Der Grenzbau und die beiden Gittersätze.

Vom

Dr. M. G. von Paucker.

(Sonderabdruck aus den „Arbeiten der kurl. Gesellschaft für Lit. und Kunst Heft IX.")

Der Druck wird unter der Bedingung gestattet, daß nach Beendigung desselben die vorschriftmäßige Anzahl von Exemplaren an das Rigasche Censur-Comité eingesandt werde.

Riga, den 9. Februar 1851. **Dr. J. G. Krohl,** Censor.

(L. S.)

Gedruckt bei J. F. Steffenhagen u. Sohn in Mitau. 1851.

Der Grenzbau und die beiden Gittersätze.

(Sitzung vom $^{10}/_{22}$ Mai 1850.)

Das Verfahren der Ausgleichungsrechnung besteht wesendlich darin, daß die entsprechenden Glieder zweier Zahlreihen mit einander gebunden werden, worauf die Anlage der einzelnen Zahlgebinde genommen wird; z. B.

	2	5	3	4
	1	3	6	7
Gebinde	2	15	18	28

Gebindanlage = 63

Um daher auf diesem Gebiet einen weitern Fortschritt anzubahnen, und neue Sätze zu finden, ist eine einfache zur Anschauung sprechende Bezeichnungsart erforderlich.

Abgesehen von den Zeichen der einzelnen Theile oder Glieder einer Reihe, erhält die ganze Reihe als solche ein besonderes Zeichen. Dieses Reihenzeichen steht oben, wenn die Reihe lothrecht abwärts fortschreitet, links dagegen, wenn die Glieder der Reihe in der Wagerichtung weiter gehen; z. B.

	a	b	c . .
(a′)	a′	b′	c′ . .
(a″)	a″	b″	c″ . .
.	.	.	.
.	.	.	.
	.	.	.

Das Zeichen der Gebindanlage ist ein unter die Reihenzeichen gesetzter sie zusammenfassender Bogen; z. B.

$$\underset{\smile}{ab} = a'b' + a''b'' + a'''b''' \ldots$$

$$\underset{\smile}{(a')\,(a'')} = a'a'' + b'b'' + c'c'' \ldots$$

Bei zwei Zahlgefügnissen heißt das eine der Urbau, das andre der Wendebau, wenn in ihrem selblichen Bau die Querglieder gleich der Einheit, die Seitenglieder aber nichtig sind; z. B.

	Urbau.			Wendebau.		Selblicher Bau.	
P	$\underset{\smile}{pp}$	$\underset{\smile}{pq}$ . .	$\mathfrak{P}$	$\underset{\smile}{pp}$	$\underset{\smile}{pq}$ . .	$\underset{\smile}{P\mathfrak{P}}$	$\underset{\smile}{P\mathfrak{Q}}$ . .
Q	$\underset{\smile}{pq}$	$\underset{\smile}{qq}$ . .	$\mathfrak{Q}$	$\underset{\smile}{pq}$	$\underset{\smile}{qq}$ . .	$\underset{\smile}{Q\mathfrak{P}}$	$\underset{\smile}{Q\mathfrak{Q}}$ . .
.							
.							

$$\underset{\smile}{P\mathfrak{P}} = 1 \qquad \underset{\smile}{Q\mathfrak{Q}} = 1 \qquad \text{u. s. w.}$$
$$\underset{\smile}{P\mathfrak{Q}} = 0 \qquad \underset{\smile}{Q\mathfrak{P}} = 0 \qquad \text{u. s. w.}$$

Satz der Umwendung.

Wenn die Glieder einer Reihe als Ursachen in den Urbau gesetzt die Glieder einer andern Reihe als Wirkungen geben, so geben die Glieder der zweiten Reihe als Ursachen in den Wendebau gesetzt die Glieder der ersten Reihe als Wirkungen.

Dieser Satz folgt aus der Befriedigung des selblichen Baues. Es sei z. B.

$$\underset{\smile}{pp}\, a' + \underset{\smile}{pq}\, a'' \ldots = \alpha' \quad \text{oder} \quad \underset{\smile}{Pa} = \alpha'$$
$$\underset{\smile}{pq}\, a' + \underset{\smile}{qq}\, a'' \ldots = \alpha'' \quad \text{oder} \quad \underset{\smile}{Qa} = \alpha''$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

so ist

$$a' = \underset{\smile}{pp}\, \alpha' + \underset{\smile}{pq}\, \alpha'' \,.\,. \quad \text{oder} \quad \underset{\smile}{\mathfrak{P}\alpha} = a'$$
$$a'' = \underset{\smile}{pq}\, \alpha' + \underset{\smile}{qq}\, \alpha'' \,.\,. \quad \text{oder} \quad \underset{\smile}{\mathfrak{Q}\alpha} = a''$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

Vorbereitung.

Die Beobachtungen und ihre Mittelfehler haben folgende Bezeichnung:

	Beobachtung.	Mittelfehler.
die unbeziehliche unausgeglichene	λ	$d\lambda$
die einheitliche unausgeglichene	l	e
die einheitliche ausgeglichene	ℓ	$d\ell$
die unbeziehliche ausgeglichene	$\mathfrak{L}$	$d\mathfrak{L}$

Jedes λ ist das Mittel aus mehrern unter gleichen Umständen angestellten, deren Anzahl $= \nu$ deren Abweichungen vom Mittel $= \varkappa$. Das entsprechende $d\lambda$ ist gegeben durch die Gleichung

$$\nu\,(\nu - 1)\,(d\lambda)^2 = \underset{\smile}{\varkappa\varkappa}$$

Bei mehrern λ welche verschiedenen Zuständen entsprechen, wählt man, um sie einheitlich zu machen, Gewichte, deren Einheit willkührlich ist, die aber folgende Bedingung befriedigen:

$$e^2 = p' \, (d\lambda')^2 = p'' \, (d\lambda'')^2 \quad \ldots$$

Die entsprechenden l sind dann

$$l' = \lambda' \sqrt{p'} \qquad l'' = \lambda'' \sqrt{p''} \quad \ldots$$

Sämmtliche l haben e zum gemeinsamen Mittelfehler erster Ordnung. Ihre Anzahl ist $= n$

Der gesetzliche Ausdruck der einheitlichen ausgeglichenen Beobachtung ℓ ist

$$\ell = a \, \underset{\smile}{al} + b \, \underset{\smile}{bl} + c \, \underset{\smile}{cl} \quad \ldots$$

Die Anzahl der Glieder von ℓ ist $= r$

Die Zahlen a, b, ... müssen einheitlich sein.

Man erlangt sie also aus den entsprechenden unbeziehlichen Werthen durch Bindung mit $\sqrt{p}$

Die Zahlen l, e, ℓ, a, b, c, u. s. w. sind der zweiten Wurzel der Gewichtseinheit verhältlich. Die Zahlen a, b, c, ... stehen im umgekehrten Verhältniß der zweiten Wurzel der Gewichtseinheit. Die ausgeglichenen Ursachen $\underset{\smile}{al}$ $\underset{\smile}{bl}$ ... sind also von der Gewichtseinheit unabhängig.

Bildung des Wendebaues.

$$\begin{array}{ll|lll|ll}
 & & a & b & & & \\
\text{Urbau.} & (a') & a' & b' \,.. & A & \underset{\smile}{aa} & \underset{\smile}{ab} \,.. \\
 & (a'') & a'' & b'' \,.. & B & \underset{\smile}{ab} & \underset{\smile}{bb} \,..
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll|lll|ll|ll}
\text{Erste} & B_1 & \underset{\smile}{b_1 b_1} & \underset{\smile}{b_1 c_1} \,.. & \mathfrak{B}_1 & \underset{\smile}{bb} & \underset{\smile}{bc} \,.. & \underset{\smile}{B_1 \mathfrak{B}_1} & \underset{\smile}{B_1 \mathfrak{C}_1} \,.. \\
\text{Erniedrigung} & C_1 & \underset{\smile}{b_1 c_1} & \underset{\smile}{c_1 c_1} \,.. & \mathfrak{C}_1 & \underset{\smile}{bc} & \underset{\smile}{cc} \,.. & \underset{\smile}{C_1 \mathfrak{B}_1} & \underset{\smile}{C_1 \mathfrak{C}_1} \,.. \\
\text{des Urbaues.} & & \vdots & & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\text{wo} & \underset{\smile}{B_1 \mathfrak{B}_1} = 1 & \underset{\smile}{C_1 \mathfrak{C}_1} = 1 & \text{u. s. f.} \\
 & \underset{\smile}{B_1 \mathfrak{C}_1} = 0 & \underset{\smile}{C_1 \mathfrak{B}_1} = 0 & \text{u. s. f.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll|lll|ll|ll}
\text{Zweite} & C_2 & \underset{\smile}{c_2 c_2} & \underset{\smile}{c_2 d_2} \,.. & \mathfrak{C}_2 & \underset{\smile}{cc} & \underset{\smile}{cd} \,.. & \underset{\smile}{C_2 \mathfrak{C}_2} & \underset{\smile}{C_2 \mathfrak{D}_2} \,.. \\
\text{Erniedrigung} & D_2 & \underset{\smile}{c_2 d_2} & \underset{\smile}{d_2 d_2} \,.. & \mathfrak{D}_2 & \underset{\smile}{cd} & \underset{\smile}{dd} \,.. & \underset{\smile}{D_2 \mathfrak{C}_2} & \underset{\smile}{D_2 \mathfrak{D}_2} \,.. \\
\text{des Urbaues.} & & \vdots & & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\text{wo} & \underset{\smile}{C_2 \mathfrak{C}_2} = 1 & \underset{\smile}{D_2 \mathfrak{D}_2} = 1 & \text{u. s. f.} \\
 & \underset{\smile}{C_2 \mathfrak{D}_2} = 0 & \underset{\smile}{D_2 \mathfrak{C}_2} = 0 & \text{u. s. f.} \\
 & \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} &
\end{array}$$

Wendebau						
$\mathfrak{A}$	$\underset{\smile}{\mathfrak{aa}}$	$\underset{\smile}{\mathfrak{ab}}$	..	$\underset{\smile}{A\mathfrak{A}}$	$\underset{\smile}{A\mathfrak{B}}$	..
$\mathfrak{B}$	$\underset{\smile}{\mathfrak{ab}}$	$\underset{\smile}{\mathfrak{bb}}$	..	$\underset{\smile}{B\mathfrak{A}}$	$\underset{\smile}{B\mathfrak{B}}$	..
	$\vdots$			$\vdots$		

wo $\underset{\smile}{A\mathfrak{A}} = 1 \quad \underset{\smile}{B\mathfrak{B}} = 1$ u. s. f.

$\underset{\smile}{A\mathfrak{B}} = 0 \quad \underset{\smile}{B\mathfrak{B}} = 0$ u. s. f.

Bildung der Sondertheile.

$$b_1 = b - \frac{\underset{\smile}{ab}}{\underset{\smile}{aa}}\, a \qquad c_1 = b - \frac{\underset{\smile}{ac}}{\underset{\smile}{aa}}\, a \qquad \text{u. s. w.}$$

Zur Prüfung $\left\{ \begin{array}{l} \underset{\smile}{ab_1} = 0 \quad \underset{\smile}{ac_1} = 0 \quad \dots \\ \underset{\smile}{bb_1} = \underset{\smile}{b_1b_1} \quad \underset{\smile}{bc_1} = \underset{\smile}{b_1c_1} \quad \underset{\smile}{cc_1} = \underset{\smile}{c_1c_1} \quad \dots \end{array} \right.$

$$c_2 = c_1 - \frac{\underset{\smile}{b_1c_1}}{\underset{\smile}{b_1b_1}}\, b_1 \qquad d_2 = d_1 - \frac{\underset{\smile}{b_1d_1}}{\underset{\smile}{b_1b_1}}\, b_1 \quad \text{u. s. w.}$$

Zur Prüfung $\left\{ \begin{array}{l} \underset{\smile}{ac_2} = 0 \quad \underset{\smile}{ad_2} = 0 \quad \dots \quad \underset{\smile}{bc_2} = 0 \quad \underset{\smile}{bd_2} = 0 \quad \dots \\ \underset{\smile}{cc_2} = \underset{\smile}{c_2c_2} \quad \underset{\smile}{cd_2} = \underset{\smile}{c_2d_2} \quad \dots \quad \underset{\smile}{dd_2} = \underset{\smile}{d_2d_2} \quad \dots \end{array} \right.$

u. s. w. u. s. w.

Grundgleichungen.

$$\mathfrak{a} = \underset{\smile}{\mathfrak{aa}}\; a + \underset{\smile}{\mathfrak{ab}}\; b \;\dots = \underset{\smile}{\mathfrak{A}(a)}$$
$$\mathfrak{b} = \underset{\smile}{\mathfrak{ab}}\; a + \underset{\smile}{\mathfrak{bb}}\; b \;\dots = \underset{\smile}{\mathfrak{B}(a)}$$
$$\vdots$$

$$a = \underset{\smile}{aa}\; \mathfrak{a} + \underset{\smile}{ab}\; \mathfrak{b} \;\dots = \underset{\smile}{A(\mathfrak{a})}$$
$$b = \underset{\smile}{ab}\; \mathfrak{a} + \underset{\smile}{bb}\; \mathfrak{b} \;\dots = \underset{\smile}{B(\mathfrak{a})}$$
$$\vdots$$

Grundbau.

$\underset{\smile}{\mathfrak{aa}}$	$\underset{\smile}{\mathfrak{ab}}$	..	$\underset{\smile}{\mathfrak{aa}} = 1 \quad \underset{\smile}{\mathfrak{bb}} = 1$	u. s. w.
$\underset{\smile}{\mathfrak{ba}}$	$\underset{\smile}{\mathfrak{bb}}$	..	$\underset{\smile}{\mathfrak{ab}} = 0 \quad \underset{\smile}{\mathfrak{ba}} = 0$	u. s. w.

Grenzbau.				Zweite Erniedrigung.				Erste Erniedrigung.			
π	$\underset{\smile}{11}$	$\underset{\smile}{12}$	..	ρ_1	$\underset{\smile}{2_1 2_1}$	$\underset{\smile}{2_1 3_1}$	..	σ_2	$\underset{\smile}{3_2 3_2}$	$\underset{\smile}{3_2 4_2}$	..
ρ	$\underset{\smile}{12}$	$\underset{\smile}{22}$	..	σ_1	$\underset{\smile}{2_1 3_1}$	$\underset{\smile}{3_1 3_1}$	..	τ_2	$\underset{\smile}{3_2 4_2}$	$\underset{\smile}{4_2 4_2}$	..
$\vdots$				$\vdots$				$\vdots$			

Bildung des Grenzbaues:

$$1 - \underset{\smile}{11} = a'\mathfrak{a}' + b'\mathfrak{b}' \;.. = \frac{a'a'}{\underset{\smile}{aa}} + \frac{b_1'b_1'}{\underset{\smile}{b_1 b_1}} + \frac{c_2'c_2'}{\underset{\smile}{c_2 c_2}} \;\ldots$$

$$- \underset{\smile}{12} = a'\mathfrak{a}'' + b'\mathfrak{b}'' \;..$$

$$= a''\mathfrak{a}' + b''\mathfrak{b}' \;.. = \frac{a'a''}{\underset{\smile}{aa}} + \frac{b_1'b_1''}{\underset{\smile}{b_1 b_1}} + \frac{c_2'c_2''}{\underset{\smile}{c_2 c_2}} \;\ldots$$

$$\vdots$$

$$1 - \underset{\smile}{22} = a''\mathfrak{a}'' + b''\mathfrak{b}'' \;.. = \frac{a''a''}{\underset{\smile}{aa}} + \frac{b_1''b_1''}{\underset{\smile}{b_1 b_1}} + \frac{c_2''c_2''}{\underset{\smile}{c_2 c_2}} \;\ldots$$

$$- \underset{\smile}{23} = a''\mathfrak{a}''' + b''\mathfrak{b}''' \;..$$

$$= a'''\mathfrak{a}'' + b'''\mathfrak{b}'' \;.. = \frac{a''a'''}{\underset{\smile}{aa}} + \frac{b_1''b_1'''}{\underset{\smile}{b_1 b_1}} + \frac{c_2''c_2'''}{\underset{\smile}{c_2 c_2}} \;\ldots$$

$$\vdots$$

Zur Prüfung dienend:

$$\underset{\smile}{\pi a} = 0 \qquad \underset{\smile}{\pi b} = 0 \;\ldots \qquad \underset{\smile}{\pi \mathfrak{a}} = 0 \qquad \underset{\smile}{\pi \mathfrak{b}} = 0 \;\ldots$$

$$\underset{\smile}{\rho a} = 0 \qquad \underset{\smile}{\rho b} = 0 \;\ldots \qquad \underset{\smile}{\rho \mathfrak{a}} = 0 \qquad \underset{\smile}{\rho \mathfrak{b}} = 0 \;\ldots$$

$$s' = \underset{\smile}{11} + \underset{\smile}{12} \;\ldots \qquad 1 - s' = v'$$

$$s'' = \underset{\smile}{12} + \underset{\smile}{22} \;\ldots \qquad 1 - s'' = v''$$

$$v' = a' \,.\, \underset{\smile}{\mathfrak{a}} + b' \,.\, \underset{\smile}{\mathfrak{b}} \;\ldots = \underset{\smile}{a} \,.\, \mathfrak{a}' + \underset{\smile}{b} \,.\, \mathfrak{b}' \;\ldots$$

$$v'' = a'' \,.\, \underset{\smile}{\mathfrak{a}} + b'' \,.\, \underset{\smile}{\mathfrak{b}} \;\ldots = \underset{\smile}{a} \,.\, \mathfrak{a}'' + \underset{\smile}{b} \,.\, \mathfrak{b}'' \;\ldots$$

$$\underset{\smile}{sa} = 0 \qquad \underset{\smile}{sb} = 0 \qquad \underset{\smile}{s\mathfrak{a}} = 0 \qquad \underset{\smile}{s\mathfrak{b}} = 0 \;\ldots$$

$$\underset{\smile}{sv} = \underset{\smile}{sa}\;\underset{\smile}{\mathfrak{a}} + \underset{\smile}{sb}\;\underset{\smile}{\mathfrak{b}} \;.. = \underset{\smile}{a}\;\underset{\smile}{s\mathfrak{a}} + \underset{\smile}{b}\;\underset{\smile}{s\mathfrak{b}} \;.. = 0$$

$$\underset{\smile}{s} - \underset{\smile}{ss} = \underset{\smile}{sv} = 0 \qquad \underset{\smile}{v} - \underset{\smile}{vv} = \underset{\smile}{sv} = 0$$

$$vv = v = a\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} \dots$$

$$ss = s = n - v$$

$$11 + 22 + 33 \dots = n - r$$

$$2_1 2_1 + 3_1 3_1 \dots = n - r - 1$$

$$3_2 3_2 \dots = n - r - 2$$

Bildung der Grenzabweichungen k (der sogenannten Beobachtungsfehler)

$$k' = l' - \ell' = 11\, l' + 12\, l'' \dots = \pi l$$

$$k'' = l'' - \ell'' = 12\, l' + 22\, l'' \dots = \varrho l$$

$$\vdots$$

$$k = l - \ell = s'l' + s''l'' \dots = sl$$

Zur Prüfung $\left\{ \begin{array}{ll} ka = 0 & kb = 0 \dots \\ k\mathfrak{a} = 0 & k\mathfrak{b} = 0 \dots \end{array} \right.$

Man setze in die erste oder obere Reihe des Grenzbaues und seiner Erniedrigungen zuerst alle Beobachtungen nach ihrer Folge, dann alle außer der ersten, dann alle außer den zwei ersten u. s. w. Dadurch ergeben sich die erniedrigten Grenzabweichungen:

$$k' = \mathfrak{k}_0 = 11\, l' + 12\, l'' + 13\, l''' + 14\, l'''' \dots$$

$$\mathfrak{k}_1 = 2_1 2_1\, l'' + 2_1 3_1\, l''' + 2_1 4_1\, l'''' \dots$$

$$\mathfrak{k}_2 = 3_2 3_2\, l''' + 3_2 4_2\, l'''' \dots$$

$$\mathfrak{k}_3 = 4_3 4_3\, l'''' \dots$$

Die ausgeglichenen Ursachen sind

$$al = a\mathfrak{a}\ \mathfrak{a}l + a\mathfrak{b}\ \mathfrak{b}l \dots = \mathfrak{A}(\mathfrak{a}l)$$

$$bl = a\mathfrak{b}\ \mathfrak{a}l + b\mathfrak{b}\ \mathfrak{b}l \dots = \mathfrak{B}(\mathfrak{a}l)$$

$$\vdots$$

Die ausgeglichenen Wirkungen und ihre Erniedrigungen sind:

$$\mathfrak{a}l = \mathfrak{a}'l' + \mathfrak{a}''l'' \dots = a\mathfrak{a}\ al + a\mathfrak{b}\ bl \dots$$

$$\mathfrak{b}_1 l = \mathfrak{b}_1'l' + \mathfrak{b}_1''l'' \dots = b_1\mathfrak{b}_1\ bl + b_1\mathfrak{c}_1\ cl \dots$$

$$\mathfrak{c}_2 l = \mathfrak{c}_2'l' + \mathfrak{c}_2''l'' \dots = c_2\mathfrak{c}_2\ cl + c_2\mathfrak{d}_2\ dl \dots$$

$$\vdots$$

Zur Berechnung der Grenzanlage $\underset{\smile}{kk}$ ist folgendes Verfahren brauchbar. Man setzt den Grenzbau und Beobachtungsbau neben einander:

	Grenzbau.					Beobachtungsbau.			
π	$\underset{\smile}{11}$	$\underset{\smile}{12}$	$\underset{\smile}{13}$	..	$(ll)'$	$l'l'$	$l'l''$	$l'l'''$	..
ϱ	$\underset{\smile}{12}$	$\underset{\smile}{22}$	$\underset{\smile}{23}$	..	$(ll)''$	$l'l''$	$l''l''$	$l''l'''$	..
σ	$\underset{\smile}{13}$	$\underset{\smile}{23}$	$\underset{\smile}{33}$	..	$(ll)'''$	$l'l'''$	$l''l'''$	$l'''l'''$	..
	⋮				⋮		⋮		

Man bindet die entsprechenden Glieder beider Baue mit einander. Die Gebindanlagen in den entsprechenden Lothreihen und Wagereihen sind einander gleich, und geben die Werthe der einzelnen kl, die Anlage aller Glieder ist $= \underset{\smile}{kk}$. Die verschiedenen Ausdrücke dieser Grenzanlage sind:

$$
\begin{aligned}
\underset{\smile}{kk} &= k'k' + k''k'' + k'''k''' \;\ldots \\
&= k'l' + k''l'' + k'''l''' \;\ldots \\
&= \pi(ll)' + \varrho(ll)'' + \sigma(ll)''' \;\ldots \\
&= \underset{\smile}{11}\, l'l' + 2.\,\underset{\smile}{12}\, l'l'' + 2.\,\underset{\smile}{13}\, l'l''' \;\ldots \\
&\qquad\qquad\;\; + \underset{\smile}{22}\, l''l'' + 2.\,\underset{\smile}{23}\, l''l''' \;\ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \underset{\smile}{33}\, l'''l''' \;\ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&= \underset{\smile}{ll} - (\underset{\smile}{al}\;\underset{\smile}{al} + \underset{\smile}{bl}\;\underset{\smile}{bl} \;..) \\
&= \underset{\smile}{ll} - \left(\frac{\underset{\smile}{al}\;\underset{\smile}{al}}{\underset{\smile}{aa}} + \frac{\underset{\smile}{b_1l}\;\underset{\smile}{b_1l}}{\underset{\smile}{b_1b_1}} + \frac{\underset{\smile}{c_2l}\;\underset{\smile}{c_2l}}{\underset{\smile}{c_2c_2}} \;.. \right) \\
&= \frac{\mathfrak{k}_0\mathfrak{k}_0}{\underset{\smile}{11}} + \frac{\mathfrak{k}_1\mathfrak{k}_1}{\underset{\smile}{2_12_1}} + \frac{\mathfrak{k}_2\mathfrak{k}_2}{\underset{\smile}{3_23_2}} \;\ldots
\end{aligned}
$$

Dieser letzte Ausdruck ist neu und bemerkenswerth. Wenn nämlich $n - r = 0$ ist, so sind alle ausgeglichenen Beobachtungen den entsprechenden unausgeglichenen gleich, also alle Grenzabweichungen nichtig, also alle Glieder des Grenzbaues nichtig.

$$k' = \ell' - l' = 0 \qquad k'' = \ell'' - l'' = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

$$\underset{\smile}{11} = 0 \qquad \underset{\smile}{12} = 0 \;\ldots\; \underset{\smile}{22} = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Es sei $n - r = 1$. Dann sind alle Glieder der ersten und der folgenden Erniedrigungen des Grenzbaues nichtig. Im Grenzbau selbst ist das Quadrat jedes Seitengliedes dem Gebinde der beiden entsprechendem Querglieder gleich:

$$\underbrace{12} \cdot \underbrace{12} = \underbrace{11} \cdot \underbrace{22} \qquad \underbrace{13} \cdot \underbrace{13} = \underbrace{11} \cdot \underbrace{33} \quad \text{u. s. w.}$$

Die Querglieder des Grenzbaues sind alsdann Quadratzahlen, in dem letzten der obigen Ausdrücke der Grenzanlage sind alle Glieder außer dem ersten nichtig, die Grenzanlage selbst also eine Quadratzahl:

$$\underbrace{kk} = \frac{\mathfrak{k}_o \mathfrak{k}_o}{\underbrace{11}} = \left(\frac{\mathfrak{k}_o}{\sqrt{\underbrace{11}}}\right)^2 = \left(\frac{\underbrace{11}}{\sqrt{\underbrace{11}}}\, l' + \frac{\underbrace{12}}{\sqrt{\underbrace{11}}}\, l'' \;\ldots\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{\underbrace{11}}\, l' + \sqrt{\underbrace{22}}\, l'' \;\ldots\right)^2$$

Es sei $n - r = 2$ Dann sind alle Glieder der zweiten und der folgenden Erniedrigungen des Grenzbaues nichtig, die Grenzanlage besteht aus zwei quadratischen Gliedern:

$$\underbrace{kk} = \left(\frac{\mathfrak{k}_o}{\sqrt{\underbrace{11}}}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{k}_1}{\sqrt{\underbrace{2_1 2_1}}}\right)^2$$

$$\text{wo} \quad \mathfrak{k}_1 = \sqrt{\underbrace{2_1 2_1}}\, l'' + \sqrt{\underbrace{3_1 3_1}}\, l''' \;\ldots$$

Allgemein besteht nach dem letzten der obigen Ausdrücke die Grenzanlage aus $n - r$ quadratischen Gliedern Um sie zu berechnen sind nur die $n - r$ obern Reihen des Grenzbaues erforderlich.

Die Grenzanlage ist der Gewichtseinheit verhältlich. Sie giebt den mittlern Ausgleichungsfehler $\mathfrak{f}$ durch die Gleichung

$$(n - r)\, \mathfrak{f}^2 = \underbrace{kk}$$

Hienach sind die Mittelfehler der ausgeglichenen Ursachen gegeben durch die Ausdrücke:

$$(d\, \underbrace{al})^2 = \underbrace{aa}\, \mathfrak{f}^2 + \underbrace{a}\, \underbrace{a}\, e^2$$
$$(d\, \underbrace{bl})^2 = \underbrace{bb}\, \mathfrak{f}^2 + \underbrace{b}\, \underbrace{b}\, e^2$$

Sie sind von der Gewichtseinheit unabhängig.

Die Mittelfehler zweiter Ordnung der ausgeglichenen einheitlichen Beobachtungen sind gegeben durch die Ausdrücke:

$$(d\ell')^2 = (a'a' + b'b' \;\ldots)\, \mathfrak{f}^2 + v'v' \;\; e^2$$
$$(d\ell'')^2 = (a''a'' + b''b'' \;\ldots)\, \mathfrak{f}^2 + v''v'' \;\; e^2$$

Zur Prüfung $\quad (d\underset{\smile}{\mathfrak{l}})^2 = r\, f^2 + (\underset{\smile}{a}\,\underset{\smile}{a} + \underset{\smile}{b}\,\underset{\smile}{b}\,..)\, e^2$

Die ausgeglichenen unbeziehlichen Beobachtungen und ihre Mittelfehler zweiter Ordnung sind

$$\mathfrak{L}' = \frac{\mathfrak{l}'}{\sqrt{p'}} \qquad d\mathfrak{L}' = \frac{d\mathfrak{l}'}{\sqrt{p'}}$$

$$\mathfrak{L}'' = \frac{\mathfrak{l}''}{\sqrt{p''}} \qquad d\mathfrak{L}'' = \frac{d\mathfrak{l}''}{\sqrt{p''}}$$

$$\vdots$$

Beide sind von der Gewichtseinheit unabhängig.

Beispiel.

$n = 3 \qquad r = 2$

λ	40,	60,	90,	
$(d\lambda)^2$	2,	18,	4,5	
p	9,	1,	4,	
a	3,	2,	10,	$\underbrace{a} = 15,$
b	12,	5,	14,	$\underbrace{b} = 31,$
A	113,	186,		
B	186,	365,		
$\mathfrak{A}$	0,05489	−0,02797		
$\mathfrak{B}$	−0,02797	0,01699		
$\mathfrak{a}$	−0,17100	−0,03008	0,15732	$\underbrace{\mathfrak{a}} = -$ 0,04376
$\mathfrak{b}$	0,12002	0,02903	−0,04181	$\underbrace{\mathfrak{b}} =$ 0,10723
π	0,07279	−0,25808	0,02978	$\underbrace{\mathfrak{a}}\,\underbrace{\mathfrak{a}} =$ 0,0019155
ϱ	−0,25808	0,91502	−0,10558	$\underbrace{\mathfrak{b}}\,\underbrace{\mathfrak{b}} =$ 0,011499
σ	0,02978	−0,10558	0,01218	$\underbrace{a}\,\underbrace{\mathfrak{a}} = -$ 0,65649
l	120,	60,	180,	$\underbrace{b}\,\underbrace{\mathfrak{b}} =$ 3,32426
k	−1,38968	4,92706	−0,56850	$\underbrace{v} = \underbrace{vv} =$ 2,66777
kl	−166,76192	295,62340	−102,33117	$\underbrace{kl} =$ 26,53030
kk	1,9312	24,2759	0,3232	$\underbrace{kk} =$ 26,53030
v	1,15551	0,44864	1,06362	$f^2 =$ 26,53030
$\mathfrak{a}\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{b}$	0,92720	0,08497	0,98782	$e^2 =$ 18,
vv	1,33520	0,20128	1,13129	
$\mathfrak{a}l$	−20,52038	−1,80478	28,31704	$\underbrace{\mathfrak{a}l} =$ 5,99188
$\mathfrak{b}l$	14,40217	1,74162	−7,52594	$\underbrace{\mathfrak{b}l} =$ 8,61784
ℓ	121,38968	55,07294	180,56850	$\underbrace{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}\, f^2 =$ 1,4564
$(\mathfrak{a}\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{b})\, f^2$	24,599	2,254	26,207	$\underbrace{\mathfrak{a}}\,\underbrace{\mathfrak{a}}\, e^2 =$ 0,0345
$vv\, e^2$	24,033	3,623	20,362	$(d\,\underbrace{\mathfrak{a}\mathfrak{b}})^2 =$ 1,4909
$(d\ell)^2$	48,632	5,877	46,569	$\underbrace{\mathfrak{b}\mathfrak{b}}\, f^2 =$ 0,4509
$\mathfrak{L}$	40,4632	55,07294	90,28425	$\underbrace{\mathfrak{b}}\,\underbrace{\mathfrak{b}}\, e^2 =$ 0,2070
$(d\mathfrak{L})^2$	5,4036	5,8772	11,642	$(d\,\underbrace{\mathfrak{b}l})\, e^2 =$ 0,6579

Erster Gittersatz, bei veränderter Anzahl der Beobachtungen.

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{N} \\ a & b \\ \hline \overset{1}{a}' & \overset{1}{b}' \;.. \\ \overset{1}{a}'' & \overset{1}{b}'' \;.. \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \overset{2}{a}' & \overset{2}{b}' \\ \overset{2}{a}'' & \overset{2}{b}'' \\ \vdots & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\overset{1}{N}} \\ \overset{1}{a} & \overset{1}{b} \\ \hline \overset{1}{a}' & \overset{1}{b}' \\ \overset{1}{a}'' & \overset{1}{b}'' \\ \vdots & \\ \multicolumn{2}{c}{\overset{2}{N}} \\ \overset{2}{a} & \overset{2}{b} \\ \hline \overset{2}{a}' & \overset{2}{b}' \\ \overset{2}{a}'' & \overset{2}{b}'' \\ \vdots & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathfrak{N}} \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \\ \hline \overset{1}{\mathfrak{a}}' & \overset{1}{\mathfrak{b}}' \\ \overset{1}{\mathfrak{a}}'' & \overset{1}{\mathfrak{b}}'' \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \overset{2}{\mathfrak{a}}' & \overset{2}{\mathfrak{b}}' \\ \overset{2}{\mathfrak{a}}'' & \overset{2}{\mathfrak{b}}'' \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\overset{1}{\mathfrak{N}}} \\ \overset{*}{\mathfrak{a}} & \overset{*}{\mathfrak{b}} \\ \hline \overset{*}{\mathfrak{a}}' & \overset{*}{\mathfrak{b}}' \\ \overset{*}{\mathfrak{a}}'' & \overset{*}{\mathfrak{b}}'' \\ \vdots & \\ \multicolumn{2}{c}{\overset{2}{\mathfrak{N}}} \\ \hat{\mathfrak{a}} & \hat{\mathfrak{b}} \\ \hline \hat{\mathfrak{a}}' & \hat{\mathfrak{b}}' \\ \hat{\mathfrak{a}}'' & \hat{\mathfrak{b}}'' \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \multicolumn{3}{c}{F} \\ \mathfrak{s} & \overset{2}{\mathfrak{a}}\alpha & \overset{2}{\mathfrak{b}}\alpha \;.. \\ t & \overset{2}{\mathfrak{a}}\beta & \overset{2}{\mathfrak{b}}\beta \;.. \\ & \vdots & \\ \multicolumn{3}{c}{V} \\ & \alpha & \beta \\ \hline & \alpha' & \beta' \\ & \alpha'' & \beta'' \\ & \vdots & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} \multicolumn{3}{c}{N} \\ A & aa & ab \;.. \\ B & ab & bb \;.. \\ & \vdots & \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \multicolumn{3}{c}{\overset{1}{N}} \\ \overset{1}{A} & \overset{1}{a}\overset{1}{a} & \overset{1}{a}\overset{1}{b} \;.. \\ \overset{1}{B} & \overset{1}{a}\overset{1}{b} & \overset{1}{b}\overset{1}{b} \;.. \\ & \vdots & \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \multicolumn{3}{c}{\overset{2}{N}} \\ \overset{2}{A} & \overset{2}{a}\overset{2}{a} & \overset{2}{a}\overset{2}{b} \;.. \\ \overset{2}{B} & \overset{2}{a}\overset{2}{b} & \overset{2}{b}\overset{2}{b} \;.. \\ & \vdots & \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \multicolumn{3}{c}{G} \\ P & pp & pq \;.. \\ Q & pq & qq \;.. \\ & \vdots & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} \multicolumn{3}{c}{\mathfrak{N}} \\ \mathfrak{A} & \mathfrak{aa} & \mathfrak{ab} \;.. \\ \mathfrak{B} & \mathfrak{ab} & \mathfrak{bb} \;.. \\ & \vdots & \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \multicolumn{3}{c}{\overset{1}{\mathfrak{N}}} \\ \overset{1}{\mathfrak{A}} & \overset{*}{\mathfrak{aa}} & \overset{*}{\mathfrak{ab}} \;.. \\ \overset{1}{\mathfrak{B}} & \overset{*}{\mathfrak{ab}} & \overset{*}{\mathfrak{bb}} \;.. \\ & \vdots & \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \multicolumn{3}{c}{\overset{2}{\mathfrak{N}}} \\ \overset{2}{\mathfrak{A}} & \hat{\mathfrak{aa}} & \hat{\mathfrak{ab}} \;.. \\ \overset{2}{\mathfrak{B}} & \hat{\mathfrak{ab}} & \hat{\mathfrak{bb}} \;.. \\ & \vdots & \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \multicolumn{3}{c}{\mathfrak{G}} \\ \mathfrak{P} & \mathfrak{pp} & \mathfrak{pq} \;.. \\ \mathfrak{Q} & \mathfrak{pq} & \mathfrak{qq} \;.. \\ & \vdots & \end{array}$$

Der Bau N enthält n Beobachtungen. Er besteht aus den Abtheilungen $\overset{1}{N}$ von $\overset{1}{n}$ Beobachtungen, und $\overset{2}{N}$ von $\overset{2}{n}$ Beobachtungen, wo $\overset{1}{n} + \overset{2}{n} = n$ ist. Diese drei Baue haben einerlei Anzahl der Glieder $= r$. Die Wendebaue sind $\mathfrak{N}$, $\overset{1}{\mathfrak{N}}$, $\overset{2}{\mathfrak{N}}$.

In dem Grenzbau von N nimmt man das letzte Eckgitter G welches in jeder Reihe $\overset{2}{n}$ Glieder hat. Diese Glieder sind

$$\text{I.}\left(\begin{array}{l} \underset{\smile}{pp} = 1 - \left(\overset{2}{a}'\overset{2}{\mathfrak{a}}' + \overset{2}{b}'\overset{2}{\mathfrak{b}}' \;..\right) \\ \underset{\smile}{pq} = \quad - \left(\overset{2}{a}'\overset{2}{\mathfrak{a}}'' + \overset{2}{b}'\overset{2}{\mathfrak{b}}'' \;..\right) = - \left(\overset{2}{a}''\overset{2}{\mathfrak{a}}' + \overset{2}{b}''\overset{2}{\mathfrak{b}}' \;..\right) \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \underset{\smile}{qq} = 1 - \left(\overset{2}{a}''\overset{2}{\mathfrak{a}}'' + \overset{2}{b}''\overset{2}{\mathfrak{b}}'' \;..\right) \end{array}\right.$$

Hieraus folgt

$$\begin{array}{l} \underset{\smile}{pp}\,\overset{2}{a}' + \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{a}'' \;.. = \overset{2}{a}' - \left(\overset{2\,2}{\underset{\smile}{aa}}\,\overset{2}{\mathfrak{a}}' + \overset{2\,2}{\underset{\smile}{ab}}\,\overset{2}{\mathfrak{b}}' \;..\right) \\ \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{a}' + \underset{\smile}{qq}\,\overset{2}{a}'' \;.. = \overset{2}{a}'' - \left(\overset{2\,2}{\underset{\smile}{aa}}\,\overset{2}{\mathfrak{a}}'' + \overset{2\,2}{\underset{\smile}{ab}}\,\overset{2}{\mathfrak{b}}'' \;..\right) \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{b}' + \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{b}'' \;.. = \overset{2}{b}' - \left(\overset{2\,2}{\underset{\smile}{ab}}\,\overset{2}{\mathfrak{a}}' + \overset{2\,2}{\underset{\smile}{bb}}\,\overset{2}{\mathfrak{b}}' \;..\right) \\ \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{b}' + \underset{\smile}{qq}\,\overset{2}{b}'' \;.. = \overset{2}{b}'' - \left(\overset{2\,2}{\underset{\smile}{ab}}\,\overset{2}{\mathfrak{a}}'' + \overset{2\,2}{\underset{\smile}{bb}}\,\overset{2}{\mathfrak{b}}'' \;..\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{array}$$

Nach den Grundgleichungen von N ist

$$\text{II.}\left(\begin{array}{l} \overset{2}{a} = \underset{\smile}{aa}\,\overset{2}{\mathfrak{a}} + \underset{\smile}{ab}\,\overset{2}{\mathfrak{b}} \;... \\ \overset{2}{b} = \underset{\smile}{ab}\,\overset{2}{\mathfrak{a}} + \underset{\smile}{bb}\,\overset{2}{\mathfrak{b}} \;... \end{array}\right.$$

Da N aus $\overset{1}{N}$ und $\overset{2}{N}$ besteht, so ist

$$\underset{\smile}{aa} = \overset{1\,1}{\underset{\smile}{aa}} + \overset{2\,2}{\underset{\smile}{aa}} \qquad \underset{\smile}{ab} = \overset{1\,1}{\underset{\smile}{ab}} + \overset{2\,2}{\underset{\smile}{ab}} \text{ u. s. w.}$$

Demnach wird

$$\begin{array}{l} \underset{\smile}{pp}\,\overset{2}{a}' + \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{a}'' \;.. = \overset{1\,1}{\underset{\smile}{aa}}\,\overset{2}{\mathfrak{a}}' + \overset{1\,1}{\underset{\smile}{ab}}\,\overset{2}{\mathfrak{b}}' \;... \\ \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{a}' + \underset{\smile}{qq}\,\overset{2}{a}'' \;.. = \overset{1\,1}{\underset{\smile}{aa}}\,\overset{2}{\mathfrak{a}}'' + \overset{1\,1}{\underset{\smile}{ab}}\,\overset{2}{\mathfrak{b}}' \;.. \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \underset{\smile}{pp}\,\overset{2}{b}' + \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{b}'' \;.. = \overset{1\,1}{\underset{\smile}{ab}}\,\overset{2}{\mathfrak{a}}' + \overset{1\,1}{\underset{\smile}{bb}}\,\overset{2}{\mathfrak{b}}' \;... \\ \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{b}' + \underset{\smile}{qq}\,\overset{2}{b}'' \;.. = \overset{1\,1}{\underset{\smile}{ab}}\,\overset{2}{\mathfrak{a}}'' + \overset{1\,1}{\underset{\smile}{bb}}\,\overset{2}{\mathfrak{b}}'' \;... \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \end{array}$$

Man bestimmt in V die Hülfstheile α, β, . . so daß

$$\text{III.}\quad\left(\begin{aligned}\alpha &= \overset{*}{\underset{\smile}{aa}}\,\overset{2}{a} + \overset{*}{\underset{\smile}{ab}}\,\overset{2}{b}\;\ldots\\ \beta &= \overset{*}{\underset{\smile}{ab}}\,\overset{2}{a} + \overset{*}{\underset{\smile}{bb}}\,\overset{2}{b}\;\ldots\\ &\vdots\end{aligned}\right.$$

Dann geben die obigen Gleichungen durch den Satz der Umwendung:

$$\text{IV.}\quad\left(\begin{aligned}\underset{\smile}{pp}\,\alpha' + \underset{\smile}{pq}\,\alpha'' \;\ldots &= \overset{2}{a}{}' = \underset{\smile}{P\alpha}\\ \underset{\smile}{pq}\,\alpha' + \underset{\smile}{qq}\,\alpha'' \;\ldots &= \overset{2}{a}{}'' = \underset{\smile}{Q\alpha}\\ &\vdots\\ \underset{\smile}{pp}\,\beta' + \underset{\smile}{pq}\,\beta'' \;\ldots &= \overset{2}{b}{}' = \underset{\smile}{P\beta}\\ \underset{\smile}{pq}\,\beta' + \underset{\smile}{qq}\,\beta'' \;\ldots &= \overset{2}{b}{}'' = \underset{\smile}{Q\beta}\end{aligned}\right.$$

Man bestimmt die Glieder $\underset{\smile}{pp}$, $\underset{\smile}{pq}$ . . so daß

$$\text{V.}\quad\left(\begin{aligned}\underset{\smile}{pp} &= 1 + \overset{2}{a}{}'\alpha' + \overset{2}{b}{}'\beta'\;\ldots\\ \underset{\smile}{pq} &= \overset{2}{a}{}'\alpha'' + \overset{2}{b}{}'\beta''\;\ldots = \overset{2}{a}{}''\alpha' + \overset{2}{b}{}''\beta'\;\ldots\\ &\vdots\\ \underset{\smile}{qq} &= 1 + \overset{2}{a}{}''\alpha'' + \overset{2}{b}{}''\beta''\;\ldots\\ &\vdots\end{aligned}\right.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\underset{\smile}{pp}\,\overset{2}{a}{}' + \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{a}{}''\;\ldots &= \overset{2}{a}{}' + \overset{2\,2}{\underset{\smile}{aa}}\,\alpha' + \overset{2\,2}{\underset{\smile}{ab}}\,\beta'\;\ldots\\ \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{a}{}' + \underset{\smile}{qq}\,\overset{2}{a}{}''\;\ldots &= \overset{2}{a}{}'' + \overset{2\,2}{\underset{\smile}{aa}}\,\alpha'' + \overset{2\,2}{\underset{\smile}{ab}}\,\beta''\;\ldots\\ &\vdots\\ \underset{\smile}{pp}\,\overset{2}{b}{}' + \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{b}{}''\;\ldots &= \overset{2}{b}{}' + \overset{2\,2}{\underset{\smile}{ab}}\,\alpha' + \overset{2\,2}{\underset{\smile}{bb}}\,\beta'\;\ldots\\ \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{b}{}' + \underset{\smile}{qq}\,\overset{2}{b}{}''\;\ldots &= \overset{2}{b}{}'' + \overset{2\,2}{\underset{\smile}{ab}}\,\alpha'' + \overset{2\,2}{\underset{\smile}{bb}}\,\beta''\;\ldots\\ &\vdots\end{aligned}$$

Aus III. folgt durch den Satz der Umwendung

$$\text{VI.}\quad\left(\begin{aligned}\overset{2}{a} &= \overset{1\,1}{\underset{\smile}{aa}}\,\alpha + \overset{1\,1}{\underset{\smile}{ab}}\,\beta\;\ldots\\ \overset{2}{b} &= \overset{1\,1}{\underset{\smile}{ab}}\,\alpha + \overset{1\,1}{\underset{\smile}{bb}}\,\beta\;\ldots\\ &\vdots\end{aligned}\right.$$

Demnach ist

$$\underset{\smile}{pp}\,\overset{2}{a}' + \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{a}'' \,.\,. = \underset{\smile}{aa}\,\alpha' + \underset{\smile}{ab}\,\beta' \,.\,.\,.$$
$$\underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{a}' + \underset{\smile}{qq}\,\overset{2}{a}'' \,.\,. = \underset{\smile}{aa}\,\alpha'' + \underset{\smile}{ab}\,\beta'' \,.\,.\,.$$
$$\vdots$$
$$\underset{\smile}{pp}\,\overset{2}{b}' + \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{b}'' \,.\,. = \underset{\smile}{ab}\,\alpha' + \underset{\smile}{bb}\,\beta' \,.\,.\,.$$
$$\underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{b}' + \underset{\smile}{qq}\,\overset{2}{b}'' \,.\,. = \underset{\smile}{ab}\,\alpha'' + \underset{\smile}{bb}\,\beta'' \,.\,.\,.$$
$$\vdots$$

Aber nach den Grundgleichungen von **N** ist

$$\text{VII.}\left(\begin{array}{l} \overset{2}{a} = \underset{\smile}{aa}\,\overset{2}{a} + \underset{\smile}{ab}\,\overset{2}{b} \,.\,.\,. \\ \overset{2}{b} = \underset{\smile}{ab}\,\overset{2}{a} + \underset{\smile}{bb}\,\overset{2}{b} \,.\,.\,. \\ \vdots \end{array}\right.$$

Aus den obigen ergiebt sich also nach dem Satz der Umwendung

$$\text{VIII.}\left(\begin{array}{l} \underset{\smile}{pp}\,\overset{2}{a}' + \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{a}'' \,.\,. = \alpha' = \underset{\smile}{\mathfrak{P}\overset{2}{a}} \\ \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{a}' + \underset{\smile}{qq}\,\overset{2}{a}'' \,.\,. = \alpha'' = \underset{\smile}{\mathfrak{Q}\overset{2}{a}} \\ \vdots \\ \underset{\smile}{pp}\,\overset{2}{b}' + \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{b}'' \,.\,. = \beta' = \underset{\smile}{\mathfrak{P}\overset{2}{b}} \\ \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{b}' + \underset{\smile}{qq}\,\overset{2}{b}'' \,.\,. = \beta'' = \underset{\smile}{\mathfrak{Q}\overset{2}{b}} \\ \vdots \end{array}\right.$$

Aus der Vergleichung von **VIII.** mit **IV.** erhellet daß der Bau $\mathfrak{G}$ welcher die Glieder $\underset{\smile}{\mathfrak{pp}}$ $\underset{\smile}{\mathfrak{pq}}$ . . enthält, der Wendebau ist von dem Gitter **G** dessen Glieder $\underset{\smile}{pp}$ $\underset{\smile}{pq}$ . . sind. Aus einem der beiden Baue **G**, $\mathfrak{G}$, ist also durch Umwendung der andere gegeben, bei Befriedigung der selblichen Gleichungen:

$$\underset{\smile}{P\mathfrak{P}} = 1 \quad \underset{\smile}{Q\mathfrak{Q}} = 1 \;.\,.\,.\; \underset{\smile}{P\mathfrak{Q}} = 0 \quad \underset{\smile}{Q\mathfrak{P}} = 0 \;.\,.$$

Aus VI. folgt

$$\begin{aligned}
\underbrace{\overset{2\,2}{\mathfrak{aa}}} &= \underbrace{\overset{1\,1}{\mathfrak{aa}}}\;\underbrace{\overset{2}{\mathfrak{a}}\alpha} + \underbrace{\overset{1\,1}{\mathfrak{ab}}}\;\underbrace{\overset{2}{\mathfrak{a}}\beta} \;.\,. \\
\underbrace{\overset{2\,2}{\mathfrak{ab}}} &= \underbrace{\overset{1\,1}{\mathfrak{ab}}}\;\underbrace{\overset{2}{\mathfrak{a}}\alpha} + \underbrace{\overset{1\,1}{\mathfrak{bb}}}\;\underbrace{\overset{2}{\mathfrak{a}}\beta} \;.\,. \\
&\;\;\vdots \\
\underbrace{\overset{2\,2}{\mathfrak{ba}}} &= \underbrace{\overset{1\,1}{\mathfrak{aa}}}\;\underbrace{\overset{2}{\mathfrak{b}}\alpha} + \underbrace{\overset{1\,1}{\mathfrak{ab}}}\;\underbrace{\overset{2}{\mathfrak{b}}\beta} \;.\,. \\
\underbrace{\overset{2\,2}{\mathfrak{bb}}} &= \underbrace{\overset{1\,1}{\mathfrak{ab}}}\;\underbrace{\overset{2}{\mathfrak{b}}\alpha} + \underbrace{\overset{1\,1}{\mathfrak{bb}}}\;\underbrace{\overset{2}{\mathfrak{b}}\beta} \;.\,. \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

Aus VII. folgt

$$\begin{aligned}
\underbrace{\overset{2\,2}{\mathfrak{aa}}} &= \underbrace{\overset{2}{A}\mathfrak{A}} \qquad \underbrace{\overset{2\,2}{\mathfrak{ab}}} = \underbrace{\overset{2}{B}\mathfrak{A}} \;.\,.\,. \\
\underbrace{\overset{2\,2}{\mathfrak{ba}}} &= \underbrace{\overset{2}{A}\mathfrak{B}} \qquad \underbrace{\overset{2\,2}{\mathfrak{bb}}} = \underbrace{\overset{2}{B}\mathfrak{B}} \;.\,.\,. \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

Da hier

$$\begin{aligned}
\underbrace{\overset{1}{A}\mathfrak{A}} + \underbrace{\overset{2}{A}\mathfrak{A}} &= \underbrace{A\mathfrak{A}} = 1 = \underbrace{\overset{1}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}} \\
\underbrace{\overset{1}{B}\mathfrak{A}} + \underbrace{\overset{2}{B}\mathfrak{A}} &= \underbrace{B\mathfrak{A}} = 0 = \underbrace{\overset{1}{B}\overset{1}{\mathfrak{A}}} \\
&\;\;\vdots \\
\underbrace{\overset{1}{A}\mathfrak{B}} + \underbrace{\overset{2}{A}\mathfrak{B}} &= \underbrace{A\mathfrak{B}} = 0 = \underbrace{\overset{1}{A}\overset{1}{\mathfrak{B}}} \\
\underbrace{\overset{1}{B}\mathfrak{B}} + \underbrace{\overset{2}{B}\mathfrak{B}} &= \underbrace{B\mathfrak{B}} = 1 = \underbrace{\overset{1}{B}\overset{1}{\mathfrak{B}}} \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

So ergiebt sich als zweiter Ausdruck

$$\begin{aligned}
\underbrace{\overset{2\,2}{\mathfrak{aa}}} &= \underbrace{\overset{1}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}} - \underbrace{\overset{1}{A}\mathfrak{A}} = \underbrace{\overset{1\,1}{\mathfrak{aa}}}\left(\underbrace{\overset{*}{\mathfrak{aa}}} - \underbrace{\mathfrak{aa}}\right) + \underbrace{\overset{1\,1}{\mathfrak{ab}}}\left(\underbrace{\overset{*}{\mathfrak{ab}}} - \underbrace{\mathfrak{ab}}\right) \;.\,. \\
\underbrace{\overset{2\,2}{\mathfrak{ab}}} &= \underbrace{\overset{1}{B}\overset{1}{\mathfrak{A}}} - \underbrace{\overset{1}{B}\mathfrak{A}} = \underbrace{\overset{1\,1}{\mathfrak{ab}}}\left(\underbrace{\overset{*}{\mathfrak{aa}}} - \underbrace{\mathfrak{aa}}\right) + \underbrace{\overset{1\,1}{\mathfrak{bb}}}\left(\underbrace{\overset{*}{\mathfrak{ab}}} - \underbrace{\mathfrak{ab}}\right) \;.\,. \\
&\;\;\vdots \\
\underbrace{\overset{2\,2}{\mathfrak{ba}}} &= \underbrace{\overset{1}{A}\overset{1}{\mathfrak{B}}} - \underbrace{\overset{1}{A}\mathfrak{B}} = \underbrace{\overset{1\,1}{\mathfrak{aa}}}\left(\underbrace{\overset{*}{\mathfrak{ab}}} - \underbrace{\mathfrak{ab}}\right) + \underbrace{\overset{1\,1}{\mathfrak{ab}}}\left(\underbrace{\overset{*}{\mathfrak{bb}}} - \underbrace{\mathfrak{bb}}\right) \;.\,. \\
\underbrace{\overset{2\,2}{\mathfrak{bb}}} &= \underbrace{\overset{1}{B}\overset{1}{\mathfrak{B}}} - \underbrace{\overset{1}{B}\mathfrak{B}} = \underbrace{\overset{1\,1}{\mathfrak{ab}}}\left(\underbrace{\overset{*}{\mathfrak{ab}}} - \underbrace{\mathfrak{ab}}\right) + \underbrace{\overset{1\,1}{\mathfrak{bb}}}\left(\underbrace{\overset{*}{\mathfrak{bb}}} - \underbrace{\mathfrak{bb}}\right) \;.\,. \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

Aus der Vergleichung beider Werthe von $\underset{\smile}{\overset{2\,2}{\mathfrak{aa}}}$ . . folgt

$$\text{IX.}\quad \left(\begin{array}{ll} \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{aa}}} - \underset{\smile}{\mathfrak{aa}} = \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak{a}}\alpha} & \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{ab}}} - \underset{\smile}{\mathfrak{ab}} = \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak{a}}\beta}\ \dots \\ \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{ab}}} - \underset{\smile}{\mathfrak{ab}} = \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak{b}}\alpha} & \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{bb}}} - \underset{\smile}{\mathfrak{bb}} = \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak{b}}\beta}\ \dots \\ \vdots & \end{array}\right.$$

Wenn $\overset{1}{N}$, $\overset{1}{\mathfrak{N}}$, gegeben, so berechnet man aus $\overset{2}{a}$, $\overset{2}{b}$, . . . nach **III** die α, β, . . . sodann nach **V** das Gitter $\mathfrak{G}$, durch dessen Umwendung das Gitter **G**, aus diesem nach **IV** die Theile $\overset{2}{a}$, $\overset{2}{b}$, . . . aus diesen und den α, β, . . . die Gebindanlagen $\underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak{a}}\alpha}$ . . . in **F**, aus diesen nach **IX** die Glieder $\underset{\smile}{\mathfrak{aa}}$ . . . von $\mathfrak{N}$.

Wenn **N**, $\mathfrak{N}$, gegeben, so berechnet man aus $\overset{2}{a}$, $\overset{2}{b}$, . . . und $\overset{2}{\mathfrak{a}}$, $\overset{2}{\mathfrak{b}}$, . . nach **I** das Gitter **G**, aus diesem durch Umwendung das Gitter $\mathfrak{G}$, aus diesem nach **VIII** die Theile α, β, . . ., aus diesen und den $\overset{2}{a}$, $\overset{2}{b}$, . . . die Gebindanlagen $\underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak{a}}\alpha}$ . . . in **F**, aus diesen nach **IX** die Glieder $\underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{aa}}}$ . . . von $\overset{1}{\mathfrak{N}}$.

Beispiel.

$\overset{1}{a}$	1,	2,	2,
$\overset{1}{b}$	2,	1,	4,
$\overset{1}{A}$	9,	13,	
$\overset{1}{B}$	13,	26,	
$\overset{1}{\mathfrak{A}}$	0,4	–0,2	
$\overset{1}{\mathfrak{B}}$	–0,2	0,13846	
$\overset{2}{a}$	1,	4,	
$\overset{2}{b}$	2,	1,	
α	0,	1,4	
β	0,07692	–0,66154	
$\mathfrak{P}$	1,15384	0,07692	
$\mathfrak{Q}$	0,07692	5,93846	
P	0,86742	–0,01124	
Q	–0,01124	0,16854	
$\overset{2}{\mathfrak{a}}$	–0,01573	0,23595	
$\overset{2}{\mathfrak{b}}$	0,07416	–0,11236	
$\mathfrak{s}$	0,33034	–0,15730	
$\mathfrak{t}$	–0,15730	0,08003	
$\mathfrak{A}$	0,06966	–0,04269	
$\mathfrak{B}$	–0,04269	0,05843	

$$
\begin{array}{c|cc}
 & H & \\
\hline
S & A\overset{2}{\mathfrak{A}} & A\overset{2}{\mathfrak{B}} \;.\,. \\
T & B\overset{2}{\mathfrak{A}} & B\overset{2}{\mathfrak{B}} \;.\,. \\
\vdots & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc}
 & \mathfrak{H} & \\
\hline
\mathfrak{S} & \overset{2}{A}\mathfrak{A} & \overset{2}{B}\mathfrak{A} \;.\,. \\
\mathfrak{T} & \overset{2}{A}\mathfrak{B} & \overset{2}{B}\mathfrak{B} \;.\,. \\
 & \vdots &
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\end{array}}\right\} = \left\{
\begin{array}{cc}
\overset{2\,2}{aa} & \overset{2\,2}{ba} \;.\,. \\
\overset{2\,2}{ab} & \overset{2\,2}{bb} \;.\,. \\
\vdots &
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{c|cc}
 & \overset{1}{H} & \\
\hline
\overset{1}{S} & \overset{1}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}} & \overset{1}{A}\overset{2}{\mathfrak{B}} \;.\,. \\
\overset{1}{T} & \overset{1}{B}\overset{2}{\mathfrak{A}} & \overset{1}{B}\overset{2}{\mathfrak{B}} \;.\,. \\
\vdots & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc}
 & \overset{1}{\mathfrak{H}} & \\
\hline
\overset{1}{\mathfrak{S}} & \overset{2}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}} & \overset{2}{B}\overset{1}{\mathfrak{A}} \;.\,. \\
\overset{1}{\mathfrak{T}} & \overset{2}{A}\overset{1}{\mathfrak{B}} & \overset{2}{B}\overset{1}{\mathfrak{B}} \;.\,. \\
 & \vdots &
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\end{array}}\right\} = \left\{
\begin{array}{cc}
\overset{2}{a}\alpha & \overset{2}{b}\alpha \;.\,. \\
\overset{2}{a}\beta & \overset{2}{b}\beta \;.\,. \\
\vdots &
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{c|cc}
 & F & \\
\hline
s & \overset{2}{a}\alpha & \overset{2}{b}\alpha \;.\,. \\
t & \overset{2}{a}\beta & \overset{2}{b}\beta \;.\,. \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

In den beiden Gittern G, $\mathfrak{G}$, deren Auflösung zur Bildung des Baues F erforderlich wird, ist die Anzahl der Glieder $= \overset{2}{n}$. Wenn diese Anzahl erheblich größer als r, d. h. als die Anzahl der Glieder von N, $\overset{1}{N}$, $\overset{2}{N}$, ist, so kann es vortheilhafter sein, den Wendebau $\overset{2}{\mathfrak{N}}$ zu bilden, und mit Hülfe desselben ohne Zuziehung der Gitter G, $\mathfrak{G}$, von einem der beiden Baue $\mathfrak{N}$, $\overset{1}{\mathfrak{N}}$, zum Bau F überzugehen. Dieses ist oben bildlich dargestellt.

Denn es folgt aus III

$$
\text{X.}\quad \left(\begin{array}{ll}
\overset{2}{a}\alpha = \overset{*}{aa}\,\overset{2\,2}{aa} + \overset{*}{ab}\,\overset{2\,2}{ab} \;.\,. & \overset{2}{b}\alpha = \overset{*}{aa}\,\overset{2\,2}{ba} + \overset{*}{ab}\,\overset{2\,2}{bb} \;.\,. \\
\overset{2}{a}\beta = \overset{*}{ab}\,\overset{2\,2}{aa} + \overset{*}{bb}\,\overset{2\,2}{ab} \;.\,. & \overset{2}{b}\beta = \overset{*}{ab}\,\overset{2\,2}{ba} + \overset{*}{bb}\,\overset{2\,2}{bb} \;.\,. \\
\qquad\vdots & \qquad\vdots
\end{array}\right.
$$

und ebenfalls aus III

$$
\overset{2}{a}\alpha = \overset{2}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}\,,\; \overset{2}{b}\alpha = \overset{2}{B}\overset{1}{\mathfrak{A}} \;\ldots,\quad \overset{2}{a}\beta = \overset{2}{A}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,,\; \overset{2}{b}\beta = \overset{2}{B}\overset{1}{\mathfrak{B}} \;\ldots
$$

$$\begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{H} \\ \hline S & \underset{\smile}{A\overset{2}{\mathfrak{A}}} & \underset{\smile}{A\overset{2}{\mathfrak{B}}} \;.. \\ T & \underset{\smile}{B\overset{2}{\mathfrak{A}}} & \underset{\smile}{B\overset{2}{\mathfrak{B}}} \;.. \\ & \vdots & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{\mathfrak{H}} \\ \hline \mathfrak{S} & \underset{\smile}{\overset{2}{A}\mathfrak{A}} & \underset{\smile}{\overset{2}{B}\mathfrak{A}} \;.. \\ \mathfrak{T} & \underset{\smile}{\overset{2}{A}\mathfrak{B}} & \underset{\smile}{\overset{2}{B}\mathfrak{B}} \;.. \\ & \vdots & \end{array} \left.\right\} = \left\{ \begin{array}{cc} \underset{\smile}{\overset{2}{a}\overset{2}{\mathfrak{a}}} & \underset{\smile}{\overset{2}{b}\overset{2}{\mathfrak{a}}} \;.. \\ \underset{\smile}{\overset{2}{a}\overset{2}{\mathfrak{b}}} & \underset{\smile}{\overset{2}{b}\overset{2}{\mathfrak{b}}} \;.. \\ \vdots & \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{\overset{1}{H}} \\ \hline \overset{1}{S} & \underset{\smile}{\overset{1}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}}} & \underset{\smile}{\overset{1}{A}\overset{2}{\mathfrak{B}}} \;.. \\ \overset{1}{T} & \underset{\smile}{\overset{1}{B}\overset{2}{\mathfrak{A}}} & \underset{\smile}{\overset{1}{B}\overset{2}{\mathfrak{B}}} \;.. \\ & \vdots & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{\overset{1}{\mathfrak{H}}} \\ \hline \overset{1}{\mathfrak{S}} & \underset{\smile}{\overset{2}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}} & \underset{\smile}{\overset{2}{B}\overset{1}{\mathfrak{A}}} \;.. \\ \overset{1}{\mathfrak{T}} & \underset{\smile}{\overset{2}{A}\overset{1}{\mathfrak{B}}} & \underset{\smile}{\overset{2}{B}\overset{1}{\mathfrak{B}}} \;.. \\ & \vdots & \end{array} \left.\right\} = \left\{ \begin{array}{cc} \underset{\smile}{\overset{2}{a}\alpha} & \underset{\smile}{\overset{2}{b}\alpha} \;.. \\ \underset{\smile}{\overset{2}{a}\beta} & \underset{\smile}{\overset{2}{b}\beta} \;.. \\ \vdots & \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{F} \\ \hline s & \underset{\smile}{\overset{2}{a}\alpha} & \underset{\smile}{\overset{2}{b}\alpha} \;.. \\ t & \underset{\smile}{\overset{2}{a}\beta} & \underset{\smile}{\overset{2}{b}\beta} \;.. \\ & \vdots & \end{array}$$

In den beiden Gittern G, $\mathfrak{G}$, deren Auflösung zur Bildung des Baues F erforderlich wird, ist die Anzahl der Glieder $= \overset{2}{n}$. Wenn diese Anzahl erheblich größer als r, d. h. als die Anzahl der Glieder von N, $\overset{1}{N}$, $\overset{2}{N}$, ist, so kann es vortheilhafter sein, den Wendebau $\overset{2}{\mathfrak{N}}$ zu bilden, und mit Hülfe desselben ohne Zuziehung der Gitter G, $\mathfrak{G}$, von einem der beiden Baue $\mathfrak{N}$, $\overset{1}{\mathfrak{N}}$, zum Bau F überzugehen. Dieses ist oben bildlich dargestellt.

Denn es folgt aus III

$$\text{X.}\left(\begin{array}{ll} \underset{\smile}{\overset{2}{a}\alpha} = \underset{\smile}{\overset{*}{a}\mathfrak{a}}\;\underset{\smile}{\overset{2}{a}\overset{2}{\mathfrak{a}}} + \underset{\smile}{\overset{*}{a}\mathfrak{b}}\;\underset{\smile}{\overset{2}{a}\overset{2}{\mathfrak{b}}} \;.. & \underset{\smile}{\overset{2}{b}\alpha} = \underset{\smile}{\overset{*}{a}\mathfrak{a}}\;\underset{\smile}{\overset{2}{b}\overset{2}{\mathfrak{a}}} + \underset{\smile}{\overset{*}{a}\mathfrak{b}}\;\underset{\smile}{\overset{2}{b}\overset{2}{\mathfrak{b}}} \;.. \\ \underset{\smile}{\overset{2}{a}\beta} = \underset{\smile}{\overset{*}{a}\mathfrak{b}}\;\underset{\smile}{\overset{2}{a}\overset{2}{\mathfrak{a}}} + \underset{\smile}{\overset{*}{b}\mathfrak{b}}\;\underset{\smile}{\overset{2}{a}\overset{2}{\mathfrak{b}}} \;.. & \underset{\smile}{\overset{2}{b}\beta} = \underset{\smile}{\overset{*}{a}\mathfrak{b}}\;\underset{\smile}{\overset{2}{b}\overset{2}{\mathfrak{a}}} + \underset{\smile}{\overset{*}{b}\mathfrak{b}}\;\underset{\smile}{\overset{2}{b}\overset{2}{\mathfrak{b}}} \;.. \\ \quad\vdots & \quad\vdots \end{array}\right.$$

und ebenfalls aus III

$$\underset{\smile}{\overset{2}{a}\alpha} = \underset{\smile}{\overset{2}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}},\ \underset{\smile}{\overset{2}{b}\alpha} = \underset{\smile}{\overset{2}{B}\overset{1}{\mathfrak{A}}} \;\ldots,\quad \underset{\smile}{\overset{2}{a}\beta} = \underset{\smile}{\overset{2}{A}\overset{1}{\mathfrak{B}}},\ \underset{\smile}{\overset{2}{b}\beta} = \underset{\smile}{\overset{2}{B}\overset{1}{\mathfrak{B}}} \;\ldots$$

Ferner aus VII

$$\text{XI.}\quad \left(\begin{array}{ll} \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak a}\alpha} = \underset{\smile}{\mathfrak{aa}}\;\underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak a}\alpha} + \underset{\smile}{\mathfrak{ab}}\;\underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak b}\alpha}\;.. & \quad \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak b}\alpha} = \underset{\smile}{\mathfrak{ab}}\;\underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak a}\alpha} + \underset{\smile}{\mathfrak{bb}}\;\underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak b}\alpha}\;.. \\ \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak a}\beta} = \underset{\smile}{\mathfrak{aa}}\;\underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak a}\beta} + \underset{\smile}{\mathfrak{ab}}\;\underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak b}\beta}\;.. & \quad \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak b}\beta} = \underset{\smile}{\mathfrak{ab}}\;\underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak a}\beta} + \underset{\smile}{\mathfrak{bb}}\;\underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak b}\beta}\;.. \\ \quad\vdots & \quad\quad\vdots \end{array}\right.$$

Aus N und $\overset{2}{\mathfrak N}$ bildet man H, durch Umwendung ergiebt sich $\mathfrak H$, dessen Glieder, wenn $\overset{1}{\mathfrak N}$ gegeben ist, nach X die Glieder von F geben:

$$\begin{array}{ll} \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak a}\alpha} = \underset{\smile}{\overset{1}{\mathfrak A}\mathfrak S} & \quad \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak b}\alpha} = \underset{\smile}{\overset{1}{\mathfrak A}\mathfrak T}\;\ldots \\ \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak a}\beta} = \underset{\smile}{\overset{1}{\mathfrak B}\mathfrak S} & \quad \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak b}\beta} = \underset{\smile}{\overset{1}{\mathfrak B}\mathfrak T}\;\ldots \end{array}$$

Aus $\overset{1}{N}$ und $\overset{2}{\mathfrak N}$ bildet man $\overset{1}{H}$, durch Umwendung ergiebt sich $\overset{1}{\mathfrak H}$, dessen Glieder, wenn $\mathfrak N$ gegeben ist, nach XI die Glieder von F geben:

$$\begin{array}{ll} \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak a}\alpha} = \underset{\smile}{\mathfrak A\overset{1}{\mathfrak S}} & \quad \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak b}\alpha} = \underset{\smile}{\mathfrak B\overset{1}{\mathfrak S}}\;\ldots \\ \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak a}\beta} = \underset{\smile}{\mathfrak A\overset{1}{\mathfrak T}} & \quad \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak b}\beta} = \underset{\smile}{\mathfrak B\overset{1}{\mathfrak T}}\;\ldots \\ & \quad\vdots \end{array}$$

Die Unterschiede der entsprechenden Theile von $\overset{1}{\mathfrak N}$ und $\mathfrak N$ sind nach IX und XI

$$\text{XII.}\quad \left(\begin{array}{l} \overset{*}{\alpha} = \overset{*}{\mathfrak a} - \overset{1}{\mathfrak a} = \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak a}\alpha}\;\overset{1}{\mathfrak a} + \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak b}\alpha}\;\overset{1}{\mathfrak b}\;.. = \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak a}\alpha}\;\overset{1}{\mathfrak a} + \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak b}\alpha}\;\overset{1}{\mathfrak b}\;.. \\ \overset{*}{\beta} = \overset{*}{\mathfrak b} - \overset{1}{\mathfrak b} = \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak a}\beta}\;\overset{1}{\mathfrak a} + \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak b}\beta}\;\overset{1}{\mathfrak b}\;.. = \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak a}\beta}\;\overset{1}{\mathfrak a} + \underset{\smile}{\overset{2}{\mathfrak b}\beta}\;\overset{1}{\mathfrak b}\;.. \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \end{array}\right.$$

woraus noch:

$$\underset{\smile}{\overset{*}{\alpha}\alpha} = \underset{\smile}{\mathfrak S\mathfrak s}\,,\; \underset{\smile}{\overset{*}{\alpha}\beta} = \underset{\smile}{\mathfrak T\mathfrak s}\;\ldots,\; \underset{\smile}{\alpha\overset{*}{\beta}} = \underset{\smile}{\mathfrak S\mathfrak t}\,,\; \underset{\smile}{\overset{*}{\beta}\beta} = \underset{\smile}{\mathfrak T\mathfrak t}\;\ldots$$

Beispiel.

$\overset{1}{a}$	1,	2,	2,	1,
$\overset{1}{b}$	3,	1,	4,	2,
$\overset{1}{c}$	2,	5,	1,	6,
$\overset{2}{a}$	4,	2,	1,	
$\overset{2}{b}$	1,	4,	5,	
$\overset{2}{c}$	1,	3,	3,	
$\overset{1}{A}$	10,	15,	20,	
$\overset{1}{B}$	15,	30,	27,	
$\overset{1}{C}$	20,	27,	66,	
$\overset{2}{A}$	21,	17,	13,	
$\overset{2}{B}$	17,	42,	28,	
$\overset{2}{C}$	13,	28,	19,	
A	31,	32,	33,	
B	32,	27,	55,	
C	33,	55,	85,	

$\overset{2}{\mathfrak{A}}$	0,17284	0,50617	–0,86420
$\overset{2}{\mathfrak{B}}$	0,50617	2,83950	–4,53086
$\overset{2}{\mathfrak{C}}$	–0,86420	–4,53086	7,32099
S	–6,96296	–42,96296	69,81481
T	–5,55555	–28,55555	48,77777
U	–39,91358	–212,24691	344,56790
$\mathfrak{S}$	0,89166	–0,05665	0,06839
$\mathfrak{T}$	–0,02486	0,67247	0,41135
$\mathfrak{U}$	–0,17715	–0,08372	–0,06919
$\overset{1}{\mathfrak{A}}$	0,67258	–0,24194	–0,10484
$\overset{1}{\mathfrak{B}}$	–0,24194	0,13978	0,01613
$\overset{1}{\mathfrak{C}}$	–0,10484	0,01613	0,04032
$\mathfrak{s}$	0,60624	–0,22254	–0,09164
$\mathfrak{t}$	–0,22254	0,10665	0,03004
$\mathfrak{u}$	–0,09164	0,03004	0,01443
$\mathfrak{A}$	0,06634	–0,01940	–0,01320
$\mathfrak{B}$	–0,01940	0,03314	–0,01391
$\mathfrak{C}$	–0,01320	–0,01391	0,02589

Zweiter Gittersatz, bei veränderter Anzahl der Glieder.

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{N} \\
\begin{array}{cccccc}
\overset{1}{a} & \overset{1}{b} & \dots & \overset{2}{a} & \overset{2}{b} & \dots \\
\hline
\overset{1}{a}{}' & \overset{1}{b}{}' & \dots & \overset{2}{a}{}' & \overset{2}{b}{}' & \dots \\
\overset{1}{a}{}'' & \overset{1}{b}{}'' & \dots & \overset{2}{a}{}'' & \overset{2}{b}{}'' & \dots \\
\vdots & & & \vdots & &
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\mathfrak{N} \\
\begin{array}{cccccc}
\overset{1}{\mathfrak{a}} & \overset{1}{\mathfrak{b}} & \dots & \overset{2}{\mathfrak{a}} & \overset{2}{\mathfrak{b}} & \dots \\
\hline
\overset{1}{\mathfrak{a}}{}' & \overset{1}{\mathfrak{b}}{}' & \dots & \overset{2}{\mathfrak{a}}{}' & \overset{2}{\mathfrak{b}}{}' & \dots \\
\overset{1}{\mathfrak{a}}{}'' & \overset{1}{\mathfrak{b}}{}'' & \dots & \overset{2}{\mathfrak{a}}{}'' & \overset{2}{\mathfrak{b}}{}'' & \dots \\
\vdots & & & \vdots & &
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\mathrm{N}:\ \begin{array}{|c|c|}
\hline
\overset{1}{\mathrm{N}} & \check{\mathrm{F}} \\
\hline
\hat{\mathrm{F}} & \overset{2}{\mathrm{N}} \\
\hline
\end{array}
\qquad
\mathfrak{N}:\ \begin{array}{|c|c|}
\hline
\overset{1}{\mathfrak{N}} & \check{\mathfrak{F}} \\
\hline
\hat{\mathfrak{F}} & \overset{2}{\mathfrak{N}} \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & & \overset{*}{\mathfrak{N}} & \\
\hline
\overset{*}{\mathfrak{A}} & \overset{*}{\mathfrak{aa}} & \overset{*}{\mathfrak{ab}} & \dots \\
\overset{*}{\mathfrak{B}} & \overset{*}{\mathfrak{ba}} & \overset{*}{\mathfrak{bb}} & \dots \\
 & \vdots & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
 & & \overset{0}{\mathrm{N}} & \\
\hline
\overset{0}{\mathrm{A}} & \overset{0}{aa} & \overset{0}{ab} & \dots \\
\overset{0}{\mathrm{B}} & \overset{0}{ba} & \overset{0}{bb} & \dots \\
 & \vdots & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & & \overset{1}{\mathrm{N}} & \\
\hline
\overset{1}{\mathrm{A}} & \overset{11}{aa} & \overset{11}{ab} & \dots \\
\overset{1}{\mathrm{B}} & \overset{11}{ba} & \overset{11}{bb} & \dots \\
 & \vdots & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc}
 & & \check{\mathrm{F}} & \\
\hline
\check{\mathrm{A}} & \overset{12}{aa} & \overset{12}{ab} & \dots \\
\check{\mathrm{B}} & \overset{12}{ba} & \overset{12}{bb} & \dots \\
 & \vdots & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc}
 & & \hat{\mathrm{F}} & \\
\hline
\hat{\mathrm{A}} & \overset{21}{aa} & \overset{21}{ab} & \dots \\
\hat{\mathrm{B}} & \overset{21}{ba} & \overset{21}{bb} & \dots \\
 & \vdots & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc}
 & & \overset{2}{\mathrm{N}} & \\
\hline
\overset{2}{\mathrm{A}} & \overset{22}{aa} & \overset{22}{ab} & \dots \\
\overset{2}{\mathrm{B}} & \overset{22}{ba} & \overset{22}{bb} & \dots \\
 & \vdots & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & & \overset{1}{\mathfrak{N}} & \\
\hline
\overset{1}{\mathfrak{A}} & \overset{11}{\mathfrak{aa}} & \overset{11}{\mathfrak{ab}} & \dots \\
\overset{1}{\mathfrak{B}} & \overset{11}{\mathfrak{ba}} & \overset{11}{\mathfrak{bb}} & \dots \\
 & \vdots & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc}
 & & \check{\mathfrak{F}} & \\
\hline
\check{\mathfrak{A}} & \overset{12}{\mathfrak{aa}} & \overset{12}{\mathfrak{ab}} & \dots \\
\check{\mathfrak{B}} & \overset{12}{\mathfrak{ba}} & \overset{12}{\mathfrak{bb}} & \dots \\
 & \vdots & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc}
 & & \hat{\mathfrak{F}} & \\
\hline
\hat{\mathfrak{A}} & \overset{21}{\mathfrak{aa}} & \overset{21}{\mathfrak{ab}} & \dots \\
\hat{\mathfrak{B}} & \overset{21}{\mathfrak{ba}} & \overset{21}{\mathfrak{bb}} & \dots \\
 & \vdots & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc}
 & & \overset{2}{\mathfrak{N}} & \\
\hline
\overset{2}{\mathfrak{A}} & \overset{22}{\mathfrak{aa}} & \overset{22}{\mathfrak{ab}} & \dots \\
\overset{2}{\mathfrak{B}} & \overset{22}{\mathfrak{ba}} & \overset{22}{\mathfrak{bb}} & \dots \\
 & \vdots & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & & \hat{\mathrm{G}} & \\
\hline
\hat{\mathfrak{S}} & \overset{*2}{\mathfrak{aa}} & \overset{*2}{\mathfrak{ab}} & \dots \\
\hat{\mathfrak{T}} & \overset{*2}{\mathfrak{ba}} & \overset{*2}{\mathfrak{bb}} & \dots \\
 & \vdots & &
\end{array}
\Bigg\} = \Bigg\{
\begin{array}{ccc}
-\overset{01}{\mathfrak{aa}}, & -\overset{01}{\mathfrak{ba}} & \dots \\
-\overset{01}{\mathfrak{ab}}, & -\overset{01}{\mathfrak{bb}} & \dots \\
\vdots & \vdots &
\end{array}
\Bigg\} = \Bigg\{
\begin{array}{ccc}
\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{\mathrm{A}}, & \overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{\mathrm{B}} & \dots \\
\overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{\mathrm{A}}, & \overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{\mathrm{B}} & \dots \\
\vdots & \vdots &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & & \check{\mathrm{G}} & \\
\hline
\check{\mathfrak{S}} & \overset{*2}{\mathfrak{aa}} & \overset{*2}{\mathfrak{ba}} & \dots \\
\check{\mathfrak{T}} & \overset{*2}{\mathfrak{ab}} & \overset{*2}{\mathfrak{bb}} & \dots \\
 & \vdots & &
\end{array}
\Bigg\} = \Bigg\{
\begin{array}{ccc}
-\overset{01}{\mathfrak{aa}}, & -\overset{01}{\mathfrak{ab}} & \dots \\
-\overset{01}{\mathfrak{ba}}, & -\overset{01}{\mathfrak{bb}} & \dots \\
\vdots & \vdots &
\end{array}
\Bigg\} = \Bigg\{
\begin{array}{ccc}
\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{\mathrm{A}}, & \overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{\mathrm{A}} & \dots \\
\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{\mathrm{B}}, & \overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{\mathrm{B}} & \dots \\
\vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Der Bau N von r Gliedern und n Theilen oder Beobachtungen, besteht aus zwei Abtheilungen: $\overset{1}{a}$, $\overset{1}{b}$, .. deren Anzahl $= \overset{1}{r}$, und $\overset{2}{a}$, $\overset{2}{b}$, .. deren Anzahl $= \overset{2}{r}$, so daß $\overset{1}{r} + \overset{2}{r} = r$ ist. Der Urbau N besteht aus den beiden Eckgittern $\overset{1}{N}$ von $\overset{1}{r}$ Gliedern und $\overset{2}{N}$ von $\overset{2}{r}$ Gliedern. Die beiden Seitenfächer $\hat{F}$ und $\check{F}$ sind einander umgelegt gleich. In dem Wendebau $\mathfrak{N}$ sind die entsprechenden Abtheilungen $\overset{1}{\mathfrak{N}}$, $\overset{2}{\mathfrak{N}}$, $\hat{\mathfrak{F}}$, $\check{\mathfrak{F}}$. Es verhalten sich $\overset{1}{N}$ und $\overset{*}{\mathfrak{N}}$, $\overset{0}{N}$ und $\overset{2}{\mathfrak{N}}$, wie Urbau und Wendebau.

Gewöhnlich steigt man von N durch eine Reihe von Erniedrigungen zu $\overset{0}{N}$. Hier soll ein andres Verfahren angezeigt werden, durch welches die Auflösung eines Baues von r Gliedern auf die Auflösung zweier Baue von $\overset{1}{r}$ und $\overset{2}{r}$ Gliedern zürückgeführt wird.

$$\text{Aus } \overset{1}{N}\,\overset{*}{\mathfrak{N}} \left\{ \begin{array}{l} \overset{1}{a} = \overset{11}{\underset{\smile}{aa}}\,\overset{*}{\mathfrak{a}} + \overset{11}{\underset{\smile}{ab}}\,\overset{*}{\mathfrak{b}} \;\ldots \\ \overset{1}{b} = \overset{11}{\underset{\smile}{ba}}\,\overset{*}{\mathfrak{a}} + \overset{11}{\underset{\smile}{bb}}\,\overset{*}{\mathfrak{b}} \;\ldots \end{array} \right.$$

$$\text{Aus } N\,\mathfrak{N} \left\{ \begin{array}{l} \overset{1}{a} = \overset{11}{\underset{\smile}{aa}}\,\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{11}{\underset{\smile}{ab}}\,\overset{1}{\mathfrak{b}} \;\ldots + \overset{12}{\underset{\smile}{aa}}\,\overset{2}{\mathfrak{a}} + \overset{12}{\underset{\smile}{ab}}\,\overset{2}{\mathfrak{b}} \;\ldots \\ \overset{1}{b} = \overset{11}{\underset{\smile}{ba}}\,\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{11}{\underset{\smile}{bb}}\,\overset{1}{\mathfrak{b}} \;\ldots + \overset{12}{\underset{\smile}{ba}}\,\overset{2}{\mathfrak{a}} + \overset{12}{\underset{\smile}{bb}}\,\overset{2}{\mathfrak{b}} \;\ldots \end{array} \right.$$

$$\text{Also} \left\{ \begin{array}{l} \overset{11}{\underset{\smile}{aa}}\,(\overset{*}{\mathfrak{a}} - \overset{1}{\mathfrak{a}}) + \overset{11}{\underset{\smile}{ab}}\,(\overset{*}{\mathfrak{b}} - \overset{1}{\mathfrak{b}}) \;.. = \overset{12}{\underset{\smile}{aa}}\,\overset{2}{\mathfrak{a}} + \overset{12}{\underset{\smile}{ab}}\,\overset{2}{\mathfrak{b}} \;\ldots \\ \overset{11}{\underset{\smile}{ba}}\,(\overset{*}{\mathfrak{a}} - \overset{1}{\mathfrak{a}}) + \overset{11}{\underset{\smile}{bb}}\,(\overset{*}{\mathfrak{b}} - \overset{1}{\mathfrak{b}}) \;.. = \overset{12}{\underset{\smile}{ba}}\,\overset{2}{\mathfrak{a}} + \overset{12}{bb}\,\overset{2}{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} \;\ldots \end{array} \right.$$

$$\vdots$$

$$\text{Aus } \overset{1}{N}\,\overset{*}{\mathfrak{N}} \left\{ \begin{array}{l} \overset{*}{a} = \overset{*}{\underset{\smile}{aa}}\,\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{*}{\underset{\smile}{ab}}\,\overset{1}{\mathfrak{b}} \;\ldots \\ \overset{*}{b} = \overset{*}{\underset{\smile}{ab}}\,\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{*}{\underset{\smile}{bb}}\,\overset{1}{\mathfrak{b}} \;\ldots \end{array} \right.$$

$$\text{XIII}\left\{\begin{aligned}
\underset{\smile}{\overset{*2}{\mathfrak{aa}}} &= \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{aa}}}\;\underset{\smile}{\overset{21}{\mathrm{aa}}} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{ab}}}\;\underset{\smile}{\overset{21}{\mathrm{ab}}} \;.. = \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{\mathrm{A}}}\\
\underset{\smile}{\overset{*2}{\mathfrak{ab}}} &= \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{aa}}}\;\underset{\smile}{\overset{21}{\mathrm{ba}}} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{ab}}}\;\underset{\smile}{\overset{21}{\mathrm{bb}}} \;.. = \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{\mathrm{B}}}\\
&\;\vdots\\
\underset{\smile}{\overset{*2}{\mathfrak{ba}}} &= \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{ab}}}\;\underset{\smile}{\overset{21}{\mathrm{aa}}} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{bb}}}\;\underset{\smile}{\overset{21}{\mathrm{bb}}} \;.. = \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{\mathrm{A}}}\\
\underset{\smile}{\overset{*2}{\mathfrak{bb}}} &= \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{ab}}}\;\underset{\smile}{\overset{21}{\mathrm{ba}}} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{bb}}}\;\underset{\smile}{\overset{21}{\mathrm{bb}}} \;.. = \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{\mathrm{B}}}
\end{aligned}\right.$$

$$\vdots$$

$$\text{XIV.}\left\{\begin{aligned}
\overset{*}{\mathfrak{a}} - \overset{1}{\mathfrak{a}} &= \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{\mathrm{A}}}\;\overset{2}{\mathfrak{a}} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{\mathrm{B}}}\;\overset{2}{\mathfrak{b}} \;...\\
\overset{*}{\mathfrak{b}} - \overset{1}{\mathfrak{b}} &= \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{\mathrm{A}}}\;\overset{2}{\mathfrak{a}} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{\mathrm{B}}}\;\overset{2}{\mathfrak{b}} \;...
\end{aligned}\right.$$

$$\vdots$$

$$\underset{\smile}{\overset{*2}{\mathfrak{aa}}} = 0 \qquad \underset{\smile}{\overset{*2}{\mathfrak{ab}}} = 0 \;.. \quad \underset{\smile}{\overset{*2}{\mathfrak{ba}}} = 0 \qquad \underset{\smile}{\overset{*2}{\mathfrak{bb}}} = 0 \;...$$

$$\text{XV.}\left\{\begin{aligned}
-\underset{\smile}{\overset{21}{\mathrm{aa}}} &= \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{\mathrm{A}}}\;\underset{\smile}{\overset{22}{\mathrm{aa}}} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{\mathrm{B}}}\;\underset{\smile}{\overset{22}{\mathrm{ab}}} \;.. = \underset{\smile}{\hat{\mathfrak{S}}\overset{2}{\mathfrak{A}}}\\
-\underset{\smile}{\overset{21}{\mathrm{ab}}} &= \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{\mathrm{A}}}\;\underset{\smile}{\overset{22}{\mathrm{aa}}} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{\mathrm{B}}}\;\underset{\smile}{\overset{22}{\mathrm{ab}}} \;.. = \underset{\smile}{\hat{\mathfrak{T}}\overset{2}{\mathfrak{A}}}\\
&\;\vdots\\
-\underset{\smile}{\overset{21}{\mathrm{ba}}} &= \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{\mathrm{A}}}\;\underset{\smile}{\overset{22}{\mathrm{ab}}} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{\mathrm{B}}}\;\underset{\smile}{\overset{22}{\mathrm{bb}}} \;. = \underset{\smile}{\hat{\mathfrak{S}}\overset{2}{\mathfrak{B}}}\\
-\underset{\smile}{\overset{21}{\mathrm{bb}}} &= \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{\mathrm{A}}}\;\underset{\smile}{\overset{22}{\mathrm{ab}}} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{\mathrm{B}}}\;\underset{\smile}{\overset{22}{\mathrm{bb}}} \;.. = \underset{\smile}{\hat{\mathfrak{T}}\overset{2}{\mathfrak{B}}}
\end{aligned}\right.$$

$$\vdots$$

$$\underset{\smile}{\overset{*1}{\mathfrak{aa}}} = \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{aa}}} \qquad \underset{\smile}{\overset{*1}{\mathfrak{ab}}} = \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{ab}}} \qquad \underset{\smile}{\overset{*1}{\mathfrak{ba}}} = \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{ab}}} \qquad \underset{\smile}{\overset{*1}{\mathfrak{bb}}} = \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{bb}}}$$

$$\text{XVI.}\left\{\begin{aligned}
\underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{aa}}} - \underset{\smile}{\overset{11}{\mathrm{aa}}} &= \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{\mathrm{A}}}\;\underset{\smile}{\overset{12}{\mathrm{aa}}} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{\mathrm{B}}}\;\underset{\smile}{\overset{12}{\mathrm{ab}}} \;.. = \underset{\smile}{\hat{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{A}}}\\
\underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{ab}}} - \underset{\smile}{\overset{11}{\mathrm{ab}}} &= \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{\mathrm{A}}}\;\underset{\smile}{\overset{12}{\mathrm{aa}}} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{\mathrm{B}}}\;\underset{\smile}{\overset{12}{\mathrm{ab}}} \;.. = \underset{\smile}{\hat{\mathfrak{T}}\check{\mathfrak{A}}}\\
&\;\vdots\\
\underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{ab}}} - \underset{\smile}{\overset{11}{\mathrm{ab}}} &= \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{\mathrm{A}}}\;\underset{\smile}{\overset{12}{\mathrm{ba}}} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{\mathrm{B}}}\;\underset{\smile}{\overset{12}{\mathrm{bb}}} \;.. = \underset{\smile}{\hat{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{B}}}\\
\underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{bb}}} - \underset{\smile}{\overset{11}{\mathrm{bb}}} &= \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{\mathrm{A}}}\;\underset{\smile}{\overset{12}{\mathrm{ba}}} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{\mathrm{B}}}\;\underset{\smile}{\overset{12}{\mathrm{bb}}} \;.. = \underset{\smile}{\hat{\mathfrak{T}}\check{\mathfrak{B}}}
\end{aligned}\right.$$

Aus $\overset{0}{N}\ \overset{2}{\mathfrak{N}}$
$$\left\{\begin{array}{l}\overset{2}{a} = \underset{\smile}{\overset{22}{aa}}\,\overset{0}{a} + \underset{\smile}{\overset{22}{ab}}\,\overset{0}{b} \ldots \\ \overset{2}{b} = \underset{\smile}{\overset{22}{ab}}\,\overset{0}{a} + \underset{\smile}{\overset{22}{bb}}\,\overset{0}{b} \ldots\end{array}\right.$$

Aus $N\ \mathfrak{N}$
$$\left\{\begin{array}{l}\overset{2}{a} = \underset{\smile}{\overset{22}{aa}}\,\overset{2}{a} + \underset{\smile}{\overset{22}{ab}}\,\overset{2}{b} \ldots + \underset{\smile}{\overset{21}{aa}}\,\overset{1}{a} + \underset{\smile}{\overset{21}{ab}}\,\overset{1}{b} \ldots \\ \overset{2}{b} = \underset{\smile}{\overset{22}{ab}}\,\overset{2}{a} + \underset{\smile}{\overset{22}{bb}}\,\overset{2}{b} \ldots + \underset{\smile}{\overset{21}{ba}}\,\overset{1}{a} + \underset{\smile}{\overset{21}{bb}}\,\overset{1}{b} \ldots\end{array}\right.$$

Also
$$\left\{\begin{array}{l}\underset{\smile}{\overset{22}{aa}}\,(\overset{0}{a} - \overset{2}{a}) + \underset{\smile}{\overset{22}{ab}}\,(\overset{0}{b} - \overset{2}{b}) = \underset{\smile}{\overset{21}{aa}}\,\overset{1}{a} + \underset{\smile}{\overset{21}{ab}}\,\overset{1}{b} \ldots \\ \underset{\smile}{\overset{22}{ab}}\,(\overset{0}{a} - \overset{2}{a}) + \underset{\smile}{\overset{22}{bb}}\,(\overset{0}{b} - \overset{2}{b}) = \underset{\smile}{\overset{21}{ba}}\,\overset{1}{a} + \underset{\smile}{\overset{21}{bb}}\,\overset{1}{b} \ldots\end{array}\right.$$

Aus $\overset{0}{N}\ \overset{2}{\mathfrak{N}}$
$$\left\{\begin{array}{l}\overset{0}{a} = \underset{\smile}{\overset{0}{aa}}\,\overset{2}{a} + \underset{\smile}{\overset{0}{ab}}\,\overset{2}{b} \ldots \\ \overset{0}{b} = \underset{\smile}{\overset{0}{ab}}\,\overset{2}{a} + \underset{\smile}{\overset{0}{bb}}\,\overset{2}{b} \ldots\end{array}\right.$$

XVII.
$$\left\{\begin{array}{l}\underset{\smile}{\overset{01}{aa}} = \underset{\smile}{\overset{0}{aa}}\,\underset{\smile}{\overset{21}{aa}} + \underset{\smile}{\overset{0}{ab}}\,\underset{\smile}{\overset{21}{ba}} \ldots \\ \underset{\smile}{\overset{01}{ba}} = \underset{\smile}{\overset{0}{ab}}\,\underset{\smile}{\overset{21}{aa}} + \underset{\smile}{\overset{0}{bb}}\,\underset{\smile}{\overset{21}{ba}} \ldots \\ \underset{\smile}{\overset{01}{ab}} = \underset{\smile}{\overset{0}{aa}}\,\underset{\smile}{\overset{21}{ab}} + \underset{\smile}{\overset{0}{ab}}\,\underset{\smile}{\overset{21}{bb}} \ldots \\ \underset{\smile}{\overset{01}{bb}} = \underset{\smile}{\overset{0}{ab}}\,\underset{\smile}{\overset{21}{ab}} + \underset{\smile}{\overset{0}{bb}}\,\underset{\smile}{\overset{21}{bb}} \ldots\end{array}\right.$$

Aus der Vergleichung von XV mit XVII folgt

$$-\underset{\smile}{\overset{01}{aa}} = \underset{\smile}{\overset{*2}{aa}} = \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\,\hat{A}} \qquad -\underset{\smile}{\overset{01}{ba}} = \underset{\smile}{\overset{*2}{ab}} = \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\,\hat{B}} \ldots$$

$$-\underset{\smile}{\overset{01}{ab}} = \underset{\smile}{\overset{*2}{ba}} = \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\,\hat{A}} \qquad -\underset{\smile}{\overset{01}{bb}} = \underset{\smile}{\overset{*2}{bb}} = \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\,\hat{B}} \ldots$$

$$\text{Also XVIII.}\left\{\begin{array}{l} \overset{2}{a} - \overset{0}{a} = \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{A}}\,\overset{1}{a} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{A}}\,\overset{1}{b}\ \ldots \\ \overset{2}{b} - \overset{0}{b} = \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{B}}\,\overset{1}{a} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{B}}\,\overset{1}{b}\ \ldots \end{array}\right.$$

$$\underset{\smile}{\overset{01}{aa}} = 0 \qquad \underset{\smile}{\overset{01}{ab}} = 0 \qquad \underset{\smile}{\overset{01}{ba}} = 0 \qquad \underset{\smile}{\overset{01}{bb}} = 0$$

$$\underset{\smile}{\overset{02}{aa}} = \underset{\smile}{\overset{0}{aa}} \qquad \underset{\smile}{\overset{02}{ab}} = \underset{\smile}{\overset{0}{ab}} \qquad \underset{\smile}{\overset{02}{ba}} = \underset{\smile}{\overset{0}{ab}} \qquad \underset{\smile}{\overset{02}{bb}} = \underset{\smile}{\overset{0}{bb}}$$

$$\text{XIX.}\left\{\begin{array}{l} \underset{\smile}{\overset{22}{aa}} - \underset{\smile}{\overset{0}{aa}} = \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{A}}\,\underset{\smile}{\overset{21}{aa}} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{A}}\,\underset{\smile}{\overset{21}{ab}}\ \ldots = \underset{\smile}{\check{\mathfrak{S}}\hat{A}} \\ \underset{\smile}{\overset{22}{ab}} - \underset{\smile}{\overset{0}{ab}} = \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{B}}\,\underset{\smile}{\overset{21}{aa}} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{B}}\,\underset{\smile}{\overset{21}{ab}}\ \ldots = \underset{\smile}{\check{\mathfrak{T}}\hat{A}} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \underset{\smile}{\overset{22}{ab}} - \underset{\smile}{\overset{0}{ab}} = \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{A}}\,\underset{\smile}{\overset{21}{ba}} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{A}}\,\underset{\smile}{\overset{21}{bb}}\ \ldots = \underset{\smile}{\check{\mathfrak{S}}\hat{B}} \\ \underset{\smile}{\overset{22}{bb}} - \underset{\smile}{\overset{0}{bb}} = \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{A}}\hat{B}}\,\underset{\smile}{\overset{21}{ba}} + \underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{B}}\hat{B}}\,\underset{\smile}{\overset{21}{bb}}\ \ldots = \underset{\smile}{\check{\mathfrak{T}}\hat{B}} \\ \qquad\qquad \vdots \end{array}\right.$$

Es seien von N die vier Fächer $\overset{1}{N}$ $\overset{2}{N}$ $\hat{F}$ $\check{F}$ und außerdem von $\overset{1}{N}$ der Wendebau $\overset{*}{\mathfrak{N}}$ gegeben. Man berechnet nach XIII, aus $\overset{*}{\mathfrak{N}}$ und $\hat{F}$ den Bau $\hat{G}$, dessen Umstellung den Bau $\check{G}$ giebt; nach XIX aus $\check{G}$ und $\hat{F}$ den Bau $\overset{0}{N}$ durch den Ausdruck $\overset{0}{N} = \overset{2}{N} - \check{G}\hat{F}$. Die Umwendung des Baues $\overset{0}{N}$ giebt $\overset{2}{\mathfrak{N}}$. Nach XV ergiebt sich aus $\hat{G}$ und $\overset{2}{\mathfrak{N}}$ das Seitenfach $\hat{\mathfrak{F}}$ und das umgelegte $\check{\mathfrak{F}}$. Nach XVI aus $\hat{G}$ und $\check{\mathfrak{F}}$ das Eckgitter $\overset{1}{\mathfrak{N}}$ durch den Ausdruck $\overset{1}{\mathfrak{N}} = \overset{*}{\mathfrak{N}} - \hat{G}\check{\mathfrak{F}}$.

Um $\overset{*}{\mathfrak{N}}$ aus $\mathfrak{N}$ zu erhalten, bildet man von $\overset{2}{\mathfrak{N}}$ den Wendebau $\overset{0}{N}$, hieraus nach XVII mit $\check{\mathfrak{F}}$ den Bau $\hat{G}$. Alsdann ergiebt sich nach XVI aus $\hat{G}$ und $\check{\mathfrak{F}}$ der Bau $\overset{*}{\mathfrak{N}}$ durch den Ausdruck $\overset{*}{\mathfrak{N}} = \overset{1}{\mathfrak{N}} + \hat{G}\check{\mathfrak{F}}$.

Beispiel.

$$\overset{1}{N}\left\{\begin{array}{llll} \overset{1}{A} & 6, & 8, & 10, \\ \overset{1}{B} & 8, & 12, & 14, \\ \overset{1}{C} & 10, & 14, & 20, \end{array}\right.$$

$$\overset{*}{\mathfrak{N}}\left\{\begin{array}{llll} \overset{*}{\mathfrak{A}} & 1,83333 & -0,83333 & -0,33333 \\ \overset{*}{\mathfrak{B}} & -0,83333 & 0,83333 & -0,16666 \\ \overset{*}{\mathfrak{C}} & -0,33333 & -0,16666 & 0,33333 \end{array}\right.$$

$$\hat{F}\left\{\begin{array}{llll} \hat{A} & 10, & 13, & 18, \\ \hat{B} & 9, & 12, & 13, \end{array}\right.$$

$$\hat{G} = \overset{*}{\mathfrak{N}}\hat{F}\left\{\begin{array}{lll} \hat{\mathfrak{S}} & 1,5 & 2,16666 \\ \hat{\mathfrak{T}} & -0,5 & 0,33333 \\ \hat{\mathfrak{U}} & 0,5 & -0,66666 \end{array}\right.$$

$$\check{G}\left\{\begin{array}{llll} \check{\mathfrak{S}} & 1,5 & -0,5 & 0,5 \\ \check{\mathfrak{T}} & 2,16666 & 0,33333 & -0,66666 \end{array}\right.$$

$$\overset{2}{N}\left\{\begin{array}{lll} \overset{2}{A} & 20, & 13, \\ \overset{2}{B} & 13, & 17, \end{array}\right.$$

$$\overset{0}{N} = \overset{2}{N} - \check{G}\overset{1}{F}\left\{\begin{array}{lll} \overset{0}{A} & 2,5 & -1, \\ \overset{0}{B} & -1, & 2,16666 \end{array}\right.$$

$$\overset{2}{\mathfrak{N}}\left\{\begin{array}{lll} \overset{2}{\mathfrak{A}} & 0,49057 & 0,22641 \\ \overset{2}{\mathfrak{B}} & 0,22641 & 0,56604 \end{array}\right.$$

$$\hat{\mathfrak{F}} = -\hat{G}\overset{2}{\mathfrak{N}}\left\{\begin{array}{llll} \hat{\mathfrak{A}} & -1,22641 & 0,16981 & -0,09434 \\ \hat{\mathfrak{B}} & -1,56604 & -0,07547 & 0,26415 \end{array}\right.$$

$$\check{\mathfrak{F}}\left\{\begin{array}{lll} \check{\mathfrak{A}} & -1,22641 & -1,56604 \\ \check{\mathfrak{B}} & 0,16981 & -0,07547 \\ \check{\mathfrak{C}} & -0,09434 & 0,26415 \end{array}\right.$$

$$\overset{1}{\mathfrak{N}} = \overset{0}{\mathfrak{N}} - \hat{G}\check{\mathfrak{F}}\left\{\begin{array}{llll} \overset{1}{\mathfrak{A}} & 7,06604 & -0,92453 & -0,76415 \\ \overset{1}{\mathfrak{B}} & -0,92453 & 0,94340 & -0,30189 \\ \overset{1}{\mathfrak{C}} & -0,76415 & -0,30189 & 0,55660 \end{array}\right.$$

Vermehrung oder Verminderung der Anzahl der Beobachtungen um eine.

Der Bau N enthält eine Beobachtung mehr als $\overset{1}{N}$. Der hinzugefügten Beobachtung entsprechen die Theile a, b, . . . Die beiden Wendebaue sind $\mathfrak{N}$ und $\overset{1}{\mathfrak{N}}$.

$\mathfrak{N}$ gegeben.	$\overset{1}{\mathfrak{N}}$ gegeben.
$a = \underset{\smile}{aa}\ a + \underset{\smile}{ab}\ b \ldots$	$\alpha = \overset{*}{\underset{\smile}{aa}}\ a + \overset{*}{\underset{\smile}{ab}}\ b \ldots$
$b = \underset{\smile}{ab}\ a + \underset{\smile}{bb}\ b \ldots$	$\beta = \overset{*}{\underset{\smile}{ab}}\ a + \underset{\smile}{bb}\ b \ldots$
$\vdots$	$\vdots$
$\underset{\smile}{pp} = 1 - (aa + bb \ldots)$	$\underset{\smile}{pp} = 1 + \alpha a + \beta b \ldots$
$1 = pp\ \underset{\smile}{pp}$	$1 = pp\ \underset{\smile}{pp}$
$\alpha = \underset{\smile}{pp}\ a$	$a = pp\ \alpha$
$\beta = \underset{\smile}{pp}\ b$	$b = pp\ \beta$
$\vdots$	

$$\overset{*}{\underset{\smile}{aa}} - \underset{\smile}{aa} = a\alpha$$

$$\overset{*}{\underset{\smile}{ab}} - \underset{\smile}{ab} = a\beta = b\alpha$$

$$\vdots$$

In diesen Unterschieden sind die Querglieder Quadrate, das Gebinde je zweier Querglieder gleich dem Quadrat des entsprechenden Seitengliedes.

Beispiel.

$\overset{1}{\mathfrak{N}}$	$\overset{1}{\mathfrak{A}}$	0,20273	0,01533	−0,01363	
	$\overset{1}{\mathfrak{B}}$	0,01533	0,21124	−0,07666	
	$\overset{1}{\mathfrak{C}}$	−0,01363	−0,07666	0,06814	
	(a)	1,	−2,	−2,	
	(α)	0,19932	−0,25383	0,00341	
$\underset{\smile}{pp} = 1 + (a)\,(\alpha)$		1,70017			
	pp	0,58818			
	($\underset{\smile}{a}$)	0,11723	−0,14929	0,00200	
	$\overset{1}{\mathfrak{A}} - \mathfrak{A}$	0,02337	−0,02976	0,00040	$(0{,}02976)^2 =$
	$\overset{1}{\mathfrak{B}} - \mathfrak{B}$	−0,02976	0,03790	−0,00051	(0,02337 . (0,03790)
	$\overset{1}{\mathfrak{C}} - \mathfrak{C}$	0,00040	−0,00051	0,00001	u. s. w.
	$\mathfrak{A}$	0,17936	0,04509	−0,01403	
	$\mathfrak{B}$	0,04509	0,17334	−0,07615	
	$\mathfrak{C}$	−0,01403	−0,07615	0,06813	

Vermehrung der Anzahl der Glieder um eines.

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & \multicolumn{3}{c}{\underset{\text{r Glieder.}}{M}} \\
\hline
A & \underset{\smile}{aa} & \underset{\smile}{ab} & .. \\
B & \underset{\smile}{ab} & \underset{\smile}{bb} & .. \\
 & \vdots & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc}
 & \multicolumn{3}{c}{\overset{*}{\mathfrak{M}}} \\
\hline
\overset{*}{\mathfrak{A}} & \underset{\smile}{\overset{*}{aa}} & \underset{\smile}{\overset{*}{ab}} & .. \\
\overset{*}{\mathfrak{B}} & \underset{\smile}{\overset{*}{ab}} & \underset{\smile}{\overset{*}{bb}} & .. \\
 & \vdots & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc}
 & \multicolumn{3}{c}{\mathfrak{M}} \\
\hline
\mathfrak{A} & \underset{\smile}{aa} & \underset{\smile}{ab} & .. \\
\mathfrak{B} & \underset{\smile}{ab} & \underset{\smile}{bb} & .. \\
 & \vdots & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & \multicolumn{3}{c}{\underset{\text{r Glieder.}}{\overset{1}{M}}} \\
\hline
\overset{1}{A} & \underset{\smile}{\overset{1}{aa}} & \underset{\smile}{\overset{1}{ab}} & .. \\
\overset{1}{B} & \underset{\smile}{\overset{1}{ab}} & \underset{\smile}{\overset{1}{bb}} & .. \\
 & \vdots & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc}
 & \multicolumn{3}{c}{\hat{\mathfrak{M}}} \\
\hline
\hat{\mathfrak{A}} & \underset{\smile}{\hat{aa}} & \underset{\smile}{\hat{ab}} & .. \\
\hat{\mathfrak{B}} & \underset{\smile}{\hat{ab}} & \underset{\smile}{\hat{bb}} & .. \\
 & \vdots & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc|c}
 & \multicolumn{3}{c}{\underset{\text{r + 1 Glieder.}}{N}} \\
\hline
 & \multicolumn{2}{c|}{M} & \underset{\smile}{at} \\
 & & & \underset{\smile}{bt} \\
\hline
T & \underset{\smile}{at} & \underset{\smile}{bt} & \underset{\smile}{tt}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc|c}
 & \multicolumn{3}{c}{\mathfrak{N}} \\
\hline
 & \multicolumn{2}{c|}{\mathfrak{M}} & \underset{\smile}{at} \\
 & & & \underset{\smile}{bt} \\
\hline
\mathfrak{T} & \underset{\smile}{at} & \underset{\smile}{bt} & \underset{\smile}{tt}
\end{array}
$$

M und $\overset{*}{\mathfrak{M}}$, $\overset{1}{M}$ und $\hat{\mathfrak{M}}$, N und $\mathfrak{N}$, verhalten sich wie Urbau und Wendebau. Die Anwendung des ersten Gittersatzes giebt folgendes Verfahren. $\overset{1}{M}$ wird aus M gebildet durch die Gleichungen

$$\underset{\smile}{\overset{1}{aa}} = \underset{\smile}{aa} + \underset{\smile}{at}\ \underset{\smile}{at}\ ,\quad \underset{\smile}{\overset{1}{ab}} = \underset{\smile}{ab} + \underset{\smile}{at}\ \underset{\smile}{bt}\ ,\ \ldots$$

$$\underset{\smile}{\overset{1}{bb}} = \underset{\smile}{bb} + \underset{\smile}{bt}\ \underset{\smile}{bt}\ ,\ \ldots$$

$$\vdots$$

Aus $\overset{1}{M}$ wird durch Umwendung $\hat{\mathfrak{M}}$ gebildet. Aus $\hat{\mathfrak{M}}$ berechnet man

$$-\alpha = \underset{\smile}{\hat{aa}}\ \underset{\smile}{at} + \underset{\smile}{\hat{ab}}\ \underset{\smile}{bt}\ . = \underset{\smile}{\hat{\mathfrak{A}}T}\ ,\quad \pi = \alpha\ \underset{\smile}{at} + \beta\ \underset{\smile}{bt}\ \ldots$$

$$-\beta = \underset{\smile}{\hat{ab}}\ \underset{\smile}{at} + \underset{\smile}{\hat{bb}}\ \underset{\smile}{bt}\ . = \underset{\smile}{\hat{\mathfrak{B}}T}\ ,\quad \frac{1}{\varrho} = \pi + \frac{\underset{\smile}{tt}}{1 + \underset{\smile}{tt}}$$

$$\vdots$$

$$\varrho\alpha = \alpha' \qquad \varrho\beta = \beta'\ \ldots$$

Hieraus die Glieder von $\mathfrak{N}$

$$\underset{\smile}{aa} - \underset{\smile}{\hat{aa}} = \alpha\alpha' \qquad \underset{\smile}{ab} - \underset{\smile}{\hat{ab}} = \alpha\beta' = \alpha'\beta$$

$$\underset{\smile}{bb} - \underset{\smile}{\hat{bb}} = \beta\beta'\ \ldots$$

$$\underset{\smile}{at} = \frac{\alpha'}{1 + \underset{\smile}{tt}} \qquad \underset{\smile}{bt} = \frac{\beta'}{1 + \underset{\smile}{tt}}\ \ \ldots\ \ \frac{1}{\underset{\smile}{tt}} = \underset{\smile}{tt} + \frac{\pi}{1 + \pi}$$

Beispiel.

$$M = \begin{array}{ccc} 4 & 7 & 9 \\ 7 & 15 & 14 \\ 9 & 14 & 23 \end{array} \qquad N = \begin{array}{c|c} M & \begin{array}{c} 10 \\ 18 \\ 25 \end{array} \\ \hline 10\ 18\ 25 & 30 \end{array}$$

$\overset{1}{A}$	104,	187,	259,	
$\overset{1}{B}$	187,	339,	464,	
$\overset{1}{C}$	259,	464,	648,	
$\hat{\mathfrak{A}}$	7,85637	−1,79533	−1,85458	
$\hat{\mathfrak{B}}$	−1,79533	0,55835	0,31777	
$\hat{\mathfrak{C}}$	−1,85458	0,31777	0,51526	
T	10,	18,	25,	30,
(α)	0,11670	−0,04129	−0,05565	
(α) T	1,16696	−0,74327	−1,39138	
π	−0,96768			
$\frac{30}{31}$	0,96774			
$1/\varrho$	0,00006			
ϱ	17267,			
(α')	2015,	−713,	−961,	
$\mathfrak{A} - \hat{\mathfrak{A}}$	235,14363	−83,20467	−112,14542	
$\mathfrak{B} - \hat{\mathfrak{B}}$	−83,20467	29,44165	39,68223	
$\mathfrak{C} - \hat{\mathfrak{C}}$	−112,14542	39,68223	53,48474	

$$\mathfrak{N} \left\{ \begin{array}{lrrrr} \mathfrak{A} & 243, & -85, & -114, & 65, \\ \mathfrak{B} & -85, & 30, & 40, & -23, \\ \mathfrak{C} & -114, & 40, & 54, & -31, \\ \mathfrak{T} & 65, & -23, & -31, & 18, \end{array} \right.$$

Der zweite Gittersatz gewährt ein einfacheres Verfahren. Aus M bildet man den Wendebau $\overset{*}{\mathfrak{M}}$, und hieraus

$$-\alpha = \underbrace{\overset{*}{aa}}\,\underbrace{at} + \underbrace{\overset{*}{ab}}\,\underbrace{bt} \ldots = \underbrace{\overset{*}{\mathfrak{A}}T}$$

$$-\beta = \underbrace{\overset{*}{ab}}\,\underbrace{at} + \underbrace{\overset{*}{bb}}\,\underbrace{bt} \ldots = \underbrace{\overset{*}{\mathfrak{B}}T}$$

$$\pi = \alpha\,\underbrace{at} + \beta\,\underbrace{bt} \ldots \qquad {}^1/\varrho = \pi + \underbrace{tt}$$

$$\varrho\alpha = \alpha' \qquad \varrho\beta = \beta' \ldots$$

$$\underbrace{aa} - \underbrace{\overset{*}{aa}} = \alpha\alpha' \qquad \underbrace{ab} - \underbrace{\overset{*}{ab}} = \alpha\beta' = \alpha'\beta$$

$$\underbrace{bb} - \underbrace{\overset{*}{bb}} = \beta\beta'$$

$$\underbrace{at} = \alpha' \qquad \underbrace{bt} = \beta' \ldots \qquad \underbrace{tt} = \varrho$$

Beispiel.

A	4,	7,	9,	
B	7,	15,	14,	
C	9,	14,	23,	
$\overset{*}{\mathfrak{A}}$	8,27777	–1,94444	–2,05555	
$\overset{*}{\mathfrak{B}}$	–1,94444	0,61111	0,38888	
$\overset{*}{\mathfrak{C}}$	–2,05555	0,38888	0,61111	
T	10,	18,	25,	30,
(α)	3,61111	–1,27777	–1,72222	
(α) T	36,11111	–23,	–43,05555	
π	–29,94444			
$\underbrace{tt}$	30,			
${}^1/\varrho$	0,05555			
$\underbrace{tt} = \varrho$	18,			
$\mathfrak{T} = (\alpha')$	65,	–23,	–31,	
$\mathfrak{A} - \overset{*}{\mathfrak{A}}$	234,72222	–83,05555	–111,94444	
$\mathfrak{B} - \overset{*}{\mathfrak{B}}$	–83,05555	29,38888	39,61111	
$\mathfrak{C} - \overset{*}{\mathfrak{C}}$	–111,94444	39,61111	53,38888	
$\mathfrak{N}$ $\mathfrak{A}$	243,	–85,	–114,	65,
$\mathfrak{N}$ $\mathfrak{B}$	–85,	30,	40,	–23,
$\mathfrak{N}$ $\mathfrak{C}$	–114,	40,	54,	–31,
$\mathfrak{N}$ $\mathfrak{T}$	65,	–23,	–31,	18,

Uebereinstimmung der ausgeglichenen Ursachen mit den nach Bessels Verfahren gefundenen.

In den astronomischen Nachrichten vom Jahre 1828, No. 136, zeigt Bessel, wie der gesetzliche Ausdruck einer regelmäßig wiederkehrenden Erscheinung aus gegebenen Beobachtungen gefunden wird. Dieser Ausdruck sei

$$\ell = a\,\underset{\smile}{\mathrm{al}} + b\,\underset{\smile}{\mathrm{bl}} + c\,\underset{\smile}{\mathrm{cl}}\;\ldots$$

wo alle $a = 1$, die Nebenzahlen $b, c, \ldots$ aber den Kosinus und Sinus der Zeit verhältlich sind. Die Werthe $\underset{\smile}{\mathrm{al}}$, $\underset{\smile}{\mathrm{bl}}\ldots$ heißen die ausgeglichenen Ursachen.

Wenn die Beobachtungen in gleichen Zeiträumen auf einander folgen, wenn diese Zeiträume ein aliquoter Theil des vollen Umlaufs sind, und wenn die Beobachtungen für alle Abschnitte des vollen Umlaufs vorhanden sind, deren Anzahl $= n$, so sind in dem Urbau N alle Seitenglieder nichtig:

$$\underset{\smile}{\mathrm{ab}} = 0 \qquad \underset{\smile}{\mathrm{ac}} = 0\;\ldots \qquad \underset{\smile}{\mathrm{bc}} = 0\;\ldots$$

Von den Quergliedern sind das erste und letzte $= n$, alle übrigen $= \frac{1}{2}\, n$.

Also sind auch in dem Wendebau $\mathfrak{N}$ alle Seitenglieder nichtig

$$\underset{\smile}{\mathrm{ab}} = 0 \qquad \underset{\smile}{\mathrm{ac}} = 0\;\ldots \qquad \underset{\smile}{\mathrm{bc}} = 0\;\ldots$$

und von den Quergliedern sind das erste und letzte $= \frac{1}{n}$, alle übrigen $= \frac{2}{n}$.

Die ausgeglichenen Ursachen sind also einfach

$$\underset{\smile}{\mathrm{al}} = \frac{1}{n}\,\underset{\smile}{\mathrm{al}} \qquad \underset{\smile}{\mathrm{bl}} = \frac{2}{n}\,\underset{\smile}{\mathrm{bl}} \qquad \underset{\smile}{\mathrm{cl}} = \frac{2}{n}\,\underset{\smile}{\mathrm{cl}} \quad \text{u. s. w.}$$

Im fünften Abschnitt der Denkschrift beantwortet Bessel die Frage, wie die ausgeglichenen Ursachen zu bestimmen sind, wenn an der vollen Anzahl der Beobachtungen einige fehlen.

Da unter der angenommenen Voraussetzung die Auflösung so ungemein einfach ist, so macht Bessel den Vorschlag, den zweiten Fall auf den ersten zurückzuführen. Man läßt in dem Ausdruck der fehlenden Beobachtungen die Nebenzahlen unbestimmt, und setzt sie so in den allgemeinen Ausdruck. Dadurch ergeben sich soviel Gleichungen als Beobachtungen fehlen. Bessel fügt hinzu: „diese Gleichungen haben dieselbe Form welche die nach der Methode der kleinsten Quadrate aufzulösenden besitzen.“

In dem Aufsatz „die mittlere Wärmung“, Arbeiten Heft **VI.** 83, wurde gezeigt, wie die ausgeglichenen Ursachen aus den gegebenen Beobachtungen ohne Zuziehung der fehlenden bestimmt werden.

Beide Wege, dieser unmittelbare, sowie jener von Bessel vorgeschlagene mittelbare, führen im Ergebniß auf dieselben Werthe der ausgeglichenen Ursachen. Der Beweis ergiebt sich leicht aus der Betrachtung des Grenzbaues und des ersten Gittersatzes.

Man bringt die n Beobachtungen in zwei Abtheilungen, mit der Anzahl $\overset{1}{n}$ und $\overset{2}{n}$, wo $n = \overset{1}{n} + \overset{2}{n}$.

Die Beobachtungen der beiden Abtheilungen sind

	unausgeglichene	ausgeglichene
I	$\overset{1}{l}{}' \quad \overset{1}{l}{}'' \quad \overset{1}{l}{}''' \ldots$	$\overset{1}{\mathfrak{l}}{}' \quad \overset{1}{\mathfrak{l}}{}'' \quad \overset{1}{\mathfrak{l}}{}''' \ldots$
II	$\overset{2}{l}{}' \quad \overset{2}{l}{}'' \quad \overset{2}{l}{}''' \ldots$	$\overset{2}{\mathfrak{l}}{}' \quad \overset{2}{\mathfrak{l}}{}'' \quad \overset{2}{\mathfrak{l}}{}''' \ldots$

Der Unterschied der unausgeglichenen und ausgeglichenen Beobachtung heißt die Grenzabweichung. Sie kann als aus zwei Theilen bestehend angesehen werden, welche den Beobachtungen der beiden Abtheilungen entsprechen. Die Grenzabweichungen der zweiten Abtheilung sind

$$\overset{2}{k}{}' = \overset{1}{K}{}' + \overset{2}{K}{}' \qquad \overset{2}{k}{}'' = \overset{1}{K}{}'' + \overset{2}{K}{}'' \quad \text{u. s. w.}$$

Nach Bessels Vorschlag setzt man die fehlenden unausgeglichenen Beobachtungen der zweiten Abtheilung den ausgeglichenen Beobachtungen dieser Abtheilung gleich

$$\overset{2}{l}{}' = \overset{2}{\mathfrak{l}}{}' \qquad \overset{2}{l}{}'' = \overset{2}{\mathfrak{l}}{}'' \ldots$$

also $\qquad \overset{2}{k}{}' = 0 \qquad \overset{2}{k}{}'' = 0 \ldots$

also $\qquad \overset{2}{K}{}' = -\overset{1}{K}{}' \qquad \overset{2}{K}{}'' = -\overset{1}{K}{}'' \ldots$

Nach der oben gewählten Bezeichnung des Grenzbaues von **N** ist

$$-\overset{1}{K}{}' = (\overset{1}{a}{}'\overset{2}{\mathfrak{a}}{}' + \overset{1}{b}{}'\overset{2}{\mathfrak{b}}{}' \ldots)\,\overset{1}{l}{}' + (\overset{1}{a}{}''\overset{2}{\mathfrak{a}}{}' + \overset{1}{b}{}''\overset{2}{\mathfrak{b}}, \ldots)\,\overset{1}{l}{}''$$

$$-\overset{1}{K}{}'' = (\overset{1}{a}{}'\overset{2}{\mathfrak{a}}{}'' + \overset{1}{b}{}'\overset{2}{\mathfrak{b}}{}'' \ldots)\,\overset{1}{l}{}' + (\overset{1}{a}{}''\overset{2}{\mathfrak{a}}{}'' + \overset{1}{b}{}''\overset{2}{\mathfrak{b}}{}'' \ldots)\,\overset{1}{l}{}'' \quad \text{u. s. w.}$$

oder $$-\overset{1}{K}' = \overset{2}{\mathfrak{a}}'\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{al}} + \overset{2}{\mathfrak{b}}'\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{bl}} \;\ldots$$

$$-\overset{1}{K}'' = \overset{2}{\mathfrak{a}}''\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{al}} + \overset{2}{\mathfrak{b}}''\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{bl}} \;\ldots$$

$$\vdots$$

Ferner ist

$$\overset{2}{K}' = [1 - (\overset{2}{a}'\overset{2}{\mathfrak{a}}' + \overset{2}{b}'\overset{2}{\mathfrak{b}}' \;..)]\,\overset{2}{l}' - (\overset{2}{a}''\overset{2}{\mathfrak{a}}' + \overset{2}{b}''\overset{2}{\mathfrak{b}}' \;..)\,\overset{2}{l}'' \;..$$

$$\overset{2}{K}'' = -(\overset{2}{a}'\overset{2}{\mathfrak{a}}'' + \overset{2}{b}'\overset{2}{\mathfrak{b}}'' \;..)\,\overset{2}{l}' + [1 - (\overset{2}{a}''\overset{2}{\mathfrak{a}}'' + \overset{2}{b}''\overset{2}{\mathfrak{b}}'' \;..)]\,\overset{2}{l}'' \;..$$

$$\vdots$$

oder $$\overset{2}{K}' = \underset{\smile}{pp}\,\overset{2}{l}' + \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{l}'' \;..$$

$$\overset{2}{K}'' = \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{l}' + \underset{\smile}{qq}\,\overset{2}{l}'' \;\ldots$$

$$\vdots$$

Also ist bei dem Vorschlage von Bessel

$$\underset{\smile}{pp}\,\overset{2}{l}' + \underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{l}'' \;.. = \overset{2}{\mathfrak{a}}'\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{al}} + \overset{2}{\mathfrak{b}}'\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{bl}} \;..$$

$$\underset{\smile}{pq}\,\overset{2}{l}' + \underset{\smile}{qq}\,\overset{2}{l}'' \;.. = \overset{2}{\mathfrak{a}}''\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{al}} + \overset{2}{\mathfrak{b}}''\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{bl}} \;..$$

$$\vdots$$

Also nach dem Satz der Umwendung. (S. 154. VIII.)

$$\overset{2}{l}' = \alpha'\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{al}} + \beta'\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{bl}} \;\ldots$$

$$\overset{2}{l}'' = \alpha''\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{al}} + \beta''\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{bl}} \;\ldots$$

$$\vdots$$

$$\underset{\smile}{\overset{2\,2}{al}} = \underset{\smile}{\overset{2}{a}\alpha}\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{al}} + \underset{\smile}{\overset{2}{a}\beta}\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{bl}} \;\ldots$$

$$\underset{\smile}{\overset{2\,2}{bl}} = \underset{\smile}{\overset{2}{b}\alpha}\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{al}} + \underset{\smile}{\overset{2}{b}\beta}\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{bl}} \;\ldots$$

$$\vdots$$

Also nach dem ersten Gittersatz. (S. 156. IX.)

$$\underset{\smile}{\overset{2\,2}{al}} = (\underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}} - \underset{\smile}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}})\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{al}} + (\underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}} - \underset{\smile}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}})\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{bl}} \;\ldots$$

$$\underset{\smile}{\overset{2\,2}{bl}} = (\underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}} - \underset{\smile}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}})\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{al}} + (\underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}} - \underset{\smile}{\mathfrak{b}\mathfrak{b}})\,\underset{\smile}{\overset{1\,1}{bl}} \;\ldots$$

$$\vdots$$

$$\overset{22}{\underset{\smile}{al}} = (\overset{*}{\underset{\smile}{aa}}\;\overset{11}{\underset{\smile}{al}} + \overset{*}{\underset{\smile}{ab}}\;\overset{11}{\underset{\smile}{bl}}\;..) - (\underset{\smile}{aa}\;\overset{11}{\underset{\smile}{al}} + \underset{\smile}{ab}\;\overset{11}{\underset{\smile}{bl}}\;..)$$

$$\overset{22}{\underset{\smile}{bl}} = (\overset{*}{\underset{\smile}{ab}}\;\overset{11}{\underset{\smile}{al}} + \overset{*}{\underset{\smile}{bb}}\;\overset{11}{\underset{\smile}{bl}}\;..) - (\underset{\smile}{ab}\;\overset{11}{\underset{\smile}{al}} + \underset{\smile}{bb}\;\overset{11}{\underset{\smile}{bl}}\;..)$$

oder $\overset{22}{\underset{\smile}{al}} = \overset{*1}{\underset{\smile}{al}} - \overset{11}{\underset{\smile}{al}}$

$\overset{22}{\underset{\smile}{bl}} = \overset{*1}{\underset{\smile}{bl}} - \overset{11}{\underset{\smile}{bl}}$

also $\overset{11}{\underset{\smile}{al}} + \overset{22}{\underset{\smile}{al}} = \overset{*1}{\underset{\smile}{al}}$ oder $\underset{\smile}{al} = \overset{*1}{\underset{\smile}{al}}$

$\overset{11}{\underset{\smile}{bl}} + \overset{22}{\underset{\smile}{bl}} = \overset{*1}{\underset{\smile}{bl}}$ oder $\underset{\smile}{bl} = \overset{*1}{\underset{\smile}{bl}}$

Wenn also nach Bessels Vorschlag statt der fehlenden unausgeglichenen Beobachtungen der zweiten Abtheilung $\overset{2}{N}$ die entsprechenden ausgeglichenen Beobachtungen in den Bau N gesetzt, und hieraus die ausgeglichenen Ursachen $\underset{\smile}{al}$, $\underset{\smile}{bl}$ .. berechnet werden, so sind sie beziehendlich denjenigen ausgeglichenen Ursachen $\overset{*1}{\underset{\smile}{al}}$, $\overset{*1}{\underset{\smile}{bl}}$ .. gleich, welche in der ersten Abtheilung $\overset{1}{N}$ aus den vorhandenen unausgeglichenen Beobachtungen dieser Abtheilung allein bestimmt werden.

Beispiel, wo $x = \sqrt{\tfrac{3}{4}}$.

	$\overset{1}{N}$				$\overset{2}{N}$			N				𝔑			
a	1	1	1	1	1	1	A	6	0	0	𝔄	$\frac{1}{6}$	0	0	$\overset{22}{\underset{\smile}{al}} = \overset{2}{l}' + \overset{2}{l}''$
b	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	B	0	3	0	𝔅	0	$\frac{1}{3}$	0	$\overset{22}{\underset{\smile}{bl}} = -\overset{2}{l}' - \frac{1}{2}\overset{2}{l}''$
c	$-x$	0	x	x	0	$-x$	C	0	0	3	ℭ	0	0	$\frac{1}{3}$	$\overset{22}{\underset{\smile}{cl}} = -x\,\overset{2}{l}''$

$\overset{1}{A}$	4	$\frac{3}{2}$	x	$\overset{1}{𝔄}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}x$
$\overset{1}{B}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{2}x$	$\overset{1}{𝔅}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{7}{15}x$
$\overset{1}{C}$	x	$-\frac{1}{2}x$	$\frac{9}{4}$	$\overset{1}{ℭ}$	$-\frac{1}{3}x$	$\frac{7}{15}x$	$\frac{19}{30}$

Nach Bessels Vorschlag:

$$\overset{2}{l}' = \tfrac{1}{6}(\overset{11}{\underset{\smile}{al}} + \overset{2}{l}' + \overset{2}{l}'') - \tfrac{1}{3}(\overset{11}{\underset{\smile}{bl}} - \overset{2}{l}' - \tfrac{1}{2}\overset{2}{l}'')$$

$$\overset{2}{l}'' = \tfrac{1}{6}(\overset{11}{\underset{\smile}{al}} + \overset{2}{l}' + \overset{2}{l}'') - \tfrac{1}{6}(\overset{11}{\underset{\smile}{bl}} - \overset{2}{l}' - \tfrac{1}{2}\overset{2}{l}'') - \tfrac{1}{3}x\,(\overset{11}{\underset{\smile}{cl}} - x\,\overset{2}{l}'')$$

also $\overset{2}{l}' = \overset{11}{\underset{\smile}{al}} - \frac{8}{5}\overset{11}{\underset{\smile}{bl}} - \frac{4}{5}x\,\overset{11}{\underset{\smile}{cl}}$ | $\underset{\smile}{al} = \frac{1}{6}\overset{11}{\underset{\smile}{al}} + \frac{1}{6}\overset{2}{l}' + \frac{1}{6}\overset{2}{l}'' = \frac{1}{2}\overset{11}{\underset{\smile}{al}} - \frac{1}{2}\overset{11}{\underset{\smile}{bl}} - \frac{1}{3}x\,\overset{11}{\underset{\smile}{cl}}$

$\overset{2}{l}'' = \overset{11}{\underset{\smile}{al}} - \frac{7}{5}\overset{11}{\underset{\smile}{bl}} - \frac{6}{5}x\,\overset{11}{\underset{\smile}{cl}}$ | $\underset{\smile}{bl} = \frac{1}{3}\overset{11}{\underset{\smile}{bl}} - \frac{1}{3}\overset{2}{l}' - \frac{1}{6}\overset{2}{l}'' = -\frac{1}{2}\overset{11}{\underset{\smile}{al}} + \frac{11}{10}\overset{11}{\underset{\smile}{bl}} + \frac{7}{15}x\,\overset{11}{\underset{\smile}{cl}}$

| $\underset{\smile}{cl} = \frac{1}{3}\overset{11}{\underset{\smile}{cl}} - \frac{1}{3}x\,\overset{2}{l}'' = -\frac{1}{3}x\,\overset{11}{\underset{\smile}{al}} + \frac{7}{15}x\,\overset{11}{\underset{\smile}{bl}} + \frac{19}{30}\overset{11}{\underset{\smile}{cl}}$

Dreizeitliche Mittelbeobachtung.

Wenn in dem gesetzlichen Ausdruck der ausgeglichenen Beobachtung

$$\mathfrak{l} = a\,\underset{\smile}{\mathrm{al}} + b\,\underset{\smile}{\mathrm{bl}} + c\,\underset{\smile}{\mathrm{cl}} \ldots$$

alle $a = 1$, die b, c, ... den Kosinus und Sinus der Zeit verhältlich sind, so heißt das erste Glied $\underset{\smile}{\mathrm{al}}$ die Mittelbeobachtung.

Bei einer bestimmten Anzahl gegebener Beobachtungen ist diejenige Mittelbeobachtung die genaueste, bei welcher die Anzahl der Glieder des gesetzlichen Ausdrucks der Anzahl der Beobachtungen gleich ist.

Die erste Beobachtung habe von der zweiten den Abstand $= 2u$, von der dritten den Abstand $= 2v$. Es sei $v - u = d$, $v + u = s$, $n = 4 \sin d \sin u \sin v$

a	b	c	na	nb	nc
1	1	0	$2 \cos d \sin d$	$-2 \cos s \sin d$	$-2 \sin s \sin d$
1	$\cos 2u$	$\sin 2u$	$-\sin 2v$	$\sin 2v$	$2 \sin v \sin v$
1	$\cos 2v$	$\sin 2v$	$\sin 2u$	$-\sin 2u$	$-2 \sin u \sin u$

Wenn die zweite Beobachtung in die Mitte der Zeiten der ersten und dritten fällt, so ist $v = 2u$, also die Nebenzahlen der ersten und dritten Beobachtung in dem Ausdruck des Mittels $\underset{\smile}{\mathrm{al}}$ einander gleich, $a' = a'''$.

Siebenstündige Zwischenzeit.			Achtstündige Zwischenzeit.		
a	b	c	a	b	c
0,3971976	0,6028024	−0,2496889	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
0,2056046	−0,2056046	0,7673272	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
0,3971976	−0,3971976	−0,5176382	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$

also sehr nahe $\underset{\smile}{\mathrm{al}} = \frac{4}{10}\, l' + \frac{2}{10}\, l'' + \frac{4}{10}\, l'''$

Zweistündliche Mittelbeobachtung.

Genauere Werthe für die Mittelbeobachtung ergeben sich aus Beobachtungen von zweistündiger Zwischenzeit. Die betreffenden Zahlen sind in folgenden Tafeln gegeben. Die Anzahl der Glieder ist gleich der Anzahl der Beobachtungen angenommen. Zur Abkürzung ist

$$x = \cos 30^\circ = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = 0{,}8660254.$$

Die erste Tafel giebt die Urbautheile a, b, c, . . . mit den Zifern 1, 2, 3, . . . bedeutet.

Die folgenden Tafeln enthalten die Wendebautheile a, b, c, . . . mit den Zifern 1, 2, 3, . . . bedeutet. Jede Tafel ist unter der Annahme berechnet, daß der gesetzliche Ausdruck so viele Glieder enthält, als Beobachtungen gegeben sind. Diese Tafeln der Wendebautheile werden durch die Tafel der Urbautheile geprüft. Sowohl in der Lothrichtung wie in der Wagerichtung geben die gleichnamigen Reihen die Gebindanlage 1, die ungleichnamigen 0.

Tafel der Urbautheile.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	x	0	1	$-\frac{1}{2}$	x	$-x$	$\frac{1}{2}$	-1
1	$\frac{1}{2}$	x	$-\frac{1}{2}$	x	-1	0	$-\frac{1}{2}$	$-x$	$\frac{1}{2}$	$-x$	1
1	0	1	-1	0	0	-1	1	0	0	1	-1
1	$-\frac{1}{2}$	x	$-\frac{1}{2}$	$-x$	1	0	$-\frac{1}{2}$	x	$-\frac{1}{2}$	$-x$	1
1	$-x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-x$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-x$	x	$\frac{1}{2}$	-1
1	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1
1	$-x$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	x	0	-1	$-\frac{1}{2}$	x	x	$-\frac{1}{2}$	-1
1	$-\frac{1}{2}$	$-x$	$-\frac{1}{2}$	x	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-x$	$-\frac{1}{2}$	x	1
1	0	-1	-1	0	0	1	1	0	0	-1	-1
1	$\frac{1}{2}$	$-x$	$-\frac{1}{2}$	$-x$	-1	0	$-\frac{1}{2}$	x	$\frac{1}{2}$	x	1
1	x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-x$	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$-x$	$-x$	$-\frac{1}{2}$	-1

Tafeln der Wendebautheile.

2 Beobachtungen.

1	2
$-3-4x$	$4+4x$
$4+4x$	$-4-4x$

3 Beobachtungen.

1	2	3
$2+2x$	$-1-2x$	$-1-2x$
$-3-4x$	$3+4x$	$2+2x$
$2+2x$	$-2-2x$	$-1+0x$

4 Beobachtungen.

1	2	3	4
$1+1x$	$\frac{1}{2}+0x$	$-\frac{3}{2}-2x$	$-\frac{1}{2}-1x$
$-\frac{1}{2}-1x$	$-\frac{3}{2}-1x$	$\frac{5}{2}+3x$	$2+2x$
$-\frac{1}{2}-1x$	$\frac{5}{2}+3x$	$-\frac{3}{2}-1x$	$-2-2x$
$1+1x$	$-\frac{3}{2}-2x$	$\frac{1}{2}+0x$	$\frac{1}{2}+1x$

5 Beobachtungen. Nenner = 6.

1	2	3	4	5
$12 + 12x$	$-3 - 6x$	$-15 - 18x$	$-3 - 6x$	$3 + 2x$
$-30 - 36x$	$18 + 24x$	$42 + 48x$	$12 + 12x$	$-12 - 12x$
$42 + 48x$	$-30 - 36x$	$-54 - 60x$	$-12 - 12x$	$18 + 24x$
$-30 - 36x$	$27 + 30x$	$39 + 42x$	$3 + 6x$	$-15 - 18x$
$12 + 12x$	$-12 - 12x$	$-12 - 12x$	$\cdot \quad \cdot$	$6 + 4x$

6 Beobachtungen. Nenner = 6.

1	2	3	4	5	6
$\cdot \quad \cdot$	$6 + 4x$	$\cdot \quad \cdot$	$\cdot \quad \cdot$	$-6 - 4x$	$\cdot - 4x$
$12 + 12x$	$-15 - 14x$	$-15 - 18x$	$-3 - 6x$	$15 + 18x$	$6 + 8x$
$-30 - 36x$	$27 + 30x$	$45 + 54x$	$15 + 18x$	$-27 - 30x$	$-12 - 12x$
$42 + 48x$	$-30 - 36x$	$-60 - 72x$	$-24 - 24x$	$30 + 36x$	$12 + 12x$
$-30 - 36x$	$21 + 26x$	$45 + 54x$	$15 + 18x$	$-21 - 26x$	$-6 - 8x$
$12 + 12x$	$-9 - 10x$	$-15 - 18x$	$-3 - 6x$	$9 + 6x$	$\cdot + 4x$

7 Beobachtungen. Nenner = 6.

1	2	3	4	5	6	7
$6 + 6x$	$3 + 2x$	$-9 - 10x$	$-3 - 6x$	$-3 - 2x$	$\cdot - 2x$	$\cdot + 2x$
$-15 - 18x$	$-3 - 2x$	$27 + 30x$	$15 + 18x$	$3 + 6x$	$3 + 2x$	$-3 - 6x$
$27 + 30x$	$3 + 2x$	$-45 - 50x$	$-27 - 30x$	$-3 - 2x$	$-3 - 2x$	$9 + 10x$
$-30 - 36x$	$\cdot \quad \cdot$	$54 + 60x$	$30 + 36x$	$\cdot \quad \cdot$	$\cdot \quad \cdot$	$-12 - 12x$
$27 + 30x$	$-3 - 2x$	$-45 - 50x$	$-27 - 30x$	$3 + 2x$	$3 + 2x$	$9 + 10x$
$-15 - 18x$	$3 + 2x$	$27 + 30x$	$15 + 18x$	$-3 - 6x$	$-3 - 2x$	$-3 - 6x$
$6 + 6x$	$-3 - 2x$	$-9 - 10x$	$-3 - 6x$	$3 + 2x$	$\cdot + 2x$	$\cdot + 2x$

8 Beobachtungen. Nenner = 6.

1	2	3	4	5	6	7	8
2 + 2x	3 + 2x	− 3 − 2x	· ·	− 3 − 2x	· − 2x	· − 2x	1 − 2x
− 1 − 2x	− 3 − 2x	3 + 2x	· ·	3 + 6x	3 + 2x	3 + 2x	1 + 2x
− 1 − 2x	3 + 2x	3 + 6x	3 + 6x	− 3 − 2x	− 3 − 2x	− 3 − 6x	− 2 − 4x
8 + 8x	· ·	− 12 − 16x	− 12 − 12x	· ·	· ·	6 + 8x	4 + 4x
− 11 − 14x	− 3 − 2x	21 + 26x	15 + 18x	3 + 2x	3 + 2x	− 9 − 10x	− 4 − 4x
13 + 14x	3 + 2x	− 21 − 26x	− 15 − 18x	− 3 − 6x	− 3 − 2x	9 + 10x	2 + 4x
− 8 − 10x	− 3 − 2x	15 + 18x	12 + 12x	3 + 2x	· + 2x	− 6 − 6x	− 1 − 2x
4 + 4x	· ·	− 6 − 8x	− 3 − 6x	· ·	· ·	· + 4x	− 1 + 2x

9 Beobachtungen. Nenner = 12.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4 + 4x	6 + 4x	− 6 − 4x	· ·	− 6 − 4x	· − 4x	· − 4x	2 − 4x	· ·
− 6 − 8x	− 6 − 8x	12 + 12x	3 + 6x	9 + 14x	6 + 8x	6 + ·	3 + 2x	− 3 + 2x
12 + 12x	12 + 12x	− 18 − 16x	− 9 − 6x	− 15 − 14x	− 12 − 12x	· − 4x	− 3 − 6x	3 + 2x
− 12 − 16x	− 12 − 16x	24 + 24x	6 + 12x	18 + 20x	12 + 16x	· ·	6 + 4x	− 6 − 4x
16 + 16x	12 + 16x	− 24 − 24x	− 12 − 12x	− 18 − 24x	− 12 − 16x	· ·	− 4 − 4x	6 + 8x
− 12 − 16x	− 12 − 16x	24 + 24x	12 + 12x	18 + 16x	12 + 16x	· ·	· + 4x	− 6 − 8x
12 + 12x	6 + 12x	− 18 − 20x	− 6 − 12x	− 12 − 16x	− 12 − 12x	· + 4x	· ·	6 + 4x
− 6 − 8x	− 6 − 8x	12 + 12x	9 + 6x	9 + 10x	6 + 8x	− 6 + ·	− 3 + 2x	− 3 − 2x
4 + 4x	· + 4x	− 6 − 8x	− 3 − 6x	− 3 − 2x	· − 4x	· + 4x	− 1 + 2x	3 − 2x

10 Beobachtungen. Nenner = 12.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3 + 2x	4 + 4x	−3 − 2x	3 + 0x	−3 − 4x	1 − 2x	−3 − 2x	· − 2x	· − 2x	1 − 2x
−2 − 4x	−4 − 4x	6 + 4x	· ·	6 + 8x	2 + 4x	6 + 4x	2 + 4x	· 4x	2 + 0x
6 + 4x	6 + 8x	−6 − 4x	· ·	−6 − 8x	−6 − 4x	−6 − 4x	−6 − 4x	· − 4x	· − 4x
−3 − 6x	−6 − 8x	9 + 6x	−3 + 0x	9 + 8x	3 + 6x	3 + 6x	6 + 6x	· 2x	3 + 2x
6 + 4x	4 + 8x	−6 − 4x	· ·	−6 − 12x	−2 − 4x	−6 − 4x	−6 − 4x	· ·	−2 − 4x
−2 − 4x	−4 − 8x	6 + 4x	· ·	6 + 4x	2 + 4x	6 + 4x	2 + 4x	· ·	2 + 4x
3 + 2x	· + 4x	−3 − 2x	3 + 0x	−3 − 4x	−3 − 2x	−3 − 2x	· − 2x	· − 2x	−3 − 2x
· ·	· − 4x	· ·	· ·	0 + 4x	· ·	· ·	· ·	· 4x	· 4x
· ·	−2 + 0x	· ·	· ·	0 + 4x	4 ·	· ·	· ·	· − 4x	−2 + 0x
1 + 2x	2 + 0x	−3 − 2x	−3 + 0x	−3 + 0x	−1 − 2x	3 − 2x	2 − 2x	· 2x	−1 + 2x

11 Beobachtungen. Nenner = 12.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2 + 0x	2 + 2x	−1 + 0x	3 + 0x	· − 2x	2 + 0x	−2 + 0x	1 + 0x	· − 2x	2 − 2x	−1 + 0x
· ·	· ·	2 + 0x	· ·	· 4x	· ·	4 + 0x	· ·	· 4x	· ·	2 + 0x
2 + 0x	1 + 2x	−1 + 2x	· ·	· ·	−2 + 0x	−2 + 0x	−2 + 0x	· − 4x	1 − 2x	−1 − 2x
· ·	· − 2x	3 + 0x	−3 + 0x	· 2x	· ·	· ·	3 + 0x	· 2x	· 2x	3 + 0x
2 + 0x	−1 + 2x	−1 + 2x	· ·	· − 4x	2 + 0x	−2 + 0x	−2 + 0x	· ·	−1 − 2x	−1 − 2x
· ·	· − 4x	2 + 0x	· ·	· ·	· ·	4 + 0x	· ·	· ·	· 4x	2 + 0x
2 + 0x	−2 + 2x	−1 + 0x	3 + 0x	· − 2x	−2 + 0x	−2 + 0x	1 + 0x	· − 2x	−2 − 2x	−1 + 0x
· ·	· − 4x	· ·	· ·	· 4x	· ·	· ·	· ·	· 4x	· 4x	· ·
2 + 0x	−1 + 2x	−1 − 2x	· ·	· ·	2 + 0x	−2 + 0x	−2 + 0x	· − 4x	−1 − 2x	−1 + 2x
· ·	· − 2x	−1 + 0x	−3 + 0x	· 2x	· ·	4 + 0x	3 + 0x	· 2x	· 2x	−1 + 0x
2 + 0x	1 + 2x	−1 − 2x	· ·	· − 4x	−2 + 0x	−2 + 0x	−2 + 0x	· ·	1 − 2x	−1 + 2x

12 Beobachtungen. Nenner = 12.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1 + 0x	2 + 0x	· ·	2 + 0x	· ·	2 + 0x	· ·	2 + 0x	· ·	2 + 0x	· ·	1 + 0x
1 + 0x	· 2x	1 + 0x	1 + 0x	· 2x	· ·	2 + 0x	-1 + 0x	· 2x	· —2x	1 + 0x	-1 + 0x
1 + 0x	1 + 0x	· 2x	-1 + 0x	· 2x	-2 + 0x	· ·	-1 + 0x	· —2x	1 + 0x	· —2x	1 + 0x
1 + 0x	· ·	2 + 0x	-2 + 0x	· ·	· ·	-2 + 0x	2 + 0x	· ·	· ·	2 + 0x	-1 + 0x
1 + 0x	-1 + 0x	· 2x	-1 + 0x	· —2x	2 + 0x	· ·	-1 + 0x	· 2x	-1 + 0x	· —2x	1 + 0x
1 + 0x	· —2x	1 + 0x	1 + 0x	· —2x	· ·	2 + 0x	-1 + 0x	· —2x	· 2x	1 + 0x	-1 + 0x
1 + 0x	-2 + 0x	· ·	2 + 0x	· ·	-2 + 0x	· ·	2 + 0x	· ·	-2 + 0x	· ·	1 + 0x
1 + 0x	· —2x	-1 + 0x	1 + 0x	· 2x	· ·	-2 + 0x	-1 + 0x	· 2x	· 2x	-1 + 0x	-1 + 0x
1 + 0x	-1 + 0x	· —2x	-1 + 0x	· 2x	2 + 0x	· ·	-1 + 0x	· —2x	-1 + 0x	· 2x	1 + 0x
1 + 0x	· ·	-2 + 0x	-2 + 0x	· ·	· ·	2 + 0x	2 + 0x	· ·	· ·	-2 + 0x	-1 + 0x
1 + 0x	1 + 0x	· —2x	-1 + 0x	· —2x	-2 + 0x	· ·	-1 + 0x	· 2x	1 + 0x	· 2x	1 + 0x
1 + 0x	· 2x	-1 + 0x	1 + 0x	· —2x	· ·	-2 + 0x	-1 + 0x	· —2x	· —2x	-1 + 0x	-1 + 0x

Aus diesen Verzeichnissen lassen sich einige Folgerungen ziehen, welche für die Ausübung von Belang sind.

Bei sechs zweistündlichen Beobachtungen ist die erste auf die Mittelbeobachtung ohne Einfluß. Diese wird aus den fünf letzten eben so gefunden als wenn die erste nicht vorhanden wäre, und nur fünf zweistündliche Beobachtungen gemacht werden, etwa um 8 U 10 U 12 U 2 U 4 U. Diese seien l^{I}, l^{II}, l^{III}, l^{IV}, l^{V}, so ist die Mittelbeobachtung

$$2\ (l^{I} + l^{V}) + 7\ l^{III} - 5\ (l^{II} + l^{IV})$$
$$+\ 2x(l^{I} + l^{V} + 4\ l^{III} - 3\ l^{II} - 3\ l^{IV})$$
$$\text{wo}\quad x = 0{,}8660254$$

Bei zehn zweistündlichen Beobachtungen haben die achte und neunte keinen Einfluß auf den Mittelwerth. Am bequemsten ist es also mit der zehnten anzufangen, dann nach einer Zwischenzeit von sechs Stunden die erste u. s. f. bis siebente folgen zu lassen. Die achte und neunte bleiben aus. Die zehnte liegt der vierten gegenüber, und ist sowohl von der ersten als siebenten sechs Stunden entfernt. Also

	4 U	10 U	12 U	2 U	4 U	6 U	8 U	10 U
oder	5 U	11 U	1 U	3 U	5 U	7 U	9 U	11 U
Beobachtungen	l^{X}	l^{I}	l^{II}	l^{III}	l^{IV}	l^{V}	l^{VI}	l^{VII}

Die Mittelbeobachtung ist dann

$$\tfrac{1}{4}\ l^{I} + \tfrac{1}{4}\ l^{VII} + \tfrac{1}{2}\ l^{III} + \tfrac{1}{2}\ l^{V} - \tfrac{1}{6}\ l^{II} - \tfrac{1}{6}\ l^{VI} - \tfrac{1}{4}\ l^{IV} + \tfrac{1}{12}\ l^{X}$$
$$+\ x\ (\tfrac{1}{6}\ l^{I} + \tfrac{1}{6}\ l^{VII} + \tfrac{1}{3}\ l^{III} + \tfrac{1}{3}\ l^{V} - \tfrac{1}{3}\ l^{II} - \tfrac{1}{3}\ l^{VI} - \tfrac{1}{2}\ l^{IV} + \tfrac{1}{6}\ l^{X})$$

Bei eilf zweistündlichen Beobachtungen sind die zweite, vierte, sechste, achte, zehnte ohne Einfluß auf den Mittelwerth. Dieser ist das einfache Mittel aus den sechs vierstündlichen Beobachtungen, also etwa um

	3 U	7 U	11 U	3 U	7 U	11 U
Beobachtungen	l^{I}	l^{III}	l^{V}	l^{VII}	l^{IX}	l^{XI}

Mittelwerth $\tfrac{1}{6}\ (l^{I} + l^{III} + l^{V} + l^{VII} + l^{IX} + l^{XI})$

Die fünf Zwischen-Beobachtungen l^{II} l^{IV} l^{VI} l^{VIII} l^{X} dienen hier nur zur Berechnung der übrigen zehn Glieder des gesetzlichen Ausdrucks.

Bei der Berechnung dieser Verzeichnisse ist wie schon bemerkt die Anzahl der Glieder des gesetzlichen Ausdrucks gleich der jedesmaligen Anzahl der Beobachtungen angenommen. Nimmt man weniger Glieder als Beobachtungen gegeben sind, so erhält man Wendebautheile welche mit den Urbautheilen in der ersten Tafel zwar in der Lothrichtung die Gebindanlagen 1 oder 0 geben, nicht aber in der Wagerichtung. In dieser Richtung geben sie die Zahlen des Grenzbaues, aus welchen die Grenzabweichungen oder sogenannten Beobachtungsfehler gefunden werden.

Bei acht zweistündlichen Beobachtungen seien z. B. nur sieben Glieder im gesetzlichen Ausdruck angenommen, so ist die Mittelbeobachtung

$$\tfrac{1}{2}\,l^{I} + \tfrac{1}{2}\,l^{VIII} + l^{II} + l^{VI} - \tfrac{3}{4}\,l^{II} - \tfrac{3}{4}\,l^{VII} - \tfrac{1}{4}\,l^{IV} - \tfrac{1}{4}\,l^{V}$$
$$+\,x\,(\tfrac{1}{2}\,l^{I} + \tfrac{1}{2}\,l^{VIII} + l^{III} + l^{VI} - l^{II} - l^{VII} - \tfrac{1}{2}\,l^{IV} - \tfrac{1}{2}\,l^{V})$$

Zieht man hievon den obigen genauesten Mittelwerth welcher auf acht Gliedern beruht

$$\tfrac{1}{3}\,l^{I} + \tfrac{2}{3}\,l^{VIII} - \tfrac{1}{6}\,l^{III} + \tfrac{13}{6}\,l^{VI} - \tfrac{1}{6}\,l^{II} - \tfrac{4}{3}\,l^{VII} + \tfrac{4}{3}\,l^{IV} - \tfrac{11}{6}\,l^{V}$$
$$+\,x\,(\tfrac{1}{3}\,l^{I} + \tfrac{2}{3}\,l^{VIII} - \tfrac{1}{3}\,l^{III} + \tfrac{7}{3}\,l^{VI} - \tfrac{1}{3}\,l^{II} - \tfrac{5}{3}\,l^{VII} + \tfrac{4}{3}\,l^{IV} - \tfrac{7}{3}\,l^{V})$$

so ist der Ueberschuß des ersten Mittelwerths über den zweiten genauern gleich

$$(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6}x)\,(l^{I} - l^{VIII}) + (\tfrac{7}{6} + \tfrac{4}{3}x)\,(l^{III} - l^{VI})$$
$$+\,(\tfrac{7}{12} + \tfrac{2}{3}x)\,(l^{VII} - l^{II}) + (\tfrac{19}{12} + \tfrac{11}{6}x)\,(l^{V} - l^{IV})$$

Beide Mittelwerthe sind also nur dann einander gleich, wenn die gleichweit von der Zeitenmitte entfernten Beobachtungen einander gleich sind.

In der Bibliothèque universelle Mai 1850 hat Professor Plantamour zu Genf für das Jahr 1849 die monatlichen Mittelwerthe der Wärme und des Luftdrucks aus neun zweistündlichen Tagesbeobachtungen berechnet. Das Verfahren beruht auf einer fortgesetzten Annäherung, und ist mühsam, obgleich der zum Grunde gelegte gesetzliche Ausdruck nur fünf Glieder hat.

Für den Fall von neun Beobachtungen und fünf Gliedern ergiebt sich aus dem oben entwickelten Rechnungswege die Mittelbeobachtung

$$\frac{1}{888}[187\,(l^{I}+l^{IX}) + 33\,(l^{II}+l^{VIII}) + 30\,(l^{III}+l^{VII}) + 105\,(l^{IV}+l^{VI}) + 178\,l^{V}]$$

$$+\,\frac{x}{444}[64\,(l^{I}+l^{IX}) - 17\,(l^{II}+l^{VIII}) - 39\,(l^{III}+l^{VII}) - 7\,(l^{IV}+l^{VI}) - 2\,l^{V}]$$

Der obige auf neun Gliedern beruhende also genaueste Mittelwerth ist dagegen

$$(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}x)\,(l^{I} + l^{IX}) - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}x)\,(l^{II} + l^{VIII}) + (1 + x)\,(l^{III} + l^{VII})$$
$$-\,(1 + \tfrac{4}{3}x)\,(l^{IV} + l^{VI}) + (\tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{3}x)\,l^{V}$$

Um beide Ausdrücke bequemer zu vergleichen nehme man eine beliebige Beobachtungsreihe z. B. die mittlern Wärmungen des Monats Julius 1849 für die neun Beobachtungszeiten zu Genf

1 . . 14,85	2 . . 18,21	3 . . 19,98	4 . . 21,85
9 . . 17,77	8 . . 19,85	7 . . 22,02	6 . . 23,18
= 32,62	= 38,06	= 42,	= 45,03
		5 . . . = 23,47	

Der Einsatz dieser Beobachtungen giebt die Mittelwärme des Julius 1849 zu Genf

nach Plantamours Rechnung	18,62
nach dem obigen fünfgliedrigen Ausdruck . .	18,6403
nach dem genauen neungliedrigen	19,0270

Hieraus sieht man, wie beträchtlich der Irrthum werden kann, wenn in dem gesetzlichen Ausdruck welcher der Mittelbeobachtung zum Grunde liegt, weniger Glieder angenommen werden als Beobachtungen vorhanden sind.

Einfluß der Gewichte auf die Ausgleichung.

(20 December 1850.)

Bei dem gewöhnlichen Verfahren werden die Gewichte gleich anfangs in die Rechnung gebracht, und kommen bei fortgesetzter Ausscheidung in verwickelter Fassung in die auf einander folgenden Theiler. Es wird daher schwierig, den Einfluß zu erkennen mit welchem sie nach abgeschlossener Rechnung auf die Mittel und deren mittlere Fehler wirken. Auch macht jede Veränderung der Gewichte eine neue Durchführung der ganzen Rechnung erforderlich.

Die umgekehrten Gewichte seien $\hat{1}$, $\hat{2}$ . . so daß

$$1 = \overset{1}{p}\,\hat{1} = \overset{2}{p}\,\hat{2} \;\ldots$$

Wenn e derjenige Beobachtungsfehler ist, dessen Gewicht = 1, und $d\lambda$ der gewichtliche Fehler der unbeziehlichen unausgeglichenen Beobachtung λ, so ist

$$\hat{1} = \frac{(\overset{1}{d\lambda})^2}{e^2} \qquad \hat{2} = \frac{(\overset{2}{d\lambda})^2}{e^2} \;\ldots$$

Bei der Bezeichnung der Urtheile, Wendetheile und Grenzglieder sei folgende Abänderung angenommen:

die einheitlichen Urtheile seien $a\sqrt{p}$, $b\sqrt{p}$, . . .

die einheitlichen Wendetheile seien $\mathfrak{A} = \frac{a}{\sqrt{p}}$, $\mathfrak{B} = \frac{b}{\sqrt{p}}$, . . .

die einheitlichen Grenzglieder seien $\frac{\underset{\smile}{11}}{\sqrt{\overset{1}{p}}\sqrt{\overset{1}{p}}}$, $\frac{\underset{\smile}{12}}{\sqrt{\overset{1}{p}}\sqrt{\overset{2}{p}}}$, . . .

Es sind also jetzt:

die unbeziehlichen Urtheile a , b , . . .

die gewichtlichen Wendetheile a , b , . . .

die gewichtlichen Grenzglieder $\underset{\smile}{11}$, $\underset{\smile}{12}$, . . .

Hienach die Gleichungen:

$$\text{I.}\quad \overset{11}{ax} + \overset{22}{ax} \,.. = A\,,\quad \overset{11}{bx} + \overset{22}{bx} \,.. = B\,,\ \ldots$$

$$\text{II.}\quad \overset{1}{a}\alpha + \overset{1}{b}\beta \,.. = \overset{1}{X}\,,\quad \overset{2}{a}\alpha + \overset{2}{b}\beta \,.. = \overset{2}{X}\,,\ \ldots$$

$$\text{III.}\quad \overset{1}{X} = \hat{1}\,\overset{1}{x}\,,\quad \overset{2}{X} = \hat{2}\,\overset{2}{x}\,,\ \ldots$$

Oder IV. 1.) $\overset{1}{X} = \hat{1} - \hat{1}\hat{1}\overset{1}{x}\ ,\ \overset{2}{X} = \quad - \hat{1}\hat{2}\overset{2}{x}\ , \ldots$

IV. 2.) $\overset{1}{X} = \quad - \hat{2}\hat{1}\overset{2}{x}\ ,\ \overset{2}{X} = \hat{2} - \hat{2}\hat{2}\overset{2}{x}\ , \ldots$

In I. sind r Gleichungen für n Werthe von x, wobei $n > r$. Hieraus ergiebt sich eine Gleichung zwischen $n - r + 1$ Werthen von x.

$$\text{V.}\left\{\begin{array}{l} \underset{\smile}{ss}\,\overset{1}{x} + \underset{\smile}{st}\,\overset{2}{x} \ldots = \overset{1}{s}A + \overset{2}{s}B \ldots \\ \text{oder}\ \underset{\smile}{st}\,\overset{1}{x} + \underset{\smile}{tt}\,\overset{2}{x} \ldots = \overset{1}{t}A + \overset{2}{t}B \ldots \\ \quad\vdots \end{array}\right.$$

In II sind n Werthe von X. Hieraus ergiebt sich durch Ausscheidung der α, β, ... eine Gleichung zwischen $r + 1$ Werthen von X.

$$\text{VI.}\quad \overset{1}{q}\overset{1}{X} + \overset{2}{q}\overset{2}{X} \ldots = 0$$

Wenn $r > n - r$, so setzt man mittels III oder IV ein x der Gleichungen V an Stelle des entsprechenden X in VI. Dadurch ergeben sich $n - r$ Gleichungen für eben so viele x oder X.

Wenn $n - r > r$, so setzt man ein X der Gleichungen VI an Stelle des entsprechenden x in V. Dadurch ergeben sich r Gleichungen für eben so viele x oder X.

Die x bedeuten gewichtliche Wendetheile a, oder b, oder c, ... je nachdem man den A, B, C folgende Werthe beilegt:

	A	B	C	
a	1	0	0	..
b	0	1	0	..
c	0	0	1	..
		⋮		

Die x bedeuten Grenzglieder, wenn alle A, B, C ... als nichtig angenommen werden, und zwar Greuzglieder der 1, 2, 3 ... Reihe, je nachdem die Gleichungen IV 1, IV 2, IV 3, .. angewendet werden.

Wenn $n = r$, so sind die x durch I. vollständig bestimmt. In diesem Fall sind also die gewichtlichen Wendetheile a, b, c, .. von den Gewichten unabhängig, die gewichtlichen Grenzglieder aber alle nichtig.

Das übliche Verfahren bei Bestimmung des mittlern Fehlers ist unvollständig, weil es nur die veränderlichen Beobachtungsfehler mit Ausschluß der festen berücksichtigt, also Veranlassung wird den mittlern Fehler der aus den Beobachtungen gezogenen Werthe zu klein zu nehmen, ihre Genauigkeit zu überschätzen.

In den „Arbeiten VIII. 108“ ist ein Satz bewiesen worden, welcher diese Vervollständigung darbietet. Das Quadrat des mittlern Fehlers zweiter Ordnung besteht aus zwei Gliedern, aus dem Quadrat des Ausgleichungsfehlers und dem Quadrat des Verbindungsfehlers. Dieser letztere richtet sich nämlich nach der Art wie die einzelnen Beobachtungen zur Bildung des Mittels verbunden werden.

Wenn die mittlern Fehler der einzelnen Beobachtungen gegeben sind, so heißen sie gewichtliche Fehler, weil angenommen wird, daß die Gewichte der Beobachtungen umgekehrt wie die Quadrate ihrer mittlern Fehler sich verhalten. Manche Rechner geben den Beobachtungen nach Beschaffenheit der Umstände gewählte Gewichte. Dann muß wenigstens einer von den gewichtlichen Fehlern gegeben sein, aus welchem dann die übrigen durch die gewählten Gewichte berechnet werden. Den gewichtlichen Fehlern giebt man dasselbe Vorzeichen welches die Beobachtungen haben.

„Auf dieselbe Art wie das Mittel aus den einzelnen unausgeglichenen Beobachtungen zusammengesetzt wird, eben so wird der Verbindungsfehler des Mittels aus den gewichtlichen Fehlern gebildet.“

„Ferner auf dieselbe Art wie jede einzelne Beobachtung aus den verschiedenen Mitteln berechnet wird, eben so wird der Verbindungsfehler der ausgeglichenen Beobachtung aus den Verbindungsfehlern der Mittel gebildet.“

Die Mittel sind:

$$\underset{\smile}{a\lambda} = \overset{1}{a}\overset{1}{\lambda} + \overset{2}{a}\overset{2}{\lambda} \;\ldots$$

$$\underset{\smile}{b\lambda} = \overset{1}{b}\overset{1}{\lambda} + \overset{2}{b}\overset{2}{\lambda} \;\ldots$$

$$\vdots$$

Die gewichtlichen Grenzabweichungen sind

$$\overset{1}{\mathfrak{K}} = \underset{\smile}{11}\,\overset{1}{\lambda} + \underset{\smile}{12}\,\overset{2}{\lambda} \;\ldots$$

$$\overset{2}{\mathfrak{K}} = \underset{\smile}{21}\,\overset{1}{\lambda} + \underset{\smile}{22}\,\overset{2}{\lambda} \;\ldots$$

$$\vdots$$

Die ausgeglichenen unbeziehlichen Beobachtungen sind

$$\overset{1}{\mathfrak{L}} = \overset{1}{\lambda} - \hat{1}\,\overset{1}{\mathfrak{K}}$$

$$\overset{2}{\mathfrak{L}} = \overset{2}{\lambda} - \hat{2}\,\overset{2}{\mathfrak{K}}$$

$$\vdots$$

Oder zur Prüfung

$$\overset{1}{\mathfrak{L}} = \overset{1}{a}\,\underset{\smile}{a\lambda} + \overset{1}{b}\,\underset{\smile}{b\lambda}\ \ldots$$

$$\overset{2}{\mathfrak{L}} = \overset{2}{a}\,\underset{\smile}{a\lambda} + \overset{2}{b}\,\underset{\smile}{b\lambda}\ \ldots$$

$$\vdots$$

Die gewichtlichen Fehler sind

$$d\overset{1}{\lambda} = e\sqrt{\hat{1}} \qquad d\overset{2}{\lambda} = e\sqrt{\hat{2}}\ \ldots$$

Die Verbindungsfehler der Mittel sind

$$\delta\underset{\smile}{a\lambda} = \overset{1}{a}\,d\overset{1}{\lambda} + \overset{2}{a}\,d\overset{2}{\lambda}\ \ldots$$

$$\delta\underset{\smile}{b\lambda} = \overset{1}{b}\,d\overset{1}{\lambda} + \overset{2}{b}\,d\overset{2}{\lambda}\ \ldots$$

Die Verbindungsfehler der gewichtlichen Grenzabweichungen sind

$$\delta\overset{1}{\mathfrak{K}} = \underset{\smile}{11}\,d\overset{1}{\lambda} + \underset{\smile}{12}\,d\overset{2}{\lambda}\ \ldots$$

$$\delta\overset{2}{\mathfrak{K}} = \underset{\smile}{21}\,d\overset{1}{\lambda} + \underset{\smile}{22}\,d\overset{2}{\lambda}\ \ldots$$

$$\vdots$$

Die Verbindungsfehler der ausgeglichenen unbeziehlichen Beobachtungen sind

$$\delta\overset{1}{\mathfrak{L}} = d\overset{1}{\lambda} - \hat{1}\,\delta\overset{1}{\mathfrak{K}}$$

$$\delta\overset{1}{\mathfrak{L}} = d\overset{2}{\lambda} - \hat{2}\,\delta\overset{2}{\mathfrak{K}}$$

$$\vdots$$

Oder zur Prüfung

$$\delta\overset{1}{\mathfrak{L}} = \overset{1}{a}\,.\,\delta\underset{\smile}{a\lambda} + \overset{1}{b}\,.\,\delta\underset{\smile}{b\lambda}\ \ldots$$

$$\delta\overset{2}{\mathfrak{L}} = \overset{2}{a}\,.\,\delta\underset{\smile}{a\lambda} + \overset{2}{b}\,.\,\delta\underset{\smile}{a\lambda}\ \ldots$$

$$\vdots$$

Die Ausgleichungsfehler werden durch Q^2 bestimmt, wo

$$(n - r)\,e^2\,Q^2 = \underset{\smile}{kk} = \underset{\smile}{11}\,\overset{1}{\lambda}\overset{1}{\lambda} + \underset{\smile}{12}\,\overset{1}{\lambda}\overset{2}{\lambda} \;\dots$$

$$+ \underset{\smile}{21}\,\overset{1}{\lambda}\overset{2}{\lambda} + \underset{\smile}{22}\,\overset{2}{\lambda}\overset{2}{\lambda} \;\dots$$

$$\vdots$$

$$= \hat{1}\,\overset{1}{\mathfrak{K}}\overset{1}{\mathfrak{K}} + \hat{2}\,\overset{2}{\mathfrak{K}}\overset{2}{\mathfrak{K}} \;\dots$$

Der mittlere Ausgleichungsfehler sei durch $\mathfrak{d}$ bezeichnet, so ist für die Mittel

$$(\mathfrak{d}\underset{\smile}{\mathfrak{a}\lambda})^2 = [(\overset{1}{\mathfrak{a}}\,d\overset{1}{\lambda})^2 + (\overset{2}{\mathfrak{a}}\,d\overset{2}{\lambda})^2 \,..\,]\,Q^2$$

$$(\mathfrak{d}\underset{\smile}{\mathfrak{b}\lambda})^2 = [(\overset{1}{\mathfrak{b}}\,d\overset{1}{\lambda})^2 + (\overset{2}{\mathfrak{b}}\,d\overset{2}{\lambda})^2 \,..\,]\,Q^2$$

$$\vdots$$

Oder zur Prüfung

$$(\mathfrak{d}\underset{\smile}{\mathfrak{a}\lambda})^2 = \underset{\smile}{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}\,e^2\,Q^2 \;,\; (\mathfrak{d}\,\underset{\smile}{\mathfrak{b}\lambda})^2 = \underset{\smile}{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}\,e^2\,Q^2 \;,\,..$$

Man bestimmt nämlich aus II. die Werthe α, β, durch $\overset{1}{X}$, $\overset{2}{X}$, oder durch die nach III. ihnen entsprechenden $\overset{1}{x}$, $\overset{2}{x}$, .. Für $x = \mathfrak{a}$ ist dann $\alpha = \underset{\smile}{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}$, für $x = \mathfrak{b}$, ist $\beta = \underset{\smile}{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}$ .. u. s. w.

Die mittlern Ausgleichungsfehler $\mathfrak{d}\mathfrak{L}$ sind gegeben durch $\overset{1}{X}$ in IV. 1, durch $\overset{2}{X}$ in IV. 2, u. s. w. nämlich

$$(\mathfrak{d}\overset{1}{\mathfrak{L}})^2 = (\hat{1} - \hat{1}\;\hat{1}\;\underset{\smile}{11})\,e^2\,Q^2 = (\overset{1}{\mathfrak{a}}\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{1}{\mathfrak{b}}\overset{1}{\mathfrak{b}} \,..\,)\,(d\overset{1}{\lambda})^2\,Q^2$$

$$(\mathfrak{d}\overset{2}{\mathfrak{L}})^2 = (\hat{2} - \hat{2}\;\hat{2}\;\underset{\smile}{22})\,e^2\,Q^2 = (\overset{2}{\mathfrak{a}}\overset{2}{\mathfrak{a}} + \overset{2}{\mathfrak{b}}\overset{2}{\mathfrak{b}} \,..\,)\,(d\overset{2}{\lambda})^2\,Q^2$$

$$\vdots$$

Der vollständige Mittelfehler zweiter Ordnung sei $\triangle$, so ist

$$(\triangle\underset{\smile}{\mathfrak{a}\lambda})^2 = (\mathfrak{d}\underset{\smile}{\mathfrak{a}\lambda})^2 + (\delta\underset{\smile}{\mathfrak{a}\lambda})^2$$

$$\vdots$$

$$(\triangle\mathfrak{L})^2 = (\mathfrak{d}\mathfrak{L})^2 + (\delta\mathfrak{L})^2$$

$$\vdots$$

Folgendes Beispiel ist aus meiner Untersuchung von Baily's Vergleichungen der Theile der londoner astronomischen Maaßröhre genommen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a	−1	.	.	.	−1	.	−1	.	.	−1	.	−1
b	−1	2	−1	−1	.	1	.	.	.	.	.	.
c	1	−1	2	1	−1	.	.	.	.	.	.	.
d	.	.	.	−1	.	−1	.	.	.	.	.	.
e	.	.	.	.	.	.	.	2	1	1	.	.
f	.	.	.	.	.	.	2	−1	1	.	.	.
g	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	1	.	.
h	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	1
i	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	1

Die Gleichungen I. geben

$$\overset{1}{x} + \overset{3}{x} = \overset{3}{m} \qquad \overset{1}{x} + \overset{5}{x} = \overset{5}{m} \qquad \overset{2}{x} - \overset{4}{x} = \overset{4}{m} \qquad \overset{2}{x} + \overset{6}{x} = \overset{6}{m}$$

$$\overset{7}{x} - \overset{8}{x} = \overset{8}{m} \qquad \overset{7}{x} + \overset{9}{x} = \overset{9}{m} \qquad \overset{7}{x} + \overset{10}{x} = \overset{10}{m}$$

$$\overset{11}{x} = \overset{11}{m} \qquad \overset{12}{x} = \overset{12}{m}$$

Die Gleichungen II. geben

$$-\overset{1}{X} + \overset{3}{X} + \overset{5}{X} = 0 \qquad \overset{2}{X} + \overset{4}{X} - \overset{6}{X} = 0 \qquad \overset{7}{X} + \overset{8}{X} - \overset{9}{X} - \overset{10}{X} = 0$$

Also in Verbindung mit III oder IV.

$$-\hat{1}\,\overset{1}{x} + \hat{3}\,\overset{3}{x} + \hat{5}\,\overset{5}{x} = \overset{1}{n} \qquad \hat{2}\,\overset{2}{x} + \hat{4}\,\overset{4}{x} - \hat{6}\,\overset{6}{x} = \overset{2}{n}$$

$$\hat{7}\,\overset{7}{x} + \hat{8}\,\overset{8}{x} - \hat{9}\,\overset{9}{x} - \hat{10}\,\overset{10}{x} = \overset{7}{n}$$

Wenn die x gewichtliche Wendetheile bedeuten, so sind alle $n = 0$, und für die m ergeben sich folgende Werthe

	$\overset{3}{m}$	$\overset{5}{m}$	$\overset{4}{m}$	$\overset{6}{m}$	$\overset{8}{m}$	$\overset{9}{m}$	$\overset{10}{m}$	$\overset{11}{m}$	$\overset{12}{m}$
a	$-\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	.	.	.	.	.
b	$\frac{1}{3}$	.	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	.	.	.	.	.
c	$\frac{2}{3}$	.	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	.	.	.	.	.
d	$\frac{1}{3}$	.	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	.	.	.	.	.
e	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	.	.
f	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	.	.
g	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	.	.
h	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	.	.	.	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
i	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{2}{9}$	.	.	.	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Die umgekehrten Gewichte geben gleichmäßige Ausdrücke:

$$\hat{1} + \hat{3} + \hat{5} = \hat{u} = \frac{1}{u} \qquad \hat{2} + \hat{4} + \hat{6} = \hat{v} = \frac{1}{v}$$

$$\hat{7} + \hat{8} + \hat{9} + \hat{10} = \hat{w} = \frac{1}{w}$$

Zu weiterer Vereinfachung sei

$$u\,\hat{1} = \overset{*}{1} \qquad u\,\hat{3} = \overset{*}{3} \qquad u\,\hat{5} = \overset{*}{5}$$

$$v\,\hat{2} = \overset{*}{2} \qquad v\,\hat{4} = \overset{*}{4} \qquad v\,\hat{6} = \overset{*}{6}$$

$$w\,\hat{7} = \overset{*}{7} \qquad w\,\hat{8} = \overset{*}{8} \qquad w\,\hat{9} = \overset{*}{9} \qquad w\,\hat{10} = \overset{*}{10}$$

so daß $\overset{*}{1} + \overset{*}{3} + \overset{*}{5} = 1 \qquad \overset{*}{2} + \overset{*}{4} + \overset{*}{6} = 1$

$$\overset{*}{7} + \overset{*}{8} + \overset{*}{9} + \overset{*}{10} = 1$$

Wenn alle Gewichte einander gleich sind, so sind $\overset{*}{1}$, $\overset{*}{3}$, $\overset{*}{5}$, $\overset{*}{2}$, $\overset{*}{4}$, $\overset{*}{6}$, jedes $= \frac{1}{3}$, $\overset{*}{7}$, $\overset{*}{8}$, $\overset{*}{9}$, $\overset{*}{10}$, jedes $= \frac{1}{4}$.

Wenn ein Gewicht z. B. $\overset{1}{p}$ unendlich groß ist, so ist das entsprechende $\overset{*}{1} = 0$, und die damit behaftete Größe fällt aus der Rechnung.

Jeder gewichtliche Wendetheil besteht aus Gliedern welche durch die mit gewissen Nebenzahlen gebundenen Gewichtswerthe $\overset{*}{1}$, $\overset{*}{3}$, $\overset{*}{5}$, $\overset{*}{2}$, $\overset{*}{4}$, $\overset{*}{6}$ . . . erhalten werden. Diese Nebenzahlen entstehen aus den obigen Werthen der m.

Nebenzahlen der gewichtlichen Wendetheile.

	a			b			c			d			h			i		
	$\overset{*}{1}$	$\overset{*}{2}$	$\overset{*}{5}$	$\overset{*}{1}$	$\overset{*}{3}$	$\overset{*}{5}$	$\overset{*}{1}$	$\overset{*}{3}$	$\overset{*}{5}$	$\overset{*}{1}$	$\overset{*}{3}$	$\overset{*}{5}$	$\overset{*}{1}$	$\overset{*}{3}$	$\overset{*}{5}$	$\overset{*}{1}$	$\overset{*}{3}$	$\overset{*}{5}$
1	·	$-\frac{2}{3}$	-1	·	$\frac{1}{3}$	·	·	$\frac{2}{3}$	·	·	$\frac{1}{3}$	·	·	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{3}$	·	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{2}{3}$
3	$-\frac{2}{3}$	·	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	·	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	·	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	·	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{9}$	·	$\frac{1}{9}$	$-\frac{4}{9}$	·	$\frac{2}{9}$
5	-1	$-\frac{1}{3}$	·	·	$-\frac{1}{3}$	·	·	$-\frac{2}{3}$	·	·	$-\frac{1}{3}$	·	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	·	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{9}$	·
	$\overset{*}{2}$	$\overset{*}{4}$	$\overset{*}{6}$	$\overset{*}{2}$	$\overset{*}{4}$	$\overset{*}{6}$	$\overset{*}{2}$	$\overset{*}{4}$	$\overset{*}{6}$	$\overset{*}{2}$	$\overset{*}{4}$	$\overset{*}{6}$	$\overset{*}{2}$	$\overset{*}{4}$	$\overset{*}{6}$	$\overset{*}{2}$	$\overset{*}{4}$	$\overset{*}{6}$
2	·	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	·	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	·	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	·	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	·	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	·	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{2}{9}$
4	$\frac{1}{3}$	·	·	$-\frac{2}{3}$	·	·	$-\frac{1}{3}$	·	·	$-\frac{2}{3}$	·	-1	$\frac{1}{9}$	·	·	$\frac{2}{9}$	·	·
6	$-\frac{1}{3}$	·	·	$\frac{2}{3}$	·	·	$\frac{1}{3}$	·	·	$-\frac{1}{3}$	-1	·	$-\frac{1}{9}$	·	·	$-\frac{2}{9}$	·	·
7		·			·			·			·			·			·	
8		·			·			·			·			·			·	
9		·			·			·			·			·			·	
10		·			·			·			·			·			·	
													ohne Gewicht.					
11		·			·			·			·		$\frac{1}{3}$			$-\frac{1}{3}$		
12		·			·			·			·		$\frac{1}{3}$			$\frac{2}{3}$		

	e				f				g			
	$\overset{*}{1}$	$\overset{*}{3}$	$\overset{*}{5}$		$\overset{*}{1}$	$\overset{*}{3}$	$\overset{*}{5}$		$\overset{*}{1}$	$\overset{*}{3}$	$\overset{*}{5}$	
1	·	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$		·	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$		·	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	
3	$-\frac{1}{6}$	·	$\frac{1}{12}$		$-\frac{1}{3}$	·	$\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{2}$	·	$\frac{1}{4}$	
5	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{12}$	·		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	·		$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	·	
	$\overset{*}{2}$	$\overset{*}{4}$	$\overset{*}{6}$		$\overset{*}{2}$	$\overset{*}{4}$	$\overset{*}{6}$		$\overset{*}{2}$	$\overset{*}{4}$	$\overset{*}{6}$	
2	·	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$		·	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$		·	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	
4	$\frac{1}{12}$	·	·		$\frac{1}{6}$	·	·		$\frac{1}{4}$	·	·	
6	$-\frac{1}{12}$	·	·		$-\frac{1}{6}$	·	·		$-\frac{1}{4}$	·	·	
	$\overset{*}{7}$	$\overset{*}{8}$	$\overset{*}{9}$	$\overset{*}{10}$	$\overset{*}{7}$	$\overset{*}{8}$	$\overset{*}{9}$	$\overset{*}{10}$	$\overset{*}{7}$	$\overset{*}{8}$	$\overset{*}{9}$	$\overset{*}{10}$
7	·	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	·	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	·	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
8	$\frac{1}{4}$	·	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	·	·	·	$-\frac{1}{4}$	·	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
9	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	·	·	$\frac{1}{2}$	·	·	·	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	·	-1
10	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	·	·	$\frac{1}{2}$	·	·	·	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	·
11		·				·				·		
12		·				·				·		

Wenn die x gewichtliche Grenzglieder bedeuten so sind alle $m = 0$. Die n haben folgende Werthe:

in den Reihen 1, 3, 5, ist $\overset{1}{n} = 1 \quad \overset{2}{n} = 0 \quad \overset{7}{n} = 0$

— — 2, 4, 6, ist $\overset{1}{n} = 0 \quad \overset{2}{n} = 1 \quad \overset{7}{n} = 0$

— — 7, 8, 9, 10, ist $\overset{1}{n} = 0 \quad \overset{2}{n} = 0 \quad \overset{7}{n} = 1$

Die gewichtlichen Grenzglieder sind also den Gewichtsnennern u, v, w, gleich.

Gewichtlicher Grenzbau.

$$\begin{array}{r|cccccc|cccc|cc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
1 & u & \cdot & -u & \cdot & -u & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2 & \cdot & v & \cdot & v & \cdot & -v & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & -u & \cdot & u & \cdot & u & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
4 & \cdot & v & \cdot & v & \cdot & -v & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
5 & -u & \cdot & u & \cdot & u & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
6 & \cdot & -v & \cdot & -v & \cdot & v & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
7 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & w & w & -w & -w & \cdot & \cdot \\
8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & w & w & -w & -w & \cdot & \cdot \\
9 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -w & -w & w & w & \cdot & \cdot \\
10 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -w & -w & w & w & \cdot & \cdot \\
11 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
12 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Die ausgeglichenen Ursachen oder die Mittel sind

$$\underset{\smile}{a\lambda} = \overset{1}{A}\overset{*}{1} + \overset{3}{A}\overset{*}{3} + \overset{5}{A}\overset{*}{5} + \overset{2}{A}\overset{*}{2} + \overset{4}{A}\overset{*}{4} + \overset{6}{A}\overset{*}{6}$$

$$\underset{\smile}{b\lambda} = \overset{1}{B}\overset{*}{1} + \overset{3}{B}\overset{*}{3} + \overset{5}{B}\overset{*}{5} + \overset{2}{B}\overset{*}{2} + \overset{4}{B}\overset{*}{4} + \overset{6}{A}\overset{*}{6}$$

$$\vdots$$

Wo $\overset{1}{A}$, $\overset{1}{B}$ .. von den Gewichten unabhängige Werthe, Gebinde der unbeziehlichen unausgeglichenen Beobachtungen λ mit den Nebenzahlen der entsprechenden gewichtlichen Wendetheile, z. B.

$\overset{1}{A} = . - \frac{2}{3}\overset{3}{\lambda} - 1\overset{5}{\lambda}$, $\overset{3}{A} = - \frac{2}{3}\overset{1}{\lambda} . - \frac{1}{3}\overset{5}{\lambda}$, $\overset{5}{A} = - 1\overset{1}{\lambda} + \frac{1}{3}\overset{3}{\lambda}$.

Hier erkennt man deutlich den Einfluß der Gewichte. So sind z. B. die Beobachtungen $\overset{11}{\lambda}$, $\overset{12}{\lambda}$ in den sieben ersten Mitteln nicht enthalten, sondern nur in den beiden letzten $\underset{\smile}{h\lambda}$, $\underset{\smile}{i\lambda}$. Daher haben auch die Gewichte der beiden letzten Beobachtungen keinen Einfluß auf die sieben ersten Mittel.

Aus den Beobachtungen λ bildet man

$$-\overset{1}{\lambda}+\overset{3}{\lambda}+\overset{5}{\lambda}=M \qquad \overset{2}{\lambda}+\overset{4}{\lambda}-\overset{6}{\lambda}=N$$

$$\overset{7}{\lambda}+\overset{8}{\lambda}-\overset{9}{\lambda}-\overset{10}{\lambda}=P$$

Die ausgeglichenen unbeziehlichen Beobachtungen L sind dann

$$\overset{1}{\lambda}+M\overset{*}{1}\ ,\ \overset{3}{\lambda}+M\overset{*}{3}\ ,\ \overset{5}{\lambda}-M\overset{*}{5}\ ,$$

$$\overset{2}{\lambda}-N\overset{*}{2}\ ,\ \overset{4}{\lambda}-N\overset{*}{4}\ ,\ \overset{6}{\lambda}+N\overset{*}{6}\ ,$$

$$\overset{7}{\lambda}+P\overset{*}{7}\ ,\ \overset{8}{\lambda}-P\overset{*}{8}\ ,\ \overset{9}{\lambda}+P\overset{*}{9}\ ,\ \overset{10}{\lambda}+P\overset{*}{10}$$

Die beiden letzten Beobachtungen $\overset{11}{\lambda}$, $\overset{12}{\lambda}$, erleiden keine Veränderung.

Die Grenzanlage besteht aus drei Quadraten

$$\underset{\smile}{kk}=M^2u+N^2v+P^2w$$

Die Anwendung des oben bezeichneten Verfahrens giebt für die Querglieder $\underset{\smile}{\mathfrak{AA}}$, $\underset{\smile}{\mathfrak{BB}}$ ... Ausdrücke, in denen die Gewichtswerthe $u\ \hat{1}\ \hat{3}$, ... $v\ \hat{2}\ \hat{4}$ ... mit gewissen Nebenzahlen gebunden sind. Ihre Aufstellung ist folgende:

	$\underset{\smile}{\mathfrak{AA}}$	$\underset{\smile}{\mathfrak{BB}}$	$\underset{\smile}{\mathfrak{CC}}$	$\underset{\smile}{\mathfrak{DD}}$	$\underset{\smile}{\mathfrak{EE}}$	$\underset{\smile}{\mathfrak{FF}}$	$\underset{\smile}{\mathfrak{GG}}$	$\underset{\smile}{\mathfrak{HH}}$	$\underset{\smile}{\mathfrak{II}}$
$u\ \hat{1}\ \hat{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{144}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{16}{81}$
$u\ \hat{1}\ \hat{5}$	1	.	.	.	$\frac{9}{144}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{81}$	$\frac{36}{81}$
$u\ \hat{3}\ \hat{5}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$
$v\ \hat{2}\ \hat{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$
$v\ \hat{2}\ \hat{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$
$v\ \hat{4}\ \hat{6}$	.	.	.	1	.	.	.	.	.
$w\ \hat{7}\ \hat{8}$	.	.	.	.	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	.	.
$w\ \hat{7}\ \hat{9}$	.	.	.	.	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	.	.
$w\ \hat{7}\ \hat{10}$	.	.	.	.	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	.	.
$w\ \hat{8}\ \hat{9}$	.	.	.	.	$\frac{1}{4}$	.	$\frac{1}{4}$	.	.
$w\ \hat{8}\ \hat{10}$	.	.	.	.	$\frac{1}{4}$	.	$\frac{1}{4}$	.	.
$w\ \hat{9}\ \hat{10}$	.	.	.	.	.	.	1	.	.
$\hat{11}$	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$\hat{12}$	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$

Beiläufig läßt sich noch bemerken, daß die nichtigen Wendetheile einfache bei allen Gewichten unverändert gültige Beziehungen zwischen den Gliedern des Wendebaues anzeigen.

In jeder Reihe des Wendebaues seien die neun auf einander folgenden Glieder

$$\alpha \;\beta \;\gamma \;\delta \;\varepsilon \;\zeta \;\eta \;\vartheta \;\iota$$

Die Wendetheile a b c d sind nichtig in den Stellen 7 bis 12. Man hat also aus II. 183, 188, in den vier ersten Reihen des Wendebaues folgende Gleichungen zwischen den Gliedern derselben

$$\begin{array}{rcl}
-\alpha \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot + 2\zeta \;\cdot\;\cdot\;\cdot & = & 0 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; 2\varepsilon - \zeta \;\cdot\;\cdot\;\cdot & = & 0 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; \varepsilon + \zeta - \eta \;\cdot & = & 0 \\
-\alpha \;\cdot\;\cdot + \varepsilon \;\cdot + \eta \;\cdot\;\cdot & = & 0 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; 2\vartheta - \iota & = & 0 \\
-\alpha \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot + \vartheta + \iota & = & 0
\end{array}$$

Also $\varepsilon = \frac{1}{4}\alpha \quad \zeta = \frac{1}{2}\alpha \quad \eta = \frac{3}{4}\alpha \quad \vartheta = \frac{1}{3}\alpha \quad \iota = \frac{2}{3}\alpha$

Die Wendetheile e f g sind nichtig in den Stellen 11 und 12. In der 5ten, 6ten und 7ten Reihe des Wendebaues ist also

$$\vartheta = \tfrac{1}{3}\alpha \qquad \iota = \tfrac{2}{3}\alpha$$

Die Wendetheile h, i, sind nichtig in den Stellen 7, 8, 9, 10. In der 8ten und 9ten Reihe des Wendebaues ist also

$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}\alpha \qquad \zeta = \tfrac{1}{2}\alpha \qquad \eta = \tfrac{3}{4}\alpha$$

Das vorliegende Beispiel erfordert nach dem gewöhnlichen Auflösungsverfahren sehr beschwerliche Rechnungen wenn die Gewichte mehrstellige Zahlen sind, da die aufzulösenden Gleichungen 9 Glieder haben.

Die hier gegebene Darstellung hat zu einer nähern Untersuchung des Einflusses der Gewichte geführt. Sie faßt die Ausgleichungslehre von einer neuen Seite, bei welcher die Eigenschaft des kleinsten Betrages der Fehlerquadrate nur eine untergeordnete Bedeutung hat. Diese Auffassung läßt sich so aussprechen: „Die Reihen der gegebenen Urtheile müssen sowohl in der Lothrichtung als in der Wagerichtung in Gleichungen gebracht werden."

Der Himmel von Mitau im Jahre 1850.

(Sitzung vom 1/13 November 1850.)

Für die Uebersicht der Witterung ist die Beibehaltung des Kalenderjahres unbequem, da der Anfang desselben in die Mitte des Winters fällt. Wir beginnen daher das Witterungsjahr mit dem 1 November n. St. Dadurch erreichen wir, daß das Witterungsjahr den vollen Winter und den vollen Sommer in sich faßt. Die monatlichen und jährlichen Mittel sind für die Kennzeichnung der Eigenthümlichkeiten eines Himmelsstrichs nicht ausreichend. Wir theilen daher jeden Monat in sechs Fünfte oder Witterungswochen. Jede der fünf ersten Witterungswochen eines Monats hat fünf, die sechste die noch übrigen Tage.

Die I. Tafel enthält die tägliche Witterung. Hier wird wohl Jedem der häufige Wechsel der Windrichtung an einem und demselben Tage, oder von einem Tage zum folgenden auffallend sein. Ein Umschlagen derselben in die entgegengesetzte Richtung ist nicht selten. Der Dunstzustand der Luft ist nur durch die drei Zeichen b (bedeckt), v (veränderlich), h (heiter) bemerkt. Manche Physiker pflegen ihn dadurch zu bezeichnen, daß sie angeben wie viel Hundertel der sichtbaren Halbkugelfläche bewölkt erscheinen. Diese Genauigkeit ist nur eine scheinbare wegen der meist augenblicklichen Veränderungen der Zustände. Diese Tafel bezeichnet näher die lange Dauer und die Erneuerung der Winterbahn, die Anzahl der Gewitter, die kalten Nächte u. s. w., den Wind aber nur dann wenn er heftig oder sturmähnlich ist, denn Wind haben wir fast an jedem Tage.

Die II. Tafel ist aus der ersten abgeleitet. Sie bezeichnet für jede der 72 Witterungswochen die mittlere Wärme der drei Beobachtungszeiten, die Anzahl der ganz bedeckten, so wie der Regen-, Schnee- und Bahntage. Die Winterbahn dauerte in diesem Jahr hier am Ort grade 100 Tage. Ferner die mittlere Windrichtung und den mittlern Luftdruck. Die mittlere Windrichtung bestimmen einige Physiker dadurch, daß sie jedem Winde die entsprechenden Grade von 0° bis 360° zutheilen und daraus das Mittel nehmen. Dieses Verfahren läßt sich bei uns nicht anwenden, wo der Zug der Luft häufig unmittelbar in den grade entgegengesetzten übergeht. Es ist daher nur der in jeder Witterungswoche vorherrschende Wind bezeichnet. Da ergiebt sich denn, daß der herrschende Ostwind ganz fehlt, und statt des sonst im Frühjahr und Sommer wehenden N, der SO Wind. Auch hier zeigt sich von einer Witterungswoche zur folgenden häufig der Wechsel der entgegengesetzten Winde. Der Luftdruck ist nur in sofern beigesetzt, als es wichtig erscheinen kann, das Steigen und Fallen des Barometers mit der Windrichtung und den übrigen Zuständen zu vergleichen. Es ist also nur angegeben, nach einmal täglich um 3 U NM angestellter Beobachtung, um wie viel im Mittel das Barometer mehr oder weniger als 336 pr. Linien bei 13° R. zeigte. Meistens erfolgten die höhern Barometerstände bei **SO.**

Die III. Tafel giebt die Mittelwärme der einzelnen 72 Witterungswochen, und zwar erstlich für das Jahr 1850, zweitens für das gesetzliche oder Durchschnittsjahr wie wir es aus 26jährigen Beobachtungen von 1824 bis 1849 (siehe Arbeiten VI. 113 f, VIII. 99 f) und aus 27jährigen von 1824 bis mit 1850 abgeleitet haben. Dieser gesetzliche Verlauf giebt den Maaßstab nach welchem die Eigenthümlichkeiten der einzelnen Sonderjahre zu beurtheilen sind. Wir sehen daraus, daß die letzten zwei Witterungswochen des November, die 2te, 3te, 5te, 6te Decemberwoche, der ganze Januar, die erste Februarwoche, die vier letzten Märzwochen, und die erste Aprilwoche zu den sehr kalten zu zählen waren. Daher ist denn auch der Winter 1850 als ein kalter zu bezeichnen. Seine Mittelwärme war — $2\frac{1}{4}$°, während sie gesetzlich nur — 1° sein soll. Jedoch ist zu bemerken, daß wir kältere Winter gehabt haben, wo statt der gesetzlichen Mittelkälte von — 5°, eine Mittelkälte von — 13°, und mehr sich einstellte, wie 1829, 30, 40, 41, 45 und 48. Die 2te Februarwoche von 1841 hatte namentlich die merkwürdige Mittelkälte von — $18\frac{1}{3}$°. Im Winter 1850 war die höchste Mittelkälte — 13° in der 1sten Februarwoche. Was übrigens in heilkundlicher Hinsicht hervorzuheben wäre, scheint weniger die hohe Stufe der Kälte oder Wärme an sich, als vielmehr ihr jäher Wechsel in den Witterungswochen eines Monats zu sein. In dieser Beziehung machte sich die zweite Hälfte des Winters von 1850 bemerklich, wo der mittlere Wärmewechsel im Februar 14°, im März 8°, im April $9\frac{1}{2}$° betrug.

Betrachten wir nun den Sommer. Der gesetzliche Verlauf giebt im Mai eine Steigerung von 7° auf 11°, im Juni $11\frac{1}{2}$° bis $13\frac{1}{2}$°, im Juli ein fester Stand auf 14°, und im August ein allmähliches Sinken von 14° auf 12°. Ein Sommer in dessen einzelnen Witterungswochen die Mittelwärme 16° und mehr beträgt, gehört bei uns zu den heißen. Ein solcher war der von 1850, wo die 5te und 6te Woche des Mai, die 1ste des Juni, die 3te, 4te, 5te, 6te des Juli, die 1ste, 2te, 3te des August eine Mittelwärme von 15°, 16°, 17°, brachten. Ob diese bedeutende und andauernde Wärme einerseits, verbunden mit dem schnellen Wechsel im Mai wo die Mittelwärme von 2° auf $16\frac{1}{2}$° stieg, Veranlassung zu den krankhaften Zuständen dieses Sommers gegeben haben, wäre zu erwägen.

Uebrigens wurde die Winterkälte von der Sommerwärme nicht aufgewogen, da der Winter um $1\frac{1}{4}$° kälter, der Sommer nur um $\frac{2}{3}$° wärmer als im gesetzlichen Verlauf war.

I. Tägliche Witterung zu Mitau 1850 n. St.

	November 1849 n. St.				December 1849 n. St.			
	8 U	3 U	10 U		8 U	3 U	10 U	
1	3,0	4,3	4,5	SO S b	−0,5	−0,3	−1,0	SO, O b
2	5,0	6,5	6,0	S f R	−5,0	−3,5	−5,3	SO b h
3	6,0	7,3	6,7	S b	−9,0	−8,0	−10,5	SO h
4	6,0	8,0	7,0	S v	−8,0	−7,3	−6,0	SO b
5	7,1	9,0	8,2	S b h W	−7,0	−5,0	−4,0	SO b
6	7,4	8,5	8,5	S b h b	−4,0	−3,8	−4,5	SO b
7	6,3	7,8	4,8	S b v R	−3,0	−3,5	−3,7	SO, O b
8	3,0	5,0	1,3	W, NW v h	−4,8	−5,0	−8,3	SO, O b
9	1,0	3,2	7,0	NW, SW, S RR	−12,0	−9,0	−11,0	S h
10	7,0	7,3	4,0	NW b	−12,5	−9,0	−11,5	SO h
11	0,5	1,5	1,4	N h b S R	−12,0	−9,5	−12,8	S, SO h
12	1,0	1,3	2,5	S b RR	−13,3	−6,0	−4,8	S, SO h b S
13	5,0	7,8	6,0	S b f	−0,8	0,5	0,5	W b f
14	5,5	6,3	6,2	S b f	−0,5	−0,5	−4,5	W, NW v h
15	5,0	5,0	5,0	SW, S b RR	−2,0	0,	−1,0	SW b
16	3,7	3,5	3,5	S, SO b f	0,5	1,2	1,5	NW b
17	4,8	5,0	4,0	SO, b RR	2,0	2,5	2,0	SW R
18	1,2	4,5	3,3	SO, NO b R	1,3	1,3	1,0	S, SW b
19	4,0	4,8	2,0	NO b RR	−0,7	−0,7	−1,3	N v S
20	2,2	3,5	1,8	SW b	−3,0	−3,5	−6,0	NO b S B
21	1,1	2,0	1,0	NW b	−9,0	−8,0	−11,5	NO v h
22	−1,1	−1,0	−0,9	NW h b S	−10,0	−7,0	−8,0	N, NO h
23	−0,5	1,0	0,8	NW b S	−5,5	−1,5	0,	W b S
24	0,7	0,	−4,5	NO, O b S W	−5,5	−3,0	−3,3	N, NO v b S
25	−10,5	−10,0	−11,0	O h	−4,0	−5,3	−6,7	N v b S
26	−11,0	−9,8	−10,0	NO h b S	−3,7	−3,0	−4,0	S b S
27	−9,0	−9,5	−9,2	N b SS	−4,5	−1,5	−0,5	SO b SS
28	−8,8	−6,5	−10,0	SO, S h B	−2,0	−3,5	−6,5	SO b S
29	−9,0	−3,0	−2,7	N h b R S	−4,5	−3,0	−3,8	SO, O b
30	0,	1,0	−1,3	N b S	−5,2	−6,5	−8,8	NO b SS
					−6,0	−4,8	−4,7	N b SS

Den 28, 29, 30, Schneebahn.

Bezeichnung.

b = bedeckt; v = veränderlich; h = heiter; f = feucht; R = Regen; RR = viel Regen; S = Schnee; SS = viel Schnee; B = Schneebahn; W = heftiger Wind; G = Gewitter.

Bis zum 16 eine geringe Schneebahn bei festem Eise. Das Thauwetter vom 16 bis 18 löset die Bahn zum Theil wieder auf. Am 20 stellt sich die Bahn wieder her und verbessert sich durch den reichen Schneefall am 27, 30, 31.

	Januar n. St. 1850.				Februar n. St. 1850.			
	8 U	9 U	10 U		8 U	9 U	10 U	
1	–4,5	–4,0	–5,0	NW b S	–24,0	–12,0	–17,0	N, S h
2	–6,8	–6,0	–6,5	SO, O b S	–16,5	–12,0	–16,3	S, SO h
3	–9,5	–7,5	–7,3	N b SS	–18,0	–12,0	–11,3	SO h b S W
4	–7,5	–7,0	–7,5	N, S b SS	–12,5	–11,5	–14,5	NO, O, SO h *)
5	–9,8	–8,0	–5,3	SO b S v b	–15,5	–5,5	–0,5	S, SO b S
6	–5,0	–2,7	–2,5	SO b	0,	0,3	–0,8	S h
7	–4,5	–7,0	–11,0	SO O b h	–0,5	2,5	1,2	S v b W
8	–11,5	–7,0	–7,0	SO b S	–0,5	0,	0,8	S h b
9	–5,3	–5,0	–6,0	SO b	1,0	2,0	0,5	W, SW b R S
10	–11,5	–12,5	–11,5	SO h (4 U A –14°)	2,3	3,0	1,8	S b RS W
11	–12,0	–11,5	–14,5	SO h (11 U A –15°,5)	0,2	1,3	–2,5	NW b h W
12	–12,0	–7,8	–8,0	SO, N, NO, O b S	–3,5	0,	0,8	S b S W
13	–8,8	–10,5	–11,0	O h b S (11 U M –11°)	1,0	1,8	0,3	SW b
14	–10,5	–9,0	–10,5	SO O h b	–1,3	–0,5	–6,3	NW, N b v S
15	–11,5	–12,0	–15,0	SO h (10 U M – 13°,5)	–5,0	–1,0	1,0	S b SS
16	–14,0	–10,0	–13,8	SO h	1,5	2,5	2,3	W, S b R S
17	–15,0	–8,5	–8,5	SO b S	1,2	1,0	–1,5	NW b SS
18	–10,5	–10,2	–11,0	SO b	–5,0	1,5	–1,0	N, W h S
19	–13,0	–12,7	–14,5	NO h (7 U A – 16°,5)	1,4	4,5	–1,0	SW, W N h
20	–16,0	–15,0	–16,0	O, N h b (11 U A – 18°)	1,3	2,5	2,0	SW b RR
21	–18,0	–9,0	–9,0	N, NO b S (6 U M – 20°)	2,0	2,5	0,8	NW, W v h R
22	–6,7	–4,3	–4,8	W b SS	0,5	1,7	0,	SW, N h S
23	–9,0	–9,3	–10,0	SW b SS	–3,5	–1,8	–4,5	N h v W
24	–4,5	–7,5	–10,5	N, NO v b S	–0,3	2,3	0,	S, NW, N b RS
25	–11,5	–10,5	–13,0	S, SO b h SS	–7,5	–1,5	–1,8	N h v
26	–13,7	–12,0	–16,0	SO, O v b	–1,5	0,8	0,3	NW b
27	–17,0	–13,0	–11,0	N h b S	0,3	2,7	1,0	NW b
28	–11,3	–5,5	–3,2	NW, S b SS	0,5	2,0	1,3	SW b
29	–5,0	–1,3	–5,0	S b SS W				
30	–10,0	–10,5	–12,0	N b SS				
31	–15,0	–12,0	–17,5	N h				

Während des ganzen Monats strenge Kälte, viel Schnee, gute Bahn.

Ungeachtet häufigen Thauwetters, sichert der reichliche Schnee doch die Winterbahn während des ganzen Monats bis 2 März.

*) (11 U M — 14°,5)

März n. St. 1850.

	8 U	3 U	10 U	
1	0,5	2,0	1,8	SW b
2	2,0	4,5	1,0	W b h
3	2,5	3,5	2,5	W b
4	2,5	4,0	1,0	SW b R S W
5	–5,0	–4,0	–4,0	N h W S
6	1,0	4,0	1,5	NW b v S
7	2,8	5,0	2,0	NW v h W
8	0,	3,0	–0,5	NW v R W
9	–1,5	–1,5	–4,0	N v h W
10	–4,5	–1,0	0,	SO, S v b W
11	1,5	4,0	–1,0	W, N v b S
12	–3,5	–3,5	–4,0	N b S
13	–3,0	3,0	1,0	W S h b
14	–5,0	–4,5	–6,0	N b S W
15	–7,5	–7,0	–8,3	N v b W
16	–9,0	–8,3	–8,0	N v b W
17	–10,0	–6,5	–8,0	N h b
18	–8,0	–6,0	–7,3	NO, O b
19	–8,0	–4,7	–9,0	SO v h
20	7,0	–2,0	–4,0	N, NW b S
21	–6,0	–3,3	–6,0	N, NO v b S
22	–6,5	–4,8	–8,8	N b h b S
23	–6,5	–4,0	–11,0	N b v S
24	–6,5	–0,5	–1,0	O, S b SS
25	–2,0	0,7	–2,3	SW b S
26	–3,0	–0,5	–4,0	NW, N b SS
27	–3,0	–0,7	–3,0	N, NW b SS
28	–3,0	0,5	–3,0	NW b S
29	–3,0	2,0	–7,5	SW, W h S
30	–8,3	–1,5	–7,0	NW h (6U M –10°)
31	–5,0	–1,0	–4,0	N h (7U M –7°)

April n. St. 1850.

	8 U	3 U	10 U	
1	–5,5	–2,0	–7,0	NW, N h
2	–3,0	–1,0	–3,0	N, NW b S
3	–6,0	0,	–4,3	N, SO h
4	–4,0	0,	–1,3	SO b (6U M –6°)
5	0,3	3,8	2,0	SO b
6	3,0	4,5	3,0	SO b RR
7	2,7	3,8	2,5	SO S b R
8	3,0	6,0	2,5	S, SO b
9	3,0	4,5	2,0	SO b
10	1,5	3,3	2,0	SO h b
11	2,0	4,0	1,8	SO b
12	2,5	3,0	2,3	SO b R
13	4,5	8,3	3,0	SO b
14	3,3	7,0	4,5	SO b
15	5,0	8,7	4,0	SO b v
16	3,0	10,2	5,0	SO h
17	4,0	11,0	6,0	SO h
18	4,7	11,0	7,3	SO h v b
19	6,0	11,5	7,0	SO b
20	7,0	11,3	5,5	S v R
21	5,5	12,7	7,0	S h
22	7,0	13,0	7,0	SO h
23	7,5	12,0	6,5	SO, NO, N, SO *)
24	6,5	6,8	4,3	SO, NO b RR
25	5,5	9,0	2,5	N h
26	4,0	6,0	2,0	N h W
27	2,0	6,5	2,5	N h
28	2,0	5,3	0,6	N h
29	1,8	9,0	3,5	N, NW h
30	4,7	8,8	5,0	NW b R

In der Stadt hört die Schneebahn am 2 März auf. Der reichliche Schnee am 24. bildet eine neue Winterbahn.

Die Winterbahn hört in den ersten Tagen des Monats auf. Eisgang 11, 12, 13, höchstes Wasser 13. früh. Erstes Gewitter den 23.

*) v G R

	Mai 1850 n. St.				Juni 1850 n. St.			
	8 U	3 U	10 U		8 U	3 U	10 U	
1	3,7	4,0	3,0	NO b RR	14,8	20,0	13,5	N, SO, O v
2	0,3	2,0	–1,0	N v S W	15,5	22,5	14,8	NW, W, O, SO v
3	1,0	4,5	1,0	N b h	17,0	21,5	14,0	SO, S, NW, W, N*)
4	2,5	7,0	5,3	S, SW b R	16,8	18,5	14,0	NW, N, O v G R
5	3,0	8,8	2,5	S v R	15,5	20,3	15,3	NO, SO h
6	4,0	7,5	3,5	W v RR	17,0	22,3	15,3	SO, S, NW v R
7	3,0	10,3	4,0	W h	17,3	22,3	14,8	S, SW, W v RR W
8	5,3	12,0	7,5	SO h	14,5	18,5	13,0	SW, NW v
9	9,3	18,5	12,5	SSO h (2UA=19°)	12,4	17,3	10,3	W b
10	13,0	16,0	10,8	S h b W RR	12,0	17,0	10,0	NW h
11	8,0	13,5	7,5	SW h	13,0	17,5	11,5	W v h
12	9,5	15,8	11,0	S h W	14,0	20,0	11,2	S, W h W
13	12,5	15,3	6,8	SW, NW h	13,0	20,0	16,7	SW, S v R
14	9,3	13,0	10,0	N, NO h b R	15,7	15,0	9,8	S, W b R
15	12,4	16,0	10,7	S, SO v G R	12,5	16,7	13,4	W, SW b R
16	7,7	12,3	7,7	SW, NW v h	11,3	17,0	10,5	S, SW b G RR
17	11,0	17,5	12,3	NW v h	10,0	15,0	8,3	NW v
18	14,2	20,5	13,5	S h W	12,5	13,0	10,0	W, S b R
19	14,8	21,5	13,0	S, SO h G R	11,3	14,0	9,0	N b h
20	15,5	21,0	14,3	SO h (2UA=22°)	11,3	17,5	10,2	NW, SW, NW h
21	15,3	22,3	14,0	SO, O h	12,0	18,5	12,8	SW h
22	14,5	23,0	14,0	O h G	14,5	21,0	15,5	SW, S, N h b R
23	15,0	22,8	15,0	NO, SO h	14,0	18,2	13,3	W, NW h b
24	16,0	22,5	13,5	SO v G R	14,3	14,8	9,8	N h
25	16,5	21,5	15,5	SO, S h	12,7	19,5	11,7	NW, W h
26	14,0	18,0	12,0	W, N, NW v	13,5	19,5	11,8	W, NW h
27	14,2	18,3	11,8	NW, W, N v	9,5	16,8	10,0	NW b
28	12,8	11,0	10,0	N, O b R	10,0	13,0	7,7	NW, N b h
29	11,0	16,8	11,0	O, SO b h	10,2	15,5	9,3	N, NW h
30	13,0	18,5	11,7	S, O, SO h	12,2	15,3	11,8	SO b R
31	15,3	19,7	13,0	O, N h b				

Letzte Frostnacht am 5., 12 Tage nach dem ersten Gewitter.

4 Gewitter im Mai.

Größte Wärme 23° am 22.

3 Gewitter im Juni.

Am 28. sehr kalte Nacht = + 5°.

Größte Wärme am 6. und 7.

*) G R v

	Juli 1850 n. St.				August 1850 n. St.			
	8 U	3 U	10 U		8 U	3 U	10 U	
1	12,0	15,5	10,0	NW h	15,0	20,0	13,8	W, NW b G R
2	13,5	18,3	15,0	SW, W v b	13,0	17,2	12,5	N h
3	17,5	19,3	11,3	S, W, NW v h	13,3	17,5	12,8	NO, O h b RR
4	12,5	19,0	13,0	NW, SW, W v h	13,8	17,0	12,0	NW v h R
5	17,0	16,0	10,3	S, W v h R	14,5	18,5	13,3	W v h
6	13,0	11,3	8,2	W, NW b R G	15,8	22,0	15,0	W, SW h
7	11,2	16,5	9,0	NW, W v h	16,0	22,0	16,3	S h
8	10,5	18,0	12,2	SW, SO v b RR	17,5	24,0	17,2	S h
9	12,0	14,5	9,0	W v b h	17,0	20,3	16,0	S b v h
10	12,5	17,3	12,3	W, S, SO b R	16,3	21,7	15,3	S h
11	10,0	13,5	13,0	O, NO b RR	17,0	20,5	14,5	S, W b v h
12	15,5	20,8	15,5	O, SO v h	15,0	18,3	15,3	N, O b
13	17,0	22,5	15,2	SO, N h	17,8	21,0	14,8	O, N h
14	17,5	23,5	15,2	N h	16,5	22,5	15,7	N, NO h
15	18,0	20,5	14,5	N h	17,0	22,8	15,5	N h
16	16,0	20,0	14,0	N h	16,5	22,8	16,0	SO h
17	15,0	19,0	15,0	N b R h	17,0	19,5	15,0	SO, SW v R
18	16,0	20,0	14,2	N v h	15,3	15,5	11,7	SW, NW b R h
19	16,0	20,0	14,2	N, O v GG RR	13,0	16,0	13,0	W, SW b R W
20	15,5	20,0	14,7	O, N v b G	12,0	15,3	9,3	SW b RR W
21	16,1	21,2	15,2	N h	11,3	13,0	8,8	W v RR W
22	17,0	21,0	15,3	N h	13,0	20,0	17,0	S v h
23	18,3	20,5	15,2	N h	14,0	17,0	13,0	N v RR
24	16,5	18,7	14,5	N R h	16,0	17,0	13,0	SW, W, N v R
25	15,8	17,4	14,0	N, NO, N G R h	9,8	11,3	9,3	NO,N,NW G RR v
26	13,3	15,8	12,0	N b h b	10,5	16,0	11,2	SW v R
27	11,0	15,0	12,2	N b	11,0	14,0	8,5	S v h R W
28	13,8	18,0	12,3	N h	11,0	14,5	12,0	S b W
29	15,0	21,5	14,5	N, O v G RR	11,5	15,3	8,5	W, SW v R
30	16,5	21,0	15,0	S, N v R	8,8	14,0	8,5	W v R
31	17,0	21,5	15,3	N, SO v G R	9,0	13,8	8,8	W v R

Größte Wärme 23½ am 14. — Größte Wärme 24° am 8.

Gewitter an 6 Tagen. — Gewitter an 2 Tagen.

	September 1850 n. St.				Oktober 1850 n. St.			
	8 U	3 U	10 U		8 U	3 U	10 U	
1	9,8	14,0	8,3	W, SW v R	9,8	13,0	8,0	SO, v b W
2	9,8	13,0	9,8	SW, S v R	8,0	10,8	8,8	SO b RR W
3	11,0	13,7	8,7	S, SW b RR	10,0	11,0	10,5	SO b RR
4	9,8	11,5	9,0	W b R W	9,2	9,3	8,3	S b RR
5	9,0	15,0	9,0	SW h	5,5	6,5	6,0	SO b W
6	8,5	12,5	7,0	S v h R	4,5	7,5	6,5	SO b W
7	8,3	13,8	7,0	NW v RR	6,2	9,0	7,5	SO b W
8	7,0	11,0	8,5	N, NO v R	7,5	8,0	9,0	SO b W RR
9	7,5	10,5	6,3	N b RR W	10,0	11,0	8,0	S, SW b R
10	7,5	10,3	4,8	N v R	8,0	10,0	7,8	S, SW b R
11	7,0	10,5	6,7	NO b	6,5	6,0	6,0	O, N b RR
12	6,0	12,0	7,3	NO h W	5,5	6,2	3 8	N b RR
13	7,2	12,0	8,0	NO, N v	5,2	6,5	3,8	NW b RR
14	9,0	11,7	6,0	N, NO, N v	4,4	5,0	3,8	NW, W b RR
15	8,3	14 0	7,2	N f v h	7,3	7,0	4 7	SW b RR
16	10,0	16,3	9,0	N h	4,0	6 2	3 0	SW, W b R
17	8,0	12,0	8,3	N b h b	5,3	6,5	4,0	S SW, NW b RR
18	6,0	11,5	5,2	N h	4 8	7,0	4 3	NW, SW, SO b RR
19	4,8	13,0	6,0	N, SO h	2,5	5,8	1,2	NW h
20	7,5	14,7	9,0	SO v h	0,3	4,7	3,0	NW, S v R
21	8,0	16,5	8,0	SO h	2,0	1,5	−1,5	O, NO v
22	7,3	15,0	8,0	SO h	0,	2,5	−1,2	NO v
23	8,5	14,5	10,3	SO v	−2,5	0,3	−1,3	SO v b S
24	10,3	10,5	10,3	SO b R	−1,0	0,7	−1,0	O, NO b S
25	10,0	11,3	10,7	SO b R	−1,8	−0,8	−1,5	O b SS
26	10,7	12,0	10,3	SO, N b	−1,0	−0,3	−1,5	O b S
27	9,0	11,5	9,0	N, W b RR	−2,0	0,5	1,8	O b RR
28	8,0	11,0	5,8	SO b	2,0	3,3	3,0	S b
29	8,5	11,0	6,8	SO b f	0,3	5,3	3,0	S, SO h
30	8,2	11,0	9,2	SO b f	2,8	5,3	4,5	SO b R
31					4,2	4,5	3,0	S NO b f

Durch den starken Regenfall treten die Flüsse in der Mitte des Monats weit aus, und behalten ihren hohen Stand bis zu Ende des Monats. Am 19 erste Frostnacht. Am 24 bildet sich eine Winterbahn die aber nur bis zum 28 dauert.

II. Wärme der drei Beobachtungszeiten, Feuchtigkeit, Wind und Luftdruck.

Winter 1850 n. St.

		8 U	3 U	10 U	b	Regen oder Schnee	Wind	Luft-druck.
November	1	5,42	7,02	6,48	3	1	S	0,8
	2	4,94	6,36	5,12	2	2	W	0,8
	3	3,40	4,38	4,22	4	3	S	1,2
	4	3,18	4,26	2,92	5	3	SO	0,8
	5	–2,06	–1,60	–2,92	3	S 3	NW	1,5
	6	–7,56	–5,56	–6,64	2	S 4 B	N	2,3
December	1	–5,90	–4,82	–5,36	3	0 B	SO	7,7
	2	- 7,26	–6,06	–7,80	3	0 B	SO	7,8
	3	–5,72	–3,10	–4,52	2	S 1 B	W	4,4
	4	0,02	0,16	–0,56	4	S 3	N	–1,4
	5	–6,80	–4,96	–5,90	1	S 3 B	N	6,4
	6	–4,32	–3,72	–4,72	6	S 5 B	SO	–3,2
Januar	1	–7,62	–6,50	–6,32	4	S 5 B	N	2,5
	2	–7,56	–6,84	–7,60	3	S 1 B	SO	7,3
	3	–10,96	–10,16	–11,80	1	S 2 B	SO	7,7
	4	–13,70	–11,28	–12 76	2	S 1 B	SO	5,1
	5	–9,94	–8,12	–9,46	3	S 5 B	W	3,9
	6	–12,00	–9,05	–10,78	3	S 4 B	W	–1,7
Februar	1	–17,30	–10,60	–11,92	1	S 2 B	SO	–1,7
	2	0,46	1,56	0,70	2	RS 2 B	S	–6,4
	3	–1,72	0,32	–1,34	3	S 3 B	W	–3,4
	4	0,08	2,40	0,16	3	RS 4 B	W	–2,7
	5	–1,76	0,64	–1,10	1	RS 3 B	N	–1,5
	6	–0,23	1,83	0,87	3	0 B	N	6,0
März	1	0.50	2,00	0,46	3	RS 2	W	–0,2
	2	–0,44	1,90	–0,20	0	RS 2	NW	–1,3
	3	–3,50	–1,60	–3,66	2	S 4	N	–1,4
	4	--8,40	–5,50	–7,26	2	S 1	N	1,0
	5	–5,50	–2,38	–5,82	2	S 5 B	N	–1,7
	6	–4,22	–0,20	4,75	3	S 4 B	NW	1,3
April	1	–3,64	0,16	–2,72	3	S 1 B	NW	1,8
	2	2,64	4,42	2,40	4	2	SO	3,4
	3	3,46	6,20	3,12	4	1	SO	2,0
	4	4,94	11,00	6,16	1	1	SO	3,1
	5	6,40	10,70	5,46	1	2	SO	2,0
	6	2,90	7,12	2,72	1	1	N	1,8

Sommer 1850 n. St.

		8 U	3 U	10 U	b	Regen	Wind	Luft-druck.
Mai.	1	2,10	5,26	2,16	2	3	N	–0,3
	2	6,92	12,86	7,66	0	2	SO	1,1
	3	10,34	14,72	9,20	0	2	SO	1,8
	4	12,64	18,56	12,16	0	1	SO	3,3
	5	15,46	22,42	14,40	0	1	SO	0,7
	6	16,06	20,46	13,90	1	1	SO	3,7
Juni.	1	15,92	20,56	14,32	0	2	NW	5,2
	2	14,64	19,48	12,68	1	2	SW	1,6
	3	13,64	17,84	12,52	2	3	SW	–0,4
	4	11,28	15,30	9,60	2	2	W	3,2
	5	13 50	18,40	12,62	0	1	W	2,7
	6	11,08	16,02	10,12	2	1	NW	0,6
Juli.	1	14,50	17,62	11,92	0	1	W	1,2
	2	11,84	15,52	10,14	2	3	W	–0,4
	3	15,60	20,16	14,68	1	1	SO	0,8
	4	15,70	19,80	14,42	0	2	N	–0,7
	5	16,74	19,76	14,84	0	2	N	1,9
	6	14,43	18,80	13,55	1	3	N	2,0
August.	1	13,92	18,04	12,88	1	3	N	0,9
	2	16,52	22,00	15,96	0	0	S	2,0
	3	16,66	21,02	15,16	1	0	N	3,5
	4	14,76	17,82	13,00	2	4	S	–2,7
	5	12,82	15,66	12,22	0	4	SW	2,2
	6	10,30	14,60	9,58	1	5	SW	2,7
September	1	9,78	13,44	8,96	2	4	SW	1,1
	2	7,76	11,62	6,72	1	5	N	2,8
	3	7,50	12,04	7,04	1	0	NO	4,4
	4	7,26	13,50	7,50	0	0	N	4,6
	5	8,82	13,56	9,46	2	2	SO	3,5
	6	8,88	11,30	8,22	5	1	SO	1,6
Oktober	1	8,50	10,12	8,32	4	3	SO	1,8
	2	7,24	9,10	7,76	5	3	SO	0,9
	3	5,78	6,14	4,42	5	5	NW	–2,9
	4	3,38	6,04	3,10	3	4	NW	–2,9
	5	–0,66	0,84	–1,30	2	S 3 B	NO	0,5
	6	1,05	3,10	2,30	5	3	SO	0,2

III. Mittelwärme der einzelnen Witterungswochen oder Fünfte.

Winter.		1850.	1824—1849.	1824—1850.	Sommer.		1850.	1824—1849.	1824—1850.
November	1	6,40	2,32	2,47	Mai	1	2,79	7,38	7,21
	2	5,56	1,76	1,90		2	8,48	8,06	8,08
	3	4,05	1,18	1,29		3	10,78	8,02	8,12
	4	3,53	0,39	0,51		4	13,68	9,17	9,34
	5	−2,15	0,32	0,23		5	16,48	10,19	10,42
	6	−6,46	−0,29	−0,52		6	16,08	10,79	10,99
December	1	−5,29	−0,49	−0,67	Juni	1	16,22	11,43	11,61
	2	−6,95	−1,13	−1,35		2	14,83	12,72	12,80
	3	−4,29	−1,65	−1,74		3	14,05	12,72	12,77
	4	−0,11	−2,09	−2,02		4	11,42	12,90	12,84
	5	−5,78	−2,42	−2,55		5	14,16	13,18	13,22
	6	−4,21	−3,84	−3,85		6	11,71	13,47	13,41
Januar	1	−6,76	−4,61	−4,69	Juli	1	14,07	13,58	13,60
	2	−7,28	−4,82	−4,91		2	11,90	14,17	14,09
	3	−10,91	−4,56	−4,80		3	16,17	13,85	13,94
	4	−12,43	−4,34	−4,64		4	16,02	14,08	14,15
	5	−9,07	−4,25	−4,43		5	16,58	13,71	13,81
	6	−10,43	−4,27	−4,50		6	14,98	14,27	14,29
Februar	1	−12,90	−3,41	−3,76	August	1	14,35	14,37	14,37
	2	0,98	−3,51	−3,34		2	17,44	13,96	14,09
	3	−0,78	−3,45	−3,35		3	16,95	13,46	13,59
	4	1,03	−3,07	−2,92		4	14,66	13,42	13,47
	5	−0,59	−3,23	−3,13		5	13,16	12,68	12,70
	6	0,95	−1,61	−1,51		6	10,90	12,29	12,24
März	1	0,80	−2,03	−1,92	September	1	10,25	11,65	11,60
	2	0,14	−2,49	−2,39		2	8,20	11,04	10,93
	3	−3,16	−1,90	−1,95		3	8,29	10,63	10,55
	4	−7,38	−1,21	−1,44		4	8,66	9,45	9,42
	5	−4,96	−0,18	−0,36		5	10,04	8,48	8,54
	6	−3,57	0,46	0,31		6	9,15	7,47	7,53
April	1	−2,51	1,17	1,03	Oktober	1	8,77	7,30	7,35
	2	2,93	1,93	1,97		2	7,82	6,78	6,82
	3	3,91	3,45	3,47		3	5,37	5,68	5,67
	4	6,65	4,43	4,51		4	3,84	4,69	4,66
	5	6,96	5,59	5,64		5	−0,57	4,27	4,09
	6	3,72	6,51	6,40		6	1,93	3,25	3,20

IV. Monatliche Mittelwärme. 1824—1850.

Winter.		Sommer.	
Nov.	0,98	Mai	9,03
Dec.	−2,03	Juni	12,78
Jan.	−4,66	Juli	13,98
Febr.	−3,00	Aug.	13,41
März	−1,29	Sept.	9,76
April	3,84	Okt.	5 30
Mittel	−1,03	Mittel	10,71

Durchjähriges M. 4°,840

V. Monatliche Mittelwärme 1850.

Winter.		Sommer.	
Nov.	1,82	Mai	11,38
Dec.	−4,40	Juni	13,73
Jan.	−9,48	Juli	14,95
Febr.	−1,88	Aug.	14,58
März	−3,02	Sept.	9,10
April	3,61	Okt.	4,53
Mittel	−2,23	Mittel	11,38

Durchjähriges M. 4°,573

Wärmegrenzen 1850.

Mittagswärme von 13°: zuerst April 22, zuletzt Oktober 1, also mittäglicher Sommer = 162 Tage. Frostnächte: die letzte Mai 5, die erste Oktober 19, also Sommernächte = 167. Größte Winterkälte Februar 1. = — 24°. Sommerkälte Mittags 11°: Mai 28, Juli 6, August 25.

Größte Sommerwärme 23° bis 24°: Mai 22, Juli 14, August 8.

Bericht über die Schrift:

Die Cholera als Krankheit der Haut.

Dargestellt von J. L. Stäger, Stadtarzt zu Windau. Mitau und Leipzig. 1850.

(Sitzung vom 1. November 1850.)

Verfasser veröffentlicht seine während der letztern Cholera-Epidemie in Windau gemachten Erfahrungen und die aus denselben gezogenen Folgerungen und Schlüsse. In der Nacht vom 6. auf den 7. December 1848 erkrankte in Windau die erste Person an der asiatischen Cholera und starb nach drei Tagen. Bis zum 7. Januar erkrankten bei höchst unbeständiger Witterung und häufigen orkanartigen Stürmen aus Nordwest 41 Personen, von denen 20 starben. Am 5. Januar trat anhaltendes Thauwetter mit Regen und Nebel ein und vom 7. häufigere Erkrankungsfälle. Mit dem Februar nahm die Cholera-Epidemie ab und hörte mit dem 21. Februar ganz auf. Im Ganzen erkrankten in dem ungefähr 2000 Einwohner enthaltenden Windau nach officiellen Angaben 143 Personen, von denen 50 starben; doch muß die Zahl der Erkrankten, namentlich an der leichtern Form, größer angenommen werden, da die Cholera besonders die ärmere Klasse ergriff. Der höhere Stand wurde fast ganz von der Cholera verschont. Im Anfange erkrankten besonders bejahrte Leute, Trunkenbolde, über den Culminationspunkt hinaus Kinder; Personen im kräftigsten Lebensalter wurden weniger von der Cholera ergriffen und genasen meistens.

Erstes Kapitel. Symptome und Verlauf. Verfasser theilt den Verlauf der Krankheit in mehrere Stadien mit Hinzufügung der vorkommenden Abweichungen.

I. Das Stadium der Vorboten. Diese äußern sich durch Störung des Wohlbefindens im Allgemeinen, oder lokalisiren sich in den Verdauungsorganen. Das Poltern, Kollern im Leibe, der Durchfall, **Diarrhoea cholerica**, Cholerine.

II Das Stadium des Anfalls. Der Anfall beginnt meistens mit Erbrechen und hat im Gefolge Krämpfe, Erkalten der Zunge und Körperoberfläche mit Verfall des vitalen Turgor's derselben, Schwinden des Pulses, Veränderung der Stimme, Unterdrückung der Harnsekretion und Alienation der Psyche, jedoch in den mannichfaltigsten graduellen Abstufungen und Schattirungen. Die Oberfläche des Körpers fühlt sich kaltfeucht an, nicht, wie diese Kälte gewöhnlich beschrieben wird, marmor- — sondern leichenkalt und der ganze Körper scheint dabei sein Unterhautzellgewebe verloren zu haben, daher die große Entstellung des Gesichts, die Verschrumpfung der Haut an Händen und Füßen. Der Augapfel ist dabei aufwärts gerollt und wird zum großen Theil unter das obere Augenlid verborgen. Die Haut hat ihre Sensibilität mehr oder weniger verloren; bildet man ferner eine Hautfalte so bleibt sie längere Zeit stehen oder verstreicht nur langsam. Diese Falten zeigen sich am stärksten da, wo die Haut mit gar keinem oder nur einem schwachen Fettpolster versehen ist, also am bemerkbarsten auf dem Hand- und Fußrücken, am Halse, an den Augenlidern. Diese eigenthümliche Beschaffenheit der Haut hält Verfasser für das einzige pathognomonische Symptom der orientalischen Cholera, indem von allen übrigen, als charakterisch bezeichneten Symptomen, eins oder das andere fehlen kann.

III. Stadium der Reaction. a. Die Reaction ist vollständig. Die Krankheitssymptome schwinden mehr oder weniger rasch und ein reichlicher, warmer duftender Schweiß führt zur Genesung. In andern Fällen zeigt sich die Reaction gleichfalls günstig, aber es tritt kein oder nur unbedeutender Schweiß ein. In beiden Fällen wird die Faltenbildung geringer und verschwindet endlich ganz. b. Häufig kommt die Reaction nicht zu Stande, weil die Lebenskräfte durch den Anfall aufgerieben sind. c. Die Reaction erfolgt mangelhaft und die Krankheit geht in ein mehr oder weniger deutlich ausgeprägtes typhöses Stadium, das sogenannte Choleratyphoid über. Das Stadium der Reaction gestaltet sich hier verschieden:

1) Die congestive Form, das eigentliche Typhoid. Diese Form kommt vorzüglich bei jugendlichen, kräftigen Personen vor. 2) Die nervöse Form zeigt sich gewöhnlich bei schwächlichern und ältern Personen nach schweren, langdauernden Anfällen.

Nachkrankheiten hat Verfasser nicht beobachtet, obgleich deren häufig auftreten. Eine günstige, für das Typhoid kritische Bedeutung scheinen nach Verfasser die flachen Exantheme zu haben.

Zweites Kapitel. Aetiologie. Verfasser hält die Cholera für eine von einem Miasma bedingte Krankheit dessen Träger die atmosphärische Luft ist, das aber nicht überall gleichmäßig verbreitet wird. Es ist nach Verfasser anzunehmen, daß das in der Atmosphäre verbreitete Miasma durch besondere Umstände stellenweise concentrirt werde, oder daß es des Zusammentreffens desselben mit einer besondern Beschaffenheit der atmosphärischen Luft bedürfe, damit es seine Wirkungen entfalte, wobei die letztere gleichsam die Rolle des prädisponirenden Moments übernimmt. Das Zustandekommen des Miasma's kann nach Verfasser nur in einer Ueberladung der Atmosphäre mit Wasserdünsten und Verunreinigung durch thierische und vegetabilische Effluvien gesucht werden und vielleicht ließe sich nach demselben daraus die scheinbare Contagiosität der Cholera erklären. Als Gelegenheitsursachen für den Ausbruch der Cholera nimmt Verfasser nur alles das an, was die normale Function der Haut zu beeinträchtigen im Stande ist. Indirect gehören auch dazu alle Einflüsse, die im Stande sind, die normale Mischung des Blutes zu verändern, namentlich dasselbe an plastischen Bestandtheilen ärmer zu machen.

Drittes Kapitel. Obductionsergebnisse. Hier hat Verfasser meistens auf die Resultate, die Cannstadt bei den Obductionen von Cholera-Leichen erhalten hat, hingewiesen. Verfasser ist der Ansicht daß überhaupt in der Cholera das anatomische Messer keinen Aufschluß geben kann, indem die Cholera eine Krankheit der Haut und durch die Beobachtung des Lebenden zu entdecken ist.

Viertes Kapitel. Nosologie. Nachdem Verfasser die verschiedenen Ansichten über das Wesen der Cholera besprochen und die Unhaltbarkeit derselben darzulegen gesucht hat, will Er das eigenthümliche Verhalten der Haut in dieser Krankheit, wie es oben angegeben worden ist, das auf Paralysis des Hautorgans beruht, für die nächste Ursache, für das Wesen der Cholera gehalten wissen, indem dadurch die normalen Verrichtungen derselben mehr oder weniger aufgehoben, bei der so hohen excretiven Thätigkeit der Haut alle zur Ausscheidung durch dieselbe bestimmten Stoffe im Blute zurückgehalten, dasselbe vergiftet werden muß. Als Folge dieser Blutvergiftung treten die Erscheinungen, wie sie uns die Cholera darbietet, auf. Verfasser bemüht sich nun das Zustandekommen aller Symptome der Cholera in ihrer Aufeinanderfolge und Verkettung aus einem paralytischen Zustande der Haut so genügend wie möglich, herzuleiten. Die Haut dient als Gefühls- und Tastorgan, steht der Assimilation, ganz besonders der Absonderung vor und ist in dieser Beziehung bei ihrer großen Ausdehnung von der höchsten Bedeutung. Die innigste Wechselbeziehung zeigt sich in dieser Hinsicht zwischen der äußern Haut und den Schleimhäuten; Einflüsse, welche die eine treffen, bedingen auch oft Veränderungen in der anderen. Wirkt das Miasma zu heftig, lähmend auf die Haut ein, so daß durch Bethätigung des Gefäßsystems die Ausgleichung durch die Haut nicht zu Stande kommen kann, so sucht der Organismus durch die Schleimhaut des Darmkanals, welche nun vicarirend für die Haut auftritt, sich der, seine normale Blutmischung beeinträchtigenden Stoffe zu entledigen.

Daß dieses nicht immer gelingt beruht darauf, daß die Blutentmischung immer mehr zunimmt, theils durch die immer mehr zunehmende Unthätigkeit der Haut, theils dadurch, daß dem Blute durch die wässerigen Ausscheidungen seine serösen Bestandtheile entzogen und dasselbe eingedickt wird. Haut- und Blutleiden sind die beiden Angeln, um die sich alle Symptome der Cholera drehen. Die bei der Cholera meist auftretenden Krämpfe, wären nach Verfasser von der, durch die mehr oder weniger gelähmte Haut verhinderten Ausgleichung der thierischen Elektricität mit der umgebenden Atmosphäre herzuleiten. Ferner hat Verfasser die Beobachtung gemacht, daß die **Vox cholerica** stets im directen Verhältniß zur Paralyse der Haut steht und will bei Sectionen die Schleimhaut des Kehlkopfs trockner gefunden haben. Die Cholera ließ sich nach Verfasser in drei Stadien eintheilen: Das erste Stadium würde das der primären, durch unterdrückte Haut-Respiration erzeugten Blutdyskrasie, das Stadium der Vorboten einnehmen, aber auch, wo die Hemmung der Hautthätigkeit schnell und intensiv erfolgt, durch Herzlähmung zum Tode führen können. Das zweite Stadium wäre das der Bluteindickung, secundäre Blutdyskrasie, hervorgerufen durch übermäßige seröse Ausleerungen mit Lähmung der Haut, das Stadium des Anfalls, aus welchem das dritte Stadium hervorgeht, das der tertiären Blutdyskrasie, die sich wieder aus der vorigen durch die Reaction herausbildet und als Typhoid in die Erscheinung tritt.

Fünftes Kapitel. Prognose. Nachdem Verfasser die allgemein bekannten günstigen und ungünstigen Zeichen für die Prognose angeführt hat, kommt derselbe auf eins, das nach Ihm ein Hauptkriterium für die zu stellende Prognose abgiebt, nämlich die Faltenbildung der Haut und die mit ihr in Einklang stehende Beschaffenheit der Stimme. Bildet nämlich bei dem heftigsten Anfalle die Haut leicht verstreichende, unbedeutende Falten, so ist eine günstige Prognose zu stellen, dagegen im entgegengesetzten, selbst bei leichten Anfällen, eine ungünstige.

Sechstes Kapitel. Therapie. Was die Behandlung anbetrifft, so spricht sich Verfasser ganz offen über die Unzulänglichkeit aller angepriesenen Mittel aus und empfiehlt mehr ein expectatives Verfahren. Den hereinbrechenden Anfall zu bekämpfen, hält derselbe für unmöglich, dagegen vorzubeugen und die Heilkraft der Natur zu unterstützen läge im Bereich der Möglichkeit. Da das Wesen der Cholera nach Verfasser auf Lähmung des Hautorgans beruht, so wäre die Hauptindikation: Aufhebung des lähmungsartigen Zustandes der Haut und Rückführung derselben zu ihrer normalen

Thätigkeit. Um diese zu Stande zu bringen, muß 1) auf Verbesserung der fehlerhaften Blutmischung hingewirkt werden und 2) auf Mäßigung der in der Schleimhaut des Darmkanals erwachten und übermäßig erfolgenden absondernden Thätigkeit.

A Prophylaxis. Das einzige, wirklich schützende Mittel besteht nach Verfasser in der Flucht. Das Uebrige hiehergehörige ist bekannt.

B. Behandlung der Vorboten. Das Opium hat Verfasser nur in der dem Anfalle vorhergehenden Diarrhöe nützlich gefunden und zwar 2= — 1=stündlich 10 Tropfen der weinigen Tinctur mit Zusatz von Ipecacuanhawein. Wo die Vitalität der Haut durch nachhaltige Einwirkung des Miasma's schon wirklich gesunken ist, da sind reizende Einreibungen des ganzen Körpers angezeigt und zwar bewährte sich Ihm die Tinctur des Capsicum's. Frühzeitig ist die Blutmischung zu berücksichtigen, wozu sich das Chlor und die Mineralsäuren zu eignen scheinen. Dem Kampfer und den Begießungen, so wie Waschungen mit eiskaltem Wasser spricht Verfasser in einzelnen Fällen auch das Wort.

C. Behandlung im Anfalle. Wenn ein Aderlaß indicirt ist, so kann er nur vor dem Choleraanfall, nicht während desselben nützlich seyn, eben so wenig da wo die Haut schon während der Vorboten mit profusem Schweiß bedeckt ist.

D. Behandlung im Reactionsstadium. Hiemit beginnt wieder die Thätigkeit des Arztes, und Derselbe muß auf die Haut kräftig einzuwirken suchen mit Berücksichtigung des Zustandes des Kopfs. Die Vitalität des Hautorgans muß im Reactionsstadium erhöht werden, indem hier nach Verfasser alle erwärmenden und nur Schweiß hervorrufenden Mittel gänzlich zu verwerfen, oder höchstens auf leichtere Fälle, in denen der Puls nicht gänzlich unterdrückt und die Faltenbildung in der Haut gering ist, zu beschränken sind. Für allein nützlich wird das Frottiren des ganzen Körpers gehalten.

Schlüßlich erlaube ich mir die Bemerkung, daß die Arbeit des Dr. Stäger, die ich dem Wesentlichsten nach im Auszuge hier mitgetheilt habe, sich durch Fleiß und eigene Beobachtungen auszeichnet und gewiß zu den bessern Mittheilungen über die Cholera gerechnet werden muß. Was aber das Wesen der Cholera anbetrifft, so kann ich meiner unmaßgeblichen individuellen Ansicht nach, nicht ganz mit dem Verfasser übereinstimmen, indem die Ansicht, daß das Cholera=Miasma, Choleragift direct auf das Ganglien= und Blut=System einwirkt, mir plausibler erscheint.

Berichtigungen.

In dem Auffatz: der Doppelpalladienraub ꝛc. Heft IX.:

Seite	71	Zeile	34	von	unten	war,	statt	war
„	72	„	16	„	„	wußte	„	mochte
„	74	„	16	„	„	**Ovid.**	„	**Ovid**
„	75	„	35	„	„	καὶ	„	καί
„	—	„	22	„	„	ausgesprochen	„	ausgesprocheu
„	76	„	29	„	„	Sophokles	„	Sophoklet
„	—	„	26	„	„	=tet	„	=tes
„	—	„	—	„	„	**R.**	„	**R**
„	—	„	23	„	„	Neoptolemos	„	Neoptolemeos
„	78	„	5	„	„	ἀπὸ	„	ἀπό
„	79	„	21	„	„	**Cor.**	„	**Corr.**
„	—	„	7	„	„	werden	„	worden
„	—	„	4	„	„	τὸ	„	τό
„	—	„	3	„	„	γὰρ	„	γαρ
„	—	„	2	„	„	νύκτωρ	„	νὺκτωρ

In dem Auffatz: der Grenzbau ꝛc. ꝛc. Heft IX.:

Seite	144	Zeile	4	von	oben	statt	$\underset{\smile}{B\mathfrak{B}}$	lies	$\underset{\smile}{B\mathfrak{A}}$
„	144	„	6	„	„	„	$c_1 = b$	„	$c_1 = c$
„	150	„	4	„	unten	„	$(d\ \underset{\smile}{\mathfrak{ab}})^2$	„	$(d\ \underset{\smile}{\mathfrak{al}})^2$
„	152	„	3	„	unten	„	$\underset{\smile}{\overset{1}{a}\overset{1}{b}}\ \overset{2}{\mathfrak{b}}'$	„	$\underset{\smile}{\overset{1}{a}\overset{1}{b}}\ \overset{2}{\mathfrak{b}}''$
„	156	„	16	„	oben	„	$\overset{1}{b}\quad 2,$	„	$\overset{1}{b}\quad 3,$
„	159	„	14	„	„	„	27	„	72
„	161	„	11	„	„	„	zürückgeführt	„	zurückgeführt
„	162	„	3	„	„	„	$\underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{bb}}}\ \underset{\smile}{\overset{2}{b}\overset{1}{b}}$	„	$\underset{\smile}{\overset{*}{\mathfrak{bb}}}\ \underset{\smile}{\overset{2}{a}\overset{1}{b}}$
„	164	„	5	„	„	„	$\overset{2}{a}\overset{1}{a}$	„	$\underset{\smile}{\overset{2}{a}\overset{1}{a}}$
„	184	„	2	„	„	„	$\begin{matrix} -\ \hat{2}\ \hat{1}\ \overset{2}{x} \\ \mathfrak{a} \end{matrix}$	„	$\begin{matrix} -\ \hat{2}\ \hat{1}\ \overset{1}{x} \\ \mathfrak{a} \end{matrix}$
„	190	„	3	„	„	„	$\overset{*}{1}\ \overset{*}{2}\ \overset{*}{5}$	„	$\overset{*}{1}\ \overset{*}{3}\ \overset{*}{5}$
„	192	„	5	„	„	„	$\overset{3}{\lambda} + M\overset{*}{3}$	„	$\overset{3}{\lambda} - M\overset{*}{3}$
„	192	„	7	„	„	„	$\overset{7}{\lambda} +$	„	$\overset{7}{\lambda} -$
„	197	„	2	„	„	„	$8\mathfrak{U}\ 9\mathfrak{U}\ 10\mathfrak{U}$	„	$8\mathfrak{U}\ 3\mathfrak{U}\ 10\mathfrak{U}$

---

5. —

e. p.