Tartu Ülikool
Sotsiaalteaduste valdkond
Haridusteaduste instituut
Eripedagoogika ja logopeedia õppekava

Liina Malva

RAUDVARA- JA TÖÖLEHTEDE KOMPLEKTI KOOSTAMINE HULKLIIKMETE TEEMA KÄSITLEMISEKS MATEMAATIKA ÕPIABITUNNIS

Magistritöö

Juhendaja: eripedagoogika nooremlektor Triin Kivirähk

Tartu 2023

Kokkuvõte

Raudvara- ja töölehtede komplekti koostamine hulkliikmete teema käsitlemiseks matemaatika õpiabitunnis

Oma abstraktse olemuse tõttu on algebra üheks teemaks, mis III kooliastmes õpiraskustega õpilastele matemaatika omandamisel raskusi tekitab. Õpilaste toetamiseks saab aga kasutada jõukohaseid õppematerjale ning algoritmilisi juhendeid. Käesoleva arendusuuringu eesmärgiks oli koostada ja hinnata matemaatika õpiabi raudvara- ja töölehtede komplekti hulkliikmete teemal. Uuringus osales kuus eksperti, kellest viis katsetasid loodud õppematerjali 19 õpilasega ning kõik eksperdid andsid õppematerjali parandamiseks tagasisidet. Delphi meetodi kaudu saavutati kahe tagasisideringi tulemusel ekspertide vaheline konsensus töölehtede sobivuse osas. Kvalitatiivse sisuanalüüsi tulemusel selgus, et ekspertide hinnangul toetab õpilasi sammhaaval õppimine, kuid ka õpiabi materjalidesse tuleks integreerida mõningaid keerulisemaid ülesandeid. Samuti hindasid eksperdid kõrgelt visuaalseid vihjeid, kuid tõid välja võimaliku riski nende vihjetega liialdamisel.

Võtmesõnad: matemaatika õpiraskused, õppematerjali koostamine ja hindamine, algebra.

Abstract

Developing a Set of Learning Materials on Polynomials Topic for Mathematics Teaching Aid Lesson

Learning algebra can be challenging for students with learning difficulties due to its abstract nature. To support them, teachers can use level appropriate materials and algorithmic instructions. The aim for the design-based research was to develop and evaluate a set of learning materials on polynomials topic for mathematics teaching aid lesson. Six experts gave feedback and five of them tested the materials with 19 students. A consensus on the suitability of the materials was reached among experts after two rounds of Delphi study. A qualitative content analysis showed that experts see benefits of step-by-step approach, however, more difficult tasks could also be included in teaching aid lessons. Experts also valued visual cues but pointed out a risk of overusing these.

Keywords: mathematics learning difficulties, developing and evaluating learning materials, algebra.

Sisukord

1. Sissejuhatus

Õpiraskuste tõttu on häiritud õpilaste akadeemiline edasijõudmine, mistõttu vajavad need õpilased õppimisel tavapärasest enam kohandusi ja muudatusi. Õpiraskustest tingitud erisusi seostatakse peamiselt tunnetustegevuse iseärasustega, samas kui tegemist ei ole vaimse alaarenguga (Schults, 2018). Matemaatika õpiraskustest saame rääkida siis, kui õpilane vajab pidevalt teemade omandamisel tavatunni väliselt lisaabi. Suur osa matemaatika õpiraskuste teemalisest teaduskirjandusest keskendub aga matemaatika varastele oskustele, nagu näiteks aritmeetika omandamisele. Nii teaduskirjanduses kui ka koolis saavad aga vähem tähelepanu need õpilased, kelle raskused ilmnevad alles hilisemas kooliastmes (Shaw, 2022). Mida klass edasi, seda suuremaks lähevad nõudmised matemaatika õppekavas, mis on omakorda väljakutseks õpilastele, kel esineb puudujääke tunnetustegevuse arengus. Õpiraskustega õpilastel võivad esineda puudujäägid näiteks matemaatilise sõnavara omandamisel, õpitu meelde jätmisel ja meenutamisel, olulise info tajumisel ja selekteerimisel ning iseenda õppimisprotsessi juhtimisel (Ketterlin-Geller & Chard, 2011). III kooliastmes tuleb algebra osakaalu suurenemise tõttu õpilastel üha enam minna üle abstraktsele mõtlemisele, mis aga õpiraskustega õpilastele veelgi enam raskusi valmistab. Lisaks oma abstraktsele olemusele kaasneb algebraga ka täiesti uute matemaatiliste reeglite õppimist, mis varasematele teadmistele tuginedes võivad esialgu vastuolulised tunduda (Ketterlin-Geller & Chard, 2011). Kirjeldatud keerukusest tulenevalt ongi algebra üks teemasid, millega õpiraskustega õpilased tunnetustegevuse iseärasuste tõttu tihti hätta jäävad (Witzel et al., 2003; Ketterlin-Geller & Chard, 2011). Seetõttu on oluline, et õpilased saaksid algebra õppimisel õiget tuge, milleks võib olla nii õppemeetodite kui ka -materjalide kohandamine (Maccini et al., 1999).

Eestis kasutusel olevad Põhikooli riikliku õppekava järgi loodud III kooliastme õpikud on küll sisutihedad, kuid ei paku alati õppijatele vajalikke algoritme, sammhaaval juhiseid, ega visuaalseid vihjeid, mida õpiraskustega õpilane just vajaks. Eesti õppekirjanduses ei ole senini avaldatud III kooliastme matemaatika õppimiseks õpiabi materjale, mille hulka kuulub ka algebra teema. Tulenevalt asjaolust, et matemaatika õpiraskused pärsivad õpilastel algebraliste oskuste omandamist, kuid algebra õppimiseks puuduvad õpiabi materjalid, keskendub käesolev magistritöö III kooliastme raudvara- ning töölehtede väljatöötamisele hulkliikmete teemal.

2. Teoreetiline ülevaade

2.1. Õpiraskuste avaldumine matemaatikas

Veel mõnikümmend aastat tagasi usuti, et mõned õpilased on lihtsalt aeglased ja laisad õppijad (Westwood, 2004). Varasemalt on õpiraskuste käsitlemisel palju tähelepanu suunatud õpilaste sotsiaalmajanduslikule ja perekondlikule taustale, mis väidetavalt mõjutasid intelligentsust ja õpimotivatsiooni. Vähem räägiti sobivatest õpetamismeetoditest ja õppekava kohandamisest ehk keskkonna mõjudest õpiraskuste avaldumisel (Westwood, 1995). Nimetatud faktorid mängivad aga olulist rolli akadeemilistes tegevustes siis, kui õpilase kognitiivsete protsesside ehk taju, mälu, mõtlemise ja tähelepanu puudujäägid mõjutavad uute teadmiste omandamise kiirust ja mahtu (Cortiella & Horowitz, 2014).

Eesti seadustikust lähtuvalt tuleb õpiraskustega õpilaste õpetamises teha muudatusi ja kohandusi (Põhikooli- ja gümnaasiumiseadus, 2010). Siinkohal on oluline märkida, et õpiraskused ei tulene vaimsest alaarengust, mistõttu ei kannata õppimisega mitteseotud tegevused (Schults, 2018). Õige toe korral saavad õpiraskustega õpilased edukalt hakkama nii oma isikliku kui ka tööeluga (Kõrgesaar, 2020). Õpikeskkonna kohandamise ja muudatuste rakendamise aeg sõltub aga õpiraskuste olemusest. Kui õpilasele pakutud tugi on efektiivne ja tagab õpitulemuste paranemise, on tegemist ajutise õpiraskusega. Kui aga sekkumine ei anna tulemusi, on tegemist püsiva õpiraskusega (Schults, 2018). Lisaks eelnimetatud määratlusele on identifitseeritud ka spetsiifilised õpiraskused: düsleksia, düsgraafia ning düskalkuulia (Cortiella & Horowitz, 2014). Spetsiifiliste õpiraskuste tulemusena on seega häirunud lugemise, kirjutamise ja arvutamisega seotud oskuste omandamine. Õpiraskuseid võib aga jagada ka üldisteks õpiraskusteks, mille puhul kannatab õppimine mitme õppeaine üleselt, või ühe õppeaine keskseks (Westwood, 2004). Siin ja edaspidi keskendub käesolev teoreetiline ülevaade matemaatika õpiraskustele, püüdes avada selle mõiste erinevaid tähendusi ning spetsiifiliselt kognitiivsete protsesside mõju matemaatika omandamisel.

Seoses õpiraskustega matemaatikas kasutatakse erinevates allikates erinevaid termineid. Eesti keelde tõlgitud raamatus „Spetsiifilised õpiraskused“ on autor Diana Hudson pühendanud ühe peatüki düskalkuuliale. Hudson (2019) järgi väljendub düskalkuulia raskustes loendamises ja aritmeetikas (liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine), samas kui üldine intelligentsitase vastab normile. Kuna vilumus aritmeetikas mängib olulist rolli matemaatika omandamises, mõjutab düskalkuulia laiemalt ka teiste matemaatiliste oskuste omandamist. Siinkohal on aga oluline rõhutada, et düskalkuulia on spetsiifiline õpiraskus ning seda mõistet ei tohiks kasutada igasuguse matemaatikas esineva raskuse kirjeldamisel (Westwood, 2004).

Rahvusvahelises haiguste klassifikatsioonis RHK-10 (Maailma Terviseorganisatsioon, 1999) on sarnaselt kirjeldatud spetsiifilist arvutamisvilumuste häiret, kuid lisatud täpsustus, et antud häire alla ei kuulu algebra, trigonomeetria ja integraalarvutuste raskused. Samuti rõhutatakse, et häire ei ole tingitud mitteadekvaatsest õpetamisest, psüühilistest või neuroloogiliste funktsioonide defektidest. Uuenenud klassifikatsioon ICD-11 (*International Classification of Diseases 11th Revision*) pakub aga ka düskalkuulia definitsiooni, mille järgi on häirunud lihtsate matemaatiliste arvutuste sooritamise õigsus vaatamata üldisele heale intellekti tasemele (World Health Organization, 2022).

Eesti haridusteadlaste poolt publitseeritud hariduslike erivajaduste temaatikat käsitlevates kirjutistes räägitakse üldiselt õpiraskustest matemaatikas, mis hõlmab ka juba eelnevalt nimetatud raskuseid matemaatika õppimisel: arvu ja hulga seostamine, loendamine, põhitehete sooritamine, matemaatilise keele omandamine, tekstülesannete lahendamine, reeglite ja algoritmide rakendamine, matemaatiliste teadmiste seostamine reaalse eluga, tabelite ja skeemide lugemine, arvude kirjutamine ja tehete vormistamine ning ruumis ja ajas orienteerumine (Kivirähk, 2018; lk 642-643). Sõltumata raskuste kirjeldamiseks kasutatavate mõistete paljususest on teada, et raskuseid matemaatikas põhjustavad peamiselt tunnetusprotsesside iseärasused (Cortiella & Horowitz, 2014). Järgnevalt ongi kirjeldatud taju, mälu, mõtlemise, tähelepanu ja keele arenguga seotud iseärasuste rolli matemaatiliste teadmiste omandamisel.

Taju kaudu tunnetavad inimesed esemete ja nähtuste terviklikkust, kusjuures terviku tunnetamise protsessi mõjutavad inimeste eelnevad teadmised ja kogemused, kognitiivse arengu tase ning hetkeline emotsionaalne seisund (Kikas, 2010). Matemaatika vaatenurgast on oluline roll arvutaju arengul, mis algab juba koolieelses eas. Arvutaju ehk kujutlus arvude suurustest ja omavahelistest suhetest on aluseks matemaatikaga seotud teadmiste ja oskuste omandamisele (Toll et al., 2016). Arvutaju saab omakorda jagada sümboliliseks ja mitte-sümboliliseks, kus esimene vastab kirjutatud numbritele (näiteks Araabia numbrid) ning teine mitte-numbriliselt kujutatud hulkadele. Mõlema, nii sümbolilise kui ka mitte-sümbolilise arvutaju varast arengut on seostatud matemaatika ainealaste tulemustega, kuid erinevad teadustööd on näidanud sümbolilise arvutaju puhul suuremat mõju arvude tähenduse mõistmisele ning arvude loendamisele, nimetamisele ja kirjutamisele (Toll et al., 2016). Lisaks arvutajule on matemaatikas oluline roll ka ruumi- ja ajatajul. Ruumitaju mõjutab näiteks info kogumise suunda (nt vasakult paremale või paremalt vasakule), arvude kirjutamist (nt numbrite asukoht arvus) ning mustrite märkamist (nt geomeetrias, skeemide ja tabelite lugemisel). Ajataju mõjutab aga nii ajaga seotud teemade õppimist (nt kell, kalender) kui ka aja jälgimist päriselus (nt tundi jõudmine õigeaegselt) (Westwood, 2004).

Mälu protsesside alla kuuluvad meeldejätmine, säilitamine ja meenutamine ning inimesed võivad infot mälus hoida kas lühi- või pikaajaliselt (vastavalt töömälu ja pikaajaline mälu) (Kikas, 2010). Mälu iseärasused väljenduvad matemaatikas mõlema mäluliigi kaudu. Põhitehete (liitmise, lahutamise, korrutamise, jagamise) sooritamisel tehtud vigade puhul on leitud seos õpilaste väikese töömälu mahuga (Toll et al., 2011; Toll et al., 2016). Töömälu roll on hoida manipuleeritavate hulkade kohta infot mälus, lisades samal ajal uut infot. Eelkooliealised lapsed seostavad arve ja hulki eelkõige ruumiliste kujunditega ehk kasutavad visuaalset töömälu, mille toel kujuneb omakorda verbaalne töömälu (Toll et al., 2016). Pikaajalise mälu puudujääkidest on aga mõjutatud kogu matemaatika ainealane sisu, mis eeldab reeglite, valemite, algoritmide ja varem õpitud oskuste meenutamist, kasutamist ja seostamist. Mida klass edasi, seda rohkem peab õpilane mäletama ja meenutama eelnevalt õpitut. Matemaatika õpiraskuste puhul võib õpilane kontseptsioonist aru saada, kuid ei mäleta lahenduseni jõudmiseks vajaminevaid samme ja nende järjekorda (Impecoven-Lind & Foegen, 2010). Õpiraskustega õpilaste jaoks on rasked ka sellised ülesanded, mis eeldavad mitme erineva teema meenutamist ja koos kasutamist (Miller & Mercer, 1997).

Mõtlemine tähendab oma kogemuse ja sellele vastava tegevuse seesmist organiseerimist, seostades ja eristades oma olemasolevaid ja uusi teadmisi (Kikas, 2010). Matemaatika olemust võib käsitleda kui pidevat probleemide lahendamist, mis eeldab aktiivset mõtlemisprotsessi. Kriitiline mõtlemine on üks komponentidest, mis mõjutab ülesannete mõistmist, seostamist reaalse eluga, sisu analüüsimist, lahendusstrateegia valimist ning ülesande lahendamist (Aini et al., 2019). Lisaks kriitilisele mõtlemisele tuleb siinkohal mängu ka loogiline mõtlemine, mis eeldab seoste loomist varasema ja uue teadmise vahel. Loogiline mõtlemine saab toimuda läbi keeleliste sõnade ja lausete mis ühendavad ühte mõtet teisega (Clarkson, 2003). Oma lahenduskäigu hindamine kriitilise ja loogilise mõtlemise kaudu mõjutab suuresti just tekstülesannete lahendamist. Viimaseks mõtlemise komponendiks, mis on seotud ka matemaatika omandamisega, on metakognitsioon ehk enda õppimise mõtestamine ja kontrollimine (Kikas, 2010). Matemaatika vaatenurgast on metakognitsioon seotud lahendusstrateegiate valikuga, mis kiirendaksid ja lihtsustaksid lahenduseni jõudmist ning enda tegevuse monitoorimise ja parandamisega (Schneider & Artelt, 2010). Õpiraskustega õpilaste jaoks on aga keeruline erinevate strateegiate ülekandmine uude olukorda, lahenduskäiguks vajalike sammude planeerimine ja nende täitmise jälgimine. Seetõttu võib tihti juhtuda, et õpiraskustega õpilane jätab mõne olulise sammu vahele või ei saa aru, et lahendus pole loogiline (Gagnon & Maccini, 2007).

Tähelepanu mõjutab matemaatika õppimist samamoodi nagu kogu õppimisprotsessi üldiselt. Tähelepanu on teadvuse suunamine mingile konkreetsele objektile, mis antud ajahetkel omab inimese jaoks tähtsust (Aru & Bachmann, 2009). Tähelepanu puhul saame rääkida tahtmatust ja tahtlikust tähelepanust. Tahtmatu tähelepanu aktiveerub ootamatu ja uudse välise stiimuli mõjul. Tahtlikku tähelepanu on aga inimesel võimalik juhtida ning seeläbi vältida ebaolulisi faktoreid (Kikas, 2010). Oskus oma tähelepanu tahtlikult suunata on oluline näiteks numbrite ja sümbolite ärakirja tehes või järguületamisega tehetes jätta meelde ja laenata. Kui tähelepanu on häiritud, ilmneb numbrite valesti lugemine või vahele jätmine, valede sümbolite kasutamine või ka näiteks komakoha valesti märkimine (Westwood, 2004). Õpiraskustega õpilaste jaoks on väljakutseks oma tähelepanu suunamine, et selekteerida kõige olulisem info (Gagnon & Maccini, 2007).

Matemaatiline keel koosneb sümbolitest ning matemaatilistest terminitest. Õpilased, kellel on lugemis- ja kirjutamisraskus, võivad ka matemaatikas teha palju vigu - näiteks tööjuhiste ja tekstülesannete lugemisel ja mõistmisel (Wadlington & Wadlington, 2008). Keeleline areng on seotud ka skeemide ja diagrammide lugemisega, tõenäosusteooriate käsitlemisega ning geomeetriaga. Keelt tuleb aga kasutada ka oma teadmiste meenutamisel ja lahenduseks vajalike sammude sõnastamisel (Miller & Mercer, 1997). Longituuduuringu tulemusel on aga leitud, et kõige vähem mõjutab keeleline areng aritmeetika ja algebra omandamist (Vukovic & Lesaux, 2013).

Raskused matemaatikas võivad aga ilmneda lisaks eelnimetatule ka õpetamiskvaliteedi languse tõttu, käitumisest tingitult, ärevuse tulemusena või tundidest puudumise tõttu (Butterworth, 2005). Seetõttu on matemaatikaga seotud õpiraskuste identifitseerimine väga keeruline. Õpetamiskvaliteedi puhul on näiteks leitud, et õpiraskuste ilmnemist võivad mõjutada järgmised faktorid: ebapiisav aeg harjutamiseks, arusaamatud tööjuhised, liiga vähe näidiseid või koos tegemist, vähe tagasisidet, ebasobiv õppematerjal, liiga keeruline keelekasutus õpetaja poolt ning liiga vähe varasemate teemade kordamist (Westwood, 2004). Vigade tegemine ja pidev negatiivne tagasiside võivad õpilases tekitada ärevust, hirmu, madalat enesehinnangut ja tundidest puudumist, mis omakorda võimendab raskuste ilmnemist (Kivirähk, 2018). Selleks, et õpilane alla andmise asemel hoopis õpiks oma vigadest, peab tal olema motivatsioon ja valmisolek vigasid analüüsida (Westwood, 2004).

2.2. Enamlevinud raskused algebra õppimisel ja nende ületamine

Algebra on matemaatikaharu, mis tegeleb arvude ja muutujatega ning nendevaheliste seostega. Algebralise avaldistega tegelemine nõuab aga teatud määral abstraktset mõtlemist, kuna tähtedega tähistatud muutujad on õppija jaoks tundmatud ning võivad erinevates olukordades kanda erinevaid väärtusi (Witzel et al., 2003). Kui Eesti õpilased teevad abstraktse algebraga tutvust juba I kooliastmes, siis näiteks Kanadas ja Uus-Meremaal jõutakse abstraktse algebra juurde alles 5. klassis. Erinevus seisneb aga selles, et näiteks Kanadas tegeletakse alates 1. klassist aktiivselt algebra mõtteviisi arendamisega näitlikustamise ja materialiseerimise kaudu (näiteks kaalukausside võrdsustamine), kuid tähte veel avaldistes ei kasutata (Jukk et al., 2013). Eestis suureneb algebra osakaal eelkõige III kooliastmes, kui 7. klass alustab ühe tundmatuga lineaarvõrrandite lahendamist (näiteks $3x + 2 = x + 8$). Vastavalt laialdaselt kasutusel olevatele matemaatikaõpikutele (näiteks Kaldmäe et al., 2015a), tehakse 7. klassi lõpus tutvust üksliikmega ja üksliikme kordajaga. Õpilased saavad teadlikuks uutest reeglitest, näiteks, et kordaja *1* puhul jäetakse see kirjutamata (näiteks xy või $-xy$). 8. klass alustab aga hulkliikmete teemaga. Õpilased liidavad ja lahutavad hulkliikmeid, korrutavad ja jagavad hulkliikmeid üksliikmega, korrutavad hulkliikmeid hulkliikmetega, korrastavad hulkliikmeid, arvutavad selle väärtuse, rakendavad valemeid ja tegurdavad ühise teguri sulgustest väljatoomise teel (Kaldmäe et al., 2015b; Põhikooli riiklik õppekava, 2011; Haavasalu, 2010).

Oma abstraktse olemuse tõttu valmistab algebra õppimine aga paljudele õpilastele raskusi (Witzel et al., 2003). Õpilased on harjunud aritmeetikas kasutusel olevate sümbolitega, kuid algebra õppimisel lisanduvad uued, muutujaid tähistavad tähed. See tähendab, et õpilased peavad hakkama aritmeetiliste tehete asemel ära tundma ja mõtestama hoopiski algebralist struktuuri. Kuna algebra teemade osakaal suureneb just III kooliastmes, eeldavad õpetajad õpilastelt abstraktset mõtlemist ning keskenduvad pigem oskuse õppimisele, vastupidiselt abstraktse matemaatika mõistmisele. Õpiraskustega õpilastel on aga tihti lüngad just eelteadmistes, mis omakorda takistab üleminekut abstraktsele mõtlemisele (Ketterlin-Geller & Chard, 2011). Algebra olemuse mõistmine ja muutujatega tehete sooritamine eeldab ka uute reeglite omandamist. Järgnevalt on välja toodud peamised raskused, millega võivad õpiraskustega õpilased silmitsi seista algebraga tutvumisel:

1) Muutujatega tähistatud tegurid *a* ja *b* pannakse kirja ilma korrutusmärgita (*ab*). Õpilased võivad sellist üksliiget lugeda kui „*a* ja *b*“ ehk „$a + b$“ (Tall & Thomas, 1991). Lisaks sellele peavad õpilased hakkama *a korda b* asemel ütlema lihtsalt *ab*, mis omakorda takistab nähtamatu korrutusmärgi kinnistamist (Freudenthal, 1983).
2) Sümbolid + ja - ei tähenda enam ainult liitmise ja lahutamise tegevust, vaid võivad olla arvu enda osa, defineerides positiivsed ja negatiivsed arvud (näiteks $-7x + (-3y) + 5x$ on sama nagu $(-3y) + (-7x) + 5x$ ja $5x + (-7x) + (-3y)$. Lisaks sellele muutub plussmärgi tähendus – kui harilike murdude liitmisel on $2 + ½ = 2 ½$ siis algebras $2 + x$ ei võrdu väärtusega $2x$. Arvu ja muutuja korrutise interpreteerimine summana on aga üldlevinud väärarusaam algebra õppimisel (Booth, 1988; Kieran, 1992).
3) Võrdusmärgi tähenduse laienemine märguandelt „*arvuta*“ võrdväärsuse tähistamisele (Molina & Ambrose, 2008). Aritmeetikas püstitatud ülesannetes on võrdusmärgi järel tühjus, mis suunab õpilasi vasakul pool olevat avaldist arvutama ning vastust paremale poole kirjutama (näiteks $2 + 3 = ...$). Algebras omandab aga võrdusmärk vasaku ja parema poole võrdväärsuse tähenduse. Lisaks sellele on õpilaste jaoks keeruline mõista avaldist, kus muutuja asub mõlemal pool võrdusmärki (näiteks $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$, võrreldes tavapärase aritmeetilist tehet meenutava avaldisega (näiteks $2a + 3 = 15$) (Herscovics & Linchevski, 1994).
4) Avaldiste vastused ei näe enam vastuste moodi välja (Tall & Thomas, 1991). Näiteks avaldise $7a - 4a - 5$ vastus on $3a - 5$, kuid õpilase jaoks võib tunduda, et see pole ikka veel lõppvastus. Sellest tulenevalt võib õpilane vastuseks kirjutada näiteks $-2a$ või $-15a$, mis tähendab aga algebra reeglite vastu eksimist (Booth, 1988).
5) Aritmeetikast tuntud tehteid ei käsitleta enam kui arvutamist, vaid objekti (Kieran, 1992). Aritmeetikast lähtuvalt tähendab $a + 2$ tehet, kus muutujale *a* tuleb juurde lisada arv *2*. Algebras võib aga $a + 2$ tähistada lisaks ka eraldiseisvat objekti ehk summat.

Algebra õppimine on õpiraskustega õpilaste puhul võimalik, kui seda õigesti toetada (Maccini et al., 1999). Impecoven-Lind ja Foegen (2010) on erinevate kirjanduse ülevaadete põhjal rõhutanud kolme tõenduspõhist sekkumist, mis võivad edukalt toetada algebra õppimist: paaristöö üksteise õpetamiseks õpilase õpetamine klassikaaslase poolt (*classwide peer tutoring*), õpistrateegiate õpetamine (*cognitive strategy instruction*) ning abistavate küsimuste küsimine (*explicit inquiry routine*). Paaristöö võimaldab õpilastel üksteist õpetada, parandada ja aidata ning on efektiivseks meetodiks olukordades, kus klassis on palju õpilasi ning õpetaja ei jõua kõikide õpilastega individuaalselt tegeleda. Õpetaja ülesanne on sealjuures luua enne õppetöö algust materjalid, mida õpilased saaksid paaristöös kasutada, kaasa arvatud vastuste lehed nõrgemale õpilasele kaaslase vastuste kontrollimiseks (Kunsch et al., 2007). Õpistrateegiate õpetamine tähendab kognitiivsete ja metakognitiivsete oskuste sammhaaval juhendamist õppimisprotsessi ajal. Õpiraskustega lastel on üldjuhul madalad õpioskused, mistõttu kasutavad nad õppimisel ebaefektiivseid strateegiaid ega kasuta enda eneseregulatsiooni potentsiaali (Impecoven-Lind & Foegen, 2010). Hutchinson (1993) on näiteks välja töötanud õpistrateegiate õpetamise formaadi just algebra õppimiseks tekstülesannete kontekstis, mis toetub küsimuste küsimisele. Eestis kasutatakse küsimuste asemel ka algoritme, mis jagavad ühe lahenduskäigu osadeks ehk konkreetseteks sammudeks, mida järgides jõuavad õpilased vastuseni (Kivirähk, 2018). Abistavate küsimuste küsimine toetab aga matemaatilise keele arengut, kuna õpilastelt oodatakse lahenduskäigu kohta selgitusi (Impecoven-Lind & Foegen, 2010). Kui alguses on uue teema puhul õpetajal suurem roll küsimusi küsides, siis hiljem hakkavad õpilased üksteist küsitlema, jõudes lõpuks selleni, et nad oskavad saata oma individuaalset tegevust kõnega (Scheuermann et al., 2009).

2.3. Õppematerjalide koostamine õpiraskustega õpilastele

Eelnimetatud strateegiate rakendamine eeldab aga mitmekülgse ja metoodiliselt sobiva õppematerjali olemasolu (Maccini et al., 1999; Watson & Ohtani, 2015). Määruse „Õppekirjandusele esitatavad nõuded...“ (2016) järgi on õppekirjanduse ehk õpikute või ülesannete kogu aluseks põhikooli riiklik õppekava. Õppekirjanduses esitatav teave peab seaduse järgi olema metoodiliselt otstarbekas ning toetama iseseisva õppimisvõime kujunemist. Tekstid peavad olema koostatud korrektses ning eakohases keeles, lisades vajadusel mõistete selgitusi.

Õpiraskustega õpilaste õppematerjalid peavad lisaks eelnimetatule vastama korraga nii ainealastele nõuetele kui ka eripedagoogilistele üldpõhimõtetele (Plado, 2005).

Õpiraskustega õpilastele võivad sobivaks õppematerjaliks olla näiteks töölehed ja vihjekaardid (*cue cards*). Vihjekaarte kasutatakse struktureeritud probleemilahendusoskuse õpetamiseks. Kaartidel on esitatud konkreetsed sammud, mida õpilasel tuleb ülesande lahendamisel järgida. Eesti kontekstis nimetatakse vihjekaartidega sarnast abimaterjali raudvaraks (Kivirähk, 2018). Raudvara võib koguda vihikusse (näiteks õpilane kirjutab ise või kleebib välja prinditud materjali), kust õpilane leiab alati üles vajalikud samm-sammulised juhised, sümbolid ja reeglid. Raudvaravihiku loomine eeldab õpetaja tuge selle koostamisel ja kasutama õppimisel. Teine oluline aspekt erinevate strateegiate edukaks kasutamiseks on jõukohaste töölehtede valimine ja koostamine. Õpetaja peab sealjuures suutma märgata, kui õpikute ja töövihikute sisu on õpiraskustega õpilase jaoks liiga raske (Wadlington & Wadlington, 2008). Õpilane võib vajada abi ka õpiabi tundidest, kus õpitakse diferentseeritud materjalidega ning õpitakse kasutama abimaterjale, sealhulgas raudvara vihikut. Raudvara on materjal, mida õpilane saab kasutada teema õppimisel ja meelde tuletamisel. Raudvara võib sisaldada olulisemaid valemeid ja reegleid, samuti algoritmilisi juhendeid ning teemakohaseid näiteid (Kivirähk, 2018).

Hea õppematerjal toetab õpieesmärkide saavutamist ja on õpilastele jõukohane, pakkudes piisavalt erinevaid ülesandeid teema harjutamiseks ja omandamiseks. Õpiraskustega õpilastele õppematerjali koostamisel tuleb arvesse võtta asjaolu, et õppijal võib olla piiratud töömälu maht (Plado, 2005), mistõttu tuleb ülesannete koostamisel läbi mõelda osategevuste arv (näiteks matemaatika puhul meeldejätmist eeldatavate objektide arv tehtes). Metakognitiivsete oskuste kujunemist saab toetada selliste ülesannete kaudu, mis nõuavad õppimise kavandamist ning sammhaaval oma tegevuse jälgimist (Griffith & Ruan, 2005). Õpiraskustega õpilaste jaoks loodud õppematerjali puhul on aga oluline, et õppematerjal aitaks õpet diferentseerida (Plado, 2005; Watson & Ohtani, 2015). Selleks peavad õppematerjalis sisalduvad tekstid ja ülesanded olema mitmekesised, varieerides teadmiste ja oskuste taset (Plado, 2005).

Õpiraskustega õpilastele mõeldud õppematerjalides olev tekst peab olema lihtne, kasutades pigem lühikesi lauseid ja vähem keerulisi grammatilisi vorme (Plado, 2005). Erialaterminite ja sümbolite puhul tuleks arvestada, et need võivad vajada definitsiooni. Üks enimlevinud viise uute sõnade selgitamiseks on õppematerjali lõpus olev sõnastik, kuid Plado (2005) arvates ei ole sõnade alfabeetiline otsimine õpiraskustega õpilaste jaoks alati jõukohane.

Õpiraskustega õpilane peaks esmalt tutvuma terminiga seotud oluliste tunnustega ning alles seejärel omandama selle nimetuse. Samuti tuleks vältida sünonüüme ja kasutada läbivalt samu termineid, et kinnistuks arusaam termini tähendusest.

Õpiraskustega õpilastele mõeldud õppematerjali koostamisel tuleb tähelepanu pöörata ka materjali kujundusele ja vormistusele. Õpilase taju aitab suunata suurem kiri ja reavahe, lugemist toetav kirjastiil, info liigendamine ja läbimõeldud paigutus (Plado, 2005). Lugemisel tekkivaid raskuseid aitab leevendada *sans serif* kirjastiilid (näiteks *Arial* või *Verdana*), kuna need stiilid ei pikenda tähtede nurki joontega ja tähekujud on disainitud pigem ümmargusel kujul (Rello & Baeza-Yates, 2013). Lugemist lihtsustab ka see, kui lause on paigutatud ühele reale. Kindlasti tuleks vältida sõnade poolitamist. Õpilaste tähelepanu eesmärgipäraseks suunamiseks ja õppematerjalis orienteerumiseks on soovitatud õppematerjali kujunduses kasutada taustaefekte ehk raame või täidisvärve (Cuoco, 2001). Algebra õppimise ja õppeülesannete disainimise kohta läbi viidud uuringud on näidanud, et just värvide kasutamine visuaalseteks vihjeteks aitab õpilastel leida mustreid, luua seoseid ning jätta meelde lahenduskäigu erinevaid osi (Watson & Thompson, 2015). Õpilase tähelepanu suunamiseks ja seoste visualiseerimiseks võib kasutada ka skeeme (Plado, 2005).

Vähem tähtis ei ole ka õpilaste motivatsiooni toetamine. Õpiraskustega õpilased kogevad õppimisega seoses tihti negatiivseid emotsioone, mistõttu on äärmiselt oluline koostada jõukohased ülesandeid nii, et ka õpiraskustega õpilased kogeksid edutunnet. Õpimotivatsiooni toetamiseks on oluline rakendada samm-sammulist õpetamist, kus korraga käsitletakse ühte oskust ning mille omandamisel lisatakse järgmine (Kivirähk, 2018). Osatoimingute kindlas järjekorras sooritamist nimetatakse algoritmiks ehk võimalikult täpseks ja konkreetseks juhendiks. Algoritmid võivad olla esitatud nii tekstina, skeemina kui ka sümbolitena (Karlep, 2019).

Matemaatika kontekstis tuleks mõelda ka arvandmete jõukohasusele ehk millises arvuvallas suudab õpilane tehetega opereerida. Kui naturaalarvude tundmaõppimine ja nendega tehete sooritamine on pigem jõukohane, siis ratsionaalarvudega toimetamine võib õpilastele palju raskusi valmistada (Mädamürk, 2018). Raskused nelja aritmeetilise tehte sooritamisel ja nende seoste mõistmisel võivad aga algebra teadmiste omandamise peaaegu võimatuks teha (Ketterlin-Geller & Chard, 2011). Seetõttu on oluline, et uue teema õppimisel oleks õpiraskustega õpilase puhul arvestatud temale jõukohase arvuvallaga (Shaw, 2022).

2.4. Töö eesmärk ja uurimisküsimused

Tulenevalt asjaolust, et Eesti kontekstis ei ole avaldatud III kooliastme algebra õpiabi materjale, on käesoleva magistritöö eesmärgiks koostada ning hinnata matemaatika õpiabi raudvara- ja töölehtede komplekti hulkliikmete teemal. Tööle on püstitatud kaks uurimisküsimust:

1) Milliseid ettepanekuid teevad eksperdid raudvara- ja töölehtede täiendamiseks?
2) Kuidas kirjeldavad eksperdid oma kogemusi raudvara- ja töölehtede kasutamisel õpilaste õppimisest lähtuvalt?

3. Metoodika

Käesolev magistritöö on läbi viidud arendusuuringuna. Arendusuuringu raames disainitud ja hinnatud objekti peab olema võimalik koolisüsteemis praktiliselt rakendada, mistõttu eeldab arendusuuringu läbiviimine uurijate ja praktikute omavahelist head koostööd (Anderson & Shattuck, 2012). Magistritöö raames välja töötatud õppematerjali hindamiseks on kasutatud Delphi meetodit ekspertidelt tagasiside kogumiseks ja õppematerjali täiustamiseks (Fink-Hafner et al., 2019). Delphi meetod keskendub ekspertide vahelise konsensuse saavutamisele, mistõttu ei piisa ühekordsest hindamisest. Andmekogumise käigus saadud tagasiside on oma sisult kvalitatiivne, kuid konsensuse osamäära arvutamiseks rakendatakse ka kvantitatiivset lähenemist. Ekspertide arv ei ole Delphi meetodit kasutades ette kirjutatud, sellest olulisem on ekspertide kompetentsus küsimuse all oleva nähtuse hindamiseks ning omavaheline anonüümsus (Lilja et al., 2011).

3.1. Valim

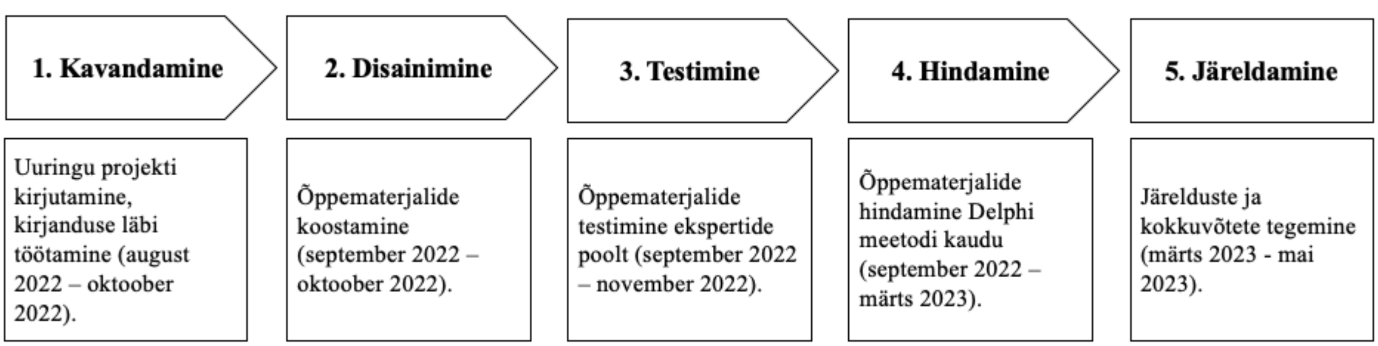
Töö valimi moodustasid neli eripedagoogi ja kaks õpiabiõpetajat (edaspidi: eksperdid). Valim moodustati esmalt sihipärase valimi põhimõtetel ehk uurijapoolsete teadmiste põhjal teatud grupi kohta. Antud juhul oli grupiks Eesti Eripedagoogide Liidu liikmed, kes eeldatavasti on eripedagoogilise ettevalmistusega spetsialistid ning keda kutsuti uuringusse listikirja kaudu. Lisaks eripedagoogilistele kompetentsidele oli uuringus osalemise tingimuseks kogemuste omamine III kooliastme matemaatika õpetamisel ning III kooliastme matemaatika õpetamine uuringu läbiviimise ajal. Huvi uuringus osalemiseks näitasid esmalt neli eripedagoogi ja üks õpiabiõpetaja, kuid üks eripedagoog langes lõpuks valimist välja tegevusetuse tõttu. Lisaks sihipärasele valimile kasutati ka mugavusvalimit, mille tulemusena kutsus uurija isiklikke kontakte kasutades uuringus osalema ühe eripedagoogi ja ühe õpiabiõpetaja, kes vastasid seatud kriteeriumitele.

Kaks uuringus osalenud eripedagoogi olid lõpetanud Tartu Ülikooli eripedagoogika ja logopeedia magistriõppe eriala ning kaks eripedagoogi Tallinna Ülikooli eripedagoog-nõustaja magistriõppe eriala. Üks õpiabiõpetaja oli lõpetanud Tartu Ülikooli eripedagoogika bakalaureuseõppe ning läbinud kõik õppeained eripedagoogika ja logopeedia magistriõppe erialal. Teine õpiabiõpetaja oli matemaatikaõpetaja, kes on läbinud Tartu Ülikooli õpiabiõpetaja täiendkoolituse. Kahel eksperdil oli erialast töökogemust üle 20 aasta (sellest III kooliastme matemaatika õpetamine 19 ja 10 aastat), kahel eksperdil vahemikus 10-20 aastat (sellest III kooliastme matemaatika õpetamine 14 ja 12 aastat) ning kahel eksperdil 5-10 aastat (sellest III kooliastme matemaatika õpetamine 8 ja 6 aastat).

Valimist väljalangemise vältimiseks said kaks eksperti võimaluse anda õppematerjalile tagasisidet vabas vormis e-kirja teel, kuna see oli nende endi soov, samas kui ülejäänud eksperdid täitsid ära uurija edastatud küsimustikud. Täpsem info selle kohta, millistele raudvara- ja töölehtedele millised eksperdid tagasisidet andsid, on esitatud Lisas 1. Ekspertidel oli enne tagasiside andmist võimalus välja töötatud õppematerjale kasutada oma töös õpilastega, kui see antud ajahetkel võimalik oli. Uuringus osalemine ja õppematerjalide kasutamine õppetöös oli vabatahtlik.

3.2. Protseduur

Käesolevas töös viidi läbi viie-etapiline arendusuuring (joonis 1), mille etapid võivad ajaliselt omavahel kattuda (Scott et al., 2020).



Joonis 1. Läbiviidu arendusuuringu etapid ja ajakava.

Arendusuuringu esimene etapp hõlmas probleemi identifitseerimist, toetudes erialasele kirjandusele. Esimese etapi tulemusel valmis uuringu projekt, mis sisaldas endas esmast teoreetilist ülevaadet, eesmärki ja uurimisküsimusi ning uuringu läbiviimiseks vajalikku tegevusplaani. Esimene etapp kattus osaliselt teise etapiga ehk õppematerjalide disainimisega. Arendusuuringu teine, kolmas ja neljas etapp on järgnevates alapeatükkides detailsemalt lahti kirjutatud, et anda ülevaade iga etapi tegevustest ja uuringus kasutatud meetoditest. Arendusuuringu viies etapp hõlmas tulemustest kokkuvõtete ja järelduste tegemist, mis on antud töös esitatud tulemuste ja arutelu peatükis.

Õppematerjali loomine

Õppematerjali sisuliseks aluseks oli Põhikooli riiklik õppekava (2011; edaspidi: PRÕK) ning seal sätestatud III kooliastme õpitulemused matemaatika ainevaldkonnas algebra teema raames. Disainimise etapi eesmärgiks oli luua raudvara- ja töölehtede komplekt 8. klassi hulkliikmete teemal, mis võtaks arvesse õpiraskustega õpilaste õppimise eripärasid. Teadaolevalt ei ole Eestis sarnast õppematerjali varasemalt loodud. Võttes aluseks Avita matemaatika õpiku 2. peatüki („Hulkliikmed“) teemade järjestuse ja jaotuse (Kaldmäe et al., 2015b), jagunes lõplik õppematerjal 15 erinevaks teemaks (Lisa 2). Iga teema kohta koostati üks raudvaraleht ning harjutustega tööleht (kokku kogu õppematerjal 55 lehekülge).

Raudvara- ja töölehtede koostamisel võeti arvesse alapeatükis 1.3. kirjeldatud põhimõtteid õppematerjali koostamisest õpiraskustega õpilastele, samuti lähtuti varasematest teadusuuringutest matemaatika õpiraskuste teemal ning algebra eripäradest üldiselt. Iga koostatud raudvaraleht sisaldab teema nimetust, algoritmilist juhist ning erinevaid näiteid. Mõningatel juhtudel on eraldi kastikestes või erksavärvilise kirjana meelde tuletatud ja rõhutatud varasemalt õpitud reegleid. Osadel raudvaralehtedel on eraldi kastis toodud välja „Nähtamatu matemaatika“, mis selgitab teatud matemaatilisi protsesse, mille jaoks ei kasutata kirjapandud sümboleid. Töölehtedel on aga erinevad ülesanded, mille kaudu saavad õpilased teemat harjutada. Iga tööleht on üles ehitatud nii, et õpilane saaks harjutada algoritmilises juhendis olevaid samme kas eraldi või teineteisele järgnevalt. Olenevalt sellest, kas ülesanne sisaldab ühte või mitut sammu, sõltub ka ülesande raskusaste. Raskusastme indikaatoriks on ka arvuvald (sealhulgas muutujate arv ja astendajate suurus). Magistritöö raames koostatud raudvara- ja töölehed on esitatud Lisas 6.

Õppematerjali testimine

Valminud õppematerjal saadeti ekspertidele (PDF formaadis), kes said seda oma töös õpilastega kasutada, kui see võimalik oli. Hulkliikmete teemat käsitletakse üldjuhul 8. klassi alguses, mistõttu tuli ajalise piirangu tõttu testida õppematerjali esimest ehk parandamata versiooni. Õppematerjaliga õpetamiseks eraldi juhiseid ei antud - iga ekspert sai ise otsustada, kas, millal ja kuidas ta materjale õppetöös rakendab. Info selle kohta, milliseid raudvara- ja töölehti õpiabitundides kasutati, on esitatud tabelis 1.

Tabel 1. Raudvara- ja töölehtede kasutamine ekspertide seas.

Ekspert	Õpilaste	Raudvara- ja töölehe number														
	arv	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
E1	-	ei	ei	ei	ei	ei	ei	ei	ei	ei	ei	ei	ei	ei	ei	ei
E2	2	jah	jah	jah	jah	jah	jah	ei	jah	jah	jah	jah	jah	jah	ei	ei
E3	3	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah	ei	ei	ei	ei	ei	ei
E4	5	jah	jah	jah	jah	jah	ei	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah
E5	5	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah
E6	4	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah	jah	ei	ei	ei	ei

Õppematerjali testimine toimus üldjuhul väiksema rühma kontekstis (väikeklass, õpiabirühm, matemaatika ainetunni rühm) või individuaalõppena (vähendatud õpitulemuste ainetund, õpiabi). Kokku kasutas õppematerjale 19 õpilast. Ekspertide poolt antud lühikirjelduste järgi esines õppematerjali kasutanud õpilaste seas järgmisi hariduslikke erivajadusi: autismispektrihäire, ärevus ja madal õpimotivatsioon, aktiivsus- ja tähelepanuhäire, keskendumisraskused, püsiv õpiraskus ning ajutine õpiraskus.

Õppematerjali hindamine

Koostatud õppematerjali hindamine viidi läbi Delphi meetodil. Delphi meetod on protsess, mille käigus kogutakse süstemaatiliselt eksperthinnanguid ning mille eesmärgiks on ekspertide vahelise konsensuse saavutamine. Delphi meetodi abil saab andmeid koguda elektrooniliselt, ilma, et ekspertgrupi liikmed omavahel kohtuksid. Väga oluline on, et eksperdid oleksid anonüümsed, et mitte mõjutada üksteise vastuseid. Käesolevas magistritöös läbiti õppematerjali hindamisel ehk andmete kogumisel järgmised Delphi meetodi etapid:

A. Eksperdid kasutasid õppematerjali 1. versiooni oma töös õpilastega.
B. Eksperdid andsid õppematerjalile tagasisidet (1. ring).

C. Töö autor analüüsis saadud tagasisidet ja viis õppematerjali sisse muudatusi (2. versioon).

D. Eksperdid andsid õppematerjalile tagasisidet (2. ring).

E. Töö autor analüüsis saadud tagasisidet ja viis õppematerjali sisse muudatusi (3. versioon).

Eksperdid andsid tagasisidet elektroonilise küsimustiku kaudu (Lisa 3). Igale raudvara- ja töölehe komplektile vastas üks küsimustik ehk kokku tuli ekspertidel ühe tagasisideringi jooksul täita 15 küsimustikku. Tagasisidet küsiti kuue aspekti raames: 1) raudvara sõnastus; 2) raudvaras esitatud näited; 3) raudvara kujundus ja kasutamislihtsus; 4) töölehe tööjuhiste sõnastus; 5) töölehe ülesannete samm-sammuline raskusastme muutus; ning 6) töölehe kujundus ja kasutamislihtsus. Küsimustikus tuli ekspertidel iga aspekti kohta märkida, kas „sobib nii, nagu on“ või „vajab muudatusi“. Viimase puhul said eksperdid lisada oma tagasiside ja muudatusettepanekud. Tagasiside 1. ringi küsimustike lõpus oli küsimus selle kohta, kas eksperdid kasutasid töölehte oma õpiabi tundides ning kuidas nad kommenteeriksid töölehti õpilase õppimise seisukohast. Kõige viimasena oli ekspertidel võimalus soovi korral kirjutada vabas vormis kommentaare. Pärast 1. ringi tagasisidet analüüsiti saadud andmeid ning õppematerjalidesse viidi sisse soovitatud muudatused. Küsimuste korral konsulteeris töö autor ülikoolipoolse juhendajaga.

Tagasiside 2. ringil jäid iga raudvara- ja töölehe puhul hindamisele alles vaid need aspektid, mille osas soovitas vähemalt üks ekspertidest muudatusi. Lisaks sellele oli 2. ringi küsimustikes iga hinnatava aspekti puhul kirjeldatud, milliseid muudatusi õppematerjalide täiustamisel rakendati. Õpilaste õppimise kohta 2. ringil enam ei küsitud, kuna eksperdid loodud õppematerjali rohkem oma töös ei kasutanud. Pärast 2. ringi tagasisidet analüüsiti taas saadud andmeid ning parandati õppematerjale vastavalt ekspertide ettepanekutele.

Delphi meetodi üheks väljakutseks on osalejate motiveerimine mitmes tagasisideringis osalemiseks (Fink-Hafner, 2019). Tagasiside andmine ja hinnatavasse materjali süvenemine on pigem aeganõudev, mistõttu võivad eksperdid uuringu ajal kaotada huvi selles osalemiseks. Selleks, et antud väljakutset ületada, püüti käesoleva uuringu läbiviimisel hoida ekspertidega pidevat kontakti ja vajadusel teha kohandusi, milleks oli näiteks küsimustiku täitmise asemel vabas vormis kommentaaride saatmine e-kirja teel. Nende kohanduste tulemusel võeti vabas vormis kirjutatud vastuseid arvesse vaid kvalitatiivse tagasisidena ega arvestatud konsensuse määramisel. Väikeselt grupilt ekspertidelt saadud tagasiside on oma olemuselt kvalitatiivne andmestik, mistõttu ei ole võimalik tulemusi ülejäänud populatsioonile üldistada. Delphi meetodil kogutud tulemuste usaldusväärsust mõjutab aga kaks faktorit: ekspertide võimalikud eriarvamused ning konsensuse piirmäär. Nimelt ei ole teadlased kokku leppinud kindlat reeglit selles osas, kui suur peaks olema ekspertide vaheline nõustumise protsent, varieerudes 51% ja 100% vahel.

3.3. Andmeanalüüs

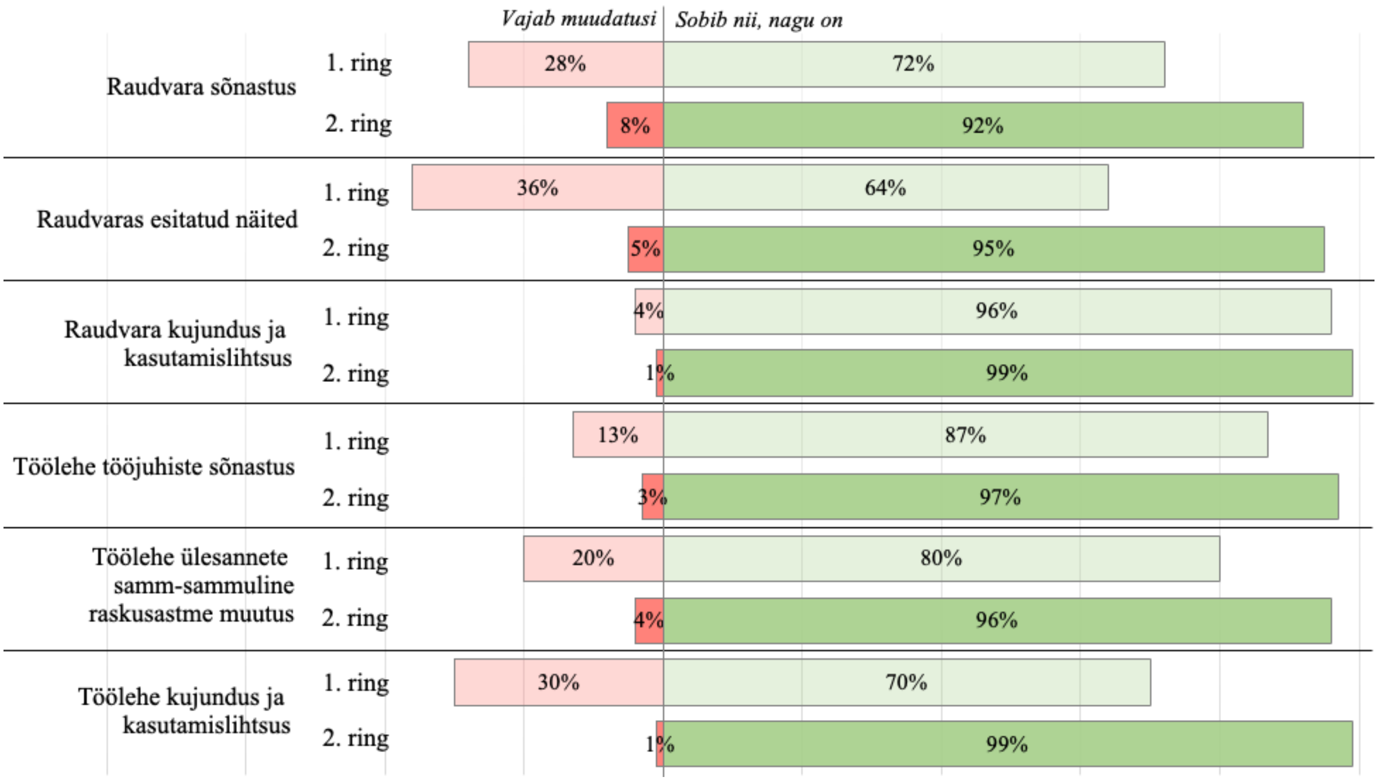
Delphi 1. ringi järgselt loodi andmetabel, kuhu sisestati iga 15 raudvara- ja töölehe ning iga kuue hinnatava aspekti puhul ekspertide hinnangute koguarv („sobib nii, nagu on“ või „vajab muudatusi“). Lisaks sellele arvutati nõustumise ehk konsensuse protsent. Sama tabelit täiendati pärast Delphi 2. ringi. Delphi 2. ringil saadud tulemused ühendati 1. ringi tulemustega nende raudavara- ja töölehtede aspektide osas, mis saavutasid juba 1. ringil 100% konsensuse ning mille osas 2. ringil enam tagasisidet ei küsitud. Järgmisena leiti hindajate vaheline usaldusväärsus, kasutades Fleiss kappa näitajat. Fleiss kappa võimaldab statistilise analüüsi tulemusena määrata hindajate vahelist usaldusväärsust juhul, kui hindajaid on rohkem kui kaks, tunnused on kategoriaalsed ning hindajad on oma hinnangud märkinud üksteisest sõltumata (Fleiss, 1971). Fleiss kappa näitaja võib varieeruda –1 ja +1 vahel. Negatiivne kappa väärtus tähendab, et hindajate vaheline nõustumine oli juhuslik. Positiivne kappa väärtus väljendab aga nõustumise määra, mis võib esineda ka ilma juhuseta. Mida suurem on kappa väärtus, seda sarnasemad on ekspertide hinnangud. Fleiss kappa analüüs viidi läbi IBM SPSS andmeanalüüsi tarkvara abil. Käesolevas töös varieerusid Fleiss kappa väärtused kuue hinnatava aspekti raames väärtuste -0,103 ja 0,187 vahel (Lisa 4). Võttes kokku kõik 1. ringi hinnangud, oli Fleiss kappa väärtuseks 0,166, väljendades väga madalat omavahelist nõustumismäära. 2. ringi hinnangute kokkuvõttev Fleiss kappa väärtus oli 0,000. Fleiss kappa madalad väärtused tulenevad asjaolust, et kuigi protsentuaalne nõustumismäär on ekspertide vahel kõrge, siis iga üksik mittenõustumine mõjutab Fleiss kappa väärtust. Käesolevas Delphi uuringus ei olnud ühtegi raudvara- ja töölehte ega hinnatavat aspekti, mille puhul oleksid absoluutselt kõik eksperdid märkinud „vajab muudatusi“, sellest tulenes ka Fleiss kappa madal väärtus.

Selleks, et saada kokkuvõttev ülevaade raudvara- ja töölehtedele antud hinnangutest 1. ja 2. ringi raames, arvutati hinnangute „sobib nii, nagu on“ ja „vajab muudatusi“ osakaal protsentides ühe hinnatava aspekti osas kõikide raudvara- ja töölehtede üleselt. Saadud protsenti kasutati ekspertide konsensuse kirjeldamiseks (1. uurimisküsimus). Teksti vormis saadud tagasiside (nii küsimustikust kui ka vabas vormis e-kirja teel) analüüsiti kvalitatiivse induktiivse sisuanalüüsi kaudu. Kvalitatiivse sisuanalüüsi eesmärgiks oli süstematiseerida ekspertide poolt välja toodud õppematerjali arendusega seotud sisu (1. uurimisküsimus), samuti ekspertide kogemuste kirjeldused õppematerjalide kasutamise kohta (2. uurimisküsimus). 1. uurimisküsimuse raames viidi kvalitatiivne induktiivne sisuanalüüs läbi iga hinnatava aspekti raames raudvara- ja töölehtede üleselt, võttes kokku nii 1. kui ka 2. ringi tagasiside. Kuna raudvaralehtede kujundus ja kasutamislihtsus saavutas juba esimesel ringil kõrge ekspertide vahelise konsensuse (96% nõustus, et „sobib nii, nagu on“) ning üksikud muudatusettepanekud viitasid vaid näpuvigadele, ei viidud antud hinnatava aspekti raames kvalitatiivset andmeanalüüsi läbi. Samuti ei analüüsitud vabas vormis antud kommentaare küsimustiku lõpus, kuna need kas kordasid varem kirjutatut või andsid üldise hinnangu (näiteks: „*Tööleht oli arusaadav.*“), mis ei andnud uut sisulist infot. Ülejäänud viie hinnatava aspekti osas eristati tagasisidest tähendust omavad lauseosad või laused, millele pandi kokkuvõttev nimetus ehk kood. Koodidest moodustati omakorda suuremad tähenduslikud üksused ehk kategooriad. Usaldusväärsuse suurendamiseks kontrollis üks uurija saadud koode ja kategooriaid ning nende nimetusi veel vähemalt kahel korral. Samamoodi analüüsiti ka 2. uurimisküsimuse vastuseid üksikküsimusele, kus eksperdid pidi kirjeldama oma kogemusi raudvara- ja töölehtede kasutamisel.

4. Tulemused ja arutelu

Käesoleva magistritöö eesmärgiks oli töötada välja ning ekspertide abil hinnata matemaatika õpiabi raudvara- ja töölehtede komplekti hulkliikmete teemal. Õppematerjali loomisel lähtuti varasematest teadusuuringutest matemaatika õpiraskuste, algebra eripärade ning õppematerjali loomise lähtepunktidest õpiraskustega õpilastele. Õppematerjale katsetasid ja hindasid kuus eksperti, kelle tagasiside põhjal parandati raudvara- ja töölehti kahel korral. Ekspertide hinnangute ning õppematerjaliga õpetamise kogemuse põhjal analüüsiti õppematerjali loomisega seotud aspekte ja kõrvutati neid olemasoleva teaduskirjandusega.

Delphi meetodil läbi viidud tagasiside tulemused on esitatud kuue tagasisidestava aspekti raames kõikide raudvara- ja töölehtede üleselt. Delphi küsimustiku esimesel ringil saavutati kõrgeim nõustumisprotsent raudvaralehtede kujunduse ja kasutamislihtsuse osas ehk ekspertide hinnanguil sobis hinnatav aspekt nii, nagu oli (nõustumisprotsent 96%; joonis 2). Kõige rohkem muudatusi vajasid aga ekspertide tagasiside põhjal raudvaras esitatud näited (nõustumisprotsent 64%), samuti raudvara sõnastus (nõustumisprotsent 72%) ning töölehtede kujundus ja kasutamislihtsus (nõustumisprotsent 70%).



Joonis 2. Delphi 1. ja 2. ringi konsensuse osakaal protsentides.

Võrreldes Delphi 1. ja 2. ringi on kõikide aspektide raames märgata nõustumisprotsendi tõusu, kus madalaimaks jäi 2. ringi järgselt raudvara sõnastus (nõustumisprotsent 92%). Peaaegu täieliku kooskõla saavutasid 2. ringil raudvara kujundus ja kasutamislihtsus (nõustumisprotsent 99%) ning töölehe kujundus ja kasutamislihtsus (nõustumisprotsent 99%).

Järgnevalt on esitatud kvalitatiivse andmeanalüüsi tulemused koos aruteluga kahe uurimisküsimuse kaupa. Esimesena on esitatud ekspertide ettepanekud raudvara- ja töölehtede parandamiseks viie hinnatava aspekti raames kahe hindamisringi kokkuvõttes. Kuues hinnatav aspekt ehk raudvara kujundus ja kasutamislihtsus on kvalitatiivsete andmete vähesuse tõttu välja jäetud. Teisena on esitatud tulemused ja arutelu selles osas, millised olid ekspertide kogemused väljatöötatud raudvara- ja töölehtede kasutamisega õpilaste õppimise seisukohast.

4.1. Ettepanekud raudvara- ja töölehtede täiendamiseks

Ekspertide tehtud ettepanekute sisuanalüüsi tulemused on esitatud kategooriate kaudu joonisel 3. Ühe hinnatava aspekti (raudvara kujundus ja kasutamislihtsus) ettepanekud ei olnud sisuliselt piisavad kvalitatiivse analüüsi läbiviimiseks, mistõttu pole antud kategooria tulemustes esitatud.

Ekspertide muudatusettepanekud				
Raudvara sõnastus	Raudvaras esitatud näited	Töölehe tööjuhiste sõnastus	Töölehe ülesannete samm-sammuline raskusastme muutus	Töölehe kujundus ja kasutamislihtsus
Juhiste täpsustamine	Erijuhtude lisamine näidetesse	Tööjuhiste lühendamine	Ette kirjutatud osade vähendamine	Punktiiri asemel ruudustiku kasutamine
Läbivalt samade terminite kasutamine	Tehtemärkide rõhutamine	Läbivalt sama terminoloogia kasutamine	Väiksema või suurema arvuvalla kasutamine	Mõttekriipsu kasutamine negatiivse arvu tähistamiseks
Reeglite kordamine	Läbivalt ühtse märkimismeetodi kasutamine	Tööjuhise seostamine ülesande ülesehitusega	Näidetes erijuhtumite kasutamine	
			Erijuhtude lisamine ülesannetesse	

Joonis 3. Ekspertide tagasiside põhjal tekkinud kategooriad viie hinnatava aspekti raames kõigi raudvara- ja töölehtede üleselt.

Raudvara sõnastus

Raudvara sõnastus vajas pärast esimest tagasisideringi 13 ning pärast teist tagasisideringi kuues raudvaralehes parandamist. Peamiselt kommenteeriti raudvaralehel olevate samm-sammuliste juhiste sõnastust, et muuta neid lühemaks ja matemaatilist sõnavara arvestades ka korrektsemaks. Ühe eksperdi sõnul on sõnastuse täpsus äärmiselt oluline, kuna õpiraskustega õpilased kalduvad täitma tööjuhist sõna sõnalt:

> *Et õpilastele tuleks meelde, milliseid liikmeid võib kokku liita, oleks parem „koonda sarnased liikmed“ või „liida sarnased korrutised“. Praegu võib minna lausliitmiseks*. (E1)

Nimetatud kommentaar oli antud avaldisele $6x^2 + 6x + 15x + 15$, mille algseks juhiseks oli „Liida saadud korrutised“ („TL10 Hulkliikmete korrutamine“). Ekspert viitas asjaolule, et õpilased võivad hakata antud juhist järgides liitma kõiki üksliikmete arvandmeid omavahel: $6 + 6 + 15 + 15$. Vältimaks olukorda, kus õpilased täidavad juhist sõna-sõnalt ning unustavad sealjuures varem õpitu ehk sarnaste liikmete koondamise reegli ära, täpsustati töölehe parandatud versioonis juhist järgnevalt: „Koonda sarnased liikmed“. Tagasiside teisel ringil sai parandatud juhis kõikide ekspertide heakskiidu. Nii kirjeldatud näide kui ka ülejäänud juhtumid, kus eksperdid pöörasid tähelepanu tööjuhise sõnastuse muutmise vajadusele, on kooskõlas ülesannete loomise põhimõtetega õpiraskustega õpilastele. Lisaks matemaatika õpiraskustele ning sellega kaasnevale terminite mittemõistmisele võivad matemaatikaülesannete tööjuhise mõistmisel vigu teha ka lugemis- ja kirjutamisraskusega õpilased (Wadlington & Wadlington, 2008).

Keele täpsus on aga oluline ka lahenduseks vajalike sammude sõnastamisel, mida õpilastel oleks võimalik hiljem meenutada ja töös rakendada (Miller & Mercer, 1997). Käesolevas töös esines „TL13 Kaksliikme summa ruut“ raudvaralehe sõnastuse puhul ka olukord, kus sama teksti tuli parandada kahel korral seoses selgitusega selle kohta, kuidas kaksliikme summa ruut tekib. Allolevas tabelis 2 on näitena toodud välja raudvaralehe kolm versiooni, ekspertide tagasiside nendele versioonidele ning näitlikustamiseks ka tehe, mis vale sõnastuse järgimisel tegelikult tekiks. Tabel illustreerib juhise täpsustamise protsessi ning rõhutab sõnastuse korrektsuse olulisust, et õpilastel oleks võimalik üheselt mõista selgitavat teksti ja selle kõrval olevat näidet.

Tabel 2. Näide juhise täpsustamise protsessist ning ebakorrektse juhise sõna-sõnalt täitmise kohta.

	Näide raudvaralehelt	Eksperdi tagasiside	Näide juhise sõna-sõnalt täitmise kohta
TL13 1. versioon	Kuidas kaksliikme summa ruut tekib? Leiame summa ruudu: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) =$ Avame sulud: $= a^2 + ab + ab + b^2 =$ Koondame sarnased liikmed: $= a^2 + 2ab + b^2$	*1. lause ei ütle mitte midagi selle kohta, mida esimesel real tehakse. Võib-olla „teeme ruudust korrutise“? 2. lause nagu TL11, võiks siin olla, et hulkliige korrutatakse või kaksliikmed korrutatakse.* (E1)	Leiame summa ruudu: $(a+b)^2 = (a+b)^2$
TL13 2. versioon	Kuidas kaksliikme summa ruut tekib? Korrutame kaksliikme ruudu iseendaga: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) =$ Korrutame hulkliikmed: $= a^2 + ab + ab + b^2 =$ Koondame sarnased liikmed: $= a^2 + 2ab + b^2$	*“Korrutame kaksliikme ruudu iseendaga“ – kui kaksliikme ruutu iseendaga korrutada, saame kaksliikme astmes neli. Äkki „Teeme kaksliikme ruudu korrutiseks“.* (E1)	Korrutame kaksliikme ruudu iseendaga: $(a+b)^2 =$ $= (a+b)^2 \cdot (a+b)^2 =$ $= (a+b)^4$
TL13 3. versioon	Kuidas kaksliikme summa ruut tekib? Teeme kaksliikme ruudu korrutiseks: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) =$ Korrutame hulkliikmed: $= a^2 + ab + ab + b^2 =$ Koondame sarnased liikmed: $= a^2 + 2ab + b^2$	-	(sama, mis raudvaralehe näites)

Lisaks sammude sõnastuse täpsustamisele pöörasid eksperdid mitmel korral tähelepanu läbivalt samade terminite kasutamisele. Tegemist oli olukordadega, kus kaks terminit on omavahel sünonüümid. Eksperdid tõid välja, et sünonüümide kasutamine võib raskendada õpiraskustega õpilaste arusaamist ning terminite meelde jätmist. Näiteks raudvaralehe „TL09 Hulkliikme tegurdamine" 1. versioonis oli kasutusel kaks sama tähendusega mõistet: „ühine tegur" ning „ühistegur". Antud juhul otsustati mõiste „ühine tegur" kasuks, et rõhutada otsitava arvu rolli sooritatavas tegevuses (tegur kui üks osa korrutisest, mida saab mõlemas üksliikmes rakendada). Läbivalt samade terminite kasutamist rõhutati ka mitme raudvara- ja töölehe üleselt. Näiteks raudvaralehes „TL10 Hulkliikmete korrutamine" on juhendatud õpilasi hulkliikmeid omavahel korrutama. Sellele järgneva raudvaralehe „TL11 Ruutude vahe valem" 1. versioonis oli aga kasutusel väljend „avame sulud". Eksperdid rõhutasid, et kuigi tegevus on sama, oleks selgem kasutada ühte läbivat väljendit. Rõhutamaks hulkliikmetega läbiviidavat tegevust, otsustati edaspidi läbivalt kasutada väljendit „korrutame hulkliikmed". Näidisülesanded koos konkreetsete sammudega toetavad õpiraskustega õpilastel algebraliste avaldiste lahendamise oskuse omandamist, kuid kirjanduses rõhutatakse, et ainult kirjalikust materjalist ei piisa (Shaw, 2022). Samm-sammulise juhendmaterjali täielikuks mõistmiseks on vajalik rakendada teatud õpetamismeetodeid, näiteks täiendavate küsimuste küsimist (Scheuermann et al., 2009; Impecoven-Lind & Foegen, 2010). Shaw (2022) soovitab põhjalikuks mõistmiseks küsida „miks" ja „kuidas" küsimusi. Koos õpetajaga läbi arutatud ja mõtestatud näidismaterjal on suurema tõenäosusega abiks uute ülesannete lahendamisel.

Mitmel juhul selgus ka, et eksperdid sooviksid raudvaralehtedel rohkem näha juba õpitud reegleid. Üheks korduvaks tagasisideks oli reegli „miinusmärk sulu ees muudab märki sulu sees" lisamine just sellises üldtuntud sõnastuses. Näiteks oli algses raudvaralehes „TL05 Hulkliikmete lahutamine" kasutatud sama reeglit, kuid pikemalt ja teises sõnastuses: „Kui hulkliige on sulgudes ja sulgude ees on – märk, siis muutub iga sulgudes oleva liikme märk.". Raudvaralehes „TL07 Hulkliikme korrutamine" oli algselt sama mõte väljendatud aga järgmiselt: „Miinusmärk sulgude ees muudab pärast sulgude avamist kõikide liikmete märki". Eksperdid kommenteerisid nimetatud olukorda järgmiselt:

> *Reegel miinusmärgi kohta: lapsed teavad üsna hästi nii-öelda luuletust „miinusmärk sulu ees muudab märgi sulu sees". Võiks siin ka seda kasutada, sest see on õnnestunud salm reegli meelde jätmiseks. Lühem ka kui praegune reeglisõnastus.* (E1)

> *Lisaksin sulgude ees oleva miinusmärgi näite juurde ka lausesse selle, et miinusmärk sulgude ees tähendab, et seal on arv -1 (nähtamatu matemaatika). Näites on sama asi ilusasti välja toodud (korrutamine -1ga).* (E4)

Ekspertide tagasisidet arvesse võttes sai raudvaralehele lisatud kast „Nähtamatu matemaatika“, et süsteemsemalt ja üldtuntud sõnastuses korrata miinusmärgi reeglit sulgude ees (tabel 3). Ka kirjanduses rõhutatakse varasemalt õpitud mõistete ja reeglite pidevat kordamist paralleelselt algebra õppimisega, kuna algebra on oma olemuselt otseses seoses aritmeetikaga. Algebraliste ülesannete lahendamisel tuleb õpilastel korraga kasutada mitmeid erinevaid oskuseid aritmeetikast, seostades neid samal algebra abstraktse olemusega, mis teeb just õpiraskustega õpilastele selliste ülesannete lahendamise keeruliseks (Shaw, 2022).

Tabel 3. Näide reegli kordamisest koos selle tekkimise selgitusega.

TL07 1. versioon	Miinusmärk sulgude ees muudab pärast sulgude avamist kõikide liikmete märki. $-(2x^2-5x^2+3x)=(-1)\cdot 2x^2-(-1)\cdot 5x^2+(-1)\cdot 3x=-2x^2+5x^2-3x=3x^2-3x$
TL07 2. versioon	NÄHTAMATU MATEMAATIKA Miinusmärk sulu ees on tegelikult arv -1. Miinusmärk sulu ees muudab märki sulu sees! $-(2x^2-5x^2)=(-1)\cdot 2x^2+(-1)\cdot(-5x^2)=-2x^2+5x^2=3x^2$

Kokkuvõttes vajas raudvaralehtede sõnastus parandamist eelkõige selleks, et juhised vastaksid täpselt matemaatiliselt läbi viidud operatsioonidele, kasutades nii ühe raudvaralehe siseselt kui ka raudvara- ja töölehtede üleselt samu termineid ning vältides liigset sünonüümide kasutamist. Lisaks pöörasid eksperdid tähelepanu üldtuntud reeglite pidevale kordamisele raudvaralehtede juhistes. Varasemates uurimustes on leitud, et keeleline areng mõjutab algklassides kõige vähem just aritmeetika ja algebra omandamist (Vukovic & Lesaux, 2013), kuid nimetatud uuring viidi läbi 6–9-aastaste laste seas, mistõttu ei saa seda tulemust üldistada vanemale kooliastmele. Käesolev arendusuuring tõi aga esile just sõnastuse olulisuse algebra kontekstis vanemas kooliastmes. Seda võib põhjendada asjaoluga, et mida keerulisemaks muutub õpisisu, seda spetsiifilisemaks ja mahukamaks muutub ka matemaatiline sõnavara (Miller & Mercer, 1997). Lisaks on kirjanduses rõhutatud, et algebraliste ülesannete olemuste täielikuks mõistmiseks on vajalik omandada vastav matemaatiline sõnavara, mis aitaks teadmistes luua seoseid ja tegevustele põhjendusi (Shaw, 2022).

Raudvaras esitatud näited

Raudvaralehtedel esitatud näidete puhul soovitati pärast 1. tagasisideringi täiendada kümmet raudvaralehte ning pärast 2. tagasisideringi veel nelja raudvaralehte. Kõige levinum ettepanek mitme teema raames oli lisada näidetesse rohkem erijuhtusid. Eksperdid tõid välja, et erijuhud on üks peamisi veakohti ülesannete lahendamisel ning on vähe osaülesandeid, kus erijuhtusid üldse ei esine. Lisaks sellele märkasid nad, et töölehtede ülesannetes oli küll kasutatud erijuhte, kuid raudvaralehe näidetes neid ei esinenud. Ka kirjanduses on toodud välja näidete mitmekesisuse olulisus just õpiraskustega õpilaste puhul, rõhutades, et iga algebraline juhtum vajab sammhaaval läbi arutamist (Shaw, 2022). Alljärgnevas tabelis 4 on ülevaade ekspertide soovitusel lisatud erijuhtumitest, mis nende praktilistele kogemustele tuginedes on ühtlasi ka levinud veakohtadeks.

Tabel 4. Näited ekspertide soovitatud erijuhtudest.

Raudvaraleht	Erijuhtum	Näide
TL01 Üksliige ja hulkliige	Negatiivne üksliige	$-12x$
	Üksik täht üksliikmena	$-a$
TL02 Hulkliikme korrastamine	Avaldise lõpus üksik arv ilma muutujata	$a^2 - b + 1$
TL03 Hulkliikme koondamine	Vastandarvulised liikmed, summa null	$m^2 + mn \cancel{+1} + 2mn \cancel{-1} - 3m^2 + n$
TL05 Hulkliikmete lahutamine	Sulgudes oleva hulkliikme esimene liige on miinusmärgiga	$(5 + 2x + x^2) - (-2x + 3x - 4)$
TL07 Üksliikme korrutamine hulkliikmega	Teguriks olev üksliige on sulgude järel, mitte ees	$(3a - 2ab + 6a^2) \cdot 2a$
	Sulgudes oleva hulkliikme esimene liige on miinusmärgiga	$5(-2a + 3) - 4(a^2 + 6)$
TL08 Hulkliikme jagamine üksliikmega	Hulkliikmes on muutuja ees kordaja 1, jagaja on sellest suurem arv	$(8xy - x) : 4x$
	Hulkliikme liige ja jagaja on võrdsed	$(15mn + 3m) : (-3m)$
TL09 Hulkliikme tegurdamine	Sulgudesse jääb pärast tegurdamist arv 1	$2x + 2xy = 2x(1 + y)$
	Kõik liikmed on negatiivsed, miinusmärk sulgude ette	$-15a^2 - 10ab = -5a(3a + 2b)$
TL11 Ruutude vahe valem	Üksliikmete järjekord sulgudes on erinev	$(x + 3)(3 - x)$
TL15 Kaksliikme ruut. Tegurdamine	Segamini aetud järjekord, ei vasta otseselt valemile	$25a^2 + 9b^2 - 30ab$

Raudvaralehtede näidetes soovitasid eksperdid rohkem märkidega seotud erijuhtumeid ning märgimuutuseid värvidega rõhutada. Lisaks sellele tõi üks ekspertidest välja olulise tähelepaneku, et üksliikmete joonimisel tuleks võimalusel alla joonida ka nende ees olev märk. Sedasi toimides harjub õpilane märke märkama ning kokku liites on erimärgilised arvud selgemini eristatavad. Tagasisidest tulenevalt said pärast 1. tagasisideringi märkidega seotud olulised kohad raudvaralehtedel olevates näidetes värvidega tähistatud. Tehtemärkide rõhutamisega seotult soovitasid eksperdid läbivalt kasutada ühtset märkimisviisi, mida kasutatakse enne liikmete koondamist. Kui raudvaralehtede 1. versioonis olid allajoonimisel kasutusel ühe-, kahe- ja kolmekordsed jooned, siis ekspertide arvates ei eristu need jooned piisavalt. Soovitati võtta kasutusele ka ringitamine ja kasti ümber tegemine. Kui üksliikmete märkimist kasutati esimest korda raudvaralehel „TL03 Hulkliikme koondamine“, siis üks ekspertidest pööras tähelepanu, et sama märkimisviisi võiks kasutada ka hilisemas töölehes „TL07 Üksliikme korrutamine hulkliikmega“:

> *Ma tähistaksin ka siin sarnased liikmed ühte moodi (üks joon alla, kaks joont alla, jne), et õpilastele tuleks meelde ja nad mõistaksid, et ikka tuleb sama moodi teha, kuigi on teine teema.* (E1)

Hulkliikme liikmete parandatud märkimissüsteemi kohta on näide Tabelis 4 („TL03 Hulkliikme koondamine“). Lisaks märkidele rõhutasid eksperdid taandamisel arvu 1 märkimist läbivalt kõikides raudvara- ja töölehtedes. Põhjusena toodi välja, et kui näiteks murru lugejas taanduvad kõik liikmed, siis jääb õpilastele mulje, et lugejasse ei jäägi midagi ning vastuseks kirjutatakse ainult nimetajas olevad liikmed.

Läbivalt ühtne märkimisviis, mille õpilased õpivad selgeks õpetaja eeskujul, toetab õpiraskustega õpilaste mõtlemisprotsessi sümbolite ja tehte erinevate osade märkamisel, suunab õpilaste tähelepanu ning vähendab potentsiaalseid vigu (Shaw, 2022). Kokkuvõttes võib ekspertide tagasiside põhjal tuua välja, et raudvaralehtedel esitatud näidetes peavad kindlasti olema ka erijuhud, samuti tuleb pidevalt ja läbivalt rõhutada tehtemärkidega seotud kriitilisi kohti. Näidetes kasutatud lahendustes on aga oluline kasutada läbivalt ühtset märkimisviisi, mille õpilane ka enda töödes kasutusele saaks võtta.

Töölehtede tööjuhiste sõnastus

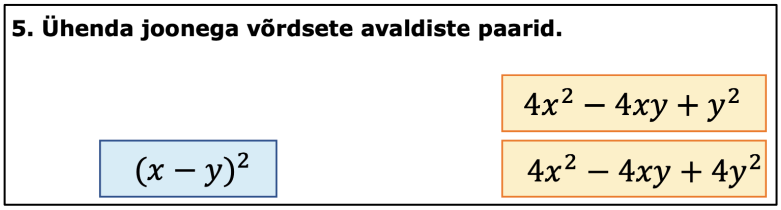
Kaheksas töölehes viieteistkümnest olid eksperdid tööjuhiste sõnastusega rahul juba tagasiside 1. ringil, kuid seitsmel juhul tehti ettepanekuid tööjuhiste parandamiseks. Töölehtede tööjuhiste parandusettepanekud olid üldjoontes sarnased raudvaralehtede sõnastusele antud ettepanekutega: eksperdid andsid soovitusi tööjuhiste konkreetsemaks ja lühemaks muutmiseks ning läbivalt samade mõistete kasutamiseks. Ekspertidelt saadud ettepanekud on kooskõlas Plado (2005) poolt välja toodud nõuetega õpiraskustega õpilastele mõeldud õppematerjalidele. Mõningatel juhtudel tõid eksperdid välja, et liialt pikk tööjuhis võib õpilast segadusse ajada ning pole keeleliselt korrektne. Näiteks töölehes „TL02 Hulkliikme korrastamine" oli veel 2. versioonis kasutusel juhis „Tõmba astendajatele värviline ring ümber", kuid ekspertide tagasisidest tulenevalt muudeti seda 3. versioonis järgnevalt: „Ringita astendajad".

Terminoloogia osas tõid eksperdid välja olukordi, kus tegelikult on olemas sünonüümid, kuid õpilaste õppimise toetamiseks võiks töölehtede komplektis läbivalt kasutada ühesuguseid mõisteid. Näiteks hulkliikme liikmete liitmisel tuleks alati öelda „Koonda sarnased liikmed", mitte „Liida sarnased liikmed" („TL03 Hulkliikme koondamine" 1. versioon). Astmetega muutujate jagamine on jällegi sama, mis murru taandamine, mistõttu pole tööjuhis „Jaga astmed" piisavalt täpne („TL08 Hulkliikme jagamine"). Ekspertide tagasisidest lähtuvalt oleks korrektne tööjuhis selles olukorras „Taanda murd". Antud tulemus kinnitab Plado (2005) kirjutatut selle kohta, et õpiraskustega õpilastele mõeldud õppematerjalides tuleks vältida sünonüüme ning kasutada läbivalt samu termineid tähenduse kinnistamiseks.

Täiendavalt toodi sisse ka ettepanekuid, kuidas muuta tööjuhist nii, et see seostuks paremini ülesande tehnilise ülesehitusega. Näiteks töölehes „TL01 Üksliige ja hulkliige" muudeti vastavalt ekspertide tagasisidele tööjuhis „Leia üksliikmed" konkreetsemaks, kasutades sõnastust „Kirjuta välja üksliikmed", kuna ülesanne eeldab üksliikmete välja kirjutamist, mitte lihtsalt leidmist. Ülesande ülesehitusega seotult muudeti ka teiste töölehtede tööjuhiste sõnastust täpsemaks. Töölehtede tööjuhistele antud tagasisides märgati ja rõhutati ekspertide poolt olukordi, kus tööjuhis ei pruugi olla kooskõlas sellega, mida ülesanne oma sisult tegelikult nõuab:

> *Ühenda joonega võrdsete avaldiste paarid. Paar tekib ühendamisel. Ühenda joonega võrdsed avaldised*. (E3)

Ülesande näide, millele ekspert antud juhul tagasisidet andis, on esitatud joonisel 4 (ülesande sisu on näites vähendatud). Antud näide illustreerib hästi olukorda, kus lisaks matemaatiliselt korrektsetele mõistetele tuleb tööjuhiste sõnastamisel tähelepanu pöörata ka ülesande tehnilisele ülesehitusele ning õpilaselt oodatud tegevusele, et tööjuhise sõnastus ja ülesande oleksid täielikult kooskõlas.



Joonis 4. Näide töölehe „TL14 Kaksliikme vahe ruut“ 2. versioonis kasutatud tööjuhisest, mille sõnastus ei vasta ülesande sisule.

Töölehtede ülesannete samm-sammuline raskusastme muutus

Töölehtede koostamisel oli üheks eesmärgiks rakendada kõikides töölehtedes samm-sammult ülesannete raskusastme tõusu, et vastavalt eripedagoogilistele üldpõhimõtetele oleks võimalik õpilasi õpetada jõukohasel tasemel ning õpet diferentseerida (Plado, 2005). Ekspertide soovitusel tuli muudatusi teha nii ülesannete kujunduses, arvuvalla suuruses kui ka erijuhtude ja keerulisemate osaülesannete kasutamises.

Seoses ülesannete muutmisega lihtsamaks või keerulisemaks on tagasisidest lähtudes vajalik leida tasakaal, et ülesanne ei muutuks õpilase jaoks automatiseeritud tegevuseks maha kirjutamise näol. Maha kirjutamist soodustavad aga üleliigsed abistavad jooned ja värvidega liialdamine. Üheks näiteks on tööleht „TL01 Üksliige ja hulkliige“, kus töölehe 1. versioonis puudus ülesanne, kus õpilased oleksid saanud ise proovida üksliikmeid leida ja eristada (tabel 5). Töölehe 2. versioonis see viga parandati.

Tabel 5. Näide töölehe „TL01 Üksliige ja hulkliige“ 1. ja 2. versiooni abistavatest joontest.

TL01 1. versioon	*Tööjuhis:* Leia üksliikmed. $-2a + b$	$3a^2 - \frac{1}{2}b^2 + 2a - ab + 2b + 1$
TL01 2. versioon	*Tööjuhis:* Kirjuta välja üksliikmed. $-2a + b$	$3a^2 - \frac{1}{2}b^2 + 2a - ab + 2b + 1$

Lisaks ette kirjutatud joontele ja värvidega märgitud vihjetele soovitasid eksperdid vähendada ka vastustesse ette kirjutatud tehtemärkide osakaalu, eriti ülesannetes, mis ilmnevad töölehe lõpu poole. Põhjendusena toodi asjaolu, et õpilased võiksid kohe õppida korrutamisel tekkinud miinusmärgi märkimist.

Ühe konkreetse teema puhul, nimelt „TL08 Hulkliikme jagamine üksliikmega“, tõi mitu eksperti välja vajaduse lihtsustada arvuvalda ehk arvutamisel kasutatavate arvude suurust ning muutujate arvu nendes. Lisaks sellele soovitasid eksperdid vältida tehteid, kus muutuja jääks murru nimetajasse või kus jagaja on suurem kui jagatav. Näiteks osaülesande $(x^3 + 4x) : x^2$ arvuvalda muudeti sulgudes oleva muutuja x ruuduga: $(x^3 + 4x^2) : x^2$. Sellise muudatuse tulemusel taandub murru nimetaja ning vastus ei tule hariliku murruna. Lisaks eemaldati samast töölehest avaldised, mille osas leidsid eksperdid, et need on õpiraskustega õpilastele liiga pikad ja rasked (näiteks: $(21x^{10}y^5 - 7x^7y^8 + 14x^{17}y^{13}) : (7x^7y^4)$). Kirjandusele tuginedes on arvuvalla lihtsustamine igati õigustatud, kuna keerulisem arvuvald mõjutab negatiivselt algebra õppimist (Ketterlin-Geller & Chard, 2011). Kui kogu kognitiivne koormus on õpilasel suunatud arvudega opereerimisele, võivad tähelepanuta jääda algebra reeglid ja lahenduseks vajaminevate sammude õiges järjestuses sooritamine.

Mõne teise töölehe puhul leidsid aga eksperdid, et arvuvald jäi töölehe lõpu poole liiga lihtsaks. Arvuvalla suurendamiseks soovitati kasutada suuremaid arve ning panna ka muutujaid ruutu. Näide sellisel viisil arvuvalla suurendamisest on esitatud tabelis 6.

Tabel 6. Näide arvuvalla raskemaks muutmisest töölehel „TL14 Kaksliikme vahe ruut“.

1. versioon	2. versioon
$(w-6)^2=$	$(w-6)^2=$ ....
$(4-a)^2=$	$(7-a^2)^2=$ ....
$(2x-2y)^2=$	$(8x-2y)^2=$ ....
$(n-2m)^2=$	$(n-9m^2)^2=$ ....

Nagu ka raudvaralehel olevate näidete puhul, soovitasid eksperdid töölehtedesse lisada veelgi enam erijuhte – seda nii ülesannetes ette tehtud näidetes kui ka osaülesannetes. Sarnaselt Tabelis 4 väljatoodule anti soovitusi lisada selliseid osaülesandeid, kus mõni üksliige või kõik liikmed oleksid negatiivsed ning kus avaldis sisaldaks ka üksikut arvu. Kokkuvõttes tuli ülesannete samm-sammulise raskusastme korrigeerimiseks vähendada ülesannetesse ette kirjutatud osasid, vastavalt olukorrale suurendada või vähendada arvuvalda ning suurendada erijuhtude esinemist.

Töölehtede kujundus ja kasutamislihtsus

Peaaegu kõikide töölehtede kujundus vajas pärast 1. tagasisideringi parandamist. Kujundusele antud soovitused kehtisid korraga mitmele töölehele. Töölehtede 1. versioonis oli ülesannete vastustes kasutusel punktiir, samuti olid mitmete ülesannete osaülesandeid eristatud rea kaupa. Sellisel viisil ülesande esitamine on aga vastuolus matemaatika põhiolemusega, mille järgi on avaldise võrdsed osad ühendatud võrdusmärgiga (Molina & Ambrose, 2008). Kujunduse parandamiseks jäeti alles osaülesannete samm-sammuline tööjuhis, kuid osaülesandes endas võeti ära rea kaupa sammude eristamine. Selle asemel lisati ülesannetesse ruudustikud, et õpilased harjuksid ülesannet lahendama sarnaselt vihikusse lahendamisega (näide tabelis 7). Sellisel viisil parandatud töölehed toetavad ühtselt matemaatilise ruumitaju arengut, kuna õpilased harjuvad mõtlema ja kirjutama vasakult paremale (Westwood, 2004).

Tabel 7. Punktiirjoonte asendamine ruudustikuga töölehtede kujunduses („TL04 Hulkliikmete liitmine“).

1. versioon	2. versioon
4. Liida hulkliikmed. A. Ava sulud. B. Koonda sarnased liikmed. C. Korrasta hulkliikme järjekord. A. $4a + (2a + 5)$ A. .... B. .... C.	**4. Liida hulkliikmed.** A. Ava sulud. B. Koonda sarnased liikmed. C. Korrasta hulkliikme järjekord. A. $4a + (2a + 5) =$

Tulenevalt töölehtede ülesannete kujunduses tehtud muudatusest asendada punktiir ruudustikuga, viidi ka raudvaralehtedes olevate näidete kujundus ülesannetega kooskõlla. Muudatuse tulemusel on nüüd töölehtedes selgemalt eristatud samm-sammuline juhend avaldise näitest, samuti on kasutatud illustreerivat ruudustikku ning võrdusmärki avaldise erinevate osade ühendamiseks (tabel 8). Teades, et õpiraskustega õpilaste taju iseärasused mõjutavad mustrite märkamist ning skeemide ja tabelite lugemist (Westwood, 2004), on visuaalselt selgem struktuur õigustatud muutus raudvaralehtedes.

Tabel 8. Raudvaralehtedes olevate samm-sammuliste juhiste kujunduse täpsustamine („TL05 Hulkliikmete lahutamine“).

1. versioon	2. versioon
1. Ava sulud. $(3x + x^2 + 5) - (2x - 7) = 3x + x^2 + 5 - 2x + 7$ Kui hulkliige on sulgudes ja sulgude ees on - märk, siis muutub iga sulgudes oleva liikme märk. 2. Koonda hulkliige. $3x + x^2 + 5 - 2x + 7 = x + x^2 + 12$ $3x - 2x = x$ $5 + 7 = 12$ 3. Korrasta hulkliikme järjekord. $x + x^2 + 12 = x^2 + x + 12$	1. Ava sulud. Miinusmärk sulu ees muudab märki sulu sees! $(3x + x^2 + 5) - (2x - 7) =$ $= 3x + x^2 + 5 - 2x + 7 =$ 2. Koonda hulkliige. $= x + x^2 + 12 =$ 3. Korrasta hulkliikme järjekord. $= x^2 + x + 12$

Teine kujundusega seotud väljakutse, mis pärast 1. tagasisideringi ilmnes, oli miinusmärgi pikkus. Nimelt esines töölehtedes olukordi, kus miinusmärki tähistas sidekriips, mitte miinusmärk. Eksperdid tõid välja, et selliselt tähistatud miinusmärgid võivad õpilastele jääda märkamatuks, kuna on liiga väikesed ja lühikesed:

> *Sulgudes olevad miinusmärgid on lühikesed ning õpilased segistasid neid korrutusmärkidega.* (E6)

Kirjeldatud muudatuste sisseviimine raudvara- ja töölehtede kujundustes pälvis tagasiside 2. ringil ekspertide heakskiidu. Ekspertide poolt välja toodud muudatused raudvara- ja töölehtede kujunduses on põhjendatud, kuna läbimõeldud paigutus ja info parem liigendamine aitavad suunata õpiraskustega õpilaste taju olulisele infole (Plado, 2005). Selgelt eristatud sammud toetavad aga omakorda lahenduseks vajalike tegevuste ja nende järjekorra meenutamist (Impecoven-Lind & Foegen, 2010).

4.2. Ekspertide kogemused raudvara- ja töölehtede kasutamisel

Delphi tagasiside 1. ringil paluti ekspertidel kirjeldada raudvara- ja töölehtede kasutamise kogemust õpilaste õppimise seisukohast, kirjeldades vabas vormis oma mõtteid ja kogemusi ühe avatud küsimuse raames. Antud küsimusele vastasid ainult need eksperdid, kellel oli võimalus õppematerjali oma töös õpilastega kasutada. Ekspertide vastused jagunesid kvalitatiivse induktiivse andmeanalüüsi tulemusel kahte peakategooriasse: õpilaste õppimist toetavad tegurid ning õpilaste õppimist mittesoodustavad tegurid. Mõlemad peakategooriad kujunesid kahest alakategooriast, mis koos koodide nimetustega on esitatud Lisas 5. Järgnevalt on kategooriate kaupa kirjeldatud ekspertide kogemusi selles osas, kuidas loodud õppematerjal nende arvates õpilaste õppimise seisukohast toimib.

Õpilaste õppimist toetavad tegurid

Ekspertide vastustest ilmnes kaks töölehtedega seotud tegurit, mis nende hinnanguil toetasid õpilaste õppimist: samm-sammuline raskusastme muutus ning visuaalsed vihjed ja näited. Mõlemad nimetatud tegurid olid aluseks võetud ka töölehtede esialgsel koostamisel. Ekspertide vastustest ilmnes, et töölehtede samm-sammuline raskusastme muutus toetas eelkõige erinevate valemite õppimist, tuues välja, et tunni lõpuks saavutati seatud õpieesmärgid. Lisaks sellele nimetati korduvalt, et töölehed olid jõukohased. Üks ekspertidest kirjeldas olukorda, kuidas ta lubas õpilastel endil ülesannete alguses olevate näidete toel valida just need ülesanded, mida nad hetkel lahendada soovivad, rõhutades piisavat valikuvõimalust tasemest lähtuvalt. Teise eksperdi sõnul soodustas jõukohane samm-sammult muutuv raskusaste iseseisvat õppimist ning osade ülesannete lõpus antud vastused enesekontrolli sooritamist. Ka Kikas (2010) järgi võimaldab oma vastuse kontrollimine õppimisprotsessi paremini mõtestada, saades kinnitust valitud lahenduskäigule või hoopiski signaali, et lahendus tuleks uuesti üle vaadata ja parandada.

Visuaalsete vihjete positiivne mõju toodi ekspertide poolt välja eelkõige seoses märkide muutustega ning lahenduskäigu sammude eristamisega. Antud tulemus on kooskõlas varasemate uuringutega, mille järgi vajavad õpiraskustega õpilased edukamaks õppimiseks tuge mustrite märkamisel (Westwood, 2004). Värviliselt rõhutatud märgid aitasid ekspertide hinnanguil suunata õpilaste tähelepanu asjaolule, et märk võib muutuda:

> *Alguses unustati veel ära liikmete ees olevad märgid, aga kuna sellele sai juhitud tähelepanu 1. ülesandes, siis edaspidi oskasid lapsed juba paremini neid märgata ja kokku arvutades tekkis ainult aeg-ajalt vigu.* (E4)

Vaatamata asjaolule, et tegemist on pidevalt korratava teadmisega, mõjutavad õpiraskustega õpilaste pikaajalise mälu ja töömälu iseärasused korrektse märgi kirjapanekut (Toll et al., 2016). Lisaks on õpiraskustega õpilaste jaoks keerulisemad sellised ülesanded, kus tuleb meenutada ja kasutada teadmisi mitmest erinevast teadmisest (Miller & Mercer, 1997), antud töölehtedes on selleks teadmised aritmeetikast ning algebrast. Kirjandusest lähtudes on ekspertide tähelepanek märkidega seotud ohtlike kohtade tähistamise kohta kooskõlas õpiraskustega õpilaste toetamise põhimõtetega. Lahenduskäigu erinevate sammude eristamine värvide abil toetas aga ekspertide sõnul teema üleüldist mõistmist. Lisaks värvide kasutamisele tõid eksperdid õpilaste õppimist toetava aspektina välja ka näidete piisavuse. Nimetatud tulemused on kooskõlas varasemate uurimustega, mille järgi vajavad õpiraskustega õpilased mõtlemisprotsessi iseärasuste tõttu tuge lahenduseks vajalike sammude planeerimisel ja täitmisel (Gagnon & Maccini, 2007).

Õpilaste õppimist mittesoodustavad tegurid

Tegurid, mis ekspertide kogemusele tuginedes ei soodustanud või lausa takistasid õpilaste õppimist, olid järgmised: ülesannete liialt lihtne sisu ning visuaalsete vihjetega liialdamine. Tulemused näitavad, et mõlemad õppimist mittesoodustavad tegurid on otseselt seotud eelnevalt välja toodud õppimist toetavate teguritega. Kui ühest küljest nägid eksperdid töölehtede samm-sammulist raskusastme muutust kui positiivset aspekti, siis mõningatel juhtudel viitasid nad aga liigsele lihtsustamisele. Ekspertide hinnangul oleksid nad soovinud, et teatud töölehed sisaldaksid rohkem keerukamaid ülesandeid või osaülesandeid, kuna hetkel olid mõned töölehed õpilastele liiga kerged. Õige tasakaalu leidmine ülesannete raskusastmes nõuab põhjalikku uurimistööd, et arvesse saaks võetud kõik õppijate erisused ning õppeülesannete vastavus õpilaste vajadustele (Watson & Ohtani, 2015). Sellest lähtuvalt võib järeldada, et käesoleva magistritöö raames välja töötatud õppematerjalides ei olnud ülesannete raskusastme variatiivsus piisav, viidates keerulisemate ülesannete lisamise vajadusele.

Lisaks sellele tõid eksperdid välja ka visuaalsete vihjete negatiivse külje ehk vihjetega liialdamise. Sinna alla kuuluvad näiteks liigne värvide ja noolte kasutamine olukordades, kus õpilased võiksid juba olla iseseisvamad. Visuaalseid vihjeid kasutatakse õpiraskustega õpilaste õppematerjalide kujunduses eesmärgiga suunata õpilaste tähelepanu antud hetkel olulisele objektile (Aru & Bachmann, 2009). On teada, et nende õpilaste jaoks on keeruline olulise info selekteerimine (Gagnon & Maccini, 2007), mistõttu võivad visuaalsed vihjed teatud õpilastele olla vajalikud, samal ajal kui teised ehk juba iseseisvamad õpilased neid enam ei vaja. Käesoleva uuringu kontekstis ei pruugi aga probleem seisneda mitte visuaalsete vihjetega liialdamises, vaid õppematerjali mahus – nimelt võiks olukorra lahendada see, kui lisaks olemasolevale oleks töölehtedele lisatud veelgi enam visuaalsete vihjeteta ülesandeid. See annaks õpetajatele ja õpilastele võimaluse valida jõukohane tase ning vajadusel jätta teatud ülesanded vahele või planeerida need hilisemaks.

Mõne töölehe ülesannete puhul olid kasutusel ka kastid, kuhu õpilased said üksliikmed välja kirjutada enne nendega manipuleerimist. Ekspertide sõnul kujunes see aga õpilaste jaoks lihtsalt ümber kirjutamiseks, millel puudus otsene tähendus või mõte. Selliselt kujundatud ülesanded vähendasid ekspertide sõnul õpilaste huvi ja aktiivsust õppetööga tegelemiseks. Visuaalse vihje alla kuulusid ka need olukorrad, kus osa vastusest oli õpilastele juba ette kirjutatud (näiteks märgid või sulud ja ruudu tähis). Ekspertide hinnangul ei olnud aga selline kujundus õigustatud, kuna õpilased ei pööranud ette kirjutatud osale tähelepanu ning hakkasid edaspidi tegema seetõttu vigu:

> *Vähendatud õpitulemusega õpilastel tekitab topelt märk segadust. Nende jaoks oli lihtsam, kui said ise tehtemärki lisada.* (E2)

Ka kirjanduses on rõhutatud, et visuaalsete elementide kasutamine peab täitma mõtestatud eesmärki ehk toetama õpilaste kognitiivseid protsesse (Watson & Thompson, 2015). Kui visuaalsed vihjed ja kujundus soodustab aga mõtestamata ümberkirjutamist, nagu antud magistritöö tulemustest selgus, ei ole sellest õppimisele kasu ehk tegemist on eesmärgitu kujunduselemendiga.

4.3. Magistritöö tugevused ja piirangud

Käesolev magistritöö oli koostatud arendusuuringu põhimõtetel ning välja töötatud raudvara- ja töölehtede hindamiseks kasutati Delphi meetodit. Õppematerjali loomisel lähtuti kolmest teaduskirjanduse valdkonnast: tunnetusprotsesside eripärad õpiraskustega õpilastel, enamlevinud raskused algebra õppimisel ning õppematerjalide loomise põhimõtted õpiraskustega õpilastele. Ekspertidelt saadud tagasiside kinnitas teoreetilises ülevaates välja toodud seisukohti ja varasemate uuringute tulemusi. Kõige sagedamini rõhutati ekspertide tagasisides tööjuhiste täpse sõnastuse olulisust ning läbivalt ühtse matemaatilise sõnavara kasutamist. Ekspertide tagasisidest tulid aga välja ka mitmed erijuhud, millele tuleks hulkliikmete teema õpetamisel tähelepanu pöörata, kuid mida erialases kirjanduses pole spetsiifiliselt rõhutatud. Ekspertide tagasiside sisukus võimaldas loodud õppematerjale kahel korral parandada ja täiendada, mistõttu võib käesoleva töö üheks tugevuseks nimetada õppematerjali katsetamise, hindamise ja parandamise protsessi, mille tulemusena paranes loodud õppematerjali kvaliteet. Ekspertide ehk kogenud praktikute kaasamine teaduslikku arendusprotsessi on oluline, kuna praktikud on otseselt seotud õpilaste õppimise toetamisega ehk nemad on tulevased õppematerjalide kasutajad.

Töö piiranguteks on aga väike valim ja kvalitatiivne lähenemisviis, mistõttu ei ole töö tulemusi võimalik üldistada suuremale populatsioonile. Uuringus osalenud eksperdid lähtusid hinnangute andmisel enda isiklikest teadmistest ja kogemustest. Raudvara ja -töölehtedele antud hinnangud kehtivad vaid antud uuringu jaoks välja töötatud õppematerjalile ning tulemused keskendusid suures osas parandamist vajavatele aspektidele, mitte ei uurinud õppematerjalide efektiivsust õpiraskustega õpilaste seas laiemalt. Lisaks sellele ei võimalda raudvara- ja töölehti kasutanud õpilaste väike arv teha üldistusi õpilaste õppimise kohta antud õppematerjali kasutades, andes vaid sellele valimirühmale kehtiva kirjeldava ülevaate ekspertide vaatenurgast.

4.4. Magistritöö praktiline väärtus ja soovitused edasisteks uuringuteks

Magistritöö raames välja töötatud õppematerjalidele saab olema vaba ligipääs, tänu millele saavad õpetajad ja eripedagoogid neid edaspidi oma töös kasutada, et pakkuda õpiraskustega õpilastele jõukohast materjali. Õpilastel on omakorda võimalus õppida õppematerjaliga, mis aitab neil hulkliikmete teemat sammhaaval õppida ja harjutada, tuues vaheldust traditsioonilistele kogu klassis kasutatavatele õpikutele. Lisaks sellele on õppematerjalides raudvaralehed, mida võib kasutada töölehtedest eraldiseisvalt näiteks raudvaravihiku koostamisel. Magistritöö tulemuste osas esitatud kokkuvõtteid ja näiteid saavad aga edaspidi kasutada õppematerjalide loojad, et vältida võimalikke vigu, mis võiksid piirata õpiraskustega õpilaste õppimist.

Teadusuuringute vaatenurgast on käesolev töö sisendiks edasist uurimist vajavate valdkondade täpsustamiseks. Näiteks selgus töö tulemustest asjaolu, et õpiraskustega õpilastele loodud ülesannete raskusaste ning visuaalne abi vajab suuremat variatiivsust. Järgmiste uuringutega saaks välja selgitada, kuidas erinevaid raskusastmeid algebra õpetamisel täpsemalt eristada ning kuidas sealjuures identifitseerida individuaalse õpilase jaoks kõige efektiivsem raskusaste. Nimetatud küsimused tõstavad esile ka asjaolu, et kuigi antud magistritöös uuriti õppematerjalide kasutamist väiksemates rühmades ja individuaalõppena, siis praktikas on diferentseeritud õppematerjalide vajadus ka aineõpetajatel suures klassitunnis. Seetõttu tuleks edaspidi uurida diferentseeritud õppematerjali kasutamist tavaklassis, lisades juurde ka õpetamismeetodite aspekti, mida hetkel magistritöös üldse ei käsitletud.

Tänusõnad

Soovin tänada kuute eksperti, kes olid valmis oma aega panustama loodud õppematerjali katsetamiseks oma igapäevatöös ning andsid kahel korral viieteistkümnele raudvara- ja töölehele tagasisidet. Olen tänulik ka 19-le õpilasele, kes kasutasid õppematerjali esimest versiooni ning pidid seetõttu mõningal juhul seisma silmitsi parandamist vajava sisuga. Tänan südamest oma juhendajat Triin Kivirähki, kes oma entusiasmi ja toetava õpetamisstiiliga äratas minus esmase huvi matemaatika kui õppeaine vastu, on alati aidanud leida küsimustele vastused ning mis kõige olulisem, juhendanud ja inspireerinud olema parem õpetaja! Tänan ka oma õde ja matemaatikaõpetajat Marist ning abikaasat Daniali, kes aitasid kontrollida õppematerjali matemaatilise sisu korrektsust.

Autorsuse kinnitus

Kinnitan, et olen koostanud ise käesoleva lõputöö ning toonud korrektselt välja teiste autorite ja toetajate panuse. Töö on koostatud lähtudes Tartu Ülikooli haridusteaduste instituudi lõputöö nõuetest ning on kooskõlas heade akadeemiliste tavadega.

Liina Malva
/allkirjastatud digitaalselt/
11.05.2023

Kasutatud kirjandus

Aini, N. R., Syafril, S., Netriwati, N., Pahrudin, A., Rahayu, T., & Puspasari, V. (2019). Problem-based learning for critical thinking skills in mathematics. *Journal of Physics: Conference Series*, *1155*(1), 012026.

Anderson, T., & Shattuck, J. (2012). Design-based research: A decade of progress in education research? *Educational researcher*, *41*(1), 16–25.

Aru, J., & Bachmann, T. (2009). *Tähelepanu ja teadvus*. Tänapäev.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shultz (Eds.), *The Ideas of Algebra, K –12* (pp. 20–32). National Council of Mathematics Teachers.

Butterworth, B. (2005). Developmental dyscalculia. *Handbook of mathematical cognition*, *93*, 455–467.

Clarkson, P. C. (2003). Language, logical thinking and communication in school mathematics: Whose responsibility. *Studies in science, mathematics and technical education*, 99–116.

Cortiella, C., & Horowitz, S. H. (2014). The state of learning disabilities: Facts, trends and emerging issues. *New York: National center for learning disabilities*, *25*(3), 2–45.

Cuoco, A. (2001). Mathematics for teaching. *Notices of the AMS, 48*(2), 168–174.

Fink-Hafner, D., Dagen, T., Doušak, M., Novak, M., & Hafner-Fink, M. (2019). Delphi method: strengths and weaknesses. *Advances in Methodology and Statistics*, *16*(2), 1–19.

Fleiss, J. L. (1971). Measuring nominal scale agreement among many raters. *Psychological bulletin*, *76*(5), 378.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.

Gagnon, J. C., & Maccini, P. (2007). Teacher reported use of empirically validated and standards-based instructional approaches in secondary mathematics. *Remedial and Special Education*, *28*, 43–57.

Griffith, P. L., & Ruan, J. (2005). What is metacognition and what should be its role in literacy instruction? In Susan E. Israel, Cathy C. Block, Kathry. L. Bauserman, & Kathryn Kinnucan-Welsch (Eds.), *Metacognition in Literacy Learning. Theory, Assessment, Instruction, and Professional Development* (pp. 25–40). Lawrence Erlbaum Associates.

Haavasalu, A. (2010). *Algebra*. Haridus- ja Noorteamet. https://oppekava.ee/algebra/

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27,* 59–78.

Hudson, D. (2019). *Spetsiifilised õpiraskused*. Studium.

Hutchinson, N. L. (1993). Effects of cognitive strategy instruction on algebra problem solving of adolescents with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, *16*, 35–63.

Impecoven-Lind, L. S., & Foegen, A. (2010). Teaching algebra to students with learning disabilities. *Intervention in School and Clinic*, *46*(1), 31–37.

Jukk, H., Arak, T., Kokk, K., & Jürimäe, M. (2013). *Põhikooli matemaatika ainekavade võrdlus: Eesti võrrelduna Bulgaaria, Inglismaa, Ontario (Kanada), Singapuri ja Uus-Meremaaga*. http://dspace.ut.ee/bitstream/handle/10062/40936/Uld_Matemaatika.pdf

Kaldmäe, K., Kontson, A., Matiisen, K., & Pais, E. (2015a). *Matemaatika õpik 7. klassile*. Avita.

Kaldmäe, K., Kontson, A., Matiisen, K., & Pais, E. (2015b). *Matemaatika õpik 8. klassile*. I osa. Avita.

Karlep, K. (2019). Osaoskused ja nende kujundamine. *Eripedagoogika, 60*, lk 68–85.

Ketterlin-Geller, L. R., & Chard, D. J. (2011). Algebra readiness for students with learning difficulties in grades 4–8: Support through the study of number. *Australian Journal of Learning Difficulties*, *16*(1), 65–78.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In T. D. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). MacMillan.

Kikas, E. (2010). Tunnetusprotsessid ja nende arengulised iseärasused. E. Kikas (Toim), *Õppimine ja õpetamine esimeses ja teises kooliastmes* (lk 17–16). Haridus- ja Teadusministeerium.

Kivirähk, T. (2018). Matemaatika õpetamine õpiraskustega ja kerge intellektipuudega õpilastele. E. Krull (Toim), *Pedagoogilise psühholoogia käsiraamat* (lk 640–647). Tartu Ülikooli Kirjastus.

Kunsch, C. A., Jitendra, A. K., & Sood, S. (2007). The effects of peer-mediated mathematics instruction for students with disabilities: A review of the literature. *Learning Disabilities Research & Practice, 22*(1), 1–12.

Kõrgesaar, J. (2020). *Sissejuhatus hariduslike erivajaduste käsitlusse.* Tartu Ülikooli Kirjastus.

Maailma Terviseorganisatsioon (1999). *RHK-10 psüühika ja käitumishäirete klassifikatsioon: kliinilised kirjeldused ja diagnostilised juhised.* https://www.kliinikum.ee/psyhhiaatriakliinik/lisad/ravi/RHK/RHK10-FR17.htm

Lilja, K. K., Laakso, K., & Palomäki, J. (2011). Using the Delphi method. In *2011 Proceedings of PICMET'11: Technology Management in the Energy Smart World (PICMET)* (pp. 1–10). IEEE.

Maccini, P., McNaughton, D., & Ruhl, K. L. (1999). Algebra instruction for students with learning disabilities: Implications from a research review. *Learning Disability Quarterly*, *22*(2), 113–126.

Miller, S. P., & Mercer, C. D. (1997). Educational aspects of mathematics disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 30*, 47–56

Molina, A., & Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign: Third graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 30*(1), 61–80.

Mädamürk, K. (2018). Arvu mõiste arengu aspekte ja selle toetamise võimalusi. *Eripedagoogika, 55*, lk 17–22.

Põhikooli- ja gümnaasiumiseadus (2010). *Riigi Teataja I 2010, 41, 240.* https://www.riigiteataja.ee/akt/13337919?leiaKehtiv

Põhikooli riiklik õppekava (2011). *Riigi Teataja I, 14.01.2011, 1.* https://www.riigiteataja.ee/akt/129082014020?leiaKehtiv

Plado, K. (2005). Hea õpik toimib õpetajana. *Haridus, 8*, lk 6–9.

Rello, L., & Baeza-Yates, R. (2013). Good fonts for dyslexia. In *Proceedings of the 15th international ACM SIGACCESS conference on computers and accessibility* (pp. 1–8).

Scheuermann, A. M., Deshler, D. D., & Schumaker, J. B. (2009). The effects of the explicit inquiry routine on the performance of students with learning disabilities on one-variable equations. *Learning Disability Quarterly*, *32*, 103–120.

Schneider, W., & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM*, *42*(2), 149–161.

Schults, A. (2018). Õpiraskused või kerge intellektipuue? E. Krull (Toim), *Pedagoogilise psühholoogia käsiraamat* (lk 631–633). Tartu Ülikooli Kirjastus.

Scott, E. E., Wenderoth, M. P., & Doherty, J. H. (2020). Design-based research: a methodology to extend and enrich biology education research. *CBE—Life Sciences Education*, *19*(2), 11.

Shaw, S. R. (2022). *Reaching and Teaching Students Who Don't Qualify for Special Education: Strategies for the Inclusive Education of Diverse Learners*. Routledge.

Tall, D. & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 1–36.

Toll, S. W., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. (2016). Visual working memory and number sense: Testing the double deficit hypothesis in mathematics. *British Journal of Educational Psychology*, *86*(3), 429–445.

Toll, S. W., Van der Ven, S. H., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. (2011). Executive functions as predictors of math learning disabilities. *Journal of learning disabilities*, *44*(6), 521–532.

Vukovic, R. K., & Lesaux, N. K. (2013). The language of mathematics: Investigating the ways language counts for children's mathematical development. *Journal of Experimental Child Psychology*, *115*(2), 227–244.

Wadlington, E., & Wadlington, P. L. (2008). Helping students with mathematical disabilities to succeed. *Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth*, *53*(1), 2–7.

Watson, A., & Ohtani, M. (2015). *Task design in mathematics education: An ICMI study 22*. Springer Nature.

Watson, A., & Thompson, D. R. (2015). Design issues related to text-based tasks. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design In Mathematics Education: an ICMI study 22* (pp. 143–190). Springer Nature.

Westwood, P.S. (1995). Teachers' beliefs and expectations concerning students with learning difficulties. *Australian Journal of Remedial Education*, *27, 2*, 19–21.

Westwood, P. S. (2004). *Learning and learning difficulties: A handbook for teachers*. Australian Council for Educational Research.

Witzel, B. S., Mercer, C. D., & Miller, M. D. (2003). Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model. *Learning Disabilities Research & Practice*, *18*(2), 121–131.

World Health Organization (2022). *International Classification of Diseases 11th Revision*. http://icd.who.int/en

Õppekirjandusele esitatavad nõuded, õppekirjanduse retsenseerimisele ja retsensentidele esitatavad miinimumnõuded ning riigi poolt tagatava minimaalse õppekirjanduse liigid klassiti ja õppeaineti (2016). *Riigi Teataja I*, *2016.* https://www.riigiteataja.ee/akt/129032016001

Lisa 1. Ekspertide tagasiside andmise viisid raudvara- ja töölehe kaupa.

Ekspert	Amet	Tagasi-side	Raudvara- ja töölehe number														
			01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
E1	eriped.	1. ring	✓	✓	✓	✓	✓	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
		2. ring	+	+	+	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+
E2	õpiabiõp.	1. ring	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
		2. ring	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
E3	eriped.	1. ring	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	–	–	–	–	–	–
		2. ring	–	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
E4	eriped.	1. ring	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+	+	+	+
		2. ring	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
E5	eriped.	1. ring	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
		2. ring	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
E6	õpiabiõp.	1. ring	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
		2. ring	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

✓ *vabas vormis tagasiside e-kirja teel;* + *täitis uurija saadetud küsimustiku;* – *ei andnud töölehele tagasisidet*

Lisa 2. Koostatud õppematerjali teemade kooskõla PRÕK õpitulemustega ja Avita 8. klassi matemaatika õpikuga.

PRÕK õpitulemus	Avita õpiku teema	Raudvara- ja töölehe teema
Õpilane: 1) korrastab üks- ja hulkliikmeid, liidab, lahutab ning korrutab üks- ja hulkliikmeid ning jagab üksliikmeid ja hulkliiget üksliikmega.	2.1. Hulkliikmed. Hulkliikmete liitmine ja lahutamine (lk 16–19)	01 Üksliige ja hulkliige
		02 Hulkliikme korrastamine
		03 Hulkliikme koondamine
		04 Hulkliikmete liitmine
		05 Hulkliikmete lahutamine
		06 Tähtavaldise väärtuse arvutamine
	2.2. Hulkliikme korrutamine ja jagamine üksliikmega (lk 20–23)	07 Üksliikme korrutamine hulkliikmega
		08 Hulkliikme jagamine üksliikmega
Õpilane: 2) tegurdab hulkliikmeid (toob sulgude ette, kasutab abivalemeid).	2.3. Hulkliikme tegurdamine. Sulgude ette toomine (lk 24–25)	09 Hulkliikme tegurdamine
	2.4. Hulkliikmete korrutamine (lk 26–29)	10 Hulkliikmete korrutamine
	2.6. Ruutude vahe valem. Tegurdamine (lk 32–33)	11 Ruutude vahe valem
		12 Ruutude vahe valem. Tegurdamine
	2.7. Kaksliikme ruut. Tegurdamine (lk 34–37)	13 Kaksliikme summa ruut
		14 Kaksliikme vahe ruut
		15 Kaksliikme ruut. Tegurdamine

Lisa 3. Delphi tagasiside küsimustik 1. ja 2. ringil.

1. RING	**2. RING**
TLXX Töölehe peakiri	**„TLXX Töölehe pealkiri“ 2. tagasiside**
Palun jagage oma hinnangut järgmise kuue aspekti osas.	Palun jagage oma hinnangut järgmiste aspektide osas.
1) Raudvara sõnastus o Sobib nii, nagu on o Vajab muudatusi	**1) Raudvara sõnastus** [*Muudatuste kirjeldus*] o Sobib nii, nagu on o Vajab muudatusi
Kui te vastasite eelmisele küsimusele „*Vajab muudatusi*“, palun lisage oma tagasiside ja muudatusettepanekud siia: [tekstikast]	Kui te vastasite eelmisele küsimusele „*Vajab muudatusi*“, palun lisage oma tagasiside ja muudatusettepanekud siia: [tekstikast]
2) Raudvaras esitatud näited o Sobib nii, nagu on o Vajab muudatusi	**2) Raudvaras esitatud näited** [*Muudatuste kirjeldus*] o Sobib nii, nagu on o Vajab muudatusi
Kui te vastasite eelmisele küsimusele „*Vajab muudatusi*“, palun lisage oma tagasiside ja muudatusettepanekud siia: [tekstikast]	Kui te vastasite eelmisele küsimusele „*Vajab muudatusi*“, palun lisage oma tagasiside ja muudatusettepanekud siia: [tekstikast]
3) Raudvara kujundus ja kasutamislihtsus o Sobib nii, nagu on o Vajab muudatusi	**3) Raudvara kujundus ja kasutamislihtsus** [*Muudatuste kirjeldus*] o Sobib nii, nagu on o Vajab muudatusi
Kui te vastasite eelmisele küsimusele „*Vajab muudatusi*“, palun lisage oma tagasiside ja muudatusettepanekud siia: [tekstikast]	Kui te vastasite eelmisele küsimusele „*Vajab muudatusi*“, palun lisage oma tagasiside ja muudatusettepanekud siia: [tekstikast]
4) Töölehe tööjuhiste sõnastus o Sobib nii, nagu on o Vajab muudatusi	**4) Töölehe tööjuhiste sõnastus** [*Muudatuste kirjeldus*] o Sobib nii, nagu on o Vajab muudatusi
Kui te vastasite eelmisele küsimusele „*Vajab muudatusi*“, palun lisage oma tagasiside ja muudatusettepanekud siia: [tekstikast]	Kui te vastasite eelmisele küsimusele „*Vajab muudatusi*“, palun lisage oma tagasiside ja muudatusettepanekud siia: [tekstikast]
5) Töölehe tööülesannete samm-sammuline raskusastme muutus o Sobib nii, nagu on	**5) Töölehe tööülesannete samm-sammuline raskusastme muutus** [*Muudatuste kirjeldus*] o Sobib nii, nagu on

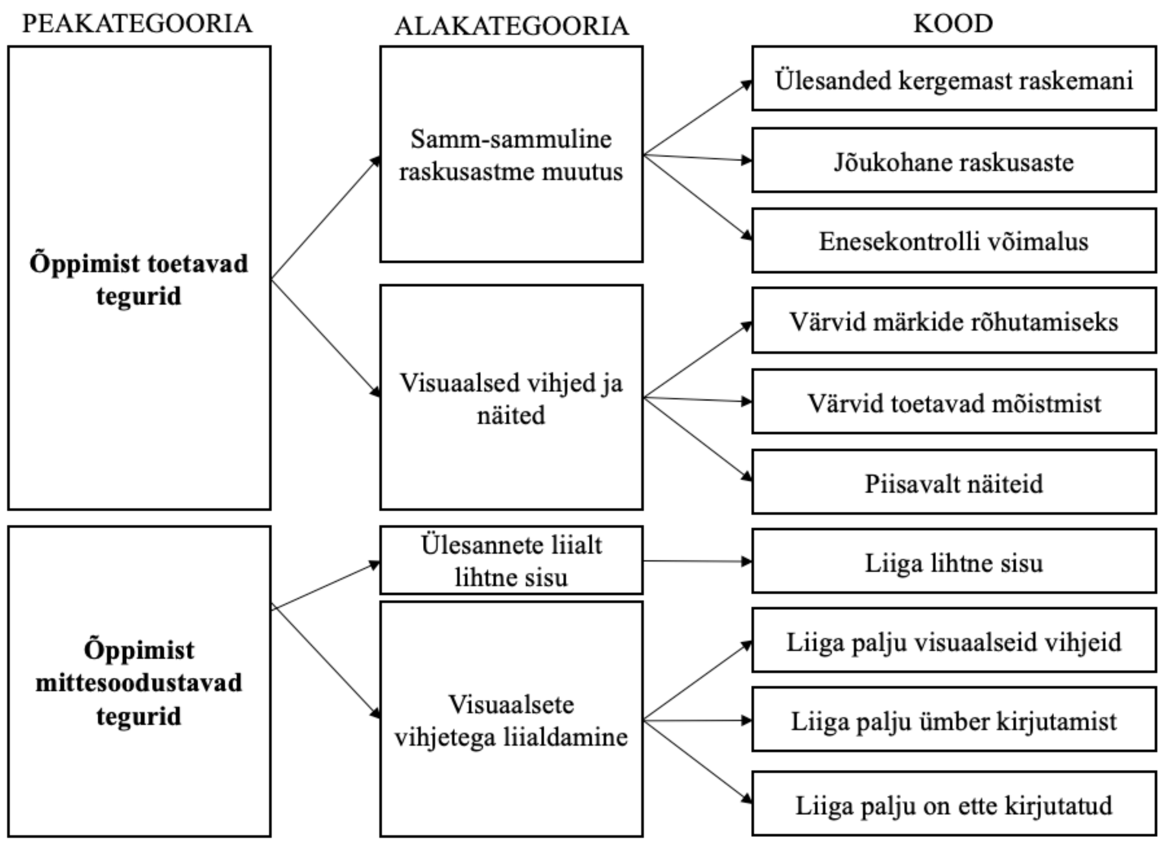
◦ Vajab muudatusi	◦ Vajab muudatusi
Kui te vastasite eelmisele küsimusele „*Vajab muudatusi*“, palun lisage oma tagasiside ja muudatusettepanekud siia: [tekstikast]	Kui te vastasite eelmisele küsimusele „*Vajab muudatusi*“, palun lisage oma tagasiside ja muudatusettepanekud siia: [tekstikast]
6) Töölehe kujundus ja kasutamislihtsus ◦ Sobib nii, nagu on ◦ Vajab muudatusi	**6) Töölehe kujundus ja kasutamislihtsus** [*Muudatuste kirj*eldus] ◦ Sobib nii, nagu on ◦ Vajab muudatusi
Kui te vastasite eelmisele küsimusele „*Vajab muudatusi*“, palun lisage oma tagasiside ja muudatusettepanekud siia: [tekstikast]	Kui te vastasite eelmisele küsimusele „*Vajab muudatusi*“, palun lisage oma tagasiside ja muudatusettepanekud siia: [tekstikast]
Kas te kasutasite töölehte oma õpiabi tundides? ◦ Jah ◦ Ei	-
Kui te vastasite eelmisele küsimusele „*Jah*“, jagage palun lühidalt oma mõtteid õpilase õppimise seisukohast. [tekstikast]	-
Muud kommentaarid, kui on: [tekstikast]	**Muud kommentaarid, kui on:** [tekstikast]

Lisa 4. Delphi 1. ja 2. ringi Fleiss kappa hindajatevahelise usaldusväärsuse väärtused.

	Hinnatav aspekt	kappa	Z	p	95% usaldusvahemik	
					alumine	ülemine
1. ring	Raudvara sõnastus	.120	1.138	.255	-.087	.327
	Raudvaras esitatud näited	.187	1.770	.077	-.020	.393
	Raudvara kujundus ja kasutamislihtsus	-.034	-.327	.744	-.241	.172
	Töölehe tööjuhiste sõnastus	-.071	-.678	.498	-.278	.135
	Töölehe ülesannete samm-sammuline raskusastme muutus	.147	1.390	.164	-.060	.353
	Töölehe kujundus ja kasutamislihtsus	-.053	-.499	.618	-.259	.154
	Kõik hinnatavad aspektid kokku	.166	3.857	<.001*	.082	.250
2. ring	Raudvara sõnastus	-.103	-1.261	.207	-.263	.057
	Raudvaras esitatud näited	.004	.044	.965	-.156	.164
	Raudvara kujundus ja kasutamislihtsus	-.014	-.166	.869	-.174	.147
	Töölehe tööjuhiste sõnastus	-.027	-.336	.737	-.187	.133
	Töölehe ülesannete samm-sammuline raskusastme muutus	-.042	-.510	.610	-.202	.118
	Töölehe kujundus ja kasutamislihtsus	.055	.669	.540	-.105	.215
	Kõik hinnatavad aspektid kokku	.000	-.003	.998	-.065	.065

*p<.005

Lisa 5. 2. uurimisküsimuse kategooriad ja koodid.



Lisa 6. Koostatud raudvara- ja töölehed.

ÜKSLIIGE JA HULKLIIGE

Üksliige

$$5a^2b$$

Koosneb arvust (5) ja muutujatest (a, b).

Neid on omavahel korrutatud:

$$5 \cdot a^2 \cdot b$$

Muutujate korrutamisel ei kirjutata $\cdot$ märki välja:

$$5 \cdot a^2 \cdot b$$

$$\downarrow$$

$$5a^2b$$

Veel näiteid üksliikmetest:

xy

$-a$

7

$-12x$

$\frac{2}{3}x^3y^2$

$-2x^3y^2x$

Hulkliige

$$x^2 - 5y + 8$$

Koosneb mitmest üksliikmest.

Üksliikmeid on omavahel liidetud:

$$x^2 + (-5y) + 8$$

Negatiivse arvu liitmisel võime avada sulud ja kaotada + märgi:

$$x^2 + (-5y) + 8$$

x^2 | $-5y$ | 8

$$x^2 - 5y + 8$$

x^2 | $-5y$ | 8

Veel näiteid hulkliikmetest:

$3a + 1$

$4x - y$

$\frac{1}{2}a^2 + ab - 1$

$a^2 + 4b + 3$

$-x^2 - 2xy + 3y - 3$

Nimi: ____________________

ÜKSLIIGE JA HULKLIIGE

1. Ühenda avaldis õige mõistega.

-2

$17x$

$3b - 2$

$x^2 + 2x - 1$

$-a^2 b$

ÜKSLIIGE HULKLIIGE

$-4a^2 + 3ab - b^2$

$7a + 2ab - \frac{1}{2}$

$-27ab^2$

$3x^2 + 2ab + b^3 + 7a - 2b + 1$

2. Kirjuta välja üksliikmed.

$2b + (-3)$

$3x + (-2y)$

$2a + (-4ab)$

$a^2 + (-4b) + 3$

$(-3x^2) + 5xy + 8y + 1$

3. Kirjuta välja üksliikmed.

$3x - 2y$

$4a - 2b$

$-2a + b$

$-3a^2 - 3a - 7$

$3a^2 - \frac{1}{2}b^2 + 2a - ab + 2b + 1$

4. Tõmba üksliikmetele joon ümber.

Näide: $2x + 5y - 3$

A. $3a + 7$

B. $2x + 4y$

C. $3x^2 - 7$

D. $5ab + a + 6$

E. $4a^2 + 3a + 2$

F. $-x^2 + y + 1$

G. $\frac{1}{2}x + 7$

H. $-9\frac{1}{2}a + 7$

I. $\frac{1}{5}x^2 + 3x - 4$

J. $3x^2 + y^2 + 2xy + 1$

K. $2x^2 - x^2y^2 + \frac{1}{2}x - 3y$

L. $3a^2 + b^2 + 2a - ab + 2b - 1$

HULKLIIKME KORRASTAMINE

1. Liida muutujate astendajad.

$$\overbrace{b^2}^{2} + \overbrace{2a^2b^2}^{2+2=4} + \overbrace{ab}^{1+1=2}$$

NÄHTAMATU MATEMAATIKA

Kui astendajat ei ole kirjutatud, on astendajaks alati arv 1.

$$ab = a^1b^1$$

2. Kirjuta üksliikmed astendajate summa kahanemise järjekorras.

$$2a^2b^2 + b^2 + ab$$

3. Sama summaga üksliikmed kirjuta tähestikulises järjekorras.

$$2a^2b^2 + ab + b^2$$

Veel näiteid:

Korrastamata hulkliige	**Korrastatud hulkliige**
$1 - b + a^2$	$a^2 - b + 1$
$-1 - 3x - x^2y + 3x^3$	$3x^3 - x^2y - 3x - 1$
$2xy + 5 - 6y + x^2 + -3x$	$x^2 + 2xy - 3x - 6y + 5$
$a + 2a^2b + \frac{1}{2}a^2b^2 - ab^2$	$\frac{1}{2}a^2b^2 + 2a^2b - ab^2 + a$

Nimi: ____________________

HULKLIIKME KORRASTAMINE

1. Korrasta hulkliige.

A. Kirjuta välja üksliikmed.

B. Ringita astendajad.

C. Pane üksliikmed õigesse järjekorda.

D. Kirjuta korrastatud hulkliige.

Näide: $2a^2 + 3a^3 - a$

$\boxed{2a^2}$ $\boxed{3a^3}$ $\boxed{-a}$

Korrastatud järjekord: $\boxed{3a^3}$ $\boxed{2a^2}$ $\boxed{-a}$

Korrastatud hulkliige: $3a^3 + 2a^2 - a$

A. $m + m^3 + m^2$

Korrastatud järjekord:

Korrastatud hulkliige : ____________________

B. $2x^2 - x^4 + x$

Korrastatud järjekord:

Korrastatud hulkliige : ____________________

C. $ab^3 + b^3 + 3b^2$

Korrastatud järjekord:

Korrastatud hulkliige : ____________________

D. $-x^2y - 2y + x$

Korrastatud järjekord:

Korrastatud hulkliige : ____________________

2. Korrasta hulkliige.

A. Ringita astendajad.

B. Pane üksliikmed õigesse järjekorda.

C. Kirjuta korrastatud hulkliige.

Näide: $-1 + 2a + 3a^2$

Korrastatud järjekord: $\boxed{3a^2}$ $\boxed{2a}$ $\boxed{-1}$

Korrastatud hulkliige : $3a^2 + 2a - 1$

A. $n + m^3 + 3m^2$

Korrastatud järjekord: $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

Korrastatud hulkliige : ____________________

B. $b + 2 - 3a^2 + 2b^3$

Korrastatud järjekord: $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

Korrastatud hulkliige : ____________________

C. $-1 + ab^3 + b + 2b^2$

Korrastatud järjekord: $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

Korrastatud hulkliige : ____________________

D. $y^3 + 0{,}3x^2y - 1y + x$

Korrastatud hulkliige : _________________________

E. $4y^3 + xy + x^2y - 2y$

Korrastatud hulkliige : _________________________

F. $m^3 - 2 + m^2n - mn$

Korrastatud hulkliige : _________________________

G. $\frac{2}{3}x + y + xy - 2$

Korrastatud hulkliige : _________________________

HULKLIIKME KOONDAMINE

1. Jooni sarnased liikmed koos nende märgiga.

$$3x + x^2 + 5 + 2x - 7$$

2. Koonda ehk liida sarnased liikmed.

$$3x + x^2 + 5 + 2x - 7$$

$$x^2 \qquad 3x + 2x \qquad 5 + (-7) = 5 - 7$$

3. Kirjuta summad vastuseks.

$$3x + x^2 + 5 + 2x - 7 = x^2 + 5x - 2$$

Veel näiteid:

$$6a + 4a + 7 = 10a + 7$$

$$3a + 3 + 2a^2 - 4a + 1 = 2a^2 - a + 4$$

$$2x^2 - 3x + 3 + 7x - 4x^2 = -2x^2 + 4x + 3$$

$$m^2 + mn + \cancel{1} + 2mn - \cancel{1} - 3m^2 + n = -2m^2 + 3mn + n$$

Alusta joonimist nendest üksliikmetest, mille astendajate summa on suurim. Nii kirjutad ka vastuse koheselt korrastatud kujul.

Lisaks joonimisele võid kasutada ka ringi või $\boxed{\textbf{kasti}}$ tegemist.

Üksliikmed, **mille summa on null**, võid kohe maha tõmmata.

Nimi: ____________________

HULKLIIKME KOONDAMINE

1. Jooni sarnased liikmed.

Näide: $2x^2 - 3x + 3 + 7x - 4x^2$

A. $3a + 2a - 3$

B. $3x + 3x^2 + 2x^2 - x$

C. $a^2 - 3a - a^2 + 3a - 3$

D. $a - 3b - 6 + c + c + 3a - 9 + 4b$

E. $3a^2 - 6a - 5 + 3 - 3a^2 + 2a - 4a^2 - 2a + 6$

2. Koonda sarnased liikmed.

A. $3a + 2a - 3$

...... + ... = ...

B. $3x^2 + 3x + 2x^2 - x$

...... + ... = ...

...... + ... = ...

C. $3x - 3y - 6 - 3x - 9 + 4y$

....

....

....

D. $a - 3b - 2 + c - c + 3a + 3 + 4b$

....

....

....

....

3. Koonda hulkliige.

A. Jooni sarnased liikmed.
B. Kirjuta kastidesse välja liidetavad.
C. Kirjuta summad vastuseks.

Ära unusta neid üksliikmeid, mida liita polnud vaja!

Näide:

$4a - a^2 + a - 3 =$ $- a^2 + 5a - 3$ ....

| 4a ...... + a .... |

A. $m^2 + m^2 + 6m - m =$ ....

| .... | .... |

B. $a^2 - 3a - a^2 + 5a - 3 =$ ....

| .... | .... |

C. $3y^2 - 4y + 8 - 6y^2 + 2y - 3 =$ ....

| .... | .... | .... |

D. $3u - 3v + 4 - 2u + 3v - 3 =$ ....

| .... | .... | .... |

E. $-x^2 - 5x - y + 7 - 5x^2 + 1 + 6x + y =$ ....

| .... | .... | .... | .... |

HULKLIIKMETE LIITMINE

1. Ava sulud.

$$(3x + x^2 + 5) + (2x - 7) =$$

$$= 3x + x^2 + 5 + 2x - 7 =$$

2. Koonda hulkliige.

$$= 5x - 2 + x^2 =$$

3. Korrasta hulkliikme järjekord.

$$= x^2 + 5x - 2$$

NÄHTAMATU MATEMAATIKA

Kui esimese sulu ees puudub märk, on seal tegelikult plussmärk.

$$(3x + x^2 + 5) = +(3x + x^2 + 5) = 3x + x^2 + 5$$

Veel näiteid:

$$(3a + 3) + (2a^2 - 4a + 1) = 3a + 3 + 2a^2 - 4a + 1 = -a + 4 + 2a^2 = 2a^2 - a + 4$$

$$(2x^2 - 3x + 3) + (7x - 4x^2) = 2x^2 - 3x + 3 + 7x - 4x^2 = -2x^2 + 4x + 3$$

$$6a + (4a + 7) = 6a + 4a + 7 = 10a + 7$$

Nimi: ___________________

HULKLIIKMETE LIITMINE

1. Ava sulud.

A. $3a + (2a - 3) =$ ....

B. $a^2 + (a^2 + 2a) =$ ....

C. $(-3x + 3x^2) + (2x^2 - x) =$ ....

D. $(4a - a^2) + (-a - 3) =$ ....

E. $(5x - 2x^2) + (3x - 3 + x^2) =$ ....

2. Koonda sarnased liikmed.

A. $3a + 2a - 3 =$ ....

B. $a^2 + a^2 + 2a =$ ....

C. $-3x + 3x^2 + 2x^2 - x =$ ....

D. $4a - a^2 - a - 3 =$ ....

E. $5x - 2x^2 + 3x - 3 + x^2 =$ ....

3. Korrasta hulkliikme järjekord.

A. $-3 + 5a =$ ....

B. $2a + a^2 =$ ....

C. $-4x + 5x^2 =$ ....

D. $3a - a^2 - 3 =$ ....

E. $-3 + 8x - x^2 =$ ....

4. Liida hulkliikmed.

A. Ava sulud.
B. Koonda sarnased liikmed.
C. Korrasta hulkliikme järjekord.

A. $4a + (2a + 5) =$

B. $(4n + 3m^2) + (2m^2 + n) =$

C. $(5a - 6b - 9) + (3a + 4b + 4) =$

D. $(x - 4y - 6 + z) + (-z + 4x - 7 + 5y) =$

E. $(3a^2 - 6a - 5) + (6 - 3a^2 + 5a) + (a^2 + a) =$

F. $(5x - 2) + (3x - 2y) + (5y - 3) + (3y - 9x) =$

HULKLIIKMETE LAHUTAMINE

1. Ava sulud.

Miinusmärk sulu ees muudab märki sulu sees!

$$(3x + x^2 + 5) - (2x - 7) =$$

$$= \underline{\underline{3x}} + \underline{x^2} + 5 - \underline{\underline{2x}} + 7 =$$

2. Koonda hulkliige.

$$= x + x^2 + 12 =$$

3. Korrasta hulkliikme järjekord.

$$= x^2 + x + 12$$

Veel näiteid:

$6a - (4a + 7) = 6a - 4a - 7 = 2a - 7$

$(2x^2 - 3x + 3) - (7x - 4x^2) = 2x^2 - 3x + 3 - 7x + 4x^2 = 6x^2 - 10x + 3$

$(3a + 3) - (2a^2 - 4a + 1) = 3a + 3 - 2a^2 + 4a - 1 = 7a + 2 - 2a^2 = -2a^2 + 7a + 2$

$(5 + 2x + x^2) - (-2x + 3x - 4) = 5 + 2x + x^2 + 2x - 3x + 4 = 9 + x + x^2 = x^2 + x + 9$

Nimi: ____________________

HULKLIIKMETE LAHUTAMINE

1. Ava sulud.

A. $3a - (2a - 3) =$ ....

B. $a^2 - (-a^2 + 2a) =$ ....

C. $(3x + 3x^2) - (2x^2 - x) =$ ....

D. $(a - a^2) - (a + 3) + (a - 3) =$ ....

E. $(5x - 2x^2) - (3x - 3 + x^2) =$ ....

2. Koonda sarnased liikmed.

A. $3a - 2a + 3 =$ ....

B. $a^2 - a^2 - 2a =$ ....

C. $3x + 3x^2 - 2x^2 + x =$ ....

D. $4a - a^2 - a + 3 =$ ....

E. $5x - 2x^2 - 3x + 3 - x^2 =$ ....

3. Korrasta hulkliikme järjekord.

A. $3 - a =$ ....

B. $2a + a^2 + 5 =$ ....

C. $4x + 3 - x^2 =$ ....

D. $3a + a^2 - 3 =$ ....

E. $-8x - x^2 - 3 =$ ....

Nimi: ____________________

4. Lahuta hulkliikmed.

A. Ava sulud.
B. Koonda sarnased liikmed.
C. Korrasta hulkliikme järjekord.

A. $3a - (2a + 7) =$

B. $(2m - 3n^2) - (4n^2 + m) =$

C. $-(3x + 2y^2) - (4x - y^2) =$

D. $(3a - 5b + 2c - 6) - (2a - 5b + 6c - 7) =$

E. $(8x - 2y + 1) - (-2y - 6x - 4) + (2x - 8y - 5) =$

F. $(3y^2 - 5y + 2) - (7y^2 + 2y - 3) - (y^2 - 3y - 1) =$

TÄHTAVALDISE VÄÄRTUSE ARVUTAMINE

Tähtavaldis koosneb arvudest ja tähtedest.
Neid tähti nimetame **muutujateks**.

Näide: $4c^2 - c + 5$

Arvutame avaldise väärtuse, kui c = 2.

1. Asenda muutuja arvuga.

$$4c^2 - c + 5 = (4 \cdot 2^2) - 2 + 5 =$$

2. Arvuta avaldise väärtus.

$$= (4 \cdot 4) - 2 + 5 = 16 - 2 + 5 = 19$$

Arvutame uuesti sama avaldise väärtuse, kuid nüüd c = 3.

$$4c^2 - c + 5 = (4 \cdot 3^2) - 3 + 5 =$$

$$= (4 \cdot 9) - 3 + 5 = 36 - 3 + 5 = 38$$

Vastused tulid erinevad.

Tähtavaldise väärtus sõltub sellest,
millise arvulise väärtuse me muutujatele anname.

Nimi: ____________________

TÄHTAVALDISE VÄÄRTUSE ARVUTAMINE

1. Asenda muutuja arvuga.

A. $b = 4$ $\quad b + 11 =$ ___ $+ 11$

B. $x = 2$ $\quad 5x + 3 = 5 \cdot$ ___ $+ 3$

C. $b = -5$ $\quad b^2 - 4b + 2 =$ ___ $- (4 \cdot$ ___$) + 2$

D. $c = -2$ $\quad c^2 + c - 1 =$ ___ $+$ ___ $- 1$

2. Asenda muutuja arvuga, kui *x = 3*.

A. $4x + 5 =$ ....

B. $3(4x + 5) =$ ....

C. $x^2 + x - 1 =$ ....

D. $-x^2 + 3x + 5 =$ ....

3. Asenda muutuja arvuga, kui *y = -2*.

A. $y - 3 =$ ....

B. $2(4y + 5) =$ ....

C. $y^2 + y - 2 =$ ....

D. $-3y^2 + 5y - 1 =$ ....

4. Asenda muutuja arvuga.

Arvuta avaldise väärtus.

A. $3b + 8$ kui b = *4*

B. $3(4x + 5)$ kui x = *2*

C. $y^2 + 4y + 7$ kui y = *3*

D. $x^2 - 2x + 1$ kui x = *-5*

E. $-3c^2 + c - 2$ kui c = *-2*

Nimi: ____________________

ÜKSLIIKME KORRUTAMINE HULKLIIKMEGA

hulkliikme liikmed

$$5(2a+3a)$$

üksliige

hulkliige

1. Ava sulud. Korruta sulgude ees oleva üksliikmega kõik hulkliikme liikmed.	$5(2a-4a+3a^2)=$ $=5\cdot 2a+5\cdot(-4a)+5\cdot 3a^2=$ $=10a-20a+15a^2=$
2. Koonda hulkliige.	$=-10a+15a^2=$
3. Korrasta hulkliikme järjekord.	$=15a^2-10a$

NÄHTAMATU MATEMAATIKA

Miinusmärk sulu ees on tegelikult kordaja -1.
Miinusmärk sulu ees muudab märki sulu sees!

$$-(2x^2-5x^2)=(-1)\cdot 2x^2+(-1)\cdot(-5x^2)=-2x^2+5x^2=3x^2$$

Veel näiteid:

$$2(2x-5)=4x-10$$

$$-(x-3)=-x+3$$

$$(2a-1+3a)\cdot(-5)=-10a+5-15a=-25a+5$$

$$5(-2a+3)-4(a^2+6)=-10a+15-4a^2-24=-10a-9-4a^2=-4a^2-10a-9$$

$$(3a-2ab+6a^2)\cdot 2a=6a^2-4a^2b+12a^3=12a^3-4a^2b+6a^2$$

 Nimi: ____________________

ÜKSLIIKME KORRUTAMINE HULKLIIKMEGA

1. Kirjuta üksliikme ja hulkliikme liikmete korrutised.

Näide:

$3(4y+2) = 3 \cdot \underline{4y} + 3 \cdot \underline{2}$

A. $5(2x+1) = 5 \cdot \ldots + 5 \cdot \ldots$

B. $-2(3y+5) = (-2) \cdot \ldots + (-2) \cdot \ldots$

C. $(3-2) \cdot x = \ldots \cdot x + \ldots \cdot x$

D. $5(3x - x + 2) = 5 \cdot \ldots + 5 \cdot \ldots + 5 \cdot \ldots$

E. $-3(m^2 - 2m + 5) = (-3) \cdot \ldots + (-3) \cdot \ldots + (-3) \cdot \ldots$

2. Kirjuta üksliikme ja hulkliikme liikmete korrutised.

Näide:

$2(5y+4) = \underline{2} \cdot 5y + \underline{2} \cdot 4$

A. $4(3x+2) = \ldots \cdot 3x + \ldots \cdot 2$

B. $-(2y+4y) = \ldots \cdot 2y + \ldots \cdot 4y$

C. $(5-2) \cdot 3x = 5 \cdot \ldots + (-2) \cdot \ldots$

D. $-2(4x - x + 3) = \ldots \cdot 4x + \ldots \cdot (-x) + \ldots \cdot 3$

E. $-5(a^2 - 4a + 3) = \ldots \cdot a^2 + \ldots \cdot (-4a) + \ldots \cdot 3$

3. Kirjuta üksliikme ja hulkliikme liikmete korrutised.

Näide:

$4(4a + 2) =$ $4 \cdot 4a$ $+$ $4 \cdot 2$

A. $a(5 + 3) =$ .... $+$ ....

B. $-x(y + 6) =$ .... $+$ ....

C. $-4m(m - 5) =$ .... $+$ ....

D. $x(x - 3x + 3) =$ .... $+$ .... $+$ ....

E. $-3y(y^2 - 2y - 7) =$ .... $+$ .... $+$ ....

4. Arvuta eelmise ülesande korrutiste vastused.

Näide:

$4(4a + 2) =$ $16a + 8$

A. $a(5 + 3) =$ ....

B. $-x(y + 6) =$ ....

C. $-4m(m - 5) =$ ....

D. $x(x - 3y + 3) =$ ....

E. $-3y(y^2 - 2y - 7) =$ ....

Tuleta meelde!

Astmete korrutamine:

$x^3 \cdot x^2 = x^{3+2} = x^5$

5. Korruta.

Näide:

$3(2x + 2) =$ 6x + 6 ....

A. $2(2x + 4) =$ ....

B. $5(2a - 1) =$ ....

C. $-5m(3m + 2) =$ ....

D. $3(y^2 - 2y) =$ ....

E. $-2a(3a + 2ab) =$ ....

6. Korruta.
Kirjuta lõppvastus korrastatud kujul.

Näide:

$3x(2 - 3x) =$ $6x - 9x^2$ .... $=$ $-9x^2 + 6x$ ....

A. $-(3b + 4a) =$ .... $=$ ....

B. $4(2a - 5a^2) =$ .... $=$ ....

C. $-5m(3m + 2 - m^2) =$ .... $=$ ....

D. $8(x^2 - 2y + 3x) =$ .... $=$ ....

E. $a(3a^2 + 2b - 4a) =$ .... $=$ ....

7. Korruta.
Koonda hulkliige.
Vajadusel korrasta lõppvastus.

Näide:

$2(x+2)+3(2+x) =$ 2x + 4 + 6 + 3x = 5x + 10

A. $x(3+x)+2(x+5) =$

B. $2x(x+5)+3(x+1) =$

C. $3(a+3a)+(a+a^2)\cdot 6 =$

D. $-2(y+7)-2(1-y) =$

E. $-5(2-x)+(3x+6)\cdot 3x =$

F. $2y(x+y-1)+(x^2+y^2+1)\cdot 3 =$

G. $-6x(2x^2-3x)+3(x+4x^2)-x(-3+4x) =$

Vastused: $3x^2+2xy+5y^2-2y+3$ $\quad 6a^2+18a$ $\quad -16x-28$ $\quad 2x+5x^2+10$

$-12x^3+26x^2+6x$ $\quad 6a^2+12a$ $\quad -16$ $\quad 16x+28$

$x^2+5x+10$

$2x^2+13x+3$ $\quad 9x^2+23x-10$ $\quad -y-16$

$x^2+2xy+3y^2+2y-1$

Nimi: ____________________

HULKLIIKME JAGAMINE ÜKSLIIKMEGA

hulkliikme liikmed

$$(6x^2 + 4x^2) : 2x$$

hulkliige

üksliige

1. Jaga iga hulkliikme liige üksliikmega.

$$(6x^2 + 4x^2) : 2x =$$

$$= (6x^2 : 2x) + (4x^2 : 2x) =$$

Jagamismärk ja murrujoon on sama tähendusega. Seega võime kirjutada ka nii:

$$= \frac{6x^2}{2x} + \frac{4x^2}{2x} =$$

Jagamisest võib mõelda ka kui taandamisest:

$$\frac{{}^{2}\cancel{4}x^{\cancel{2}}}{{}_{1}\cancel{2}\cancel{x}}$$

1) Jagan arvud 6 : 2 = 3

2) Jagan muutujad $x^2 : x = x^{2-1} = x^1 = x$

2. Liida saadud jagatised.

$$= 3x + 2x = 5x$$

Veel näiteid:

$$(8a + 4) : 2 = \frac{8a}{2} + \frac{4}{2} = 4a + 2$$

$$(6a^4 - 8a^4) : (2a) = \frac{6a^4}{2a} - \frac{8a^4}{2a} = 3a^3 - 4a^3 = -a^3$$

Jälgi märki!

$$(2x^3y + 3xy^2) : (xy) = \frac{2x^3y}{xy} + \frac{3xy^2}{xy} = 2x^2 + 3y$$

$$(8xy - x) : 4x = \frac{8xy}{4x} - \frac{x}{4x} = 2y - \frac{1}{4}$$

$$(15mn + 3m) : (-3m) = \frac{15mn}{(-3m)} + \frac{3m}{(-3m)} = -5n - 1$$

Nimi: ____________________

HULKLIIKME JAGAMINE ÜKSLIIKMEGA

1. Kirjuta hulkliikme ja üksliikme jagatised.

Näide:

$(2a + a) : 2 = \frac{2a}{2} + \frac{a}{2}$

A. $(2x + 6) : 2 = \frac{2x}{\quad} + \frac{6}{\quad}$

B. $(3x^2 + 5x) : x = \frac{3x^2}{\quad} + \frac{5x}{\quad}$

C. $(21a - 14a) : (7a) = \frac{21a}{\quad} + \frac{(-14a)}{\quad}$

D. $(5x^3 + 2a^2) : a^2 = \frac{5x^3}{\quad} + \frac{2a^2}{\quad}$

E. $(15a + 21b - 6) : (-ab) = \frac{15a}{\quad} + \frac{21b}{\quad} + \frac{(-6)}{\quad}$

2. Kirjuta hulkliikme ja üksliikme jagatised.

Näide:

$(4a + 6a) : 2 = \frac{4a}{2} + \frac{6a}{2}$

A. $(12x + 16) : 4 = \frac{\quad}{4} + \frac{\quad}{4}$

B. $(3x^2 - 5x) : x = \frac{\quad}{x} + \frac{\quad}{x}$

C. $(12a - 8a) : (4a) = \frac{\quad}{4a} + \frac{\quad}{4a}$

D. $(x^4 + 2x^2y) : (-x^2) = \frac{\quad}{(-x^2)} + \frac{\quad}{(-x^2)}$

E. $(x^3 - 2x^2 + 3x) : x = \frac{\quad}{x} + \frac{\quad}{x} + \frac{\quad}{x}$

3. Kirjuta hulkliikme ja üksliikme jagatised.
Jaga.

Näide:
$(4a - 2a) : 2 = \frac{{}^{2}\cancel{4}a}{{}_{1}\cancel{2}} + \frac{-\cancel{2}^{1}a}{{}_{1}\cancel{2}} = 2a - a$

A. $(6x + 4) : 2 = \_\_\_ + \_\_\_ =$

B. $(15x^2 + 6x) : 3 = \_\_\_ + \_\_\_ =$

C. $(7a - 14b) : (-7) = \_\_\_ + \_\_\_ =$

D. $(2x^3 + 8y^2) : 2 = \_\_\_ + \_\_\_ =$

E. $(12a + 30b - 6) : 6 = \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ =$

4. Kirjuta üksliikme ja hulkliikme jagatised.

Jaga.

Näide:
$(2a^2 - a^3) : a = \frac{2a^{\cancel{2}\,1}}{{}_{1}\cancel{a}} + \frac{-a^{\cancel{3}\,2}}{{}_{1}\cancel{a}} = 2a - a^2$

Tuleta meelde!

Astmete jagamine:

$x^3 : x^2 = x^{3-2} = x^1 = x$

A. $(x^3 + 4x^2) : x^2 = \_\_\_ + \_\_\_ =$

B. $(15x^2 + x) : (-x) = \_\_\_ + \_\_\_ =$

C. $(7a^4 - 14a^2b) : a^2 = \_\_\_ + \_\_\_ =$

D. $(2xy^3 + 8x^2y^2) : (xy) = \_\_\_ + \_\_\_ =$

E. $(12a + 30ab - 6a^3) : a = \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ =$

5. Jaga.

Näide:

$(4a^2 + 2a) : (2a) = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\overset{1}{\cancel{a^2}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\cancel{a}} + \frac{\overset{1}{\cancel{2a}}}{\underset{1}{\cancel{2a}}} = 2a + 1$

A. $(6x^2 + 4x) : (2x) =$ ______ + ______ =

B. $(15y^2 + 6y^3) : (3y) =$ ______ + ______ =

C. $(7a^4b - 14a^2) : (7a^2) =$ ______ + ______ =

D. $(2x^3 + 8x^2y^2) : x^2 =$ ______ + ______ =

E. $(12ab + 30ab - 6ab) : (-6ab) =$ ______ + ______ + ______ =

6. Jaga.

A. $(6x + 3) : 3 =$

B. $(y^2 + y^3) : y =$

C. $(4a^4 - a) : (2a) =$

D. $(16x^3y + 8xy^2) : (xy) =$

E. $(2a + 12ab - 8a) : (4a) =$

7. Jaga.

Vajadusel korrasta lõppvastus.

Näide:

$(x^2y + 3x^2y^2 - 4x^2y) : (xy) = \frac{\cancel{x^2}\cancel{y}}{\cancel{x}\cancel{y}} + \frac{3\cancel{x^2}\cancel{y^2}}{\cancel{x}\cancel{y}} + \frac{-4\cancel{x^2}\cancel{y}}{\cancel{x}\cancel{y}} = x + 3xy + (-4x) =$

$= x + 3xy - 4x = -3x + 3xy = 3xy - 3x$

A. $(21a^2b^3 - 9a^2b^2) : (3a^2b^2) =$

B. $(x^2y^3 + 2xy) : (-xy) =$

C. $(6ab^5 + 2a^3b^4) : (2ab) =$

D. $(-4x^4 - 6xy^2) : (-2x) =$

E. $(7x^7 + 21x^2y - 14x^4) : (-7x^2) =$

Vastused:

$7b - 3$ $\quad 2x^3 + 3y^2$ $\quad -xy^2 - 2$ $\quad 2x^3 - 3y^2$ $\quad xy^2 + 2$ $\quad -x^5 + 2x^2 - 3y$ $\quad 7x^5 + 2x^2 + 3y$ $\quad ab^2 + 3b^3$ $\quad 7b^2 - 3$ $\quad a^2b^3 + 3b^4$

Nimi: ____________________

HULKLIIKME TEGURDAMINE

1. Leia ühine tegur, millega jaguvad kõik hulkliikme liikmed.

$$12x + 4y =$$

12x : 4 = 3x   4y : 4 = y   Ühine tegur on 4

2. Kirjuta ühine tegur sulgude ette.

$$12x + 4y = 4\ (\dots\dots\dots\dots)$$

3. Sulgudesse kirjuta hulkliikmete ja ühise teguri jagatised.

$$12x + 4y = 4\ (3x + y)$$

12x : 4 = 3x   4y : 4 = y

Kui ühiseks teguriks on lisaks arvule ka muutuja,
too ka see sulgude ette.

$$14x^2 - 28xy = 7x(2x - 4y)$$

Jälgi märki!

$14x^2 : 7x = 2x$ $28xy : 7x = 4y$

Veel näiteid:

$12x + 18y = 6(2x + 3y)$

$-15a^2 - 10ab = -5a(3a + 2b)$

$2x + 2xy = 2x(1 + y)$

$3b^5 + 9ab^3 - 9ab^2 = 3b^2(b^3 + 3ab - 3a)$

Nimi: ____________________

HULKLIIKME TEGURDAMINE

1. Leia ühine tegur.

Näide: $2x + 2y$

2x : 2 = x	2y : 2 = y

Ühine tegur on ...2......

A. $3m + 6n$

Ühine tegur on ....

B. $10a + 15b$

Ühine tegur on ....

C. $9x + 15y$

Ühine tegur on ....

D. $4k + 2m + 6n$

Ühine tegur on ....

E. $25a + 15c + 30b$

Ühine tegur on ....

2. Leia ühine tegur.

A. $3m + 6m$

Ühine tegur on ....

B. $8a^2 + 12a$

Ühine tegur on ....

C. $3ab + 9a$

Ühine tegur on ....

D. $15x^2 + 5xy + 10x$

Ühine tegur on ....

E. $3a^2b + 9ab^2 + 12ab$

Ühine tegur on ....

3. Kirjuta sulgudesse hulkliikmete ja ühise teguri jagatis.

Näide: $2x + 2y = 2(\underline{\;x\;} + \underline{\;y\;})$

2x : 2 = x   2y : 2 = y

A. $15b + 3a = 3(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

B. $4m + 12 = 4(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

C. $-12a - 16b = -4(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

D. $6c - 4b + 12a = 2(\ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots)$

E. $18ab + 24c - 12 = 6(\ldots\ldots + \ldots\ldots - \ldots\ldots)$

4. Kirjuta sulgudesse hulkliikmete ja ühise teguri jagatis.

A. $4mn + 12m = 4m(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

B. $xy + 2y = y(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

C. $-15c^2 - 3c^3 = -3c^2(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

D. $6a^2b^3c - 4a^2b^2c^2 = 2a^2b^2c(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

E. $35ab + 28ab^2 - 7ab = 7ab(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

5. Tegurda.

Näide: $15ab - 10b =$ 5b (3a – 2)

15ab : 5b = 3a

10b : 5b = 2

A. $25a + 15 =$

B. $16xy - 36y =$

C. $4m^2 + 2m =$

D. $12xy + 4y^2 =$

E. $9m^2n^3 - 18mn =$

F. $5a^4b^3 + 4a^3b =$

G. $18a^3b + 24a^2b^2 - 12ab^3 =$

6. Vali õige vastusevariant.

Millega jagub selline hulkliige:
😁🐸 + 😁🦋 + 🐸🌲😁

a) 😁🐸

b) 🦋

c) 😁

d) 🐸

Kas üksliige $-3x^2$ saab olla hulkliikme $-9x^2y - 12x^3$ ühine tegur?

a) Jah, saab
b) Ei, sest seal on miinusmärk
c) Jah, kui miinusmärk ära võtta
d) Ei, sest hulkliikmed ei jagu selle üksliikmega

Leia tegurdatud hulkliige, milles on viga:

a) $x^2 + x = x(x + 1)$

b) $2x^2 - x = x(2x - 1)$

c) $4xy^2 + 12xy = 4xy(y + 3)$

d) $x^2 - 3x = 3(x^2 - x)$

Nimi: ____________________

HULKLIIKMETE KORRUTAMINE

korrutamine

$$(2x+5)(3x+3)$$

esimene hulkliige	teine hulkliige
$(2x+5)$	$(3x+3)$

1. Korruta esimese hulkliikme iga liige teise hulkliikme kõigi liikmetega.

$$(2x+5)(3x+3)=$$

$$=2x\cdot 3x+2x\cdot 3+5\cdot 3x+5\cdot 3=$$

$$=6x^2+6x+15x+15=$$

2. Koonda sarnased liikmed.

$$=6x^2+21x+15$$

Veel näiteid:

$(2x+1)(x+3x)=2x^2+6x^2+x+3x=8x^2+4x$

$(5a-4)(3a+5)=15a^2+25a-12a-20=15a^2+13a-20$

Korrutamisel jälgi märke!

$(3x+4)(2-5x)=6x-15x^2+8-20x=-15x^2-14x+8$

$(2a-b)(3a-5b+2)=6a^2-10ab+4a-3ab+5b^2-2b=6a^2-13ab+5b^2+4a-2b$

$(2x+1)(x-3x-5)=2x^2-6x^2-10x+x-3x-5=-4x^2-12x-5$

Nimi: ____________________

HULKLIIKMETE KORRUTAMINE

1. Kirjuta hulkliikmete korrutised.

Näide: $(x+3)(x+2) =$ x · x + x · 2 + 3 · x + 3 · 2

A. $(x+5)(x+3) =$ .... + ... + ... + ...

B. $(a-5)(a+10) =$ .... + ... − .... − ....

C. $(2+3x)(1-3x) =$ .... − .... + ... − ....

D. $(4m+7)(5+2m) =$ .... + ... + ... + ...

E. $(5x-y)(x^2+x+y) =$ .... + ... + ... − .... − .... − ....

2. Kirjuta eelmise ülesande korrutiste vastused.

Näide: $(x+3)(x+2) =$ x^2 + 2x + 3x + 6

A. $(x+5)(x+3) =$ .... + ... + ... + ...

B. $(a-5)(a+10) =$ .... + ... − .... − ....

C. $(2+3x)(1-3x) =$ .... − .... + ... − ....

D. $(4m+7)(5+2m) =$ .... + ... + ... + ...

E. $(5x-y)(x^2+x+y) =$ .... + ... + ... − .... − .... − ....

3. Korruta hulkliikmed.

Koonda sarnased liikmed.

Näide: $(x+3)(x+2) =$ $x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6$

A. $(2+x)(6+x) =$

B. $(2a+4)(3a+5) =$

C. $(3+x)(6-x) =$

D. $(x^2+3)(2x+4) =$

E. $(-3+x)(5-2x) =$

F. $(x-5)(y+4) =$

G. $(x+2)(x^2-x) =$

4. Korruta hulkliikmed.

Koonda sarnased liikmed.

A. $(x + 3x)(2x + 3x + 2) =$

B. $(3 - 4x)(x + 2x - 3) =$

C. $(1 - 2x^2)(x - 3x + 2) =$

D. $(5x - y)(x + 4x - y) =$

E. $(2x + 3)(x + 1) + (2x + 3)(5x + 2) =$

F. $(x - 3)(x^2 - 2x + 5) + 3x =$

Vastused:

$20x^2 + 8x$

$x^3 - 12x^2 + 6x - 16$

$25x^2 - 10xy + y^2$

$4x^3 - 4x^2 - 2x + 2$

$-12x^2 + 21x - 9$

$12x^2 + 24x + 9$

$x^3 - 5x^2 + 14x - 15$

Nimi: ____________________

RUUTUDE VAHE VALEM

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

üksliikmete summa · üksliikmete vahe = üksliikmete ruutude vahe

Kuidas ruutude vahe valem tekib?

Korrutame hulkliikmed: $(a+b)(a-b)=a^2-\cancel{ab}+\cancel{ab}-b^2=$

Koondame sarnased liikmed: $=a^2-b^2$

1. Kontrolli, kas sulgudes on samad liikmed, mis erinevad vaid märgi poolest? Kui jah, saad kasutada ruutude vahe valmit.

$$(a+2)(a-2)$$

2. Korruta omavahel ühesugused üksliikmed.

$$(a+2)(a-2)=a^2-4$$

$$a\cdot a \qquad 2\cdot 2$$

Veel näiteid:

$(x+3)(x-3)=x^2-9$

$(a-6)(a+6)=a^2-36$

$(2x+3y)(2x-3y)=4x^2-9y^2$

$(x+3)(3-x)=(3\cdot 3)-(x\cdot x)=9-x^2$

$(10-a)(a+10)=(10\cdot 10)-(a\cdot a)=100-a^2$

Pane tähele! Ühesugused üksliikmed võivad sulgudes olla ka erinevas järjekorras.

Alusta alati positiivsete liikmete korrutisest!

Nimi: ____________________

RUUTUDE VAHE VALEM

1. A. Ava sulud ja koonda sarnased liikmed.
B. Tõmba joon ümber avaldistele, mille puhul saab kasutada ruutude vahe valemit.

A. $(x+7y)(x-7y)$

D. $(10-x)(x+10)$

G. $(7k-3m)(3m+7k)$

B. $(2y^2+2)(2y^2-2)$

E. $(3a^3-2)(4a^3-2)$

H. $(1-b)(1+b)$

C. $(8k+9)(8m-9)$

F. $(k+3m)(3m-k)$

I. $(3m+n)(3m+n)$

Näide: A. $(x+7y)(x-7y) = x^2 - \cancel{7xy} + \cancel{7xy} - 49y^2 = x^2 - 49y^2$

2. Korruta omavahel ühesugused üksliikmed.

Näide: $(x+4)(x-4)$

$x \cdot x$ = x^2 $4 \cdot 4$ = 16

A. $(y+2)(y-2)$

.... = ... = ...

B. $(x-5)(x+5)$

.... = ... = ...

C. $(b+a)(a-b)$

.... = ... = ...

D. $(3y+2x)(2x-3y)$

.... = ... = ...

E. $(x^2-6y)(x^2+6y)$

.... = ... = ...

3. Kasuta ruutude vahe valemit.

Näide: $(x+4)(x-4) =$ x^2 $-$ 16

A. $(x+3)(x-3) =$ .... $-$ ....

B. $(10+y)(y-10) =$ .... $-$ ....

C. $(2x-1)(2x+1) =$ .... $-$ ....

D. $(5+x)(x-5) =$ .... $-$ ....

E. $(4-2m)(4+2m) =$ .... $-$ ....

F. $(1-6y)(6y+1) =$ .... $-$ ....

G. $(5a+2b)(5a-2b) =$ .... $-$ ....

4. Kasuta ruutude vahe valemit.

Näide: $(2x + 3y)(2x - 3y) =$ ...4x²... $-$ ...9y²...

A. $(4a + 3b)(4a - 3b) =$ .... $-$ ....

B. $(6x + 4y)(6x - 4y) =$ .... $-$ ....

C. $(xy - 2a)(xy + 2a) =$ .... $-$ ....

D. $(4x + 9y)(9y - 4x) =$ .... $-$ ....

E. $(10x - y^2)(y^2 + 10x) =$ .... $-$ ....

F. $(c^3 - ab^2)(c^3 + ab^2) =$ .... $-$ ....

G. $(x^2y + 2x^4)(2x^4 - x^2y) =$ .... $-$ ....

5. Täida lüngad.

Näide: $(2x +$ ...3... $)(2x -$ ...3... $) = 4x^2 - 9$

A. $(3a +$ .... $)(3a -$ .... $) = 9a^2 - 4$

B. $($ .... $+4y)($ .... $-4y) = 25 - 16y^2$

C. $($ .... $-9)($ .... $+9) = a^2 - 81$

D. $($ .... $+ b)(b -$ .... $) = b^2 - 100a^2$

E. $(xz -$ .... $)(xz +$ .... $) = x^2z^2 - y^4$

F. $($ .... $-ab)($ .... $+ab) = 16n^2 - a^2b^2$

G. $(y +$ .... $)($ .... $-y) = 1 - y^2$

6. Kasuta ruutude vahe valemit.

Näide: $(2x + 3y)(2x - 3y) =$ ....$4x^2 - 9y^2$....................................

A. $(a + b)(a - b) =$ ....

B. $(2 - x)(2 + x) =$ ....

C. $(6 + 3a)(6 - 3a) =$ ....

D. $(x - y)(y + x) =$ ....

E. $(10 + y)(y - 10) =$ ....

F. $(x^2 + 2y)(2y - x^2) =$ ....

G. $(m^3 - 4n)(m^3 + 4n) =$ ....

7. Tõmba ring ümber avaldistele, mille puhul saab kasutada ruutude vahe valemit.

$(5ab^2 + 7c^2)(7c^3 - 5ab^2)$

$\left(\frac{a^2}{4} - \frac{b}{2}\right)\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b}{2}\right)$

$\left(\frac{x}{8} - \frac{y}{5}\right)\left(\frac{y}{5} + \frac{x}{8}\right)$

$(ab + x)(a^2b^2 - x^2)$

$\left(3ab + \frac{c}{d}\right)\left(3ab - \frac{c}{d}\right)$

$(9x^2y + 3z^2)(3z^2 - 9xy^2)$

$(7a^5 - 5b)(7a^5 + 5b)$

$\left(\frac{xy}{8} - \frac{y}{5}\right)\left(\frac{yx}{5} + \frac{x}{8}\right)$

Nimi: ____________________

RUUTUDE VAHE TEGURDAMINE

Kui kasutame valemit vastupidi, saame ruutude vahe **tegurdada**.

$$a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$$

1. Leia üksliikmed, mille ruut on antud.

$$a^2 - 4$$

$$a \cdot a \qquad 2 \cdot 2$$

2. Tegurda.

$$a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$$

$$a \cdot a \qquad 2 \cdot 2$$

Veel näiteid:

$x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$

$a^2 - 36 = (a + 6)(a - 6)$

$a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$

$a^2 - 9b^2 = (a + 3b)(a - 3b)$

$4x^2 - 25y^2 = (2x + 5y)(2x - 5y)$

$16m^2 - n^4 = (4m + n^2)(4m - n^2)$

Nimi: ____________________

RUUTUDE VAHE TEGURDAMINE

1. Kirjuta üksliikmete ruudud korrutisena.

Näide: $x^2 - 9$

x · x	3 · 3

A. $4 - a^2$

B. $25 - m^2$

C. $x^2 - 16$

D. $a^4 - 4$

E. $4x^2 - y^2$

F. $9a^2 - 4b^2$

G. $49x^2 - 64y^2$

H. $16a^2b^2 - c^6d^6$

2. Tegurda.

Näide: $x^2 - 4 = (\underline{x} + \underline{2})(\underline{x} - \underline{2})$

A. $9 - x^2 = (\ldots\ldots + \ldots\ldots)(\ldots\ldots - \ldots\ldots)$

B. $16 - a^2 = (\ldots\ldots + \ldots\ldots)(\ldots\ldots - \ldots\ldots)$

C. $x^2 - 25 = (\ldots\ldots + \ldots\ldots)(\ldots\ldots - \ldots\ldots)$

D. $4x^2 - 4 = (\ldots\ldots + \ldots\ldots)(\ldots\ldots - \ldots\ldots)$

E. $a^2 - b^2 = (\ldots\ldots + \ldots\ldots)(\ldots\ldots - \ldots\ldots)$

F. $36x^2 - 9y^2 = (\ldots\ldots + \ldots\ldots)(\ldots\ldots - \ldots\ldots)$

3. Tegurda.

Näide: $x^2 - 9 =$ (x + 3) (x – 3)

A. $a^2 - 4 =$ ....

B. $25 - a^2 =$ ....

C. $x^2 - 36 =$ ....

D. $100 - b^2 =$ ....

E. $a^2 - 81 =$ ....

F. $a^2 - b^2 =$ ....

4. Tegurda.

A. $a^2b^2 - 4a^2 =$ ....

B. $16x^2 - y^2z^2 =$ ....

C. $x^4 - 36y^2 =$ ....

D. $1 - a^2b^6 =$ ....

E. $25z^4 - 81y^2 =$ ....

F. $\frac{x^2}{9} - y^2 =$ ....

G. $\frac{a^2}{16} - \frac{a^2b^2}{64} =$ ....

Nimi: ____________________

KAKSLIIKME SUMMA RUUT

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$(a+b)^2$	a^2	$2ab$	b^2
kaksliikme **summa** ruut	esimese liikme ruut	kahe-kordne liikmete korrutis	teise liikme ruut

Kuidas kaksliikme summa ruut tekib?

Teeme kaksliikme ruudu korrutiseks: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) =$

Korrutame hulkliikmed: $= a^2 + ab + ab + b^2 =$

Koondame sarnased liikmed: $= a^2 + 2ab + b^2$

1. Kirjuta esimese liikme ruut.

$$(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

2. Kirjuta kahekordne mõlema liikme korrutis.

$$(x+4)^2 = x^2 + \underbrace{8x}_{2 \cdot x \cdot 4} + 16$$

3. Kirjuta teise liikme ruut.

$$(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

Veel näiteid:

$(3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

$(3+a)^2 = 9 + 6a + a^2$

$(5y+3x)^2 = 25y^2 + 30xy + 9x^2$

 Nimi: ____________________

KAKSLIIKME SUMMA RUUT

1. Täida lüngad.

Näide: $(x+y)^2 = \underline{x^2} + 2xy + y^2$

A. $(3+x)^2 = \dots\dots\dots +6x + x^2$

B. $(4+y)^2 = \dots\dots\dots +8y + y^2$

C. $(2x+1)^2 = \dots\dots\dots +4x + 1$

D. $(3a+2b)^2 = \dots\dots\dots +12ab + 4b^2$

E. $(1+6m)^2 = \dots\dots\dots +12m + 36m^2$

Näide: $(x+y)^2 = x^2 + \underline{2 \cdot x \cdot y} + y^2 = x^2 + \underline{2xy} + y^2$

F. $(x+3)^2 = x^2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots +9 = x^2 + \dots\dots\dots +9$

G. $(m+n)^2 = m^2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots +n^2 = m^2 + \dots\dots\dots +n^2$

H. $(2x+3)^2 = 4x^2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots +9 = 4x^2 + \dots\dots\dots +9$

I. $(k+7)^2 = k^2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots +49 = k^2 + \dots\dots\dots +49$

J. $(2a+3b)^2 = 4a^2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots +9b^2 = 4a^2 + \dots\dots\dots +9b^2$

Näide: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + \underline{y^2}$

K. $(2+x)^2 = 4 + 4x + \dots\dots\dots$

L. $(5x+5)^2 = 25x^2 + 50x + \dots\dots\dots$

M. $(1+3x)^2 = 1 + 6x + \dots\dots\dots$

N. $(4x+y)^2 = 16x^2 + 8xy + \dots\dots\dots$

O. $(9+10a)^2 = 81 + 180a + \dots\dots\dots$

2. Ava sulud kaksliikme summa ruudu valemi abil.

Näide: $(x+y)^2 =$ x^2 + $2xy$ + y^2

A. $(3+a)^2 =$ ...... + ... + ...

B. $(c+2)^2 =$ ...... + ... + ...

C. $(4x+2)^2 =$ .... + ... + ...

D. $(5+4a)^2 =$ .... + ... + ...

E. $(2+s)^2 =$ ...... + ... + ...

F. $(m+5)^2 =$ ...... + ... + ...

G. $(6+2x)^2 =$ ...... + ... + ...

H. $(1+y)^2 =$ ...... + ... + ...

I. $(2+x)^2 =$ ....

J. $(x+1)^2 =$ ....

K. $(3+a)^2 =$ ....

L. $(2x+y)^2 =$ ....

M. $(3x+2y)^2 =$ ....

3. Ühenda joonega võrdsete avaldiste paarid.

$(a+b)^2$	$4a^2+4ab+b^2$
$(2a+b)^2$	$9a^2+6ab+b^2$
$(a+1)^2$	$a^2+4ab+4b^2$
$(a+2b)^2$	$a^2+2ab+b^2$
$(3a+2b)^2$	$9a^2+12ab+4b^2$
	a^2+2a+1

Üle jäi: ....

Nimi: ____________________

KAKSLIIKME VAHE RUUT

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$(a-b)^2$	a^2	$2ab$	b^2
üksliikmete **vahe** ruut	esimese liikme ruut	kahekordne liikmete korrutis	teise liikme ruut

Kuidas kaksliikme vahe ruut tekib?

Teeme kaksliikme ruudu korrutiseks: $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) =$

Korrutame hulkliikmed: $= a^2 - ab - ab + b^2 =$

Koondame sarnased liikmed: $= a^2 - 2ab + b^2$

Jälgi märke!

1. Kirjuta esimese liikme ruut.

$$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

2. Kirjuta kahekordne mõlema liikme korrutis.

Jälgi märke!

$$(x-3)^2 = x^2 - \underbrace{6x}_{2 \cdot x \cdot 3} + 9$$

3. Kirjuta teise liikme ruut.

Jälgi märke!

$$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

Veel näiteid:

$(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

$(4-a)^2 = 16 - 8a + a^2$

$(8y-3x)^2 = 64y^2 - 48xy + 9x^2$

Nimi: ____________________

KAKSLIIKME VAHE RUUT

1. Kirjuta lünka õige märk.

Näide: $(x-y)^2 = x^2 \underline{-} 2xy + y^2$

A. $(3-x)^2 = 9 - 6x \dots x^2$

B. $(4-y)^2 = 16 \dots 8y + y^2$

C. $(2x \dots 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

D. $(3a-2b)^2 = 9a^2 - 12ab \dots 4b^2$

2. Täida lüngad.

Näide: $(x-y)^2 = \underline{x^2} - 2xy + \underline{y^2}$

A. $(2x-3)^2 = \dots\dots - 12x + \dots\dots$

B. $(m-1)^2 = m^2 - \dots\dots + \dots\dots$

C. $(y-9)^2 = \dots\dots - \dots\dots + 81$

D. $(1-3x)^2 = \dots\dots - 6x + \dots\dots$

E. $(10-s)^2 = 100 - \dots\dots + \dots\dots$

3. Ava sulud kaksliikme vahe ruudu valemi abil.

Näide: $(x-y)^2 = \underline{x^2} - \underline{2xy} + \underline{y^2}$

A. $(m-6)^2 = \dots\dots - \dots\dots + \dots\dots$

B. $(2-x)^2 = \dots\dots - \dots\dots + \dots\dots$

C. $(3y-4)^2 = \dots\dots - \dots\dots + \dots\dots$

D. $(2x-1)^2 = \dots\dots - \dots\dots + \dots\dots$

4. Ava sulud kaksliikme vahe ruudu valemi abil.

Jälgi märke!

Näide: $(x-y)^2=$ $x^2 - 2xy + y^2$

A. $(y-1)^2=$ ....

B. $(a-8)^2=$ ....

C. $(2m-1)^2=$ ....

D. $(5-x)^2=$ ....

E. $(w-6)^2=$ ....

F. $(7-a^2)^2=$ ....

G. $(8x-2y)^2=$ ....

H. $(n-9m^2)^2=$ ....

5. Ühenda joonega võrdsed avaldised.

	$4x^2-4xy+y^2$
$(x-y)^2$	$4x^2-4xy+4y^2$
$(2x-y)^2$	$x^2+2xy+y^2$
$(x-2y)^2$	$4x^2-8xy+4y^2$
$(2x-2y)^2$	$x^2-4xy+4y^2$
	$x^2-2xy+y^2$

Üle jäid: .... *ja* ....

Nimi: ____________________

KAKSLIIKME RUUT. TEGURDAMINE

Kui kasutame valemit vastupidi, saame kolmliiget **tegurdada**.

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

1. Leia kaksliikme ruudu liikmed.

$$9 - 6x + x^2$$

$$3 \cdot 3 \qquad x \cdot x$$

Esimene liige on: 3
Teine liige on: x

2. Tegurda.

Jälgi märke!

$$9 - 6x + x^2 = (3 - x)^2$$

Kontrolli: $2 \cdot 3 \cdot x = 6x$

Veel näiteid:

$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

$16 + 8a + a^2 = (4 + a)^2$

$m^2 - 4mn + 4n^2 = (m - 2n)^2$

$25a^2 + 9b^2 - 30ab = (5a - 3b)^2$

$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2$

Nimi: ____________________

KAKSLIIKME RUUT. TEGURDAMINE

1. Leia kaksliikme ruudu liikmed.
Kontrolli.

Näide: $x^2 + 6x + 9$

Esimene liige on: ....x......., sest ....$x \cdot x = x^2$....

Teine liige on: ....3......., sest ....$3 \cdot 3 = 9$....

Kontroll: ....$2 \cdot x \cdot 3 = 6x$....

$a^2 + 2a + 1$

Esimene liige on: ...., sest ....

Teine liige on: ...., sest ....

Kontroll: ....

$b^2 + 4b + 4$

Esimene liige on: ...., sest ....

Teine liige on: ...., sest ....

Kontroll: ....

$16 - 8x + x^2$

Esimene liige on: ...., sest ....

Teine liige on: ...., sest ....

Kontroll: ....

$49 - 14a + a^2$

Esimene liige on: ...., sest ....

Teine liige on: ...., sest ....

Kontroll: ....

2. Leia kaksliikme ruudu liikmed.

Kontrolli.

$16 + 16x + 4x^2$

Esimene liige on: ...., sest ....

Teine liige on: ...., sest ....

Kontroll: ....

$y^2 - 2xy + x^2$

Esimene liige on: ...., sest ....

Teine liige on: ...., sest ....

Kontroll: ....

$100 + 20a + a^2$

Esimene liige on: ...., sest ....

Teine liige on: ...., sest ....

Kontroll: ....

$25a^2 + 10a + 1$

Esimene liige on: ...., sest ....

Teine liige on: ...., sest ....

Kontroll: ....

$9 - 12a + 4a^2$

Esimene liige on: ...., sest ....

Teine liige on: ...., sest ....

Kontroll: ....

3. Kirjuta lünka õige märk.

Näide: $x^2 - 6x + 9 = (x \underline{\ -\ } 3)^2$

A. $4 - 4a + a^2 = (2 \dots\dots a)^2$

B. $x^2 + 10x + 25 = (x \dots\dots 5)^2$

C. $9 - 6a + a^2 = (3 \dots\dots a)^2$

D. $16x^2 - 24x + 9 = (4x \dots\dots 3)^2$

E. $4x^2 + 12x + 9 = (2x \dots\dots 3)^2$

F. $y^2 - 2y + 1 = (y \dots\dots 1)^2$

4. Tegurda.

Näide: $y^2 + 4y + 4 = (\underline{\ y\ } + \underline{\ 2\ })^2$

A. $x^2 + 6x + 9 = (\dots\dots + \dots\dots)^2$

B. $1 + 4a + 4a^2 = (\dots\dots + \dots\dots)^2$

C. $4x^2 + 16x + 16 = (\dots\dots + \dots\dots)^2$

D. $81 + 18a + a^2 = (\dots\dots + \dots\dots)^2$

E. $a^2 - 2ab + b^2 = (\dots\dots - \dots\dots)^2$

F. $25 - 10x + x^2 = (\dots\dots - \dots\dots)^2$

G. $100x^2 - 60x + 9 = (\dots\dots - \dots\dots)^2$

H. $36m^2 - 12m + 1 = (\dots\dots - \dots\dots)^2$

5. Tegurda.

Jälgi märke!

A. $x^2 + 4x + 4 = (\dots\dots\dots\dots\dots\dots)^2$

B. $25 + 10a + a^2 = (\dots\dots\dots\dots\dots\dots)^2$

C. $1 + 10x + 25x^2 = (\dots\dots\dots\dots\dots\dots)^2$

D. $4x^2 + 8x + 4 = (\dots\dots\dots\dots\dots\dots)^2$

E. $9x^2 - 36x + 36 = (\dots\dots\dots\dots\dots\dots)^2$

F. $81 - 18a + a^2 = (\dots\dots\dots\dots\dots\dots)^2$

G. $y^2 - 14y + 49 = (\dots\dots\dots\dots\dots\dots)^2$

H. $4x^2 - 8xy + 4y^2 = (\dots\dots\dots\dots\dots\dots)^2$

I. $64 + 16a + a^2 =$ ....

J. $9x^2 - 18x + 9 =$ ....

K. $16m^2 + 16mn + 4n^2 =$ ....

L. $100 - 20a + a^2 =$ ....

M. $x^2 + 9 - 6x =$ ....

N. $16 + a^2 - 8a =$ ....

O. $1 - 4a + 4a^2 =$ ....

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Liina Malva,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Raudvara- ja töölehtede komplekti koostamine hulkliikmete teema käsitlemiseks matemaatika õpiabitunnis", mille juhendaja on Triin Kivirähk, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Liina Malva

11.05.2023