Euroopa Liit
Euroopa Sotsiaalfond

Eesti tuleviku heaks

E-kursuse "Mõõtmised ja mõõtemääramatused (LOFY.01.004)" materjalid

Aine maht 3 EAP

Erko Jakobson (Tartu Ülikool), 2011

Sisukord

Sissejuhatus

Aine sissejuhatus

Mõõtmine on olnud maailma infrastruktuuri üks oluline osa juba iidsetest aegadest alates. Kõik teaduse, tehnika, kaubanduse, riikliku kontrolli jne vallas tehtud järeldused ja otsused tuginevad andmetele, mis on saadud mõõtmiste põhjal. Õigete otsuste langetamiseks peavad mõõtetulemused olema piisavalt usaldusväärsed. Eriti oluline on see valdkondades, mis puudutavad tervishoidu ja keskkonnakaitset. Näiteks elukeskkonda saastavate radioaktiivsete ainete, toiduainetes kahjulike pestitsiidide ning haigusi ja epideemiaid tekitavate bakterite ja viiruste sisalduse määramise ja kontsentratsiooni mõõtmise ebatäpsed tulemused võivad põhjustada väga tõsiseid tagajärgi.

Mõõtetulemuse usaldatavuse tõstmise huvides tuleks mõõtmine läbi viia kompetentses laboris, kus kasutatakse kalibreeritud mõõtevahendeid ja aktsepteeritud mõõtemeetodeid. Mõõtesuurus peab seejuures olema tellija ja täitja omavahelise kokkuleppega eelnevalt täpselt määratletud ning saadav mõõtetulemus koos määramatusega tuleb esitada üldtunnustatud mõõtühikutes.

Mõõtmine on rahvusvaheliselt defineeritud kui menetluste kogum, mille eesmärgiks on mõõdetava suuruse väärtuse määramine. Teadusharu, mis käsitleb suuruste mõõtmist, nimetatakse metroloogiaks.

Kõrvalseisjale paistab mõõtmine võrdlemisi lihtsa toiminguna, eriti veel siis, kui see teostatakse täpselt kindlaksmääratud mõõteprotseduuri kohaselt. Probleemid tekivad aga tavaliselt siis, kui on vaja hinnata saadud mõõtetulemuse usaldatavust.

Kursuse eesmärgiks on tutvustada mõõtmisteooria aluseid; õpetada üliõpilast mõõtma füüsikalisi suurusi, hindama mõõtmistulemuse usaldatavust, samuti tutvustada katsetulemuste töötlemise aluseid.

Kursuse positiivsele hindele läbinud üliõpilane:

1. mõistab metroloogia põhitõdesid;
2. oskab rakendada mõõteprotseduuride juures enamkasutatavaid jaotusseaduseid;
3. teab enamlevinud mõõtmismeetodeid ning mõõtemääramatuse hindamise paremaid praktikaid;
4. suudab lihtsamatel juhtudel hinnata mõõtmisandmete, mõõteseadmete passide ja kalibreerimistunnistuste ning muude kättesaadavate andmete põhjal mõõtetulemust ning selle usaldusvahemikku;
5. tunneb ära seadmetel enamkasutatavad täpsusklassid ning oskab neid rakendada;
6. oskab kirjeldada mõõtevahendite metroloogilise kontrolli meetodeid;
7. oskab mõõtmist planeerida, koostada mõõtmiste mudelit ning seda rakendada.

Hindamismeetodid:

Hindamismeetoditeks on kodused tööd, kirjalik test, grupitöö ning kirjalik eksam. Kodused tööd (õpiväljundid 2, 3, 4, 5) annavad 10 %, test (õpiväljundid 1, 2, 4) annab 20 %, grupitöö (õpiväljundid 3, 4, 7) 10 % ning eksam (õpiväljundid 1, 3, 4, 5, 6) 60 % koondhindest. Testis ning eksamil on ülesande juures ära toodud, palju punkte mingi ülesanne annab (kui ülesanne on jagatud mitmesse ossa, siis palju punkte mingi osa annab). Grupitööl hinnatakse töö püstitust, meetodi sobivust, tulemuse õigsust ning töö vormistust. Kõik hindamismeetodid tuleb sooritada positiivsele hindele, s.t. peab saama üle 50 % punktidest.

Koondhinne arvutatakse vastavalt praegu kehtivale %-süsteemile ("A" = >90 % jne).

Põhikirjandus:

- Mõõtmise alused (Rein Laaneots, Olev Mathiesen, 2002, TTÜ kirjastus)
- An Introduction to Uncertainty in Measurements (Les Kirkup, Bob Frenkel, 2006, Cambridge University Press).

MMM esialgne loenguplaan 2011 kevad

1. Sissejuhatus, aine tutvustus, loengukursuse ülesehitus ning tutvustus.
2. Füüsikaliste mõõtmiste praktikumis nõutav mõõtetulemuste ning nende usaldusvahemiku hindamine, praktilised arvutusnäited.
3. Mõõtmine, mõõtühikud, mõõtühikute vahelised seosed. Mõõtmisteooria lähted. Mõõtmise põhiväide. Juhuslike suuruste jaotusseadused. Juhusliku suuruse arvkarakteristikud. Keskväärtus. Keskväärtuse omadusi. Keskmiste kasutamisest. Dispersioon ja ruuthälve.
4. Mõõteprotseduuride juures enamkasutatavad jaotusseadused. Ühtlane jaotus. Eksponentjaotus. Normaaljaotus. Arkussiinusjaotus. Juhuslike jaotuste summa. Kahe jaotuse summa jaotus. Keskne piirteoreem.
5. Mõõtevead ja mõõtemääramatus. Süstemaatilised vead. Juhuslikud vead. Mõõdetava suuruse statistiline hinnang. Keskväärtuse hindamine mõõtmistulemustest. Dispersiooni hindamine mõõtmistulemustest. Ühetaoliselt jaotunud suuruste aritmeetilise keskmise keskväärtus ja dispersioon. Mõõtemääramatus. A-tüüpi mõõtemääramatus. B-tüüpi mõõtemääramatus. Liitmääramatus.
6. Ümardamine ning tähendnumbrite hulk määramatuse arvutamisel. Ekse. Jääkväärtused ja vabadusastmete arv. B-tüüpi määramatuse vabadusastmete arv. Liitmääramatuse efektiivne vabadusastmete arv. Studenti test ning mõõtetulemuse laiendmääramatus. Mõõtmistulemuse mõõtemääramatus kahe sisendsuuruse korral.
7. Mõõtmise mudel. Mõõtemääramatus mitme sõltumatu sisendsuuruse korral. Liitmääramatuse tähtsusetu komponendi kriteerium.
8. Ülesannete lahendamine.
9. KONTROLLTÖÖ!!!
10. Kontrolltöö analüüs, ülesannete lahendamine. Grupitööde planeerimine.

11. Mõõtevahendid ja nende lubatud vigade normeerimine. Mõõtevahendi metroloogilised omadused. Kostekarakteristika, tundlikkus, kostelävi, lahutusvõime, suikeulatus, kosteaeg ja moonutusvabadus. Mõõtevahendi täpsus. Stabiilsus ja triiv. Näidu korduvus- ja korratavusvõime. Mõõtevahendi näiduhälbe piirid.
12. Määramatuse allikad. Mõõtevahendi näidiku lahutusvõimest tingitud määramatus. Mõõtevahendi suikeulatusest tingitud määramatus. Tulemuste ümardamisest tingitud määramatus. Mudelisse sissetoodud sisendväärtused ja nende määramatused. Dokumendist võetud suuruse määramatus. Kontrollitava suuruse määramatus. Mõõtemeetodist tulenev määramatus. Mõõteobjektust tulenev määramatus.
13. Mõõtevahendite metroloogilise kontrolli liigid. Kalibreerimine ja justeerimine. Tüübikinnitus. Taatlus.
14. Grupitööde esitamine, ülesannete lahendamine.
15. Grupitööde esitamine, ülesannete lahendamine.

Lisaks: külaliste ettekanded, Metroserdi külastus, jne.

Test ja eksam on kirjalikud, testi vormis ning sisaldavad küsimusi nii teooria osast kui ka praktilist arvutamist. Spikerdamine on limiteeritud. Kaastudengeid, raamatuid, konspekte, arvuteid, telefone jne pole lubatud kasutada. Laual võib olla kalkulaator ning üks A4 formaadis lehekülg vabalt valitud käsitsi kirjutatud teksti, nagu valemid, definitsioonid, jne.

Testi ja eksami tulemuste kontrollimine käib lahendimatriitsi abil – on kaks varianti, kas vastus on õige või vale. Lisalehed on arvutamiseks, neis olevat infot üldjuhul ei kontrollita ega hinnata.

Grupitöö on õpitu praktiliseks kasutamiseks. Grupi suurus on kuni 5 tudengit, ülesandega mõõta mingit etteantud parameetrit käepäraste vahenditega ning vormistada mõõtmistulemus koos mõõtemääramatusega. Näiteks võiks olla füüsikahoone fuajee pikkuse mõõtmine, kasutades pikkusühikuks saabast nr 42. Grupitööst räägime täpsemalt pärast testi.

Moodle

Paralleelselt loengutega toimub ka ainele e-toe loomine Moodle keskkonnas. Kõik esitatavad materjalid lähevad sinna üles, samuti toimub selle kaudu koduste ülesannete ning grupitööde esitamine. Kõik loengud filmitakse üles ning on samuti Moodle kaudu järelvaadatavad.

Tagasiside

Kõiksuguste aine ja loengu kohta käivate küsimuste jaoks on Moodles foorumid. Eriti oodatud on küsimused, kui midagi jäi loengus segaseks, siis saab kas foorumis või järgmises loengus üle rääkida. Samuti on võimalik anda tagasisidet anonüümselt, selleks on ukse kõrval ümbrik, kuhu jäetud mõtteteri püüan ma võimaluste piires arvesse võtta.

1. Mõõtmine, mõõtühikud, mõõtühikute vahelised seosed

1.1. Mõõdetavad suurused

Inimteadvuse tunnetuse objektiks on meid ümbritseva maailma esemed, ained ja nähtused ning nende omadused. Nii võib selleks olla meid ümbritsev ruum, mille omaduseks on tema ulatus. Viimast võib iseloomustada mitmel viisil ning üheks ruumi ulatust iseloomustavaks suuruseks on pikkus. Samal ajal on reaalse füüsikalise ruumi ulatus üsna keeruline omadus, mida ei saa mõne juhu jaoks piisavalt iseloomustada ainult pikkusega. Ruumi täielikumaks kirjeldamiseks vaadeldakse tema ulatust kas mitmes suunas (koordinaadis) või kasutatakse lisaks pikkusele veel niisuguseid suurusi nagu nurk, pindala, maht jne. Seega võib ruumi iseloomustada mitme suuruse järgi.

Igasugused sündmused ja nähtused reaalses maailmas ei toimu teatavasti silmapilkselt. Nende toimumise kestus on omadus, mis erineb kvalitatiivselt ruumi ulatusest ning seda iseloomustatakse suurusega aeg.

Füüsikast on teada, et keha seisab paigal või liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt, kui puudub temale mõjuv välisjõud. Seda keha omadust nimetatakse inertsiks ning teda iseloomustavaks suuruseks on mass.

Aine või keha paljud omadused sõltuvad suurel määral tema kuumutusastmest, mida võib iseloomustada molekulide soojusliikumise keskmise kiirusega. Praktikas kasutatakse aga aine või keha kuumutatud oleku iseloomustamiseks suurust termodünaamiline temperatuur.

Seega suurused iseloomustavad meid ümbritseva keskkonna esemeid, aineid, nähtusi ja protsesse ning nende omadusi.

Ülaltoodust tuleneb ka suuruse definitsioon:

Suurus on nähtuse, keha või aine oluline omadus, mida saab kvalitatiivselt eristada ja kvantitatiivselt üheselt määrata.

Esitatud mõiste suurus võib tähendada

1. suurust üldiselt, st füüsikalist suurust, nagu

    pikkus, mass, temperatuur, takistus, ainehulga kontsentratsioon jne

2. või mingit konkreetset suurust, nagu

    teatud varda pikkus, teatud keha mass, teatud keha temperatuur antud tingimustel, antud traadi elektriline takistus, etanooli ainehulga kontsentratsioon mingis kindlas veinis jne.

Olenevalt püstitatud ülesandest valitakse süsteemi või objekti (keha) paljude omaduste hulgast tihti see, mis on kõige olulisem. Nii näiteks lähtutakse mingi objekti kosmosesse lennutamiseks vajaliku energia arvutamisel esmajärjekorras selle objekti massist, sest antud ülesande puhul on just see suurus kõige määravam.

Suurusi, mida saab üksteise suhtes järjestada kvantitatiivse kasvu alusel, nimetatakse sama liiki suurusteks. Samaliigilisteks suurusteks on näiteks töö, soojus ja energia ning pikkuse valdkonnas pikkus, laius, paksus ja ümbermõõt.

Galileo Galilei on öelnud: "Mõõda, mis on mõõdetav, ja tee mõõdetavaks see, mis ei ole veel mõõdetav". Sellesse lakoonilisse lausesse on siirdatud idee mõõtmise ennetavast tähtsusest kaasaegsetes uuringutes.

Mõõtmise objektiks olevat konkreetset suurust nimetatakse mõõtesuuruseks Võib kasutada ka mõistet mõõdetav suurus. Näiteks, mõõtesuuruseks on konkreetse veeproovi veeauru rõhk 20 °C juures. Ristküliku pindala mõõtmisel on mõõtesuuruseks pindala, mille mõõtetulemus saadakse suuruste pikkus ja laius mõõtmise põhjal.

Esimene samm mõõtmise sooritamisel on mõõtesuuruse täpne kindlaksmääramine ehk defineerimine tema kirjeldamise teel. Praktikas sõltub mõõtesuuruse defineerimise viis ja täiuslikkus vajalikust mõõtetäpsusest. Mõõtesuurus peab olema defineeritud iga konkreetse mõõtmisega seotud praktilise eesmärgi jaoks niivõrd üksikasjalikult, et mõõtesuurusel oleks ühene väärtus.

Näide 1.1. Kalapeol lubatakse, et kõige suurema kala püüdja auhinnaks on selle kala suuruse jagu kulda. Siin pole aga märgitud, kas mõeldakse selle kala massi või ruumala. Arvestades, et erinevus on ligi 20 kordne, tuleks kasutada korrektsemat definitsiooni.

Mõõtesuuruse määratlus võib vajaduse korral sisaldada ka nõudeid teiste mõõtesuuruste kohta. Näiteks pikkusotsmõõdu pikkuse defineerimisel osutub vajalikuks ka mõõteobjekti ja keskkonna temperatuuri, aga ka rõhu, niiskuse jms väärtuste vahemiku määramine, mille puhul see pikkus kehtib.

Mõõtesuuruse puudulik defineerimine annab alati mõõtetulemuse määramatusse lisakomponendi, mis võib nõutava mõõtetäpsusega võrreldes sageli küllaltki oluliseks osutuda.

1.2 Põhi- ja tuletatud suurused

Loodusnähtuste kirjeldamisel kasutatakse mitmeid suurusi, nagu pikkus, aeg, kiirus, kiirendus, jõud jne. Füüsikavalemid väljendavad seoseid nende suuruste vahel. Selgub, et enamasti on võimalik mingit suurust väljendada teiste suuruste kaudu, mille vahel ei valitse otsest omavahelist seost. Neid suurusi nimetataksegi põhisuurusteks (ka baassuurusteks). Seega põhisuurus on üks suurustest, mida mingis suuruste süsteemis käsitletakse leppeliselt üksteisest sõltumatuna.

Põhisuurusteks loetavate suuruste valik on teoreetiliselt meelevaldne, kuid piiratud praktiliste kaalutlustega. Põhisuurusi kasutades saame nende kaudu tuletada teisi nn tuletatud suurusi. Tuletatud suurus on seega niisugune suurus, mis on mingis suuruste süsteemis defineeritud süsteemi põhisuuruste funktsioonina. Näiteks suuruste süsteemis, mille põhisuurusteks on pikkus, mass ja aeg, on keha liikumise kiirus tuletatud suurus, mis on määratletud pikkuse ja ajavahemiku jagatisena, st funktsiooniga

$$v = l/t \tag{1.1}$$

kus v – keha liikumise kiirus, l – teepikkus ja t – keha poolt teepikkuse läbimiseks kulunud ajavahemik

Kehale mõjuv jõud on samuti tuletatud suurus, mis on määratletud keha massi ja kiirenduse korrutisena, st funktsiooniga

$$F = m \cdot a \tag{1.2}$$

kus F – jõud, m – keha mass ja a – jõu F mõjust tingitud keha kiirendus.

Mistahes tuletatud suuruse mingis süsteemis saame seega avaldada põhisuuruste kaudu järgmise üldistatud valemi abil:

$$Q = \xi \prod_{i=1}^{n} A_i^{\alpha_i} \quad , \qquad (1.3)$$

kus Q – tuletatud suurus, ξ [hii] –tegur, A_i – põhisuurus ja α_i – positiivne või negatiivne täis- või murdarv.

Põhisuuruse A_i all võivad esitatud valemis (1.3) figureerida ka juba eelnevalt leitud tuletatud suurused. Näiteks sõltuvuses $F = m \cdot a$ (vt valem (1.2)) on mass põhisuurus, kiirendus aga tuletatud suurus.

Praktikas kasutatakse valemi (1.3) asemel ka suurustele kohaselt valitud ühikute väärtustevahelisi seoseid. Tegurid nendes valemites sõltuvad siis juba valitud ühikutest.

Selleks et paremini ja seostatult iseloomustada erinevates valdkondades objekte, aineid, nähtusi ja nende omadusi iseloomustavaid suurusi ning lihtsustada nendevahelisi seoseid, on suurused kokkuleppeliselt grupeeritud vastavatesse suuruste süsteemidesse. Seega on suuruste süsteem kogum omavaheliste sõltuvustega määratletud suurusi. Suuruste süsteemi tähistamiseks kasutatakse üldiselt põhisuuruste ladinakeelsete nimetuste esitähti.

Mehaanikas kuuluvad põhisuuruste hulka pikkus, mass ja aeg ning need märgitakse üldistatult tähtedega L (lad.k. longitudo – pikkus), M (lad.k. massa – mass) ja T (lad.k. tempus – aeg). Selle järgi tuleb suuruste süsteemi tähiseks LMT.

Süsteem tähisega LMT1θNJ on aga kogum põhi- ja tuletatud suurustest, milles põhisuurused on: pikkus – L, mass – M, aeg – T, elektrivoolu tugevus – I, termodünaamiline temperatuur – θ, aine hulk – N ja valgustugevus – J.

Suurusi tähistatakse ladina või kreeka tähestiku tähtedega. Tähis on alati ühetäheline. Vajaduse korral eristatakse suurusi indeksitega, mis võivad ka viidata objektidele, mis pole suurused. Suuruse tähised kirjutatakse alati kaldkirjas.

1.3 Suuruse dimensioon

Tähistades valitud suuruste süsteemis põhisuurusi ladina tähestiku järjestikuste suurte tähtedega ja kasutades tuletatud suuruste saamiseks üldistatud valemit (1.3), milles tegur ξ =1 on võetud võrdseks ühega, saame määrata mistahes tuletatud suuruse dimensiooni valemiga

$$\mathrm{dim}Q = A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma}, \qquad (1.4)$$

kus A, B, C, ... – põhisuuruste *A*, *B*, *C*, ... dimensioonid ja α,β, γ – dimensioonide astmenäitajad, mis on positiivsed või negatiivsed ratsionaalarvud (täis- või murdarvud)

Näiteks LMT süsteemis saab tuletatud suuruse dimensiooni määrata järgmise valemiga

$$\mathrm{dim}Q = \mathrm{L}\alpha\ \mathrm{M}\beta\ \mathrm{T}\gamma, \qquad (1.5)$$

kus L, M, T - tähised, mis tähistavad põhisuuruste pikkus, mass ja aeg dimensioone ja α, β, γ –

dimensioonide astmenäitajad.

Rahvusvahelise standardi ISO 31-0 kohaselt tähistatakse suuruse Q dimensioon tähisega dim Q. Seega suuruse dimensioon on avaldis, mis väljendab süsteemi kuuluvat suurust selle süsteemi põhisuurusi tähistavate tegurite astmete korrutisena.

Kui tuletatud suurus valemis (1.4) ei sõltu mõnest kõnealloleva suuruste süsteemi põhisuurusest, siis öeldakse, et selle tuletatud suuruse dimensioon sõltumatu põhisuuruse suhtes on üks. Võib ka juhtuda, et tuletatud suurus ei sõltu ühestki valitud suuruste süsteemi põhisuurusest. Niisugust tuletatud suurust nimetatakse antud suuruste süsteemis suuruseks dimensiooniga üks. Kasutatakse ka mõistet dimensioonita suurus, mis viitab dimensiooni astmenäitajale null.

Suuruse dimensioon on palju üldisem mõiste kui nähtub seda suurust iseloomustavast üldistatud valemist (1.4). Nii võivad ühte ja sama dimensiooni omada erinevad suurused, milledel on erinev omaduslik külg ja ka erinev suurustevaheline seos. Näiteks, jõu *F* poolt tehtud töö, mis on määratud valemiga

$$W = F \cdot l, \tag{1.6}$$

kus *W* – töö, *F* – jõud ja *l* – teepikkus

ja liikuva keha kineetiline energia, mis määratud valemiga

$$E = mv^2/ 2, \tag{1.7}$$

kus *E* – kineetiline energia, *m* – keha mass ja *v* – keha kiirus, omavad ühesugust dimensiooni, st $\mathrm{dim}W = \mathrm{dim}E = L^2MT^{-2}$.

Dimensioonidega võib teha matemaatilisi tehteid: korrutamine, jagamine, astendamine ja juurimine. Seevastu dimensioonide liitmine ja lahutamine ei oma mõtet. Põhisuuruse astmenäitaja enda suhtes on võrdne ühega.

Põhi- ja tuletatud suuruste dimensioonide kogum antud süsteemis moodustab dimensioonisüsteemi, mille baasiks on põhisuuruste dimensioonid. Seega on tuletatud suuruse Q dimensioon suuruste süsteemis LMTIθNJ üldiselt määratav seosest

$$\mathrm{dim}Q = L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}I^{\delta}\theta^{\varepsilon}N^{\zeta}J^{\eta}. \tag{1.8}$$

Näiteks jõu F dimensioon süsteemis LMTIθNJ on $\mathrm{dim}F = LMT^{-2}$. Suuruse dimensioon oleneb valitud suuruste süsteemist. Näiteks ε_0 – vaakumi dielektriline läbitavus absoluutses elektrostaatilises suuruste süsteemis on dimensiooniga üks, aga süsteemis LMTIθNJ on tal dimensioon: $\mathrm{dim}\varepsilon_0 = L^{-3}M^{-1}T^4I^2$.

Eelpoolkirjeldatu põhjal tekib ka küsimus, kas tuletatud suuruse dimensiooni võib alati käsitleda kui selle suuruse valemi (1.4) kohast põhisuurustest sõltuvuse väljendit, olenemata sellest, missuguseid seadusi kasutati vaadeldava seose avaldamiseks.

Kui iga tuletatud suuruse määratlus seostaks teda vahetult põhisuurustega, siis võib püstitatud küsimusele vastata jaatavalt. Kuid enamasti niisugune vahetu seos puudub ning põhi-ja tuletatud suuruste vahel on terve ahel (sageli on see väga pikk) vahepealseid suuruste määratlusi. Näiteks on rõhk määratud jõuga, mis mõjub ühele pinnaühikule. Jõud on omakorda väljendatud massi ja kiirenduse korrutisena (vt valem (1.2)), pindala aga kahe joonsuuruse (pikkuse) korrutisena, kiirendus on kiiruse tuletis aja järgi ning kiirus omakorda paigutuse tuletis aja järgi. Seda ahelat võib antud juhul väljendada järgmise dimensioonide reaga:

$$\dim p = \dim F \cdot \dim A^{-1} = M \dim a \cdot L^{-2} = M \cdot \dim v \cdot T^{-1} \cdot L^{-2} =$$

$$= M \cdot L \cdot T^{-1} \cdot T^{-1} \cdot L^{-2} = L^{-1} M T^{-2}. \qquad (1.9)$$

Seega rõhu dimensioonivalem omandas kuju, mille järgi on raske näha seost põhisuurustega. Vaevalt õnnestub leida ratsionaalset seletust sellele, et niisuguste staatiliste suuruste nagu mehaanikas kasutatava pinge dimensioonis on aja dimensiooni ruut. Seega, kui defineeritakse vahepealseid suurusi, võib tuletatud suuruse dimensiooni moodustamisel astmenäitajate liitmise ja lahutamise teel valem (1.4) lõpuks võtta hoopis kummalise kuju.

Toome näiteks elektrilise mahtuvuse dimensiooni: dim $C = L^{-}2\ M^{-}1\ T^{4}\ I^{2}$.

Dimensioonivalemite piiratud sisust kõneleb ka see asjaolu, et mitmel juhul on erisugustel suurustel ühesugune dimensioon. Seda ei tohi mingil juhul tõlgendada niimoodi, et neil on ühesugune füüsikaline olemus. Eriti käib see nende suuruste kohta, mis ei oma dimensiooni. Näiteks võiks tuua niisugused suurused, nagu tasanurk, ruuminurk, hõõrdetegur, suhteline pikenemine, Machi arv, murdumisnäitaja, moolosa (ainehulga osa) ja massiosa. Mõnel erijuhul võimaldab dimensioonivalemite ühtelangemine oletada seost eri suuruste vahel või nende allumist üldistele seaduspärasustele.

Nii näiteks rõhu ja energia ruumtiheduse dimensioonide ühtelangemine peegeldub faktis, et ideaalgaasi rõhk on võrdeline tema molekulide kulgeva liikumise energia ruumtihedusega. Niisuguseid näiteid on siiski vähe ja seega võib väita, et enamasti ei anna dimensioonivalem ilmekat kujutlust vaadeldava suuruse seosest teiste suurustega, eriti põhisuurustega.

Dimensioonivalemi muutumatus antud süsteemi piires nõuab, et iga erinevaid suurusi seostava võrduse vasema ja parema osa dimensioonid oleksid ühesugused. Seepärast on vaja tuletatud suuruse jaoks saadud valemi puhul, kui see väljendab meid huvitavate suuruste sõltuvust teistest suurustest, kontrollida vasema ja parema osa dimensioonide ühtelangemist. Kui dimensioonid ei ühti, on tuletamisel päris kindlasti tehtud viga ning võrdus ei kehti. Kuid mõistagi ei taga dimensioonide ühtivus veel saadud võrrandi õigsust.

Kokkuvõttes võib öelda, et dimensioon iseloomustab suurust kvalitatiivselt. Ta iseloomustab tuletatud suuruse seost põhisuurustega ja sõltub nende valikust. Nagu märkis Max Planck, küsimus meelevaldse suuruse "tõelisest" dimensioonist ei oma rohkem mõtet kui küsimus mistahes eseme "tõelisest" nimetusest. Sellest tulenevalt ei leia dimensioonivalemi analüüs humanitaarteadustes, kunstis, spordis, kvaliteedihinnangutes jms, kus põhisuuruste nomenklatuur ei ole määratletud, veel efektiivset kasutamist.

1.4. Mõõtühikud ja nende süsteemid

Mõõtmiste juures on väga oluline mõõtühiku valik. Põhimõtteliselt võiks ühikuks valida ükskõik millise sama liiki füüsikalise suuruse väärtuse ja seejärel mõõta, mitu korda on mõõdetav objekt meie ühikust suurem või väiksem. Vanasti seda ka tehti.

Esimesed mõõtühikud tekkisid koos inimühiskonna arenguga

- pikkusühikud: kasutati erinevate kehaosade pikkusi – vaks, küünar, jalg;

- massiühikud: igapäevases elus kasutatavad esemed jne.

Ühtsed riiklikud mõõtühikud võeti kasutusele vanas Egiptuses ja Babüloonias. Näiteks Egiptuses kasutati pikkusühikuna vaarao küünart (kaugus küünarnukist väljasirutatud sõrmeotsteni). Egiptlased oskasid ka mõõtühikuid tuletada. Näiteks pindala mõõtsid nad ruutühikutes. Kordsed ühikud võeti kasutusele Babüloonias. Ajaühikud tund, minut ja sekund pärinevad samuti vanast Babülooniast. Materiaalse kultuuri ajalugu tunneb tohutut hulka erisuguseid ühikuid, eriti pikkuse, pindala, massi ja ruumala mõõtmiseks. Selline ühikute mitmekesisus on mingil määral säilinud tänapäevani.

Näide 1.2. Te kõik teate massiühikut tonn. Kui mitu kilogrammi vastab ühele tonnile? Kas 907,2 kg, 1000 kg või 1016 kg? Vastus sõltub teie asukohariigist:

- nn. meetersüsteemi tonn = 1000 kg;
- Briti (pikk) tonn = 2240 naela = 1016 kg;
- Ameerikas (lühike) tonn = 2000 naela = 907,2 kg.

Näide 1.3. Nii inglased kui ameeriklased kasutavad mahuühikut gallon, aga:

- Inglismaal 1 gallon = 4,54609 liitrit;
- Ameerikas 1 gallon = 3,78543 liitrit.

Näide 1.4. Laialdaselt kasutatakse mahuühikut barrel (tõlkes: vaat, tünn), aga tuleb eristada nn. kuiva barrelit ja naftabarrelit:

- kuiv barrel = 115,628 liitrit;
- naftabarrel = 158,988 liitrit.

Suure hulga erisuguste ühikute puhul on probleemiks nendest ühikutest arusaamine. Kui igal inimesel oleksid omad ühikud, millega ta mõõteobjekte võrdleb, siis oleks teistel inimestel väga raske neid mõõtetulemusi kasutada. Sellepärast on vajalikud inimestevahelised kokkulepped ühikuteks valitavate suuruste osas. Tänapäeva maailmas peaksid sellised kokkulepped olema ülemaailmsed, s.t. tuleks valida sellised ühikud, mis kehtiksid kõikides maades. Tänapäeval enim levinud mõõtühikute süsteem on SI (prantsuse keeles: Système International d'Unités, tõlkes "rahvusvaheline ühikute süsteem"). See võeti kasutusele 1960 aastal, XI Rahvusvahelisel Kaalude ja Mõõtude Peakonverentsil.

Demo: Vanade ja vähemlevinud mõõtühikute loend - Vikipeedia, vaba entsüklopeedia

1.5. Rahvusvaheline ühikute süsteem SI

SI süsteemi põhiühikuteks on:

L	Pikkusühik	m
M	massiühik	kg
T	ajaühik	s
I	voolutugevuse ühik	A
Θ	temperatuuri ühik	K
N	ainehulga ühik	mol
J	valgustugevuse ühik	cd

Rahvusvahelise süsteemi põhiühikud on defineeritud tabelis 1.

Tabel 1. Rahvusvahelise süsteemi põhiühikud.

Dimensiooni tähis	**SI ühik**	**Definitsioon**
L	**m**	Pikkusühik meeter on teepikkus, mille valgus läbib vaakumis 1/299 792 458 s jooksul.
M	**kg**	Massiühik kilogramm võrdub rahvusvahelise kilogrammi etaloni massiga.
T	**s**	Ajaühik sekund on tseesium-133 aatomi põhiseisundi kahe ülipeenstruktuurinivoo vahelisele üleminekule vastava kiirguse 9 192 631 770 perioodi kestus.
I	**A**	Voolutugevuse ühik amper on muutumatu elektrivoolu tugevus, mis hoituna vaakumis teineteisest 1 m kaugusele paigutatud kahes lõpmata pikas paralleelses ja tähtsusetult väikse ümara ristlõikega sirgjuhtmes, tekitab nende juhtmete vahel jõu $2 \cdot 10^{-7}$ N juhtme jooksva meetri kohta.
Θ	**K**	Temperatuuri ühik kelvin on 1/273,16 osa vee kolmikpunkti termodünaamilisest temperatuurist.
N	**mol**	Mool on süsteemi ainehulk, mis sisaldab sama arvu elementaarseid koostisosakesi nagu on aatomeid 0,012 kilogrammis süsiniku isotoobis ^{12}C. Mooli kasutamisel peab koostisosakeste tüüp olema täpsustatud. Need võivad olla aatomid, molekulid, ioonid, elektronid, mingid teised osakesed või kindla koosseisuga grupid neist osakestest.
J	**cd**	Kandela on valgustugevus, mis kiiratakse kindlas suunas monokromaatilisest allikast kiirgussagedusel $540 \cdot 10^{12}$ Hz, kui allika kiirgustugevus selles suunas on 1/683 W/sr.

Enne SI süsteemi loomist oli füüsikute hulgas enamlevinuks CGS süsteem, mille põhiühikuteks on:

- L pikkusühik cm
- M massiühik g
- T ajaühik s

Tegelikult tuuakse veel sisse temperatuuri Θ ühik K (kelvin), ainehulga N ühik mol (mool) ja valgusvoo Φ ühik lm (luumen).

Lisaks põhiühikutele kasutatakse veel tuletatud ühikuid. Füüsikas on erinevate suuruste vahel hulk seoseid – füüsika valemeid. Need seosed ja seaduspärasused on aluseks ka põhi– ja tuletatud ühikute vaheliste seoste määramisel.

Näide 1.5. Juhti läbinud laeng Q on arvutatav juhti läbiva voolu I ja aja t korrutisena $Q = I\ t$. SI süsteemis mõõdetakse voolu amprites ja aega sekundites. Laengu ühikuks saame nüüd [Q]SI = A s = C.

Täispikkade tuletatud ühikute kasutamine igapäevaelus on suhteliselt kohmakas, seetõttu on mitmetele enamkasutatavatele tuletatud ühikutele antud oma erinimetus ja -tähis. Eelmises näites toodud SI süsteemi laengu ühikut kutsutakse kuloniks. Erinimetusega tuletatud ühikute tähised on toodud tabelis 2.

Tabel 2. Mõned erinimetusega tuletatud mõõtühikud ja nende dimensioonvalemid

Suurus	**Tähis**	**Mõõtühik**	**Ühiku nimetus**	**SI dimensioonvalem**
sagedus	f	Hz	herts	dim $f = \mathrm{T}^{-1}$
jõud, kaal	F	N	njuuton	dim $F = \mathrm{L\ M\ T}^{-2}$
rõhk, meh. pinge	p	Pa	paskal	dim $p = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{M\ T}^{-2}$
töö, soojus, energia	A	J	džaul	dim $A = \mathrm{L}^{2}\mathrm{M\ T}^{-2}$
võimsus	P	W	vatt	dim $P = \mathrm{L}^{2}\mathrm{M\ T}^{-3}$
valgusvoog	Φ	lm	luumen	dim $\Phi = \mathrm{J}$
heledus	L	nt	nitt	dim $L = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{J}$
valgustatus	E	lx	lux	dim $E = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{J}$
neeldunud kiirguse doos	D	Gy	grei	dim $D = \mathrm{L}^{2}\mathrm{T}^{-2}$
nurk	φ	rad	radiaan	dim $\varphi = 1$
ruuminurk	Ω	sr	steradiaan	dim $\Omega = 1$
elektriline takistus	R	Ω	oom	dim $R = 1\ \mathrm{L}^{2}\mathrm{MT}^{-3}\mathrm{I}^{-2}$

Näide 1.6. Dimensioonvalem pinge jaoks avaldub järgmiselt:

$$\mathrm{dim}U = \mathrm{L}^2\ \mathrm{M}\ \mathrm{T}^{-3}\ \mathrm{I}^{-1}.$$

SI süsteemi põhiühikute asendamisel dimensioonvalemisse saame pinge ühikuks SI süsteemis

$$[U]\mathrm{SI} = \mathrm{m}^2\ \mathrm{kg}\ \mathrm{s}^{-3}\ \mathrm{A}^{-1}.$$

Seda ühikut nimetatakse voldiks.

Näide 1.7. Eespool nägime, et laeng Q avaldub valemiga $Q = I\,t$. SI süsteemi ühikuks saime $[Q]_{SI}$ = A s = C. Dimensioonvalemiks võime seega kirjutada dimQ = T I.

1.6. Suured ja väikesed ühikud, meetermõõdustik

Mõõdetavate suuruste väärtus võib olla kord suur ja kord väike. Seetõttu on otstarbekas omada ka mitmesuguse suurusega ühikuid sama liiki füüsikalise suuruse mõõtmiseks.

Näide 1.8. Pikkuse mõõtmiseks kasutatakse toll'i, jalg'a, jard'i, miili'i, mere miil'i:

- toll: 1'' = 0,0254 m
- 1 jalg = 0,3048 m = 12''
- 1 jard = 0,9144 m = 3 jalga = 36''
- miil = 1 609,344 m= 1 760 jardi = 5 280 jalga = 63 360''
- meremiil: 1 nam = 1 850 m = 2 025 jardi = 6 080 jalga = 72 900''

Oleks hea, kui ühtedelt ühikutelt teistele üleminek oleks võimalikult lihtne. Niisugusteks mõõtühikuteks said meetermõõdustiku ühikud, mis loodi Prantsuse revolutsiooni ajal 1791. aasta kevadel "kõikideks aegadeks, kõigile inimestele, kõigi riikide jaoks". Meetermõõdustiku ehk kümnendsüsteemi oluliseks omaduseks on see, et ühe ja sama suuruse erinevad mõõtühikud suhtuvad üksteisesse nagu kümne täisarvulised astmed. Kasutatavate kümnendliidete selgitus on toodud tabelis 4. Hoolimata meetermõõdustiku ilmsetest eelistest kasutatakse mitmetes maades tänaseni kohalikku süsteemi (Inglismaa, USA).

1.7. Meetermõõdustiku ajaloost

meeter – pr. k. mètre, kr. k. metron – mõõt

Prantsusmaal on meetermõõdustik kohustuslik aastast 1840. Aastal 1875 kirjutasid 17 riiki alla meetrikonventsioonile. Selle alusel otsustati valmistada meetri ja kilogrammi etalonid ja kutsuda iga kuue aasta järel kokku kaalude ja mõõtude peakonverents otsuste vastuvõtmiseks ning edaspidise töö arendamiseks metroloogia alal. Esimene konverents toimus aastal 1889.

Briti impeeriumis ja USA-s seadustati meetermõõdustik 1897, NSVL-s 1925, Eestis 1929.

Meetermõõdustiku põhiühikute ajaloost. Prantsusmaa rahvuskogu dekreet kuulutas 1791 seaduslikuks pikkusühikuks ühe kümnemiljondiku Pariisi veerandmeridiaani pikkusest. Prantsuse TA erikomisjon korraldas 1792–1799 meridiaanikaare pikkuse mõõtmise Dunkerque'ist Barcelonani. 1799 valmistati plaatinast lihtne latikujuline esimene meetri etalon, nn arhiivimeeter, seda säilitatakse Prantsuse Riigiarhiivis. Hiljem selgus, et puhtast plaatinast valmistatud etalon on vähestabiilne [vähese jäikusega, suure soojuspaisumisega] ning et selle pikkus on 0.09 mm (hilisemate arvutuste järgi 0.2 mm) võrra väiksem definitsiooniga määratud pikkusest. Seepärast korrigeeriti meetrit ja valmistati aastatel 1875–1879 plaatina (90 %) ja iriidiumi (10 %) sulamist 31 uut X-kujulise ristlõikega etaloni pikkusega 102 cm. Iga etalon paiknes rullikutel ja meeter oli tähistatud kahe kriipsuga. Uutest etalonidest täpseima (selle pikkus ühtis kõige täpsemalt arhiivimeetri pikkusega) kinnitas kaalude ja mõõtude I peakonverents 1889. a meetri rahvusvaheliseks prototüübiks. Ülejäänud etalonid jaotati loosiga rahvusvahelise meetrikonventsiooniga ühinenud riikide vahel.

Samas on selge, et mõõtetehnika arenedes võib metallist (või mistahes muust materjalist) etaloni ja selle prototüüpide suhtes selguda üha enam puudusi. Ei ole ka kindel etaloni füüsiline säilimine.

Selgus veel, et etaloni looduslik alus, Pariisi meridiaan, ei ole konstantne. Planeet Maa kui geoiidi kuju muutub Kuu ja Päikese külgetõmbe mõjul. Etalonide taasvalmistamise seisukohast on otstarbekas defineerida pikkusühik mingi sobivama loodusliku konstandi kui Pariisi meridiaan kaudu. Praegusel tehnoloogilisel tasemel peetakse sobivaimateks konstantideks valguse lainepikkusi ja valguse leviku kiirust vaakumis.

1960. a kinnitas kaalude ja mõõtude XI peakonverents meetri uue definitsiooni: meeter võrdub krüptooni isotoobi tasemete 2p10 ja 5d5 vahelisel siirdel vaakuumis kiirguva valguse 1 650 763,73 lainepikkusega.

Definitsiooni uuendas kaalude ja mõõtude XVII peakonverents 1983. a: meeter võrdub vahemaaga, mille valgus läbib vaakumis 1/299 792 458 sekundiga (s.o valguse kiirusega).

Kaaluühik defineeriti esmalt grammina (massi nimetati tol ajal kaaluks, kaalu asemel tarvitati mõistet raskusjõud). Grammi esmaseks etaloniks oli 1 cm^3 puhast vett jää sulamistemperatuuril. Mitmel põhjusel [peamiselt miniatuursusest tingitud suurest suhtelisest ebatäpsusest] veenduti üsna kiiresti grammi ebasobivuses.

Järgnevalt defineeriti kilogramm kaaluühikuna kui 1 liitri puhta vee kaal 4 ºC juures. Esimene kilogrammi etalon (arhiivikilogramm) valmistati 1799. a plaatinast, seda säilitatakse (koos arhiivimeetriga) Prantsuse Riigiarhiivis.

Seoses meetri korrigeerimisega oleks olnud vaja korrigeerida ka liitrit, esialgu seda ei tehtud, mistõttu liiter ning dm^3 ei langenud mõni aeg kokku. Kilogramm defineeriti jätkuvalt liitri kaudu. Seejärel korrigeeriti ka liitrit, mistõttu praegu langevad liiter ja dm^3 jälle kokku.

Aastal 1899 valmistati plaatina (90 %) ja iriidiumi (10 %) sulamist silindrikujulised (läbimõõt ja kõrgus ca 39 mm) arhiivikilogrammi koopiad, millest täpseimat säilitatakse rahvusvahelise etalonina (prototüübina) Pariisi lähedal Sevres's Rahvusvahelises Kaalude ja Mõõtude Büroos.

Hilisematel mõõtmistel selgus, et 1 dm^3 puhta vee kaal temperatuuril 4 ºC on 0.999972 kg. Seega kerkis küsimus, kas muuta kilogrammi definitsiooni ja valmistada uus etalon või lugeda kilogrammiks juba valminud etaloni massi. Uus definitsioon tähendanuks paljude kasutuses olevate konstantide korrigeerimist ja sellega seonduvaid segadusi. Lihtsam oli jääda olemasoleva kilogrammi juurde. Uut looduslikku konstanti, analoogselt pikkusühikuga, pole massi jaoks leitud. Praegusel hetkel on massi 1 kg etaloniks rahvusvahelise kilogrammi etaloni mass (ilma loodusliku vasteta).

Ajaühiku sekund defineerimisel lähtuti juba Babüloonias väljakujunenud ööpäevasest kellakasutusest, mille järgi ööpäev jaguneb tundideks, minutiteks ja sekunditeks.

Aastani 1956 defineeriti sekund kui 1/86400 osa keskmisest päikeseööpäevast (86400 = 24*60*60).

NB! Peale päikeseööpäeva on veel täheööpäev, mis on pisut lühem, kuna tähtedelt vaadatuna teeb Maa aastas ühe pöörde rohkem.

sekund – lad. k. secundus – teine

Astronoomiatehnika arenedes selgus, et troopiline aasta lüheneb sajandis ca 0,5 s [tõusu-mõõna tõttu ookean "loksub", mis analoogselt hõõrdumisega aeglustab Maa liikumist, kiiruse vähenemise tõttu väheneb tsentrifugaaljõud ja väheneb Päike–Maa kaugus, väiksem orbiit läbitakse kiiremini]. Kuna aasta osutus olevat aja t funktsiooniks, siis leiti lahendus aasta defineerimises ühel konkreetsel ajahetkel. Selleks hetkeks valiti 31. detsembri 1899 keskpäev. Sekund defineeriti kui 1/31 556 925,9747 osa troopilisest aastast 31.12.1899 kell 12:00. See definitsioon kehtis 1956–1967. (Troopiliseks aastaks nimetatakse ajavahemikku Päikese keskpunkti kahe järjestikuse kevadpunktist läbimineku vahel.)

Aatomifüüsika areng võimaldas veelgi paremat looduslikule konstandile tuginevat sekundi definitsiooni:

sekund on võrdne aatomi põhiseisundi kahe ülipeenstruktuurinivoo vahelisele siirdele vastava kiirguse 9 192 631 770 perioodiga.

Tabel 3. Kümnendliited kordsete mõõtühikute moodustamiseks.

Aste	Nimetus	Tähis	Aste	Nimetus	Tähis
10^{24}	jotta	Y	10^{-24}	jokto	y
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{18}	eksa	E	10^{-18}	atto	a
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{12}	tera	T	10^{-12}	piko	p
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{6}	mega	M	10^{-6}	mikro	µ
10^{3}	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^{2}	hekto	h	10^{-2}	senti	c
10^{1}	deka	da	10^{-1}	detsi	d

Ülesanne 1.1. Mitu mikronit vastab ühele kilomeetrile?

$1\ \mu m = 10^{-6}\ m = 10^{-6} \cdot (10^{-3}\ km) = 10^{-9}\ km$, seega $1\ km = 10^{9}\ \mu m$.

Ülesanne 1.2. Mitu kilomeetrit on üks sentimeeter?

$1\ km = 1000\ m = 1000 \cdot (100\ cm) = 100000\ cm$

Ülesanne 1.3. Üks akadeemiline tund (45 minutit) on ligikaudu võrdne ühe mikrosajandiga. Kui suur on nende erinevus protsentides? Ühes (troopilises) aastas on 365,244 ööpäeva.

Avaldame mõlemad suurused põhiühiku sekund kaudu:

$45\ min = 45 \cdot (60\ s) = 2700\ s$

$1\ \mu saj = 10^{-6}\ saj = 10^{-6} \cdot (10^{2}\ a) = 10^{-4}\ a = 10^{-4} \cdot (365{,}244 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ s) \approx 3156\ s.$

Nende suuruste erinevus on: $\frac{3156 - 2700}{3156} = 0{,}144 = 14{,}4\%$.

Ülesanne 1.4. Astronoomilist aega mõõdetakse Maa pöörlemise järgi, aatomiaega aga sellest sõltumatult. Kuna Maa pöörleb aeglustuvalt (põhjuseks on Kuu külgetõmbejõust tingitud tõusu-mõõnalainete sumbumine), kasvab ühe ööpäeva pikkus aatomiajas mõõdetuna aastas ühe mikrosekundi võrra. Leidke, kui suur on erinevus aatomikella ja „astronoomilise kella“ näitude vahel pärast 20 sajandi möödumist.

20 saj = 20 · (100 a) = 2000 a

$1 + 2 + 3 + ... 1998 + 1999 + 2000 = 1000 \cdot (2000 + 1) = 2001000 = 2{,}001 \cdot 10^6$

$2{,}001 \cdot 10^6$ μs $=2{,}001 \cdot 10^6 \cdot (10^{-6}$ s$) \approx 2$ s.

Ülesanne 1.5. Kuld on üks suurima tihedusega metalle, ühe kuupsentimeetri kulla mass on 19,32 grammi. Sõrmuse mass on 4 grammi. Kui suure kuldlehe saaks sellest valtsida, kui lehe paksus on üks mikromeeter?

$V = m/\rho = 4\text{g}/19{,}32\text{g/cm}^3 \approx 0{,}207\text{ cm}^3$
$S = V/h = 0{,}207\text{ cm}^3/1\text{ μm} = 0{,}207\text{ cm}^3/(10^{-6}\text{ m}) = 0{,}207\text{ cm}^3/(10^{-6}\ (10^2\text{ cm}) =$
$= 2070\text{ cm}^2 = 20{,}7\text{ dm}^2$.

Ülesanne 1.6. Mitu sülda on üks yard? (1 kilomeeter (km) = 1000 meetrit = 468 7/10 sülda; 1 yard = 3 jalga = 91 sentimeetrit 4 2/5 millimeetrit.)

1 yard $= 914{,}4$ mm $= 0{,}9144$ m $= 0{,}9144 \cdot 10^{-3}$ km $= 0{,}9144 \cdot 10^{-3}$ (468,7 sülda) ≈
≈ 0,429 sülda

Ülesanne 1.7. Auto, mille algkiirus oli 30 penikoormat tunnis, sõidab mäest alla kiirendusega 0,5 sülda ruutsekundis. Mäe pikkus on 900 yardi. Leidke auto kiirus mäe all ühikutes kilomeetrit tunnis.

1 penikoorem = 880 fathomit = 1760 yardi = 754 sülda 2 jalga = 1 km 609 m.

1 yard = 3 jalga = 91 sentimeetrit 4 2/5 millimeetrit.

$v_0 = 30$ penikoormat/h $= 30 \cdot (1609\text{ m}) / (3600\text{ s}) = 13{,}4$ m/s

754 sülda 2 jalga = 754 sülda + 2/3 · 0,9144 m = 1609 m

754 sülda = 1609 m – 0,6 m = 1608,4 m

1 süld = 1608,4 m / 754 = 2,13 m

$a = 0{,}5\text{ sülda/s}^2 = 0{,}5 \cdot 2{,}13\text{ m/s}^2 = 1{,}06\text{ m/s}^2$.

$s = 900$ yardi $= 900 \cdot 0{,}9144$ m $= 823$ m

$s = v_0t + at^2/2 \rightarrow at^2 + 2v_0t - 2s = 0 \rightarrow$

$$t = \frac{-2v_0 \pm \sqrt{4v_0^{\ 2} + 8as}}{2a} = \frac{-2 \cdot 13{,}4 \pm \sqrt{4 \cdot 13{,}4^2 + 8 \cdot 1{,}06 \cdot 823}}{2 \cdot 1{,}06} =$$

$$= \frac{-26{,}8 \pm 87{,}7}{2{,}12} \qquad t = 28{,}7 \text{ s}$$

$v = v_0 + at$

v = 13,4 m/s + 1,06 m/s2·28,7 s = 43,8 m/s = $43{,}8 \frac{\text{km}}{1000} \cdot \frac{3600}{\text{h}} = 157{,}7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

2. Mõõtmisteooria lähted

2.1. Mõõtmise põhiväide

Igasugune mõõtmine suhteskaalat kasutades tähendab tundmatu suuruse võrdlemist sama liiki määratletud suurusega, mille tulemusena avaldatakse tundmatu suuruse väärtus tuntud suuruse kaudu kas tema osana või kordsena. Füüsikalise suuruse mõõtmisel on määratletud suuruseks loomulikult selle suuruse ühik. Ühikutena tuleks eelistada SI ühikuid, sest need on kogu maailmas laialt kasutusel ning Mõõteseadusega on nad Eestis kuulutatud kohustuslikeks mõõtühikuteks. Seega võib füüsikalise suuruse korral iseloomustada võrdlemise protseduuri (mõõtmist) ja selle tulemusena saadavat mingi mõõtesuuruse X_i arvväärtust $\{X_i\}$ suhtega $X_i/[X_i]$, kus i on indeks, mille abil eraldame samas mõõteprotsessis esinevaid mõõtesuurusi.

Näide 2.1. Vedeliku mass mõõdetakse kaalumise meetodil koos mahutiga, siis võrdlemise protseduuri ning saadavat arvväärtust saab iseloomustada suhtega $(X_1 + X_3)/[X_1]$, kus X_1 tähistab materjali ja X_3 mahuti massi.

Näide 2.2. Kui eriti väikeste objektide joonmõõtmete mõõtmisel suurendatakse objekti kujutist mikroskoobi abil, siis tulemust võib kirjeldada suhtega $X_4 \bullet X_2/[X_2]$, kus X_2 tähistab joonmõõdet ja X_4 vastavat suurendustegurit. Toodud suhtes peaksid olema ühikuteks tegelikult$[X_1 + X_3]$ ja $[X_4 \bullet X_2]$, kuid kuna liita saab ainult sama liiki suurusi ning suurendustegur on suurus, mille dimensioon on üks, siis oleme ühikuteks valinud vastavalt $[X_1]$ ja $[X_2]$.

Jätkame näidet 2.1. Kui lähtuda oletusest, et mõõtesuurusele $X_1 + X_3$ saame anda kindla arvväärtuse $(X_1 + X_3)/[X_1]$ ning piirduda ainult aditiivsete mõjuritega, mille koosmõju arvestab juhuslik liidetav X_5, siis on mõõtmise võrrand järgmine:

$$\{X\} = \frac{X_1 + X_3}{[X_1]} + \frac{X_5}{[X_1]}. \tag{2.1}$$

See võrrand iseloomustab võrdlemise protseduuri ja arvväärtuse saamist ideaalsetes tingimustes. Tegelikkuses ei ole võimalik võrrandi (2.1) liikmeid eristada.

Ideaalolukorras omab võrrandi (2.1) esimene liige kindlat arvväärtust, teine liige on aga juhuslik. Saadavat summaarset arvväärtust $\{X\}$ ei saa antud juhul kuidagi iseloomustada ainult ühe arvuga. Seda võib iseloomustada matemaatilise mudeli (maatriks) abil ning esitada dokumentaalselt eksperimentaalsete andmete kogumina kas tabeli, graafiku, sõltuvuse jne kujul, mis on ühtlasi ka arvväärtuse $\{X\}$ hinnanguks.

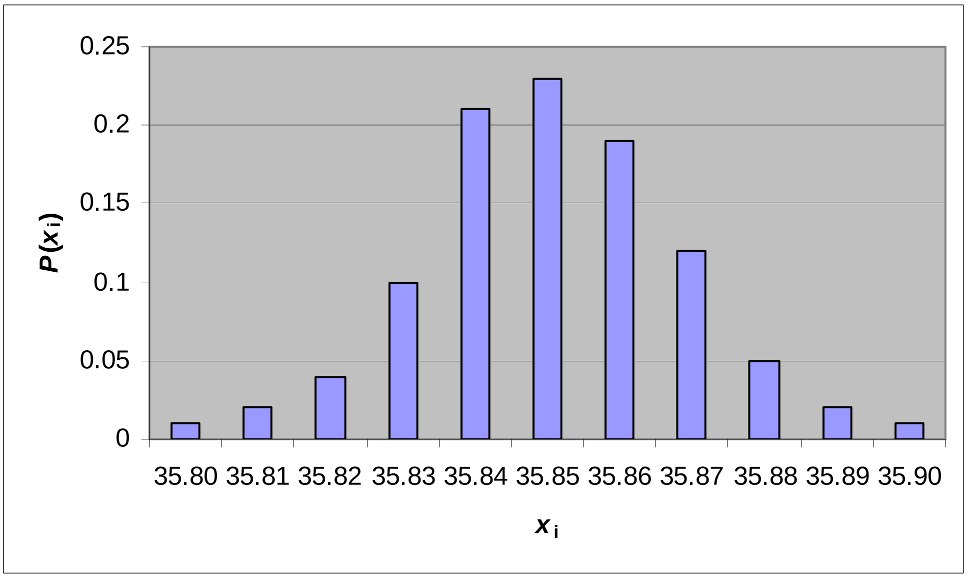
Näide 2.3. Mõõtesuuruse $X_1 + X_3$ n-kordsel (antud juhul 100-kordsel) sõltumatul mõõtmisel numbernäidikuga massimõõtevahendi abil fikseeriti näiduseadisel järgmised diskreetsed arvväärtused x_i, mis on toodud tabelis 2.1.

Tabel 2.1. Mõõtmisel saadud diskreetsed arvväärtused xi, nende esinemiste arv mi, tõenäosus P(xi) ja jaotusfunktsioon $F(x_i)$.

x_i	m_i	$P(x_i)$	$F(x_i)$
1	2	3	4
35.80	1	0.01	0.01
35.81	2	0.02	0.03
35.82	4	0.04	0.07
35.83	10	0.1	0.17
35.84	21	0.21	0.38
35.85	23	0.23	0.61
35.86	19	0.19	0.8
35.87	12	0.12	0.92
35.88	5	0.05	0.97
35.89	2	0.02	0.99
35.90	1	0.01	1

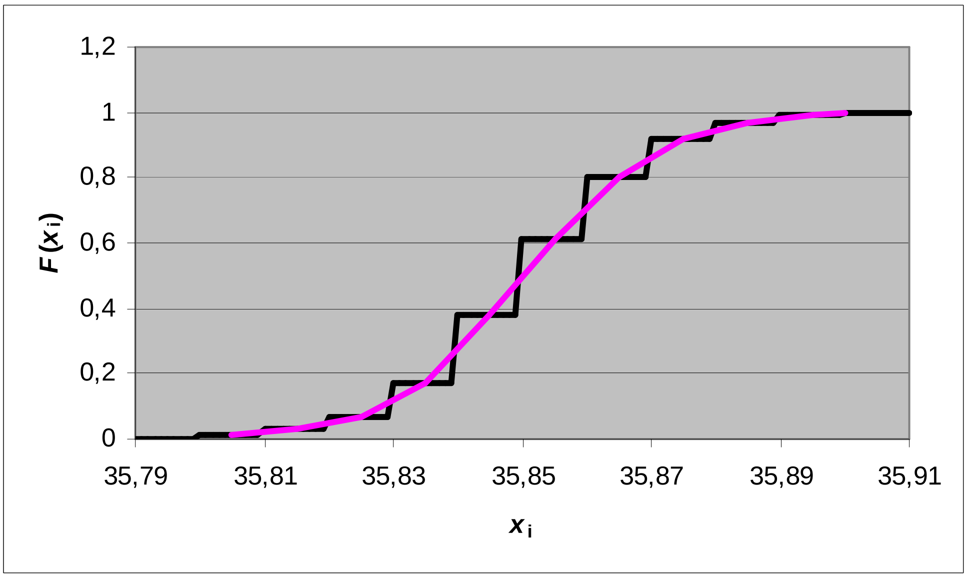
Iga i-ndas arvväärtus esines mõõtmistel m_i korda. Tekib küsimus: „Missugune nendest arvväärtustest tuleks antud n-kordsel mõõtmisel võtta mõõtetulemuse aluseks?“

Antud juhul mitte ükski arvväärtus tabeli esimeses tulbas üksikuna võttes ei iseloomusta mõõtevahendi abil saadud mõõtetulemust tervikuna. Seda iseloomustab antud juhul kogu saadud arvväärtuste kogum koos üksikute arvväärtuste esinemise sagedusega. Võttes iga i-nda arvväärtuse suhtelise esinemise sageduse m_i/n selle lugemi esinemise tõenäosuseks $P(x_i)$, saame täita tabeli kolmanda veeru. Võrreldes tabeli esimese veeruga annab kolmas veerg meile antud mõõtevahendi abil saadud ja tabeli kujul esitatud diskreetsete arvväärtuste tõenäosusjaotuse. Selle tõenäosusjaotuse võime avaldada ka graafiliselt, jaotusspektrina, joonis 2.1.



Joonis 2.1. Diskreetsete arvväärtuste tõenäosusjaotus.

Liidame kõik need kolmandas veerus olevad arvväärtuste esinemise tõenäosused, mille korral arvväärtused x_i on väiksemad vaadeldavast arvväärtusest x_k. Tabeli esimese veeru arvväärtustega võrreldes annavad neljanda veeru arvväärtused meile mõõtevahendi diskreetsete arvväärtuste esinemise jaotusfunktsiooni tabeli kujul. Graafiliselt on see toodud joonisel 2.2.



Joonis 2.2. Diskreetsete arvväätuste jaotusfunktsioon.

Jooniselt 2.2 on näha, et mõõtevahendi diskreetsete arvväätuste esinemise jaotusfunktsioon on katkev, täpsemini treppfunktsioon. Katkevuspunktides on mõõtevahendi lugemite võimalikud väärtused ning nendes punktides jaotusfunktsioon kasvab hüppeliselt, kusjuures hüppe mõõtmeks on tõenäosus, et esineb katkevuspunktist väiksemaid arvväärtusi.

Seega numbernäiduseadisega mõõtevahendite korral kirjeldavad tõenäosusjaotus $P(x_i)$ ja jaotusfunktsioon $F(x_i)$ täielikult saadavat diskreetset arvväärtust x_i.

Jätkame nüüd mõõtmise võrrandi 2.1. analüüsi. Oletame, et me teame mahuti massi X_3 eelnevatest mõõtmistest, või saadakse see täiendavate uuringute põhjal. Vastavalt meie lähenemisviisile oleme andnud suurusele X_3 kindla väärtuse ja juhuslikud komponendid üle kandnud suurusesse X_5. Seega on suurusel X_5 juhuslik iseloom, mis tähendab, et tema väärtust ei ole põhimõtteliselt võimalik kindlaks teha. Siit järeldame, et mõõtesuuruse X_1 väärtust on võimatu täpselt kindlaks teha võrrandi (2.1) põhjal tuletatud valemi

$$X_1 = \{X\} \cdot [X_1] - X_5 - X_3 \tag{2.2}$$

abil. Seda isegi siis, kui lähtume ideaalolukorral kehtivast oletusest, et suurusel X_3 on kindel väärtus. Toonitame veelkord, et võrrand (2.2) ei peegelda tegelikku mõõteprotsessi, st et me praktikas ei saa eristada juhuslikku suurust X_5 vaadeldavast mõõtesuurusest X_1.

Kokkuvõtteks – mõõtmise kordamisel tuleb suuruse arvväärtus $\{X\}$, tingituna mõõtesuuruse iseloomust, igal mõõtmisel erinev. Seega praktilise mõõtmise kogemuse põhjal võime väita, et mistahes suuruse mõõtmisel saadud arvväärtusel ning seega ka mõõtetulemusel on juhuslik iseloom selles mõttes, et saadud väärtused ei ühti. Samas aga ei ole nad ka täiesti juhuslikku laadi, vaid erinevus jälgib teatud seaduspärasusi, mida saame kirjeldada vastava tõenäosusjaotusega. Mõõtetulemus, st mõõtmise teel saadud mõõtesuuruse väärtus, on seega juhuslik suurus ehk muutuja. Nimetatut võime formuleerida mõõtmise põhiväitena, mis kehtib kõikide mõõteliikide ja mõõtevaldkondade kohta ning millele toetub kogu mõõtmise teooria.

2.2. Juhuslike suuruste jaotusseadused

Juhuslikud suurused jaotuvad kahte klassi: diskreetseteks ja pidevateks. Diskreetsed suurused saavad omada ainult ettemääratud väärtuseid, näiteks täringuvise silmasid 1 – 6, mündivise kulli ja kirja ning suvalise digitaalmõõtevahendi näit (digitaalne kaal resolutsiooniga 1 gramm võimalikud mõõtetulemused grammides on täisarvud). Juhuslikku suurust nimetatakse pidevaks, kui tema võimalike väärtuste hulk on arvtelje (lõplik või lõpmatu) vahemik. Füüsikalised suurused ise on üldiselt pidevad, näiteks temperatuur, mass, takistus jne.

Elementaarsündmuseks nimetatakse juhusliku katse tulemust.

Diskreetse juhusliku suuruse esinemistõenäosus on avaldatav valemiga

$$p_k = \frac{Soodsate\ elementaarsündmuste\ hulk}{Kõigi\ elementaarsündmuste\ hulk}, \qquad (2.3)$$

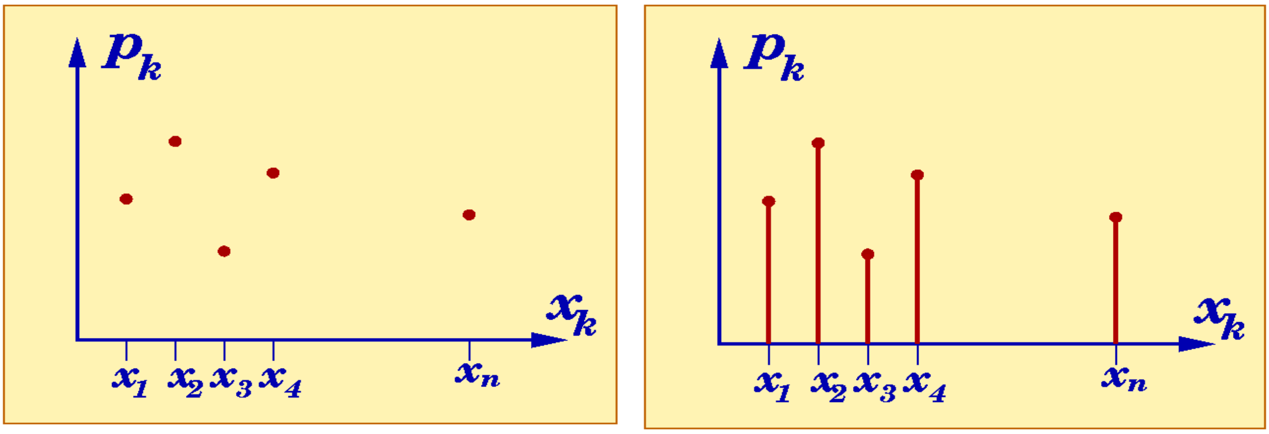
$$0 \le p_k \le 1$$
$$\sum_k p_k \equiv 1 \qquad (2.4)$$

Esimene omadus tähendab, et esinemistõenäosus ei saa olla negatiivne ega ka mitte suurem kui üks. Teine omadus tähendab, et kõigi elementaarsündmuste esinemistõenäosuste summa on üks, s.t. on 100% kindel, et toimub mingi realisatsioon kõigi elementaarsündmuste hulgast ja kõik teised võimalused on võimatud.

Näide 2.4. Tõenäosus visata 6-tahulise sümmeetrilise täringuga:

visatakse 1 silm:	p = 1/6	
visatakse 4 silma:	p = 1/6	
visatakse 8 silma:	p = 0/6 = 0	Võimatu sündmus
visatakse 1 või 4 silma:	p = 2/6	
visatakse 1, 2, 4 või 6 silma:	p = 4/6	
visatakse vähem kui 8 silma:	p = 6/6 = 1	Kindel sündmus

Juhusliku diskreetse suuruse tõenäosusjaotus on toodud joonisel 2.3. Tõenäosus erineb nullist ainult määratud, diskreetsetel väärtustel. Näiteks täringu viskel väärtus 2,9 ei ole määratud ja tema tõenäosus on seega null.



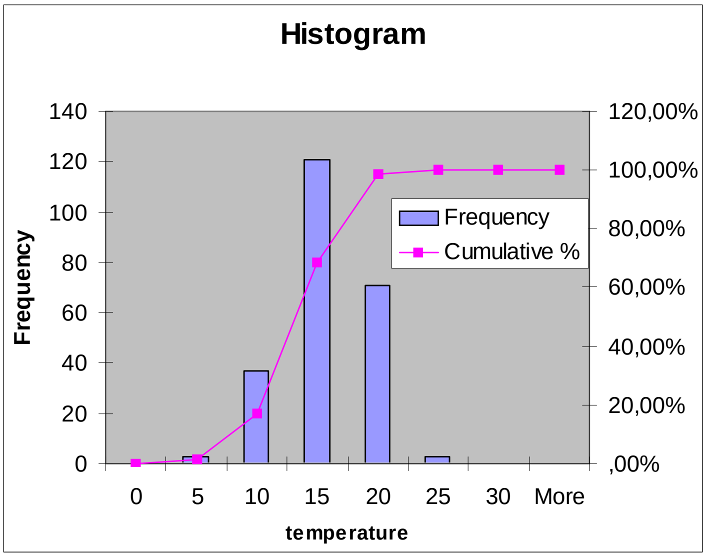
Joonis 2.3. Juhusliku diskreetse suuruse tõenäosusjaotus.

Diskreetsete suuruste jaotusfunktsioon ehk kumulatiivne tõenäosusjaotus on defineeritud valemiga:

$$F(k) = \sum_{i \le k} p_i \, , \tag{2.5}$$

s.t. jaotusfunktsioon näitab, kui suur on tõenäosus, et juhuslik suurus x_i on väiksem, kui x_k. Näiteks täringuviske puhul tähendab jaotusfunktsioon kohal 4 tõenäosust visata täringuga silmade arv 1, 2, 3 või 4, s.t. tema väärtuseks on 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 4/6.

Joonisel 2.4. on toodud temperatuuri mõõtmise tõenäosusjaotus (tulbad) ja tihedusfunktsioon (joon).



Joonis 2.4. Juhusliku diskreetse suuruse tõenäosusjaotus (tulbad) ja tihedusfunktsioon.

Jaotusfunktsiooni omadused tulenevad tõenäosusjaotuse omadustest. Kuna tõenäosusjaotuses ei saa olla negatiivseid väärtuseid, siis jaotusfunktsiooni väärtused ei saa samuti väheneda, s.t. $F(x_2) \ge F(x_1)$, kui $x_2 > x_1$. Kui aga muuta x väärtust tema võimalikes piirides, muutub $F(x)$ alates 0 kuni 1, s.t. jaotusfunktsioon rahuldab võrratust $0 \le F(x) \le 1$.

Tõenäosus, et sündmuse väärtus on väiksem mingist väärtusest x_1 on $F(x_1)$ ja et sama väärtus on väiksem väärtusest $x_2 > x_1$ on vastavalt $F(x_2)$. Sellest lähtuvalt võime väita, et tõenäosus sündmuse väärtuse sattumiseks vahemikku $[x_1; x_2]$, on võrdne funktsiooni $F(_x)$ väärtusega selle vahemiku piires:

$$P\{x_1 \leq x \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1), \tag{2.6}$$

Pideva suuruse korral võib väärtused x_1 ja x_2 võtta võimalikult teineteise lähedusest. Siit tuleneb, et kui võtta $x_1 \rightarrow x_2$, siis $\lim_{x_1 \to x_2} [F(x_2) - F(x_1)] = 0$. Seega saame väita, et pideva suuruse korral on mingi konkreetse väärtuse tõenäosus võrdne nulliga. Näiteks tõenäosus, et ühe mõõtesilindri maht on täpselt 1 liiter, on null. Seega on mõistlik vaadata pidevate suuruste korral hoopis tõenäosust, et sündmus satuks vahemikku $[x_1; x_2]$.

Jaotustihedus $f(x)$ on tuletatud jaotusfunktsioonist $F(x)$:

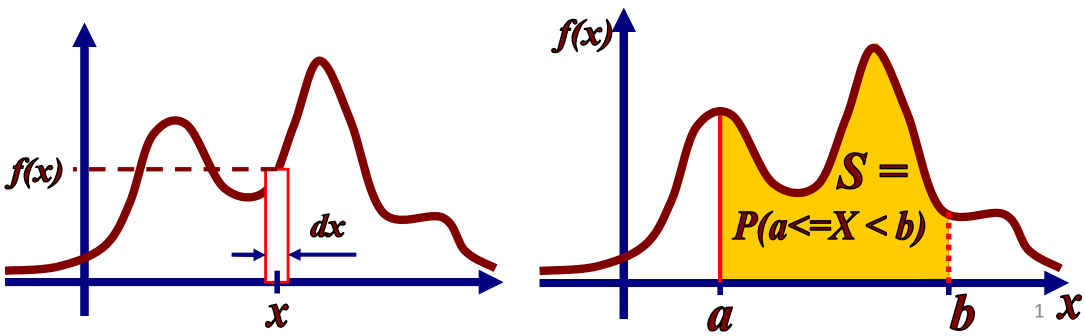
$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \tag{2.7}$$

Teistpidi on jaotusfunktsioon määratud integraal jaotustihedusest:

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x) dx, \tag{2.8}$$

Kuigi matemaatiliselt on jaotustihedus ja jaotusfunktsioon üksteisest tuletatavad, on mõlemad siiski tarvilikud, sageli lihtsustab valemite 2.7 ja 2.8 kasutamine oluliselt paljude esmapilgul väga keeruliste ülesannete lahendamist.

Geomeetriline interpretatsioon jaotustihedusest ja jaotusfunktsioonist on toodud joonisel 2.5.



Joonis 2.5. Geomeetriline interpretatsioon jaotustihedusest ja jaotusfunktsioonist.

Valemist 2.7 saame, et

$$dp = dF(x) = f(x) \cdot dx, \tag{2.9}$$

seega suurus dp on ristküliku pindala mõõtmetega dx ja $f(x)$. Funktsiooni $f(x)$ pindala vahemikus (a, b) on seega määratud integraal:

$$p(a,b) = P(a \le X \le b) = \int_a^b dP = \int_a^b f(x) \cdot dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{b} f(x) \cdot dx - \int_{-\infty}^{a} f(x) \cdot dx = F(b) - F(a), \qquad (2.10)$$

Ülesanne 2.1. Tee kahe täringuviske summa jaotustabel. Leia tõenäosus, et

a. kahe täringuviske summa oleks 6;
b. kahe täringuviske summa oleks väiksem kui 9;
c. kahe täringuviske summa oleks vahemikus [3;8].

summa	**kombinatsioonid**	**esinemiste arv**	**esinemise tõenäosus**	**Jaotus-funktsioon**
2	1,1	1	1/36	1/36
3	1,2 2,1	2	2/36	3/36
4	1,3 2,2 3,1	3	3/36	6/36
5	1,4 2,3 3,2 4,1	4	4/36	10/36
6	1,5 2,4 3,3 4,2 5,1	5	5/36	15/36
7	1,6 2,5 3,4 4,3 5,2 6,1	6	6/36	21/36
8	2,6 3,5 4,4 5,3 6,2	5	5/36	26/36
9	3,6 4,5 5,4 6,3	4	4/36	30/36
10	4,6 5,5 6,4	3	3/36	33/36
11	5,6 6,5	2	2/36	35/36
12	6,6	1	1/36	1

a. Vastavalt esinemiste tõenäosusele on kahe täringuviske summaks võimalik saada 5/36 ≈ 13% juhtudest.

b. Vastavalt jaotusfunktsioonile, tõenäosus, et summa oleks väiksem kui 9 on 30/36 ≈ 83%.

c. Vastavalt jaotusfunktsioonile, tõenäosus, et summa oleks vahemikus [3;8], on

26/36 – 1/36 = 25/36 ≈ 69%.

Ülesanne 2.2. Radioaktiivse aine pooldumist kirjeldab valem $f(t) = \frac{1}{t_0}\exp(-t/t_0)$, kus parameeter t_0 on antud aine poolestusaeg (ajaintervall, mille jooksul jääb ainet $e \approx 2{,}718$ korda vähemaks. Tseesium 137 poolestusaeg on 43 aastat. Leia radioaktiivse aine pooldumist kirjeldav tihedusfunktsioon. Palju kulub aega, et esialgsest Cs ainehulgast jääks järgi ainult 1%?

$$f(t)=\frac{1}{t_0}\exp(-t/t_0)$$

$$F(t)=\int_0^{t_1} f(t)dt=\int_0^{t_1}\frac{1}{t_0}\exp(-t/t_0)dt=\frac{1}{t_0}\exp(-t/t_0)\cdot(-t_0)\Big|_0^{t_1}=$$

$$=\exp(-t/t_0)\Big|_{t_1}^{0}=1-\exp(-t_1/t_0)$$

$$1-\exp(-t_1/t_0)=0{,}99\ \Rightarrow\ \exp(-t_1/t_0)=0{,}01\ \Rightarrow -t_1/t_0=\ln(0.01)=-4{,}61$$

$$t_1=4{,}61\cdot t_0=4{,}61\cdot 43=198$$

Seega oleks esialgsest ainehulgast 198 aasta pärast alles 1%.

<u>Ülesanne 2.3.</u> Ruumi temperatuurikontrollisüsteem hoiab ruumi temperatuuri vahemikus 20 °C kuni 24 °C. Temperatuuri tsüklilise muutumise tulemuseks on arkussiinustemperatuurijaotus, keskväärtusega 22 °C. Mitu protsenti ajast on ruumi temperatuur vahemikus 21 °C kuni 23 °C? Mitu protsenti ajast on ruumi temperatuur alla 20,5 °C või üle 23,5 °C?

Arkussiinusjaotuse jaotustihedus on
$$f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}},\quad 0<x<1$$

ning tema jaotusfunktsioon on
$$F(x)=\frac{2\cdot\arcsin(\sqrt{x})}{\pi},\quad 0<x<1.$$

Tõestame kõigepealt jaotustihedusele vastava jaotusfunktsiooni. Vaatame ainult piirkonda $0 < x < 1$, sest kuna arkussiinusjaotus on nullist erinev ainult piirkonnas (0; 1), on tema jaotusfunktsioon $F(x) = 0$ piirkonnas $x \le 0$ ja $F(x) = 1$ piirkonnas $x \ge 1$.

$$P(X\le x)=F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=$$

$$=\int_0^x\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}dx=\int_0^x\frac{1}{\pi\sqrt{(1-x)}\cdot\sqrt{x}}dx=\qquad y=\sqrt{x}\Rightarrow x=y^2\Rightarrow dx=2y\cdot dy$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy=\qquad (0;x)\Rightarrow(\sqrt{0};\sqrt{x})=(0;\sqrt{x})$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\arcsin(y)\right]_0^{\sqrt{x}}=\frac{2\cdot\arcsin(\sqrt{x})}{\pi}\qquad \int\frac{1}{1-y^2}dy=\arcsin(y)$$

Nüüd tuleb teha ülesande lahendamiseks muutujavahetus, et sobituda arkussiinusjaotuse valemiga:

Vaatame paare: $x_1 = 0 \rightarrow t_1 = 20$

$x_2 = 1 \rightarrow t_2 = 24$

Vastav üleminekuvalem on ilmselt $x = \frac{t - 20}{4}$.

Teeme tabeli meid huvitavatest temperatuuridest, vastavatest x-i väärtustest ning tihedusfunktsiooni väärtustest:

t	***x***	***F*(*x*)**
20,5	1/8	0,23
21	¼	0,33
23	¾	0,67
23,5	7/8	0,77

Seega on vahemikus 21 °C kuni 23 °C ruumi temperatuur 0,67 – 0,33 = 34% ajast. Alla 20,5 °C või üle 23,5 °C on 0,23 + (1 – 0,77) = 46%. On huvitav märkida, et tsükliliste temperatuurimuutuste korral püsib temperatuur kõige kauem vahemiku ekstreempunktide läheduses ja kõige lühemat aega ettenähtud temperatuuril. See omadus nähtub jaotustiheduse graafikust ja on intuitiivselt mõistetav, vaadeldes siinuskõvera kulgu.

2.3. Juhusliku suuruse arvkarakteristikud

Eespool nägime, et juhusliku suuruse jaotusseadus iseloomustab täielikult juhuslikku suurust tõenäosuslikult vaatekohalt. Jaotusseadus võimaldab leida juhusliku suurusega seotud iga sündmuse tõenäosust. Jaotusseaduse põhikujudeks on teatavasti jaotustabel diskreetse juhusliku suuruse puhul ja jaotusfunktsioon (jaotustihedus) pideva juhusliku suuruse korral.

Pideva suuruse korral on jaotustiheduse eksperimentaalne leidmine sageli väga kulukas ja töömahukas ülesanne. Enamasti aga ei olegi jaotusseadust tarvis teada (ei ole tarvis nii täielikku infot). Piisab, kui kasutada nn juhusliku suuruse arvkarakteristikuid, mis iseloomustavad juhusliku suuruse integraalseid omadusi. Ilma liialdamata võib öelda, et tõenäosusteooria rakendamisel praktiliste ülesannete lahendamiseks on oluline osata kasutada juhusliku suuruse arvkarakteristikuid, jättes kõrvale jaotusseadused.

Olulisemateks arvkarakteristikuteks on keskväärtus ja dispersioon. Peale nende põhikarakteristikute kasutatakse veel suurt hulka teisi arvkarakteristikuid nagu kvantiilid, mediaan, mood, momendid, asümmeetriakordaja, ekstsessikordaja, karakteristlik funktsioon, entroopia jmt.

2.3.1. Keskväärtus

Keskväärtus on juhusliku suuruse tähtsaim arvkarakteristik, mis iseloomustab juhusliku suuruse paiknemist.

Juhusliku suuruse X keskväärtust tähistatakse matemaatikas ja füüsikas üsna mitmel erineval viisil. Levinumad tähistused on

m, m_x, $m[x]$, $\bar{x}$ $\langle x \rangle$ – füüsikute hulgas;

EX, $M[X]$ – matemaatikute hulgas.

Siin tähis m, M on võetud ingliskeelse sõna *mean* (keskmine) esitähest, E aga on tulenenud prantsuskeelse sõna *espérance* (lootus, ootus) esitähest.

Diskreetse juhusliku suuruse $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ keskväärtuseks nimetatakse suurust (arvu)

$$m = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \ , \qquad (2.11)$$

kus $p_k = P(X = x_k)$.

Kui võimalike väärtuste hulk on loenduv, siis

$$m = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \ , \qquad (2.12)$$

kusjuures eeldatakse, et summa paremal koondub (on lõplik). Kui summa ei koondu, siis harilikult keskväärtust juhuslikule suurusele ei omistata.

Pideva juhusliku suuruse X, mille jaotustihedus on $f(x)$ ja võimalike väärtuste hulk on kogu reaaltelg, keskväärtuseks nimetatakse arvu

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \, , \qquad (2.13)$$

eeldusel, et integraal eksisteerib (koondub absoluutselt).

Märkus. Valem keskväärtuse arvutamiseks langeb kokku valemiga varda massikeskme arvutamiseks, kui varda mass on võrdne ühega. Teisisõnu, keskväärtus on ühikmassiga varda staatiline moment.

Näide 2.5. Ühtlase jaotuse keskväärtus.

Ühtlase jaotuse jaotustihedus on defineeritud kui

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{mujal} \end{cases} \qquad (2.14)$$

Arvutame nüüd ühtlase jaotuse keskväärtuse kasutades valemit (2.13):

$$m=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} x\cdot f(x)dx+\int_{a}^{b} x\cdot f(x)dx+\int_{b}^{\infty} x\cdot f(x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{a} x\cdot 0dx+\int_{a}^{b} x\cdot \frac{1}{b-a}dx+\int_{b}^{\infty} x\cdot 0dx=0+\int_{a}^{b} x\cdot \frac{1}{b-a}dx+0=$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} x\,dx=\frac{1}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}\right)_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

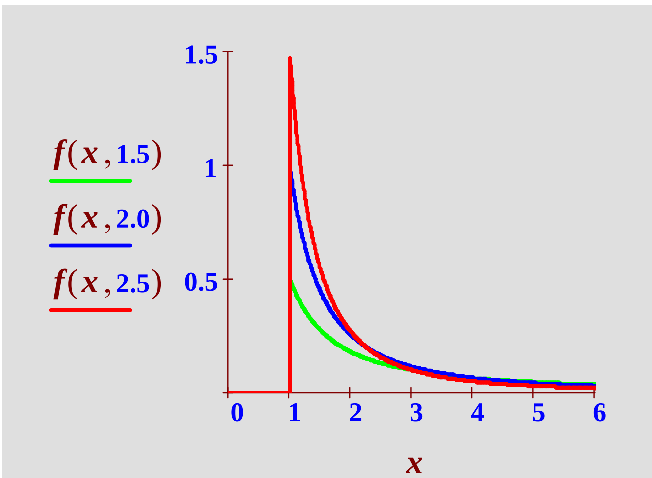
See on lõigu [a; b] keskpunkt.

Näide 2.6. Astmejaotuse keskväärtus.

Astmejaotus on

$$f(x;r) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{r-1}{x^r}, & x\geq 1, \\ 0, & x<1, \end{cases} \tag{2.15}$$

konstant r – 1 lugejas arvestab normeeringut (f integraal x järgi rajades $[1,\infty)$ olgu võrdne ühega). On näha: selleks, et jaotus oleks positiivne, peab kehtima r > 1. Astmejaotuse graafik on toodud erinevate parameetri r väärtuste korral joonisel 2.6.



Joonis 2.6. Astmejaotuse jaotusfunktsioon.

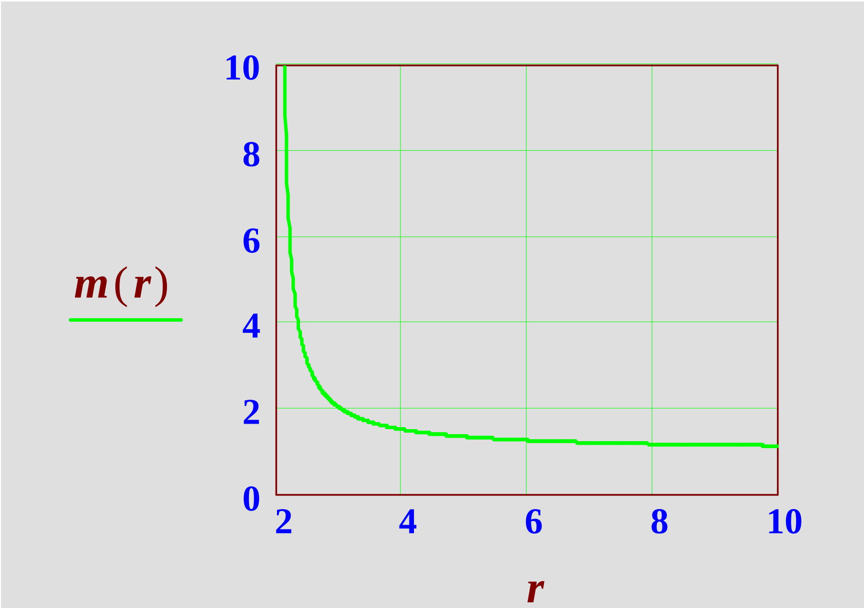
Arvutame astmejaotuse keskväärtuse

$$m=\int_{1}^{\infty} x\ f(x,r)\,dx= \quad (r-1)\int_{1}^{\infty} x^{1-r}\ dx \quad = \quad \frac{r-1}{2-r}\left(\frac{1}{x^{r-2}}\right)_1^{\infty}.$$

Näeme, et keskväärtuse eksisteerimiseks on tarvilik tingimuse $r-2>0$ ehk $r>2$ kehtimine – vastasel juhul ei koonduks ümarsulgudes olev avaldis lõpmatuses nulliks, vaid oleks lõpmata suur. Kui see tingimus on täidetud, siis saame

$$m = \frac{r-1}{r-2}, \qquad r > 2. \tag{2.16}$$

Seega, keskväärtus on alati suurem ühest (pole ka midagi imestada, kuna kogu jaotuse kandja asub punktist üks paremal) ja kasvab piiramatult kui r läheneb kahele paremalt (joonis 2.7).



Joonis 2.7. Astmejaotuse keskväärtus.

Oluline asi, millele selle näitega tähelepanu juhime, on asjaolu, et lõpmatusse ulatuva kandjaga (sama kehtib miinuslõpmatuse puhul) juhuslikul suurusel ei pruugi keskväärtus eksisteerida. Selle (keskväärtuse) olemasoluks on vajalik, et jaotustihedus läheneks nullile piisavalt kiiresti, kui $x \to \pm\infty$. Lõpliku kandja puhul sellist probleemi ei teki.

Keskväärtuse omadusi

Näitame mõned olulisemad keskväärtuse omadused, mis kehtivad nii diskreetse kui pideva juhusliku suuruse korral.

1. Konstandi keskväärtus. Konstandi keskväärtus on see konstant ise

$$m[c] = c.$$

2. Homogeensus. Konstandi võib tuua keskväärtuse sümboli ette:

$$m[cX] = cm[X].$$

Tõestatakse see pideval juhul nii:

$$m[cX] = \int_{-\infty}^{+\infty} cx\, f(x)dx = c\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx = c\, m[X].$$

Analoogiline on tõestus diskreetse juhusliku suuruse korral.

Keskmiste kasutamisest

Defineerime siinkohal veel mõned keskmisi väärtuseid kirjeldavad juhuslike suuruste arvkarakteristikud:

- Mediaan on arv, millest suuremaid ja väiksemaid väärtuseid on variatsioonireas ühepalju.
- Mood on tunnuse kõige sagedamini esinev väärtus.
- Kaalutud keskmine on arv, mis saadakse, kui aritmeetilise keskmise arvutamisel antakse erinevatele väärtustele erinevad kaalud. Kaaluks võivad olla näiteks mõõtetulemuste standardhälbed.

Näide 2.7. Suvel märgistatakse raadiomajakaga 9 kuldnokka, et teada saada kuldnokkade keskmine rände kestvus. Sügisel lahkusid kõik 9 kuldnokka Eestist, kuid vaatlusperioodi lõpuks suve alguses oli Eestisse tagasi jõudnud ainult 7 kuldnokka, kelle rände kestvused olid vastavalt 146; 152; 152; 154; 156; 159; 159 päeva. Mitu päeva kestis sellel aastal keskmiselt kuldnokkade ränne?

> Vastus: nihketa hinnang oleks mediaan, ehk 156 päeva. Aritmeetilist keskmist saab arvutada ainult suve alguseks Eestisse tagasi jõudnud lindude rännet arvesse võttes, see oleks 154 päeva, kuid see ei arvesta võimalusega, et kadunud 2 lindu siiski kunagi, näiteks suvel, siiski jõudsid tagasi. Ka annaks aritmeetiline keskmine selgelt nihutatud hinnangu juhul, kui mõni lindudest saabuks juba sügisel miskipärast Eestisse tagasi.

Kui meid huvitab kõige tüüpilisem väärtus, siis seda näitab kõige suurema sagedusega väärtus mood. Mood on sageduse kõrgpunkt, ta ei näita, kas ja kui palju on temast suuremaid ja vähemaid väärtuseid. Nominaaltunnuste korral (näiteks rahvus, elukutse) leitakse keskmisena mood.

Mediaani leidmisel ei arvestata tunnuse väärtusi vaid ainult suurusjärjestust. Mediaani kasutatakse siis, kui on eesmärgiks leida täpne andmete jaotuse keskpunkt, või kui andmete hulgas on ekstremaalseid väärtuseid, mis oluliselt mõjutavad keskväärtust.

Keskväärtus sõltub kõigist tunnuse väärtustest, kuid ta ei pruugi ise olla tunnuse väärtus. Keskväärtus võib sattuda vahemikku, kus tunnusel on vähe väärtuseid või need puuduvad hoopis. Siiski kasutatakse keskväärtust küllalt sageli, sest ta on aluseks teiste statistiliste näitajate (näiteks standardhälve, korrelatsioonikordaja) määramisele.

Näide 2.8. Oletame, et üks firma koosneb juhatajast ja 9-st töötajast. Töötajate kuupalk on 5000 EEK, juhata kuupalk on 55000 EEK. Keskmine palk selles firmas on

$$m = \frac{9 \cdot 5000 + 55000}{10} = 10000\,.$$

Samas mediaanpalk selles firmas on 5000 EEK.

Üks teine firma koosneb neljast insenerist, kuupalgaga 39000 EEK ning koristajast, kuupalgaga 4000 EEK. Keskmine palk selles firmas on

$$m = \frac{4 \cdot 39000 + 4000}{5} = 32000\,.$$

Samas mediaanpalk selles firmas on 39000 EEK.

Seega, sõltuvalt palkade jaotusest, võib olla keskmine palk mediaanpalgast nii suurem kui ka väiksem. Eesti keskmisena on siiski keskmine palk mediaanpalgast märgatavalt kõrgem, seda tingib ühelt poolt miinimumpalk, millest väiksemat palka ei ole võimalik maksta, samuti tõsiasi, et meil on teatud hulk inimesi, kes saavad ülisuuri palkasid. Toon siin internetist leitud Eesti keskmise ja mediaanpalga näited, need on illustratiivsed ja ei pretendeeri kindlale tõele: 2008. aasta III kvartalis oli keskmine kuupalk 12 512 krooni, samas kui 2008. aasta II kvartalis oli mediaanpalk 9 897 krooni

2.3.2. Dispersioon ja ruuthälve

Teades juhusliku suuruse keskväärtust, ei saa veel otsustada, milliseid väärtusi juhuslik suurus võib omandada ja kuidas nad on hajutatud keskväärtuse ümber. Kui jaotustihedus on hästi kitsas, kui juhusliku suuruse hajuvus on väike, siis on keskväärtusest küll, et iseloomustada juhuslikku suurust. Kui aga jaotustihedus on lai ja lame? Meil on tarvis suurust, mis võimaldaks kvantitatiivselt hinnata jaotuse „kitsust“ või „hajuvust“. Selliseks suuruseks on dispersioon.

Dispersiooni defineerimiseks toome esmalt sisse juhusliku suuruse hälbe ehk tsentreeritud juhusliku suuruse:

$$\varepsilon_i = x_i - m[X]. \tag{2.17}$$

Pole raske veenduda, et hälbe keskväärtus on võrdne nulliga. Tõepoolest

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0$$

See on seletatav sellega, et võimalikud hälbed on erinevate märkidega ja summaarselt kompenseeruvad. Järelikult ei iseloomusta hälve hajuvust. Tsentreerimine tähendab geomeetriliselt seda, et koordinaatide alguspunkt viiakse punkti $m[X]$.

Dispersioon

Juhusliku suuruse dispersiooniks (ingliskeelne nimetus variance) nimetatakse suurust

$$D \equiv D[X] = m[\varepsilon^2] = m[(X - m[X])^2], \tag{2.18}$$

mis võetakse üheks hajuvuse karakteristikuks. Seega on dispersioon juhusliku suuruse üheks nn juhuslikkuse määra iseloomustajaks.

Teised levinumad tähised dispersioonile on veel σ^2 (dispersioon on siin tähistatud kui standardhälbe ruut). Käesolevas kursuses kasutame dispersioonile tähist *D*.

ja kui tahame rõhutada või esile tuua, millise juhuliku suurusega on tegu, siis tähist $D(X)$.

Vastavalt definitsioonile (2.18) on diskreetse juhusliku suuruse dispersiooni arvutusvalem

$$D = \sum_i (x_i - m)^2 p_i . \tag{2.19}$$

Niisiis, tegu on tõenäosustega kaalutud üksikrealisatsioonide hälvete ruutude summaga. Analoogiliselt, pideva juhuliku suuruse korral annab (2.2)

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \ f(x)\, dx . \tag{2.20}$$

Dispersiooni praktiliseks arvutamiseks sobib kasutada järgmist Steineri valemit

$$D[X] = m[X^2] - (m[X])^2 . \tag{2.21}$$

Siin esimene suurus paremal on keskväärtus juhusliku suuruse ruudust X^2. Kõige lihtsam on seda valemit tõestada, esitades valemeis (2.19) ja/või (2.20) ruutavaldise ümarsulgudes kujul

$$(x-m)^2 = x^2 - 2xm + m^2 .$$

Vaatame detailsemalt (2.21) tõestust pideva juhusliku suuruse juhul (2.20):

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \ f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2xm + m^2) \ f(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \ f(x)\, dx - 2m \int_{-\infty}^{\infty} x \ f(x)\, dx + m^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx .$$

Siin teine integraal on *X* keskväärtus *m* ja viimane integraal on normeerituse tõttu võrdne ühega. Seepärast saame

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \ f(x)\, dx - 2m^2 + m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \ f(x)\, dx - m^2 ,$$

mis ongi valem (2.21). Ühtlasi oleme ka saanud ilmutatud esituse juhusliku suuruse ruudu keskväärtuse arvutamiseks:

$$m[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \ f(x)\, dx . \tag{2.22}$$

Dispersiooni ruutjuurt nimetatakse standardhälbeks, ruutkeskmiseks hälbeks ehk ruuthälbeks. Definitsioonidest on näha, et dispersiooni dimensioon on võrdne juhusliku suuruse dimensiooni (mõõtühiku) ruuduga, standardhälbe dimensiooniks on aga juhusliku suuruse dimensioon. Seetõttu kasutatakse praktikas harilikult standardhälvet.

Mõõtemääramatuste arvutamisel kasutatakse alati standardhälvet!!!

$$\sigma = \sqrt{D} \tag{2.23}$$

Näide 2.9. Täringuvisete keskväärtus ning standardhälve.

Lahendamiseks teeme kõigepealt tabeli:

	x	x^2	$x-m$	$(x-m)^2$	p_i
	1	1	–2,5	6,25	1/6
	2	4	–1,5	2,25	1/6
	3	9	–0,5	0,25	1/6
	4	16	0,5	0,25	1/6
	5	25	1,5	2,25	1/6
	6	36	2,5	6,25	1/6
Σ	21	91	0	17,5	1

Leiame kõigepealt keskväärtuse, lähtudes valemist (2.11):

$$m = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = \frac{1}{6} \cdot 21 = 3{,}5 .$$

Lähtudes valemist (2.19), saame:

$$D = \sum_i (x_i - m)^2 p_i = \frac{1}{6} \cdot 17{,}5 \approx 2{,}92 .$$

Lähtudes Steineri valemist (2.21), saame:

$$D = m[X^2] - m^2 = \frac{91}{6} - 3{,}5^2 \approx 15{,}17 - 12{,}25 = 2{,}92 .$$

Täringuviske standardhälve on

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{2{,}92} = 1{,}71 .$$

Näide 2.10. Ühtlase jaotuse standardhälve.

Ühtlase jaotuse jaotustihedus on:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

Ühtlase jaotuse keskväärtuseks saime juba varem

$$m(x) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{x^2}{2} \right)_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Dispersiooni arvutamisel kasutame Steineri valemit (2.21). Leiame esmalt teist järku algmomendi (ehk x^2 keskväärtuse):

$$m(x^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2\, dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{x^3}{3} \right)_a^b =$$
$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(a^2 + ab + b^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Nüüd saame

$$D(x) = m(x^2) - (m(x))^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 =$$
$$= \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Standardhälve tuleb siis

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b-a}{2} \approx 0{,}577 \frac{b-a}{2}.$$

Näide 2.11. Astmejaotuse dispersioon ning standardhälve.

Olgu jaotustiheduseks astmejaotus (2.15). Dispersiooni arvutuseks kasutame valemit (2.21).

Keskväärtus m on teada valemist (2.16), seega on vaja leida $m[X^2]$, kasutades selleks seost (2.22) ja jaotustihedust (2.15):

$$m[X^2] = \int_1^\infty x^2 \frac{r-1}{x^r} dx = (r-1)\int_1^\infty x^{2-r}\, dx = \frac{r-1}{3-r} \left(\frac{1}{x^{r-3}} \right)_1^\infty.$$

Siin ümarsulg annab lõpliku tulemuse vaid siis, kui on täidetud tingimus $r > 3$. Sel juhul annab ümarsulg ülemise raja juures nulli ning saame lõplikult

$$m[X^2] = \frac{r-1}{r-3}.$$

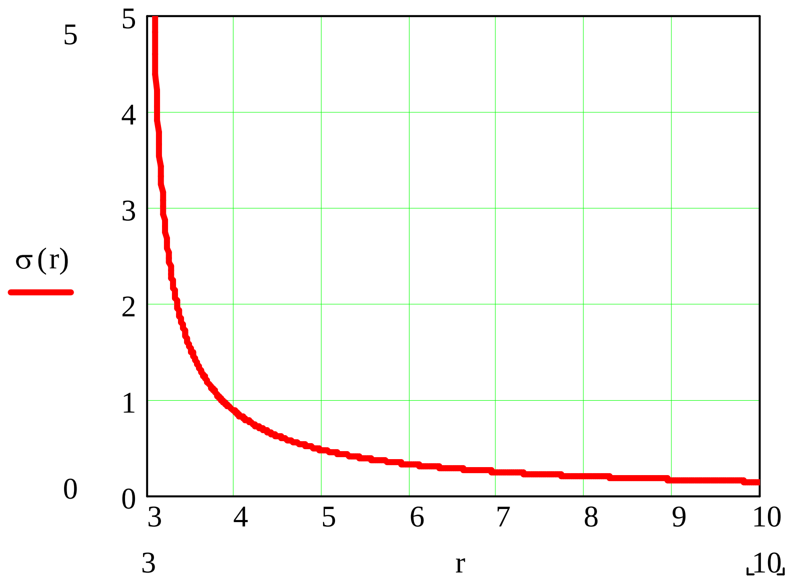
Seega saame astmejaotuse dispersiooni jaoks

$$D \equiv D(r) = \frac{r-1}{r-3} - \left(\frac{r-1}{r-2}\right)^2 = \frac{r-1}{(r-3)(r-2)^2}$$

Ning astmejaotuse standardhälbe jaoks

$$\sigma = \sqrt{D(r)} = \sqrt{\frac{r-1}{(r-3)(r-2)^2}}\ .$$

Selle dispersiooni graafik parameetri *r* funktsioonina on toodud joonisel 2.8.



Joonis 2.8. Astmejaotuse standardhälve.

Näeme, et standardhälve läheneb kiiresti lõpmatusele, kui parameeter *r* läheneb kolmele. Ja vastupidi, parameetri kasvades läheneb standardhälve kiiresti nullile.

See näide demonstreerib seda tõsiasja, et – sarnaselt keskväärtusele – vajab lõpmatu määramispiirkonnaga juhuslik suurus standardhälbe lõplikkuseks (st eksisteerimiseks) küllalt kiiret tõenäosustiheduse nullile lähenemist protsessis $x \to \pm\infty$. Jaotustiheduse nullile lähenemise kiiruse määrab käesolevas näites parameeter r – mida suurem see on, seda kiirem on $f(x)$ nullile lähenemine (vt joonis 2.7). Nagu näeme, on standardhälbe eksisteerimiseks tarvilik suurem nullile lähenemise kiirus ($r > 3$) kui oli tarvilik keskväärtuse olemasoluks (seal oli tarvilik $r > 2$). See tulemus on üsna üldine: lõpmatu kandjaga jaotustiheduse korral on tingimused standardhälbe eksisteerimiseks hoopis karmimad kui keskväärtusele.

Dispersiooni omadusi, millest tulenevad ka standardhälbe omadused:

Vaatleme dispersiooni põhiomadusi, mis kehtivad nii diskreetse kui pideva juhusliku suuruse puhul.

1. Dispersiooni mittenegatiivsus.

a) Mittejuhusliku suuruse dispersioon on null. Konstandi dispersioon on võrdne nulliga

$$D[c] \quad = \quad 0 .$$

Tõestuseks teisendame

$$D[c] = m[\ (c - m[c])^2\ ] = m[0] = 0 .$$

b) Juhusliku suuruse dispersioon on alati positiivne.

Vaatame määranguid (2.19) ja (2.20). Diskreetsel juhul (2.19) on summa all ainult positiivsed suurused, ja positiivsete suuruste summa on positiivne. Erandjuhuks on mittejuhuslik diskreetne suurus, mil summa koosneb vaid ühest liikmest, mis on parasjagu null.

Analoogiline on tõestus pideval juhul (2.20): integraal positiivsest funktsioonist on positiivne. Ka siin on piiril erijuhuks ühteainsasse punkti $X = c$ lokaliseeritud jaotus, mida kirjeldab delta-funktsioon

$$f(x) \quad = \quad \delta(x - c) .$$

2. Ruuthomogeensus. Kehtib võrdus

$$D[cX] = c^2 D[X].$$

Keskväärtuse omaduste põhjal

$$\begin{aligned} D[cX] &= m\left[(cX - m[(cX)])^2\right] = m\left[(cX - cm[X])^2\right] = \\ &= m\left[c^2 (X - m[X])^2\right] = c^2 D[X] \end{aligned} .$$

3. Juhuslike suuruste summa dispersioon.

Kui suurused X ja Y on sõltumatud juhuslikud suurused, siis

$$D[X \pm Y] = D[X] + D[Y].$$

Kui suurused X ja Y on omavahelises sõltuvuses olevad juhuslikud suurused, siis

$$D[X \pm Y] = D[X] + D[Y] \pm 2r\sqrt{D[X]D[Y]} ,$$

kus $r = \dfrac{m[\varepsilon(x) \cdot \varepsilon(y)]}{\sqrt{D[X]D[Y]}}$ on korrelatsioonitegur (sellest täpsemalt edaspidi).

Tõestuseks teisendame, kasutades keskväärtuse aditiivsuse omadust

$$\begin{aligned} D[X \pm Y] &= m\left[(X \pm Y - m[X \pm Y])^2\right] = m\left[(\varepsilon(x) \pm \varepsilon(y))^2\right] = \\ & m\left[\varepsilon^2(x) \pm 2\varepsilon(x)\varepsilon(y) + \varepsilon^2(x)\right] = D[X] + D[Y], \end{aligned}$$

sest $\quad m[\varepsilon(x)\varepsilon(y)] = m[(X - m[X])(Y - m[Y])] = r \cdot \sqrt{D[X]D[Y]} .$

Sõltumatute tundmatute erijuhul ($r \approx 0$) on $m[\varepsilon(x)\varepsilon(y)] = 0$.

Erijuhul, kus üks liidetav on konstant, on

$$D[X + c] = D[X].$$

Standardhälve (ruutkeskmine hälve).

Dispersiooni ruutjuurt

$$\sigma = \sqrt{D} \tag{2.23}$$

nimetatakse **standardhälbeks, ruutkeskmiseks hälbeks** ehk **ruuthälbeks.**

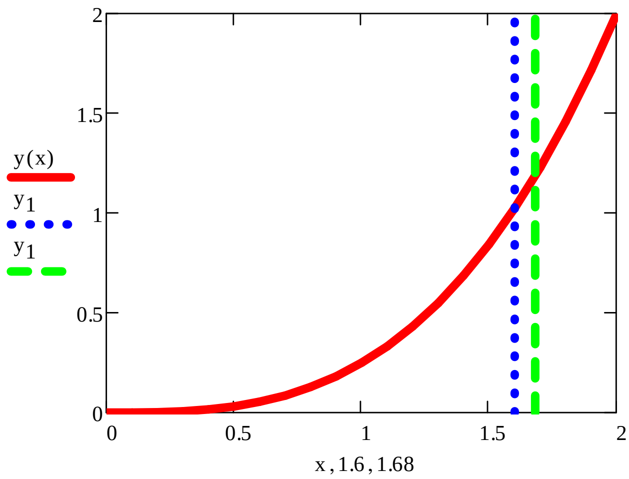
Definitsioonidest on näha, et dispersiooni dimensioon on võrdne juhusliku suuruse dimensiooni (mõõtühiku) ruuduga, standardhälbe dimensiooniks on aga juhusliku suuruse dimensioon. Seetõttu kasutatakse praktikas harilikult standardhälvet.

Ülesanne 2.4. Juhusliku suuruse jaotustiheduseks on kuupfunktsioon:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{4}, & 0<x<2\\ 0, & \text{mujal}\end{cases}$$

Leia antud funktsioonil:

a. keskväärtus *m*
b. standardhälve σ
c. tõenäosus, et juhuslik suurus oleks vahemikus *m* ± σ
d. tõenäosus, et juhuslik suurus oleks väiksem kui keskväärtus
e. mediaan



$$F(x_1)=\int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx=\int_0^{x_1}\frac{x^3}{4}dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^{x_1}=\frac{x_1^{\;4}}{16}$$

$$m(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_0^2\frac{x^4}{4}dx==\frac{1}{4}\frac{x^5}{5}\Big|_0^2=\frac{2^5}{4\cdot 5}=\frac{8}{5}=1{,}6$$

$$m(x^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^2\frac{x^5}{4}dx==\frac{1}{4}\cdot\frac{x^6}{6}\Big|_0^2=\frac{2^6}{4\cdot 6}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}\approx 2{,}667$$

$$D=m(x^2)-(m(x))^2=2{,}667-1{,}6^2=0{,}107$$

$$\sigma=\sqrt{D}=0{,}107\approx 0{,}33$$

$$m-\sigma=1{,}6-0{,}33=1{,}27$$

$$m+\sigma=1{,}6+0{,}33=1{,}93$$

$$F(m-\sigma)=\frac{1{,}27^4}{16}=\frac{2{,}6}{16}=0{,}16$$

$$F(m+\sigma) = \frac{1{,}93^4}{16} = \frac{13{,}9}{16} = 0{,}87$$

$$p(m \pm \sigma) = 0{,}87 - 0{,}16 = 0{,}71 = 71\%$$

$$F(m) = \frac{1{,}6^4}{16} = \frac{6{,}6}{16} = 0{,}41 = 41\%$$

Arvutame mediaani:

$$F(x_{med}) = \frac{x_{med}{}^4}{16} = 0{,}5 \Rightarrow x_{med}{}^4 = 8 \Rightarrow x_{med} = \sqrt[4]{8} = 1{,}68$$

Ülesanne 2.5. Radioaktiivse aine pooldumist kirjeldab valem $f(t) = \frac{1}{t_0}\exp(-t/t_0)$, kus parameeter t_0 on antud aine poolestusaeg (ajaintervall, mille jooksul jääb ainet $e \approx 2{,}718$ korda vähemaks. Tseesium 137 poolestusaeg on 43 aastat. Leia Cs pooldumise keskväärtus, mediaan ja standardhälve.

Kasutame arvutuses poolestusaja pöördväärtust $\lambda = 1/t_0$:

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$$
$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$$

Siin on otstarbekas arvutada algmomendid ning neid kasutada keskväärtuse ja dispersiooni leidmiseks.

$$m\left[t^k\right] = \int_0^\infty t^k \cdot \lambda \exp(-\lambda t) dt = \lambda \cdot \int_0^\infty t^k \cdot \exp(-\lambda t) dt$$

Rakendame integraali arvutamisel parameetri järgi diferentseerimise võtet:

$$\int_0^\infty t^k \exp(-\lambda t) dt = \left(-\frac{d}{dt_0}\right)^k \int_0^\infty \exp(-\lambda t) dt$$

Kuna viimase integraali väärtus on

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda},$$

siis saame

$$m\left[t^k\right] = \lambda \cdot \left(-\frac{d}{d\lambda}\right)^k \frac{1}{\lambda}$$

Võttes siin k = 0, 1, 2, saame kerge vaevaga

$$m\left[t^0\right] = \lambda \cdot \left(-\frac{d}{d\lambda}\right)^0 \frac{1}{\lambda} = 1,$$

seega normeering ühele on kehtiv nagu peabki,

$$m\left[t^1\right] = \lambda \cdot \left(-\frac{d}{d\lambda}\right)^1 \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = t_0$$

$$m\left[t^2\right] = \lambda \cdot \left(-\frac{d}{d\lambda}\right)^2 \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2} = 2t_0{}^2$$

Seega on eksponentjaotuse keskväärtus ja dispersioon vastavalt

$$m[t] = t_0 \text{ ja}$$

$$D = m\left[t^2\right] - m[t]^2 = 2t_0{}^2 - t_0{}^2 = t_0{}^2$$

Standardhälve on siit:

$$\sigma = \sqrt{D} = t_0$$

Niisiis on eksponentjaotuse korral keskväärtus ja standardhälve arvuliselt võrdsed.

Leiame nüüd mediaani:

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t) = 0{,}5 \;\; \Rightarrow \;\; \exp(-\lambda t) = 0{,}5$$

$$-\lambda t = \ln(0{,}5) = -0{,}69 \;\; \Rightarrow \;\; t = \frac{0{,}69}{\lambda} = 0{,}69 \cdot t_0 = 0{,}69 \cdot 43 \approx 30$$

Seega on tseesiumi pooldumise keskväärtus 43 aastat, aga mediaan 30 aastat.

2.4. Mõõteprotseduuride juures enamkasutatavad jaotusseadused

2.4.1. Ühtlane jaotus

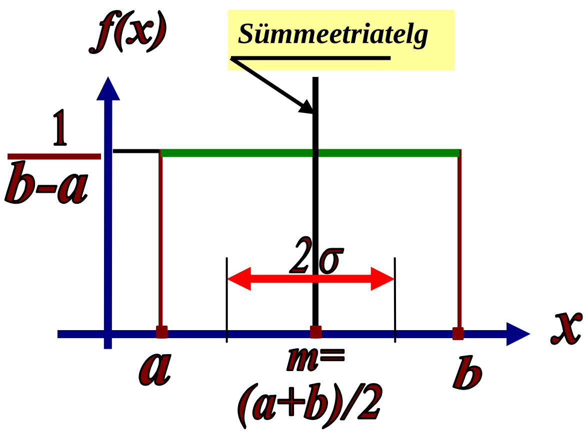
Pideva juhusliku suuruse X ühtlaseks jaotuseks (ka ristkülikjaotuseks) lõigul [a; b] nimetatakse jaotust, mille jaotustihedus sellel lõigul on nullist erinev konstant. Kuna peab kehtima normeerimistingimus, siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} c \cdot dx = \int_a^b c \cdot dx = c \cdot x\Big|_a^b = c \cdot (b-a) \equiv 1 \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{b-a}$$

Seega on ühtlase jaotuse jaotustihedus:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{mujal} \end{cases} \tag{2.24}$$

Joonisel 2.9 on toodud ühtlase jaotuse jaotustiheduse graafik.



Joonis 2.9. Ühtlase jaotuse jaotustihedus.

Arvutame nüüd ühtlase jaotuse keskväärtuse kasutades valemit (2.13):

$$m = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}\right)_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

See on lõigu [a; b] keskpunkt. Et tegemist on lõigu keskpunkti suhtes sümmeetrilise jaotusega (joonis 2.9), siis on ka loomulik, et keskväärtus ühtib sümmeetriakeskme asukohaga.

Dispersiooni arvutamisel kasutame Steineri valemit (2.21). Leiame esmalt teist järku algmomendi

$$m\left[X^2\right]=\int_a^b x^2\,\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx=\frac{1}{b-a}\left(\frac{x^3}{3}\right)_a^b=$$
$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Nüüd saame

$$D = m\left[X^2\right] - m^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Standardhälve tuleb siis

$$\sigma=\sqrt{D}=\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{b-a}{2} \approx 0.577\,\frac{b-a}{2}.$$

Standardhälbe ulatus (s.o intervalli $\left[m-\sigma, m+\sigma\right]$ ulatus) on näidatud joonisel 2.9 kahepoolse noolega. Standardhälbe väärtusest on ka näha, et kahekordsele standardhälbele vastav intervall $\left[m-2\sigma, m+2\sigma\right]$ sisaldaks eneses juba kogu juhusliku suuruse muutumispiirkonna [*a*, *b*]. Teiste sõnadega, andes hajuvuspiirkonnana pluss-miinus kaks standardhälvet keskväärtusest, saavutame, et juhuslik suurus satub sellesse piirkonda tõenäosusega 1 (eeldusel, et jaotus ikka on ühtlane!).

Ühtlase jaotuse näiteks on mõõtevahendi resolutsioonist tingitud määramatus, seda eriti selgelt digitaalnäiduga seadmetel. Kui näiteks digitaaltermomeetri resolutsioon on 0,1 °C ning näiduks on 22,6 °C, siis tegelik temperatuur on vahemikus (22,55 °C – 22,65 °C). Kuna meil pole mingi alust eeldada, et temperatuuril esineks mingisugused eelistatumaid väärtuseid, siis on kõige mõistlikum eeldada, et mõõtevahendi resolutsioonist tingitud määramatus on kirjeldatav ühtlase jaotusena.

Ka analoogmõõteseadme resolutsioonist tingitud määramatust võib käsitleda samamoodi kui digitaalsetel seadmetel. Siiski on analoogseadmetel võimalik seda määramatust vähendada. Näiteks on joonlaua resolutsioon 1 mm, kuid terava silmaga mõõtja suudab jagada millimeetri veel pooleks. Sellisel juhul alluks resolutsioonist tingitud määramatus ikka ühtlasele jaotusele, kuid oleks mõõtetulemuse 283,5 mm

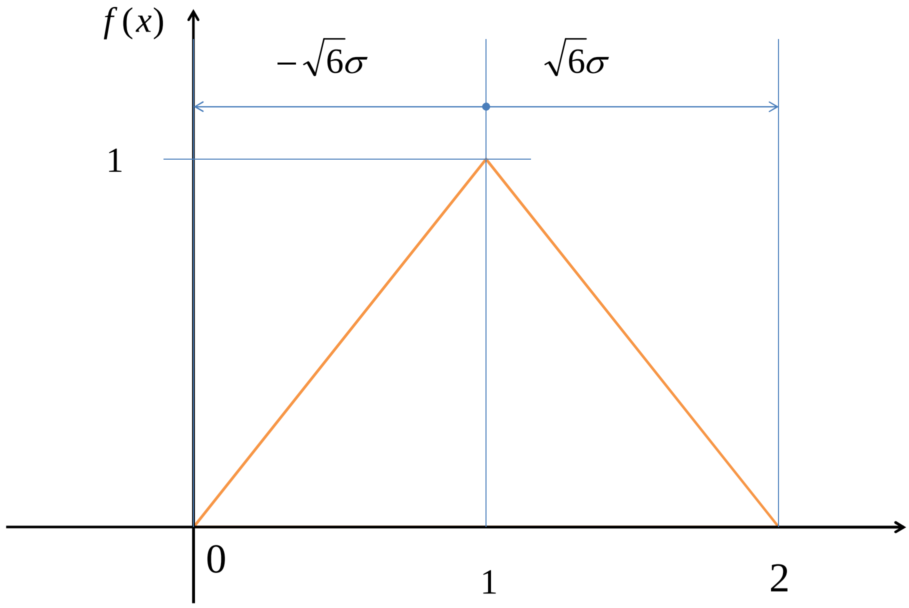
Teine ühtlase jaotuse näide on Brauni osakeste levimine. Vedeliku anumasse ühte punkti pandud Brauni osakesed hakkavad pidevalt ümber jaotuma ning on selles anumas pika aja pärast (aeg → ∞) ühtlaselt jaotunud. Sellel põhjusel on piimaga kohvi ühtlaselt pruun.

2.4.2. Kolmnurkjaotus

Vaatame ühte erijuhtu kolmnurkjaotusest, mis on sümmeetriline ning asub lõigul [*0*; *2*], seega on tema jaotustihedus on antud funktsiooniga

$$f(x)=\begin{cases} x;\ 0<x\le 1 \\ 2-x; 1<x\le 2, \\ 0;\ \ \text{mujal} \end{cases} \qquad (2.25)$$

ning mille jaotustihedus on toodud joonisel 2.10.



Joonis 2.10. Kolmnurkjaotuse jaotustihedus.

Et ülalkirjeldatud kolmnurkjaotus on sümmeetriline, siis ilmselt tema keskväärtus $m(x) = \dfrac{0+2}{2} = 1$ ja tema ruudu keskväärtus on:

$$m(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot x\,dx + \int_1^2 x^2 \cdot (2-x)\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + \frac{2x^3}{3}\Big|_1^2 - \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{16-2}{3} - \frac{16-1}{4} = \frac{3+56-45}{12} = \frac{14}{12}$$

ja dispersioon ning standardhälve on:

$$D = m(x^2) - m^2 = \frac{14}{12} - (1)^2 = \frac{2}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{2}{12}} \approx 0{,}41$$

Hiljem vaatame seda kolmnurkjaotust seoses keskse piirteoreemiga

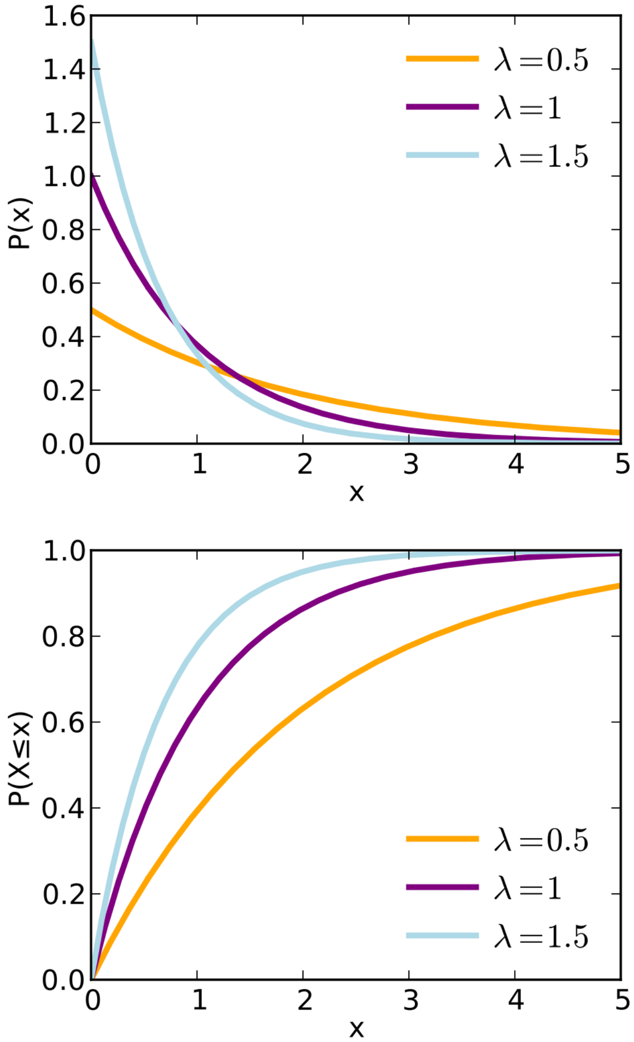
2.4.3. Eksponentjaotus

Eksponentjaotus sai läbi arvutatud radioaktiivse aine pooldumist kirjeldavas näites.

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$$

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t),$$

Siin $\lambda = 1 / t_0$, eksponentjaotuse keskväärtus ja standardhälve on mõlemad võrdsed parameetriga t_0.



Joonis 2.11. Eksponentjaotuse jaotustihedus ja jaotusfunktsioon.

Näide 2.9. Hõõglambi eluiga allub eksponentjaotusele. Tootja väidab, et hõõglambi keskmine eluiga on 1000 tundi. Kui pikk on keskmise lambi eluiga? Kui suur on tõenäosus, et ühe lambi eluiga on 5000 tundi? Teha näidisarvutus Mathcadis (lambi_eluiga.mcd).

2.4.4. Normaaljaotus

Normaaljaotus e. ***Gaussi jaotus*** on üks tähtsamaid jaotusseadusi juhuslikele suurustele, mis on jaotunud kogu reaalteljele ja võivad omandada väärtusi vahemikus $(-\infty, \infty)$.

Näide 2.10. Gaasi molekuli x-telje suunaline kiirus allub normaaljaotusele, kus keskväärtus on $a = 0$ (makroskoopiliselt püsib gaas paigal) ning standardhälve on proportsionaalne ruutjuurega temperatuurist.

Näide 2.11. Ühemõõtmelisse lõputu ulatusega vedeliku anumasse (lõpmatult pikk kapillaartoru) ühte punkti x_0 ajahetkel $t = 0$ pandud Brauni osakesed hakkavad pidevalt ümber jaotuma, nende jaotus ajahetkel t > 0 on kirjeldatav normaaljaotusega parameetritega $a = t_0$ ning $\sigma^2 \sim t$. Seega standardhälve ajas järjest suureneb võrdeliselt ruutjuurega ajast. Seega, kui valada lõpmatult suures tassis kohvile piima, ei saa mitte kunagi ühtlaselt pruuni segu vaid ainult piimatilk, tasapisi segunedes musta kohviga.

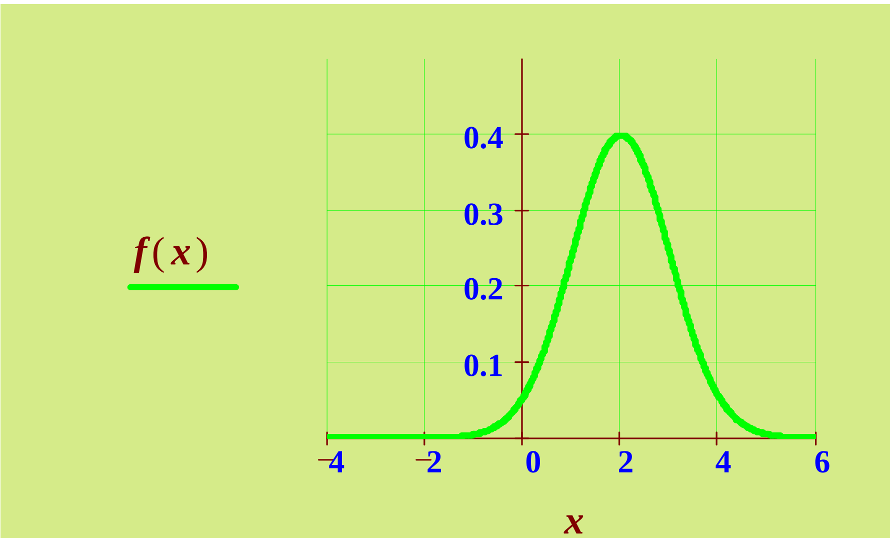
Juhusliku suuruse jaotust nimetatakse **normaaljaotuseks** ehk **Gaussi jaotuseks**, kui jaotustihedus on

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), \tag{2.26}$$

Kus a on fikseeritud reaalarv (võib olla nii negatiivne kui positiivne, aga võib olla ka null), ja $\sigma > 0$ on fikseeritud positiivne reaalarv. Antud loengukursuse raames me ei tõesta, vaid ainult konstateerime, et parameeter a on **normaaljaotuse keskväärtus** ja σ on **normaaljaotuse standardhälve**.

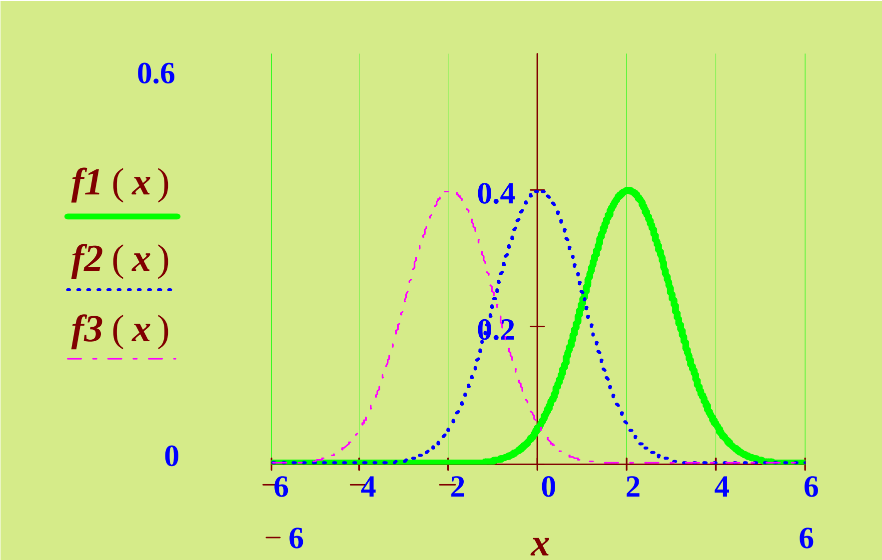
Jaotustiheduse määramispiirkond on kogu reaaltelg $\mathbf{R}$ (s.t argument x võib omandada väärtusi kogu reaalteljel).

Normaaljaotuse tiheduse graafik on parameetrite $a = 2$, $\sigma = 1$ korral toodud joonisel 2.12.



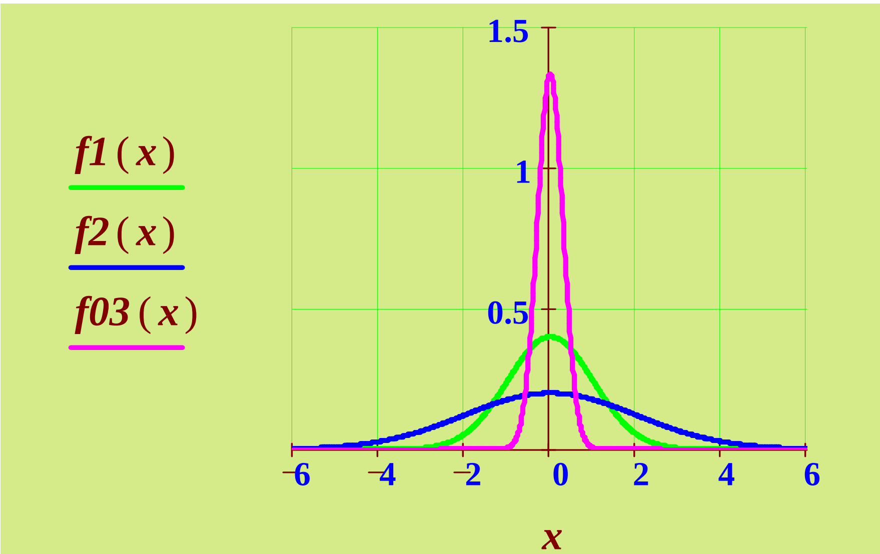
Joonis 2.12. Normaaljaotuse jaotustihedus.

Parameetri a muutumisel joone asend muutub x-telje suhtes: a kasvades jaotus nihkub paremale (toimub kujundi x-telje sihiline paralleellüke). Mida suurem on a, seda paremal paikneb kõver (joonis 2.13).



Joonis 2.13. Erinevad normaaljaotused σ = 1 korral: a = –2 (kõver *f3(x)*), a = 0 (kõver *f2(x)*) ja a = 2 (kõver *f1(x)*).

Kui parameeter σ kasvab, siis kahanevad funktsiooni väärtused ja joon muutub lamedamaks – kõver surutakse kokku y-telje suunas. Kui σ kahaneb, siis muutub joon teravatipulisemaks – kõver venitatakse välja y-telje suunas (joonis 2.14).



Joonis 2.14. Normaaljaotus (*a* = 0) erinevate σ-de korral: *f1(x)* – σ = 1, *f2(x)* – σ = 2 ja *f03(x)* – σ = 0,3.

Paljud looduses toimuvad protsessid on kirjeldatavad normaaljaotuse abil: loomulik müra, transpordivoo kiirus, teatud vanuserühma meeste, naiste ja laste pikkus, vererõhk jne.

Nagu teistegi jaotusseaduste puhul, on ka normaaljaotuse puhul mingisse intervalli sattumise tõenäosuse leidmiseks vaja teada tema jaotusfunktsiooni. Praktikas ei ole normaaljaotuse (2.26) integreerimine just lihtne ülesanne. Selles loengukursuses me ei tõesta, et normaaljaotuse jaotusfunktsioon on:

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-t^2)\,dt, \qquad (2.27)$$

Siin erf(x) tähistab veafunktsiooni. Praktiliste ülesannete lahendamisel kasutatakse valmisprogrammide abi. Mathcad'is on normaaljaotuse parameetritega a ja σ jaotustihedus kohal x arvutatav funktsiooniga dnorm(x, a, σ) ning jaotusfunktsioon kohal x funktsiooniga pnorm(x, a, σ).

Excel'is on jaotustihedus arvutatav käsuga normdist(x, a, σ, 0) ning jaotusfunktsioon käsuga normdist(x, a, σ, 1).

Näide 2.12. Arvutame välja tõenäosuse et normaaljaotuse puhul satuks sündmus intervalli (a ± σ), (a ± 2σ), (a ± 3σ). Kuna need tõenäosused ei sõltu jaotuse parameetritest, siis valime võimalikult lihtsad parameetrid, näiteks a = 0 ja σ = 1. Leiame Excel'i abil meid huvitavad jaotusfunktsiooni väärtused:

Normdist(–3, 0, 1, 1) = 0,00135
Normdist(–2, 0, 1, 1) = 0,0228
Normdist(–1, 0, 1, 1) = 0,159
Normdist(1, 0, 1, 1) = 0,841
Normdist(2, 0, 1, 1) = 0,9772
Normdist(3, 0, 1, 1) = 0,99865

Tegelikult piisaks ka neist ainult esimese kolme arvutamisest, sest normaaljaotus on sümmeetriline, ning seega on tõenäosus, et toimub sündmus $x < a - z$ võrdne tõenäosusega, et toimub sündmus $x > a + z$.

$P(a$ ± 3σ) = 0,99865 – 0,00135 = 0,9973 = 99,73 %

***P*(*a* ± 3σ)** = 1 – 2(0,00135) = 0,9973 = **99,73 %**
***P*(*a* ± 2σ)** = 1 – 2(0,0228) = 0,9545 = **95,45 %**
***P*(*a* ± 1σ)** = 1 – 2(0,159) = 0,6827 = **68,27 %**

Seega satub vahemikku ± 1σ ligikaudu 68 %, vahemikku ± 2σ ligikaudu 95 % ja vahemikku ± 3σ ligikaudu 99,7 % sündmustest.

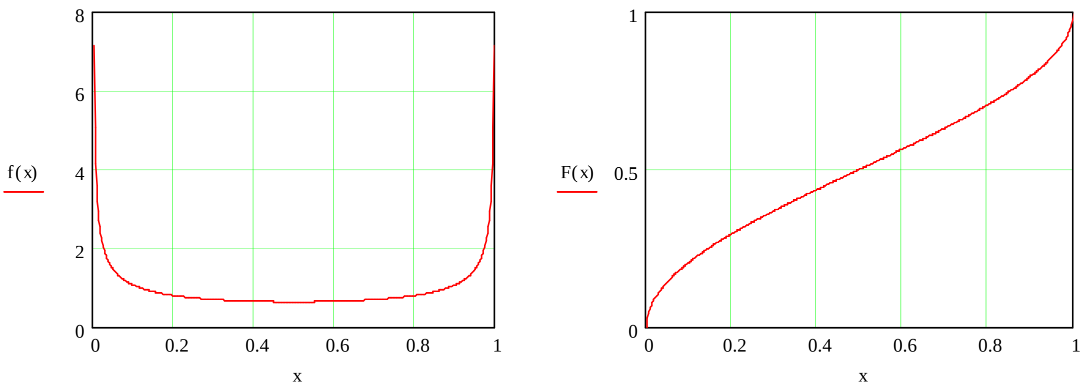
2.4.5. Arkussiinusjaotus

Arkussiinusjaotuseks nimetatakse juhusliku suuruse X niisugust jaotust, mille jaotustihedus ning jaotusfunktsioon on:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, \quad 0 < x < 1$$
$$F(x) = \frac{2 \cdot \arcsin(\sqrt{x})}{\pi}, \quad 0 < x < 1 \qquad (2.28)$$

Arkussiinusjaotuse jaotusfunktsiooni arvutuskäik sai toodud varasemalt ruumi temperatuurikontrolli süsteemi näites.

Arkussiinusjaotuse keskväärtus on m = 0,5 ning dispersioon on $\sigma = \frac{1}{\sqrt{8}}$



Joonis 2.15. Arkussiinusjaotuse jaotustihedus ning jaotusfunktsioon.

Näide 2.13. Kolmnurkjaotust võib defineerida ka järgnevalt: piirkondades $x < 0$ ning $x > b$ on tema väärtus 0; vahemikus [0; b] on tema väärtus ühtlaselt kasvav ($f(x) = cx$). Arvuta koefitsient c, jaotusfunktsioon, keskväärtus ja mediaan ning standardhälve. Leia tõenäosus, et sündmus satuks piirkonda ($m \pm \sigma$); ($m \pm 2\sigma$). Joonista graafik ning kanna sellele keskväärtus ja mediaan ning viiruta piirkond ($m \pm 2\sigma$).

Kuna peab kehtima normeerimistingimus, siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} cx \cdot dx = \int_{0}^{b} cx \cdot dx = c \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^b = c \cdot \frac{(b^2)}{2} \equiv 1 \;\Rightarrow\; c = \frac{2}{b^2}$$

Seega on selle kolmnurkjaotuse jaotustihedus:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{b^2}, & 0 \le x \le b \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

Leiame nüüd jaotusfunktsiooni:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{2x}{b^2} dx = \int_{0}^{x} \frac{2x}{b^2} dx = \frac{x^2}{b^2}\Big|_0^x = \frac{x^2}{b^2}$$

Arvutame nüüd keskväärtuse kasutades valemit (2.13):

$$m = \int_0^b x \frac{2x}{b^2} dx = \frac{2}{b^2} \int_0^b x^2\, dx = \frac{2}{b^2} \left(\frac{x^3}{3} \right)_0^b = \frac{2b^3}{3b^2} = \frac{2}{3} b \approx 0{,}67b$$

Dispersiooni arvutamisel kasutame Steineri valemit (2.21). Leiame esmalt teist järku algmomendi

$$m\left[X^2\right] = \int_0^b x^2 \frac{2x}{b^2} dx = \frac{2}{b^2} \int_0^b x^3\, dx = \frac{2}{b^2} \left(\frac{x^4}{4} \right)_0^b = \frac{b^2}{2}.$$

Nüüd saame

$$D = m\left[X^2\right] - m^2 = \frac{b^2}{2} - \left(\frac{2b}{3} \right)^2 = \frac{9b^2 - 8b^2}{18} = \frac{b^2}{18}.$$

Standardhälve tuleb siis

$$\sigma = \sqrt{D} = \frac{b}{\sqrt{18}} \quad \approx \quad 0.24\, b\,.$$

Arvutame mediaani kasutades jaotusfunktsiooni:

$$F(x) = \frac{x^2}{b^2} = 0{,}5 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{0{,}5} \cdot b \approx 0{,}71b$$

Leiame jaotusfunktsiooni väärtused meid huvitavates punktides:

$$m - 2\sigma = \frac{2}{3}b - \frac{2b}{\sqrt{18}} \approx b(0{,}67 - 0{,}48) = 0{,}19b$$

$$m - \sigma = \frac{2}{3}b - \frac{b}{\sqrt{18}} \approx b(0{,}67 - 0{,}24) = 0{,}43b$$

$$m + \sigma = \frac{2}{3}b + \frac{b}{\sqrt{18}} \approx b(0{,}67 + 0{,}24) = 0{,}91b$$

$$m + 2\sigma = \frac{2}{3}b + \frac{2b}{\sqrt{18}} \approx b(0{,}67 + 0{,}48) = 1{,}15b$$

$$F(m - 2\sigma) \approx F(0{,}19b) = 0{,}19^2 = 0{,}036$$

$$F(m - \sigma) \approx F(0{,}43b) = 0{,}43^2 = 0{,}185$$

$$F(m + \sigma) \approx F(0{,}91b) = 0{,}91^2 = 0{,}828$$

$$F(m + 2\sigma) = F(1{,}15b) = 1$$

$P(m \pm \sigma) = 0{,}828 - 0{,}185 = 0{,}643 = 64{,}3\%$

$P(m \pm 2\sigma) = 1 - 0{,}036 = 0{,}964 = 96{,}4\%$

2.5. Juhuslike jaotuste summa

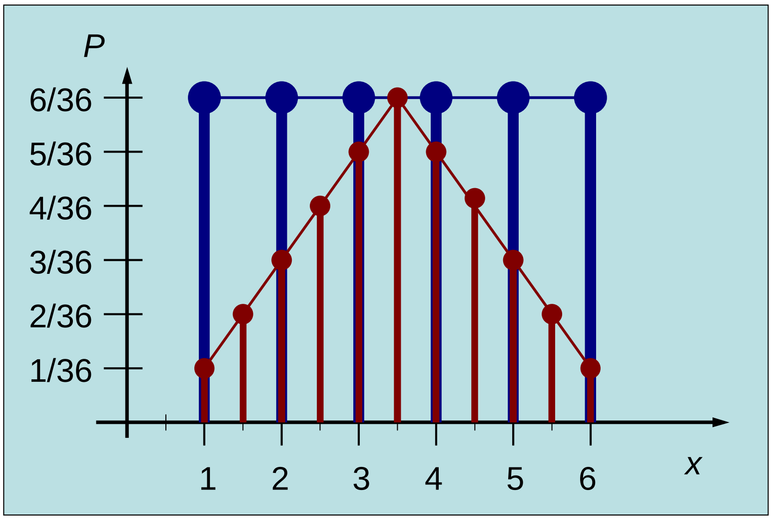
2.5.1. Kahe jaotuse summa jaotus

Senini oleme tegelenud ainult üksikväärtustega mingist jaotusest. Sageli aga sooritatakse korduvmõõtmisi ning kasutatakse hoopis keskväärtuseid. Tekib õigustatud küsimus, et milline on keskväärtuse jaotus? Alustuseks meenutame, et n-kordse korduvmõõtmise keskväärtus on võrdne n-kordse korduvmõõtmise summaga jagatud mõõtmiste arvu n-ga. Kuna n on konstant, siis on selge, et nii keskväärtus kui ka summa peavad olema samast jaotusest. Arvutuslikult on lihtsam analüüsida summat ning alles jaotuse leidmisel see läbi jagada n-ga.

Vaatame uuesti näidet, kus me vaatasime kahe täringuviske summat (2. loeng). Saime järgmise jaotustabeli:

Tabel 2.2. Kahe täringuviske summa jaotustabel.

summa	**kombinatsioonid**	**esinemiste arv**	**esinemise tõenäosus**	**Jaotus-funktsioon**
2	1,1	1	1/36	1/36
3	1,2 2,1	2	2/36	3/36
4	1,3 2,2 3,1	3	3/36	6/36
5	1,4 2,3 3,2 4,1	4	4/36	10/36
6	1,5 2,4 3,3 4,2 5,1	5	5/36	15/36
7	1,6 2,5 3,4 4,3 5,2 6,1	6	6/36	21/36
8	2,6 3,5 4,4 5,3 6,2	5	5/36	26/36
9	3,6 4,5 5,4 6,3	4	4/36	30/36
10	4,6 5,5 6,4	3	3/36	33/36
11	5,6 6,5	2	2/36	35/36
12	6,6	1	1/36	1



Joonis 2.16. Kahe täringuviske keskväärtuse jaotustihedus (punane), taustaks ühe täringuviske jaotustihedus (sinine).

Nii tabelist kui ka jooniselt näeme, et kuigi mõlemad täringuvisked olid diskreetsest ühtlasest jaotusest, on nende summa ja keskväärtuse jaotus kolmnurga kujuline, seega erinev summeeritavate jaotusest.

Üldiselt kasutatakse kahe jaotuse summa jaotustiheduse leidmiseks konvolutsiooni integraali:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau \qquad (2.29)$$

Tutvume selle integraali arvutamisega näidete varal, liites kokku kaks ühesugust jaotust.

Näide 2.14. Leiame konvolutsiooni integraali kahest ühtlasest jaotusest:

$$x(t) = h(t) = \begin{cases} 1; & 0 < t < 1 \\ 0; & \text{mujal} \end{cases}$$

Selleks, et see integraal oleks nullist erinev, peavad tema mõlemad komponendid olema nullist erinevad. Esimene integraal on nullist erinev ainult piirkonnas $\tau = [0;1]$. Teine integraal on nullist erinev ainult piirkonnas

$$t - \tau = [0;1] \Rightarrow -t + \tau = [-1;0] \Rightarrow \tau = [t-1;t],$$

seega on meil integreerimisradade valikuks kaks tingimust, mis peavad mõlemad samaaegselt kehtima:

$$\tau = \begin{cases} [0;1] \\ [t-1;t] \end{cases}.$$

Kuna τ sõltub t väärtusest, siis integreerime tükkide kaupa:

1. $t < 0 \quad \Rightarrow y(t) = 0$

2. $0 < t < 1 \quad \Rightarrow \tau = (0;t) \Rightarrow \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_0^t 1 \cdot 1 \cdot d\tau = t$

3. $1 < t < 2$. Selles piirkonnas on radasid kõige raskem ette kujutada. Integreerimise alumise raja määrab teine tingimus, ehk $\tau = t - 1$; ülemise aga esimene tingimus, ehk $\tau = 1$:

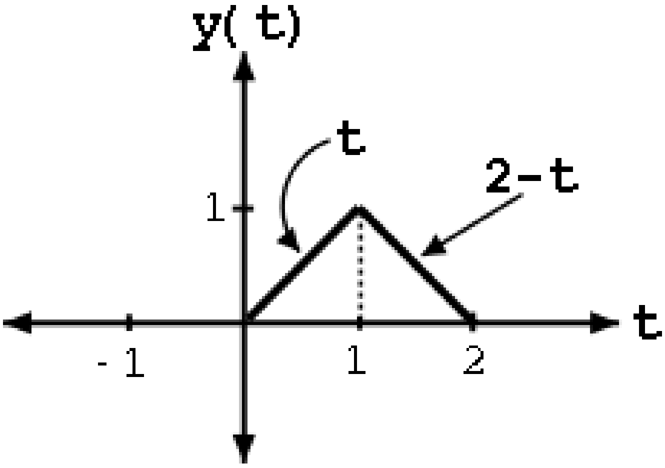
$$1 < t < 2 \quad \Rightarrow \tau = (t-1;1) \Rightarrow \quad y(t) = \int_{t-1}^{1} 1 \cdot d\tau = \tau \Big|_{t-1}^{1} = 1 - (t-1) = 2 - t$$

4. $t > 2 \quad \Rightarrow y(t) = 0$

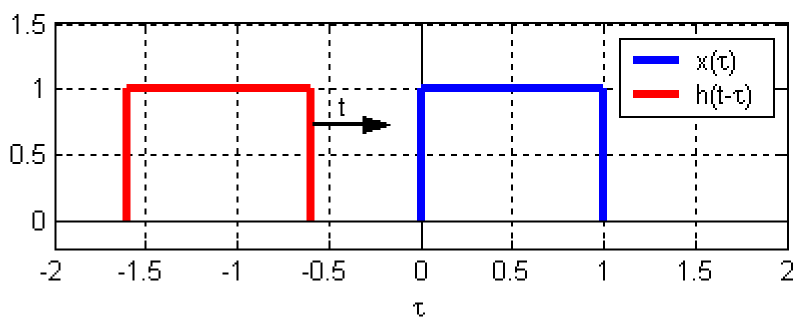
Seega saime, et kahe ühtlase jaotuse summa jaotus on määratud järgmiste tingimustega:

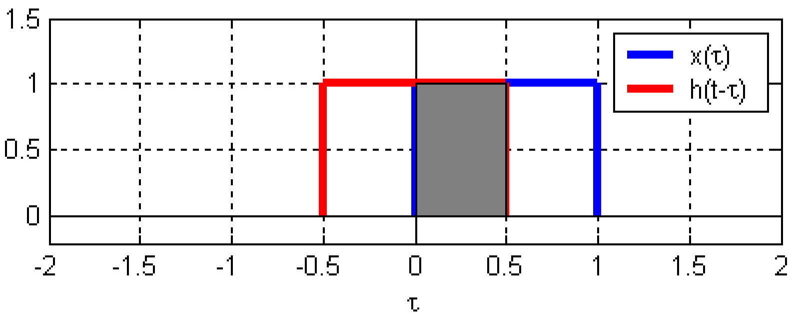
$$y(t) = \begin{cases} t; & 0 < t < 1 \\ 2 - t; & 1 < t < 2 \\ 0; & \text{mujal} \end{cases}$$

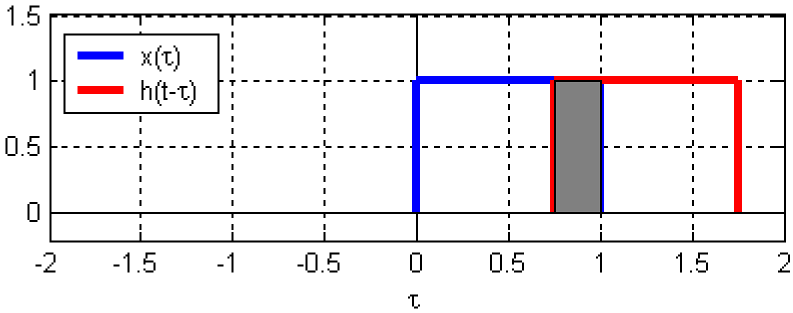
Antud funktsioon on toodud järgneval graafikul ning on identne eelmises loengus toodud kolmnurkjaotusega.

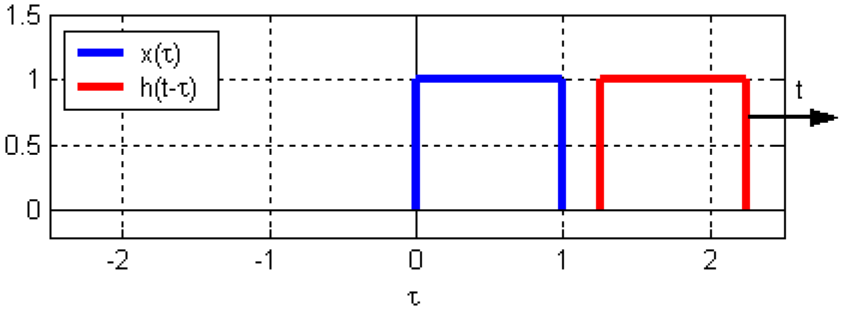


Kahe jaotuse konvolutsiooni saab leida ka graafiliselt. Järgnevatel joonistel on toodud konvolutsiooni graafilise arvutamise näide juba arvutatud ühtlaste jaotuste liitmisest. Osutub, et konvolutsiooni integraal kohal t on võrdne funktsioonide $x(\tau)$ ja $h(t - \tau)$ kattuvuspiirkonna pindalaga.









Näide 2.15. Leiame konvolutsiooni integraali kahest eksponentjaotusest:

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} e^{-x}; & x > 0 \\ 0; & \text{mujal} \end{cases}$$

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y} \cdot e^{-(x-y)}dy$$

Leiame jälle tingimused, kus konvolutsiooni integraali mõlemad komponendid oleksid nullist erinevad. Esimene tingimus on, et $y = [0;\infty)$. Teine tingimus on, et

$$x - y = [0;\infty) \;\Rightarrow\; -x + y = [-\infty;0) \;\Rightarrow\; y = [-\infty; x)$$

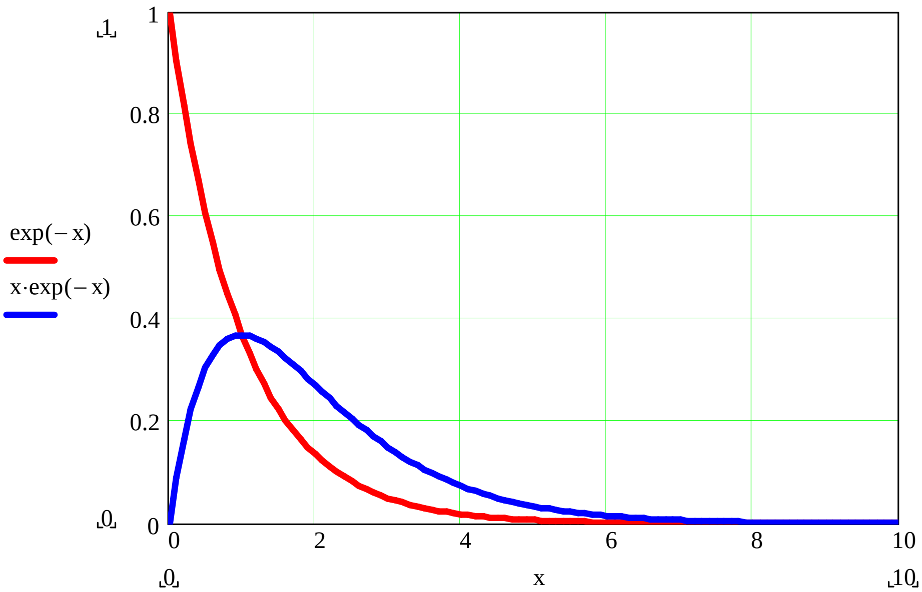
Vaadates neid mõlemaid tingimusi, on selge, et alumiseks piiriks on 0 ja ülemiseks on x: $y = [0; x]$.

Hakkame nüüd konvolutsiooni integraali arvutama:

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cdot g(x-y)dy=\int_0^x e^{-y}\cdot e^{-(x-y)}dy=$$

$$=\int_0^x e^{-y}\cdot\frac{e^{-x}}{e^{-y}}dy=e^{-x}\cdot\int_0^x 1\cdot dy=x\cdot e^{-x}$$

Alloleval joonisel on toodud nii eksponentjaotuse graafik kui ka kahe eksponentjaotuse konvolutsiooni graafik.



2.5.2. Keskne piirteoreem

On tõestatud, et paljude sõltumatute (või nõrgalt sõltuvate) juhuslike suuruste (mõõtesuuruste) summa $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ jaotus erineb vähe normaaljaotusest. Mida suurem on liidetavate arv *n*, seda väiksem on erinevus. Teisisõnu, normaaljaotust võib eeldada paljudes ülesannetes, kus juhuslikke sõltumatuid suuruseid on palju ja ükski neist ei ole ülekaalus. Keskse piirteoreemi põhjal kehtib see olenematult jaotusseadusest (peab eksisteerima lõplik dispersioon).

Matemaatiline keskse piirteoreemi definitsioon:

Olgu $X_1, X_2, \ldots$ juhuslikud suurused, $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$. Kui $\sigma=\sqrt{D(X_n)}<\infty$, siis

$$Z_n = \frac{S_n - n \cdot \mu}{\sigma\sqrt{n}} \Rightarrow N(0;1), \qquad (2.30)$$

kus $\mu = m(X_n)$.

Selle teoreemi kehtides on selge, et ka S_n on ise normaaljaotusega, sest konstandi lahutamine ning jagamine konstandiga ei muuda jaotuse kuju vaid ainult parameetreid.

Teeme Mathcadis demo, kus me analüüsime keskset piirteoreemi. Selleks tuleb aga eelnevalt mõningaid vajalikke üleminekuvalemeid tuletada.

Kasutame Mathcadi sisseehitatud juhuslike arvude generaatorit, mis annab juhusliku arvu ühtlasest jaotusest vahemikus (0; 1), tähistame seda $U(0;1)$. Kui me tahame testida mõnda teist jaotust, siis tuleb leida vastav üleminekuvalem. Selleks kasutame tingimust, et mõlema jaotuse jaotusfunktsioonid peavad olema võrdsed: $F(y) = F(x)$. Leiame üleminekuvalemid eelmises loengus lahendatud kolmnurkjaotusele, eksponentjaotusele ning parabooljaotusele.

1. Vaatame kolmnurkjaotust, mis on defineeritud kujul $f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$. Eelmises loengus saime, et sellise jaotuse keskväärtus on $m(y) = 2/3$ ning standardhälve on $\sigma = 1/\sqrt{18}$.

Ühtlase jaotuse jaotusfunktsioon on $F(x) = \int_0^x 1 \cdot dx = x\Big|_0^x = x$;

Kolmnurkjaotuse jaotusfunktsioon on $F(y) = \int_0^y 2y \cdot dy = y^2\Big|_0^y = y^2$.

Kuna $F(y) = F(x)$, siis $y^2 = x$, järelikult annab sedasi defineeritud kolmnurkjaotuse ruutjuur ühtlasest jaotusest:

$$y = \sqrt{x} = \sqrt{U(0;1)}$$

2. Vaatame eksponentjaotust, mis on defineeritud kujul $f(y) = \begin{cases} \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot y, & y > 0 \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$.

Eksponentjaotuse keskväärtus on $m(y) = 1/\lambda$ ning standardhälve on $\sigma = 1/\lambda$.

Eksponentjaotuse jaotusfunktsioon on $F(y) = 1 - \exp(-\lambda \cdot y)$.

Kuna $F(y) = F(x)$, siis:

$$F(y) = 1 - \exp(-\lambda \cdot y) = x$$
$$\lambda \cdot y = -\ln(1 - x)$$
$$y = \frac{-\ln(1-x)}{\lambda} = \frac{-\ln(1-U(0;1))}{\lambda}$$

3. Vaatame parabooljaotust, mis on defineeritud kujul $f(y) = \begin{cases} \frac{3}{2} \cdot y^2 & |y| < 1 \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$.

Parabooljaotuse keskväärtus on sümmeetria kaalutlustel $m(y) = 0$, arvutame y^2 keskväärtuse ning siis standardhälbe:

$$m(y^2) = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2} y^4 dy = \frac{3}{2} \cdot \frac{y^5}{5} \Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$$

$$D(y) = \frac{3}{5} - 0^2 = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Parabooljaotuse jaotusfunktsioon on:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{3}{2} y^2 dy = \frac{y^3}{2} \Big|_{-1}^{y} = \frac{y^3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 + y^3}{2}.$$

Kuna $F(y) = F(x)$, siis:

$$F(y) = \frac{1 + y^3}{2} = x$$
$$y = \sqrt[3]{2x - 1} = \sqrt[3]{2 \cdot U(0;1) - 1}$$

Nüüd mõtleme teoreetiliselt läbi, kuidas piirteoreemi (2.30) uurida. Tähistame summeeritavate väärtuste arvu n-ga. Genereerime n numbrit ning arvutame nende summa ning teoreemis antud suuruse Z_n. Saadud üksikut numbrit vaadates ei saa me aga teha mingisugust järeldust selle kohta, millisest jaotusest ta pärineb. Jaotuse mõistmiseks tuleb suurust Z_n arvutada palju kordi, alles seejärel saame leida Z_n histogrammi ning võrrelda seda normaaljaotusega parameetritega $N(0;1)$.

Demo keskne_piirteoreem_v2.mcd.

Demoga „mängides“ veendusime, et tõesti, summeeritavate väärtuste arvu n suurenedes lähenes jaotus normaaljaotusele. See lähenemise kiirus sõltus aga oluliselt jaotuse kujust: ühtlase jaotuse puhul piisas tingimusest, et $n \geq 3$, samas kui eksponentjaotuse puhul jäi väike erinevus sisse ka veel $n = 20$ juures. Me ei proovinud, kuid selline lähenemine normaaljaotusele kehtib ka erinevatest jaotustest pärit arvude liitmisel. See ongi keskse piirteoreemi üks kõige olulisem omadus. Lähenemine normaaljaotusele võib siiski olla väga aeglane, kui leiduvad mõned mittenormaaljaotusega komponendid, millel on teistega võrreldes palju suuremad standardhälbed. Sellest hoolimata võib enamasti mõõtetulemust, mis on sisendsuuruste summat $y = x_1 + x_2 + ... + x_n$ (või ka aritmeetilist keskmist) käsitleda kui normaaljaotusega suurust. See tulemus kehtib ka väga komplitseeritud jaotustega mõõtetulemustele, mis kinnitab veelgi selle teoreemi suurt metroloogilist väärtust.

Näide 2.16. Genereeri arkussiinusjaotus $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, \quad 0 < x < 1$,

$F(x) = \dfrac{2 \cdot \arcsin(\sqrt{x})}{\pi}, \quad 0 < x < 1$, võttes aluseks ühtlase jaotuse $U(0;1)$?

Lahendus:

$$F(y) = \frac{2 \cdot \arcsin(\sqrt{y})}{\pi} = U(0;1)$$

$$\arcsin(\sqrt{y}) = \frac{\pi \cdot U(0;1)}{2}$$

$$y = \left[\sin\left(\frac{\pi \cdot U(0;1)}{2}\right)\right]^2$$

3. Mõõtevead ja mõõtemääramatus

Oletame, et meil on teada mõõdetava suuruse tõeline väärtus x_t (tegelikult muidugi ei ole teada, aga mõttelise eksperimendi korras võib nii oletada). Mõõtmistulemuse x ja mõõdetava suuruse tõelise väärtuse vahe $\Delta x = x - x_t$ on **mõõtmistulemuse viga (**kasutatakse ka pikemat terminit *ühekordse mõõtmise konkreetne mõõteviga*). Viga sisaldab ***süstemaatilist*** ja ***juhuslikku*** komponenti. Võib ka öelda, et **viga liitub süstemaatilisest komponendist ja juhuslikust komponendist.**

3.1. Süstemaatilised vead

Süstemaatilised vead liigitatakse:

1. Vead, mille põhjused on teada ja millede suurusi on võimalik piisavalt täpselt määrata.

   Näiteks

   - testri 0 võib olla paigast ära
   - keha massi määramisel üleslükkejõu arvestamata jätmine
   - termomeetri skaala võib olla nihkes.

   Võimaluse korral tuleb seda liiki vead kindlasti kõrvaldada või äärmisel juhul arvesse võtta parandite abil. Teadaoleva (aditiivse) süstemaatilise vea arvestamisel saame mõõtmistulemuse parandatud väärtuseks $\tilde{x} = \bar{x} + q$, kus q on aditiivsest süstemaatilisest veast tingitud parand. Aditiivne viga ei sõltu mõõtmistulemuse väärtusest.

   Mõnikord võib meil tegemist olla ka multiplikatiivse veaga, s.t veaga, mis kasvab võrdeliselt mõõtmistulemuse kasvuga. Sellisel juhul tuleb parandatud mõõtmistulemuse saamiseks mõõtmistulemus parandusteguriga läbi korrutada $\tilde{x} = Q \cdot \bar{x}$, kus Q on multiplikatiivset süstemaatilist hälvet arvestav parandustegur.

   Nihkes skaalaga seadmete kasutamiseks lisatakse kalibreerimisel seadme dokumentatsioonile parandite tabel, kust saab leida vajaliku väärtuse parandi (või parandusteguri) jaoks.

2. Vead, millede põhjused on teada, kuid suurused mitte.

   Siia alla käivad kõik riistavead. Need on põhjustatud ebatäpsest gradueerimisest. *Nagu edaspidi näeme on siin sisuliselt tegu B-tüüpi (mõiste täpsustame edaspidi) mõõtemääramatusega ja seda viga saab iseloomustada mõõtemääramatuse abil.* Põhimõtteliselt aga saab sellisest süstemaatilisest veast ka vabaneda, kui kontrollida mõõteriista mõne teise tunduvalt täpsema mõõteriistaga ja koostada vastava parandite tabeli.

3. Vead, millede olemasolu on meile teadmata.

   Sellised vead võivad esineda juhtudel, kui kasutatakse uut mõõtmismeetodit või kui on tegemist äärmiselt keeruliste mõõtmistega. Kui vea olemaolu on mõõtjale teadmata, siis selline viga jääb mõõdetud suuruse väärtusesse paratamatult sisse.

   Teadmata süstemaatiline viga võib esineda ka küllalt lihtsatel juhtudel. Olgu näiteks vaja määrata mingi materjali elektrijuhtivust. Selleks mõõdetagu sellest materjalist tehtud traadi takistust. Kui traadis on mingi varjatud materjalidefekt (pragu, ebahomogeenne koht), siis takistuse väärtus tuleb süstemaatiliselt vale.

   Teadmata süstemaatilisest veast saab vabaneda randomiseerimise teel, milleks püütakse süstemaatiline hälve muuta osaliselt või täielikult juhuslikuks. Traadi näite puhul tuleks mõõta paljude traaditükkide takistus ja leida nende keskväärtus. Kui aga viga on väga suur, siis ei ole randomiseerimist vajagi, piisab kui fikseerime vigase traadi (mille takistus osutus näiteks ülejäänutest erinevaks 10 korda) ja jätame selle edasisest mõõtmisest kõrvale.

3.2. Juhuslikud vead. Mõõdetava suuruse statistiline hinnang

Lisaks süstemaatilisele veale on mõõtmistulemusel alati ka juhuslik komponent. Tingituna suurest hulgast mitmesugustest, üldjuhul välistest, s.o mõõtja kontrollile mitte alluvatest teguritest on üksikmõõtmise tulemus juhuslik suurus.

Ükskõik kui hoolikalt me ka ei mõõdaks üht ja sama detaili, me saame erinevatel sõltumatutel mõõtmistel erineva tulemuse. See erinevus võib olla väga väike, kuid ta on põhimõtteliselt alati olemas. **Peamised juhuslikkuse allikad on välised tegurid, mõõdetava objekti enda muutlikkus ja mõõtmisi teostava isiku oskused ja kogemustepagas.** Seetõttu on mõõdetav suurus juhuslik suurus X ja iga mõõtmistulemus (iga üksikmõõtmine) on selle juhusliku suuruse realisatsioon x.

3.2.1. Keskväärtuse hindamine mõõtmistulemustest

Vaatame alustuseks taas hüpoteetilist situatsiooni, kus meil on aprioorselt teada mõõdetava suuruse tõeline väärtus x_t. X juhuslikkuse tõttu mõõtmistulemuse x ja mõõdetava suuruse tõelise väärtuse vahe $\Delta x = x - x_t$, s.o mõõtmistulemuse viga, erineb nullist. Tehes nüüd palju kordi mõõtmisi, kokku N sõltumatut mõõtmist, saame juhusliku suuruse X valimi $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_{N-1}, x_N\}$. Selle valimi aritmeetiline keskväärtus

$$\overline{x}_N = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}, \qquad (3.1)$$

on parim lähend tõelisele väärtusele piirväärtuse mõttes (NB! *idealiseeritud eeldusel, et muid veaallikaid – süstemaatilist viga, teadmata viga vms – ei esine*!)

$$\lim_{N\to\infty} \overline{x}_N = x_t. \qquad (3.2)$$

Et mõõtmisi on alati lõplik hulk (N alati lõplik) ning reaalsetel mõõtmistel idealiseeritud eeldused (ei esine süstemaatilist viga, teadmata viga jne) ei kehti, siis tegelikult me ei saa kunagi teada tõelist mõõdetava suuruse väärtust ja me peame alati piirduma ligikaudse statistilise hinnanguga $\overline{x}_N$. See statistiline hinnang võetakse mõõdetava suuruse parimaks hinnanguks.

3.2.2. Dispersiooni hindamine mõõtmistulemustest

Dispersiooni katselisel määramisel on olukord analoogiline keskväärtuse hindamisega. Meenutame siin dispersiooni definitsiooni (2.19):

$$D[X] \;=\; \sum_{i=1}^{N} (x_i - m)^2 \cdot p_i$$

Kuna summa üle p_i-de peab olema võrdne ühega ning pole põhjust oletada, et näiteks esimesed mõõtmised olid täpsemad kui viimased, siis $p_i = 1/N$, seega

$$D[X] \;\approx\; \sigma_N{}^2 \;=\; \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - m)^2 . \qquad (3.3)$$

Alternatiivset valemit dispersiooni arvutamiseks nimetatakse **empiiriliseks dispersiooniks**:

$$D[X] \;\approx\; s_N{}^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - m)^2 . \qquad (3.4)$$

Osutub, et nende suuruste keskväärtused rahuldavad seoseid

$$m[\sigma_N^2] = \frac{N-1}{N} d, \qquad\qquad m[s_N^2] = d,$$

kus d on juba eespool selles punktis defineeritud üksiksuuruse X_k dispersioon. Nagu näeme, lähendab suurus s_N^2 vähemalt matemaatilise ootuse (keskmise) mõttes tõelist dispersiooni õigesti, kuna (esmavaatlusel võib-olla mõnevõrra ootamatult) suurus σ_N^2 alahindab dispersiooni. Suurte N-de korral ei ole suurt erinevust, millist dispersioonihinnangut kasutada, väikeste puhul ($N < 10$) aga küll. Seepärast kasutame edaspidi juhuslikus suuruse dispersiooni hindamisel valemit (3.4), mida nimetame suuruse X **empiiriliseks dispersiooniks.** Kehtib

$$s_N^2 \approx d . \qquad (3.5)$$

(Tegemist on muidugi d hinnanguga, mis on seda parem, mida suurem on N!)

Juhusliku suuruse X **empiiriline standardhälve** on vastavalt

$$s_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x}_N)^2}{N-1}} \approx \sqrt{d} . \qquad (3.6)$$

3.2.3. Ühetaoliselt jaotunud suuruste aritmeetilise keskmise keskväärtus ja dispersioon

Vaatleme n sõltumatut juhuslikku suurust X_k (k = 1, 2, ..., N), mis on ühesuguse jaotusega ja järelikult ka ühesuguste arvkarakteristikutega, s.t

$$m[X_k] = a, \qquad D[X_k] = d.$$

Leiame juhuslike suuruste aritmeetilise keskmise $\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k$ **arvkarakteristikud.**

Keskväärtuseks saame

$$m[\overline{X}_N] = m\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} m[X_k] = \frac{Na}{N} = a\,. \qquad (3.7)$$

Seega: **Ühesuguselt jaotunud *N* sõltumatu suuruse aritmeetilise keskmise keskväärtus langeb kokku üksiksuuruse keskväärtusega.**

Dispersioon on aga (ilma tõestuseta):

$$D[\overline{X}_N] = \frac{d}{N},$$

ning järeldusena

$$\sigma(\overline{X}_N) = \sqrt{\frac{d}{N}} \approx \frac{s_N}{\sqrt{N}}\,. \qquad (3.8)$$

Seega:

Ühesuguselt jaotunud *N* sõltumatu suuruse aritmeetilise keskmise dispersioon on *N* korda väiksem kui üksiksuuruse dispersioon ja standardhälve on $\sqrt{N}$ korda väiksem kui üksiksuuruse standardhälve.

See on väga tähtis ja fundamentaalne tulemus, mida kasutatakse laialdaselt füüsikalistel mõõtmistel. Nimelt – kõigepealt tehakse *N* mõõtmist. Seejärel leitakse mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine

$$\overline{x}_N \;=\; \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \;\approx\; m \quad , \qquad (3.9)$$

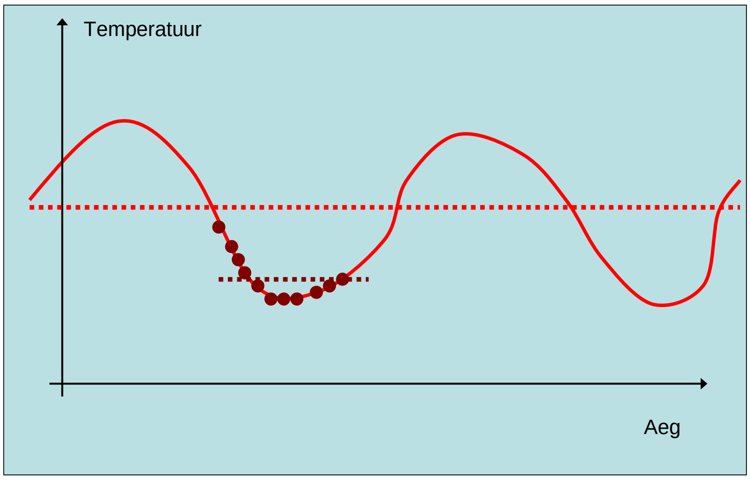
mis vastavalt valemi (3.7) tulemustele võetaksegi mõõdetava suuruse m hinnanguks. Eelneva põhjal on see usaldusväärsem kui üksikmõõtmised ja mõõtmiste arvu suurenemisel aritmeetiline keskmine erineb üha vähem mõõdetava suuruse tegelikust keskmisest väärtusest, kusjuures see erinevuse suurus on hinnatav valemiga aritmeetilise keskmise standardhälbele (3.8).

Oluline on tähele panna, et mõõtmistulemused oleksid omavahel sõltumatud. Kui on oht, et mõõtmistulemused ei ole sõltumatud, siis ei kasutata mõõteseeria aritmeetilise keskmise standardhälbe arvutamiseks mitte valemit (3.8) vaid hoopis valemit (3.6), s.t. ka mõõteseeria aritmeetilise keskmise standardhälbena kasutatakse empiirilist standardhälvet.

Näide 3.1. Täppiskaalude kasutamisel annab iga mõõtmine veidi erineva tulemuse, seoses erinevate vibratsioonidega. Nende vibratsioonide vähendamiseks on mõned laborid ehitatud eriprojekti järgi, võttes kasutusele mitmeid lahendusi. Näiteks Füüsika Instituudis on keldris labor, mille töölaud on massiivsest mitmetonnisest raudplaadist, see asetseb vedrudel, mis toetuvad muust majast eraldatud vundamendile.

Kuna vibratsioonide sagedus on suur, võrreldes mõõtmiste sagedusega, siis ei mõõtmised omavahel sõltuvad ning aritmeetilise keskmise standardhälbe leidmiseks võib kasutada valemit (3.8).

Näide 3.2. Kontrollitud temperatuuriga ruumi temperatuuri ajaline käik on toodud joonisel (3.1). On selgesti näha, et keskmise temperatuuri leidmiseks tehtud mõõteseeria aritmeetiline keskmine ei lange kokku ruumi temperatuuri tegeliku keskmise väärtusega. Tulemus ei paraneks, kui mõõtmisi oleks teostatud sama aja jooksul, kuid 100 korda tihedamalt.



Joonis 3.1. Kontrollitud temperatuuriga ruumi temperatuuri ajaline käik ning mõõteseeria ruumi keskmise temperatuuri määramiseks.

Näidete 1 ja 2 põhjal võib järeldada, et väga oluline on mõõtesuuruses esineda võiva süstemaatilise muutlikkuse sagedus – kui see on suurem kui mõõtmiste sagedus, siis võib kasutada valemit (3.8), aga kui see sagedus on oluliselt väiksem kui mõõtmiste sagedus, siis peab piirduma valemiga (3.6). Selle demonstreerimiseks võib joonistada siinusgraafiku ning kanda sellele kaks mõõteseeriat – üks, mille ulatus on murdosa võnkeperioodist (nagu joonis 3.1), ning teine, mille ulatus on mitmeid võnkeperioode.

Näide 3.3. Olgu pliiatsitehases pliiatsiautomaadi poolt toodetavate pliiatsite pikkus X. Kui täpne ka ei oleks masin, ka temale on omane eksimine (*eksimine on inimlik* $\Rightarrow$ *eksimine on masinlik*) ja lõppkokkuvõttes pliiatsite pikkused veidi erinevad üksteisest. Teiste sõnadega: X on juhuslik suurus. Me tahame hinnata:

(1) milline on keskmine pliiatsi pikkus mida see masin produtseerib

(2) milline on üksiku pliiatsi pikkuse standardhälve

(3) kui oleme hinnanud pliiatsi keskmise pikkuse, siis milline on selle keskmise hinnangu enese standardhälve.

Võtame peoga pliiatseid ja saame valimi (juhuslikult) 30 pliiatsist: N = 30. Mõõdame nad ära, olgu mõõtmisoperatsioon ise täpne ja tulemused olgu x_i . Nüüd:

a) arvutame aritmeetilise keskmise $\overline{x}_N$ valemist (3.9). See annab meile (hinnangulise) vastuse küsimusele (1); olgu konkreetselt $\overline{x}_N$ = 198,0 mm

b) arvutame empiirilise standardhälbe s_N (3.6). See annab vastuse küsimusele (2).

Olgu konkreetselt s_N = 1 mm. Seejuures, eeldusel, et pliiatsite pikkuse jaotus on normaalne, asub 67% tõenäosusega üksikpliiatsi pikkus vahemikus $\left[\overline{x}_N - s_N, \overline{x}_N + s_N\right]$ = [197;199] mm ja tõenäosusega 95% vahemikus $\left[\overline{x}_N - 2s_N, \overline{x}_N + 2s_N\right]$ = [196;200] mm.

c) lõpuks, arvutame keskmise pikkuse enese hajuvuse valemist (3.8). See annab vastuse küsimusele (3). Konkreetse numbrilise väärtuse s_N = 1 mm korral saame

$$u\left[\overline{X}_N\right] = s_N / \sqrt{N} = 1/\sqrt{30} = 1/5{,}48 = 0{,}18 \text{ mm.}$$

Eeldame, et pliiatsite pikkuse jaotus on sümmeetriline, siis valimi maht 30 lubab meid juba eeldada, et aritmeetilise keskväärtuse jaotust võib vastavalt kesksele piirteoreemile lähendada normaaljaotusega. seega asub 67% tõenäosusega pliiatsite keskmine pikkus vahemikus

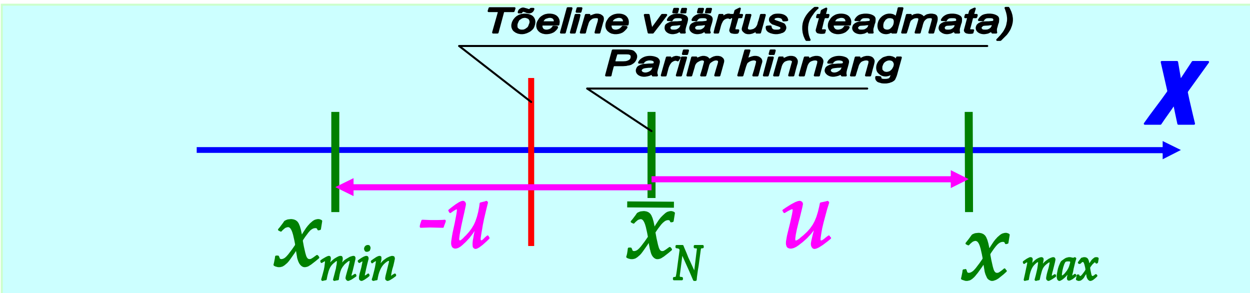
$$\left[\overline{x}_N - \frac{s_N}{\sqrt{30}}, \overline{x}_N + \frac{s_N}{\sqrt{30}}\right] = [197{,}8\,;198{,}2] \text{ mm}$$

ja tõenäosusega 95% vahemikus

$$\left[\overline{x}_N - \frac{2s_N}{\sqrt{30}}, \overline{x}_N + \frac{2s_N}{\sqrt{30}}\right] = [197{,}6\,;198{,}4] \text{ mm.}$$

3.3. Mõõtemääramatus

Niisiis, meil pole teada mõõdetava suuruse tõeline väärtus (kui oleks, siis poleks mõõtmised tarvilikud) ning seda tõelist väärtust ei anna ka suure arvu kordusmõõtmiste keskmistamine. **Maksimum, mida saab nõuda, on mõõtmistest leitud mõõdetava suuruse mingi arvatav parim hinnang – näiteks kordusmõõtmistel on selleks aritmeetiline keskmine – ning teatav intervall selle parima hinnangu ümber, millesse etteantud usaldusnivooga kuulub mõõdetava suuruse tõeline väärtus.** Seega, mõõtmistulemuseks ei ole mitte punkt arvsirgel, vaid **mõõtmistulemuseks on lõplik lõik reaalteljel, mis määrab mõõdetava suuruse võimalike väärtuste diapasooni.** Olukorda illustreerib joonis 3.2.



Joonis 3.2. Suuruse parim hinnang, tõeline väärtus ning mõõtemääramatus.

Võimalike väärtuste diapasooni võib anda algus- ja lõpp-punktiga $x_{\min}$ ja $x_{\max}$. Tavalisem ja levinum on siiski anda **lõigu keskpunkt,** milleks valitakse mõõdetava suuruse parim hinnang $\bar{x}_N$ ning **lõigu poollaius** $u(x)$. Seda poollaiust $u(x)$ nimetatakse **mõõtemääramatuseks** *(mõõtemääramatuse tähis u on tulnud ingliskeelsest terminist* uncertainty*).*

Mõõtemääramatus on mõõtmistäpsuse mõõduks: mida suurem on lõigu poollaius u, seda väiksem on mõõtmistäpsus. Enamasti on mõõtmistel statistiline iseloom ning koos mõõtemääramatusega on tarvis anda ka **usaldusnivoo** $p(u)$, millega mõõdetav suurus **usaldusintervalli** $\left[\bar{x}_N - u(x), \bar{x}_N + u(x)\right]$ satub. **Mõõtmine on korrektselt sooritatud, kui on leitud kolm arvu:** $\bar{x}_N$, $u(x)$ ja $p(u)$.

Mõõtmisteooria ülesandeks on põhjendada ja anda eeskirjad parima hinnangu $\bar{x}_N$, mõõtemääramatuse $u(x)$ ja usaldusnivoo $p(u)$ leidmiseks.

Uue standardi järgi on oluline erinevus määramatuse ja mõõtmisvea mõistete vahel:

Määramatus ≠ viga.

Viga on mõõtmistulemuse ja mõõdetava suuruse tõelise väärtuse vahe, on seega juhusliku suuruse konkreetne realisatsioon. Kuna tõelist väärtust ei ole võimalik teada, siis pole ka viga praktikas võimalik leida.

Mõõtemääramatus peegeldab seda, et meil puuduvad täpsed teadmised mõõtesuuruse väärtuste kohta. Ka pärast teadaolevate süstemaatiliste mõõtehälvete kõrvaldamist on mõõtmistulemus ikkagi vaid mõõtesuuruse väärtuse hinnang, ja seda määramatuse tõttu, mis on tingitud juhuslikust mõõteveast ja süstemaatiliste mõõtevigade "mittetäielikust" korrigeerimisest. Mõõtmistulemus võib osutuda väga lähedaseks mõõtesuuruse väärtusele (mida pole küll võimalik täpselt teada), kuid samal ajal võib sellel mõõtmistulemusel olla üsna suur määramatus.

Mõõtmistulemuse määramatus koosneb paljudest komponentidest, mis jagatakse **kahte tüüpkategooriasse:**

A- tüüpi määramatus, mida hinnatakse statistiliste meetodite abil

B- tüüpi määramatus, mida hinnatakse muul viisil.

Nende kahe põhitüübi koosmõjul tekkiv mõõtemääramatus kannab nime

***Liitmääramatus, ka C-tüüpi määramatus*.**

Kasutatakse veel ka standardmääramatuse mõistet. ***Standardmääramatus*** on standardhälbe kujul väljendatud mõõtmistulemuse määramatus.

Määramatuse komponentide A ja B gruppi jagamise eesmärgiks on nende hindamise kahe erineva viisi rõhutamine, mitte aga erineval viisil saadud komponentide iseloomu erinevuse näitamine. ***Mõlemad hinnangud põhinevad tõenäosusjaotusel*** ja ***mõlemal viisil saadud määramatuse komponendid esitatakse dispersioonhinnangu või standardmääramatuse (standardhälbe hinnangu) abil***. Põhiline ja oluline erinevus on selles, et **A-tüüpi mõõtemääramatus saadakse vahetult mõõtmistulemustest nende statistilise töötluse tulemusel**, kuna **B-tüüpi mõõtemääramatuse leidmisel kasutatakse kaudsel viisil hangitud/teadaolevat tõenäosuslikku informatsiooni**. (Näiteks on teada, et mõõteriista vea jaotust võib käsitleda ühtlase seaduse kohaselt).

Järgnevas vaatleme A- ja B-tüüpi määramatusi ning liitmääramatust lähemalt.

3.3.1. A-tüüpi mõõtemääramatus

A-tüüpi mõõtemääramatus on **statistilist tüüpi** mõõtemääramatus, mille suurust saab vähendada mõõtmiste arvu suurendades, kordusmõõtmisi sooritades ja tulemusi keskmistades. A-tüüpi mõõtemääramatus on tekitatud juhuslike mõjurite poolt, mis võivad kallutada mõõtmistulemust kord ühele, kord teisele poole, suurendada ja vähendada üksikmõõtmist. A-tüüpi määramatuse põhjustavad: 1) mitmesugused häirivad tegurid mõõtmisel (näit välistingimused), 2) objekti enda muutlikkus (nii valmistamise ebatäpsus kui objekti ajaline muutumine), jne.

Näide 3.4. Stomatoloogiakabinetis kaalutakse hambakulda. Kabinet paikneb vanas majas, kus põrand pisut kõigub, kui seda mööda kõndida. Tundlikke kaale on raske tasakaalustada. Iga mõõtmine annab isesuguse tulemuse.

A-tüüpi mõõtemääramatuse hindamine toimub nii nagu juhusliku suuruse statistilisel hindamisel. A-tüüpi mõõtemääramatuse tähis on u_A.

Niisiis, tehakse N mõõtmist ja leitakse aritmeetiline keskmine ***(mis ühtlasi võetakse ka mõõdetava suuruse parimaks hinnanguks, kui seda ei ole vaja täiendavalt korrigeerida teadaoleva suurusega süstemaatilise vea tõttu)***

$$x_t \approx \bar{x}_N = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}.$$

Seejärel hinnatakse mõõdetud suuruse **aritmeetilise keskmise standardhälve** valemitega (3.6) omavahel sõltuvate mõõtesuuruste korral ning valemiga (3.8) omavahel sõltumatute mõõtesuuruste korral.

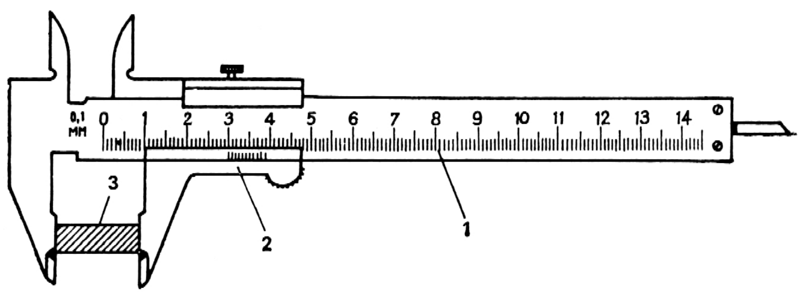
3.3.2. B-tüüpi mõõtemääramatus

Laias laastus on B-tüüpi mõõtemääramatus igasugune mõõteprotsessis ilmnev määramatus, mis ei ole statistiliselt vähendatav. B-tüüpi mõõtemääramatuse tähis on u_B.

Esmajoones kuuluvad B-tüüpi mõõtemääramatuse alla vead, mis on tingitud mõõteinstrumendi piiratud võimalustest. Kui hoolikalt ja täpselt ka poleks valmistatud mõõteriist või mõõtevahend, millega me mõõtmist teostame, alati on ka sellel olemas mingi (juhuslikku laadi) viga, mis on selle konkreetse mõõteriista puhul küll muutumatu ja püsiv suurus, kuid mis muutub ühelt mõõteriistalt teisele samuti juhuslikult. See – mõõteriista viga – on viga etaloni suhtes. Korduvatel mõõtmistel see viga on esindatud täpselt ühel ja samal moel (kuna mõõtmised teeme ühe ja sama mõõteriistaga) ja korduvad mõõtmised tema suurust ei kahanda. Käesoleva kursuses seomegi B-tüüpi mõõtemääramatuse konkreetse riistaveaga.

Näide 3.5. Praktikumis kasutatava **nihiku** (joonis 3.3) **põhiviga** (ehk riistaviga) on $\Delta_o = 0.05$ mm. S.t eeldatakse, et mõõteriistast tingitud viga ühekordsel mõõtmisel $\Delta x = x - x_t$ jääb piiridesse

$$-\Delta_o < \Delta x < \Delta_o .$$



Joonis 3.3. Nihik. 1 – põhiskaala; 2 – noonius; 3 – mõõdetav detail. Nihiku põhiviga on kantud mõõteriistale. (Toodud joonisel on see 0.1 mm. Praktikumis kasutakse kaks korda täpsemat riista põhiveaga 0.05 mm.)

Valmistajatehas garanteerib, et mõõteriista tegelik viga ei välju neist piirest.

Üldiselt **eeldatakse, et** (konkreetse) **mõõteriista viga on jaotunud ühtlaselt lõigul** $[-\Delta_o, +\Delta_o]$**,** s.o mõõteriista vea jaotustihedus on ühtlane jaotus keskväärtusega nullis (lõigu otspunktid on seetõttu $a = -\Delta_o$ ja $b = \Delta_o$) ning standardhälbega

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{b-a}{2} \quad = \quad \frac{\Delta_o}{\sqrt{3}} = 0{,}58\Delta_o .$$

See standardhälve võetaksegi B-tüüpi mõõtemääramatuseks:

$$u_B \quad = \quad \frac{\Delta_o}{\sqrt{3}} = 0{,}58\Delta_o.$$

3.3.3. Liitmääramatus

Mõõtmistulemuse standardmääramatust, mis on saadud A ja B komponentide liitumise tulemusel, nimetatakse **liitmääramatuseks** (*combined uncertainty*). Tema arvuline väärtus võrdub positiivse ruutjuurega liitdispersioonist, mis saadakse kõikide dispersiooni komponentide liitmisel

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}\ . \tag{3.10}$$

Eeldatakse, et A ja B tüüpi määramatuse määravad/põhjustavad juhuslikud suurused, mis on vastastikku korreleerimatud (sõltumatud) – ainult sel juhul kehtib dispersioonide liitumise seadus.

Keerulisemate mõõtmiste korral võib meil olla tegu mitme A-tüüpi komponendiga $u_{A1}, u_{A2}, \ldots$ ning mitme B-tüüpi komponendiga u_{B1}, u_{B2} ….. . Sel juhul

$$u_\mathrm{C} = \sqrt{u_\mathrm{A1}^2 + u_\mathrm{A2}^2 + \ldots u_{B1}^2 + u_{B2}^2 + \ldots.}\ .$$

Näide 3.6. Silindri pikkuse mõõtmine nihikuga.

Vaatleme konkreetselt metallsilindri mõõtmist. Oletame, et mõõtsime metallsilindri pikkust N = 100 korda. Oletame, et eksperimendist saime saja mõõtmise keskmiseks väärtuseks $\overline{x}_N = 76{,}648\,\mathrm{mm}$ ja tema standardhälbeks $u_\mathrm{A} = u(\overline{x}_N) = 0{,}044\,\mathrm{mm}$.

Nihiku põhivea $\Delta = 0{,}05\,\mathrm{mm}$ korral saame B-tüüpi mõõtemääramatuseks $u_\mathrm{B} = \sigma = \dfrac{\Delta}{\sqrt{3}} = \dfrac{0{,}05}{\sqrt{3}} = 0{,}029\,\mathrm{mm}$.

Järelikult koond- ehk liitmääramatuseks saame $u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{0{,}044^2 + 0{,}029^2} = 0{,}053\,\mathrm{mm}$.

Siin oleme arvesse võtnud juhusliku hälbe ja mõõteriista ebatäpsuse, kuid arvesse võtmata jätnud süstemaatilise hälbe.

Tulemus esitatakse sageli kujul

$$\overline{x} = 76{,}648(0{,}053)\,\mathrm{mm}$$

või

$$\overline{x} = 76{,}648(53)\,\mathrm{mm}$$

või

$$\overline{x} = 76{,}648 \pm 0{,}053\,\mathrm{mm}\,.$$

Kahjuks pole eelnevatest kirjaviisidest võimalik üheselt aru saada, kas tegemist on määramatusega standardmääramatuse tasemel, laiendmääramatusega, või hoopis mõõteriista veaga. Mitmetimõistmise vältimiseks esitame antud kursuse raames mõõtetulemust kujul

$$\bar{x} = 76{,}648\ \text{mm} \quad , \qquad u(x) = 0{,}053\ \text{mm}\,.$$

Muidugi võib kasutada veelgi täiuslikumat kirjaviisi tulemuste esitamiseks:

$$\bar{x} = 76{,}648\ \text{mm}$$

$$N = 100$$

$$p = 68\%$$

$$u_\text{C} = 0{,}053\ \text{mm}$$

$$u_\text{A}(\bar{x}) = 0{,}044\ \text{mm}\text{, normaaljaotus}$$

$$u_\text{B} = 0{,}029\ \text{mm}\text{, ühtlane jaotus.}$$

3.4. Ümardamine ning tähendnumbrite hulk määramatuse arvutamisel

Määramatuse hinnang mõõtmiste väikese arvu korral on üsna ebatäpne, seetõttu pole vahemikhinnangu väljakirjutamisel mõtet suurel **tähendnumbrite** hulgal (***tähendnumbrite hulk*** *e* ***tähendusega numbrikohtade hulk*** arvus on *kehtivate kümnendkohtade hulk* arvus). Tulemused esitatakse ümardatult. Arvude ümardamisel kasutatakse reeglit: arvud 1; 2; 3 ja 4 ümardatakse alla, 6; 7; 8; 9 üles. Koolis õpetati, et arv 5 ümardatakse üles. Statistiliselt tekitab selliselt ümardamine süstemaatilise vea, kuna ümardatud arvude keskväärtus on süstemaatiliselt suurem kui ümardamata arvude keskväärtus. Süstemaatilisest veast on vaba järgmine ümardamise reegel: **„arvu 5 ümardatakse nõnda, et tulemuse viimane tüvinumber oleks paarisarv“**. Samuti on selle reegli eeliseks, et jagades nii ümardamata kui ümardatud tulemust kahega, saame ikka õige tulemuse.

Tähendnumbriteks arvus loetakse alati kõiki numbreid peale nulli. Nulli loetakse kehtivaks, kui ta asub teiste arvude vahel, täisarvu või kümnendmurru lõpus. **Arvu alguses olevaid nulle**, samuti **ümardamise teel saadud nulle arvu lõpus** ei loeta tähendnumbriteks.

Näide 3.7.

10 400	5 tähendnumbrit.
$104 \cdot 10^2$	3 tähendnumbrit.
10 400,00	7 tähendnumbrit.
0,01040	4 tähendnumbrit.

Mõõtemääramatus esitatakse kas ühe või kahe tähendnumbriga. ISO standardi alusel esitatakse määramatus *täppismõõtmistel* kahe tähendnumbri täpsusega ja *tavamõõtmistel* ühe tähendnumbri täpsusega. **Kui arvutustel tuleb mõõtemääramatus pikem, siis ümardatakse tulemus vastavalt kas kahe või ühe tähendnumbri pikkuseks.** Ümardatakse ainult lõpptulemust, vahetulemuste ümardamisel võiks alles jätta vähemalt kolm tähendnumbrit, sest lahenduse algstaadiumis tehtud ümardamise viga võib arvutamise käigus võimenduda.

Näide 3.8.

Arvutatud u_c	***23751***	***23,751***	***0,23751***	***0,0023751***
u_c kahe tähendnumbriga	***$24 \cdot 10^3$***	***24***	***0,24***	***0,0024***
u_c ühe tähendnumbriga	***$2 \cdot 10^4$***	***$2 \cdot 10^1$***	***0,2***	***0,002***

Mõõtmistulemus esitatakse alati määramatuse viimase koha täpsusega.

Näide 3.9. Olgu mõõdetud suurus x = 73,3565023 ja arvutatud mõõtemääramatus u_C = 0,0382765.

Ümardame mõõtemääramatuse kahe tähendnumbri pikkuseks: u_C = 0,038.
Seega mõõdetud suurus ümardub kujule x = 73,35**7**.
Mõõtmistulemuse võime kirjutada kujul

x = 73,358(38)

või x = 73,358(0,038).

Näide 3.10. Olgu mõõdetud x = 100,3476 ja u_C = 0,5246.
Ümardame mõõtemääramatuse ühe tähendnumbri pikkuseks: u_C = 0,5.
Seega mõõdetud suurus ümardub kujule x = 100,3.
Mõõtmistulemuse võime kirjutada kujul

x = 100,3(5)

või x = 100,3(0,5).

3.5. Ekse

Mõnikord juhtub, et mõõtetulemuste hulka satub ilmselgelt vale mõõdis ehk ekse, olgu siis lugemi sisestamisel tekkinud näpuvea tõttu, võrgupinge kõikumise tõttu, mõõtmisruumi ukse avanemisega kaasnenud tuuletõmbuse tõttu vms. Sageli on sellistel juhtudel mõistlik teha mõõtmistes väike paus ning oodata, mil näiteks kaalu näit muutub jälle stabiilseks. Samas arvutijuhitava kaalu puhul see pole lihtne, näiteks, kui arvuti salvestab kaalu näidu kord sekundis. Eksed aga mõjutavad selgelt mõõtmistulemust ja neid ei tohiks keskväärtuse ning standardhälbe arvutustes kasutada.

Üldiselt defineeritakse ekseteks kõik mõõtmistulemused, mis erinevad keskväärtusest rohkem kui kolmekordne standardhälve. Normaaljaotuse eeldusel on tõenäosus, et mõõtetulemus erineb keskväärtusest rohkem kui kolm standardhälvet, 0,3%.

Eksed tuleb edasisest andmetöötlusest kõrvaldada ning siis arvutada uuesti keskväärtus ning standardhälve. Mõõtmiste protokolli tuleb ekse kõrvaldamisest teha asjakohane märge.

3.6. Jääkväärtused ja vabadusastmete arv

Oletame, et me arvutame keskväärtust $m(x)$, valimi suurus on n. Kasutame uuesti dispersiooni defineerimisel kasutatud suurust **hälve** ehk **tsentreeritud juhuslik suurus** ehk **jääkväärtus** (2.17):

$$\varepsilon_i = x_i - m(x) \qquad (i = 1; 2; ...; n)\ . \tag{3.11}$$

Kehtib seos

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0\,. \tag{3.12}$$

Seda seost on kerge tõestada, kasutades keskväärtuse $m(x)$ definitsiooni.

Kuna jääkväärtused on omavahel seotud valemi (3.12) kaudu, ei ole nad sõltumatud. Kui meil on teada $n - 1$ jääkväärtust, siis n-s jääkväärtus on arvutatav seosest (3.12). Seetõttu öeldakse, et n jääkväärtust omavad vabadusastmete arvu ν,

$$\upsilon = n - 1\,. \tag{3.13}$$

Kui aga n sõltumatut mõõdist on vähimruutude meetodi abil kasutatud nii sirge tõusu kui ka algordinaadi määramiseks, siis on vastavate standardmääramatuste vabadusastmete arv $\upsilon = n - 2$. Analoogselt, kui vähimruutude meetodil hinnatakse m parameetrit n andmepunkti alusel, siis on iga parameetri vabadusastmete arv $\upsilon = n - m$.

Kasutades suurust ν, saame esitada juhusliku suuruse X empiirilise standardhälbe (3.6) kujul

$$s_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x}_N)^2}{\upsilon}}\ . \tag{3.14}$$

See valem on üldisem, kuna ei sõltu sellest, mitut parameetrit m valimist suurusega n on leitud.

3.6.1. B-tüüpi määramatuse vabadusastmete arv

On tõestatud, et määramatuse hinnangu määramatus on

$$u(s) \approx \frac{s}{\sqrt{2\nu}} \quad \Rightarrow \quad \frac{u(s)}{s} \approx \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \tag{3.15}$$

See ligikaudne võrdsus läheb võrdsuseks normaaljaotuse erijuhul. Samas polegi meil enamasti vaja mitte täpset väärtust vaid piisab ka määramatuse hinnangu määramatuse suurusjärgulisest hinnangust, milleks on valem (3.15) igati sobiv.

Kui vabadusastmete arv on $\nu = 4$, siis on suhteline määramatuse hinnangu määramatus 35 % ning kui $\nu = 50$, siis on suhteline määramatuse hinnangu määramatus 10 %.

Avaldame nüüd sellest valemist vabadusastmete arvu ν:

$$\nu \approx \frac{s^2}{2u^2(s)} = \frac{1}{2}\left(\frac{u(s)}{s}\right)^{-2} \qquad (3.16)$$

See valem on suureks abiks B-tüüpi määramatuste hindamisel.

Näide 3.11. Hindame nihkkaliibri B-tüüpi määramatust. Nihkkaliibri tootja on märkinud nihiku põhiveaks Δ = 0,05 mm. Võime eeldada, et tootja on seda teinud põhjalikult, ehk $u(s) \to 0$. Valemist (3.16) saame, et nihkkaliibri B-tüüpi määramatus on lõpmatult suur. Saadud tulemust saab üldistada: **mõõteseadme tootja poolt esitatud määramatuse (B-tüüpi määramatuse) vabadusastmete arv on lõpmatu.**

Näide 3.12. Termomeetri näidu standardmääramatuseks on hinnatud 0,2 °C. Toodud kirjaviisist võib järeldada, et termomeetri näidu standardmääramatus on vahemikus (0,15; 0,25) °C. Ühtlase jaotuse standardmääramatus on $u(u(t)) = \frac{\Delta u(t)}{\sqrt{12}} = \frac{0{,}1}{\sqrt{12}} = 0{,}0289\,°\mathrm{C}$. Siit saame, et $\frac{u(u(t))}{u(t)} = \frac{0{,}0289}{0{,}2} = 0{,}144$ ning vabadusastmete arv on $\nu = \frac{1}{2}(0{,}144)^{-2} = 24$.

3.6.2. Liitmääramatuse efektiivne vabadusastmete arv

Liitmääramatuse (3.10) vabadusastmete arvu otseselt ei saa arvutada, küll aga võib leida efektiivsete vabadusastmete arvu ν_{eff}, kasutades Welch-Satterthwaite valemit:

$$\nu_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i)\right)^4}{\nu_i}}, \qquad (3.17)$$

kus $u(x_i)$ on i-ndast sisendsuurusest tingitud liitmääramatuse komponent.

Efektiivne vabadusastmete arv, arvutatult valemist (3.17), ei ole üldiselt täisarv. Täisarvulise efektiivsete vabadusastmete arvu saamiseks ümardatakse saadud tulemus **alla**, näiteks arvud 6,2 ja 6,8 ümardatakse mõlemad täisarvuks 6.

Näide 3.13. (Jätkame näidet 3.6.)

Vaatleme konkreetselt metallsilindri mõõtmist. Oletame, et mõõtsime metallsilindri pikkust n= 100 korda. Oletame, et eksperimendist saime saja mõõtmise keskmiseks väärtuseks $\bar{x}_N = 76{,}648\,\mathrm{mm}$ ja tema standardhälbeks $u_{\mathrm{A}} = u(\bar{x}_n) = 0{,}044\,\mathrm{mm}$.

Nihiku põhivea $\Delta = 0.05\,\mathrm{mm}$ korral saame B-tüüpi mõõtemääramatuseks

$$u_{\mathrm{B}} = \sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}05}{\sqrt{3}} = 0{,}029\,\mathrm{mm}$$

ning koondmääramatuseks

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{0{,}044^2 + 0{,}029^2} = 0{,}053\,\mathrm{mm}$$

Siit algab näite uus osa:

Leiame nüüd komponentide vabadusastmed:

$\nu_\mathrm{A} = n - 1 = 99$

B-tüüpi määramatuse vabadusastmete arv on lõpmatu, nagu näitasime näites 1. Efektiivne vabadusastmete arv on vastavalt valemile (3.17):

$$\nu_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i{}^4(y)}{\nu_i}} = \frac{u_C{}^4}{\frac{u_A{}^4}{\nu_A} + \frac{u_B{}^4}{\nu_B}} = \frac{0{,}053^4}{\frac{0{,}044^4}{99} + \frac{0{,}029^4}{\infty}} = 208{,}4 \to 208\,.$$

Seega saime metallsilindri efektiivsete vabadusastmete arvuks 208.

3.7. Studenti test ning mõõtetulemuse laiendmääramatus

Nii $m(x)$ kui ka u_N on mõlemad tegelikult juhuslikud suurused ja ei ole rangelt võttes ei tõeline keskväärtus ega aritmeetilise keskmise tõeline standardhälve (kuigi nad on nendele suurustele lähedased, sest nende hajuvus on väike). Inglise teadlane Student, alias W.S. Gosset tõestas:

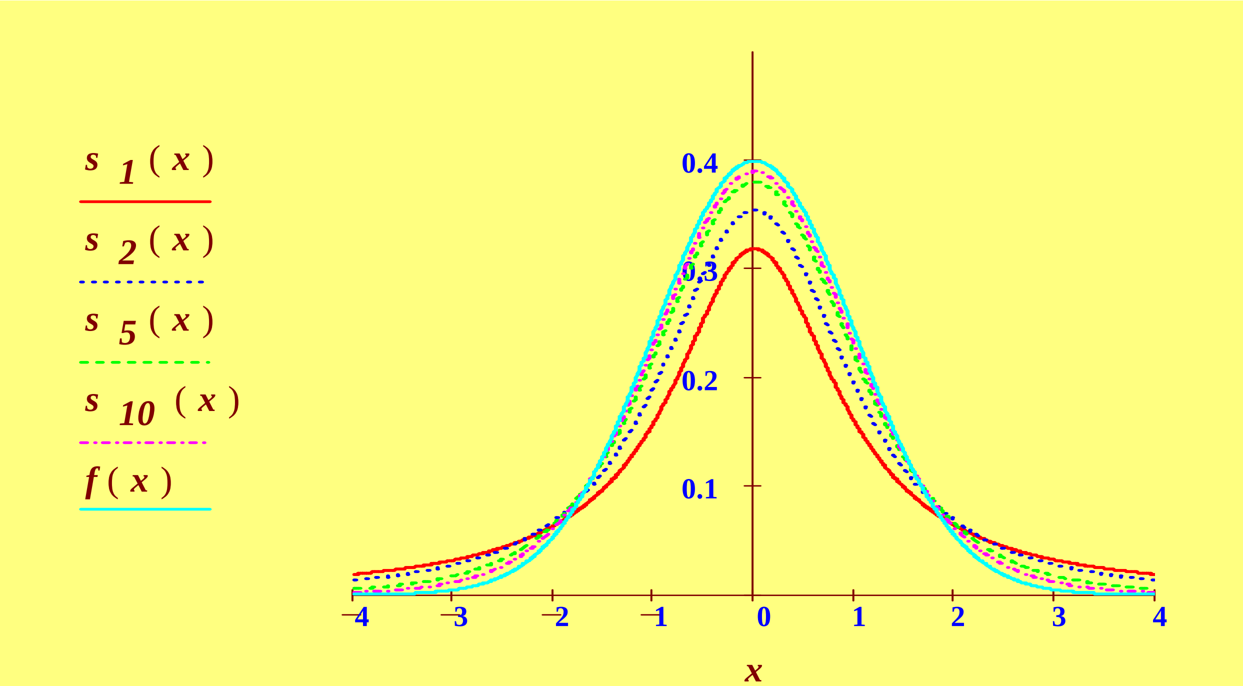
Kui X on normaalne juhuslik suurus, siis juhuslik suurus

$$T = \frac{\bar{x}_N - m[X]}{u(\bar{x}_N)} \tag{3.18}$$

allub jaotusele tihedusega

$$s_{N-1}(t) = C_{N-1}\left(1 + \frac{t^2}{N-1}\right)^{-N/2}. \tag{3.19}$$

Siin C_{N-1} on normeerimistegur. Jaotust (3.19) nimetatakse (N-1 vabadusastmega) ***Studenti jaotuseks***. Studenti jaotus erinevate $N-1$ väärtuste korral on toodud joonisel 3.4, millelt on ka näha, kuidas see funktsioon vabadusastmete arvu kasvades läheneb standardiseeritud normaaljaotusele.



Joonis 3.4. Ühe, kahe, viie ja kümne vabadusastmega Studenti jaotus $s_{N-1}(x)$ ning standardiseeritud normaaljaotus $f(x)$.

Studenti jaotuse oluline omadus on, et juhusliku suuruse T jaotusfunktsioon $s_{N-1}(t)$ sõltub vaid ühest parameetrist (nn vabadusastmete arvust) $N-1$ ja ei sõltu üldse juhusliku suuruse (mõõdetava suuruse) X konkreetsest dispersioonist ega keskväärtusest (küll on aga oluline X normaalsus). Selles mõttes on tegu universaalfunktsiooniga, mis iseloomustab suvaliste ühesuguse normaaljaotusega juhuslike suuruste summa üldisi omadusi.

Otsene järeldus asjaolust, et juhuslik suurus (3.18) allub Studenti jaotusele on, et usaldusnivoole p vastav mõõtmistulemuse paiknemise intervall on esitatav kujul

$$P\left[\bar{x}_N - t_{N-1}(p)u(\bar{x}_N) < x < \bar{x}_N + t_{N-1}(p)u(\bar{x}_N)\right] = p. \tag{3.20}$$

Siin suurus $t_{N-1}(p)$ on (Studenti) ***t*-kordaja** – parandustegur etteantud usaldusnivoo p ja $N-1$ vabadusastme korral. t-kordaja on samuti ainult ühest parameetrist N sõltuv universaalne usaldusnivoo funktsioon, mis on leitav Studenti jaotusest. Tavaliselt antakse t-kordaja kindlate p väärtuste jaoks tabuleeritult. Studenti t-kordaja tabuleeritud väärtused on toodud **lisas 1.** Mathcadis on t-kordaja leidmiseks funktsioon $qt\left(\frac{1+p}{2}, \nu\right)$; Excelis funktsioon $TINV(1-p, \nu)$.

Valemit (3.20) nimetatakse ***Studenti testiks***.

Suurte N-ide korral läheb Studenti jaotus üle standardiseeritud normaaljaotuseks. Tabelis 1 toodud Studenti t-kordaja tabelist on näha, et näiteks $t_2(95\%) \to 4{,}30$ ja $t_9(99{,}73\%) \to 4{,}09$ jne. Erinevus on oluline alas $N < 30$ ja väga oluline alas $N < 10$.

Tabel 3.1. Studenti t-kordaja väärtused $t_\nu(p)$ sõltuvalt vabadusastmete arvust $\nu = N - 1$ ja soovitavast usaldusnivoost p.

Vabadusastmete arv $\nu = N - 1$	Osa p protsentides					
	68,27[I]	90	95	95,45[I]	99	99,73[I]
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

(I) Suuruse x jaoks, mida kirjeldab normaaljaotus keskväärtusega $\bar{x}$ ja standardhälbega σ_x, sisaldab vahemik $x \pm k\sigma_x$ p = 68,27; 95,45 ja 99,73 protsenti jaotusest vastavalt k = 1; 2 ja 3 korral.

Kuigi liitmääramatus $u(y)$ on mõõtesuuruse Y mõõtetulemuse y määramatuse esmane väljend, on mõnede tööstuslike ja ärialaste rakenduste vajaduste rahuldamiseks, aga ka tervishoiu ja ohutusalaste nõuete tagamiseks, vajalik liitmääramatuse asemel esitada vahemik, mis teatud usaldatavusega hõlmab mõõtesuuruse väärtuse. Vastava vahemiku moodustamiseks kasutatakse nn laiendmääramatust tähisega $\boldsymbol{U}$. Laiendmääramatuse saame standardhälbena esitatud liitmääramatuse korrutamisel mingi teguriga k. Järelikult on mõlemate määramatuse esitamisvormide mõõteinfo hulk sama ja seega tundub laiendmääramatuse kasutamine justkui asjatuna. Kuid laiendmääramatusel on siiski üks eelis. Ta võimaldab võrrelda mõõtetulemusi, milledel on erinev vabadusastmete arv.

Laiendmääramatus U saadakse liitmääramatuse $u(y)$ korrutamisel katteteguriga k:

$$U(y) = k \cdot u(y)\,. \tag{3.21}$$

Kattetegus valemis (3.21) on arv, mida kasutatakse liitmääramatuse $u(y)$ korrutustegurina, et saada laiendmääramatust U. Katteteguri väärtus valitakse sõltuvalt vahemikule $[y-U;\ y+U]$ etteantud usaldatavustasemest p. Enamasti valitakse selleks usaldusvahemikuks 95 % või 99 %. Et saada väärtust kattetegurile k_p, mis annaks vahemiku teatud kindla usaldatavustasemega p, vajame detailseid teadmisi mõõtetulemuse ja tema tõenäosusjaotuse kohta.

Oletame, et keskse piirteoreemi eeldused on enam-vähem täidetud, s.t. et liitmääramatuses $u(y)$ ei domineeri sisendsuuruse standardmääramatuse komponent, mis on saadud väikesest arvust mõõdistest A-tüüpi hindamismeetodit kasutades, või komponent, mis tugineb eeldatud jaotusele, mis ei ole normaaljaotus. (B-tüüpi hindamismeetod). Sellest oletusest järeldub, et mõistlik esimene lähend katteteguri k_p saamiseks on normaaljaotuse kasutamine. Kui esimene eeldus ei kehti, s.t. on väike arv mõõdiseid, siis on mõistlik arvutada efektiivsete vabadusastmete arv ning kasutada Studenti jaotust. Kui teine eeldus ei kehti, s.t. domineerib normaaljaotusest erinev jaotus, siis tuleks leida jaotusfunktsioon ning sealt arvutada katteteguri väärtus. Mõningad ristkülik-, kolmnurk-, normaaljaotus- ja studenti jaotusele kehtivad k_p väärtused on toodud tabelis 3.2.

Tabel 3.2. Valik ristkülik-, kolmnurk-, normaaljaotus- ja studenti jaotusele kehtivaid k_p väärtuseid.

Usaldatavustase *p*	**Kattetegur k_p**			
%	Ristkülikjaotus	Kolmnurkjaotus	Studenti jaotus (v = 9)	Normaaljaotus
57,74	1	0,857		0,802
64,98	1,125	1		0,934
68,27	1,182	1,070	1,06	1
90	1,559	1,675	1,83	1,645
95	1,645	1,902	2,26	1,960
95,45	1,653	1,927	2,32	2
96,63	1,674	2		2,124
99	1,715	2,205	3,25	2,576
99,73	1,727	2,322	4,09	3
100	≥1,732	≥2,449	∞	∞

Näide 3.14. Metallsilindri mõõtmine (jätkame näiteid 3.6. ja 3.13.)

Vaatleme konkreetselt metallsilindri mõõtmist. Oletame, et mõõtsime metallsilindri pikkust n= 100 korda. Oletame, et eksperimendist saime saja mõõtmise keskmiseks väärtuseks $\bar{x}_N = 76{,}648\,\text{mm}$ ja tema standardhälbeks $u_\text{A} = u(\bar{x}_n) = 0{,}044\,\text{mm}$.

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{0{,}044^2 + 0{,}029^2} = 0{,}053\,\text{mm}$$

Metallsilindri efektiivsete vabadusastmete arvuks 208.

Leiame Studenti t-kordaja väärtuse vabadusastmete arvule 208 usaldusnivool 95% tabelist 3.1. Tabelis on vabadusastmete arvule 100 vastav t-kordaja 1,984 ning lõpmatu vabadusastmete arvu korral 1,960. Vabadusastmete arvu 208 korral võime võtta t-kordaja väärtuseks vahepealse väärtuse, ehk $k_{0,95}$ = 1,97. Nüüd saame metallsilindri pikkuse laiendmääramatuseks

$$U(\overline{x_n}) = k_p \cdot u_C = 1{,}97 \cdot 0{,}053\,\text{mm} = 0{,}1044\ \text{mm} \to 0{,}10\ \text{mm}$$

Seega on metallsilindri keskmine pikkus $\bar{x}_N = 76{,}65\,\text{mm}$ ning laiendmääramatus $U(\overline{x_n}) = 0{,}10$ mm (usaldusnivool 95 %).

Näide 3.15. Laua pikkust mõõdeti 5 korda joonlauaga resolutsiooniga 5 mm. Kõik mõõtmised andsid laua pikkuseks 185 mm. Leida laua pikkus ning vastav laiendmääramatus usaldusnivool 95%.

Laua pikkuse aritmeetiline keskmine on ilmselt 185 mm. A-tüüpi määramatus on null, sest mõõtmistulemustes puudus varieeruvus.

Laua pikkuse B-tüüpi määramatus on tingitud joonlaua resolutsioonist, mis eeldatavasti allub ühtlasele jaotusele:

$$u_B(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{12}} = \frac{5\,\text{mm}}{\sqrt{12}} = 1{,}44\ \text{mm}.$$

Laua pikkuse koondmääramatus on võrdne B-tüüpi määramatusega. Laiendmääramatuse leidmisel tuleb samuti arvestada ühtlase jaotusega, tabelist 3.2. saame katteteguri väärtuseks $k_{0,95}$ = 1,645, seega saame laiendmääramatuseks

$$U(\overline{x_n}) = k_p \cdot u_C = 1{,}645 \cdot 1{,}44\,\text{mm} = 2{,}3688\ \text{mm} \to 2\ \text{mm}.$$

Laua keskmine pikkus on $\bar{x}_N = 185\,\text{mm}$ ning laiendmääramatus on $U(\overline{x_n}) = 2$ mm (usaldusnivool 95 %).

Näide 3.16. Laua pikkust mõõdeti 2 korda nihikuga põhiveaga 0,05 mm. Mõõtmistulemusteks olid 184,7 mm ning 185.1. Leida laua pikkus ning vastav laiendmääramatus usaldusnivool 95%.

Laua pikkuse aritmeetiline keskmine on ilmselt 184,9 mm. A-tüüpi määramatus on

$$u_A = s_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}_N)^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{0{,}2^2 + 0{,}2^2}{2 \cdot 1}} = 0{,}2 \text{ mm}.$$

Laua pikkuse B-tüüpi määramatus on tingitud nihiku põhiveast, mis eeldatavasti allub ühtlasele jaotusele:

$$u_B(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{12}} = \frac{0{,}05\,\text{mm}}{\sqrt{12}} = 0{,}0144 \text{ mm}.$$

Laua pikkuse koondmääramatus on seega

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}0144^2} = 0{,}2005\,\text{mm} \to 0{,}20\,\text{mm}.$$

Näeme, et koondmääramatuses domineerib A-tüüpi mõõtemääramatuse komponent. Mäletame, et ühtlasest jaotusest võetud kahe mõõdise keskväärtus on kirjeldatav kolmnurkjaotusena, tabelist 3.2. saame katteteguri väärtuseks $k_{0,95}$ = 1,902, seega saame laiendmääramatuseks

$$U(\overline{x_n}) = k_p \cdot u_C = 1{,}902 \cdot 0{,}20\,\text{mm} = 0{,}3804 \text{ mm} \to 0{,}4 \text{ mm}.$$

Laua keskmine pikkus on $\overline{x}_N = 184{,}9\,\text{mm}$ ning laiendmääramatus on $U(\overline{x_n}) = 0{,}4$ mm (usaldusnivool 95 %).

Näide 3.17. Laua pikkust mõõdeti 100 korda nihikuga põhiveaga 0,05 mm. Laua pikkuse mõõtmise aritmeetiline keskmine oli 184,872 mm, empiiriline standardhälve oli 0,18 mm. Leida laua pikkus ning vastav laiendmääramatus usaldusnivool 95%.

Laua pikkuse aritmeetiline keskmine on 184,872 mm. A-tüüpi määramatus on

$$u_A = \frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{0{,}18}{\sqrt{100}} = 0{,}018 \text{ mm}.$$

Laua pikkuse B-tüüpi määramatus on tingitud nihiku põhiveast, mis eeldatavasti allub ühtlasele jaotusele:

$$u_B(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{12}} = \frac{0{,}05\,\text{mm}}{\sqrt{12}} = 0{,}0144 \text{ mm}.$$

Laua pikkuse koondmääramatus on seega

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{0{,}018^2 + 0{,}0144^2} = 0{,}02305\,\text{mm} \to 0{,}023\,\text{mm}.$$

Näeme, et koondmääramatuses on A-tüüpi ja B-tüüpi mõõtemääramatuse komponendid suurusjärgus sama kaaluga. A-tüüpi mõõtemääramatusel on vabadusastmete arv 99, B-tüüpi mõõtemääramatusel lõpmatu. Arvutame välja koondmääramatuse efektiivsete vabadusastmete arvu:

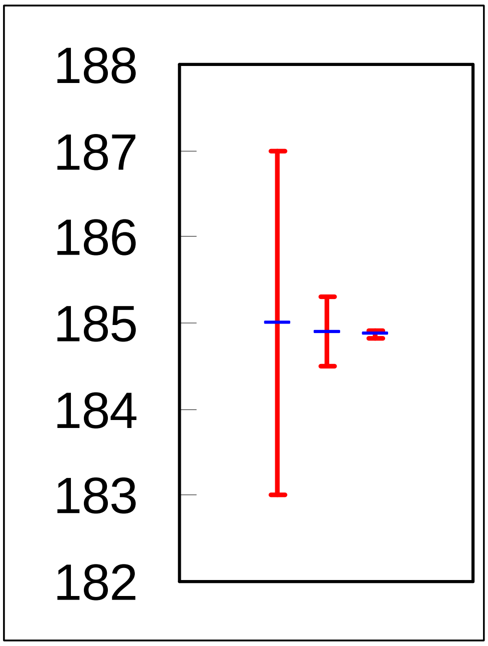
$$\nu_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} = \frac{u_C^{\ 4}}{\frac{u_A^{\ 4}}{\nu_A} + \frac{u_B^{\ 4}}{\nu_B}} = \frac{0{,}023^4}{\frac{0{,}018^4}{99} + \frac{0{,}023^4}{\infty}} = 263{,}9 \to 263$$

tabelist 3.2. saame katteteguri väärtuseks $k_{0,95}$ = 1,984, seega saame laiendmääramatuseks

$$U(\overline{x_n}) = k_p \cdot u_C = 1{,}984 \cdot 0{,}023\,\text{mm} = 0{,}04563\ \text{mm} \to 0{,}046\ \text{mm}.$$

Laua keskmine pikkus on $\overline{x}_N = 184{,}872\,\text{mm}$ ning laiendmääramatus on $U(\overline{x_n}) = 0{,}046$ mm (usaldusnivool 95 %).

Näidete 3.15., 3.16. ja 3.17. kokkuvõte: sama lauda mõõdeti 3 korda, neist näites 3.15 väikese resolutsiooniga joonlauaga, näites 3.16 mõõdeti täpse nihikuga 2 korda ning näites 3.17 mõõdeti täpse nihikuga 100 korda. Saadud keskväärtused koos laiendmääramatuse vahemikuga on toodud alloleval joonisel. Kooskõla tulemuste vahel on väga hea, kuigi määramatused on mitu suurusjärku erinevad.



3.8. Mõõtmistulemuse mõõtemääramatus kahe sisendsuuruse korral

Alustuseks tuletame meelde Taylori rittaarenduse, kui esinevad väiksed hälbed:

$$f(x+\delta x) \approx f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot \delta x$$

Näide 3.18. Arvutame rittaarendusena suuruse $10{,}1^2 = 102{,}01$:

valime $x = 10$; $\delta x = 0{,}1$, siis $f(x+\delta x) \approx f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot \delta x = x^2 + 2x \cdot \delta x = 100 + 2 \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 102$.

Probleemi püstitus. Olgu mõõdetud 2 füüsikalist suurust X_1, X_2 (nn sisendsuurused), s.t olgu meil teada mõlema keskväärtused $m(x_1)$, $m(x_2)$ ja liitmõõtemääramatused $u(x_1)$, $u(x_2)$.

Olgu füüsikaline suurus Y (nn väljundsuurus) funktsioon sisendsuurustest X_1, X_2:

$$Y = Y(X_1, X_2).$$

Teeme nüüd eelduse, et suuruste X_i üksikmõõtmiste hälbed $\delta x_i = x_i - m(x_i)$ on väikesed ja muudavad väljundsuuruse Y väärtust vähe. Sel juhul saame esitada ***üksikmõõtmisele vastava*** Y väärtuse punktis $\{x_i\}$ rittaarendusena punktis $\{m(x_i)\}$ hälvetele $\{\delta x_i\}$ järgi:

$$Y = Y\left(\bar{x}_1 + \delta x_1; \bar{x}_2 + \delta x_2\right) \approx Y\left(\bar{x}_1; \bar{x}_2\right) + \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\delta x_1 + \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\delta x_2$$

ehk

$$Y = \bar{Y} + \delta Y, \tag{3.22}$$

kus

$$\bar{Y} = Y\left(\bar{x}_1; \bar{x}_2\right) \quad \text{ja} \quad \delta Y = \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\delta x_1 + \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\delta x_2. \tag{3.23}$$

Siin $m(Y)$ samastame suuruse Y mõõdetud/parima hinnangu väärtusega ja hälbe δY samastame suuruse Y ühekordse mõõtmise mõõteveaga. Seetõttu saame Y mõõtemääramatuse arvutamiseks valemi

$$u^2(Y) = m\left[(\delta Y)^2\right], \tag{3.24}$$

kus $m[\ ]$ tähistab matemaatilist ootust nagu varemgi. Valem (3.24) eeldab, et hälbe δY keskväärtus on null:

$$m[\delta Y] = 0.$$

See eeldus on rangelt võttes täidetud vaid siis, kui

$$m[\delta x_i] = 0, \text{ s.o, kui } m[X_i] = \bar{x}_i. \tag{3.25}$$

Ligikaudu see nii ongi, ja sel juhul on (3.24) kasutamine õigustatud. Pannes δY avaldise (3.23) valemisse (3.24), saame

$$m\left[(\delta Y)^2\right] = m\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\delta x_1 + \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\delta x_2\right)^2\right] = m\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\delta x_1\right)^2 + 2\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\delta x_1 \delta x_2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\delta x_2\right)^2\right]$$

Kui mõõtevigade keskväärtused on nullid (nagu eeldab valem (3.25)), siis on keskväärtus $\delta x_1 \delta x_2$-st võrdne kovariatsiooniga, mille saab esitada kasutades korrelatsioonikordajat r:

$$m\left[\delta x_1 \cdot \delta x_2\right] = \mathrm{cov}(\delta x_1, \delta x_2) = r\, u(X_1)u(X_2),$$

seega saame Y mõõtemääramatuse ruudu jaoks järgmise valemi:

$$u^2(Y) = \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\right)^2 u^2(X_1) + 2 \cdot r \cdot \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2} u(X_1)u(X_2) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\right)^2 u^2(X_2)\,. \qquad (3.26)$$

Korrelatsioonikordaja suuruste x ja y vahel on defineeritud järgmiselt:

$$r_{x;y} = \frac{\sum_{\mathrm{k}=1}^{N}(x_{\mathrm{k}} - \bar{x})(y_{\mathrm{k}} - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{\mathrm{k}=1}^{N}(x_{\mathrm{k}} - \bar{x})^2 \sum_{\mathrm{k}=1}^{N}(y_k - \bar{y})^2}}\,. \qquad (3.27)$$

Vaatame esialgu erijuhtu, mil muutujad x ja y on omavahel sõltumatud, s.t. ühe tulemus ei mõjuta teise tulemust. Praktikas võib leida lõputult selliseid paare, näiteks mingi kera mass ning läbimõõt; sademete hulk ajaühikus ning pindala, aeg ja teepikkus jne. Osutub, et sõltumatute muutujate vaheline korrelatsioon võrdne nulliga ning valem (3.26) lihtsustub:

$$u^2(Y) = \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\right)^2 u^2(X_1) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\right)^2 u^2(X_2)\,, \qquad (3.28)$$

$$u(Y) = \sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\right)^2 u^2(X_1) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\right)^2 u^2(X_2)}\,. \qquad (3.29)$$

Näide 3.19. Olgu meil mõõdetavateks suurusteks homogeense metallkera diameeter D (üksikmõõtmise tulemus d) ja mass m (üksikmõõtmise tulemus μ (kasutame siin kreeka tähte, et mitte segadust tekitada keskväärtuse tähisega m)) ning olgu tarvis leida metalli tihedus ρ valemist

$$\rho = \frac{M}{\text{ruumala}} = \frac{6}{\pi}\frac{M}{D^3}. \qquad (3.30)$$

Tiheduse ja tema määramatuse arvutamiseks on kõigepealt vaja leida diameetri ning massi keskväärtused ning standardmääramatused.

Kera diameeter olgu mõõdetud $N = 10$ korda nihikuga, mille põhiviga $\Delta_{\mathrm{o}} = 0{,}05\,\mathrm{mm}$.

Diameetri keskväärtuseks saime

$$\bar{d}_N = \frac{1}{10}\left(d_1 + d_2 + ... + d_{10}\right) = 20{,}170\,\mathrm{mm}\,.$$

Diameetri A-tüüpi mõõtemääramatuseks saime

$$u_A(D)=\sqrt{\frac{(d_1-\overline{d}_N)^2+...+(d_{10}-\overline{d}_N)^2}{10\cdot(10-1)}}=0{,}022\text{ mm},$$

ning diameetri B -tüüpi mõõtemääramatus on

$$u_B(D)=\Delta_o/\sqrt{3}=0{,}0289\text{ mm}.$$

Diameetri koondmõõtemääramatus on

$$u_C(D)=\sqrt{(u_A(D))^2+(u_B(D))^2}=\sqrt{(0{,}022)^2+(0{,}0289)^2}=0{,}0363\text{ mm}.$$

Massi kaalusime ühekordselt neljanda klassi kaaludega. Mass osutus võrdseks järgmiste vihtide masside summaga

$$\mu=(20+2+2+0{,}1+0{,}05)\text{ g}=\ 24{,}15\text{ g}.$$

Igal vihil on vastavalt standardile määramatus, kusjuures võime siin eeldada, et vihid on omavahel sõltumatud. Samuti on ka kaalul oma määramatus. Kaalu põhiviga on 50 mg ja neljanda klassi vihtide põhivead on vastava tabeli järgi 20, 6, 6, 1 ja 1 mg. Vastavalt valemile (3.29), on massi määramatus arvutatav:

$$u_B(M)=\sqrt{\left(\frac{50}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{54{,}5}{\sqrt{3}}=31{,}5\text{ mg}$$

Kuna kordsed massi mõõtmised annaksid siin kogu aeg ühe ja sama tulemuse, siis loeme massi A-tüüpi mõõtemääramatuse nulliks.

$$u_C(M)=u_B(M)=31{,}5\text{ mg}=0{,}032\text{ g}.$$

Nüüd on meil olemas info tiheduse ning tema määramatuse arvutamiseks, kasutades valemeid (3.29) ja (3.30):

$$\rho=\frac{M}{\text{ruumala}}=\frac{6}{\pi}\frac{M}{D^3}=\frac{6}{\pi}\frac{24{,}15}{(20{,}170)^3}=5{,}621\frac{g}{cm^3}.$$

Leiame vajalikud tuletised:

$$\frac{\partial\rho}{\partial M}=\frac{6}{\pi}\frac{1}{D^3}=\frac{\rho}{M}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial D}=\frac{6M}{\pi}\cdot\frac{-3}{D^4}=\frac{-18M}{\pi D^4}=\frac{-3\rho}{D}$$

$$u(\rho) = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial M}\right)^2 u^2(M) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial D}\right)^2 u^2(D)} = \sqrt{\left(\frac{\rho}{M}\right)^2 u^2(M) + \left(\frac{-3\rho}{D}\right)^2 u^2(D)} =$$

$$= \rho \cdot \sqrt{\left(\frac{u(M)}{M}\right)^2 + \left(\frac{-3 \cdot u(D)}{D}\right)^2} = 5{,}621 \frac{g}{cm^3} \cdot \sqrt{\left(\frac{0{,}032}{24{,}15}\right)^2 + \left(\frac{-3 \cdot 0{,}0363}{20{,}170}\right)^2} =$$

$$= 5{,}621 \frac{g}{cm^3} \cdot \sqrt{0{,}00133^2 + (-0{,}0054)^2} = 5{,}621 \frac{g}{cm^3} \cdot 0{,}00556 = 0{,}031 \frac{g}{cm^3}$$

Kuidas ei tohi väljundsuurust arvutada. Kui prooviksime siin arvutada erinevatele mõõtmistele vastavad tiheduse väärtused lähtudes üldvalemist (3.30), s.o i-nda mõõtmise korral leiaksime suuruse

$$\rho_i = \frac{6}{\pi} \frac{\mu_i}{(d_i)^3}$$

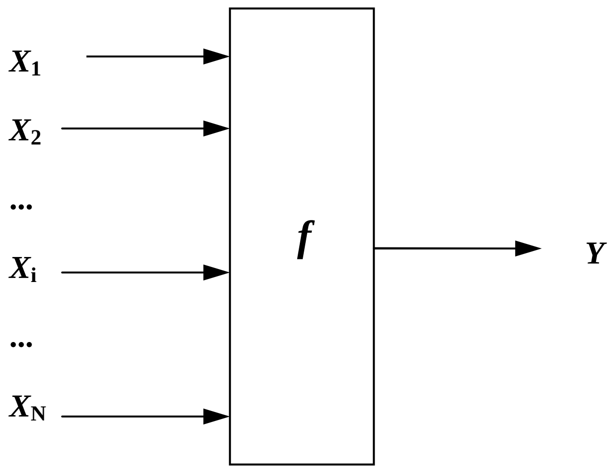
ja seejärel leiaksime üksiktiheduste ρ_i aritmeetilise keskmise ning empiirilise standardhälbe (tiheduse A-tüüpi mõõtemääramatuse iseloomustajana), siis läheks suur osa massi määramisega seotud mõõtemääramatusest lihtsalt kaotsi. Sellist viga aga ei tohi teha.

4. Mõõtmise mudel

Igasugune reaalsetes tingimustes mõõtmine toimub alati suure hulga mõjurite toimel ning iga mõõteülesande korral arvutatakse meid huvitava mõõtesuuruse väärtus matemaatilise seosega teiste, antud mõõteülesande jaoks vajalike suuruste abil. Hinnanguid saame teatud osale nendest suurustest anda nende vahetu mõõtmise käigus, ülejäänud osale suurustest aga teadaoleva info, näiteks normdokumentides või käsiraamatutes esitatud andmete abil. Mõõtesuuruse väärtuse hinnangu leidmiseks tuleb seega mõõteülesandest lähtuvalt koostada mõõtesuuruse sõltuvust teistest vaadeldud suurustest kirjeldav mõõtmise mudel.

Üldistatud kujul on mõõtmise mudel esitatud joonisel 4.1. Toodud mudelis on väljundsuurus Y mõõteülesandega ette nähtud mõõtesuurus, mis sõltub sisendsuurustest X_i (i = 1; 2; ...; N). Sisendsuurused võivad olla nii konstandid, parandid, mõjurid kui ka sellised suurused, mida tuleb antud ülesande lahendamise käigus omakorda mõõta. Sõltuvust saab väljendada funktsiooni f abil kujul

$$Y = f(X_1;\ X_2;\ ...\ ; X_i;\ ...;\ X_N) \qquad (4.1.)$$



Joonis 4.1. Mõõtmise mudel.

Sisendsuurusi X_i seoses (4.1) tuleb alati vaadelda kui mõõtesuurusi, mis võivad omakorda sõltuda teistest suurustest, sealhulgas ka süstemaatilisi efekte kõrvaldavatest paranditest ja konstantidest. Seetõttu mõõtesuuruse Y funktsionaalne sõltuvus f võib kujuneda üsna komplitseerituks, mida ei saa alati täpselt kirjeldada. Veelgi enam, sõltuvus f võib olla vaid eksperimentaalselt määratav või eksisteerida algoritmina, mida saab hinnata ainult arvuliselt. Seega peab funktsiooni f tõlgendama laiemalt kui puhast matemaatilist funktsiooni. Tähtis on, et funktsioon sisaldaks kõik mõõtesuurused, parandid, konstandid jne, mis annavad panuse mõõtesuuruse Y mõõtetulemusse. Kui tulemused näitavad, et sõltuvus f ei modelleeri mõõtetoimingut vajaliku täpsusega, tuleb funktsioonile f lisada täiendavaid sisendsuurusi. Võib tekkida isegi vajadus sellise sisendsuuruse järele, mis kajastab mõõtesuurust Y mõjutava nähtuse täiendavat uurimist.

Näide 4.1. Pikkusotsmõõdu pikkuse mõõtmine. Mõõtevahendiks on pikkuskomparaator ja mõõtmisel võrreldakse mõõdetava otsmõõdu pikkust l etalonotsmõõdu pikkusega l_E. Komparaatorilt saadud mõõdiseks on kahe otsmõõdu pikkuste vahe δl.

Antud juhul on mõõtesuuruseks otsmõõdu pikkus l, mis otseselt sõltub etalonotsmõõdu pikkusest l_E ja mõõtmise tulemusel komparaatorilt saadud mõõdisest δl. Peale selle peame arvestama veel parandeid, mis tulenevad sellest, et mõlema otsmõõdu materjalide joonpaisumistegurid α_E ja α on erinevad ning pikkuse mõõtmise hetkel etaloni ja mõõdetava pikkusotsmõõdu temperatuuride väärtused hälbivad normaaltemperatuurist vastavalt θ_E ja θ võrra. Pikkus l on seega funktsionaalses sõltuvuses kuuest sisendsuurusest. Seose (4.1) kohane mõõtmise mudel on antud juhul

$$l = f(l_E;\ \delta l;\ \alpha_E;\ \alpha;\ \theta_E;\ \theta).$$

Mõõtesuuruse l väärtus normaaltemperatuuril on kirjeldatud mõõtemeetodi korral arvutatav matemaatilise seosega

$$l = \frac{l_E\left(1+\alpha_E\theta_E\right)+\delta l}{1+\alpha\theta},$$

kus suuruse l_E väärtuse saame etaloni kalibreerimistunnistusest, suuruste δl, θ_E ja θ väärtused saame mõõtmise protsessi käigus ning suuruste α_E ja α väärtused nimetatud otsmõõtude spetsifikatsioonidest või sobivast käsiraamatust.

Kasutades mõõtesuuruse l mõõtmise teisi meetodeid, võime seda mõõtmist modelleerida teistsuguste matemaatiliste avaldistega. Näiteks, kasutades mõõtmisel nihikut, on mõõtmise mudel

$$l = f(l_n),$$

kus l_n on nihiku näit.

Mõõtesuuruse l väärtus normaaltemperatuuril on kirjeldatud mõõtemeetodi korral arvutatav matemaatilise seosega

$$l = l_n.$$

Seega, ühe ja sama suuruse mõõtmisel on võimalik kasutada erinevaid mõõtmise mudeleid, sõltuvalt valitud mõõtemeetodist.

Näide 4.2. Metallitüki kaalumine võrdõlgse kaaluga. Metallitükile ning kaaluvihtidele mõjuvad raskusjõud ning õhurõhust tingitud üleslükkejõud. Kui materjalide tihedused pole võrdsed, on sama massi juures ruumalad erinevad ning seega on ka üleslükkejõud erinevad. Teiste sõnadega öeldes – kui kaal on tasakaalus, kuid materjalide tihedused pole võrdsed, ei ole kaalutava metallitüki mass võrdne vihtide masside summaga, sest lisandub ruumalade erinevusest tulenev üleslükkejõu erinevus.

Paneme kirja suurused, mis mõõtmistulemust mõjutavad:

- vihtide mass m_v;
- vihtide tihedus ρ_v;
- kaalutava metallitüki tihedus ρ_m;
- õhu tihedus $\rho_õ$;
- võrdõlgse kaalu tundlikkus Z.

Seega

$$m_m = f(m_v;\ \rho_v;\ \rho_m;\ \rho_õ;\ Z)\,.$$

Samas pole ka siintoodud suurused otseselt mõõdetavad, näiteks õhu tiheduse arvutamiseks on tarvis mõõta õhurõhku, temperatuuri ning õhu niiskust, seega on õhu tiheduse mõõtmise valemiks

$$\rho_õ = f(P;\ T;\ RH)\,.$$

Näide 4.3. Suusataja lõppkiiruse määramine käepäraste vahenditega. Kiirus v on defineeritud valemiga

$$v = \frac{s}{t}\,,$$

kus s on teepikkus ning t on aeg. Selle valemi võibki võtta mõõtmiste mudeliks, kuid kindlam on, kui seda mudelit täpsustada, lähtuvalt sellest, kuidas sisendsuurused mõõdetakse.

Oletame, et teepikkuse s mõõtmiseks kasutatakse mõõdulinti pikkusega s_1, mida tõstetakse edasi N korda, siis teepikkuse mõõtmise mudel on

$$s = N\,s_1 + ds,$$

kus ds on pärast viimast edasitõstmist mõõdulindilt saadud lugem.

Aeg t on suusataja mõõtmisalast väljumise aeg t_2 lahutatud mõõtmisalasse jõudmise aeg t_1:

$$t = t_2 - t_1.$$

Pannes esialgsesse valemisse sisendsuuruste mõõtmiste mudelid, saame kiiruse mõõtmise mudeliks:

$$v = \frac{N \cdot s_1 + ds}{t_2 - t_1}\,.$$

Lihtsamatel juhtudel tavaliselt mõõtmiste mudelit välja ei kirjutata, sest teatakse isegi, kuidas soovitud suurust õigesti arvutada. Probleem tekibki enamasti alles määramatuse hindamisel, sest peas olevast valemist peast osatuletiste võtmine käib üldjuhul üle jõu. Seega – enne mõõtma hakkamist on ALATI mõistlik kirja panna ka mõõtmiste mudel, see lihtsustab üldjuhul oluliselt nii mõõtmiste optimaalset planeerimist kui ka mõõtemääramatuste hindamist.

4.1. Mõõtemääramatus mitme sõltumatu sisendsuuruse korral

Peatükis 3.8. tuletasime mõõtesuuruse mõõtemääramatuse kahe sisendsuuruse korral. Jätkame sõltumatute suuruste erijuhu üldistamist valemist (3.28):

$$u^2(Y) = \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\right)^2 u^2(X_1) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\right)^2 u^2(X_2)\,. \qquad (4.2)$$

Sama valem on summa märgi all kirja pandav kujul

$$u^2(Y) = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_i} \right)^2 u^2(X_i)\,, \tag{4.3}$$

Üldistatult kehtib samasugune valem ka N sõltumatu sisendsuuruse korral:

$$u^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_i} \right)^2 u^2(X_i)\,, \tag{4.4}$$

Selle valemi üldisemat kuju, kus esineb ka üksteisest sõltuvaid sisendsuuruseid, vaatame hiljem.

4.1.1. Liitmääramatuse tähtsusetu komponendi kriteerium

Mõõtmise mudelisse tuleb sisse viia kõik mõeldavad määramatust tekitavad liikmed. Mõne liikme koha pealt võib tekkida kahtlus, kas seda peab arvesse võtma või saab öelda, et see liige on ebaoluline. Selleks lähtume eeldusest, et määramatuse hinnang antakse mitte rohkem kui kahe tähendusliku arvkohaga. Kui mingi määramatuse komponent on nii väike, et liitmääramatuse kahte tähenduslikku arvkohta praktiliselt ei muuda, siis võib öelda, et tegemist on ebaolulise määramatuse komponendiga. Mingi määramatuse komponendi $u(x_m)$ ebaolulisuse kinnitamiseks on eelpool öeldust tuletatud võrratus:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_m} u(x_m) \right| \le 0{,}3u(y)\,. \tag{4.5}$$

st kõik komponendid, mis alluvad sellele võrratusele, on ebaolulised.

Kuna liitmääramatus $u(y)$ moodustub kõikide määramatuse komponentide summast, siis tingimusest

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_m} u(x_m) \right| \le 0{,}3 \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right|, \tag{4.6}$$

kus $u(x_i)$ on suvaline määramatuse komponent, järeldub ka tingimus (4.5).

Tingimuse (4.6) kontrollimine on üldiselt palju lihtsam, sest tingimus (4.5) eeldab juba, et koondmääramatus on arvutatud ning siis jääb üle ainult konstateerida, milline liige oli ebaoluline.

Näide 4.4. Alumiiniumist risttahukakujulist plaadi kõigi kolme külje pikkused mõõdeti nihikuga ning saadi järgmised tulemused:

a = 8,02 mm,	$u(a)$ = 0,03 mm,	$\upsilon(a)$ = 5;
b = 42,53 mm,	$u(b)$ = 0,04 mm,	$\upsilon(b)$ = 6;
c = 172,11 mm,	$u(c)$ = 0,05 mm,	$\upsilon(c)$ = 7;

Leida plaadi ruumala laiendmääramatus usaldusnivool 95 %.

Lahendus 1, arvestamata tähtsusetu komponendi kriteeriumit:

Ruumala on

$$V = a \cdot b \cdot c = 8{,}02 \cdot 42{,}53 \cdot 172{,}11 = 58705\ \text{mm}^3 = 58{,}705\ \text{cm}^3,$$

ruumala määramatus on:

$$\begin{aligned}
u(V) &= V \cdot \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2 + \left(\frac{u(c)}{c}\right)^2} = \\
&= V \cdot \sqrt{\left(\frac{0{,}03}{8{,}02}\right)^2 + \left(\frac{0{,}04}{42{,}53}\right)^2 + \left(\frac{0{,}05}{172{,}11}\right)^2} = \\
&= V \cdot \sqrt{(0{,}00374)^2 + (0{,}00094)^2 + (0{,}00029)^2} = \\
&= V \cdot 0{,}00387 = 58{,}705 \cdot 0{,}00387 = 0{,}227\ \text{cm}^3.
\end{aligned}$$

Ruumala efektiivne vabadusastmete arv on:

$$\begin{aligned}
\nu(V) &= \frac{u^4(V) \cdot \dfrac{V^4}{V^4}}{\dfrac{\left(V \cdot \dfrac{u(a)}{a}\right)^4}{\nu(a)} + \dfrac{\left(V \cdot \dfrac{u(b)}{b}\right)^4}{\nu(b)} + \dfrac{\left(V \cdot \dfrac{u(c)}{c}\right)^4}{\nu(c)}} = \\
&= \frac{\dfrac{u^4(V)}{V^4}}{\dfrac{\left(\dfrac{u(a)}{a}\right)^4}{\nu(a)} + \dfrac{\left(\dfrac{u(b)}{b}\right)^4}{\nu(b)} + \dfrac{\left(\dfrac{u(c)}{c}\right)^4}{\nu(c)}} = \\
&= \frac{0{,}00387^4}{\dfrac{(0{,}00374)^4}{5} + \dfrac{(0{,}00094)^4}{6} + \dfrac{(0{,}00029)^4}{7}} = \\
&= \frac{3{,}87^4}{\dfrac{(3{,}74)^4}{5} + \dfrac{(0{,}94)^4}{6} + \dfrac{(0{,}29)^4}{7}} = \\
&= \frac{224{,}3}{39{,}13 + 0{,}13 + 0{,}001} = \frac{224{,}3}{39{,}26} = 5{,}71 \Rightarrow 5.
\end{aligned}$$

Studenti kattetegur usaldusnivool 95 % vabadusastmete arvuga 5 on 2,57, seega saame laiendmääramatuseks:

$$U(V) = k \cdot u(V) = 2{,}57 \cdot 0{,}227\ \text{cm}^3 = 0{,}58\ \text{cm}^3.$$

Lahendus 2, arvestades tähtsusetu komponendi kriteeriumit:

Leiame kõik määramatuse komponendid:

$$\frac{\partial V}{\partial a}\cdot u(a)=V\cdot\frac{u(a)}{a}=V\cdot\frac{0{,}03}{8{,}02}=V\cdot 0{,}00374$$

$$\frac{\partial V}{\partial b}\cdot u(b)=V\cdot\frac{u(b)}{b}=V\cdot\frac{0{,}04}{42{,}53}=V\cdot 0{,}00094$$

$$\frac{\partial V}{\partial c}\cdot u(c)=V\cdot\frac{u(c)}{c}=V\cdot\frac{0{,}05}{172{,}11}=V\cdot 0{,}00029$$

Näeme, et kõige suurem määramatuse komponent on seotud suuruse *a*-ga.

Rakendame nüüd valemit (4.6):

$$\left|\frac{\frac{\partial V}{\partial b}\cdot u(b)}{\frac{\partial V}{\partial a}\cdot u(a)}\right|=\left|\frac{V\cdot 0{,}00094}{V\cdot 0{,}00374}\right|=0{,}22<0{,}3$$

$$\left|\frac{\frac{\partial V}{\partial b}\cdot u(c)}{\frac{\partial V}{\partial a}\cdot u(a)}\right|=\left|\frac{V\cdot 0{,}00029}{V\cdot 0{,}00374}\right|=0{,}08<0{,}3$$

Seega selgus, et nii *b* kui ka *c* määramatused on tähtsusetud ning nendega ei pea arvestama.

Leiame nüüd ruumala laiendmääramatuse:

$$u(V)=V\cdot\frac{u(a)}{a}=V\cdot\frac{0{,}03}{8{,}02}=58{,}705\cdot 0{,}00374=0{,}220\ \text{cm}^3$$

Ruumala määramatus sõltub ainult komponendist *a*, seega on ka ruumala vabadusastmete arv võrdne komponendi *a* vabadusastmete arvuga:

$$\nu(V)=\nu(a)=5\,.$$

Studenti kattetegur usaldusnivool 95 % vabadusastmete arvuga 5 on 2,57, seega saame laiendmääramatuseks:

$$U(V)=k\cdot u(V)=2{,}57\cdot 0{,}220\ \text{cm}^3=0{,}57\ \text{cm}^3.$$

Kokkuvõte: kui võrrelda lahendusi 1 ja 2, siis vastuste erinevus on väga väike, 0,01 cm^3 ehk ca 2 %. See erinevus on märgatavalt väiksem kui määramatuse määramatus, mis vabadusastmete arvu 5 juures on üle 30 %. Seega võib öelda, et mõlemad vastused on õiged, kuid teise lahenduse puhul oli vähem arvutamist.

Tähtsusetu komponendi kriteerium osutub eriti praktiliseks juhul kui on vaja otsustada, milliste määramatuse komponentidega tuleb arvestada ning millistega mitte.

4.2. Mõõtemääramatus omavahel sõltuvuses olevate sisendsuuruse korral

4.2.1. Kovariatsioon ning korrelatsioon

Oletame, et meil on mõõdetud kahte suurust, x ja y. Kui meil on N suuruste paari x_i; y_i ($i = 1 \ldots N$), siis kovariatsioon x ja y vahel on:

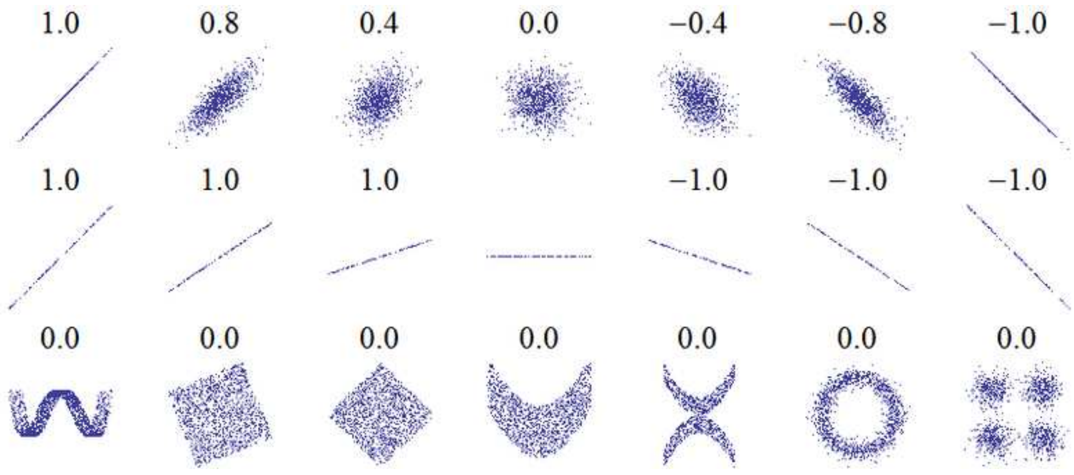
$$\mathrm{cov}(x;y) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - m(x)\right)\cdot\left(y_i - m(y)\right)}{n-1}, \tag{4.10}$$

kus $m(x)$ ja $m(y)$ on vastavad keskväärtused.

Korrelatsioon r (tähistatakse ka R, $R(x;\ y)$) on defineeritav kovariatsiooni ning standardhälvete kaudu:

$$r(x;y) = \frac{\mathrm{cov}(x;y)}{\sqrt{s(x)\cdot s(y)}} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - m(x)\right)\cdot\left(y_i - m(y)\right)}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - m(x)\right)^2\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - m(y)\right)^2\right]}}, \tag{4.11}$$

Korrelatsioon on normeeritud kovariatsioon, kuna ta saab olla vahemikus [–1; 1]. Korrelatsioon $r = \pm 1$ tähendab, et tegemist on funktsionaalse seosega, kus puudub varieeruvus. Kui $r > 0$, on tegemist positiivse korrelatsiooniga, st x kasvades kasvavad üldiselt ka y väärtused. Kui $r < 0$, on tegemist negatiivse korrelatsiooniga, st x kasvades üldiselt y väärtused kahanevad. Kui $r \approx 0$, siis korrelatsioon puudub ning suurused x ja y on omavahel sõltumatud. Joonisel (4.2) on toodud erinevate punktipilvede kohta käivad korrelatsioonid.



Joonis 4.2. Erinevate seoste vahelised korrelatsioonid.

Näide 4.5. Näited sõltuvatest suurustest:

- Inimese pikkus ning kehamass on omavahel sõltuvad, kuigi mitte päris üks-ühele.

- Ilmajaama erinevatel kõrgustel mõõdetud tuule kiiruse väärtused on omavahel tugevasti positiivselt korreleeruvad.

- Negatiivselt korreleeruvad suuruseid on temperatuur ning suhteline õhu niiskus – kui suletud süsteemis temperatuuri tõsta, siis suhteline õhu niiskus kahaneb, ning vastupidi.

- Uuringud on näidanud, et on negatiivne korrelatsioon televiisori vaatamisele kulunud aja ning hinnete vahel, st mida rohkem vaatad televiisorit, seda kehvemad hinded

- Haridustaseme ning vanglas oldud aja vahel on negatiivne korrelatsioon, st mida madalam haridustase, seda pikem on vanglas oldud aeg. Sama väite teine sõnastus ütleb, et nendel inimestel, kes on vanglas pikemalt olnud, on madalam haridustase.

Korrelatsiooniga r on tihedasti seotud ka determinatsioonikoefitsient r^2. Matemaatiliselt sisaldab determinatsioonikoefitsient vähem infot, sest ta ei näita, kas on tegemist positiivse või negatiivse korrelatsiooniga. Determinatsioonikoefitsient näitab, kui suur osa y varieeruvusest on ära kirjeldatud lineaarse trendiga $y = ax + b$.

4.2.2. Mõõtetulemuse mõõtemääramatus omavahelise sõltuvusega sisendsuuruste korral

Jätkame peatükis 3.8. alustatud mõõtemääramatusega, kuid jätame ära eelduse, et tegemist on sõltumatute suurustega.

Toome uuesti valemi (3.26) mõõtemääramatuse ruudu arvutamise kohta:

$$u^2(Y) = \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\right)^2 u^2(X_1) + 2 \cdot r \cdot \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2} u(X_1)u(X_2) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\right)^2 u^2(X_2), \quad (4.12)$$

ning korrelatsioonikordaja suuruste x ja y vahel:

$$r(x;y) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - m(x)) \cdot (y_i - m(y))}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - m(x))^2\right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{N}(y_i - m(y))^2\right]}}. \quad (4.13)$$

Üldistatult on valem (4.12) N sõltumatu sisendsuuruse korral (sama valem, mis (4.4)):

$$u^2(Y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_i}\right)^2 u^2(X_i), \quad (4.14)$$

Kui nüüd sõltumatuse eeldusest loobuda, siis lisanduvad valemisse (4.14) korrelatsiooni liikmed:

$$u^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_i} \right)^2 u^2(X_i) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^{N} r(x_i; x_k) \frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_i} \frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_k} u(X_i) u(X_k), \qquad (4.15)$$

siin kahekordse summamärgiga summeeritakse kõikide liikmepaaride omavahelistest korrelatsioonidest tulenevad määramatuse komponendid, seega kui on N komponenti, siis korrelatsiooni liikmeid on $\frac{N \cdot (N-1)}{2}$. Tavaliselt on arvestatav korrelatsioon siiski ainult mõne üksiku komponendi vahel ning ülejäänud korrelatsioonid on võrdsed nulliga.

Näide 4.6. Vaatame kolme suurust *A*; *B*; *C*. Keskmised väärtused on *A* = 5; *B* = 7; *C* = 12; standardmääramatused on *u*(*A*) = 0,3); *u*(*B*) = 0,5); *u*(*C*) = 0,4); parameetrite vahelised korrelatsioonid on *r*(*A*; *B*) = 0,2; *r*(*A*; *C*) = 0,9; *r*(*B*; *C*) = –0,4.

$D = A + B + C$
$\mathrm{E} = A - C$

Leia suuruste D ja *E* standardmääramatused nii arvestades korrelatsioone kui ka ilma.

Lahendus:

Leiame *D* standardmääramatuse kõigepealt ilma korrelatsioone arvestamata, st valemi (4.15) esimese poole:

$$u1^2(D) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial D}{\partial \overline{x}_i} \right)^2 u^2(X_i) = \left(\frac{\partial D}{\partial A} \right)^2 u^2(A) + \left(\frac{\partial D}{\partial B} \right)^2 u^2(B) + \left(\frac{\partial D}{\partial C} \right)^2 u^2(C) =$$
$$= 1^2 \cdot 0{,}3^2 + 1^2 \cdot 0{,}5^2 + 1^2 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}5$$
$$u1(D) = \sqrt{0{,}5} = 0{,}71$$

Leiame *D* standardmääramatuse korrelatsioonide osa, st valemi (4.15) teise poole:

$$u2^2(D) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^{N} r(x_i; x_k) \frac{\partial D}{\partial \overline{x}_i} \frac{\partial D}{\partial \overline{x}_k} u(X_i) u(X_k) =$$
$$= 2 \cdot \left[r(A;B) \frac{\partial D}{\partial A} \frac{\partial D}{\partial B} u(A)u(B) + r(A;C) \frac{\partial D}{\partial A} \frac{\partial D}{\partial C} u(A)u(C) + r(B;C) \frac{\partial D}{\partial B} \frac{\partial D}{\partial C} u(B)u(C) \right] =$$
$$= 2 \cdot [0{,}2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 + (-0{,}4) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4] =$$
$$= 2 \cdot [0{,}03 + 0{,}108 - 0{,}08] = 2 \cdot 0{,}058 = 0{,}116$$

Leiame *D* standardmääramatuse, arvestades korrelatsioone:

$$u(D) = \sqrt{u1^2(D) + u2^2(D)} = \sqrt{0{,}5 + 0{,}116} = \sqrt{0{,}616} = 0{,}78$$

Suuruse D määramatuse arvutuses nägime, et korrelatsioonist tingitud liige võib olla oluline, ning on võimalus, et korrelatsiooni tõttu tuleb koondmääramatus väiksem kui ilma korrelatsiooni arvestamata.

Leiame E standardmääramatuse kõigepealt ilma korrelatsioone arvestamata, st valemi (4.15) esimese poole:

$$u1^2(E) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial E}{\partial \overline{x}_i} \right)^2 u^2(X_i) = \left(\frac{\partial E}{\partial A} \right)^2 u^2(A) + \left(\frac{\partial E}{\partial C} \right)^2 u^2(C) =$$
$$= 1^2 \cdot 0{,}3^2 + 1^2 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}25$$
$$u1(E) = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$$

Leiame E standardmääramatuse korrelatsioonide osa, st valemi (4.15) teise poole:

$$u2^2(E) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^{N} r(x_i; x_k) \frac{\partial E}{\partial \overline{x}_i} \frac{\partial E}{\partial \overline{x}_k} u(X_i) u(X_k) =$$
$$= 2 \cdot \left[r(A;C) \frac{\partial D}{\partial A} \frac{\partial D}{\partial C} u(A) u(C) \right] =$$
$$= 2 \cdot \left[0{,}9 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \right] = 2 \cdot \left[-0{,}108 \right] = -0{,}216$$

Leiame E standardmääramatuse, arvestades korrelatsioone:

$$u(E) = \sqrt{u1^2(E) + u2^2(E)} = \sqrt{0{,}25 + (-0{,}216)} = \sqrt{0{,}034} = 0{,}18$$

Seega nägime suuruste D ja E standardmääramatuste arvutusest, et korrelatsioonide arvestamine võib liitmääramatust nii suurendada kui vähendada, sõltudes nii osatuletiste märkidest kui ka korrelatsiooni märkidest.

Näide 4.7. Tavaliselt on digitaalsetel termomeetritel võimalik valida näidud nii Celsiuse (C) kui ka Farenheidi (F) kraadides. Kuna info pärineb samalt temperatuuri sensorilt, on korrelatsioon nende näitude vahel üks. Teame, et nende skaalade vaheline seos on järgmine:

$$F = C \cdot x + 32 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{F - 32}{C}$$

Meid huvitab, kui täpselt me saame hinnata koefitsienti x kümnest mõõtmisest. Mõõtmistulemused on järgmised:

C = 22; 15; 21; 20; 23; 24; 21; 21; 18; 17.
F = 72; 60; 70; 67; 74; 76; 70; 70; 64; 62.

Lahendus: Mathcad failis „C_ja_F_temperatuuri_omavaheline_seos.mcd“

4.3. Näidisülesanded mõõtemääramatuse arvutamise kohta

Kordame üle põhivalemid:

Efektiivne vabadusastmete arv on:

$$\nu_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i) \right)^4}{\nu_i}}, \tag{3.17}$$

N sõltumatu sisendsuuruse liitmääramatus on:

$$u(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_i} \right)^2 u^2(X_i)} \ . \tag{4.4}$$

N sõltuva sisendsuuruse liitmääramatus on:

$$u^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_i} \right)^2 u^2(X_i) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^{N} r(x_i; x_k) \frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_i} \frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_k} u(X_i) u(X_k), \tag{4.15}$$

<u>Näide 4.8.</u> Modelleerimise käigus saadi, et ühte protsessi kirjeldab järgmine funktsioon:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{21 \cdot x^8}{3 \cdot x^5} + c \cdot x \cdot x^2; & 0 < x < 1 \\ 0; & \text{mujal} \end{cases}$$

Leia:
- koefitsient *c*;
- jaotusfunktsioon kohal x_1 ($0 < x_1 < 1$);
- keskväärtus;
- mediaan;
- standardhälve;
- tõenäosus, et sündmus satuks piirkonda (–0,3; 0,7).

Lahendus:

Alustuseks tuleks seda funktsiooni lihtsustada:

$$\frac{21 \cdot x^8}{3 \cdot x^5} + c \cdot x \cdot x^2 = 7x^3 + c \cdot x^3 = (7 + c) \cdot x^3$$

Koefitsiendi *c* leiame lähtudes normeerimistingimusest:

$$\int_0^1 (7+c) \cdot x^3 dx = (7+c) \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{(7+c) \cdot 1}{4} \equiv 1 \ \Rightarrow \ 7 + c = 4 \ \Rightarrow c = -3$$

Asendades c väärtuse funktsiooni, saame jaotustiheduseks:

$$f(x)=\begin{cases}4\cdot x^3; & 0<x<1\\ 0; & \text{mujal}\end{cases}.$$

Jaotusfunktsioon kohal x_1 on:

$$F(x_1)=\int_0^{x_1}4\cdot x^3dx=4\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^{x_1}=x_1{}^4.$$

Keskväärtus on:

$$m(x)=\int_0^{x_1}x\cdot 4\cdot x^3dx=4\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{4}{5}=0{,}8.$$

Mediaan on x-i väärtus, mille korral jaotusfunktsioon on võrdne 0,5-ga:

$$F(x_1)=x_1{}^4\equiv 0{,}5\ \Rightarrow\ x_{med}=\sqrt[4]{0{,}5}=0{,}84.$$

Standardhälbe arvutamiseks leiame kõigepealt x^2 keskväärtuse:

$$m(x^2)=\int_0^{x_1}x^2\cdot 4\cdot x^3dx=4\cdot\frac{x^6}{6}\Big|_0^1=\frac{4}{6}=0{,}667.$$

$$s(x)=\sqrt{m(x^2)-(m(x))^2}=\sqrt{0{,}667-0{,}64}=0{,}163.$$

NB: selle koha peal on oluline, et x_2 keskväärtus leitakse vähemalt kolme tüvinumbriga, muidu on ümardamise viga liiga suur.

Tõenäosus, et sündmus satuks piirkonda (–0,3; 0,7) on arvutatav jaotusfunktsioonide vahena nendes punktides:

$$P(-0{,}3<x<0{,}7)=F(0{,}7)+F(-0{,}3)=0{,}7^4-0=0{,}24.$$

Siin F(–0,3) on võrdne nulliga seetõttu, et kuna piirkonnas (–∞; 0) on jaotustihedus võrdne nulliga, siis on ka jaotusfunktsioon selles piirkonnas võrdne nulliga.

<u>Näide 4.9.</u> Praktikumis kaaluti klotsi massi 5 korda kaaluga, mille kalibreerimistunnistusel on kirjas, et piirkonnas 50 g on tema laiendmääramatus usaldusnivool 95 % (k = 2) 0,3 g. Kaalu resolutsioon on 0,1 g. Mõõtmistulemused on järgmised: m = {45,5; 45,9; 45,8; 45,2; 45,6} g.

Leia:
- klotsi massi parim hinnang;
- klotsi massi A-tüüpi määramatus;
- klotsi massi B-tüüpi määramatus;
- klotsi massi liitmääramatus;
- klotsi massi vabadusastmete arv;
- klotsi massi laiendmääramatus usaldusnivool 95 %

Lahendus:

Teeme tabeli, kus on mõõtmistulemused, mõõtmistulemuste erinevus keskväärtusest ning selle ruut.

nr	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x - m(x)}$	$\boldsymbol{(x - m(x))^2}$
1	45,5	–0,1	0,01
2	45,9	0,3	0,09
3	45,8	0,2	0,04
4	45,2	-0,4	0,16
5	45,6	0	0
sum	228,0	0	0,30
keskmine	**45,6**		

Klotsi massi parim hinnang on tema aritmeetiline keskmine:

$$m(x) = 45{,}6 \text{ g.}$$

Klotsi massi A-tüüpi määramatuse arvutamiseks leiame kõigepealt standardhälbe:

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - m(x))^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{0{,}30}{4}} = 0{,}27 \text{ g.}$$

$$u_A(x) = \frac{s(x)}{\sqrt{N}} = \frac{0{,}27}{\sqrt{5}} = 0{,}12 \text{ g.}$$

Klotsi massi B-tüüpi määramatus kujuneb tema kalibreerimisel hinnatud määramatusest ning resolutsioonist. Kalibreerimisel saadi laiendmääramatuseks 0,3 g katteteguriga 2, seega kalibreerimise standardmääramatus on 0,3 / 2 = 0,15 g.

$$u_B(x) = \sqrt{0{,}15^2 + \left(\frac{0{,}1}{\sqrt{12}}\right)^2} = \sqrt{0{,}0225 + 0{,}0008} = 0{,}15 \text{ g.}$$

Seega selgus, et resolutsiooni määramatus oli ebaoluline.

Klotsi massi liitmääramatus on:

$$u_C(x) = \sqrt{u_A(x)^2 + u_B(x)^2} = \sqrt{0{,}12^2 + 0{,}15^2} = \sqrt{0{,}144 + 0{,}0225} = 0{,}19 \text{ g.}$$

Klotsi massi vabadusastmete arv on:

$$\nu(x) = \frac{{u_C}^4(x)}{\frac{{u_A}^4(x)}{\nu_A} + \frac{{u_B}^4(x)}{\nu_B}} = \frac{0{,}19^4}{\frac{0{,}12^4}{4} + \frac{0{,}15^4}{\infty}} = 25{,}1 \Rightarrow 25\,.$$

Studenti kattetegur usaldusnivool 95 % vabadusastmete arvu 25 jaoks on vastavalt tabelile:

$$k_{95\%;25} = 2{,}06$$

Klotsi massi laiendmääramatus usaldusnivool 95 % on:

$$U(x) = k \cdot u_C(x) = 2{,}06 \cdot 0{,}19 = 0{,}39 \text{ g.}$$

<u>Näide 4.10.</u> Jää tiheduse mõõtmiseks puuriti jääst 10 puursüdamikku ning mõõdeti nende pikkused ning massid. Kuna jää paksus erines mõõtekohtades oluliselt, siis oli ka pikkuste ja masside erinevus suur, samas oli massi ja pikkuse vaheline korrelatsioon väga kõrge: R = 0,95. Mõõtmisandmetest saadi puursüdamiku pikkuse keskväärtuseks 20,4 cm ning koondmääramatuseks 9,4 cm; puursüdamiku läbimõõdu keskväärtuseks saadi 4,96 cm koondmääramatusega 0,12 cm ning puursüdamiku massi keskväärtuseks saadi 366 g koondmääramatusega 130 g. Silindri ruumala on:

$$V = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot H}{4}$$

Leia:

- jää tiheduse parim hinnang;
- jää tiheduse määramatus, korrelatsiooni arvestamata;
- jää tiheduse määramatus, arvestades korrelatsioone.

Lahendus:

Jää tiheduse parim hinnang on:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4 \cdot m}{\pi \cdot d^2 \cdot H} = \frac{4 \cdot 366}{\pi \cdot 4{,}96^2 \cdot 20{,}4} = 0{,}929\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.$$

Jää tiheduse määramatus, korrelatsiooni arvestamata on:

$$u_1(\rho) = \rho \cdot \sqrt{\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot u(d)}{d}\right)^2 + \left(\frac{u(H)}{H}\right)^2} =$$

$$= 0{,}929 \cdot \sqrt{\left(\frac{130}{366}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 0{,}12}{4{,}96}\right)^2 + \left(\frac{9{,}4}{20{,}4}\right)^2} =$$

$$= 0{,}929 \cdot \sqrt{0{,}126 + 0{,}002 + 0{,}212} = 0{,}929 \cdot 0{,}583 = 0{,}542\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.$$

Puursüdamiku läbimõõdu määramatus osutus ebaoluliseks.

Korrelatsioon on ainult massi ning pikkuse vahel, teised korrelatsioonid võib võtta nulliks. Jää tiheduse määramatuse korrelatsiooni arvestav komponent on:

$$u_2(\rho)^2 = 2 \cdot r(m;H) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial m} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial H} \cdot u(m) \cdot u(H) =$$

$$= 2 \cdot 0{,}95 \cdot \rho^2 \cdot \frac{u(m)}{m} \cdot \frac{-u(H)}{H} = -1{,}9 \cdot 0{,}929^2 \cdot \frac{130}{366} \cdot \frac{9{,}4}{20{,}4} = -0{,}268 \left(\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)^2.$$

Jää tiheduse määramatus on korrelatsiooni arvestades:

$$u(\rho) = \sqrt{\left(u_1(\rho)\right)^2 + \left(u_2(\rho)\right)^2} = \sqrt{0{,}294 - 0{,}268} = \sqrt{0{,}026} = 0{,}16\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.$$

Seega korrelatsiooni arvestamine vähendas määramatust üle 3-e korra.

Näide 4.11. Risttahuka kujuline akvaarium on täidetud veega. Akvaariumi põhja mõõtmed on 20,23 cm ja 30,18 cm, veekihi paksus on 38,17 cm. Kõik akvaariumi mõõdud mõõdeti metalljoonlauaga, mille põhiviga oli 1 mm, akvaariumi erinevatest punktidest10 korda. Akvaariumi põhja lühema külje standardmääramatuseks oli 2,0 mm, põhja pikema külje standardmääramatuseks aga 3,0 mm. Veekihi paksust mõõdeti 20 korda ning saadi standardmääramatuseks 5 mm. Hinnata akvaariumis oleva vee ruumala koos laiendmääramatusega usaldusnivool 95 %.

Lahendus:
Leiame alustuseks akvaariumi ruumala:

$$V = a \cdot b \cdot h = 20{,}23 \cdot 30{,}18 \cdot 38{,}17 = 23304{,}365\ \text{cm}^3 = 23{,}304365\ \text{dm}^3$$

Leiame nüüd kõigi kolme külje standardmääramatused ning vastavad vabadusastmete arvud:

$$u_A(a) = \frac{0{,}2\ \text{cm}}{\sqrt{10}} = 0{,}063\ \text{cm}$$

$$u_B(a) = \frac{0{,}1\ \text{cm}}{\sqrt{3}} = 0{,}058\ \text{cm}$$

$$u_C(a) = \sqrt{(u_A(a))^2 + (u_B(a))^2} = \sqrt{0{,}063^2 + 0{,}058^2} = 0{,}086\ \text{cm}$$

$$\nu_{eff}(a) = \frac{u^4(a)}{\dfrac{u_A{}^4(a)}{\nu_A} + \dfrac{u_B{}^4(a)}{\nu_B}} = \frac{0{,}086^4}{\dfrac{0{,}063^4}{10-1} + \dfrac{0{,}058^4}{\infty}} = 9 \cdot \frac{0{,}086^4}{0{,}063^4} = 9 \cdot 3{,}47 = 31{,}3 = 31$$

$$u_C(b) = \sqrt{(u_A(b))^2 + (u_B(b))^2} = \sqrt{\left(\frac{0{,}3}{\sqrt{10}}\right)^2 + 0{,}058^2} = \sqrt{0{,}095^2 + 0{,}058^2} = 0{,}111\ \text{cm}$$

$$\nu_{eff}(b) = \frac{u^4(b)}{\dfrac{u_A{}^4(b)}{\nu_A} + \dfrac{u_B{}^4(b)}{\nu_B}} = \frac{0{,}111^4}{\dfrac{0{,}095^4}{10-1} + \dfrac{0{,}058^4}{\infty}} = 9 \cdot \frac{0{,}111^4}{0{,}095^4} = 9 \cdot 1{,}86 = 16{,}8 = 16$$

$$u_C(h) = \sqrt{(u_A(h))^2 + (u_B(h))^2} = \sqrt{\left(\frac{0{,}5}{\sqrt{20}}\right)^2 + 0{,}058^2} = \sqrt{0{,}112^2 + 0{,}058^2} = 0{,}126\ \text{cm}$$

$$\nu_{eff}(h) = \frac{u^4(h)}{\dfrac{u_A{}^4(h)}{\nu_A} + \dfrac{u_B{}^4(h)}{\nu_B}} = \frac{0{,}126^4}{\dfrac{0{,}112^4}{20-1} + \dfrac{0{,}058^4}{\infty}} = 19 \cdot \frac{0{,}126^4}{0{,}112^4} = 19 \cdot 1{,}60 = 30{,}4 = 30$$

Leiame osatuletised:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = b \cdot h = \frac{V}{a}; \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = a \cdot h = \frac{V}{b}; \qquad \frac{\partial V}{\partial h} = a \cdot b = \frac{V}{h}$$

Leiame akvaariumi ruumala standardmääramatuse:

$$u(Y) = \sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_1}\right)^2 u^2(X_1) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_2}\right)^2 u^2(X_2)}$$

$$u(V) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial V}{\partial \overline{x}_i}\right)^2 u^2(X_i)} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2 u^2(a) + \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)^2 u^2(b) + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 u^2(h)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{V}{a}\right)^2 u^2(a) + \left(\frac{V}{b}\right)^2 u^2(b) + \left(\frac{V}{h}\right)^2 u^2(h)} = V \cdot \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2 + \left(\frac{u(h)}{h}\right)^2} =$$

$$= 23304 \cdot \sqrt{\left(\frac{0{,}086}{20{,}23}\right)^2 + \left(\frac{0{,}111}{30{,}18}\right)^2 + \left(\frac{0{,}126}{38{,}17}\right)^2} = 23304 \cdot \sqrt{0{,}0043^2 + 0{,}0037^2 + 0{,}0033^2} =$$

$$= 23304 \cdot 0{,}0066 = 153 \text{ cm}^3$$

Leiame nüüd ruumala efektiivsete vabadusastmete arvu:

$$\nu_V = \frac{u^4(V)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i^{\,4}(V)}{\nu_i}} = \frac{0{,}0066^4}{\frac{0{,}0043^4}{31} + \frac{0{,}0037^4}{16} + \frac{0{,}0033^4}{30}} = 71{,}08 = 71$$

Seega on ruumala mõõtmise efektiivsete vabadusastmete arv $\nu_R = 71$.

Leiame nüüd ruumala laiendmääramatuse usaldusnivool 95 %, kasutades Studenti testi. Tabelis 3.1 on Studenti *t*-kordaja väärtus kohal $\nu = 50$ ja usaldusnivool 95 % $k_{50,95\%} = 2{,}01$, kohal $\nu = 100$ ja usaldusnivool 95 % $k_{100,95\%} = 1{,}984$, seega kohal $\nu = 71$ ja usaldusnivool 95 % võime võtta kordajaks $k_{50,95\%} = 2{,}00$ seega on akvaariumi ruumala laiendmääramatus $U(V)$ usaldusnivool 95 %

$$U(V) = u(V) \cdot k = 153 \ c\text{m}^3 \cdot 2{,}00 = 306 \ c\text{m}^3 = 0{,}31 \ d\text{m}^3.$$

Seega on akvaariumi ruumala $V = 23{,}30 \text{ dm}^3$ ning tema laiendmääramatus $U(V) = 0{,}31 \ d\text{m}^3$.

<u>Näide 4.12.</u> Optikas on valgustatus arvutatav valemist

$$E = \frac{I}{R^2}\cos\alpha$$

Valgusti intensiivsus olgu I = 100 W ± 2 W; Uuritava pinna ning valgusti vaheline kaugus on mõõdetud 10 korda, keskmiseks kauguseks R = 1 m, standardhälve on $s(R)$ = 3 cm, mõõdulindi põhiviga on ±1 mm. Valgusti ja valgustatava pinna vaheline nurk on mõõdetud nurgamõõtjaga α = 30°, nurgamõõtja põhiviga on ±1 °. Hinnata pinna valgustatus E koos laiendmääramatusega usaldusnivool 95 %.

Lahendus:

Leiame kõigepealt valgustatuse E keskväärtuse:

$$E = \frac{I}{R^2}\cos\alpha = \frac{100\ \text{W}}{(1\ \text{m})^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 86{,}603\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Leiame nüüd mõõdetud suuruste standardhälbed:

$$I = 100\ \text{W};\quad u(I) = \frac{2\ \text{W}}{\sqrt{3}} = 1{,}15\ \text{W}$$

$$R = 1\ \text{m};\quad u(R) = \sqrt{\left(\frac{0{,}03\ \text{m}}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}001\ \text{m}}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{0{,}00009 + 0} = 0{,}0095\ \text{m}$$

$$\alpha = 30\ ° = \pi/6;\quad u(\alpha) = \frac{1\ °}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{180\cdot\sqrt{3}} = 0{,}0101$$

Leiame nüüd osatuletised:

$$\frac{\partial E}{\partial I} = \frac{1}{R^2}\cos\alpha = E\cdot\frac{1}{I} = E\cdot\frac{1}{100\ \text{W}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial R} = \frac{-2I}{R^3}\cos\alpha = E\cdot\frac{-2}{R} = E\cdot\frac{-2}{1\ \text{m}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = \frac{-I}{R^2}\sin\alpha = E\cdot\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = E\cdot(-\tan 30°) = E\cdot\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

Paneme nüüd standardmääramatused ning osatuletised valemisse (4.4). Kuna igas osatuletiste liikmes on sees komponent E, siis toome selle ette:

$$u(E) = E \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{100} \cdot 1{,}15\right)^2 + \left(\frac{-2}{1} \cdot 0{,}0095\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \cdot 0{,}0101\right)^2} =$$

$$= 86{,}6\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \cdot \sqrt{0{,}000132 + 0{,}000361 + 0{,}000034} = 86{,}6\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \cdot 0{,}023 = 1{,}99\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

Seega on valgustatuse standardmääramatus 2,0 W/m^2.

Leiame nüüd erinevate määramatuse komponentide efektiivsed vabadusastmete arvud, kasutades valemit (3.17):

Valgusti intensiivsuse määramatus ning nurga mõõtmise määramatus on B-tüüpi määramatused, seega nende vabadusastmete arvu võib võtta lõpmatuks. Kauguse mõõtmine sisaldas nii A- kui ka B-tüüpi määramatust, leiame nüüd kauguse mõõtmise vabadusastmete arvu:

$$\nu_R = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i{}^4(y)}{\nu_i}} = \frac{0{,}0095^4}{\frac{0{,}0095^4}{9} + \frac{0}{\infty}} = 9$$

Leiame nüüd valgustatuse efektiivsete vabadusastmete arvu:

$$\nu_R = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i{}^4(y)}{\nu_i}} = \frac{0{,}023^4}{\frac{0{,}0115^4}{\infty} + \frac{0{,}019^4}{9} + \frac{0{,}0058^4}{\infty}} = 9 \cdot \frac{0{,}023^4}{0{,}019^4} = 9 \cdot 2{,}15 = 19{,}3 = 19$$

Seega on valgustatuse efektiivsete vabadusastmete arv $\nu_R = 19$.

Leiame nüüd valgustatuse laiendmääramatuse usaldusnivool 95 %, kasutades Studenti testi. Tabelis 3.1 on Studenti *t*-kordaja väärtus kohal ν = 19 ja usaldusnivool 95 % $k_{19,95\%}$ = 2,09, seega on valgustatuse laiendmääramatus $U(E)$ usaldusnivool 95 %

$$U(E) = u(E) \cdot k = 1{,}99\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \cdot 2{,}09 = 4{,}159 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = 4{,}2 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

Seega on valgustatus $E = 86{,}6\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ ning tema laiendmääramatus $U(E) = 4{,}2 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

5. Määramatuse allikad

5.1. Mõõtevahendi näidiku lahutusvõimest tingitud määramatus

Numbernäidikuga mõõtevahendi abil saadud näidu (mõõdise) määramatuse üheks allikaks on näidiku lahutusvõime. Isegi kui korduvnäidud on identsed, ei ole kordustäpsust iseloomustav määramatus null, sest sisendsignaalil on piirkond, milles see mõõtevahendi näidik esitab ühe ja sama näidu. Kui näidiku lahutusvõime on δx, milleks on näidu muutus (numbersamm), kus kõige madalama järgu number muutub ühe sammu võrra, siis sisendsignaal, mis annab näidu x, võib võrdse tõenäosusega jääda vahemikku $[x - \delta x/2;\ x + \delta x/2]$. Sisendsignaal on seega kirjeldatav ristkülikjaotusega, mille laius on δx ja standardhälve on $\sigma(x) = \delta x / \sqrt{12}$. See tähendab, et iga näidu x standardmääramatus on $u(x) = \sigma(x) = 0{,}29\ \delta x$. Näiteks numbernäidikuga voltmeetril, mille näidiku väikseim tähendusega näit on 1 mV, on näidiku lahutusvõime δx = 1 mV tõttu x standardmääramatus $u(x)$ = 0,29 mV.

5.2. Mõõtevahendi suikeulatusest tingitud määramatus

Näidiku lahutusvõimega analoogset määramatust võib põhjustada ka mõõtevahendi suikeulatus, milleks on mõõtesuuruse väärtuse (stiimuli) kasvamise või kahanemise maksimaalne piirkond δx ilma et muutuks mõõtevahendi näit. Ettenägelik mõõtja täheldab mõõtesuuruse järgnevate väärtuste kasvamise või kahanemise suunda ja teeb sellest tulenevalt vastava paranduse. Kuid suikeulatuse suund pole alati jälgitav, sest mõõtevahendis võib mingi tasakaalupunkti ümber esineda ka peidetud mõõtehälbeid ning saadav näit (mõõdis) sõltub suunast, millega see punkt lõpuks saavutati. Mõõtevahendi suikeulatust suurendatakse mõnikord sihilikult, vältimaks näidu muutumist sisendsuuruse pisimuutuste korral. Kui suikeulatusest tingituna on võimalikud mõõtevahendi näidud vahemikus $[x - \delta x/2;\ x + \delta x/2]$, siis meelevaldse näidu x standardmääramatus $u(x) = 0{,}29\ \delta x$, analoogselt lahutusvõimest tingitud määramatusele.

5.3. Tulemuste ümardamisest tingitud määramatus

Ka andmetöötlusega seotud arvväärtuste (mõõdiste, mõõtetulemuste) ümardamine või nende murdosa ärajätmine võib olla määramatuse allikaks, sest ümardatud arv esitab mõõtesuuruse arvväärtust alati ligikaudselt. Mida rohkem on arvul tähendusega kohti, seda suurem on suhteline täpsus. Mõnikord on põhjust tähenduslike kohtade arvu vähendada ümardamise teel. Etteantud ümardamissammu $\{\delta x\}$ korral on meelevaldne arvväärtus $\{x\}$ vahemikus
$[\{x\} - \{\delta x\}/2;\ \{x\} + \{\delta x\}/2]$ ning standardmääramatus $u(x) = 0{,}29\ \delta x$, analoogselt lahutusvõimest tingitud määramatusele.

5.4. Mudelisse sissetoodud sisendväärtused ja nende määramatused

Mudelisse sisestatud sisendsuuruse hinnang x ei pruugi olla määratud antud mõõtmisega, vaid võib olla saadud mujalt. Sageli on sellel väärtusel ka mingil viisil hinnatud määramatus. See võib olla antud standard- või laiendmääramatusena. Kui määramatus on antud vahemiku poollaiusena, st laiendmääramatusena U, millel on etteantud usaldatavustase, siis on sellega antud ka katteteguri k väärtus. Sel juhul on hinnangu x standardmääramatus $u(x)$ avaldatav seosest $u(x) = U(x)/k$. Alternatiivselt võib olla antud sisendsuuruse hinnangu x ülemine ja alumine rajaväärtus (näiteks vahemik (b; a), aga info määramatuse kohta võib puududa. Viimasel juhul peaks nende rajaväärtuste kasutajad rakendama oma teadmisi, hindamaks määramatust, lähtudes sisendsuuruse iseloomust, allika usaldusväärsusest, mõõtepraktikas selliste suuruste jaoks kasutatavatest määramatustest jne. Lisainfo puudumisel eeldatakse tavaliselt, tegemist on ühtlase jaotusega ülemise ja alumise rajaväärtuse vahel, standardmääramatusega $u(x) = (b - a)/\sqrt{12}$. Kui aga on alust arvata, et rajade lähedased väärtused on vahemiku keskosaga võrreldes vähemtõenäolised, on lihtsuse mõttes tihti põhjendatud kasutada kolmnurkjaotust standardmääramatusega $u(x) = (b - a)/\sqrt{24}$.

5.5. Dokumendist võetud suuruse määramatus

Kui sisendsuuruse X hinnangu x määramatus on antud eksperimentaalse standardhälbe ja teatud arvu korrutisena, st laiendmääramatusena U, siis võib standardmääramatuse $u(x)$ väärtuseks võtta laiendmääramatuse U ja katteteguri k jagatise $u = U/k$. See olukord on tavaline, kui andmed on võetud tootja spetsifikatsioonist, kalibreerimistunnistuselt, käsiraamatust või mõnest muust allikast. Näiteks, kui kalibreerimistunnistusel on kirjas, et 200 g kirjeväärtusega etalonvihi mass m_{200} = 199,99993 g on esitatud laiendmääramatusega U = 0,66 mg kolme standardhälbe tasemel, siis selle etalonvihi massi standardmääramatus on $u(m_{200}) = U/k$ = (0,66 mg)/3 = 0,22 mg.

Hinnagu x määramatus ei pruugi tingimata olla esitatud standardhälbe mingil kordsel kujul, nagu eespool mainitud. Selle asemel võib suuruse hinnangu määramatus olla antud näiteks 90, 95 või 99 protsendilise usaldatavustasemega vahemiku poollaiusena. Kui pole teisiti täpsustatud, siis võib eeldada, et vahemiku arvutamisel kasutati normaaljaotust ja x standardmääramatuse võib taastada, jagades esitatud jaotuse normaaljaotuse jaoks kehtiva teguriga. Sel juhul teguri k_p väärtused, mis vastavad eeltoodud kolmele vahemikule on: 1,64; 1,960 ja 2,576. Näiteks on kalibreerimistunnistusel kirjas, et 10 Ω kirjega etalontakisti takistus 23 °C juures on R_E = 10,000584 Ω ± 152 μΩ usaldusnivool 99 %. Sel juhul on takisti kalibreerimisel saadud tulemuse standardmääramatuseks: $u(R_E)$ = (152 μΩ)/2,58 = 59 μΩ.

5.6. Kontrollitava suuruse määramatus

Sageli mõõdetakse suurusi kontrollitavatel töötingimustel, eeldades, et need tingimused mõõteprotseduuri sooritamise jooksul ei muutu. Näiteks võib objekti panna mõõtmiseks õlivanni, mille temperatuuri hoitakse kindlates piirides termostaadi abil. Õli temperatuuri vannis võib mõõta objekti iga mõõtmise ajal. Kui aga temperatuur vannis perioodiliselt muutub, ei tarvitse objekti hetkeline temperatuur võrduda õli temperatuuriga. Õli temperatuuri määramatuse arvutamine peaks sel juhul algama õli temperatuuri teadaolevast või eeldatavast muutumistsüklist vannis. Temperatuuri muutumist võib mõõta tundliku termopaariga varustatud termomeetri abil ning, kui see pole võimalik, siis võib temperatuuri lähendi tsüklile tuletada reguleerimisprotsessi iseloomustavate üldiste teadmiste põhjal. Analoogne olukord on ka mõõteprotseduuri teostamisel nõutavate töötingimuste täitmiseks mõõteruumis ümbritseva õhu temperatuuri reguleerimisel ja hoidmisel. Niisugustel juhtudel võib mõõtesuuruse mõõtmise mudelisse sisestatava temperatuuri X hinnangu x standardmääramatuse $u(x)$ hindamine toimuda, arvestades temperatuurikontrolli süsteemi toimimise tulemusena tekkivat temperatuuri tsüklilisest muutumisest tulenevat arkussiinustemperatuurijaotust.

5.7. Mõõtemeetodist tulenev määramatus

Kõige raskemini hinnatav määramatuse komponent tuleneb mõõtemeetodist, eriti kui meetod annab teistest teadaolevatest analoogsetest meetoditest väiksema määramatusega tulemusi. Tõenäoliselt on olemas ka teisi seni tundmatuid või mingil viisil seni veel mõõtepraktikas mittekasutatavaid meetodeid, mis annavad samavõrd kehtivaid, kuid süstemaatiliselt erinevaid tulemusi. See viib aprioorse tõenäosusjaotuseni. Isegi kui meetodist tulenev määramatus osutub valdavaks komponendiks, piirdub kogu info selle määramatuse hindamiseks siiski vaid teadmistega füüsikalise maailma kohta. Sama mõõtesuuruse väärtuse hindamine erinevatel meetoditel, kas samas või eri laborites või ka samal meetodil eri laborites, võib sageli anda väga väärtuslikku infot mõõtemeetodi kohta. Mõõtemeetodi kohta tehtud hinnangute usaldusväärsuse kontrollimiseks ja süstemaatiliste efektide (mõõtehälvete) väljaselgitamiseks on üldiselt kasulik teostada tööetalonide ja etalonainete laboritevahelist vahetust.

5.8. Mõõteobjektist tulenev määramatus

Paljude mõõteprotseduuride korral, eriti aga mõõtevahendite kalibreerimisel, leiab aset tundmatu objekti võrdlus tuntud, lähedaste karakteristikutega etaloniga, et mõõta või kalibreerida tundmatut objekti. Niisuguste objektide näitena võib mainida kaaluvihtide või takistite komplekte, pikkusotsmõõte, termomeetreid ja suure puhtusega aineid. Antud juhul ei ole kasutatavad mõõtemeetodid enamasti ebasoodsalt mõjutatud mõjuritest tekitatud efektidest, kuna tundmatu objekt ja etalon reageerivad ühesugusel (sageli ennustataval) viisil efektidest esilekutsutud muutustele.

Mõnes praktilises mõõtesituatsioonis on aga objekti valikul ja selle käsitlemisel siiski palju suurem osa. Enamasti kehtib see looduslike materjalide keemilise analüüsi korral. Erinevalt kontrollitava homogeensusega tehismaterjalist koosnevast objektist (tööetalonist, etalonainest või sertifitseeritud etalonainest) on looduslikud materjalid sageli mittehomogeensed. Nimetatud mittehomogeensus kutsub esile tavaliselt kaks täiendavat määramatuse komponenti. Esimese hindamiseks on vaja määrata, kui adekvaatselt esindab valitud objekt keemiliselt analüüsitavat lähtematerjali. Teise komponendi hindamiseks on aga tarvis määrata ulatus, mil määral võrreldava tundmatu objekti mitteanalüüsitavad koostisosad mõjutavad mõõtmise tulemust.

Mõnel juhul teeb eksperimendi hoolikas kavandamine võimalikuks objekti valikust tingitud määramatuse hindamise. Tavaliselt on siiski mõõteobjektist tuleneva määramatuse hindamiseks vajalikud mõõtja (analüüsija) kogemustest ammutatud oskused ja teadmised ning kogu hetkel kättesaadav info selle tundmatu mõõteobjekti kohta.

5.9. Erinevate määramatustega mõõtetulemuste käsitlus (kaalutud keskmiste meetod)

Ühe ja sama suuruse Y_i mitmel erineval viisil (meetodil) või erinevates laborites mõõtmisel saadud tulemuste y_j (j = 1, 2, ..., J) liitmääramatused $u(y_j)$ võivad üksteisest oluliselt erineda. Võttes kõik saadud mõõtetulemused aluseks mõõtesuuruse Y_i väärtuse parima hinnangu saamiseks on, eriti väikese mõõtetulemuste arvu (J = 2, 3 või 4) korral, õiglase hinnangu saamiseks põhjust arvestada väiksema määramatusega mõõtetulemusi rohkem kui suurema määramatusega mõõtetulemusi. Seega on erinevate määramatustega mõõtetulemuste ühise keskväärtuse hinnanguks sobiv kasutada kaalutud keskmist:

$$y_0 = \frac{\sum_{j=1}^{J} g_j \cdot y_j}{\sum_{j=1}^{J} g_j}, \qquad (5.1)$$

kus g_j on mõõtetulemuse y_j kaal.

Et anda väiksema määramatusega mõõtetulemustele suuremat kaalu kui tulemustele, millel on suurem määramatus, valime mõõtetulemuste kaalud pöördvõrdelisteks dispersioonidega, st antud juhul liitmääramatuste ruutude pöördväärtustega, saades

$$g_j = \frac{1}{u^2(y_j)}. \qquad (5.2)$$

Lähtudes seosest (5.2), saame kaalutud keskmise y_0 liitmääramatuse $u(y_0)$ arvutada võrdusest

$$u(y_0) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{J} g_j}}. \qquad (5.3)$$

Näide 5.1. Ühte ja sama keha kaaluti kõigepealt võrdlusmeetodil võrdõlgse kaaluga ning siis otsehinnangmeetodil elektronkaaluga. Mõõtetulemused olid järgmised:

m_1 = 2,0039 g liitmääramatusega $u(m_1)$ = 0,1 mg (võrdõlgne kaal)

m_2 = 2,0052 g liitmääramatusega $u(m_2)$ = 0,2 mg (elektronkaal)

Mõõtetulemuste m_1 ja m_2 kaalud g_1 ja g_2 on valemi (5.2) järgi:

$$g_1 = \frac{1}{u^2(m_1)} = \frac{1}{(0{,}1\ \text{mg})^2} = 100\ \text{mg}^{-2}$$

$$g_2 = \frac{1}{u^2(m_2)} = \frac{1}{(0{,}2\ \text{mg})^2} = 25\ \text{mg}^{-2}$$

Kaalutud keskmine on seose (5.1) järgi

$$m_0 = \frac{\sum_{j=1}^{J} g_j \cdot m_j}{\sum_{j=1}^{J} g_j} = \frac{100 \cdot 2{,}0039 + 25 \cdot 2{,}0052}{100 + 25} = \frac{100 \cdot 2{,}0039 + 25 \cdot 2{,}0052}{100 + 25} = \frac{250{,}52}{125} = 2{,}00416\ \text{g}.$$

Kaalutud keskmise liitmääramatuse saame võrdusest (5.3):

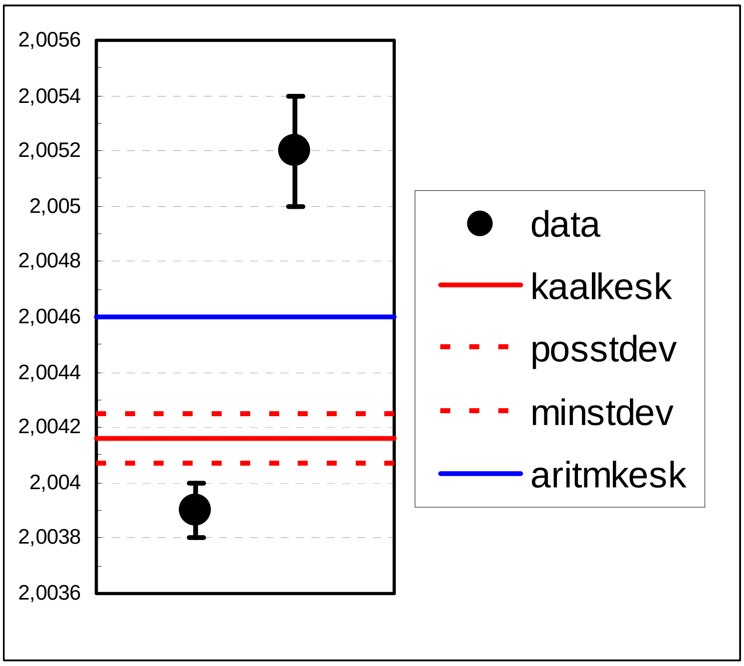
$$u(m_0) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{J} g_j}} = \frac{1}{\sqrt{100 + 25}} = \frac{1}{\sqrt{125\ \text{mg}^{-2}}} = 0{,}089\ \text{mg} = 0{,}000089\ \text{g}.$$

Antud juhul on mõõtesuuruse m_0 väärtuse parim hinnang

m_0 = 2,00416 g, standardmääramatusega $u(m_0) = 0{,}00009$ g

Nagu näitest selgub, ei mõjusta suurema määramatusega mõõtetulemus m_2 = 2,0052 g lõpptulemust m_0 = 2,0042 g kuigi palju. Lihtne aritmeetiline keskmine $\overline{m} = 2{,}0046$ g oleks siiski antud olukorras märksa halvem keha massi hinnang kui väiksema määramatusega mõõtetulemus m_1 = 2,0039 g üksinda.

Kõik senitehtu on tehniline arvutamine. Nüüd vaatame antud näidet sisulise külje pealt. Teeme joonise, kanname sinna nii mõõtetulemused kui ka standardmääramatused ning kaalutud keskmise koos standardmääramatusega ning aritmeetilise keskmise (allolev joonis). Näeme, et kogu see tehtud arvutus ei oma füüsikalist mõtet, kuna võime üsna kindlalt väita, et üks mõõtmistest ei saa olla õige, sest nende standardmääramatused ei kattu ja isegi kaks korda laiemad ehk 95 % usaldusnivool olevad laiendmääramatused ei kattu. Seega tuleb kaalutud keskmise arvutamise asemel hakata uurima, kummas mõõtemeetodis võiks viga olla.



Joonis. Mustaga on toodud mõlema mõõtmise tulemus koos liitmääramatusega; punane pidev joon on kaalutud keskmine, punased katkendjooned on kaalutud keskmine ± kaalutud keskmise liitmääramatus; sinine joon on mõlema mõõtmise aritmeetiline keskmine.

Näide 5.2. Nihikuga eseme pikkuse mõõtmine. Nihiku laiendmääramatus usaldusnivool 95 % on vastavalt kalibreerimistunnistusele 0,084 mm. Ülesandeks on purskkaevus oleva raudtoru läbimõõdu mõõtmine. Vee ja seega ka toru temperatuur on 5 °C. Toru mõõdeti 9-st erinevast kohast. Toru läbimõõduks saadi keskmiselt 125,124 mm ning standardmääramatuseks saadi 0,048 mm. Mis oleks selle toru läbimõõduks temperatuuril 21 °C ning vastav laiendmääramatus usaldusnivool 95 %?

Mõõtetulemus l_{20} sõltub meil temperatuuril 5 °C võetud nihiku näidust l_5 ning raua soojuspaisumis-tegurist C_{Fe}, seega on mõõtmise mudel:

$$l_{21} = f(\, l_5;\, C_{Fe})$$

ning vastav valem on

$$l_{21} = l_5 + C_{Fe} \cdot \Delta T \cdot l_5 = l_5 \cdot (1 + C_{Fe} \cdot \Delta T) \qquad (5.4)$$

Wikipedia andmetel on raua soojuspaisumistegur temperatuuri 25 °C piirkonnas C_{Fe} = 11,8 μm m^{-1} K^{-1}. Kuna tundub, et tegemist on väga väikese efektiga, vaatame kogu soojuspaisumise efekti kui ühte määramatuse komponenti, ehk C_{Fe} = 0, $u(C_{\mathrm{Fe}})$ = 11,8 μm m^{-1} K^{-1} = 0,0118 mm m^{-1} K^{-1}

Leiame osatuletised:

$$\frac{\partial l_{21}}{\partial l_5} = 1 + C_{Fe} \cdot \Delta T = 1 + 11{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot (21 - 5) = 1{,}0001888 = 1\,,$$

$$\frac{\partial l_{21}}{\partial C_{Fe}} = l_5 \cdot \Delta T = 0{,}125124 \cdot (21 - 5) = 2{,}002 \ \mathrm{m\ K}.$$

Eeldame, et temperatuuri mõõtmise viga on teist järku väike suurus, sest kui me eeldame, et kogu temperatuuri muutusest tingitud efekt on väheoluline, siis pole oluline ka täpne temperatuuri muutus ise.

Leiame standardmääramatused:

$$u_A(l_5) = \frac{0{,}048}{\sqrt{9}} = 0{,}016 \ \mathrm{mm}$$

Kuna nihiku laiendmääramatus on antud usaldusnivool 95 %, siis selleks, et saada standardmääramatust, tuleb see läbi jagada koefitsiendiga *k*. Sellistel puhkudel eeldatakse, et kalibreerimisel oli vabadusastmete arv küllalt suur, ning Studenti koefitsient oli ligikaudu k = 2. Seega saame, et

$$u_B(l_5) = \frac{0{,}084}{2} = 0{,}042 \ \mathrm{mm}\,,$$

Nihiku näidu koondstandardmääramatus temperatuuril 5 °C on seega

$$u_C(l_5) = \sqrt{{u_A}^2(l_5) + {u_B}^2(l_5)} = \sqrt{16^2 + 42^2} = \sqrt{256 + 1764} = 44{,}7\,\mu\mathrm{m} = 0{,}0447 \ \mathrm{mm}\,, \qquad (5.5)$$

siin vahearvutustes kasutasime ühikuid μm.

Leiame nüüd toru läbimõõdu standardmääramatuse temperatuuril 21 °C:

$$u(l_{21}) = \sqrt{\left(\frac{\partial l_{21}}{\partial C_{Fe}}\right)^2 u^2(C_{Fe}) + \left(\frac{\partial l_{21}}{\partial l_5}\right)^2 u^2(l_5)} =$$

$$= \sqrt{\left(2{,}002\ \text{m} \cdot \text{K} \cdot 0{,}0118\ \text{mm} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}\right)^2 + \left(1 \cdot 0{,}0447\ \text{mm}\right)^2} = \tag{5.6}$$

$$= \sqrt{\left(0{,}0236\right)^2 + \left(0{,}0447\right)^2} = 0{,}05055 = 0{,}051\ \text{mm}.$$

Tingimus (4.5) ei ole täidetud, sest 0,0236/0,0506 = 0,47 > 0,3. Seega osutus soojuspaisumine siiski piisavalt oluliseks, ehk toodud täpsuse juures tuleb seda arvestada.

Leiame nüüd koefitsiendi k laiendmääramatuse arvutamiseks. A-tüüpi määramatuse vabadusastmete arv oli 8 ning ülejäänud määramatuse komponendid omavad lõpmatult suurt vabadusastmete arvu. Nihiku koondmääramatuse arvutusest (4.8) on näha, et põhilise osa andis B-tüüpi määramatus lõpmatult suure vabadusastmete arvuga, seega on ka efektiivsete vabadusastmete arv suur, seega võime võtta koefitsiendi k väärtuseks k = 1,96 ≈ 2.

Eeltoodud arutelu kinnituseks arvutame efektiivsete vabadusastmete arvu:

$$\nu_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^{\,4}(y)}{\nu_i}} = \frac{0{,}051^4}{\frac{0{,}0236^4}{\infty} + \frac{0{,}016^4}{8} + \frac{0{,}042^4}{\infty}} = 8 \cdot \frac{0{,}051^4}{0{,}016^4} = 825$$

$$U(l_{21}) = 2 \cdot 0{,}051 = 0{,}10\ \text{mm}.$$

Seega on toru läbimõõt temperatuuril 21 °C l_{21} = 125,12 mm, laiendmääramatusega (usaldusnivool 95 %) $U(l_{21})$ = 0,10 mm.

Lahendus 2:

Võtame kogu soojuspaisumise efekti toru läbimõõdu arvutuses arvesse, ehk C_{Fe} = 11,8 μm m^{-1} K^{-1} = 0,0118 mm m^{-1} K^{-1}, kuna tema mõju on arvatavasti väga väike, jätame temast tingitud määramatuse arvesse võtmata, ehk $u(C_{Fe})$ = 0.

Arvutame valemi (4.7) põhjal välja toru läbimõõdu temperatuuril 21 °C:

$$l_{21} = l_5 + C_{Fe} \cdot \Delta T \cdot l_5 = 125{,}124 + 0{,}0118 \cdot 16 \cdot 0{,}125124 = 125{,}124 + 0{,}024 = 125{,}148\ \text{mm}.$$

Määramatuse arvutusel on valemis (4.8) $u(C_{Fe})$ = 0, seega on

$$u(l_{21}) = \sqrt{\left(\frac{\partial l_{21}}{\partial C_{Fe}}\right)^2 u^2(C_{Fe}) + \left(\frac{\partial l_{21}}{\partial l_5}\right)^2 u^2(l_5)} =$$

$$= \sqrt{\left(2{,}002 \cdot 0\right)^2 + \left(1 \cdot 0.0437\right)^2} =$$

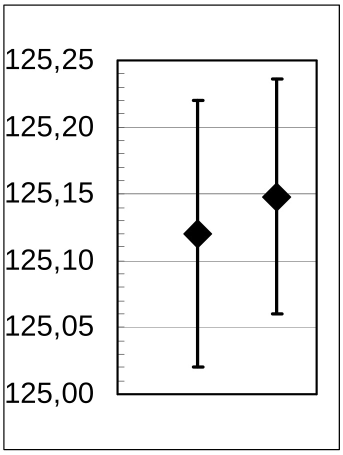
$$= \sqrt{\left(0.0437\right)^2} = 0{,}044\ \text{mm}.$$

Laiendmääramatuse arvutuses on analoogilisel põhjusel eelmise lahendusega koefitsient k = 2 ehk laiendmääramatus usaldusnivool 95 % on

$$U(l_{21}) = 2 \cdot 0{,}044 = 0{,}088 \text{ mm.}$$

Seega on toru läbimõõt temperatuuril 21 °C l_{21} = 125,148 mm, laiendmääramatusega (usaldusnivool 95 %) $U(l_{21})$ = 0,088 mm.

Mõlemal meetodil saadud toru läbimõõdud koos laiendmääramatustega on toodud alloleval joonisel.



6. Mõõtevahendid ja nende lubatud vigade normeerimine

6.1.Mõõtevahendid

Mõõtevahendid on tehnilised vahendid, millel on normeeritud metroloogilised omadused ja mis on ette nähtud mõõtmiseks.

Mõõtevahendid jaotatakse viide rühma:

1. mõõdud:
   - üheväärtuselised mõõdud, näiteks kaaluvihid
   - mitmeväärtuselised mõõdud, näiteks joonlauad, takistussalved
2. mõõteriistad (mõõturid)
3. mõõtemuundurid
4. abimõõtevahendid
5. mõõtesüsteemid või -kompleksid või seadeldised.

Mõõdud on seadeldised mingi füüsikalise suuruse reprodutseerimiseks. Näide: kaaluvihid.

Mõõteriist on mõõtevahend, mis võimaldab saada mõõteandmeid vaatlejale vahetult tajutaval kujul. Näide: osutmõõteriistad, klaas-vedelik termomeetrid.

Mõõtemuundur on ette nähtud mõõteinfo saamiseks, muundamiseks, edastamiseks ja pole varustatud vahendiga vaatlejale vahetu info saamiseks, kuna puudub näiduseadis. Näide: mõõtevõimendid. Mõõtemuundurite eriliigiks on andurid esmase mõõteinfo saamiseks. Näide: termopaar, niiskusmõõtja mahtuvuslik andur.

Abimõõtevahendid on seadmed, millega kontrollitakse mõõteriista töötingimusi, füüsikalisi mõjureid jne. Näiteks kuivelemendi elektromotoorjõu määramise töös kasutatakse normaalelementi elektromotoorjõu standardi reprodutseerimiseks, mõõtmised ise tehakse aga potentsiomeetri sisese pingeallikaga.

Mõõtesüsteem on mitmest eelpoolmainitud mõõtevahendist koostatud seadeldis.

Iga mõõtevahendi juurde kuulub pass ja rida dokumente, mis normeerivad

- mõõtepiirkonna
- mõõtediapasooni
- tundlikkuse
- mõõtevea jne.

6.1.1. Mõõtevahendi kasutamistingimused

Mõõtetulemus sõltub peale mõõtesuuruse väärtuse muu juhusliku muutuse mingil määral ka mõõtetingimustest. Mõõtevahendi kalibreerimistulemused kehtivad kalibreerimistunnistuses esitatud määramatusega ainult siis, kui mõõtevahendile mõjuvad suurused, nagu temperatuur, õhuniiskus, õhurõhk, mõõtevahendi kaldenurk horisontaalasendist, häireväljad jms on kalibreerimisel kehtinud piirides.

Mõõtevahendi kasutamistingimusi kirjeldatakse mõõtevahendi näidule mõjuvate suuruste väärtuste abil. Mõjuvate suurustena ehk mõjuritena vaadeldakse ainult neid suurusi, mille mõju mõõtetulemusele on praktiliselt võimalik märgata ja kindlaks teha. Näiteks pikkusmõõtevahenditega mõõtmisel on temperatuur mõjuv suurus, õhurõhk aga vähemõjuv suurus. Iga mõõtevahendi kohta on normdokumentidega tavaliselt kindlaks määratud neli erinevat kasutamistingimuste piirkonda Need on:

1. **Normaaltingimused** on tingimused, mis kehtestatakse mõõtevahendi metroloogiliseks kontrolliks või mõõtetulemuste vastastikuseks võrdlemiseks. Leppetingimused on kõige soodsamad mõõtetingimused ja need hõlmavad tavaliselt arvessevõetud mõjurite nimiväärtusi või nimipiirkondi. Universaalseid normaaltingimusi ei ole, need kehtestatakse individuaalselt igale mõõteriistale (temperatuuri-, niiskuse-, õhurõhu-, toitepinge vahemik jne). Näiteks etalonnormaalelemendi puhul on lubatud temperatuurivahemik (23,000 ± 0,005) °C. Tavalistel seadmetel on see 20 °C või 23 °C ümbruses ± 0,1 kuni ± 5 °C.

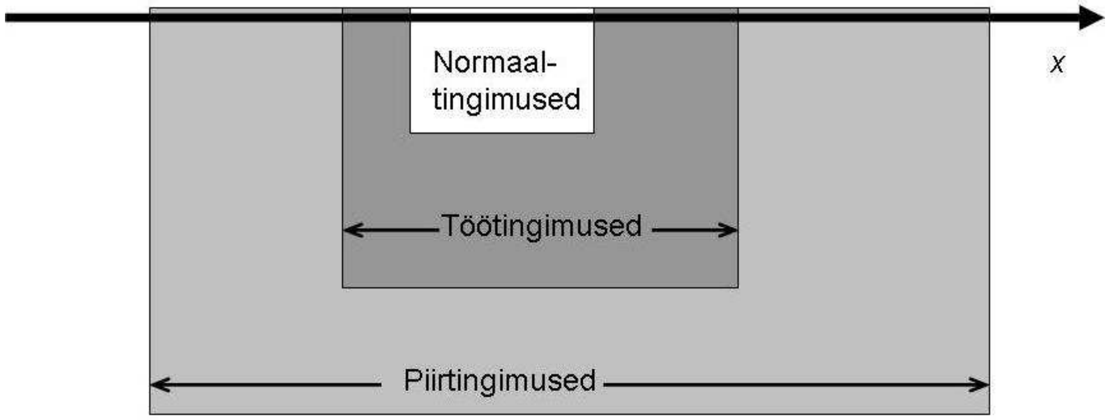
2. **Töötingimused** on mõõtevahendi kasutamistingimused, mille korral mõõtevahendi metroloogilised omadused on eeldatavalt etteantud piirides. Viimased on tavaliselt kirjeldatud mõõtevahendi spetsifikatsioonis. Tavaliselt väljendavad töötingimused mõõtesuuruste ja mõjurite etteantud väärtusi või nende hulka.

3. **Piirtingimused** on tingimused, mille iseloomustavate suuruste mõjule mõõtevahend peab vastu pidama riketeta ja metroloogiliste omaduste halvenemiseta tema edasisel kasutamisel töötingimustel. Mõõtevahendi säilitamise, transportimise ja kasutamise piirtingimused võivad üksteisest erineda. Piirtingimused võivad sisaldada mõõtesuuruste ja mõjurite piirväärtusi.

4. **Säilitamise tingimused** on tingimused, mis ei kahjusta mõõtevahendit ka pika aja jooksul.

Kolme esimese tingimustepiirkonna omavahelisi suhteid iseloomustab joonis 6.1. Säilitamise tingimused reglementeeritakse mõõtevahendi töötingimustest sõltumatult. Nad ei ole kunagi piirtingimustest laiemad ega normaaltingimustest kitsamad, aga töötingimustest võivad nad olla kitsamad või laiemad olenevalt konkreetse mõõtevahendi omadustest.

Standard ISO 1 on kehtestanud tööstuslike pikkusmõõtmiste valdkonnas universaalseks normaaltemperatuuriks 20 °C. Mõõtevahendite spetsifikatsioonidest nähtub, et normaaltemperatuuri piirkonnad sisaldavad reeglina universaalse normaaltemperatuuri väärtuse. Tüüpilised normaaltemperatuuri piirkonnad on 18 °C ... 22 °C ja 15 °C ... 25 °C.



Joonis 6.1. Mõõtevahendi kasutamistingimusi iseloomustavate piirkondade suhted.

6.1.2. Mõõtevahendi täpsusklass

Mõõtevahendi täpsusklass on mõõtevahendi üldistatud karakteristik, mis määrab tema suurima lubatava põhi- ja lisavea, aga samuti teised täpsust mõjutavad omadused vastavalt mõõteliikidele kehtestatud standardile.

Selleks üldistatud karakteristikuks võib olla:

1. Absoluutpõhiviga $\Delta_o, \Delta_o x$. Definitsiooni kohaselt on absoluutpõhiviga maksimaalselt lubatud viga normaaltingimustel. Absoluutpõhiviga on alati positiivne suurus, seejuures eeldatakse, et mõõdetav suurus satub intervalli $[-\Delta_o, +\Delta_o]$. Kasutatakse peamiselt mõõtude puhul.

Näide 6.1. Esimeses praktikumi töös kasutatava nihiku absoluutpõhiviga on 0,05 mm.

Näide 6.2. **Kaaluvihid klassifitseeritakse viide täpsusklassi**. Kasutatud klassile vastavad absoluutpõhivea väärtused leitakse vihtide komplekti tehnilisest dokumentatsioonist.

Näide 6.3. Olgu meil keha kaalumiseks vaja kolme vihti – 1 kg, 50 g ja 2 g. Kasutades selle keha kaalumiseks 3. klassi vihte, saame põhiveaks

$$\Delta_o \mathrm{m} = \sqrt{12^2 + 3^2 + 0{,}6^2} = \sqrt{153} = 12{,}4 \text{ mg}.$$

B-tüüpi määramatuse jaoks saame $u_B = \dfrac{12{,}4}{\sqrt{3}} = 7{,}2 \text{ mg}$.

Kaaludes sama keha 4. klassi vihtidega, saame põhiveaks

$$\Delta_o \mathrm{m} = \sqrt{120^2 + 30^2 + 6^2} = \sqrt{15300} = 124 \text{ mg}.$$

Märkus: <u>Kaalumisel tuleks alati kasutada võimalikult vähe, s.t võimalikult suuri vihte.</u> Viimase väite illustreerimiseks arvuta ise kaaluvihtide viga juhu jaoks, kus keha kaalumiseks kasutati 21 50 g-list ja ühte 2 g-list vihti.

2. Suhtpõhiviga $\delta_{\text{o}} \equiv \delta_{\text{o}} x = \frac{\Delta_{\text{o}} x}{x_t} 100\,\%$. Kui täpsusklass on suhtpõhivea kujul, siis on seadme esipaneelile või skaalale kantud täpsusklassi tähis (= suhtpõhivea väärtus) ringi sees. Klasside tähised on siin informatiivsed. Vene päritolu seadmetel võib olla suhtpõhivea tähiseks ka venekeelne sõna КЛАСС.

3. Taandpõhiviga $\gamma_{\text{o}} \equiv \gamma_{\text{o}} x = \frac{\Delta_{\text{o}} x}{x_{\text{norm}}} 100$ %. Rõhuva enamuse osutmõõteriistade puhul on kasutusel see karakteristik. Seadme esipaneelile või skaalale on kantud täpsusklassi tähis (= taandpõhivea väärtus) ilma ringita. Näiteks 0,5 või 1,0 jne. Kasutusel on täpsusklasside rida $(1.0;\ 1{,}5;\ 2{,}0;\ 2{,}5;\ 3{,}0;\ 4{,}0;\ 5{,}0;\ 6{,}0) \cdot 10^n$, kus $n = 1;\ 0;\ -1;\ -2;\ ...$

Näide 6.4. Oletame, et mõõtsime voltmeetriga alalispinge väärtuseks $U = 587{,}2\ \text{V}$. Voltmeetri klass olgu 0,5 ja skaala ulatus $U_{sk} = 1000\ \text{V}$. Sel juhul avaldame esmalt taandpõhivea valemist absoluutpõhivea $\Delta_o U = \frac{\gamma_o U_{sk}}{100}$ ja seejärel leiame B-tüüpi määramatuse:

$$u_B = \frac{\Delta_{\text{o}} U}{\sqrt{3}} = \frac{\gamma_{\text{o}} \cdot U_{sk}}{100\sqrt{3}} = \frac{0{,}5 \cdot 1000}{100 \cdot \sqrt{3}} = 2{,}9\ \text{V}.$$

4. Konstandid *e* ja *f* kujul e / f taandpõhivea arvutamiseks valemist:

$$\gamma_o = \left[e + f \left(\frac{x_{\text{norm}}}{x_{\text{näit}}} - 1 \right) \right], \%.$$

Näide 6.5. Oletame et mõõtsime arvvoltmeetriga vahelduvpinge efektiivväärtuseks $U_{\text{näit}} = 15{,}080\ \text{V}$. Olgu voltmeetri täpsusklass esitatud kujul 0,05 / 0,02 ja oletame, et kasutasime voltmeetri piirkonda U_{sk} = 20 V. Sel juhul avaldame esmalt taandpõhivea valemist absoluutpõhivea

$$\Delta_{\text{o}} U = \frac{\gamma_{\text{o}} U_{\text{sk}}}{100} = \left[0{,}05 + 0{,}02 \cdot \left(\frac{20}{15{,}080} - 1 \right) \right] \cdot \frac{20}{100} = 0{,}0113\,\text{V}$$

ja seejärel leiame B-tüüpi määramatuse:

$$u_{\text{B}} = \frac{\Delta_{\text{o}} U}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}0113}{\sqrt{3}} = 0{,}0065\,\text{V}.$$

NB! Mõnikord antakse analoogilise valemiga ka mõõteriista suhtpõhiviga. Seetõttu tuleb alati seadme passist lugeda, mis veaga on tegemist.

5. Absoluut- ja suhtvea kombinatsioon. Mõnikord kasutatakse ***digitaalsete mõõteriistade*** täpsusklassi esitamisel kombinatsiooni absoluutveast ja suhtelisest veast.

Näide 6.6. Digitaalse multimeetri viga antakse kujul

$$\textit{Täpsus} = 0{,}25\,\%\ \text{rdg} + 2\text{D}.$$

Selline esitusviis on praegu digitaalsete riistade puhul kõige levinum.

Sellist esitust tuleb mõista järgmiselt: Lugemi absoluutpõhiviga on 0,25 % lugemist pluss lugemi viimase kehtiva koha kaks ühikut.

Oletame, et saime multimeetriga mõõtes pinge väärtuseks U = 6,25 V. Siis absoluutpõhiviga

$$\Delta_o = \frac{0{,}25}{100} \cdot 6{,}25\ \mathrm{V} + 0{,}02\ \mathrm{V} = 0{,}016\ \mathrm{V} + 0{,}02\ \mathrm{V} \approx 0{,}04\ \mathrm{V}\ .$$

6.2. Mõõtevahendi metroloogilised omadused

6.2.1. Kostekarakteristika, tundlikkus, kostelävi, lahutusvõime, suikeulatus, kosteaeg ja moonutusvabadus

Väga paljude mõõtevahendite spetsifikatsioonides on esitatud mõõtevahendite kostekarakteristika, mida nimetatakse ka väljundkarakteristikaks. Kostekarakteristika on mõõtevahendi sisendi ehk stiimuli ja sellele vastava väljundi ehk koste vaheline sõltuvus määratletud tingimustel. Näitena võib nimetada termopaari elektromotoorjõudu temperatuuri funktsioonina. Stiimuli ja koste vahelist sõltuvust võib väljendada algebralise võrrandi, tabeli või graafiku kujul.

Samuti on mõõtevahendi ühe metroloogilise omadusena spetsifikatsioonis tavaliselt toodud mõõtevahendi tundlikkus, mis on koste muutuse ja selle tekitanud stiimuli muutuse suhe, st

$$T = \frac{\Delta x}{\Delta X},$$

kus T – mõõtevahendi tundlikkus,

Δx – mõõtevahendi näidu (mõõdise) muutus;

ΔX – mõõtesuuruse muutus

Tundlikkuse näitena võib tuua 1 µm jaotiseväärtusega mikromõõturi (ülekanne 1000:1), mille tundlikkus on 1 mm 0,001 mm kohta, sest mõõtesuuruse muutus 0,001 mm võrra tekitab näidikus viida nihke ehk lugemi muutuse 1 mm.

Mõõtevahendi tundlikkusega on tihedalt seotud kostelävi. Kostelävi on stiimuli suurim muutus, mis ei tekita koste märgatavat muutust eeldusel, et stiimul muutub aeglaselt ja monotoonselt. Mõõtevahendite kostelävi võib sõltuda näiteks sisemisest või välisest mürast, liikuvate osade vahelisest hõõrdumisest, aga ka stiimuli väärtusest.

Mõõtevahendi näidu võtmisel on väga tähtis näidiku lahutusvõime, st näidikult saadavate näitude väikseim erinevus, mida on võimalik mõttekalt eristada. Numbernäiduga näidiku korral on selleks näidu muutus, kus kõige madalama järgu number muutub ühe sammu (numbersammu) võrra. Skaala ja viidaga varustatud näidikuga mõõteriistade korral määrab lahutusvõime põhiliselt skaalajaotuse pikkus. Üldiselt on mõõteriistadel tunnetatav näidu muutus, mis on vähemalt 1/5 skaalajaotuse pikkusest.

Mõõtevahendi metroloogiliste omaduste hulka kuulub ka suikeulatus, st maksimaalne piirkond, milles sisendit ehk stiimulit võib mõlemas suunas muuta, ilma et muutuks väljund ehk koste. Mõõtesuuruste väärtusteks, mille juures määratakse mõõtevahendi suikeulatus, valitakse tavaliselt mõõtepiirkonna alumise ja ülemise piirväärtuse lähedased väärtused, vahel ka mõõtepiirkonna keskmine väärtus. Mõõtepiirkonna suikeulatust põhjustavad hõõrdumine, surnud käik, elastsed mõjud, hüsterees jms. Suikeulatus ei ole alati konstantne, eriti liikuvate osade vahelise hõõrdumise või hõõrdeteguri muutuse tõttu. Tavaliselt märgitakse mõõtevahendite spetsifikatsioonides, et suikeulatus on väiksem teatud piirväärtusest.

Mõõtevahendi reageerimisvõimet mõõdetavale suurusele iseloomustab kosteaeg. See on ajavahemik hetkest, millal sisendit ehk stiimulit etteantud määral järsult muudetakse, hetkeni, millal väljund ehk koste jõuab ja jääb etteantud piiridesse oma püsiva lõppväärtuse ümbruses. Näiteks termomeeter, hügromeeter.

Eristatakse ka veel mõõtevahendi reageerimisaega, milleks on ajavahemik hetkest, mil sisendit ehk stiimulit etteantud määral järsult muudetakse, hetkeni, mil väljund ehk koste jõuab etteantud leppeväärtuseni. Näiteks gaasianalüsaatori reageerimisaeg t_{10} vastab tasemele 10 % gaasikontsentratsiooni lõppväärtusest näidikul.

Mõningad mõõtevahendid ei ole neutraalsed mõõdetava objekti või mõõtesuuruse suhtes ja võivad neid moonutada. Seega iseloomustab mõõtevahendeid ka niisugune omadus nagu moonutusvabadus. See on mõõtevahendi võime mitte mõjutada mõõtesuuruse väärtust. Näiteks võrdõlgne kaal on moonutusvaba, aga takistustermomeeter, mis soojendab ainet, mille temperatuuri mõõtmiseks ta on ette nähtud, ei ole moonutusvaba.

6.2.2. Mõõtevahendi täpsus

Mõõtevahendite üheks kõige tähtsamaks omaduseks on täpsus. Täpsus on mõõtevahendi võime anda mõõtesuuruse väärtusele lähedasi kosteid. Sellest määratlusest ilmneb, et mõõtevahendi täpsus on kvalitatiivne mõiste, sest ta on näidu ja mõõtesuuruse väärtuse kokkulangevuse näitaja.

Kvantitatiivselt hinnatakse mõõtevahendi täpsust mõõtevahendi süstemaatilise näiduhälbe abil. See on ka mõõtevahendi näidu ja sisendsuuruse väärtuse vahe. Selles tähenduses kasutatakse ka mõistet näiduviga, mis viitab mittesoovitud kõrvalekaldele. Kuna aga mõõtesuuruse väärtust ei ole põhimõtteliselt võimalik teada, peame praktikas mõõtesuuruse väärtuse asemel kasutama selle mingit leppeväärtust. Hinnangu mõõtevahendi süstemaatilisele näiduhälbele saame mõõtevahendi kalibreerimisel, kusjuures leppeväärtuseks on etaloniga realiseeritud suuruse väärtus. Mõõdu puhul on süstemaatiliseks näiduhälbeks sellele omistatud kirjeväärtuse kõrvalekalle väärtusest, mille saame mõõdu kalibreerimisel. Mõõtevahendi süstemaatilise näiduhälbe võib esitada ka suhtelise näiduhälbe kujul, st mõõtevahendi süstemaatilise näiduhälbe ja vastava leppeväärtuse suhtena.

Nagu varem oleme tõdenud, esineb praktilistel mõõtmistel paraku alati mõõtetingimuste juhuslikke muutusi, mis põhjustavad juhuslikke muutusi saadud mõõdistes. Osa neist tulenevad välismõjudest, teine osa aga mõõtevahendi omadustest. Mõjude eristamine nõuaks väga mahukaid uurimisi. Kõikide juhuslike mõjude minimeerimiseks kordame mõõtmist korduvustingimustel ja keskmistame tulemuse. Selle ja kasutatud suuruse leppeväärtuse vahe annabki meile süstemaatilise näiduhälbe hinnangu. Mõõtevahendi võimet anda näite, mis on vabad süstemaatilisest näiduhälbest, kirjeldatakse mõõtevahendi õigsusega.

6.2.3. Stabiilsus ja triiv

Kasutaja seisukohast on tähtis, et mõõtevahend säilitaks oma metroloogilised omadused ajaliselt muutumatutena. Seda mõõtevahendi omadust nimetatakse stabiilsuseks. Stabiilsust võib iseloomustada näiteks aja kaudu, mille jooksul metroloogilised omadused muutuvad etteantud määral, või omaduse muutuse kaudu etteantud ajavahemiku jooksul. Kui mõistet mõõtevahendi stabiilsus kasutatakse mingi teise suuruse kui aja suhtes, tuleb see kasutusviis eraldi ära märkida. Mõõtevahendi metroloogiliste omaduste aeglast ajalist muutumist nimetatakse triiviks. Triivi põhjuseid võib olla mitmeid, näiteks rauast kaaluvihi roostetamine, mistõttu tema mass langeb, samuti võib takistustraadi pind reageerida mõne õhu koostisosaga ning seeläbi võib tema takistus ajapikku muutuda. Kui seadmel on liikuvaid osasid, nagu näiteks tiivikanemomeetril, siis temas olev määre võib vananeda ning hõõrdetakistus võib hakata vähehaaval suurenema.

6.2.4. Näidu korduvus- ja korratavusvõime

Et hinnata mõõtevahendi võimet anda lähedasi kosteid, kui mõõtmine toimub samadel tingimustel ja sama stiimuli korduval rakendamisel, tuleb seda mõõtevahendit katsetada korduvustingimustel. Kuna mõõtevahendi näidu korduvusvõimet saab kvantitatiivselt väljendada näitude (mõõdiste) jaotuskarakteristikute abil, siis nende katsete tulemusel saab leida korduvusstandardhälbe hinnangu s_r (vajadusel saab selle kohta täpsemalt lugeda raamatust Mõõtmised ja mõõtemääramatused, Laaneots ja Mathiesen).

6.2.5. Mõõtevahendi näiduhälbe piirid

Kõikide mõõtevahendi metroloogilistest omadustest tulenevate efektide mõju mõõtevahendile võetakse arvesse näiduhälbe piiride (piirvea, veapiiride) määramisel. Viimase all mõeldakse mõõtevahendi spetsifikatsioonis, kasutamisjuhendis, õigusaktis või mõnes muus dokumendis lubatud näiduhälbe piirväärtust. Tavakasutuses võime üldiselt oletada, et mõõtevahendi kasutamisel saadud juhuslik näiduhälve ei ületa mõõtevahendile etteantud näiduhälbe piire.

Mõnes metroloogia valdkonnas kasutatakse ka terminit *mõõtevahendi näidu taandhälve* (*taandviga*). Selle mõiste all mõeldakse näiduhälbe piiri ja mingi antud mõõtevahendi jaoks kindlaksmääratud väärtuse suhet. Kui see kindlaksmääratud väärtus on mõõtevahendi skaalanäidiku ülemine piir, siis määrab näidu taandhälve protsentides tavaliselt mõõtevahendi täpsusklassi. Näiteks mõõtevahendi näidu lubatud taandhälbe 0,1 % korral võib sellele mõõtevahendile omistada täpsusklassi 0,1.

Tingituna mõõtevahendi konstruktsioonist või teatud kasutamisalast ei pruugi positiivsed ja negatiivsed näiduhälbed olla võrdsed. Seepärast võib moodustada ka erinevad näiduhälbe piirid. Mõõtevahendi näiduhälbe piirid määratakse tavaliselt kindlaks kooskõlastuste, ettekirjutuste, riigi poolt allkirjastatud lepingute (Euroopa Liidu juhised) aga ka kalibreerimis- või taatluseeskirjade alusel. Taatluseeskirjad ja nende kehtivus on tavaliselt normitud neid väljaandva riigi tasandil. Kvantitatiivselt esitatakse näiduhälbe sümmeetrilised piirid tavaliselt kas konstantsetena mõõtesuuruse ühikutes mõõtevahendi kogu mõõtepiirkonna ulatuses, st $\Delta = a$; või näiduga proportsionaalsetena, st $\Delta = bx$; või eelneva kahe summana, st $\Delta = a + bx$.

6.3. Mõõtevahendite metroloogilise kontrolli liigid

6.3.1. Kalibreerimine ja justeerimine

Mõõtevahend kalibreeritakse mõõtetulemuse seostatuse saavutamiseks. Kalibreerimine on menetlus, mis fikseeritud tingimustel määrab kindlaks seose mõõtevahendi poolt esitatud väärtuse (näidu, mõõdise) ja etaloni abil realiseeritud suuruse vastava väärtuse vahel.

Mõistet kalibreerimine ei tohi segi ajada mõistega justeerimine. Viimane on tegevus, mille eesmärgiks on mõõtevahendi viimine kasutamiseks sobivasse töörežiimi. Justeerimine nõuab seega tehnilist vahelesegamist, mille tulemusena võib muutuda mõõtevahendi kostekarakteristika. Näiteks kaaluviht justeeritakse ettenähtud kirjeväärtuseni mahaviilimise või pliihaavli juurdelisamisega, mis tähendab kaaluvihi massi muutmist kirjeväärtuse lähedusse. Teise näitena võib nimetada takistusmõõdu justeerimist leppeväärtuseni traadi pikkuse muutmisega ja balanssiiri (ankru) justeerimist soovitud võnkesageduseni spiraalvedru jäikuse muutmisega. Mõõtevahendit saab justeerida ka tema võrdlemisel täpsema mõõdu või mõõtevahendiga, paigutades selleks mõõtevahendisse mõõtesignaali muutva lüli. Justeerimise käigus rakendatakse reguleerimisvõimalusi, mis ei tarvitse olla kättesaadavad tavakasutajale.

Justeerimist, mille käigus rakendatakse ainult mõõtevahendi kasutajale ettenähtud reguleerimisvõimalusi, nimetatakse mõõtevahendi seadmiseks. Näiteks mõõtepiirkonnaga üle 25 mm kruviku korral on enne mõõtetoimingu algust tarvis kruviku komplektis oleva seademõõdu abil sättida paika nullnäit. Mõningate teiste mõõtevahendite korral tähendab seadmine mõõtevahendi alg- ja lõppnäidu reguleerimist. Mõõtevahendil, mida seadistatakse mingis näiduseadise või skaala kindlas punktis, toimub reguleerimine mõõtevahendi komplektis oleva seademõõdu, sertifitseeritud etalonaine või muu kindlalt määratletud objekti järgi nii, et näit oleks võimalikult lähedane seadeobjekti kirjeväärtusele (nimiväärtusele).

Enne kalibreerimisele asumist tuleb kontrollida, kas tellimus näeb ette mõõtevahendi eelnevat justeerimist või mitte. Kui justeerimisvajadus on ilmne, aga ei kajastu tellimuses, tuleb küsimus kooskõlastada tellijaga. Põhjuseks on see, et justeerimisega muudetakse mõõtevahendi metroloogilisi omadusi, mille katkematu jälgimine võib olla oluline mõõtevahendi valdajale. Valdaja võib näiteks kasutada mõõtevahendit etalonina või kontrollmõõduna.

Kalibreerimise määratlusest johtub, et erinevalt mõõtevahendi justeerimisest ei toimu kalibreerimisel tehnilist vahelesegamist. Näidikuga mõõtevahendi kalibreerimisel tehakse kindlaks näidu ja mõõtesuuruse leppeväärtuse vaheline mõõtehälve, mõõtude korral aga mõõdu kirjeväärtuse ja leppeväärtuse vaheline mõõtehälve. Kalibreerimisega on tegu ka siis, kui määratakse näiteks pingemõõturi skaalategur või tehakse kindlaks skaalaga varustatud ampermeetri näitude ja voolutugevuse leppeväärtuste vahelised mõõtehälbed. Kalibreerimismenetluse erijuhtumiks on tingskaalaga varustatud mõõtevahendi gradueerimine, st mõõtesuuruse väärtustele vastavate skaalamärkide, vahel ka ainult kindlate põhimärkide, asetuse määramine näituril.

Kalibreerimisel saadud mõõtevahendi sisendsuuruse (mõõtesuuruse, stiimulite) ja väljundsuuruste (mõõdiste, kostete) vahelise sõltuvuse võib esitada tabeli, graafiku või valemi abil. Kalibreerimisel saadud arvuline tulemus – näiduhälbe hinnang koos selle hinnangu määramatusega – võimaldab kindlaks määrata mõõtevahendi näidule vastava näiduparandi, mis on võrdne näiduhälbe hinnanguga, kuid on vastandmärgiga. Kalibreerimistulemus esitatakse vastavas dokumendis, mida nimetatakse kalibreerimistunnistuseks või –aruandeks.

Kokkuvõtteks võib öelda, et kalibreerimisel määratakse kindlaks mõõtevahendilt saadud mõõtesuuruse väärtuse hinnangu (näidu, mõõdise) ja selle suuruse leppeväärtuse vaheline sõltuvus. Seega on kalibreerimine kõige olulisem metroloogilise kontrolli liik. Kalibreerimisel võib määrata ka teisi mõõtevahendi metroloogilisi omadusi, näiteks hinnata mõjurite toimet näidule jne.

Näide 6.8. Millise täpsusega peab olema valmistatud pendliga kella pendli pikkus, et ta ei valetaks ühe kuu (30 p) pärast rohkem kui ühe minuti? Pendli valem on $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Lahendus:
Avaldame pendli pikkuse l funktsioonina perioodist T ning konstantidest π ja g:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Rightarrow \frac{T^2}{4\cdot\pi^2} = \frac{l}{g} \quad \Rightarrow l = \frac{T^2\cdot g}{4\cdot\pi^2}$$

Pendli pikkus peaks olema:

$$l = \frac{T^2\cdot g}{4\cdot\pi^2} = \frac{1^2\cdot 9{,}80665}{4\cdot\pi^2} = 0{,}2484053 \text{ m} = 248{,}4053 \text{ mm}$$

Leiame nüüd pendli pikkuse tuletise perioodi järgi:

$$\frac{\partial l}{\partial T} = \frac{2T\cdot g}{4\cdot\pi^2} = \frac{2l}{T}$$

Pendli perioodi erinevust ühest sekundist tähistame ΔT-ga, väikest pendli pikkuse erinevus tähistame Δl-ga, seega

$$\Delta l = \frac{\partial l}{\partial T}\cdot\Delta T = 2l\cdot\frac{\Delta T}{T}$$

Arvutame nüüd välja suhte $\Delta T/T$:

ΔT = 1 minutit, T = 30 päeva = 30 * 24 tundi = 30 * 24 * 60 minutit = 43200 minutit, seega

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{43200} \approx 0{,}0000231\,.$$

Pendli pikkuse erinevus õigest väärtusest võib siis olla maksimaalselt:

$$\Delta l = 2l\cdot\frac{\Delta T}{T} = 2\cdot 248 \text{ mm}\cdot\frac{1}{43200} = 0{,}011 \text{ mm}$$

Seega peab olema kella pendli pikkus 248,405 mm ± 0,011 mm, et kell ei eksiks ühe kuu jooksul rohkem kui ühe minuti.

Näide 6.9. Jätkame pendli ülesannet. Vanaisa seinakell on aegade algusest saadik maha jäänud, ligikaudu 5 minutit igas kuus. Kuidas seda kella justeerida, et kell hakkaks täpsemalt käima?

Lahendus:

Seose pendli pikkuse ja kella ebatäpsuse vahel leidsime juba eelmises näites, kasutame seda, et leida pendli pikkuse ebatäpsus:

$$\Delta l = \frac{\partial l}{\partial T}\cdot\Delta T = 2l\cdot\frac{\Delta T}{T}$$

ΔT = 5 minutit, T = 30 päeva = 30 * 24 tundi = 30 * 24 * 60 minutit = 43200 minutit, l = 248,405 mm, seega

$$\Delta l = 2l\cdot\frac{\Delta T}{T} = 248\cdot\frac{5}{43200} = 0{,}057 \text{ mm}\,.$$

Kuna kell jääb maha, siis järelikult käib kell liiga aeglaselt, seega on pendel liiga pikk, järelikult tuleb pendlit lühemaks teha. Seega on meil vaja pendli pikkust lühendada ligikaudu 0,06 mm võrra. Tekib küsimus, et kuidas üldse mõõta pendli pikkust? Mehaanika teadmistest lähtuvalt, võime võtta pendli pikkuseks vahemaa pendli võnkumistelje ning pendlisüsteemi masskeskme vahel. Siit saab ka juba idee pendli pikkuse muutmiseks – tuleb nihutada pendli masskeset. Näiteks lähtudes pildil oleva kella pendli kujust – pendli pommi ülemisse otsa (et masskeset teljele lähemale viia) tuleb kinnitada üks lisaraskus. Selle lisaraskuse massi hindamiseks on tarvis teada pendli massi ning tema kaugust võnkumisteljest. Oletame, et oleme hinnanud pommi massiks 200 grammi ning joonlauaga mõõtnud, et kaugus pendli võnkumistelje ning planeeritud lisamassi asukoha vahel on 190 mm. Kasutame nüüd masskeskme arvutamise valemit (mis on identne aritmeetilise keskmise arvutamise valemiga):

$$l_{\mathrm{keskmine}} \cdot m_{\mathrm{kogu}} = l_{\mathrm{pendel}} \cdot m_{\mathrm{pendel}} + l_{\mathrm{lisamass}} \cdot m_{\mathrm{lisamass}} \,.$$

$$l_{\mathrm{keskmine}} \cdot \left(m_{\mathrm{pendel}} + m_{\mathrm{lisamass}}\right) = l_{\mathrm{pendel}} \cdot m_{\mathrm{pendel}} + l_{\mathrm{lisamass}} \cdot m_{\mathrm{lisamass}}$$

$$l_{\mathrm{keskmine}} \cdot m_{\mathrm{lisamass}} - l_{\mathrm{lisamass}} \cdot m_{\mathrm{lisamass}} = l_{\mathrm{pendel}} \cdot m_{\mathrm{pendel}} - l_{\mathrm{keskmine}} \cdot m_{\mathrm{pendel}}$$

Avaldame nüüd suuruse m_{lisamass}:

$$m_{\mathrm{lisamass}} = \cdot \frac{m_{\mathrm{pendel}} \cdot \left(l_{\mathrm{pendel}} - l_{\mathrm{keskmine}}\right)}{l_{\mathrm{keskmine}} - l_{\mathrm{lisamass}}} = \frac{200 \cdot 0{,}057}{248 - 190} = 0{,}2 \ \text{g.}$$

Seega peab pendlile lisama 0,2 g-se lisaraskuse, et ta hakkaks täpsemalt käima.

Tõenäoliselt ei olnud pendli massi hinnang 200 g kuigi täpne, seega kell ei käi ikka täpselt. Kui nüüd uuesti leida, kui palju kell valetab, on saadud tulemusest võimalik välja arvutada pendli mass ning selle kaudu täpsem lisamassi raskus.

6.3.2. Tüübikinnitus

Tüübikinnitus on toiming, mille käigus tehakse mõõtevahendi dokumentatsiooni ja tüübihindamise tulemuste alusel kindlaks, kas antud tüüpi mõõtevahendiga mõõtmisel võib eeldada etteantud täpsuse säilimist kindlaksmääratud ajavahemiku jooksul. Kõneallolev mõõtevahend peab olema gradueeritud seaduslikes ühikutes. Tüübikinnituse tulemusena väljastatakse tüübikinnitustunnistus. See sisaldab mõõtevahendi antud tüübi metroloogiliste omaduste ning vajadusel lisatingimuste, piirangute ja tähtaegade kirjelduse. Tüübikirjeldus on kohustuslik mõõtevahenditele, millele eri õigusaktis on kehtestatud taatluskohustus.

Tüübikinnituse teostaja on tavaliselt riigi poolt seadusega määratud riigiasutus (Eestis on selleks asutuseks Tehnilise Järelevalve Inspektsioon). Tüübikinnituse aluseks on tüübihindamine, st ühe või mitme sama tüüpi mõõtevahendi süstemaatiline vaatlus ja katsetamine dokumenteeritud nõuete põhjal. Tüübihindamine toimub omaette asutuses, milleks võib olla vastava mõõteliigi alal akrediteeritud mõõtelabor. Tüübihindamise tulemused dokumenteeritakse tüübihindamise aruandes.

Tüübikinnitus antakse reeglina mõõtevahendile, mille metroloogilised ja kasutusomadused vastavad kas Rahvusvahelise Legaalmetroloogia Organisatsiooni dokumentide OIML D ning soovituste OIML R või Euroopa Liidu direktiivides kehtestatud nõuetele. Kui mõõtevahend pole nimetatud dokumentides kajastatud, siis on tüübikinnituse aluseks rahvusvaheliste standardimisorganisatsioonide (Rahvusvaheline Standardimisorganisatsioon – ISO, Rahvusvaheline

Elektrotehnikakomisjon – IEC, Euroopa Standardikomitee – CEN, Euroopa Elektrotehnika Standardikomitee – CENELEC) standardite nõuded.

Mõõtevahendi tüübikinnituse taotlejaks võib olla mõõtevahendite valmistaja või tema volitatud esindaja või importija, kes esitab vastava taotluse koos tüübihindamise aruandega kompetentsele riigiorganile (tüübikinnituse teostajale). See väljastab nõuetele vastavuse korral mõõtevahendi tüübikinnitustunnistuse ja annab õiguse kanda mõõtevahendile tüübikinnitusmärk.

6.3.3. Taatlus

Taatlus on taatluseeskirjadele vastav menetlus, mis hõlmab mõõtevahendi vastavuse kontrollimist mõõtevahendi tüübikinnituses toodud metroloogilistele omadustele ja mõõtevahendi sellekohast märgistamist õiguspädeva taatlusasutuse poolt. Kontrollimisega selgitatakse, kas mõõtevahend vastab taatluseeskirjade nõuetele, eelkõige taatlushälbe piiride osas. Märgistamisega kinnitatakse vastavust. Taatluseeskiri on pädeva organi poolt kehtestatud kohustuslik tegutsemisreeglistik kindlat liiki või tüüpi mõõtevahendite taatlemiseks. Taatlus loob eelduse oletada, et taatluskehtivusaja jooksul mõõtevahendi kasutamisel tema näiduhälve jääb lubatud piiridesse.

Siinkohal meenutame, et mõõtevahendi taatlust nõutakse mõõtevahendi kasutamisel taatluskohustuslikus valdkonnas ning et taadelda saab ainult tüübikinnitust omavaid mõõtevahendeid. Taatlus on liigitatud esma- kordus- ja erakorraliseks taatluseks. Mõõtevahendi esmataatluse eesmärk on kindlaks teha, kas taatlusprotsessi seni mitteläbiteinud mõõtevahend vastab taatluseeskirjas esitatud nõuetele ja kinnitatud tüübile. Kordustaatluse eesmärk on kindlaks teha, kas mõõtevahend vastab jätkuvalt taatluseeskirjas esitatud nõuetele ja kinnitatud tüübile. Kordustaatlusele kuuluvad taatluskohustuslikes valdkondades kasutusel või kasutusvalmis olevad mõõtevahendid kindlate ajavahemike (taatluskehtivusaeg) järel. Taatluskehtivusaja jooksul tuleb taatluskohustuslikku mõõtevahendit erakorraliselt taadelda juhul, kui on tõestatud, et mõõtevahend ei vasta taatluseeskirjas või tüübikinnituses fikseeritud nõuetele, ja pärast mõõtevahendi remonti. Erakorralise taatluse algatab ja korraldab tavaliselt järelvalvet teostav vastav volitatud juriidiline isik, aga seda võib nõuda ka mõõtevahendi valdaja.

Vastandina kalibreerimisele justeeritakse taatluse käigus vajaduse korral mõõtevahendit, et viia näiduhälve taatlushälbe piiridesse. Taatluse tulemus dokumenteeritakse taatlusprotokollis, mis peab sisaldama taatluse läbinud mõõtevahendi(te) identifikatsiooni ja viidet kasutatud taatluseeskirjale. Kui taatluse käigus ilmneb, et taatluskohustuslik mõõtevahend ei vasta taatluseeskirjade nõuetele, tuleb see vastavalt märgistada ja väljastada taatlusnõuetele mittevastavuse protokoll.

Kokkuvõtteks võib öelda, et taatlus annab mõõtevahendi kasutamiskõlblikkuse kohta vastuse *jah* või *ei*, kalibreerimine aga seose kasutatud leppeväärtuse ja mõõtevahendi näidu vahel, jättes otsuse langetamise mõõtevahendi sobivuse kohta antud mõõtmiseks mõõtevahendi kasutajale.

Lisa 1. Studenti t-kordaja väärtused

Studenti t-kordaja väärtused $t_\nu(p)$ sõltuvalt vabadusastmete arvust $\nu = N - 1$ ja soovitavast usaldusnivoost p.

Vabadusastmete arv $\nu = N-1$	Osa p protsentides					
	68,27(I)	90	95	95,45(I)	99	99,73(I)
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

(I) Suuruse x jaoks, mida kirjeldab normaaljaotus keskväärtusega $\bar{x}$ ja standardhälbega σ_x, sisaldab vahemik $x \pm k\sigma_x$ p = 68,27; 95,45 ja 99,73 protsenti jaotusest vastavalt k = 1; 2 ja 3 korral.

Lisa 2. Vihtide lubatud vead

Tavaliste vihtide lubatud vead milligrammides [mg] (GOST 7328-65 järgi)

m	1. kl.	2. kl.	3. kl.	4. kl.	5. kl.
50 g	0,12	0,6	3	30	300
20 g	0,08	0,4	2	20	200
10 g	0,05	0,25	1,2	12	120
5 g	0,03	0,16	0,8	8	80
2 g	0,025	0,12	0,6	6	–
1 g	0,015	0,08	0,4	4	–

Mõõtmised ja mõõtemääramatused

Measurements and uncertainties

Erko Jakobson, PhD

MMM – Mõõtmise definitsioon

Mõõtmine on rahvusvaheliselt defineeritud kui menetluste kogum, mille eesmärgiks on mõõdetava suuruse väärtuse määramine. Teadusharu, mis käsitleb suuruste mõõtmist, nimetatakse metroloogiaks.

MMM - Õpiväljundid

Kursuse positiivsele hindele läbinud üliõpilane:

1. mõistab metroloogia põhitõdesid;
2. oskab rakendada mõõteprotseduuride juures enamkasutatavaid jaotusseaduseid;
3. teab enamlevinud mõõtmismeetodeid ning mõõtemääramatuse hindamise paremaid praktikaid;
4. suudab lihtsamatel juhtudel hinnata mõõtmisandmete, mõõteseadmete passide ja kalibreerimistunnistuste ning muude kättesaadavate andmete põhjal mõõtetulemust ning selle usaldusvahemikku;
5. tunneb ära seadmetel enamkasutatavad täpsusklassid ning oskab neid rakendada;
6. oskab kirjeldada mõõtevahendite metroloogilise kontrolli meetodeid;
7. oskab mõõtmist planeerida, koostada mõõtmiste mudelit ning seda rakendada.

MMM - Hindamismeetodid

Hindamismeetoditeks on kodused tööd, kirjalik test, grupitöö ning kirjalik eksam.

Koondhinde moodustavad:

- **kodused tööd (õpiväljundid 2, 3, 4, 5) – 10 %,**
- **test (õpiväljundid 1, 2, 4) – 20 %,**
- **grupitöö (õpiväljundid 3, 4, 7) – 10 %,**
- **eksam (õpiväljundid 1, 3, 4, 5, 6) – 60 %,**
- **preemiapunktid – xx %.**

Testis ning eksamil on ülesande juures ära toodud, palju punkte mingi ülesanne annab (kui ülesanne on jagatud mitmesse ossa, siis palju punkte mingi osa annab). Grupitööl hinnatakse töö püstitust, meetodi sobivust, tulemuse õigsust ning töö vormistust.

Kõik hindamismeetodid tuleb sooritada positiivsele hindele, s.t. peab saama üle 50 % punktidest.

Koondhinne arvutatakse vastavalt praegu kehtivale %-süsteemile ("A" = >90 % jne).

MMM - Hindamismeetodid

Test ja eksam on kirjalikud, testi vormis ning sisaldavad küsimusi nii teooria osast kui ka praktilist arvutamist. Spikerdamine on limiteeritud. Kaastudengeid, raamatuid, konspekte, arvuteid, telefone jne pole lubatud kasutada. Laual võib olla kalkulaator ning üks A4 formaadis lehekülg vabalt valitud käsitsi kirjutatud teksti, nagu valemid, definitsioonid, jne.

Testi ja eksami tulemuste kontrollimine käib lahendimatriitsi abil – on kaks varianti, kas vastus on õige või vale. Lisalehed on arvutamiseks, neis olevat infot üldjuhul ei kontrollita ega hinnata.

Grupitöö on õpitu praktiliseks kasutamiseks. Grupi suurus on kuni 5 tudengit, ülesandega mõõta mingit etteantud parameetrit käepäraste vahenditega ning vormistada mõõtmistulemus koos mõõte-määramatusega. Näiteks võiks olla füüsikahoone fuajee pikkuse mõõtmine, kasutades pikkusühikuks saabast nr 42. Grupitööst räägime täpsemalt pärast testi.

MMM - Põhikirjandus

- **Mõõtmise alused (Rein Laaneots, Olev Mathiesen, 2002, TTÜ kirjastus)**
- **An Introduction to Uncertainty in Measurements (Les Kirkup, Bob Frenkel, 2006,Cambridge University Press).**

MMM – Loenguplaan (detailsem plaan Moodles)

1, 2. Füüsikaliste mõõtmiste praktikumis nõutav mõõtetulemuste ning nende usaldusvahemiku hindamine, praktilised arvutusnäited.

8. Ülesannete lahendamine.

9. KONTROLLTÖÖ!!! (4. aprill 2011)

10. Kontrolltöö analüüs, ülesannete lahendamine. Grupitööde planeerimine.

14. Grupitööde esitamine, ülesannete lahendamine.

15. Grupitööde esitamine, ülesannete lahendamine.

Lisaks: külaliste ettekanded, Metroserdi külastus, jne.

MMM – Moodle

Paralleelselt loengutega toimub ka ainele e-toe loomine Moodle keskkonnas. Kõik esitatavad materjalid lähevad sinna üles, samuti toimub selle kaudu koduste ülesannete ning grupitööde esitamine. Kõik loengud filmitakse üles ning on samuti Moodle kaudu järelvaadatavad.

https://moodle.ut.ee

Mõõtmised ja mõõtemääramatused (LOFY.01.004)

Aine võti on “mootemaaramatus”.

MMM – Tagasiside

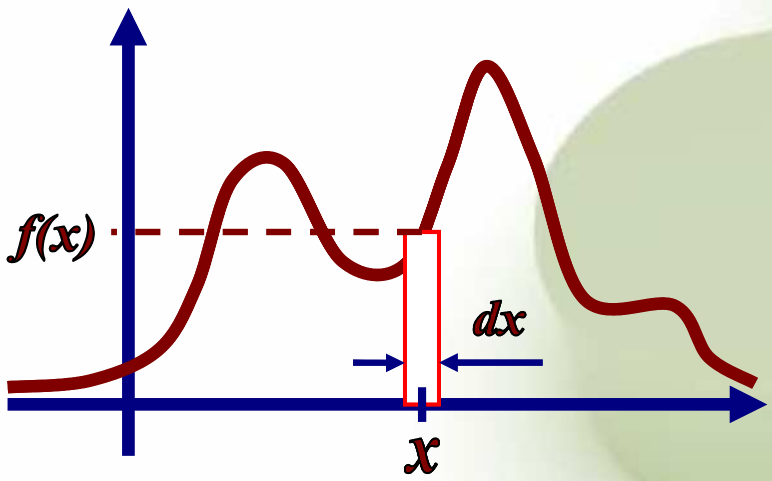
Kõiksuguste aine ja loengu kohta käivate küsimuste jaoks on Moodles foorumid. Eriti oodatud on küsimused, kui midagi jäi loengus segaseks, siis saab kas foorumis või järgmises loengus üle rääkida. Samuti on võimalik anda tagasisidet anonüümselt, selleks on ukse kõrval ümbrik, kuhu jäetud mõtteteri püüan ma võimaluste piires arvesse võtta, samuti on Moodles anonüümse tagasiside koht.

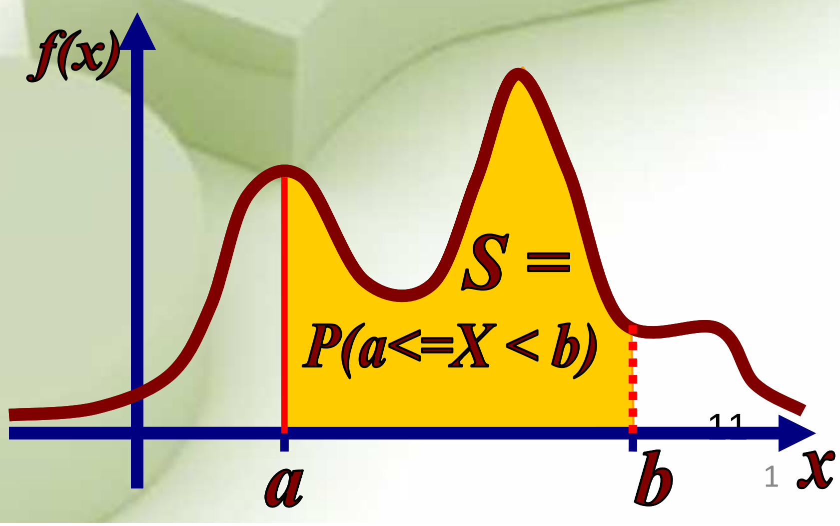
Füüsikaliste mõõtmiste praktikumis nõutav mõõtetulemuste ning nende usaldusvahemiku hindamine, praktilised arvutusnäited

Pideva juhusliku suuruse jaotustiheduseks *f*(*x*) nimetatakse funktsiooni, mis kirjeldab suhtelist tõenäosust selle juhusliku suuruse esinemiseks mingis punktis *x*. Tõenäosus, et juhuslik suurus langeb etteantud vahemikku [*a*, *b*] on võrdne integraaliga jaotustihedusest *f*(*x*) radadega a-st b-ni:

$$p(a,b) = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Jaotustihedus on normeeritud, st integraal üle kogu jaotustiheduse määramispiirkonna on võrdne ühega.





MMM – Praktikumi baasmaterjalid – Keskväärtus

Pideva juhusliku suuruse *X*, mille jaotustihedus on *f*(*x*), keskväärtuseks nimetatakse arvu

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

Keskväärtuse hindamiseks mõõtmistulemustest kasutatakse aritmeetilist keskmist:

$$\overline{x}_N = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

MMM – Praktikumi baasmaterjalid – Standardhälve

Pideva juhusliku suuruse X, mille jaotustihedus on f(x), standardhälbeks nimetatakse arvu

$$\sigma(x) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - m(x))^2 \; f(x)\, dx}$$

Standardhälbe hindamiseks mõõtmistulemustest kasutatakse empiirilist standardhälvet:

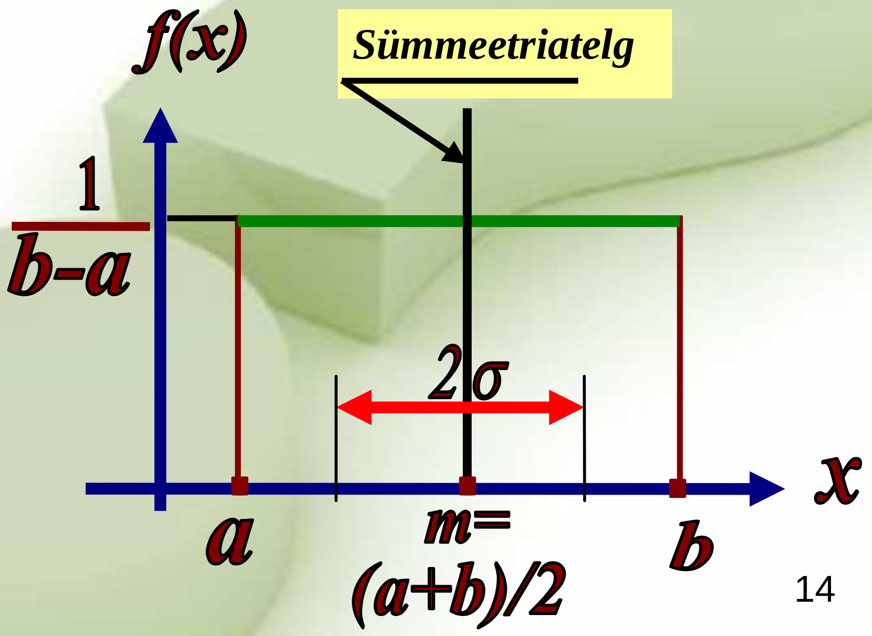
$$s_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - m(x))^2}{N - 1}} \; .$$

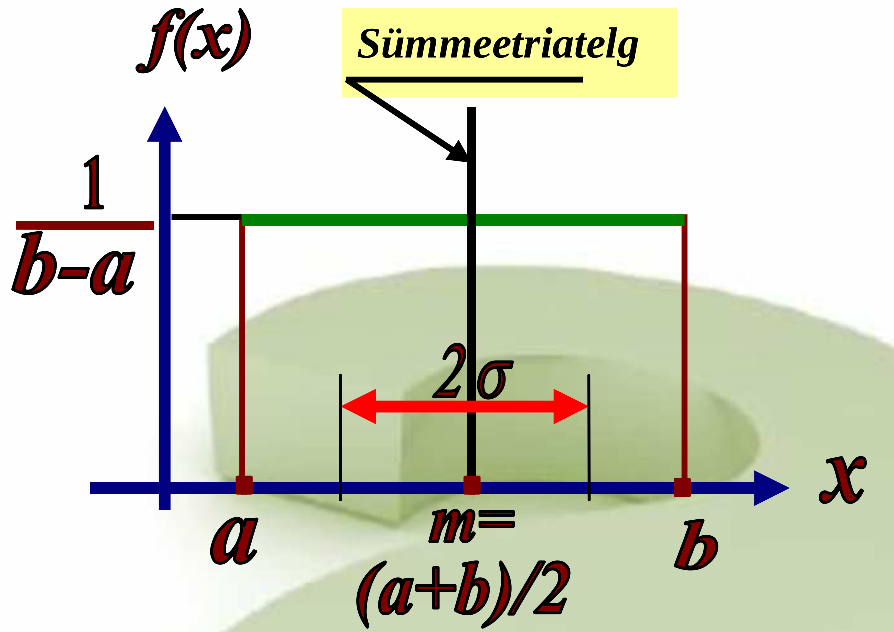
Pideva juhusliku suuruse *X* ühtlaseks jaotuseks (ka ristkülikjaotuseks) lõigul [*a*; *b*] nimetatakse jaotust, mille jaotustihedus sellel lõigul on nullist erinev konstant. Kuna peab kehtima normeerimistingimus, siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} c \cdot dx = \int_{a}^{b} c \cdot dx = c \cdot x\Big|_a^b = c \cdot (b-a) \equiv 1 \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{b-a}$$

Seega on ühtlase jaotuse jaotustihedus:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$





Ühtlase jaotuse keskväärtus on

$$m = \frac{a+b}{2}$$

See on lõigu [a; b] keskpunkt. Et tegemist on lõigu keskpunkti suhtes sümmeetrilise jaotusega, siis on ka loomulik, et keskväärtus ühtib sümmeetriakeskme asukohaga.

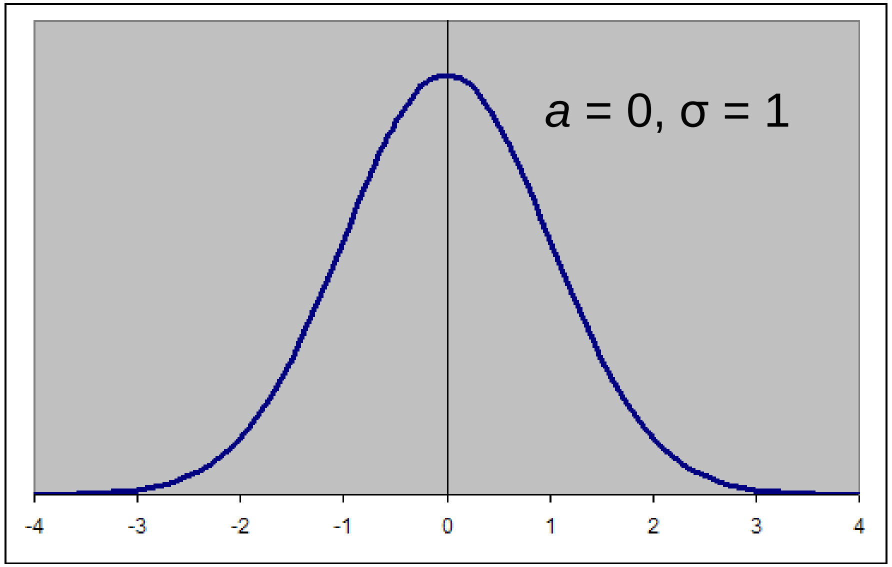
Ühtlase jaotuse standardhälve on

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b-a}{2} \approx 0.577 \frac{b-a}{2}$$

Normaaljaotus e. Gaussi jaotus on üks tähtsamaid jaotusseadusi juhuslikele suurustele, mis on jaotunud kogu reaalteljele ja võivad omandada väärtusi vahemikus (– ∞, ∞).

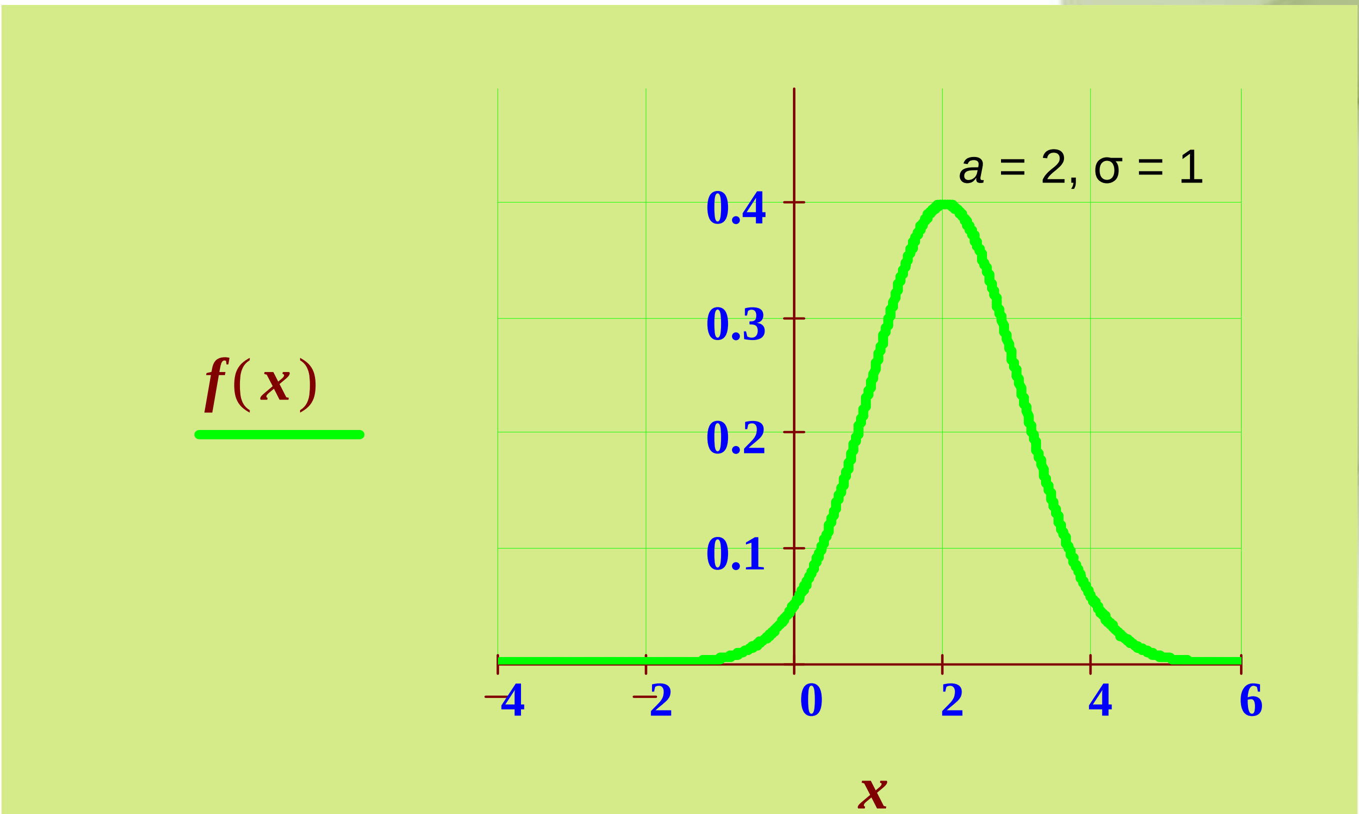
Juhusliku suuruse jaotust nimetatakse normaaljaotuseks ehk Gaussi jaotuseks, kui jaotustihedus on

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right),$$

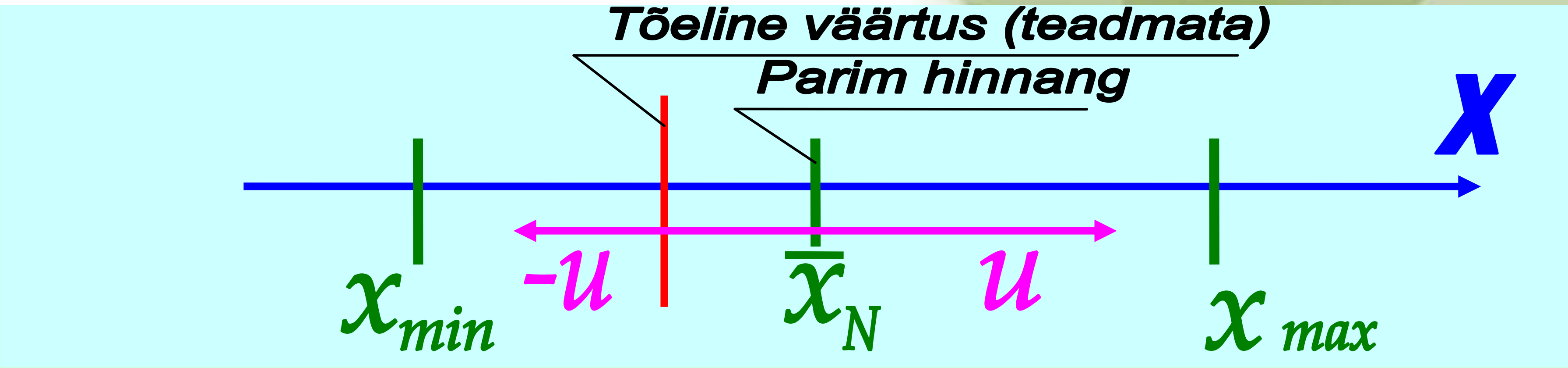


Kus *a* on fikseeritud reaalarv (võib olla nii negatiivne kui positiivne, aga võib olla ka null), ja σ > 0 on fikseeritud positiivne reaalarv. Parameeter *a* on normaaljaotuse keskväärtus ja σ on normaaljaotuse standardhälve.

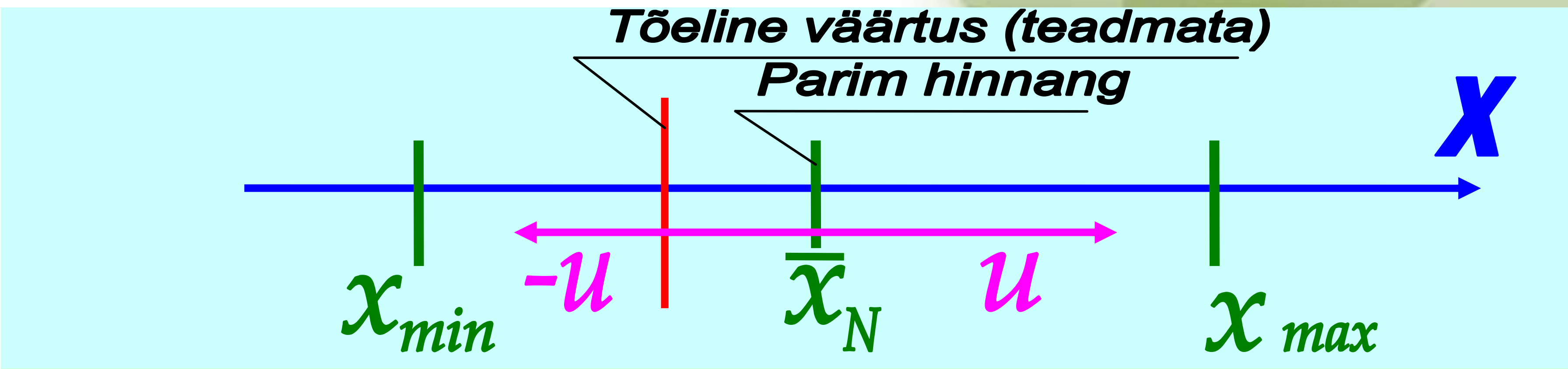
Paljud looduses toimuvad protsessid on kirjeldatavad normaaljaotuse abil: loomulik müra, transpordivoo kiirus, teatud vanuserühma meeste, naiste ja laste pikkus, vererõhk jne. Paljude sõltumatute juhuslike suuruste keskväärtuse jaotus läheneb normaaljaotusele, sõltumata nende juhuslike suuruste endi jaotusest.



Oletame, et meil on teada mõõdetava suuruse tõeline väärtus x_t (tegelikult muidugi ei ole teada, aga mõttelise eksperimendi korras võib nii oletada). Mõõtmistulemuse x ja mõõdetava suuruse tõelise väärtuse x_t vahe $\Delta x = x - x_t$ on mõõtmistulemuse viga.



Võimalike väärtuste diapasooni võib anda algus- ja lõpp-punktiga x_{min} ja x_{max}. Tavalisem ja levinum on siiski anda lõigu keskpunkt, milleks valitakse mõõdetava suuruse parim hinnang $m(x)$ ning mõõtemääramatus $u(x)$.



Mõõtemääramatus on mõõtmistäpsuse mõõduks: mida suurem on mõõtemääramatus u, seda väiksem on mõõtmistäpsus. Enamasti on mõõtmistel statistiline iseloom ning koos mõõtemääramatusega on tarvis anda ka usaldusnivoo $p(u)$, millega mõõdetav suurus satub usaldusintervalli $[m(x) \pm u(x)]$. Mõõtmine on korrektselt sooritatud, kui on leitud kolm arvu: $m(x)$, $u(x)$ ja $p(u)$.

Mõõtmisteooria ülesandeks on põhjendada ja anda eeskirjad parima hinnangu $m(x)$, mõõtemääramatuse $u(x)$ ja usaldusnivoo $p(u)$ leidmiseks.

Uue standardi järgi on oluline erinevus määramatuse ja mõõtmisvea mõistete vahel:

Määramatus ≠ viga.

Viga on mõõtmistulemuse ja mõõdetava suuruse tõelise väärtuse vahe, on seega juhusliku suuruse konkreetne realisatsioon. Kuna tõelist väärtust ei ole võimalik teada, siis pole ka viga praktikas võimalik leida.

Mõõtemääramatus peegeldab seda, et meil puuduvad täpsed teadmised mõõtesuuruse väärtuste kohta. Ka pärast teadaolevate süstemaatiliste mõõtehälvete kõrvaldamist on mõõtmistulemus ikkagi vaid mõõtesuuruse väärtuse hinnang, ja seda määramatuse tõttu, mis on tingitud juhuslikust mõõteveast ja süstemaatiliste mõõtevigade “mittetäielikust” korrigeerimisest. Mõõtmistulemus võib osutuda väga lähedaseks mõõtesuuruse väärtusele (mida pole küll võimalik täpselt teada), kuid samal ajal võib sellel mõõtmistulemusel olla üsna suur määramatus.

MMM – Praktikumi baasmaterjalid – Mõõtemääramatus

Mõõtmistulemuse määramatus koosneb paljudest komponentidest, mis jagatakse kahte tüüpkategooriasse:

<u>A- tüüpi määramatus</u>, mida hinnatakse statistiliste meetodite abil

<u>B- tüüpi määramatus</u>, mida hinnatakse muul viisil.

Nende kahe põhitüübi koosmõjul tekkiv mõõtemääramatus kannab nime

<u>Liitmääramatus</u>, ka C-tüüpi määramatus.

MMM – Praktikumi baasmaterjalid – Mõõtemääramatus A

A-tüüpi mõõtemääramatus on statistilist tüüpi mõõtemääramatus, mille suurust saab vähendada mõõtmiste arvu suurendades, kordusmõõtmisi sooritades ja tulemusi keskmistades. A-tüüpi mõõtemääramatus on tekitatud juhuslike mõjurite poolt, mis võivad kallutada mõõtmistulemust kord ühele, kord teisele poole, suurendada ja vähendada üksikmõõtmist. A-tüüpi määramatuse põhjustavad: 1) mitmesugused häirivad tegurid mõõtmisel (näit välistingimused), 2) objekti enda muutlikkus (nii valmistamise ebatäpsus kui objekti ajaline muutumine), jne.

Ühesuguselt jaotunud   sõltumatu suuruse aritmeetilise keskmise standardhälve on   korda väiksem kui üksiksuuruse standardhälve,

$$\sigma(\overline{X}_N) = \sqrt{\frac{d}{N}} \approx \frac{s_N}{\sqrt{N}}$$

seega mida suuremaks viia mõõtmiste arv, seda väiksemaks läheb aritmeetilise keskmise standardhälve.

MMM – Praktikumi baasmaterjalid – Mõõtemääramatus A

Oluline on tähele panna, et mõõtmistulemused oleksid omavahel sõltumatud. Kui on oht, et mõõtmistulemused ei ole sõltumatud, siis ei kasutata mõõteseeria aritmeetilise keskmise standardhälbe arvutamiseks mitte valemit

$$\sigma(\overline{X}_N) = \sqrt{\frac{d}{N}} \approx \frac{s_N}{\sqrt{N}}$$

vaid hoopis valemit

$$s_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}_N)^2}{N-1}}\ .$$

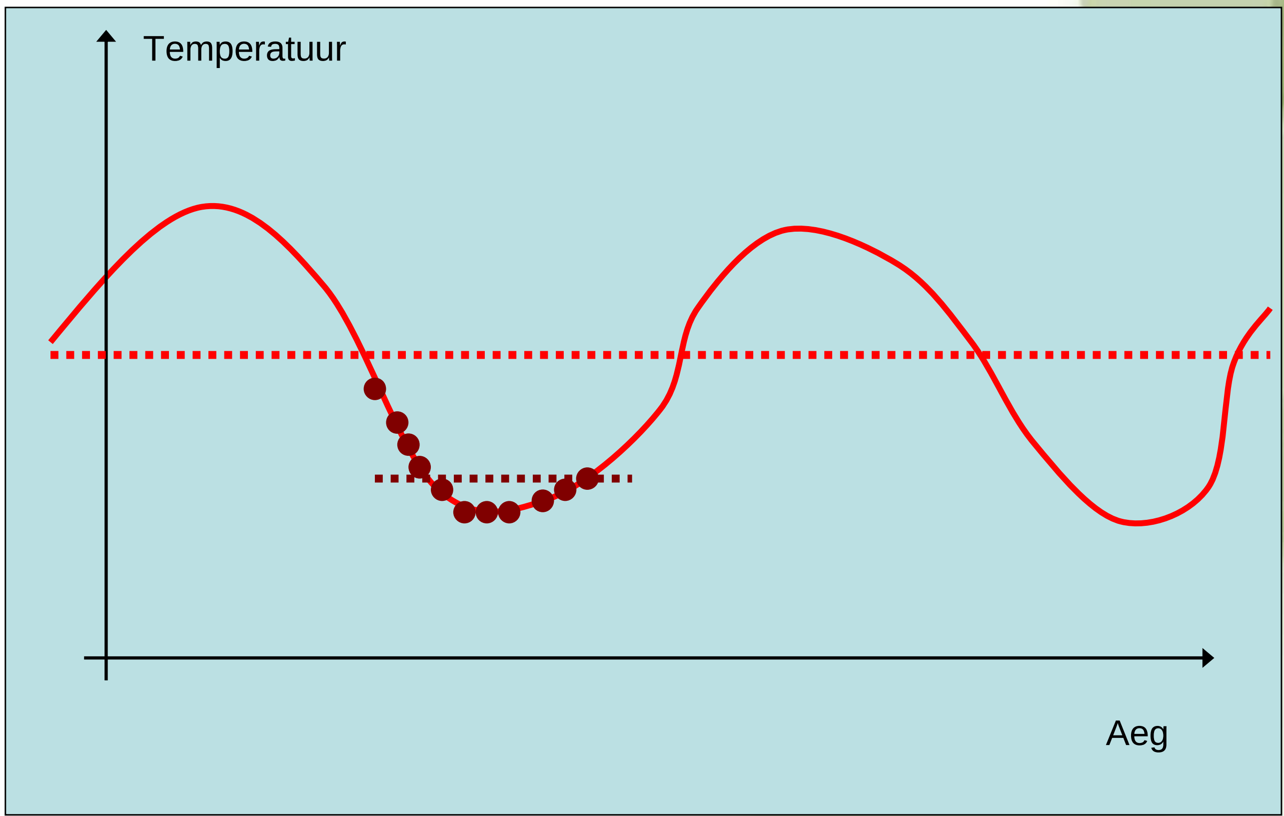
s.t. ka mõõteseeria aritmeetilise keskmise standardhälbena kasutatakse empiirilist standardhälvet.

A-tüüpi mõõtemääramatuse hindamine toimub nii nagu juhusliku suuruse standardhälbe statistilisel hindamisel. A-tüüpi mõõtemääramatuse tähis on u_A.

$$u_A = \sigma(\overline{X}_N) = \frac{s_N}{\sqrt{N}}$$

Näide 1.1. Täppiskaaludega kaalumine.

Näide 1.2. Kontrollitud temperatuuriga ruumi temperatuuri ajaline käik

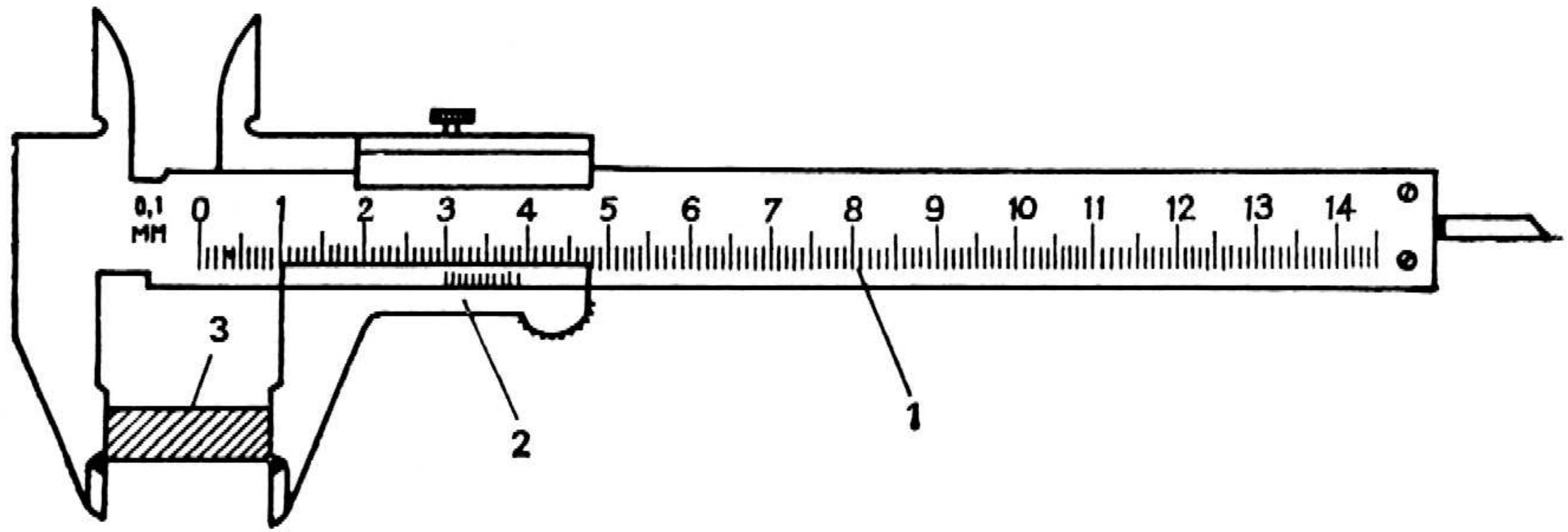


Laias laastus on B-tüüpi mõõtemääramatus igasugune mõõteprotsessis ilmnev määramatus, mis ei ole statistiliselt hinnatav ning mis ei vähene kordusmõõtmiste arvu suurenedes. B-tüüpi mõõtemääramatuse tähis on u_B.

Esmajoones kuuluvad B-tüüpi mõõtemääramatuse alla vead, mis on tingitud mõõteinstrumendi piiratud võimalustest. Kui hoolikalt ja täpselt ka poleks valmistatud mõõteriist või mõõtevahend, millega me mõõtmist teostame, alati on ka sellel olemas mingi (juhuslikku laadi) viga, mis on selle konkreetse mõõteriista puhul küll muutumatu ja püsiv suurus, kuid mis muutub ühelt mõõteriistalt teisele samuti juhuslikult. See – mõõteriista viga – on viga etaloni suhtes. Korduvatel mõõtmistel see viga on esindatud täpselt ühel ja samal moel (kuna mõõtmised teeme ühe ja sama mõõteriistaga) ja korduvad mõõtmised tema suurust ei kahanda.

Näide 1.3. Praktikumis kasutatava nihiku (joonis 1.5) põhiviga (ehk riistaviga) on   S.t eeldatakse, et mõõteriistast tingitud viga ühekordsel mõõtmisel   jääb piiridesse $-\Delta_o < \Delta x < \Delta_o$.

Valmistajatehas garanteerib, et mõõteriista tegelik viga ei välju neist piirest.



Joonis 1.5. Nihik. 1 – põhiskaala; 2 – noonius; 3 – mõõdetav detail. Nihiku põhiviga on kantud mõõteriistale.

Mõõtmistulemuse standardmääramatust, mis on saadud A ja B komponentide liitumise tulemusel, nimetatakse liitmääramatuseks ehk koondmääramatuseks (combined uncertainty). Tema arvuline väärtus võrdub positiivse ruutjuurega liitdispersioonist, mis saadakse kõikide dispersiooni komponentide liitmisel:

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

Näide 1.4. Silindri pikkuse mõõtmine nihikuga.

MMM – Kodune töö

Selleks, et saada infot sellele kursusele registreerunute varasematest teadmistest, on Moodles avatud tasemetest. Eksami arvestuses läheb see test arvesse kui arvestuslik test – testi täitmisel (ka siis, kui kõik vastused on valed) läheb kirja arvestatud, mittetäitmisel mittearvestatud. Test sulgub 14.02.2011 kell 00:00.

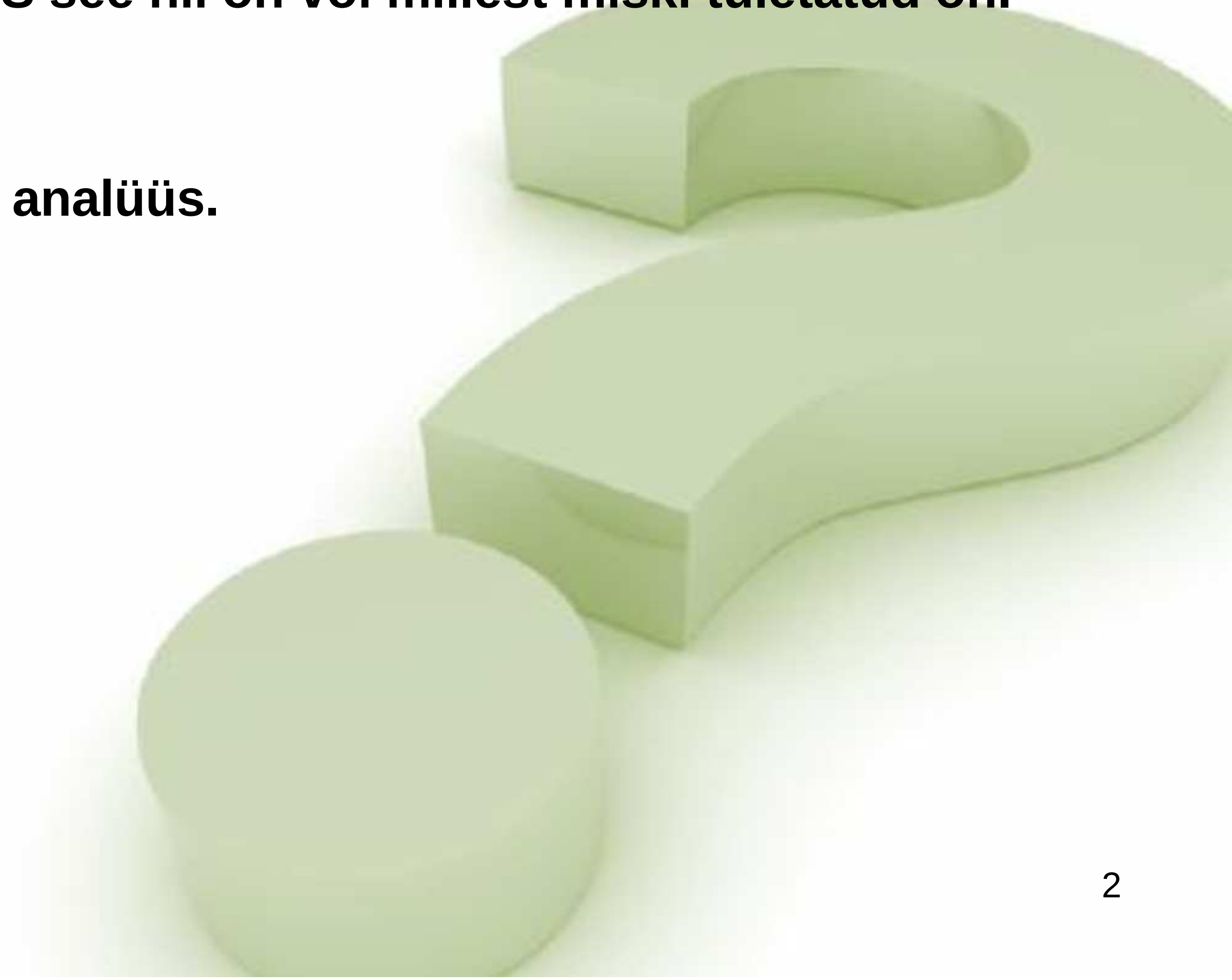
Mõõtmised ja mõõtemääramatused

Measurements and uncertainties

Erko Jakobson, PhD

MMM – Praktikumi baasmaterjalid – Tagasiside

... näiteks kui lahendate tahvlil ülesannet, siis oleks hea, kui Te ei seletaks mitte ainult seda, kuidas miski käib ja mida teha tuleb, vaid et seletaksite juurde, MIKS see nii on või millest miski tuletatud on.



Tasemetesti tulemuste analüüs.

Tähendnumbrite hulk ehk tüvinumbrite hulk ehk tähendusega numbrikohtade hulk arvus on kehtivate kümnendkohtade hulk arvus.

Tähendnumbriteks arvus loetakse alati kõiki numbreid peale nulli. Nulli loetakse kehtivaks, kui ta asub teiste arvude vahel, täisarvu või kümnendmurru lõpus. Arvu alguses olevaid nulle, samuti ümardamise teel saadud nulle arvu lõpus ei loeta tähendnumbriteks.

Näide 1.5.	**10 400**	**5 tähendnumbrit.**
	$1{,}04 \cdot 10^2$	**3 tähendnumbrit.**
	10 400,00	**7 tähendnumbrit.**
	0,01040	**4 tähendnumbrit.**

Aga “kuus miljardit (6 000 000 000) aastat tagasi”?

MMM – Praktikumi baasmaterjalid – Ümardamine

Määramatuse hinnang mõõtmiste väikese arvu korral on üsna ebatäpne, seetõttu pole vahemikhinnangu väljakirjutamisel mõtet suurel tähendnumbrite hulgal. Tulemused esitatakse ümardatult.

Arvude ümardamisel kasutatakse reeglit: arvud 1; 2; 3 ja 4 ümardatakse alla, 6; 7; 8; 9 üles. Koolis õpetati, et arv 5 ümardatakse üles. Statistiliselt tekitab selliselt ümardamine süstemaatilise vea, kuna ümardatud arvude keskväärtus on süstemaatiliselt suurem kui ümardamata arvude keskväärtus.

Süstemaatilisest veast on vaba järgmine ümardamise reegel: „arvu 5 ümardatakse nõnda, et tulemuse viimane tüvinumber oleks paarisarv“. Samuti on selle reegli eeliseks, et jagades nii ümardamata kui ümardatud tulemust kahega, saame ikka õige tulemuse.

Mõnikord juhtub, et mõõtetulemuste hulka satub ilmselgelt vale mõõdis ehk ekse, olgu siis lugemi sisestamisel tekkinud näpuvea tõttu, võrgupinge kõikumise tõttu, mõõtmisruumi ukse avanemisega kaasnenud tuuletõmbuse tõttu vms. Sageli on sellistel juhtudel mõistlik teha mõõtmistes väike paus ning oodata, mil näiteks kaalu näit muutub jälle stabiilseks. Samas arvutijuhitava kaalu puhul see pole lihtne, näiteks, kui arvuti salvestab kaalu näidu kord sekundis. Eksed aga mõjutavad selgelt mõõtmistulemust ja neid ei tohiks keskväärtuse ning standardhälbe arvutustes kasutada.

Üldiselt defineeritakse ekseteks kõik mõõtmistulemused, mis erinevad keskväärtusest rohkem kui kolmekordne standardhälve. Normaaljaotuse eeldusel on tõenäosus, et mõõtetulemus erineb keskväärtusest rohkem kui kolm standardhälvet, 0,3%.

Eksed tuleb edasisest andmetöötlusest kõrvaldada ning siis arvutada uuesti keskväärtus ning standardhälve. Mõõtmiste protokolli tuleb ekse kõrvaldamisest teha asjakohane märge.

MMM – Praktikumi baasmaterjalid – Vabadusastmete arv

A-tüüpi määramatuse vabadusastmete arv on

$$\upsilon = n - 1$$

Kus *n* on mõõtmiste arv.

B-tüüpi määramatuse vabadusastmete arvu võib füüsikaliste mõõtmiste praktikumi raames võtta alati lõpmatult suureks.

MMM – Praktikumi baasmaterjalid – Vabadusastmete arv

Liitmääramatuse vabadusastmete arvu otseselt ei saa arvutada, küll aga võib hinnata efektiivsete vabadusastmete arvu v_{eff}, kasutades Welch-Satterthwaite' valemit:

$$\nu_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i) \right)^4}{\nu_i}}$$

kus $u_i(y)$ on i-ndast sisendsuurusest tingitud liitmääramatuse komponent.

Efektiivne vabadusastmete arv ei ole üldiselt täisarv. Täisarvulise vabadusastmete arvu saamiseks ümardatakse saadud tulemus alla, näiteks arvud 6,2 ja 6,8 ümardatakse mõlemad täisarvuks 6.

MMM – Praktikumi baasmaterjalid – Vabadusastmete arv

Näide 1.6. Jätkame metallsilindri mõõtmise näidet. Metallsilindri pikkust mõõdeti *n* = 100 korda,

$$u_{\mathrm{A}} = u(\overline{x}_n) = 0{,}044\,\mathrm{mm}$$

$$u_{\mathrm{B}} = 0{,}029\,\mathrm{mm}$$

$$u_C = 0{,}053\,\mathrm{mm}$$

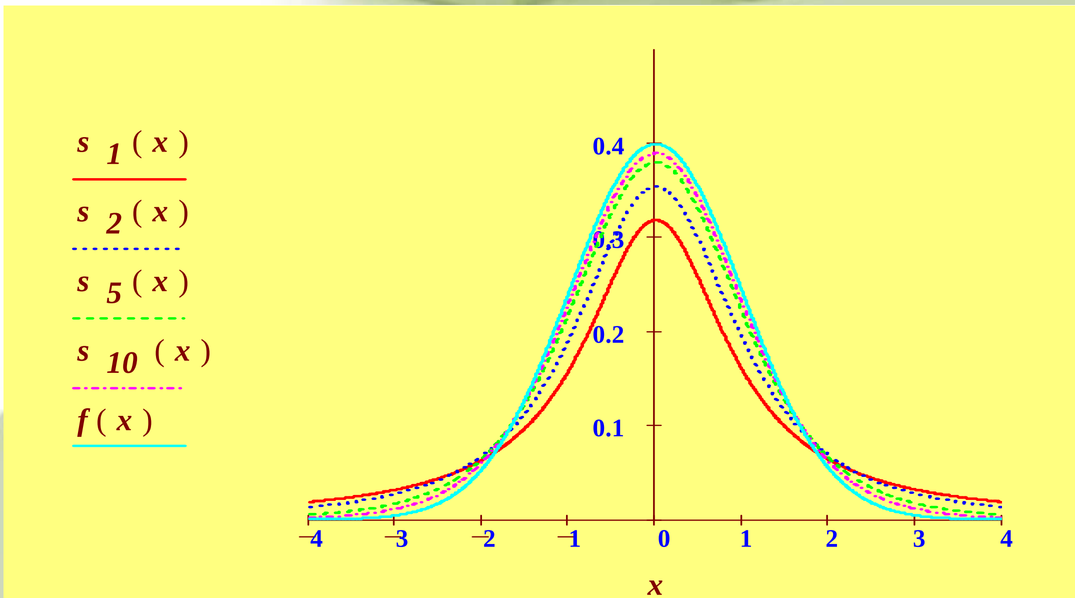
Arvutame efektiivsete vabadusastmete arvu metallsilindri pikkuse koondmääramatusele.

$$\nu_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i)\right)^4}{\nu_i}}$$

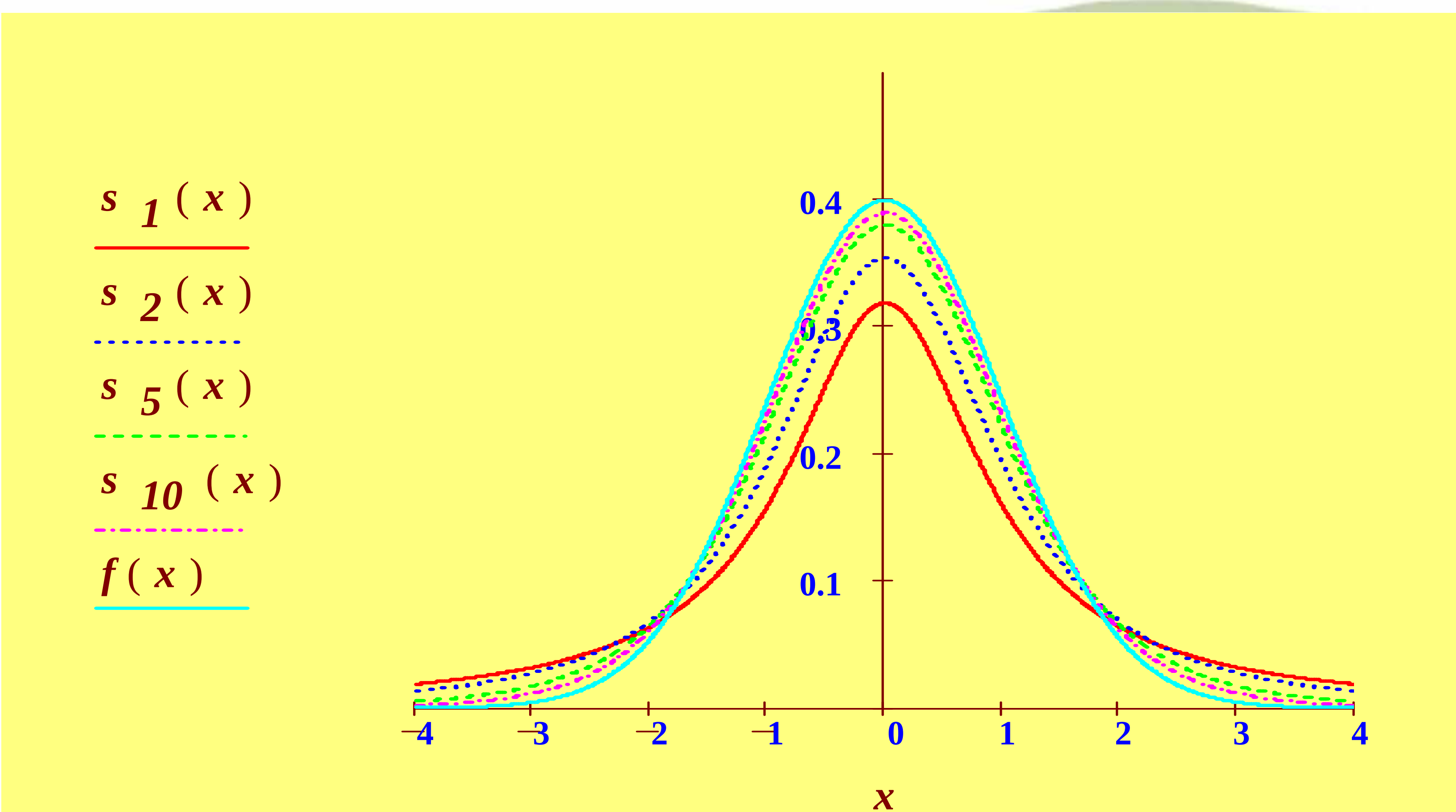
Studenti jaotus sõltub vaid vabadusastmete arvust *u* ja ei sõltu üldse juhusliku suuruse (mõõdetava suuruse) *X* konkreetsest dispersioonist ega keskväärtusest (küll on aga oluline *X* normaalsus).
Usaldusnivoole *p* vastav mõõtmistulemuse paiknemise intervall on esitatav kujul

$$P\left[\overline{x}_N - t_\nu(p)u(\overline{x}_N) < x < \overline{x}_N + t_\nu(p)u(\overline{x}_N)\right] = p.$$

Seda valemit nimetatakse Studenti testiks. Siin suurus $t_u(p)$ on (Studenti) t-kordaja – kattetegur etteantud usaldus-nivoo *p* ja *u* vabadusastme korral. Tavaliselt antakse t-kordaja kindlate väärtuste jaoks tabuleeritult.



Studenti jaotus läheneb vabadusastmete arvu kasvades standardiseeritud normaaljaotusele.

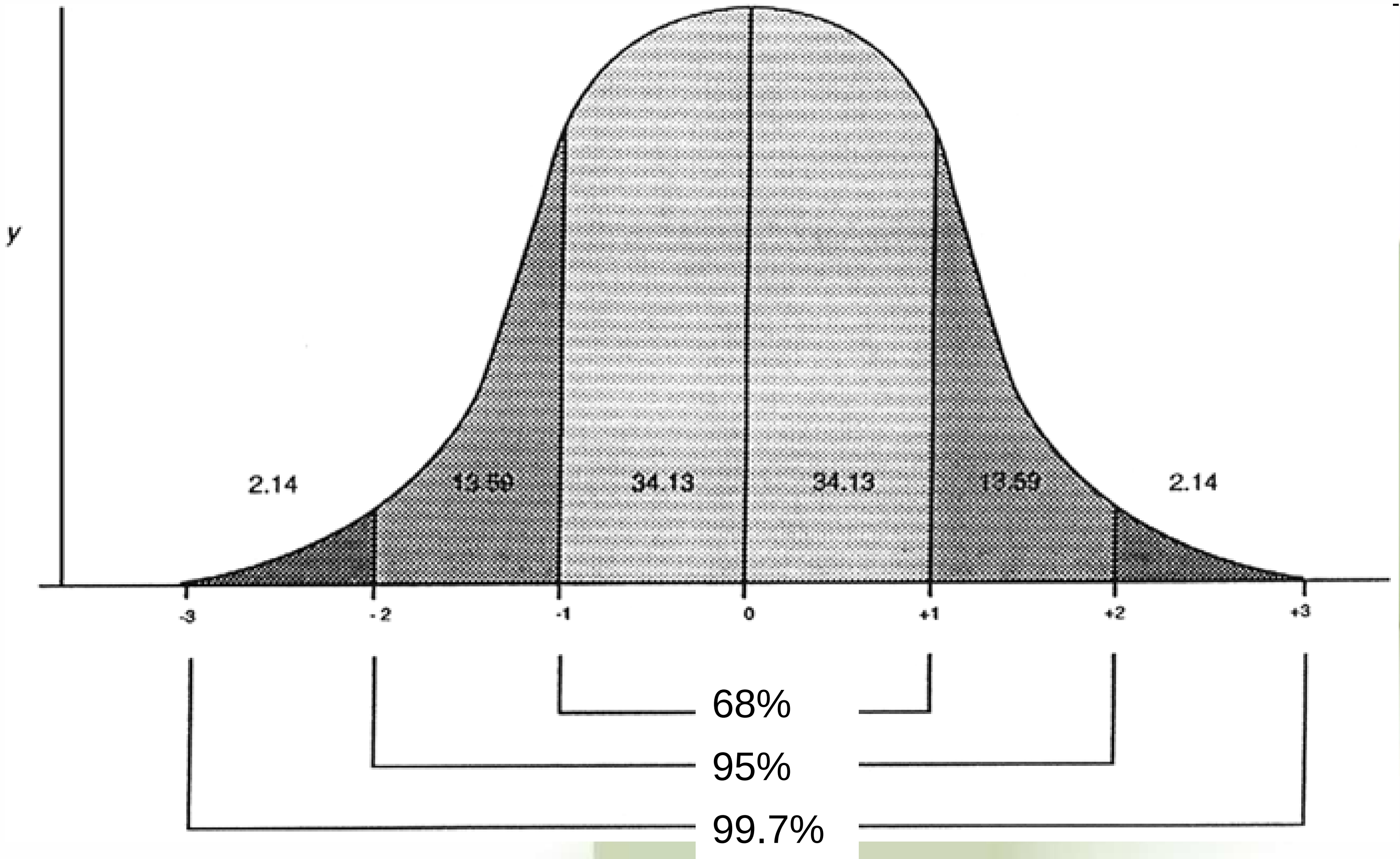


Kuigi liitmääramatus *u*(*y*) on mõõtesuuruse *Y* mõõtetulemuse *y* määramatuse esmane väljend, on mõnede tööstuslike ja ärialaste rakenduste vajaduste rahuldamiseks, aga ka tervishoiu ja ohutusalaste nõuete tagamiseks, vajalik liitmääramatuse asemel esitada vahemik, mis teatud usaldatavusega hõlmab mõõtesuuruse väärtuse. Vastava vahemiku moodustamiseks kasutatakse nn laiendmääramatust tähisega *U*. Laiendmääramatuse saame standardhälbena esitatud liitmääramatuse korrutamisel mingi teguriga *k*. Järelikult on mõlemate määramatuse esitamisvormide mõõteinfo hulk sama ja seega tundub laiendmääramatuse kasutamine justkui asjatuna. Kuid laiendmääramatusel on siiski üks eelis. Ta võimaldab võrrelda mõõtetulemusi, milledel on erinev vabadusastmete arv.

Laiendmääramatus *U* saadakse liitmääramatuse *u*(*y*) korrutamisel katteteguriga *k*:

$$U(y) = k \cdot u(y)$$

MMM – Praktikumi baasmaterjalid – Laiendmääramatus



$$U(y) = k \cdot u(y)$$

Kattetegur on arv, mida kasutatakse liitmääramatuse *u*(*y*) korrutusteguriana, et saada laiendmääramatust *U*. Katteteguri väärtus valitakse sõltuvalt vahemikule etteantud usaldatavustasemest *p*. Enamasti valitakse selleks usaldusvahemikuks 95 % või 99 %. Eeldusel, et mõõtesuurus *Y* allub ligikaudu normaaljaotusele, valitakse katteteguri k_p väärtuseks Studenti t-kordaja sõltuvalt vabadusastmete arvust ning soovitavast usaldusnivoost.

Arvutiga saab leida t-kordaja vastava sisseehitatud funktsiooniga:

Mathcad: $$qt\left(\frac{1+p}{2},\nu\right)$$

Excel: $$TINV\left(1-p,\nu\right)$$

MMM – Praktikumi baasmaterjalid – Studenti test

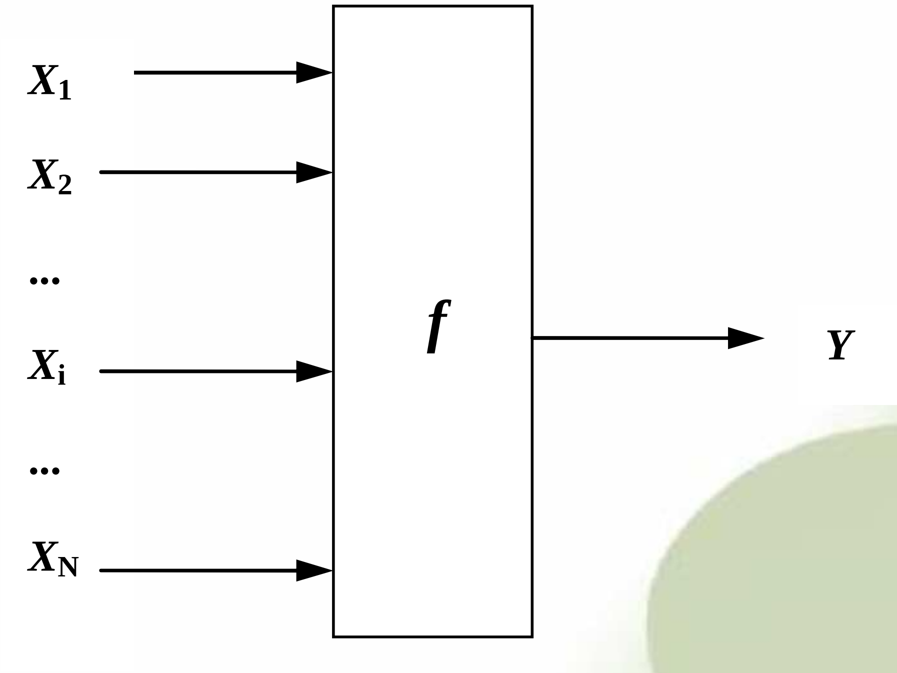
Vabadusastmete arv $\nu = N - 1$	Osa p protsentides					
	68,27[I]	90	95	95,45[I]	99	99,73[I]
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

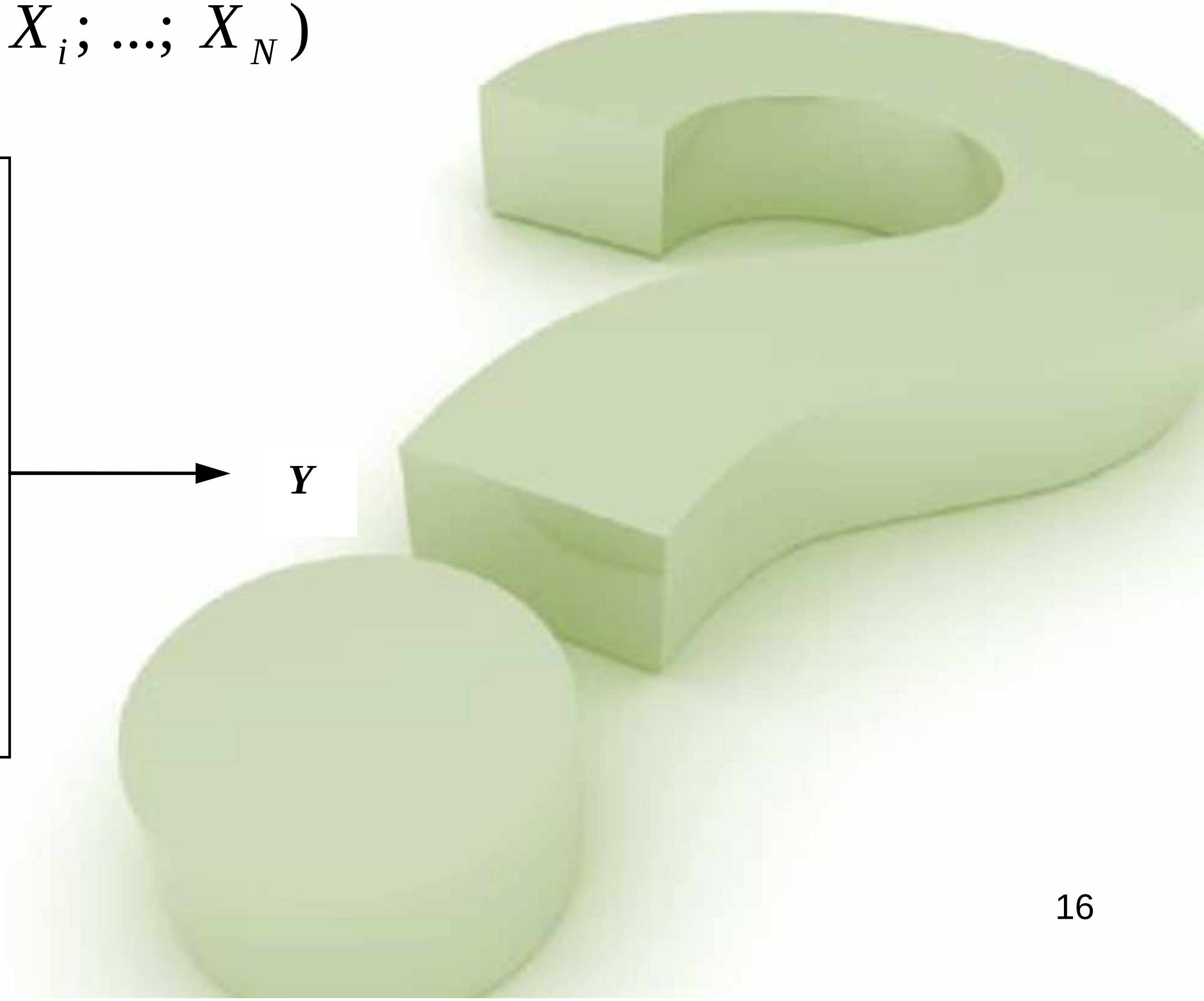
MMM – Praktikumi baasmaterjalid – Mõõtmiste mudel

Igasugune reaalsetes tingimustes mõõtmine toimub alati suure hulga mõjurite toimel ning iga mõõteülesande korral arvutatakse meid huvitava mõõtesuuruse väärtus matemaatilise seosega teiste, antud mõõteülesande jaoks vajalike suuruste abil. Hinnanguid saame teatud osale nendest suurustest anda nende vahetu mõõtmise käigus, ülejäänud osale suurustest aga teadaoleva info, näiteks normdokumentides või käsiraamatutes esitatud andmete abil. Mõõtesuuruse väärtuse hinnangu leidmiseks tuleb seega mõõteülesandest lähtuvalt koostada mõõtesuuruse sõltuvust teistest vaadeldud suurustest kirjeldav mõõtmise mudel.

Sisendsuurused võivad olla nii konstandid, parandid, mõjurid kui ka sellised suurused, mida tuleb antud ülesande lahendamise käigus omakorda mõõta. Sõltuvust saab väljendada funktsiooni *f* abil kujul

$$Y = f(X_1;\ X_2;\ \dots;\ X_i;\ \dots;\ X_N)$$





Näide 1.7. Metallitüki kaalumine võrdõlgse kaaluga. Metallitükile ning kaaluvihtidele mõjuvad raskusjõud ning õhurõhust tingitud üleslükkejõud. Kui materjalide tihedused pole võrdsed, on sama massi juures ruumalad erinevad ning seega on ka üleslükkejõud erinevad. Teiste sõnadega öeldes – kui kaal on tasakaalus, kuid materjalide tihedused pole võrdsed, ei ole kaalutava metallitüki mass võrdne vihtide masside summaga, sest lisandub ruumalade erinevusest tulenev üleslükkejõu erinevus.

Näide 1.7. Metallitüki kaalumine võrdõlgse kaaluga.

Paneme kirja suurused, mis mõõtmistulemust mõjutavad:

- **vihtide mass m_v;**
- **vihtide tihedus ρ_v;**
- **kaalutava metallitüki tihedus ρ_m;**
- **õhu tihedus $\rho_õ$;**
- **võrdõlgse kaalu tundlikkus Z.**

Seega

$$m_m = f\left(m_v;\ \rho_v;\ \rho_m;\ \rho_õ;\ Z\right)$$

Samas pole ka siintoodud suurused otseselt mõõdetavad, näiteks õhu tiheduse arvutamiseks on tarvis mõõta õhurõhku, temperatuuri ning õhu niiskust, seega on õhu tiheduse mõõtmise valemiks

$$\rho_õ = f\left(P;\ T;\ RH\right)$$

Senine teooria on käinud otsemõõtmiste kohta, st suuruste jaoks, mille väärtus on saadud vahetult mõõtmisvahendi skaalalt või saadakse vahetult mõõduga võrdlemise teel.

Kaudmõõtmine on mõõtmine, kus mõõtmistulemus leitakse arvutuse teel (valemi abil) otsemõõdetud suurustest ning konstantidest.

Näide 1.8. Elektrivoolu töö leidmiseks mõõdame pinge *U* voltmeetriga, voolutugevuse *I* ampermeetriga ja aja *t* sekundkellaga ning töö arvutame valemist $A = UIt$.

Kaudmõõtmise puhul leitakse esmalt kõigi sisendsuuruste liitmääramatused ning vabadusastmete arvud.

N **sõltumatu sisendsuuruse** ***Y*** **=** ***Y*****(**x_1**,** x_2**, ...,** x_N**) liitmääramatus on**

$$u(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial Y}{\partial x_i} \right)^2 u^2(X_i)}$$

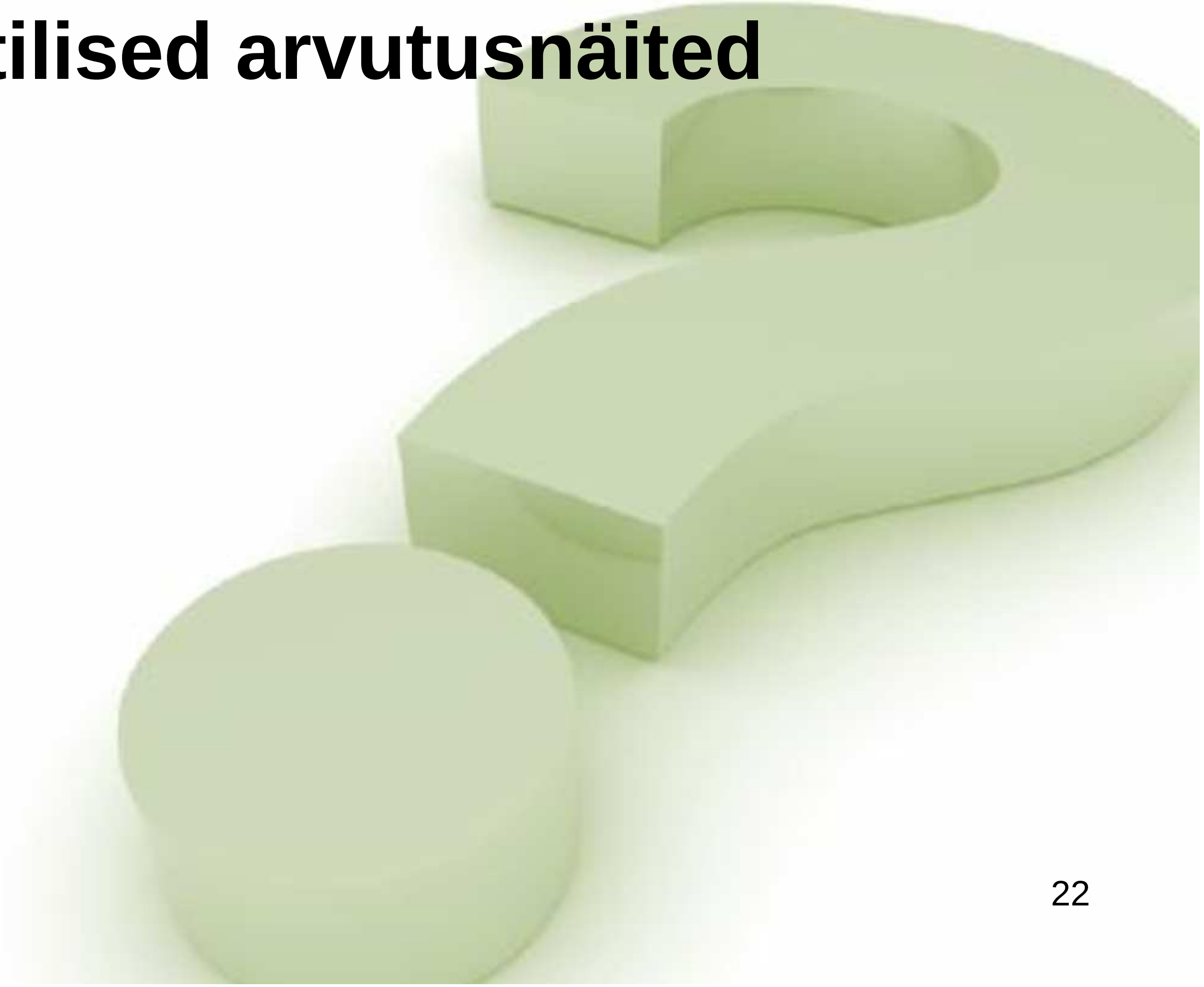
Suuruse ***Y*** **vabadusastmete arv arvutatakse Welch-Satterthwaite valemi kaudu:**

$$\nu_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i) \right)^4}{\nu_i}}$$

Määramatuse hindamine (sõltumatud sisendid)

Matemaatiline mudel	$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.	$\rho = \frac{m}{V} = \frac{6m}{\pi \cdot d^3}$
Sisendväärtused	$X_1, X_2, \ldots, X_n$	m, d, π
Määramatuse komponendid igale sisendväärtusele	$u_A(X_1), u_B(X_1), u_C(X_1)$, $u_A(X_2), u_B(X_2), u_C(X_2), \ldots$, *etc*	$um_C = \sqrt{um_{A1}^2 + um_{A2}^2 + \ldots um_{B1}^2 + um_{B2}^2 + \ldots}$ $ud_C = \sqrt{ud_{A1}^2 + ud_{A2}^2 + \ldots ud_{B1}^2 + ud_{B2}^2 + \ldots}$
Liitmääramatus	$u^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial Y}{\partial x_i}\right)^2 u^2(X_i)$	$u^2(\rho) = \rho^2 \cdot \left[\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{-3 \cdot u(d)}{d}\right)^2\right]$
Vabadusastmete arv igale sisendväärtusele	$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$	ν_m, ν_d
Efektiivsed vabadusastmete arvud väljundsuurustele	$\nu_{eff}(y) = u^4(y) \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^4 u^4(x_i)}{\nu_i}$	$\nu_{eff}(\rho) = u^4(\rho) \Big/ \left[\frac{\left(\rho \cdot \frac{u(m)}{m}\right)^4}{\nu_m} + \frac{\left(\rho \cdot \frac{-3 \cdot u(d)}{d}\right)^4}{\nu_d}\right]$
Kattetegur	$k = t_{\alpha\%,\nu}$ = TINV(1-α, ν)	$k = t_{95\%,\nu(\rho)}$ = TINV(0.05, $\nu(\rho)$)
Laiendmääramatus	$U(y) = k\, u(y)$	$U(\rho) = k\, u(\rho)$

Praktilised arvutusnäited



Näide 1.10. Olgu meil mõõdetavateks suurusteks homogeense metallkera diameeter (üksikmõõtmise tulemus *d*) ja mass *m* (üksikmõõtmise tulemus μ (kasutame siin kreeka tähte, et mitte segadust tekitada keskväärtuse tähisega *m*)) ning olgu tarvis leida metalli tihedus valemist

$$\rho = \frac{\text{mass}}{\text{ruumala}} = \frac{6}{\pi}\frac{M}{D^3}.$$

Leida metalli tiheduse parim hinnang koos vastava laiendmääramatusega 99 % usaldusnivool.

Näide 1.9. Detaili pikkust mõõdeti nihikuga 4 korda. Detaili pikkuse keskväärtuseks saadi 57,43 mm (kasutades valemit 1.5), empiiriliseks standardhälbeks saadi 0,12 mm (kasutades valemit 1.6). Nihiku põhiviga on Δ = 0,1 mm. Leida detaili pikkuse parim hinnang ning selle laiendmääramatus usaldusnivool 95 %.

Keskväärtuse hindamiseks mõõtmistulemustest kasutatakse aritmeetilist keskmist

$$\bar{x}_N = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}. \qquad (1.5)$$

Standardhälbe hindamiseks mõõtmistulemustest kasutatakse empiirilist standardhälvet

$$s_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}_N)^2}{N-1}}. \qquad (1.6)$$

Näide 1.11. Füüsikaliste mõõtmiste praktikumitöö nr FMA-6: „Teekonnapunktide vahekauguse mõõtmine GPSiga“. Uurime, kuidas hinnata kahe punkti vahelise kauguse määramatust.

Kui meid huvitavad suvalised kaks punkti (koordinaatidega ϕ_1, λ_1 ja ϕ_2, λ_2) paiknevad piisavalt lähestikku et võiksime jätta arvestamata Maa kumeruse, siis võime leida nende punktide vahelise kauguse Pythagorase teoreemi alusel:

$$L = R\sqrt{(\phi_1 - \phi_2)^2 + \left((\lambda_1 - \lambda_2)\cdot\cos\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)\right)^2}$$

GPS-seade annab lisaks punkti koordinaatidele ka oletatava täpsusraadiuse *r*. Käsitleme seda täpsusraadiust seadme veana, st eeldame, et esitatud koordinaatidega punkti kaugus mõõtepunktist on väiksem kui täpsusraadius.

MMM – Tagasiside

Palun leia tükk paberit ning kirjuta sellele lühidalt:

- **mis oli sinu arvates kõige olulisem asi, mida sa täna õppisid;**
- **milline koht oli tänases loengus kõige keerulisem, segasem;**
- **oma eriala**

Pärast loengu lõppu jätke paberid ukse kõrvale karpi.

MMM – Kodune töö

Kodune test sulgub 20.02.2011 kell 23:55. Nüüdsest on tulemused olulised, st punkte annavad ainult õiged vastused. Vale vastuse puhul Moodle ütleb seda ning laseb vastust korrigeerida, kuid võtab 20 % selle küsimuse punktidest maha. Seega on võimalik igale küsimusele vastata maksimaalselt 5 korda. Vastuste korrigeerimine on võimalik küll ainult arvutusülesannete juures.

Mõõtmised ja mõõtemääramatused

Measurements and uncertainties

Erko Jakobson, PhD

MMM – koduste testide olulisus edasijõudmisel

Kursuse käigus tuleb täita ca 12 kodust testi. Testid sulguvad pühapäeva õhtul kell 23:55 ning testi järgi teha ei saa, sest me analüüsime neid töid järgmises loengus.

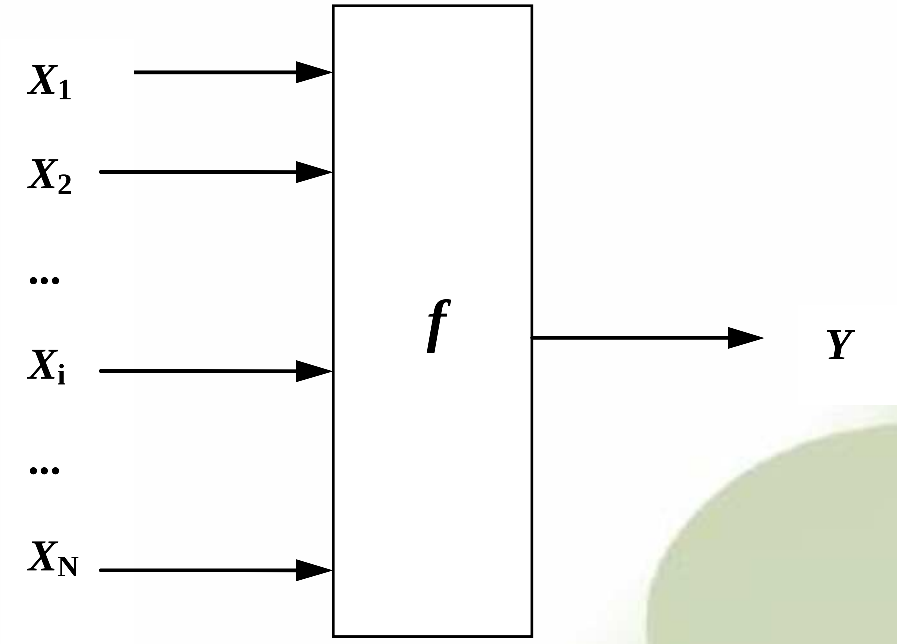
Iga test annab maksimaalselt 10 punkti (vahest võib olla ka preemiapunkte).

Üksikust testist positiivse hinde saamine või üldse testi täitmine ei ole kohustuslikud, kuid mõjutavad aine koondhinnet.

Kodustest testidest kogutud punktid liidetakse kõik kokku ning jagatakse läbi testide arvuga. Saadav tulemus on koondhinde arvestusse minevate punktide arv. Kui saadav tulemus on väiksem kui 5, siis tähendab see automaatselt ainest läbikukkumist.

Sisendsuurused võivad olla nii konstandid, parandid, mõjurid kui ka sellised suurused, mida tuleb antud ülesande lahendamise käigus omakorda mõõta. Sõltuvust saab väljendada funktsiooni *f* abil kujul

$$Y = f(X_1;\ X_2;\ \ldots\ ;X_i;\ \ldots;\ X_N)$$



Näide 1.7. Metallitüki kaalumine võrdõlgse kaaluga. Metallitükile ning kaaluvihtidele mõjuvad raskusjõud ning õhurõhust tingitud üleslükkejõud. Kui materjalide tihedused pole võrdsed, on sama massi juures ruumalad erinevad ning seega on ka üleslükkejõud erinevad. Teiste sõnadega öeldes – kui kaal on tasakaalus, kuid materjalide tihedused pole võrdsed, ei ole kaalutava metallitüki mass võrdne vihtide masside summaga, sest lisandub ruumalade erinevusest tulenev üleslükkejõu erinevus.

MMM – Praktikumi baasmaterjalid – Mõõtmiste mudel

Näide 1.7. Metallitüki kaalumine võrdõlgse kaaluga.

Paneme kirja suurused, mis mõõtmistulemust mõjutavad:

- **vihtide mass m_v;**
- **vihtide tihedus ρ_v;**
- **kaalutava metallitüki tihedus ρ_m;**
- **õhu tihedus $\rho_õ$;**
- **võrdõlgse kaalu tundlikkus Z.**

Seega

$$m_m = f(m_v;\ \rho_v;\ \rho_m;\ \rho_{\tilde{o}};\ Z)$$

Samas pole ka siintoodud suurused otseselt mõõdetavad, näiteks õhu tiheduse arvutamiseks on tarvis mõõta õhurõhku, temperatuuri ning õhu niiskust, seega on õhu tiheduse mõõtmise valemiks

$$\rho_{\tilde{o}} = f(P;\ T;\ RH)$$

Senine teooria on käinud otsemõõtmiste kohta, st suuruste jaoks, mille väärtus on saadud vahetult mõõtmisvahendi skaalalt või saadakse vahetult mõõduga võrdlemise teel.

Kaudmõõtmine on mõõtmine, kus mõõtmistulemus leitakse arvutuse teel (valemi abil) otsemõõdetud suurustest ning konstantidest.

Näide 1.8. Elektrivoolu töö leidmiseks mõõdame pinge V voltmeetriga, voolutugevuse I ampermeetriga ja aja t sekundkellaga ning töö arvutame valemist $A = VIt$.

MMM – Praktikumi baasmaterjalid – Kaudmõõtmised

Kaudmõõtmise puhul leitakse esmalt kõigi sisendsuuruste liitmääramatused ning vabadusastmete arvud.

N **sõltumatu sisendsuuruse** $Y = Y(x_1, x_2, ..., x_N)$ **liitmääramatus on**

$$u(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_i} \right)^2 u^2(X_i)}$$

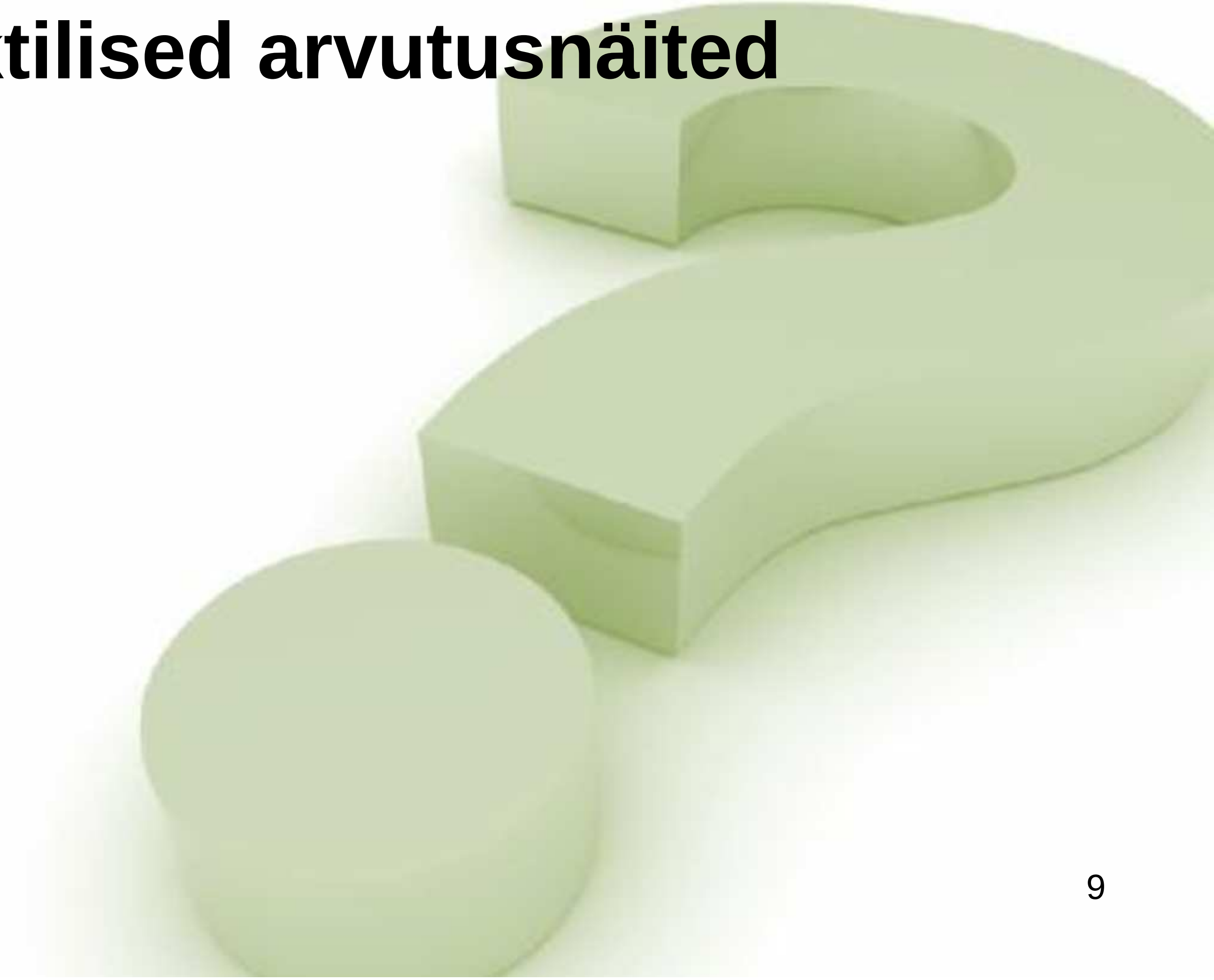
Suuruse ***Y*** **vabadusastmete arv arvutatakse Welch-Satterthwaite valemi kaudu:**

$$\nu_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i) \right)^4}{\nu_i}}$$

Määramatuse hindamine (sõltumatud sisendid)

Matemaatiline mudel	$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.	$\rho = \frac{m}{V} = \frac{6m}{\pi \cdot d^3}$
Sisendväärtused	$X_1, X_2, \ldots, X_n$	m, d, π
Määramatuse komponendid igale sisendväärtusele	$u_A(X_1), u_B(X_1), u_C(X_1)$, $u_A(X_2), u_B(X_2), u_C(X_2), \ldots, etc$	$um_C = \sqrt{um_{A1}^2 + um_{A2}^2 + \ldots um_{B1}^2 + um_{B2}^2 + \ldots}$ $ud_C = \sqrt{ud_{A1}^2 + ud_{A2}^2 + \ldots ud_{B1}^2 + ud_{B2}^2 + \ldots}$
Liitmääramatus	$u^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial Y}{\partial x_i}\right)^2 u^2(X_i)$	$u^2(\rho) = \rho^2 \cdot \left[\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{-3 \cdot u(d)}{d}\right)^2\right]$
Vabadusastmete arv igale sisendväärtusele	$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$	ν_m, ν_d
Efektiivsed vabadusastmete arvud väljundsuurustele	$\nu_{eff}(y) = u^4(y) \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^4 u^4(x_i)}{\nu_i}$	$\nu_{eff}(\rho) = u^4(\rho) \Big/ \left[\frac{\left(\rho \cdot \frac{u(m)}{m}\right)^4}{\nu_m} + \frac{\left(\rho \cdot \frac{-3 \cdot u(d)}{d}\right)^4}{\nu_d}\right]$
Kattetegur	$k = t_{\alpha\%,\nu}$ = TINV(1-α, ν)	$k = t_{95\%,\nu(\rho)}$ = TINV(0.05, $\nu(\rho)$)
Laiendmääramatus	$U(y) = k\, u(y)$	$U(\rho) = k\, u(\rho)$

Praktilised arvutusnäited



Näide 1.10. Olgu meil mõõdetavateks suurusteks homogeense metallkera diameeter (üksikmõõtmise tulemus *d*) ja mass *m* (üksikmõõtmise tulemus μ (kasutame siin kreeka tähte, et mitte segadust tekitada keskväärtuse tähisega *m*)) ning olgu tarvis leida metalli tihedus valemist

$$\rho = \frac{\text{mass}}{\text{ruumala}} = \frac{6}{\pi}\frac{M}{D^3}.$$

Leida metalli tiheduse parim hinnang koos vastava laiendmääramatusega 95 % usaldusnivool.

Näide 1.9. Detaili pikkust mõõdeti nihikuga 4 korda. Detaili pikkuse keskväärtuseks saadi 57,43 mm (kasutades valemit 1.5), empiiriliseks standardhälbeks saadi 0,12 mm (kasutades valemit 1.6). Nihiku põhiviga on Δ = 0,1 mm. Leida detaili pikkuse parim hinnang ning selle laiendmääramatus usaldusnivool 95 %.

Keskväärtuse hindamiseks mõõtmistulemustest kasutatakse aritmeetilist keskmist

$$\bar{x}_N = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} . \qquad (1.5)$$

Standardhälbe hindamiseks mõõtmistulemustest kasutatakse empiirilist standardhälvet

$$s_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}_N)^2}{N-1}} . \qquad (1.6)$$

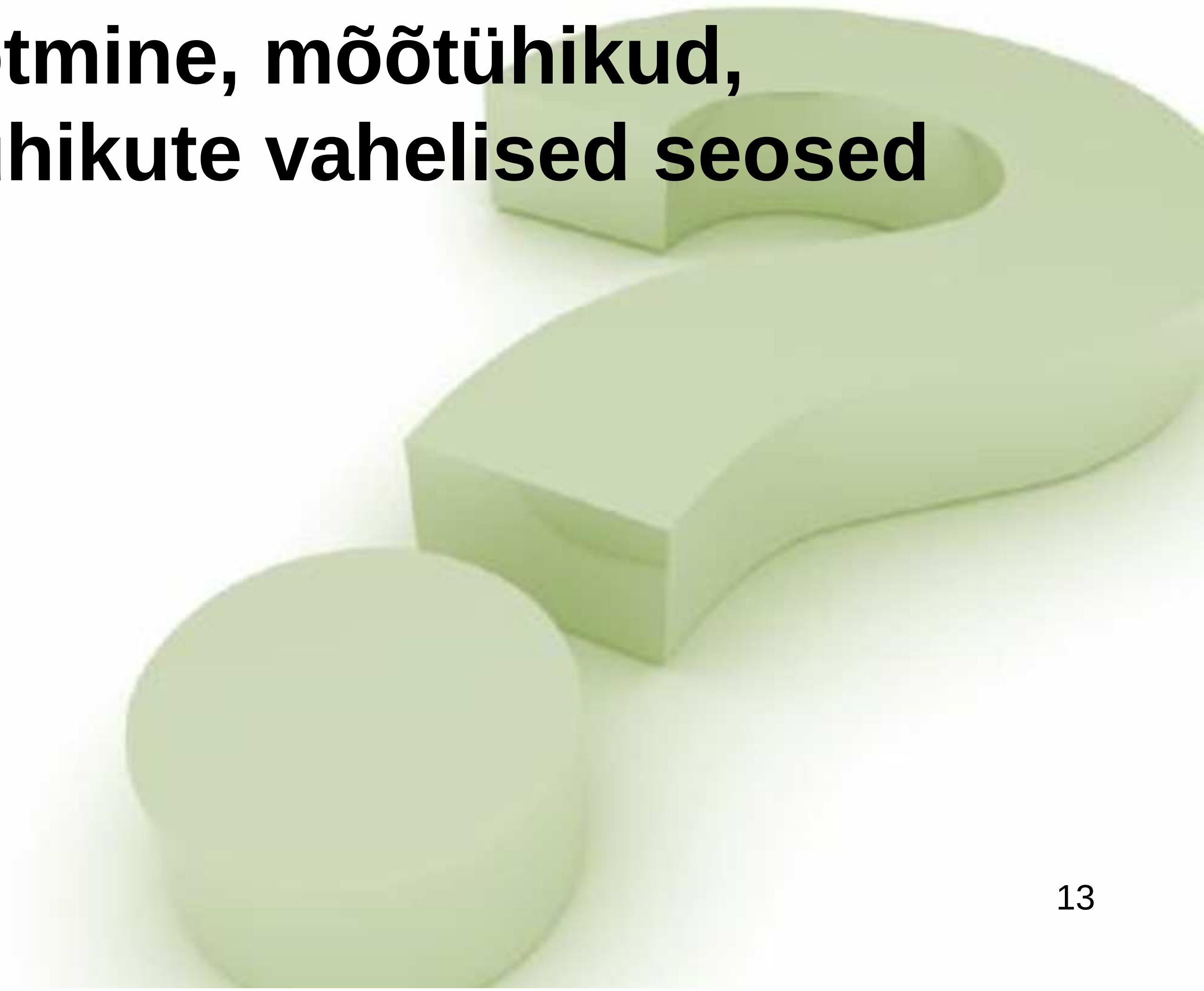
Näide 1.11. Füüsikaliste mõõtmiste praktikumitöö nr FMA-6: „Teekonnapunktide vahekauguse mõõtmine GPSiga“. Uurime, kuidas hinnata kahe punkti vahelise kauguse määramatust.

Kui meid huvitavad suvalised kaks punkti (koordinaatidega ϕ_1, λ_1 ja ϕ_2, λ_2) paiknevad piisavalt lähestikku et võiksime jätta arvestamata Maa kumeruse, siis võime leida nende punktide vahelise kauguse Pythagorase teoreemi alusel:

$$L = R\sqrt{(\phi_1 - \phi_2)^2 + \left((\lambda_1 - \lambda_2)\cdot\cos\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)\right)^2}$$

GPS-seade annab lisaks punkti koordinaatidele ka oletatava täpsusraadiuse *r*. Käsitleme seda täpsusraadiust seadme veana, st eeldame, et esitatud koordinaatidega punkti kaugus mõõtepunktist on väiksem kui täpsusraadius.

Mõõtmine, mõõtühikud, mõõtühikute vahelised seosed



Mõõtmisteooria lähted

Mistahes suuruse mõõtmisel saadud arvväärtusel ning seega ka mõõtetulemusel on juhuslik iseloom selles mõttes, et saadud väärtused ei ühti. Samas aga ei ole nad ka täiesti juhuslikku laadi, vaid erinevus jälgib teatud seaduspärasusi, mida saame kirjeldada vastava tõenäosusjaotusega. Mõõtetulemus, st mõõtmise teel saadud mõõtesuuruse väärtus, on seega juhuslik suurus ehk muutuja. Nimetatut võime formuleerida mõõtmise põhiväitena, mis kehtib kõikide mõõteliikide ja mõõtevaldkondade kohta ning millele toetub kogu mõõtmise teooria

MMM – jaotusseadused

Juhuslikud suurused jaotuvad kahte klassi: diskreetseteks ja pidevateks. Diskreetsed suurused saavad omada ainult ettemääratud väärtuseid, näiteks täringuvise silmasid 1 – 6, mündivise kulli ja kirja ning suvalise digitaalmõõtevahendi näit (digitaalne kaal resolutsiooniga 1 gramm võimalikud mõõtetulemused grammides on täisarvud). Juhuslikku suurust nimetatakse pidevaks, kui tema võimalike väärtuste hulk on arvtelje (lõplik või lõpmatu) vahemik. Füüsikalised suurused ise on üldiselt pidevad, näiteks temperatuur, mass, takistus jne.

Elementaarsündmuseks nimetatakse juhusliku katse tulemust.

Diskreetse juhusliku suuruse esinemistõenäosus on avaldatav valemiga

$$p_k = \frac{Soodsate\ elementaarsündmuste\ hulk}{Kõigi\ elementaarsündmuste\ hulk}$$

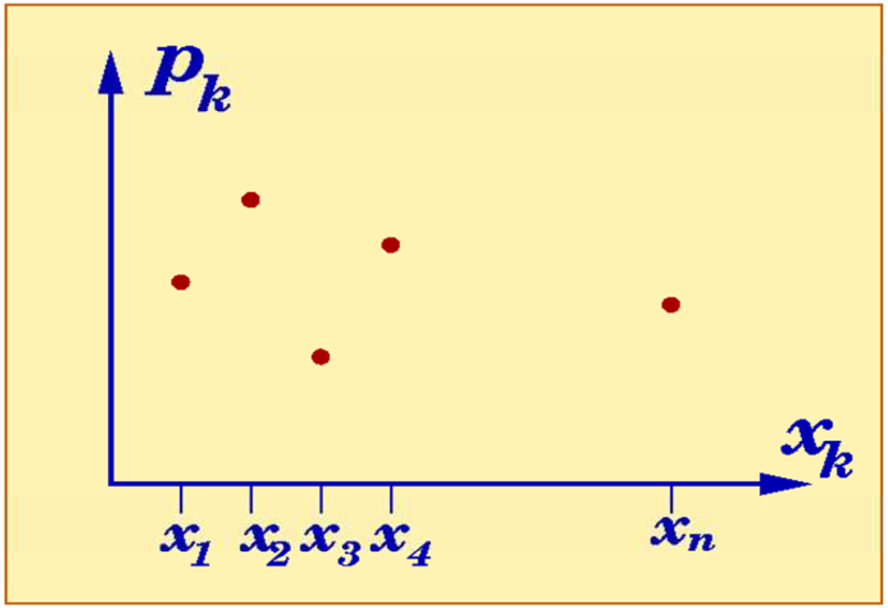
$$0 \le p_k \le 1$$

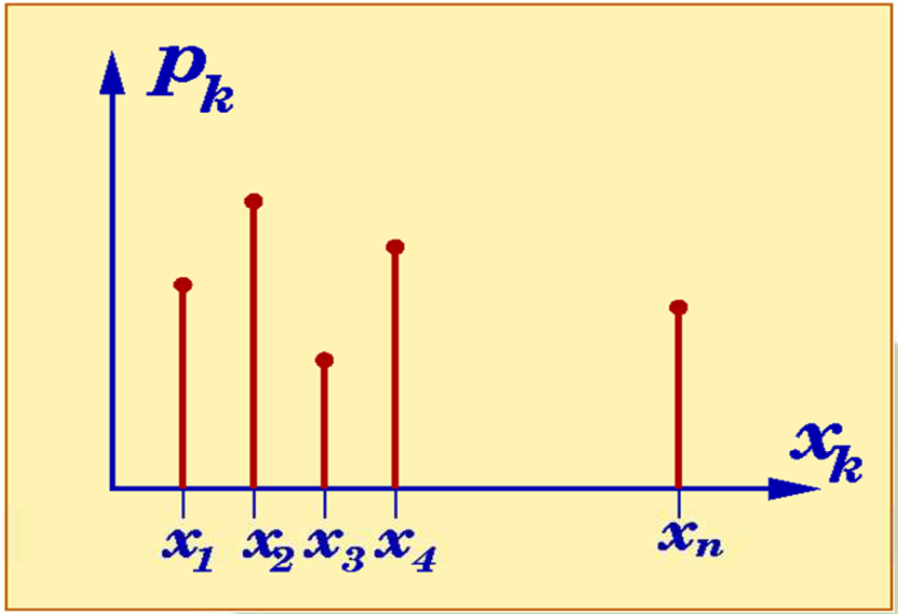
$$\sum_k p_k \equiv 1$$

Näide 2.4. Tõenäosus visata 6-tahulise sümmeetrilise täringuga:

visatakse 1 silm:	$p = 1/6$	
visatakse 4 silma:	$p = 1/6$	
visatakse 8 silma:	$p = 0/6 = 0$	**Võimatu sündmus**
visatakse 1 või 4 silma:	$p = 2/6$	
visatakse 1, 2, 4 või 6 silma:	$p = 4/6$	
visatakse vähem kui 8 silma:	$p = 6/6 = 1$	**Kindel sündmus**

MMM – jaotusseadused





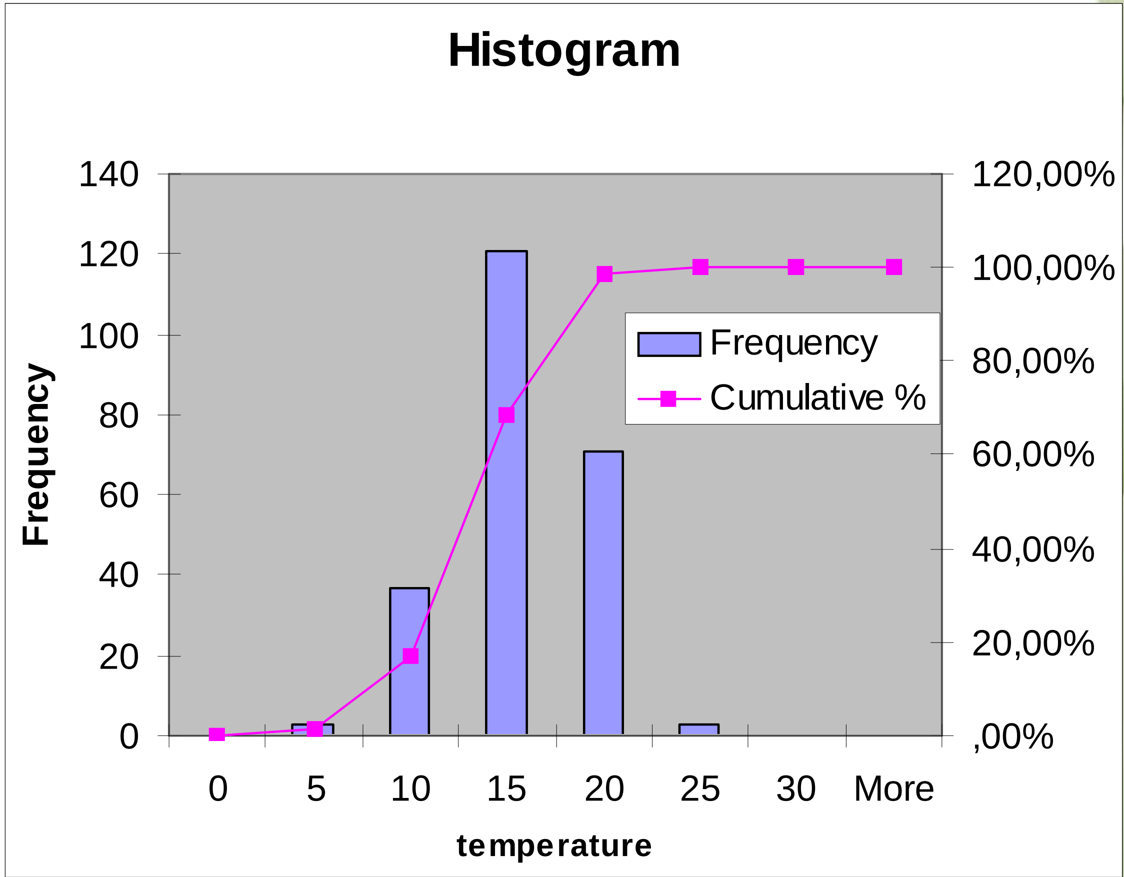
Juhusliku diskreetse suuruse tõenäosusjaotus.

Tõenäosus erineb nullist ainult määratud, diskreetsetel väärtustel. Näiteks täringu viskel väärtus 2,9 ei ole määratud ja tema tõenäosus on seega null.

MMM – jaotusseadused

Diskreetsete suuruste jaotusfunktsioon ehk kumulatiivne tõenäosusjaotus on defineeritud valemiga:

$$F(k) = \sum_{i \le k} p_i$$



MMM – jaotusseadused

Jaotusfunktsiooni omadused tulenevad tõenäosusjaotuse omadustest. Kuna tõenäosusjaotuses ei saa olla negatiivseid väärtuseid, siis jaotusfunktsiooni väärtused ei saa samuti väheneda, s.t. $F(x_2) \geq F(x_1)$, kui $x_2 > x_1$. Kui aga muuta x väärtust tema võimalikes piirides, muutub $F(x)$ alates 0 kuni 1, s.t. jaotusfunktsioon rahuldab võrratust $0 \leq F(x) \leq 1$.

Tõenäosus, et sündmuse väärtus on väiksem mingist väärtusest x_1 on $F(x_1)$ ja et sama väärtus on väiksem väärtusest $x_2 > x_1$ on vastavalt $F(x_2)$. Sellest lähtuvalt võime väita, et tõenäosus sündmuse väärtuse sattumiseks vahemikku $[x_1; x_2]$, on võrdne funktsiooni $F(x)$ väärtusega selle vahemiku piires:

$$P\left\{x_1 \leq x \leq x_2\right\} = F(x_2) - F(x_1)$$

MMM – jaotusseadused

Jaotustihedus *f*(*x*) on tuletatud jaotusfunktsioonist *F*(*x*):

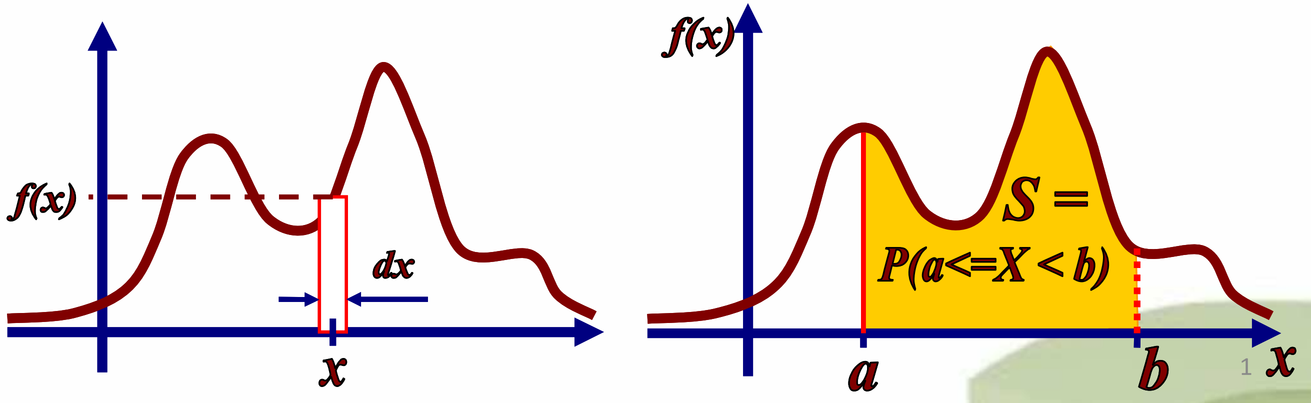
$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Teistpidi on jaotusfunktsioon määratud integraal jaotustihedusest:

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx$$

Kuigi matemaatiliselt on jaotustihedus ja jaotusfunktsioon üksteisest tuletatavad, on mõlemad siiski tarvilikud, sageli lihtsustab nende valemite kasutamine oluliselt paljude esmapilgul väga keeruliste ülesannete lahendamist.

MMM – jaotusseadused



Geomeetriline interpretatsioon jaotustihedusest ja jaotusfunktsioonist.

$$dp = dF(x) = f(x) \cdot dx$$

$$p(a,b) = P(a \le X \le b) = \int_a^b dP = \int_a^b f(x) \cdot dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{b} f(x) \cdot dx - \int_{-\infty}^{a} f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$$

Integraalid

Tuletised

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad \int x^{-1} dx = \ln|x| + C \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1}$$

$$\int \exp(x) dx = \exp(x) + C \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x)$$

$$\int \ln(x) dx = x \cdot \ln|x| - x + C \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

22

MMM – jaotusseadused

Ülesanne 2.1. Tee kahe täringuviske summa jaotustabel. Leia tõenäosus, et

- **a.** **kahe täringuviske summa oleks 6;**
- **b.** **kahe täringuviske summa oleks väiksem kui 9;**
- **c.** **kahe täringuviske summa oleks vahemikus [3;8].**

Ülesanne 2.1. Tee kahe täringuviske summa jaotustabel. Leia tõenäosus, et

a. kahe täringuviske summa oleks 6;
b. kahe täringuviske summa oleks väiksem kui 9;
c. kahe täringuviske summa oleks vahemikus [3;8].

summa	kombinatsioonid	esinemiste arv	esinemise tõenäosus	Jaotus-funktsioon
2	1,1	1	1/36	1/36
3	1,2 2,1	2	2/36	3/36
4	1,3 2,2 3,1	3	3/36	6/36
5	1,4 2,3 3,2 4,1	4	4/36	10/36
6	1,5 2,4 3,3 4,2 5,1	5	5/36	15/36
7	1,6 2,5 3,4 4,3 5,2 6,1	6	6/36	21/36
8	2,6 3,5 4,4 5,3 6,2	5	5/36	26/36
9	3,6 4,5 5,4 6,3	4	4/36	30/36
10	4,6 5,5 6,4	3	3/36	33/36
11	5,6 6,5	2	2/36	35/36
12	6,6	1	1/36	1

MMM – Tagasiside

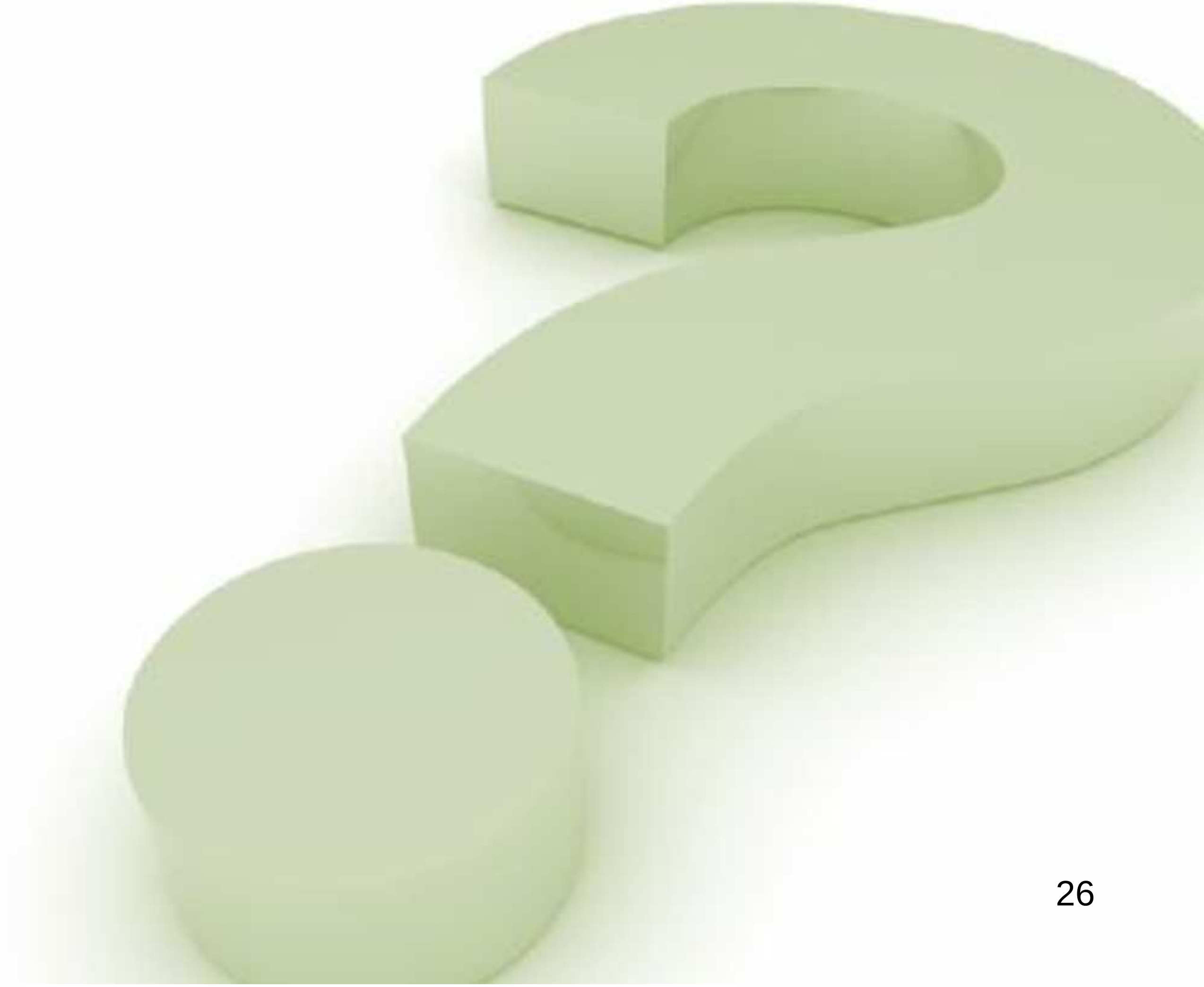
Palun leia tükk paberit ning kirjuta sellele lühidalt:

- **mis oli sinu arvates kõige olulisem asi, mida sa täna õppisid;**
- **milline koht oli tänases loengus kõige keerulisem, segasem;**
- **oma eriala.**

Pärast loengu lõppu jätke paberid ukse kõrvale karpi.

MMM – Kodune töö

Kodune test sulgub 27.02.2011 kell 23:55.



Mõõtmised ja mõõtemääramatused

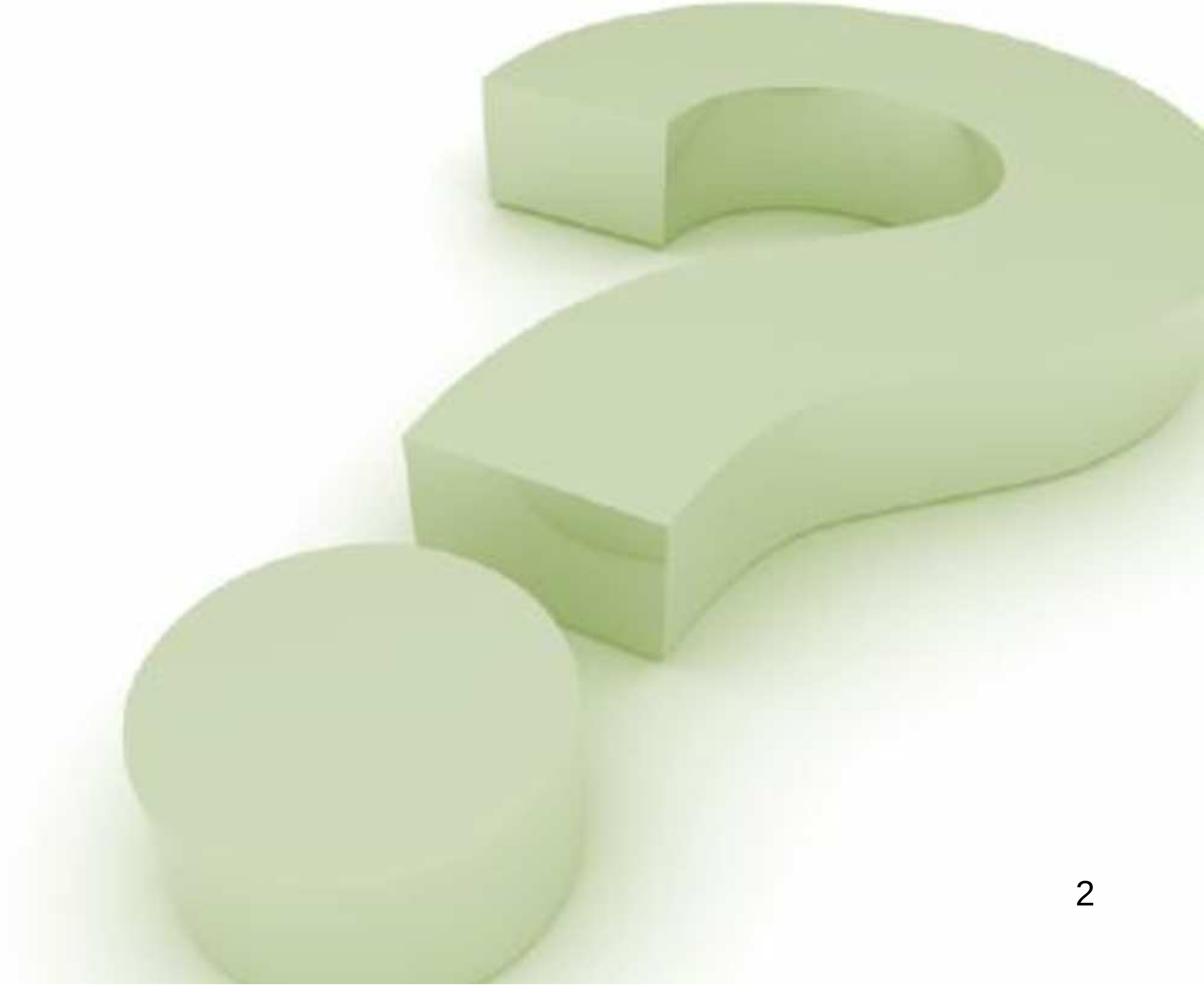
Measurements and uncertainties

Erko Jakobson, PhD

MMM – tagasiside

Eelmise loengu tagasiside

Koduste testide tagasiside



MMM – jaotusseadused

Ülesanne 2.2. Radioaktiivse aine pooldumist kirjeldab valem

$$f(t) = \frac{1}{t_0} \exp(-t / t_0)$$

kus parameeter t_0 on antud aine poolestusaeg (ajaintervall, mille jooksul jääb ainet $e \approx 2{,}718$ korda vähemaks. Tseesium 137 poolestusaeg on 43 aastat. Leia radioaktiivse aine pooldumist kirjeldav jaotusfunktsioon. Palju kulub aega, et esialgsest Cs ainehulgast jääks järgi ainult 1%?

MMM – jaotusseadused

Ülesanne 2.3. Ruumi temperatuurikontrollisüsteem hoiab ruumi temperatuuri vahemikus 20 ℃ kuni 24 ℃. Temperatuuri t süklilise muutumise tulemuseks on arkussiinustemperatuurijaotus, keskväärtusega 22 ℃. Mitu protsenti ajast on ruumi temperatuur vahemikus 21 ℃ kuni 23 ℃? Mitu protsenti ajast on ruumi temperatuur alla 20,5 ℃ või üle 23,5 ℃?

Arkussiinusjaotuse jaotustihedus on

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, \quad 0 < x < 1$$

ning tema jaotusfunktsioon on

$$F(x) = \frac{2 \cdot \arcsin(\sqrt{x})}{\pi}, \quad 0 < x < 1$$

MMM – juhusliku suuruse arvkarakteristikud

Eespool nägime, et juhusliku suuruse jaotusseadus iseloomustab täielikult juhuslikku suurust tõenäosuslikult vaatekohalt.

Pideva suuruse korral on jaotustiheduse eksperimentaalne leidmine sageli väga kulukas ja töömahukas ülesanne. Enamasti aga ei olegi jaotusseadust tarvis teada (ei ole tarvis nii täielikku infot). Piisab, kui kasutada nn juhusliku suuruse arvkarakteristikuid, mis iseloomustavad juhusliku suuruse integraalseid omadusi. Ilma liialdamata võib öelda, et tõenäosusteooria rakendamisel praktiliste ülesannete lahendamiseks on oluline osata kasutada juhusliku suuruse arvkarakteristikuid, jättes kõrvale jaotusseadused.

Olulisemateks arvkarakteristikuteks on keskväärtus ja dispersioon. Peale nende põhikarakteristikute kasutatakse veel suurt hulka teisi arvkarakteristikuid nagu kvantiilid, mediaan, mood, momendid, asümmeetriakordaja, ekstsessikordaja, karakteristlik funktsioon, entroopia jmt.

MMM – juhusliku suuruse arvkarakteristikud – keskväärtus

Keskväärtus on juhusliku suuruse tähtsaim arvkarakteristik, mis iseloomustab juhusliku suuruse paiknemist.

Juhusliku suuruse *X* keskväärtust tähistatakse matemaatikas ja füüsikas üsna mitmel erineval viisil. Levinumad tähistused on

m, m_x, $m[x]$, $\overline{X}$ $\langle x \rangle$	**– füüsikute hulgas;**
EX, $M[X]$	**– matemaatikute hulgas.**

Siin tähis *m*, *M* on võetud ingliskeelse sõna *mean* (keskmine) esitähest, *E* aga on tulenenud prantsuskeelse sõna *espérance* (lootus, ootus) esitähest.

MMM – juhusliku suuruse arvkarakteristikud – keskväärtus

Diskreetse juhusliku suuruse *X* = {x_1, x_2, ..., x_n} keskväärtuseks nimetatakse suurust (arvu)

$$m = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \qquad p_k = P(X = x_k)$$

Pideva juhusliku suuruse *X*, mille jaotustihedus on *f*(*x*) nimetatakse arvu

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

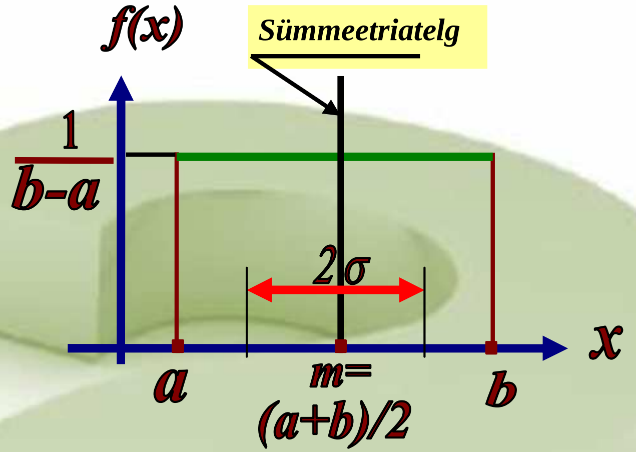
Valemid keskväärtuse arvutamiseks langevad kokku valemitega varda massikeskme arvutamiseks, kui varda mass on võrdne ühega. Teisisõnu, keskväärtus on ühikmassiga varda staatiline moment.

MMM – juhusliku suuruse arvkarakteristikud – keskväärtus

Näide 2.5. Ühtlase jaotuse keskväärtus.

Ühtlase jaotuse jaotustihedus on defineeritud kui

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{mujal}\end{cases}$$



Ühtlase jaotuse keskväärtus on:

$$m(x)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{a}x\cdot f(x)dx+\int_{a}^{b}x\cdot f(x)dx+\int_{b}^{\infty}x\cdot f(x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{a}x\cdot 0dx+\int_{a}^{b}x\cdot\frac{1}{b-a}dx+\int_{b}^{\infty}x\cdot 0dx=0+\int_{a}^{b}x\cdot\frac{1}{b-a}dx+0=$$

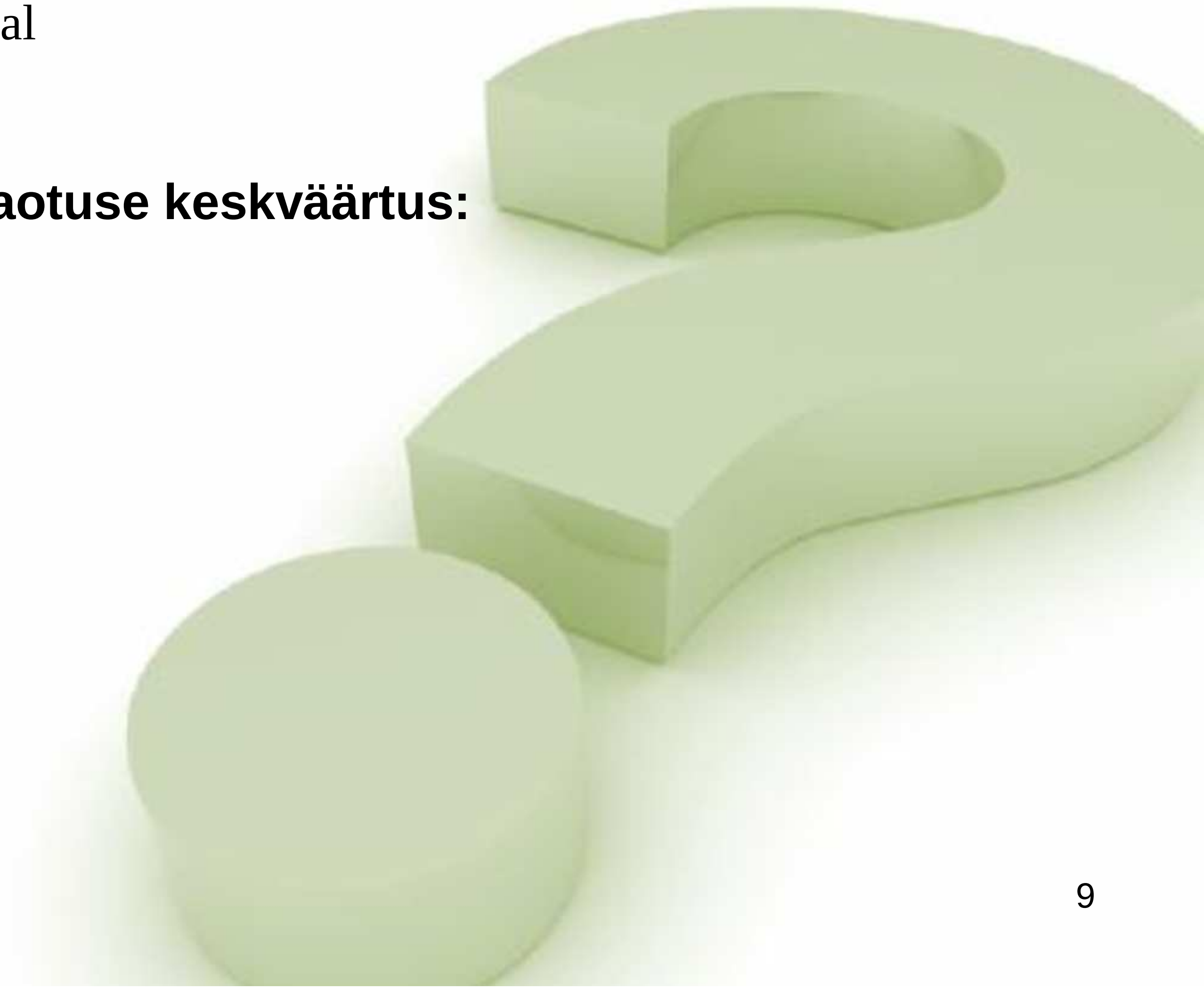
$$=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}x\,dx=\frac{1}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{a}^{b}=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

MMM – juhusliku suuruse arvkarakteristikud – keskväärtus

Näide. Defineerime ühe kolmnurkjaotuse jaotustiheduse:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & 0 \le x \le 3 \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

Arvuta selle kolmnurkjaotuse keskväärtus:



MMM – juhusliku suuruse arvkarakteristikud – keskväärtus

Näide. Defineerime ühe kolmnurkjaotuse jaotustiheduse:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & 0 \le x \le 3 \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

Arvuta selle kolmnurkjaotuse keskväärtus:

$$m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot f(x)dx + \int_{0}^{3} x \cdot f(x)dx + \int_{3}^{\infty} x \cdot f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int_{0}^{3} x \cdot \frac{2}{3}xdx + \int_{3}^{\infty} x \cdot 0dx = 0 + \int_{0}^{3} x \cdot \frac{2}{3}xdx + 0 =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{0}^{3} x^2\, dx = \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3^3 - 0^3}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{3} = 6$$

Kas keskväärtus *m*(*x*) = 6 tundub realistlik?

MMM – juhusliku suuruse arvkarakteristikud – keskväärtus

Näide. Defineerime ühe kolmnurkjaotuse jaotustiheduse:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}x, & 0 \le x \le 3 \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

Kontrollime selle jaotustiheduse vastavust normeerimistingimusele:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{3} \frac{2}{3}x\,dx + \int_{3}^{\infty} 0\,dx = 0 + \int_{0}^{3} \frac{2}{3}x\,dx + 0 =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{0}^{3} x\,dx = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)_{0}^{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3^2 - 0^2}{2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2} = 3 \ne 1$$

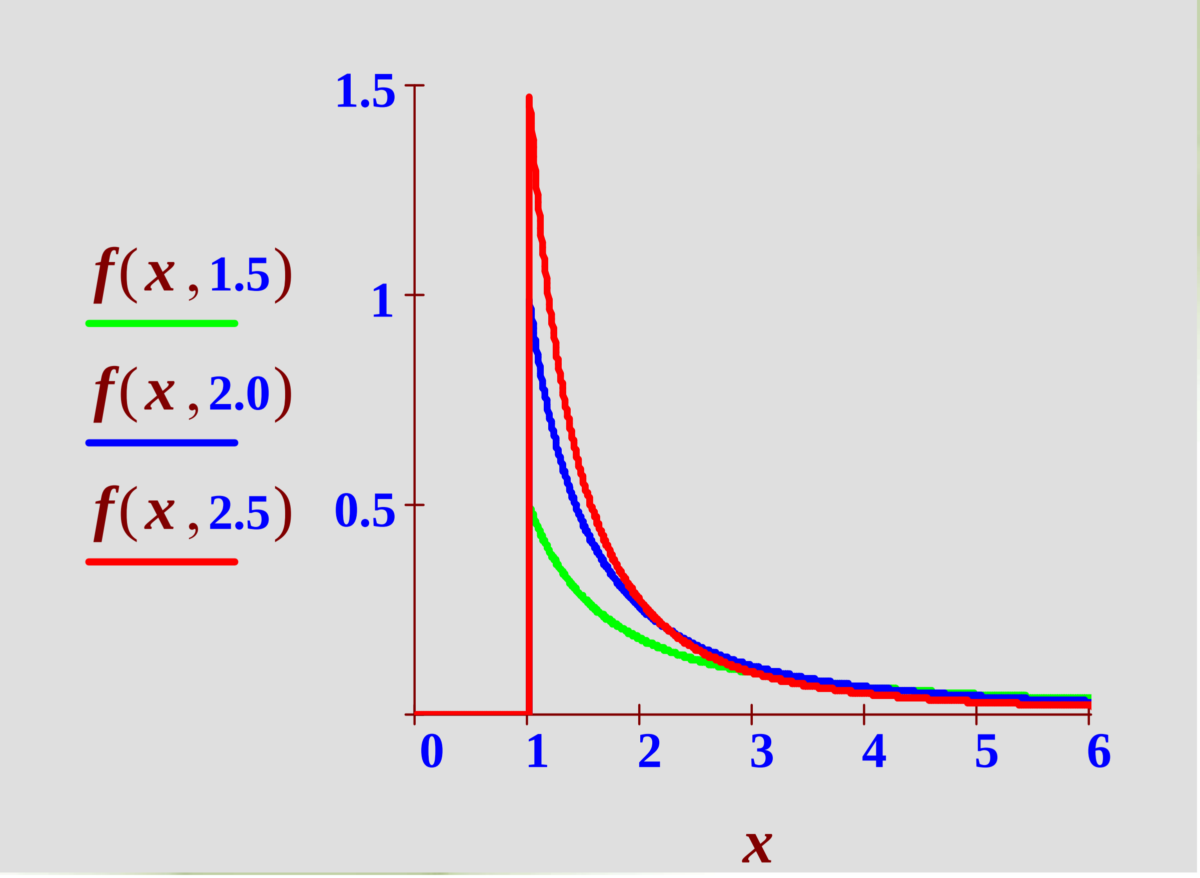
Seega polegi tegemist jaotustihedusega.

Näide 2.6. Astmejaotuse keskväärtus.

Astmejaotus on

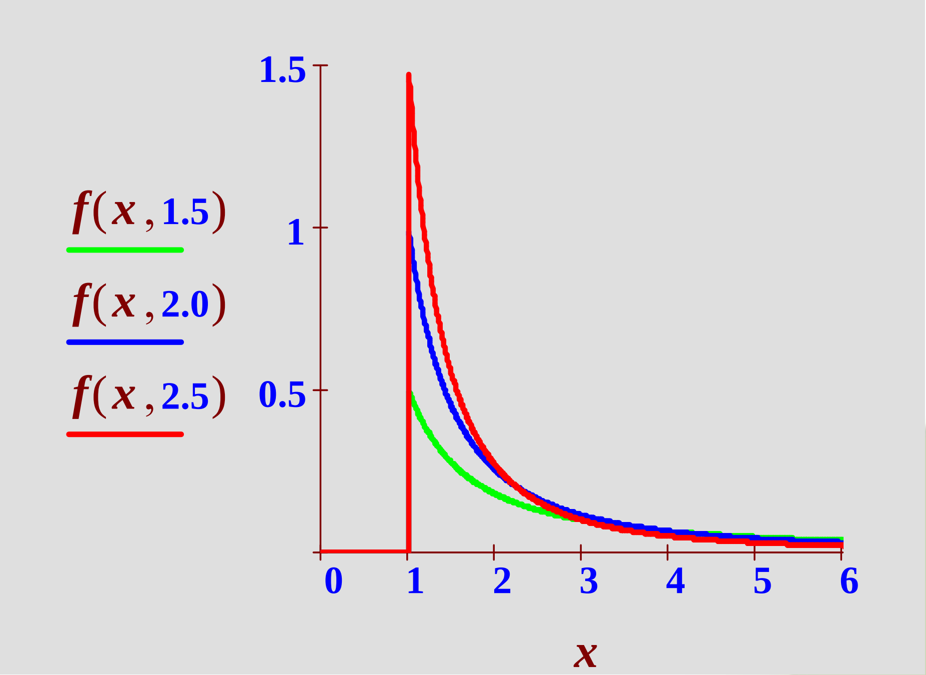
$$f(x;r) = \begin{cases} \dfrac{r-1}{x^r}, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1, \end{cases}$$

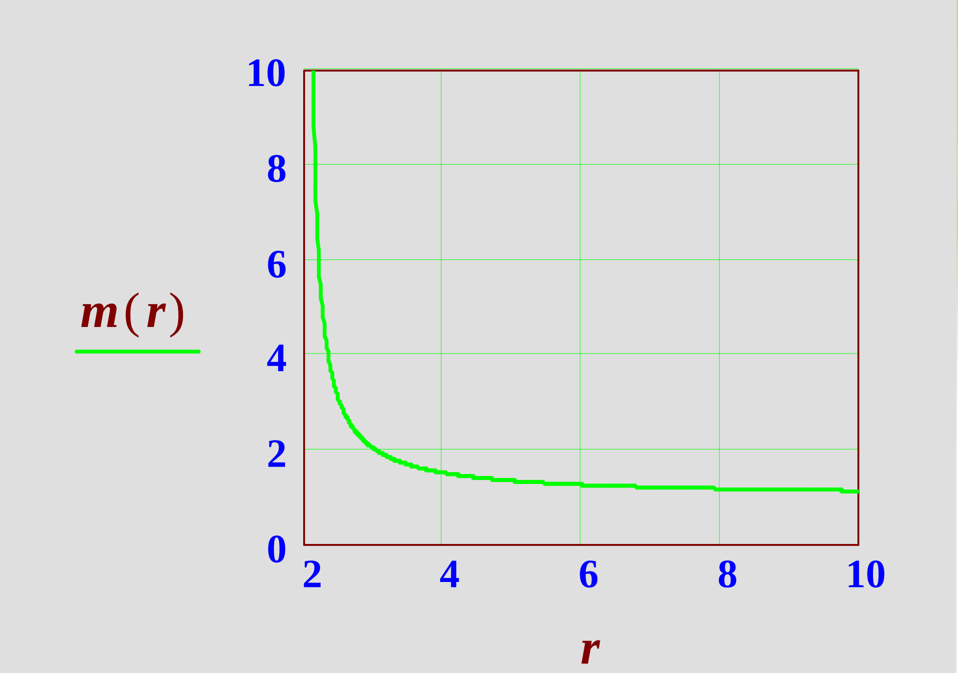
konstant *r* – 1 lugejas arvestab normeeringut. On näha: selleks, et jaotus oleks positiivne, peab kehtima *r* > 1.



Näide 2.6. Astmejaotuse keskväärtus.

$$f(x;r) = \begin{cases} \dfrac{r-1}{x^r}, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1, \end{cases} \qquad m = \frac{r-1}{r-2}, \quad r > 2$$





MMM – juhusliku suuruse arvkarakteristikud – keskväärtus

Näitame mõned olulisemad keskväärtuse omadused, mis kehtivad nii diskreetse kui pideva juhusliku suuruse korral.

1. Konstandi keskväärtus. Konstandi keskväärtus on see konstant ise

$$m[c] = c.$$

2. Homogeensus. Konstandi võib tuua keskväärtuse sümboli ette:

$$m[cX] = cm[X].$$

Tõestame homogeensuse tingimuse pideva juhu jaoks:

$$m[cX] = \int_{-\infty}^{+\infty} cx\, f(x)dx = c\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx = c\, m[X]$$

MMM – juhusliku suuruse arvkarakteristikud – keskväärtus

Keskmiste kasutamisest

Defineerime siinkohal veel mõned keskmisi väärtuseid kirjeldavad juhuslike suuruste arvkarakteristikud:

- **Mediaan on arv, millest suuremaid ja väiksemaid väärtuseid on variatsioonireas ühepalju.**
- **Mood on tunnuse kõige sagedamini esinev väärtus.**
- **Kaalutud keskmine on arv, mis saadakse, kui aritmeetilise keskmise arvutamisel antakse erinevatele väärtustele erinevad kaalud. Kaaluks võivad olla näiteks mõõtetulemuste standardhälbed.**

MMM – juhusliku suuruse arvkarakteristikud – keskväärtus

Kui meid huvitab kõige tüüpilisem väärtus, siis seda näitab kõige suurema sagedusega väärtus mood. Mood on sageduse kõrgpunkt, ta ei näita, kas ja kui palju on temast suuremaid ja vähemaid väärtuseid. Nominaaltunnuste korral (näiteks rahvus, elukutse) leitakse keskmisena mood.

Mediaani leidmisel ei arvestata tunnuse väärtusi vaid ainult suurusjärjestust. Mediaani kasutatakse siis, kui on eesmärgiks leida täpne andmete jaotuse keskpunkt, või kui andmete hulgas on ekstremaalseid väärtuseid, mis oluliselt mõjutavad keskväärtust.

Keskväärtus sõltub kõigist tunnuse väärtustest, kuid ta ei pruugi ise olla tunnuse väärtus. Keskväärtus võib sattuda vahemikku, kus tunnusel on vähe väärtuseid või need puuduvad hoopis. Siiski kasutatakse keskväärtust küllalt sageli, sest ta on aluseks teiste statistiliste näitajate (näiteks standardhälve, korrelatsioonikordaja) määramisele.

MMM – juhusliku suuruse arvkarakteristikud – keskväärtus

Näide 2.6. Suvel märgistatakse raadiomajakaga 9 kuldnokka, et teada saada kuldnokkade keskmine rände kestvus. Sügisel lahkusid kõik 9 kuldnokka Eestist, kuid vaatlusperioodi lõpuks suve alguses oli Eestisse tagasi jõudnud ainult 7 kuldnokka, kelle rände kestvused olid vastavalt 146; 152; 152; 154; 156; 159; 159 päeva. Mitu päeva kestis sellel aastal keskmiselt kuldnokkade ränne?

MMM – juhusliku suuruse arvkarakteristikud – keskväärtus

Näide 2.7. Oletame, et üks firma koosneb juhatajast ja 9-st töötajast. Töötajate kuupalk on 5000 EEK, juhata kuupalk on 55000 EEK. Keskmine palk selles firmas on

$$m = \frac{9 \cdot 5000 + 55000}{10} = 10000$$

Samas mediaanpalk selles firmas on 5000 EEK.

Üks teine firma koosneb neljast insenerist, kuupalgaga 39000 EEK ning koristajast, kuupalgaga 4000 EEK. Keskmine palk selles firmas on

$$m = \frac{4 \cdot 39000 + 4000}{5} = 32000$$

Samas mediaanpalk selles firmas on 39000 EEK.

MMM – juhusliku suuruse arvkarakteristikud – dispersioon

Juhusliku suuruse dispersiooniks *D* (ka σ^2) nimetatakse suurust

$$D[X] = m\left[\left(X - m[X]\right)^2\right]$$

mis võetakse üheks hajuvuse karakteristikuks. Seega on dispersioon juhusliku suuruse üheks nn juhuslikkuse määra iseloomustajaks.

Vastavalt definitsioonile on diskreetse juhusliku suuruse dispersiooni arvutusvalem

$$D = \sum_i \left(x_i - m\right)^2 p_i$$

Niisiis, tegu on tõenäosustega kaalutud üksikrealisatsioonide hälvete ruutude summaga. Analoogiliselt, pideva juhuliku suuruse korral on dispersiooni arvutusvalem

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \, f(x)\, dx$$

MMM – juhusliku suuruse arvkarakteristikud – dispersioon

Dispersiooni praktiliseks arvutamiseks sobib kasutada järgmist Steineri valemit

$$D[X] = m[X^2] - (m[X])^2$$

Siin esimene suurus paremal on keskväärtus juhusliku suuruse ruudust *X*².

Tõestame Steineri valemi pideva juhu jaoks:

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \, f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2xm + m^2)\, f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, f(x)\,dx - 2m \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx + m^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Siin teine integraal on *X* keskväärtus *m*(*X*) ja viimane integraal on normeerituse tõttu võrdne ühega. Seepärast saame

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, f(x)\,dx - 2m^2 + m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, f(x)\,dx - m^2$$

MMM – juhusliku suuruse arvkarakteristikud – standardhälve

Dispersiooni ruutjuurt

$$\sigma = \sqrt{D}$$

nimetatakse standardhälbeks, ruutkeskmiseks hälbeks ehk ruuthälbeks.

Definitsioonidest on näha, et dispersiooni dimensioon on võrdne juhusliku suuruse dimensiooni (mõõtühiku) ruuduga, standardhälbe dimensiooniks on aga juhusliku suuruse dimensioon. Seetõttu kasutatakse praktikas harilikult standardhälvet.

Mõõtemääramatuste arvutamisel kasutatakse alati standardhälvet!!!

MMM – juhusliku suuruse arvkarakteristikud – standardhälve

Näide 2.9. Täringuvisete keskväärtus ning dispersioon.

	x	x^2	$x-m$	$(x-m)^2$	p_i
	1	1	–2,5	6,25	1/6
	2	4	–1,5	2,25	1/6
	3	9	–0,5	0,25	1/6
	4	16	0,5	0,25	1/6
	5	25	1,5	2,25	1/6
	6	36	2,5	6,25	1/6
Σ	21	91	0	17,5	1

Leiame kõigepealt keskväärtuse:

$$m(x)=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k = 21\cdot\frac{1}{6}=3{,}5$$

Dispersioon põhivalemi põhjal:

$$D(x)=\sum_i (x_i-m)^2 p_i = \frac{1}{6}\cdot 17{,}5\approx 2{,}92$$

Dispersioon Steineri valemist:

$$D(x)=m\left[X^2\right]-m^2=\frac{91}{6}-3{,}5^2\approx 15{,}17-12{,}25=2{,}92$$

Standardhälve:

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{2{,}92}=1{,}71$$

MMM – juhusliku suuruse arvkarakteristikud – standardhälve

Näide 2.10. Ühtlase jaotuse standardhälve.

Ühtlase jaotuse jaotustihedus on:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

Ühtlase jaotuse keskväärtuseks saime:

$$m(x) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{x^2}{2} \right)_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Dispersiooni arvutamisel kasutame Steineri valemit. Leiame esmalt x^2 keskväärtuse:

$$m(x^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2\, dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{x^3}{3} \right)_a^b =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(a^2 + ab + b^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Näide 2.10. Ühtlase jaotuse standardhälve.

$$m(x) = \frac{a+b}{2} \qquad m(x^2) = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Vastavalt Steineri valemile, on ühtlase jaotuse dispersioon

$$D(x) = m(x^2) - \left(m(x)\right)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

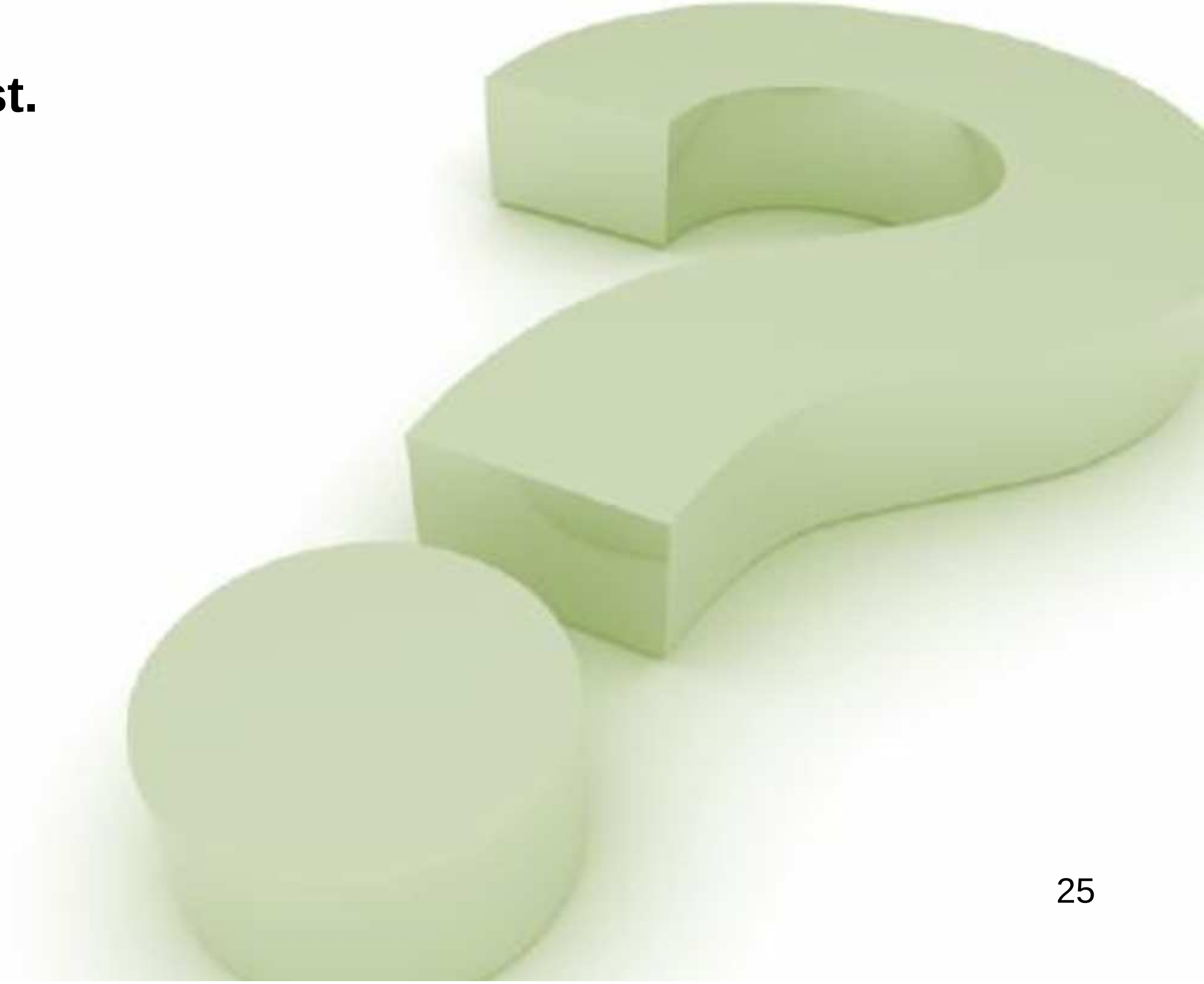
$$= \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

ning ühtlase jaotuse standardhälve on:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \frac{b-a}{\sqrt{3}\cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{b-a}{2} \approx 0{,}577\,\frac{b-a}{2}$$

Näide 2.11. Astmejaotuse standardhälve

vaadake ise konspektist.



MMM – juhusliku suuruse arvkarakteristikud – standardhälve

Dispersiooni omadusi, millest tulenevad ka standardhälbe omadused:

1. Dispersiooni mittenegatiivsus.

a) Mittejuhusliku suuruse ehk konstandi dispersioon on null.

b) Juhusliku suuruse dispersioon on alati positiivne.

2. Ruuthomogeensus. Kehtib võrdus

$$D\left[cX\right] = c^2 D\left[X\right]$$

3. Juhuslike suuruste summa dispersioon.

Kui suurused X ja Y on sõltumatud juhuslikud suurused, siis

$$D\left[X \pm Y\right] = D\left[X\right] + D\left[Y\right]$$

Kui suurused X ja Y on omavahelises sõltuvuses olevad juhuslikud suurused, siis

$$D\left[X \pm Y\right] = D\left[X\right] + D\left[Y\right] \pm 2r\sqrt{D\left[X\right]D\left[Y\right]}$$

Ülesanne 2.4. Juhusliku suuruse jaotustiheduseks on kuupfunktsioon:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{4}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

Leia antud funktsioonil:

- **a.** **keskväärtus *m***
- **b.** **standardhälve σ**
- **c.** **tõenäosus, et juhuslik suurus oleks vahemikus *m* ± σ**
- **d.** **tõenäosus, et juhuslik suurus oleks väiksem kui keskväärtus**
- **e.** **mediaan**

Leiame praegu ainult mediaani, ülejäänud lahendust vaadake ise konspektist.

Ülesanne 2.4. Juhusliku suuruse jaotustiheduseks on kuupfunktsioon:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{4}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

e. mediaan

$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx = \int_0^{x_1} \frac{x^3}{4} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^{x_1} = \frac{x_1^{\,4}}{16}$$

$$F(x_{med}) = \frac{x_{med}^{\;4}}{16} = 0{,}5 \Rightarrow x_{med}^{\;4} = 8 \Rightarrow x_{med} = \sqrt[4]{8} = 1{,}68$$

Ülesanne 2.5. Radioaktiivse aine pooldumist kirjeldab valem

$$f(t) = \frac{1}{t_0} \exp(-t / t_0)$$

kus parameeter t_0 on antud aine poolestusaeg (ajaintervall, mille jooksul jääb ainet $e \approx 2{,}718$ korda vähemaks. Tseesium 137 poolestusaeg on 43 aastat. Leia Cs pooldumise keskväärtus, mediaan ja standardhälve.

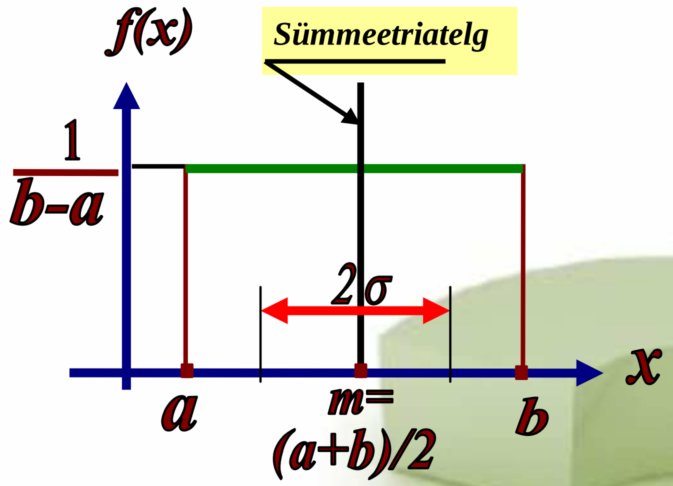
Proovi kodus ise lahendada, kontrolli konspektist lahendust.

MMM – enamkasutatavad jaotusseadused – ühtlane jaotus

Ühtlane jaotus

$$m = \frac{a+b}{2}$$

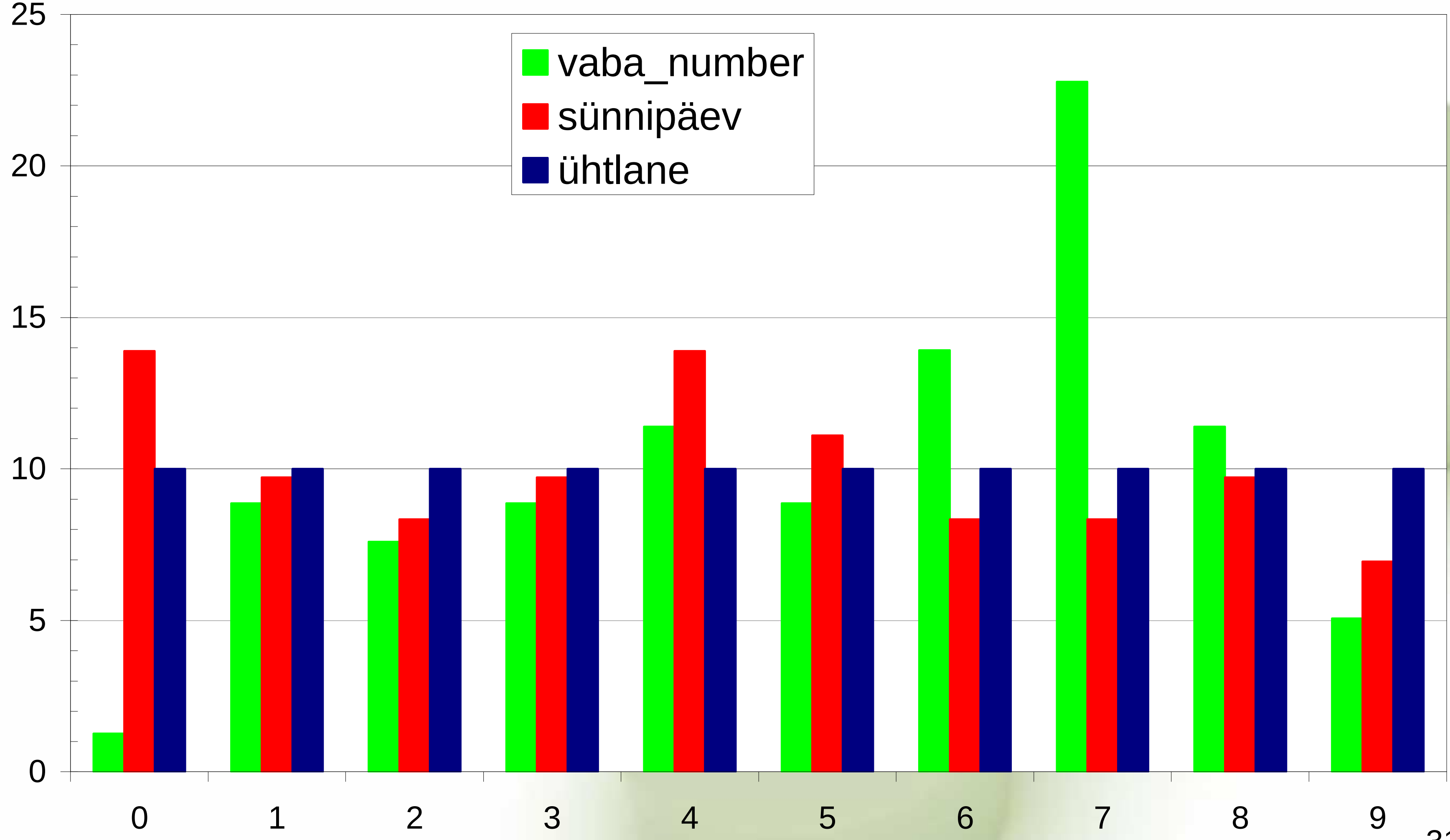
$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b-a}{2} \approx 0.577 \frac{b-a}{2}$$



Ühtlase jaotuse näiteks on mõõtevahendi resolutsioonist tingitud määramatus, seda eriti selgelt digitaalnäiduga seadmetel. Kui näiteks digitaaltermomeetri resolutsioon on 0,1 ℃ ning näiduks on 22,6 ℃, siis tegelik temperatuur on vahemikus (22,55 ℃ – 22,6 5 ℃). Kuna meil pole mingi alust eeldada, et temperatuuril esineks mingisugused eelistatumaid väärtuseid, siis on kõige mõistlikum eeldada, et mõõtevahendi resolutsioonist tingitud määramatus on kirjeldatav ühtlase jaotusena.

MMM – enamkasutatavad jaotusseadused – ühtlane jaotus

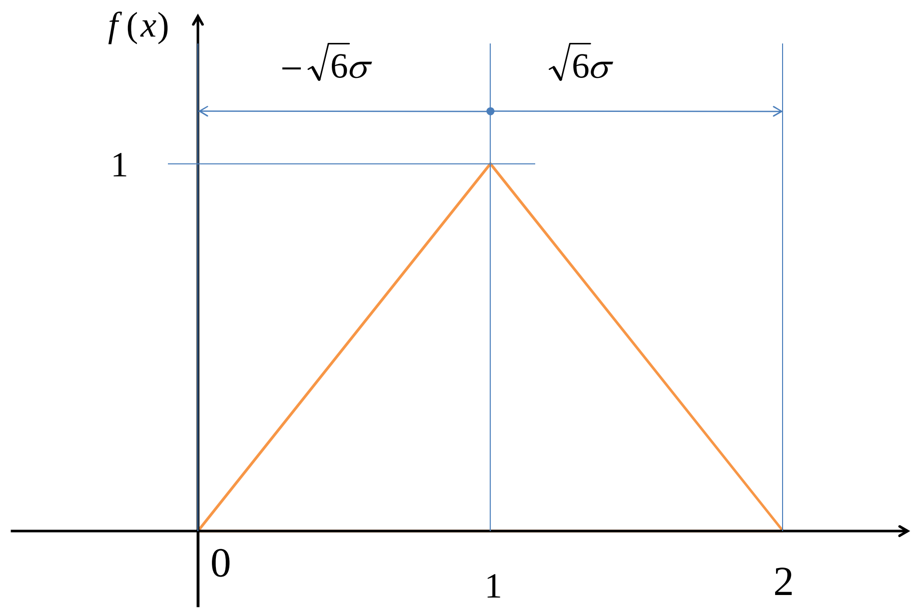
Eelmise nädala numbrite pakkumise ning sünnikuupäeva viimase numbri küsitluse tulemused:



Kolmnurkjaotus

Vaatame ühte erijuhtu kolmnurkjaotusest, mis on sümmeetriline ning asub lõigul [0; 2], seega on tema jaotustihedus on antud funktsiooniga

$$f(x) = \begin{cases} x; & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x; & 1 < x \leq 2 \\ 0; & \text{mujal} \end{cases}$$



Et ülalkirjeldatud kolmnurkjaotus on sümmeetriline, siis ilmselt on tema keskväärtus

$$m = \frac{0+2}{2} = 1$$

MMM – enamkasutatavad jaotusseadused – kolmnurkjaotus

Kolmnurkjaotus

$$m(x) = \frac{0+2}{2} = 1$$

Kolmnurkjaotuse ruudu keskväärtus on:

$$m(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot x\,dx + \int_1^2 x^2 \cdot (2-x)\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + \frac{2x^3}{3}\Big|_1^2 - \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{16-2}{3} - \frac{16-1}{4} = \frac{3+56-45}{12} = \frac{14}{12}$$

ja kolmnurkjaotuse dispersioon ning standardhälve on:

$$D = m(x^2) - m^2 = \frac{14}{12} - (1)^2 = \frac{2}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{2}{12}} \approx 0{,}41$$

MMM – enamkasutatavad jaotusseadused – eksponentjaotus

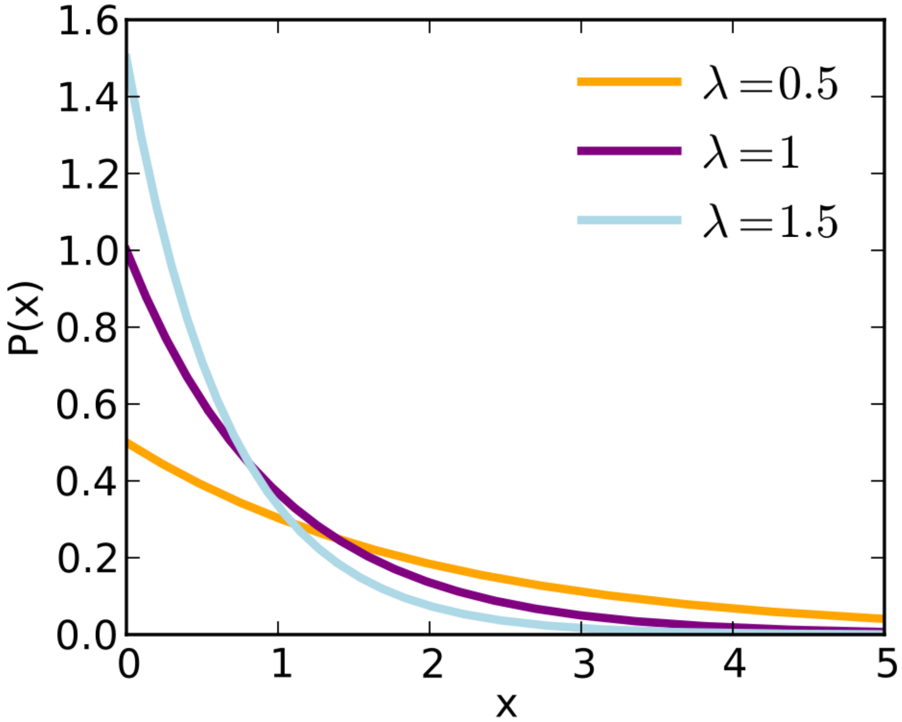
Eksponentjaotus

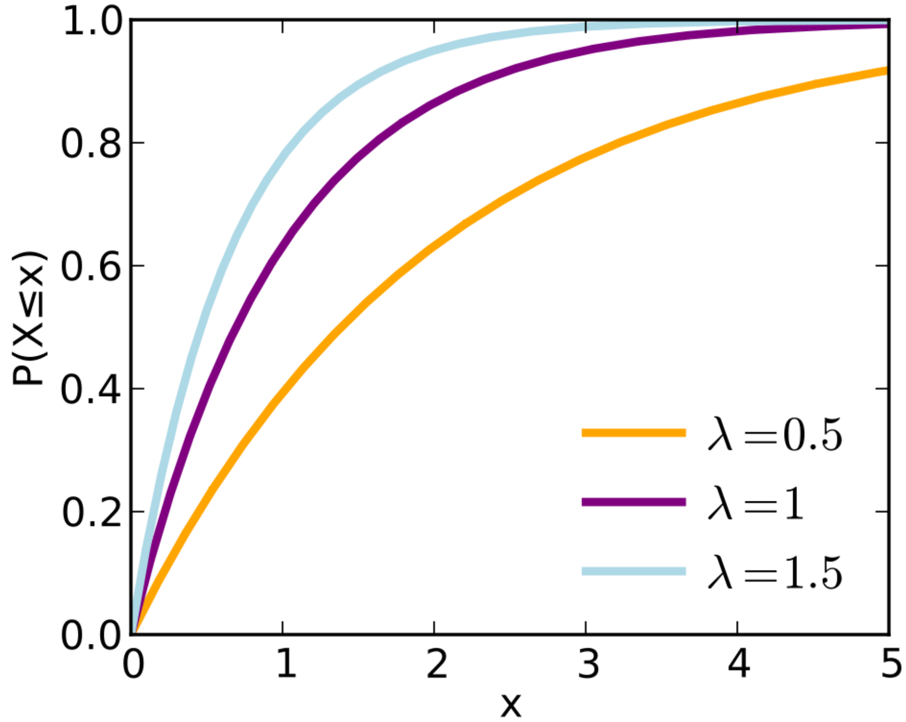
Eksponentjaotuse saate läbi arvutada radioaktiivse aine pooldumist kirjeldavas näites.

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$$

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$$

Siin $\lambda = 1 / t_0$, eksponentjaotuse keskväärtus ja standardhälve on mõlemad võrdsed parameetriga t_0.

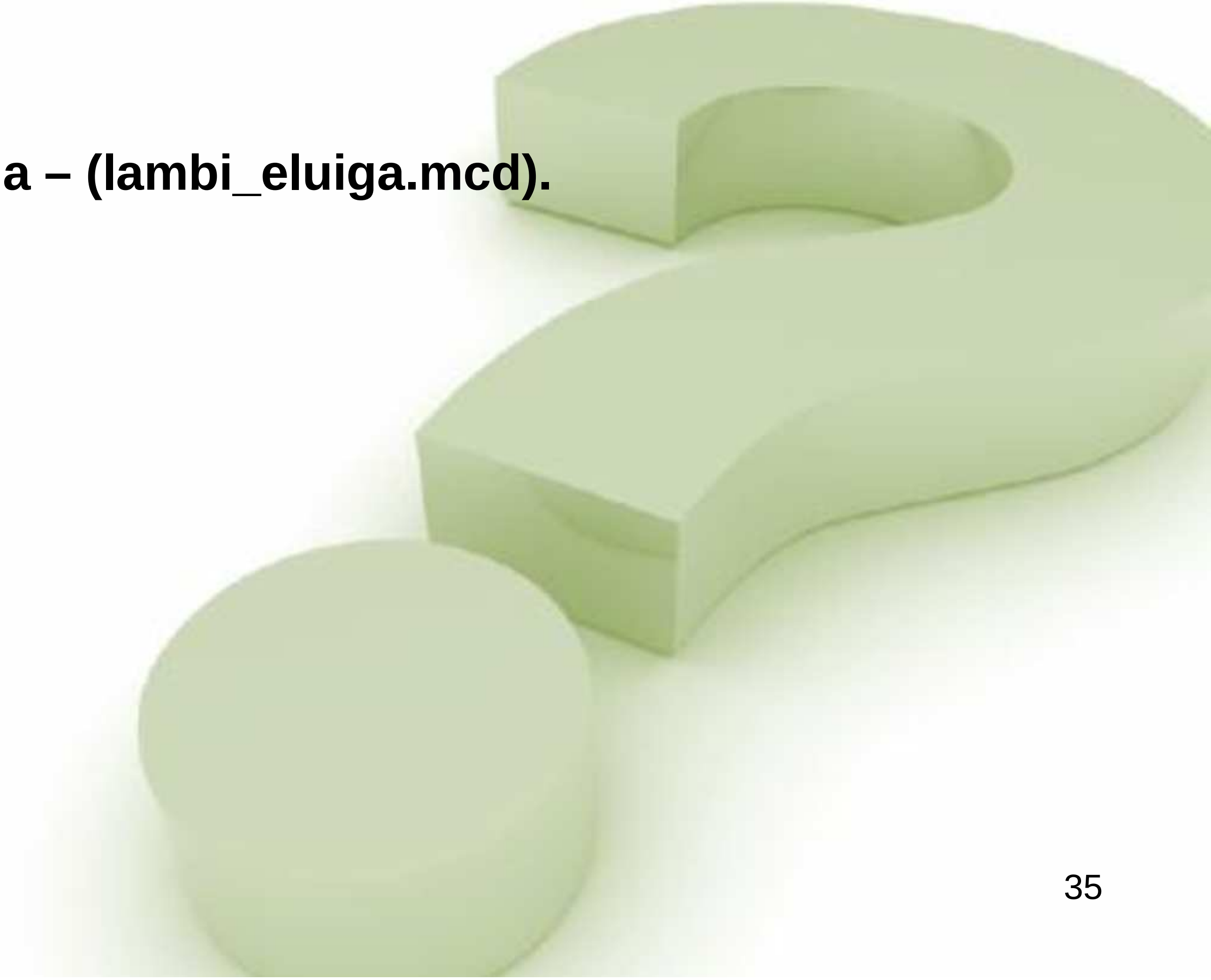




MMM – enamkasutatavad jaotusseadused – eksponentjaotus

Näide 2.9. Hõõglambi eluiga allub eksponentjaotusele. Tootja väidab, et hõõglambi keskmine eluiga on 1000 tundi. Kui pikk on keskmise lambi eluiga? Kui suur on tõenäosus, et ühe lambi eluiga on 5000 tundi?

Lahendus – Mathcadiga – (lambi_eluiga.mcd).



MMM – Tagasiside

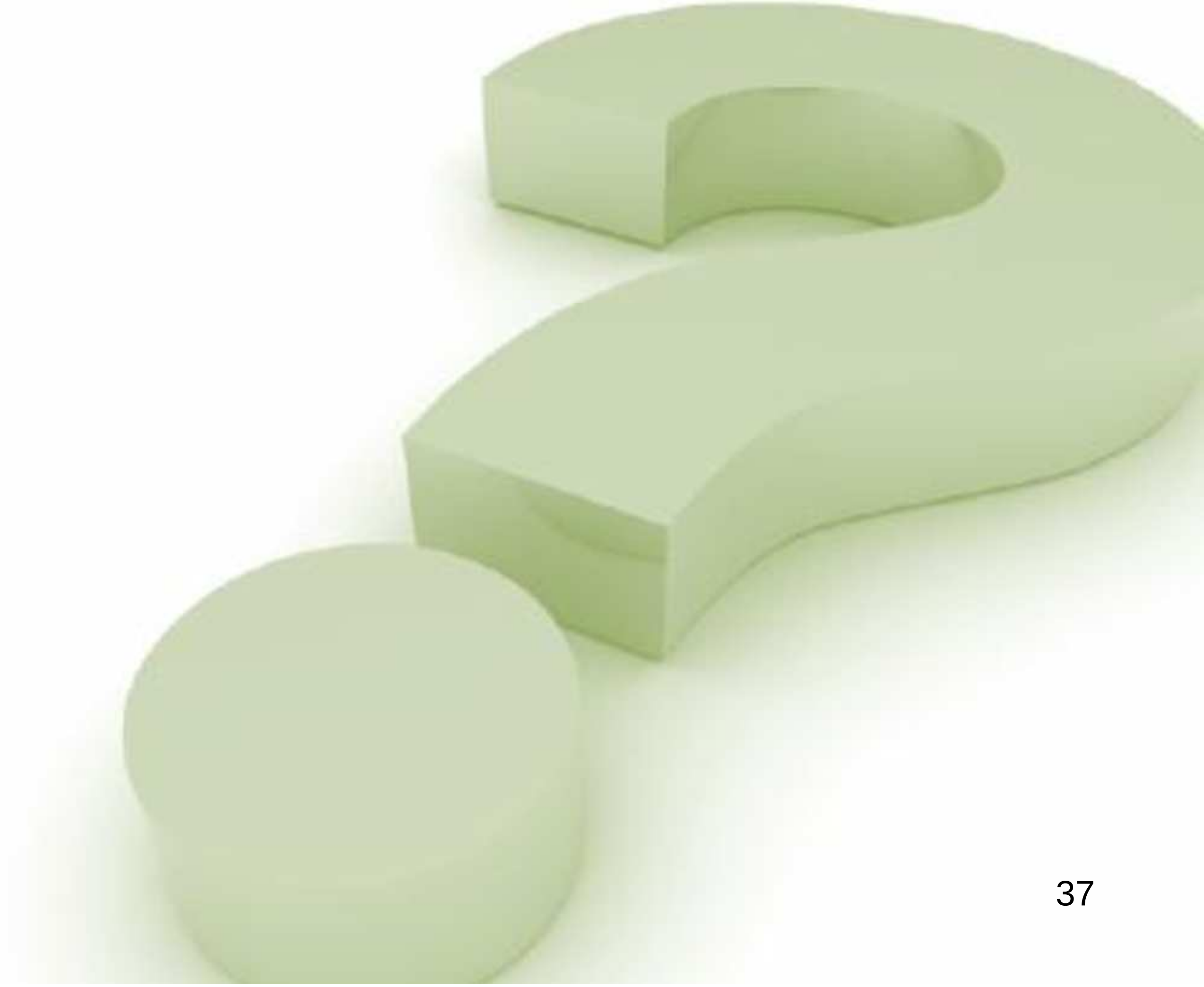
Palun leia tükk paberit ning kirjuta sellele lühidalt:

- **mis oli sinu arvates kõige olulisem asi, mida sa täna õppisid;**
- **milline koht oli tänases loengus kõige keerulisem, segasem;**
- **oma eriala.**

Pärast loengu lõppu jätke paberid ukse kõrvale karpi.

MMM – Kodune töö

Kodune test sulgub 06.03.2011 kell 23:55.



Mõõtmised ja mõõtemääramatused

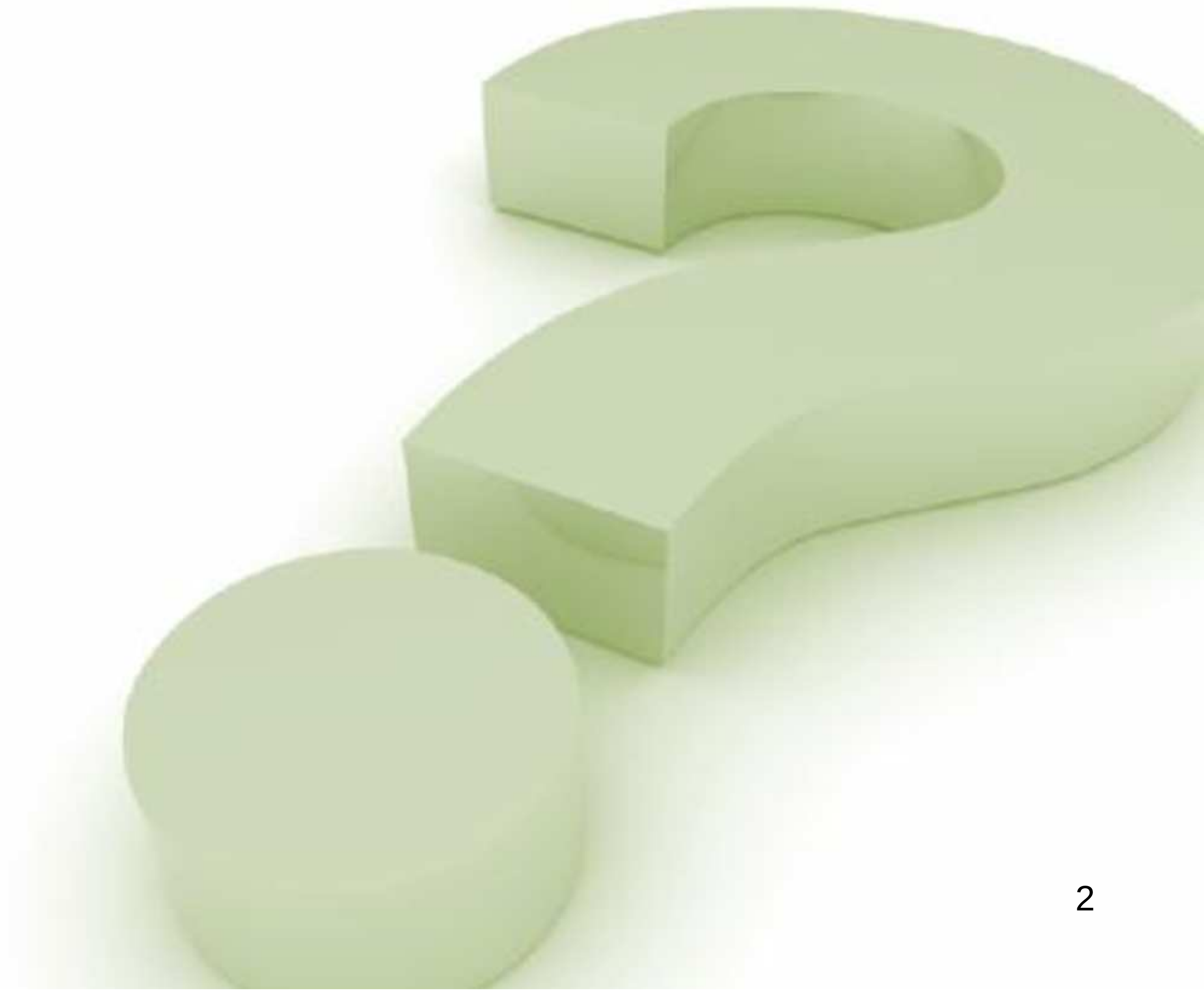
Measurements and uncertainties

Erko Jakobson, PhD

MMM – tagasiside

Eelmise loengu tagasiside

Koduste testide tagasiside



MMM – enamkasutatavad jaotusseadused – eksponentjaotus

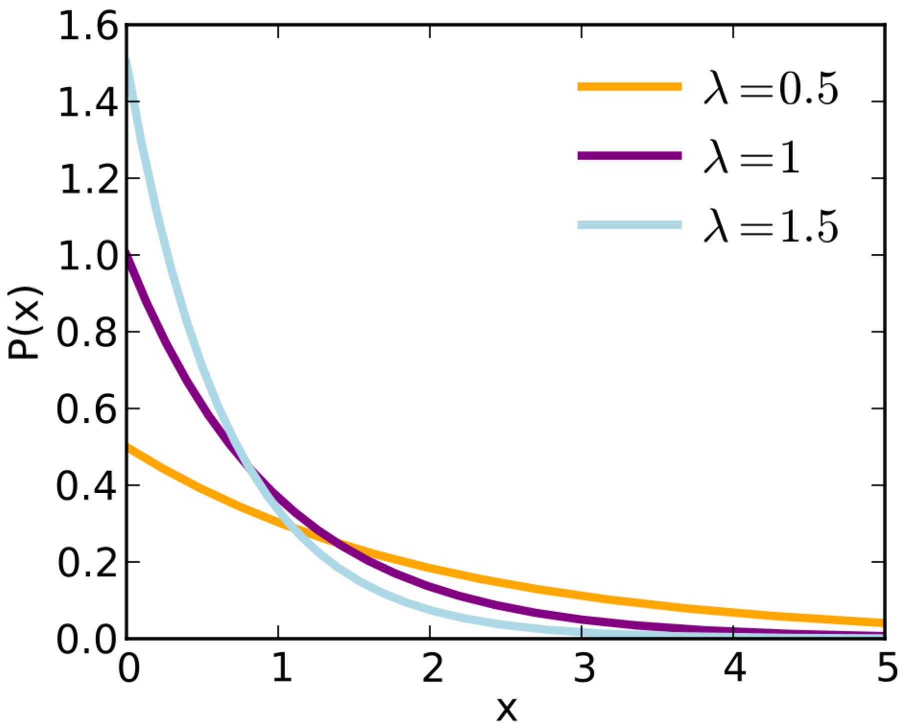
Eksponentjaotus

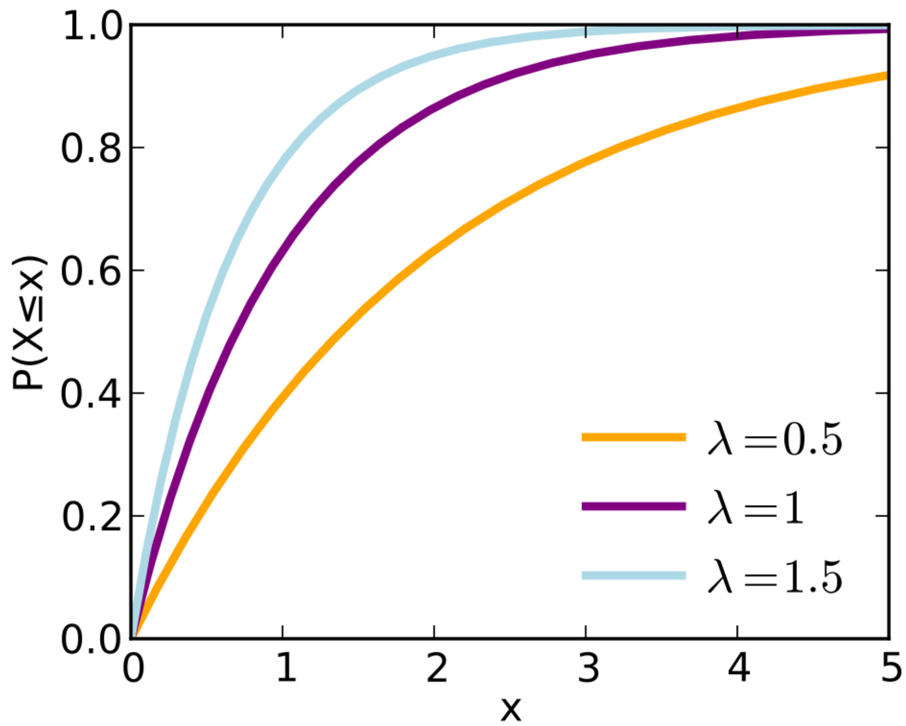
Eksponentjaotuse saate läbi arvutada radioaktiivse aine pooldumist kirjeldavas näites.

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$$

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$$

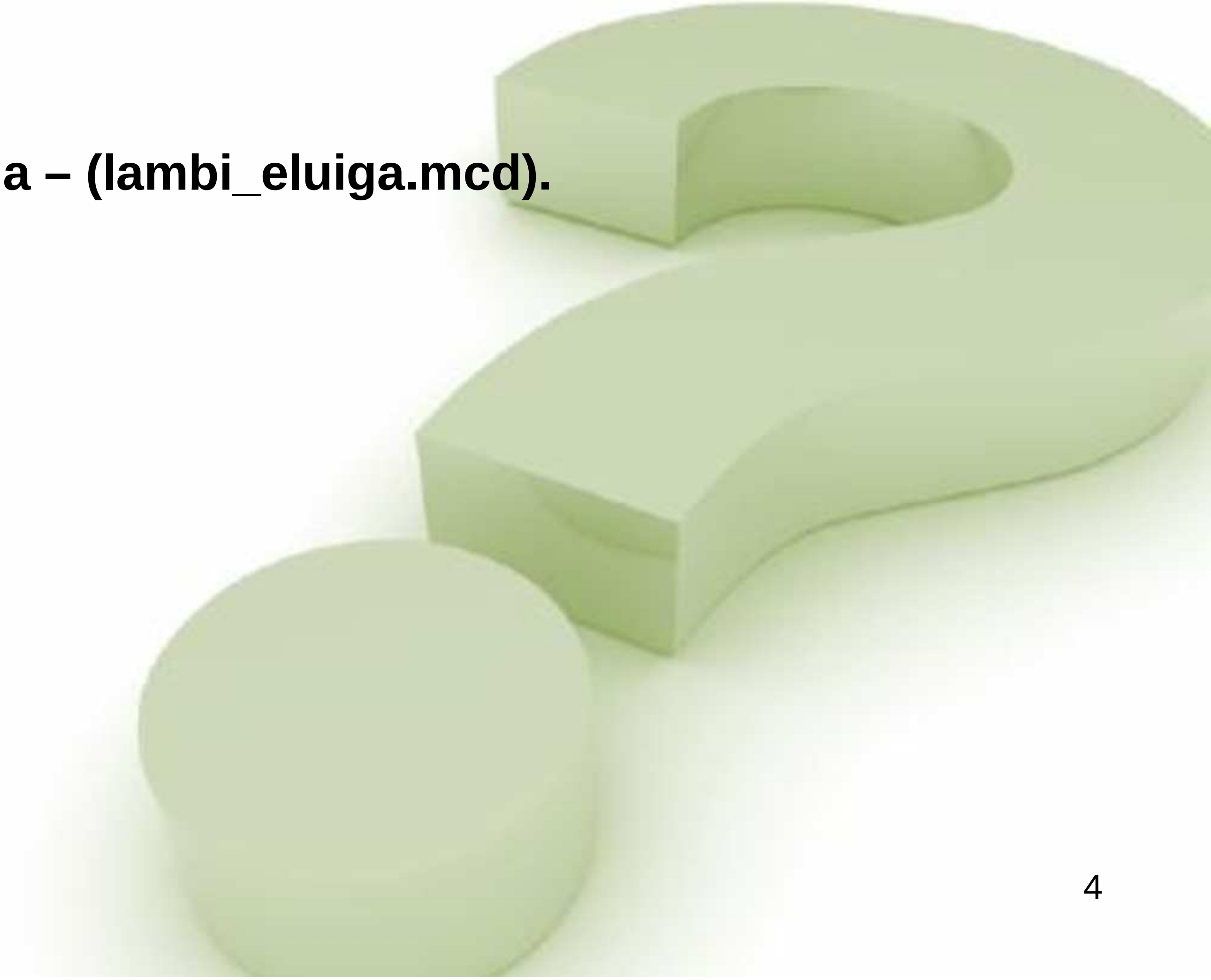
Siin $\lambda = 1 / t_0$, eksponentjaotuse keskväärtus ja standardhälve on mõlemad võrdsed parameetriga t_0.





Näide 2.9. Hõõglambi eluiga allub eksponentjaotusele. Tootja väidab, et hõõglambi keskmine eluiga on 1000 tundi. Kui pikk on keskmise lambi eluiga? Kui suur on tõenäosus, et ühe lambi eluiga on 5000 tundi?

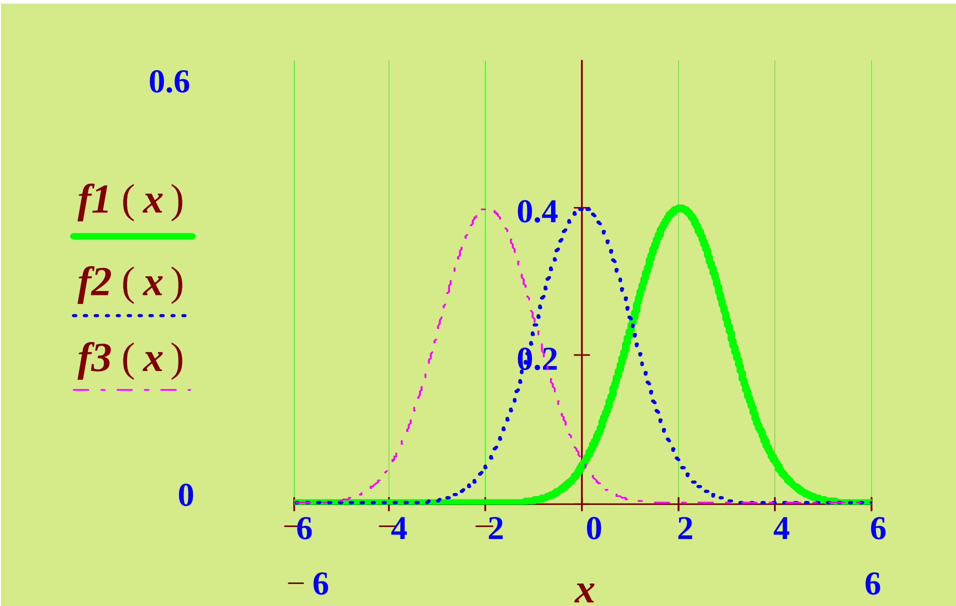
Lahendus – Mathcadiga – (lambi_eluiga.mcd).

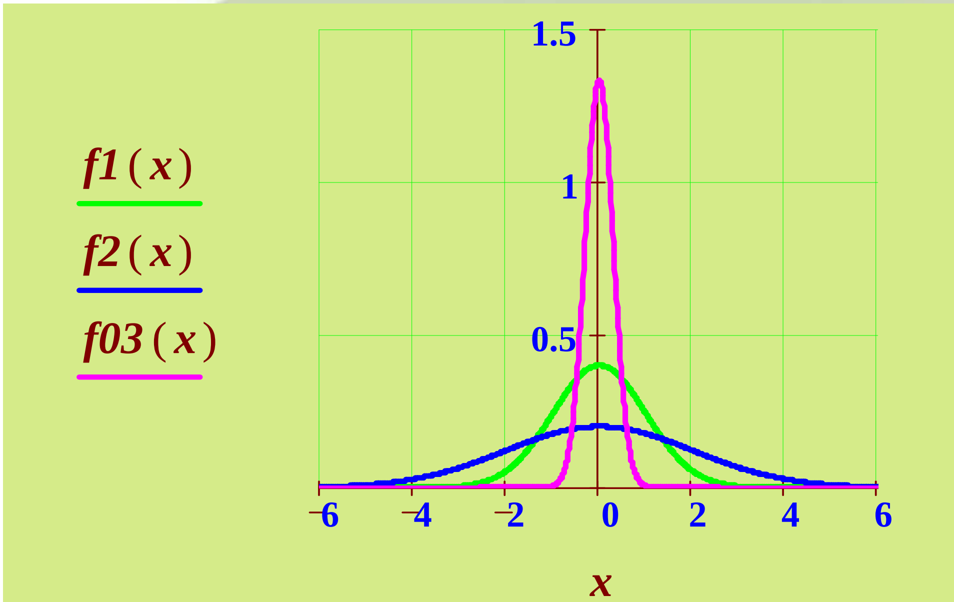


Normaaljaotus

Juhusliku suuruse jaotust nimetatakse normaaljaotuseks ehk Gaussi jaotuseks, kui jaotustihedus on

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right),$$





MMM – enamkasutatavad jaotusseadused – normaaljaotus

Normaaljaotus

Nagu teistegi jaotusseaduste puhul, on ka normaaljaotuse puhul mingisse intervalli sattumise tõenäosuse leidmiseks vaja teada tema jaotusfunktsiooni. Praktikas ei ole normaaljaotuse integreerimine just lihtne ülesanne. Selles loengukursuses me ei tõesta, et normaaljaotuse jaotusfunktsioon on:

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-t^2)\,dt$$

Siin erf(*x*) tähistab veafunktsiooni. Praktiliste ülesannete lahendamisel kasutatakse valmisprogrammide abi.

MMM – enamkasutatavad jaotusseadused – normaaljaotus

Normaaljaotus

Mathcad'is on normaaljaotuse parameetritega *a* ja *σ* jaotustihedus *f*(*x*) kohal *x* arvutatav funktsiooniga dnorm(*x*, *a*, *σ*) ning jaotusfunktsioon *F*(*x*) kohal *x* funktsiooniga pnorm(*x*, *a*, *σ*).

Excel'is on jaotustihedus *f*(*x*) arvutatav käsuga normdist(*x*, *a*, *σ*, 0) ning jaotusfunktsioon *F*(*x*) käsuga normdist(*x*, *a*, *σ*, 1).

Näide:

Pliiatsitehases toodetavate pliiatsite pikkus allub normaaljaotusele keskväärtusega 180,0 mm ning standardhälbega 0,7 mm. Kui suur on tõenäosus, et toodangu seast juhuslikult valitud pliiatsi pikkus on vähem kui 179 mm?

Normaaljaotus

Mathcad'is on normaaljaotuse parameetritega a ja σ jaotustihedus $f(x)$ kohal x arvutatav funktsiooniga dnorm(x, a, σ) ning jaotusfunktsioon $F(x)$ kohal x funktsiooniga pnorm(x, a, σ).

Excel'is on jaotustihedus $f(x)$ arvutatav käsuga normdist(x, a, σ, 0) ning jaotusfunktsioon $F(x)$ käsuga normdist(x, a, σ, 1).

Näide:

Pliiatsitehases toodetavate pliiatsite pikkus allub normaaljaotusele keskväärtusega 180,0 mm ning standardhälbega 0,7 mm. Kui suur on tõenäosus, et toodangu seast juhuslikult valitud pliiatsi pikkus on vähem kui 179 mm?

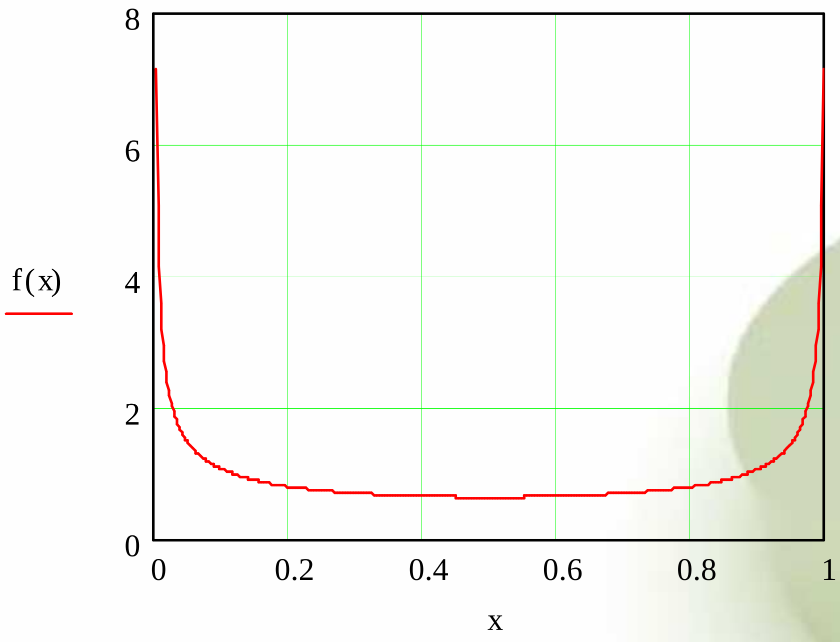
normdist(179; 180,0; 0,7; 1) = 0,076563726 = 7,66 %.

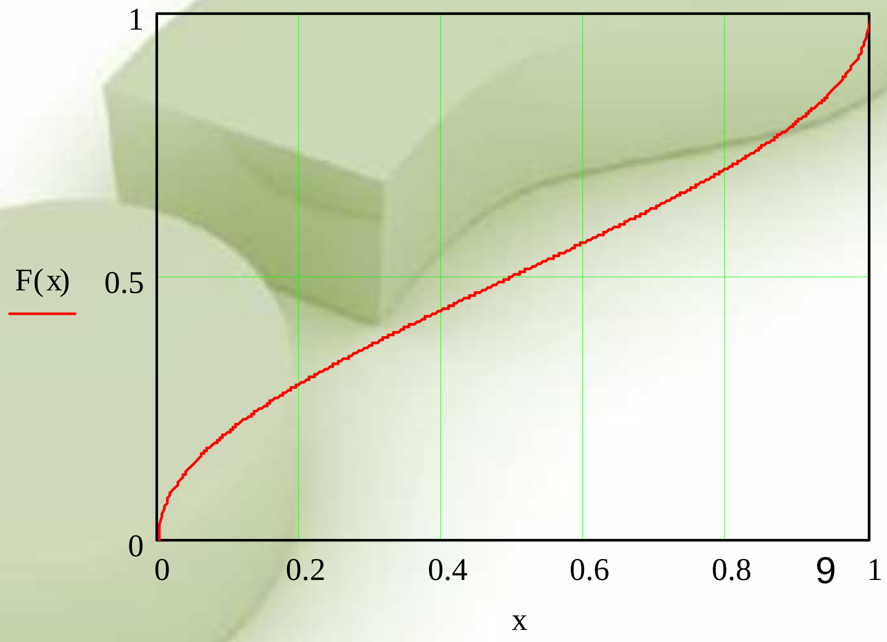
Arkussiinusjaotus

Arkussiinusjaotuseks nimetatakse juhusliku suuruse *X* niisugust jaotust, mille jaotustihedus ning jaotusfunktsioon on

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, \quad 0 < x < 1$$

$$F(x) = \frac{2 \cdot \arcsin(\sqrt{x})}{\pi}, \quad 0 < x < 1$$





MMM – jaotuste summa

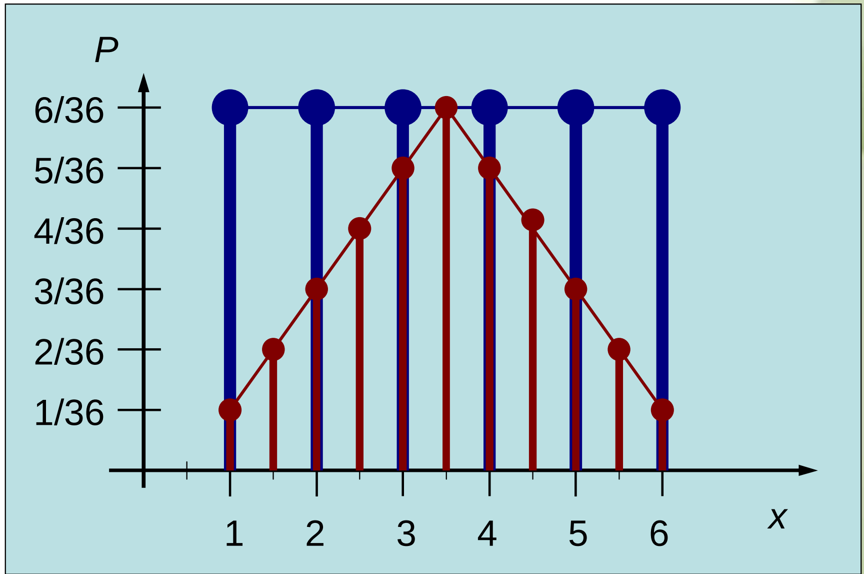
Kahe jaotuse summa jaotus

Senini oleme tegelenud ainult üksikväärtustega mingist jaotusest. Sageli aga sooritatakse korduvmõõtmisi ning kasutatakse hoopis keskväärtuseid. Tekib õigustatud küsimus, et milline on keskväärtuse jaotus? Alustuseks meenutame, et n-kordse korduvmõõtmise keskväärtus on võrdne n-kordse korduvmõõtmise summaga jagatud mõõtmiste arvu n-ga. Kuna n on konstant, siis on selge, et nii keskväärtus kui ka summa peavad olema samast jaotusest. Arvutuslikult on lihtsam analüüsida summat ning alles jaotuse leidmisel see läbi jagada n-ga.

MMM – jaotuste summa

Kahe täringuviske summa jaotustabel

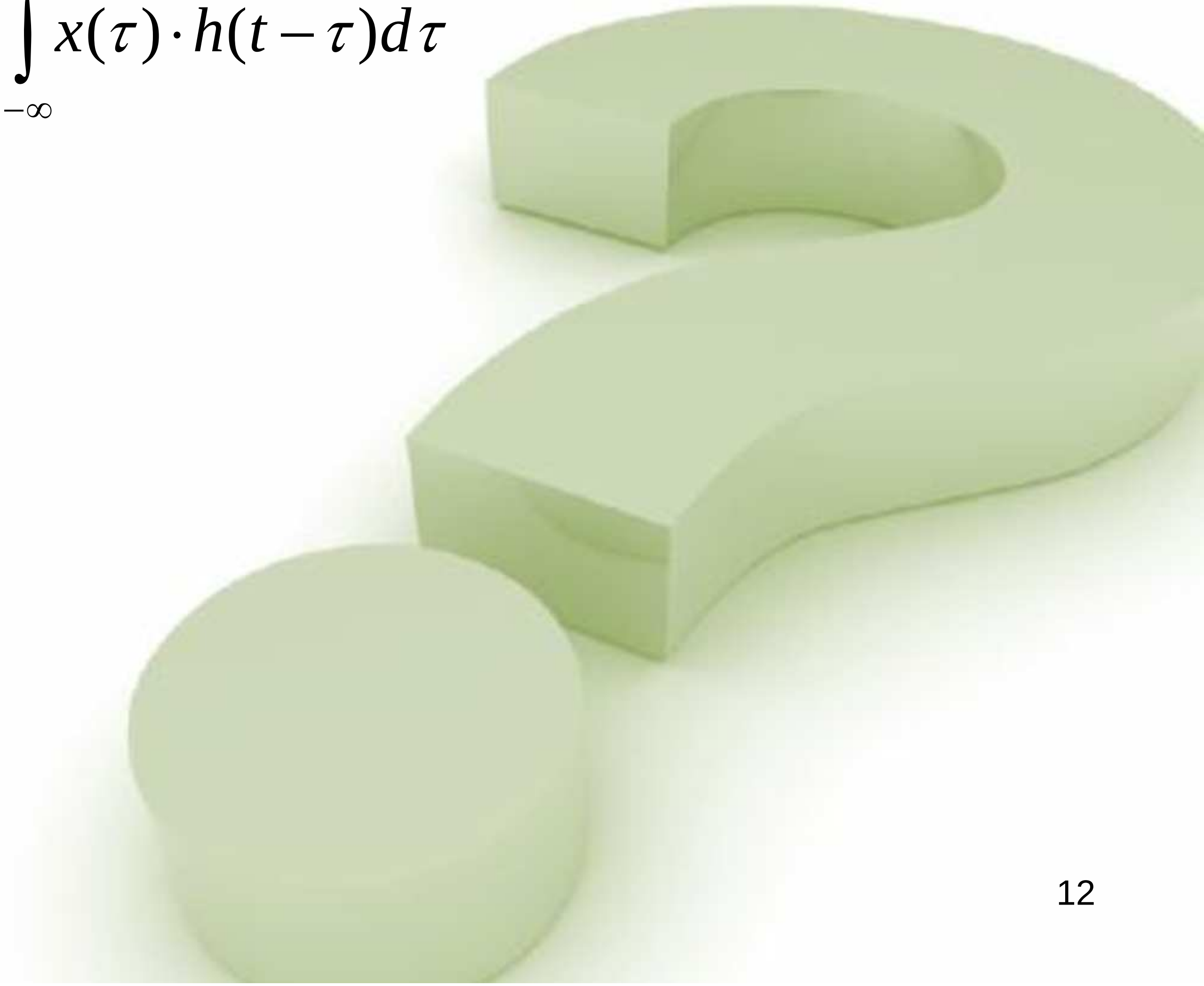
summa	kombinatsioonid	esinemiste arv	esinemise tõenäosus	Jaotus-funktsioon
2	1,1	1	1/36	1/36
3	1,2 2,1	2	2/36	3/36
4	1,3 2,2 3,1	3	3/36	6/36
5	1,4 2,3 3,2 4,1	4	4/36	10/36
6	1,5 2,4 3,3 4,2 5,1	5	5/36	15/36
7	1,6 2,5 3,4 4,3 5,2 6,1	6	6/36	21/36
8	2,6 3,5 4,4 5,3 6,2	5	5/36	26/36
9	3,6 4,5 5,4 6,3	4	4/36	30/36
10	4,6 5,5 6,4	3	3/36	33/36
11	5,6 6,5	2	2/36	35/36
12	6,6	1	1/36	1



MMM – jaotuste summa – konvolutsiooni integraal

Üldiselt kasutatakse kahe jaotuse summa jaotustiheduse leidmiseks konvolutsiooni integraali:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$



MMM – jaotuste summa – konvolutsiooni integraal

Näide 2.14. Leiame konvolutsiooni integraali kahest ühtlasest jaotusest:

$$x(t) = h(t) = \begin{cases} 1; & 0 < t < 1 \\ 0; & \text{mujal} \end{cases} \qquad y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

Selleks, et see integraal oleks nullist erinev, peavad tema mõlemad komponendid olema nullist erinevad:

$$\tau = [0;1] \qquad t - \tau = [0;1] \Rightarrow -t + \tau = [-1;0] \Rightarrow \tau = [t-1;t]$$

seega on meil integreerimisradade valikuks kaks tingimust, mis peavad mõlemad samaaegselt kehtima:

$$\tau = \begin{cases} [0;1] \\ [t-1;t] \end{cases}$$

MMM – jaotuste summa – konvolutsiooni integraal

Näide 2.14. Leiame konvolutsiooni integraali kahest ühtlasest jaotusest:

$$x(t) = h(t) = \begin{cases} 1; & 0 < t < 1 \\ 0; & \text{mujal} \end{cases} \qquad y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau$$

$$\tau = \begin{cases} [0;1] \\ [t-1;t] \end{cases}$$

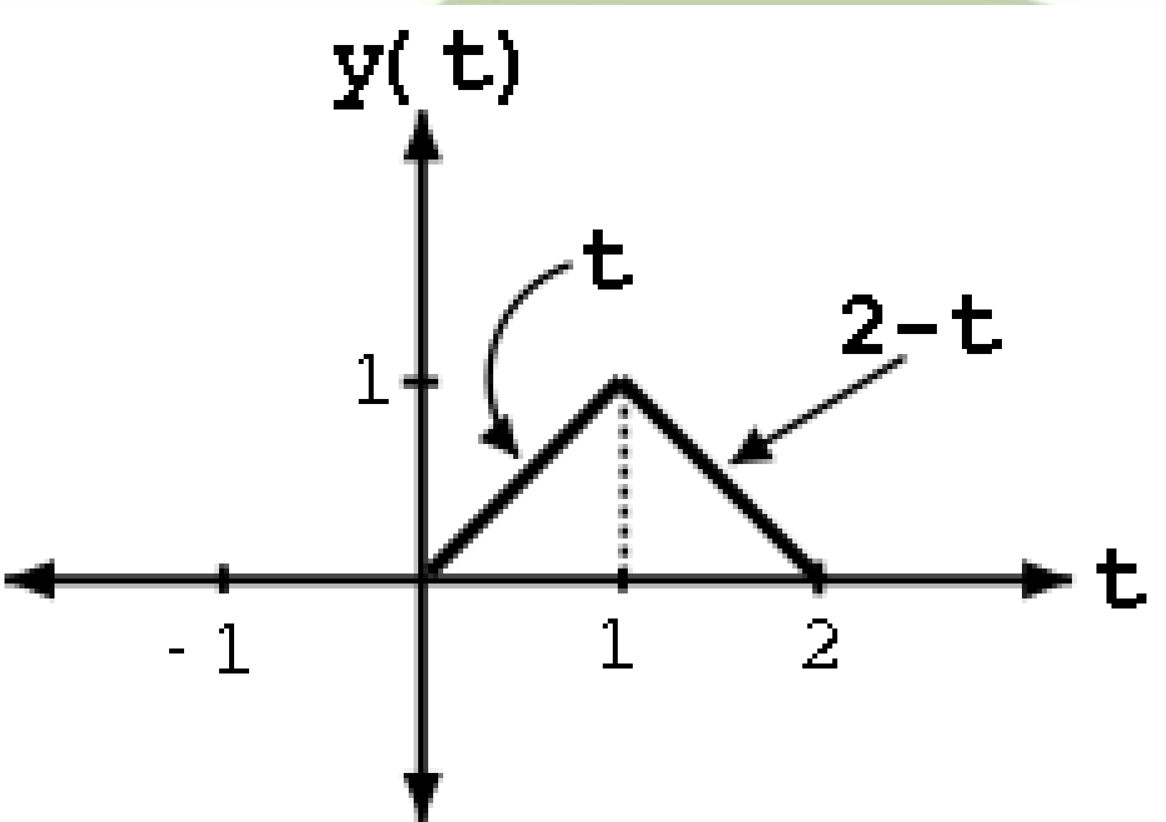
1. $t < 0 \quad \Rightarrow y(t) = 0$
2. $0 < t < 1 \quad \Rightarrow \tau = (0;t) \Rightarrow \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau = \int_0^t 1\cdot 1\cdot d\tau = t$
3. $1 < t < 2 \quad \Rightarrow \tau = (t-1;1) \Rightarrow \quad y(t) = \int_{t-1}^{1} 1\cdot d\tau = \tau\Big|_{t-1}^{1} = 1-(t-1) = 2-t$
4. $t > 2 \quad \Rightarrow y(t) = 0$

MMM – jaotuste summa – konvolutsiooni integraal

Näide 2.14. Leiame konvolutsiooni integraali kahest ühtlasest jaotusest:

Seega saime, et kahe ühtlase jaotuse summa jaotus on määratud järgmiste tingimustega:

$$y(t) = \begin{cases} t; & 0 < t < 1 \\ 2 - t; & 1 < t < 2 \\ 0; & \text{mujal} \end{cases}$$



MMM – jaotuste summa – keskne piirteoreem

On tõestatud, et paljude sõltumatute (või nõrgalt sõltuvate) juhuslike suuruste (mõõtesuuruste) summa

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

jaotus erineb vähe normaaljaotusest. Mida suurem on liidetavate arv *n*, seda väiksem on erinevus. Teisisõnu, normaaljaotust võib eeldada paljudes ülesannetes, kus juhuslikke sõltumatuid suuruseid on palju ja ükski neist ei ole ülekaalus. Keskse piirteoreemi põhjal kehtib see olenematult jaotusseadusest (peab eksisteerima lõplik dispersioon).

MMM – jaotuste summa – keskne piirteoreem

Teeme Mathcadis demo, kus me analüüsime keskset piirteoreemi.

Kõigepealt tuleb aga eelnevalt mõningaid vajalikke üleminekuvalemeid tuletada.

Kasutame Mathcadi sisseehitatud juhuslike arvude generaatorit, mis annab juhusliku arvu ühtlasest jaotusest vahemikus (0; 1), tähistame seda $U(0; 1)$. Kui me tahame testida mõnda teist jaotust, siis tuleb leida vastav üleminekuvalem. Selleks kasutame tingimust, et mõlema jaotuse jaotusfunktsioonid peavad olema võrdsed: $F(y) = F(x)$. Leiame üleminekuvalemid kolmnurkjaotusele, eksponentjaotusele ning parabooljaotusele.

MMM – jaotuste summa – keskne piirteoreem

Vaatame kolmnurkjaotust, mis on defineeritud kujul

$$f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & \text{mujal}\end{cases}$$

Ühtlase jaotuse jaotusfunktsioon on

$$F(x)=\int_0^x 1\cdot dx = x\Big|_0^x = x = U(0;1)$$

Kolmnurkjaotuse jaotusfunktsioon on

$$F(y)=\int_0^y 2y\cdot dy = y^2\Big|_0^y = y^2$$

Kuna *F*(*y*) = *F*(*x*), siis $y^2 = x$, järelikult annab sedasi defineeritud kolmnurkjaotuse ruutjuur ühtlasest jaotusest:

$$y=\sqrt{x}=\sqrt{U(0;1)}$$

MMM – jaotuste summa – keskne piirteoreem

Teeme Mathcadis demo, kus me analüüsime keskset piirteoreemi.

1. **Genereerime mingist jaotusest suure hulga arve. Arvutame suuruse Z_n ning teeme Z_n esinemissagedusest graafiku, tulemus peaks olema sarnane sellele jaotusele endale.**

2. **Genereerime uuesti arvud mingist jaotusest ning arvutame nendest arvudest *n* arvu jaoks Z_n väärtused. Tehes Z_n esinemissagedusest graafiku, näeme, milline on selle jaotuse *n* arvu aritmeetilise keskmise jaotus.**

$$Z_n = \frac{S_n - n \cdot \mu}{\sigma \sqrt{n}} \Rightarrow N(0;1)$$

Mängime Mathcadi demoga “Keskne piirteoreem_v3.mcd”

MMM – jaotuste summa – keskne piirteoreem

Demoga „mängides“ veendusime, et tõesti, summeeritavate väärtuste arvu n suurenedes lähenes jaotus normaaljaotusele. See lähenemise kiirus sõltus aga oluliselt jaotuse kujust: ühtlase jaotuse puhul piisas tingimusest, et n ≥ 3, samas kui eksponentjaotuse puhul jäi väike erinevus sisse ka veel n = 20 juures. Me ei proovinud, kuid selline lähenemine normaaljaotusele kehtib ka erinevatest jaotustest pärit arvude liitmisel. See ongi keskse piirteoreemi üks kõige olulisem omadus. Lähenemine normaaljaotusele võib siiski olla väga aeglane, kui leiduvad mõned mittenormaaljaotusega komponendid, millel on teistega võrreldes palju suuremad standardhälbed. Sellest hoolimata võib enamasti mõõtetulemust, mis on sisendsuuruste summat $y = x_1 + x_2 + ... + x_n$ (või ka aritmeetilist keskmist) käsitleda kui normaaljaotusega suurust. See tulemus kehtib ka väga komplitseeritud jaotustega mõõtetulemustele, mis kinnitab veelgi selle teoreemi suurt metroloogilist väärtust.

MMM – mõõtevead ja mõõtemääramatus

Oletame, et meil on teada mõõdetava suuruse tõeline väärtus x_t (tegelikult muidugi ei ole teada, aga mõttelise eksperimendi korras võib nii oletada). Mõõtmistulemuse x ja mõõdetava suuruse tõelise väärtuse vahe $\Delta x = x - x_t$ on mõõtmistulemuse viga (kasutatakse ka pikemat terminit ühekordse mõõtmise konkreetne mõõteviga). Viga sisaldab süstemaatilist ja juhuslikku komponenti. Võib ka öelda, et viga liitub süstemaatilisest komponendist ja juhuslikust komponendist.

MMM – mõõtevead ja mõõtemääramatus

Süstemaatilised vead liigitatakse:

1. **Vead, mille põhjused on teada ja millede suurusi on võimalik piisavalt täpselt määrata (nt testri null võib olla paigast ära jms).**
2. **Vead, millede põhjused on teada, kuid suurused mitte (nt ebatäpne gradueerimine).**
3. **Vead, millede olemasolu on meile teadmata.**

Juhuslikud vead

Lisaks süstemaatilisele veale on mõõtmistulemusel alati ka juhuslik komponent. Tingituna suurest hulgast mitmesugustest, üldjuhul välistest, s.o mõõtja kontrollile mitte alluvatest teguritest on üksikmõõtmise tulemus juhuslik suurus.

Keskväärtuse hindamine mõõtmistulemustest

Vaatame alustuseks taas hüpoteetilist situatsiooni, kus meil on aprioorselt teada mõõdetava suuruse tõeline väärtus x_t.
X juhuslikkuse tõttu mõõtmistulemuse x ja mõõdetava suuruse tõelise väärtuse vahe $\Delta x = x - x_t$, s.o mõõtmistulemuse viga, erineb nullist.
Tehes nüüd palju kordi mõõtmisi, kokku N sõltumatut mõõtmist, saame juhusliku suuruse X valimi $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_{N-1}, x_N\}$. Selle valimi aritmeetiline keskväärtus

$$\bar{x}_N = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

on parim lähend tõelisele väärtusele piirväärtuse mõttes

$$\lim_{N \to \infty} \bar{x}_N = x_t .$$

Dispersiooni hindamine mõõtmistulemustest

Dispersiooni katselisel määramisel on olukord analoogiline keskväärtuse hindamisega. Meenutame siin dispersiooni definitsiooni

$$D[X] \; = \; \sum_{i=1}^{N} (x_i - m)^2 \cdot p_i$$

Kuna summa üle p_i-de peab olema võrdne ühega ning pole põhjust oletada, et näiteks esimesed mõõtmised olid täpsemad kui viimased, siis $p_i = 1/N$, seega

$$D[X] \; \approx \; {\sigma_N}^2 \; = \; \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - m)^2$$

Alternatiivset valemit dispersiooni arvutamiseks nimetatakse empiiriliseks dispersiooniks:

$$D[X] \; \approx \; {s_N}^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - m)^2$$

Dispersiooni hindamine mõõtmistulemustest

$$D[X] \approx \sigma_N{}^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - m)^2 \qquad D[X] \approx s_N{}^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - m)^2$$

Osutub, et nende suuruste keskväärtused rahuldavad seoseid

$$m\left[\sigma_N^2\right] = \frac{N-1}{N} d, \qquad m\left[s_N^2\right] = d,$$

kus *d* on üksiksuuruse X_k dispersioon. Nagu näeme, lähendab suurus s_N^2 vähemalt matemaatilise ootuse (keskmise) mõttes tõelist dispersiooni õigesti, kuna suurus σ_N^2 alahindab dispersiooni. Seepärast kasutame edaspidi juhuslikus suuruse dispersiooni hindamisel suuruse *X* empiirilist dispersiooni.

Juhusliku suuruse *X* empiiriline standardhälve on vastavalt

$$s_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x}_N)^2}{N-1}} \approx \sqrt{d}\ .$$

Ühetaoliselt jaotunud suuruste aritmeetilise keskmise keskväärtus ja dispersioon

Vaatleme n sõltumatut juhuslikku suurust X_k (k = 1, 2, ..., N), mis on ühesuguse jaotusega ja järelikult ka ühesuguste arvkarakteristikutega, s.t

$$m[X_k] = a, \qquad D[X_k] = d.$$

Leiame juhuslike suuruste aritmeetilise keskmise

$$\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k$$ **arvkarakteristikud.**

Keskväärtuseks saame

$$m[\overline{X}_N] = m\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} m[X_k] = \frac{Na}{N} = a$$

MMM – mõõtevead ja mõõtemääramatus

Ühetaoliselt jaotunud suuruste aritmeetilise keskmise keskväärtus ja dispersioon

Vaatleme n sõltumatut juhuslikku suurust X_k (k = 1, 2, ..., N), mis on ühesuguse jaotusega ja järelikult ka ühesuguste arvkarakteristikutega, s.t

$$m[X_k] = a, \qquad D[X_k] = d.$$

Leiame juhuslike suuruste aritmeetilise keskmise

$$\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k$$

arvkarakteristikud.

Keskväärtuseks saame

$$m[\overline{X}_N] = m\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} m[X_k] = \frac{Na}{N} = a$$

MMM – mõõtevead ja mõõtemääramatus

Ühetaoliselt jaotunud suuruste aritmeetilise keskmise keskväärtus ja dispersioon

Aritmeetilise keskmise dispersioon on (ilma tõestuseta):

$$D\left[\overline{X}_N\right] = \frac{d}{N}$$

ning järeldusena

$$\sigma(\overline{X}_N) = \sqrt{\frac{d}{N}} \approx \frac{s_N}{\sqrt{N}}$$

Seega: ühesuguselt jaotunud *N* sõltumatu suuruse aritmeetilise keskmise dispersioon on *N* korda väiksem kui üksiksuuruse dispersioon ja standardhälve on ruutjuur *N* korda väiksem kui üksiksuuruse standardhälve.

MMM – mõõtevead ja mõõtemääramatus

Teeme eksperimendi, kus mõõdame *N* korda mingit suurust mingist jaotusest ning arvutame keskväärtuse ning standardhälbe. Kordame seda eksperimenti *M* korda ning vaatame, kui hästi mõõtmistulemused omavahel kokku langevad.

Olgu tegemist ühtlase jaotusega, keskväärtusega 100 ning standardhälbega 10.

Lahendame Mathcadis “keskmise_standardhälve_v01.mcd”

MMM – mõõtevead ja mõõtemääramatus

Uue standardi järgi on oluline erinevus määramatuse ja mõõtmisvea mõistete vahel:

Määramatus ≠ viga.

Viga on mõõtmistulemuse ja mõõdetava suuruse tõelise väärtuse vahe, on seega juhusliku suuruse konkreetne realisatsioon. Kuna tõelist väärtust ei ole võimalik teada, siis pole ka viga praktikas võimalik leida.

Mõõtemääramatus peegeldab seda, et meil puuduvad täpsed teadmised mõõtesuuruse väärtuste kohta. Ka pärast teadaolevate süstemaatiliste mõõtehälvete kõrvaldamist on mõõtmistulemus ikkagi vaid mõõtesuuruse väärtuse hinnang, ja seda määramatuse tõttu, mis on tingitud juhuslikust mõõteveast ja süstemaatiliste mõõtevigade “mittetäielikust” korrigeerimisest. Mõõtmistulemus võib osutuda väga lähedaseks mõõtesuuruse väärtusele (mida pole küll võimalik täpselt teada), kuid samal ajal võib sellel mõõtmistulemusel olla üsna suur määramatus.

MMM – mõõtevead ja mõõtemääramatus

Mõõtmistulemuse määramatus koosneb paljudest komponentidest, mis jagatakse kahte tüüpkategooriasse:

A- tüüpi määramatus, mida hinnatakse statistiliste meetodite abil

B- tüüpi määramatus, mida hinnatakse muul viisil.

Nende kahe põhitüübi koosmõjul tekkiv mõõtemääramatus kannab nime

Liitmääramatus, ka C-tüüpi määramatus.

MMM – mõõtevead ja mõõtemääramatus

A-tüüpi mõõtemääramatus on statistilist tüüpi mõõtemääramatus, mille suurust saab vähendada mõõtmiste arvu suurendades, kordusmõõtmisi sooritades ja tulemusi keskmistades. A-tüüpi mõõtemääramatus on tekitatud juhuslike mõjurite poolt, mis võivad kallutada mõõtmistulemust kord ühele, kord teisele poole, suurendada ja vähendada üksikmõõtmist. A-tüüpi määramatuse põhjustavad: 1) mitmesugused häirivad tegurid mõõtmisel (näit välistingimused), 2) objekti enda muutlikkus (nii valmistamise ebatäpsus kui objekti ajaline muutumine), jne.

Ühesuguselt jaotunud   sõltumatu suuruse aritmeetilise keskmise standardhälve on   korda väiksem kui üksiksuuruse standardhälve,

$$\sigma(\overline{X}_N) = \sqrt{\frac{d}{N}} \approx \frac{s_N}{\sqrt{N}}$$

seega mida suuremaks viia mõõtmiste arv, seda väiksemaks läheb aritmeetilise keskmise standardhälve.

MMM – mõõtevead ja mõõtemääramatus

Oluline on tähele panna, et mõõtmistulemused oleksid omavahel sõltumatud. Kui on oht, et mõõtmistulemused ei ole sõltumatud, siis ei kasutata mõõteseeria aritmeetilise keskmise standardhälbe arvutamiseks mitte valemit

$$\sigma(\overline{X}_N) = \sqrt{\frac{d}{N}} \approx \frac{s_N}{\sqrt{N}}$$

vaid hoopis valemit

$$s_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}_N)^2}{N-1}}\,.$$

s.t. ka mõõteseeria aritmeetilise keskmise standardhälbena kasutatakse empiirilist standardhälvet.

A-tüüpi mõõtemääramatuse hindamine toimub nii nagu juhusliku suuruse standardhälbe statistilisel hindamisel. A-tüüpi mõõtemääramatuse tähis on u_A.

$$u_A = \sigma(\overline{X}_N) = \frac{s_N}{\sqrt{N}}$$

MMM – mõõtevead ja mõõtemääramatus

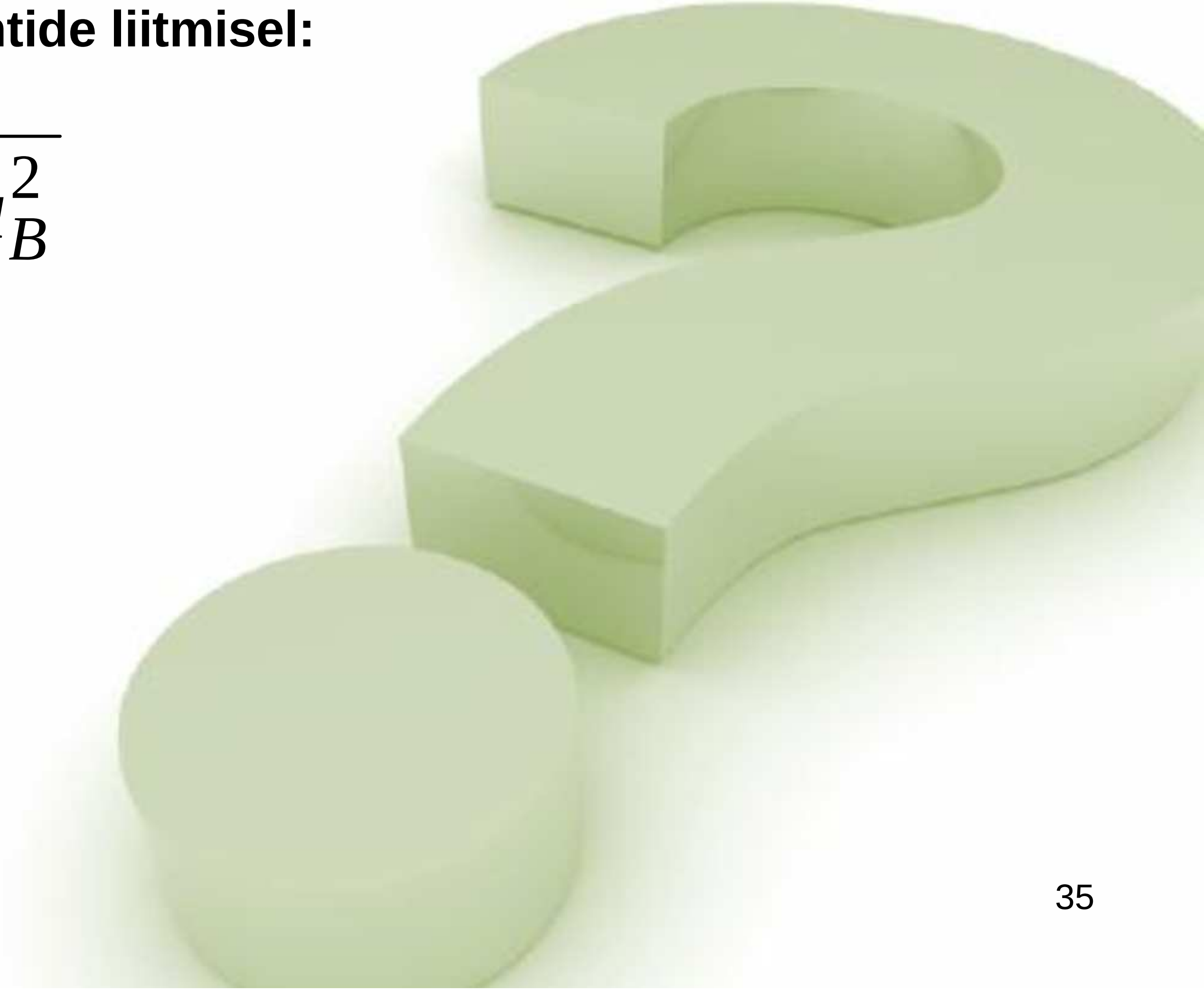
Laias laastus on B-tüüpi mõõtemääramatus igasugune mõõteprotsessis ilmnev määramatus, mis ei ole statistiliselt hinnatav ning mis ei vähene kordusmõõtmiste arvu suurenedes. B-tüüpi mõõtemääramatuse tähis on u_B.

Esmajoones kuuluvad B-tüüpi mõõtemääramatuse alla vead, mis on tingitud mõõteinstrumendi piiratud võimalustest. Kui hoolikalt ja täpselt ka poleks valmistatud mõõteriist või mõõtevahend, millega me mõõtmist teostame, alati on ka sellel olemas mingi (juhuslikku laadi) viga, mis on selle konkreetse mõõteriista puhul küll muutumatu ja püsiv suurus, kuid mis muutub ühelt mõõteriistalt teisele samuti juhuslikult. See – mõõteriista viga – on viga etaloni suhtes. Korduvatel mõõtmistel see viga on esindatud täpselt ühel ja samal moel (kuna mõõtmised teeme ühe ja sama mõõteriistaga) ja korduvad mõõtmised tema suurust ei kahanda.

MMM – mõõtevead ja mõõtemääramatus

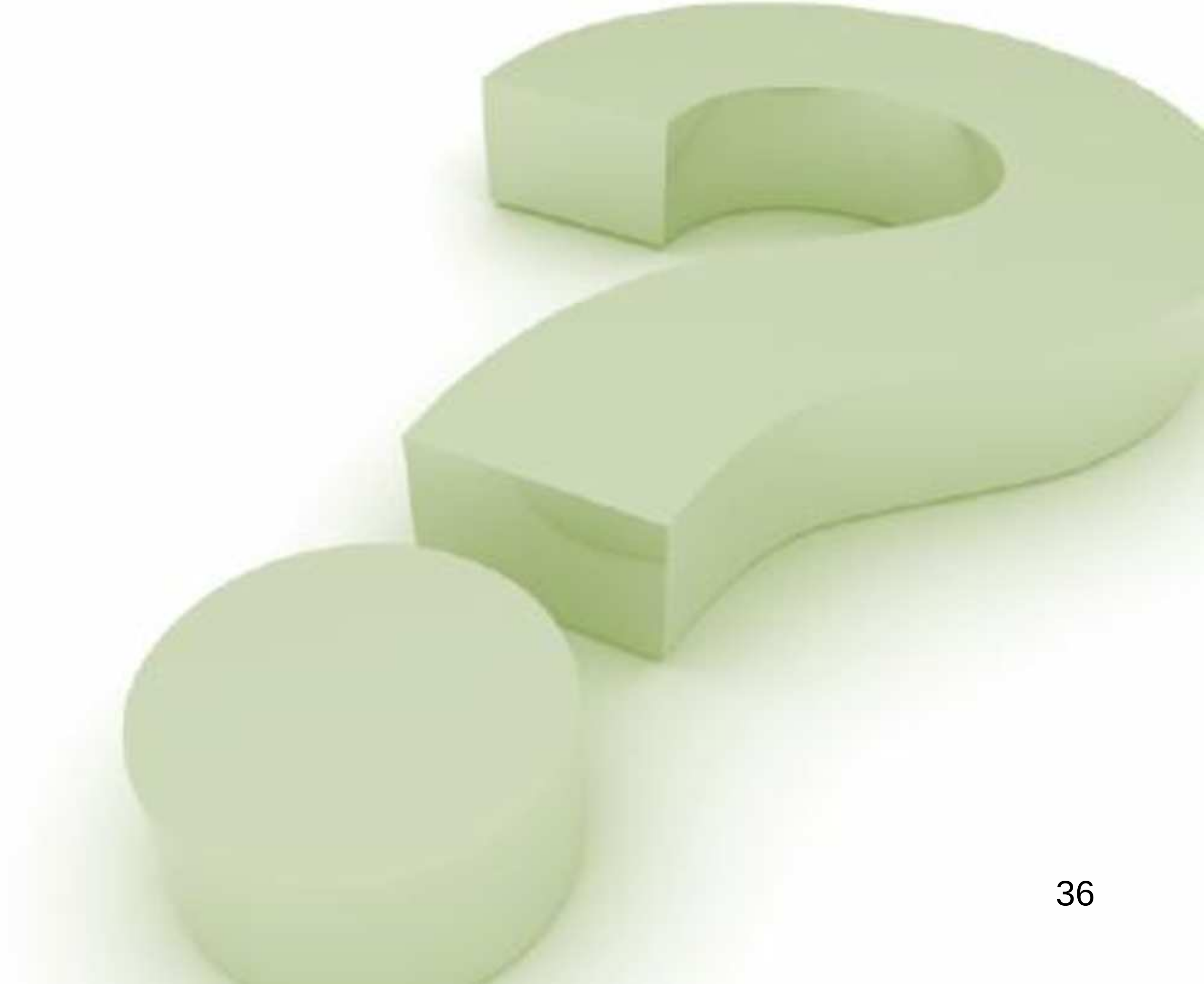
Mõõtmistulemuse standardmääramatust, mis on saadud A ja B komponentide liitumise tulemusel, nimetatakse liitmääramatuseks ehk koondmääramatuseks (*combined uncertainty*). Tema arvuline väärtus võrdub positiivse ruutjuurega liitdispersioonist, mis saadakse kõikide dispersiooni komponentide liitmisel:

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$



MMM – Kodune töö

Kodune test sulgub 13.03.2011 kell 23:55.



Mõõtmised ja mõõtemääramatused

Measurements and uncertainties

Erko Jakobson, PhD

MMM – tagasiside

Eelmise loengu tagasiside

Koduste testide tagasiside

EKSAMI AJAD (viimane korraline loeng on 23. mai):

30. mai ???

13. juuni ???

Järeleksam:

27. juuni ???

Täiendav võimalus:

2011/2012 kevadsemester

MMM – mõõtevead ja mõõtemääramatus

Ühetaoliselt jaotunud suuruste aritmeetilise keskmise keskväärtus ja dispersioon

Vaatleme *n* sõltumatut juhuslikku suurust X_k (*k* = 1, 2, ..., *N*), mis on ühesuguse jaotusega ja järelikult ka ühesuguste arvkarakteristikutega, s.t

$$m[X_k] = a, \qquad D[X_k] = d.$$

Leiame juhuslike suuruste aritmeetilise keskmise

$$\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k$$ **arvkarakteristikud.**

Keskväärtuseks saame

$$m[\overline{X}_N] = m\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} m[X_k] = \frac{Na}{N} = a$$

Ühetaoliselt jaotunud suuruste aritmeetilise keskmise keskväärtus ja dispersioon

Aritmeetilise keskmise dispersioon on (ilma tõestuseta):

$$D\left[\overline{X}_N\right] = \frac{d}{N}$$

ning järeldusena

$$\sigma(\overline{X}_N) = \sqrt{\frac{d}{N}} \approx \frac{s_N}{\sqrt{N}}$$

Seega: ühesuguselt jaotunud *N* sõltumatu suuruse aritmeetilise keskmise dispersioon on *N* korda väiksem kui üksiksuuruse dispersioon ja standardhälve on ruutjuur *N* korda väiksem kui üksiksuuruse standardhälve.

MMM – mõõtevead ja mõõtemääramatus

Teeme eksperimendi, kus mõõdame *N* korda mingit suurust mingist jaotusest ning arvutame keskväärtuse ning standardhälbe. Kordame seda eksperimenti *M* korda ning vaatame, kui hästi mõõtmistulemused omavahel kokku langevad.

Olgu tegemist ühtlase jaotusega, keskväärtusega 100 ning standardhälbega 10.

Lahendame Mathcadis “keskmise_standardhälve_v01.mcd”

MMM – mõõtevead ja mõõtemääramatus

Mõõtmistulemuse määramatus koosneb paljudest komponentidest, mis jagatakse kahte tüüpkategooriasse:

<u>A- tüüpi määramatus</u>, mida hinnatakse statistiliste meetodite abil

<u>B- tüüpi määramatus</u>, mida hinnatakse muul viisil.

Nende kahe põhitüübi koosmõjul tekkiv mõõtemääramatus kannab nime

<u>Liitmääramatus</u>, ka C-tüüpi määramatus.

MMM – mõõtevead ja mõõtemääramatus

A-tüüpi mõõtemääramatus on statistilist tüüpi mõõtemääramatus, mille suurust saab vähendada mõõtmiste arvu suurendades, kordusmõõtmisi sooritades ja tulemusi keskmistades. A-tüüpi mõõtemääramatus on tekitatud juhuslike mõjurite poolt, mis võivad kallutada mõõtmistulemust kord ühele, kord teisele poole, suurendada ja vähendada üksikmõõtmist. A-tüüpi määramatuse põhjustavad: 1) mitmesugused häirivad tegurid mõõtmisel (näit välistingimused), 2) objekti enda muutlikkus (nii valmistamise ebatäpsus kui objekti ajaline muutumine), jne.

Ühesuguselt jaotunud   sõltumatu suuruse aritmeetilise keskmise standardhälve on   korda väiksem kui üksiksuuruse standardhälve,

$$\sigma(\overline{X}_N) = \sqrt{\frac{d}{N}} \approx \frac{s_N}{\sqrt{N}}$$

seega mida suuremaks viia mõõtmiste arv, seda väiksemaks läheb aritmeetilise keskmise standardhälve.

MMM – mõõtevead ja mõõtemääramatus

Oluline on tähele panna, et mõõtmistulemused oleksid omavahel sõltumatud. Kui on oht, et mõõtmistulemused ei ole sõltumatud, siis ei kasutata mõõteseeria aritmeetilise keskmise standardhälbe arvutamiseks mitte valemit

$$\sigma(\overline{X}_N) = \sqrt{\frac{d}{N}} \approx \frac{s_N}{\sqrt{N}}$$

vaid hoopis valemit

$$s_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}_N)^2}{N-1}}\,.$$

s.t. ka mõõteseeria aritmeetilise keskmise standardhälbena kasutatakse empiirilist standardhälvet.

A-tüüpi mõõtemääramatuse hindamine toimub nii nagu juhusliku suuruse aritmeetilise keskmise standardhälbe statistilisel hindamisel. A-tüüpi mõõtemääramatuse tähis on u_A.

MMM – mõõtevead ja mõõtemääramatus

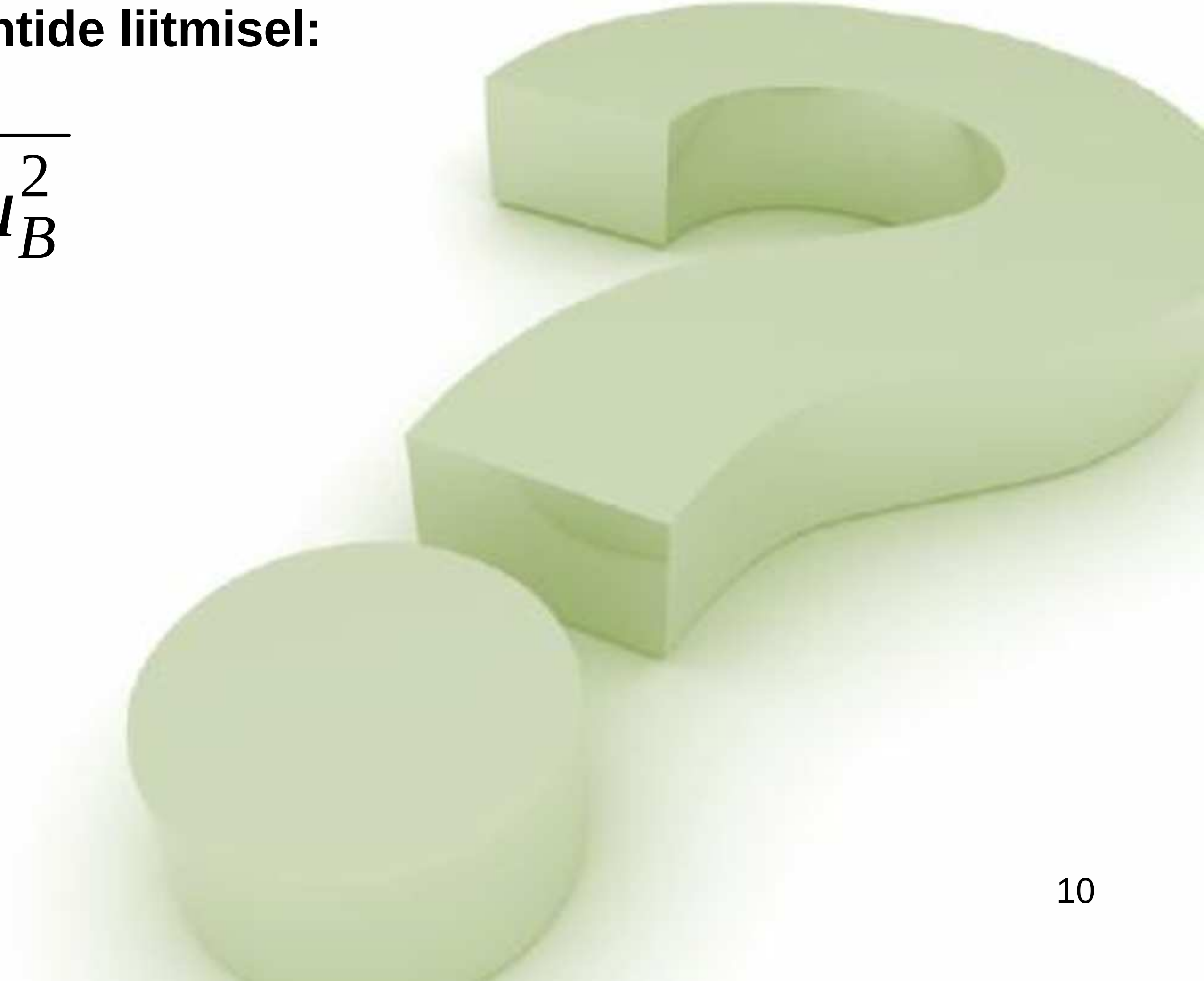
Laias laastus on B-tüüpi mõõtemääramatus igasugune mõõteprotsessis ilmnev määramatus, mis ei ole statistiliselt hinnatav ning mis ei vähene kordusmõõtmiste arvu suurenedes. B-tüüpi mõõtemääramatuse tähis on u_B.

Esmajoones kuuluvad B-tüüpi mõõtemääramatuse alla vead, mis on tingitud mõõteinstrumendi piiratud võimalustest. Kui hoolikalt ja täpselt ka poleks valmistatud mõõteriist või mõõtevahend, millega me mõõtmist teostame, alati on ka sellel olemas mingi (juhuslikku laadi) viga, mis on selle konkreetse mõõteriista puhul küll muutumatu ja püsiv suurus, kuid mis muutub ühelt mõõteriistalt teisele samuti juhuslikult. See – mõõteriista viga – on viga etaloni suhtes. Korduvatel mõõtmistel see viga on esindatud täpselt ühel ja samal moel (kuna mõõtmised teeme ühe ja sama mõõteriistaga) ja korduvad mõõtmised tema suurust ei kahanda.

MMM – mõõtevead ja mõõtemääramatus

Mõõtmistulemuse standardmääramatust, mis on saadud A ja B komponentide liitumise tulemusel, nimetatakse liitmääramatuseks ehk koondmääramatuseks (*combined uncertainty*). Tema arvuline väärtus võrdub positiivse ruutjuurega liitdispersioonist, mis saadakse kõikide dispersiooni komponentide liitmisel:

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$



MMM – Ekse

Mõnikord juhtub, et mõõtetulemuste hulka satub ilmselgelt vale mõõdis ehk ekse. Eksed aga mõjutavad selgelt mõõtmistulemust ja neid ei tohiks keskväärtuse ning standardhälbe arvutustes kasutada.

Üldiselt defineeritakse ekseteks kõik mõõtmistulemused, mis erinevad keskväärtusest rohkem kui kolmekordne standardhälve. Normaaljaotuse eeldusel on tõenäosus, et mõõtetulemus erineb keskväärtusest rohkem kui kolm standardhälvet, 0,3%.

Eksed tuleb edasisest andmetöötlusest kõrvaldada ning siis arvutada uuesti keskväärtus ning standardhälve. Mõõtmiste protokolli tuleb ekse kõrvaldamisest teha asjakohane märge.

Kolmekordse standardhälbe kriteeriumit ekse leidmiseks on mõtet kasutada juhul, kui mõõtmiste arv on vähemalt $N = 11$.

MMM – Määramatuse määramatus

On tõestatud, et määramatuse hinnangu määramatus on

$$u(s) \approx \frac{s}{\sqrt{2\nu}} \quad \Rightarrow \quad \frac{u(s)}{s} \approx \frac{1}{\sqrt{2\nu}}$$

Kui vabadusastmete arv on *v* = 4, siis on suhteline määramatuse hinnangu määramatus 35 % ning kui *v* = 50, siis on suhteline määramatuse hinnangu määramatus 10 %.

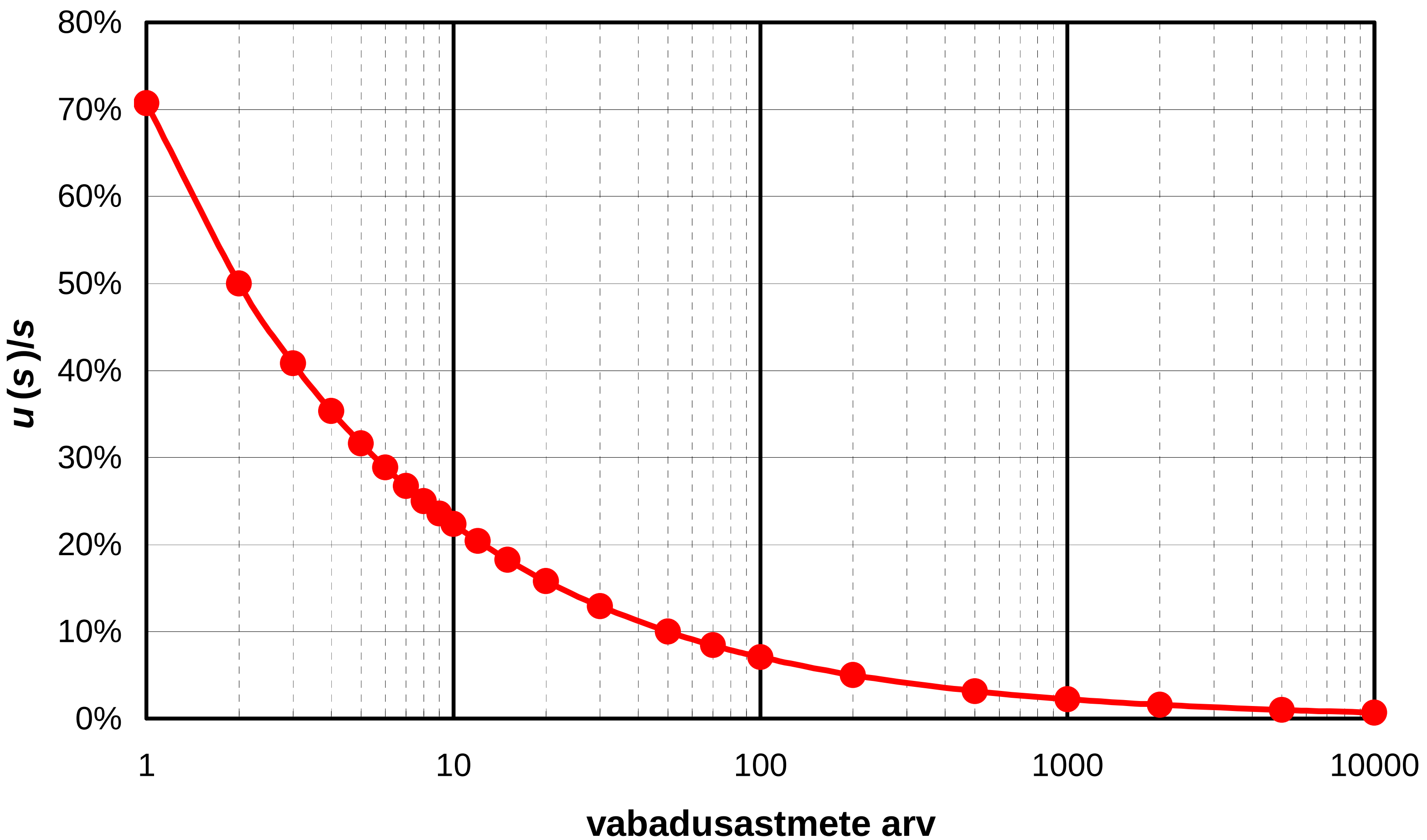
Näide: Detaili pikkuse keskväärtus on *m*(*l*) = 180,45 mm, koondmääramatus on *u*(*l*) = 1,2789 mm ning vabadusastmete arv on *v* = 8.

$$u(u(l)) \approx \frac{u(l)}{\sqrt{2 \cdot 8}} = \frac{u(l)}{4} = 0{,}32 \ \text{mm}$$

Seega koondmääramatuse kolmanda tüvinumbri esitamine ei oma mingit mõtet, kuna ka teine tüvinumber ei pruugi õige olla.

MMM – Määramatuse määramatus

$$\frac{u(s)}{s} \approx \frac{1}{\sqrt{2\nu}}$$



MMM – Määramatuse määramatus

Avaldame nüüd sellest valemist vabadusastmete arvu *v*:

$$\frac{u(s)}{s} \approx \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \quad \Rightarrow \quad \nu \approx \frac{s^2}{2u^2(s)} = \frac{1}{2}\left(\frac{u(s)}{s}\right)^{-2}$$

See valem on suureks abiks B-tüüpi määramatuste hindamisel.

Näide 3.11. Hindame nihkkaliibri B-tüüpi määramatust. Nihkkaliibri tootja on märkinud nihiku põhiveaks Δ = 0,05 mm. Võime eeldada, et tootja on seda teinud põhjalikult, ehk *u*(*s*) → 0. Ülal toodud valemist saame, et nihkkaliibri B-tüüpi määramatus on lõpmatult suur. Saadud tulemust saab üldistada: mõõteseadme tootja poolt esitatud määramatuse (B-tüüpi määramatuse) vabadusastmete arv on lõpmatu.

MMM – Määramatuse määramatus

Näide 3.12. Termomeetri näidu standardmääramatuseks on hinnatud 0,2 ℃. Toodud kirjaviisist võib järeldada, et termomeetri näidu standardmääramatus on vahemikus (0,15; 0,25) ℃. Ühtlase jaotuse standardmääramatus on

$$u(u(t)) = \frac{\Delta u(t)}{\sqrt{12}} = \frac{0{,}1}{\sqrt{12}} = 0{,}0289$$

Siit saame, et temperatuuri määramatuse suhteline määramatus on

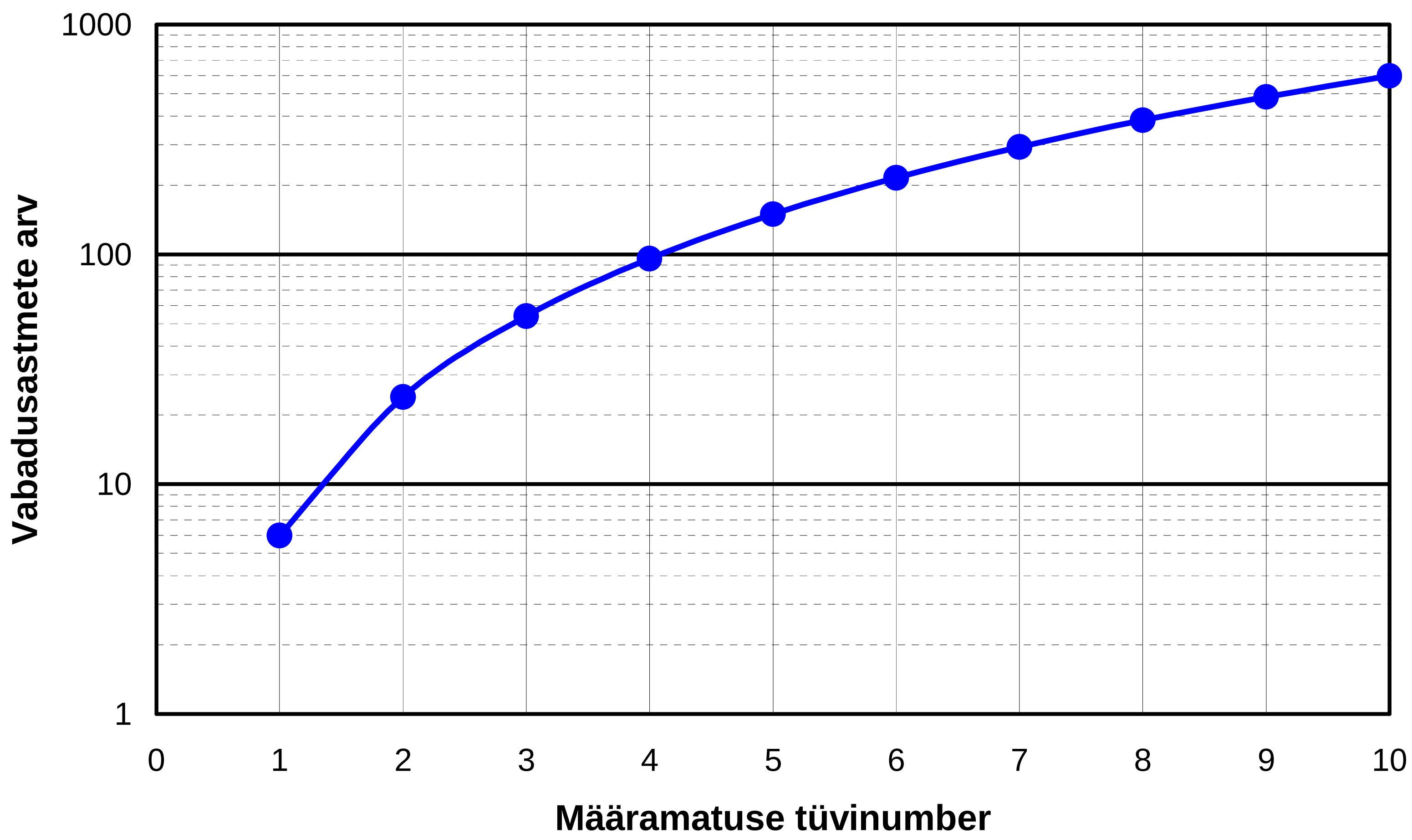
$$\frac{u(u(t))}{u(t)} = \frac{0{,}0289}{0{,}2} = 0{,}144$$

ning vabadusastmete arv on

$$\nu = \frac{1}{2}\left(0{,}144\right)^{-2} = 24$$

MMM – Määramatuse määramatus

Kui määramatus esitatakse ainult ühe tüvinumbri täpsusega, siis võib lahutusvõimest tingitud vabadusastmete arv olla üsna väike:



MMM – Liitmääramatuse efektiivne vabadusastmete arv

Liitmääramatuse vabadusastmete arvu otseselt ei saa arvutada, küll aga võib hinnata efektiivsete vabadusastmete arvu v_{eff}, kasutades Welch-Satterthwaite' valemit:

$$\nu_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i) \right)^4}{\nu_i}}$$

kus $u(x_i)$ on i-ndast sisendsuurusest tingitud liitmääramatuse komponent.

Efektiivne vabadusastmete arv ei ole üldiselt täisarv. Täisarvulise vabadusastmete arvu saamiseks ümardatakse saadud tulemus alla, näiteks arvud 6,2 ja 6,8 ümardatakse mõlemad täisarvuks 6.

MMM – Liitmääramatuse efektiivne vabadusastmete arv

Näide: Keha kineetiline energia on arvutatav valemist

$$E = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Eelnevalt on teada, et keha mass on 1000 g, koondmääramatusega 50 g, vabadusastmete arvuga 5 ning keha kiirus on 20,0 m/s, kiiruse koondmääramatus on 1,0 m/s ning vabadusastmete arv on 8.

Leia keha kineetilise energia koondmääramatus ning efektiivne vabadusastmete arv.

MMM – Liitmääramatuse efektiivne vabadusastmete arv

Welch-Satterthwaite' valem efektiivsete vabadusastmete arvu leidmiseks kehtib, kui kõik sisendsuurused on lähendatavad normaaljaotusega. Probleem tekib aga siis, kui tahta arvutada liitmääramatuse efektiivsete vabadusastmete arvu, kui A-tüüpi määramatus on lähendatav normaaljaotusele, sest mõõtmiste arv on piisavalt suur kuid B-tüüpi määramatus on saadud ühtlasest jaotusest.

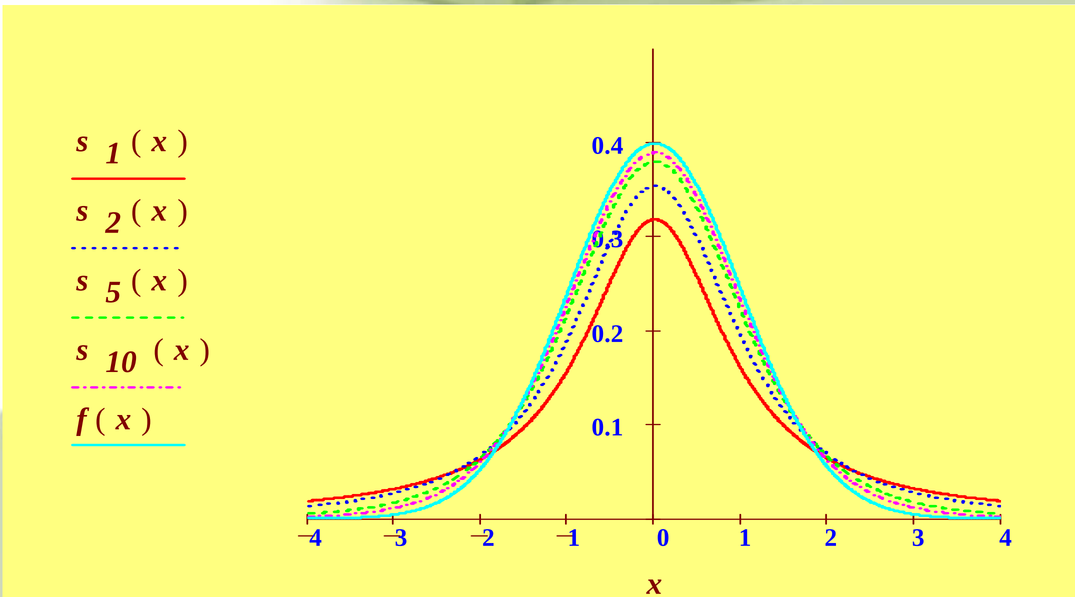
Ideaalse Gaussi puhul oleks 95 % usaldusnivool katteteguriks 1,96, aga ühtlase jaotuse puhul 1,68. Nende ühendjaotuse puhul peaks kattetegur jääma nende kahe juhu vahele, seega ikka väiksem kui 1,96. Studenti testi kattetegur aga läheneb vabadusastmete arvu suurenedes normaaljaotusele, seega on alati vähemalt 1,96. Seega kasutades Welch-Satterthwaite valemit ühtlase jaotusega sisendite puhul, hindame katteteguri väärtust veidi üle, see aga pole keelatud.

MMM – Studenti test ning laiendmääramatus

Studenti jaotus sõltub vaid vabadusastmete arvust *υ* ja ei sõltu üldse juhusliku suuruse (mõõdetava suuruse) *X* konkreetsest dispersioonist ega keskväärtusest (küll on aga oluline *X* normaalsus).
Usaldusnivoole *p* vastav mõõtmistulemuse paiknemise intervall on esitatav kujul

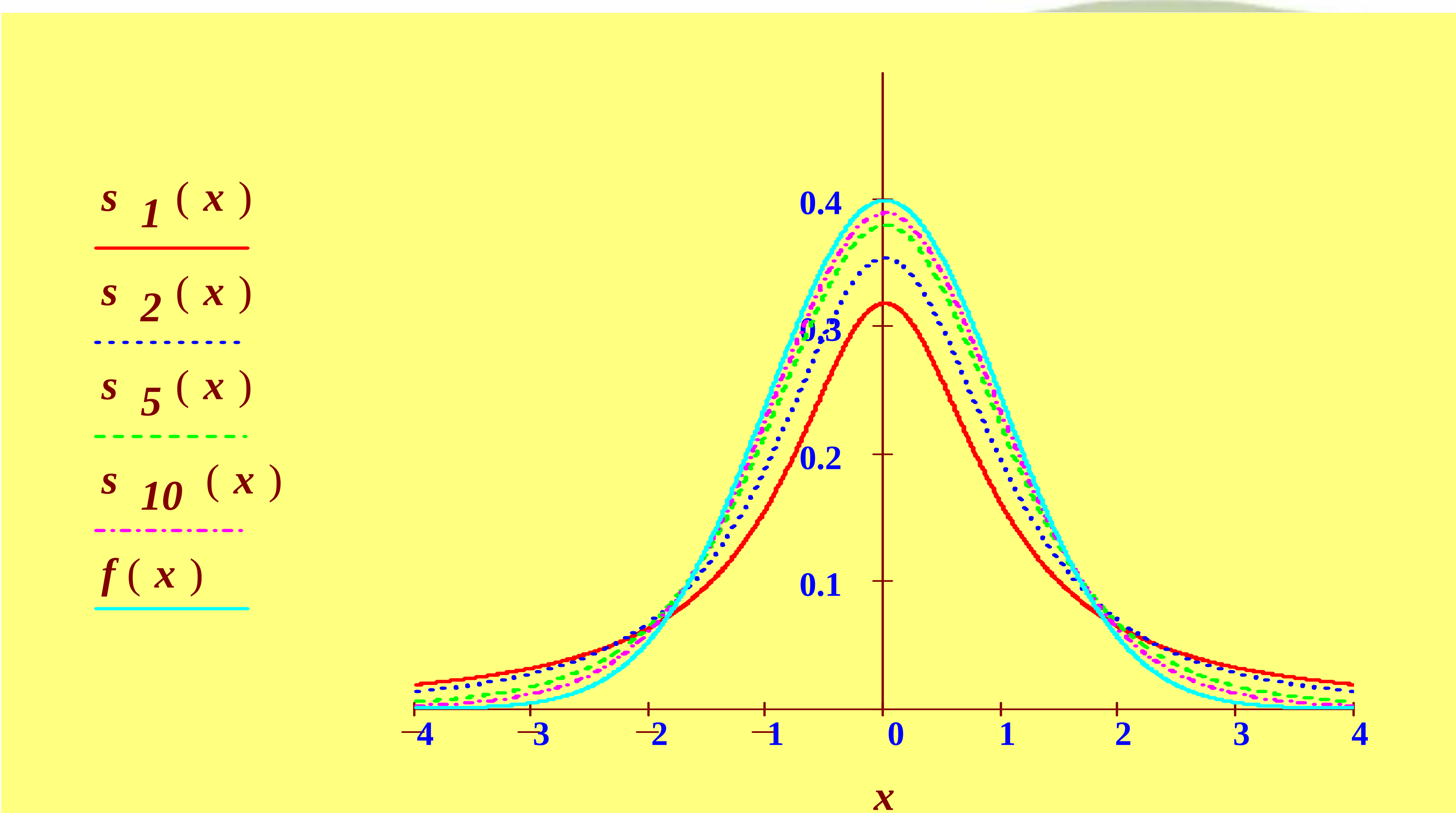
$$P\left[\bar{x}_N - t_\nu(p)u(\bar{x}_N) < x < \bar{x}_N + t_\nu(p)u(\bar{x}_N)\right] = p.$$

Seda valemit nimetatakse Studenti testiks. Siin suurus $t_\upsilon(p)$ on (Studenti) t-kordaja – kattetegur etteantud usaldus-nivoo *p* ja *υ* vabadusastme korral. Tavaliselt antakse t-kordaja kindlate väärtuste jaoks tabuleeritult.



MMM – Studenti test ning laiendmääramatus

Studenti jaotus läheneb vabadusastmete arvu kasvades standardiseeritud normaaljaotusele.



MMM – Studenti test ning laiendmääramatus

Kuigi liitmääramatus *u*(*y*) on mõõtesuuruse *Y* mõõtetulemuse *y* määramatuse esmane väljend, on mõnede tööstuslike ja ärialaste rakenduste vajaduste rahuldamiseks, aga ka tervishoiu ja ohutusalaste nõuete tagamiseks, vajalik liitmääramatuse asemel esitada vahemik, mis teatud usaldatavusega hõlmab mõõtesuuruse väärtuse. Vastava vahemiku moodustamiseks kasutatakse nn laiendmääramatust tähisega *U*. Laiendmääramatuse saame standardhälbena esitatud liitmääramatuse korrutamisel mingi teguriga *k*. Järelikult on mõlemate määramatuse esitamisvormide mõõteinfo hulk sama ja seega tundub laiendmääramatuse kasutamine justkui asjatuna. Kuid laiendmääramatusel on siiski üks eelis. Ta võimaldab võrrelda mõõtetulemusi, milledel on erinev vabadusastmete arv.

Laiendmääramatus *U* saadakse liitmääramatuse *u*(*y*) korrutamisel katteteguriga *k*:

$$U(y) = k \cdot u(y)$$

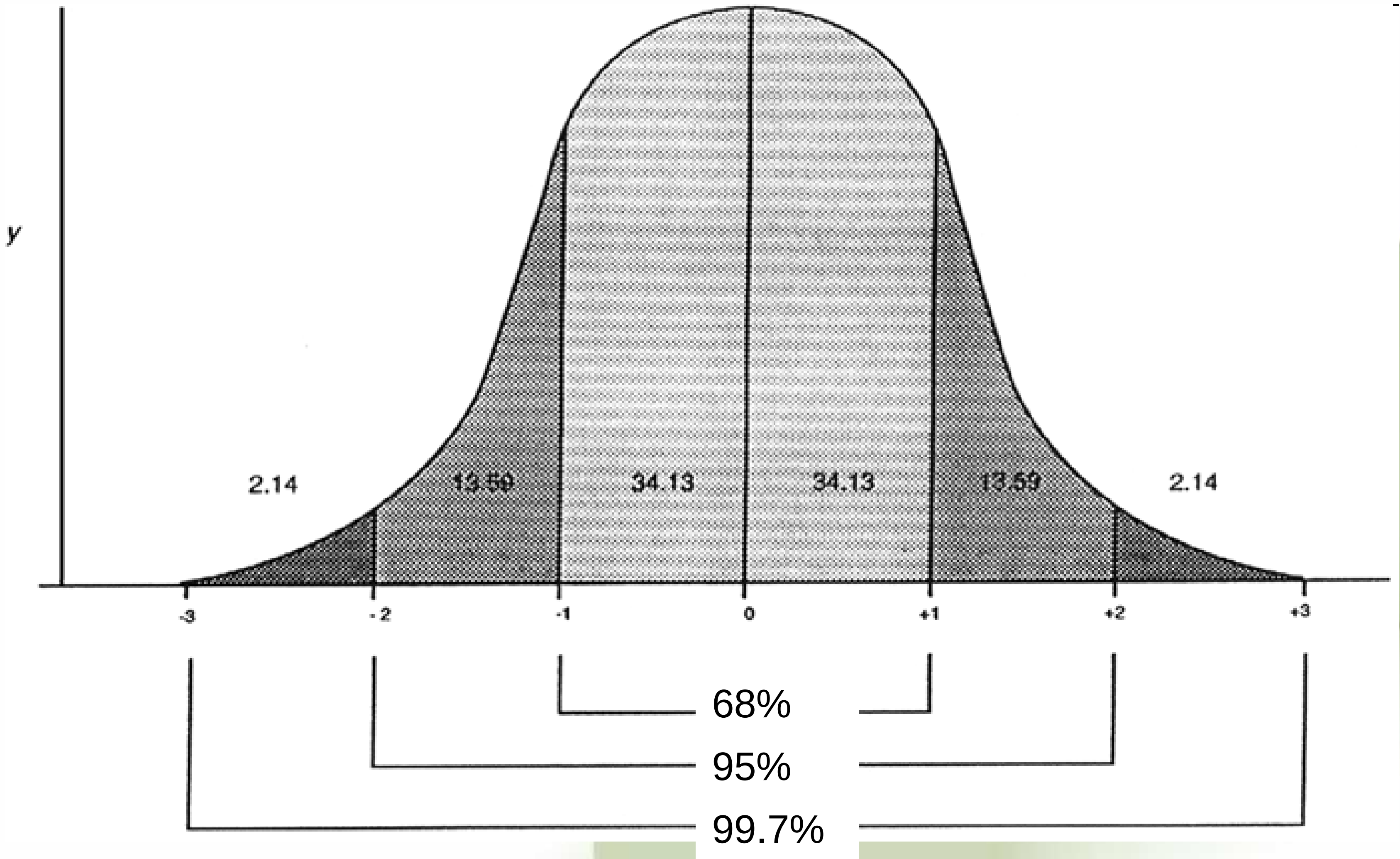
MMM – Studenti test ning laiendmääramatus

Tabel 3.2. Valik ristkülik-, kolmnurk-, normaaljaotus- ja studenti jaotusele kehtivaid k_p väärtuseid.

Usaldatavustase *p*	**Kattetegur k_p**			
%	Ristkülikjaotus	Kolmnurkjaotus	Studenti jaotus (v = 9)	Normaaljaotus
57,74	1	0,857		0,802
64,98	1,125	1		0,934
68,27	1,182	1,070	1,06	1
90	1,559	1,675	1,83	1,645
95	1,645	1,902	2,26	1,960
95,45	1,653	1,927	2,32	2
96,63	1,674	2		2,124
99	1,715	2,205	3,25	2,576
99,73	1,727	2,322	4,09	3
100	≥1,732	≥2,449	∞	∞

$$U(y) = k \cdot u(y)$$

MMM – Studenti test ning laiendmääramatus



$$U(y) = k \cdot u(y)$$

MMM – Studenti test ning laiendmääramatus

Kattetegur on arv, mida kasutatakse liitmääramatuse *u*(*y*) korrutustegurina, et saada laiendmääramatust *U*. Katteteguri väärtus valitakse sõltuvalt vahemikule etteantud usaldatavustasemest *p*. Enamasti valitakse selleks usaldusvahemikuks 95 % või 99 %. Eeldusel, et mõõtesuurus *Y* allub ligikaudu normaaljaotusele, valitakse katteteguri k_p väärtuseks Studenti t-kordaja sõltuvalt vabadusastmete arvust ning soovitavast usaldusnivoost.

Arvutiga saab leida t-kordaja vastava sisseehitatud funktsiooniga:

Mathcad: $$qt\left(\frac{1+p}{2}, \nu\right)$$

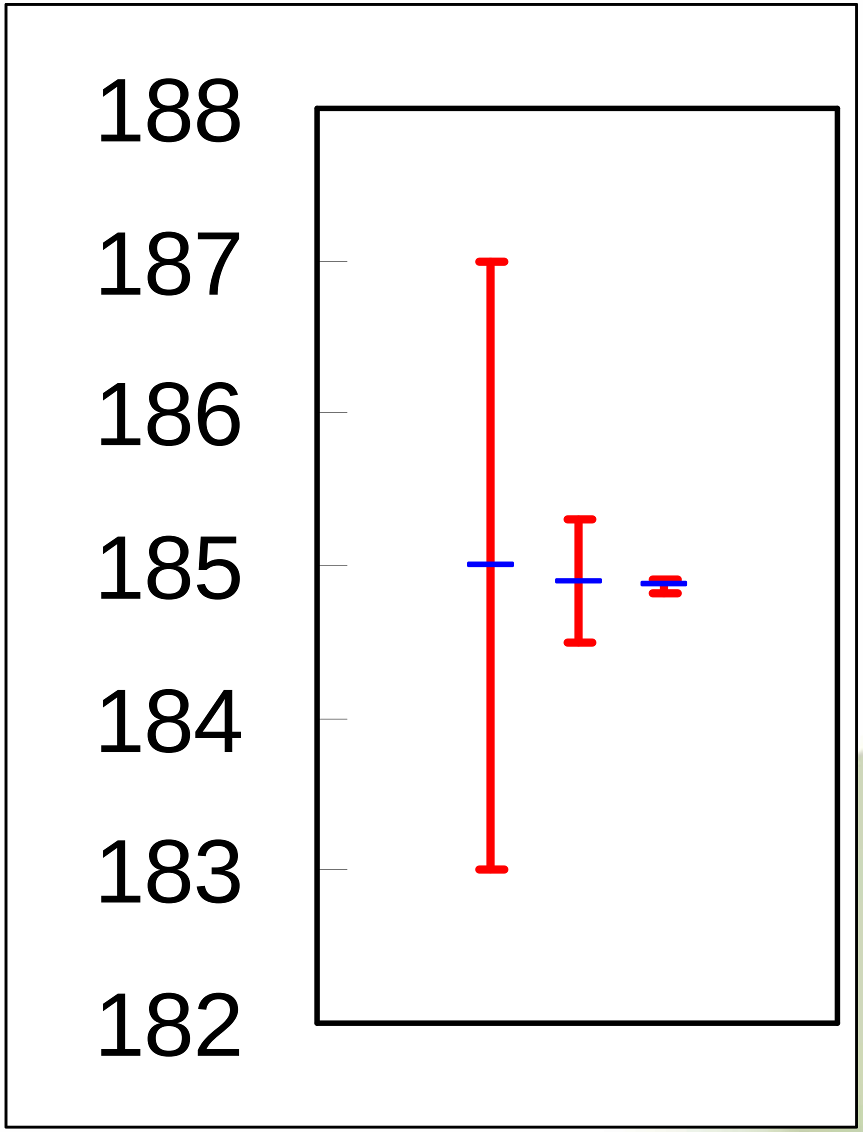
Excel: $$TINV\left(1-p, \nu\right)$$

MMM – Studenti test ning laiendmääramatus

Vabadusastmete arv $\nu = N - 1$	Osa p protsentides					
	68,27[l]	90	95	95,45[l]	99	99,73[l]
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

MMM – Laiendmääramatus

Näidete 3.15., 3.16. ja 3.17. kokkuvõte:



MMM – Mõõtemääramatus kahe sisendsuuruse korral

Tuletame mõõtemääramatuse valemi kahe sisendsuuruse korral:

Alustuseks tuletame meelde Taylori rittaarenduse, kui esinevad väiksed hälbed:

$$f(x+\delta x) \approx f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot \delta x$$

Näide 3.18. Arvutame rittaarendusena suuruse $10{,}1^2 = 102{,}01$:

valime x = 10; δx = 0,1, siis

$$f(x+\delta x) \approx f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot \delta x = x^2 + 2x \cdot \delta x = 100 + 2 \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 102$$

MMM – Mõõtemääramatus kahe sisendsuuruse korral

Probleemi püstitus. Olgu mõõdetud 2 füüsikalist suurust X_1, X_2 (nn sisendsuurused), s.t olgu meil teada mõlema keskväärtused $m(x_1)$, $m(x_2)$ ja liitmõõtemääramatused $u(x_1)$, $u(x_2)$.

Olgu füüsikaline suurus Y (nn väljundsuurus) funktsioon sisendsuurustest X_1, X_2:

$$Y = Y(X_1, X_2).$$

Teeme nüüd eelduse, et suuruste X_i üksikmõõtmiste hälbed $\delta x_i = x_i - m(x_i)$ on väikesed ja muudavad väljundsuuruse Y väärtust vähe. Sel juhul saame esitada üksikmõõtmisele vastava Y väärtuse punktis $\{x_i\}$ rittaarendusena punktis $\{m(x_i)\}$ hälvetele $\{\delta x_i\}$ järgi:

$$Y = Y\left(\bar{x}_1 + \delta x_1; \bar{x}_2 + \delta x_2\right) \approx Y\left(\bar{x}_1; \bar{x}_2\right) + \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\delta x_1 + \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\delta x_2$$

MMM – Mõõtemääramatus kahe sisendsuuruse korral

$$Y = Y\left(\bar{x}_1 + \delta x_1; \bar{x}_2 + \delta x_2\right) \approx Y\left(\bar{x}_1; \bar{x}_2\right) + \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\delta x_1 + \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\delta x_2$$

$$Y = \bar{Y} + \delta Y,$$

$$\bar{Y} = Y\left(\bar{x}_1; \bar{x}_2\right)$$

$$\delta Y = \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\delta x_1 + \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\delta x_2.$$

Siin *m*(*Y*) samastame suuruse *Y* mõõdetud/parima hinnangu väärtusega ja hälbe δ*Y* samastame suuruse *Y* ühekordse mõõtmise mõõteveaga. Seetõttu saame *Y* mõõtemääramatuse arvutamiseks valemi:

$$u^2(Y) = m\left[(\delta Y)^2\right] \qquad D[X] = m\left[(X - m[X])^2\right]$$

MMM – Mõõtemääramatus kahe sisendsuuruse korral

$$\delta Y = \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\delta x_1 + \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\delta x_2 .$$

$$u^2(Y) = m\left[(\delta Y)^2\right]$$

Ühendades need kaks valemit, saame:

$$u^2(Y) = m\left[(\delta Y)^2\right] = m\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\delta x_1 + \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\delta x_2\right)^2\right] =$$

$$= m\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\delta x_1\right)^2 + 2\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\delta x_1 \delta x_2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\delta x_2\right)^2\right]$$

MMM – Mõõtemääramatus kahe sisendsuuruse korral

$$u^2(Y) = m\left[(\delta Y)^2\right] = m\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_1}\delta x_1 + \frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_2}\delta x_2\right)^2\right] =$$

$$= m\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_1}\delta x_1\right)^2 + 2\frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_1}\frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_2}\delta x_1 \delta x_2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_2}\delta x_2\right)^2\right]$$

Keskväärtus $\delta x_1 \delta x_2$-st on võrdne kovariatsiooniga, mille saab esitada kasutades korrelatsioonikordajat *r*:

$$m\left[\delta x_1 \cdot \delta x_2\right] = \mathrm{cov}(\delta x_1, \delta x_2) = r\, u(X_1) u(X_2),$$

seega saame Y mõõtemääramatuse ruudu jaoks järgmise valemi:

$$u^2(Y) = \left(\frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_1}\right)^2 u^2(X_1) + 2 \cdot r \cdot \frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_1}\frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_2} u(X_1) u(X_2) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \overline{x}_2}\right)^2 u^2(X_2)$$

MMM – Mõõtemääramatus kahe sisendsuuruse korral

$$u^2(Y) = \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\right)^2 u^2(X_1) + 2 \cdot r \cdot \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2} u(X_1)u(X_2) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\right)^2 u^2(X_2)$$

Vaatame esialgu erijuhtu, mil muutujad *x* ja *y* on omavahel sõltumatud, s.t. ühe tulemus ei mõjuta teise tulemust. Praktikas võib leida lõputult selliseid paare, näiteks mingi kera mass ning läbimõõt; sademete hulk ajaühikus ning pindala, aeg ja teepikkus jne. Osutub, et sõltumatute muutujate vaheline korrelatsioon võrdne nulliga ning määramatuse valem lihtsustub:

$$u^2(Y) = \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\right)^2 u^2(X_1) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\right)^2 u^2(X_2)$$

$$u(Y) = \sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\right)^2 u^2(X_1) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\right)^2 u^2(X_2)}$$

MMM – Sõltumatud ning sõltuvad suurused

Millised paarid on omavahel sõltumatud, millised sõltuvad?

puude pikkus – puude läbimõõt

puude pikkus – päikese kõrgus kraadides

puude läbimõõt – puude vanus

puude läbimõõt – maapinna temperatuur

ruumi temperatuur – ruumi niiskus

inimese jalanumber – pikkus

merevee temperatuur Hurghadas – lume paksus Haanjas

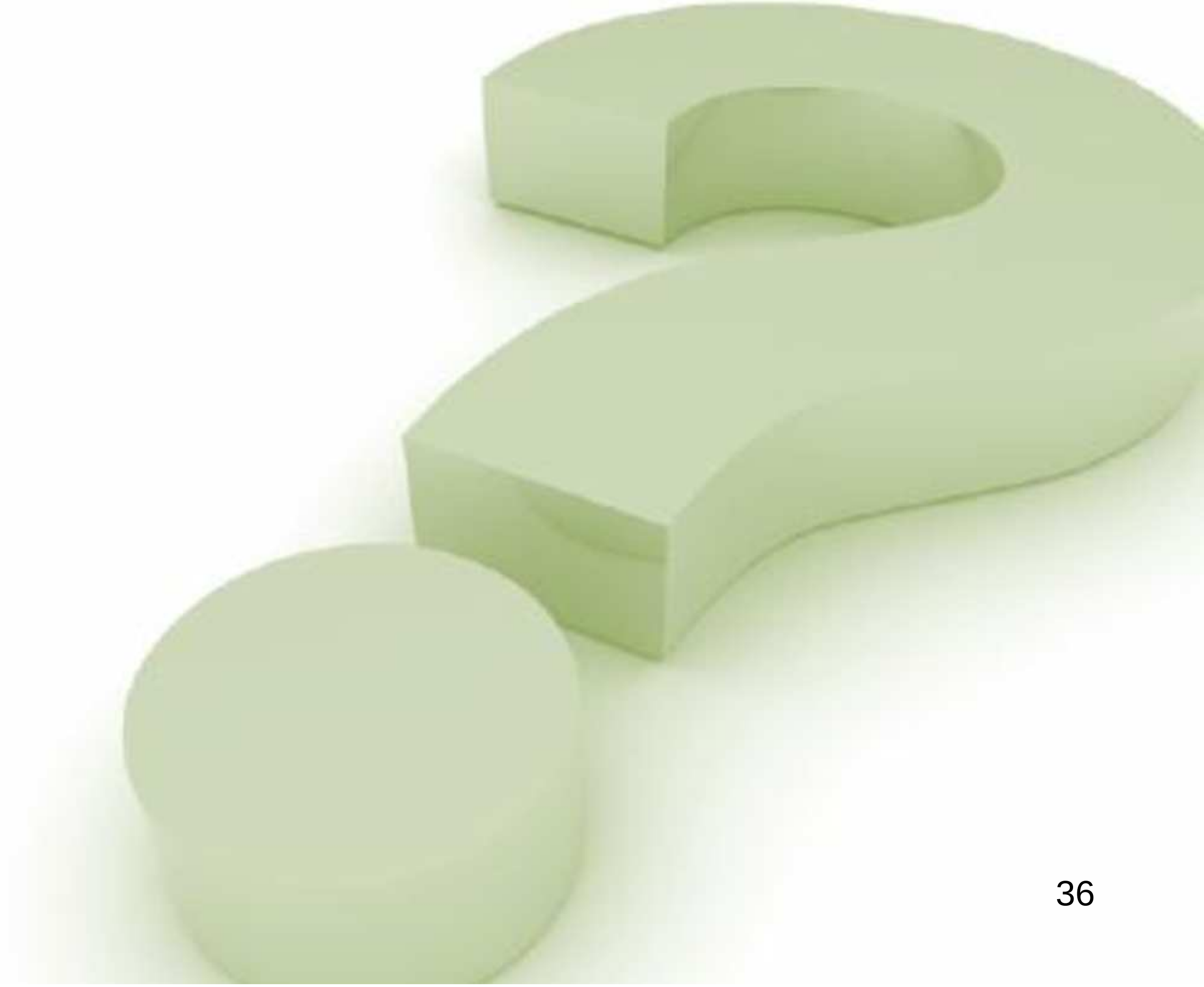
MMM – Järgmiste nädalate plaan

MMM nädalate plaan:

7. **Mõõtmise mudel. Mõõtemääramatus mitme sõltumatu sisendsuuruse korral. Liitmääramatuse tähtsusetu komponendi kriteerium.**
8. **Ülesannete lahendamine, kontrolltööks valmistumine.**
9. **KONTROLLTÖÖ!!!**

MMM – Kodune töö

Kodune test sulgub 20.03.2011 kell 23:55.



Mõõtmised ja mõõtemääramatused

Measurements and uncertainties

Erko Jakobson, PhD

MMM – tagasiside

Eelmise loengu tagasiside

- Mis on kattetegur?
- Milleks Studenti test?
- Mille järgi määrata jaotuse tüüpi?

Koduste testide tagasiside

EKSAMI AJAD (kell 12:15 – 14:00, ruum 160):

30. mai
06. juuni ???
13. juuni

Järeleksam:

27. juuni

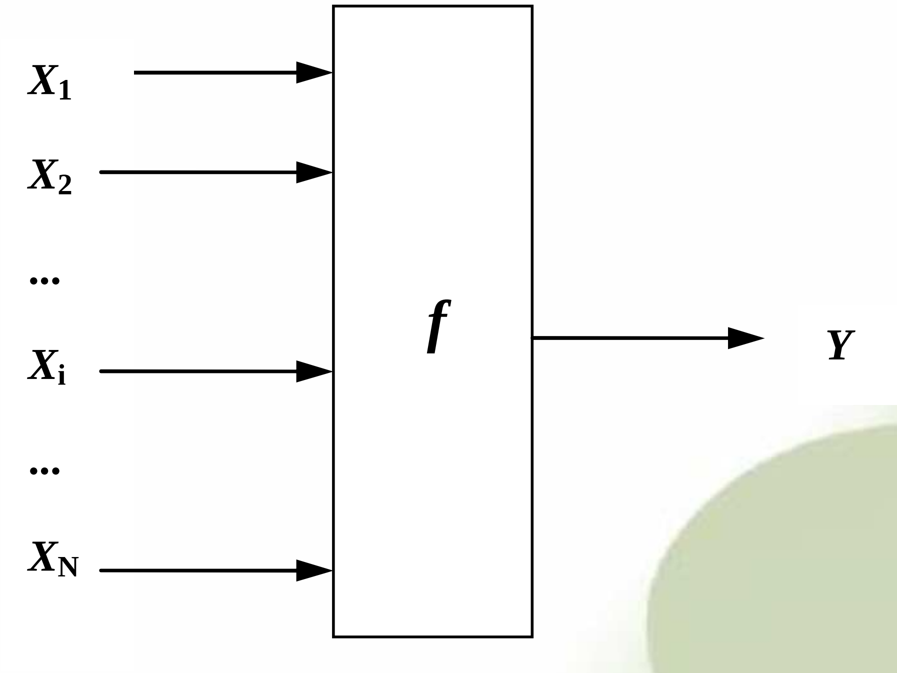
MMM – Mõõtmiste mudel

Igasugune reaalsetes tingimustes mõõtmine toimub alati suure hulga mõjurite toimel ning iga mõõteülesande korral arvutatakse meid huvitava mõõtesuuruse väärtus matemaatilise seosega teiste, antud mõõteülesande jaoks vajalike suuruste abil. Hinnanguid saame teatud osale nendest suurustest anda nende vahetu mõõtmise käigus, ülejäänud osale suurustest aga teadaoleva info, näiteks normdokumentides või käsiraamatutes esitatud andmete abil. Mõõtesuuruse väärtuse hinnangu leidmiseks tuleb seega mõõteülesandest lähtuvalt koostada mõõtesuuruse sõltuvust teistest vaadeldud suurustest kirjeldav mõõtmise mudel.

MMM – Mõõtmiste mudel

Sisendsuurused võivad olla nii konstandid, parandid, mõjurid kui ka sellised suurused, mida tuleb antud ülesande lahendamise käigus omakorda mõõta. Sõltuvust saab väljendada funktsiooni *f* abil kujul

$$Y = f\,(X_1;\ X_2;\ \ldots\ ;X_i;\ \ldots;\ X_N)$$



MMM – Mõõtmiste mudel

Näide 4.3. Suusataja lõppkiiruse määramine käepäraste vahenditega. Kiirus *v* on defineeritud valemiga

$$v = \frac{s}{t}$$

kus *s* on teepikkus ning *t* on aeg. Selle valemi võibki võtta mõõtmiste mudeliks, kuid kindlam on, kui seda mudelit täpsustada, lähtuvalt sellest, kuidas sisendsuurused mõõdetakse.

Oletame, et teepikkuse *s* mõõtmiseks kasutatakse mõõdulinti pikkusega s_1, mida tõstetakse edasi *N* korda, siis teepikkuse mõõtmise mudel on

$$s = N\,s_1 + ds,$$

kus *ds* on pärast viimast edasitõstmist mõõdulindilt saadud lugem.

MMM – Mõõtmiste mudel

Aeg t on suusataja mõõtmisalast väljumise aeg t_2 lahutatud mõõtmisalasse jõudmise aeg t_1:

$$t = t_2 - t_1.$$

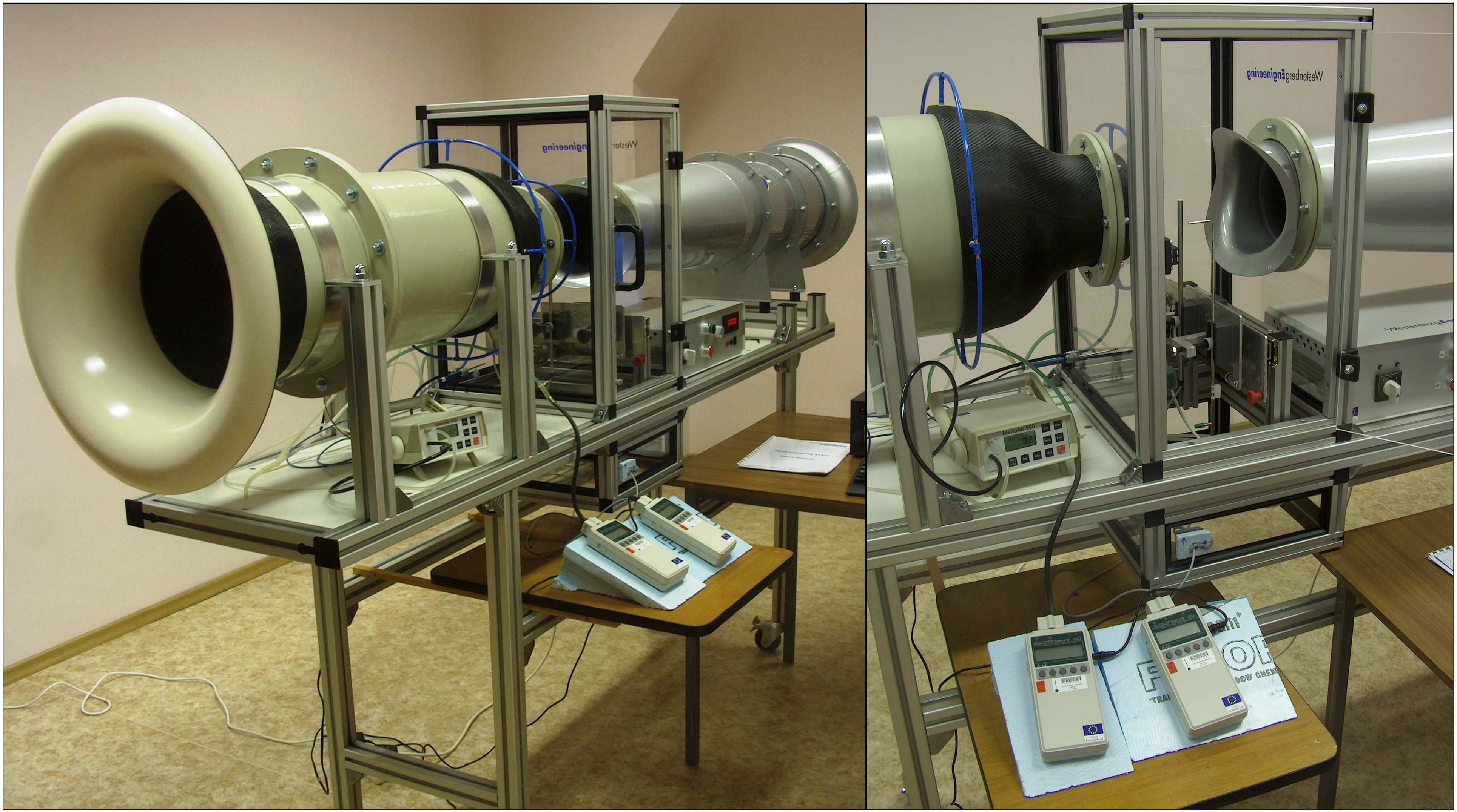
Pannes esialgsesse valemisse sisendsuuruste mõõtmiste mudelid, saame kiiruse mõõtmise mudeliks:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{N \cdot s_1 + ds}{t_2 - t_1}$$

Lihtsamatel juhtudel tavaliselt mõõtmiste mudelit välja ei kirjutata, sest teatakse isegi, kuidas soovitud suurust õigesti arvutada. Probleem tekibki enamasti alles määramatuse hindamisel, sest peas olevast valemist peast osatuletiste võtmine käib üldjuhul üle jõu. Seega – enne mõõtma hakkamist on ALATI mõistlik kirja panna ka mõõtmiste mudel, see lihtsustab üldjuhul oluliselt nii mõõtmiste optimaalset planeerimist kui ka mõõtemääramatuste hindamist.

MMM – Mõõtmiste mudel

Metoodika "Anemomeetrite kalibreerimine TÜ Katsekoja tuuletunneliga ja pöördnoole-etaloniga"



MMM – Mõõtemääramatus sõltumatute sisendite korral

Eelmine loeng tuletasime mõõtesuuruse mõõtemääramatuse kahe sisendsuuruse korral. Üldistame saadud valemit:

$$u^2(Y) = \left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}\right)^2 u^2(X_1) + \left(\frac{\partial Y}{\partial x_2}\right)^2 u^2(X_2)$$

Sama valem on summa märgi all kirja pandav kujul:

$$u^2(Y) = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial Y}{\partial x_i}\right)^2 u^2(X_i)$$

Üldistatult kehtib samasugune valem ka *N* sõltumatu sisendsuuruse korral:

$$u^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial Y}{\partial x_i}\right)^2 u^2(X_i)$$

MMM – Liitmääramatuse tähtsusetu komponendi kriteerium

Mõõtmise mudelisse tuleb sisse viia kõik mõeldavad määramatust tekitavad liikmed. Mõne liikme koha pealt võib tekkida kahtlus, kas seda peab arvesse võtma või saab öelda, et see liige on ebaoluline. Selleks lähtume eeldusest, et määramatuse hinnang antakse mitte rohkem kui kahe tähendusliku arvkohaga. Kui mingi määramatuse komponent on nii väike, et liitmääramatuse kahte tähenduslikku arvkohta praktiliselt ei muuda, siis võib öelda, et tegemist on ebaolulise määramatuse komponendiga. Mingi määramatuse komponendi $u(x_m)$ ebaolulisuse kinnitamiseks on eelpool öeldust tuletatud võrratus:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_m} u(x_m) \right| \leq 0{,}3u(y)$$

st kõik komponendid, mis alluvad sellele võrratusele, on ebaolulised.

MMM – Liitmääramatuse tähtsusetu komponendi kriteerium

Kuna liitmääramatus *u*(*y*) moodustub kõikide määramatuse komponentide summast, siis tingimusest

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}u(x_m)\right| \le 0{,}3\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}u(x_i)\right|$$

kus $u(x_i)$ on suvaline määramatuse komponent, järeldub ka tingimus

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}u(x_m)\right| \le 0{,}3u(y)$$

Seega, kui leida kõige suurem määramatuse komponent ning võrrelda teisi määramatuse komponente sellega, siis kui mõni komponendi suurus on võrreldes kõige suurema komponendiga 30 % või vähem, siis on tegemist tähtsusetu komponendiga, mille võib arvutuste lihtsustamise huvides jätta arvestamata.

MMM – Liitmääramatuse tähtsusetu komponendi kriteerium

Näide 4.3. Alumiiniumist risttahukakujulist plaadi kõigi kolme külje pikkused mõõdeti nihikuga ning saadi järgmised tulemused:

a = 8,02 mm,	$u(a)$ = 0,03 mm,	$v(a) = 5$;
b = 42,53 mm,	$u(b)$ = 0,04 mm,	$v(b) = 6$;
c = 172,11 mm,	$u(c)$ = 0,05 mm,	$v(c) = 7$;

Leida plaadi ruumala laiendmääramatus usaldusnivool 95 %.

MMM – Mõõtemääramatus sõltuvate sisendite korral

Kovariatsioon ja korrelatsioon

Oletame, et meil on mõõdetud kahte suurust, *x* ja *y*. Kui meil on *N* suuruste paari x_i; y_i (*i* = 1 ... *N*), siis kovariatsioon *x* ja *y* vahel on:

$$\operatorname{cov}(x;y)=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-m(x)\right)\cdot\left(y_i-m(y)\right)}{n-1}$$

Korrelatsioon *r* (tähistatakse ka *R*, *R*(*x*; *y*)) on defineeritav kovariatsiooni ning standardhälvete kaudu:

$$r(x;y)=\frac{\operatorname{cov}(x;y)}{\sqrt{s(x)\cdot s(y)}}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-m(x)\right)\cdot\left(y_i-m(y)\right)}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-m(x)\right)^2\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-m(y)\right)^2\right]}}$$

MMM – Mõõtemääramatus sõltuvate sisendite korral

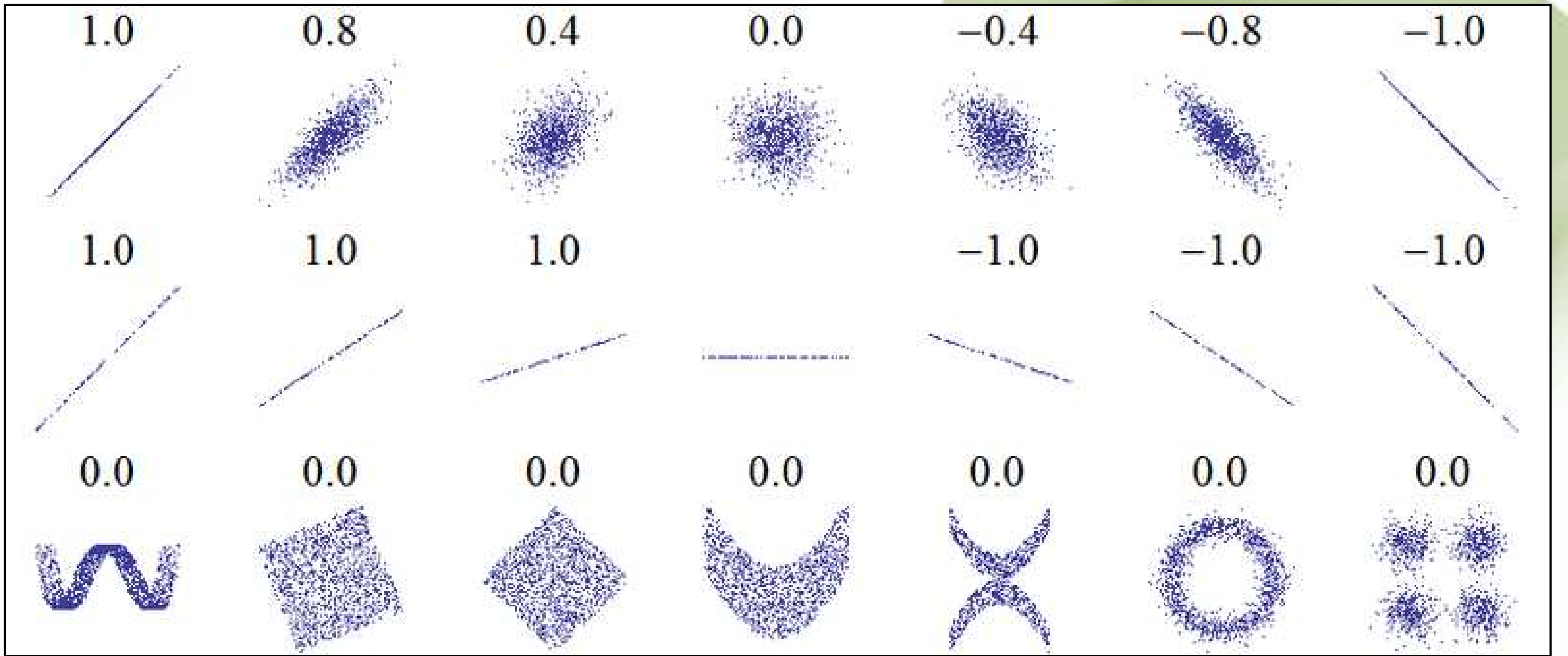
Kovariatsioon ja korrelatsioon

Korrelatsioon on normeeritud kovariatsioon, kuna ta saab olla vahemikus [–1; 1]. Korrelatsioon $r = \pm 1$ tähendab, et tegemist on funktsionaalse seosega, kus puudub varieeruvus. Kui $r > 0$, on tegemist positiivse korrelatsiooniga, st x kasvades kasvavad üldiselt ka y väärtused. Kui $r < 0$, on tegemist negatiivse korrelatsiooniga, st x kasvades üldiselt y väärtused kahanevad. Kui $r \approx 0$, siis korrelatsioon puudub ning suurused x ja y on omavahel sõltumatud.

Korrelatsiooniga r on tihedasti seotud ka determinatsioonikoefitsient r^2. Matemaatiliselt sisaldab determinatsioonikoefitsient vähem infot, sest ta ei näita, kas on tegemist positiivse või negatiivse korrelatsiooniga. Determinatsioonikoefitsient näitab, kui suur osa y varieeruvusest on ära kirjeldatud lineaarse trendiga $y = ax + b$.

MMM – Mõõtemääramatus sõltuvate sisendite korral

$$r(x;y) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - m(x)\right)\cdot\left(y_i - m(y)\right)}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - m(x)\right)^2\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - m(y)\right)^2\right]}}$$



MMM – Mõõtemääramatus sõltuvate sisendite korral

Jätkame eelmises loengus tuletatud mõõtemääramatusega kahe sisendsuuruse korral, kuid jätame ära eelduse, et tegemist on sõltumatute suurustega.

$$u^2(Y) = \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\right)^2 u^2(X_1) + 2 \cdot r \cdot \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_1}\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2} u(X_1)u(X_2) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_2}\right)^2 u^2(X_2)$$

Üldistatult on määramatuse valem *N* sõltumatu sisendsuuruse korral:

$$u^2(Y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_i}\right)^2 u^2(X_i)$$

Kui nüüd sõltumatuse eeldusest loobuda, siis lisanduvad valemisse korrelatsiooni liikmed:

$$u^2(Y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_i}\right)^2 u^2(X_i) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k=i+1}^{N} r(x_i; x_k)\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_i}\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}_k} u(X_i)u(X_k)$$

Näide 4.6. Vaatame kolme suurust A; B; C. Keskmised väärtused on $A = 5$; $B = 7$; $C = 12$; standardmääramatused on $u(A) = 0,3$; $u(B) = 0,5$; $u(C) = 0,4$; parameetrite vahelised korrelatsioonid on $r(A; B) = 0,2$; $r(A; C) = 0,9$; $r(B; C) = –0,4$.

$$D = A + B + C$$

$$E = A – C$$

Leia suuruste D ja E standardmääramatused nii arvestades korrelatsioone kui ka ilma.

MMM – Mõõtemääramatus sõltuvate sisendite korral

Näide 4.6. Vaatame kolme suurust *A*; *B*; *C*. Keskmised väärtused on *A* = 5; *B* = 7; *C* = 12; standardmääramatused on *u*(*A*) = 0,3; *u*(*B*) = 0,5; *u*(*C*) = 0,4; parameetrite vahelised korrelatsioonid on *r*(*A*; *B*) = 0,2; *r*(*A*; *C*) = 0,9; *r*(*B*; *C*) = –0,4.

$$D = A + B + C$$

<u>Lahendus:</u> Leiame *D* standardmääramatuse kõigepealt ilma korrelatsioone arvestamata:

MMM – Mõõtemääramatus sõltuvate sisendite korral

Näide 4.6. Vaatame kolme suurust *A*; *B*; *C*. Keskmised väärtused on *A* = 5; *B* = 7; *C* = 12; standardmääramatused on *u*(*A*) = 0,3; *u*(*B*) = 0,5; *u*(*C*) = 0,4; parameetrite vahelised korrelatsioonid on *r*(*A*; *B*) = 0,2; *r*(*A*; *C*) = 0,9; *r*(*B*; *C*) = –0,4.

$$D = A + B + C$$

Leiame *D* standardmääramatuse korrelatsioonide osa:

$$u2^2(D) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^{N} r(x_i; x_k) \frac{\partial D}{\partial x_i} \frac{\partial D}{\partial x_k} u(X_i) u(X_k) =$$

$$= 2 \cdot \left[r(A;B) \frac{\partial D}{\partial A} \frac{\partial D}{\partial B} u(A)u(B) + r(A;C) \frac{\partial D}{\partial A} \frac{\partial D}{\partial C} u(A)u(C) + r(B;C) \frac{\partial D}{\partial B} \frac{\partial D}{\partial C} u(B)u(C) \right] =$$

$$= 2 \cdot [0{,}2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 + (-0{,}4) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4] =$$

$$= 2 \cdot [0{,}03 + 0{,}108 - 0{,}08] = 2 \cdot 0{,}058 = 0{,}116$$

MMM – Mõõtemääramatus sõltuvate sisendite korral

Näide 4.6. Vaatame kolme suurust *A*; *B*; *C*. Keskmised väärtused on *A* = 5; *B* = 7; *C* = 12; standardmääramatused on *u*(*A*) = 0,3; *u*(*B*) = 0,5; *u*(*C*) = 0,4; parameetrite vahelised korrelatsioonid on *r*(*A*; *B*) = 0,2; *r*(*A*; *C*) = 0,9; *r*(*B*; *C*) = –0,4.

$$D = A + B + C$$

Leiame D standardmääramatuse, arvestades korrelatsioone:

$$u(D) = \sqrt{u1^2(D) + u2^2(D)} = \sqrt{0{,}5 + 0{,}116} = \sqrt{0{,}616} = 0{,}78$$

Näide 4.6. Vaatame kolme suurust *A*; *B*; *C*. Keskmised väärtused on *A* = 5; *B* = 7; *C* = 12; standardmääramatused on *u*(*A*) = 0,3; *u*(*B*) = 0,5; *u*(*C*) = 0,4; parameetrite vahelised korrelatsioonid on *r*(*A*; *B*) = 0,2; *r*(*A*; *C*) = 0,9; *r*(*B*; *C*) = –0,4.

E* = *A* – *C

Leiame *E* standardmääramatuse kõigepealt ilma korrelatsioone arvestamata:

$$u1^2(E) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial E}{\partial \bar{x}_i} \right)^2 u^2(X_i) = \left(\frac{\partial E}{\partial A} \right)^2 u^2(A) + \left(\frac{\partial E}{\partial C} \right)^2 u^2(C) =$$

$$= 1^2 \cdot 0{,}3^2 + 1^2 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}25$$

$$u1(E) = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$$

MMM – Mõõtemääramatus sõltuvate sisendite korral

Näide 4.6. Vaatame kolme suurust *A*; *B*; *C*. Keskmised väärtused on *A* = 5; *B* = 7; *C* = 12; standardmääramatused on *u*(*A*) = 0,3; *u*(*B*) = 0,5; *u*(*C*) = 0,4; parameetrite vahelised korrelatsioonid on *r*(*A*; *B*) = 0,2; *r*(*A*; *C*) = 0,9; *r*(*B*; *C*) = –0,4.

E* = *A* – *C

Leiame *E* standardmääramatuse korrelatsioonide osa:

$$u2^2(E) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^{N} r(x_i; x_k) \frac{\partial E}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial E}{\partial \bar{x}_k} u(X_i) u(X_k) =$$

$$= 2 \cdot \left[r(A;C) \frac{\partial E}{\partial A} \frac{\partial E}{\partial C} u(A) u(C) \right] =$$

$$= 2 \cdot [0{,}9 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4] = 2 \cdot [-0{,}108] = -0{,}216$$

MMM – Mõõtemääramatus sõltuvate sisendite korral

Näide 4.6. Vaatame kolme suurust *A*; *B*; *C*. Keskmised väärtused on *A* = 5; *B* = 7; *C* = 12; standardmääramatused on *u*(*A*) = 0,3; *u*(*B*) = 0,5; *u*(*C*) = 0,4; parameetrite vahelised korrelatsioonid on *r*(*A*; *B*) = 0,2; *r*(*A*; *C*) = 0,9; *r*(*B*; *C*) = –0,4.

$$E = A - C$$

Leiame E standardmääramatuse, arvestades korrelatsioone:

$$u(E) = \sqrt{u1^2(E) + u2^2(E)} = \sqrt{0{,}25 + (-0{,}216)} = \sqrt{0{,}034} = 0{,}18$$

Määramatuse hindamine (sõltumatud sisendid)

Matemaatiline mudel	$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.	$\rho = \frac{m}{V} = \frac{6m}{\pi \cdot d^3}$
Sisendväärtused	$X_1, X_2, \ldots, X_n$	m, d, π
Määramatuse komponendid igale sisendväärtusele	$u_A(X_1)$, $u_B(X_1)$, $u_C(X_1)$, $u_A(X_2)$, $u_B(X_2)$, $u_C(X_2)$, …, *etc*	$um_C = \sqrt{um_{A1}^2 + um_{A2}^2 + \ldots um_{B1}^2 + um_{B2}^2 + \ldots}$ $ud_C = \sqrt{ud_{A1}^2 + ud_{A2}^2 + \ldots ud_{B1}^2 + ud_{B2}^2 + \ldots}$
Liitmääramatus	$u^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial Y}{\partial x_i}\right)^2 u^2(X_i)$	$u^2(\rho) = \rho^2 \cdot \left[\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{-3 \cdot u(d)}{d}\right)^2\right]$
Vabadusastmete arv igale sisendväärtusele	$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$	ν_m, ν_d
Efektiivsed vabadusastmete arvud väljundsuurustele	$\nu_{eff}(y) = u^4(y) \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^4 u^4(x_i)}{\nu_i}$	$\nu_{eff}(\rho) = u^4(\rho) \Big/ \left[\frac{\left(\rho \cdot \frac{u(m)}{m}\right)^4}{\nu_m} + \frac{\left(\rho \cdot \frac{-3 \cdot u(d)}{d}\right)^4}{\nu_d}\right]$
Kattetegur	$k = t_{\alpha\%,\nu}$ = TINV(1-α, ν)	$k = t_{95\%,\nu(\rho)}$ = TINV(0.05, $\nu(\rho)$)
Laiendmääramatus	$U(y) = k\, u(y)$	$U(\rho) = k\, u(\rho)$

MMM – Praktikumide tööde vormistamine

Mõningaid näpunäiteid praktikumi aruannete vormistamisest Mathcadis.

- **Praktikumi aruande eesmärk on tulemusi arusaadavalt esitada, eesmärgiks peaks olema tulemuste läbipaistvus.**
- **Tööd tuleb kommenteerida – lugejal ei tohi kuskil tekkida küsimust, et “miks siin nii tehti”.**
- **Kõigi mõõtmiste mudeli sisendsuuruste mõõtemääramatused tuleb protokollis esitada.**
- **Hea toon on esitada kõigi mõõtmiste mudeli komponentide osa koondmääramatuses.**
- **Aruanne peaks olema struktureeritud, st peaks olema lihtsalt arusaadav, kus üks arvutus lõpeb ning teine algab.**
- **Enne aruande esitamist tuleks see ise läbi lugeda ning võimalusel lasta ka kellelgi teisel see läbi lugeda.**

MMM – 04. aprilli kontrolltöö

Kontrolltöö annab 20 % aine koondhindest.

Eksamile pääsemiseks peab kontrolltöös saama vähemalt 50 % punktidest.

Tuleb ka kontrolltöö järeltöö, selle aja lepime kokku nädal pärast kontrolltööd, 11. aprillil.

Positiivset sooritust ümber teha ei saa.

Järeltöös saadud punktid korrutatakse läbi koefitsiendiga 0,8 (ei kehti põhjendatud vabandajate kohta).

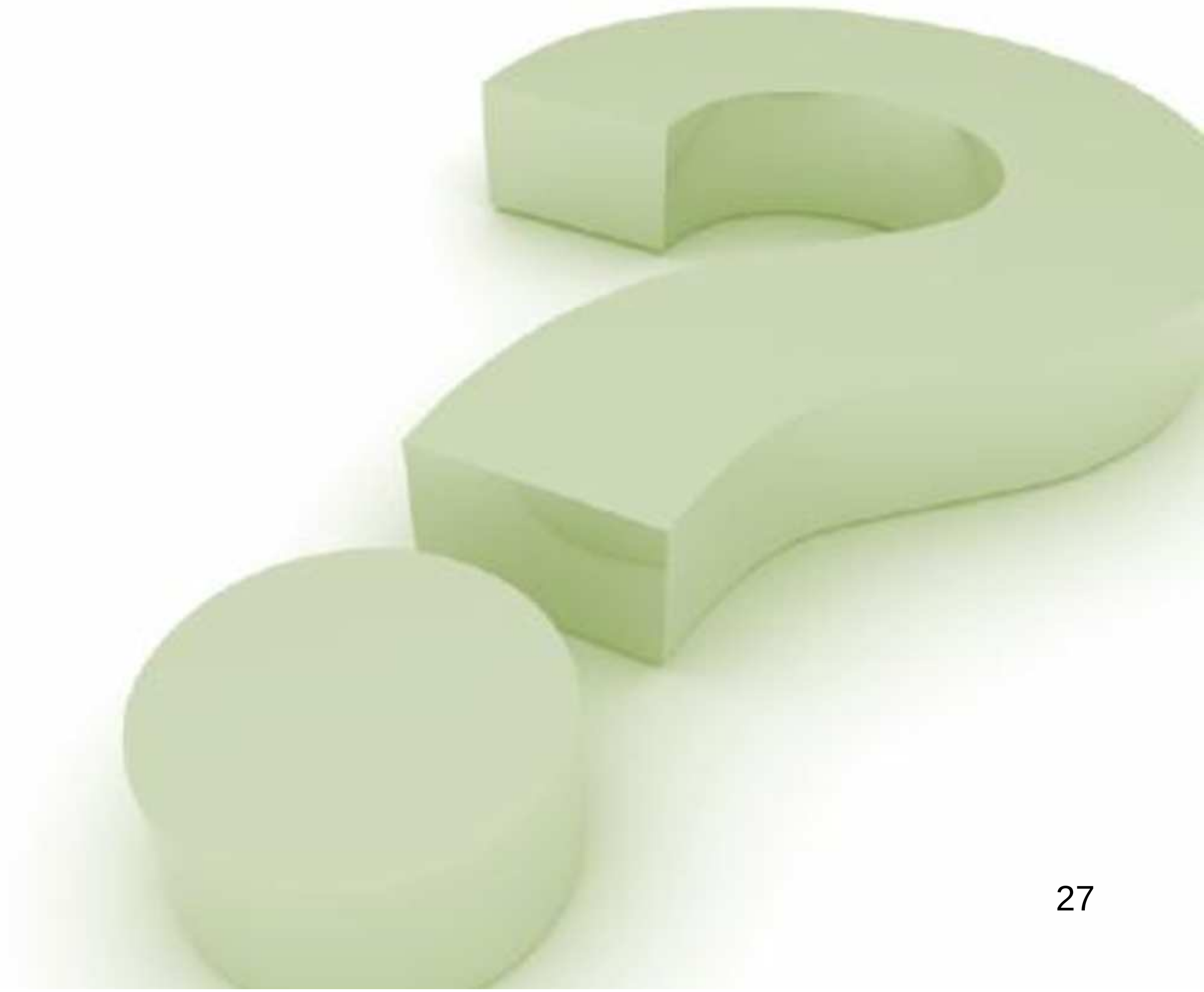
MMM – 04. aprilli kontrolltöö

Test ja eksam on kirjalikud, testi vormis ning sisaldavad küsimusi nii teooria osast kui ka praktilist arvutamist. Spikerdamine on limiteeritud. Kaastudengeid, raamatuid, konspekte, arvuteid, telefone jne pole lubatud kasutada. Laual võib olla kalkulaator ning üks A4 formaadis lehekülg vabalt valitud käsitsi kirjutatud teksti, nagu valemid, definitsioonid, jne.

Testi ja eksami tulemuste kontrollimine käib lahendimatriitsi abil – on kaks varianti, kas vastus on õige või vale. Lisalehed on arvutamiseks, neis olevat infot üldjuhul ei kontrollita ega hinnata.

MMM – Kodune töö

Kodune test sulgub 27.03.2011 kell 23:55.



Mõõtmised ja mõõtemääramatused

Measurements and uncertainties

Erko Jakobson, PhD

MMM – tagasiside

Eelmise loengu tagasiside

- **Mis asjad on vabadusastmed, mille jaoks neid vaja on?**

Koduste testide tagasiside

EKSAMI AJAD (kell 12:15 – 14:00, ruum 160):

30. mai
06. juuni
13. juuni

Järeleksam:

27. juuni

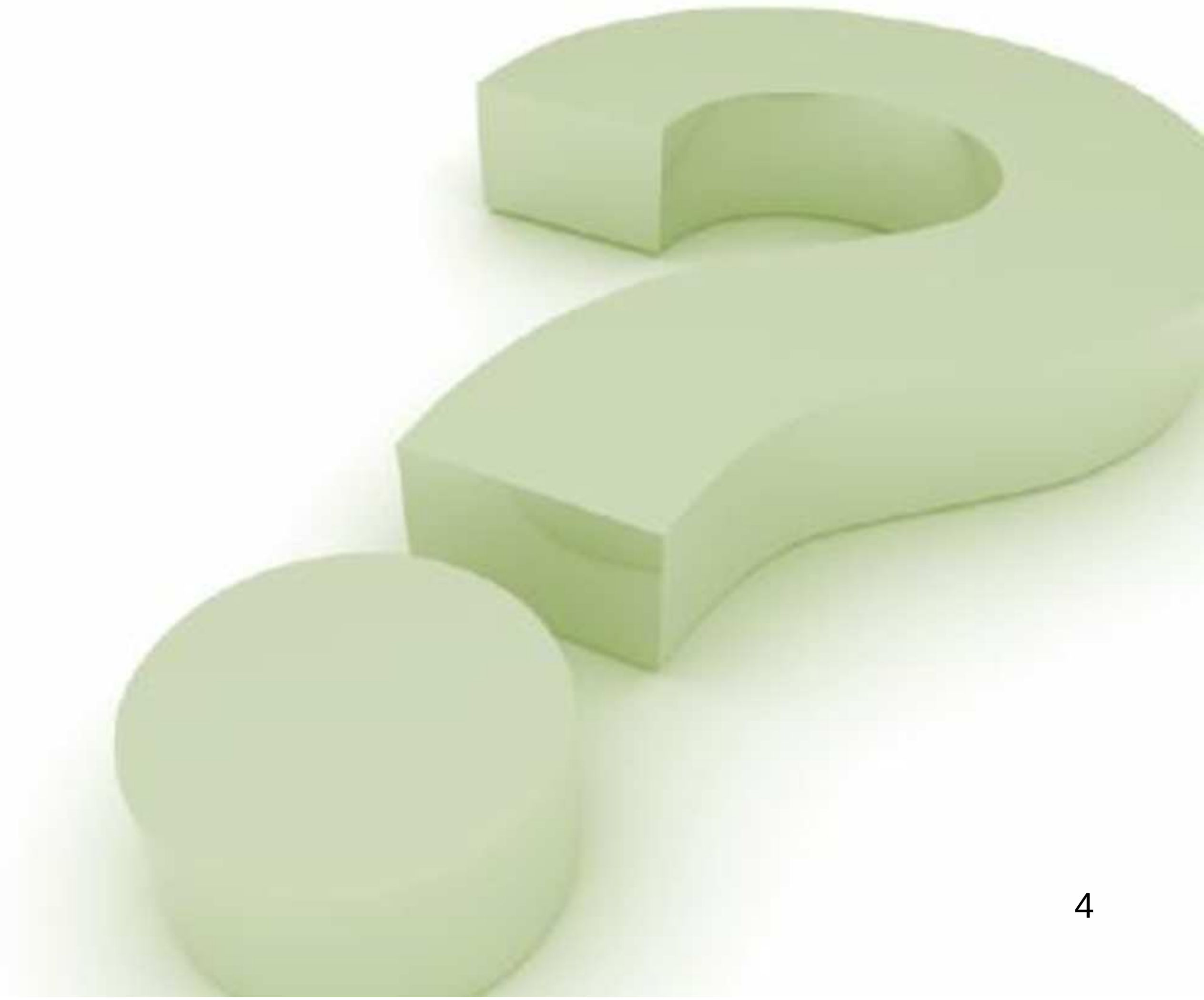
MMM – 04. aprilli kontrolltöö

Test ja eksam on kirjalikud, testi vormis ning sisaldavad küsimusi nii teooria osast kui ka praktilist arvutamist. Spikerdamine on limiteeritud. Kaastudengeid, raamatuid, konspekte, arvuteid, telefone jne pole lubatud kasutada. Laual võib olla kalkulaator ning üks A4 formaadis lehekülg vabalt valitud käsitsi kirjutatud teksti, nagu valemid, definitsioonid, jne.

Testi ja eksami tulemuste kontrollimine käib lahendimatriitsi abil – on kaks varianti, kas vastus on õige või vale. Lisalehed on arvutamiseks, neis olevat infot üldjuhul ei kontrollita ega hinnata.

MMM – Näidiskontrolltöö

Küsimused-kommentaarid näidiskontrolltöö kohta?



MMM – Mõõtemääramatus sõltuvate sisendite korral

Näide 4.7. Tavaliselt on digitaalsetel termomeetritel võimalik valida näidud nii Celsiuse (C) kui ka Farenheidi (F) kraadides. Kuna info pärineb samalt temperatuuri sensorilt, on korrelatsioon nende näitude vahel üks. Teame, et nende skaalade vaheline seos on järgmine:

$$F = C \cdot x + 32 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{F - 32}{C}$$

Meid huvitab, kui täpselt me saame hinnata koefitsienti *x* kümnest mõõtmisest. Mõõtmistulemused on järgmised:

C = 22; 15; 21; 20; 23; 24; 21; 21; 18; 17.

F = 72; 60; 70; 67; 74; 76; 70; 70; 64; 62.

Lahendus: Mathcad failis „C_ja_F_temperatuuri_omavaheline_seos.mcd“

MMM – Kodune töö

Kodune test sulgub 03.04.2011 kell 23:55.

Seekord saab tööd esitada lõpmatult palju kordi, arvesse läheb parim tulemus.

Näide 4.8. Modelleerimise käigus saadi, et ühte protsessi kirjeldab järgmine funktsioon:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{21\cdot x^{8}}{3\cdot x^{5}}+c\cdot x\cdot x^{2}; & 0<x<1\\ 0; & \text{mujal}\end{cases}$$

Leia:

- **koefitsient *c*;**
- **jaotusfunktsioon kohal x_1 ($0 < x_1 < 1$);**
- **keskväärtus;**
- **mediaan;**
- **standardhälve;**
- **tõenäosus, et sündmus satuks piirkonda (–0,3; 0,7).**

Näide 4.9. Praktikumis kaaluti klotsi massi 5 korda kaaluga, mille kalibreerimistunnistusel on kirjas, et piirkonnas 50 g on tema laiendmääramatus usaldusnivool 95 % (k = 2) 0,3 g. Kaalu resolutsioon on 0,1 g. Mõõtmistulemused on järgmised:
m = {45,5; 45,9; 45,8; 45,2; 45,6} g.

Leia:

- **klotsi massi parim hinnang;**
- **klotsi massi A-tüüpi määramatus;**
- **klotsi massi B-tüüpi määramatus;**
- **klotsi massi liitmääramatus;**
- **klotsi massi vabadusastmete arv;**
- **klotsi massi laiendmääramatus usaldusnivool 95 %**

MMM – Harjutusülesanded

Näide 4.10. Jää tiheduse mõõtmiseks puuriti jääst 10 puursüdamikku ning mõõdeti nende pikkused ning massid. Kuna jää paksus erines mõõtekohtades oluliselt, siis oli ka pikkuste ja masside erinevus suur, samas oli massi ja pikkuse vaheline korrelatsioon väga kõrge: R = 0,95. Mõõtmisandmetest saadi puursüdamiku pikkuse keskväärtuseks 20,4 cm ning koondmääramatuseks 9,4 cm; puursüdamiku läbimõõdu keskväärtuseks saadi 4,96 cm koondmääramatusega 0,12 cm ning puursüdamiku massi keskväärtuseks saadi 366 g koondmääramatusega 130 g. Silindri ruumala on:

$$V = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot H}{4}$$

Leia:

- **jää tiheduse parim hinnang;**
- **jää tiheduse määramatus, korrelatsiooni arvestamata;**
- **jää tiheduse määramatus, arvestades korrelatsioone.**

MMM – Harjutusülesanded

Näide 4.11. Risttahuka kujuline akvaarium on täidetud veega. Akvaariumi põhja mõõtmed on 20,23 cm ja 30,18 cm, veekihi paksus on 38,17 cm. Kõik akvaariumi mõõdud mõõdeti metalljoonlauaga, mille põhiviga oli 1 mm, akvaariumi erinevatest punktidest10 korda. Akvaariumi põhja lühema külje standardmääramatuseks oli 2,0 mm, põhja pikema külje standardmääramatuseks aga 3,0 mm. Veekihi paksust mõõdeti 20 korda ning saadi standardmääramatuseks 5 mm. Hinnata akvaariumis oleva vee ruumala koos laiendmääramatusega usaldusnivool 95 %.

Näide 4.12. Optikas on valgustatus arvutatav valemist

$$E = \frac{I}{R^2}\cos\alpha$$

Valgusti intensiivsus olgu *I* = 100 W ± 2 W; Uuritava pinna ning valgusti vaheline kaugus on mõõdetud 10 korda, keskmiseks kauguseks *R* = 1 m, standardhälve on *s*(*R*) = 3 cm, mõõdulindi põhiviga on ±1 mm. Valgusti ja valgustatava pinna vaheline nurk on mõõdetud nurgamõõtjaga *α* = 30°, nurgamõõtja põhiviga on ±1 °. Hinnata pinna valgustatus *E* koos laiendmääramatusega usaldusnivool 95 %.

Mõõtmised ja mõõtemääramatused

Measurements and uncertainties

Erko Jakobson, PhD

MMM – Tagasiside

Järelkontrolltöö aeg:

Neljapäev, 14.04 kell 16:15 – 18:00, ruum 410 ???

EKSAMI AJAD:

valida üks kolmest:

30. mai	**kell 10:15 – 12:00, ruum 160 ???**
30. mai	**kell 12:15 – 14:00, ruum 416 ???**
30. mai	**kell 14:15 – 16:00, ruum 160 ???**

06. juuni	**kell 12:15 – 14:00, ruum 160**
13. juuni	**kell 12:15 – 14:00, ruum 160**

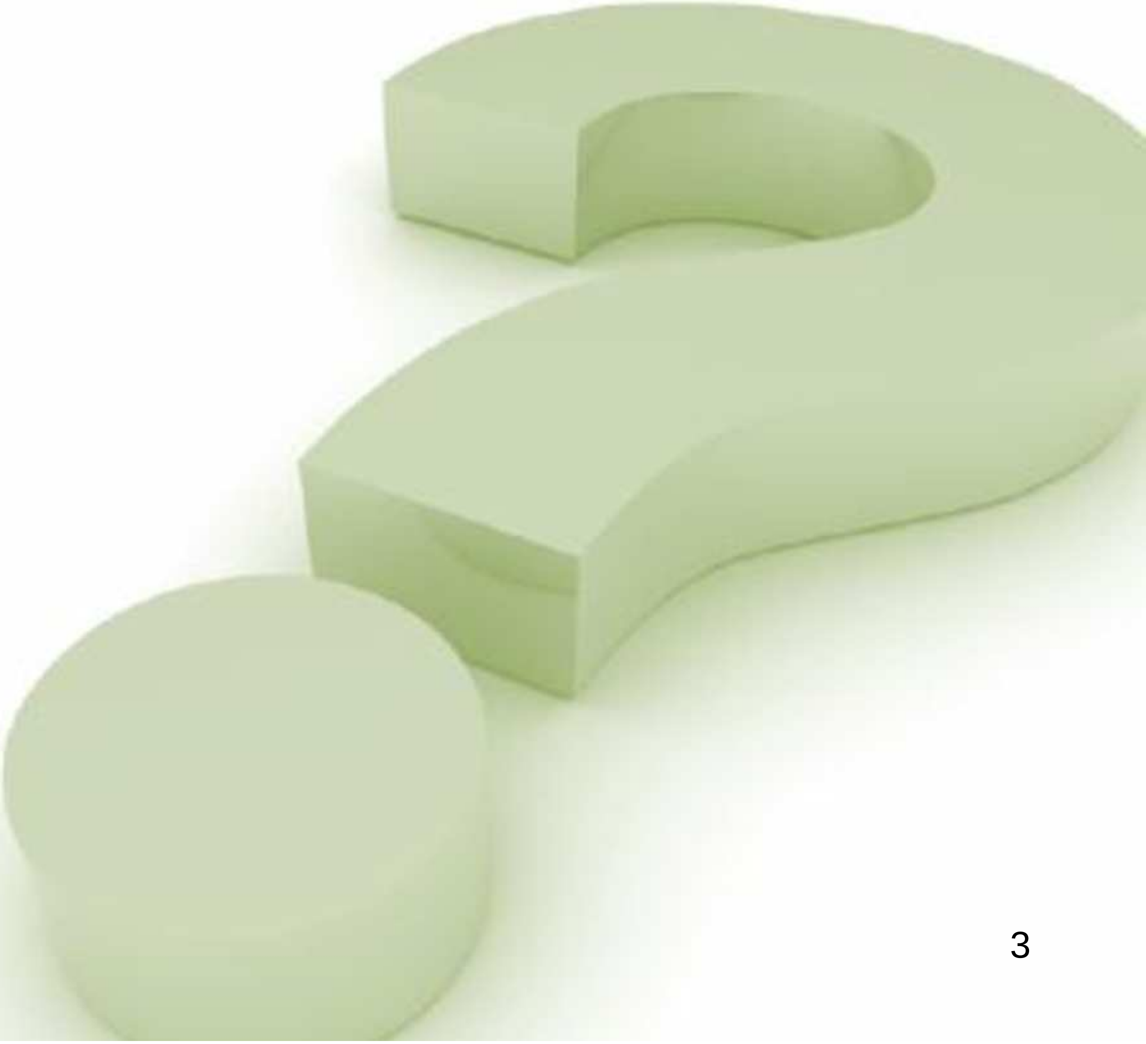
Järeleksam:

27. juuni

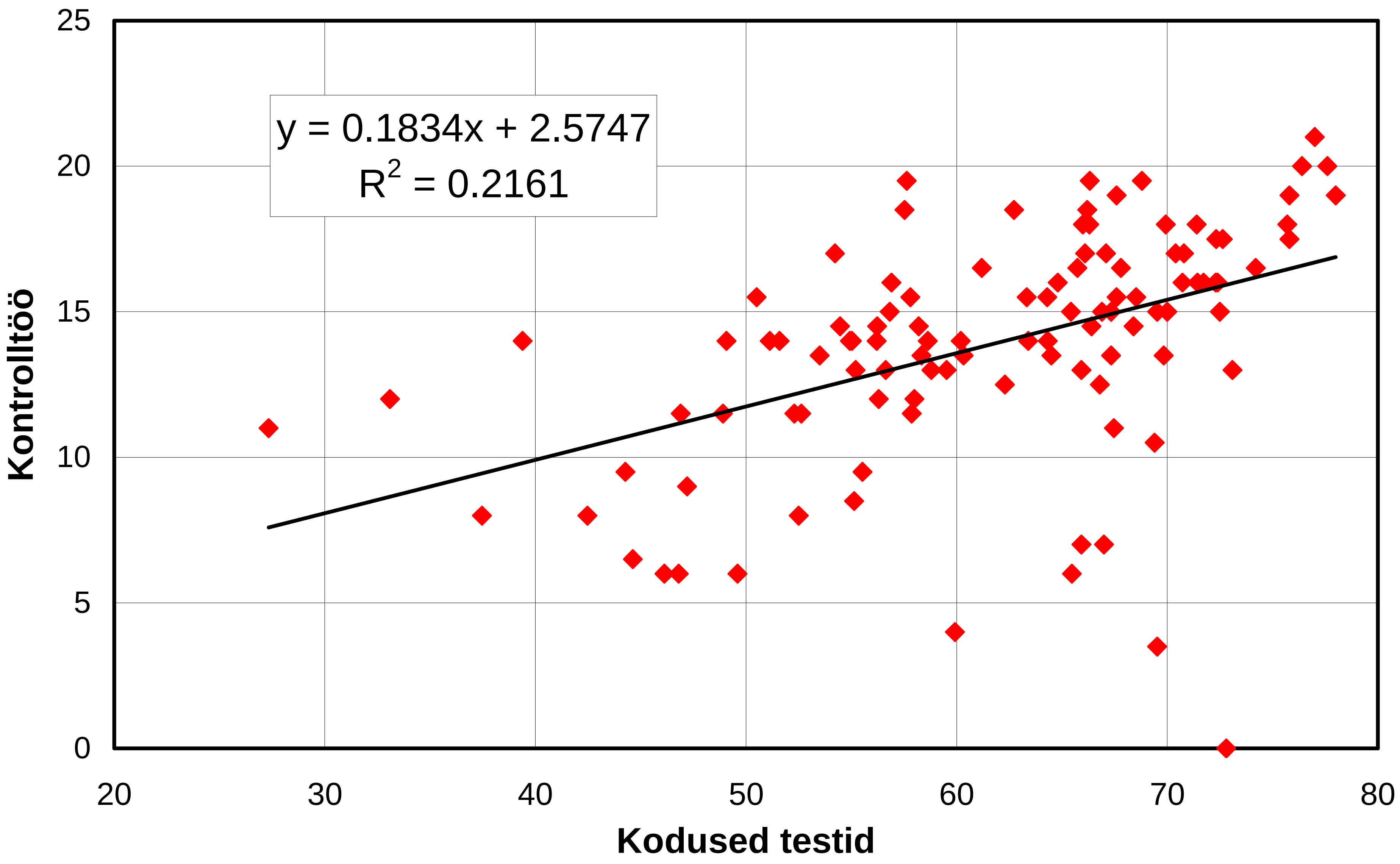
MMM – Kontrolltöö analüüs

Statistika:

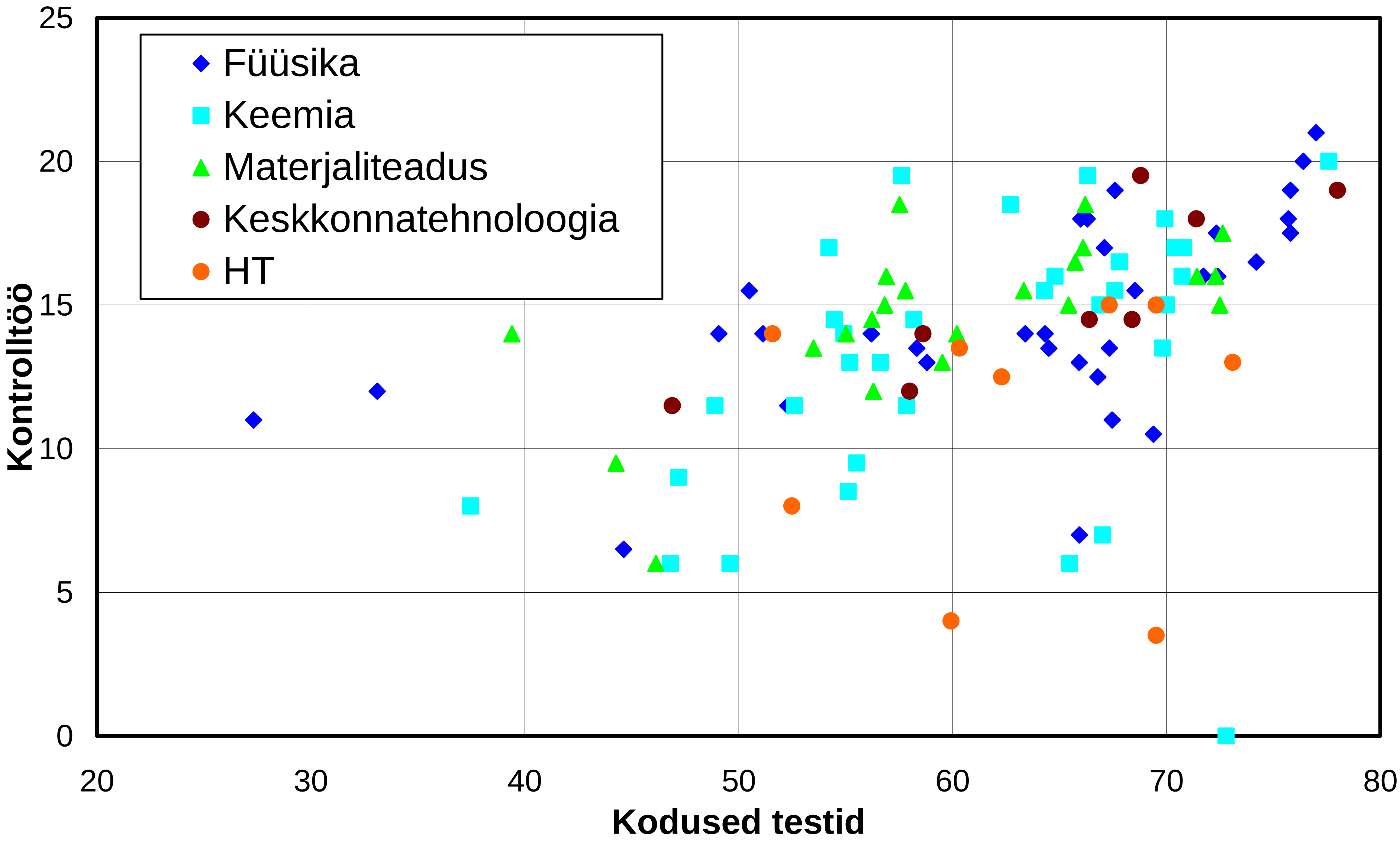
Keskmine hinne:	**13,9**
Standardhälve:	**4,0**
Läbikukkujaid:	**17**



MMM – Kontrolltöö analüüs



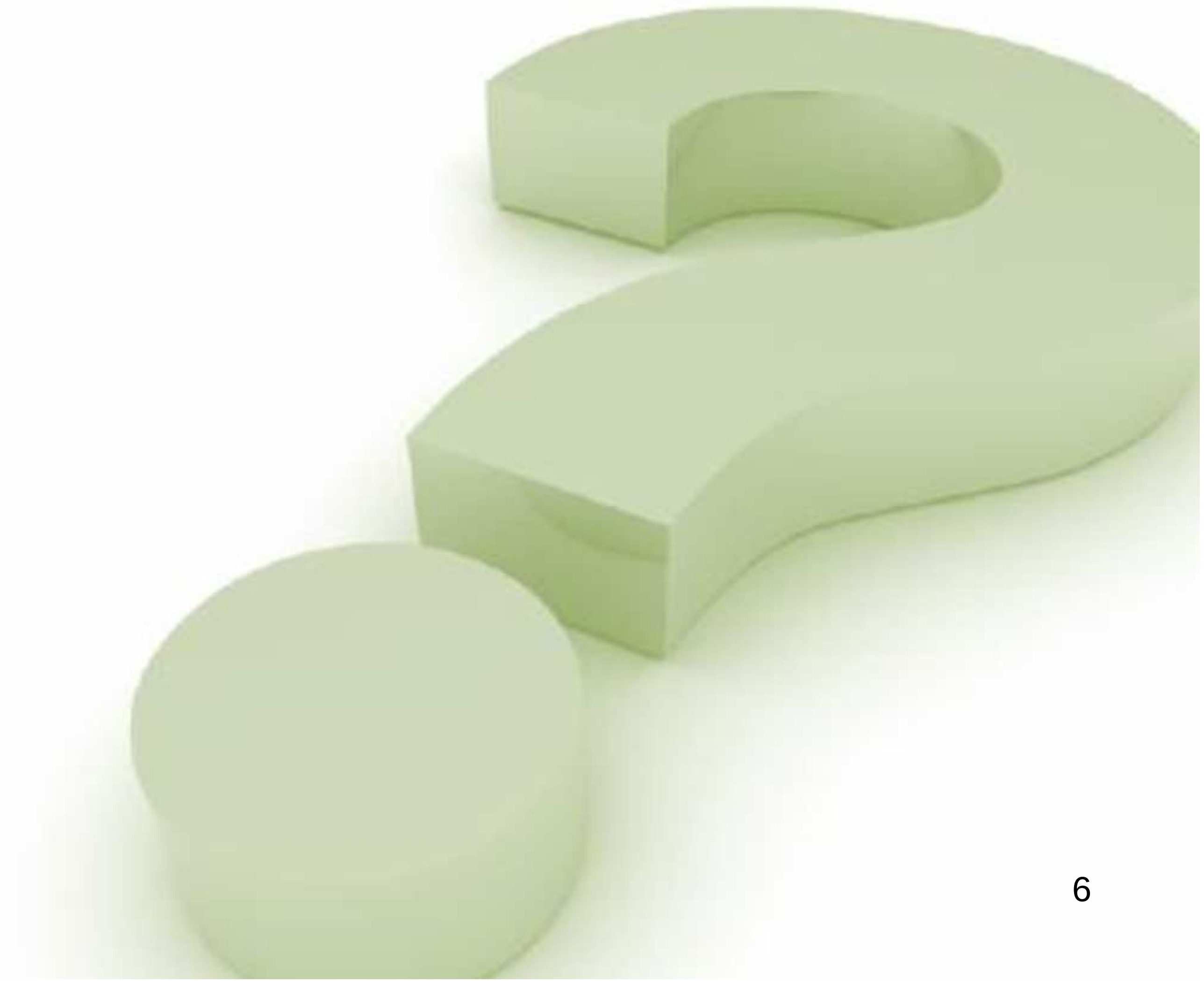
MMM – Kontrolltöö analüüs



MMM – Kontrolltöö analüüs

1. Kirjuta tiheduse ($\rho = m / V$) dimensioonvalem

2. Esita ajaühik viis nädalat kilotundides.



MMM – Kontrolltöö analüüs

3. Süstemaatilised vead (liigitus, näited, kuidas vältida) – hea vastus

Määratavad vead – nende esinemine on teada ning ka vea ulatus on määratav. Näiteks tekib mingi mõjuri arvestamata jätmisel arvutustes või aparatuuri skaala nihke tõttu (pole null korrektselt paigas). Kuna saab määrata vea ulatuse on võimalik kasutada parandeid (näiteks kasutatakse enne mõõtmist algnäidu erinevust nullist hiljem mõõtmistulemuse parandamiseks) (aparatuuri kalibreerimine).

Vead, mille olemasolu on teada, kuid suurus pole kindlalt määratav. Näiteks mõõteriistade ja aparatuuri vead. Võib öelda ka, et B-tüüpi vead. Mõõteriistade vead loetakse ühtlase jaotuse alla käivaks, ei teata kui kaugel mõõtmistulemusest on tõeline väärtus, kuid teatakse, mis piirkonda see võiks jääda. Mida parema lahutusvõimega ning väiksema põhiveaga on aparatuur , seda väiksem tuleb B-tüüpi määramatus. Täpsem aparatuur vähendab vigu.

Vead mille olemasolu ja suurus on teadmata. Sellisteks on näiteks aparatuuri defektid või keskkonnaga seotud tegurid, mida ei osata arvestada. Aparatuuri defektide avastamiseks kasutada erinevaid aparaate, võrrelda tulemusi, alati hoolikalt läbi mõelda, et mis tegurid võivad tulemusi mõjutada.

MMM – Kontrolltöö analüüs

3. Süstemaatilised vead (liigitus, näited, kuidas vältida)

Mitte väga korrektsed väited 1:

- **Vältida saab siis, kui kasutada koguaeg uusi mõõteriistu (sest neil pole vigu teada).**
- **Kolmandaks – vead, mille olemasolus ei saa kindel olla, saab ainult eeldada, et nad on olemas. Tuleb mõõtmisi sooritada mitu korda, et jõuda tõelisele väärtusele keskväärtusega võimalikult lähedale.**
- **Teadmata vigu saab vältida, tehes rohkem mõõtmisi, keskmistades, jättes välja suured kõrvalekalded keskmisest (eksed).**
- **Mõned vead saab kaotada kui teha suurem arv mõõtmisi. Kasutada töötavaid mõõtevahendeid. Mõõtmised sooritada selleks sobilikus keskkonnas (mõttetu on mõõta tuulekiirust tormi ajal, kui mõõteriist asub kinnises ruumis).**

MMM – Kontrolltöö analüüs

3. Süstemaatilised vead (liigitus, näited, kuidas vältida)

Mitte väga korrektsed väited 2:

- **Süstemaatilised vead on vead, mis esinevad pidevalt ja nende olemasolust ollakse teadlikud.**

- **Vigade vältimiseks tuleb kasutada võimalikult palju mehhaniseeritud ja digitaliseeritud mõõteriistu.**

- **Süstemaatilised vead jaotatakse: põhiviga ja suhteline viga. Põhiviga on antud mõõteriistaga mõõtmisel tehtud viga, see oleneb mõõteriista mõõte täpsusest. Suhteline viga on mõõtja enda poolt tehtud viga või viga, mille põhjustasid mingisugused välised jõud, näiteks müra segas helikiiruse mõõtmist.**
  ... Suhteline viga võib olla ka “näpuviga” – vajutasid kalkulaatoril valet klahvi või unustasid ühikud teisendamata.

MMM – Kontrolltöö analüüs

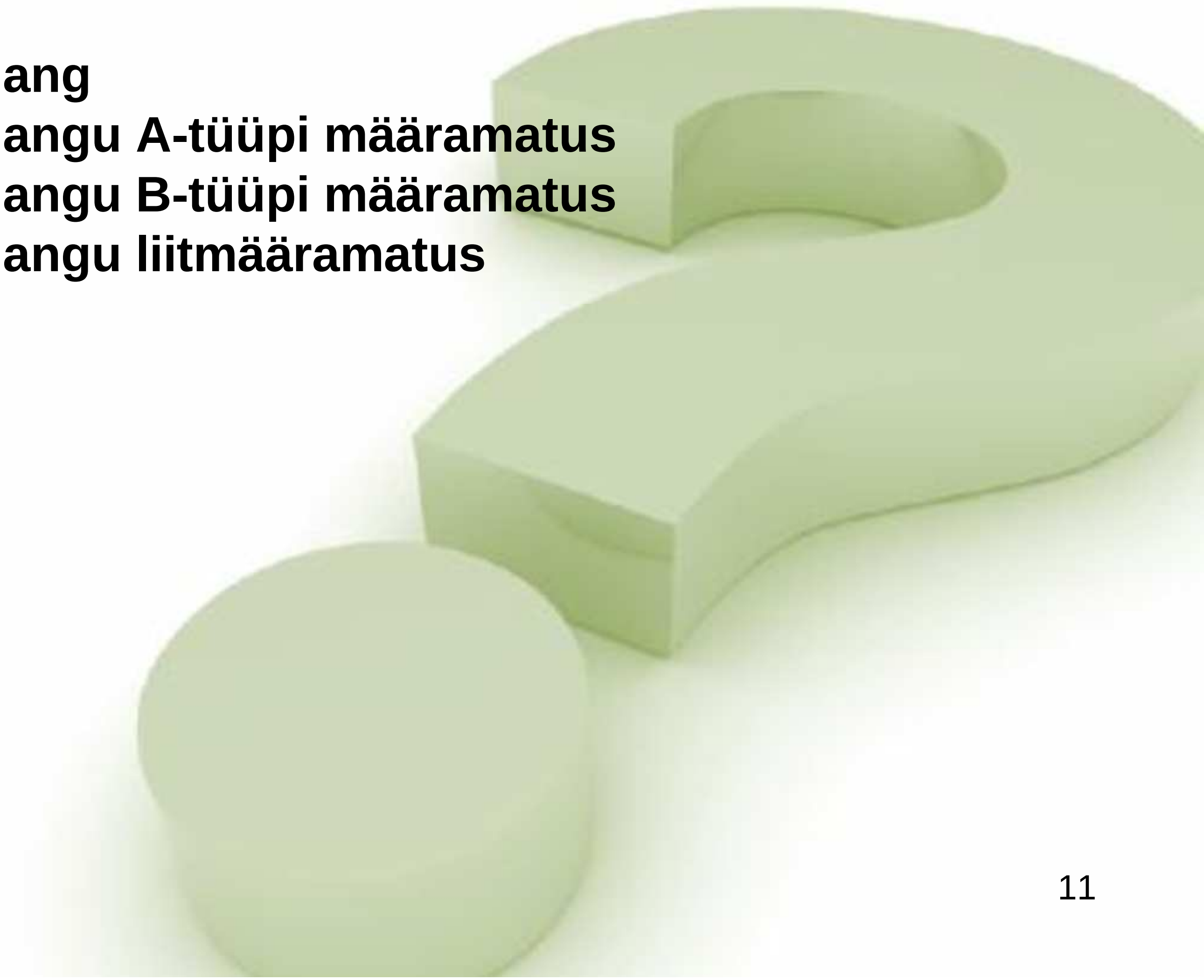
4. Jaotustihedus on defineeritud järgnevalt: piirkondades $x < 3$ ning $x > 4$ on tema väärtus 0; vahemikus [3; 4] kirjeldab seda ruutfunktsioon $f(x) = cx^2$. Leia:

- **a. koefitsient c**
- **b. jaotusfunktsioon vahemikus [3; 4]**
- **c. keskväärtus**
- **d. mediaan**
- **e. standardhälve**
- **f. tõenäosus, et sündmus satuks piirkonda (3,5; 7)**

MMM – Kontrolltöö analüüs

5. **Praktikumis mõõdeti laua pikkust 5 korda ning saadi järgmised väärtused: l = {154,4; 154,6; 154,3; 154,3; 154,4} mm. Kasutatava mõõdulindi põhiviga on 1 mm. Leia:**

a. **laua pikkuse hinnang**
b. **laua pikkuse hinnangu A-tüüpi määramatus**
c. **laua pikkuse hinnangu B-tüüpi määramatus**
c. **laua pikkuse hinnangu liitmääramatus**



MMM – Kontrolltöö analüüs

6. Kehamassi indeks BMI on defineeritud kui kehakaal *M* jagatud pikkuse *l* ruuduga. 10 tudengi mõõtmistulemustest saadi järgmised keskväärtuse, koondmääramatuse ning vabadusastmete arvu tulemused: $m(M)$ = 72 kg; $u(M)$ = 8 kg; $u(M)$ = 34; $m(l)$ = 172 cm; $u(l)$ = 9 cm; $u(l)$ = 70. Korrelatsioon tudengite kehakaalu ning pikkuse vahel oli $r(M, l)$ = 0,77. Leia:

a. Kehamassi indeksi BMI parim hinnang:
b. BMI määramatus korrelatsiooni arvestamata:
c. BMI määramatus korrelatsiooni arvestades:

Arktika kliima statistiline analüüs

Töö seisneb ERA-40 järelanalüüsi mudeli 44 aasta andmebaasi temperatuuri ning niiskuse vertikaalsete profiilide statistilisel analüüsil Arktikas. Töö eesmärk on õppida kasutama programmi GrADS ning tutvuda andmeanalüüsi lihtsamate meetoditega.

Töö jätkuks magistrantuuris suuremate globaalsete ilmamudelite andmete valideerimisega Arktikas, kasutades võrdluseks 2007. aastal läbi Arktika triivinud laeval TARA tehtud mõõtmisi.

Juhendaja: Erko Jakobson

Grupitöö

Eksamile pääsemise üheks eelduseks on grupitöö tegemine, grupi suurus kuni 5 tudengit. Grupid moodustate ise. Grupitöö annab 10 % eksamihindest.

Grupitöö ülesandeks on mõõta mingit vabalt valitud parameetrit käepäraste vahenditega ning vormistada mõõtmistulemus koos mõõtemääramatusega. Iga grupis osalev tudeng peab mõõtmise vähemalt kolm korda läbi viima, seega peab olema korratud mõõtmiste arv vähemalt 3*n*, kus *n* on grupi suurus. Sõltumata kasutatud meetodist ning mõõtevahenditest, tuleb tulemus esitada SI ühikutes.

Grupitöö viimase versiooni esitamise tähtaeg on 29. aprill kell 23:55. Töö tuleb esitada korralikult vormistatult pdf-failina Moodles.

MMM – Grupitöö

Grupitöö

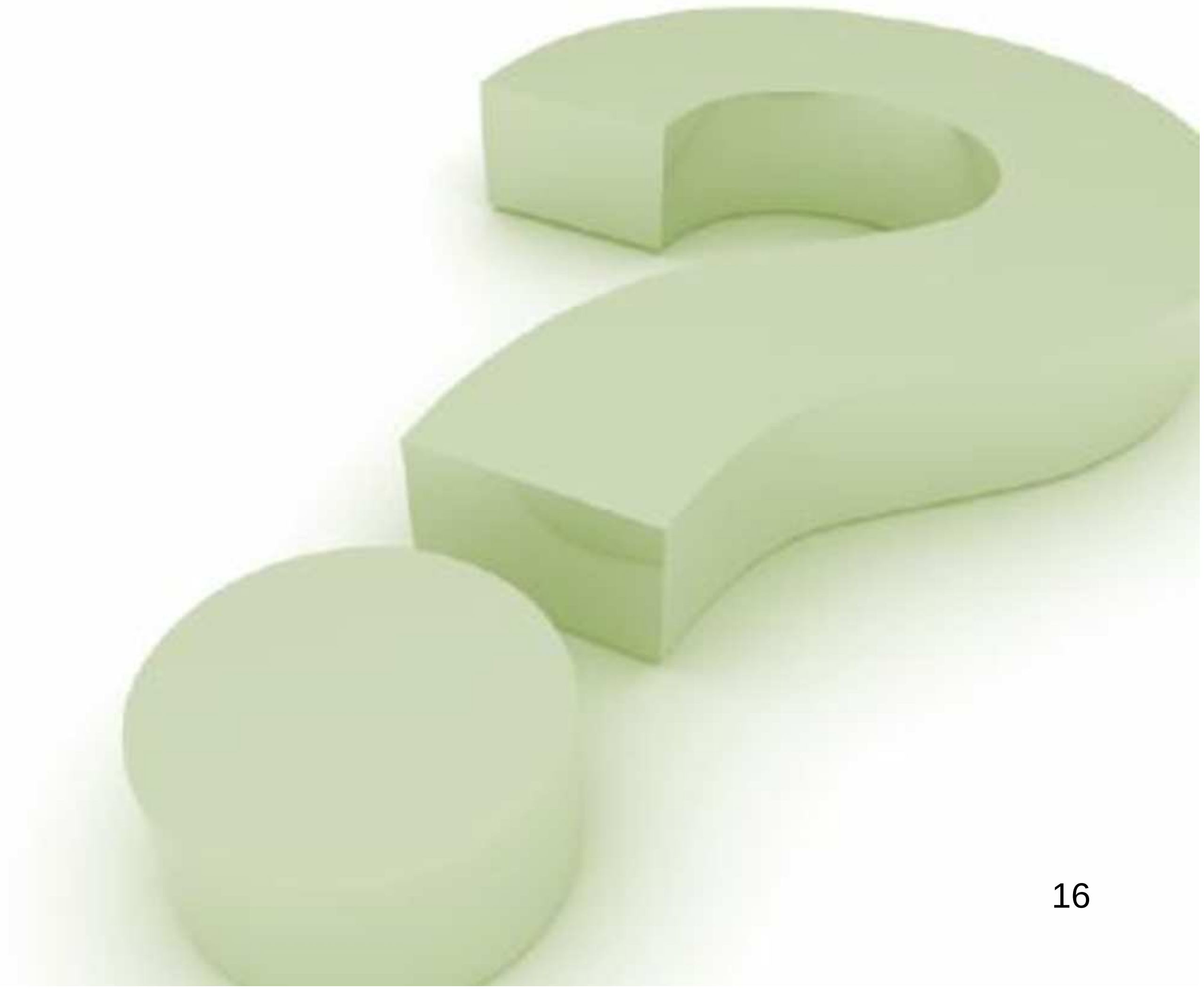
Grupitöö on põhimõtteliselt arvestuslik – kui esitatud töö vastab kõigile esitatud kriteeriumidele, siis saab selle eest 10 punkti eksamiarvestusse, vastasel korral läheb töö tagasi parandamisele-täiendamisele.

On kergesti võimalik teenida lisapunkte:

- **Vähemalt kahe eriala esindajatest koosnev grupp (+1p)**
- **Korreleeruvate sisendite kasutamine (kuni +5p)**
- **Silmapaistvalt huvitav ning keeruline töö (kuni “A” ilma eksamita)**

MMM – Kodune töö

Koduseks tööks on grupi moodustamine ning grupitöö teema väljamõtlemine, kuid punkte selle eest ei saa.



Mõõtmised ja mõõtemääramatused

Measurements and uncertainties

Erko Jakobson, PhD

MMM – Tagasiside

Järelkontrolltöö tulemused: keskmine tulemus oli üsna hea, maksimumpunkte ei tulnud, kuid läbikukkujaid oli ka ainult üks. Esines ka mõningaid tüüpvigasid, mis vajavad selgitamist.

EKSAMI AJAD:

valida üks kolmest:

30. mai	**kell 10:15 – 12:00, ruum 160**
06. juuni	**kell 12:15 – 14:00, ruum 160**
13. juuni	**kell 12:15 – 14:00, ruum 160**

Järeleksam:

27. juuni

MMM – Järelkontrolltöö analüüs

4. Jaotustihedus on defineeritud järgnevalt: piirkondades $x < -1$ ning $x > 1$ on tema väärtus 0; vahemikus [–1; 1] kirjeldab seda funktsioon $f(x) = cx^4$. Leia:

a. koefitsient c

b. jaotusfunktsioon vahemikus [1; 2] (mõeldud oli vahemik [–1, 1])

c. keskväärtus

d. mediaan

e. standardhälve

f. tõenäosus, et sündmus satuks piirkonda (0; 1,5)

6. 6. Meteomasti andmetest oli välja arvutatud järgmised keskväärtuse ning koondmääramatuse väärtused:
2 m tuule kiirus $m(v_2)$ =4,0 m/s, $u(v_2)$ =0,4 m/s;
10 m tuule kiirus $m(v_{10})$ =6,0 m/s, $u(v_{10})$ =0,3 m/s.
Korrelatsioon 2 m ja 10 m tuule kiiruste vahel oli $r(v_2, v_{10})$ = 0,78.

Parameeter ZZ on defineeritud kui 2 m ning 10 m tuule kiiruste korrutis.

Leia:

a. Parameetri ZZ parim hinnang (0,5p):
b. Parameetri ZZ määramatus korrelatsiooni arvestamata (2p):
c. Parameetri ZZ määramatus korrelatsiooni arvestades (2p):

MMM – Grupitöö

Grupitöö

Eksamile pääsemise üheks eelduseks on grupitöö tegemine, grupi suurus kuni 5 tudengit. Grupid moodustate ise. Grupitöö annab 10 % eksamihindest.

Grupitöö ülesandeks on mõõta mingit vabalt valitud parameetrit käepäraste vahenditega ning vormistada mõõtmistulemus koos mõõtemääramatusega. Iga grupis osalev tudeng peab mõõtmise vähemalt kolm korda läbi viima, seega peab olema korratud mõõtmiste arv vähemalt 3*n*, kus *n* on grupi suurus. Sõltumata kasutatud meetodist ning mõõtevahenditest, tuleb tulemus esitada SI ühikutes.

Grupitöö VIIMASE VERSIOONI esitamise tähtaeg on 29. aprill kell 23:55. Töö tuleb esitada korralikult vormistatult pdf-failina Moodles.

MMM – Grupitöö

Grupitöö

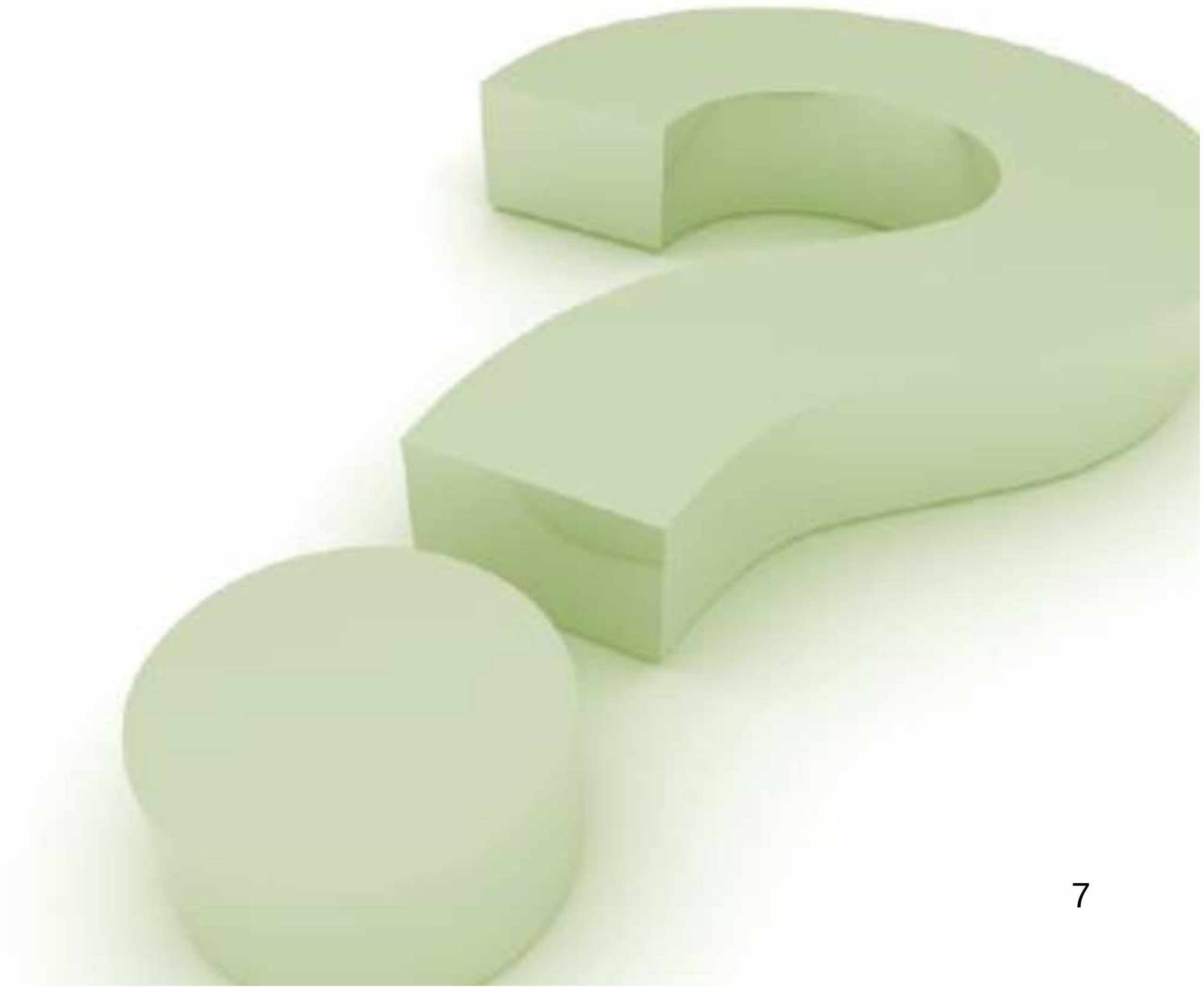
Grupitöö on põhimõtteliselt arvestuslik – kui esitatud töö vastab kõigile esitatud kriteeriumidele, siis saab selle eest 10 punkti eksamiarvestusse, vastasel korral läheb töö tagasi parandamisele-täiendamisele.

On kergesti võimalik teenida lisapunkte:

- **Vähemalt kahe eriala esindajatest koosnev grupp (+1p)**
- **Korreleeruvate sisendite kasutamine (kuni +5p)**
- **Silmapaistvalt huvitav ning keeruline töö (kuni “A” ilma eksamita)**

MMM – Määramatuse allikad

Vaatame konspektis üle teema “Määramatuse allikad”.



MMM – Määramatuse allikad

5.9. Erinevate määramatustega mõõtetulemuste käsitlus (kaalutud keskmiste meetod)

Erinevate määramatustega mõõtetulemuste ühise keskväärtuse hinnanguks on sobiv kasutada kaalutud keskmist:

$$y_0 = \frac{\sum_{j=1}^{J} g_j \cdot y_j}{\sum_{j=1}^{J} g_j}$$

kus g_j on mõõtetulemuse y_j kaal.

$$g_j = \frac{1}{u^2(y_j)}$$

$$u(y_0) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{J} g_j}}$$

MMM – Määramatuse allikad

Näide: Meteomasti andmetest oli välja arvutatud järgmised keskväärtuse ning koondmääramatuse väärtused:
2 m tuule kiirus $m(v_2)$ =4,0 m/s, $u(v_2)$ =0,4 m/s;
10 m tuule kiirus $m(v_{10})$ =6,0 m/s, $u(v_{10})$ =0,3 m/s.
Leia 2 m ja 10 m tuule kiiruse kaalutud keskmine ning vastav standardmääramatus.

$$g_j = \frac{1}{u^2(y_j)} \qquad y_0 = \frac{\sum_{j=1}^{J} g_j \cdot y_j}{\sum_{j=1}^{J} g_j} \qquad u(y_0) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{J} g_j}}$$

MMM – Määramatuse allikad

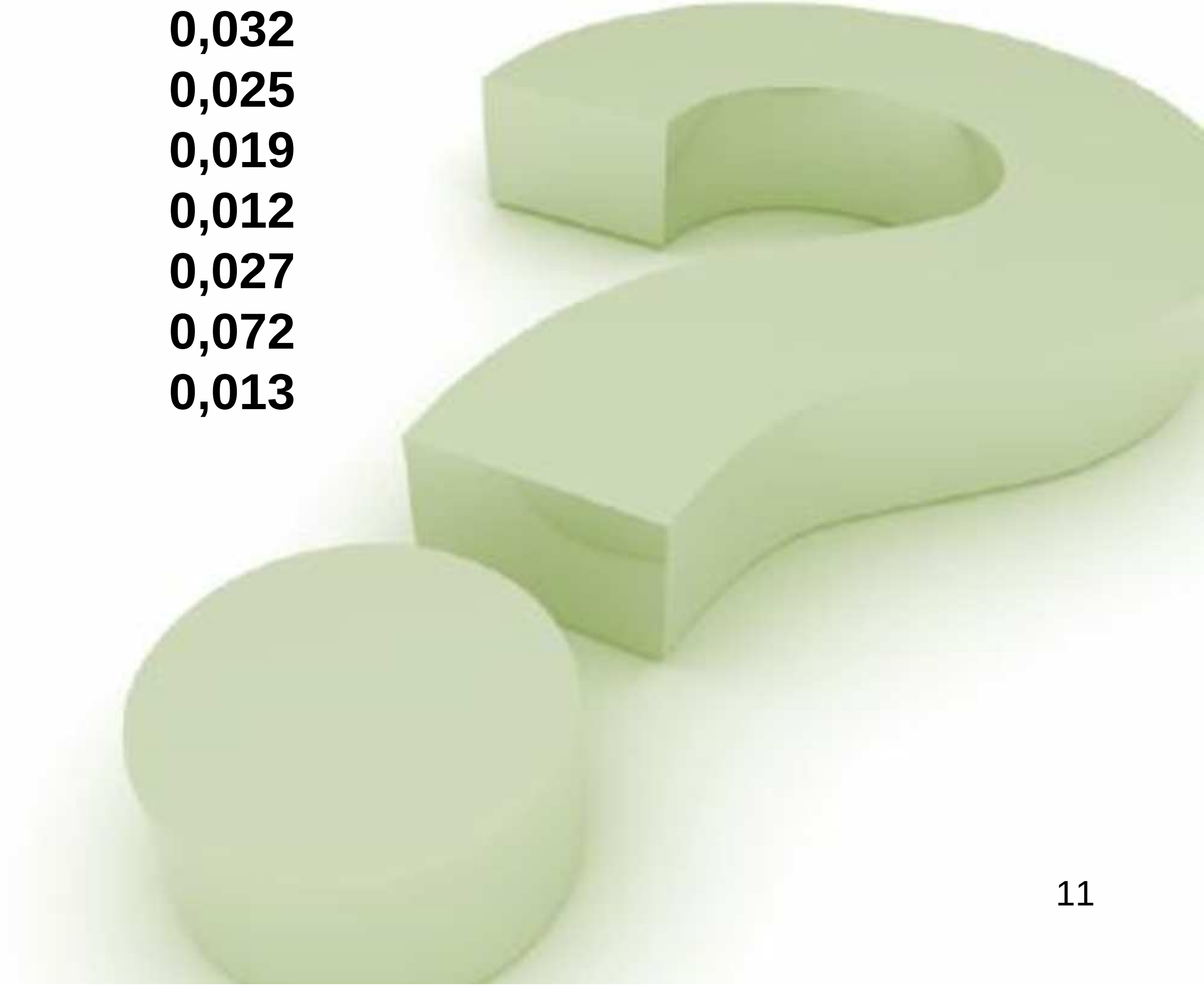
Näide: Rahvusvahelise võrdlusmõõtmise käigus on 10 erinevat laborit kalibreerinud ühte ja sama mõõtevahendit samades mõõtepunktides ning sarnastel keskkonnatingimustel. Kalibreerimisparandid koos laiendmääramatustega usaldusnivool 95 % on toodud allolevas tabelis. Mis tuleks võtta kalibreerimisparandi parimaks hinnanguks ning selle laiendmääramatuseks, milliste laborite mõõtetulemused lugeda korrektseteks ning millised ebakorrektseteks?

Labor	parand	Laiendmääramatus
1	0,245	0,013
2	0,240	0,013
3	0,230	0,027
4	0,280	0,032
5	0,248	0,025
6	0,250	0,019
7	0,352	0,012
8	0,355	0,027
9	0,210	0,072
10	0,253	0,013

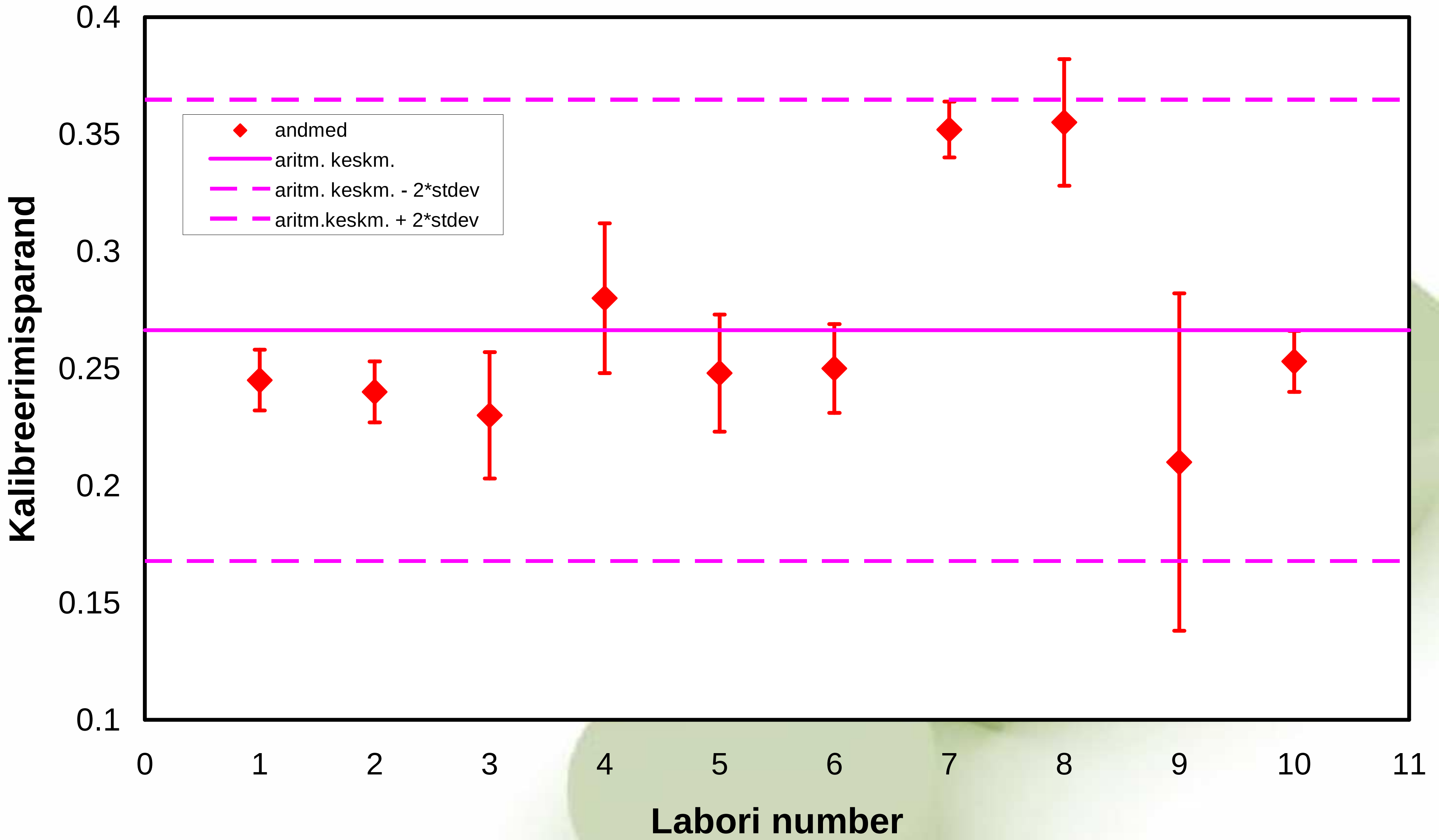
MMM – Määramatuse allikad

Labor	parand	Laiendmääramatus
1	0,245	0,013
2	0,240	0,013
3	0,230	0,027
4	0,280	0,032
5	0,248	0,025
6	0,250	0,019
7	0,352	0,012
8	0,355	0,027
9	0,210	0,072
10	0,253	0,013

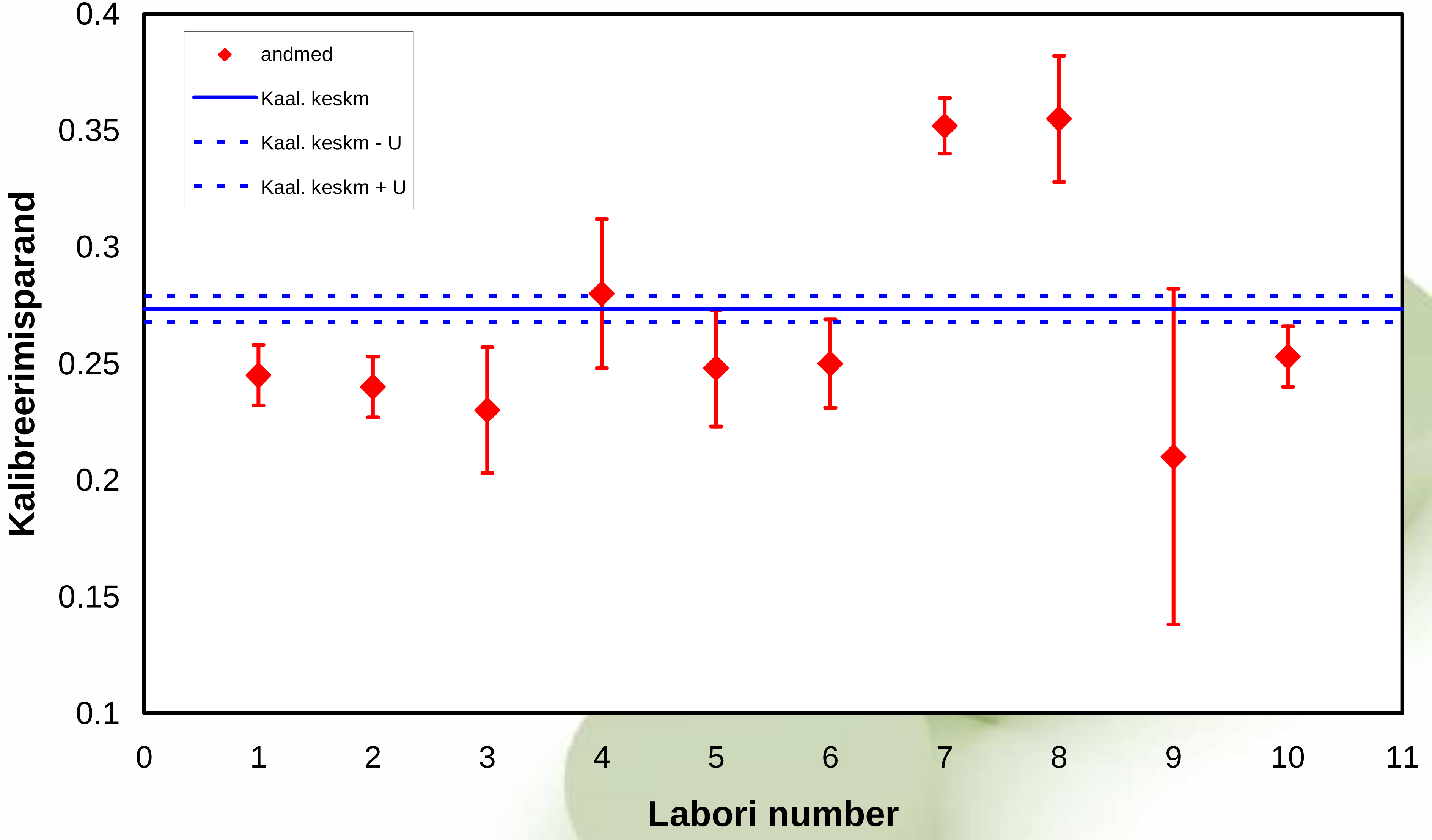
Keskmine 0,266
Standardhälve 0,049



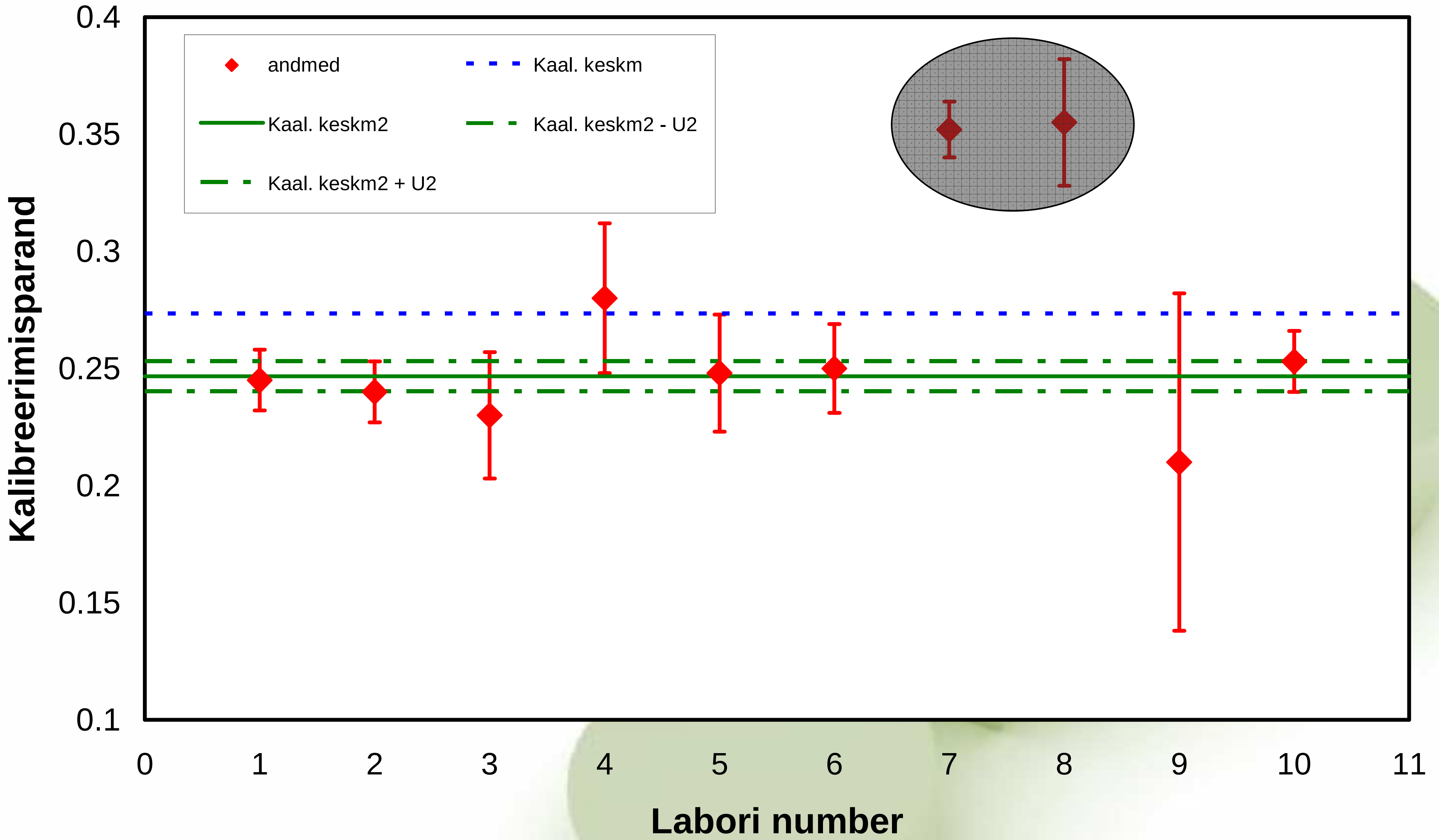
MMM – Määramatuse allikad



MMM – Määramatuse allikad



MMM – Määramatuse allikad



MMM – Määramatuse allikad

Näide 5.1. Ühte ja sama keha kaaluti kõigepealt võrdlusmeetodil võrdõlgse kaaluga ning siis otsehinnangmeetodil elektronkaaluga. Mõõtetulemused olid järgmised:

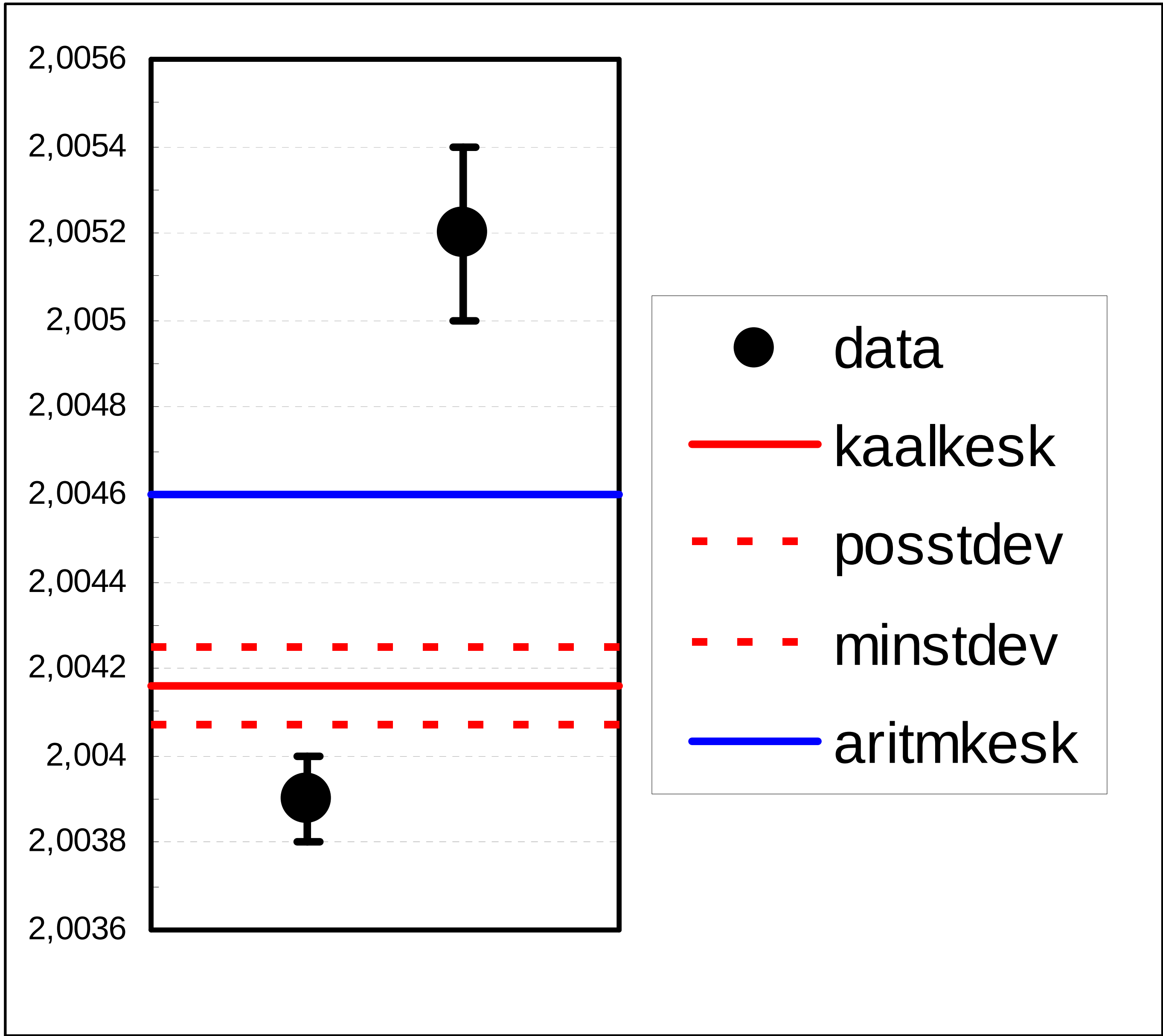
m_1 = 2,0039 g liitmääramatusega $u(m_1)$ = 0,1 mg (võrdõlgne kaal)

m_2 = 2,0052 g liitmääramatusega $u(m_2)$ = 0,2 mg (elektronkaal)

$$g_j = \frac{1}{u^2(y_j)} \qquad y_0 = \frac{\sum_{j=1}^{J} g_j \cdot y_j}{\sum_{j=1}^{J} g_j} \qquad u(y_0) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{J} g_j}}$$

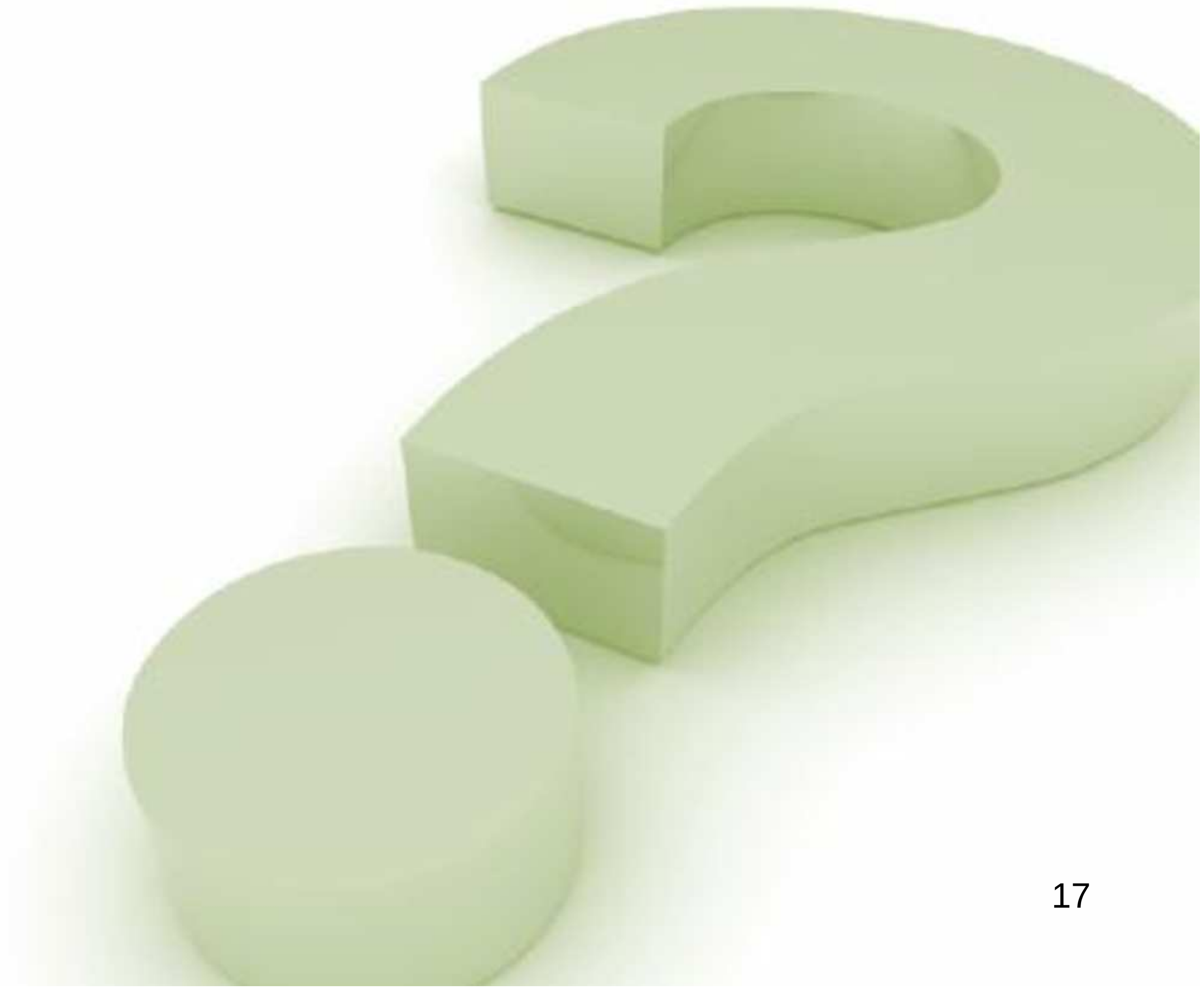
MMM – Määramatuse allikad

Näide 5.1.



MMM – Kodune töö

Kodune test sulgub 24.04.2011 kell 23:55.



Mõõtmised ja mõõtemääramatused

Measurements and uncertainties

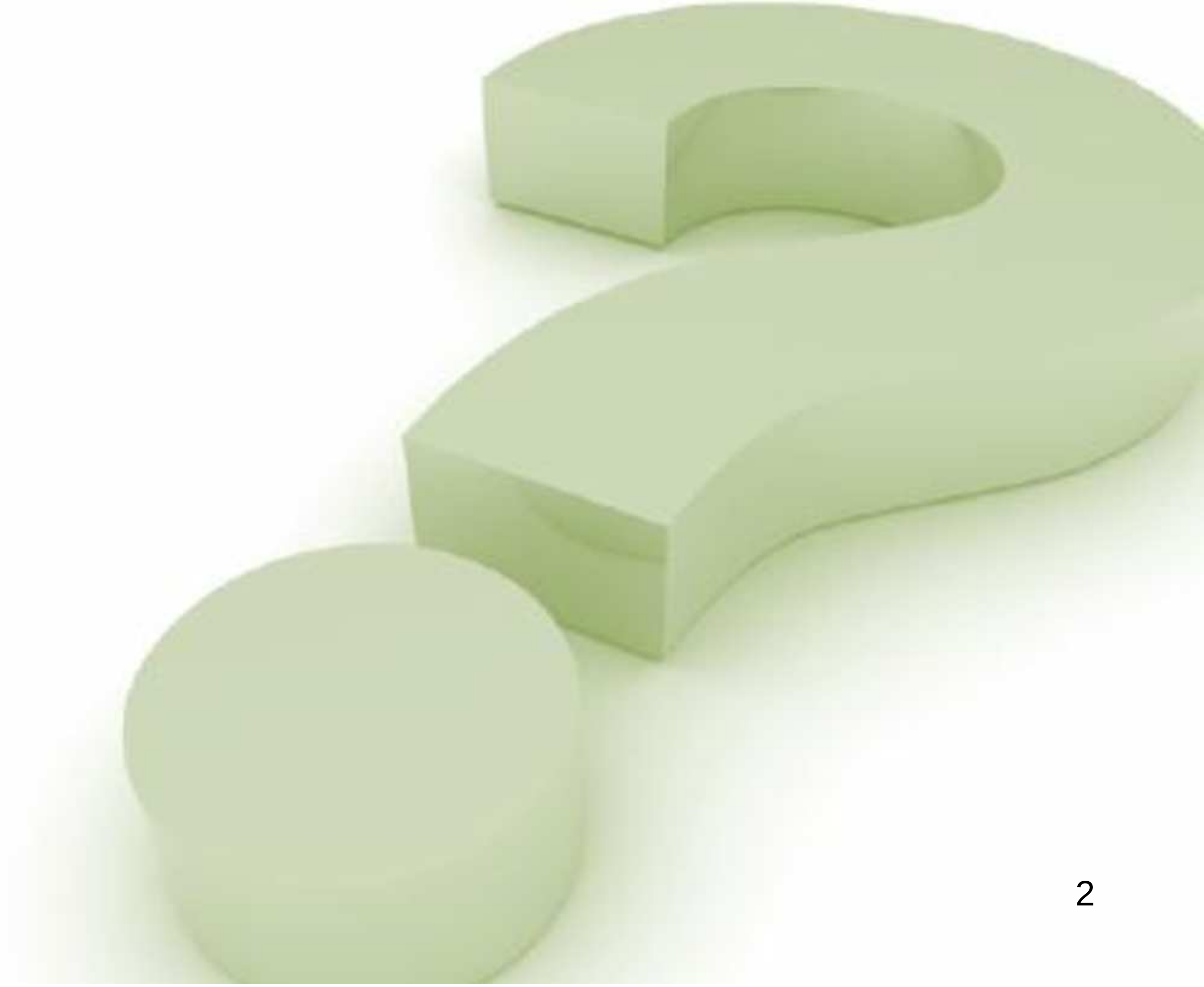
Erko Jakobson, PhD

MMM – Tagasiside

ÕIS tagasiside

“Statistika puudub (Õpetamise ja ainekursuste hindamise periood: 02.05.2011...22.05.2011, statistika nähtav alates 28.06.2011)”

Koduse testi analüüs



MMM – Mõõtevahendid ja nende lubatud vigade normeerimine

Mõõtevahendid

Mõõtevahendid jaotatakse viide rühma:

1. **mõõdud:**
   - **ühevääartuselised mõõdud, näiteks kaaluvihid**
   - **mitmeväärtuselised mõõdud, näiteks joonlauad, takistussalved**
2. **mõõteriistad (mõõturid)**
3. **mõõtemuundurid**
4. **abimõõtevahendid**
5. **mõõtesüsteemid või -kompleksid või seadeldised.**

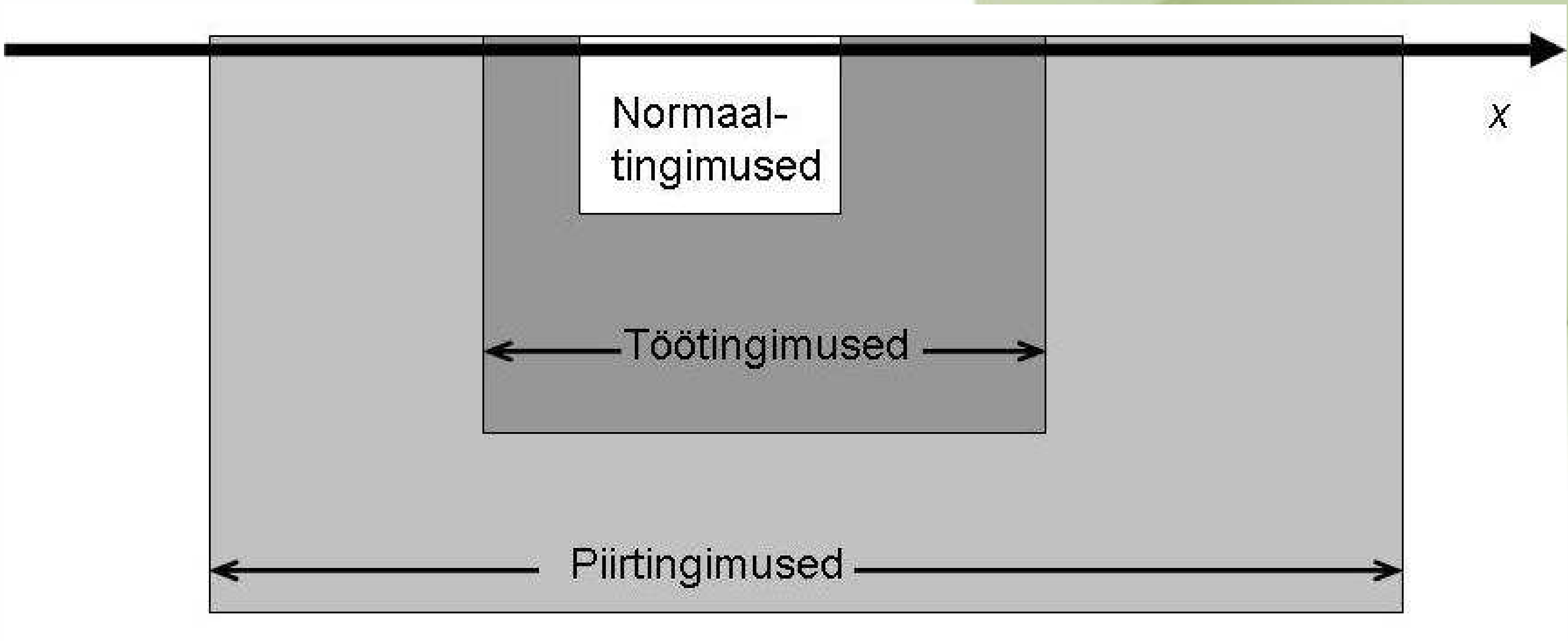
Iga mõõtevahendi juurde kuulub pass ja rida dokumente, mis normeerivad

- **mõõtepiirkonna**
- **mõõtediapasooni**
- **tundlikkuse**
- **mõõtevea jne.**

MMM – Mõõtevahendid ja nende lubatud vigade normeerimine

Mõõtevahendi kasutamistingimused:

* Normaaltingimused
* Töötingimused
* Piirtingimused
* Säilitamise tingimused



MMM – Mõõtevahendi täpsusklass

Mõõtevahendi täpsusklass on mõõtevahendi üldistatud karakteristik, mis määrab tema suurima lubatava põhi- ja lisavea, aga samuti teised täpsust mõjutavad omadused vastavalt mõõteliikidele kehtestatud standardile.

Selleks üldistatud karakteristikuks võib olla:

1. **Absoluutpõhiviga Δ_0**
2. **Suhtpõhiviga δ_0**
3. **Taandpõhiviga γ_0**
4. **Konstandid *e* ja *f***
5. **Absoluut- ja suhtvea kombinatsioon**

MMM – Mõõtevahendi täpsusklass

1. Absoluutpõhiviga Δ_0. Definitsiooni kohaselt on absoluutpõhiviga maksimaalselt lubatud viga normaaltingimustel. Absoluutpõhiviga on alati positiivne suurus, seejuures eeldatakse, et mõõdetav suurus satub intervalli ($-\Delta_0$, Δ_0). Kasutatakse peamiselt mõõtude puhul.

Lisa 2. Vihtide lubatud vead

Tavaliste vihtide lubatud vead milligrammides [mg] (GOST 7328-65 järgi)

m	1. kl.	2. kl.	3. kl.	4. kl.	5. kl.
50 g	0,12	0,6	3	30	300
20 g	0,08	0,4	2	20	200
10 g	0,05	0,25	1,2	12	120
5 g	0,03	0,16	0,8	8	80
2 g	0,025	0,12	0,6	6	–
1 g	0,015	0,08	0,4	4	–

MMM – Mõõtevahendi täpsusklass

2. Suhtpõhiviga

$$\delta_{\mathrm{o}} = \frac{\Delta_{\mathrm{o}}}{x_{n\ddot{a}it}} 100\ \%$$

Kui täpsusklass on suhtpõhivea kujul, siis on seadme esipaneelile või skaalale kantud täpsusklassi tähis (= suhtpõhivea väärtus) ringi sees. Klasside tähised on siin informatiivsed. Vene päritolu seadmetel võib olla suhtpõhivea tähiseks ka venekeelne sõna КЛАСС.

MMM – Mõõtevahendi täpsusklass

3. Taandpõhiviga $$\gamma_\mathrm{o} = \frac{\Delta_\mathrm{o}}{x_\mathrm{norm}} 100\ \%$$

Rõhuva enamuse osutmõõteriistade puhul on kasutusel see karakteristik. Seadme esipaneelile või skaalale on kantud täpsusklassi tähis (= taandpõhivea väärtus) ilma ringita. Näiteks 0,5 või 1,0 jne.

MMM – Mõõtevahendi täpsusklass

4. Konstandid *e* ja *f* kujul *e*/*f* taandpõhivea arvutamiseks valemist:

$$\gamma_o = \left[e + f\left(\frac{x_{\text{norm}}}{x_{\text{näit}}} - 1 \right) \right], \%$$

NB! Mõnikord antakse analoogilise valemiga ka mõõteriista suhtpõhiviga. Seetõttu tuleb alati seadme passist lugeda, mis veaga on tegemist.

MMM – Mõõtevahendi täpsusklass

5. Absoluut- ja suhtvea kombinatsioon. Mõnikord kasutatakse digitaalsete mõõteriistade täpsusklassi esitamisel kombinatsiooni absoluutveast ja suhtelisest veast.

Näide 6.6. Digitaalse multimeetri viga antakse kujul

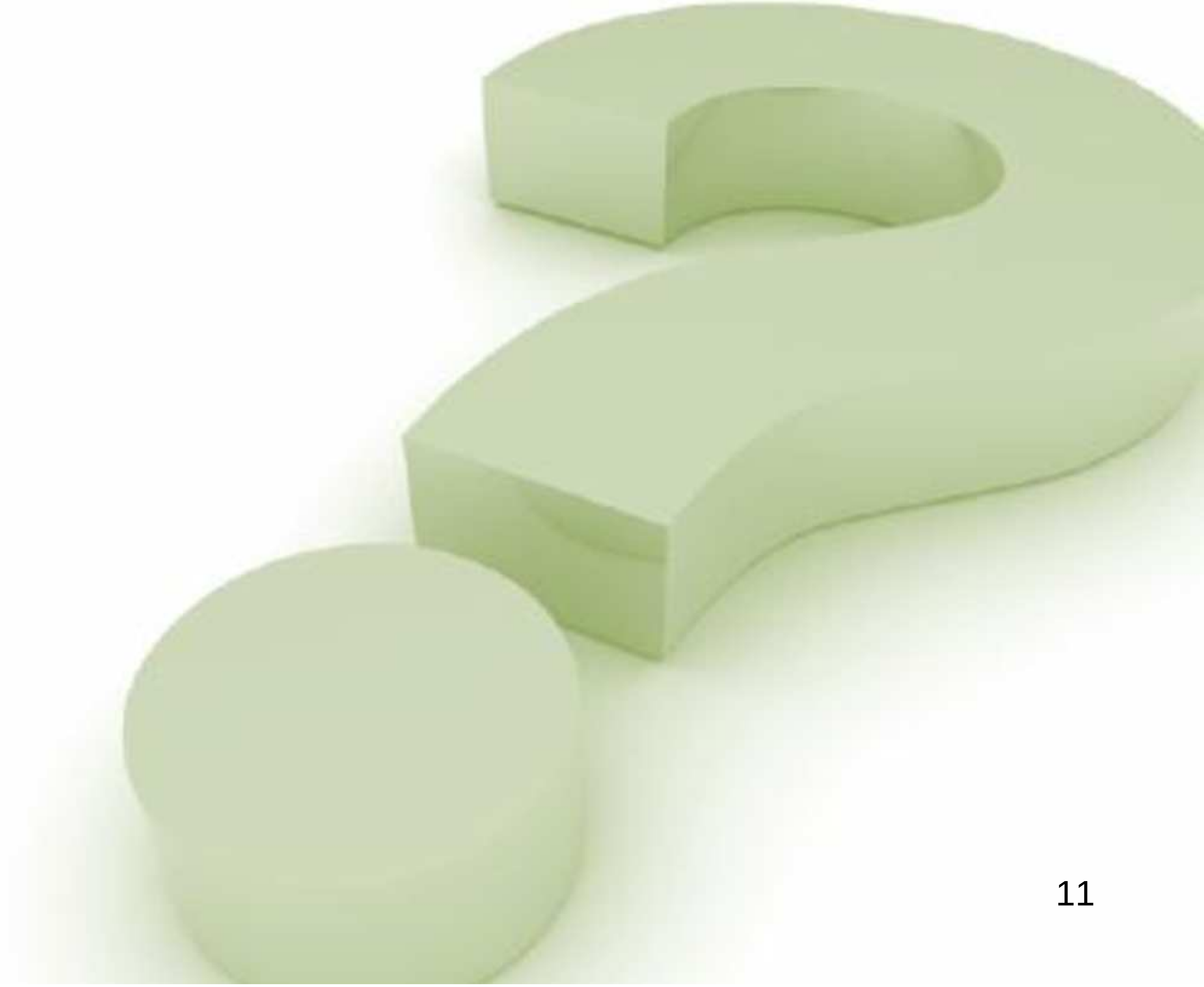
$$Täpsus = 0{,}25\,\%\ \mathrm{rdg} + 2\mathrm{D}$$

Selline esitusviis on praegu digitaalsete riistade puhul kõige levinum.

Sellist esitust tuleb mõista järgmiselt: Lugemi absoluutpõhiviga on 0,25 % lugemist pluss lugemi viimase kehtiva koha kaks ühikut.

MMM – Mõõtevahendi metroloogilised omadused

Loe ise konspektist lk 120 – 126.



MMM – Pendli näide

MMM – Grupitöö

Grupitöö

Grupitöö on põhimõtteliselt arvestuslik – kui esitatud töö vastab kõigile esitatud kriteeriumidele, siis saab selle eest 10 punkti eksamiarvestusse, vastasel korral läheb töö tagasi parandamisele-täiendamisele.

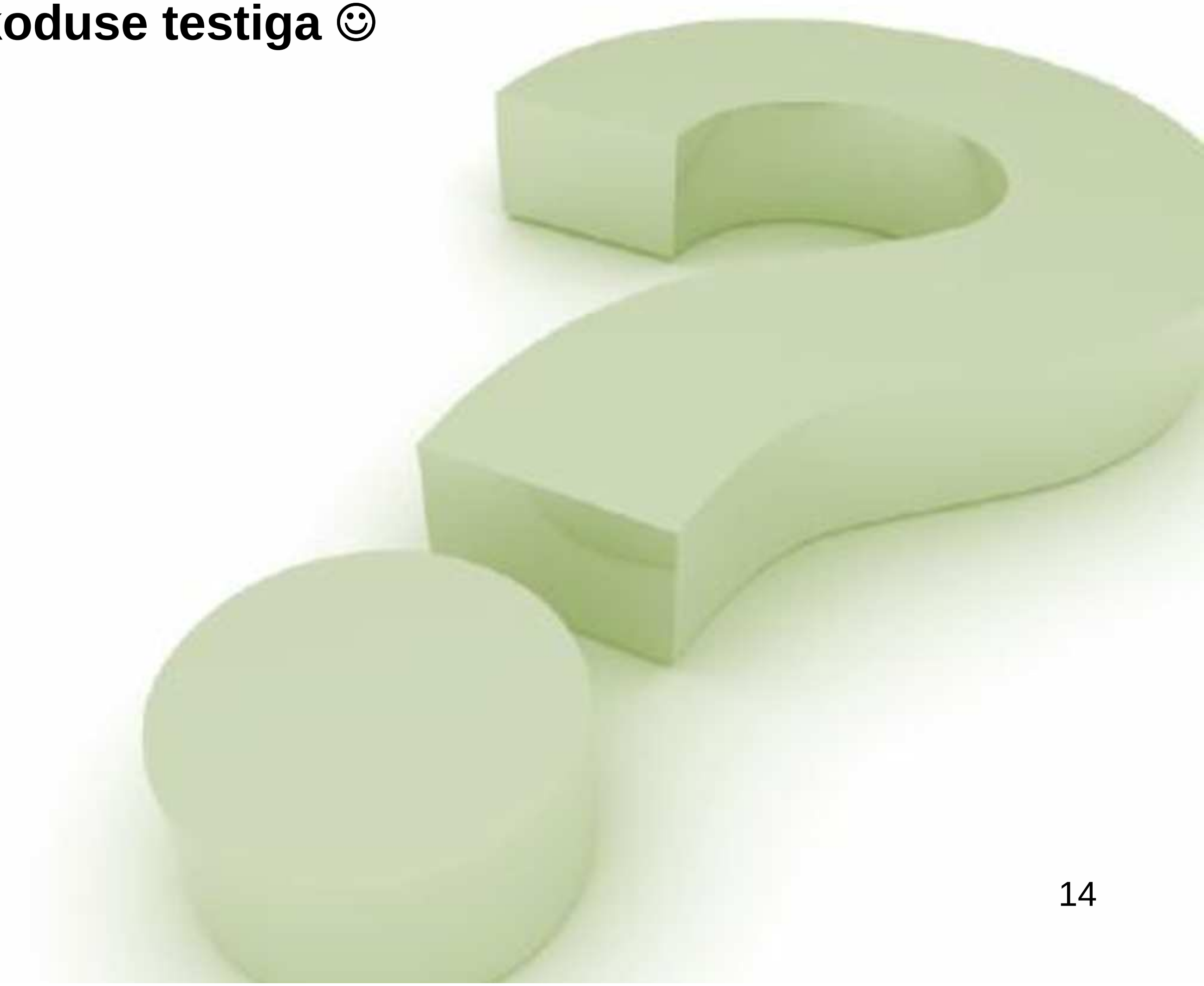
On kergesti võimalik teenida lisapunkte:

- **Vähemalt kahe eriala esindajatest koosnev grupp (+1p)**
- **Korreleeruvate sisendite kasutamine (kuni +5p)**
- **Silmapaistvalt huvitav ning keeruline töö (kuni “A” ilma eksamita)**

MMM – Kodune töö

Kodune test sulgub 01.05.2011 kell 23:55.

Tegemist on viimase koduse testiga ☺



Mõõtmised ja mõõtemääramatused

Measurements and uncertainties

Erko Jakobson, PhD

MMM – Tagasiside

Loengute ajakava:

9. mai – Külaline Metroserdist; eksami ülesehituse tutvustamine; grupitööde esitamine;

16. mai – Loengut ei toimu, seoses õppusega “Kevadtorm”;

23. mai – Grupitööde esitamine, eksamiks valmistumine.

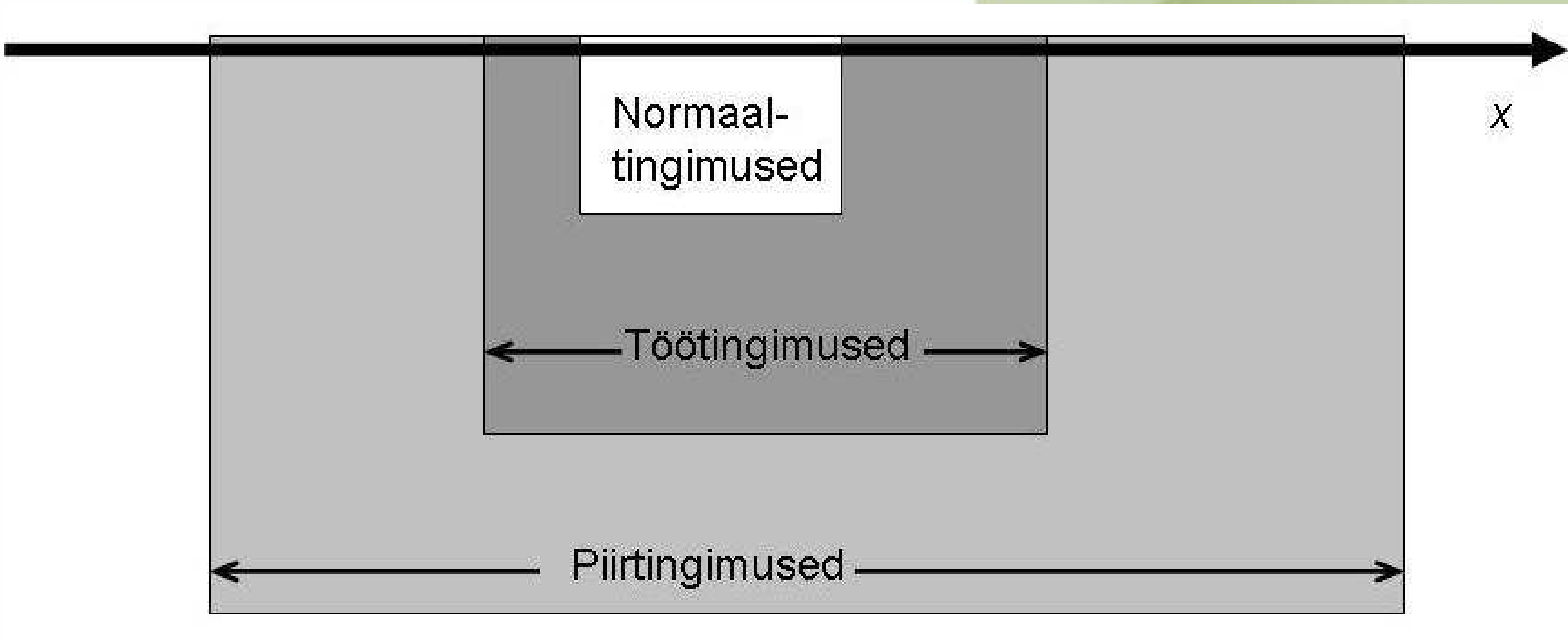
Tänase loengu ülesehitus:

1. **Kodune test, tagasiside**
2. **Grupitöö pöördülesande näide**
3. **Grupitööd, üldine tagasiside**
4. **Grupitööde esitamine**

MMM – Mõõtevahendid ja nende lubatud vigade normeerimine

Mõõtevahendi kasutamistingimused:

* **Normaaltingimused**
* **Töötingimused**
* **Piirtingimused**
* **Säilitamise tingimused**



MMM – Mõõtevahendid ja nende lubatud vigade normeerimine

Mõõdulindi täpsus

“The precision of our rules is within 0.2mm/m (conform to ECII)”

Kui joonlaudadel või mõõdulintidel pole täpsusklassi antud, siis parema puudumisel tulekski eeldada, et need vastavad ECII standardile.

Mõõtes 30 m pika mõõdulindiga 24 m pikkust koridori, on mõõdulindi veaks 4,8 mm, mõõtes sama lindiga 30 cm pikkust paberilehte, on mõõdulindi veaks 0,06 mm.

Kes leiab ja postitab esimesena foorumisse ECI ja ECIII klassi mõõdulindi täpsushinnangu viite, saab preemiapunkte!

MMM – Grupitöö pöördülesande näide

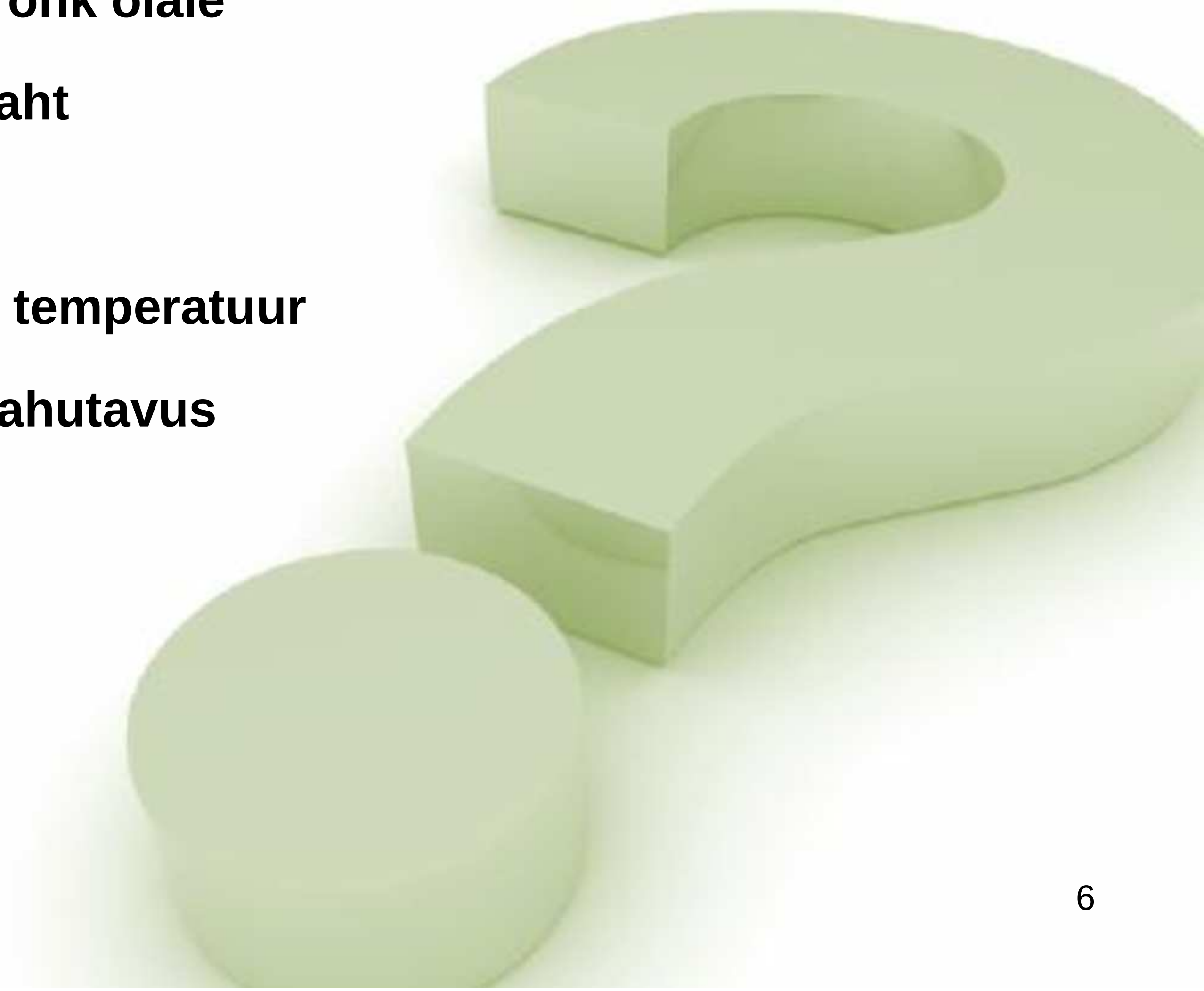
Senini oleme lähtunud olukorrast, kus olemasolevatest andmetest lähtuvalt tuleb hinnata mõõtemääramatust.

Pöördülesanne oleks selline, kus antakse ette soovitud mõõtemääramatus ning sellest lähtuvalt planeeritakse, milliste mõõtevahenditega mõõta ning mitu kordusmõõtmist sooritada.

mõõtmiste_planeerimine.mcd

MMM – Grupitööd

- Grupp 18: Kitarri häälestamine
- Grupp 14: CD andmerajad
- Grupp 1: Käekoti rõhk õlale
- Grupp 5: Kopsumaht
- Grupp 24: Lift
- Grupp 11: Emajõe temperatuur
- Grupp 4: Ämbri mahutavus



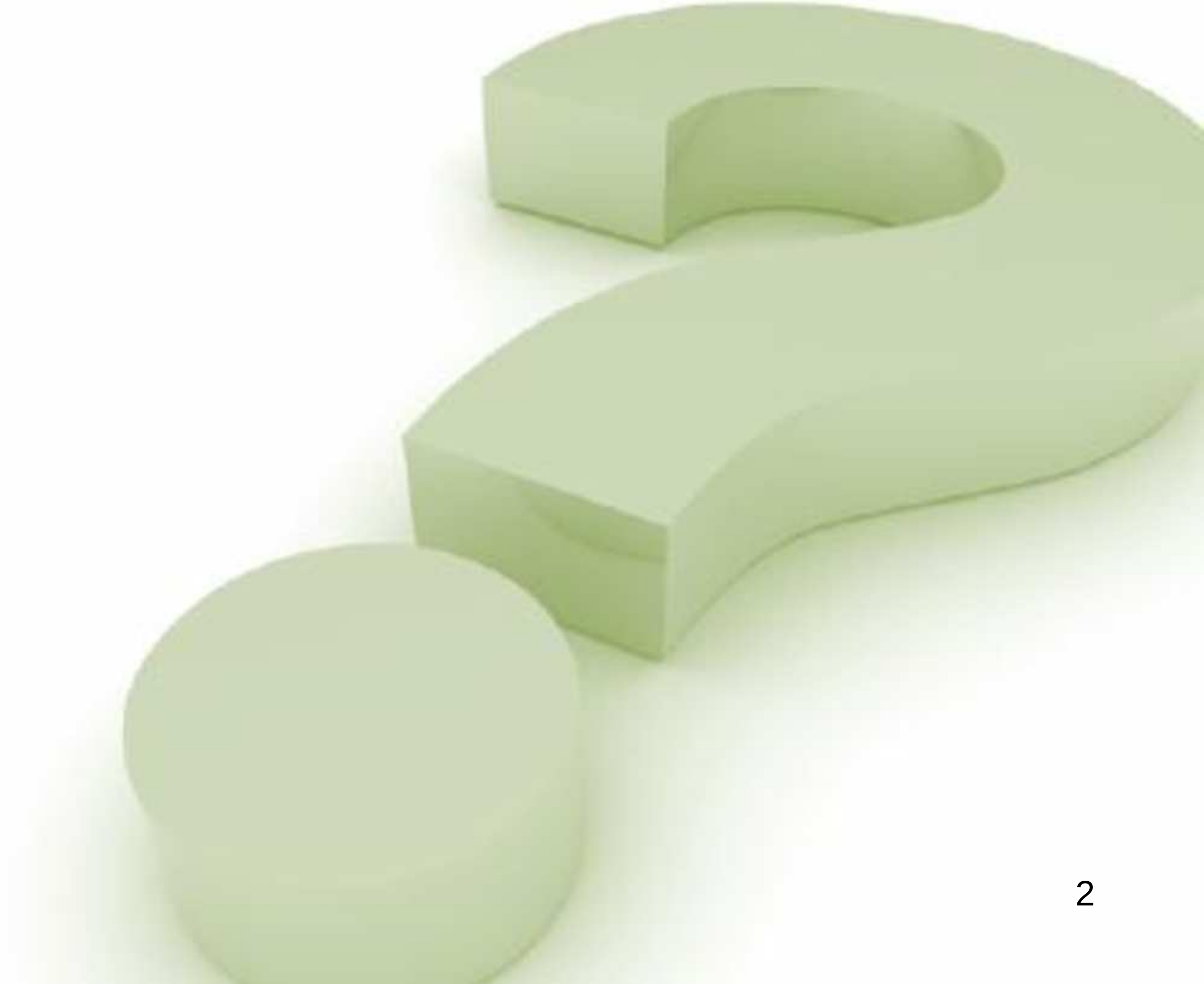
Mõõtmised ja mõõtemääramatused

Measurements and uncertainties

Erko Jakobson, PhD

MMM – külaline

AS Metrosert teadus- ja arendusdivisjoni juht Toomas Kübarsepp



MMM – Tagasiside

Loengute ajakava:

16. mai – Loengut ei toimu, seoses õppusega “Kevadtorm”;

23. mai – Grupitööde esitamine, eksamiks valmistumine.

EKSAMI AJAD:

valida üks kolmest:

30. mai	**kell 10:15 – 12:00, ruum 160**
06. juuni	**kell 12:15 – 14:00, ruum 160**
13. juuni	**kell 12:15 – 14:00, ruum 160**

Järeleksam:

27. juuni

MMM – määramatuse vähendamise nipp

Keskmistamine $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$

$$u(\bar{x}) = \left[\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_1} \cdot u(x_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_2} \cdot u(x_2)\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_n} \cdot u(x_n)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$u(x_1) = u(x_2) = u(x_n)$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_1} = \frac{1}{n} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_2} \ldots$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_n} = \frac{1}{n}$$

$$u(\bar{x}) = \sqrt{\left(\frac{1}{n} \cdot u(x_n)\right)^2 + \left(\frac{1}{n} \cdot u(x_n)\right)^2 + \ldots} =$$

$$= \sqrt{n\left(\frac{1}{n} \cdot u(x_n)\right)^2} = \sqrt{n \cdot \frac{1}{n^2}\left[u(x_n)\right]^2} =$$

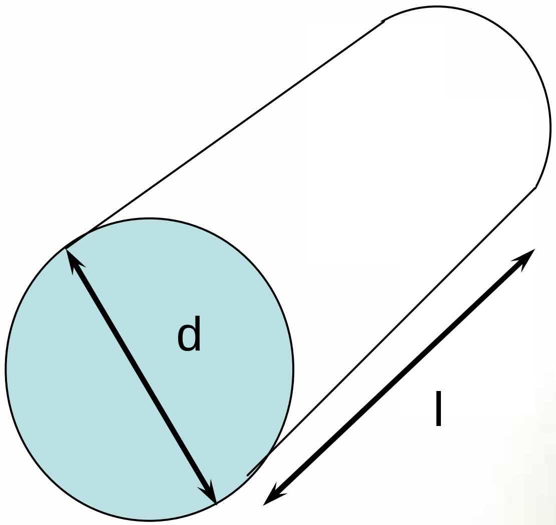
$$= \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \left[u(x_n)\right]^2} = \frac{u(x_n)}{\sqrt{n}}$$

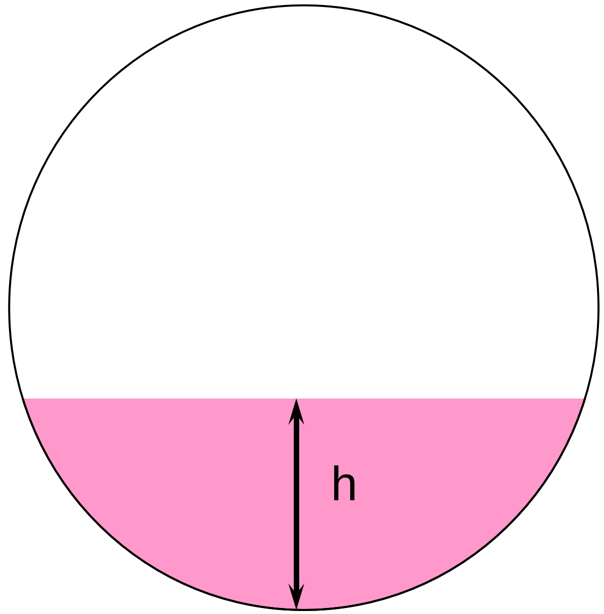
MMM – Lisaülesanne kodus proovimiseks

Näidisülesanne selle kohta, et mitte kõik ülesanded ei ole lihtsad.

Silindrikujuline horisontaalne kütusetünn on osaliselt kütust täis. Tünni pikkus on l määramatusega u(l) ning läbimõõt d määramatusega u(d). Allesoleva kütuse hulga mõõtmiseks asetatakse tünni puupulk ning siis mõõdetakse, kui paks kiht kütust on, paksus h, määramatusega u(h).

Leida arvutusvalem kütuse koguse ning selle määramatuse jaoks.





MMM – Näidiseksam

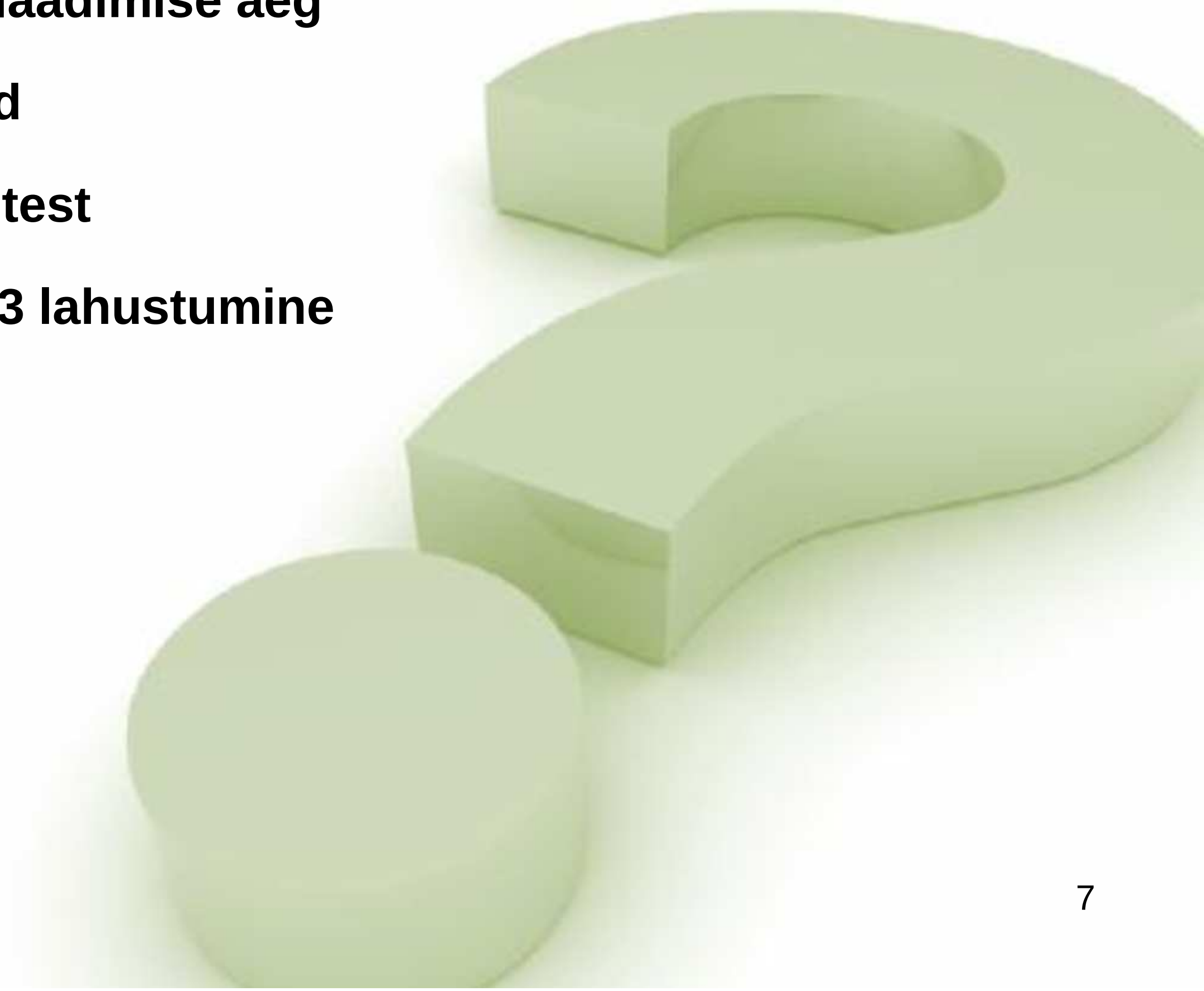
Näidiseksam on Moodles üleval. Viimane ülesanne tuleb ühe esitatud grupitöö baasil.

Koduste testide tagasiside

Märkus 100 mõõtmise praktikumi töö kohta.

MMM – Grupitööd

- Grupp 19: Koridori pindala
- Grupp 6: Patareide mahutavus
- Grupp 9: ÕIS üleslaadimise aeg
- Grupp 15: Küünlad
- Grupp 10: Ajataju test
- Grupp 22: NaHCO3 lahustumine



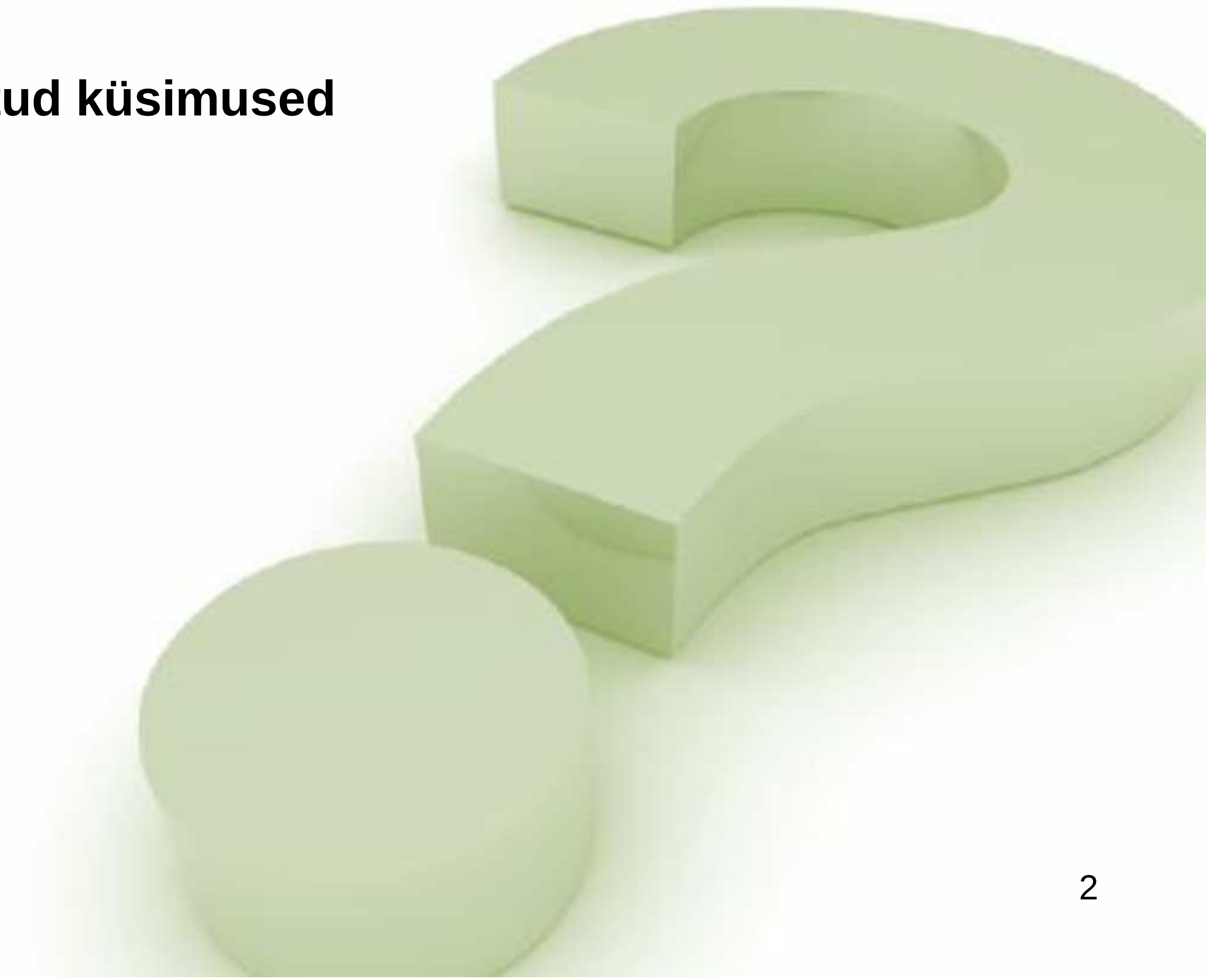
Mõõtmised ja mõõtemääramatused

Measurements and uncertainties

Erko Jakobson, PhD

MMM – Loengu ülesehitus

1. **eksamist**
2. **grupitööde läbivaatamine**
3. **tünni ülesanne**
4. **tagasisides esitatud küsimused**
5. **konsultatsioon**



MMM – Tagasiside

EKSAMI AJAD:

valida üks kolmest:

30. mai	**kell 10:15 – 12:00, ruum 160**
06. juuni	**kell 12:15 – 14:00, ruum 160**
13. juuni	**kell 12:15 – 14:00, ruum 160**

Järeleksam:

27. juuni

Erandkorras saab eksamit teha juba teisipäeval, 24.05 kell 10:15 – 12:00 ruumis 207.

Näidiseksami 2 varianti on Moodles üleval. Viimane ülesanne tuleb ühe esitatud grupitöö baasil.

MMM – Grupitööd

Tööde esitamisel võiks faili nimi olla võimalikult informatiivne:

- **millega on tegu, mõistetavalt nii töö esitaja kui ka vastuvõtja jaoks;**
- **järjekorra number, et oleks üheselt aru saada, milline on viimane versioon;**

MMM – Grupitööd

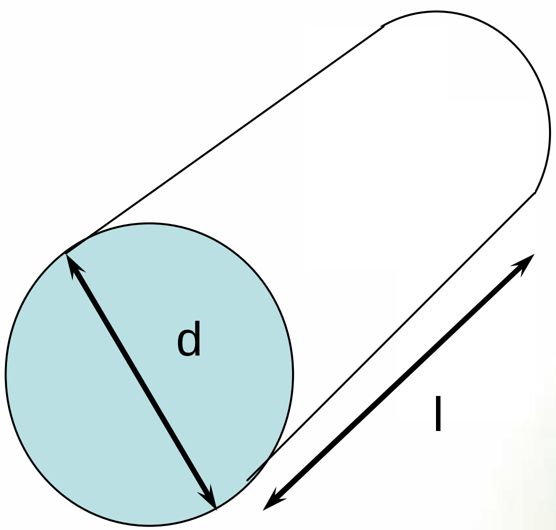
- Grupp 27: Porgand
- Grupp 28: Plähviga pikkus
- Grupp 21: Korruse kõrgus
- Grupp 13: Soolalahuse tihedus
- Grupp 12: Raha pindtihedus
- Grupp 26: Inimkõrva tundlikkus
- Grupp 07: Rosinad
- Grupp 08: Kaltsiumkloriidi moolide arv
- Grupp 23: Fuajee pikkus
- Grupp 30: Laua pindala prillidega
- Grupp 16: Pulss ja hinge kinnihoidmine
- Grupp 02: Käelaba pikkus
- Grupp 03: Riisitera mõõtmine
- Grupp 20: Laibameetod
- Grupp 25: Piima mass
- Grupp 17: Snikers

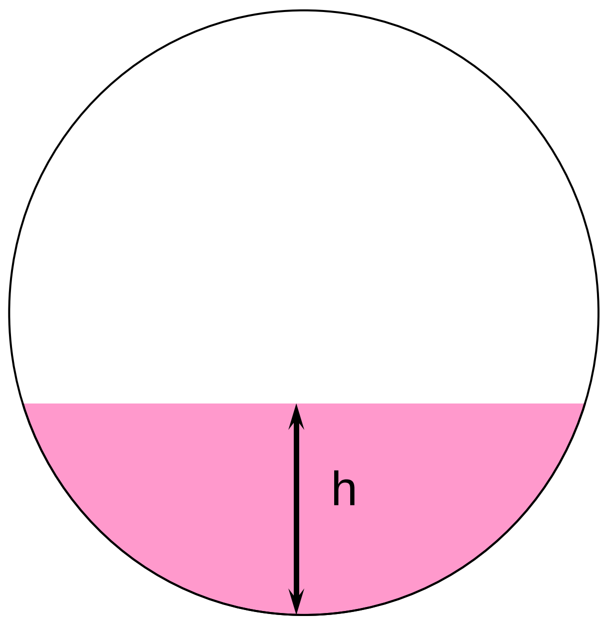
MMM – Lisaülesanne kodus proovimiseks

Näidisülesanne selle kohta, et mitte kõik ülesanded ei ole lihtsad.

Silindrikujuline horisontaalne kütusetünn on osaliselt kütust täis. Tünni pikkus on l määramatusega u(l) ning läbimõõt d määramatusega u(d). Allesoleva kütuse hulga mõõtmiseks asetatakse tünni puupulk ning siis mõõdetakse, kui paks kiht kütust on, paksus h, määramatusega u(h).

Leida arvutusvalem kütuse koguse ning selle määramatuse jaoks.





MMM – Tagasiside

Moodles saadeti järgmine tagasiside:

*** kuidas arvutada vabadusastmeid Welch–Satterthwaite'i valemiga, kui mõni määramatuse komponent sisaldab korrelatsioonikordajat? Oma töös jätsin selle liikme lihtsalt arvestamata, kuid pole kindel, kas see on õigustatud (konspektis on mainitud ainult seda, et sisendsuurused peavad olema sõltumatud, järelikult oleks pidanud ka korreleeruvad sisendsuurused vabadusastmete arvutamisel ära jätma?).**

*** kuidas arvestada regressioonisirge tõusu ja vabaliikme määramatuste arvutamisel mõõtevahendist tingitud B-tüüpi määramatusi? Tõenäosusteooria ja statistika konspektis on kirjas standardhälbe arvutamise valemid ning need standardhälbed on määramatuse arvutamisel läbi korrutatud Studenti t-kordajaga. See nagu viitaks sellele, et arvutatud standardhälve (A-tüüpi määramatus?) on võetud võrdseks liitmääramatusega ning B-määramatus on arvestamata jäetud.**

Estimation of intercept and slope (K&F, p63):

We don't prove, that coefficients *a* and *b*

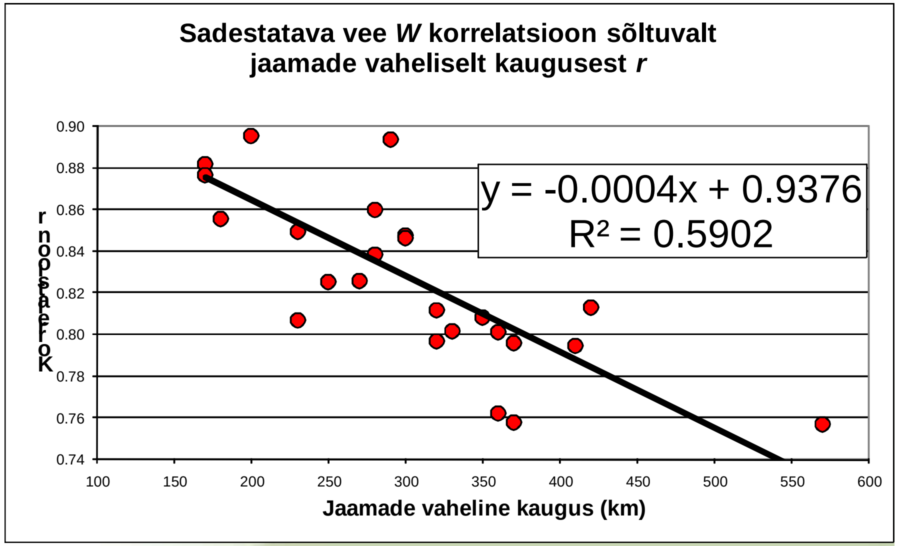
$$D = n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}{D}$$

$$b = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{D}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{\ 2}}{n-2}}$$

$$s_{aver} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$



$$s_a = s \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2}}{D}}$$

$$s_b = s \cdot \sqrt{\frac{n}{D}}$$

8

MMM – Tagasiside

Moodles saadeti järgmine tagasiside:

*** kui väljundsuuruse arvutamisel on kasutatud mingi kahe korreleeruva sisendsuuruse alusel koostatud regressioonisirge tõusu, siis kas väljundsuuruse vabadusastmete arvutamisel võib tõusu määramatuse komponendi vabadusastmete arvuks võtta nende sisendsuuruste mõõtmiste arvu miinus kaks (st kui vastavate sisendsuuruste mõõtmiste arv on N, siis regressioonisirge tõusu määramatuse komponent jagatakse W-S valemis läbi (N-2)'ga)?**

*** konspekti lõpus on toodud näide kaalutud keskmiste arvutamisest. Kas sama suuruse erinevate määramatuste kattumise võrdlemisel arvestatakse vaid nende standardmääramatusi?**

*** kas väljundsuuruse määramatust (arvutatakse osatuletiste ja asjadega) nimetatakse B-tüüpi määramatuseks?**

MMM – Konsultatsioon

Küsige kõige kohta mis on jäänud segaseks, eksamil küsin juba mina☺