TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI
TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

721

KONSTRUKTSIOONIDE ARVUTAMINE JA OPTIMISEERIMINE

РАСЧЕТ И ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ

Matemaatika- ja mehaanika-alaseid töid

Труды по математике и механике

TARTU 1985

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 721 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г.

KONSTRUKTSIOONIDE ARVUTAMINE JA OPTIMISEERIMINE

РАСЧЕТ И ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ

Matemaatika- ja mehaanika-alaseid töid

Труды по математике и механике

ТАРТУ 1985

КАФЕДРЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА СОРОК ЛЕТ

Л. Реоте
Тартуский государственный университет

Весной 1985 года кафедра теоретической механики Тартуского государственного университета отпраздновала свой юбилей - ей исполнилось 40 лет со дня создания в апреле 1945 года.

Предшественницей кафедры теоретической механики в Тартуском университете следует считать профессуру прикладной математики, созданную в 1842 году. Первым профессором прикладной математики в Тарту был известный математик Эрнст Фердинанд Адольф Миндинг, который работал в этой должности с 1843 по 1883 год и, помимо многих математических дисциплин, читал также лекции по различным вопросам теоретической механики.

Среди последователей Э.Ф.А. Миндинга особо выделяется Гурий Васильевич Колосов, работавший в Тарту в 1903 - 1913 годах. Его докторская диссертация, написанная в Тартуском университете, положила начало новому направлению в механике, именно применению теории функций комплексной переменной в теории упругости. Последним профессором прикладной математики в Тартуском университете царского времени был Леонид Самойлович Лейбензон (1915-1918), впоследствии ставший академиком АН СССР.

В 1922 году в Тартуском университете был создан Институт математики и механики, руководителем которого стал первый эстонский профессор прикладной математики и механики Герхард Ряго. Лабораторию прикладной математики и механики этого института, которой руководил также проф. Г. Ряго, можно считать уже прямой предшественницей кафедры теоретической механики ТГУ.

После освобождения Советской Эстонии от немецко-фашистских захватчиков была проведена реорганизация структуры Тартуского государственного университета. Тогда, 23 апреля 1945 года, в составе математического отделения естественно-математического факультета и была создана кафедра теоретической механики, заведующим которой был назначен профессор Г. Ряго. В обязанности кафедры, кроме преподавания теоретической механики, входило, главным образом, также чтение лекций по высшей математике, в основном для студентов нематематических специальностей. Таким же осталось содержание учебно-педагогической работы кафедры и до настоящего времени.

С 1958 года кафедрой заведует профессор Юло Лепик. Состав кафедры увеличился с трёх преподавателей в 1945 году до семи в настоящее время. Направление научной работы кафедры сложилось и развивалось под руководством проф. Ю. Лепика; оно охватывает различные проблемы механики деформируемого твёрдого тела. Члены кафедры занимались вопросами устойчивости, послекритического поведения и определения больших прогибов упруго-пластических конструкций, а также определением несущей способности жёстко-пластических тел. С начала семидесятых годов проблематика научной работы кафедры связана, главным образом, с вопросами оптимизации пластических балок, пластин и оболочек, в частности, находящихся под действием динамической нагрузки. По этому направлению в результате работ проф. Ю. Лепика и его учеников в Тарту сложилась научная школа, заслужившая признание как в Советском Союзе, так и за границей.

Кафедра имеет тесные связи с отечественными и зарубежными исследовательскими центрами по механике. Укреплению этих связей содействовали, в частности, и шесть научных конференций, т.н. летних школ по механике, организованных с 1966 года кафедрой теоретической механики, в которых принимали участие многие ведущие учёные, специалисты по механике твёрдого тела.

К ТРИДЦАТИЛЕТИЮ КАФЕДРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

К. Кенк

Таллинский политехнический институт

В сентябре 1983 года кафедра теоретической механики Таллинского политехнического института отметила тридцатилетие со времени выделения её из объединённой кафедры математики и теоретической механики в самостоятельный коллектив. Первые годы становления кафедры характеризовались большой текучестью кадров.

В 1955 году и.о. доцента О. Сильде стал кандидатом физико-математических наук и в 1956 году был избран заведующим кафедрой. Его научные интересы в то время касались вопросов математики и основное внимание по теоретической механике уделялось учебно-методическим вопросам.

В 1964 году заведующим кафедрой стал и.о. профессора Г. Гольст (д.т.н. и профессор с 1966 года).

Наряду с продолжением методической работы всё большее внимание уделялось выполнению научных исследований.

В полном соответствии с профилем кафедры началась разработка оригинального метода аналитической механики - „уравнение возможной мощности" (УВМ). В основу метода легла идея о расширении и обобщении теоремы кинетической энергии. Первые попытки в этом направлении сделал старший преподаватель Б. Тийкма. С 1964 года к этой теме был привлечен доцент О. Сильде, трудами которого УВМ получило самостоятельный вид.

В ТПИ аспирантуру окончил А. Тиманок, а в Ленинградском государственном университете имени А.А. Жданова - К. Кенк и Т. Лийва. В 1966, 1969 и 1970 годах соответственно они стали кандидатами наук и на кафедре продолжали дальнейшую разработку тем своих диссертаций: А. Тиманок - динамика оболочек, К. Кенк - определяющие уравнения теории пластичности, Т. Лийва - устойчивость оболочек. В 1968 году диссертацию по механике горного дела защитил Э. Лиотре, преподававший тогда на общетехническом факультете в Кохтла-Ярве.

Под руководством доцента О. Сильде в 1975 году по теме УВМ диссертацию защитил Х. Рельвик. Он является инициатором внедрения метода в учебный процесс.

Аспирант кафедры Г. Арясов под руководством профессора Г. Гольста разработал и защитил в 1979 году кандидатскую диссертацию по динамике перекрёстных балок.

В 1980 году диссертацию по оптимальному проектированию пластических пластин и оболочек защитил Ю. Кирс. Его руководителем был профессор Тартуского государственного университета Ю. Лепик.

С 1978 года на кафедре работает к.т.н. Б. Ясулович, диссертация которого касалась численного расчёта перекрытий.

К началу 80-ых годов на кафедре был создан высококвалифицированный научный коллектив.

В 1979 году вышла из печати книга Г. Гольста, Х. Рельвика, О. Сильде „Основные вопросы аналитической механики. Уравнение возможной мощности", которая в 1980 году была удостоена премии Советской Эстонии.

В связи с переходом в 1981 году Г. Гольста на должность профессора-консультанта заведующим кафедрой стал доцент К. Кенк. Кафедра продолжает научные исследования в области УВМ (Х. Рельвик, А. Хайтин), по динамике конструкций и сред (К.Кенк, Ю. Кирс, Т. Лийва, Г. Арясов, Б. Ясулович, Т. Пейпман).

Проводятся хоздоговорные исследования по сепарационному измельчению (А. Тиманок, Я. Тамм, Т. Мерисалу, Э. Метус).

В 1984 году диссертацию по волновым процессам в неоднородной среде защитил Т. Пейпман под руководством профессора Ю. Энгельбрехта из Института кибернетики АН ЭССР.

Растёт педагогическое мастерство сотрудников. Звание доцента присвоено А. Тиманоку, К. Кенку, Х. Рельвику, Т. Лийва, Э. Лиотре, и.о. доцентов избраны Ю. Кирс, Г. Арясов, Б. Ясулович, Э. Топник.

На кафедре систематически разрабатываются и издаются учебные пособия, которые широко используются студентами. Основным автором этих пособий является и.о. доц. Э. Топник. Большое внимание на кафедре постоянно уделяется руководству научными работами студентов.

В 1973 году кафедра стала базовой в пределах ЭССР.

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ АРМИРОВАННОЙ БАЛКИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЯМ

Я. Леллеп, Э. Сакков

Тартуский государственный университет

Проблемы, связанные с поведением динамически нагруженных армированных балок из жёстко-пластического материала, исследовались в [I-5, 7]. В [I, 2] была разработана методика расчёта и оптимизации неоднородных балок, для которых учитывались конечные размеры армирующих слоёв. Однако, в этих работах ограничивались случаем одного слоя (при несимметричном) и двумя слоями (при симметричном армировании). Ниже результаты предыдущих работ обобщаются для произвольного числа армирующих слоёв. Ограничиваются симметричным (относительно нейтральной линии) расположением арматуры.

I. Формулировка задачи и основные уравнения

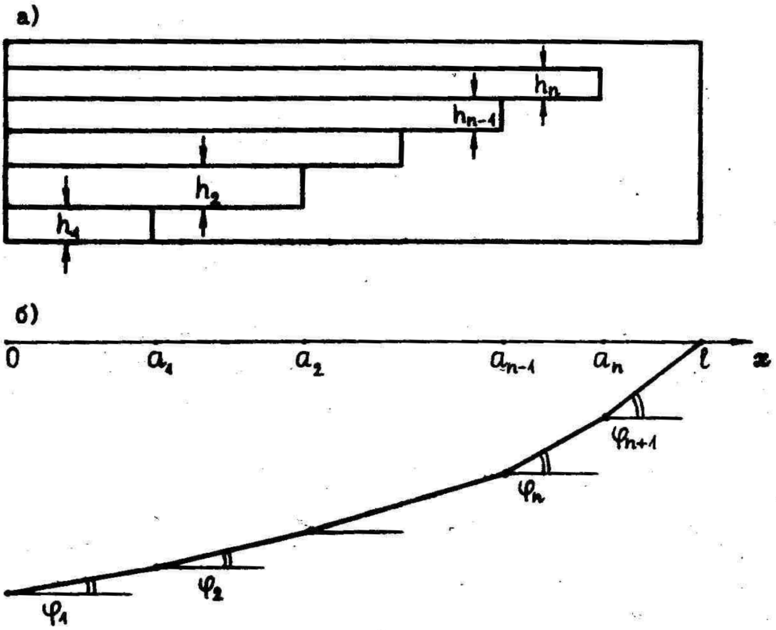
Рассмотрим неоднордную балку длины 2ℓ, ширины B и толщины H, концы которой шарнирно закреплены. Балка армирована симметрично относительно нейтральной линии с помощью арматуры, состоящей из n слоёв (n – заданное число). Как отдельные слои с толщинами $h_1, \dots, h_n$ (фиг. Ia), так и связующий материал считаем жёстко-пластическими, имеющими пределы текучести $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ и σ_{n+1} соответственно. Длины слоёв арматуры обозначены через $2a_1, \dots, 2a_n$ (из-за симметрии на фиг. Ia представлена лишь одна четвёртая часть балки). Допускается, что $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Предполагается, что балка подвержена действию динамической нагрузки. В данной работе ограничиваемся случаем, когда балка движется под действием начального импульса, сообщающего балке начальную кинетическую энергию K_0.

Требуется найти такие размеры арматуры (длины $a_1, \dots, a_n$ и толщины $h_1, \dots, h_n$ отдельных слоёв), при которых остаточный прогиб в центре балки достигает минимального значения для заданной общей массы

$$M_* = 2B\sum_{i=1}^{n}\Big(2\sum_{j=i}^{n} h_j(a_i - a_{i-1})(\varrho_j - \varrho_{n+1}) + H\varrho_{n+1}(a_i - a_{i-1})\Big) + 2BH\varrho_{n+1}(\ell - a_n) . \qquad (I.I)$$

В (I.I) $\rho_1, \ldots, \rho_n$ и ρ_{n+1} обозначают плотности слоёв арматуры и связующего материала соответственно, а $a_0 = 0$. В случае $n = 1$ эта задача была рассмотрена в [I, 2].



Фиг. I.

Решение поставленной задачи должно удовлетворять уравнениям движения

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \begin{cases} m_k \ddot{w}, & x \in \mathcal{D}_k, \\ m_{n+1} \ddot{w}, & x \in \mathcal{D}_{n+1}, \end{cases} \tag{I.2}$$

краевым условиям

$$M(l, t) = Q(0, t) = 0, \tag{I.3}$$

а также условиям непрерывности изгибающего момента $M(x,t)$, перерезывающей силы $Q(x,t)$, прогиба $w(x,t)$ и скорости прогиба $\dot{w}(x,t)$ в любой точке отрезка $[0, l]$ в каждый момент времени $t > 0$. В формуле (I.2) и в дальнейшем (если не сказано, какие значения принимает индекс k) индекс k принимает значения $k = 1, \ldots, n$. Через $\mathcal{D}_k$ обозначаются отрезки $[a_{k-1}, a_k]$, а через m_k и m_{n+1} – масса, приходящаяся на единицу длины в армированной и в однородной областях соответственно, т.е.

$$\begin{aligned} m_k &= 2B\sum_{j=k}^{n} h_j(\varrho_j - \varrho_{n+1}) + BH\varrho_{n+1} \,, \\ m_{n+1} &= BH\varrho_{n+1} \,. \end{aligned} \qquad (\mathrm{I}.4)$$

Сопоставляя формулы (I.I) и (I.4), видим, что $M_k = \sum_{j=1}^{n+1} m_j \Delta_j$, где $\Delta_j = a_j - a_{j-1}$ $(j = 1, \ldots, n+1)$, $a_{n+1} = \ell$.

2. Интегрирование основных уравнений

Для интегрирования основных уравнений (I.2) с учётом краевых условий (I.3) применяется метод модальных движений, согласно которому скорость прогиба балки представляется в виде (фиг. Iб)

$$\dot{w} = \begin{cases} \dot\varphi_k(a_k - x) + \sum\limits_{j=k+1}^{n+1} \dot\varphi_j \Delta_j \,, & x \in \mathcal{D}_k \\ \dot\varphi_{n+1}(\ell - x) \,, & x \in \mathcal{D}_{n+1} \,. \end{cases} \qquad (2.\mathrm{I})$$

В (2.I) символы $\dot\varphi_j$ обозначают скорости изменения углов φ_j (фиг. Iб).

Вычисляя ускорение прогиба с помощью (2.I), подставляя его в (I.2) и интегрируя, получим

$$Q = \begin{cases} m_k\ddot\varphi_k\left[a_k(x - a_{k-1}) - \frac{1}{2}(x^2 - a_{k-1}^2)\right] + m_k(x - a_{k-1})\sum\limits_{j=k+1}^{n+1} \ddot\varphi_j \Delta_j + Q_{k-1}, & x \in \mathcal{D}_k, \\ m_{n+1}\ddot\varphi_{n+1}\left[\ell(x - a_n) - \frac{1}{2}(x^2 - a_n^2)\right] + Q_n \,, & x \in \mathcal{D}_{n+1} \,, \end{cases} \qquad (2.2)$$

где Q_{k-1} и Q_n – постоянные интегрирования. Согласно (I.3) и условиям непрерывности перерезывающей силы в точках a_k имеем

$$\begin{aligned} Q_0 &= 0 \,, \\ Q_k &= \sum_{j=1}^{k} m_j \Delta_j \left[\frac{1}{2}\ddot\varphi_j \Delta_j + \sum_{i=j+1}^{n+1} \ddot\varphi_i \Delta_i\right] \,. \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Подставляя (2.2) в первое уравнение из (I.2) и интегрируя ещё раз по x, приходим к соотношениям

$$M=\begin{cases} m_k\ddot{\varphi}_k\left[\frac{a_k}{2}(x-a_{k-1})^2-\frac{1}{6}(x^3-a_{k-1}^3)+\frac{1}{2}a_{k-1}^2(x-a_{k-1})\right]+Q_{k-1}(x-a_{k-1})+ \\ +\frac{1}{2}m_k(x-a_{k-1})^2\sum\limits_{j=k+1}^{n+1}\ddot{\varphi}_j\Delta_j+N_k\ , \quad x\in\mathcal{D}_k\ , \\ m_{n+1}\ddot{\varphi}_{n+1}\left[\frac{l}{2}(x-a_n)^2-\frac{1}{6}(x^3-a_n^3)+\frac{a_n^2}{2}(x-a_n)\right]+Q_n(x-a_n)+N_{n+1},\ x\in\mathcal{D}_{n+1}\ , \end{cases} \tag{2.4}$$

где постоянные интегрирования N_k и N_{n+1} определяются согласно (I.3) и условиям непрерывности изгибающего момента при $x=a_k$ в виде

$$\begin{gathered} N_k=-\sum_{j=k}^{n+1}\left\{\frac{m_j}{3}\ddot{\varphi}_j\Delta_j^3+Q_{j-1}\Delta_j\right\}-\sum_{j=k}^{n}\frac{m_j}{2}\Delta_j^2\sum_{i=j+1}^{n+1}\ddot{\varphi}_i\Delta_i\ , \\ N_{n+1}=-m_{n+1}\ddot{\varphi}_{n+1}\left[\frac{l}{2}(l-a_n)^2-\frac{1}{6}(l^3-a_n^3)+\frac{1}{2}a_n^2(l-a_n)\right]-Q_n(l-a_n)\ . \end{gathered} \tag{2.5}$$

На каждом отрезке $\mathcal{D}_k$ изгибающий момент не может превышать соответствующее предельное значение. Поскольку самыми опасными являются сечения $x=a_{k-1}$, то требуется проверить выполнение неравенств (предполагается, что изгибающий момент всюду неотрицателен)

$$M(a_{k-1},t)\le M_k\ , \quad k=1,\dots,n+1\ , \tag{2.6}$$

где через M_k обозначены предельные моменты для отрезков $\mathcal{D}_k$. Величины M_k определяются в виде (фиг. 2)

$$\begin{gathered} M_k=B\left\{\sum_{j=k}^{n}\sigma_j\left[2h_j\left(\frac{H}{2}-\sum_{i=0}^{j-1}h_i\right)-h_j^2\right]+\sigma_{n+1}\left[\left(\frac{H}{2}-\sum_{j=1}^{n}h_j\right)^2-\right.\right. \\ \left.\left.-\left(\frac{H}{2}-\sum_{j=0}^{k-1}h_j\right)^2+\frac{H^2}{4}\right]\right\}\ , \\ M_{n+1}=\frac{1}{4}BH^2\sigma_{n+1}\ , \end{gathered} \tag{2.7}$$

где для краткости записи обозначено $h_0=0$.

Неравенства (2.6) приобретают с учётом (2.3) - (2.5) и (2.7) вид

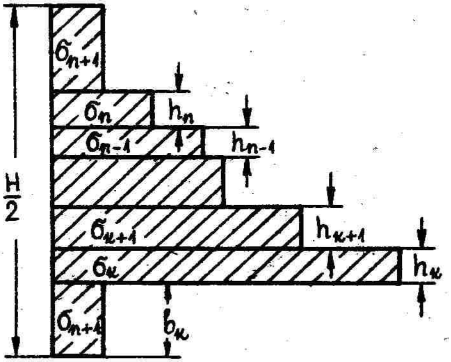
$$\sum_{j=k}^{n+1}\left(\frac{1}{3}m_j\ddot{\varphi}_j\Delta_j^3+Q_{j-1}\Delta_j\right)+\sum_{j=k}^{n}\frac{m_j}{2}\Delta_j^2\sum_{i=j+1}^{n+1}\ddot{\varphi}_i\Delta_i+B\Big\{\sum_{j=k}^{n}\sigma_j\Big[2h_j\Big(\frac{H}{2}-\sum_{i=0}^{j-1}h_i\Big)-$$

$$-h_j^2\Big]+\sigma_{n+1}\Big[\Big(\frac{H}{2}-\sum_{j=1}^{n}h_j\Big)^2-\Big(\frac{H}{2}-\sum_{j=0}^{k-1}h_j\Big)^2+\frac{H^2}{4}\Big]\Big\}\geq 0\ ; \qquad (2.8)$$

$$m_{n+1}\ddot{\varphi}_{n+1}\Big[\frac{l}{2}(l-a_n)^2-\frac{1}{6}(l^3-a_n^3)+\frac{a_n^2}{2}(l-a_n)\Big]+Q_n(l-a_n)+\frac{1}{4}BH^2\sigma_{n+1}\geq 0.$$

Согласно методу модальных движений величины $\ddot{\varphi}_j$ $(j=1,\ldots,n+1)$ являются постоянными. Это обстоятельство позволяет проинтегрировать уравнения (2.I) по времени. Учитывая при этом непрерывность прогиба, получим

$$\dot{w}=\begin{cases}\Big[\ddot{\varphi}_k(a_k-x)+\sum\limits_{j=k+1}^{n+1}\ddot{\varphi}_j\Delta_j\Big]\Big(\frac{t^2}{2}-t_f t\Big)\ , & x\in\mathfrak{D}_k\ ,\\ \ddot{\varphi}_{n+1}(l-x)\Big(\frac{t^2}{2}-t_f t\Big)\ , & x\in\mathfrak{D}_{n+1}\ ,\end{cases} \qquad (2.9)$$



Фиг. 2.

где t_f обозначает время прекращения движения. Из-за непрерывности скорости прогиба все части балки останавливаются одновременно.

Для связывания модального поля скоростей с действительными скоростями перемещений в данной работе используется метод кинетической энергии [6]. Предполагается, что задана начальная кинетическая энергия

$$K_0=\sum_{j=1}^{n+1}\int_{a_{j-1}}^{a_j}m_j\dot{w}^2(x,0)dx \qquad (2.10)$$

Подставляя в (2.I0) вместо $\dot{w}(x,0)$ начальную модальную скорость (она определяется путём дифференцирования по времени формулы (2.9)) и интегрируя по x, находим

$$t_f^2 = K_0\Big\{\sum_{j=1}^{n} m_j\Delta_j\Big[\frac{1}{3}\ddot{\varphi}_j^2\Delta_j^2 + \ddot{\varphi}_j\Delta_j\sum_{i=j+1}^{n+1}\ddot{\varphi}_i\Delta_i + \tag{2.II}$$

$$+\Big(\sum_{i=j+1}^{n+1}\ddot{\varphi}_i\Delta_i\Big)^2\Big] + \frac{1}{3}m_{n+1}\ddot{\varphi}_{n+1}^2(l-a_n)^3\Big\}^{-1} .$$

Максимальный остаточный прогиб выражается согласно (2.9) и (2.II) в виде

$$w(0,t_f) = -\frac{1}{2}K_0\sum_{j=1}^{n}\ddot{\varphi}_j\Delta_j\Big\{\sum_{j=1}^{n} m_j\Delta_j\Big[\frac{1}{3}\ddot{\varphi}_j^2\Delta_j^2 + \ddot{\varphi}_j\Delta_j\sum_{i=j+1}^{n+1}\ddot{\varphi}_i\Delta_i + \tag{2.I2}$$

$$+\Big(\sum_{i=j+1}^{n+1}\ddot{\varphi}_i\Delta_i\Big)^2\Big] + \frac{1}{3}m_{n+1}\ddot{\varphi}_{n+1}^2(l-a_n)^3\Big\}^{-1} ,$$

где неизвестными являются не только a_k и m_k (они определяются с помощью толщин h_k), но и угловые ускорения $\ddot{\varphi}_j$ $(j=1,\dots,n+1)$.

3. Определение оптимальных параметров балки

Выше было показано, что поставленная задача сводится к минимизации функционала (2.I2) с учётом равенства (I.I) и неравенств (2.8). В этой задаче нелинейного программирования пределы текучести σ_j и плотности ρ_j $(j=1,\dots,n+1)$, как и величины n, M_*, B, H и K_0, считаются заданными. Заранее неизвестными являются a_k, h_k и $\ddot{\varphi}_j$ $(j=1,\dots,n+1)$. Для получения конечных численных результатов задачу следует решить на ЭВМ.

Решение данной задачи значительно упрощается, если из физических соображений вытекает, что работают все пластические шарниры в точках $x=a_i$ $(i=0,\dots,n)$. Это означает, что неравенства (2.8) превращаются в равенства. Из этих уравнений, поскольку согласно (2.3) и (2.8) они линейны относительно $\ddot{\varphi}_j$ $(j=1,\dots,n+1)$, можно вычислить ускорения $\ddot{\varphi}_j$. Подставляя найденные значения в (2.I2), приходим к задаче нахождения условного минимума функции $2n$ переменных a_k и h_k. При минимизации следует учитывать лишь равенство (I.I).

Если, однако, появление шарнира в некоторой точке, например, при $x = a_s$ невозможно, то неравенство, соответствующее значению $k = s$, в (2.8) следует заменить равенством $\ddot{\varphi}_s = \ddot{\varphi}_{s+1}$. В остальном задача не изменится.

4. Пример

В качестве примера рассмотрим балку, армированную двумя слоями, расположенными симметрично относительно нейтральной линии и срединного поперечного сечения. В этом случае формула (I.I) примет вид (теперь $n = 1$)

$$M_* = 2BH\ell\varrho_2[1 + 2\alpha\delta(\gamma - 1)] , \qquad (4.I)$$

где используются обозначения

$$\alpha = \frac{a_1}{\ell} , \quad \delta = \frac{h_1}{H} , \quad \gamma = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} . \qquad (4.2)$$

Подробный анализ показывает [I], что в данном случае функционал (2.I2) достигает минимума с учётом ограничений (2.8) и (4.I), если в (2.8) реализуются знаки равенства и $\ddot{\varphi}_1 = 0$. Последнее означает, что распределение модельных скоростей имеет вид трапеции. Таким образом, из (2.8) , (4.I) следует, что оптимальные значения параметров α и δ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} & m - 2\alpha\delta = 0 , \\ & 3m^2(1 - 2\delta + 2\gamma\delta) - 8\delta(1-\delta)(\nu - 1)(2\delta - m)[3m(1 - 2\delta + \\ & \quad + 2\gamma\delta) + 2\delta - m] = 0 , \end{aligned} \qquad (4.3)$$

где

$$\nu = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} , \qquad m = \frac{\dfrac{M_*}{2BH\ell\varrho_2} - 1}{\gamma - 1} . \qquad (4.4)$$

Как величина γ в (4.2), так и ν и m в формуле (4.4) считаются заданными величинами.

Экономия найденного проекта оценивается отношением

$$e = \frac{w(0, t_f)}{w_f} . \qquad (4.5)$$

Величина $w(0,t_f)$ в (4.5) вычисляется при значениях α и δ, которые удовлетворяют уравнениям (4.3), а w_f обозначает остаточный прогиб однородной балки, изготовленной из связующего материала.

Результаты вычислений представлены в таблицах I и 2. Табл. I соответствует случаю $\nu=\gamma=2$, табл. 2 – случаю $\nu=3$; $\gamma=1,5$. Расчёт показывает (как и следовало ожидать), что достигаемая экономия тем больше, чем больше величина ν, т.е. чем прочнее материал арматуры.

Таблица I.

m	0,I	0,2	0,3	0,4	0,5
α	0,45	0,59	0,62	0,65	0,68
δ	0,II	0,I7	0,24	0,3I	0,37
e	0,55	0,4I	0,38	0,35	0,32

Таблица 2.

m	0,I	0,2	0,3	0,4	0,5
α	0,63	0,7I	0,75	0,77	0,78
δ	0,08	0,I4	0,20	0,26	0,32
e	0,37	0,29	0,25	0,23	0,22

Литература

I. Леллеп Я., Сакков Э., Оптимальный проект армированной балки из жёстко-пластического материала в случае импульсивного нагружения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I983, 659, 3 – II.

2. Леллеп Я., Сакков Э., Оптимальное проектирование пластических армированных балок. Матер. Всес. конф. "Прочн. жёсткость и технологичность изделий из композ. матер."

Т.2. Ереван, I984, I29-I32.

3. Лепик Ю.Р., К оптимальному проектированию жёстко-пластических армированных балок в случае динамического нагружения. Матер. Всес. конф. "Прочн., жёсткость и технологичность изделий композ. матер.", Т.2. Ереван, I984, I33-I36.
4. Немировский Ю.В., Динамический изгиб армированных пластических стержней. Дин. сплош. среды, I979, 4I, 7I-79
5. Jones N., Dynamic behavior of ideal fibre-reinforced rifid-plastic beams.- Trans. ASME, J.Appl. Mech., 1976, 43, № 2, 319 - 324.
6. Lippmann H., Kinetics of the axisymmetric rigid-plastic membrane subject to initial impact.- Int. J.Mech.Sci., 1974, 16, № 5, 297 - 303.
7. Spencer A.J.M., Dynamics of ideal fibre-reinforced rigid-plastic beams.- J. Mech. and Phys. Solids, 1974, 22, № 3, 147 - 159.

On optimization of a reinforced beam subjected to dynamic loading

J.Lellep, E.Sakkov

Summary

An optimal design method is developed for a non-homogenous beam which response to an initial impulsive loading. The material of the beam as well as materials of the reinforcement are expected to be rigid-plastic which possess different physical characteristics. The optimisation problem consists in the determination of optimal dimensions of reinforcement layers under the condition that the maximal residual deflection attains the minimal value for a specified weight of the beam. Incorporating the concept of the mode-form motions accompanied with the kinetic energy method the problem is reduced to a non-linear programming problem. A particular case associated with the reinforcement which consists of two layers of the common material is treated numerically in greater detail.

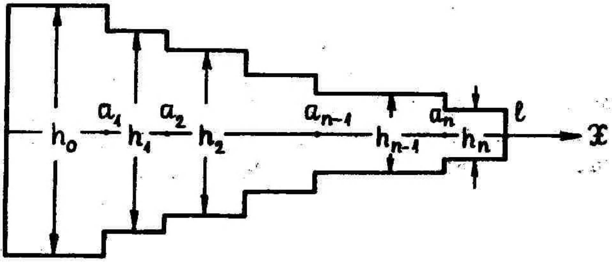
ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ БАЛОК КУСОЧНО ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

Я. Леллеп, Ю. Маяк
Тартуский государственный университет

Оптимальному проектированию жёстко-пластических балок с учётом умеренно больших прогибов посвящены работы [4, 7, 8]. В отмеченных статьях разработаны вариационные подходы к оптимизации геометрически нелинейных пластических балок, при которых толщины и другие геометрические и физические переменные считаются непрерывными. Однако, как показано в [2, 5, 6, 9], при оптимальном проектировании геометрически линейных пластин и оболочек большое значение имеют проекты с кусочно постоянной толщиной. Ниже представляется методика определения оптимальных проектов кусочно постоянной толщины для балок, работающих в стадии умеренно больших прогибов. Балки шарнирно закреплены и нагружены равномерно распределённым поперечным давлением и осевым растяжением.

I. Формулировка задачи

Пусть балка длины 2ℓ подвержена действию распределённой поперечной нагрузки интенсивности P и растягивающей осевой силы N_1. Оба конца балки шарнирно закреплены, но допускают малые перемещения в осевом направлении. Допускается, что балка имеет постоянную ширину B, но кусочно постоянную толщину (фиг. I)



Фиг. I.

$$h = h_j\ ,\ \ x \in (a_j, a_{j+1}),\ j = 0, \ldots, n, \quad (\text{I.I})$$

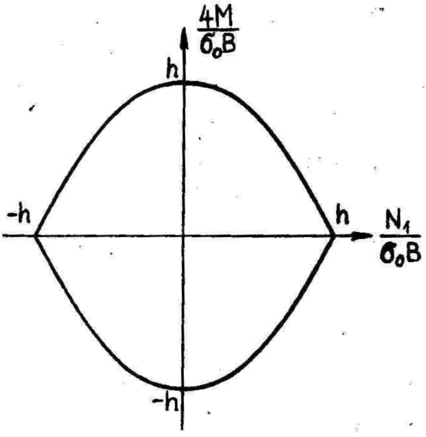
где $a_0 = 0$ и $a_{n+1} = \ell$, а начало координатной оси Ox находится в центре тяжести срединного поперечного сечения балки. Из-за симметрии здесь и в дальнейшем рассматривается лишь правая половина балки.

Требуется найти такие значения толщины $h_i\ (i = 0, \ldots, n)$, а также координат $a_j\ (j = 1, \ldots, n)$, которые доставляют минимум объёму

$$V = B \sum_{j=0}^{n} h_j (a_{j+1} - a_j)\ . \quad (\text{I.2})$$

Минимум функционала (I.2) ищется в предположении, что прогиб $W(x)$ оптимального проекта совпадает с прогибом W_* балки постоянной толщины h_*. Число ступеней $2n$ считается заданным.

2. Основные уравнения и предположения



Фиг. 2.

В данной работе учитываются умеренно большие прогибы, т.е. прогибы до порядка толщины балки. Как в ранних работах [4, 7, 8], так и здесь применяется теория пластичности типа деформации. Материал балки считается жёстко-пластическим; условие текучести (фиг. 2) имеет в случае прямоугольного поперечного сечения вид [I, 3]

$$\left|\frac{4M}{\sigma_0 B h^2}\right| + \left(\frac{N_1}{\sigma_0 B h}\right)^2 \leqslant 1\ . \quad (2.\text{I})$$

Здесь M – изгибающий момент, а σ_0 – предел текучести материала. В дальнейшем предполагается, что изгибающий момент принимает лишь неотрицательные значения. Поэтому в (2.I) опускается знак абсолютной величины.

3

при сделанных допущениях уравнения равновесия и ассоциированный закон деформирования записываются в виде системы [4, 7, 8]

$$m' = q\ ; \qquad q' = N\lambda^2 - p\ ; \qquad w' = z\ ;$$
$$z' = -\lambda^2\ ; \qquad u' = -\frac{1}{2}z^2 + 2N\lambda^2\ , \qquad (2.2)$$

где штрих обозначает дифференцирование по x, а U – осевое перемещение и

$$x = \frac{X}{\ell}\ , \qquad \alpha_j = \frac{a_j}{\ell}\ , \qquad N = \frac{N_1}{\sigma_0 B h_*}\ , \qquad m = \frac{4M}{\sigma_0 B h_*^2}\ ,$$
$$p = \frac{4\ell^2 P}{\sigma_0 B h_*^2}\ , \qquad u = \frac{16\ell U}{h_*^2}\ , \qquad w = \frac{4W}{h_*}\ , \qquad \gamma_j = \frac{h_j}{h_*}\ . \qquad (2.3)$$

Переменные q и z в (2.2) рассматриваются как вспомогательные переменные, а λ^2 обозначает неотрицательную функцию, которая тождественно равна нулю на отрезке $[\beta, 1]$, где неравенство (2.I) превращается в строгое неравенство. На отрезке $[0, \beta]$ условие (2.I) примет вид равенства

$$m + N^2 - 1 = 0\ , \qquad x \in [0, \beta]\ , \qquad (2.4)$$

т.е. здесь имеют место пластические деформации.

С учётом (I.I) и (2.3) ограничение (2.I) можно записать в виде

$$m + N^2 - \gamma_j^2 \leq 0\ , \qquad x \in [\alpha_j, \alpha_{j+1}]\ , \qquad j = 0, \dots, n\ . \qquad (2.5)$$

Самыми опасными (с точки зрения нарушения неравенств (2.5) являются поперечные сечения, где толщина балки имеет скачки. Поэтому ограничения (2.5) можно заменить неравенствами

$$m(\alpha_j) + N^2 - \gamma_j^2 \leq 0\ . \qquad (2.6)$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что, если не сказано противное, индекс j принимает значения $j = 1, \dots, n$.

Подробный анализ показывает, что из условия $w = w_*(x)$ следует, что $h_0 = h_*$. Таким образом, $\gamma_0 = 1$.

3. Необходимые условия оптимальности

Сформулированная выше задача заключается в минимизации функционала (I.2) при ограничениях (2.2), (2.4) и (2.6). Минимизация функционала (I.2) равносильна минимизации функционала

$$\mathcal{J} = \alpha_1 + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j (\alpha_{j+1} - \alpha_j) \ . \qquad (3.I)$$

Для выведения необходимых условий оптимальности следует составить расширенный функционал [4, 8]

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_* = \mathcal{J} + \int_0^1 \{ \varphi_1 m' + \psi_2 q' + \psi_3 w' + \varphi_4 z' + \psi_5 u' - \mathcal{H} \} dx + \\ + \int_0^{\beta} \varphi (m + N^2 - 1) dx + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j [m(\alpha_j) + N^2 - \gamma_j^2 + r_j^2] \ , \end{aligned} \qquad (3.2)$$

где $\varphi_1 - \varphi_5$ – сопряженные переменные, φ и λ_j – некоторые множители Лагранжа и r_j – неизвестные параметры. Параметры r_j введены с целью записать неравенства (2.6) в виде равенств. Функция $\mathcal{H}$ в (3.2) имеет вид

$$\mathcal{H} = \psi_1 q + \psi_2 (N\lambda^2 - p) + \psi_3 z - \psi_4 \lambda^2 + \psi_5 (2N\lambda^2 - z^2/2) + \psi_0 (w - w_*) . \qquad (3.3)$$

Варьирование функционала (3.2) с учётом (3.I) и (3.3) приводит к сопряженной системе

$$\begin{aligned} &\psi_1' = \begin{cases} \varphi , & x \in (0, \beta) , \\ 0 , & x \in (\beta, 1) , \end{cases} \\ &\psi_2' = -\psi_1 \ ; \quad \psi_3' = -\psi_0 \ ; \quad \psi_4' = -\psi_3 + \psi_5 z \ ; \quad \psi_5' = 0 \end{aligned} \qquad (3.4)$$

и соответствующим условиям трансверсальности. Однако, как уравнения (3.4), так и условия трансверсальности выполняются тождественно при $\psi_i = 0$, $\varphi = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, 5)$. Это означает, что функцию λ в формулах (2.2) и (3.3) следует рассматривать как заданную функцию.

Таким образом, варьированию подлежат лишь параметры α_j, γ_j и r_j, и условия оптимальности функционала (3.2) примут вид

$$\begin{aligned} &\lambda_j r_j = 0 \ , \\ &\alpha_{j+1} - \alpha_j - 2\lambda_j \gamma_j = 0 \ , \\ &\gamma_{j-1} - \gamma_j + \lambda_j \frac{\partial m(\alpha_j)}{\partial \alpha_j} = 0 \ , \end{aligned} \qquad (3.5)$$

3*

где $\alpha_0 = 0$, $\alpha_{n+1} = 1$, $\gamma_0 = 1$, а величина $m(\alpha_j)$ интерпретируется как значение функции m , удовлетворяющей уравнениям (2.2).

Из первой группы уравнений (3.5) следует, что либо

$$\lambda_j = 0 , \quad r_j \neq 0 , \tag{3.6}$$

либо

$$\lambda_j \neq 0 , \quad r_j = 0 . \tag{3.7}$$

В первом случае из остальных уравнений в (3.5) находим

$$\alpha_j = \alpha_{j+1} , \quad \gamma_j = \gamma_{j+1} . \tag{3.8}$$

Следовательно, формулы (3.6) и (3.8) соответствуют балке постоянной толщины. Поэтому особый интерес представляет случай (3.7), при котором

$$r_j = 0 , \quad m(\alpha_j) = \gamma_j^2 - N^2 . \tag{3.9}$$

Согласно соотношениям (3.5) имеем

$$\lambda_j = \frac{\alpha_{j+1} - \alpha_j}{2\gamma_j} \tag{3.10}$$

и

$$\gamma_{j-1} - \gamma_j + \frac{(\alpha_{j+1} - \alpha_j)}{2\gamma_j} \cdot \frac{\partial m(\alpha_j)}{\partial \alpha_j} = 0 . \tag{3.11}$$

Изгибающий момент $m(x)$, удовлетворяющий системе (2.2) и требуемым краевым условиям, имеет вид [7]

$$m = \begin{cases} 1 - N^2 , & x \in (0, \beta) , \\ 1 - N^2 - \frac{p}{2}(x - \beta)^2 , & x \in (\beta, 1) . \end{cases} \tag{3.12}$$

Величина β определяется соотношением

$$\beta = 1 - \sqrt{\frac{2(1 - N^2)}{p}} . \tag{3.13}$$

С учётом (3.12) и (3.13) можно уравнениям (3.9) и (3.11) придать вид

$$\begin{gathered} \gamma_j^2 + \frac{p}{2}(\alpha_j - \beta)^2 - 1 = 0 , \\ \gamma_{j-1} - \gamma_j - \frac{p}{2\gamma_j}(\alpha_j - \beta)(\alpha_{j+1} - \alpha_j) = 0 . \end{gathered} \tag{3.14}$$

Формула (3.I0) служит для определения множителей Лагранжа; она в дальнейшем не используется.

4. Оптимальный проект балки

Оптимальные значения параметров α_j и γ_j $(j=1,\ldots,n)$ вычисляются из системы (3.I4), которая состоит из $2n$ нелинейных алгебраических уравнений. Определяя из (3.I4) величины

$$\gamma_j=\sqrt{1-\frac{p}{2}(\alpha_j-\beta)^2} \qquad (4.\text{I})$$

и подставляя (4.I) в последние уравнения в (3.I4), получим

$$\sqrt{\left[1-\frac{p}{2}(\alpha_j-\beta)^2\right]\left[1-\frac{p}{2}(\alpha_{j-1}-\beta)^2\right]}+\frac{p}{2}(\alpha_j-\beta)(2\alpha_j-\alpha_{j+1}-\beta)-1=0. \qquad (4.2)$$

Система (4.2) позволяет определить величины α_j при заданных значениях p и N (через них выражается и величина β). При найденных значениях α_j величины γ_j определяются с помощью формулы (4.I).

Система (4.2) решена численно на ЭВМ. В расчётах использовался метод Ньютона. Разработан алгоритм для построения начальных приближений, обеспечивающих сходимость процесса итерации. Начальные данные для задачи с k неизвестными α_1, ... α_k определяются с помошью решения предыдущей задачи с $k-1$ неизвестными.

Результаты вычислений представлены при некоторых значениях p и N в табл. I – 5. Таблицы I – 4 соответствуют случаю $n=7$. В табл. I приведена зависимость между α_j и N в предельном состоянии. Величина e (последний столбец в таблицах I, 3, 4) выражает экономию найденного проекта. Она определяется в виде

$$e=\frac{1}{h_0}\int_0^l h\,dx\,. \qquad (4.3)$$

Таблица I.

N	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	e
0,0	0,3I96	0,475I	0,6003	0,707I	0,7998	0,8800	0,9476	0,825I
0,2	0,3I53	0,4690	0,5932	0,6995	0,7922	0,8733	0,9429	0,8348
0,4	0,3073	0,4576	0,5797	0,6852	0,7784	0,86I5	0,9353	0,86II
0,6	0,2986	0,4456	0,5659	0,6709	0,7650	0,8505	0,9286	0,8994
0,8	0,2904	0,4344	0,5532	0,6580	0,7533	0,84I2	0,923I	0,9464

Таблица 2.

N	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7
0,0	0,9476	0,8800	0,7998	0,707I	0,6003	0,475I	0,3I96
0,2	0,95II	0,888I	0,8I37	0,7282	0,6304	0,5I76	0,3826
0,4	0,9595	0,9078	0,8472	0,7782	0,7007	0,6I73	0,5I20
0,6	0,97I0	0,9343	0,89I7	0,8438	0,7909	0,7329	0,6694
0,8	0,9847	0,9654	0,9433	0,9I88	0,8920	0,8633	0,8326

Расчётами было обнаружено интересное обстоятельство - оптимальные значения величин γ_j не зависят (в пределах умеренно больших прогибов) от интенсивности поперечной нагрузки. В табл. 2 представлена зависимость между γ_j и N .

Таблица 3.

p	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	e
I,92	0,3I58	0,4690	0,5932	0,6995	0,7922	0,8733	0,9429	0,8348
2,22	0,3633	0,5062	0,62I7	0,7205	0,8068	0,882I	0,9469	0,8464
2,52	0,4024	0,5365	0,6449	0,7377	0,8I86	0,8893	0,9502	0,8558

Таблица 4.

p	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	e
I,68	0,3073	0,4576	0,5797	0,6852	0,7784	0,86I5	0,9353	0,86II
I,88	0,345I	0,4873	0,6027	0,7024	0,7905	0,8690	0,9388	0,8687
2,08	0,3774	0,5I25	0,6223	0,7I7I	0,8009	0,8755	0,94I8	0,8752
2,28	0,4054	0,5344	0,6392	0,7298	0,8098	0,88II	0,9445	0,8808

В табл. 3, 4 приведены оптимальные значения координат α_j при некоторых значениях интенсивности внешней нагрузки. Табл. 3 соответствует осевому растяжению $N = 0,2$, а в табл. 4 – $N = 0,4$. Таким образом, таблице 3 соответствует вторая строка, а таблице 4 - третья строка в табл. 2.

Таблица 5.

n	I	2	3	4	5	6	7
e	0,9I42	0,8784	0,8584	0,8456	0,8367	0,830I	0,825I
n	8	9	IO	30	50	80	IOO
e	0,82IO	0,8I78	0,8I50	0,7965	0,7922	0,7897	0,7889

Зависимость коэффициента экономии от числа ступеней представлена в табл. 5 (здесь $N=0$ и интенсивность поперечной нагрузки соответствует несущей способности балки). Расчёты показывают, что при увеличении числа n коэффициент экономии приближается к значению 0,7854, который выражает экономию в случае балки с плавно изменяющейся толщиной [7]. Из табл. 5 видно, что разница между экономией данного проекта и экономией проекта с непрерывно меняющейся толщиной составляет в случае $n=10$ лишь 3,8 % (при $n=1$ I6,4 %).

Литература

I. Беленький Л.М., Большие деформации судовых конструкций. Л., "Судостроение", I973.

2. Гопкинс Г., Прагер В., Пределы экономии материала в пластинках. - Механика. Сб. перев. и обз.ин.пер. лит., I956, № 6, II2-II7.

3. Дикович И.Л., Статика упруго-пластических балок судовых конструкций. Л., "Судостроение", I967.

4. Леллеп Я., Параметрическая оптимизация пластических балок. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I982, 627, 50-57.

5. Cinquini C., Kouam M., Optimal plastic design of stiffened shells.- Int. J. Solids and Struct., 1983, 19, № 9, 773 - 783.

6. Cinquini C., Lamblin D., Guerlement G., Variational formulation of the optimal plastic design of circular plates.- Comput. Meth. Appl.Mech. and Eng.,1977,11,№ 1,19-30.

7. Lellep J., Application of the optimal control theory to optimal design of plastic beams in post-yield range.- Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. techn., 1981, 29, № 3 - 4, 159 - 168.

8. Lellep J., Parametrical optimization of plastic beams in the post-yield range.- Int. J. Eng. Sci., 1982, 20. № 1, 67 - 75.

9. Sheu C.Y., Prager W., Optimal plastic design of circular and annular sandwich plates with piecewise constant cross section.- J. Mech. and Phys. Solids, 1969, 17, № 1, 11 - 16.

Optimal design of plastic beams with piece wise constant thickness

J. Lellep, J. Majak

Summary

An optimization technique is developed for rigid-plastic beams with piece wise constant thickness accounting for moderately large deflections. The beams under consideration are subjected to a uniformly distributed transverse loading and to an axial tension. The ends of the beams are fixed so that the end displacements in the transverse direction are avoided but the axial displacements as well as the rotations are admitted. The optimal piece wise constant thickness distribution is sought for under the requirement of minimum material consumption. The deflections of the optimal design are required to coincide with the deflections of an associated beam of constant thickness. Numerical results are presented up to the design with 100 steps.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИ НАГРУЖЕННЫХ ЖЁСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ БАЛОК С УЧЁТОМ МЕМБРАННЫХ ЭФФЕКТОВ

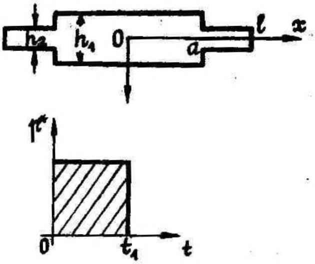
Ю. Лепик
Тартуский государственный университет

Оптимальное проектирование двухступенчатых жёстко-пластических балок под действием динамической нагрузки исследовалось в ряде предыдущих работ автора: в работах [2, 5] при помощи метода модальных движений было найдено приближенное решение задачи, а решение в точной постановке дано в работах [3, 4, 6]. Во всех этих работах считается, что продольная сила в балке отсутствует, т.е. опоры допускают смещение вдоль оси балки. Но интересно исследовать и случай несмещающихся опор; тогда при изгибе балки возникает продольная сила, что в свою очередь вызывает мембранные напряжения. Весьма важно выяснить, как влияют мембранные эффекты на изгиб и на оптимальные параметры балки. Этот вопрос и является объектом исследования данной статьи.

Отметим ещё, что динамический изгиб жёстко-пластических балок постоянной высоты с учётом мембранных усилий исследовался в работах [I, 7, 8].

I. Основные уравнения

Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения. Допустим, что ширина балки B постоянна, а высота изменяется по закону $h^*(x) = h_1$ для $x \in (0, a)$, $h^*(x) = h_2$ для $x \in (a, l)$. Здесь x – координата вдоль оси балки, l – половина длины балки (фиг. I).



Фиг. I.

Ограничимся лишь случаем, когда $h_2 < h_1$. Пусть балка нагружена постоянным давлением p^*, которое в некоторый момент времени $t = t_1$ снимается, и дальнейшее движение балки происходит по инерции (т.н. "прямоугольная нагрузка"). Уравнения движения балки имеют вид

$$\frac{\partial M^*}{\partial x} = Q^*, \qquad \frac{\partial Q^*}{\partial x} = -N\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \varrho B h^*(x)\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} - p^*, \tag{I.I}$$

где w^* – прогиб, M^* – изгибающий момент, Q^* – перерезывающая сила, N – продольная сила; при $t > t_1$ следует взять $p^* = 0$.

Обозначим символом σ_s предел текучести материала (упрочнением пренебрегаем). Введём ещё предельную продольную силу N_s и предельный изгибающий момент по формулам

$$N_s = \sigma_s B h_2, \qquad M_s = \frac{\sigma_s}{4} B h_2^2. \tag{I.2}$$

Кривая предельного состояния сечения балки имеет теперь форму (см., например, [7])

$$\frac{M^*}{M_s} = \left(\frac{h^*(x)}{h_2}\right)^2 - \left(\frac{N}{N_s}\right)^2. \tag{I.3}$$

Этой кривой соответствует ассоциированный закон течения

$$\dot{\varepsilon}^* = \frac{2NM_s}{N_s^2}\dot{\varkappa}^*. \tag{I.4}$$

Здесь обозначено.

$$\dot{\varepsilon}^* = \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial x}\frac{\partial \dot{w}^*}{\partial x}, \qquad \dot{\varkappa}^* = -\frac{\partial^2 \dot{w}^*}{\partial x^2}, \tag{I.5}$$

где u – перемещение вдоль оси x; точками обозначены производные по времени t.

Будем считать, что опоры не могут перемещаться в направлении оси x, т.е. $u(\ell, t) = \dot{u}(\ell, t) = 0$ (вследствие симметрии рассмотрим лишь половину балки). Кроме того, допустим, что конец $x = \ell$ или свободно оперт, или защемлён. Для первого случая имеем краевые условия $w^*(\ell, t) = M^*(\ell, t) = 0$; для второго – $w^*(\ell, t) = 0$, $M^*(\ell, t) = -M_s$.

Перейдём к безразмерным величинам

$$\xi = \frac{x}{\ell}, \qquad \gamma = \frac{h_1}{h_2}, \qquad \alpha = \frac{a}{\ell}, \qquad n = \frac{2N\ell}{\sigma_s V},$$
$$p = \frac{8B\ell^4}{\sigma_s V^2}p^*, \quad M = \frac{4M^*}{\sigma_s B h_2^2}, \quad Q = \frac{4\ell Q^*}{\sigma_s B h_2^2}, \quad t = \tau t_1, \tag{I.6}$$
$$w = \frac{4\varrho B \ell^3 w^*}{3\sigma_s V t_1^2}, \qquad \lambda = \frac{\sigma_s t_1^2}{\varrho \ell^2}.$$

Здесь V – объём балки. В дальнейшем при решении задач оптимизации будем считать величину V заданной. Толщину h_2 можно тогда вычислить из условия $h_2 = V/(2B\ell\Delta)$, где Δ – безразмерный объём, который вычисляется по формуле $\Delta = \alpha\gamma + 1 - \alpha$.

Уравнения движения (I.I) в безразмерной форме имеют следующий вид (в дальнейшем штрихами обозначены производные по ξ, точками – производные по τ) :

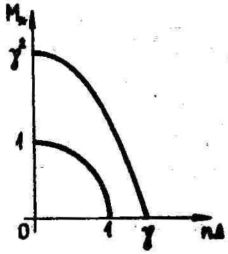
$$M' = Q \ , \quad Q' = -6\Delta^2 \lambda n w'' + 6\Delta\gamma(\xi)\ddot{w} - 2p\Delta^2 . \qquad (I.7)$$

В этой формуле $\gamma(\xi) = \gamma$ для $\xi \in (0,\alpha)$ и $\gamma(\xi) = 1$ для $\xi \in (\alpha, 1)$; при $\tau > 1$ следует считать $p = 0$.

Уравнение предельного состояния (I.3) получает теперь форму (фиг. 2)

$$M_* = \gamma^2(\xi) - (n\Delta)^2 , \qquad (I.8)$$

где верхняя кривая из фиг. 2 соответствует участку $\xi \in (0,\alpha)$, а нижняя – участку $\xi \in (\alpha, 1)$.



Фиг. 2.

Чтобы представить и закон течения в безразмерной форме, введём ещё обозначения

$$\varepsilon = \left(\frac{4\rho B l^4}{3\sigma_s V t_1^2}\right)^2 \varepsilon^* , \quad \varkappa = \frac{4\rho B l^5}{3\sigma_s V t_1^2}\varkappa^* , \quad u = l\left(\frac{4\rho B l^3}{3\sigma_s V t_1^2}\right)^2 u^* .$$

Формулы (I.4) – (I.5) можно теперь написать в виде

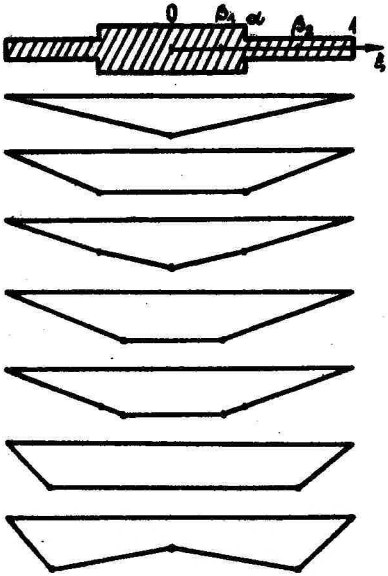
$$3\lambda\dot{\varepsilon} = n\dot{\varkappa}$$
$$\dot{\varepsilon} = \dot{u}' + w'\dot{w}' , \quad \dot{\varkappa} = -\dot{w}'' . \qquad (I.9)$$

2. Интегрирование уравнений движения

При изгибе балки в некоторых сечениях возникают пластические шарниры (они могут быть и нестационарными). Между этими шарнирами материал балки является жёстким. Подробный анализ показывает, что в случае не очень высоких нагрузок имеют место пластические режимы I-7, эпюры скоростей прогиба $\dot{w}$ которых указаны на фиг. 3.(При весьма высоких давлениях возможны ещё 9 дополнительных режимов, которые описаны в [3], стр. 25 и которые для простоты в данной работе не рассматриваются). При выборе этих режимов следует проверить, выполнено ли неравенство (I.8) $|M(\xi)| \leq M_*$ (см. формулу). Если выясняется, что это неравенство не выполняется хотя бы в некоторой точке в некоторый момент времени, то выбранный режим течения следует считать недействительным, и его придётся заменить другим более подходящим режимом.

Допустим, что в некоторый момент времени нам известны распределение скоростей $\dot w(x,t)$, прогибов $w(x,t)$ и параметр n. Тогда мы можем численно проинтегрировать уравнения (I.7) и получить решение для нового момента времени $t + \Delta t$.

Изменение безразмерной продольной силы n определим следующим образом. В жёсткой области имеем $\dot\varepsilon = \dot\varkappa \equiv 0$; из уравнений (I.9) вытекает, что $\dot w' = -A = const$, $\dot u = Aw + const$. Допустим, что в сечении $\xi = s$ имеется пластический шарнир, в силу (I.9) находим



Фиг. 3.

$$\dot u' = -\frac{n}{3\lambda}\dot w'' - w'\dot w' .$$

Интегрируем это уравнение в пределах $s-\varepsilon$ и $s+\varepsilon$ и переходим к пределу $\varepsilon \to 0$. Так как величина $w'\dot w'$ конечна, то

$$\dot u(s_+,\tau) - \dot u(s_-,\tau) = -\frac{n}{3\lambda}\left[\dot w'(s_+,\tau) - \dot w'(s_-,\tau)\right] . \quad (2.I)$$

Таким образом, исходя из условия $\dot u(0,\tau) = 0$, можем пройти весь промежуток $\xi \in [0,1]$ и определить величину $\dot u(1,\tau)$. Но ввиду граничного условия имеем $\dot u(1,\tau) = 0$; из этого требования можем найти новое значение величины n ; подставим его в уравнения (I.7) и проинтегрируем их для следующего момента времени. В этой процедуре встречаются разные переходы из одного режима в другой (более подробно эти переходы описаны в работе [3], стр.28). Эти вычисления проводим до некоторого момента времени $\tau = \tau_s$, когда скорость прогиба становится равной нулю (если не будет перехода в мембранное состояние, о чём будет идти речь в следующем пункте, то движение кончится модальными режимами I или 2 из фиг 3). После этого определим остаточные прогибы $w(\xi,\tau_f)$, чем и заканчивается решение задачи.

Объём данной статьи не позволяет исследовать более подробно все возможные режимы течения. Поэтому в качестве примера проинтегрируем уравнения движения лишь для режима № 6 из фиг. 3. Для этого режима скорости прогиба определяются формулами

$$\dot{w}=\begin{cases} v_0 & \text{для} \quad \xi\in(0,\beta) \\ \dfrac{v_0(1-\xi)}{1-\beta} & \text{для} \quad \xi\in(\beta,1). \end{cases} \tag{2.2}$$

Продифференцируем эти соотношения, учитывая, что величины v_0 и β зависят также от времени; при этом получим

$$\ddot{w}=\begin{cases} \dot{v}_0 & \text{для} \quad \xi\in(0,\beta) \\ \left[\dfrac{\dot{v}_0}{1-\beta}+\dfrac{\dot{\beta}v_0}{(1-\beta)^2}\right](1-\xi) & \text{для} \quad \xi\in(\beta,1). \end{cases}$$

Так как теперь ускорение $\ddot{w}$ известно, можем проинтегрировать уравнения (I.7) по координате ξ. Для конкретности рассмотрим балку со свободно опертыми концами, тогда имеем краевые условия $w'(0,\tau)=Q(0,\tau)=0$, $w(1,\tau)=M(1,\tau)=0$. Так как в точке $\xi=\beta$ возникает пластический шарнир, то в силу условия (I.8) должно быть $M(\beta,\tau)=1-(n\Delta)^2$, $Q(\beta,\tau)=0$. Выполняя все эти требования, а также условия непрерывности Q и M при $\xi=\beta$, приходим к уравнениям

$$\dot{v}_0=\frac{p\Delta\beta}{3(\beta-\alpha+\alpha\gamma)} \tag{2.3}$$

$$v_0\dot{\beta}=0{,}5p\Delta(1-\beta)-\dot{v}_0(1-\beta)-\frac{3\Delta\lambda n}{1-\beta}\left[w(\beta,\tau)+w'(\beta_+,\tau)(1-\beta)\right]-\frac{1-(n\Delta)^2}{2\Delta(1-\beta)}.$$

Определим ещё значение параметра n. Так как $\dot{u}(0,\tau)=0$, а на отрезке $\xi\in(0,\beta)$ также $A=-\dot{w}'=0$, то $\dot{u}(\beta_-,\tau)=0$. Из условия (2.I) находим

$$\dot{u}(\beta_+,\tau)=+\frac{n}{3\lambda}\frac{v_0}{1-\beta}. \tag{2.4}$$

На отрезке $\xi\in(\beta,1)$ имеем $\dot{u}(\xi,\tau)=Aw(\xi,\tau)+const$. Так как $\dot{u}(1,\tau)=w(1,\tau)=0$, то константа в этом выражении равняется нулю. Учитывая, что $A=-\dot{w}'(\xi,\tau)=v_0/(1-\beta)$, находим

$$\dot{u}(\beta_+,\tau)=\frac{v_0}{1-\beta}w(\beta,\tau)\ . \tag{2.5}$$

Приравнивая выражения (2.4) и (2.5), получим

$$n=3\lambda w(\beta,\tau)\ . \tag{2.6}$$

Теперь из системы (2.3) вычисляем производные $\dot{v}_0$, $\dot{\beta}$ и численным интегрированием находим их значения v_0 и β для следующего момента времени $\tau+\Delta\tau$. Прогиб определим по формуле

$$w(\xi,\tau+\Delta\tau)=w(\xi,\tau)+\dot{w}(\xi,\tau)\Delta\tau\ .$$

Новое значение параметра n вычислим из уравнения (2.6). После этого проверим выполнимость неравенства $|M(\xi)|\leq M_*$. Этот процесс можно повторять до тех пор, пока $\beta(\tau)>\alpha$ (в противном случае происходит переход к режимам 2, 3 или 5 из фиг. 3).

3. Мембранное состояние

С увеличением прогибов увеличивается и безразмерная продольная сила n. Это происходит до момента времени, когда $n=1/\Delta$. Теперь из уравнения (I.8) вытекает, что $M^*\equiv 0$ для $\xi\in(\alpha,1)$, и, следовательно, более тонкая часть балки находится в безмоментном состоянии и работает как мембрана (или как струна). В таком случае будем говорить о мембранном состоянии.

Из второго уравнения (I.7) вытекает, что

$$\ddot{w}=\lambda\Delta w''+\frac{1}{3}p\Delta\ , \tag{3.I}$$

причём при $\tau>1$ следует взять $p=0$.

Кроме уравнения (3.I), надо иметь ввиду и закон пластического течения. Так как точка $n\Delta=1$, $M_\Delta=0$ на фиг.2 сингулярна, то вектор скорости деформаций не определяется единственным образом, и закон течения можно написать в виде неравенства

$$-\frac{1}{3\lambda\Delta}\leq\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varkappa}}\leq\frac{1}{3\lambda\Delta}\ . \tag{3.2}$$

Учитывая формулы (I.9) и принимая $\dot{\varepsilon}\approx w'\dot{w}'$, получим

$$-\frac{1}{3\lambda\Delta}\leq+\frac{w'\dot{w}'}{\dot{w}''}\leq\frac{1}{3\lambda\Delta}\ . \tag{3.3}$$

Если на некотором отрезке (ξ_1, ξ_2), где $\alpha \le \xi_1 < \xi_2 \le 1$, выполняются неравенства (3.3), то на этом отрезке придётся интегрировать уравнение (3.I). В противном случае одно из неравенств в (3.3) следует заменить равенством и интегрировать соответствующее уравнение. Учитывая ещё, что концы отрезка (ξ_1, ξ_2) заранее неизвестны и изменяются во времени, решение поставленной задачи в точной постановке ведет к большим математическим затруднениям. Поэтому в работе [7] отказались от точного решения, и построено приближённое решение, при котором игнорируются неравенства (3.3), и уравнение (3.I) считается применимым для всего процесса движения.

Таким образом, мы поступили и в данной работе. Кроме того, допустим, что поле скоростей в средней части балки задаётся линейным соотношением

$$\dot{w} = v_\alpha + \frac{1}{\alpha}(v_0 - v_\alpha)(\alpha - \xi). \qquad (3.4)$$

Исследуем условия сопряжения в сечении $\xi = \alpha$. На основании фиг. 4 можем написать

$$-\frac{\partial w^*}{\partial x}\bigg|_{x=a+} = \varphi^* + \psi^* .$$

Так как

$$\varphi^* = -\frac{\partial w^*}{\partial x}\bigg|_{x=a-} , \qquad \psi^* \approx \tan\psi^* = \frac{|Q^*|}{N_s} = -\frac{Q^*}{N_s} ,$$

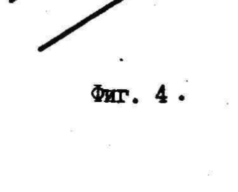
то имеем

$$-\frac{\partial w^*}{\partial x}\bigg|_{x=a+} = -\frac{\partial w^*}{\partial x}\bigg|_{x=a-} - \frac{Q^*(\alpha, \tau)}{N_s}$$

или в безразмерных величинах (I.6)

$$Q(\alpha, \tau) = 6\lambda\Delta[w'(\alpha+, \tau) - w'(\alpha-, \tau)] . \qquad (3.5)$$

Допустим для простоты, что время действия нагрузки t_1 настолько мало, что переход в мембранное состояние происходит при $\tau > 1$. Проинтегрируем уравнения (I.7) в промежутке $\xi \in (0, \alpha)$ с учётом формулы (3.4). Принимая в найденных результатах соответственно $\xi = 0$ и $\xi = \alpha$, находим окончательно



Фиг. 4.

$$Q(\alpha,\tau)=-6\Delta\lambda[w'(\alpha-,\tau)-w'(0,\tau)]+3\Delta\gamma\alpha(\dot{\vartheta}_0+\dot{\vartheta}_\alpha)$$
$$M(0,\tau)=-6\Delta\lambda[w(0,\tau)-w(\alpha,\tau)+\alpha w'(0,\tau)]-\Delta\gamma\alpha^2(2\dot{\vartheta}_0+\dot{\vartheta}_\alpha)\,. \qquad (3.6)$$

Исключая величину $Q(\alpha,\tau)$ из (3.5) – (3.6), получаем

$$\dot{\vartheta}_0+\dot{\vartheta}_\alpha=\frac{2\lambda}{\alpha\gamma}[w'(\alpha+,\tau)-w'(0,\tau)]\,. \qquad (3.7)$$

Далее рассмотрим два частных случая.

Режим M_I. Здесь вся центральная часть $\xi\in(0,\alpha)$ остаётся жёсткой. Так как $\vartheta_\alpha=\vartheta_0$, то $\dot{\vartheta}_0=\dot{\vartheta}_\alpha$ и из уравнения (3.7) находим

$$\dot{\vartheta}_0=\dot{\vartheta}_\alpha=\frac{\lambda}{\alpha\gamma}[w'(\alpha+,\tau)-w'(0,\tau)]\,. \qquad (3.8)$$

Этот случай имеет место, если изгибающий момент в центре балки меньше предельного, т.е. $|M(0,\tau)|<\gamma^2-1$.

Режим M_2. В этом случае в центре $\xi=0$ возникает пластический шарнир, и, следовательно, $M(0,\tau)=\gamma^2-1$. Из второго уравнения системы (3.6) находим, что

$$2\dot{\vartheta}_0+\dot{\vartheta}_\alpha=-\frac{\gamma^2-1}{\Delta\gamma\alpha^2}-\frac{6\lambda}{\alpha^2\gamma}[w(0,\tau)-w(\alpha,\tau)+\alpha w''(0,\tau)]\,. \qquad (3.9)$$

Ускорения $\dot{\vartheta}_0$ и $\dot{\vartheta}_\alpha$ вычислим теперь из формул (3.7) и (3.9).

Краевыми условиями для уравнения (3.I) являются $\dot{w}(\alpha,\tau)=\dot{\vartheta}_\alpha$, $\dot{w}(1,\tau)=w(1,\tau)=0$; кроме того, прогиб w должен быть непрерывным в точке $\xi=\alpha$. Начальные условия определяются величинами $w(\xi,\tau_*)$ и $\dot{w}(\xi,\tau_*)$, где τ_* – момент времени, при котором происходит переход в мембранное состояние. Величина ϑ_α определяется путём интегрирования по времени уравнений (3.7) – (3.9). Уравнение (3.I) было проинтегрировано численно методом конечных разностей. При решении конкретных задач выяснилось, что режим M_2 может перейти в M_I (т.е. средняя часть полностью затвердеет). Пусть это происходит в момент времени τ_{**}. До этого момента мы, согласно формуле (3.4), имеем линейное по ξ распределение скоростей, а после перехода в режим M_I скорости средней части уже не зависят от ξ. Следовательно, в момент времени τ_{**} скорости прогиба претерпевают разрыв (фактически мы имеем здесь явление удара). В таком случае поле скоростей $\dot{w}(\xi, \tau_{**}+)$ было найдено из требования, чтобы импульсы до и после момента времени τ_{**} были равны.

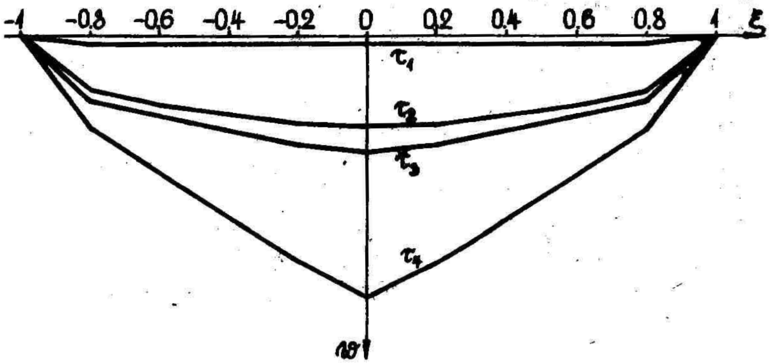
4. Численные результаты об изгибе балок

При анализе численных результатов для балок различной формы (но одинакового объёма) целесообразно сопоставлять такие балки, на которые действует одинаковый импульс, т.е. $J^* = p^* t_1 = const$. Переходя к безразмерным величинам, можем это требование записать в форме

$$J = p\sqrt{\lambda} = const. \qquad (4.I)$$

Если мы не хотим учитывать мембранных эффектов, следует взять $n = 0$

При решении конкретных задач мы переходим в разные режимы течения из фиг. 3. Например, при $\alpha = 0,8$, $\gamma = I,4$, $\lambda = 0,00I$, $J = I$ и в случае свободного опирания движение начнётся с режима 6, в момент времени $\tau_1 = I,07$ переходим в режим 5; при $\tau_2 = 7,78$ в режим 4. При $\tau > \tau_3 = 9,93$ реализуется режим I, и движение заканчивается в момент времени $\tau_4 = 34,46$.



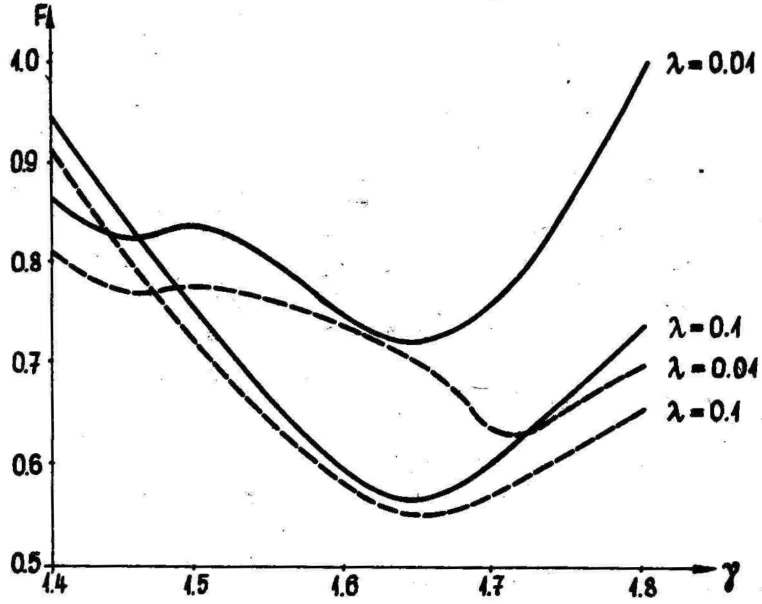
Фиг. 5.

Эпюры прогибов для этих моментов времени указаны на фиг. 5.

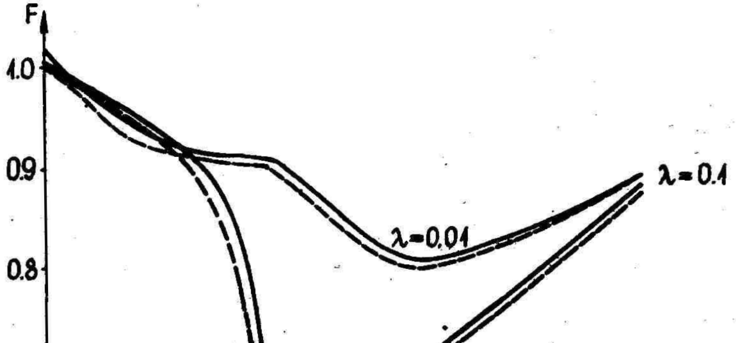
Были проведены ещё вычисления для $J = I$, причём в случае свободно опертой балки было зафиксировано значение $\alpha = 0,8$, а для жёстко-заделанной балки взято $\alpha = 0,4$. Прогибы характеризуются отношением

$$F = \frac{w(0,\tau_f)}{w_0}\ , \tag{4.I}$$

где символом w_0 обозначен остаточный прогиб в центре балки постоянной высоты (без учёта мембранных усилий). Параметр γ считается переменным. Зависимости $\gamma - F$ для двух значений параметра λ представлены на фиг. 6 – 7 (диаграмма 6 соответствует случаю свободного опирания, диаграмма 7 – жёсткой заделке). Пунктирными линиями обозначены прогибы балок без учёта мембранных усилий. Из этих графиков вытекает, что, применяя двухступенчатые балки вместо однородных балок, можем значительно уменьшить остаточные прогибы (например, в случае свободно опертой балки при $\lambda = 0,I$ это уменьшение достигает 45 %). Из фиг. 6 – 7 вытекает ещё одно обстоятельство, которое на первый взгляд кажется парадоксальным – именно, прогибы с учётом мембранного эффекта больше, чем без него. Это связано с уменьшением предельного момента, определенного по формуле (I.8). Такое явление доминирует при малых импульсах. При более высоких импульсах более тонкая часть балки начинает работать как струна, и можно ожидать, что вследствие этого прогибы уменьшаются и будут меньше, чем в случае балок со смещающимися опорами. Это допущение подтверждают и экспериментальные данные (см., например, [9], фиг. 7 – I0). Результаты вычислений для более высоких значений импульсов будут опубликованы в дальнейшем.


F
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
1.4
1.5
1.6
1.7
1.8
γ
λ = 0.01
λ = 0.1
λ = 0.01
λ = 0.1

Фиг. 6.


F
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
1.0
1.1
1.2
1.3
1.4
γ
λ = 0.1
λ=0.01

Фиг. 7.

5. Оптимальное проектирование балок

Следуя работам [2, 3-6], поставим задачу оптимизации следующим образом. Заданы импульс и объём балки, а также коэффициент λ, определённый соотношением (I.6). Надо найти такие значения параметров формы балки α и γ, при которых остаточный прогиб в центре балки будет минимален. Чтобы дать больше свободы проектировщику, будем фиксировать один из параметров (например α) и найдем оптимальное значение другого. При этом придётся решать задачу одномерного поиска, для которого можно применить один из известных алгоритмов нелинейного программирования (в данной работе был применён метод золотого сечения). Результаты вычислений, проведённые при $J = 1$, представлены в таблице I. Величина F в этой таблице вычисляется опять по формуле (4.I). В скобках даны соответствующие значения для γ и F балок со смещающимися опорами (т.е. без учёта мембранных эффектов).

Из этой таблицы вытекает, что оптимальные значения для параметра γ с учётом и без учёта мембранных усилий практически совпадают (исключением является лишь случай свободно опертой балки при $\alpha = 0,2$ и $\lambda = 0,I$). Отсюда можно сделать вывод, что по крайней мере в случае небольших импульсов учёт мембранных усилий оказывает лишь небольшое влияние на оптимальные проекты балок. Что касается остаточных прогибов, то из таблицы I видно, что они опять немножко превосходят значения, полученные для балок со смещающимися опорами (причина этого явления выяснена в п. 4 данной работы).

Таблица I.

Свободное опирание

α	$\lambda = 0,I$		$\lambda = 0,0I$	
	γ	F	γ	F
0,2	I,38 (I,03)	0,874 (0,852)	I,03 (I,03)	0,880 (0,882)
0,3	I,06 (I,06)	0,8II (0,767)	I,06 (I,06)	0,830 (0,808)
0,4	I,II (I,II)	0,725 (0,692)	I,II (I,II)	0,774 (0,747)
0,5	I,I7 (I,I8)	0,656 (0,632)	I,I8 (I,I8)	0,706 (0,689)
0,6	I,27 (I,28)	0,605 (0,589)	I,27 (I,28)	0,700 (0,655)
0,7	I,4I (I,44)	0,575 (0,565)	I,4I (I,44)	0,690 (0,635)
0,8	I,65 (I,62)	0,565 (0,566)	I,64 (I,7I)	0,692 (0,632)

Жёсткая заделка

α	$\lambda = 0{,}I$		$\lambda = 0{,}0I$	
	γ	F	γ	F
0,2	I,04 (I,04)	0,7I8 (0,674)	I,09 (I,09)	0,887 (0,860)
0,3	I,09 (I,09)	0,650 (0,6I4)	I,I8 (I,I7)	0,824 (0,8I4)
0,4	I,I6 (I,I6)	0,603 (0,569)	I,2I (I,2I)	0,807 (0,792)
0,5	I,27 (I,27)	0,582 (0,582)	I,34 (I,34)	0,80I (0,786)
0,6	I,44 (I,42)	0,666 (0,636)	I,5I (I,52)	0,837 (0,8I9)
0,7	I,67 (I,68)	0,802 (0,8I0)	I,74 (I,78)	0,926 (0,898)

Литература

I. Дикович Л.И., Динамика упруго-пластических балок. Л., Судпромгиз, I962.

2. Лепик Ю.Р., Оптимальное проектирование жёстко-пластических балок под действием динамических нагрузок. -Уч. зап. Тартуск. ун-та, I979, 487, I6-27.

3. Лепик Ю.Р., Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения. - Таллин, "Валгус", I982.

4. Лепик Ю.Р., Оптимальное проектирование жёстко-пластических балок ступенчато-постоянной высоты под действием импульсного нагружения. -Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела, I983, № I, I36-I42.

5. Lepik Ü., Mróz Z., Optimal design of plastic structures under impulsive and dynamic pressure loading.- Int.J. Solids and Struct., 1977, 13, № 7, 657 - 674.

6. Lepik Ü., Optimal design of rigid-plastic simply supported beams under dynamic pressure loading.-Int.J. Solids and Struct., 1982, 18, № 4, 285 - 295.

7. Symonds P.S., Mentel T.J., Impulsive loading of plastic beams with axial constraints.- J. Mech. and Phys. Solids 1958, 6, 186 - 196.

8. Symonds P.S., Jones N., Impulsive loading of fully clamped beams with finite plastic deformations and strain-rate sensitivity.- Int. J. Mech. Sci., 1972, 14, №1,49-69.

9. Symonds P.S., Elastic, finite deflection and strain rate effects in a mode approximation technique for plastic

deformation of pulse loaded structures.- J.Mech. Eng. Sci., 1980, 22, № 4, 189 - 197.

Optimal design of dynamically loaded rigid-plastic beams taking account of the membrane effects

Ü.Lepik

Summary

Dynamic response of a rigid-plastic stepped beam, loaded by a uniform pressure over a time interval $0 < t < t_1$, is discussed. The ends of the beam are either simply supported or clamped. The edge constraints prevent axial displacements, so that the membrane action must be taken into account.

Equations of motion of the beam are given; they are integrated numerically for a set of different yield mechanisms, the effect of moving plastic hinges is also taken into account. Residual deflections of the beam are found.

The following optimization problem has been set up: the load intensivity and the beam's volume are prescribed; such beam dimensions, for which the residual deflections are minimal, have to be calculated.

In order to estimate the membrane effect, numerical calculations for different beams are carried out.

РАСЧЕТ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

С. Ханнус

Тартуский государственный университет

В работе [I] изложена методика расчёта напряжённо-деформационного состояния геометрически нелинейных трёхслойных замкнутых оболочек, края которых шарнирно закреплены. В дальнейшем этот метод применяется при расчёте однородных открытых оболочек с защемлёнными концами.

I. Постановка задачи

Рассмотрим однородную круговую цилиндрическую оболочку длины 2ℓ, радиуса A и толщины h. Оболочка подвержена действию равномерно распределённой поперечной внутренней нагрузки интенсивности P и осевого растяжения N_1. Допустим, что материал оболочки жёстко-пластический, удовлетворяющий аппроксимированному нелинейному условию текучести [2]

$$n_1^2 + n_2^2 - n_1 n_2 + m^2 - 1 \leq 0 ,$$

где m, n_1, n_2 – безразмерные обобщённые напряжения. При определении напряжённо-деформационного состояния оболочки учитываем умеренно большие прогибы, т.е. прогибы до порядка толщины оболочки.

При сделанных допущениях поставленная задача сводится к краевой задаче, при которой система дифференциальных уравнений имеет вид [I]

$$\begin{aligned}
&m' = q ,\\
&q' = \frac{4 n_1 \alpha w m}{\sqrt{1 - m^2 - \frac{3}{4} n_1^2}} + \alpha\left(p - \frac{n_1}{2} - \sqrt{1 - m^2 - \frac{3}{4} n_1^2}\right) ,\\
&w' = z\\
&z' = \frac{\alpha w m}{\sqrt{1 - m^2 - \frac{3}{4} n_1^2}} ,\\
&u' = -\frac{1}{2} z^2 + \frac{\alpha w \left(\frac{3}{2} n_1 - \sqrt{1 - m^2 - \frac{3}{4} n_1^2}\right)}{8\sqrt{1 - m^2 - \frac{3}{4} n_1^2}}
\end{aligned} \qquad (I)$$

Здесь m – изгибающий момент, q – перерезывающая сила, w, u – перемещения соответственно перпендикулярно к образующей цилиндра и вдоль оболочки, n_1 – растяжение, p – – давление, α – геометрический параметр оболочки в безразмерном виде. Безразмерные величины связаны с действительными формулами

$$\xi=\frac{x}{\ell}, \quad m=\frac{M}{M_0}, \quad n_1=\frac{N_1}{N_0}, \quad n_2=\frac{N_2}{N_0},$$

$$p=\frac{A}{N_0}P, \quad w=\frac{N_0}{4M_0}W, \quad u=\frac{N_0^2\ell}{16M_0^2}U, \quad \alpha=\frac{N_0\ell^2}{M_0A},$$

где $M_0=\sigma_0 h^2/4$ и $N_0=\sigma_0 h$ – предельные обобщённые напряжения и σ_0 – предел текучести.

При рассматрении из-за симметрии лишь правой части оболочки в случае жестко защемлённой оболочки уравнениям (I) соответствуют граничные условия

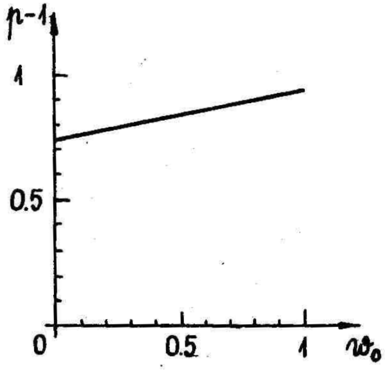
$$q(0)=0, \quad z(0)=0, \quad u(0)=0, \quad m(1)=\sqrt{1-\tfrac{3}{4}n_1^2}, \quad w(1)=0. \quad (2)$$

2. Численное решение краевой задачи

Краевая задача (I), (2) решена на ЭВМ методом Рунге-Кутта четвёртого порядка. При этом а) задаются отсутствующие граничные условия на левом конце отрезка $[0,1]$, б) решается соответствующая задача Коши и в) выбираются новые начальные значения фазовых координат. Эту процедуру повторяют до тех пор, пока граничные условия на правом конце отрезка интегрирования удовлетворяются заданной точностью.

Практическое решение задачи на ЭВМ при заданных краевых условиях затруднительно, поскольку в процессе минимизации функционала $|\sqrt{1-0{,}75n_1^2} - m(1)| + |w(1)|$ под знаком квадратного корня появляются отрицательные числа. Для преодоления этой трудности квадратный корень вычисляется при необходимости от абсолютной величины данного выражения. Этот способ предложен в работе [3], где отмечено, что данный способ не имеет математического обоснования, но практические результаты оправдают его использование. Разумеется, решение, получаемое в процессе итерации, должно удовлетворять истинным краевым условиям.

Полученные результаты приведены на фиг. I и в табл. I – 3. На фиг. I изображена зависимость между прогибом в срединном сечении оболочки w_0 и давлением. В табл. I приведены результаты вычислений при $\alpha = 4$, $n_1 = 0.I$. Табл. 2 соответствует случаю $\alpha = 4$, p = I.93, табл. 3 – случаю $n_1 = 0.I$, p = I.93.



Фиг. I.

Таблица I.

ξ	p = I,83			p = I,93		
	m	w	n_2	m	w	n_2
0	-0,690	0,480	0,768	-0,68I	0,997	0,777
0,2	-0,62I	0,445	0,829	-0,6I8	0,925	0,83I
0,4	-0,4I4	0,354	0,956	-0,426	0,739	0,950
0,6	-0,077	0,236	I,043	-0,I00	0,495	I,04I
0,8	0,386	0,II5	0,968	0,366	0,24I	0,977
I	0,996	-0,000	0,078	0,996	0,000	0,07I

Таблица 2.

ξ	$n_1 = 0,I5$			$n_1 = 0,2$		
	m	w	n_2	m	w	n_2
0	-0,679	0,606	0,797	-0,676	0,4I9	0,8I7
0,2	-0,6I6	0,562	0,852	-0,6I2	0,389	0,872
0,4	-0,422	0,449	0,972	-0,4I8	0,3I0	0,992
0,6	-0,096	0,300	I,062	-0,093	0,208	I,08I
0,8	0,367	0,I46	0,996	0,367	0,I0I	I,0I4
I	0,99I	0,000	0,098	0,985	0,000	0,I09

Таблица 3.

ξ	$\alpha = 3,6$			$\alpha = 3,8$		
	m	w	n_2	m	w	n_2
0	-0,730	0,457	0,728	-0,705	0,728	0,754
0,2	-0,657	0,423	0,799	-0,638	0,675	0,8I5
0,4	-0,444	0,337	0,942	-0,435	0,538	0,946
0,6	-0,098	0,226	I,04I	-0,099	0,360	I,04I
0,8	0,376	0,IIO	0,973	0,37I	0,I75	0,975
I	0,996	-0,000	0,076	0,996	-0,000	0,059

Литература

I. Леллеп Я., Ханнус С., Большие прогибы жёстко-пластических замкнутых цилиндрических оболочек. - Уч. зап. Тартуск. ун-та, I983, 659, 59-65.

2. Розенблюм В.И., Приближённая теория равновесия пластических оболочек. - Прикл. мат. и мех., I954, I8, № 3, 289-302.

3. Haydl H.M., Sherbourne A.N., Plastic analysis of shallow spherical shells under combined loading at moderately large deflections.- Z. angew. Math. und Mech., 1974, 54, № 2, 73 - 82.

Calculation of plastic cylindrical shells in the case of large deflections

S. Hannus

Summary

Rigid-plastic cylindrical clamped shells subjected to the uniformly distributed internal pressure and axial dead load are considered by taking account of the post yield behaviour. The homogeneus shells are studied assuming that the material obeys a nonlinear approximation of the Von Mises criterion. Numerical results are presented.

ОПТИМАЛЬНАЯ НЕОДНОРОДНОСТЬ СФЕРИЧЕСКОГО СОСУДА ПОД ДАВЛЕНИЕМ

К. Хейн, М. Хейнлоо
Тартуский государственный университет

За последние годы заметно усилилось внимание исследователей к задачам теории упругости неоднородных и кусочно-однородных тел. По этому направлению отметим библиографический указатель [I] и книгу [2]. Почти во всех задачах по теории упругости неоднородных и кусочно-однородных тел, решенных ранее, непрерывная неоднородность задается некоторой наперед заданной функцией, а кусочная однородность – заданным расположением, размерами и формами однородных частей. По-видимому, впервые задача об определении оптимальной непрерывной неоднородности была поставлена в работе [4]. Здесь для сферического сосуда под заданным внутренним давлением найдено такое распределение модуля Юнга, которое обеспечивает минимальное значение перемещения на внешней полости сферы. Поставленная задача решалась методом функционалов Лагранжа при следующих ограничениях: I. Материал сосуда несжимаем; 2. Себестоимость сосуда-заданная величина; 3. Деформации сосуда остаются упругими; 4. Распределение модуля Юнга ограничено снизу и сверху. В работе [5] получено оптимальное распределение модуля сдвига для призматического стержня, обеспечивающее максимальную жесткость конструкции. В работе [6] найдено оптимальное распределение упругих свойств неоднородного линейного тела, дающее экстремальное значение его упругому потенциалу. Общие принципы определения оптимальной кусочно-однородности в многослойных сферических сосудах, цилиндрических трубах и круглых дисках сформулированы в работе [3]. Здесь были найдены также точные аналитические критерии выбора материалов и геометрических размеров слоев многослойного сферического сосуда под наружным давлением, обеспечивающие впервые выполнение условия пластичности Треска или Мизеса сразу на всех внутренних радиусах слоев.

В первом пункте данной работы поставлена задача об определении оптимального непрерывного распределения модуля Юнга в сферическом сосуде под внутренним и внешним давлениями, гарантирующее выполнение условия пластичности Треска или Мизеса впервые сразу во всех точках сосуда. Оказывается, что сформулированная задача имеет простое и точное решение. Во втором пункте результаты, полученные в первом пункте, обобщаются на случай многослойного сферического сосуда. Представлены графики, определяющие оптимальные распределения модуля Юнга в различных условиях, и график иллюстрирующий эффективность проектирования неоднородных сферических сосудов.

Далее удобно пользоваться следующими безразмерными величинами:

$$r_i = \frac{\rho_i}{\ell}, \quad E_i = \frac{E_i^0}{p}, \quad \sigma_{\theta_i} = \frac{\sigma_{\theta_i}^0}{p}, \quad \sigma_{r_i} = \frac{\sigma_{r_i}^0}{p}, \quad \alpha_i = \frac{a_i}{\ell}, \quad \nu_i,$$

$$p_i = \frac{p_i^0}{p}, \quad u_i = \frac{u_i^0}{\ell}, \quad \alpha_{N+1} = \frac{b}{\ell}, \quad \sigma_i = \frac{\sigma_i^0}{p}, \quad p_{N+1} = \frac{p_{N+1}^0}{p},$$

где p, ℓ - характерное давление и линейный размер; E_i^0, ν_i - модули Юнга и коэффициенты Пуассона ($i = 1,2,\dots,N$); $\sigma_{r_i}^0$, $\sigma_{\theta_i}^0 = \sigma_{\varphi_i}^0$, u_i^0 - компоненты напряжений и смещений; a_i - внутренние радиусы слоев; p_j^0 ($j = 2,3,\dots,N$) - контактные давления на поверхностях контакта слоев в многослойном сферическом сосуде; p_1^0, b, p_{N+1}^0 - внутреннее давление, внешний радиус и наружное давление для сферического сосуда; $\rho_i (a_i \leq \rho_i \leq b_i)$ - текущие радиусы; σ_i^0 - пределы текучести материалов.

I. Определение оптимальной непрерывной неоднородности

В этом пункте индексы в безразмерных величинах будут опущены. Для сферического сосуда под давлением справедливо уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 . \qquad (I.I)$$

Предположим сначала, что

$$2(\sigma_\theta - \sigma_r) = C_1 . \qquad (I.2)$$

Подставляя равенство (I.2) в дифференциальное уравнение (I.I) и интегрируя последнее, получим

$$\sigma_r = C_1 \ln r + C_2 . \qquad (I.3)$$

Здесь константы интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий $\sigma_r(\alpha_1) = -p_1$; $\sigma_r(\alpha_2) = -p_2$ и имеют вид

$$C_1 = \frac{p_2 - p_1}{\ln \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} ; \qquad C_2 = \frac{p_1 \ln \alpha_2 - p_2 \ln \alpha_1}{\ln \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} . \qquad (I.4)$$

Подставив закон Гука

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E(r)}(\sigma_r - 2\nu\sigma_\theta)\,; \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E(r)}\Big[(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r\Big] \qquad (I.5)$$

в уравнение совместности деформаций

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_r + r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0$$

и пользуясь формулами (I.2), (I.3), приходим к следующему дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\frac{d\ln E(r)}{dr} = \frac{3C_1}{r\big[n(C_1\ln r + C_2) + C_1\big]}\,, \qquad (I.6)$$

где

$$n = \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu}\,.$$

Интересно заметить, что при $\nu = 0.5$ имеем $n = 0$, и дифференциальное уравнение (I.6) принимает вид

$$\frac{d\ln E(r)}{dr} = \frac{3}{r}\,.$$

Это уравнение имеет решение

$$\frac{E(r)}{E(\alpha_2)} = \left(\frac{r}{\alpha_2}\right)^3. \qquad (I.7)$$

Независимость решения (I.7) от граничных условий указывает на недопустимость предположения о несжимаемости материала в рассматриваемой задаче. При $\nu \neq 0.5$ решение дифференциального уравнения (I.6) можно представить в виде

$$\frac{E(r)}{E(\alpha_2)} = \left|\frac{n(C_1\ln r + C_2) + C_1}{n(C_1\ln\alpha_2 + C_2) + C_1}\right|^{\frac{3}{n}}. \qquad (I.8)$$

Условие пластичности Треска или Мизеса выполняется впервые сразу во всех точках сосуда, если

$$\frac{1}{2}|C_1| = \sigma\,. \qquad (I.9)$$

С учетом (I.4) равенство (I.9) можно представить в виде

$$p^* = 2\sigma\ln\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\,, \qquad (I.10)$$

где $p^* = |p_2 - p_1|$ называется далее параметром нагрузки, или в виде

$$p_2 = p_1 + 2\ell\sigma \ln\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad , \tag{I.II}$$

где $\ell = +1$, если $p_2 > p_1$ и $\ell = -1$, если $p_2 < p_1$. Подставляя (I.II) в (I.4), а затем (I.4) в (I.8), получим окончательно

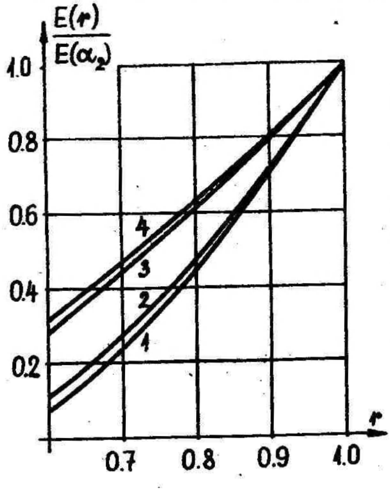
$$\frac{E(r)}{E(\alpha_2)} = \left| \frac{2\ell\sigma + n\left(p_1 - 2\ell\sigma \ln\frac{\alpha_1}{r}\right)}{2\ell\sigma + n p_2} \right|^{\frac{3}{n}} . \tag{I.I2}$$

Заметим, что из (I.I2) при $\ell = +1$ следуют неравенства $0 < E(r)/E(\alpha_2) < \infty$. При $\ell = -1$ эти неравенства имеют место, когда

$$\frac{p_2}{\sigma} \neq \frac{1-\nu}{1-2\nu} - 2\ln\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \,; \qquad \frac{1-\nu}{1-2\nu} \neq \frac{p_2}{\sigma} \,.$$

При $p_1 < p_2$ решение существует всегда.

Таким образом, в случае существования решения рассматриваемой задачи формулы (I.7) и (I.I2) дают оптимальное распределение модуля Юнга, гарантирующее при параметре нагрузки, подсчитанном по формуле (I.I0), выполнение условия пластичности Треска или Мизеса сразу во всех точках сосуда.



Фиг. I.

На фиг. I приведены для иллюстрации оптимальные распределения величины $E(r)/E(\alpha_2)$ по радиусу сферического сосуда, когда $\alpha_1 = 0.6$ и $\alpha_2 = 1.0$. Кривые I,2,3,4 подсчитаны по формуле (I.I2). На кривых I, 2 имеем $p_2 = 0$, $p_1 = 1.022$ и на кривых 3, 4 – $p_1 = 0$, $p_2 = 1.022$. Кривые 2, 3 подсчитаны при $\nu = 0.33$, а кривые I, 4 – при $\nu = 0.25$.

В случае однородного сферического сосуда предельное значение параметра нагрузки, когда условие пластичности

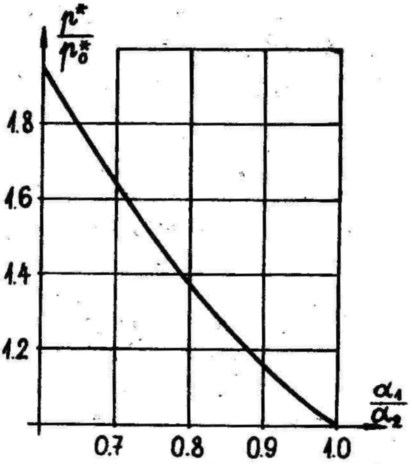
Треска или Мизеса выполняется только на внутренней полости сосуда, вычисляется по формуле

$$p_0^* = \frac{2}{3}\sigma\left[1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right] .$$

Эту формулу легко можно получить на основании, например, работы [3]. Эффективность построения непрерывно неоднородных сферических сосудов можно оценить формулой

$$\frac{p^*}{p_0^*} = \frac{3\ln\frac{a_2}{a_1}}{1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3} .$$

График зависимости p^*/p_0^* от a_1/a_2, приведенный для иллюстрации на фиг. 2, показывает высокую эффективность построения неоднородных сферических сосудов вместо однородных.



Фиг. 2.

2. Определение оптимальной кусочно-непрерывной неоднородности

Рассмотрим теперь многослойный сферический сосуд, представляющий набор из N связанных между собой концентрических сфер, материалы которых различные. Предположим здесь также, что сосуд нагружен равномерными внутренним и внешним давлениями. В данном случае для i-го неоднородного слоя аналогично формуле (I.II) теперь получим

$$p_{i+1} = p_i + 2\ell_i\sigma_i \ln\frac{a_{i+1}}{a_i} , \qquad (2.I)$$

где $l_i=+1$, если $p_{i+1}>p_i$ и $l=-1$, если $p_{i+1}<p_i$. Из (2.I) после суммирования по индексу i находим

$$p^*=2\left|\sum_{i=1}^{N} l_i\sigma_i \ln\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\right| , \tag{2.2}$$

где $p^*=|p_{N+1}-p_1|$. Из (2.2) следует, что параметр нагрузки p^* имеет наибольшее значение, если все l_i одного и того же знака, т.е. $l_i=l$, где теперь $l=+1$, если $p_{N+1}>p_1$ и $l=-1$, если $p_{N+1}<p_1$. Так как $\sigma_i>0$ и $\ln(\alpha_{i+1}/\alpha_i)>0$, то p^* можно вычислить по формуле

$$p^*=2\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\ln\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} . \tag{2.3}$$

Исследуем теперь p^* на максимум относительно параметров α_s $(s=2,3,\dots,N)$. Для этого находим

$$\frac{\partial p^*}{\partial\alpha_s}=\frac{2}{\alpha_s}(\sigma_{s-1}-\sigma_s) . \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что при $\sigma_{s-1}=\sigma_s$ параметр нагрузки p^* не зависит от α_s. При $\sigma_{s-1}\neq\sigma_s$ получим, что параметр нагрузки p^* имеет максимальное значение, если в рассматриваемой конструкции лишь один неоднородный слой, имеющий предел текучести $\sigma=max(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_N)$. Этот случай рассмотрен в пункте I. Далее рассмотрим многослойные сферические сосуды с кусочно-непрерывной неоднородностью, имеющие во всех слоях одинаковые пределы текучести. В этом случае для параметра нагрузки p^* из (2.3) получим

$$p^*=2\sigma\ln\frac{\alpha_{N+1}}{\alpha_1} . \tag{2.5}$$

Из (I.I0) и (2.5) следует, что в значениях параметра нагрузки мы ничего не выиграем, если рассмотрим вместо непрерывно неоднородного сферического сосуда многослойный сферический сосуд с кусочно-непрерывной неоднородностью. Здесь выигрыш проявляется в более широких возможностях выбора материалов слоев. Решение для многослойного сферического сосуда с кусочно-непрерывной неоднородностью можно использовать для исследования влияния различия коэффициента Пуассона в слоях на распределение модуля Юнга.

Для вычисления смещений в i-ом слое используем формулу

$$\varepsilon_{\theta_i} = \frac{u_i}{r_i} \quad . \tag{2.6}$$

Из равенства (2.6) с помощью формул (I.2) и (I.3) в применении к i-му слою получим

$$u_i = \frac{r_i}{E_i(r_i)}\left[(1-2\nu_i)(C_{1i}\ln r_i + C_{2i}) + \frac{1-\nu_i}{2}C_{1i}\right], \tag{2.7}$$

где константы C_{1i} и C_{2i} определяются для i-го слоя так же, как и в пункте I, и вычисляются по формулам

$$C_{1i} = \frac{p_{i+1} - p_i}{\ln\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}}} \quad ; \qquad C_{2i} = \frac{p_i \ln\alpha_{i+1} - p_{i+1}\ln\alpha_i}{\ln\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}}} . \tag{2.8}$$

Подставляя (2.I) при $\ell_i = \ell$ и $\sigma_i = \sigma$ в (2.8), а затем (2.8) в (2.7), находим следующую формулу для определения смещений:

$$u_i = \frac{r_i}{E_i(r_i)}\left[(1-2\nu_i)\left(2\ell\sigma\ln\frac{\alpha_i}{r_i} - p_i\right) - \ell\sigma(1-\nu_i)\right]. \tag{2.9}$$

Пользуясь условием сопряжения слоев $u_k(\alpha_{k+1}) = u_{k+1}(\alpha_{k+1})$, к = I, 2, ... , $N-1$ и формулой (2.9), найдем, что

$$\frac{E_k(\alpha_{k+1})}{E_{k+1}(\alpha_{k+1})} = \frac{(1-2\nu_k)p_{k+1} + \ell\sigma(1-\nu_k)}{(1-2\nu_{k+1})p_{k+1} + \ell\sigma(1-\nu_{k+1})} . \tag{2.I0}$$

Эта формула определяет скачки модуля Юнга при переходе через контактные поверхности. Для i-го слоя вместо (I.I2) теперь имеем

$$\frac{E_i(r_i)}{E_i(\alpha_{i+1})} = \left[\frac{2\ell\sigma + n_i\left(p_i - 2\ell\sigma\ln\frac{\alpha_i}{r_i}\right)}{2\ell\sigma + n_i p_{i+1}}\right]^{\frac{3}{n_i}} . \tag{2.II}$$

Нетрудно убедиться в справедливости формулы

$$\frac{E_k(r_k)}{E_N(\alpha_{N+1})} = \frac{E_k(r_k)}{E_k(\alpha_{k+1})} \prod_{j=k}^{N-1}\left[\frac{E_j(\alpha_{j+1})}{E_{j+1}(\alpha_{j+1})} \cdot \frac{E_{j+1}(\alpha_{j+1})}{E_{j+1}(\alpha_{j+2})}\right] \tag{2.I2}$$

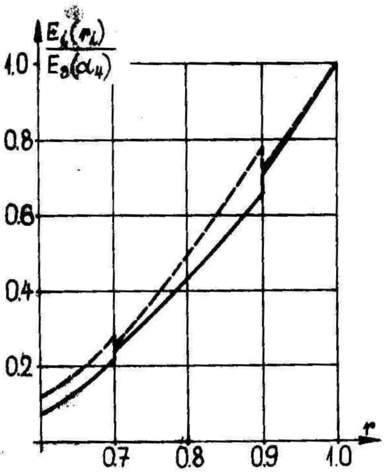
$$(k = 1, 2, \dots, N-1)$$

Пользуясь формулами (2.I0) - (2.I2) находим окончательно

$$\frac{E_k(r_k)}{E_N(\alpha_{N+1})} = B_k \left[\frac{2\ell\sigma + n_k\left(p_k - 2\ell\sigma \ln\frac{\alpha_k}{r_k}\right)}{2\ell\sigma + n_k p_{k+1}} \right]^{\frac{3}{n_k}} , \qquad (2.I3)$$

где

$$B_k = \prod_{j=k}^{N-1} \left[\frac{(1-2\nu_j)p_{j+1} + \ell\sigma(1-\nu_j)}{(1-2\nu_{j+1})p_{j+1} + \ell\sigma(1-\nu_{j+1})} \right] \left[\frac{2\ell\sigma + n_{j+1}p_{j+1}}{2\ell\sigma + n_{j+1}p_{j+2}} \right]^{\frac{3}{n_{j+1}}} .$$



Фиг. 3.

На фиг. 3 для иллюстрации представлены распределения величин $E_i(r_i)/E_3(\alpha_4)$ по радиусу сосуда, подсчитанные по формулам (2.II) при $i = 3$ и (2.I3) при $k = $ = I, 2. При этом на сплошной кривой $p_4 = 0$, $p_1 = $ = I.022, $\sigma = $ I.0, $\ell = $ -I, $\alpha_1 = 0.6$, $\alpha_2 = 0.7$, $\alpha_3 = $ = 0.9, $\alpha_4 = $ I.0, $\nu_1 = 0.25$, $\nu_2 = 0.33$, $\nu_3 = 0.25$, а на штрихованной кривой $p_4 = 0$, $p_1 = $ I.022, $\sigma = $ I.0, $\ell = $ = +I, $\alpha_1 = 0.6$, $\alpha_2 = 0.7$, $\alpha_3 = 0.9$, $\alpha_4 = $ I.0, $\nu_1 = $ = 0.33, $\nu_2 = 0.25$, $\nu_3 = 0.33$. Из фиг. 3 следует, что распределение коэффициента Пуассона по слоям сильно влияет на кусочно-непрерывное распределение модуля Юнга по радиусу трехслойного сферического сосуда.

В заключение авторы благодарят проф. Ю.В.Немировского и к.ф.-м.н. Б.С.Резникова за обсуждение результатов данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

I. Колчин Г.Б., Теория упругости неоднородных тел (библиографический указатель отечественной и иностранной литературы). Кишинев, Изд. „Штиинца", 1972.

2. Ломакин В. А., Теория упругости неоднородных тел. М., Изд. МГУ, 1976.

3. Немировский Ю. В., Хейнлоо М. Л., Одномерная задача прочности и оптимального проектирования неоднородных многослойных сферических и цилиндрических сосудов или круглых дисков.- Прикл. пробл. прочн. и пластичн., I976, вып. 5, 3 - I4.

4. Klosowicz B., The nonhomogeneous spherical pressure vessel of maximum rigidity.- Bull. Acad. Polon. Sci., ser. sci. techn., 1968, 16, № 7, 557 - 568.

5. Klosowicz B., Sur la nonhomogénéité optimale d'une barre tordue.- Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. techn., 1970, 18, № 8, 339 - 343.

6. Klosowicz B., Lurie K.A., On the optimal distribution of elastic moduli of a nonhomogeneous body.- J. Optimiz. Theor. and Appl., 1973, 12, № 1, 32 - 42.

The optimal nonhomogeneity of a spherical vessel under pressure

K. Hein, M. Heinloo

Summary

The problem of optimal nonhomogeneity, that quarantees satisfaction of the Tresca or Mises yield condition first and at once in all points of a spherical vessel of single - or multilayer case, is stated in this work. The exact solution of this problem has been got. For the illustration of the results, the optimal distribution of Young modulus for the case of single and three layer, have been brought out. The effectiveness of the projection of such constructions has been discussed in this work.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОДАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ОПОРЫ К ЖЁСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Г. Оленев
Тартуский государственный университет

Одним из простейших способов уменьшения податливости конструкции является установка к ней дополнительных опор. Причём их расположение желательно выбрать так, чтобы при этом достигался минимум некоторой характерной величины, например, максимального остаточного прогиба.

Оптимальное проектирование жёстко-пластических цилиндрических оболочек с дополнительными опорами в случае динамической нагрузки исследовалось Я.Леллепом в работе [6]. Оптимальное расположение дополнительных опор к импульсно нагруженным жёстко-пластическим цилиндрическим оболочкам произвольной длины было найдено в работе [4].

К значительно более математически простым решениям по сравнению с решением в точной постановке приводит приближённый метод модальных движений, который был предложен в 1966 г. Дж.Мартином и П. Саймондсом [2] для исследования задач динамического изгиба жёстко-пластических конструкций. Этот метод используется в данной работе для решения задачи об оптимальном расположении дополнительной опоры к импульсно нагруженной цилиндрической оболочке, причём устанавливается, что совпадение результатов при приближённом и точном решениях является удовлетворительным лишь для коротких оболочек.

I. Исходные соотношения

Расcмотрим расположенную горизонтально жёстко-пластическую цилиндрическую оболочку длины ℓ, радиуса R с толщиной стенки, равной h. Левый конец оболочки жёстко заделан, а правый - свободен. Установим к оболочке круговую жёсткую опору, препятствующую прогибанию оболочки в месте установки и расположенную на расстоянии s от левого конца оболочки, в котором поместим начало координатной оси Ox, направленной вдоль образующей оболочки. Пусть в начальный момент времени

$t=0$ оболочка не деформирована, но подвержена воздействию внешней равномерной импульсной нагрузки, т.е. все её точки, кроме опорных, имеют одинаковую скорость v_0 по направлению внутренней нормали к срединной поверхности оболочки. Отметим что в силу симметрии используемого нами условия текучести данное решение справедливо и для внутренней импульсной нагрузки (в этом случае по сравнению с решением при внешней нагрузке надо поменять знаки у рассматриваемых ниже функций $M(x,t)$, $N(x,t)$ и $W(x,t)$).

Требуется определить такое расположение дополнительной опоры, при котором максимальный остаточный прогиб оболочки принимал бы минимальное значение.

Динамический изгиб жёстко-пластической цилиндрической оболочки в осесимметрическом случае при малых прогибах и отсутствии осевой силы мы будем изучать при помощи метода модальных движений. Согласно этому методу скорость прогиба по направлению внутренней нормали к срединной поверхности оболочки задаётся в виде

$$\dot{W}(x,t)=\Phi(t)v(x) , \qquad (I.I)$$

где $\Phi(t)$ есть амплитудная функция, зависящая только от времени t, а $v(x)$ - пространственная мода, зависящая лишь от x - координаты по образующей оболочки.

Как показано в работах Дж.Мартина и П.Саймондса [2] и З.Мруза и Ю.Лепика [3], для жёстко-пластического материала амплитудная функция $\Phi(t)$ является убывающей линейной функцией:

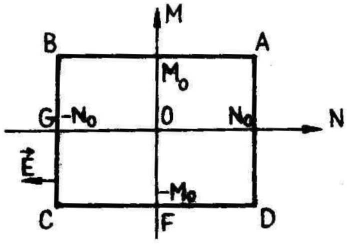
$$\Phi(t)=Ct+\mathcal{D}, \quad \text{где } C<0 , \ \mathcal{D}>0 .$$

Уравнение движения цилиндрической оболочки имеет вид

$$M''(x,t)+\frac{N(x,t)}{R}=\mu\ddot{W}(x,t) , \qquad (I.2)$$

где $M(x,t)$ и $N(x,t)$ - осевой изгибающий момент и окружная сила на единицу длины соответственно, μ - поверхностная плотность оболочки. Здесь и далее штрихи и точки обозначают дифференцирование по x и t соответственно.

Будем пользоваться предложенным Ф.Г.Ходжем [5] условием текучести, при котором предельная кривая ограничивает прямоугольник $|M|\leq M_0$, $|N|\leq N_0$ (фиг. I) ,



Фиг. I.

где $M_0 = 0{,}25\sigma_0 h^2$ и $N_0 = \sigma_0 h$ – – предельный изгибающий момент и предельная окружная сила на единицу длины соответственно при пределе текучести σ_0. Вектор скоростей деформации имеет вид

$$\vec{E} = (-\dot{W},\ -\frac{Rh}{2}\dot{W}'') .$$

2. Оптимальное расположение дополнительной опоры

Если взять амплитудную функцию $\Phi(t)$ одинаковой для всей оболочки, то в силу равенства (I.I) и условия $W(x,0)=0$ будем иметь

$$W(x,t) = v(x)\int_0^t \Phi(t)dt ,$$

откуда

$$\max_{0\le x\le l} W(x,t_f) = \max_{0\le x\le l} v(x)\cdot\int_0^{t_f}\Phi(t)dt ,$$

где t_f – момент окончания движения.

Таким образом, в этом случае оптимальное расположение дополнительной опоры получается путём минимизации величины $\max\limits_{0\le x\le l} v(x)$ и не зависит от того, каким спососбом сравнивается действительное начальное поле скоростей v_0 и модальная скорость $v(x)$.

Действуя таким способом, для жёстко заделанной с левого и свободной с правого конца цилиндрической оболочки из требования минимальности максимального остаточного прогиба можно получить, что при $l/\sqrt{hR} \le 2\sqrt{3}+\sqrt{3/2}$ оптимальная координата дополнительной опоры равна

$$s_{\text{опт}} = \frac{2\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}l ,$$

а при $l/\sqrt{hR} > 2\sqrt{3}+\sqrt{3/2}$ получается, что максимальный остаточный прогиб принимает минимальное значение для любого s из отрезка

Заметим, что при $\ell/\sqrt{hR} > 2\sqrt{3} + \sqrt{3/2}$

$$2\sqrt{3hR} < s_{opt} = \frac{2\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}\ell < \ell - \sqrt{\frac{3}{2}hR} .$$

В дальнейшем мы для левой $(0 \le x \le s)$ и правой $(s \le x \le \ell)$ частей оболочки будем пользоваться различными амплитудными функциями.

Заметим, что при использовании метода модальных движений начальное модальное поле скоростей далеко не всегда совпадает с действительным начальным полем скоростей. Для максимального сближения картины деформирования конструкции при этих различных начальных полях скоростей предложены различные методы, позволяющие разумно выбрать значение амплитудной функции в начальный момент времени (см. монографию Ю. Лепика [I], § 2). Мы представим решение исходной задачи, когда для сравнения начальных действительного и модального полей скоростей используется как метод Дж. Мартина и П. Саймондса [2], так и "метод кинетической энергии", предложенный Х. Липпманом [7].

Рассмотрим более подробно модальное движение короткой левой части оболочки.

Амплитудная функция здесь имеет вид $\Phi_{11}(t) = C_{11}t + D_{11}$. Зададим функцию $v(x)$ в виде (фиг. 2)

$$v(x) = \begin{cases} \dfrac{A_1}{a}x, & 0 \le x \le a, \\ \dfrac{A_1}{s-a}(s-x), & a \le x \le s. \end{cases} \qquad (2.I)$$

При этом реализуются следующие пластические режимы:

$$0 \le x \le a \to C-B, \qquad a \le x \le s \to B-C .$$

Отсюда следует, что в уравнении (I.2) мы должны взять $N = -N_0$. При этом уравнение (I.2) принимает вид

$$M'' = p + q_{11}v(x) ,$$

где $p = N_0/R$, $q_{11} = C_{11}p$.

Интегрируя это уравнение с учётом (2.I) и условий

$$M(0,t) = -M_0, \quad M(a,t) = M_0, \quad M'(a,t) = 0, \quad M(s,t) = -M_0,$$

приходим к соотношениям

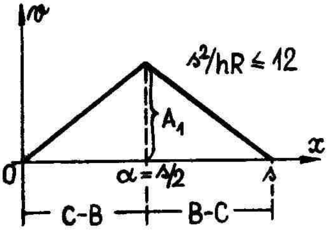
$$\alpha^2(3p+2q_{11}A_1)=-12M_0\,,$$
$$(s-\alpha)^2(3p+2q_{11}A_1)=-12M_0\,,$$

откуда получаем, что $\alpha=s/2$, а

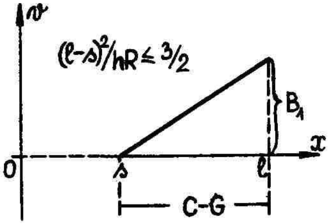
$$A_1=-\frac{3}{2q_{11}}\left(p+\frac{16M_0}{s^2}\right)\,. \tag{2.2}$$

Изгибающий момент при модальном движении не зависит от времени. Необходимое условие $|M|\leq M_0$ при $0\leq x\leq s$ в данном случае равносильно одновременному выполнению условий $M'(0)\geq 0$ и $M'(s)\leq 0$, каждое из которых выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $s^2/(hR)\leq 12$, т.е. тогда, когда мы имеем дело с короткой левой частью оболочки.

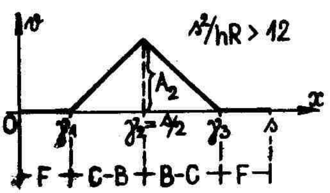
Для короткой правой, длинной левой и длинной правой частей оболочки пространственные моды $\vartheta(x)$ и пластические режимы показаны на фиг. 3–5, а амплитудные функции обозначены через Φ_{12}, Φ_{21} и Φ_{22} соответственно, причём на фиг. 3–5 указаны подлежащие определению параметры, а $\Phi_{ij}(t)=C_{ij}t+\mathcal{D}_{ij}$, $(i,j=1,2)$.



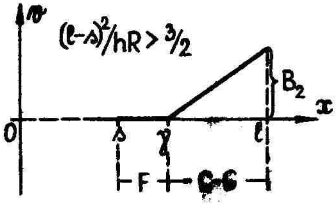
Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Действуя, как и в случае короткой левой части оболочки, находим, что

$$B_1 = -\frac{3}{2q_{12}}\left[p + \frac{2M_0}{(\ell-s)^2}\right], \quad A_2 = -\frac{2p}{q_{21}}, \quad B_2 = -\frac{2p}{q_{22}}, \quad (2.3)$$

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \gamma_3 - \gamma_2 = 2\sqrt{\frac{3M_0}{p}}, \quad \gamma = \ell - \sqrt{\frac{6M_0}{p}},$$

где $p = N_0/R$, а $q_{ij} = C_{ij}\varkappa$, $(i, j = 1,2)$.

В случае короткой правой части оболочки необходимое условие $|M| \le M_0$ при $s \le x \le \ell$ равносильно неравенству $(\ell-s)^2/(hR) \le 3/2$. Без ограничения общности можно положить, что $\gamma_2 = s/2$. Для длиной левой части оболочки условие $\gamma_3 - \gamma_1 < s$ равносильно имеющему место в данном случае неравенству $s^2/(hR) > 12$, а осевой изгибающий момент на отрезке $\gamma_1 \le x \le \gamma_2 = s/2$ монотонно возрастает от $-M_0$ до M_0, а на отрезке $\gamma_2 = s/2 \le x \le \gamma_3$ монотонно убывает от M_0 до $-M_0$. Наконец, в случае длинной правой части оболочки условие $s < \gamma$ равносильно имеющему место в данном случае неравенству $(\ell-s)^2/(hR) > 3/2$, а осевой изгибающий момент на отрезке $\gamma \le x \le \ell$ монотонно возрастает от $-M_0$ до нуля.

Отметим, что в случае длинной левой части оболочки уравнение движения (I.2) будет тождественно удовлетворено на отрезках $0 \le x \le \gamma_1$ и $\gamma_3 \le x \le s$, если принять, что на них $M(x,t) \equiv -M_0$, а $N(x,t) \equiv 0$ (на этих отрезках $v(x) \equiv 0$), т.е. если для зон $0 \le x \le \gamma_1$ и $\gamma_3 \le x \le s$ выбран пластический режим F (фиг. I). Аналогичное замечание можно сделать для отрезка $s \le x \le \gamma$ при рассмотрении деформации длинной правой части оболочки.

Применим сначала метод Мартина-Саймондса [2] для сравнения действительного начального поля скоростей и начального модального поля скоростей. Согласно этому методу в случае короткой левой части оболочки, например, коэффициент $\mathcal{D}_{11} = \Phi_{11}(0)$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{D}_{11} = \frac{\int_0^s v_0 v(x)\,dx}{\int_0^s v^2(x)\,dx} = \frac{3v_0}{2A_1}.$$

Отсюда, учитывая также 2.2 и то, что $C_{11}=q_{11}/\mu$, получим, что момент t_{11} окончания движения короткой левой части оболочки

$$t_{11}=-\frac{\vartheta_{11}}{C_{11}}=\frac{\mu v_0}{\mu+16M_0/s^2},$$

поэтому для максимального остаточного прогиба W_{11} в случае короткой левой части оболочки имеем соотношение

$$W_{11}(s)=\max_{0\le x\le s} v(x)\cdot\int_0^{t_{11}}\Phi_{11}(t)dt=\frac{3\mu v_0^2}{4(p+16M_0/s^2)}. \qquad (2.4)$$

Применяя метод Мартина-Саймондса и действуя аналогичным способом с учётом соотношений (2.3) и вида пространственных мод, показанных на фиг. 3-5, находим максимальные остаточные прогибы W_{12}, W_{21} и W_{22} для короткой правой, длинной левой и длинной правой частей оболочки соответственно

$$W_{12}(s)=\frac{3\mu v_0^2}{4[p+2M_0/(\ell-s)^2]}, \quad W_{21}=W_{22}=\frac{9\mu v_0^2}{16p}, \quad \left(p=\frac{N_0}{R}\right). \qquad (2.5)$$

Таким образом, максимальные остаточные прогибы W_1 и W_2 для левой и правой частей оболочки соответственно можно записать в виде

$$W_1(s)=\begin{cases} W_{11}(s), & 0\le s\le 2\sqrt{3hR}, \\ W_{21}, & 2\sqrt{3hR}\le s\le \ell, \end{cases}$$

$$W_2(s)=\begin{cases} W_{22}, & 0\le s\le \ell-\sqrt{\frac{3}{2}hR}, \\ W_{12}(s), & \ell-\sqrt{\frac{3}{2}hR}\le s\le \ell, \end{cases}$$

где $W_{11}(s)$, $W_{12}(s)$, W_{21} и W_{22} вычисляются по формулам (2.4) и (2.5). Отсюда следует, что в случае метода Мартина-Саймондса максимальный остаточный прогиб для всей оболочки

$$\max\{W_1(s),\ W_2(s)\} \quad \text{при} \quad \ell/\sqrt{hR} < 2\sqrt{3}+3/2$$

достигает минимума при $s=2\sqrt{2}\,\ell/(1+2\sqrt{2})$, а при $\ell/\sqrt{hR}\ge 2\sqrt{3}+3/2$ максимальный остаточный прогиб является постоянной от s функцией.

Применим теперь метод кинетической энергии [7] для сравнения начальных действительного и модального полей скоростей. Учитывая, что действительное начальное распределение скорости равномерно по длине оболочки, согласно этому методу для короткой левой части оболочки, например, можем написать равенство

$$\frac{s}{l}\mathcal{K}_0=\pi\mu R\mathcal{D}_{11}^2\int_0^s v^2(x)dx\ ,$$

где $\mathcal{K}_0$ – начальная кинетическая энергия действительного движения для всей оболочки. Отсюда согласно (2.I) находим, что

$$\mathcal{D}_{11}=\frac{1}{A_1}\sqrt{\frac{3\mathcal{K}_0}{\pi\mu l R}}\ .$$

Учитывая (2.2), а также то, что $C_{11}=q_{11}/\mu$, для момента t_{11} окончания движения короткой левой части оболочки, получим, что

$$t_{11}=-\frac{\mathcal{D}_{11}}{C_{11}}=\frac{2}{3(p+16M_0/s^2)}\sqrt{\frac{3\mu\mathcal{K}_0}{\pi l R}}\ .$$

Теперь найдём максимальный остаточный прогиб w_{11} для короткой левой части оболочки

$$w_{11}(s)=\max_{0<x<s} v(x)\cdot\int_0^{t_{11}}\Phi_{11}(t)dt=\frac{\mathcal{K}_0}{\pi l R(p+16M_0/s^2)}\ . \qquad (2.6)$$

Требуя, чтобы начальные кинетические энергии действительного и модального движений для каждой части оболочки были равны, и, учитывая соотношения (2.3) и вид пространственных мод, показанных на фиг. 3–5, найдём максимальные остаточные прогибы w_{12} , w_{21} и w_{22} для короткой правой, длинной левой и длинной правой частей оболочки соответственно

$$w_{12}(s)=\frac{\mathcal{K}_0}{\pi l R[p+2M_0/(l-s)^2]}\ ,$$

$$(2.7)$$

$$w_{21}(s)=\frac{3s\mathcal{K}_0}{8\pi p l R\sqrt{3hR}}\ , \qquad w_{22}(s)=\frac{3(l-s)\mathcal{K}_0}{4\pi p l R\sqrt{\frac{3}{2}hR}}\ ,$$

$$\left(p=\frac{N_0}{R}\right).$$

Максимальные остаточные прогибы w_1 и w_2 для левой и правой частей оболочки соответственно теперь можно записать в виде

$$w_1(s) = \begin{cases} w_{11}(s), & 0 \le s \le 2\sqrt{3hR}, \\ w_{21}(s), & 2\sqrt{3hR} \le s \le \ell, \end{cases}$$

$$w_2(s) = \begin{cases} w_{22}(s), & 0 \le s \le \ell - \sqrt{\frac{3}{2}hR}, \\ w_{12}(s), & \ell - \sqrt{\frac{3}{2}hR} \le s \le \ell, \end{cases}$$

где $w_{11}(s)$, $w_{21}(s)$, $w_{12}(s)$ и $w_{22}(s)$ вычисляются по формулам (2.6) и (2.7).

Отсюда находим, что максимальный остаточный прогиб для всей оболочки $\max\{w_1(s), w_2(s)\}$ при любом значении величины $\ell/\sqrt{hR}$ достигает минимума при

$$s = \frac{2\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}\ell \approx 0{,}7388\ell .$$

Сравнивая этот результат с точным решением, представленным в работе [4], видим, что совпадение приближённого и точного решений является удовлетворительным лишь при малых значениях величины $\ell/\sqrt{hR}$.

Литература

1. Лепик Ю., Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения. Таллин, "Валгус", 1982, 196 с.
2. Мартин Дж., Саймондс П., Модальные аппроксимации для импульсно нагруженных жёстко-пластических конструкций. - Механика. Сб. перев. и обз. ин. пер. лит., 1973, № 5, 128-149.
3. Мруз З., Лепик Ю.Р., Оптимальное проектирование конструкций при импульсном нагружении. - Механика полимеров, 1977, № 6, 1021 - 1028.
4. Оленев Г., Об оптимальном расположении дополнительной опоры к жёстко-пластической цилиндрической оболочке при импульсном нагружении. - Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1983, 659, 42-51.
5. Hodge P.G., Impact pressure loading of rigid-plastic cylindrical shells.- J. Mech. and Phys. Solids, 1955, 3, № 3, 376-388.

6. Lellep J., Optimal location of additional supports for plastic cylindrical shells subjected to impulsive loading.-Int.J.Non-Linear Mech.,1984,19,№ 4,323-330.
7. Lippmann H., Kinetics of the axisymmetric rigid-plastic membrane subject to initial impact.- Int. J.Mech.Sci., 1974, 16, № 5, 297 - 303.

Application of the method of mode form motions to the problem of optimal location of an additional support for a rigid-plastic cylindrical shell

G. Olenev

Summary

Optimal location of a rigid circular support for a rigid-plastic cylindrical shell, subjected to the initial transverse impulse is sought for the condition that the maximal residual deflection attains a minimal value. One end of the shell is clamped and the other is free. The material of the shell is assumed to obey the rectangular yield condition. This problem is solved with the aid of the approximate mode form technique. Martin-Symonds method and the method of kinetic energy are used to obtain the approximations of the actual initial velocity fields. It is shown that the exact and the approximate results are quite adequate in the case of short shells.

ОПТИМАЛЬНАЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОСТЬ МНОГОСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ ПОД ДАВЛЕНИЕМ

М. Хейнлоо
Тартуский государственный университет

В работе [I] сформулированы общие принципы определения оптимальной кусочно-однородности в многослойных сферических сосудах, цилиндрических трубах и круглых дисках. Реализация этих принципов в общем случае приводит к задачам нелинейного программирования с большим количеством варьируемых параметров и ограничений. Наряду с численными методами определения оптимальной кусочно-однородности большое значение имеют любые приближённые и тем более точные аналитические методы. В работах, проанализированных в обзорной части работы [I], оптимизация проводилась за счёт создания предварительных натягов или зазоров между слоями. В данной работе максимизация нагрузки (или минимизация толщины стенки трубы) в области упругих деформаций при заданных поперечных размерах трубы (или при заданной нагрузке) проводится за счёт выбора механических характеристик материалов и радиусов поверхностей контакта слоёв. Получено точное аналитическое решение.

I. Критерии выбора механических характеристик материалов и радиусов поверхностей контакта слоёв

Пусть кусочно-однородная многослойная цилиндрическая труба представляет собой набор из N связанных между собой одноосных цилиндрических труб, материалы которых в общем случае различные и находятся в условиях плоской деформации.

Удобно ввести следующие безразмерные величины: $r_i = \dfrac{\varrho_i}{a_{N+1}}$;

$$E_i = \frac{E_i^0}{E_N^0} \quad ; \quad \sigma_{\theta_i} = \frac{\sigma_{\theta_i}^0}{p} \quad ; \quad \sigma_{r_i} = \frac{\sigma_{r_i}^0}{p} \quad ; \quad \alpha_i = \frac{a_i}{a_{N+1}} \quad ;$$

$$p_i = \frac{p_i^0}{p} \quad ; \quad u_i = \frac{u_i^0}{a_{N+1}} \quad ; \quad \sigma_i = \frac{\sigma_i^0}{p} \quad ; \quad p_{N+1} = \frac{p_{N+1}^0}{p} \quad ;$$

ν_i ; $\sigma_{z_i} = \nu_i(\sigma_{\theta_i} + \sigma_{r_i})$, где p – характерное давление, E_i^0, ν_i, σ_i^0 – модули Юнга, коэффициенты Пуассона и пределы текучести материалов; $\sigma_{r_i}^0$, $\sigma_{\theta_i}^0$, $\sigma_{z_i}^0$, u_i^0 – компоненты напряжений и смещений; a_i – внутренние радиусы;

a_{N+1} , p_1^0 , p_{N+1}^0 – наружный радиус, внутреннее и внешнее давления для многослойной цилиндрической трубы ;
p_j^0 $(j = 2, 3, \ldots, N)$ – контактные давления;
ϱ_i $(a_i \le \varrho_i \le a_{i+1})$ – текущие радиусы.

Для вычисления напряжений σ_{r_i} , σ_{θ_i} и смещений u_i в слое с номером i (i = I, 2,..., N ; нумерация начинается от внутреннего радиуса многослойной цилиндрической трубы) имеем известные формулы Ламе

$$\sigma_{r_i} = C_{1i} - C_{2i} r_i^{-2} \quad ; \tag{I.I}$$

$$\sigma_{\theta_i} = C_{1i} + C_{2i} r_i^{-2} \quad ; \tag{I.2}$$

$$u_i = r_i(1+\nu_i)E_i^{-1}\left[(1-2\nu_i)C_{1i} + C_{2i} r_i^{-2}\right] \quad , \tag{I.3}$$

где константы C_{1i} и C_{2i} вычисляются по формулам

$$C_{1i} = \frac{a_i^2 p_i - a_{i+1}^2 p_{i+1}}{a_{i+1}^2 - a_i^2} \quad ; \quad C_{2i} = \frac{(p_i - p_{i+1}) a_i^2 a_{i+1}^2}{a_{i+1}^2 - a_i^2} \quad . \tag{I.4}$$

Предполагается, что во всех слоях сразу впервые выполняются условия пластичности Треска. Эти условия могут быть записаны, например, в виде следующей системы уравнений и неравенств:

$$\max_{a_i \le r_i \le a_{i+1}} \left|\sigma_{\theta_i}(r_i) - \sigma_{r_i}(r_i)\right| = \sigma_i \quad ; \tag{I.5}$$

$$\left|\sigma_{\theta_i}(r_i) - \sigma_{z_i}(r_i)\right| \le \sigma_i \quad ; \tag{I.6}$$

$$\left|\sigma_{r_i}(r_i) - \sigma_{z_i}(r_i)\right| \le \sigma_i \quad . \tag{I.7}$$

Так как

$$\max_{a_i \le r_i \le a_{i+1}} \left|\sigma_{\theta_i}(r_i) - \sigma_{r_i}(r_i)\right| = \frac{2\left|p_i - p_{i+1}\right| a_{i+1}^2}{a_{i+1}^2 - a_i^2} \quad , \tag{I.8}$$

то равенства (I.5) можно записать в виде

$$p_i - p_{i+1} = \frac{1}{2} l_i \sigma_i (1 - x_i) \quad , \tag{I.9}$$

где $x_i = a_i^2 a_{i+1}^{-2}$ и $l_i = +1$, если $p_i > p_{i+1}$ и $l_i = -1$, если $p_i < p_{i+1}$. Суммируя все уравнения в (I.9) по индексу i , можно записать

$$P = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{N} \ell_i \sigma_i (1 - x_i)\right| , \qquad (\text{I.10})$$

где $P = |p_1 - p_{N+1}|$. Из (I.10) следует, что с целью максимизации значения параметра нагрузки P необходимо принять все ℓ_i одного и того же знака, т.е.

$$\ell_i = \ell , \qquad (\text{I.11})$$

где $\ell = +1$, если $p_1 > p_{N+1}$ и $\ell = -1$, если $p_1 < p_{N+1}$. Поскольку $\sigma_i > 0$ и $x_i < 1$, то с учётом (I.11) можно записать (I.10) в виде

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \sigma_i (1 - x_i) . \qquad (\text{I.12})$$

Подберем величины α_s ($s = 2, 3, \ldots, N$) так, чтобы параметр нагрузки P, определённый теперь выражением (I.12), имел максимальное значение. Для этого из (I.12) находим производные

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha_s} = -\sigma_s \alpha_s^{-3} \alpha_{s+1}^{-2} (\alpha_s^4 - \sigma_{s-1} \sigma_s^{-1} \alpha_{s-1}^2 \alpha_{s+1}^2) ,$$

откуда следует, что параметр нагрузки P имеет наибольшее значение, если

$$\alpha_s^4 = \sigma_{s-1} \sigma_s^{-1} \alpha_{s-1}^2 \alpha_{s+1}^2 . \qquad (\text{I.13})$$

Условиям (I.13) с учётом обозначения $x_i = \alpha_i^2 \alpha_{i+1}^{-2}$ можно придать вид $\sigma_s x_s = \sigma_{s-1} x_{s-1}$; ($s = 2, 3, \ldots, N$), откуда находим, что

$$\sigma_s x_s = \sigma_1 x_1 \;\; ; \;\; (s = 2, 3, \ldots, N) . \qquad (\text{I.14})$$

Учитывая (I.14), представим (I.12) в виде

$$P = \frac{1}{2}(\varkappa_N - N \sigma_1 x_1) , \qquad (\text{I.15})$$

где

$$\varkappa_j = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_j . \qquad (\text{I.16})$$

Пользуясь условиями (I.14) и равенством $\alpha_1^2 = x_1 x_2 \ldots x_N$, находим

$$\sigma_1 x_1 = \sqrt[N]{\omega_N \alpha_1^2} \quad , \qquad (I.17)$$

где

$$\omega_j = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_j \quad . \qquad (I.18)$$

Подставляя (I.17) в (I.15), получим следующее окончательное выражение для параметра нагрузки P:

$$P = \frac{1}{2}\left(\varkappa_N - N \sqrt[N]{\omega_N \alpha_1^2}\right) . \qquad (I.19)$$

Подберём теперь σ_j так, чтобы параметр нагрузки P, определённый выражениями (I.19), достигал глобального максимума. Для этого вычислим производные

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma_i} = \frac{1}{2}\sigma_i^{-1}\left(\sigma_i - \sqrt[N]{\omega_N \alpha_1^2}\right) ; \quad (i = 1, 2, \ldots, N) ,$$

откуда видно, что параметр нагрузки P не может иметь локальных экстремумов. Исследование полного дифференциала от функции $P(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N)$ показывает, что глобальный максимум параметра нагрузки P достигается на границе области $\sigma_{min} \leq \leq \sigma_j \leq \sigma_{max}$, где σ_{min}, σ_{max} – минимальное и максимальное возможные значения параметра σ_j, если при

$$\sigma_m > \sqrt[N]{\omega_N \alpha_1^2} \qquad (I.20)$$

принять $\sigma_m = \sigma_{max}$ и при

$$\sigma_n \leq \sqrt[N]{\omega_N \alpha_1^2} \qquad (I.21)$$

принять $\sigma_n = \sigma_{min}$.

Заметим, что параметр нагрузки P не зависит от последовательности расположения материалов в слоях. Расположим материалы так, чтобы выполнялись неравенства

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \ldots \leq \sigma_N \quad . \qquad (I.22)$$

Такое расположение материалов в слоях позволяет удовлетворить условиям (I.14) и $x_i < 1$. В соответствии с неравенствами (I.20)-(I.22) параметр нагрузки P имеет глобальный максимум, если при $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \ldots \leq \sigma_t \leq \sqrt[N]{\omega_N \alpha_1^2} \leq \sigma_{t+1} \leq \sigma_{t+2} \leq \ldots \leq \sigma_N$

принять $\sigma_{min} = \sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_t < \sigma_{t+1} = \sigma_{t+2} = \sigma_N = \sigma_{max}$.

Отметим также, что при заданном значении параметра нагрузки P значение параметра α_1, вычисляемого тогда по формуле (I.19), определяет минимальную толщину стенки многослойной цилиндрической трубы, когда внутренний или внешний радиус этой трубы задан наперед.

Формулы для вычисления контактных давлений p_j ($j = 2, 3, \ldots, N$) находим из (I.9) с учётом (I.11) и получим

$$p_j = p_1 - \frac{1}{2}\ell\left[\varkappa_{j-1} - (j-1)\sigma_1 x_1\right] . \qquad (I.23)$$

С помощью формул (I.23) представим (I.4) в виде

$$C_{2i} = \frac{1}{2}\ell\sigma_i\alpha_i^2 \ ; \qquad C_{1i} = -p_i + \frac{1}{2}\ell\sigma_i . \qquad (I.24)$$

Подставляя (I.3) с учётом (I.24) в условия сопряжения слоев

$$u_k(\alpha_{k+1}) = u_{k+1}(\alpha_{k+1}) \ ; \qquad k = 1, 2, \ldots, N-1 ,$$

получим

$$E_k E_{k+1}^{-1} = A_k B_k^{-1} , \qquad (I.25)$$

где

$$A_k = (1+\nu_k)\left\{(1-2\nu_k)\left[-2p_1 + \varkappa_k\ell - (k-1)\sigma_1 x_1\ell\right] + \sigma_1 x_1\ell\right\} ;$$

$$B_k = (1+\nu_{k+1})\left\{(1-2\nu_{k+1})\left[-2p_1 + \varkappa_{k+1}\ell - k\sigma_1 x_1\ell\right] + \ell\sigma_{k+1}\right\} .$$

Здесь величины $\sigma_1 x_1$ и $\varkappa_j$ вычисляются по формулам (I.17) и (I.16). Пользуясь равенствами (I.25), находим следующие формулы для вычисления величин E_k :

$$E_k = \prod_{j=k}^{N-1} A_j B_j^{-1} \ ; \qquad (k = 1, 2, \ldots, N-1) . \qquad (I.26)$$

С помощью условия (I.14) и равенства $\alpha_1^2 = x_1 x_2 \ldots x_N$ получим

$$x_i = \sigma_i^{-1}\sqrt[N]{\omega_N\alpha_1^2} . \qquad (I.27)$$

В соответствии с обозначением $x_i = \alpha_i^2\alpha_{i+1}^{-2}$ имеем

$$\alpha_j^2 x_1 x_2 \ldots x_{j-1} = \alpha_1^2 \ ; \qquad (j = 2, 3, \ldots, N) . \qquad (I.28)$$

Подставляя (I.27) в (I.28), получим следующие формулы для определения величин α_j $(j = 2, 3, \ldots, N)$:

$$\alpha_j = \alpha_1 \eta_{j-1} \left(\sqrt[N]{\eta_N \alpha_1}\right)^{1-j} , \qquad (I.29)$$

где $\eta_j = \sqrt{\omega_j}$.

Таким образом, формулы (I.14), (I.20), (I.21), (I.26), (I.29) определяют оптимальную кусочно-однородность многослойной цилиндрической трубы под давлением, обеспечивающей глобальный максимум параметра нагрузки P , определённый формулой (I.19) (или глобальный минимум параметра поперечных размеров α_1) при заданном параметре поперечных размеров α_1 (при заданном параметре нагрузки P), если выполняются неравенства (I.6) и (I.7). Ограничения, накладываемые этими неравенствами на полученные критерии, будут рассмотрены в п.3.

2. Случаи одинаковых пределов текучести

Рассмотрим теперь подробнее случаи, когда пределы текучести материалов одинаковые. Сначала заметим, что в случае, когда неравенство (I.20) выполняется при всех возможных значениях индекса m , глобальный максимум параметра нагрузки P имеется в случае, когда все пределы текучести имеют одинаковые значения, равные максимально возможному значению σ_{max} . В рассматриваемом случае формулы (I.14), (I.19) и (I.29) значительно упрощаются и принимают следующий вид:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_N \; ; \qquad (2.1)$$

$$P = \frac{1}{2} N \left(1 - \sqrt[N]{\alpha_1^2}\right) \sigma_{max} \; ; \qquad (2.2)$$

$$\alpha_j = \alpha_1 \sqrt[N]{\alpha_1^{1-j}} \; . \qquad (2.3)$$

В формулах (I.26) теперь имеем $\sigma_1 = \sigma_{max}$, и в соответствии с выражениями (I.16) и (I.27) следует принять $\varkappa_j = j\sigma_{max}$ и

$$x_1 = \sqrt[N]{\alpha_1^2} \; . \qquad (2.4)$$

В случае однослойной цилиндрической трубы из (2.2) имеем

$$P^* = \frac{1}{2}\left(1 - \alpha_1^2\right)\sigma_{max} \; .$$

Чтобы оценить эффективность проектирования кусочно-однородных многослойных цилиндрических труб из материалов с одинаковыми пределами текучести вместо однослойных, введём коэффициент эффективности по формуле

$$R = \frac{P}{P^*} = \frac{N\left(1-\sqrt[N]{\alpha_1^2}\right)}{1-\alpha_1^2} \qquad (2.5)$$

Заметим ещё, что

$$\lim_{N\to\infty} R = -\frac{2\ln\alpha_1}{1-\alpha_1^2} \,. \qquad (2.6)$$

Результаты расчёта по формулам (2.2),(2.3),(2.5),(2.6) приводятся в п.4.

3. Ограничения на полученные критерии

Рассмотрим неравенства (I.6) и (I.7), которые с учётом равенства $\sigma_{z_i} = \nu_i(\sigma_{\theta_i} + \sigma_{r_i})$ представим в виде следующей системы :

$$\begin{cases} \left|(1-\nu_i)\sigma_{\theta_i} - \nu_i\sigma_{r_i}\right| \le \sigma_i \;; \\ \left|(1-\nu_i)\sigma_{r_i} - \nu_i\sigma_{\theta_i}\right| \le \sigma_i \;. \end{cases} \qquad (3.I)$$

Подставляя (I.I) и (I.2) с учётом (I.24) в (3.I), находим

$$\begin{cases} \left|p_i(1-2\nu_i) - \frac{1}{2}\ell\sigma_i(1-2\nu_i) - \frac{1}{2}\ell\sigma_i\alpha_i^2 r_i^{-2}\right| \le \sigma_i \;; \\ \left|p_i(1-2\nu_i) - \frac{1}{2}\ell\sigma_i(1-2\nu_i) + \frac{1}{2}\ell\sigma_i\alpha_i^2 r_i^{-2}\right| \le \sigma_i \;. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Вследствие монотонности функции под знаком абсолютной величины в (3.2) неравенства (3.2) удовлетворяются, если при $\ell = +1$ $(p_1 > p_{N+1})$ имеем

$$\begin{cases} |p_i(1-2\nu_i)-\sigma_i(1-\nu_i)| \leq \sigma_i ; \\ |p_i(1-2\nu_i)+\sigma_i\nu_i| \leq \sigma_i ; \\ |p_i(1-2\nu_i)+\sigma_i\nu_i-\frac{1}{2}\sigma_i(1+\varkappa_i)| \leq \sigma_i ; \\ |p_i(1-2\nu_i)+\sigma_i\nu_i-\frac{1}{2}\sigma_i(1-\varkappa_i)| \leq \sigma_i , \end{cases} \qquad (3.3)$$

и при $l=-1$ $(p_1 < p_{N+1})$ имеем

$$\begin{cases} |p_i(1-2\nu_i)+\sigma_i(1-\nu_i)| \leq \sigma_i ; \\ |p_i(1-2\nu_i)-\sigma_i\nu_i| \leq \sigma_i ; \\ |p_i(1-2\nu_i)-\sigma_i\nu_i+\frac{1}{2}\sigma_i(1+\varkappa_i)| \leq \sigma_i ; \\ |p_i(1-2\nu_i)-\sigma_i\nu_i+\frac{1}{2}\sigma_i(1-\varkappa_i)| \leq \sigma_i . \end{cases} \qquad (3.4)$$

Нетрудно показать, что из систем (3.3) и (3.4) следуют неравенства

$$p_i \leq \frac{(1-\nu_i)\sigma_i}{1-2\nu_i} \qquad (3.5)$$

и

$$p_i \leq \frac{\nu_i\sigma_i}{1-2\nu_i} \qquad (3.6)$$

соответственно.

Таким образом, неравенства (I.6) и (I.7) выполняются при $l=+1$, когда удовлетворяются (3.5), и при $l=-1$, если удовлетворяются (3,6). Следовательно. полученные в п.I критерии имеют место лишь при выполнении (3.5), если $p_1>p_{N+1}$ и (3.6), если $p_1<p_{N+1}$.

В случае материалов с одинаковыми пределами текучести и коэффициентами Пуассона ограничения (3.5) и (3.6) представляются в видах

$$p_1 \leq \frac{(1-\nu)\sigma_{max}}{1-2\nu} \qquad (3.7)$$

и

$$p_{N+1} \leq \frac{\nu \sigma_{max}}{1-2\nu} \tag{3.8}$$

соответственно.

4. Некоторые проекты многослойных цилиндрических труб с оптимальной кусочно-однородностью под внешним давлением

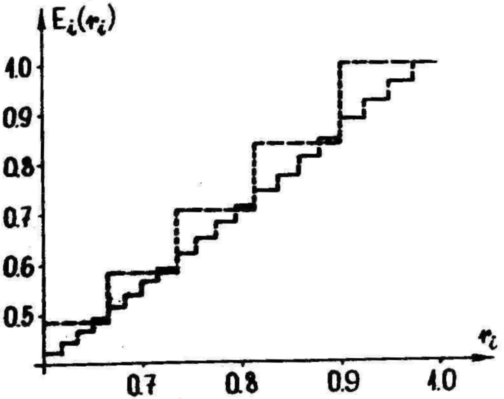
Пусть $p_1 = 0$, $\sigma_i = \sigma_{max}$ и $\nu_i = \frac{1}{3}$. Тогда из (I.26) находим

$$E_k = \prod_{j=k}^{N-1} \frac{[k(1-x_1)+4x_1]}{[k(1-x_1)+4]} \quad . \tag{4.I}$$

В рассматриваемом случае ограничению (3.8) с помощью (2.2) можно придать вид

$$\alpha_1 \geq \left(1-\frac{2}{N}\right)^{\frac{N}{2}} \quad . \tag{4.2}$$

Из (4.2) следует, что при $N = 5$ имеем ограничение $\alpha_1 > 0,29$ и при $N = 20$ – ограничение $\alpha_1 > 0,35$. В расчётах примем $\alpha_1 \geq 0,6$. На фиг. I приведены распределения параметра E_i по радиусу пяти- и двадцатислойной цилиндрической трубы. Расчёты проведены по формулам (2.3) и (4.I). По формуле (2.2) подсчитаны также $p_6 = 0,462\sigma_{max}$ и $p_{21} = 0,498\sigma_{max}$.



Фиг. I.

Таблица I.

α_1 \ N	I	2	3	4	8	I4	20	∞
0,6	I,000	I,250	I,359	I,409	I,499	I,540	I,556	I,596
0,7	I,000	I,I77	I,245	I,28I	I,338	I,364	I,374	I,399
0,8	I,000	I,III	I,I52	I,I73	I,206	I,220	I,226	I,240
0,9	I,000	I,053	I,07I	I,080	I,095	I,I0I	I,I03	I,I09

В табл. I приведены результаты расчёта по формулам (2.5) и (2.6). Из таблицы следует эффективность проектирования кусочно-однородных многослойных цилиндрических труб из материалов с одинаковыми пределами текучести вместо однослойных.

Литература

I. Немировский Ю.В., Хейнлоо М.Л., Одномерная задача прочности и оптимального проектирования неоднородных многослойных сферических и цилиндрических сосудов или круглых дисков. - Прикл. пробл. прочн. и пластич. I976, вып. 5, 3 - I4.

The optimal piecewise homogeneity of a multilayer cylindrical tube under pressure

M. Heinloo

Summary

The sizes and mechanical properties of the layers of the multilayer cylindrical tube, in which the Tresca yield condition is first and at once satisfied on the internal radii of the layers, and the absolute value of the differnce of the external and internal pressures has the global maximum in the region of the elastic deformations, has been found out in this work. For the illustration of the results, the projects of the optimal piecewise homogeneous multilayer cylindrical tubes of five and twenty layers respectively, which materials have equal yield points and Poisson coefficients and which are loaded only by external pressure, have been brought out in this work.

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВАЛЫ МАКСИМАЛЬНОЙ ЖЁСТКОСТИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Э. Сакс
Тартуский государственный университет

Валы, скручиваемые касательной нагрузкой, приложенной на некотором участке боковой поверхности, широко используются в технике [I]. Одним из важнейших качеств вала является его жёсткость на кручение. Рассмотрим задачу оптимизации формы сплошного вала, обеспечивающей его максимальную жёсткость на кручение при фиксированном объёме.

Отнесём вал к цилиндрической системе координат $r\theta z$, где ось z совпадает с осью симметрии вала. Обозначим переменный радиус вала через $r = R(z)$. Пусть радиус вала в точке разрыва боковой касательной нагрузки, длина участка приложения этой нагрузки и длина вала в целом равны соответственно R_0, ℓ и L фиг. I. В дальнейшем удобнее иметь дело с безразмерными величинами. Для этого достаточно выбрать R_0 за единицу длины. Принимается, что форма вала на нагруженном участке задана. Радиус вала на ненагруженном участке боковой поверхности $r = R(z)$ следует определить так, чтобы разность углов поворота ψ элементов вала в точках $A(0, R(0))$ и $B(L, R(L))$

$$P = \psi(B) - \psi(A) \qquad (I)$$

достигала минимального значения: $P \to min$. Для ограничения объёма вала достаточно ограничить объём только варьируемой части вала

$$V = \pi \int_0^L R^2(z)\,dz = V_0 \;, \qquad (2)$$

где V_0 - заданный объём.

Близкую по постановке задачу исследовал А. Гоодарз [8]. Им найдено, что в случае крутящего момента, изменяющегося линейно по z, форма оптимального вала задаётся функцией $R(z) = const \cdot z^6$. В этом случае относительный угол поворота вала уменьшается на I5 % по сравнению с валом постоянного диаметра.

Для нахождения разности (I) нужно решать задачу кручения осесимметричного вала при заданных краевых условиях и при произвольной форме вала. Используем для этого функцию перемещения $\psi(z, r)$, которая представляет собой угол поворота элемента вала и внутри вала удовлетворяет дифференциальному уравнению [I]

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}=0 . \qquad (3)$$

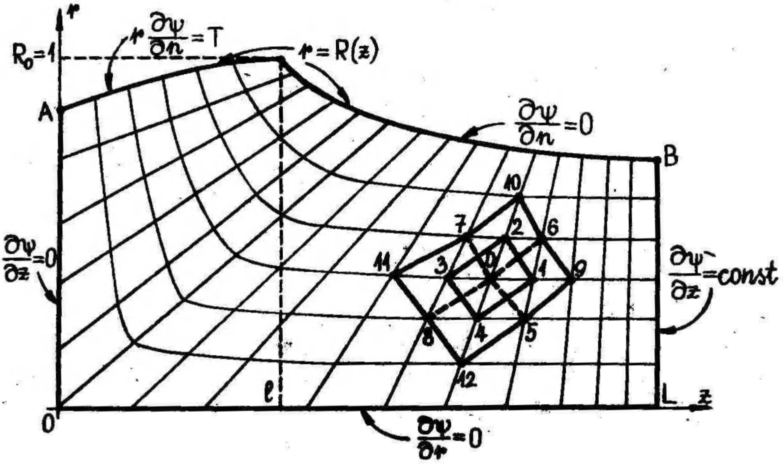
Компоненты напряжения выражаются в виде

$$\tau_{z\theta}=Gr\frac{\partial\psi}{\partial z} , \qquad \tau_{r\theta}=Gr\frac{\partial\psi}{\partial r} , \qquad (4)$$

где G – модуль сдвига. Пусть боковая касательная нагрузка задаётся функцией

$$T(z, R(z))=\tau_{z\theta}\cos(z, n)+\tau_{r\theta}\cos(r, n) \qquad (0\le z\le l) ,$$

где n – единичная нормаль к контуру $r=R(z)$. Кроме этого, полагаем длину ненагруженного участка вала $L-l$ достаточно большой по сравнению с радиусом $R_0=1$, так что, в соответствии с принципом А. Сен-Венана, $R(z)\approx const$ около торца $z=L$. Учитывая ещё, что в области упругих деформаций (предполагается, что все точки вала находятся в упругом состоянии) искомая форма вала $r=R(z)$ не зависит от выбора модуля сдвига $G=const$ и крутящего момента M, краевые условия для функции ψ можно задавать в следующем виде (фиг. I):



Фиг. I.

При минимизации выражения (I) с условием $V=V_0$ можно поступить следующим образом: задавать форму вала в варьируемой его части в виде однопараметрической кривой $r=R(z, r_1)$ так, что при любом значении параметра r_1 (в некоторой области изменения) объём вала равен V_0. Параметр r_1 при этом следует выбрать так, чтобы выполнялось условие $P \to min$. Как увидим ниже, для нахождения такого значения r_1 существуют эффективные поисковые методы [6, 7].

При численном решении уравнения (3) целесообразно пользоваться сеткой из произвольных четырёхугольников, получаемых при пересечении двух семейств кривых на осевом сечении вала, причём контур вала входит в эти семейства (фиг. I). Исходим от формул [3]

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_0 = \frac{(\psi_4-\psi_2)(r_1-r_3)-(\psi_1-\psi_3)(r_4-r_2)}{A_0}\,,$$
$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_0 = \frac{(\psi_1-\psi_3)(z_4-z_2)-(\psi_4-\psi_2)(z_1-z_3)}{A_0}\,, \qquad (5)$$

где

$$A_0=(z_4-z_2)(r_1-r_3)-(z_1-z_3)(r_4-r_2) \qquad (6)$$

удвоенная площадь четырёхугольника I234 (фиг. I); нижние индексы указывают на значения величин в соответствующем узле. По аналогии с формулами (5), (6) найдём (фиг. I)

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_1 = \frac{(\psi_5-\psi_6)(r_9-r_0)-(\psi_9-\psi_0)(r_5-r_6)}{A_1}\,,$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_1 = \frac{(\psi_9-\psi_0)(z_5-z_6)-(\psi_5-\psi_6)(z_9-z_0)}{A_1}\,, \qquad (7)$$

$$A_1=(z_5-z_6)(r_9-r_0)-(z_9-z_0)(r_5-r_6)\,. \qquad (8)$$

На базе выражений (7),(8) с помощью циклических перестановок индексов I→2→3→4→I, 5→6→7→8→5, 9→IO→II→I2→9 получим аналогичные выражения для узлов 2, 3, 4. Теперь, имея выражения для частных производных первого порядка в узлах I, ..., 4, с помощью выражений (5), ..., (8) построим конечно-разностный аналог уравнения (3)

$$\sum_{i=0}^{12} P_i\psi_i=0\,, \qquad (9)$$

где, обозначаем $z_{i,j} = z_i - z_j$; $r_{i,j} = r_i - r_j$,

$$P_2 = -P_4 = 3z_{1,3}/r_0 \; ; \quad P_3 = -P_1 = 3z_{2,4}/r_0 \; ;$$

$$P_9 = -(z_{2,4}z_{5,6} + r_{2,4}r_{5,6})/A_1 \; ; \quad P_{10} = (z_{1,3}z_{6,7} + r_{1,3}r_{6,7})/A_2 \; ;$$

$$P_{11} = (z_{2,4}z_{7,8} + r_{2,4}r_{7,8})/A_3 \; ; \quad P_{12} = -(z_{1,3}z_{8,5} + r_{1,3}r_{8,5})/A_4 \; ;$$

$$P_5 = B_1 - B_4 \; ; \quad P_6 = B_2 - B_1 \; ; \quad P_7 = B_3 - B_2 \; ; \quad P_8 = B_4 - B_3 \; ;$$

$$B_1 = (z_{2,4}z_{9,0} + r_{2,4}r_{9,0})/A_1 \; ; \quad B_2 = -(z_{1,3}z_{10,0} + r_{1,3}r_{10,0})/A_2 \; ;$$

$$B_3 = -(z_{2,4}z_{11,0} + r_{2,4}r_{11,0})/A_3 \; ; \quad B_4 = (z_{1,3}z_{12,0} + r_{1,3}r_{12,0})/A_4 \; ;$$

$$P_0 = -(P_9 + P_{10} + P_{11} + P_{12}) .$$

Если точка с индексом 0 пробегает все внуренние узлы вала, уравнение (9) вместе с соответствующими краевыми условиями, выраженными также в конечно-разностном виде, сводится к некоторой системе линейных алгебраических уравнений относительно функции ψ в узлах сетки. Если при этом некоторый i-й узел ($i = 9, \ldots, 12$) стремится выйти за границы контура вала, его следует отождествлять с узлом номером $i - 8$ (фиг. I). Легко заметить, что в формуле (9) сумма коэффициентов перед $\psi_1, \ldots, \psi_8$ равна нулю, а коэффициенты P_i ($i = 9, \ldots, 12$) при любых ориентациях четырёхугольников положительны. Отсюда следует, что матрица полученной нами системы линейных алгебраических уравнений обладает свойством: её элементы на главной диагонали по абсолютной величине равны сумме остальных элементов строки

$$|P_0| = P_9 + P_{10} + P_{11} + P_{12} .$$

Это наводит на мысль при решении системы линейных алгебраических уравнений воспользоваться широко распространённым методом простых итераций, что позволяет заведомо равные нулю слагаемые исключать из рассмотрения. Если известны узловые значения функции ψ на к-м шаге итерации $\psi_i^{(k)}$, то её значения на следующем шаге итерации сможем вычислить по формуле

$$\psi_0^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{12} p_i \psi_i^{(k)} , \qquad (10)$$

где

$$p_i = P_i / (P_9 + P_{10} + P_{11} + P_{12}) \qquad (i = 1, \dots, 12),$$

причём точка с индексом 0 пробегает все внутренние узлы вала.

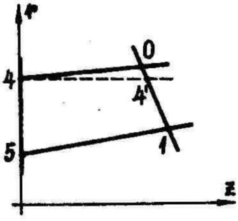
Вслед за итерированием во внутренних узлах вала следует пересчитывать значения ψ в контурных узлах, чтобы краевые условия на каждом шаге итерации выполнялись (в случае смешанных краевых условий заданные значения углов поворота ψ пересчитывать не следует). В узлах, находящихся на боковой поверхности, для более удобного удовлетворения краевых условий образуем ортогональную сетку. Тогда, если узел с индексом 3 находится на нагруженном участке боковой поверхности, следует принимать (фиг. I)

$$\psi_3^{(k+1)} = \psi_0^{(k+1)} + \sqrt{(z_3 - z_0)^2 + (r_3 - r_0)^2}\; T(z_3, r_3)/r_3 . \qquad (II)$$

Для узла на варьируемом участке контура получим

$$\psi_2^{(k+1)} = \psi_0^{(k+1)} . \qquad (I2)$$

В прямолинейных участках контура не всюду можно построить ортогональную сетку. Поясним с помощью фиг. 2 (нумерация узлов соответствует фиг. I), как удовлетворять краевому условию $\partial\psi/\partial z = 0$ на торце $z = 0$.



Фиг. 2.

Обозначим через $4'$ точку пересечения нормали к контуру $z = 0$, проходящей через узел 4, с прямой, проходящей через узлы 0 и I. Из краевого условия получим соотношение

$$\psi_4 - \psi_{4'} = 0 ,$$

где значение $\psi_{4'}$ находится по значениям в узлах 0 и I с помощью линейной интерполяции.

Теперь для узла на торце $z = 0$ получим формулу

$$\psi_4^{(k+1)} = \left[(r_0 - r_4)\psi_1^{(k+1)} - (r_1 - r_4)\psi_0^{(k+1)}\right] / (r_0 - r_1) . \qquad (I3)$$

Аналогично получим для осевой точки $r = 0$

$$\psi_4^{(k+1)} = \left[(z_0 - z_4)\psi_3^{(k+1)} - (z_3 - z_4)\psi_0^{(k+1)}\right] / (z_0 - z_3) \qquad (I4)$$

и для торцевой точки $z = L$

$$\psi_1^{(n+1)} = [(z_0 - L)\psi_2^{(n+1)} - (z_2 - L)\psi_0^{(n+1)}]/(z_0 - z_2) . \qquad (15)$$

Таким образом, отправляясь от некоторого начального приближения $\psi_i^{(0)}$ и выполняя формулы (10), ..., (15) достаточное количество раз, пока два последовательных приближения $\psi_i^{(n)}$ и $\psi_i^{(n+1)}$ не будут совпадать с заданной точностью ε , можно находить приближённое распределение углов поворота скручиваемого вала у узлах сетки и тем самым составить разность (1). Отложим, однако, вопрос о выборе подходящего начального приближения $\psi_i^{(0)}$, пока не будет уточнена форма вала в его варьируемой части.

Как отмечалось выше, функция $r = R(z)$ стремится к постоянной, если $z - \ell > 1$. Этому условию удовлетворяет, например, функция

$$r = R(z) = (1 - r_1)e^{\lambda_1(\ell - z)} + r_1 \qquad (\ell \le z \le L), \qquad (16)$$

где $\lambda_1 > 0$ такая, что $R(z) \to r_1$ при $z \to L$, так что r_1 - радиус вала на торце $z = L$. По таблицам $e^{-x} < 0,02$ при $x > 4$. Тогда, если задать

$$\lambda_1 > 4/\Lambda , \qquad \Lambda = L - \ell , \qquad (17)$$

имеет место приближённое равенство $R(L) \approx r_1$ с относительной ошибкой меньше 2 %. Вычислив интеграл (2) от функции (16) с условием (17), найдём

$$V = \pi(1 + 2r_1 - 3r_1^2)/2\lambda_1 + \pi r_1^2 \Lambda . \qquad (18)$$

Если в формуле (16) r_1 и λ_1 заменить на r_0 и λ_0 и потребовать, чтобы объём (18) сохранялся, получим связь между параметрами r_1 , λ_1 , r_0 , λ_0 :

$$\lambda_1 = \frac{(1 - r_1)(1 + 3r_1)\lambda_0}{(1 - r_0)(1 + 3r_0) + 2\Lambda(r_0^2 - r_1^2)\lambda_0} ,$$

которая используется для варьирования формы вала. Теперь можно поступать следующим образом. Во-первых, устремляем $\lambda_1 \to \infty$, в результате получим ступенчатый вал с объёмом $V_0 = \pi r_1^2 \Lambda$. Если V_0 и Λ заданы, сможем определить соответствующий торцевой радиус вала

$$r_{max} = r_1 = \sqrt{t} , \qquad t = V_0/\pi\Lambda . \qquad (19)$$

Во-вторых, выбирая для λ_1 нижний предел $\lambda_1 = 4/\Lambda$ по формуле (I7) и требуя сохранения объёма V_0, получим уравнение

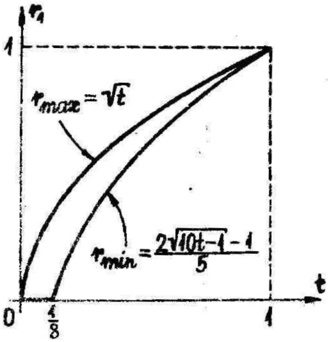
$$\frac{\Lambda}{2 \cdot 4}(1+2r_1-3r_1^2)+r_1^2\Lambda = t\Lambda ,$$

решением которого будет

$$r_{min} = r_1 = (2\sqrt{10t-1}-1)/5 . \tag{20}$$

По физическим соображениям $r_{min} \geqslant 0$, поэтому формула (20) справедлива при $\text{I}/8 \leqslant t \leqslant 1$. При $t < \text{I}/8$ следует положить $r_{min} = 0$ (фиг. 3).

Для нахождения минимума (I) при $V = V_0$ можем поступать следующим образом. Задавшись V_0, Λ, сможем по формулам (I9), (20) определить границы r_{min} и r_{max} искомого торцевого радиуса r_1. В этих границах r_1 следует определить по условию (I). Поскольку зависимость P от r_1 не известна, минимизировать можно её поисковыми методами минимизации недифференцируемых функций. Одним из эффективных поисковых методов для недифференцируемых функций является метод золотого сечения [6, 7], который на каждом шаге итерации сужает область минимума в $(\sqrt{5}+\text{I})/2 \approx \text{I{,}62}$ раз, и на нём требуется вычислить лишь одно дополнительное значение минимизируемой функции (за исключением исходного шага, где трубется вычислить два значения функции). В данной задаче разность $r_{max} - r_{min}$ мала, тем самым для нахождения минимума от $P(r_1)$ с точностью до I % требуется в среднем четыре (максимально семь) итераций по методу золотого сечения. У метода ещё одно достоинство: от очень удобен при программировании.



Фиг. 3.

Ранее вопрос о выборе начального приближения $\psi^{(0)}$ остался открытым. Заполним этот пробел. Как и в случае упругопластического кручения [4], зададим начальное приближение в виде квазиклассического распределения по координатам

I) $\partial\psi^{(0)}/\partial r \equiv 0$, т.е. радиусы вала не искривляются;

2) $\psi^{(0)}$ в каждом поперечном сечении вала соответствует текущему крутящему моменту, который в данном случае равен

$$M(z)=\begin{cases} 2\pi\int_0^z T(z,R(z))\sqrt{1+\left(\dfrac{dR}{dz}\right)^2}\,dz & (0\le z<l)\,; \\ 2\pi\int_0^l T(z,R(z))\sqrt{1+\left(\dfrac{dR}{dz}\right)^2}\,dz & (l<z\le L)\,. \end{cases} \tag{2I}$$

Из выражения

$$M(z)=\int_0^{R(z)} r^2\tau_{z\theta}\,dr$$

и формулы (4) получим уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{4M(z)}{2\pi G R^4(z)}\,. \tag{22}$$

Поскольку постоянный множитель

$$4/G\int_0^l T(z,R(z))\sqrt{1+\left(\frac{dR}{dz}\right)^2}\,dz$$

на форму вала с условием максимальной жёсткости при кручении не влияет, его в дальнейшем опускаем. С учётом этого, интегрируя уравнение (22) с использованием выражения (2I), получим начальное приближение для угла поворота

$$\psi^{(0)}(z)=\frac{\displaystyle\int_0^z\frac{dz}{R^4(z)}\int_0^z T(z,R(z))\sqrt{1+\left(\frac{dR}{dz}\right)^2}\,dz}{\displaystyle\int_0^l T(z,R(z))\sqrt{1+\left(\frac{dR}{dz}\right)^2}\,dz} \tag{23}$$

при $0\le z\le l$ и

$$\begin{aligned}\psi^{(0)}(z)=\frac{1}{\lambda_1 r_1^3}\Big[1+\frac{r_1}{2}+\frac{r_1^2}{3}-\frac{R^2(z)+R(z)r_1/2+r_1^2/3}{R^3(z)}+\\ +\frac{\ln R(z)-\lambda_1(l-z)}{r_1}\Big]+\psi^{(0)}(l)\end{aligned} \tag{24}$$

при $l<z\le L$, где $R(z)$ задаётся формулой (I6). Как видно, аппроксимация формы вала в виде (I6) удобна ещё тем, что допускает задавать начальное приближение $\psi^{(0)}$ в виде явной функции, если только повторный интеграл (23) берется.

Теперь несколько слов об образовании сетки из четырехугольников (фиг. I). Сначала нужно задавать некоторое количество контурных узлов на границах $r=0$ и $z=0$ и такое же количество узлов на варьируемой границе вала. Если эти узлы попарно соединить прямыми, на которых расставить внутренние узлы, мы и получим определённое количество узлов сетки. На криволинейных участках контура вала приходится расставить узлы по длине дуги. Вычислим длину дуги $s(z)$ варьируемой части контура вала, начиная от точки $(l,1)$ до точки (z,r), где r задаётся формулой (I6):

$$s(z)=\frac{u(l)-u(z)}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{u(z)+1}{u(l)+1}+z-l\,, \qquad (25)$$

где

$$u(z)=\sqrt{1+\lambda_1^2(1-r_1^2)e^{2\lambda_1(l-z)}}\;.$$

Выражать координату z через длину дуги s в формуле (25) в явном виде нельзя. Этого можно добиться только численными приёмами, например, методом И. Ньютона [2]

$$z_k=(s_k-s_*)/s'(z_*)+z_* \quad , \qquad (26)$$

где s_k - заданная длина дуги от точки $(l,1)$ до к-го узла на криволинейном контуре; s_* - итерированное значение s_k, соответствующее итерированному значению z_*. При этом $s'(z_*)=$ $=u(z_*)$. За начальное приближение для s_* и z_* выбираются их значения в предидущем узле с индексом к-I. Вследствие быстрой сходимости достаточно провести не больше двух итераций (26). По значению z_k вычисляется r_k по формуле (I6). Аналогично расставляются узлы на нагруженном участке боковой поверхности $r=R(z)$ $(0 \le z \le l)$.

Приступим к описанию результатов расчёта. Было принято, что заданы следующие геометрические параметры вала: $l=0{,}3$; $L=2{,}0$; $R(z)\equiv \mathrm{I}$ $(0 \le z \le l)$, т.е. вал на участке заданной формы совпадает с круговым цилиндром. На последнем участке были заданы два различных краевых условия: во-первых, равномерная боковая касательная нагрузка $T(z,1)=\mathrm{const}$; во-вторых, равный нулю угол поворота $\psi(z,1)=0$. Некоторые результаты этих расчётов представлены в таблицах I и 2 соответственно.

Таблица I.

$V_0/\varkappa\Lambda$	r_1	λ	$\psi(\ell,1)$	$P=\psi(L,r_1)$
0,90	0,949	44,3	0,I85	2,27
0,75	0,866	44,3	0,II3	3,05
0,60	0,774	44,3	0,096	4,43
0,45	0,670	44,3	0,066	7,27
0,30	0,547	44,3	0,035	I4,85
0,I5	0,387	45,5	0,0I9	49,53

Таблица 2.

$V_0/\varkappa\Lambda$	r_1	λ	$\psi(\ell,1)$	$P=\psi(L,r_1)$
0,90	0,949	44,3	0	2,06
0,75	0,866	44,3	0	2,85
0,60	0,774	44,3	0	4,23
0,45	0,670	44,3	0	7,08
0,30	0,547	44,3	0	I4,67
0,I5	0,387	45,5	0	49,38

По таблицам I, 2 видно, что форма максимально жёсткого вала практически не зависит от выбора краевых условий, при этом параметр λ в формуле (I6) мало зависит от величины заданного объёма V_0. Естественно, относительный угол поворота торца вала P зависит от выбора краевых условий, хотя, как видно, разность двух величин P при различных краевых условиях практически не зависит от выбора V_0. То, что параметр λ достаточно велик, означает, что вал максимальной жёсткости близок к ступенчатому (без острого входящего угла, где возникала бы концентрация напряжений).

Чтобы сравнить вал максимальной жёсткости с равнопрочным валом [5], вычислялись интенсивности касательных напряжений вдоль варьируемой части боковой поверхности вала. Оказалось, что при значении $V_0 = 0,9\varkappa\Lambda$ она более-менее постоянна вдоль контура боковой поверхности вала, т.е. вал можно считать приближенно равнопрочным. Чем ближе V_0 к нулю, тем существеннее форма вала максимальной жёсткости отличается от формы равнопрочного вала.

Литература

I. Абрамян Б.Л., Арутюнян Н.Х., Кручение упругих тел. М., Физматгиз, I963.

2. Березин И.С., Жидков Н.П., Методы вычислений. М., Физматгиз, I963.

3. Квитка А.Л., Кияшко Л.Е., Исследование напряженного состояния тел вращения произвольного очертания при кручении. Сообщение I. - Пробл. прочн., I97I, № 8, 3 - I5.

4. Немировский Ю.В., Сакс Э.Э., Упруго-пластическое кручение тел вращения. - Пробл. прочн., I974, № I2, II-I7.

5. Немировский Ю.В., Сакс Э.Э., О равнопрочных формах упругих круглых валов при сложном кручении. - Машиноведение, I972, № I, I03-II0.

6. Полак Э., Численные методы оптимизации., М., "Мир", I974.

7. Поляк Б.Т., Введение в оптимизацию., М., "Наука", I983.

8. Goodarz A., Shafts with minimum angle of twist.- Arabian J. Sci. and Eng., 1982, 7, № 3, 261 - 263.

Axisymmetrical shafts of maximal rigidity in torsion

E. Saks

Summary

Some cases of torsion of shafts of variable diameter in two different contour conditions have been examined. It was assumed that the diameter of the shaft in the loaded domain is fixed, and the form of the shaft was optimized so, that the relative torsion angle would be minimal. To have the unique solution the volume of the shaft must be fixed. The calculations were accomplished by the aid of the golden section method. The numerical results have been given in two tables.

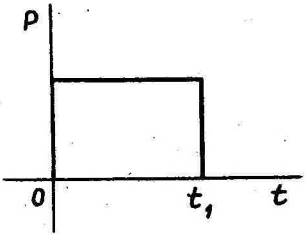
ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ РАВНОМЕРНО НАГРУЖЕННОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ

К.Кенк, Ю.Кирс

Таллинский политехнический институт

Оптимальный проект равномерно нагруженной пластины зависит от закона изменения приложенного давления p во времени.

В работе [I] выполнено оптимальное проектирование шарнирно опёртой круговой пластины в случае нагрузки, режим изменения которой представлен на фиг. I.



Фиг. I.

При заданном объёме V_0 пластины и её толщины $2H_0$ на краю требовалось определить толщину $2H$ в зависимости от радиальной координаты r так, чтобы прогиб пластины в центре в момент $t = t_1$ был бы минимален. Расчёт был проведён с учётом изотропного упрочнения материала, а также без учёта упрочнения. Условие текучести принималось в форме Мизеса. Результаты расчёта показали слабое влияние упрочнения материала на оптимальный проект. Однако открытым остался вопрос о влиянии упрочнения при других режимах нагружения.

Поэтому в настоящей работе рассматривается задача, которая отличается от вышеизложенной лишь тем, что закон изменения нагрузки принимается в виде

$$P = p_0 e^{-nt} , \qquad (I)$$

а также требуется минимальность прогиба в центре пластины в момент остановки её.

Вводим безразмерное время

$$\tau = \frac{t}{t_1} ,$$

где в связи с отсутствием характерных точек у закона (I), в качестве t_1 выбрано время, за которое давление уменьшится в $N = e^3 \approx 20$ раз по сравнению с начальным его значением.

Тогда учитывая I безразмерная нагрузка

$$q = q_0 e^{-3\tau} ;$$

где $q_0 = \frac{\sqrt{3} P_0 R}{\sigma_{s0} H_0^2}$, R – радиус пластины, σ_{s0} – исходный предел текучести.

Ищем $H(r)$ в виде полинома

$$H(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 ,$$

а безразмерный прогиб $w = \frac{W}{H_0 b}$ в виде произведения

$$w = \varphi(\tau) \cdot f(x) , \qquad (2)$$

где

$$f(x) = e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + e_3 x^3 + e_4 x^4 ,$$

величины a_i и e_i – постоянные, а безразмерная координата $x = \frac{r}{R}$. С учётом заданных величин, условий симметрии и краевых условий получим

$$f = \frac{\ell}{14}(14x^3 - 3x^2 - 11) ,$$

$$h = \beta_0 + \beta_1 x^2 + b x^3 ,$$

где

$$h = \frac{H}{H_0} , \qquad b = \frac{a_3 R^3}{H_3} , \qquad (3)$$

$$\beta_0 = (2V - 1) + \frac{b}{5} \qquad (4)$$

$$\beta_1 = 2(1 - V) - \frac{b}{5} \qquad (5)$$

$$V = \frac{V_0}{2\pi R^2 H_0} ,$$

а ℓ – постоянная.

Введём обозначение $F = -\ell\varphi$.

Тогда из дифференциального уравнения движения пластины получим для определения F уравнение

$$\ddot{F} + \frac{6\alpha\beta_0^3}{\kappa D_1} \cdot F = \frac{A_1 q - A_2}{\kappa D_1} , \qquad (6)$$

где $D_1 = V \cdot 0,41801 - 0,16707 - b \cdot 0,00014 \qquad (7)$

$$\kappa = \frac{\mu R^2 \sqrt{5}}{\sigma_{s0} t_1^2} , \qquad \varkappa = \frac{2H_0^2}{\sqrt{3} B R^2 \sigma_{s0}} \qquad (8)$$

μ – плотность материала, B – параметр упрочнения

$$A_1 = 0,21875, \qquad A_2 = b J(1)\, 0,81073 + \sqrt{3}\beta_0^2 , \qquad (9)$$

$$J(1) = \int_0^1 x^2 (1 - x^2)^{1/7} dx .$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (6) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (26) из работы [I] с той лишь разницей, что там $q = const$, а в уравнении (6) $q = q_0 e^{-3\tau}$
Решение уравнения (6) имеет вид

$$F = \frac{A_1 q_0}{(9\kappa D_1 + 6\alpha\beta_0^3)}\left(e^{-3\tau} - \cos L\tau + \frac{3}{L}\sin L\tau\right) + \frac{A_2}{6\alpha\beta_0^3}(\cos L\tau - 1), \qquad (I0)$$

где

$$L = \sqrt{\frac{6\alpha\beta_0^3}{\kappa D_1}}. \qquad (II)$$

Согласно (2)

$$w = \frac{F}{11}(11 - 14x^2 + 3x^4). \qquad (I2)$$

Конструкция останавливается если $\dot{w} = 0$, т.е. согласно (I2) $\dot{F} = 0$.

Для определения времени остановки τ_1 получим уравнение

$$\cos L\tau_1 - e^{-3\tau_1} = A\sin L\tau_1, \qquad (I3)$$

где

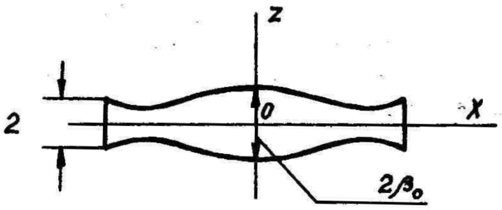
$$A = \frac{A_2 L(9 + L^2)}{3A_1 L^2 q_0} - \frac{L}{3}. \qquad (I4)$$

Определив τ_1 из уравнения (I3) и подставляя его в (I0) и (I2) получим прогиб в момент остановки в зависимости от параметра b (см. 3). Для оптимального проекта требуется найти минимум w по b.

При конкретном решении зададимся шагом и пределами изменения параметра b. Для каждого значения b согласно (4), (5), (7), (8), (II) и (I4) вычисляет ЭВМ соответственно β_0, β_1, D_1, A_2, L и A.

Затем решается уравнение (I3) и получим τ_1, подставлением которого в (I0) и (I2) находим прогиб в момент остановки. Для определения прогиба в центре пластины в (I2) подставим $x = 0$. Из полученных значений прогиба выбираем минимальное, и соответствующее значение b подставляем в выражение для R и тем самым получим оптимальный проект.

В случае неупрочняющегося материала параметр $\alpha = 0$ (8). Учитывая, что заданы объём пластины V_0 и толщина $2H_0$ на краю согласно расчётам оптимальная форма пластины показана на фиг. 2.



Фиг. 2.

Из технологических и расчётных требований следует, что $R \neq 0$ и поэтому для расчёта ставится дополнительное условие $h > h_1$ и расчёты проведены для значений $h_1 = 0{,}I$; 0,2 и I/3.

Таблица I.

$h_1 = 0{,}I$

V	κ	α	q_0	b	τ_1	w_1	b^*	τ_1^*	w_1^*
0,8	20	0,5	300	I3,3I	0,40	0,2879	I3,39	I,II	I,3364
0,8	20	0,5	I50	I3,29	0,30	0,0460	I3,27	0,42	0,0806
0,8	20	0,5	200	I3,36	0,36	0,II83	I3,39	0,67	0,3I89
0,8	20	I,0	200	I3,39	0,28	0,0794	I3,39	0,67	0,3I39
I,0	20	0,5	200	I6,04	0,20	0,0I30	I6,06	0,24	0,0I85
I,0	20	0,5	300	I6,05	0,3I	0,0822	I6,06	0,58	0,2284
I,2	50	0,2	500	I8,58	0,50	0,I058	I8,57	0,70	0,I732
I,2	50	0,5	500	I8,57	0,39	0,0722	I8,57	0,70	0,I732
I,2	40	0,5	500	I8,57	0,37	0,0798	I8,56	0,70	0,2I7I
I,2	25	0,2	500	I8,48	0,42	0,I6I5	I8,56	0,70	0,3473

Таблица 2.

$h = 0{,}2$

V	κ	α	q_0	b	τ_1	w_1	b^*	τ_1^*	w_1^*
I,2	25	0,2	500	I6,77	0,48	0,22I7	I6,77	0,85	0,52I4
I,2	50	0,2	500	I6,77	0,57	0,I502	I6,77	0,85	0,2607
I,0	20	0,5	300	I4,I6	0,36	0,I5I6	I4,28	0,75	0,4027
0,8	20	0,5	200	II,49	0,44	0,2026	II,49	0,92	0,6I84
0,6	25	0,2	200	8,44	0,43	I,5282	8,44	2,29	4,5I25

Таблица 3.

h = I/3

V	κ	α	q_0	b	τ_1	w_1	b^*	τ_1^*	w_1^*
0,8	20	0,5	200	9,II	0,57	0,3769	9,I7	I,37	I,2709
I,0	20	0,5	300	II,89	0,44	0,2173	II,90	I,04	0,7799
I,2	50	0,2	500	I4,34	0,69	0,2288	I4,37	I,I0	0,4295
I,2	50	0,I	500	I4,37	0,9I	0,339I	I4,37	I,I0	0,4295
I,2	50	I,0	500	I4,I8	0,42	0,I037	I4,37	I,I0	0,4295

Звёздочкой отмечены результаты, полученные без учёта упрочнения. Нетрудно убедиться, что оптимальная форма слабо зависит от упрочнения материала, т.к. b мало зависит от упрочнения и плотности материала, а также от величины нагрузки, а в основном зависит от объёма пластины.

Время остановки и остаточный прогиб сильно зависят от упрочнения материала и если ставится ограничение на остаточный прогиб, то упрочнение даёт существенно более широкие возможности проектировщику.

Литература

I. Кирс Ю., Кенк К., Об оптимальном проектировании круговых пластин. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I983, 659, 23-29.

Optimal design of circular plates subjected to uniformly distributed dynamic pressure

K. Kenk and J. Kirs

Summary

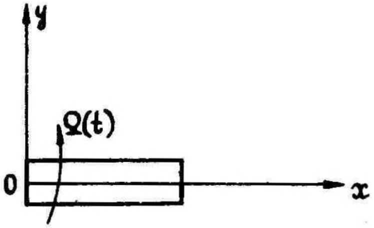
The designing of simply supported plastic circular plates made of isotropically hardening material is examined. The plate is under the monotonously decreasing normal pressure. The purpose is to determine such a function of thickness in which the normal deformations in the centre of the plate, at the moment when the movement of the plate has stopped, were as small as possible. The problem is solved by using the yieldcurve, presented by Mieses. The results of calculations indicate that the effect of hardening is great regarding the time of movement of the plate and the deflections, but it is insignificant regarding the shape of the plate.

К УЧЁТУ СИЛ ИНЕРЦИИ ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ

И.Т.Гавриков, Б.Н.Ясулович

Таллинский политехнический институт

В качестве расчётной модели для анализа продольных колебаний, возникающих в лопастях гребных и воздушных винтов, вентиляторов, лопатках гидротурбин и т.д., можно принять вращающийся вокруг торцевого сечения однородный стержень (фиг. I).



Фиг. I. Стержень, вращающийся вокруг оси.

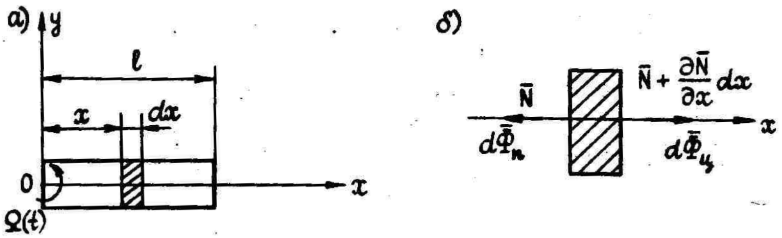
Поскольку рассматривается вращающийся стержень, то представляет интерес учёт влияния возникающих при вращении сил инерции.

Целью настоящей работы является получение функции продольного перемещения поперечного сечения вращающегося прямолинейного однородного стержня, жёстко закрепленного одним концом с учётом сил инерции.

При этом принято, что поперечные сечения стержня остаются плоскими и частицы стержня не совершают поперечных движений, а перемещаются только в продольном направлении.

Пусть $u(x,t)$ - функция продольного перемещения текущего сечения стержня при колебаниях. Для составления дифференциального уравнения движения рассмотрим элемент стержня, расположенный между двумя бесконечно близкими сечениями [I] (фиг. 2.а.).

[I] Вывод уравнения продольных колебаний неподвижного стержня приведен в [I, 2].



Фиг. 2. Вращающийся стержень

а) положение элемента стержня;

б) схема сил, действующих на выделенный элемент.

На выделенный элемент действуют следующие силы (фиг. 2.б.):

$\bar N$, $(\bar N+\frac{\partial \bar N}{\partial x}dx)$ - продольные силы, действующие со стороны отброшенных частей стержня

$d\Phi_n$ - сила инерции, возникающая при поступательном перемещении элемента стержня

$d\Phi_ц$ - центробежная сила инерции, возникающая при вращательном движении стержня

Если перемещение левого сечения выделенного элемента равно u, то перемещение бесконечно близкого к нему сечения справа равно $u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$ и, следовательно, абсолютное удлинение бесконечно малого элемента dx равно $\frac{\partial u}{\partial x}dx$, а относительное удлинение $\varepsilon=\frac{\partial u}{\partial x}$.. Поэтому выражение для продольной силы в сечении с координатой x может быть записано в виде

$$N=EA\varepsilon=EA\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{I}$$

где A - площадь поперечного сечения стержня; E - модуль упругости материала.

Выражение для элементарной силы инерции при поступательном движении элемента стержня запишем в виде

$$d\Phi_n=\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx, \tag{2}$$

где ρ - плотность материала.

Соответственно выражение для элементарной центробежной силы инерции

$$d\Phi_{ц} = \rho A\Omega^2(t)x\,dx \quad , \tag{3}$$

где $\Omega(t)$ – функция угловой скорости вращения стержня; x – текущая координата поперечного сечения стержня.

Используя метод кинетостатики (принцип Даламбера), спроектируем силы, действующие на элемент стержня (фиг. 2.б) на ось x.

В результате получим

$$\partial\Phi_n + \frac{\partial N}{\partial x}dx + d\Phi_{ц} = 0 \, . \tag{4}$$

Произведя в равенстве (4) подстановки из (I), (2) и (3), получим следующее дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Omega^2(t)x \quad , \tag{5}$$

где $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

Полученное уравнение (5) решаем при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} &u(0,t) = 0 \ ; \\ &\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\ell} = 0 \ . \end{aligned} \tag{6}$$

Следуя методу Фурье, решение краевой задачи ищем в виде ряда, представляющего собой произведение двух функций:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\omega_k x \ . \tag{7}$$

Для того чтобы решение (7) удовлетворяло уравнению (5), текущую координату поперечного сечения стержня представим также в виде ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\omega_k x \ . \tag{8}$$

После подстановки функции (8) и частных производных функций (7) в (5) получим обыкновенное неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$f''_k(t) + a^2\omega_k f_k(t) = \Omega^2(t)b_k \, . \tag{9}$$

Общее решение такого дифференциального уравнения, как известно, представляет собой сумму общего решения уравнения (9) без правой части и частного решения уравнения (9).

Общее решение уравнения (9) без правой части имеет вид

$$f_{1k}(t) = C_1 \cos a\omega_k t + C_2 \sin a\omega_k t . \qquad (I0)$$

Частное решение уравнения (9) ищем методом вариации произвольных постоянных, используя общее решение (I0). Опуская промежуточные выкладки, общее решение получим в виде

$$f_k(t) = B_k \sin a\omega_k t + A_k \cos a\omega_k t + \frac{b_k}{a\omega_k}\Big[\sin a\omega_k t \cdot \int \Omega^2(t) \cos a\omega_k t\,dt - \cos a\omega_k t \cdot \int \Omega^2(t) \sin a\omega_k t\,dt\Big] , \qquad (II)$$

где A_k и B_k – произвольные постоянные.

Теперь функция продольного перемещения поперечного сечения стержня (7) с учётом решения (II) получит следующий вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[B_k \sin a\omega_k t + A_k \cos a\omega_k t + \frac{b_k}{a\omega_k} \cdot \Big[\sin a\omega_k t \cdot \int \Omega^2(t) \cos a\omega_k t\,dt - \cos a\omega_k t \cdot \int \Omega^2(t) \sin a\omega_k t\,dt\Big]\Big] \sin \omega_k x . \qquad (I2)$$

Произвольные постоянные A_k и B_k найдём из начальных условий

$$u(x,0) = 0 , \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 . \qquad (I3)$$

Воспользуемся для этой цели выражением (7), из которого с учётом (I3) получим

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(0) \sin \omega_k x = 0 \Rightarrow f_k(0) = 0$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \Rightarrow f_k'(0) = 0 . \qquad (I4)$$

Определим A_k и B_k с учётом (I3) и (I4) для двух практически важных случаев:

а) случай равномерного вращения $\Omega = const$

Здесь из выражения (II) с учётом (I3) получим

$$A_k = -\frac{b_k \Omega^2}{a^2 \omega_k^2}\ ; \qquad B_k = 0\ . \tag{I5}$$

Функция перемещения продольного сечения стержня с учётом (I5) будет иметь вид

$$u(x,t) = \frac{\Omega^2}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{b_k}{\omega_k^2} (1 - \cos a\omega_k t) \sin \omega_k x \right]\ . \tag{I6}$$

б) случай равнопеременного вращения $\varepsilon = const$, $\Omega = \varepsilon t$.
Здесь также из (I2) с учётом (I3) получим

$$A_k = \frac{2 b_k \varepsilon^2}{a^4 \omega_k^4}\ ; \qquad B_k = 0\ . \tag{I7}$$

Функция перемещения продольного сечения стержня получит вид.

$$u(x,t) = \frac{2\varepsilon^2}{a^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{b_k}{\omega_k^4} \left(\frac{a^2 \omega_k^2 t^2}{2} + \cos a\omega_k t - 1 \right) \sin \omega_k x \right]\ . \tag{I8}$$

Теперь, исходя из граничных условий, определим значения параметра ω_k , при которых найденное решение удовлетворяет уравнению (5) , а также определим коэффициент b_k.

Из граничных условий (6) и выражения (7) следует, что

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\ell} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \omega_k \cos \omega_k \ell = 0\ . \tag{I9}$$

Из (I9) видно, что так как $f_k(t) \neq 0$, то $\cos \omega_k \ell = 0$, а это возможно лишь при следующих значениях параметра ω_k :

$$\omega_k = \frac{\pi}{2\ell}(2m+1)\ , \tag{20}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Для определения коэффициента b_k умножим обе части (8) на $\sin \omega_k x$ и проинтегрируем полученное равенство

$$b_k = (-1)^m \frac{4}{(2m+1)\pi}\ , \tag{2I}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

В итоге работы получен общий вид функции продольного перемещения поперечного сечения вращающегося однородного стержня с учётом сил инерции.

Для случаев равномерного и равнопеременного вращения получены выражения для продольного перемещения поперечного сечения стержня, позволяющие практически определить напряжения в поперечных сечениях стержня с помощью зависимостей $\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon$; $\sigma=E\varepsilon$, иными словами, оценить прочность вращающегося стержня с учётом сил инерции в указанных режимах.

Сопоставляя формулы (I6) и (I8), можно отметить, что в случае равномерного вращения перемещение u , а значит, и продольные напряжения в поперечных сечениях стержня будут возрастать лишь до определённого предела. В случае же равнопеременного вращения стержня напряжения будут возрастать пропорционально времени. Следовательно, в периоды возрастания или уменьшения угловой скорости влияние сил инерции будет наиболее ощутимым. Очевидно, что продолжительность таких периодов должна быть по возможности минимальной.

Литература

I. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л., "Машиностроение", 1976.

2. Бабаков И.М. Теория колебаний. М., "Высшая школа", 1972.

The effect of forces of inertia to longitudinal osillation of rotative bar

I. Gavrikov, B. Jasulovitš

Summary

In this paper the effect of forces of inertia to longitudinal oscillation of rotative bar is studied. The differential equation of longitudinal oscillation is derived. The general solution of that equation has been found by the use of method of Fourie. The constants of integration are determined in the case of uniform rotation and uniformly variable rotation.

МЕТОДЫ РАСЧЁТА СЛОИСТЫХ ГОФРИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК

Г.П.Арясов, А.Н.Ситко, Е.В.Соколов

Таллинский политехнический институт

В настоящее время многослойные гофрированные оболочки получили широкое распространение в строительстве и во многих областях машиностроения [I] . Однако методы их расчёта, особенно при исследовании краевого эффекта, до сих пор нельзя считать завершёнными.

В качестве исходных дифференциальных уравнений многослойных гофрированных оболочек целесообразно использовать систему разрешающих дифференциальных уравнений осесимметричных деформаций многослойных оболочек, рассмотренную в [2, п.2.4] .

Координатная поверхность оболочки задаётся с помощью криволинейных координат

$$\alpha = s , \qquad \beta = \theta ,$$

где s – длина дуги меридиана,

θ – окружная координата.

Параметры Ляме для такой поверхности имеют вид $A=1$, $B=r$. Главные радиусы кривизны определяются с помощью соотношений

$$R_s = \frac{\sqrt{1-(r')^2}}{r''} , \qquad R_\theta = \frac{r}{\sqrt{1-(r')^2}} . \qquad (I)$$

Уравнения Кодацци-Гаусса сводятся к одному уравнению следующего вида:

$$\frac{dr}{ds} = \cos\varphi , \qquad (2)$$

где φ – угол, образованный нормалью к срединной поверхности с осью вращения оболочки.

В отличие от однослойных оболочек в многослойных оболочках безмоментные и изгибные факторы не могут быть отделены друг от друга. Поэтому для многослойной изотропной оболочки внутренние усилия определяются с помощью соотношения

$$\begin{bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ C_{21} & C_{22} & \kappa_{21} & \kappa_{22} \\ \kappa_{11} & \kappa_{12} & D_{11} & D_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \text{æ}_s \\ \text{æ}_\theta \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

где ε_s , ε_θ , æ_s и æ_θ – деформации координатной поверхности оболочки;

$$C_{pm} = C_{mp}, \qquad \kappa_{pm} = \kappa_{mp}, \qquad D_{pm} = D_{mp},$$

$$C_{11} = C_{22} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{E_i}{1-\nu_i^2} d\xi, \qquad C_{12} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{\nu_i E_i}{1-\nu_i^2} d\xi,$$

$$\kappa_{11} = \kappa_{22} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \xi d\xi, \qquad \kappa_{12} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{\nu_i E_i}{1-\nu_i^2} \xi d\xi,$$

$$D_{11} = D_{22} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \xi^2 d\xi, \qquad D_{12} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{\nu_i E_i}{1-\nu_i^2} \xi^2 d\xi,$$

i – номер слоя оболочки,

ξ_i – координаты i-го слоя оболочки, отсчитываемые в направлении нормали к её координатной поверхности;

E_i , ν_i – модуль упругости и коэффициент Пуассона i-го слоя.

Очевидно, что для однослойной оболочки все коэффициенты $\kappa_{mp} = 0$, если отсчёт производится от срединной поверхности, а символы $\sum\int$ должны быть заменены простым интегралом $\int_{-h/2}^{+h/2}$, где h – толщина оболочки.

Тогда для однослойных оболочек получим

$$C_{11} = C_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \qquad C_{12} = \nu C_{11}, \qquad \kappa_{11} = \kappa_{22} = \kappa_{12} = 0,$$

$$D_{11} = D_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \qquad D_{12} = \nu D_{11}.$$

С учётом сделанных пояснений система разрешающих дифференциальных уравнений запишется следующим образом:

$$\frac{d\bar{y}}{ds} = A(s)\bar{y} + \bar{f}(s), \qquad (4)$$

где

$$\bar{y}^T = [N_s, Q_s, M_s, u, w, \theta_s], \qquad \bar{f}^T(s) = [-q_s, -q_r, 0, 0, 0, 0],$$

$\bar{y}^T$, $\bar{f}^T(s)$ – транспонированные матрицы от матриц – векторов $\bar{y}$ и $\bar{f}(s)$;

u – перемещение оболочки в направлении координатной линии s;

w – прогиб оболочки;

θ_s – угол поворота;

q_s, q_n – тангенциальная и нормальная составляющие внешней нагрузки.

Матрица $A(s)$ имеет вид

$$A(s) = \begin{bmatrix} \frac{(d_{41}-1)\cos\varphi}{r} & 0 & \frac{d_{42}\cos\varphi}{r} & \frac{d_{43}\cos^2\varphi}{r^2} & \frac{d_{43}\sin 2\varphi}{2r^2} & \frac{d_{44}\cos^2\varphi}{r^2} \\ \frac{d_{41}\sin\varphi}{r} & -\frac{\cos\varphi}{r} & \frac{d_{42}\sin\varphi}{r} & \frac{d_{43}\sin 2\varphi}{2r^2} & \frac{d_{43}\sin^2\varphi}{r^2} & \frac{d_{44}\sin 2\varphi}{2r^2} \\ \frac{d_{51}\cos\varphi}{r} & 1 & \frac{(d_{52}-1)\cos\varphi}{r} & \frac{d_{53}\cos^2\varphi}{r^2} & \frac{d_{53}\sin 2\varphi}{2r^2} & \frac{d_{54}\cos^2\varphi}{r^2} \\ \frac{(d_{41}-1)\cos\varphi}{r} & 0 & d_{12} & \frac{d_{13}\cos\varphi}{r} & \frac{d_{13}\sin\varphi}{r} & \frac{d_{14}\cos\varphi}{r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{d_{51}\cos\varphi}{r} & 0 & d_{32} & \frac{d_{32}\cos\varphi}{r} & \frac{d_{33}\sin\varphi}{r} & \frac{d_{34}\cos\varphi}{r} \end{bmatrix}, \qquad (5)$$

где коэффициенты d_{ik} приведены в [2,с.66–67, ф-ла (2.I08)].

Чтобы решить систему дифференциальных уравнений (4), необходимо задаться уравнением координатной поверхности для многослойной или уравнением срединной поверхности для однослойной оболочек в виде функции

$$r = \psi(s).$$

Тогда, используя уравнение Кодацци–Гаусса (2), можно найти величины $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, входящие в матрицу коэффициентов $A(s)$, а по формулам (I) главные радиусы кривизны оболочки R_s и R_θ представить как функции координаты s. Далее по любой из известных схем можно произвести интегрирование системы уравнений (4). Для этой цели, например, может быть использован метод, предложенный в [I] .

Однако, для гофрированных оболочек с периодически повторяющимися элементами нет необходимости для нахождения общего решения пользоваться обычными методами интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

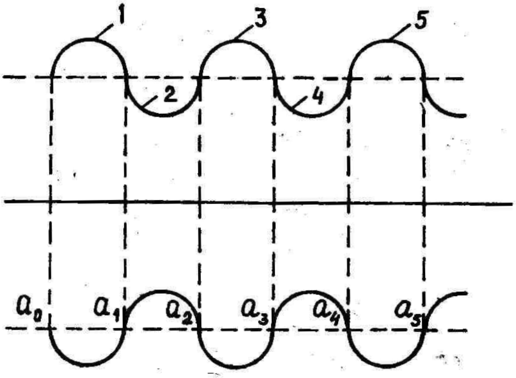
Дело в том, что в случае оболочки, составленной из периодически повторяющихся элементов, задача отыскания решения значительно упрощается, если можно построить общее решение для характерного элемента оболочки, т.е. записать его решение в виде

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{n} C_i Y_i(s)+Y_{\text{ч}}(s)\ , \qquad (6)$$

где n - порядок исходной системы дифференциальных уравнений;

C_i , $Y_i(s)$, $Y_{\text{ч}}(s)$ - произвольные постоянные, линейно независимые решения однородной задачи и частное решение системы неоднородных дифференциальных уравнений.

Например, для гофрированной оболочки типа сильфона, представленного на фиг. I, имеем два характерных элемента: I и 2.



Фиг. I.

Для полугофра с выпуклостью, направленной от оси вращения (элемент I), формула (6) даёт

$$Y_1(s)=\sum_{j=1}^{n} C_{j1} Y_{j1}(s)+Y_{\text{ч}1}(s)\ .$$

Аналогично для полугофра с выпуклостью, направленной к оси вращения (элемент 2), будем иметь

$$Y_2(s)=\sum_{j=1}^{n} C_{j2} Y_{j2}(s)+Y_{\text{ч}2}(s)\ .$$

Связь между произвольными постоянными i-го и i+I-го участков осуществляется с помощью соотношения [3, ф-ла (6)]

$$[C_{j\,i+1}]=[V_{i+1}(a_i)]^{-1}[V_i(a_i)][C_{ji}]+[V_i(a_i)]^{-1}[y_{\text{ч}i,\,i+1}(a_i)]\,, \qquad (7)$$

где $[C_{j\,i+1}]$ и $[C_{ji}]$ - матрицы-столбцы произвольных постоянных i+I-го и i-го участков;

$[V_{i+1}(a_i)]$ и $[V_i(a_i)]$ - матрицы Вронского i+I-го и i-го участков;

$[y_{\text{ч}i,\,i+1}(a_i)]$ - матрица-столбец частных решений соответствующих неоднородных дифференциальных уравнений;

$$[y_{\text{ч}i,\,i+1}(a_i)]=\begin{bmatrix} y_{\text{ч}i}(a_i)-y_{\text{ч}\,i+1}(a_i) \\ y'_{\text{ч}i}(a_i)-y'_{\text{ч}\,i+1}(a_i) \\ \hdashline y^{(n-1)}_{\text{ч}i}(a_i)-y^{(n-1)}_{\text{ч}\,i+1}(a_i) \end{bmatrix}$$

Поскольку сильфон имеет периодически повторяющиеся одинаковые гофры, должны выполняться условия (фиг. I)

$$\left.\begin{aligned} y_{j1}(a_0)&=y_{j1}(a_1)=\ldots=y_{j1}(a_N)\,,\\ y_{j2}(a_0)&=y_{j2}(a_1)=\ldots=y_{j2}(a_N)\,, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

где N - общее количество полугофров.
Из соотношения (8) следует, что должны выполняться соответствующие условия и для матриц Вронского, т.е.

$$\left.\begin{aligned} V_1(a_0)&=V_1(a_1)=\ldots=V_1(a_N)\,,\\ V_2(a_0)&=V_2(a_1)=\ldots=V_2(a_N)\,. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

В то же время частные решения для соседних узловых точек a_0, a_1, a_2, ..., a_N в общем случае будут отличны друг от друга.

Используя соотношения (7) для элементов I и 2 (фиг. I), получим

$$[C_{j2}]=[V_2(a_1)]^{-1}[V_1(a_1)][C_{j1}]+[V_2(a_1)]^{-1}[y_{\text{ч}12}(a_1)]\,. \qquad (IO)$$

Аналогично для участков 2 и 3 формула (7) даёт

$$[C_{j3}]=[V_3(a_2)]^{-1}[V_2(a_2)][C_{j2}]+[V_3(a_2)]^{-1}[y_{\text{ч}23}(a_2)]\,. \qquad (II)$$

Учитывая зависимость (9), а также соотношение $V_1(a_i) = V_{2k+1}(a_i)$, которое вытекает из периодичности нечётных полугофров, выражение (II) преобразуем к виду

$$[C_{j3}] = [V_1(a_2)]^{-1}[V_2(a_2)][V_2(a_1)]^{-1}[V_1(a_1)][C_{j1}] + \\ + [V_1(a_2)]^{-1}[V_2(a_2)][V_2(a_1)]^{-1}[y_{\text{ч}_{12}}(a_1)] + [V_1(a_2)]^{-1}[y_{\text{ч}_{23}}(a_2)]. \quad (I2)$$

В силу выполнения условий (9) получим

$$[V_2(a_2)][V_2(a_1)]^{-1} = [E], \qquad [V_1(a_2)]^{-1}[V_2(a_1)] = [E],$$

где $[E]$ - единичная матрица.
Поэтому вместо (I2) будем иметь

$$[C_{j3}] = [C_{j1}] + [V_1(a_1)]^{-1}[y_{\text{ч}_{12}}(a_1) + y_{\text{ч}_{23}}(a_2)]. \quad (I3)$$

Обобщая полученный результат на все нечётные полугофры, можно утверждать, что произвольные постоянные для всех нечётных полугофров отличаются друг от друга лишь на частное решение. При этом применение формулы, аналогичной (I3), к последующим нечётным полугофрам даёт

$$[C_{j\,2k+1}] = [C_{j1}] + [V_1(a_1)]^{-1}\Big[\sum_{i=1}^{2k} y_{\text{ч}_{i,i+1}}(a_i)\Big]. \quad (I4)$$

Совершенно аналогично для всех чётных полугофров получим

$$[C_{j\,2k}] = [C_{j2}] + [V_2(a_1)]^{-1}\Big[\sum_{i=2}^{2k} y_{\text{ч}_{i,i+1}}(a_i)\Big]. \quad (I5)$$

Поскольку произвольные постоянные $[C_{j2}]$ выражаются через произвольные постоянные первого полугофра $[C_{j1}]$ при помощи зависимости (I0), то видим, что соотношения (I0), (I4) и (I5) позволяют выразить произвольные постоянные всех участков гофрированной оболочки через произвольные постоянные первого участка.

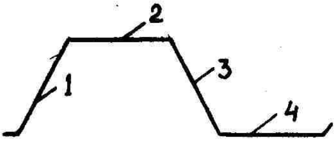
Общее решение задачи записывается с помощью единичных функций $\eta(s-a_i)$ следующим образом:

$$[y(s)] = [1-\eta(s-a_1)]y_1(s) + [\eta(s-a_1)-\eta(s-a_2)]\,y_2(s) + \ldots + \eta(s-a_{N-1})y_N(s) \quad (I6)$$

Весьма существенно, что общее решение (I6) содержит теперь лишь n произвольных постоянных, которые могут быть определены из граничных условий задачи.

В задачах, в которых учитывается влияние краевого эффекта, все частные решения $y_{ч_i}(a_i)$, за исключением частных решений, учитывающих работу крайних сечений оболочки, одинаковы. Поэтому вторые слагаемые зависимостей (I4) и (I5) превращаются в обычные частные решения одного из крайних элементов гофра.

Структура зависимостей (I0), (I4) и (I5) не изменится и в случае, если гофр имеет более сложное очертание. Например, для гофра, изображённого на фиг. 2, вместо одного соотношения (I0) необходимо ввести три условия, связывающие произвольные постоянные элементов 2, 3 и 4 с произвольными постоянными первого элемента гофра. Кроме того, вместо соотношений (I4) и (I5) придётся ввести четыре зависимости, связывающие произвольные постоянные участков гофров, имеющих номера 4к, 4к-I, 4к-2, 4к-3.



Фиг. 2.

Таким образом, процесс построения решения для гофрированной оболочки может быть значительно упрощён, если учесть периодичность её геометрии. Более того, если известны решения для каждого из элементов одного гофра, то формулы (I0), (I4) и (I5) позволяют "набрать" общее решение гофрированной оболочки (I6), не прибегая к интегрированию дифференциальных зависимостей (4).

Литература

1. Арясов Г.П., Снитко А.Н., Соколов Е.В., Расчёт гофрированных оболочек типа сильфона методом обобщённых функций. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1983, 659, 88-94.
2. Григоренко Я.М., Мукоед А.П., Решение задач теории оболочек на ЭВМ. Киев, "Вища школа", 1979.
3. Королёв В.И., Слепов Б.И., Соколов Е.В., Применение обобщённых функций к построению аналитических решений для составных оболочек и пластин. В кн.: Строит. мех. сооружений. Межвуз. темат.сб.тр., Л.: ЛИСИ, 1981, 54-60.

Methods of calculation of layer goffering shells

G. Aryasov, A. Snitko, E. Sokolov

Summary

This article is devoted to the problem of the calculation of layer goffering shells. The differential equations of layer goffering shells having arbitrary configuration in the equation form of Grigorenko are employed here.

The repetition of the shell geometry is taken into account. For this purpose the correlations which connect integration constants of the goffering shell's elements are used. Both considerable simplification of the calculation and the possibility of registration of the boundary conditions are obtained.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРИНЦИПАХ МЕХАНИКИ

Х.Рельвик

Таллинский политехнический институт

I. Обозначения

Введём аналоги кинетической энергии [3] $V^{l,n} = \sum m_i \overset{(l)}{\bar{v}_i} \cdot \overset{(n)}{\bar{v}_i}$, $V^{l,n} = V^{n,l}$, в частности, $2T = V^{0,0}$.

Скорость точки $\bar{v} = v^j \bar{u}_j$, где v^j – параметры скорости и $\bar{u}_j = \bar{u}_j(x^k)$ – соответствующие базисные векторы.

Возможная скорость [2] $\{\bar{v}\} = \{v^j\}\bar{u}_j$.

Возможная производная скорости $\{\dot{\bar{v}}\} = \{\dot{v}^j\} + \{v^j v^k\}\dfrac{\partial \bar{u}_j}{\partial x^k}$.

Производная возможной скорости $\{\bar{v}\}^{\cdot} = \{v\}^{\cdot}\bar{u}_j + \{v^j\}\{v^k\}\dfrac{\partial \bar{u}_j}{\partial x^k}$, следовательно, естественно, принимать

$$\{\bar{v}\}^{\cdot} = \{\dot{\bar{v}}\}; \qquad \{\bar{v}\}^{\cdot\cdot} = \{\ddot{\bar{v}}\}; \quad \ldots \quad .$$

Введём возможные аналоги кинетической энергии

$$\{V^{l,n}\} = \sum m_i \overset{(l)}{\bar{v}_i} \cdot \{\overset{(n)}{\bar{v}_i}\}, \qquad \{V^{l,n}\} \neq \{V^{n,l}\},$$

в частности, $\{V^{0,0}\} = 2\{T\} = \sum m_i \bar{v}_i \cdot \{\bar{v}_i\}$.

Фигурные скобки всегда принадлежат к последнему множителю.

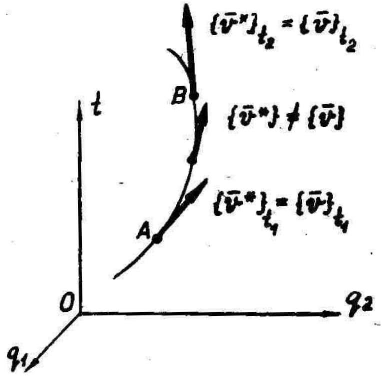
Возможная мощность $\{N\} = \sum \bar{F}_i \cdot \{\bar{v}_i\}$ и аналогичные величины с производными скорости. Вместо $\{\bar{v}_i\}$ и $\{\overset{(n)}{\bar{v}_i}\}$ будем пользоваться и другими векторами, в частности, относительной скоростью и её производными

$$\{V^{l,n}\} = \sum m_i \overset{(l)}{\bar{v}_i} \cdot \{\overset{(n)}{\bar{v}_{ir}}\}; \quad \{N\}_r = \sum \bar{F}_i \cdot \{\bar{v}_{ir}\}; \quad \{N^n\}_r = \sum \bar{F}_i \cdot \{\overset{(n)}{\bar{v}_{ir}}\}$$

и т.д., где индекс r показывает относительность движения.

2. Постановка задачи

Рассмотрим движение системы в расширенном $(k+1)$ – мерном пространстве (k – число степеней свободы), где координатами являются q_i и время t (см., напр. [I] с. I04).



Фиг. I.

Траектория в этом пространстве в случае $n=2$ показана на фиг. I. В дальнейшем будем заниматься и квазикоординатами.

Пусть возможная скорость (и её производные) на дуге AB будет $\{\bar v\}$ $\left(\{\bar v\}^{\cdot} = \{\dot{\bar v}\};\ \{\bar v\}^{\cdot\cdot} = \{\ddot{\bar v}\}; \ldots\right)$.

Представим себе, что на том же пути существует ещё кинематически возможное движение, отличное от действительного. Пусть возможная скорость и её производные этого движения будут

$$\{\bar v^*\} \qquad \left(\{\bar v^*\}^{\cdot} = \{\dot{\bar v}^*\};\quad \{\bar v^*\}^{\cdot\cdot} = \{\ddot{\bar v}^*\}; \ldots\right).$$

Эти скорости в общем не равны $\left(\{\bar v^*\} \neq \{\bar v\};\ \{\bar v^*\}^{\cdot} \neq \{\bar v\}^{\cdot}; \ldots\right)$, но будем требовать, что в точках A и B они совпадали. Обозначим скорость такого движения (и соответствующие производные) относительно действительного движения через

$$\{\bar v_r\} = \{\bar v^*\} - \{\bar v\}; \qquad \{\bar v_r\}^{\cdot} = \{\bar v^*\}^{\cdot} - \{\bar v\}^{\cdot}; \ \ldots ;$$

тогда в точках A и B соответственно

$$\begin{aligned} &\{\bar v_r\}_{t_1} = \{\bar v_{rA}\} = 0; \qquad &\{\bar v_r\}^{\cdot}_{t_1} = 0;\ \ldots \\ &\{\bar v_r\}_{t_2} = \{\bar v_{rB}\} = 0; \qquad &\{\bar v_r\}^{\cdot}_{t_2} = 0;\ \ldots\ . \end{aligned} \tag{I}$$

При этом $\{\bar v\} = \{v^j\}\bar u_j$ и $\{\bar v^*\} = \{v^{*j}\}\bar u_j$, так как базис $\bar u_j$ зависит только от положения точек и не зависит от их кинематики. Для удобства записи мы часто опускаем индекс r, от этого ошибок не будет.

Имеем целью составить уравнения движения системы.

3. Аналог принципа Гамильтона-Остроградского

Для подстановки в уравнение возможной мощности [2]

$$\sum m_i \bar a_i \cdot \{\bar v_i\} = \{N\} \tag{2}$$

вычислим

$$\frac{d}{dt}\sum m_i\bar{v}_i\cdot\{\bar{v}_i\}=\sum m_i\bar{a}_i\cdot\{\bar{v}_i\}+\sum m_i v_i\cdot\{\bar{v}_i\}^{\cdot}$$

и получим аналог центрального уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\sum m_i\bar{v}_i\cdot\delta\bar{r}_i=\delta T+\delta' A$$

в виде

$$\frac{d}{dt}\sum m_i\bar{v}_i\cdot\{\bar{v}_i\}=\{V^{0,1}\}+\{N\}. \qquad (3)$$

Составим теперь уравнение (3) при помощи возможных относительных скоростей $\{\bar{v}_{ik}\}$ и проинтегрируем его в пределах от t_1 до t_2

$$\frac{d}{dt}\sum m_i\bar{v}_i\cdot\{\bar{v}_{ik}\}=\{V^{0,1}\}_k+\{N\}_k\ ;$$

$$\sum m_i\bar{v}_i\cdot\{\bar{v}_{ik}\}\Big|_{t_1}^{t_2}=\int_{t_1}^{t_2}\left(\{V^{0,1}\}_k+\{N\}_k\right)dt$$

или с учётом усилий (I)

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\{V^{0,1}\}_k+\{N\}_k\right)dt=0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) выражает интегральный принцип механики, аналогичный принципу Гамильтона-Остроградского. Его первый член интегрируется по частям

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum m_i\bar{v}_i\cdot\{\bar{v}_{ik}\}dt=\sum m_i\bar{v}_i\cdot\{\bar{v}_{ik}\}\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\sum m_i\bar{a}_i\cdot\{\bar{v}_{ik}\}dt=$$

$$=-\int_{t_1}^{t_2}\sum m_i\bar{a}_i\cdot\{\bar{v}_{ik}\}dt=-\int_{t_1}^{t_2}\sum m_i\bar{a}_i\cdot\{v_k^j\}\bar{u}_{ij}dt.$$

Следовательно, уравнение (4) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum(m_i\bar{a}_i-\bar{\mathcal{F}}_i)\cdot\{\bar{v}_{ik}\}dt=0$$

или

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum(m_i a_i-\mathcal{F}_i)\cdot\{v_k^j\}\bar{u}_{ij}=0.$$

Здесь $\{v_k^j\}$ – произвольные величины, и поэтому (см., напр. [4] с. 205–206)

$$\sum(m_i\bar{a}_i-\bar{\mathcal{F}}_i)\cdot\bar{u}_{ij}=0\ ,$$

как и должно быть.

4. Обобщение

Возьмём вместо уравнения (2) его обобщение (см. [3]

$$\sum m_i \bar{a}_i \cdot \{\overset{(n)}{\bar{v}_i}\} = \{N^n\} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (5)$$

и используем производную

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \bar{a}_i \cdot \{\overset{(n)}{\bar{v}_i}\} = \sum m_i \bar{a}_i \cdot \{\overset{(n)}{\bar{v}_i}\} + \sum m_i \bar{v}_i \cdot \{\overset{(n+1)}{\bar{v}_i}\} .$$

Составим соответствующее уравнение при помощи относительных скоростей. Получим обобщение уравнения (3)

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \bar{v}_i \cdot \{\bar{v}_{in}\}^{(n)} = \{V^{0,n+1}\}_{\kappa} + \{N^n\}_{\kappa} \quad (n = 1, 2, \ldots) . \quad (6)$$

Проинтегрировав уравнение (6), учтя условия (I), получим обобщение принципа (4)

$$\int_{t_1}^{t_2} (\{V^{0,n+1}\}_{\kappa} + \{N^n\}_{\kappa}) dt = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) . \qquad (7)$$

Здесь также первый член интегрируется по частям, и при условиях (I) получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum (m_i \bar{a}_i - \bar{F}_i) \cdot \{\overset{(n)}{\bar{v}_{n}^{j}}\} \bar{u}_{ij} dt = 0 ;$$

$$\sum (m_i \bar{a}_i - \bar{F}_i) \cdot \bar{u}_{y} = 0 .$$

5. Дальнейшее обобщение

До сих пор мы занимались аналогами кинетической энергии $V^{0,n}$, т.е. с первым индексом $l = 0$. Пусть теперь $l \neq 0$. Тогда, повторяя математические операции, сделанные в предыдущих пунктах, получим

$$\frac{d}{dt} \{V^{l-1,n}\}_{\kappa} = \{V^{l,n}\}_{\kappa} + \{V^{l-1,n+1}\}_{\kappa} ;$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\{V^{l,n}\}_{\kappa} + \{V^{l-1,n+1}\}_{\kappa}) dt = 0 .$$

Повторное интегрирование по частям второго члена под знаком интеграла даёт теперь

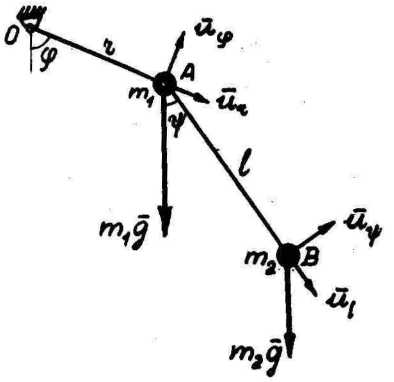
$$\int_{t_1}^{t_2} (\{V^{l,n}\}_{\kappa} \pm \{N^{l+n-1}\}_{\kappa}) dt = 0 , \qquad (8)$$

где знак плюс принадлежит к четному l , а минус – к нечетному l . Признаком того, сколько раз надо интегрировать, является конечное условие $l = 1$ – последний интеграл должен давать

$$\{V^{l,p}\} = \sum m_i \bar{a}_i \cdot \{\overset{(p)}{\bar{v}}_{in}\} = \sum \bar{F}_i \cdot \{\overset{(p)}{\bar{v}}_{in}\} \,, \quad \text{где} \quad p = (n+1) + (l-2) = n + l - 1.$$

Можно включить и случай $\overset{(-1)}{\bar{v}} = \bar{r}$. Тогда в формулах возникает сумма $\sum \bar{F}_i \cdot \{\bar{r}_i\}$, т.е. понятие возможного вириала. Но это требует особых рассуждений, которые мы здесь пропустим.

6. Пример



Фиг. 2.

Составим дифференциальные уравнения движения двойного маятника (фиг. 2).

Пользуемся уравнением (4). Здесь (индекс r опустим)

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(m_1 \bar{v}_A \cdot \{\bar{a}_A\} + m_2 \bar{v}_B \cdot \{\bar{a}_B\} + m_1 \bar{g} \cdot \{\bar{v}_A\} + m_2 \bar{g} \cdot \{\bar{v}_B\} \right) dt = 0 \,;$$

$$m_1 \bar{v}_A \cdot \{\bar{v}_A\} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m_1 \bar{a}_A \cdot \{\bar{v}_A\} dt + m_2 \bar{v}_B \cdot \{\bar{v}_B\} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m_2 \bar{a}_B \cdot \{\bar{v}_B\} dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left(m_1 \bar{g} \cdot \{\bar{v}_A\} + m_2 \bar{g} \cdot \{\bar{v}_B\} \right) dt = 0 \,;$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[(m_1 \bar{a}_A - m_1 \bar{g}) \cdot \{\bar{v}_A\} + (m_2 \bar{a}_B - m_2 \bar{g}) \cdot \{\bar{v}_B\} \right] = 0 \,.$$

Подставив сюда $\{\bar{v}_A\} = r\{\dot{\varphi}\}\bar{u}_\varphi$; $\quad \bar{a}_A = r\ddot{\varphi}\bar{u}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\bar{u}_r$;

$\{\bar{v}_B\} = r\{\dot{\varphi}\}\bar{u}_\varphi + l\{\dot{\psi}\}\bar{u}_\psi$; $\quad \bar{a}_B = r\ddot{\varphi}\bar{u}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\bar{u}_r + l\ddot{\psi}\bar{u}_\psi - l\dot{\psi}^2\bar{u}_l$,

получим

$$\int_{t_1}^{t_2}\{\dot{\varphi}\}\Big[(m_1+m_2)r^2\ddot{\varphi} + m_2 rl\ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi) + m_2 rl\dot{\psi}^2\sin(\varphi-\psi) +$$
$$+ (m_1+m_2)gr\sin\varphi\Big]dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2}\{\dot{\psi}\}\Big\{m_2\big[lr\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi) - lr\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\psi) + l^2\ddot{\psi}\big] +$$
$$+ m_2 gl\sin\psi\Big\}dt = 0 \;;$$

$$(m_1+m_2)r\ddot{\varphi} + m_2 l\ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi) + m_2 l\dot{\psi}^2\sin(\varphi-\psi) +$$
$$+ (m_1+m_2)g\sin\varphi = 0 \;;$$

$$r\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi) + l\ddot{\psi} - r\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\psi) + g\sin\psi = 0 \,.$$

7. Выводы

При помощи аналогов кинетической энергии можно составить бесконечное множество дифференциальных уравнений движения механической системы (см. (4), (7) и (8)), аналогичных интегральным вариационным принципам механики.

Раньше (см. [3]) получены два разных вида уравнений движения - типа Лагранжа (случай $l = 0$) и типа Аппеля ($l = 1$). Здесь также имеем два типа уравнений, но разница между ними минимальна - знак плюс или минус в равенстве (8). Кроме того, здесь оказались полезными и аналоги кинетической энергии с первым индексом $l > 1$, которых мы в [3] не применили.

Уравнения (7) и (8) полезны в случае надобности учёта связей с высшими производными скоростей.

Литература

I. Гантмахер Ф.Р., Лекции по аналитической механике. М., "Наука", I966.

2. Гольст Г., Рельвик Х., Сильде О., Основные вопросы аналитической механики. Уравнение возможной мощности. Таллин, "Валгус", I979.

3. Рельвик Х., Составление дифференциальных уравнений движения при помощи аналогов кинетической энергии. Тр. ТПИ, I973, № 345.

4. Смирнов В.И., Курс высшей математики т. 4. Изд. 3-е. Гос. изд. тех.-теорет. лит., М., I953.

About the integral principles of mechanics

H.Relvik

Summary

In the paper the integral principles of mechanics (4), (7) and (8) are derived by means of the possible power equation.

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВОЗМОЖНОЙ МОЩНОСТИ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.Хайтин

Таллинский политехнический институт

К настоящему времени уравнение возможной мощности УВМ [I] не без успеха применялось к некоторым разделам механики. В данной короткой статье на основе УВМ рассматривается вопрос устойчивости движения стационарных механических систем.

I. УВМ можно задать [I] в следующем виде:

$$\sum m_i\bar{a}_i\cdot u_{ij}\{v^j\}=\sum\bar{F}_i\cdot\bar{u}_{ij}\cdot\{v^j\}\ , \qquad (I.I)$$

где m_i – масса, $\bar{a}_i$ – ускорение, $\bar{u}_{ij}$ – базисный вектор i-той точки системы; вектор $\bar{u}_{ij}$ соответствует независимому параметру скорости – v^j, а $\{v^j\}$ – параметр возможной скорости, т.е. любое число; $\bar{F}_i$ – равнодействующая сил на i-тую точку; знак $\sum$ означает суммирование по i, т.е. по всем точкам системы; остальные индексы подчиняются правилу: по повторяющимся индексам производится суммирование.

Скорость и возможная скорость i-той точки соответственно будут

$$\bar{v}_i=v^j\bar{u}_{ij}\ , \qquad j=1,2,\ldots,S\ , \qquad (I.2)$$

$$\{\bar{v}_i\}=\{v^j\}\bar{u}_{ij}\ . \qquad (I.3)$$

Векторы $\bar{u}_{ij}$ являются функциями обобщенных координат q^m, $m=1,2,\ldots,n$. Скорости $\dot{q}^m$ и v^j связаны линейно:

$$\dot{q}^m=\Lambda^m_j v^j\ ,$$

где

$$\Lambda^m_j=\Lambda^m_j(q^m)\ .$$

Число степеней свободы системы: $S=n-\ell$, ℓ – число неголономных связей.

Рассматривая $\bar{r}_i=\bar{r}_i(q^m)$, имеем

$$\bar{v}_i=\dot{\bar{r}}_i=\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q^m}\dot{q}^m=\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q^m}\Lambda^m_j v^j=\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial x^j}v^j=v^j\bar{u}_{ij}\ ,$$

где x_j являются квазикоординатами

$$\dot{x}^j = v^j \quad \text{или} \quad x^j = \int v^j dt \, .$$

Связь
$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\partial f}{\partial q^m} A^m_j$$

остаётся в силе для любой функции $f(q^m)$.

2. Пусть в некоторый момент времени t_0 состояние механической системы определяется параметрами q^m_0 и v^j_0. Переместим мысленно систему в бесконечно близкое положение, при котором эти параметры получат приращения δq^m и δv^j, называемые вариациями координат и скоростей. Ввиду того, что при использовании δq^m необходимо учитывать уравнения связей, заменим их вариациями квазикоординат δx^j, которые можно выбирать свободно. В рассматриваемом положении q^m_0 системы можно все $x^j = 0$, поэтому для упрощения записи заменим δx^j на x^j.

Вариация радиуса-вектора

$$\delta \bar{r}_i = x^j \bar{u}_{ij} \, . \tag{2.I}$$

В процессе движения $\delta \bar{r}_i$ является функцией времени, и её производная равна вариации скорости [3], т.е.

$$(\delta \bar{r}_i)^{\cdot} = \delta \bar{v}_i \, , \tag{2.2}$$

аналогично

$$(\delta \bar{v}_i)^{\cdot} = \delta \bar{a}_i \, , \tag{2.3}$$

и, следовательно,

$$(\delta \bar{r}_i)^{\cdot\cdot} = \delta \bar{a}_i \, . \tag{2.4}$$

Выражения для этих вариаций и производных имеют следующий вид:

$$(\delta \bar{r}_i)^{\cdot} = \dot{x}^j \bar{u}_{ij} + \frac{\partial \bar{u}_{ij}}{\partial x^k} x^j v^k \, , \qquad k = 1, 2, \ldots, s \, ,$$

$$(\delta \bar{r}_i)^{\cdot\cdot} = \ddot{x}^j \bar{u}_{ij} + 2 \frac{\partial \bar{u}_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^j v^k + \frac{\partial \bar{u}_{ij}}{\partial x^k} x^j \dot{v}^k + \frac{\partial^2 \bar{u}_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} x^j v^k v^l \, ,$$

$$l = 1, 2, \ldots, s \, ,$$

$$\delta\dot{v}^i g_{jp} = \ddot{x}^j g_{jp} + 2\Gamma_{kj\cdot p}\dot{x}^j v^k + (\Gamma_{kj\cdot p} - \Gamma_{jk\cdot p})x^j \dot{v}^k -$$

$$-(\Gamma_{kj\cdot p} + \Gamma_{jk\cdot p})v^k \delta v^j + \left[\frac{\partial\Gamma_{kj\cdot p}}{\partial x^l} - \frac{\partial\Gamma_{kl\cdot p}}{\partial x^j} - \Delta_{kj\cdot lp}\right]x^j v^k v^l, \qquad (3.3)$$

где

$$\Delta_{kj\cdot lp} = \sum m_i\left(\frac{\partial\bar{u}_{ij}}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial\bar{u}_{ip}}{\partial x^l} - \frac{\partial\bar{u}_{il}}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial\bar{u}_{ip}}{\partial x^j}\right), \qquad (3.4)$$

и учтено

$$\sum m_i \frac{\partial^2\bar{u}_{ij}}{\partial x^k\partial x^l}\cdot\bar{u}_{ip} = \frac{\partial\Gamma_{kj\cdot p}}{\partial x^l} - \sum m_i\frac{\partial\bar{u}_{ij}}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial\bar{u}_{ip}}{\partial x^l}, \qquad (3.5)$$

$$\sum m_i \frac{\partial^2\bar{u}_{il}}{\partial x^k\partial x^j}\cdot\bar{u}_{ip} = \frac{\partial\Gamma_{kl\cdot p}}{\partial x^j} - \sum m_i\frac{\partial\bar{u}_{il}}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial\bar{u}_{ip}}{\partial x^j}. \qquad (3.6)$$

Наконец, выполнив подстановку выражения (3.3) в (3.I), получим искомые уравнения

$$\ddot{x}^j g_{jp} + \dot{x}^j\left(2\Gamma_{kj\cdot p}v^k - \frac{\partial Q_p}{\partial v^j}\right) + x^j\Big[(\Gamma_{kj\cdot p} + \Gamma_{jp\cdot k})\dot{v}^k +$$

$$+\left(\frac{\partial\Gamma_{kj\cdot p}}{\partial x^l} - \Delta_{kj\cdot lp}\right)v^k v^l - \frac{\partial Q_p}{\partial x^j} - v^k\gamma^l_{kj}\frac{\partial Q_p}{\partial v^l}\Big] = 0\,, \qquad (3.7)$$

в которых использовано с учётом (4.5) выражение

$$\delta Q_p = \dot{x}^j\frac{\partial Q_p}{\partial v^j} + x^j\left(\frac{\partial Q_p}{\partial x^j} + v^k\gamma^l_{kj}\frac{\partial Q_p}{\partial v^l}\right). \qquad (3.8)$$

Члены, содержащие $\Delta_{kj\cdot lp}$, в частном случае движения твёрдого тела упрощаются и принимают вид следующих выражений: при $p=1$, имеем

$$x^1\left[\Delta_{21\cdot 21}(v^2)^2 + \Delta_{31\cdot 31}(v^3)^2 + \Delta_{11\cdot 21}v^1v^2 + \Delta_{11\cdot 31}v^1v^3 + (\Delta_{21\cdot 31} + \Delta_{31\cdot 21})v^2v^3\right] \qquad (3.9)$$

+ члены, содержащие x^2 и x^3 с соответствующей перестановкой индексов. Аналогично могут быть записаны члены при x^j в уравнениях $p=2, 3$.

4. Уравнения (3.7) можно преобразовать к другому виду. Принимая во внимание (2.3) и (2.4), рассмотрим

$$\sum m_i\left[(\delta\bar{v}_i)^{\cdot} - (\delta\bar{r}_i)^{\cdot\cdot}\right]\cdot\bar{u}_{ip} = 0. \qquad (4.I)$$

При подстановке в (4.I) выражений для $(\delta\bar{v}_i)^{\cdot}$ и $(\delta\bar{r}_i)^{\cdot\cdot}$ из п. 2 имеем

$$\delta\bar{v}_i = \delta v^j \bar{u}_{ij} + \frac{\partial \bar{u}_{ij}}{\partial x^k} x^k v^j \quad ,$$

$$(\delta\bar{v}_i)^{\cdot} = (\delta v^j)^{\cdot} \bar{u}_{ij} + \frac{\partial \bar{u}_{ij}}{\partial x^k} v^k \delta v^j + \frac{\partial \bar{u}_{ij}}{\partial x^k}(\dot{x}^k v^j + x^k \dot{v}^j) + \frac{\partial^2 \bar{u}_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} x^k v^j v^l \ ,$$

$$\bar{a}_i = \dot{v}^j \bar{u}_{ij} + \frac{\partial \bar{u}_{ij}}{\partial x^k} v^j v^k$$

и

$$\delta\bar{a}_i = \delta\dot{v}^j \bar{u}_{ij} + \frac{\partial \bar{u}_{ij}}{\partial x^k} x^k \dot{v}^j + \left(\frac{\partial \bar{u}_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \bar{u}_{ik}}{\partial x^j}\right) v^k \delta v^j + \frac{\partial^2 \bar{u}_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} x^l v^j v^k \ .$$

3. Уравнения возмущенного движения механической системы можно получить, варьируя (I.I)

$$\delta \sum m_i \bar{a}_i \cdot \bar{u}_{ij} \{v^j\} = \delta \sum \bar{F}_i \cdot \bar{u}_{ij} \{v^j\}$$

или

$$\delta(\dot{v}^j g_{j\mu} + \Gamma_{kj \cdot \mu} v^j v^k)\{v^\mu\} = \delta Q_\mu \{v^\mu\} , \quad \mu = 1,2,\ldots,s \ ,$$

откуда ввиду произвольности параметров $\{v^\mu\}$ получим

$$\delta\dot{v}^j g_{j\mu} + (\Gamma_{jk \cdot \mu} + \Gamma_{j\mu \cdot k}) x^j \dot{v}^k + \frac{\partial \Gamma_{kl \cdot \mu}}{\partial x^j} x^j v^l v^k +$$

$$+ (\Gamma_{kj \cdot \mu} + \Gamma_{jk \cdot \mu}) v^k \delta v^j = \delta Q_\mu \quad , \qquad (3.I)$$

здесь принято во внимание, что

$$\delta g_{j\mu} = (\Gamma_{kj \cdot \mu} + \Gamma_{k\mu \cdot j}) x^k \quad ,$$

и сделана замена некоторых индексов. Выражение для $\delta\dot{v}^j g_{j\mu}$ может быть найдено с помощью (2.4). Составим сумму

$$\sum m_i [\delta\bar{a}_i - (\delta\bar{r}_i)^{\cdot\cdot}] \cdot \bar{u}_{i\mu} = 0 \quad . \qquad (3.2)$$

Подставив в (3.2) выражения для $\delta\bar{a}_i$ и $(\delta\bar{r}_i)^{\cdot\cdot}$, после упрощений получим

$$(\delta v^j)^{\cdot} g_{j\rho} = \ddot{x}^j g_{j\rho} + (\Gamma_{kj\cdot\rho} - \Gamma_{jk\cdot\rho})\dot{x}^j v^k + (\Gamma_{kj\cdot\rho} - \Gamma_{jk\cdot\rho}) x^j \dot{v}^k +$$

$$+ x^j\left[\Gamma_{lr\cdot\rho}\gamma^r_{jk} + \frac{\partial(\Gamma_{kj\cdot\rho} - \Gamma_{jk\cdot\rho})}{\partial x l} - \Sigma m_i\left(\frac{\partial \bar{u}_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \bar{u}_{ik}}{\partial x^j}\right)\cdot\frac{\partial \bar{u}_{i\rho}}{\partial x^l}\right] v^k v^l, \qquad (4.2)$$

где $$\gamma^r_{jk} = g^{rt}(\Gamma_{jk\cdot t} - \Gamma_{kj\cdot t}), \qquad r = 1, 2, \ldots, S \ ; \qquad (4.3)$$

учтено, что

$$\Sigma m_i \frac{\partial^2 \bar{u}_{ik}}{\partial x^j \partial x^l}\cdot\bar{u}_{l\rho} = \frac{\partial \Gamma_{jk\cdot\rho}}{\partial x^l} - \Sigma m_i \frac{\partial \bar{u}_{ik}}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial \bar{u}_{i\rho}}{\partial x^l}, \qquad (4.4)$$

а также (3.5) и (2.2), причём (2.2) представлено в виде

$$\delta v^j = \dot{x}^j + \gamma^j_{kl} x^l v^k . \qquad (4.5)$$

Умножив (4.5) на $g_{j\rho}$, дифференцируя все по времени, учтя (4.5) и что $\dot{g}_{j\rho} = (\Gamma_{kj\cdot\rho} + \Gamma_{k\rho\cdot j}) v^k$, получим второе выражение для $(\delta v^j)^{\cdot} g_{j\rho}$

$$(\delta v^j)^{\cdot} g_{j\rho} = \ddot{x}^j g_{j\rho} + x^j\left[\gamma^r_{jl}(\Gamma_{kr\cdot\rho} + \Gamma_{k\rho\cdot r}) + \frac{\partial(\Gamma_{kj\cdot\rho} - \Gamma_{jk\cdot\rho})}{\partial x^l}\right] v^k v^l +$$

$$+ (\Gamma_{kj\cdot\bar{\rho}} - \Gamma_{jk\cdot\rho})(\dot{x}^j v^k + x^j \dot{v}^k) , \qquad (4.6)$$

где сделана замена некоторых индексов. Сравнение (4.2) и (4.6) даёт

$$\Sigma m_i\left(\frac{\partial \bar{u}_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \bar{u}_{ik}}{\partial x^j}\right)\cdot\frac{\partial \bar{u}_{i\rho}}{\partial x^l} = \Gamma_{k\rho\cdot r}\gamma^r_{lj} . \qquad (4.7)$$

Теперь, приняв во внимание выражения (3.4) и (4.7), из (3.7) выводим уравнения возмущенного движения в виде

$$\ddot{x}^j g_{j\rho} + 2\Gamma_{kj\cdot\rho}\dot{x}^j v^k + (\Gamma_{kj\cdot\rho} + \Gamma_{j\rho\cdot k}) x^j \dot{v}^k +$$

$$+ x^j\left(\Gamma_{k\rho\cdot r}\gamma^r_{jl} + \frac{\partial \Gamma_{kj\cdot\rho}}{\partial x^l} - \Delta_{jk\cdot l\rho}\right) v^k v^l = \delta Q_\rho , \qquad (4.8)$$

где $\Delta_{jk\cdot l\rho}$ получается из (3.4) соответствующей перестановкой индексов. δQ_ρ см. (3.8).

5. Дадим ещё один вид уравнений возмущенного движения. Для этого выполним преобразование тех членов в (3.7), которые содержат отрицательную часть выражения (3.4). Тогда

$$x^j \Sigma m_i \frac{\partial \bar{u}_{il}}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial \bar{u}_{i\rho}}{\partial x^j} v^k v^l = \delta Q_\rho - \Sigma\left(\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial x^j} x^j + \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial v^j}\delta v^j\right)\cdot\bar{u}_{i\rho} - \Gamma_{j\rho\cdot k} x^j \dot{v}^k, \quad (5.1)$$

где принято во внимание I.2 и учтено, что

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}_i}{\partial x^k}\vartheta^k=\bar{a}_i-\dot{\vartheta}^k\bar{u}_{ik}\ ,$$

$$m_i\bar{a}_i=\bar{F}_i\ ,\qquad \Sigma\bar{F}_i\cdot\bar{u}_{ip}=Q_p\ , \tag{5.2}$$

$$\Sigma\frac{\partial\bar{F}_i}{\partial\vartheta^j}\cdot\bar{u}_{ip}=\frac{\partial Q_p}{\partial\vartheta^j}\ .$$

Выполнив подстановку (5.I) в (3.7) с учётом (3.4), (4.5) и (5.2) имеем

$$\begin{aligned}\ddot{x}^j g_{jp}+\dot{x}^j\left(2\Gamma_{kj\cdot p}-\frac{\partial Q_p}{\partial\vartheta^k}\right)\vartheta^k+x^j\Big[\Gamma_{kj\cdot p}\dot{\vartheta}^k+\left(\frac{\partial\Gamma_{kj\cdot p}}{\partial x^l}-\Sigma m_i\frac{\partial\bar{u}_{ij}}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial\bar{u}_{ip}}{\partial x^l}\right)\cdot\vartheta^k\vartheta^l-\\ -\left(\Sigma\frac{\partial\bar{F}_i}{\partial x^j}\cdot\bar{u}_{ip}+\vartheta^k\gamma^l_{kj}\frac{\partial Q_p}{\partial\vartheta^l}\right)\Big]=0\ .\end{aligned} \tag{5.3}$$

Отметим, что (5.3) получается и при варьировании

$$\Sigma m_i\delta(\bar{a}_i-\bar{F}_i)\cdot\bar{u}_{ip}=0\ .$$

Здесь подлежат варьированию все силы так же, как в члене $\Sigma\frac{\partial\bar{F}_i}{\partial x^j}\cdot\bar{u}_{ip}x^j$ из (5.3).

6. Допустим, что для некоторой механической системы коэффициенты при $\ddot{x}^j$, $\dot{x}^j$ и x^j в уравнении (3.7), или (4.8), или (5.3) имеют постоянное значение (это может быть, например, в случае установившегося движения). Тогда возмущенное движение рассматриваемой системы будет описываться системой линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Дальнейшее определение устойчивости движения производится на основе анализа корней характеристического уравнения [4].

7. Вопрос исследования устойчивости движения можно ещё решать иначе.

Пусть в начальный момент

$$x^j=0\ ,\qquad \delta\vartheta^j\neq 0\ . \tag{7.I}$$

Тогда (4.5) даёт $\delta\vartheta^j=\dot{x}^j$, а сравнивая (3.3) и (4.6), получим

$$\delta\dot{\vartheta}^j=(\delta\vartheta^j)^{\cdot}\ . \tag{7.2}$$

Теперь с учётом (7.I), (7.2) и (3.8), из (3.I) имеем

$$(\delta v^l)^{\cdot}+\left[(\Gamma^l_{kj}+\Gamma^l_{jk})v^k-g^{lp}\frac{\partial Q_p}{\partial v^j}\right]\delta v^j=0\,, \qquad (7.3)$$

где выполнено умножение на g^{lp} и принято во внимание, что

$$g_{jp}g^{pl}=\delta^l_j\,, \qquad \Gamma^l_{kj}=g^{lp}\Gamma_{kj\cdot p}\;.$$

Пример. Вращение по инерции твёрдого тела вокруг закреплённой точки.

В качестве осей координат принимаются главные оси инерции тела в закреплённой точке O.

Скорость i-той точки тела

$\bar{v}_i=v^j\bar{u}_{ij}$, $j=1,2,3$, где $v^1=\omega_1$, $v^2=\omega_2$, $v^3=\omega_3$,

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_{i1}&=\bar{i}\times\bar{\varrho}_i=y_i\bar{k}-z_i\bar{j}\,,\\ \bar{u}_{i2}&=\bar{j}\times\bar{\varrho}_i=z_i\bar{i}-x_i\bar{k}\,,\\ \bar{u}_{i3}&=\bar{k}\times\bar{\varrho}_i=x_i\bar{j}-y_i\bar{i}\,,\end{aligned}\right\} \qquad (1^0)$$

$$\varrho_i=x_i\bar{i}+y_i\bar{j}+z_i\bar{k}\;.$$

Дифференцируя (1^0) по времени и учтя, что

$$(\partial\bar{u}_{ij}/\partial\dot{x}^l)=(\partial\dot{\bar{u}}_{ij}/\partial v^l)\;,$$

получим

$$\left.\begin{aligned}&(\partial\bar{u}_{i1}/\partial\dot{x}^1)=-y_i\bar{j}-z_i\bar{k},\quad(\partial\bar{u}_{i1}/\partial\dot{x}^2)=y_i\bar{i},\quad(\partial\bar{u}_{i1}/\partial\dot{x}^3)=z_i\bar{i},\\ &(\partial\bar{u}_{i2}/\partial\dot{x}^1)=x_i\bar{j},\quad(\partial\bar{u}_{i2}/\partial\dot{x}^2)=-x_i\bar{i}-z_i\bar{k},\quad(\partial u_{i2}/\partial\dot{x}^3)=z_i\bar{j},\\ &(\partial\bar{u}_{i3}/\partial\dot{x}^1)=x_i\bar{k},\quad(\partial\bar{u}_{i3}/\partial\dot{x}^2)=y_i\bar{k},\quad(\partial\bar{u}_{i3}/\partial\dot{x}^3)=-x_i\bar{i}-y_i\bar{j}\,.\end{aligned}\right\}(2^0)$$

Составляющие метрического тензора $g_{jp}=\Sigma m_i\bar{u}_{ij}\cdot\bar{u}_{ip}$ с учётом (1^0) будут

$$g_{11}=J_1\,,\quad g_{22}=J_2\,,\quad g_{33}=J_3\,, \qquad (3^0)$$

где J_1, J_2, J_3 – моменты инерции тела относительно соответственно осей $0x$, $0y$ и $0z$.

Отличные от нуля символы Кристоффеля

$$\Gamma_{kj\cdot p} = \sum m_i (\partial \bar{\omega}_{ij} / \partial x^k) \cdot \bar{\omega}_{ip}$$

имеют значения

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_{23\cdot 1} = \frac{1}{2}(J_1 + J_3 - J_2)\,, && \Gamma_{32\cdot 1} = \frac{1}{2}(J_3 - J_1 - J_2)\,, \\ &\Gamma_{13\cdot 2} = \frac{1}{2}(J_1 - J_2 - J_3)\,, && \Gamma_{31\cdot 2} = \frac{1}{2}(J_1 + J_2 - J_3)\,, \\ &\Gamma_{12\cdot 3} = \frac{1}{2}(J_2 + J_3 - J_1)\,, && \Gamma_{21\cdot 3} = \frac{1}{2}(J_2 - J_1 - J_3)\,, \end{aligned}\right\} \qquad (4^0)$$

Рассмотрим устойчивость вращения вокруг оси $0x$. Тогда $\vartheta^2 = \vartheta^3 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ = , нулю также равны все производные от скоростей, частные производные от символов Кристоффеля и члены, получающиеся из δQ_p , т.к. $Q_p = 0$ - обобщённые силы.

Теперь на основании (3.7) и учитывая $(2^0) + (4^0)$, получим уравнения возмущенного движения

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}^1 g_{11} = 0 \\ &\ddot{x}^2 J_2 + x^2 (J_1 - J_3)\omega_1^2 + \dot{x}^3 (J_1 - J_2 - J_3)\omega_1 = 0 \\ &\ddot{x}^3 J_3 + x^3 (J_1 - J_2)\omega_1^2 + \dot{x}^2 (J_2 + J_3 - J_1)\omega_1 = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (5^0)$$

Характеристическое уравнение для данной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами будет

$$\lambda^2 [\lambda^4 J_2 J_3 + \lambda^2 \omega_1^2 ([J_1 - J_3][J_1 - J_2] + J_2 J_3) + \omega_1^4 (J_1 - J_3)(J_1 - J_2)] = 0\,, \qquad (6^0)$$

откуда имеем корни этого уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_{1,2} = 0\,, \qquad \lambda_{3,4} = \pm\omega i\,, \qquad i = \sqrt{-1}\,, \\ &\lambda_{5,6} = \pm\omega \frac{\sqrt{(J_3 - J_1)(J_1 - J_2)}}{\sqrt{2}\, J_2 J_3}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (7^0)$$

Если последнее подкоренное выражение положительно, т.е. $J_3 > J_1 > J_2$, то имеем случай неустойчивого вращения вокруг средней оси инерции. В случае же вращения вокруг большой или малой оси инерции корни $\lambda_{5,6}$ будут мнимыми. Ввиду наличия кратных корней для установления устойчивости движения найдём общее решение системы (5^0). Оно будет иметь вид

$$x^1 = c_1^1 + c_1^2 t\,, \qquad x^2 = c_2^\mu e^{\lambda_\mu t}\,, \qquad x^3 = c_3^\mu e^{\lambda_\mu t}\,, \qquad \mu = 3, 4, 5, 6\,.$$

Откуда видно, что неустойчивой является координата x^1 , остальные координаты и производные от всех координат будут устойчивы. Получаем, что вращения вокруг большой или малой оси инерции будут устойчивыми.

Если воспользоваться при решении данной задачи уравнениями (7.3), то получим уравнения, которые в литературе (см. напр. [2]) называют уравнениями линейного приближения.

Таким образом, в данной статье получены уравнения возмущённого движения механической системы линейные относительно возмущений квазикоординат и их производных. В том случае, если коэффициенты этих уравнений постоянны, исследование устойчивости движения сводится к анализу корней характеристического уравнения.

Автор выражает благодарность О.М.Сильде за оказанную при написании статьи помощь.

Литература

I. Гольст Г., Рельвик Х., Сильде О., Основные вопросы аналитической механики. Таллин, "Валгус", I979.

2. Малкин И.Г., Теория устойчивости движения. М., "Наука", I966.

3. Лурье А.И., Аналитическая механика. М., "Наука", I96I.

4. Неймарк Ю.И. и Фуфаев Н.А., Динамика неголономных систем. М., "Наука", I967.

Application of the possible power equation in determining the stability of motion of a mechanical system

A. Haitin

Summary

In the paper equations of perturbed motion of a mechanical system have been derived by means of the possible power equation. The equations derived are linear ones. In case the coefficients of the equations prove to be constant, it is easy to determine whether the motion is stable or not.

The equations derived may be applied in determining the rotation of a solid body around a fixed point.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Ученые записки Тартуского государственного университета.
Выпуск 72I.
РАСЧЕТ И ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ.
Труды по математике и механике.
На русском языке.
Резюме на английском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, I8.
Ответственный редактор Я. Леллеп.
Корректоры Г. Оленев, Р. Нелис.
Подписано к печати I4.XI.1985.
МВ I0533.
Формат 60х90/I6.
Бумага писчая.
Машинопись. Ротапринт.
Учетно-издательских листов 6,93. Печатных листов 7,5.
Тираж 500.
Заказ № I085.
Цена I руб.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Пялсона, I4.

? - 2