N. VILENKIN

JUTUSTUSI HULKADEST

N. VILENKIN

JUTUSTUSI HULKADEST

KIRJASTUS «VALGUS» TALLINN 1968

Originaali tiitel:

Н. Я. Виленкин
РАССКАЗЫ О МНОЖЕСТВАХ
Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва 1965

Tõlkinud B. Kabur

Kaanekujundus J. Arrak

2—2—3
32—68

Tänapäeval teame, et peaaegu kogu kaasaegset matemaatikat on võimalik tuletada ühest lähtealusest — hulgateooriast.

N. Bourbaki

Hulgateooria tohutu suur mõju viimase poole sajandi matemaatika arengule on tänapäeval üldtunnustatud fakt.

P. S. Aleksandrov
A. N. Kolmogorov

Hulgateooria on sügavalt tunginud paljudesse matemaatika aladesse ja on nende peale tohutut mõju avaldanud; eriti silmapaistvat osa etendab ta uurimustes, mis on ühenduses matemaatika loogilise ja filosoofilise põhjendamisega.

R. Courant

Hulkade elementideks võivad olla väga erinevad objektid: tähed, aatomid, arvud, funktsioonid, punktid, nurgad ja nii edasi. Seetõttu on algusest peale selge hulgateooria erakordne laius ja tema rakendusvõimalused väga paljudes teadusalades (matemaatikas, mehhaanikas, füüsikas).

N. N. Luzin

Kvantitatiivsete transfiniitsete arvude seadused erinevad fundamentaalselt lõplikkuse vallas valitsevatest sõltuvustest.

G. Cantor

EESSÕNA

Esmakordselt kuulsin ma hulgateooriast umbes kolmekümne aasta eest loengul, mille pidas Moskva kooliõpilastele I. M. Gelfand, kes tol ajal oli alles noor dotsent, kuid on nüüd NSV Liidu TA kirjavahetajaliige. Kaks tundi rääkis ta meile täiesti uskumatutest asjadest: et ratsionaalarvusid on niisama palju kui naturaalarvusid ja et sirglõigus on punkte niisama palju kui ruuduski.

Tutvus hulgateooriaga jätkus Moskva Riikliku Ülikooli mehhaanika-matemaatikateaduskonnas õppimise ajal. Lisaks loengutele ja seminaridele kasutati seal veel üht omapärast õpetamismeetodit, millest professoritel ja dotsentidel vist aimugi ei olnud. Pärast loenguid (ja vahel — mis siin salata — ka mõnede mitte just huvitavate loengute ajal) jalutasid üliõpilased mööda ülikooli vana hoone koridore Mohhovaja tänaval ja arutasid huvitavaid ülesandeid, esitasid ootamatuid näiteid ja teravmeelseid tõestusi. Just niisugustel jutuajamistel said esimese kursuse tudengid oma vanematelt seltsimeestelt teada, kuidas ehitada kõverat, mis läbib kõik ruudu punktid, või funktsiooni, millel pole kuskil tuletist jne.

Muidugi anti seletused n.-ö. näppude peal ning oleks olnud andeksandmatu kergemeelsus üksnes nendest ammutatud teadmistega eksamile minna. Kuid eksamist polnud juttugi — õppeplaani järgi tuli reaalmuutuja funktsioonide teooria eksam anda alles kahe aasta pärast. Ent kui suureks abiks oli see koridoris saadud ettevalmistus hiljem loengute kuulamisel ja eksamite tegemisel! Iga teoreemi puhul tulid meelde huvitavad ülesanded, mida enne oli lahendatud, teravmeelsed võrdused, piltlikud analoogiad.

Ma tahaksin lugejatele hulgateooriast rääkida umbes samas stiilis, nagu mina teda «koridorikursust» kuulates tundma õppisin. Sellepärast on minu peamiseks püüdeks teha selgeks ülesannete olemus, rääkida ootamatustest ja kummalistest, naiivse arusaamisega ühtelugu vastuollu sattuvatest näidetest, mille poolest reaalmuutuja funktsioonide teooria on nii rikas. Ning kui keskkooli lõpuklassi õpilasel, ülikooli või pedagoogilise instituudi esimese kursuse üliõpilasel tekib tahtmine lähemalt tundma õppida hulgateooriat, reaalmuutuja funktsioonide teooriat, siis peab autor oma eesmärki saavutatuks.

Põhjalikumatest õpikutest võiks soovitada järgmisi:

1. П. С. Александров, Введение в теорию множеств и функций. М.—Л. 1948.
2. А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа. Изд-во МГУ, ч. 1, 1954, ч. 2, 1960.
3. Н. Н. Лузин, Теория функций действительного переменного. Учпедгиз 1948.
4. И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной. М.—Л. 1950.
5. Ф. Хаусдорф, Теория множеств. М.—Л. 1937.

Mõnede küsimuste kohta leidub palju huvitavaid andmeid A. S. Parhomenko raamatus «Что такое линия».

Eestikeelsest kirjandusest tuleks märkida kogumikus «Matemaatika ja kaasaeg» nr.-d 6 kuni 10 ilmunud J. Gabovitši artiklite seeriat «Algebra põhimõisteid» («Matemaatika ja kaasaeg», nr.-d 6, 7, 8, 9, 10).

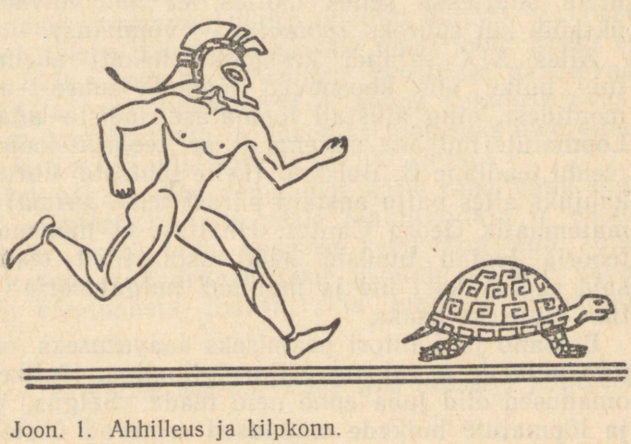
Raamatu lõpus on toodud mõned ülesanded reaalmuutuja funktsioonide teooria alalt; nende lahendamine on lugejale kasulik. Märgime veel, et mõned raskemad punktid — need on märgitud tähekesega — võib esimesel lugemisel vahele jätta, ilma et see takistaks järgneva mõistmist.

LÕPMATUTE HULKADE KUMMALISED OMADUSED

Pole liialdus öelda, et kogu matemaatika on täis lõpmatuse ideed. Tavaliselt ei tunta matemaatikas huvi mitte üksikobjektide (arvude, geomeetriliste kujundite), vaid nende objektide tervete klasside vastu: uuritakse *kõigi* naturaalarvude kogumikku, *kõigi* kolmnurkade kogumikku jne. Kuid niisugused kogumikud koosnevad l õ p m a t u s t hulgast üksikelementidest.

Sellepärast on matemaatikud ja filosoofid alati lõpmatuse mõiste vastu huvi tundnud. Huvi tekkis hetkel, kui sai selgeks, et iga naturaalarvu järel tuleb uus naturaalarv, tähendab, kui sai selgeks, et arvrida on lõpmatu. Kuid juba esimesed lõpmatuse uurimise katsed viisid arvukate paradoksideni.

Näiteks kasutas kreeka filosoof Zenon lõpmatuse mõistet selleks, et tõestada liikumise võimatust. Tõepoolest, rääkis ta, selleks et nool läbiks mingi vahemaa, peab ta



Joon. 1. Ahhilleus ja kilpkonn.

algul katma poole sellest. Aga enne kui läbida pool teest, peab ta läbi lendama veerandi, kaheksandiku jne. sellest. Et jagamisprotsess kunagi ei lõpe (siit tulebki välja lõpmatus!), siis ei saa ka nool paigast liikuda. Täpselt samuti tõestas ta, et välejalgne Achilleus ei saa kunagi kätte aeglast kilpkonna.

Selliste paradokside ja sofismide pärast loobusid antiikse Kreeka matemaatikud lõpmatuse mõistest ning vältisid seda oma matemaatilistes arutlustes. Mõned filosoofid arvasid, et kõik geomeetrilised kujundid koosnevad lõplikust arvust pisikestest jagamatutest osakestest (aatomitest). Niisuguse mõtteviisi puhul tuli näiteks välja, et ringi pole võimalik jagada kaheks võrdseks osaks — keskpunkt jääb ainult ühe osa sisse ja see ei luba täita osade pindvõrdsuse nõuet.

Keskajal tunti lõpmatuse probleemi vastu huvi peamiselt ainult seoses probleemiga, kas nõela otsa mahub lõplik või lõputu hulk ingleid. Ulatuslikult hakati lõpmatuse mõistet matemaatikas kasutama XVII sajandist peale, kui loodi matemaatiline analüüs. Niisuguseid mõisteid, nagu «lõpmata suur suurus», «lõpmata väike suurus», hakati matemaatilistes arutlustes igal sammul rakendama. Kuid tol ajal ei uuritud mitte hulki, mis sisaldavad lõpmata palju elemente, vaid suurusi, mis muutuvad aina suuremaks ja suuremaks, nii et nad lõppude lõpuks saavad suuremaks igast etteantud väärtusest. Niisuguseid suurusi hakati nimetama «potentsiaalselt lõpmata suurteks» selles mõttes, et nad võivad muutuda ükskõik kui suureks (*potentia* — võimalus).

Alles XIX sajandi keskpaiku hakati uurima lõpmatuid hulki, mis koosnevad lõpmata suurest arvust elementidest, ning alustati lõpmatuse mõiste analüüsimist. Lõpmatute hulkade matemaatilise teooria loojateks olid tšehhi teadlane B. Bolzano (kelle tähtsaim uurimus ilmus kahjuks alles palju aastaid pärast tema surma) ja saksa matemaatik Georg Cantor. Huvitav, et mõlemad hulgateooria loojad tundsid hästi skolastilist teadust, kuid said skolastikast üle ja muutsid hulgateooria matemaatika oluliseks osaks.

Bolzano ja Cantori peamiseks saavutuseks oli lõpmatute hulkade omaduste väljaselgitamine; lõplike hulkade omadused olid juba enne neid teada. Selgus, et lõplike ja lõpmatute hulkade omadused erinevad üksteisest põhjalikult: paljusid lõplike hulkade puhul võimatuid asju on lõpmatute hulkade puhul üsna kerge teha. Katsuge näiteks paigutada võõrastemajja, mille igas toas elab üks külaline, veel üks elanik, nii et igas toas elaks ikkagi ainult üks elanik. Ei tule välja? Ainult sellepärast, et tubade arv võõrastemajas on lõplik! Aga kui seal oleks lõpmata palju tube... Kuid niisugused võõrastemajad võivad esineda vist küll ainult kosmoseajastu Münchhauseni, kosmoserändur Ijon Tichy jutustustes, poola fantastikakirjaniku Stanislaw Lemi raamatu «Ijon Tichy kosmoserändude päevikud» peakangelase lugudes.*

Kummaline võõrastemaja ehk Ijon Tichy tuhande esimene reis

Jõudsin üsna hilja koju — mälestuste õhtu klubis «Andromeeda udukogu» lõppes alles hulk aega pärast keskööd. Öö läbi olin hädas painajatega. Kord nägin unes, et mind neelas alla tohutu kurdl, kord jälle viirastus, et lendan uuesti lolldiootide planeedi poole ega tea, kuidas pääseda sealsest hirmsast masinast, mis muudab inimesed kuusnurkadeks, siis jälle... Nõnda et ei soovita kellelegi starkat ja vana mõdu segamini juua. Telefoni ootamatu helin tõi mind tagasi reaalsesse maailma. Mulle helistas vana sõber ja kosmoseretkede kolleeg professor Tarantoga.

«Kiire ülesanne, kallis Ijon,» kuulsin ma. «Astronoomid avastasid kosmoses mingi imeliku objekti — ühest galaktikast teiseni läheb salapärane must joon. Keegi ei saa aru, milles asi on. Parimad rakettidel paiknevad teleskoobid ja raadioteleskoobid ei suuda saladuse avastamiseks midagi ära teha. Ainukeseks lootuseks oled sina. Lenda kiiresti välja udukogu ACD-1587 suunas.»

Järgmisel päeval sain remondist kätte oma vana footonraketi, monteerisin talle peale ajakiirendaja ja elektronroboti, kes oskab kõiki kosmose keeli ning teab kõiki lugusid kosmoseränduritest (see peletab igavuse vähemalt viie rännuaasta jooksul), ja lendasin ülesannet täitma.

---

* *Loodan, et S. Lem andestab mulle selle oskamatu järeleaimamise katse.*

Joon. 2. Võõrastemaja «Kosmos» ehitamine.

Kui roboti lugude tagavara oli ammendatud ja ta hakkas neid kordama (pole midagi hullemat kui elektronrobot, kes kümnendat korda jutustab tuntud lugu), ilmus kaugelt nähtavale mu reisi siht. Udukogud, mis salapärast joont varjasid, jäid seljataha, ja minu pilgule avanes... võõrastemaja «Kosmos».

Selgus, et kosmosehulkurid aetlased, kelle jaoks ma kunagi pisikese planeedi olin ehitanud, olid ka selle tükkhaaval laiali kandnud ja jällegi peavarjuta jäänud. Siis aga, et mitte enam mööda võõraid galaktikaid hulkuda, otsustasid nad ehitada suurejoonelise hoone — võõrastemaja kõikide kosmoserändurite jaoks. See ulatus peaaegu läbi kõikide galaktikate. Ütlesin «peaaegu», sest aetlased olid demonteerinud mõned asustamatud galaktikad ja kõikidest ülejäänutest olid nad igaühest ära hiivanud mõne hooletusse jäetud tähekogu.

Kuid võõrastemaja oli suurepärane. Igas toas olid kraanid, kust voolas külm ja kuum plasma. Soovi korral võis ööks hajuda, hommikul pani uksehoidja elaniku ta aatomiskeemi järgi uuesti kokku.

Aga mis kõige tähtsam, *võõrastemajas oli lõpmata palju tube*. Aetlased lootsid, et nüüd pole enam kellelgi tarvis kuulda lauset, mis neid rännakutel üsna ära oli tüüdanud: «Vabu tube ei ole.»

Sellest hoolimata mul ei vedanud. Kui ma võõrastemaja ootesaali astusin, torkas esimesena silma plakat kirjaga: «Kosmozooloogide kongressi delegaate registreeritakse 127. korrusel.»

Et kosmozooloogid sõitsid kokku kõikidest galaktikatest, aga neid on ju lõpmata palju, siis olid kõik toad kongressist osavõtjate käes. Minule kohta ei jätkunud. Administraator katsus küll mind mõnede kosmozooloogide juurde kaasüüriliseks panna, ent kui ma teada sain, et üks minu tulevastest toanaabritest hingab fluori ja teine peab enda jaoks normaalseks väliskeskkonna temperatuuriks 860°, siis loobusin viisakalt nii «meeldivast» seltskonnast.

Õnneks oli võõrastemaja direktoriks aetlane, kes mäletas veel hästi neid teeneid, mis ma kunagi sellele rahvale olin osutanud. Ta püüdis mulle võõrastemajas ruumi teha, sest tähtedevahelises ruumis ööbides võis kergesti kopsupõletiku saada. Pärast mõningat arupidamist ütles ta administraatorile:

«Paigutage ta number esimesse.»

«Aga kuhu ma panen selle toa elaniku?» küsis administraator üllatunult.

«See paigutage number kahte. Number kahe elanik aga pange number kolme, number kolme oma number nelja ja nõnda edasi.»

Alles nüüd taipasin ma võõrastemaja ebatavalisi omadusi. Kui võõrastemajas oleks olnud lõplik arv tube, siis oleks viimase toa elanik pidanud tähtedevahelisse ruumi kolima. Ent selletõttu, et võõrastemajal oli lõpmata palju tube, jätkus ruumi kõigile ja mina sain koha, ilma et ükski kosmozooloog pidanuks võõrastemajast lahkuma.

Ma ei imestanud, kui järgmisel hommikul paluti mind ümber kolida tuppa number 1 000 000. Võõrastemajja olid lihtsalt jõudnud hilinenud kosmozooloogid galaktikast VSK-3472 ja võõrastemaja pidi vastu võtma veel 999 999 elanikku. Aga kui ma kolmandal päeval kõndisin administraatori juurde toa eest maksma, siis läks mul silme ees mustaks. Luugi ees oli järjekord, mille ots kadus kuhugi Magalhãesi pilvede kanti. Järjekorrast kostis hääli:

«Annan kaks Andromeeda udukogu marki ühe Siiriuse margi vastu!»

«Kellel on kosmoseajastu 57. aasta Herpeia mark?»

Hämmeldunult küsisin ma administraatorilt:

«Aga kes need on?»

«Galaktikatevaheline filatelistide kongress.»

«Ja kas neid on palju?»

«Lõpmatu hulk — üks esindaja igast galaktikast.»

«Kuidas neid siis ära mahutada, kosmozooloogid lähevad ju alles homme minema?»

«Ei tea, seda hakatakse arutama direktori juures viieminutilisel nõupidamisel.»

Ülesanne osutus väga keeruliseks ja viiest minutist sai terve tund. Viimaks tuli administraator direktori juurest ära ja hakkas uusi elanikke majutama. Kõigepealt käskis ta toa number üks elaniku ümber paigutada tuppa number kaks. Mulle tundus see imelik, sest omadest kogemustest teadsin, et niisugune ümberpaigutamine vabastas ainult ühe toa, võõrastemajja aga oli vaja vastu võtta lõpmata hulk filateliste. Kuid administraator jätkas korraldusi:

«Toa number kaks elanik paigutage ümber tuppa number neli, number kolmest viige elanik number kuude, üldse number *n*-ist tuppa number 2n.»

Nüüd ma taipasingi ta plaani: sel kombel vabastas ta lõpmata palju paarituid numbreid ja võis sinna majutada filatelistid. Tulemusena olid paaritunumbrilised toad lõpuks filatelistide ja paarisnumbrilised kosmozooloogide käes (endast ma ei räägigi — kolmepäevase tutvuse järel sain kosmozooloogidega nii suureks sõbraks, et nad valisid mu oma kongressi auesimeheks; koos teiste kosmozooloogidega tuli mul lahkuda koduseks muutunud toast ja asuda ümber toast number 1 000 000 tuppa number 2 000 000). Üks tuttav filatelist, kes oli järjekorras 574., läks tuppa nr. 1147. Üldse said need filatelistid, kes järjekorras *n*-ndal kohal seisid, toa numbriga 2*n*—1.

Järgmisel päeval läks tubadega lahedamaks. Kosmozooloogide kongress lõppes ja nad sõitsid laiali. Mina aga kolisin võõrastemaja direktori juurde, kelle korteris vabanes üks tuba. Kuid see, mis on hea elanikele, ei rahulda alati administratsiooni. Paari päeva pärast muutus mu külalislahke peremees nukraks.

«Mis on juhtunud?» küsisin temalt.

«Pooled toad on tühjad, finantsplaan jääb täitmata.»

Õigust öelda ei saanud ma päriselt aru, missugusest finantsplaanist oli jutt, sest tasu laekus ju lõpmata arvu tubade eest, kuid siiski andsin nõu:

«Te paigutage külalised tihedamini, nõnda et kõik numbrid oleksid täidetud.»

Selgus, et seda oli üsna lihtne teha. Filatelistid elasid ainult paaritunumbrilistes tubades: 1, 3, 5, 7, 9 jne. Toa nr. 1 elanik jäeti paigale. Nr. 3-st paigutati elanik tuppa nr. 2, nr. 5-st — nr. 3, nr. 7-st — nr. 4 ja nõnda edasi. Selle tulemusena olid kõik numbrid jälle täidetud, aga ühtki uut elanikku juurde polnud tulnud.

Kuid ega direktori mured sellega lõppenud. Selgus, et aetlased polnud rahuldunud üksnes võõrastemaja «Kosmos» ehitamisega. Rahutud ehitajad olid püstitanud veel lõpmata hulga võõrastemaju, milles igaühes oli lõpmata arv tube. Sealjuures demonteerisid nad nii palju galaktikaid, et galaktikatevaheline tasakaal oli rikutud, sel aga võis olla üpris raskeid tagajärgi. Sellepärast kästi neil sulgeda kõik võõrastemajad peale «Kosmose» ja viia kasutatud materjal oma kohale tagasi. Kuid käsku täita polnud lihtne, sest kõik võõrastemajad (sealhulgas ka meie oma) olid täis. Nüüd tuli elanikud ümber paigutada lõpmata hulgast võõrastemajadest, milles igaühes oli lõpmata hulk elanikke, ühteainsasse võõrastemajja, mis oli juba niigi täis.

«Minule aitab sellest!» hüüdis direktor. «Esiteks paigutasin ma täis võõrastemajja juurde ühe elaniku, siis veel 999 999 elanikku, siis veel lõpmata palju elanikke; ja nüüd tahetakse, et siia mahuks veel lõpmata hulk lõpmata palju elanikke. Ei, võõrastemaja pole kummist, minul ruumi ei ole, pangu kuhu tahavad!»

Kuid käsk on käsk, ja viie päeva pärast pidi uute elanike vastuvõtmiseks kõik valmis olema. Need päevad ei töötanud võõrastemajas keegi — kõik mõtlesid, kuidas ülesannet lahendada. Kuulutati välja võistlus. Auhinnaks oli turismireis ühte galaktikasse. Aga kõik esitatud lahendused lükati tagasi kui ebaotstarbekad. Nii näiteks soovitas nooremkokk jätta meie võõrastemaja esimese toa elanik samasse numbrisse edasi, toast number kaks paigutada elanik ümber tuppa nr. 1001, toast number kolm tuppa nr. 2001 jne. Pärast seda paigutada teise võõrastemaja elanikud meie võõrastemaja numbritesse 2, 1002, 2002 jne., kolmanda võõrastemaja elanikud numbritesse 3, 1003, 2003 jne. See projekt lükati tagasi, nimelt polnud selge, kuhu paigutada 1001. võõrastemaja elanikud, sest juba esimese 1000 võõrastemaja elanikud võtavad kõik toad enda alla. Sel puhul meenus mulle, et kui lipitsevad rooma senaatorid soovitasid imperaator Tiberiusel septembrikuu tema auks «tibeeriuseks» ümber nimetada (eelmised kuud olid juba saanud imperaatorite Juliuse ja Augustuse nimed), siis küsis ta neilt pilgates: «Aga mis nõu te kolmeteistkümnendale keisrile annate?»

Üsna hea variandi soovitas võõrastemaja raamatupidaja. Ta tegi ettepaneku kasutada ära geomeetrilise progressiooni omadused ja paigutada elanikud nõndaviisi: esimese võõrastemaja elanikud tubadesse nr. 2, 4, 8, 16, 32 jne. (need arvud moodustavad geomeetrilise progressiooni teguriga 2). Teise võõrastemaja elanikud — numbritesse 3, 9, 27, 81 jne. (need on geomeetrilise progressiooni liikmed, mille teguriks on 3). Samal viisil soovitas ta paigutada ka ülejäänud võõrastemajade elanikud. Kuid direktor küsis temalt:

«Kolmanda võõrastemaja jaoks tuleks siis kasutada progressiooni, mille teguriks on 4?»

«Muidugi,» vastas raamatupidaja.

«Siis ei tule sellest midagi välja, sest neljandas toas elab juba esimese võõrastemaja elanik.»

Nüüd jõudis minu kätte kord näidata, et ma polnud ilmaaegu Täheakadeemias viis aastat matemaatikat õppinud.

«Kasutage algarvusid! Paigutage esimese võõrastemaja elanikud numbritesse 2, 4, 8, 16,..., teise omad — numbritesse 3, 9, 27, 81,..., kolmanda omad numbritesse 5, 25, 125, 625,..., neljanda omad — numbritesse 7, 49, 343,...»

«Aga kas siis ei juhtu jälle nii, et ühte tuppa tuleb panna kaks elanikku?» küsis direktor.

«Ei juhtu! Sest kui võtta kaks algarvu, siis ei saa ühe arvu ükski naturaalarvuline aste võrduda teise arvu mõne naturaalarvulise astmega. Kui p ja q on algarvud, kusjuures $p \neq q$, ja m ning n — naturaalarvud, siis $p^m \neq q^n$.»

Direktor nõustus minuga ning esitas otsekohe minu ettepaneku täiendatud variandi, mille juures kasutati üksnes kahte algarvu: 2 ja 3. Nimelt pani ta ette paigutada n-nda võõrastemaja m-nda numbri elanik meie võõrastemaja tuppa numbriga $2^m 3^n$. Asi on selles, et kui $m \neq p$ või $n \neq q$, siis $2^m 3^n \neq 2^p 3^q$ ning sellepärast ei satu kaks inimest ühte tuppa.

Ettepanek vaimustas kõiki. Lahendati ülesanne, mis tundus lahendamatuna. Kuid preemiat ei saanud ei mina ega direktor — meie lahenduste puhul jäi liiga palju tube tühjaks (minul näiteks jäid tühjaks 6, 10, 12 ja üldse kõik toad, mille numbrid ei olnud algarvude astmed, ning direktoril need toad, mille numbreid ei saanud üles kirjutada kujul $2^m 3^n$). Parima lahenduse andis üks filatelist — Luige galaktika Matemaatikaakadeemia president.

Ta soovitas kõigepealt koostada tabeli, kusjuures selle read kandku võõrastemajade ja veerud — tubade numbreid. Näiteks neljanda rea kuuendale veerule märgitakse neljanda võõrastemaja kuues tuba. Toomegi nüüd ära tabeli (õigemini selle vasakpoolse ülemise osa, sest kogu tabeli üleskirjutamiseks on vaja lõpmata palju ridu ja veerge):

$$\begin{array}{llllllll}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & \ldots & (1,n) & \ldots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & \ldots & (2,n) & \ldots \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & \ldots & (3,n) & \ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll}
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & \dots & (4,n) & \dots \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & \dots & (5,n) & \dots \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
(m,1) & (m,2) & (m,3) & (m,4) & (m,5) & \dots & (m,n) & \dots \\
. & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

«Ja nüüd paigutage elanikud mööda ruutusid laiali,» ütles matemaatikust filatelist.

«Kuidas?» ei saanud direktor aru.

«Mööda ruutusid! Esimesse numbrisse paigutatakse elanik (1,1)-st, s. t. esimese võõrastemaja esimesest toast, teise numbrisse elanik (1,2)-st, s. t. esimese võõrastemaja teisest toast, kolmandasse — (2,2)-st — teise võõrastemaja teisest toast ja neljandasse (2,1)-st — teise võõrastemaja esimesest toast. Sel viisil on ära paigutatud elanikud ülevalt vasakpoolsest ruudust, mille külje pikkus on kaks. Pärast seda paigutame number viiendasse elaniku (1,3)-st, number kuuendasse — (2,3)-st, number seitsmendasse (3,3)-st, number kaheksandasse — (3,2)-st, number üheksandasse — (3,1)-st. (Need numbrid moodustavad ruudu, mille külg on kolm.) Ja edasi läheme samal kombel:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
(1,1) & & (1,2) & & (1,3) & & (1,4) & & (1,5) & & \dots & (1,n) & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \\
(2,1) & \leftarrow & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & & (2,5) & & \dots & (2,n) & \dots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \\
(3,1) & \leftarrow & (3,2) & \leftarrow & (3,3) & & (3,4) & & (3,5) & & \dots & (3,n) & \dots \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \\
(4,1) & \leftarrow & (4,2) & \leftarrow & (4,3) & \leftarrow & (4,4) & & (4,5) & & \dots & (4,n) & \dots \\
 & & & & & & & & \downarrow & & & \downarrow & \\
(5,1) & \leftarrow & (5,2) & \leftarrow & (5,3) & \leftarrow & (5,4) & \leftarrow & (5,5) & & \dots & (5,n) & \dots \\
 & & & & & & & & & & & \downarrow & \\
. & & . & & . & & . & & . & & . & . & . \\
(n,1) & \leftarrow & (n,2) & \leftarrow & (n,3) & \leftarrow & (n,4) & \leftarrow & (n,5) & \leftarrow & \dots & (n,n) & \dots \\
. & & . & & . & & . & & . & & . & . & .
\end{array}$$

«Kas tõesti jätkub kõigile ruumi?» lõi direktor kahtlema.

«Muidugi jätkub. Selle skeemi puhul paigutame ju esimesesse n^2 tuppa elanikud n esimese võõrastemaja n toast. Sellepärast saab varem või hiljem iga elanik endale toa. Näiteks kui on tegemist võõrastemaja nr. 136 toast number 217 tulnud elanikuga, siis saab ta endale toa 217. sammul. Hõlpus on isegi toa numbrit välja arvutada. See on 216^2+136. Üldse, kui elanik tuleb m-nda võõrastemaja n-ndast numbrist, siis $n \geqslant m$ puhul saab ta toa number $(n-1)^2+m$ ja $n<m$ puhul toa m^2-n+1.»

Projekt tunnistatigi parimaks — kõik elanikud kõikidest võõrastemajadest paigutati meie võõrastemajja ning ükski number ei jäänud tühjaks. Matemaatikust filatelistile anti preemia — turismireis galaktikasse LCR-287.

Nii õnnestunud paigutamise puhul korraldas võõrastemaja direktor vastuvõtu, kuhu kutsuti kõik võõrastemaja elanikud. Vastuvõtul olid ka omad komplikatsioonid. Paarisnumbritega tubade elanikud tulid pool tundi hiljem ja kui nad kohale jõudsid, siis selgus, et kõik toolid on juba täis, ehkki külalislahke peremees oli pannud iga külalise jaoks ühe tooli. Tuli oodata, kuni kõik uutele kohtadele olid ümber istunud ja vajaliku hulga toole vabastanud (muidugi mõista ei toodud saali ühtki uut tooli). Kui aga hakati jäätist serveerima, siis sai iga külaline kaks portsjonit, ehkki kokk oli valmistanud täpselt ühe portsjoni iga külalise jaoks. Loodan, et lugeja saab nüüd ise aru, kuidas see kõik juhtus.

Pärast vastuvõtu lõppemist istusin oma footonraketti ja lendasin Maa peale. Mul oli vaja kõikidele maistele kosmonautidele rääkida uuest peatuskohast kosmoses. Peale selle tahtsin ma Maa väljapaistvamatelt matemaatikutelt ja oma sõbralt professor Tarantogalt konsultatsiooni lõpmatute hulkade omaduste kohta.

AUTORILT

Sellega lahkume ajutiselt oma jutukangelasest. Paljugi tema jutus äratab kahtlust — pole ju relatiivsusteooria seaduste järgi võimalik signaale edasi anda suurema kiirusega kui 300 000 km/s. Sellepärast nõuaks juba administraatori esimese käsu täitmine lõpmata palju aega. Kuid me ei hakka liialt palju nõudma Ijon Tichylt, tema reisidel tuli ette veel palju uskumatuid seiklusi.

Raamatu ülejäänud osas räägitakse hulgateooriast. Ja kuigi tegevus ei sünni mitte tähtedevahelises ruumis, vaid sirglõigul [0,1] või ruudus, mille külje pikkus on 1, pole siingi paljud sündmused sugugi vähem ebatavalised.

HULGAD JA TEHTED NENDEGA

Mis on hulk?

Enne kui rääkida lõpmatute hulkade omadustest, tuleb teada saada, mis on *hulk*, missuguseid tehteid saab hulkadega teha. Kahjuks pole võimalik teooria põhimõistet — hulk — rangelt defineerida. Muidugi võiks öelda, et hulk on «koondis», «kogum», «ansambel», «kollektsioon», «perekond», «süsteem», «klass» jne., kuid ükski neist pole matemaatiline definitsioon, vaid pigem keele sõnarikkuse kuritarvitamine.

Selleks et mingit mõistet defineerida, tuleb kõigepealt näidata, missuguse laiema mõiste erijuht ta on. Hulga mõiste puhul seda teha ei saa, sest see on kõige laiem ega sisaldu mingis teises mõistes.

Sellepärast illustreerime hulga mõistet näidete abil ja jätame definitsiooni andmata.

Tihti on vaja rääkida mitmest asjast, mida omavahel seob mingi ühine tunnus. Nii näiteks võib rääkida kõikide toolide hulgast toas, kõikide aatomite hulgast Jupiteris, kõikide rakkude hulgast inimkehas, kõikide kartulite hulgast teatavas kotis, kõikide kalade hulgast ookeanis, kõikide ruutude hulgast tasapinnal, kõikide punktide hulgast antud ringis jne.

Objekte, mis moodustavad mingi hulga, nimetatakse selle hulga *elementideks*. Kui tahetakse märkida, et antud hulk A koosneb x elemendist, kirjutatakse tavaliselt

$$A = \{x\}.$$

Loogelised sulud tähistavad siin seda, et elemendid x on ühendatud üheks tervikuks — hulgaks A. Fakti, et element x kuulub hulka A, kirjutatakse üles märgi $\in$ abil nõnda: $x \in A$. Kui aga antud element x ei kuulu hulka A, siis kirjutatakse $x \overline{\in} A$. Näiteks kui A tähendab kõikide paaris naturaalarvude hulka, siis $6 \in A$, kuid $3 \overline{\in} A$.

Järelikult kui räägime hulgast, siis ühendame mõned objektid tervikuks ja nimelt hulgaks, mille elementideks need objektid on. Hulgateooria looja Georg Cantor rõhutas seda järgmiste sõnadega:

«Hulk on paljus, mida me vaatleme ühtse tervikuna».

Selleks et hulga mõistet endale näitlikult ette kujutada, soovitas akadeemik N. N. Luzin järgmist pilti. Kujutlegem läbipaistvat läbitungimatut kilet, midagi hästi suletud läbipaistva koti taolist. Oletame, et selle kile sisse on paigutatud kõik antud hulga A elemendid ja et peale nende pole seal mitte midagi. Kile, mille sees asetsevad objektid x, võibki kujutada endast elementidest x koosnevat hulka A. Ning see läbipaistev kile, mis mahutab kõiki elemente (ja mitte midagi muud peale nende), kujutab üsna hästi elementide x ühendamise akti, mille tagajärjel tekib hulk A.

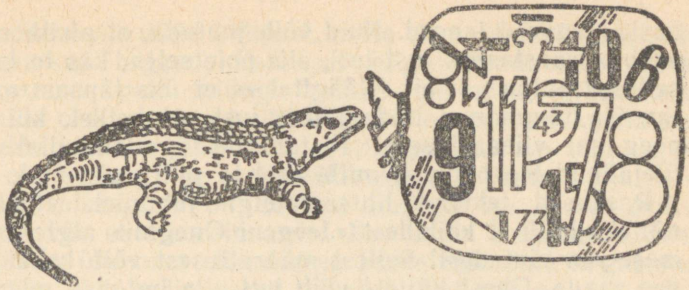
Kui hulk sisaldab lõpliku hulga elemente, siis nimetatakse teda *lõplikuks,* ja kui seal on lõpmata palju elemente, siis *lõpmatuks*. Näiteks puude hulk metsas on lõplik, punktide hulk ringis aga lõpmatu.

Kuidas määratakse hulka!

Hulka on võimalik määrata mitut moodi. Üks viis on see, et antakse hulka kuuluvate elementide täielik nimestik. Näiteks on teatava klassi õpilaste hulk määratud nende nimekirjaga klassipäevikus, kõikide riikide hulk maakeral on määratud nende nimekirjaga geograafiaatlases, kõikide kontide hulk inimese luustikus — nende nimestikuga anatoomiaõpikus.

Kuid niisugune viis on rakendatav ainult lõplike hulkade puhul ja isegi siis mitte alati. Näiteks kuigi kõikide kalade hulk ookeanis on lõplik, suudaksime vaevalt nende nimestikku koostada. Aga lõpmatuid hulki ei saa enam kuidagi nimestiku abil määrata; katsuge näiteks koostada kõigi naturaalarvude nimestik — selge, et selle nimestiku koostamisega ei jõua te kunagi lõpule.

Juhul kui hulka ei saa anda nimestiku abil, määratakse ta sel teel, et antakse mingi iseloomulik omadus — nii-



Joon. 3. Krokodill ei kuulu naturaalarvude hulka.

sugune, mis hulga elementidel on olemas, aga kõikidel ülejäänud asjadel maailmas puudub. Näiteks võime rääkida kõikide naturaalarvude hulgast. On selge, et arv 73 kuulub sellesse hulka, aga arv $\frac{3}{4}$ ega krokodill ei kuulu. Täpselt samuti ei kuulu $\sqrt{2}$ ega planeet Saturn kõikide ratsionaalarvude hulka, aga $\frac{7}{15}$ kuulub sinna.

Märgime, et tegelikul kasutamisel raskendab hulga määramist iseloomuliku omaduse abil inimese keele mitmetähenduslikkus. Suure hulga vahepealsete vormide olemasolu teeb raskeks objektide jaotamise niisugusteks, mis kuuluvad, ja niisugusteks, mis ei kuulu teatavasse hulka. Olgu meil näiteks tegemist kõikide maakeral kasvavate puude hulgaga. Kõigepealt tuleb välja selgitada, kas tegemist on kõikide puudega, mis olid ja saavad olema Maa peal, või ainult nendega, mis olid Maa peal olemas teataval kindlal ajavahemikul (näiteks 1. maist kuni 1. septembrini 1965). Kuid siis tekib küsimus, mida teha nende puudega, mis sel ajavahemikul maha lõigati. Peale selle on puude ja muude taimede vahel olemas terve hulk vahevorme ning tuleb kokku leppida, missugused neist kuuluvad puude hulka, missugused mitte.

Kui aga vaatleme kõiki 1965. aastal avaldatud luuletusi, siis tekivad raskused sellest, et luule ja proosa vahel on terve hulk vahepealseid vorme (rütmiline proosa, vabavärss jne.). Pole kuigi täpselt määratletud ka näiteks nende isikute hulk, kel on õigus tasuta sõita Nõukogude Liidu raudteel. Muuseas kuuluvad sinna ka alla viie

aasta vanused lapsed. Kuid võib juhtuda, et pisike reisija saab viieaastaseks just teel, siis pole selge, kas ta kuulub sellesse hulka või ei. (Räägitakse, et üks täpsust armastav isa tõmmanud hädapidurit just sel hetkel, kui tema poeg sai viieaastaseks. Ta tahtnud täpselt kindlaks teha ülejäänud tee pikkust, mille eest ta pidi maksma.)
Raskused tekivad lihtsamatelgi juhtudel. Koosnegu näiteks hulk A kõikidest «Jevgeni Onegini» algteksti esimese rea tähtedest. Sellest määratlusest võib kahel viisil aru saada. Ühest küljest võib jutt olla hulgast, mis koosneb selle rea kõikidest tähtedest, kusjuures iga täht esineb hulgas just nii mitu korda, kui mitu korda ta reas esineb (selleks et tähti üksteisest eristada, võime neile numbrid juurde kirjutada):

$$M_1, U_1, O_1, N_1, U_2, T_1, \tilde{O}_1, T_2, T_3; J_1, A_1, \tilde{O}_2, I_1, G_1, U_3, S_1, T_4, T_5, U_4, N_2, D_1, I_2, S_2.$$

Kuid sellest võib aru saada ka nii, et tegemist on hulgaga, mille moodustavad ainult selles reas esinevad erinevad tähed. Sel juhul tuleb korduvad tähed vahele jätta ja nõustuda, et eelnimetatud hulk koosneb järgmistest tähtedest:

$$M, U, O, N, T, \tilde{O}, J, A, I, G, S, D.$$

On selge, et need kaks hulka erinevad teineteisest.

Kas ajada habet või mitte!

Hulga koostise määramisel tekkivad raskused ei tulene alati üksnes keele puudulikkusest. Vahel on põhjus hoopis sügavam. Vaatleme järgmist näidet. Tavaliselt pole hulgad ise iseenda elementideks. (Näiteks pole kõikide naturaalarvude hulk ise naturaalarv, kõikide kolmnurkade hulk pole ise kolmnurk jne.) Kuid hulga elementide loomus on üldiselt rääkides suvaline ja sellepärast ei saa keegi meil keelata vaatlemast ka niisuguseid hulki, mis sisaldavad ühe elemendina iseennast. Et niisuguseid hulki vaadeldakse harva, nimetame neid *ekstraordinaarseteks* ja kõiki teisi *ordinaarseteks* hulkadeks.

Moodustame nüüd hulga A, mille elementideks on **kõik** ordinaarsed hulgad. Esimesel pilgul tundub, et selles määratluses pole midagi halba; pole näha, miks lause «kõikide ordinaarsete hulkade hulk» on halvem kui lause «kõikide kolmnurkade hulk». Ent tegelikult on siin tegemist olulise loogilise vasturääkivusega. Püüame välja selgitada, missugune on saadud hulk A ise — kas ordinaarne või ekstraordinaarne. Kui ta on ordinaarne, siis kuulub ta ühe oma elemendina iseendasse (me kogusime ju kokku kõik ordinaarsed hulgad). Ent siis on ta definitsiooni järgi ekstraordinaarne. Kui aga hulk A on ekstraordinaarne, siis peab ta ekstraordinaarsuse definitsiooni järgi olema iseenda element, kuid hulga A elementideks on ainult ordinaarsed hulgad, ekstraordinaarseid hulki me sinna ju ei võtnud!

Tekkis lahendamatu loogiline vastuolu — hulk A ei saa olla ei ordinaarne ega ka ekstraordinaarne. Muide, niisugused loogilised vastuolud ilmnevad ka hoopis lihtsamatel juhtudel. Näiteks tehti ühele sõdurile ülesandeks ajada habet nendel ja ainult nendel oma jao sõduritel, kes ise endal habet ei aja. Kerkis küsimus, kuidas ta ise peab talitama. Kui ta ajab endal habet, siis tuleb ta paigutada nende sõdurite hulka, kes ise endal habet ajavad, aga niisugustel sõduritel ta habet ajada ei tohi. Kui ta aga endal habet ei aja, siis tuleb ta lugeda nende sõdurite hulka, kes ise endal habet ei aja, ja siis peab ta käsu põhjal iseendal habet ajama.

On teada teisigi näiteid, kus hulk, mis esimesel pilgul näis olevat täiesti määratud, osutus väga halvasti määratuks või õigemini päriselt määramatuks. Koosnegu näiteks hulk A kõikidest reaalarvudest, mida saab määratleda ülimalt kahesaja eestikeelse sõna abil (siia kuuluvad ka sõnad «null», «üks», «kaks» jne.).

Et kõikide eestikeelsete sõnade hulk on lõplik (lihtsuse mõttes eeldame, et arvesse võetakse ainult ÕS-is leiduvad sõnad ja nende grammatilised vormid), siis on ka niisuguste reaalarvude hulk lõplik, järelikult võib sellesse hulka kuuluvad elemendid ära nummerdada. Oletame, et numeratsioon on juba tehtud, ja määrame arvu N järgmisel viisil.

$$N = 0, n_1 n_2 n_3 \ldots n_k \ldots$$

Kui sealjuures hulga A k-nda arvu k-ndas kümnendkoht erineb arvust 1, siis võtame $n_k=1$. Kui aga k-nda arvu k-ndas kümnendkoht on üks, siis võtame $n_k=2$.

Siis ei ole N võrdne hulga A k-nda elemendiga, sest erineb temast k-nda kümnendkoha poolest. Kuna k on suvaline arv, siis ei saa N võrduda ühegi hulga A elemendiga, järelikult ei kuulu ta hulka A. Kuid teisest küljest peab N kuuluma sellesse hulka, sest me oleme N-i määranud mitte rohkem kui kahesaja sõna abil.

Eelmise paradoksiga on lähedas ühenduses ka järgmine.

Missugune on see vähim täisarv, mida ei saa määrata vähem kui sada eestikeelest sõna sisaldava lausega?

Niisugune arv on olemas, sest eesti keeles on lõplik arv sõnu, järelikult on olemas ka arvud, mida ei saa määrata lausega, mis sisaldab vähem kui sada sõna. Ent siis on nende arvude hulgas olemas ka kõige väiksem arv.

Teiselt poolt, seda arvu pole olemas, sest määrangus esineb vastuolu. Tõepoolest, see arv on määratud eespool kursiivis toodud lausega, mis koosneb vähem kui sajast sõnast, aga definitsiooni järgi ei saa seda arvu määrata niisuguse lausega.

Hulgateoorias on palju juhtumeid, kus hulga määrangus peitub sisemine vastuolu. Uurimused, mis püüdsid välja selgitada niisuguse olukorra tingimused, viisid sügavatele loogikaalastele uurimustele, mis täielikult muutsid kogu loogika ilmet. Paljusid neist uurimustest kasutati hiljem ära kiirete arvutusmasinate teooria, automaatide teooria jne. ülesehitamiseks. Kuid need küsimused kuuluvad juba matemaatilise loogika valdkonda ning me jätame nad kõrvale.

Edaspidi vaatleme ainult neid hulki, mis on määratud täpselt ning vastuoludeta ja mille koosseis ei ärata kahtlusi (niisuguseid, nagu kõikide naturaalarvude hulk, kõikide ruutude hulk tasapinnal jne.).

Tühi hulk

Nimetus «hulk» viib mõttele, et iga hulk peab sisaldama mitu (vähemalt kaks) elementi. Kuid asi pole nõnda. Matemaatikas tuleb vaadelda ka niisuguseid hulki, mis sisaldavad ainult ühe elemendi, ning isegi selliseid, milles pole ühtki elementi. Neid hulki nimetatakse *tühjadeks* ja tähistatakse märgiga 0.

Milleks tuuakse sisse tühi hulk? Esiteks märgime, et kui hulk on määratud mingi iseloomuliku omadusega, siis pole mitte alati juba enne teada, et on olemas kas või üks selliste omadustega element. Näiteks koosnegu hulk A kõikidest niisugustest nelinurkadest, millel

a) kõik nurgad on täisnurgad,

b) diagonaalid on erineva pikkusega.

Inimesele, kes geomeetriat ei tunne, ei paista nendes nõudmistes midagi vastuolulist olevat. Kuid ristküliku diagonaalide võrdsusteoreemist järgneb, et niisuguste nelinurkade hulk on tühi. Tühi on ka hulk, mis koosneb kolmnurkadest, mille sisenurkade summa erineb 180°. Samuti on tühi niisugune hulk, mis koosneb ruutkolmliikmetest, millel on üle kahe juure. Üldse võib mitmeid matemaatilisi väiteid formuleerida väitena, et teatav hulk on tühi (katsuge nõnda formuleerida Pythagorase teoreemi).

Ka mõningad mittematemaatilise päritoluga hulgad on tühjad: kõikide üle kolmesaja aasta vanuste inimeste hulk, kõikide kuival maal kõndivate kokrede hulk, kõikide päikesesüsteemi planeetide hulk, mis varem Siiriuse ümber tiirlesid.

Mõnede hulkade kohta pole siiamaani teada, kas nad on tühjad või mitte. Näiteks pole seni teada, kas on tühi kõikide niisuguste naturaalarvude n hulk, mille puhul $n>2$ ja võrrandil

$$x^n+y^n=z^n$$

on positiivsed täisarvulised lahendid (see ongi kuulus Fermat' probleem). Teadmata on ka see, kas on tühi niisuguste numbrite hulk, mis arvu π kümnendmurrulises arenduses esinevad lõplik arv kordi (kuigi arv π on välja arvutatud mitme tuhande kümnendkoha täpsusega, on siiamaani teadmata, kas kõik numbrid esinevad tema kümnendmurrulises arenduses lõpmata palju kordi või esineb mõni neist ainult lõplik arv kordi).

Teadmata on ka see, kas kõikide elavate plesiosauruste hulk maakeral on tühi — kui Loch Nessi järve koletis osutub tõepoolest plesiosauruseks, siis pole see hulk sugugi tühi.

Hulgateooria ja koolimatemaatika

Hulgad võivad koosneda väga mitmesugustest elementidest — kaladest, majadest, ruutudest, arvudest, punktidest jne. Sellega ongi seletatav hulgateooria erakordne haardelaius ja rakendatavus väga mitmesugustes teadusharudes (matemaatikas, mehhaanikas, füüsikas, bioloogias, keeleteaduses jne.). Matemaatika jaoks on eriti tähtsad need hulgad, mis koosnevad «matemaatilistest» objektidest — geomeetria kujunditest, algebralistest avaldistest, funktsioonidest jne. Mõnedega sellistest hulkadest tegeldakse koolimatemaatikas, kuid seal välditakse tavaliselt sõna «hulk» (seda on kerge mõista, kui meenutada, et kõige «moodsamad» koolimatemaatika osad tekkisid XVII sajandi lõpus, hulgateooria aga sündis XIX sajandil).

Tegelikult puutub koolimatemaatika igal sammul hulkadega kokku. Eriti sageli esinevad seal arvhulgad, see tähendab, hulgad, mis koosnevad arvudest. Niisugused on näiteks:

a) kõikide naturaalarvude hulk,
b) kõikide täisarvude hulk (positiivsed, negatiivsed ja null),
c) kõikide ratsionaalarvude hulk,
d) kõikide reaalarvude hulk,
e) kõikide kompleksarvude hulk.

Geomeetrias puutume kokku kaht tüüpi hulkadega. Esiteks räägivad geomeetria teoreemid tavaliselt geomeetriliste kujundite mõnesuguse hulga omadustest. Näiteks teoreem, mis ütleb, et rööpkülikute diagonaalid poolitavad teineteist, käib kõikide rööpkülikute hulga kohta. Teiseks, geomeetrilised kujundid ise on hulgad, mis koosnevad neisse kuuluvatest punktidest. Sellepärast võime rääkida näiteks teatava ringi kõikide punktide hulgast, teatava koonuse kõikide punktide hulgast jne.

Algebras esinevad jälle teistsugused hulgad — näiteks kõikide kahe muutujaga hulkliikmete hulk, kõikide ruutvõrrandite hulk, teatava võrrandi kõikide lahendite hulk jne. Ühesõnaga, peaaegu iga koolimatemaatika osa on mingil viisil ühenduses hulgateooriaga.

Osahulgad

Hulga mõiste toomine matemaatikasse oli väga kasulik. Hulkade elementideks võivad olla väga erineva loomuga asjad ja sellepärast saab kõiki hulkasid käsitlevaid väiteid rakendada nii geomeetriakujunditele kui ka naturaalarvudele, nii loomadele ja taimedele kui ka aatomitele ja molekulidele. Hulgateooria mõisted ning teoreemid on väga üldised. Vaatame nüüd mõnda neist.

Kõigepealt tutvume mõistega *osahulk*. See tekib siis, kui on vaja vaadelda mingit hulka mitte iseseisvalt, vaid teise, laiema hulga osana. Nimelt öeldakse, et hulk B on teise hulga A osahulk siis, kui B iga element x on samal ajal ka hulga A elemendiks. Sel korral kirjutatakse $B \subset A$.

Näiteks kui vaadelda mingit keskkooli, siis üheteistkümnendate klasside õpilaste hulk selles koolis on kõikide selle kooli õpilaste hulga osahulk. Selle kooli õpilaste hulk omakorda on kõikide kooliõpilaste hulga osahulk.

Samuti esinevad geomeetrias sageli mõningate geomeetriakujundite osahulgad. Võtame näiteks järgmised hulgad:

a) hulk A koosneb kõikidest nelinurkadest;
b) hulk B koosneb kõikidest trapetsitest;
c) hulk C koosneb kõikidest rööpkülikutest;
d) hulk D koosneb kõikidest ristkülikutest;
e) hulk E koosneb kõikidest ruutudest.

Iga järgmist tüüpi kujund selles nimestikus on eelmist tüüpi kujundi erijuhuks (trapets on nelinurga erijuht, rööpkülik trapetsi erijuht jne.). Kuid see tähendabki, et iga järgmine hulk on eelmise osahulk:

$$A \supset B \supset C \supset D \supset E.$$

Järgmises nimestikus on samuti iga järgmine hulk eelneva osahulk:

a) kõikide kompleksarvude hulk;
b) kõikide reaalarvude hulk;
c) kõikide ratsionaalarvude hulk;
d) kõikide täisarvude hulk;
e) kõikide naturaalarvude hulk.

Sageli lisatakse mõne hulga osahulga eraldamiseks hulga iseloomulikule tunnusele veel täiendav tingimus. Näiteks eraldatakse naturaalarvude osahulk täisarvude hulgast lisatingimusega $n>0$.

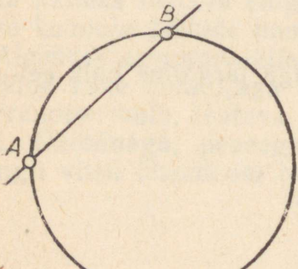
Universaalne hulk

Äärmiselt harva võib esineda olukord, kus ühes arutluses on juttu nii kõikidest kompleksarvudest kui ka kõikide vaalade hulgast ookeanis (ehkki pole muidugi võimatu, et vaala liikumise uurimisel rakendatakse kompleksmuutuja funktsioonide teooria meetodeid). Tavaliselt on kõik hulgad, millega mõnes arutluses tegeldakse, teatava fikseeritud hulga I osahulgad. Sel juhul nimetame hulka I *universaalseks hulgaks.*

Aritmeetikas on näiteks universaalseks hulgaks mittenegatiivsete ratsionaalarvude hulk, algebras — kompleksarvude ja algebraliste funktsioonide hulk, matemaatilises analüüsis — arvulise argumendi arvuliste funktsioonide hulk, geomeetrias — kõikide ruumipunktide hulk. Iga geomeetriline kujund on näiteks geomeetrilise ruumi punktide hulga osahulk.

Hulkade ühisosa

Matemaatilistes rakendustes tuleb sageli mitmest hulgast välja valida need elemendid, mis kuuluvad korraga igasse hulka ja moodustavad neist uue hulga. Viimast nimetatakse antud hulkade *ühisosaks* ehk nende *korrutiseks* ja uue hulga moodustamise operatsiooni ennast hul-



Joon. 4.

kade *lõikumiseks* ehk *korrutamiseks*. Järelikult mitme hulga *A, B, C ... ühisosaks nimetatakse uut hulka, mis sisaldab neid ja ainult neid elemente, mis kuuluvad üheaegselt hulkadesse A, B, C ...*

Nimetus «ühisosa» tuleb sellest, et kahe geomeetriakujundi punktihulkade lõikumisel saadakse nende kujundite punktide ühisosa sõna kõige tavalisemas tähenduses. Joonisel 4 on kujutatud sirge, mis lõikab ringi mööda kõõlu AB. Selle sirglõigu punktide hulga moodustab sirge punktide hulga ühisosa ringi punktide hulgaga.

Kuid ühisosa mõistet ei kasutata mitte üksnes geomeetriakujundite puhul. Võtku näiteks mingi kooli õpilased osa neljast spordiringist: jalgpall, ujumine, male ja poks. Osavõtjate hulkade ühisosa koosneb universaalsetest sportlastest, kes mängivad jalgpalli, ujuvad, poksivad ja tunnevad avanguteooriat.

Vahel on ühisosa ka geomeetriakujundite või arvude hulkadel. Näiteks kujutab kõikide ruutude hulk endast kõikide ristkülikute hulga ja kõikide rombide hulga ühisosa. Korrapäraste kolmnurkade hulk on kõigi kolmnurkade hulga ja korrapäraste hulknurkade hulga ühisosa. Kahega jaguvate naturaalarvude ja kolmega jaguvate naturaalarvude ühisosa on kuuega jaguvate naturaalarvude hulk.

Kahe hulga A ja B ühisosa tähistatakse tavaliselt AB või $A \cap B$. Hulkade korrutamise tehtel on mõningad omadused, mis meenutavad arvude korrutamist. Nimelt kehtivad siin kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse seadused

$$AB = BA$$

ja

$$A(BC) = (AB)C.$$

Tühi hulk etendab hulkade ühisosa leidmisel (korrutamisel) samalaadset osa nagu null arvude korrutamisel. Nimelt kehtib igasuguse hulga A puhul võrdus

$$A0 = 0,$$

mis on analoogiline võrdusega

$$a \cdot 0 = 0.$$

Universaalne hulk I etendab analoogilist osa arvuga 1: iga I-sse kuuluva osahulga A kohta kehtib võrdus

$$AI = A,$$

mis on analoogiline võrdusega

$$a \cdot 1 = a.$$

Kuid mõnedel hulkade korrutamise omadustel pole analoogiaid arvude korrutamise omadustega. Näiteks kui B on hulga A osahulk, $B \subset A$, siis kehtib võrdus $BA = B$. Tõepoolest, sel juhul kuuluvad kõik B elemendid (ja ainult need) üheaegselt nii A-sse kui ka B-sse. Hulk A etendab siin universaalse hulga I osa.

Muuseas, iga hulga A jaoks kehtib võrdus

$$AA = A.$$

Hulkade liitmine

Nüüd vaatleme, kuidas hulkasid liita, see tähendab, kuidas mitmest hulgast moodustada ühtne hulk. Mitme hulga A, B, ... *summaks* nimetatakse uut hulka, mis koosneb nendest ja ainult nendest elementidest, mis kuuluvad vähemalt ühesse liidetavatest hulkadest. Hulkade A ja B summat tähistatakse tavaliselt $A+B$ ehk $A \cup B$.

Tuleb silmas pidada, et mõned elemendid ei kuulu mitte ühte, vaid mitmesse liidetavasse hulka. Sel puhul kuuluvad nad summasse ikkagi ainult ühekordselt ja sellepärast võib lõplike hulkade puhul juhtuda nii, et liitmise tulemusena saadud hulgas on elementide arv väiksem liidetavates hulkades olevate elementide kogusummast. Näiteks koosnegu esimene hulk nendest ladina tähestiku tähtedest, mis esinevad «Jevgeni Onegini» esimeses reas, ja teine hulk nendest tähtedest, mis esinevad selle poeemi teises reas. Esimese hulga kirjutasime juba välja. Ta koosneb 12 tähest (vt. lk. 22):

$$M, U, O, N, T, \tilde{O}, J, A, I, G, S, D.$$

Teine hulk koosneb 11 tähest:

$$K, U, I, T, A, B, S, J, L, M, E.$$

Nende kahe hulga summa koosneb järgmisest 16 tähest:

$M, U, O, N, T, \tilde{O}, J, A, I, G, S, D, K, B, L, E.$

Tähed U, I, T, A, S, J, M, mis kuuluvad nende kahe hulga ühisossa, esinevad summas ainult üks kord ning sellepärast saime 23 tähe asemel 16.

Võtame veel ühe näite, kus liidetavatel hulkadel on ühised elemendid. Kõikide õpilaste hulk klassis koosneb järgmise kolme hulga summast:

a) edasijõudvate õpilaste hulk,
b) tütarlaste hulk,
c) mitteedasijõudvate poiste hulk.

On selge, et klassi iga õpilane kuulub vähemalt ühte eelnimetatud hulkadest. Kuid nendel hulkadel võivad olla ka ühised elemendid: edasijõudvad tüdrukud kuuluvad nii esimesse kui ka teise hulka.

Vahel koosneb summa lõpmatust arvust liidetavatest hulkadest. Näiteks tähistame hulga, mis on moodustatud kõikidest positiivsetest murdudest nimetajaga n, sümboliga A_n:

$$A_1=\left\{\frac{m}{1}\right\},\ A_2=\left\{\frac{m}{2}\right\},\ldots,\ A_n=\left\{\frac{m}{n}\right\}\ldots$$

Hulkade $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ summa on kõikide positiivsete murdude hulk, see tähendab, kõikide niisuguste murdude hulk, mis väljenduvad kujul $\frac{m}{n}$, kus m ja n on naturaalarvud.

Tähistame korrapäraste kolmnurkade hulga A_3, korrapäraste nelinurkade hulga A_4, korrapäraste viisnurkade hulga A_5 jne. Siis kõigi nende hulkade summaks on kõikide korrapäraste hulknurkade hulk A.

Liithulgad esinevad ka algebras. Kui A on võrrandi

$$f(x)=0$$

juurte hulk ja B võrrandi

$$\varphi(x)=0$$

juurte hulk, siis võrrandi

$$f(x)\varphi(x)=0$$

juurte hulk on $A+B$ (sealjuures ei võeta arvesse juurte kordsust).

Hulkade liitmise operatsioonil on paljud omadused analoogilised arvude liitmise omadustega. Näiteks kehtivad kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse seadused:

$$A+B=B+A$$

ja

$$A+(B+C)=(A+B)+C.$$

Tühi hulk etendab ka hulkade liitmisel nulli osa: ükskõik missugune hulk A ka oleks, ikka kehtib võrdus:

$$A+0=A.$$

Kuid universaalne hulk ei täida enam seda osa, mida arv üks etendab arvude liitmisel. Igasuguse hulga puhul kehtib

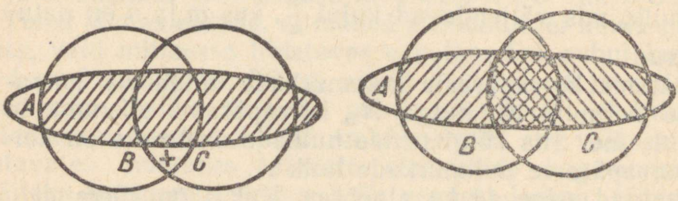
$$A+I=I.$$

Üldse, kui B on A osahulk, siis $B+A=A$. Muide, iga hulga A puhul kehtib $A+A=A$.

Hulkade liitmise ja korrutamise puhul kehtib distributiivsuse seadus

$$A(B+C)=AB+AC. \tag{1}$$

Selle tõestamiseks tuleb näidata, et iga element, mis leidub võrduse vasakul poolel, kuulub ka paremasse poolde ja ümberpöördult.



Joon. 5.

Tõestuse rangelt loogiline esitamine pole raske, kuid üsna keeruline. Piirdume sellepärast kahe võrdust (1) selgitava joonisega. Esimesel on näha viirutatud hulga A ühisosa hulgaga $B+C$, teisel A ühisosa B-ga ning A ühisosa C-ga. Need joonised teevad võrduse (1) täiesti selgeks. Kuid hulkade puhul kehtib ka teine distributiivsuse seadus, mis arvude puhul ei kehti. Seda väljendab valem

$$A+BC=(A+B)(A+C). \tag{2}$$

Selle tõestamiseks tuleb paremal pool avada sulud seaduse (1) järgi ja silmas pidada, et hulgad AB ja AC on A osahulgad, järelikult $AC \subset A$ ja $AB \subset A$. Peale selle $AA=A$ ning järelikult

$$AA+AC+BA+BC=A+BC.$$

Hulkade jaotamine

Üldiselt rääkides võib liidetavatel hulkadel olla ühiseid elemente. Kuid sageli tuleb ette, et mõni hulk on niisuguste osahulkade summa, mille juures ühelgi osahulkade paaril pole ühiseid elemente (ehk nagu tavaliselt öeldakse — nad on ühisosata). Sel puhul öeldakse, et hulk *A on jaotatud ühisosata osahulkadeks.*

Osahulkadeks jaotamist kasutatakse sageli objektide klassifitseerimisel. Näiteks kui raamatukogus raamatute kataloogi koostatakse, siis jaotatakse raamatud algul ilukirjanduseks, ühiskondlik-poliitiliseks kirjanduseks, loodusteaduslikuks kirjanduseks jne. Pärast seda jaotatakse saadud osahulgad väiksemateks osahulkadeks: ilukirjandus proosaks ja luuleks, ühiskondlikke teadusi käsitlevad raamatud filosoofiat, poliitökonoomiat jne. käsitlevateks teosteks, loodusteadus matemaatikaks, füüsikaks jne. Niisugune jaotamine võimaldab hiljem hõlpsamini vajalikku raamatut üles leida.

Muidugi võib üht ja sedasama hulka mitmel viisil osahulkadeks jaotada. Kui samas raamatukogus koostatakse tähestikulist kataloogi, siis jaotatakse raamatud niisugusteks osahulkadeks, kus autori nimi algab *A*-ga, kus autori nimi algab *B*-ga jne. Pärast seda jaotatakse iga saadud osahulk vastavalt autori nime teisele tähele jne.

Hulkade osahulkadeks jaotamisel kasutatakse sageli elementide *ekvivalentsuse* mõistet. Selleks defineeritakse, mis tähendab «element x on ekvivalentne elemendiga y», ja pärast seda ühendatakse ekvivalentsed elemendid ühte osahulka. Kuid niisuguseks jaotuseks ei kõlba mitte igasugune ekvivalentsuse mõiste. Nimetame näiteks kaht inimest ekvivalentseks siis, kui nad on teineteisega tuttavad. Niisugune ekvivalentsuse definitsioon osutub kõlbmatuks. Võib ju juhtuda, et isik X tunneb isikut Y, isik Y tunneb isikut Z, aga isikud X ja Z teineteist ei tunne. Siis tuleb meil algul isikud X ja Y paigutada ühte osahulka (nad tunnevad teineteist) ja siis samasse osahulka paigutada ka Z (ta tunneb Y), ning meil satuvad samasse osahulka X ja Z, kes teineteist ei tunne. Et selliseid viperusi ei juhtuks, on vaja, et ekvivalentsuse mõiste täidaks järgmist kolme tingimust:

a) iga element on ekvivalentne iseendaga;

b) kui element x on ekvivalentne elemendiga y, siis element y on ekvivalentne elemendiga x;

c) kui element x on ekvivalentne elemendiga y ja element y on ekvivalentne elemendiga z, siis element x on ekvivalentne elemendiga z.

Saab tõestada, et nende tingimuste täitmine on vajalik ja piisav selleks, et hulka A oleks võimalik jaotada omavahel ekvivalentsete elementide osahulkadeks (ning sealjuures nõnda, et erinevates osahulkades poleks ühiseid elemente).

Näiteks nimetame kaht täisarvu x ja y ekvivalentseteks siis, kui nende vahe on paarisarv. On hõlpus kontrollida, et seejuures on täidetud kõik kolm tingimust *a, b* ja *c*. Kui ühendame ekvivalentsed täisarvud, siis jaotame kõikide täisarvude hulga kaheks osahulgaks: kõikidest paarisarvudest koosnevaks osahulgaks ja kõikidest paarituarvudest koosnevaks osahulgaks.

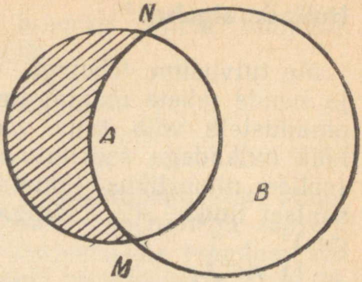
Hulkade lahutamine

Seal, kus on liitmine, on tavaliselt olemas ka lahutamine. Hulgadki pole selles suhtes erandiks. Hulkade A ja B vaheks nimetatakse hulka $A-B$, kuhu kuuluvad kõik need A elemendid, mis ei kuulu hulka B. Sealjuures pole sugugi vajalik, et hulk B oleks hulga A osa. Kui B ei ole A osa, siis taandub B lahutamine A-st sellele, et eemaldatakse A-st A ja B ühine osa:

$$A-B=A-AB.$$

Näiteks kui A on esimese ringi punktide hulk ja B teise

Joon. 6.



ringi punktide hulk siin leheküljel oleval joonisel, siis nende vahe on sirbikujulise viirutatud kujundi (ilma kaareta MN) punktide hulk. Kui A on kõikide teatava klassi õpilaste hulk mõnes koolis ja B kõikide selles koolis õppivate tüdrukute hulk, siis on $A-B$ kõikide selle kooli selles klassis õppivate poiste hulk.

Juhul kui B on hulga A osa, nimetatakse $A-B$-d hulga B *täiendiks* hulgas A ja tähistatakse B'_A (muidugi mõista on ühel ja samal hulgal B erinevad täiendid erinevates hulkades A, mis seda hulka sisaldavad). Näiteks on paarisarvude hulga täiendiks kõikide täisarvude hulgas paarituarvude hulk. Kõikide ruutude hulga täiendiks kõikide ristkülikute hulgas on kõikide mittevõrdkülgsete ristkülikute hulk. Aga sama ruutude täiendiks kõikide rombide hulgas on mittevõrdsete diagonaalidega rombide hulk.

Kui kõiki hulki käsitleda universaalse hulga I osahulkadena, siis mõistetakse tavaliselt hulga B täiendi all tema täiendit hulgas I. Sel puhul kirjutatakse B'_I asemel lihtsalt B'.

Hulkade liitmisel võetakse korduvaid elemente ainult üks kord, lahutada aga võib ka seda hulka, mis ei kuulu tervenisti lahutatavasse, ja seetõttu kaotavad mõned aritmeetikaseadused hulkade lahutamise puhul kehtivuse. Näiteks üldiselt rääkides

$$(A+B)-C \neq A+(B-C).$$

Tõepoolest, kui kõik kolm hulka ühte langevad ($A=B=C$), siis on vasak pool tühi hulk, aga parem langeb kokku hulgaga A.

Hulkade algebra *

Me tutvusime tehetega, mida hulkadele saab rakendada, ja nende tehete mõningate omadustega. Lisaks mainitud omadustele võib tuua veel terve rea teisi. Näitame ära kõik hulkadega sooritatavate tehete kõik põhiomadused (selles nimestikus tähistab 0 tühja hulka, I — universaalset hulka, A' — hulga A täiendit universaalses hulgas):

1) $A \subset A$.
2) Kui $A \subset B$ ja $B \subset A$, siis $A = B$.
3) Kui $A \subset B$ ja $B \subset C$, siis $A \subset C$.
4) $0 \subset A$.
5) $A \subset I$.
6) $A + B = B + A$.
7) $AB = BA$.
8) $A + (B + C) = (A + B) + C$.
9) $A(BC) = (AB)C$.
10) $A + A = A$.
11) $AA = A$.
12) $A(B + C) = AB + AC$.
13) $A + BC = (A + B)(A + C)$.
14) $A + 0 = A$.
15) $AI = A$.
16) $A + I = I$.
17) $A0 = 0$.
18) Seos $A \subset B$ on ekvivalentne seostega $A + B = B$ ja $AB = A$.
19) $A + A' = I$.
20) $AA' = 0$.
21) $0' = I$.
22) $I' = 0$.
23) $(A')' = A$.
24) Seos $A \subset B$ on ekvivalentne seosega $B' \subset A'$.
25) $(A + B)' = A'B'$.
26) $(AB)' = A' + B'$.

Omaduste 1—26 abil saab hulkadega täpselt samuti tehteid sooritada kui algebras sooritatakse tehteid arvudega. Sealjuures on mõningad valemid isegi lihtsamad kui tavalises algebras. Näiteks binoomi valem taandub järgmisele väga lihtsale võrdusele:

$$(A+B)^n=A+B,$$

mis järgneb omadusest 11.

Ma ei hakka tõestama kõiki kahtkümmend kuut omadust. Neid on võimalik illustreerida joonistega täpselt niisamuti, nagu me eespool illustreerisime omadust 12. Veidi keerulisem teistest tõestustest on omaduste 25 ja 26 tõestamine.

Mõistagi pole kõigi kahekümne kuue omaduse meelespidamine sugugi kerge. Kuid seda pole vajagi. Asi on selles, et võib piirduda kahe põhioperatsiooniga: hulkade liitmise ja täiendi moodustamisega, kusjuures on nõutav, et oleksid täidetud järgmised kolm tingimust:

a) $A+B=B+A$;
b) $(A+B)+C=A+(B+C)$;
c) $(A'+B')'+(A'+B)'=A$.

Nüüd defineerime korrutise tehte AB ja sisaldavuse seose $A\subset B$. Selleks kasutame järgmisi võrdusi:

d) AB on definitsiooni põhjal võrdne $(A'+B')'$;
e) $A\subset B$ tähendab definitsiooni põhjal, et $A+B=B$.

Siis saab kõik kakskümmend kuus omadust tuletada võrdustest $a \ldots e$.

Osutame veel järgmisele tähelepanuväärivale «duaalsele seosele». Kui omadustes 1—26 igaühes vahetada omavahel ära sümbolid

$\subset$ ja $\supset$,

0 ja I,

$+$ ja $\cdot$,

siis saame selle tagajärjel jällegi ühe neist omadustest. Näiteks saame sel teel omadusest 6 omaduse 7, omadusest 12 omaduse 13 jne.

Siit järgneb, et igale teoreemile, mida saab järeldada omadustest 1—26, vastab teine, «duaalne» teoreem, mis saadakse esimesest eespool nimetatud sümbolite vahetamise teel.

Boole'i algebrad *

Matemaatikas esinevad peale hulkade ka teised objektid, mille puhul kehtivad tingimusi 1—26 rahuldavad liitmise ja korrutamise tehted. Selliste objektide süsteeme uuris 1847. aastal esimesena inglise matemaatik Boole (kuulsa raamatu «Kiin» autori, kirjanik Ethel Lilian Voynichi isa). Sellepärast nimetatakse niisuguseid süsteeme *Boole'i algebrateks.*

Huvitavaks Boole'i algebra näiteks on arvu 30 kõikide jagajate hulk

$$M = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}.$$

Selle juures tuleb kahe jagaja «liitmise» all mõista nende vähima ühiskordse moodustamist ning «korrutamise» all suurima ühisteguri leidmist. Näiteks $2 \oplus 5 = 10$, $6 \odot 15 = 3$ (liitmise ja korrutamise märgi ümbritsesime sõõriga, selleks et eristada neid tavalisest liitmisest ja korrutamisest). Seos $a \subset b$ tähendab, et a on arvu b jagaja. Elemendi 0 osa etendab sealjuures arv 1 ja elemendi I osa arv 30. Jagaja a täiendiks tuleb pidada arvu $a' = \frac{30}{a}$. Näiteks $10' = 3$.

Mõistagi pole vaja kontrollida, kas on täidetud kõik omadused 1—26. Nagu juba öeldud, piisab, kui kontrollitakse omadusi a, b, c, d ja e, mis on toodud lk. 37.

HULKADE VÕIMSUS

Kuidas hulki võrrelda?

Senini vaatlesime selliseid hulkade omadusi, mis olid ühised nii lõplike kui ka lõpmatute hulkade jaoks. Nüüd aga hakkame vaatlema niisuguseid omadusi, mis esinevad üksnes lõpmatute hulkade juures. Ijon Tichy jutustusest on juba teada, et need omadused erinevad oluliselt lõplike hulkade omadustest. See, mis on lõplike hulkade puhul võimatu, osutub täiesti võimalikuks lõpmatute hulkade korral.

Esimene küsimus, mis me läbi arutame, on lõpmatute hulkade omavaheline võrdlemine. Igasuguste lõplike hulkade puhul võib alati ütelda, missugune neist rohkem elemente sisaldab, missugune vähem. Lõpmatute hulkade puhul on asi palju keerulisem. Näiteks missuguseid arvusid on rohkem, naturaalarvusid või ratsionaalarvusid, ratsionaalarvusid või reaalarvusid? Kus on rohkem punkte, sirglõigul või tervel sirgel, sirgel või ruudus?

Esimesel pilgul näib, et nendele küsimustele on üsna lihtne vastata. Naturaalarvude hulk on ju osa ratsionaalarvude hulgast ning sirglõik osa sirgest. Kas pole siis iseenesest selge, et naturaalarvusid on vähem kui ratsionaalarvusid ja punkte sirglõigul vähem kui kogu sirgel? Tuleb aga välja, et asi pole sugugi selge. Kuskilt ei saa ju järeldada, et lõpmatute hulkade juurde minnes jäävad kehtima seadused, mis on saadud lõplike hulkade uurimisel — näiteks seadus, et «osa on väiksem kui terve».

Ja mis kõige olulisem: kui püüame lõpmatuid hulki võrrelda tunnuse järgi, et üks hulk on teise hulga osa, siis on see katse juba algusest peale ebaõnnestumisele määratud. Näiteks kus on rohkem punkte, ruudus või lõpmata pikal sirgel? Ruutu ei saa ju sirgjoone sisse panna ega sirgjoont ilma katki murdmata ruudu sisse paigutada. Muidugi võib sirgjoone murda tükkideks, mis on ruudu külje pikkused, ning pärast seda kõik tükid paigutada ruudu sisse nõnda, et nad üksteisega ei lõikuks. Võib-olla on ruutugi võimalik kuidagi osadeks jaotada ja osad siis sirge peale panna nõnda, et nad üksteist ei kataks? Aga kui palju on lõpmatuid hulkasid, mis pole teineteise osad! Tasapinnal asuvate ruutude hulgal ja samal tasapinnal asuvate ringide hulgal pole ühtki ühist elementi. Kuidas neid siis võrrelda? Kuidas välja selgitada, mida on maailmas rohkem — kas lämmastiku või hapniku aatomeid?

Niisiis, küsimus on seatud. Kõigepealt selgitame välja, missugusel juhul tuleb ütelda, et üks hulk sisaldab niisama palju elemente kui teine. Teiste sõnadega, selgitame välja, missugusel juhul on kahel lõpmatul hulgal «ühepalju» elemente.

Tantsupõrandal

Lõplike hulkade puhul on võrdlemine lihtne. Selleks et teada saada, kas kahes hulgas on ühesugune arv elemente, tuleb elemendid loendada. Kui loendamisel saame ühesugused tulemused, siis tähendab see, et mõlemas hulgas on ühepalju elemente. Kuid lõpmatute hulkade juures see meetod ei kõlba, sest kui hakkame loendama lõpmatut hulka elemente, siis on oht, et loeme neid elu lõpuni ega saa siiski veel ülesandega hakkama.

Ent ka lõplike hulkade puhul pole loendamine alati sobiv meetod. Läheme näiteks tantsima. Kuidas teada saada, kas siin on tüdrukuid ja poisse ühepalju? Muidugi võib paluda noormehi ühele poole ja neidusid teisele poole minna ning hakata mõlemaid üle lugema. Kuid esiteks saame seejuures üleliigset informatsiooni — meid ju ei huvita, kui palju siin neidusid ja noormehi on, vaid huvitab ainult see, kas neid on ühepalju. Teiseks, ega noored selleks tantsupõrandale tulnud, et seista ja oodata, kuni loendamine lõpeb, nad tulid tantsima.

Noh olgu peale. Täidame nende soovi ja palume, et orkester mängiks mingit tantsu, mida kõik oskavad. Siis kutsuvad noormehed neiud tantsima ja . . . meie ülesanne on lahendatud. Sest kui selgub, et kõik noormehed ja neiud tantsivad, tähendab, kui kõik noored on jagunenud paarideks, siis on ilmne, et tantsupõrandal on täpselt niisama palju noormehi kui neidusid.

Täpselt samuti võib teada saada, kas vaatajate arv teatrisaalis võrdub istekohtade arvuga. Kui etenduse ajal pole ühtki vaba kohta, kusjuures ükski vaataja ei seisa vahekäigus ja igal kohal istub üksainus inimene, siis võib kindel olla, et vaatajaid on täpselt niisama palju kui kohti.

Kui vihmasel päeval inimesed tänaval kiirustavad, siis on inimeste arv niisama suur kui vihmamantlite arv: igal inimesel on seljas üks ja ainult üks vihmamantel ning ilma vihmamantlita ei ole keegi söandanud välja tulla.

Iga tõusu kohta tuleb üks mõõn

Me tutvusime sellega, kuidas teada saada, et kahel lõplikul hulgal on ühepalju elemente, ilma et oleksime neid elemente üle lugenud. Seda võtet võib rakendada ka lõpmatute hulkade puhul. Ainult siin ei saa enam orkestrit appi võtta, vaid tuleb endal jagada kahe võrreldava hulga elemendid «tantsupaarideks».

Niisiis, olgu meil antud kaks hulka A ja B. Öeldakse, et nende vahel on seatud sisse *üksühene vastavus*, kui hulkade elemendid on ühendatud paaridesse (a, b) nõnda, et:

1) element a kuulub hulka A ja element b hulka B;

2) mõlema hulga iga element on sattunud ühte ja ainult ühte paari.

Näiteks kui hulk A koosneb tantsupõrandal olevatest poistest ja hulk B neidudest samal põrandal, siis paarid (a, b) on moodustatud üksteisega tantsivatest neidudest ja poistest. Kui hulk A koosneb vaatajatest ja hulk B saalis olevatest istekohtadest, siis paar (a, b) koosneb vaatajast ja istekohast, millel ta istub. Ning lõpuks, kui A on tänaval olevate inimeste hulk ja B vihmamantlite hulk, siis paar (a, b) koosneb inimesest ja tema vihmamantlist.

Muidugi mõista pole mitte igasugune hulkadevaheline vastavus üksühene. Kui hulk A koosneb kõikidest Maa peal olevatest puudest ja hulk B nende puude otsas kasvavatest viljadest, siis võib hulkade vahel leida vastavuse: igale viljale seame vastavusse puu, mille otsas see vili kasvab. Kuid vastavus pole üksühene: mõnedel puudel kasvab palju vilju, aga teistel nad puuduvad parajasti üldse. Sellepärast võtavad ühed elemendid *a* (puud) osa mitmetest paaridest, teised elemendid *a* ei kuulu jälle ühessegi paari.

Lõplike hulkade puhul on ükskõik kas öelda, et kahe hulga vahel on üksühene vastavus, või öelda, et neil on ühepalju elemente. Väga tähtsaks pöördepunktiks oli hulkade teoorias hetk, mil Cantor otsustas samal viisil võrrelda ka lõpmatuid hulki.

Teiste sõnadega, Cantori järgi on kahel (nad võivad ka lõpmatud olla) hulgal *A* ja *B* ühepalju elemente, siis kui nende hulkade elementide vahel on võimalik sisse seada üksühene vastavus.

Tavaliselt ei ütle matemaatikud, et «hulkadel *A* ja *B* on ühepalju elemente», vaid ütlevad, et «*A* ja *B* on ühesuguse *võimsusega*» või «hulgad *A* ja *B* on *ekvivalentsed*».

Järelikult tähendab lõpmatute hulkade puhul sõna «võimsus» sedasama, mis lõplike hulkade puhul «elementide arv».

Juba enne Cantorit jõudis üksühese vastavuse mõisteni tšehhi teadlane B. Bolzano. Kuid ta ei saanud üle neist raskustest, mida see mõiste endaga kaasa tõi. Nagu varsti näeme, tuli pärast seda, kui võeti vastu põhimõte, mille järgi lõpmatuid hulki hakati võrdlema üksühese vastavuse abil, loobuda paljudestki dogmadest.

Kas osa on võrdne tervikuga!

Kõige tähtsam dogma, millest tuli loobuda, oli juba üsna matemaatika arenemise algul püstitatud väide: *osa on tervikust väiksem.* See väide on vaieldamatult õige lõplike hulkade puhul, kuid lõpmatute hulkade puhul kaob tema kehtivus. Tuletage meelde, kuidas kummalise võõrastemaja direktor paigutas kosmozooloogid paarisnumbritesse. Selle ümberpaigutuse juures asus elanik toast nr. *n* tuppa nr. 2*n*. Teiste sõnadega, ümberpaigutus tehti järgmise skeemi järgi:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 \ldots & n \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 6 \ldots & 2n \ldots \end{array}$$

Kuid see skeem seab sisse üksühese vastavuse naturaalarvude hulga

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n, \ldots$$

ja selle osa — paarisarvude hulga vahel

$$2,\ 4,\ 6, \ldots, 2n, \ldots$$

Me leppisime ju kokku, et hulgad, mille vahel on võimalik sisse seada üksühene vastavus, sisaldavad ühepalju elemente. Tähendab, naturaalarvude hulk sisaldab niisama palju elemente kui tema osa — paarisarvude hulk.

Täpselt samal viisil on võimalik sisse seada üksühest vastavust naturaalarvude hulga ja järgmiste arvude hulga vahel

$$10,\ 100,\ 1000,\ 10\,000, \ldots$$

Selleks tuleb igale naturaalarvule n vastavusse seada arv 10^n:

$$n \to 10^n.$$

Ongi sisse seatud soovitud üksühene vastavus. Täpselt samuti saab naturaalarvude hulka üksühesesse vastavusse seada kõikide naturaalarvude ruutude hulgaga:

$$n \to n^2,$$

naturaalarvude hulka kõikide naturaalarvude kuupide hulgaga:

$$n \to n^3$$

jne.

Üldiselt saab kõikide naturaalarvude hulga ja iga tema lõpmatu osa vahel alati sisse seada üksühese vastavuse. Selleks tuleb vaid järjestikku ära nummerdada selles osas leiduvad arvud.

Loenduvad hulgad

Kõiki hulki, milles on niisama palju elemente kui naturaalarvude hulgas, nimetatakse *loenduvateks* hulkadeks. Teiste sõnadega, hulka nimetatakse loenduvaks, kui ta on lõpmatu, ent kui tema elemente saab nummerdada naturaalarvudest numbritega. Näiteks paarisarvude hulk, paarituarvude hulk, algarvude hulk ja üldse naturaalarvude hulga iga lõpmatu osa on loenduv hulk.

Vahel tuleb mõne hulga loenduvuse määramiseks üsna leidlik olla. Võtame näiteks kõikide täisarvude hulga (nii positiivsed kui negatiivsed):

$$\ldots -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

Kui katsuksime hakata seda hulka nummerdama mõnest juhuslikust punktist alates, siis ei saaks me kunagi tööga valmis, sest osa jääks paratamatult nummerdamata. Et nummerdamisel ükski arv välja ei jääks, tuleb hulk üles kirjutada kahes reas

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, \ldots \\ -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & -6, & -7, \ldots \end{array}$$

ja nummerdada siis veergude kaupa. Sealjuures 0 saab numbri 1, —1 numbri 2, 1 — nr. 3, 2 — nr. 4 jne. Teiste sõnadega, kõik positiivsed arvud ja null saavad paaritud numbrid ning kõik negatiivsed arvud paarisnumbrid. Eks ole, tuleb meelde, kuidas direktor paigutas kõik filatelistid võõrastemajja, mis oli juba täis kosmozoolooge.

Aga kui kõigi täisarvude hulga loenduvust on kerge uskuma jääda, siis ratsionaalarvude hulga loenduvusest on juba raskem aru saada. Ratsionaalarvud paiknevad ju väga tihedalt — iga kahe ratsionaalarvu vahele mahub neid veel lõpmatu hulk. Sellepärast pole sugugi selge, kuidas neid nummerdada; näib, et iga kahe arvu vahel tuleb nummerdada veel lõpmatu hulk arvusid ja et see protsess ei lõpe kunagi. Tõepoolest, ratsionaalarve pole kuidagi võimalik nende suuruse järjekorras nummerdada.

Aga kui loobuda ratsionaalarvude järjestamisest suuruse järgi, siis on neid võimalik nummerdada. Selleks kirjutame esiteks välja kõik need positiivsed murrud, mille nimetajaks on üks, pärast seda kõik positiivsed murrud, mille nimetajaks on kaks, siis nimetajaga kolm jne. Saame järgmise tabeli:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1} \cdots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2} \cdots$$

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \cdots$$

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4} \cdots$$

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5} \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Selge, et siin tabelis esineb iga positiivne ratsionaalarv ja sealjuures korduvalt. Näiteks arv 3 esineb nii murrus $\frac{3}{1}$ kui ka murruna $\frac{6}{2}$ ja murruna $\frac{9}{3}$.

Nüüd alustame nummerdamist. Selleks tuletame meelde kummalise võõrastemaja direktori viimast kangelastegu. Ta paigutas ju oma võõrastemajja elanikud lõpmatust hulgast samasugustest võõrastemajadest. Selleks kasutas ta nummerdamist ruutude järgi. Meie teeme täpselt samuti, ainult selle vahega, et mõningad murrud vahele jätame (näiteks $\frac{1}{1}$ sai juba numbri ühe ning selle-pärast jätame $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}$ jne. vahele: nad märgivad ju üht ja sedasama arvu). Positiivsete ratsionaalarvude jaoks saame järgmise numeratsiooni: $1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 4, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \ldots$

Nii nummerdasime kõik positiivsed ratsionaalarvud ja nüüd on juba kerge taibata, kuidas nummerdada kõik (s. t. nii positiivsed kui negatiivsed) ratsionaalarvud. Selleks tuleb nad kirjutada kahte eraldi tabelisse, ühe tabeli arvud nummerdada paarisnumbritega, teise omad paaritute numbritega (ning jätta veel üks number nulli jaoks).

Üldse, kui liidame loenduvad hulgad loenduvaid hulki, siis saame uuesti loenduva hulga. Seda saab tõestada jällegi samal, ruutude kaupa nummerdamise teel.

Algebralised arvud *

Kõik seni vaadeldud näited on ühe üldise teoreemi erijuhud. Asi seisab nimelt selles, et neis näidetes saab hulkade elemente määrata naturaalarvude lõplike komplektide abil. Näiteks on iga täisarvu n (välja arvatud 0) võimalik üles kirjutada kujul

$$(-1)^k|n|,$$

kus $|n|$ on arvu moodul ja k võrdub ühega, kui $n<0$, ning kahega, kui $n>0$. Seepärast on arv n määratud naturaalarvude paariga $(k, |n|)$. Täpselt samuti võib positiivset ratsionaalarvu anda taandumatu murru $\frac{m}{n}$ kujul, või mis seesama, naturaalarvude paari (m, n) abil.

Üldine teoreem, mida mainisime, kõlab järgmiselt.

Kui hulga iga elementi on võimalik määrata lõplikust hulgast naturaalarvudest koosneva komplektiga, siis on see hulk lõplik või loenduv.

Teoreemi tõestus on idee poolest väga sarnane (ainult veidi keerulisem) ühega neist meetodeist, mida kasutas võõrastemaja direktor, kui ta lahendas kõige raskemat probleemi.

Nimelt võtame kõik algarvud 2, 3, 5, 7, 11, 13 jne. ja tähistame nad järjekorras $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ Kui A-sse kuuluv element x on määratud naturaalarvude komplektiga $\{m_1, \ldots, m_n\}$, siis seame temaga vastavusse naturaalarvu

$$N_x = p_1^{m_1} \ldots p_n^{m_n}.$$

Teoreemist, mille põhjal naturaalarvusid on võimalik ainult ühel viisil algarvulisteks teguriteks lahutada, järgneb, et A erinevatele elementidele vastavad sel puhul erisugused naturaalarvud. Sellepärast määrab seos $x \rightarrow N_x$ üksühese vastavuse hulga A elementide ja naturaalarvude hulga osa elementide vahel.

Allpool tõestatakse, et naturaalarvude hulga iga lõpmatu osahulk on loenduv. Siit järgneb, et hulk A on kas lõplik või loenduv.

Selle üldise teoreemi abil on näiteks võimalik tõestada kõikide algebraliste arvude hulga loenduvust.

Algebralisteks arvudeks nimetatakse algebraliste võrrandite

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=0 \tag{1}$$

lahendeid, kusjuures koefitsiendid $a_0, \dots a_n$ on täisarvud. $\sqrt{5}$ on näiteks algebraline arv, sest ta rahuldab võrrandit

$$x^4-5=0.$$

Mittealgebralisi arve nimetatakse *transtsendentseteks*.

Igal n-astmelisel võrrandil on täpselt n lahendit. Sellepärast on iga algebraline arv määratud arvukomplektiga

$$\{k, a_0, a_1, \dots, a_n\},$$

kus $a_0, \dots, a_n$ on võrrandi (1) kordajad ja k on juure number. Arvud $a_0, \dots, a_n$ omandavad kõikvõimalikud täisarvulised väärtused ja k — täisarvulised väärtused ühest kuni n-ni. Teoreemi rakendades veendume, et kõikide algebraliste arvude hulk on loenduv.*

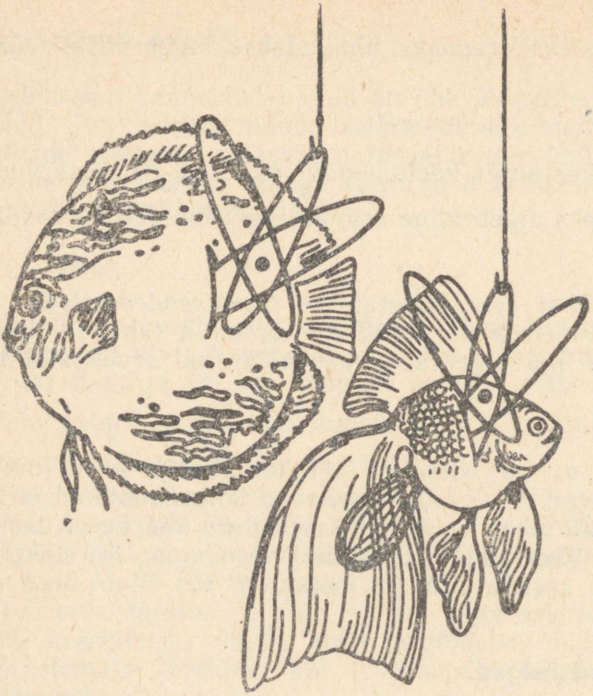
Mittevõrdsed hulgad

Me seletasime juba, mida tähendab lause «kahes hulgas on ühepalju elemente». Nüüd selgitame, mida tähendab: «ühes hulgas on rohkem elemente kui teises». Ka lõplike hulkade puhul saab seda kindlaks teha, ilma et oleks vaja loendama hakata. Meenutagem meie näidet tantsijatega.

Kui pärast tantsu algust on noormehed neiud põrandale kutsunud ja osa noormehi ikka veel seina ääres seisab, siis on selge, et noormehi on rohkem. Kui aga osa neidusid nukralt oma tantsivaid sõbratare vaatab, siis on neide ilmselt rohkem.

Niisugusel juhul talitasime nõnda: seadsime sisse üksühese vastavuse ühe hulga ja teise hulga osa vahel. Kui see oli võimalik, siis järeldus siit, et teine hulk sisaldas rohkem elemente kui esimene. Seda meetodit kasutades on näiteks kerge välja selgitada, et ookeanis on kalu

* Asjaolu, et arvud $a_0, \dots, a_n$ omandavad täisarvulisi, mitte aga ainuüksi naturaalarvulisi väärtusi, pole oluline, sest täisarve on võimalik nummerdada.



Joon. 7. Igast kalast üks aatom.

vähem kui maakeral aatomeid (kuigi mõlemad hulgad on lõplikud, siiski vaevalt on neid võimalik loendada). Piisab, kui igale kalale seada vastavusse üks aatom, mis kuulub kala keha koostisse. Sel viisil on sisse seatud üksühene vastavus kõikide kalade hulga ja kõikide maakeral asuvate aatomite hulga osa vahel.

Kahjuks ei saa lõpmatute hulkadega nii lihtsalt talitada. Me juba nägime, et hulgas võib olla niisama palju elemente kui tema osaski. Sellepärast ei saa ainult asjaolust, et hulgas *A* on niisama palju elemente kui hulga *B* osas, veel järeldada, et hulk *A* sisaldab vähem elemente kui kogu hulk *B*.

Väljendume tagasihoidlikumalt ja ütleme, et kui hulka *A* on võimalik seada üksühesesse vastavusse hulgaga *B*, siis *hulgas B on vähemalt niisama palju elemente kui hulgas A*. Võib tõestada, et sel seosel on kõik võrratuste omadused.

1) Igas hulgas A on vähemalt niisama palju elemente kui selles hulgas endas.

2) Kui hulgas A on vähemalt niisama palju elemente kui B-s ja B-s on vähemalt niisama palju elemente kui C-s, siis A-s on vähemalt niisama palju elemente kui C-s.

3) Kui A-s on vähemalt niisama palju elemente kui B-s ja B-s vähemalt niisama palju elemente kui A-s, siis on neis ühepalju elemente (see tähendab, nende hulkade elementide vahel on võimalik sisse seada üksühene vastavus).

Võib juhtuda nii, et hulgas B on vähemalt niisama palju elemente kui hulgas A, aga need hulgad pole ekvivalentsed. Teiste sõnadega, võib juhtuda, et on olemas üksühene vastavus hulga A ja hulga B osa B_1 vahel, kuid pole olemas üksühest vastavust A ja kogu hulga B vahel. Sel juhul ütlemegi, et B-s on rohkem elemente kui A-s.

Loenduv hulk on kõige väiksem lõpmatute hulkade seas

Me juba rääkisime, et igasugune naturaalarvude hulga lõpmatu osa on loenduv. See tähendab, et pole olemas lõpmatut hulka, mille võimsus oleks loenduva hulga võimsusest väiksem. Tõestame nüüd, et igas lõpmatus hulgas on olemas loenduv osahulk. Siit järeldub, et loenduva hulga võimsus on väiksem iga lõpmatu hulga võimsusest, järelikult on ta võimsus kõige väiksem lõpmatute hulkade seas.

Selleks et valida lõpmatust hulgast A välja loenduv osahulk, talitame järgmiselt. Võtame ühe elemendi x_1 — seda on võimalik teha, sest hulk A on lõpmatu ja igatahes mitte tühi. Selge, et pärast elemendi x_1 eemaldamist pole hulk A veel ammendatud ning me võime sealt võtta veel teise elemendi x_2 jne. Tulemusena oleme hulgast A võtnud loenduva osahulga nummerdatud elemente

$$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

Tõestust veidi täiendades võib jõuda niikaugele, et pärast loenduva osahulga eemaldamist jääb alles lõpmatu hulk. Selleks tuleb pärast osahulga X eraldamist tagasi panna kõik paarisnumbrilised elemendid. Tulemusena eraldasime loenduva osahulga

$Y=\{x_1, x_3, x_5, \ldots\}$

ning järelejäänud hulk sisaldab veel lõpmatu hulga elemente: $\{x_2, x_4, x_6, \ldots, x_{2n}, \ldots\}$ (ja võib-olla veel palju teisi elemente).

Lihtne on tõestada järgmisi teoreeme.

Lõpmatu hulga võimsus ei muutu, kui lisada talle loenduv hulk.

Mitteloenduva hulga võimsus ei muutu, kui eemaldada temast loenduv hulk.

Need teoreemid kinnitavad veel kord, et loenduvad hulgad on lõpmatute hulkade seas kõige väiksemad.

Mitteloenduvad hulgad

Kõik eespool konstrueeritud hulgad olid loenduvad. See viib mõttele, et kas pole üldse kõik lõpmatud hulgad loenduvad. Kui see nii oleks, siis muutuks matemaatikute elu kergeks: kõikides lõpmatutes hulkades oleks ühepalju elemente ja poleks vaja mingit lõpmatuse analüüsi. Selgus aga, et asi on palju keerulisem: mitteloenduvad hulgad on olemas ja sealjuures pole neil sugugi ühesugune võimsus. Üht mitteloenduvat hulka tunnevad kõik hästi — see on punktide hulk sirgjoonel. Kuid enne selle hulga juurde asumist räägime teisest hulgast, mis on temaga üsna lähedases seoses, nimelt kummalise võõrastemaja täitmise variantide hulgast A.

Märgime, et mingi hulga mitteloenduvust on üldse väga raske tõestada. Tõestada, et mingi hulk on loenduv, see tähendab leida lihtsalt mingi viis, mille järgi saab tema elemente nummerdada. Aga selleks, et tõestada mingi hulga mitteloenduvust, tuleb tõestada, et niisugust viisi pole ega saagi olla. Teiste sõnadega, ükskõik missuguse viisi me välja mõtleksime, alati leidub hulgas mõni nummerdamata element. Hulkade mitteloenduvuse tõestamiseks mõtles Cantor välja väga teravmeelse meetodi, mida hakati nimetama diagonaalseks protsessiks (tegelikult me puutusime sellega kokku juba lk. 23). Cantori tõestusmeetod saab selgeks järgmisest Ijon Tichy jutustusest.

Lõpetamata jäänud nimestik

Seni rääkisin ma kummalise võõrastemaja direktori edusammudest: sellest, kuidas ta oskas täidetud võõrastemajja paigutada veel lõpmatu hulga elanikke ja siis isegi kõik elanikud lõpmatust hulgast niisama kummalistest võõrastemajadest. Ent juhtus ka nõnda, et ükskord ei saanud isegi see võlur ja maag oma ülesandega hakkama.

Kosmiliste võõrastemajade trustist tuli käsk koostada kõikvõimalikud võõrastemaja tubade täitmise variandid. Need tuli esitada tabelina, milles iga rida pidi kujutama üht varianti. Sealjuures pidi täidetud toa märkima ühega ja tühja nulliga. Näiteks variant

1010101010101010101...

tähendas, et kõik paaritud numbrid on täis ja kõik paarisnumbrid tühjad, variant

1111111111111...

tähendas, et kõik toad on täis, ning variant

000000000...

tähendas täielikku majanduslikku krahhi — kõik numbrid on tühjad.

Direktor oli tööga ülekoormatud ja leidis sellepärast olukorrast lihtsa väljapääsu. Iga korruse valvekorrapidajale tehti ülesandeks koostada nii mitu täitmisvarianti, kui mitu numbrituba oli tema korrusel. Sealjuures rakendati abinõusid selleks, et variandid ei korduks. Mõne päeva pärast esitati nimekirjad direktorile ning see pani nad kokku üheks nimestikuks.

«Kas olete kindel, et nimestik on täielik?» küsisin ma direktorilt. «Kas mõni variant pole mitte vahele jäänud?»

«Ei tea,» vastas ta. «Variante on nimekirjas lõpmata palju ja ma ei oska kontrollida, kas leidub ehk veel mõni variant.»

Ning siis välgatas mul peast läbi idee (muide, võibolla ma liialdan veidi oma võimetega, lihtsalt vestlused lõpmatutest hulkadest professor Tarantogaga ei möödunud jälgi jätmata).

«Vean kihla, et nimekiri pole täielik. Tahate, ma näitan variandi, mis on kindlasti vahele jäetud.»

«Olen veel nõus sellega, et nimestik pole täielik. Aga vahelejäänud variandi näitamisega te küll hakkama ei saa — siin on ju lõpmata palju variante.»

Vedasime kihla. Et teda võita, tegin ettepaneku panna iga variant välja just selle toa uksele, millele ta vastas (nagu lugeja mäletab, oli variante koostatud nimelt just nii palju, kui võõrastemajas numbreid oli). Siis talitasin väga lihtsalt. Läksin esimese numbri ukse taha ja nägin, et vastav variant algab numbrist 0. Otsekohe ilmus minu märkmikku number 1; see oligi esimene number tollest variandist, mida mina tahtsin koostada.

Kui jõudsin teise numbri ukse juurde, siis vastava variandi esimene number mind ei huvitanud, sest minu variandi esimene number oli juba üles kirjutatud. Sellepärast pöörasin kogu tähelepanu teisele numbrile. Nähes, et see on 1, kirjutasin oma märkmikku number 0. Kui ma nägin, et kolmanda toa uksel olev kolmanda variandi kolmas number oli ka 1, kirjutasin oma märkmikku jälle number 0. Üldse, kui ma avastasin, et n-nda variandi n-s number on 0, siis kirjutasin oma märkmikku n-ndale kohale numbri 1, kui aga n-nda variandi n-s number oli 1, siis kirjutasin sinna 0.

Kui kõik võõrastemaja toad olid läbi käidud *, siis leidus mu märkmikus mingi nullide ja ühtede rida.

Direktori kabinetti astudes ütlesin:

«Näete, siin ongi vahelejäetud variant.»

«Aga kust te seda teate, et ta on vahele jäetud?»

«Ta ei saa olla esimene variant, sest erineb sellest esimese numbri poolest, ei saa olla ka teine, sest erineb sellest teise numbri poolest, ega kolmas, sest erineb kolmanda numbri poolest, ega üldse n-s variant, sest erineb sellest n-nda numbri poolest.»

Kihlvedu oli võidetud ja ma sain igaveseks õiguse selles võõrastemajas tasuta elada.

Kuid samal ajal sai selgeks, et kui võtta ükskõik missugune loenduv hulk variante, leidub alati niisugune, mis sellesse hulka ei kuulu (need variandid võib alati tubade ustele riputada). Aga see tähendabki, et võõraste-

---

* Kui palju ta selleks küll aega kulutas!

maja täitmise kõikide variantide hulk on mitteloenduv. Direktorile antud üiesannet polnud võimalik täita.

Otsustati telegramm saata. Peab ütlema, et tolles kummalises võõrastemajas oli telegraafki ebatavaline, ta andis telegramme, mis ei koosnenud mitte lõplikust, vaid lõpmatust (täpsemalt, loenduvast) hulgast punktidest ja kriipsudest. Neil oli näiteks niisugune kuju:

—•——•———• jne.

Ma taipasin kohe, et niisuguste telegrammide hulk on ka mitteloenduv, sest punktide ja kriipsude asemele võib ju panna nullid ja ühed, ning siis pole vahet loenduvast hulgast märkidest koosnevate telegrammide ja kõikide võõrastemaja täitmisvariantide hulga vahel.

Pärast telegrammi ärasaatmist jätsin võõrastemaja direktoriga südamlikult jumalaga ja lendasin galaktikasse RGC-8067, kus mul oli vaja teha astrograafilisi mõõtmisi...

Kontiinuumi mitteloenduvus

Nüüd on juba lihtne tõestada, et kõikide sirgjoonel asetsevate punktide hulk on mitteloenduv. Selle hulga asemel võib vaadelda kõikide reaalarvude hulka, sest sirge igale punktile vastab reaalarv ja vastupidi.

Iga reaalarvu saab kirjutada lõpmatu kümnendmurruna järgmisel viisil

$$a, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$$

Mõnda reaalarvu saab isegi kahte moodi üles kirjutada, näiteks: 0,5000000... ja 0,49999999... on üks ja seesama arv. Selguse mõttes hakkame kasutama üleskirjutamist nullide abil.

Oletame, et meil läks mingil viisil korda nummerdada kõik reaalarvud. Selleks et näidata, et see oletus on vale, piisab, kui konstrueerime kas või ühegi mittenummerdatud arvu. Järgnedes Ijon Tichy eeskujule, talitame järgmiselt.

Algul kirjutame nulli ja paneme selle järele koma. Siis võtame esimest numbrit kandva arvu ja vaatame selle arvu esimest kümnendkohta pärast koma (s. t. numbrit, mis märgib kümnendikke). Kui see number erineb ühest, siis märgime kirjutatavasse arvu 1, kui aga see number on üks, siis paneme esimeseks numbriks pärast koma 2. Nüüd vaatame arvu, mis sai numbri kaks. Kui tema teine number pärast koma erineb ühest, märgime endale arvu 1, kui ta aga võrdub ühega, siis paneme sinna numbri 2. Samuti teeme ka edaspidi ning iga kord vaatame n-ndat numbrit kandva arvu n-ndat kümnendkohta pärast koma. Lõpuks saame mingi arvu, näiteks:

$N = 0{,}1121211\ldots$

Selge, et see arv pole saanud veel mingit numbrit; tema esimene kümnendkoht erineb arvust numbriga 1, teine kümnendkoht arvust numbriga 2, n-s kümnendkoht arvust numbriga n jne. (vt. lk. 52).

Et lugejal oleks selge, kuidas kirjutatakse üles nummerdamata jäänud arv, oletame, et valitud numeratsiooni puhul on esimesel viiel arvul järgmine kuju:

4,27364...
1,31226...
7,95471...
0,62419...
8,56280...

Siis algab nummerdamata jäänud arv järgmiste kümnendkohtadega

0,12121...

Muidugi mitte üksnes see, vaid ka paljud teised arvud jäid numbrita (me oleksime võinud asendada kõik numbrid peale 2 2-ga ja numbri 2 numbriga 7 või valida veel mõne teistsuguse asendusviisi). Kuid meile jätkub üheainsa nummerdamata jäänud arvu olemasolust, et kummutada hüpotees kõigi reaalarvude nummerdamise võimalikkusest.

Transtsendentsete arvude olemasolu

Me ütlesime, et *transtsendentsed arvud* on niisugused arvud, mis pole ühegi täisarvuliste koefitsientidega võrrandi

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

lahenditeks. Niisuguste võrrandite lahenditeks olevaid arve aga nimetatakse *algebralisteks arvudeks*.

Kaua aega tegelesid matemaatikud ainult algebraliste arvudega, sellistega nagu näiteks $\frac{7}{15}$, $\sqrt[8]{10}$, $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ jne. Alles suurte jõupingutustega õnnestus prantsuse matemaatikul Liouville'il 1844. aastal leida mõned transtsendentsed arvud. Arvu π transtsendentsuse tõestamine, mida tegi Lindemann 1882. aastal, oli suureks teaduslikuks sündmuseks: sellest järeldus ju ringi kvadratuuri võimatus.

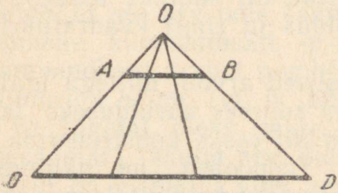
Ning äkki selgus, et algebralised arvud, millega igal sammul kokku puutume, on väga suureks harulduseks ja transtsendentsed arvud, mida on nii raske konstrueerida, kõige tavalisemaks nähtuseks. Tõepoolest, me nägime juba, et algebralised arvud moodustavad ainult loenduva hulga. Kuid kõikide reaalarvude hulk, nagu me äsja avastasime, on mitteloenduv. Tähendab, mitteloenduv on ka reaalarvude ja algebraliste arvude hulkade vahe, s. t. transtsendentsete arvude hulk.

See transtsendentsete arvude olemasolu tõestus, mille G. Cantor leidis 1873. aastal, avaldas matemaatikutele suurt mõju. Cantoril läks ju korda transtsendentsete arvude olemasolu tõestada üksnes üldistest kaalutlustest lähtudes, ilma et ta oleks konstrueerinud ühtki konkreetset näidet nendest arvudest. Ent see, mis on Cantori tõestuse vooruseks, on samal ajal ka selle nõrgaks küljeks. Cantori arutlustest pole võimalik saada mingit reeglit kas või ühegi transtsendentse arvu konstrueerimiseks, rääkimata juba niisuguste arvude nagu π ja $2^{\sqrt{2}}$ transtsendentsuse kontrollimisest. Cantori arutlus on, nagu matemaatikud ütlevad, puhas olemasolu teoreem.

Lühikesel ja pikal sirglõigul on ühepalju punkte

Seni kui lugeja polnud veel tuttav lõpmatute hulkade imekspandavate omadustega, ei oleks vastus küsimusele «kus on rohkem punkte, kas 1 mm või 1 m pikkuses sirglõigus?» tekitanud vist kahtluse varjugi — selge, et 1 m pikkuses lõigus on hoopis rohkem punkte, lõik ise on ju tuhat korda pikem. Ent nüüd on lugeja arvatavasti niisuguste kategooriliste väidetega ettevaatlikum — lõpmatute hulkade omadused on ju liialt erinevad sellest, mis igapäevase elu kogemused meile on õpetanud.

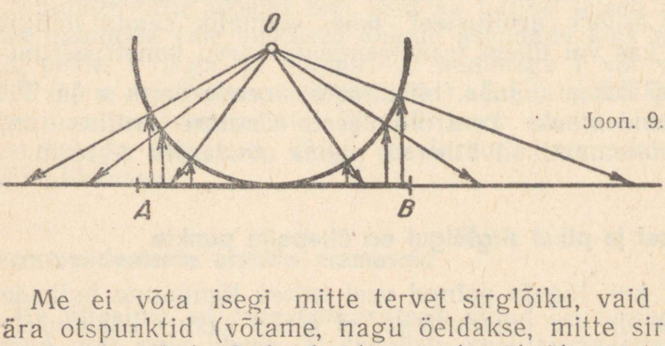
Ja tõepoolest — väga lühikeses ja väga pikas sirglõigus on ühepalju punkte! Teiste sõnadega, alati võib nendes lõikudes sisalduvad punktid üksühesesse vastavusse seada. Kuidas seda teha, see on kõige paremini näha jooniselt 8.



Joon. 8.

Raske on leppida mõttega, et miljoni valgusaasta pikkune tee ja aatomituuma raadius sisaldavad ühepalju punkte.

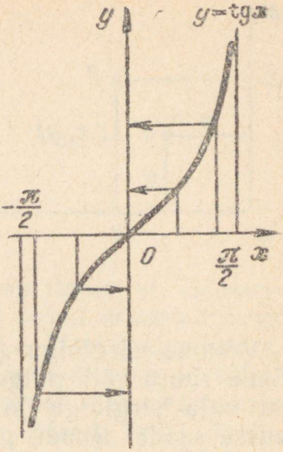
Kuid veel ootamatum oli avastus, et isegi kogu lõpmatus sirges pole rohkem punkte kui sirglõigus, s. t. sirge punktidehulga ja sirglõigu punktidehulga vahel on võimalik sisse seada üksühene vastavus.



Joon. 9.

Me ei võta isegi mitte tervet sirglõiku, vaid jätame ära otspunktid (võtame, nagu öeldakse, mitte sirglõigu, vaid vahemiku). Seda, kuidas seada üksühesesse vastavusse vahemiku ja sirge punktid, on näha jooniselt 9.

Joon. 10.



Algul kantakse vahemiku punktid poolringile ja siis projekteeritakse poolring sirgele. Selge, et sealjuures vastab vahemiku igale punktile üks ja ainult üks punkt sirgel, kusjuures ükski sirge punkt ei jää vahele.

Muide, seda vastavust saab korraldada ka teisiti, tangensoidi, s. t. funktsiooni $y=\operatorname{tg} x$ abil (joon. 10).

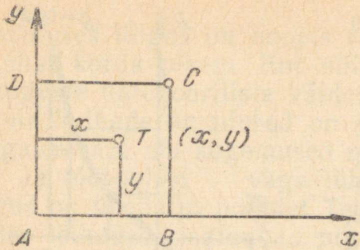
Sirglõik ja ruut

Sellega, et lõpmatus sirges on niisama palju punkte kui sirglõigus, leppisid matemaatikud veel kuidagiviisi. Ent Cantori järgmine tulemus osutus veelgi ootamatumaks. Otsides hulka, milles oleks rohkem elemente kui sirglõigus, pööras Cantor tähelepanu ruudu punktide hulgale. Ta ei kahelnud tulemuses mitte sugugi — sirglõik mahub ju tervenisti ruudu ühele küljele ja hulgal, mis koosneb kõikidest sirglõikudest, milleks ruutu võib lahutada, on endal kontiinuumi võimsus.

Kolm aastat (1871 kuni 1874) otsis Cantor tõestust sellele, et üksühene vastavus ruudu ja sirglõigu punktide vahel pole võimalik.

Aastad möödusid, aga soovitud tulemust ei saadud. Ning äkki õnnestus tal täiesti ootamatult konstrueerida vastavus, mida ta võimatuks pidas! Algul ei uskunud ta isegi ennast. Matemaatik Dedekindile kirjutas ta: «Ma näen, kuid ei usu seda.»

Kuid tuli siiski leppida sellega, et intuitsioon pettis ka siin — ruudus on täpselt niisama palju punkte kui sirglõiguski. Väite range tõestus on keeruline seetõttu, et arvude ülesmärkimine kümnendsüsteemis pole päris ühetähenduslik. Sellepärast anname Cantori tõestusest ainult skeemi.



Joon. 11.

Võtame sirglõigu [0,1] ja ruudu külje pikkusega 1. Seda ruutu võib paigutada nõnda nagu joonisel 11. Meil on vaja sirglõigu ja ruudu punktid üksühesesse vastavusse seada. Ruudu punktide projekteerimine lõigule AB siin ei aita, sest sel juhul satub lõigu ühte punkti lõpmata hulk ruudu punkte (näiteks punkti A satuvad kõik lõigu DA punktid).

Lahendame asja järgmisel viisil. Ruudu $ABCD$ iga punkti T võime määrata kahe arvuga: tema koordinaatidega x ja y (või lihtsalt tema kaugusega külgedest AB ja AD). Need arvud saab üles kirjutada lõpmatute kümnendmurdude kujul. Et x ja y pole ühest suuremad, siis on nendel arvudel kuju

$$x=0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots, \tag{1}$$
$$y=0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots \tag{2}$$

(lihtsuse pärast ei vaatle me ruudu neid punkte, mis asuvad tema külgedel, vaid ainult sisemisi punkte). α_n ja β_n on arvude x ja y kümnendkohad, näiteks kui $x=$ $=0,63205\ldots$ ja $y=0,21357\ldots$, siis $\alpha_1=6$, $\alpha_2=3$, $\alpha_3=2$ jne. ja $\beta_1=2$, $\beta_2=1$, $\beta_3=3$ jne.

Olgu meil nüüd vaja leida lõigu AB üht punkti Q, mis vastaks punktile T. Jätkub sellest, kui teame lõigu AQ pikkust. Valime selle pikkuse võrdseks arvuga z, mille kümnendkohad saame arvude x ja y kümnendkohtade «kombineerimisel». Teiste sõnadega, teeme kahest võrdusest (1) ja (2) kolmanda niimoodi, et kirjutame nende kümnendkohad vaheldumisi:

$$z=0,\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3\ldots\alpha_n\beta_n.$$

Näiteks kui

$$x=0{,}515623\ldots$$

ja

$$y=0{,}734856\ldots,$$

siis

$$z=0{,}571354682536\ldots$$

Punkt z asetseb lõigul [0,1] ning on ilmne, et erinevatele ruudu punktidele vastavad sel puhul erinevad sirglõigu punktid, sest kui punktid T ja T' ei lange kokku, siis arvude x ja x' või y ja y' kümnendkohtades on vähemalt üks koht erinev. Sellest järgneb, et vastavate arvude z ja z' kümnendkohad ei ole ühised. Veidi üksikasjalisem analüüs näitab, et siis ei lange ka punktid ise kokku.

Järelikult leidsime üksühese vastavuse ruudu punktide ja sirglõigu [0,1] osa punktide vahel. See näitab, et ruudu punktide hulk ei ole suurema võimsusega kui sirglõigu punktide hulk. Kuid ta võimsus ei ole ka väiksem ning sellepärast on mõlemad võimsused võrdsed.

Mitte ainult ruudus, vaid ka kuubis on niisama palju punkte kui sirglõigus. Üldse on igas geomeetrilises kujundis, milles on kas või üksainuski joon, niisama palju punkte kui sirglõigus. Niisuguseid hulki hakati nimetama kontiinuumi võimsusega hulkadeks (ladinakeelsest sõnast *continuum* — pidev).

Üks ülesanne ei tule millegipärast välja

Esialgu tutvusime kaht tüüpi lõpmatute hulkadega. Ühtedes neist on niisama palju elemente kui naturaalarvude hulgas ja teistes — niisama palju kui punkte sirges. Selgus, et teist tüüpi hulkades on rohkem elemente. Muidugi tekib küsimus, kas pole ehk olemas «vahepealset» hulka, milles oleks rohkem elemente kui naturaalarvude hulgas ja vähem kui sirge punktide hulgas. Seda küsimust hakati nimetama kontiinuumi probleemiks. Selle kallal juurdlesid paljud väljapaistvad matemaatikud alustades Georg Cantorist endast, aga kuni kõige viimase ajani on probleem lahendamatuks jäänud.

Palju aastaid mõtiskles kontiinuumi probleemi üle üks suuremaid matemaatikuid, reaalmuutuja funktsioonide teooria nõukogude koolkonna rajaja, akadeemik N. N. Luzin. Kuid lahendus libises eest nagu fatamorgaana (tõsi küll, põhiprobleemi kõrvalt lahendas N. N. Luzin mitmed väga rasked hulgateooria ülesanded ja lõi terve uue matemaatikaharu — deskriptiivse hulgateooria).

Kord toodi N. N. Luzini juurde viieteistkümneaastane poiss Lev Šnirelman, kel olid tähelepanuäratavad matemaatilised võimed (hiljem sai temast üks silmapaistvamaid nõukogude matemaatikuid, NSVL TA kirjavahetajaliige). Noore matemaatiku võimete kontrollimiseks andis N. N. Luzin talle kolmkümmend väga rasket ülesannet. Kahekümne üheksa ülesande lahendust ta teadis ja kolmekümnes ülesanne oli... kontiinuumi probleem. Nädala pärast tuli noor matemaatik N. N. Luzini juurde tagasi ja teatas kurvalt: «Üks ülesanne ei tule millegipärast välja.»

Kontiinuumi probleemi lahendamiskatsete ebaõnnestumine polnud juhuslik nähtus. Olukord meenutab paralleelsuse aksioomi lugu. Seda postulaati püüti kahe aastatuhande jooksul tuletada muudest geomeetria aksioomidest, kuid Lobatševski, Hilberti ja teiste uurimused selgitasid, et paralleelide aksioom ei ole teiste aksioomidega küll vastuolus, kuid teda ei saa ka neist tuletada. Täpselt samuti sai pärast K. Gödeli, P. S. Novikovi, J. Coheni ja teiste uurimusi selgeks, et väide vahepealse võimsusega hulga puudumise kohta ei ole vastuolus hulgateooria ülejäänud aksioomidega, kuid teda pole ka võimalik nendest tuletada.

Kas on olemas kõige suurema võimsusega hulk? *

Seni teadaolevatest hulkadest on suurima võimsusega sirges sisalduvate punktide hulga, s. t. kontiinuumi võimsus. Ei ruudu punktide hulgal ega kuubi punktide hulgal pole suuremat võimsust. Kas pole siis kontiinuumi võimsus kõige suurem? Tuleb välja, et ei. Veel rohkem, kõige suurema võimsusega hulka pole üldse olemas. Iga hulga *A* jaoks on olemas temast suurema võimsusega hulk. Niisuguseks hulgaks on näiteks hulk *B*, mis koosneb kõikidest hulga A elementidega antud funktsioonidest, mis omandavad väärtuse 0 ja 1.

Algul näitame, et hulga B võimsus pole väiksem hulga A võimsusest. Selleks seame iga hulga A punktiga a vastavusse funktsiooni $f_a(x)$, mis omandab selles punktis väärtuse 1 ja teistes punktides väärtuse 0. On selge, et erinevatele punktidele vastavad erinevad funktsioonid. Näiteks kui hulk A koosneb kolmest punktist 1, 2, 3, siis punktile 1 vastab funktsioon, mis omandab selles punktis väärtuse 1, aga punktile 2 vastab funktsioon, mis omandab punktis 1 väärtuse 0. Need funktsioonid pole võrdsed.

Järelikult pole hulga B võimsus väiksem hulga A võimsusest. Näitame nüüd, et need võimsused pole võrdsed, s. t. et hulga A ja hulga B elementide vahel ei ole üksühest vastavust. Tõepoolest, oletame, et niisugune vastavus on olemas.

Tähistame sel puhul hulka A kuuluvale elemendile a vastavat funktsiooni $f_a(x)$. Peame silmas, et kõik funktsioonid $f_a(x)$ omandavad ainult kaks väärtust 0 ja 1.

Koostame uue funktsiooni $\varphi(x)$, mis on määratud võrdusega

$$\varphi(x)=1-f_x(x). \qquad (1)$$

Järelikult selleks, et leida funktsiooni $\varphi(x)$ mõnes A-sse kuuluvas punktis a, tuleb algul leida sellele punktile vastav funktsioon $f_a(x)$ ja lahutada arvust 1 väärtus, mille see funktsioon omandab $x=a$ puhul. On selge, et ka funktsioon $\varphi(x)$ on määratud hulga A punktidega ning omandab väärtused 0 ja 1. Järelikult on $\varphi(x)$ hulga B element. Ent siis vastab $\varphi(x)$ eelduse põhjal mingile hulka A kuuluvale punktile b ning järelikult

$$\varphi(x)=f_b(x). \qquad (2)$$

Võrdustest (1) ja (2) järgneb, et kõikide A-sse kuuluvate x-de korral

$$1-f_x(x)=f_b(x).$$

Võtame selles võrduses $x=b$. Saame

$1-f_b(b)=f_b(b)$ ning järelikult

$$f_b(b)=\frac{1}{2}.$$

Kuid see on vastuolus väitega, et funktsiooni $f_b(x)$ väärtuseks saab olla ainult 0 ja 1. Vastuolu näitab, et hulkade A ja B vahel ei saa olla üksühest vastavust.

Järelikult iga hulga A puhul on võimalik konstrueerida temast suurema võimsusega hulka B. Sellepärast pole kõige suurema võimsusega hulka olemas.

Märgime, et hulka B on võimalik ka teisiti konstrueerida. Nimelt võib B-d vaadelda kui hulga A kõikide osahulkade hulka. Tõepoolest, olgu C mingi A-sse kuuluv osahulk. Võtame funktsiooni $f(x)$, mis omandab väärtuse 1, kui $x \in C$, ja väärtuse 0, kui $x \notin C$. On selge, et erinevatele osahulkadele vastavad erinevad funktsioonid. Ja vastupidi, igale funktsioonile $f(x)$, mis omandab kaks väärtust 0 ja 1, vastab A osahulk, mis koosneb elementidest, milles funktsioon omandab väärtuse 1. Sellega ongi sisse seatud üksühene vastavus hulga A elementidega määratud väärtustega 0 ja 1 funktsioonide hulga ning hulga A kõikide osahulkade vahel.

Lõpmatuse aritmeetika *

Me tutvusime mitmesuguste hulkade võimsusega. Nagu juba öeldud, on võimsuse mõiste lõplikus hulgas olevate elementide arvu mõiste üldistus. Kuid naturaalarvudega on võimalik teha aritmeetikatehteid — neid saab liita, lahutada, korrutada jne. Need operatsioonid on analoogilised mõnedega neist, mida sooritatakse hulkadega. Näiteks naturaalarvude liitmine vastab kahe ühisosata lõpliku hulga liitmisele. Kui ühes hulgas on m ja teises n elementi, siis on nende summas $m+n$ elementi.

Analoogiliselt määratakse ka võimsustega sooritatavad operatsioonid. Sealjuures tähistatakse võimsust eriliste märkidega. Näiteks tähistame loenduva hulga võimsuse $\aleph$. ($\aleph$ on heebrea tähestiku esimene täht *alef*). Kontiinuumi võimsust tähistatakse tähega $\mathfrak{c}$ (gooti *c*), kõikide reaalteljel antud funktsioonide hulga võimsust tähega $\mathfrak{f}$ jne.

Võimsusi võib liita täpselt samuti kui naturaalarvusid. Nimelt kui hulga A võimsus on $\mathfrak{m}$ ja hulga B võimsus on $\mathfrak{n}$, kusjuures A-l ja B-l ei ole ühisosa, siis tähistab

$\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$ hulga $A+B$ võimsust. Hulkade liitmise omadustest järgneb, et

$$\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{n}+\mathfrak{m},$$
$$\mathfrak{m}+(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})=(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})+\mathfrak{p}.$$

Kuid paljud lõpmatute hulkade liitmise eeskirjad erinevad tavalistest aritmeetikareeglitest. Siin pole midagi imelikku, sest nagu juba teame, erinevad lõpmatute hulkade omadused põhjalikult lõplike hulkade omadustest. Näiteks kehtivad lõpmatuse aritmeetikas järgmised võrdused:

1) $n+\aleph_0=\aleph_0$,

2) $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$,

3) $\aleph_0+\mathfrak{c}=\mathfrak{c}$,

4) $\mathfrak{c}+\mathfrak{c}=\mathfrak{c}$,

5) $\mathfrak{c}+\mathfrak{f}=\mathfrak{f}$.

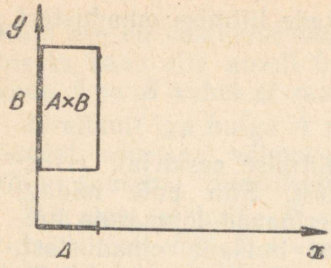
Esimene neist tähendab, et lõpliku ja loenduva hulga summa on loenduv hulk, teine — kahe loenduva hulga summa on loenduv hulk, kolmas — kui kontiinuumi võimsusega hulgale lisada loenduv hulk, siis saame kontiinuumi võimsusega hulga. Ülejäänud võrdused võib lugeja ise hõlpsasti ära seletada.

Nüüd vaatame, kuidas korrutada lõpmatuid võimsusi. Selleks on vaja alguses mõista, missuguse operatsiooniga on ühenduses naturaalarvude korrutamine. Olgu A lõplik hulk, mis koosneb m elemendist, ja B lõplik hulk, mis koosneb n elemendist. Moodustame uue hulga $A \times B$, mille elementideks on kõikvõimalikud paarid (a, b), kus $a \in A$ ja $b \in B$. Kui tähistame esimese hulga elemendid $a_1, \ldots, a_m$ ja teise omad $b_1, \ldots, b_n$, siis võib need paarid paigutada järgmisse tabelisse:

$$\begin{array}{l} (a_1, b_1) \ldots (a_1, b_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_m, b_1) \ldots (a_m, b_n). \end{array}$$

Siit on selge, et niisuguseid paare on mn tk., s. t. paaride arv on võrdne m ja n korrutisega.

Kanname operatsiooni üle lõpmatutele hulkadele. Olgu A ja B lõpmatud hulgad. Nimetame nende otsekorrutiseks hulka $A \times B$, mille elementideks on kõikvõimalikud paa-



Joon. 12.

rid (a, b), kus $a \in A$, $b \in B$. Näiteks kui A on sirglõigu [0,1] punktide hulk ja B sirglõigu [1,3] punktide hulk, siis võib hulka $A \times B$ kujutada ristküliku punktidena, nagu näidatud joonisel 12. Tõepoolest, igale selle ristküliku punktile vastavad tema kaks projektsiooni telgedele.

Kui hulga A võimsus on $\mathfrak{m}$ ja hulga B võimsus $\mathfrak{n}$, siis $\mathfrak{mn}$ märgib hulga $A \times B$ võimsust. Kehtivad on järgmised võimsuste korrutamise seadused:

$$\mathfrak{mn} = \mathfrak{nm},$$
$$(\mathfrak{mn})\mathfrak{p} = \mathfrak{m}(\mathfrak{np}),$$
$$\mathfrak{m}(\mathfrak{n} + \mathfrak{p}) = \mathfrak{mn} + \mathfrak{mp}.$$

Veel kehtivad võrdused

$$\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0,$$
$$\aleph_0 \mathfrak{c} = \mathfrak{c},$$
$$\mathfrak{cc} = \mathfrak{c}.$$

Esimene võrdus tähendab, et kui A ja B on loenduvad hulgad, siis on ka kõikidest paaridest (a, b), $a \in A$, $b \in B$, moodustatud hulk loenduv. See tähendab tegelikult väidet, et summa, mis on moodustatud loenduvast hulgast loenduvatest hulkadest, on ka ise loenduv hulk. Ning võrdus $\mathfrak{cc} = \mathfrak{c}$ tähendab, et punktide arv ruudus ja sirglõigus on võrdne, sest $\mathfrak{c}$ märgib punktide arvu sirglõigus ja $\mathfrak{cc}$ punktide arvu iseendaga korrutatud sirglõigus, s. t. punktide arvu ruudus.

Lõpmatusse astmesse tõstmine *

Et me oskame juba võimsusi omavahel korrutada, siis võib igasuguse võimsuse tõsta igasugusesse naturaalarvulise näitajaga astmesse. Nüüd selgitame, kuidas tõsta võimsust lõpmatu astmenäitajaga astmesse, s. t. teeme selgeks, mida tähendab avaldis $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$. Selleks tuleb uuesti tagasi pöörduda lõplike hulkade juurde ja kirjeldada hulka, mille elementide arv on n^m.

See sünnib järgmisel viisil. Sisaldagu hulk A m elementi, hulk B n elementi. Olgu B^A hulk, mille elementideks on igasugused hulga A elementidega määratud funktsioonid, mis omandavad väärtusi hulgas B. Teiste sõnadega, hulga B^A iga element annab seaduse, mille alusel A-sse kuuluvate elementidega a seatakse vastavusse hulka B kuuluvad elemendid $b=f(a)$. Koosnegu näiteks hulk A kolmest arvust 1, 2, 3 ja hulk B kahest elemendist — punkt ning kriips. Siis kujutavad hulga B^A elemendid järgmisi «funktsioone»: $f(1)=\cdot$, $f(2)=\cdot$, $f(3)=-$ või $f(1)=-$, $f(2)=\cdot$, $f(3)=\cdot$. Need «funktsioonid» võib anda lihtsalt kolmest märgist koosnevate punktide ja kriipsude jadadena. On kerge näha, et niisuguste erinevate järjestuste arv on 8, s. o. 2^3. Nimelt on meil tegemist järgmiste järjestustega:

• • •; • • —; • — •; • — —; — • •; — • —; — — •; — — —.

Saime $8=2^3$ järjestust. See pole juhuslik. Kui hulk A koosneb m elemendist ja hulk B n elemendist, siis B^A koosneb n^m elemendist. Jätame selle väite lugeja enda tõestada.

Aga nüüd võime juba seletada, mida tähendab sümbol $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$, kui $\mathfrak{m}$ ja $\mathfrak{n}$ on lõpmatud võimsused. Nimelt võtame hulga A, mille võimsus on $\mathfrak{m}$, ja hulga B, mille võimsus on $\mathfrak{n}$, ning tähistame avaldisega B^A hulka, mis koosneb kõikidest A-ga määratud «funktsioonidest», mis omandavad väärtusi B-s. Selle hulga võimsus ongi $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Eespool näitasime, et igasuguse hulga A puhul on A-ga määratud ja kahte väärtust — 0, 1 — omandavate funktsioonide hulga võimsus suurem hulga A enda võimsusest. See tähendab, et igasuguse võimsuse puhul on rahuldatud võrratus

$$2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}.$$

Märgime veel, et

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}.$$

Tõepoolest, eespool nägime, et kõikide lõpmatute telegrammide hulgal on kontiinuumi võimsus. Aga iga lõpmatu telegramm pole midagi muud kui funktsioon, mis on määratud naturaalarvude hulgas ja omandab ainult kaks väärtust: punkt ja kriips. Sellepärast on kõikide lõpmatute telegrammide hulga võimsus $2^{\aleph_0}$. Sellega ongi võrdus (1) tõestatud.

Numbrite järjekorras...

Hulkade võimsused (ehk nagu neid veel nimetatakse — *kardinaalarvud*) täidavad ainult poolest saadik naturaalarvude kohustusi. Sest naturaalarve ei kasutata mitte üksnes selleks, et vastata küsimusele «kui palju», vaid ka selleks, et vastata küsimusele «mitmes». Teiste sõnadega, me ei ütle üksnes «kaks», «viis», «kakskümmend», vaid ka «teine», «viies», «kahekümnes». Ent võimsus ei ütle midagi selle kohta, missugune on elementide järjekord. Ning kuigi naturaalarvude hulgas on niisama palju elemente kui täisarvude hulgas, on nad korraldatud hoopis teisiti. Naturaalarvude hulgas on olemas esimene element, aga täisarvude hulgas see puudub.

Sellepärast ei piisa hulga elementide asetuse teadasaamiseks kardinaalarvudest (võimsustest), vaid lisaks on vaja uusi mõisteid. Algul toome sisse mõiste *järjestatud hulk*. Öeldakse, et hulk A on järjestatud, kui tema elementide iga paari jaoks on määratud võrratus $a<b$, millel on järgmised omadused:

1) kui $a<b$, siis $a\neq b$;
2) kui $a<b$ ja $b<c$, siis $a<c$.

Kerge on järjestada kõikide reaalarvude hulka, kõikide ratsionaalarvude hulka, kõikide naturaalarvude hulka jne. Ka kõigi kompleksarvude hulka on võimalik järjestada. Nimelt ütleme, et $a+bi<c+di$, kui kas $a<c$ või $a=c$, kuid $b<d$. Näiteks $2+15i<3+10i$, $2+4i<2+5i$. Analoogiliselt saab järjestada kõikide hulkliikmete hulka, muidugi võib sama hulka mitmeti järjestada.

Vaatame näiteks kõikide sellesse raamatusse kuuluvate erinevate sõnade hulka. Seda saab järjestada näiteks nõnda: võtta raamat ja kirjutada sealt välja kõik sõnad nende esinemise järjekorras. Sel juhul võib järjestamise seadust formuleerida nõnda: sõna A eelneb sõnale B, kui raamatut järjest lugedes esineb sõna A varem kui sõna B.

Ent võib ka teisiti talitada: sõna A eelneb sõnale B siis, kui sõna A eelneb tähestikulises järjekorras sõnale

B. Selge, et need ühe ja sellesama hulga järjestamise viisid on erinevad.

Öeldakse, et kahel järjestatud hulgal A ja B on sama järjestustüüp siis, kui nende vahel on võimalik sisse seada üksühene vastavus, kusjuures elementide järjekord säilib. Teiste sõnadega, kui $a_1 \longleftrightarrow b_1$ ja $a_2 \longleftrightarrow b_2$, siis sellest, et $a_1 < a_2$, järeldub, et $b_1 < b_2$.

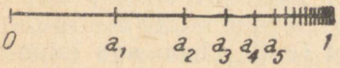
Näiteks on igal sirglõikude paaril sama järjestustüüp. Joonisel 8 kujutatud projektsioon säilitab punktide järjestuse. Samuti säilib järjestus, kui terve sirge projekteerida vahemikule (ära jäetud otspunktidega sirglõigule) nagu joonisel 9. Sirglõigul ja sirgel on aga erinevad järjestustüübid. Kuigi nende vahel on võimalik sisse seada üksühest vastavust, rikub see tingimata järjestust, sest sirglõigul on ju alg- ja lõpp-punktid, kuid sirgel neid pole.

Täielikult järjestatud hulgad

Isegi loenduvat hulka saab järjestada õige mitmesugusel viisil, sest nii kõikide naturaalarvude, kõikide täisarvude kui ka kõikide ratsionaalarvude hulk on loenduv. Kuid järjestatud on need hulgad hoopis erineval viisil. Naturaalarvude hulgal on olemas esimene element (arv 1), kuid kõigi täisarvude ja samuti kõigi ratsionaalarvude hulgal see puudub. Teisest küljest on naturaalarvude ja täisarvude hulga jaoks võimalik näidata elementide paari, mille vahel teisi elemente pole (näiteks arvud 5 ja 6), kuid kõikide ratsionaalarvude hulgal on iga kahe elemendi vahel lõpmata palju teisi sama hulga elemente.

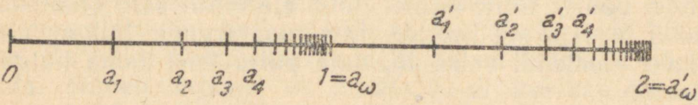
Selleks et mingil määral vahet teha mitmesuguste järjestuste vahel, eraldas G. Cantor järjestatud hulkade seas eriklassi, millesse kuuluvate hulkade mõned omadused tuletasid suuresti meelde naturaalarvude hulka. Kui naturaalarvude hulgas võtta suvaline mittetühi osahulk, siis selle elementide seas on tingimata olemas kõige väiksem, kõige vasakpoolsem. Niisuguse omadusega hulgad nimetas G. Cantor *täielikult järjestatud hulkadeks.* Teiste sõnadega, järjestatud hulka A nimetatakse täielikult järjestatuks, kui igal tema mittetühjal osahulgal on olemas esimene element.

Nagu me juba ütlesime, on kõige lihtsamaks täielikult järjestatud hulgaks naturaalarvude hulk. Seda võib kujutada punktidega 1, 2, 3... kiirel $(0, \infty)$. Kuid joonisel 9 kujutatud sirge projekteerimine vahemikule säilitab punktide järjestuse, sealjuures kiir $(0, \infty)$ läheb üle vahemikuks $(0, 1)$. Sellepärast võib punktide 1, 2, 3... asemel võtta vahemikul $(0, 1)$ asuvad punktid. Saame lõpmata hulga punkte $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, mis lähenevad punktile 1 (joon. 13).



Joon. 13.

Vaatame nüüd punkti 1. Seda ei saa enam nummerdada tavaliste arvudega — me kulutasime need punktide $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ nummerdamiseks. Selleks et sedagi punkti nummerdada, on meil vaja uut numbrit, mis poleks naturaalarv. Punkt 1 asetseb pärast kõiki punkte $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, mida me tavaliste arvude abil ära jõudsime nummerdada, sellepärast nimetame seda uut arvu *transfiniitseks* arvuks (lad. k. *trans* — üle, läbi, kaudu, *finitae* — piiratud, otsmine). Kõikidele naturaalarvudele 1, 2, 3,... otseselt järgnevat transfiniitset arvu on kombeks tähistada ω. Sellepärast tähistame punkti 1 märgiga a_ω. Kõikidest punktidest $a_1, \ldots, a_n, \ldots, a_\omega$ koosnev hulk A on samuti täielikult järjestatud (mõelge järele, miks!).



Joon. 14.

Nüüd nihutame saadud hulga A ühe võrra edasi. Seejuures satub punkt a_1 punkti $a_1' = a_1 + 1$, punkt a_2 punkti $a_2'' = a_2 + 1$ jne. Tulemusena tekib hulk B, mis koosneb punktidest $a_1', \ldots, a_n' \ldots, a_\omega'$. Kerge on veenduda, et hulk $A+B$ on täielikult järjestatud. Katsume tema elemendid ära nummerdada. Me oskame juba nummerdada hulga A punkte. Punkt a_1' järgneb kohe punktile a_ω (vt. joonis 14), sellepärast on loomulik talle numbriks panna transfiniitne arv $\omega+1$, s. t. võtta $a_1' = a_\omega + 1$. Täpselt samuti teeme järgmise punktiga, s. t. a_2', mida on loomulik nummerdada transfiniitse arvuga $\omega+2$ jne. Ja punkti a_ω', mis tuleb pärast kõiki punkte $a_\omega + 1, \ldots, a_\omega + n, \ldots$ numbriks paneme transfiniitse arvu 2ω:

$$a_\omega' = a_{2\omega}.$$

Lugeja on vist juba taibanud, et nüüd me nihutame hulga A punktid kahe võrra paremale ja saame uued punktid, mida tuleb nummerdada transfiniitsete numbritega $2\omega+1, \ldots, 2\omega+n, \ldots, 3\omega$. Sel viisil jätkates saame täielikult järjestatud hulga, mis koosneb transfiniitsete arvudega $k\omega+n$ nummerdatud punktidest, kus k ja n on naturaalarvud.

Kuid sellega ei lõpe veel transfiniitsete arvude konstrueerimine. Me saime ju jällegi hulga, mis asetseb kogu kiirel $(0, \infty)$. Sealjuures on selle kiire igal lõigul $[n, n+1]$ lõpmatu arv meie hulga punkte. Projekteerime kiire $(0, \infty)$ uuesti vahemikule $(0, 1)$. Saame punktile 1 läheneva punktide hulga. Selleks et nüüd punkti 1 nummerdada, on vaja uut transfiniitset arvu, mida märgitakse ω^2. Ja edasi konstrueeritakse transfiniitsed arvud $\omega^2+1, \ldots \omega^3, \ldots, \omega^n$ ja isegi ω^ω. On olemas ka selline transfiniitne arv:

$$\omega, \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

kuid nende küsimuste juures me enam üksikasjalisemalt ei peatu.

Arusaamatu aksioom

Me juba rääkisime, et mõningaid hulki saab järjestada mitmel viisil. Ent kas iga hulka on üldse võimalik järjestada ja kui on, siis kas iga hulka saab alati täielikult järjestada? Selle küsimuse kallal töötasid paljud matemaatikud, sest jaatava vastuse korral järgneks, et iga hulka on võimalik transfiniitsete arvude abil nummerdada.

Ootamatult lihtsa ja lühikese lahenduse avaldas 1904. aastal Zermelo: tal õnnestus tõestada, et iga hulka on võimalik täielikult järjestada. (G. Cantor nägi seda vastust ette juba 1883. a.) Kuid Zermelo tõestus ei meeldinud kaugeltki mitte kõikidele matemaatikutele. Asi on selles, et see rajanes ühele väitele, mis Cantori ja ka teiste matemaatikute meelest ei olnud hoopiski mitte silmanähtav. Väide, mida pärast hakati nimetama valiku või Zermelo aksioomiks, seisab järgnevas.

Olgu teie ees mitu õunakuhja. Selge, et kõikidest kuhjadest saab valida igastühest ühe õuna ja panna need uude kuhja. Tundub, nagu võiks sedasama teha ka siis, kui igas kuhjas on lõpmata palju õunu ja kuhje endid on ka lõpmata palju. Selles seisabki valiku aksioom.

Kui on antud lõpmata hulk lõpmatuid hulki, siis võib igast hulgast võtta ühe elemendi, ilma et valimise viisi oleks vaja ette ära määrata.

Nendes viimastes sõnades ongi varjul kogu probleem — valiku aksioom viib täiesti mittekonstruktiivsetele tõestustele: on näiteks võimalik tõestada, et iga hulka saab järjestada, kuid mingeid andmeid selle kohta, kuidas seda teha, pole tõestusest võimalik saada.

Kaua aastaid kasutasid matemaatikud valiku aksioomi, pidades seda täiesti ilmseks. Ent kui tema üle hakati sügavamalt järele mõtlema, hakkas ta tunduma aina mõistatuslikumana. Paljud valiku aksioomi abil tõestatud teoreemid olid silmanähtavusega täielikult vastuolus. Sellepärast ütles silmapaistev matemaatik Bertrand Russell mainitud aksioomi kohta nõnda:

«Algul tundub ta silmanähtav, kuid mida rohkem ta üle mõtled, seda kummalisemad hakkavad paistma sellest aksioomist tulenevad järeldused; lõpuks aga muutub üldse arusaamatuks, mis ta õieti tähendab.»

Sellest hoolimata kasutab enamik matemaatikuid oma uurimustes rahumeeles valiku aksioomi.

Ühest õunast kaks

Räägime valiku aksioomi ühest kõige üllatavamast järeldusest. Te olete arvatavasti näinud, kuidas osav mustkunstnik estraadil töötab. Ta näitas vaatajatele tühja kotti, pani sinna kera ja võttis välja... kaks kera; pani kotti kaks kera, võttis välja neli, pani sisse neli, võttis kaheksa. Muidugi saavad kõik aru, et siin pole mingit imet, vaid ainult n.-ö. käte osavus. Kuid hulgateoorias niisugused imed esinevad.

Võtame kõige harilikuma õuna ja lõikame ta ükskõik mil viisil neljaks. Näib ilmne olevat, et kui võtame saadud osadest ainult kaks, siis ei ole neist kuidagi võimalik tervet õuna kokku panna (kui süüa pool apelsini ära, siis pole võimalik ülejäänud osadest tervet apelsini kokku panna).

Ent matemaatikutel läks korda kera nelja ossa jagada, nõnda et kahest osast sai kokku panna samasuguse raadiusega terve kera, ilma et midagi oleks juurde pandud, ainult osi liigutate nii nagu tahkeid kehi. Teisest kahest osast sai kokku panna teise täpselt samasuguse kera. Sel viisil saadi ühest kerast kaks temaga võrdset kera. Kahju, et probleem on ainult teoreetiliselt lahendatud, muidu võiks ühest õunast teha kaks samasugust õuna, siis neli, seejärel kaheksa jne. Muidugi pole see võimalik, sest see räägib vastu mateeria jäävuse seadusele.

Selline kera jaotamine neljaks osaks on rajatud just valiku aksioomile.

Selle aksioomi teistest, samuti üpris kummalistest järeldustest ei hakka me praegu rääkima.

KUMMALISED FUNKTSIOONID JA JOONED EHK JALUTUSKÄIGUD MATEMAATIKA PANOPTIKUMIS

Kuidas arenes funktsiooni mõiste

Enamik matemaatika mõisteid tegi läbi pika arengutee. Algul tekkisid nad mingite igapäevasest elust võetud silmanähtavate kujutluste üldistustena. Eriliste ja juhuslike omaduste kõrvalejätmise teel kristalliseerusid neist järk-järgult välja täpsed matemaatilised määratlused. Kuid sageli ilmnes, et need määratlused ei hõlma mitte üksnes objekte, mille uurimine viis vaadeldava määratluse formuleerimisele, vaid ka palju teisi objekte, millest varem ei mõeldudki. Algas nende uute objektide uurimine, üleminek kõrgema taseme abstraktsioonidele, ja siis hakati sel baasil ka esialgseid määratlusi laiendama. Seejuures täitusid matemaatilised mõisted aina üldisema ja üldisema tähendusega, nad hõlmasid aina laiema objektideringi, omandasid üha mitmekesisemad rakendusvõimalused.

Missuguse pika tee on läbi käinud näiteks arvu mõiste, alustades eelajaloolistest aegadest, mil osati loendada ainult «üks, kaks, palju», kuni praeguse ajani! Naturaalarvud, murrud, negatiivsed arvud, kompleksarvud, kvaternioonid, hüperkompleksarvud... Ja peab ütlema, et mõne mõiste uut üldistust ei võtnud kõik matemaatikud sugugi mitte vaimustatult vastu. Näiteks paljudki teadlased ei pidanud kaua aega mitte üksnes kompleksarve, vaid isegi negatiivseid arve päris tõelisteks arvudeks.

Keerulise tee tegi läbi ka funktsiooni mõiste. Mõnede suuruste sõltuvuse idee ulatub ilmselt tagasi antiikse Kreeka teadusesse. Kuid seal oli suurustel ainult geomeetriline loomus. Isegi Newton, üks matemaatilise analüüsi rajajaid, kasutas sõltuvate suuruste vaatlemisel geomeetria keelt. Ehkki funktsiooni mõistet rakendasid tegelikult juba Fermat ja Descartes, kasutas terminit «funktsioon» alles 1694. a. saksa teadlane Leibniz, kes jagab Newtoniga matemaatilise analüüsi loomise au. Kuid Leibnizil oli funktsiooni mõiste väga kitsas. Ta nimetas nõnda abstsissi, ordinaati, puutuja alust ja normaali alust, kõverusraadiust ning teisi lõikusid, mis olid kõvera teatava punktiga ühenduses sel viisil, et iga lõikude paari vahel oli olemas mingi sõltuvus. Nõnda jäi Leibnizki geomeetria kujutluste valdkonda. Alles Leibnizi õpilane J. Bernoulli andis 1718. aastal geomeetriakujunditest vaba funktsiooni definitsiooni: *«Muutuva suuruse funktsiooniks nimetatakse kvantiteeti, mis on ükskõik mis viisil saadud sellest muutuvast suurusest ja konstantidest.»*

Järgmine samm funktsiooni mõiste arengus on seotud J. Bernoulli geniaalse õpilase, Peterburi akadeemiku Leonhard Euleri nimega. Oma «Diferentsiaalarvutuses» defineerib ta funktsiooni järgmiselt: *«Suurusi, mis sõltuvad teistest suurustest nõnda, et teiste muutumisel muutuvad ka esimesed, on kombeks nimetada nende funktsioonideks.»*

Kuid funktsiooni mõiste oli Euleril ja tolleaegsetel matemaatikutel ühendatud võimalusega väljendada seda funktsiooni valemi abil. XVIII sajandi matemaatikute seisukohalt väljendas avaldis

$$y=\begin{cases} x, \text{ kui } x<0; \\ x^2, \text{ kui } x>0 \end{cases}$$

mitte üht, vaid kaht funktsiooni.

Varsti selgus, et asi on hoopis keerulisem. Lahendades võnkuvat pillikeelt käsitlevat ülesannet, sai D. Bernoulli vastuse niinimetatud *trigonomeetrilise rea* kujul. Me ei hakka praegu seletama, mis see on, vaid ütleme ainult, et võnkuva pillikeele kuju oli antud ühe valemiga (kuigi see sisaldas lõpmata palju liikmeid).

Sellesama keele võnkumise ülesande lahendas ka prantsuse teadlane d'Alembert. D'Alemberti lahendil oli hoopis teine kuju kui Bernoulli omal, ja mis kõige tähtsam, seda oli argumendi erinevate väärtuste korral võimalik kirjutada erinevate valemitega.

XVIII sajandi matemaatika ees seisis lahendamatuna tunduv vastuolu: ühele ja samale ülesandele saadi kaks vastust, kusjuures üks neist oli kõikide argumendi väärtuste jaoks väljendatud ühe ja sellesama, aga teine mitme valemiga. Puhkes äge vaidlus, millest võtsid osa kõik XVIII sajandi suurimad matemaatikud — Euler, d'Alembert jt.

Sisuliselt käis vaidlus funktsiooni mõiste üle, seose üle funktsionaalse olenevuse ja selle olenevuse valemiga väljendatavuse vahel. Küsimus lahendati lõplikult XIX sajandi algul, kui prantsuse teadlane J. Fourier näitas, et lõpmatu, trigonomeetrilistest funktsioonidest koosneva rea summa võib erinevatel lõikudel olla väljendatud erinevate valemitega. Pärast seda andis ta funktsioonile uue definitsiooni, rõhutades selles, et kõige tähtsam on funktsiooni väärtuste määramine ja pole oluline, kas see määramine sünnib ühe teatava valemiga või ei.

Fourier' tulemusi täpsustas saksa matemaatik Dirichlet, kes näitas, et trigonomeetrilise rea summa graafikuks võib olla ükskõik milline suvaliselt tõmmatud joon. Vaja on ainult, et sel joonel oleks lõplik arv maksimume ja miinimume ning et ta ei kerkiks lõpmata kõrgele. Dirichlet täpsustas ka Fourier' antud funktsiooni definitsiooni ning andis talle selle kuju, mida praegugi kasutatakse (lähedase definitsiooni andsid enne Dirichlet'd ka Lacroix, Lobatševski ja mõned teised matemaatikud). Dirichlet' definitsioon oli järgmine: «*Muutuvat suurust y nimetatakse muutuva suuruse x funktsiooniks, kui suuruse x igale väärtusele vastab ainus suuruse y määratud väärtus.*»

Pärastpoole lisati sõnadele «suuruse x igale väärtusele» sõnad «mis kuulub teatavasse hulka» (funktsioon ei pea ju tingimata kõikide x väärtuste puhul määratud olema).

Definitsioon oli haruldaselt üldine, seal ei öeldud sõnagi selle kohta, et funktsioon peab olema antud ühe ja sellesama valemiga terve lõigu ulatuses, kus ta on määratud. Veel rohkem, funktsioon ei pruukinud üldse olla antud mingi valemiga, vaid võis olla määratud sõnadega. Näiteks Dirichlet ise uuris niisugust funktsiooni:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ kui } x \text{ on irratsionaalarv,} \\ 1, \text{ kui } x \text{ on ratsionaalarv.} \end{cases}$$

XVIII sajandi matemaatikute vaatevinklist ei andnud see määratlus mingit funktsiooni, polnud ju antud valemit, mille järgi võiks arvutada *Dirichlet' funktsiooni!* Ning sellest hoolimata määrab ta täielikult funktsiooni. Sellest on selgesti näha, et näiteks $f\left(\frac{3}{4}\right)=1$ ja $f(\sqrt{2})=0$.

Sisuliselt oli Dirichlet' definitsioon (eespool nimetatud täpsustusega) arvuliste argumentidega arvuliste funktsioonide jaoks lõplik. Edasine areng seisis selles, et hakati vaatlema suvaliste hulkade kaudu antud funktsioone, mis omandasid väärtusi samuti suvalistes hulkades. Nimelt olgu antud kaks hulka A ja B ning olgu hulga A igale elemendile a vastavusse seatud hulga B element b. Siis öeldakse, et hulga A kaudu on määratud funktsioon, mille väärtused on hulgas B. Nii üldises formuleeringus sulab funktsiooni mõiste kokku *vastavuse, peegeldamise, teisendamise* mõistetega.

Sellest vaatevinklist on kolmnurga pindala näiteks funktsioon, mis on määratud kõikide kolmnurkade hulga kaudu ja omandab väärtused positiivsete arvude hulgas. Kolmnurga sisse joonistatud ring on funktsioon, mis on määratud kõikide kolmnurkade hulga kaudu ja omandab väärtusi ringide hulgas. Kuid me ei vaatle siin nii üldiselt, vaid piirdume ainult nende funktsioonidega, mis on määratud arvhulkade kaudu ja omandavad arvulisi väärtusi.

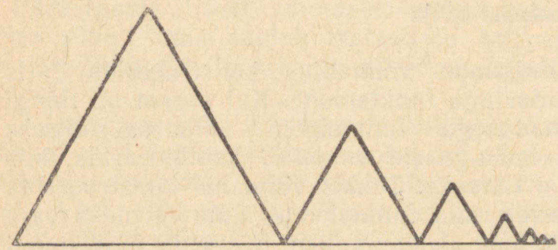
Vaim pääseb pudelist välja

Dirichlet' definitsioon võimaldas konstrueerida üpris kummaliste omadustega funktsioone. Kui varem oli mingi ebatavalise omadusega funktsiooni konstrueerimiseks vaja hulk aega igasuguseid valemeid kombineerida, siis nüüd muutus asi lihtsaks. Tekkis võimalus konstrueerida ja uurida mitmesuguseid funktsioone, ilma et oleks vaja mõelda sellest, kas on olemas valem, mis seda funktsiooni väljendab. Viimase poolteise sajandi jooksul on konstrueeritud funktsioone, mille omadused erinevad täielikult «korralike» funktsioonide omadest. Kindlasti ei mõelnud Dirichlet isegi, et niisugused «ebardid» võivad olemas olla.

Ebaharilik on juba seesama Dirichlet' funktsioon, millest eespool räägiti. Isegi kõige väiksemal abstsisstelje lõigul on lõpmata palju nii ratsionaal- kui ka irratsionaalarve. Kuid Dirichlet' funktsioon ratsionaalarvude jaoks võrdub ühega ning irratsionaalarvude jaoks nulliga. Kui nüüd x liigub mööda abstsisstelge, siis funktsiooni väärtus hüpleb kogu aeg nullist üheni ja tagasi. Selle funktsiooni graafikut pole üldse võimalik ehitada, sest see funktsioon on kõikides punktides katkev.

Aga ka pidevate seas on ebatavaliste omadustega funktsioon. Näiteks kas saab pideval funktsioonil olla lõpliku pikkusega lõigus lõpmatu hulk maksimume ja miinimume? Esimesel pilgul tundub see täiesti võimatu. Funktsioon peaks ju lõpmatu arv kordi maksimumpunktist laskuma miinimumpunkti, siis jälle tõusma maksimumpunkti jne. Kuidas saab ta seda kõike teha lõplikul lõigul? Siiski selgus, et niisugused kummalised funktsioonid on olemas, kusjuures neid on üsna kerge konstrueerida.

Ehitame sellise funktsiooni lõigul [0,1]. Selleks jagame lõigu pooleks ja ehitame vasakule poolele võrdkülgse kolmnurga. Nüüd jagame ülejäänud parema poole uuesti kaheks võrdseks osaks ja ehitame osale $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ teise võrdkülgse kolmnurga. Kordame kirjeldatud operatsiooni lõpmatu palju kordi. Saame mägiahela, mis koosneb lõpmatust hulgast tippudest ja laskub aegamööda punkti 1 suunas (joonis 15). Võtame saadud murdjoone funktsiooni



Joon. 15.

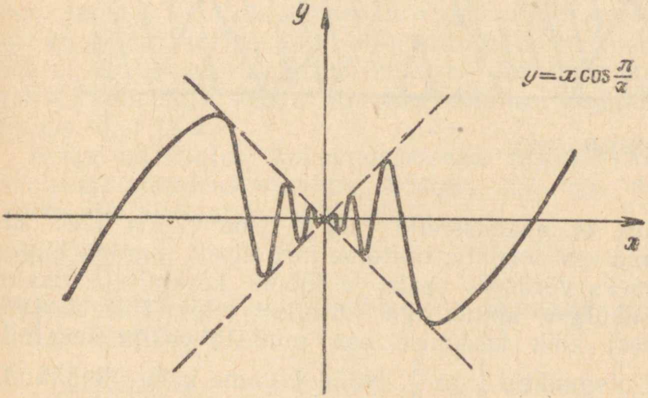
$f(x)$ graafikuks. Siis on funktsioon määratud lõigu [0,1] igas punktis, välja arvatud äärmine parempoolne punkt 1. Selles punktis võtame $f(1)=0$.

Punktile 1 lähenedes lähenevad tippude kõrgused nullile ja sellepärast on saadud funktsioon lõigu [0,1] igas punktis pidev, kuid maksimumide ja miinimumide arv selles lõigus lõpmata suur!

Niisuguse pentsiku funktsiooni konstrueerimiseks oleks XVIII sajandi matemaatik pidanud hulk aega igasuguste funktsioonidega kombineerima, enne kui ta oleks sellele tulnud, et funktsioonil

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{\pi}{x}, \text{ kui } x\neq 0, \\ 0, \text{ kui } x=0 \end{cases}$$

on lõigul [0,1] lõpmatu hulk maksimume ja miinimume (joonis 16).

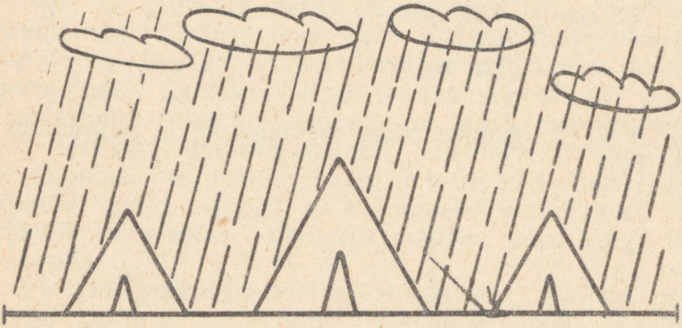


Joon. 16.

Kuid lõpmatu paljude maksimumide ja miinimumidega funktsioonid olid alles nende ebameeldivuste alguseks, mis matemaatikuid ootasid. Vaim alles hakkas pudelist välja ronima.

Märjad punktid

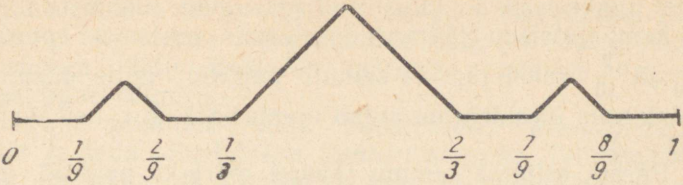
Funktsioonil, mille me eelmises paragrahvis ehitasime, on ainult üks punkt, mille ümbruses esineb lõpmata palju maksimume ja miinimume, selleks punktiks on 1. Nüüd konstrueerime teise funktsiooni, millel on neid punkte palju rohkem.



Joon. 17. Sajab vihma.

Oletame, et abstsisstelje lõik [0,1] on vihma käes. Et seda vihma eest varjata, talitame järgmiselt. Jagame lõigu [0,1] kolmeks võrdseks osaks ja lööme keskmisele osale üles võrdkülgse kolmnurga kujulise telgi. Telk varjab vihma eest kõik keskmise osa punktid (välja arvatud selle osa otspunktid $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$. Nüüd jagame kaks ülejäänud osa jällegi kolmeks võrdseks osaks ja varjame nende keskosad samakujuliste telkidega (kuid kolm korda väiksematega). Saame joonisel 18 kujutatud kõvera. Protsessi kolmandal sammul ehitame veel neli telki, siis veel kaheksa jne.

Tekib küsimus: kas saadud saehammastekujulise joonega on kaitstud kõik lõigu punktid või on jäänud punkte, mis vihma käes märjaks saavad? Mõningaid nendest «märgadest» punktidest on kerge ära näidata — niisugusteks on varjatud lõikude otspunktid (s. o. punktid $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$ jne.). Kõik need punktid jäävad vastava telgi püstitamisel varjamata ning ka järgmised ei varja



Joon. 18.

neid. Kerge on näha, et selliseid otspunkte on lõpmatu, kuid siiski ainult loenduv hulk.

Ent selgub, et peale loenduva hulga «märgade» punktide on olemas veel terve kontiinuum niisuguseid punkte. Nende kirjeldamiseks on otstarbekas kasutada arvude kolmendsüsteemi. Teatavasti on see süsteem konstrueeritud samuti kui kümnendsüsteemgi, ainult selle vahega, et kõrgemat järku ühik pole võrdne mitte kümne, vaid ainult kolme alama järgu ühikuga. Sellepärast kasutatakse kolmendsüsteemi arvudes kümne numbri asemel kolme: 0, 1 ja 2.

Kerge on õppida kolmendsüsteemi arvusid kümnendsüsteemi arvudeks muutma. Näiteks arv, mis kolmendsüsteemis kirjutatuna näeb välja

$$0{,}02020202\ldots,$$

kujutab endast kümnendsüsteemis lõpmatut geomeetrilist progressiooni

$$\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^6}+\ldots$$

Selle progressiooni summa võrdub $\frac{1}{4}$. Sellepärast

$$\frac{1}{4}=0{,}020202\ldots$$

Nüüd võime juba täpselt öelda, missugused punktid jäävad märjaks pärast seda, kui kõik kaitsetelgid on üles löödud. Esimene telk varjab punkte, mis on vahemikus $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$. Kuid need on noodsamad punktid, millel on kolmendsüsteemis järgmine kirjutusviis:

$$0{,}1\ldots,$$

kus punktidega on tähistatud igasugune numbrite 0, 1 ja 2 kombinatsioon (kümnendsüsteemis asetsevad punktide $\frac{1}{10}$ ja $\frac{2}{10}$ vahel täpselt samuti punktid, mille kümnendsüsteemis üleskirjutus algab numbrist 1, s. t. neil on kuju 0,1 . . .).

Pärast esimest sammu jäävad märjaks punktid, mille kolmendsüsteemilisel üleskirjutusel on kuju

0,0 . . .

või kuju

0,2 . . .

Täpselt samuti on võimalik näidata, et pärast kahe telgi üleslöömist jäävad teisel sammul märjaks ainult need punktid, mille kolmendsüsteemiline üleskirjutus algab ühega järgmisest neljast kombinatsioonist:

0,00 . . . ,
0,02 . . . ,
0,20 . . . ,
0,22 . . .

Niimoodi, samm-sammult, varjatakse vihma eest punktid, mille kolmendsüsteemilisse üleskirjutusse kuuluvad ühed. Lõppude lõpuks jäävad märjaks ainult need, mida saab kolmendsüsteemis üles kirjutada ilma arvu 1 kasutamata. Näiteks jääb märjaks punkt

$$\frac{1}{4} = 0{,}020202\ldots,$$

punkt

$$\frac{3}{4} = 0{,}20202\ldots$$

jne.

Ja nüüd on juba selge, miks «märgade» punktide hulgal on kontiinuumi võimsus. Selle hulga saab ju seada üksühesesse vastavusse lõpmatute telegrammide hulgaga (vt. lk-d 52—53). Selleks tuleb ainult igale punktile, mis on üles kirjutatud kujul

0,20220200 . . . ,

seada vastavusse lõpmatu telegramm, kusjuures 0 asemele tuleb panna punkt ja 2 asemele kriips. Sealjuures vastavad erinevatele arvudele erinevad telegrammid. Me teame, et lõpmatute telegrammide hulk on kontiinuumi võimsusega. Sellepärast on märgade punktide hulgal samasugune võimsus.

Märgade punktide hulga konstrueeris esmakordselt Cantor ja seda nimetatakse *Cantori hulgaks*. Telkide ehitusest on näha, et Cantori hulga iga punkti juures on lõpmata palju saehambakujulise kõvera maksimume ja miinimume.

Kuraditrepp

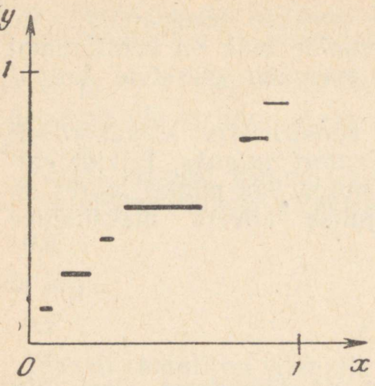
Sellesama Cantori hulgaga on ühenduses veel üks huvitav funktsioon. Seda konstrueeritakse järgmiselt. Jagame lõigu $[0,1]$ jälle kolmeks võrdseks osaks ja võtame funktsiooni keskmise osa kõikides punktides võrdseks $\frac{1}{2}$. Siis jaotame parempoolse ja vasakpoolse kolmandiku uuesti kolmeks võrdseks osaks ja võtame funktsiooni vahemikus $\frac{1}{9}$ kuni $\frac{2}{9}$ võrdseks $\frac{1}{4}$ ning vahemikus $\frac{7}{9}$ kuni $\frac{8}{9}$ võrdseks $\frac{3}{4}$. Nüüd on meil jäänud neli lõiku, kus funktsioon pole veel määratud:

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Jagame igaühe neist kolmeks võrdseks osaks ja võtame keskmistes osades funktsiooni võrdseks vastavalt $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ ja $\frac{7}{8}$.

Protsessi jätkates saame funktsiooni, mis on määratud kõikides «kuivades» punktides, s. t. kõikides punktides, mis ei kuulu Cantori hulga sisse. Seda funktsiooni on hõlpus ka Cantori hulka kuuluvates punktides määrata nõnda, et ta muutuks pärast seda pidevaks ja mittekahanevaks. Saadud funktsiooni graafik on ligikaudu kujutatud joonisel 19. Tal on lõpmata hulga astmetega redeli kuju (graafikus pole kõiki astmeid kujutatud).

Muide, pärast seda kui me tutvusime joontega, mil on lõpmata palju maksimume ja miinimume, ning lõpmata



Joon. 19.

arvu astmetega treppjoonega, on vaevalt enam võimalik kedagi üllatada. Kuid üllatav on midagi muud. Arvutame kokku oma treppjoone astmete kogupikkuse. Esimese astme pikkus on $\frac{1}{3}$, kaks järgmist — kumbki $\frac{1}{9}$, järgmised neli astet on igaüks $\frac{1}{27}$ jne. Järelikult moodustab kõikide astmete pikkuste summa geomeetrilise progressiooni

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots$$

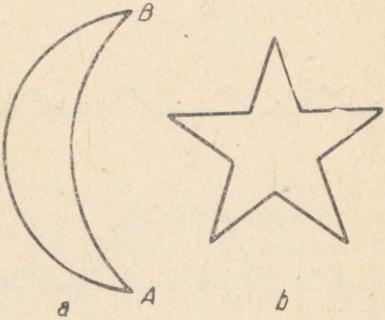
Progressiooni summa on

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1.$$

Järelikult on trepiastmete kogupikkus 1. Kuid nendel astmetel ei tõuse funktsioon üldse ülespoole, kogu tõus on koondunud Cantori hulka kuuluvate punktide kohale. Selle hulga jaoks jäi üle väga «vähe» punkte — kuigi hulga võimsus on võrdne kontiinuumi võimsusega, võrdub hulga punktide kogupikkus nulliga! (Kogu lõigu [0,1] pikkus on 1 ja astmete kogupikkus on ka 1.) Niimoodi oskab meie funktsioon tõusta üheni, ehkki ta suureneb ainult nullpikkusega hulgas ega tee kuskil hüppeid! Eks ole ju kummaline?

Okasjoon

Paljude sajandite jooksul oli matemaatikutel tegemist ainult niisuguste joontega, millele peaaegu igas punktis võis tõmmata puutuja. Kui esinesidki erandid, siis ainult mõnedes punktides. Nendes oleks joon nagu nurgaks murdunud ja sellepärast nimetatigi niisuguseid punkte nurkpunktideks. Joonisel 20, *a* kujutatud joonel on kaks nurkpunkti ja joonisel 20, *b* kujutatud joonel kümme



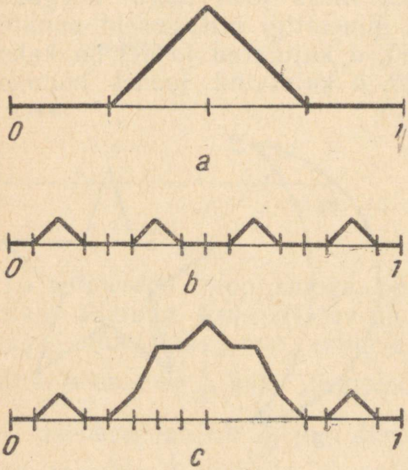
Joon. 20.

nurkpunkti. Kuid äsja konstrueeritud joontel oli lõpmata palju nurkpunkte: joonisel 16 oleval joonel — loenduv hulk selliseid punkte ja joonisel 18 oleval joonel — terve kontiinuum nurkpunkte. Ta murdub kõikides Cantori hulka kuuluvates punktides ja peale selle veel kõikide kolmnurkade tippudes. Kuid isegi joonisel 19 kujutatud joonel esineb nurkpunkte võrdlemisi «väikeses» punktide hulgas, mille kogupikkus on null.

Kaua aega ei uskunud ükski matemaatik, et võib olemas olla pidev joon, mis tervenisti koosneb hammastest, murdumistest ja okastest. Suur oli nende imestus, kui läks korda konstrueerida niisugune joon, veelgi rohkem — funktsioon, mille graafikuks oli niisugune okasaed. Esimesena tegi seda tšehhi teadlane Bolzano. Kuid tema töö jäi avaldamata ja esimesena avaldas niisuguse näite saksa matemaatik K. Weierstrass. Kuid Weierstrassi näidet on raske ära tuua, see on rajatud trigonomeetriliste ridade teooriale. Bolzano näide aga on päris lihtne ja meenutab väga joont, mille me siin äsja konstrueerisime.

Esitame nüüd Bolzano näite väikeste muudatustega.

Jagame lõigu [0,1] neljaks võrdseks osaks ja ehitame kahe keskmise osa peale võrdhaarse täisnurkse kolmnurga (joon. 21, *a*). Saadud joon on graafikuks teatavale funktsioonile, mille tähistame $y=f_1(x)$.

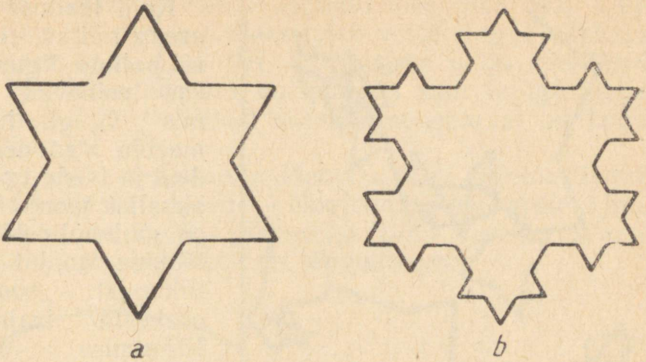


Joon. 21.

Jagame nüüd iga veerandi jälle neljaks võrdseks osaks ja ehitame sellele vastavalt veel neli võrdhaarset täisnurkset kolmnurka (joon. 21, *b*). Saame graafiku teisele funktsioonile $y=f_2(x)$. Kui need kaks funktsiooni liita, siis summa $y=f_1(x)+f_2(x)$ graafik on niisugune, nagu kujutatud joonisel 21, *c*. On näha, et saadud joonel on juba rohkem nurki ja et need nurgad on tihedamini paigutatud. Järgmisel sammul jaotame jälle iga osa veel neljaks, ehitame 16 võrdhaarset täisnurkset kolmnurka ja liidame saadud funktsioonile $y=f_3(x)$ funktsiooni $y=$ $=f_1(x)+f_2(x)$.

Protsessi jätkates saame ikka nurgelisema joone. Piiril jõuame jooneni, mis on igas punktis murtud ja mille ühelegi punktile ei saa tõmmata puutujat.

Taolise joone, mil pole kuskil puutujat, konstrueeris hollandi teadlane Van der Waerden. Ta jagas võrdkülgse kolmnurga iga külje kolmeks võrdseks osaks ja ehitas keskmistele osadele, tipuga väljapoole, uued võrdkülgsed kolmnurgad. Nii tuli välja midagi kuuenurkse tähe tao-



Joon. 22.

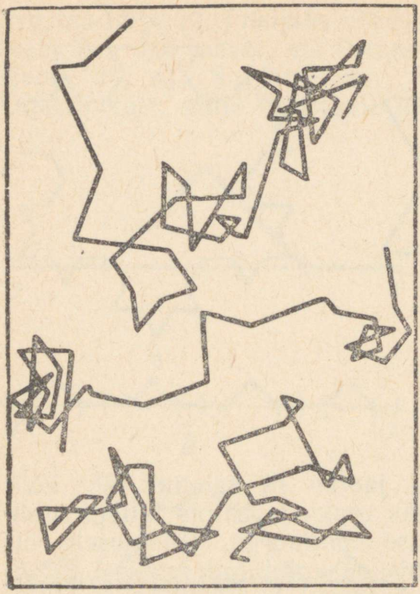
list (joon. 22, *a*). Nüüd jaotas ta saadud tähe kõik üheksa külge veel kolmeks osaks ja ehitas jällegi igale keskmisele osale võrdkülgse kolmnurga. Tulemuseks oli veelgi okkalisem joon, mis on kujutatud joonisel 22, *b*. Pärast lõpmata arv kordi jagamist ja võrdkülgsete kolmnurkade ehitamist oli tulemuseks joon, mille igas punktis on nurk, okas.

Matemaatikud ehitasid palju pidevaid funktsioone, mille graafikutel polnud üheski punktis puutujat, ja hakkasid nende omadusi uurima. Need omadused ei sarnanenud sugugi «korralike», siledate funktsioonide omadega, millega nad seni olid tegelnud. Sellepärast vaatasid klassikaliste traditsioonide järgi kasvatatud matemaatikud hämmastunult uusi funktsioone. Veel enam, üks silmapaistvamaid klassikalise matemaatilise analüüsi esindajaid Charles Hermite kirjutas oma sõbrale, hollandi matemaatik Stieltjesele nõnda:

«Pöördun võikusega ära sellest kahetsemisväärsest pidevate funktsioonide paisest, mil pole üheski punktis tuletist.» (S. t. üleni okkalistest joontest, nagu meie neid nimetasime.)

Tuntud prantsuse teadlane H. Poincaré kirjutas:

«Kunagi peeti uute funktsioonide otsimisel silmas mingeid praktilisi eesmärke. Nüüd leiutatakse funktsioone spetsiaalselt selleks, et paljastada meie isade mõtlemise puudulikkust; midagi muud peale selle ei ole neist võimalik järeldada.»



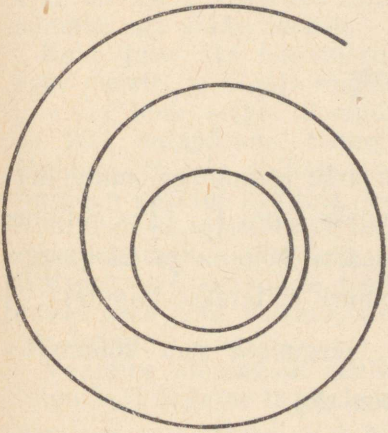
Joon. 23.

Kuid teaduse edasine areng näitas, et Poincarél polnud õigus. Füüsikas esinevad jooned, mis vägagi tuletavad meelde Van der Waerdeni ja teiste igalt poolt okkalisi jooni. Nendeks on molekulidelt saadud löökide mõjul Browni liikumist sooritavate osakeste trajektoorid. Prantsuse teadlane F. Perrin joonistas nende osakeste liikumise üles. Ta vaatles nende asendit iga poole minuti järel ja ühendas saadud punktid sirglõikudega. Tulemuseks sai ta sassis murdjooned, taolised, nagu on kujutatud joonisel 23. Kuid ei tule arvata, nagu oleks osake vaatluste vaheaegadel mööda sirget liikunud. Kui Perrin oleks vaadelnud mitte iga poole minuti, vaid poole sekundi järel, siis oleks ta pidanud iga sirglõigu asendama murdjoonega, mis oleks niisama keeruline kui kogu joonisel 23 kujutatud murdjoon. Ning mida väiksemad oleksid vaatlustevahelised ajavahemikud, seda keerulisemaks ja «okkalisemaks» muutuks murdjoon. Ameerika matemaatik N. Wiener näitas, et kui Browni liikumisest võtab osa osake, mis on nii väike, et tema inertsi võib vaatlusest välja jätta, siis liigub ta mööda joont, millel pole kuskil puutujat.

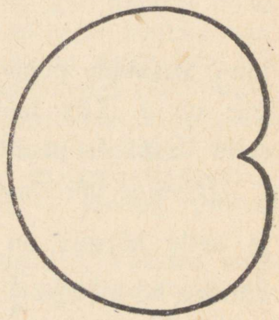
Lõpmata pikk kinnine joon

Lõpmata pikad jooned esinevad sageli — lõpmata pikad on sirge, parabool, hüperbool jne. Kõik need jooned lähevad lõpmatusse ja sellepärast pole midagi imestada, et nad on lõpmata pikad. Muide, pole raske konstrueerida joont, mis asetseb tervenisti lõplikul tasapinna osal, kuid on siiski lõpmata pikk. Selleks tuleb võtta ring ja mähkida selle ümber spiraal, millel on lõpmata palju keerdusid (joonis 24). Keerdude arv on lõpmata suur ja iga keeru pikkus ringi ümbermõõdust suurem, sellepärast on kogu spiraal lõpmata pikk.

Ent kas saab olemas olla lõpmata pikk kinnine joon? Tavalised kinnised jooned — ringjoon, ellips, kardioid jne. (joon. 25) — on lõpliku pikkusega. Kuid Van der Waerdeni okkalise joone pikkus on lõpmata suur.



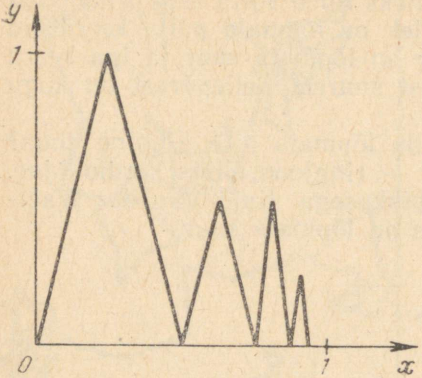
Joon. 24.



Joon. 25.

Tõepoolest, lähtekolmnurga ümbermõõt on ju 3. Pärast esimest sammu saadi täht, mille ümbermõõt, nagu kerge arvutada, on 4. Järgmisel sammul saadi joon, mis koosneb 64 sirglõigust, igaüks pikkusega $\frac{1}{9}$. Tähendab, selle ümbermõõt on $\frac{64}{9}$. Siis saadakse joon pikkusega $\frac{256}{27}$ jne. Üldse saadakse pärast n-ndat sammu joon, mille ümbermõõt on $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Kuid n-i suurenedes läheneb avaldis lõpmatusele. Järelikult on Van der Waerdeni joon lõpmata pikk.

On olemas teisigi lõpmata pikki jooni. Näiteks konstrueerime joone nõnda. Jagame lõigu [0,1] pooleks ja ehi-



Joon. 26.

tame vasakule poolele võrdhaarse kolmnurga, mille kõrgus on 1. Siis jaotame pooleks lõigu $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ja ehitame selle vasakule poolele võrdhaarse kolmnurga kõrgusega $\frac{1}{2}$. Järgmine võrdhaarne kolmnurk ehitatakse lõigule $\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right]$ ja selle kõrgus on jälle $\frac{1}{2}$; järgmised neli kolmnurka võtame kõrgusega $\frac{1}{4}$ jne. (joon. 26).

Jällegi saame alaneva mägiahela, nii nagu lk. 76. Kuid nüüd alaneb see väga aeglaselt. On selge, et esimese kolmnurga võrdsete külgede pikkus on suurem 1-st, teisel ja kolmandal — suurem $\frac{1}{2}$-st, neljandal, viiendal, kuuendal ja seitsmendal — suurem $\frac{1}{4}$-st jne. (kolmnurga külje pikkus on alati kõrgusest suurem). Sellepärast on murdjoone pikkus võrdne vähemalt järgmise lõpmatu reaga:

$$2+\left(\frac{2}{2}+\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{2}{4}+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\right)+\ldots$$

Kuid igas suluavaldises sisalduvate arvude summa on 2 ja suluavaldiste arv lõpmatu. Sellepärast on rea summa lõpmatu. Järelikult on ka meie joon lõpmata pikk.

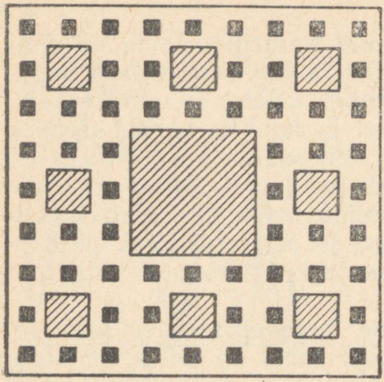
Matemaatiline vaip

Räägitakse, et kunagi küsinud Katariina Teine kelleltki kindralilt, mis vahe on mortiiri ja haubitsa vahel. Segadusse sattunud kindral vastanud: «Näed sa, emake keisrinna, mortiir on hoopis iseasi ja haubits hoopis iseasi.» Umbes sama sisuka vastuse võib saada, kui küsida matemaatikas võhikult, mis vahe on joone, pinna ja keha vahel. Lisaks imestab ta, et kuidas saab pärida nii endastmõistetavaid asju. Igaühele on ju selge, et joon, pind ja keha on täiesti erinevad asjad ja keegi ei pea ringjoont pinnaks ega sfääri jooneks.

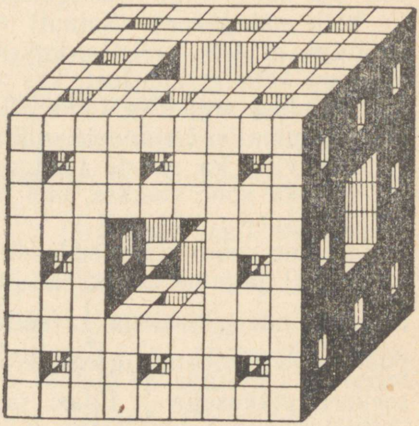
Kuid juba üks teravmeelne malesuurmeister ütles, et vahe meistri ja algaja maletaja vahel on selles, et algajale on kõik selge niisuguses seisus, kus meistri jaoks on kõik salapärane. Samuti on lugu meie küsimusega. Muidugi ei teki selliste kujundite puhul nagu ruut või ringjoon kellelgi kahtlust, kas nad on jooned või pinnad. Kuid teaduse arenedes ilmus pärast Cantori avastusi palju väga kummalisi kujundeid, mille kohta mitte ainult kooliõpilane, vaid ka suurte teadmistega matemaatikaprofessor ei oska kohe vastata, mis nad on — jooned, pinnad või kehad.

Vaatame mõningaid selliseid kujundeid. Võtame sirglõigu [0,1], jagame ta pooleks ja tõmbame lõigu keskpunktist ristjoone pikkusega $\frac{1}{2}$. Nüüd jagame iga poole jällegi pooleks ja tõmbame igasse jaotuspunkti uuesti ristjoone, seekord pikkusega $\frac{1}{4}$. Edasi jagame saadud lõigud jälle pooleks ja tõmbame jaotuspunktidesse ristjooned, mille pikkuseks on $\frac{1}{8}$. Pärast viiendat sammu saame joonisel 27 esitatud kujundi. Kuid me ei piirdu viie jagamisega,

Joon. 27.



Joon. 28.



Joon. 29.

vaid kordame seda operatsiooni lõpmata palju kordi. Tulemusena saame mingisuguse geomeetriakujundi. Ning nüüd võime küsida, mis ta on, kas joon või pind. Me ju tõmbasime lõpmatu arvu ristjooni. Kas ei sula nad kokku ega täida väikest pinda, mis asetseb lõigu [0,1] juures? Sellele küsimusele polegi nii lihtne vastata.

Vaatame teist näidet. Võtame ruudu, mille külje pikkuseks on 1, jagame selle üheksaks võrdseks osaks ja võtame keskmise osa välja (väljavõetava väikese ruudu piirjooned jätame alles). Pärast seda jaotame iga ülejäänud ruudu jällegi üheksaks võrdseks osaks ja võtame neist uuesti keskmised osad välja. Kui me analoogilist protseduuri veel kord kordame, saame joonisel 28 esitatud kujundi (väljavõetud ruudud on siin viirutatud). Selge, et joonisel 28 esitatud kujund on veel pind. Kuid me ei jää kolmanda sammu juurde peatuma, vaid jagame lõpmatu arv kordi järelejäänud ruudud üheksaks osaks ja võtame keskmise välja. Lõppude lõpuks saame teatava kujundi, mida nimetatakse Sierpinski vaibaks, poola matemaatiku järgi, kes selle välja mõtles.

Kujund sarnaneb hullumeelse kangru kootud kangaga. Risti ja põigiti käivad lõimed ja kude, mis põimuvad ilusaks sümmeetriliseks mustriks. Kuid saadud kangas on ise väga auklik — selles pole ühtki tervet kohta, igast, kõige väiksemastki ruudukesest on keskmine osa välja lõigatud. Ja pole sugugi selge, mis see vaip siis õieti on, kas joon või pind. Ühest küljest pole tal ühtki tervet kohta ja sellepärast saab ta vaevalt küll pind olla, aga teisest küljest on tema koed ja lõimed nii keeruliseks mustriks põimunud, et vaevalt küll keegi Sierpinski vaipa ilma kahtlemata jooneks saab nimetada. Igatahes oleks väga raske seda «joont» üles joonistada.

Kuid Sierpinski vaip pole mitte kõige keerulisem geomeetriakujund. Ruudu asemel oleksime võinud võtta kuubi, jagada selle 27 võrdseks osaks ja võtta välja keskmise kuubi koos kuue temaga külgneva kuubiga. Pärast seda jaotame iga ülejäänud kuubi jälle 27 osaks ja jätkame väljavõtmise operatsiooni (joonisel 29 on kujutatud keha, mis jääb pärast teist sammu). Kordame seda lõpmata arv kordi. Mida kujutab endast pärast kõiki eemaldamisi tekkinud kujund — joont, pinda või keha?

Eukleides ei tule appi

Kui endisaegade matemaatikute ette kerkis keeruline geomeetriline küsimus, siis läksid nad kõigepealt vaatama, mis Eukleides on selle kohta kirjutanud, sest peaaegu kaks tuhat aastat oli Eukleides matemaatilise ranguse etaloniks ja geomeetrilise tarkuse entsüklopeediaks. Isegi filosoofid, püüdes ennast aegsasti kaitsta etteheidete eest mõttekäigu mitteküllaldase ranguse pärast, võtsid appi Eukleidese keele ja formuleerisid oma väited aksioomide, lemmade ja teoreemidena.

Kuid just meid huvitava küsimuse kohta on Eukleidesel kirjutatud midagi üsna segast. Eukleidese raamatu «Elemendid» esimesed read on järgmised.

1. Punkt on see, millel pole mõõdet.
2. Joon aga on pikkus ilma laiuseta.
3. Joone lõpp aga on punkt.
4. Pind on see, millel on üksnes pikkus ja laius.
5. Pinna lõpp aga on joon.
6. Piir on see, mis on millegi lõpp.
7. Kujund on see, mis sisaldub mingi või mingite piiride sees.

Ei, tehke mis tahate, aga need on kõike muud kui ranged matemaatilised definitsioonid. Inimene, kes ei tea, mis on punkt, joon või pind, saab vaevalt küll mingeid kasulikke teadmisi nendest «definitsioonidest», mis tuletavad meelde segadusse sattunud kindrali vastust («Joon — see on iseasi, aga pind — iseasi»). Muidugi ei ole neist definitsioonidest võimalik teada saada, mis asi on Sierpinski vaip — joon või pind, kas on tal ainult pikkus ilma laiuseta või pikkus ja laius mõlemad. Kuid Eukleidese ajal ei tuntud nii keerulisi kujundeid kui seda on Sierpinski vaip ja lihtsate kujundite jaoks polnud definitsioone just väga vaja — igaüks võis ise vaadata, kus oli joonisel joon, kus pind. Muide, nähtavasti taipas Eukleides isegi, et tal põhimõistete definitsioonidega kõik korras pole. Igatahes esitab ta need raamatu alguses, unustab siis täiesti ega kasuta neid pärast üldse.

Kas on vaja rangeid definitsioone!

Kaks tuhat aastat püsis Eukleidese autoriteet täiesti vankumatult. Mõnes tema väites kahtlemine tähendas oma matemaatilise reputatsiooni lõplikku ja parandamatut rikkumist. Üks XIX sajandi suuremaid matemaatikuid Carl Friedrich Gauss, kes oli juba enne Lobatševskit mitteeukleidilise geomeetria ideedeni jõudnud, ei söandanud oma uurimusi avaldada boiootlaste * kisa kartes, nagu ta ühele sõbrale kirjutas. Ja alles suure vene geomeetri Nikolai Ivanovitš Lobatševski teaduslik julgus muutis mitteeukleidilise geomeetria üldsuse omandiks, sest ta trükkis oma avastused ära mõistmatute teadlaste pilgetest hoolimata.

---

* Boiootlased — kreeka hõim, kelle kohta arvati, et neil on mõistust üsna kasinalt.

Pärast N. I. Lobatševski tööde ilmumist sai selgeks, et on olemas kaks geomeetriat, mis on ühteviisi loogiliselt laitmatud, kuid millest tuletuvad hoopis erinevad teoreemid. Ent kui see nii on, siis kaotavad kõik vihjed «geomeetrilisele evidentsusele» igasuguse väärtuse. Iga geomeetriline väide tuli rajada rangetele definitsioonidele ja laitmatutele loogilistele väidetele. Ning geomeetria põhimõistetele — joonele, kujundile, kehale — oleks kindlasti vaja olnud anda täpsed definitsioonid, mis täiesti erineksid seda laadi määratlustest, nagu «see on iseasi ja see — iseasi».

Rangete definitsioonide poole püüdlemine ei iseloomustanud mitte ainult geomeetriat, vaid ka XIX sajandi matemaatilist analüüsi.

Kasutades diferentsiaal- ja integraalarvutust, mis loodi Newtoni, Leibnizi, Euleri, Lagrange'i ja teiste XVII ja XVIII sajandi suurte matemaatikute töödega, läks korda lahendada väga erinevaid ülesandeid, alustades suurtükimürsu trajektoori arvutamisest kuni planeetide ja komeetide liikumise ennustamiseni. Kuid põhimõisted, millest lähtudes need suurepärased saavutused tehti, olid defineeritud äärmiselt ebarangelt. Tolleaegse matemaatilise analüüsi alus — lõpmata väikese suuruse mõiste — tundus tol ajal asuvat kuskil olemise ja mitteolemise piiril, midagi nulli taolist, kuid mitte päriselt null. Ja XVIII sajandi matemaatikud olid sunnitud oma kahtlevaid õpilasi ergutama sõnadega: «Tee tööd, ja usk tuleb iseenesest.»

Kuid ega matemaatika pole religioon, seda ei saa rajada usule. Ja kõige tähtsam — meetodid, mis andsid nii suurepäraseid tulemusi suurte meistrite käes, hakkasid viima vigadele ja paradoksidele, kui neid kasutasid vähem andekad õpilased. Meistreid hoidis eksituste eest nende absoluutne matemaatiline intuitsioon, see alateadvuslik tunne, mis viib sageli kiiremini õige vastuse juurde kui pikad loogilised arutelud. Ent õpilastel niisugust intuitsiooni polnud ja XVIII sajandi lõppu tähistasid ennekuulmatud skandaalid matemaatikas — vohasid valemid, mille väärtus oli väiksem kui paber, millele nad trükiti, ja kahtlased teoreemid, mille rakenduspiirkond oli üsna selguseta.

Nagu lapsed, kes lõhuvad ilusa mänguasja, et vaadata, kuidas see seest välja näeb, niisamuti hakkasid

XIX sajandi matemaatikud halastamatult kritiseerima kõiki tol ajal kasutatavaid mõisteid, hakkasid matemaatikat rangete definitsioonide alusel ümber ehitama. Ei tunnustatud viidet evidentsusele, selle asemel nõuti rangelt loogikat *. Kuid loogika nõuetele ei vastanud kõige lihtsamad laused matemaatilise analüüsi õpikust, näiteks sellised:

«Vaatame piirkonda *G*, mida piirab kinnine joon Γ.»

Mis asi on kinnine joon? Miks on ta piirkonna piir? Mitmeks osaks jaotab kinnine joon tasandi ja missugust nendest osadest vaadeldakse?

Kõikidele nendele küsimustele ei andnud XVIII sajandi matemaatikud vastust. Nad joonistasid lihtsalt ovaali ja arvasid, et sellega on kõik öeldud. Kuid XIX sajandil ei usutud enam joonistusi. Küsimus «Mis on joon?» muutus analüütikutele põlevaks päevaküsimuseks.

Ent möödus hulk aega, enne kui suudeti sellele ammendavalt vastata.

Joon on liikuva punkti jälg

Selleks et joont rangelt defineerida, tuli lähtuda nendest konkreetsetest objektidest, mis viisid selle matemaatilise mõiste tekkimiseni: pikkadest ja peenikestest lõngadest, valguskiirtest, pikkadest ja kitsastest teedest. Kõikidel mainitud juhtudel on pikkus laiusest nii palju suurem, et laiuse võib kõrvale jätta. Matemaatilise idealiseerimise tulemusena jõuamegi laiuseta joone mõisteni.

Esimesena katsus joonele ranget definitsiooni anda prantsuse matemaatik Camille Jordan. Ta lähtus sellest, et väga väikese keha liikumise trajektoor kujutab endast pikka ja peenikest toru. Keha vähenedes muutub toru ikka peenemaks ja saab piirile üle minnes liikuva punkti trajektooriks — jooneks, mil pole paksust. Just jooneks nimetaski Jordan liikuva punkti trajektoori. Sealjuures pidi punkt liikuma pidevalt, ilma hüpeteta.

Täpsemalt oli Jordani definitsioon järgmine. Selleks et määrata liikuva punkti asendit, peab määrama tema koor-

---

* Tõsi küll, sealjuures heitsid nad vahel koos pesuveega ka lapse välja, ja XX sajandil võeti suur hulk väljapraagitud asju jälle teadusse tagasi.

dinaadid liikumise iga momendi jaoks. Et aga liikumine kestab mingi lõpliku ajavahemiku, siis võib ilma üldisust piiramata võtta selleks vahemikuks [0,1]. Teiste sõnadega, punkt alustab liikumist teataval ajamomendil, mille võtame mõõtmise algmomendiks, ja lõpetab liikumise mingi ajaühiku (ühe sekundi, minuti, aasta jne.) lõpul. Igal ajamomendil t antakse selles vahemikus liikuva punkti koordinaadid. Järelikult sõltuvad punkti koordinaadid ajamomendist t, on selle funktsiooniks. Tähistame need funktsioonid $f(t)$ ja $g(t)$:

$$x=f(t),\ y=g(t).$$

Punkti pidev liikumine tähendab seda, et funktsioonid $f(t)$ ja $g(t)$ on lõigu [0,1] igas punktis pidevad. Umbkaudselt rääkides, kui t muutub veidi, siis peavad natuke muutuma ka funktsioonid $f(t)$ ja $g(t)$. Täpsemalt, kui $t_1 \ldots, t_n, \ldots$ lähenevad mingile väärtusele t, $(\lim\limits_{n\to\infty} t_n=t)$, siis kehtivad võrdused

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n)=f(t)$$

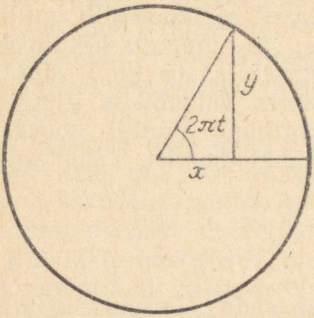
ja

$$\lim_{n\to\infty} g(t_n)=g(t).$$

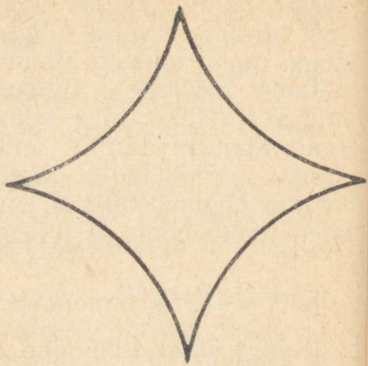
Jordani definitsioon oli üsna hästi õnnestunud. Selgus, et kõik jooned, millega matemaatikud tol ajal tegelesid, olid kõverad Jordani mõttes ehk, nagu öeldakse, nad olid Jordani kõverad. Võtame näiteks ringjoone raadiusega 1. Selle pikkus on 2π. Selleks et punkt jõuaks ühe ajaühiku jooksul ringjoone läbi käia, peab ta liikuma kiirusega 2π, sest aja t jooksul käib ta ära kaare $2\pi t$. Jooniselt 24 on näha, et punkti koordinaadid ajamomendil t on määratud võrranditega

$$\left.\begin{aligned} x&=\cos 2\pi t,\\ y&=\sin 2\pi t. \end{aligned}\right\}$$

Neid kaht võrrandit nimetatakse ringjoone parameetrilisteks võrranditeks. Joonisel 31 kujutatud kõvera (seda



Joon. 30.

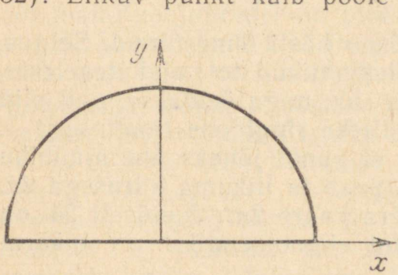


Joon. 31.

nimetatakse astroidiks) parameetrilised võrrandid on järgmise kujuga:

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos^3 2\pi t, \\ y &= \sin^3 2\pi t. \end{aligned}\right\}$$

Jordani joonteks võivad olla ka mitmest kõverast koosnevad jooned. Võtame näiteks poolringi kontuuri, mis koosneb poolringist raadiusega 1 ja diameetrist (joon. 32). Liikuv punkt käib poole ajaühiku jooksul ära pool



Joon. 32.

ringjoont ja teise poole ajaühiku jooksul diameetri. Meile on juba teada punkti koordinaatide võrrandid sel ajal, kui ta ringjoont mööda liigub. Mööda diameetrit liikudes jääb y võrdseks nulliga ja x muutub -1 kuni 1. Saame kontuuri jaoks järgmised parameetrilised võrrandid:

$$x=\begin{cases}\cos 2\pi t, \text{ kui } 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ 4t-3, \text{ kui } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1;\end{cases}$$

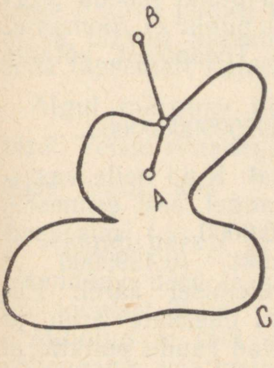
$$y=\begin{cases}\sin 2\pi t, \text{ kui } 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ 0, \text{ kui } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

Teoreem on ilmne, aga tõestust ei ole

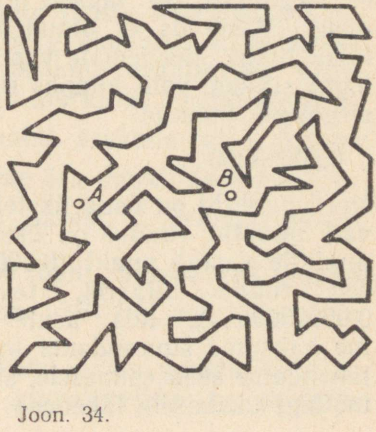
Kasutades enda loodud kõvera mõistet suutis Jordan täpsustada sellesama, matemaatilise analüüsi õpikutest võetud lause mõtet, millest me juba rääkisime: «Piiraku kinnine kõver Γ piirkonda *G*.» Kinnine Jordani kõver on selline kõver, mis $t=1$ korral satub samasse punkti, kus ta oli $t=0$ puhul. Kui sealjuures erinevatele, 0- ja 1-vahelistele ajamomentidele t_1 ja t_2 vastavad erinevad kõvera punktid, siis ei lõiku see kõver iseendaga.

Jordan tõestas järgmise teoreemi.

Kinnine Jordani kõver Γ, mil pole iseendaga lõikumispunkte, jaotab kogu tasandi kaheks osaks. Kaht punkti, mis kuuluvad samasse ossa, on võimalik omavahel ühendada murdjoonega, mis ei lõika kõverat Γ, kuid erinevatesse osadesse kuuluvaid punkte pole võimalik ühendada niisuguse murdjoonega, iga neid ühendav murdjoon lõikab kõverat Γ (joon. 33).



Joon. 33.



Joon. 34.

Teoreem tundub täiesti ilmne olevat. Kuid selle tõestamiseks läks siiski vaja väga täpseid mõttekäike. Isegi juhul, kui joon Γ on suletud hulknurk, jääb tõestus väga keeruliseks. Katsuge otsekohe ütelda, kas saab joonisel 34 punkte A ja B ühendada niisuguse murdjoonega, mis ei lõiku kontuuriga Γ.

Kaht osa, milleks kinnine Jordani kõver tasandi jaotab, nimetatakse selle joonega piiratud sise- ja välispiirkondadeks. Järelikult omandab kinnise joonega piiratud piirkonna mõiste täpse tähenduse.

Kõver läbib kõiki ruudu punkte

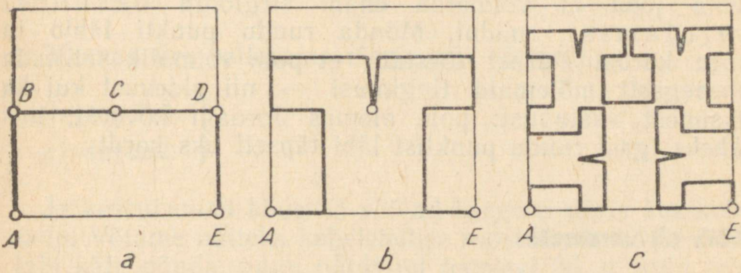
Kui Jordan kõverale definitsiooni andis, siis paistis algul, et eesmärk on saavutatud, et käes on joone mõiste range definitsioon, mis ei ole rajatud silmanähtavusele. Kuid varsti selgus, et asi polnud nii — Jordani definitsioon ei hõlmanud mitte üksnes tavalised jooned, vaid sellisedki kujundid, mida keegi joonteks ei oleks nimetanud. Igalt poolt okkaliste joontega oleks matemaatikud mingil moel leppinud. Kuid ruutu jooneks nimetada — seda ei söandanud keegi. Ent selgus, et nii ruut kui ka kolmnurk (mitte kolmnurga ümbermõõt, vaid kolmnurk ise kõigi oma sisepunktidega) ja ring on Jordani mõttes jooned. Selle tõestas Itaalia matemaatik Peano.

Me juba rääkisime, et Cantor seadis sirglõigu ja ruudu punktid üksühesesse vastavusse, see tähendab, ta näitas, et sirglõigus on täpselt niisama palju punkte kui ruuduski. Vastavus ei olnud pidev. Kui punkt mööda sirglõiku liikus, siis temale vastav ruudu punkt ei roomanud nagu sitikas, vaid hüppas nagu kirp. Tõepoolest, võtame sirglõigul punktid

0,50000000 . . . 0,4999999900000000 . . .

Need punktid on üsna üksteise lähedal. Kuid neile vastavad punktid ruudus on üksteisest kaugel, sest esimesele punktile vastab punkt (0,50000 . . ., 0,0000 . . .), mis asetseb ruudu alläärel, teisele punkt (0,4999000 . . ., 0,9999000 . . .), mis asub ruudu ülemisel äärel. Kui me hakkame suurendama teise punkti üheksate arvu ja lähendame seda esimesele, siis vastavad ruudu punktid ei mõtlegi üksteisele läheneda.

Järelikult, kuigi Cantor seadis lõigu kõik punktid ruudu punktidega üksühesesse vastavusse, ometi ei asetsenud lõigul pidevalt üksteisele järgnevatele punktidele vastavad ruudu punktid pidevalt üksteise kõrval. Järelikult ei andnud see Jordani kõverat. Peanol õnnestus konstrueerida teistsugune sirglõigu punktide hulga ülekanne ruudu punktide hulgale, nõnda et sirglõigu naaberpunktidele olid vastavaks seatud need punktid, mis olid ka ruudul naabruses. Teiste sõnadega, Peano suutis konstrueerida kõverjoone (Jordani mõttes), mis läks läbi ruudu kõikidest punktidest!



Joon. 35.

Muidugi mõista ei saa me Peano kõverat üles joonistada, võime ainult abstraktsionistlikku kunstnikku matkides joonistada musta ruudu. Kuid sellest ruudust ei ole ju ikka võimalik aru saada, kust algab kõver ja kus ta lõpeb, mismoodi ta ruudu läbi käib. Sellepärast ei võtagi me eeskuju abstraktsionistidest, vaid füüsik Perrinist, ja kujutame liikuva punkti asukohta sirglõikudega. Mida väiksemaks jäävad ajavahemikud üksikute «vaatluste» vahel, seda täpsemalt kujutab saadud murdjoon Peano kõverat.

Algul märgime liikuva punkti asukoha iga $\frac{1}{4}$ sekundi järel. Teiste sõnadega, märgime ära punkti asukoha liikumise algul, siis $\frac{1}{4}$ sekundi pärast, $\frac{1}{2}$ sekundi pärast, $\frac{3}{4}$ sekundi pärast ja liikumise lõpul. Saame viis punkti. Ühendame need ja saame joone *ABCDE*, mis on kujutatud joonisel 35, *a*.

Muidugi ei läbi see joon kõiki ruudu punkte. Kuid me vähendame vaatlustevahelisi ajavahemikke ja märgime punkti asukoha üles iga $\frac{1}{12}$ sekundi järel. Joon muutub veel sakilisemaks, murdumiskohtade arv suureneb ja joon omandab sellise kuju, nagu näidatud joonisel 35, *b*. Kui hakkame liikuva punkti asukohta veel tihedamini üles märkima, siis saame uue joone, mis on kujutatud joonisel 35, *c*. Näeme, et joon täidab ruutu aina tihedamalt, läheb igale tema punktile aina lähemale. Piirjuhul, kui me jälgime liikuvat punkti vahetpidamata, saame joone, mis läheb läbi eranditult kõikidest ruudu punktidest.

Tuleb märkida, et kui Peano sai Cantoriga võrreldes selle eelise, et joon on pidev, siis kaotas ta teises asjas: tema joon ei võimalda enam sirglõigu üksühest kujutamist ruudul. Mõnda ruudu punkti läbib ta mitu korda. Pärast tõestati, et pole võimalik säilitada üheaegselt mõlemaid tingimusi — nii pidevust kui ka üksühest vastavust: pole olemas Jordani kõverat, mis läheks igast ruudu punktist läbi täpselt üks kord!

Kõik oli varemetes

Raske on sõnadega edasi anda mõju, mida matemaatikute maailmale avaldasid Peano tulemused. Tundus, nagu oleks kõik kokku varisenud, nagu oleks kõige põhilisemad matemaatilised määratlused kaotanud igasuguse mõtte, polnud näha vahet joone ja pinna, pinna ja keha vahel (ei teatud veel, et sirglõiku ja ruutu pole võimalik pidevasse üksühesesse vastavusse seada). Kuulus prantsuse matemaatik Henri Poincaré hüüdis kibedusega:

«Kuidas võis intuitsioon meid seevõrra petta!»

Oli selge, et Jordani antud kõvera definitsioon polnud puudusteta. Ühest küljest oli see liiga lai: selle alla mahub ka Peano kõver. Aga teiselt poolt oli ta liiga kitsas: määratluse alla ei mahu mitte kõik kujundid, mida me intuitiivselt tahaksime jooneks pidada. Näiteks joonisel 24 kujutatud joon (ringjoon tema peale mähitud spiraaliga) ei olnud enam Jordani kõver. Jordani definitsioonil avastati veel teine, sügavamal peituv puudus — selles polnud juttu ju mitte üksnes kõverast, vaid ka sellest, missuguses tempos ja kuidas liigub tema punkt. Kujutlege näiteks jooksjat, kes ringi esimese poole jookseb läbi veerand minutiga, siis väsib ning ringi teise poole käib kolmveerand minutiga. Selge, et sel juhul saame hoopis teised parameetrilised võrrandid kui lk. 96.

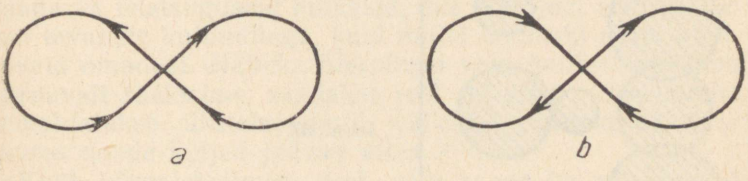
Kuid ringjoone läbimiseks on punktil ju hulk viise, kord ta liikumine võib kiireneda, kord jälle aeglustuda. Sellepärast tulevad ühe ja sellesama ringi jaoks erisugused parameetrilised võrrandid ning väga raske on taibata, et võrrandid

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y &= \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}\right\}$$

määravad ära sellesama ringi, mis võrrandid

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos 3\pi t, \\ y &= \sin 2\pi t. \end{aligned}\right\}$$

Ja keerukamad kõverad võivad kergesti päris ära kohutada. Võtame näiteks kahelehelise roosi. Selle kõvera võib läbi käia nõnda, nagu näidatud joonisel 36, *a*, kuid võib ka nõnda, nagu joonisel 36, *b*. Jordani vaatekohalt saame täiesti erinevad kõverad, kuid ega kõverat ei muuda see, mispidi teda tõmmatakse — kõver ise jääb ju endiseks.



Joon. 36.

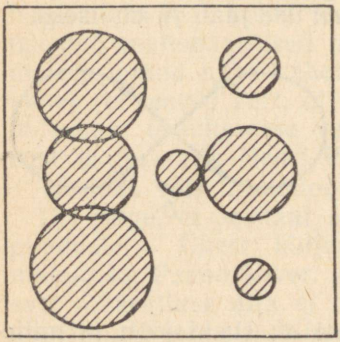
Jällegi tekkis küsimus, mis asi on siiski joon ja mille poolest ta erineb pinnast. Sellele küsimusele vastamine oli ühenduses Cantori üldiste uurimistega geomeetriakujundite alal.

Kui Cantor oli hulgateooria valmis saanud, asus ta uurima, *mis on geomeetriakujund*. Kõige üldisem vastus oli: geomeetriakujund on igasugune ruumipunktide hulk. Kui see hulk asetseb tasandil, siis saadakse tasandiline kujund. Kuid selline vastus oli liiga üldine — «kujunditel» selles tähenduses pole peaaegu mingeid küllalt huvitavaid omadusi. Niisuguste kujundite geomeetrias pole peaaegu üldse teoreeme.

Sellepärast oli esmajoones vaja piiritleda uuritavate hulkade kogumikud, eraldada neist need, mis on omaduste poolest tavalistele geomeetriakujunditele kõige lähemal.

Selleks et niisugust kujundite klassi eraldada, selgitame, missugused ühised omadused on tavalistel kujunditel, niisugustel, nagu ruut, ring, sirglõik, astroid jne. Selgub, et kõiki neid kujundeid võib saada ühesuguse menetluse abil.

Räägitakse, et kui kuulsa skulptori Rodini käest küsiti, kuidas ta oma suurepäraseid kujusid teeb, siis olevat ta vastanud: «Ma võtan marmorpanga ja raiun tema küljest ära kõik, mis on üleliigne.»



Joon. 37.

Samasugusel viisil võib saada igasuguse piiritletud tasandilise geomeetriakujundi: tuleb võtta mingi ruut, milles see kujund asetseb, ja siis lõigata ülearune ära. Lõigata ei tohi mitte korraga, vaid järk-järgult, ringikujuliste tükikeste haaval. Sealjuures ring ise heidetakse kõrvale, kuid ringi piir, ringjoon jäetakse kujundisse alles.

Esimesel pilgul võiks arvata, et sel viisil saab teha ainult niisuguseid kujundeid nagu joonisel 37. Kuid asi on selles, et ära ei lõigata mitte üks ega kaks ringi, vaid loenduv hulk ringe, ning loenduva hulga väljalõigete abil võib saada igasuguse kujundi. Selleks tuleb teha järgmist: võtta kõik ringid, millel mõlemad keskpunkti koordinaadid ja raadius on ratsionaalsed. Lk-l 46 oleva teoreemi põhjal on niisuguste ringide hulk loenduv. Nüüd heidame tasandilt välja kõik need ringid, mis kuuluvad eespool nimetatute hulka, kuid mille sees pole ühtki otsitava kujundi punkti.

Selge, et pärast seda jääb alles ainult kujund ise ning eemaldatud ringide arv pole suurem loenduvast hulgast.

Muide, pole sugugi vaja tingimata ringe eemaldada. Ringide asemel võib eemaldada ruutusid, ristkülikuid, ellipseid, kusjuures silmas tuleb pidada ainult üht — sisemised punktid heidetakse ära, rajapunktid jäävad.

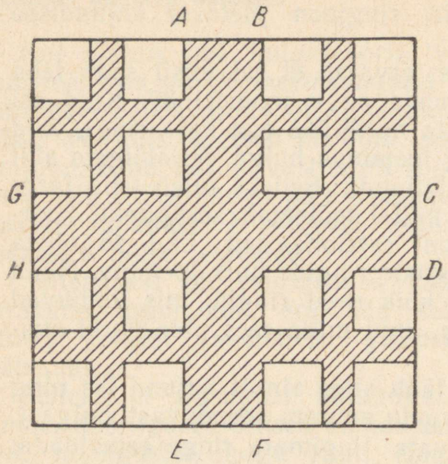
Kontiinuumid

Selgub, et peale tavaliste geomeetriakujundite võib loenduva hulga ringide (ruutude jne.) eemaldamise abil saada ka teistsuguseid hulkasid, mis pole just eriti sarnased tavaliste kujunditega, kuid millel on siiski palju huvitavaid omadusi. Näiteks Sierpinski vaip, millest me juba korduvalt rääkisime, saadakse just sel viisil: ühikruudust eemaldatakse üksteise järel väikesed ruudukesed, kusjuures nende küljed jäävad alles.

Kuid kõrvaleheitmise teel võib saada ka niisuguseid «kujundeid», mis pole enam ühest tükist. Näiteks kui välja võtta «ristid»*, nii nagu joonisel 38, siis saame lõpuks hulga, milles ei ole ühtki tervet tükki (niisuguse hulga kohta öeldakse, et see on täielikult mittesidus). Sellepärast piirame seda menetlust tingimusega, et iga kord pärast eemaldamist peab järele jääma ühest tükist koosnev hulk. Siis jääb ka pärast kõiki eemaldamisi järele ühest tükist koosnev hulk (see tähendab, sidus hulk, nagu

---

* Sealjuures eemaldatakse koos iga ristiga ka tema otsavahemikud, näiteks vahemikud *AB*, *CD*, *EF*, *GH*.



Joon. 38.

matemaatikud ütlevad). Peale selle on saadud hulk tõkestatud, s. t. ta asetseb tervenisti mingis ruudus.

Hulki *F*, mis täidavad neid kolme tingimust, see tähendab, niisuguseid hulki, kus:

1) hulk *F* saadakse ruudust loenduva hulga ringide (ruutude jne.) eemaldamisega, kusjuures eemaldatud ringide (ruutude jne.) rajajooned alles jäävad;

2) hulk *F* koosneb ühest tükist (on sidus);

3) hulk *F* on tõkestatud,

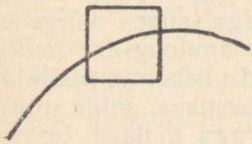
nimetaski Cantor *kontiinuumideks* (tuletame meelde, et ladina keeles tähendab *continuum* pidev). Just kontiinuumid osutusidki kõige üldisemateks hulkadeks, mille omadused on väga lähedased tavaliste geomeetriakujundite omadustele.

Cantori jooned

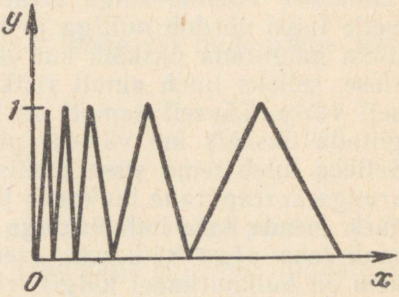
Nüüd oleme juba valmis vastama küsimusele, mis on tasajoon. Et tasajooned peavad olema geomeetriakujundid, siis on selge, et neid tuleb otsida kontiinuumide hulgast. Ent ka ring ja ruut on kontiinuumid, kuid neid kujundeid ei saa kuidagi joonteks nimetada. Sellepärast tuleb lisada veel mingi tingimus, mis niisugused kujundid välja jätaks.

Peame silmas, et nii ring kui ruut sisaldavad «terveid» tasanditükke. Kuid joon ei sisalda terveid tasanditükke; ükskõik kui väikese ruudu me võtame, ikka leidub seal punkte, mis ei kuulu joone sisse (joonis 39). See ongi vajalik lisatingimus: *Cantori mõttes nimetatakse tasajooneks tasandil asetsevat kontiinuumi, mis ei täida ühtki tasandi tükki tervenisti* (s. o. niisugust kontiinuumi, mille puhul igasse ruutu jäävad punktid, mis ei kuulu sellesse joonesse).

Näiteks kolmnurga kontuur, ringjoon, neljaleheline roos — need kõik on jooned. Ka Sierpinski vaip on joon. Teda konstrueerides tegime augud sisse kõikidele jagamisel saadud ruutudele ning sellepärast ei sisalda ta ühtki



Joon. 39.



Joon. 40.

tervet tasanditükki. Ka ringjoon koos tema ümber mässitud spiraaliga on Cantori joon. Samuti saehammasjoon joonisel 40 koos ordinaattelje lõiguga [0,1]. Üldse kõik jooned, mis on jooned silmanähtava, naiivse arusaamise järgi, on jooned ka Cantori mõttes. Ent kujundid, mis sisaldavad kas või ühegi terve tasanditüki, ei kuulu Cantori joonte hulka.

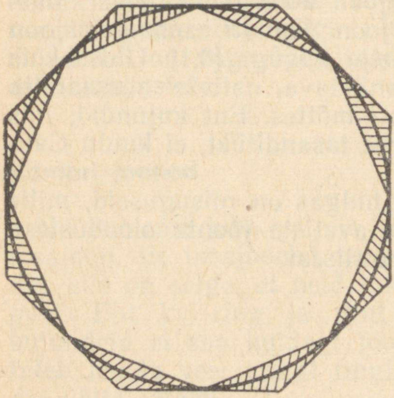
Kuid ka Cantori joonte hulgas on niisuguseid, mille omadused hoopis erinevad tavaliste joonte omadustest. Järgnevalt räägime mõnest sellisest.

Kas joone pindala võib nullist erineda?

Muidugi, pärast seda kui lugeja tutvus joontega, mis lähevad läbi ruudu kõikide punktide, võib oodata ükskõik mida. Aga siiski, kas joonel võib olla pindala? Eks öelnud juba Eukleides, et joon — see on pikkus ilma laiuseta. Aga kuidas seal, kus pole laiust, saab tekkida pindala? Ning ka Cantori joone definitsioonis on öeldud, et ta ei sisalda ühtki tervet tasanditükki. Kust saab siis sel juhul tekkida pindala? Kuid ärge kiirustage lõpliku vastusega.

Enne küsimuse uurimist tuleb kokku leppida tarvitatavate sõnade täpse tähenduse suhtes. Mida tähendavad sõnad «joonel on nullpindala» või «joonel on mittenullpindala»? Võtame kõige tavalisema joone — sirglõigu. Selle laius võrdub nulliga ja järelikult on võimalik sirglõiku paigutada ükskõik kui väikese pindalaga ristküliku sisse, selleks tuleb ainult ristküliku laius võtta küllaldaselt väike. Täpselt samuti on ka ringjoont võimalik paigutada ükskõik kui väikese pindalaga hulknurga sisse. Selleks tuleb tema sisse joonistada väga suure külgede arvuga korrapärane hulknurk ja ümber analoogiline hulknurk. Nende kahe hulknurgaga piiratud piirkonna pindala saab teha väga väikeseks (seda väiksemaks, mida rohkem on hulknurkadel külgi), ringjoon aga paikneb tervenisti selles piirkonnas (joonis 41).

Nüüd on juba selge, mida tähendab väide — joonel on



Joon. 41.

nullpindala. See tähendab, et ükskõik kui väikese positiivse arvu ε me ka ei võtaks, ikkagi leidub hulknurkne piirkond, mis sisaldab joont ja on niisugune, et tema pindala on väiksem kui ε. Kui me aga niisugust piirkonda ei leia, siis joone pindala ei võrdu nulliga.

Et see määratlus selgemaks saaks, ei rakenda me seda mitte niisugustele lihtsatele joontele, nagu sirglõik või ringjoon, vaid keerulisematele. Üks kõige keerulisemaid jooni on muidugi Sierpinski vaip. Leiame tema pinna suuruse. Selleks tuletame meelde, et kogu ruudu pindala oli 1. Esimesel sammul eemaldasime keskmise ruudu, mille pindala oli $\frac{1}{9}$. Tulemuseks oli hulknurkne piirkond pindalaga $\frac{8}{9}$. Teisel sammul eemaldasime 8 väiksemat ruutu, igaüks pindalaga $\frac{1}{81}$. Järele jäi hulknurkne piirkond pindalaga

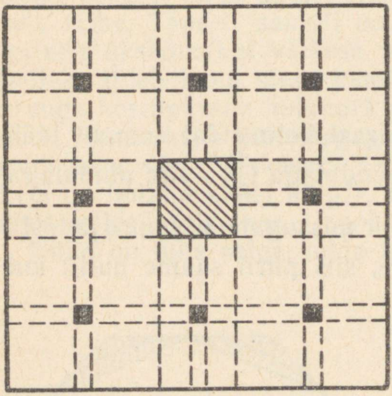
$$\frac{8}{9}-\frac{8}{81}=\frac{64}{81}=\left(\frac{8}{9}\right)^2.$$

Nüüd on juba selge, et pärast kolmandat sammu jääb järele hulknurkne piirkond pindalaga $\left(\frac{8}{9}\right)^3$, siis pindalaga $\left(\frac{8}{9}\right)^4$ jne. Aga kui võtta ükskõik missugune lihtmurd ja tõsta ta ikka suuremasse astmesse, siis piiril saame nulli: kui $0<q<1$, siis

$$\lim_{n\to\infty} q^n=0.$$

Sealhulgas ka $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n=0$. Kuid piiri mõiste definitsiooni põhjal tähendab see seda, et iga $\varepsilon>0$ jaoks leidub niisugune n, mille puhul $\left(\frac{8}{9}\right)^n<\varepsilon$. Järelikult saame pärast n sammu hulknurkse piirkonna, mille pindala on väiksem kui ε. Kuid see piirkond katab tervenisti Sierpinski vaiba. Tuleb välja, et Sierpinski vaiba pindala võrdub nulliga.

Paistab, nagu oleks Eukleidese definitsioon saavutanud täieliku triumfi. Isegi niisuguse keerulise joone puhul nagu Sierpinski vaip on joone pindala null. Kuid triumfeerimine oleks enneaegne. Midagi ei sundinud ju meid välja võtma nii suuri tükke. Oleme kokkuhoidlikumad ja jagame ruudu mitte 9, vaid 25-ks võrdseks osaks (s. t. jagame ruudu külje viieks). Võtame välja keskmise ruuduosa, mille pindala on ilmselt $\frac{1}{25}$. Nüüd tahab lugeja arvatavasti jagada kõik 24 järelejäänud ruutu jälle 25 osaks ja eemaldada neist keskmised osad. Kuid see poleks jällegi kokkuhoidlik. Selle asemel võtame eemaldatud ruutu piiravad lõigud ja pikendame neid kuni lõikumiseni suure ruudu külgedega. Saame neli ruutu (nurkades) ja neli ristkülikut. Igasse ruutu ja igasse ristkülikusse tõmbame ristid laiusega $\frac{1}{25}$ ja eemaldame ristide keskosad (joonis 42). Iga niisuguse keskosa pindala on $\frac{1}{625}$ ning kõi-



Joon. 42.

kide teisel sammul eemaldatud ruudukeste pindala on kokku $\frac{8}{625}$. Kolmandal sammul eemaldame analoogiliselt 64 ruudukest kogupindalaga $\frac{64}{25^3}=\frac{64}{15\,625}$ jne. Nagu näha, moodustavad eemaldatavate ruudukeste pindalad geomeetrilise progressiooni

$$\frac{1}{25}+\frac{8}{25^2}+\frac{64}{25^3}+\ldots,$$

mille tegur on $\frac{8}{25}$. Selle progressiooni summa on ainult $\frac{1}{17}$. Mis see tähendab? See tähendab, et iga sammu puhul on järelejäänud pinna suurus ikka vähemalt $\frac{16}{17}$. Jääki ei saa katta ühegi hulknurkse piirkonnaga, mille pindala oleks väiksem kui $\frac{16}{17}$. Kuid see jääk nagu Sierpinski vaipki on joon (Cantori mõttes) — tema konstrueerimisel tegime augud sisse igale ristkülikule ning ei jätnud alles ühtki tervet ristkülikut.

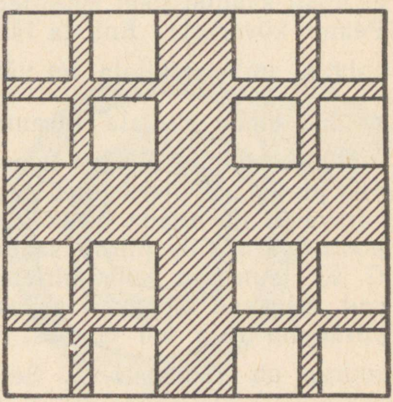
Järelikult saab kujundil, mis on (Cantori mõttes) joon, olla nullist erinev pindala!

Ilma pindalata piirkonnad

Siiski ei ole eespool vaadeldud näide päris veenev: saadud joon koosneb igal pool iseendaga lõikumisel tekkinud punktidest ega ümbritse mingit piirkonda. Seepärast tekib küsimus — kas võib «heal» kõveral, millel pole lõikepunkte iseendaga (s. t. kinnisel Jordani kõveral, mis iseendaga ei lõiku), olla nullist erinev pindala? Selgub, et võib küll!

Niisuguse kõvera konstrueerimiseks muudame veidi konstrueerimisviisi. Algul konstrueerime hulga, milles ei puudu mitte üksnes terve tasanditükk, vaid kus pole ka ühtki tervet joonetükki, kuid mille pindala siiski ei võrdu

Joon. 43.



nulliga. Selleks tuleb eemaldada niihästi keskmised ruudukesed kui ka terved ristid, nagu on näidatud joonisel 43. Sealjuures valime ristide suuruse sel kombel, et esimese eemaldatud risti pindala oleks $\frac{8}{25}$, teisel sammul eemaldatud ristide kogupindala $\frac{64}{625}=\left(\frac{8}{25}\right)^2$, kolmandal sammul — $\left(\frac{8}{25}\right)^3$ jne. Siis tuleb eemaldatud ristide üldpinnaks geomeetrilise progressiooni $\frac{8}{25}+\left(\frac{8}{25}\right)^2+\left(\frac{8}{25}\right)^3+\cdots$ summa, s. t. $\frac{8}{17}$. Kuid see on väiksem kui kogu ruudu pindala. Nii et üle jääb veel $\frac{9}{17}$ kogu ruudu pindalast. Jäägi konstrueerimiseks eemaldasime terved ristid ja lõikusime ruutu halastamatult. Selle jäägi ühtki punktidepaari ei saa joonega ühendada, isegi mitte joonega Cantori mõttes. Jäägi punktide vahel pole mingit ühendust. Jääk on täielikult mittesidus hulk, nagu ütlevad matemaatikud. Kuid pindala on sel hulgal, mis ei sisalda ei tervet tasanditükki ega kõvera kaart, nullist erinev; seda hulka ei saa katta ühegi hulknurkse piirkonnaga, mille pindala oleks väiksem kui $\frac{9}{17}$.

Nüüd on juba kerge konstrueerida mõni iseendaga mittelõikuv kinnine kõver, mille pindala ei võrdu nulliga. Selleks tuleb saadud punktid ühendada täpselt samal viisil, nagu me tõmbasime kõvera läbi ruudu iga punkti. Selle tõttu, et me igal sammul eemaldasime terved ristid, ei lõiku saadud joon iseendaga (selle poolest ta erinebki Peano kõverast). Ent ta läheb läbi kõikidest punktidest hulgas, mille pindala on vähemalt $\frac{9}{17}$, ja sellepärast on saadud joone pindala vähemalt $\frac{9}{17}$.

Nüüd on juba hõlpus konstrueerida piirkond, mil puudub pindala. Selleks tuleb saadud kõvera punktid *A* ja *B* omavahel ühendada ükskõik missuguse joonega, näiteks poolringiga. Siis piirab saadud joon Γ mingit piirkonda *G*. Kui suur on selle piirkonna pindala? Vastused tulevad erinevad olenevalt sellest, kas võtame arvesse selle piirkonna raja või ei, sest rajal endal on pindala, mille suurus on vähemalt $\frac{9}{17}$. Selge, et meie piirkonnal pole tavalist pindala. Niisuguseid piirkondi, millel pole tavalist pindala, nimetatakse matemaatikas *mittekvadreeruvateks* piirkondadeks.

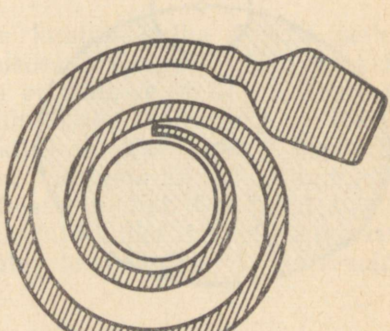
Ootamatud näited

Arvatavasti olid matemaatikud pärast Peano kõverate avastamist kindlad, et tunnevad juba kõiki kummaliste funktsioonide ja joonte maailma «imeloomi». Kuid hiljemgi pettis geomeetriline intuitsioon neid korduvalt. Kuivõrd erinevad on Cantori joonte omadused tavaliste joonte omadustest, seda näitab kõige selgemini järgmine lugu.

XX sajandi algul avaldas tuntud matemaatik Schoenflies sarja töid, mis käsitlesid kõverate, piirkondade rajade jne. mitmesuguseid omadusi. Sealjuures toetus Schoenflies sageli «geomeetrilisele silmanähtavusele». Kuid mõne aasta pärast, 1910. a., ilmus noore hollandi matemaatiku Brouweri lühike artikkel (ainult 12 lehekülge). Selles olid mõningad üllatavad näited, millest järgnes, et Schoenfliesi ühed tulemused olid lihtsalt valed ja teised, kuigi õiged, ei olnud rangelt tõestatud. Tõepoolest, «geomeetriline silmanähtavus» mängis Schoenfliesile halva nalja!

Et näidata, missugused «silmanähtavad» väited valedeks osutusid, toome mõned Brouweri näited (kasutame sealjuures hiljem saadud lihtsustusi).

Brouwer konstrueeris tõkestatud piirkonna, mille raja ei



Joon. 44.

olnud kontiinuum. Selleks võttis ta «pudeli» ja hakkas selle kaela välja venitama ning ringile peale mähkima (joon. 44). Niiviisi sai ta piirkonna, mille rajaks oli kaks spiraali ja «pudel». Kuid see raja ei ole kontiinuum; kontiinuumi saamiseks tuleb spiraalidele lisada ring, mille peale nad mähitakse.

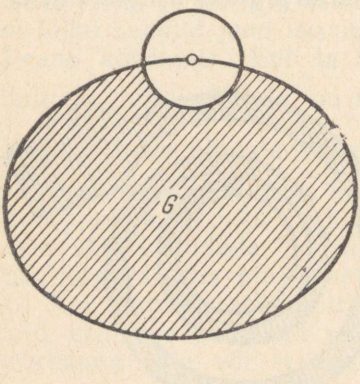
Piirkonnad ja rajad *

Et me juba hakkasime rääkima piirkondadest ja rajadest, siis täpsustame neid mõisteid. Ilmselt ei olnud Jordani antud joone definitsioon kuigi õnnestunud ja sellepärast tuleb anda ka uus piirkonna definitsioon.

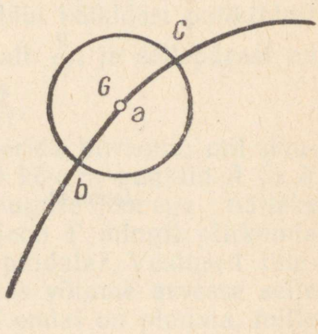
Nimetame tasandil *lahtiseks hulgaks* iga hulka, mis kujutab endast ärajäetud rajadega ringide summat. Muide, igasuguse tasandilise kontiinuumini viiv täiend on lahtine tasandiline hulk. Kõik tavalised tasandilised piirkonnad (ringi, ruudu, kolmnurga jne. sisemus) on lahtised hulgad (tasandil). Peale selle on nad sidusad: nende iga kahe punkti vahele saab ilma sellest piirkonnast välja minemata tõmmata murdjoone. Niisugused omadused määravadki tasandilise piirkonna.

Tasandiliseks piirkonnaks nimetatakse tasandi punktide niisugust sidusat hulka, mis kujutab endast ärajäetud rajadega ringide summat.

Sealjuures võib ringide hulk olla suvaline, kuid saab



Joon. 45.



Joon. 46.

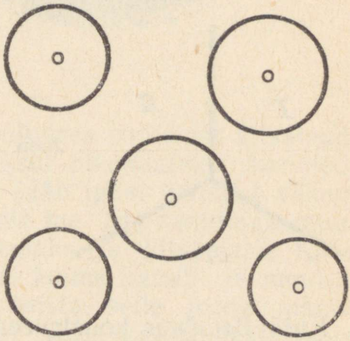
tõestada, et iga piirkonna võib koostada ringide loenduvast hulgast.

Ärajäetud rajaga ringi nimetatakse ringi keskpunkti *a* ümbruseks. Muidugi mõista on igal punktil lõpmata palju ümbrusi.

Tasandil asetsevat punkti *a* nimetatakse piirkonna *G* rajapunktiks siis, kui punkti *a* igas ümbruses on nii piirkonna *G* punktid kui ka temasse mittekuuluvad punktid (joon. 45).

Täiesti analoogiliselt defineeritakse lahtisi hulki, piirkondi ja piirkondade rajapunkte ruumis. Vahe on ainult selles, et ärajäetud rajaga ringide asemel võetakse ärajäetud rajasfääriga kerad.

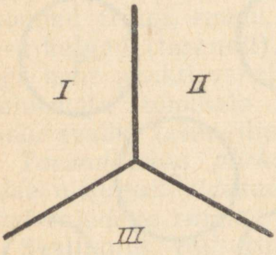
Punkti ümbruse mõiste kõrval (tasandil või ruumis) läheb meil vaja veel mingisse hulka *A* kuuluva punkti suhtelise ümbruse mõistet. Nõnda nimetatakse seda



Joon. 47.

ümbruspunktide hulka, mis kuulub hulka *A*, s. t. selle punkti tavalise ümbruse ühisosa hulgaga *A*. Näiteks kui joonisel 46 kujutatud joon on hulk *A* ja *G* — punkti *a* ümbrus, siis selle punkti suhteliseks ümbruseks on joonlõik punktist *b* kuni punktini *c*. Kui hulk *A* koosneb mitmest punktist, siis on igal tema punktil suhteline ümbrus, mis koosneb ainult sellest punktist. Sel juhul tuleb suhtelise ümbruse saamiseks võtta hulka *A* kuuluva punkti tavaline ümbrus, kus pole teisi hulka *A* kuuluvaid punkte (joon. 47).

Nüüd räägime teisest, veel üllatavamast Brouweri toodud näitest. Joonistame mingi maa ja temaga piirnevate maade kaardi. Peaaegu iga punkt selle maa piiris kuulub ainult kahele maale: vaadeldavale maale ja ühele tema naabritest. Sellepärast seisavad piiri igas punktis kaks piirivalvurit — üks vaadeldava maa poolt ja teine naabermaalt. Kaardil on olemas mõningad punktid, kus kolm maad kokku puutuvad (joon. 48). Niisugustes punktides seisab juba kolm piirivalvurit. Kuid neid punkte on kaardil ainult lõplik arv ning tundub täiesti ilmne olevat, et nad ei saa täita kogu maa piiri, see tähendab, ei saa olla kolme piirkonda (kolme maad), millel on üks ja seesama ühine piir. Teiste sõnadega, tundub ilmne, et kolme erineva maa piirivalvurid ei saa olla piiri igas punktis.

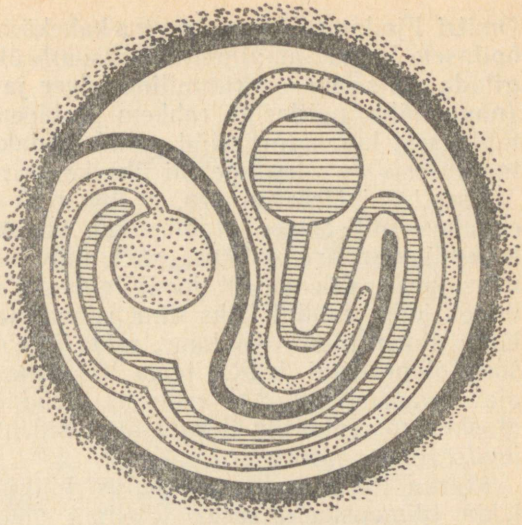


Joon. 48.

Kuid Brouwer konstrueeris niisugused kolm piirkonda. Et tema näitest aru saada, oletame, et ookeanis on saar, millel on kaks mageda veega järve. Ainult et ühes järves on vesi külm ja teises soe. Nüüd teeme järgmised irrigatsioonitööd. Esimese päeva jooksul kaevame kanalid ookeanist ja mõlemast järvest niimoodi, et iga kanal oleks «umbne» (s. t. kujutaks endast ainult vastava veekogu lahte), et need kanalid ei voolaks kuskil üksteise sisse ja et iga kuivamaa punkti kaugus ookeaniveest ning ka mõlema järve veest oleks väiksem kui üks kilomeeter (joon. 49).

Järgmise poole päeva jooksul jätkame neid kanaleid nõnda, et nad jääksid endiselt «umbseks» ega voolaks üksteise sisse, kuid kuivamaa iga punkti kaugus kõikidest nendest kanalitest oleks väiksem kui pool kilomeetrit. Mui-

Joon. 49.



dugi peavad kanalid olema seejuures endistest kitsamad. Järgmise veerand päeva jooksul pikendatakse kanaleid nõnda, et iga kuivamaa punkt jääb igast kanalist vähem kui veerand kilomeetri kaugusele jne. Iga sammuga muutuvad kanalid ikka käänulisemaks ja kitsamaks. Kahe päeva pärast on kogu saar täis kolme kanalit ja muutub seega Cantori jooneks. Kui seista selle joone mõnes punktis, siis saab soovi järgi võtta kas soolast, sooja magedat või külma magedat vett. Sealjuures ei tohi veed üksteisega seguneda. Kui me ookeani ja järvede asemel oleksime võtnud kolm riiki, siis oleksime saanud niisuguse kummalise olukorra, millest me algul rääkisime — igasse piiripunkti võib panna kolm piirivalvurit, ühe iga riigi poolt.

«Mittedissertaabel» teema

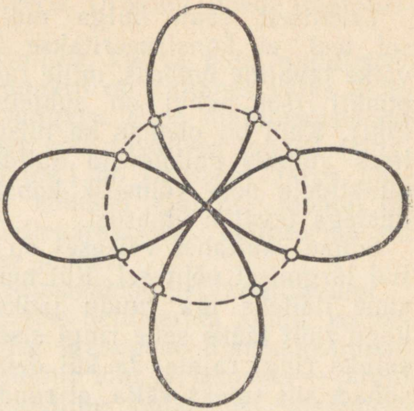
Me juba rääkisime, et Cantori definitsioonil oli üks puudus — see ei kõlvanud üldse ruumiliste kõverate jaoks. Aga seda, mis asi on ruumis olev pind, ei teadnud keegi. 1921. aasta suvel tegi Moskva ülikooli professor

Dmitri Fjodorovitš Jegorov oma kahekümne kolme aastasele õpilasele Pavel Samuilovitš Urõssonile ülesandeks välja selgitada, mis asi on ruumiline kõver ja ruumis olev pind (nagu näha, mõtles ta rohkem probleemi matemaatilisest tähtsusest kui, nagu nüüd vahel öeldakse, teema «dissertaablusest» — ülesanne oli üks kõige raskemaid!).

Varsti sai Urõsson aru, et Jegorovi ülesanne on ainult erijuhus üldisemast probleemist: mis asi on geomeetriakujundi dimensioonilisus, s. t. mitu dimensiooni tal on, miks peab ütlema, et joonlõigul või ringjoonel on üks dimensioon, ruudul kaks dimensiooni ja kuubil või keral kolm dimensiooni. Kuulame, mida ütleb selle P. S. Urõssoni eluperioodi kohta tema lähedane sõber, kes oli tol ajal samasugune noor aspirant, nüüd aga akadeemik ja Moskva matemaatikaühingu aupresident — Pavel Sergejevitš Aleksandrov:

«Terve 1921. aasta suvi kulus pingutavatele katsetele leida (dimensioonilisuse) «tõeline» definitsioon, kusjuures P. S. läks ühe variandi juurest teise juurde, konstrueeris kogu aeg näiteid, mis demonstreerisid, miks see või teine variant tuli kõrvale jätta. See oli kaks kuud tõepoolest kõikehaaravaid mõtisklusi. Viimaks ärkas P. S. augusti lõpul ühel hommikul valmi, lõpliku ja nüüd kõigile hästi tuntud dimensioonilisuse induktiivse definitsiooniga... Samal hommikul rääkis P. S. Urõsson mulle Kljazmas supeldes oma dimensioonilisuse määratlusest ja visandas sealsamas mitmetunnilises vestluses kogu dimensioonilisuse teooria terve rea teoreemidega, tol ajal alles hüpoteesidega, mille kohta ei teatud veel, kust otsast neid kätte võtta, ja mis hiljem järgnevate kuude jooksul üksteise järel ära tõestati. Kunagi hiljem ei ole ma võtnud osa või kuulanud matemaatilist vestlust, mis oleks koosnenud nii ohtrast uute mõtete voolust nagu sel augustikuu hommikul. Kogu visandatud programm teostati täielikult talvel 1921/1922. 1922. aasta kevadeks oli kogu dimensioonilisuse teooria valmis...»

Dimensioonilisuse määratluse põhiidee seisis Urõssonil järgnevas. Selleks et osa joont ülejäänud joonest eraldada, piisab tavaliselt kahest või mitmest punktist (joonisel 50 eraldatakse keskpunkti sisaldav neljalehelise roosi osa ülejäänud roosist kaheksa punktiga). Kuid pinna osa pole enam võimalik eraldada kogu ülejäänud pinnast mõne punktiga — selleks on tingimata vaja tervet joont;



Joon. 50.

ükskõik kui palju punkte me pinnal võtame, nendest on alati võimalik mööda minna. Täpselt samuti eraldatakse kolmemõõtmelise ruumi osa kogu ülejäänud ruumist pinnaga.

Kõike seda oli vaja veel täpsustada: mõnede joonte puhul on osa eraldamiseks vaja lõpmatu hulk punkte, kuid need punktid ei moodusta kokku mingit joont. Urõsson suutis täpselt formuleerida kõik vajalikud definitsioonid. Mingis mõttes tuletasid tema määratlused meelde Eukleidese määratlusi (joone lõpp on punktid, pinna lõpp on jooned). Kuid sarnasus on umbes samasugune nagu ürginimese õõnestatud puutüve ja kaasaegse laeva vahel.

Dimensioonilisuse induktiivne definitsioon *

Räägime nüüd täpsemalt, kuidas määratletakse geomeetriakujundi dimensioonilisust Urõssoni järgi. Algul selgitame välja, mis asi on nulldimensiooniline hulk. Tüüpiline nulldimensiooniline hulk on niisugune hulk, mis koosneb ühest punktist või äärmisel juhul lõplikust arvust punktidest. Kuid niisuguse hulga igal punktil on tühja rajaga suhteline ümbrus — see punkt ise (vt. joon. 47). Just selle omaduse võttis Urõsson nulldimensioonilise hulga definitsiooniks.

Täpsemalt on definitsioon sõnastatud järgmiselt:

Hulk F on nulldimensiooniline, kui igal tema punktil on olemas ükskõik kui väike tühja rajaga suhteline ümbrus.

Tavaliselt saab hulga nulldimensioonilisust näidata sel teel, et konstrueeritakse igale punktile ükskõik kui väike tavaline ümbrus, mille raja ei sisalda ühtki hulga F punkti (sel puhul on suhtelise ümbruse raja kindlasti tühi). Kuid on olemas ka niisuguseid kolmedimensioonilises ruumis paiknevaid nulldimensioonilisi hulki, mille punktidele pole võimalik konstrueerida niisuguste omadustega tavalisi ümbrusi.

Sõnad «kuitahes väikese» on sellele definitsioonile lisatud järgmisel põhjusel. Kui neid sõnu ei oleks, siis võiksime näiteks iga ruudu jaoks võtta nii suure ringi, et kogu ruut jääks selle ringi sisse ja ükski ruudu punkt ei satuks ringi rajale. Ja kui definitsioonis puuduksid need sõnad, siis tuleks välja, et ruudu dimensioonilisus võrdub nulliga, aga mitte kahega, nagu tegelikult peab olema.

Mitte üksnes lõplikud, vaid ka paljud lõpmatud hulgad on nulldimensioonilised. Võtame näiteks hulga, mis koosneb teljel asuvatest punktidest koordinaatidega 0, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... $\frac{1}{n}$, ... Selge, et selle hulga igal punktil on kuitahes väike ümbrus, mille raja ei sisalda hulga punkte. Ainuke kaheldav punkt võiks olla 0. Ent kui võtta tema ümbrus raadiusega α, kus α on irratsionaalarv, siis ei satu ükski hulga punktidest selle ümbruse rajale.

Nulldimensiooniline on ka sirgel asetsevate ratsionaalsete koordinaatidega punktide hulk Q. Selle tõestamiseks tuleb Q-sse kuuluva punkti α ümbruseks võtta irratsionaalse pikkusega vahemik, mille keskpunkt asuks punktis α. Nulldimensiooniline on ka Cantori hulk (vt. lk. 81) ja hulk, mis on saadud ruudust ristide eemaldamise teel (vt. lk. 104), ning paljud teised hulgad.

Analoogilisel viisil saab nulldimensioonilisi hulki konstrueerida mitte üksnes tasandil, vaid ka ruumis (seejuures tuleb punkti ümbruse all mõista muidugi ümbrust ruumis).

Pärast seda, kui nulldimensiooniline hulk oli defineeritud, läks Urõsson ühedimensiooniliste hulkade, s. t. joonte juurde. Siin pole enam väikesi, tühja rajaga ümbrusi (vt. joon. 50). Kuid tavaliste joonte puhul lõikub ümbruse raja joon endaga ainult mõnes punktis. Aga lõplikust arvust punktidest koosnev hulk on nulldimensiooniline. Seda tähendust üldistades defineeris Urõsson ühedimensioonilise hulga järgmisel viisil.

Hulk F on *ühedimensiooniline*, kui ta pole nulldimensiooniline, aga igal tema punktil on kuitahes väike ümbrus, mille raja ühishulk hulgaga F on nulldimensiooniline. Selgus, et mitte üksnes kõik tavalised jooned (ringjooned, sirglõigud, ellipsid jne.) on Urõssoni järgi ühedimensioonilised, vaid ka kõikidel Cantori joontel on sama dimensioonilisus. Sellepärast sai defineerida nii tasandilise kui ka ruumilise joone:

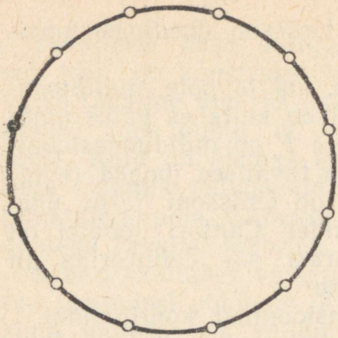
jooneks nimetatakse ühedimensioonilist kontiinuumi.

Nüüd on juba selge, kuidas defineerida pindu, kolmedimensioonilisi kehi ja üldse igasuguse dimensioonilisusega hulki. Defineerimine sünnib siin järjekorras — algul defineeritakse nulldimensiooniline hulk, siis ühedimensiooniline, siis kahedimensiooniline hulk jne. ja sellepärast nimetatakse Urõssoni antud dimensioonilisuse definitsiooni induktiivseks definitsiooniks.

Tööd pole vaja mitte retsenseerida, vaid see tuleb trükkida!

Urõsson tõestas suure hulga väga huvitavaid teoreeme, mis olid ühenduses tema poolt kasutusele võetud dimensioonilisuse mõistega. Kuid üht, kõige tähtsamat teoreemi ei suutnud ta kuidagi tõestada: ta ei saanud hakkama selle tõestamisega, et kõige tavalisemal kuubil on kolm dimensiooni. Pärast pikki pingutusi leidis ta olukorrast suurepärase väljapääsu sellega, et leiutas uue dimensioonilisuse definitsiooni. Me ei hakka seda üksikasjaliselt ära tooma, vaid selgitame teda lihtsate kujundite abil.

Kui võtta joonlõik või ringjoon, siis saab neid jaotada kuitahes väikesteks osadeks nii, et iga punkt ei kuulu korraga mitte rohkem kui kahele lõigule (joon. 51). Sealjuures tuleb lõigud võtta koos nende rajadega (s. t. lõpppunktidega). Ruutu ei saa enam nõnda jaotada. Esimesel pilgul näib, et ruudu osadeks jagamisel tekivad alati punktid, mis kuuluvad neljale osale korraga (joon. 52, *a*). Ent kui asetada osad nii, nagu telliseid müüri pannakse, siis on võimalik asi nõnda seada, et ükski punkt ei kuulu korraga rohkem kui kolmele erinevale osale (joon. 52, *b*). Täpselt samuti saab kuupi jagada väikesteks rööptahu-



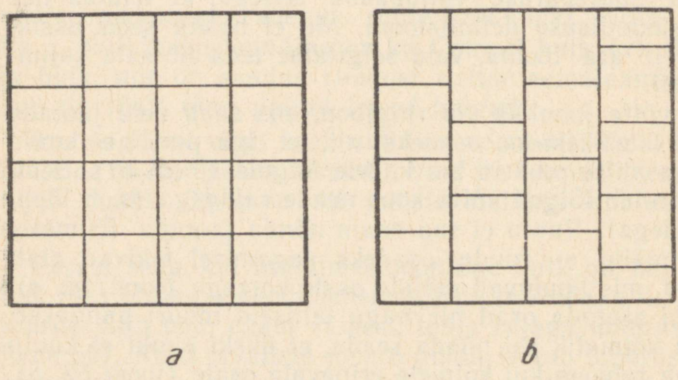
Joon. 51.

kakesteks, mille juures iga punkt ei kuulu mitte rohkem kui neljale rööptahukale.

Just selle omaduse võttis Urõsson dimensioonilisuse uueks määratluseks. Kujundit nimetatakse n-dimensioonililiseks, kui teda on võimalik jagada kuitahes väikesteks kinnisteks osadeks nõnda, et ükski punkt ei kuulu $n+2$ erinevale osale, kuid igasuguse küllalt väikesteks osadeks jagamise puhul leiduvad punktid, mis kuuluvad $n+1$ erinevale osale.

Sealjuures ei tohi osad, milleks kujund jaotatakse, olla ükskõik missugused, nende täiendid peavad olema lahtised hulgad (niisuguseid osi nimetataksegi kinnisteks).

Seda dimensioonilisuse definitsiooni kasutades tõestas



Joon. 52.

Urõsson, et ruudu dimensioonilisus on kaks, kuubi oma kolm jne. Ja siis näitas ta, et see definitsioon on ekvivalentne esialgselt antuga.

Urõssoni loodud dimensioonilisuse teooria avaldas kogu matemaatikamaailmale sügavat muljet. Sellest räägib ilmekalt järgmine juhtum. Välismaisel komandeeringul pidas Urõsson oma tulemuste üle loengu Göttingenis. Kuni fašistide võimulepääsemiseni oli Göttingeni ülikool üks tähtsamaid matemaatikakeskusi. Pärast loengut ütles Göttingeni matemaatikakoolkonna kuulus juht David Hilbert, et need tulemused on vaja avaldada ajakirjas «Mathematische Annalen», tolle aja üks tähtsamaid matemaatikaajakirju. Mõne kuu pärast pidas Urõsson jälle Göttingenis loengu ning Hilbert küsis «Mathematische Annalen» toimetaja Richard Courant'i käest, kas Urõssoni töö on juba avaldatud. See vastas, et töö on retsenseerimisel. «Kuid ma ju ütlesin selgesti, et tööd pole vaja mitte retsenseerida, vaid ta tuleb trükkida!» hüüatas Hilbert. Pärast nii ühemõttelist lauset trükiti artikkel otsekohe ära.

Kolm aastat kestis Urõssoni sügavuselt ja pingelt võrratu teaduslik tegevus (selle aja jooksul avaldas ta mitukümmend teaduslikku tööd). Traagiline juhus lõpetas varakult ta elu — 17. augustil 1924. aastal uppus ta tormi ajal Biskaia lahes supeldes. Päev enne surma lõpetas ta järjekordse teadusliku töö.

Pärast P. S. Urõssoni surma jäid järele arvukad mustandid ja avaldamata uurimuste visandid. Tema lähedane sõber (ja paljude tööde kaasautor) Pavel Sergejevitš Aleksandrov jättis mõneks ajaks kõrvale oma uurimused ning toimetas need tööd trükki. Sellega tegi ta Urõssoni uurimistulemused kõikidele matemaatikutele kättesaadavaks. Praegu on dimensioonilisuse teooria muutunud oluliseks peatükiks matemaatikas.

LÕPPSÕNA

Lõpmatutel hulkadel on kummalised omadused. Neid tundma õppides pidid matemaatikud oma arutlused aina täpsemaks muutma, aina rohkem arendama matemaatilist loogikat. Kaua aega arvati, et hulgateooria ja matemaatiline loogika on abstraktsed teadused, millel pole mingeid praktilisi rakendusi. Ent kui loodi elektronarvutid, siis selgus, et programmeerimine on nendel masinatel rajatud matemaatilisele loogikale, ja paljud uurimused, mis näisid olevat eluvõõrad, omandasid väga suure praktilise tähtsuse. (Nõnda juhtub teaduse ajaloos sageli. Alles meie sajandi kolmekümnendate aastate algul kirjutati ühes raamatus: «Uraanil ei ole praktilist tähtsust.»)

Tänapäeval on hulgateooria mitme matemaatikaharu aluseks (näiteks funktsionaalanalüüs, topoloogia, üldine algebra jne.). Sügavad uurimused on teoksil ka hulgateoorias endas. Need on ühenduses matemaatika kõige sügavamate alustega. Uurimused on näidanud, et see «naiivne» arusaamine hulga mõistest, millest siin raamatus on räägitud, pole kaugeltki mitte alati küllaldane, et hulga mõistet on vaja aksiomatiseerida. Kuid need tööd ulatuvad kaugele välja kavatsetud raamatu piiridest.

NÄITED JA HARJUTUSED

1. Hulk A koosneb neljaga jaguvatest täisarvudest, hulk B kümnega jaguvatest täisarvudest ja hulk C 75-jaguvatest täisarvudest. Missugustest arvudest koosneb hulk ABC?

2. Raamatukogus on raamatuid mitmesuguste teaduste ja kunstide alalt. Tähistame raamatukogu kõigi raamatute hulga A-ga ja kõigi matemaatika-alaste raamatute hulga (mitte ainult selles raamatukogus) B-ga. Iseloomustage hulka $A-B$.

3. Hulkade algebra reegleid rakendades lihtsustage avaldis

$$(A+B+C)(A+B)-[A+(B-C)]A.$$

4. Millega võrdub kardinaalarv $2^{\aleph^0}\mathfrak{c}+\aleph_0\mathfrak{c}$?

5. Seadke üksühesesse vastavusse lõigu $[0,1]$ ja vahemiku $(0,1)$ (s. t. lõigu, mille otspunktid 0 ja 1 on ära jäetud) punktid.

6. Tõestage, et tasandi punktid, millel mõlemad koordinaadid on ratsionaalarvud, moodustavad loenduva hulga.

7. Tõestage, et tasandil ei ole võimalik konstrueerida mitte rohkem kui loenduv hulk paarikaupa mittelõikuvaid ringjooni.

8. Konstrueerida tasandil paarikaupa mittelõikuvate ringjoonte kontiinuum.

9. Tõestada, et tasandil ei ole võimalik konstrueerida rohkem kui loenduv hulk paarikaupa mittelõikuvaid kaheksaid.

10. Tõestada, et tasandil ei ole võimalik konstrueerida rohkem kui loenduv hulk T-tähe kujulisi jooni.

11. Nummerdame ära lõigu $[0,1]$ kõik ratsionaalsed punktid. Saame punktide $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ jada. Konst-

rueerime punkti r_1 ümbruse raadiusega $\frac{1}{10}$, punkti r_2 ümbruse raadiusega $\frac{1}{20}$, punkti r_3 ümbruse raadiusega $\frac{1}{40}$ jne. Ühendame kõik konstrueeritud ümbrused. Kas langeb saadud hulk M kokku kogu lõiguga?

12. Olgu ratsionaalsed punktid nõnda ära nummerdatud, nagu näidatud lk. 45. Näidake ära üks punkt, mis ei ole sattunud ülesandes 11 antud hulka M.

13. Nimetame loenduvmõõduliseks kuubiks kõikide niisuguste reaalarvude jadade $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ hulka, mille puhul $0 \leqslant x_n \leqslant 1$. Tõestage, et loenduvmõõdulise kuubi punktide hulgal on kontiinuumi võimsus.

14. Konstrueerige pidev funktsioon, millel on igas lõigus lõpmata palju maksimume ja miinimume.

15. Hulk M koosneb lõigu $[0,1]$ punktidest, mida võib esitada niisuguste kümnendmurdudega, mille ükski kümnendmärk ei võrdu 3 ega 8. Kirjeldage, kuidas saada seda hulka sel teel, et lõigust järjest vahemikke välja jäetakse.

16. Teha sedasama punktide puhul, mille kümnendarenduses ei esine kombinatsioon 38 (siin näidatud järjestuses).

17. Punkti a nimetatakse hulga M kuhjumispunktiks, kui igas tema ümbruses leidub lõpmata palju selle hulga punkte. Tõestage, et Cantori hulga (lk. 81) kõik kuhjumispunktid kuuluvad sellesse hulka. Tõestage ka ümberpöördut — Cantori hulga iga punkt on tema jaoks kuhjumispunkt. Tehke sama 15. ja 16. näites esinevate hulkade puhul.

18. Tõestage, et lõigu $[0,1]$ iga punkt on kuhjumispunkt kõikide niisuguste ratsionaalarvude hulga jaoks, kus $0 \leqslant r \leqslant 1$ ...

19. Kas täisarvude hulgas esineb kuhjumispunkte?

20. Tõestage, et iga lahtise tasandilise hulga täiend sisaldab kõiki oma kuhjumispunkte.

21. Tõestage, et kui hulk sisaldab kõiki oma kuhjumispunkte, siis tema täiend on lahtine hulk.

SISUKORD

Наум Яковлевич Виленкин. РАССКАЗЫ О МНОЖЕСТВАХ. На эстонском языке. Оформление Ю. Аррак. Издательство «Валгус». Таллин, Пярнуское шоссе, 10.

*

Toimetaja H. Heinoja. Kunstiline toimetaja A. Säde. Tehniline toimetaja A. Muna. Korrektorid H. Peel ja E. Bitter. Laduda antud 11. VII 1967. Trükkida antud 25. VII 1968. Paber 54×84/16. Trükipaber nr. 2 — Kohila Paberivabrik. Trükipoognaid 8. Tingtrükipoognaid 6,72. Arvestuspoognaid 6,18. Trükiarv 5000. Tellimise nr. 4503. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. I.

Hind 19 kop.

19 kop.

40 —