Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Rasmus Erlemann

Riemanni dzeetafunktsioon

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9EAP)

Juhendaja: Urve Kangro

Tartu 2016

Riemanni dzeetafunktsioon

Bakalaureusetöö
Rasmus Erlemann

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöö eesmärk on uurida Riemanni dzeetafunktsiooni omadusi. Alustame Baseli ülesandest ning põhilistest Riemanni dzeetafunktsiooni omadustest. Töö põhitulemuseks on Riemanni dzeetafunktsiooni funktsionaalvõrrand. Töö lõpus tutvustatakse funktsiooni nullkohti ning Riemanni hüpoteesi.

CERCS teaduseriala: P140 Read, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.
Märksõnad: Kompleksmuutuja funktsioonid, read.

Riemann Zeta Function

Bachelor's Thesis
Rasmus Erlemann

Abstract. The purpose of this Bachelor's thesis is to explore properties of the Riemann zeta function. We start by introducing the Basel problem and some fundamental properties of the Riemann zeta function. The main result of the thesis is the Riemann zeta function's functional equation. At the end of the thesis we touch on zeros of the Riemann zeta function and the Riemann hypothesis.

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.
Keywords: Complex functions, series.

Sisukord

Sissejuhatus

Riemanni dzeetafunktsioon on oluline erifunktsioon, mis on leidnud laialdast kasutust matemaatikas ja füüsikas. Funktsiooni käitumine nii reaalarvulise, kui ka kompleksarvulise muutuja korral on tänapäevani suuresti teadmata. Seetõttu on dzeetafunktsioon aluseks mitmetele laialt tuntud lahendamata probleemidele.

Töö eesmärgiks on anda elementaarne ülevaade Riemanni dzeetafunktsioonist. Käesolev töö on peamiselt referaadi vormis ning käsitleb lihtsamaid dzeetafunktsiooni omadusi ja annab lühida ülevaate käsitletava valdkonnaga seotud lahendamata probleemidest.

Töö koosneb neljast peatükist.
Esimeses tutvustatakse vajalikke eelteadmisi, mida on vaja, et mõista järgnevas neljas peatükis saadud tulemusi. Vajaminevad teadmised kuuluvad algebra, arvuteooria, kompleksmuutuja funktsiooniteooria ja matemaatilise analüüsi valdkonda.
Teises peatükis uuritakse Riemanni dzeetafunktsiooni käitumist argumendi korral, mille reaalosa on suurem ühest. Peatükis antakse Riemanni dzeetafunktsiooni definitsioon ja tutvustatakse selle omadusi.
Kolmandas peatükis uuritakse Riemanni dzeetafunktsiooni käitumist tervel kompleksitasandil välja arvatud punktis. Peatüki põhitulemus on funktsionaalvõrrandi esitus koos tõestusega.
Neljandas peatükis sõnastatakse Riemanni hüpotees, tutvustatakse selle ajalugu ning antakse lühitutvustus nullkohtadest.

Põhiline kasutatud kirjandus töös on E. C. Titchmarch'i õpik pealkirjaga *The Theory of the Riemann Zeta-Function.*

Peatükk 1

Vajalikud eelteadmised ja abitulemused

Märkus 1.1. Erinevalt traditsioonilisest kompleksmuutuja tähistusest z, tähistas Riemann dzeetafunktsiooni kompleksmuutujat tähega s. See tähistusviis sai alguse teosest [Rie].

Definitsioon 1.2. Funktsiooni $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nimetatakse **analüütiliseks** punktis $z \in \mathbb{C}$, kui f on arendatav astmeritta punkti z mingis ümbruses.

Definitsioon 1.3. Olgu funktsioonid f ja g analüütilised vastavalt piirkondades D ja G ning $D \cap G \neq \emptyset$. Olgu $f(z) = g(z)\ \forall z \in D \cap G$. **Analüütiliseks jätkamiseks** nimetatakse f määramist piirkonnas G järgnevalt

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in G.$$

Lause 1.4 (Weierstrassi tunnus). *Kui leidub positiivsete liikmetega arvrida*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

et iga $n \in \mathbb{N}$ ja $z \in Z$ korral kehtib

$$|u_n(z)| \leqslant a_n,$$

siis funktsionaalrida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ koondub ühtlaselt hulgal Z.

Teoreem 1.5 (Maclaurin-Cauchy integraaltunnus). *Positiivsete liikmetega monotoonne arvrida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ koondub siis ja ainult siis, kui mittenegatiivne, pidev ja monotoonselt kahanev funktsioon $f(n) = a_n$ rahuldab tingimust*

$$\int_1^{\infty} f(x)dx < \infty.$$

Definitsioon 1.6. Integreeruva funktsiooni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **Fourier' teisenduseks** nimetatakse funktsiooni $\hat{f}$, mis avaldub järgnevalt

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx,$$

kus $\xi \in \mathbb{R}$.

Definitsioon 1.7. Schwartzi funktsiooniks nimetatakse funktsiooni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, mis on lõpmatu palju kordi diferentseeruv tervel reaalteljel ning iga $n, k \in \mathbb{N}_0$ korral kehtib

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^k f^{(n)}(x) = 0.$$

Valem 1.8 (Poissoni summeerimisvalem). *Kui f on Schwartzi funktsioon, siis kehtib järgmine valem*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k).$$

Poissoni summeerimisvalemi tõestuse leiab [Jia].

Lause 1.9. *Funktsioon $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ avaldub lõpmatu korrutisena järgmiselt*

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

kus $x \in \mathbb{R}$.

Tõestuse lausele 1.9 leiab [Dun] lehekülgedel $11 - 16$.

Teoreem 1.10. *Funktsionaalrida*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

kus $n^s = e^{s \ln n}$, koondub $Re(s) > 0$ korral, kui leidub T, et kehtib

$$\left| \sum_{t=n}^{n+k} a_t \right| \leqslant T,$$

iga $n, k \in \mathbb{N}$ korral.

Tõestuse lausele 1.10 leiab [Cla] leheküljel 12.

Definitsioon 1.11. Punkti z_0 nimetatakse funktsiooni f **iseäraseks punktiks**, kui f pole regulaarne, ehk diferentseeruv punktis z_0.

Definitsioon 1.12. Iseärast punkti z_0 nimetatakse funktsiooni f **kõrvaldatavaks iseäraseks punktiks**, kui leidub lõplik piirväärtus $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Definitsioon 1.13. Iseärast punkti z_0 nimetatakse funktsiooni f **pooluseks**, kui $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Definitsioon 1.14. Funktsiooni f **resiidiks** funktsiooni isoleeritud iseärases punktis a nimetatakse suurust

$$\operatorname{Res}[f(z);a] = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz,$$

kus γ on punkti a sellise ümbruse raja, mis ei sisalda teisi funktsiooni iseäraseid punkte.

Lause 1.15 (Weierstrassi koonduvustunnus). *Olgu $g : [c,\infty] \to \mathbb{R}$ selline ühe muutuja funktsioon, et päratu integraal $\int_c^\infty g(t)dt$ koondub. Kui*

$$|f(x,t)| \leqslant g(t) \quad \text{iga } x \in [a,b] \text{ ja } t \in [c,\infty) \text{ korral,}$$

siis päratu integraal $\int_c^\infty f(x,t)dt$ koondub ühtlaselt lõigus $[a,b]$.

Tõestuse lausele 1.15 leiab [LZ] leheküljel 135.

Teoreem 1.16 (Päratu parameetrist sõltuva integraali diferentseeruvus). *Olgu f ja tema osatuletis $\frac{\partial f}{\partial x}$ kahe muutuja funktsioonid hulgas D ning koondugu integraal $\int_c^\infty f(x,t)dt$ punktiviisi lõigus $[a,b]$. Kui integraal $\int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ koondub ühtlaselt lõigus $[a,b]$, siis funktsioon $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidevalt diferentseeruv ja kehtib Leibnizi valem*

$$F'(x) = \int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Tõestuse lausele 1.16 leiab [LZ] leheküljel 137.

Lause 1.17. *Funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$f(t) = e^{-t^2\pi x}$$

on Schwartzi funktsioon.

Tõestus. Esmalt paneme tähele, et funktsioon on lõpmata palju kordi diferentseeruv reaalteljel. Funktsiooni tuletised avalduvad kujul

$$f^{(n)}(t) = P_n(t)e^{-t^2\pi x}.$$

kus P_n on n-ndat järku polünoom. Iga suvalise $n,k \in \mathbb{N}_0$ korral võime kasutada *L'Hospitali* reeglit ning saame tulemuseks

$$\lim_{t\to\pm\infty} t^k f^{(n)}(t) = 0.$$

Järelikult f on Schwartzi funktsioon. ∎

Lause 1.18 (**Monotoonse koondumise teoreem**). *Kui mittekahaneva jada $\{f_n\}$ liikmed on integreeruvad lõigul $[a,b]$ Riemanni mõistes ning kehtib*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

iga $x \in [a,b]$ jaoks, siis kui f on samuti integreeruv lõigul $[a,b]$ Riemanni mõistes, kehtib

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Tõestuse lausele 1.18 leiab [Tho] lehekülgedel $547-550$.

Märkus 1.19. Võttes funktsioonide jadaks rea osasummade jada, saame rakendada lauset 1.18, et näidata

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x)dx,$$

kus $a_n(x) \geqslant 0$ iga $x \in [a,b]$ ja $n \in \mathbb{N}$ korral.

Peatükk 2

Riemanni dzeetafunktsioon piirkonnas $\mathrm{Re}(s) > 1$

Lemma 2.1. *Arvrida* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *koondub, kui* $s \in (1, \infty)$.

Tõestus. Paneme tähele, et funktsioon

$$f(x) = \frac{1}{x^s}$$

rahuldab kõiki Maclaurin-Cauchy integraaltunnuse tingimusi. Kuna iga $s \in (1, \infty)$ korral kehtib

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{(1-s)x^{s-1}} \bigg|_1^k = \frac{1}{1-s},$$

siis Maclaurin-Cauchy integraaltunnuse põhjal arvrida $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ koondub, kui $s \in (1, \infty)$. ■

Lemma 2.2. *Tähistame kompleksarvu* $s = \sigma + it$. *Rida* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *koondub ühtlaselt igal hulgal* $\sigma \in [\sigma_0, \infty)$ *ja* $t \in \mathbb{R}$, *kus* $\sigma_0 \in (1, \infty)$.

Tõestus. Kasutades kolmnurga võrratust, saame

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+it}} \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^{\sigma+it}|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^{\sigma}||n^{it}|}.$$

Võtame arvesse, et kehtib

$$|n^{it}| = |e^{it \ln n}| = 1.$$

Järelikult kehtib

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+it}} \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}}$$

Võttes arvesse lemmat 2.1 ja Weierstrassi koonduvustunnust, saame et rida $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ koondub ühtlaselt, kui $\mathrm{Re}(s) \geqslant \sigma_0 > 1$. ∎

Eelnevad lemmad andsid meile vastuse rea koondumise kohta. See lubab meil defineerida funktsiooni ζ.

Definitsioon 2.3. Funktsiooni $\zeta : \{s\colon \mathrm{Re}(s) > 1,\ s \in \mathbb{C}\} \to \mathbb{C}$, mis on defineeritud järgmiselt

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots, \tag{2.1}$$

nimetatakse **Riemanni dzeetafunktsiooniks**.

Paneme tähele, et ühtlasest koondumisest järeldub lihtsasti Riemanni dzeetafunktsiooni analüütilisus hulgas $\{s\colon s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$, kuna saame rida diferentseerida liikmeti. Järgmine lemma näitab, et Riemanni dzeetafunktsiooni saab defineerida ka läbi lõpmatu korrutise.

Lemma 2.4. *Võrdus* (2.1) *ja*

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

kus $\mathbb{P}$ on kõikide algarvude hulk, on ekvivalentsed Riemanni dzeetafunktsiooni defineerimisel.

Tõestus. Definitsiooni kohaselt

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

Teisendades saame

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots$$

ning

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \dots.$$

Korrates sama teisendust järgemööda kõikide algarvudega, saame

$$\frac{1}{3^s}\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \dots$$

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \dots$$

$$\dots$$

$$\dots\left(1 - \frac{1}{7^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1.$$

Järelikult kehtib

$$\zeta(s) = \prod_{p\in P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

■

2.1 Baseli ülesanne

Aastal 1735 leidis Leonhard Euler rea summa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Selle ülesande püstitas Pietro Mengoli aastal 1644 Baseli ülesande nime all. Ülesandeks oli leida rea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ summa. Järgneb Euleri poolt esitatud rea summa tõestus.

Tõestus. Arendame funktsiooni $p(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ Maclaurini ritta

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}. \tag{2.2}$$

Funktsiooni p nullkohad on $x = \pm k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Kasutades lauset 1.9, avaldub funktsioon p nullkohtade järgi järgmiselt

$$p(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{n\pi}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right). \tag{2.3}$$

Paneme tähele, et kehtib

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \sum_{t=1}^{n} \frac{x^2}{\pi^2 t^2} + \sum_{v=2}^{n} \frac{x^4}{2^2\pi^4 v^2} - \sum_{w=3}^{n} \frac{x^6}{2^2 3^2 \pi^2 w^2} + \dots\right) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} \sum_{t=1}^{n} \frac{x^2}{\pi^2 t^2} + \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{v=2}^{n} \frac{x^4}{2^2\pi^4 v^2} - \sum_{w=3}^{n} \frac{x^6}{2^2 3^2 \pi^2 w^2} + \dots\right).\end{aligned}$$

Viimane võrdus on põhjendatud sellega, et võrduse vasakul pool on lõplik piirväärtus iga $x \in \mathbb{R}$ korral ja rida

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{x^2}{\pi^2 t^2}$$

koondub. Järelikult on piirväärtus summast piirväärtuste summa. Kasutades valemit (2.2) saame võrduse

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \sum_{t=1}^{\infty} \frac{x^2}{\pi^2 t^2} + \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{v=2}^{n} \frac{x^4}{2^2\pi^4 v^2} - \sum_{w=3}^{n} \frac{x^6}{2^2 3^2 \pi^2 w^2} + \dots\right).$$

Võrduse kehtimiseks iga $x \in \mathbb{R}$ korral, peavad x^2 kordajad olema võrdsed, ehk

$$-\frac{1}{3!} = -\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 t^2}.$$

Pärast teisendamist saame tulemuseks

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

■

Järgneb alternatiivne tõestus Baseli probleemile, mis kasutab sobiva funktsiooni Fourier' ritta arendust. Selle väljatoomise põhjuseks on erinev lähenemisviis tõestuses.

Tõestus. Arendame funktsiooni $f(x) = x^2$ Fourier' ritta piirkonnas $[-\pi, \pi]$. Teame, et

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right],$$

kus konstandid avalduvad vastavalt

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}\ , \ n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = 0\ , \ n \in \mathbb{N}.$$

Järelikult

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)\right).$$

Võttes arvesse, et $f(\pi) = \pi^2$, saame

$$\begin{aligned} \pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(n\pi)\right) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n (-1)^n \frac{1}{n^2}\right) \qquad (2.4) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Teisendades (2.4) on tulemuseks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}.$$

■

2.2 Paarisarvulise argumendiga Riemanni dzeetafunktsioon

Loomulik jätk Baseli probleemile on uurida Riemanni dzeetafunktsiooni teiste positiivsete paarisarvuliste väärtuste korral. Esmalt, defineerime Bernoulli arvud genereeriva funktsiooni kaudu.

Definitsioon 2.5. Esimene **Bernoulli arv** on $B_0 = 1$. Järgnevad avalduvad eksponentsiaalse genereeriva funktsiooni kaudu

$$\frac{x}{e^x - 1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}.$$

Näide 2.6. Esimesed 9 Bernoulli arvu on

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 & B_1 &= -\frac{1}{2} \\ B_2 &= \frac{1}{6} & B_3 &= 0 \\ B_4 &= -\frac{1}{30} & B_5 &= 0 \\ B_6 &= \frac{1}{42} & B_7 &= 0. \end{aligned}$$

Lemma 2.7. *Kõik ühest suuremad paaritud Bernoulli arvud on nullid, ehk $k \in \mathbb{N}$ korral kehtib*

$$B_{2k+1} = 0.$$

Tõestus. Definitsiooni kohaselt kehtib

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} \Leftrightarrow \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}.$$

Paneme tähele, et võrduse vasakul pool on paarisfunktsioon

$$\frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2} = \frac{2t + t(e^t - 1)}{2(e^t - 1)} = \frac{t}{2} \frac{e^t + 1}{e^t - 1} = \frac{t}{2} \frac{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}},$$

$$\frac{-t}{e^{-t} - 1} + \frac{-t}{2} = -\frac{2t + t(e^{-t} - 1)}{2(e^{-t} - 1)} = -\frac{t}{2} \frac{e^{-t} + 1}{e^{-t} - 1} = \frac{t}{2} \frac{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}}.$$

Järelikult kehtib $B_k = (-1)^k B_k$, kui $k \neq 1$ ning sellest järeldub, et $B_{2k+1} = 0$, kui $k \in \mathbb{N}$. ∎

Lause 2.8. *Paarisarvulise argumendiga Riemanni dzeetafunktsiooni väärtused avalduvad järgmiselt*

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} B_{2k} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!}, \quad k \in \mathbb{N},$$

kus B_{2k} on Bernoulli number.

Tõestus. Kasutades lauset 1.9, saame võrduse

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Tehes muutujavahetuse $x = -\frac{iu}{2}$, fikseerides $u \in (-2\pi, 0) \cup (0, 2\pi)$ ja võttes naturaallogaritmi mõlemast võrduse poolest, saame järgmise võrduse

$$\ln\left(\sin\left(-\frac{iu}{2}\right)\right) = \ln\left(-\frac{iu}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{u^2}{4k^2\pi^2}\right). \tag{2.5}$$

Kuna funktsionaalrida võrduses (2.5) koondub punktiviisi vaadeldavas piirkonnas $u \in (-2\pi, 0) \cup (0, 2\pi)$, funktsionaalrida tuletistest

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \ln\left(1 + \frac{u^2}{4k^2\pi^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2u}{4k^2\pi^2 + u^2},$$

koondub ühtlaselt samas vahemikus, seetõttu on liikmeti diferentseerimine põhjendatud. Seetõttu saame võrduse (2.5) mõlemaid pooli diferentseerida ning tulemuseks on

$$\left(-\frac{i}{2}\right) \frac{\cos(-\frac{iu}{2})}{\sin(-\frac{iu}{2})} = \frac{1}{u} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2u}{4k^2\pi^2 + u^2}. \tag{2.6}$$

Kasutades omadusi

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

ja

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}),$$

saame teisendada võrduse (2.6) vasakut poolt järgmiselt

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{i}{2}\right) \frac{\cos(-\frac{iu}{2})}{\sin(-\frac{iu}{2})} &= \left(-\frac{i}{2}\right) \frac{\frac{e^{-u/2} + e^{u/2}}{2}}{\frac{-e^{-u/2} + e^{u/2}}{2i}} \\
&= \frac{e^{-u/2} + e^{u/2}}{2(-e^{-u/2} + e^{u/2})} \\
&= \frac{e^{-u/2}(-1 + e^u + 2)}{2e^{-u/2}(-1 + e^u)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{e^u - 1}.
\end{aligned}$$

Asendades saadu tagasi võrdusesse (2.6), saame

$$\frac{u}{e^u-1}+\frac{u}{2}-1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2u^2}{4k^2\pi^2+u^2}. \tag{2.7}$$

Võrduse vasaku poole teisendamisest järeldub

$$\begin{aligned}\frac{u}{e^u-1}+\frac{u}{2}-1&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k u^k}{k!}+\frac{u}{2}-1\\&=1-\frac{u}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k u^k}{k!}+\frac{u}{2}-1\\&=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k u^k}{k!}\end{aligned}$$

Teame lemma 2.7 põhjal, et paaritud Bernoulli arvud on nullid. Järelikult avaldub eelnevalt leitud rida järgmiselt

$$\frac{u}{e^u-1}+\frac{u}{2}-1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}u^{2k}}{(2k)!}.$$

Võttes vaatluse alla võrduse (2.7) parema poole, saame

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2u^2}{4k^2\pi^2+u^2}&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2u^2}{(2k\pi)^2}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{u}{2k\pi}\right)^2}\right)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2u^2}{(2k\pi)^2}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{u}{2\pi k}\right)^{2j}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}2(-1)^j\left(\frac{u}{2\pi k}\right)^{2j+2}.\end{aligned}$$

Kuna me fikseerisime $u\in(-2\pi,0)\cup(0,2\pi)$, siis rida $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}2(-1)^j\left(\frac{u}{2\pi k}\right)^{2j+2}$ koondub absoluutselt ning me võime summeerimise järjekorda vahetada

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2u^2}{4k^2\pi^2+u^2}&=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}2(-1)^{j-1}\left(\frac{u}{2\pi k}\right)^{2j}\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{j-1}}{(2\pi)^{2j}}\left(\frac{1}{k^{2j}}\right)u^{2j}\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{j-1}}{(2\pi)^{2j}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{2j}}\right)u^{2j}\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{j-1}}{(2\pi)^{2j}}\zeta(2j)u^{2j}.\end{aligned}$$

Asendades tagasi, saame

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}u^{2k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k)u^{2k}.$$

Võrduse kehtimiseks peavad vastavate liikmete kordajad võrduma

$$\frac{B_{2k}}{(2k)!}=\frac{2(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k).$$

Avaldades $\zeta(2k)$, saame

$$\zeta(2k)=\frac{(-1)^{k-1}B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}.$$

$\blacksquare$

Järgneb alternatiivne moodus positiivse paarisarvulise argumendi korral Riemanni dzeetafunktsiooni väärtuste leidmiseks. Selle keskne idee seisneb sobiva funktsiooni Fourier' ritta arendamises.

Arendame funktsiooni $f(x)=x^{2p}$, kus $p\in\mathbb{N}$, Fourier' ritta piirkonnas $[-\pi,\pi]$. Selleks tuleb leida funktsiooni $f(x)$ Fourier' rea kordajad a_0, a_n ning b_n. Need on

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^{2p}dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^{2p+1}}{2p+1}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\pi^{2p}}{2p+1},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^{2p}\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^{2p}\cos(nx)dx,\quad n\in\mathbb{N},$$

$$b_n=0.$$

Järelikult funktsioon f esitub järgnevalt

$$f(x)=\frac{\pi^{2p}}{2p+1}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\pi}x^{2p}\cos(nx)dx.$$

Võttes arvesse, et $f(\pi)=\pi^{2p}$ saame võrduse

$$\pi^{2p}=\frac{\pi^{2p}}{2p+1}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\pi}x^{2p}\cos(nx)dx. \tag{2.8}$$

Toome sisse tähistuse

$$I_{n,2p}:=\int_0^{\pi}x^{2p}\cos(nx)dx.$$

Kasutades korduvalt ositi integreerimist, avaldub $I_{n,p}$ rekursiivselt

$$I_{n,2p}=\frac{2p}{n^2}\pi^{2p-1}(-1)^n-\frac{2p(2p-1)}{n^2}I_{n,2(p-1)},\quad p\in\mathbb{N}.$$

Kuna $I_{n,0} = 0$, siis kehtib

$$I_{n,2} = \frac{2p}{n^2}\pi^{2p-1}(-1)^n.$$

Pannes tähele, et $I_{n,2p}$ sisaldab tegurit $\frac{1}{n^{2p}}$, saame kasutada seda võrduse (2.8) reas $\zeta(2p)$ arvutamiseks. Selleks, et leida $\zeta(2p)$, peame teadma järgemööda väärtusi $I_{n,0}, I_{n,2}, \ldots, I_{n,2(p-1)}, I_{n,2p}$ koos väärtustega $\zeta(2), \zeta(4), \ldots, \zeta(2(p-1))$. Leitud algoritm lubab meil arvutada $\zeta(2p)$ iga $p \in \mathbb{N}$ jaoks.

Näide 2.9. Kasutades $I_{n,4}$, saab leida $\zeta(4)$ täpse väärtuse. Rakendades eelnevat algoritmi, saame

$$\begin{aligned}
\pi^4 &= \frac{\pi^4}{5} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi)I_{n,4} \\
&= \frac{\pi^4}{5} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi)\left(\frac{4\pi^3}{n^2} - \frac{24\pi}{n^4}\right)\cos(n\pi) \\
&= \frac{\pi^4}{5} + \frac{4\pi^4}{3} - 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.
\end{aligned}$$

Järelikult kehtib

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Näide 2.10. Järgmised neli väärtust avalduvad kujul

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} = 1.0173\ldots \qquad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450} = 1.00407\ldots$$
$$\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555} = 1.000994\ldots \qquad \zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{638512875} = 1.000246\ldots.$$

Näidete põhjal võib arvata, et paarisarvulise argumendi kasvades läheneb Riemanni dzeetafunktsioon väärtusele 1. Järgnev lemma annab sellele vastuse.

Lemma 2.11. *Kehtib järgnev võrdus*

$$\lim_{s\to\infty}\zeta(s) = 1.$$

Tõestus. Kuna ζ on ühtlaselt koonduv lemma 2.2 märgitud poollõikudes, siis saame reast piirväärtust leida liikmeti

$$\lim_{s\to\infty}\zeta(s) = \lim_{s\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{s\to\infty}\frac{1}{n^s} = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1.$$

∎

Peatükk 3

Riemanni dzeetafunktsiooni analüütiline jätk

Eelnevates peatükkides käsitlesime funktsiooni ζ määramispiirkonnaga $\{s : s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$. Esmalt näitame, et seda saab analüütilise jätkamise teel laiendada piirkonnaks $D := \{s : s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 0,\ s \neq 1\}$.

Teoreem 3.1. *Riemanni dzeetafunktsioonil leidub analüütiline jätk hulgale D.*

Tõestus. Esmalt leiame analüütilise jätku hulgale

$$D_1 := \left\{s : s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 0,\ s \neq \frac{2k\pi i}{\ln 2} + 1, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Paneme tähele, et $\mathrm{Re}(s) > 1$ korral kehtib

$$\begin{aligned}
(1 - 2^{1-s})\zeta(s) &= \left(1 - 2\frac{1}{2^s}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^s} \\
&= \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots \qquad (3.1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^s}. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Liidetavate ümberjärjestamine võrduses (3.1) on põhjendatud absoluutse koondumisega. Teame, et rida (3.2) koondub teoreemi 1.10 kohaselt, kui $\mathrm{Re}(s) > 0$. Kuna $f(z) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^s}$ on analüütiline hulgal D_1 ja hulgal $D_2 = \{s : \mathrm{Re}(s) > 1\}$ kehtib $f = \zeta$, siis saame Riemanni dzeetafunktsiooni analüütiliselt jätkata hulgalt D_2 hulgale D_1 funktsiooni f kaudu järgmiselt

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^s}. \qquad (3.3)$$

Järgmiseks näitame, et punktides $\dfrac{2k\pi i}{\ln 2}+1$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ on kõrvaldatavad iseärased punktid. Defineerime funktsiooni

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} - \frac{2}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{2}{6^s} + \dots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3n)^s}.
\end{aligned}$$

Teame, et funktsiooni F määramispiirkond on $\mathrm{Re}(s) > 0$ teoreemi 1.10 põhjal. Paneme tähele, et

$$\zeta(s) - F(z) = \frac{3}{3^s}\zeta(s) \Rightarrow \zeta(s) = \frac{1}{1-3^{1-s}}F(s).$$

Sellega oleme analoogiliselt leidnud funktsiooni ζ analüütilise jätku hulgale

$$D_3 := \left\{ s : s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 0,\ s \neq \frac{2k\pi i}{\ln 3} + 1, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Kuna $D_1 \cap D_3 = \{1\}$, siis leidub Riemanni dzeetafunktsioonil analüütiline jätk hulgale $\mathrm{Re}(s) > 0$, $s \neq 1$. ■

Lemma 3.2. *Riemanni dzeetafunktsioonil on punktis $s = 1$ esimest järku poolus.*

Tõestus. Kasutame rea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^s}$ ühtlast koondumist ning $\ln x$ Taylori rida, et leida piirväärtust

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) &= \lim_{s\to 1}\frac{s-1}{1-2^{1-s}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^s} \\
&= \lim_{s\to 1}\frac{s-1}{1-2^{1-s}}\ln 2 \qquad (3.4)\\
&= \lim_{s\to 1}\frac{1}{2^{1-s}\ln 2}\ln 2 \qquad (3.5)\\
&= 1
\end{aligned}$$

Võrduses (3.4) kasutasime funktsiooni ln Taylori rida ning võrduses (3.5) kasutasime *L'Hospitali* reeglit. Kuna leitud piirväärtus on lõplik, siis saame järeldada, et punktis $s = 1$ on funktsioonil ζ esimest järku poolus. ■

Järgmiseks tuletame Riemanni dzeetafunktsiooni funktsionaalvõrrandi, mis lubab laiendada analüütilise jätkamise teel dzeetafunktsiooni määramispiirkonda laiendada hulgaks $\{s : s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s) \neq 1\}$. Funktsionaalvõrrandi tuletame algupärasel viisil, nagu seda tegi Bernhard Riemann.

Lause 3.3. *Funktsiooni $f(t) = e^{-t^2\pi x}$, kus $x > 0$ on fikseeritud, Fourier' teisendus avaldub kujul*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{\xi^2\pi}{x}}.$$

Tõestus. Esmalt leiame funktsiooni $g(t) = e^{-t^2}$ Fourier' teisenduse. Definitsiooni kohaselt

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e^{-2\pi i \xi y} dy. \tag{3.6}$$

Kuna iga $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\xi \in [a,b]$ ja $y \in \mathbb{R}$ korral kehtib

$$\left| \frac{d}{d\xi} e^{-y^2} e^{-2\pi i \xi y} \right| = |e^{-y^2}(-2\pi i y) e^{-2\pi i \xi y}| = 2\pi |y| e^{-y^2}$$

ning päratu integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi |y| e^{-y^2} dy = 2\pi$$

koondub, siis Weierstrassi koonduvustunnuse põhjal integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\xi} e^{-y^2} e^{-2\pi i \xi y} dy$ koondub ühtlaselt igas vahemikus. Järelikult võime parameetrist sõltuvat päratut integraali (3.6) lause 1.16 põhjal diferentseerida ξ järgi integraali märgi all

$$\frac{d}{d\xi} \hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} (-2\pi i y) e^{-2\pi i \xi y} dy = \pi i \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dy} e^{-y^2} \right) e^{-2\pi i \xi y} dy. \tag{3.7}$$

Leiame integraali (3.7), kasutades ositi integreerimist

$$\frac{d}{d\xi} \hat{g}(\xi) = -2\pi^2 \xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e^{-2\pi i \xi y} dy = -2\pi^2 \xi \hat{g}(\xi),$$

ehk

$$\frac{d}{d\xi} \hat{g}(\xi) + 2\pi^2 \xi \hat{g}(\xi) = 0. \tag{3.8}$$

Diferentsiaalvõrrandi (3.8) lahend on

$$\hat{g}(\xi) = c e^{-\pi^2 \xi^2},$$

kus $c \in \mathbb{R}$. Osates leida Gaussi integraali $\hat{g}(0)$, leiame konstandi c

$$\hat{g}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \Rightarrow c e^{-\pi^2 0^2} = c = \sqrt{\pi}.$$

Sellest järeldame, et

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e^{-2\pi i \xi y} dy = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \xi^2}.$$

Tehes muutujavahetuse $y\sqrt{x\pi} = u$, saame

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2\pi x} e^{-2\pi i \xi y} dy = \frac{1}{\sqrt{x\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} e^{-\frac{2\pi i \xi u}{\sqrt{x\pi}}} du}_{\hat{g}\left(\frac{\xi}{\sqrt{\pi x}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{\pi\xi^2}{x}}.$$

■

Definitsioon 3.4. Gammafunktsioon on defineeritud $\mathrm{Re}(z) > 0$ korral järgmiselt

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Teoreem 3.5. *Riemanni dzeetafunktsiooni saab analüütiliselt jätkata tervele komplekstasandile, välja arvatud punktid $s = 1$ ja $s = 0$. See avaldub läbi järgmise valemi*

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

Tõestus. Kasutame definitsiooni 3.4 ning teeme muutujavahetuse $y = v^2$, saame

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} y^{z-1} e^{-y} dy = 2\int_0^{\infty} e^{-v^2} v^{2z-1} dv.$$

Tehes muutujavahetuse $z = \dfrac{s}{2}$ ja $v^2 = n^2\pi x$, saame

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = n^s \pi^{\frac{s}{2}} \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi x} dx.$$

Summeerides üle $n \in \mathbb{N}$ ning kasutades Riemanni dzeetafunktsiooni definitsiooni, saame $\mathrm{Re}(s) > 1$ korral võrduse

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)}{\pi^{\frac{s}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi x} dx. \tag{3.9}$$

Summamärgiga integraali alla minemine võrduses (3.9) on põhjendatud sellega, et saame seda hinnata reaga $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} x^{\sigma-1} e^{-nx} dx$, mis käitub nagu geomeetrine rida ning koondub $\sigma > 1$ korral. Kuna $s = \sigma + it$ korral kehtib

$$\left|x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi x}\right| = \left|x^{\frac{\sigma}{2}-1+\frac{it}{2}} e^{-n^2\pi x}\right| = x^{\frac{\sigma}{2}-1} e^{-n^2\pi x} < x^{\sigma-1} e^{-nx},$$

kui n on piisavalt suur. Seega lause 1.18 põhjal kehtib võrdus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi x} dx = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} dx.$$

Defineerime funktsiooni

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}.$$

Saame Riemanni dzeetafunktsiooni jaoks $\mathrm{Re}(s) > 1$ korral võrduse

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx. \tag{3.10}$$

Järgmiseks tõestame funktsionaalvõrrandi ψ jaoks. Vaatame funktsiooni $f(n) = e^{-n^2\pi x}$. Teame lause 3.3 põhjal selle funktsiooni Fourier' teisendust, saame

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{x}} + 1\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right).\end{aligned}$$

Lause 1.17 põhjal f rahuldab Poissoni summeerimisvalemi eeldusi. Poissoni summeerimisvalemi kohaselt kehtib seega

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi),$$

millest järeldub võrrand

$$2\psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right),$$

ehk

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}. \tag{3.11}$$

Rakendades tulemust (3.11) võrduses (3.10), saame

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx\\ &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx.\end{aligned}$$

Leiame integraalid

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{\frac{s}{2}-1}}{2}dx &= \frac{1}{s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0,\\ \int_0^1 \frac{x^{\frac{s}{2}-1}}{2\sqrt{x}}dx &= \frac{1}{s-1}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1.\end{aligned}$$

Tehes muutujavahetuse $\dfrac{1}{x} = t$, siis

$$\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\psi\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_1^\infty t^{-\frac{1}{2}(s+1)}\psi(t)dt.$$

Järelikult kehtib

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (x^{-\frac{1}{2}(s+1)} + x^{\frac{s}{2}-1})\psi(x)dx. \tag{3.12}$$

Defineerime funktsiooni

$$g(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (x^{-\frac{1}{2}(s+1)} + x^{\frac{s}{2}-1})\psi(x)dx.$$

Kuna $\mathrm{Re}(s) > 1$ korral kehtib

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (x^{-\frac{1}{2}(s+1)} + x^{\frac{s}{2}-1})\psi(x)dx$$

aga võrduse parem pool on defineeritud tervel komplekstasandil, välja arvatud punktides $s = 1, 0$, saame funktsiooni ζ analüütiliselt jätkata hulgale $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Paneme tähele, et kehtib $g(s) = g(1-s)$, millest järeldub

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}+\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right)\zeta(1-s) \Leftrightarrow \zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}+s}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}\zeta(1-s).$$

Viimaseks kasutame gammafunktsiooni omadusi $\Gamma\left(z + \dfrac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\dfrac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)}$ ja $\Gamma(z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)\Gamma(1-z)}$ ning $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Saame kõikide $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ jaoks tulemuse

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= 2^{1+s}\pi^s\frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(-\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2})}\zeta(1-s) \\
&= 2^{1+s}\pi^{s-1}\frac{\Gamma(-s)\Gamma(1+\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}\sin\left(-\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s) \\
&= 2^{1+s}\pi^{s-1}\frac{\frac{s}{2}\Gamma(-s)\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}\sin\left(-\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s) \\
&= -2^s\pi^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\left(-\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s) \\
&= 2^s\pi^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s).
\end{aligned}$$

■

Teoreem 3.6. *Riemanni dzeetafunktsioon avaldub Re(s) > 0 korral järgmiselt*

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{[x]-x+\frac{1}{2}}{x^{s+1}}dx + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}.$$

Tõestus. Olgu $\phi(x)$ suvaline funktsioon, millel on pidev tuletis vahemikus (a,b). Esmalt näitame, et siis $a,b \in \mathbb{N}$ korral kehtib

$$\sum_{n=a+1}^{b} \phi(n) = \int_a^b \phi(x)dx + \int_a^b \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\phi'(x)dx - \frac{1}{2}\phi(a) + \frac{1}{2}\phi(b). \quad (3.13)$$

Võtame arvesse, et kehtib

$$\begin{aligned}\int_a^b [x]\phi'(x)dx &= \sum_{n=a}^{b-1} n\int_n^{n+1}\phi'(x)dx\\ &= \sum_{n=a}^{b-1} n\left(\phi(n+1)-\phi(n)\right)\\ &= -\sum_{n=a+1}^{b}\phi(n) - a\phi(a) + b\phi(b). \quad (3.14)\end{aligned}$$

$$\int_a^b \left(x-\frac{1}{2}\right)\phi'(x)dx = \left(b-\frac{1}{2}\right)\phi(b) - \left(a-\frac{1}{2}\right)\phi(a) - \int_a^b \phi(x)dx. \quad (3.15)$$

Kasutades tulemusi (3.14) ja (3.15), saame

$$\int_a^b \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\phi'(x)dx = \sum_{n=a+1}^{b}\phi(n) - \int_a^b \phi(x)dx + \frac{1}{2}\phi(a) - \frac{1}{2}\phi(b),$$

millest järeldub tulemus (3.13). Olgu $\phi(n) = n^{-s}$, kus $s \neq 1$ ja $a,b \in \mathbb{N}$. Siis kasutades tulemust (3.13), saame

$$\sum_{n=a+1}^{b}\frac{1}{n^s} = \frac{b^{1-s}-a^{1-s}}{1-s} - s\int_a^b \frac{x-[x]-\frac{1}{2}}{x^{s+1}}dx + \frac{1}{2}(b^{-s}-a^{-s}).$$

Olgu $\mathrm{Re}(s) > 1$ ning võtame $a = 1$ ja $b \to \infty$. Liites võrduse mõlemale poolele 1, saame

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{[x]-x+\frac{1}{2}}{x^{s+1}}dx + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}.$$

Kuna $[x]-x+\dfrac{1}{2}$ on tõkestatud, siis integraal koondub $\mathrm{Re}(s) > 0$ korral ja ühtlaselt koonduv igas kinnises hulgas, mis jääb imaginaarteljest rangelt paremale. Järelikult määrab saadud tulemus analüütilise funktsiooni ning see on võrdne funktsiooniga ζ, kui $\mathrm{Re}(s) > 0$. ∎

Lemma 3.7. *Riemanni dzeetafunktsioonil on punktis $\zeta = 0$ kõrvaldatav katkevuspunkt. Saame defineerida*

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}.$$

Tõestus. Kasutame lauset 3.2 ning tähistame $s := 1 - s$

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = 1 \Leftrightarrow \lim_{s\to 0} s\zeta(1-s) = -1.$$

Kasutades Riemanni dzeetafunktsiooni funktsionaalvõrrandit, saame

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\zeta(s) &= -\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s) \\
&= -\lim_{s\to 0}2^{s-1}\pi^s\frac{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\frac{\pi s}{2}}\Gamma(1-s) && (3.16) \\
&= -\frac{1}{2}. && (3.17)
\end{aligned}$$

Kasutame võrduses (3.16) piirväärtust $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z} = 1$. Tulemusest (3.17) järeldame, et punktis $s = 0$ on Riemanni dzeetafunktsioonil kõrvaldatav katkevuspunkt. Saame selle kõrvaldada ning defineerida $\zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$. ∎

3.1 Triviaalsed nullkohad

Lemma 3.8. *Riemanni dzeetafunktsioonil on nullkohad väärtustel $s \in \{-2, -4, -6, \dots\}$*

Tõestus. Teame, et $\mathrm{Re}(s) < 1$ korral on Riemanni dzeetafunktsioon defineeritud järgmiselt

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

Asendades $s = -2k$, kus $k \in \mathbb{N}$, saame

$$\begin{aligned}
\zeta(-2k) &= 2^{-2k}\pi^{-2k-1}\sin\left(\frac{\pi(-2k)}{2}\right)\Gamma(1+2k)\zeta(1+2k) \\
&= 2^{-2k}\pi^{-2k-1}\sin(-k\pi)\Gamma(1+2k)\zeta(1+2k).
\end{aligned}$$

Kuna $\sin(-k\pi) = 0$, siis

$$\zeta(-2k) = 0.$$

∎

Definitsioon 3.9. Riemanni dzeetafunktsiooni **triviaalseteks nullkohtadeks** nimetatakse nullkohti $s \in \{-2, -4, -6, \dots\}$.

Definitsioon 3.10. Riemanni dzeetafunktsiooni **kriitiliseks ribaks** nimetatakse hulka $\{s :\ \mathrm{Re}(s) \in (0, 1),\ s \in \mathbb{C}\}$.

Lemma 3.11. *Riemanni dzeetafunktsioonil pole mitte-triviaalseid nullkohti väljaspool kriitilist riba.*

Tõestus. $\mathrm{Re}(s) > 1$ korral kehtib

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Kuna kõik teguritest on nullist erinevad, siis ei leidu Riemanni dzeetafunktsioonil nullkohti piirkonnas $\mathrm{Re}(s) > 1$. Funktsionaalvõrrandist järeldub, et ka piirkonnas $\mathrm{Re}(s) < 0$ pole mitte-triviaalseid nullkohti.

$\blacksquare$

Peatükk 4

Riemanni hüpotees

If I were to awaken after having slept for thousand years my first question would be: Has the Riemann hypothesis been proven
-David Hilbert

Bernhard Riemann esitas omanimelise hüpoteesi aastal 1859 ilmunud töös *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.* Seda võib sõnastada järgmiselt: Riemanni dzeetafunktsiooni kõikidel mittetriviaalsetel nullkohtadel on reaalosa 1/2.

Hüpotees on püsinud tänapäevani lahendamata ning see on valitud ka millenniumi ülesannete hulka. Järgnevalt esitame hüpoteesi viisil, nagu seda tegi Riemann aastal 1859. Enne selle sõnastamist, defineerime ksiifunktsiooni, suure ksiifunktsiooni ja teoreemi suure ksiifunktsiooni kuju kohta.

Definitsioon 4.1. Ksiifunktsiooniks nimetatakse funktsiooni

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s),$$

kus $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Definitsioon 4.2. Suureks ksiifunktsiooniks nimetatakse funktsiooni

$$\Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

kus $t \in \mathbb{R}$.

Lemma 4.3. *Suur ksiifunktsioon avaldub järgmisel kujul*

$$\Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = 4\int_1^\infty \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)x^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{t}{2}\ln x\right)dx.$$

Tõestus. Kasutame funktsionaalvõrrandi tõestusest saadud tulemust (3.12)

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (x^{-\frac{1}{2}(s+1)} + x^{\frac{s}{2}-1})\psi(x)dx, \tag{4.1}$$

kus $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$. Korrutades võrduse mõlemat poolt funktsiooniga $\frac{1}{2}s(s-1)$, saame avaldada võrdusest (4.1) ksiifunktsioonile järgneva kuju

$$\xi(s) = \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2}\int_1^{\infty} \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{1-s}{2}-1}\right)dx$$

Järgmiseks, kasutameositi integreerimist

$$\xi(s) = \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2}\left(\psi'(x)\left(\frac{2x^{\frac{s}{2}}}{s} + \frac{2x^{\frac{1-s}{2}}}{1-s}\right)\Bigg|_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \psi'(x)\left(\frac{2x^{\frac{s}{2}}}{s} + \frac{2x^{\frac{1-s}{2}}}{1-s}\right)dx\right).$$

Kuna $x > 0$ korral ψ kahaneb eksponentsiaalselt, siis kehtib $\lim_{l\to\infty} \psi(l)\left(\frac{2l^{\frac{s}{2}}}{s} + \frac{2l^{\frac{1-s}{2}}}{1-s}\right) = 0$ ning

$$\begin{aligned}\xi(s) &= \frac{1}{2} + \frac{s(1-s)}{2}\psi(1)\left(\frac{2}{s} + \frac{2}{1-s}\right) + \int_1^{\infty} \psi'(x)\left((1-s)x^{\frac{s}{2}} + sx^{\frac{1-s}{2}}\right)dx \\ &= \frac{1}{2} + \psi(1) + \int_1^{\infty} x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\left((1-s)x^{\frac{s-1}{2}-1} + sx^{-\frac{s}{2}-1}\right)dx.\end{aligned}$$

Kasutame ositi integreerimist, saame

$$\begin{aligned}\xi(s) = \frac{1}{2} + \psi(1) + x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\left(-2x^{\frac{s-1}{2}} - 2x^{-\frac{s}{2}}\right)\Bigg|_1^{\infty} - \\ - \int_1^{\infty} \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)\left(-2x^{\frac{s-1}{2}} - 2x^{-\frac{s}{2}}\right)dx.\end{aligned}$$

kui $x > 0$, siis ψ' kahaneb eksponentsiaalselt ning $\lim_{l\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\psi'(l)\left(-2x^{\frac{s-1}{2}} - 2x^{-\frac{s}{2}}\right) = 0$. Saame ksiifunktsiooni jaoks järgneva kuju

$$\xi(s) = \frac{1}{2} + \psi(1) - \psi'(1)(-2-2) + \int_1^{\infty} \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)\left(2x^{\frac{s-1}{2}} + 2x^{-\frac{s}{2}}\right)dx. \tag{4.2}$$

Diferentseerides võrdust

$$2\psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right),$$

ning võttes $x = 1$, saame võrduse

$$\frac{1}{2} + \psi(1) + 4\psi'(1) = 0. \tag{4.3}$$

Kasutades tulemust (4.3) võrduses (4.2), saame

$$\begin{aligned}\xi\,(s) &= \int_1^{\infty} \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)4\left(\frac{x^{\frac{s-1}{2}}}{2} + \frac{x^{-\frac{s}{2}}}{2}\right)dx \\ &= 4\int_1^{\infty} \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)x^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{2}\right)}}{2} + \frac{x^{-\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{2}\right)}}{2}\right)dx \\ &= 4\int_1^{\infty} \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)x^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\exp\left(\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{2}\right)\ln x\right) + \exp\left(-\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{2}\right)\ln x\right)}{2}\right)dx\end{aligned}$$

Fikseerides $s = \dfrac{1}{2}+it$ ning kasutades funktsiooni Ξ definitsiooni, saame soovitud tulemuse

$$\xi\left(\frac{1}{2}+it\right) = \Xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)x^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{t}{2}\ln x\right)dx.$$

$\blacksquare$

Riemanni hüpoteesi sõnastus algupärasel viisil on: Funktsiooni Ξ kõik nullkohad on reaalsed. See on samaväärne peatüki alguses esitatud sõnastusega.

Järgmiseks sõnastame Hardy teoreemi. Seda peetakse üheks olulisemaks edusammuks Riemanni hüpoteesi tõestamisel. Teoreem ei anna vastust Riemanni dzeetafunktsiooni nullkohtade paiknemise kohta, vaid väidab, et mittetriviaalseid nullkohti on lõpmatu palju.

Teoreem 4.4 (**Hardy teoreem**). *Riemanni dzeetafunktsioonil on lõpmatu palju nullkohti reaalosaga* $1/2$.

Hardy teoreemi tõestuse leiab [Tit] lehekülgedel $214 - 221$.

Kirjandus

[Cla] Pete L. Clark, *Dirichlet Series*
math.uga.edu/~pete/4400dirichlet.pdf

[DM] R. J. Dwilewicz, J. Minac *Values of the Riemann zeta function at integers*, 2009
www.mat.uab.cat/matmat/PDFv2009/v2009n06.pdf

[Dun] Steven R. Dunbar, *Topics in Probability Theory and Stochastic Processes, Wallis' Formula*, 2009
https://www.math.unl.edu/~sdunbar1/ProbabilityTheory/Lessons/StirlingsFormula/WallisFormula/wallisformula.pdf

[Edw] Harold M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, 2001

[Jia] Zilin Jiang, *Poisson Summation Formula and Basel Problem*, 2014
http://www.libragold.com/blog/2014/12/poisson-summation-formula-and-basel-problem/

[Kan] Urve Kangro, *Kompleksmuutuja funktsioonide teooria lühikonspekt*, 2016

[LZ] Toivo Leiger, täiendused Indrek Zolk, *Matemaatiline analüüs IV*, 2014

[Rie] B. Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, 1859, tõlkinud inglise keelde David R. Wilkins
www.claymath.org/sites/default/files/zeta.pdf

[Tho] Brian S. Thomson, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 117, 2010

[Tit] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford, 1951

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Rasmus Erlemann, annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose Riemanni dzeetafunktsioon, mille juhendaja on Urve Kangro,

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus 12.05.2016.