



TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

L. KIVISTIK

VARIATSIOONARVUTUS

TARTU  1965

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Algebra ja geomeetria kateeder

L. KIVISTIK

VARIATSIOONARVUTUS

TARTU 1965

S I S U K O R D

EESSÕNA	7
I. FUNKTSIONAALID JA NENDE EKSTREEMUMID.....	9
§ 1. Funktsionaalruumid	9
1. Lineaarne normeeritud ruum	9
2. Funktsionaalruumide näiteid	10
§ 2. Funktsionaalide ja variatsioonülesannete näiteid	13
1. Funktsionaal ja tema määramispiirkond	13
2. Variatsioonülesannete näiteid	14
§ 3. Funktsionaali ekstreemumid.....	17
§ 4. Funktsionaali variatsioon	20
1. Funktsionaali pidevus ja lineaarsus	20
2. Variatsiooni definitsioon.....	22
3. Variatsiooni leidmise näiteid.....	25
4. Funktsionaali ekstreemumi tarvilik tingimus	28
§ 5. Funktsionaali teine variatsioon	29
1. Bilineaarne funktsionaal.....	29
2. Teine variatsioon	30
3. Ekstreemumi tingimused teise variatsiooni kaudu	32
II. VARIATSIOONÜLESANDED FIKSEERITUD RAJAPUNKTIDE KORRAL	35
§ 6. Variatsioonarvutuse põhilemmad.....	35
1. Lagrange'i lemma	35
2. Du Bois Raymond'i lemma.....	36
3. Lemma 3.....	37
§ 7. Variatsioonarvutuse lihtsaim ülesanne. Euleri võrrand.....	38
1. Ülesande formuleering ja Euleri võrrandi tuletamine.....	38
2. Teise tuletise olemasolu ja pidevus	40
3. Näide.....	41

§ 8. Euleri võrrandi lihtsalt integreeruvaid erijuhte. Brahhistikrooniprobleemi lahendus.....	42
1. Funktsioon f ei sõltu argumentidest y'	42
2. Funktsioon f sõltub argumentidest y' lineaarselt.....	42
3. Funktsioon f ei sõltu otseselt argumentidest x ja y	43
4. Funktsioon f ei sõltu otseselt argumentidest y ..	44
5. Funktsioon f ei sõltu otseselt argumentidest x ..	44
6. Näide	45
III. VARIATSIOONÜLESANDED FIKSEERIMATA RAJAPUNKTIDE KORRAL JA NEILE TAANDUVAD ÜLESANDED.....	
§ 9. Lihtsaima variatsioonülesande üldistus fikseerimata rajapunktide juhule	47
1. Ekstreemumi tarvilik tingimus.....	47
2. Juhtum, kus lubatavate kõverate otspunktid asuvad vertikaalsirgetel.....	48
3. Kitsendusteta juhtum	50
4. Transversaalsuse tingimus.....	55
§ 10. Nurgapunktidega ekstremaalid	58
1. Probleemi seade	58
2. Nurgapunktidega ekstremaalide olemasolu tingimused.....	60
3. Näiteid	61
4. Ekstremaalide "peegeldumine" etteantud kõveral	64
IV. EKSTREEMUMI PIISAVAD TINGIMUSED.....	
§ 11. Ekstremaalide väli	67
1. Välja mõiste	67
2. Jacobi tingimus	70
§ 12. Ekstreemumi piisavad tingimused	75
1. Weierstrassi E-funktsioon	75
2. Legendre'i tingimus. Ülevaade piisavatest tingimustest.....	82
3. Legendre'i ja Jacobi tingimused ning teise variatsiooni positiivne määratus	87

V. LIHTSAIMA VARIATSIOONÜLESANDE ÜLDISTUSI.....	91
√ § 13. Mitmest funktsioonist sõltuv funktsionaal	91
§ 14. Variatsioonprintsip mehhaanikas.....	93
§ 15. Kõrgemat järku tuletistest sõltuv funktsionaal	97
§ 16. Kordsete integraalide ekstreemumid	99
§ 17. Variatsioonülesanded parameetrilisel kujul.....	103
VI. LISATINGIMUSTEGA VARIATSIOONÜLESANDED	106
§ 18. Lagrange'i ülesanne	106
§ 19. Isoperimeetrilised ülesanded	110
1. Tarviliku tingimuse tuletamine	110
2. Duaalsuse printsip	113
VII. VARIATSIOONARVUTUSE OTSESED MEETODID	114
§ 20. Otseste meetodite mõiste ja põhiidee	114
§ 21. Euleri diferentsmeetod	117
§ 22. Ritzi meetod	120
§ 23. Kantorovitši meetod	125
§ 24. Variatsioonmeetodite rakendamine diferentsiaal- võrrandite lahendamiseks	127
HARJUTUSÜLESANDED	132
KIRJANDUS	142
AINEREGISTER	143

E E S S Ū N A

Variatsioonarvutus on matemaatika haru, mille sisu moodustavad mitmesuguste funktsionaalide ekstreemumkohtade leidmise meetodid. Funktsionaali ekstreemumkohtade leidmise ülesannet nimetatakse variatsioonülesandeks. Esimese üldist huvi äratanud variatsioonülesande, nn. brahhistokrooni probleemi tõstis üles Johann Bernoulli 1696.aastal. Iseseisvaks distsipliiniks muutus variatsioonarvutus aga pärast Leonhard Euleri (1707-1783) töid. Eulerit loetaksegi variatsioonarvutuse loojaks. Variatsioonarvutuse areng on seotud J.L. Lagrange'i, M.V. Ostrogradski, S.D. Poissoni, C.F. Gaussi, A.M. Legendre'i, K.G.J. Jacobi, K. Th.W. Weierstrassi, D. Hilberti ja teiste nimekate matemaatikute töödega. Oma osa variatsioonarvutuse arengusse on andnud nõukogude matemaatikud L.A. Ljusternik, I.G. Petrovski, M.A. Lavrentjev, N.N. Bogoljubov, M.N. Krõlov ja paljud teised.

Variatsioonülesandeid esineb geomeetrilistes probleemides, füüsikas, mehhaanikas, tehnikas. Mehhaanika ja füüsika mitmed põhiprintsiibid formuleeritakse variatsioonprintsipiidena. Variatsioonarvutuse otsuste meetodite abil saab edukalt lahendada paljusid rakendustes tähtsaid ülesandeid, mis taanduvad diferentsiaalvõrranditele või nende süsteemidele, sealhulgas optimaalse reguleerimise ülesandeid. Üeldust selgub, et variatsioonarvutuse rakenduslik tähtsus on üsna suur.

Variatsioonarvutuse areng valmistas ette funktsionaalanalüüsi tekkimise. Kaasajal loetakse variatsioonarvutust funktsionaalanalüüsi üheks haruks, sealjuures haruks, mis kujunes välja ajalooliselt esimesena. Enamikus, eriti varasemates õpikutes ei viidata variatsioonarvutuse seosele funktsionaalanalüüsiga. Alles viimasel ajal on ilmunud paar õpikut

([3, 6]), kus variatsioonarvutuse kursust püütakse üles ehitada funktsionaalanalüüsi mõistete abil. Ka käesolevas kursuses kasutatakse, eriti alguses, funktsionaalanalüüsi aparatuuri, mis võimaldab mõningaid küsimusi käsitleda suvaliste funktsionaalide korral.

Selleks, et käesolevat õppevahendit saaksid kasutada ka need lugejad, kes pole varem funktsionaalanalüüsiga tutvunud, on I peatükis ära toodud funktsionaalanalüüsi põhimõisted, mis leiavad järgnevas kasutamist.

Õppevahendi koostamisel on kasutatud raamatu lõpus märgitud kirjandust. Sama kirjandust võib soovitada ka lugejale, kes tahab tutvuda variatsioonarvutusega põhjalikumalt kui seda võimaldab käesolev õppevahend. Kirjanduse loetelus on eespool ära märgitud teosed, mis sisaldavad põhjalikumat käsitlust, lõpus aga need, kus käsitletakse vaid variatsioonarvutuse üksikküsimusi.

I. FUNKTSIONAALID JA NENDE EKSTREEMUMID

§ 1. Funktsionaalruumid

1. Lineaarne normeeritud ruum. Meenutame kõigepealt lineaarse normeeritud ruumi definitsiooni, mis on esinenud juba reaalmuutuja funktsioonide teooria kursuses.

Hulka X elementidega y, z, u, \dots nimetatakse lineaarseks ruumiks (ehk vektoriruumiks), kui selle hulga kõigi elementidega on defineeritud liitmise ja reaalarvuga λ korrutamise tehe, nii et $y + z \in X$, $\lambda y \in X$ ja on täidetud järgmised tingimused:

$$1^{\circ} \quad y + z = z + y;$$

$$2^{\circ} \quad (y + z) + u = y + (z + u);$$

3° leidub element $0 \in X$ (nimetatakse nullelemendiks), nii et $y + 0 = y$ iga $y \in X$ puhul;

4° iga elemendi $y \in X$ jaoks leidub element $-y \in X$ (elemendi y vastandelement), nii et $y + (-y) = 0$;

$$5^{\circ} \quad \lambda(\mu y) = (\lambda\mu)y;$$

$$6^{\circ} \quad \lambda(y+z) = \lambda y + \lambda z;$$

$$7^{\circ} \quad (\lambda+\mu)y = \lambda y + \mu y$$

$$8^{\circ} \quad 1y = y.$$

Lineaarset ruumi X nimetatakse lineaarseks normeeritud ruumiks, kui igale elemendile $y \in X$ on seatud vastavusse mittenegatiivne reaalarv $\|y\|$, mida nimetatakse elemendi y normiks, nii et

$$1^{\circ} \quad \|y\| = 0 \text{ parajasti siis, kui } y = 0;$$

$$2^{\circ} \quad \|\lambda y\| = |\lambda| \|y\|;$$

$$3^{\circ} \quad \|y + z\| \leq \|y\| + \|z\|.$$

Ruumi X elemente nimetame ka selle ruumi punktideks. Punktide y ja z vaheliseks kauguseks nimetame arvu $\|y - z\|$. Punktide $y \in X$ hulka, mis rahuldavad tingimust $\|y - y_0\| < \varepsilon$, nimetatakse lahtiseks sfääriks keskpunktiga y_0 ja raadiusega ε ning tähistatakse $S(y_0, \varepsilon)$. Seda sfääri nimetatakse ka elemendi y_0 ε -ümbruseks ehk lihtsalt ümbruseks. Elemente y ja z loeme lähedasteks, kui üks kuulub teise mingisse (küllalt väiksesse) ε -ümbrusse. Arusaadavalt on elementide läheduse mõiste suhteline, olenedes meie poolt valitavast ε -st.

Lineaarse normeeritud ruumi elementideks võivad olla mis tahes objektid: ruum võib koosneda vektoritest, jadadest, funktsioonidest, maatriksitest jne. Variatsioonarvutuse kursuses huvitavad meid peamiselt funktsionaalruumid, s.t. ruumid, mille elementideks on funktsioonid. Sealjuures mõistetakse funktsioonide liitmist ja arvuga korrutamist tavalisel viisil: funktsioonide summa on funktsioon, mille väärtus igal kohal võrdub liidetavate funktsioonide väärtuste summaga sellel kohal, ja funktsiooni korrutis arvuga on funktsioon, mille väärtus igal kohal võrdub antud arvu ja esialgse funktsiooni väärtuse korrutisega sellel kohal.

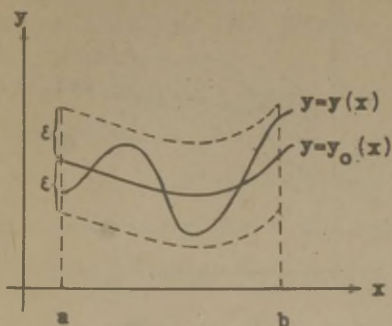
2. Funktsionaalruumide näiteid. Käesolevas kursuses kasutatakse järgmisi ruume:

1) Ruum C ehk $C[a, b]$. Ruum C koosneb kõigist funktsioonidest $y(x)$, mis on määratud ja pidevad lõigul $[a, b]$. Norm defineeritakse järgmiselt:

$$\|y\| = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)|.$$

Pole raske kontrollida, et funktsioonide hulk $C[a, b]$ on tõepoolest lineaarne normeeritud ruum. Kontrollimise jätame aga nii selles kui ka järgnevates näidetes lugejale.

Tingimus $\|y - y_0\| < \varepsilon$ tähendab geomeetriliselt, et funktsiooni $y = y(x)$ graafik asetseb täielikult võõndis, mille laius vertikaali mõõda on 2ε ja mis ümbritseb funktsiooni $y = y_0(x)$ graafikut nii, nagu näidatud joonisel 1.



Joonis 1.

Funktsioonide $y(x)$ ja $y_0(x)$ lähedus tähendab seega, et lähedased on nende funktsioonide vastavad väärtused.

Edaspidi esineb meil ühe ja sama funktsiooni norm erinevates ruumides. Normide eristamiseks märgime seepärast elementi $y \in C$ normi ruumis C tavaliselt sümboliga $\|y\|_0$.

Et iga pideva funktsiooni $y = y(x)$ graafik on teatud kõver, siis räägime sageli ka

kõvera $y = y(x)$ kuuluvusest ruumi C . Analoogilist terminoloogiat kasutame samuti teiste ruumide korral.

2) Ruum $C'[a, b]$. Ruum $C'[a, b]$ koosneb kõigist funktsioonidest, mis on pidevalt diferentseeruvad lõigul $[a, b]$. Elementi $y \in C'$ norm, mida me märgime $\|y\|_1$, defineeritakse valemiga

$$\|y\|_1 = \max_{a \leq x \leq b} \{ |y(x)|, |y'(x)| \}.$$

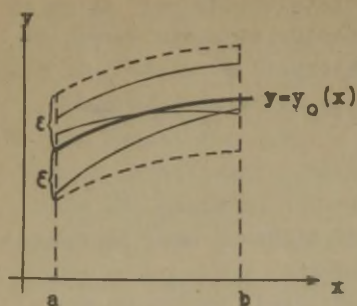
Funktsioonide lähedus ruumis C' tähendab, et lähedased on nii funktsioonide kui ka tuletiste väärtused vastavates punktides. Tõepoolest, kui

$$\|y - y_0\|_1 = \max_{a \leq x \leq b} \{ |y_0(x) - y(x)|, |y_0'(x) - y'(x)| \} < \varepsilon,$$

siis iga $x \in [a, b]$ puhul

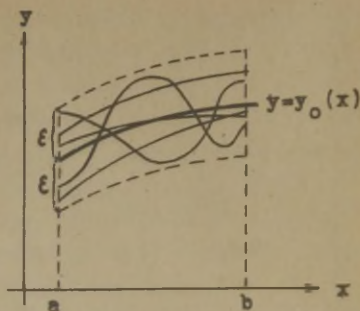
$$|y_0(x) - y(x)| < \varepsilon \text{ ja } |y_0'(x) - y'(x)| < \varepsilon.$$

Märgime, et $C'[a, b] \subset C[a, b]$. Funktsioonid, mis on lähedased ruumis C' , on lähedased ka ruumis C . Vastupidi, funktsioonid $y(x) \in C'$, mis on lähedased ruumis C , ei tarvitse olla lähedased ruumis C' . Üeldu illustreerimiseks on toodud joonised 2 ja 3.



Joonis 2.

Funktsioonid, mis rahuldavad tingimust $\|y - y_0\|_1 < \varepsilon$.



Joonis 3.

Tingimust $\|y - y_0\|_0 < \varepsilon$ rahuldavate funktsioonide hulgas sisalduvad funktsioonid, mis rahuldavad tingimust $\|y - y_0\|_1 < \varepsilon$.

3) Ruum $C^{(n)}[a, b]$. Ruum $C^{(n)}$ koosneb kõigist funktsioonidest $y(x)$, mis on lõigul $[a, b]$ n korda pidevalt diferentseeruvad. Norm, mida me märgime $\|y\|_n$, defineeritakse valemiga

$$\|y\|_n = \max_{a \leq x \leq b} \{ |y(x)|, |y'(x)|, \dots, |y^{(n)}(x)| \}.$$

Funktsioonide lähedus selles ruumis tähendab järelikult, et igal x väärtusel lõigult $[a, b]$ on lähedased nii funktsioonide kui ka vastavate tuletiste väärtused kuni järguni n .

Märgime, et $C^{(n)}[a, b] \subset C^{(n-1)}[a, b]$, kusjuures $C^{(0)} = C$.

4) Ruum $C'(E)$, kus E on mingi kahedimensionaalne (sidus) piirkond. Ruum koosneb funktsioonidest $z(x, u)$, mis on pidevad koos oma esimest järku osatuletistega $z_x(x, u)$, $z_u(x, u)$ piirkonnas E . Normi defineerime valemiga

$$\|z\| = \max_{(x, u) \in E} \{ |z(x, u)|, |z_x(x, u)|, |z_u(x, u)| \}.$$

Võib defineerida ka üldisema ruumi $C^{(n)}(E)$, kus E on mingi m -dimensionaalne piirkond ja ruumi punktideks on m -muu-

tuja funktsioonid, mis on pidevad piirkonnas E koos oma kõigi osatuletistega kuni järguni n . Oma kursuses me sellist ruumi ei kasuta.

5) Ruum $C_n^1[a, b]$. Ruum koosneb kõikidest funktsioonide vektoritest

$$y = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)),$$

mille korral $y_i(x) \in C^1[a, b]$, $i = 1, \dots, n$. Elemendi $y \in C_n^1[a, b]$ normi defineerime valemiga

$$\begin{aligned} \|y\| &= \max_{a \leq x \leq b} \{|y_1(x)|, \dots, |y_n(x)|, |y_1'(x)|, \dots, |y_n'(x)|\} = \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \|y_i\|_1. \end{aligned}$$

Ka selle ruumi alusel võib defineerida üldisema ruumi $C_n^{(m)}[a, b]$. Kuidas?

§ 2. Funktsionaalide ja variatsioonülesannete näiteid

1. Funktsionaal ja tema määramispiirkond. Olgu antud lineaarne normeeritud ruum X ja selles hulk G . Me ütleme, et hulgal G on defineeritud funktsionaal, kui igale elemendile $y \in G$ on teatud eeskirja järgi vastavusse seatud reaalarv $\eta = F(y)$. Elementi $y \in X$ nimetame funktsionaali argumendiks, hulka G funktsionaali määramispiirkonnaks. Variatsioonarvutuse kursuses leiavad kasutamist peamiselt funktsionaalid, mille argumendiks y on funktsioon või funktsioonide vektor. See tähendab, et argumenti võib lugeda mingi eespool vaadeldud funktsionaalruumi elemendiks.

Olgu $y(x)$ suvaline, lõigul $[a, b]$ pidevalt diferentseeruv funktsioon (s.t. $y(x) \in C^1[a, b]$) ja olgu $f(x, y, u)$ antud pidev kolme muutuja funktsioon. Siis üheks funktsionaali näiteks on avaldis

$$(1) \quad F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx,$$

sest igale funktsioonile $y(x) \in C^1[a, b]$ on seatud vastavusse integraali väärtus $F(y)$, s.o. reaalarv. Sageli esineb järgmist tüüpi ülesanne: leida funktsioon $y(x)$, mis annab integraalile (1) minimaalse või maksimaalse väärtuse. Nagu juba eessõnas mainitud, nimetatakse sellist ülesannet variatsioonülesandeks.

Kui $f(x, y, u)$ on määratud piirkonnas $a \leq x \leq b$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < u < +\infty$, siis funktsionaali (1) määramispiirkonnaks on kogu ruum $C^1[a, b]$. Sageli ei huvita meid aga funktsionaali loomulik määramispiirkond, vaid sellest kitsam piirkond, mis on määratud ülesande sisuga. Näiteks võib olla püstitatud lisatingimus, et kõigi funktsioonide $y = y(x)$ graafikud peavad läbima punkte $A(a, c)$, $B(b, d)$. Siis vaadeldava funktsionaali määramispiirkonnaks loeme hulka $G \subset C^1[a, b]$, mis koosneb nendest ruumi $C^1[a, b]$ kuuluvatest funktsioonidest, mis rahuldavad rajatingimusi

$$y(a) = c, \quad y(b) = d.$$

Näiteks on punkte $A(a, c)$ ja $B(b, d)$ ühendavate kõverate $y = y(x)$ pikkus

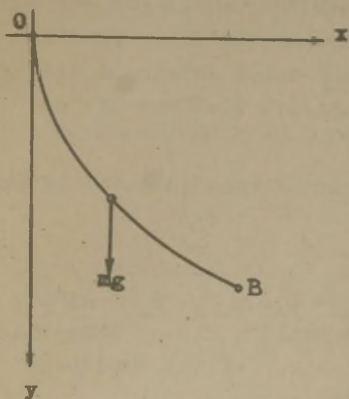
$$s(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

vaadeldavat tüüpi funktsionaal, mille määramispiirkond on G . Funktsionaali määramispiirkonna all me mõistamegi edaspidi ülesande tingimustega kitsendatud määramispiirkonda. Määramispiirkonda kuuluvaid funktsioone nimetame vaadeldava variatsioonülesande lubatavateks funktsioonideks. Kui funktsiooni graafikuks on kõverjoon, siis räägime sageli ka lubatavatest kõveratest.

2. Variatsioonülesannete näiteid. Variatsioonülesannete konkreetsete näidetena vaatleme kolme ülesannet, mis avaldasid suurt mõju variatsiooniarvutuse tekkimisele.

1) Brahhistokrooni probleem (kr. k. brahhistos - lühim,

hronos - aeg). Vertikaaltasapinnas on antud kaks punkti O ja B (O kõrgemal kui B). Masspunkt, mille algkiirus on null, liigub punktist O raskustungi mõjul mingit kõverat mööda punkti B. Leida kõver, mida mööda liikudes masspunkt jõuab kõige lühema ajaga punktist O punkti B (hõõrdumist ja keskkonna takistust ei arvestata). Osuţub, et ülesande lahendiks ei ole sirge, kuigi sirg-lõik on lühim tee kahe punkti vahel.



Joonis 4.

Formuleerime ülesande matemaatilisel. Valime teljestiku koordinaatide algusega punktis O, y-telje suuname ülalt alla. Siis O koordinaadid on (0,0), punkti B koordinaadid elgu (b,d). Olgu $y = y(x)$ punkte O ja B ühendava kõvera võrrand. Masspunkti liikumise kiirus (x-teljest kaugusel y) on

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{dt},$$

millest

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{v}.$$

Kiiruse v avaldame teisiti. Tehtud töö on ühelt poolt $A = mgy$, kus m on masspunkti mass ja g - raskuskiirendus, teiselt poolt $A = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} mv^2$ (sest algkiirus $v_0 = 0$). Seega

$$mgy = \frac{1}{2} mv^2,$$

millest

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Nüüd

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{\sqrt{2gy}}$$

ja integreerimisel saame koguaja $T(y)$, mis kulub masspunkti liikumiseks punktist O punkti B:

$$T(y) = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

Lühima langemisajaga kõvera $y = y(x)$ saamiseks tuleb leida funktsioon, mis rahuldab rajatingimusi $y(0) = 0$, $y(b) = d$ ja mis annab funktsionaalile $T(y)$ minimaalse väärtuse. Varsti pärast ülesande püstitamist lahendasid selle Johann ja Jacob Bernoulli, Newton ja l'Hospital. Lahendust vaatleme hiljem (II ptk., § 8).

2) Geodeetiliste joonte probleem. Ruumis on antud kõverpind

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

ja sellel kaks punkti $A(x_0, y_0, z_0)$ ja $B(x_1, y_1, z_1)$. Leida kõver, mis asub pinnal ja läbib neid punkte, nii et tema kaare pikkus punktide A ja B vahel oleks lühim. Sellise omadusega jooni nimetatakse teatavasti geodeetilisteks.

Analüütiliselt võib ülesannet formuleerida järgmiselt. Leida funktsioonid

$$y = y(x) \text{ ja } z = z(x),$$

mis rahuldavad tingimusi

$$(2) \quad \begin{aligned} y(x_0) &= y_0, & y(x_1) &= y_1, \\ z(x_0) &= z_0, & z(x_1) &= z_1, \\ \varphi(x, y(x), z(x)) &= 0 \end{aligned}$$

ja annavad funktsionaalile

$$(3) \quad s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

minimaalse väärtuse.

Funktsionaali (3) võib vaadelda ruumis $C_2^1[x_0, x_1]$, kusjuures antud juhul on tema määramispiirkonnaks G tingimusi (2) rahuldavate kõikide funktsioonipaaride $(y(x), z(x)) \in C_2^1[x_0, x_1]$ hulk.

3) Iseperimeetriline ülesanne (kr.k. isos - sama, perimetros - ümbermõõt). Tasapinnal leida antud pikkusega

s kinnine kõver, mis piirab suurima pindala S . Selliseks kõve-
raks on ringjoon. See oli teada juba Vana-Kreekas, kuid teo-
reetilise põhjenduse saab lahendile anda alles variatsioon-
arvutuse abil. Selles ülesandes tuleb leida kõver

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

mis annab funktsionaalile

$$S = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \dot{x}(t) dt$$

maksimaalse väärtuse lisatingimusel, et kõvera pikkus oleks
 s , s. t.

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = s.$$

Kõiki seda tüüpi lisatingimustega variatsioonülesandeid nime-
tatakse isoperimeetristeks. Üldised meetodid isoperimeetri-
liste ülesannete lahendamiseks andis Euler.

§ 3. Funktsionaali ekstreemumid

Olgu antud funktsionaal $F(y)$, mis on määratud hulgal
 $G \subset X$. Ütleme, et funktsionaal saavutab kohal $y_0 \in G$ maksi-
mumi, kui

$$\Delta F = F(y) - F(y_0) \leq 0$$

iga y puhul punkti y_0 mingist ümbrusest $S(y_0, \varepsilon)$. Ütleme, et
funktsionaal saavutab kohal $y_0 \in G$ minimumi, kui

$$\Delta F = F(y) - F(y_0) \geq 0$$

iga y puhul punkti y_0 mingist ümbrusest $S(y_0, \varepsilon)$. Üldiselt
võib öelda, et funktsionaal saavutab kohal y_0 ekstreemumi, kui

$$\Delta F = F(y) - F(y_0)$$

säilitab märki punkti $y_0 \in G$ mingis ümbruses $S(y_0, \varepsilon)$.

Meil tuleb vaadelda funktsionaale, mis on määratud pide-
valt diferentseeruvate funktsioonide teatud hulgal. Pidevalt
diferentseeruvaid funktsioone võib lugeda nii ruumi C' kui

ka ruumi C elementideks. Vastavalt sellele kahele võimalusele eristatakse kaht liiki ekstreemumeid.

Ütleme, et funktsionaal $F(y)$ saavutab punktis $y_0 \in C'$ nõrga ekstreemumi, kui eksisteerib punkti y_0 selline ümbrus

$$S_1(y_0, \varepsilon) \subset C', \text{ et}$$

$$\Delta F = F(y) - F(y_0)$$

säilitab märki iga lubatava funktsiooni y puhul sellest sfäärist. Teisiti: funktsionaal $F(y)$ saavutab funktsioonil $y_0(x)$ nõrga ekstreemumi, kui eksisteerib $\varepsilon > 0$, nii et ΔF säilitab märki kõigil lubatavatel funktsioonidel $y(x)$, mis rahuldavad tingimust

$$\|y - y_0\|_1 = \max_x \{ |y(x) - y_0(x)|, |y'(x) - y_0'(x)| \} < \varepsilon.$$

Ütleme, et funktsionaal $F(y)$ saavutab punktis $y_0 \in C$ tugeva ekstreemumi, kui eksisteerib punkti y_0 selline ümbrus

$$S_0(y_0, \varepsilon) \subset C, \text{ et}$$

$$\Delta F = F(y) - F(y_0)$$

säilitab märki iga lubatava funktsiooni y puhul sellest sfäärist. Teisiti: funktsionaal $F(y)$ saavutab funktsionaal $y_0(x)$ tugeva ekstreemumi, kui eksisteerib $\varepsilon > 0$, nii et ΔF säilitab märki kõigil lubatavatel funktsioonidel $y(x)$, mis rahuldavad tingimust

$$\|y - y_0\|_0 = \max_x |y(x) - y_0(x)| < \varepsilon.$$

Pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulgal on iga tugev ekstreemum ka nõrgaks ekstreemumiks. Tõepoolest, $S_1(y_0, \varepsilon) \subset S_0(y_0, \varepsilon)$ ja seega, kui ΔF säilitab märki iga $y \in S_0$ puhul, siis ta säilitab märki loomulikult ka iga y puhul S_0 osahulgast S_1 .

Nõrk ekstreemum ei ole üldiselt tugevaks ekstreemumiks.

Nõrga ja tugeva ekstreemumi vahetada võib geomeetriliselt hõlpsasti selgitada jooniste 2 ja 3 abil. Proovida!

Defineeritud ekstreemumeid nimetatakse ka lokaalseteks (mõnikord relatiivseteks) ekstreemumiteks. Peale lokaalse ekstreemumi räägitakse veel absoluutsest ekstreemumist. Ütleme, et funktsionaal $F(y)$ saavutab punktis $y_0 \in G \subset X$ absoluutse ekstreemumi, kui iga $y \in G$ puhul

$$\Delta F = F(y) - F(y_0)$$

säilitab üht ja sama märki. Teha kindlaks, milline on ühelt poolt absoluutse ning teiselt poolt tugeva ja nõrga ekstreemumi vaherkord!

Selleks, et kindlaks määrata, millistel ruumi elementidel võib antud funktsionaal saavutada ekstreemumi, vajame me omaette teooriat, mida arendamegi järgnevas paragrahvides. Omaette teooriat vajame ka selleks, et kindlaks teha, kas antud element realiseerib funktsionaali ekstreemumi ja kui realiseerib, siis mis liiki. Viimaseid küsimusi saab aga mõnedel lihtsatel erijuhtudel lahendada ka definitsioonist lähtudes.

N ä i d e. Teha kindlaks, kas funktsionaal

$$F(y) = \int_1^2 y'(1 + x^2 y') dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 5,$$

saavutab kõveral $y = 7 - \frac{4}{x}$ ekstreemumi ja kui saavutab, siis mis liiki.

Kõigepealt paneme tähele, et antud kõver on lubatav kõver: ta kuulub ruumi $C^1[1,2]$ ja rahuldab rajatingimusi. Lisaks antud kõverale $y = y_0(x) \equiv 7 - \frac{4}{x}$ võtame kõvera

$y = y(x) \equiv y_0(x) + h(x)$, kus $h(x)$ on suvaline funktsioon, mis rahuldab tingimusi $h(1) = h(2) = 0$. Arvutame ΔF :

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(y) - F(y_0) = \int_1^2 (y_0' + h') [1 + x^2(y_0' + h')] dx - \\ &- \int_1^2 y_0'(1 + x^2 y_0') dx = \int_1^2 [(1 + 2x^2 y_0')h' + x^2 h'^2] dx = \\ &= \int_1^2 (9h' + x^2 h'^2) dx = 9h(x) \Big|_1^2 + \int_1^2 x^2 h'^2 dx = \int_1^2 x^2 h'^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

Nagu näeme, on $\Delta F \geq 0$ iga h ja h' korral. Teisiti öeldes, leidub $\varepsilon > 0$ (kusjuures ε -ks sobib iga positiivne arv), nii et $\Delta F \geq 0$ iga lubatava funktsiooni $y(x) = y_0(x) + h(x)$ korral, mis rahuldab tingimust

$$\|y - y_0\|_0 = \max_{1 \leq x \leq 2} |h(x)| < \varepsilon.$$

Seega funktsionaal $F(y)$ saavutab kõveral $y = 7 - \frac{4}{x}$ tugeva minimumi. Et ε -ks võib võtta mistahes positiivse arvu, siis funktsionaal saavutab ühtlasi absoluutse minimumi. Minimaalne väärtus on

$$F(y_0) = \int_1^2 \frac{4}{x^2} \cdot 5 dx = -\frac{20}{x} \Big|_1^2 = 10.$$

§4. Funktsionaali variatsioon

1. Funktsionaali pidevus ja linearsus. Funktsionaali $F(y)$ nimetatakse pidevaks punktis $y_0 \in G$, kui iga $\varepsilon > 0$ jaoks eksisteerib selline $\delta > 0$, et niipea kui $\|y - y_0\| < \delta$, kehtib võrratus

$$|F(y) - F(y_0)| < \varepsilon.$$

Funktsionaali nimetatakse pidevaks piirkonnas E , kui ta on pidev selle piirkonna igas punktis.

Kui $f(x, y, u)$ on pidev kolme muutuja funktsioon, siis variatsioonarvutuses vaadeldav lihtsaim funktsionaal

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

on pidev ruumis $C^1[a, b]$ (kontrollida!), pole aga üldiselt pidev ruumis $C[a, b]$. Illustreerime viimati öeldut näitega. Olgu antud funktsionaal

$$F(y) = \int_0^{\pi} y'^2 dx.$$

Näitame, et ta pole pidev kohal $y = 0$, kui funktsionaali vaa-
 delda ruumis $C[0, \pi]$. Võtame kaks funktsiooni $y_0(x) = 0$ ja
 $y_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$, kus n on suvaline naturaalarv ($0 \leq x \leq \pi$).
 Arvutame

$$\|y_n - y_0\|_0 = \max_{0 \leq x \leq \pi} \frac{1}{n} |\sin nx| = \frac{1}{n},$$

$$\begin{aligned} |F(y_n) - F(y_0)| &= \int_0^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2nx) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2n} \sin 2nx \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Võttes n küllalt suure, võime funktsioonidevahelise kauguse
 $\|y_n - y_0\|_0$ teha kuitahes väikeseks. Samal ajal jääb aga
 funktsionaali väärtuste vahe muutumatuks: $|F(y_n) - F(y_0)| =$
 $= \frac{\pi}{2}$. See tähendab, et kui $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, siis ei leidu sellist
 arvu $\delta > 0$, et võrratusest $\|y - y_0\|_0 < \delta$ järelduks võrratus
 $|F(y) - F(y_0)| < \varepsilon$.

Iga variatsioonülesande puhul on kasulik funktsionaal-
 ruum nii valida, et ülesandes esinev funktsionaal tuleks pidev
 selles ruumis.

Funktsionaali $L(y)$ nimetatakse lineaarseks, kui ta on

1) homogeenne, s.t. mistahes $y \in G$ ja reaalarvu λ puhul
 $L(\lambda y) = \lambda L(y)$,

2) aditiivne, s.t. mistahes $y_1, y_2 \in G$ puhul $L(y_1 + y_2) =$
 $= L(y_1) + L(y_2)$.

Lineaarset funktsionaali märgitakse tavaliselt Ly . Lineaarse funktsionaali näiteks on funktsionaal

$$Ly = \int_a^b [c_0(x) y(x) + c_1(x) y'(x)] \, dx,$$

kus $c_0(x)$ ja $c_1(x)$ on antud funktsioonid (kontrollida!).

M ä r k u s: Mõnikord asendatakse lineaarse funktsionaali
 definitsioonis homogeensuse nõue pidevuse nõudega.

2. Variatsioonide definitsioon. Asume nüüd defineerima funktsionaali variatsioonide definitsiooni. Definitsioon on analoogiline funktsiooni diferentsiaalide definitsiooniga. Vaatleme funktsionaali $F(y)$. Tema juurdekasv, mis vastab argumenti $y \in G \subset X$ juurdekasvule $h \in X$, olgu

$$\Delta F = \Delta F(y, h) = F(y + h) - F(y).$$

Siinjuures on h suvaline funktsioon ruumist X , nii et $y + h \in G$. Kui y fikseerida, siis ΔF muutub funktsionaaliks, mille argument on h .

Definitsioon 1. Kui funktsionaali $F(y)$ juurdekasvu saab esitada kujul

$$\Delta F(y, h) = \delta F(y, h) + \alpha(y, h),$$

kus $\delta F(y, h)$ on h suhtes pidev lineaarne funktsionaal ja

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\alpha(y, h)}{\|h\|} = 0,$$

siis funktsionaali $F(y)$ nimetatakse diferentseeruvaks punktis y . Sealjuures $\delta F(y, h)$ nimetatakse funktsionaali $F(y)$ variatsiooniks ehk diferentsiaaliks¹ kohal y juurdekasvuga h .

Näitame, et funktsionaali variatsioon (kui ta eksisteerib) on üheselt määratud. Teeme eelnevalt järgmise märkuse: kui Lh on lineaarne funktsionaal ja $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{Lh}{\|h\|} = 0$, siis $Lh \equiv 0$.

Tõepoolest, olgu $Lh_0 = \lambda \neq 0$. Võtame $h_n = \frac{h_0}{n}$. Siis $\|h_n\| \rightarrow 0$, kui $n \rightarrow \infty$, kuid

$$\lim_{\|h_n\| \rightarrow 0} \frac{Lh_n}{\|h_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nLh_0}{n\|h_0\|} = \frac{\lambda}{\|h_0\|} \neq 0.$$

Sega oletus, et Lh on nullist erinev kas või ühes punktis, ei pea paika.

Oletame nüüd, et funktsionaali variatsioon pole üheselt määratud, s.t.

$$\Delta F = \delta F(y, h) + \alpha(y, h) = L(y, h) + \beta(y, h),$$

¹Variatsiooniarvutuse kursuses kasutatakse enamasti terminit "variatsioon", funktsionaalanalüüsi kursuses aga terminit "diferentsiaal".

kus ka $L(y, h)$ on h suhtes pidev lineaarne funktsionaal ja

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\beta(y, h)}{\|h\|} = 0. \text{ Siis}$$

$$\delta F(y, h) - L(y, h) = \beta(y, h) - \alpha(y, h),$$

kusjuures vasakul seisev avaldis on h suhtes pidev lineaarne funktsionaal. Siit

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\delta F(y, h) - L(y, h)}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\beta(y, h)}{\|h\|} - \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\alpha(y, h)}{\|h\|} = 0,$$

millest järeldubki, et

$$\delta F(y, h) = L(y, h).$$

Bespool defineeritud funktsionaali variatsiooni nimetatakse ka tugevaks variatsiooniks ja diferentseeruvust tugevaks diferentseeruvuseks. Sageli defineeritakse veel nn. nõrk variatsioon.

Definitsioon 2. Nimetame funktsionaali $F(y)$ nõrgalt diferentseeruvaks punktis $y \in G$, kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(y + th) - F(y)}{t} = \delta_1 F(y, h),$$

kus $h \in X$. Seda piirväärtust ennast nimetame funktsionaali $F(y)$ nõrgaks variatsiooniks ehk nõrgaks diferentsiaaliks punktis $y \in G$ juurdekasvuga h .

Nõrka variatsiooni võib arvutada ka valemi järgi

$$\delta_1 F(y, h) = \left. \frac{\partial}{\partial t} F(y + th) \right|_{t=0}.$$

Tõepoolest,

$$\begin{aligned} \delta_1 F(y, h) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(y + th) - F(y)}{t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(y + \Delta t h) - F(y)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(y + (t + \Delta t)h) - F(y + th)}{\Delta t} \Big|_{t=0} = \left. \frac{\partial}{\partial t} F(y + th) \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Näitame, et kui funktsionaal on tugevalt diferentseeruv, siis eksisteerib ka nõrk variatsioon, mis ühtib tugevaga.

Olgu funktsionaal tugevalt diferentseeruv. Siis

$$F(y + th) - F(y) = \delta F(y, th) + \alpha(y, th) = \\ = t \delta F(y, h) + \alpha(y, th).$$

Siit

$$\delta_1 F(y, h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(y + th) - F(y)}{t} = \\ = \delta F(y, h) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(y, th)}{t} = \delta F(y, h),$$

sest kui $t \rightarrow 0$, siis ka $\|th\| = |t| \cdot \|h\| \rightarrow 0$ ja

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(y, th)}{t} = \|h\| \cdot \lim_{\|th\| \rightarrow 0} \frac{\alpha(y, th)}{\|th\|} \cdot \text{sign } t = 0.$$

Et piirväärtus

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(y + th) - F(y)}{t}$$

eksisteerib, siis eksisteerib ka $\delta_1 F(y, h)$. Seega, kui funktsionaal on tugevalt diferentseeruv, siis võib ka tema tugevat variatsiooni arvutada definitsioonist 2 järelduvate valemite järgi:

$$\delta F(y, h) = \left. \frac{\partial}{\partial t} F(y + th) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(y + th) - F(y)}{t}.$$

Vastupidi, kui funktsionaal on nõrgalt diferentseeruv, siis alati ei tarvitse ta olla tugevalt diferentseeruv.

Märgime, et nii nõrk kui ka tugev diferentsiaal rahuldavad tingimusi: $\delta(F_1 + F_2) = \delta F_1 + \delta F_2$, $\delta(cF) = c \delta F$.

M ä r k u s: Mitmetes õpikutes kasutatakse ka funktsiooni variatsiooni mõistet. Funktsiooni $y(x)$ variatsiooniks δy nimetatakse selle funktsiooni suvalist juurdekasvu $h(x)$ funktsionaali juurdekasvu avaldises.

$$\Delta F = F(y + h) - F(y),$$

s. t. $\delta y = h(x)$. Me jääme ka järgnevas juba kasutusele võetud tähistuse juurde, funktsiooni variatsiooni asemel räägime aga funktsiooni juurdekasvust.

3. Variatsiooni leidmise näiteid. 1° Pidev lineaarne funktsionaal L_y on alati diferentseeruv ja tema variatsioon on igas punktis y võrdne L_h , sest

$$L(y + h) - L_y = L_h.$$

2° Vaatleme funktsionaali

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

ruumis $C^1[a, b]$. Funktsioon f olgu pidev kolme muutuja funktsioon, millel on pidevad osatuletised kuni teise järguni (kaasa arvatult) ja mis on määratud piirkonnas $a \leq x \leq b$, $-\infty < y, y' < +\infty$. Leiame tugeva variatsiooni, kasutades integraali all Taylori valemit:

$$\begin{aligned} F(y + h) - F(y) &= \int_a^b [f(x, y+h, y'+h') - f(x, y, y')] dx = \\ &= \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} h + \frac{\partial f}{\partial y'} h' \right\} dx + \int_a^b r(x, y, y', h, h') dx, \end{aligned}$$

kus $\frac{\partial f}{\partial y}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y'}$ on võetud kohal (x, y, y') . Esimene liidetav

on h suhtes lineaarne funktsionaal, mis on peale selle pidev ruumis $C^1[a, b]$. Vaatleme teist liidetavat

$$\alpha(y, h) = \int_a^b r(x, y, y', h, h') dx,$$

kus

$$\begin{aligned} r(x, y, y', h, h') &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y+\theta h, y'+\theta h') h^2 + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} f(x, y+\theta h, y'+\theta h') h h' + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y'^2} f(x, y+\theta h, y'+\theta h') h'^2 \end{aligned}$$

ja $0 < \theta < 1$. Arvestades, et $|h(x)| \leq \|h\|$, $|h'(x)| \leq \|h\|$ ja et teist järku osatuletiste pidevuse tõttu leidub konstant N , nii et

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right| \leq N, \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \right| \leq N, \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \right| \leq N,$$

saame

$$|r(x, y, y', h, h')| \leq 2N \|h\|^2.$$

Siit

$$\begin{aligned} \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|\alpha(y, h)|}{\|h\|} &\leq \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \int_a^b |r(x, y, y', h, h')| dx \leq \\ &\leq \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{2N(b-a)\|h\|^2}{\|h\|} = 0. \end{aligned}$$

Seega funktsionaal $F(y)$ on diferentseeruv ja tema variatsioon

$$\delta F(y, h) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} h + \frac{\partial f}{\partial y'} h' \right] dx.$$

3^o Vaatleme funktsionaali

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$$

ruumis $C^{(n)}[a, b]$, kusjuures funktsioon f olgu pidev koos oma esimest ja teist järka osatuletistega piirkonnas $a \leq x \leq b$, $-\infty < y, y', \dots, y^{(n)} < +\infty$. Leiame nõrga variatsiooni:¹

$$\begin{aligned} \delta_1 F(y, h) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} F(y + th) \right|_{t=0} = \\ &= \int_a^b \left. \frac{\partial}{\partial t} f(x, y + th, y' + th', \dots, y^{(n)} + th^{(n)}) \right|_{t=0} dx = \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} h(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} h'(x) + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} h^{(n)}(x) \right] dx, \end{aligned}$$

kus osatuletised on võetud kohal $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$.

¹ Tingimused, mis lubavad diferentseerida parameetri t järgi integraali märgi all, on siin täidetud (vt. näit. Г. М. Фихтенгольц, Основы математического анализа, т. II, гл. XVII, §1).

Tehtud eeldustel on funktsionaalil olemas ka tugev variatsioon kusjuures $\delta F(y, h) = \delta_1 F(y, h)$. Ühtlasi on tuletuskäigust näha, et nõrga variatsiooni olemasoluks piisab funktsiooni f esimest järku osatuletiste olemasolust ja pidevusest.

4° Vaatleme funktsionaali

$$F(z) = \iint_E f(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)) \, dx dy$$

ruumis $C^1(E)$. Funktsioon f olgu piirkonnas $(x, y) \in E$, $-\infty < z, z_x, z_y < +\infty$ pidev koos oma esimest ja teist järku osatuletistega. Siis

$$\begin{aligned} \delta_1 F(z, h) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} F(z + th) \right|_{t=0} = \\ &= \iint_E \left[\frac{\partial f}{\partial z} h + \frac{\partial f}{\partial z_x} h_x + \frac{\partial f}{\partial z_y} h_y \right] \, dx dy, \end{aligned}$$

kus osatuletised $\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z_x}, \frac{\partial f}{\partial z_y}$ on võetud kohal

$(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y))$. Tehtud eeldused kindlustavad ka funktsionaali tugeva diferentseeruvuse. Nõrga variatsiooni olemasoluks piisab aga funktsiooni f esimest järku osatuletiste pidevusest.

5° Vaatleme funktsionaali

$$F(y) = \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') \, dx$$

ruumis $C_n^1[a, b]$. Funktsioon f olgu piirkonnas $a \leq x \leq b$, $-\infty < y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n' < +\infty$ pidev koos oma esimest ja teist järku osatuletistega. Siis tähistades $h = (h_1(x), \dots, h_n(x))$

saame

$$\begin{aligned} \delta_1 F(y, h) &= \int_a^b \left. \frac{\partial}{\partial t} f(x, y_1 + th_1, \dots, y_n + th_n, y_1' + th_1', \dots, y_n' + th_n') \right|_{t=0} \, dx = \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n} h_n + \frac{\partial f}{\partial y_1'} h_1' + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n'} h_n' \right] \, dx, \end{aligned}$$

kus osatuletised on võetud kohal $(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')$ tehtud eeldused kindlustavad ka funktsionaali tugeva diferentseeruvuse. Nõrga variatsiooni olemasoluks piisab ka siin funktsiooni f esimest järku osatuletiste pidevusest.

4. Funktsionaali ekstreemumi tarvilik tingimus. Mistahes funktsionaali ekstreemumi tarvilik tingimus on antud järgmise teoreemiga.

Teoreem. Selleks, et nõrgalt diferentseeruv funktsionaal $F(y)$ saavutaks punktis $y_0 \in G \subset X$ ekstreemumi, on tarvilik, et

$$\delta_1 F(y_0, h) = 0$$

iga $h \in X$ puhul.

Tõestus. Vaatleme suvalise, kuid fikseeritud $h \in X$ puhul t funktsiooni $F(y_0 + th)$. See funktsioon on diferentseeruv t järgi ja omandab eelduse kohaselt $t = 0$ puhul ekstreemaalse väärtuse. Seepärast tema tuletis kohal $t = 0$ võrdub nulliga, s. t.

$$\delta_1 F(y_0, h) = \left. \frac{\partial}{\partial t} F(y_0 + th) \right|_{t=0} = 0.$$

Järeldus. Kui funktsionaal on tugevalt diferentseeruv punktis y_0 , siis ekstreemumi korral selles punktis ka $\delta F(y_0, h) = 0$.

Saadud tingimused on igasuguse ekstreemumi olemasoluks tarvilikud, kuid pole piisavad, s. t. kui need tingimused on täidetud, siis funktsionaalil ei tarvitse veel ekstreemumit esineda. Piisavaid tingimusi käsitleme põhjalikumalt IV peatükis, kuid ka järgnevas paragrahvis esitame ühe üldise piisava tingimuse. Sageli õnnestub ekstreemumit leida juba tarvilike tingimuste abil.

Iga punkti y_0 , milles suvalise h puhul esimene variatsioon $\delta F(y_0, h)$ võrdub nulliga, nimetatakse funktsionaali $F(y)$ statsionaarseks punktiks. Ekstreemumpunktide leidmiseks tuleb kõigepealt leida statsionaarsed punktid, seejärel aga selgitada, millistes nendest funktsionaal saavutab maksimumi või miinimumi.

§5. Funktsionaali teine variatsioon

1. Bilineaarne funktsionaal. Funktsionaal võib sõltuda mitmest argumendist. Olgu y, z mingi lineaarse normeeritud ruumi muutuvad elemendid ja $F(y, z)$ funktsionaal selles ruumis, s. t. $F(y, z)$ on iga konkreetse y ja z korral reaalarv. Funktsionaali $F(y, z)$ nimetatakse bilinearseks, kui ta iga fikseeritud z korral on lineaarne y suhtes ja iga fikseeritud y korral lineaarne z suhtes. Seega $F(y, z)$ on bilineaarne, kui

$$F(\alpha y_1 + \beta y_2, z) = \alpha F(y_1, z) + \beta F(y_2, z),$$

$$F(y, \gamma z_1 + \varepsilon z_2) = \gamma F(y, z_1) + \varepsilon F(y, z_2).$$

Bilineaarset funktsionaali, kus $y = z$ nimetatakse ruutfunktsionaaliks. Lõplikudimensionaalses ruumis nimetatakse bilineaarset funktsionaali bilineaarvormiks ja ruutfunktsionaali ruutvormiks.

Ruutfunktsionaali $F(y, y)$ nimetatakse positiivseks, kui $F(y, y) > 0$ iga elemendi $y \neq 0$ korral vaadeldavast ruumist. Ruutfunktsionaali $F(y, y)$ nimetatakse positiivselt määratuks, kui eksisteerib selline positiivne konstant k , et $F(y, y) \geq k \|y\|^2$ iga y puhul vaadeldavast ruumist. Positiivselt määratud funktsionaal on positiivne. Lõplikudimensionaalses ruumis on õige ka vastupidine väike, üldjuhul mitte. Bilineaarset funktsionaali näiteks võib olla ruumis $C[a, b]$ määratud funktsionaal

$$F(y, z) = \int_a^b A(x)y(x)z(x)dx,$$

kus $A(x)$ on fikseeritud funktsioon. Kui $A(x) > 0$ peaaegu kõikjal lõigul $[a, b]$, siis vastav ruutfunktsionaal

$$F(y, y) = \int_a^b A(x)y^2(x)dx$$

on positiivne, kui aga leidub konstant $c > 0$, nii et $A(x) \geq c$ iga $x \in [a, b]$ puhul, siis $F(y, y')$ on positiivselt määratud.

Bilineaarne on ka funktsionaal

$$\int_a^b [A(x)y(x)z(x) + B(x)y(x)z'(x) + C(x)y'(x)z(x) + D(x)y'(x)z'(x)] dx,$$

mis on määratud ruumis $C^1[a, b]$. Temale vastavaks ruutfunktsionaaliks on funktsionaal

$$\int_a^b [A(x)y^2(x) + B_1(x)y(x)y'(x) + D(x)y'^2(x)] dx,$$

kus $B_1(x) = B(x) + C(x)$.

2. Teine variatsioon. Olgu $F(y)$ funktsionaal, mis on defineeritud lineaarses normeeritud ruumis X . Me ütleme, et funktsionaalil $F(y)$ on olemas teine variatsioon ehk teine diferentsiaal, kui selle funktsionaali juurdekasvu

$$\Delta F = F(y+h) - F(y)$$

saab esitada kujul

$$\Delta F = \varphi_1(y, h) + \frac{1}{2} \varphi_2(y, h, h) + \beta(y, h),$$

kus $\varphi_1(y, h)$ on h suhtes pidev lineaarne funktsionaal (s.t. variatsioon), $\varphi_2(y, h, h)$ on h suhtes pidev ruutfunktsionaal

ja $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\beta(y, h)}{\|h\|^2} = 0$. Ruutfunktsionaali $\varphi_2(y, h, h)$ nimetatakse

teiseks variatsiooniks ehk teist järku diferentsiaaliks ja märgitakse $\delta^2 F(y, h)$ või $\delta^2 F$. Funktsionaali, millel on olemas teine variatsioon, nimetame kaks korda diferentseeruvaks.

Funktsionaal

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

osutub kaks korda diferentseeruvaks, kui integraalialusel funktsionaalil f on olemas kuni kolmandat järku pidevad

osatuletised. Teist järku variatsiooni avaldise saame, kui arendame $f(x, y+h, y'+h')$ Taylori valemi järgi kohal (x, y, y') kuni kolmandat järku liikmeteni. Rakendades eelmise paragrahvi 3. punkti näites 2^o kasutatud mõttekäiku saame

$$\delta^2 F = \int_a^b \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} h h' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} h'^2 \right] dx.$$

Veenduda selles!

Analoogiliselt saame funktsionaali

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$$

teist järku variatsiooni

$$\delta^2 F = \int_a^b \sum_{i, k=0}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(i)} \partial y^{(k)}} h^{(i)} h^{(k)} dx,$$

funktsionaali

$$F(z) = \iint_E f(x, y, z, z_x, z_y) dx dy$$

teist järku variatsiooni

$$\delta^2 F = \iint_E \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z_x} h h_x + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial z_y^2} h^2_y \right] dx dy$$

ja lõpuks funktsionaali

$$F(y_1, \dots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$$

teist järku variatsiooni

$$\delta^2 F = \int_a^b \left\{ \sum_{i, k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k} h_i h_k + 2 \sum_{i, k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k'} h_i h_k' + \sum_{i, k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y_i' \partial y_k'} h_i' h_k' \right\} dx.$$

Teist variatsioonit võib defineerida ka kui variatsioonit esimest järku variatsioonist, s.t. $\delta^2 F(y, h) = \delta(\delta F(y, h))$, vaadeldes sealjuures $F(y, h)$ funktsionaalina muutujast y . Teine variatsioon nagu esimesegi on üheselt määratud.

Analoogiliselt võib defineerida kolmandat ja kõrgemat järku variatsioone. Oma kursuses me neid aga ei kasuta.

3. Ekstreemumi tingimused teise variatsiooni kaudu. Olgu funktsionaal $F(y)$ kaks korda diferentseeruv ja y_0 tema stationaarne punkt. Tõestame funktsionaali ekstreemumi järgmise tarviliku tingimuse.

Teoreem 1. Selleks et funktsionaalil $F(y)$ oleks stationaarses punktis y_0 minimum, on tarvilik, et iga h puhul

$$\delta^2 F(y_0, h) \geq 0.$$

Maksimumiks on tarvilik, et kehtiks võrratus $\delta^2 F(y_0, h) \leq 0$.

Tõestus. Et ekstreemumpunktis $\delta F(y_0, h) = 0$, siis juurdekasv avaldub kujul

$$(1) \Delta F = \frac{1}{2} \delta^2 F(y_0, h) + \beta(y_0, h),$$

kus $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\beta(y_0, h)}{\|h\|^2} = 0$. Olgu y_0 miinimumpunkt. Siis leidub

$\varepsilon > 0$, nii et $\Delta F(y_0, h) \geq 0$, kui $\|h\| < \varepsilon$. Oletame nüüd vastupidi väitele, et mõne h_0 korral

$$\delta^2 F(y_0, h_0) < 0.$$

Kui reaalarv η on absoluutväärtuselt küllalt väike, siis juurdekasv

$$\Delta F = F(y_0 + \eta h_0) - F(y_0) = \frac{1}{2} \delta^2 F(y_0, \eta h_0) + \beta(y_0, \eta h_0) =$$

$$= \eta^2 \left[\frac{1}{2} \delta^2 F(y_0, h_0) + \frac{\beta(y_0, \eta h_0)}{\|h_0 \eta\|^2} \|h_0\|^2 \right] < 0,$$

$$\text{sest } \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\beta(y_0, \eta h_0)}{\|\eta h_0\|^2} = \lim_{\|\eta h_0\| \rightarrow 0} \frac{\beta(y_0, \eta h_0)}{\|\eta h_0\|^2} = 0.$$

Viimane võrratus näitab, et y_0 ei ole miinimumpunkt. Saadud vastuolu tõestabki väite. Analoogiline en tõestus maksimumpunkti korral.

Teise variatsiooni mittenegatiivsus on tarvilik miinimumi olemasoluks, kuid mitte piisav. Selleks et saada piisavat tingimust, tuleb nõuda, et teine variatsioon oleks positiivselt määratud:

Teoreem 2. Kui $\delta F(y_0, h) = 0$ ja iga h puhul

$$(2) \quad \delta^2 F(y_0, h) \geq k \|h\|^2,$$

kus k on positiivne konstant, siis y_0 on funktsionaali $F(y)$ miinimumpunkt.

Tõestus. Valime nii väikese positiivse reaalarvu ε , et võrduses (1) $|\beta(y_0, h)| < \frac{k}{4} \|h\|^2$, kui $\|h\| < \varepsilon$. Siis

$$\begin{aligned} \Delta F &= \frac{1}{2} \delta^2 F(y_0, h) + \beta(y_0, h) \geq \\ &\geq \frac{k}{2} \|h\|^2 - \frac{k}{4} \|h\|^2 = \frac{k}{4} \|h\|^2 > 0, \end{aligned}$$

kui $\|h\| < \varepsilon$, s. t. kohal y_0 on funktsionaalil miinimum.

M ä r k u s. Teoreemis 2 esitatud piisavat tingimust (2) ei saa nõrgendada ja asendada näiliselt loomuliku tingimusega $\delta^2 F(y_0, h) > 0$. Näiteks võib olla funktsionaal

$$F(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 x y^2(x) dx - \int_0^1 y^3(x) dx = \int_0^1 y^2(x) \left[\frac{1}{2} x - y(x) \right] dx$$

ruumis $C[0, 1]$. Punkt $y(x) \equiv 0$ on selle funktsionaali statsionaarne punkt ja teine variatsioon

$$\delta^2 F(0, h) = \frac{1}{2} \int_0^1 x h^2(x) dx > 0$$

iga funktsiooni $h(x) \neq 0$ puhul. Sellele vaatamata omandab funktsionaal nulli igas ümbruses $S(0, \varepsilon)$ nii positiivseid

kui ka negatiivseid väärtusi. Tõepoolest, $F(y) > 0$ iga pideva funktsiooni $y(x) \in S(0, \varepsilon)$ korral, mis lõigul $[0, 1]$ rahuldab tingimusi $y(x) \neq 0$, $y(x) < \frac{1}{2}$ ($|y(x)| < \varepsilon$). Funktsionaal $F(y)$ omandab negatiivse väärtuse, kui funktsioon $y(x)$ valida sellest ümbrusest näiteks järgmisel viisil:

$$y(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } 0 \leq x < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \varepsilon - x, & \text{kui } \frac{\varepsilon}{2} \leq x < \varepsilon, \\ 0, & \text{kui } x \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Märgime, et antud juhul ei leidu positiivset konstanti k , nii et kehtiks võrratus (2).

II. V A R I A T S I O O N Ü L E S A N D E D
F I K S E E R I T U D R A J A P U N K T I D E
K O R R A L

§ 6. V a r i a t s i o o n a r v u t u s e
p õ h i l e m m a d

1. Lagrange'i lemma. Kui $\Phi(x)$ on lõigul $[a, b]$ pidev funktsioon ja

$$\int_a^b \Phi(x)h(x)dx = 0$$

iga pideva funktsiooni $h(x)$ puhul, siis $\Phi(x) \equiv 0$ kogu lõigul $[a, b]$.

Tõestus. Kui $\Phi(x) \not\equiv 0$, siis leidub lõigu $[a, b]$ sisemine punkt x_0 , milles $\Phi(x_0) \neq 0$. Olgu konkreetsuse mõttes $\Phi(x_0) = c > 0$ ja $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ punkti x_0 ümbrus, milles on rahuldatud tingimus $\Phi(x) > \frac{c}{2}$. Võtame mingi mittenegatiivse pideva funktsiooni $h(x)$, mis võrdub nulliga väljaspool vahemikku $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ja on positiivne $x = x_0$ puhul. Siis

$$\int_a^b \Phi(x)h(x)dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \Phi(x)h(x)dx > \frac{c}{2} \cdot \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx > 0,$$

mis on vastuolus eeldusega.

M ä r k u s. Lagrange'i lemma jääb kehtima ka siis, kui funktsioonide $h(x)$ hulka märksa kitsendada. Nagu tõestuskäigust näha, võime nõuda, et $h(x) \in S(0, \varepsilon) \subset C^{(n)}[a, b]$ ja $h(a) = h(b) = 0, \dots, h^{(n-1)}(a) = h^{(n-1)}(b) = 0$, kus ε on mistahes positiivne reaalarv ja n - suvaline naturaalarv.

2. Du Bois Raymond'i lemma. Kui $\Psi(x)$ on pidev lõigul $[a, b]$ ja

$$(1) \quad \int_a^b \Psi(x)h'(x)dx = 0$$

iga funktsiooni $h(x) \in C'[a, b]$ puhul, mis rahuldab tingimusi $h(a) = h(b) = 0$, siis $\Psi(x) = \text{const}$.

Tõestus. Vastupidiselt väitele oletame, et funktsioon $\Psi(x)$ ei ole kogu lõigul $[a, b]$ konstantne. See tähendab, et sellel lõigul leiduvad punktid c_1 ja c_2 , nii et $\Psi(c_1) < \Psi(c_2)$. Näitame, et siis eksisteerib funktsioon $h(x) \in C'[a, b]$, $h(a) = h(b) = 0$, mille puhul võrdus (1) ei kehti. Võtame arvu c , mis rahuldab tingimusi

$$\Psi(c_1) < c < \Psi(c_2).$$

Et $\Psi(x)$ on pidev funktsioon, siis leiduvad ühisosata vahemikud $\Delta_1 \ni c_1$ ja $\Delta_2 \ni c_2$, nii et iga $x' \in \Delta_1$, $x'' \in \Delta_2$ puhul

$$\Psi(x') < c < \Psi(x'').$$

Funktsiooniks $h'(x)$ valime suvalise pideva funktsiooni, mis on positiivne vahemikus Δ_1 , negatiivne vahemikus Δ_2 ja võrdne nulliga väljaspool neid vahemikke ning rahuldab tingimust

$$\int_a^b h'(x)dx = \int_{\Delta_1} h'(x)dx + \int_{\Delta_2} h'(x)dx = 0.$$

Funktsiooni $h(x)$ defineerime valemiga

$$h(x) = \int_a^x h'(t)dt.$$

Ilmselt $h(x) \in C'$ ja $h(a) = h(b) = 0$. Edasi leiame

$$\int_a^b [\Psi(x) - c] h'(x)dx = \int_{\Delta_1} [\Psi(x) - c] h'(x)dx +$$

$$+ \int_a^b [\Psi(x) - c] h'(x) dx < 0,$$

sest mõlemad liidetavad on negatiivsed. Kuid siis

$$\begin{aligned} \int_a^b \Psi(x) h'(x) dx &= \int_a^b [\Psi(x) - c] h'(x) dx + c \int_a^b h'(x) dx = \\ &= \int_a^b [\Psi(x) - c] h'(x) dx < 0. \end{aligned}$$

Saadud vastuolu tekkis oletusest, et $\Psi(x)$ ei ole konstantne kogu lõigul $[a, b]$. Lemma on tõestatud.

3. Lemma 3. Kui $\Phi(x)$ ja $\Psi(x)$ on pidevad ning

$$(2) \quad \int_a^b [\Phi(x)h(x) + \Psi(x)h'(x)] dx = 0$$

iga funktsiooni $h(x) \in C^1[a, b]$ puhul, mis rahuldab tingimusi $h(a) = h(b) = 0$, siis $\Psi(x)$ on diferentseeruv ja

$$\Phi(x) - \Psi'(x) = 0, \text{ kui } x \in [a, b].$$

Tõestus. Tähistades

$$(3) \quad A(t) = \int_a^t \Phi(\tau) d\tau,$$

saame ositi integreerides

$$\begin{aligned} \int_a^b \Phi(x)h(x) dx &= A(x)h(x) \Big|_a^b - \int_a^b A(x)h'(x) dx = \\ &= - \int_a^b A(x)h'(x) dx. \end{aligned}$$

Seega võime võrduse (2) ümber kirjutada kujul

$$\int_a^b [-A(x) + \Psi(x)] h'(x) dx = 0.$$

Kuid siis Du Bois Raymond'i lemma põhjal

$$\Psi(x) - A(x) = \text{const},$$

millest seose (3) tõttu

$$\Psi'(x) - \Phi(x) = 0.$$

Rõhutame siin, et funktsiooni $\Psi(x)$ diferentseeruvust polnud eeldatud.

§ 7. Variatsioonarvutuse lihtsaim ülesanne. Euleri võrrand

1. Ülesande formuleering ja Euleri võrrandi tuletamine.

Konkreetsete ülesannete vaatlemist alustame variatsioonarvutuse lihtsaimast ülesandest, mida võib formuleerida järgmiselt.

Olgu $f(x, y, z)$ antud funktsioon, millel on olemas esimest ja teist järku pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi. Kõigi funktsioonide $y(x) \in C'[a, b]$ seast, mis rahuldavad tingimusi

$$y(a) = c, \quad y(b) = d,$$

leida selline funktsioon, mille korral funktsionaal

$$(1) \quad F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$$

saavutab ekstreemumi. Teisiti rääkides seisneb variatsioonarvutuse lihtsaim ülesanne funktsionaali (1) ekstreemumi leidmises antud punkte $A(a, c)$ ja $B(b, d)$ ühendavate siledade kõverate hulgal. Siia alla kuulub näiteks brahhiotokrooni probleem. Edaspidi nimetame funktsionaali (1) ka variatsioonarvutuse põhifunktsionaaliks.

Nagu teada, on ekstreemumiks tarvilik, et ekstreemumpunktis $\delta_1 F(y, h) = 0$ iga h puhul. Variatsiooni avaldis on meil eespool leitud (vt. I ptk., §4, punkt 3). Seega on tarvilik, et

$$\int_a^b [f_y h(x) + f_{y',h'}(x)] dx = 0.$$

Et kõik lubatavad funktsioonid $y(x)$ peavad rahuldama tingimusi $y(a) = c$, $y(b) = d$, siis mistahes juurdekasvu $h(x)$ puhul $h(a) = h(b) = 0$. Belmise paragrahvi lemma 3 alusel eksisteerib $\frac{d}{dx} f_y$, ja $f_y - \frac{d}{dx} f_y = 0$. Seega iga funktsioon $y(x)$, mis annab variatsiooniarvutuse põhifunktsionaalile ekstreemaalse väärtuse, rahuldab võrrandit

$$(2) \quad f_y - \frac{d}{dx} f_y = 0.$$

Võrrandit (2), mille tuletas Euler 1744.a., nimetatakse Euleri võrrandiks.

Saadud tulemuse sõnastame teoreemina.

Teoreem 1. Selleks et põhifunktsionaal (1), mis on määratud funktsioonide $y(x) \in C^1[a, b]$, $y(a) = c$, $y(b) = d$ hulgal, saavutaks antud funktsioonil $y(x)$ ekstreemumi, on tarvilik, et see funktsioon rahuldaks Euleri võrrandit (2).

Selle teoreemiga on antud nõrga ekstreemumi tarvilik tingimus, sest $y \in C^1$. Et aga iga tugev ekstreemum on ühtlasi nõrgaks ekstreemumiks, siis on see tingimus tarvilik ka tugeva ekstreemumi olemasoluks.

Euleri võrrand on teist järku harilik diferentsiaalvõrrand, mis väljaarendatult on järgmine¹:

$$(3) \quad f_y - f_{xy} \cdot y' - f_{yy} \cdot y'^2 - f_{y'y} \cdot y'' = 0.$$

Euleri võrrandi lahendeid nimetatakse ekstremaalideks. Funktsionaal (1) võib saavutada ekstreemumi ainult ekstreemaalil, kuid kõik ekstremaalid ei tarvitse anda sellele funktsionaalile ekstreemaalset väärtust. Kõverat, millel ekstreemum saavutatakse, nimetame ekstreemaliseerivaks kõveraks. Euleri võrrandi üldlahend

$$y = y(x, C_1, C_2)$$

sisaldab kaht suvalist konstanti. Nende määramiseks on meil aga ka parajasti kaks rajatingimust

¹ Tegelikult võib Euleri võrrandit kirjutada kujul (3) vaid juhul, kui tema lahend y on kaks korda diferentseeruv. y'' olemasolu küsimust käsitleme järgmises punktis.

$$y(a) = c, \quad y(b) = d,$$

sest kõik ekstremaalid peavad läbima punkte $A(a, c)$ ja $B(b, d)$. Seega jääb tavaliselt üks ekstremaal, millel ekstreemum võib realiseeruda. Kui sealjuures ülesande sisust on teada maksimumi või miinimumi olemasolu, siis see saavutatakse saadaval kõveral.

2. Teise tuletise olemasolu ja pidevus. Euleri võrrandis kujul (3) esineb y'' . Eeldasime, et $y \in C'$, s.t. meil pole teada, kas y'' on olemas. Tõestame järgmise teoreemi.

Teoreem 2. Olgu $y = y(x)$ Euleri võrrandi lahend. Kui funktsioonil $f(x, y, y')$ on olemas pidevad osatuletised kuni teise järguni (kaasa arvatult), siis igas punktis x , kus

$$f_{y,y'}(x, y(x), y'(x)) \neq 0,$$

on funktsioonil $y = y(x)$ olemas pidev teist järku tuletis $y''(x)$.

Tõestus. Vaatleme punkti, kus $f_{y,y'} \neq 0$. Tähistame $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$, $\Delta y' = y'(x + \Delta x) - y'(x)$ ja peame meeles, et y ja y' on pidevad, s.t. kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis ka $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta y' \rightarrow 0$. Nagu me nägime, eksisteerib $\frac{d}{dx} f_{y'}$, s.t. eksisteerib piirväärtus

$$\frac{d}{dx} f_{y'} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [f_{y'}(x + \Delta x, y(x + \Delta x), y'(x + \Delta x)) - f_{y'}(x, y(x), y'(x))]$$

ehk

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f_{y'} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [f_{y'}(x + \Delta x, y(x + \Delta x), y'(x + \Delta x)) - \\ &\quad - f_{y'}(x, y(x + \Delta x), y'(x + \Delta x))] + \\ &+ \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (\Delta y \rightarrow 0)}} \frac{1}{\Delta y} [f_{y'}(x, y + \Delta y, y' + \Delta y') - f_{y'}(x, y, y' + \Delta y')] \frac{\Delta y}{\Delta x} + \\ &+ \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (\Delta y' \rightarrow 0)}} \frac{1}{\Delta y'} [f_{y'}(x, y, y' + \Delta y') - f_{y'}(x, y, y')] \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \end{aligned}$$

$$= f_{y'x} + f_{y'y}y' + f_{y'y'} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x}.$$

Et kõigi piirväärtuste eksisteerimine peale viimase on teada, siis eksisteerib ka

$$y'' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{1}{f_{y'y'}} \left[\frac{d}{dx} f_{y'} - f_{xy'} - f_{yy'}y' \right]$$

ja Euleri võrrand on esitatav kujul (3). Viimasest saame

$$y'' = \frac{1}{f_{y'y'}} [f_y - f_{xy'} - f_{y'y'}y'].$$

Et paremal pool on kõik pidevad funktsioonid, siis on pidev ka y'' .

3. Näide. Millistel kõveratel võib funktsionaal

$$F(y) = \int_0^1 (y'^2 + 12xy) dx$$

saavutada ekstreemumi, kui $y(0) = 0$ ja $y(1) = 2$?

Leiame ekstreemaalid. Et $f(x, y, y') = y'^2 + 12xy$, siis

$f_y = 12x$, $f_{y'} = 2y'$ ja Euleri võrrandiks on

$$12x - 2y'' = 0.$$

Viimase üldlahendiga

$$y = x^3 + C_1x + C_2$$

ongi antud kõik ekstreemaalid. Nõutud rajatingimusi rahuldab neist ekstremaal

$$y = x^3 + x \equiv y_0(x).$$

Seega võib funktsionaal saavutada ekstreemumi vaid sellel kõveral.

Arvutame veel funktsionaali väärtuse leitud ekstreemalil ja vaatame, kas võib öelda midagi ekstreemumi iseloomu kohta. Kõigepealt

$$F(y_0) = \int_0^1 [(3x^2 + 1)^2 + 12x(x^3 + x)] dx = 11\frac{1}{5}.$$

Võtame veel mõne teise hästi lihtsa kõvera, mis rahuldab rajatingimusi, näiteks sirge $y = 2x \equiv y_1(x)$. Saame

$$F(y_1) = \int_0^1 (4 + 24x^2) dx = 12.$$

Et $F(y_0) < F(y_1)$, siis juhul, kui ekstremaalil $y = x^3 + x$ ekstreemum saavutatakse, võib see olla vaid miinum. Nagu hiljem näeme (§ 12, punkt 3, näide 3), esinebki tugev miinum.

§ 8. Euleri võrrandi lihtsalt integreeruvaid erijuhte. Brahhistokrooni probleemi lahendus

Euleri võrrand pole alati lihtsalt lahenduv. Et aga variatsioonülesannete lahendamisel on Euleri võrrandil täita eriline osa, siis on oluline välja selgitada need juhud, millal ta on lihtsalt integreeritav. Vaatlemegi mõningaid erijuhte.

1. Funktsioon f ei sõltu argumendist y' , s.t. $f = f(x, y)$.

Siis $f_y = 0$ ja Euleri võrrandil on kuju

$$f_y(x, y) = 0.$$

Saadud võrrand pole diferentsiaalvõrrand, vaid tasapinnalise kõvera võrrand. Et tegemist pole kõverate parvega, vaid üksiku kõveraga, siis puudub üldiselt võimalus rajatingimuste $y(a) = c$, $y(b) = d$ rahuldamiseks ja variatsioonülesandel puudub lahend. Ainult juhul, kui kõver läbib juhtumisi punkte $A(a, c)$ ja $B(b, d)$, võib ülesanne olla lahenduv.

2. Funktsioon f sõltub argumendist y' lineaarselt, s.t. $f(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'$. Vaadeldaval juhul saame Euleri võrrandiks

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} y' - \frac{d}{dx} N(x, y) = 0$$

ehk

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Siin on jällegi tegemist üksiku jeone võrrandiga. Seetõttu kehtib eelmises punktis öeldu.

Kui $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$, siis $Mdx + Ndy$ on täisdiferentsiaal ja funktsionaal

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_a^b f(x, y, y') dx = \int_a^b \left[M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} \right] dx = \\ &= \int_{(a, c)}^{(b, d)} M(x, y) dx + N(x, y) dy \end{aligned}$$

ei sõltu integreerimisteest ning on konstantne. Variatsioonülesanne kaotab sel juhul mõtte.

3. Funktsioon f ei sõltu otseselt argumentidest x ja y , s.t. $f = f(y')$. Vaadeldaval juhul $f_y = f_{xy} = f_{yy'} = 0$ ja Euleri võrrandiks on

$$f_{y'y'} \cdot y'' = 0.$$

Siit kas $f_{y'y'} = 0$ või $y'' = 0$. Kui $y'' = 0$, siis $y = C_1 x + C_2$.

Kui $f_{y'y'}(y') = 0$ ja sellel y' suhtes harilikul võrrandil on üks või mitu lahendit $y' = k_1$, siis $y = k_1 x + C$. Saime üheparameetrilise sirgete parve, mis sisaldub juba leitud kaheparameetrilises parves. Ekstremaalid on seega sirged

$$y = C_1 x + C_2,$$

kusjuures rajatingimusi $y(a) = c$, $y(b) = d$ rahuldab neist üks.

Näiteks ülesandes: kõverate seast, mis ühendavad punkte $A(a, c)$, $B(b, d)$, leida selline, mille kaare pikkus nende punktide vahel on vähim, tuleb leida funktsioon $y = y(x)$, mis realiseerib funktsionaali

$$F(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

miinimumi. Eelöeldu põhjal on ekstremaalideks sirged
 $y = C_1 x + C_2$, kusjuures antud punkte läbib neist sirge

$$y = \frac{c-d}{a-b} x + \frac{ad-bc}{a-b}.$$

4. Funktsioon f ei sõltu otseselt argumentidest y , s.t.
 $f = f(x, y')$. Siis Euleri võrrand omandab kuju

$$\frac{d}{dx} f_{y'}(x, y') = 0,$$

mille esimene integraal on

$$(1) \quad f_{y'}(x, y') = C_1.$$

Et saadud esimest järku diferentsiaalvõrrand ei sisalda muutujat y , siis saab võrrandit otseselt integreerida.

1. v õ i m a l u s. Lahendame võrrandi (1) y' suhtes:

$$y' = \varphi(x, C_1)$$

ja saame

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

2. v õ i m a l u s. Toome sisse parameetri $\frac{dy}{dx} = p$
ja avaldame seosest (1)

$$x = \psi(p, C_1).$$

y saame seosest $dy = p dx = p \psi'(p, C_1) dp$ integreerimise teel. Niiviisi leiame üldlahendi parameetrilisel kujul

$$x = \psi(p, C_1),$$

$$y = \int p \psi'(p, C_1) dp + C_2.$$

Parameetri võib sisse tuua ka mõnel teisel sobival viisil.

5. Funktsioon f ei sõltu otseselt argumentidest x , s.t.
 $f = f(y, y')$. Et $f_{xy'} = 0$, siis Euleri võrrand saab kujul

$$f_y - f_{yy'} y' - f_{y'y'} y'' = 0.$$

Kui korrutada võrrandi kõiki liikmeid y' -ga, siis võib võrrandi esitada kujul

$$\frac{d}{dx}(f - y'f_y) = 0.$$

Kontrollida! Seega on võrrandi esimeseks integraaliks

$$f - y'f_y = C_1.$$

Et saadud esimest järku võrrand ei sisalda otseselt x , siis saame võrrandi lahendada y' avaldamisega või parameetri sissetoomisega.

6. Näide. Leiame ekstremaalid brahhistokrooni probleemi korral (vt. I ptk., § 2, punkt 2). Nagu nägime, tuleb leida kõver, mis annab funktsionaalile¹

$$F(y) = \int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

minimaalse väärtuse, kusjuures peavad olema täidetud raja-tingimused

$$y(0) = 0, \quad y(b) = d.$$

Antud juhul $f(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$ ei sisalda ilmutatud kujul

x ja esimeseks integraaliks on

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = C$$

ehk

$$y(1 + y'^2) = C_1.$$

Viimase võrrandi integreerimiseks toome sisse parameetri

$y' = \cot t$. Siis

$$y = \frac{C_1}{1 + \cot^2 t} = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t),$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \sin 2t}{\cot t} dt = 2C_1 \sin^2 t dt = C_1(1 - \cos 2t)dt$$

¹ Teguri $\frac{1}{\sqrt{2g}}$, mis esialgses funktsionaalis esines, võime ära jätta, sest see ei mõjуста funktsionaali ekstreemukohta.

ja

$$x = C_1 \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + C_2 = \frac{C_1}{2} (2t - \sin 2t) + C_2.$$

Et kõver läbib punkti $(0, 0)$, siis $C_2 = 0$.

Seega

$$x = \frac{C_1}{2} (2t - \sin 2t),$$

$$y = \frac{C_2}{2} (1 - \cos 2t),$$

kus C_1 tuleb määrata tingimusest, et $y(b) = d$. Seega ekstremaal on tsükleid, mis läbib punkte $(0, 0)$ ja (b, d) . Ülesande sisust on selge, et miinimum mingil kõveral saavutatakse, seega on lahend leitud. Otsitava tsükleidi geomeetrist konstrueerimist vt. G. Rägo õpikust [8], lk. 492-493.

III. VARIATSIOONÜLESANDED
 FIKSEERIMATA RAJAPUNKTIDE
 KORRAL JA NEILE TAANDUVAD
 ÜLESANDED

§ 9. Lihtsaima variatsioon-
 ülesande üldistus fikseeri-
 mata rajapunktide juhule

1. Ekstreemumi tarvilik tingimus. Eelmises peatükis uurisime variatsioonarvutuse põhifunktsionaali

$$(1) \quad F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

eeldusel, et rajapunktid $A(a, c)$ ja $B(b, d)$, mida otsitav kõver läbib, on antud. Käesolevas peatükis uurime sama funktsionaali, kusjuures üks või mõlemad rajapunktid on ette andmata. Seega lubatavate kõverate hulk ehk funktsionaali määramispiirkond laieneb.

Olgu $y(x) \in C'[a, b]$ funktsionaali (1) ekstremaliseeriv funktsioon, s.t. kõigi määramispiirkonda kuuluvate kõverate hulgast realiseerigu ekstreemumi just kõver $y = y(x)$. Kitsendame nüüd funktsionaali määramispiirkonda ja vaatleme funktsionaali vaid nendel kõveratel, millel on ühised otspunktid ekstremaliseeriva kõveraga. Siis kõver $y = y(x)$ jääb ekstremaliseerivaks ka kõigi nimetatud kõverate hulgas. See tähendab, et ta rahuldab Euleri võrrandit

$$(2) \quad f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0.$$

Seega tuleb ekstremaliseerivaid kõveraid otsida endiselt Euleri võrrandi lahendite hulgast.

Euleri võrrandi üldlahend

$$y = y(x, C_1, C_2)$$

sisaldab kaht suvalist konstanti. Fikseeritud rajapunktide korral saime need määrata rajatingimustest

$$y(a) = c, \quad y(b) = d.$$

Nüüd on asi komplitseeritum. Käesolevas peatükis seamegi ülesandeks tuletada tingimusi, mis asendaksid rajatingimusi ja lubaksid konstante määrata.

2. Juhtum, kus lubatavate kõverate otspunktid asuvad vertikaalsirgetel. Vaatleme ekstreemumi leidmist funktsionaali (1) korral eeldusel, et kõigi lubatavate kõverate otspunktid asuvad etteantud sirgetel $x = a$ ja $x = b$. Seega on ekstremaalide otspunktide abstsissid endiselt antud, muutada saab vaid ordinaat. Lähtume ekstreemumi tarvilikust tingimusest: ekstremaliseerival kõveral

$$\delta F(y, h) = \int_a^b (f_y h + f_{y', h'}) dx = 0.$$

Siin $h(x)$ kui suvaline funktsioon ei tarvitse enam muutuda nulliks punktides $x = a$ ja $x = b$. Seepärast variatsiooniarvutuse põhilemma 3 (§ 6, punkt 3) pole rakendatav.

Integreerime ositi teist liidetavat. Saame

$$\delta F(y, h) = f_{y', h(x)} \Big|_a^b + \int_a^b \left[f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right] h dx = 0.$$

Et ekstremaalidel $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \equiv 0$, siis integraal võrdub nulliga ja jääb tingimus, et

$$f_{y', (b, y(b), y'(b))} h(b) - f_{y', (a, y(a), y'(a))} h(a) = 0$$

iga funktsiooni $h(x) \in C'[a, b]$ puhul. Arvestades, et $h(b)$ ja $h(a)$ on teineteisest sõltumatud, leiame siit tingimused, mis peavad olema täidetud iga ekstremaliseeriva kõvera korral:

$$(3) \quad f_{y', (a, y(a), y'(a))} = 0,$$

$$(4) \quad f_{y'}(b, y(b), y'(b)) = 0.$$

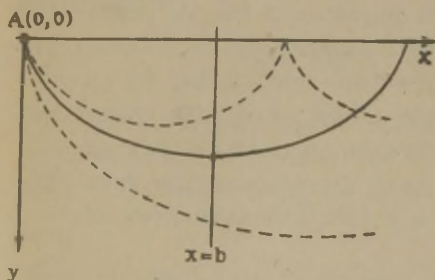
Saadud tingimusi nimetatakse loomulikeks rajatingimusteks. Seega võime vaadelda juhul otsitavad ekstremaalid määrata tingimustest (2), (3) ja (4).

Juhul, kui vasakpoolne otspunkt on fikseeritud, asendub tingimus (3) tingimusega $y(a) = c$. Analoogiline on olukord, kui on fikseeritud parempoolne otspunkt.

N ä i d e. Lahendame brahhistokrooni probleemi juhu jaoks, kui parempoolne otspunkt võib liikuda vertikaalsirgel $x = b$, s.t. lahendame ülesande: leida kõver, mida mööda liikudes masspunkt, mis on asendis $A(0, 0)$ saavutab raskustungi mõjul kõige kiiremini vertikaalsirge $x = b$.

Minimiseerida tuleb funktsionaal

$$F(y) = \int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx.$$



Joonis 5.

Nagu nägime eelmises paragrahvis, on punkti $A(0, 0)$ läbivateks ekstremaalideks tsükloidid

$$x = \frac{C_1}{2} (2t - \sin 2t),$$

$$y = \frac{C_1}{2} (1 - \cos 2t).$$

Konstant C_1 tuleb nii määrata, et tingimus (4) oleks

täidetud, s.t. et

$$f_{y'} \Big|_{x=b} = \frac{y'(b)}{\sqrt{y(b)} \sqrt{1+y'^2(b)}} = 0.$$

Siit

$$y'(b) = 0.$$

s.t. kohal $x = b$ peab ekstremaliseeriva kõvera puutuja olema paralleelne x -teljega. Seega tuleb tsükloidide seast valida see, mille ordinaat saavutab maksimaalse väärtuse just kohal

$x = b$. Ordinaat y saavutab maksimumi, kui $t = \frac{\pi}{2}$. Siis
 aga $b = \frac{C_1}{2}\pi$ ja otsitava kõvera võrrandid on

$$x = \frac{b}{\pi} (2t - \sin 2t),$$

$$y = \frac{b}{\pi} (1 - \cos 2t).$$

Tsükloid läbib sirgel punkti $(b, \frac{2b}{\pi})$.

3. Kitsenduseta juhtum. Vaatleme variatsioonarvutuse põhifunktsionaali

$$(5) \quad F(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx,$$

kus f on pidev koos oma esimest ja teist järku osatuletistega. Erinevalt varem vaadeldud juhtudest eeldame, et nende kõverate otspunktid, millel funktsionaal on määratud, võivad teatud piirides liikuda suvalisel viisil, s.t. erinevate lubatavate kõverate otspunktide abstsissid kui ka ordinaadid võivad olla erinevad. Lineaarseks normeeritud ruumiks, milles funktsionaal $F(y)$ on määratud, võtame ruumi $C'[a, b]$, kus lõik $[a, b]$ sisaldab otspunktide abstsisside kõik võimalikud asendid. Kui mõned lubatavad kõverad pole määratud kogu lõigul $[a, b]$, siis pikendame neid üle otspunktide kuni lõikumiseni sirgetega $x = a$ ja $x = b$ (näiteks lineaarseks-
 trapolatsioonil abil).

Et ekstreemum saavutatakse ainult ekstremaalidel, s.o. Euleri võrrandi lahenditel, siis vaatleme järgnevas funktsionaali (5) vaid ekstremaalidel

$$y = y(x, C_1, C_2).$$

Ekstremaalidel muutub funktsionaal $F(y)$ parameetrite C_1, C_2 ja integreerimisrajade x_0, x_1 funktsiooniks:

$$F(y) = \varphi(C_1, C_2, x_0, x_1).$$

Eeldame algul, et iga ekstremaal $y = y(x, C_1, C_2)$ on oma otspunktidega üheselt määratud. Siis võib lugeda ekstremaalide parameetriteks otspunktide koordinaadid x_0, y_0, x_1, y_1 .

Tähistame ekstremaaliseerivat kõverat $y = y(x)$ sümboliga γ_0 , kõigi ekstremaalide hulka $\{\gamma\}$. Siis iga ekstremaal $\gamma \in \{\gamma\}$ on määratud nelja parameetriga x_0, y_0, x_1, y_1 ja vaadeldav funktsionaal (5) muutub sellel ekstremaalide parvel nende parameetrite funktsiooniks:

$$F(y) = \Phi(x_0, y_0, x_1, y_1).$$

Mitme muutuja funktsiooni ekstreemumi tarvilikuks tingimuseks on diferentsiaali võrdumine nulliga, s.t.

$$d\Phi|_{\gamma_0} = 0.$$

Sealjuures

$$(6) \quad d\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_0} dy_0 \right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} dy_1 \right).$$

Siin dx_0, dy_0, dx_1, dy_1 on ekstremaali otspunktide koordinaatide diferentsiaalid (suvalised juurdekasvud). Ilmselt $dy_0 = h(x_0)$ ja $dy_1 = h(x_1)$. Edasi seame eesmärgiks määrata osatuletised

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_0}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_0}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}.$$

1) Vaatleme algul ekstremaalide parve $\{\gamma\}$ kaheparameetrist alamhulka, kus muutuda saavad vaid otspunktide ordinaadid, abstsissid x_0 ja x_1 on fikseeritud, s.t. $dx_0 = dx_1 = 0$. Teiste sõnadega, me vaatleme juhtu, kus ekstremaalide otspunktid asuvad vertikaalsirgetel $x = x_0$ ja $x = x_1$. Nendel ekstremaalidel, mida me tähistame $y = y(x, y_0, y_1)$, muutub funktsioon $\Phi(x_0, y_0, x_1, y_1)$ ja seega ka funktsionaal $F(y)$ kahe muutuja funktsiooniks

$$F(y) = F(y(x, y_0, y_1)) = \Phi_0(y_0, y_1),$$

kusjuures

$$(7) \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}$$

kõigis punktides, kus x_0 ja x_1 omandavad eespool fikseeritud väärtusi. Edasi

$$F(y + h) = F(y(x, y_0 + dy_0, y_1 + dy_1)) = \Phi_0(y_0 + dy_0, y_1 + dy_1)$$

Ja $dy_0 = h(x_0)$, $dy_1 = h(x_1)$ tõttu

$$F(y+th) = \Phi_0(y_0+tdy_0, y_1+tdy_1).$$

Nüüd aga

$$\begin{aligned} (8) \quad \delta_1 F(y, h) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} F(y+th) \right|_{t=0} = \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \Phi_0(y_0+tdy_0, y_1+tdy_1) \right|_{t=0} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1} dy_1 = \\ &= d\Phi_0(y_0, y_1), \end{aligned}$$

s.t. diferentsiaal $d\Phi_0$ ühtib kõne all olevatel ekstremaalidel variatsiooniga $\delta_1 F$. Vaadeldava juhu jaoks on aga variatsioon leitud eelmises punktis:

$$\delta_1 F(y, h) = f_{y, h(x)} \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right] h(x) dx.$$

Arvestades, et ekstremaalidel võrdub integraal nulliga ja $h(x_0) = dy_0$, $h(x_1) = dy_1$, näeme, et vaatluse all olevatel ekstremaalidel

$$(9) \quad \delta_1 F(y, h) = f_{y'} \Big|_{x=x_1} dy_1 - f_{y'} \Big|_{x=x_0} dy_0.$$

Võrreldes viimast seost seostega (8) ja (7) saame valemid

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_0} = - f_{y'} \Big|_{x=x_0} = - f_{y'}(x_0, y_0, y'(x_0)),$$

$$(10) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = f_{y'} \Big|_{x=x_1} = f_{y'}(x_1, y_1, y'(x_1)).$$

2) Selleks et leida $\frac{\partial \Phi}{\partial x_0}$ ja $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$, vaatleme hulga

teist alamhulka, mis koosneb mingi ühe ja sama ekstremaali $y = y(x)$ kaartest muutuvate otspunktidega (x_0, y_0) ja (x_1, y_1) , kus $y_0 = y(x_0)$ ja $y_1 = y(x_1)$. Otspunktide koordinaatide diferentsiaalid on omavahel seotud võrdustega

$$dy_0 = y'(x_0) dx_0, \quad dy_1 = y'(x_1) dx_1$$

ja seetõttu omandab diferentsiaali avaldis (6) vaadeldaval ekstremaalide alamhulgal kuju

$$(11) \quad d\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} + y'(x_0) \frac{\partial \Phi}{\partial y_0} \right) dx_0 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + y'(x_1) \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \right) dx_1.$$

Nimetatud alamhulgal muutub põhifunktsionaal (5) (ja seega ka funktsioon $\Phi(x_0, y_0, x_1, y_1)$) integreerimisrajade funktsiooniks

$$(12) \quad \Phi_1(x_0, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x)) dx,$$

kusjuures

$$d\Phi_1 = d\Phi$$

kõigis punktides, kus y_0 ja y_1 omandavad ekstremaali $y = y(x)$ valikuga fikseeritud väärtusi. Et vaadeldava parve ekstremaalid on antud kõik ühe ja sama võrrandiga $y = y(x)$ ja seetõttu integraalialune funktsioon parameetritest ei sõltu, siis integraali (12) diferentseerimine annab

$$(13) \quad d\Phi_1 = f(x_1, y_1, y'(x_1)) dx_1 - f(x_0, y_0, y'(x_0)) dx_0.$$

Seega

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} + y'(x_0) \frac{\partial \Phi}{\partial y_0} = -f|_{x=x_0},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + y'(x_1) \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = f|_{x=x_1},$$

millest seoste (10) tõttu

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} = - (f - y'f_{y'})|_{x=x_0},$$

(14)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = (f - y'f_{y'})|_{x=x_1}.$$

Nagu näeme, on ekstremaalidel $\{y\}$ põhifunktsionaali (5) kui nelja muutuja funktsiooni $\Phi(x_0, y_0, x_1, y_1)$ osatuletised antud valemitega (10) ja (14) ning tema täisdiferent-siaal

$$(15) \quad d\Phi = - \left\{ [f - y'f_{y'}]_{x=x_0} dx_0 + f_{y'}|_{x=x_0} dy_0 \right\} + \left\{ [f - y'f_{y'}]_{x=x_1} dx_1 + f_{y'}|_{x=x_1} dy_1 \right\}.$$

Eriti juhul, kui üks rajapunktidest (x_0, y_0) on fikseeritud, muutub $F(y)$ kahe muutuva funktsiooniks $\Phi(x_1, y_1)$ ja tema diferentsiaal on

$$(16) \quad d\Phi = [f - y'f_{y'}]_{x=x_1} dx_1 + f_{y'}|_{x=x_1} dy_1.$$

Viimast valemit kasutame IV peatükis.

M ä r k u s 1. Valemi (9) tuletamisel (vt. eelmine punkt) eeldasime, et lähtekõver γ ehk $y = y(x)$ on ekstremaal, kuid ei kasutatud asjaolu, et $y = y(x) + h(x)$ on ekstremaal. Olgu nüüd antud kõverate parv $\{\eta\}$, mis üldiselt ei koosne ekstremaalidest, kuid mis sisaldavad ekstremaali γ . Vaatleme sellel parvel funktsionaali F kui kõverate otspunktide koordinaatide funktsiooni. Siis üleminekul ekstremaalilt γ ehk $y = y(x)$ vaadeldava parve mingile teisele kõverale η ehk $y = y(x) + h(x)$ diferentsiaali kuju (15) säilib.

M ä r k u s 2. Valemite (10), (14) ja (15) tuletamisel eeldasime, et ekstremaaliseeriva kõvera γ_0 ümbruses läbib iga kahte punkti parajasti üks ekstremaal, ehk teisiti, iga ekstremaal on üheselt määratud nelja parameetriga. Vabaneme sellest eeldusest. Alati võib γ_0 lülitada neljaparameetrilisse kõverate parve, kus γ_0 mingis ümbruses ühendab iga kaht punkti parajasti üks parve kõver ja kus kõverad sõltuvad oma otspunktide koordinaatidest pidevalt. Vaadeldav funktsionaal $F(y)$ muutub ka sellel neljaparameetrilisel parvel nelja muutuva funktsiooniks $\Phi(x_0, y_0, x_1, y_1)$. Üleminekul ekstremaaliseerivalt kõveralt γ_0 vaadeldava parve mistahes teisele kõverale avaldub diferentsiaal $d\Phi$ märkuse 1 põhjal endiselt valemiga (15).

Põrdume tagasi ülesande juurde. Tuleb leida ekstremaalid, millel $d\Phi = 0$ iga dx_0, dy_0, dx_1, dy_1 puhul. Tavaliselt on vasak- ja parempoolne otspunkt teineteisest sõltumatud. Kui ka sama otspunkti abstsiss ja ordinaat on teineteisest sõltumatud, siis tähendab tingimus $d\Phi = 0$ seda, et nulliga peavad võrduma kõik osatuletised:

$$(17) \quad \begin{aligned} [f - y'f_{y'}]_{x=x_0} &= 0, & f_{y'}|_{x=x_0} &= 0, \\ [f - y'f_{y'}]_{x=x_1} &= 0, & f_{y'}|_{x=x_1} &= 0. \end{aligned}$$

Sageli esineb aga juhtum, kus ühe ja sama otspunkti abstsiss ja ordinaat on teineteisega seotud. Nimetatud juhtu käsitlemegi järgmises punktis.

4. Transversaalsuse tingimus. Asugu antud põhifunktsionaali (5) kõigi lubatavate kõverate otspunktid etteantud kõveratel

$$y = \varphi(x) \text{ ja } y = \psi(x).$$

Nõutakse leida selle funktsionaali ekstreemumi piisavaid tingimusi. Sellise ülesande näiteks võib olla kahe kõvera vahelise suurima või vähima kauguse leidmise ülesanne.

Antud juhul ei ole ekstreemaali otspunkti abstsiss ja ordinaat ning seega ka nende diferentsiaalid sõltumatud. Et

$$(18) \quad y_0 = \varphi(x_0) \text{ ja } y_1 = \psi(x_1),$$

siis

$$dy_0 = \varphi'(x_0)dx_0, \quad dy_1 = \psi'(x_1)dx_1$$

ja tingimusest $d\Phi = 0$, kus

$$(19) \quad d\Phi = [f + (\varphi' - y')f_{y'}]_{x=x_0} dx_0 + \\ + [f + (\psi' - y')f_{y'}]_{x=x_1} dx_1,$$

järeldub

$$(20) \quad \begin{aligned} [f + (\varphi' - y')f_{y'}]_{x=x_0} &= 0, \\ [f + (\psi' - y')f_{y'}]_{x=x_1} &= 0. \end{aligned}$$

Tingimusi (20) nimetatakse transversaalsuse tingimusteks. Transversaalsuse tingimused koos seostega (18) lubavad määrata ühe või mitu kõverat ekstremaalide parvest

$$y = y(x, C_1, C_2),$$

millel funktsionaal võib saavutada ekstreemumi. Juhul kui üks rajapunktidest on fikseeritud, asendub vastav transversaalsuse tingimus rajatingimustega.

Transversaalsuse tingimused juhtude jaoks, kus lubatavate kõverate otspunktid asuvad vertikaalsirgetel $x = x_0$, $x = x_1$ või kõveratel $x = g(y)$, $x = k(y)$, ei järeldu tingimustest (20). Siis saame transversaalsuse tingimused otse $d\Phi$ avaldisest (15). Näiteks juhul, kui $x = x_0$, $x = x_1$, on $dx_0 = dx_1 = 0$ ja transversaalsuse tingimusteks on loomulikud rajatingimused (vt. punkt 2).

N ä i d e 1. Leiame transversaalsuse tingimused funktsionaali

$$F(y) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, y) \sqrt{1+y'^2} dx$$

jaoks eeldusel, et antud kõveratel $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ funktsioon $K(x, y) \neq 0$.

Transversaalsuse tingimus $[f + (\varphi' - y')f_{y'}]_{x=x_0} = 0$ on

siis järgmine:

$$\left[K(x, y) \sqrt{1+y'^2} + (\varphi' - y') \frac{K(x, y)y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right]_{x=x_0} = 0$$

ehk

$$\frac{K(x, y)(1 + \varphi'y')}{\sqrt{1+y'^2}} \Big|_{x=x_0} = 0.$$

Siit $1 + \varphi'(x_0)y'(x_0) = 0$ ehk

$$y'(x_0) = -\frac{1}{\varphi'(x_0)},$$

s.t. ekstremaal peab lõikama joont $y = \varphi(x)$ täisnurga all. Analoogiline on olukord ekstreemaali lõikumisel teise etteantud joonega. Seega vaadeldud tüüpi ekstremaalide korral tähendab transversaalsuse tingimus ortogonaalsuse tingimust.

N ä i d e 2. Leiame ekstreemaalid funktsionaali

$$F(y) = \int_0^x \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$$

jaoks, kui lubatavate kõverate vasakpoolsed otspunktid rahuldavad rajatingimust $y(0) = 0$, kuid parempoolsed otspunktid asuvad ringjoonel

$$(21) \quad (x - 9)^2 + y^2 = 9.$$

Et integraalilune funktsioon $f = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}$ ei sõltu otseselt argumentidest x , siis Euleri võrrandi esimene integraal on $f - y'f_{y'} = C_1$ ehk

$$\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

Siit edasi

$$y^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = C_2^2 \quad (\text{kus } C_2 = \frac{1}{C_1}),$$

millest

$$dx = \pm \frac{y dy}{\sqrt{C_2^2 - y^2}}.$$

Peale integreerimist leiame kaheparameetrilise ringjoonte parve

$$(x + C)^2 + y^2 = C_2^2.$$

Rajatingimust $y(0) = 0$ rahuldavad neist ringjooned

$$(22) \quad (x + C)^2 + y^2 = C_2^2.$$

Teise konstandi määramiseks arvestame, et otsitav ekstremaal peab lõikama ringjoont (21) ortonaalselt, s.t. lõikepunktis

$$(23) \quad y' \varphi' = -1,$$

kus $\varphi(x)$ on antud ilmutamata kujul võrrandiga (21). Tuletiste φ' ja y' määramiseks diferentseerime seoseid (21) ja (22) arvestades, et lõikepunktis $\varphi = y$. Saame

$$2(x - 9) + 2y\varphi' = 0,$$

$$2(x + C) + 2yy' = 0,$$

millest seose (23) tõttu

$$(24) \quad (x - 9)(x + C) + y^2 = 0.$$

Lahutades võrduste (21) ja (22) summast kahekordse võrduse (24) leiame seose

$$[(x - 9) - (x + C)]^2 = 9 + C^2,$$

millest $C = -4$. Seega nõutud ekstremaalid, mida on kaks, on antud ilmutamata kujul võrrandiga

$$(x - 4)^2 + y^2 = 16.$$

§ 10. Nurgapunktidega ekstreemaaalid

1. Probleemi seade. Vaatleme variatsioonarvutuse põhilfunktsionaali

$$(1) \quad F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx,$$

kusjuures lubatavate kõverate rajapunktid $A(a, c)$, $B(b, d)$ olgu fikseeritud. Varem (§7) otsisime ekstremaliseerivat funktsiooni $y(x)$ funktsioonide hulgast, mis kuulusid ruumi $C'[a, b]$, s.t. eeldasime, et $y(x)$ on pidev koos oma esimest järku tuletistega. Vastavat kõverat $y = y(x)$ nimetame siledaks kõveraks. Võib aga juhtuda, et siledate kõverate hulgas ei leidu sellist, mis realiseeriks ekstreemumi. Sellisel juhul on loomulik kindlaks teha, kas ekstreemum ei realiseeru üldisema ruumi funktsioonidel. Üldisemaks ruumiks on kõigi pidevate funktsioonide ruum $C[a, b]$. Vaatleme selle ruumi elementide hulgast tükati siledaid kõveraid. Kõverat nimetame tükati siledaks, kui ta on pidev ja koosneb lõplikust arvust siledate kõverate kaartest. Kõvera punkti, kus esinevad erinevad ühepoolsed puutujad, nimetatakse kõvera nurgapunktiks.

Vaatleme kõigepealt järgmist näidet. Olgu antud funktsionaal

$$F(y) = \int_{-1}^1 (y' - 1)^2 (y' + 1)^2 dx$$

rajatingimustega $y(-1) = 0$, $y(1) = 1$, s.t. kõik lubatavad kõverad peavad läbima punkte $A(-1, 0)$ ja $B(1, 1)$. Uurime funktsionaali ekstreemumeid.

Vaadeldav funktsionaal on määratud punkte A ja B ühendavatel kõveratel, mis kuuluvad ruumi C' . On ilmne, et iga sellise kõvera korral $F(y) \geq 0$. Ekstreemum võidakse saavutada ainult ekstreemaalil. Ekstreemaalideks on sirged $y = C_1x + C_2$, sest $f = f(y')$ ei sõltu otseselt argumentidest x ja y . Antud rajatingimusi rahuldab neist sirge

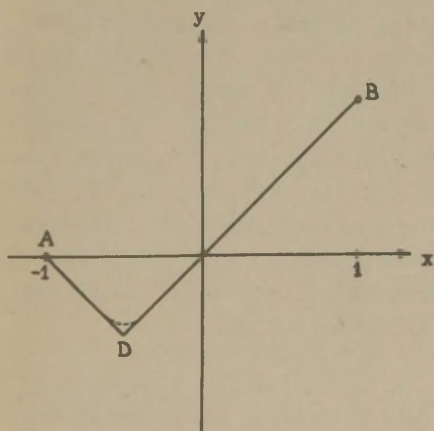
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \equiv y_0(x),$$

kusjuures

$$F(y_0) = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 dx = \frac{9}{8} > 0.$$

Esiialgu me ei tea, kas funktsionaal saavutab sellel sirgel ekstreemumi, kuid teame, et teistel siledatel kõveratel ta seda ei saavuta. Sellele vaatamata omandab funktsionaal absoluutse miinimumi väärtusega 0 näiteks murdjoonel (joonis 6)

$$y = y(x) \equiv \begin{cases} -x - 1, & \text{kui } -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \\ x, & \text{kui } -\frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Joonis 6.

Näeme, et see funktsionaal ei saavuta siledatel kõveratel absoluutset miinimumi väärtusega 0, küll aga tükati siledatel kõveratel. Kui murdjoon punktis D ümardada, siis saame kõvera, mis kuulub ruumi C' . Olenevalt ümardamise "suurusest" võib funktsionaali väärtuse sellisel kõveral teha nullile kui tahes lähedaseks. See tähendab, et 0 on funktsionaali väärtuste alumine

raja ruumis C' , kuid siledatel kõveratel seda raja ei saavutata. Kui aga laiendame funktsionaali määramispiirkonda tükati siledate kõverate hulgani, siis alumine raja saavutatakse ja variatsioonülesanne saab ühe lahendi juurde.

Ainsal siledal ekstremaalil, mis rahuldab rajatingimusi, s.o. sirgel $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, on funktsionaalil nõrk maksimum. Lugeja võib veenduda selles hiljem, peale järgmise peatükiga tutvumist.

2. Nurgapunktidega ekstremaalide olemasolu tingimused.

Esitame nüüd ekstreemumi tarvilikud tingimused juhu jaoks, kus ekstremaliseerivaks kõveraks on tükati sile kõver. Erijuhul, kui ühtki nurgapunkti pole, saame juba tuntud ekstreemumi tingimused.

Oletame, et nurgapunktidega ekstremaliseeriv kõver on juba leitud. Siis iga sile kaar temas peab olema Euleri võrrandi

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$$

lahendiks. See saab selgeks, kui fikseerime kõverjooneline murdjoone kõik lülid peale ühe. Siis selle ühe lüli suhtes tekib fikseeritud rajapunktidega lihtsaim variatsioonülesanne. Viimase lahend on aga tingimata Euleri võrrandi lahendiks. On ka selge, et kui kõverjooneline murdjoon realiseerib näiteks miinimumi, siis ka ühe lüli suhtes saame miinimumi leidmise ülesande, kusjuures kõigi lüli otspunkte läbivate kõverate seast realiseerib selle vaatluse all olev lüli.

Käsitleme lihtsustamiseks vaatleme juhtu, kus ekstremaliseerival kõveral on vaid üks nurgapunkt. Asugu see kohal ξ ($a < \xi < b$). Kui nurgapunkte on rohkem, siis kehtib iga kohta sama arutlus. Jaotame integraali kaheks:

$$F(y) = \int_a^{\xi} f(x, y, y') dx + \int_{\xi}^b f(x, y, y') dx = F_1(y) + F_2(y).$$

Kummalgi funktsionaalil $F_1(y)$, $F_2(y)$ on üks otspunkt fikseeritud, teine fikseerimata. Vaatleme funktsionaali vaid ekstremaalidel. Siis muutub ta kahe muutuja funktsiooniks

$F(\xi, \eta) = F_1(\xi, \eta) + F_2(\xi, \eta)$ ja tema ekstreemumi tarvilikuks tingimuseks on $dF(\xi, \eta) = 0$. Kuid $dF = dF_1 + dF_2$, kusjuures dF_1 ja dF_2 avaldised saame eelmise paragrahvi seoste (15) ja (16) alusel kohe välja kirjutada:

$$dF_1 = [f - y'f_{y'}]_{x=\xi-0} d\xi + f_{y'}|_{x=\xi-0} d\eta$$

(parempoolne otspunkt on fikseerimata) ja

$$dF_2 = - [f - y'f_{y'}]_{x=\xi+0} d\xi - f_{y'}|_{x=\xi+0} d\eta$$

(vasakpoolne otspunkt on fikseerimata). Nüüd saab tingimus

$$dF = dF_1 + dF_2 = 0 \text{ kuju}$$

$$(2) \left\{ [f - y'f_{y'}]_{x=\xi-0} - [f - y'f_{y'}]_{x=\xi+0} \right\} d\xi + \left\{ f_{y'}|_{x=\xi-0} - f_{y'}|_{x=\xi+0} \right\} d\eta = 0.$$

Et $d\xi$ ja $d\eta$ on teineteisest sõltumatud, siis peavad nurgapunktis (ξ, η) kehtima seosed:

$$[f - y'f_{y'}]_{x=\xi-0} - [f - y'f_{y'}]_{x=\xi+0} = 0,$$

(3)

$$f_{y'}|_{x=\xi-0} - f_{y'}|_{x=\xi+0} = 0.$$

Nurgapunktide olemasolu tarvilikud tingimused (3) kannavad Weierstrass-Erdmanni tingimuste nime. Kõverat, mis koosneb ekstremaali kaartest ja rahuldab nurgapunktides tingimusi (3), nimetame edaspidi nurgapunktidega ekstremaaliks.

3. Näited.

N ä i d e 1. Leida funktsionaali

$$F(y) = \int_0^a (y'^2 - y^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b,$$

nurgapunktidega ekstremaalid, kui need eksisteerivad.

Kirjutame tingimustest (3) välja teise, s.o. $f_{y'}|_{x=\xi-0} = f_{y'}|_{x=\xi+0}$ ehk $2y'(\xi-0) = 2y'(\xi+0)$. Näeme, et

oletatavas nurgapunktis $x = \xi$ on tuletis y' pidev. Seega antud juhul puuduvad nurgapunktidega ekstremaalid.

N ä i d e 2. Leida funktsionaali

$$F(y) = \int_{-1}^1 (y' - 1)^2 (y' + 1)^2 dx, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 1,$$

nurgapunktidega ekstremaalid.

Käesoleva paragrahvi punktis 1 me juba vaatlesime seda funktsionaali ja nägime, et vähemalt üks nurgapunktidega ekstremaal on olemas. Leiame nüüd nurgapunktidega ekstremaalid, kasutades Weierstrassi-Erdmanni tingimusi. Et integraalilune funktsioon sõltub vaid y' -st, siis on ekstremaalideks sirged $y = C_1 x + C_2$. Ekstremaali esimene lüli rahuldab tingimust $y(-1) = 0$, mistõttu $C_2 = C_1$ ja lüli võrrand on

$$y = C_1 x + C_1.$$

Viimane lüli rahuldab tingimust $y(1) = 1$, mistõttu $C_2 = 1 - C_1$ ja lüli võrrandiks saame $y = C_1 x + (1 - C_1)$. Arvestades, et esimeses ja viimases lülis on konstandid teineteisest sõltumatud, tähistame konstandi teisel juhul C -ga ja saame viimasele lülile kuju

$$y = Cx + (1 - C).$$

Vahepealsetes nurgapunktides, kui neid on, peavad olema rahuldatud tingimused (3). Tähistades

$$y'(\xi - 0) = p \quad \text{ja} \quad y'(\xi + 0) = q$$

saame pärast lihtsaid teisendusi (kontrollida!)

$$(4) \quad \begin{cases} 4p(p^2 - 1) = 4q(q^2 - 1), \\ -(p^2 - 1)(3p^2 + 1) = -(q^2 - 1)(3q^2 + 1). \end{cases}$$

Kõigepealt esineb triviaalne võimalus

$$p = q \quad \text{ehk} \quad y'(\xi - 0) = y'(\xi + 0),$$

s. t. tuletis on pidev igas punktis ξ ja ekstremaaliks on sile kõver, milleks on punkte $A(-1, 0)$ ja $B(1, 1)$ ühendav sirge. Lihtne on näha, et võrrandisüsteem (4) on veel rahuldatud, kui

$$p = y'(\xi - 0) = 1$$

ja

$$q = y'(\xi + 0) = -1$$

või

$$p = y'(\xi - 0) = -1$$

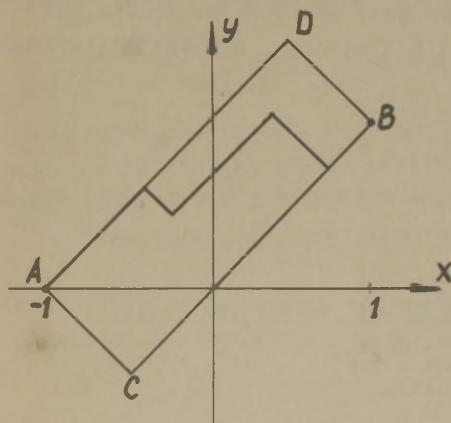
ja

$$q = y'(\xi + 0) = 1$$

(siis võrduste (4) mõlemad pooled muutuvad nulliks).

Järelikult nurgapunktidega ekstremaalid koosnevad lülidest, mille võrrandid on $y = x + c$ ja $y = -x + c$.

Funktsionaal saavutab absoluutse miinimumi väärtusega null igal murdjoonel, mis koosneb lõplikust arvust sellistest lülidest. Nimeetatud murdjooned asuvad kõik joonisel 7 kujutatud



Joonis 7.

ristkülikus ACBD. Ühe nurgapunktiga ekstremaale on kaks:

$$y = \begin{cases} -x - 1, & \text{kui } -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ x, & \text{kui } -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ja

$$y = \begin{cases} x + 1, & \text{kui } -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -x + 2, & \text{kui } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Lahendame lõpuks võrrandisüsteemi (4) algebraliselt ja veendume, et peale leitud lahendite pole süsteemil teisi lahendeid. Jagame esimest võrrandit 4-ga, avame võrrandites sulud ja viime kõik liikmed ühele poole võrdusmärgi. Seejärel, võttes esimeses võrrandis sulgude ette teguri $p - q$, teisles $p^2 - q^2$, saame

$$\begin{cases} (p - q)(p^2 + pq + q^2 - 1) = 0, \\ (p - q)(p + q)(3p^2 + 3q^2 - 2) = 0. \end{cases}$$

Võrdsustame nulliga võrrandite ühise esimese teguri. Saame lahendid $p = q = \alpha$, kus α on suvaline reaalarv. Teiseks võrdsustame nulliga teise võrrandi teise teguri, millest $p = -q$. Pärast asendamist esimesse võrrandisse leiame, et $q^2 = 1$, millest $p = -q = 1$ ja $p = -q = -1$. Lõpuks jääb võimalus

$$\begin{cases} 3p^2 + 3q^2 - 2 = 0, \\ p^2 + pq + q^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Saadud süsteemi lahendamine annab $p = q = \pm \frac{1}{3}$, s.o. saame lahendid, mis juba sisalduvad lahendite $p = q = \alpha$ seas.

4. Ekstremaalide "peegeldumine" etteantud kõveral. Vaatleme järgmist ülesannet. Leida kõver, mis realiseerib funktsionaali

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

ekstreemumi ja läbib antud punkte $A(a, c)$, $B(b, d)$, nii et ekstremaal satuks punkti B alles pärast "peegeldumist" antud siledalt kõveralt $y = \varphi(x)$. On selge, et peegeldumispunktis (ξ, η) võib olla nurgapunkt ja seega tuleb leida nurgapunkti-
ga ekstremaal. Et ξ ja η rahuldavad seost $\eta = \varphi(\xi)$, siis $d\xi$ ja $d\eta$ ei ole enam sõltumatud, vaid on omavahel seotud võrdusega

$$d\eta = \varphi'(\xi) d\xi.$$

Kasutades punktis 2 leitud tingimust (2) saame ekstremaalide peegeldumise tingimuseks

$$[f + (\varphi' - y')f_{y'}]_{x=\xi-0} = [f + (\varphi' - y')f_{y'}]_{x=\xi+0}.$$

Vaatleme näitena funktsionaali

$$F(y) = \int_a^b K(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx, \text{ kus } K(x, y) \neq 0.$$

Siis

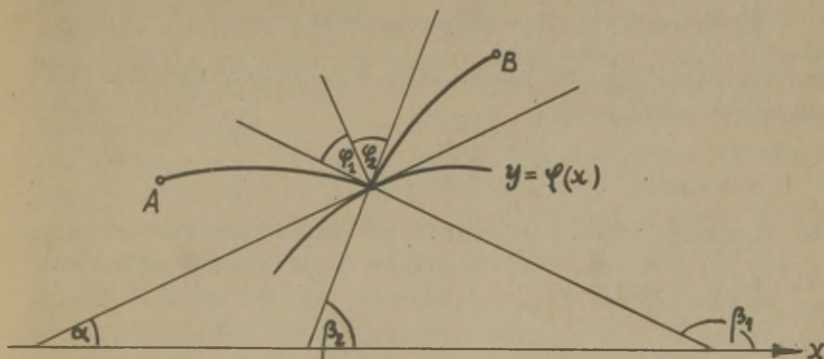
$$f = K(x, y)\sqrt{1 + y'^2}, \quad f_{y'} = K(x, y)\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

$$f + (\varphi' - y')f_{y'} = K(x, y)\frac{1 + \varphi'y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

ja peegeldumise tingimus saab kuju

$$(5) \quad \left. \frac{1 + \varphi'y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right|_{x=\xi-0} = \left. \frac{1 + \varphi'y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right|_{x=\xi+0}.$$

Märgime kõvera $y = \varphi(x)$ puutuja ja x -telje vahelise nurga sümboliga α ja ekstremaalile peegeldumispunktis M tõmmatud puutujate tõusunurgad vastavalt β_1 ja β_2 (joonis 8).



Joonis 8.

Siis $y'(\xi - 0) = \tan\beta_1$, $y'(\xi + 0) = \tan\beta_2$, $\varphi'(\xi) = \tan\alpha$ ja tingimus (5) omandab kuju

$$\frac{1 + \tan\alpha \tan\beta_1}{\sqrt{1 + \tan^2\beta_1}} = \frac{1 + \tan\alpha \tan\beta_2}{\sqrt{1 + \tan^2\beta_2}}$$

ehk

$$-\cos\beta_1(1 + \tan\alpha \tan\beta_1) = \cos\beta_2(1 + \tan\alpha \tan\beta_2).$$

Peale korrutamist teguriga $\cos\alpha$ saame

$$-(\cos\alpha \cos\beta_1 + \sin\alpha \sin\beta_1) = \cos\alpha \cos\beta_2 + \sin\alpha \sin\beta_2$$

ehk

$$-\cos(\alpha - \beta_1) = \cos(\alpha - \beta_2).$$

Olles tähistanud langemisnurga ja peegeldumisnurga vastavalt sümboolitega φ_1 ja φ_2 ning kasutades seoseid

$\alpha + (180^\circ - \beta_1) = 90^\circ - \varphi_1$, $\alpha + (90^\circ - \varphi_2) = \beta_2$,
leiame, et

$$-\cos(90^\circ + \varphi_1) = \cos(90^\circ - \varphi_2)$$

ehk

$$2\cos(90^\circ + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}) \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 0,$$

millest $\varphi_1 = \varphi_2$, s.o. langemisnurk võrdub peegeldumisnurgaga.

Kui punkt liigub keskkonnas kiirusega $v(x, y)$, mis sõltub vaid punkti asukoha koordinaatidest x ja y , siis

$$\frac{ds}{dt} = v(x, y) \quad dt = \frac{ds}{v(x, y)} = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{v(x, y)}$$

ja punktidest A(a, c) punkti B(b, d) liikumiseks kuluv aeg väljendub integraaliga

$$t = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)} dx.$$

Kui liikumine (koos peegeldumisega) toimub sellist teed mööda, mille korral ühest punktist teise jõudmiseks kuluv aeg on minimaalne, siis kiiruse $v(x, y)$ igasuguse muutumis- seaduse korral on peegeldumispunktis peegeldumisnurk võrdne langemisnurgaga. Tulemus üldistab valguse peegeldumise tuntud seaduspärasust. Valgus nimelt levib keskkonnas sellist teed mööda, mille korral ühest punktist teise jõudmiseks kuluv aeg on minimaalne (Fermat' printsiip).

Analoogiliselt võib käsitleda ekstremaalide murdumist, kusjuures saadav tulemus üldistab valguse murdumise seadust (vt. näit.[2]).

IV. EKSTREEMUMI PIISAVAD TINGIMUSED

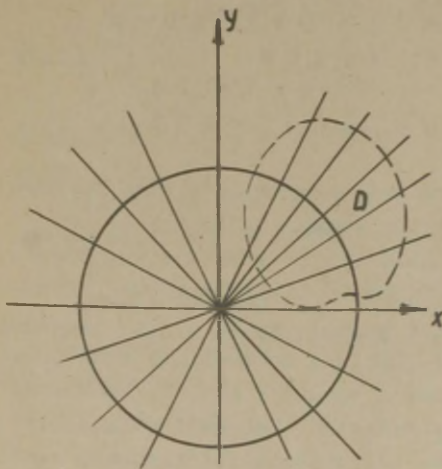
§ 11. Ekstremaalide väli

1. Välja mõiste. Ütleme, et üheparameetriline kõvera-
parv $y = y(x, C)$ moodustab välja antud piirkonnas D , kui
selle piirkonna iga punkti läbib üks ja ainus parve kõver.
Niiviisi defineeritud välja nimetame ka pärisväljaks. Kõve-
rale punktis $(x, y) \in D$ tõmmatud puutuja tõusu $p(x, y)$ nimetame
välja kaldeks punktis (x, y) . Näiteks moodustavad igas piir-
konnas pärisvälja paralleelsed sirged $y = kx + C$, kusjuures
välja kalle $p(x, y) = k$ on konstantne. Seevastu paraboolide
parv $y = (x - C)^2$ ei moodusta välja üheski piirkonnas, sest
ülevalpool x -telge asuvaid tasandi punkte läbib kaks kõverat,
allpool x -telge asuvaid punkte ei läbi aga ühtki kõverat.

Lõikugu nüüd parve $y = y(x, C)$ kõik kõverad piirkonnas
 D parajasti ühes punktis ja katku kogu vaadeldava piirkonna.
Siis kõveraparv pärisvälja ei moodusta. Sel juhul öeldakse,
et kõverate kimp $y = y(x, C)$ moodustab tsentraalse välja.
Kõikide kõverate ühist punkti nimetatakse kimbu keskpunktiks.
Näiteks moodustavad ringis $x^2 + y^2 \leq 1$ tsentraalse välja
sirged $y = Cx$. Kuid igas piirkonnas D , mis ei sisalda koordi-
naatide alguspunkti, moodustavad need sirged pärisvälja
(joonis 9). Edaspidi mõistame välja all nii pärisvälja kui
ka tsentraalset välja. Kui välja moodustavad mingi variat-
sioonülesande Euleri võrrandi lahendid, s.o. ekstremaalid,
siis räägitakse ekstremaalide väljast.

Olgu antud funktsionaal

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx,$$



Joonis 9.

kus rajapunktid $A(a, c)$, $B(b, d)$ on fikseeritud ja funktsioon $f(x, y, z)$ rahuldab paragrahvis 7 püstitatud nõudeid. Kõver $y = y(x)$ olgu selle funktsionaali ekstremaal, mis ühendab punkte A ja B . Ütleme, et ekstremaal $y = y(x)$ sisaldub ekstremaalide väljas ehk on lülitatud ekstremaalide välja, kui on leitud ekstremaalide parv $y = y(x, C)$, mis moodustab mingis piirkonnas D välja ja annab teatud C väärtusel C_0 ekstremaali $y = y(x)$, kusjuures viimane

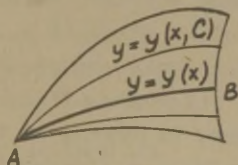
ei asu piirkonna D rajajoonel. Edaspidi on tähtis teada, kas ekstremaali $y = y(x)$ saab lülitada ekstremaalide välja või mitte.

Sageli õnnestub vaadeldavat ekstremaali lülitada tsentraalsesse välja. Tõepoolest, olgu

$$(1) \quad f_{y'y'}(a, y(a), y'(a)) \neq 0,$$

siis $f_{y'y'}(a, y(a), y')$ on nullist erinev kõikidel y' väärtustel, mis on küllalt lähedased suurusele $y'(a)$. Järelikult Euleri võrrand $f_{y'y'}y'' + f_{yy'}y' + f_{xy'} - f_y = 0$ rahuldab kõiki lahendi olemasolu ja ühesuse tingimusi. Seega eksisteerivad selle võrrandi integraalkõverad, mis läbivad punkti A ja millel on punktis A etteantud puutuja tõus y' ($y'(a)$ teatud ümbrusest). Nimetatud kõverad moodustavad ekstremaalide kimbu $y = y(x, C)$ ($C_1 \leq C \leq C_2$), mis sisaldab punkte A ja B ühenda-

vat ekstremaali $y = y(x) \equiv y(x, C_0)$ ($C_1 < C_0 < C_2$). Kui saadud kimp moodustab ekstremaali $y = y(x)$ teatud ümbruses tsentraalse välja, siis ongi vaadeldav ekstremaal lülitatud sellesse välja (joonis 10). Kui aga kimbu kõverad lõikuvad ekstre-



Joonis 10.

$$(2) \quad y'(a, C) = C.$$

Tehtud märkust kasutame järgmises punktis.

N ä i d e 1. On antud funktsionaal

$$F(y) = \int_0^a (y'^2 - y^2) dx.$$

Leida ekstremaal, mis ühendab punkte $A(0, 0)$ ja $B(a, 0)$, ja uurida, kas teda saab lülitada ekstremaalide välja.

Euleri võrrandi $y'' + y = 0$ üldlahend on

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

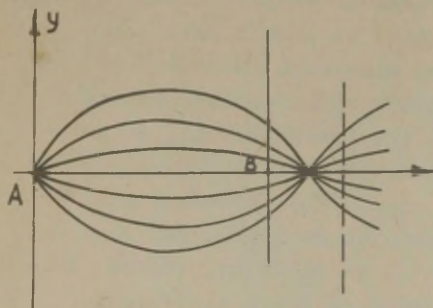
Punkte A ja B ühendavaks ekstremaaliks on sirglõik $y = 0$. Üldlahendist saame ekstremaalide kimbu

$$y = C_1 \sin x,$$

mis läbib punkti $A(0, 0)$ ja sisaldab erijuhul, kui $C_1 = 0$, ekstremaali $y = 0$. Vaadeldav ekstremaalide kimp moodustab

¹ Kui oleme leidnud ekstremaalide kimbu, mis seda tingimust ei rahulda, siis tähistades $y'(a, C) = \bar{C}$, saame kimbu võrrandile kuju $y = \bar{y}(x, \bar{C})$, mis juba rahuldab tingimust (2).

ekstremaali $y = 0$ ümbruses tsentraalse välja, kui $a < \pi$, ja ei moodusta välja, kui $a \geq \pi$, sest kimbu kõverad lõikuvad siis rohkem kui ühes punktis (joonis 11). Seega saab ekstremaali $y = 0$ lülitada tsentraalsesse välja parajasti siis, kui $a < \pi$.



Joonis 11.

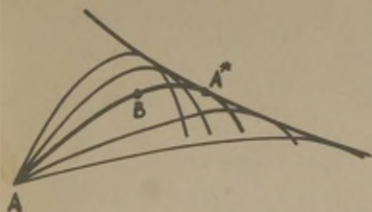
2. Jacobi tingimus. Käesolevas punktis anname piisava tingimuse selleks, et ekstremaali oleks võimalik lülitada tsentraalsesse ekstremaalide välja. Diferentsiaalgeomeetria kursusest on teada, et üheparameetrilise kõveraparve $y = y(x, C)$ kaks lähedast kõverat saavad lõikuda vaid diskriminantkõvera küllalt väikeses ümbruses. Diskriminantkõver on antud võrrandi-

süsteemiga

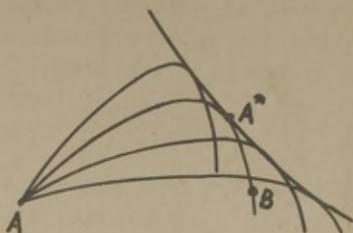
$$(3) \quad \begin{cases} y = y(x, C), \\ \frac{\partial y(x, C)}{\partial C} = 0 \end{cases}$$

ja võib endast kujutada kõveraparve $y = y(x, C)$ mähisjoont või iseärase punktide geomeetrilist kohta. Eriti on süsteemiga (3) määratud kordsed punktid, sealhulgas kimbu keskpunkt.

Vaatleme ekstremaalide kimpu. Kui selle kimbu diskriminantkõveral ja kimpu kuuluva ekstremaali $y = y(x)$ kaarel AB ei ole ühiseid punkte peale punkti A (punkti A kui kordse punkti koordinaadid rahuldavad süsteemi (3)), siis leidub kaare AB ümbrus, milles ekstremaalid ei lõiku (joonis 12). Seega moodustavad need ekstremaalid kaare AB ümber tsentraalse välja, mis sisaldab kaart AB. Kui ekstremaali $y = y(x)$ kaarel AB on diskriminantkõveraga punktist A erinev ühine punkt A^* , siis ekstremaalile $y = y(x)$ lähedased ekstremaalid võivad üksteisega lõikuda punkti A^* ja seega ka ekstre-



Joonis 12.



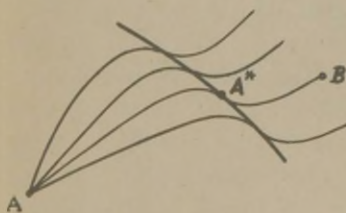
Joonis 13.

maali $y = y(x)$ igas ümbruses (joonis 13). Sellisel juhul ekstremaalide kimp $y = y(x, C)$ vaadeldava ekstremaali ümbruses üldiselt välja ei moodusta. Märkime aga, et esineb juhte, kus sellele vaatamata, et kaarel AB on diskriminantkõveraga punktist A erinev ühine punkt A^* , moodustavad ekstremaalid $y = y(x, C)$ kaare AB ümbruses välja (joonis 14).

Punkti A^* , mis asub nii diskriminantkõveral kui ka kaarel AB või tema pikendusel mööda ekstremaali ja mis erineb punktist A, nimetatakse A kaaspunktiks. Kui sealjuures a on punkti A abstsiss ja a^* punkti A^* abstsiss, siis ütleme, et a^* on a kaasväärtus ekstremaali AB ehk $y = y(x)$ suhtes.

Kasutades kaaspunkti mõistet, võime saadud tulemust sõnastada järgmiselt:

Kui punkti A kaaspunkt A^* ei asu ekstremaali kaarel AB, siis saab seda kaart lülitada tsentraalsesse ekstremaalide välja keskpunktiga A. Tingimust, et punkti A kaaspunkt ei asu kaarel AB, nimetatakse Jacobi tingimuseks. Jacobi tingimus on seega piisav selleks, et antud ekstremaali saaks lülitada



Joonis 14.

tsentraalsesse välja.

Formuleerime Jacobi tingimuse analüütiliselt. Et diskriminantkõver on antud võrranditega (3), siis on üheks võimaluseks otsida a kaasväärtusi võrrandi

$$(4) \quad \frac{\partial y(x, C_0)}{\partial C} = 0$$

lahenditena. Kui nüüd poollõigul (a, b) ei leidu võrrandi (4) lahendeid¹, siis kaarel AB ei leidu A kaaspunkti, ja vastupidi, kui võrrandi (4) mõni lahend asub poollõigul (a, b), siis punkti A kaaspunkt asub kaarel AB. Jacobi tingimust võib seega sõnastada järgmiselt: võrrandi (4) ükski lahend $x = a^*$ ei asu poollõigul (a, b).

Jacobi tingimuse kontroll võrrandi (4) lahendamise kaudu nõuab ekstremaalide kimbu üldvõrrandi $y = y(x, C)$ teadmist. On aga võimalik ka selleta läbi saada. Arvestame, et kõik ekstremaalid $y = y(x, C)$ rahuldavad Euleri võrrandit, s.t.

$$f_y(x, y(x, C), y'(x, C)) - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y(x, C), y'(x, C)) \equiv 0.$$

Diferentseerime viimast samasust C järgi, arvestades, et diferentseerimiste järjekord x ja C järgi on muudetav:

$$\begin{aligned} & f_{yy}(x, y(x, C), y'(x, C)) \frac{\partial y(x, C)}{\partial C} + \\ & + f_{yy'}(x, y(x, C), y'(x, C)) \frac{\partial y'(x, C)}{\partial C} - \\ & - \frac{d}{dx} \left\{ f_{yy'}(x, y(x, C), y'(x, C)) \frac{\partial y(x, C)}{\partial C} + \right. \\ & \quad \left. + f_{y'y'}(x, y(x, C), y'(x, C)) \frac{\partial y'(x, C)}{\partial C} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Piki iga fikseeritud kõverat $y = y(x, C)$ on $\frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$ ainult x funktsioon. Tähistame

$$(5) \quad \frac{\partial y(x, C_0)}{\partial C} = u,$$

kus C_0 on nagu ennegi parameetri väärtus, mille puhul saame

¹ a kui ekstremaalide kimbu keskpunkti A abstsiss rahuldab võrrandit (4).

punkte A ja B ühendava ekstremaali $y = y(x)$. Olles tähistanud veel lühidalt

$$f_{yy}(x, y(x), y'(x)) = f_{yy},$$

$$f_{yy'}(x, y(x), y'(x)) = f_{yy'},$$

$$f_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) = f_{y'y'},$$

ja arvestades, et

$$\frac{\partial y'(x, C_0)}{\partial C} = \frac{\partial^2 y(x, C_0)}{\partial x \partial C} = u',$$

jõuame võrrandini

$$f_{yy}u + f_{yy'}u' - \frac{d}{dx}(f_{yy'}u + f_{y'y'}u') = 0,$$

mis pärast sulgude avamist ja koondamist emandab kuju

$$(6) \quad (f_{yy} - \frac{d}{dx} f_{yy'})u - \frac{d}{dx}(f_{y'y'}u') = 0.$$

Võrrandit (6), mis on tundmatu funktsiooni u suhtes teist järku lineaarne homogeenne harilik diferentsiaalvõrrand, nimetatakse Jacobi võrrandiks.

Jacobi võrrandi lahend (5) ei võrdu samaselt nulliga, sest seose (2) tõttu on $u'(a) = 1$. Sealjuures $u(a) = 0$, sest $A(a, c)$ on kimbu $y = y(x, C)$ keskpunkt. Märgime, et lahend (5) erineb ülejäanud mittetriviaalsetest ja homogeenset rajatingimust $u(a) = 0$ rahuldavatest lahenditest vaid konstantse teguri poolest. Viimase väite kehtivust võib lihtsalt kontrollida (teha seda!), lähtudes Jacobi võrrandi üldlahendist $u = C_1 u_1 + C_2 u_2$, kus u_1 ja u_2 on lineaarselt sõltumatud erilahendid.

Kui eksisteerib Jacobi võrrandi lahend, mis muutub nulliks kohal $x = a$, kuid ei muutu nulliks poollõigu $a < x \leq b$ üheski punktis, siis sama tingimust rahuldab ka lahend (5) ja ekstremaali $y = y(x)$ kaarel AB ei leidu punkti A kaaspunkte. Seega võib Jacobi tingimust sõnastada veel järgmiselt: Jacobi võrrandil on olemas lahend $u(x)$, mis rahuldab tingimusi

$u(a) = 0; u(x) \neq 0$, kui $a < x \leq b$.

M ä r k u s. Ekstremaal, mis rahuldab mõlemat rajatingimust, ei tarvitse anda funktsionaalile ekstremaalset väärtust. Saab aga näidata, et kui ekstremaal AB annab funktsionaalile tõepoolest ekstremaalse väärtuse, siis Jacobi tingimus on täidetud, s.t. punkti A kaaspunkt A^* ei asu kaarel AB (vt. näit. [1], § 29, teoreem 8). Jacobi tingimus on seega ekstreemiks tarvilik.

N ä i d e 2. Kasutades Jacobi võrrandit kontrollida, kas Jacobi tingimus on täidetud funktsionaali

$$F(y) = \int_0^a (y'^2 - y^2) dx$$

ekstremaali puhul, mis läbib punkte $A(0, 0)$ ja $B(a, 0)$ (vrd. näide 1).

Jacobi võrrandi

$$-2u - \frac{d}{dx}(2u') = 0 \text{ ehk } u'' + u = 0$$

üldlahendiks on $u = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Tingimust $u(0) = 0$ rahuldavad lahendid $u = C_1 \sin x$. Viimane funktsioon muutub nulliks punktides $x = k\pi$, kus k on täisarv. Järelikult, kui $0 < a < \pi$, siis funktsioon $u = C_1 \sin x$ ($C_1 \neq 0$) ei muutu nulliks poollõigul $0 < x \leq a$ ja Jacobi tingimus on täidetud. Kui aga $a \geq \pi$, siis see funktsioon muutub poollõigul $0 < x \leq a$ nulliks vähemalt ühes punktis ja Jacobi tingimus pole täidetud.

N ä i d e 3. Kas Jacobi tingimus on täidetud funktsionaali

$$F(y) = \int_0^a (y'^2 + y^2 + x^2) dx$$

ekstremaali korral, mis läbib punkte $A(0, 0)$ ja $B(a, 0)$?

Jacobi võrrandi $2u - \frac{d}{dx}(2u') = 0$ ehk $u'' - u = 0$ üldlahendiks on $u = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Tingimust $u(0) = 0$ rahuldavad lahendid

$$u = C_1(e^x - e^{-x}) = 2C_1 \operatorname{sh} x.$$

Et $\operatorname{sh} x$ ei muutu nulliks kusagil peale $x = 0$, siis Jacobi tingimus on täidetud iga a korral.

§ 12. Ekstreemumi piisavad tingimused

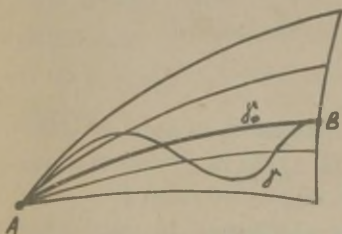
1. Weierstrassi E-funktsioon. Käesolevas paragrahvis formuleerime variatsiooniarvutuse põhifunktsionaali

$$(1) \quad F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

ekstreemumi piisavad tingimused, eeldades nagu varemgi, et funktsioon $f(x, y, u)$ on pidev koos kõigi oma esimest ja teist järku osatuletistega ja et lubatavad kõverad läbivad punkte $A(a, c)$, $B(b, d)$. Eeldame veel, et nimetatud punkte läbivat ekstreemaali γ_0 , mille võrrand olgu $y = y_0(x)$, on võimalik lülitada tsentraalsesse ekstremaalide välja.

Koos ekstremaaliga γ_0 vaatleme temale lähedast¹ suvalist lubatavat kõverat γ , mis üldiselt ei ole ekstremaal (joonis 15). Käsitluse hõlbustamiseks kasutame järgmisi tähistusi.

Sümboliga



Joonis 15.

$$\int_{\gamma_0} f(x, y, y') dx$$

märgime integraali (1) mööda kõverat γ_0 , s.t.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} f(x, y, y') dx &= \\ &= \int_a^b f(x, y_0(x), y_0'(x)) dx. \end{aligned}$$

Sümboliga $\int_{\gamma} f(x, y, y') dx$ tähistame

sama integraali mööda lubatavat kõverat γ , s.t. kui γ võrrand

¹ Kasutatava ruumi meetrika mõttes. Kasutatavaks ruumiks võib olla nii $C[a, b]$ kui ka $C^1[a, b]$.

on $y = y(x) \equiv y_0(x) + h(x)$, siis

$$\int_{\gamma} f(x, y, y') dx = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx.$$

See, kas on tegemist maksimumi või miinimumiga, sõltub

$$\Delta F = \int_{\gamma} f(x, y, y') dx - \int_{\gamma_0} f(x, y, y') dx$$

märgist. ΔF märgi uurimiseks vaatleme abifunktsionaali

$$(2) \int_{\gamma} [f(x, y, p) + (y' - p)f_p(x, y, p)] dx,$$

kus $p = p(x, y)$ on ekstremaalide välja kalle punktis (x, y) .

Ekstremaalil γ_0 muutub see funktsionaal funktsionaaliks

$$\int_{\gamma_0} f(x, y, y') dx,$$

sest p definitsiooni kohaselt on ekstremaalidel $y' = p$.

Näitame, et abifunktsionaalis (2), mida võib esitada joonintegraalina

$$(3) \int_{\gamma} [f(x, y, p(x, y)) - p(x, y) \cdot f_p(x, y, p(x, y))] dx + \\ + f_p(x, y, p(x, y)) dy,$$

on integraalilune avaldis teatud funktsiooni täisdiferentsiaal. Võtame funktsionaali

$$(4) \int_a^x f(x, y, y') dx,$$

kus lubatavate kõverate vasakpoolne otspunkt $A(a, c)$ on fikseeritud, parempoolne võib aga vabalt liikuda. Funktsionaalidel (4) ja (1) on ühed ja samad rajatingimused $y(a) = c$ rahuldavad ekstremaalid. Et sellised ekstremaalid moodustavad eelduse kohaselt tsentraalse välja, siis nad ei lõiku ja funktsionaal (4) muutub nendel kabe muutuja funktsiooniks $\Phi(x, y)$. Viimase täisdiferentsiaal (vt. § 9, valem (16))

$$d\Phi(x, y) = [f(x, y, y') - y'f_{y'}(x, y, y')] dx + \\ + f_{y'}(x, y, y') dy =$$

$$= [f(x, y, p(x,y)) - p(x,y)f_p(x,y, p(x,y))] dx + \\ + f_p(x, y, p(x,y)) dy$$

Ühtib integraaliluse avaldisega abifunktsionaalis (3) ja seega ka samas abifunktsionaalis kujul (2). Nimetatud asjaolu tõttu ei sõltu integraali (3) ehk (2) väärtus integreerimisteest ja iga kõvera γ puhul, mis ühendab punkte A ja B, kehtib võrdus

$$\int_{\gamma_0} f(x, y, y') dx = \int_{\gamma_0} [f(x, y, p) + (y' - p)f_p(x, y, p)] dx = \\ = \int_{\gamma} [f(x, y, p) + (y' - p)f_p(x, y, p)] dx.$$

Nüüd võime aga funktsionaali kasvu esitada järgmiselt:

$$\Delta F = \int_{\gamma} f(x, y, y') dx - \int_{\gamma_0} f(x, y, y') dx = \\ = \int_{\gamma} f(x, y, y') dx - \int_{\gamma} [f(x, y, p) + (y' - p)f_p(x, y, p)] dx$$

ehk

$$\Delta F = \int_{\gamma} [f(x, y, y') - f(x, y, p) - (y' - p)f_p(x, y, p)] dx.$$

Integraalilust funktsiooni nimetatakse Weierstrassi E-funktsiooniks ja tähistatakse $E(x, y, p, y')$,

$$E(x, y, p, y') = f(x, y, y') - f(x, y, p) - (y' - p)f_p(x, y, p).$$

Seega

$$\Delta F = \int_a^b E(x, y, p, y') dx.$$

Kui $b > a$, siis funktsionaali $F(y)$ miinimumi piisavaks tingimuseks on $E \geq 0$ ja maksimumi piisavaks tingimuseks on $E \leq 0$. Tingimust $E \geq 0$ (või vastavalt $E \leq 0$) nimetatakse Weierstrassi tingimuseks. Saadud üldist tulemust kasutades sõnastame kõigepealt nõrga miinimumi piisava tingimuse:

Olgu $y = y_0(x)$ rajatingimusi rahuldava ekstremaali γ_0 võrrand. Kui leidub $\varepsilon > 0$, nii et $E(x, y, p, y') \geq 0$ iga lubatava kõvera $y = y(x)$ puhul sfäärilist

$$\|y - y_0\|_1 = \max_{a < x < b} (|y(x) - y_0(x)|, |y'(x) - y_0'(x)|) < \varepsilon,$$

ja γ_0 kaar AB on lülitatav ekstremaalide välja, siis funktsionaal (1) saavutab ekstremaalil γ_0 nõrga miinimumi.

Teiste sõnadega, kui ekstremaal γ_0 on lülitatav ekstremaalide välja ja võrratus $E \geq 0$ kehtib iga $y(x)$ puhul, mille väärtused on lähedased $y_0(x)$ vastavatele väärtustele ja mille tuletise $y'(x)$ väärtused erinevad vähe $p(x, y_0(x)) \equiv y_0'(x)$ vastavatest väärtustest, siis põhifunktsionaal (1) saavutab ekstremaalil γ_0 nõrga miinimumi.

Tugeva miinimumi piisava tingimuse võib sõnastada järgmiselt:

Kui leidub positiivne arv ε , nii et $E(x, y, p, y') \geq 0$ iga lubatava kõvera $y = y(x)$ puhul sfäärilist

$$\|y - y_0\|_0 = \max_{a < x < b} |y(x) - y_0(x)| < \varepsilon,$$

ja γ_0 kaar AB on lülitatav ekstremaalide välja, siis funktsionaal (1) saavutab ekstremaalil γ_0 tugeva miinimumi.

Teiste sõnadega, kui γ_0 saab lülitada ekstremaalide välja ja võrratus $E \geq 0$ kehtib $y'(x)$ suvaliste väärtuste ja kõigi $y(x)$ väärtuste puhul, mis on lähedased $y_0(x)$ vastavatele väärtustele, siis funktsionaal (1) saavutab ekstremaalil γ_0 tugeva miinimumi.

Nõrga ja tugeva maksimumi piisavad tingimused on miinimumitingimustega analoogilised, ainult võrratus $E \geq 0$ asendub võrratusega $E \leq 0$.

M ä r k u s. Weierstrassi tingimus on ka tarvilik ekstreemumi olemasoluks. Täpsemini, kui funktsioon E omandab mõnedel y' väärtustel ekstremaali γ_0 erinevates punktides vastandmärgilisi väärtusi, siis funktsionaal ekstremaalil γ_0 tugevat ekstreemumit ei saavuta. Kui see olukord leiab aset ekstremaalil γ_0 võetud välja kaldale $p(x, y_0(x)) \equiv y_0'(x)$ kuitahes lähedastel y' väärtustel, siis funktsionaal ei saavuta ka nõrka ekstreemumit.

Tõepoolest, miinimumi juhul kehtib võrratus

$$\begin{aligned} \Delta F &= \int_{\gamma} f(x, y, y') dx - \int_{\gamma_0} f(x, y, y') dx = \\ &= \int_{\gamma} E(x, y, p, y') dx \geq 0 \end{aligned}$$

iga lubatava kõvera γ puhul ekstremaali γ_0 mingist ümbrusest $\|y - y_0\| < \varepsilon$. Kui nüüd ekstremaali γ_0 mõnes punktis (x, y) $E(x, y, p(x, y), y') < 0$, siis E pidevuse tõttu on $E < 0$ ka selle punkti teatud ümbruses. Arvestades γ suvalisust valime ta nii, et ta erineks ekstremaalist γ_0 vaid piirkonnas, kus $E < 0$. Nüüd on

$$\int_{\gamma} f(x, y, y') dx - \int_{\gamma_0} f(x, y, y') dx < 0,$$

mis on vastuolus eeldusega, et esineb miinimum. Analoogiline on olukord maksimumi juhul.

Märgime, et kui funktsioon $f(x, y, y')$ on arendatav kolmanda argumendi järgi Tayloriga ritta, siis

$$\begin{aligned} E(x, y, p, y') &= f(x, y, y') - f(x, y, p) - (y' - p)f_{y'}(x, y, p) = \\ &= \frac{1}{2!}(y' - p)^2 f_{y'y'}(x, y, p) + \frac{1}{3!}(y' - p)^3 f_{y'y'y'}(x, y, p) + \dots = \\ &= (y' - p)^2 \left[\frac{1}{2!} f_{y'y'}(x, y, p) + \frac{1}{3!}(y' - p) f_{y'y'y'}(x, y, p) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Siit on näha, et E -funktsiooni avaldises saab välja eraldada teguri $(y' - p)^2$, mistõttu tema märgi uurimine taandub nurksulgudes seisva avaldise märgi uurimisele. Viimane ülesanne on sageli lihtsam kui esialgne. Eriti juhul, kui $f(x, y, y')$ on y' suhtes n -astme polünoom, tuleb nurksulgudes seisva summa $(n - 2)$ -astme polünoom. Muidugi pole nurksulgudes seisva avaldise leidmiseks tingimata tarvis leida esatuletisi f_{y^k} , seda võib saada ka E -funktsiooni avaldise algebralise teisendamise (või teguriga $(y' - p)^2 = y'^2 - 2y'p + p^2$ jagamise teel, kui $f(x, y, y')$ on y' suhtes polünoom).

Saadud tulemuste rakendusena vaatleme kahte näidet.

N ä i d e 1. Uurida funktsionaali

$$F(y) = \int_0^a y'^3 dx, \quad a > 0,$$

ekstreemumit rajatingimustel $y(0) = 0$, $y(a) = b$.

Ekstremaalideks on sirged $y = C_1 x + C_2$, milledest rajatingimusi rahuldab $y = \frac{b}{a} x$. Seda ekstremaali saab lülitada ekstremaalide $y = C_1 x$ välja keskpunktiga $(0, 0)$. Weierstrassi E-funktsioon

$$E(x, y, p, y') = y'^3 - p^3 - 3p^2(y' - p) = (y' - p)^2(y' + 2p).$$

a) Olgu $b > 0$, siis ekstremaalil $y = \frac{b}{a} x$ on välja kalle $p = \frac{b}{a} > 0$. Kui nüüd y' väärtused on küllalt lähedased suurusele p , siis $E \geq 0$ ja funktsionaal omandab sirgel $y = \frac{b}{a} x$ nõrga miinimumi. Tugevat miinimumi funktsionaal ei saavuta, sest kui y' muutub suvaliselt, siis $y' + 2p$ ja koos temaga ka $E(x, y, p, y')$ võivad olla nii positiivsed kui ka negatiivsed.

b) Olgu $b < 0$, siis ekstremaalil on välja kalle $p = \frac{b}{a} < 0$. Kui nüüd y' omandab väärtusi, mis on küllalt lähedased suurusele p , siis $E \leq 0$ ja funktsionaal omandab sirgel $y = \frac{b}{a} x$ nõrga maksimumi. Tugevat maksimumi funktsionaal ei saavuta.

c) Olgu $b = 0$. Siis ekstremaalil $y = 0$ on välja kalle $p = 0$ ja $E(x, y, 0, y') = 2y'^3$. Ükskõik millises $p = 0$ ümbruses y' ka muutuks, omandab E nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi. Seega juhul, kui $b = 0$, ei saavuta vaadeldav funktsionaal ekstreemumit.

N ä i d e 2. Uurida funktsionaali

$$F(y) = \int_0^a (y'^4 - 6y'^2 + cyy') dx, \quad a > 0,$$

rajatingimustel $y(0) = 0$, $y(a) = b$.

1) Leiame ekstremaalid. Euleri võrrandi esimeseks integraaliks $f - y'f_{y'} = C$ on

$$-3y'^4 + 6y'^2 = C,$$

millest saame üldlahendi

$$y = C_1 x + C_2$$

ja rajatingimusi rahuldava ekstremaali $y = \frac{b}{a} x$.

2) Ekstremaali $y = \frac{b}{a} x$ saab lülitada ekstremaalide kimpu $y = C_1 x$, mis moodustab tsentraalse välja. Saadud ekstremaalil on välja kalle

$$p = \frac{b}{a}.$$

3) Weierstrassi E-funktsiooni

$$E = (y' - p)^2 [y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2)]$$

märk ühtib ruutkolmliikme

$$y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2)$$

märgiga. Seega võib E muuta märki vaid siis, kui ruutkolmliikme nullkohad

$$y' = -p + \sqrt{6 - 2p^2} \quad \text{ja} \quad y' = -p - \sqrt{6 - 2p^2}$$

on reaalsed ja y' läbib muutumisel nullkohta.

a) Kui $6 - 2p^2 \leq 0$, s.t. $|\frac{b}{a}| = |p| \geq \sqrt{3}$, siis on ruutkolmliige ja seega ka E iga y' puhul mittenegatiivne. Vaadeldaval juhul saavutab funktsionaal ekstremaalil $y = \frac{b}{a} x$ tugeva miinimumi.

b) Kui $6 - 2p^2 > 0$ ehk $|\frac{b}{a}| = |p| < \sqrt{3}$, siis ruutkolmliige $y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2)$ muudab märki y' üleminekul väärtustest

$$-p \pm \sqrt{6 - 2p^2}.$$

Seetõttu vaadeldaval juhul tugevat ekstreemumit esineda ei saa. Uurime nõrga ekstreemumi olemasolu.

Ruutkolmliige on positiivne ja $E \geq 0$, kui

$$y' < -p - \sqrt{6 - 2p^2} \quad \text{või} \quad y' > -p + \sqrt{6 - 2p^2}.$$

Arvestades asjaolu, et me võime lugeda y' ja p erinevuse kui tahes väikeseks, saame p väärtused, mille puhul viimased tingimused on täidetud, arvutada võrratustest

$$p < -p - \sqrt{6 - 2p^2} \quad \text{ja} \quad p > -p + \sqrt{6 - 2p^2}.$$

Viimaste lahendamisel leiame, et

$$\left| \frac{b}{a} \right| = |p| > 1.$$

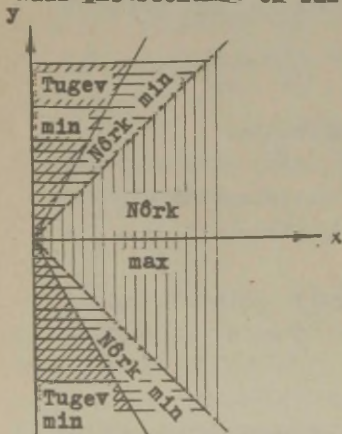
Seega juhul, kui $1 < \left| \frac{b}{a} \right| < \sqrt{3}$, esineb nõrk miinimum.

Ruutkolmeliige on negatiivne ja $E \leq 0$, kui

$$-p - \sqrt{6 - 2p^2} < y' < -p + \sqrt{6 - 2p^2}.$$

Arvestades jälle, et y' ja p erinevuse võime lugeda kuitahes väikeseks, näeme, et viimane võrratus on täidetud, kui $|p| = \left| \frac{b}{a} \right| < 1$. Vaadeldaval juhul esineb nõrk maksimum.

Lõpuks, kui $p = 1$, siis $E = (y' - 1)^3(y' + 3)$; kui $p = -1$, siis $E = (y' + 1)^3(y' - 3)$. Kummalgi juhul ei säilita E $y' = p$ ümbruses märki ja seega, kui $|b| = a$, funktsionaal ekstreemumit ei saavuta.



Joonis 16.

Saadud tulemused on esitatud joonisel 16: olenevalt sellest, millises sektoris asub punktist 0 lähtuva ekstremaali lõpp-punkt $B(a, b)$, saavutab funktsionaal ekstremaalil $y = \frac{b}{a}x$ kas tugeva minimumi, nõrga miinimumi või nõrga maksimumi.

2. Legendre'i tingimus. Ülevaade piisavatest tingimustest.

Weierstrassi E-funktsiooni märgi uurimine on sageli küllaltki tülikas. Käesolevas punktis tuletame Weierstrassi tingimuse abil Legendre'i

tingimuse, mis ei ole küll alati kasutatav tugeva ekstreemumi korral, kuid on selle-eest hästi rakendatav nõrga ekstreemumi uurimiseks.

Olgu funktsioon $f(x, y, y')$ argumenti y' järgi kaks korda diferentseeruv ja olgu $f_{y'y'}$ pidev kõikide argumentide järgi. Tayloriga valemil kohaselt saame siis

$$(5) \quad f(x, y, y') = f(x, y, p) + (y' - p)f_p(x, y, p) + \frac{1}{2}(y' - p)^2 f_{y', y'}(x, y, q),$$

kus $q = q(y', p)$ on p ja y' vahepealne suurus. Seose (5) tõttu

$$(6) \quad E(x, y, p, y') = \frac{1}{2}(y' - p)^2 f_{y', y'}(x, y, q).$$

Niisiis taandub $E(x, y, p, y')$ märgi uurimine $f_{y', y'}(x, y, q)$ märgi uurimisele. Kui $f_{y', y'}(x, y, p) \neq 0$ ekstremaali γ_0 punktides, siis pidevuse tõttu säilitab ta märki ka ekstremaalile lähedastes punktides ja q väärtustel, mis on lähedased välja kaldele p ekstremaalil γ_0 . Seepärast võib nõrga miinimumi (maksimumi) piisavates tingimustes asendada tingimuse $E \geq 0$ ($E \leq 0$) nõudega, et vaadeldaval ekstremaalil $f_{y', y'}(x, y, p) > 0$ (vastavalt $f_{y', y'}(x, y, p) < 0$). Tingimust $f_{y', y'} > 0$ (või $f_{y', y'} < 0$) nimetatakse Legendre'i tingimuseks.

Tugeva ekstreemumi piisavates tingimustes analoogilist asendust teha ei saa, sest sellest, et $f_{y', y'}(x, y, p)$ on ekstremaali γ_0 igas punktis positiivne (või negatiivne) ei järeldu, et $f_{y', y'}(x, y, q)$ säilitaks γ_0 ümbruses märki suvalistel q väärtustel. Tugeva miinimumi (maksimumi) piisavates tingimustes võib tingimuse $E \geq 0$ ($E \leq 0$) asendada nõudega, et $f_{y', y'}(x, y, q) \geq 0$ (vastavalt $f_{y', y'}(x, y, q) \leq 0$) punktides (x, y) , mis on lähedased ekstremaali γ_0 punktidele, ja q suvalistel väärtustel. Peale selle tuleb veel nõuda, et valem (5) kehtiks iga y' korral.

Eelmises punktis tehtud märkusest Weierstrassi tingimuse tarvilikkuse kohta järeldub, et nõrga ekstreemumi olemasoluks on tarvilik, et ekstremaalil γ_0 oleks täidetud Legendre'i tingimus kujul $f_{y', y'} \geq 0$ (vastavalt $f_{y', y'} \leq 0$). Tugeva ekstreemumi olemasoluks pole aga tarvilik, et $f_{y', y'}(x, y, q)$ säilitaks igal q väärtusel üht ja sama märki. Tõepoolest näiteks eelmise punkti näites 2 saavutab funktsionaal ekstremaalil $y = px$ tugeva miinimumi, kui $|p| \geq \sqrt{3}$;

sellele vaatamata ei säilita $f_{y'y'}(x, y, q) = 12(q^2 - 1)$ kõikidel q väärtustel üht ja sama märki. Näeme, et vaadeldaval juhul Legendre'i tingimus ei sobi tugeva ekstreemumi kindlakstegemiseks. Nõrka ekstreemumit saame aga küll uurida: kui $|p| < 1$, siis $f_{y'y'}(x, y, p) = 12(p^2 - 1) < 0$ ja esineb nõrk maksimum, kui $|p| > 1$, siis $f_{y'y'} > 0$ ja esineb nõrk miinimum.

Esitame nüüd funktsionaali

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad y(a) = b, \quad y(c) = d$$

miinimumi piisavad tingimused järgmise ülevaatliku tabelina.

Nõrk miinimum	Tugev miinimum
<p>1. $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0, y(a) = b, y(c) = d.$</p> <p>2. a) Eksisteerib ekstremaalide väli, mis sisaldab uuritavat ekstremaali, või b) on täidetud Jacobi tingimus.</p> <p>3. a) $E(x, y, p, y') \geq 0$ punktides (x, y), mis on küllalt lähedased uuritava ekstremaali punktidele, ja y' puhul, mis on lähedased ekstremaalil võetud välja kaldele $p(x, y)$, või b) $f_{y'y'}(x, y, p) > 0$ uuritava ekstremaalil.</p>	<p>1. $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0, y(a) = b, y(c) = d.$</p> <p>2. a) Eksisteerib ekstremaalide väli, mis sisaldab uuritavat ekstremaali, või b) on täidetud Jacobi tingimus.</p> <p>3. a) $E(x, y, p, y') \geq 0$ punktides (x, y), mis on küllalt lähedased uuritava ekstremaali punktidele, ja suvalistel y' väärtustel või b) $f_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$ punktides (x, y), mis on küllalt lähedased uuritava ekstremaali punktidele, ja suvalistel y' väärtustel.</p>

Funktsionaali maksimumi piisavate tingimuste saamiseks tuleb võrratuste märgid asendada vastupidistega.

Toome lõpuks veel mõned näited funktsionaali uurimise kohta.

N ä i d e 3. Kontrollida, mis liiki ekstreemumi saavutab funktsionaal

$$F(y) = \int_0^1 (y'^2 + 12xy) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2,$$

ekstremaali $y = x^3 + x$.

§-s 7 leidsime vaadeldava funktsionaali ekstremaali, kuid jäi lahtiseks ekstreemumi iseloomu küsimus. Et siin $f_{y'y'} = 2 > 0$ sõltumata y' väärtusest ja $f(x, y, y')$ on arendatav igal y' väärtusel Taylori ritta, siis saavutab funktsionaal ekstremaalil $y = x^3 + x$ tugeva miinimumi.

N ä i d e 4. Uurida funktsionaali

$$F(y) = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b,$$

ekstreemumi iseloomu.

See funktsionaal esines brahhistokrooni probleemi puhul, mida me käsitlesime §-s 8. Nagu nägime, on rajapunkte läbi-vaks ekstremaaliks tsükloid

$$(7) \quad x = c(2t - \sin 2t), \quad y = c(1 - \cos 2t),$$

kus konstant c on määratud parempoolse otspunktiga $B(a, b)$. Kui $a < 2\pi c$, siis saab seda ekstremaali lülitada ekstremaalide

$$x = C(2t - \sin 2t), \quad y = C(1 - \cos 2t)$$

tsentraalsesse välja.

Et $f_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}(1 + y'^2)^{3/2}} > 0$ iga $y > 0$ ja y' puhul ning

$f(x, y, y')$ on arendatav kujule (5), siis tsükloidil (7) realiseerub tugev miinimum.

N ä i d e 5. Teha kindlaks, kas funktsionaal

$$F(y) = \int_0^a \frac{y}{y'^2} dx, \quad y(0) = 1, y(a) = b, a > 0, 0 < b < 1,$$

saavutab ekstreemumi siledatel kõveratel. Juhul, kui saavutab, määrata ekstreemumi liik.

Euleri võrrandi esimeseks integraaliks on

$$\frac{y}{y'^2} + y' \cdot \frac{2y}{y'^3} = C \quad \text{ehk} \quad y'^2 = 4C_1^2 y,$$

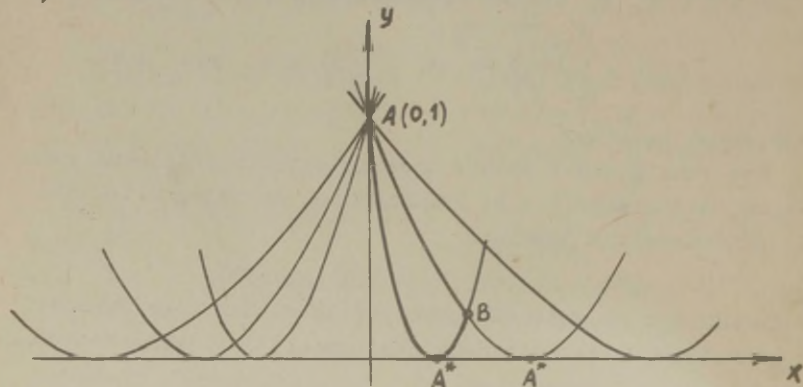
millest peale integreerimist saame paraboolide parve $y =$

$= (C_1 x + C_2)^2$. Tingimusest $y(0) = 1$ leiame $C_2 = 1$. Paraboo-

lide kimbul $y = (C_1 x + 1)^2$ keskpunktiga $A(0,1)$ on diskrimi-

nantkõver $y = 0$ (joonis 17). Punkti $B(a,b)$ läbib kaks para-

booli sellest kimbust, $y = \left(\frac{\sqrt{b}-1}{a} x + 1\right)^2$ ja $y = \left(\frac{-\sqrt{b}-1}{a} x + 1\right)^2$. Nendest esimese parabooli kaarel AB ei asu punkti A



Joonis 17.

kaaspunkti, teise parabooli kaarel AB aga asub. Tulemus on lihtsalt saadav geomeetriliselt, kuid ka analüütiliselt pole sama tulemusteni raske jõuda. (Proovida, kasutades näiteks võrrandit (4), § 11.) Esimese parabooli kaart AB saab lülitada ekstremaalide $y = (C_1 x + 1)^2$ tsentraalsesse välja, teise kaart aga mitte. Jääb uurida, kas paraboolil $y = \left(\frac{\sqrt{b}-1}{a} x + 1\right)^2$ realiseerub ekstreemum.

Uuritava ekstremaali ümbruses $f_{y',y'} = \frac{6y}{y'^4} > 0$ iga y'

puhul. Siiski ei saa selle alusel väita, et funktsionaal saavutaks vaadeldaval ekstremaalil tugeva miinimumi, sest funktsiooni $f(x, y, y') = \frac{y}{y'^2}$ jaoks ei kehti Tayloriga valem (5) iga y' korral. Võib aga väita, et esineb nõrk miinimum, sest Tayloriga valem on õige y' väärtustel, mis on küllalt lähedased välja kaldele vaadeldaval ekstremaalil. Funktsionaali täielikuks uurimiseks vaatleme E-funktsiooni:

$$E(x, y, p, y') = \frac{y}{y'^2} - \frac{y}{p^2} + (y' - p) \frac{2y}{p^3} = \frac{y(y' - p)^2(2y' + p)}{y'^2 p^3}.$$

Et tegur $2y' + p$ ei säilita märki suvalistel y' väärtustel, siis tugevat miinimumi ei esine.

3. Legendre'i ja Jacobi tingimused ning teise variatsiooni positiivne määratus. Paragrahvis 5 tegime kindlaks, et funktsionaali miinimumi piisavaks tingimuseks on teise variatsiooni positiivne määratus. Käesolevas paragrahvis saime teistsugused piisavad tingimused. Osutub, et need tingimused on siiski omavahel seotud. Nimetatud väite õigsus nähtub allpool tõestatavast teoreemist. Siinjuures eeldame, et funktsioon $f(x, y, y')$ on kõikide argumentide järgi kolm korda diferentseeruv.

Teoreem. Kui ekstremaalil $y = y_0(x)$ on täidetud Jacobi tingimus ja Legendre'i tingimus $f_{y',y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) > 0$, siis funktsionaali (1) teine variatsioon $\delta^2 F(y_0, h)$ on positiivselt määratud.

Tõestus. Lisaks teisele variatsioonile

$$(8) \quad \delta^2 F(y_0, h) = \int_a^b (f_{yy} h^2 + 2f_{yy'} h h' + f_{y'y'} h'^2) dx$$

vaatleme integraali

$$I = \int_a^b [\omega'(x) h^2 + 2\omega(x) h h'] dx,$$

kus $\omega(x)$ on suvaline diferentseeruv funktsioon. Viimane integraal võrdub nulliga, sest

$$I = \int_a^b d(\omega h^2) = [\omega(x)h^2(x)]_a^b$$

ja $h(a) = h(b) = 0$. Lisades integraali I teisele variatsioonile, saame

$$(9) \delta^2 F = \int_a^b [(f_{yy} + \omega')h^2 + 2(f_{yy'} + \omega)hh' + f_{y'y'}h'^2] dx.$$

Valime nüüd $\omega(x)$ nii, et integraalilaine funktsioon valemis (9) muutuks täisruuduks

$$(Ah + Bh')^2 = A^2h^2 + 2ABhh' + B^2h'^2.$$

Selleks peab olema

$$A^2 = f_{yy} + \omega', \quad B^2 = f_{y'y'}, \quad AB = f_{yy'} + \omega$$

ehk

$$(10) \quad f_{y'y'}(f_{yy} + \omega') = (f_{yy'} + \omega)^2.$$

Kui leidub diferentseeruv funktsioon $\omega(x)$, mis lõigul $[a, b]$ seda võrrandit rahuldab, siis

$$(11) \quad \delta^2 F(y_0, h) = \int_a^b f_{y'y'} \left(h' + \frac{f_{yy'} + \omega}{f_{y'y'}} h \right)^2 dx \geq 0.$$

Võrrand (10) on muidugi alati lokaalselt lahenduv, kuid võib juhtuda, et küllalt suure lõigu $[a, b]$ korral lahendit kogu lõigul ei eksisteeri, nagu näiteks juhul, kui $f_{y'y'} = -1$, $f_{yy} = 1$, $f_{yy'} = 0$. Tõepoolest, sel juhul saab võrrand (10) kuju $\omega' + 1 + \omega^2 = 0$, millest $\omega(x) = \tan(C-x)$. Kui $b-a > \pi$, siis leidub lõigul $[a, b]$ vähemalt üks punkt, kus lahend ei eksisteeri.

Näitame, et kui on täidetud Jacobi tingimus, siis võrrandil (10) on lahend olemas kogu lõigul $[a, b]$. Teeme võrrandis (10) muutuja vahetuse

$$(12) \quad \omega = -f_{yy'} - f_{y'y'} \frac{u'}{u},$$

kus u on uus tundmatu funktsioon. Peale ω asendamist saame Jacobi võrrandi

$$(13) \quad (f_{yy} - \frac{d}{dx} f_{yy'})u - \frac{d}{dx} (f_{y'y'}u') = 0.$$

Eelduse kohaselt on täidetud Jacobi tingimus, s.t. võrrandil (13) on olemas lahend $u(x)$, mis poollõigul $a < x \leq b$ ei muutu nulliks. Samadel x väärtustel on teostatav muutuja vahetus (12) ja eksisteerib diferentseeruv funktsioon $\omega(x)$, mis rahuldab võrrandit (10). Saadud tulemus ei rahulda meid täielikult, sest Jacobi võrrandi teadaolev lahend muutub nulliks kohal $x = a$. Kuid tänu diferentsiaalvõrrandi lahendi pidevale sõltuvusele algtingimustest, leidub küllalt väikese positiivse arvu ε puhul Jacobi võrrandi lahend $u(x)$, mis rahuldab tingimusi $u(a - \varepsilon) = 0$, $u(x) \neq 0$, kui $a - \varepsilon < x \leq b$. Selline lahend ei saa nulliks lõigu $[a, b]$ üheski punktis. Kasutades muutuja vahetuse (12) juures just sellist lahendit, saame funktsiooni $\omega(x)$, mis rahuldab võrrandit (10) kogu lõigul $[a, b]$ ja mille korral kehtib võrratus (11).

Näitame nüüd, et võrratuse (11) asemel kehtib tegelikult rangem võrratus

$$(14) \quad \delta^2 F(y_0, h) \geq c \|h\|^2 \quad (c > 0),$$

s.t. $\delta^2 F(y_0, h)$ on positiivselt määratud. Eelduse kohaselt on $f_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) > 0$ iga $x \in [a, b]$ puhul. See tähendab, et leidub positiivne arv α , nii et iga $x \in [a, b]$ puhul kehtib võrratus $f_{y'y'} > \alpha > 0$ ehk $f_{y'y'} - \alpha > 0$. Siis

$$(15) \quad \delta^2 F(y_0, h) = \int_a^b h'^2(x) dx = \int_a^b (f_{y'y'} - \alpha) \left(h' + \frac{f_{yy'} + \omega}{f_{y'y'} - \alpha} \right)^2 dx \geq 0$$

eeldusel, et leidub diferentseeruv funktsioon $\omega(x)$, mis lõigul $[a, b]$ rahuldab võrrandit

$$(16) \quad (f_{y'y'} - \alpha)(f_{yy} + \omega') = (f_{yy'} + \omega)^2,$$

ehk funktsioon $u(x)$, mis ei muutu lõigul $[a, b]$ nulliks ja rahuldab võrrandit

$$(17) \quad (f_{yy} - \frac{d}{dx} f_{yy'})u - \frac{d}{dx} [(f_{y'y'} - \alpha)u'] = 0.$$

Viimane eeldus on aga täidetud, sest diferentsiaalvõrrandi

lahendi kordajatest pideva sõltuvuse tõttu leidub võrrandil (17) selline lahend, kui ta on olemas võrrandil (13).

Nüüd pole võrratust (14) enam raske saada. Kõigepealt märgime, et juba (11) tõttu on võrratus (14) ilmne, kui $h(x) \equiv 0$. Seepärast vaatleme juhtu, kus $h(x) \neq 0$. Kasutades integraalarvutuse keskväärtusvalemit ja $h'(x)$ pidevust leiame, et

$$\delta^2 F(y_0, h) \geq \alpha \int_a^b h'^2 dx = \frac{\alpha}{b-a} h'^2(\xi) = \frac{\alpha\beta}{b-a} \max_x h'^2(x),$$

kus $a < \xi < b$, $h'(\xi) \neq 0$ ja $0 < \beta < 1$. Teiselt poolt, kasutades Cauchy-Bunjakovski võrratust, saame iga $x \in [a, b]$ puhul

$$h^2(x) = \left(\int_a^x h'(x) dx \right)^2 \leq (x-a) \int_a^x h'^2(x) dx \leq (b-a) \int_a^x h'^2(x) dx,$$

seega ka

$$\max h^2(x) \leq (b-a) \int_a^b h'^2(x) dx.$$

Siit

$$\delta^2 F(y_0, h) \geq \alpha \int_a^b h'(x) dx \geq \frac{\alpha}{b-a} \max h^2(x)$$

ja seega

$$\delta^2 F(y_0, h) \geq \frac{\alpha\beta}{b-a} \cdot \max \{ h^2(x), h'^2(x) \} = \frac{\alpha\beta}{b-a} \|h\|_1^2,$$

s. t. võrratus (14) kehtib, kusjuures $c = \frac{\alpha\beta}{b-a} > 0$.

V. LIHTSAIMA VARIATSIOON-
ÜLESANDE ÜLDISTUSI

§ 13. Mitmest funktsioonist
sõltuv funktsionaal

Vaatleme järgmist ülesannet: leida funktsionaali

$$(1) \quad F(y) = F(y_1, y_2, \dots, y_n) = \\ = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$$

ekstreemumi tarvilik tingimus rajatingimustel

$$y_1(a) = y_{10}, \quad y_1(b) = y_{11}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Kui funktsioonil f on kõigi argumentide järgi olemas pidevad osatuletised kuni teise järguni, siis variatsioon (vt. §4, punkt 3)

$$\delta F(y, h) = \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial y_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n} h_n + \frac{\partial f}{\partial y_1'} h_1' + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n'} h_n' \right\} dx,$$

kus $h = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)) \in C_n^1[a, b]$ ja $h|_{x=a} = h|_{x=b} = (0, 0, \dots, 0)$. Otsitaval ekstreemaliseerival kõveral muutub $\delta F(y, h)$ nulliks iga h puhul. Eriti muutub ta nulliks ka siis, kui

$$h = (0, \dots, 0, h_1(x), 0, \dots, 0), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kus $h_1(x)$ on suvaline funktsioon, mis rahuldab tingimusi

$$h_1(a) = h_1(b) = 0. \quad \text{Siis aga}$$

$$\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} h_i(x) + \frac{\partial f}{\partial y_i'} h_i'(x) \right] dx = 0.$$

Variatsioonarvutuse põhilemma 3 (vt. § 6, punkt 3) põhjal eksisteerib tuletis $\frac{d}{dx} f_{y_i}$, kusjuures $f_{y_i} - \frac{d}{dx} f_{y_i'} \equiv 0$. Seega selleks, et $(n+1)$ -mõõtmelise ruumi kõver

$$y_1 = y_1(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

oleks funktsionaali (1) ekstremaliseerivaks kõveraks, on tarvilik, et ta rahuldaks Euleri võrrandite süsteemi

$$(2) \quad f_{y_i} - \frac{d}{dx} f_{y_i'} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Selle süsteemi üldlahend sisaldab $2n$ suvalist konstanti:

$$y_1 = y_1(x, C_1, C_2, \dots, C_{2n}),$$

$$y_2 = y_2(x, C_1, C_2, \dots, C_{2n}),$$

.....

$$y_n = y_n(x, C_1, C_2, \dots, C_{2n}).$$

Nende määramiseks on ka $2n$ rajatingimust. Lõpptulemuseks saame punkte $A(a, y_{10}, \dots, y_{n0})$ ja $B(b, y_{11}, \dots, y_{n1})$ läbiva kõvera $(n+1)$ -dimensionaalses ruumis.

N ä i d e. Leida funktsionaali

$$F(y, z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 + z'^2 + 2yz) dx$$

ekstremaalid rajatingimustel

$$y(0) = z(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Elimineerides Euleri võrrandite süsteemist

$$y'' - z = 0,$$

$$z'' - y = 0$$

näiteks $z, z'' = y$, saame

$$y^{iv} - y = 0,$$

millest

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,$$

$$z = y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x.$$

Rajatingimustest leiame ruumilise kõvera

$$y = \sin x,$$

$$z = -\sin x,$$

millel funktsionaal võib saavutada ekstreemumi.

Käesolevas peatükis vaadeldavate ülesannete korral me ei käsitle ekstreemumi piisavaid tingimusi. Märgime aga, et ka siin on võimalik arendada analoogilist teooriat nagu

variatsioonarvutuse põhifunktsionaali $\int_a^b f(x, y, y') dx$ puhul

(vt. näit. [3]). Lihtsamatel juhtudel võib ekstreemumi iseloomu kindlaks määrata otse definitsoonil alusel. Füüsikalise sisuga ülesannete puhul on sageli ekstreemumi iseloomu teada, tuleb vaid leida ekstreemukoht.

§ 14. V a r i a t s i o o n p r i n t s i i p m e h h a a n i k a s

Teoreetilise mehhaanika kursusest on teada Hamiltoni-Ostrogradski ja Maupertuis-Lagrange'i variatsioonprintsiibid (vt. näit. [10]). Eelmise paragrahvi üldiste tulemuste rakendusena tuletame siin Hamiltoni printsiiibi ja Lagrange'i teist tüüpi võrrandid.

Olgu antud masspunktide süsteem, mis koosneb n punktist ja mille massid on m_1, m_2, \dots, m_n . Tähistame j -nda punkti koordinaate x_j, y_j, z_j . Nagu teada, kirjeldavad süsteemi liikumist Newtoni võrrandid

$$(1) \quad m_j \ddot{x}_j = F_{jx}, \quad m_j \ddot{y}_j = F_{jy}, \quad m_j \ddot{z}_j = F_{jz} \quad (j = 1, \dots, n),$$

kus F_{jx}, F_{jy}, F_{jz} on j -ndale punktile mõjuva tungi F_j komponendid. Eeldame, et süsteem liigub konservatiivses tungide väljas. See tähendab, et

$$(2) \quad F_{jx} = - \frac{\partial U}{\partial x_j}, \quad F_{jy} = - \frac{\partial U}{\partial y_j}, \quad F_{jz} = - \frac{\partial U}{\partial z_j},$$

kus

$$U = U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$$

on süsteemi potentsiaalne energia.

Võtame vaatluse alla kaks järgmist funktsionaali

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_1} T(\dot{x}_1, \dots, \dot{z}_n) dt, \quad I_2 = \int_{t_0}^{t_1} U(x_1, \dots, z_n) dt,$$

kus

$$T = \sum_{j=1}^n \frac{m}{2} (\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2) = T(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n)$$

on süsteemi kineetiline energia. Lugesed fikseeritaks süsteemi algasendi ($t = t_0$)

$$x_1(t_0), \dots, z_n(t_0)$$

ja lõppasendi ($t = t_1$)

$$x_1(t_1), \dots, z_n(t_1),$$

leiame mõlema funktsionaali variatsiooni:

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \delta \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_n} \delta \dot{z}_n \right] dt,$$

$$I_2 = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial U}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial z_n} \delta z_n \right] dt,$$

kus $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \dots, \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$ ja $\delta \dot{x}_1, \delta \dot{y}_1, \delta \dot{z}_1, \dots, \delta \dot{x}_n, \delta \dot{y}_n, \delta \dot{z}_n$ on vastavalt funktsioonide $x_1(t), y_1(t), z_1(t), \dots, x_n(t), y_n(t), z_n(t)$ suvalised juurdekasvud (variatsioonid) ja nende tuletised t järgi. Et

$$\delta x_1(t_0) = \delta x_1(t_1) = \dots = \delta z_n(t_0) = \delta z_n(t_1) = 0,$$

siis integreerides δI_1 avaldises iga liiget ositi ja arvestades T avaldist leiame

$$\delta I_1 = - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \delta x_1 + \dots + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_n} \delta z_n \right] dt =$$

$$= - \int_{t_0}^{t_1} \left[m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + \dots + m_n \ddot{z}_n \delta z_n \right] dt.$$

Kui nüüd pidada silmas seoseid (2) ja (1), siis näeme, et

$$\delta I_1 = \delta I_2,$$

millest

$$\delta(I_1 - I_2) = 0.$$

Seega funktsioonide

$$x_1(t), y_1(t), z_1(t), \dots, x_n(t), y_n(t), z_n(t)$$

puhul, mis kirjeldavad süsteemi tegelikku liikumist aja-
vahemikus $t_0 \leq t \leq t_1$, on funktsionaali

$$(3) \quad I_1 - I_2 = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

variatsioon null, ehk teisiti, see funktsionaal omandab statsionaarse väärtuse. Tulemus väljendabki Hamiltoni printsiipi: masspunktide süsteemi tegelik liikumine toimub selliselt, et funktsionaal (3) omandab statsionaarse väärtuse.

Kui masspunktide süsteemi liikumine on kitsendatud teatud seostega, siis võib süsteemi liikumist kirjeldada r funktsiooniga $q_1(t), \dots, q_r(t)$, kus r ($r < 3n$) on süsteemi vabadusastmete arv. Süsteemi parameetreid q_1, \dots, q_r nimetatakse sealjuures üldistatud koordinaatideks. Üldistatud koordinaatide kaudu avalduvad ka masspunktide süsteemi ristkoordinaadid:

$$x_j = x_j(q_1, \dots, q_r)$$

$$y_j = y_j(q_1, \dots, q_r) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$z_j = z_j(q_1, \dots, q_r)$$

Siiit

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^r \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k, \quad \dot{y}_j = \sum_{k=1}^r \frac{\partial y_j}{\partial q_k} \dot{q}_k,$$

$$\dot{z}_j = \sum_{k=1}^r \frac{\partial z_j}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

ja süsteemi kineetiline energia T on üldistatud kiiruste \dot{q}_j ruutvorm:

$$T = \sum_{j,k=1}^r a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (a_{jk} = a_{kj}).$$

Kordajad a_{jk} on üldistatud koordinaatide q_1, \dots, q_r funktsioonid.

Potensiaalne energia $U(x_1, \dots, z_n)$ on üldistatud koordinaatide funktsioon.

$$U = U(q_1, \dots, q_r).$$

Funktsioon $L = T - U$, mida nimetatakse Lagrange'i funktsiooniks, osutub seega üldistatud koordinaatide ja üldistatud kiiruste funktsiooniks,

$$L = L(q_1, \dots, q_r, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_r).$$

Funktsionaali (3), s.t. funktsionaali

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q_1, \dots, q_r, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_r) dt$$

statsionaarsuse tingimus on antud Euleri võrrandite süsteemiga, mis omandab nüüd kuju

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

ehk

$$(4) \quad \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r).$$

Näeme, et Euleri võrrandite süsteem, mis kirjeldab antud juhul masspunktide süsteemi tegelikku liikumist, ühtib teoreetilise mehhaanika kursusest tuntud Lagrange'i teist tüüpi võrrandite süsteemiga.

Kuigi teoreetilise mehhaanika kursuses on võrrandsüsteemi (4) integreerimist käsitletud, peatume ka siin sellel küsimusel, sest tulemus pakub huvi funktsionaali Euleri võrrandite süsteemi praktilise integreerimise seisukohalt. Osutub, et süsteemi (4) esimese integraali, nn. energiaintegraali, saab lihtsalt leida. Selleks korrutame iga võrrandi diferentsiaaliga $dq_j = \dot{q}_j dt$ ja liidame kõik võrrandid; saame

$$\sum \frac{\partial T}{\partial q_j} dq_j - \sum \frac{\partial U}{\partial q_j} dq_j - \sum \dot{q}_j \cdot d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0.$$

Et

$$\dot{q}_j d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = d\left(q_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j$$

ja

$$\sum \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T,$$

siis

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial T}{\partial q_j} dq_j - \sum \frac{\partial U}{\partial q_j} dq_j - 2dT + \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j &= \\ = dT - dU - 2dT &= -(dU + dT) = 0, \end{aligned}$$

millest

$$U + T = \text{const.}$$

Tulemus näitab, et süsteemi koguenergia (s.o. potentsiaalse ja kineetilise energia summa) jääb kogu liikumise kestel samaks.

§ 15. Kõrgemat järku tuletistest sõltuv funktsionaal

Leiame funktsionaali

$$(1) \quad F(y) = \int_a^b f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$$

ekstreemumi tarviliku tingimuse eeldusel, et funktsioonil f on olemas pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi kuni järguni $n + 1$ ja lubatavad funktsioonid $y(x)$, mis kuuluvad ruumi $C^{(2n)}[a, b]$, rahuldavad rajatingimusi

$$y(a) = y_0, y'(a) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(a) = y_0^{(n-1)},$$

$$y(b) = y_1, y'(b) = y'_1, \dots, y^{(n-1)}(b) = y_1^{(n-1)}.$$

Nagu nägime (§ 4, punkt 3), on funktsionaali (1) variatsioon

$$\delta F(y, h) = \int_a^b \left[f_{y'} h + f_{y''} h' + \dots + f_{y^{(n)}} h^{(n)} \right] dx,$$

kus $h \in C^{(n)}[a, b]$ ja

$$(2) \quad h(a) = h'(a) = \dots = h^{(n-1)}(a) = 0,$$

$$h(b) = h'(b) = \dots = h^{(n-1)}(b) = 0.$$

Viimaseid tingimusi arvestades integreerime teist liiget ositi ühe korra.

$$\int_a^b f_{y''} h' dx = f_{y''} h \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} f_{y''} h dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} f_{y''} h dx,$$

kolmandat liiget ositi kaks korda,

$$\begin{aligned} \int_a^b f_{y'''} h'' dx &= f_{y'''} h' \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} f_{y'''} h' dx = \left(- \frac{d}{dx} f_{y'''} \right) h \Big|_a^b + \\ &+ \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} f_{y'''} h dx = \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} f_{y'''} h dx \end{aligned}$$

jne., viimast liiget integreerime ositi n korda,

$$\int_a^b f_{y^{(n)}} h^{(n)} dx = \dots = (-1)^n \int_a^b \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} h dx.$$

Peale saadud tulemuste asendamist $\delta F(y, h)$ avaldisse saame ekstreemumi tarvilikuks tingimuseks

$$\delta F(y, h) =$$

$$= \int_a^b \left[f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} \right] h dx = 0.$$

Et $h \in C^{(n)}[a, b]$ on suvaline funktsioon, mis rahuldab raja-

tingimusi (2), siis Lagrange'i lemma põhjal (§6, punkt 1) peab olema

$$(3) f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} = 0.$$

Seega vaadeldava variatsioonvõrrandite lahendid peavad rahuldama võrrandit (3), mida nimetatakse Euleri-Poissoni võrrandiks. Euleri-Poissoni võrrand on $2n$ -järku harilik diferentsiaalvõrrand ja tema üldlahend sisaldab $2n$ suvalist parameetrit. Nende määramiseks on meil parajasti $2n$ rajatingimust (2).

M ä r k u s. Eeldasime, et f omab pidevaid osatuletisi kuni järkuni $n+1$ ja lubatavad funktsioonid kuuluvad ruumi $C^{(2n)}[a, b]$. Nimetatud eeldused püstitasime selleks, et kindlustada tuletiste $\frac{d}{dx} f_{y'}$, ..., $\frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}}$ olemasolu. Muutes tuletuskäiku komplitseeritumaks, on võimalik saada Euleri-Poissoni võrrandit ka eeldusel, et funktsioonil f on olemas kuni teist järku pidevad osatuletised ja lubatavad kõverad kuuluvad ruumi $C^{(n)}[a, b]$.

§ 16. K o r d s e t e i n t e g r a a l i d e e k s t r e e m u m i d

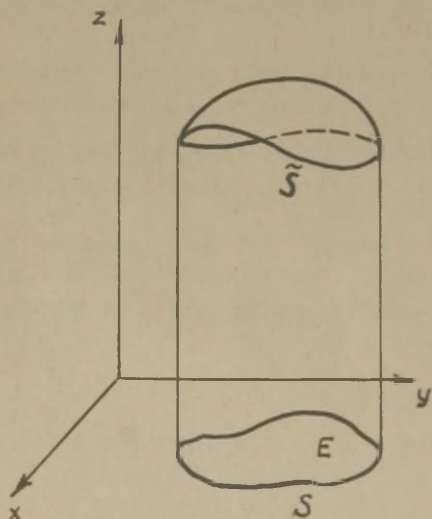
Silani vaatlesime funktsionaale, mis sõltusid ühe muutuja funktsioonidest, s.o. joontest. Paljudes probleemides esinevad funktsionaalid, mis sõltuvad mitme muutuja funktsioonidest. Piirdume lihtsuse mõttes funktsionaaliga, mis sõltub ühest kahe muutuja funktsioonist, s.o. pinnast kolmemõõtmises ruumis. Leiame funktsionaali

$$(1) \quad F(z) = \iint_E f(x, y, z, z_x, z_y) dx dy$$

ekstreemumi tarviliku tingimuse eeldusel, et lubatavad funktsioonid $z(x, y)$ omandavad piirkonna E rajajoonel S etteantud väärtusi, s.t. lubatavad pinnad $z = z(x, y)$ läbivad etteantud ruumilist kontuuri S (joonis 18). Funktsiooni

$f(x, y, z, u, v)$ kohta eeldame, et tal on olemas kuni teist järku pidevad osatuletised kõikide argumentide järgi, lubatavad funktsioonid aga kuuluvad ruumi $C'(E)$. Lähtume üldisest tarvilikust tingimusest $\delta F(z, h) = 0$, kus antud juhul

$$(2) \quad \delta F(z, h) = \iint_E (f_z h + f_{z_x} h_x + f_{z_y} h_y) dx dy.$$



Joonis 18

Selleks, et saada tarvilikku tingimust sobival kujul, peame vabanema tundmatutest funktsioonidest h, h_x, h_y . Eesmärgi saavutamiseks kasutame järgmist abitulemust.

L e m m a. Kui

$\Phi(x, y)$ on fikseeritud funktsioon, mis on pidev piirkonnas E , ja kui

$$(3) \quad \iint_E \Phi(x, y) h(x, y) dx dy = 0$$

iga funktsiooni $h(x, y) \in C'(E)$ puhul, mis muutub nulliks piirkonna E raja-joonel S , siis $\Phi(x, y) = 0$ kogu piirkonnas E .

Tõestus. Oletame, et piirkonna E mingis sisemises punktis (ξ, η) on funktsioon $\Phi(x, y)$ nullist erinev, näiteks positiivne. Funktsiooni $\Phi(x, y)$ pidevuse tõttu leidub positiivne reaalarv ϱ , nii et $\Phi(x, y)$ on positiivne ringis, mille raadius on ϱ , keskpunkt (ξ, η) ja mis asub täielikult piirkonnas E . Kui võtta

$$h(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{väljaspool ringi } (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \varrho^2, \\ \left[\frac{\varrho^2 - ((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)}{\varrho^2} \right]^2 & \text{selles ringis,} \end{cases}$$

siis integraal (3) taandub integraaliks üle ringi ja on posi-

tiivne. Tulemus on vastuolus eeldusega. Lemma on tõestatud.

Teisendame nüüd variatsiooni (2) kujule, kus h_x ja h_y ei esine, arvestades sealjuures, et rajatingimuse tõttu

$$(4) \quad h(x, y)|_S = 0.$$

Tähistades $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ ja kasutades seoseid

$$\frac{\partial}{\partial x} (f_p h) = \frac{\partial}{\partial x} f_p \cdot h + f_p h_x,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (f_q h) = \frac{\partial}{\partial y} f_q \cdot h + f_q h_y,$$

leiame, et

$$\begin{aligned} \delta F &= \iint_E \left[\frac{\partial}{\partial x} (f_p h) + \frac{\partial}{\partial y} (f_q h) \right] dx dy + \\ &+ \iint_E \left[f_z - \frac{\partial}{\partial x} f_p - \frac{\partial}{\partial y} f_q \right] h(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Siin võrdub esimene integraalidest nulliga, sest Greeni valemi

$$\iint_E \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \int_S N dy + M dx$$

järgi

$$\iint_E \left[\frac{\partial}{\partial x} (f_p h) + \frac{\partial}{\partial y} (f_q h) \right] dx dy = \int_S f_p h dy - f_q h dx$$

ja viimane joonintegraal mööda rajajoont S on (4) tõttu null. Seega omandab tingimus $\delta F = 0$ kuju

$$\iint_E \left[f_z - \frac{\partial}{\partial x} f_p - \frac{\partial}{\partial y} f_q \right] h(x, y) dx dy = 0,$$

millest lemma tõttu

$$f_z - \frac{\partial}{\partial x} f_p - \frac{\partial}{\partial y} f_q \equiv 0.$$

See aga tähendab, et ekstremaalseeriv pind rahuldab võrrandit

$$f_z - \frac{\partial}{\partial x} f_p - \frac{\partial}{\partial y} f_q = 0.$$

Seda teist järku osatuletistega võrrandit, mille tuletas

Ostrogradski 1834.a., nimetatakse Euleri-Ostrogradski võrrandiks.

N ä i d e. Leida pind, mis läbib antud ruumilist kontuuri \tilde{S} ja millel on selle kontuuri sees vähim pindala.

Ülesanne taandub funktsionaali

$$F(z) = \iint_E \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx dy$$

miinimumi otsimisele, kusjuures E on piirkond, mida piirab ruumilise kõvera \tilde{S} projektsioon xy -tasandil. Euleri-Ostrogradski võrrandiks on osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0.$$

Olles tähistanud

$$r = z_{xx}, \quad s = z_{xy}, \quad t = z_{yy},$$

saame pärast osatuletiste leidmist võrrandile kuju

$$(5) \quad \frac{r(1 + q^2) - 2spq + t(1 + p^2)}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)^3}} = 0.$$

Võrrandit (5) on lihtne geomeetriliselt interpreteerida. Diferentsiaalgeomeetria kursuses tõestatakse, et pinna keskmine kõverus

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)},$$

kus E , F , G ja L , M , N on vastavalt pinna esimese ja teise ruutvormi kordajad. Kui pind on antud võrrandiga $z = z(x, y)$, siis

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2,$$

$$L = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Seega

$$EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2,$$

$$EN - 2FM + GL = \frac{t(1 + p^2) - 2spq + r(1 + q^2)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

ja keskmise kõveruse H avaldis erineb võrrandi (5) vasakust poolest vaid konstantse teguri poolest. Näeme, et otsitav pind on iseloomustatud sellega, et kontuuri \tilde{S} sees on tema keskmine kõverus igas punktis null. Sellise omadusega pinda nimetatakse teatavasti minimaalpinnaks.

§ 17. Variatsioonülesanded parameetrilisel kujul

Mõnede variatsioonülesannete lahendit on otstarbekohane otsida parameetrilisel kujul. Eriti tekib selline vajadus siis, kui on ette teada, et lahend ei ole ühene funktsioon. Käsitleme siin vaid lihtsaima funktsionaali juhtu, s.t. vaatleme variatsioonarvutuse põhifunktsionaali

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad y(a) = c, \quad y(b) = d,$$

kusjuures ekstremaliseerivat kõverat otsime parameetrilisel kujul

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Peale x ja y asendamist saame funktsionaali

$$F(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}) \dot{x}(t) dt,$$

kus $x(t_0) = a$, $x(t_1) = b$, $y(t_0) = c$, $y(t_1) = d$. Saadud tüüpi funktsionaali käsitlesime 13. paragrahvis. Siin ei sisalda integraalialune funktsioon

$$\varphi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = f(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}) \dot{x}$$

otseselt muutujat t ja rahuldab iga reaalarvu k puhul tingimust

$$(1) \quad \varphi(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = k\varphi(x, y, \dot{x}, \dot{y}).$$

Kõvera parameetiline esitusviis ei ole teatavasti ühene. Näitame, et uue parameetri valik ei muuda funktsionaali väär-

tust. Tõepoolest, minnes üle parameetrite τ ,

$$t = \psi(\tau) \quad (\psi'(\tau) \neq 0)$$

ja kasutades seoseid

$$x'_\tau = \dot{x}\psi'_\tau, \quad y'_\tau = \dot{y}\psi'_\tau, \quad dt = \psi'_\tau d\tau$$

ning homogeensuse omadust (1), saame

$$\begin{aligned} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \varphi(x, y, x'_\tau, y'_\tau) d\tau &= \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x, y, \dot{x}\psi'_\tau, \dot{y}\psi'_\tau) \frac{dt}{\psi'_\tau} = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt. \end{aligned}$$

Funktsionaali

$$(2) \quad F(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$$

ekstremaalid saame Euleri võrrandite süsteemist (vt. § 13)

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi_x - \frac{d}{dt} \varphi_{\dot{x}} &= 0, \\ \varphi_y - \frac{d}{dt} \varphi_{\dot{y}} &= 0. \end{aligned}$$

Osutub, et kui $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$, siis funktsiooni φ homogeensuse tõttu \dot{x} ja \dot{y} suhtes ei ole need võrrandid sõltumatud. Näitame seda. Diferentseerides samasust (1) k järgi, leiame

$$\varphi_{\dot{x}} \dot{x} + \varphi_{\dot{y}} \dot{y} = \varphi.$$

Siit

$$(4) \quad \begin{aligned} \varphi_x &= \dot{x} \varphi_{x\dot{x}} + \dot{y} \varphi_{x\dot{y}}, \quad \varphi_y = \dot{x} \varphi_{y\dot{x}} + \dot{y} \varphi_{y\dot{y}}, \\ \varphi_{\dot{x}} &= \varphi_{\dot{x}} + \dot{x} \varphi_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{y} \varphi_{\dot{x}\dot{y}}, \quad \varphi_{\dot{y}} = \varphi_{\dot{y}} + \dot{x} \varphi_{\dot{x}\dot{y}} + \dot{y} \varphi_{\dot{y}\dot{y}}. \end{aligned}$$

Seostest (4)

$$\dot{x} \varphi_{\dot{x}\dot{x}} = -\dot{y} \varphi_{\dot{x}\dot{y}}, \quad \dot{x} \varphi_{\dot{x}\dot{y}} = -\dot{y} \varphi_{\dot{y}\dot{y}},$$

millest omakorda

$$(5) \quad \frac{\varphi_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = \frac{\varphi_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2} = -\frac{\varphi_{\dot{x}\dot{y}}}{\dot{x}\dot{y}} = \varphi_{11}(x, y, \dot{x}, \dot{y}).$$

Leiame Euleri võrrandites (3) esinevad avaldised

$$\frac{d}{dt} \varphi_x = \varphi_{xx} \dot{x} + \varphi_{yx} \dot{y} + \varphi_{x\ddot{x}} \ddot{x} + \varphi_{x\ddot{y}} \ddot{y},$$

$$\frac{d}{dt} \varphi_y = \varphi_{xy} \dot{x} + \varphi_{yy} \dot{y} + \varphi_{y\ddot{x}} \ddot{x} + \varphi_{y\ddot{y}} \ddot{y}$$

ja asetame nad võrrandite vasakutesse pooltesse:

$$\begin{aligned} \varphi_x - \frac{d}{dt} \varphi_x &= \dot{x} \varphi_{xx} + \dot{y} \varphi_{xy} - \dot{x} \varphi_{xx} - \dot{y} \varphi_{yx} - \ddot{x} \varphi_{x\ddot{x}} - \ddot{y} \varphi_{x\ddot{y}} = \\ &= \dot{y} \varphi_{xy} - \dot{y} \varphi_{yx} - \ddot{x} \varphi_{x\ddot{x}} + \ddot{y} \varphi_{y\ddot{y}} = \dot{y} [\varphi_{xy} - \varphi_{yx} - \varphi_{x\ddot{x}} (\ddot{x} - \ddot{y})] = 0; \end{aligned}$$

analoogiliselt

$$\varphi_y - \frac{d}{dt} \varphi_y = \dot{x} [\varphi_{xy} - \varphi_{yx} - \varphi_{y\ddot{y}} (\ddot{x} - \ddot{y})] = 0.$$

Siit¹

$$(6) \quad \varphi_{xy} - \varphi_{yx} - \varphi_{x\ddot{x}} (\ddot{x} - \ddot{y}) = 0,$$

mis näitabki, et mõlemad võrrandid süsteemis (3) on samaväärsed. Seega võib võrrandisüsteemi (3) asendada tegelikult ühe võrrandiga, näiteks esimesega. Seda võrrandit tuleb vaadelda koos võrrandiga, mis määrab parameetri valiku. Näiteks, kui parameetriks võtta kõvera kaare pikkus, siis $ds^2 = dx^2 + dy^2$, millest $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$.

¹ Võrrandit (6) nimetatakse Euleri võrrandiks Weierstrassi kujul.

VI. LISATINGIMUSTEGA
VARIATSIOONÜLESANDED

Lisatingimustega variatsioonülesanneteks (ehk tingimuslikeks variatsioonülesanneteks) nimetatakse ülesandeid, kus nõutakse funktsionaali ekstreemumi leidmist tingimusel, et funktsioonid, millest funktsionaal sõltub, rahuldaksid teatud seoseid.

§ 18. Lagrange'i ülesanne

Lagrange'i ülesandeks nimetatakse järgmist variatsioonülesannet. Leida funktsionaali

$$(1) \quad F = \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$$

ekstreemumkohad tingimustel, et rajapunktid on fikseeritud, s.o.

$$y_i(a) = y_{i0}, \quad y_i(b) = y_{i1} \quad (i = 1, \dots, n),$$

ja lubatavad funktsioonid rahuldavad seoseid

$$(2) \quad \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; m < n)$$

Juhul, kui süsteem (2) on mingi m funktsiooni suhtes praktiliselt lahendatav, võime nimetatud m funktsiooni teiste kaudu avaldada ja peale asendamist funktsionaali avaldisse (1) saada lisatingimusteta variatsioonülesande. Vaatleme ülesande teistsuguse lahendamise võimalust, kus kõik funktsioonid y_i on samaväärsed. Esitatav meetod on matemaatilise

analüüsi kursusest tuntud Lagrange'i λ -meetodi üldistuseks ja kannab ka siin Lagrange'i meetodi nimetust.

Kuigi nimetatud meetod on rakendatav üldjuhul, piirdume tema tuletamise juures vaid juhuga $n = 2$, $m = 1$, s.t. vaatleme funktsionaali

$$(3) \quad F = \int_a^b f(x, y, z, y', z') dx$$

lisatingimusel

$$(4) \quad \varphi(x, y, z) = 0,$$

kusjuures

$$y(a) = y_{10}, \quad z(a) = z_{10}, \quad y(b) = y_{11}, \quad z(b) = z_{11}.$$

Eeldame, et ekstremaliseerival kõveral $\varphi_y'^2 + \varphi_z'^2 \neq 0$.

Olgu konkreetsuse mõttes $\varphi_z' \neq 0$, siis eksisteerib funktsioon

$$z = \psi(x, y),$$

mis rahuldab seost¹ (4). Siis

$$z' = \psi_x' + \psi_y' \cdot y'.$$

Peale z ja z' asendamist funktsionaali avaldisse (3) saame

$$(5) \quad F^*(y) = \int_a^b f^*(x, y, y') dx,$$

kus

$$f^*(x, y, y') = f(x, y, \psi(x, y), y', \psi_x' + \psi_y' y').$$

Nüüd jõudsimme hariliku variatsioonülesandeni, kus lisatingimust ei esine. Kui oleme $y(x)$ leidnud, siis leiame $z(x) = \psi(x, y(x))$. Kirjutame välja funktsionaali (5) Euleri võrrandi

$$f_y^* - \frac{d}{dx} f_{y'}^* = 0.$$

Arvestades, et

$$f_y^* = f_y + f_z \psi_y' + f_{z'} (\psi_{xy}'' + \psi_{yy}'' \cdot y'),$$

¹ z avaldamine seosest (4) ei tarvitse olla praktiliselt teostatav.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f_y^* &= \frac{d}{dx} (f_y + f_z \psi_y') = \\ &= \frac{d}{dx} f_y + \left(\frac{d}{dx} f_z \right) \psi_y' + f_z' (\psi_{xy}'' + \psi_{yy}'' y'), \end{aligned}$$

võime Euleri võrrandi esitada kujul

$$(6) \quad f_y - \frac{d}{dx} f_y + (f_z - \frac{d}{dx} f_z) \psi_y' = 0.$$

Tundmatust funktsioonist ψ_y' vabanemiseks diferentseerime samasust

$$\varphi(x, y, \psi(x, y)) \equiv 0$$

y järgi,

$$\varphi_y' + \varphi_z' \psi_y' = 0,$$

ja asendame ψ_y' väärtuse võrrandisse (6). Siis jõuame võrrandini

$$(7) \quad f_y - \frac{d}{dx} f_y = \varphi_y' \frac{f_z - \frac{d}{dx} f_z}{\varphi_z'}$$

Olles tähistanud

$$\frac{f_z - \frac{d}{dx} f_z}{\varphi_z'} = -\lambda(x),$$

saame seosest (7) kaks võrrandit

$$(8) \quad \begin{aligned} f_y + \lambda(x) \varphi_y - \frac{d}{dx} f_y &= 0, \\ f_z + \lambda(x) \varphi_z - \frac{d}{dx} f_z &= 0. \end{aligned}$$

Täpselt sama tulemuse saame, kui kirjutame välja funktsionaali

$$(9) \quad \int_a^b [f(x, y, z, y', z') + \lambda(x) \varphi(x, y, z)] dx = \\ = \int_a^b g(x, y, z, y', z') dx$$

ekstreemumi tarvilikud tingimused.

Seega võib variatsioonülesande $\{(3), (4)\}$ ekstreemumi tarviliku tingimuse saada sel teel, et moodustame funktsiooni $g(x, y, z, y', z') = f(x, y, z, y', z') + \lambda(x) \varphi(x, y, z)$ ja kirjutame funktsionaali (9) jaoks välja Euleri võrrandite

süsteemi

$$\varepsilon_y - \frac{d}{dx} \varepsilon_{y'} = 0,$$

$$\varepsilon_z - \frac{d}{dx} \varepsilon_{z'} = 0.$$

See süsteem osutubki süsteemiks (8). Funktsioon $\lambda(x)$ on esialgu määramata. Lahendades süsteemi (8) koos seosega (4) saame määrata kolm tundmatut funktsiooni $y(x)$, $z(x)$ ja $\lambda(x)$.

Sama meetod on rakendatav variatsioonülesande {(1), (2)} korral. Siis tuleb moodustada funktsioon

$$g = f + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i$$

ja kirjutada välja funktsionaali

$$G = \int_a^b g(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$$

ekstreemumi tarvilikud tingimused. Euleri võrrandite süsteem

$$\varepsilon_{y_i} - \frac{d}{dx} \varepsilon_{y_i'} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

koos seostega (2) võimaldab määrata $n + m$ tundmatut funktsiooni

$$y_1(x), \dots, y_n(x), \lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x).$$

Sealjuures rajatingimused, mis ei tohi olla vastuolus seostega, võimaldavad Euleri võrrandite süsteemi üldlahendis määrata üldiselt $2n$ suvalist konstanti. Nagu juba eespool mainitud, ei peatu me esitatud väite tõestusel üldjuhul.

Märgime samuti tõestuseta, et Lagrange'i meetod on kasutatav ka juhul, kui seosed on antud diferentsiaalvõrranditena

$$\varphi_i(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Näide. Punktid $A(x_0, y_0, z_0)$ ja $B(x_1, y_1, z_1)$ asuvad pinnal $\varphi(x, y, z) = 0$. Leida kõver, mis asub pinnal, läbib punkte A, B ja mille kaare pikkus A ja B vahel on lühim. See on geodeetiliste joonte probleem, mille sõnastasime juba 2. paragrahvis.

Antud juhul tuleb leida funktsionaali

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

miinimumkoht lisatingimusel

$$(10) \quad \varphi(x, y, z) = 0.$$

moodustame abifunktsionaali

$$F = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x) \varphi(x, y, z) \right\} dx$$

ja kirjutame välja Euleri võrrandid koos seosega (10):

$$\lambda(x) \varphi_y - \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0$$

$$\lambda(x) \varphi_z - \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0$$

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

Siit saab konkreetse pinna korral leida funktsioonid $y(x)$, $z(x)$ ja $\lambda(x)$. Üldjuhul võimaldab see süsteem määrata geodeetiliste joonte omaduse: joone peanormaal ühtib pinna normaaliga (vt. [7]).

§ 19. I s o p e r i m e e t r i l i s e d ü l e s a n d e d

1. Tarviliku tingimuse tuletamine. Isoperimeetriliste ülesannete all mõistetakse järgmist tüüpi variatsioonülesandeid:

Kõigi kõverate $y = y(x)$ seast, mis läbivad punkte $A(a, c)$, $B(b, d)$ ja mille puhul integraal

$$(1) \quad G(y) = \int_a^b g(x, y, y') dx$$

omandab etteantud väärtuse s , leida kõver, mis annab inte-

graalile

$$(2) \quad F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

ekstremaalse väärtuse. Isoperimeetrilise ülesande nimetus tuleneb seda tüüpi põhilisest ülesandest: leida kinnine kõver, mis antud pikkuse s juures piirab suurima pindala (vt. § 2, punkt 2).

Sõnastatud ülesande saab taandada eelmises paragrahvis vaadeldud ülesandele. Selleks toome sisse uue tundmatu funktsiooni $z(x)$, tähistades

$$z(x) = \int_a^x g(x, y, y') dx.$$

Siis $z(a) = 0$ ja $z(b) = s$. Sealjuures $z'(x) = g(x, y, y')$ ehk

$$g(x, y, y') - z' = 0.$$

Saime seose diferentsiaalvõrrandina. Edasi tuleb moodustada funktsioon

$k(x, y, z, y', z') = f(x, y, y') - \lambda(x)(z' - g(x, y, y'))$ ja kirjutada välja Euleri võrrandid funktsionaali

$$\int_a^b k(x, y, z, y', z') dx$$

jaoks. Saame

$$(3) \quad f_y + \lambda(x)g_y - \frac{d}{dx} [f_{y'} + \lambda(x)g_{y'}] = 0,$$
$$\frac{d}{dx} \lambda(x) = 0.$$

Teisest võrrandist leiame, et $\lambda(x) = \lambda = \text{const}$, esimene võrrand on aga Euleri võrrandiks funktsionaalile

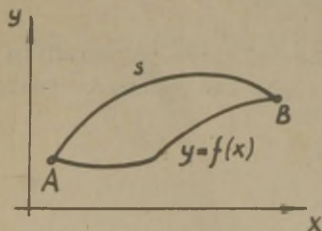
$$(4) \quad \int_a^b (f + \lambda g) dx.$$

Seega taandub isoperimeetriline ülesanne funktsionaali (4) ekstreemumi leidmisele, kusjuures ekstremaalid saame

funktsionaali (4) Euleri võrrandist

$$(5) \quad f_y + \lambda g_y - \frac{d}{dx} [f_{y'} + \lambda g_{y'}] = 0,$$

mis ühtib süsteemi (3) esimese võrrandiga. λ määramiseks tuleb kasutada lisatingimust $G(y) = s$.



Joonis 19.

Näide. Leida tasandiline kõver, $y = y(x)$, mis läbib punkte $A(a, c)$ ja $B(b, d)$, millel on antud pikkus s ja mis koos antud kõveraga $y = f(x)$ piirab maksimaalse pindala (joonis 19). Tuleb leida funktsionaali

$$S = \int_a^b [y(x) - f(x)] dx$$

maksimum rajatingimustel

$$y(a) = c, \quad y(b) = d$$

ja lisatingimusel

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = s.$$

Moodustame abifunktsionaali

$$\int_a^b (y - f(x) + \lambda \sqrt{1 + y'^2}) dx$$

ja tema Euleri võrrandi

$$1 - \frac{d}{dx} \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0.$$

Integreerimisel saame

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = x + C_1,$$

$$\lambda^2 y'^2 = (x + C_1)^2 + y'^2 (x + C_1)^2,$$

$$y' = \pm \frac{x + C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x + C_1)^2}},$$

$$y = \pm \sqrt{\lambda^2 - (x + C_1)^2} - C_2,$$

$$(y + C_2)^2 + (x + C_1)^2 = \lambda^2.$$

Saime ringjoonte parve. Konstantide C_1 , C_2 ja λ määramiseks on rajatingimused ja lisatingimus. Viimane omandab peale y' asendamist kuju

$$\int_a^b \frac{|\lambda| dx}{\sqrt{\lambda^2 - (x + C_1)^2}} = s,$$

mis annab $|\lambda|$ ja C_1 suhtes transtsendentse võrrandi.

2. Duaalsuse printsiip. Eeldame, et võrrandis (5) $\lambda \neq 0$. Kui $\lambda = 0$, siis oleks tegemist üleliigse lisatingimusega, sest sel juhul tingimus $G(y) = s$ ei mõjusta mingil määral funktsionaali (2) ekstreemumit. Jagame võrrandi (5) λ -ga läbi ja tähistame $\frac{1}{\lambda} = \lambda_1$. Siis võib võrrandi esitada kujul

$$g_y + \lambda_1 f_y - \frac{d}{dx} [g_{y'} + \lambda_1 f_{y'}] = 0.$$

See aga pole midagi muud, kui Euleri võrrand funktsionaalile

$$\int_a^b (g + \lambda_1 f) dx.$$

Saadud funktsionaali ekstreemumi leidmist võib tõlgendada kui funktsionaali (1) ekstreemumi leidmist lisatingimusel, et $F(y) = \text{const}$.

Viimast ülesannet nimetatakse esialgse variatsioonülesande duaalseks ülesandeks. Et Euleri diferentsiaalvõrrandi korrutamine konstantse teguriga ei muuda tema lahendeid, siis võib öelda, et duaalsetel ülesannetel on samad ekstremaalid. Ekstremaalide leidmise seisukohalt on seega täiesti ükskõik, kas leiame funktsionaali (2) ekstreemumi lisatingimusel, et funktsionaal (1) omandab etteantud väärtuse või funktsionaali (1) ekstreemumi lisatingimusel, et funktsionaal (2) omandab

etteantud väärtuse. Sellist omadust nimetatakse duaalsuse printsipiiks. Duaalsete ülesannete näiteks võib olla ühelt poolt antud pikkusega kinnise kõvera poolt piiratud maksimaalse pindala leidmise ülesanne ja teiselt poolt antud suurusega pindala piirava lühima pikkusega kinnise kõvera leidmise ülesanne.

VII. V A R I A T S I O O N A R V U T U S E O T S E S E D M E E T O D I D

§ 20. O t s e s t e m e e t o d i t e m õ i s t e j a p õ h i i d e e

Seni lahendasime variatsioonülesandeid sel teel, et taandasime nad diferentsiaalvõrranditele või nende süsteemidele (tavaliselt rajaülesannetele). Sellist meetodit variatsioonülesannete lahendamiseks nimetatakse mõnikord klassikaliseks meetodiks. Sealjuures taandub funktsionaali statsionaarse väärtuse olemasolu küsimus vastava rajaülesande lahenduvuse küsimusele. Kui rajaülesanne on praktiliselt lahendatav, siis saab funktsionaali statsionaarse punkti leida ja edasi juba kindlaks määrata, kas seal esineb ekstreemum või mitte. Kui meil ei õnnestu aga näidata saadava rajaülesande lahendi olemasolu, jääb ka variatsioonülesande lahenduvuse küsimus lahtiseks. Siin on kohane meenutada, et Euleri diferentsiaalvõrrand ja tema üldistused, millele variatsioonülesanded taanduvad, on lõplikul kujul lahendatavad vaid erandjuhtudel, enamikus nõuavad nad ligikaudsete meetodite kasutamist. Seepärast on loomulik püüda variatsioonülesannet lahendada otseselt, ilma diferentsiaalvõrrandite abita. Variatsioonülesannete lahendusmeetodeid, mis ei nõua diferentsiaalvõrrandite lahendamist, nimetataksegi

seepärast otsesteks meetoditeks. Otsesed meetodid annavad küll variatsioonülesande ligikaudse lahendi, kuid võimaldavad seda arvutada iga etteantud täpsusega.

On välja töötatud mitmeid otseseid meetodeid, kuid kõik nad põhinevad ühel ja samal üldisel ideel, mis seisneb järgnevas.

Vaatleme konkreetseuse mõttes funktsionaali $F(y)$ miinimumi leidmise ülesannet. Funktsionaali määramispiirkond, s.t. lubatavate funktsioonide hulk olgu G . Selleks et ülesandel oleks mõtet, tuleb eeldada, et hulgas G eksisteerivad funktsioonid $y(x)$, mille korral $F(y) < +\infty$, ja et

$$\inf F(y) = \mu > -\infty.$$

Siis alumise raja definitsiooni kohaselt eksisteerib selline funktsioonide jada $\{y_n(x)\}$, mida nimetatakse minimiseerivaks jadaks, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = \mu.$$

Kui hulgas G leidub piirfunktsioon $y^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ ja kui osutub lubatavaks piirile üleminek funktsionaali märgi all, s.o.

$$(1) \quad \lim F(y_n) = F(\lim y_n) = F(y^*),$$

siis

$$F(y^*) = \mu,$$

s.t. piirkõver on vaadeldava ülesande lahendiks. Minimiseeriva jada liikmeid võib vaadelda kui variatsioonülesande ligikaudseid lahendeid.

Seega variatsioonülesande lahendamine otsese meetodiga koosneb järgmistest etappidest:

- 1) konstrueeritakse minimiseeriv jada $\{y_n(x)\}$;
- 2) tõestatakse, et sellel jadal on vaadeldavas hulgas olemas piirfunktsioon $y^*(x)$;
- 3) tõestatakse piirprotsessi (1) lubatavus.

Märgime siinjuures järgmist.

1. Minimiseeriva jada konstrueerimine on alati võimalik, kui vaid $\inf F(y) > -\infty$. Erinevad otsesed meetodid erinevad üksteisest peamiselt minimiseeriva jada valiku poolest. Mini-

minimiseeriva jada konstrueerimise üldine idee seisneb selles, et funktsionaali ei vaadelda kõikide lubatavate funktsioonide hulgal, vaid lõplikust arvust parameetritest sõltuvate kindlat tüüpi funktsioonide hulgal. Sealjuures kehtib nõue, et parameetrite arvu suurendamise ja parameetrite sobiva valikuga peab saama kuitahes hästi aproksimeerida iga lubatavat funktsiooni. Kui parameetrite arv n fikseerida, siis funktsionaal muutub vaadeldavat tüüpi funktsionaalidel parameetrite funktsiooniks. Tema ekstreemumkohti võib leida matemaatilisest analüüsist tuntud meetoditel. Niiviisi saame parameetritele konkreetsed väärtused ja leiame ühtlasi minimiseeriva jada n -nda elemendi.

2. Kuigi minimiseeriva jada saab konstrueerida iga variatsioonülesande korral, ei pruugi piirfunktsioon vaadeldavas hulgas eksisteerida. Võtame näiteks funktsionaali

$$F(y) = \int_{-1}^1 x^2 y'^2 dx, \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1,$$

mis emandab vaid mittenegatiivseid väärtusi, kusjuures

$$\inf F(y) = 0.$$

Minimiseerivaks jadaks võib siin valida ruumist $C'[-1, 1]$ funktsioonide jada

$$(2) \quad y_n(x) = \frac{\arctan nx}{\arctan n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Tõepoolest, kui $n \rightarrow \infty$, siis

$$\begin{aligned} F(y_n) &= \int_{-1}^1 \frac{n^2 x^2 dx}{(1 + n^2 x^2)^2 \arctan^2 n} < \\ &< \frac{1}{\arctan^2 n} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + n^2 x^2} = \frac{2}{n \arctan n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Kuid

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x > 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0, \\ -1, & \text{kui } x < 0; \end{cases}$$

seega funktsioonide jada (2) piirväärtus ei kuulu ruumi $C'[-1, 1]$ ja isegi mitte ruumi $C[-1, 1]$.

3. Küsimus piirprotsessi (1) lubatavusest juhul, kui koonduvust $y_n \rightarrow y^*$ mõistetakse ruumi C meetrika mõttes (s.o. $\|y_n - y^*\| = \max |y_n(x) - y^*(x)| \rightarrow 0$), pole samuti triviviaalne, sest kõik funktsionaalid pole pidevad ruumis C . Viimane asjaolu tähendab aga seda, et üldiselt $F(y^*) \neq \mu = \lim F(y_n)$. Märgime, et funktsionaali pidevus pole võrduse (1) kehtivuseks siiski tarvilik. Piisab, kui funktsionaal on alt poolpidev. Ütleme, et funktsionaal $F(y)$ on alt poolpidev, kui iga positiivse arvu ε jaoks eksisteerib teine arv $\delta > 0$, nii et iga h puhul, mis rahuldab tingimust $\|h\| < \delta$, kehtib võrratus¹

$$(3) \quad F(y + h) - F(y) > -\varepsilon.$$

Olgu $F(y)$ alt poolpidev. Siis ühelt poolt

$$F(y^*) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = \inf F(y)$$

ja teiselt poolt küllalt suure n korral

$$F(y_n) - F(y^*) > -\varepsilon,$$

millest

$$F(y^*) \leq \lim F(y_n) + \varepsilon.$$

ε suvalisuse tõttu saame viimasest võrratusest

$$F(y^*) \leq \lim F(y_n)$$

ja seega kehtib võrdus (1). Funktsionaali maksimumi leidmisel on võrduse (1) kehtivuseks piisav, et funktsionaal oleks ülalt poolpidev.

§ 21. Euleri diferentsmeetod

Vaatleme lihtsaimat funktsionaali

$$(1) \quad F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

¹ Juhul kui võrratus (3) asendada võrratusega $F(y + h) - F(y) < \varepsilon$, saame ülalt poolpideva funktsionaali definitsiooni. Funktsionaal on pidev parajasti siis, kui ta on poolpidev nii alt kui ka ülalt.

rajatingimustel $y(a) = c$, $y(b) = d$. Euleri idee seisneb selles, et funktsionaali $F(y)$ väärtusi ei vaadelda mitte suvalistel lubatavatel kõveratel, vaid ainult murdjoontel, mis on moodustatud n lülist, kus n on etteantud naturaalarv. Tippude abstsissid

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

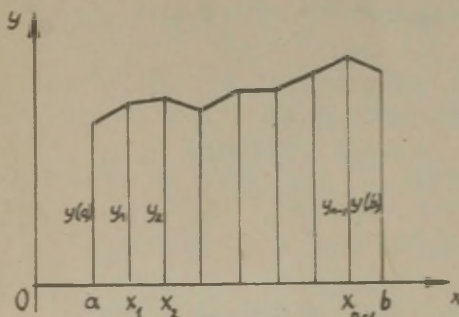
võetakse konstantse sammuga $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (joonis 20). Sellistel murdjoontel muutub funktsionaal $F(y)$ murdjoone tippude ordinaatide y_1, y_2, \dots, y_{n-1} funktsiooniks $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$,

sest koos rajatingimustega määravad need ordinaadid murdjoone täielikult.

Valime y_1, y_2, \dots, y_{n-1} selliselt, et funktsioon $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ saavutaks ekstreemumi, s.t. määrame nad järgmisest võrrandisüsteemist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 0, \dots,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}} = 0.$$



Joonis 20.

Kui minna piirile $n \rightarrow \infty$, siis teatud lisatingimustel funktsiooni f kohta, saame variatsioonülesande täpse lahendi. Kui me aga piirile üleminekut ei teosta, siis saame ligikaudse lahendi, mis on üldiselt seda täpsem, mida suurem on n .

Vaatleme, kuidas näeb Euleri meetodi rakendamine välja tegelikult. Murdjoontel omandab funktsionaal (1) kuju

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x, y, y') dx = \\ & = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\left(x, y_k + \frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x} (x-x_k), \frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}\right) dx \end{aligned}$$

Peale integreerimist saamegi funktsiooni muutujatest y_1, y_2, \dots, y_n . Siin võib aga ka integreerimisest loobuda ja asendada integraali integraalsummaga

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) \Delta x = \varphi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$$

Arvestades, et saadud summas sõltub muutujast y_k vaid kaks liiget, kirjutame välja funktsiooni φ ekstreemumi tarviliku tingimuse:

$$f_y(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}) \Delta x - f_y(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}) + \\ + f_y(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}) = 0 \quad (k = 1, \dots, n-1).$$

Peale jagamist Δx -ga saame

$$f_y(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}) - \\ - \frac{1}{\Delta x} \left[f_y(x_k, y_k, \frac{\Delta y_k}{\Delta x}) - f_y(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{\Delta y_{k-1}}{\Delta x}) \right] = 0$$

ehk lühidalt

$$(2) \quad f_y(x_k, y_k, \frac{\Delta y_k}{\Delta x}) - \frac{\Delta f_y}{\Delta x} = 0 \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

Kasutades rajatingimusi võime viimase süsteemi lahendamisel määrata otsitavad ordinaadid y_1, y_2, \dots, y_{n-1} ja leida sellega murdjoone, mis võib olla vaadeldava variatsioonülesande ligikaudseks lahendiks.

Euleri meetod on kasutatav ka teiste funktsionaalide korral, samuti fikseerimata rajapunktidega variatsioonülesannete lahendamiseks.

Diferentsmeetodit rakendas Euler oma uurimuste esialgsel perioodil. Hiljem, kui tal õnnestus variatsioonülesannet taandada diferentsiaalvõrrandile, jäi see meetod tagaplaanile. Alles nõukogude matemaatikud Ljusternik, Petrovski jt. võtsid umbes 30 a. tagasi Euleri meetodi uuesti kasutusele.

Märgime lõpuks ära järgmise huvitava asjaolu. Eeldame, et funktsioonil $f(x, y, y')$ on olemas pidevad osatuletised

f_y ja $f_{y'}$, ning $f_y(x, y(x), y'(x))$ on diferentseeruv x järgi. Kui laseme $n \rightarrow \infty$, siis $\Delta x \rightarrow 0$ ja võrrandisüsteem (2) asendub Euleri diferentsiaalvõrrandiga

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0.$$

§ 22. R i t z i m e e t o d

Üheks kõige enam kasutatavaks otseseks meetodiks on Ritzi meetod, mis seisneb järgnevas. Olgu antud funktsionaal $F(y)$ määramispiirkonnaga G mingis lineaarses normeeritud (funktsionaal-)ruumis X . Valime ruumis X jada

$$(1) \quad \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$$

nii, et lineaarsed kombinatsioonid

$$(2) \quad y_n = \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_n \varphi_n$$

kuulaksid funktsionaali $F(y)$ määramispiirkonda (oleksid tema lubatavateks funktsioonideks). Jada (1) nimetame koordinaatjadaks ehk koordinaatfunktsioonide jadaks ja eeldame, et ta on täielik hulgas G , s.t. et lineaarsete kombinatsioonidega kujul (2) saab funktsionaali $F(y)$ iga lubatavat funktsiooni kuitahes hästi aproksimeerida ruumi X meetrika mõttes. Funktsiooni $y \in G$ kuitahes hea aproksimeerimise all me mõistame seda, et vastavalt igale positiivsele arvule ε leidub naturaalarv n ja konstandid a_1, a_2, \dots, a_n , nii et $\|y - y_n\| < \varepsilon$,

kus $y_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k + \varphi_0$ ja norm on võetud ruumis X .

Eeldame, et funktsionaalil on olemas parajasti üks miinimum, mis realiseerub lubatavate funktsioonide hulgal, ja püstitame ülesande: antud n korral valida kordajad c_k ($k = 1, 2, \dots, n$) nii, et funktsionaali väärtus lineaarsel kombinatsioonil (2) oleks võimalikult väike. See on aga n muutuja funktsiooni

(3) $F(\varphi_0 + c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n) = \Phi(c_1, c_2, \dots, c_n)$ miinimumi leidmise ülesanne, mille lahendamine on põhimõtteli-

selt märksa lihtsam kui funktsionaali $F(y)$ miinimumi leidmine ja mille lahendamiseks võib kasutada matemaatilist analüüsist tuntud meetodit. Seega saame iga n jaoks vastava miinimumi μ_n . On selge, et

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n \geq \mu_{n+1} \geq \dots,$$

sest esimese $n + 1$ funktsiooni lineaarsete kombinatsioonide hulgas sisalduvad ka esimese n funktsiooni kõik lineaarsed kombinatsioonid.

Küsime, mis tingimustel on Ritzi meetodil konstrueeritav jada $\{y_n^*\}$ minimiseerivaks jadaks. Vastuse annab järgmine teoreem.

Teoreem. Kui funktsionaal $F(y)$ on pidev (ruumi X meetrika mõttes) ja tal on parajasti üks miinimum μ ning koordinaatfunktsioonide jada (1) on täielik, siis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu.$$

Tõestus. Olgu $y^* \in G$ element, millel funktsionaal $F(y)$ saavutab miinimumi, ja olgu $\varepsilon > 0$ vabalt valitav reaalarv. Funktsionaali $F(y)$ pidevuse tõttu ruumis X leidub niisugune reaalarv $\delta > 0$, et

(4) $|F(y) - F(y^*)| < \varepsilon$,
niipea kui $\|y - y^*\| < \delta$. Lineaarsete kombinatsioonide (2) seas leidub selline, märgime teda \bar{y}_n , et

$$\|\bar{y}_n - y^*\| < \delta.$$

Siis võrratuse (4) tõttu

$$F(\bar{y}_n) \leq \mu + \varepsilon.$$

Kui nüüd y_n^* on lineaarne kombinatsioon, millel funktsioon (3) saavutab miinimumi antud n puhul, siis

$$F(y_n^*) \leq F(\bar{y}_n) \leq \mu + \varepsilon.$$

ε suvalisuse tõttu saame siit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n^*) = \mu = F(y^*).$$

Teoreem on tõestatud.

See teoreem on rakendatav näiteks funktsionaalile

$$(5) \quad F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx,$$

kui teda vaadelda ruumis $C^1[a, b]$, sest selline funktsionaal on pidev ruumis C^1 (eeldusel, et funktsioon $f(x, y, y')$ on pidev).

Märgime, et jada $\{\varphi_n\}$ täielikkuse nõue, mis esineb teoreemis, on printsiipiaalse tähtsusega. Kui see pole täidetud, võib Ritzi meetodi rakendamine viia jämeda veani: küllalt suure n puhul võivad tulemused erineda tugevasti täpsest lahendist. Kui tahame leida funktsionaali (5) ekstreemumit rajatingimustel

$$y(a) = c, \quad y(b) = d,$$

siis võib funktsiooniks φ_0 valida

$$\varphi_0(x) = c + \frac{d - c}{b - a} (x - a),$$

ülejääänud koordinaatfunktsioonideks aga võtta näiteks

$$\varphi_k(x) = (x - a)^k (x - b) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

või

$$\varphi_k(x) = \sin \frac{k\pi(x - a)}{b - a}.$$

Saab näidata, et nii valitud jada $\{\varphi_n(x)\}$ on täielik.

Kuigi teoreem kindlustab minimiseerivale jadale $\{y_n^*\}$ vastavate funktsionaali väärtuste jada $\{F(y_n^*)\} = \{\mu_n\}$ koondumise funktsionaali miinimumiks $\mu = F(y^*)$ ja sealjuures üsna vähestel eeldustel, ei saa väita, et samadel tingimustel minimiseeriv jada koonduks funktsiooniks y^* , mis selle miinimumi realiseerib. Nii nagu teiste otseste meetodite korral, võib minimiseeriv jada ka Ritzi meetodi puhul olla lubatavate funktsioonide hulgas piirväärtuseta. Ritzi meetodil saadava jada $\{y_n^*\}$ koonduvuse ja vea $\|y^* - y_n^*\|$ hindamise küsimused, mis on meetodi rakendamisel olulise tähtsusega, on võrdlemisi keerukad. Need küsimused on põhjalikumalt läbi uuritud mõnedel lihtsamatel juhtudel, eriti aga ruutfunktsionaali ja funktsionaali

$$(6) \quad F(y) = \int_a^b [p(x)y'^2 + q(x)y^2 + 2r(x)y] dx$$

puhul, mida võib vaadelda ruutfunktsionaali ja lineaarfunktsionaali summana. Märgime, et seda tüüpi funktsionaali korral on Ritz'i meetodi rakendamine ka suhteliselt lihtne, sest võrrandisüsteem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c_n} = 0,$$

konstantide c_1, c_2, \dots, c_n määramiseks tuleb siis lineaarne¹. Ühtlasi on variatsioonülesanded, mis sisaldavad ruutfunktsionaali, üsna tähtsad, sest neile taanduvad paljud matemaatilise füüsika ülesanded.

Näiteks, kui funktsionaalis (6) on $p(x)$ pidevalt diferentseeruv, $q(x)$ ja $r(x)$ on pidevad ja $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ lõigul $[a, b]$, siis $F(y_n^*) \rightarrow F(y^*)$ ja kehtib hinnang²

$$\max_{a \leq x \leq b} |y^*(x) - y_n^*(x)| \leq \sqrt{\frac{b-a}{\min p(x)}} \sqrt{F(y_n^*) - F(y^*)},$$

millest nähtub, et $y_n^*(x) \rightarrow y^*(x)$. Kui koordinaatfunktsioonid valida ette juba konkreetselt, siis võib saada ka konkreetsema hinnangu.

Näide. Leida Ritz'i meetodil variatsioonülesande

$$F(y) = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0$$

ligikaudne lahend.

Valime koordinaatfunktsioonideks

$$\varphi_0(x) \equiv 0, \quad \varphi_k(x) = x^k(1-x), \quad k = 1, 2, \dots;$$

¹Variatsioonülesannet ruutfunktsionaali ekstreemumi leidmiseks nimetatakse linearseks variatsioonülesandeks, sest ka vastav Euleri võrrand tuleb lineaarne.

²Eeldatakse koordinaatfunktsioonide jada täielikkust ruumi $C'[a, b]$ kuuluvas määramispiirkonnas G .

siis

$$y_n(x) = x(1-x)(c_1 + c_2x + \dots + c_nx^{n-1}).$$

Leiame ligikaudse lahendi juhuks, kui $n = 2$.

Nüüd

$$y_2(x) = x(1-x)(c_1 + c_2x) = (x-x^2)c_1 + (x^2-x^3)c_2,$$

$$y_2'(x) = (1-2x)c_1 + (2x-3x^2)c_2.$$

Funktsioonidel $y_2(x)$ muutub $F(y)$ c_1 ja c_2 funktsiooniks:

$$\begin{aligned} \Phi(c_1, c_2) &= \int_0^1 [(1-2x)^2c_1^2 + 2(1-2x)(2x-3x^2)c_1c_2 + \\ &+ (2x-3x^2)^2c_2^2 - x^2(1-x)^2c_1^2 - 2x^2(1-x)c_1c_2 - \\ &- x^4(1-x)^2c_2^2 - 2x^2(1-x)c_1 - 2x^3(1-x)c_2] dx \end{aligned}$$

ja tingimused

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c_2} = 0$$

omandavad kuju

$$2Ac_1 + 2Bc_2 - 2D = 0,$$

$$2Bc_1 + 2Cc_2 - 2E = 0,$$

kus

$$A = \int_0^1 [(1-2x)^2 - (x-x^2)^2] dx = \frac{3}{10},$$

$$B = \int_0^1 [(1-2x)(2x-3x^2) - (x-x^2)(x^2-x^3)] dx = \frac{3}{20},$$

$$C = \int_0^1 [(2x-3x^2)^2 - (x^2-x^3)^2] dx = \frac{13}{105},$$

$$D = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \frac{1}{12},$$

$$E = \int_0^1 (x^3 - x^4) dx = \frac{1}{20}.$$

Peale arvutuste teostamist saame

$$c_1 = \frac{71}{369} \text{ ja } c_2 = \frac{7}{41}.$$

Seega ligikaudseks lahendiks on

$$y_2^*(x) = x(1-x)\left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x\right).$$

Vaadeldud lihtsal juhul saab leida ka täpse lahendi, mis on järgmine

$$y = \frac{\sin x}{\sin 1} - x = y^*(x).$$

Kui võrrelda mõnedes punktides ligikaudset ja täpset lahendit, siis saame järgmised tulemused:

x	$y^*(x)$	$y_2^*(x)$
0,25	0,0440	0,0441
0,50	0,0698	0,0694
0,75	0,0601	0,0601

§ 23. Kantorovitši meetod

Vaatleme funktsionaali $F(z)$, kus z on n muutuja funktsioon,

$$z = z(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ka koordinaatfunktsioonid φ_k on nüüd n muutuja funktsioonid,

$$\varphi_k = \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ritzi meetodi rakendamisel tuleks ligikaudset lahendit otsida kujul

$$(1) \quad z_m = \varphi_0(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(x_1, \dots, x_n),$$

kus c_k ($k = 1, \dots, m$) on konstant. Kantorovitši meetid erineb Ritzi meetodist selle poolest, et konstantide c_k asemel on nüüd ühe muutuja funktsioonid $u_k(x_1)$, mis tulevad ülesande lahendamise käigus määrata. Seega otsitakse ligikaudset lahendit kujul

$$(2) \quad z_m = \varphi_0(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m u_k(x_1) \varphi_k(x_1, \dots, x_n),$$

kus i on üks indeksitest $1, 2, \dots, n$. Funktsioonidel (2) muutub funktsionaal $F(z)$ funktsionaaliks

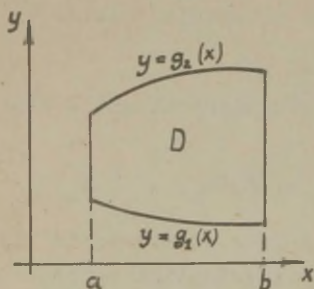
$$\tilde{F}(u_1(x_1), u_2(x_1), \dots, u_m(x_1)),$$

mis sõltub m ühe muutuja funktsioonist. Funktsioonid $u_1(x_1), \dots, u_m(x_1)$ valitakse nii, et funktsionaal \tilde{F} saavutaks ekstreemumi. Viimane ülesanne on põhimõtteliselt lihtsam kui esialgne, sest ta taandub harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendamisele (vt. § 13), kuna esialgne variatsioonülesanne nõuab osatuletistega võrrandi lahendamist (§ 16). Kantorovitš nimetaski oma meetodit harilikele diferentsiaalvõrranditele taandamise meetodiks.

Kui teostada üleminek piirile $m \rightarrow \infty$, siis teatud eeldustel võib saada esialgse ülesande täpse lahendi; kui piirile mitte minna, saame ligikaudse lahendi. Kantorovitši meetodil saadud ligikaudne lahend on sama liikmete arvu ja samade koordinaatfunktsioonide juures enamasti märksa täpsem kui Ritzi meetodil leitud ligikaudne lahend. See on tingitud asjaolust, et funktsioonide klass (2) on tunduvalt laiem kui funktsioonide klass (1).

Käsitleme üksikasjalikumalt erijuhtu, kus

$$F(y) = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) dy dx$$



Joonis 21.

sioonülesande ligikaudset lahendit kujul

Integreerimispiirkonnaks D on siin üldiselt piirkond, mis on piiratud, sirgetega $x = a$, $x = b$ ja kõveratega $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$ (joonis 21). Piirkonna D rajajoonel olgu funktsiooni $z(x, y)$ väärtused ette antud. Valime täieliku koordinaatfunktsioonide jada $\varphi_0(x, y), \varphi_1(x, y), \dots, \varphi_m(x, y), \dots$

Piirdudes selle jada $m+1$ esimese elemendiga, otsime variat-

$$(3) \quad z_m(x, y) = \varphi_0(x, y) + \sum_{k=1}^m u_k(x) \varphi_k(x, y).$$

Peale asendamist saame

$$F(z_m(x, y)) = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y, z_m(x, y), \frac{\partial z_m}{\partial x}, \frac{\partial z_m}{\partial y}) dy.$$

Et integraalilalune funktsioon f on nüüd y suhtes täielikult määratud, siis integreerime y järgi ja jõuame funktsionaalini

$$\tilde{F}(z_m(x)) = \int_a^b \psi(x, u_1(x), \dots, u_m(x), u_1'(x), \dots, u_m'(x)) dx.$$

Viimase funktsionaali ekstreemumi tingimustest

$$\psi_{u_1} - \frac{d}{dx} \psi_{u_1'} = 0$$

(4)

$$\psi_{u_m} - \frac{d}{dx} \psi_{u_m'} = 0$$

saamegi määrata funktsioonid $u_1(x), \dots, u_m(x)$. Konstandid süsteemi (4) üldlahendis määratakse nii, et $z_m(x, y)$ rahuldaks sirgetel $x = a, x = b$ antud rajatingimusi. Rajatingimused kõveratel $y = g_1(x), y = g_2(x)$ rahuldatakse koordinaat-funktsioonide valikuga. Avaldis (3) rahuldab nimetatud kõveratel antud rajatingimusi, kui neid rajatingimusi rahuldab $\varphi_0(x, y)$, kuna kõik ülejäänud koordinaatfunktsioonid rahuldavad homogeenseid rajatingimusi

$$\varphi_k(x, g_1(x)) = \varphi_k(x, g_2(x)) \equiv 0.$$

§ 24. Variatsioonmeetodite rakendamine diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks

Variatsioonarvutuse otseseid meetodeid kasutatakse laialdaselt diferentsiaalvõrrandite ligikaudseks lahendamiseks. Kui õnnestub näidata, et vaadeldav diferentsiaalvõrrand on

mingi funktsionaali Euleri võrrandiks,¹ siis saame diferentsiaalvõrrandi lahendamise taandada selle funktsionaali ekstreemumkoha leidmisele. Funktsionaali ekstreemumkoha (s.t. ekstremaliseeriva funktsiooni) võime aga leida mingil ottsel meetodil. Lihtne on näha, et kui diferentsiaalvõrrand rahuldab mingeid rajatingimusi, siis samu rajatingimusi peab rahuldama ka saadav funktsionaal. Näiteks taandub rajaväärtusülesanne

$$(1) \quad -\frac{d}{dx} (p(x)y') + q(x)y = -r(x), \quad y(a) = c, \quad y(b) = d,$$

§-s 22 vaadeldud funktsionaali

$$(2) \quad F(y) = \int_a^b [p(x)y'^2 + q(x)y^2 + 2r(x)y] dx$$

ekstreemumi leidmisele samadel rajatingimustel, sest võrrand (1) on funktsionaali (2) Euleri võrrandiks. Arvestades seda, võime öelda, et § 22 lõpul me leidsime Ritz'i meetodil ühtlasi rajaväärtusülesande

$$y'' + y' = -x, \quad y(0) = y(1) = 0$$

ligikaudse lahendi.

Kasulik on märkida, et iga lineaarne II järku harilik diferentsiaalvõrrand osutub Euleri võrrandiks funktsionaalile tüüpi (2). Selleks on küllaldane näidata, et iga lineaarset võrrandit

$$(3) \quad -p(x)y'' - s(x)y' + q(x)y = -r(x) \quad (p(x) \neq 0)$$

saab viia kujule (1). Korrutame võrrandit (3) teguriga

$$(4) \quad \exp \int_a^x \frac{s(x) - p'(x)}{p(x)} dx,$$

kus $\exp u = e^u$. Tulemuseks saame

¹ Käesolevas paragrahvis mõistame Euleri võrrandi all ka tema üldistusi, millele taandub V peatükis vaadeldud funktsionaalide ekstreemumi leidmine.

$$\begin{aligned}
 -\frac{d}{dx} \left[p \left(\exp \int_a^x \frac{s-p'}{p} dx \right) y' \right] + q \left(\exp \int_a^x \frac{s-p'}{p} dx \right) y &= \\
 &= r \exp \int_a^x \frac{s-p'}{p} dx,
 \end{aligned}$$

mis ongi võrrand kujul (1). Saab näidata, et iga teist järku diferentsiaalvõrrand $y'' = \varphi(x, y, y')$ on teatud funktsionaali

(5)
$$\int f(x, y, y') dx$$
 Euleri võrrandiks (vt. näit. [4], lk. 179), kuid funktsionaali (5) konstrueerimine on üldjuhul seotud juba raskustega.

Ka osatuletistega võrrandite puhul on rajaülesanded taandatavad funktsionaali miinimumi leidmisele. Vaatleme näiteks ülesannet: leida piirkonnas D Poissoni võrrandi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = r(x, y)$$

lahend, mis omandab piirkonna D rajajoonel S etteantud väärtused. See ülesanne taandub funktsionaali

$$F(z(x, y)) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2zr(x, y) \right] dx dy$$

miinimumi leidmisele samadel rajatingimustel, sest viimase funktsionaali Euleri-Ostrogradski võrrand osutubki Poissoni võrrandiks.

Märgime lõpuks, et antud võrrandi järgi võib funktsionaali konstrueerida ka mõnel teisel viisil, s.t. võrrand ei tarvitse olla tingimata funktsionaali Euleri võrrandiks. Näiteks võib ülesande (1) ehk

$$Ly + r = 0, \quad y(a) = c, \quad y(b) = d,$$

kus

$$Ly = -\frac{d}{dx}(py') + qy,$$

lahendamise taandada ka funktsionaalide

$$\int_a^b (Ly + r)^2 dx, \quad \int_a^b a(x) (Ly + r)^2 dx$$

minimumi leidmisele samadel rajatingimustel, kus $a(x)$ on mingi positiivne funktsioon. Täpselt samuti võib toimida ka üldisemat tüüpi võrrandite puhul.

Variatsioonimeetodite põhjalikuma käsitlese võib leida näiteks monograafias [9].

Näide. Leida Poissoni võrrandi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -1$$

pidev ligikaudne lahend kolmnurkses piirkonnas D , mis on piiratud sirgetega

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} x, \quad x = b,$$

kusjuures otsitav lahend peab sirgetel $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} x$ võrduma nulliga, aga sirgel $x = b$ rahuldama tingimust

$$(6) \quad z(b, y) = (y^2 - \frac{b^2}{3})$$

Vaadeldav võrrand on Euleri-Ostrogradski võrrandiks funktsionaalile

$$F(z) = \int_0^b \int_{-\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\frac{x}{\sqrt{3}}} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2z \right] dy dx$$

Ligikaudset lahendit otsime Kantorovitši meetodil, võttes koordinaatfunktsioonideks

$$\varphi_0(x, y) = 0, \quad \varphi_k(x, y) = \left(y + \frac{x}{\sqrt{3}} \right)^k \left(y - \frac{x}{\sqrt{3}} \right).$$

Sellise valiku korral on rajatingimused sirgetel $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} x$ rahuldatud ja jada $\{\varphi_k(x, y)\}$ täielik. Piirdume juhuga $n = 1$, s.t. otsime ligikaudset lahendit kujul

$$z_1 = \left(y^2 - \frac{x^2}{3} \right) u(x).$$

Nüüd

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = -\frac{2}{3} x u + \left(y^2 - \frac{x^2}{3} \right) u', \quad \frac{\partial z_1}{\partial y} = 2y u,$$

$$\begin{aligned}
 F(z_1) &= \int_0^b \int_{-\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\frac{x}{\sqrt{3}}} \left[u'^2 y^4 + \left(-\frac{4}{3} x u u' - \frac{2}{3} x^2 u'^2 + 4u^2 - 2u\right) y^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{9} x^2 u^2 + \frac{2}{3} x^2 u + \frac{4}{9} x^3 u u' + \frac{1}{9} x^4 u'^2 \right] dy dx = \\
 &= \frac{8\sqrt{3}}{5 \cdot 81} \int_0^b (2x^5 u'^2 + 10x^4 u u' + 30x^3 u^2 + 15x^3 u) dx.
 \end{aligned}$$

Viimase funktsionaali Euleri võrrandiks on

$$x^2 u'' + 5x u' - 5u = \frac{15}{4}.$$

Saadud võrrandi üldlahendiks on mingi erilahendi ja vastava homogeense võrrandi üldlahendi summa. Üheks erilahendiks on konstant $u = c$, mille saame määrata asendamise teel: $-5c = -\frac{15}{4}$, $c = -\frac{3}{4}$. Homogeense võrrandi üldlahendi saamiseks tuleb leida kaks lineaarselt sõltumatut erilahendit. Otsime neid kujul $u = x^k$. Proovimise teel leiame, et $u_1 = x$, $u_2 = x^{-5}$. Seega Euleri võrrandi üldlahend on

$$u = C_1 x + C_2 x^{-5} - \frac{3}{4}.$$

Et punkti $x = 0$ ümbruses peab olema $u(x)$ tõkestatud, siis tuleb võtta $C_2 = 0$. Tingimusest (6) saame $u(b) = 1$, millest

$C_1 = \frac{7}{4b}$. Seega otsitavaks ligikaudseks lahendiks on

$$z = z_1(x, y) \cong \frac{1}{12b} (3y^2 - x^2)(7x - 3b).$$

HARJUTUSÜLESANDED

I peatükk

1. Lähtudes ekstreemumi definitsioonist tõestada, et funktsionaal

$$F(y) = \int_0^2 y'^2(1 - y')^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 1$$

saavutab sirgel $y = \frac{x}{2}$ ekstreemumi. Taha kindlaks ekstreemumi liik.

2. Kas funktsionaal

$$F(y) = \int_{-1}^2 y'(1 + x^2 y') dx, \quad y(-1) = y(2) = 1$$

saavutab sirgel $y = 1$ ekstreemalise väärtuse? Kui saavutab, siis mis liiki?

3. Lähtudes ekstreemumi definitsioonist tõestada, et funktsionaal

$$F(y) = \int_0^1 (y'^4 - y'^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

saavutab sirgel $y = x$ tugeva miinimumi.

4. Lähtudes variatsiooni definitsioonist leida ruumis $C[a, b]$ defineeritud funktsionaali

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x)) dx$$

tugev variatsioon. Milliseid tingimusi peab rahuldama funktsioon $f(x, y)$?

5. Kontrollida järgmiste funktsionaalide diferentseeruvust:

a) $F(y) = y(a)$ ruumis $C[a, b]$;

b) $F(y) = y(a)$ ruumis $C'[a, b]$;

c) $F(y) = \sqrt{1 + y'^2(a)}$ ruumis $C'[a, b]$;

d) $F(y) = |y(a)|$ ruumis $C[a, b]$;

6. Näidata, et funktsionaal $F^2(y)$ on diferentseeruv, kui on diferentseeruv $F(y)$. Kirjutada välja funktsionaali $F^2(y)$ variatsioon.

7. Tõestada, et ruutfunktsionaal on diferentseeruv, ja leida tema esimene ja teine variatsioon.

8. Kirjutada välja funktsionaali $e^{F(y)}$ teine variatsioon, kui $F(y)$ on kaks korda diferentseeruv funktsionaal.

9. Tõestada, et nullist erineval lineaarsel funktsionaalil ei ole ekstreemumeid.

II p e a t ü k k

Leida järgmiste funktsionaalide ekstremaalid fikseeritud rajapunktide korral:

10. $F(y) = \int_0^1 (y^2 + x^2 y') dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = a.$

11. $F(y) = \int_a^b (y + xy') dx, \quad y(a) = c, \quad y(b) = d.$

12. $F(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{x} dx, \quad y(a) = c, \quad y(b) = d.$

13. $F(y) = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 - 2y \sin x) dx,$

$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$

14. $F(y) = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 + 2ye^x) dx,$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

15. Määrata antud rajapunkte läbiv kõver, mille pöörlemisel ümber x -telje moodustuks vähima pindalaga pöördpind (nn. minimaalse pöördpinna probleem).

16. Leida funktsionaali

$$F(y) = \int_0^1 e^{y'} \tan y' dx$$

ekstremaalid, mis rahuldavad rajatingimusi $y(0) = 0, y(1) = 1$.

III p e a t ü k k

17. Leida funktsioon, millel võib saavutada ekstreemumi funktsionaal

$$F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - y'^2) dx, \quad y(0) = 0,$$

kui lubatavate kõverate parempoolsed otspunktid asuvad sirgel

$$x = \frac{\pi}{4}.$$

18. Leida integraali

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} y'^2 + yy' + y' + y \right) dx$$

miinimum, kui lubatavate funktsioonide väärtused lõigu $[0, 1]$ otspunktides pole antud.

19. Leida ekstremaalid $y = y(x)$, millel võib saavutada ekstreemumi funktsionaal

$$F(y) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{y},$$

kui lubatavate kõverate vasakpoolsed otspunktid rahuldavad tingimust $y(0) = 0$ ja parempoolsed otspunktid asuvad sirgel $y = x - 5$.

20. Tõlgendada geomeetriliselt transversaalsuse tingimust funktsionaali

$$F(y) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, y) e^{\arctan y' \sqrt{1 + y'^2}} dx$$

korral, kui $K(x, y) \neq 0$.

21. Leida nurgapunktidega ekstremaalid funktsionaali

$$F(y) = \int_0^a (y'^4 - 6y'^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b \quad (a > 0),$$

korral. Kas nurgapunktidega ekstremaalid eksisteerivad iga a ja b puhul?

22. Leida funktsionaali

$$F(y) = \int_{-1}^1 y'^2 (1 - y')^2 dx, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 1$$

ühe nurgapunktiga ekstremaal.

Leida nurgapunktidega ekstremaalid, kui nad eksisteerivad.

$$23. \quad F(y) = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2xy - y^2) dx,$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

$$24. \quad F(y) = \int_0^{x_1} \sin y' dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1.$$

$$25. \quad F(y) = \int_0^{x_1} y'^3 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1.$$

IV p e a t ü k k

Kasutades ekstreemumi piisavaid tingimusi uurida järgmiste funktsionaalide ekstreemumi iseloomu.

$$26. \quad F(y) = \int_1^2 y'(1 + x^2 y') dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 5.$$

$$27. F(y) = \int_0^2 (xy' + y'^2) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(2) = 0.$$

$$28. F(y) = \int_0^a (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx, \quad a > 0;$$

$$y(0) = y(a) = 0.$$

$$29. F(y) = \int_0^{\pi/4} (4y^2 - y'^2 + 8y) dx,$$

$$y(0) = -1, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

$$30. F(y) = \int_0^2 \frac{1 + y^2}{y'^2} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = \text{sh } 2.$$

$$31. F(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^{2x}) dx, \quad y(0) = \frac{1}{3},$$

$$y(1) = \frac{1}{3} e^2.$$

$$32. F(y) = \int_0^{x_1} \frac{dx}{y^4}, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1, \quad x_1 > 0.$$

$$33. F(y) = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^2} dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 4.$$

$$34. F(y) = \int_0^{\pi/4} (y^2 - y'^2 + 6y \sin 2x) dx, \quad y(0) = 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$35. F(y) = \int_0^2 (y'^4 - y'^2 + 2y^2 y') dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 1.$$

$$36. F(y) = \int_{-1}^1 x^{\frac{2}{3}} y'^2 dx, \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1.$$

$$37. F(y) = \int_1^2 (xy'^4 - 2yy'^3) dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$$

38. Uurida funktsionaali

$$F(y) = \int_0^1 (y'^4 + cy'^2 + y^3 y') dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

ekstreemumit E-funktsiooni abil sõltuvalt parameetrist c .
Leida ekstremaalne väärtus.

39. Näidata, et sirge $y = 0$ annab funktsionaalile

$$F(y) = \int_0^1 (y'^2 - yy'^3) dx, \quad y(0) = y(1) = 0$$

ainult nõrga miinimumi, kuigi Legendre'i tingimus $f_{y'y'} > 0$
on ekstremaali $y = 0$ punktides täidetud iga y' puhul.

40. Uurida funktsionaali

$$F(y) = \int_0^a (y'^4 - 2y'^3 - 3y'^2 + yy') dx$$

ekstreemumit E-funktsiooni abil rajatingimustel $y(0) = 0$,
 $y(a) = b$, $a > 0$. Võrrelda saadud tulemusi tulemustega, mis
saadakse Legendre'i tingimuste abil.

V p e a t ü k k

41. Tõestada, et funktsionaali

$$F(y, z) = \int_a^b f(x, y, y', z, z') dx$$

Euleri võrrandite süsteemil on järgmised esimesed integraa-
lid:

$$1) \frac{\partial f}{\partial y'} = C, \text{ kui } f \text{ ei sisalda } y;$$

2) $f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} - z' \frac{\partial f}{\partial z'} = C$, kui f ei sisalda x .

42. Eeldades, et $f_{y'y'} f_{z'z'} - f_{y'z'}^2 \neq 0$,

leida funktsionaali

$$F(y, z) = \int_a^b f(y', z') dx$$

ekstremaalid.

Leida järgmiste funktsionaalide ekstremaalid.

43. $F(y, z) = \int_a^b (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2) dx.$

44. $F(y) = \int_a^b (2xy + y''^2) dx.$

45. $F(y) = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + 2y'^2 + y''^2) dx.$

46. Tõestada, et kui funktsionaalis

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', y'') dx$$

integraalialune funktsioon ei sisalda y , siis Euleri-Poissoni võrrandi esimeseks integraaliks on

$$\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) = \text{const},$$

kui f ei sisalda x , siis esimese integraali võib esitada kujul

$$f - y' \left[\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) \right] - y'' \frac{\partial f}{\partial y''} = \text{const},$$

kui aga f ei sisalda ei x ega y , siis teiseks integraaliks on

$$f - y'' \frac{\partial f}{\partial y''} = C_1 + C_2 y'.$$

47. Leida funktsionaali

$$F(y) = \int_a^b (y'')^n dx$$

ekstremaalid.

48. Kõverate seast, mis läbib punkte $A(0, 0)$ ja $B(1, 0)$, leida selline, mis annab funktsionaalile

$$F(y) = \int_0^1 y'^2 dx$$

minimaalse väärtuse kahel juhul: 1) kui $y'(0) = a$, $y'(1) = b$; 2) kui pole antud mingeid rajatingimusi.

Kirjutada välja Euleri-Ostrogradski võrrand järgmiste funktsionaalide jaoks:

$$49. F(z) = \iint_E \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

$$50. F(z) = \iint_E \left[\left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2z f(x, y) \right] dx dy.$$

51. Leida funktsionaali

$$F(z) = \iint_D e^{zy} \sin z_y dx dy$$

ekstremaalpind rajatingimustel

$$z(x, 0) = 0, \quad z(x, 1) = 1,$$

kui D on ruut: $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$.

VI p e a t ü k k

52. Leida funktsionaali

$$F(y) = \int_{x_0}^{x_1} y'^2 dx$$

ekstremaalid tingimustel, et

$$\int_{x_0}^{x_1} y dx = a = \text{const}, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

53. Leida funktsionaali

$$F(y, z) = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z) dx$$

ekstremaalid tingimustel

$$\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2) dx = 2, \quad y(0) = z(0) = 0, \quad y(1) = z(1) = 1.$$

54. Leida isoperimeetrilise ülesande

$$F(y) = \int_0^1 (y'^2 + x^2) dx,$$

$$\int_0^1 y^2 dx = 2, \quad y(0) = y(1) = 0$$

ekstremaalid.

55. Leida ringsilindri $r = R$ geodeetilised jooned.

Lahendit otsida silindrilistes koordinaatides.

56. Kirjutada välja isoperimeetrilise ülesande

$$F(y) = \int_0^{x_1} [p(x)y'^2 + q(x)y^2] dx,$$

$$\int_0^{x_1} r(x)y^2 dx = 1, \quad y(0) = y(x_1) = 0$$

ekstremaalide diferentsiaalvõrrand.

VII p e a t ü k k

57. Leida Euleri diferentsmeetodil funktsionaali

$$F(y) = \int_1^2 y'(1 + x^2 y') dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 5$$

ligikaudne miinimumkoht. Võtta $n = 5$ ja leida tulemus nii integreerimisega kui ka integraalide integraalsummadega asendamise teel.

58. Leida Ritzi meetodil funktsionaali

$$F(y) = \int_0^2 (y'^2 + y^2 + 2xy) dx, \quad y(0) = y(2) = 0$$

miinimumi leidmise ülesande ligikaudne lahend. Võrrelda tulemust täpse lahendiga.

59. Leida Ritzi meetodil rajaülesande

$$y'' + x^2 y = x, \quad y(0) = y(1) = 0$$

ligikaudne lahend. Määrata $y_2(x)$ ja $y_3(x)$ ning võrrelda neid punktides $x = 0,25$, $x = 0,5$ ja $x = 0,75$.

60. Leida ruudus $-a \leq x \leq a$, $-a \leq y \leq a$ Poissoni võrrandi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -1$$

pidev ligikaudne lahend, mis ruudu külgedel omandab väärtuse null.

K I R J A N D U S

1. Лаврентьев М.А и Лвстерник Л.А. Курс вариационного исчисления, 1950.
2. Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление, 1952, 1958.
3. Гельфанд И.М. и Фомин С.В. Вариационное исчисление, 1961.
4. Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению, 1955.
5. Блисс Г.А. Лекции по вариационному исчислению, 1950.
6. Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс, гл.III, 1960
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т.IV, гл.II.
8. Rõgo, G. Kõrgem matemaatika, II; III peatükk, 1963.
9. Канторович Л.В. и Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа, 1962.
10. Roots, L. Valitud küsimusi teoreetilisest mehhaanikast, IV, TRÜ rotaprint, 1963.

A I N E R E G I S T E R

- Absoluutne ekstreemum 19
Alt poolpidev funktsionaal 117
- Bernoulli, Jacob 16
Bernoulli, Johann 7, 16
Bilineaarne funktsionaal 29
Bilineaarvorm 29
Bogoljubov, N.N. 7
Brahhistokrooni probleem 7, 14, 45, 49
- Diferentseeruv funktsionaal 22, 23
Diferentsiaal 22, 23
Diferentsiaalvõrrandite lahendamise
 variatsioonmeetoditel 127
Du Bois Raymond'i lemma 36
Duaalne ülesanne 113
Duaalsuse printsiip 113
- E-funktsioon 77
Ekstreemum 17
 —, absoluutne 19
 —, lokaalne 19
 —, nõrk 18
 —, tugev 18
Ekstreemumi piisavad tingimused 33, 78, 84
 — tarvilikud tingimused 28, 32
Ekstremaal 39
Ekstremaalide väli 67
Ekstremaliseeriv kõver 39
Energiaintegraal 97
Euler, L. 7, 119
Euleri diferentsmeetod 117

Euleri võrrand 39

—— - Ostrogradski võrrand 102

—— - Poissoni võrrand 99

Funktsionaal 13

Funktsionaali argument 13

—— diferentsiaal 22

—— ekstreemum 17

—— ekstreemumi piisavad tingimused 33, 78, 84

—— ——— tarvilikud tingimused 28, 32

—— määramispiirkond 13

—— pidevus 20

—— variatsioon 22

—— ———, nõrk 23

—— ———, tugev 22, 23

—— ———, teist järku 30

Funktsionaalruumid 10

Funktsiooni variatsioon 24

Gauss, C.F. 7

Geodeetiliste joonte probleem 16

Hamiltoni printsiip 95

Harilikele diferentsiaalvõrranditele

taandamise meetod 126

Hilbert, D. 7

Isoperimeetrilised ülesanded 17, 110

Jacobi, K.G.J. 7

Jacobi tingimus 71

—— võrrand 73

Kaaspunkt 71

Kaasväärtus 71

Kantorovitši meetod 125

Kaugus punktide vahel 10
Koordinaatfunktsioonide jada 120
Kordse integraali ekstreemum 99
Krölov, M.N. 7

Lagrange, J.L. 7
Lagrange'i funktsioon 96

—— lemma 35
—— λ -meetod 107
—— ülesanne 106

Lahtine sfäär 10

Lavrentjev, M.A. 7

Legendre, A.M. 7

Legendre'i tingimus 83

L'Hospital 16

Lineaarne funktsionaal 21

—— normeeritud ruum 9
—— ruum 9
—— variatsioonülesanne 123

Lisatingimustega variatsioonülesanded 106

Ljusternik, L.A. 7, 119

Lokaalne ekstreemum 19

Loomulikud rajatingimused 49

Lubatavad funktsioonid 14

—— kõverad 14

Lähedased elemendid 10

—— punktid 10

Maksimum 17

—— , nõrk 18, 78, 85
—— , tugev 18, 78, 85

Minimum 17

—— , nõrk 18, 78, 84
—— , tugev 18, 78, 84

Minimaalpind 103

Minimiseeriv jada 115

Newton 16
Norm 9
Nurgapunkt 58
Nurgapunktidega ekstremaalid 58, 61
Nõrk diferentseeruvus 23
—— diferentsiaal 23
—— ekstreemum 18
—— maksimum 18
—— ———, piisavad tingimused 78, 85
—— miinimum 18
—— ———, piisavad tingimused 78, 84
—— variatsioon 23

Ostrogradski, M.V. 7
Otsesed meetodid 117

Petrovski, I.G. 7, 119
Pidev funktsionaal 20
Poisson, S.D. 7
Peolpidev funktsionaal 117
Positiivne ruutfunktsionaal 29
Positiivselt määratud ruutfunktsionaal 29
Punkti ümbrus 10
Punktidevaheline kaugus 10

Rajatingimused 14
Ritzi meetod 120
Ruum $C[a, b]$ 10
—— $C^1[a, b]$ 11
—— $C^{(n)}[a, b]$ 12
—— $C(E)$ 12
—— $C_n^1[a, b]$ 13
Ruumi punktid 10
Ruutfunktsionaal 29
Ruutvorm 29

Sfäär 10
Sile kõver 58
Statsionaarne punkt 28

Teine variatsioon ehk teist järku diferentsiaal 30
Transversaalsuse tingimus 55
Tsentraalne väli 67
Tugev diferentseeruvus 22, 23
— ekstreemum 18
— maksimum 18
— ———, piisavad tingimused 78, 85
— miinimum 18
— ———, piisavad tingimused 78, 84
— variatsioon 22, 23
Tükati sile funktsioon 58

Variatsioon 22, 23, 24
Variatsioonarvutuse lihtsaim ülesanne 38
— põhifunktsionaal 38
— põhilemmad 35
Variatsioonprintsip mehhaanikas 93
Variatsioonülesanne 7, 14
—, fikseeritud rajapunktid 35
—, fikseerimata rajapunktid 47
—, lisatingimustega 106
— parameetrilisel kujul 103

Väli 67

Välja kalle 67

Weierstrassi E-funktsioon 77
— tingimus 77
— - Erdmanni tingimused 61

Ümbrus 10

Тартуский государственный университет
ЗССР, г. Тарту, ул. Пилкооли, 18

Л. Кивикоти

ВАРИАЦИОННЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

На эстонском языке.

Vastutav toimetaja E. Tamme

Korrektor E. Võhandu

TRÜ rotaprint 1965. Trüki-poognaid 9,19. Tingtrüki-
poognaid 8,36. Arvestuspoognaid 7,25. Trükiarv 300.

Paljundamisele antud 10. IV 1965. MB 03215.

Tell. nr. 123.

Hind 22 kop.