THEOREMATA PRINCIPALIA

E THEORIA

CURVARUM ET SUPERFICIERUM

CONSCRIPSIT

CAROLUS EDUARDUS SENFF
CAND. PHIL.

DISSERTATIO D. XII. DEC. AN. MDCCCXXX AB ORDINE AMPLISSIMO PHILOSOPHORUM ACADEMIAE CAESAREAE DORPATENSIS NUMMI AUREI PRAEMIO ORNATA, ET SUMPTIBUS ACADEMIAE TYPIS EXPRESSA,

---

DORPATI LIVONORUM, MDCCCXXXI.
TYPIS J. C. SCHÜNMANNI, TYPOGRAPHI ACADEMICI.

Ex decreto Ordinis Philosophorum Caesareae Universitatis litterarum Dorpatensis.
Dorpati Calendis Dec. MDCCCXXXI.

D. Martinus Bartels,
p. t. Decanus.

PATRI OPTIMO CARISSIMO

CAROLO AUGUSTO SENFF

DELINEANDI ARTIS MAGISTRO, PROFESSORI PUBLICO EXTRAORDINARIO IN UNIVERSITATE LITTERARUM CAESAREA DORPATENSI

HASCE STUDIORUM PRIMITIAS

IN PERPETUUM PII ET GRATI ANIMI DOCUMENTUM

D. D. D.

AUCTOR.

PRAEFATIO.

Theoria curvarum et superficierum, quam vulgo vocant geometriam sublimiorem, omnibus temporibus a clarissimis mathematicis culta, recentiore tamen aetate demum ad eum, quo nunc gaudet, perfectionis gradum evecta est. Ex antiquitate ante omnes elucent Archimedes et Apollonius, quorum disquisitiones ingeniosae, quamvis modo ad sectiones conicas et paucas alias curvas planas spectent, semper in suo genere excellentes erunt, atque etiam omnibus, qui illos sequebantur, mathematicis et antiquae et mediae aetatis fundamento erant, cui suas quaestiones de hac re proxime adjungerent, quo fiebat, ut per illud temporis intervallum parum novi alienaeque auctoritati non obnoxii praestaretur. Quum tandem ab ineunte quinto decimo saeculo mathesis simul cum ceteris artibus in occidente denuo laetius in dies vigeret, et praecipue analysis, ad perficiendas disciplinas mathematicas tam necessaria, sexto decimo saeculo et ineunte septimo decimo multa atque gravia incrementa caperet, etiam theoria curvarum plenius ac perfectius tractari poterat, in qua re ante omnes excellebant Roberval et Descartes, praecipue per suam, quam vocant, methodum tangentium; adhuc tamen curvae planae solae erant, ad quas animum attenderent mathematici. Rationum, quas sequebantur ad transitum a recta in curvam faciendum, pleraeque longae et parum expeditae erant, ita ut litteris mathematicis maxime opus esset calculo differentiali a Newton et Leibnitz invento, qui omnes illas methodos tum simplicitate tum universa utilitate supervacaneas reddidit. Ex hoc tempore etiam in superficies et curvas dupliciter curvatas contemplandas mathematici incubuerunt, quarum theoriae fundamenta jecit illust. Clairaut. Multi postea fuerunt, qui ejus vestigia prementes hunc mathesis campum colebant et brevi tempore mirificos in eo faciebant progressus. Ex iis, qui theoriam curvarum et superficierum ad eam perfectionem, quae nunc est, evexerunt, inter geometros Francogallos ante omnes nominari debet illust. Monge, qui praecipue naturam superficierum e motu ortarum earumque aequationes differentiales particulares investigavit atque etiam doctrinam de evolutis et evolventibus curvarum dupliciter curvatarum perfecit, quae a clariss. Lancret amplificata est. Inter mathematicos germanicos de theoria superficierum optime meriti sunt Euler et Gauss, V ill. Ille doctrinam de maximo et minimo radii osculi, hic doctrinam de curvatura superficierum fundavit.

Ex brevi hoc conspectu historico theoriae curvarum ac superficierum jam satis elucet, plenam hujus theoriae tractationem minime unius anni opus esse, id quod a tali libello de praemio proposito certante postulatur, sed potius requirere, ut plurium annorum studia ad hanc rem spectantia jam antecesserint. Itaque tantum theoremata principalia eligere et ne ea quidem exemplis satis illustrare mihi licebat, sed praecipue ad rerum ordinandarum et tractandarum rationem animum attendere debebam. In ordine ab usitato more eo discedo, quod theoriam curvarum superficiebus praemitto, qua ratione soli fieri poterat, ut de utraque parte seorsum agerem, et in utraque eundem ordinem conservarem. In rerum tractandarum ratione id praecipue ante oculos habui, ut omnes res sub forma quam maxime generali spectarem, et casus speciales ex universis deducerem, quo modo plerumque demonstrationes ad majus elegantiae fastigium evehi liceat. Ea de causa etiam de curvis planis non seorsum egi, sed eas modo ut speciem quandam curvarum dupliciter curvatarum consideravi. In utraque re scholas, de theoria superficierum curvarumque in Academia nostra habitas, in universum secutus sum, quod ne male interpreteris, nonnulla de genere, quo clariss. Bartels, venerandus praeceptor meus, doceat, afferre mihi permissum sit. Clariss. Bartels in praelectionibus suis id potius agit, ut artis tractandae viam auditoribus praeeat, quam ut ipse a se omnia absoluta velit. Eo modo, quum omnes res velut problemata sibi ipsi ignota tractet, auditores incitat, ut ipsi vires suas periclitentur, et facit, ut res, de qua agit, maxime teneat et oblectet animos eorum, quod ei, qui alio docendi genere utetur, nunquam succedet. Imo mihi quidem videtur haec unica esse ratio, qua mathesis docenda sit, et quae auditoribus majorem quam lectio librorum praebere possit utilitatem. Verum etiam facile intelligitur, eum, qui talem docendi rationem sequatur, non ubique tam stricte systematicum ordinem observare posse, et oportere, saepius nonnulla omittat, quae ei, qui rem ad artis normam tractare vult, necessario supplenda sunt. Itaque re vera dicere possum, me in hac dissertatione magna saltem ex parte rem, methodum tantum clarissimi Bartels sequentem, tractasse; si vero mihi contigit, ut Ordini Amplissimo probaretur opusculum meum, id uni honoratissimo huic praeceptori meo debeo, quo duce fundamenta studiorum meorum jeci.

Praeter quaedam alia omnino ei propria est methodus, qua de curvaturis curvae egi cap. IV §§. 1, 2 et 3, et analysis capitis V. §. 5. Ex operibus, quibus in hac dissertatione elaboranda usus sum, prae ceteris nominari debent haec: Application de l'analyse à la géom. par **Monge**, qua praecipue in elaborando cap. II. ductus sum, — Leçons sur les applic. du calcul infinitésimal à la géométrie par **Cauchy**, unde cap. VII. §. 4 depromptus est, — Optique par **Malus** (Journal de l'école polytechnique, Cahier XIV, qua commentatione usus sum in cap. IX. Cap. V maxima ex parte secundum disquisitionem clarissimi **Lancret** (Mémoires des savans étr. Paris, 1811) elaboravi, et cap. VIII., in quo de curvatura superficierum agitur, e disquisitione illustris **Gauss**, (in Commentationibus societ. reg. scient. Gotting. recentioribus Vol. VI contenta) deprompsi, leviter tantum mutata rei tractandae forma.

Pauca sunt in hoc opusculo, quae mihi propria habere possim, eaque levia, ut eliminandi ratio in cap. II. §§. 9 et 11 exposita, contemplatio contactus inter superficiem et curvam (cap. VI. §. 6), et determinatio linearum curvaturae superficiei, si haec data supponitur per aequationes tales $x = \varphi(t,\theta)$, $y = \psi(t,\theta)$, $z = f(t,\theta)$ (cap. IX. §. 8).

Denique silentio praetermittere non possum, theoremata in introductione statuta in disquisitione quadam clarissimi **Bartels** contenta esse, quae an. 1825 jam apud Academiam Petropolitanam lecta erat, tunc vero, quum hanc dissertationem scriberem inciperem, nondum in publicum prodierat.

INTRODUCTIO.

Quum in hac dissertatione nonnullis significationibus, quas clariss. Bartels primus in geometriam analyticam introduxit, uti, atque etiam multa theoremata huc spectantia postea ut concessa sumere velim, brevem illorum theorematum conspectum praemittere coactus sum. Omnia quidem haec theoremata dilucide explicata inveniuntur in opusculo: Systematische Darstellung der Hauptsätze der Geometrie im Raume von C. J. Senff. Dorpat 1829, sed incommodum mihi videbatur, lectorem semper ad illud opusculum remittere.

Theoremata principalia e Geometria analytica.

1) Si per x, y, z et x', y', z', designamus coordinatas duorum punctorum P et P', respectu systematis trium axium inter se orthogonalium, pro distantia (PP') horum punctorum habemus hanc formulam

$$PP' = \sqrt{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]},$$

et denotante r distantiam puncti P ab initio coordinatarum, erit:

$$r = \sqrt{[x^2 + y^2 + z^2]}.$$

2) Directio lineae rectae aptissime determinatur per tres angulos, quos haec cum tribus axibus format, quorum angulorum cosinus determinantes lineae rectae nominare et respective per ξ, η, ζ designare volumus. Qua significatione salva, determinantes lineae PP', si haec in directione a puncto P ad punctum P' consideratur, hos valores habebunt:

$$\xi = \frac{x' - x}{PP'}, \quad \eta = \frac{y' - y}{PP'}, \quad \zeta = \frac{z' - z}{PP'}$$

et determinantes ipsius r:

$$\xi = \frac{x}{r}, \quad \eta = \frac{y}{r}, \quad \zeta = \frac{z}{r}.$$

Inde facile deducitur, inter tres determinantes cujuslibet rectae semper hanc aequationem conditionalem locum habere:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Quodsi ratio sola trium determinantium nobis data est, earum valores omnino determinati sunt, nempe si $\xi : \eta : \zeta = m : n : o$, erit, statuendo $\sqrt{[m^2 + n^2 + o^2]} = k$,

$$\xi = \frac{m}{k}, \quad \eta = \frac{n}{k}, \quad \xi = \frac{o}{k}.$$

Ex praecedentibus apparet, determinantes ξ, η, ζ tamquam coordinatas puncti, cujus distantia ab initio coordinatarum $= 1$, considerari posse.

3) Si nobis datae sunt determinantes rectae (ξ, η, ζ) et coordinatae (a, b, c) puncti in ea siti, denotantibus x, y, z coordinatas cujuslibet puncti illius rectae, has habemus aequationes:

$$x - a = \lambda\xi, \qquad y - b = \lambda\eta, \qquad z - c = \lambda\zeta,$$

ubi λ est distantia puncti (x, y, z) a puncto (a, b, c), quam si eliminamus, evadunt aequationes:

$$\frac{x-a}{z-c} = \frac{\xi}{\zeta}, \quad \frac{y-b}{z-c} = \frac{\eta}{\zeta}.$$

4) Si per β designamus lineae cujusdam angulum inclinationis ad planum (xy) et per λ angulum, quem linea in hoc planum projecta cum axe x format, ejus determinantes sunt:

$$\xi = \cos\lambda \cos\beta, \qquad \eta = \sin\lambda \cos\beta, \qquad \zeta = \sin\beta.$$

Dato igitur situ puncti (x, y, z) per ejus coordinatas polares i. e. per radium vectorem r atque angulos β et λ, qui directionem radii vectoris determinant, pro x, y, z manifesto obtinemus:

$$x = r \cos\lambda \cos\beta, \quad y = r \sin\lambda \cos\beta, \quad z = r \sin\beta.$$

5) Ponamus esse ξ, η, ζ et ξ', η', ζ' duarum linearum determinantes, et ω angulum, quem altera cum altera formet; tunc habebitur

$$\cos\omega = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta', \quad \sin\omega = \sqrt{[(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + (\zeta\xi' - \xi\zeta')^2 + (\xi\eta' - \eta\xi')^2]},$$

igitur si lineae formant angulum rectum, inter earum determinantes aequatio haec existit:

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0$$

6) Quodsi nobis datum est planum per determinantes suas (ξ, η, ζ) (i. e. determ. rectae in eo normalis) et per coord. (a, b, c) puncti in plano siti, denotantibus x, y, z coordinatas cujuslibet ejus puncti, aequatio hujus plani est:

$$\xi\,(x - a) + \eta\,(y - b) + \zeta\,(z - c) = 0,$$

quae, si nobis loco coordinatarum a, b, c perpendiculum p a centro axium systematis in planum demissum datur, in hanc transit:

$$\xi x + \eta y + \zeta z = p.$$

7) Datis determinantibus duarum rectarum ξ, η, ζ et ξ', η', ζ' atque coordinatis earum puncti intersectionis x, y, z, inveniri possunt determinantes (ξ'', η'', ζ'') plani, quod utramque lineam continet, et perpendiculum p ab initio coordinatarum in hoc planum demissum; prodit nimirum:

$$\xi'' : \eta'' : \zeta'' = (\eta\zeta' - \zeta\eta') : (\zeta\xi' - \xi\zeta') : (\xi\eta' - \eta\xi'),$$

denotante igitur ω angulum, quem duae illae lineae inter se formant, erit:

$$\xi'' = \frac{\eta\zeta' - \zeta\eta'}{\sin\omega},\quad \eta'' = \frac{\zeta\xi' - \xi\zeta'}{\sin\omega},\quad \zeta'' = \frac{\xi\eta' - \eta\xi'}{\sin\omega},\quad p = \xi''x + \eta''y + \zeta''z.$$

8) Si concipimus superficiem sphaericam radio r circa centrum (a, b, c) descriptam, denotando per x, y, z coordinatas cujuslibet puncti in superficie siti, hanc habemus aequationem:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2,$$

cui si adjungimus aequationem plani per centrum sphaerae ducti:

$$\xi\,(x - a) + \eta\,(y - b) + \zeta\,(z - c) = 0,$$

hae duae aequationes pro omnibus punctis circuli valent, quem planum et sphaera se invicem secantes formant.

9) Denotantibus x, y, z; x', y', z' et x'', y'', z'' respective coordinatas trium punctorum P, P' et P'', utamur his significationibus:

$$\begin{array}{lll}
y'z'' - z'y'' = X, & z'x'' - x'z'' = Y, & x'y'' - y'x'' = Z, \\
y''z - z''y = X', & z''x - x''z = Y', & x''y - y''x = Z', \\
yz' - zy' = X'', & zx' - xz' = Y'', & xy' - yx' = Z'',
\end{array}$$

$X + X' + X'' = \overline{X}$, $\quad Y + Y' + Y'' = \overline{Y}$, $\quad Z + Z' + Z'' = \overline{Z}$, $\sqrt{(\overline{X}^2 + \overline{Y}^2 + \overline{Z}^2)} = S$,
tunc has sex expressiones:

$$xX + yY + zZ, \qquad x'X' + y'Y' + z'Z', \qquad x''X'' + y''Y'' + z''Z'',$$
$$xX + x'X' + x''X'', \qquad yY + y'Y' + y''Y'', \qquad zZ + z'Z' + z''Z'',$$

eundem habent valorem, quem per K designare volumus, ita ut sit:

$$K = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - zy'x'' - z'y''x - z''yx'.$$

Quibus denotationibus salvis, pro determinantibus plani, in quo tria puncta P, P' et P'' sita sunt, hi prodeunt valores:

$$\xi = \frac{\overline{X}}{S}, \quad \eta = \frac{\overline{Y}}{S}, \quad \zeta = \frac{\overline{Z}}{S}.$$

Perpendiculum p ab initio coordinatarum in hoc planum demissum fit $= \frac{K}{S}$ et area duplex trianguli $PP'P'' = S$, unde elucet, quantitatem K aequalem esse volumini sextuplici pyramidis, cujus basis est triangulum $PP'P''$ et cujus apex in initio coordinatarum jacet.

Pro triangulis, quae latera pyramidis formant, has formulas habemus:
$2\Delta OP'P'' = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$, $2\Delta OP''P = \sqrt{(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)}$, $2\Delta OPP' = \sqrt{(X''^2 + Y''^2 + Z''^2)}$.
Duplex triangulum $PP'P''$ in tria plana principalia (yz), (zx) et (xy) projectum respective fit $= \overline{X}$, $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$ et projectiones duplices triangulorum ad latera pyramidis jacentium $OP'P''$; $OP''P$ et OPP' respective fiunt $= X, Y, Z$; X', Y', Z', et X'', Y'', Z''.

10) Fingamus novum axium systema, cujus situs respectu primi systematis nobis datum sit et per coordinatas centri sui (a, b, c) et per determinantes trium axium suorum ξ, η, ζ; ξ', η', ζ' et ξ'', η'', ζ''. Tunc denotando per x, y, z et x', y', z' respective coordinatas ejusdem puncti respectu primi et novi systematis axium, obtinemus has aequationes:

$$\begin{aligned} x' &= \xi\,(x-a) + \eta\,(y-b) + \zeta\,(z-c), & x &= \xi x' + \xi' y' + \xi'' z' + a \\ y' &= \xi'(x-a) + \eta'(y-b) + \zeta'(z-c), & y &= \eta x' + \eta' y' + \eta'' z' + b \\ z' &= \xi''(x-a) + \eta''(y-b) + \zeta''(z-c), & z &= \zeta x' + \zeta' y' + \zeta'' z' + c \end{aligned}$$

11) Determinantes primi systematis axium respectu novi systematis sunt respective $= \xi, \xi', \xi''$; η, η', η'' et ζ, ζ', ζ'', itaque inter has quantitates hae duodecim aequationes locum habent:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = 0, \quad \xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 = 1, \quad \eta\zeta + \eta'\zeta' + \eta''\zeta'' = 0$$
$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1, \quad \xi''\xi + \eta''\eta + \zeta''\zeta = 0, \quad \eta^2 + \eta'^2 + \eta''^2 = 1, \quad \zeta\xi + \zeta'\xi' + \zeta''\xi'' = 0$$
$$\xi'' + \eta''^2 + \zeta''^2 = 1, \quad \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0, \quad \zeta^2 + \zeta'^2 + \zeta''^2 = 1, \quad \xi\eta + \xi'\eta' + \xi''\eta'' = 0$$

quarum tamen senae ex ceteris ded uci possunt, ita ut re vera sex tantum aequationes conditionales inter quantitates ξ, η, ζ, etc. locum habeant.

12) Directiones axium novi systematis respectu primi systematis etiam per tres angulos determinari possunt; primo per angulum (ω), quem ambo plana principalia (xy) inter se formant, tunc per angulum (φ) inter lineam intersectionis horum duorum planorum et axem x primi systematis, denique per angulum (ψ), quem eadem linea intersectionis cum novo axe x format; tunc determinantes novorum axium ξ, η, ζ, etc. hos obtinent valores:

$$\xi = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\omega, \qquad \xi' = -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\omega,$$
$$\eta = \sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\psi\cos\omega, \qquad \eta' = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\omega,$$
$$\zeta = \sin\psi\sin\omega, \qquad \zeta' = \cos\psi\sin\omega,$$
$$\xi'' = \sin\varphi\sin\omega, \qquad \eta'' = -\cos\varphi\sin\omega, \qquad \zeta'' = \cos\omega.$$

13) Si aequatio generalis secundi gradus inter coordinatas x, y, z:

(1) $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Eyz + 2Fzx + 2Gxy + 2Hx + 2Iy + 2Kz + L = 0,$$

accipiendo novum systema axium et substituendo pro x, y, z earum valores ex art. 10), in aequationem

(2) $$\mathfrak{A}x'^2 + \mathfrak{B}y'^2 + \mathfrak{C}z'^2 + 2\mathfrak{E}y'z' + 2\mathfrak{F}z'x' + 2\mathfrak{G}x'y' + 2\mathfrak{H}x' + 2\mathfrak{I}y' + 2\mathfrak{K}z' + \mathfrak{L} = 0$$

transmutatur, coefficientes aequationis (2) nanciscuntur hos valores:

(3) $$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2E\eta\zeta + 2F\zeta\xi + 2G\xi\eta \\
\mathfrak{B} &= A\xi'^2 + B\eta'^2 + C\zeta'^2 + 2E\eta'\zeta' + 2F\zeta'\xi' + 2G\xi'\eta' \\
\mathfrak{C} &= A\xi''^2 + B\eta''^2 + C\zeta'' + 2E\eta''\zeta'' + 2F\zeta''\xi'' + 2G\xi''\eta'' \\
\mathfrak{E} &= A\xi'\xi'' + B\eta'\eta'' + C\zeta'\zeta'' + E(\eta'\zeta'' + \zeta'\eta'') + F(\zeta'\xi'' + \xi'\zeta'') + G(\xi'\eta'' + \eta'\xi'') \\
\mathfrak{F} &= A\xi''\xi + B\eta''\eta + C\zeta''\zeta + E(\eta''\zeta + \zeta''\eta) + F(\zeta''\xi + \xi''\zeta) + G(\xi''\eta + \eta''\xi) \\
\mathfrak{G} &= A\xi\xi' + B\eta\eta' + C\zeta\zeta' + E(\eta\zeta' + \zeta\eta') + F(\zeta\xi' + \xi\zeta') + G(\xi\eta' + \eta\xi')
\end{aligned}\right.$$

$$\mathfrak{H} = A\xi a + B\eta b + C\zeta c + E(\eta c + \zeta b) + F(\zeta a + \xi c) + G(\xi b + \eta a) + H\xi + I\eta + K\zeta$$
$$\mathfrak{I} = A\xi' a + B\eta' b + C\zeta' c + E(\eta' c + \zeta' b) + F(\zeta' a + \xi' c) + G(\xi' b + \eta' a) + H\xi' + I\eta' + K\zeta$$
$$\mathfrak{K} = A\xi'' a + B\eta'' b + C\zeta'' c + E(\eta'' c + \zeta'' b) + F(\zeta'' a + \xi'' c) + G(\xi'' b + \eta'' a + H\xi'' + I\eta'' + K\zeta''$$
$$\mathfrak{L} = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2Ebc + 2Fca + 2Gab + 2Ha + 2Ib + 2Kc + L$$

et denotatis $BC - E^2$, $CA - F^2$, $AB - G^2$, $FG - AE$, $GE - BF$, $EF - CG$ respective per A', B', C', E', F', G' et $\mathfrak{B}\mathfrak{C} - \mathfrak{E}^2$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A} - \mathfrak{F}^2$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{G}^2$, $\mathfrak{F}\mathfrak{G} - \mathfrak{A}\mathfrak{E}$, $\mathfrak{G}\mathfrak{E} - \mathfrak{B}\mathfrak{F}$, $\mathfrak{E}\mathfrak{F} - \mathfrak{C}\mathfrak{G}$ respective per $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{G}'$, quantitates $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{G}'$ eodem modo per A', B', C' etc. exprimuntur, quo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. per A, B, C etc. (aequat. (3)).

Unde, positis $ABC + 2EFG - AE^2 - BF^2 - CG^2 = D$

et $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} + 2\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{G} - \mathfrak{A}\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{C}\mathfrak{G}^2 = \mathfrak{D}$

deducuntur hae quatuor aequationes conditionales inter coefficientes aequationum (1) et (2):

I. $A + B + C = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$, II. $A' + B' + C' = \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' + \mathfrak{C}'$,

III. $D = \mathfrak{D}$, IV $A'H^2 + B'I^2 + C'K^2 + 2E'IK + 2F'KH + 2G'HI + DL$
$= \mathfrak{A}'\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{B}'\mathfrak{I}^2 + \mathfrak{C}'\mathfrak{K}^2 + 2\mathfrak{E}'\mathfrak{I}\mathfrak{K} + 2\mathfrak{F}'\mathfrak{K}\mathfrak{H} + 2\mathfrak{G}'\mathfrak{H}\mathfrak{I} + \mathfrak{D}\mathfrak{L}$.

Quodsi novum systema axium ita accipimus, ut cum primo systemate idem habeat initium coordinatarum, ideoque quantitates a, b, c fiant $= 0$, loco quartae aequationis conditionalis nanciscimur has tres:

$$\text{IV. } H^2 + I^2 + K^2 = \mathfrak{H}^2 + \mathfrak{I}^2 + \mathfrak{K}^2,$$

$$\text{V. } AH^2 + BI^2 + CK^2 + 2EIK + 2FKH + 2GHI = \mathfrak{A}\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{I}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{K}^2 + 2\mathfrak{E}\mathfrak{I}\mathfrak{K} + 2\mathfrak{F}\mathfrak{K}\mathfrak{H} + 2\mathfrak{G}\mathfrak{H}\mathfrak{I},$$

$$\text{VI. } A'H^2 + B'I^2 + C'K^2 + 2E'IK + 2F'KH + 2G'HI = \mathfrak{A}'\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{B}'\mathfrak{I}^2 + \mathfrak{C}'\mathfrak{K}^2 + 2\mathfrak{E}'\mathfrak{I}\mathfrak{K} + 2\mathfrak{F}'\mathfrak{K}\mathfrak{H} + 2\mathfrak{G}'\mathfrak{H}\mathfrak{I}.$$

Ex antecedentibus derivari licet, novum axium systema, etsi modo directiones axium mutentur, semper ita accipi posse, ut coefficientes $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ fiant $= 0$ ideoque aequatio generalis secundi gradus transformetur in hanc:

$$\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{H}x + 2\mathfrak{I}y + 2\mathfrak{K}z + \mathfrak{L} = 0$$

Jam haec aequatio, si etiam aliud accipimus initium coordinatarum, secundum valores ejus coefficientium $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc., in quatuor diversas formas simpliciores redigi potest; puta si nec $\mathfrak{A}$ nec $\mathfrak{B}$ nec $\mathfrak{C} = 0$, in hanc

$$\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{L} = 0$$

si $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{H}$ vero non, in hanc

$$\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{H}x = 0$$

si et $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{H} = 0$,

$$\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{L} = 0$$

si $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C} = 0$,

$$\mathfrak{A}x^2 + 2\mathfrak{J}y + 2\mathfrak{K}z = 0$$

Quum vero aequationem $\mathfrak{A}x^2 + 2\mathfrak{J}y + 2\mathfrak{K}z = 0$, mutando directiones axium, statim reducere possimus ad hanc $\mathfrak{A}x^2 + 2\sqrt{[\mathfrak{J}^2 + \mathfrak{K}^2]}\,z = 0$, tertia et quarta aequatio, quod ad earum formam attinet, facile cognoscuntur pro singulis casibus primae et secundae; unde sequitur, generalem aequationem secundi gradus semper transformari posse in alterutram harum duarum:

$$1)\ \mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{L} = 0$$
$$2)\ \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{H}x = 0$$

Conspectus theorematum principalium e theoria curvarum et superficierum.

CAP. I.

De aequationibus superficierum curvarumque in universum, et specialiter de superficiebus secundi gradus.

§. 1. Coordinatis puncti x, y, z respectu systematis trium axium inter se orthogonalium velut quantitatibus variabilibus spectatis, pro quibus omnes valores intra limites $+\infty$ et $-\infty$ substituere licet, punctum per coordinatas x, y, z determinatum quoslibet situs in spatio infinito occupare posse, facile apparet. Quodsi vero ponimus, inter coordinatas x, y, z et nonnullas alias quantitates, quae pro constantibus habendae sint, aequationem ita exhibitam $u = 0$ locum habere, denotante u functionem ipsarum x, y, z, situs illius puncti non amplius omnino arbitrarius erit, dummodo ejus coordinatae aequationi illi satisfaciant. Data enim aequatione $u = 0$, omnia spatii infiniti puncta in duas classes distribui possunt, in ea, quorum coordinatis substitutis pro x, y, z, functio u accipiat valorem positivum, et in ea, pro quibus u evadat negativa. Qua ratione totum spatium in duas dividitur partes, quarum alteram puncta primae classis, alteram secundae classis occupant. In limite ambobus spatiis communi jacent puncta, pro quibus u fit $= 0$; quum igitur limes, qui duo spatia invicem sejungat, sit superficies, omnia puncta aequationi $u = 0$ respondentia in superficie sita sunt, qua de causa et omnis aequatio inter coordinatas x, y, z et alias quantitates constantes aequatio superficiei nominatur. Ad distinguendum ergo, utrum punctum quoddam datum in positivo latere superficiei an in negativo situm sit, tantum investigemus oportet, quemnam valorem functio u, substitutis in ea pro x, y, z coordinatis illius puncti, accipiat.

§. 2. Data superficiei aequatione, ipsa superficies, quod ad ejus formam ac situm attinet, omnino determinata est, ita ut singula superficiei puncta per geometricam constructionem inveniri liceat. Si enim punctum quoddam in plano principali (yz) accipimus, substitutis ejus coordinatis pro y et z, per aequationem superficiei etiam coordinata x determinatur, pro qua tot nanciscemur valores, quoti gradus est aequatio $u = 0$ respectu quantitatis x, totidem igitur puncta superficiei per coordinatas suas data erunt. Quum eodem modo cuicunque positioni puncti in plano (yz) accepti totidem superficiei puncta respondeant, facile perspicitur, substituendo pro y et z deinceps omnes valores intra limites $+\infty$ et $-\infty$, ope aequationis $u = 0$ omnia puncta superficiei determinari posse. — Si pro certis valoribus ipsarum y et z vel plures vel omnes valores coordinatae x imaginarii fiunt, inde concludi licet, lineam in hoc puncto ad planum (yz) normalem superficiem vel in paucioribus punctis vel omnino in nullo secare.

§. 3. Forma ac situs superficiei partim ab aequationis forma partim a quantitatibus constantibus, quae in ea implicitae sunt, pendet. Forma aequationis universe naturam superficierum determinat praecipuasque earum proprietates, etsi longe diversae esse possunt, prout constantes, quae in aequatione insunt, diversos habeant valores. Hae vero constantes inter se discerni debent, quum ab alteris earum tantum situs superficiei, ab alteris vero ejus forma etiam pendeat. Prioris generis constantes sex tantum occurrere possunt, quamcunque enim mutationem situs superficiei ad transformationem systematis axium reduci licet; situm vero systematis axium per sex quantitates datum esse, ex Introd. art. 10 et 12 elucet. (In casibus specialibus etiam per pauciores quantitates situs superficiei determinari potest, si e. gr. directiones axium, ut in aequatione sphaerae, arbitrariae sunt.) Itaque plerumque fieri poterit, ut per transformationem systematis axium sex quantitates const. ex aequatione superficiei evanescant, quae hac ratione in simplicissimam suam formam redigatur. Numerum quantitatum constantium, a quibus etiam forma superficiei pendet, minime determinare licet, quum alius sit in aliis superficiebus.

§. 4. Aequatio superficiei non sub sola forma ($u = 0$) se offerre potest. Plerumque superficies datur per aequationem ita exhibitam $z = \varphi(x,y)$, signo $\varphi(x,y)$ denotante functionem ipsarum x et y, facile vero perspicitur, hunc tantum unum quendam casum esse generalis formae $u = 0$, ubi u sit $= \varphi(x, y) - z$. Sed etiam longe alio modo superficiem per aequationes inter coordinatas x, y, z determinare possumus, puta per tres tales:

$$x = \varphi(t, \theta), \qquad y = \psi(t, \theta), \qquad z = f(t, \theta),$$

t et θ denotantibus duas variabiles arbitrarias, quarum x, y, z sunt functiones datae. Hanc rationem superficiei determinandae cum supra exposita congruere, ex eo elucet, quod, eliminando quantitates t et θ, unam inter coordinatas x, y, z nanciscimur aequationem ($v = 0$), quae secundum supra datam definitionem aequatio superficiei est. Praeterea vero etiam per tres illas aequationes omnia puncta superficiei determinari possunt. Substitutis enim pro t et θ quibuslibet valoribus, illae aequationes certos valores ipsarum x, y, z suppeditant, per binos igitur valores ipsarum t et θ punctum superficiei datur, et omnia haec puncta etiam aequationi $v = 0$ respondeant necesse est. — Quod ad formam functionum φ, ψ, f attinet, binae earum pro omni superficie ad libitum accipi possunt, et tertia sola a natura superficiei pendet. Acceptis enim pro x et y quibuslibet functionibus quantitatum t et θ, substituendo hos valores pro x et y in aequatione superficiei ($v = 0$), etiam coordinata z hujus aequationis ope tanquam functio quantitatum t et θ nobis datur. Quodsi nobis e. gr. haec aequatio inter x, y, z data est:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad \text{(A)}$$

quae, ut infra cognoscemus, ad ellipsoidem pertinet, substituendo pro x et y respective functiones arbitrarie acceptas: $a \cos t \cos\theta$ et $b \cos t \sin\theta$, prodit:

$$\cos^2 t + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad \text{unde deducimus: } z = c \sin t,$$

itaque x, y, z erunt sequentes functiones ipsarum t et θ:

$$x = a \cos t \cos \theta, \qquad y = b \cos t \sin \theta, \qquad z = c \sin t,$$

per quas aequationes aeque ac per aequat. (A) ellipsoides nobis determinatur.

Facile ex antecedentibus concluditur, infinite multas varias aequationes hujus formae $x = \varphi(t,\theta)$, $y = \psi(t,\theta)$, $z = f(t,\theta)$ ad unam et eandem superficiem pertinere posse, prout alias vel alias quantitates pro t et θ eligamus.

§. 5. Quum omnem curvam tamquam lineam intersectionis duarum superficierum considerare liceat, per aequationes duarum superficierum curvam determinari patet. Puncta enim, quorum coordinatae utriusque superficiei aequationi respondent, tantum in earum linea intersectionis jacere possunt. Quum per eandem curvam innumeras superficies concipere liceat, quarum binarum linea intersectionis illa curva sit, etiam per innumera paria aequationum eadem curva nobis dari potest. — Utraque aequatio curvae omnes tres coordinatas x, y, z contineat minime necesse est; sed etiam duae aequationes tales $\varphi(x,z) = 0$ et $\psi(y,z) = 0$ sive $x = \varphi(z)$ et $y = \psi(z)$ ad curvam determinandam sufficiunt. Aequatio enim inter duas coordinatas, hujus instar $\varphi(y,z) = 0$, ad superficiem pertinet, in qua y et z non pendent ab x, i. e. ad superficiem cylindricam plano (yz) normalem. — Etiam singula puncta curvae ex ejus aequationibus determinari posse, facile intelligitur; pro quocunque enim valore coordinatae z, curvae aequationes valores respondentes ipsarum x et y suppeditant.

Quantitatum constantium, quae in aequationibus implicitae sint, etiam in curvis sex tantum ad situm curvae determinandum requiri, ex §. 3 elucet.

§. 6. Curvae in universum distribuuntur in planas et dupliciter curvatas. Curvae planae sunt, quarum puncta omnia in eodem plano jacent. Quum igitur omnem curvam planam sicut lineam intersectionis cujuslibet superficiei cum plano spectare liceat, semper una ejus aequationum aequatio plani esse poterit. Si vero systema axium ita accipimus, ut hoc planum cum plano princ. (xy) congruat, coordinata z pro omnibus curvae punctis fit $= 0$, ita ut solam aequationem inter coordinatas x et y retineamus. Itaque elucet, curvam planam duntaxat casum specialem dupliciter curvatarum esse, ubi altera aequatio sit: $z = 0$, quare et postea eas ita tractabimus.

§. 7. Curvae aequationes etiam hac forma exhiberi possunt:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = f(t),$$

t denotante variabilem arbitrariam, a qua coordinatae x, y, z pendent. Facile enim perspicitur, has aequationes idem valere, ac duas inter x, y, z, ad quas eliminando t pervenimus, nec minus etiam omnia curvae puncta illarum aequationum ope inveniri posse, quum cuique valori arbitrario ipsius t certi valores coordinatarum x, y, z respondeant. E tribus functionibus φ, ψ et f una sola ad libidinem assumi potest. Substituendo enim e. gr. pro x functionem arbitrariam ipsius t, per duas curvae aequationes etiam y et z tamquam functiones ipsius t nobis dantur.

Quanta analogia sit inter hoc genus aequationum curvae et tres tales superficiei aequationes, quales §. 4 statuimus, in oculos incurrit. Totum discrimen in eo positum est, quod in curvae aequationibus una quantitas arbitraria introducta est, in superficiei vero duae. Inde novus superficiei considerandae modus evadit: si quidem in aequationibus superficiei, substituto pro θ valore constante, t solam ut variabilem spectamus, per tres illas aequat. curvam in superficie sitam nobis dari elucet. Mutato jam perpaulum valore ipsius θ, ad novum hunc valorem alia pertinet curva in superficie sita et perpaulo a priori diversa. Itaque si θ omnes valores inter $+\infty$ et $-\infty$ deinceps accipiat, infinite multas curvas nanciscemur, quae superficiem, ut ita dicam, constituunt et quae sub eadem forma aequationum continentur, per diversum modo valorem quantitatis constantis inter se differentium. Quodsi eandem agendi rationem persequimur respectu quantitatis t, alterum simile systema curvarum prodit, quae eodem modo superficiem componunt.

§. 8. Ex iis, quae in §§. praec. de superficiebus curvisque protulimus, satis elucet, in earum aequationes praeter coordinatas x, y, z etiam alias variabiles introduci posse, ita ut generalissima aequationum forma sit:

$$\varphi\ (x, y, z, t, u, v, \text{etc.}) = 0,$$
$$\psi\ (x, y, z, t, u, v, \text{etc.}) = 0,$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

quae aequationes utrum ad curvam pertineant, an ad superficiem, e numero earum pendet. Si quidem numerus variabilium (adnumeratis coordinatis x, y, z) numerum aequationum unitate superat, illae aequationes ad curvam pertinent, si vero duabus plus variabilium habemus, ad superficiem. — Ex ejusmodi aequationibus, ut ad simplices aequat. curvae vel superficiei inter coordinatas x, y, z perveniamus, tantum ceterae variabiles eliminandae sunt.

§. 9. Non semper aequationes inter coordinatas ipsas nobis datae sunt, sed modo inter earum variationes differentiales, quae aequationes differentiales vocantur. Earum contemplatio, ut postea videbimus, maximi momenti est, quia earum ope plurimae proprietates superficierum curvarumque cognoscuntur. —

Ex aequationibus inter coordinatas ipsas x, y, z facile per differentiationem inveniuntur aequat. differentiales. Hoc modo ex aequatione superficiei $u = 0$ prodit aequatio differentialis:

$$\overset{x}{d}u\, dx + \overset{y}{d}u\, dy + \overset{z}{d}u\, dz = 0, \text{*)}$$

aequatio $z = \varphi(x,y)$ suppeditat:

$$dz = pdx + qdy,$$

denotantibus p et q respective $\overset{x}{d}z$ et $\overset{y}{d}z$. Tribus aequationibus superficiei $x = \varphi(t,\theta)$, $y = \psi(t,\theta)$, $z = f(t,\theta)$ respondent aequationes different. hujus formae:

$$dx = adt + a'd\theta, \quad dy = bdt + b'd\theta, \quad dz = cdt + c'd\theta,$$

a, b, c et a', b', c' denotantibus respective differentialia particularia ipsarum x, y, z respectu t et θ.

Pro curva vel duas aequationes differentiales nanciscimur inter quantitates dx, dy, dz vel tres tales:

$$dx = adt, \quad dy = bdt, \quad dz = cdt.$$

Per repetitam differentiationem harum aequationum ad aequationes differentiales superiorum ordinum pervenimus.

Coefficientes aequationum differentialium, quae differentialia particularia sunt, maximam attentionem merentur, quia ab iis praecipue quantitates ad proprietates super-

---

*) Pro differentiali cujusdam functionis u respectu solius variabilis x, quod differentiale particulare ipsius u vocabimus et vulgo denotant per $\left(\frac{du}{dx}\right)$, utemur signo $\overset{x}{d}u$; eodem modo pro $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)$ scribemus $\overset{x}{d}{}^2u$, $\overset{x}{d}\overset{y}{d}u$ et sic porro.

ficierum spectantes pendent. Itaque etiam principales cujusdam generis superficierum proprietates per aequationem inter illa exprimi possunt, quales aequationes vocabimus aequat. differentiales particulares.

§. 10. Postquam de plurimis, quae ad superficierum curvarumque aequationes in universum spectant, disserui, nonnulla etiam de superficiebus secundi gradus afferre in animo habeo, quae sufficiant ad earum aequationes et proprietates principales cognoscendas, ut postea iis velut exemplis uti liceat.

Generalem aequationem secundi gradus inter coordinatas x, y, z per transformationem systematis axium semper in formam alteriusutrius harum duarum aequationum redigi posse, in Introd. art. 13 vidimus:

$$1)\ \mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{L} = 0,$$

$$2)\ \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{H}x = 0,$$

unde sequitur, omnem superficiem secundi gradus ad alterutram harum aequationum pertinere, quas nunc seorsum diligentius contemplari volumus.

Prior aequatio, pro valoribus coefficientium, plures diversas superficies complectitur.

Si omnes tres coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sunt positivi, $\mathfrak{L}$ per se fit quantitas negativa; quotiescunque in hoc casu pro una trium coordinatarum x, y, z substituimus valorem constantem, nanciscimur aequationem ellipsis. Omne igitur planum cum quovis trium planorum principalium parallelum hanc superficiem in ellipsi secat, qua re ellipsoides vocatur. Haec superficies, quae manifesto clausa est, a tribus axibus systematis tres partes abscindit, quae respective sunt: $2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{A}}}$, $2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{B}}}$, $2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{C}}}$ et axes ellipsoidis nominantur. Denotando dimidia horum axium respective per a, b, c aequatio ellipsoidis fit:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Quodsi duo coefficientium e. gr. $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ inter se aequales sunt, habemus ellipsoidem revolutione circa axem x ortam; si omnes tres coeffic. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ eundem habent valorem, aequatio est sphaerae.

Supponamus unum coefficientium aequationis 1) e. gr. $\mathfrak{A}$ esse quantitatem negativam, tunc $\mathfrak{L}$ vel quantitas positiva vel negativa esse potest. In utroque casu omnis curva intersectionis superficiei cum planis (zx) vel (xy) parallela hyperbola est, omnis intersectio cum plano principali (yz) parallela ellipsis. Quum vero in primo casu, ubi $\mathfrak{L}$ est quantitas positiva, harum ellipsium aequatio sit: $\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 = \mathfrak{A}x^2 - \mathfrak{L}$, omnes imaginariae fiunt, pro quibus $x < \pm\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{A}}}$. Nullum igitur punctum superficiei inter duo plana, cum plano princip. (yz) parallela et quantitate $\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{A}}}$ utrimque ab eo distantia, situm est. Quare hanc superficiem, quae e duabus sejunctis et inter se aequalibus partibus composita est, hyperboloidem bipartitam vocabimus. In altero vero casu, quum $\mathfrak{L}$ est quantit. negativa, omnes ellipses reales esse facile perspicitur, ita ut superficies omnino continua sit, quam ea de causa hyperboloidem continuam vocare volumus.

Si, quantitate $\mathfrak{A}$ semper negative accepta, $\mathfrak{L}$ supponitur $= 0$, habemus aequationem $\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 - \mathfrak{A}x^2 = 0$, quae per substitutionem quantitatis constantis pro x transit in aequationem ellipsis vel hyperbolae, prout $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ sunt quantitates homogeneae vel heterogeneae. Si ei conjungimus aequationem cujuslibet plani plano (yz) normalis et per initium coordinatarum transeuntis: $y = \alpha z$, et eliminamus ex his aequationibus vel y vel z, nanciscimur semper aequationem duarum linearum rectarum in centro systematis se secantium. Illa aequatio igitur pertinet ad superficiem conicam, cujus basis vel ellipsis vel hyperbola. In eo casu vero, ubi est $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, illa aequatio per transformationem systematis axium, substituendo $x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y'$, $y = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y'$, $z = z'$, abit in hanc: $\mathfrak{C}z'^2 - \mathfrak{A}x'y' = 0$, quae manifesto ad superficiem conicam cum basi parabolica pertinet.

Si in aequatione 1) unus trium coefficientium e. gr. $\mathfrak{A} = 0$, aequatio superficiei cylindricae est, cujus basis vel ellipsis vel hyperbola, prout $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ sunt homog. vel heterogeneae.

Progrediamur nunc ad contemplationem secundae aequationis. Substituto in ea vel pro y vel pro z valore quodam constanti, nanciscimur in utroque casu aequationem parabolae. Omne igitur planum cum planis (zx) vel (xy) parallelum superficiem in parabola secat. Eodem modo cognoscitur, omnem superficiei lineam intersectionis parallelam cum plano (yz) aut ellipsem aut hyperbolam esse, prout $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ sunt quantit. homogen. aut heterogen. Itaque aequatio secunda pro valoribus coefficientium duas superficies diversi generis complectitur, quarum altera paraboloides elliptica vocatur, altera paraboloides hyperbolica.

Si in aequatione 2) alteruter coefficientium e. gr. $\mathfrak{C} = 0$, aequationem ad superficiem cylindricam cum basi parabolica pertinere patet.

...nes ceteri casus, qui ad diversos valores coefficientium duarum aequationum 1) et 2) spectant, ad unum ex praecedentibus reduci possunt, igitur illae sunt omnes superficies, quas aequatio secundi gradus complectitur.

CAP. II.

De superficiebus, quae per curvam motam, cujus forma in universum variabilis supponitur, oriuntur, item de superficiebus involventibus.

§. 1. Priusquam ad universas proprietates curvarum ac superficierum contemplandas transimus, de aequationibus superficierum disseramus, quae vel curvae vel alterius superficiei motu gignuntur. Quae oriundi ratio minime singulari tantum generi superficierum propria putanda est, sed potius omnino omnes superficies illa ratione ortas concipere licet, omnem enim superficiem esse locum geometricum curvae, cujus in aequationibus una constans ut variabilis spectetur, jam ex Cap. I §. 7 elucet. Igitur de eo tantum agitur, ut datis aequationibus curvae vel superficiei se moventis, et determinata motus ratione, inveniamus aequationem superficiei, quae hac curva vel superficie mota oritur.

§. 2. Primo ad superficies, quae a mota curva describuntur, animum attendamus. Curva nobis data sit per aequationes:

$$\varphi(x, y, z) = 0 \text{ et } \psi(x, y, z) = 0, \qquad \text{(A)}$$

in quibus implicitae sint quantitates constantes α, β, γ, etc. Quodsi his quantitatibus deinceps alios et alios valores tribuimus, curva etiam diversas positiones in spatio accipiet, ideoque, si mutatio quantitatum α, β, γ, etc. continua est, curva se movebit, in universum etiam formam suam mutans. Quum vero curvam secundum legem determinatam moveri supponatur, variationes quantitatum α, β, γ, etc. invicem inter se dependere debent, sive, quod idem est, omnes hae quantitates functiones unius ex ipsis erunt, quae functiones per motus legem nobis datae sunt.

Itaque praeter aequationes (A) habemus sequentes:

$$\beta = f(\alpha), \qquad \gamma = f'(\alpha), \text{ etc.}$$

sive generaliter $F(\alpha, \beta, \gamma, \text{etc.}) = 0, \quad F'(\alpha, \beta, \gamma, \text{etc.}) = 0$, etc., (B) quarum numerus unitate minor quam numerus quantitatum α, β, γ, etc. Nunc quum inter quantitates variabiles x, y, z, α, β, γ, etc., si earum numerus est $= n$, habeamus $(n - 2)$ aequationes, secundum Cap. I §. 8 per has aequationes nobis datur superficies. Haec manifesto erit superficies e motu curvae orta, et proinde ejus aequationem in x, y, z nanciscimur eliminando quantitates indeterminatas α, β, γ, etc. ex aequationibus (A) et (B).

Num curva se movendo formam suam mutet, nec ne, sine dubio ex eo pendet, utrum inter quantitates α, β, γ, etc. inveniantur tales, quae formam curvae, an tales tantum, quae ejus situm determinant.

Haud monendum censeo, in aequat. (A) praeter α, β, γ, etc. etiam alias constantes occurrere posse, quae mota curva eaedem maneant, ideoque etiam in aequatione superficiei tamquam constantes implicentur.

§. 3. Ad rem melius explanandam afferamus exemplum.

Ellipsoidem, cujus semiaxes sunt a, b, c, considerare licet tamquam per motum ellipsis cum plano principali (xy) parallelae ortam, cujus aequationes sunt:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \qquad z = \gamma, \tag{C}$$

quae ita se moveat, ut puncta extrema ejus axium 2α et 2β (quae variabilis longitudinis supponuntur) in planis principalibus (xz) et (yz) respective duas ellipses describant, quarum centrum commune in initio coordinatarum jaceat et quarum semiaxes pro altera sint a et c, pro altera b et c. Unde facile colligitur, inter α, β, γ has duas aequationes existere:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1, \tag{D}$$

ex quibus comparatis cum aequationibus (C) eliminandae sunt α, β, γ. Aequationes (C) suppeditant:

$$\alpha^2 = a^2\left(1 - \frac{\gamma^2}{c^2}\right), \qquad \beta^2 = b^2\left(1 - \frac{\gamma^2}{c^2}\right),$$

quibus valoribus substitutis in priori aequationum (C) evadit:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\gamma^2}{c^2},$$

unde ponendo $\gamma^2 = z^2$ nanciscimur:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

quae, ut supra vidimus, est aequatio ellipsoidis, cujus semiaxes sunt a, b, c.

§. 4. Si curva, quae per aequationes suas nobis data est, secundum legem indeterminatam vel non plane determinatam se movet, sine dubio valde diversae superficies ab ea describi possunt, quae, quum indole quadam communi utantur, genus quoddam superficierum formabunt. Tunc formam generalem aequationis, quae omnibus superficiebus hujus generis communis est, secundum regulas modo expositas invenire licet.

Aggrediamur ad nonnulla exempla, quae et rem satis illustrent et postea in usum vocari possint.

Superficies, quae a curva qualibet circa lineam rectam velut circa axem rotante describitur, superficies per revolutionem orta vocatur. — Facile perspicitur, talem superficiem etiam a circulo descriptam fingi posse, cujus centrum in recta illa sive axe superficiei jaceat, ad quam ejus planum etiam normale sit, et cujus peripheria semper per punctum curvae propositae transeat. — Quodsi per a, b, c designamus coordinatas puncti cujusdam in linea recta siti, per ξ, η, ζ hujus lineae determinantes, et per α, β, γ coordinatas cujuslibet puncti curvae propositae, aequationes talis circuli erunt:

$$\left.\begin{array}{c}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2+(\gamma-c)^2, \\ \xi x+\eta y+\zeta z=\xi\alpha+\eta\beta+\zeta\gamma,\end{array}\right\}\text{(E)}$$

et inter α, β, γ habemus has duas aequationes

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma)=0, \qquad \psi(\alpha, \beta, \gamma)=0,$$

quae ad curvam rotantem spectant. Ex his aequationibus comparatis cum (E) nunc eliminandae sunt quantitates α, β, γ, unde sine dubio prodit aequatio hujus formae:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=F(\xi x+\eta y+\zeta z),$$

quae omnes superficies per revolutionem ortas complectitur. — Quodsi axis superficiei cum axe principali z congruit, a, b, ξ et η fiunt $=0$ et $\zeta=1$, in hoc casu igitur aequatio generalis hanc obtinet formam:

$$x^2+y^2+(z-c)^2=F(z) \qquad \text{sive:} \qquad z=f(x^2+y^2).$$

Contemplemur nunc superficiem conicam, quae a linea recta semper per idem punctum transeunte et in longitudinem curvae cujuslibet mota describitur. Lineam rectam generatricem superficiei vocant, curvam vero ejus directricem.

Designatis coordinatis cujuslibet puncti lineae generatricis per x, y, z, puncti, per quod linea se movendo semper transit, per a, b, c, et coordinatis cujuslibet puncti curvae directricis per α, β, γ, aequationes lineae rectae erunt:

$$\frac{x-a}{z-c}=\frac{\alpha-a}{\gamma-c}, \qquad \frac{y-b}{z-c}=\frac{\beta-b}{\gamma-c}, \qquad \text{(F)}$$

atque inter α, β, γ habemus duas aequationes, quae ad curvam generatricem pertinent

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma)=0, \qquad \psi(\alpha, \beta, \gamma)=0,$$

quarum ope α, β, γ eliminandae sunt ex (F). Hac ratione, ut facile perspicitur, perveniemus ad aequationem hujus formae:

$$F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)=0,$$

quae in universum cuicunque superficiei conicae, cujus apex in puncto a, b, c jacet, propria est.

Aequatio igitur talis superficiei conicae, ut forma eius modo inventa indicat, homogenea esse debet respectu $(x-a)$, $(y-b)$ et $(z-c)$, i. e. summa exponentium harum quantitatum in omnibus aequationis membris eadem sit oportet. — Quodsi apex superficiei conicae in initio coordinatarum situs est, manifesto idem valet respectu quantitatum x, y, z. Itaque e. g. aequatio generalis superficiei conic. secundi gradus, cujus apex in initio coordinatarum jacet, erit:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Eyz + 2Fzx + 2Gxy = 0. \tag{G}$$

Concipiamus planum per apicem hujus superficiei ductum, quod plerumque in duabus rectis eam secabit, et quaeramus harum rectarum determinantes atque angulum, quem formant; quod problema infra in usum vocare volumus.

Denotando determinantes plani per ξ, η, ζ, ejus aequationem habebimus hanc:

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0, \tag{H}$$

et determinantes linearum intersectionis erunt ad rationem $x : y : z$, si pro x, y, z sumuntur valores, qui ambabus aequationibus (G) et (H) satisfaciant; itaque modo solvendum est problema analyticum, ut ex aequationibus (G) et (H) determinetur ratio $x : y : z$; duo diversi valores, qui inde prodibunt propter aequat. (G), duabus lineis intersectionis respondebunt.

Substituendo pro y in (G) ejus valorem ex (H) obtinemus aequationem:

$$(A\eta^2 + B\xi^2 - 2G\xi\eta)\frac{x^2}{z^2} + 2(F\eta^2 + B\zeta\xi - E\eta\xi - G\eta\zeta)\frac{x}{z} + (C\eta^2 + B\zeta^2 - 2E\eta\zeta) = 0,$$

quae in forma:

$$L\frac{x^2}{z^2} + M\frac{x}{z} + N = 0,$$

exhibita, pro $\frac{x}{z}$ hunc suppeditat valorem:

$$\frac{x}{z} = \frac{-M \pm \sqrt{[M^2 - LN]}}{L}$$

ubi (salvis denotationibus ex Introd. art. 13) erit:

$$M^2 - LN = -\eta^2(A'\xi^2 + B'\eta^2 + C'\zeta^2 + 2E'\eta\zeta + 2F'\zeta\xi + 2G'\xi\eta) = -\eta^2\mathfrak{A}'.$$

Eodem modo pro $\frac{y}{z}$ similem nanciscimur formulam, in qua L eundem habet valorem, M vero fit $= (E\xi^2 + A\eta\zeta - F\xi\eta - G\zeta\xi)$ et $M^2 - LN = -\xi^2\mathfrak{A}'$.

Statuendo igitur rationem determinantium pro altera linea intersectionis $= m : n : o$, pro altera $= m : n' : o'$, habemus:

$$\left.\begin{array}{l|l} m = -B\zeta\xi + E\xi\eta - F\eta^2 + G\eta\zeta + \eta\sqrt{-\mathfrak{A}'} & n = -A\eta\zeta - E\xi^2 + F\xi\eta + G\zeta\xi - \xi\sqrt{-\mathfrak{A}'} \\ m' = -B\zeta\xi + E\xi\eta - F\eta^2 + G\eta\zeta - \eta\sqrt{-\mathfrak{A}'} & n' = -A\eta\zeta - E\xi^2 + F\xi\eta + G\zeta\xi + \xi\sqrt{-\mathfrak{A}'} \\ \multicolumn{2}{c}{o = o' = A\eta^2 + B\xi^2 - 2G\xi\eta.} \end{array}\right\} (J)$$

Cosinus anguli (ω), quem ambae lineae intersectionis formant, facillime invenitur per transformationem systematis axium ita comparatam, ut planum principale (yz) cum plano (H) congruat; tunc denotatis novis coordinatis per x', y', z', aequatio (H) transit in: $x' = 0$, et proinde aequatio (G) ita exhibetur:

$$\mathfrak{B}y'^2 + \mathfrak{C}z'^2 + 2\mathfrak{E}y'z' = 0,$$

unde prodit:

$$\frac{y'}{z'} = \frac{-\mathfrak{E} \pm \sqrt{(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}\mathfrak{C})}}{\mathfrak{B}} = \frac{-\mathfrak{E} \pm \sqrt{-\mathfrak{A}'}}{\mathfrak{B}}, \text{ (vide Introd. art. 13)},$$

ergo determinantes duarum linearum intersectionis respectu novi systematis axium pro altera sunt ad rationem: $0 : (-\mathfrak{E} + \sqrt{-\mathfrak{A}'}) : \mathfrak{B}$, pro altera: $0 : (-\mathfrak{E} - \sqrt{-\mathfrak{A}'}) : \mathfrak{B}$, unde pro $\cos\omega$ hanc formulam nanciscimur:

$$\cos\omega = \frac{(\mathfrak{E} + \sqrt{-\mathfrak{A}'})\,(-\mathfrak{E} - \sqrt{-\mathfrak{A}'}) + \mathfrak{B}^2}{\sqrt{[(-\mathfrak{E} + \sqrt{-\mathfrak{A}'})^2 + B^2]\,[(-\mathfrak{E} - \sqrt{-\mathfrak{A}})^2 + \mathfrak{B}^2]}},$$

quae facile in simpliciorem hanc redigi potest:

$$\cos\omega = \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}{\sqrt{[(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})^2 - 4\mathfrak{A}']}}, \tag{K}$$

in qua formula, quum secundum Introd. art. 13 sit

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{C} = A + B + C - \mathfrak{A} \text{ et } \mathfrak{A} = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2E\eta\zeta + 2F\zeta\xi + 2G\xi\eta,$$

pro $(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$ et $\mathfrak{A}'$ habemus hos valores:

$$(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = A(\eta^2 + \zeta^2) + B(\zeta^2 + \xi^2) + C(\xi^2 + \eta^2) - 2E\eta\zeta - 2F\zeta\xi - 2G\xi\eta$$
$$\text{et } \mathfrak{A}' = A'\xi^2 + B'\eta^2 + C'\zeta^2 + 2E'\eta\zeta + 2F'\zeta\xi + 2G'\xi\eta.$$

§. 5. Aggrediamur nunc ad contemplandas superficies, quae e motu alterius superficiei, cujus forma vel constans vel variabilis habenda, oriuntur. — Superficies quidem se movens non alteram superficiem describit, sed semper spatium trium dimensionum percurrit, superficies vero hoc spatium terminans pro ea existimanda est, quae e motu illius oritur. Qua de causa ejusmodi superficies, quum superficiem se moventem in omnibus ejus positionibus circumcludat, ejus superficies involvens vocatur. Quodsi e. g. centrum sphaerae, cujus radius constans, in longitudinem curvae cujusdam movemus, sphaera ipsa spatium ad instar canalis formatum percurrit, cujus superficies sphaerae superficies involvens est. Hinc facile perspicitur, non omnia puncta superficiei se moventis in quaque ejus positione ad superficiem involventem pertinere, sed modo ea, quae in linea intersectionis, quam superficies se movens in duabus infinite prope se invicem sequentibus positionibus format, sita sunt. Concipiamus e. g. sphaeram illam secundum curvam quandam se moventem in duabus perpaulo inter se diversis positionibus, tunc linea intersectionis manifesto erit circulus maximus sphaerae ad directionem, in qua ejus centrum movetur, normalis, quem circulum etiam in sphaerae superficie involventi jacere patet. — Itaque tota res in eo vertitur, ut inveniamus aequationes illius lineae intersectionis, quae per duas infinite prope se sequentes positiones superficiei motae formatur.

§. 6. Superficies nobis data sit per aequationem $u=0$, in qua implicitae sint quantitates constantes α, β, γ, etc., quae mota superficie valores suos mutant, et ponamus omnes has quantitates functiones datas ipsius α esse, ita ut u sit functio ipsarum x, y, z et α. Substituendo nunc in u $\alpha+d\alpha$ loco ipsius α, nanciscimur aequationem:

$$u+\overset{\alpha}{d}u d\alpha=0,$$

quae ad superficiem in positione a priori infinite parum diversa pertinet. Haec aequatio igitur conjuncta cum aequatione $u=0$, cujus ope illa reducitur ad $\overset{\alpha}{d}u=0$, lineam intersectionis determinat, quam superficies in duabus infinite prope se invicem sequentibus positionibus format. — Jam facile perspicitur, superficiem involventem tamquam locum geometricum illius curvae considerari posse, si α in ejus aequationibus pro variabili habetur. Eliminando igitur α inter aequationem:

$$u=0 \qquad \text{et ejus differentiale respectu } \alpha: \qquad \overset{\alpha}{d}u=0,$$

nanciscimur aequationem superficiei involventis.

Si β et γ non directe nobis datae sunt velut functiones ipsius α, sed modo implicite per duas aequationes tales $v=0$ et $w=0$, denotantibus v et w duas functiones ipsarum α, β, γ, inter has tres aequationes differentiales:

$$
\begin{aligned}
du\, d\alpha + \overset{\beta}{du}\, d\beta + \overset{\gamma}{du}\, d\gamma &= 0,\\
\overset{\alpha}{dv}\, d\alpha + \overset{\beta}{dv}\, d\beta + \overset{\gamma}{dv}\, d\gamma &= 0,\\
\overset{\alpha}{dw}\, d\alpha + \overset{\beta}{dw}\, d\beta + \overset{\gamma}{dw}\, d\gamma &= 0
\end{aligned}
$$

eliminare debemus $\frac{d\beta}{d\alpha}$ et $\frac{d\gamma}{d\alpha}$. Aequatio inde prodiens conjuncta cum aequatione $u=0$ ad curvam intersectionis pertinet, et eliminatio ipsarum α, β, γ inter has duas aequationes atque aequationes $v=0$ et $w=0$ suppeditat aequationem superficiei involventis.

Quod hic respectu trium quantitatum α, β, γ demonstravimus, facile etiam ad plures accommodare licet.

§. 7. Curvae intersectionis, quas superficies se movens in binis infinite prope se sequentibus positionibus format et quae superficiem involventem componunt, ejus **characteristicae** vocantur. — Aequationes unius ex characteristicis, quae certae positioni superficiei se moventis sive certo valori ipsius α respondet, ut supra vidimus, sunt:

$$u=0 \quad \text{et} \quad \overset{\alpha}{du}=0, \tag{L}$$

ubi supponitur, in functione u pro β, γ, etc. earum valores in α substitutos esse.

Harum characteristicarum binae se invicem sequentes generaliter se secabunt. Omnia haec puncta intersectionis curvam in superficie involventi sitam formabunt, quam ejus **curvam repercussionis** (arrête de rebroussement) vocare volumus, quia superficiem plerumque in duas sejungit partes, quarum ab altera in alteram punctum quoddam in superficie se movens non nisi repercutiendo transferri possit.

Substituendo in aequationibus characteristicae (L) $(\alpha+d\alpha)$ pro α, nanciscimur aequationes alterius characteristicae, quae illam infinite prope sequitur, quae aequationes proinde conjunctae cum (L) ad punctum intersectionis harum duarum characteristicarum pertinebunt. Itaque quum aequationes (L) per hanc substitutionem transeant in $u+\overset{\alpha}{du}d\alpha = 0$ et $\overset{\alpha}{du}+\overset{\alpha}{d^2u}d\alpha = 0$, facile perspicitur per tres aequationes:

$$u=0, \quad \overset{\alpha}{du}=0, \quad \overset{\alpha}{d^2u}=0 \tag{M}$$

illud punctum intersectionis determinari, quod certo cuidam valori ipsius α respondeat.

Eliminando igitur α inter aequat. (M) pervenimus ad aequationes illius curvae, quam curvam repercussionis superficiei involventis vocavimus.

§. 8. Contemplemur e. gr. superficiem involventem sphaerae, cujus radius constans supponitur, et cujus centrum in longitudinem parabolae in plano principali (xy) descriptae movetur.

Designando per α et β coordinatas centri et per r radium sphaerae, ejus aequatio haec est:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = r^2, \tag{1}$$

et inter quantitates α et β habemus aequationem

$$\beta^2 = 2p\alpha, \tag{2}$$

denotante p parametrum parabolae. Ex aequat. (2) sequitur esse: $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{p}{\beta}$, differentiando igitur aequationem (1) respectu α nanciscimur:

$$(x-\alpha)\,\beta + (y-\beta)\,p = 0. \tag{3}$$

Per aequationes (1) et (3) nobis datur characteristica superficiei involventis, unde elucet, hanc curvam pro quocunque valore ipsius α esse circulum maximum sphaerae ad planum principale (xy) normalem. — Eliminando α et β e tribus aequat. (1), (2) et (3) obtinemus aequationem superficiei involventis, quae septimi gradus fit.

Differentiatio aequationis (3) iterum adhibita respectu α suppeditat:

$$(x-\alpha)\,p - \beta^2 - p^2 = 0. \tag{4}$$

Quodsi jam ex quatuor aequationibus (1), (2), (3) et (4), quae ad punctum intersectionis duarum se invicem sequentium characteristicarum pertinent, eliminamus α et β, pervenimus ad aequationes curvae repercussionis. Inde prodeunt hae aequationes:

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3,$$

$$\frac{1}{p}\left(\frac{2x+p}{3}\right)^2 + z^2 = r^2,$$

quae ad duas projectiones hujus curvae in planis (xy) et (xz) pertinent. Quum prior aequatio, nisi x sit $> p$, pro y non reales suppeditet valores, tunc vero propter alteram aequationem z tantum, si $p <, r$, fiat realis, superficies involvens modo in eo casu, quum est $p < r$, curvam repercussionis habebit, in casu opposito vero continuam formabit superficiem.

§. 9. Proprietates principales et indolem alicujus generis superficierum per aequationem differentialem particularem exprimi posse, jam supra memoravimus (Cap. I. §. 9.). Hoc etiam ad superficies, quae e motu curvae vel superficiei datae secundum legem indeterminatam se moventis oriuntur, praecipue adhibere licet.

In aequationibus curvae se moventis:

$$u = 0 \qquad \text{et} \qquad v = 0, \tag{N}$$

implicitae sint quantitas indeterminata α et functiones arbitrariae $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, $f\alpha$, etc. Tunc, quum hae aequationes, si α pro variabili habetur, ad superficiem pertineant, manifesto eas differentiare possumus respectu x et y, considerantes has quantitates velut variabiles independentes, et α quoque velut functionem earum, unde prodit:

$$\overset{x}{du} + \overset{\alpha}{du}\,\overset{x}{d\alpha} = 0, \qquad \overset{x}{dv} + \overset{\alpha}{dv}\,\overset{x}{d\alpha} = 0,$$

$$\overset{y}{du} + \overset{\alpha}{du}\,\overset{y}{d\alpha} = 0, \qquad \overset{y}{dv} + \overset{\alpha}{dv}\,\overset{y}{d\alpha} = 0,$$

et proinde:

$$\overset{x}{du}\,\overset{y}{dv} - \overset{x}{dv}\,\overset{y}{du} = 0, \tag{O}$$

quae aequatio quantitates x, y, z, $\overset{x}{dz}$, $\overset{y}{dz}$, α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, etc. continet. Quodsi una tantum functio arbitraria $\varphi\alpha$ in aequat. (N) occurrit, eliminando α et $\varphi\alpha$ ex (N) et (O) pervenimus ad aequationem inter x, y, z, $\overset{x}{dz}$, $\overset{y}{dz}$, quae aequatio different. partic. superficiei a mota curva descriptae est.

Sin plures insunt functiones arbitrariae, aequationem (O), quam exhibere volumus per $u' = 0$, iterum differentiare debemus respectu x et y, quod suppeditat:

$$\overset{x}{du'} + \overset{\alpha}{du'}\,\overset{x}{d\alpha} = 0, \qquad \overset{y}{du'} + \overset{\alpha}{du'}\,\overset{y}{d\alpha} = 0,$$

ergo: $\overset{x}{du'}\,\overset{y}{d\alpha} - \overset{x}{du'}\,\overset{y}{d\alpha} = 0$, et proinde, quum sit: $\dfrac{\overset{x}{d\alpha}}{\overset{y}{d\alpha}} = \dfrac{\overset{x}{du}}{\overset{y}{du}} = \dfrac{\overset{x}{dv}}{\overset{y}{dv}}$, habemus:

$$\overset{x}{du'}\,\overset{y}{du} - \overset{y}{du'}\,\overset{x}{du} = \overset{x}{du'}\,\overset{y}{dv} - \overset{y}{du'}\,\overset{x}{dv} = 0, \tag{P}$$

quae aequatio complectitur etiam differentialia partic. secundi ordinis ipsius z: $\overset{x}{d^2}z$, $\overset{x}{d}\overset{y}{d}z$, $\overset{y}{d^2}z$. Ex hac aequatione, si eam designamus per $u'' = 0$, eodem modo deducitur haec:

$$\overset{x}{d}u'' \, \overset{y}{d}u - \overset{y}{d}u'' \, \overset{x}{d}u = 0 = u''', \tag{Q}$$

ubi pro u etiam ponere licet v vel u'; et sic porro. Hanc rationem persequentes, ut facile intelligitur, semper tot aequationes $u' = 0$, $u'' = 0$, etc. exhibere poterimus, ut conjunctae cum (N) ad eliminationem quantitatum α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ etc. sufficiant. Nullo negotio etiam perspicitur aequationem different. partic., quae inde prodeat, fore ordinis n, i. e. contenturam esse differentialia partic. ipsius z respectu x et y usque ad ordinem n, si n est numerus functionum indeterminatarum $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, etc.

§. 10. Ad rem clarius illustrandam adjungamus exemplum, et quaeramus aequationem different. partic. superficiei, quae in universum per motum lineae rectae describitur. In quo casu habemus aequationes:

$$x + \alpha z + a = 0 = u, \qquad y + \beta z + b = 0 = v, \tag{1}$$

in quibus, quum motus lineae rectae omnino arbitrarius sit, et a et b et β velut functiones indeterminatae ipsius α tractandae sunt. — Designando $\overset{x}{d}z$ per p, $\overset{y}{d}z$ per q, per differentiationem respectu x et y nanciscimur:

$$\overset{x}{d}u = 1 + \alpha p, \qquad \overset{x}{d}v = \beta p,$$

$$\overset{y}{d}u = \alpha q, \qquad \overset{y}{d}v = 1 + \beta q,$$

unde aequatio (O) fit:

$$1 + \alpha p + \beta q = 0 = u'. \tag{2}$$

Quum vero tres insint functiones indeterminatae, usque ad differentialia partic. tertii ordinis ipsius z progredi debemus. Differentiando igitur rursus aequationem (2) et statuendo: $\overset{x}{d^2}z = r$, $\overset{x}{d}\overset{y}{d}z = s$, $\overset{y}{d^2}z = t$, obtinemus:

$$\overset{x}{d}u' = \alpha r + \beta s, \qquad \overset{y}{d}u' = \alpha s + \beta t,$$

et quum simul habeamus $\dfrac{\overset{x}{d}u}{\overset{y}{d}u} = \dfrac{1 + \alpha p}{\alpha q} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ (propter aequat. (2)), aequatio (P) fit:

$$\alpha^2 r + 2\alpha\beta s + \beta^2 t = 0 = u'' \tag{3}$$

Hinc, statuendo $\overset{x}{d^3 z} = l$, $\overset{x\ y}{d^2 dz} = m$, $\overset{x\ y}{d\, d^2 z} = n$, $\overset{y}{d^3 z} = o$, per differentiationem deducitur:

$$\overset{x}{du''} = \alpha^2 l + 2\alpha\beta m + \beta^2 n, \qquad \overset{y}{du''} = \alpha^2 m + 2\alpha\beta n + \beta^2 o = 0,$$

igitur pro aequatione (Q) habemus:

$$\alpha^3 l + 3\alpha^2\beta m + 3\alpha\beta^2 n + \beta^3 o = 0.$$

Eliminando nunc ex hac aequatione comparata cum (3) $\frac{\alpha}{\beta}$, perveniemus ad aequationem different. partic. superficiei, quae in universum a linea recta se movente describitur.

§. 11. Pro superficie involventi alterius superficiei datae secundum legem indeterminatam se moventis habemus duas hujusmodi aequationes:

$$u = 0 \quad \text{et} \quad \overset{\alpha}{du} = 0,$$

quarum altera continet α et functiones arbitrarias $\varphi\alpha$, $f\alpha$, etc., altera etiam differentialia harum functionum respectu α: $\varphi'\alpha$, $f'\alpha$, etc. Differentiando jam aequationem $u = 0$, respectu x et y, propter $\overset{\alpha}{du} = 0$, nanciscimur:

$$\overset{x}{du} = 0, \qquad \overset{y}{du} = 0, \tag{R}$$

e quibus aequationibus conjunctis cum aequatione $u = 0$, si haec modo unam funtionem arbitrariam $\varphi\alpha$ continet, jam α et $\varphi\alpha$ eliminari possunt. — Quodsi plures functiones arbitrariae insunt, tractando aequationes (R) eodem modo quo aequationes (N) in §. 9, tot aequationes exhibere debemus, quot sufficiant ad quantitates indeterminatas eliminandas. Inde facile intelligitur, ordinem aequationis different. partic., quam pro superficie involventi obtinemus, etiam hic respondere numero functionum arbitrariarum $\varphi\alpha$, $f\alpha$, etc.

Ad afferendum exemplum contemplemur superficiem, quae e motu sphaerae oritur, cujus radius constans et cujus centrum in longitudinem curvae cujuslibet dupliciter curvatae movetur. Pro hac habemus aequationes:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - r^2 = 0, \tag{4}$$
$$(x-\alpha) \;\; + (y-\beta)\beta' + (z-\gamma)\gamma' = 0,$$

denotantibus β et γ functiones arbitrarias ipsius α. Differentiando nunc priorem aequationem respectu x et y nanciscimur:

$$(x-\alpha) + p(z-\gamma) = 0 = u', \qquad (y-\beta) + q(z-\gamma) = 0 = v, \tag{5}$$

et quum hinc derivetur, denotando $\overset{x}{d^2}z$, $\overset{x\,y}{dd}z$, $\overset{y}{d^2}z$ respective per r, s, t:

$$\overset{x}{d}u' = 1 + p^2 + (z-\gamma)\, r, \qquad \overset{x}{d}v' = pq + (z-\gamma)\, s,$$

$$\overset{y}{d}u' = pq + (z-\gamma)\, s, \qquad \overset{y}{d}v' = 1 + q^2 + (z-\gamma)\, t,$$

secundum methodum §. 9 habemus etiam hanc aequationem:

$$[1 + p^2 + (z-\gamma)\, r]\, [1 + q^2 + (z-\gamma)\, t] - [pq + (z-\gamma)\, s]^2 = 0,$$

sive statuendo:

$$1 + p^2 + q^2 = k^2, \qquad (1+p^2)\, t + (1+q^2)\, r - 2pqs = h, \qquad rt - s^2 = g,$$

$$k^2 + (z-\gamma)\, h + (z-\gamma)^2 g = 0. \tag{6}$$

Jam ex aequationibus (4), (5) et (6) eliminare possumus α, β et γ, unde, quum aequationes (4) et (5) praebeant $(z-\gamma)^2 k^2 = r^2$, obtinemus:

$$k^4 + khr + gr^2 = 0,$$

quae est aequatio different. partic. illius superficiei involventis.

§. 12. Nunc singularem speciem superficierum involventium, quae magni momenti sunt in theoria superficierum curvarumque, diligentius etiam contemplemur, puta eas, quae e motu plani oriuntur.

Quia duo plana semper in linea recta se invicem secant, omnes characteristicae talis superficiei involventis erunt lineae rectae, quarum binae se invicem sequentes, quum in eodem plano jaceant, semper se secabunt et eo modo curvam repercussionis formabunt (excepto eo casu singulari, ubi omnes hae characteristicae inter se sunt parallelae). Tota igitur ejusmodi superficies ex planis elementis infinitae longitudinis, quae a duabus se invicem sequentibus characteristicis formantur, composita erit, qua re singularis hujus superficiei proprietas nititur. Si quidem tale elementum torquemus circa lineam, in qua proximum elementum secat, donec cum hoc in idem incidat planum, — tum ambo haec elementa circa lineam, in qua tertium secant, torquemus, donec omnia tria elementa in eodem plano jaceant, et sic porro, talem superficiem eo modo omnino in planum explicari posse elucet. Qua de causa hoc superficierum genus **superficies in planum explicabiles** vocantur.

Quomodo omnem superficiem involventem etiam per motum characteristicae suae oriri posse, supra vidimus, ita et superficies in planum explicabilis a linea recta describi poterit, quae ita moveatur, ut in duabus infinite prope se sequentibus positionibus se ipsa secet sive saltem in eodem plano maneat.

Superficies cylindrica et conica manifesto duae species superficierum in planum explicabilium sunt. Illa nullam habet curvam repercussionis, quia omnes ejus characteristicae inter se parallelae sunt; in hac curva repercus. in punctum reducitur, puta apicem superficiei conicae.

Investigemus etiam aequationem different. partic. superficiei in planum explicabilis, quae, quum in aequatione plani:

$$x\alpha + y\beta + z\gamma - 1 = 0 = u$$

duae insint functiones arbitrariae β et γ, erit secundi ordinis. Secundum methodum expositam jam primum nanciscimur per differentiationem respectu x et y (salvis denotationibus §§. praec.):

$$\alpha + \gamma p = 0 = u', \qquad \beta + \gamma q = 0 = v',$$

et proinde:

$$\overset{x}{du'} = \gamma r, \qquad \overset{y}{du'} = \gamma s, \qquad \overset{x}{dv'} = \gamma s, \qquad \overset{y}{dv'} = \gamma t,$$

unde statim deducitur (vide aequat. (O) §. 9):

$$rt - s^2 = 0.$$

Haec igitur est aequatio differ. partic. superficiei in planum explicabilis.

Pro curva repercussionis hujus superficiei tres sequentes habemus aequationes:

$$x\alpha + y\beta + z\gamma - 1 = 0, \tag{7}$$

$$x + y\beta' + z\gamma' = 0, \tag{8}$$

$$y\beta'' + z\gamma'' = 0,$$

si α in iis pro variabili habetur, denotantibus β', γ', β'', γ'' differentialia ipsarum β et γ respectu α.

Differentiatio completa primae et secundae aequationis, quia earum differentialia respectu α sunt $= 0$, suppeditat pro curva repercussionis:

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0, \qquad dx + \beta' dy + \gamma' dz = 0,$$

unde deducitur:

$$dx : dy : dz = (\beta\gamma' - \gamma\beta') : (\gamma - \alpha\gamma') : (\alpha\beta' - \beta);$$

eandem vero rationem et inter determinantes characteristicae intercedere, ex aequationibus (7) et (8), quae ad eam pertinent, facile deducitur. Itaque determinantes characteristicae eandem rationem inter se habent, quam differentialia coordinatarum curvae repercussionis pro puncto ambabus communi, unde sequitur, ut infra videbimus, omnes characteristicas superficiei in planum explicabilis tangentes curvae repercussionis esse.

CAP. III.

De arcu curvae ejusque tangenti. — De contactu duarum curvarum et diversis contactus gradibus. — De circulo osculi.

§. 1. Inter omnes constat, lineam rectam, cui duo puncta cum curva quadam communia sint, secantem curvae nominari, eam vero secantis partem, quae inter puncta intersectionis jaceat, chordam arcui curvae inter eadem puncta sito respondentem.

Concipiamus chordam ad curvam quandam ductam, et ponamus, ejus puncta intersectionis sibi invicem appropinquare; tunc et chorda ipsa et arcus ei respondens decrescent et simul longitudine se invicem propius accedent. Quo minor arcus fit, eo magis sine dubio cum chorda sua congruet, ita ut re vera dici possit, arcum infinite parvum chordae suae aequalem esse sive rationem inter arcum et chordam ejus, arcu decrescente, unitatem pro limite habere. Quodsi coordinatas unius puncti intersectionis designamus per x, y, z, et quantitates, quibus coordinatae alterius puncti intersectionis ab illis differunt, respective per Δx, Δy, Δz, chorda quae haec duo puncta jungit, manifesto aequalis erit: $\sqrt{[\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2]}$ (Introd. art. 1.). Itaque si eam denotamus per $Ch.$ et arcum ei respondentem per Δs, habebimus:

$$\Delta s \frac{Ch}{\Delta s} = \sqrt{[\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2]},$$

sive posito, curvae aequationes sub hac forma $x = \varphi t$, $y = \psi t$, $z = ft$ exhibitas esse, et divisa illa aequatione per differentiam argumenti *) communis Δt, quae differentiis Δx, Δy, Δz respondet, erit:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \frac{Ch}{\Delta s} = \sqrt{\left[\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2\right]}.$$

Si jam alterum punctum intersectionis puncto (x, y, z) appropinquat, usquedum cum eo in unum incidat, fit $\frac{Ch}{\Delta s} = 1$, et quantitates $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, etc. abeunt in differentialia ipsarum s, x, y, z respectu argumenti t, unde prodit:

$$ds = \sqrt{[dx^2 + dy^2 + dz^2]}.$$

In hac formula x, y, z et s considerantur tamquam functiones indeterminatae t; si vero curva nobis data est per duas aequationes inter coordinatas x, y, z, quas semper in formam $x = \varphi z$, $y = \psi z$ redigi licet, z pro argumento ipsarum x et y haberi debet; tunc igitur illa formula transmutatur in hanc:

$$ds = dz \sqrt{\left[\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1\right]}.$$

Si curva est plana, evanescente coordinata z habemus:

$$ds = \sqrt{[dx^2 + dy^2]} \qquad \text{vel} \qquad ds = dy \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]}$$

prout curva nobis data est per duas tales aequationes $x = \varphi t$, $y = \psi t$, vel per unam ita exhibitam $x = fy$.

§. 2. Datis aequationibus curvae cujusdam, evolvendo ex iis valores differentialium dx, dy, dz et substituendo eos in formula pro ds modo inventa, per integrationem

---

*) Verbo „argumentum" hic eum sensum tribuo, ut significet variabilem independentem, a qua ceterae quantitates velut functiones pendent.

hujus formulae longitudinem arcus curvae inter duo quaelibet ejus puncta invenire licet, si quidem illa formula integrabilis sit. Quae ratio curvae rectificatio vocatur.

Proponamus e. gr. determinandam longitudinem arcus epicycloidis, cujus aequationes, ut nemo ignorat, sunt hae:

$$x = (n \mp 1)\, r \cos\frac{t}{n} \pm r \cos(n \mp 1)\frac{t}{n}, \qquad y = (n \mp 1)\, r \sin\frac{t}{n} - r \sin(n \mp 1)\frac{t}{n},$$

ubi r est radius orbis se rotantis, nr radius orbis quiescentis, et prout ille intra vel extra hunc rotatur, signa superiora vel inferiora sumenda sunt.

Differentiando has aequationes nanciscimur:

$$dx = -\left[(n \mp 1)\frac{r}{n} \sin\frac{t}{n} \pm (n \mp 1)\frac{r}{n} \sin(n \mp 1)\frac{t}{n}\right] dt,$$

$$dy = \left[(n \mp 1)\frac{r}{n} \cos\frac{t}{n} - (n \mp 1)\frac{r}{n} \cos(n \mp 1)\frac{t}{n}\right] dt,$$

quibus valoribus substitutis in formula pro ds, fit:

$$ds = (n \mp 1)\frac{r}{n}\sqrt{[2 - 2\cos t]}\, dt = 2\left(1 \mp \frac{1}{n}\right) r \sin\frac{t}{2}\, dt.$$

Integratio igitur suppeditat:

$$s = -4\left(1 \mp \frac{1}{n}\right) r \cos\frac{t}{2} + Const.$$

Statuendo vero initium epicycloidis in eo puncto, ubi orbem quiescentem tangit, habemus pro $t = 0$ etiam $s = 0$, unde *Const.* fit $= 4\left(1 \mp \frac{1}{n}\right) r$, ergo:

$$s = 4\left(1 \mp \frac{1}{n}\right) r \left(1 - \cos\frac{t}{2}\right),$$

qua formula arcus epicycloidis nobis datur usque ad quodlibet ejus punctum. Inde etiam rectificatio cycloidis deduci potest, in qua loco orbis quiescentis habemus lineam rectam, sive circulum, cujus radius $= \infty$; ponendo igitur $n = \infty$, pro cycloide nanciscimur $s = 4\, r \left(1 - \cos\frac{t}{2}\right)$.

Ut etiam afferamus exemplum curvae dupliciter curvatae, consideremus curvam repercussionis, cujus aequationes invenimus in Cap. II. §. 8 ita exhibitas:

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x - p)^3, \qquad \frac{1}{p}\left(\frac{2x + p}{3}\right)^3 + z^2 = r^2,$$

quas statim transformari licet in has:

$$y = [(r^2 - z^2)^{\frac{1}{3}} - p^{\frac{2}{3}}]^{\frac{3}{2}}, \qquad x + \frac{p}{2} = \frac{3}{2}p^{\frac{1}{3}}(r^2 - z^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Differentiando pervenimus ad has formulas:

$$\frac{dy}{dz} = - [(r^2 - z^2)^{\frac{1}{3}} - p^{\frac{2}{3}}]^{\frac{1}{2}} (r^2 - z^2)^{-\frac{2}{3}} z, \qquad \frac{dx}{dz} = - p^{\frac{1}{3}} (r^2 - z^2)^{-\frac{2}{3}} z,$$

igitur habemus:

$$ds = dz \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]} = dz \sqrt{\left[\frac{(r^2 - z^2)^{\frac{4}{3}} + p^{\frac{2}{3}} z^2 + [(r^2 - z^2)^{\frac{1}{3}} - p^{\frac{2}{3}}]\, z^2}{(r^2 - z^2)^{\frac{4}{3}}}\right]}$$

$= dz \sqrt{\left[\frac{r^2}{r^2 - z^2}\right]}$, et integrando jam formulam $ds = \frac{r\,dz}{\sqrt{[r^2 - z^2]}}$, nullo negotio nanciscimur: $s = r\ Arc.\ sin\ \frac{z}{r} + Const.$

Illa exempla suffectura credo, ad rectificandae curvae rationem explanandam, semper enim de eo tantum agitur, ut formulam pro ds redigamus vel in hanc formam $\int t\,dt$, vel in hanc $\int z\,dz$, ubi loco ipsius z etiam vel x vel y sumere licet.

§. 3. Si curvae secantem circa alterum punctum intersectionis P, ita torquemus, ut semper secans maneat, alterum vero punctum intersectionis Q ad prius magis magisque appropinquet, eo momento, quum ambo puncta in unum incidunt, illa linea **tangens** curvae vocatur. Proponamus jam inveniendas determinantes atque aequationes tangentis curvae pro dato in hac puncto.

Si designamus coordinatas puncti P per x, y, z, puncti Q per $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, secantis determinantes, denotata chorda PQ per Ch, erunt respective $= \frac{\Delta x}{Ch}, \frac{\Delta y}{Ch}, \frac{\Delta z}{Ch}$ (Introd. art. 2), sive introducta differentia arcus Δs, $= \frac{\Delta x\, \Delta s}{\Delta s\, Ch}$, $\frac{\Delta y\, \Delta s}{\Delta s\, Ch}$, $\frac{\Delta z\, \Delta s}{\Delta s\, Ch}$. Quodsi jam punctum Q cum puncto P in unum incidit, linea secans mutatur in tangentem curvae pro puncto P, pro valoribus vero secantis determinantium eorum limites, decrescente differentia Δs, sumere debemus. Denotando igitur tangentis determinantes per ξ, η, ζ, quum $lim.\ \frac{\Delta s}{Ch}$ sit $= 1$, habebimus:

$$\xi = \frac{dx}{ds}, \qquad \eta = \frac{dy}{ds}, \qquad \zeta = \frac{dz}{ds},$$

unde hoc theorema deducitur:

Determinantes tangentis cujusque curvae esse ad rationem differentialium coordinatarum x, y, z, pro puncto contactus.

E. gr. in curva repercussionis, quam in §. praec. memoravimus, erat:

$$\frac{dx}{dz} = -p^{\frac{1}{3}}(r^2 - z^2)^{-\frac{2}{3}}z, \quad \frac{dy}{dz} = -[(r^2 - z^2)^{\frac{1}{3}} - p^{\frac{2}{3}}]^{\frac{1}{2}}(r^2 - z^2)^{-\frac{2}{3}}z = -y^{\frac{1}{3}}(r^2 - z^2)^{-\frac{2}{3}}z,$$

itaque quum tangentis determinantes sint ad rationem $dx : dy : dz = \frac{dx}{dz} : \frac{dy}{dz} : 1$, pro hac curva erit:

$$\xi : \eta : \zeta = -zp^{\frac{1}{3}} : -zy^{\frac{1}{3}} : (r^2 - z^2)^{\frac{2}{3}},$$

unde valores determinantium nullo negotio inveniuntur (Introd. art. 2).

Quodsi coordinatas cujuslibet puncti tangentis, quae curvam in puncto (x, y, z) tangit, designamus per x', y', z', ejus aequationes ita exhibitae erunt (Introd. art. 3):

$$\frac{x' - x}{z' - z} = \frac{dx}{dz}, \qquad \frac{y' - y}{z' - z} = \frac{dy}{dz},$$

ubi quantitates $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ sunt datae functiones ipsarum x, y, z vel earum argumenti communis t, quas e curvae aequationibus evolvere licet.

Omnis recta, quae normalis est ad tangentem in ejus puncto contactus, normalis curvae vocatur, et planum, in quo omnes normales ejusdem puncti curvae itae sunt, ejus planum normale. Igitur aequatio plani normalis per curvae punctum (x, y, z) transeuntis erit:

$$(x' - x)\,dx + (y' - y)\,dy + (z' - z)\,dz = 0,$$

denotantibus x', y', z' coordinatas cujuslibet ejus puncti.

§. 4. In curvis planis tangentem cum curva in eodem plano sitam esse, facile intelligitur. Itaque determinans ζ evanescet, pro determinantibus ξ et η vero eosdem retinemus valores $\xi = \frac{dx}{ds}$, $\eta = \frac{dy}{ds}$.

Sed plerumque in curvis planis directio tangentis per angulum (φ) determinatur, quem tangens cum axe x format, sive per ejus punctum intersectionis cum hoc axe. Distantia hujus puncti ab ordinata y subtangens vocatur, et eodem modo subnormalis nominatur distantia puncti, in quo normalis axem x secat, ab ordinata y. Formulas pro his quantitatibus facile invenire licet. Tangens trigonometrica anguli φ

manifesto erit $= \frac{\eta}{\xi}$, igitur $tg\,\varphi = \frac{dy}{dx}$. Pars tangentis curvae inter punctum contactus et punctum intersectionis cum axe x sita erit $= y\,cosec\,\varphi$, sive $= y\sqrt{[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2]}$, subtangens erit $= y\,cotg\,\varphi = \frac{ydx}{dy}$. Eadem ratione pro normali invenitur formula: $y\sqrt{[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2]}$ et pro subnormali: $\frac{ydy}{dx}$.

Differentiando e. gr. aequationem hyperbolae $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, nanciscimur: $\frac{xdx}{a^2} - \frac{ydy}{b^2} = 0$, igitur $tg\,\varphi = \frac{xb^2}{ya^2} = \frac{b}{a}\sqrt{[1 + \frac{b^2}{y^2}]}$, unde et formulae pro ceteris quantitatibus, puta subtangenti etc., facile evolvuntur. Posito vero in formula pro $tg\,\varphi$ $y = \infty$, $tg\,\varphi$ evadit $= \frac{b}{a}$, et distantia puncti intersectionis, quod tangens cum axe x format, ab initio coordinatarum, quae aequalis est $x - \frac{ydx}{dy}$ ideoque pro hyperbola $= x - \frac{y^2a^2}{xb^2} = \frac{a^2}{x}$, sub eadem conditione, puta $y = \infty$, fit $= 0$; itaque linea recta per initium coordinatarum transiens, quae cum axe x angulum, cujus tangens $= \frac{b}{a}$, format, hyperbolam omnino non secabit, magis magisque vero ad eam appropinquabit. Talis linea asymptota curvae nominatur, et eadem ratione pro omni curva, in qua tali lineae locus est, facile determinari potest.

---

§. 5. Duae curvae, quibus punctum commune est, in quo eandem habeant tangentem, in hoc puncto se invicem tangere dicuntur: et secundum §. 1 in illo puncto quantitates dx, dy, dz pro utraque curva eandem rationem inter se habeant oportet. Facile vero perspicitur, duarum talium curvarum contactum longe diversae naturae fore, prout mutua earum positio ac forma prope punctum contactus alia vel alia sit, ita ut curvae plus minusve altera ad alteram se applicent. Quae diversa contactus genera nunc diligentius exploremus.

Designando coordinatas alterius curvae per x, y, z, alterius per x', y', z', et spectando eas ut functiones communis argumenti t, ita ut altera curva nobis data sit per aequationes $x = \varphi t$, $y = \psi t$, $z = ft$, altera per aequationes $x' = \varphi' t$, $y' = \psi' t$, $z' = f' t$, pro puncto contactus coordinatae x, y, z et x', y', z' eosdem valores habebunt. Duas curvas vero eo magis sibi invicem applicari elucet, quo minor sit mutua distantia punctorum, quae in ambabus curvis prope punctum contactus jacent. Concipiamus igitur in illis curvis duo ejusmodi puncta, quae etiam eidem valori ipsius t respondeant, et denotemus coordinatas puncti in priori curva jacentis per $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, puncti in altera curva siti per $x' + \Delta x'$, $y' + \Delta y'$, $z' + \Delta z'$. Tunc distantia horum punctorum, quia $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, erit:

$$\sqrt{[(\Delta x - \Delta x')^2 + (\Delta y - \Delta y')^2 + (\Delta z - \Delta z')^2]};$$

quo minor igitur haec quantitas evadet pro omnibus punctis prope punctum contactus sitis, sine respectu eorum distantiae ab hoc, eo arctior erit contactus curvarum. Quum vero haec quantitas composita sit ex quadratis trium quantitatum, ejus valor una cum his et crescet et decrescet, itaque ex valoribus ipsarum $(\Delta x - \Delta x')$, $(\Delta y - \Delta y')$, $(\Delta z - \Delta z')$ contactus curvarum natura pendebit.

Considerando autem coordinatas x, y, z et x', y', z' tamquam functiones ipsius t, earum differentias Δx, Δy, Δz, et $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$, quae eidem differentiae Δt respondent, secundum theorema Taylori in has series evolvere licet:

$$\Delta x = dx\, \Delta t + d^2 x\, \frac{\Delta t^2}{2} + d^3 x\, \frac{\Delta t^3}{2.3} + \text{etc.}$$

$$\Delta x' = dx' \Delta t + d^2 x'\, \frac{\Delta t^2}{2} + d^3 x'\, \frac{\Delta t^3}{2.3} + \text{etc.}$$

$$\Delta y = dy\, \Delta t + d^2 y\, \frac{\Delta t^2}{2} + d^3 y\, \frac{\Delta t^3}{2.3} + \text{etc.}$$

etc. etc.

unde sequitur esse:

$$\Delta x - \Delta x' = (dx - dx')\, \Delta t + (d^2 x - d^2 x')\, \frac{\Delta t^2}{2} + (d^3 x - d^3 x')\, \frac{\Delta t^3}{2.3} + \text{etc.}$$

$$\Delta y - \Delta y' = (dy - dy')\, \Delta t + (d^2 y - d^2 y')\, \frac{\Delta t^2}{2} + (d^3 y - d^3 y')\, \frac{\Delta t^3}{2.3} + \text{etc.}$$

$$\Delta z - \Delta z' = (dz - dz')\, \Delta t + (d^2 z - d^2 z')\, \frac{\Delta t^2}{2} + (d^3 z - d^3 z')\, \frac{\Delta t^3}{2.3} + \text{etc.}$$

Quum jam quantitas Δt ad puncta spectet, quae puncto contactus proxime adjacent, ejus valor semper perparvus erit, ita ut dignitates superiores ipsius Δt prae inferioribus evanescant; igitur etiam quantitates $(\Delta x - \Delta x')$, $(\Delta y - \Delta y')$, $(\Delta z - \Delta z')$ sine respectu valoris ipsius Δt eo minores erunt, quo plures coefficientium serierum, quas pro his quantitatibus invenimus, fient $= 0$.

Quae quum ita sint, contactus duarum curvarum in diversos gradus dividere possumus. Si quidem tres primi tantum coefficientes, puta $dx - dx'$, $dy - dy'$, $dz - dz'$, sunt $= 0$, contactus primi gradus vocatur, — si etiam coefficientes secundae dignitatis ipsius Δt, puta $d^2x - d^2x'$, $d^2y - d^2y'$, $d^2z - d^2z'$, sunt $= 0$, contactus secundi gradus et sic porro. Videmus igitur, gradum contactus a valoribus differentialium coordinatarum pendere, ita ut contactus gradus sit $= n$, si omnia differentialia coordinatarum usque ad $\overset{n}{d}x$, $\overset{n}{d}y$, $\overset{n}{d}z$ pro puncto contactus in ambabus curvis respective aequalia sint.

§. 6. Exploremus nunc, quo modo effici possit, ut curva quaedam (s'), cujus aequationes sunt:

$$F\,(x', y', z') = 0, \qquad F'\,(x', y', z') = 0, \tag{1}$$

in quibus constantes indeterminatae α, β, γ, etc. implicitae sunt, ita ut forma ac situs curvae (s') adhuc sit arbitrarius, cum altera curva (s) plane determinata per aequationes

$$x = \varphi t, \qquad y = \psi t, \qquad z = f t \tag{2}$$

in puncto (x, y, z) contactum certi cujusdam gradus ineat.

Manifesto de eo tantum agitur, ut determinemus valores quantitatum α, β, γ, etc., qui illis conditionibus conveniant. Quia curva s' per punctum (x, y, z) transire debet, coordinatae x, y, z ejus aequationibus respondeant necesse est; substitutis igitur in aequationibus (1) pro x', y', z' respective x, y, z, jam duas aequationes habemus inter quantitates α, β, γ, etc. Quum vero ad contactum primi gradus pertineat, ut dx', dy', dz' respective aequales sint ipsis dx, dy, dz, differentiando aequationes (1) et substituendo in iis pro x', y', z', dx', dy', dz' respective x, y, z, dx, dy, dz (quarum valores in t ex aequat. (2) evolvuntur), alias duas aequationes nanciscimur, quibus quantitates α, β, γ, etc. respondere debent, ut curva s cum curva s contactum primi gradus ineat.

Substituendo eodem modo in aequationibus differentialibus secundi ordinis curvae s' loco quantitatum x', dx', d^2x', y', dy', etc. respective x, dx, d^2x, y, dy, etc. pervenimus ad aequationes inter α, β, γ, etc., quae ad contactum secundi gradus pertinent; et sic porro.

Igitur si quantitates α, β, γ, etc. ita determinare volumus, ut curvae s' et s contactum gradus n ineant, earum valores evolvendi sunt ex aequationibus curvae s ejusque aequationibus differentialibus usque ad ordinem n (quarum numerus erit $= 2n + 2$), substitutis in iis pro x', y', z', dx', dy', etc. respective quantitatibus x, y, z, dx, dy, etc., quarum valores depromuntur ex aequationibus curvae s. Hac ratione ergo α, β, γ, etc. exprimuntur tamquam functiones ipsius t.

Si vero etiam pro curva s loco trium aequationum (2) habemus duas tales: $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$, coordinata z pro argumento habenda est; tunc igitur aequationes curvae s' differentiare debemus respectu z' et deinde pro x', y', z', $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$, $\frac{d^2x'}{dz'^2}$, etc. respective substituere x, y, z, $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$, etc. Ceterum agendi ratio supra exposita omnino eadem manet.

Ex praecedentibus etiam facile concluditur, gradum, in quo curva s' curvam s tangere possit, e numero quantitatum α, β, γ, etc. pendere; quum enim non plures liceat habere aequationes quam quantitates indeterminatas, manifesto numerus indeterminatarum, quae ad contactum gradus n requiruntur, esse debebit $= 2n + 2$. Itaque quatuor quantit. indeterminatae pertinent ad contactum primi gradus, sex ad contactum secundi gradus, et sic porro.

§. 7. Descendamus nunc ab hac contemplatione generali ad casus speciales.

Quum circulus ad formam suam ac situm per sex constantes nobis datus sit, puta ejus radium r, coordinatas centri a, b, c, et determinantes plani, in quo jacet, ξ', η', ζ' (quae propter aequationem conditionalem $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1$ pro duabus habendae sunt), circulum, si omnes hae quantitates ut indeterminatae spectentur, cum quacunque curva contactum secundi gradus inire posse, ex §. praec. elucet. Determinemus nunc secundum regulas illic datas valores quantitatum r, a, b, c et ξ', η', ζ' pro circulo, qui curvam quandam (s) in puncto x, y, z tangat.

Denotando per x', y', z' coordinatas cujuslibet ejus puncti, circuli aequationes erunt:

$$(x'-a)^2 + (y'-b)^2 + (z'-c)^2 = r^2, \tag{1}$$

$$(x'-a)\xi' + (y'-b)\eta' + (z'-c)\zeta' = 0, \tag{2}$$

quarum differentiatio bis repetita, statuto $ds' = \sqrt{[dx'^2 + dy'^2 + dz'^2]}$, suppeditat etiam quatuor sequentes aequationes:

$$(x'-a)\,dx' + (y'-b)\,dy' + (z'-c)\,dz' = 0, \tag{3}$$

$$(x'-a)\,d^2x' + (y'-b)\,d^2y' + (z'-c)\,d^2z' + ds'^2 = 0, \tag{4}$$

$$\xi' dx' + \eta' dy' + \zeta' dz' = 0, \tag{5}$$

$$\xi' d^2x' + \eta' d^2y' + \zeta' d^2z' = 0. \tag{6}$$

Ex his sex aequationibus, substitutis pro x', y', z', dx', dy', dz', d^2x', d^2y', d^2z' respective quantitatibus x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, quae ad curvam s spectant, evolvendi sunt valores quantitatum r, a, b, c, ξ', η', ζ'

Eo modo ex (5) et (6) deducitur:

$$\xi' : \eta' : \zeta' = (dyd^2z - dzd^2y) : (dzd^2x - dxd^2z) : (dxd^2y - dyd^2x),$$

denotando igitur has tres quantitates respective per U, V, W et ponendo $\sqrt{[U^2 + V^2 + W^2]} = S$, pro ξ', η', ζ' habemus hos valores:

$$\xi' = \frac{U}{S}, \qquad \eta' = \frac{V}{S}, \qquad \zeta' = \frac{W}{S}, \tag{7}$$

quibus substitutis, ex aequationibus (2) et (3) prodit:

$$x - a = \lambda(Vdz - Wdy), \quad y - b = \lambda(Wdx - Udz), \quad z - c = \lambda(Udy - Vdx) \tag{8}$$

λ denotante coefficientem indeterminatum, cujus valorem tamen determinare licet ex aequatione (4), substituendo in ea pro $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$ earum valores ex (8); nanciscimur hac ratione:

$$\lambda = -\frac{ds^2}{S^2}, \tag{9}$$

quae aequatio cum (8) comparata suppeditat valores ipsarum $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$.

Substitutis jam his valoribus in (1), aequatio illa transit in hanc:

$$r = -\frac{ds^4}{S^4}[(Wdy - Vdz)^2 + (Udz - Wdx)^2 + (Vdx - Udy)^2]:$$

quantitatem vero parenthesi inclusam in hanc transformare licet:

$(U^2+V^2+W^2)(dx^2+dy^2+dz^2) - (Udx+Vdy+Wdz)^2$, cujus prior pars fit $= S^2 ds^2$, altera vero $= 0$, itaque habemus $r^2 = \frac{ds^6}{S^2}$ sive:

$$r = \frac{ds^3}{S}. \tag{10}$$

Nunc per aequationes (7), (8), (9), (10), substitutis pro dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z iis valoribus, qui ex aequationibus curvae s prodeunt, nobis datae sunt quantitates ξ', η', ζ', a, b, c et r.

§. 8. Talis circulus qui curvam quandam in secundo gradu tangit, ejus **circulus osculi** nominatur et ejus radius **radius osculi** sive **curvaturae**. Planum, in quo hic circulus jacet, **planum osculi** curvae vocatur.

Pro quocunque puncto curvae datae, ut ex §. praec. elucet, ejus circulus osculi omnino determinatus est. Invenimus enim pro determinantibus plani osculi ξ', η', ζ' has formulas:

$$\xi' = \frac{U}{S}, \quad \eta' = \frac{V}{S}, \quad \zeta' = \frac{W}{S},$$

pro coordinatis centri circuli osc. sive **centri curvaturae**:

$$a = x + \frac{ds^2}{S^2}(Vdz - Wdy), \quad b = y + \frac{ds^2}{S^2}(Wdx - Udz), \quad c = z + \frac{ds^2}{S^2}(Udy - Vdx)^2$$

et pro radio osculi:

$$r = \frac{ds^3}{S}.$$

Si curva nobis data est per duas aequationes inter coordinatas x, y, z, spectando z ut argumentum, habemus $dz = 1$: $d^2z = 0$, igitur fit in hoc casu:

$$U = -\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right), \quad V = \left(\frac{d^2x}{dz^2}\right), \quad W = \left(\frac{dx}{dz}\right)\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right) - \left(\frac{dy}{dz}\right)\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right).$$

Determinantes radii osculi, quas per ξ'', η'', ζ'' designare volumus, manifesto sunt ad rationem quantitatum $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$, itaque erit:

$$\xi'' : \eta'' : \zeta'' = (Vdz - Wdy) : (Wdx - Udz) : (Udy - Vdx),$$

substituendo vero in formula $Vdz - Wdy$, pro V et W eorum valores $(dzd^2x - dxd^2z)$ et $(dxd^2y - dyd^2x)$ obtinemus:

$$Vdz - Wdy = dz^2 d^2x - dzdxd^2z - dxdyd^2y + dy^2d^2x = (dx^2 + dy^2 + dz^2)\, d^2x - dx\,(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z),$$

quum vero sit: $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, sequitur esse: $dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = dsd^2s$, igitur habemus:

$$Vdz - Wdy = ds^2d^2x - dxdsd^2s = ds^3\,\frac{dsd^2x - dxd^2s}{ds^2} = ds^3 d\left(\frac{dx}{ds}\right);$$

simili modo nanciscemur:

$$Wdx - Udz = ds^3 d\left(\frac{dy}{ds}\right) \qquad \text{et} \qquad Udy - Vdz = ds^3 d\left(\frac{dz}{ds}\right),$$

unde sequitur:

$$\xi'' : \eta'' : \zeta'' = d\left(\frac{dx}{ds}\right) : d\left(\frac{dy}{ds}\right) : d\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

Itaque, quum $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sint determinantes tangentis curvae, hoc theorema demonstratum est:

Determinantes radii osculi inter se eandem habere rationem, quam differentialia determinantium tangentis.

Planum osculi curvam quoque in secundo gradu tangit, ita ut nullum aliud planum inveniri possit, ad quod arctius curva se applicet. Denotando enim coordinatas puncti cujusdam in curva prope punctum contactus siti per $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, ejus distantia a plano osculi manifesto erit $= \xi'\Delta x + \eta'\Delta y + \zeta'\Delta z$, sive spectando x, y, z ut functiones argumenti t:

$$= (\xi'dx + \eta'dy + \zeta'dz)\,\Delta t + (\xi'd^2x + \eta'd^2y + \zeta'd^2z)\,\frac{\Delta t^2}{2} + \text{etc.}$$

Facile jam perspicitur, pro plano osculi coefficientes quantitatum Δt et Δt^2 fieri $= 0$, nec alteram inveniri posse planum, pro quo plures coefficientes fiant $= 0$, quia per duas aequationes:

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz = 0,$$
$$\xi d^2x + \eta d^2y + \zeta d^2z = 0$$

valores quantitatum ξ, η, ζ omnino jam determinati sunt. Inde etiam nullo negotio concluditur, curvam planam cum curva dupliciter curvata nullo modo contactum superioris quam secundi gradus inire posse.

Planum osculi etiam considerare licet tamquam planum, in quo duae tangentes curvae infinite prope se invicem sequentes jaceant. Si enim determinantes alterius tangentis sunt $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, determinantes alterius infinite prope illam sequentis erunt ad rationem: $\left(\frac{dx}{ds} + d(\frac{dx}{ds})\right) : \left(\frac{dy}{ds} + d(\frac{dy}{ds})\right) : \left(\frac{dz}{ds} + d(\frac{dz}{ds})\right)$, evolvendo vero ex his quantitatibus valores determinantium plani, in quo ambae tangentes jacent, ratio earum evadit $= U : V : W$, unde sequitur, hoc planum cum plano osculi congruere.

Ut duae curvae primo gradu se tangunt, si eandem habent tangentem, ita contactus secundi gradus inter eas locum habebit in eo puncto, ubi iis communis est circulus osculi.

§. 9. Contemplemur nunc curvas planas, ad quas omnia, quae de curvis dupliciter curvatis cognovimus, levi tantum mutatione adhiberi licet. Quod ad contactum duarum curvarum planarum attinet, in eosdem etiam diversos gradus dividitur secundum numerum differentialium coordinatarum x et y, quae in utraque curva eosdem valores habeant. Quum vero curva plana nobis data sit per unam aequationem inter x et y, ideoque per quamque ejus differentiationem etiam unam solam aequationem differentialem exhibeamus, numerus quantitatum indeterminatarum, quae ad contactum certi cujusdam gradus requiruntur, dimidio minor erit quam in curvis dupliciter curvatis. Duae igitur constantes indeterminatae sufficient ad contactum primi gradus, tres ad contactum secundi gradus, quatuor ad tertii, et sic porro.

Quodsi e. gr. in aequatione parabolae $y^2 = 2px$ transformando systema axium pro x et y substituimus respective $(x' - a) \cos\varphi + (y' - b) \sin\varphi$ et $-(x' - a) \sin\varphi + (y' - b) \cos\varphi$, ita ut obtineamus generalem parabolae aequationem, in qua a et b sint coordinatae ejus verticis, φ angulus, quem ejus axis cum axe principali x' format, et p ejus parameter, — differentiatio hujus aequationis ter repetita tres nobis suppeditat aequationes, e quibus cum aequatione ipsa inter x' et y' conjunctis valores quantitatum a, b, φ et p determinari licet tamquam functiones ipsarum x', y', dx', dy', d^2x', d^2y', d^3x', d^3y'. Substituendo jam pro hisce quantitatibus earum valores, ex aequatione cujuslibet alterius curvae planae evolutos, quantitates a, b, φ et p ita comparatae erunt, ut inter parabolam et alteram curvam contactus tertii gradus locum habeat.

§. 10. Circulum osculi pro curvis planis facillime determinare licet, si in formulis §. 8 inventis statuimus $z = 0$, quo fit:

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = dxd^2y - dyd^2x, \quad S = W;$$

igitur pro coordinatis centri circuli osculi nanciscimur formulas:

$$\left.\begin{array}{l} a = x - \dfrac{ds^2dy}{W} \qquad b = y + \dfrac{ds^2dx}{W} \\ \text{et pro radio osculi:} \qquad r = \dfrac{ds^3}{W}. \end{array}\right\} (1)$$

Quae formulae, si curva nobis data est per unam aequationem inter x et y, in quo casu, spectando y ut argumentum, dy fit $= 1$ et $d^2y = 0$, transmutantur in has:

$$a = x + \frac{1 + (\frac{dx}{dy})^2}{(\frac{d^2x}{dy^2})}, \quad b = y - \frac{\left(1 + (\frac{dx}{dy})^2\right)\frac{dx}{dy}}{(\frac{d^2x}{dy^2})}, \quad r = \frac{\left(1 + (\frac{dx}{dy})^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(\frac{d^2x}{dy^2})}. \quad (2)$$

Adhibeamus illas formulas ad nonnulla exempla. Ex aequationibus epicycloidis (vide §. 2)

$$x = (n \mp 1)\, \varrho \cos\frac{t}{n} \pm \varrho \cos(n \mp 1)\frac{t}{n}, \qquad y = (n \mp 1)\, \varrho \sin\frac{t}{n} - \varrho \sin(n \mp 1)\frac{t}{n}$$

bis differentiando nanciscimur:

$$dx = -(n \mp 1)\frac{\varrho}{n}\left[\sin\frac{t}{n} \pm \sin(n \mp 1)\frac{t}{n}\right], \qquad dy = (n \mp 1)\frac{\varrho}{n}\left[\cos\frac{t}{n} - \cos(n \mp 1)\frac{t}{n}\right],$$

$$d^2x = -(n \mp 1)\frac{\varrho}{n^2}\left[\cos\frac{t}{n} \pm (n \mp 1)\cos(n \mp 1)\frac{t}{n}\right],$$

$$d^2y = -(n \mp 1)\frac{\varrho}{n^2}\left[\sin\frac{t}{n} - (n \mp 1)\sin(n \mp 1)\frac{t}{n}\right],$$

igitur:

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2\left(1 \mp \frac{1}{n}\right)\varrho \sin\frac{t}{2}$$

et $W = dxd^2y - dyd^2x = (n \mp 1)^2 \frac{\varrho^2}{n^3}[1 \mp (n \mp 1) - \cos t + (n \mp 1)\cos t]$

$= 2(2 \mp n)(n \mp 1)^2 \frac{\varrho^2}{n^3} \sin^2\frac{t}{2}$, quibus valoribus substitutis in formulis (1), pro a, b et r obtinemus:

$$a = x - \frac{2\varrho(n \mp 1)\cos\frac{t}{n} - 2\varrho(n \mp 1)\cos(n \mp 1)\frac{t}{n}}{2 \mp n} = \frac{n\varrho}{2 \mp n}\left[\cos(n \mp 1)\frac{t}{n} \mp (n \mp 1)\cos\frac{t}{n}\right]$$

$$b = y - \frac{2(n \mp 1)\varrho \sin \frac{t}{n} \pm 2(n \mp 1)\varrho \sin (n \mp 1)\frac{t}{n}}{2 \mp n} = \frac{\mp n \varrho}{2 \mp n}\left[\sin (n \mp 1)\frac{t}{n} + (n \mp 1)\sin \frac{t}{n}\right]$$

$$r = \frac{4(n \mp 1)\varrho \sin \frac{t}{2}}{2 \mp n}$$

Hac ratione igitur pro quoque puncto epicycloidis nobis datus est ejus radius osculi et locus centri circuli osculi.

Differentiatio aequationis parabolae $y^2 = 2px$ suppeditat:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}, \quad \text{et} \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{p}.$$

Substituendo hos valores in formulis (2), prodit:

$$a = x + p\left(1 + \frac{y^2}{p^2}\right) = p + 3x, \qquad b = -\frac{y^3}{p^2},$$

$$r = p\left(1 + \frac{y^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}};$$

igitur e. gr. in vertice parabolae, ubi $y = 0$, radius osculi fit $= p$.

CAP. IV.

De variabili axium systemate, de curvaturis curvae et ejus punctis inflexionis.

§. 1. Demonstravimus in Cap. praec. determinantes tangentis respective aequales esse quantitatibus: $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, determinantes plani osculi sive lineae ei normalis esse ad rationem $U : V : W$ (vide cap. III. §. 7), et determinantes radii osculi ad rationem $d\left(\frac{dx}{ds}\right) : d\left(\frac{dy}{ds}\right) : d\left(\frac{dz}{ds}\right)$. Inde facile derivari potest, has tres lineas in quocunque puncto curvae, quam s nominabimus, sub angulis rectis se invicem secare; denotantibus enim ξ, η, ζ determinantes tangentis, ξ', η', ζ' lineae plano osculi normalis, et ξ'', η'', ζ'' radii osculi, e valoribus harum quantitatum modo propositis nullo negotio deducuntur hae aequationes:

$$\left.\begin{aligned} \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' &= 0,\\ \xi''\xi + \eta''\eta + \zeta''\zeta &= 0,\\ \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' &= 0. \end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Itaque tres illas lineas tamquam tres axes orthogonales considerare licet, qui quum alias in alio curvae puncto habeant directiones, quasi variabile axium systema formant, cujus centrum semper est punctum curvae s.

§. 2. Si centrum hujus axium systematis in longitudinem curvae movemus, ita quidem ut axes semper relationes suas ad curvam retineant, hi axes manifesto directiones suas mutare debent. Si igitur per idem punctum curvae alterum axium systema ductum concipimus, cujus axes tamen semper axibus systematis principalis, ad quod aequationes curvae referuntur, paralleli maneant, ac simul fingimus superficiem sphaericam radio 1 circa punctum curvae, quod commune amborum systematum centrum est, descriptam, puncta intersectionis, quae axes variabiles cum hac superficie sphaerica formant, se movendo tres curvas in ea depingent, quas respective per σ, σ', σ'' designare volumus. — Hae curvae singularem relationem habent ad curvam primitivam s. Si e. gr. curvae σ arcum infinite parvum consideremus, hunc arcum aequalem esse angulo, quem duae infinite prope se invicem sequentes tangentes curvae s forment, facile perspicitur. Hic angulus vero est curvae s, quam vocant, curvatura secundum tangentem, itaque differentiale $d\sigma$ curvae σ huic curvaturae aequale erit. Simili modo $d\sigma'$ erit curvatura curvae s secundum lineam plano osculi normalem, sive angulus, quem duo plana osculi infinite prope se invicem sequentia formant; et $d\sigma''$ curvae s curvatura secundum radium osculi.

Quum vero tres curvae σ, σ', σ'' in superficie sphaerica radio 1 descripta jaceant, earum coordinatae respectu systematis axium cum axibus principalibus parallelorum respective erunt ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'; ξ'', η'', ζ''. Itaque tres curvaturae curvae s manifesto habebunt hos valores:

$$\left.\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)}, \\ d\sigma' &= \sqrt{(d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2)}, \\ d\sigma'' &= \sqrt{(d\xi''^2 + d\eta''^2 + d\zeta''^2)}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

§. 3. Inter tres curvaturas curvae cujuslibet relatio insignis locum habet, quae hoc theoremate exprimitur:

Quadratum curvaturae secundum radium osculi aequale est summae duorum quadratorum curvaturae secundum tangentem et curvaturae secundum lineam plano osculi normalem, — sive $d\sigma''^2 = d\sigma^2 + d\sigma'^2$, quod hac ratione demonstrari potest. Differentiatio aequationum (1) suppeditat:

$$\begin{aligned} (\xi' d\xi'' + \eta' d\eta'' + \zeta' d\zeta'') &+ (\xi'' d\xi' + \eta'' d\eta' + \zeta'' d\zeta') = 0, \\ (\xi'' d\xi + \eta'' d\eta + \zeta'' d\zeta) &+ (\xi d\xi'' + \eta d\eta'' + \zeta d\zeta'') = 0, \\ (\xi d\xi' + \eta d\eta' + \zeta d\zeta') &+ (\xi' d\xi + \eta' d\eta + \zeta' d\zeta) = 0, \end{aligned}$$

statuendo igitur:

$$\left.\begin{aligned} \xi' d\xi'' + \eta' d\eta'' + \zeta' d\zeta'' &= L, \\ \xi'' d\xi + \eta'' d\eta + \zeta'' d\zeta &= M, \\ \xi d\xi' + \eta d\eta' + \zeta d\zeta' &= N, \end{aligned}\right\} \text{ habebitur etiam } \left\{\begin{aligned} \xi'' d\xi' + \eta'' d\eta' + \zeta'' d\zeta' &= -L, \\ \xi d\xi'' + \eta d\eta'' + \zeta d\zeta'' &= -M, \\ \xi' d\xi + \eta' d\eta + \zeta' d\zeta &= -N, \end{aligned}\right.$$

item has aequationes locum habere patet:

$$\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta = 0, \quad (3)$$

$$\xi' d\xi' + \eta' d\eta' + \zeta' d\zeta' = 0, \quad (4)$$

$$\xi'' d\xi'' + \eta'' d\eta'' + \zeta'' d\zeta'' = 0. \quad (5)$$

Quum vero ξ'', η'', ζ'' sint ad rationem $d(\frac{dx}{ds}) : d(\frac{dy}{ds}) : d(\frac{dz}{ds})$ sive $d\xi : d\eta : d\zeta$, pro ξ'', η'', ζ'' prodeunt valores:

$$\xi'' = \frac{d\xi}{d\sigma}, \qquad \eta'' = \frac{d\eta}{d\sigma}, \qquad \zeta'' = \frac{d\zeta}{d\sigma},$$

ergo:

$$N = -(\xi' d\xi + \eta' d\eta + \zeta' d\zeta) = -d\sigma\,(\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'') = 0.$$

Quadrando jam formulas pro M et $-N$ atque aequationem (3), et addendo haec tria quadrata, nullo negotio nanciscimur:

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = M^2;$$

eadem ratio ad formulas pro N et $-L$ atque aequationem (4) adhibita suppeditat:

$$d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2 = L^2;$$

item ex formulis pro L et $-M$ atque aequatione (5) simili modo colligitur:

$$d\xi''^2 + d\eta''^2 + d\zeta''^2 = L^2 + M^2;$$

unde sequitur esse:

$$d\xi''^2 + d\eta''^2 + d\zeta''^2 = (d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) + (d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2),$$

sive:

$$d\sigma''^2 = d\sigma^2 + d\sigma'^2,$$

quod erat demonstrandum.

Ea de causa plerumque ponitur, quum per duas curvaturas curvae tertia jam data sit, curvam duas tantum curvaturas habere, puta secundum tangentem $d\sigma$ et secundum lineam plano osculi normalem $d\sigma'$.

Curvaturam secundum tangentem $d\sigma$, introducendo radium osculi r, per simplicem formulam exprimi licet. Pro radio enim osculi invenimus in cap. praec. formulam $\frac{ds^3}{S}$, ubi $S = \sqrt{[U^2 + V^2 + W^2]}$; substituendo pro U, V, W respective earum valores $(dyd^2z - dzd^2y)$, $(dzd^2x - dxd^2z)$, $(dxd^2y - dyd^2x)$, fit:

$$S = ds\sqrt{[d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2]},$$

si vero in formula $d\sigma = \sqrt{[d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2]}$ pro ξ, η, ζ substituimus respective $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, nanciscimur:

$$d\sigma = \frac{1}{ds}\sqrt{[d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2]},$$

ergo habemus : $S = ds^2 d\sigma$, sive introducendo radium osculi:

$$d\sigma = \frac{ds}{r}$$

Spectato igitur differentiali arcus ds velut constanti, curvatura $d\sigma$ in ratione inversa radii osculi est.

§. 4. Tria plana principalia variabilis axium systematis sunt planum normale, planum osculi et planum rectificans, (unde originem trahat hoc nomen, postea cognoscemus) cui radius osculi normalis. Quodque horum planorum in movendo axium systema manifesto superficiem in planum explicabilem describit, quas superficies nunc diligentius contemplemur.

Aequatio plani normalis, quod per punctum (x, y, z) curvae s transit, ita exhibita est (Cap. III §. 3):

$$(x - x')\, dx + (y - y')\, dy + (z - z')\, dz = 0, \tag{6}$$

denotantibus x', y', z' coordinatas cujuslibet ejus puncti, quam si differentiamus respectu x, y, z, unde prodit:

$$(x - x')\, d^2x + (y - y')\, d^2y + (z - z')\, d^2z + ds^2 = 0, \tag{7}$$

has aequationes ad lineam intersectionis duorum infinite prope se invicem sequentium planorum normalium pertinere, ex cap. II §. 6 elucet. Itaque si ex his aequationibus, in quibus dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z et ds sunt functiones datae ipsarum x, y, z, quae ex aequationibus curvae s evolvuntur, eliminamus quantitates x, y, z ope aequationum curvae s, pervenimus ad aequationem inter x', y', z', quae ad superficiem e motu plani normalis ortam pertinet.

Lineae intersectionis duorum se sequentium planorum normalium, quae illius superficiei characteristicae sunt, lineae polorum curvae s vocantur; et ex aequationibus (6) et (7) sequitur, determinantes talis lineae esse ad rationem

$$(dyd^2z - dzd^2y) : (dzd^2x - dxd^2z) : (dxd^2y - dyd^2x) \text{ sive } U : V : W,$$

unde elucet, eam ad planum osculi normalem esse. Facile etiam demonstrari licet, talis lineae polorum punctum intersectionis cum plano osculi esse centrum curvaturae curvae s, ideoque perpendiculum a puncto (x, y, z) in hanc lineam demissum esse radium osculi curvae s pro hoc puncto. Aequatio enim plani osculi est:

$$(x - x')\, U + (y - y')\, V + (z - z')\, W = 0,$$

quae conjuncta cum aequat. (6) et (7) pro puncto intersectionis (x', y', z') lineae polorum cum plano osculi valet. Ex his vero aequationibus pro x', y', z' et $\sqrt{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]}$ evolvuntur iidem valores, quos in cap. III. §. 7 pro coordinatis centri curvaturae et pro radio osculi invenimus.

Itaque curva, in qua omnia centra curvaturae curvae s sunt, in hac superficie, quae e motu plani normalis oritur, jacet.

Curva repercussionis hujus superficiei, quae ab omnibus lineis polorum tangitur, ut ex cap. II §. 12 elucet, per has tres aequationes determinatur:

$$(x - x')dx + (y - y')dy + (z - z')dz = 0,$$
$$(x - x')d^2x + (y - y')d^2y + (z - z')d^2z + ds^2 = 0,$$
$$(x - x')d^3x + (y - y')d^3y + (z - z')d^3z + 3ds d^2s = 0,$$

e quibus si eliminamus x, y, z ope aequationum curvae s, pervenimus ad aequationes illius curvae repercussionis.

Inter duas curvaturas hujus curvae, quas per $d\bar{\sigma}$ et $d\bar{\sigma}'$ denotare volumus, et duas curvaturas curvae s, $d\sigma$ et $d\sigma'$, relatio insignis locum habet. Quum enim tangentes curvae repercussionis sint lineae polorum curvae s ideoque normales ad plana osculi hujus curvae, binae tangentes curvae repercussionis manifesto eundem angulum formabunt, quem respondentia plana osculi curvae s, igitur $d\bar{\sigma} = d\sigma'$; et quum vice versa omne planum normale curvae s sit planum osculi illius curvae repercussionis (quia duas se invicem sequentes lineas polorum continet), angulus, quem bina plana normalia curvae s sive binae ejus tangentes formant, aequalis erit angulo inter duo respondentia plana osculi curvae repercussionis, unde sequitur: $d\sigma = d\bar{\sigma}'$.

§. 5. Consideremus nunc superficiem, quam planum osculi se movendo describit. Ex eo, quod semper duae se invicem sequentes tangentes curvae in eodem plano osculi jacent (Cap. III §. 8), jam satis elucet, etiam lineam intersectionis duorum se invicem sequentium planorum osculi tangentem curvae esse, hoc vero etiam inde concludi licet, quod duae aequationes:

$U(x - x') + V(y - y') + W(z - z') = 0$ et $dU(x - x') + dV(y - y') + dW(z - z') = 0$,

quarum altera est plani osculi, altera differentiando respectu x, y, z ex illa derivata, quae aequationes ad lineam intersectionis duorum se invicem sequentium planorum osculi pertinent, cum aequationibus tangentis:

$$\frac{x - x'}{z - z'} = \frac{dx}{dz}, \qquad \frac{y - y'}{z - z'} = \frac{dy}{dz} \tag{8}$$

omnino idem valent. Facile enim perspicitur, quia $Udx + Vdy + Wdz = 0$ et $dUdx + dVdy + dWdz = 0$, quantitates $(VdW - WdV)$, $(WdU - UdW)$, $(UdV - VdU)$ esse ad rationem $dx : dy : dz$. Superficies igitur, quae e motu plani osculi oritur, eadem est, quam tangens se movendo describit; itaque pervenimus ad ejus aequationem in x', y', z', eliminando x, y, z ex aequationibus tangentis (8), in quibus $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ sunt functiones datae ipsarum x, y, z, et aequationibus curvae s. Curva repercussionis hujus superficiei manifesto curva s ipsa est.

§. 6. Adhuc superest superficies in planum explicabilis, quae e motu plani rectificantis (radio osculi normalis) oritur. Ejus aequatio secundum methodum saepius jam adhibitam facile invenitur differentiando aequationem plani rectificantis

$$(x - x')\,d\left(\frac{dx}{ds}\right) + (y - y')\,d\left(\frac{dy}{ds}\right) + (z - z')\,d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

respectu x, y, z, et eliminando deinde has quantitates ex duabus aequationibus inde ortis ope aequationum curvae s.

Curva repercussionis hujus superficiei nil notatione dignum habet, superficies ipsa vero singulari proprietate est. Si quidem eam in planum explicamus, curva s, quae in ea sita est, fit linea recta, unde etiam illud planum nomen suum habet. Quum enim hac ratione omnia plana rectificantia curvae s in unum incidant, ejus curvatura secundum radium osculi $d\sigma''$ pro omnibus ejus punctis fit $= 0$, unde sequitur, propter aequationem $d\sigma''^2 = d\sigma^2 + d\sigma'^2$, in hoc casu omnes tres curvaturas curvae evanescere ideoque curvam fieri lineam rectam.

§. 7. Nonnulla amplius afferre volumus de punctis singularibus curvae. Punctum curvae, in quo una ex ejus curvaturis vel omnes tres fiunt $= 0$, punctum inflexionis vocatur. Duo diversa genera sunt inflexionis curvae. Si tantum habemus $d\sigma' = 0$, curva, quum duo ejus plana osculi se invicem sequentia in unum incidant, in hoc puncto plana fit; tale punctum inflexionis simplicis vocatur. Si vero $d\sigma$ est $= 0$, duae tangentes curvae se invicem sequentes in unum incidunt, curva igitur in hoc puncto fit recta, quod punctum inflexionis duplicis nominabimus, videbimus enim in tali puncto $d\sigma'$ quoque fieri $= 0$.

Si problema nobis datum esset, ut punctum curvae determinaremus, quod esset punctum simplicis inflexionis, tantum oporteret explorari, in quonam puncto $d\sigma'$ fieret $= 0$. Haec vero aequatio conditionalis in simpliciorem formam redigi potest. Quum enim sit $d\sigma' = \sqrt{[d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2]}$, oportet esse $d\xi' = 0$, $d\eta' = 0$, $d\zeta' = 0$, quas aequationes idem valere cum his: $V\,dW - W\,dV = 0$, $W\,dU - U\,dW = 0$, substituendo pro ξ', η', ζ' respective $\frac{U}{S}$, $\frac{V}{S}$, $\frac{W}{S}$, facile colligitur. Utraque vero harum aequationum, substitutis pro U, V, W earum valoribus $(dyd^2z - dzd^2y)$, $(dzd^2x - dxd^2z)$, $(dxd^2y - dyd^2x)$, in sequentem transmutatur:

$$Ud^3x + Vd^3y + Wd^3z = 0.$$

Punctum curvae igitur, in quo haec aequatio locum habet, punctum simplicis inflexionis est. — Haec aequatio etiam, quum pro omnibus punctis curvae planae eam valere necesse sit, suppeditat nobis facultatem cognoscendi, num curva, cujus aequationes datae sunt, sit plana nec ne. — Si coordinata z ut argumentum ipsarum x et y spectatur, illa aequatio in simpliciorem hanc formam redigitur:

$$\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)\left(\frac{d^3y}{dz^3}\right) - \left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)\left(\frac{d^3x}{dz^3}\right) = 0.$$

Sitne punctum curvae punctum duplicis inflexionis, per aequationem $d\sigma = 0$ indicatur, quae, quum $d\sigma$ sit $= \frac{S}{ds^2}$ (§. 3), idem valet cum aequatione $S = 0$. Ex hac vero sequentes tres prodeunt:

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0,$$

quarum binae tertiam necessario requirunt. Per binas igitur harum aequationum punctum duplicis inflexionis determinatur, item ex iis cum aequatione $Ud^3x + Vd^3y + Wd^3z = 0$ comparatis sequitur, in tali puncto etiam $d\sigma'$ fieri $= 0$.

§. 8. Quum in curvis planis pro omnibus punctis $d\sigma'$ sit $= 0$, iis unam tantum curvaturam $d\sigma$ esse elucet, quam facile determinare possumus. Habemus enim:

$$d\sigma = \frac{ds}{r} \qquad \text{et} \qquad r = \frac{ds^3}{dxd^2y - dyd^2x},$$

igitur erit:

$$d\sigma = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{ds^2},$$

sive spectando x ut argumentum:

$$d\sigma = \frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Trium superficierum in planum explicabilium, quas in curvis dupliciter curvatis contemplati sumus, in curvis planis ad eam tantum respicere possumus, quae e motu plani normalis oritur. Quum hic normalia sint ad planum curvae omnia plana normalia ideoque omnes lineae polorum, manifesto illa superficies erit cylindrica, cujus basis est locus omnium centrorum curvaturae curvae (vide §. 4). — Punctum inflexionis curvae planae manifesto per aequationem: $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ indicatur. In tali puncto saepissime fit, ut curva plana convexitatem suam cum concavitate permutet; hoc enim ex eo cognoscitur, quod angulus, quem tangens curvae cum axe x format, vel maximum vel minimum suum attingit. Quum vero hujus anguli tangens trigonometrica sit $= \frac{dy}{dx}$, aequatio $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ indicium est ejus maximi vel minimi, nisi habemus etiam $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0$. Itaque in hoc solo casu, puta si $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0$, curva convexitatem suam in eodem latere retinebit.

CAP. V.

De evolventibus et evolutis curvae.

§. 1. Si filum in totam longitudinem curvae cuidam s affixum concipimus, et eo modo ab ea evolvimus, ut soluta ejus pars semper tangens curvae sit, quodcunque punctum hujus fili curvam describet, quam vulgo vocant evolventem curvae s, et vice versa curvam s illius curvae evolutam. Ex qua definitione facile deduci potest, tangentem talis evolventis tangentem curvae s ubique sub angulo recto secare. Denotando enim per λ partem solutam fili, cujus punctum extremum (x', y', z') evolventem describit, et per x, y, z coordinatas puncti, in quo hoc filum curvam s tangit, habemus:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = \lambda^2,$$

et differentiando hanc aequationem:

$$(x - x')(dx - dx') + (y - y')(dy - dy') + (z - z')(dz - dz') = \lambda d\lambda.$$

Ex ea conditione vero, quod soluta pars fili tangens curvae s sit, sequitur:

$$\frac{x - x'}{\lambda} = \frac{dx}{ds}, \quad \frac{y - y'}{\lambda} = \frac{dy}{ds}, \quad \frac{z - z'}{\lambda} = \frac{dz}{ds};$$

igitur aequatio modo inventa transit in hanc:

$$ds - \frac{dxdx' + dydy' + dzdz'}{ds} = d\lambda;$$

quum autem longitudo fili manifesto semper eadem quantitate crescat, atque arcus curvae a qua devolvitur, erit $d\lambda = ds$, itaque habemus:

$$dxdx' + dydy' + dzdz' = 0,$$

quod erat demonstrandum.

Quod quum ita se habeat, rem etiam generalius aggredi possumus. Concipiamus scilicet curvam, quae omnes tangentes curvae s sub angulo quolibet constanti ω secet. Ejusmodi curvam in universum nominare volumus evolventem curvae s, et vice versa curvam s illius evolutam, *) contra ea vero pro curvis, quae vulgo ita vocantur, nominibus evolventis orthogonalis et evolutae orthogonalis uti mihi permissum sit, facile enim perspicitur, has curvas tantum singulos casus esse illarum, ubi ω sit angulus rectus.

§. 2. Omnis curva (s) manifesto, non solum secundum diversos valores anguli ω, sed etiam eadem ejus amplitudine, innumeras habet evolventes, omnes vero in superficie sitas, quam tangens curvae se movendo describit. Determinemus aequationes unius evolventium curvae s.

Si ex aequationibus ejus tangentis

$$\frac{x - x'}{z - z'} = \frac{dx}{dz}, \qquad \frac{y - y'}{z - z'} = \frac{dy}{dz} \tag{1}$$

*) Clariss. Lancret, qui primus hanc rem tractavit (vide: Mémoires de l'Académie de Paris, an 1811), has curvas vocat Trajectoire et Developpoide; quum vero haec verba non apte in latinam linguam vertere potuerim, in his nominationibus ab usitato more discedere mihi liceat.

conjunctis cum aequationibus curvae s

$$\varphi\,(x, y, z) = 0, \qquad \psi\,(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

eliminamus x, y, z, obtinemus (vide Cap. IV §. 5) aequationem superficiei e motu tangentis ortae, in qua omnes evolventes curvae s jacent, quam aequationem in hac forma exhibere volumus:

$$F\,(x', y', z') = 0. \tag{3}$$

Ad determinandam igitur evolventem quandam curvae s una aequatio insuper requiritur, quam ex ea conditione deducere possumus, quod tangens evolventis cum tangenti curvae s ubique angulum ω formare debeat, unde prodit, statuendo $\sqrt{[dx'^2 + dy'^2 + dz'^2]} = ds'^2$:

$$dxdx' + dydy' + dzdz' = dsds'\cos\omega, \tag{4}$$

denotantibus x', y', z' coordinatas evolventis. Quodsi ex hac aequatione, in qua dx, dy, dz et ds sunt functiones ipsarum x, y, z, eliminamus x, y, z ope aequationum (1) et (2), nanciscimur aequationem differentialem inter x', y', z' et dx', dy', dz', quae integrata et conjuncta cum aequatione (3) unam ex evolventibus curvae s determinat, quae tangentes hujus curvae sub angulo ω secant. Ad quamnam harum evolventium aequationes pertineant, a valore constantis arbitrariae, quae integratione introducitur, pendet.

Pro evolventibus orthogonalibus aequatio (4) sine dubio transit in hanc:

$$dxdx' + dydy' + dzdz' = 0,$$

unde ratio modo exposita longe simplicior redditur.

Curvarum planarum evolventes omnes in plano curvae jacere, nullo negotio perspicitur; et ad inveniendam aequationem differentialem unius ex evolventibus sufficiunt aequationes:

$$\frac{x - x'}{y - y'} = \frac{dx}{dy}, \qquad dxdx' + dydy' = dsds'\cos\omega,$$

e quibus x et y ope aequationis curvae eliminantur.

§. 3. Exploremus jam, quo modo evolutam curvae cujusdam (s) invenire possimus. Evoluta curvae s manifesto est curva, cujus tangentes omnes curvam s sub angulo quodam constanti (ω) secant. Itaque si lineam rectam per punctum curvae s transeuntem ita in longitudinem hujus curvae movemus, ut angulus ω, quem cum tangenti curvae formet, semper idem maneat, linea vero se in duabus se invicem sequentibus positionibus secet et eo modo superficiem in planum explicabilem describat, curva repercussionis hujus superficiei evoluta curvae s erit. Quum per idem punctum curvae s innumeras lineas concipere liceat, quae cum tangenti hujus curvae eundem angulum forment, innumeras esse evolutas curvae s, quae eidem angulo respondeant, facile intelligitur. Pro diversis igitur valoribus anguli ω numerus evolutarum cujusque curvae, pariter atque evolventium, infinitus erit in secundo ordine.

Contemplemur nunc ante omnia superficiem, in qua evolutae curvae s eidem angulo ω respondentes jacent, quam superficiem evolutarum vocare volumus. Quum omnes rectae per idem punctum (x, y, z) curvae s transeuntes, quarum motu hae evolutae describuntur, in superficie conica cum basi circulari jaceant, cujus axis est tangens curvae s et cujus linea lateralis cum axe angulum ω format, superficies evolutarum manifesto erit superficies involvens talis superficiei conicae, si haec in longitudinem curvae s moveatur. Inde aequatio superficiei evolutarum deduci potest; denotatis enim coordinatis cujuslibet puncti superficiei conicae per x', y', z', ejus aequationem inveniemus, ut facile perspicitur, eliminando ex aequationibus:

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = r^2,$$

$$(x-x')\frac{dx}{ds} + (y-y')\frac{dy}{ds} + (z-z')\frac{dz}{ds} = r\cos\omega,$$

quae ad circulum basi parallelum superficiei conic. pertinent, quantitatem r, unde prodit:

$$\cos^2\omega\,[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2] - \left[(x-x')\frac{dx}{ds}+(y-y')\frac{dy}{ds}+(z-z')\frac{dz}{ds}\right]^2 = 0. \quad (5)$$

Differentiando jam hanc aequationem respectu x, y, z nanciscimur:

$$\cos^2\omega\,[(x-x')\,dx + (y-y')\,dy + (z-z')\,dz]$$

$$-\left[(x-x')\frac{dx}{ds}+(y-y')\frac{dy}{ds}+(z-z')\frac{dz}{ds}\right]\left[(x-x')d\left(\frac{dx}{ds}\right)+(y-y')d\left(\frac{dy}{ds}\right)+(z-z')d\left(\frac{dz}{ds}\right)+ds\right]=0,$$

quae aequatio conjuncta cum (5) ad curvam intersectionis duarum se invicem sequentium superficierum conicarum pertinet. Hanc aequationem vero in hos duos factores resolvere licet:

$$(x-x')\,dx + (y-y')\,dy + (z-z')\,dz = 0$$

$$\text{et } (x-x')\,d\left(\frac{dx}{ds}\right) + (y-y')\,d\left(\frac{dy}{ds}\right) + (z-z')\,d\left(\frac{dz}{ds}\right) + ds\sin^2\omega = 0, \quad (6)$$

quorum prior cum aequatione (5) comparatus punctum (x, y, z) curvae s determinat, unde sequitur, aequationem (6) proprie ad illam curvam intersectionis, quae characteristica superficiei evolutarum est, pertinere. Eliminando igitur ex aequationibus (5), (6) et (2) quantitates x, y, z, obtinemus in x', y', z' aequationem superficiei evolutarum.

§. 4. Quum quantitates $d(\frac{dx}{ds})$, $d(\frac{dy}{ds})$, $d(\frac{dz}{ds})$ sint ad rationem determinantium radii osculi, aequatio (6) manifesto est aequatio plani, quod radio osculi normale. Itaque characteristica superficiei evolutarum, quae est linea intersectionis hujus plani cum superficie conica (5), hyperbola erit, cujus planum plano osculi curvae s normale, cujus axis principalis ejus tangenti parallelus et cujus centrum est punctum intersectionis radii osculi cum plano (6). — Distantia hujus plani a puncto (x, y, z) et duo axes hyperbolae pro quoque puncto curvae s facile determinari possunt. Denotando enim radium osculi curvae s per R et ejus determinantes per ξ'', η'', ζ'', aequatio (6), quia $R = \frac{ds}{\sqrt{\left[d(\frac{dx}{ds})^2 + d(\frac{dy}{ds})^2 + d(\frac{dz}{ds})^2\right]}}$ (vide Cap. IV §. 3), abit in hanc:

$$(x - x')\xi'' + (y - y')\eta'' + (z - z')\zeta'' + R\sin^2\omega = 0, \qquad (7)$$

unde elucet, distantiam plani hyperbolae a puncto (x, y, z) esse $= R\sin^2\omega$. Transformando nunc axium systema, ita ut initium coordinatarum sit punctum (x, y, z), axis x sit tangens curvae s pro hoc puncto, et ejus planum osculi accipiatur pro plano principali (zx), aequationes hyperbolae (5) et (7), ut facile perspicitur, transeunt in has:

$$\cos^2\omega\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) - x'^2 = 0, \qquad z' - R\sin^2\omega = 0, \qquad (8)$$

unde prodit aequatio hyperbolae ad ejus planum relata:

$$\sin^2\omega\, x^2 - \cos^2\omega\, y^2 - R^2\cos^2\omega\sin^4\omega = 0,$$

itaque ejus semiaxis major $= R\sin\omega\cos\omega$, ejus semiaxis minor $= R\sin^2\omega$.

Puncto cuilibet (x, y, z) curvae s manifesto in quaque ejus evolutarum punctum quoddam (x', y', z') respondet, et numerus horum punctorum, eidem puncto curvae s respondentium, infinitus erit in secundo ordine. Ea puncta, quae ad evolutas eidem angulo ω respondentes pertineant, in hyperbola jacere, cujus sunt aequationes (8), modo vidimus. Itaque si ex aequationibus (8) eliminamus angulum ω, unde prodit aequatio:

$$z'(x'^2 + y'^2 + z'^2) = R(y'^2 + z'^2),$$

quae ad variabile axium systema curvae s relata est, haec aequatio sine dubio ad superficiem pertinebit, in qua puncta omnium evolutarum curvae s puncto (x, y, z) respondentia jacent. Quodsi hanc superficiem plano quodam per tangentem curvae s transeunte et sub angulo arbitrario (θ) ad planum osculi inclinato secamus, linea intersectionis semper est circulus, cujus diameter $= R \sec\theta$. Accipiendo enim hoc planum pro plano principali (xz) et denotando novas coordinatas per $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, habemus $x' = \bar{x}$, $y' = \bar{y}\cos\theta + \bar{z}\sin\theta$, $z' = -\bar{y}\sin\theta + \bar{z}\cos\theta$, igitur aequatio superficiei mutatur in hanc:

$$(\bar{z}\cos\theta - \bar{y}\sin\theta)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2) = R(\bar{y}^2 + \bar{z}^2),$$

cui si conjungimus aequationem illius plani $\bar{y} = 0$, nanciscimur:

$$\bar{x}^2 + \bar{z}^2 = \bar{z}\, R \sec\theta,$$

quae est aequatio ejusmodi circuli. Illam superficiem ergo geometrice construere possumus jungendo omnia puncta lineae polorum curvae s, quae puncto (x, y, z) respondet, cum hoc puncto per lineas rectas, et ducendo super quamque harum rectarum velut diametrum circulum in plano per tangentem curvae s transeunti; tunc omnes hi circuli conjuncte illam superficiem formabunt.

§. 5. Aggrediamur jam ad quaerendas aequationes singularis cujusdam evolutae, cujus tangentes curvam s sub angulo ω secant. Aequationem superficiei, in qua omnes hae evolutae jaceant, invenire jam docuimus §. 3, igitur una sola aequatio amplius requiritur, quae inde potissimum derivari potest, quod omnis tangens evolutae per punctum curvae s transire debet, unde prodeunt aequationes:

$$\frac{dx'}{dz'} = \frac{x - x'}{z - z'}, \qquad \frac{dy'}{dz'} = \frac{y - y'}{z - z'}, \tag{9}$$

denotantibus x', y', z' coordinatas evolutae.

Eliminando e quatuor quibuslibet aequationum (9), (5), (6) et (2) quantitates x, y, z, pervenimus ad aequationem differentialem inter x', y', z', quae integrata et conjuncta cum aequatione superficiei evolutarum unam ex evolutis determinat. Ad quamnam unam evolutam aequatio pertineat, a determinanda quantitate constanti per integrationem introducta pendet.

Quum vero hac ratione saepissime aequationem differentialem obtineamus, quae integrationem vel omnino non admittit, vel tantum adhibitis difficillimis transformationibus, alteram etiam methodum evolutae determinandae afferre volumus, in qua explicanda simul relationes, quae inter curvaturas curvae s et ejus evolutae locum habeant, detegemus.

Sine dubio evolutam considerare licet tamquam curvam repercussionis superficiei, quam ejus planum osculi se movendo describit, et proinde ejus aequationes secundum methodum capitis **II.** §. 6 ex aequatione hujus plani deducere possumus. Quum vero planum osculi evolutae, ut facile intelligi potest, per tangentem curvae s transeat, ejus determinantes respectu variabilis axium systematis curvae s, denotato angulo, quem cum plano osculi hujus curvae format, per θ, erunt: 0, $\cos\theta$, $-\sin\theta$; itaque ejus determinantes respectu principalis axium systematis, salvis denotationibus capitis IV §. 1, hos valores habebunt:

$$(\xi'\cos\theta - \xi''\sin\theta), \qquad (\eta'\cos\theta - \eta''\sin\theta), \qquad (\zeta'\cos\theta - \zeta''\sin\theta),$$

et aequatio illius plani erit:

$$(\xi'\cos\theta - \xi''\sin\theta)(x - x') + (\eta'\cos\theta - \eta''\sin\theta)(y - y') + (\zeta'\cos\theta - \zeta''\sin\theta)(z - z') = 0, \quad (10)$$

significantibus x', y', z' coordinatas cujuslibet ejus puncti.

Quodsi jam hac aequatione ad inveniendas aequationes evolutae uti volumus, etiam angulum θ velut functionem ipsarum x, y, z determinemus oportet.

Designemus ad hunc finem determinantes tangentis curvae s, ejus plani osculi et radii osculi ut antea respective per ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'; ξ'', η'', ζ'', et easdem quantitates ad evolutam spectantes per $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$; $\bar{\xi}'$, $\bar{\eta}'$, $\bar{\zeta}'$; $\bar{\xi}''$, $\bar{\eta}''$, $\bar{\zeta}''$, determinantes vero horum axium respectu illorum (sive variabilis axium systematis evolutae respectu variabilis axium systematis curvae s) in punctis respondentibus ambarum curvarum per α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ''; tunc quantitates α, β, γ; etc. per angulos ω et θ, quorum alterum tangentes curvae s et evolutae formant, alterum earum plana osculi, determinari possunt. Ex Introd. art. 12 enim elucet esse:

$$\left.\begin{array}{lll}\alpha = \cos\omega, & \beta = \sin\omega\,\sin\theta, & \gamma = \sin\omega\,\cos\theta,\\ \alpha' = 0, & \beta' = \cos\theta, & \gamma' = -\sin\theta,\\ \alpha'' = -\sin\omega, & \beta'' = \cos\omega\,\sin\theta, & \gamma'' = \cos\omega\,\cos\theta,\end{array}\right\}(11)$$

item habemus aequationes (Introd. art. 5.):

$$\left.\begin{array}{l}\bar\xi = \alpha\xi + \beta\xi' + \gamma\xi'', \quad \bar\xi' = \alpha'\xi + \beta'\xi' + \gamma'\xi'', \quad \bar\xi'' = \alpha''\xi + \beta''\xi' + \gamma''\xi'',\\ \bar\eta = \alpha\eta + \beta\eta' + \gamma\eta'', \quad \bar\eta' = \alpha'\eta + \beta'\eta' + \gamma'\eta'', \quad \bar\eta'' = \alpha''\eta + \beta''\eta' + \gamma''\eta'',\\ \bar\zeta = \alpha\zeta + \beta\zeta' + \gamma\zeta'', \quad \bar\zeta' = \alpha'\zeta + \beta'\zeta' + \gamma'\zeta'', \quad \bar\zeta'' = \alpha''\zeta + \beta''\zeta' + \gamma''\zeta'',\\ \text{quarum differentiatio suppeditat:}\\ d\bar\xi = \alpha d\xi + \beta d\xi' + \gamma d\xi'' + \xi d\alpha + \xi' d\beta + \xi'' d\gamma,\\ \qquad\text{etc.}\qquad\text{etc.}\\ d\bar\xi' = \alpha' d\xi + \beta' d\xi' + \gamma' d\xi'' + \xi d\alpha' + \xi' d\beta' + \xi'' d\gamma',\\ \qquad\text{etc.}\qquad\text{etc.}\\ d\bar\xi'' = \alpha'' d\xi + \beta'' d\xi' + \gamma'' d\xi'' + \xi d\alpha'' + \xi' d\beta'' + \xi'' d\gamma'',\\ \qquad\text{etc.}\qquad\text{etc.}\end{array}\right|(12)$$

Denotando jam curvaturas curvae (s) per $d\sigma$ et $d\sigma'$, curvaturas evolutae per $d\bar\sigma$ et $d\bar\sigma'$, secundum Cap. IV. §. 3 erit:

$$(\xi' d\xi'' + \eta' d\eta'' + \zeta' d\zeta'') = -(\xi'' d\xi' + \eta'' d\eta' + \zeta'' d\zeta') = L = d\sigma',$$
$$(\xi'' d\xi + \eta'' d\eta + \zeta'' d\zeta) = -(\xi d\xi'' + \eta d\eta'' + \zeta d\zeta'') = M = d\sigma,$$
$$(\xi d\xi' + \eta d\eta' + \zeta d\zeta') = -(\xi' d\xi + \eta' d\eta + \zeta' d\zeta) = N = 0,$$

$$(\bar\xi' d\bar\xi'' + \bar\eta' d\bar\eta'' + \bar\zeta' d\bar\zeta'') = -(\bar\xi'' d\bar\xi' + \bar\eta'' d\bar\eta' + \bar\zeta'' d\bar\zeta') = \bar L = d\bar\sigma',$$
$$(\bar\xi'' d\bar\xi + \bar\eta'' d\bar\eta + \bar\zeta'' d\bar\zeta) = -(\bar\xi d\bar\xi'' + \bar\eta d\bar\eta'' + \bar\zeta d\bar\zeta'') = \bar M = d\bar\sigma,$$
$$(\bar\xi d\bar\xi' + \bar\eta d\bar\eta' + \bar\zeta d\bar\zeta') = -(\bar\xi' d\bar\xi + \bar\eta' d\bar\eta + \bar\zeta' d\bar\zeta) = \bar N = 0.$$

Quodsi in hisce formulis pro $\bar L$, $\bar M$, $\bar N$ loco determinantium $\bar\xi$, $\bar\eta$, $\bar\zeta$; etc. earumque differentialium substituimus eorum valores ex aequationibus (12), nanciscimur, respiciendo ad aequationes: $\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta = 0$, etc. et $\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'' = \alpha$, $\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'' = \beta$, etc. (Introd. art. 7):

$$\bar L = d\bar\sigma' = \beta d\sigma + \alpha d\sigma' + \alpha' d\alpha'' + \beta' d\beta'' + \gamma' d\gamma'',$$
$$\bar M = d\bar\sigma = \beta' d\sigma + \alpha' d\sigma' + \alpha'' d\alpha + \beta'' d\beta + \gamma'' d\gamma,$$
$$\bar N = 0 = \beta'' d\sigma + \alpha'' d\sigma' + \alpha d\alpha' + \beta d\beta' + \gamma d\gamma';$$

et substituendo in his aequationibus pro α β, γ; etc. earum valores ex (12), ubi in evolvendis differentialibus $d\alpha$, $d\beta$, etc. ω velut constans spectatur, nullo negotio producimus:

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma}' &= \sin\omega \sin\theta d\sigma + \cos\omega d\sigma' + \cos\omega d\theta, \\ d\bar{\sigma} &= \cos\theta d\sigma, \\ 0 &= \cos\omega \sin\theta d\sigma - \sin\omega d\sigma' - \sin\omega d\theta. \end{aligned}$$

Quantitas $d\theta$ ope tertiae aequationis e prima eliminari potest, qua ratione obtinemus:

$$d\bar{\sigma}' = \frac{\sin\theta}{\sin\omega} d\sigma, \qquad d\bar{\sigma} = \cos\theta d\sigma, \qquad d\theta = \cot g\,\omega \sin\theta d\sigma - d\sigma'. \tag{13}$$

Jam per duas priores harum aequationum relationes, quae inter curvaturas curvae s et ejus evolutae locum habeant, nobis datae sunt, et tertia est aequatio differentialis inter θ et x, y, z, cujus ope, quoties integrabilis est, θ velut functionem ipsarum x, y, z determinare licet. Tunc substituto hoc valore pro θ in aequatione (10), hanc bis differentiare debemus respectu x, y, z, et deinde eliminare has quantitates ex aequationibus inde ortis, quo modo pervenimus (vide cap. II §. 6) ad aequationes cum superficiei, quae e motu plani (10) oritur, tum ejus curvae repercussionis, quae una ex evolutis curvae s est. Jam vero per aequationem illius superficiei conjunctam cum aequatione superficiei evolutarum (§. 3) evoluta nobis determinata est.

Formula (13) pro $d\theta$ in universum non integrabilis est, nisi curva s sit plana ideoque $d\sigma' = 0$, in quo casu habemus $\frac{d\theta}{\sin\theta} = \cot g\,\omega d\sigma$; itaque quum in curvis planis $d\sigma = \dfrac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ (vide cap. IV §. 8), integrando nanciscimur:

$$\log.\ nat.\ \cot g\frac{\theta}{2} = \cot g\,\omega\ Arc.\ tg\left(\frac{dy}{dx}\right) + Const.$$

In curvis dupliciter curvatis igitur ad methodum prius expositam refugere debemus.

§. 6. Contemplemur nunc eum casum, ubi $\omega = 90°$ ideoque superficies evolutarum est locus omnium evolutarum orthogonalium curvae s. Tunc aequationes (5) et (6), quae ad characteristicam hujus superficiei pertinent, abeunt in has:

$$\left.\begin{aligned}(x-x')\frac{dx}{ds}+(y-y')\frac{dy}{ds}+(z-z')\frac{dz}{ds}&=0\\ \text{et }(x-x')\,d\left(\frac{dx}{ds}\right)+(y-y')\,d\left(\frac{dy}{ds}\right)+(z-z')\,d\left(\frac{dz}{ds}\right)+ds&=0,\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

quarum altera est aequatio plani normalis curvae s, altera per differentiationem respectu x, y, z ex illa orta. Itaque in hoc casu hyperbola illa, quae characteristica superficiei evolutarum erat, mutatur in lineam polorum, et superficies ipsa, in qua omnes evolutae orthogonales curvae s jacent, et cujus aequationem obtinemus eliminando x, y, z ex aequationibus (14) et (2), est superficies in planum explicabilis, quae e motu plani normalis oritur.

In curvis planis ergo locus omnium evolutarum orthogonalium est superficies cylindrica, plano curvae normalis. Hujus superficiei basis sive linea intersectionis cum plano curvae, quam evolutam curvae esse patet, simul est locus omnium centrorum curvaturae, haec enim in superficie e motu plani normalis orta jacent (vide cap. IV §. 4). In curvis dupliciter curvatis curva, quae locus omnium centrorum curvaturae est, minime ad evolutas curvae pertinet, quia radii osculi curvae dupliciter curvatae, ut facile intelligitur, non superficiem in planum explicabilem formant.

Quod ad inveniendas aequationes unius evolutarum orthogonalium attinet, omnia, quae in §. praec. de evolutis in universum exposuimus, etiam hic valent. Aequationes (13), ponendo $\omega = 90°$, transeunt in has:

$$d\sigma' = \sin\vartheta\, d\sigma, \quad d\bar{\sigma} = \cos\vartheta\, d\sigma, \quad d\theta = -\,d\sigma'.$$

In curvis planis igitur $d\theta = 0$ et $\theta = Const.$, unde sequitur, omnia plana osculi alicujus evolutae orthogonalis curvae planae cum plano hujus curvae eundem angulum formare.

Priusquam ab hac re discedimus, ad afferendum exemplum, etsi modo ad singularem casum spectans, determinemus secundum methodum expositam aequationes unius evolutarum orthogonalium parabolae. Differentiando ejus aequationem:

$$y^2 = 2px, \tag{15}$$

nanciscimur: $dx : dy = y : p$, igitur aequatio plani normalis erit:

$$(x-x')\,y + (y-y')\,p = 0, \tag{16}$$

cujus differentiatio respectu y suppeditat:

$$\frac{y^2}{p} + p + (x - x') = 0. \tag{17}$$

Aequationes (16) et (17) jam ad unam ex lineis polorum parabolae pertinent: igitur si ex iis cum aequatione (15) comparatis eliminamus x et y, aequatio inde prodiens:

$$y'^2 = \frac{8}{27p}(x' - p)^3 \tag{18}$$

superficiei cylindricae est, in qua omnes evolutae orthogonales parabolae jacent, sive statuto $z' = 0$, aequatio ejus evolutae, quae basis hujus superficiei cylindricae est. Eandem etiam aequationem nanciscimur inter coordinatas centri curvaturae parabolae a et b (vide cap. III §. 10), eliminando ex aequationibus $a = p + 3x$, $b = -\frac{y^3}{p}$ ope aequationis (15) quantitates x et y.

Ad inveniendam aliam quamlibet evolutarum orthogonalium parabolae, secundum methodum priorem §. 5 eliminare debemus x et y ex aequationibus:

$$\frac{dx'}{dz'} = \frac{x' - x}{z'} \quad \text{et} \quad \frac{dy'}{dz'} = \frac{y' - y}{z'} \tag{19}$$

adjumento aequationum (15), (16) et (17). Ex (15) et (17) vero deducitur: $x = \frac{x' - p}{3}$, et substituendo hunc valorem pro x in priori aequationum (19) obtinemus:

$$\frac{dx'}{dz'} = \frac{2x' + p}{3z'} \quad \text{sive} \quad \frac{dx'}{2x' + p} = \frac{dz'}{3z'},$$

unde per integrationem prodit: $\frac{1}{2} log(2x' + p) = \frac{1}{3} log z' + Const.$ Denotato jam valore coordinatae z', qui valori p ipsius x respondet, per c, $Const.$ fit $= \frac{1}{2} log 3p - \frac{1}{3} log c$, itaque pervenimus ad hanc aequationem:

$$\left(\frac{2x' + p}{3p}\right)^3 = \left(\frac{z'}{c}\right)^2 \tag{20}$$

quae conjuncta cum aequatione (18) quamlibet evolutarum orthogonalium parabolae nobis determinat, prout alium vel alium valorem pro c accipimus.

Exhibitis aequationibus (18) et (20) sub hac forma:

$$x' = \frac{3p}{2}\left(\frac{z'}{c}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{p}{2}, \qquad y' = p\left[\left(\frac{z'}{c}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]^{\frac{3}{2}},$$

differentiando nanciscimur:

$$dx = \frac{p}{c^{\frac{2}{3}}} z^{-\frac{1}{3}}, \quad d^2x' = -\frac{p}{3c^{\frac{2}{3}}} z'^{-\frac{4}{3}}, \quad dy' = \frac{p}{c^{\frac{2}{3}}}\left[\left(\frac{z'}{c}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]^{\frac{1}{2}} z'^{-\frac{1}{3}},$$

$$d^2y = \frac{p}{3c^{\frac{2}{3}}}\left[\left(\frac{z'}{c}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} z'^{-\frac{4}{3}}$$

ideoque (vide cap. III §. 8):

$$W = dx'd^2y' - dy'd^2x' = \frac{p^2}{3c^2z'}\left[\left(\frac{z'}{c}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} \text{ et } S = \frac{p}{3c^2z'}\sqrt{(p^2 + c^2)}\left[\left(\frac{z'}{c}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Igitur determinans ζ plani osculi evolutae fit $= \frac{p}{\sqrt{(p^2+c^2)}}$, unde sequitur, planum osculi alicujus evolutae orthogonalis parabolae cum plano hujus curvae angulum constantem formare, cujus cosinus $= \frac{p}{\sqrt{(p^2+c^2)}}$.

CAP. VI.

De elemento superficiei, de plano tangenti et de contactu duarum superficierum.

§. 1. Transeamus nunc ad superficies, in quibus contemplandis eandem viam ingredi nobis proposuimus, quam in tractatione curvarum persecuti sumus. Primum igitur superficiei elemento determinando occupemur.

Superficiem infinite variis rationibus in elementa divisam fingere possumus. Hoc enim efficitur, quoties series curvarum, quae infinite paulo invicem distantes in superficie ductae sunt, ab altera talium curvarum serie secantur. Plerumque hae curvae ita accipiuntur, ut altera series earum sint lineae intersectionis superficiei cum planis plano principali (zx) parallelis, altera ejus lineae intersectionis cum planis plano princ. (yz) parallelis. Rem vero generaliter tractare licet, si superficiem per tres aequationes ita exhibitas:

$$x = \varphi(t,\theta), \quad y = \psi(t,\theta), \quad z = f(t,\theta),$$

nobis datam ponimus, tunc enim spectando vel t vel θ velut constantem et tribuendo iis deinceps omnes valores inter $+\infty$ et $-\infty$, totam superficiem in duo systemata curvarum dividi posse, jam supra (Cap. I. §. 7) vidimus; et elementa, quae ab iis formantur, diversi generis erunt, prout quantitatibus t et θ alias vel alias significationes tribuimus. Consideremus nunc elementum superficiei, quod a duabus curvis se invicem sequentibus primi systematis et secundi systematis describitur.

Si curvam primi systematis, ubi θ ut constans spectatur, designamus per s, curvam secundi systematis, ubi t constans est, per σ, illud elementum tamquam infinite parvum parallelogrammum considerare licet, cujus latera sint ds et $d\sigma$. Ejus aream proinde invenimus multiplicando productum ipsorum ds et $d\sigma$ per sinus anguli ω, quem haec latera formant. Ex aequationibus vero differentialibus superficiei ita exhibitis:

$$dx = adt + a'd\theta, \qquad dy = bdt + b'd\theta, \qquad dz = cdt + c'd\theta$$

facile deducitur esse:

$$ds = dt\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)} \qquad \text{et} \qquad d\sigma = d\theta\sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)},$$

et quum angulus ω idem sit, quem tangentes curvarum s et σ ad punctum, in quo elementum jacet, ductae formant, determinantes vero tangentis curvae s sint ad rationem $a : b : c$, curvae σ ad rationem $a' : b' : c'$, pro $\sin\omega$ habebimus formulam (Introd. art. 5):

$$\frac{\sqrt{[(bc'-cb')^2 + (ca'-ac')^2 + (ab'-ba')^2]}}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2)}},$$

itaque elementum superficiei erit $=$

$$dtd\theta\sqrt{[(bc'-cb')^2 + (ca'-ac')^2 + (ab'-ba')^2]}. \qquad \text{(A)}$$

Ponamus jam, superficiem nobis datam esse per ejusmodi aequationem $z = \varphi(x, y)$, cui respondet, statuto $\overset{x}{dz} = p$ et $\overset{y}{dz} = q$, aequatio differentialis:

$$dz = p dx + q dy.$$

Hunc manifesto pro casu singulari habere licet, ubi sit $t = x$ et $\theta = y$, unde pro differentialibus particularibus a, b, c, a', b', c' hi valores prodeunt:

$$a = 1, \quad a' = 0, \quad b = 0, \quad b' = 1, \quad c = p, \quad c' = q,$$

quibus substitutis in (A), formula pro elemento superficiei transit in hanc:

$$dx dy \sqrt{[1 + p^2 + q^2]}. \tag{B}$$

Elementum, quod huic formulae respondeat, a quatuor lineis intersectionis describi, quas superficies cum planis plano (yz) et plano (zx) parallelis formet, facile intelligitur; pro illis curvis enim respective vel x vel y constans est.

Si aequatio superficiei in hac forma exhibita est: $\varphi(x, y, z) = u = 0$, prodit aequatio differentialis:

$$\overset{x}{du}\, dx + \overset{y}{du}\, dy + \overset{z}{du}\, dz = 0 \quad \text{sive} \quad dz = -\frac{\overset{x}{du}}{\overset{z}{du}}\, dx - \frac{\overset{y}{du}}{\overset{z}{du}}\, dy;$$

in hoc casu igitur p et q hos valores obtinent:

$$p = -\frac{\overset{x}{du}}{\overset{z}{du}}, \qquad q = -\frac{\overset{y}{du}}{\overset{z}{du}},$$

quorum substitutio formulam (B) in hanc transmutat:

$$\frac{dx\, dy}{\overset{z}{du}} \sqrt{[\overset{x}{du}^2 + \overset{y}{du}^2 + \overset{z}{du}^2]}. \tag{C}$$

§. 2. Si nobis data est formula pro elemento superficiei, per ejus integrationem aream cujuslibet partis superficiei, a quatuor illarum curvarum, quae eam in elementa dividunt, conclusae, determinari licet. Hic vero id respiciendum est, ut talis formula dupliciter integretur, respectu utriusque variabilis t et θ vel x et y, intra limites, qui curvis superficiei circumscriptis respondent. Integrando enim e. g. respectu ipsius t, ubi θ et $d\theta$ ut constantes spectantur, nanciscimur summam omnium elementorum, quae certo cuidam valori ipsius θ respondent, sive, ut ita dicam, virgam superficiei, quae a duabus se invicem sequentibus curvis s includitur; tunc per integrationem respectu θ summa omnium harum virgarum colligitur, quae conjunctae superficiem formant. — Formula generalis (A) in plurimis casibus formulis (B) et (C) anteferenda est, quia nobis facultatem dat, ut quantitates t et θ commodissime ad integrationem eligamus.

Ad rem melius explanandam consideremus e. g. superficiem in cap. praec. §. 4 descriptam, cujus aequatio erat:

$$z(x^2 + y^2 + z^2) = R(y^2 + z^2).$$

Hic quantitatibus t et θ potissimum eas significationes tribuemus, ut t sit angulus inter radium vectorem r et axem x, θ vero angulus, quem radius vector in planum (y,z) projectus cum axe z format; tunc coordinatae x, y, z obtinent hos valores:

$$x = r\cos t, \qquad y = r\sin t\sin\theta, \qquad z = r\sin t\cos\theta,$$

quibus substitutis in aequatione proposita nanciscimur: $r = \dfrac{R\sin t}{\cos\theta}$, unde tres aequationes superficiei fiunt:

$$x = \frac{R\sin t\cos t}{\cos\theta}, \qquad y = R\sin^2 t\, tg\,\theta, \qquad z = R\sin^2 t.$$

Differentiando jam has aequationes respectu t et θ, pro a, b, c, a', b', c' nanciscimur formulas:

$$a = \frac{R\cos 2t}{\cos\theta}, \qquad b = \frac{R\sin 2t\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad c = R\sin 2t,$$

$$a' = \frac{R\sin 2t\sin\theta}{2\cos^2\theta}, \qquad b' = \frac{R\sin^2 t}{\cos^2\theta}, \qquad c' = 0,$$

quarum substitutio in (A) pro elemento illius superficiei hanc formulam suppeditat:

$$R^2\, dt\, d\theta \frac{\sin^2 t}{\cos^3\theta}.$$

Curvae s, pro quibus θ constans est, in hoc casu manifesto sunt lineae intersectionis superficiei cum planis per axem x transeuntibus; curvae σ vero, pro quibus t (ideoque z) constans, ejus lineae intersectionis cum planis plano (xy) parallelis. Integrando igitur formulam modo inventam, aream cujuslibet partis superficiei a quatuor ejusmodi curvis conclusae invenire licet. Integratio illius formulae respectu t, ubi θ et $d\theta$ velut constantes spectantur, suppeditat:

$$\frac{R^2 d\theta}{\cos^2\theta}\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right),$$

et integrando etiam respectu θ nanciscimur:

$$\frac{R^2}{2}\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+log.\,nat.\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)\right).$$

Si e. g. area totius superficiei determinanda sit, hoc integrale primo sumi oporteat a $t = 0$ usque ad $t = 360°$, ubi fit $=$

$$\frac{R^2\pi}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+log.\,nat.\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)\right),$$

et deinde a $\theta = -90°$ usque ad $\theta = +90$, in quo casu evadit infinite magnum.

Eadem ratione e. gr. quaeque superficiei sphaericae pars, quae a duobus meridianis et duobus circulis parallelis circumscripta est, facillime invenitur, statuendo aequationes superficiei sphaericae in hac forma:

$$x = r\cos t\cos\theta, \quad y = r\cos t\sin\theta, \quad z = r\sin t,$$

r denotante ejus radium.

§. 3. Per datum alicujus superficiei punctum (x, y, z) innumerae curvae in ea duci possunt, quarum tangentes, ut facile demonstrare licet, omnes in eodem plano jacent. Ponamus enim aequationem differentialem superficiei esse:

$$\overset{x}{du}\,dx + \overset{y}{du}\,dy + \overset{z}{du}\,dz = 0; \qquad \text{(D)}$$

tunc etiam pro quacunque illarum curvarum haec aequatio valeat oportet. Itaque si lineam per punctum (x, y, z) transeuntem concipimus, cujus determinantes sint ad rationem $\overset{x}{du} : \overset{y}{du} : \overset{z}{du}$, hanc lineam cum tangentibus omnium illarum curvarum ad punctum (x, y, z) ductis angulos rectos formare, ex aequat. (D) statim sequitur; omnes igitur hae tangentes in plano ad illam lineam normali sitae erunt.

Hoc planum, quod manifesto superficiem in puncto (x, y, z) tangit, ejus planum tangens vocatur, et linea ei normalis, cujus determinantes sunt ad rationem:

$$\overset{x}{du} : \overset{y}{du} : \overset{z}{du},$$

superficiei **normalis**; plani tangentis aequatio igitur erit:

$$(x - x')\overset{x}{du} + (y - y')\overset{y}{du} + (z - z')\overset{z}{du} = 0,$$

denotantibus x', y', z' coordinatas cujuslibet ejus puncti.

Si aequatio differentialis superficiei ita exhibita est:

$$dz = pdx + qdy,$$

jam in §. 1 invenimus esse: $p = -\dfrac{\overset{x}{du}}{\overset{z}{du}}$, $q = -\dfrac{\overset{y}{du}}{\overset{z}{du}}$, ergo in hoc casu determinantes **normalis** superficiei erunt ad rationem $p : q : -1$, et aequatio plani tangentis fit:

$$(x - x')p + (y - y')q - (z - z') = 0.$$

Quum denotando per ξ, η, ζ determinantes normalis habeamus $\zeta = \dfrac{\overset{z}{du}}{\sqrt{(\overset{x}{du}^2 + \overset{y}{du}^2 + \overset{z}{du}^2)}}$ $= \dfrac{-1}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$, formulas (B) et (C) (§. 1) pro elemento superficiei etiam in hac forma exhiberi licet:

$$\frac{dx\,dy}{\zeta}.$$

Ponamus denique superficiem nobis datam esse per tres aequationes tales: $x = \varphi(t,\theta)$, $y = \psi(t,\theta)$, $z = f(t,\theta)$, quibus respondent aequationes differentiales:

$$dx = adt + a'd\theta,\quad dy = bdt + b'd\theta,\quad dz = cdt + c'd\theta;$$

tunc planum tangens duas tangentes curvarum s et σ, pro quibus respective vel θ vel t constans, contineat oportet, quarum tangentium determinantes pro curva s sunt ad rationem $a : b : c$, pro curva σ ad rationem $a' : b' : c'$. Itaque determinantes **plani tangentis** sive **normalis** superficiei erunt ad rationem (Introd. art. 7):

$$(bc' - cb') : (ca' - ac') : (ab' - ba').$$

§. 4. Aggrediamur jam ad contemplandum contactum duarum superficierum in universum, quem secundum eadem principia atque contactum duarum curvarum investigare volumus.

Si duae superficies, quarum coordinatas respective per x, y, z et x', y', z' designabimus, in puncto quodam se tangunt, pro hoc puncto sine dubio erit:

$x = x'$, $y = y'$, $z = z'$. Itaque si ponimus superficies illas nobis datas esse per aequationes: $z = \varphi(x,y)$ et $z' = \varphi'(x',y')$, et fingimus in iis duo puncta prope punctum contactus sita, quorum coordinatae respective sint $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ et $x' + \Delta x'$, $y' + \Delta y'$, $z' + \Delta z'$, et quae aequalibus valoribus ipsarum Δx, Δy et $\Delta x'$, $\Delta y'$ respondeant, distantia horum punctorum erit $= (\Delta z - \Delta z')$. A valore hujus quantitatis igitur contactus superficierum pendet, ita ut superficies eo arctius se tangant, quo minor differentia $(\Delta z - \Delta z')$ pro omnibus punctis prope punctum contactus sitis evadat. Secundum theorema **Taylori** vero $(\Delta z - \Delta z')$, quum sit $\Delta x = \Delta x'$ et $\Delta y = \Delta y'$, in hanc seriem evolvi potest:

$$(\overset{x}{d}z - \overset{x'}{d}z')\,\Delta x + (\overset{y}{d}z - \overset{y'}{d}z')\,\Delta y + (\overset{x}{d^2}z - \overset{x'}{d^2}z')\,\frac{\Delta x^2}{2} + (\overset{x}{d}\overset{y}{d}z - \overset{x'}{d}\overset{y'}{d}z')\,\Delta x \Delta y + \text{etc.},$$

unde elucet, quantitatem $(\Delta z - \Delta z')$, nulla ratione habita valorum ipsarum Δx, Δy et $\Delta x'$, $\Delta y'$, eo minorem evasuram esse, quo plures quantitatum $(\overset{x}{d}z - \overset{x'}{d}z')$, $(\overset{y}{d}z - \overset{y'}{d}z')$, $(\overset{x}{d^2}z - \overset{x'}{d^2}z')$, etc. fiant $= 0$.

Etiam contactum superficierum igitur in varios dividere possumus **gradus**; ita ut pro contactu **primi gradus** differentialia particularia primi ordinis $\overset{x}{d}z$, $\overset{y}{d}z$ et $\overset{x'}{d}z'$, $\overset{y'}{d}z'$ in ambabus superficiebus respective eosdem habeant valores, pro contactu **secundi gradus** etiam different. partic. secundi ordinis: $\overset{x}{d^2}z$, $\overset{x}{d}\overset{y}{d}z$, $\overset{y}{d^2}z$ et $\overset{x'}{d^2}z'$, $\overset{x'}{d}\overset{y'}{d}z'$, $\overset{y'}{d^2}z'$ respective sint aequalia, et sic porro.

Si igitur problema nobis proponimus: ut datis duarum superficierum (S) et (S') aequationibus, in quarum altera (S') quantitates constantes indeterminatae implicitae sint, ita ut generaliter situs ac forma hujus superficiei sit arbitraria, determinemus valores harum constantium, pro quibus superficies (S') cum superficie (S) in dato hujus puncto contactum certi cujusdam gradus ineat, — hoc problema sequenti modo solvitur. Evolutis ex utriusque superficiei aequatione differentialibus partic. $\overset{x}{d}z$, $\overset{x'}{d}z'$, $\overset{y}{d}z$, $\overset{y'}{d}z'$ etc., haec usque ad eum gradum, in quo superficies se invicem tangere debent, respective inter se aequalia ponimus, quo facto, tum in aequationibus inde prodeuntibus tum in aequatione ipsa superficiei (S) substituimus pro x, y, z et x', y', z' coordinatas puncti contactus, e quibus aequationibus tunc eruendi sunt valores constantium indeterminatarum.

Inde facile perspicitur, ad contactum primi gradus tres pertinere aequationes inter constantes indeterminatas, ad contactum secundi gradus sex, et generaliter $(1 + 2 + 3 \ldots + (n + 1))$ aequationes ad contactum gradus n. Itaque etiam $(1 + 2 + 3 \ldots + (n + 1))$ quantitates indeterminatae in aequatione superficiei (S') requiruntur, ut contactum gradus n cum altera superficie inire possit.

§. 5. Secundum methodum in §. praec. expositam e. g. aequationem plani tangentis pro data qualibet superficie invenire licet.

Aequatio plani cujuslibet ita exhibita est:

$$Ax' + By' + z' = C,$$

in qua quum tres tantum constantes occurrant, planum quoddam superficiem non in superiore quam primo gradu tangere posse, nullo negotio apparet. Itaque si aequatio differentialis superficiei est $dz = pdx + qdy$, et coordinatae puncti contactus sunt x, y, z, quum ex aequatione plani derivetur: $\frac{dz'}{dx'} = -A$, $\frac{dz'}{dy'} = -B$, tres sequentes habemus aequationes:

$$Ax + By + z = C, \qquad -A = p, \qquad -B = q,$$

quae determinant valores quantitatum A, B, C, pro quibus illud planum est planum tangens superficiei in puncto x, y, z. Inde pro plano tangenti haec aequatio prodit,

$$(x - x')p + (y - y')q - (z - z') = 0,$$

quae eadem est, quam jam supra alia ratione invenimus. —

Quum sphaera per quatuor constantes, puta ejus radium et coordinatas centri, determinata sit, inter superficiem sphaericam et aliam superficiem cujuslibet generis generaliter contactum secundi gradus locum habere non posse, ex principiis in §. praec. propositis elucet. Itaque pro superficiebus sphaera osculi in eo sensu non datur, in quo curvis circulum osculi esse cognovimus, quod ex geometrica contemplatione jam deduci licet; superficies qualiscunque enim generaliter in eodem puncto secundum alias directiones alias habebit curvaturas, dum superficies sphaerica in quacunque directione aequaliter curvata est. Jam igitur contemplationem de curvaturis superficierum alia ratione aggrediemur, et proponemus determinandos circulos osculi curvarum, quae secundum diversas directiones per idem punctum superficiei duci possunt, quam rem in sequenti capite tractabimus.

§. 6. Contemplemur denique etiam contactum, qui inter superficiem et curvam locum habere potest. Superficies per aequationem $u = 0$ inter ejus coordinatas x', y, z' nobis data sit, curva vero per aequationes: $x = \varphi t$, $y = \psi t$, $z = ft$.

Quantitas Δu, quae secundum theorema Taylori

$$= \overset{x'}{d}u\,\Delta x' + \overset{y'}{d}u\,\Delta y' + \overset{z'}{d}u\,\Delta z' + \overset{x'}{d^2}u\,\frac{\Delta x'^2}{2} + \overset{y'}{d^2}u\,\frac{\Delta y'^2}{2} + \overset{z'}{d^2}u\,\frac{\Delta z'^2}{2} + \overset{y'z'}{d\,d}u\,\Delta y'\Delta z' + \text{etc.},$$

manifesto pro omnibus punctis in superficie sitis erit $= 0$, pro puncto vero extra superficiem jacenti valorem quendam eumque eo majorem accipiet, quo longius punctum a superficie distabit. Quo minor igitur haec quantitas pro punctis, quae in curva prope punctum contactus jaceant, evadet, eo arctior contactus inter curvam et superficiem erit. Pro puncto vero in curva sito, quod a puncto contactus in directionibus coordinatarum quantitatibus Δx, Δy, Δz distat, Δu fit $=$

$$\overset{x'}{d}u\,\Delta x + \overset{y'}{d}u\,\Delta y + \overset{z'}{d}u\,\Delta z + \overset{x'}{d^2}u\,\frac{\Delta x^2}{2} + \overset{y'}{d^2}u\,\frac{\Delta y^2}{2} + \overset{z'}{d^2}u\,\frac{\Delta z^2}{2} + \overset{y'z'}{d\,d}u\,\Delta y\Delta z + \text{etc.},$$

sive statuto $\Delta x = dx\,\Delta t + d^2x\,\frac{\Delta t^2}{2} + \text{etc.}$, $\Delta y = dy\,\Delta t + d^2y\,\frac{\Delta t^2}{2} + \text{etc.}$, $\Delta z = dz\,\Delta t + d^2z\,\frac{\Delta t^2}{2} + \text{etc.}$, prodit: $\Delta u =$

$$(\overset{x'}{d}udx + \overset{y'}{d}udy + \overset{z'}{d}udz)\,\Delta t + (\overset{x'}{d}ud^2x + \overset{y'}{d}ud^2y + \overset{z'}{d}ud^2z + \overset{x'}{d^2}udx^2 + \overset{x'y'}{d\,d}udxdy + \text{etc.})\,\frac{\Delta t^2}{2} + \text{etc.}$$

Facile nunc perspicitur Δu eo minorem fieri, sine respectu valoris ipsius Δt sive distantiae puncti (Δx, Δy, Δz) a puncto contactus, quo plures coefficientium ipsius Δt ponimus $= 0$, unde etiam varii contactus gradus prodeunt. Hi coefficientes vero sunt differentialia ipsius u, si in iis loco differentialium dx', dy', dz', d^2x', etc. substituimus dx, dy, dz, d^2x, etc.

Si igitur constantes indeterminatas, quae vel in aequatione superficiei vel in aequationibus curvae occurrunt, ita determinare volumus, ut altera cum altera contactum gradus n ineat, earum valores in priori casu evolvendi sunt ex aequatione superficiei ejusque aequationibus differentialibus usque ad ordinem n, in altero ex aequationibus curvae et iisdem aequationibus differentialibus superficiei, substitutis in his in utroque casu loco ipsorum dx', dy', dz', etc. respective valoribus ipsorum dx, dy, dz, etc., qui ex aequationibus curvae eruuntur. Ad contactum gradus n ergo in priori casu (ubi constantes indeterminatae ad superficiem spectant) $(n+1)$, in altero casu $(n+2)$ constantes indeterminatae pertinebunt.

Superficies sphaerica e. g., quum per quatuor constantes determinetur, cum quacunque curva contactum tertii gradus inire potest. Valores constantium a, b, c et r, ad hunc finem determinari debent ex aequationibus his:

$$(x'-a)^2 + (y'-b)^2 + (z'-c)^2 = r^2,$$
$$(x'-a)\,dx' + (y'-b)\,dy' + (z'-c)\,dz' = 0,$$
$$(x'-a)\,d^2x' + (y'-b)\,d^2y' + (z'-c)\,d^2z' + ds'^2 = 0,$$
$$(x'-a)\,d^3x' + (y'-b)\,d^3y' + (z'-c)\,d^3z' + 3ds'\,d^2s' = 0,$$

quae quum omnino eaedem sint respectu a, b, c, quas pro curva repercussionis superficiei e motu plani normalis ortae invenimus in Cap. IV §. 4, hanc curvam esse locum omnium centrorum sphaerarum, quae curvam propositam in tertio gradu tangunt, per se elucet.

CAP. VII.

De maximo et minimo radii osculi in puncto quodam superficiei. — De lineis brevissimis.

§. 1. Planum per normalem superficiei ductum planum normale superficiei vocatur. Innumera ergo plana normalia pro eodem puncto superficiei fingi possunt, quae omnia superficiem in curvis secabunt, quarum tangentes lineae intersectionis horum planorum cum plano tangenti sunt. Consideremus jam unam harum curvarum, quae sectiones normales superficiei vocantur.

Superficies nobis data sit per aequationem ita exhibitam: $u = 0$, cujus aequatio differentialis sit:

$$Hdx + Idy + Kdz = 0, \tag{A}$$

denotantibus H, I, K respective different. partic. $\overset{x}{du}$, $\overset{y}{du}$, $\overset{z}{du}$, tunc determinantes normalis erunt ad rationem $H : I : K$. Designando igitur coordinatas centri curvaturae unius ex sectionibus normalibus superficiei per a, b, c, quum hoc punctum manifesto in normali jaceat, habebimus:

$$(x-a) = \lambda H, \qquad (y-b) = \lambda I, \qquad (z-c) = \lambda K, \tag{B}$$

λ denotante coefficientem indeterminatum.

Substituendo hos valores pro $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$ in aequatione

$$(x-a)\,d^2x + (y-b)\,d^2y + (z-c)\,d^2z + ds^2 = 0,$$

quam pro coordinatis centri curvaturae locum habere in cap. III. §. 7 vidimus, nanciscimur:

$$\lambda\,(Hd^2x + Id^2y + Kd^2z) + ds^2 = 0,$$

ergo:

$$\lambda = \frac{-ds^2}{Hd^2x + Id^2y + Kd^2z}; \tag{C}$$

ex differentiatione aequationis (A) vero prodit:

$$Hd^2x + Id^2y + Kd^2z = -\,(dHdx + dIdy + dKdz),$$

unde fit:

$$\lambda = \frac{ds^2}{dHdx + dIdy + dKdz}.$$

Statuendo jam

$$\overset{x}{d^2u} = A, \quad \overset{y}{d^2u} = B, \quad \overset{z}{d^2u} = C, \quad \overset{y\,z}{ddu} = E, \quad \overset{z\,x}{ddu} = F, \quad \overset{x\,y}{ddu} = G,$$

habemus:

$$dH = Adx + Gdy + Fdz, \quad dI = Gdx + Bdy + Edz, \quad dK = Fdx + Edy + Cdz,$$

quibus valoribus substitutis formula pro λ modo inventa transit in hanc:

$$\lambda = \frac{ds^2}{Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 + 2Edydz + 2Fdzdx + 2Gdxdy}.$$

Si vero determinantes tangentis illius sectionis normalis, cujus circulum osculi quaerimus, respective designamus per α, β, γ, erit $\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\beta = \frac{dy}{ds}$, $\gamma = \frac{dz}{ds}$;

denotando igitur ejus radium osculi per ϱ, quum sit $\varrho = \sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}$ $= \lambda \sqrt{(H^2 + I^2 + K^2)}$, habebimus, statuto $\sqrt{(H^2 + I^2 + K^2)} = T$:

$$\varrho = \lambda T = \frac{T}{A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2E\beta\gamma + 2F\gamma\alpha + 2G\alpha\beta}. \tag{D}$$

In hac formula valores quantitatum A, B, C, E, F, G et T ex aequatione superficiei eruuntur et a situ puncti (x, y, z) in superficie pendent, quantitates α, β, γ vero directionem sectionis normalis determinant.

In eodem puncto superficiei igitur radius osculi pro variis sectionibus normalibus varios valores habebit, quos jam diligentius exploremus.

§. 2. Ad redigendam formulam (D) in formam simpliciorem, transformemus systema axium, ad quod coordinatae x, y, z referuntur, et designemus quantitates A, B, C, E, F, G, H, I, K, α, β, γ, x, y, z respectu novi systematis respective per $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{K}$, α', β', γ', x', y', z', ita ut sit: $\mathfrak{A} = \overset{x'}{d^2u}$, $\mathfrak{B} = \overset{y'}{d^2u}$ etc. Tunc, si ponimus initium coordinatarum idem mansisse, denotatis determinantibus axium novi systematis per ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'; ξ'', η'', ζ'', ex principiis calculi differentialis facile deducitur, valores ipsarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{K}$ expressos per A, B, C, E, F, G, H, I, K eosdem esse, quos in Introd. art. 13 invenimus, positis in iis a, b et $c = 0$; unde sequitur inter has quantitates etiam sex illas aequationes conditionales (Introd. art. 13) locum habere. — Jam novum axium systema ita accipiamus, ut axis z' normali superficiei pro puncto (x, y, z) parallelus sit, tunc manifesto γ' fit $= 0$, et quia $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{K}$ sunt ad rationem determinantium normalis respectu novi systematis, etiam $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{I}$ evanescunt, $\mathfrak{K}$ vero fit $= T$ (secundum IV aequat. condit. Introd. art. 13), itaque, si amplius directiones axium x' et y' ita determinamus, ut fiat $\mathfrak{G} = 0$, formula (D) transmutatur in hanc:

$$\varrho = \frac{T}{\mathfrak{A}\alpha'^2 + \mathfrak{B}\beta'^2}; \tag{E}$$

denotando jam angulum, quem tangens sectionis normalis cum axe x' format, per ω, erit $\alpha' = \cos\omega$, $\beta' = \sin\omega$, et formula (E) facile in hanc formam redigitur:

$$\varrho = \frac{2T}{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\cos 2\omega}. \tag{F}$$

Valores quantitatum $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ex aequationibus conditionalibus in Introd. art. 13

statutis eruendi sunt. Ex VI aequatione cond., posito in ea $\mathfrak{H} = \mathfrak{I} = \mathfrak{G} = 0$ et $\mathfrak{K} = T$, et statuto

$$A'H^2 + B'I^2 + C'K^2 + 2E'IK + 2F'KH + 2G'HI = R,$$

prodit:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \frac{R}{T^2};$$

quodsi in V aequat. condit. ponimus $\mathfrak{H} = \mathfrak{I} = \mathfrak{G} = 0$ et $\mathfrak{K} = T$, fit:

$$\mathfrak{C}T^2 = AH^2 + BI^2 + CK^2 + 2EIK + 2FKH + 2GHI,$$

et I aequatio cond. suppeditat: $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = A + B + C - \mathfrak{C}$, statuendo igitur

$$A(I^2+K^2) + B(K^2+H^2) + C(H^2+I^2) - 2EIK - 2FKH - 2GHI = S,$$

nanciscimur aequationem:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \frac{S}{T^2},$$

ex qua comparata cum aequatione $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \frac{R}{T^2}$ pro $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ hi valores prodeunt:

$$\mathfrak{A} = \frac{S + \sqrt{(S^2 - 4RT^2)}}{2T^2}, \qquad \mathfrak{B} = \frac{S - \sqrt{(S^2 - 4RT^2)}}{2T^2},$$

quibus substitutis pro $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, aequatio (F) transit in hanc:

$$\varrho = \frac{2T^3}{S + \cos 2\omega \sqrt{(S^2 - 4RT^2)}}. \qquad \text{(G)}$$

§. 3. Haec formula praecipue accommodata est ad explorandum varios radii osculi valores pro puncto quodam superficiei, quia directiones sectionum normalium a solo angulo ω pendent.

Primo videmus, duas esse sectiones sub angulo recto se invicem secantes, quarum pro altera radius osculi minimum suum attingat, pro altera maximum. Minimum radii osculi enim manifesto erit $= \frac{2T^3}{S + \sqrt{(S^2 - 4RT^2)}} = \frac{T}{\mathfrak{A}}$, ejus maximum $= \frac{2T^3}{S - \sqrt{(S^2 - 4RT^2)}} = \frac{T}{\mathfrak{B}}$, qui valores, quum respondeant ipsius ω valoribus $\omega = 0$ et $\omega = 90^\circ$, pertinebunt ad sectiones normales, quarum tangentes altera axi x' altera axi y' parallelae sunt, ideoque sub angulo recto se invicem secant. Vocabimus has curvas sectiones principales superficiei, quae manifesto duae sunt in quoque puncto ejus.

In hac contemplatione tacite posuimus esse $\sqrt{(S^2 - 4RT^2)} < S$, sive R quantitatem positivam, in quo casu, quum radius osculi semper evadat positivus, centra curvaturae omnium sectionum normalium in eodem latere superficiei sita sunt, cui concavitatem suam advertit.

Si vero R est quantitas negativa, ideoque $\sqrt{(S^2 - 4RT^2)} > S$, duae sectiones principales non amplius respondent maximo et minimo radii osculi, qui in hoc casu etiam negativos valores accipere potest. Tunc enim pro altera sectione principali, ubi $\omega = 0$, radius osculi minimum positivum valorem habet, ubi $\omega = \frac{1}{2} Arc.\cos\left(\frac{-S}{\sqrt{(S^2-4RT^2)}}\right)$, (quem angulum per $90° - \varphi$ designabimus) evadit infinite magnus, pro altera sectione principali, ubi $\omega = 90°$, minimum negativum valorem attingit, et ubi $\omega = 90 + \varphi$ iterum fit infinite magnus. Omnibus sectionibus inter limites $\omega = 90° - \varphi$ et $\omega = 90° + \varphi$ sitis negativi radii osculi respondent, harum curvarum concavitas igitur lateri opposito adversa est, quam ceterarum sectionum normalium.

Quodsi denique $R = 0$, formula pro radio osculi fit $\varrho = \frac{2T^3}{S + S\cos 2\omega}$. In hoc casu igitur radius osculi semper positivus manet, ejus minimum est $= \frac{T^3}{S}$ et in maximo suo fit infinite magnus.

Hinc sequitur omnes superficies in tria diversa genera distribui posse, prout quantitas R in omnibus punctis superficiei sit vel positiva vel negativa vel $= 0$. Superficies primi generis, quae ea proprietate sunt, ut in quoque puncto omnes sectiones normales convexitates suas eidem lateri advertant, convexo-convexas vocare volumus. Ad illas pertinent e. g. Ellipsoides et Hyperboloides bipartita. Superficies secundi generis vero, in quibus una pars sectionum normalium convexitatem lateri opposito adversam habet quam ceterae, quarum sunt e. g. Hyperboloides continua et Paraboloides hyperbolica, convexo-concavas vocabimus. Tertium genus superficierum, quasi medium locum tenens inter duo illa, superficies in planum explicabiles sunt, videbimus enim infra, aequationem $R = 0$ idem valere quod $rt - s^2 = 0$ (vide cap. II §. 12).

§. 4. Legem, qua crescit et decrescit radius osculi pro variis sectionibus normalibus in eodem puncto superficiei optime in conspectu ponere possumus, statuendo $\varrho = r^2$ et spectando r velut radium vectorem curvae planae. Aequatio hujus curvae facillime deducitur ex aequatione (E), cujus ope nanciscimur: $r^2(\mathfrak{A}\alpha'^2 + \mathfrak{B}\beta'^2) = T$, ponendo igitur $r\alpha = x$, $r\beta = y$, aequatio curvae erit:

$$\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 = T.$$

Pro superficiebus primi generis ergo, ubi R est quantitas positiva ideoque (quum $\frac{R}{q^2}$ sit $= \mathfrak{A}\mathfrak{B}$) $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sunt homogeneae, illa curva est ellipsis, cujus major et minor axis maximo et minimo radii osculi respondent. — In casu secundo, ubi R est quantitas negativa ideoque $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sunt heterogeneae, aequatio illa, quum ϱ etiam negativus fieri possit, in hac forma exhibenda est: $\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 = \pm T$ (alioquin r fieret imaginarius). Tunc igitur ad duas hyperbolas conjunctas pertinet, quarum axes minimo positivo et negativo valori ipsius ϱ respondent, et quarum asymptotae cum axe x angulum $(90° - \varphi)$ formant. — In tertio casu, ubi $R = 0$ ideoque vel $\mathfrak{A}$ vel $\mathfrak{B} = 0$, curva illa transit in duas lineas rectas, vel axi x vel y parallelas et aequali utrinque intervallo ab eo distantes.

Si hanc curvam in plano tangenti superficiei ita describimus, ut ejus axes sint tangentes duarum sectionum principalium, radius osculi cujuslibet sectionis normalis mensuratur per quadratum ejus radii vectoris illius curvae, qui cum tangenti hujus sectionis normalis congruit.

§. 5. Adhuc superest, ut directiones duarum sectionum principalium, i. e. valores quantitatum α, β, γ pro maximo et minimo radii osculi determinemus.

Quum pro his valoribus radii osculi ejus variatio differentialis $d\varrho$ respectu α, β, γ debeat esse $= 0$, differentiemus aequationem (D), unde prodit:

$$(A\alpha + G\beta + F\gamma)\, d\alpha + (G\alpha + B\beta + E\gamma)\, d\beta + (F\alpha + E\beta + C\gamma)\, d\gamma = 0,$$

inter $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ vero etiam has aequationes locum habere patet:

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0, \qquad Hd\alpha + Id\beta + Kd\gamma = 0;$$

eliminando jam $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ ex his tribus aequationibus pervenimus ad aequationem hujus formae:

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + 2O\beta\gamma + 2P\gamma\alpha + 2Q\alpha\beta = 0, \qquad (H)$$

ubi coefficientes hos valores habent:

$$L = IF - KG, \qquad M = KG - HE, \qquad N = HE - IF,$$
$$2O = KF - IG + HB - HC, \quad 2P = HG - KE + IC - IA, \quad 2Q = IE - HF + KA - KB.$$

Ex aequatione (H) comparata cum hac:

$$H\alpha + I\beta + K\gamma = 0,$$

ratio quantitatum α, β, γ determinanda est, quod problema analyticum jam in cap. II §. 4 solvimus. Substitutis igitur in formulis, quas ibidem pro m, n, o et m', n', o' invenimus, loco ipsarum A, B, C, E, F, G, ξ, η, ζ respective L, M, N, O, P, Q, H, I, K, pro altera sectionum principalium habebitur:

$$\alpha : \beta : \gamma = m : n : o, \quad \text{pro altera} \quad \alpha : \beta : \gamma = m' : n' : o'.$$

§. 6. Posuimus in §§. praec. superficiei aequationem ita exhibitam esse $u = 0$, exploremus jam, quomodo formulae evolutae mutentur, si superficies nobis data est per ejusmodi aequationem $z = \varphi(x, y)$. — Tunc denotando quantitates $\overset{x}{d}z$, $\overset{y}{d}z$, $\overset{x}{d^2}z$, $\overset{x}{d}\overset{y}{d}z$, $\overset{y}{d^2}z$ respective per p, q, r, s, t, et statuendo $u = \varphi(x, y) - z$, pro quantitatibus A, B, C etc. prodeunt hi valores:

$$\begin{array}{lllll} H = p, & A = r, & E = 0, & A' = 0, & E' = 0, \\ I = q, & B = t, & F = 0, & B' = 0, & F' = 0, \\ K = -1, & C = 0, & G = s, & C' = rt - s^2, & G' = 0, \end{array}$$

quibus substitutis formulae pro T, R et S (§. 2) transeunt in has:

$$T = \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}, \qquad R = rt - s^2, \qquad S = r(1 + q^2) + t(1 + p^2) - 2spq;$$

itaque pro radio osculi in maximo et minimo ejus habemus:

$$\varrho = \frac{2(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}{[r(1+q^2)+t(1+p^2)-2spq] \mp \sqrt{[(r(1+q^2)+t(1+p^2)-2spq)^2 - 4(rt-s^2)(1+p^2+q^2)]}},$$

et determinantes tangentium duarum sectionum principalium superficiei inveniri possunt secundum §. praec. statuendo

$$L = s, \quad M = -s, \quad N = 0, \quad 2O = pt - qs, \quad 2P = ps - qr, \quad 2Q = t - r.$$

Quum habeamus $rt - s^2 = R$, tria illa genera superficierum (vide §. 3) etiam secundum valorem quantitatis $(rt - s^2)$ distingui possunt, ita ut pro superficiebus convexo-convexis $(rt - s^2)$ sit quantitas positiva, pro convexo-concavis negativa et pro superficiebus tertii generis sit $rt - s^2 = 0$, unde elucet, has esse superficies in planum explicabiles.

§. 7. Omnium curvarum, quae in superficie per punctum quoddam duci possunt, adhuc eas tantum contemplati sumus, quae lineae intersectionis superficiei cum planis normalibus sunt. Concipiamus jam curvam quamlibet in superficie ductam, et determinemus ejus circulum osculi. Hic sequens theorema demonstrari licet:

Si per punctum cujuslibet curvae in superficie quadam descriptae concipimus planum normale superficiei ita ductum, ut ejus lineae intersectionis cum superficie eadem tangens sit atque curvae, radius osculi hujus curvae (r) in illo puncto ad radium osculi illius sectionis normalis (ϱ) eandem rationem habet, quam cosinus anguli (φ), quem planum osculi curvae cum plano normali format, ad unitatem, — i. e. $r : \varrho = \cos\varphi : 1$ sive $r = \varrho \cos\varphi$.

Denotatis enim determinantibus tangentis ambabus curvis communis per α, β, γ et statuto $\sqrt{(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2)} = d\sigma$, determinantes radii osculi r sunt respective $\frac{d\alpha}{d\sigma}$, $\frac{d\beta}{d\sigma}$, $\frac{d\gamma}{d\sigma}$. Radius osculi r vero cum normali superficiei, cujus determinantes sunt $\frac{H}{T}$, $\frac{I}{T}$, $\frac{K}{T}$, angulum $(180° - \varphi)$ format, igitur erit:

$$\cos\varphi = -\frac{Hd\alpha + Id\beta + Kd\gamma}{Td\sigma}.$$

Quum vero sit $\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\beta = \frac{dy}{ds}$, $\gamma = \frac{dz}{ds}$, nanciscimur:

$$d\alpha = \frac{d^2x}{ds} - dx\frac{d^2s}{ds^2}, \quad d\beta = \frac{d^2y}{ds} - dy\frac{d^2s}{ds^2}, \quad d\gamma = \frac{d^2z}{ds} - dz\frac{d^2s}{ds^2},$$

quibus valoribus substitutis formula pro $\cos\varphi$, quia $Hdx + Idy + Kdz = 0$, transit in hanc:

$$\cos\varphi = -\frac{Hd^2x + Id^2y + Kd^2z}{Td\sigma ds} = -\frac{ds}{d\sigma}\left(\frac{Hd^2x + Id^2y + Kd^2z}{Tds^2}\right),$$

unde adjumento aequationum (C) et (D) §. 1, et quia $\frac{ds}{d\sigma} = r$, statim deducitur: $\cos\varphi = \frac{r}{\varrho}$, sive

$$r = \varrho \cos\varphi, \quad \text{q. e. d.}$$

§. 8. Ex hoc theoremate nullo negotio intelligitur, quamcunque curvam in superficie ductam, cujus planum osculi in puncto quodam ad superficiem normale sit, pro hoc puncto eundem circulum osculi habere, quem superficies secundum directionem tangentis illius curvae. Itaque si curvam in superficie ducere volumus, quae in omnibus punctis suis hacce proprietate gaudeat, hujus curvae radius osculi ubique ad superficiem normalis sit oportet, unde sequentes prodeunt aequationes:

$$\left.\begin{aligned} d(\frac{dx}{ds}) &= \mu \overset{x}{d}u, \\ d(\frac{dy}{ds}) &= \mu \overset{y}{d}u, \\ d(\frac{dz}{ds}) &= \mu \overset{z}{d}u, \end{aligned}\right\}\text{(J)}$$

denotante μ coefficientem indeterminatum.

Talis curva etiam singulari proprietate utitur, ut inter duo quaelibet ejus puncta nulla alia curva in superficie describi possit, quae illa brevior sit, quare hae curvae, quas manifesto secundum omnes directiones in superficie ducere licet, lineae brevissimae superficiei vocantur.

Hanc proprietatem cum aequationibus (J) consentaneam esse, sequenti modo demonstratur. Quum arcus curvae cujusdam sit $= \int ds = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, pro curva brevissima hujus quantitatis variatio indeterminata, quam charactere δ designare volumus, debet esse $= 0$, ergo:

$$\int\left(\frac{dx}{ds}\,\delta dx + \frac{dy}{ds}\,\delta dy + \frac{dz}{ds}\,\delta dz\right) = 0;$$

ponendo jam pro δdx, δdy, δdz respective $d\delta x$, $d\delta y$, $d\delta z$ et integrando ex parte nanciscimur:

$$\frac{dx}{ds}\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,\delta y + \frac{dz}{ds}\,\delta z - \int\left(d(\frac{dx}{ds})\,\delta x + d(\frac{dy}{ds})\,\delta y + d(\frac{dz}{ds})\,\delta z\right) = 0,$$

unde elucet, quantitatem $d(\frac{dx}{ds})\,\delta x + d(\frac{dy}{ds})\,\delta y + d(\frac{dz}{ds})\,\delta z$ oportere esse integrabilem, quod secundum principia calculi variationum non aliter accidere potest, ac si haec quantitas ipsa est $= 0$, itaque habemus:

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right)\delta x + d\left(\frac{dy}{ds}\right)\delta y + d\left(\frac{dz}{ds}\right)\delta z = 0; \tag{K}$$

quodsi variationes δx, δy, δz omnino arbitrariae essent, singulos earum coefficientes possemus ponere $= 0$, quum vero etiam aequationi

$$\overset{x}{du}\,\delta x + \overset{y}{du}\,\delta y + \overset{z}{du}\,\delta z = 0$$

satisfacere debeant, multiplicando hanc per coefficientem indeterminatum et subtrahendo eam ab (K) pervenimus ad aequationem, in qua omnes tres coefficientes statuere licet $= 0$, unde prodeunt aequationes (J); has igitur ad lineas brevissimas in superficie pertinere elucet.

§. 9. Lineae brevissimae multas insignes proprietates habent, et in superficiebus in universum idem valent, quod lineae rectae in plano. Jam nonnulla theoremata, quae ad eas spectent, proponamus.

Si ex omnibus punctis curvae cujusdam in superficie descriptae lineas brevissimas ad curvam normales et longitudine inter se aequales ducimus, curva, quae extremitates alteras harum linearum brevissimarum jungit, eas omnes sub angulis rectis secat.

Designemus per A punctum datum in prima curva, et per t longitudinem hujus curvae a puncto A usque ad quodvis alterum punctum, ex quo lineam brevissimam ad illam normalem ductam concipimus, cujus longitudo sit $= \theta$, tunc manifesto per t et θ situs cujusvis superficiei puncti determinari potest, ideoque coordinatae x, y, z ut functiones harum quantitatum spectandae sunt, ita ut habeamus:

$$dx = a\,dt + a'\,d\theta,$$
$$dy = b\,dt + b'\,d\theta,$$
$$dz = c\,dt + c'\,d\theta.$$

Curva, pro qua t constans manet, est ipsa linea brevissima θ, curva vero, quae valori constanti ipsius θ respondet, ea est, quae extremitates linearum brevissimarum aequalis longitudinis jungit; denotabimus hanc per v. Jam de eo tantum agitur, ut demonstremus, angulum, quem tangentes curvarum v et θ in quoque puncto inter se forment, esse angulum rectum. Designando eum per ω facile perspicitur esse:

$$\cos\omega = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}\,\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2)}},$$

si vero pro differentialibus respectu t et θ respective characteribus d et δ utimur, erit:

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)} = \sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)} = \mathrm{d}v,$$
$$\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2)} = \sqrt{(\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2)} = \delta\theta = 1,$$

itaque habebimus:

$$\cos\omega.\mathrm{d}v = aa' + bb' + cc',$$

unde differentiando respectu θ nanciscimur:

$$\delta(\cos\omega.\mathrm{d}v) = a\delta a' + b\delta b' + c\delta c' + a'\delta a + b'\delta b + c'\delta c.$$

Quum vero a', b', c' sint determinantes tangentis lineae brevissimae θ, quantitates $\delta a'$, $\delta b'$, $\delta c'$ sunt ad rationem determinantium normalis superficiei (vide §. praec.), ideoque $a\delta a' + b\delta b' + c\delta c' = 0$, et quia $\delta a = \delta\mathrm{d}x = \mathrm{d}\delta x = \mathrm{d}a'$, $\delta b = \mathrm{d}b'$ et $\delta c = \mathrm{d}c'$, fit etiam $a'\delta a + b'\delta b + c'\delta c = a'\mathrm{d}a' + b'\mathrm{d}b' + c'\mathrm{d}c' = 0$; itaque habemus:

$$\delta(\cos\omega.\mathrm{d}v) = 0.$$

Hinc elucet, quantitatem $(\cos\omega.\mathrm{d}v)$ a θ non dependere, i. e. pro omnibus valoribus ipsius θ eundem valorem retinere. Quum pro $\theta = 0$, ubi curva v cum curva t congruit, ω sit angulus rectus ideoque $\cos\omega = 0$, quantitas $(\cos\omega.\mathrm{d}v)$ ubique erit $= 0$. Manifesto vero $\mathrm{d}v$ tantum in singulis casibus evanescere potest (si quidem duae se invicem sequentes lineae brevissimae θ se mutuo secent in curva v), itaque semper oportebit esse $\cos\omega = 0$ et ω angulum rectum, q. e. d.

§. 10. Quum theorema modo demonstratum valeat, qualiscunque sit curva t, etiam circulum infinite parvum sive **punctum** pro ea sumere possumus, in quo casu theorema hoc modo exprimitur:

Ductis ex puncto quodam in superficie sito in omnes partes innumeris lineis brevissimis aequalis longitudinis, curva, quae earum extremitates jungit, ad eas omnes erit normalis.

Itaque situm cujusvis puncti superficiei (x, y, z) etiam eo modo determinare licet, ut nobis detur et longitudo lineae breviss. θ a puncto determinato (A) (quod pro centro habetur) ad punctum (x, y, z) ductae, et angulus (φ), quem tangens lineae breviss.

θ in puncto A cum tangenti alterius cujusdam lineae breviss., (quae pro linea initiali sumitur) format.

Hoc posito, si aequationes differentiales superficiei ita exhibentur:

$$dx = a d\varphi + a' d\theta, \qquad dy = b d\varphi + b' d\theta, \qquad dz = c d\varphi + c' d\theta,$$

secundum theorema modo demonstratum erit:

$$aa' + bb' + cc' = 0, \qquad \text{et} \qquad a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1;$$

in hoc casu igitur pro $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ habemus hanc simplicem formulam, statuendo $a^2 + b^2 + c^2 = \mu^2$:

$$ds^2 = \mu^2 d\varphi^2 + d\theta^2.$$

Haec determinatio quantitatum φ et θ in plurimis casibus praecipue commoda est, ut ex cap. sequenti elucebit.

CAP. VIII.

De curvatura superficierum.

Si in omnibus punctis lineae circumcurrentis figurae cujusdam (S) in superficie descriptae normales ad superficiem ductas concipimus, et insuper fingimus superficiem sphaericam radio 1 circa centrum arbitrarium descriptam, ex cujus centro radios omnibus illis normalibus parallelos ducamus, hi radii superficiem sphaericam secantes figuram quandam (Σ) in ea formabunt, quae illius figurae (S) quasi imago est. Amplitudo figurae Σ in superficie sphaerica sitae partim ab amplitudine figurae S partim a curvatura superficiei intra ambitum figurae S pendebit; haec curvatura enim majorem vel minorem divergentiam radiorum e centro sphaerae ductorum determinat. Hinc facile colligitur, rationem areae figurae Σ ad aream figurae S pro mensura curvaturae superficiei intra figuram S haberi posse. Quum vero in superficie non ubique aequaliter curvata haec ratio variabilis sit, si amplitudo figurae S mutetur, curvatura superficiei in certo quodam puncto ejus determinabitur per limitem hujus rationis, decrescente amplitudine figurae S, sive per rationem inter elementum superficiei in illo puncto situm et elementum superficiei sphaericae per directionem normalium illi respondens. Quam rationem ea de causa mensuram curvaturae superficiei pro illo puncto vocabimus. Denotando igitur hanc quantitatem per k, elementum superficiei per e, et respondens elementum superficiei sphaericae, cujus radius $= 1$, per ε, habemus $k = \frac{\varepsilon}{e}$.

Figuram ipsam vero in superficie sphaerica sitam (Σ) curvaturam integram figurae in superficie descriptae (S) vocare volumus. Formula pro curvatura integra manifesto erit $\iint ke$, si hoc integrale intra limites figurae S extenditur; quum enim sit $ke = \varepsilon$, per integrationem formulae ke nanciscimur summam omnium elementorum respondentium superfic. sphaericae i. e. aream figurae Σ.

§. 2. Aggrediamur jam ad determinandum valorem ipsius k pro puncto quodam superficiei, cujus aequatio nobis data sit. Si aequationem superficiei in hac forma exhibemus: $z = \varphi(x,y)$, formula pro elemento superficiei (e) haec est (vide cap. VI §. 1):

$$e = dxdy\sqrt{(1 + p^2 + q^2)},$$

denotantibus p et q respective $\overset{x}{d}z$ et $\overset{y}{d}z$.

Ad inveniendum elementum respondens (ε) in superficie sphaerica radio 1 descripta, designemus determinantes normalis elemento e respondentis per ξ, η, ζ, tunc hae quantitates etiam coordinatae puncti superficiei sphaericae erunt, in quo elementum ε jacet. Quum vero elementum e a talibus curvis concludatur, pro quibus x et y alternae sint constantes, elementum ε, ut illi respondeat, a paribus curvis formatum accipere debemus. Itaque area hujus elementi invenitur secundum formulam (A) Cap. VI §. 1, spectando ξ, η, ζ ut functiones ipsarum x et y, unde prodit:

$$\varepsilon = dxdy\sqrt{[(\overset{x}{d}\eta\,\overset{y}{d}\zeta - \overset{x}{d}\zeta\,\overset{y}{d}\eta)^2 + (\overset{x}{d}\zeta\,\overset{y}{d}\xi - \overset{x}{d}\xi\,\overset{y}{d}\zeta)^2 + (\overset{x}{d}\xi\,\overset{y}{d}\eta - \overset{x}{d}\eta\,\overset{y}{d}\xi)^2]},$$

sed tres quantitates $(\overset{x}{d}\eta\,\overset{y}{d}\zeta - \overset{x}{d}\zeta\,\overset{y}{d}\eta)$, etc. sunt ad rationem determinantium normalis superficiei sphaericae (Cap. VI §. 3 (E)), quae etiam pro hac sunt ξ, η, ζ, proinde formulam modo inventam in hanc transmutare licet:

$$\varepsilon = dxdy\,(\overset{x}{d}\xi\,\overset{y}{d}\eta - \overset{x}{d}\eta\,\overset{y}{d}\xi)\,\sqrt{\left(\frac{\xi^2}{\zeta^2} + \frac{\eta^2}{\zeta^2} + 1\right)}.$$

Statuendo jam $\sqrt{(1+p^2+q^2)} = \lambda$, habemus: $\xi = \frac{p}{\lambda}$, $\eta = \frac{q}{\lambda}$, $\zeta = -\frac{1}{\lambda}$, $\frac{\xi}{\zeta} = -p$, $\frac{\eta}{\zeta} = -q$, quibus valoribus substitutis nanciscimur:

$$\varepsilon = dxdy\left(\overset{x}{d}\left(\frac{p}{\lambda}\right)\overset{y}{d}\left(\frac{q}{\lambda}\right) - \overset{x}{d}\left(\frac{q}{\lambda}\right)\overset{y}{d}\left(\frac{p}{\lambda}\right)\right)\sqrt{(1+p^2+q^2)},$$

$$\text{itaque}\quad k = \frac{\varepsilon}{e} = \left(\overset{x}{d}\left(\frac{p}{\lambda}\right)\overset{y}{d}\left(\frac{q}{\lambda}\right) - \overset{x}{d}\left(\frac{q}{\lambda}\right)\overset{y}{d}\left(\frac{p}{\lambda}\right)\right).$$

Si vero quantitates $\overset{x}{d^2}z$, $\overset{x}{d}\overset{y}{d}z$, $\overset{y}{d^2}z$ respective designamus per r, s, t, facile perspicitur esse:

$$\overset{x}{d}\left(\frac{p}{\lambda}\right) = \frac{r}{\lambda} - \frac{p\,\overset{x}{d}\lambda}{\lambda^2}, \qquad \overset{x}{d}\left(\frac{q}{\lambda}\right) = \frac{s}{\lambda} - \frac{q\,\overset{x}{d}\lambda}{\lambda^2},$$

$$\overset{y}{d}\left(\frac{q}{\lambda}\right) = \frac{t}{\lambda} - \frac{q\,\overset{y}{d}\lambda}{\lambda^2}, \qquad \overset{y}{d}\left(\frac{p}{\lambda}\right) = \frac{s}{\lambda} - \frac{p\,\overset{y}{d}\lambda}{\lambda^2},$$

per quam substitutionem formula pro k transit in hanc:

$$k = \frac{rt-s^2}{\lambda^2} - \frac{(pt-qs)\,\overset{x}{d}\lambda + (qr-ps)\,\overset{y}{d}\lambda}{\lambda^3};$$

e valore ipsius $\lambda = \sqrt{(1+p^2+q^2)}$ vero deducitur: $\overset{x}{d}\lambda = \frac{pr+qs}{\lambda}$, $\overset{y}{d}\lambda = \frac{ps+qt}{\lambda}$, unde prodit:

$$k = \frac{rt-s^2}{\lambda^2} - \frac{(p^2+q^2)(rt-s^2)}{\lambda^4} = \frac{rt-s^2}{\lambda^4}.$$

Itaque pro mensura curvaturae habemus hanc formulam:

$$k = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}. \tag{A}$$

§. 3. Quum numerator hujus formulae sit quantitas $(rt-s^2)$, quae ad distinguenda tria illa genera superficierum (cap. VII §. 3) valeat, etiam mensuram curvaturae pro indole superficierum diversi generis esse elucet, ita ut pro superficiebus convexo-convexis k sit quantitas positiva, pro convexo-concavis negativa et pro superficiebus in planum explicabilibus $= 0$. Curvatura integra manifesto pro illis diversis superficiebus eodem modo variabitur. Curvatura negativa superficierum secundi generis cum eo quadrat, quod pro qualibet figura in tali superficie descripta figura in superficie sphaerica per directionem radiorum illi respondens inversa est, i. e. ejus latus dextrum lateri sinistro figurae in superficie descriptae respondet et vice versa.

Primo adspectu non statim intelligitur, quomodo pro superficiebus in planum explicabilibus curvatura integra semper fieri possit $= 0$, accuratius vero examinando videmus, pro quacunque figura in tali superficie descripta figuram respondentem in superficie sphaerica in lineam reduci.

E formula, quam in cap. VII §. 6 pro maximo et minimo radii osculi superficiei evolvimus, productum ex his duobus valoribus sequitur esse $= \dfrac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2}$, unde hoc theorema deducitur:

Mensura curvaturae in quoque puncto superficiei aequalis est unitati divisae per productum ex maximo et minimo radii osculi.

Denotando igitur maximum et minimum radii osculi per ϱ^0 et ϱ^1 habemus:

$$k = \frac{1}{\varrho^0 \varrho^1}. \tag{B}$$

§. 4. Data superficiei aequatione in hac forma $u = 0$, formula pro mensura curvaturae facile ex (A) derivatur. In Cap. VII §. 7 enim invenimus esse: $rt - s^2 = R$, $\sqrt{(1+p^2+q^2)} = T$, unde prodit:

$$k = \frac{R}{T^4}; \tag{C}$$

valores quantitatum R et T in Cap. VII. §. 2 dati sunt.

Quaeramus jam formulam pro mensura curvaturae, si x, y, z velut functiones duarum indeterminatarum φ et θ spectantur; tunc aequationes differentiales ita exhibebuntur:

$$\begin{aligned}
dx &= a d\varphi + a' d\theta, & d^2x &= \alpha d\varphi^2 + \alpha' d\varphi d\theta + \alpha'' d\theta^2,\\
dy &= b d\varphi + b' d\theta, & d^2y &= \beta d\varphi^2 + \beta' d\varphi d\theta + \beta'' d\theta^2,\\
dz &= c d\varphi + c' d\theta, & d^2z &= \gamma d\varphi^2 + \gamma' d\varphi d\theta + \gamma'' d\theta^2,
\end{aligned}$$

et manifesto habemus:

$$pa + qb - c = 0, \qquad pa' + qb' - c' = 0, \tag{1}$$

unde deducitur, statuendo $bc' - cb' = A''$, $ca' - ac' = B''$, $ab' - ba' = C''$,

$$p = -\frac{A''}{C''}, \qquad q = -\frac{B''}{C''}. \tag{2}$$

Differentiando jam aequationes (1) respectu φ et θ, quum sit $\overset{\varphi}{dp} = ra + sb$, $\overset{\varphi}{dq} = sa + tb$, $\overset{\theta}{dp} = ra' + sb'$, $\overset{\theta}{dq} = sa' + tb'$, pervenimus ad tres sequentes aequationes:

$$\begin{aligned}
p\alpha + q\beta - \gamma + a^2r + 2abs + b^2t &= 0,\\
p\alpha' + q\beta' - \gamma' + aa'r + (ab' + ba')s + bb't &= 0,\\
p\alpha'' + q\beta'' - \gamma'' + a'^2r + 2a'b's + b'^2t &= 0,
\end{aligned}$$

quae, substitutis pro p et q respective $-\frac{A''}{C''}$ et $-\frac{B''}{C''}$, abeunt in has:

$$\begin{aligned}
A''\alpha + B''\beta + C''\gamma &= C''(a^2r + 2abs + b^2t),\\
A''\alpha' + B''\beta' + C''\gamma' &= C''(aa'r + (ab' + ba')s + bb't),\\
A''\alpha'' + B''\beta'' + C''\gamma'' &= C''(a'^2r + 2a'b's + b'^2t).
\end{aligned}$$

Quodsi a producto primae et tertiae aequationis subtrahimus quadratum secundae, nanciscimur:

$$(A''\alpha + B''\beta + C''\gamma)(A''\alpha'' + B''\beta'' + C''\gamma'') - (A''\alpha' + B''\beta' + C''\gamma')^2 = C''^4(rt - s^2),$$

item ex aequationibus (2) deducitur:

$$(A''^2 + B''^2 + C''^2)^2 = C''^4(1 + p^2 + q^2)^2,$$

itaque pro mensura curvaturae obtinemus hanc formulam:

$$K = \frac{(A''\alpha + B''\beta + C''\gamma)(A''\alpha'' + B''\beta'' + C''\gamma'') - (A''\alpha' + B''\beta' + C''\gamma')^2}{(A''^2 + B''^2 + C''^2)^2}. \tag{D}$$

§. 5. Formula modo inventa in simplicissimam formam redigi potest, si quantitates φ et θ in ea significatione accipiuntur, quam iis tribuimus in Cap. VII §. 10, in quo casu habetur:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \qquad aa' + bb' + cc' = 0.$$

Ad hunc finem transformemus formulam (D), ita ut tantum quantitates hujus formae $(aa' + bb' + cc')$, $(a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'')$, etc. contineat, pro quibus sequentibus denotationibus usuri sumus:

Characteribus a, b, c ; a', b', c' ; α, β, γ ; α', β', γ' ; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ respective respondeant signa: 0 , 1 , 0 , 1 , 2;

tunc e. g. quantitas $(a\alpha' + b\beta' + c\gamma')$ designatur per (0,1), quantitas $(a'^2 + b'^2 + c'^2)$ per (1,1), et sic porro. Hoc posito pro nominatore formulae (D) habemus:

$$(A''^2+B''^2+C''^2) = (a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2 = (0,0)(1,1)-(0,1)^2,$$

et ejus numerator hoc modo transformatur:

$$(A''\alpha+B''\beta+C''\gamma)(A''\alpha''+B''\beta''+C''\gamma'') = (A''^2+B''^2+C''^2)(\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma'')$$
$$-[(B''\gamma-C''\beta)(B''\gamma''-C''\beta'')+(C''\alpha-A''\gamma)(C''\alpha''-A''\gamma'')+(A''\beta-B''\alpha)(A''\beta''-B''\alpha'')],$$
$$(A''\alpha'+B''\beta'+C''\gamma')^2 =$$
$$(A''^2+B''^2+C''^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2) - [(B''\gamma'-C''\beta')^2+(C''\alpha'-A''\gamma')^2+(A''\beta'-B''\alpha')^2],$$

quum vero talis quantitas $(B''\gamma - C''\beta)$ sit $= (ca' - ac')\gamma - (ab' - ba')\beta$ $= a'(c\gamma + b\beta) - a(c'\gamma + b'\beta) = a'(a\alpha + b\beta + c\gamma) - a(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma)$ $= a'(0,0) - a(1,0)$, transformando simili modo omnes quantitates hujus formae $(B''\gamma - C''\beta)$ et introducendo ubique denotationes supra propositas, nanciscimur:

$$(A''\alpha+B''\beta+C''\gamma)(A''\alpha''+B''\beta''+C''\gamma'') = [(0,0)(1,1)-(0,1)^2](0,2)$$
$$-\Big([a'(0,0)-a(1,0)][a'(0,2)-a(1,2)]+[b'(0,0)-b(1,0)][b'(0,2)-b(1,2)]+[c'(0,0)-c(1,0)][c'(0,2)-c(1,2)]\Big)$$
$$=[(0,0)(1,1)-(0,1)^2](0,2)-\Big((0,0)(1,0)(1,2)+(1,1)(0,0)(0,2)-(0,1)[(0,0)(1,2)+(0,2)(1,0)]\Big),$$
$$(A''\alpha'+B''\beta'+C''\gamma')^2 = [(0,0)(1,1)-(0,1)^2](1,1)-[(0,0)(1,1)^2+(1,1)(0,1)^2-2(0,1)(0,1)(1,1)],$$

unde pro mensura curvaturae haec formula deducitur:

$$\left.\begin{aligned} k = {} & \frac{[(0,0)(1,1)-(0,1)^2][(0,2)-(1,1)]}{[(0,0)(1,1)-(0,1)^2]^2} \\ & - \frac{(0,0)[(1,0)(1,2)-(1,1)^2]+(1,1)[(0,0)(0,2)-(0,1)^2]-(0,1)[(0,0)(1,2)+(0,2)(1,0)-2(0,1)(1,1)]}{[(0,0)(1,1)-(0,1)^2]^2}. \end{aligned}\right\}(E)$$

Adhibeamus jam hanc formulam pro k ad eum casum, ubi est:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = (1,1) = 1, \qquad aa' + bb' + cc' = (0,1) = 0,$$

e quibus aequationibus per differentiationem respectu φ et θ prodeunt hae:

$$a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = (1,1) = 0, \quad a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = (1,2) = 0, \quad a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = (0,2) = 0,$$

igitur formula pro k, statuendo $a^2 + b^2 + c^2 = (0,0) = \mu^2$, redigitur in hanc:

$$k = \frac{\mu^2[(0,2)-(1,1)]+(0,1)^2}{\mu^4}.$$

Differentiatio vero aequationis $a^2 + b^2 + c^2 = \mu^2$ respectu θ bis repetita suppeditat:

$$a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = (0,1) = \mu \overset{\theta}{d}\mu,$$

$$(1,1) + a\overset{\theta}{d}\alpha' + b\overset{\theta}{d}\beta' + c\overset{\theta}{d}\gamma' = (\overset{\theta}{d}\mu)^2 + \mu\overset{\theta}{d^2}\mu,$$

e quibus aequationibus prodit:

$$\frac{\overset{\theta}{d^2}\mu}{\mu} = \frac{\mu^2[(1,1) + a\overset{\theta}{d}\alpha' + b\overset{\theta}{d}\beta' + c\overset{\theta}{d}\gamma'] - (0,1)^2}{\mu^4},$$

et differentiando aequationem $a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma' = 0$ respectu φ, et substituendo simul pro $\overset{\varphi}{d}\alpha''$, $\overset{\varphi}{d}\beta''$, $\overset{\varphi}{d}\gamma''$ respective $\overset{\theta}{d}\alpha'$, $\overset{\theta}{d}\beta'$, $\overset{\theta}{d}\gamma'$, nanciscimur:

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' + a\overset{\theta}{d}\alpha' + b\overset{\theta}{d}\beta' + c\overset{\theta}{d}\gamma' = 0,$$

cujus aequationis ope fit:

$$\frac{\overset{\theta}{d^2}\mu}{\mu} = \frac{\mu^2[(1,1)-(0,2)]-(0,1)^2}{\mu^4} = -k.$$

In eo igitur casu, ubi $ds^2 = \mu^2 d\varphi^2 + d\theta^2$, pro mensura curvaturae habemus hanc simplicem formulam:

$$k = -\frac{\overset{\theta}{d^2}\mu}{\mu}. \qquad \text{(F)}$$

§. 7. Si per analogiam superficierum in planum explicabilium omnes superficies nobis fingimus flexibiles sed non extensibiles, manifesto quamvis partem superficiei cujusdam, non interrupta continuitate, in maxime varias formas flectere possumus. Ad rem illustrandam concipiamus e. g. superficiem hemisphaericam, quae a duabus partibus oppositis circuli sui maximi plus minusve comprimatur. In mutanda vero hoc modo forma superficiei, quoniam non extendi potest, quantitas ds et omnes, quae ab hac sola dependent quantitates, non variabuntur. In harum numerum etiam referenda est mensura curvaturae; quum enim habeamus, salvis significationibus §. praec.:

$$(0{,}0) = \tfrac{1}{2}\overset{\varphi}{d}(0{,}0), \qquad (0{,}1) = \tfrac{1}{2}\overset{\theta}{d}(0{,}0), \qquad (1{,}0) = \overset{\varphi}{d}(0{,}1) - \tfrac{1}{2}\overset{\theta}{d}(0{,}0),$$

$$(1{,}1) = \tfrac{1}{2}\overset{\varphi}{d}(1{,}1), \qquad (1{,}2) = \tfrac{1}{2}\overset{\theta}{d}(1{,}1), \qquad (0{,}2) = \overset{\theta}{d}(0{,}1) - \tfrac{1}{2}\overset{\varphi}{d}(1{,}1),$$

$$[(0{,}2) - (1{,}1)] = \tfrac{1}{2}[-\overset{\varphi}{d^2}(1{,}1) + 2\overset{\varphi}{d}\overset{\theta}{d}(0{,}1) - \overset{\theta}{d^2}(0{,}0)],$$

formula (E) pro mensura curvaturae manifesto tantum e quantitatibus (0,0), (0,1), (1,1) earumque differentialibus respectu φ et θ composita est. Inde elucet, ad determinandam mensuram curvaturae aequationes finitas superficiei minime requiri, sed modo formulam pro $ds^2 = (0{,}0)d\varphi^2 + 2(0{,}1)d\varphi d\theta + (1{,}1)d\theta^2$, ideoque eam ab hac sola quantitate dependere. Itaque mensura curvaturae in quoque puncto superficiei et proinde etiam curvatura integra pro qualibet ejus parte omnino eadem manet, in quamcunque formam superficies flectatur.

§. 7. Figurae cujusdam in superficie descriptae curvaturam integram sive aream figurae, quae illi in superficie sphaerica, cujus radius = 1, per directionem normalium respondet, invenimus (vide §. 1) per integrationem formulae ke intra limites illius figurae. Itaque si pro elemento superficiei (e) eligimus hanc formulam:

$$dxdy\sqrt{(1+p^2+q^2)},$$

adhibendo pro k formulam $\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$, nanciscimur pro curvatura integra:

$$\iint \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\, dxdy.$$

Si aequationes differentiales superficiei ita exhibitae sunt: $dx = ad\varphi + a'd\theta$, $dy = bd\varphi + b'd\theta$, $dz = cd\varphi + c'd\theta$, pro elemento superficiei habemus formulam:

$$d\varphi d\theta\sqrt{[(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2]},$$

quae, si quantitates φ et θ ita eligimus, ut sit: $a'^2+b'^2+c'^2=1$, $aa'+bb'+cc'=0$, $ds^2 = \mu^2 d\varphi^2 + d\theta^2$, in hanc formam redigitur:

$$\mu d\varphi d\theta,$$

quum igitur in hoc casu sit: $k = -\frac{\overset{\theta}{d^2}\mu}{\mu}$, formula pro curvatura integra evadit:

$$-\iint \overset{\theta}{d^2}\mu\, d\varphi d\theta.$$

§. 8. **Proponamus jam determinandam curvaturam integram trianguli in superficie quadam per lineas brevissimas descripti, ad quem finem ingrediamur hanc contemplationem.**

Si in superficie per aequat. differentiales $dx = ad\varphi + a'd\theta$, $dy = bd\varphi + b'd\theta$, $dz = cd\varphi + c'd\theta$ data, ubi φ et θ habent significationes ex Cap. VII. §. 10, quamlibet lineam brevissimam (v) ducimus, haec curva quamque lineam brevissimam θ sub angulo quodam (ω) secabit. Investigemus jam, quomodo hic angulus varietur, si in longitudinem curvae v progredimur.

Determinantes tangentis curvae θ sunt a', b', c' (quia $\sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)} = 1$), denotando igitur determinantes tangentis curvae v per ξ, η, ζ, habemus:

$$\cos\omega = \xi a' + \eta b' + \zeta c',$$

unde:

$$-\sin\omega . d\omega = a'd\xi + b'd\eta + c'd\zeta + (\xi\alpha' + \eta\beta' + \zeta\gamma')d\varphi + (\xi\alpha'' + \eta\beta'' + \zeta\gamma'')d\theta;$$

ex proprietate vero lineae brevissimae (Cap. VII. §. 8) sequitur: $a'd\xi + b'd\eta + c'd\zeta = 0$, et quia $\xi = \frac{dx}{ds}$, $\eta = \frac{dy}{ds}$, $\zeta = \frac{dz}{ds}$, nanciscimur, statuendo $ds^2 = \mu^2 d\varphi^2 + d\theta^2$:

$$\xi = \frac{ad\varphi + a'd\theta}{\sqrt{(\mu^2 d\varphi^2 + d\theta^2)}}, \qquad \eta = \frac{bd\varphi + b'd\theta}{\sqrt{(\mu^2 d\varphi^2 + d\theta^2)}}, \qquad \zeta = \frac{cd\varphi + c'd\theta}{\sqrt{(\mu^2 d\varphi^2 + d\theta^2)}},$$

quibus valoribus substitutis, formulae pro $\cos\omega$ et $-\sin\omega . d\omega$, ope aequationum:

$$\begin{array}{lll} aa' + bb' + cc' = 0, & a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, & a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = \mu\overset{\theta}{d}\mu, \\ a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = 0, & a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = 0, & a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = 0, \end{array}$$

transeunt in has:

$$\cos\omega = \frac{d\theta}{\sqrt{(\mu^2 d\varphi^2 + d\theta^2)}}, \qquad -\sin\omega . d\omega = \frac{\mu\overset{\theta}{d}\mu . d\varphi^2}{\sqrt{(\mu^2 d\varphi^2 + d\theta^2)}},$$

quarum combinatio suppeditat:

$$d\omega = -\overset{\theta}{d}\mu\, d\varphi.$$

Jam si nobis datum est triangulum ABC per lineas brevissimas in superficie descriptum, punctum A sumere licet pro initio linearum brevissimarum θ, et AB pro linea brevissima, a qua numeretur angulus φ; tunc BC habetur pro linea brevissima v.

His ita intellectis, integremus formulam pro curvatura integra $-\iint \overset{\theta}{d^2}\mu\, d\varphi\, d\theta$ respectu ipsius θ, unde prodit:

$$-\int \left(\overset{\theta}{d}\mu + Const.\right) d\varphi.$$

Valor constantis determinari potest pro $\theta = 0$, ubi triangulum ipsum ideoque ejus curvatura integra fit $= 0$, quantitas $\overset{\theta}{d}\mu$ vero $= 1$ (pro valore exiguo enim ipsius θ, curva, pro qua θ est constans, fit circulus parvus radio θ circa punctum A descriptus; quum vero sit $ds^2 = \mu^2 d\varphi^2 + d\theta^2$, pro hoc circulo erit $ds = \mu d\varphi$, unde sequitur μ esse hujus circuli radium, sive $\mu = \theta$, et proinde $\overset{\theta}{d}\mu = 1$). Itaque habemus $Const. = -1$, unde pro curvatura integra evadit haec formula:

$$\int \left(-\overset{\theta}{d}\mu + 1\right) d\varphi,$$

quae amplius integranda est respectu ipsius φ. Invenimus vero esse $-\overset{\theta}{d}\mu\, d\varphi = d\omega$, itaque ejus integrale fit:

$$\omega + \varphi,$$

denotante ω angulum, quem linea brevissima BC in quoque puncto cum linea brevissima θ ad hoc punctum ducta format. Hoc integrale a $\varphi = 0$ usque ad $\varphi = A$ extendere debemus. Pro $\varphi = 0$ vero habemus $\omega = \pi - B$, et pro $\varphi = A$, $\omega = C$, igitur pro $\varphi = 0$ et $\varphi = A$, integrale nostrum respective fit $\pi - B$ et $A + C$, unde pro integrali completo nanciscimur:

$$A + B + C - \pi.$$

Hinc prodit hoc theorema illustre:

Curvatura integra trianguli in superficie per lineas brevissimas descripti aequalis est excessui summae trium ejus angulorum ultra π.

Pro superficiebus convexo-concavis igitur, ubi curvatura integra evadit negativa, summa trium angulorum ejusmodi trianguli semper minor est quam 180°.

Hoc theorema manifesto est amplificatio theorematis a clariss. Legendre primo demonstrati, quod cognitum est sub nomine: Théorème de l'excès sphérique.

Facile etiam perspicitur, theorema illud in universum pro quacunque figura in superficie per lineas brevissimas descripta valere, eo modo ut curvatura integra talis figurae, quae n latera habeat, aequalis sit excessui summae ejus angulorum ultra $(n-2)\pi$.

CAP. IX.

De lineis curvaturae superficiei.

§. 1. Lineae curvaturae nominantur curvae, quae ita in superficie ductae sunt, ut earum tangentes in quoque puncto cum directionibus maximae minimaeve curvaturae superficiei congruant. Quum hae directiones in quoque puncto superficiei sibi invicem normales sint (ut in Cap. VII. vidimus), facile perspicitur, lineas curvaturae duo systemata curvarum formare, quae per totam superficiem se extendentes in quoque puncto sub angulis rectis se invicem secent. Duo talia systemata curvarum e. g. in superficie per revolutionem orta meridiani et circuli paralleli formant, et re vera hae sunt lineae curvaturae talis superficiei, ut ex proprietatibus earum elucebit. — Licet enim demonstrare, lineas curvaturae superficiei eas esse curvas, quas punctum intersectionis normalis in superficie describit, si normalem ita movemus, ut superficiem in planum explicabilem formet. Ad id demonstrandum proponamus nobis hoc problema generale: Quonam modo linea recta superficiem secans, cujus determinantes sint functiones datae coordinatarum ejus puncti intersectionis, movenda sit, ut superficiem in planum explicabilem describat. — Problema de lineis curvaturae manifesto tantum pro singulari casu hujus problematis habendum est.

§. 2. Superficies nobis data sit per aequationem $u = 0$, et ponamus determinantes lineae rectae, quae superficiem in puncto (x, y, z) secet, esse ad rationem $m : n : o$, ubi igitur m, n et o sunt functiones ipsarum x, y, z. Haec linea, quum in superficie in planum explicabili movenda sit, in duabus se invicem sequentibus positionibus se ipsa secare debet; hujus puncti intersectionis coordinatas denotabimus per x', y', z', et ejus distantiam a puncto (x, y, z) per ϱ, tunc statuendo $\frac{\varrho}{\sqrt{(m^2+n^2+o^2)}} = \lambda$, tres sequentes habebimus aequationes:

$$x - x' = \lambda m, \qquad y - y' = \lambda n, \qquad z - z' = \lambda o, \tag{I}$$

e quarum differentiatione prodit:

$$\begin{aligned} dx - dx' &= \lambda dm + m d\lambda, \\ dy - dy' &= \lambda dn + n d\lambda, \\ dz - dz' &= \lambda do + o d\lambda. \end{aligned}$$

Quum vero x', y', z' sint coordinatae curvae repercussionis superficiei in planum explicabilis, quam linea se movendo describit, haec linea vero tangens illius curvae, erit $dx' : dy' : dz' = m : n : o$, itaque illas aequationes in hanc formam redigi licet, ponendo $d\lambda + \sqrt{\left(\frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{m^2+n^2+o^2}\right)} = k$:

$$\left.\begin{aligned} dx - km &= \lambda dm, \\ dy - kn &= \lambda dn, \\ dz - ko &= \lambda do; \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

addendo has aequationes respective multiplicatas per $(ndo - odn)$, $(odm - mdo)$, $(mdn - ndm)$, nanciscimur:

$$dx\,(ndo - odn) + dy\,(odm - mdo) + dz\,(mdn - ndm) = 0,$$

unde, quum m, n, o sint functiones ipsarum x, y, z, statuto

$$(n \overset{x}{d}o - o \overset{x}{d}n) = L, \quad (o \overset{y}{d}m - m \overset{y}{d}o) = M, \quad (m \overset{z}{d}n - n \overset{z}{d}m) = N,$$

$$(o \overset{z}{d}m - m \overset{z}{d}o + m \overset{y}{d}n - n \overset{y}{d}m) = 2P, \quad (m \overset{x}{d}n - n \overset{x}{d}m + n \overset{z}{d}o - o \overset{z}{d}n) = 2Q,$$

$$(n \overset{y}{d}o - o \overset{y}{d}n + o \overset{x}{d}m - m \overset{x}{d}o) = 2R,$$

deducitur haec aequatio:

$$Ldx^2 + Mdy^2 + Ndz^2 + 2Pdydz + 2Qdzdx + 2Rdxdy = 0. \tag{III}$$

Quum jam quantitates dx, dy, dz determinent directionem, secundum quam punctum x, y, z moveatur, aequatio illa nobis indicat, hoc punctum in spatio, nulla ratione ad superficiem ($u = 0$) habita, secundum innumeras directiones, quae tamen cunctae in superficie conica secundi gradus jaceant, ita moveri posse, ut linea, cujus determinantes sint functiones ipsarum x, y, z, superficiem in planum explicabilem formet. Quum vero hoc punctum in superficie ($u = 0$) manere coactum sit, inter dx, dy, dz insuper habemus aequationem:

$$Hdx + Idy + Kdz = 0, \tag{IV}$$

denotantibus H, I, K respective $\overset{x}{du}$, $\overset{y}{du}$, $\overset{z}{du}$, quae conjuncta cum (III) nobis determinat rationem quantitatum dx, dy, dz. Quum aequatio (III) sit secundae dimensionis, pro hac ratione duos diversos valores nanciscemur, unde sequitur, punctum in superficie secundum duas directiones moveri posse.

Problema analyticum, ut ratio quantitatum dx, dy, dz ex (III) et (IV) determinetur, jam in cap. II §. 4 solvimus. Statuendo igitur pro altera directione $dx : dy : dz = \alpha : \beta : \gamma$, pro altera $= \alpha' : \beta' : \gamma'$, valores ipsarum α, β, γ et α', β', γ' nanciscimur, substituendo in formulis pro m, n, o et m', n', o' in cap. II §. 4 inventis loco A, B, C, E, F, G, ξ, η, ζ respective L, M, N, P, Q, R, H, I, K, unde prodit:

$$\begin{aligned}
\alpha &= -MKH + PHI - QI^2 + RIK + I\sqrt{-\mathfrak{A}'},\\
\alpha' &= -MKH + PHI - QI^2 + RIK - I\sqrt{-\mathfrak{A}'},\\
\beta &= -LIK - PH^2 + QHI + RKH - H\sqrt{-\mathfrak{A}'},\\
\beta' &= -LIK - PH^2 + QHI + RKH + H\sqrt{-\mathfrak{A}'},\\
\gamma &= \gamma' = LI^2 + MH^2 - 2RIH,
\end{aligned}$$

et denotando angulum, quem duae directiones inter se formant, per ω, habemus:

$$\cos\omega = \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}{\sqrt{[(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})^2 - 4\mathfrak{A}']}},$$

ubi $\mathfrak{B} + \mathfrak{C} = L(I^2 + K^2) + M(K^2 + H^2) + N(H^2 + I^2) - 2PIK - 2QKH - 2RHI$

et $-\mathfrak{A}' = (P^2 - MN)H^2 + (Q^2 - NL)I^2 + (R^2 - LM)K^2 + 2(LP - QR)IK$
$+ 2(MQ - RP)KH + 2(NR - PQ)HI.$

§. 3. Punctum intersectionis igitur superficiei cum linea recta, cujus determinantes functiones datae ejus coordinatarum sunt, secundum duas diversas curvas in superficie moveri potest, ita ut linea superficiem in planum explicabilem describat. Determinantes tangentis alterius curvae sunt ad rationem $\alpha : \beta : \gamma$, alterius ad rationem $\alpha' : \beta' : \gamma'$. Designabimus has curvas respective per s et s'. Quum idem evenire oporteat in quocunque puncto superficiei, habebimus duo systemata curvarum s et s', quae per totam superficiem se extendant, et in quoque puncto sub angulo ω, cujus valor in universum variabilis, se invicem secent.

Aequationes cujuslibet curvae primi systematis (s) nanciscimur in x, y, z, integrando aequationes:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\alpha}{\gamma}, \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{\beta}{\gamma} \tag{V}$$

aequationes curvae secundi systematis (s'), integrando has:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\alpha'}{\gamma'}, \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{\beta'}{\gamma'}; \tag{VI}$$

a determinandis quantitatibus constantibus per integrationem introductis pendet, ad quamnam unam ex curvis s vel s' aequationes pertineant. Ceterum, quia curvae s et s' in superficie ($u = 0$) jacent, jam singulae aequationum (V) et (VI) ad utramque earum determinandam sufficiunt.

§. 4. Priusquam, quae hic invenimus, ad lineas curvaturae adhibemus, contemplationem generalem etiam longius persequamur.

Utrique curvae s et s' superficies in planum explicabilis (S) et (S') respondet, quam linea recta secundum unam vel alteram curvam se movens describit. Itaque etiam duo systemata superficierum in planum explicabilium habebimus, quae, pariter atque curvae s et s' in superficie elementa formant, totum spatium in elementa infinitae longitudinis divident, quae a quatuor lineis intersectionis duarum se invicem sequentium superficierum S et S' concluduntur. Aequationem unius ex superficiebus S obtinebimus in x', y', z', eliminando quantitates x, y, z et λ ex aequationibus (I) cum aequationibus curvae s comparatis. Tractando simili modo aequationes curvae s', pervenimus ad aequationem superficiei S'.

Quaeque superficierum S et S' suam curvam repercussionis habet. Ad inveniendum aequationes talis curvae, antea valorem quantitatis λ, a qua distantia puncti (x', y', z') a puncto (x, y, z) pendet, determinare debemus. E prima et secunda aequationum (II) nullo negotio deducitur:

$$ndx - mdy = \lambda(ndm - mdn),$$

ergo

$$\lambda = \frac{n dx - m dy}{(n \overset{x}{d}m - m \overset{x}{d}n) dx + (n \overset{y}{d}m - m \overset{y}{d}n) dy + (n \overset{z}{d}m - m \overset{z}{d}n) dz}; \qquad \text{(VII)}$$

substituendo in hac formula pro dx, dy, dz respective vel α, β, γ vel α', β', γ', nanciscimur valorem ipsius λ, qui vel curvae s vel curvae s' respondeat.

Quodsi, substitutis in (VII) pro dx, dy, dz respective α, β, γ, inter aequationes (I) et (VII) cum aequationibus curvae s comparatas eliminamus x, y, z et λ, obtinemus in x', y', z' aequationes curvae repercussionis (σ), quae ad superficiem in planum explic. S pertinet. Eadem agendi ratio ad quantitates α', β', γ' et aequationes curvae s' adhibita, suppeditat nobis aequationes curvae repercussionis (σ'), quae ad superfic. S' pertinet. Distantia unius punctorum (x', y', z') a puncto respondenti (x, y, z), quam nominavimus ϱ, nobis datur per formulam:

$$\varrho = \lambda \sqrt{(m^2 + n^2 + o^2)}.$$

Omnes curvae repercussionis σ in superficie quadam (Σ) jacent, quae locus omnium punctorum intersectionis est, quae linea recta se movendo secundum curvas primi systematis s format. Similem superficiem (Σ') constituunt curvae repercussionis σ'.

Ad aequationem superficiei Σ pervenimus, substituendo in (VII) pro dx, dy, dz respective α, β, γ et eliminando tunc x, y, z et λ inter (I), (VII) et aequationem $u = 0$. Adhibendo ad hanc agendi rationem pro α, β, γ quantitates α', β', γ', nanciscimur aequationem superficiei Σ'. — Ceterum superficies Σ et Σ' plerumque partes unius superficiei sunt, cujus aequatio utramque superficiem Σ et Σ' complectitur. Haec aequatio prodit ex eliminatione quantitatum x, y, z, λ, $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ inter aequationes (I), (III), (IV), (VII) et $u = 0$. In eo tantum casu, quum aequationem (III) in duos factores resolvere licet, sive quum $\sqrt{(-\mathfrak{A}')}$ est quantitas rationalis, superficies Σ et Σ' suam utraque aequationem separatam habebunt.

§. 5. Transeamus jam ad casum peculiarem, ubi linea recta se movens est superficiei **normalis**. In hoc casu habemus $m = H$, $n = I$, $o = K$, statuendo igitur $\overset{x}{d^2}u = A$, $\overset{y}{d^2}u = B$, $\overset{z}{d^2}u = C$, $\overset{y}{d}\,\overset{z}{d}u = E$, $\overset{z}{d}\,\overset{x}{d}u = F$, $\overset{x}{d}\,\overset{y}{d}u = G$, erit:

$\overset{x}{dm} = A$, $\overset{y}{dn} = B$, $\overset{z}{do} = C$, $\overset{z}{dn} = \overset{y}{do} = E$, $\overset{x}{do} = \overset{z}{dm} = F$, $\overset{y}{dm} = \overset{x}{dn} = G$,
unde pro coefficientibus aequationis (III) prodeunt hi valores:

$$L = (IF - KG), \qquad M = (KG - HE), \qquad N = (HE - IF), \qquad \text{(VIII)}$$
$$2P = (KF - IG + HB - HC),\ 2Q = (HG - KE + IC - IA),\ 2R = (IE - HF + KA - KB).$$

In hoc igitur casu aequationes (III) et (IV) omnino eaedem sunt, quas inter determinantes tangentium duarum sectionum principalium superficiei obtinere, in cap. VII §. 5 demonstravimus. Itaque **normalis** superficiei, ut superficiem in planum explicabilem describat, in quoque puncto secundum directiones vel **maximae** vel **minimae curvaturae** moveri debet, et proinde ejus punctum intersectionis in superficie illas curvas describit, quas supra **lineas curvaturae** vocavimus.

Angulum ω in hoc casu ubique fieri $= 90°$, e re ipsa jam elucet, verum etiam eo demonstrari licet, quod substitutis pro L, M, N, P, Q, R earum valoribus ex (VIII), numerator formulae pro $\cos\omega$ inventae $(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$ fit $= 0$. Superficies in planum explicabiles S et S' manifesto ad superficiem $(u = 0)$ in quoque puncto normales erunt, atque eodem modo ac lineae curvaturae s et s' ubique sub angulis rectis se invicem secabunt. — Ad cognoscendam indolem curvarum σ et σ' et superficierum Σ et Σ', determinemus valorem quantitatis ϱ in hoc casu. Substitutis in (II) pro m, n, o respective H, I, K, addendo illas aequationes respective per dx, dy, dz multiplicatas, nanciscimur:

$$ds^2 = \lambda(dHdx + dIdy + dKdz) = \lambda(Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 + 2Edydz + 2Fdzdx + 2Gdxdy),$$

itaque, quum habeamus $\varrho = \lambda\sqrt{(H^2 + I^2 + K^2)} = \lambda T$, fit

$$\varrho = \frac{T\,ds^2}{Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 + 2Edydz + 2Fdzdx + 2Gdxdy}.$$

In cap. VII §. 1 vero vidimus, hanc esse formulam pro radio osculi superficiei secundum directionem, cujus determinantes ipsis dx, dy, dz sunt proportionales, igitur, quum in hoc casu quantitates dx, dy, dz respondeant directionibus duarum sectionum principalium superficiei, manifestum est, quantitatem ϱ sive distantiam puncti (x', y', z'), in quo normalis se ipsa in duabus se invicem sequentibus positionibus secet, a puncto (x, y, z) pro altero systemate linearum curvaturae esse **maximum** radii osculi superficiei, pro altero **minimum**. Ponamus, maximum respondere curvis

s, minimum curvis s'. (Minime in errorem induci debemus hunc, ut ϱ putemus esse radium osculi lineae curvaturae, hoc enim secundum cap. VII §. 8 tantum in eo casu accidere possit, si linea curvaturae simul sit linea brevissima in superficie; item debeat esse curva plana, quia radii osculi curvae dupliciter curvatae non formant superficiem in planum explicabilem). Tunc igitur curva repercussionis σ est locus centrorum minimae curvaturae (quae maximo radii osculi respondet), quae ad puncta curvae s pertinent, et curva repercussionis σ' locus centrorum maximae curvaturae, pro punctis curvae s'. Superficies Σ et Σ' sunt loca omnium centrorum minimae et maximae curvaturae superficiei ($u = 0$). Hae duae superficies ergo ad superficiem ($u = 0$) similem habent relationem, atque evoluta orthogonalis ad evolventem suam, quaeque enim normalis superficiei ($u = 0$) tangens est utriusque superficiei Σ et Σ'.

§. 6. Duae se invicem sequentes superficies in planum explicabiles S lineam intersectionis formant, quae locus omnium centrorum maximae curvaturae pro punctis curvae s est, et proinde in superficie Σ' jacet. Simili modo linea intersectionis duarum se invicem sequentium superficierum S' est locus omnium centrorum minimae curvaturae pro punctis curvae s', ideoque jacet in superficie Σ. Ea de causa Σ' est superficies involvens (vide cap. II §. 5) superficiei S, et ab hac tangitur, et vice versa Σ est superficies involvens superficiei S', quae illam tangit. Si igitur planum normale superficiei ($u = 0$) per tangentem curvae s ductum concipimus, superficies S et Σ' simul ab hoc plano tangentur; et eodem modo planum normale per tangentem curvae s' ductum simul superficies S' et Σ tanget. Quum haec duo plana sub angulis rectis se invicem secent, superficies Σ et Σ' ea proprietate esse sequitur, ut quodque planum tangens unius sit alterius planum normale.

Superficies Σ et Σ' generaliter se invicem secant, et earum curva intersectionis respondet curvae in superficie sitae, cujus in punctis omnibus maximum et minimum radii osculi eundem habent valorem, ideoque duae curvaturae superficiei ($u = 0$) sibi invicem aequales sunt. Hanc curvam, quae manifesto per aequationem $\mathfrak{A}' = 0$ determinatur, substitutis in ea pro L, M, N, P, Q, R earum valoribus ex (VIII), lineam sphaericae curvaturae vocant, quia superficies in omnibus ejus punctis sphaeram osculi habet.

Ut illas curvas et superficies, quas descripsimus, facilius cogitatione nobis fingere possimus, contemplemur e. g. superficiem per revolutionem ortam. Hic, ut jam supra memoravimus, meridiani et circuli paralleli duo sunt systemata linearum curvaturae (s) et (s'). Normalis enim superficiei secundum meridianos vel circulos parall. se movens vel plana per axem superficiei transeuntia vel superficies conicas, quarum apices in axe superficiei siti sunt, describit. Illae sunt superficies in planum explicabiles S, hae S'. Curvae repercussionis σ sunt evolutae orthogonales meridianorum, curvae σ' ad puncta reducuntur, quae apices superficierum conicarum S' sunt. Superficies Σ est superficies e revolutione unius curvarum σ orta, et, ut facile intelligi potest, ab omnibus superficiebus conicis S' tangitur, superficies Σ' in lineam rectam redigitur, puta axem superficiei per revolutionem ortae.

§. 7. Adhuc superest ut formulas, quas in §§. praec. eruimus, adaptemus ad eum casum, ubi superficies per aequationem hujus formae $z = \varphi(x, y)$ nobis data sit. — Tunc coefficientes aequationis (III), ut jam in Cap. VII. §. 6 monuimus, hos valores obtinent:

$$L = s, \quad M = -s, \quad N = 0, \quad 2P = pt - qs, \quad 2Q = ps - qr, \quad 2R = t - r,$$

et proinde aequatio (III) transit in hanc:

$$sdx^2 - sdy^2 + (pt - qs)\,dydz + (ps - qr)\,dzdx + (t - r)\,dxdy = 0,$$

ex qua per substitutionem $dz = pdx + qdy$ prodit:

$$[(1 + q^2)s - pqt]\frac{dy^2}{dx^2} + [(1 + q^2)r - (1 + p^2)t]\frac{dy}{dx} - [(1 + p^2)s - pqr] = 0. \quad \text{(IX)}$$

In hac forma plerumque aequatio pro lineis curvaturae sistitur. Integrando eam in hac forma, constans arbitraria per integrationem introducta, in secundo gradu in ea implicatur, ideoque pro quoque puncto superficiei duos diversos habet valores, qui duabus lineis curvaturae respondent. Hanc rationem sequens illustris Monge lineas curvaturae ellipsoidis determinavit, quarum projectiones in planis principalibus vel ellipses vel hyperbolas esse demonstravit (vide Application de l'Algèbre à la Géométrie par M.).

Ad inveniendas aequationes curvarum σ et σ' ac superficierum S, S' et Σ, Σ' idem agendi modus adhibetur, quem in §. 4 explicavimus.

§. 8. Aequatio pro lineis curvaturae vero etiam in formam elegantem eamque saepissime ad integrationem magis accommodatam redigi potest, si coordinatae x, y, z tamquam functiones duarum indeterminatarum φ et ω considerantur; cujus rationis utilitatem jam in aliis casibus cognovimus.

Retinendo igitur significationes cap. VIII §. 4, et statuendo

$$\alpha A'' + \beta B'' + \gamma C'' = D, \qquad \alpha' A'' + \beta' B'' + \gamma' C'' = D', \qquad \alpha'' A'' + \beta'' B'' + \gamma'' C'' = D'',$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = E, \qquad aa' + bb' + cc' = F, \qquad a'^2 + b'^2 + c'^2 = G,$$

secundum aequationes illic evolutas habemus

$$D = C''(a^2r + 2abs + b^2t), \quad D' = C''(aa'r + (ab' + ba')s + bb't), \quad D'' = C''(a'^2r + 2a'b's + b'^2t),$$

unde nullo negotio pro r, s et t deducuntur hi valores:

$$r = \frac{b'^2D - 2bb'D' + b^2D''}{C''^3}, \quad s = \frac{-a'b'D + (ab' + ba')D' - abD''}{C''^3}, \quad t = \frac{a'^2D - 2aa'D' + a^2D''}{C''^3},$$

item habemus:

$$p = -\frac{A''}{C''}, \qquad q = -\frac{B''}{C''}.$$

Quodsi hos valores introducimus in aequationem (IX) et simul statuimus $dx = ad\varphi + a'd\omega$, $dy = bd\varphi + b'd\omega$, $dz = cd\varphi + c'd\omega$, idoneis reductionibus institutis, nanciscimur:

$$(ED' - FD)d\varphi^2 - (GD - ED'')d\varphi d\omega + (FD'' - GD')d\omega^2 = 0. \qquad \text{(X)}$$

Per hanc aequationem nobis data est relatio inter $d\varphi$ et $d\omega$, et duo diversi valores, qui pro $\frac{d\varphi}{d\omega}$ ex ea prodeunt, in quoque puncto superficiei ad directiones duarum linearum curvaturae pertinent. Integrando eam pervenimus ad aequationem hujus formae:

$$k^2 + 2Rk + S = 0, \qquad \text{(XI)}$$

ubi k denotat constantem arbitrariam, R et S vero sunt functiones ipsarum φ et ω.

Jam duos diversos casus distinguere debemus, puta num aequationes (X) et (XI) in duos factores resolvi possint, necne (quantitas radicalis scilicet in utraque aequatione eadem est). — In altero casu, ubi $\sqrt{(R^2 - S)}$ est quantitas irrationalis, ope aequationis (XI) ω exprimi potest per φ et k; per substitutionem hujus valoris pro ω aequationes superficiei transeunt in has:

$$x = f(\varphi), \qquad y = F(\varphi), \qquad z = \mathfrak{f}(\varphi), \qquad \text{(XII)}$$

quae secundum diversos valores, quos constanti arbitrariae k tribuimus, ad diversas lineas curvaturae superficiei pertinent. Tunc igitur eaedem aequationes, modo per diversos valores quantitatis constantis distinctae, utrumque systema linearum curvaturae complectuntur.

In altero casu, ubi $\sqrt{(R^2 - S)}$ est rationalis, denotando duos diversos valores ipsius k per k' et k'', et φ et ω tamquam functiones ipsarum k' et k'' exprimere licet: per hanc substitutionem aequationes superficiei transformantur in has:

$$x = \varphi(k', k''), \qquad y = \psi(k', k''), \qquad z = f(k', k''), \tag{XIII}$$

quae prout k' vel k'' pro constante habetur, ad alterum vel alterum systema linearum curvaturae pertinent. Supponemus curvas s respondere valoribus constantibus ipsius k', curvas s' vero ipsius k''

§. 9. Si jam aequationes normalis superficiei exhibemus in hac forma:

$$x' = x + \varrho\xi, \qquad y' = y + \varrho\eta, \qquad z' = z + \varrho\zeta, \tag{XIV}$$

ubi ξ, η, ζ sint determinantes normalis ideoque $\xi : \eta : \zeta = A'' : B'' : C''$, substituendo in priori casu in iis pro x, y, z earum valores ex (XII), x', y', z' nobis dantur velut functiones ipsarum φ et ϱ, et si spectamus φ et ϱ tamquam variabiles indeterminatas, hae aequationes ad superficies in planum explicabiles S et S' pertinent, ad varias quidem pro variis valoribus constantis k. In altero casu, substituendo in (XIV) pro x, y, z earum valores ex (XIII) et habendo vel ϱ et k'' vel ϱ et k' pro variabilibus indeterminatis, nanciscimur vel aequationes superficierum S vel superficierum S'; illae per varios valores constantis k', hae constantis k'' distinguuntur.

Ut coordinatae x', y', z' ad curvas σ et σ' ac superficies Σ et Σ' spectent, pro ϱ sumendum est maximum et minimum radii osculi superficiei, quos valores per φ et ω expressos facillime nanciscemur substituendo in formula pro ϱ inventa (cap. VII. §. 6) loco r, s, t, p et q earum valores supra datos, unde prodit:

$$\varrho = \frac{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}}{ED'' + GD - 2FD' \pm \sqrt{[(ED'' + GD - 2FD')^2 - 4(DD'' - D'^2)(EG - F^2)]}},$$

ubi quantitas radicalis eadem est atque in aequationibus (X) et (XI), ideoque aequatio:

$$\varrho^2(DD'' - D'^2) - \varrho(ED'' + GD - 2FD')(EG - F^2)^{\frac{1}{2}} + (EG - F^2)^2 = 0, \tag{XV}$$

in eodem casu quo illae in duos factores resolvi potest.

In priori casu, ubi quantitas radicalis irrationalis est, substituendo in aequatione (XV) pro ϱ deinceps ejus valores ex aequationibus (XIV) pervenimus ad tres aequationes tales:

$$(x'-x)^2L + (x'-x)M + N = 0,$$
$$(y'-y)^2L' + (y'-y)M' + N' = 0,$$
$$(z'-z)^2L'' + (z'-z)M'' + N'' = 0,$$

quarum ope, quum L, M, N, L' etc. et x, y, z sint functiones ipsarum φ et ω, etiam x', y', z' per has quantitates nobis datae sunt, et quae aequationes ambas superficies Σ et Σ' complectuntur. Aequatio igitur harum superficierum in x', y', z', quae per eliminationem ipsarum φ et ω ex illis prodit, semper fit ordinis paris respectu x', y', z' — Quodsi pro ω substituimus ejus valorem in φ et k, hae aequationes, pro variis valoribus constantis k, ad curvas σ vel σ' pertinent, vel ad curvas, in quibus superficies S' et S superficies Σ et Σ' tangunt (vide §. 6).

In altero casu, ubi aequatio (XV) in duos factores resolvi potest, ϱ duos plane diversos habet valores, et ope formulae $\varrho = \dfrac{(EG-F^2)(Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\omega + Gd\omega^2)}{Dd\varphi^2 + 2D'd\varphi d\omega + D''d\omega^2}$ optime dignoscitur, uter eorum ad curvam s vel ad curvam s' pertineat.

Tunc substituendo in aequationibus (XIV) pro ϱ eum valorem, qui curvis s respondet, et ponendo simul pro φ et ω earum valores in k' et k'', pervenimus ad tres aequationes tales:

$$x' = f(k',k''), \qquad y' = f'(k',k''), \qquad z' = f''(k',k''), \tag{XVI}$$

quae ad superficiem Σ pertinent. — Tractando eadem ratione eum valorem ipsius ϱ, qui curvis s' respondet, pervenimus ad aequationes ejusdem formae:

$$x' = F(k',k''), \qquad y' = F'(k',k''), \qquad z' = F''(k',k''), \tag{XVII}$$

quae ad superficiem Σ' pertinent. — Quodsi in (XVI) vel k' vel k'' pro constante habemus, hae aequationes pertinent vel ad curvas σ vel ad curvas, in quibus superficies Σ a superficiebus S' tangitur; spectando in (XVII) vel k' vel k'' velut constantem, nanciscimur vel aequationes curvarum, in quibus superficies S superficiem Σ' tangunt, vel curvarum σ'.

§. 10. Ut exemplum afferamus, contemplemur superficiem illam, quam in cap. V §. 4 descripsimus, et cujus aequationes in cap. VI §. 2 statuimus in hac forma:

$$x = \frac{R\, sin\, 2\varphi}{2\, cos\, \omega}, \qquad y = R\, sin\, \varphi^2\, tg\, \omega, \qquad z = R\, sin\, \varphi^2,$$

unde per differentiationem respectu φ et ω deducitur:

$$a = \frac{R\, cos\, 2\varphi}{cos\, \omega}, \qquad b = R\, sin\, 2\varphi\, tg\, \omega, \qquad c = R\, sin\, 2\varphi,$$

$$a' = \frac{R\, sin\, 2\varphi\, sin\, \omega}{2\, cos\, \omega^2}, \qquad b' = \frac{R\, sin\, \varphi^2}{cos\, \omega^2}, \qquad c' = 0,$$

$$\alpha = -\frac{2\, R\, sin\, 2\varphi}{cos\, \omega}, \qquad \beta = 2\, R\, cos\, 2\varphi\, tg\, \omega, \qquad \gamma = 2\, R\, cos\, 2\varphi,$$

$$\alpha' = \frac{R\, cos\, 2\varphi\, sin \omega}{cos\, \omega^2}, \qquad \beta' = \frac{R\, sin\, 2\varphi}{cos\, \omega^2}, \qquad \gamma' = 0,$$

$$\alpha'' = \frac{R\, sin\, 2\varphi\, (1 + sin \omega^2)}{2\, cos\, \omega^3}, \quad \beta'' = \frac{2\, R\, sin\, \varphi^2\, sin \omega}{cos\, \omega^3}, \qquad \gamma'' = 0,$$

et proinde:

$$A'' = -\frac{R^2\, sin\, \varphi^2\, sin\, 2\varphi}{cos\, \omega^2}, \qquad B'' = \frac{R^2\, sin\, 2\varphi^2\, sin\, \omega}{2\, cos\, \omega^2}, \qquad C' = \frac{R^2 (cos\, \omega^2\, sin\, 2\varphi^2 - 2\, sin \varphi^2)}{2\, cos\, \omega^3},$$

$$E = \frac{R^2}{cos\, \omega^2}, \qquad F = \frac{R^2 sin\, 2\varphi\, sin\, \omega}{2\, cos\, \omega^3}, \qquad G = \frac{R^2 (4\, sin\, \varphi^2 - cos\, \omega^2 sin 2\varphi^2)}{4\, cos\, \omega^4},$$

$$D = \frac{2\, R^3\, sin\, \varphi^2}{cos\, \omega^3}, \qquad D' = \frac{R^3 sin\, 2\varphi\, sin\, \varphi^2\, sin\, \omega}{cos\, \omega^4}, \quad D'' = -\frac{R^3\, sin\, 2\varphi^2\, sin\, \varphi^2}{2\, cos\, \omega^3}$$

Per substitutionem horum valorum aequatio (X) transit in hanc:

$$\frac{2 R^5\, sin\, \varphi^4}{cos \omega^7}\, d\varphi d\omega + \frac{R^5 sin\, \varphi^4\, sin\, 2\varphi\, sin\, \omega}{cos\, \omega^8}\, d\omega^2 = 0,$$

quae resolvitur in duos factores:

$$d\omega = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{2 d\varphi}{sin\, 2\varphi} + \frac{sin \omega d\omega}{cos\, \omega} = 0,$$

unde per integrationem prodit vel $\omega = Const.$ vel $log. tg\, \varphi - log. cos\, \omega = Const;$ ponamus:

$$\omega = k', \qquad \frac{cos \omega}{tg\, \varphi} = k''$$

Substituendo hos valores in aequationibus superficiei nanciscimur:

$$x = \frac{R k''}{k''^2 + cos\, k'^2}, \qquad y = \frac{R\, cos\, k'\, sin\, k'}{k''^2 + cos\, k'^2}, \qquad z = \frac{R\, cos\, k'^2}{k''^2 + cos\, k'^2}, \qquad \text{(XVIII)}$$

quae aequationes, prout k' vel k'' pro constante habetur, ad alterum vel alterum systema linearum curvaturae pertinent. — Lineae curvaturae s, pro quibus k' constans, manifesto sunt circuli, in quibus superficies a planis per axem x transeuntibus et sub angulo k' ad planum $(z\,x)$ inclinatis secatur. — Lineas curvaturae s', pro quibus k'' constans, quum per eliminationem ipsius k' ex (XVIII) nanciscamur aequationes: $xk'' = R - z$ et $y^2k''^2 + z^2(1 + k''^2) = Rz$, quae ad illas curvas pertineant, et ipsos circulos esse patet, puta lineas intersectionis superficiei cum planis ad planum $(z\,x)$ normalibus, quae omnia per punctum axis z, ab initio coordinatarum quantitate R distans, transeunt et cum plano $(y\,z)$ formant angulum, cujus $cotg = k''$.

Si ex aequationibus normalis:

$$x' = x + \varrho\xi, \qquad y' = y + \varrho\eta, \qquad z' = z + \varrho\zeta,$$

substitutis pro x, y, z earum valoribus in k' et k'', itemque pro ξ, η, ζ respective:

$$\xi = -\frac{2k''\cos k'^2}{k''^2 + \cos k'^2}, \qquad \eta = \frac{2k''^2\cos k'\sin k'}{k''^2 + \cos k'^2}, \qquad \zeta = \frac{2k''^2\cos k'^2 - (k''^2 + \cos k'^2)}{k''^2 + \cos k'^2},$$

eliminamus vel ϱ et k'' vel ϱ et k', pervenimus vel ad aequationem superficierum S vel superficierum S'. Nanciscimur in primo casu aequationem:

$$(2Rz - x'^2 - y'^2)\sin k'^2\cos k' - y'(R + 2z')\sin k'\cos k'^2 + y'R\sin k'^3 + y'^2\cos k'^3 = 0,$$

quae per substitutionem formularum

$$x' = \bar{x}, \quad y' = \cos k'\,\bar{y} + \sin k'\,\bar{z} + R\,tg k', \quad z' = -\sin k'\,\bar{y} + \cos k'\,\bar{z} + \frac{R\cos 2k'}{2\cos k'^2}$$

transmittitur in hanc:

$$\bar{y}^2 - (\bar{z}^2 + \bar{x}^2)\,tg^2k' = 0;$$

in altero casu aequationem:

$$[(R - 2z')k'' + (1 - k''^2)x'](R - x'k'') - k''y'^2 = 0,$$

quae per substitutionem formularum

$$x' = \frac{k''\bar{x}}{\sqrt{(1 + k''^2)}} - \frac{\bar{z}}{\sqrt{(1 + k''^2)}} + \frac{R}{k''}, \quad y' = \bar{y}, \quad z' = \frac{\bar{x}}{\sqrt{(1 + k''^2)}} + \frac{k''\bar{z}}{\sqrt{(1 + k''^2)}} + \frac{R}{2k''^2}$$

transit in hanc:

$$k''^2\bar{x}^2 - (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) = 0.$$

Itaque et S et S' sunt superficies conicae cum basi circulari.

Adhibendo formulam (XV) pro maximo et minimo radii osculi ad superficiem propositam obtinemus pro ϱ hos duos valores:

$$\varrho = \frac{R}{2\cos\omega^2} = \frac{R}{2\cos k'^2} \qquad \text{et} \qquad \varrho = -\frac{R\,tg\varphi^2}{2\cos\omega^2} = -\frac{R}{2k''^2},$$

qui respective curvis s et s' respondent. Substituendo igitur priorem valorem ipsius ϱ in aequationibus normalis, aequationes inde prodeuntes

$$x' = 0, \qquad y' = R\,tgk', \qquad z' = R\,\frac{\cos 2k'}{2\cos k'^2}$$

ad superficiem Σ pertinent, quae proinde in curvam reducitur, puta parabolam in plano princ. (yz) jacentem, cujus aequatio est:

$$y'^2 = 2R\left(\frac{R}{2} - z'\right).$$

Per substitutionem alterius valoris pro ϱ aequationes normalis transeunt in has:

$$x' = \frac{R}{k''}, \qquad y' = 0, \qquad z' = \frac{R}{2k''^2}.$$

Itaque etiam superficies Σ', ad quam spectant hae aequationes, reducitur in parabolam in plano (yx) sitam, cujus aequatio est $x'^2 = 2Rz'$.

Curvae σ et σ' proinde sunt puncta, scilicet apices superficierum conicarum S et S'.

CONTENTA.

Pag.

Introductio lemmata quaedam sistens e geometria analytica . . 1

Cap. I. De aequationibus superficierum curvarumque in universum et specialiter de superficiebus secundi gradus 8

Cap. II. De superficiebus, quae per curvam motam, cujus forma in universum variabilis supponitur, oriuntur, item de superficiebus involventibus 16

De curvis.

Cap. III. De arcu curvae ejusque tangenti. — De contactu duarum curvarum et variis contactus gradibus. — De circulo osculi 30

Cap. IV De variabili axium systemate, de curvaturis curvae et ejus punctis inflexionis . . 44

Cap. V. De évolventibus et evolutis curvae 52

De superficiebus.

Cap. VI. De elemento superficiei, de plano tangenti et de contactu duarum superficierum 63

Cap. VII. De maximo et minimo radii osculi in puncto quodam superficiei. — De lineis brevissimis 72

Cap. VIII. De curvatura superficierum 83

Cap. IX. De lineis curvaturae superficiei 93