

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL



Harry Oiglane

KAASAEGSE
TEOREETILISE FÜÜSIKA
PÕHIKURSUS

I OSA

KLASSIKALINE TEORIA

TARTU  1965

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Harry Siiglane

**KAASAEGSE
TEOREETILISE FÜÜSIKA
PÕHIKURSUS**

I OSA

KLASSIKALINE TEORIA

TARTU 1965

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Динкооли, 18
Харри Нилглане
ОСНОВНОЙ КУРС
СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
1 часть
Классическая теория
На востокем янке

Vastutav toimetaja P. Kard
Korrektor E. Oja

TRÜ rotaprint 1965. Trükipoognaid 11. Tingtrüki-
poognaid 10. Arvestuspoognaid 7,85. Trükiarv 500.
Paljundamisele antud 3. VI 65. MB 04770.
Tell. nr. 204.
Hind 23 kop.

S i s s e j u h a t u s .

Matemaatikaosakonna õppeplaanides on teoreetilisel mehhaanikal eriline koht. Õieti on kuni kõige viimase ajani jäänud teoreetiline mehhaanika ainsaks füüsikaliseks kursuseks, milles orienteerumist peetakse matemaatikaosakonna üliõpilastele kohustuslikuks. See on kursus, mis peab tagama siideme matemaatika ja viimase ühe olulisema rakendusala, teoreetilise füüsika vahel.

Niisugusel teoreetilise mehhaanika eelistamisel teiste füüsikakursuste ees on ajaloolised juured. See pärineb 18/19. sajandist, mil mehhaanika oli füüsika juhtiv haru ja osaliselt isegi filosoofilist maailmavaadet kujundav distsipliin. Teoreetiline mehhaanika oli oma loomult suurepäraseks rakendusosalaks diferentsiaal- ja integraalarvutusele ja on seda oma olemuselt tänapäevani. Matemaatika kaasaegsemad harusid nagu hulkade teooriat, lineaarsete ruumide ja operaatorite teooriat, funktsionaalanalüüsi jt. võib teoreetilises mehhaanikas küll rakendada, kuid need ei ole sellele distsipliinile iseloomulikud. Teiselt poolt on teoreetiline mehhaanika minetanud oma osa ka füüsikute maailmavaate kujundajana ja andnud maad tervele reale teoreetilise füüsika haru-

dele nagu klassikaline elektrodünaamika ja spetsiaalne relatiivsusteooria ning kvantmehhaanika ja väljade kvantteooria. Loetletud distsipliinid on need, mis määravad kaasaegse füüsika ideelise aluse ja neid võib seetõttu nimetada täie õigusega kaasaegse füüsika põhikursuseks. Ja kui pida da silmas veel seda, et kaasaegse füüsika põhikursusesse kuuluvad distsipliinid kasutavad õige intensiivselt matemaatika nooremaid harusid, siis saab selgeks, et teoreetilise mehhaanika kõrval (osalt isegi asemel) peab matemaatikaosakonna õppeplaanides olema tingimata ka ülevaade kaasaegse teoreetilise füüsika loetletud aluskursustest.

Teoreetilise füüsika kursust võib üles ehitada kahel põhimõttel. Võib aluseks võtta looduse vaatlemisel ja eksperimenteerimisel saadud materjal ja tuua sellele juurde matemaatika kui eksperimentaalse materjali süstematiseerimise ja seletamise vahendi. Võib aga lähtuda ka teisest küljest, võttes arvesse, et matemaatika on samuti üks loodusteadustest, mis peegeldab maailmas valitsevaid seaduspärasusi. Sel juhul me võtame aluseks olemasoleva matemaatilise aparatuuri ja vaatame, missugust füüsikalist sisu on võimalik sellele vastavusse seada. Füüsikaosakonnas ehitatakse teoreetilise füüsika kursused üles esimesel printsiibil, nagu see ongi loomulik. Matemaatiku mõttelaadile peaks aga olema vastuvõetavam teisel printsiibil koostatud kursus, mille lähtekohad on matemaatikas.

Käesolev ülevaade ongi koostatud viimasel põhimõttel. Seejuures on tegemist ikkagi füüsika kursusega, kus pearõhk pannakse füüsikalisele tõlgendusele ja faktile, ilma et kü-

aimuse matemaatiliselt täielikku käsitlemist taotletaks. Mitmesugused olemasolu, ühesuse ja teised matemaatikale tüüpilised probleemid peavad käesolevast välja jääma. Kui aga niisugune matemaatilisest mõttest lünklik käsitlemine innustab matemaatikut küsimust matemaatiliselt põhjalikumalt uurima, siis on sellest kahtlemata kasu nii teoreetilisele füüsikale kui ka matemaatikale endale.

Käesolev kursus on mõeldud matemaatikaosakonna üliõpilastele sissejuhatusena teoreetilise füüsika ideede ringi. Kuid ta peaks tooma kasu ka teoreetilise füüsika osakonna üliõpilastele kui matemaatilise kallakuga kokkuvõttekursus distsipliinidest, millede füüsikalise sisuga on nad varem juba põhjalikumalt tuttavad.

Kursus on kavandatud kolmeosalisena:

Esimene osa - "Klassikaline teooria" - käsitleb aeg-ruumi teisendusi ja nendega seotud spetsiaalset relatiivsusteooriat. Siia kuuluvad ka klassikalise elektrodünaamika need osad, mis kirjeldavad laengu liikumist välises elektromagnetilises väljas.

Teine osa - "Ettevalmistus kvantteooriaks" - uurib aeg-ruumi teisenduste rühmade esitust, kusjuures teisendusrühmi määravaid operaatoreid käsitletakse kui füüsikaliste suuruste esitajaid. Leitakse relativistlikult invariantsete võrrandid ja antakse neile klassikalises väljateoorias omane tõlgendus (Maxwelli võrrandid).

Kolmandas osas - "Kvantteooria" - antakse relativistlikult invariantsetele võrranditele algul kvantmehaaniline, seejärel ka väljade kvantteooriale omane tõlgendus.

I p e a t ü k k .

SISSEJUHATAVAID ÜLDKÜSIMUSI.

§ 1 . R ü h m a m õ i s t e .

Rühmaks nimetatakse igat matemaatiliste objektide hulka G , mis täidab nõudeid:

1° Hulgaks on defineeritud algebraline operatsioon, mis igale antud järjekorras võetud elementide paarile (g_i, g_k) seab vastavusse sama hulga mingisuguse elemendi g_e

$$(g_i, g_k) \rightarrow g_e , \quad g_i, g_k, g_e \in G . \quad (1.1)$$

Selle algebralise operatsiooni konkreetne tähendus võib olla mitmesugune. Harilikult nimetatakse algebralist operatsiooni korrutamiseks ja valem (1.1) kirjutatakse üles kujul

$$g_i g_k = g_e , \quad g_i, g_k, g_e \in G . \quad (1.2)$$

Algebraline operatsioon ei tarvitse olla kommutatiivne, s.o. üldiselt

$$g_i g_k \neq g_k g_i ,$$

kuid peab olema assotsiatiivne

$$g_i (g_k g_e) = (g_i g_k) g_e .$$

2° Hulgaks on vasakpoolne ühikelement g_0 , nii et

$$g_0 g_i = g_i \quad \text{mistahes } g_i \in G \text{ korral.} \quad (1.3)$$

3° Hulgaks on igale elemendile g_i vastav vasakpoolne pöördelement, mida tähistatakse g_i^{-1} ja mis rahuldab tingimust

$$g_i^{-1} g_i = g_0. \quad (1.4)$$

On võimalik näidata, et vasakpoolne ühikelement on ühtlasi ka parempoolseks ühikelemendiks

$$g_i g_i = g_i g_0 = g_i \quad (1.3a)$$

ja vasakpoolne pöördelement on ühtlasi ka parempoolseks pöördelemendiks

$$g_i^{-1} g_i = g_i g_i^{-1} = g_0. \quad (1.4a)$$

Kokkuvõtlikult: Rühm on matemaatiliste objektide hulk, milles on defineeritud üks assotsiatiivne algebraline operatsioon ja mis sisaldab ühikelementi ning igale elemendile vastavat pöördelementi.

Kui rühma elementide arv on lõplik, siis nimetatakse rühma lõplikuks rühmaks, vastupidisel juhul on tegemist lõpmatu rühmaga. Lõpliku rühma elementide arvu nimetatakse rühma järguks.

Kui rühmas defineeritud algebraline operatsioon on kommutatiivne, s. o. kui

$$g_i g_k = g_k g_i \quad \text{mistahes } g_i, g_k \in G \text{ korral,}$$

siis nimetatakse rühma kommutatiivseks rühmaks ehk Abeli rühmaks.

Kui osa rühma G elementidest omaette võetuna täidab

kõiki rühma G nõudeid, siis nimetatakse nende elementide hulka rühma G alamrühmaks.

Olgu antud rühm G ja tema alamrühm C .

Võtame nüüd rühma G meelevaldse elemendi g_i ja moodustame kõikvõimalikud korrutised $g_i c g_i^{-1}$ alamrühma C kõigi elementidega $c \in C$. Niisuguste korrutiste hulka tähistame sümboolselt $g_i C g_i^{-1}$. Kui nüüd osutub, et

$$g_i C g_i^{-1} = C$$

iga $g_i \in G$ korral, siis nimetame alamrühma C rühma G invariantseks alamrühmaks või normaaljagajaks.

Igas rühmas on triviaalne normaaljagaja - see on ainult ühikelemendist koosnev alamrühm.

Rühma, millel ei ole mittetriviaalseid invariantseid alamrühmi, nimetatakse lihtsaks rühmaks.

Alamrühma rühmas G , mis koosneb kõikvõimalikest korrutistest $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ ($g_1 \in G$, $g_2 \in G$) nimetatakse rühma G kommutandiks ehk tuletisrühmaks ja tähistatakse G' . Saab näidata, et tuletisrühm on rühmale G invariantseks alamrühmaks.

Tuletisrühmade moodustamise protsessi võib jätkata: moodustame rühma G tuletisrühma G' , edasi moodustame rühma G' tuletisrühma G'' jne. jne.

Rühma G nimetatakse lahenduvaks, kui tema tuletisrühmade jada viimaseks liikmeks tuleb ühikelemendist koosnev rühm: G', G'', G''', \dots, E ; $E = \{e\}$

Rühma, millel ei ole lahenduvaid invariantseid alamrühmi, nimetatakse poollihtsaks rühmaks.

Olgu meil kaks rühma G ja H oma elementidega $g_i \in G$, $h_i \in H$. Kui on võimalik korraldada üks-ühest vastavust

$$g_i \longleftrightarrow h_i, \quad g_i \in G, \quad h_i \in H,$$

nii et elementide korrutisele ühes rühmas vastab vastavate elementide korrutis ka teises rühmas

$$g_i g_k \longleftrightarrow h_i h_k, \quad g_i, g_k \in G, \quad h_i, h_k \in H,$$

siis nimetatakse rühmi G ja H isomorfseteks ning kirjutatakse

$$G \longleftrightarrow H.$$

Teisiti võib ka öelda, et rühm H on rühma G isomorfseks kujutiseks (või vastupidi; rühm G on rühma H isomorfseks kujutiseks).

Kui on võimalik korraldada ühest vastavust

$$g_i \longrightarrow h_i, \quad g_i \in G, \quad h_i \in H,$$

nii et

$$g_i g_k \longrightarrow h_i h_k, \quad g_i, g_k \in G, \quad h_i, h_k \in H,$$

siis öeldakse, et rühm H on rühma G homomorfseks kujutiseks ja seda tähistatakse

$$G \longrightarrow H.$$

Teisiti võib ka öelda, et rühm G on homomorfne rühmaga H .

Defineerime kahe hulga A ja B korrutise kui hulga C , mille elementideks on hulkade A ja B elementide kõikvõimalikud korrutised:

$$a_i b_k \in C, \quad a_i \in A, \quad b_k \in B.$$

Kui üks ja sama element esineb korrutises mitu korda, siis arvestame teda ainult ühekordselt. Rühma erijuhul saame:

$$G \cdot G = G .$$

Olgu antud rühma G invariantne alamrühm H . Moodustame hulga, mille elementideks on hulgad $g_0 H = H, g_1 H, \dots, g_i H, \dots$. Lihtne on veenduda, et hulk

$$F = \{H, g_1 H, \dots, g_i H, \dots\}$$

moodustab hulkade korrutamise suhtes rühma. Seda rühma F nimetatakse rühma G faktorrühmaks normaaljagaja H suhtes ja tähistatakse $F = G/H$. Normaaljagaja H ise on faktorrühmaühikelemendiks.

§ 2. F ü ü s i k a l i s e r u u m i j a a j a m a t e m a a t i l i s e s t k i r j e l d a m i s e s t .

Kõik füüsika uurimisobjektid asetsevad ning liiguvad ruumis. Filosoofiast me teame, et ruum ja aeg on mateeria eksisteerimise põhivormideks. Selle määrangu filosoofiline lah-timõtestamine ei ole meie käesoleva kursuse ülesanne. Meile on oluline fakt, et materiaalse maailma objektide vaheliste suhete hulgast eralduvad teravalt teatud liiki suhted, mida nimetatakse ruumilisteks ja ajalisteks suheteks. Vastavalt sellele kogemusele tuleb ka looduse matemaatilisel kirjeldamisel eraldada osa uurimisobjektide vahekorradest kui ruumilised ja ajalised vahekorrad ning käsitleda neid geomeetria matemaatilise aparatuuri abil. Objektide füüsikalised omadu-

sed üksinda ei anna täielikku füüsikalist pilti loodusest. Samuti ei piisa, üldiselt rääkides, ainult aja ja ruumi geometria andmisest, vaid looduse kirjeldamisel peab füüsikaline aspekt alati seotud olema geometrilise aspektiga. Tun- tud prantsuse matemaatik ja füüsik H. Poincaré väitis, et füüsika objektide matemaatilist uurimist saab kujutada järg- mise tunnetusteoreetilise summa kujul:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Postuleeritud} \\ \text{aeg-ruumi} \\ \text{geomeetria} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Mittegeomeetri-} \\ \text{sed seadused, mis} \\ \text{on väljendatud} \\ \text{geomeetria abil} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Füüsikalise} \\ \text{nähtuse} \\ \text{vaadeldav} \\ \text{kirjeldus} \end{array} \right\}$$

Kas selle tunnetusteoreetilise summa geometriline ja mittegeomeetriline osa on määratud üheselt või mitte, see pole praegu selge. Meie ei tea alati, missugune osa vaadel- davast nähtusest on tingitud aja ja ruumi geometriast, mis- sugune osa mittegeomeetristest loodusseadustest. Käesole- vas me neid küsimusi lähemalt ei arutle. Samuti ei uuri me siin küsimust, kas aeg-ruumi geometria on põhimõtteliselt ainult postuleeritav või on seda võimalik vaatlustest välja lugada. Meile piisab inimkonna kauaaegsetest kogemustest, et ruum, milles me elame ja tegutseme, on kolmedimensiooniline ruum, milles kõik mõõtmistulemused on reaalarvude abil väl- jendatavad ja milles saab konstrueerida eukleidilises geo- meetrias kirjeldatavaid kujundeid. See tähendab, et meie ruu- mi matemaatiliseks mudeliks sobib kolmedimensiooniline line- aarne reaalne eukleidilise meetrikaga vektorruum. Aja mate- maatiliseks mudeliks, nagu näitab kogemus, tuleb võtta ühe- dimensiooniline lineaarne reaalne eukleidilise meetrikaga vektorruum.

Tuletame lühidalt meelde, kuidas nimetatud ruume matemaatikas defineeritakse.

Lineaarne vektorruum.

Lineaarseks vektorruumiks R nimetatakse Abeli rühma, kus peale rühmaoperatsiooni on defineeritud veel elemendi korrutamine kompleksarvuga.

Lineaarse vektorruumi elemente nimetatakse vektoriteks ja tähistatakse s, t, \dots . Et rõhutada rühmaoperatsiooni kommutatiivsust, nimetatakse seda harilikult liitmiseks ja tähistatakse plussmärgiga. Eelmises paragrahvis toodud kolm rühmapostulaati kõlavad siis järgmiselt:

1° Kui $s \in R$ ja $t \in R$, siis ka $s + t \in R$, kusjuures $s + t = t + s$.

2° Vektorruumis R on alati nullvektor (rühma ühik-element) omadusega $s + 0 = 0 + s$ mistahes $s \in R$ korral.

3° Vektorruumis R on igale vektorile s vastav pöördvektor, mida tähistatakse $-s$ ja millel on omadus

$$s + (-s) = -s + s = 0.$$

Vektori korrutamine kompleksarvuga defineeritakse järgmiste omaduste kaudu:

$$1^\circ (\alpha + \beta)s = \alpha s + \beta s,$$

$$2^\circ \alpha(s + t) = \alpha s + \alpha t,$$

$$3^\circ \alpha(\beta s) = (\alpha\beta)s,$$

mis kehtivad iga $s, t \in R$ korral ning meelevaldsete kompleksarvude α ja β puhul. Neile lisandub veel neljas tingimus:

$$4^\circ \alpha s = s \text{ iga } s \in R \text{ korral, kui } \alpha = 1.$$

Kui antud lineaarses vektorruumis on võimalik leida n lineaarselt sõltumatut vektorit, kuid pole võimalik leida ühtegi $n + 1$ vektorist koosnevat lineaarselt sõltumatute vektorite kogumit, siis öeldakse, et meil on tegemist n -dimensioonilise vektorruumiga.

n -dimensioonilises vektorruumis on võimalik leida ülimalt n lineaarselt sõltumatut vektorit. Neid lineaarselt sõltumatuid vektoreid nimetame baasivektoreiks ja tähistame

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n.$$

n -dimensioonilise lineaarse vektorruumi iga vektor S on avaldatav sama ruumi baasivektorite lineaarse kombinatsioonina

$$S = \sum_{k=1}^n \sigma_k u_k. \quad (1.5)$$

Kompleksarve σ_k nimetatakse vektori S komponentideks baasi (u_1, u_2, \dots, u_n) suhtes. Vektori komponendid on fikseeritud baasi korral alati üheselt määratud. Ja teiselt poolt, kui baas on teada, määravad komponendid σ_k vektori S üheselt.

Lineaarne meetriline vektorruum.

Lineaarse meetrilise vektorruumi saame lineaarsest vektorruumist, kui viime sinna sisse meetrika, s. o. kui määrame ruumis pikkuste mõõtmise eeskirja. Seda tehakse uue tehte, kahe vektori skalaarkorrutise defineerimisega vektorruumis.

Lineaarne meetriline vektorruum on seega niisugune hulk, kus on defineeritud kolm tehet:

vektorite liitmine,

vektori korrutamine kompleksarvuga (skaalariga) ja vektorite skalaarkorrutis.

Vektorite S ja t skalaarkorrutis on kompleksarv, mida tähistatakse (S, t) . Kahe vektori skalaarkorrutis defineeritakse järgmiste omadustega:

$$1^\circ (S_1 + S_2, t) = (S_1, t) + (S_2, t),$$

$$2^\circ (t, S) = \overline{(S, t)} \quad ((S, t) \text{ tähendab } (S, t) \text{ kaaskompleksi})$$

$$3^\circ (\alpha S, t) = \alpha (S, t), \text{ kus } \alpha \text{ on mistahes kompleksarv.}$$

Omadusest 2° on näha, et vektori skalaarkorrutis iseendaga (S, S) on alati reaalarv: $(S, S) = \overline{(S, S)}$. Me nõuame aga täiendavalt veel, et

$4^\circ (S, S) \geq 0$, kusjuures võrdusmärk on õige ainult siis, kui $S = 0$.

Avaldist $(S, S) = |S|^2$ nimetatakse vektori absoluutväärtuse ruuduks või ka vektori pikkuse ruuduks. Skalaarkorrutise sissetoomine võimaldab vektorruumis pikkusest rääkida, s. o. võimaldab ruumis mõetmisi toimetada. Selles mõttes määrabki skalaarkorrutise operatsioon vektorruumi meetrika.

Olgu antud kaks vektorit S ja t baasivektorite lineaarkombinatsioonidena

$$S = \sum_{k=1}^n \sigma_k u_k,$$

$$t = \sum_{i=1}^n \tau_i u_i.$$

Kasutades skalaarkorrutise postulaate on nüüd lihtne veenduda, et

$$(S, t) = \sum_{i,k=1}^n \bar{\tau}_i \sigma_k (u_k, u_i).$$

Kahe baasivektori skalaarkorrutist tähistame

$$(u_k, u_i) = h_{ik}.$$

Kuna suurusi h_{ik} on n^2 tükki, siis võime neid vaadata kui teatud maatriksi H elemente. Seda maatriksit nimetatakse meetriliseks maatriksiks. Kahe vektori skalaarkorrutis avaldub siis vektorite komponentide ja meetrilise maatriksi elementide kaudu järgmiselt:

$$(s, t) = \sum_{i,k=1}^n \bar{z}_i h_{ik} \sigma_k. \quad (1.6)$$

Erijuhul, kui baasivektorid moodustavad ortonormeeritud süsteemi, s. o. kui

$$(u_k, u_i) = \delta_{ik}, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i=k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

on meetriliseks maatriksiks ühikmaatriks: $h_{ik} = \delta_{ik}$.

Osutub, et ortonormeeritud baasi kogu ruumi jaoks igasugustes ruumides sisse tuua ei saa. Seda ei saa teha näiteks kogu kerapinna jaoks. Neid ruume, kus on võimalik konstrueerida kogu ruumi jaoks ühist ortonormeeritud baasi, nimetatakse eukleidilise meetrikaga ruumideks.

Ortonormeeritud baasi korral avaldub kahe vektori skalaarkorrutis

$$(s, t) = \sum_{k=1}^n \bar{z}_k \sigma_k. \quad (1.6a)$$

Erijuhul, kui meil on reaalne vektorruum, kus kõigi vektorite komponendid avalduvad reaalarvudena, saame skalaarkorrutise valemi

$$(s, t) = \sum_{k=1}^n \bar{z}_k \sigma_k. \quad (1.6b)$$

Füüsikalise ruumi matemaatiline mudel.

Kogemusest me teame, et füüsikalise ruumi punkte saame iseloomustada vektoritega, mida piltlikult võib kujutada suunatud sirglõikudena. Lineaarselt sõltumatuid vektoreid saame ruumis valida kolm tükki, nendeks on näit. ühikvektorid Cartesiuse ristkoordinaadistikus. Selles avaldub meie ruumi kolmedimensioonilisus. Baasvektoreiks, millede lineaarkombinatsioonidena saame avaldada kõiki vektoreid, ongi eelnimetatud telgede suunalised ühikvektorid Cartesiuse ristkoordinaadistikus.

Et Cartesiuse ristkoordinaadistiku sissetoomine kogu ruumi jaoks on võimalik, selles avaldub meie ruumi eukleidiiline iseloom.*

Kahe ruumivektori $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ja $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ skalaarkorrutis avaldub meil

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{k=1}^3 x_k y_k .$$

Eelöeldust on näha, et oma füüsikalise ruumi matemaatiliseks mudeliks võime võtta kolmedimensioonilise lineaarse reaalse eukleidiilise meetrikaga vektorruumi. Analoogiline aja omaduste analüüs näitab, et aja matemaatiliseks mudeliks sobib ühedimensiooniline lineaarne reaalne eukleidiilise meetrikaga vektorruum.

* Täpsemini on olukord nähtavasti niisugune, et väga suurte kosmiliste ruumi piirkondade ulatuses me ühist Cartesiuse koordinaadistikku kasutada ei saa; niisuguseid piirkondi tuleb kirjeldada Riemanni geomeetria abil. Suurtes ulatustes tuleb ilmsiks ruumi "kõverus". Väiksemates ruumialades ruumi "kõverus" praktiliselt avastatav ei ole, seepärast võime siin konstrueerida kogu ala jaoks ühise Cartesiuse ristkoordinaadistiku, mida lihtsuse mõttes loeme kehtivaks kogu ruumis.

Füüsikaliste objektide ruumilisi suhteid saab kirjeldada ainult kindlalt fikseeritud ruumikoordinaadistiku (baasi) taustal. Koordinaadistiku valik on seejumres teatud määral meelevaldne. Meie kogemus ütleb, et ruumil on kaks põhiomadust:

1) Ruum on isotroopne, s. o. kõik ruumisuunad on põhimõtteliselt samaväärsed. See tähendab, et samaväärsed on ka koordinaattelgede kõikvõimalikud suunad. Samaväärsed peavad olema ka paremakäe ja vasakukäe koordinaadistikud.

Ruumi isotroopsust arvestatakse teorias sel teel, et nõutakse füüsika võrrandite invariantisust koordinaadistiku kui terviku pöörete suhtes. Võiks muidugi nõuda invariantisust baasi lineaarteesenduste suhtes üldse, kuid see viib keerukamatele valemitele, ilma et teooria füüsikaline sisu sellest muutuks. Füüsika võrrandid peavad olema invariantid ka ruumikoordinaadistiku peegelduse suhtes, seda muidugi eeldusel, et võrranditega kirjeldatavad objektid või protsessid on peegelsümmeetrilised.

2) Ruum on homogeenne, s. o. kõik ruumipunktid on põhimõtteliselt samaväärsed. Sisuliselt tähendab see, et lõpmatul universumil ei ole keskpunkti. Kõik ruumipunktid sobivad üksteisi hästi koordinaadistiku alguspunktiks.

Ruumi homogeensust arvestatakse teorias sel teel, et nõutakse füüsika võrrandite invariantisust koordinaadistiku alguspunkti nihete suhtes.

Füüsikalisi protsesse saab kirjeldada ainult siis, kui meil on peale ruumikoordinaadistiku antud ka aja mõõtmise

süsteem (kell). Kogemus näitab, et aja põhiomaduseks on homogeensus, s. o. kõik ajahetked on põhimõtteliselt samaväärsed. Me võime kella käima panna mistahes ajahetkel, ilma et kella edasine käik sellest sõltuks. Aja selle omaduse arvestamisel teoorias tuleb nõuda füüsika võrrandite invariantisust aja alguspunkti nihete suhtes.

Isotroopsuse omadust ajal ei ole. Aega kirjeldavas ühedimensioonilises vektorruumis on üks suund (tulevik) tema vastassuunast (minevik) teravalt eristatav.

Aja ja ruumi homogeensusust ning ruumi isotroopsust arvestavad baasi teisendused aega ning ruumi kirjeldavates vektorruumides pakuvad teoreetilises füüsikas suurt huvi.

§ 3. Lineaaroperaatorid.

Rühmateooriat rakendatakse füüsikas palju. Rühma elementide füüsikaline tähendus võib olla seejuures mitmesugune. Samuti võib olla mitmesugune rühmas defineeritud algebralise operatsiooni konkreetne tähendus. Rühmateoorias pole rühma elementide konkreetne tähendus oluline, mille rõhutamiseks rühma nimetatakse siin tihti abstraktseks rühmaks. Just see abstraktsus võimaldab rakendustes rühma elemente ja rühmas defineeritud algebralist operatsiooni vajaduse järgi konkretiseerida.

Rühma elemente võib alati esitada lineaarse vektorruumi lineaarteisenduste kujul. Lõplikudimensioonilise (täpsemini loenduva dimensioonide arvuga) vektorruumi lineaarteisendusi saab esitada maatriksitena. Need juhud pakuvad meie kursuses erilist huvi.

Vektorruumi lineaarteisendused.

Vektorruumi lineaarteisenduseks nimetame teatud eeskirja A , mis seab vektorruumi igale elemendile S vastasse teise elemendi S' (lühidalt kirjutame $S' = AS$), kusjuures kehtivad järgmised omadused:

1° Kui $AS = S'$, siis $A(\alpha S) = \alpha S'$.

2° Kui $AS = S'$ ja $At = t'$, siis $A(S+t) = S'+t'$.

Esimene neist tingimustest ütleb: kui lineaarteisendus A teisendab vektori S vektoriks S' , siis teisendab ta vektori αS vektoriks $\alpha S'$.

Teine tingimus ütleb: kui lineaarteisendus A teisendab vektori S vektoriks S' ja vektori t vektoriks t' , siis teisendab ta nende vektorite summa $S+t$ summaks $S'+t'$.

Teisiti võib öelda, et vektorruumi lineaarteisendused on niisugused teisendused, kus uue vektori S' komponendid avalduvad lineaarfunktsioonidena vana vektori S komponentidest.

Vektorruumi lineaarteisenduse A pöördteisenduseks nimetame teisendust A^{-1} , millel on omadus

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Erijuhul, kui lineaarteisendused avalduvad maatriksitena, saame eelmise võrduse kirjutada:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kl}^{-1} = \delta_{il}, \quad (1.7)$$

kus a_{ik} tähistab maatriksi A elemente ja a_{kl}^{-1} - maatriksi A^{-1} elemente.

Tarvilik ja piisav tingimus selleks, et maatriksil A oleks olemas pöördmaatriks A^{-1} , on maatriksi regulaarsus:

$$\det A \neq 0.$$

Lineaarteisendusel on kaks interpretatsiooni. Ühelt poolt võib lineaarteisendust vaadata kui teatud eeskirja, mis vektorruumi igale vektorile seab vastavusse mingi teise vektori. Vektorruumi baas seejuures ei muutu. Teiselt poolt võib vektorruumi lineaarteisendust aga interpreteerida kui eeskirja vektorruumi baasi muutmiseks, kusjuures vektorruumi vektorid ise jäävad paigale. Viimast interpretatsiooni kasutatakse füüsikas sagedamini. Vaatame seda lähemalt.

Olgu meil antud vektor S oma komponentide σ_k ja baasvektorite u_k kaudu:

$$S = \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i. \quad (1.8)$$

Teisendame nüüd vektorruumi baasi mingi regulaarse maatriksi abil, mida tähistame A^{-1} . Saame uued baasvektorid

$$u'_k = \sum_{i=1}^n u_i a_{ik}^{-1}. \quad (1.9)$$

Uues baasis on vektoril S loomulikult ka uued komponendid, s. o. uues baasis avaldub see vektor

$$S = \sum_{k=1}^n \sigma'_k u'_k. \quad (1.10)$$

Asendades siia u'_k avaldise (1.9), saame

$$S = \sum_{l,k=1}^n \sigma'_k u_l a_{lk}^{-1},$$

mille võrdlemine valemiga (1.8) annab

$$\sum_{k=1}^n \sigma'_k a^{-1}_{ik} = \sigma_i .$$

Silmas pidades tingimust (1.7) järgneb siit vektori komponentide teisenemiseeskiri:

$$\sigma'_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} \sigma_i .$$

Sümboolselt võime eelöeldu lühidalt kokku võtta:

Kui vektorruumi baas teiseneb eeskirja

$$u' = u A^{-1}$$

kohaselt, siis vektorruumi vektorite komponendid muutuvad

$$s' = A s .$$

Rakendustes on tihti vaja ka linearteisenduse segainterpretatsiooni:

Olgu antud vektorruumi teisendus

$$t = A s ,$$

mida me tõlgendame kui vektori S teisendamist vektoriks t (ilma baasi muutmata). Teostame nüüd baasi teisenduse operaatori V^{-1} abil. Vektorite S ja t komponendid muutuvad siis:

$$s' = V s , \text{ mis on vektor } S \text{ uues baasis,}$$

$$t' = V t , \text{ mis on vektor } t \text{ uues baasis.}$$

Korrutades vektori S teisenemiseeskirja vasakult operaatoriga V , saame:

$$V t = V A V^{-1} V s .$$

Selle võime kirjutada

$$t' = A' s' , \tag{1.11}$$

kus

$$A' = VAV^{-1}. \quad (1.12)$$

Seega operaator VAV^{-1} kujutab sama lineaarteisendust kui operaator A , ainult uues baasis väljendatuna. Teisendust (1.12) nimetatakse sarnasusteisenduseks.

Lineaaroperaatorite põhitüüpe.

Olgu antud lineaarse vektorruumi vektorid s , t , ... ja selles ruumis mõjuv operaator A . Moodustame skalaarkorrutise

$$(As, t), \quad (1.13)$$

mille konkreetne tähendus sõltub sellest, mida me mõistame vektorite s , t , ... all.

Kui vektoriteks on näiteks n -dimensioonilise ruumi vektorid, siis ortonormeeritud baasi korral saame

$$(As, t) = t^* As = \sum_{i,k=1}^n \bar{t}_i a_{ik} \sigma_k, \quad (1.14)$$

kus a_{ik} on n -realise ruutmatriksi A elemendid ja σ_k ning τ_i - vektorite s ja t komponendid. Vektorite avaldamisel komponentide kaudu kasutame edaspidi tähiseid:

$$t = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{pmatrix}, \quad \bar{t} = \begin{pmatrix} \bar{\tau}_1 \\ \bar{\tau}_2 \\ \vdots \\ \bar{\tau}_n \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \tilde{t} &= (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n), \\ \tilde{t}^* &= (\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \dots, \bar{\tau}_n). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Kui vaadeldava lineaarse vektorruumi moodustavad aga näiteks ühemuutuja funktsioonid $\varphi(x)$, $\psi(x)$, ..., saame ortonormeeritud baasi korral skalaarkorrutise avaldada

$$(A\varphi, \psi) = \int \bar{\psi}(x) A\varphi(x) dx, \quad (1.16)$$

kus integreerimine toimub üle funktsioonide $\varphi(x)$, $\psi(x)$, ... määramispiirkonna. A on siin mingisugune ühemuutu- ja funktsioonidele mõjuv operaator (näiteks lineaarne diferentsiaaloperaator).

Operaatori A transponeeritud operaator \tilde{A} defineeritakse võrdusega

$$(\tilde{A}t, \bar{s}) = (As, \bar{t}). \quad (1.17)$$

Kui operaator A on maatriks, siis tähendab tema transponeerimine ridade ja veergude vahetamist maatriksis.

Operaatorile A hermiitiline kaasoperaator A^* defineeritakse võrdusega

$$(s, A^*t) = (As, t). \quad (1.18)$$

Maatriksite korral tähendab hermiitiline kaasoperaator transponeeritud maatriksit, milles kõik elemendid on asendatud nende kaaskompleksidega.

Kui operaator A on antud, on alati võimalik moodustada tema hermiitilist kaasoperaatorit ja transponeeritud operaatorit.

Normaaloperaatoriks nimetatakse operaatorit, mis kommuteerub iseenda hermiitilise kaasoperaatoriga, s. o. rahuldab tingimust

$$N^*N = NN^*. \quad (1.19)$$

Normaaloperaatorite tähtsamad alaliigid on:

hermiitiline operaator, mis rahuldab tingimust

$$A^* = A,$$

antihermiitiline operaator, mis rahuldab tingimust

$$A^* = -A$$

ja unitaarne operaator, mis rahuldab tingimust

$$U^* = U^{-1}.$$

Kui $\tilde{A} = A$, nimetatakse operaatorit sümmeetriliseks operaatoriks ja kui $\tilde{A} = -A$ - kaldsümmeetriliseks (või ka antisümmeetriliseks) operaatoriks.

On kerge veenduda, et kahe operaatori korrutise korral kehtivad järgmised põhiomadused:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

$$(\widetilde{AB}) = \widetilde{B} \widetilde{A},$$

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

Viimasest on näha, et kahe hermiitilise operaatori korrutis on hermiitiline siis ja ainult siis, kui need operaatorid kommuteeruvad. Juhul, kui hermiitilised operaatorid A ja B ei kommuteeru, saame moodustada neist hermiitilised bilineaarkombinatsioonid:

$$\frac{1}{2}(AB+BA), \quad \frac{1}{2}(AB-BA).$$

Taanduvatest operaatoritest.

Olgu antud n -dimensiooniline vektorruum R_n ja selle m -dimensiooniline alamruum L_m ($m < n$). Alamruumi L_m nimetame invariantseks lineaarteisenduse A suhtes, kui see teisendus muudab iga alamruumi vektori jälle sama alamruumi vektoriks. Teiste sõnadega: alamruum L_m on invariantne lineaarteisenduse A suhtes, kui kehtib tingimus:

$$\text{kui } seL_m, \text{ siis ka } AseL_m.$$

Ruumi R_n saab avaldada alamruumi L_m ja tema täiendruumi

L_{n-m} ottesummana

$$R_n = L_m + L_{n-m} .$$

See tähendab, et iga vektor $S \in R_n$ on avaldatav üheselt summana $S = S_1 + S_2$, kus $S_1 \in L_m$ ja $S_2 \in L_{n-m}$.

Füüsikas huvitavad meid harilikult niisugused lineaarteisendused, millel invariantseid alamruume ei ole.

Kui lineaarteisendusel invariantseid alamruume ei ole, siis nimetatakse lineaarteisendust taandumatuks.

Kui lineaarteisendusel on invariantne alamruum koos selle invariantse täiendruumiga, siis nimetatakse lineaarteisendust täielikult taanduvaks.

Kui lineaarteisendusel on invariantne alamruum (ilma et selle täiendruum invariantne oleks), siis nimetatakse lineaarteisendust taanduvaks.

Kui vektorruumi alamruum on invariantne lineaarteisenduste hulga kõigi teisenduste suhtes, siis öeldakse, et sellel lineaarteisenduste hulgal on invariantne alamruum.

Kui lineaarteisenduste hulgal on invariantne alamruum koos selle invariantse täiendruumiga, siis nimetatakse seda lineaarteisenduste hulka täielikult taanduvaks.

Kui lineaarteisenduste hulgal on invariantne alamruum (ilma et selle täiendruum invariantne oleks), siis nimetatakse seda lineaarteisenduste hulka taanduvaks.

Erijuhul, kui lineaarteisendusteks on matriksid, siis võime n -dimensioonilises vektorruumis R_n baasivektorid nii nummerdada, et m esimest baasivektorit kuuluvad invariantseesse alamruumi L_m ja $n-m$ järgnevat baasivektorit selle

täiendruumi L_{n-m} . Sel juhul on alamruumi L_m kuuluvatel vektoritel nullist erinevad ainult m esimest komponenti ja alamruumi L_{n-m} kuuluvatel vektoritel nullist erinevad ainult $n-m$ viimast komponenti:

$$\begin{aligned} \text{Kui } s_1 \in L_m, \text{ siis } s_1 &= \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \text{kui } s_2 \in L_{n-m}, \text{ siis } s_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma_{m+1} \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Siit on näha, et täielikult taanduva maatriksite hulga kõik maatriksid peavad olema kujul

$$A = \begin{pmatrix} A_m^m & 0 \\ 0^* & A_{n-m}^{n-m} \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

A_m^m tähistab siin m -realist ruutmaatriksit, mis mõjub lineaarteisendusena alamruumis L_m ja A_{n-m}^{n-m} - $n-m$ -realist ruutmaatriksit, mis mõjub lineaarteisendusena alamruumis L_{n-m} . 0 tähistab ristkülikmaatriksit, mille kõik elemendid on nullid, ja 0^* selle hermitilist kaasmaatriksit.

Vektorruumis on alati võimalik baasi nii valida, et täielikult taanduva maatriksite hulga kõik maatriksid oleksid kujul (1.21).

§ 4. Lineaaroperaatori omaväärtused ja omavektorid.

Operaatori A omaväärtused $\alpha_{(k)}$ ja omavektorid $s^{(k)}$ määratakse võrrandist

$$A s^{(k)} = \alpha_{(k)} s^{(k)}. \quad (1.22)$$

Indeks (k) nummerdab siin omaväärtusi ja ka omaväärtustele vastavaid omavektoreid. Võrrandist on näha, et omavektori pikkus pole määratud: kui $s^{(k)}$ on operaatori A omavektori omaväärtusel $\alpha_{(k)}$, siis on seda ka vektor $\alpha s^{(k)}$. Seepärast võime ilma üldsust kitsendamata oletada, et omavektorid on normeeritud:

$$(s^{(k)}, s^{(k)}) = 1. \quad (1.23)$$

Korrutades nüüd võrrandit (1.22) skalaarselt vektoriga $s^{(k)}$ ja arvestades normeerimistingimust (1.23), saame omaväärtuse $\alpha_{(k)}$ avaldada:

$$\alpha_{(k)} = (A s^{(k)}, s^{(k)}) = s^{(k)*} A s^{(k)}. \quad (1.24)$$

Võtame viimase võrduse mõlemalt poolt hermiitilise kaassuuruse (arvu $\alpha_{(k)}$ korral tähendab see lihtsalt kaaskompleksi võtmist). Saame

$$\bar{\alpha}_k = s^{(k)*} A^* s^{(k)}. \quad (1.25)$$

Kahe viimase valemi võrdlemine näitab, et hermiitilise operaatori omaväärtused on reaalarvud ja antihermiitilise operaatori omaväärtused puht imaginaararvud.

Omavektorite ortonomeeritud süsteem.

Olgu antud omaväärtusprobleem hermiitilise operaatori jaoks kahe omaväärtuse $\alpha_{(k)}$ ja $\alpha_{(i)}$ korral:

$$\begin{aligned} A s^{(k)} &= \alpha_{(k)} s^{(k)}, \\ A s^{(i)} &= \alpha_{(i)} s^{(i)}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Korrutame neist esimest võrrandit skalaarselt vektoriga $s^{(i)}$ ja teist võrrandit vektoriga $s^{(k)}$. Silmas pidades, et hermiitilise operaatori omaväärtus $\alpha_{(i)}$ on reaalarv, saame:

$$\begin{aligned} (A s^{(k)}, s^{(i)}) &= \alpha_{(k)} (s^{(k)}, s^{(i)}), \\ (s^{(k)}, A s^{(i)}) &= \alpha_{(i)} (s^{(k)}, s^{(i)}). \end{aligned}$$

Valemist (1.18) on näha, et hermiitilise operaatori $A^* = A$ korral on viimaste võrrandite vasakud pooled võrdsed; võrdsed peavad järelikult olema ka paremad pooled:

$$(\alpha_{(k)} - \alpha_{(i)})(s^{(k)}, s^{(i)}) = 0.$$

Juhul, kui $\alpha_{(k)} \neq \alpha_{(i)}$, järgneb siit:

$$(s^{(k)}, s^{(i)}) = 0.$$

Erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid on ortogonaalsed.

On võimalik näidata, et juhul, kui operaatoril on r -kordne omaväärtus, vastab neile omaväärtustele r lineaarselt sõltumatut vektorit, mis aga üldiselt ei tarvitse olla omavahel ortogonaalsed. Kuid neid omavektoreid on alati võimalik ortogonaliseerida. Seega võime hermiitilise operaatori omavektorid alati nii valida, et nad moodustaksid ortonormeeritud süsteemi, s. o. et nad täidaksid tingimust:

$$(S^{(k)}, S^{(i)}) = \delta_{ki}. \quad (1.27)$$

See on sama tingimus, mida rahuldavad vektorruumi ortonormeeritud baasi moodustavad vektorid. Mingi operaatori omavektorite süsteemi võime alati valida vektorruumi baasiks.

Juhul, kui vektorruumi baasiks on valitud operaatori A omavektorid, siis öeldakse, et operaator A on diagonaalkujus. Seega tuleb operaatori viimiseks diagonaalkujju teostada vektorruumis baasi teisendus, nii et baasivektorid langeksid ühte operaatori omavektoritega.

Erijuhul, kui diagonaalkujus olevaks lineaarteisenduseks on maatriks, erinevad sellel maatriksil nullist ainult peadiagonaalil asetsevad elemendid. Nendeks peadiagonaali elementideks on maatriksi kui lineaaroperaatori omaväärtused.

Teostame vektorruumis lineaarteisenduse

$$S^{(k)'} = US^{(k)}.$$

Võrrand (1.24) võtab siis kuju

$$\alpha'_{(k)} = (A'S^{(k)'}, S^{(k)'}), \quad (1.27)$$

kus

$$A' = UAU^{-1}.$$

Asetades võrrandisse (1.27) $S^{(k)'}$ ja A' avaldised ning kasutades võrdust (1.18), on lihtne veenduda, et omaväärtus

$\alpha'_{(k)}$ on võrdne omaväärtusega $\alpha_{(k)}$ siis ja ainult siis, kui $U^* = U^{-1}$, s. o. kui U on unitaaroperaator. On tõestatud lause:

Igat normaaloperaatorit (erijuhul muidugi siis ka her-

miitilist operaatorit) on võimalik viia diagonaalkujju, kui temaga teostada sarnasusteisendus sobivalt valitud unitaaroperaatoriga.

Ja vastupidi: iga operaator, mida saab unitaaroperaatori abil teisendada diagonaalkujju, on kindlasti normaalooperaator.

Nägime, et juhul, kui sarnasusteisendus teostatakse unitaaroperaatori abil, ei muutu operaatori omaväärtused. Analoomiliselt saab näidata, et unitaarteisendus ei muuda ka vektorite skalaarkorrutise väärtust. Peale nimetatute on unitaarteisenduse invariantideks veel maatriksi jälg ja maatriksi determinant*.

§ 5. Operaatorite üheaegne diagonaliseerimine.

Olgu antud kaks operaatorit A ja B . Võib juhtuda, et mõni operaatori A omavektoritest on juhuslikult omavektoriks ka operaatorile B . Kuid niisugused juhuslikku laadi kokkusattumised ei paku melle huvi. Käesoleva paragrahvi eesmärgiks on välja selgitada, missugustel tingimustel on operaatoritel A ja B kõik omavektorid ühised, s. o. missugustel tingimustel moodustavad operaatorite A ja B ühised omavektorid täieliku süsteemi. Tõestame lause:

* Maatriksi jälg ja maatriksi determinant on invariantideks ka üldkujulisele sarnasusteisendusele $A' = VAV^{-1}$.

Kui operaatorid A ja B kommuteeruvad, siis moodustavad nende ühised omavektorid täieliku süsteemi.

Operaatorite A ja B omavektorid määratakse võrranditest:

$$A s^{(k)} = a_{(k)} s^{(k)}, \quad (1.28)$$

$$B u^{(i)} = b_{(i)} u^{(i)}. \quad (1.29)$$

Kuna omavektorid $u^{(i)}$ moodustavad täieliku süsteemi, siis võime nad lugeda baasvektoriteks ja avaldada operaatori A omavektorid nende lineaarkombinatsioonina:

$$s^{(k)} = \sum_i \sigma_i^{(k)} u^{(i)} \quad (1.30)$$

(Juhul, kui summeerimisindeks muutub pidevalt, tuleb summa all mõista integraali). Summa (1.30) on võetud üle kõikvõimalike i väärtuste. Tegelikult esinevad summas ainult need baasvektorid $u^{(i)}$, millede ees olevad kordajad $\sigma_i^{(k)}$ on nullist erinevad.

Asendanud võrrandisse (1.28) reaksarenduse (1.30), saame selle ümber kirjutada kujul

$$\sum_i \sigma_i^{(k)} (A - a_{(k)}) u^{(i)} = 0. \quad (1.31)$$

Eeldusel, et operaatorid A ja B kommuteeruvad, saame arvutada

$$B(A - a_{(k)}) u^{(i)} = (A - a_{(k)}) B u^{(i)} = (A - a_{(k)}) b_{(i)} u^{(i)}.$$

Teiste sõnadega

$$B[(A - a_{(k)}) u^{(i)}] = b_{(i)} [(A - a_{(k)}) u^{(i)}],$$

millest on näha, et $(A - a_{(k)})u^{(k)}$ on operaatori B omavektoriks omaväärtusel $\beta_{(k)}$. Valemi (1.31) vasakul pool on järelikult lineaarkombinatsioon operaatori B omavektoritest. Korrutame selle valemi skalaarselt operaatori B omavektoriga $(A - a_{(k)})u^{(k)}$. Kuna omavektorid moodustavad ortogonaalse süsteemi, siis jääb summast järele ainult üks liige, nimelt see, kus $i = k$:

$$\sigma_k^{(k)} \left((A - a_{(k)})u^{(k)}, (A - a_{(k)})u^{(k)} \right) = 0.$$

Saadud tingimuse rahuldamiseks on kaks võimalust: Kordaja $\sigma_k^{(k)} = 0$ või $\sigma_k^{(k)} \neq 0$, kuid

$$\left((A - a_{(k)})u^{(k)}, (A - a_{(k)})u^{(k)} \right) = 0.$$

Vektori skalaarkorrutis iseendaga on null ainult sel juhul, kui vektor ise on nullvektor:

$$(A - a_{(k)})u^{(k)} = 0.$$

See ütleb, et $u^{(k)}$ on operaatori A omavektoriks omaväärtusel $a_{(k)}$. Näeme, et reaksarendus (1.30) sisaldab tegelikult ainult neid vektoreid $u^{(i)}$, mis on operaatori omavektoriteks omaväärtusel $a_{(k)}$. Andes indeksile k valemis (1.30) kõikvõimalikud väärtused, saame operaatori A kõigi omavektorite reaksarendused operaatorite A ja B ühiste omavektorite järgi.

Vektorruumi mistahes vektori x võime avaldada lineaarkombinatsioonina operaatori A omavektoritest $S^{(k)}$:

$$x = \sum_k \xi_k S^{(k)}.$$

Asendades siia reaksarenduse (1.30), saame

$$x = \sum_{i,k} \xi_k \sigma_i^{(k)} u^{(i)}.$$

Tulemuseks on meelevaldse vektori x reaksarendus operaatorite A ja B ühiste omavektorite järgi. Need ühised omavektorid moodustavad järelikult omavektorite täieliku süsteemi, mida võib valida vektorruumi baasiks.

Võrrandid (1.28) ja (1.29) võime nüüd kirjutada

$$A u^{(k,i)} = a_{(k)} u^{(k,i)}, \quad (1.32)$$

$$B u^{(k,i)} = b_{(i)} u^{(k,i)},$$

kus $u^{(k,i)}$ tähistab operaatorite A ja B ühiseid omavektoreid.

Eeltõestatud lause pöördlause kõlab:

Kui kahe operaatori A ja B ühised omavektorid moodustavad täieliku süsteemi, siis need operaatorid kommuteeruvad.

Tõestuseks märgime kõigepealt, et (1.32) põhjal

$$(AB - BA) u^{(k,i)} = (a_{(k)} b_{(i)} - b_{(i)} a_{(k)}) u^{(k,i)} = 0. \quad (1.33)$$

Võtame nüüd vektorruumi meelevaldse vektori x ja arendame selle omavektorite $u^{(k,i)}$ järgi:

$$x = \sum_{k,i} \xi_{k,i} u^{(k,i)}. \quad (1.34)$$

Valemite (1.33) ja (1.34) põhjal on kerge näha, et

$$(AB - BA)x = 0.$$

Kuna X oli meelevaldne vektor, siis saab viimane võrdus olla õige ainult sel juhul, kui

$$AB - BA = 0.$$

Sellega ongi tõestatud, et operaatorid, millele ühised omavektorid moodustavad täieliku süsteemi, kommuteeruvad omavahel.

Kõik see, millest oli juttu kahe operaatori korral, kehtib üldiselt:

Kui on antud rida omavahel kommuteeruvaid operaatoreid A_1, A_2, \dots, A_p , siis on alati võimalik teostada vektorruumis niisugune baasi teisendus, et kõik operaatorid A_1, A_2, \dots, A_p diagonaliseeruksid üheaegselt. Teiste sõnadega: me võime leida kõigi operaatorite jaoks ühise unitaaroperaatori U , nii et kõik

$$A'_k = U A_k U^*, \quad k=1, 2, \dots, p,$$

oleksid diagonaalkujus. See tähendab, et me oleme vektorruumi baasi nii teinendanud, et baasivektorid langevad ühte operaatorite A_k ühiste omavektoritega.

Mittekommuteeruvate operaatorite ühised omavektorid (kui neid ka juhuslikult esineb), täielikku süsteemi ei moodusta. Mittekommuteeruvaid operaatoreid üheaegselt diagonaliseerida pole järelikult võimalik.

§ 6. Lineaarsete ruumide
otsekorrutis.

Olgu A $m \times n$ ristikülikmaatriks elementidega a_{ik} ja B - $m' \times n'$ ristikülikmaatriks elementidega b_{pq} . Moodustame kõikvõimalikud korrutised $a_{ik} b_{pq}$, mida saame kokku $m n m' n'$ tükki. Saadud arvud

$$c_{ipkq} = a_{ik} b_{pq}$$

moodustavad üldiselt rääkides mingi neljamõõtmelise maatriksi C , mida nimetatakse maatriksite A ja B Kroneckeri korrutiseks või otsekorrutiseks ja tähistatakse lühidalt

$$C = A \times B.$$

Ruumiliste maatriksite üleskirjatamine on ebamugav. See-pärast anname maatriksile C arvutabelli kuju kahemõõtmelises ruumis (paberil). Maatriksit C kujutavas tabelis nummerdame ridu esimese indeksipaariga (ip) ja veerge teise indeksipaariga (kq):

$$C_{(ip)(kq)} = a_{ik} b_{pq}.$$

Arvupaaride järjestuseks võtame nn. leksikograafilise järjes-tuse, mis määratakse tingimustega:

Arvupaari (ip) loeme eelnevaks arvupaarile ($i'p'$) sel juhul, kui

$$1^\circ \quad i < i', \quad \text{või,}$$

$$2^\circ \quad \text{kui } i = i', \quad \text{siis } p < p'.$$

Korrutise $A \times B$ võib sümboolselt üles kirjutada järgmise tabelina:

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

On lihtne veenduda, et niisuguses tabelis on read ja veerud tõepoolest leksikograafilises järjestuses. Erijuhul, kui A ja B on kaherealised ruutmaatriksid, saame

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Kroneckeri korrutise olulisemad omadused on järgmised:

1° $A \times B \neq B \times A$. Saab näidata, et maatriks $A \times B$ teiseneb maatriksiks $B \times A$, kui baasivektorid ruumides, kus mõjuvad A ja B , sobivalt ümber nummerdada.

2° Olgu A , B , C ja D maatriksid, nii et on olemas harilikud korrutised AC ja BD . Siis kehtib:

$$(A \times B)(C \times D) = AC \times BD.$$

$$3^\circ (A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C).$$

4° Jälje võtmisel Kroneckeri korrutisest tuleb silmas pidada reeglit:

$$Sp(A \times B) = Sp A \cdot Sp B.$$

5° Kui A ja B on unitaarmaatriksid, siis on unitaarmaatriks ka $A \times B$.

Kuna vektorid on erikujulised maatriksid (üheveerulised maatriksid), siis on võimalik moodustada Kroneckeri korrutist ka kahest vektorist. Illustreerime niisuguse korrutise moodustamise mõtet füüsikalise näitega.

Nukleon on elementaerosake, millel on kaks võimalikku olekut: ta võib esineda kas prootoni või neutroni kujul. Kirjeldame nukleoni kahekomponendilise vektorina

$$S = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix},$$

kus esimene komponent vastab prootonolekule, teine komponent neutronolekule. Puhtas prootonolekus viibivat nukleoni kirjeldab siis vektor $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$ ja puhtas neutronolekus viibivat nukleoni vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$.

Kahest nukleonist koosneval süsteemil on võimalikke olekuid neli:

- a) 1. nukleon on prootonolekus; 2. nukleon prootonolekus;
- b) 1. nukleon on prootonolekus, 2. nukleon neutronolekus;
- c) 1. nukleon on neutronolekus, 2. nukleon prootonolekus;
- d) 1. nukleon on neutronolekus, 2. nukleon neutronolekus.

On näha, et kahe nukleoni süsteemi olekuid kirjeldava neljekomponendilise vektori saame vektorite $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} p' \\ n' \end{pmatrix}$ otsekorrutisena:

$$S \times S' = \begin{pmatrix} pp' \\ pn' \\ n p' \\ n n' \end{pmatrix}.$$

Olgu antud kaks vektorruumi R ja R_1 . Nende ruumi-

de otsekorrutiseks nimetatakse siis kõikvõimalikke vektorite s ja s_1 otsekorrutisi $s \times s_1$, kus $s \in R$ ja $s_1 \in R_1$.

On lihtne kontrollida järgmist: Kui vektorruumis R mõjub lineaarteisendus A ja vektorruumis R_1 - lineaarteisendus A_1 , siis otsekorrutisena saadavas vektorruumis $R \times R_1$ mõjub lineaarteisendus $A \times A_1$. Teiste sõnadega:

$$\text{kui } s' = As, \quad s, s' \in R,$$

$$\text{ja } s'_1 = A_1 s_1, \quad s_1, s'_1 \in R_1,$$

$$\text{siis } (s \times s_1)' = (A \times A_1)(s \times s_1), \quad (s \times s_1), (s \times s_1)' \in R \times R_1.$$

Kui vektorruumis R on baasivektorid u_n ja vektorruumis R_1 baasivektorid v_n , siis ruumi $R \times R_1$ baasivektorid defineeritakse kui kõikvõimalikud paarid $u_n v_n$. Meetrika viiakse otsekorrutisena saadavasse vektorruumi järgmise tingimusega:

Kui vektorruumides R ja R_1 on meetrilised maatriksid vastavalt H ja H_1 , siis vektorruumi $R \times R_1$ jaoks saame meetrilise maatriksi otsekorrutisena $H \times H_1$. Erijuhul, kui vektorruumides R ja R_1 on baas ortonormeeritud, siis tuleb ortonormeeritud baas ka ruumis $R \times R_1$.

§ 7. Rühma esitus.

Kui rühma G igale elemendile g_i on vastavusse seatud n -dimensioonilise vektorruumi lineaarteisendus $D(g_i)$, nii et

$$D(g_i g_n) = D(g_i) D(g_n), \quad (1.36)$$

siis ütleme, et meil on antud rühma G n -dimensiooniline

esitus lineaarteisenduste kaudu. Esitustingimus (1.36) tähendab sisuliselt seda, et kui me oleme rühma elementidele

g_i ja g_k vastavusse seadnud lineaarteisendused $D(g_i)$ ja $D(g_k)$, siis rühma elementide korrutisele $g_i g_k$ tuleb vastavusse seada lineaarteisenduste korrutis $D(g_i)D(g_k)$

Võtame esitustingimuses (1.36) elemendi g_k võrdseks rühma ühikelemendiga, $g_k = g_0$. Siis saame

$$D(g_i) = D(g_i)D(g_0),$$

millest on näha, et

$$D(g_0) = I. \quad (1.37)$$

Rühma ühikelemendile vastab vektorruumi ühikteisendus.

Kui võtame esitustingimuses $g_k = g_i^{-1}$, saame

$$D(g_0) = D(g_i)D(g_i^{-1}).$$

Silmas pidades vastavust (1.37) järgneb

$$D(g_i^{-1}) = D^{-1}(g_i). \quad (1.38)$$

Elemendi g_i pöördelemendile rühmas vastab lineaarteisenduse $D(g_i)$ pöördteisendus.

Vastavusest (1.38) on näha, et rühma esitust moodustavad maatriksid peavad olema regulaarmaatriksid.

On loomulik, et rühma esituse korral on rühma postulaadid täidetud. Rühma esitus moodustab seega rühma, mille elementidel on konkreetne tähendus - nendeks elementideks on lineaarse vektorruumi lineaarteisendused.

Kui rühma esitust moodustavate lineaarteisenduste hulk on taanduv, siis nimetatakse rühma esitust taanduvaks.

On võimalik tõestada teoreemi:

Poollihntsa (ja järelikult ka lihtsa) rühma kõik taandu-
vad esitused on täielikult taanduavad.

Füüsikalistes rakendustee kasutatakse peamiselt lihtsaid rühmi, millede taanduavad esitused on eelmise teoreemi põhjal täielikult taanduavad. Seega on kõik rühmade esitused, milledega füüsikud kokku puutuvad, täielikult taanduavad, kuid lühiduse mõttes nimetatakse neid harilikult taanduivateks esitusteks. Seda tehakse ka käesolevas konspektis. Igal pool, kus edaspidi on juttu taanduivatest esitustest, tuleb nende all tegelikult mõista täielikult taanduavaid esitusi.

Et konkreetselt otsustada, kas antud esitusmaatriksite hulk moodustab taanduva või taandumatu esituse, on tihti otsarbekohane kasutada nn. Schuri lemmat, millest järgneb:

Esitus on taandumatu siis ja ainult siis, kui ainukeseks maatriksiks, mis kommuteerub kõigi esitusmaatriksitega, on skalaarne maatriks.*

Siit tuleneb oluline järeldus: Abeli rühma ainukeseks lõplikudimensiooniliseks taandumatuks esituseks on ühedimensiooniline esitus.

Tõepoolest, kuna Abeli rühma esituse maatriksid peavad kõik omavahel kommuteeruma, siis Schuri lemma põhjal on nad kõik skalaarsed maatriksid, s. o. sisuliselt lihtsalt harilikud arvud. Esitus on ühedimensiooniline.

Rühmal on esitusi üldiselt mitu. Tähistame S -nda

* Skalaarseks maatriksiks nimetame maatriksit, mis avaldub ühikmaatriksi kordsena σI , kus σ on mingi kompleksarv.

esituse (see võib olla nii taanduv kui taandumatu esitus) matrikseid $D^{(s)}(g_i)$. Rühma elemendi g_i karakteri S -ndas esituses, $\chi^{(s)}(g_i)$, defineerime nüüd kui vasta-va esitusmaatriksi jälje:

$$\chi^{(s)}(g_i) = \text{Sp} D^{(s)}(g_i). \quad (1.39)$$

Olgu antud rühma G mingi element g_i ja sama rühma teine element g'_i , mis on saadud esimesest nn. sarnasusteisenduse teel:

$$g'_i = g_n g_i g_n^{-1}, \quad g_n \in G.$$

On kerge näha, et elementidel g_i ja g'_i on võrdsed karakterid. Arvestades esitustingimust ja seda, et jälje märgi all võib matrikseid ümber tõsta, saame

$$\begin{aligned} \chi(g'_i) &= \chi(g_n g_i g_n^{-1}) = \text{Sp} [D(g_n) D(g_i) D(g_n^{-1})] = \\ &= \text{Sp} [D(g_n^{-1}) D(g_n) D(g_i)] = \text{Sp} [D^{-1}(g_n) D(g_n) D(g_i)] = \text{Sp} D(g_i). \end{aligned}$$

$$\chi(g'_i) = \chi(g_i).$$

Rühma elementidel, mis on üksteisest saadavad sarnasusteisenduse teel, on igas esituses võrdsed karakterid.

Olgu antud rühma G kaks esitust esitusmaatriksitega vastavalt $D(g_i)$ ja $D'(g_i)$. Kerge on kontrollida, et siis moodustavad sama rühma esituse ka matriksid

$$D(g_i) \times D'(g_i).$$

Tõepoolest, kui matriksid $D(g_i)$ ja $D'(g_i)$ rahuldavad esitustingimusi

$$D(g_i)D(g_k) = D(g_i g_k),$$

$$D'(g_i)D'(g_k) = D'(g_i g_k),$$

siis järgneb neist otseselt

$$\begin{aligned} [D(g_i) \times D'(g_i)][D(g_k) \times D'(g_k)] &= [D(g_i)D(g_k)] \times [D'(g_i)D'(g_k)] = \\ &= D(g_i g_k) \times D'(g_i g_k), \end{aligned}$$

mis tähendab, et esitustingimust rahuldavad ka maatriksid $D(g_i) \times D'(g_i)$. Maatriksitega $D(g_i) \times D'(g_i)$ antud esitust nimetatakse maatriksitega $D(g_i)$ ja $D'(g_i)$ antud esituste otsekorrutiseks.

Kahe taandumatu esituse otsekorrutis annab harilikult taanduva esituse.

§ 8. Rühmade otsekorrutis ja selle esitused.

Olgu antud kaks rühma G ja H , millele kõik elementid omavahel kommuteeruvad:

$$g_i h_k = h_k g_i \text{ mistahes } i \text{ ja } k \text{ korral, kui}$$

$$g_i \in G, \quad h_k \in H.$$

Rühmade G ja H otsekorrutiseks C nimetame siis rühma, mille moodustavad elementide g_i ja h_k kõikvõimalikud korrutised:

$$C = G \times H,$$

kusjuures kõik

$$g_i h_k \in C.$$

Kehtib järgmine teoreem:

Kui rühm C avaldub rühmade G ja H otsekorrutisena, siis saame C kõikvõimalikud taandumatud esitused rühmade G ja H kõikvõimalike taandumatute esituste otsekorrutistena. Teiste sõnadega: Rühma C kõigi taandumatute esituste maatriksid $D(c_k)$ avalduvad kujul

$$D^{(r,s)}(c_k) = D^{(r)}(g_i) \times D^{(s)}(h_\ell), \quad (1.40)$$

kus indeksid (r) ja (s) nummerdavad rühmade G ja H kõikvõimalikke taandumatuid esitusi.

Juhul, kui rühma C kõik elemendid avalduvad küll rühmade G ja H elementide korrutistena, kuid viimased omavahel ei kommuteeru, siis rühma C rühmade G ja H otsekorrutiseks lugeda ei saa ja nende rühmade esituste vahel ei ole niisugust lihtsat seost nagu (1.40). Selle asemel kehtib järgmine küllaltki komplitseeritud teoreem:

Olgu rühmal C invariantne alamrühm H ja olgu antud veel mingi kolmas rühm G , nii et rühma C kõik elemendid avalduvad üheselt korrutistena $g_i h_k$, kus $g_i \in G$, ja $h_k \in H$. Edasi olgu rühmal C niisugused taandumatud esitused, et elemendile $g_i h_k$ vastab esitusmaatriks $D^{(r)}(g_i h_k)$, kusjuures need esitused olgu samaaegselt taandumatuteks esitusteks ka rühmale H . Siis maatriksid

$$D(g_i h_k) = \chi^{(r)}(g_i) D^{(s)}(g_i h_k), \quad (1.41)$$

kus $\chi^{(r)}(g_i)$ tähistab rühma G elemendile g_i vastavat karakterit r -ndas esituses, moodustavad rühma C taan-

dumatu esituse. Veelgi enam: võttes valemis (1.41) rühma

C kõikvõimalikud eelnimetatud tingimusi rahuldavad esitused $\{D^{(i)}(g_i, h_i)\}$ ja rühma G kõikvõimalikele taandumatutele esitustele vastavad karakterid, saame rühma C kõikvõimalikud taandumatud esitused.

§ 9. Pidevatest rühmadest.

Pidevateks rühmadeks või lde rühmadeks nimetatakse rühmi, millele elemendid on määratud pidevate funktsioonidena ühest või mitmest parameetrist α_i :

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in G.$$

Parameetrite α_i väärtused valitakse harilikult nii, et nende nullväärtustele vastab rühma ühikelement:

$$g_0 = g(0, 0, \dots, 0). \quad (1.42)$$

Parameetrite α_i lõpmata väikestele väärtustele ($|\alpha_i| \ll 1$, $i = 1, 2, \dots, n$) vastavad siis rühma elemendid, mis kuuluvad ühikelemendi lähemasse ümbrusesse.

Samad parameetrid α_i , mis määravad rühma elemente, määravad ka rühma esituse elemendid. Pideva rühma esituse saame, kui seame rühma elemendile $g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ vastavusse mingi vektorruumi lineaartesisenduse $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, mis on lõpmatu arv kordi diferentseeruv kõigi parameetrite järgi. See vastavusseadmine teostatakse muidugi kooskõlas esitustingimustega: kui

$$g(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0) g(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_n^1) = g(\alpha_1'', \alpha_2'', \dots, \alpha_n''),$$

siis

$$D(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0) D(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_n^1) = D(\alpha_1^{\prime\prime}, \alpha_2^{\prime\prime}, \dots, \alpha_n^{\prime\prime}).$$

Sellest esitustingimusest järeneb, et rühma ühikelemendile $g(0, 0, \dots, 0)$ vastab lineaarse vektorruumi ühikteisendus

$$D(0, 0, \dots, 0) = I. \quad (1.43)$$

Ühikelemendi lähemas ümbruses asetsevatele rühma elementidele vastab lõpmata väike lineaarteisendus (infinitesimaalteisendus)

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \text{ kus } |\alpha_i| \ll 1, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Fideva rühma esitusse kuuluva lineaarteisenduse võime esitada reaksarendusena parameetrite α_i astmete järgi:

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(0, 0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha_i} \right)_{\alpha=0} \alpha_i + \dots$$

Lõpmata väikeste teisenduste korral võime selles reaksarenduses piirduda ainult kuni lineaarsete liikmetega α_i suhtes. Võttes veel arvesse vastavust (1.43) saame

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = I + \sum_{i=1}^n \alpha_i J_i, \quad |\alpha_i| \ll 1, \quad (1.44)$$

kus operaatoreid

$$J_i = \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha_i} \right)_{\alpha=0} \quad (1.45)$$

nimetatakse rühma esitust määravateks infinitesimaaloperaatoriteks. On näha, et infinitesimaaloperaatorid rühma ja esituse elemente määravatest parameetritest α_i ei olene.

Vektorruumi lõpmata väike teisendus avaldub valemi (1.44) kohaselt infinitesimaaloperaatorite kaudu järgmiselt:

$$s' = \left(I + \sum_{i=1}^n \alpha_i J_i \right) s. \quad (1.46)$$

On näidatud, et vektorruumi suure pideva teisenduse võib alati saada lõpmata väikeste teisenduste järjestikuse rakendamise teel. Käesolevas me seda probleemi põhjalikult uurima ei hakka, skitseerime ainult tee, kuidas leida suuri teisendusi infinitesimaalteisenduste kaudu.

Kui arv ℓ valida küllalt suur, siis kuulub rühma element $g\left(\frac{\alpha_1}{\ell}, \frac{\alpha_2}{\ell}, \dots, \frac{\alpha_r}{\ell}\right)$ ühikelemendi lähemasse ümbrusesse ka parameetrite α_i suurte väärtuste korral. Rühma suurtele elementidele vastavad lineaarteisendused saame niisuguse parameetrisatsiooni korral avaldada

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left[D\left(\frac{\alpha_1}{\ell}, \frac{\alpha_2}{\ell}, \dots, \frac{\alpha_r}{\ell}\right) \right]^\ell.$$

Kuna $D\left(\frac{\alpha_1}{\ell}, \frac{\alpha_2}{\ell}, \dots, \frac{\alpha_r}{\ell}\right)$ on infinitesimaalteisendus, siis valem (1.44) kohaselt võime kirjutada

$$D\left(\frac{\alpha_1}{\ell}, \frac{\alpha_2}{\ell}, \dots, \frac{\alpha_r}{\ell}\right) = I + \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^r \alpha_i J_i.$$

Eelmine valem võtab nüüd kuju:

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left[I + \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^r \alpha_i J_i \right]^\ell. \quad (1.47)$$

Kui J_i oleksid harilikud arvud, siis defineeriks võrduse (1.47) parem pool hariliku eksponentfunktsiooni. Kasutades analoogiat defineerime eksponentfunktsiooni ka mingist operaatorist A :

$$\exp A = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(I + \frac{A}{\ell} \right)^\ell. \quad (1.48)$$

Saab näidata, et selle valemiga defineeritud funktsioonil

$\exp A$ on kõik olulisemad eksponentfunktsiooni omadused. Muuhulgas võib kasutada reaksarendust

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n . \quad (1.49)$$

Valemiga (1.48) antud sümbolites saame suure teisenduse valemi (1.47) anda kujul

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = \exp \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i J_i \right) . \quad (1.50)$$

Siit on näha, et ka suured teisendused on infinitesimaaloperaatoritega määratud.

§ 10. Lie - Cartani teoreem .

Infinitesimaaloperaatorid mängivad pidevate rühmade esituste teoorias erakordselt tähtsat osa. Käesoleva punkti pühendame ühe olulise infinitesimaaloperaatorite kohta käiva teoreemi, nn. Lie-Cartani teoreemi tõestusele. See teoreem kõlab:

Pideva rühma G mingile esitusele vastavad infinitesimaaloperaatorid J_j ($j = 1, 2, \dots, r$) rahuldavad vahetuseeskirju

$$J_j J_k - J_k J_j = \sum_{i=1}^r C_{jk}^i J_i , \quad (1.51)$$

kus kordajad C_{jk}^i esitusest ei olene.

Et tõestada seda teoreemi, vaatame lineaarteisendust

$D(g^{-1})$, mis vastab rühma G mingi elemendi g pöördelemendile. Selle teisenduse mõjul teiseneb esitusruumi vektor s mingiks teiseks vektoriks s' :

$$s'(g^{-1}) = D(g^{-1})s . \quad (1.52)$$

On selge, et teisenduse tulemusena saadav vektor s' on rühma elementi (ja seega ka esituse elementi) määravate parameetrite pidevaks funktsiooniks, mida oleme eelmises valemis rõhutanud, kirjutades $s'(g^{-1})$. Korrutades valemit (1.52) vasakult sama rühma G mingi teisele elemendile h vastava lineaarteisendusega $D(h)$, saame

$$D(h)s'(g^{-1}) = D(h)D(g^{-1})s.$$

Esitustingimuse (1.36) põhjal järgneb siit

$$D(h)s'(g^{-1}) = D(hg^{-1})s,$$

millest valemi (1.51) kohaselt tuleb

$$D(h)s'(g^{-1}) = s'(hg^{-1}).$$

Tähistame nüüd $hg^{-1} = f$ ja kirjutame eelmise võrduse ümber

$$D(fg)s'(g^{-1}) = s'(f). \quad (1.53)$$

Olgu $\alpha_i(f)$, $\alpha_i(g)$ ja $\alpha_i(fg)$ rühma elemente määravate parameetrite α_i ($i = 1, 2, \dots, r$) konkreetset väärtused, mis määravad rühma elemendid f , g ja fg . Parameetrid $\alpha_i(fg)$ peavad olema parameetrite $\alpha_i(f)$ ja $\alpha_i(g)$ funktsioonideks, sest rühma element fg on üheselt määratud kui elementide f ja g korrutis:

$$\alpha_i(fg) = \varphi_i[\alpha_1(f), \alpha_2(g)]. \quad (1.54)$$

Funktsioonide φ_i kuju ei saa seejuures oleneda esitusest, vaid see on täielikult määratud juba rühmas defineeritud korrutamiseeskirjaga.

Fikseerime elemendi g ja diferentseerime seost (1,53) parameetri $\alpha_i(f)$ järgi:

$$\frac{\partial s'(f)}{\partial \alpha_j(f)} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial D(fg)}{\partial \alpha_i(fg)} \frac{\partial \alpha_i(fg)}{\partial \alpha_j(f)} s'(g^{-1}). \quad (1.55)$$

Võtame nüüd $g = f^{-1}$. Siis saame

$$\left. \frac{\partial D(fg)}{\partial \alpha_i(fg)} \right|_{g=f^{-1}} = \frac{\partial D(g_0)}{\partial \alpha_i(g_0)} = \left. \frac{\partial D}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0},$$

mis valemi (1.45) järgi pole midagi muud kui infinitesimaaloperaator:

$$\left. \frac{\partial D(fg)}{\partial \alpha_i(fg)} \right|_{g=f^{-1}} = J_i. \quad (1.56)$$

Valem (1.55) võtab nüüd kuju

$$\frac{\partial s'(f)}{\partial \alpha_j(f)} = \sum_{i=1}^2 S_{ij}(f) J_i s'(f), \quad (1.57)$$

kus tähistasime

$$S_{ij}(f) = \left. \frac{\partial \alpha_i(fg)}{\partial \alpha_j(f)} \right|_{g=f^{-1}}. \quad (1.58)$$

Valem (1.57) on diferentsiaalvõrrandid suuruste määramiseks. Need võrrandid tuleb lahendada algtingimusel

$$s'(g_0) = S, \quad (1.59)$$

mille saame seosest (1.52), kui võtame seal g^{-1} võrdseks rühma ühikelemendiga: $g^{-1} = g_0$. On teada, et süsteemil (1.57) on lahend olemas - see lahend on antud valemiga (1.52). Järelikult peab kehtima süsteemi lahenduvuse tarvilik tingimus, mis seisneb teiste tuletiste võrdsuses:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{\partial s'}{\partial \alpha_k} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left(\frac{\partial s'}{\partial \alpha_j} \right). \quad (1.60)$$

Vajalike teiste tuletiste arvutamine annab:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left(\frac{\partial s'}{\partial \alpha_j} \right) = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial S_{ij}(\varphi)}{\partial \alpha_k} J_i s'(\varphi) + S_{ij}(\varphi) J_i \frac{\partial s'(\varphi)}{\partial \alpha_k} \right],$$

mille saame võrrandit (1.57) silmas pidades ümber kirjutada

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left(\frac{\partial s'}{\partial \alpha_j} \right) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial S_{ij}(\varphi)}{\partial \alpha_k} J_i s'(\varphi) + \sum_{i,i'=1}^2 S_{ij}(\varphi) J_i S_{i'k}(\varphi) J_{i'} s'(\varphi). \quad (1.61)$$

Analoogiliselt arvutame

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{\partial s'}{\partial \alpha_k} \right) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial S_{ik}(\varphi)}{\partial \alpha_j} J_i s'(\varphi) + \sum_{i,i'=1}^2 S_{ik}(\varphi) J_i S_{ij}(\varphi) J_{i'} s'(\varphi). \quad (1.62)$$

Avaldiste (1.61) ja (1.62) võrrutamise vastavalt tingimusele (1.60) annab

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial S_{ik}(\varphi)}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial S_{ij}(\varphi)}{\partial \alpha_k} \right) J_i s'(\varphi) &= \\ &= \sum_{i,i'=1}^2 S_{i'k}(\varphi) S_{ij}(\varphi) [J_i J_{i'} - J_{i'} J_i] s'(\varphi). \end{aligned} \quad (1.63)$$

Võtame nüüd $\varphi = g_0$ ja arvestame algtingimust (1.59) ning valemist (1.58) järgnevat tingimust $S_{ij}(g_0) = \delta_{ij}$ (mis ütleb, et parameetrid α_l on kõik sõltumatud). Saame

$$(J_j J_k - J_k J_j) s = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial S_{ik}(\varphi)}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial S_{ij}(\varphi)}{\partial \alpha_k} \right)_{\varphi=g_0} J_i s. \quad (1.64)$$

Kuna see seos peab olema õige mistahes vektori s korral, järgneb siit vastav võrdus operaatorite vahel:

$$J_j J_k - J_k J_j = \sum_{i=1}^2 C_{jk}^i J_i, \quad (1.65)$$

kus kordajad

$$C_{jk}^i = \left(\frac{\partial S_{ik}(f)}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial S_{ij}(f)}{\partial \alpha_k} \right)_{f=g_0} \quad (1.66)$$

ilmselt ei sõltu esitusest. Kordajaid C_{jk}^i nimetatakse rühma struktuurikonstantideks.

Sellega on Lie-Cartani teoreem tõestatud.

Valemist (1.66) nähtub, et struktuurikonstandid on kahe alumise indeksi suhtes antisümmeetrilised:

$$C_{jk}^i = -C_{kj}^i \quad (1.67)$$

Struktuurikonstante harilikult valemite (1.66) järgi ei ar-
vutata, vaid nad määratakse ühes kindlas esituses, kasutades
selleks infinitesimaaloperaatorite konkreetset kuju selles
esituses. Et struktuurikonstandid esitusest ei sõltu, siis
on nende konstantide leidmise probleem kõigi esituste jaoks
korraga lahendatud.

K i r j a n d u s .

1. Мурнаган, Ф., Теория представлений групп, Москва 1950.
2. Любарский, Г.н., Теория групп и ее применение в физике, Москва 1957.
3. Хейне, В., Теория групп в квантовой механике, Москва 1963.

II p e a t ü k k .

AEG-RUUMI TEISENDUSTE RÜHMAD.

§ 1. Kolmedimensioonilise vektorruumi ortogonaalteisenduste rühm.

Vaatame füüsikalist ruumi kirjeldava kolmedimensioonilise vektorruumi teisendusi, mis säilitavad ruumi meetrika (s. o., mis ei muuda skalaarkorrutise väärtust). Teiste sõnadega: kui kolmedimensioonilise ruumi vektor x teiseneb eeskirja

$$x' = A x \quad (2.1)$$

järgi, siis nõuame, et selle teisenduse juures

$$(x', x') = (x, x) . \quad (2.2)$$

Olgu vektorruumis antud ortonormeeritud baas. Sel juhul

$$(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

ja meid huvitavad teisendused määratakse kui reaalsete komponentide x_k ($k = 1, 2, 3$) teisendused, millede korral

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 . \quad (2.3)$$

Ruutvorm $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ on otsitavate teisenduste suhtes invariantne.

Vektori teisenemisvalemi (2.1) saame komponentides avaldada

$$x'_k = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ki} x_i, \quad k=1, 2, 3, \quad (2.4)$$

kus α_{ki} on teisendusmaatriksi A elemendid.

Sellistes valemites nagu (2.4) me summamärki edaspidi välja ei kirjuta. Et sellest ei tekiks segadusi, lepime kindlalt kokku järgnevas:

1) Kui ühes liikmes esineb kahekordne ladina tähega märgitud indeks, siis tähendab see alati summeerimist üle selle indeksi väärtuste 1, 2, 3.

$$\alpha_k \beta_k \text{ tähendab alati } \sum_{k=1}^3 \alpha_k \beta_k .$$

Loomulikult ei ole oluline, kuidas me summeerimisindeksit tähistame: $\alpha_k \beta_k \equiv \alpha_i \beta_i$.

2) Ühekordne ladina tähega märgitud indeks omandab sõltumatult väärtusi 1, 2, 3. α_k tähendab siis suuruste $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ komplekti, s. o. α_k annab meile vektori α komponendid.

Selles uues sümboolikas kirjutame teisendusvalemi (2.4) ümber

$$x'_k = \alpha_{ki} x_i \quad (2.5)$$

ja meetrika invarianttsuse tingimuse (2.3) avaldame kujus

$$x'_k x'_k = x_k x_k . \quad (2.6)$$

Kui nüüd asetame x'_k avaldise (2.5) tingimusse (2.6), saame

$$\alpha_{ki} \alpha_{k\ell} x_i x_\ell = x_k x_k ,$$

millest järgneb, et teisendusmaatriksi elemendid peavad rahuldama seost

$$a_{ki} a_{kl} = \delta_{il}. \quad (2.7)$$

See tingimus tähendab, et teisendusmaatriksi A veerud, kui neid vaadata kolmekomponendiliste vektoritena, on omavahel ortogonaalsed ja normeeritud. Kasutades ortogonaalsu-
setingimusi (2.7) saame lihtsalt avaldada teisenduse (2.5)
pöörde teisenduse. Selleks korrutame valemit (2.5) suurusega
 a_{kl} ja arvestame tingimust (2.7). Saame

$$x_l = a_{kl} x'_k. \quad (2.8)$$

Arvestades summeerimisindeksi tähistuse meelevaldsust, võime
meetrika invarianttsuse tingimuse (2.6) kirjutada $x'_l x'_l = x_l x_l$.
Asetades siia x_l avaldise valemist (2.8) saame

$$a_{il} a_{kl} x'_i x'_k = x'_l x'_l,$$

millest järgneb

$$a_{il} a_{kl} = \delta_{ik}. \quad (2.9)$$

Saadud tingimus ütleb, et ka teisendusmaatriksi A read, kui neid vaadata kolmekomponendiliste vektoritena, on omava-
hel ortogonaalsed ja normeeritud.

Teisendusmaatriksil A koosnevad nii read kui ka veerud omavahel ortogonaalsetest vektoritest. Sellepärast nimetatak-
segi maatriksitega A antud teisendusi ortogonaalteisendus-
teks. Olgu märgitud, et ortogonaalsu-
setingimused (2.9) ei ole iseseisvad, vaid tulenevad tingimustest (2.7).

Ortogonaalsu-
setingimus (2.7) ei ole midagi muud kui
maatriksseos

$$\tilde{A} A = I \quad (2.10)$$

elementides välja kirjutatuna. Võtame viimases võrduses mõlemalt poolt determinandi. Saame

$$\det(\bar{A}A) = 1, \quad (2.11)$$

kus oleme arvestanud, et ühikmaatriksi determinant on 1. Edasi on teada, et maatriksite korrutise determinant on võrdne samade maatriksite determinantide korrutisega. Võrrandi

(2.11) asemel saame seega $\det \bar{A} \det A = 1$ ja siit omakorda

$$(\det A)^2 = 1, \quad (2.12)$$

sest transponeeritud maatriksi determinant on võrdne maatriksi enda determinandiga. Viimasel võrrandil on kaks lahendit:

$$\det A = \pm 1. \quad (2.13)$$

Kolmedimensioonilise ruumi ortogonaalteisendused moodustavad kaks alamhulka: teisendused, kus $\det A = +1$, ja teisendused, kus $\det A = -1$. Tähistame esimesse alamhulka kuuluvaid maatrikseid $A^{(+)}$ ja teise alamhulka kuuluvaid maatrikseid $A^{(-)}$, s. o.

$$\det A^{(+)} = +1,$$

$$\det A^{(-)} = -1.$$

On lihtne veenduda, et hulk $\{A^{(+)}\}$ rahuldab rühma postulaate:

1) Kui meil on kaks teisendust $A^{(+)}$ ja $A'^{(+)}$, nii et $\det A^{(+)} = +1$ ja $\det A'^{(+)} = +1$, siis ka $\det(A^{(+)}A'^{(+)}) = +1$. Hulk $\{A^{(+)}\}$ on maatriksite korrutamise suhtes kinnine.

2) Hulka kuulub ühikmaatriks I , sest $\det I = +1$.

3) Kui $\det A^{(+)} = +1$, siis ka pöördmaatriksi determinant $\det(A^{(+)-1}) = +1$. Selles on lihtne veenduda meenutades, et pöörd-

maatriksi determinant on võrdne maatriksi enda determinandi pöördväärtusega. Ka viimane rühma postulaat on rahuldatud: kui hulka $\{A^{(*)}\}$ kuulub maatriks $A^{(*)}$, siis kuulub sinna ka tema pöördmaatriks $(A^{(*)})^{-1}$.

Rühma postulaadid on rahuldatud. Kolmedimensioonilise reaalse vektorruumi ortogonaalteisendused, millel $\det A^{(*)} = +1$ moodustavad rühma. Seda rühma nimetatakse kolmedimensioonilise reaalse vektorruumi omateisenduste rühmaks (või ka pöörrete rühmaks) ja tähistatakse N_{3p} .

Teisenduste hulk $\{A^{(*)}\}$ rühma ei moodusta, sest see hulk ei ole maatriksite korrutamise suhtes kinnine (kui $\det A^{(*)} = -1$ ja $\det A^{(*)} = -1$, siis $\det (A^{(*)}A^{(*)}) = +1$) ja seal puudub ühikelement. Küll aga moodustavad rühma kolmedimensioonilise reaalse vektorruumi kõik ortogonaalteisendused kokku, s. o. hulk $\{A^{(*)}, A^{(*)}\}$. Seda rühma nimetatakse kolmedimensioonilise reaalse vektorruumi täielikuks ortogonaalseks rühmaks ja tähistatakse N_3 .

Teisendusi $\hat{A}^{(*)}$ nimetatakse peegeldusiseloomuga teisendusteks. Nende tüüpiliseks esindajaks on

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Maatriksi P abil saame kõik peegeldustüüpi teisendused siduda omateisendustega:

$$\hat{A}^{(*)} = PA^{(*)}. \quad (2.15)$$

Täielik ortogonaalne rühm koosneb seega teisendustest

$$N_3 = \{A^{(*)}, PA^{(*)}\}. \quad (2.16)$$

Teisendus P moodustab koos ühikmaatriksiga teist järku Abeli rühma, mida nimetatakse kolmedimensioonilise ruumi peegelduste rühmaks ja tähistatakse G_3 . Kuna rühma G_3 kõik elemendid kommuteeruvad rühma N_{3p} kõigi elementidega, siis saame moodustada nende rühmade otsekorrutise, milleks on rühm N_3 :

$$\{A^{(*)}, PA^{(*)}\} = \{I, P\} \times \{A^{(*)}\},$$

või teisiti

$$N_3 = G_3 \times N_{3p}. \quad (2.17)$$

§ 2. Kolmedimensioonilise vektorruumi lõpmata väikesed ortogonaalteisendused.

Vaatame nüüd lähemalt kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma, mis kuulub pidevate rühmade hulka. Sellesse rühma kuuluvad teisendused määratakse 9 parameetriga Q_{ik} , kuid kõik need parameetrid ei ole sõltumatud, vaid rahuldavad ortogonaalsuse-normeerituse seoseid (2.7). Valem (2.7) on indeksite i ja l suhtes sümmeetriline, mis tähendab, et seal on 6 sõltumatut seost. Omateisendusi määravate sõltumatute parameetrite arv kahaneb seega kolmele. See tulemus langeb kokku analüütilisest geometriast tuntud tõsiasiaga, et ruumikoordinaadistiku pöördmääramiseks tuleb anda kolm parameetrit, näiteks kolm Euleri nurka.

Et opereerida ainult sõltumatute parameetritega, on kasulik vaadata lõpmata väikesi teisendusi

$$x'_k = x_k + \varepsilon_{kl} x_l, \quad (2.18)$$

kus

$$|\varepsilon_{kl}| \ll 1 .$$

Kasutades teisendusvalemit (2.18) saame meetrika invariant-
susetingimusele (2.6) anda nüüd kuju

$$(x_k + \varepsilon_{kl} x_l)(x_k + \varepsilon_{kl} x_l) = x_k x_k ,$$

millest teist järku lõpmata väikeste liikmete ärajätmisel
saame

$$\varepsilon_{kl} x_l x_k + \varepsilon_{lk} x_k x_l = 0 . \quad (2.19)$$

Kui tähistame teises liidetavas summeerimisindeksid ümber,
 $k \leftrightarrow l$, saame

$$(\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{lk}) x_l x_k = 0 .$$

Et viimane seos kehtiks x_k meelevaldsete väärtuste korral,
peab sulgudes olev avaldis võrduma nulliga. See tähendab, et
 ε_{kl} on antisümmeetriline suurus:

$$\varepsilon_{kl} = -\varepsilon_{lk} . \quad (2.20)$$

Kolmedimensioonilise ruumi lõpmata väikesi teisendusi määra-
vatest parameetritest ε_{kl} on sõltumatuid ainult kolm.

Analoogiliselt sellele, nagu me näitasime ε_{kl} antisüm-
meetrilisust, saab kontrollida, et kehtivad üldised reeglid:

1) Sümmetrilise suuruse S_{ik} ja antisümmeetrilise suu-
ruse f_{ik} korrutis, kui summeerimine toimub üle mõlema in-
deksi, annab alati nulli.

Kui $S_{ik} = S_{ki}$ ja $f_{ik} = -f_{ki}$, siis $S_{ik} f_{ik} = 0$. (2.21)

2) Kui antisümmeetrilise suuruse korrutis mingi teise
suurusega annab nulli, siis see teine suurus on kindlasti
sümmeetriline:

Kui $f_{ik} = -f_{ki}$, kusjuures $S_{ik} f_{ik} = 0$, siis $S_{ik} = S_{ki}$. (2.22)

3) Kui sümmeetrilise suuruse korratis mingi teise suurusga annab nulli, siis see teine suurus on kändlasti antisümmeetriline:

$$\text{Kui } S_{ik} = S_{ki}, \text{ kusjuures } S_{ik} f_{ik} = 0, \text{ siis } f_{ik} = -f_{ki}. \quad (2.23)$$

§ 3. Kolme dimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma infinitesimaaloperaatorid.

Lineaarse ruumi teisenduste rühma võime alati vaadata kui iseenda esitust, sest siin kujutab rühma iga elementi teatud lineaarteisendus. Selles mõttes võime rääkida ka lineaarse ruumi omateisenduste rühma infinitesimaaloperaatoritest. Valemi (1.46) saame nüüd kolmedimensioonilise vektorruumi lõpmata väikeste teisenduste jaoks kirjutada kujul

$$x' = \left(I + \sum_{\substack{i,k=1 \\ i < k}}^3 \varepsilon_{ik} J_{ik} \right) x, \quad (2.24)$$

kus x tähistab vaadatava ruumi vektorit ja summamärgi all esinevad ainult sõltumatud parameetrid ε_{ik} , $i < k$. Kasutades käesoleva peatüki esimeses punktis antud summeerimisreeglit, on otstarbekohane kirjutada seos (2.24) ümber kujul

$$x' = \left(I + \frac{1}{2} \varepsilon_{ik} J_{ik} \right) x. \quad (2.24)$$

Et see valem langeb ühte valemiga (2.24), selles on lihtne veenduda, kui pidada silmas, et ε_{ik} ja J_{ik} mõlemad on antisümmeetrilised suurused. J_{ik} antisümmeetrilisust

$$J_{ik} = -J_{ki} \quad (2.25)$$

saab lihtsalt kontrollida järgmise arutluse teel.

Olgu antud korrutis

$$\varepsilon_{ik} K_{ik},$$

kus $\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}$ on antisümmeetriline suurus, kuid K_{ik} kohta

me esialgu midagi täpsemat ei tea. Lahutame nüüd suuruse

\mathcal{K}_{ik} antisümmeetrilise osa $J_{ik}^{(a)}$ ja sümmeetrilise osa $J_{ik}^{(s)}$ summaks:

$$\mathcal{K}_{ik} = J_{ik}^{(a)} + J_{ik}^{(s)},$$

kus

$$J_{ik}^{(a)} = \frac{1}{2}(\mathcal{K}_{ik} - \mathcal{K}_{ki}),$$

$$J_{ik}^{(s)} = \frac{1}{2}(\mathcal{K}_{ik} + \mathcal{K}_{ki}).$$

Järelikult

$$\varepsilon_{ik} \mathcal{K}_{ik} = \varepsilon_{ik} J_{ik}^{(a)} + \varepsilon_{ik} J_{ik}^{(s)} = \varepsilon_{ik} J_{ik}^{(s)},$$

sest $\varepsilon_{ik} J_{ik}^{(a)}$ on valemi (2.21) põhjal võrdne nulliga. Valemis (2.24) esinev suurus J_{ik} saab olla ainult antisümmeetriline.

Komponentides avaldub (2.24) kujul

$$x'_\ell = \left(\delta_{\ell m} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ik} J_{ik}^{\ell m} \right) x_m, \quad (2.26)$$

kus alumised indeksid $J_{ik}^{\ell m}$ juures nummerdavad infinitesimaaloperaatoreid ja ülemised indeksid - nende infinitesimaaloperaatorite kui maatriksite elemente.

Nüüd arvestame, et see kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma esitus, mida me siin vaatame, langeb tegelikult ühte rühma endaga. See tähendab, et lõpmata väikeste teisenduste valemi võime ka kirjutada kujul (2.18):

$$x'_\ell = x_\ell + \varepsilon_{\ell m} x_m$$

Viimase valemi võrdlemine valemiga (2.26) annab

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{ik} J_{ik}^{\ell m} = \varepsilon_{\ell m}, \quad (2.27)$$

mis on võrrand infinitesimaaloperaatorite määramiseks. Kerge

on kontrollida, et saadud võrrandit rahuldab avaldis

$$J_{ik}^{lm} = \delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl} . \quad (2.28)$$

Silmas pidades, et ülemised indeksid J_{ik}^{lm} juures nummerdavad infinitesimaaloperaatorite ridu ja veerge, saame (2.28) ümber kirjutada maatriksite kujul:

$$J_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (2.29)$$

Nüüd on kerge kontrollida, et saadud maatriksite vahel kehtivad järgmised kommutatsiooniseosed

$$\begin{aligned} [J_{12}, J_{23}] &= -J_{31}, \\ [J_{23}, J_{31}] &= -J_{12}, \\ [J_{31}, J_{12}] &= -J_{23}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

kus $[A, B]$ tähistab operaatorite A ja B kommutanti:

$$[A, B] \equiv AB - BA. \quad (2.31)$$

Seostega (2.30) ongi määratud kordajad Lie-Cartani valemis (1.51) kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma jaoks.

Operaatorid J_{kl} on antihermiitilised. Mõnikord on ettearbekohane nende asemel kasutada hermiitilisi operaatoreid

J_k , mis defineeritakse järgmiselt:

$$\begin{aligned} J_1 &= -i J_{23}, \\ J_2 &= -i J_{31}, \\ J_3 &= -i J_{12}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Kommutatsiooniseosed uute operaatorite vahel tulevad

$$\begin{aligned} [J_1, J_2] &= i J_3, \\ [J_2, J_3] &= i J_1, \\ [J_3, J_1] &= i J_2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Formaalselt võib viimastele kommutatsiooniseostele anda kuju

$$\vec{J} \times \vec{J} = i \vec{J}, \quad (2.34)$$

kus \vec{J} tähistab formaalset vektorit, mille komponentideks loeme suurused J_1 , J_2 ja J_3 . Vektorruumi lõpmata väikese teisenduse (2.24) võime nüüd uute operaatorite kaudu üles kirjutada

$$x' = (I + \varepsilon_k J_k) x, \quad (2.35)$$

kus

$$\varepsilon_1 = i \varepsilon_{23}, \quad \varepsilon_2 = i \varepsilon_{31}, \quad \varepsilon_3 = i \varepsilon_{12}. \quad (2.36)$$

Kasutades kommutatsiooniseoseid (2.33) on lihtne kontrollida, et operaator

$$J^2 \equiv J_k J_k \quad (2.37)$$

kommuteerub kõigi infinitesimaaloperaatoritega J_i , s. o.

$$[J^2, J_i] = 0. \quad (2.38)$$

See operaator on järelikult kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma invariantdiks. Näitame seda.

Kuna lõpmata väikese parameetri ε_k teise astmega võrdelised liikmed loeme nulliks, siis kehtib

$$(I - \varepsilon_k J_k)(I + \varepsilon_k J_k) = I, \quad (2.39)$$

mis ütleb, et operaator $(I - \varepsilon_{\kappa} J_{\kappa})$ on operaatorile $(I + \varepsilon_{\kappa} J_{\kappa})$ pöördoperaatoriks. Operaatori J^2 teisenduseeskirja lõpmata väikeste teisenduste korral saame siis valemi (1.12) eeskujul avaldada

$$J^{2'} = (I + \varepsilon_{\kappa} J_{\kappa}) J^2 (I - \varepsilon_{\kappa} J_{\kappa}),$$

millest kommutatsiooniseoste (2.38) põhjal järgneb otseselt

$$J^{2'} = J^2. \quad (2.40)$$

Operaator J^2 vektorruumi lõpmata väikeste teisenduste korral ei muutu. Kuid siis ei muutu ta ka suurte teisenduste korral, sest suure teisenduse saame alati lõpmata väikeste teisenduste järjestikuse rakendamise teel. Valem (2.40) on õige ka suurte teisenduste korral. Teiste sõnadega tähendab see, et operaator J^2 kommuteerub kõigi kolmedimensioonilise vektorruumi omateisendustega, millest järeldub (vt. ptk. I § 7), et J^2 on skalaarne operaator.

§ 4. Kolmedimensioonilise vektorruumi suured omateisendused.

Et avada lõpmata väikese teisenduse (2.24) geomeetrilist sisu, oletame konkreetsuse mõttes, et $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = 0$. Teisendusvalem on siis

$$x' = (I + \varepsilon_{12} J_{12}) x. \quad (2.41)$$

Kui me võtame arvesse operaatori J_{12} konkreetset kuju (2.29), saame siit teisenemiseeskirjad vektori komponentide jaoks:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 + \varepsilon_{12} x_2, \\x_2' &= x_2 - \varepsilon_{12} x_1, \\x_3' &= x_3.\end{aligned}\tag{2.42}$$

Siit on näha, et valem (2.41) kirjeldab pööret $x_1 x_2$ -tasandis lõpmata väikese nurga ε_{12} võrra, kusjuures pööre toimub x_1 -telje poolt x_2 -telje poole.

Vaatame nüüd, missugused tulevad vektori komponentide teisendusvalemid suure pöörde korral $x_1 x_2$ -tasandis. Et veel kord illustreerida seda, kuidas lõpmata väikesed teisendused määravad suuri teisendusi, konstrueerime suure teisenduse lõpmata väikeste teisenduste integreerimise teel.

Olgu $A(\varphi)$ maatriks, mis kirjeldab pööret $x_1 x_2$ -tasandis nurga φ võrra. Teostame järjest pöörded nurkade φ ja $d\varphi$ võrra, tulemusena saame pöörde nurga $\varphi + d\varphi$ võrra:

$$A(\varphi + d\varphi) = A(\varphi) A(d\varphi) .\tag{2.43}$$

Moodustame nüüd avaldise

$$\frac{dA(\varphi)}{d\varphi} = \frac{A(\varphi + d\varphi) - A(\varphi)}{d\varphi} ,\tag{2.44}$$

mis (2.43) põhjal tuleb

$$\frac{dA(\varphi)}{d\varphi} = A(\varphi) \frac{A(d\varphi) - I}{d\varphi} .\tag{2.45}$$

Lõpmata väikest pööret $x_1 x_2$ -tasandil kirjeldav operaator valemist (2.41) avaldub nüüd meie tähistes

$$A(d\varphi) = I + J_{12} d\varphi .\tag{2.46}$$

Asendades selle $A(d\varphi)$ avaldise valemisse (2.45) saame

nüüd

$$\frac{dA(\varphi)}{d\varphi} = A(\varphi)J_{12} . \quad (2.47)$$

See on võrrand $A(\varphi)$ määramiseks, mis tuleb integreerida lisatingimusel

$$A(0) = I . \quad (2.48)$$

Kui $A(\varphi)$ ja J_{12} oleksid harilikud arvud, siis saaksime võrrandi lahendi kujul

$$A(\varphi) = \exp(J_{12}\varphi) . \quad (2.49)$$

Formaalselt võime võrrandi (2.47) lahendi samal kujul üles kirjutada ka antud juhul, ainult $\exp(J_{12}\varphi)$ all tuleb mõista siis kas lõpmatu korrutise piirväärtust (1.48) või reaksarendust (1.49). Silmas pidades J_{12} konkreetset kuju (2.29) saame $\exp(J_{12}\varphi)$ reaksarenduse

$$\begin{aligned} A(\varphi) = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!} \begin{pmatrix} 0 & \varphi & 0 \\ -\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \varphi^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \\ & - \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & \varphi^3 & 0 \\ -\varphi^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4!} \begin{pmatrix} \varphi^4 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5!} \begin{pmatrix} 0 & \varphi^5 & 0 \\ -\varphi^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \dots \end{aligned}$$

Summeerimine annab maatriksi, mille elementideks on siinuse ja koosinuse reaksarendused

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (2.50)$$

Suure pöörde korral x_1, x_2 -tasandis on vektori komponentide

teisendusvalemid siis

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, \\x'_2 &= x_2 \cos \varphi - x_1 \sin \varphi, \\x'_3 &= x_3.\end{aligned}\tag{2.50a}$$

Olgu öeldud veel, et valemi (2.49) oleksime saanud valemist (2.41) otseselt eeskirja (1.50) rakendamisel.

§ 5. Galilei rühm. Klassikalise mehhaanika relatiivsuspriintsiip.

Ruumi homogeensuse omadusest tuleneb füüsika võrrandite invariantse nõue koordinaadistiku alguspunkti nihke suhtes

$$x'_k = x_k - a_k^0, \tag{2.51}$$

kus a_k^0 on konstantne vektor. Teisendused (2.51) moodustavad Abeli rühma, mille uurimine meile käesoleval juhul huvi ei paku. Käesolevas punktis pühendame oma tähelepanu niisugustele koordinaatide teisendustele, kus vektor a_k on teatud funktsioon ajast:

$$x'_k = x_k - a_k(t). \tag{2.52}$$

Niisugune teisendus tähendab üleminekut koordinaadistikku, mis esialgse süsteemi suhtes teatud viisil liigub.

Et füüsika võrrandid peaksid olema invariantseid ka kõigis liikuvates koordinaadistiketes, see ei ole iseendast sugugi selge. Seda küsimust saab otsustada ainult eksperiment. Vaatame, kuidas käsitles seda probleemi klassikaline mehhaanika.

Klassikaline mehhaanika tugineb Newtoni teisele seadusele: Keha liikumishulga $m_0 v_k$ muutus ajaühikus on võrdeline kehale mõjuva jõuga F_k . Ühikute sobiva valiku korral saame selle seaduse kirja panna

$$\frac{d}{dt}(m_0 v_k) = F_k, \quad (2.53)$$

kus v_k on kiirusevektor, F_k kehale mõjuva jõu vektor ja m_0 keha mass, mida klassikalises mehhaanikas loetakse antud keha iseloomustavaks konstandiks. Et rõhutada massi konstantsust, kirjutasime tema tähise juurde indeksi 0.

Newtoni teise seaduse on füüsikud katselisel teel loodusest tuletanud, puhtloogiliste arutlustega pole seda seadust võimalik tuletada.

Olgu võrrand (2.53) antud mingis kindlas koordinaadistikus, mida tähistame K . Läheme nüüd teisenduste (2.52) abil üle teise koordinaadistikku K' , mis liigub eelmise suhtes. Missuguse iseloomuga võib olla see liikumine, et võrrand (2.53) kehtiks ka uues süsteemis K' ? Teiste sõnadega: kuidas peab uus koordinaadistik vana suhtes liikuma, et temas kehtiks samasugune klassikaline mehhaanika nagu vanas koordinaadistikuski?

Klassikalises mehhaanikas oletatakse, et kahe keha vahel valitsevad jõud on pöördvõrdelised nende kehade vahelise kauguse ruuduga. Niisuguste omadustega on näiteks gravitatsioonijõud, elektrostaatilised jõud (mõjuvad kahe paigalseisva elektrilaengu vahel) ja magnetostaatilised jõud (mõjuvad kahe paigalseisva magnetipooluse vahel). Veel möödunud sajandil oli füüsikute püüdeks seletada kõiki loodusnähtusi ainult

niisuguste jõudude abil, mis on pöördivõrdelised kauguse ruuduga.

Et kahe punkti $x_K^{(1)}$ ja $x_K^{(2)}$ vahelise kauguse ruut

$$d^2 = (x_K^{(2)} - x_K^{(1)})(x_K^{(2)} - x_K^{(1)})$$

koordinaadistiku nihke (seega ka teisenduse (2.52)) korral ei muutu, sellest järgneb, et üleminekul süsteemi K suhtes liikuvasse koordinaadisüsteemi K' kehale mõjuv jõud ei muutu:

$$F'_K = F_K \quad (2.54)$$

Newtoni teise seaduse (2.53) parem pool on teisenduste (2.52) suhtes invariantne. Määrame nüüd, missugune peab olema süsteemi K' liikumine süsteemi K suhtes, et invariantseks jääks ka Newtoni teise seaduse vasak pool. Valemist (2.52) saame arvutada seose kiiruste vahel

$$v'_K = v_K - \frac{da_K}{dt} \quad (2.55)$$

kus

$$v'_K = \frac{dx'_K}{dt} \quad , \quad v_K = \frac{dx_K}{dt} .$$

Siin me oletasime tegelikult, et aeg üleminekul koordinaadistikust K koordinaadistikku K' ei muutu:

$$t' = t \quad (2.56)$$

See oletus on klassikalise mehhaanika katsetega ja igapäevase elu kogemustega kooskõlas.

Asendame nüüd v_K avaldise valemist (2.55) võrrandisse (2.53), saame

$$\frac{d}{dt}(m_0 v'_K) + m_0 \frac{d^2 a_K}{dt^2} = F'_K \quad ,$$

kus arvestasime ka jõu invarianttsust (2.54). Siit on näha, et

Newtoni teine seadus jääb muutumatuks, kui

$$\frac{d^2 a_k}{dt^2} = 0,$$

s. o. kui

$$a_k = v_k^0 t + a_k^0,$$

kus v_k^0 ja a_k^0 on integreerimiskonstandid. Newtoni teine seadus on invariantne teisenduste

$$x'_k = x_k - v_k^0 t - a_k^0. \quad (2.57)$$

suhtes. Kuna viimane liidetav a_k^0 kirjeldab siin koordinaadistiku alguspunkti ühekordset (ajas konstantset) nihet, siis see antud juhul meile huvi ei paku ja võime lugeda $a_k^0 = 0$. Teisendusvalemid (2.57) ja (2.56) tulevad siis

$$\begin{aligned} x'_k &= x_k - v_k^0 t, \\ t' &= t. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Esimene neist valemitest ütleb, et süsteem K' liigub süsteemi K suhtes konstantse kiirusega v_k^0 . Süsteemide omavaheline liikumine on inertsiaalne (ühtlane ja sirgjooneline).

Newtoni teine seadus on invariantne uude koordinaadistikku ülemineku suhtes, kui uue koordinaadistiku alguspunkt liigub vanas koordinaadistikus ühtlaselt ja sirgjooneliselt. Invariantne niisuguse ülemineku suhtes on siis muidugi ka Newtoni esimene seadus, mida võime vaadata kui teise seaduse erijuhtu (jõud $F_k = 0$).

Teine valemitest (2.58) ütleb, et üleminekul ühest koordinaadistikust teise, esimese suhtes liikuvasse koordinaadistikku, aeg ei muutu. Aja määramiseks kõigis koordinaadistikes

piisab ühest universaalsest kellast. Konkreetsuse mõttes ole-
tame siiski, et iga ruumikoordinaadistiku külge on kinnita-
tud kell, mille abil määrame aja kulgemist selles koordinaa-
distikus. Sisuliselt on kõigi koordinaadistike varustamine
kellaga teooria antud etapil üleliigne, sest need kellad näi-
tavad kõik ühte aega. Me teeme seda aga eesmärgil, et hiljem
oleks lihtsam üle minna relatiivsusteooriasse.

Kellaga varustatud ruumilist koordinaadistikku nimetame
taustsüsteemiks.

Taustsüsteeme, kus kehtivad Newtoni seadused, nimetame
inertsiaalsüsteemideks. Inertsiaalsüsteem on niisugune taust-
süsteem, kus keha liikumishulga muutus ajaühikus on võrdeline
kehale mõjuva jõuga ja kus vabad kehad liiguvad inertsiaalselt
(ühtlaselt ja sirgjooneliselt). Teisiti võiks öelda: inertsia-
aalsüsteemideks nimetatakse taustsüsteeme, kus kolme vaba
mittekooplanaarse punktmassi kiirused on ajas konstantsed.

Üksteise suhtes liiguvad kõik inertsiaalsüsteemid ühtla-
selt ja sirgjooneliselt.

Nüüd võime sõnastada klassikalise mehhaanika relatiiv-
susprintsipi, mis ütleb:

Mehhaanika seadused avalduvad kõigis inertsiaalsüsteemide-
s ühtviisi.

Kui me oleme leidnud taustsüsteemi K^0 , milles klassi-
kalse mehhaanika seadused kehtivad, siis oleme sellega mää-
ranud ühe inertsiaalsüsteemidest. Klassikalise mehhaanika
relatiivsusprintsip väidab nüüd, et mehhaanika seadused
kehtivad täpselt samal kujul ka kõigis teistes taustsüsteemi-
des, mis liiguvad süsteemi K^0 suhtes ühtlaselt ja sirgjoon-

neliselt. Klassikalise mehhaanika relatiivsprintsiiip väidab seega, et kinnises ruumis teostatud mehhaanikakatsete tulemused ei anna võimalust kindlaks teha, kas ruum on mingi kindla inertsiaalsüsteemi K^0 suhtes paigal või liigub tema suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt. Paigalseis ja ühtlane sirgliikumine on selles mõttes ekvivalentsed.

Klassikalise mehhaanika relatiivsprintsiiibi matemaatiliseks väljenduseks on mehhaanika võrrandite invariant. - se nõue teisenduste (2.58) suhtes. Neid teisendusi nimetatakse Galilei teisendusteks. Kas Galilei teisendused moodustavad rühma või mitte, see oleneb kiiruste liitumise seaduse iseloomust. Vaatame, missugustele järeldustele kiiruste liitumise seaduse kohta jõuame, kui oletame, et Galilei teisendustel on rühmaomadus (kahe Galilei teisenduse järjestikune teostamine annab jälle Galilei teisenduse).

Olgu meil kolm taustsüsteemi K , K' ja K'' , kusjuures teise süsteemi kiirus esimese suhtes olgu V_k ja kolmanda süsteemi kiirus teise suhtes - U_k . Mingi ruumpunkti koordinaate süsteemis K tähistame X_k , süsteemis K' - X'_k ja süsteemis K'' - X''_k . Üleminekuvalemid ruumikoordinaatide jaoks on siis:

$$x'_k = x_k - v_k t,$$

$$x''_k = x'_k - u_k t.$$

Asenduse teel saame siit

$$x''_k = x_k - (v_k + u_k)t,$$

mille võime ümber kirjutada

$$x''_k = x_k - w_k t, \quad (2.59)$$

kus

$$w_k = v_k + u_k \quad (2.60)$$

Kui teisendus (2.59) on ka Galilei teisendus, siis peab suurus w_k tähendama kolmanda taustsüsteemi kiirust esimese suhtes. Valem (2.60) on järelikult kiiruste liitumise seadus. Eksperiment näitab, et kiiruste liitumise seadus kujul (2.60) on tõepoolest õige. See tähendab, et Galilei teisendustel on rühmaomadus olemas. Et nende teisenduste hulgas on ka ühikelement ($v_k = 0$) ja igale teisendusele vastav pöördteisendus (kui teisenduse määrab v_k , siis tema pöördteisenduse määrab $-v_k$), siis moodustavad Galilei teisendused rühma. Seda rühma nimetatakse Galilei rühmaks. Galilei rühma invariantideks (s. o. muutumatuteks suurusteks Galilei teisenduste suhtes) on kaugus kahe ruumipunkti vahel ja aeg.

Klassikalise mehhaanika kiiruste liitumise seadust (2.60) läheb meil edaspidi vaja kujul, kus kiirused v_k ja u_k on ühesuunalised. Olgu näiteks

$$v_k = (0, 0, v),$$

$$u_k = (0, 0, u),$$

siis saame

$$w_k = (0, 0, w),$$

kus

$$w = u + v. \quad (2.61)$$

§ 6. Spetsiaalne relatiivsus - printsip.

Valguse kiiruse määras esmakordselt taani astronoom O. Rømer 1675. aastal. See tuli 300 000 km/sek. Kui J.C. Maxwell mõõdnud sajandi keskel tuletas elektromagnetilist välja kirjeldavad võrrandid, siis sai selgeks, et valgusnähtused on elektromagnetisminähtuste üheks alaliigiks: valgus on elektromagnetiline laine.

Elektromagnetilist välja kirjeldavad võrrandid (nn. Maxwelli võrrandid) olid huvitavad selle poolest, et nad sisaldasid elektromagnetilise välja levimise kiirust 300 000 km/sek ilmutatud kujul. Sai selgeks, et see konstant mängib looduse kirjeldamisel erilist osa ja teda hakati tähistama spetsiaalse tähisega C :

$$C = 300\,000 \text{ km/sek}$$

(kaasaegsete andmete kohaselt on täpsemini $C = 299\,790 \pm 1$ km/sek).

Mehhaanika võrrandid kiirust ilmutatud kujul ei sisalda, neis on ainult kiiruse tuletis aja järgi, s. o. kiirendus. Tänu sellele kehtivadki need võrrandid kõigis inertsiaalsüsteemides ühte viisi, s. o. need võrrandid on invariant-
sed Galilei teisenduste suhtes. Et elektromagnetilise välja võrrandid sisaldavad kiirust ilmutatud kujul, siis nad Galilei teisenduste suhtes invariant-
sed olla ei saa. Siit järeldati, et Maxwelli võrrandid võivad õiged olla ainult ühes inertsiaalsüsteemis; see on süsteem, kus valgus liigub igas

suunas ühesuguse kiirusega C . Missugune võiks olla see eelissüsteem? Võiks oletada, et selleks süsteemiks on valgusallikaga seotud taustsüsteem. Sel juhul peaks valguse kiirus olenema valgusallika liikumise kiirusest. Astronoomilised vaatlused näitasid aga selgelt, et see nii ei ole. On ükskõik, kas maailmaruumis liikuv täht läheneb suure kiirusega Maale või eemaldub sellest, valgus, mida ta kiirgab, jõuab Maale ikka ühesuguse kiirusega C .

Jäi üle oletada, et looduses on kõikvõimalike inertsiaalsüsteemide hulgas üks eriline süsteem K^0 (nn. absoluutne taustsüsteem), kus valguse kiirus on C suunast sõltumatu. Teises inertsiaalsüsteemis K' , mis esimese süsteemi suhtes liigub kiirusega V , peaks klassikalise mehhaanika kiiruste liitumise seaduse (2.60) järgi valguse kiirus siis olenema juba suunast: tema maksimaalseks väärtuseks on $C+V$ ja minimaalseks väärtuseks $C-V$. Konkreetselt oletati isegi, et absoluutseks taustsüsteemiks on eriline keskkond, nn. maailmaeeter, milles elektromagnetilised lained levivad.

Klassikaline mehhaanika ei võimaldanud kõigi inertsiaalsüsteemide hulgast ühte eelissüsteemi eristada, elektromagnetismi võrrandid andsid aga selleks lootusi. Oli tarvis määrata süsteem, kus valguse kiirus on C suunast sõltumatu, ja absoluutne taustsüsteem oleks olnudki määratud.

Absoluutse taustsüsteemi otsingutes said määravaks ameerika füüsikute Michelsoni ja Morley katsed 1887. aastal. Nende katsete eesmärgiks oli kindlaks teha, kuidas liigub Maa absoluutse taustsüsteemi (maailmaetri) suhtes. Esimesed mõõtmised näitasid, et valguse kiirus Maa suhtes oli C suu-

nast sõltumatu. Seda tulemust võis seletada oletusel, et katse teostamise ajal oli Maa absoluutse taustsüsteemi suhtes juhuslikult paigal. Katset korrati poole aasta pärast. Et Maa liigub oma orbiidil ümber Päikese kiirusega 30 km/sek, siis poole aasta pärast, kui Maa oli oma orbiidil teisele poole Päikest jõudnud, pidi tema kiirus absoluutse taustsüsteemi suhtes olema 60 km/sek. Mõõtmised näitasid aga jällegi vastuvaidlematult, et valguse kiirus Maa suhtes oli c suunast sõltumatu. Need eksperimentaalsed faktid võeti kokku nn. valguse kiiruse konstantsuse printsiibis:

Valguse kiirus ei olene valgusallika ja kiirust määrava mõõteaparatuuri omavahelisest liikumisest.

Eksperimendid viisid ühesele järeldusele: ka elektromagnetismikatsed ei võimalda määrata absoluutset taustsüsteemi, ka Maxwelli võrrandid kehtivad kõigis inertsiaalsüsteemides ühteviisi. See eksperimendile tuginev kogemus üldistati nn. spetsiaalseks relatiivsuspriintiibiks:

Loodusnähtuste kirjeldamisel on kõik inertsiaalsüsteemid samaväärsed.

Kui looduseadus on õige ühes taustsüsteemis, siis kehtib ta samal kujul ka kõigis teistes taustsüsteemides, mis liiguvad esimese süsteemi suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt.

Spetsiaalne relatiivsuspriintiip väljendab looduseadust, mille õigsuses kahelda pole mingisugust alust. See tähendab aga, et meil tuleb revideerida mõningaid klassikalise mehhaanika seisukohti, milledest oli juttu eelmises punktis.

Kõigepealt on ilmne, et klassikalise mehhaanika kiiruste liitumise seadus (2.60) siis õigeid tulemusi ei anna, kui üks

liidetavatest kiirustest on valguse kiirus. Meie ülesandeks on leida uus ja täpsem kiiruste liitumise seadus. Viimane omakorda on seotud teisendusvalemitega, mis kirjeldavad üleminekuid ühest inertsiaalsüsteemist teise. Galilei teisendused selleks eesmärgiks enam ei sobi, sest elektromagnetismi võrrandid ei ole nende teisenduste suhtes invariantid. On vaja leida uued teisendusvalemid, mis kirjeldavad üleminekuid inertsiaalsüsteemide vahel, kusjuures elektromagnetismi võrrandid peavad nende teisenduste suhtes invariantid olema. Muuhulgas peab neist teisendusvalemitest järgnema ka valguse kiiruse konstantsuse printsiip, mida võime sõnastada:

Valguse kiirus on kõigis inertsiaalsüsteemides suunast sõltumatu.

§ 7. I n t e r v a l l .

Mingi sündmus maailmas on määratud oma toimumiskoha ja toimumishetkega, s. o. koordinaatidega (x_k, t) . Sündmused moodustavad seega neljadimensioonilise ruumi. Osutub, et sündmuste ruumis on otstarbekohane määrata meetrika järgmise meetrilise maatriksi abil:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

Sündmuste ruumi vektori skalaarkorrutis iseendaga avaldub siis valemi (1.6) järgi:

$$s^2 = x_k x_k - c^2 t^2. \quad (2.63)$$

Suurust β nimetatakse sündmuste (x_k, t) ja $(0, 0)$ vaheliseks intervalliks. Analoogiliselt võime defineerida intervalli sündmuste (x_k^0, t^0) ja (x_k, t) vahel:

$$\beta = \sqrt{(x_k - x_k^0)(x_k - x_k^0) - c^2(t - t^0)^2} \quad (2.64)$$

Intervall ei ole midagi muud kui "kaugus" kahe sündmuse vahel sündmuste ruumis.

On näha, et intervalli ruut β^2 ei ole positiivselt määratud suurus. On kolm võimalust:

Kui $\beta^2 < 0$, nimetatakse intervalli ajasarnaseks.

Kui $\beta^2 > 0$, nimetatakse intervalli ruumisarnaseks.

Kui $\beta = 0$, nimetatakse intervalli isotroopseks.

Vaatame nüüd kahte sündmust, mis seisnevad valgussignaali väljasaatmises mingi valgusallika poolt ja selle signaali jõudmises vastuvõtjani. Kirjeldame neid sündmusi kahes inertsiaalsüsteemis.

Inertsiaalsüsteemis K tähistame valgusallika ja vastuvõtja koordinaate vastavalt x_k^0 ja x_k , signaali lähtehetke t^0 ja kohalejõudmise hetke t . Valgussignaali liikumise võrrand on siis

$$\sqrt{(x_k - x_k^0)(x_k - x_k^0)} = c(t - t^0),$$

mille saab üles kirjutada kujul

$$\beta = 0. \quad (2.65)$$

Sündmused, milledeks on valgussignaali lähtumine mingist ruumipunktist ja selle jõudmine teise ruumipunkti, on selles inertsiaalsüsteemis eraldatud isotroopse intervalliga.

Teises inertsiaalsüsteemis K' tähistame valgussignaali lähte- ja lõppkoordinaate ning ajahetki vastavalt tähistega $x_k^{o'}$, $x_k^{i'}$, $t^{o'}$, $t^{i'}$. Vastavalt valguse kiiruse konstantse printsiibile on valguse kiirus ka selles inertsiaalsüsteemis c . Valgussignaali liikumise võrrandi saame siis

$$\sqrt{(x_k^{i'} - x_k^{o'})(x_k^{i'} - x_k^{o'})} = c(t^{i'} - t^{o'}),$$

mis ütleb, et ka selles inertsiaalsüsteemis eraldab valgussignaali lähtumist ja kohalejõudmist isotroopne intervall.

Ka

$$s' = 0. \quad (2.65a)$$

Näeme, et sündmused, mis seisnevad valgussignaali väljasaatmises ja vastuvõtmises, on kõigis inertsiaalsüsteemides eraldatud isotroopse intervalliga.

Vaatame nüüd lõpmata väikest intervalli

$$ds^2 = dx_k dx_k - c^2 dt^2. \quad (2.66)$$

Valgussignaali levimise uurimine näitas, et juhul, kui intervall on null ühes inertsiaalsüsteemis, siis on ta null ka kõigis teistes inertsiaalsüsteemides. Siit järeldub, et juhul, kui intervall on lõpmata väike suurus ühes inertsiaalsüsteemis, siis on ta lõpmata väike suurus ka kõigis teistes inertsiaalsüsteemides. Lõpmata väikesi suurusi võime aga alati omavahel võrdelisteks lugeda:

$$ds = a ds', \quad (2.67)$$

kus ds tähistagu intervalli inertsiaalsüsteemis K ja ds' intervalli inertsiaalsüsteemis K' . Võrdetegur a

võiks, üldiselt rääkides, oleneda ruumikoordinaatidest, ajast ja inertsiaalsüsteemi K kiirusest inertsiaalsüsteemi K' suhtes. Vaatame, missugused nendest sõltuvustest tulevad tegelikult kõne alla.

Kui võrdetegur α oleneks ruumikoordinaatidest, siis tähendaks see, et seose (2.67) konkreetne kuju on ruumipunktist, mille läheduses ta üles on kirjutatud. See oleks vastuolus ruumi homogeensuse nõudega. Võrdetegur α ruumikoordinaatidest oleneda ei saa. See võrdetegur ei saa oleneda ka ajahetkest, sest see viiks kohe vastuollu aja homogeensuse nõudega. Jääb järele ainult oletus, et α sõltub inertsiaalsüsteemi K kiirusest inertsiaalsüsteemi K' suhtes. Kuid ruumisuundade samaväärsuse (ruumi isotroopsuse) nõue ütleb veel täiendavalt, et α ei tohi oleneda selle kiiruse suunast, vaid ainult tema absoluutväärtusest.

Kui me räägime ainult kiiruste absoluutväärtustest, siis võime öelda, et süsteemi K' kiirus süsteemi K suhtes on sama suur kui süsteemi K kiirus süsteemi K' suhtes. Järelikult võime kirjutada

$$ds' = \alpha ds, \quad (2.68)$$

kus võrdetegur α on sama mis valemis (2.67). Asendus viimasest valemist valemisse (2.67) annab

$$ds = \alpha^2 ds,$$

millest järgneb

$$\alpha = \pm 1.$$

Erijuhul, kui inertsiaalsüsteem K' süsteemi K suhtes ei

liigu, peab loomulikult olema $ds' = ds$. Siit järgneb, et meile sobib ainult lahend $Q = +1$ ja valemid (2.67) ning (2.68) võtavad kuju

$$ds' = ds. \quad (2.69)$$

Näeme, et ka lõpmata väikesed intervallid on kõigis inertsiaalsüsteemides võrdsed. Kuid siis peavad olema võrdsed ka suured intervallid, sest suure intervalli võime alati saada lõpmata väikeste intervallide summeerimise teel: $s' = s$ või

$$s'^2 = s^2. \quad (2.70)$$

Näeme, et üleminekud inertsiaalsüsteemide vahel peavad toimuma nii, et sündmustevahelised intervallid jäävad muutumatuks. Teisendusvalemid, mis kirjeldavad üleminekut ühest inertsiaalsüsteemist teise, peavad olema niisugused, et intervall on nende invariantiks.

Eelöeldust on näha, et intervall hakkab järgnevas teoorias suurt osa mängima. Seepärast on otstarbekohane tema avaldada kompaktsemal kujul üles kirjutada. Selleks modifitseerime sündmuste ruumikoordinaatide tähendust nii, et meetrilise maatriksi (2.62) asemele tuleks ühikmaatriks.

Ruumi, mille meetrikat kirjeldab maatriks (2.62), nimetatakse pseudoeuclidilise meetrikaga ruumiks (pseudoeuclidiliseks ruumiks). Et muuta see ruum formaalselt euclidilise meetrikaga ruumiks, defineerime ajakoordinaadi asemele uue pikkuse dimensiooniga koordinaadi

$$x_4 = ict.$$

Intervalli ruut (2.63) avaldub siis

$$j^2 = x_k x_k + x_4 x_4 .$$

Fikseerime edaspidiseks järgmised reeglid:

1) Kui ühes liikmes esineb kahekordne kreeka tähega märgitud indeks, siis tähendab see alati summeerimist üle selle indeksi väärtuste 1, 2, 3, 4.

2) Ühekordne kreeka tähega märgitud indeks omandab sõltumatult väärtusi 1, 2, 3, 4.

Neid reegleid silmas pidades saame intervalli ruudu avaldise kirjutada lühidalt

$$j^2 = x_j x_j . \quad (2.71)$$

Intervalli ruut avaldub formaalselt samal kujul kui hariliku ruumilise pikkuse ruut. Erinevus on ainult neljandas täiendavas koordinaadis, mis on puhtimaginaarne suurus.

Ruumi, mille vektorite komponentideks on kolm reaalselt ruumikoordinaati x_1 , x_2 , x_3 ja neljas puhtimaginaarne ajakoordinaat x_4 , nimetatakse Minkowski ruumiks. See on erijuht üldisest 4-dimensioonilisest komplekssest ruumist. Seepärast on meil otstarbekohane vaadata kõigepealt 4-dimensioonilise kompleksse ruumi teisendusi, mis jätavad "pikkuse" invariantseks.

§ 8. 4 - d i m e n s i o o n i l i s e k o m p l e k s s e r u u m i o r t o g o n a a l t e i s e n d u s t e r ü h m .

Vaatame 4-dimensioonilist kompleksset ruumi, mille vektorite komponente tähistame \mathcal{X} , ja mille meetrika olgu mää-

ratud ruutvormiga $\mathcal{L}_3 \mathcal{L}_3$. Ülesandeks on nüüd leida teisen-
dused

$$\mathcal{L}'_3 = a_{36} \mathcal{L}_6, \quad (2.72)$$

mis ei muuda selle ruumi meetrikat, s. o. täidavad tingimust

$$\mathcal{L}'_3 \mathcal{L}'_3 = \mathcal{L}_3 \mathcal{L}_3.$$

Ülesanne, mille me seadsime, langeb formaalselt kokku
käesoleva peatüki esimeses punktis lahendatud ülesandega. Ai-
nukeseks mitteoluliseks erinevuseks on see, et ladina tähega
märgitud indeks vektori komponendi juures on igal pool asenda-
tud kreeka tähega. Järelikult on kõik eespool saadud tulemu-
sed ka antud juhul kehtivad. Refereerime neid lühidalt:

Meetrika invariantisuse tingimusest (2.72) saame ortogo-
naalsuse-seosed teisendusmaatriksi elementide jaoks:

$$a_{36} a_{36} = \delta_{66}, \quad (2.73)$$

või teisiti

$$a_{66} a_{36} = \delta_{63}. \quad (2.74)$$

Viimaste seoste tuletamisel kasutasime teisenduse (2.71)
pöördteisendust

$$\mathcal{L}_6 = a_{36} \mathcal{L}'_3. \quad (2.75)$$

Edasi järgneb valemist (2.73), et teisendusmaatriksi
determinant on

$$\det A = \pm 1. \quad (2.76)$$

Teisendused $\{A^{(4)}\}$ ($\det A^{(4)} = +1$) moodustavad rühma O_{4p} ,
mida nimetatakse 4-dimensioonilise kompleksse ruumi omatei-

senduste (või pöörete) rühmaks. Teisendused $\{A^{(\pm)}\}$ ($\det A^{(\pm)} = -1$) rühma ei moodusta. Küll aga moodustavad rühma teisendused $\{A^{(+)}, A^{(-)}\}$. Seda rühma nimetatakse 4-dimensioonilise kompleksse ruumi ortogonaalteisenduste rühmaks ja tähistatakse O_4 .

Maatriksid $A^{(\pm)}$ võib avaldada

$$A^{(\pm)} = PA^{(\pm)}, \quad (2.77)$$

kus P on näiteks maatriks

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

Kuna teisendus P teisendustega $A^{(\pm)}$ ei kommuteeru, siis rühma O_4 sobivalt valitud peegelduste rühma ja rühma O_{4P} otsekorrutisena avaldada ei saa, s. o. seosele (2.17) analoogilist seost antud juhul ei ole.

Teisendusvalem (2.71) on määratud 16 kompleksse parameetriga $Q_{\gamma\delta}$, millele vahel on 10 ortogonaalsuse-normeerituse seost (2.73). Siit järgneb, et rühm O_{4P} on määratud 6 sõltumatu kompleksse parameetriga.

Et opereerida ainult sõltumatute parameetritega, on kasulik vaadata jälle infinitesimaalteisendusi

$$x'_\gamma = x_\gamma + \varepsilon_{\gamma\delta} x_\delta, \quad |\varepsilon_{\gamma\delta}| \ll 1, \quad (2.79)$$

kus meetrika invariantisuse tingimuse (2.72) järelalusena

$$\varepsilon_{\gamma\delta} = -\varepsilon_{\delta\gamma}. \quad (2.80)$$

Analoogiliselt sellele, nagu on tehtud käesoleva pea-

tüki punktis 3, saame näidata, et rühma kui iseenda esituse infinitesimaaloperaatorid $J_{\rho\sigma}$ rahuldavad võrrandit

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\sigma} J_{\rho\sigma}^{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu}, \quad (2.81)$$

kus ülemised indeksid infinitesimaaloperaatori juures nummerdavad tema ridu ja veerge. Võrrandi (2.81) lahendiks on

$$J_{\rho\sigma}^{\mu\nu} = \delta_{\rho\mu} \delta_{\sigma\nu} - \delta_{\rho\nu} \delta_{\sigma\mu}. \quad (2.82)$$

Oma elementide kaudu väljakirjutatuna avalduvad need infinitesimaaloperaatorid järgmiselt:

$$J_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.83)$$

$$J_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{34} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kasutades infinitesimaaloperaatori avaldist (2.82) on kerge kontrollida, et

$$[J_{\rho\sigma}, J_{\mu\nu}] = -\delta_{\rho\mu} J_{\rho\nu} + \delta_{\rho\nu} J_{\rho\mu} + \delta_{\sigma\mu} J_{\rho\nu} - \delta_{\sigma\nu} J_{\rho\mu}. \quad (2.84)$$

Sellega ongi rühma $O_{4\rho}$ struktuurikonstandid määratud (vt. (1.51)).

Toome maatriksite $J_{\rho\sigma}$ asemele sisse uued maatriksid

$$J_n^{(+)} = -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{2} e_{k\ell m} J_{\ell m} + J_{n4} \right), \quad (2.85)$$

$$J_n^{(-)} = -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{2} e_{k\ell m} J_{\ell m} - J_{n4} \right),$$

kus e_{klm} on täielikult antisümmeetriline Levi-Civita sümbol, mis defineeritakse omadustega

$$e_{klm} = \begin{cases} +1 & \text{kui } klm \text{ on arvude } 123 \text{ paaris permutatsioon,} \\ -1 & \text{kui } klm \text{ on arvude } 123 \text{ paaritu permutatsioon,} \\ 0 & \text{kui kaks või rohkem indeksit on võrdsed.} \end{cases}$$

Kasutades vahetuseeskirju (2.84) saab näidata, et operaatorite $J_k^{(+)}$, $J_l^{(-)}$ vahel kehtivad järgmised kommutatsiooniseosed:

$$\begin{aligned} [J_l^{(+)}, J_k^{(+)}] &= i e_{lkm} J_m^{(+)}, \\ [J_l^{(-)}, J_k^{(-)}] &= i e_{lkm} J_m^{(-)}, \\ [J_k^{(+)}, J_l^{(-)}] &= 0. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Operaatorid $J_k^{(+)}$ omavahel ja operaatorid $J_k^{(-)}$ omavahel rahuldavad tegelikult neidsamu kommutatsioonieskirju (2.33) mis kolmedimensioonilise ruumi pöörete rühma infinitesimaaloperaatoridki. Operaatoritega $J_l^{(-)}$ kommuteeruvad operaatorid $J_k^{(+)}$.

Eeskirjadest (2.86) järgneb, et operaatorid

$$\begin{aligned} J_k^{(+)^2} &= J_k^{(+)} J_k^{(+)}, \\ J_k^{(-)^2} &= J_k^{(-)} J_k^{(-)} \end{aligned} \quad (2.87)$$

kommuteeruvad kõigi operaatoritega $J_k^{(+)}$ ja $J_k^{(-)}$.

Muidugi kommuteeruvad nad siis ka $J_k^{(+)}$ ja $J_k^{(-)}$ lineaarkombinatsioonidega J_{35} . Operaatorid $J_k^{(+)^2}$ ja $J_k^{(-)^2}$ on seega rühma O_{4D} invariantideks. Sama rühma invariantideks on siis ka $J_k^{(+)^2}$ ja $J_k^{(-)^2}$ lineaarkombinatsioonid, muu-

hulgas operaatorid

$$\begin{aligned} -j^{(+)} - j^{(-)} &= \frac{1}{2} J_{\alpha\beta} J_{\alpha\beta}, \\ -j^{(+)} + j^{(-)} &= \frac{1}{4} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} J_{\alpha\beta} J_{\gamma\delta}, \end{aligned} \quad (2.88)$$

kus $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ on neljadimensiooniline täielikult antisümmeetriline Levi-Civita sümbol:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \begin{cases} +1 & \text{kui } \alpha\beta\gamma\delta \text{ on arvude } 1234 \text{ paaris permutatsioon,} \\ -1 & \text{kui } \alpha\beta\gamma\delta \text{ on arvude } 1234 \text{ paaritu permutatsioon,} \\ 0 & \text{kui kaks või rohkem indeksit on võrdsed.} \end{cases}$$

§ 9. Rühma O_4 alamrühmi. Lorentzi rühm.

Loetleme mõningaid 4-dimensioonilise kompleksse ruumi ortogonaalteisenduste rühma O_4 alamrühmi. Nendeks on:

1) 4-dimensioonilise kompleksse ruumi omateisenduste rühm $O_{4\mathbb{C}}$.

2) 4-dimensioonilise reaalse ruumi ortogonaalteisenduste rühm N_4 , mille moodustavad reaalsete elementidega 4-realised ruutmaatriksid, mis rahuldavad ortogonaalsuse-seo-
seid (2.73).

3) 4-dimensioonilise reaalse ruumi omateisenduste rühm $N_{4\mathbb{R}}$, mis on ühtlasi alamrühmaks ka rühmadele $O_{4\mathbb{R}}$ ja N_4 .
Siia kuuluvad rühma N_4 need teisendused, millele determinant on +1.

4) 3-dimensioonilise kompleksse ruumi ortogonaalteisenduste rühm O_3 . Selle rühma moodustavad komplekssete ele-

mentidega 3-realistised ruutmaatriksid, mis rahuldavad ortogonaalsuse-seoseid (2.7).

5) 3-dimensioonilise kompleksse ruumi omateisenduste rühm O_{3p} , mis on alamrühmaks ka rühmadele O_{4p} ja O_3 . Siiä kuuluvad rühma O_3 need teisendused, millele determinant on $\neq 1$.

6) 3-dimensioonilise reaalse ruumi ortogonaalteisenduste rühm N_3 , mida me uurisime käesoleva peatüki punktis nr. 1. Peale O_4 on see rühm veel alamrühmaks rühmadele N_4 ja O_3 .

7) 3-dimensioonilise reaalse ruumi omateisenduste rühm N_{3p} , mida me samuti uurisime käesoleva peatüki esimestes punktides. Peale O_4 on see rühm alamrühmaks veel rühmadele O_{4p} , N_4 , N_{4p} , O_3 , O_{3p} , N_3 .

Rakenduslikust seisukohast on rühma O_4 üheks olulise-maks alamrühmaks Minkowski ruumi ortogonaalteisenduste rühm L , mida nimetatakse ka üldiseks homogeenseks Lorentzi rüh-maks. Näitame, et Minkowski ruumi ortogonaalteisendused tõe-poollest rühma moodustavad.

Minkowski ruumiks me nimetasime ruumi, mille vektorite kolm esimest komponenti on reaalsed ja neljas komponent puht-imaginaarne: x_k , $x_4 = ict$. Et see omadus jääks ka pärast koordinaatide teisendamist

$$x'_\nu = \alpha_{\nu\sigma} x_\sigma, \quad (2.89)$$

peavad olema:

$$\begin{aligned} \alpha_{ik} & \text{ reaalarvud,} \\ \alpha_{i4}, \alpha_{4i} & \text{ imaginaararvud,} \\ \alpha_{44} & \text{ reaalarv.} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Minkowski ruumi kui 4-dimensioonilise kompleksse ruumi erijuhu teisendusmaatriksi elemendid peavad peale ortogonaalsuse-seoste (2.73) rahuldama veel reaalsuse-imaginaarsusetingimusi (2.90). Veendume nüüd selles, et homogeesed lineaar-teisendused, mis on rühma O_4 teisenduste hulgast tingimustega (2.90) eraldatud, moodustavad rühma.

1° Olgu kaks teisendust

$$x'_\nu = a_{\nu\sigma} x_\sigma,$$

$$x''_\lambda = a'_{\lambda\nu} x'_\nu,$$

kus kordajad $a_{\nu\sigma}$ ja $a'_{\lambda\nu}$ rahuldavad tingimusi (2.90).

Nende teisenduste järjestikune rakendamine annab

$$x''_\lambda = b_{\lambda\sigma} x_\sigma,$$

kus

$$b_{\lambda\sigma} = a'_{\lambda\nu} a_{\nu\sigma}.$$

Lihtne on näha, et ka kordajad $b_{\lambda\sigma}$ rahuldavad tingimusi (2.90):

b_{ik} ja b_{ii} on reaalsed,

b_{i4} ja b_{4i} on imaginaarsed.

Reaalsuse-imaginaarsusetingimusi (2.90) rahuldavate teisenduste korrutamine annab jälle neid tingimusi rahuldava teisenduse. Minkowski ruumi teisendustel (2.89) on rühmaomadus.

2° Minkowski ruumi teisenduste (2.89) hulgas on ka ühikteisendus, mis rahuldab tingimusi (2.90).

3° Ortogonaalsuse-seostest (2.73) on näha, et teisendusmaatriksi A pöördmaatriksi saame, kui transponeerime maatriksit A : $A^{-1} = \bar{A}$. Seega ka maatriks A^{-1} rahuldab

tingimusi (2.90) ja kuulub uuritavasse hulka.

Minkowski ruumi teisendused (2.89) moodustavad rühma, mida nimetatakse üldiseks homogeenseks Lorentzi rühmaks ja tähistatakse L_4 . See rühm on alamrühmaka rühmale O_4 .

Eelmises punktis, kus me uurisime rühma O_4 , ei teinud me kusagil kitsendavaid eeldusi selle kohta, kas teisendusmaatriksi elemendid on reaalsed või imaginaarsed; lugesime neid üldjuhul kompleksarvudeks. Järelikult kehtib kogu selle punkti sisu ka Lorentzi teisenduste korral, mis on määratud kitsendavate tingimustega (2.90).

Niisiis, Lorentzi teisenduse (2.89) maatriksi elemendid $Q_{\nu\sigma}$ rahuldavad ortogonaalsuse-seoseid (2.73), samuti nendega ekvivalentseid seoseid (2.74). Üldise Lorentzi rühma korral on teisendusmaatriksi determinant

$$\det A = \pm 1. \quad (2.91)$$

Need teisendused, kus teisendusmaatriksi determinant on $+1$, moodustavad üldise Lorentzi rühma alamrühma L_p , mida nimetatakse Lorentzi omarühmaks.

Lorentzi omarühma infinitesimaalteisendused on antud valemitega (2.79) ja (2.80), infinitesimaaloperaatorid valemiga (2.82). Infinitesimaaloperaatoritevahelised kommutatsioonieskirjad (2.84) ja rühma invariandid (2.87) (ning (2.88)) on samuti rühmadele O_{4p} ja L_p ühised.

§ 10. Üldise homogeense Lorentzi rühma struktuur.

Nägime juba, et üldine Lorentzi rühm jaguneb kahte alamhulka:

$$\begin{aligned} \{A^{(+)}\} \text{ kus } \det A^{(+)} = +1 \\ \text{ja } \{A^{(-)}\} \text{ kus } \det A^{(-)} = -1. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Ortogonaalsuse-seostest (2.73) saame veel täiendava tingimuse. Erijuhul, kui $\sigma = \varrho = 4$, saame sellest seosest

$$a_{44} a_{44} = 1.$$

Et a_{44} on puht imaginaararvud, siis võime viimase seose kirjutada

$$a_{44}^2 = 1 + |a_{k4}| |a_{k4}|,$$

kus $|a_{k4}|$ on a_{k4} moodul, s. o. positiivne arv. Järelikult

$$a_{44}^2 \geq 1,$$

millest nähtub, et on kaks võimalust:

$$\begin{aligned} a_{44} &\geq +1, \\ a_{44} &\leq -1. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Üldise Lorentzi rühma saame seega nelja alamhulka jaotada:

- 1) Teisendused, kus $\det A = +1$, $a_{44} \geq +1$: $\{A^{(+)}\}$
- 2) Teisendused, kus $\det A = -1$, $a_{44} \geq +1$,
- 3) Teisendused, kus $\det A = -1$, $a_{44} \leq -1$,
- 4) Teisendused, kus $\det A = +1$, $a_{44} \leq -1$.

Esimesse nendest alamhulkadest kuulub ühikteisendus ja infinitiesimaalteisendused. See alamhulk moodustab rühma, nn.

Lorentzi omarühma, mida tähistame L või $\{A^{(4)}\}$.

Teine alamhulk rühma ei moodusta, sest ühikelementi siin ei ole. Tüüpiliseks teisenduseks selles alamhulgas on ruumikoordinaatide peegeldus, mida kirjeldab operaator

$$P_r = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.94)$$

Selle alamhulga elementideks on korrutised $\{P_r A^{(4)}\}$, kus $A^{(4)}$ tähistab Lorentzi omarühma elemente. Hulk $\{A^{(4)}, P_r A^{(4)}\}$ moodustab rühma, mida nimetatakse täielikuks Lorentzi rühmaks.

Ka kolmas alamhulk ei moodusta rühma. Tüüpiliseks teisenduseks on siin ajakoordinaadi peegeldus, mida kirjeldab operaator

$$P_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

Selle alamhulga elementideks on korrutised $\{P_t A^{(4)}\}$.

Neljanda alamhulga tüüpiliseks elemendiks on

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.96)$$

mis kirjeldab kõigi telgede peegeldamist Minkowski ruumis.

Neljanda alamhulga kõik elemendid avalduvad korrutistena

$PA^{(4)}$. Hulk $\{PA^{(4)}\}$ rühma ei moodusta, sest siin puudub ühikelement. Küll aga moodustab rühma hulk

$$L = \{A^{(4)}, P_r A^{(4)}, P_t A^{(4)}, P_l A^{(4)}\}, \quad (2.97)$$

mis ongi üldine homogeenne Lorentzi rühm.

Peegeldusoperaatorid P_r , P_t , P_l koos ühikmaatriksiga moodustavad rühma:

$$G_s^{(4)} = \{I, P_r, P_t, P_l\}. \quad (2.98)$$

On näha, et rühma L iga element avaldub rühmade $G_s^{(4)}$ ja $L_p = \{A^{(4)}\}$ elementide korrutisena. Et aga rühmade $G_s^{(4)}$ ja L_p elemendid omavahel ei kommuteeru, siis ei saa me öelda, et rühm L avalduks rühmade $G_s^{(4)}$ ja L_p otsekorrutisena.

Lõpuks veel paar sõna Lorentzi rühma alamrühmadest.

On näha, et erikujulised teisendused

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

moodustavad rühma. Niisuguste teisenduste mõjul Minkowski ruumi vektorid teisenevad

$$\begin{aligned} x'_k &= a_{ki} x_i, \\ x'_4 &= x_4, \end{aligned} \quad (2.100)$$

kusjuures ortogonaalsusetingimused (2.73) võtavad kuju

$$a_{ki} a_{kl} = \delta_{il}, \quad (2.101)$$

s. o. langevad ühte tingimustega (2.7). Teisendused (2.99) koos ortogonaalsusetingimustega (2.101) moodustavad kolme-dimensioonilise ruumi ortogonaalteisenduste rühma N_3 , mis on täieliku Lorentzi rühma alamrühmaks.

Teisendused, mis on kujuga

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

ja rahuldavad ortogonaalsuse-seoseid (2.73) ning tingimusi (2.90), moodustavad samuti rühma. Seda rühma nimetatakse spetsiaalseks Lorentzi rühmaks. Selle rühma teisendused jätavad Minkowski ruumi vektorite kaks esimest komponenti muutumatuks; teisendus toimub x_3, x_4 - tasandil. Üldisekujulise Lorentzi teisenduse saab alati avaldada spetsiaalse Lorentzi teisenduse (2.102) ja ruumikoordinaadistiku ortogonaalteisenduse (2.99) korrutisena. Et viimane teisendus on juba ammu tuntud ja midagi uut ei anna, siis peavad kõik üldisekujulisest Lorentzi rühmast tulenevad füüsikalised järeldused sisalduma juba spetsiaalses Lorentzi rühmas. Viimase rühma uurimisele ongi pühendatud järgmine peatükk.

Märgime veel, et Galilei teisendused ei ole Lorentzi rühma alamrühmaks. Tõepoolest, kui me kirjutame Galilei teisendustele (2.58) vastava maatriksi Minkowski ruumi koordinaatide jaoks, siis saame

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-iv_1}{c} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-iv_2}{c} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-iv_3}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.103)$$

On näha, et see maatriks ortogonaalsuse-seoseid (2.73) ei rahulda, millest järenebki, et Galilei rühm Lorentzi rühma alamrühmaks olla ei saa.

§ 11. Minkowski ruumi nihete rühmast ja mittehomogeensest Lorentzi rühmast.

Teisendused

$$x'_\mu = x_\mu + a_\mu, \quad (2.104)$$

mis kirjeldavad koordinaadistiku alguspunkti nihet Minkowski ruumis, moodustavad Abeli rühma. Vaatame selle rühma lõpmata väikesi teisendusi

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_\mu. \quad (2.105)$$

Käsitledes nihete rühma kui iseenda esitust, võime valemi (1.46) eeskujul kirjutada

$$x'_\mu = (\delta_{\mu\sigma} + \varepsilon_\nu J_\nu^{\mu\sigma}) x_\sigma, \quad (2.106)$$

kus $|\varepsilon_\nu| \ll 1$ on lõpmata väikest nihet määravad parameetrid ja J_ν on infinitesimaaloperaatorid (ülemised indeksid infinitesimaaloperaatori juures nummerdavad maatriksi ridu ja veerge).

Et on tegemist Abeli rühmaga, peavad kõik infinitesimaaloperaatorid omavahel kommuteeruma:

$$[J_\nu, J_\sigma] = 0. \quad (2.107)$$

Järelikult võivad need operaatorid kõik üheaegselt diagonaalkujus olla, mis teiste sõnadega tähendab seda, et invariantseteks alamruumideks on kõik ühedimensioonilised alamruumid. Operaatorite J_ν taandumatuks esituseks on üherealine esitus, s. o. need operaatorid ei ole maatriksid, vaid harilikud arvud.

Et määrata operaatorite J_ν võimalikku kuju, võrdleme valemeid (2.105) ja (2.106). See annab

$$\varepsilon_\nu J_\nu^{\mu\sigma} x_\sigma = \varepsilon_\mu . \quad (2.108)$$

Saadud võrrandi lahendiks on

$$J_\nu^{\mu\sigma} = \delta_{\mu\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\nu} , \quad (2.109)$$

või kui piirduda ainult üherealise taandumatu esitusega

$$J_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} . \quad (2.110)$$

Ruumis, kus mõjuvad operaatorid J_ν , on antud ka Lorentzi omarühma esitus. Et leida seda, kirjutame võrrandi (2.81) kujul

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\sigma} J_{\rho\sigma}^{\mu\nu} x_\nu = \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu . \quad (2.111)$$

Saadud võrrandi lahendiks on

$$J_{\rho\sigma}^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \left(x_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\rho} - x_\rho \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \right) .$$

Piirdudes üherealise taandumatu esitusega, saame Lorentzi omarühma infinitesimaaloperaatorid kujul

$$J_{\rho\sigma} = x_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\rho} - x_\rho \frac{\partial}{\partial x_\sigma} . \quad (2.112)$$

On lihtne kontrollida, et saadud operaatorid rahuldavad vahetuseeskirju (2.84), nagu see peabki olema. Pöõrete rühma ja nihete rühma infinitesimaaloperaatoritevahelised kommutatsiooniseosed tulevad

$$[J_{\rho\sigma}, J_\nu] = \delta_{\nu\rho} J_\sigma - \delta_{\nu\sigma} J_\rho . \quad (2.113)$$

Nüüd veel mõni sõna mittehomogeensest Lorentzi rühmast,

mille moodustavad teisendused

$$x'_\nu = a_{\nu\sigma} x_\sigma + a_\nu . \quad (2.114)$$

Selle rühma elemendid võib saada homogeense Lorentzi teisenduse ja 4-dimensioonilise koordinaadistiku nihke järjestikuse rakendamise tulemusena. Et need teisendused aga omavahel ei kommuteeru, sellest tekib terve rida komplikatsioone mitte-homogeense Lorentzi rühma ja tema esituste uurimisel. Muuhulgas on valemist (2.113) näha, et nihete rühma infinitesimaaloperaatorid J_ν pöörete rühma infinitesimaaloperaatoritega $J_{\rho\sigma}$ ei kommuteeru. See tähendab, et homogeense rühma invariantid (2.88) mittehomogeensele rühmale invariantideks ei ole. Mittehomogeense rühma invariantideks tulevad hoopis suurused

$$J^2 = J_\nu J_\nu , \quad (2.115)$$

$$W_\lambda = \frac{1}{2} e_{\lambda\mu\nu\rho} J_\mu J_{\nu\rho} , \quad (2.116)$$

mis oluliselt erinevad homogeense rühma invariantidest.

Hiljem näeme, et mittehomogeense rühma invariantide füüsikaline mõte on selgem kui homogeense rühma invariantidel. See näib olevat viiteks, et tegelikult tuleks füüsikalistes rakendustes kasutada eelkõige mittehomogeenset Lorentzi rühma. Et see viib aga tublisti tülikamatele arvutustele, siis on seda seni võrdlemisi vähe tehtud. Harilikult uuritakse ikka homogeenset rühma eraldi ja nihete rühma eraldi. Viimast teed kasutatakse ka käesolevas kursuses.

§ 12. Duaalne suurus antisümmeetrilisele suurusele.

Olgu antud mingisugune oma indeksite suhtes antisümmeetriline suurus $a_{\nu\sigma}$ (see võib olla näit. maatriks või tensor):

$$a_{\nu\sigma} = -a_{\sigma\nu}. \quad (2.117)$$

Suurusele $a_{\nu\sigma}$ duaalseks nimetame suurust $a_{\nu\sigma}^D$, mille defineerime

$$a_{\nu\sigma}^D = \frac{1}{2} e_{\nu\sigma\varrho\lambda} a_{\varrho\lambda}. \quad (2.118)$$

$e_{\nu\sigma\varrho\lambda}$ on siin § 8 lõpus määratud täielikult antisümmeetriline Levi-Civita sümbol. On lihtne veenduda, et $a_{\nu\sigma}^D$ komponentideks on $a_{\nu\sigma}$ komponendid, ainult teises järjekorras võetuna:

$$\begin{aligned} a_{12}^D &= a_{34}, & a_{14}^D &= a_{23}, \\ a_{23}^D &= a_{14}, & a_{24}^D &= a_{31}, \\ a_{31}^D &= a_{24}, & a_{34}^D &= a_{12}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Viimaste seoste abil on ka lihtne veenduda, et

$$(a_{\mu\nu}^D)^D = a_{\mu\nu}. \quad (2.120)$$

Kui

$$a_{\mu\nu}^D = a_{\mu\nu}, \quad (2.121)$$

siis nimetame antisümmeetrilist suurust $a_{\mu\nu}$ iseendale duaalseks või lühemalt iseduaalseks suuruseks.

Kui

$$a_{\mu\nu}^D = -a_{\mu\nu}, \quad (2.122)$$

siis nimetame antisümmeetrilist suurust anti-iseduaalseks suuruseks.

Antisümmeetrilisel suurusel $a_{\nu\sigma}$ on kuus sõltumatut komponenti. Iseduaalsuse tingimus (2.121) annab nende komponentide vahel veel kolm seost. Seega on iseduaalsel antisümmeetrilisel suurusel ainult kolm sõltumatut komponenti. Analogiliselt on kolm sõltumatut komponenti ka anti-iseduaalsel antisümmeetrilisel suurusel.

Antisümmeetrilise suuruse saab alati lahutada iseduaalse ja anti-iseduaalse suuruse summaks. Tõepoolest, alati võib kirjutada

$$a_{\nu\sigma} = a_{\nu\sigma}^{(i)} + a_{\nu\sigma}^{(a)}, \quad (2.123)$$

kus

$$a_{\nu\sigma}^{(i)} = \frac{1}{2}(a_{\nu\sigma} + a_{\nu\sigma}^D),$$

$$a_{\nu\sigma}^{(a)} = \frac{1}{2}(a_{\nu\sigma} - a_{\nu\sigma}^D)$$

on vastavalt iseduaalne ja anti-iseduaalne suurus.

Vaatame näiteks 4-dimensioonilise kompleksse ruumi lineaarteisenduste hulka. Nende lineaarteisenduste seas on iseduaalsed antisümmeetrilised maatriksid

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \delta & -\gamma & \beta \\ -\delta & 0 & \beta & \gamma \\ \gamma & -\beta & 0 & \delta \\ -\beta & -\gamma & -\delta & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.124)$$

kus β , γ , δ tähistavad meelevaldseid kompleksarve. Iseduaalsete maatriksite hulk korrutamise suhtes kinnine ei ole. Moodustame skalaarse maatriksi ja iseduaalse

maatriksi summa:

$$K = \alpha I + M = \begin{pmatrix} \alpha & \delta & -\gamma & \beta \\ -\delta & \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & -\beta & \alpha & \delta \\ -\beta & -\gamma & -\delta & \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.125)$$

kus α olgu samuti kompleksarv, mis koos arvudega β , γ , δ rahuldab tingimust

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1. \quad (2.126)$$

Viimane tingimus ütleb, et maatriksid K kuuluvad ortogonaalmaatriksite hulka (nende maatriksite read, samuti veerud, moodustavad ortonormeeritud süsteemi).

Lihtne on veenduda, et maatriksite hulk $\{K\}$ moodustab rühma, mis on rühmale O_4 alamrühmaks.

Analoogiliselt saame moodustada maatriksid

$$R = \begin{pmatrix} \alpha' & \delta' & -\gamma' & -\beta' \\ -\delta' & \alpha' & \beta' & -\gamma' \\ \gamma' & -\beta' & \alpha' & -\delta' \\ \beta' & \gamma' & \delta' & \alpha' \end{pmatrix}, \quad (2.127)$$

mis avalduvad skalaarse maatriksi ja anti-iseduaalse maatriksi summana. Kui nõuda, et kompleksarvud α' , β' , γ' , δ' rahuldaksid tingimust

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \delta'^2 = 1, \quad (2.128)$$

siis moodustab ka maatriksite hulk $\{R\}$ rühma, mis on samuti rühmale O_4 alamrühmaks.

§ 13. Omarühmade lahutamise
teguriteks.

Näitame kõigepealt, et omarühma O_{4p} mistahes elemendi saab avaldada maatriksite K (vt. (2.125)) ja R (vt. (2.127)) korrutisena, kusjuures see teguriteks lahutamine on ühene kuni teguri ± 1 täpsuseni, mis peab olema ühesugune mõlema maatriksi ees.

Vaatame kõigepealt infinitesimaalteisenduste juhtu.

Rühma O_{4p} infinitesimaalteisenduse ΔA elemendid $\Delta Q_{\nu\sigma}$ on valemi (2.79) kohaselt

$$\Delta Q_{\nu\sigma} = \delta_{\nu\sigma} + \varepsilon_{\nu\sigma}, \quad (2.129)$$

kus $\varepsilon_{\nu\sigma}$ on antisümmeetriline suurus. Reegli (2.123) järgi saame $\varepsilon_{\nu\sigma}$ lahutada iseduaalse ja anti-iseduaalse osa summaks:

$$\varepsilon_{\nu\sigma} = \varepsilon_{\nu\sigma}^{(i)} + \varepsilon_{\nu\sigma}^{(a)} \dots \quad (2.130)$$

Valemi (2.129) asemel saame siis

$$\Delta Q_{\nu\sigma} = \delta_{\nu\sigma} + \varepsilon_{\nu\sigma}^{(i)} + \varepsilon_{\nu\sigma}^{(a)} = (\delta_{\nu\sigma} + \varepsilon_{\nu\sigma}^{(i)}) (\delta_{\rho\sigma} + \varepsilon_{\rho\sigma}^{(a)}), \quad (2.131)$$

või ka

$$\Delta Q_{\nu\sigma} = (\delta_{\nu\rho} + \varepsilon_{\nu\rho}^{(a)}) (\delta_{\rho\sigma} + \varepsilon_{\rho\sigma}^{(i)}). \quad (2.131a)$$

Kõrgemat järku lõpmata väikesed liikmed oleme seejuures nulliks lugenud. Tegur $(\delta_{\nu\rho} + \varepsilon_{\nu\rho}^{(i)})$ pole midagi muud kui rühma $\{K\}$ kuuluv infinitesimaalteisendus, mida tähistame ΔK . Tegur $(\delta_{\rho\sigma} + \varepsilon_{\rho\sigma}^{(a)})$ on infinitesimaalteisenduseks rühmas $\{R\}$ ja teda tähistame ΔR . Valemite (2.131) ja (2.131a) asemel saame nüüd

$$\Delta A = \Delta K \cdot \Delta R = \Delta R \cdot \Delta K. \quad (2.132)$$

Infinitesimaalteisendusi ΔK ja ΔR saab alati nii valida, et nende korrutis annaks rühma O_{4p} infinitesimaalteisenduse ΔA . Rühma O_{4p} lõpliku teisenduse A saab infinitesimaalteisenduste järjestikuse rakendamise teel, mida sümbolsealt kirjutame

$$A = \Pi_{\Delta} A. \quad (2.133)$$

Võttes arvesse valemit (2.132), saame siit kohe

$$A = \Pi(\Delta R \cdot \Delta K) = (\Pi_{\Delta} R)(\Pi_{\Delta} K) = RK. \quad (2.134)$$

Rühma O_{4p} iga element on avaldatav rühmade $\{K\}$ ja $\{R\}$ elementide korrutisena. Peale selle on lihtne kontrollida, et matriksid K kommuteeruvad matriksitega R :

$$KR - RK = 0. \quad (2.135)$$

Eelöeldust järgneb, et rühm O_{4p} avaldub rühmade $\{K\}$ ja $\{R\}$ otsekorrutisena:

$$O_{4p} = \{K\} \times \{R\}. \quad (2.136)$$

Et tegurite K ja R ees korrutises (2.134) võib üheaegselt olla kordaja ± 1 , siis annab rühmade $\{K\}$ ja $\{R\}$ otsekorrutis rühma O_{4p} tegelikult kahekordselt. Kui me oleksime päris täpsed, siis tuleks öelda, et rühm O_{4p} on otsekorrutise $\{K\} \times \{R\}$ homomorfseks kujutiseks. Käesolevas pole niisugune täpsus aga vajalik. Me kirjutame valemis (2.136) ja edaspidi ka teistes temaga analoogilistes valemites võrdusmärgi, kusjuures peame alati silmas, et võrduse paremal pool on korrutatavad rühmad määratud üheaegse kordaja ± 1 täpsusega.

Teostame nüüd matriksi

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & i & i & 0 \\ -i & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.137)$$

abil maatriksitega (2.125) ja (2.127) sarnasusteisenduse.

Saame

$$K' = T^* K T = V \times T, \quad (2.138)$$

$$R' = T^* R T = I \times W,$$

kus I tähistab kaherealist ühikmaatriksit ja

$$V = \begin{pmatrix} \alpha + i\delta & \beta - i\gamma \\ -\beta - i\gamma & \alpha - i\delta \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} \alpha' - i\delta' & \beta' + i\gamma' \\ -\beta' + i\gamma' & \alpha' + i\delta' \end{pmatrix} \quad (2.139)$$

Pärast sarnasusteisendust avaldub rühma O_{4p} iga element

A nüüd korrutisena

$$A' = K'R' = (V \times I)(I \times W) = V \times W \quad (2.140)$$

Lihtne on kontrollida, et tänu tingimustele (2.126)

(2.128) osutuvad maatriksid V ja W unimodulaarseteks:

$$\det V = 1, \quad \det W = 1. \quad (2.141)$$

Kahedimensioonilised unimodulaarmaatriksid moodustavad rühma, mida tähistame C_2 . Valemi (2.136) asemel võime nüüd kirjutada

$$O_{4p} = C_2 \times C_2'. \quad (2.142)$$

Et rühma elementi määravad parameetrid teguris C_2' ei sõltu samade parameetrite väärtustest teguris C_2 , seda oleme rõhutanud tähisega "prim" teise teguri juures.

Silmas pidades K ja R avaldisi (2.125) ja (2.127) arvutame välja korrutise $A = KR$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' - \delta\delta' - \gamma\gamma' + \beta\beta' & \alpha\delta' + \delta\alpha' + \gamma\beta' + \beta\gamma' & -\alpha\gamma' + \delta\beta' - \gamma\alpha' + \beta\delta' & -\alpha\beta' - \delta\gamma' + \gamma\delta' + \beta\alpha' \\ -\delta\alpha' - \alpha\delta' + \beta\gamma' + \gamma\beta' & \alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma' - \delta\delta' & \delta\gamma' + \alpha\beta' + \beta\alpha' + \gamma\delta' & \delta\beta' - \alpha\gamma' - \beta\delta' + \gamma\alpha' \\ \gamma\alpha' + \beta\delta' + \alpha\gamma' + \delta\beta' & \gamma\delta' - \beta\alpha' - \alpha\beta' + \delta\gamma' & \alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' + \delta\delta' & -\gamma\beta' + \beta\gamma' - \alpha\delta' + \delta\alpha' \\ -\beta\alpha' + \gamma\delta' - \delta\gamma' + \alpha\beta' & -\beta\delta' - \gamma\alpha' + \delta\beta' + \alpha\gamma' & \beta\gamma' - \gamma\beta' - \delta\alpha' + \alpha\delta' & \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta' \end{pmatrix} \quad (2.143)$$

Niisugune on rühma O_{4p} elemendi üldine kuju parameetrite $\alpha, \beta, \dots, \alpha', \beta', \dots$ kaudu avaldatuna. Need parameetrid on üldiselt kompleksarvud, millele valikut kitsendavad ainult tingimused (2.126) ja (2.128). Kui me saame parameetritele veel täiendavaid tingimusi, siis saame rühma O_{4p} alamrühmad N_{4p}, L_p, O_{3p} ja N_{3p} . Vaatame kõiki neid eraldi.

1) Et maatriks (2.143) oleks rühma N_{4p} üldkujuliseks elemendiks, peavad kõik parameetrid $\alpha, \beta, \dots, \alpha', \beta', \dots$ olema reaalsed. Maatriksid V ja W on sel juhul

$$V = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -\bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix}, \quad (2.144)$$

kus

$$\begin{aligned} a &= \alpha + i\delta, & a' &= \alpha' - i\delta', \\ b &= \beta - i\gamma, & b' &= \beta' + i\gamma'. \end{aligned}$$

Teiste sõnadega: maatriksid V ja W on unitaarmaatriksid, mis moodustavad rühma C_2 alamrühma. Tähistame seda teist järku unitaarmaatriksite rühma U_2 . Valemi (2.142)

asemel saame antud juhul

$$N_{u_p} = U_2 \times U_2' . \quad (2.145)$$

2) Et rahuldada reaalsuse-imaginaarsuse tingimusi (2.90) rühma L_p korral, peame võtma valemis (2.143):

$$\alpha' = \bar{\alpha}, \quad \beta' = \bar{\beta}, \quad \gamma' = \bar{\gamma}, \quad \delta' = \bar{\delta}. \quad (2.146)$$

Sel juhul ei ole maatriksid V ja W enam sõltumatud, vaid maatriksi W elemendid saame, kui võtame maatriksi V elementidest kaaskompleksid. Valemi (2.142) asemel saame siis

$$L_p = C_2 \times \bar{C}_2, \quad (2.147)$$

kus \bar{C}_2 tähistab rühma, mille elementideks on rühma C_2 elementidega võrreldes kaaskomplekssete elementidega maatriksid.

Võrdus (2.147) ütleb, et me saame rühma C_2 igale elemendile vastavusse seada rühma L_p kindla elemendi. Ja vastupidi: rühma L_p igale elemendile saame vastavusse seada k a k s rühma C_2 elementi, mis erinevad teineteisest märgi poolest. Seega võime öelda, et rühm L_p on rühma C_2 homomorfseks kujutuseks:

$$C_2 \rightarrow L_p . \quad (2.148)$$

3) Et saada rühma O_{3p} üldist elementi, tuleb võtta valemis (2.143)

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \gamma, \quad \delta' = \delta. \quad (2.149)$$

Maatriksid V ja W tulevad jällegi sõltuvad:

$$W = ZVZ^*, \quad (2.150)$$

kus

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Valemi (2.142) asemel saame siis

$$O_{3p} = C_2 \times \check{C}_2, \quad (2.151)$$

kus \check{C}_2 tähistab rühma, mille elemendid on saadud rühma C_2 elementidest sarnasusteisenduse (2.150) teel. Valem (2.151) ütleb, et rühma C_2 igale elemendile saame üheselt vastavusse seada rühma O_{3p} elemendi, samal ajal aga rühma O_{3p} igale elemendile saame vastavusse seada kaks rühma C_2 elementi, mis erinevad teineteisest märgi poolest. Ka rühm O_{3p} on rühma C_2 homomorfseks kujutuseks:

$$C_2 \longrightarrow O_{3p}. \quad (2.152)$$

Valemitest (2.148) ja (2.152) ning eeltoodud arutlustest järgneb, et rühmad O_{3p} ja L_p on isomorfised:

$$O_{3p} \longleftrightarrow L_p. \quad (2.153)$$

4) Et saada rühma N_{3p} üldist elementi, tuleb võtta valemis (2.143)

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \gamma, \quad \delta' = \delta. \quad (2.154)$$

ja oletada peale selle, et α , β , γ ja δ on reaalarvud. Maatriksid V ja W on sel juhul unitaarmaatriksid. Maatriksi W elemendid saame, kui võtame maatriksi V elementidest kaaskompleksid. Valemi (2.142) asemel tuleb siis

$$N_{3p} = U_2 \times \bar{U}_2, \quad (2.155)$$

kus \bar{U}_2 tähistab unitaarmaatriksite rühma, mille elementideks on rühma U_2 elementidega võrreldes kaaskomplekssete

elementidega maatriksid.

Valemist (2.155) järgneb, et rühm N_{3p} on rühma U_2 homomorfseks kujutuseks:

$$U_2 \rightarrow N_{3p} . \quad (2.156)$$

k i r j a n d u s .

1. Roman, P., Theory of Elementary Particles, Amsterdam 1960.
2. Гельфанд, И.М., Минлос, Р.А., Шапиро, З.Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, Москва 1958.
3. Любарский, Г.Я., Теория групп и ее применение в физике, Москва 1957.
4. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., Теория поля, Москва 1960.
5. Бергман, П.Г., Введение в теорию относительности, Москва 1947.

III peatükk.

SPETSIAALNE RELATIIVSUSTEORIA. LAENG

ELEKTROMAGNETILISES VÄLJAS.

§ 1. Lorentzi teisendused kitsamas mõttes.

Vaatame Lorentzi teisendusi kitsamas mõttes, s. o. teisendusi (2.102), mis moodustavad spetsiaalse Lorentzi rühma

$$A^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Need teisendused rahuldavad ortogonaalsuse-seoseid (2.74), mis antud juhul tulevad

$$a_{33}^2 + a_{34}^2 = 1,$$

$$a_{43}^2 + a_{44}^2 = 1; \quad (3.2a)$$

$$a_{33}a_{43} + a_{34}a_{44} = 0. \quad (3.2b)$$

Et rahuldada viimast võrrandit ja reaalsuse-imaginaarsusetingimusi (2.90), võtame

$$a_{33} = \alpha, \quad a_{34} = i\alpha\beta, \quad (3.3)$$

$$a_{44} = \alpha, \quad a_{43} = -i\alpha\beta,$$

kus α ja β on reaalarvud, mis tulevad veel määrata. Võrrandid (3.2a) annavad nende reaalarvude jaoks tingimused

$$\alpha^2 - \alpha^2\beta^2 = 1,$$

millest saame

$$\alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (3.4)$$

Vaadeldavad teisendused peavad erijuhuna sisaldama ka ühik-teisendust, mille saame, kui võtame

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0.$$

Need tingimused ütlevad, et miinusmärk valemis (3.4) ei sobi.

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (3.5)$$

Seega on spetsiaalsesse Lorentzi rühma kuuluvad teisendused kujuga

$$A^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 0 & \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

kus β on mingi reaalarv, mis peab olema $\beta \leq 1$, vastasel korral ei oleks teisendus (3.6) kooskõlas reaalsuse-imigi-naarsusetingimustega (2.90).

Ruumikoordinaadid x_k ja ajakoordinaat x_4 muutuvad teisenduse (3.6) mõjul järgmiselt:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= \frac{x_3 + i\beta x_4}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ x_4' &= \frac{x_4 - i\beta x_3}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Teeme nüüd kindlaks parameetri β füüsikalise tähenduse. Olgu antud taustsüsteem K , milles aeg-ruumi punkti koordinaate tähistame x , ja taustsüsteem K' , milles aeg-ruumi punkti koordinaate tähistame x' . Olgu vaatleja taustsüsteemi K' suhtes paigal, s. o. koordinaadid x'_k valemites (3.7) loeme konstantseteks, siis $dx'_1 = 0$, $dx'_2 = 0$, $dx'_3 = 0$. Võttes valemitest (3.7) diferentsiaalid, saame järelikalt

$$\begin{aligned} dx_1 &= 0, & dx_2 &= 0, \\ dx_3 + i\beta dx_4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Arvestades, et $dx_4 = icdt$, saame siit

$$\frac{dx_1}{dt} = 0, \quad \frac{dx_2}{dt} = 0, \quad \frac{dx_3}{dt} = c\beta. \quad (3.9)$$

Saadud suurused pole aga midagi muud kui vaatleja kiiruse komponendid süsteemis K , või teiste sõnadega süsteemi K' kiiruse komponendid süsteemi K suhtes. On näha, et süsteem K' liigub süsteemi K kolmanda telje sihis. Tähistame tema liikumise kiirust V . Siis saame

$$V = c\beta; \quad \beta = \frac{V}{c}. \quad (3.10)$$

Parameeter β näitab, mitmendiku osa valguse kiirusest moodustab süsteemi K' kiirus süsteemi K suhtes. Tingimusest $\beta \leq 1$ järgneb siis kohe, et inertsiaalsüsteemide omavaheline kiirus ei saa olla suurem kui valguse kiirus.

Teisendusvalemid (3.7) võime nüüd kirjutada

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1, & x'_2 &= x_2, \\ x'_3 &= \frac{x_3 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x_3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Saadud teisendused kannavad Lorentzi teisenduste nime.

Saadud teisendusvalemeid nimetatakse Lorentzi teisendusteks või täpsemini Lorentzi teisendusteks kitsamas mõttes. Need valemid kirjeldavad mingi sündmuse ruumi- ja ajakoordinaatide muutumist üleminekul inertsiaalsüsteemist K inertsiaalsüsteemi K' , kusjuures süsteem K' liigub süsteemi K kolmanda telje positiivses suunas kiirusega v . Erinevalt Galilei teisendustest muutub Lorentzi teisenduste korral ka ajakoordinaat.

Vaatame lõpuks erijuhtu, kui inertsiaalsüsteemidevaheline kiirus on väga väike võrreldes valguse kiirusega, $v \ll c$. Teiste sõnadega: me võime lugeda valguse kiiruse lõpmata suureks võrreldes inertsiaalsüsteemidevaheliste kiirustega. Piirjuhul $c \rightarrow \infty$ saame valemitest (3.11)

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1, & x_3' &= x_3 - vt, \\x_2' &= x_2, & t' &= t,\end{aligned}\tag{3.12}$$

mis langevad ühte Galilei teisendustega (2.58) juhul, kui liikumine toimub ainult süsteemi K kolmanda telje suunas. Siit järeldub, et Galilei teisenduste abil võime kirjeldada üleminekuid ühest inertsiaalsüsteemist teise ainult sel juhul, kui inertsiaalsüsteemide omavaheline kiirus on väga väike võrreldes valguse kiirusega. Suuremate kiiruste korral tuleb inertsiaalsüsteemidevahelisi üleminekuid kirjeldada Lorentzi teisenduste (3.11) abil.

Piirileminek $c \rightarrow \infty$ muudab alati Lorentzi teisendustele tugineva relativistliku füüsika valemid mitterelativistliku füüsika valemiteks, mis on kooskõlas Galilei teisendustega.

§ 2. Üldkujulise Lorentzi omarühma füüsikalisest interpretatsioonist.

Nägime, et spetsiaalne Lorentzi rühm, kuhu kuuluvad teisendused (3.1) (või mis on seesama - (3.6)), kirjeldab üleminekuid inertsiaalsüsteemist K inertsiaalsüsteemi K' juhul, kui süsteem K' liigub süsteemi K kolmanda ruumitelje suunas. Et saada teisendusi, mis kirjeldavad üleminekuid inertsiaalsüsteemide vahel sel juhul, kui süsteem K' liigub süsteemis K meelevaldses suunas, tuleb teostada vektorite X_ν ruumis ruumikoordinaadistiku pööre, mis on antud teisendusmaatriksiga (2.99):

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

kusjuures

$$a'_{ik} a'_{il} = \delta_{kl} \quad (3.14)$$

Spetsiaalsesse Lorentzi rühma kuuluvad teisendused $A^{(s)}$ muutuvad siis reegli (1.12) kohaselt järgmiselt:

$$A^{(s)} \rightarrow A^{(u)} = A^{(2)} A^{(s)} A^{(2)^{-1}}. \quad (3.15)$$

Kerge on näha, et teisendused A muudavad aeg-ruumi koordinaate valemi (2.89) kohaselt, kusjuures kehtivad ka reaalsuse-imaginaarsusetingimused (2.90) ja ortogonaalsusetingimused (2.73). Et $\det A^{(s)} = 1$, siis saame ka

$$\det A^{(\bar{u})} = \det A^{(u)} \det A^{(s)} \det A^{(v)^{-1}} = 1 \quad (3.16)$$

Kõigest eelöeldust järgneb, et valemiga (3.15) antud teisendused kuuluvad Lorentzi omarühma L_p . Või teisiti öeldes: Lorentzi omarühm L_p sisaldab teisendusi, mis kirjeldavad üleminekuid inertsiaalsüsteemide vahel sel juhul, kui üks inertsiaalsüsteem liigub teise suhtes meelevaldses suunas. Peale nende sisaldab L_p veel teisendusi, kus pärast üleminekut ühest inertsiaalsüsteemist teise on teostatud ruumikoordinaadistiku pööre. Rühma L_p kuuluva teisenduse üldine kuju on seega

$$A = A^{(v')} A^{(\bar{u})}, \quad (3.17)$$

kus $A^{(v')}$ kirjeldab mingisugust ruumikoordinaadistiku pööret ja $A^{(\bar{u})}$ on antud valemiga (3.15).

§ 3. Relativistlik kiiruste liitumise seadus.

Relativistliku kiiruste liitumise seaduse saame järeldusena spetsiaalsesse Lorentzi rühma kuuluvate teisenduste rühmaomadusest.

Olgu meil kolm taustsüsteemi K , K' ja K'' , kusjuures teise süsteemi kiirus esimese suhtes olgu V ja kolmanda süsteemi kiirus teise suhtes - U (oletame, et süsteemide omavaheline liikumine toimub kolmanda ruumitelje sihis). Üleminekut esimesest inertsiaalsüsteemist teise kirjeldab siis valemi (3.6) kohaselt teisendus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 0 & \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

kus

$$\beta = \frac{v}{c}. \quad (3.19)$$

Üleminekut süsteemist K' süsteemi K'' kirjeldab analoogiline teisendus

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}} & \frac{i\beta'}{\sqrt{1-\beta'^2}} \\ 0 & 0 & \frac{-i\beta'}{\sqrt{1-\beta'^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}} \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

kus

$$\beta' = \frac{u}{c}. \quad (3.21)$$

Nende teisenduste korrutisele saame anda kuju

$$A'A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} & \frac{i\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \\ 0 & 0 & \frac{-i\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

kus

$$\gamma = \frac{W}{c} \quad (3.23)$$

ja W omakorda on järgmine avaldis:

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}} . \quad (3.24)$$

Nõudest, et teisendus $A'A$ kuuluks samuti spetsiaalsesse Lorentzi rühma, järgneb, et suurus W peab olema süsteemi K'' kiirus süsteemi K suhtes. Valem (3.24) pole midagi muud kui Lorentzi teisendustest järelduv kiiruste liitumise seadus, nn. relativistlik kiiruste liitumise seadus.

On näha, et väikeste kiiruste u ja v korral (või teiste sõnadega piirjuhul $c \rightarrow \infty$) läheb relativistlik kiiruste liitumise seadus (3.24) üle klassikalise mehhaanika kiiruste liitumise seaduseks (2.61). Väikesi kiirusi võime liita klassikalise valemi abil, sest relativistlik valem ei anna sel juhul klassikalisest valemist oluliselt erinevaid tulemusi. Suuremate kiiruste liitmiseks klassikaline valem aga enam ei kõlba, sest see annab tegelikkusest tunduvalt suuremad tulemused. Näiteks kiiruse 200 000 km/sek liitmisel teise sama suure kiirusega saame klassikalise valemi järgi 400 000 km/sek, mis on tunduvalt suurem kui relativistlikust valemist (3.24) järgnev õige tulemus 276 900 km/sek.

Eriti huvitava tulemuse saame siis, kui võtame valemis (3.24) üheks liidetavatest kiirustest valguse kiiruse. Olgu näiteks $u = c$. Arvutus näitab, et siis tuleb ka resulteerv kiirus $w = c$. Ükskõik missuguse kiiruse liitmisel valguse kiirusele saame alati jälle valguse kiiruse. See tulemus annab piltliku seletuse valguse kiiruse konstantsuse printsiibile: valguse kiirus ei olene valgusallika ja mõõteaparatuuri omavahelisest liikumisest.

Relativistlikust kiiruste liitumise seadusest on veel näha, et ükskõik, kui suured me võtame $u \leq c$ ja $v \leq c$, tuleb resuldeeruv kiirus ikka väiksem kui valguse kiirus:

Valguse kiirus on kõige suurem võimalik kiirus looduses.

§ 4. O m a a e g .

Vaatame ühtlaselt ning sirgjooneliselt liikuvat materiaalist keha. Muutugu aja Δt jooksul tema koordinaadid ΔX_k võrra. Moodustame selle keha neljadimensioonilise nihkevektori $(\Delta X_k, \Delta X_y)$, kus $\Delta X_y = ic\Delta t$. Nihkevektorist omakorda moodustame intervalli ruudu

$$ds^2 = \Delta X_y \Delta X_y = \Delta X_k \Delta X_k - c^2(\Delta t)^2. \quad (3.25)$$

ds on intervall kahe sündmuse vahel, mis seisnevad keha jõudmises teineteisest ΔX_k võrra erinevatesse ruumipunkti-desse.

ΔX_k ja Δt on omavahel seotud keha kiiruse v kaudu:

$$\Delta X_k \Delta X_k = v^2(\Delta t)^2. \quad (3.26)$$

Intervalli ruudu avaldise võime seega kirjutada

$$ds^2 = (v^2 - c^2)(\Delta t)^2. \quad (3.27)$$

Nimetusega materiaalne keha rõhutame seda, et tegemist ei ole valgussignaaliga, vaid kehaga, mis liigub valguse kiirusest väiksema kiirusega: $v < c$. Eelmisest valemist järgneb siis kohe, et materiaalse keha nihkevektorist moodustatud intervalli ruut on negatiivne, $ds^2 < 0$. Materiaalse keha nihke-

vektor on ajasarnane vektor.

Läheme nüüd üle kehaga seotud taustsüsteemi. Selle süsteemi suhtes on keha paigal, s. o. keha nihkevektor on selles süsteemis $(\Delta x_k^0, \Delta x_n^0)$, kus $\Delta x_k^0 = 0$ ja $\Delta x_n^0 = ct \Delta \tau$. $\Delta \tau$ tähistab siin ajavahemikku, mis on mõõdetud kehaga seotud taustsüsteemis (s. o. mida mõõdab keha suhtes liikumatu kell). Seda aega nimetatakse keha omaajaks.

Et saada seost omaaja ja mingi teise taustsüsteemi aja Δt vahel, kirjutame üles intervalli ruudu avaldise kehaga seotud taustsüsteemis:

$$ds^2 = -c^2(\Delta \tau)^2. \quad (3.28)$$

Et aga intervall on invariant, s. o. tema väärtus on kõigis taustsüsteemides ühesugune, siis saame ds^2 avaldised (3.27) ja (3.28) võrrutada, millest järgneb

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.29)$$

Valemist (3.28) saame omaaja avaldada ka intervalli kaudu

$$\Delta \tau = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2}. \quad (3.30)$$

Viimasest ilmneb, et omaaeg on invariant, sest tema avaldis koosneb ainult invariantidest c ja ds .

Valemist (3.29) on näha, et $\Delta \tau \leq \Delta t$. See tähendab, omaajas mõõdetud ajavahemik on üldiselt alati lühem kui ajavahemik samade sündmuste vahel mõõdetuna mingi teise taustsüsteemi ajas. Keha omaaeg ja taustsüsteemi aeg on võrdsed ainult sel juhul, kui keha on taustsüsteemi suhtes liikumatu.

Füüsikalised protsessid mingis kehas toimuvad alati sel-

le keha omaaja järgi. Mõõtmisel saame kehas toimuvatest protsessidest pildi laboratooriumiga seotud taustsüsteemi ajas. Kui keha laboratooriumi suhtes küllalt kiiresti liigub, siis kujuneb erinevus keha omaaja ja laboratooriumi aja vahel küllaltki suureks. Võtame ühe konkreetse näite.

Elementaarosakeste hulgas on tuntud nn. μ -mesonid, mis pärast tekkimist $2 \cdot 10^{-6}$ sekundi pärast lagunevad elektroniks ja neutriinodeks. μ -mesoni eluiga on määratud tema omaajas. Sama mesoni eluiga laboratooriumi ajas oleneb aga sellest, kui kiiresti meson laboratooriumi suhtes liigub. Olgu μ -mesoni kiirus näiteks 290 000 km/sek (nii suure kiirusega mesoneid on tegelikult jälgitud). Selle mesoni eluiga laboratooriumi ajas tuleb siis valemi (3.29) kohaselt

$$\Delta t = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 - \left(\frac{290\,000}{300\,000}\right)^2}} \approx 8 \cdot 10^{-6} \text{ sek}$$

Näeme, et laboratooriumi ajas on nii kiiresti liikuva mesoni eluiga 4 korda pikem kui teise samasuguse mesoni eluiga, mis laboratooriumi suhtes paigal seisab. Omaajas on mõlema mesoni eluiga aga ühesugune.

§ 5. Spetsiaalse relatiivsusteooria kinemaatilised efektid.

Eelmise peatüki 5. punktis märgiti, et Galilei teisenduste korral jäävad muutumatuks sündmustevaheline aeg ja ruumiline kaugus, kusjuures aega ja pikkusi võis mõõta ükskõik missuguses inertsiaalsüsteemis. Ruumiline pikkus ja ajavahemik on Galilei teisenduste invariantid. Eelmises punktis

nägime aga, et relatiivsusteoorias tuleb ajavahemik samade sündmuste vahel erinevates inertsiaalsüsteemides erinev. Invariant on ainult keha omaaeg, mitte aga aeg mistahes inertsiaalsüsteemis mõõdetuna.

Vaatame lähemalt Lorentzi teisendustest järelduvaid kiirete efektide, mis on seotud ajavahemiku ja ruumilise pikkusega.

Aja dilatatsioon.

Olgu meil kaks taustsüsteemi K ja K' , milledes aja- ja ruumikoordinaate tähistame vastavalt x_k, t ja x'_k, t' . Olgu antud veel süsteemi K suhtes liikumatu kell, mille käiku võrdleb oma kellaga süsteemi K' suhtes liikumatu vaatleja. Missugune on süsteemi K kella käik võrreldes süsteemi K' kella käiguga, kui võrdlust teostab süsteemi K' suhtes liikumatu vaatleja?

Et vastata sellele küsimusele, kasutame Lorentzi teisendusi, mis kirjeldavad informatsiooni üleminekut kellaga seotud süsteemist K vaatlejaga seotud süsteemi K' , s. o. teisendusi (3.11):

$$x'_3 = \frac{x_3 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.31a)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.31b)$$

Süsteemi K suhtes liikumatu kell asetsegu kindlas ruumipunktis x_k^0 . Kui asetame kella koordinaadi väärtuse valemisse (3.31b), saame seose süsteemide K ja K' aegade vahel:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_3^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.32)$$

või sama valem kahe sündmuse toimumishetke jaoks kirjutatuna

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_3^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} x_3^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.33)$$

Siit saame

$$(t'_2 - t'_1) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = t_2 - t_1. \quad (3.34)$$

On näha, et juhul, kui $v \neq 0$, annab valem $t'_2 - t'_1 > t_2 - t_1$. Ajavahemik sündmuste vahel on vaatlejaga seotud taustsüsteemi K' aja järgi pikem kui süsteemi K aja järgi. Vaatleja võib öelda, et liikuva kellaga mõõdetult (süsteemi K kell) tuleb ajavahemik sündmuste vahel lühem kui paigalseisva kellaga (süsteemi K' kell) mõõdetult. Liikuv kell käib aeglasemalt kui paigalseisev kell. Seda nähtust nimetatakse aja dilatatsiooniks.

Et aja dilatatsiooni nähtus ei ole vastuolus kõigi inertsiaalsüsteemide samaväärsuse nõudega, selles saab veenduda, kui vaadata, missugusele tulemusele jõuab süsteemis K asetsev vaatleja süsteemi K' kella käigu küsimuses. Et arutada selle vaatleja mõõtmistulemusi, kirjutame jälle üles teisendusvalemid, mis kirjeldavad informatsiooni üleminekut kellaga seotud süsteemist vaatlejaga seotud süsteemi. Need on pöördteisendused teisendustele (3.31):

$$x_3 = \frac{x'_3 + vt'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.35a)$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x_3'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.35b)$$

Saadud valemid erinevad valemitest (3.31) ainult kiiruse märgi poolest, mis on füüsikaliselt ka mõistetav: kui süsteem K' liigub süsteemi K suhtes kiirusega v , siis süsteem K liigub süsteemi K' suhtes kiirusega $-v$. Asetsegu süsteemi K' kell paigal ruumpunktis x_K' . Aegade võrdlus süsteemides K ja K' toimub siis antud juhul valemi

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x_3'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.36)$$

kohaselt. Analoogiliselt eespool kasutatud mõttekäigule saame nüüd

$$(t_2 - t_1) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = t_2' - t_1' \quad (3.37)$$

See tähendab, et antud juhul $t_2 - t_1 > t_2' - t_1'$. Ajavahemik sündmuste vahel on vaatejaga seotud taustsüsteemi aja (antud juhul süsteemi K aja) järgi pikem kui süsteemi K' aja järgi. Jällegi võime öelda, et liikuv kell käib aeglasemalt kui paigalseisev kell. Mingisugust vastuolu inertsiaalsüsteemide samaväärsuse nõudega ei teki.

Liikuva kella käigu aeglustus võrreldes teise samasuguse, kuid paigalseisva kella käiguga ei ole tingitud kella ehitusest, vaid peegeldab aja ja ruumi füüsikalisi omadusi. Aja "voolamise" kiirus on relatiivne mõiste. Me ei saa rääkida aja "voolamise" kiirusest üldse, vaid ainult aja "voolamise" kiirusest kindla taustsüsteemi suhtes. Nii tulebki, et inertsiaalsüsteemi K suhtes käib süsteemi K' kell aeg-

lasemalt kui süsteemi K kell, süsteemi K' suhtes aga vastupidi: süsteemi K kell käib aeglasemalt kui süsteemi K' kell.

Samapaiksuse ja samaaegsuse relatiivsus.

Et ühes inertsiaalsüsteemis samapaiksed sündmused ei ole samapaiksed teises inertsiaalsüsteemis, see õn teada juba klassikalisest mehhaanikast. Toimugu näiteks süsteemis K ruumpunktis $(0, 0, x_3^0)$ ajahetkedel t^0 ja t^* ($\neq t^0$) , kaks sündmust. Läheme üle teise inertsiaalsüsteemi K' , mis liigub esimese süsteemi kolmanda ruumitelje suunas kiirusega V . Galilei teisenduste (2.58) kohaselt toimuvad need sündmused süsteemis K' siis ruumpunktides $(0, 0, x_3^{0'})$ ja $(0, 0, x_3^{*'})$, kusjuures

$$x_3^{0'} = x_3^0 - vt^0,$$

$$x_3^{*' } = x_3^0 - vt^* .$$

Kaugus sündmuste toimumiskohtade vahel süsteemis K' tuleb siis

$$x_3^{*' } - x_3^{0'} = v(t^* - t^0) . \quad (3.38)$$

Galilei teisenduste korral ei muutu ajakoordinaat. See tähendab, et klassikaline mehhaanika väidab: sündmused, mis on samaaegsed ühes inertsiaalsüsteemis, on seda ka kõigis teistes inertsiaalsüsteemides.

Samapaiksus ei ole Galilei teisenduste suhtes invariantne mõiste, samaaegsus aga on. Lorentzi teisendustele tuginev relatiivsusteooria kõrvaldab selle ebasümmeetria ruumi- ja ajakoordinaatide vahel. On lihtne veenduda, et Lorentzi teisenduste suhtes on nii samapaiksus kui ka samaaegsus mitteinvariantsed mõisted.

Olgu antud inertsiaalsüsteemis K kaks sündmust oma koordinaatidega (x_3^0, t^0) ja (x_3^*, t^*) . (Me ei kirjuta välja kahte esimest ruumikoordinaati, mis meid huvitavate spetsiaalsete Lorentzi teisenduste (3.11) suhtes muutumatuks jäävad.) Samade sündmuste koordinaadid süsteemis K' tulevad siis valemite (3.31) järgi

$$x_3^{0'} = \frac{x_3^0 - vt^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x_3^{*'} = \frac{x_3^* - vt^*}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.39)$$

$$t^{0'} = \frac{t^0 - \frac{v}{c^2}x_3^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t^{*'} = \frac{t^* - \frac{v}{c^2}x_3^*}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.40)$$

Erijuhul, kui sündmused on süsteemis K samaaegsed ($t^0 = t^*$), saame valemitest (3.40) süsteemis K' ajavahe- miku nende toimumishetkede vahel

$$t^{*'} - t^{0'} = \frac{\frac{v}{c^2}(x_3^0 - x_3^*)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.41)$$

Erijuhul, kui sündmused on süsteemis K samapaiksed ($x_3^0 = x_3^*$), saame valemitest (3.39) süsteemis K' nende sündmuste vaheliseks ruumiliseks kauguseks

$$x_3^{*'} - x_3^{0'} = \frac{v(t^0 - t^*)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.42)$$

Viimane valem on klassikalise mehhaanika valemi (3.38) relativistlikuks üldistuseks.

Relatiivsusteoorias on nii samapaiksus kui ka samaaegsus relatiivsed mõisted. Erinevus nende vahel on ainult selles, et samapaiksuse relatiivsus ilmneb juba väikeste kiirustega juures, samaaegsuse relatiivsus muutub märgatavaks alles siis, kui taustsüsteemide suhteline kiirus on väga suur. Või teisiti: Piirjuhul $C \rightarrow \infty$ (kiiruste korral, mis on väikesed võrreldes valguse kiirusega) saame valemist (3.42) klassikalise mehhaanika valemi (3.38), valem (3.41) võtab aga kuju

$$t^{*'} - t^{o'} = 0, \quad (3.43)$$

mis ütleb, et ajakoordinaat jääb teisenduste korral praktiliselt muutumatuks.

Valemist (3.41) on veel näha, et taustsüsteemis K oleb samaaegsete sündmuste ajaline järjestus süsteemis K' (s. o. vahe $t^{*'} - t^{o'}$ märk) kiiruse V märgist. Kui muuta vastupidiseks süsteemi K' liikumise suund süsteemis K , siis muutub vastupidiseks ka kahe eelkäsitletud sündmuse ajaline järjestus süsteemis K' .

Valemist (3.42) järgneb, et täpselt samasugune on olukord sündmuste ruumilise järjestusega süsteemis K' : süsteemis K on sündmused samapaiksed, süsteemis K' toimub aga esimene sündmus x_3 -teljel teisest sündmusest kas vasakul või paremal, olenevalt süsteemi K' liikumise suunast süsteemis K .

Pikkuse kontraktsioon.

Vaatame kolmanda ruumiteljega paralleelset varrast, mis olgu taustsüsteemi K suhtes paigal. Varda otspunktide koordinaadid selles süsteemis olgu x_3^0 ja x_3^* , mis tähendab, et varda pikkus selles süsteemis on

$$l = x_3^* - x_3^0. \quad (3.44)$$

Taustsüsteemi K' suhtes liigub see varras, ots ees, kiirusega V . Missugune on varda pikkus selles süsteemis? Et vastata sellele küsimusele, peab süsteemis K' asetsev vaatleja fikseerima varda otspunktide koordinaadid $x_3^{i'}$ ja $x_3^{n'}$ ühel ja samal ajamomendil. Valemite (3.35) abil saame siduda varda otspunktide koordinaadid süsteemis K' tema otspunktide koordinaatidega süsteemis K :

$$x_3^0 = \frac{x_3^{o'} + vt^{o'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x_3^* = \frac{x_3^{n'} + vt^{n'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.45)$$

kus $t^{o'}$ tähistab ajamomenti, millal varda otspunktide koordinaadid süsteemis K' mõõdeti. Eelmistest valemitest saame otsekohe

$$x_3^* - x_3^0 = \frac{x_3^{n'} - x_3^{o'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

või teisiti

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (3.46)$$

kus $l' = x_3^{n'} - x_3^{o'}$ on varda pikkus süsteemis K' . Kui $V \neq 0$, siis $l' < l$. Süsteemis K paigalseisev varras on süsteemi K suhtes pikem kui süsteemi K' suhtes.

Kui varras oleks liikumatu süsteemi K' suhtes, siis

saaksime valemite (3.31) abil analoogilisel teel veenduda, et see varras on süsteemi K' suhtes pikem kui süsteemi K suhtes.

Süsteemis, kus varras on paigal, on ta pikem kui süsteemis, milles ta liigub. Varda liikumisesuunaline mõõde oleneb varda liikumise kiirusest. Seda nähtust nimetatakse pikkuse kontraktsiooniks.

Varda pikkuse olenevus tema liikumise kiirusest ei ole ne varda füüsikalise ehitusest, vaid peegeldab ruumi ja aja füüsikalisi omadusi. Pikkus ja ruumiline kaugus on relatiivsed mõisted. Me saame rääkida ruumilisest kaugusest kahe sündmuse vahel või eseme mõõtetest ainult kindla taustsüsteemi suhtes.

§ 6. Spetsiaalse relatiivsusteooria kinemaatika geomeetrilisest esitamisest.

Sündmuste maailma geomeetriline esitamine.

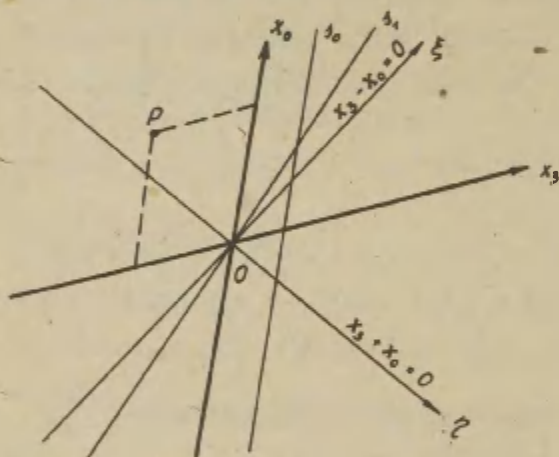
Eelmise peatüki 7. punktis nägime, et iga sündmus on iseloomustatav tema toimumiskoha koordinaatidega x_k ja toimumishetkega t . Sündmuste maailm on 4-dimensiooniline kontinuum, mille punkti (s. o. sündmuse) koordinaatideks me valisime arvud x_k , $x_4 = ict$.

Et kujutada sündmuste maailma geomeetriliselt, valime ruumi esindajaks ainult x_3 -telje. See tähendab, et me huvitume sündmuste maailmas ainult nendest koordinaatistiku

teisendustest, mis vastavad spetsiaalsetele Lorentzi teisendustele (3.11); koordinaate x_1 ja x_2 mis jäävad teisenduste korral muutumatuks, me oma geomeetrisel skeemil ei kujuta. Ajahetke määravaks koordinaadiks valime reaalarvu

$$x_0 = ct. \quad (3.47)$$

Sündmuste maailma geomeetrisel pildiks on siis x_3x_0 -tasand. Inertsiaalsüsteemi, mille suhtes me sündmuste koordinaate määrame, esitagu kaldkoordinaadistik (joon. 1), mis eri-



Joon. 1.

juhul võib olla ka ristkoordinaadistik. Iga sündmust kujutab selles koordinaadistikus mingi punkt P , mida nimetatakse maailmapunktiks. Maailmapunkti koordinaadid määrame kui selle punkti paralleelprojektsioonid telgedele.

Üksteisele järgnevate sündmuste ahelat, s. o. mingit füüsikalist protsessi kujutab joon, mida nimetatakse maailmajooneks. Joonisel on toodud näiteks paigalseisva punktmassi maailmajoon \mathcal{J}_0 ja maailmajoon \mathcal{J}_1 , mis kujutab ajamomendil $t=0$ ruumikoordinaadistiku alguspunkti läbinud ühtlaselt ja sirgjoo-

neliselt liikuvat punktmassi. Ühtlase liikumise kiiruse mää-
 rab sirge β_1 kaldenurk x_3 -telje suhtes. Mitteühtlaselt
 liikuva punktmassi maailmajoon on kõver. Kahe maailmajoone
 lõikumisel saadav punkt kujutab kehade kohtumist (kehad on
 samal ajahetkel samas ruumpunktis).

Oletame, et ruumikoordinaadistiku alguspunktis O saa-
 detakse ajahetkel $t = 0$ välja valgussignaal. Ruumis levib
 see signaal keralainena, mille võrrand on

$$x_n x_n - x_0^2 = 0. \quad (3.48)$$

Neljädimensioonilises ruumis koordinaatidega (x_n, x_0)
 kujutab valgussignaali levimist hüperkoonus, mille tipp aset-
 seb koordinaadistiku alguspunktis. Selle koonuse läbilõige
 $x_3 x_0$ -tasandiga on ristsirgete paar

$$\begin{aligned} x_3 + x_0 &= 0, \\ x_3 - x_0 &= 0, \end{aligned} \quad (3.49)$$

mida nimetatakse valgusekoonuseks.

Oluline on nüüd, et me võime $x_3 x_0$ -tasandil muuta tel-
 jestikku, mis tähendab üleminekut uude inertsiaalsüsteemi,
 kuid valgusekoonuse võrrandid (3.49) peavad selle juures jää-
 ma muutumatuks. Siit järgneb, et üleminekut uude inertsiaal-
 süsteemi kujutab kaldkoordinaadistiku telgedevahelise nurga
 muutmine, kusjuures valgusekoonust kujutavad nurgapoolitajad
 telgede vahel peavad jääma paigale. Valgusekoonus annab meie
 joonisel loomuliku ristkoordinaadistiku, mille telgi tähis-
 tame ξ ja η . Nende telgede võrranditeks on

$$\begin{aligned} \xi &= 0, \\ \eta &= 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Teiselt poolt on samade telgede võrrandid antud valemitega (3.49). Siit järgneb, et koordinaat ξ on võrdeline avaldisega $x_3 + x_0$ ja koordinaat η võrdeline avaldisega $x_3 - x_0$. Kui me valime ξ - ja η -telgedel sobivad ühikud, siis võime kirjutada:

$$\begin{aligned} \xi &= x_3 + x_0, \\ \eta &= x_3 - x_0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Avaldis

$$\xi\eta = x_3^2 - x_0^2 = g, \quad (3.52)$$

kui intervalli ruut on invariant. Anname sellele invariandi-
le väärtused $g = \pm 1$. Saame

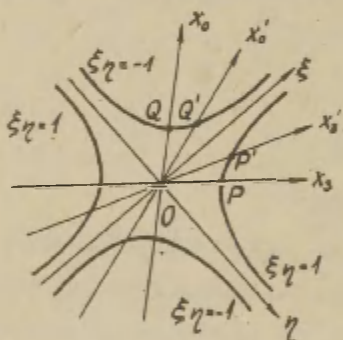
hüperboolid, millele võrran-
diteks $\xi\eta$ -teljestikus on

$$\xi\eta = \pm 1 \quad (3.53)$$

ja x_3x_0 -teljestikus on

$$x_3^2 - x_0^2 = \pm 1. \quad (3.54)$$

Neid hüperboole nimetatakse
mõõtekõverateks, sest nende
abil saab määrata ühikud x_3 -
ja x_0 -telgedel.



Joon. 2.

* Täpsem arvutus annab

$$\xi \cos \frac{\alpha}{2} = x_3 + x_0, \quad \eta \sin \frac{\alpha}{2} = x_3 - x_0,$$

kus α on nurk x_3 -telje ja x_0 -telje positiivsete suundade vahel.

Vaatame hüperbooli

$$x_3^2 - x_0^2 = 1.$$

On näha, et see kõver lõikab x_3 -telge punktides $x_3 = \pm 1$ (kui $x_0 = 0$, siis $x_3 = \pm 1$). Seega määravad mõõdukõvera $\xi\eta = 1$ lõikepunktid x_3 -teljega mõõduühiku sellel teljel. Analoogiliselt saab veenduda, et hüperbooli

$$x_3^2 - x_0^2 = -1 \quad (\xi\eta = -1)$$

lõikepunktid x_0 -teljega määravad x_0 -telje ühiku.

Joonisel 2 on kujutatud x_3, x_0 -teljestik ja x_3', x_0' -teljestik, samuti mõõdukõverad. Esimese teljestiku ühikuteks on sirglõigud OP ja OQ , teise teljestiku ühikuteks vastavalt sirglõigud OP' ja OQ' .

Relativistlik kiiruste liitumise seadus.

Olgu antud kolm inertsiaalsüsteemi K , K' ja K'' , mida me geomeetrilises pildis esitame kolme teljestikuna (x_3, x_0) , (x_3', x_0') , (x_3'', x_0'') . Arvutuste lihtsustamiseks kujutame kaldteljestikena ainult inertsiaalsüsteeme K' ja K'' , kusjuures inertsiaalsüsteemi K esitagu ristteljestik (vt. joon. 3). Määrame nende inertsiaalsüsteemide omavahelised kiirused.

Et määrata kiirust u , millega süsteem K'' liigub süsteemi K' suhtes, selleks vaatame süsteemis K'' koordinaatistiku alguspunktis paigalseisvat punktmassi. Selle punktmassi maailmajooneks teljestikus (x_3', x_0') on x_0'' -telg. Ajamomendil $x_0' = 0$ läbige see punktmass parajasti koordinaatistiku alguspunkti, teatud aja pärast punkti C . Massi lii-

kumist selles ajavahemikus kujutab maailmajoone lõik OA.

Moodustame nüüd suhte

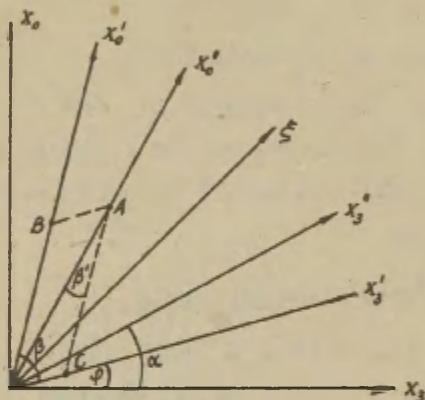
$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\sin \beta'}{\sin \beta} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha + \varphi)}. \quad (3.55)$$

Lõigu OC pikkus annab meile punktmassi poolt läbitud tee pikkuse ja lõigu OB pikkus koordinaadi $x'_0 = ct'$ muutu-

mise. Süsteemi K^m ühtlase sirgliikumise kiiruse u süsteemi K' suhtes saame järelikult avaldada

$$\frac{u}{c} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha + \varphi)}. \quad (3.56)$$

Kelmist väidet tuleks õieti täpsustada. Arvestades, et igas teljestikus on oma pikkuseühikud, mida me antud ju-



Joon. 3.

hul ei määranud, võime väita ainult seda, et pikkused \overline{OC} ja \overline{OB} on võrdelised vastavalt käidud tee pikkuse ja kulutatud ajaga (x_0 ühikutes mõõdetuna). Jooniselt 2 on aga näha, et võrdetegur, mis iseloomustab ühiku muutumist üleminekul ühelt teljestikult teisele, on aja- ja ruumitelje jaoks ühesugune. Kiiruse arvutamisel taandub järelikult see võrdetegur ja me ei tarvitse teda algusest peale arvestada.

Erijuhul, kui määrame kiirust niisuguse inertsiaalsüsteemi suhtes, mida kajutab ristteljestik, tuleb viimases valemis võtta $\varphi = 0$. Valemi paremale poole jääb siis tangens

liikuvat süsteemi kujutava teljestiku ruumitelje tõasunurgast. Nii saame:

Inertsiaalsüsteemi K' kiirus v inertsiaalsüsteemi K suhtes avaldub

$$\frac{v}{c} = \tan \varphi. \quad (3.57)$$

Inertsiaalsüsteemi K'' kiirus w inertsiaalsüsteemi K suhtes avaldub

$$\frac{w}{c} = \tan \alpha. \quad (3.58)$$

Valgusesignaali maailmajooneks on ξ -telg. Et saada valgusesignaali kiirust süsteemis K , tuleb võtta valemis (3.57) $\varphi = \frac{\pi}{4}$, mis annab $\frac{v}{c} = 1$.

Et määrata valgusesignaali kiirust süsteemis E' , tuleb võtta valemis (3.56) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, mis annab jällegi $\frac{u}{c} = 1$. Valguse kiirus on c nii süsteemis K kui ka süsteemis K' . Saadud kiirusevalemid on kooskõlas valguse kiiruse konstantsuse printsiibiga.

Lihtsate arvutuste teel saab veenduda, et kehtib identsus

$$\frac{\tan \varphi + \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha + \varphi)}}{1 + \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha + \varphi)} \tan \varphi} = \tan \alpha. \quad (3.59)$$

Asendades siia kiirused valemitest (3.56) - (3.58), saame

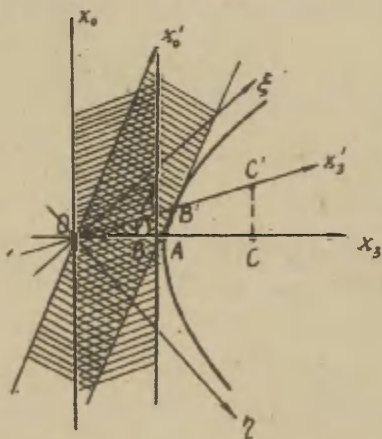
$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}},$$

mis ongi relativistlik kiiruste liitumise seadus (vt. (3.24)).
 Antud juhul me leidsime selle seaduse geomeetrilise skeemi
 abil.

Pikkuse kontraktsioon.

Punktmassi liikumist kirjeldab geomeetrilises skeemis maailmajoone. Ruumilise keha liikumist kirjeldab siis terve maailmajoonte kimp, mis täidab neljadimensioonilises ruumis ühe kolmedimensioonilise hüperpinna. Meie kahedimensioonilises pildis esitab seda hüperpinda tasapinna osa. Joonisel 4 kujutab näiteks süsteemis K paigalseisvat ühikupikkust varrast vertikaalne viirutatud rida. Samasugust ühikupikkust varrast, mis on liikumatu süsteemi K' suhtes, kujutab kaldu olev viirutatud rida. Jooniselt näeme, et esimene neist varrastest võtab süsteemis K oma alla kõik ruumpunktid lõigul OA ,

süsteemis K' aga kõik ruumpunktid lõigul OA' . Esimene neist lõikudest on ühikupikkune, teine aga lühem kui vastava süsteemi ühik OB' . Süsteemis K , kus varras on paigal, on ta pikem kui süsteemis K' , kus sama varras iseenda sihis liigub. (Antud skeemis, kus ruumi esindab ainult üks koordinaattelg, saab



Joon. 4.

varras ainult iseenda sihis liikuda.)

Analoogilisele tulemusele jõuame, kui vaatame ühikupikkust varrast, mis on paigal süsteemi K' suhtes. Süsteemis K' haarab see varras oma alla ühikupikkuse lõigu OB' , süsteemis K aga lõigu OB , mis on lühem kui mõõduühikut kujutav lõik OA . Süsteemis K' , kus varras on paigal, on ta pikem kui süsteemis K , mille suhtes ta liigub.

Need on kvalitatiivsed tulemused. Üksikasjalikumad arutlused võimaldavad arvutada ka pikkuse kontraktsiooni täpse väärtuse.

Lihtsuse mõttes loeme joonisel 4 inertsiaalsüsteemi K kujutava teljestiku jälle ristteljestikuks. Olgu antud süsteemi K suhtes paigalolev varras pikkusega l , mis võtab oma alla ruumpunktid lõigul OC . Süsteemis K' katab sama varras lõigu OC' , mille pikkuse l' saame jooniselt lugeda:

$$l' = \frac{l}{\cos \varphi} \quad (3.60)$$

Tuleb ainult silmas pidada, et pikkusi on seejuures ka süsteemis K' mõõdetud süsteemi K ühikutega. Üleminekuteguri ρ süsteemi K ühikute muutmiseks süsteemi K' ühikuteks saame, kui arvutame hüperbooli (mõõdukõvera)

$$x_3^2 - x_0^2 = 1 \quad (3.61)$$

kaarega eraldatud lõikude OA ja OB' pikkuste suhte. Asendades võrrandisse (3.61)

$$x_0 = x_3 \tan \varphi,$$

saame lihtsalt leida punkti B' koordinaadid

$$\bar{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \tan^2 \varphi}}, \quad \bar{x}_0 = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 - \tan^2 \varphi}}. \quad (3.62)$$

Süsteemi K' ühiku võrdlemine süsteemi K' ühikuga annab seega

$$\rho = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB'}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{x}_3^2 + \bar{x}_0^2}} = \cos \varphi \sqrt{1 - \tan^2 \varphi}. \quad (3.63)$$

Jagades saadud teguriga ρ valemi (3.60) vasaku poole, saame

$$l' = l \sqrt{1 - \tan^2 \varphi}, \quad (3.64)$$

mis annab varda pikkuse süsteemis K' sama süsteemi ühikutes mõõdetuna. Silmas pidades valemit (3.57), saame eelmise asemel

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

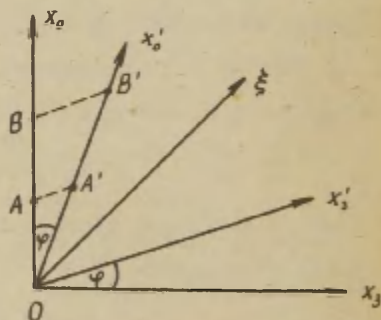
See ongi tuttav pikkuse kontraktsiooni valem (3.46).

Aja dilatatsioon.

Olgu antud inertsiaalsüsteem K, mida joonisel 5 kujutame ristteljestikuna (x_3, x_0) ja veel teine inertsiaalsüsteem K' (teljed (x_3', x_0')), mis liikugu esimese süsteemi suhtes kiirusega

$$v = c \tan \varphi.$$

Toimugu süsteemis K ruumikoordinaadistiku alguspunktis paigaloleva kehaga kaks sündmust, mida tähistame joonisel punktidenä A ja B.



Joon. 5.

Kaugus nende punktide vahel annab sündmustevahelise ajavahe-
miku x_0 süsteemis K. Süsteemis K', mille suhtes keha
liigub, ei toimu need sündmused samas ruumpunktis. Ajavahe-
mikku selles süsteemis nende sündmuste vahel, s. o. punktide
A' ja B' vahelist kaugust tähistame x_0' . Jooniselt on
näha, et

$$x_0' = \frac{x_0}{\cos \varphi} \quad (3.65)$$

Ajavahemikke on valemis (3.65) mõõdetud mõlemas süsteemis
inertsiaalsüsteemi K ühikuga. Et minna süsteemis K' üle
oma ühikule, tuleb eelmise võrduse vasak pool jagada teguri-
ga ρ , mis antud juhul tuleb sama kui ruumi mõõduühiku
muutumist kirjeldav tegur (3.63). Saame

$$x_0' = x_0 \sqrt{1 - \tan^2 \varphi}, \quad (3.66)$$

mis annab sündmuste A ja B vahelise ajavahe-
miku süsteemis K' (see on liikuva kellaga mõõdetud ajavahe-
miku). Saadud valemi võime kirjutada ka

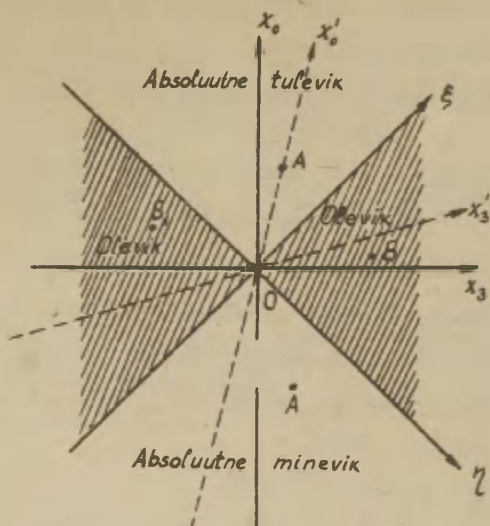
$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

mis ongi aja dilatatsiooni kirjeldavaks valemiks (3.37).

Minevik. olevik ja tulevik.

Joonisel 6 on antud inertsiaalsüsteemi K kujutav rist-
teljestik (x_3, x_0) ja valgusekoonus (ristteljestik
(ξ, η)). Eespool nägime, et üleminekut teise inertsia-
aalsüsteemi kirjeldab x_3 - ja x_0 - telgede pööre, mis lä-
hendab või eemaldab neid telgi võrdse nurga φ võrra ξ -
teljele. Uue inertsiaalsüsteemi kiirus vana süsteemi suhtes

peab olema väiksem kui C . See tähendab, et telgede pöördenurga tangens peab absoluutväärtuse poolest olema väiksem



Joon. 6.

kui 1. x_3 -telg võib oma suunda muuta ainult ξ - ja η -telgedega eraldatud tasapinna osal (joonisel viirutatud).

x_0 - võib seejuures muuta oma suunda sellel tasapinna osal, mis on joonisel viirutamata jäänud. Aja- telje peegeldamine koordinaadistiku alguspunkti suhtes ei ole lubatud, sest see

räägiks vastu meie kogemustele, mis näitavad, et aeg on ühesuunaline nähtus (aja matemaatiliseks mudeliks on suunatud sirge). ξ -telg ja η -telg ise tulevad inertsiaalsüsteemi kujutatavatele telgedele lubatud piirkonnast välja arvata.

Vaatame nüüd lähemalt maailmapunktide (s. o. sündmuste) klassifikatsiooni taustsüsteemi alguspunkti kujutava sündmuse O suhtes.

Sündmused, mis jäävad joonisel viirutamata pinna ülemisse ossa (niisuguste sündmuste esindajaks on punkt A), on eraldatud sündmusest O ajasarnase intervalliga. On näha, et alati saab leida kindla inertsiaalsüsteemi K (tel-

jed (x_3, x_0)), milles sündmused O ja A on samapaiksed. Samaaegsed need sündmused aga üheski inertsiaalsüsteemis ei ole, samuti ei ole võimalik uude inertsiaalsüsteemi üleminekuga muuta sündmuste O ja A ajalist järjestust. Sündmus A jääb sündmuse O suhtes alati tulevikku. Seepärast nimetataksegi kogu ülemist viirutamata osa joonisel 6 absoluutseks tulevikuks punkti O suhtes.

Ajasarnase intervalliga on eraldatud sündmusest O ka kõik sündmused, mis jäävad joonisel alumisse viirutamata piirkonda (näit. sündmus A_1). Ka siin on võimalik leida inertsiaalsüsteemi, kus sündmused O ja A_1 toimuvad ühes ruumpunktis. Nende sündmuste ajaline järjestus on aga kõigis inertsiaalsüsteemides ühesugune: punkt A_1 rsetseb punkti O suhtes minevikus. Seepärast nimetatakse alumist viirutamata osa joonisel 6 absoluutseks minevikuks punkti O suhtes.

Kokkuvõttes: ajasarnase intervalliga eraldatud sündmusei saab inertsiaalsüsteemi sobiva valikuga alati ühte ruumpunkti viia, nende sündmuste ajalist järjestust ei saa aga ühelgi viisil muuta.

Vaatame nüüd joonisel paremal viirutatud osas asetsevat sündmust B , mis on sündmusest O eraldatud ruumisarnase intervalliga. On näha, et sobiva inertsiaalsüsteemi valikuga on võimalik sündmuse O ja B samaaegseteks muuta või nende ajalist järjestust isegi vastupidiseks teha. Näit. süsteemis K toimub sündmus B sündmuse O suhtes tulevikus, süsteemis K' toimub ta aga sündmuse O suhtes minevikus. Niisugust inertsiaalsüsteemi, kus sündmused O ja B toi-

müksid ühes ruumipunktis, pole võimalik leida. Täpselt sedasama mis sündmuse B kohta võime rääkida ka sündmusest B_1 , mis asetseb joonisel vasakpoolses viirutatud osas. Sündmuste B ja B_1 ajaline järjestus sündmuse O suhtes ei ole määratud - ühes inertsiaalsüsteemis on see niisugune, teises aga teistsugune. Me ütleme, et sündmused B ja B_1 toimuvad sündmuse O suhtes olevikus.

Klassikalises mehhaanikas kujutavad olevikku ainult x_3 -telje punktid (kogu ruum antud ajahetkel), kusjuures kõik ülejäänud maailmapunktid kuuluvad kas minevikku või tulevikku. Relatiivsusteoorias seevastu on oleviku pildiks samasugune pinnaosa nagu tulevikul ja minevikulgi. Relatiivsusteoorias on minevikku, olevikku ja tulevikku kujutavad pinnaosad omavahel sarnased. See ei tähenda, nagu arvestaks relatiivsusteooria uusi sündmusi, mida klassikaline teooria ei kirjelda. On teada, et tasapinna punktide hulk on sama võimsusega kui sirge punktide hulk. Järelikult ei anna oleviku "laiendamine" x_3 -teljelt tasapinnaosaks juurde uusi sündmusi, vaid muudab ainult sündmuste omavaheliste ajalisruumiliste suhete interpretatsiooni.

Nägime, et ruumisarnase intervalliga eraldatud sündmuste ajaline järjestus ei ole määratud (erinevates inertsiaalsüsteemides võib see olla erinev). See tähendab, et ruumisarnase intervalliga eraldatud sündmustest üks ei saa teise põhjuseks (või tagajärjeks) olla, sest põhjus peab kõigis inertsiaalsüsteemides eelnema tagajärjele. Põhjuslikult võivad omavahel olla seotud ainult ajasarnase intervalliga eraldatud sündmused, millele ajaline järjestus on kõigis inertsia-

aalsüsteemides ühesugune. Põhjus asetseb tagajärje suhtes absoluutses minevikus.

Põhjuslikule seosele sündmuste paaris saab konkreetse füüsikalise interpretatsiooni anda.

Olgu antud kaks sündmust A ja B. Kui sündmus B toimub enne, kui valgussignaali sündmuse A juurest tema toimumiskohta jõuaks, siis on intervall sündmuste A ja B vahel ruumisarnane. Et ruumisarnase intervalliga eraldatud sündmused ei saa omavahel põhjuslikult seotud olla, tähendab siis seda, et looduses ei ole mõjusignaali, mis jõuaks sündmuse A juurest sündmuse B toimumiskohta kiiremini, kui seda teeb valgus. Valguse kiirus on mõju levimise maksimaalne kiirus looduses.

Kui sündmus B toimub samal hetkel, kui valgussignaali sündmuse A juurest tema toimumiskohta jõuaks, siis on nende sündmuste vahel isotroopne intervall. Isotroopse intervalliga eraldatud sündmuste ajaline järjestus on kõigis inertsiaalsüsteemides ühesugune. Isotroopse intervalliga eraldatud sündmused võivad seega omavahel põhjuslikus seoses olla, kusjuures üks sündmus mõjustab teist valguse kiirusega leviva signaaliga.

Ja lõpuks: Kui sündmus B toimub pärast seda, kui valgussignaali sündmuse A juurest tema toimumiskohta jõuaks, siis on nende sündmustevaheline intervall ajasarnane. Ajasarnase intervalliga eraldatud sündmuste ajaline järjestus on kõigis inertsiaalsüsteemides ühesugune. Niisugused sündmused võivad seega omavahel põhjuslikus seoses olla, kusjuures mõju ülekandjaks ühelt sündmuselt teisele on signaal, mis lii-

gub aeglasemalt kui valgus. Niisuguseks signaaliks võib olla näiteks materiaalne keha, mis lähtub sündmusest A ja kutsub esile sündmuse B.

§ 7. V a b a p u n k t m a s s i r e l a t i v i s t - l i k m e h h a a n i k a .

Eespool nägime, et klassikaline mehhaanika on invariantne Galilei teisenduste suhtes. Elektromagnetilisi nähtusi (seega ka valguse levimist) kirjeldav teooria Galilei teisenduste suhtes invariantne ei ole; nimetatud teooria on invariantne Lorentzi teisenduste suhtes. Teiste sõnadega: elektromagnetismi teooriast järgneb, et üleminekuid ühest inertiaalsüsteemist teise tuleb kirjeldada Lorentzi rühma abil. Nüüd tekib aga raskus, mis on seotud sellega, et klassikalise mehhaanika võrrandid ei ole Lorentzi teisenduste suhtes invariantseid. See tähendab tõsiselt ebakõla elektromagnetismi teooria ja klassikalise mehhaanika vahel, mida saab kõrvaldada ainult mehhaanika modifitseerimisega.

Vajadus uue mehhaanika järele ei olnud tingitud ebakõlast eksperimendi ja teooria vahel. Sellest seisukohast rahuldab klassikaline mehhaanika füüsikuid täielikult. Tuleb aga silmas pidada, et kõik mehhaanika eksperimendid on tehtud väikeste kiiruste korral. Teiselt poolt just väikeste kiiruste piirjuhul taandub Lorentzi rühm Galilei rühmaks. Siit on näha, et ebakõla mehhaanika ja elektromagnetismi teooria vahel saame kõrvaldada (ilma et me rikuksime kooskõla eksperimendi ja teooria vahel) sel teel, et konstrueerime uue meh-

haanika, mis oleks invariantne Lorentzi teisenduste suhtes ja mille valemid väikeste kiiruste korral läheksid üle klassikalise mehhaanika valemiteks. Niisuguse uue, nn. relativistliku mehhaanika ülesehitamine ongi järgnevate lehekülgede eesmärgiks.

Missugune peaks olema relativistlikus mehhaanikas mõjuintegraal, mis kirjeldab vaba punktmassi? On selge, et relativistlikult invariantes teoorias peab vaba punktmassi kirjeldav mõjuintegraal olema invariant, s.o. ta peab jääma muutumatuks üleminekul ühest inertsiaalsüsteemist teise.

Liikugu punktmass ajavahemiku $dx_4 = ic dt$ jooksul ruumis edasi dx_k võrra. Nendest punktmassi liikumist iseloomustavatest suurustest saame moodustada intervalli

$$ds = \sqrt{dx_k dx_k}, \quad (3.67)$$

mis on kõige lihtsam invariant. Teemegi nüüd kõikvõimalikest oletustest kõige lihtsama, nimelt et vaba punktmassi kirjeldab mõjuintegraal

$$S = \lambda \int_a^b ds, \quad (3.68)$$

kus integreerimine toimub mööda mingit maailmajoont maailmapunktide $\alpha = (x'_k, ict')$ ja $\beta = (x''_k, ict'')$ vahel. Valemist (3.27) saame lõpmata väikese intervalli avaldada lõpmata väikese ajavahemiku kaudu

$$ds = ic \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (3.69)$$

nii et mõjuintegraalis võime integreerimise üle maailmajoone elemendi asendada integreerimisega üle ajakoordinaadi

$$S = ic\lambda \int_{t'}^{t''} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (3.70)$$

Mõjuintegraal avaldub seega klassikalisest analüütilisest mehhaanikast tuntud kujul

$$S = \int_{t'}^{t''} L_0 dt, \quad (3.71)$$

kus Lagrangei' funktsiooniks on järgmine avaldis

$$L_0 = ic\lambda \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.72)$$

Klassikalises mehhaanikas on vaba punktmassi langranžiaaniks kineetilise energia avaldis

$$L_{\text{ke}} = \frac{m_0 v^2}{2}, \quad (3.73)$$

kus m_0 tähistab suurust, mida klassikalises mehhaanikas nimetatakse massiks.

Nõuame nüüd, et väikeste kiiruste korral viiks relativistliku mehhaanika langranžiaan samadele tulemustele kui klassikalise mehhaanika langranžiaangi. Kui $v \ll c$, võime avaldises (3.72) esineva ruutjuure reaksarenduses piirduda ainult esimest järku liikmetega $\frac{v^2}{c^2}$ suhtes.

Saame

$$L_0 \approx ic\lambda \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right). \quad (3.74)$$

Füüsikaliste suuruste leidmine langranžiaanist on seotud tuletiste arvutamisega. Seetõttu ei paku meile huvi esimene konstantne liige langranžiaanis (3.74). Teine, oluline liige langeb klassikalise mehhaanika langranžiaaniga ühte sel juhul, kui valime konstandi λ jaoks väärtuse $\lambda = im_0c$. Vaba

punktmassi lagranžiaaniks relativistlikus mehhaanikas saame valemi (3.72) põhjal

$$L_0 = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.75)$$

Vastavalt valemitele (3.29) ja (3.70) võime mõjuintegraali kirjutada omaaja kaudu

$$S_0 = -m_0 c^2 \int_a^b d\tau. \quad (3.76)$$

Vaba punktmassi impulsi p_k ja energia \mathcal{E} määrame nüüd analüütilisest mehhaanikast tuntud valemitega

$$p_k = \frac{\partial L_0}{\partial v_k}, \quad \mathcal{E} = p_k v_k - L_0. \quad (3.77)$$

Arvutus annab punktmassi relativistliku impulsi

$$p_k = \frac{m_0 v_k}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.78)$$

ja relativistliku energia

$$\mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.79)$$

Näeme, et klassikalisel piirjuhul $v \ll c$ langeb relativistliku impulsi avaldis ühte klassikalisest mehhaanikast tuntud impulsi avaldisega $p_k = m_0 v_k$. Energia jaoks saame samal piirjuhul aga

$$\mathcal{E} = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2}. \quad (3.80)$$

Teine liidetav saadud energia avaldises on klassikalisest füüsikast tuttav kineetiline energia. Relativistlik füüsika lisab sellele veel liikme

$$\mathcal{E}_0 = m_0 c^2, \quad (3.81)$$

mille saame relativistlikust energia avaldisest, kui võtame seal $v = 0$. See on energia, mida sisaldab paigalseisev mass m_0 . Suurust ϵ_0 nimetatakse seisuenergiaks. Kordajat m_0 seisuenergia avaldises nimetatakse vastavalt seisumassiks.

Relatiivsusteooria ütleb seega, et juhul, kui meil õnnestub keha seisumassi Δm_0 võrra vähendada, vabastame sellega energia

$$\Delta \epsilon = \Delta m_0 \cdot c^2.$$

Et konstandi c arvuline väärtus on suur, siis vabaneb juba väikese osa seisumassi kadumisel märkimisväärne hulk energiat. Näiteks seisumassi vähenemisel ühe tuhandiku grammi võrra vabaneb $9 \cdot 10^{17}$ ergi (25 000 kilovatt-tundi) energiat. Kaasaegsetes tuumareaktorites vabanev energia saadakse just tuumade seisumassi vähenemise arvel.

Füüsikalistes protsessides mõõdetakse alati energiateg vahesid - protsessi energiabilansi saame, kui lahutame süsteemi lõppenergiast tema algenergia. Kui protsessi jooksul süsteemi seisumass ei muutu, siis koonduvad energiateg vahed moodustamisel seisuenergia liikmed energia avaldistest välja. Sellest on näha, et klassikalise füüsika energia avaldist võime arvutustes kasutada ainult siis, kui on täidetud kaks tingimust:

- a) kehade liikumiskiirused on väga väikesed võrreldes valguse kiirusega ja
- b) protsessist osavõtvate kehade seisumassid protsessi jooksul ei muutu.

Kui üks (või ka mõlemad) neist eeldustest täidetud ei ole, siis tuleb energeetilistes arvutustes alati kasutada relativistliku energia avaldist.

Valemitest (3.78) ja (3.79) saame seose relativistliku energia \mathcal{E} ja relativistliku impulsi p_x vahel:

$$p_x = \frac{\mathcal{E} v_x}{c^2} \quad (3.82)$$

Erijuhul, kui on tegemist "valguseosakestega", footonitega, saame siit

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c} \quad (3.83)$$

See on valem, mis seob valguse poolt avaldatavat impulssi valguse energiaga.

Lihtne arvutus näitab, et kehtib seos

$$p_x p_x - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = -m_0^2 c^2, \quad (3.84)$$

mille võime ümber kirjutada

$$p_y p_y = -m_0^2 c^2, \quad (3.85)$$

kus p_y tähistab neljakomponendilist suurust

$$p_y = (p_x, \frac{i}{c} \mathcal{E}). \quad (3.86)$$

Seisumass m_0 ja valguse kiirus c on invariandid, s. o. nende arvulised väärtused ei sõltu taustsüsteemist. Näeme, et skalaarkorrutise reeglite järgi moodustatud avaldis (3.85) neljakomponendilisest suurusest p_y on taustsüsteemist sõltumatu. Suurus p_y teiseneb üleminekul ühest taustsüsteemist teise järelikult täpselt samuti nagu neljakomponendiline vektor χ_y (mille skalaarkorrutis iseendaga on ka invariant). Suurus p_y on seega neljadimensiooniline vektor. Seda vek-

torit nimetatakse energiaimpulsi vektoriks. Energiaimpulsi vektor on ajasarnane vektor, s. o. vektor, mille skalaarkorrutis iseendaga annab negatiivse arvu.

§ 8. M a s s r e l a t i v i s t l i k u s f ü ü s i k a s .

Klassikalises mehhaanikas on impulss (liikumishulk) võrdeline kiirusega, kusjuures võrdeteguriks kiiruse ees on keha mass. Ka relativistlikus füüsikas võime massi m defineerida kui kiiruse ees oleva võrdeteguri impulsi avaldises (3.78)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.87)$$

On näha, et nullist erineva seisumassiga keha relativistlik mass sõltub kiirusest - ta kasvab koos kiirusega ja läheneb lõpmatusele, kui keha kiirus läheneb valguse kiirusele. Täpselt valguse kiirusega saavad liikuda ainult niisugused nähtused, millel seisumass on null (kui $m_0 \rightarrow 0$ ja $v \rightarrow c$, võib massi avaldis (3.87) lõpliku piirväärtuse omandada). Niisuguseks nähtuseks on näiteks valgus (fotonid). Teiselt poolt: nähtus, mille seisumass on null, ei saa liikuda aeglasemalt kui valgus, sest muidu oleks tema energia valemi (3.79) kohaselt null. Et fotonite seisumass on null, see tähendab sisuliselt seda, et need osakesed saavad liikuda valguse kiirusega ja ainult sellega. Kõik väiksemad kiirused, ka paigalolek on neil keelatud.

Massi all tuleb õieti mõista kahte asja. Mass, millest me seni rääkisime, iseloomustab keha vastupanu välisele jõu-

le, mis püüab tema liikumisolekut muuta. See hakkab hästi silma Newtoni teise seaduse analüüsimisel.

Valem (2.53) kehtib ka muutuva massi korral. Seega võime selle valemi vasakul pool suuruse m_0 asendada avaldisega (3.87), millega oleme klassikalise füüsika valemi keh-tivuspiirkonna laiendanud suurte kiiruste juhule, kus massi olenevus kiirusest on märgatav. Saame

$$m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{v_k}{\sqrt{1 - \frac{v_k^2}{c^2}}} \right) = F_k, \quad (3.88)$$

mis kirjeldab seisumassiga m_0 keha liikumist jõu F_k mõjul mingis taustsüsteemis. Saadud valemist on näha, et antud jõu mõjul toimuv keha kiiruse muutus ajaühiku kohta on seda väiksem, mida suurem on keha seisumass m_0 . Suurus m_0 iseloomustab keha vastupanu tema liikumisoleku muutmisele, keha inertsit. Vastavalt sellele nimetatakse eespool käsitletud suurust m_0 inertseks seisumassiks ja suurust

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

vastavalt inertseks massiks.

Hoopis teises tähenduses kasutatakse terminit "mass" Newtoni gravitatsiooniseaduses, mis ütleb, et punktmasside m^* ja M^* vaheline jõud mõjub neid masse ühendava sirge suunas ja on absoluutväärtuse poolest võrdne

$$F = \mathcal{K} \frac{m^* M^*}{r^2}, \quad (3.89)$$

kus \mathcal{K} on nn. gravitatsioonikonstant väärtusega

$$\mathcal{K} = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sek}^{-2},$$

ja r tähistab punktmassidevahelist kaugust.

Massid m^* ja M^* iseloomustavad viimases valemis nendevahelise gravitatsioonilise mõju intensiivsust. Newtoni arvates mõjustasid massid üksteist silmapilkselt leviva kaugmõju teel. Relatiivsusteooriast järgneb aga, et silmapilkselt levivat kaugmõju looduses olla ei saa, mõju levimise maksimaalseks kiiruseks võib olla valguse kiirus C . Seega tuleb meil oletada, et näiteks mass M^* tekitab ruumis erilise olukorra, nn. gravitatsioonivälja, mis liigub tühjuses kiirusega C . Selle gravitatsioonivälja tugevuse punktmassist M kaugusel r defineerime kui suuruse

$$f = \kappa \frac{M^*}{r^2} . \quad (3.90)$$

Selles gravitatsiooniväljas asetsevate masside m^* mõjub siis valemiga (3.89) määratud jõud

$$F = m^* f . \quad (3.91)$$

Et valem (3.89) on masside suhtes sümmeetriline, siis võib teda tõlgendada ka vastupidi: mass m^* tekitab ruumis gravitatsioonivälja ja selles väljas asetsevate masside M^* mõjub jõud (3.89).

Suurust m^* , mis iseloomustab seda, kui intensiivse gravitatsioonivälja see keha tekitab (või kui suur jõud temale gravitatsiooniväljas mõjub), nimetatakse graviteeruvaks massiks või raskeks massiks. Raske mass on seega suurus, mis iseloomustab keha kui gravitatsioonivälja allikat ja detektorit.

Üldiselt võib oletada, et analoogiliselt inertsele massile oleneb kiirusest ka raske mass, nimelt nii, et

$$m^* = m_0^* \varphi(v), \quad (3.92)$$

kus $\varphi(v)$ on suurusest m_0^* sõltumatu funktsioon, nii et $\varphi(0) = 1$. Suurust m_0^* võime siis nimetada raskeks seisumassiks. Valemite (3.88), (3.91) ja (3.92) põhjal saame nüüd gravitatsiooniväljas (mille tugevus on f) liikuva punkt-massi liikumisvõrrandi

$$m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{v_k}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = m_0^* \varphi(v) f e_k, \quad (3.93)$$

kus e_k on gravitatsioonijõusuunaline ühikvektor.

Nagu juba ütlesime, on inertne seisumass m_0 ja raske seisumass m_0^* oma definitsioonide poolest täielikult erinevad suurused. Oletame siiski korraks, et inertne mass on raske massiga võrdeline:

$$m_0^* = \alpha m_0.$$

Sel juhul koondub liikumisvõrrandist (3.93) keha iseloomustav seisumass üldse välja. Saame

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v_k}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \alpha \varphi(v) f e_k. \quad (3.94)$$

See võrrand näitab, et kõik kehad, sõltumata nende seisumassist, liiguvad gravitatsiooniväljas ühtemoodi. Jõudsime oma arutluses juba Galilei ajast tuntud tõsiasjani, et "kõik kehad langevad ühte viisi". Siit tuleb järeldada, et looduses on tõepoolest inertne mass ja raske mass võrdelised suurused (mõõdtühikute sobiva valiku korral võib ka öelda, et inertne mass on raske massiga võrdne). Selles mõttes öeldakse tihti, et inertne ja raske mass on ekvivalentsete suurused.

Inertse massi ja raske massi võrdsust on eksperimentaal-

selt korduvalt suure täpsusega kontrollitud. Senise mõõtmis-
täpsuse juures ei ole nende vahel erinevust avastatud. See
eksperimentaalne tõsiasi avab võimaluse spetsiaalse relatiiv-
susteooria laiendamiseks.

Taustsüsteemis, mis liigub inertsiaalsüsteemide suhtes
kiirendusega, mõjuvad kehadele nn. inertsjõud, millede mõjul
esilekutsutud liikumine ei olene keha massist. Inertsjõudude
mõjul liiguvad kehad samuti "ühteviisi" nagu gravitatsiooniväljaski. Siit ilmneb, et taustsüsteemi mitteinertsiaalsest liikumisest tingitud efekte on kinnises ruumis viibijal küll võimalik avastada, kuid ta ei saa kindlaks teha, kas on tegemist gravitatsioonivälja mõjuga või taustsüsteemi mitteinertsiaalse liikumise peegeldusega. Seda muidugi eeldusel, et kinnine ruum on nii väike, et gravitatsioonivälja tugevus tema ulatuses on ühesugune ja vaatlusi toimetatakse nii lühikesel aja jooksul, et gravitatsioonivälja tugevus selle aja jooksul ei muutu.

Eelöeldu võetakse kokku järgmiseks printsiibiks, mis kannab ekvivalentsuse printsiibi nime:

Küllalt väikeses ruumiosas ja küllalt lühikesel ajavahe-
miku jooksul gravitatsiooniväljas kulgeva protsessi kirjeldamine inertsiaalsüsteemi taustal annab täpselt samasuguse pildi kui protsessi kirjeldamine inertsiaalsüsteemide suhtes sobivalt valitud kiirendusega liikuvast taustsüsteemis. Ekvivalentsuse printsiip ütleb sisuliselt, et taustsüsteemi valikuga saame gravitatsioonivälja antud ruumpunktis antud hetkel suvakohaselt muuta.

Tänu ekvivalentsuse printsiibile on võimalik luua teoo-

ria (nn. üldine relatiivsusteooria), ~~kus~~ loetakse samaväärseteks kõikvõimalikud pidevate teisendustega ühendatavad taustsüsteemid. Niisuguses teoorias mängivad erilist osa gravitatsiooniefektid. Kuigi üldine relatiivsusteooria on kaasaegse füüsika põhikursuse üks komponente, ei ole meil käesolevas võimalik tema juures lähemalt peatuda. Üldist relatiivsusteooriat käsitleva peatüki väljajätmine on võimalik ka seetõttu, et see teooria on teiste füüsikadistsipliinidega suhteliselt nõrgalt seotud.

§ 9. L a e n g e l e k t r o m a g n e t i l i s e s v ä l j a s .

On loomulik oletada, et punktlaengu liikumist elektromagnetilises väljas kirjeldab mõjuintegraal

$$S = S_0 + S_{int} , \quad (3.95)$$

kus vaba punktmassi mõjuintegraalile S_0 lisandub veel elektromagnetilise välja ja elektrilaengu interaktsiooni arvestav integraal S_{int} . Interaktsiooni kirjeldav mõjuintegraal tuleb muidugi määrata nii, et teooria tulemused langeksid ühte eksperimendi andmetega.

On arusaadav, et S_{int} peab sisaldama nii elektrilaengut kui ka elektromagnetilist välja iseloomustavaid suurusi, samuti osakese koordinaate. Peale selle nõuab spetsiaalne relatiivsuspriintsiip, et S_{int} oleks kõigis inertsiaalsüsteemides ühesugune, s. o. S_{int} peab olema invariant. S_{int} avaldise koostamiseks tuleb meil siis kõigepealt otsustada, mis-

suguste matemaatiliste suurustega kirjeldada elektrilaengut ja elektromagnetilist välja.

Kõige lihtsama teooria variandi saame siis, kui oletame, et nii elektrilaengut kui ka elektromagnetilist välja saab kirjeldada skalaariga. Osutub aga, et niisugune teooria variant ei vasta füüsikalisele realiteedile. Seepärast teeme veidi keerulisema oletuse, nimelt, et elektrilaengut saab kirjeldada teatud skalaariga e , elektromagnetilist välja aga neljakomponendilise vektoriga A_ν , mida nimetame elektromagnetilise välja potentsiaali vektoriks. Kõige lihtsama relativistlikult invariantse mõjuintegraali S_{int} saame üles kirjutada kujul

$$S_{int} = \frac{e}{c} \int_a^b A_\nu dx_\nu, \quad (3.96)$$

kus integreerimine toimub jälle üle mingi maailmajoone maailmapunktide a ja b vahel, mis vastavad laengu liikumise alg- ja lõppolekule. Elektrilaengut iseloomustavast skalaarist, mille kohta me esialgu veel midagi täpsemat ei tea, eraldasime edasiste arvutuste lihtsustamiseks teguri $\frac{1}{c}$, mis sisuliselt ei tähenda midagi muud kui elektrilaengu mõõtühiku valikut.

Valemite (3.76) ja (3.96) põhjal saame nüüd elektromagnetilises väljas liikuva punktilaengu mõjuintegraali kirjutada:

$$S = \int_a^b \left[-m_0 c^2 d\tau + \frac{e}{c} A_\nu dx_\nu \right]. \quad (3.97)$$

Laengu liikumisvõrrandi saame siis analüütilisest mehhaanikast hästi tuntud tingimusest

$$\delta S = 0, \quad (3.98)$$

kus varieerimine toimub laengu koordinaatide x_6 järgi, ning maailmapunktides a ja b on koordinaatide variatsioonid nullid:

$$\delta x_v \Big|_a = 0, \quad \delta x_v \Big|_b = 0.$$

Mõjuintegraali varieerimisel tuleb veel silmas pidada, et elektromagnetilise välja potentsiaal võib muutuda nii ruumis kui ajas, teiste sõnadega: elektromagnetilise välja potentsiaal on nii ruumikoordinaatide x_k kui ka ajakoordinaadi x_4 funktsioon, mida kirjutame sümboolselt

$$A_v = A_v(x).$$

Võrrandi (3.98) saame nüüd kirjutada

$$\int_a^b \left[-m_0 c^2 \delta(d\tau) + \frac{e}{c} \delta A_v(x) \cdot dx_v + \frac{e}{c} A_v(x) \delta(dx_v) \right] = 0. \quad (3.99)$$

Silmas pidades omaaja avaldist

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-dx_v dx_v}$$

saame arvutada tema variatsiooni

$$\delta(d\tau) = -\frac{u_v}{c^2} \delta(dx_v), \quad (3.100)$$

kus u_v tähistab koordinaatide tuletist omaaja järgi

$$u_v = \frac{dx_v}{d\tau}. \quad (3.101)$$

Suurust u_v nimetatakse harilikult neljadimensiooniliseks kiiruse vektoriks. Pidades silmas veel variatsioonarvutusest tuntud reeglit, mis lubab esimese variatsiooni ja di-

ferentsiaali märgi vahetamist, saame valemi (3.99) asemel

$$\int_a^b \left[m_0 u_\nu d(\delta x_\nu) + \frac{e}{c} A_\nu(x) d(\delta x_\nu) + \frac{e}{c} \delta A_\nu(x) \cdot dx_\nu \right] = 0. \quad (3.102)$$

Integreerime ositi kahte esimest liidetavat integraali märgi all, kusjuures peame silmas ääretingimusi (3.98). Saame

$$\int_a^b \left[-m_0 du_\nu \delta x_\nu - \frac{e}{c} dA_\nu(x) \delta x_\nu + \frac{e}{c} \delta A_\nu(x) \cdot dx_\nu \right] = 0, \quad (3.103)$$

kus viimases liidetavas integraali märgi all tähistasime summeerimisindeksit endise ν asemel tähega σ . Et

$$dA_\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\sigma} dx_\sigma, \quad \delta A_\sigma = \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\nu} \delta x_\nu,$$

saame siit

$$\int_a^b \left[-m_0 \frac{du_\nu}{d\tau} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\sigma} \right) \frac{dx_\sigma}{d\tau} \right] d\tau \delta x_\nu = 0. \quad (3.104)$$

Et niisugune tingimus oleks rahuldatud meelevaldsete δx_ν korral, peab kehtima

$$m_0 \frac{du_\nu}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{\nu\sigma} u_\sigma, \quad (3.105)$$

kus

$$F_{\nu\sigma} = \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\sigma} \quad (3.106)$$

on indekseid ν ja σ suhtes antisümmeetriline suurus, mida nimetatakse elektromagnetilise välja tensoriks.

Võrrand (3.105) kirjeldab elektrilaengu liikumist elektromagnetilises väljas. See võrrand on klassikalise füüsika võrrandi (2.53) üldistuseks: klassikalise mehhaanika impuls-

si $m_0 v_x$ asendab meie juhul suurus $m_0 u_x$ ja tuletis taustsüsteemi aja järgi $\frac{d}{dt}$ on asendatud tuletisega omaaja järgi $\frac{d}{dt}$. Võrrandi (3.105) parem pool kirjeldab siis elektromagnetilises väljas laengule mõjuvat jõudu.

Elektromagnetilisest väljast saame andmeid selle kaudu, kuidas mõjub see väli laengu liikumisele. Võrrand (3.105) näitab nüüd, et välja mõju laengule ei olene elektromagnetilise välja potentsiaalist A_y , vaid ainult elektromagnetilise välja tensorist $F_{y\sigma}$. See tähendab, et eksperimentaalselt määratavaks füüsikaliseks suuruseks on ainult $F_{y\sigma}$; välja potentsiaal A_y on ainult matemaatiliseks abisuuruseks, mis antud välja korral ei ole isegi üheselt määratud. On lihtne näha, et elektromagnetilise välja potentsiaali A_y asendamine suurusega

$$A_y \longrightarrow A_y + \frac{\partial f}{\partial x_y} \quad (3.107)$$

ei muuda elektromagnetilise välja tensorit. f on siin meelevaldne funktsioon, millel on olemas vähemalt teist järku tuletised koordinaatide x_y järgi. Teisendust (3.107) nimetatakse gradientteisenduseks. Me nägime, et laengu liikumise võrrand on gradientteisenduse suhtes invariantne.

§ 10. Laengu liikumise võrrandi kolmeimensiooniline kuju.

Võrrandi (3.105) me tuletasime relativistlikult invariantsest mõjuintegraalist, kusjuures me tuletuskäigus kusagil relativistlikku invarianttsust ei rikkunud. Sellest järgneb,

et see võrrand on relativistlikult invariantne.

Relativistlikult invariantseid võrrandid on oma kujult kõige lihtsamad siis, kui nad on üles kirjutatud ühtselt nii ruumi- kui ajakoordinaatide jaoks (nagu seda on näit. võrrand (3.105)). Et meie ettekujutus maailmast on aga alati seotud ruumi ja aja eristamisega, siis on võrrandites peituvat füüsikalist sisu älati kergem mõista sel juhul, kui neis võrrandides on aja- ja ruumikoordinaadid eraldatud. Käesolevas punktis ongi meie eesmärgiks ruumi- ja ajakoordinaatide eraldamine võrrandis (3.105) ning selle võrrandi tõlgendamine.

Ajalooliselt koostati elektrodünaamika võrrandid algul just niisugusel kujul, kus ruumi- ja ajakoordinaadid olid eraldatud, ja alles pärast relatiivsusteooria loomist anti neile võrranditele kuju (3.105).

Möödunud sajandi esimesel poolel teostatud eksperimendid näitasid, et elektrivälja tugevust on võimalik iseloomustada kolmekomponendilise vektoriga \vec{E} ja magnetvälja tugevust samuti kolmekomponendilise vektoriga \vec{H} . Inglise füüsikateoreetik J.C. Maxwell avaldas 1873. aastal võrrandid, nn. Maxwelli võrrandid, mis võimaldasid arvutada laengute jaotusest ning liikumisest tingitud elektrivälja \vec{E} ja magnetvälja \vec{H} . Maxwell näitas ka, et nende võrrandite lahendid avalduvad nelja funktsiooni \vec{A} ja φ kaudu järgmiselt:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi, \quad (3.108)$$
$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A},$$

kus $\text{grad } \varphi$ all mõistetakse vektorit, mille komponentideks on skalaarse funktsiooni φ tuletised

$$\text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) \quad (3.109)$$

ja $\text{rot } \vec{A}$ all - vektorit, mille komponentideks on järgmised kombinatsioonid vektori \vec{A} komponentide tuletistest*:

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right). \quad (3.110)$$

Nii määratud abifunktsioone hakati nimetama elektromagnetilise välja potentsiaalideks: φ - skalaarseks potentsiaaliks ja \vec{A} - vektorpotentsiaaliks.

Osutub, et relatiivsusteooriale eelnenud elektrodünaamika käsitus langeb ühte relatiivsusteoorias kasutatava käsitlusega sel juhul, kui lugeda \vec{A} komponendid A_k eespool kasutuselevõetud potentsiaali A_ν kolmeks esimeseks komponendiks ja suurus $i\varphi$ sama vektori neljandaks komponendiks:

$$A_\nu = (A_k, i\varphi). \quad (3.111)$$

Silmas pidades viimast, on nüüd valemite (3.106) ja (3.108) abil lihtne leida seoseid elektromagnetilise välja tensori

* Kui võtta kasutusele vektor-operaator "nabla"

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right),$$

siis võib sümboltselt kirjutada:

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &= \nabla \varphi, \\ \text{rot } \vec{A} &= \nabla \times \vec{A}. \end{aligned}$$

\vec{F}_{v6} komponentide ja elektrivälja \vec{E} ning magnetvälja \vec{H} komponentide vahel:

$$E_k = i \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_4} \right) = i F_{k4}; \quad (3.112)$$

$$H_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = F_{23}, \quad H_2 = F_{31}, \quad H_3 = F_{12}.$$

Elektromagnetilise välja tensori komponentideks on elektrivälja ja magnetvälja vektorite komponendid. Tabelina saame tensori F_{v6} kirjutada

$$F = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -iE_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -iE_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.113)$$

Eraldame nüüd laengu liikumise võrrandites (3.105) aja- ja ruumikoordinaadid. Saame

$$m_0 \frac{du_k}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{k\ell} u_\ell + \frac{e}{c} F_{k4} u_4, \quad (3.114a)$$

$$m_0 \frac{du_4}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{4\ell} u_\ell. \quad (3.114b)$$

Kasutades seost (3.29) läheme võrrandites (3.114) omaajalt τ üle taustsüsteemi ajale t . Saame

$$u_k = \frac{v_k}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.115)$$

$$m_0 \frac{du_k}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \frac{m_0 v_k}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dp_k}{dt},$$

kus

$$v_k = \frac{dx_k}{dt}$$

tähistab harilikku kiirust.

Võrrandile (3.114a) saame siis anda kuju

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{e}{c} F_{k\ell} v_\ell + \ell e F_{k4}, \quad (3.116)$$

või silmas pidades tensori $F_{\nu\sigma}$ komponentide tähendusi

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] + e\vec{E}. \quad (3.117)$$

See on harilik osakese liikumisvõrrand, kus paremal pool on osakesele mõjuva jõu avaldis. Näeme, et elektriväljas \vec{E} mõjub laengule e , elektrivälja vektori sihiline jõud. Magnetväli mõjub aga laengule ainult sel juhul, kui laeng liigub; mõjuv jõud on seejuures risti nii laengu kiirusega kui ka magnetvälja vektoriga \vec{H} .

Vaatame nüüd võrrandit (3.114b). Kui me läheme jälle üle taustsüsteemi ajale t ja peame silmas elektromagnetilise välja tensori komponentide tähendusi, saame

$$\frac{d}{dt} \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = e\vec{E} \cdot \vec{v}. \quad (3.118)$$

Valemist (3.79) on aga näha, et saadud võrrandi vasakul pool seisab vaba punktmassi energia, s. o. energia, mida me täie õigusega võime nimetada punktmassi kineetiliseks energiaks \mathcal{E}_{kin} . Seose (3.118) võime nüüd ümber kirjutada

$$d\mathcal{E}_{kin} = e\vec{E} \cdot d\vec{x}, \quad (3.119)$$

kus $d\vec{x} = \vec{v} dt$ tähistab nihkevektorit. Seose paremal poolel ei ole midagi muud kui laengule mõjuva jõu ja nihkevektori

skalaarkorrutis, s. o. töö, mida teeb elektriväli laengu nihutamisel $d\vec{l}$ võrra. Seos (3.119) on energia jäävuse seaduse väljenduseks: osakese kineetilise energia muutus on võrdne välja poolt tehtud tööga.

Magnetväli seoses (3.119) ei esine, s. o. magnetväli elektrilaengu kineetilist energiat ei muuda. See on arusaadav: liikumisvõrrand (3.117) ütleb, et laengule magnetväljas mõjuv jõud on kiirusevektoriga ja seega ka nihkevektoriga risti. Jõuvektori ja nihkevektori skalaarkorrutis on null. Magnetväli laengu liikumisel tööd ei tee ja seega ka laengu energiat muuta ei saa.

§ 11. Laengu liikumine konstantsees homogeeneses elektriväljas.

Vaatame laengu liikumist puhtas elektriväljas juhul, kui elektrivälja vektor on aja- ja ruumikoordinaatidest sõltumatu suurus. Niisugust välja nimetatakse konstantseks (ajast sõltumatu) ja homogeenseks (kõigis ruumipunktides ühesugune) elektriväljaks. Et saada sellele juhule vastavat laengu liikumise võrrandit, paneme võrrandisse (3.117)

$\vec{H} = 0$. Ruumikoordinaadistiku valime nii, et elektrivälja vektori \vec{E} suund langeks ühte esimese koordinaattelje suunaga. Saame võrrandid, mis kirjeldavad impulsi komponentide muutumist ajas:

$$\frac{dp_x}{dt} = eE, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0, \quad \frac{dp_z}{dt} = 0. \quad (3.120)$$

Integreerime need võrrandid algtingimusel, et osakese alg-

impulss on p_0 ning suunatud teise koordinaattelje suunas. Teiste sõnadega: me oletame, et osake lendab ajamomendil $t = 0$ konstantsesse homogeensesse elektrivälja nii, et tema impulss on elektrivälja vektoriga risti. Osakese impulsside komponentide jaoks saame siis

$$p_1 = eEt, \quad p_2 = p_0, \quad p_3 = 0. \quad (3.121)$$

Kui oleks tegemist klassikalise mehhaanika impulsiga, siis oleks nende võrrandite edasine integreerimine äärmiselt lihtne. Relativistliku impulsi olenevus koordinaatide tuletistest (kiiruse komponentidest) on aga keerulisem. Seepärast tuleb meil saadud võrrandite edasiseks integreerimiseks kasutada relativistliku mehhaanika seost (3.82) energia \mathcal{E} ja impulsi p_k vahel,

$$v_k = \frac{p_k c^2}{\mathcal{E}}, \quad (3.122)$$

kus energia on arvutatud võrrandist (3.84)

$$\mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \quad (3.123)$$

Võrrand (3.122) kiiruse komponentide jaoks kirjutatuna annab siis

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{eeEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + e^2 E^2 t^2}},$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{p_0 c}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + e^2 E^2 t^2}}, \quad (3.124)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 0,$$

kus oleme kasutanud tähist

$$\epsilon_0 = c \sqrt{p_0^2 + m_0^2 c^2}, \quad (3.125)$$

mis annab osakese energia algmomendil $t = 0$. Tingimusel, et algmomendil oli osake ruumpunktis $\vec{x}_0 \left(\frac{\epsilon_0}{eE}, 0, 0 \right)$, saame võrrandite (3.124) integreerimisel

$$x_1 = \frac{1}{eE} \sqrt{\epsilon_0^2 + e^2 c^2 E^2 t^2},$$

$$x_2 = \frac{p_0 c}{eE} \operatorname{Arsh} \frac{ceEt}{\epsilon_0}, \quad (3.126)$$

$$x_3 = 0.$$

Osake jääb liikumisel $x_1 x_2$ -tasandile. Kaks esimest võrranditest (3.126) annavad osakese trajektoori. Kui avaldame teisest võrrandist parameetri t ja asendame esimesse võrrandisse, saame

$$x_1 = \frac{\epsilon_0}{eE} ch \frac{eE}{p_0 c} x_2. \quad (3.127)$$

See on aheljoone võrrand. Konstantses homogeenises elektriväljas liigub laeng aheljoonekujulisel trajektoorigil.

Klassikalisel piirjuhul $v \ll c$ võime lugeda $p_0 \approx m_0 v_0$ ja $\epsilon_0 \approx m_0 c^2$. Hüperboolse koosinuse reaksarenduses võime siis piirduda kahe esimese liikmega.

$$ch \frac{eE}{p_0 c} x_2 \approx 1 + \frac{e^2 E^2}{2m_0^2 v_0^2 c^2} x_2^2$$

ja laengu liikumise võrrand tuleb

$$x_1 = \frac{m_0 c^2}{eE} + \frac{eE}{2m_0 v_0^2} x_2^2. \quad (3.128)$$

Väikeste kiiruste korral on laengu trajektoor praktiliselt

parabool. Kui me osakese seisueenergiat $m_0 c^2$ ei arvesta, nagu seda klassikaline mehhaanika teeb, saame laengu trajektooriks

$$x_1 = \frac{eE}{2 m_0 v_0^2} x_1^2 . \quad (3.129)$$

Samasuguse võrrandi oleksime saanud, kui oleksime integreerinud võrrandeid (3.121) nagu klassikalise mehhaanika võrrandeid ja oletanud, et osakese algimpulss on $\vec{p}_0 = (0, p_0, 0)$ ja algkoordinaadid $\vec{x}_0 = (0, 0, 0)$.

§ 12. Laengu liikumine konstantses homogeeneses magnetväljas.

Oletame nüüd, et $\vec{E} = 0$, H on aga aja- ja ruumikoordinaatidest sõltumatu suurus. Liikumisevõrrand (3.117) võtab siis kuju

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] . \quad (3.130)$$

Et relativistliku impulsi \vec{p} ja kiiruse \vec{v} vahel on seos

$$\vec{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \vec{v} ,$$

saame eelmisele võrrandile anda kuju

$$\frac{\mathcal{E}}{c^2} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] , \quad (3.131)$$

kusjuures me arvestasime seda, et puhtas magnetväljas liikuva laengu energia ei muutu, s. o. \mathcal{E} on konstant.

Valime koordinaadistiku nii, et kolmanda telje suund langeb ühte magnetvälja suunaga: $\vec{H} = (0, 0, H)$. Osakese liikumise võrrandid saame siis

$$\frac{dv_1}{dt} = \omega v_2 ,$$

$$\frac{dv_2}{dt} = -\omega v_1 , \quad (3.132)$$

$$\frac{dv_3}{dt} = 0 ,$$

kus

$$\omega = \frac{e c H}{\varepsilon} . \quad (3.133)$$

Kui korrutame esimest saadud võrranditest imaginaarühikuga i ja liidame teisele võrrandile, saame

$$\frac{d}{dt}(v_1 + i v_2) = -i \omega (v_1 + i v_2) . \quad (3.134)$$

Selle võrrandi lahendamine annab

$$v_1 + i v_2 = a e^{-i \omega t} , \quad (3.135)$$

kus a on meelevaldne kompleksarv. Kui avaldame selle arvu tema mooduli v_0 ja argumendi α kaudu

$$a = v_0 e^{-i \alpha} ,$$

saame (3.135) asemel

$$v_1 + i v_2 = v_0 e^{-i(\omega t + \alpha)} . \quad (3.136)$$

Reaal- ja imaginaarosade eraldamine annab

$$v_1 = v_0 \cos(\omega t + \alpha) , \quad (3.137)$$

$$v_2 = -v_0 \sin(\omega t + \alpha) .$$

Integreerides veel kord saame siit

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1^0 + \frac{v}{\omega} \sin(\omega t + \alpha), \\x_2 &= x_2^0 + \frac{v}{\omega} \cos(\omega t + \alpha),\end{aligned}\tag{3.138}$$

kus x_1^0 ja x_2^0 määratakse algtingimustega. Võime oletada, et $x_1^0 = x_2^0 = 0$. Magnetväljas liikuva laengu koordinaadid muutuvad siis järgmiselt

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{v}{\omega} \sin(\omega t + \alpha), \\x_2 &= \frac{v}{\omega} \cos(\omega t + \alpha).\end{aligned}\tag{3.139}$$

Võrranditest (3.132) kolmanda üldlahend on

$$x_3 = x_3^0 + u_0 t,\tag{3.140}$$

kus x_3^0 tähistab alkoordinaati ja u_0 - algkiirust. On näha, et x_3 -telje suunas liigub laeng ühtlaselt ja sirgjooneliselt kiirusega u_0 . x_1x_2 -tasandil on osakese trajektoor ringjoon raadiusega $\frac{v}{\omega}$. Laeng liigub järelikult mööda kruvijoont ringsagedusega ω . Erijuhul, kui kolmanda telje sihiline liikumine puudub ($u_0 = 0$), jääb laeng kogu aeg x_1x_2 -tasandile paralleelsele tasandile, liikudes seal ringjoonelisel teel. Valemitest (3.137) järgneb

$$v_0 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$

s. o. v_0 on osakese algkiirus x_1x_2 -tasandil.

Valemist (3.133) on näha, et laengu ringliikumise sagedus magnetväljas on võrdeline laengu suurusega ja magnetvälja tugevusega ning pöördvõrdeline laengu kineetilise energiaga. See ringliikumine toimub magnetvälja suuna ümber. Ringorbiidi raadius tuleb

$$R = \frac{v}{\omega} = \frac{v \mathcal{E}}{e c H} . \quad (3.141)$$

Erijuhul, kui laengu kiirus on valguse kiirusega võrreldes väga väike, võime võtta

$$\mathcal{E} \approx m_0 c^2 .$$

Ringsageduse ja orbiidi raadiuse jaoks saame siis valemid

$$\omega = \frac{e H}{m_0 c} , \quad (3.142)$$

$$R = \frac{m_0 v c}{e H} , \quad (3.143)$$

mida praktilistes rakendustes tihti kasutatakse.

§ 13. Dipool välises väljas .

Vaatame ajast sõltumatut elektrivälja, mille vektor valemite (3.108) järgi avaldub

$$E_k = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} . \quad (3.144)$$

φ on siin elektromagnetilise välja skalaarne potentsiaal. Valemi (3.119), mis kirjeldab elektriväljas liikuva laengu kineetilise energia muutumist, võime siis ümber kirjutada

$$d\mathcal{E}_{kin} = -e \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx_k . \quad (3.145)$$

Kineetilise energia \mathcal{E}_{kin} ja potentsiaalse energia \mathcal{U} summa on konstantne suurus,

$$\mathcal{E}_{kin} + \mathcal{U} = const . \quad (3.146)$$

Valemist (3.145) saame

$$dU = e \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx_k . \quad (3.147)$$

Integreerime saadud valemit mööda mingit teed lõpmatusest kuni punktini $x_k^{(0)}$, kusjuures oletame, et skalaarne potentsiaal φ on lõpmatuses null. Saame

$$U = e \int_{\infty}^{x_k^{(0)}} \frac{\partial \varphi}{\partial x'_k} dx'_k = e \varphi(\vec{x}^{(0)}) . \quad (3.148)$$

See avaldis määrab ruumpunktis $\vec{x}^{(0)}$ asetseva laengu e potentsiaalse energia.

Olgu nüüd antud laengute süsteem, nii et punktlaeng e_A asetseb ruumpunktis $\vec{x}^{(A)}$. Niisuguse laengute süsteemi potentsiaalne energia on

$$U = \sum_A e_A \varphi(\vec{x}^{(A)}) . \quad (3.149)$$

Valime koordinaadistiku alguspunkti kusagil laengute süsteemi sees ja oletame, et potentsiaal φ muutub süsteemi ulatuses vähe. Sel juhul saame arendada potentsiaalse energia U avaldise ritta ja piirduda reaksarenduses ainult kolme esimese liikmega:

$$U = \varphi_0 \sum_A e_A + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_k} \sum_A e_A x_k^{(A)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_k \partial x_l} \sum_A e_A x_k^{(A)} x_l^{(A)} \dots \quad (3.150)$$

φ_0 , $\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_k}$ jne. tähistavad siin potentsiaali φ ja tema tuletiste väärtusi koordinaadistiku alguspunktis.

Näeme, et esimeses lähenduses

$$U = U_1 = q \varphi_0 , \quad (3.151)$$

kus

$$q = \sum_A e_A$$

on laengute süsteemi kogulaeng.

Juhul, kui süsteemis on positiivseid ja negatiivseid laenguid ühepalju ($q = 0$), saab määravaks reaksarenduse (3.150) teine liige

$$U_2 = \frac{\partial \psi_0}{\partial x_k} \sum_A e_A x_k^{(A)} . \quad (3.152)$$

$\frac{\partial \psi_0}{\partial x_k}$ annab elektrivälja vektori \vec{E} väärtuse koordinaatistiku alguspunktis

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial x_k} = -E_{(o)k} . \quad (3.153)$$

Suurust

$$d_k = \sum_A e_A x_k^{(A)} \quad (3.154)$$

nimetatakse laengute süsteemi dipoolmomendiks. Näeme, et teises lähenduses avaldub laengute süsteemi energia dipoolmomendi ja elektrivälja vektori skalaarkorrutise kaudu:

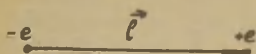
$$U_2 = -\vec{d} \vec{E}_{(o)} . \quad (3.155)$$

Vaatame elektrilist dipooli, s.o. süsteemi, mis koosneb kahest suuruse poolest võrdsest, kuid vastasmärgilisest elektrilaengust. Dipoolmomendi avaldis (3.154) saab sel juhul kuju

$$\vec{d} = e \vec{\ell} , \quad (3.156)$$

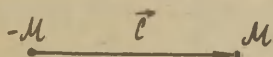
kus $\vec{\ell}$ on negatiivse laengu $-e$ asukohest positiivse laengu $+e$ asukohta suunduv vektor.

Käesolevas me ei hakka lähemalt uurima magnetpooluse



Joon. 7.
Elektriline dipool.

käitumist magnetväljas. Meenutame ainult eksperimentaalselt kindlaks-tehtud tõsiasja, et magnetpoolus käitub magnetvälja ja teiste magnetpooluste suhtes täpselt samuti nagu elektrilaeng elektrivälja ja teiste laengute suhtes. Oluline erinevus elektrilaengute ja magnetpooluste vahel on ainult selles, et elektrilaengud võivad looduses esineda ühekaupa, magnetpoolused aga alati võrdsete, kuid isenimeliste pooluste, põhjapooluse ja lõunapooluse paaridena. Nii-suguse magnetpooluste paari tüüpiliseks näiteks on magnet-pulk, mis pole tegelikult midagi muud kui magnetpoolustest moodustatud dipool. Kui tähistame magnetilise põhjapooluse tugevust M ja lõunapooluse tugevust $-M$, ning lõuna-



Joon. 8.
Magnetiline dipool.

poolusest põhjapoolusesse suunduvat vektorit \vec{e} , saame analoogiliselt valemile (3.156) kirjutada magnetdipooli dipoolmomendi:

$$\vec{\mu} = M\vec{e}, \quad (3.157)$$

mida nimetatakse ka magnetmomen-diks. Ja analoogiliselt valemile (3.155) kirjutame valemi, mis annab magnetdipooli $\vec{\mu}$ potentsiaalse energia, kui see dipool asetseb magnetväljas tugevusega \vec{H} :

$$U = -\vec{\mu} \vec{H}. \quad (3.158)$$

Magnetvälja põhjustajaks võib olla ka elektrivool. Saab näidata, et esimeses lähenduses on voolu magnetväli

samasugune kui magnetdipooli magnetväli. Esimeses lähenduses võime elektrivoolude süsteemi vaadata kui magnetdipooli ja arvutada ka selle dipooli magnetmomendi. Magnetdipooli potentsiaalse energia avaldis (3.158) kehtib sõltumata sellest, kas on tegemist magnetpulgaga või elektrivoolude süsteemiga.

§ 14. Elektriline kvadrupolmoment.

Juhul, kui elektrilaengute süsteemi kogulaeng ja dipoolmoment mõlemad on nullid, hakkab reaksarenduses (3.150) domineerima kolmas liige

$$U_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_k \partial x_l} \sum_A e_A x_k^{(A)} x_l^{(A)}, \quad (3.159)$$

mille võib kirjutada ka elektrivälja vektori kaudu

$$U_3 = -\frac{1}{2} \frac{\partial E_{kl}}{\partial x_l} \sum_A e_A x_k^{(A)} x_l^{(A)}. \quad (3.160)$$

Vaatame avaldist

$$\frac{\partial E_k}{\partial x_k} = \operatorname{div} \vec{E}, \quad (3.161)$$

mida nimetatakse elektrivälja divergentsiks*.

* Minge vektori \vec{W} divergents defineeritakse kui skalaar, mis avaldub

$$\operatorname{div} \vec{W} = \frac{\partial W_1}{\partial x_1} + \frac{\partial W_2}{\partial x_2} + \frac{\partial W_3}{\partial x_3}.$$

Kasutades eespool toodud sümboolset "nablavektorit" ∇ , võime vektori \vec{W} divergentsi kirjutada kui vektorite ∇ ja \vec{W} skalaarkorrutise:

$$\operatorname{div} \vec{W} = \nabla \vec{W}.$$

Arvutame integraali sellest divergentsist üle mingi ruumi-osa V . Gaussi lause põhjal võrdub see ruumiintegraal integraaliga üle seda ruumalalt piirava pinna S :

$$\int_V \frac{\partial E_k}{\partial x_k} dV = \oint_S E_k dS_k, \quad (3.162)$$

kus dS_k on vektor, mille pikkus võrdub pinnaelemendi dS suurusega ja mis on suunatud pinnanormaali suunas. Skalaarkorrutis $E_k dS_k$ annab siis \vec{E} voo läbi pinnaelemendi dS ja integraal \vec{E} kogu voo läbi pinna S . Erijuhul, kui $\text{div } \vec{E} = 0$, on null ka suuruse \vec{E} voog läbi pinna S . See tähendab, teiste sõnadega, et suurusel \vec{E} ruumiosas V allikaid ei ole.

See on üldreegel. Ruumpunktides, kus mingi suuruse divergents on null, sellel suurusel allikaid ei ole.

Niisugune on just juht, mida me praegu uurime: laengute süsteem asetseb välises elektriväljas, mille allikad on kusaugil kaugel. Meid huvitavas ruumi- piirkonnas elektriväljal \vec{E} allikaid ei ole, s. o.: meil tuleb lugeda

$$\frac{\partial E_{(v)k}}{\partial x_k} = 0. \quad (3.163)$$

Vastavalt sellele võime siis valemile (3.160) paremale poole lisada nulliga võrduva liikme

$$\frac{1}{6} \frac{\partial E_{(v)k}}{\partial x_l} \sum_A e_A \delta_{kl} z^{(A)2}, \quad (3.164)$$

kus $z^{(A)2} = x_k^{(A)} x_k^{(A)}$ on vektori $x_k^{(A)}$ pikkuse rüüt. Saame

$$U_3 = -\frac{1}{6} \frac{\partial E_{(v)k}}{\partial x_l} \sum_A e_A (3x_k^{(A)} x_l^{(A)} - \delta_{kl} z^{(A)2}), \quad (3.165)$$

või teisiti

$$U_3 = -\frac{1}{\epsilon} D_{kl} \frac{\partial E_{(kl)}}{\partial x_k} \quad (3.166a)$$

ehk ka

$$U_3 = -\frac{1}{6} D_{kl} \frac{\partial E_{(kl)}}{\partial x_k}, \quad (3.166b)$$

kus suurust

$$D_{kl} = \sum_A e_A (3x_k^{(A)} x_l^{(A)} - \delta_{kl} r_A^2) \quad (3.167)$$

nimetatakse laengusüsteemi kvadrupolmomendiks.

On näha, et $D_{kk} = 0$, s. o. kvadrupolmomendil on 5 sõltumatut komponenti.

Vaatame lõpuks neljast ruudu tippudesse asetatud laengust koosnevat süsteemi (joon. 9). Olgu need laengud oma absoluutväärtuse poolest kõik võrdsed ja paarikaupa vastasmärgilised. Nii-sugust laengute süsteemi nimetatakse elektriliseks kvadrupoliks.



Joon. 9.
Elektriline kvadrupol.

Kvadrupoli kogulaeng on null. Null on ka kvadrupoli dipoolmoment, milles on lihtne veenduda, kui valida koordinaadistiku alguspunkt kvadrupoli diagonaalide lõikepunktis O . Välises elektriväljas asetseva kvadrupoli energia määratakse reaksarenduse (3.150) kolmanda liikmega U_3 .

Lihtne arvutus näitab, et joonisel 7 kujutatud dipooli kvadrupolmoment on null.

Joonisel 9 kujutatud kvadrupoli kvadrupolmoment on

$$D = e \begin{pmatrix} 0 & -3e^2 & 0 \\ -3e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Näeme, et kvadrupoli kvadrupolmomenti saame iseloomustada ühe arvuga $3e^2$, mis on pindala dimensiooniga suurus (kui laengudimensiooni mitte arvestada).

K i r j a n d u s .

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теория поля, Москва 1960.
2. Бергман П.Г., Введение в теорию относительности, Москва 1947.
3. Тоннела М.-А., Основы электромагнетизма и теории относительности, Москва 1962.
4. Рашевский П.К., Риманова геометрия и тензорный анализ, Москва 1953.

S i s u k o r d .

Sissejuhatus	3
I. SISSEJUHATAVAID ÜLDKÜSIMUSI.	6
§ 1. Rühma mõiste	6
§ 2. Füüsilise ruumi ja aja matemaatilisest kirjeldamisest.	10
Lineaarne vektorruum	12
Lineaarne meetriline vektorruum.	13
Füüsilise ruumi matemaatiline mudel.	16
§ 3. Lineaaroperaatorid.	18
Vektorruumi lineaartesisendused	19
Lineaaroperaatorite põhitüüpe.	22
Taanduvatest operaatoritest	24
§ 4. Lineaaroperaatori omaväärtused ja omavektorid.	27
Omavektorite ortonormeeritud süsteem	28
§ 5. Operaatorite üheaegne diagonaliseerimine.	30
§ 6. Lineaarsete ruumide otsekorrutis.	35
§ 7. Rühma esitus	38
§ 8. Rühmade otsekorrutis ja selle esitused.	42
§ 9. Pidevatest rühmadest	44
§ 10. Lie-Cartani teoreem	47
II. AEG-RUUMI TEISENDUSTE RÜHMAD	52
§ 1. Kolmedimensioonilise vektorruumi ortogonaalteisenduste rühm	52
§ 2. Kolmedimensioonilise vektorruumi lõpmata väikesed ortogonaalteisendused.	57
§ 3. Kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma infinitesimaaloperaatorid	59
§ 4. Kolmedimensioonilise vektorruumi suured omateisendused	63

§ 5.	Galilei rühm. Klassikalise mehhaanika relatiivsusprintsip	66
§ 6.	Spetsiaalne relatiivsusprintsip.	73
§ 7.	Intervall	76
§ 8.	4-dimensioonilise kompleksse ruumi ortogonaalteisenduste rühm.	81
§ 9.	Rühma O_4 alamrühmi. Lorentzi rühm.	86
§ 10.	Üldise homogeense Lorentzi rühma struktuur.	90
§ 11.	Minkowski ruumi nihete rühmast ja mitte-homogeensest Lorentzi rühmast	94
§ 12.	Duaalne suurus antisümmeetrilisele suurusele	97
§ 13.	Omarühmade lahutamine teguriteks.	100
III. SPETSIAALNE RELATIIVSUSTEORIA. LAENG ELEKTRO-		
MAGNETILISES VÄLJAS 107		
§ 1.	Lorentzi teisendused kitsamas mõttes	107
§ 2.	Üldkujulise Lorentzi omarühma füüsikalisest interpretatsioonist.	111
§ 3.	Relativistlik kiiruste liitumise seadus.	112
§ 4.	Omaaeg	115
§ 5.	Spetsiaalse relatiivsussteooria kinemaatilised efektid.	117
	Aja dilatatsioon	118
	Samapaiksuse ja samaaegsuse relatiivsus.	121
	Pikkuse kontraktsioon.	124
§ 6.	Spetsiaalse relatiivsussteooria kinemaatika geomeetrilisest esitamisest.	125
	Sündmuste maailma geomeetriline esitamine	125
	Relativistlik kiiruste liitumise seadus.	129
	Pikkuse kontraktsioon.	132
	Aja dilatatsioon	134
	Minevik, olevik ja tulevik	135
§ 7.	Vaba punktmassi relativistlik mehhaanika	140
§ 8.	Mass relativistlikus füüsikas.	146
§ 9.	Laeng elektromagnetilises väljas	151
§ 10.	Laengu liikumise võrrandi kolmedimensiooniline kuju	155
§ 11.	Laengu liikumine konstantses homogeenses elektriväljas	160

§ 12. Laengu liikumine konstantses homo- geenses magnetväljas	163
§ 13. Dipool välises väljas	166
§ 14. Elektriline kvadrupolmoment.	170

Hind 23 kop.