

947  
J. SARV

**ANALÜÜTILISE GEOMEETRIA**  
**ALGKURSUS**

J. Sarv

# Analüütilise geomeetria

## algkursus

Autori kirjastus — Tartu, 1924

1824

✓



A 1133.

2170

U 16032147

## I. Analüütilise geomeetria mõiste ja jaotus.

1. Analüütiliseks geometriaks nimetatakse punktide ja nende kogude niisugust käsitamist, et

1) punktidele või nende lihtsamatele kogudele korraldatakse vastavad arvud,

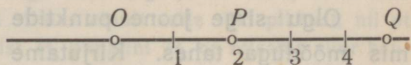
2) punktide ja nende lihtsamate kogude käsitamise asemel tehtakse tehteid nende vastavate arvudega ja

3) nendest tehetest saadud arvused vaadeldes mõeldakse neid punktisid või punktide kogusid, mis vastavad nendele arvudele.

2. Analüütilise geomeetria jaotus võib olla väga mitmesugune. Meie jaotame tema siin ühemõtteliseks, kahemõtteliseks, kolmemõtteliseks (ja üldiselt mitmemõtteliseks). See jaotus ei ole lahusus, sest kahemõtteline sisaldab ka ühemõttelise ja kolmemõttelise ühe- ja kahemõttelise. Kuid see jaotus on kohane sellepolest, et ühemõttelisega alates on analüütilise geomeetria sisu kõige kergem omandada.

## II. Ühemõtteline analüütiline geomeetria.

3. Cartesiuse koordinaadid sirge joone peal. Ühemõttelise analüütilise geomeetria lihtsamaks näiteks on ühe sirge joone analüütiline geomeetria. On kõige lihtsam võtta ühe sirge joone igale punktile vastavaks nimelt see arv, mis näitab, mitu mõõtu on see punkt eemal selle sama sirge joone mingist märgitud punktist. Seda märgitud punkti, millest teiste punktide kaugusi mõõdetakse, nimetatakse alguspunktiks ja kirjutatakse harilikult tähega  $O$  (Ladina sõnast *origo* — algus). Joonisel 1 on võetud kauguse mõõduks ligi 0,7 cm ja on siis saadud punktile  $P$  vastavaks arv 2, punktile  $Q$  arv 4,7 jne. igale punktile (alguspunktist paremal pool) oma arv.



Joonis 1.

Punktidele (või punktide kogudele) vastavateks korraldatud arvusid nimetatakse nende punktide (või punktide kogude) koordinaatideks (*Leibnizi* järgi XVII. aastasaja lõpust saadik). Näiteks öeldakse, et joonisel 1 on punkti  $P$  koordinaat 2, punkti  $Q$  oma 4,7 jne. Seda ütlust kirjutatakse märkidega:  $P = (2)$ ,  $Q = (4,7)$  jne. Kui sirge joone punktide koordinaadid on nimelt kauguse arvud, nagu joonisel 1, siis nimetatakse neid *Cartesiuse* koordinaatideks, sest *Cartesius* ehk *Descartes* andis hoogu nende koordinaatide tarvitamiseks (XVII. aastasaja esimesel poolel).

Märkus 1. Neid koordinaatisid tarvitati juba enne Kristust. Näiteks käsitas nende koordinaatide abil *Apollonius* (III. aastasajal e. Kr.) neid kõvera- ja jooni, mida (*Apolloniuse* järgi) nimetatakse ellipsiks, parabooliks ja hüperbooliks.

Märkus 2. Harilikult loetakse *Cartesiust* analüütilise geomeetria põhjendajaks, sest tema avaldas 1637. a. oma töö *La Géométrie*, kus ta koordinaatide abil lahendas ka neid ülesandeid, millega vana Kreeka matemaatika mehed ei olnud toime saanud. Kuid *Cartesiuse* töö ei olnud süstemaatiline analüütilise geomeetria kursus. Esimeseks süstemaatiliseks analüütilise geomeetria kursuseks võib küll lugeda *Cartesiuse* kaasaeglase *Fermat* raamatukest *Ad locos planos et solidos isagoge*. *Fermat* töö on täiesti olenematu *Cartesiuse* omast. Võrrandites tarvitab ta tähti veel nii, nagu seda oli teinud uuema algebra väljatöötaja *Vieta* (XVI. aastasaja lõpul). *Cartesius* on oma geomeetrias hakanud kirjutama tundmatuid arvusid tähestiku lõpu tähtedega  $x, y, z$  ja tuntud arvusid tähestiku algustähtedega  $a, b, c$  jne., nagu seda tema järgi veel praegugi tehakse.

**4. Kahe punkti vaheline kaugus. Negatiivsed koordinaadid.** Kui sirget joont mõõda tema ühest punktist  $O$  ühele poole on mõõdetud sentimeetriga ja siis saadud ühele punktile  $P$  *Cartesiuse* koordinaadiks 2 ja teisele punktile  $Q$  4,5, siis saab nende koordinaatide järgi kohe leida punkti  $Q$  kauguse punktist  $P$ . On ju siis

$$OP = 2 \text{ cm}, \quad OQ = 4,5 \text{ cm} \text{ ja siis}$$

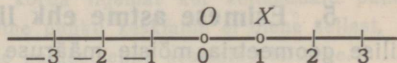
$$PQ = OQ - OP = (4,5 - 2) \text{ cm} = 2,5 \text{ cm}.$$

Olgu sirge joone punktide kaugused alguspunktist mõõdetud mis mõõduga tahes. Kirjutame tähega  $X$  selle punkti, mis on alguspunktist ühe mõõdu kaugusel, nii et on  $X = (1)$ . Seda punkti nimetame mõõdupunktiks. Olgu nüüd selle sirge joone peal alguspunktist mõõdupunkti pool kaks punkti  $P_1 = (x_1)$  ja  $P_2 = (x_2)$ . Siis on

$$OP_1 = x_1 OX, \quad OP_2 = x_2 OX \text{ ja siis}$$

$$P_1P_2 = OP_2 - OP_1 = (x_2 - x_1)OX \quad 1$$

See kauguse arv  $x_2 - x_1$ , saab siis positiivne, kui on punkt  $P_2$  punktist  $P_1$  seal pool, kus on mõõdupunkt  $X$  alguspunktist  $O$ , ja siis negatiivne, kui on lugu ümberpööratud. Et see sirge joone kahe punkti vahelise kauguse valem oleks maksev selle sirge joone kõigi punktide kohta, selleks tuleb lugeda alguspunkti koordinaadiks arv 0 ja igale punktile, mis seisab alguspunktist mõõdupunkti vastupidisel pool, tuleb lugeda *Cartesiuse* koordinaadiks küll ka see arv, mis näitab, mitme mõõdu kaugusel alguspunktist see punkt on, kuid see arv tuleb võtta märgiga miinus, nagu see on näidatud joonisel 2.



Joonis 2.

Märkus 1. *Cartesiuse* järgi kirjutatakse ühe sirge joone punkti koordinaati üldiselt tähega  $x$ . Kui on tegemist mitme punktiga, siis kirjutatakse sagedasti ühe punkti koordinaati tähega  $x_1$  (loetakse: üks üks), teise oma tähega  $x_2$  (üks kaks) jne.  $n$ -nda oma tähega  $x_n$  (üks en). Punktile ise pannakse sagedasti nimeks täht  $P$  (sõnast punkt) ja kui on tegemist mitme punktiga, siis kirjutatakse ka ühte tähega  $P_1$ , teist tähega  $P_2$  jne.

Märkus 2. Kui sirge joone punktile ole korraldatud *Cartesiuse* koordinaadid, siis on selle sirge joone igale üksikule punktile saanud vastavaks üks arv ja ainult see arv ja niisama ka igale üksikule arvule vastavaks selle sirge joone üks punkt ja ainult see punkt. Kui kaks nähtuste kogu on nii oma vahel vastavusse seatud, et kummagi kogu igale üksikule nähtusele vastab üks nähtus teisest kogust ja ainult see, siis öeldakse, et need kaks nähtuste kogu on oma vahel üksüheses vastavuses.

Märkus 3. Valemist 1 järgneb, et on

$$P_1P_2 = -P_2P_1 \text{ ja } PP = 0 \quad 2$$

Juba *Euklidese* ajal (IV. aastajal e. Kr.) kirjutati üksikuid punktsid üksikute tähtedega ja siis ka kahe tähega seda sirge joone tükki, mille otse tähendasid need tähed. Kuid siis peeti silmas ainult selle tüki pikkust, nii et võis kirjutada  $P_1P_2 = P_2P_1$ , s. o. punktist  $P_1$  punktini  $P_2$  on niisama suur kaugus kui punktist  $P_2$  punktini  $P_1$ . Praegusel ajal (koordinaatiliselt) vaadatakse valemi 1 järgi kahe punkti vahelise kauguse peale suuruse veel ka poolsust: kui on punkt  $P_2$  punktist  $P_1$  seal pool, kus pool on mõõdupunkt alguspunktist, siis on kaugus punktist  $P_1$  punktini  $P_2$  positiivne, aga kaugus punktist  $P_2$  punktini  $P_1$  negatiivne. Esimene kaugus kirjutatakse  $P_1P_2$ , teine  $P_2P_1$ .

Märkus 4. Kui tähtedega on kirjutatud arvud, siis tähendab kirjutus  $ab$  arvude  $a$  ja  $b$  korrutist. Arvude korrutises on tegurid vahetuvad, s. o.  $ab = ba$ , ja korrutis on null ainult siis, kui üks tegur on null. Öeldakse, et arvude korrutis on kommutatiivne. Nüüd märkas *H. Grassmann* (XIX. aastasaja esimesel poolel juba), et on mitmeti mõnus (nagu seda pärast näeme) lugeda ka kirjutust  $AB$  või  $P_1P_2$  punktide korrutiseks. Valem 2 näitab, et punktide korrutises on võimalik teguriid vahetada ainult korrutise märki muutes, nii et see korrutis on null siis, kui on üks tegur samane teisega. Niisugust korrutist nimetatakse alternatiivseks.

**5. Esimese astme ehk lineaarne võrrand.** Kui analüütilise geomeetria mõiste määruse teise osa järgi hakkame punktide asemel käsitama nende koordinaatsid, siis saame punktide kohta tekkinud küsimuste peale vastused võrranditest ilma konstruktsioonita. Olgu näiteks antud punktid  $P = (5)$  ja  $Q = (19)$  ja olgu küsitud, kus seisab sirgel joonel  $PQ$  punkt  $M$ , mis on ühe kaugusel kummastki antud punktist. Kirjutame otsitava punkti koordinaadi tähega  $x$ . Siis on valem 1 järgi

$$PM = (x - 5)OX \text{ ja } MQ = (19 - x)OX$$

ja siis küsimise tingimuse järgi

$$(x - 5)OX = (19 - x)OX$$

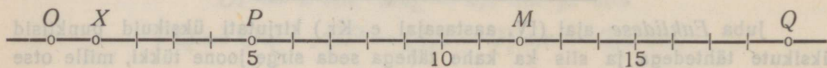
ehk

$$x - 5 = 19 - x,$$

kust saab

$$x = 12.$$

Nii saame konstruimata ja mõõtmata teada, et punkt  $M$ , mis seisab antud punktidest  $P = (5)$  ja  $Q = (19)$  lähimineva sirge joone peal kummastki antud punktist ühekaugusel, on alguspunktist  $O$  seal pool, kus pool on mõõdupunkt  $X$  ja nimelt 12 korda sellest mõõdupunktist kaugemal [Joonis 3].



Joonis 3.

Nii esitab iga esimese astme võrrand ühe tundmatuga  $ax + b = 0$  siis ühe punkti, kui arvud  $a$  ja  $b$  ei ole mõlemad korraga nullid ja kui selle võrrandi tundmatu on punkti koordinaat, sest siis saab selle võrrandi lahendada ja sellega teada punkti koordinaadi.

Harjutus 1. On antud kaks punkti  $P_1 = (x_1)$  ja  $P_2 = (x_2)$ . Leida sirge joone  $P_1P_2$  peal kolmas punkt  $Q = (x)$  nii, et oleks  $\frac{P_1Q}{QP_2} = \frac{m}{n}$  (s. o. leida tundmatu arv  $x$  antud arvude  $x_1, x_2, m$  ja  $n$  abil).

H. 2. Kahe antud punkti keskmiseks nimetame punkti, mis seisab sellest kahest antud punktist läbimineva sirge joone peal kummastki ühekaugusel, ja kolme antud punkti keskmiseks punkti, mis seisab kahe antud punkti keskmisest ja kolmandast läbimineva sirge joone peal selle keskmise ja kolmanda punkti vahel ja sellele kahe antud punkti keskmisele kaks korda ligemal kui kolmandale punktile. Tõendada, et sel viisil määratud kolme punkti keskmine ei olene sellest, missugusele kahele punktile antud kolme hulgast enne keskmine leitakse.

H. 3.  $n$  antud punkti keskmiseks nimetame punkti, mis seisab  $n-1$  antud punkti keskmisest ja  $n$ -ndast punktist läbimineva sirge joone peal selle keskmise ja  $n$ -nda punkti vahel sellele  $(n-1)$ -e antud punkti keskmisele  $n-1$  korda ligemal kui  $n$ -ndale punktile. Tõendada, et sel viisil määratud  $n$  punkti keskmine ei olene sellest, missugusele  $(n-1)$ -ele punktile antud  $n$  punkti hulgast enne keskmine leitakse.

Märkus 1. Mitme antud punkti keskmise punkti koordinaadiks saab nende antud punktide koordinaatide aritmeetiline keskmine. Seda ütlust, et punkt  $M$  on punktide  $P_1, P_2, \dots, P_n$  keskmine, võib küll kirjutada

$$M = \frac{1}{n}(P_1 + P_2 + \dots + P_n),$$

sest selle keskmise punkti koordinaat on antud punktide koordinaatide  $x_1, x_2, \dots, x_n$  järgi nimelt  $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ , s. o.

Kui on  $P_1 = (x_1), P_2 = (x_2), \dots, P_n = (x_n), M = (x)$ ,

$$x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n);$$

siis kirjutame

$$M = \frac{1}{n}(P_1 + P_2 + \dots + P_n).$$

3

Valemist 3 paistab silma punktide summa ja nende jagatis arvuga. Punktisid liites ja lahutades ja neid arvudega korrutades ja jagades läks August Ferdinand Möbius'el korda analüütilist geomeetriat käsitada (1827) täielikumalt kui keegi seda enne teda oli teinud. Kuid juba ligi poolteist sada aastat enne seda (1689) on Giovanni Ceva punktisid liites ja lahutades tõendanud muu seas ka selle lause, mida praegu Ceva lauseks nimetatakse.

Valemiga 3 kokkukõlas tehtakse punktidega aritmeetilisi tehteid (ehk, nagu öeldakse, arvutatakse punktisid) järgmise kahe lause põhjal:

1) punktisid liita või lahutada või neid arvudega korrutada või jagada tähendab liita või lahutada või nende arvudega korrutada või jagada nende punktide koordinaatisid, ja

2) saadus loetakse üheks punktiks või saadud arv ühe punkti koordinaadiks ainult siis, kui see saadus on üks punkt aritmeetika algõpetuse järgi, s. o. kui on liidetud  $n$  punkti ja sealt lahutatud  $n-1$  punkti või jälle liites, lahutades jne. saadud  $n$  punkti ja see saadus jagatud arvuga  $n$ .

Harjutus 4. Punktide arvutamise lausetest järgneb punktile  $P = (x)$  järgmine kirjutus alguspunkti  $O$  ja mõõdupunkti  $X$  abil:

$$\boxed{P = (1-x)O + xX \text{ ehk } P = O + x(X-O)} \quad 4$$

Katsuda järele, et see valem on õige 1) alguspunkti kohta, 2) mõõdupunkti kohta ja 3) iga punkti kohta, mille koordinaat on täisarv. [Sest kui ta on õige punkti  $P_n = (n)$  kohta ja ka punkti  $P_{n+1} = (n+1)$  kohta, siis järgneb tema maksvus punkti  $P_{n+2} = (n+2)$  kohta sellest, et on  $P_{n+1} = \frac{1}{2}(P_n + P_{n+2})$  ehk, nagu siit kõiki liikmeid arvuga 2 korrutades ja  $P_n$  teisele poole viies saame,  $P_{n+2} = -P_n + 2P_{n+1}$ ].

H. 5. Kui kaks punkti on kirjutatud valem 4 järgi

$$P_1 = O + x_1(X-O) \text{ ja } P_2 = O + x_2(X-O)$$

ja nende punktide kirjutused korrutatakse nagu algebralised avaldused, ainult silmas pidades punktide korrutise alternatiivsust, siis saab tõesti valem 1, sest on ju  $P_1P_2 = [O + x_1(X-O)][O + x_2(X-O)] = O.O + x_1(X-O)O + x_2O(X-O) + x_1x_2(X-O)(X-O) = x_1XO + x_2OX = -x_1OX + x_2OX = (x_2 - x_1)OX$ .

Teha see korrutamine täielikult avades kõik sulud ja alles siis lugedes nulliks need liikmed, kus esineb seesama punkt kaks korda teguriks, ja muutes märgid nende liikmete ees, kus tuleb kaks isesugust punkttegurit selleks ümber asetada, et see liige saaks mõne teisega sarnaseks. Teha seesama kujul  $P_1P_2 = [(1-x_1)O + x_1X][(1-x_2)O + x_2X]$ .

Märkus 2. Kui viimase harjutuse korrutises kirjutatakse tegurid teine teise alla

$$P_1P_2 = [O + x_1(X-O)] \times \text{ või } P_1P_2 = [(1-x_1)O + x_1X] \times \\ \times [O + x_2(X-O)] \quad \times [(1-x_2)O + x_2X],$$

siis paistavad sealt silma nende tegurite liigete kordajad tabelitena

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \quad \text{või} \quad \begin{vmatrix} 1-x_1 & x_1 \\ 1-x_2 & x_2 \end{vmatrix}$$

Korrutades punkti  $P_1$  punktiga  $P_2$  on nende tabelite arvudega tehtud järgmised tehted: esimese rea esimene arv on korrutatud teise rea teise arvuga ja sellest korrutisest lahutatud esimese rea teine arv korrutatud teise rea esimese arvuga. Arvude tabeliid ühes niisuguste tehetega mõeldult kirjutatakse Cayley eeskujul (XIX. a. s. keskelt) ühekordsete püstkriipsude vahele, nii et

$$\text{kirjutus } \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \text{ tähendab } 1 \cdot x_2 - x_1 \cdot 1 \text{ ja kirjutus } \begin{vmatrix} 1-x_1 & x_1 \\ 1-x_2 & x_2 \end{vmatrix} \text{ jälle}$$

$(1 - x_1)x_2 - x_1(1 - x_2)$  või üldiselt kirjutus  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  tähendab  $ad - bc$ .

Niisuguseid arvude kogusid, mida on nagu loomulik vaadelda ruudukujulise tabeli kujul ja millega tulevad niisugused tehted teha nagu punktisid korrutades tegurite liikmete kordajatega, — niisuguseid arvude kogusid oli juba *Leibniz*'ist saadik (XVII. a. s. lõpust) tähele pandud. *Gauss* nimetas (XVIII. a. s. lõpul) neid **determinantideks**.

H a r j u t u s 6. Tõendada (valem 1 põhjal), et on  $P_1P_2 + P_2P_3 + \dots + P_{n-1}P_n + P_nP_1 = 0$ , kui on  $P_1, P_2, \dots, P_n$  ühe sirge joone punktid.

H. 7. Tõendada *Euleri* lause: Summa  $P_1P_2 \cdot P_3P_4 + P_1P_3 \cdot P_4P_2 + P_1P_4 \cdot P_2P_3$  on 0, kui on  $P_1, P_2, P_3$  ja  $P_4$  ühe sirge joone punktid.

**6. Bilineaarne võrrand.** Kui sirge joone punktidele on korraldatud koordinaadid, siis esitab iga üksik arv koordinaadina ühe punkti. Niisama esitab ühe punkti ka iga üksik (lahenduv) esimese astme võrrand, millel ainsaks tundmatuks on punkti koordinaat. Tekkib küsimine, mida esitavad sirge joone analüütilises geomeetrias teise, kolmanda ja kõrgemate astmete võrrandid ja võrrandid mitme tundmatuga, kus on tundmatuiks punktide koordinaadid. Analüütilise geomeetria algkursuses vastatakse see küsimine ainult teise astme võrrandite kohta, sest kõrgema astme võrrandite lahendamist ei käsitata algebra algõpetuses.

On võrrand, mis on nagu vahelülis esimese astme ja teise astme võrrandi vahel. See on võrrand kahe tundmatuga, mis on kummagi tundmatu kohta üksikult esimese astme võrrandiks, aga saab teise astme võrrandiks ühe tundmatuga siis, kui need kaks tundmatut saavad samasteks teine teisega. Seda võrrandit nimetatakse selle kahe tundmatu bilineaarseks võrrandiks, sest esimese astme võrrandit nimetatakse ka lineaarseks ja sõna bilineaarne tähendab kahekordselt lineaarne.

Ühe tundmatuga esimese astme ehk lineaarse võrrandi üldine kuju on

$$ax + b = 0.$$

Niisugune kuju peab olema bilineaarsel võrrandil kummagi tundmatu kohta, see on: kahe tundmatu  $x$  ja  $x'$  (üks ja üks priim) bilineaarne võrrand peab olema niisugune, et teda saab kirjutada kujul  $ax + b = 0$  kui ka kujul  $a'x' + b' = 0$ . Et võrrand  $ax + b = 0$  oleks  $x$  ja  $x'$  bilineaarne võrrand, selleks peab seal esinema  $x'$

arvudes  $a$  või  $b$  ja peab seal esinema nimelt esimesel astmel, s. o. peab olema üldiselt

$$a = mx' + n \quad \text{ja} \quad b = px' + q,$$

kus  $m$ ,  $n$ ,  $p$  ja  $q$  on juba mingi antud arvud. Sellega on bilineaarsel võrrandil kahe tundmatuga  $x$  ja  $x'$  üldine kuju

$$(mx' + n)x + px' + q = 0 \quad \text{ehk} \quad mx'x + nx + px' + q = 0$$

või kahte ritta kirjutades

$$\begin{aligned} (mx' + n)x + \\ + px' + q = 0 \end{aligned}$$

See kahte ritta kirjutamine on mõnus sellepolest, et nii saavad üksteise ligidale nii need liikmed, kus esineb  $x$ , kui ka need, kus esineb  $x'$ . Võttes sulgude taha tundmatu  $x'$  saame

$$(mx + p)x' + nx + q = 0 \quad \text{ehk} \quad \begin{aligned} (mx + p)x' + \\ + px + q = 0, \end{aligned}$$

nii et arvud, mille meie enne kirjutasime tähtedega  $a'$  ja  $b'$ , on

$$a' = mx + p \quad \text{ja} \quad b' = nx + q.$$

Kui bilineaarne võrrand kahe tundmatuga on kirjutatud oma kaherealisel kujul, siis paistavad seal (kui on  $x$  sulgude taga) selle võrrandi neli kordajat tabelina

$$\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix},$$

kus on kaks rida  $m$   $n$  ja  $p$   $q$  ja kaks veergu  $m$   $p$  ja  $n$   $q$ . Kui sulgude taha on võetud  $x$  asemel  $x'$ , siis saab selle võrrandi kordajate tabel niinimetatud transpooneeritud (ümberseatud) kuju

$$\begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix},$$

kus on ridadeks eelmise tabeli veerud ja veergudeks eelmise tabeli read. Selle juures on ainult kaks arvu  $n$  ja  $p$  oma kohad vahetanud. Kui need arvud on teine seisega samased, s. o.  $n = p$ , siis nimetatakse seda tabelit ja ka bilineaarset võrrandit ennast sümmeetriliseks.

Bilineaarse võrrandi geomeetrilise tähenduse katsume selgeks teha näidete varal.

Näide 1. Olgu võrrandis  $mx'x + nx + px' + q = 0$   $m=0=q$  ja  $n=p$ , siis on see võrrand sümmeetriline ja saab (kui veel kõik liikmed jagame kordajate  $n$  ja  $p$  ühise väärtusega) väga lihtsa kuju

$$x + x' = 0.$$

See võrrand annab alles siis ühele tundmatule oma väärtuse, kui seal teisele tundmatule juba on antud mingi väärtus. Lahendades selle võrrandi tundmatu  $x'$  kohta saame

$$x' = -x,$$

kust iga  $x$  väärtuse jaoks paistab silma vastav  $x'$  väärtus. Kui näiteks anname tundmatule  $x$  täisarvulised väärtused ja kirjutame need järgemööda üheks veeruks ja iga  $x$  väärtuse kohale kirjutame teise veergu temale vastava  $x'$  väärtuse, siis saame järgmise tabeli

$x$	$x'$
0	0
1	-1
2	-2
⋮	⋮
$n$	$-n$

Nii on bilineaarse võrrandiga  $x + x' = 0$  määratud sirge joone igale punktile ( $x$ ) oma vastav punkt ( $x'$ ) nii, et punkt ja tema vastav punkt seisavad alguspunktist ühekaugusel, aga teine teisel pool. See vastavus on kujutatud joonisel 4, kus on näha punktide  $X, A, B, C$  vastavad  $X', A', B', C'$ .

Joonis 4.

Sirge joone punktide niisugust vastavust nimetatakse selle sirgejoone peegelduseks alguspunktis või ka sümmeetriaks alguspunkti kohta, sest kui alguspunktis oleks peegel risti sellele joonele, siis paistaksid selles peeglis punktide  $X, A, B, C$  jne. pildid nimelt seal, kus on  $X', A', B', C'$  jne. Selles vastavuses nimetatakse ka iga punkti vastavat selle punkti peegelduseks.

Näide 2. Olgu võrrandis  $mx'x + nx + px' + q = 0$   $n=0=p$  ja  $m=-q$ , siis on see võrrand jälle sümmeetriline ja saab (kui veel kõik liikmed jagame kordajaga  $m$ ) väga lihtsa kuju

$$xx' - 1 = 0.$$

Lahendades selle võrrandi tundmatu  $x'$  kohta saame

$$x' = \frac{1}{x}$$

ja sellega saame järgmise tabeli

$x$	$x'$	
0	$\frac{1}{0} = \infty$	Nii on bilineaarse võrrandiga $xx' - 1 = 0$ määratud sirge joone igale punktile ( $x$ ) oma vastav punkt ( $x'$ ) nii, et punkt ja tema vastav seisavad alguspunktist ühel pool, aga teine nii mitu korda mõõdupunktist ligemal, kui mitu korda on teine kaugemal, siis, kui nad on alguspunktist mõõdupunkti pool, — siis aga, kui nad on vastupidisel pool, teine mõõdupunkti vastavast ( $-1$ ) nii mitu korda ligemal, kui mitu korda on teine kaugemal. Sirge joone punktide niisugust vastavust nimetatakse inversiooniks mõõdupunkti ja tema vastava kohta. Selles vastavuses nimetatakse ka iga punkti vastavat selle punkti inversiooniks.
1	1	
2	$1/2$	
$\vdots$	$\vdots$	
$n$	$\frac{1}{n}$	

Sfäärilise peegli optilise telje peal on iga punkt oma pildi inversioon.

Näide 3. Kui selsamal viisil võrrandit lahendades, tabelit tehes ja joonistades arutame sümmeetrilise bilineaarse võrrandi

$$xx' + 1 = 0$$

geomeetrilist tähendust, siis leiame, et selle võrrandiga määratud vastavuses on iga punkti vastavaks selle punkti peegelduse inversioon või inversiooni peegeldus. Sellepärast nimetatakse seda vastavust peegelduse ja inversiooni korrutiseks.

Näide 4. Bilineaarne võrrand

$$xx' + x - 1 = 0$$

ei ole sümmeetriline, sest tema kordajate tabel on

$$\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Seda võrrandit tundmatu  $x'$  kohta lahendades saame

$$x' = \frac{1-x}{x}$$

ja siit tabeli

$x$	$x'$	Lahendades mis tahes bilineaarse võrrandi kahe tundmatuga
0	$\infty$	$(mx' + n)x + px' + q = 0$
1	0	ühe tundmatu näiteks $x$ kohta, saame
2	$-\frac{1}{2}$	
3	$-\frac{2}{3}$	$x = \frac{-px' - q}{mx' + n}$ ,
4	$-\frac{3}{4}$	kust võime iga $x'$ -väärtuse jaoks kohe lugeda vastava $x$ -väärtuse. Niisama saame iga $x$ -väärtuse jaoks kohe lugeda vastava $x'$ -väärtuse, kui oleme selle võrrandi lahendanud $x'$ kohta:
...	...	
$\frac{1}{2}$	1	
$\frac{1}{3}$	2	
...	...	
		$x' = \frac{-nx - q}{mx + p}$ .

Sellega määrab iga bilineaarne võrrand kahe tundmatuga siis, kui need tundmatud on ühe sirge joone punktide koordinaadid ja kui kahel võrrandil  $mx + n = 0$  ja  $px + q = 0$  ei ole ühist lahendust, selle sirge joone punktide vahel üksühese vastavuse. Seda vastavust nimetatakse üldiselt projektiivseks vastavuseks või lühidalt projektiivsuseks (nii et peegeldus, inversioon ja nende korrutis on projektiivsuse erijuhused).

Märkus. Näidetest 1—4 paistab hästi silma, milles mittesümmeetrilise bilineaarse võrrandiga määratud vastavus lahku läheb sümmeetrilise võrrandi omast. Sümmeetrilise bilineaarse võrrandiga määratud vastavus on niinimetatud kahekordne vastavus, s. o. kui ühele tundmatule anname mingi väärtuse  $a$ , siis saab sümmeetrilisest bilineaarsest võrrandist teise tundmatu jaoks seesama väärtus, mis saaks esimese tundmatu jaoks siis, kui väärtus  $a$  oleks antud teisele tundmatule. Nii saab esimeses näites  $x' = -2$ , kui on  $x = 2$ , ja siis  $x = -2$ , kui on  $x' = 2$ , ja üldiselt saab seal  $x' = -a$ , kui on  $x = a$ , ja siis  $x = -a$ , kui on  $x' = a$ . Teises näites saab  $x' = \frac{1}{3}$ , kui on  $x = 3$ , ja siis  $x = \frac{1}{3}$ , kui on  $x' = 3$ , või üldiselt  $x' = \frac{1}{a}$ , kui on  $x = a$ , ja siis  $x = \frac{1}{a}$ , kui on  $x' = a$ . Mittesümmeetrilise bilineaarse võrrandiga määratud vastavuses ei ole lugu enam nii. Näeme ju neljandas näites, et  $x' = -\frac{1}{2}$ , kui on  $x = 2$ , aga  $x = \frac{1}{3}$ , kui on  $x' = 2$ , ja üldiselt on  $x' = \frac{1-a}{a}$ , kui on  $x = a$ , kuna on  $x = \frac{1}{a+1}$ , kui on  $x' = a$ .

Harjutus 8. Võttes sirge joone peal alguspunkti, mõõdupunkti ja veel mitu muud punkti, konstruida punktid, mis vastavad neile võetud punktidele inversioonis  $xx' - 1 = 0$ .

H. 9. Konstruida sirge joone mitmele punktile vastavad punktid projektiivsuses  $xx + 1 = 0$ .

H. 10. Leida seos asjapunkti ja pildipunkti koordinaatide vahel sfäärilise peegli optilise telje peal, võttes alguspunktiks selle telje ja peegli lõikepunkti ja mõõdupunktiks peegli kerapinna keskpunkti.

**7. Teise astme võrrand ühe tundmatuga.** Kui bilineaarsetes võrrandis kahe tundmatuga

$$mxx' + nx + px' + q = 0$$

saavad tundmatud samasteks teine teisega, s. o.

$$x' = x,$$

siis saab see võrrand teise astme võrrandiks ühe tundmatuga

$$mx^2 + (n + p)x + q = 0.$$

Harilikult kirjutatakse teise astme võrrandis ühe tundmatuga selle tundmatu ruudu kordaja tähega  $a$ , tundmatu esimese astme kordaja tähega  $2b$  ja vabaliige tähega  $c$ , s. o.

$$ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Sellel võrrandil on (kui ei ole  $a=0$ ) kaks juurt

$$x_1 = \frac{1}{a}(-b + \sqrt{b^2 - ac}) \text{ ja } x_2 = \frac{1}{a}(-b - \sqrt{b^2 - ac}).$$

Sellega esitab teise astme võrrand ühe tundmatuga siis, kui see tundmatu on punkti koordinaat, ühel sirgel joonel kaks punkti. Kui see teise astme võrrand on saanud bilineaarsest võrrandist, siis esitab ta selle bilineaarse võrrandiga määratud (projektiivsuses) vastavuses need punktid, mis vastavad iseenestele. Näiteks saab bilineaarsest võrrandist  $xx' - 1 = 0$  teise astme võrrand  $x^2 - 1 = 0$ , mis oma lahendustega  $x_1 = 1$  ja  $x_2 = -1$  esitab selles vastavuses (inversioonis) iseenestele vastavad punktid (1) ja (-1).

Ühe sirge joone punktisid käsitades võime saada teise astme võrrandi ilma, et meil oleks tegemist bilineaarse võrrandiga. Aga iga teise astme võrrandi juures võib mõelda neid bilineaarseid võrrandid, millest see teise astme võrrand võis saada. Nende bilineaarsete võrrandite hulgas, millest saab antud teise astme võrrand  $ax^2 + 2bx + c = 0$ , on ainult üks sümmeetriline, nimelt  $axx' + bx + bx' + c = 0$  ehk

$$(ax' + b)x + bx' + c = 0.$$

See sümmeetriline bilineaarne võrrand annab teise astme võrrandile ka siis reaalse sisu, kui selle teise astme võrrandi lahendused on imaginaarsed. Seda selgitab järgmine

Näide. Olgu tarvis kahe antud punkti järgi leida punkt sellest kahest punktist läbimineva sirge joone peal nii, et kaugus esimesest antud punktist otsitava punktini oleks geomeetriliseks keskmiseks kaugustele esimesest antud punktist teiseni ja sealt otsitavani. Võtame esimese antud punkti alguspunktiks ja teise mõõdupunktiks ja kirjutame otsitava punkti koordinaadi siis tähega  $x$ , siis on tingimuse järgi  $x^2 = 1 \cdot (x - 1)$  ehk

$$x^2 - x + 1 = 0, \text{ kust saame } x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ja } x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Võttes nüüd sümmeetrilise bilineaarse võrrandi  $xx' - \frac{x}{2} - \frac{x'}{2} + 1 = 0$  (millest see teise astme võrrand saab), leiame  $x' = (x - 2) : (2x - 1)$  ja sellega saame tabeli

$x$	$x'$
0	2
1	-1
2	0
⋮	⋮

Nii näeme, et otsitav punkt pidi olema iseene-  
sele vastav punkt ühes punktide vastavuses, mil-  
lest saame kirjutada vastavate punktide paarisid kui  
palju tahes,

Harjutus 11. Leida iseenelele vastavad punktid asja-  
ja pildipunktide vastavuses sfäärilise peegli optilisel teljel,  
võttes alguspunktiks optilise telje lõikepunkti peegli ja mõõdu-  
punktiks peafookuse.

**8. Teise astme võrrandi lihtsustamine.** Teise astme võrrandi lahendamiseks lihtsustatakse see võrrand  $ax^2 + 2bx + c = 0$  niisuguseks, et tal ei oleks seda liiget, kus on tundmatu esimesel astmel. See lihtsustamine sünnib nii, et 1) võrrandi kõik liikmed korrutatakse tundmatu ruudu kordajaga  $a$  ja 2) lisatakse siis kahele esimesele liikmele positiivselt ja järeljäänud liikmele negatiivselt niisugune arv juurde, et kahest esimesest liikmest ühes juurdelisatud liikmega saaks kakslükme ruut. Selleks tuleb juurde lisada nimelt  $b^2$ . Nii saab

$$1) \quad a \mid ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$2) \quad \quad \quad + b^2 - b^2$$

$$(ax + b)^2 + ac - b^2 = 0$$

ehk kirjutades  $ax + b = x'$  ja  $ac - b^2 = \Delta$  (delta):

$$x'^2 + \Delta = 0.$$

Täht  $\Delta$  peab siin meelde tuletama sõna determinant, sest ta on siin tõesti võetud determinandi  $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$  asemele. Seda determinanti nimetatakse teise astme võrrandi  $ax^2 + 2bx + c = 0$  determinandiks. Ta paistab silma, kui see võrrand kirjutatakse niinimetatud bilineaarsel kujul:

$$(ax + b)x + bx + c = 0.$$

Sõna „determinant“ tähendab määraja. Teise astme võrrandi determinant määrab selle võrrandi juurte reaalsuse, ühevõrdsuse või imaginaarsuse järgmiselt (nagu see otsekohe silma paistab selle võrrandi lihtsustatud kujust  $x'^2 + \Delta = 0$ ):

Kui on  $\Delta < 0$ , siis on juured reaalsed ja isevõrdsed;

„ „  $\Delta = 0$ , „ „ „ „ „ ühevõrdsed;

„ „  $\Delta > 0$ , „ „ „ „ „ imaginaarsed.

**Harjutus 12.** Tõendada täielikult teise astme võrrandi juurte reaalsus, ühevõrdsus või imaginaarsus selle võrrandi determinandi negatiivse, nullilise või positiivse väärtuse korral.

**9. Cartesiuse koordinaatide teisendamine.** Teise astme võrrandile saime väga lihtsa kaju alles siis, kui esialgse tundmatu  $x$  asemele võtsime uueks tundmatuks  $x'$ , mis on seotud esialgse tundmatuga väga lihtsa valemiga

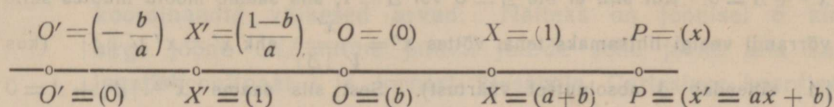
$$x' = ax + b.$$

Kui see uus tundmatu on leitud, siis saame sellest väga lihtsast bilineaarsest võrrandist, esialgse tundmatu  $x$  jaoks valemi

$$x = \frac{x' - b}{a}.$$

Neid valemiid nimetatakse ühe sirge joone punktide Cartesiuse koordinaatide teisendusvalemiteks, sest kui esialgne tundmatu  $x$  oli ühe sirge joone mingi punkti koordinaat, siis võib ka uut tundmatut  $x'$  lugeda sellesama punkti teisendatud koordinaadiks. Nimelt saab selle sirge joone igale punktile, mille esialgne koordinaat oli  $x$ , siis uueks koordinaadiks  $x' = ax + b$ , kui

ueeks alguseks võetakse punkt  $O' = \left(-\frac{b}{a}\right)$  ja uueks mõõdupunktiks punkt  $X' = \left(\frac{1-b}{a}\right)$ , nagu see on näidatud joonisel 5. Seal on ühel sirgel joonel tema endiste ja uute algus- ja mõõdupunktide  $O, X, O', X'$  juurde ja veel ühe muu punkti  $P$  juurde kirjutatud nende endised koordinaadid sellest joonest ülespoole ja uued koordinaadid tema alla.



Joonis 5.

Need teisendusvalemid saavad väga lihtsa erikuju 1) siis, kui seal on  $a=1$ , ja 2) siis, kui seal on  $b=0$ .

Esimesel erijuhusel, kui on  $a=1$ , saavad nad

$$x' = x + b \text{ ja } x = x' - b.$$

Siis on uutel koordinaatidel uus alguspunkt ja ka uus mõõdupunkt, aga mõõt  $O'X'$  seesama endine  $OX$ . Niisugust koordinaatide teisendamist, kus alguspunkt saab uueks, aga mõõt jääb endiseks, nimetatakse uue alguspunkti võtmiseks või alguse edasiviimiseks.

Teisel erijuhusel, kui on  $b=0$ , saavad teisendusvalemid

$$x' = ax \text{ ja } x = \frac{x'}{a}.$$

Siis on uutel koordinaatidel seesama alguspunkt, mis endistelgi, aga mõõt on uus ja niisugust teisendamist nimetatakse uue mõõdu võtmiseks või mõõdu muutmiseks.

Iga Cartesiuse koordinaatide teisendamist uuteks Cartesiuse koordinaatideks võib nii toimetada, et esiteks võetakse (kui tarvis) uus algus ja siis (kui tarvis) uus mõõt, või jälle esiti uus mõõt ja siis uus algus. Selle kohta öeldakse ka, et Cartesiuse koordinaatide teisendamine uuteks Cartesiuse koordinaatideks on kas alguse edasiviimine või mõõdumuutmine või selle kahe lihtsama teisenduse korrutis.

Harjutus 13. Lihtsustada seos asjapunkti ja pildipunkti koordinaatide vahel sfäärilise peegli optilise telje peal (teisendades koordinaatisid nii, et sellest seosest saav teise astme võrrand saaks võimalikult lihtne).

**Harjutus 14.** Tõendada, et valemist  $x' = ax + b$  saadavad  $x'$ -väärtused on siis tõesti Cartesiusse koordinaadid (kauguse arvud), kui  $x$ -väärtused seda on. [Selleks on ainult vaja tõendada, et siis, kui kahel punktil  $P_1$  ja  $P_2$  on endised koordinaadid  $x_1$  ja  $x_2$  ja uued koordinaadid  $x'_1$  ja  $x'_2$ , on tõesti  $(x'_2 - x'_1) O'X' = (x_2 - x_1) OX$ .]

**Märkus.** Koordinaatisid teisendatakse nimelt selleks, et võrrandid või muud avaldused, kus koordinaadid esinevad, saaksid lihtsamaks. Nii saime koordinaatisid teisendades võrrandist  $ax^2 + 2bx + c = 0$  lihtsama võrrandi  $x''^2 + \Delta = 0$ . Kui siin ei ole  $\Delta = 0$  või  $\Delta = 1$ , siis saame mõõtu muutes selle võrrandi veelgi lihtsamaks teha, võttes  $x'' = \frac{x'}{\sqrt{|\Delta|}}$  ehk  $x' = x'' \sqrt{|\Delta|}$  (kus  $|\Delta|$  tähendab  $\Delta$  absoluutset väärtust). Sest siis saame  $x''^2 \cdot |\Delta| + \Delta = 0$  ehk  $x''^2 \pm 1 = 0$ , kus tuleb  $+$  siis, kui on  $\Delta$  positiivne, ja  $-$  siis, kui on  $\Delta$  negatiivne.

**10. Kauguste jagatiskoordinaadid.** Sirge joone punktidele võib väga mitmel viisil ka niisuguseid arvusid vastavaks seada, mis ei ole kauguse arvud. Nende (mitte-Cartesiusse) koordinaatide näiteks vaatame siin kõige pealt neid arvusid, mis saavad siis sirge joone iga punkti  $P$  jaoks, kui selle sirge joone peal on märgitud alguspunkt  $O$  ja veel üks teine punkt  $U$ , mida võiks nimetada abipunktiks, ja kaugus alguspunktist punktini  $P$  jagatakse kaugusega punktist  $P$  abipunktini. Neid arvusid kirjutatakse sagedasti tähega  $\lambda$  (selle tähe nimi on lambda, ja ta on võetud kreeka keelsest sõnast  $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$  — jagatis), nii et on

$$\lambda = \frac{OP}{PU}.$$

Neid jagatise nimetamegi kauguste jagatiskoordinaatideks (saksakeelse Abstandsverhältniskoordinaten järele).

Olgu siin punktidel  $O$ ,  $U$  ja  $P$  Cartesiusse koordinaadid järjekorras  $x_0$ ,  $x_u$  ja  $x$ , siis on

$$\lambda = \frac{OP}{PU} = \frac{x - x_0}{x_u - x}.$$

See on koordinaatide teisendusvalem, mille järgi saavad antud Cartesiusse koordinaatidest kauguste jagatiskoordinaadid. Sellest valemist saame teise teisendusvalemi

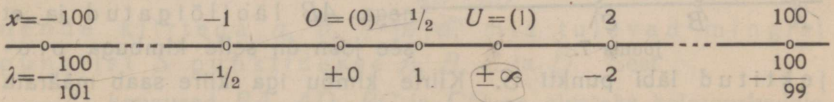
$$x = \frac{x_0 + \lambda x_u}{1 + \lambda},$$

mille järgi saavad Cartesiusse koordinaadid kauguste jagatiskoordinaatidest. Kui nende uute koordinaatide alguspunkt on ka Car-

tesiuise koordinaatide alguspunktiks, s. o.  $x_0 = 0$ , ja nende abipunkt Cartesiuse omade mõõdupunktiks, s. o.  $x_u = 1$ , siis on need teisendusvalemid

$$\lambda = \frac{x}{1-x} \quad \text{ja} \quad x = \frac{\lambda}{1+\lambda}$$

Kaugustejagatiskoordinaadid on mõnusad sellepolest, et siis, kui abipunkt ei ole väga kaugel, on ka väga kaugete punktide koordinaadid väikesed arvud. Näiteks on joonisel 6 kirjutatud sirge joone  $OU$  mitme punkti juurde selle joone alla kaugustejagatiskoordinaat  $\lambda$  ja joonest ülespoole Cartesiuse koordinaat viimaste valemite järgi. See joon ise on seal kahest kohast katkestatud, nagu oleks seal suur tükk sellest joonest joonistamata jäänud ja siis veel joonistatud nendele joonistamata tükikidele järgnevad väga kauged tükikesed. Joonisel on näha, et  $\lambda$ -väärtused on positiivsed ainult neil punktidel, mis on  $O$  ja  $U$  vahel, aga muudel punktidel negatiivsed ja seda ligemad arvule  $-1$ , mida kaugemal on punkt algus- ja abipunktist.

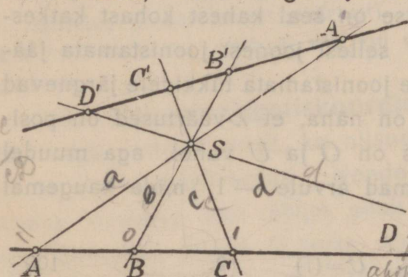


Joonis 6.

M ä r k u s 1. Abipunktile ( $U$ ) ei saa  $\lambda$ -väärtust, sest eelviimase valemiga järgi tuleks selle punkti jaoks  $\lambda = \frac{1}{0}$ , mis ei ole mingi arv. Seda saadust  $\frac{1}{0}$  loetakse siiski vahel arvuks — õieti ebaarvaks, kirjutatakse ühe märgiga  $\infty$  ja nimetatakse lõpmatuks. Joonisel 6 on näha, et see ebaarv on positiivsete ja negatiivsete arvude vahel, nagu null, ja on siis ise niisama hästi positiivne kui negatiivne. (Seesama paistab silma ka igast tabelist mingi bilineaarse võrrandi kahe tundmatu väärtuste jaoks, kui sellel tabelil kirjutame ühe tundmatu väärtuste kasvamise järjekorras selle osakese peenemalt, kus teine tundmatu saab lõpmatuks). Kaugustejagatiskoordinaatide korral on see ebaarv selleks tarvilik, et igale punktile saaks tõesti oma vastav arv. Kuuld selle juures jääb üks arv, nimelt  $-1$ , ilma vastava punktita. Cartesiuse koordinaatide korral jääb ebaarv ilma vastava punktita. Selleks, et siis, kui arvude hulka on võetud ka ebaarv, võiks kõnelda igale ise arvule vastavast ise punktist ühe sirge joone peal, ja iseäranis selleks, et iga bilineaarse võrrandiga määratud vastavuses ühe sirge joone punktide vahel saaks kõnelda igale punktile vastavast punktist, — selleks on kõnelema hakatud sirge joone (ühel) ebapunktist või (ühel) lõpmata kaugest punktist, millel on Cartesiuse koordinaadiks ebaarv  $\infty$  ja kaugustejagatiskoordinaadiks arv  $-1$ .

Märkus 2. Kaugustejagatiskoordinaat määratakse paljudes õppe-  
raamatutes vastupidise märgiga, nimelt kaugus alguspunkti jagatud kaugusega  
abipunkti. Meie oleme võtnud *A. F. Möbius'*e algupärase määruse (a. 1827).

**11. Ristjagatiskoordinaadid ühemõõtelises analüütilises  
geomeetrias.** Ühe sirge joone analüütilist geomeetriat nimetatakse  
ühemõõteliseks sellepärast, et selle joone iga punkti saab määrata  
ühe arvuga (selle punkti koordinaadiga). Kui ühest punktist  
lähevad sirged jooned ühe sirge joone igasse punktisse, siis  
nimetatakse seda ühest punktist läbiminevate joonte kogu kiirte  
kimbuks, sest sirget joont nimetatakse sagedasti lühedalt



Joonis 7.

kiireks. Joonisel 7 on näha  
kiirte kimbust  $S$  (s. o. punktist  
 $S$  läbiminevate kiirte kimbust) neli  
kiirt  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  ja  $SD$ , mis on  
seal kirjutatud ka üksikute väi-  
keste tähtedega  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ja  $d$ . Õel-  
dakse, et see kimp on sirge joo-  
nega  $AB$  läbilõigatud ja et  
see joon on selle kimbuga pro-  
jektitud läbi punkti  $S$ . Kiirte kimbu iga kiire saab määrata  
ühe arvuga, näiteks lõikaja joone selle punkti koordinaadiga, millest  
see kiir läbi läheb. Nii saab võimalikuks käsitada ühe kimbu kiiri  
nendele vastavate arvude — nende kiirte koordinaatide —  
kaudu. Sellega võib kõnelda ühe kiirte kimbu analüütilisest geo-  
meetriast. See on siis teine näide ühemõõtelisest geomeetriast.

Lõikaja joone punktide Cartesiuse koordinaadid ei ole igapidi  
küllalt kohased läbilõigatud kiirte koordinaatideks. Sest kui on  
kimp läbi lõigatud kahe sirge joonega  $AB$  ja  $A'B'$  ja nendel joontel  
võetud alguspunktideks  $A$  ja  $A'$  ja mõõdupunktideks  $B$  ja  $B'$ , nii  
et kiire  $a$  koordinaadiks saab kummagi lõikaja järgi arv 0 ja kiire  
 $b$  koordinaadiks 1, siis võivad teiste kiirte jaoks saada teise lõikaja  
järgi teised koordinaadid. Näiteks tuleks siis joonisel 7 kiirele  $c$   
koordinaadiks joone  $AB$  järgi arv 2, aga joone  $A'B'$  järgi 1,5.  
Ka kaugustejagatiskoordinaadid ei ole sellepoolest paremad. Alles  
siis, kui sirgel joonel võtame peale algus- ja abipunkti veel mingi  
punkti mõõdupunktiks ja loeme iga muu punkti koordinaadiks tema  
kaugustejagatiskoordinaadi jagatise selle mõõdupunkti kaugustejaga-

tiskoordinaadiga, alles siis saame sirge joone punktidele koordinaadid, mis kõlbavad ka nendest punktidest läbiminevate ühe kimbu kiirtele nii, et igast lõikajast joonest võivad nendele kiirtele saada needsamad koordinaadid. Neid koordinaatisid nimetame ristjagatiskoordinaatideks, sest kui on neli punkti  $A, B, C$  ja  $D$  ühe sirge joone peal ja kauguste jagatis  $\frac{BA}{AD}$  jagatakse kauguste jagatisega  $\frac{BC}{CD}$ , siis nimetame saadust selle nelja punkti ristjagatiseks (inglisekeelse *crossratio* järgi). Nelja punkti  $A, B, C$  ja  $D$  ristjagatis kirjutatakse Möbiuse eeskujul  $(ABCD)$ , nii et on  $(ABCD) = \frac{BA}{AD} : \frac{BC}{CD}$ . See ristjagatis on siis punkti  $A$  ristjagatiskoordinaat, kui on võetud alguspunktiks  $B$ , mõõdupunktiks  $C$  ja abipunktiks  $D$ . Teda loetakse ka kiirte  $a, b, c$  ja  $d$  ristjagatiseks ja kiire  $a$  ristjagatiskoordinaadiks, lugedes alguskiireks  $b$ , mõõdukiireks  $c$  ja abikiireks  $d$ . Siis kirjutatakse teda ka  $(abcd)$ .

Ristjagatis  $(ABCD) = \frac{BA}{AD} : \frac{BC}{CD}$  on tõesti määratud nende kiirtega  $a, b, c$  ja  $d$ , mis tulevad mingist punktist  $S$  punktidesse  $A, B, C$  ja  $D$ . Sest

1) kaugused  $BA, AD, BC$  ja  $CD$  on alusteks kolmnurkadele  $BAS, ADS, BCS$  ja  $CDS$ , millel on ühine tipp ja siis ka ühine kõrgus, nii et nende kauguste jagatised on ühevõrdsed vastavate kolmnurkade pindalade jagatistega  $\frac{BA}{AD} = \frac{BAS}{ADS}$  jne., ja

2) kui tähed  $a, b, c$  ja  $d$  loeme mitte ainult joonte  $SA, SB$  jne. tähtedeks, vaid ka joonetükkide  $SA, SB$  jne. pikkusearvudeks, siis on trigonomeetria järgi  $BAS = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \hat{ba}$ ,  $ADS = \frac{1}{2} a d \sin \hat{ad}$  jne. ruutmõõtu ja sellega  $\frac{BAS}{ADS} = \frac{ba \sin \hat{ba}}{ad \sin \hat{ad}}$  jne., nii et saab (kui lugejast ja nimetajast või jagatavast ja jagajast jätame ära ühised kordajad või jagajad)

$$\begin{aligned} (abcd) &= (ABCD) = \frac{BA}{AD} : \frac{BC}{CD} = \frac{BAS}{ADS} : \frac{BCS}{CDS} = \\ &= \frac{ba \sin \hat{ba}}{ad \sin \hat{ad}} : \frac{bc \sin \hat{bc}}{cd \sin \hat{cd}} = \frac{\sin \hat{ba}}{\sin \hat{ad}} \cdot \frac{\sin \hat{bc}}{\sin \hat{cd}} \end{aligned}$$

Selle valemi järgi on nelja ühest punktist tuleva kiire ristjagatis ehk neid kiiri lõikava sirge joone lõikepunktide vaheliste kauguste jagatiste jagatis seesama, mis nende kiirte vaheliste nurkade siinuste jagatiste jagatis. Sellepärast on nendel sirgetel joontel, mis lõikavad nelja ühest punktist tulevat kiirt, kõigil lõikepunktide ristjagatis seesama, näiteks joonisel 7 on  $(A'B'C'D') = (ABCD)$ . Sellepöolest ongi ristjagatiskoordinaadid väga tähtsad tegelikus geometrias, isäranis pärast seda, kui on võimalikuks saanud maapinda päevapildistada õhust. Päevapildilt mõne sirge joone punktide vahelisi kaugusi mõõtes, saame leida ristjagatiskoordinaadid selle sirge joone punktidele päevapildil ja need on siis valem 5 järgi ristjagatiskoordinaatideks ka selle sirge joone punktidele looduses. Sest joonisel 7 võib lugeda joont  $AB$  looduses olevaks, punkti  $S$  pildiriista objektiivil optiliseks keskpunktiks ja siis joont  $A'B'$  joone  $AB$  pildiks.

Ühe joone punktide ristjagatiskoordinaatidest saame nende punktide Cartesiuse koordinaadid, kui on juba teada kolme punkti Cartesiuse koordinaadid. Sest sellest kolmest punktist võime ühe võtta alguspunktiks, teise mõõdupunktiks ja kolmanda abipunktiks ja siis saame kohe valemi ristjagatiskoordinaadi jaoks Cartesiuse koordinaadi järgi ja sealt Cartesiuse koordinaadi jaoks ristjagatiskoordinaadi järgi. Olgu need kolm punkti oma Cartesiuse koordinaatidega  $O = (x_0)$ ,  $X = (x_1)$  ja  $U = (x_u)$ . Siis on iga punkti  $P = (x)$  ristjagatiskoordinaat  $\lambda$  (nagu teda sagedasti kirjutatakse) tema mõiste määruse järgi

$$\lambda = \frac{OP}{PU} : \frac{OX}{XU} = \frac{x - x_0}{x_u - x} : \frac{x_1 - x_0}{x_u - x_1}$$

See valem saab siis lihtsamaks, kui esimese punkti  $O$  võtame ka Cartesiuse koordinaatide alguspunktiks, teise punkti  $X$  mõõdupunktiks ja siis kirjutame kolmanda punkti  $U$  koordinaadi ühe lihtsa tähega  $a$ , s. o. kui on  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  ja  $x_u = a$ . Siis on

$$\lambda = \frac{x}{a - x} : \frac{1}{a - 1} = \frac{(a - 1)x}{a - x} \text{ ja siis } x = \frac{a\lambda}{a - 1 + \lambda}.$$

Märkus 1. Cartesiuse koordinaadid on ristjagatiskoordinaatide erijuhus ja nimelt see erijuhus, kui on abipunktiks ebapunkt. Sest valemis  $\lambda = (a - 1)x : (a - x)$  jagades jagatavat ja jagajat arvuga  $a - 1$  saame  $\lambda = x : \left(1 + \frac{1 - x}{a - 1}\right)$  ja siit paistab silma, et selle ühevõrduse teise poole jagajal

saab siis teine liige nulliks, kui punkt  $U$  saab ebapunktiks, s. o. kui tema koordinaat  $a$  saab lõpmatuseks, ja siis saabki  $\lambda = x$ . Niisama on kauguste-jagatiskoordinaadid ristjagatiskoordinaatide see erijuhus, kui on  $OX = XU$ , sest siis on  $\lambda = \frac{OP}{P\bar{U}}$

**Märkus 2.** Valem 5 tõenduse juures võib tekkida küsimine kolmnurkade pindalade poolsuse (positiivsuse või negatiivsuse) kohta, sest joonis 7 järgi on kaugus  $BA$  negatiivne ja saab siis olla  $\frac{BA}{AD} = \frac{BAS}{ADS}$  ainult siis, kui sellest kahest pindalast loetakse üks negatiivseks. Meie määrame edaspidi kolmnurkade pindalade poolsuse nukipunktide järjekorraga: kui see järjekord läheb päripäeva ringi, nagu joonisel 7  $BAS$ , siis loeme pindala negatiivseks, kui vastupäeva, nagu  $ADS$ , siis positiivseks. Valemis 5 on see määratud siinusega, sest kui nurga  $\hat{a}$  (kiirest  $a$  kiireni  $d$ ) loeme positiivseks, siis tuleb trigonomeetria järgi lugeda nurk  $\hat{b}$  negatiivseks ja negatiivse nurga siinus on ka negatiivne.

**Märkus 3.** Valem 5 tõenduse juures võib veel tekkida küsimine selle juhuse kohta, kui on  $AB \parallel d$  ja sellega  $D$  ebapunkt. Siis oleks ristjagatis

$$(ABCD) = \frac{BA}{AD} \cdot \frac{BC}{CD} = \frac{BA}{BC} \cdot \frac{AD}{CD} = \frac{BA}{BC} \cdot \frac{AC + CD}{CD} = \frac{BA}{BC} \cdot \left( \frac{AC}{CD} + 1 \right) = \frac{BA}{BC},$$

sest kui punkt  $D$  saab ebapunktiks, s. o. kaugus  $CD$  saab lõpmata suureks, siis saab  $\frac{AC}{CD}$  nulliks. Nüüd on  $\frac{BA}{BC} = \frac{BAS}{BCS} = \frac{ba \sin \hat{b}}{bc \sin \hat{c}} = \frac{a \sin \hat{b}}{c \sin \hat{c}} = \frac{\sin \hat{b}}{\sin \hat{c}} \cdot \frac{c}{a}$

ja kolmnurgast  $ACS$  järgneb, et on  $\frac{c}{a} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{C}} = \frac{\sin \hat{a}}{\sin \hat{c}}$ , sest  $AB$  ja  $d$  paralleelsuse pärast on külje  $c$  vastuseisev nurk  $\hat{A} = 180^\circ - \hat{a}$  ja külje  $a$  vastu-

seisev nurk  $\hat{C} = \hat{c}$ . Nii on ka sellel juhusel  $(ABCD) = \frac{\sin \hat{b}}{\sin \hat{c}} \cdot \frac{\sin \hat{a}}{\sin \hat{c}} =$

$$= \frac{\sin \hat{b}}{\sin \hat{a}} \cdot \frac{\sin \hat{c}}{\sin \hat{c}}$$

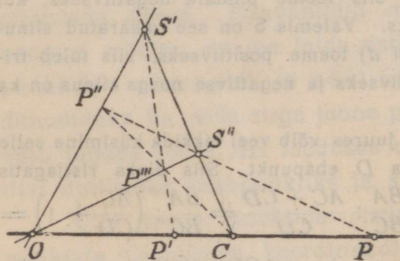
**Harjutus 15.** Päevapildil on näha sirge raudtee ääres kolm üksteisele järgnevat kilomeetri posti, teine esimesest eemal 28 mm ja kolmas teisest 21 mm. Viimasest postist edasi 49 mm on näha sild. Kui kaugel on sild esimesest postist?

**H. 16.** Kui nelja punkti (või kiire) ristjagatis on  $-1$ , siis nimetatakse seda nelja punkti (või kiirt) harmooniliseks salgaks. Tõendada, et peegli optilisel teljel on punkt  $P$ , tema pilt  $P'$  ja iseenestele vastavad punktid  $O$  ja  $C$  koos harmooniline salk, nii et on  $(POP'C) = -1$ .

**H. 17.** Kui mõnda punkti otsides saadakse tema koordinaadiks imaginaarne arv, siis öeldakse, et see punkt on imaginaarne. Valem 1 järgi kõneldakse ka imaginaarsete punktide vahelistest kaugustest. Tõendada, et vastavuses  $xx' + 1 = 0$  on punkt  $(x)$ , tema vastav  $(x')$  ja iseenestele vastavad punktid  $(i)$  ja  $(-i)$  koos harmooniline salk, nii et on  $((x)(i)(x')(-i)) = -1$ .

H. 18. Ühest sirgest joonest läbiminevate tasapindade kogu nimelame lehtede kimbuks. Üksikuid tasapindu ehk lehti kirjutatakse Kreeka tähtedega  $\alpha$  (alfa),  $\beta$  (beeta),  $\gamma$  (gamma),  $\delta$  (delta) jne. Tõendada, et on  $(ABCD) = (\alpha\beta\gamma\delta)$ , kui on  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ja  $\delta$  ühe kimbu lehed,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ja  $D$  ühe sirge joone punktid — punkt  $A$  lehe  $\alpha$  peal, punkt  $B$  lehe  $\beta$  peal jne. — ja kui  $(\alpha\beta\gamma\delta)$  — lehtede  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  ristjagatis. — tähendab  $\frac{\sin \hat{\beta}\alpha}{\sin \hat{\alpha}\delta} : \frac{\sin \beta\gamma}{\sin \gamma\delta}$ , kus on  $\hat{\beta}\alpha$  jne. kahetahused nurgad lehtede  $\beta$  ja  $\alpha$  jne. vahel.

Märkus 4. Kui üks kiirte kimp on läbi lõigatud kahe sirge joonega (nagu joonisel 7), siis öeldakse, et ühe joone punktid on projekteeritud teise peale selle kimbu kiirtega (läbi nende kiirte ühise punkti, mida nimetatakse ka kimbu keskpunktiks) ja teise joone iga punkti nimetatakse esimese joone selle punkti projektsiooniks, mis on temaga ühe kiire peal (näiteks joonisel 7 on punkt  $A'$  punkti  $A$  projektsioon, punkt  $B'$  punkti  $B$  oma jne.). Punktide ja nende projektsioonide või veel projektsioonide jaoks saadud projektsioonide vastavust nimetatakse projektiivseks vastavuseks või projektiivsuseks. Saab tõendada, et iga vastavus, mis on määratud bilineaarse võrrandiga ühe sirge joone punktide vahel, on tõesti projektiivsus. Näiteks saavad peegli optilise telje punktidest nende pildi punktid sel teel, et 1) ühe iseenele vastava punkti [H 12]  $C$  läbi võetakse sirge joon [J 8], 2) selle joone peal mingi kaks punkti  $S'$  ja  $S''$ , 3) ühendatakse need punktid teise iseenele vastava punktiga  $O$  ja siis 4) projekteeritakse telje  $OC$  iga punkt  $P$  läbi punkti  $S''$  joone  $OS'$  peale, saadud projektsioon  $P''$  siis läbi punkti  $C$  joone  $OS''$  peale ja uus saadud projektsioon  $P'''$  sealt läbi punkti  $S'$  tagasi telje  $OC$  peale punktiks  $P'$ .



Joonis 8.

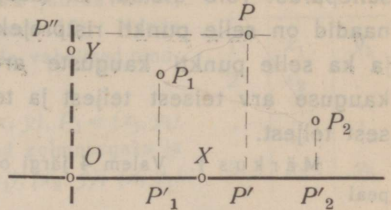
### III. Kahemõõteline analüütiline geometria.

12. Tasapinna punktide Cartesiuse koordinaadid. Kahemõõtelise geometria lihtsamaks näiteks on ühe tasapinna punktide käsitlemine. Kui tasapinna peal on mingi sirge joon, siis saame selle sirge joone punktidele Cartesiuse koordinaadid, kui võtame seal mingi ühe punkti  $O$  alguspunktiks ja mingi teise punkti  $X$  mõõdupunktiks [3]. Siis saab selle tasapinna igale muule punktile  $P$  vastavaks kaks arvu:

1) joone  $OX$  selle punkti  $P'$  koordinaat  $x$ , mille kohal see muu punkt seisab, s. o. kui on  $P'P \perp OX$ , ja

2) selle kauguse arv  $y$ , mille võrra see muu punkt on eemal joonest  $OX$ .

Joon  $OX$  lahutab selle tasapinna kaheks pooleks. Kauguse arv  $y$  peab ka seda näitama, kus pool joonest  $OX$  see punkt  $P$  seisab. Selleks peab sellel tasapinnal peale punktide  $O$  ja  $X$  veel märkima mingi kolmanda punkti  $Y$ , mis ei ole joone  $OX$  peal. Siis



Joonis 9.

alles saab ütelda, et punkt  $P$  on joonest  $OX$  seal pool, kus on punkt  $Y$ , või jälle vastupidisel pool. On kõige lihtsam võtta niisuguseks kolmandaks punktiks see punkt, mis seisab alguspunktist  $O$  ühe mõõdu kaugusel ja otse tema kohal, s. o. nii, et on  $OY \perp OX$ . Siis saavad sirge joone  $OY$  punktidele alguspunkti  $O$  ja mõõdupunkti  $Y$  järgi Cartesiuse koordinaadid, mis on positiivsed alguspunktist  $O$  seal pool, kus on punkt  $Y$  ja negatiivsed vastupidisel pool. Selle järgi loetakse ka igal muul punktil kauguse arv  $y$  siis positiivseks, kui see punkt on joonest  $OX$  seal pool, kus on punkt  $Y$ , ja siis negatiivseks, kui ta on vastupidisel pool.

Sel viisil tasapinna  $OXY$  iga punkti  $P$  jaoks saadud kahte arvu  $x$  ja  $y$  (nagu neid Cartesiuse eeskujul kirjutatakse) nimetatakse selle punkti Cartesiuse ristkoordinaatideks või lihtsalt Cartesiuse koordinaatideks —  $x$  esimeseks ja  $y$  teiseks. Punkt koordinaatidega  $x$  ja  $y$  kirjutatakse lühidalt  $(x, y)$ , nii et kui selle punkti nimi on  $P$ , siis võib ütlust „ $P$  on punkt koordinaatidega  $x$  ja  $y$ “ kirjutada  $P = (x, y)$ . Jooni  $OX$  ja  $OY$ , mille najal need koordinaadid saadakse, nimetatakse koordinaatide telgedeks või ka lihtsalt telgedeks ja nimelt  $OX$  esimeseks või  $x$ -teljeks ja  $OY$  teiseks või  $y$ -teljeks ja nende ühist alguspunkti ka koordinaatide alguspunktiks või ka lihtsalt alguseks.

Kui punktist  $P$  läheb kiir risti mõnele sirgele joonele, siis nimetatakse selle kiire ja selle joone lõikepunkt punkti  $P$  ristprojektsiooniks või ka lihtsalt projektsiooniks selle joone

peal. Joonisel 9 on kirjutatud punkti  $P$  projektsioon  $x$ -teljel tähega  $P'$  ja  $y$ -teljel tähega  $P''$ . Et on

$OY \perp OX$ ,  $PP' \perp OX$ ,  $PP'' \perp OY$  ja siis  $P'P \nparallel OP''$  ja  $P''P \nparallel OP'$ , sellepärast võib ütelda, et tasapinna punkti Cartesiuse ristkoordinaadid on selle punkti ristprojektsioonide koordinaadid telgede peal ja ka selle punkti kauguste arvud telgedest: esimene koordinaat kauguse arv teisest teljest ja teine koordinaat kauguse arv esimesest teljest.

Märkus 1. Valem 4 järgi on punkti  $P = (x, y)$  projektsioonid telgede peal

$$P' = (1-x)O + xX = O + x(X-O) \text{ ja } P'' = (1-y)O + yY = O + y(Y-O).$$

Et täisnurkse nelinurga  $OP'P''$  diagonaalidel on ühine keskpunkt, siis on  $\frac{1}{2}(O + P) = \frac{1}{2}(P' + P'')$  ehk  $P = P' + P'' - O$  ja sellega

$$P = (1-x-y)O + xX + yY = O + x(X-O) + y(Y-O) \quad 6$$

Selle valemiga on punkt kirjutatud oma koordinaatidega põhipunktide, s. o. alguspunkti ja mõõdupunktide abil. See kirjutus on tasapinna punkti täielik kirjutus. Selle valemi viimast osa  $O + x(X-O) + y(Y-O)$  võib lugeda: „see punkt, milleni jõutakse, kui minnakse punktist  $O$  edasi joonega  $OX$  paralleelselt  $xOX$  võrra ja sealt veel joonega  $OY$  paralleelselt  $yOY$  võrra“. (Kirjutus  $(x, y)$  on iseenesest ilma sisuta, aga oma läheduse pärast kohane ka punkti nimeks.)

Märkus 2. Tasapinna punktide Cartesiuse koordinaatisid käsitatakse juba algkoolis, loomulikult nimelt siis, kui seal puudutatakse maamõõtmist, seda geometria esialgset sisu (Kreeka *γεωμετρία* tähendab maamõõtmine). Üks lihtsam maamõõtmise viis on järgmine. Mõõdetaval maatükil tähistatakse püstitatud teivastega või ritvadega need punktid, mille vaheliste pinnatükkide suurust on tarvis teada või mis muidu tähtsad on. Need punktid nummerdatakse  $P_1, P_2$  jne. ja märgitakse selle maatüki esialgsel ligikaudsel joonisel (silma järgi tehtud plaani või kaardi kavandil). Siis võetakse selle maatüki läbi või tema ligidal siht, mille mõõtmine ei ole mõnesuguste takistustega raskendatud, ja hakatakse selle sihi mingist punktist  $O$  mõõtma sinna poole, kus on tähistatud punktid. Jõudes mõõtes mingi tähistatud punkti kohale, s. o. sinna, kuhu tuleb sellest punktist ristjoon mõõdetavale sihile (see koht leitakse mõne riista, näiteks nurgapeegli abil), kirjutatakse saadud kauguse arv selle punkti esimeseks koordinaadiks. Kui nii on seda sihti mõõtes jõutud viimase punkti kohale, siis tullakse sedasama teed mõõtes tagasi. See teistkordne mõõtmine on tarvilik kontrolliks, kas vahest ei ole esimesel korral eksitud. Niisama saadakse igale punktile teine koordinaat, mõõtes teist sihti, mis on risti esimesele, ja sellega on käes kõik tarvilikud andmed nende tähistatud punktide kohta. Need andmed kirjutatakse

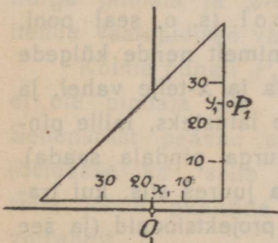
harilikult tabeli kujul ja nende andmete järgi saab sellest punktide kogust teha joonise (plaani või kaardi) näiteks järgmiselt: Võetakse joon, selle joone peal punkt  $O$ , seatakse nurklaua, mille kummagile servale on täisnurga nukist alates märgitud mõõdud, üks serv selle joone külge nii, et punkt  $O$  tuleb selle kriipsu juurde, mille number on  $x_1$ , ja joonistatakse punkti  $P_1$  pilt nurklaua teise serva juurde sinna, kus mõõdu kriipsu number on  $y_1$  (v. joonis 10). Nende andmete järele saab ka leida nende punktide vahelised pindalad [13].

Harjutus 19. Joonisel 9 olgu  $P = (x, y)$ ,  $P_1 = (x_1, y_1)$  ja  $P_2 = (x_2, y_2)$ . Ühendada need punktid kolmnurgaks ja otsida veel punktid  $(x_1, y_2)$ ,  $(x_1, y)$ ,  $(x_2, y_1)$ ,  $(x_2, y)$ ,  $(x, y_1)$  ja  $(x, y_2)$ .

$P$	$x$	$y$
1	$x_1$	$y_1$
2	$x_2$	
·	·	·
·	·	·
5	$x_5$	$y_5$

H. 20. Teljed  $OX$  ja  $OY$  lahutavad tasapinna  $OXY$  neljaks osaks. Vaadata järele, kus on mõlemad koordinaadid positiivsed, kus ainult esimene positiivne, kus mõlemad negatiivsed, kus ainult esimene negatiivne.

**13. Kolme punkti vaheline pindala. Negatiivne pindala.**  
Sirge joon läbi kahe punkti. Kui tasapinna punktidele on kor-



Joonis 10.

raldatud Cartesiusse koordinaadid ja on antud oma koordinaatidega kolm punkti  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$  ja  $P = (x, y)$ , siis saame kohe leida ka nende punktide vahelise pindala, s. o. kolmnurga  $P_1P_2P$  pindala, mille kirjutame lihtsalt  $P_1P_2P$ . On ju see pindala määratud kolme trapetsi pindaladega  $P_1P_2P'_2P'_1$ ,  $P_2PP'_2P'_2$ ,  $PP_1P'_1P'_1$  [Joonised 9 ja 11], kus on  $P'_1$ ,  $P'_2$  ja  $P'$  punktide  $P_1$ ,  $P_2$  ja  $P$

projektsioonid  $x$ -telje peal. Nendel trapetsitel on laiused järgimööda  $P'_2P'_1 = (x_1 - x_2)OX$ ,  $P'_2P'_2 = (x_2 - x)OX$  ja  $P'_1P'_1 = (x - x_1)OX$  ja keskmised pikkused

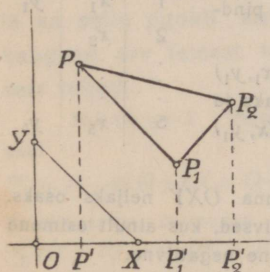
$$\frac{1}{2}(P'_1P_1 + P'_2P_2) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)OY, \quad \frac{1}{2}(P'_2P_2 + P'_2P) = \frac{1}{2}(y_2 + y)OY \text{ ja } \frac{1}{2}(P'_1P + P'_1P_1) = \frac{1}{2}(y + y_1)OY$$

ja sellega nende trapetsite pindalade summa nende laiuste ja keskmiste pikkuste korrutiste summa

$$[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x)(y_2 + y) + (x - x_1)(y + y_1)] \frac{OX \cdot OY}{2}.$$

See kolme trapetsi pindalade summa ongi otsitav kolme punkti vaheline pindala. Sest siis, kui punktid  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P$  seisavad nii kui

joonisel 9, on otsitava pindala saamiseks õieti tarvis trapetsite  $P_2PP'P'_2$  ja  $PP_1P'_1P'$  pindalade summast lahutada kolmanda trapetsi pindala (ja nende punktide mõne teistsuguse seisu korral — kui need punktid on kõik  $x$ -teljest ühel pool — tuleks ühe trapetsi pindalast lahutada kahe teise trapetsi pindalade summa, nagu joonisel 11). Aga kui kolmnurga  $P_1P_2P$  nukkidele on määratud



Joonis 11.

ringjärjekord  $P_1P_2P$  (nii et viimasele punktile  $P$  loetakse järgnevas esimene  $P_1$ ), siis saavad selle kolmnurga külgede projektsioonid  $x$ -telje peal (s. o. nende külgede otsade ehk kolmnurga nukkide projektsioonide vahelised  $x$ -telje tükid ühe nuki projektsioonist järgmise nuki projektsioonini)  $P'_1P'_2$ ,  $P'_2P'$  ja  $P'P'_1$  mõned positiivsed (nagu joonisel 11  $P'_1P'_2$  ja  $P'P'_1$ ), teised

negatiivsed. Kui kolmnurga nukkide ringjärjekord  $P_1P_2P$  on samane järjekorraga  $OXY$  (nagu joonisel 11 — mõlemad vastupäeva) ja kolmnurk on  $x$ -teljest positiivsel pool (s. o. seal pool, kus on punkt  $Y$ ), siis saavad positiivsed nimelt nende külgede projektsioonid, mis on selle kolmnurga pindala ja  $x$ -telje vahel, ja need projektsioonid on nimelt nende trapetsite laiusteks, mille pindala tuleb teiste omast lahutada (et kolmnurga pindala saada). Sellepärast saaks niisuguse nukkide järjekorra juures siis, kui trapetsite laiusteks loetakse kolmnurga külgede projektsioonid (ja see kolmnurk ise oleks  $x$ -teljest positiivsel pool), laiuse ja keskmise pikkuse korrutis ehk pindala nimelt nendel trapetsitel negatiivne, mille pindaladest teiste omad (positiivsed) lahutada tulevad, ja sellega kõige kolme trapetsi pindalade summa tõesti otsitava kolmnurga pindala suurune, aga negatiivne. Sellepärast olemegi selle summa jaoks võtnud trapetsite laiusteks mitte kolmnurga külgede projektsioonid ise, vaid nende vastupidised väärtused  $P'_2P'_1$  jne. Selles summas oleme veel trapetsite keskmise pikkuse kirjutustest jagaja 2 viinud pinnamõõdu  $OX \cdot OY$  juurde, nii et on saanud mõõduks pool ruutmõõtu  $\frac{OX \cdot OY}{2}$ , mis on nimelt põhikolmnurga

$OXY$  pindala. Nii saame otsitava pindala  $P_1P_2P$  jaoks (kui teda mõõdame poole ruutmõõduga  $OXY$ ) järgmise valemi

$$P_1P_2P = [(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x)(y_2 + y) + (x - x_1)(y + y_1)] \cdot OXY \quad 7$$

Selle valemi järgi saab pindala  $P_1P_2P$  siis ikka positiivne, kui on ringjärjekord  $P_1P_2P$  samane järjekorruga  $OXY$ . Sest siis, kui kolmnurk  $P_1P_2P$  on  $x$ -teljest negatiivsel pool (s. o. sealpool, kus ei ole punkt  $Y$ ), on tema nendel külgedel, mis on tema pindala ja  $x$ -telje vahel, projektsioonid juba negatiivsed (Joonistada!) ja siis valemis nende vastupidised väärtused positiivsed, aga siis on jälle  $y$ -väärtused negatiivsed, sellega valemis nendel trapetsitel, mille pindala tuleb teiste omast lahutada, laius küll positiivne, aga keskmine pikkus negatiivne ja sellepärast nende korrutis negatiivne.

Kui aga ringjärjekord  $P_1P_2P$  on vastupidine järjekorralt  $OXY$  (teine nendest vastupäeva, teine päripäeva), siis saab selle valemi järgi pindala arv negatiivne. Sest siis saavad  $x$ -teljest positiivsel pool kolmnurga nendel külgedel, mis ei ole selle kolmnurga pindala ja  $x$ -telje vahel, projektsioonid positiivsed ja siis nende vastupidised väärtused selles valemis negatiivsed.

Kolme punkti  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$  ja  $P = (x, y)$  vahel ei ole pindala siis, kui need punktid on ühe sirge joone peal. Sellepärast peavad sirge joone  $P_1P_2$  iga punkti  $P$  koordinaadid (öeldakse ka: selle joone jooksva punkti koordinaadid või selle joone punktide jooksvad koordinaadid) rahuldama võrrandit

$$(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x)(y_2 + y) + (x - x_1)(y + y_1) = 0$$

ja iga arvude paar  $x$  ja  $y$ , mis rahuldab seda võrrandit, on joone  $P_1P_2$  ühe punkti koordinaatide paar. Selle võrrandi esimeses pooles (kolmnurga  $P_1P_2P$  pindala arvus) sulgusid avades, sarnaseid liikmeid koondades ja tundmatuid  $x$  ja  $y$  sulgude taha võttes, saame ta lihtsamal kujul

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0 \quad 8$$

Võrrandit, mida rahuldavad ühe sirge joone iga punkti koordinaadid ja ainult need, nimetatakse selle sirgejoone võrrandiks. Võrrand 8 on siis selle sirge joone võrrand, mis läheb läbi punktide  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$ .

Märkus 1. Kolme punkti vahelise pindala valemi tuletamise viisil saab tuletada valemi hulknurga  $P_1P_2\dots P_n$  pindala jaoks:

$$P_1P_2\dots P_n = [(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \dots + (x_n - x_1)(y_n + y_1)] OXY.$$

Märkus 2. Kolme punkti vahelise pindala valemi saame kohe lihtsustatud kujul, kui korrutame need punktid

$$P_1 = O + x_1(X - O) + y_1(Y - O)$$

$$P_2 = O + x_2(X - O) + y_2(Y - O)$$

$$P = O + x(X - O) + y(Y - O)$$

ja peame silmas, et punktide vahede korrutis on ka alternatiivne, nagu see pärast sulgude avamist punktide korrutise alternatiivsusest järgneb, ja et on  $O(X - O)(Y - O) = OXY$ . Sest kahe esimese punkti esimesi ja teisi liikmeid korrutades saame  $(x_2 - x_1)O(X - O)$ , mida tuleb korrutada kolmandast punktist ainult kolmanda liikmega (Mispärast?), nii et saab  $(x_2 - x_1)yO(X - O)(Y - O) = (x_2 - x_1)yOXY$ ; kahe esimese punkti esimesi ja viimaseid liikmeid korrutades saame  $(y_2 - y_1)O(Y - O)$ , mida tuleb korrutada kolmandast punktist ainult teise liikmega, nii et saab  $(y_2 - y_1)xOYX$  ehk kahte tegurit vahetades ja siis märki muutes  $-(y_2 - y_1)xOXY$ , ja esimese kahe punkti teisi ja kolmandaid liikmeid korrutades saame  $(x_1y_2 - x_2y_1)(X - O)(Y - O)$ , mida tuleb korrutada kolmandast punktist ainult esimese liikmega, nii et saab  $(x_1y_2 - x_2y_1)XYO$  ehk kaks korda kahte tegurit vahetades ja siis kaks korda märki muutes  $(x_1y_2 - x_2y_1)OXY$ . Sellega on otsitav korrutis (kui tema arvu veel ka kolmerealise determinandi kujul kirjutame, s. o. kolme reaalse ja kolme veerulise arvude tabeli kujul, mille ette ja taha pandud püstkriipsudega näidatakse, et selle tabeli arvudega tulevad teha tehted nagu siis, kui kolm punkti on kirjutatud kolme põhipunkti abil nii, et esimesel punktil on põhipunktide kordajateks nende põhipunktide järjekorras selle tabeli esimese rea arvud, teisel teise rea omad jne. ja need kolm punkti korrutatakse)

$$P_1P_2P = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} OXY = 9$$

$$= [(x_2 - x_1)y - (y_2 - y_1)x + x_1y_2 - x_2y_1] OXY$$

Et see korrutise valem on enne saadud pindala valem ainult lihtsustatud kujul, sellepärast võib kolme punkti vahelise pindala leida neid punktisid korrutades ehk seda determinanti arvutades, millel on teises ja kolmandas veerus antud punktide koordinaadid ja esimeses veerus ühed.

Harjutus 21. Tõendada, et valemis 9 on viimane liige  $(x_1y_2 - x_2y_1)OXY$  nimelt kolmnurga  $P_1P_2O$  pindala.

H. 22. Tuletada võrrand 8, vaadeldes mingit kahte punkti  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$ , sellest kahest punktist läbimineva sirge joone mingit muud punkti

$(x, y)$ , punktisid  $(x_2, y_1)$  ja  $(x, y_1)$  ja kolmnurke  $(x_1, y_1)(x_2, y_1)(x_2, y_2)$  ja  $(x_1, y_1)(x, y_1)(x, y)$ .

H. 23. Vaadeldes mingit kolmnurka  $P_1 P_2 P$  ja kolmnurka  $P_1 P_2 O$ ,  $P_2 P O$  ja  $PP_1 O$  teha selgeks, et on  $P_1 P_2 P = P_1 P_2 O + P_2 P O + PP_1 O$ . Tule-tada siit H 21 abil uus valem pindala  $P_1 P_2 P$  jaoks.

**14. Kahe punkti vaheline kaugus. Punkti kaugus sirgest joonest. Kahe kiire vaheline nurk.** Vaadeldes (Joonistada!) kahte punkti  $P_1 = (x_1, y_1)$  ja  $P_2 = (x_2, y_2)$  ja veel kolmandat punkti  $(x_2, y_1)$  märkame, et selle kahe punkti vaheline kaugus  $P_1 P_2$  on hüpotenuusiks täisnurkses kolmnurgas  $(x_1, y_1)(x_2, y_1)(x_2, y_2)$ , kus kaatetite pikkused on  $(x_1, y_1)(x_2, y_1) = (x_2 - x_1) OX$  ja  $(x_2, y_1)(x_2, y_2) = (y_2 - y_1) OY$ . Sellepärast on *Pythagoras*'e lause järgi (kui on  $OX$  siis, kui sihti tähele ei panda, samane kui  $OY$  ehk, nagu seda kirjutatakse,  $|OX| = |OY|$ )

$$|P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} |OX| \quad 10$$

See valem ja valem 7 või lihtsustatud kujul valem 9 on kaks põhivalemit tasapinna geomeetrias. Nendest valemitest saame näiteks valemi punkti  $P = (x, y)$  kauguse jaoks joonest  $P_1 P_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2)$ . Punkti kauguse arv joonest kirjutatakse sagedasti tähega  $\delta$ . See arv oleks siis kolmnurga  $P_1 P_2 P$  pindala arv, kui kaugus  $P_1 P_2$  oleks üks mõõt ja pindala mõõduks ikka kolmnurk  $OXY$ . Sest kui kolmnurkadel  $OXY$  ja  $P_1 P_2 P$  on alused  $OX$  ja  $P_1 P_2$  ühepikkused, siis on nende kõrgused proportsionaalsed pindaladega ja kolmnurga  $OXY$  kõrguse arv on ju  $OY$  pikkuse arv 1 ja kolmnurga  $P_1 P_2 P$  kõrguse arv on punkti  $P$  kauguse arv joonest  $P_1 P_2$ . Kui kaugus  $P_1 P_2$  ei ole üks mõõt, siis on tema suuruse arv valemi 10 järgi  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  ja kolmnurga  $P_1 P_2 P$  pindala arv on selle arvu kordselt  $\delta$ . Sellega on

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{(x_2 - x_1)y - (y_2 - y_1)x + x_1 y_2 - y_1 x_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad 11$$

Selle valemi järgi saab punkti  $P$  kaugus joonest  $P_1P_2$  siis negatiivne, kui järjekord  $P_1P_2P$  läheb vastupidi järjekorrale  $OXY$ , sest siis saab jagatav pindala negatiivne.

Teiseks näiteks leiame valemite 9 ja 10 valemi kahe kiire vahelise nurga siinuse jaoks. Kahte kiirt on kõige lihtsam määrata kolme punktiga, millest üks  $P_1 = (x_1, y_1)$  oleks nende kiirte ühine punkt, teine  $P_2 = (x_2, y_2)$  ühe kiire mingi muu punkt ja kolmas  $P = (x, y)$  teise kiire mingi muu punkt. Kirjutame tähega  $a$  esimese kiire  $P_1P_2$  ja ka tema tüki  $P_1P_2$  pikkuse arvu, nii et on  $a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ . Niisama kirjutame teise kiire  $P_1P$  ja tema tüki  $P_1P$  pikkuse arvu tähega  $b$ , nii et on  $b = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$ . Siis on kolmnurga  $P_1P_2P$  pindala  $\frac{1}{2} ab \sin \widehat{ab}$  ruutmõõtu ehk  $P_1P_2P = ab \sin \widehat{ab} OXY$ . Sellega on valem 9 järgi

$$\sin \widehat{ab} = \frac{1}{ab} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = \frac{(x_2 - x_1)y - (y_2 - y_1)x + x_1y_2 - x_2y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}} \quad 12$$

Harjutus 24. Leida antud punkti  $(x, y)$  kaugus (s. o. kauguse arv) alguspunktist ja kirjutada võrrand, mida rahuldavad alguspunktist  $r$  mõõdu kaugusel seisvate punktide koordinaadid  $(x$  ja  $y)$  ja ainult need. Vabastada see võrrand radikaalist.

H. 25. Kirjutada võrrand, mida rahuldavad antud punktist  $(x_0, y_0)$   $r$  mõõdu kaugusel seisvate punktide koordinaadid  $(x$  ja  $y)$  ja ainult need. Vabastada see võrrand radikaalist ja võrreldes teda sirge joone võrrandiga otsustada, mille võrrandiks tuleb teda nimetada.

H. 26. Leida alguspunkti  $(0,0)$  kaugus  $\delta$  sirgest joonest, mis läheb läbi kahe antud punkti  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$ .

**15. Esimese astme võrrand kahe tundmatuga.** Kui tasapinna punktidele on korraldatud Cartesiuse koordinaadid, siis saame selle tasapinna iga sirge joone jaoks esimese astme võrrandi  $V$  8, sest selle sirge joone peal võime võtta mingi kaks punkti  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$ . Ümberpöörduvalt esitab iga antud esimese astme võrrand kahe tundmatuga

$$ax + by + c = 0$$

(kus ei ole  $a$  ja  $b$  korruga nullid) sirge joone, kui need tundmatud on ühe tasapinna punktide Cartesiuse koordinaadid. Sest

1) kui  $a$ ,  $b$  ja  $c$  ei ole ükski null, siis rahuldavad seda võrrandit selle kahe punkti  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$  koordinaadid, millel on  $y_1 = 0$ ,  $x_1 = \frac{-c}{a}$ ,  $x_2 = 0$  ja  $y_2 = \frac{-c}{b}$ , nii et on võrrand V 8 jaoks  $y_1 - y_2 = \frac{c}{b}$ ,  $x_2 - x_1 = \frac{c}{a}$ ,  $x_1 y_2 - x_2 y_1 = \frac{c^2}{ab}$  ja siis sellest kahest punktist läbimineva joone võrrand  $\frac{c}{b}x + \frac{c}{a}y + \frac{c^2}{ab} = 0$ , mille kõiki liikmeid jagades arvuga  $\frac{c}{ab}$  saamegi antud võrrandi  $ax + by + c = 0$ ;

2) kui on  $c = 0$ ,  $a \neq 0 \neq b$  ( $a$  ega  $b$  ei ole null), siis rahuldavad seda võrrandit alguspunkti koordinaadid  $x_1 = 0$  ja  $y_1 = 0$  ja selle punkti  $(x_2, y_2)$  koordinaadid, millel on  $x_2 = 1$  ja  $y_2 = -\frac{a}{b}$ , nii et on  $y_1 - y_2 = \frac{a}{b}$ ,  $x_2 - x_1 = 1$ ,  $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$  ja siis sellest kahest punktist läbimineva joone võrrand  $\frac{a}{b}x + y = 0$  ehk  $ax + by = 0$ , mis ongi antud võrrand;

3) kui on  $b = 0$ ,  $a \neq 0$ , siis rahuldavad seda võrrandit kõigi nende punktide koordinaadid, mis seisavad  $y$ -teljest  $-\frac{c}{a}$  mõõdu kaugusel.

Nii esitab iga võrrand  $ax + by + c = 0$ , millel ei ole  $a$  ja  $b$  mõlemad nullid, sirge joone, võrrand  $ax + by = 0$  nimelt sirge joone läbi alguspunkti ja võrrandid  $ax + c = 0$  ja  $by + c = 0$  nimelt paraleelid telgedele. Sirge joon, mille võrrand on  $ax + by + c = 0$  nimetatakse ka lühidalt joon  $ax + by + c = 0$ . Kui see sirge joon on kirjutatud veel kuidagi teisiti, näiteks ühe tähega  $s$ , siis tähendatakse seda samasuse märgi  $\equiv$  abil, kirjutades

$$s \equiv ax + by + c = 0.$$

H a r j u t u s 27. Kirjutadamiu (enam kui kaks) numbrilist esimese astme võrrandit kahe tundmatuga, joonistada nende võrranditega esitatud jooned ja arvutada nende joonte lõikepunktide koordinaadid (silmaspidades, et kahe joone lõikepunkti koordinaadid peavad rahuldama kummagi joone võrrandit).

H. 28. Kui on antud kaks joont  $s_0$  ja  $s_{II}$  ja esimese joone võrrandil  $a_0x + b_0y + c_0 = 0$  korrutame kõik liikmed mingi arvuga  $k_0$ , teise joone

omal  $a_u x + b_u y + c_u = 0$  mingi arvuga  $k_u$  ja siis liidame esimese võrrandi pooled teise omadega, siis saame uue võrrandi

$$\begin{array}{l|l} s_0 \equiv a_0 x + b_0 y + c_0 = 0 & k_0 \\ s_u \equiv a_u x + b_u y + c_u = 0 & k_u \\ \hline s \equiv (k_0 a_0 + k_u a_u) x + (k_0 b_0 + k_u b_u) y + k_0 c_0 + k_u c_u = 0, \end{array}$$

või, kõiki liikmeid jagades arvuga  $k_0$  ja kirjutades  $\frac{k_u}{k_0} = \lambda$ , veel lihtsamal kujul

$$s \equiv (a_0 + \lambda a_u) x + (b_0 + \lambda b_u) y + c_0 + \lambda c_u = 0.$$

Tõendada, et 1) joon  $s$  läheb läbi joonte  $s_0$  ja  $s_u$  lõikepunkti (mida kirjutame  $s_0 \times s_u$ ) ja et 2)  $\lambda$  on selle joone ristjagatiskoordinaat kiirtekimbuse  $s_0 \times s_u$ , kui seal on alguskiireks  $s_0$ , abikiireks  $s_u$  ja mõõdukiireks  $s_1 \equiv (a_0 + a_u) x +$

$+(b_0 + b_u) y + c_0 + c_u = 0$ , s. o. et on  $\lambda = \frac{\sin \hat{s}_0 \hat{s}}{\sin \hat{s}_u \hat{s}} : \frac{\sin \hat{s}_0 \hat{s}_1}{\sin \hat{s}_u \hat{s}_1}$ . (Tõenduseks tu-

leb vaadata nende joonte lõikepunktisid ühe teljega, näiteks  $x$ -teljega, kus on  $y = 0$ , või, kui nad kõik lähevad läbi alguspunkti, joonega  $x = 1$ , ja silmaspidada, et otsitav ristjagatis ( $s s_0 s_1 s_u$ ) on nende lõikepunktide omaga ühevõrdne).

H. 29. Et võrrandi kõiki liikmeid võib jagada mis arvuga tahes (peale nulli), sellepärast saab sirge joone võrrandile vahel anda lihtsama kju

$$y = mx + n$$

või jalle kju

$$ux + vy + 1 = 0.$$

(Millal ei ole võimalik esimene lihtsam kju, millal teine?) Võrrandis  $y = mx + n$  nimetatakse arvu  $m$  joone tõusuks ja arvu  $n$   $y$ -telje lõiguks, võrrandis  $ux + vy + 1 = 0$  arvud  $u$  ja  $v$  telgede lõikude negatiivseteks ümberpööratud väärtusteks. Võttes mitu niisugust numbrilist võrrandit, joonistada nende võrranditega esitatud jooned ja saadud joonistelt leida joone tõusuks ja telje lõiguks nimetamise põhjendus.

M ä r k u s. Kui võrrandis  $ax + by + c = 0$  on  $a = 0 = b$ , aga  $c \neq 0$ , siis saab temale anda kju  $ux + vy + 1 = 0$ , kus on  $u = 0 = v$ . Öeldakse, et see võrrand on lõpmata kaugel sirge joone ehk ebakiire võrrand, sest mida kaugemal on joon tasapinna punktide koordinaatide algusest, s. o. mida kaugemal algusest lõikab see joon telgi, seda ligemad saavad arvud  $u$  ja  $v$  nullile. Kui oleme ka ebakiire mõiste tarvitusele võtnud, siis võib küll ütelda, et võrrand  $ax + by + c = 0$  esitab sirge joone alati siis, kui ei ole  $a$ ,  $b$  ja  $c$  kõik korraga nullid.

H. 30. Sirge joone võrrandis  $ax + by + c = 0$  võib arvud  $a$  ja  $b$  lugeda selle joone kahe punkti koordinaatide vahedeks (nagu võrrandis 8), sest võttes näiteks ühe punkti jaoks  $x_1 = 0$ , nii et saab  $y_1 = \frac{-c}{b}$ , ja teise punkti jaoks  $x_2 = b$ , nii et saab  $y_2 = \frac{-c-ab}{b}$ , saamegi  $a = y_1 - y_2$ ,  $b = x_2 - x_1$

ja  $c = x_1 y_2 - x_2 y_1$ . Tõendada, et siis, kui jagame võrrandi  $ax + by + c = 0$  kõik liikmed arvuga  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , saab võrrandi pahem pool  $\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  nimelt punkti  $(x, y)$  kaugusearvuks joonest  $ax + by + c = 0$  ehk  $\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$ . (Sellel viimasel kujul nimetatakse sirge joone võrrandit normaalseks).

H. 31. Kahe antud joone  $s \equiv ax + by + c = 0$  ja  $s' \equiv a'x + b'y + c' = 0$  juures võib vaadelda täisnurkseid kolmnurke  $(0, \frac{-c}{b})(0, \frac{-c-ab}{b})(b, \frac{-c-ab}{b})$  ja  $(0, \frac{-c'}{b'})(0, \frac{-c'-a'b'}{b'})(b', \frac{-c'-a'b'}{b'})$ . Neil on esimeste kaatetite pikkusearvud (s. o. nende kirjutuse järjekorras kaugusearvud esimestest nukkides teiseni)  $-a$  ja  $-a'$  ja need kaatetid ise  $y$ -telje tükid, teiste kaatetite pikkusearvud (teistest nukkidest kolmandateni) on  $b$  ja  $b'$  ja need kaatetid ise  $x$ -teljega paralleelsed, aga hüpotenuusid on neil kolmnurkadel antud joonte tükid. Tõendada nende kolmnurkade abil, et jooned  $s$  ja  $s'$  on paralleelsed siis ja ainult siis, kui on

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

13

Tõendada see sirgete joonte paralleelsuse tunnus ka otsides selle kahe joone lõikepunkti (mis paralleelsuse korral peab olema ebapunkt).

H. 32. Kui täisnurkne kolmnurk

$$(0, \frac{-c}{b})(0; 0)(\frac{-c}{a}, 0),$$

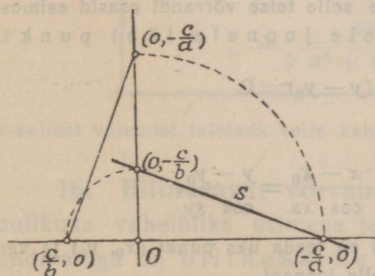
millel on hüpotenuusiks tükk mingist joonest  $ax + by + c = 0$  ja kaatetiteks telgede tükid, pööratakse alguspunkti

joonest  $ax + by + c = 0$  ja kaatetiteks ümber täisnurga võrra nii, et punkt  $X$  siis, kui ta läheks selle kolmnurgaga ühes, tuleks punktisse  $Y$ , siis saab uus täisnurkne kolmnurk

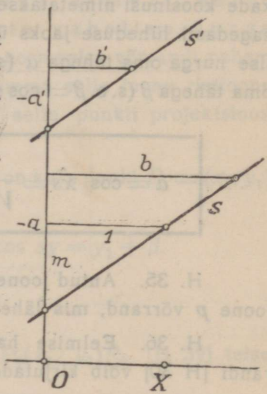
$$(\frac{c}{b}, 0)(0; 0)(0, \frac{-c}{a}),$$

mille hüpotenuus on risti joonele  $ax + by + c = 0$ . Kirjutada võrrand sellele sirgele joonele, mille tükiks on selle uue kolmnurga hüpotenuus, ja tõendada, et kaks joont  $ax + by + c = 0$  ja  $a'x + b'y + c' = 0$  on teine teisega risti siis ja ainult siis, kui on

$$\frac{a'}{-b} = \frac{b'}{a}$$



Joonis 13.



Joonis 12.

ehk, nagu seda sirgete joonte ristseisu tunnust harilikult kirjutatakse.

$$aa' + bb' = 0$$

14

H. 33. Vaadeldes selle sirge joone  $s$  juures, mis läheb läbi kahe punkti  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$ , kolmnurka  $(x_1, y_1)$   $(x_2, y_1)$   $(x_2, y_2)$  tõendada, et on telgede ja selle joone vaheliste nurkade koosinused

$$\cos \hat{x}s = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad \text{ja} \quad \cos \hat{y}s = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

H. 34. Mingi sirge joone  $s \equiv ax + by + c = 0$  ja telgede vaheliste nurkade koosinusi nimetatakse selle joone sihikoosinusteks ja kirjutatakse sagedasti lüheduse jaoks üksikute tähtedega: esimese telje ja selle joone vahelise nurga oma tähega  $\alpha$  (s. o.  $\alpha = \cos \hat{x}s$ ) ja joone ja teise telje vahelise nurga oma tähega  $\beta$  (s. o.  $\beta = \cos \hat{y}s$ ). Tõendada valemid

$$\alpha = \cos \hat{x}s = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{ja} \quad \beta = \cos \hat{y}s = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad 15$$

H. 35. Antud joone  $s \equiv ax + by + c = 0$  järgi kirjutada kohe selle sirge joone  $p$  võrrand, mis läheb läbi alguspunkti ja on risti joonega  $s$  [H 32].

H. 36. Eelmise harjutuse põhjal tõendada, et joone  $s$  normaalse võrrandi [H 30] võib kirjutada (Hesse) kujul

$$s \equiv x \cos \hat{x}p + y \cos \hat{y}p + p = 0,$$

kui tähega  $p$  kirjutame joone  $s$  ristjoone läbi alguspunkti ja ka selle ristjoone tüki joonest  $s$  alguspunktini.

H. 37. Võttes joone  $s \equiv ax + by + c = 0$  peal mingi punkti  $(x_0, y_0)$ , s. o. nii, et on  $ax_0 + by_0 + c = 0$ , saame selle teise võrrandi osad esimese omadest lahutades võrrandi sirgele joonele läbi punkti  $(x_0, y_0)$

$$s \equiv a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Teisendada see võrrand võrrandiks

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \text{või} \quad \frac{x - x_0}{\cos \hat{x}s} = \frac{y - y_0}{\cos \hat{y}s}$$

mida saab kohe kirjutada, kui joonest  $s$  on teada üks punkt  $(x_0, y_0)$  ja veel tema tõus  $m$  või nurk esimesest teljest selle jooneni.

H. 38. Vaadeldes kolmnurka  $P_1P_2P$  (mille nukkidele on määratud ringjärjekord nii, et  $P$  järgmiseks loetakse  $P_1$ ) ja selle kolmnurga külgede projektsioonid  $x$ -telje peal (s. o. nende külgede otsade projektsioonide vahelisi  $x$ -telje tükisid

eelmise otsa projektsioonist järgmise omani)  $P_1'P_2'$  jne., tõendada, et iga hulknurga  $P_1P_2\dots P_n$  külgede projektsioonide summa  $x$ -telje peal on null, s. o.

$$P_1'P_2' + P_2'P_3' + \dots + P_{n-1}'P_n' + P_n'P_1' = 0.$$

H. 39. Tõendada, et kahe punkti vahelise kauguse  $P_1P_2$  projektsioon mingi sirge joone (näiteks  $x$ -telje) peal on ühevõrdne selle murdjoone  $P_1Q_2Q_3\dots Q_nP_2$  tükide projektsioonide summaga, mis algab esimeses punktis  $P_1$  ja lõpeb teises  $P_2$ , s. o. et on [H 38]

$$P_1'P_2' = P_1'Q_2' + Q_2'Q_3' + \dots + Q_n'P_2'.$$

H. 40. Silmaspidades, et nurga koosinuseks nimetatakse selle nurga ühe külje ühe mõõdu pikkuse tüki projektsiooni pikkuse arvu teise külje peal ja et sellepärast on ühe sirge joone mingi tüki projektsiooni pikkus teise joone peal nimelt selle tüki pikkus korrutatud nende joonte vahelise nurga koosinusega, tõendada, et sirge joone *Hesse* normaalse võrrandi pahem pool on kolmnurga  $OP'P$  külgede projektsioonide summa selle joone ristjoone  $p$  peal, kui on  $P=(x, y)$  joone  $s$  mingi punkt ja  $P'$  selle punkti projektsioon  $x$ -telje peal.

H. 41. Tõendada, et siis, kui sirge joone  $s$  peal on kaks punkti  $P_1=(x_1, y_1)$  ja  $P_2=(x_2, y_2)$  nii, et on  $|P_1P_2| = |OX|$ , on

$$x_2 = x_1 + \cos \hat{x}s = x_1 + a \text{ ja } y_2 = y_1 + \cos \hat{y}s = y_1 + \beta.$$

H. 42. Projektides sirge joone

$$s \equiv ax + by + c = 0$$

ühe mõõdu pikkuse tüki  $P_1P_2$  asemel murdjoone  $P_1(x_2, y_1)P_2$  [H 39] teise sirge joone

$$s' \equiv a'x + b'y + c' = 0$$

peale, tõendada selle kahe joone vahelise nurga koosinuse valem

$$\begin{aligned} \cos \hat{s}s' &= a \cdot \cos \hat{x}s' + \beta \cdot \cos \hat{y}s' = aa' + \beta\beta' = \\ &= \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a'^2 + b'^2}} \end{aligned}$$

16

ja sellest valemist tuletada selle kahe joone ristseisu tunnus.

**16. Bilineaarne võrrand kahe paari tundmatutega.** Loomulikult vahelülks esimese ja teise astme võrrandite vahel kahe tundmatuga on bilineaarne võrrand kahe paari tundmatutega. Nii nimetatakse võrrandit kahe paari tundmatutega  $x, y$  ja  $x', y'$ , mis on esimese astme võrrandiks ehk lineaarseks võrrandiks kummagi paari tundmatutele, kui teise paari tundmatud

loetakse tuntud arvudeks. Bilineaarses võrrandis on kordajaid 9, sest kui see võrrand saab siis lineaarseks võrrandiks  $ax + by + c = 0$ , kui seal  $x'$  ja  $y'$  loetakse tuntud arvudeks, siis võib arvudel  $a$ ,  $b$  ja  $c$  olla liige tundmatuga  $x'$  igalühel oma kordajaga, niisama liige tundmatuga  $y'$  jälle igalühel oma kordajaga ja viimaks veel vabaliige jälle igalühel oma. Et neid kordajaid oleks kergem meeles pidada, kuhu keegi nendest kuulub, selleks kirjutatakse nendele juurde arv 1 selle täheks, et see kordaja kuulub esimese tundmatu  $x$  kordajasse, ja kui ta seal on veel teise paari esimese tundmatu  $x'$  kordajaks, siis kirjutatakse tema juurde veel teine kord arv 1, nii et saab  $a_{11}$  ( $a$  üks üks). Niisama kirjutatakse teise tundmatu  $y$  kordajasse kuulumise täheks arv 2 ja vabaliikme täheks arv 0. Nii saab kahe paari tundmatutega bilineaarne võrrand täielikul kujul (kui ta kirjutame kolmerealiselt)

$$\begin{aligned} & (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{10})x + \\ & + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{20})y + \\ & + a_{01}x' + a_{02}y' + a_{00} = 0 \end{aligned} \quad 17$$

Harjutus 43. Kirjutada numbriline bilineaarne võrrand (s. o. võtta tähtede  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  jne. asemele numbrilised arvud, näiteks  $a_{11} = 2$ ,  $a_{12} = -5$  jne.). Avada selles võrrandis sulud ja võtta siis sulgude taha  $x'$  ja  $y'$ .

Märkus. Bilinearse võrrandi kolmerealisest kirjutusest paistab silma kolme realine ja kolme veeruline kordajate tabel. Selle tabeli determinanti [13 M 2] nimetatakse selle bilineaarse võrrandi determinandiks ja ta kirjutatakse sellesama tähega suurelt, mis on võetud kordajate jaoks, s. o. siin tähega  $A$ , nii et on

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{vmatrix}$$

Kui on  $a_{12} = a_{21}$ ,  $a_{10} = a_{01}$  ja  $a_{20} = a_{02}$ , siis nimetatakse see determinant ja bilineaarne võrrand ise sümmeetriliseks. Meie käsitame siin ainult sümmeetrilisi bilineaarseid võrrandid kahe paari tundmatutega, võttes nende geomeetrilise tähenduse selgituseks mõned näited ja tutvudes nende juures esile tulevate tähtsamate mõistetega.

H. 44. Kirjutada sümmeetriline bilineaarne võrrand kahe paari tundmatutega  $x$ ,  $y$  ja  $x'$ ,  $y'$ , anda seal kord ühele tundmatute paarile mingid väärtused, teine kord teisele tundmatute paarile need samad väärtused ja võrrelda saadud kahte kahe tundmatuga võrrandit.

1) Näited. Kui võrrandis

$$(1) \quad x'x + y'y + 1 = 0$$

(kus on  $a_{11} = a_{22} = a_{00} = 1$  ja  $a_{12} = a_{10} = a_{21} = a_{20} = a_{01} = a_{02} = 0$ ) on kumbki paar tundmatuid ühe tasapinna punktide koordinaadid, siis esitab see võrrand punkt  $(x', y') = (0; 1)$  korral (s. o. kui on  $x' = 0$  ja  $y' = 1$ ) joone  $0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 = 0$  ehk  $y = -1$ , punkt  $(x', y') = (1; 1)$  korral joone  $x + y + 1 = 0$ , punkt  $(x', y') = (2; 1)$  korral joone  $2x + y + 1 = 0$  jne. igale punktile  $(x', y')$  oma vastava joone  $ax + by + c = 0$ , kus on  $a = x'$ ,  $b = y'$  ja  $c = 1$ . Arvudele  $x'$  ja  $y'$  ainult positiivseid täisarvulisi väärtusi 1 kuni  $n$  andes saame siin juuresoleva tabeli

Niisamasuguse tabeli punktide ja nende

$x'$	$y'$	$a$	$b$	$c$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	$n$	0	$n$	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$n$	$n$	$n$	1

vastavate joonte kohta saame võrrandist

$$(2) \quad x'x + y'y - 1 = 0$$

(kus on  $a_{11} = a_{22} = 1$ ,  $a_{00} = -1$  ja  $a_{ik} = 0$ , kui on  $i \neq k$ ) - ainult viimase veeru vastupidiste märkidega, ja ka võrrandist

$$(3) \quad x'x - y'y - 1 = 0$$

(kus on  $a_{11} = 1$ ,  $a_{22} = a_{00} = -1$  ja  $a_{ik} = 0$ , kui on  $i \neq k$ ) -- ainult kahes viimases veerus vastupidised märgid.

Võrrandist

$$(4) \quad x - y'y + x' = 0$$

(kus on  $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{20} = a_{02} = a_{00} = 0$ ,  $a_{01} = a_{10} = 1$  ja  $a_{22} = -1$ ) saame tabeli

Võrrandist

$x'$	$y'$	$a$	$b$	$c$
0	0	1	0	0
0	1	1	-1	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	$n$	1	$-n$	0
1	0	1	0	1
1	1	1	-1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$n$	1	$-n$	$n$

$$(5) \quad (2x' + 3y' + 4)x + \\ + (3x' + y' + 5)y + \\ + 4x' + 5y' + 6 = 0$$

(kus on  $a_{11} = 2$ ,  $a_{12} = a_{21} = 3$ ,  $a_{10} = a_{01} = 4$ ,  $a_{22} = 1$ ,  $a_{20} = a_{02} = 5$  ja  $a_{00} = 6$ ) saame iga antud punkti  $(x', y')$  korral joone  $ax + by + c = 0$ , kus on

$$a = 2x' + 3y' + 4, \quad b = 3x' + y' + 5 \text{ ja} \\ c = 4x' + 5y' + 6.$$

Nii saame igast bilineaarsest võrrandist [V 17] (siis, kui kolmel võrrandil  $a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0$ ,  $a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = 0$  ja  $a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0$  ei ole ühist lahendust) iga antud punkti  $(x', y')$  korral joone  $ax + by + c = 0$ , kus on

$$\begin{aligned} a &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{10}, & b &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{20} \text{ ja} \\ c &= a_{01}x' + a_{02}y' + a_{00} \end{aligned} \quad 18$$

Niisama saame ka sellest bilineaarsest võrrandist igale antud joonele  $ax + by + c = 0$  leida punkti  $(x', y')$ , mille korral sellest bilineaarsest võrrandist see antud joon saaks. Näib, nagu oleks meil viimases valemis  $x'$  ja  $y'$  jaoks (antud  $a$ ,  $b$  ja  $c$  järgi) koguni kolm võrrandit. Aga need võrrandid ei kõlba  $x'$  ja  $y'$  leidmiseks otsekohe, sest iga võrrandi kõiki liikmeid võib ju korrutada mis arvuga tahes (peale nulli) ja sellepärast ei tarvitse antud võrrandis  $ax + by + c = 0$  arvud  $a$ ,  $b$  ja  $c$  olla nimelt need, mis saaksid valemitest 18, kui sinna pandaks otsitavad  $x'$  ja  $y'$  väärtused, vaid nad peavad igatahes olema nendega proportsionaalsed, s. o.

$$\begin{aligned} \frac{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{10}}{a} &= \frac{a_{21}x' + a_{22}y' + a_{20}}{b} = \\ &= \frac{a_{01}x' + a_{02}y' + a_{00}}{c} \end{aligned} \quad 19$$

Siit saamegi (kui ei ole  $a$ ,  $b$  ja  $c$  kõik kolm korraga nullid) kaks esimese astme võrrandit otsitava punkti koordinaatide jaoks. Kui arvudest  $a$ ,  $b$  ja  $c$  on mõni null, siis peab valemis 19 selle nullilise nimetajaga murrul ka lugeja null olema (nagu see järgneb valemist 18, kus  $a$ ,  $b$  ja  $c$  peavad olema proportsionaalsed valem 19 omadega).

Sellega määrab iga bilineaarne võrrand [V 17] kahe paari tundmatutega siis, kui need tundmatud on ühe tasapinna punktide koordinaadid ja kui kolmel võrrandil  $a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0$ ,  $a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = 0$  ja  $a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0$  ei ole ühist lahendust, üksühese vastavuse selle tasapinna punktide ja sirgete

joonte vahel. Seda vastavust nimetatakse üldiselt korrelatiivsuseks tasapinnal.

Harjutus 45. Teha võrrandite  $x'x + y'y + 1 = 0$ ,  $x'x - y'y - 1 = 0$ ,  $x - y'y + x' = 0$  ja  $(2x' + 3y' + 4)x + (3x' + y' + 5)y + 4x' + 5y' + 6 = 0$  igäühe jaoks oma joonis, kus oleks näidatud mitu punkti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  jne. ja nende vastavad jooned  $a$ ,  $b$ ,  $c$  jne.

2) Polaarne süsteem. Kui sümmeetrilise bilineaarse võrrandiga  $V$  17 (kus on  $a_{ik} = a_{ki}$ ) mingile punktile  $(x_1, y_1)$  vastavaks määratud joonel võtame mingi punkti  $(x_2, y_2)$ , nii et on

$$(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{10})x_2 + (a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{20})y_2 + a_{01}x_1 + a_{02}y_1 + a_{00} = 0.$$

siis saab (sellepärast, et on  $a_{12} = a_{21}$  jne. iga  $a_{ik} = a_{ki}$ ) selles võrrandis sulgusid avades ja siis  $x_1$  ja  $y_1$  sulgude taha võttes

$$(a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{10})x_1 + (a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{20})y_1 + a_{01}x_2 + a_{02}y_2 + a_{00} = 0.$$

Sellega läheb sümmeetrilise bilineaarse võrrandiga määratud vastavuses ühel tasapinnal mingile punktile  $(x_1, y_1)$  vastava joone iga punkti  $(x_2, y_2)$  vastav joon esimesest punktist  $(x_1, y_1)$  läbi (nagu see siis tegelikult silma paistab, kui hakkame ühe sirge joone punktidele vastavaid jooni tõesti joonistama). Sellepärast nimetatakse sümmeetrilise bilineaarse võrrandiga määratud vastavuses (korrelatiivsuses) ühel tasapinnal iga punkti tema vastava joone pooluseks (Kreeka sõnast *πόλος* — telg) ja joont oma vastava punkti polaariks. Sest kui punkt läheks edasi ühte sirget joont mööda, siis pöörduks selle punkti polaar selle joone pooluse nagu telje ümber. Pooluste ja polaaride vastavust nimetatakse ka polaarseteks süsteemiks ja siis seda bilineaarset võrrandit, mis polaarsete süsteemi määrab, ka polaarsete süsteemi võrrandiks.

Harjutus 46. Eelmise harjutuse viimase võrrandiga määratud polaarsetes süsteemis leida ühele punktile (näiteks punktile  $(1;1)$ ) polaar, võtta selle polaari peal mitu punkti ja joonistada nende punktide polaarid.

3) Ebakiir ja tema poolus ehk keskpunkt. Bilineaarse võrrandiga määratud vastavus ühe tasapinna punktide ja sirgete joonte vahel saab täielik ailes siis, kui hariliku punkti ja kiire mõistetele võetakse lisaks veel ebapunkti ja ebakiire mõisted.

Kui võrrandis  $ax+ay+c=0$  on  $a=0$  ja ka  $b=0$  aga  $c$  ei ole null, siis on see võrrand võimatu. Sellest võrrandist kõneldakse siiski kui niisugusest, millele ligineved võrrandid  $ax+by+c=0$  selles võrrandite järjes (näiteks

$$2x+y+1=0, \quad x+\frac{1}{2}y+1=0, \quad \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+1=0, \dots, \\ \frac{1}{n}x+\frac{1}{n+1}y+1=0, \dots),$$

kus kõigil võrranditel on seesama  $c \neq 0$ , aga  $a$  ja  $b$  igal järgmisel võrrandil (absoluutselt) vähemad kui eelmisel, ja kus saab näidata võrrandit, millel on  $a$  ja  $b$  (absoluutselt) vähemad kui mingi antud arv  $\varepsilon$ . Vaadeldes niisuguses võrrandite järjes iga üksiku võrrandiga esitatud joont, märkame, et iga järgmise võrrandiga esitatud joon seisab alguspunktist kaugemal kui eelmise võrrandi oma, sest alguspunkti  $(0;0)$  kaugus joonest  $ax+by+c=0$  on ju  $\frac{c}{\sqrt{b^2+a^2}}$  [H 30] ja murd suureneb kui ta lugeja jääb selleksamaks, aga nimetaja väheneb.

Niisuguse võrrandite järje loomulikuks lõpuks olekski võimatu võrrand

$$ax+by+c=0, \text{ kus on } a=0=b, \quad c \neq 0 \quad 20$$

ja see peaks esitama sirge joone, mis seisaks alguspunktist kaugemal kui kõik teised. Kuid hariliku ruumi mõiste järgi ei ole niisugust joont. Sellest võimatust võrrandist kõneldakse siiski — nimetades teda ebakiire võrrandiks —, sest see võrrand esineb mõnedes vastavustes (nagu näite (1) tabelis esimesel kohal).

Kui polaarses süsteemis on punkt, mille polaarile saab valémitest 18  $a=0$  ja  $b=0$ , aga  $c \neq 0$  (nagu näidetes (1) — (3) alguspunkt), siis nimetatakse seda punkti — ebakiire poolust — selle polaarise süsteemi keskpunktiks. Keskpunkti koordinaadid kirjutatakse sagedasti tähtega  $x_0, y_0$ . Nende jaoks saame valemist 18 (või otsekohe polaarise süsteemi võrrandist) võrrandid

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} &= 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} &= 0 \\ (a_{01}x_0 + a_{02}y_0 + a_{00} &\neq 0) \end{aligned} \quad 21$$

kust leiame

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -a_{10} & a_{12} \\ -a_{20} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-a_{10}a_{22} + a_{12}a_{20}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \quad \text{ja}$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{10} \\ a_{21} & -a_{20} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-a_{11}a_{20} + a_{10}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}.$$

(Need väga tuttavad lahendused kahele võrrandile kahe tundmatuga on siin veel kirjutatud determinantide abil nimelt ettevalmistuseks kolme võrrandi lahendamisele).

Numbriliseks näiteks on polaarsel süsteemil (5)

$$(2x' + 3y' + 4)x + (3x' + y' + 5)y + 4x' + 5y' + 6 = 0$$

keskpunkti koordinaadid

$$x_0 = \frac{-4 \cdot 1 + 3 \cdot 5}{2 \cdot 1 - 3^2} = -\frac{11}{7} \quad \text{ja} \quad y_0 = \frac{-2 \cdot 5 + 4 \cdot 3}{-7} = -\frac{2}{7}.$$

Selle punkti — ebakiire pooluse — nimetamine keskpunktiks on osalt juba sellega põhjendatud, et alguspunkti küllalt kaugel seisvatel joontel on kõigil poolused selle punkti ligemas ümbruses ja sellepärast lähivad alguspunkti küllalt kaugel seisvatel punktidel kõigil polaarid selle punkti ligemast ümbrusest läbi.

Harjutus 47. Eelmise harjutuse polaarses süsteemis võtta mitu punkti, millel üks koordinaat oleks (absoluutselt) sajast suurem, leida nende punktide polaarid ja nende polaaride kaugused keskpunktist  $\left(-\frac{11}{7}, -\frac{2}{7}\right)$ .

Niisama võtta seal mitu kiirt, mis lõikaksid telgi alguspunkti üle saja mõõdu eemal, leida nende kiirte poolused ja nende pooluste kaugused keskpunktist.

4) Ebapunkt ja tema polaar ehk diameeter. Kui mingi antud joone võrrandil  $ax + by + c = 0$  (kus ei ole  $b = 0$  ega  $c = 0$ , näiteks võrrandil  $x + 2y - 1 = 0$ , jagame kõik liikmed arvuga  $x$ , nii et saame

$$a + b \frac{y}{x} + \frac{c}{x} = 0 \quad (\text{näiteks } 1 + 2 \frac{y}{x} - \frac{1}{x} = 0)$$

ja vaatleme siis sellel joonel punktide järge  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$

(näiteks  $(1;0)$ ,  $(2, -1/2)$ , ...,  $(n, \frac{1-n}{2})$ , ...), kus igal järgmisel on esimene koordinaat suurem eelmise omast ja kus saab näidata punkti, millel esimene koordinaat on suurem mis tahes antud arvust  $a$ , siis märkame, et igal järgmisel punktil on teise koordinaadi jagatis esimesega, s. o.

$$\frac{y}{x} = -\frac{a}{b} - \frac{c}{bx},$$

ligem selle sirge joone tõusule  $m = -\frac{a}{b}$  ja punktidel, millel on esimene koordinaat küllalt suur, läheb see jagatis kui vähe tahes lahku sellest tõusu arvust (sest kui murrul  $\frac{c}{bx}$  on lugeja  $c$  mingi antud arv, siis ligineb see murd seda enam nullile, mida suuremaks saab tema nimetaja).

Selle punktide järje loomulikuks lõpuks oleks joone  $ax+by++c=0$  see punkt, mille teise koordinaadi jagatis esimesega oleks nimelt

$$\frac{y}{x} = -\frac{a}{b} = m.$$

(Sellesama valemi, ainult ümberasetatud kujul

$$\frac{x}{y} = -\frac{b}{a} = \frac{1}{m},$$

saame ka siis, kui antud võrrandis ei ole  $a=0$  ega  $c=0$  ja tema kõik liikmed jagame arvuga  $y$  ja vaatleme nende punktide järge, millel kasvavad selle jagaja väärtused.) Sellel punktil peaks olema üks koordinaat suurem kui kõigil muil selle sirge joone punktidel ja ta seisaks siis alguspunktist kaugemal kui kõik muud selle joone punktid. Hariliku ruumi mõiste järge ei ole sirgel joonel niisugust punkti. Temast kõneldakse siiski kui ebapunktist, sest siis on vastavusi käsitada hõlpsam. Öeldakse, et sirge joone ebapunktis on see koordinaat lõpmatus ( $\infty$ ), mis pidi olema suurem selle joone kõigi teiste punktide omast. Sellega on joone  $ax+by+c=0$  ebapunktis

$$x = \infty \text{ ja } \frac{y}{x} = -\frac{a}{b} = m$$

$$\text{või } y = \infty \text{ ja } \frac{x}{y} = -\frac{b}{a} = \frac{1}{m}$$

Selle ebapunkti valemil järgi saab vahet teha nende joonte ebapunktide vahel, mis lähevad lahku oma tõusu poolest, aga ei saa vahet teha nende joonte ebapunktide vahel, millel on ühine tõus (mis on oma vahel paralleelsed). Sellepärast öeldakse, et paralleelsetel joontel on ühine ebapunkt.

Polaarses süsteemis tuleb ühise tõusuga ehk paralleelsetel joontel lugeda ebapunkt ühiseks veel sellepärast, et paralleelsete joonte küllalt suurte koordinaatidega punktidel on polaariid kõik kui ligidal tahes ühele ainsale joonele. Sest jagades polaarse süsteemi võrrandi kõik liikmed arvuga  $x'$  või  $y'$ , nii et saame

$$\left(a_{11} + a_{12} \frac{y'}{x'} + \frac{a_{10}}{x'}\right)x + \left(a_{21} + a_{22} \frac{y'}{x'} + \frac{a_{20}}{x'}\right)y + a_{01} + a_{02} \frac{y'}{x'} + \frac{a_{00}}{x'} = 0$$

või

$$\left(a_{11} \frac{x'}{y'} + a_{12} + \frac{a_{10}}{y'}\right)x + \left(a_{21} \frac{x'}{y'} + a_{22} + \frac{a_{20}}{y'}\right)y + a_{01} \frac{x'}{y'} + a_{02} + \frac{a_{00}}{y'} = 0,$$

märkame, et siis, kui on punkt  $(x', y')$  mingi sirge joone peal, mille tõus on  $m$ , ja kui on  $x'$  või  $y'$  küllalt suur, on nendes võrrandites jagatis  $\frac{y'}{x'}$  kui ligidal tahes arvule  $m$ , või jagatis  $\frac{x'}{y'}$  kui ligidal tahes arvule  $\frac{1}{m}$ , kuna (küllalt suure arvuga  $x'$  või  $y'$  jagatud) liikmed kordajatega  $a_{10}$ ,  $a_{20}$  ja  $a_{00}$  on kui ligidal tahes nullile ja sellega need võrrandid ise kui ligidal tahes võrrandile

$$(a_{11} + a_{12} m)x + (a_{21} + a_{22} m)y + a_{01} + a_{02} m = 0$$

$$\text{ehk } \left(\frac{a_{11}}{m} + a_{12}\right)x + \left(\frac{a_{21}}{m} + a_{22}\right)y + \frac{a_{01}}{m} + a_{02} = 0$$

23

Seda võrrandit tuleb lugeda nendel paralleelsetel joontel, mille tõus on  $m$ , nende ühise ebapunkti polaari võrrandiks, Ebapunkti polaari nimetatakse polaarse süsteemi diameetriks. Näiteks on  $x$ -teljega paralleelsetel joontel tõus  $m=0$  ja sellega nende ühise ebapunkti polaari  $a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0$ , ja jälle  $y$ -teljega paralleelsetel joontel tõusu ümberpööratud väärtus  $\frac{1}{m} = 0$  ja sellega nende ühise ebapunkti polaari  $a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = 0$ .

Diameetrid  $a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0$  ja  $a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = 0$  lähivad läbi keskpunkti, sest nende võrrandid ongi keskpunkti koordinaatide võrrandid [V 21]. Iga diameeter läheb läbi keskpunkti, sest keskpunkti koordinaadid rahuldavad diameetri võrrandit [V 23], nagu see kohe selgub, kui sinna asetame  $x = x_0$  ja  $y = y_0$ , avame sulud ja võtame sulgude taha  $m$ , nii et saab

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} + m(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}) = 0.$$

Sellepärast saab siis, kui on teada keskpunkti koordinaadid, kirjutada diameetri võrrandi lihtsamal kujul  $a'(x - x_0) + b'(y - y_0) = 0$  (mida rahuldavad tõesti keskpunkti koordinaadid ja kus on kirjutatud kordajad priimidega selleks, et vahet teha nende ja selle joone võrrandi kordajate vahel, mille ebapunkti polaariks see diameeter on) või siis, kui on veel teada diameetri tõus  $m' = -\frac{a}{b}$ , veelgi lihtsamal kujul  $y - y_0 = m'(x - x_0)$ .

Harjutus 48. Eelmise harjutuse polaarses süsteemis joonistada  $x$ - ja  $y$ -telje ebapunktide polaarid  $d$  ja  $e$ .

5) Kaaskiired ja kaasdiameetrid. Sirge joone iga punkti polaari nimetatakse selle joone kaaskiireks, ja sellepärast tema ebapunkti polaari selle joone kaasdiameetriks. Diameetri

$$(a_{11} + a_{12}m)x + (a_{21} + a_{22}m)y + a_{01} + a_{02}m = 0$$

iga punkti  $(x', y')$  polaari *in on selle joone tõus, mille pool on ebapunkt.*

$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{10})x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{20})y + a_{01}x' + a_{02}y' + a_{00} = 0$   
on tõus

$$-\frac{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{10}}{a_{21}x' + a_{22}y' + a_{20}}$$

nimelt  $m$ , sest asetades diameetri võrrandisse tema selle punkti koordinaadid  $x = x'$  ja  $y = y'$ , avades sulud ja võttes sulgude taha  $m$ , saame

$$a_{11}x' + a_{12}y' + a_{10} + m(a_{21}x' + a_{22}y' + a_{20}) = 0,$$

kust järgneki nimetatud tõusu väärtus. Sellega on antud diameetri kaaskiired kõik oma vahel paralleelsed ja nimelt selle ebapunktiga, mille polaariks on see diameeter, ja nende kaaskiirte hulgas olevale diameetrile — oma kaasdiameetrile — on antud diameeter omakord kaasdiameetriks.

Harjutus 49. Eelmises harjutuses saadud diameetritele  $d$  ja  $e$  joonistada mitu kaaskiirt ja ka nende kaasdiameetrid  $d'$  ja  $e'$ .

6) Teljed. Kui polaarse süsteemi diameeter on risti oma kaaskiirtega, siis nimetatakse seda diameetrit polaarse süsteemi

teljeks. Kui diameetri tõusu  $-\frac{a_{11} + a_{12}m}{a_{21} + a_{22}m}$  (tema võrrandist V 23)

kirjutame tähega  $m'$ , siis on diameetri tõusu  $m'$  ja tema kaaskiirte tõusu  $m$  korrutis nende ristseisu korral  $-1$  (nagu see ristseisu tunnusest  $aa' + bb' = 0$  siis silma paistab, kui selle jagame arvuga  $bb'$

ja asetame sinna  $m = -\frac{a}{b}$  ja  $m' = -\frac{a'}{b'}$ ), s. o.

$$-\frac{a_{11} + a_{12}m}{a_{21} + a_{22}m} \cdot m = -1,$$

kust saame

$$\boxed{a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{21} = 0} \quad 24$$

ehk (sellepärast, et on  $a_{12} = a_{21}$ )

$$m_1 = \frac{1}{2a_{12}} [(a_{22} - a_{11}) + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}] \text{ ja}$$

$$m_2 = \frac{1}{2a_{12}} [(a_{22} - a_{11}) - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}].$$

Siit paistab silma, et igal polaarsel süsteemil on teljed, sest saadud  $m$  väärtused on nende telgede või telgede kaaskiirte tõusu väärtused ja need on alati reaalsed sellepärast, et juuritav on siin kahe ruudu summa ja sellega alati positiivne (kui on  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  ja  $a_{12}$  kõik reaalsed arvud).

Kui on

$$\boxed{a_{12} = 0 \text{ ja } a_{11} = a_{22}} \quad 25$$

siis on  $m = \frac{0}{0}$ , s. o.  $m$  väärtus määramata, nii et iga paar kaaskiirte diameetriid on telgedeks. Muidu on telgi ainult üks paar, sest iga telje tõusu arv  $m$  peab rahuldama diameetri ja tema kaaskiirte ristseisu tunnusest saadud võrrandit V 24 ja sellel on ainult kaks lahendust  $m_1$  ja  $m_2$ .

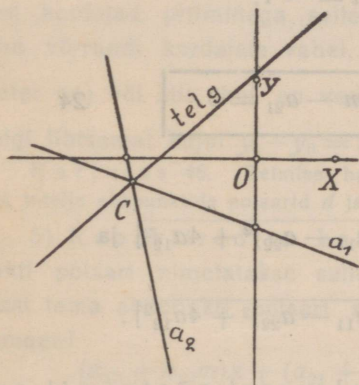
Näiteks saame polaarsel süsteemil

$$(2x' + 3y' + 4)x + (3x' + y' + 5)y + 4x' + 5y' + 6 = 0$$

telgede tõusu jaoks võrrandi  $3m^2 + m - 3 = 0$ , nii et on  $m_1 = \frac{1}{6}(\sqrt{37}-1)$  ja  $m_2 = -\frac{1}{6}(\sqrt{37}+1)$  ja siis ühe telje võrrand diameetri võrrandi kõige lihtsama kuju järgi [4]) (sellepärast, et siin on  $x_0 = -\frac{11}{7}$  ja  $y_0 = -\frac{2}{7}$ ) nimelt

$$y + \frac{2}{7} = \frac{1}{6}(\sqrt{37}-1)\left(x + \frac{11}{7}\right).$$

Siit leiame selle telje lõikepunkti  $y$ -teljega, kus on  $x=0$  ja siis  $y = (11\sqrt{37}-23):42 = 43,9:42 = 1,04$ , nii et saame kohe joonistada selle telje [J 14]. (Teine telg on muidugi sellega risti).



Joonis 14.

7) Asümptoodid. Kui polaarse süsteemi diameeter on iseene kaasdiameetrik, siis nimetatakse seda diameetrit selle polaarse süsteemi asümptoodiks. Asümptoodi kui diameetri tõus

$$m' = -\frac{a_{11} + a_{12}m}{a_{21} + a_{22}m}$$

peab siis olema samane tema kaasdiameetri tõusuga  $m$ , s. o. peab olema

$$m = -\frac{a_{11} + a_{12}m}{a_{21} + a_{22}m}$$

ehk (sellepärast, et on  $a_{12} = a_{21}$ )

$$\boxed{a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0}$$

26

kust saame

$$m_1 = \frac{1}{a_{22}}(-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}) \text{ ja } m_2 = \frac{1}{a_{22}}(-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}).$$

Siit paistab silma, et

(1) polaarsel süsteemil ei ole asümptooti, kui on

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0,$$

sest siis on asümptoodi tõusu arv juuritav arv negatiivne;

(2) polaarsel süsteemil on üks asümptoodi tõus, kui on

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0,$$

sest siis on  $m_1 = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = m_2$ , ja

(3) polaarsel süsteemil on kaks asümptooti, kui on

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0.$$

Näiteks on eelmise näite polaarsel süsteemil

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7, \text{ nii et on } m_1 = -3 + \sqrt{7} \text{ ja } m_2 = -3 - \sqrt{7}$$

ja siis asümptoodid diameetri võrrandi kõige lihtsama kuju järgi

$$y + \frac{2}{7} = (\sqrt{7} - 3)\left(x + \frac{11}{7}\right) \text{ ja } y + \frac{2}{7} = (-3 - \sqrt{7})\left(x + \frac{11}{7}\right).$$

Nende asümptootide lõikepunktidel  $y$ -teljega (kus on  $x = 0$ ) on esimesel asümptoodil  $y = -0,84$  ja teisel  $y = -9,16$ , nii et kohe saame need asümptoodid  $a_1$  ja  $a_2$  ka joonistada [J 14].

Harjutus 50. Võttes uue numbrilise sümmeetrilise bilineaarse võrrandi, kus ei oleks  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ , joonistada selle võrrandiga määratud polaarsel süsteemil teljed ja asümptoodid.

H. 51. Tõendada, et teljed on asümptootide vaheliste nurkade poolitajad.

$$[V 24 \text{ annab } \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{2m}{1 - m^2} = \frac{2 \tan \varphi}{1 - \tan^2 \varphi} = \tan 2\varphi, V 26:]$$

$$\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2} = \frac{\tan \hat{x}a_1 + \tan \hat{x}a_2}{1 - \tan \hat{x}a_1 \tan \hat{x}a_2} = \tan(\hat{x}a_1 + \hat{x}a_2).]$$

8) Kui polaarse süsteemi keskpunkt on ebapunkt, s. o. kui keskpunkti koordinaatide võrranditest [V 21] saab nende koordinaatide ühiseks nimetajaks

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0,$$

aga lugejad  $\begin{vmatrix} -a_{10} & a_{12} \\ -a_{20} & a_{22} \end{vmatrix}$  ja  $\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{10} \\ a_{21} & -a_{20} \end{vmatrix}$  ei saa mõlemad nullid, siis

on sellel polaarsel süsteemil kõik diameetrid ehk ebapunktide polaarid ühise tõusu arvuga  $m' = -\frac{a_{11}}{a_{21}}$  ja sellega oma vahel paralleelsed. Sest siis saame ühevõrduse

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \text{ ehk } a_{11}a_{22} = a_{12}^2$$

põhjal lihtsustada diameetri võrrandi

$$(a_{11} + a_{12}m)x + (a_{21} + a_{22}m)y + a_{01} + a_{02}m = 0,$$

korrutades arvuga  $a_{12}$  (kui see ei ole null), nii et saab

$$(a_{11}a_{12} + a_{12}^2m)x + (a_{12}^2 + a_{12}a_{22}m)y + (a_{01} + a_{02}m)a_{12} = 0$$

ehk

$$(a_{11}a_{12} + a_{11}a_{22}m)x + (a_{12}^2 + a_{12}a_{22}m)y + (a_{01} + a_{02}m)a_{12} = 0,$$

ja jagades nüüd arvuga  $a_{12} + a_{22}m$ :

$$a_{11}x + a_{12}y + \frac{(a_{01} + a_{02}m)a_{12}}{a_{12} + a_{22}m} = 0, \text{ kui on } a_{12} \neq 0 \quad 27$$

Siit näeme ka, et siis, kui polaarsel süsteemil on  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$  ehk  $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$ , on tal üks ainus telg. Sest selles valemis

on arv  $m' = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$  nimelt kõigi diameetrite ühine tõusu arv ja

arv  $m$  iga üksiku diameetri kaaskirte tõusu arv, nii et siis, kui diameeter on telg (s. o. risti oma kaaskirtega), on  $mm' = -1$  ehk

$$m = -\frac{1}{m'} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{21}}$$

ja sellega on ainsaks telje võrrandiks

$$a_{11}x + a_{12}y + c = 0$$

$$\left( \text{kus on } c = \frac{(a_{01} + a_{02} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}})a_{12}}{a_{12} + a_{22} \frac{a_{12}}{a_{11}}} = \frac{a_{01}a_{11} + a_{02}a_{12}}{a_{11} + a_{22}} \right) \quad 28$$

Kui on  $a_{12} = 0$ , siis on ka kas  $a_{22} = 0$  või  $a_{11} = 0$ . Esimesel juhusel on veel  $m = 0$  ja saab telje võrrand [V 23]  $a_{11}x + a_{01} = 0$ .

Teisel juhusel on jälle veel  $\frac{1}{m} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = 0$  ja siis telje võrrand [V 23]  $a_{22}y + a_{02} = 0$ .

Sellel polaarsel süsteemil saame kergesti leida tipu, s. o. telje selle punkti, mis on oma polaari peal. Tipu koordinaadid — kirjutame nad  $x_0$  ja  $y_0$  — peavad rahuldama telje võrrandit ja tipu polaari võrrandit, s. o. peab olema  $a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + c = 0$  ja  $(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x_0 + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y_0 + a_{01}x_0 + a_{02}y_0 + a_{00} = 0$  ehk  $a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00} = 0$ . See viimane võrrand on teise astme võrrand, aga ühevõrduse

$$a_{11}a_{22} = a_{12}^2 \text{ pärast on}$$

$$a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 = \frac{(a_{11}x_0 + a_{12}y_0)^2}{a_{11}} = \frac{c^2}{a_{11}}$$

Sellepärast saame siis, kui  $\frac{c^2}{a_{11}} + a_{00} = \frac{c^2 + a_{00}a_{11}}{a_{11}}$  asemele kirjutame  $2c'$ , tipu koordinaatide jaoks võrrandid

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + c = 0 \\ a_{01}x_0 + a_{02}y_0 + c' = 0 \\ \left( \text{kus on } c' = \frac{c^2 + a_{00}a_{11}}{2a_{11}} \right) \end{cases} \quad 29$$

Näiteks on polaarsel süsteemil

$$(2x' + 6y' + 1)x + (6x' + 18y' - 1)y + x' - y' + 1 = 0$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 2 \cdot 18 - 6^2 = 0$  ja siis tema telje võrrand

$$2x + 6y + \frac{(1-1 \cdot 3) \cdot 6}{6 + 18 \cdot 3} = 0 \text{ ehk } 10x + 30y - 1 = 0.$$

Tipu koordinaatide võrrandite jaoks on  $c = -\frac{1}{5}$  ja siis

$2c' = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + 1 = \frac{51}{50}$  ehk  $c' = \frac{51}{100}$  ja sellega need võrrandid

$$\begin{cases} 10x_0 + 30y_0 - 1 = 0 \\ 100x_0 - 100y_0 + 51 = 0, \end{cases}$$

kust saame

$$x_0 = \frac{-100 + 1530}{-1000 - 3000} = -0,3575 \text{ ja } y_0 = \frac{-510 - 100}{-4000} = 0,1525.$$

Harjutus 52. Leida teljed ja keskpunkt polaarsel süsteemil, kus on  $a_{12} = a_{10} = a_{20} = 0$  (aga  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  ja  $a_{00}$  ei ole ükski null), s. o.

$$a_{11}x'x + a_{22}y'y + a_{00} = 0.$$

Niisama leida telg ja tipp polaarsel süsteemil, kus on  $a_{11} = a_{12} = a_{20} = a_{00} = 0$  (aga  $a_{10}$  ja  $a_{22}$  ei ole nullid), s. o. polaarsel süsteemil

$$a_{10}x + a_{22}y'y + a_{01}x' = 0.$$

9) Tulipunktid ehk fookused ja nende polaarid ehk juhtjooned. Polaarses süsteemis tasapinnal on iga sirge joone peal kaaspunktide vastavus, sest selle joone peal on võimalik vaadelda igale punktile vastavana punkti, millest läheb esimese punkti polaar läbi ja mida sellepärast nimetatakse esimese punkti kaaspunktiks. Niisama on polaarses süsteemis tasapinnal igas kiirte kimbus (ühest punktist — kimbu keskpunk-

ist — läbiminevate kiirte kogus) kaaskiirte vastavus, sest selles kimbub on võimalik vaadelda igale kiirele vastavana kiirt, mille peal on selle kiire poolus ja mida sellepärast tuleb nimetada esimese kiire kaaskiireks. Kui polaarses süsteemis on kiirte kimpusid, kus iga kiir on risti oma kaaskiirega, siis nimetatakse nende kimpude keskpunktsid selle polaarise süsteemi tulipunktideks ehk fookusteks ja nende polaarid selle polaarise süsteemi juhtjoonteks.

Meie käsitame siin fookusi ja juhtjooni ainult sellel juhusel, kui polaarise süsteemi võrrand on lihtne, kas

$$(1) \quad a_{11}x'x + a_{22}y'y + a_{00} = 0$$

(kus ükski kordaja ega  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$  ei ole null) või jälle

$$(2) \quad a_{10}x + a_{22}y'y + a_{01}x' = 0$$

(kus ükski kordaja ei ole null, aga on  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ ).

Olgu otsitav fookus  $F = (x_0, y_0)$ . Siis on temast läbimineva kiire võrrand kõige lihtsamal kujul

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \text{ehk} \quad -mx + y + mx_0 - y_0 = 0.$$

Selle kiire ristkiirel on tõus  $m' = -\frac{1}{m}$  ja sellega tema võrrand, kui ta läheb läbi  $F$ ,  $m(y - y_0) = -x + x_0$  ehk  $x + my - x_0 - my_0 = 0$ . See ristkiir on fookuse korral esimese kiire kaaskiir, s. o. läheb läbi esimese kiire pooluse  $(x', y')$ , nii et on

$$x' + my' - x_0 - my_0 = 0.$$

Juhusel (1) on esimesel kiirel kui punkti  $(x', y')$  polaaril võrrand  $-mx + y + mx_0 - y_0 = 0$  samane võrrandiga (1), nii et on

$$\frac{a_{11}x'}{-m} = \frac{a_{22}y'}{1} = \frac{a_{00}}{mx_0 - y_0} \quad \text{ehk} \quad x' = \frac{-ma_{00}}{a_{11}(mx_0 - y_0)} \quad \text{ja} \quad y' = \frac{a_{00}}{a_{22}(mx_0 - y_0)}.$$

Asetades need  $x'$  ja  $y'$  väärtused viimasesse võrrandisse, saame

$$-\frac{ma_{00}}{a_{11}(mx_0 - y_0)} + \frac{ma_{00}}{a_{22}(mx_0 - y_0)} - x_0 - my_0 = 0 \quad \text{ehk}$$

$$-a_{11}a_{22}x_0y_0m^2 + [a_{00}(a_{11} - a_{22}) + a_{11}a_{22}(y_0^2 - x_0^2)]m + a_{11}a_{22}x_0y_0 = 0.$$

See võrrand peab rahuldatud olema, olgu temas  $m$  missugune tahes, s. o. olgu võetud kiir läbi fookuse mis tõusuga tahes. See on võimalik ainult siis, kui on  $m$  iga astme kordaja ja veel liige, kus  $m$  ei esine, kõik üksikult nullid.

Sellepärast saame fookuse koordinaatide  $x_0$  ja  $y_0$  jaoks võrrandid.

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}x_0y_0 &= 0 \\ a_{11}a_{22}(y_0^2 - x_0^2) + a_{00}(a_{11} - a_{22}) &= 0 \\ (\text{kui on } a_{11}x'x + a_{22}y'y + a_{00} &= 0) \end{aligned} \quad 30$$

Esimesest võrrandist järgneb kas  $x_0 = 0$  või  $y_0 = 0$  ja siis teisest võrrandist vastavalt kas  $y_0 = \pm \sqrt{\frac{a_{00} - a_{00}}{a_{11} - a_{22}}}$  või  $x_0 = \pm \sqrt{\frac{a_{00} - a_{00}}{a_{22} - a_{11}}}$ .

Sellest neljast lahendusest on ainult kaks reaalselt, sest teisel lahenduste paaril on juuritav arv teise oma vastupidise märgiga.

Jätame kõrvale selle juhuse, kus on arvud  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  ja  $a_{00}$  kõik positiivsed või kõik negatiivsed. Muul juhusel saame vahest märki muutes ja telgi ümbernimetades teha  $a_{00}$  negatiivseks ja  $a_{11}$  positiivseks ja kui selle juures saab ka  $a_{22}$  positiivseks, siis nimelt nii, et on  $a_{11} < a_{22}$ . Siis saavad reaalsed nimelt viimase paari

lahendused, sest siis on juuritava arvu teine liige  $-\frac{a_{00}}{a_{11}}$  positiivne ja absoluutselt suurem esimesest. (Näiteks tuleb võrrandil  $-2x'x - y'y + 1 = 0$  selleks kõigil liikmetel märk muuta ja  $x$ -telg nime-tada  $y$ -teljeks, nii et saame võrrandi  $x'x + 2y'y - 1 = 0$  ja selle võrrandiga esitatud polaarse süsteemi fookused  $F_1 = (\sqrt{0,5}; 0)$  ja  $F_2 = (-\sqrt{0,5}; 0)$ ).

Lüheduse jaoks kirjutatakse (siis, kui on  $a_{12} = a_{10} = a_{20} = 0$  ja  $-\frac{a_{00}}{a_{11}} > 0$ , ja  $a_{22} > 0$  korral veel  $a_{11} < a_{22}$ )

$$-\frac{a_{00}}{a_{11}} = a^2 \text{ ja } \sqrt{\frac{a_{00}}{a_{22}} + a^2} = e \quad 31$$

nii et fookused on  $F_1 = (e, 0)$  ja  $F_2 = (-e, 0)$ . (Täht  $e$  on võetud sõnast ekstsentrismus, mis tähendab keskpunkti lahku-minekut ja mille asemel öeldakse ka lahkkeskus.)

Juhusel, kui on  $a_{11} = a_{12} = a_{02} = a_{00} = 0$  ja sellega  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ , on esimesel kiirel võrrand  $-mx + y + mx_0 - y_0 = 0$ , tema pooluse  $(x', y')$  järgi samane võrrandiga (2), nii et on

$$\frac{a_{10}}{-m} = \frac{a_{22}y'}{1} = \frac{a_{01}x'}{mx_0 - y_0} \text{ ehk } x' = -\frac{mx_0 - y_0}{m} \text{ ja } y' = -\frac{a_{10}}{a_{22}m}.$$

Asetades need  $x'$  ja  $y'$  väärtused endisesse ristkiire võrrandisse  $x' + my' - x_0 - my_0 = 0$ , saame

$$-\frac{mx_0 - y_0}{m} - \frac{a_{10}}{a_{22}} - x_0 - my_0 = 0 \text{ ehk}$$

$$a_{22}y_0m^2 + (2a_{22}x_0 + a_{10})m - a_{22}y_0 = 0,$$

kust endisel viisil saame fookuse koordinaatide  $x_0$  ja  $y_0$  jaoks võrrandid

$$\begin{aligned} a_{22}y_0 &= 0 \\ 2a_{22}x_0 + a_{10} &= 0 \end{aligned} \quad 32$$

(kui on  $a_{10}x + a_{22}y'y + a_{01}x' = 0$ )

ja siit ainsa fookuse koordinaadid  $y_0 = 0$  ja  $x_0 = -\frac{a_{10}}{2a_{22}}$ . Lüheduse jaoks kirjutatakse (siis, kui on  $a_{11} = a_{12} = a_{20} = a_{00} = 0$ )

$$-\frac{a_{10}}{a_{22}} = p \quad 33$$

nii et fookus on sellel juhusel  $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ .

Harjutus 53. Vaadeldes neid valemeid, mis me oleme saanud telgede, keskpunkti ja tipu jaoks, tõendada, et

1) iga keskpunktiga polaarse süsteemi võrrandis (kus  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$  ei ole null) siis, kui on koordinaatide telgedeks selle polaarse süsteemi teljed, on  $a_{12} = a_{10} = a_{20} = 0$  ja sellega see võrrand nimelt

$$a_{11}x'x + a_{22}y'y + a_{00} = 0, \text{ ja et}$$

2) iga keskpunktita polaarse süsteemi võrrandis (kus on  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ ) siis, kui on  $x$ -teljeks selle polaarse süsteemi telg ja alguspunktiks tema tipp, on  $a_{11} = a_{12} = a_{02} = a_{00} = 0$  ja sellega see võrrand nimelt

$$a_{10}x + a_{22}y'y + a_{01}x' = 0.$$

10) Juhtjooned (s. o. fookuste polaardid) on keskpunktiga polaarsel süsteemil ühe fookuse  $F_1 = (e, 0)$  järgi  $f_1 = a_{11}ex + a_{00} = 0$

ehk  $f_1 \equiv x + \frac{a_{00}}{a_{11}e} = 0$  ja teise fookuse  $F_2 = (-e, 0)$  järgi

$f_2 \equiv -a_{11}ex + a_{00} = 0$  ehk  $f_2 \equiv x - \frac{a_{00}}{a_{11}e} = 0$ . Nii on fookused

keskpunktiga polaarsel süsteemil ühe telje peal (mida nimetatakse fokaalteljeks või ka peateljeks ja mis harilikult võetakse  $x$ -teljeks) keskpunktist kummalgi pool  $e$  mõõdu kaugusel ja juhtjooned keskpunktist kummalgi pool

$-\frac{a_{00}}{a_{11}e}$  mõõdu kaugusel paralleelsed teise teljega. See juhtjoone kauguse arv keskpunktist [V 31]

$$-\frac{a_{00}}{a_{11}e} = \frac{a^2}{e}$$

on fookuse kauguse arvust suurem asümptootideta polaarsel süsteemil, sest sellel on [7)]  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ , s. o. siin (kus on  $a_{12} = 0$ ,

$a_{00} < 0$  ja  $a_{11} > 0$ ) ka  $a_{22} > 0$  ja sellega  $e^2 = \frac{a_{00}}{a_{22}} - \frac{a_{00}}{a_{11}} = \frac{a_{00}}{a_{22}} +$

$+ a^2 < a^2$  ehk  $e < \frac{a^2}{e}$ . Asümptootidega polaarsel süsteemil on juhtjoone

kauguse arv fookuse omast vähem, sest sellel süsteemil on

$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ , s. o. siin  $a_{22} < 0$  ja sellepärast  $\frac{a_{00}}{a_{22}} > 0$ , nii et

on  $e^2 = \frac{a_{00}}{a_{22}} + a^2 > a^2$  ehk  $e > \frac{a^2}{e}$ .

Keskpunktita polaarsel süsteemil on ainus

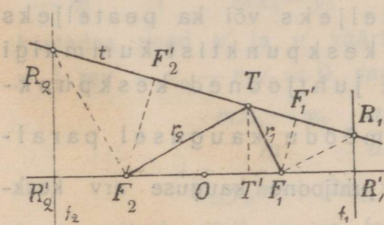
fookus  $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$  (tema ainsa telje peal) ja juhtjoon

$f \equiv a_{10}x + \frac{a_{01}p}{2} = 0$  ehk  $f \equiv x + \frac{p}{2} = 0$  mõlemad tipust

(alguspunktist)  $\frac{p}{2}$  mõõdu kaugusel teine teisel pool.

Nimed fookus ehk tulipunkt ja juhtjoon selguvad alles siis, kui vaatleme polaarses süsteemis neid punkte, mis on oma polaari peal. Kui on antud mingi oma polaari pealolev punkt  $T$ , siis saame kohe joonistada selle punkti polaari  $t$ , võttes ühest fookusest  $F_1$  ühe kiire  $r_1$  antud punktisse ja sellele kiirele ristkiire kuni lõikumise

seni juhtjoonega  $f_1$  mingis punktis  $R_1$ . Sest siis on see saadud punkt  $R_1$  kiire  $r_1$  poolus sellepärast, et ta on selle kiire kaaskiire peal (mis fookuses on ristkiir) ja veel punkti  $F_1$  polaari peal ja need mõlemad jooned (mille poolused on kiire  $r_1$  peal) peavad selle kiire poolusest läbi minema. Sellepärast peab punkti  $T$  polaari  $t$



Joonis 15.

(mis läheb läbi punkti  $T$ ) tõesti minema ka läbi punkti  $R_1$ . Niisama saame iga oma polaari läbimineva kiire peal kohe tema pooluse  $T$ , võttes fookusest kiire selle antud kiire ja juhtjoone lõikepunktisse  $R_1$  ja sellele kiirele ristkiire kuni lõikumiseni antud kiirega otsitavas pooluses  $T$ . Nii juhatab juhtjoon polaari leidmist, kui see läheb oma poolusest läbi, ja pooluse leidmist, kui see on oma polaari peal [J 15, 16, 17].

Vaadeldes veel sellesama oma poolusest läbimineva kiire lõikepunkti  $R_2$  teise juhtjoonega  $f_2$  ja teisest fookusest  $F_2$  tulevaid rist- ehk kaaskiiri  $F_2T \equiv r_2$  ja  $F_2R_2$  ja veel punktide  $R_1$ ,  $T$  ja  $R_2$  projektsioonid  $R'_1$ ,  $T'$ ,  $R'_2$ , fokaaltele  $F_1F_2$  peal, märkame, et on (1)  $F_2O = OF_1$ ,  $R'_2O = OR'_1$  ja siis  $R'_2F_2 = F_1R'_1$ ,  $\triangle F_1R'_1R_1 \sim \triangle TT'F_1$  ja siis  $\frac{F_1R_1}{TF_1} = \frac{F_1R'_1}{TT'}$ , (2)  $\triangle F_2T'T \sim \triangle R_2R'_2F_2$  ja siis  $\frac{F_2R_2}{TF_2} = \frac{R'_2F_2}{T'T} = \frac{F_1R'_1}{T'T} = \frac{F_1R_1}{TF_1}$ . Sellega on sarnased täisnurksed

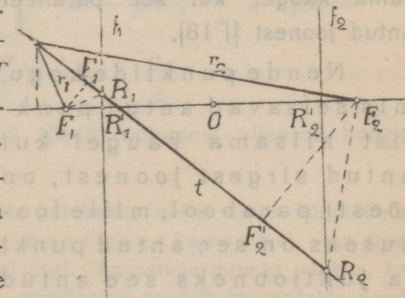
kolmnurgad  $\triangle TF_1R_1 \sim \triangle TF_2R_2$  ja siis ühevõrdsed nurgad  $\widehat{r_1t} = \widehat{r_2t}$ . Peegli pinnaga on langeval kiirel seesama nurk, mis peegeldunud kiirelgi. Sellepärast võib ütelda: ühest fookusest tulevad kiired peegelduvad nende punktide kohal, mis on oma polaari peal, nendes polaariides nii, et nad teise fookusesse kokku lähevad. Nii on fookused ehk tulipunktid tõesti kiirte kogumise punktid.

Harjutus 54. Antud fookuste ja ühe juhtjoone järgi joonistada teine juhtjoon ja vaadeldes mingi kiire lõikepunktisid juhtjoonega, otsustada, kas see kiir läheb oma poolusest läbi. Niisama vaadeldes saadud joonise piirkonnas mingit punkti, otsustada, kas see punkt on oma polaari peal.

11) Polaarse süsteemi korraldusjoon. Ellips, hüperbool ja parabool. Nende punktide kogu, mis polaarsetes süsteemis on oma polaaride peal, nimetame selle polaarsete süsteemi korraldusjooneks (*von Staudt*'i Ordnungskurve järgi, a. 1847). Keskpunktiga ja asümptootideta polaarsete süsteemi korraldusjoont (kui on  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ ) nimetatakse ellipsiks, keskpunktiga ja asümptootidega polaarsete süsteemi oma (kui on  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ ) hüperbooliks ja keskpunktita polaarsete süsteemi oma kui on  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ ) parabooliks. Polaarsete süsteemi ise nimetatakse siis vastavalt ellipsi, hüperbooli või parabooli polaarseteks süsteemiks ja polaarsete süsteemi keskpunkti, diameetriid, telgi, asümptootisid, tippusid, fookuseid ja juhtjooni ka selle süsteemi korraldusjoone omadeks.

Kiiri, mis polaarsetes süsteemis lähevad oma poolustest (korraldusjoone punktidest) läbi, nimetatakse korraldusjoone puutuja-teks. Neil ei saa olla selle korraldusjoonega peale oma pooluse muud ühist punkti. Sest kui kiirel  $t$  [J 15] oleks peale oma pooluse  $T$  veel muu punkt, mis oma polaari peal seisaks, siis peaks selle muu punkti polaar ka punktist  $T$  läbi minema ja sellega olema samane kiirega  $t$ , nii et kiirel  $t$  oleks kaks poolust, kuna pooluste ja polaaride vastavus on üks ühene.

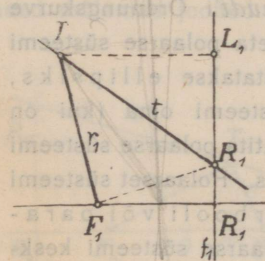
Fookustest  $F_1$  ja  $F_2$  korraldusjoone mingisse punktisse  $T$  tulevatel kiiretel  $r_1$  ja  $r_2$  nimetatakse selle punkti ja fookuste vahelisi tükkisid selle punkti raadiusvektoriteks ja tähtedega  $r_1$  ja  $r_2$  kirjutatakse ka nende raadiusvektorite pikkuse arvud. Meie nägime juba [J 15], et ellipsil (kui poolused on juhtjoonte vahel) teeb puutuja  $t$  kummagi raadiusvektoriga samanaurga. Seesama lugu on [J 16] ka hüperboolil (kui on juhtjooned fookuste vahel).



Joonis 16.

12) Parabooli konstruimine. Võib mõelda ellipsite või hüperboolide järge, kus kõigil on üks fookus  $F_1$  ja tema polaar  $f_1$  samased, aga teine fookus  $F_2$  igal järgmisel ellipsil või

hüperboolil esimesest kaugemal kui eelmisel, ja kus on ellipsiid ja hüperboole, millel fookuste vahelise kauguse arv on suurem mingist antud arvust  $2e$ . Selle ellipsite või hüperboolide järje lõpuks

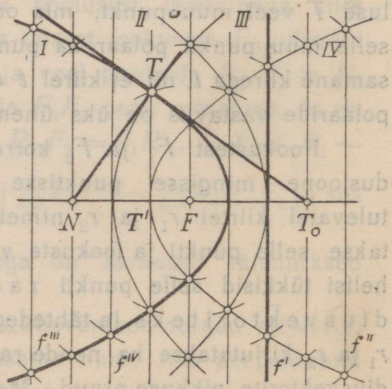


Joonis 17.

näib olevat parabool, sest kui teine fookus kaob lõpmatusse, siis kaob sinna ka keskpunkt. Siis oleks kiir  $TF_2$  paralleelne fokaalteljega ja risti juhtjoonega, nagu seda näitab joonis 17. Kui selle kiire lõikepunkti juhtjoonega kirjutame  $L_1$ , siis on ühtivad kolmnurgad  $\triangle TF_1R_1 \cong \triangle TL_1R_1$ , sest need kolmnurgad on täisnurksed, ühise hüpotenuusiga ja nuki  $T$  juures on neil ühevõrdsed nurgad.

Sellega oleks  $F_1T = L_1T$  ja selle ellipsite ja hüperboolide järje ühiseks lõpujuhuseks joon, mille iga punkti kaugus ühest antud punktist on ühevõrdne tema kaugusega ühest antud sirgest joonest, millest sellepärast saab konstruuda punktid kui palju tahes, võttes paralleele sellele antud sirgele joonele ja märkides iga võetud paralleeli peal punktid, mis on sellest antud punktist niisama kaugel kui see paralleel antud joonest [J 18].

Nende punktide kogu, mis seisavad antud punktist niisama kaugel kui antud sirgest joonest, on tõesti parabool, mille fookuseks on see antud punkt ja juhtjooneks see antud joon. Sest



Joonis 18.

(1) peavad oma polaari peal oleval punktil koordinaadid rahuldama seda võrrandit, mis saab polaarse süsteemi võrrandist siis, kui seal saavad polaari jooksvad koordinaadid  $x$  ja  $y$  samasteks pooluse koordinaatidega  $x'$  ja  $y'$ , s. o. võrrandit

$(a_{11}x + a_{12}y + a_{10})x + (a_{12}x + a_{22}y + a_{20})y + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0$   
ehk (polaarse süsteemi korraldusjoone üldist võrrandit)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad 34$$

mis parabooli korral (kui võtame kohe lihtsama kuju) on

$$a_{10}x + a_{22}y^2 + a_{01}x = 0 \text{ ehk valem 33 järgi.}$$

$$y^2 - 2px = 0 \quad 35$$

(2) on selle võrrandi järgi parabooli kõik punktid (peale tipu)  $y$ -teljest seal pool, kus on fookus (sest kui fookuse koordinaat

$\frac{p}{2}$  ja parabooli punkti koordinaat  $x$  oleks üks positiivne ja teine negatiivne, siis oleks võrrandi pahem pool nullist suurem) ja sellega on parabooli punkti  $(x, y)$  kaugus juhtjoonest (mis on teisel pool  $y$ -telge  $\frac{p}{2}$  mõõdu kaugusel)  $d = x + \frac{p}{2}$ ;

(3) on parabooli punktil  $(x, y)$  millel on valem 35 järgi  $y^2 = 2px$ , kaugus fookusest  $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  [V 10]

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \\ &= \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}. \end{aligned}$$

nii et parabooli punktid seisavad tõesti fookusest niisama kaugel kui juhtjoonest.

Harjutus 55. Joonistada mitu parabooli, millel oleks kõigil ühine fookus ja ühine telg, (neid nimetatakse konfokaalseteks), aga tipud mõnedel ühel pool fookust, teistel teisel pool. Joonistada mitmes punktis, kus need paraboolid lõikuvad, kummalegi paraboolile puutuja ja vaadelda nende puutujate vaheliste nurkade suurusi.

13) Ellipsi ja hüperbooli konstruimine. Kui nüüd vaatleme joonistelt 15 ja 16 ka ellipsi ja hüperbooli punkti  $T$  (absoluutseid) kaugusi fookustest ja juhtjoontest, siis märkame, et punkti  $T$  kaugusteks juhtjoontest  $f_1$  ja  $f_2$  on  $R'_1T'$  ja  $R'_2T'$ , mis on kiire  $t$  tükki  $R_1T$  ja  $R_2T$  projektsioonid  $x$ -telje peal ja sellepärast  $R'_1T' = R_1T \cos \hat{x}t$  ja  $R'_2T' = R_2T \cos \hat{x}t$ . Aga nende samade tükki

projektsioonid on ka punkti  $T$  kaugused fookustest:  $F_1T = R_1T \cos \widehat{r_1t}$  ja  $F_2T = R_2T \cos \widehat{r_2t}$ . Kui punkti  $T$  kauguste arvud juhtjoontest  $f_1$  ja  $f_2$  kirjutame vastavalt  $d_1$  ja  $d_2$ , siis on (sellepärast, et on  $\widehat{r_1t} = \widehat{r_2t}$ )

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{F_1T}{R_1T'} = \frac{R_1T \cos \widehat{r_1t}}{R_1T \cos \widehat{xt}} = \frac{\cos \widehat{r_1t}}{\cos \widehat{xt}} = \frac{\cos \widehat{r_2t}}{\cos \widehat{xt}} = \frac{r_2}{d_2}.$$

See ellipsi või hüperbooli punkti ja fookuse vahelise kauguse jagatis selle punkti kaugusega vastavast juhtjoonest on ühe ellipsi või ühe hüperbooli kõigil punktidel see sama. Olgu nimelt punktid  $F'_1$  ja  $F'_2$  fookuste projektsioonid kiire  $t$  peal (nii et on  $F'_1F_1 \perp t$  ja ka  $F'_2F_2 \perp t$ ), siis on  $F'_1F'_2$  fookuste vahelise kauguse projektsioon kiire  $t$  peal, s. o.  $F'_1F'_2 = F_1F_2 \cos \widehat{xt}$ . Kuid seesama projektsioon on ellipsil raadiusvektorite projektsioonide summa ja hüperboolil vahe, s. o. (kui kahest tehte märgist loeme ülemise ellipsi jaoks ja alumise hüperbooli jaoks)

$F'_1F'_2 = F_2T \cos \widehat{r_2t} + F_1T \cos \widehat{r_1t} = (F_2T + F_1T) \cos \widehat{r_1t} = F_1F_2 \cos \widehat{xt}$ ,  
kust saame

$$\frac{\cos \widehat{r_1t}}{\cos \widehat{xt}} = \frac{F_1F_2}{F_2T + F_1T} = \frac{2e}{r_2 + r_1}$$

Siin esineva raadiusvektorite summa või vahe jaoks saame teise võrrandi juhtjoonte vahelisest kaugusest, mis on ( $R'_1T' = R_1T \cos \widehat{xt}$ ,  $R'_2T' = R_2T \cos \widehat{xt}$ ,  $F_1T = R_1T \cos \widehat{r_1t}$  ja  $F_2T = R_2T \cos \widehat{r_2t}$  järgi)

$$R'_1R'_2 = |R'_2T' + T'R'_1| = \frac{\cos \widehat{xt}}{\cos \widehat{r_1t}} |F_2T + TF_1|, \text{ s. o.}$$

$$\frac{\cos \widehat{r_1t}}{\cos \widehat{xt}} = \frac{|F_2T + F_1T|}{R'_1R'_2} = \frac{|r_2 + r_1|}{2 \frac{a^2}{e}} \quad [\text{lhk. 55}].$$

Korrutades kahe viimase ühevõrduse pooled, saame

$$\left( \frac{\cos \widehat{r_1t}}{\cos \widehat{xt}} \right)^2 = \frac{e^2}{a^2} \text{ ehk } \frac{\cos \widehat{r_1t}}{\cos \widehat{xt}} = \frac{e}{a},$$

nii et tõesti on ühe ellipsi või ühe hüperbooli kõigil punktidel kauguse fookusest jagatud kaugusega vastavast juhtjoonest seesama arv  $\frac{a}{e}$ , mida kirjutatakse ka ühe tähega  $e$ , s. o.

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \frac{e}{a} = \varepsilon$$

36

Viimastest ühevõrdustest järeleb ka, et on

$$\begin{array}{l} \text{ellipsil} \quad r_1 + r_2 = 2a \\ \text{ja hüperboolil} \quad |r_2 - r_1| = 2a \end{array}$$

37

Sellega on ellips nende punktide kogu, millel on kauguste summa kahest antud punktist (fookusest) kõigil see sama, ja sellepärast saab siis, kui on antud ellipsi fookused  $F_1$  ja  $F_2$  ja tema üks punkt  $T$ , konstruuda selle ellipsi punktid kui palju tahes, võttes näiteks joone  $F_1F_2$  peal punkti  $Q$  nii, et oleks  $F_1Q = F_1T + F_2T$ , joonistades siis ringisid keskpunktiga  $F_1$ , mis lõikaksid joone tükki  $F_1Q$  mingites punktides  $P_1, P_2$  jne. ja märkides esimese ringi peal punktid, mis on fookusest  $F_2$  nii kaugel kui punkt  $P_1$  punktist  $Q$ , teise peal punktid, mis on fookusest  $F_2$  nii kaugel kui punkt  $P_2$  punktist  $Q$  jne.

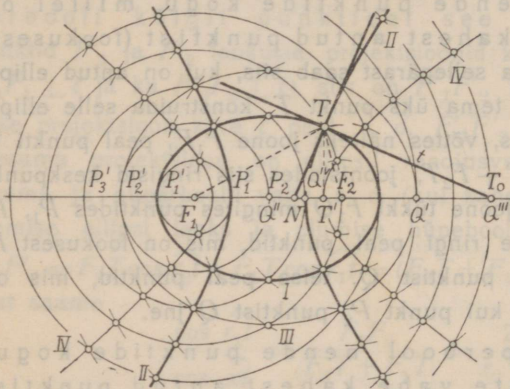
Niisama on hüperbool nende punktide kogu, millel on kauguste vahe kahest antud punktist (fookusest) kõigil see sama, ja saame siis, kui on antud hüperbooli fookused  $F_1$  ja  $F_2$  ja tema üks punkt  $T$ , konstruuda selle hüperbooli punktid kui palju tahes, võttes näiteks joone  $F_1F_2$  peal punkti  $Q$  nii, et oleks  $F_1Q = |F_1T - F_2T|$ , joonistades siis ringisid keskpunktiga  $F_1$ , mis lõikaksid joont  $F_1F_2$  väljaspool tükki  $F_1Q$ , üks mingites punktides  $P_1$  ja  $P'_1$ , teine punktides  $P_2$  ja  $P'_2$  jne. ja märkides esimese ringi peal punktid, mis on fookusest  $F_2$  nii kaugel kui punktid  $P_1$  ja  $P'_1$  punktist  $Q$ , teise ringi peal punktid, mis on fookusest  $F_2$  nii kaugel kui punktid  $P_2$  ja  $P'_2$  punktist  $Q$  jne. Hüperbool saab kaheosaline joon, juhtjooned on tema osade vahel.

Harjutus 56. Joonistada mitu ellipsit ja hüperbooli, millel oleks kõigil ühised fookused (neid nimetatakse konfokaalseteks). Joonistada mitmes punktis, kus need jooned lõikuvad, kummalegi joonele puutuja ja vaa-delda nende puutujate vaheliste nurkade suurusi.

14) Kanoonilised võrrandid. Ellipsi ja hüperbooli lihtsamas võrrandis

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{00} = 0$$

(mis saab üldisest võrrandist V 34 siis, kui koordinaatide telgedeks on võetud nende joonte teljed) on tema kolmest kordajast  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  ja  $a_{00}$  olulised ainult nende kaks jagatist, sest ühega nendest kordajatest võib võrrandi kõiki liikmeid jagada. Kui kõik need kolm kordajat on positiivsed või kõik negatiivsed, siis ei saa olla reaalsel punkti, mille koordinaadid rahuldaksid seda võrrandit, sest olgu  $x$  ja  $y$  mis reaalsed



Joonis 19.

arvud tahes, nende ruudud on positiivsed (või nullid) ja võrrandi pahem pool, kui ta on jagatud ühe kordajaga, on ikka positiivne. Sellel korral ei ole polaar-süsteemil korraldusjoont (vahel öeldakse, et see joon on nullosaline või imaginaarne ellips). Sellepärast jätsime juba fookuste käsitamisel selle juhuse kõrvale. Muul juhusel jagatakse selle võrrandi kõikliikmed arvuga  $-a_{00}$ . Meie oleme juba kirjutanud jagatise  $-\frac{a_{00}}{a_{11}}$  tähega  $a^2$ . Jagatis  $-\frac{a_{00}}{a_{22}}$  on ellipsil positiivne ja kirjutatakse siis  $b^2$ ; hüperboolil on ta negatiivne ja kirjutatakse siis  $-b^2$ . Nii saavad niinimetatud kanoonilised võrrandid

$$\begin{array}{l} \text{ellipsil} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ \text{ja hüperboolil} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{array}$$

Parabooli kanooniliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit V 35.

Ellipsi ja hüperbooli lihtsamast võrrandist paistab silma, et need jooned on sümmeetrilised telgede kohta, sest kui siin [V 38] anname ühele tundmatule mingi väärtuse, siis saab teine tundmatu kaks absoluutselt ühesuurust väärtust, aga vastupidiste märkidega, nii et kui ühel pool telge on mingi ellipsi või hüperbooli punkt, siis on selle punkti kohal (temast teljele risti mineva sirge joone peal) teisel pool telge niisama kaugel ka selle ellipsi või hüperbooli punkt. Parabool [V 35] on sümmeetriline ainult oma ainsa telje kohta. Sellega on polaarse süsteemi teljed tema korraldusjoone sümmeetria teljed ja siis tema keskpunkt korraldusjoone sümmeetria keskpunkt (s. o. ellipsi või hüperbooli mingist punktist keskpunkti mineva kiire peal on veel teine ellipsi või hüperbooli punkt teisel pool keskpunkti niisama kaugel). Ellipsi ja hüperbooli lõikepunktid nende sümmeetria telgedega nimetatakse nende tippudeks ja tippude vaheliste telje tükide pikkuste arvud ka lihtsalt telgedeks. Nii on valemi 38 järgi (kus on sümmeetria teljed koordinaatide telgedeks)  $x$ -telje peal tipud  $(-a, 0)$  ja  $(a, 0)$  ja nende vahelise kauguse arv  $2a$ . See arv on ellipsil suurem telg ja  $a$  suurem pooltelg [V 31].  $y$ -telje peal on ellipsil tipud  $(0, -b)$  ja  $(0, b)$  ja siis vähem telg  $2b$  ehk vähem pooltelg  $b$ . Hüperbool ei lõika  $y$ -telge; öeldakse et  $b$  on hüperboolil imaginaarne pooltelg ja siis  $a$  reaalne pooltelg. Pooltelgede järgi on fookuse kaugus keskpunktist ehk ekstsentrisus

$$\text{ellipsil } e = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ ja hüperboolil } e = \sqrt{a^2 + b^2},$$

nii et ellipsi ekstsentrisuse saab konstruuda pooltelgede järgi, nagu kaateti hüpotenuusi ja teise kaateti järgi, ja hüperbooli oma, nagu hüpotenuusi kaatetite järgi.

Märkus 1. Ekstsentrisuseks nimetatakse vahel fookuse ksugust keskpunktist, vahel selle fookuse kauguse jagatist ellipsi suurema poolteljega või hüperbooli reaalse poolteljega (fokaalpoolteljega), s. o. seda arvu  $\frac{e}{a}$  ehk  $\varepsilon$ , mille meie saime jagades ellipsi või hüperbooli mingi punkti kaugust fookusest selle punkti kaugusega vastavast juhtjoonest (selle fookuse polaarist). Vahetegemiseks nimetatakse fookuse kaugust keskpunktist ka lineaarseks

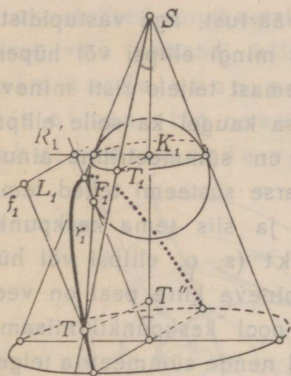
ekstsentriseks ja siis tema jagatist fokaalpoolteljega numbriliseks ekstsentriseks. Sagedasti kirjutatakse nimelt numbriline ekstsentriseks tähega  $e$ .

Märkus 2. Ellipsit, hüperbooli ja parabooli käsitati rohkesti juba Archimedese ajal (III. aastasajal e. Kr.), kuid mitte polaarsete süsteemide korraldusjoontena, vaid koonuselõigetena, s. o. koonuse ja tasapinna lõikejoontena. Joonistel 20–22 on näha koonus tipuga  $S$  ja teljega  $s \equiv SK_1$ . See telg on seal mõeldud nimelt joonise pinnal (selle raamatu lehe peal), nii et joonise pind lõikab seda koonust kahte kujutatavat joont  $l_1$  ja  $l_2$  mööda, mis seisavad teine teisel pool telge. See koonus on veel lõigatud tasapinnaga  $TF_1F_2$  või  $TF_1L_1$ , mis on risti joonise pinnale ja lõikab seda joonise pinda joont  $x \equiv F_1R'_1 \equiv F_1F_2$  mööda. Sellest saadud koonuselõige on siin joonistatud paksem kui muud jooned.

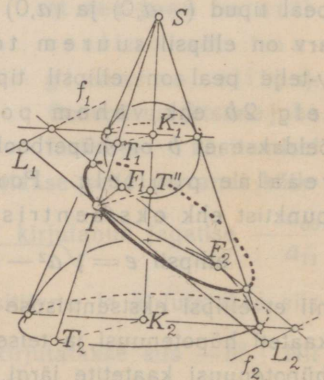
Et koonuselõike samasus parabooliga, ellipsiga või hüperbooliga silma paistaks, selleks on siin veel joonistatud (Dandelini järgi a. 1822) kerad, mis puutuvad kõiki koonuse kujutatavaid jooni ringide  $K_1$  ja  $K_2$  punktides ja ka lõikajat tasapinda punktides  $F_1$  ja  $F_2$ .

Kui nüüd vaatame koonuselõike mingit punkti  $T$  ja temast läbimineva kujutava joone  $l \equiv ST$  punktisid  $T_1$  ja  $T_2$  ringide  $K_1$  ja  $K_2$  peal, siis märkame, et on  $TF_1 = TT_1$  (kui puutuvad ühele kerale ühest punktist) ja niisama ka  $TF_2 = TT_2$  ja sellepärast joonisel 21  $F_1T + F_2T = T_1T + TT_2 = T_1T_2$  ja joonisel 22  $F_2T - F_1T = T_1T_2$  ja see tükk  $T_1T_2$  ringide  $K_1$  ja  $K_2$  vahel on kõigil (ühe koonuse) kujutatavatel joontel ühepikkune. Sellega on koonuselõige joonisel 21 ellips ja joonisel 22 hüperbool.

Kui veel vaatame punkti  $T$  projektsiooni  $T''$  koonuse telje peal ja ringide  $K_1$  ja  $K_2$  tasapindade lõikejoont koonuselõike tasapinnaga nimelt  $f_1 \equiv R'_1L_1$  ja  $f_2 \equiv R'_2L_2$ , kus on  $L_1$  ja  $L_2$  punkti  $T$  projektsioonid nende joonte peal ja sellega  $L_1T$  ja  $L_2T$  punkti  $T$  kaugused nendest joontest, siis märkame, et need jooned  $f_1$  ja  $f_2$  on risti joonise pinnale (sest koonuselõike pind oli võetud risti ja ringide  $K_1$  ja  $K_2$  pinnad on risti teljele  $s$ , mis on joonise pinnal) ja sellepärast on  $TL_1 \parallel x$ . Sellepärast on kauguse  $TL_1$  projektsioon



Joonis 20.



Joonis 21.

koonuse telje peal  $T''K_1 = TL_1 \cos \hat{x}s$ . Seesama koonuse telje tükk on ka projektsiooniks kujutava joone  $l$  tükile  $TT_1$ , mis on ühevõrdne kaugusega  $TF_1$ , s. o.  $T''K_1 = TT_1 \cos \hat{l}s = TF_1 \cos \hat{l}s$ . Sellest kahest ühevõrdudest järgneb, et ühe koonuselõike iga punkti kaugus ühest punktist  $F_1$ , jagatud tema kau-

gusega ühest joonest  $f_1$ , on  $\frac{TF_1}{TL_1} = \frac{\cos \hat{x}s}{\cos \hat{l}s}$  ja

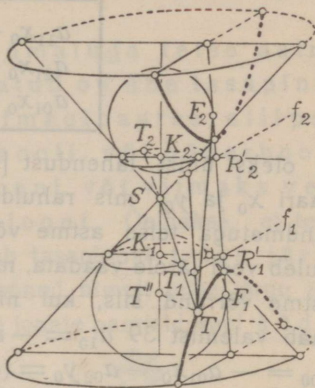
siis, kui on  $x \parallel l_2$ , nagu joonisel 20, nimelt

$$\frac{TF_1}{TL_1} = \frac{\cos \hat{x}s}{\cos \hat{l}s} = 1 \text{ ehk } TF_1 = TL_1, \text{ nii et siis,}$$

kui lõike pind on paralleelne ühe kujutava joonega, on koonuselõige parabool.

Koonuselõige on ellips siis, kui tasapind lõikab koonuse pinda ainult ühel pool tippu, ja hüperbool siis, kui lõikumine sünnib kummalgi pool tippu. Kreeka matemaatika mehed enne Apolloniust on vaadelnud koonuse pinda ainult ühel pool tippu. Nad on veel võtnud lõikaja tasapinna alati risti ühele kujutavale joonele, nii et võis saada parabool ainult siis, kui koonus oli täisnurkne, s. o.,

$\hat{l}_1\hat{l}_2 = 90^\circ$ , ellips ainult siis, kui koonus oli teravnurkne, s. o.  $\hat{l}_1\hat{l}_2 < 90^\circ$ , ja hüperbool ainult siis, kui koonus oli nürinurkne, s. o.  $\hat{l}_1\hat{l}_2 > 90^\circ$ . Veel Archimedes kõneleb teravnurkse, täisnurkse ja nürinurkse koonuse lõigetest. Alles tema noorem kaasaeglane Apollonius on hakanud vaatlema koonuse pinda (ilma piirava põhjata) tipust mõlemal pool ja lõikama teda igapidi, nii et ühte ja sedasama koonust lõigates võis saada igasuguse koonuselõike.



Joonis 22.

**17. Teise astme võrrand kahe tundmatuga. Teise järgu joon.** Kui polaarse süsteemi võrrandis (tasapinnal) saab üks paar tundmatuid samaseks teisega, siis saab teise astme võrrand kahe tundmatuga [V 34]

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0,$$

s. o. võrrand, millel siis, kui tal on parem pool 0 ja pahem pool (koondatud) hulkliige, kus tundmatud on ainult liikmete teguriteks, ei ole neid tundmatuid teguriid ühelgi liikmel üle kahe. Selles kirjutuses kordajatele  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{01}$ ,  $a_{02}$  ja  $a_{00}$  (millest ainult 5 on olulist, sest ühega nendest võib võrrandi kõiki liikmeid jagada) igasuguseid väärtusi andes, saame iga antud teise astme võrrandi kahe tundmatuga. Sellepärast nimetatakse valemit 34 kahe tundmatuga teise astme võrrandi üldiseks kujuks.

Polaarse süsteemi võrrandis ei võinud need kordajad olla misugused tahes, sest selleks, et igale punktile saaks oma vastav sirge joon (vahest ka ebakiir), pidid need kordajad olema niisugused, et kolmel võrrandil

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} = 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} = 0 \\ a_{01}x_0 + a_{02}y_0 + a_{00} = 0 \end{cases}$$

39

ei oleks ühist lahendust [V 18, V 19, V 21]. Kui ei ole arvude paari  $x_0$  ja  $y_0$ , mis rahuldaks võrrandiid V 39, siis esitab kahe tundmatuga teise astme võrrand polaarse süsteemi korraldusjoone. Tuleb veel järele vaadata, mida esitab antud (kahe tundmatuga) teise astme võrrand siis, kui niisugune arvude paar  $x_0$  ja  $y_0$  on. Siis saab valemist 39  $a_{10} = -a_{11}x_0 - a_{12}y_0$ ,  $a_{20} = -a_{21}x_0 - a_{22}y_0$  ja  $a_{00} = -a_{01}x_0 - a_{02}y_0 = (a_{11}x_0 + a_{12}y_0)x_0 + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0)y_0$  ja pannes need väärtused teise astme võrrandi üldisesse kujusse  $a_{10}$ ,  $a_{20}$  ja  $a_{00}$  asemele, saame (iseäranis kergesti siis, kui oleme enne selle võrrandi kirjutanud bilineaarselt, s. o.  $(a_{11}x + a_{12}y + a_{01})x + (a_{12}x + a_{22}y + a_{02})y + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0$ ) sellel juhul kahe tundmatuga teise astme võrrandile järgmise lihtsama kuju

$$a_{11}(x - x_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + a_{22}(y - y_0)^2 = 0 \quad 40$$

Kui nüüd on  $a_{22} = 0$ , siis on antud võrrand  $(x - x_0)[a_{11}(x - x_0) + 2a_{12}(y - y_0)] = 0$ , nii et ta esitab kaks sirget joont läbi punkti  $(x_0, y_0)$ :

$$x - x_0 = 0 \text{ ja } a_{11}(x - x_0) + 2a_{12}(y - y_0) = 0.$$

Ka siis, kui ei ole  $a_{22} = 0$ , esitab kahe tundmatuga teise astme võrrand võrrandite V 39 maksvuse korral sirgete joonte paari. Sest jagades siis võrrandi V 40 arvuga  $(x - x_0)^2$  ja lahendades teda jagatise  $\frac{y - y_0}{x - x_0}$  kohta, saame

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{1}{a_{22}}(-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}) \text{ või}$$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{1}{a_{22}}(-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}})$$

ja sellega sirged jooned  $y - y_0 = m_1(x - x_0)$  ja  $y - y_0 = m_2(x - x_0)$ , kui esimese lahenduse väärtuse kirjutame  $m_1$  ja teise oma  $m_2$ . Need lahendused saavad imaginaarsed, kui on  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ . Siis öeldakse, et antud võrrand esitab imaginaarsete sirgete joonte paari.

Sellega esitab kahe tundmatuga teise astme võrrand siis, kui need tundmatud on ühe tasapinna punktide koordinaadid, kas imaginaarse ellipsi, või (reaalse) ellipsi, või parabooli, või hüperbooli, või paari (reaalseid) sirgeid jooni, või viimaks veel paari imaginaarseid sirgeid jooni. Öeldakse, et teise astme võrrand kahe tundmatuga esitab tasapinnal teise järgu joone. Sellega on kõik nimetatud jooned nimelt teise järgu jooned. Nende hulgas nimetatakse sirgete joonte paarisid veel kõrdunud teise järgu joonteks.

Märkus 1. Võrreldes valem 40 saadusi valem ~~27~~<sup>26</sup> omadega, märkame, et kõrdumata teise järgu joonele on valem 40 tema asümptootide paari võrrandiks. Sellega on näiteks hüperboolil  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$  asümptootide paari võrrandiks  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$  (sest seal on keskpunkti koordinaadid  $x_0 = 0$  ja  $y_0 = 0$  ja kordaja  $a_{12}$  ka null), nii et üks asümptoot on  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$  ja teine  $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$  (nagu see ka siis silma paistab, kui asümptootide paari võrrandil lahutame pahema poole teguriteks).

Märkus 2. Teise järgu joone kõrdumise tunnusest V 39 saame kõrvaldada  $x_0$  ja  $y_0$ , leides nende väärtused kahest võrrandist ja asetades nad kolmandasse. Kui ei ole  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ , siis saame esimesest kahest võrrandist

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{10} \\ a_{22} & a_{20} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{21} \end{vmatrix}} \quad \text{ja} \quad y_0 = - \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{21} & a_{20} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

ja neid kolmandasse asemele panhes ja seal kõiki liikmeid ühise nimetajaga korrutades

$$a_{10} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{10} \\ a_{22} & a_{20} \end{vmatrix} - a_{20} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{12} & a_{20} \end{vmatrix} + a_{00} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Selle ühevõrduse pahem pool on nimelt (sümmeetriline) determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix} = A,$$

mida nimetame ka teise astme võrrandi V 34 determinandiks. Saame ju tõesti selle ühevõrduse pahema poole siis, kui selle determinandi arvudega (ehk tema elementidega) teeme tehted, nagu siis, kui kolm punkti on kirjutatud kolme põhipunkti abil nii, et esimesel punktil on põhipunktide kordajateks (nende põhipunktide kindlas järjekorras) selle tabeli esimese rea arvud, teisel teise rea omad jne. ja need kolm punkti korrutatakse, s. o.  $(a_{11}X + a_{12}Y + a_{10}O)(a_{12}X + a_{22}Y + a_{20}O)(a_{10}X + a_{20}Y + a_{00}O) = A \cdot XYO$ .

Nii on teise järgu joone kõdumise tunnuseks see, et tema võrrandi determinant  $A$  on null. — Mõõda minnes märkame siit, et kolm sirget joont lähevad läbi ühe punkti siis ja ainult siis, kui nende võrrandite V 39 (kui seal ka ei oleks  $a_{ik} = a_{ki}$ ) kordajate determinant on null.

Märkus 3. Öeldakse, et eespool saadud ühevõrduses on see determinant  $A$  arendatud tema viimase rea elementide  $a_{10}$ ,  $a_{20}$  ja  $a_{00}$  järgi, ja neid kaherealisi determinantisid (ühes nende  $+$  või  $-$  märgiga), millega need elemendid seal on korrutatud, nimetatakse nendele elementidele vastavateks alamdeterminandideks ja kirjutatakse nende samade tähtedega suurelt, nii et on

$$A = a_{10}A_{10} + a_{20}A_{20} + a_{00}A_{00}.$$

Kui selles kolme punkti korrutises, mis determinandi  $A$  arvutamise juhiks on, korrutame enne teise teguri kolmandaga ja siis alles esimese teguri selle saadusega, siis saame determinandi  $A$  arendatult tema esimese rea elementide järgi

$$A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{10}A_{10},$$

kus on  $A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{20} \\ a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}$  jne. Niisama saab determinanti arendada ka tema ühe veeru elementide järgi. Sümmeetrilisel determinandil ongi ühe rea järgi arendamine samane ühe veeru järgi arendamisega.

Märkus 4. Märkuses 2 oletasime, et võrrandites V 39 saab kahest leida  $x_0$  ja  $y_0$ , s. o. et seal alamdeterminandid  $A_{00}$ ,  $A_{02}$  ja  $A_{01}$ , ei ole kõik nullid, sest leides neid väärtusi, kahest esimesest võrrandist, saame neile nimetajaks  $A_{00}$ , leides neid esimesest ja kolmandast, saame nimetajaks  $A_{02}$  ja leides neid kahest viimasest, saame nimetajaks  $A_{01}$ . Kui nüüd kõik need kolm alamdeterminanti on nullid, siis on determinant  $A$  juba sellepärast null.

Märkus 5. Kui teise järgu joonest on antud tema viie punkti koordinaadid, siis saab leida selle joone võrrandi. Sest teise astme võrrandil kahe tundmatuga on üldisel kujul V 34 kuus kordajat, kuid sellepärast, et võrrandi kõiki liikmeid võib jagada mis arvuga tahes peale nulli, saab seal ühe kordaja, mis ei ole null, teha arvuks 1, ja järeljäänud viie kordaja jaoks saab viis võrrandit, kui võrrandisse V 34 pannakse tundmatute  $x$  ja  $y$  asemele järgimööda viie antud punkti koordinaadid. Öeldakse: teise järgu joon on määratud oma viie punktiga.

Märkus 6. Kahe sirge joone võrrandite pahemaid pooli korrutades saame teise astme avalduse, nimelt selle joonte paari võrrandi pahema poole.

Niisuguseid teise astme avaldusi vahest veel mõne arvuga korrutatult liites, võime saada ka kõdumata teise järgu joone võrrandi pahema poole. Kui näiteks kirjutame lüheduse jaoks sirgete joonte  $s, s_1, s_2$  jne. võrranditel pahemad pooled nende samade üksikute tähtedega  $s, s_1, s_2$  jne., siis on  $ass_2 + bs_1s_3$ , kus on  $a$  ja  $b$  mingi kordajad, selle teise järgu joone võrrandi pahem pool, mis läheb läbi punktide  $s \times s_1$  (s. o. kus lõikub joon  $s$  joonega  $s_1$ ),  $s_1 \times s_2$ ,  $s_2 \times s_3$  ja  $s_3 \times s$ . Teevad ju esimese punkti koordinaadid nulliks  $s$  ja  $s_1$  ja sellega tõesti ka avalduse  $ass_2 + bs_1s_3$ . Niisama teeivad nulliks selle avalduse ka järgmiste punktide koordinaadid. Andes selles avalduses kordajatele  $a$  ja  $b$  igasuguseid väärtusi, saame võrrandite pahemad pooled igasuguste teise järgu joonte jaoks, mis lähevad läbi selle nelja punkti (mis on, nagu öeldakse, selle nelja punktiga määratud teise järgu joonte kimbust).

Märkus 7. *Blaise Pascal* leidis (kuueistkümnenda aastalt, 1640), et kuusnurgal, mille nukid on teise järgu joone punktid, on vastaskülgede (s. o. esimese ja neljanda, teise ja viienda, kolmanda ja kuuenda) lõikepunktid ühe sirge joone peal. *Sylvester* (XIX a. s. keskel) tõendas selle Pascali lause järgmiselt. Olgu kuusnurga küljed järgemööda  $s_1, s_2, \dots, s_6$  ja olgu  $s \equiv (s_6 \times s_1)(s_3 \times s_4)$  (s. o. esimese ja neljanda nuki ühendaja joon). Siis on kuuest nukist läbimineva teise järgu joone võrrandi pahem pool esimese, teise, kolmanda ja neljanda nuki järgi  $a ss_2 + bs_1s_3$  ja neljanda, viienda, kuuenda ja esimese nuki järgi  $c ss_5 + ds_4s_6$  ja sellega

$$a ss_2 + bs_1s_3 = c ss_5 + ds_4s_6 \text{ ehk } (as_2 - cs_5)s = d s_4s_6 - b s_1s_3,$$

nii et  $as_2 - cs_5$  ja  $s$  on paar sirgeid jooni läbi nelja punkti  $s_1 \times s_4$ ,  $s_3 \times s_6$ ,  $s_6 \times s_1$  ja  $s_3 \times s_4$ . Joon  $s$  läheb oletuse järgi läbi kahe viimase, sellega läheb joon  $as_2 - cs_5$  läbi punktide  $s_1 \times s_4$  ja  $s_3 \times s_6$ , aga oma kirjutuse järgi ka läbi punkti  $s_2 \times s_5$ , nii et need kolm punkti on tõesti ühe sirge joone peal.

Harjutus 57. Kirjutada mitu teise astme võrrandit kahe tundmatuga ja otsustada, missuguse teise järgu joone esitab igaüks neist. [Näiteks esitab võrrand  $2x^2 + 6xy + y^2 + 8x + 10y + 6 = 0$  kõdumata joone, sest tal on  $A = 4 \cdot 11 + 5 \cdot 2 - 6 \cdot 7 > 0$ , ja nimelt hüperbooli, sest tal on  $A_{00} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -7 < 0$ .]

H 58. Sirge joone ja teise järgu joone ühiste punktide koordinaadid peavad rahuldama sirge joone (esimese astme) võrrandit ja ka teise järgu joone (teise astme) võrrandit. Leides esimesest võrrandist ühe koordinaadi teise abil ja asetades saadud väärtuse teise võrrandisse, saame teise koordinaadi jaoks ruutvõrrandi. Kui sellel võrrandil on juured reaalsed ja isevõrdsed, siis nimetatakse seda sirget joont selle teise järgu joone lõikajaks, kui juured on ühevõrdsed, siis puutujaks ja kui nad on imaginaarsed, siis väliseks jooneks. Sirge joone ja teise järgu joone ühiseid punkte nimetatakse esimesel juhul lõikepunktideks, teisel puutepunktideks ja kolmandal juhul öeldakse, et nad on imaginaarsed. Võttes teise järgu joone peal kaks punkti  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$ , s. o. nii, et on

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + 2a_{10}x_1 + 2a_{20}y_1 + a_{00} = 0 \text{ ja}$$

$$a_{11}x_2^2 + 2a_{12}x_2y_2 + a_{22}y_2^2 + 2a_{10}x_2 + 2a_{20}y_2 + a_{00} = 0,$$

saame nendest punktidest läbimineva lõikaja võrrandiks

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1),$$

millest saab puutuja võrrand punktis  $(x_1, y_1)$  siis, kui saab punkt  $(x_2, y_2)$  samaseks punktiga  $(x_1, y_1)$ . Tõendada, et sel teel saadud puutuja võrrand on nimelt punkti  $(x_1, y_1)$  polaari võrrand. [Teise ühevõrduse liigetetest tulevad lahutada esimese omad, saadud võrrandi esimene pool tuleb jagada arvuga  $x_2 - x_1$ , sealt leida  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , lugeda saaduses  $x_2 = x_1$  ja asetada ta viimasesse ühevõrdusesse.]

H. 59. Teise järgu joone lõikaja tükki lõikepunktide vahel nimetatakse kõõlukes. Tõendada, et paralleelsete kõõlude keskpunktid on nimelt nende kõõlude kaaside meetri peal. [Tõenduseks tuleb kirjutada lõikaja joone võrrand selle joone kõõlu keskpunkti  $(x_0, y_0)$  ja tema tõusu  $m$  abil, sellest võrrandist leida üks koordinaat, näiteks  $y$ , teise abil, panna saadud väärtus lõikepunkti koordinaadi väärtuseks  $y$  asemele teise järgu joone võrrandisse. Siis saab ruutvõrrand lõikepunkti teise koordinaadi  $x$  jaoks. Selle saab korraldada nii, et seal  $x$  esineb ainult vahe  $x - x_0$  liikmena, kui igalpool seal, kus  $x$  veel ei esine selle vahe liikmena, kirjutatakse tema asemele  $(x - x_0) + x_0$ . Nii saab ruutvõrrand  $a(x - x_0)^2 + 2b(x - x_0) + c = 0$ , kus on  $a$ ,  $b$  ja  $c$  algebralised avaldused arvudega  $x_0$  ja  $y_0$ .  $x - x_0$  on lõikepunkti ja kõõlu keskpunkti vahelise kauguse projektsioon  $x$ -telje peal. Et mõlemad lõikepunktid ehk kõõlu otsad on keskpunktist ühekaugusel teine teisel pool, siis on ka nende kauguste projektsioonid  $x$ -telje peal, s. o. viimases ruutvõrrandis  $x - x_0$  väärtused, ühesuured, aga vastupidiste märkidega. See on võimalik ainult siis, kui selles võrrandis teine liige puudub, s. o. kui on  $b = 0$ . Näiteks asetades lõikaja võrrandist tundmatu  $y$  väärtuse  $y_0 + m(x - x_0)$  ellipsi võrrandisse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$  ja

kirjutades seal veel tundmatu  $x$  asemele  $(x - x_0) + x_0$ , nii et saab

$$\frac{[(x - x_0) + x_0]^2}{a^2} + \frac{[y_0 + m(x - x_0)]^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ ehk } \left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)(x - x_0)^2 +$$

$$+ 2\left(\frac{x_0}{a^2} + \frac{my_0}{b^2}\right)(x - x_0) + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ näeme, et kõõludel tõusuga } m$$

peavad keskpunktide koordinaadid  $x_0$  ja  $y_0$  rahuldama võrrandit  $\frac{x_0}{a^2} + \frac{my_0}{b^2} = 0$ , mis on tõesti diameetri võrrand V 23.]

H. 60. Kahe arvu harmooniliseks keskmiseks nimetame nende arvude geomeetrilise keskmise ruudu jagatist nende aritmeetilise keskmisega. Sirge joone antud tüki harmooniliseks keskpunktiks selle joone mingi antud punkti kohta nimetame punkti, mille kaugus sellest antud punktist on harmooniliseks keskmiseks selle antud joonetüki otsade kaugustele sellest samast antud punktist. Tõendada, et teise järgu joone nendel lõikajatel, mis lähevad kõik ühest punktist läbi, on kõõlude harmoonilised keskpunktid selle ühe punkti kohta nimelt selle punkti polaari peal. [Olgu lõikajate ühine

punkt  $(x_0, y_0)$ . Siis on läbi selle punkti mineva lõikaja võrrand  $y - y_0 = m(x - x_0)$ . Paneme teise astme võrrandisse siit  $y$  asemele  $y_0 + m(x - x_0)$  ja kirjutame seal veel  $x$  asemele  $x_0 + (x - x_0)$ . Siis saame selle lõikaja ja teise järgu joone lõikepunktide ehk kõõlu otsade kauguste jaoks võrrandi sellest punktist (õieti nende kauguste projektsioonide jaoks  $x$ -telje peal)

$$a_{11}[x_0 + (x - x_0)]^2 + 2a_{12}[x_0 + (x - x_0)][y_0 + m(x - x_0)] + a_{22}[y_0 + m(x - x_0)]^2 + 2a_{10}[x_0 + (x - x_0)] + 2a_{20}[y_0 + m(x - x_0)] + a_{00} = 0$$

ehk nurgelisi sulgusid avades  $a(x - x_0)^2 + 2b(x - x_0) + c = 0$ , kus on

$$a = a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2, \quad b = a_{11}x_0 + a_{12}(mx_0 + y_0) + a_{22}my_0 + a_{10} + a_{20}m$$

ja  $c = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00}$ .

Nende kauguste harmooniline keskmine ehk nende korrutise jagatis nende summa poolega on  $\frac{c}{a} : -\frac{b}{a} = -\frac{c}{b}$ , sest  $\frac{c}{a}$  on, nagu tuttav, selle võrrandi juurte korrutis ja  $-\frac{2b}{a}$  nende summa. Olgu harmooniline keskpunkt punkti  $(x_0, y_0)$  kohta nimelt  $(x', y')$  siis on

$$x' - x_0 = -\frac{c}{b} \quad \text{ehk} \quad b(x' - x_0) + c = 0.$$

Silmaspidades, et lõikaja tõus  $m$  on lõikajate ühise punkti  $(x_0, y_0)$  ja kõõlu harmoonilise keskpunkti  $(x', y')$  järgi  $m = \frac{y' - y_0}{x' - x_0}$ , saamegi (kordaja  $b$  üksikuid liikmeid korrutades arvuga  $x' - x_0$  ja neile juurde lisades sarnased liikmed kordajast  $c$ )

$$a_{11}x_0x' + a_{12}(x_0 + y'_0) + a_{22}y_0y' + a_{10}(x' + x_0) + a_{20}(y' + y_0) + a_{00} = 0$$

ehk  $(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x' + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y' + a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00} = 0$ .

H. 61. Tõendada, et siis, kui sirge joon läbi punkti  $(x_0, y_0)$ , lõikab teise järgu joont punktides  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$  ja veel punkti  $(x_0, y_0)$  polaari (selle teise järgu joone polaarses süsteemis) punktis  $(x', y')$ , on selle nelja punkti ristjagatis  $((x_1, y_1)(x', y')(x_2, y_2)(x_0, y_0)) = -1$  ja sellega need neli punkti harmooniline salk. Järeldada siit [11 M 3], et lõikajal on kõõlu keskpunkt nimelt tema ebapunkti polaari peal ja sellega paralleelsetel lõikajatel kõõlude keskpunktid nende ühise ebapunkti polaari peal.

H. 62. Kirjutada mitu teise astme võrrandit kahe tundmatuga ja nende järgi nende polaarsete süsteemide võrrandid, mille korraldusjoonteks on nende võrranditega esitatud teise järgu jooned (s. o. V 34 järgi V 17).

H. 63. Eelmises harjutuses saadud teise järgu joontel võtta igaühe peal vähemalt üks punkt (näiteks punkt, kus on  $x = 0$  või  $y = 0$  või  $x = 1$  või üks koordinaat mingi muu täisarv) ja kirjutada võrrand selle teise järgu joone puutujale selles punktis. [Puutuja on puutepunkti polaar].

H. 64. Kui teise järgu joone lõikajal saab teine lõikepunkt samaseks esimesega, siis saab see lõikaja puutujaks ja tema (null-) kõõlu harmooniliseks keskpunktiks selle lõikaja mingi muu punkti kohta seesama puutepunkt. Sellega läheb puutujal iga punkti polaar tema puutepunktist läbi ja selle pärast saab leida antud punktist puutujad antud teise järgu joonele,

liedes selle punkti polaari lõikepunktid selle teise järgu joonega ja siis sirged jooned, mis lähevad antud punktist leitud punktidesse. Võttes numbrilise teise astme võrrandi kahe tundmatuga ja mitu punkti (oma numbriliste koordinaatidega), leida nendest punktides puutujad selle võetud võrrandiga esitatud joonele. (Kui võetud punkti polaari lõikepunktid võetud joonega on imaginaarsed, siis nimetatakse seda punkti selle teise järgu joone sisseamiseks punktiks.)

H. 65. Tõendada, et sirge joon, mis läheb läbi kõõlu keskpunkti ja veel läbi selle punkti, kust tulevad puutujad selle kõõlu otsadesse, on diameeter.

H. 66. Silmaspidades, et ringi iga diameeter poolitab nimelt need kõõlud, mis on temaga risti, ja et sellepärast on ringil iga diameeter risti oma kaaskiirtega, tõendada, et ringjoon on määratud oma kolme punktiga [M 5; V 25].

H. 67. Leida ringjoon (s. o. ringjoone võrrand), kui on antud tema üks puutuja ühes oma puutepunktiga ja veel üks muu punkt selle ringjoone peal. [Kumbki antud punkt annab ühe võrrandi otsitava teise astme võrrandi kordajate jaoks, antud puutuja võrrand on kolmandaks ja va'lemid 25 neljandaks ja viiendaks.]

H. 68. Tõendada, et ellips või hüperbool on määratud, kui on antud tema kaks puutujat ühes oma puutepunktidega ja veel üks muu punkt selle teise järgu joone peal.

H. 69. Tõendada, et parabool on määratud, kui on antud tema kaks puutujat ühes oma puutepunktidega. [Paraboolil on  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ ].

H. 70. Kui mingi kõvera joone puutujatele lähevad ristjooned ühest punktist, siis nimetatakse nende ristjoonte aluspunktide kogu (s. o. nende punktide kogu, kus ristjoon lõikab seda puutujat, millele ta risti on) selle kõvera joone aluspunktjooneks selle ühe punkti kohta. Tõendada, et aluspunktjoon fookuse kohta on ellipsil ja hüperboolil ring, mille keskpunktiks on ellipsi või hüperbooli keskpunkt ja raadiuseks ellipsil suurem pooltelg ja hüperboolil reaalne pooltelg, aga paraboolil puutuja tipus. [Hüperbooli või ellipsi  $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{00} = 0$  punktis  $(x_1, y_1)$  on puutuja  $a_{11}x_1x + a_{22}y_1y + a_{00} = 0$  Sellele ristjoon läbi fookuse  $(e, 0)$  on  $-a_{22}y_1x + a_{11}x_1y + a_{22}y_1e = 0$ . Nende joonte lõikepunktis on

$$x = \frac{-a_{00}a_{11}x_1 + a_{22}^2y_1^2e}{a_{11}^2x_1^2 + a_{22}^2y_1^2} \quad \text{ja} \quad y = \frac{-a_{11}a_{22}x_1y_1e - a_{00}a_{22}y_1}{a_{11}^2x_1^2 + a_{22}^2y_1^2},$$

kust sellepärast, et on  $e = \sqrt{\frac{a_{00}}{a_{22}} - \frac{a_{00}}{a_{11}}}$  ja  $a_{11}x_1^2 + a_{22}y_1^2 + a_{00} = 0$ , järgneb

$x^2 + y^2 = -\frac{a_{00}}{a_{11}}$ . Parabooli  $a_{22}y^2 + 2a_{10}x = 0$  punktis  $(x_1, y_1)$  on puutuja  $a_{10}x +$

$+ a_{22}y_1y + a_{10}x_1 = 0$  ja sellele ristjoon läbi fookuse  $(\frac{p}{2}; 0)$  on  $-a_{22}y_1x +$

$+ a_{10}y + a_{22}y_1\frac{p}{2} = 0$  Nende lõikepunktis on  $x = \frac{-2a_{10}^2x_1 + a_{22}^2y_1^2p}{2(a_{10}^2 + a_{22}^2y_1^2)}$

ehk sellepärast, et on  $p = -\frac{a_{10}}{a_{22}}$  ja  $a_{22}y_1^2 + 2a_{10}x_1 = 0$ , nimelt  $x = 0$ ]

H. 71. Küllalt lühikeste külgedega hulknurk, millel küljed on teise järgu joone puutujad (mis on sellele teise järgu joonele ümberjoonistatud), aitab seda teise järgu joont joonistada niisama hästi kui hulk selle joone (üksteise ligidal seisvaid) punktisid. Tuletada eelmisest harjutusest ühine viis ellipsi, hüperbooli ja parabooli joonistamiseks, kui on teada nende tipud ja üks fookus.

H. 72. Tõendada *Brianchon*'i lause (a. 1806): Kui kuusnurgal on küljed ühe teise järgu joone puutujad, siis lähevad tema vastasnukkid (s. o. esimest ja neljandat, teist ja viiendat kolmandat ja kuuentat) ühendavad kiired ühest punktist läbi [Kui selle ümberjoonistatud kuusnurga külgede puutepunktid võtame järgemööda sissejoonistatud kuusnurga nukkideks, siis on selle viimase kuusnurga küljed esimese kuusnurga nukkide polaarid ja *Brianchon*'i lause järgneb *Pascali* lausest.]

H. 73. *Pascali* lause põhjal saame ühe teise järgu joone antud viie punkti järgi leida selle joone kuuenda punkti iga kiire peal, mis läheb viiendast antud punktist läbi, ja niisama *Brianchoni* lause põhjal ühe teise järgu joone antud viie puutuja järgi leida selle joone kuuenda puutuja iga punkti läbi, mis on viienda antud puutuja peal. Mil viisil?

H. 74. Kui varras  $l$  liigub nii, et tal üks punkt  $A$  läheb edasi mingit sirget joont  $x$  mööda ja teine punkt  $B$  teist sirget joont  $s$  mööda, mis lõikab esimest mingis punktis  $O$ , siis liigub selle varda iga kolmas punkt  $P$  ellipsit mööda. Sest kui võtame esimese joone  $x$ -teljeks ja punkti  $O$  alguseks ja kirjutame varda tükide  $AB$ ,  $AP$  ja  $PB$  pikkuste arvud järgemööda  $l$ ,  $l_1$  ja  $l_2$ , siis on punkti  $P$  koordinaadid

$$y = l_1 \sin \hat{x}l \quad \text{ja} \quad x = \frac{y}{l_1} \cdot l \cdot \cot \hat{x}s - l_2 \cos \hat{x}l,$$

kust saame

$$\cos \hat{x}l = \frac{ly}{l_1 l_2} \cot \hat{x}s - \frac{x}{l_2}, \quad \sin \hat{x}l = \frac{y}{l_1}$$

ja sellega

$$\frac{x^2}{l_2^2} - \frac{2l \cot \hat{x}s}{l_1 l_2^2} xy + \left( \frac{l^2 \cot^2 \hat{x}s}{l_1^2 l_2^2} + \frac{1}{l_1^2} \right) y^2 = \cos^2 \hat{x}l + \sin^2 \hat{x}l = 1,$$

mis on tõesti ellipsi võrrand, sest tal on  $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = \frac{1}{l_1^2 l_2^2} > 0$ .

Teha joonis, kus oleks näha peale nimetatud punktide ja joonte veel  $P'$  ja  $B'$  — punktide  $P$  ja  $B$  projektsioonid joone  $x$  peal.

H. 75. Kui varras  $l$  liigub nii, et tal üks punkt  $A$  läheb edasi mingit sirget joont  $x$  mööda ja teine punkt  $B$  ühte ringjoont mööda, millel on keskpunkt  $O$  joone  $x$  peal ja raadius  $OB = AB$ , siis liigub selle varda iga kolmas punkt  $P$  ellipsit mööda. Tõendada see lause [H 74].

H. 76. Kui hüperboolil on asümptoodid teine teisele risti, siis nime-tame hüperbooli püsthüperbooliks. Tuletada asümptootide tõusu võr-randist V 26 püsthüperbooli tunnus  $a_{11} = a_{22}$ .

H. 77. Tõendada, et teise järgu joon on hüperbool ikka (aga mitte ainult) siis, kui ta on kõdumata ja kui on  $a_{11}$  ja  $a_{22}$  teine positiivne ja teine negatiivne.

### 18. Kahe tundmatuga teise astme võrrandi lihtsustamine.

**Kaldkoordinaadid.** Kahe tundmatuga teise astme võrrandi V 34 saab lihtsustada nagu masinlikult sel teel, et 1) võrrandi kõik liik-med korrutatakse ühe tundmatu ruudu kordajaga, näiteks  $a_{11}$ , kui see ei ole null, 2) lisatakse siis sellele liikmete salgale, kus esineb see tundmatu, positiivselt ja järeljäänud liikmete salgale negatiivselt juurde niisugused liikmed, et esimesest salgast ühes juurdelisatud liikmetega saaks kolmeliikme ruut. Selleks tuleb (kolmeliikme ruudu valemit  $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + + 2bc + c^2$  silmaspidades) siis, kui tahetakse esimese tundmatuga liikmed kolmeliikme ruuduks täiendada ja selle jaoks on juba võr-randi kõik liikmed korrutatud arvuga  $a_{11}$ , juurde lisada nimelt  $(a_{12}y + a_{10})^2$  ehk  $a_{12}^2y^2 + 2a_{12}a_{10}y + a_{10}^2$ . Nii saab (kui lähedu-seks kirjutame  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = A_{00}$ ,  $a_{20}a_{11} - a_{12}a_{10} = -A_{20}$  ja  $a_{00}a_{11} - a_{10}^2 = A_{22}$  [17 M 3])

$$\begin{aligned} 1) \quad & a_{11} | a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \\ 2) \quad & \qquad \qquad \qquad + (a_{12}y + a_{10})^2 - (a_{12}y + a_{10})^2 \end{aligned}$$

---


$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{10})^2 + A_{00}y^2 - 2A_{20}y + A_{22} = 0.$$

Kui siin ei ole  $A_{00} = 0$ , siis saame temaga kõiki liikmeid korrutades ja juurde lisades  $A_{20}^2 - A_{20}^2$ :

$$A_{00}(a_{11}x + a_{12}y + a_{10})^2 + (A_{00}y - A_{20})^2 + a_{11}A = 0,$$

sest kolmandaks liikmeks tuleb küll  $A_{22}A_{00} - A_{20}^2$ , aga seda arvu-tades leiame, et ta on nimelt antud võrrandi esimese tundmatu ruudu kordaja  $a_{11}$  korrutatud selle võrrandi determinandiga  $A$  [17 M 2 ja 3] ( $A_{00}A_{22} - A_{20}^2 = A_{00}(a_{11}a_{00} - a_{10}^2) + A_{20}(a_{11}a_{20} - - a_{10}a_{12}) = a_{11}(a_{00}A_{00} + a_{20}A_{20}) - a_{10}(a_{11}a_{22}a_{10} - a_{12}^2a_{10} - a_{11}a_{20}a_{12} + + a_{10}a_{12}^2) = a_{11}(a_{00}A_{00} + a_{20}A_{20} + a_{10}A_{10}) = a_{11}A$ ). Võttes nüüd uuteks tundmatuteks

$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{10} \text{ ja } y' = A_{00}y - A_{20}$

saamegi antud võrrandile lihtsa kuju

$$A_{00}x'^2 + y'^2 + a_{11}A = 0 \quad 42$$

Kui on  $A_{00} = 0$ , s. o.  $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$ , siis paistab pärast korrutamist arvuga  $a_{11}$  kohe silma, et antud võrrandil on kolm esimest liiget koos juba kaksliikme ruut, s. o.

$$(a_{11}x + a_{12}y)^2 + 2a_{11}a_{10}x + 2a_{11}a_{20}y + a_{11}a_{00} = 0.$$

Võttes siin uuteks tundmatuteks

$$y' = a_{11}x + a_{12}y \text{ ja } x' = 2a_{11}a_{10}x + 2a_{11}a_{20}y + a_{11}a_{00} \quad 43$$

saame antud võrrandile väga lihtsa kuju

$$y'^2 + x' = 0 \quad 44$$

(On viisiks kirjutada selles väga lihtsas võrrandis tähega  $y$  nimelt seda tundmatut, mis on ruudus.)

Näide 1. Olgu näiteks võrrand

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 + 8x - 10y + 7 = 0,$$

kus tundmatud  $x$  ja  $y$  on ühe tasapinna punktide koordinaadid. Korrutades arvuga  $a_{11} = 2$  ja lisades juurde  $(2y + 4)^2 - (2y + 4)^2$ , saame

$$(2x + 2y + 4)^2 + 2y^2 - 36y - 2 = 0,$$

ja veel korrutades arvuga  $A_{00} = 2$  ja lisades juurde  $18^2 - 18^2$ , saame

$$2(2x + 2y + 4)^2 + (2y - 18)^2 - 328 = 0$$

ehk

$$2x'^2 + y'^2 - 328 = 0,$$

kui võtame uuteks tundmatuteks

$$x' = 2x + 2y + 4 \text{ ja } y' = 2y - 18 \quad 41a$$

Et antud võrrandi determinant on [V 42]  $A = \frac{-328}{2}$  mitte null, siis esitab võrrand kõdumata teise järgu joone ja nimelt ellipsi, sest temal on  $A_{00} = 2 > 0$ .

Kui uued tundmatud  $x'$  ja  $y'$  on mõlemad nullid, siis esitavad valemid 41 a kumbki ühe sirge joone (selle tasapinna peal) [J 23]

$$x' = 0 = 2x + 2y + 4 \quad \text{ja} \quad y' = 0 = 2y - 18$$

ja mõlemad koos nende joonte lõikepunkti  $O' = (x_0, y_0)$ , kus on

$$y_0 = \frac{18}{2} = 9 \quad \text{ja} \quad \text{siis} \quad x_0 = \frac{1}{2}(-2 \cdot 9 - 4) = -11.$$

Niisama esitava need valemid tundmatute  $x'$  ja  $y'$  igasuguse väärtuste paari korral ühe ainsa punkti (selle tasapinna peal) ja iga isesuguse  $x'$  ja  $y'$  väärtuste paari korral nimelt ise punkti. Sest kahel sirgel joonel on üks ainus lõikepunkt (kui nad üldse lõikuvad) ja esimene valem 41 a esitab iga  $x'$  isesuguse väärtuse korral ise joone (mille võrrandites on  $x$  ja  $y$  kordajad kõigis needsamad ja sellega kõik need jooned paralleelsed joonega  $x' = 0$ ) ja samuti ka teine valem iga  $y'$  isesuguse väärtuse korral ise joone (paralleelse joonega  $y' = 0$ ).

Sellega on tundmatute  $x'$  ja  $y'$  väärtuste paaride ja selle tasapinna punktide vahel üksühene vastavus ja need uued tund-

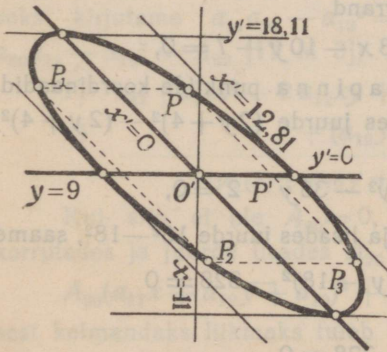
matud kõlbavad siis ka selle tasapinna punktide koordinaatideks. Nad on ka kauguse arvud:  $x'$  kauguse arv joonest  $x' = 0$  ja  $y'$  kauguse arv joonest  $y' = 0$ , kui joonte  $x' = 1$  ja  $y' = 1$  kaugused võetakse mõõdetudeks. Sest viies võrrandites V 41 a kõik liikmed ühele poole ja tehes need võrrandid normaalseteks [H 30], saame

$$\frac{2x + 2y + 4 - x'}{\sqrt{8}} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{2y - 18 - y'}{2} = 0$$

ja sellega punkti  $O' = (x_0, y_0)$  kaugused nendest joontest

$$\delta_1 = \frac{2x_0 + 2y_0 + 4 - x'}{\sqrt{8}} = -\frac{x'}{\sqrt{8}} \quad \text{ja} \quad \delta_2 = \frac{2y_0 - 18 - y'}{2} = -\frac{y'}{2}$$

ja siis nende joonte omad kaugused punktist  $O'$  ehk selle punkti



Joonis 23.

läbi minevatest joontest  $x' = 0$  ja  $y' = 0$  nimelt  $-\delta_1 = \frac{x'}{\sqrt{8}}$  ja  $-\delta_2 = \frac{y'}{2}$ , nii et need uued koordinaadid on tõesti kauguse arvud, kui kauguse mõõduks joonest  $x' = 0$  võetakse siin  $\frac{1}{\sqrt{8}}$  endist mõõtu ja joonest  $y' = 0$  pool endist.

Harilikult loetakse esimese valemiga 41 esitatud joonte kaugusi joonest  $x' = 0$  nimelt joont  $y' = 0$  mööda või selle joonega paralleelselt ja niisama teise valemiga 41 esitatud joonte kaugusi joonest  $y' = 0$  nimelt joont  $x' = 0$  mööda või selle joonega paralleelselt, olgugi jooned  $x' = 0$  ja  $y' = 0$  mitte risti teine teisega. Siis saavad nende kauguste mõõdud sellekohaselt suuremad. Neid punkti koordinaatid, mis on selle punkti kauguste arvud kahest lõikuvast sirgest joonest, kui kaugus kummastki joonest mõõdetakse paralleelselt teisele joonele, nimetatakse (Cartesiususe) kaldkoordinaatideks. *Cartesius* tarvitas omas töös *La Géométrie* koordinaatid niisugusel üldisel kujul, et vad võisid olla nii kald- kui ka ristkoordinaadid. Jooned, millest punkti kaugust mõõdetakse, nimetatakse ka kaldkoordinaatide korral koordinaatide telgedeks ja nende lõikepunkt alguseks.

Saadud võrrandist  $2x'^2 + y'^2 - 328 = 0$  (või valemitest 41 ja 42) paistab silma, et ellipsi võrrandit sel viisil masinlikult lihtsustades saame uuteks koordinaatide telgedeks ellipsi kaaside meetrite paari ja siis uueks alguseks nimelt ellipsi keskpunkti. Sest andes ühele tundmatule mingi väärtuse, näiteks  $x' = 10$ , saame teise tundmatu jaoks kaks sümmeetrilist väärtust (s. o. absoluutselt ühesuurust, aga vastupidiste märkidega), näiteks siin  $y' = \pm \sqrt{128} = \pm 11,3$ , nii et joone  $x' = 10$  peal on kaks punkti, mille koordinaadid rahuldavad ellipsi võrrandit, ja nimelt kumbki punkt joonest  $y' = 0$  eemal 11,3 mõõtu — teine teisel pool, ja niisamuti ka joone  $x' = -10$  peal, s. o.  $x'$ -telg poolitab tõesti  $y'$ -teljele paralleelsed kõõlud ja  $y'$ -telg  $x'$ -teljele paralleelsed. Selle pärast leiame siis, kui ellipsi ühte punkti otsime, sellest masinlikult lihtsustatud võrrandist (üldiselt) neli punkti, nagu joonisel 23 punktid  $P = (10; 11,3)$ ,  $P_1 = (-10; 11,3)$ ,  $P_2 = (-10; -11,3)$  ja  $P_3 = (10; -11,3)$ .

Võrrandist  $2x'^2 + y'^2 - 328 = 0$  paistab ka silma, et nendel  $x'$  ja  $y'$  väärtustel, mis rahuldavad seda võrrandit on omad äärmused, millest nad üle minna ei saa. Nimelt ei saa  $2x'^2$  millalgi olla suurem kui 328, sest ta peab ju alles koos mittenegatiivse arvuga  $y'^2$  andma 328. Sellega saab siin tundmatu  $x'$  oma äärmise väärtuse siis, kui on  $y' = 0$ , ja nimelt  $x' = \pm \sqrt{\frac{328}{2}} = \pm \sqrt{164} = \pm 12,8$ , ja niisama tundmatu  $y'$  oma äärmise väärtuse, kui on  $x' = 0$ , ja nimelt  $y' = \pm \sqrt{328} = \pm 18,1$ . Need neli joont  $x' = 12,8$ ,  $x' = -12,8$ ,  $y' = 18,1$ , ja  $y' = -18,1$  teevad parallelogrammi mille kõik küljed on puutunud antud ellipsile ja nimelt iga külg oma keskpunktis; külg  $x' = 12,8$  punktis  $(12,8; 0)$ , külg  $x' = -12,8$  punktis  $(-12,8; 0)$ , külg  $y' = 18,1$  punktis  $(0; 18,1)$  ja külg  $y' = -18,1$  punktis  $(0; -18,1)$ . (Sest need punktid on tõesti nende sirgete joonte ja antud ellipsi ühised punktid ja nende sirgete joonte võrrandid tõesti nende punktide polaaride võrrandid.) Selle parallelogrammi järgi saab antud ellipsi juba ligikaudu joonistada [J 23].

Näide 2. Olgu antud võrrand

$$3x^2 + 5xy - 7y^2 + 2x - 4y + 9 = 0,$$

kus ei ole  $a_{12}$  täisarv. Korrutame tema kõik liikmed sellepärast esiti arvuga 2, nii et saab

$$6x^2 + 10xy - 14y^2 + 4x - 8y + 18 = 0,$$

kus on siis  $a_{11} = 6$ ,  $a_{12} = 5$  jne. Korrutades nüüd arvuga 6 ja lisades juurde  $(5y + 2)^2 - (5y + 2)^2$ , saame

$$(6x + 5y + 2)^2 - 109y^2 - 68y + 104 = 0,$$

ja veel korrutades arvuga  $A_0 = -109$  ja lisades juurde  $34^2 = 34^2$ , saame

$$-109(6x + 5y + 2)^2 + (109y + 34)^2 - 12492 = 0$$

ehk

$$x'^2 - 109y'^2 - 12492 = 0,$$

kui võtame uuteks koordinaatideks

$$\boxed{x' = 109y + 34 \text{ ja } y' = 6x + 5y + 2} \quad 41b$$

(sest on viisiks kirjutada niisuguses kolmeliikmelises hüperbooli võrrandis tähega  $y$  nimelt selle liikme tundmatut, millel on märk samane vabaliikme omaga).



kui võtame teisteks uuteks koordinaatideks

$$x'' = x' + \sqrt{109}y' = 6\sqrt{109}x + (109 + 5\sqrt{109})y + 34 + 2\sqrt{109} \text{ ja}$$

$$y'' = x' - \sqrt{109}y' = -6\sqrt{109}x + (109 - 5\sqrt{109})y + 34 - 2\sqrt{109}.$$

Nende teiste uute koordinaatide teljed  $x'' = 0$  ja  $y'' = 0$  lähevad läbi hüperbooli keskpunkti (sest keskpunkti esimesed uued koordinaadid  $x' = 0$  ja  $y' = 0$  rahuldavad nende võrrandiid) ja nad on: esimene tõusuga

$$m_1 = \frac{-6\sqrt{109}}{109 + 5\sqrt{109}} = \frac{-6}{\sqrt{109} + 5} = -0,39 \text{ ja teine}$$

$$m_2 = \frac{6}{\sqrt{109} - 5} = 1,1,$$

nii et nad saame kohe joonistada [J 24]. Need uued teljed lahutavad tasapinna neljaks osaks ja antud hüperbooli punktid on ainult selles kahes osas, kus on  $x''$  ja  $y''$  kas mõlemad positiivsed või mõlemad negatiivsed, sest võrrandi  $x''y'' - 12492 = 0$  järgi peab nende korrutis olema positiivne. Sellest võrrandist on ka näha, et hüperbooli punkt küllalt kaugel ühest uuest teljest, on teisele teljele kui ligidal tahes, aga mitte kusagil otse ühe või teise telje peal. Sellepärast nimetatakse jooni  $x'' = 0$  ja  $y'' = 0$  selle hüperbooli asümptootideks (s. o. mitteühenevateks).

Hüperbooli korral on valemis 42 arv  $A_{00} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$  negatiivne, nii et üldisel kujul saame sealt (kahe esimese liikme summat teguriteks lahutades)

$$x''y'' + a_{11}A = 0$$

45

kui võtame [V 41]

$$x'' = y' + a_{11}\sqrt{-A_{00}}x' \text{ ehk}$$

$$x'' = a_{11}\sqrt{-A_{00}}x + (A_{00} + a_{12}\sqrt{-A_{00}})y - A_{20} + a_{10}\sqrt{-A_{00}}$$

$$y'' = y' - \sqrt{-A_{00}}x' \text{ ehk}$$

$$y'' = -a_{11}\sqrt{-A_{00}}x + (A_{00} - a_{12}\sqrt{-A_{00}})y - A_{20} - a_{10}\sqrt{-A_{00}}$$

46

Jooned  $x'' = 0$  ja  $y'' = 0$  on tõesti asümptoodid asümptoodi mõiste endise määruse järgi, sest nad lähevad läbi hüperbooli keskpunkti ja nende tõusud on võrrand  $V.26$  juured, näiteks esimese joone oma:

$$\begin{aligned} \frac{-a_{11}\sqrt{-A_{00}}}{A_{00}+a_{12}\sqrt{-A_{00}}} &= \frac{-a_{11}}{-\sqrt{-A_{00}}+a_{12}} = \frac{-a_{11}(a_{12}+\sqrt{-A_{00}})}{A_{00}+a_{12}^2} = \\ &= -\frac{1}{a_{22}}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}). \end{aligned}$$

Näide 3. Olgu antud võrrand

$$9x^2 + 12xy + 4y^2 + 7x + 11y + 12 = 0,$$

kus on  $A_{00} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 9 \cdot 4 - 6^2 = 0$ . Et siin on esimese liikme kordaja ruutarv, siis saab juba ilma temaga korrutamata kirjutada esimese kolme liikme summa ratsionaalselt (ilma juuremärgita) kaksliikme ruuduna:

$$(3x + 2y)^2 + 7x + 11y + 12 = 0.$$

Kui nüüd võtame uuteks koordinaatideks

$$y' = 3x + 2y \quad \text{ja} \quad x' = 7x + 11y + 12,$$

siis saamegi antud võrrandile väga lihtsa kuju

$$y'^2 + x' = 0.$$

Need uued koordinaadid on siin tõesti võimalikud, sest joone  $x' = 0$  ja  $y' = 0$  lõikuvad ( $\frac{3}{7} \neq \frac{2}{11}$ ). Nende lõikepunkt  $O' = (\frac{24}{19}, -\frac{36}{19})$  on üks punkt, mille koordinaadid rahuldavad antud võrrandit. Kõik muud punktid on joonest  $x' = 0$  negatiivsel pool, sest positiivsed  $x'$  väärtused ei saa rahuldada võrrandit  $y'^2 + x' = 0$ , kus nende summa mittenegatiivse arvuga  $y'^2$  peab null saama. Sellega ei saa antud võrrand esitada sirgete joonte paari ja esitab siis parabooli mis puutub joont  $x' = 0$  ehk  $y$  telge punktis  $O'$ . Uus  $x$ -telg on selle parabooli üks diameeter, sest iga  $x'$  (negatiivse) väärtuse korral saab  $y'$  jaoks kaks sümmeetrilist väärtust, nii et  $x'$ -telg poolitab tõesti  $y'$ -teljele paralleelsed kõõlud.

Kui need uued koordinaatide teljed ei ole teine teisega risti (nagu siin, kus  $3 \cdot 7 + 2 \cdot 11$  ei ole null), siis saame kohe teised uued koordinaadid, mis on juba ristkoordinaadid, võttes

$$y'' = y' + c = 3x + 2y + c$$

ja siis (selleks, et parabooli võrrand saaks  $y''^2 + x'' = 0$ )  
 $x'' = x' - 6cx - 4cy - c^2 = (7-6c)x + (11-4c)y + 12 - c^2$ ,  
 ja võttes selle juures  $c$  nimelt nii, et oleks  $3 \cdot (7-6c) + 2(11-4c) = 0$ ,  
 s. o.  $c = \frac{43}{6} = 1,654$ .

(Üldisel kujul saame paraboolile võrrandi

$$y''^2 + x'' = 0$$

ristkoordinaatides siis, kui võtame V 43 järgi

$$y'' = a_{11}x + a_{12}y + c,$$

$$x'' = (2a_{11}a_{10} - 2a_{11}c)x + (2a_{11}a_{20} - 2a_{12}c)y + a_{11}a_{00} - c^2 \quad 47)$$

ja  $c$  nii, et on

$$a_{11}(2a_{11}a_{10} - 2a_{11}c) + a_{12}(2a_{11}a_{20} - 2a_{12}c) = 0$$

Joon  $y'' = 0$  ehk uus  $x$ -telg on siis nimelt parabooli telg (sest ta on võrrandi  $y''^2 + x'' = 0$  järgi parabooli sümmeetria telg ja tema võrrand valemist 47 on samane võrrandiga V 28). Joon  $x'' = 0$  ehk uus  $y$ -telg on puutuja tipus (sest tema lõikepunkt parabooli teljega  $y'' = 0$  on ka parabooli punkt ja kõik muud parabooli punktid on temast ühel pool). Antud parabooli jaoks saame nende uute koordinaatide telgede võrrandid vanades koordinaatides, kui paneme võrrandite  $x'' = 0$  ja  $y'' = 0$  pahemate poolte avaldustes  $c$  asemele tema väärtuse. Nii saame

$$x'' = -2,92x + 4,38y + 9,26 = 0 \quad \text{ja}$$

$$y'' = 3x + 2y + 1,65 = 0.$$

Viimane võrrand siin on selle parabooli telje võrrand. Neid võrrandiid lahendades saame tipu vanad koordinaadid.

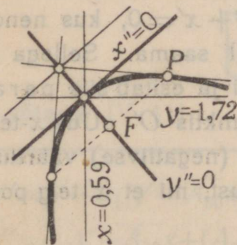
$x_0$  ja  $y_0$ :

$$x_0 = 0,59 \quad \text{ja} \quad y_0 = -1,72.$$

Selle parabooli joonistamine saab veel hõlpsamaks siis, kui need uute telgede võrrandid vanades koordinaatides teeme normaalseteks, jagades esimese liikmed arvuga

$$\sqrt{2,92^2 + 4,38^2} = 5,27 \quad \text{ja teise omad arvuga}$$

$\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ . Siis saavad nende võrrandite pahemad pooled punkti  $(x, y)$  kauguse arvudeks uutest telgedest nimelt vana



Joonis 25.

mõõdu järgi. Võttes need kauguse arvud (ühise vana mõõdu järgi) kolmandateks uuteks koordinaatideks

$$x''' = \frac{x''}{5,27} \quad \text{ja} \quad y''' = \frac{y''}{\sqrt{13}}$$

saame võrrandist  $y''^2 + x'' = 0$  võrrandi selle parabooli jaoks nendes viimastes koordinaatides sel teel, et paneme  $x''$  asemele temaga ühevõrdse  $5,27x'''$  ja  $y''$  asemele  $\sqrt{13}y'''$ . Nii saame võrrandi

$$13y'''^2 + 5,27x''' = 0$$

ja siit V 33 järgi  $p = -\frac{5,27}{2 \cdot 13}$ . Sellel paraboolil [J 25] on siis

fookus  $\frac{p}{2} = -\frac{5,27}{2 \cdot 2 \cdot 13} = -5,27 : 52 = -0,10$  vana mõõtu tipust

eemal ja nimelt seal pool uut  $y$ -telge ehk  $\frac{x''}{5,27} = 0$ , kus ei ole vana alguspunkt, sest vana alguspunkti kaugus sellest teljest on  $+ \frac{9,26}{5,27}$  mõõtu.

Märkus 1. Üksikutes numbrilistes näidetes võib see teise astme võrrandi masinlik lihtsustamise käik vahest lüheneda, nagu näites 3, kus ei tulnudki korrutada arvuga  $a_{11}$ . Näites 1 oleks võinud võrrandil  $2(2x + 2y + 4)^2 + (2y - 18)^2 - 328 = 0$  jagada kõik liikmed arvuga 4. Siis oleks saanud lihtsam võrrand  $2(x + y + 2)^2 + (y - 9)^2 - 82 = 0$  ja siis ka  $x'$  ja  $y'$  lihtsamad

$$x' = x + y + 2 \quad \text{ja} \quad y' = y - 9.$$

Märkus 2. Jagades valemis 42 kõik liikmed arvuga  $-a_{11}A$  ja võttes uuteks tundmatuteks ellipsi korral (kui on  $A_{00} > 0$ )

$$x'' = \sqrt{\frac{-A_{00}}{a_{11}A}} x' \quad \text{ja} \quad y'' = \frac{y'}{\sqrt{-a_{11}A}}$$

ja hüperbooli korral (kui on  $A_{00} < 0$ ) siis, kui on  $a_{11}A > 0$ ,

$$x'' = \sqrt{\frac{-A_{00}}{a_{11}A}} x' \quad \text{ja} \quad y'' = \frac{y'}{\sqrt{a_{11}A}},$$

aga siis, kui on  $a_{11}A < 0$ ,

$$x'' = \frac{y'}{\sqrt{-a_{11}A}} \quad \text{ja} \quad y'' = \sqrt{\frac{A_{00}}{a_{11}A}} x',$$

saame väga lihtsad võrrandid

ellipsile $x''^2 + y''^2 - 1 = 0$
ja hüperboolile $x''^2 - y''^2 - 1 = 0$

Märkus 3. Cartesiuse ristkoordinaatides on esimene võrrand valemis 48 ringjoone võrrand, kui mõõduks on selle ringjoone raadius, ja teine püsthüperbooli võrrand, kui mõõduks on selle püsthüperbooli reaalne pooltelg. Sellepärast võib ütelda, et sellekohaseid uusi Cartesiuse koordinaatisid võttes saab iga ellipsi võrrandi teha samaseks ringjoone võrrandiga ja iga hüperbooli võrrandi püsthüperbooli omaga. Selle asemel öeldakse lühidalt, et iga ellips on affiinne ringjoonega ja iga hüperbool püsthüperbooliga (Ladina affiinis tähendab sugulane).

Kui kahel punktide kogul, näiteks ringjoonel ja ellipsil, on võrrandid samased ja ühe kogu igale punktile loetakse vastavaks teise kogu see punkt, millel on needsamad koordinaadid, siis on see vastavus üksühene. Kui selle juures on koordinaadid kummagi kogu punktidel nimelt Cartesiuse omad, siis nimetatakse seda vastavust affiinsuseks (nagu ringjoonel iga ellipsiga ja püsthüperboolil iga hüperbooliga), kui veel ristkoordinaadid, kus on kummalgi punktide kogul  $x$ -telje mõõt samane  $y$ -telje omaga, siis nimetatakse seda vastavust sarnasuseks ja ühte punktide kogu sarnaseks teisega, ja kui ühe punktide kogu koordinaatide telgede mõõt on veel samane teise omaga, siis nimetatakse seda vastavust ühtivuseks ja ühte punktide kogu ühtivaks teisega. Näiteks on ringjoon ühtiv iga ringjoonega, millel on seesama raadius, sarnane iga ringjoonega ja affiinne iga ellipsiga. Iga teise järgu joon on sarnane iga muu teise järgu joonega, millel on see sama numbriline ekstsentrus  $\varepsilon$ . Sest ühevõrdusest  $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  [16 14] M 1] järgneb  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ja sellega võrrandist  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$  võrrand  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1 - \varepsilon^2)a^2} - 1 = 0$  või siis  $x'^2 + \frac{y'^2}{1 - \varepsilon^2} - 1 = 0$ , kui uueks mõõduks võetakse  $a$  endist mõõtu, ja parabooli korral järgneb võrrandist  $y^2 - 2px = 0$  võrrand  $\frac{y^2}{p^2} - 2\frac{x}{p} = 0$  või siis  $y'^2 - 2x' = 0$ , kui uueks mõõduks võetakse  $p$  endist mõõtu. (Ühtivus on muidugi ka sarnasus ja sarnasus ka affiinsus.)

Saab tõendada, et üks punktide kogu on ühtiv teisega siis ja ainult siis, kui igale kaugusele esimeses kogus on vastav niisama suur kaugus teises, sarnane siis ja ainult siis, kui igale nurgale vastab niisama suur nurk, ehk kui ristjoontele vastavad ristjooned, ja affiinne siis ja ainult siis kui paralleelidele vastavad paralleelid.

Märkus 4. Võrrandite V 48 korral on koordinaatide telgedeks üks paar kaaside meetriid (s. o. (kald)sümmeetria telgi). Võttes uuteks koordinaatideks (hüperbooli korral alumise märgiga)

$$x''' = k_0 x'' + k y''$$

$$y''' = k x'' - k_0 y''$$

$$(kus on  $k_0^2 \pm k^2 = 1$ )$$

saame ellipsi või hüperbooli võrrandile sellesama kuju  $x''^2 + y''^2 - 1 = 0$ , aga koordinaatide telgedeks juba uue paari kaasdiameetriid, kui ei ole  $k_0 = 1$  või  $k_0 = 0$ . Andes sellele kordajale mis väärtuse tahes nende äärmiste vahel, s. o. nii, et on  $1 > k_0 > 0$ , saame koordinaatide telgedeks missuguse uue kaasdiameetrite paari tahes, sest ristkoordinaatide korral järgneb see harjutusest 28 ja siis kaldkoordinaatide korral samaste koordinaatidega määratud vastavuse üksühesusest [M 3].

Märkus 5. Võrrandid saavad sagedasti käsitamiseks lihtsamad niinimetatud parameetrilisel kujul, s. o. siis, kui saab tundmatud  $x, y$  jne. avaldada mingi abi arvu (parameetri) najal (mida sagedasti kirjutatakse tähega  $t$ ). Näiteks on sellel ringjoonel (niinimetatud mõõdoringil), millel on keskpunktiks koordinaatide algus  $O$  ja mis läheb läbi mõõdupunkti  $X$  (nii et tema raadius on 1), võrrand

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

ja tema iga punkti  $P = (x, y)$  koordinaadid nimelt

$$x = \cos t \text{ ja } y = \sin t$$

kui arv  $t$  on kaare  $XP$  pikkuse arv. Seda kahte võrrandit nimetataksegi ringi parameetrilisteks võrranditeks. Nii saavad ka igale ellipsile parameetrilised võrrandid  $x'' = \cos t$  ja  $y'' = \sin t$  [V 48], kui parameetrikts  $t$  võetakse selle ellipsiga affiinse mõõduringi kaare pikkus.

Mõõduringi kaare pikkuse arv on samane selle kaarega piiratud sektori pindala arvuga (kui pindala mõõduks on põhikolmnurga  $OXY$  pindala). Sellepärast võib nendes parameetrilistes võrrandites parameetrit  $t$  lugeda nimelt sektori pindala arvuks (kaare pikkuse arvu asemel). Saab tõendada, et affiinsetel punktide kogudel on vastavad (s. o. vastavate punktide vahelised) pindalad proportsionaalsed. Sellest järgneb, et ellipsi  $x''^2 + y''^2 - 1 = 0$  sektoril  $O''X''P''$  on pindala arv samane ringjoone  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  vastava sektori  $OX P$  pindala arvuga, kui esimese pindala mõõduks on kolmnurk  $O''X''Y''$  ja teise omaks  $OXY$ . Sellepärast võib ellipsi parameetrilistes võrrandites  $x'' = \cos t$  ja  $y'' = \sin t$  lugeda arvu  $t$  sellesama ellipsi sektori  $O''X''P''$  pindala arvuks (kui on  $P'' = (x'', y'')$ ).

Kui püsthüperboolil on keskpunktiks alguspunkt  $O$  ja üheks tipuks mõõdupunkt  $X$ , siis on selle mõõduhüperbooli võrrand

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

ja tema igal punktil  $P = (x, y)$  nimetatakse esimest koordinaati  $x$  sektori  $OX P$  (millel äärjoone tükki  $XP$  on hüperbooli kaar) pindala arvu  $t$  hüperboolseks koosinuseks ja teist koordinaati  $y$  selle pindala arvu hüperboolseks siinuseks ja kirjutatakse

$$x = \cosh t \text{ ja } y = \sinh t.$$

Need on mõõduhüperbooli parameetrilised võrrandid, sest on tabelid, kust saab iga arvu  $t$  jaoks kohe lugeda  $\cosh t$  ja  $\sinh t$  väärtused, nii et nende võrrandite järgi saab tõesti leida  $x$ - ja  $y$ -väärtused  $t$ -väärtuste abil. Needsamad võrrandid on ka iga hüperbooli  $x''^2 - y''^2 - 1 = 0$  parameetrilised võrrandid

$x'' = \cosh t$  ja  $y'' = \sinh t$ , kus on  $t$  sellesama hüperbooli sektori  $O''P''X''$  pindala arv (kui on  $P'' = (x'', y'')$  ja pindala mõõduks  $O''X''Y''$ ).

Harjutus 78. Tõendada, et ka kaldkoordinaatides on sirge joone võrrand esimese astme võrrand [H 22; 15].

H. 79. Tõendada, et ka kaldkoordinaatides on joonte

$$s \equiv ax + by + c = 0 \text{ ja } s' \equiv a'x + b'y + c' = 0,$$

paralleelsuse tunnuseks

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \text{ [H 31].}$$

H. 80. Tõendada niisama, et ka kaldkoordinaatides on kolmnurga  $(x_1, y_1)(x_2, y_2)(x, y)$  pindala arvaks  $(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x)(y_2 + y) + (x - x_1)(y + y_1)$ , kui mõõduks on kolmnurga  $OXY$  pindala. [Joonis 11 tuleb teha nii, et telg  $OY$  ei oleks risti teljega  $OX$  ega  $|OY| = |OX|$ . Kõik kolm trapetsit tulevad lahutada kolmnurkadeks, näiteks ühendades punkti  $P'$  punktidega  $P_1$  ja  $P_2$  ja veel punkti  $P_1$  punktiga  $P'_2$ , ja need kolmnurgad võrrelda kolmnurgaga  $OXY$ , võttes selle juures näiteks  $PP'P_1$  asemel temaga ühevõrdse  $PP'P'_1$ , nii et igal saadud kolmnurgal oleks üks nurk ühevõrdne nurgaga  $YOX$  või selle täiendusega kahe täisnurgani, sest niisugustel kolmnurkadel on pindalad proportsionaalsed selle nurga juuresolevate külgede pikkuste korrutistega.]

H. 81. Tõendada, et siis, kui ühele punktide kogule tasapinnal on määratud Cartesiuse koordinaadid mingi põhipunktidega  $O, X$  ja  $Y$  ja teisele punktide kogule teiste põhipunktidega  $O', X'$  ja  $Y'$  ja esimese kogu igale punktile  $(x, y)$  loetakse vastavaks teisest kogust punkt  $(x', y')$  siis ja ainult siis, kui on  $x' = x$  ja  $y' = y$  (nii et see vastavus on affiinsus), on esimese kogu punktide vahelised pindalad proportsionaalsed teise kogu vastavate punktide vahelistega ja nimelt

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3) : (x'_1, y'_1)(x'_2, y'_2)(x'_3, y'_3) = OXY : O'X'Y' \text{ [H 80].}$$

H. 82. Tõendada, et ellipsi  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$  pindala on  $2\pi ab$   $OXY$  ehk  $\pi ab$  ruutmõõtu.

H. 83. Tõendada, et affiinsetes punktide kogudes ühe kogu paralleelidele vastavad teise kogu paralleelid [H 79].

H. 84. Öeldakse, et ühtivus on: 1) kommutatiivne ehk vahetuv, s. o. kui üks kuju on ühtiv teisega, siis on ka teine ühtiv esimesega; 2) transitiivne ehk üleminev, s. o. kui üks kuju on ühtiv teisega ja teine kolmandaga, siis on ka esimene ühtiv kolmandaga, ja 3) refleksiivne ehk tagasitulev, s. o. kui üks kuju on ühtiv teisega, siis on ta ka ühtiv iseenesega. Kas võib seda ütelda ka sarnasuse ja affiinsuse kohta?

H. 85. Tõendada Apolloniuse lause: Parallelogrammidel, millel on nukid ühe ellipsi punktid ja diagonaalid selle ellipsi kaasdiameetrid, on pindalad ühevõrdsed. [Olgu ühe diameetri ots (ellipsi peal)  $X$  ja tema kaasdiameetri ots  $Y$  mõõdupunktideks, need diameetrid ise telgedeks ja siis keskpunkt  $O$  alguseks Cartesiuse koor-

dinaatidele. Siis on selle ellipsi pindala nendes koordinaatides  $2\pi OXY$  [M 5; H 81]. Niisama on selle ellipsi pindala  $2\pi OX'Y'$  nendes koordinaatides, millel on telgedeks teine paar kaasdiameetriid ja mõõdupunktideks nende otsad  $X'$  ja  $Y'$  (ellipsi peal). Sellega on  $OXY = OX'Y'$  ja siis ka  $4OXY = 4OX'Y'$ .

H. 86. Tõendada, et parallelogrammidel, millel on üks nukk hüperbooli peal ja kaks külge selle hüperbooli asümptootide tükid, on pindalad ühevõrdsed. [Olgu hüperbooli peal oleval nukil koordinaadid  $x''$  ja  $y''$  [V 45], siis on selle parallelogrammi pindala [H 80]  $2x''y'' - O'X''Y'' = -2a_{11}A \cdot O'X''Y''$ , nii et ta ei olene sellest nukist. Näiteks on joonisel 24  $O'P'PP'' = O'P'_2P_2P''_2$ ]

H. 87. Hüperbooli lõikajal sirgel joonel on tükki ühest lõikepunktist ühe asümptoodini ühevõrdne tükiga teisest asümptoodist teise lõikepunktini. Sest jagades hüperbooli võrrandil V 45 kõik liikmed arvuga  $-a_{11}A$  ja võttes uuteks koordinaatideks näiteks  $x = \frac{x''}{a_{11}}$  ja  $y = \frac{y''}{-A}$ , saame hüperbooli võrrandiks  $xy - 1 = 0$  ja lõikaja joone võrrandiks [H 78] mingi  $ax + by + c = 0$  ja siis nende lõikepunktide  $P$  ja  $P_2$  esimesteks koordinaatideks (asetades väärtuse  $y = \frac{1}{x}$  esimesest võrrandist teise):

$$x = -\frac{c}{2a} + \frac{1}{2a} \sqrt{c^2 - 4ab} \quad \text{ja} \quad x_2 = -\frac{c}{2a} - \frac{1}{2a} \sqrt{c^2 - 4ab},$$

kuna lõikepunktil  $P_1$  asümptoodiga  $y = 0$  on esimene koordinat  $x_1 = -\frac{c}{a}$  ja lõikepunktil  $P_3$  teise asümptoodiga  $x = 0$  on esimene koordinat muidugi  $x_3 = 0$  ja sellega koordinaatide vahe  $x_3 - x = \frac{c}{2a} - \frac{1}{2a} \sqrt{c^2 - 4ab}$  tõesti ühevõrdne koordinaatide vahetega  $x_2 - x_1 = -\frac{c}{2a} - \frac{1}{2a} \sqrt{c^2 - 4ab} + \frac{c}{a}$  ja siis ka  $PP_3 = P_1P_2$ . Kuidas saab selle lause põhjal leida hüperbooli punktid kui palju tahes, kui hüperboolist on antud tema üks punkt ja asümptoodid?

H. 88. Harjutuses 22 saab sirge joone võrrand kõige pealt proportsiooni kujul. Kui seal kirjutame jagatiste ühise väärtuse mingi tähega näiteks  $t$ , s. o.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t,$$

siis saame  $x$  ja  $y$  avaldada selle uue arvu abil ja sellega sirge joone parameetriselised võrrandid

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t \quad \text{ja} \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t \quad 50$$

Mille arv on siin parameeter  $t$ ?

H. 89. Iga võrrandite paar  $x = x_1 + at$  ja  $y = y_1 + bt$  määrab (arvu  $t$  igasuguste väärtuste abil) ühe sirge joone (mis läheb läbi punktide  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2) = (x_1 + a, y_1 + b)$ ). Asetades sümmeetrilisesse bilineaar-sesse võrrandisse V 17  $x, x', y$  ja  $y'$  asemele järgemööda  $x_1 + at, x_1 + at'$ ,

$y_1 + bt$  ja  $y_1 + bt'$ , saame bilineaarse võrrandi tundmatutega  $t$  ja  $t'$ . See võrrand saab ka sümmeetriline, sest kordajaks saab arvudele  $t$  ja  $t'$  seesama arv  $(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{10})a + (a_{12}x_1 + a_{22}a + a_{20})b$ , nii et temaga on määratud kahekordne vastavus [6] M sirge joone ( $x = x_1 + at$  ja  $y = y_1 + bt$ ) punktidele, mis on nimelt kaaspunktide vastavus polaarses süsteemis V 17 [16 9]). Kaaspunktide vastavust sirgel joonel (ja kaaskiirte vastavust kiirte kimbus ja ka üldse iga kahekordset vastavust [6 M]) nimetatakse involuutsuseks (*Desargues*, XVII. a. s. algul) ja siis ebapunkti kaaspunkti involuutsuse keskpunkti k.s. Määrata polaarses süsteemis keskpunkti ja diameetri mõisted involuutsuse keskpunkti mõiste abil.

**19. Koordinaatide teisendamine tasapinnal. Polaar-koordinaadid.** Teise astme võrrandile kahe tundmatuga saime lihtsamad kujud siis, kui endiste tundmatute  $x$  ja  $y$  asemele võtsime uued tundmatud  $x'$  ja  $y'$  või  $x''$  ja  $y''$ , mis olid seotud endistega valemitega 41, 43, 46, 47. Nendest valemitest saame kergesti valemid endiste tundmatute  $x$  ja  $y$  jaoks uute abil. Neid valemiid nimetatakse Cartesiuse koordinaatide teisendusvalemiteks tasapinnal, sest uute koordinaatide võtmist endiste asemele nimetatakse endiste koordinaatide teisendamiseks ja valemite 41, 43 jne. järgi saadud uued koordinaadid on ka Cartesiuse omad (s. o. kauguste arvud), kui endised olid.

1) Cartesiuse koordinaatidest saavad uued koordinaadid ka Cartesiuse koordinaadid ainult siis, kui teisendusvalemid on täislineaarsed, s. o. kui uued koordinaadid  $x'$  ja  $y'$  on esimese astme avaldused endistes  $x$  ja  $y$ :

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1 \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2 \end{aligned} \quad 51$$

(nagu nad kõigis siiamaaalseis teisendusvalemites olid). Sest murdlineaarse teisenduse korral, s. o. kui uued koordinaadid oleksid esimese astme avalduste jagatised endistes:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c} \text{ ja } y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{ax + by + c},$$

ei saaks koordinaatisid joone  $ax + by + c = 0$  punktidele, ja kui uus koordinaat oleks teise astme avaldus endistes

$$x' = a_1x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00},$$

siis saaks uueks teljeks  $x' = 0$  teise järgu joon.

Valemiid 51 nimetatakse ka lineaarseks asemelepanuks ehk lineaarseks substituutsiooniks, sest selleks, et mingi kauguse, pindala või muu geomeetrilise suuruse avaldusest uutes koordinaatides saaks sellesama geomeetrilise suuruse avaldus endistes, tulevad panna uute koordinaatide asemele nende väärtused nendest valemitest. Nendest valemitest silma paistev determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

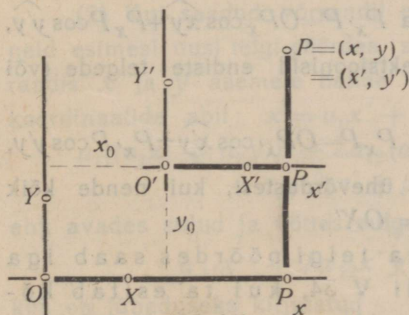
nimetatakse substituutsiooni determinandiks või substituutsiooni mooduliks ja substituutsiooni ennast siis unimodulaarseks, kui see determinant on 1.

Valemid 51 saavad lihtsama erikuju 1) siis, kui seal on  $b_1 = 0 = a_2$  ja  $a_1 = 1 = b_2$ , ja 2) siis, kui seal on  $c_1 = 0 = c_2$ ,  $a_1^2 + b_1^2 = 1 = a_2^2 + b_2^2 = a_1^2 + a_2^2$  ja  $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$  (kust siis järgneb ka  $b_1^2 + b_2^2 = 1$  ja  $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$  ja unimodulaarsuse korral, s. o. kui on  $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1$ , veel  $a_1 = b_2$  ja  $a_2 = -b_1$ ).

Esimesel erijuhusel saavad teisendusvalemid (kui  $c_1$  ja  $c_2$  asemele kirjutame  $-x_0$  ja  $-y_0$ )

$$\begin{array}{l} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{array}$$

52



Joonis 26.

Siis on uutel koordinaatidel uus alguspunkt  $O' = (x_0, y_0)$  [J 26], aga teljed paralleelsed endistega ja mõõdud endine:  $OX \parallel O'X'$  ja  $OY \parallel O'Y'$ . Seda koordinaatide teisendamise erijuhust nimetatakse lihtsalt alguse edasiviimiseks.

Teisel erijuhusel saavad teisendusvalemid (kui nendes kirjutame kordajad Kreeka tähtedega)

$$\begin{array}{l} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y \\ y' = \alpha_2 x + \beta_2 y \end{array} \quad \begin{array}{l} x = \beta_2 x' - \beta_1 y' = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' \\ y = -\alpha_2 x' + \alpha_1 y' = \beta_1 x' + \beta_2 y' \end{array}$$

53

Siis on uutel koordinaatidel seesama alguspunkt, mis endistelgi, aga mõõdupunktid uued  $X'=(\alpha_1, \beta_1)$  ja  $Y'=(\alpha_2, \beta_2)$  [J 27] nii, et mõõt on endine

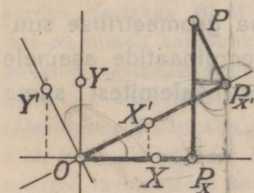
$$|OX'| = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} |OX| = |OX| \text{ ja}$$

$$|OY'| = \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} |OY| = |OY|$$

(kui oli  $|OX|=|OY|$ ). Siis on ka  $\alpha_1$  ja  $\beta_1$  nimelt uue  $x$ -telje ühe mõõdu pikkuse tüki projektsioonid endiste telgede peal ja niisama ka  $\alpha_2$  ja  $\beta_2$  uue  $y$ -telje omad, s. o.

$$\alpha_1 = \cos \widehat{xx'}, \beta_1 = \cos \widehat{x'y'} \text{ ja}$$

$$\alpha_2 = \cos \widehat{xy'}, \beta_2 = \cos \widehat{y'y'}$$



Joonis 27.

ja need uued koordinaadid on ka ristkoordinaadid, sest uute telgede vahelise nurga koosinus on

$$\cos \widehat{x'y'} = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 = 0$$

ja sellega see nurk täisnurk. Sellepärast nimetatakse seda substituutsiooni [V 53] ortogonaalseks, s. o. täisnurkseks. Uued teljed ühes oma mõõdupunktidega on siin saadud nagu endisi telgi pöördes nurga  $\widehat{xx'}$  võrra, mille väärtuse kirjutame ka tähega  $\varphi$ . Sellepärast nimetatakse seda teisendamise erijuhust telgede pöörmiseks.

Telgede pöörmise valemid 53 paistavad silma jooniselt 27, kui seal mõtleme murdjoone  $OP_xP$  projektsioonid uute telgede (või nendele paralleelsete joonte) peal

$$OP_{x'} = OP_x \cos \widehat{xx'} + P_x P \cos \widehat{x'y'} \text{ ja } P_x P = OP_x \cos \widehat{xy'} + P_x P \cos \widehat{y'y'}$$

või jälle murdjoone  $OP_xP$  projektsioonid endiste telgede (või nendele paralleelsete joonte) peal

$$OP_x = OP_{x'} \cos \widehat{x'x} + P_x P \cos \widehat{xy'} \text{ ja } P_x P = OP_{x'} \cos \widehat{x'y} + P_x P \cos \widehat{y'y'}$$

sest valemid 53 saavad nendest ühevõrdustest, kui nende kõik liikmed jagatakse mõõduga  $|OX|=|OX'|$ .

2) Algust edasiviies ja telgi pöördes saab iga antud teise astme võrrandi V 34, kui ta esitab kõrdumata joone, teha kanooniliseks [V 38, V 35] (s. o. võimalikult lihtsaks Cartesiuse ristkoordinaatides muutmata mõõduga, sest Kreeka *κανόν*, nagu Ladina *norma*, tähendab juhtnõr ehk eeskuju ja sellega kanooniline, nagu normaalnegi, — niisugune, nagu peab olema). Selle lause tõendame järgmiste juhuste kaupa.

(1) Kui ei ole  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$  ega  $a_{10}$  ja  $a_{20}$  mõlemad nullid, siis viime alguse punktis  $(x_0, y_0)$ , s. o. paneme võrrandis V 34  $x$  ja  $y$  asemele  $x' + x_0$  ja  $y' + y_0$  [V 52], nii et saame

$$a_{11}(x' + x_0)^2 + 2a_{12}(x' + x_0)(y' + y_0) + a_{22}(y' + y_0)^2 + 2a_{10}(x' + x_0) + 2a_{20}(y' + y_0) + a_{00} = 0$$

ehk avades sulud ja võttes siis sulgude taha  $x'$  ja  $y'$ :

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x' + 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y' + a'_{00} = 0,$$

kus on lüheduseks kirjutatud

$$a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00} = a'_{00} \quad 54$$

Kui selle juures valime arvud  $x_0$  ja  $y_0$  nii, et saab

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} = 0 \quad \text{ja} \quad a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} = 0$$

ehk  $x_0 = A_{10} : A_{00}$  ja  $y_0 = A_{20} : A_{00}$  (kui lüheduseks kirjutame  $a_{20}a_{12} - a_{10}a_{22} = A_{10}$ ,  $a_{12}a_{10} - a_{11}a_{20} = A_{20}$  ja  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = A_{00}$ ), siis saame antud võrrandi asemele juba lihtsama

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{00} = 0$$

ja uute koordinaatide alguseks on nimelt antud teise järgu joone keskpunkt [V 21]. Kui on  $a_{12} = 0$  ja  $a'_{00} \neq 0$ , siis saab juba siit kanooniline võrrand [V 38]. Kui aga on  $a'_{00} = 0$ , siis esitab antud võrrand sirgete joonte paari [V 40].

(2) Kui saadud võrrandil ei ole  $a_{12} = 0$  ega  $a'_{00} = 0$ , siis neid esimesi uusi telgi pöördes, s. o. pannes saadud lihtsamas võrrandis  $x'$  ja  $y'$  asemele nende väärtused valemitest 53 teiste uute koordinaatide abil:  $x' = \alpha_1 x'' + \alpha_2 y''$  ja  $y' = \beta_1 x'' + \beta_2 y''$ , saame

$$a_{11}(\alpha_1 x'' + \alpha_2 y'')^2 + 2a_{12}(\alpha_1 x'' + \alpha_2 y'')(\beta_1 x'' + \beta_2 y'') + a_{22}(\beta_1 x'' + \beta_2 y'')^2 + a'_{00} = 0$$

ehk avades sulud ja võttes sulgude taha  $x''$  ja  $y''$ :

$$a'_{11}x''^2 + 2a'_{12}x''y'' + a'_{22}y''^2 + a'_{00} = 0,$$

kus on lüheduseks kirjutatud

$$a_{11}\alpha_1^2 + 2a_{12}\alpha_1\beta_1 + a_{22}\alpha_1^2 = a'_{11}$$

$$a_{11}\alpha_2^2 + 2a_{12}\alpha_2\beta_2 + a_{22}\beta_2^2 = a'_{22}$$

$$a_{11}\alpha_1\alpha_2 + a_{12}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + a_{22}\beta_1\beta_2 = a'_{12}$$

Kui selle juures valime nurga  $\widehat{x'x''}$  väärtuse  $\varphi$  nii, et saab  $a'_{12}=0$ , s. o. (kui silmas peame, et valemis 53 on  $\alpha_2 = -\beta_1 = -\cos \widehat{x'y'} = -\sin \widehat{x'x''} = -\sin \varphi$  ja  $\beta_2 = \alpha_1 = \cos \widehat{x'x''} = \cos \varphi$

$$-a_{11} \cos \varphi \sin \varphi + a_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + a_{22} \sin \varphi \cos \varphi = 0 \quad 56$$

ehk jagades veel arvuga  $\cos^2 \varphi$  (mis ei saa null olla sellepärast, et ei ole  $a_{12}=0$  ja et ühe nurga siinus ja koosinus ei saa olla korruga nullid) ja muutes märgid:

$$a_{12} \tan^2 \varphi + (a_{11} - a_{22}) \tan \varphi - a_{12} = 0,$$

siis saavad uued teljed nimelt selle teise järgu joone teljed [V 24]

(sest uue  $x$ -telje tõus on ju  $m = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \tan \varphi$ ) ja võrrand

$$a'_{11}x''^2 + a'_{22}y''^2 + a'_{00} = 0$$

saab kanooniliseks nagu valemis 38 [16 14]].

Kui antud võrrandis on  $a_{10}=0$  ja  $a_{20}=0$ , siis on see võrrand juba nii lihtne, nagu muidu alles algust edasi viies saaks, ja edasi lihtsustamiseks (kui tarvis) tuleb siis ainult telgi pöörda.

(3) Kui on  $A_{00} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$  ja  $a_{12} \neq 0$ , siis saame telgi pöördes [V 53]  $a_{11}(a_1x' + a_2y')^2 + 2a_{12}(a_1x' + a_2y')(\beta_1x' + \beta_2y') + a_{22}(\beta_1x' + \beta_2y')^2 + 2a_{10}(a_1x' + a_2y') + 2a_{20}(\beta_1x' + \beta_2y') + a_{00} = 0$  ehk sulgusid avades ja siis sulgude taha võttes  $x'$  ja  $y'$ :

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a_{00} = 0,$$

kus on  $a'_{11}$ ,  $a'_{12}$  ja  $a'_{22}$  valemi 55 omad ja veel lüheduseks kirjutatud

$$a_{10}\alpha_1 + a_{20}\beta_1 = a'_{10} \text{ ja } a_{10}\alpha_2 + a_{20}\beta_2 = a'_{20} \quad 57$$

Kui selle juures valime nurga  $\widehat{xx'}$  väärtuse  $\varphi$  nii, et saab  $a'_{12}=0$ , s. o. et oleks [V 56; V 24] (sellepärast, et siin on  $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$  ja siis  $\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2} = a_{11} + a_{22}$ )

$$\tan \varphi = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{a_{22}}{a_{12}} \text{ või}$$

$$\tan \varphi = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = -\frac{a_{11}}{a_{12}} \quad 58$$

ja sellest kahest võimalusest nimelt viimase, siis saab ka

$$a'_{11} = \alpha_1^2 \left( a_{11} - 2a_{12} \cdot \frac{a_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{22}a_{11}^2}{a_{12}^2} \right) = \alpha_1^2 (a_{11} - 2a_{11} + a_{11}) = 0$$

ja sellega võrrand

$$a'_{22}y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a_{00} = 0.$$

Kui on  $a'_{20} = 0$  ja  $a_{00} = 0$ , siis saab juba siit kanooniline võrrand V 35, ja kui on  $a'_{10} = 0$ , siis saab sellest võrrandist arvule  $y'$  ainult kaks väärtust ja sellega esitab antud võrrand uue  $x$ -telje paralleelide paari.

(4) Kui ei ole  $a'_{20}$  ja  $a_{00}$  mõlemad nullid ega  $a'_{10} = 0$ , siis viime alguse punktisse  $(x'_0, y'_0)$ , s. o. paneme selles võrrandis  $x'$  ja  $y'$  asemele [V 52]  $x'' + x'_0$  ja  $y'' + y'_0$ , nii et saame

$$a'_{22}(y'' + y'_0)^2 + 2a'_{10}(x'' + x'_0) + 2a'_{20}(y'' + y'_0) + a_{00} = 0$$

ehk sulgusid avades ja siis sulgude tahta võttes  $x''$  ja  $y''$ :

$$a'_{22}y''^2 + 2a'_{10}x'' + 2a'_{20}y'' + a'_{00} = 0,$$

kus on lüheduseks kirjutatud

$$a'_{22}y'_0 + a'_{20} = a''_{20} \quad \text{ja} \quad a'_{22}y'_0{}^2 + 2a'_{10}x'_0 + 2a'_{20}y'_0 + a_{00} = a'_{00},$$

ja valime uue alguse koordinaadid  $x'_0$  ja  $y'_0$  nii, et saaks  $a''_{20} = 0$  ja  $a'_{00} = 0$ , s. o.

$$y'_0 = -\frac{a'_{20}}{a'_{22}} \quad \text{ja} \quad \text{siis} \quad x'_0 = -\frac{a_{00}a'_{22} - a'_{20}{}^2}{2a'_{10}a'_{22}} \quad 59$$

Siis saame võrrandi

$$a'_{22}y''^2 + 2a'_{10}x'' = 0$$

ja sellest kanoonilise nagu valemis 35 (nii et punkt  $(x'_0, y'_0)$  on antud võrrandiga esitatud parabooli tipp ja  $x''$ -telg tema telg).

Kui antud võrrandis on  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$  ja veel  $a_{12} = 0$ , siis on seal ka kas  $a_{11} = 0$  või  $a_{22} = 0$  (sest korrutis saab null olla ainult siis, kui üks tegur on null) ja sellega on see võrrand juba nii lihtne, nagu muidu alles telgi pöördes saaks. Edasi lihtsustamiseks (kui tarvis) tuleb siis ainult uus algus võtta (ja viimasel juhusel veel telgede nimed vahetada, kui tahame, nagu see viisiks on, kanoonilises võrrandis saada nimelt  $y^2$ , mitte  $x^2$ ).

3) Kui ühe tasapinna peal on märgitud üks punkt näiteks  $O$ , teine punkt näiteks  $X$  ja veel kolmas punkt, mis ei ole kiire  $OX$  peal, näiteks  $Y$  (nii et on  $OY \perp OX$  ja  $|OY| = |OX|$ , siis saab selle tasapinna iga muu punkti  $P$  täiesti määrata tema kauguse arvuga punktist  $O$  mõõdu  $OX$  järgi:

$$r = |OP| : |OX|$$

ja nurga  $POX$  suuruse arvuga  $\varphi$ , lugedes seda nurka kiirest  $OX$  nimelt sinna poole, kus on punkt  $Y$ . Seda kahte arvu  $r$  ja  $\varphi$  nimetatakse punkti  $P$  polaarkoordinaatideks ja nurga  $POX$  suuruse arvuks loetakse selle juures nimelt punkti  $O$  kui keskpunkti ümber ühemõõdulise raadiusega kujutatud ringi kaare pikkuse arvu selle nurga küljest  $OX$  punkti  $Y$  poole kuni teise küljeni  $OP$ , s. o.

$$\varphi = \widehat{XOP}_0 : |OX|$$

(kui  $P_0$  on see punkt, kus ringjoon keskpunktiga  $O$  ja raadiusega  $|OX|$  lõikab kiirt  $OP$ ). Punkt  $O$  nimetatakse siin ka pooluseks ja kiir  $OX$  ka polaarteljeks.

Täisnurksest kolmnurgast  $OP'P$  (kui on  $P'$  punkti  $P$  ristprojektsioon kiire  $OX$  peal) järgnevad nende Cartesiuse koordinaatide jaoks, millel on siin alguspunktiks  $O$  ja mõõdupunktideks  $X$  ja  $Y$ , teisendusvalemid polaarkoordinaatideks ja ümberpöörduid:

$$x = r \cos \varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

60

Polaarkoordinaatides saavad mitmed võrrandid lihtsamad kui Cartesiuse koordinaatides. Olgu näiteks teise järgu joonel võetud polaarkoordinaatide pooluseks üks fookus (näiteks  $F_1$  joonistel 15, 16 ja 17) ja polaarteljeks fokaaltelg sellest fookusest tipu poole ja kirjutame fookuse ja temale vastava juhtjoone vahelise (absoluutse) kauguse  $|F_1R'_1|$  arvu [lhk. 55], mis on paraboolil  $p$ , läheduseks

$$\left| \frac{a^2}{e} - e \right| = \frac{p}{\varepsilon}$$

Et on [J 15, J 16, J 17]  $|T'R'_1| = \left| \frac{F_1 T}{\cos r_1 t} \cdot \cos \hat{x}t \right| = \frac{|F_1 T|}{\varepsilon} =$   
 $= |F_1 R'_1| \pm |F_1 T'|$  ja märgiga  $\pm$  nimelt siis, kui on nurga  $TF_1 R'_1$   
 väärtus  $\varphi > \frac{\pi}{2}$  ja sellega  $\cos \varphi$  negatiivne, sellest järgneb ühine  
 võrrand kõigile kõdumata teise järgu joontele:

$$\frac{r}{\varepsilon} = \frac{p}{\varepsilon} - r \cos \varphi \quad \text{ehk} \quad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad 61$$

M ä r k u s 1. Kui valemis 54 on  $x_0$  ja  $y_0$  keskpunkti koordinaadid, siis  
 saab ta (nagu siis silma paistab, kui tema pahema poole kirjutame bilineaarselt)

$$a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00} = a'_{00} \quad 54a$$

Numbriliste võrrandite lihtsustamisel tuleb tarvitada muidugi ainult seda lühemat valemit.

M ä r k u s 2. Valemist 56 saame (märgates, et on  $\sin \varphi \cos \varphi =$   
 $= \frac{1}{2} \sin 2\varphi$  ja  $\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi$ )

$$\tan 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad 56a$$

Numbriliste võrrandite kanoonilise kuju leidmiseks ja ka nendega esitatud joonte  
 joonistamiseks ei ole sugugi tarvilik nurga  $\varphi$  väärtus (kraadides või mõõduringi  
 kaare pikkuse arvuna), vaid vahest ainult uue mõõdupunkti  $X'$  või  $X''$  koordi-  
 naadid  $\alpha_1$  ja  $\beta_1$ . Kui siiski seda nurga väärtust tarvis on, siis tuleb ta mui-  
 dugi leida sellest esimeseastmelisest valemist.

M ä r k u s 3. Arvud  $a'_{11}$  ja  $a'_{22}$  valemis 55 on siis ühe kergesti meel-  
 dejääva teise astme võrrandi juured, kui on  $a'_{12} = 0$ , sest on ju nende summa  
 $a'_{11} + a'_{22} = a_{11}(a_1^2 + a_2^2) + 2a_{12}(a_1\beta_1 + a_2\beta_2) + a_{22}(\beta_1^2 + \beta_2^2) = a_{11} + a_{22}$   
 (nagu see järgneb ortogonaalse substitutsiooni tingimustest) ja korrutis  
 $a'_{11}a'_{22} = a'_{11}a'_{22} - a'_{12}{}^2 = (a_{11}a_1^2 + 2a_{12}a_1\beta_1 + a_{22}\beta_1^2)(a_{11}a_2^2 + 2a_{12}a_2\beta_2 + a_{22}\beta_2^2) -$   
 $- [a_{11}a_1a_2 + a_{12}(a_1\beta_2 + a_2\beta_1) + a_{22}\beta_1\beta_2]^2 = a_{11}a_{22}(a_1^2\beta_2^2 + \beta_1^2a_2^2 - 2a_1a_2\beta_1\beta_2) +$   
 $+ a_{12}{}^2[4a_1\beta_1a_2\beta_2 - (a_1\beta_2 + a_2\beta_1)^2] = (a_1\beta_2 - \beta_1a_2)^2(a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2) = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2$   
 (ortogonaalse substitutsiooni unimodulaarsuse pärast). Sellega on võrrandil

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = 0$$

tõesti üks juur  $\lambda_1 = a'_{11}$  ja teine  $\lambda_2 = a'_{22}$ .

Selle võrrandi võime saada rohkem geomeetrilisel teel. Kirjutame diameetri võrrandi V 23 selle diameetri kaaskiirte sihikoosinuste  $\alpha$  ja  $\beta$  abil, s. o. paneme seal arvu  $m$  asemele tema väärtuse  $m = \frac{\beta}{\alpha}$  ja kaotame murrud, nii et saame igaks juhuseks kõlbava võrrandi (sest sihikoosinused ei saa millalgi lõpmatuseks)

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)x + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)y + a_{10}\alpha + a_{20}\beta = 0 \quad 62$$

Kui diameeter on telg, s. o. risti oma kaaskiirtega, siis on tema võrrandis tundmatute kordajad nimelt nende kaaskiirte sihikoosinused — vahest korrutatud mingi arvuga [H 36, H 30], mille siin kirjutame tähega  $\lambda$ , s. o. kui diameeter on telg, siis on

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha + a_{12}\beta &= \lambda\alpha \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta &= \lambda\beta \end{aligned} \quad 63$$

Need kaks võrrandit tundmatutega  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\lambda$  on  $\alpha$  ja  $\beta$  kohta homogeensed. (Mitme tundmatuga võrrandit nimetatakse nende tundmatute kohta siis homogeenseks (s. o. ühtlaseks), kui selle võrrandi kõiki liikmeid tema ühe tundmatu sellekohase astmega (mille näitajat nimetatakse ka selle võrrandi astmenäitajaks) jagades, kaotame selle tundmatu ja saame uuteks tundmatuteks teiste tundmatute jagatised selle ühega ja sellega neid uusi ühe tundmatu võrra vähem.) Jagades võrranditel V 63 kõik liikmed näiteks arvuga  $\alpha$  ja leides siis

ühest võrrandist jagatise  $\frac{\beta}{\alpha}$  arvu  $\lambda$  abil ja pannes saaduse teise võrrandisse

$\frac{\beta}{\alpha}$  asemele, saamegi ühe võrrandi tundmatu  $\lambda$  jaoks, mille võime kirjutada determinandi kujul

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad 64$$

mis on tõesti samane enne saadud võrrandiga ja mida tema kaju pärast nimetatakse sekulaarvõrrandiks.

Et sekulaarvõrrandi V 64 juured on nimelt võrrandi V 34 kanoonilise kaju saamiseks tarvilikud kordajad  $a'_{11}$  ja  $a'_{22}$ , see selgub ka siis, kui silmas peame, et valemites 53 on kordajad  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  ja  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  nimelt uute telgede sihikoosinused ja peavad siis selleks, et antud võrrandile saaks kanooniline kaju, olema selle võrrandiga esitatud teise järgu joone telgede (või telje ja tema kaaskiirte) sihikoosinused. Sest kui ühevõrdustes V 63 on  $\alpha = \alpha_1$  ja  $\beta = \beta_1$  ja seal korrutame esimese ühevõrduse liikmed arvuga  $\alpha_1$  ja teise omad arvuga  $\beta_1$ , siis saame nende ühevõrduste esimesi pooli liites  $a'_{11}$  [V 55] ja teisi pooli liites  $\lambda$ , ja niisama saame siis  $a'_{22} = \lambda$ , kui on  $\alpha = \alpha_2$  ja  $\beta = \beta_2$  ja esimese ühevõrduse liikmed korrutame arvuga  $\alpha_2$  ja teise omad arvuga  $\beta_2$ .

Märkus 4. Selleks, et antud numbrilisele teise astme võrrandile kanoonilist kuju saada, lahendatakse kõige pealt sekulaarvõrrand [V 64]. Kui selle juures ei saa ükski lahendus null, siis on antud võrrandiga esitatud teise järgu joonel keskpunkt, mille koordinaadid leitakse võrranditest V 21 ja siis nende järgi  $a'_{00}$  valemist 54a. Kui sekulaarvõrrandil saab üks lahendus null, siis on  $\lambda_1 \lambda_2 = a'_{11} a'_{22} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$ , s. o. antud võrrandiga esitatud teise järgu joon keskpunktita, ja kordaja  $a'_{10}$  jaoks [V 57] saadakse  $\alpha_1$  ja  $\beta_1$  väärtused (valemi 58 asemel) valemi 63 ühest võrrandist, kui sinna pannakse  $\lambda_1 = 0$ , ja nimelt

$$\alpha_1 = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} \quad \text{ja} \quad \beta_1 = \frac{-a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} \quad (\text{sest on ju } a_1^2 + \beta_1^2 = 1).$$

Näiteks on võrrandi  $2x^2 + 6xy + y^2 + 8x + 10y + 6 = 0$  [16 1) (5)] korral sekulaarvõrrand

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 7 = 0 \quad \text{ja} \quad \text{siis} \quad \lambda_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2} = 4,54 = a'_{11} \quad \text{ja}$$

$$\lambda_2 = -1,54 = a'_{22}$$

Keskpunkti koordinaadid on siin  $x_0 = -\frac{1}{7}$  ja  $y_0 = -\frac{2}{7}$ , sellega  $a'_{00} = -\frac{4}{7} - \frac{1}{7} + 6 = -\frac{1}{7}^2$  ja siis lihtsustatud võrrand

$$4,54 x'^2 - 1,54 y'^2 - \frac{1}{7}^2 = 0 \quad \text{ja kanooniline:} \quad \frac{x'^2}{0,38} - \frac{y'^2}{1,11} - 1 = 0,$$

nii et antud võrrand esitab hüperbooli, mille reaalne pooltelg on  $a = 0,61$ ,

imaginaarne  $b = 1,05$  ja siis ekstsentrisus  $\varepsilon = \sqrt{\frac{0,38 + 1,11}{0,38}} = 2,0$ .

Teiseks näiteks on võrrandi  $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 7x + 11y + 12 = 0$  [18 N 3] korral sekulaarvõrrand

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 6 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda = 0 \quad \text{ja} \quad \text{siis} \quad \lambda_1 = 0 \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = 13 = a'_{22}.$$

Kordaja  $a'_{10}$  jaoks saame võrrandist  $9\alpha_1 + 6\beta_1 = 0$  (ja võrrandist  $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$ )

$$\alpha_1 = \frac{6}{\sqrt{117}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad \text{ja} \quad \beta_1 = \frac{-9}{\sqrt{117}} = \frac{-3}{\sqrt{13}}, \quad \text{sellega valemist 57 järgi} \quad 2a'_{10} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{13}} \cdot 7 - \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot 11 = -19 : \sqrt{13} = -5,28 \quad \text{ja} \quad \text{siis lihtsustatud võrrand}$$

$$13y'^2 - 5,28x' = 0 \quad \text{ja kanooniline:} \quad y'^2 - 0,41x' = 0,$$

nii et antud võrrand esitab parabooli, millel on  $2p = 0,41$  ja siis fookuse kaugus tipust  $\frac{p}{2} = 0,10$ . Selle parabooli tipu vanade koordinaatide arvutamiseks

leiame [V 57]  $a'_{20} = \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot 7 + \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot 11 = \frac{43}{2\sqrt{13}}$  ja siis need koordinaadid ise [V 53, V 59]:

$$x_0 = a_1 x'_0 + a_2 y'_0 = \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{12 \cdot 13 - 43^2}{-19 \cdot 13} + \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{43}{2\sqrt{13} \cdot 13} =$$

$$= \frac{2(12 \cdot 13 \cdot 4 \cdot 13 - 43^2)}{19 \cdot 13 \cdot 4 \cdot 13} - \frac{3 \cdot 43}{2 \cdot 13 \cdot 13} = 0,98 - 0,38 = 0,60 \quad \text{ja siis}$$

$$y_0 = \beta_1 x'_0 + \beta_2 y'_0 = -\frac{3}{2} \cdot 0,98 + \frac{2}{3} \cdot -0,38 = -1,72$$

$$\left( \text{sest on ju } \frac{\beta_1}{\alpha_1} = -\frac{3}{2} \quad \text{ja} \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{2}{3} \right).$$

Märkus 5. Alguse edasiviimisel ja telgede pöörmisel, s. o. koordinaatide teisendamisel nii, et saab

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0 \quad \text{ja} \quad y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0 \quad 65$$

jääb muutmatusks antud teise astme võrrandi determinandi väärtus  $A$ . See selgub näiteks järgmiselt.

1) Determinandi mõistemääruse järgi on

$$(a_{11}X + a_{12}Y + a_{10}O)(a_{22}X + a_{22}Y + a_{20}O)(a_{10}X + a_{20}Y + a_{00}O) = A \cdot XYO.$$

Kui siia asetame

$$X = \alpha_1 X' + \alpha_2 Y' + x_0 O', \quad Y = \beta_1 X' + \beta_2 Y' + y_0 O' \quad \text{ja} \quad O = O' \quad 66$$

võtame igas (punkt-)teguris pahemal pool sulgude tahta  $X'$ ,  $Y'$  jne. ja kirjutame siis nendele saadud kordajad  $a'_{11}$ ,  $a'_{12}$  jne., siis saame pahemal pool

$$(a'_{11}X' + a'_{12}Y' + a'_{10}O')(a'_{21}X' + a'_{22}Y' + a'_{20}O')(a'_{01}X' + a'_{02}Y' + a'_{00}O') = A' \cdot X'Y'O'$$

ja paremal pool

$$A \cdot XYO = A \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & x_0 \\ \beta_1 & \beta_2 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} X'Y'O' = A \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} X'Y'O' = A \cdot X'Y'O',$$

nii et on  $A' = A$ . Nii saadud  $a'_{11}$  jne. on silmanähtavalt samased nendega, mis saavad siis  $x'x$  jne. kordajateks, kui antud võrrandi bilineaarses kolmerealises kujus [V 17] on pandud ainult viimases reas ja kahe esimese rea sulgudes  $x$  ja  $y$  asemele nende väärtused valemist 65.

2) Kui selles saadud bilineaarses võrrandis (võtame sulgude tahta  $x'$  ja  $y'$ , kirjutame ta siis kolme realiselt ja) paneme (jälle kolmandas reas ja kahe esimese rea sulgudes)  $x$  ja  $y$  asemele nende väärtused valemist 65, siis alles saame lõpuliku teisendatud võrrandi  $a''x'^2 + \dots = 0$  ja selle võrrandi determinandi väärtuse  $A''$  ühevõrdusest

$$(a'_{11}X + a'_{21}Y + a'_{01}O)(a'_{12}X + a'_{22}Y + a'_{02}O)(a'_{10}X + a'_{20}Y + a'_{00}O) = A' \cdot XYO,$$

kui sinna asetame  $X, Y$  ja  $O$  väärtused valemist 66. Selle ühevõrduse pahem pool saab siis  $A'' \cdot X'Y'O'$  ja parem pool

$$A' \cdot XYO = A' \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & x_0 \\ \beta_1 & \beta_2 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} X'Y'O' = A' \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} X'Y'O' = A' \cdot X'Y'O'$$

ja sellega on

$$A'' = A' = A.$$

Teise astme võrrandi determinandi muutmatuse pärast (alguse edasiviimisel ja telgede pöörmisel) saame parabooli lihtsustatud võrrandis  $\lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' = 0$  kordaja  $a'_{10}$  leida võrrandist

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{10} \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ a'_{10} & 0 & 0 \end{vmatrix} = A \text{ ehk } -\lambda_2 a'_{10}{}^2 = A, \text{ kust saaab:}$$

$$a'_{10} = \pm \sqrt{-A : \lambda_2}$$

67

**Märkus 6.** Nagu teise astme võrrandi determinant  $A$ , nii jäävad alguse edasiviimisel ja telgede pöörmisel muutumata ka sekulaarvõrrandi kordajad  $-(a_{11} + a_{22})$  ja  $A_{00} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$  [M 3]. Teise astme võrrandi V 34 pahemat poolt mõeldakse sagedasti homogeensena, nagu ta siis saaks, kui 1)  $x$  ja  $y$  asemel oleks murrud  $x:t$  ja  $y:t$ , 2) kõik liikmed tehtaks ühenimelisteks ja 3) jäetaks siis nimetaja ära. Siis nimetatakse ta ternaarseks (s. o. kolmeliseks) teise astme vormiks ja tema kordajatest kokku seatud niisuguseid avaldusi, mille väärtused ei muutu tundmatute mõnesuguste teisenduste korral, nimetatakse selle vormi absoluutseteks invariantideks (s. o. muutmatuteks) nende teisenduste kohta. Sellega on  $-(a_{11} + a_{22})$ ,  $A_{00}$  ja  $A$  ternaarse teise astme vormi

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}xt + 2a_{20}yt + a_{00}t^2$$

absoluutsed invariantid alguse edasiviimise ja telgede pöörmise kohta (ja viimased kaks veel iga unimoodulaarse substituutsiooni kohta, nagu see järgneb eelmise märkuse tõenduselt, mida saab selsamal viisil tarvitada binaarse (s. o. kahelise) vormi  $a_{22}x^2 + 2a_{12}xy + a_{11}y^2$  determinandi  $A_{00}$  jaoks). Näiteks on võrrandil  $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 7x + 11y + 12 = 0$

$$A = 3,5 \begin{vmatrix} 6 & 3,5 \\ 4 & 5,5 \end{vmatrix} - 5,5 \begin{vmatrix} 9 & 3,5 \\ 6 & 5,5 \end{vmatrix} = -9,5^2 \text{ ja } \lambda_2 = 13 \text{ ja sellega}$$

$$a'_{10} = \pm \sqrt{\frac{9,5^2}{13}} = \pm 9,5 : 3,60 = \pm 2,64 \text{ ehk siis } 2a'_{10} = \pm 5,28 \text{ [lhk. 83, lhk. 97].}$$

**Märkus 7.** Et valemist 21 saavad keskpunkti koordinaadid nimelt  $x_0 = A_{10} : A_{00}$  ja  $y_0 = A_{20} : A_{00}$  [17 M 3], siis saab valemist 54 a (lhk. 95)

$$a'_{00} = a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00} = (a_{10}A_{10} + a_{20}A_{20} + a_{00}A_{00}) : A_{00} = A : A_{00}$$

68

Sellega saab antud võrrandi teha kanooniliseks, kui on teada ainult tema (pahema poole) invariandid  $(a_{11}+a_{22})$ ,  $A_{00}$  ja  $A$ , sest esimese kahe invariandi järgi saab kirjutada sekulaarvõrrandi ja sealt leida  $\lambda_1 = a'_{11}$  ja  $\lambda_2 = a'_{22}$  ja viimase invariandi järgi saab leida  $a'_{00}$  [V 68] või  $a'_{10}$  [V 67].

Märkus 8. Valemis 52 on vanade tundmatute kordajate determinant ehk substituutsiooni moodul  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ , nii et alguse edasiviimise asemelepanu on ka unimodulaarne. Valemis 53 on vanade tundmatute kordajate determinant

$\begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$  nimelt uue põhikolmnurga pindala arv, sest on ju

$$O'X'Y' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & \beta_1 \\ 1 & a_2 & \beta_2 \end{vmatrix} OXY = \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{vmatrix} OXY.$$

See saab ainult siis positiivne, kui on ringjärjekord  $O'X'Y'$  samane ringjärjekorraga  $OXY$ , ja ainult siis on  $a_2 = -\beta_1$  ja  $\beta_2 = a_1$ , muidu aga saab  $a_2 = \beta_1$  ja  $\beta_2 = -a_1$ .

Märkus 9. Substituutsiooni  $x' = y$  ja  $y' = x$  nimetame telgede vahetuseks, substituutsiooni  $x' = x$  ja  $y' = -y$  peegelduseks  $x$ -teljes ja substituutsiooni  $x' = -x$  ja  $y' = -y$  peegelduseks alguspunktis.

Harjutus 90. Võttes mitu (enam kui 2) numbrilist teise astme võrrandit kahe tundmatuga, teha need võrrandid kanoonilisteks ainult invariantide abil ja joonistada nendega esitatud teise järgu jooned.

H. 91. Leida valemid nende teisenduste jaoks, millega saaks kõik kolm kanoonilist võrrandit ühise kuju

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

(Seda kuju tarvis rohkesti Apollonius ja nimetas selle juures  $x$ -väärtust (telje) lõiguks (ladinakeelses tõlkes *abscissa*) ja temale vastavat  $y$ -väärtust juurde korraldatud kauguseks (ladinakeelses tõlkes *ordinatim applicata*). Nende nimetuste järgi öeldakse veel praegu esimese koordinaadi asemel sagedasti abstsiss ja teise asemel ordinaat.) [Parabooli võrrand on juba selle kujuline. Teistel tuleb ainult algus edasi viia.]

H. 92. Kui on  $A = 0$  ja  $A_{00} = 0$ , siis on null ka  $a_{10}A_{10} + a_{20}A_{20} = -a_{10}(a_{12}a_{20} - a_{10}a_{22}) + a_{20}(a_{10}a_{12} - a_{11}a_{20}) = -(a_{10}\sqrt{a_{22}} - a_{20}\sqrt{a_{11}})^2 = -A_{20}^2 : a_{11} = -A_{10}^2 : a_{22}$  ja sellega  $A_{10} = 0$  ja siis ka  $A_{20} = 0$ . Seda silmaspidades tõendada valemist 42 ja teise astme võrrandi lihtsustamise esimesest saadusest (lhk. 74) teise järgu joone juhuste kriteeriumide tabel:

	$A_{00} \neq 0$		$A_{00} = 0$	
$A \neq 0$	$A_{00} < 0$	$A_{00} > 0$		parabool
		$a_{11}A$ (või $a_{22}A$ ) $< 0$	$> 0$	
	hüperbool	ellips	im. ellips	
$A = 0$	paarrealseid	paar imagin.		$A_{22}$ (või $A_{11}$ ) $< 0$   $> 0$
		lõikuvaid sirgeid jooni		$A_{11} = 0 = A_{22}$
			paarreaal. paar im. paralleele	üks sirge joon kahekordselt

H. 93. Niinimetatud normaalsel ringjoone võrrandil  $x^2 + y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$  nimetatakse tema pahema poole väärtust punkti  $(x, y)$  potentsiks selle ringi kohta. Tõendada, et punkti potentsil ringi kohta on ruutjuur nimelt sellest punktist sellele ringile mineva puutuja tüki pikkuse arv sellest punktist puutepunktini ehk, nagu lühidalt öeldakse, puutuja pikkus sellest punktist selle ringini. [Selle võrrandi pahem pool saab  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2$  [18], kus on  $x_0 = -a_{10}$  ja  $y_0 = -a_{20}$  selle ringi keskpunkti koordinaadid ja  $r^2 = a_{10}^2 + a_{20}^2 - a_{00}$  tema raadiuse ruut.]

H. 94. Kahe teise järgu joone võrrandite pahemaid pooli vahest veel mõne arvuga korrutatult liites saame jälle teise astme avalduse nendes samades tundmatutes. Sellepärast võime selle saaduse lugeda ka teise järgu joone võrrandi pahemaks pooleks. Kui näiteks kirjutame lüheduseks ühe teise järgu joone võrrandi pahema poole ühe tähega  $k_1$  ja teise oma  $k_2$ , siis on  $ak_1 + bk_2$  (kus  $a$  ja  $b$  on mingi kordajad) nimelt selle teise järgu joone võrrandi pahem pool, mis läheb läbi kahe esimese joone ühiste punktide, sest nende ühiste punktide koordinaadid teevad nulliks nii  $k_1$  kui ka  $k_2$  ja siis ka  $ak_1 + bk_2$ . Kui  $k_1$  ja  $k_2$  on kahe ringjoone normaalsete võrrandite [H 93] pahemad pooled, siis saab ka  $\frac{ak_1 + bk_2}{a + b}$  normaalse võrrandi pahemaks pooleks mingile ringile, mis läheb läbi selle kahe ringi lõikepunktide ehk mis on, nagu öeldakse, selle kahe ringiga määratud ringjoonte kimburst. Selles kahe ringiga  $k_1$  ja  $k_2$  määratud ringjoonte kimburst on üks joon, millele ei saa normaalset võrrandit, nimelt see, millel on  $a + b = 0$  ja siis ilma selle arvuga jagamata võrrandi pahem pool  $ak_1 + bk_2 = a(k_1 - k_2)$  ehk lihtsalt  $k_1 - k_2$ . Tõendada, et see joon (selle ringjoonte kimbu radikaaltelg) on sirge joon, ja võttes kaks numbrilist ringjoone võrrandit joonistada nendega määratud ringjoonte kimburst mitu ringi ja ka radikaaltelg.

H. 95. Tõendada, et ühe ringjoonte kimbu radikaaltelje antud punktil on seesama potents selle kimbu iga ringjoone kohta. (Sellepärast nimetatakse radikaaltelge ka potentsjooneks.) [Radikaaltelje antud punkti koordinaadid teevad nulliks  $k_1 - k_2$ , nii et iga ringjoone  $ak_1 + bk_2$  potents saab  $\frac{ak_1 + bk_2}{a + b} = \frac{a(k_1 - k_2) + (a + b)k_2}{a + b} = k_2$ .]

H. 96. Tõendada, et siis, kui ringjoonte kimp (ühes oma radikaalteljega) on läbi lõigatud mingi sirge joonega, on selle sirge joone lõikepunktid oma vahel siis kahekordses vastavuses (kaaspunktide vastavuses ekk involuutsuses), kui ühe ringi lõikepunktile loetakse vastavaks (kaaspunktiks) selle sama ringi teine lõikepunkt. [Kirjutame ühe ringi lõikepunkti kauguse arvu radikaaltelje lõikepunktist tähega  $x$  ja selle sama ringi teise lõikepunkti kauguse arvu tähega  $x'$ , siis on  $xx' = k$  [6 N 2 ja 3, M; H 89], sest ühest punktist mineval ringil lõikajal on lõikepunktidel sellest punktist loetud kauguste arvude korrutis puutuja pikkuse arvu ruudu suurune ja see on radikaaltelje punktil selle kimbu iga ringjoone kohta seesama.]

H. 97. Ristjoont kõvera joone puutujale puutepunktis nimetatakse selle kõvera joone normaaliks selles punktis. Tõendada, 1) et ellips on ring, kui tema kõik normaaliid lõikuvad ühes punktis [17 M 2], ja 2) et paraboolil  $y^2 - 2px = 0$  on tema igas punktis  $T$  [J 18] normaali tükil sellest punktist  $x$ -teljeni  $TN$  projektsiooni pikkus  $x$ -telje peal (parabooli subnormaal)  $\overline{TN}$  see sama arv. [Puutuja mingis punktis  $P_1 = (x_1, y_1)$  on  $y_1y - px - px_1 = 0$ . Sellega on normaal  $y_1(x - x_1) + p(y - y_1) = 0$ . Tema lõikepunkt  $x$ -teljega on  $N = (p + x_1, 0)$  ja sellega joonetüki  $P_1N$  otsade esimeste koordinaatide vahe  $p + x_1 - x_1 = p$ .]

H. 98. Tõendada, et võrrand

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1 = 0$$

69

kus on  $a$  ja  $b$  antud arvud ( $a^2 > b^2$ ), aga  $\lambda$  tundmatu (parameeter), esitab ellipsiid, kui on  $\lambda < b^2$ , ja hüperboole, kui on  $a^2 > \lambda > b^2$ , ja et nendel ellipsitel ja hüperboolidel on ühised fookused (et nad on konfokaalsed).

H. 99. Tõendada, et valemiga 69 määratud konfokaalsete joonte parvest läheb tasapinna igast punktist läbi üks ellips (parameetriga  $\lambda_1$ ) ja üks hüperbool (parameetriga  $\lambda_2$ ). Arvusi  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$  nimetatakse selle punkti elliptilisteks koordinaatideks selles konfokaalsete joonte parves. Kuid vastavus nende arvude paaride ja tasapinna punktide vahel ei ole mitte üksühene vaid üksneljane. Miks? [J 19]. [Asetades mingi antud punkti Cartesiuse koordinaadid valemisse 69, saame  $\lambda$  jaoks teise astme võrrandi, mille lahendustele saab anda kuju

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - x^2 - y^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b^2 - x^2 - y^2)^2 + 4y^2(a^2 - b^2)} < b^2 \text{ ja}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - x^2 - y^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 - a^2 + x^2 + y^2)^2 + 4y^2(a^2 - b^2)} > b^2 \text{ või}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - x^2 - y^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b^2 + x^2 + y^2)^2 - 4x^2(a^2 - b^2)} < a^2.]$$

H. 100. Tõendada, et võrrand

$$y^2 - 2(p-\lambda)x + \lambda(p-\lambda) = 0$$

70

kus on  $p$  antud arv, aga  $\lambda$  tundmatu (parameeter), esitab ühise fookusega (ja ühise teljega) parabooli, ja leida antud punkti Cartesiusse koordinaatide  $x$  ja  $y$  järgi tema paraboolsete koordinaadid [H 99] valemiga 70 määratud konfokaalsete paraboolide parves. [Viies alguse  $x$ -telge mööda edasi  $\frac{\lambda}{2}$  võrra, nitetsaab  $x = x' + \frac{\lambda}{2}$ , saame võrrandi  $y'^2 - 2(p-\lambda)x' = 0$ , kust

järgneb fookuse kaugus uuest algusest  $\frac{p-\lambda}{2}$  ja siis endisest  $\frac{p-\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \frac{p}{2}$ .]

H. 101. Tõendada, et elliptilised ja paraboolsete koordinaadid on ortogonaalsed (kõverjoonelised) koordinaadid, s. o. et ühest punktist läbiminevatel konfokaalsetel joontel on selles punktis teisel puutuja risti teise omaga ehk teise puutuja teisele normaaliks. [Joonte  $\frac{x^2}{a^2 - \lambda_1} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_1} - 1 = 0$

ja  $\frac{y^2}{a^2 - \lambda_2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_2} - 1 = 0$  puutujad mingis punktis  $(x_1, y_1)$  on

$$\frac{x_1 x}{a^2 - \lambda_1} + \frac{y_1 y}{b^2 - \lambda_1} - 1 = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{x_1 x}{a^2 - \lambda_2} + \frac{y_1 y}{b^2 - \lambda_2} - 1 = 0.$$

Nende ristseisu tunnuse

$$\frac{x_1^2}{(a^2 - \lambda_1)(a^2 - \lambda_2)} + \frac{y_1^2}{(b^2 - \lambda_1)(b^2 - \lambda_2)} = 0$$

saame kohe, kui kummagi joone võrrandisse paneme nende ühise punkti koordinaadid  $x_1$  ja  $y_1$ , lahutame siis esimese võrrandi pahemast poolest teise oma ja jätame ära ühise teguri  $\lambda_1 - \lambda_2$ . Paraboolsete koordinaatide korral saame ristseisu tunnuse elimiiniides (kõrvaldades) joonte võrranditest  $x_1$ .]

H. 102. Puutujate paar  $t_1 t_2$  antud punktist  $P$  antud teise järgu joonele  $k$  on (kõdunud) teise järgu joon läbi kahe puutepunkti, mida tuleb kumbagi lugeda kaheks ühinenud lõikepunktiks. Kuni kaks lõikajat antud punktist ei ole saanud puutujateks, seni võib veel vaadelda teist sirgete joonte paari  $p_1 p_2$  läbi nende lõikepunktide. See teine paar saab siis, kui lõikajad saavad puutujateks, antud punkti polaariks  $p$  kahekordselt. Kui tähtedega  $t_1, t_2, k$  ja  $p$  kirjutame lüheduseks ka nende joonte võrrandite pahemad pooled, siis on  $t_1 t_2 = ak + bp^2$  [H 94]. Silmaspidades, 1) et kordaja  $b$  ei või siin olla null (kui ei ole joon  $k$  kõdunud), 2) et võrrandi pahemat poolt võib jagada iga arvuga, mis ei ole null, ja 3) et võrrandit  $t_1 t_2 = 0$  peavad rahuldama antud punkti koordinaadid, tõendada, et antud punktist  $P = (x_1, y_1)$  antud (kõdumata) teise järgu joonele  $k$  mineva puutujate paari võrrand on

$$k_1 k - p^2 = 0$$

71

kus on  $k = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00}$ ,  
 $k_1 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + 2a_{10}x_1 + 2a_{20}y_1 + a_{00}$  ja siis  
 $p = a_{11}x_1x + a_{12}(x_1y + xy_1) + a_{22}y_1y + a_{10}(x + x_1) + a_{20}(y + y_1) + a_{00}$ .  
 (Näiteks on puutujate paar ellipsile  $x^2 + 2x^2 - 1 = 0$  punktist  $(0; 3)$ ):

$$17(x^2 + 2y^2 - 1) - (6y - 1)^2 = 0 \text{ ehk } 17x^2 - 2y^2 + 12y - 18 = 0, \text{ s. o.}$$

$$17x^2 - 2(y - 3)^2 = 0 \text{ ehk } \sqrt{17}x \pm \sqrt{2}(y - 3) = 0.$$

H. 103. Need punktid, kust puutujate paarid antud teise järgu joonele on ristjoonte paarid, on ellipsi ja hüperbooli korral ühe ringjoone ja parabooli korral ühe sirge joone peal. Missuguse ringjoone ja missuguse sirge joone peal? [Olgu punktist  $P = (x_1, y_1)$  üks puutuja  $t_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$  ja teine  $t_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ . Nende paari võrrand on siis  $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ . Selle võrrandi pahem pool peab olema samane võrrandi V 71 pahema poolega (vahest mõne arvuga korrutatult) ja temas on nende puutujate ristseisu korral, s. o.  $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$  korral,  $x^2$  kordajal  $a_1a_2$  ja  $y^2$  kordajal  $b_1b_2$  summa null. Ellipsi ja hüperbooli lihtsama võrrandi  $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{00} = 0$  järgi on valem 71

$$(a_{11}x_1^2 + a_{22}y_1^2 + a_{00})(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{00}) - (a_{11}x_1x + a_{22}y_1y + a_{00})^2 = 0.$$

Siit saame  $x^2$  kordajaks

$$(a_{11}x_1^2 + a_{22}y_1^2 + a_{00})a_{11} - a_{11}^2x_1^2 = a_{22}a_{11}y_1^2 + a_{00}a_{11}$$

ja  $y^2$  omaks selsamal viisil  $a_{11}a_{22}x_1^2 + a_{00}a_{22}$  ja sellega

$$a_{22}a_{11}y_1^2 + a_{11}a_{22}x_1^2 + a_{00}a_{11} + a_{00}a_{22} = 0 \text{ ehk } x_1^2 + y_1^2 + \frac{a_{00}}{a_{22}} + \frac{a_{00}}{a_{11}} = 0.$$

Niisama saame parabooli lihtsama võrrandi  $a_{22}y^2 + 2a_{10}x = 0$  järgi

$$2a_{22}x_1 - a_{10} = 0.]$$

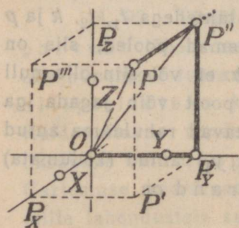
## IV. Kolmemõõteline analüütiline geomeetria.

20. Ruumi punktide Cartesiuse koordinaadid. Kolmemõõtelise geomeetria lihtsamaks näiteks on ruumi punktide käsitlemine. Kui ruumis on mingi tasapind, siis saame selle tasapinna punktidele Cartesiuse koordinaadid, kui võtame seal mingi kaks ristjoont  $OX$  ja  $OY$  telgedeks [12]. Siis saab ruumi igale muule punktile  $P$  vastavaks kolm arvu:

1) tasapinna  $OXY$  selle punkti  $P'$  koordinaadid  $x$  ja  $y$ , mille kohal see muu punkt seisab, s. o. kui on  $P'P \perp OXY$ , ja

2) selle kauguse arv  $z$ , mille võrra see

muu punkt on eemal pinnast  $OXY$ .



Joonis 28.

Pind  $OXY$  lahutab ruumi kaheks pooleks. Kauguse arv  $z$  peab ka seda näitama, kus pool pinnast  $OXY$  see punkt  $P$  seisab. Selleks peab ruumis peale punktide  $O$ ,  $X$  ja  $Y$  veel märkima mingi neljanda punkti  $Z$ , mis ei ole pinna  $OXY$  peal. Siis alles saab ütelda, et punkt  $P$  on pinnast  $OXY$  seal pool, kus on punkt  $Z$ , või jälle vastupidisel pool. On kõige lihtsam võtta niisuguseks neljandaks punktiks see punkt, mis seisab alguspunktist  $O$  ühe mõõdu kaugusel ja otse tema kohal, s. o. nii, et on  $OZ \perp OXY$ . Siis saavad sirge joone  $OZ$  punktidele alguspunkti  $O$  ja mõõdupunkti  $Z$  järgi Cartesiuse koordinaadid, mis on positiivsed alguspunktist  $O$  seal pool, kus on punkt  $Z$ , ja negatiivsed vastupidisel pool. Selle järgi loetakse ka igal muul punktil kauguse arv  $z$  siis positiivseks, kui see punkt on pinnast  $OXY$  seal pool, kus on punkt  $Z$ , ja siis negatiivseks, kui ta on vastupidisel pool.

Sel viisil ruumi iga punkti  $P$  jaoks saadud kolme arvu  $x$ ,  $y$  ja  $z$  nimetatakse selle punkti Cartesiuse ristkoordinaatideks või lihtsalt Cartesiuse koordinaatideks —  $x$  esimeseks,  $y$  teiseks ja  $z$  kolmandaks. Punkt koordinaatidega  $x$ ,  $y$  ja  $z$  kirjutatakse lühidalt  $(x, y, z)$ , nii et kui selle punkti nimi on  $P$ , siis võib ütluse „ $P$  on punkt koordinaatidega  $x$ ,  $y$  ja  $z$ “ kirjutada:  $P = (x, y, z)$ . Jooni  $OX$ ,  $OY$  ja  $OZ$ , mille najal need koordinaadid saadakse, nimetatakse koordinaatide telgedeks või ka lihtsalt telgedeks ja nimelt  $OX$  esimeseks või  $x$ -teljeks,  $OY$  teiseks või  $y$ -teljeks ja  $OZ$  kolmandaks või  $z$ -teljeks ja nende ühist alguspunkti ka koordinaatide alguspunktiks või ka lihtsalt alguseks. Tasapindasid  $OXY$ ,  $OYZ$  ja  $OZX$  nimetatakse koordinaatide tasapindadeks ja esimest ka  $xy$ -pinnaks, teist  $yz$ -pinnaks ja kolmandat  $zx$ -pinnaks.

Kui punktist  $P$  läheb kiir risti mõnele tasapinnale, siis nimetatakse selle kiire ja selle pinna lõikepunkt punkti  $P$  ristprojektsiooniks või ka lihtsalt projektsiooniks selle pinna peal. Joonisel 28 on kirjutatud punkti  $P$  projektsioon  $xy$ -pinnal tähega  $P'$ ,  $yz$ -pinnal tähega  $P''$  (pe sekund) ja  $zx$ -pinnal tähega  $P'''$  (pe tertis). Seal on veel näha ka punkti  $P$  projektsioonid telgede peal:  $x$ -telje peal  $P_x$  (pe üks),  $y$ -telje peal  $P_y$  ja  $z$ -telje peal  $P_z$ . Need punkti  $P = (x, y, z)$  projektsioonid on:  $P' = (x, y, 0)$ ,  $P'' = (0, y, z)$ ,  $P''' = (x, 0, z)$ ,  $P_x = (x, 0; 0)$ ,  $P_y = (0, y, 0)$  ja  $P_z = (0; 0, z)$ .

Et on  $OZ \perp OXY$ ,  $OX \perp OYZ$ ,  $OY \perp OZX$ ,  $PP' \perp OXY$   
 $PP'' \perp OYZ$  ja  $PP''' \perp OZX$  ja siis

$$P'P \perp OP_z, P''P \perp OP_x \text{ ja } P'''P \perp OP_y,$$

sellepärast võib ütelda, et ruumi punkti Cartesiuse ristkoordinaadid on selle punkti ristprojektsioonide koordinaadid telgede peal ja ka selle punkti kauguste arvud koordinaatide pindadest:  $x$  kauguse arv  $yz$ -pinnast,  $y$  kauguse arv  $zx$ -pinnast ja  $z$  kauguse arv  $xy$ -pinnast.

Märkus 1. Valemi 4 järgi on punkti  $P = (x, y, z)$  projektsioonid telgede peal

$$P_x = O + x(X - O), P_y = O + y(Y - O) \text{ ja } P_z = O + z(Z - O)$$

ja tema projektsioon  $xy$ -pinnal valemi 6 järgi

$$P' = O + x(X - O) + y(Y - O).$$

Et parallelelepipeedi  $OP_x P' P_y P'' P P''' P_z$  diagonaalidel on ühine keskpunkt, siis on

$$\frac{1}{2}(O + P) = \frac{1}{2}(P' + P_z) \text{ ehk } P = P' + P_z - O$$

ja sellega

$$P = (1 - x - y - z)O + xX + yY + zZ = O + x(X - O) + y(Y - O) + z(Z - O) \quad 72$$

Selle valemiga on punkt kirjutatud oma koordinaatidega  $x, y, z$  põhipunktide  $O, X, Y$  ja  $Z$  abil. See kirjutus on ruumi punkti täielik kirjutus. Tema viimast osa  $O + x(X - O) + y(Y - O) + z(Z - O)$  võib lugeda: see punkt, kuhu jõutakse, kui minnakse punktist  $O$  edasi joonega  $OX$  paralleelselt  $x$   $OX$  võrra, sealt joonega  $OY$  paralleelselt  $y$   $OY$  võrra ja sealt joonega  $OZ$  paralleelselt  $z$   $OZ$  võrra. (Kirjutus  $(x, y, z)$  on iseenesest ilma sisuta, aga oma läheduse pärast kohane ka punkti nimeks.)

Märkus 2. Joonis 28 on niinimetatud paralleelperspektiivne, s. o. niisugune, nagu saaks vari mingi tasase tagaseina peal siis, kui sirged jooned ( $OX, OY$  jne.) oleksid sirged traadid ja nende peale paistaksid paralleelsed kiired. Niisuguse varjupildi peal on 1) paralleelide pildid paralleelsed ja sellepärast iga sirge joone ja tema paralleelide ühepikkuste tükide pildid ühepikkused ja 2) tagaseinaga paralleelsete joonte pildid nende joontega ühtivad. Selle sarnaselt paistavad ruumi jooned ja nende tükid, vaatajale alles siis, kui ta on nendest joontest väga kaugel.

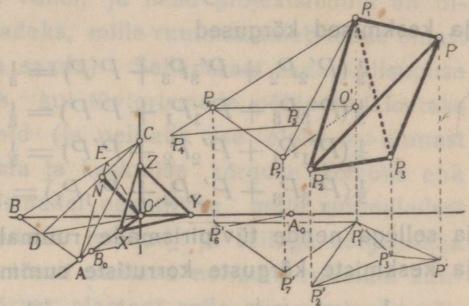
Joonisel 28 on mõeldud püstiseivaks tagaseinaks nimelt  $yz$ -pind. Varjuheitvad kiired tulevad paremalt poolt ülevalt nii, et möödul  $OX$  saab pilt umbes kaks korda vähem. Tagaseina taga olevad jooned on joonistatud punktiliselt [J 20, J 21, J 22]. Joonel, mis on teise taga, on selle teise joone pildi kohal pilt kustunud.

Selle sama juhtmõtte järgi on valmistatud kõik järgnevad joonised. Selle joonistamise viisiga harjumiseks annab joonis 29 õige rohkesti ainet.

1) Seal saab leida kõigi antud punktide koordinaadid, võttes  $y$  telje peal punktid  $P_y, P_{1y}, P_{2y}$  jne. nii, et oleks  $OX \parallel P_y P' \parallel P_{1y} P'_1 \parallel P_{2y} P'_2$  jne. ja mõõtes punkti  $P$  jaoks  $P_y P'$  mõõduga  $OX$ ,  $OP_y$  mõõduga  $OY$  ja  $P'P$  mõõduga  $OZ$  ja niisama ka teiste punktide jaoks.

2) Nendel punktidel, mille projektsioonid ei ole antud (nagu  $P_4, N$  jne.), saab need leida, võttes sellest punktist püstjoone ( $P_4 P'_4$ ) ja selle püstjoone peal punkti ( $P'_4$ ) nimelt nii, et ta oleks sellest punktist läbimineva sirge joone ( $P_1 P_6$ ) projektsiooni ( $P'_1 P'_6$ ) peal.

3) Kolmnurgad  $P_1 P_2 P, P_1 P_6 P_7$  ja  $P_1 P_4 P_5$  on kõik tasapinna  $ABC$  peal, sest nende külgede pikendused lõikuvad oma projektsioonidega  $xy$ -pinnal joone  $AB$  peal ja  $yz$ -pinnal joone  $BC$  peal.



Joonis 29.

Harjutus 104. Joonistada teljed oma mõõdupunktidega ja võttes mitu arvude kolmikut märkida selles teljestikus väikeste ringikestega need punktid, millele need arvude kolmikud on koordinaatide kolmikuteks.

H. 105. Pinnad  $OXY, OXZ$  ja  $OYZ$  lahutavad ruumi kaheksaks osaks. Vaadata järele, kus on kõik kolm koordinaati positiivsed, kus ainult esimene positiivne, kus ainult teine, kus ainult kolmas; kus on kõik kolm koordinaati negatiivsed, kus ainult esimene negatiivne, kus ainult teine, kus ainult kolmas.

**21. Nelja punkti vaheline ruumala. Negatiivne ruumala. Tasapind läbi kolme punkti.** Kui ruumi punktile on korraldatud Cartesiuse koordinaadid ja on antud oma koordinaatidega neli punkti  $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2), P_3 = (x_3, y_3, z_3)$  ja  $P = (x, y, z)$ , siis saame kohe leida ka nende punktide vahelise ruumala, s. o. nelitahu ehk tetraeedri  $P_1 P_2 P_3 P$  ruumala, mille kirjutame lihtsalt  $P_1 P_2 P_3 P$ . On ju see ruumala määratud nelja tüviprisma  $P_2 P_3 P P' P'_3 P'_2, P_3 P_1 P P' P'_1 P'_3, P_1 P_2 P P' P'_2 P'_1$  ja  $P_3 P_2 P_1 P'_1 P'_2 P'_3$  ruumaladega [J 29], kus on  $P'_1, P'_2, P'_3$  ja  $P'$  punktide  $P_1, P_2, P_3$  ja  $P$  projektsioonid  $xy$ -pinna peal. Nendel tüviprismaadel on põhjapindalad järgemööda

$$P'_2 P'_3 P' = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} OXY, \quad P'_3 P'_1 P' = \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} OXY,$$

$$P'_1 P'_2 P' = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} OXY \text{ ja } P'_3 P'_2 P'_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} OXY,$$

ja keskmised kõrgused

$$\frac{1}{3}(P'_2 P_2 + P'_3 P_3 + P'P) = \frac{1}{3}(z_2 + z_3 + z) OZ,$$

$$\frac{1}{3}(P'_3 P_3 + P'_1 P_1 + P'P) = \frac{1}{3}(z_3 + z_1 + z) OZ,$$

$$\frac{1}{3}(P'_1 P_1 + P'_2 P_2 + P'P) = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z) OZ \text{ ja}$$

$$\frac{1}{3}(P'_3 P_3 + P'_2 P_2 + P'_1 P_1) = \frac{1}{3}(z_3 + z_2 + z_1) OZ,$$

ja sellega nende tüvipirismade ruumalade summa nende pindalade ja keskmiste kõrguste korrutiste summa

$$\left[ \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} (z_2 + z_3 + z) + \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} (z_3 + z_1 + z) + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} (z_1 + z_2 + z) + \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} (z_3 + z_2 + z_1) \right] \frac{OXY \cdot OZ}{3}.$$

See nelja tüviprisma ruumalade summa ongi otsitav nelja punkti vaheline ruumala. Sest siis, kui punktid  $P_1, P_2, P_3, P$  seisavad nii kui joonisel 29, on otsitava ruumala saamiseks õieti tarvis kolmanda tüviprisma ruumalast lahutada teiste omade summa, aga kui nelitahu  $P_1 P_2 P_3 P$  nukkidele on määratud kruvijärjekord  $P_1 P_2 P_3 P$  (s. o. tahu  $P_1 P_2 P_3$  nukkidele on määratud ringjärjekord  $P_1 P_2 P_3$  ja siis — Möbiuse reegli järgi — iga muu tahu nukkidele ringjärjekord nii, et kahe tahu, näiteks  $P_1 P_2 P_3$  ja  $P_2 P_1 P$ , kahest ühisest nukist, nagu siin  $P_1 P_2$ , on ühe tahu järjekorras see nukk teise eelmiseks, mis on teise tahu järjekorras teise järgmiseks), siis saavad selle nelitahu tahkude projektsioonid  $xy$ -pinna peal (s. o. nende tahkude nukkide projektsioonide vahelised  $xy$ -pinna tükid, kui nukkide projektsioonidel loetakse seesama ringjärjekord, mis nukkidel ise on)  $P'_1 P'_2 P'_3, P'_2 P'_1 P', P'_3 P'_2 P'$  ja  $P'_1 P'_3 P'$  mõned (nagu joonisel 29  $P'_2 P'_1 P'$ ) negatiivsed. Kui nelitahu nukkide kruvijärjekord  $P_1 P_2 P_3 P$  on samane järjekorraga  $OXYZ$

(nagu joonisel 29 on mõlemad parempoolsed kruvijärjekorrad, s. o. joon punktist  $O$  üle  $X$  ja  $Y$  punktini  $Z$  ja joon punktist  $P_1$  üle  $P_2$  ja  $P_3$  punktini  $P$  keeravad mõlemad nagu hari-liku ehk parema käe kruvi soon) ja kui nelitahk on  $xy$ -pinnast positiivsel pool (s. o. seal pool, kus on punkt  $Z$ ), siis saavad positiivsed ainult nende tahkude projektsioonid, mis on selle nelitahu ruumala ja  $xy$ -pinna vahel, ja need projektsioonid on nimelt nende tüviprismade põhjadeks, mille ruumala tuleb teiste omast lahutada (et nelitahu ruumala saada). Sellepärast saaks niisuguse nukkide järjekorra juures siis, kui tüviprismade põhjadeks loetakse nelitahu tahkude projektsioonid (ja nelitahk ise oleks  $xy$ -pinnast positiivsel pool), põhja pindala ja keskmise kõrguse korrutis ehk ruumala nimelt nendel tüviprismadel negatiivne, mille ruumaladest teiste omad (positiivsed) lahutada tulevad, ja sellega kõige nelja tüviprisma ruumalade summa tõesti otsitava nelitahu ruumala suurune, aga negatiivne. Sellepärast olemegi selle summa jaoks võtnud tüviprismade põhjadeks mitte nelitahu tahkude projektsioonid ise, vaid nende vastupidised väärtused  $P'_3P'_2P'_1$  jne. (muutes nukkide ringjärjekorra vastupidiseks). Selles summas oleme veel tüviprismade keskmise kõrguse kirjutustest jagaja 3 viinud ruumimõõdu  $OXY.OZ$  juurde, nii et on saanud mõõduks kolmandik sellest kolmnurksest prismast  $OXY.OZ$  ja sellega  $\frac{1}{6}$  kuupmõõtu, mis on nimelt põhinelitahu  $OXYZ$  ruumala. Nii saame otsitava ruumala  $P_1P_2P_3P$  jaoks (kui teda mõõdame  $\frac{1}{6}$  kuupmõõduga  $OXYZ$ ) järgmise valemi

$$P_1P_2P_3P = \left[ \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x & y \end{array} \right| (z_2 + z_3 + z) + \left| \begin{array}{ccc} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \end{array} \right| (z_3 + z_1 + z) + \\ + \left| \begin{array}{ccc} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{array} \right| (z_1 + z_2 + z) + \left| \begin{array}{ccc} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{array} \right| (z_3 + z_2 + z_1) \right] OXYZ$$

73

Selle valemi järgi saab ruumala  $P_1P_2P_3P$  siis ikka positiivne, kui on kruvijärjekord  $P_1P_2P_3P$  samane järjekorraga  $OXYZ$ . Sest siis, kui nelitahk  $P_1P_2P_3P$  on  $xy$ -pinnast negatiivsel pool (s. o.

seal pool, kus ei ole punkt  $Z$ ), on tema nendel tahkudel, mis on tema ruumala ja  $xy$ -pinna vahel, projektsioonid juba negatiivsed ja siis valemis nende vastupidised väärtused positiivsed, aga siis on jälle  $z$ -väärtused negatiivsed, sellega valemis nendel tüviprismadel, mille ruumala tuleb teiste omast lahutada, põhja pindala küll positiivne, aga keskmine kõrgus negatiivne ja sellepärast nende korrutis negatiivne.

Kui aga kruvijärjekord  $P_1P_2P_3P$  on vastupidine järjekorrale  $OXYZ$  (teine nendest parempoolne, teine pahempoolne, s. o. nii, et joon esimesest punktist üle teise ja kolmanda neljandasse punkti minnes keerab nagu soon sellel kruvil, mis siis välja tuleb, kui teda käänatakse harilikku kruvi sissekäänamise viisil), siis saab selle valemi järgi ruumala arv negatiivne. Sest siis saavad  $xy$ -pinnast positiivsel pool nelitahu nendel tahkudel, mis ei ole selle nelitahu ruumala ja  $xy$ -pinna vahel, projektsioonid positiivsed ja siis nende vastupidised väärtused selles valemis negatiivsed.

Nelja punkti  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ,  $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$  ja  $P = (x, y, z)$  vahel ei ole ruumala siis, kui need punktid on ühe tasapinna peal. Sellepärast peavad tasapinna  $P_1P_2P_3$  iga punkti  $P$  koordinaadid rahuldama võrrandit:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} (z_2 + z_3 + z) + \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} (z_3 + z_1 + z) + \\ + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} (z_1 + z_2 + z) + \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} (z_3 + z_2 + z_1) = 0$$

ja iga arvude kolmik  $x, y$  ja  $z$ , mis rahuldab seda võrrandit, on pinna  $P_1P_2P_3$  ühe punkti koordinaatide kolmik. Sellepärast nimetatakse seda võrrandit tasapinna võrrandiks. Selle võrrandi esimese poole (nelitahu  $P_1P_2P_3P$  ruumala arvu) saame kohe kirjutada lihtsamal kujul, kui märkame, et siis, kui nelitahu nuksidele on määratud kruvijärjekord, saab selle nelitahu tahkude projektsioonide summa null (ja siis muidugi ka nende projektsioonide vastupidiste väärtuste summa), sest negatiivsed projektsioonid katavad positiivsed. Seda märkust silmaspidades lisame ruumala arvu esimese liikme teisele tegurile juurde  $z_1 - z_1$ , teise liikme teisele tegurile

$z_2 - z_2$ , kolmanda liikme omale  $z_3 - z_3$  ja neljanda liikme omale  $z - z$ . Siis saab selles ruumala arvus osa, millel on teguriks  $z_1 + z_2 + z_3 + z$  ja teiseks teguriks nelja determinandi summa, mis on null, sest ta on nelitahu tahkude projektsioonide summa. Sellega on see ruumala arv oma muu osa suurune, s. o.

$$P_1 P_2 P_3 P = \begin{pmatrix} 1 & x_2 & y_2 & -z_1 \\ 1 & x_3 & y_3 & -z_2 \\ 1 & x & y & -z \\ 1 & x_3 & y_3 & -z \\ 1 & x_2 & y_2 & -z \\ 1 & x_1 & y_1 & -z \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} -$$

$$- z \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} \Big) OXYZ.$$

See saadus kirjutatakse lühidalt (niinimetatud neljarealise determinandi kujul):

$$P_1 P_2 P_3 P = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix} OXYZ.$$

Sellega on tasapinna  $P_1 P_2 P_3$  võrrand selle kolme punkti koordinaatide järgi

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad 74$$

Märkus 1. Nelitahu ruumala valemi tuletamise viisil saab tuletada valemi iga hulktahu ruumala jaoks. Saab ju iga hulktahu  $P_1 P_2 \dots P_n$  tahud lahutada kolmnurkadeks, ilma et selleks tuleks uusi nukkisid juurde võtta. Nende kolmnurkadele saab kõigile määrata nukkide ringjärjekorra Möbiuse reegli järgi. Siis saavad nendel tahkudel, mis on selle hulktahu ruumala ja  $xy$ -pinna vahel (kui see hulktahk on ühel pool  $xy$ -pinda), kõigil projektsioonid positiivsed või kõigil negatiivsed, aga muil tahkudel vastupidised, nii et hulktahu ruumala arvu saamiseks on tarvis tema iga (kolmnurkse) tahu projektsioon korrutada selle tahu nukkide kolmandate koordinaatide summaga ja need korrutised liita.

Märkus 2. Nelja punkti vahelise ruumala valemi saame kohe lihtsustatud kujul, kui korrutame need punktid

$$\begin{aligned} P_1 &= O + x_1(X - O) + y_1(Y - O) + z_1(Z - O) \\ P_2 &= O + x_2(X - O) + y_2(Y - O) + z_2(Z - O) \\ P_3 &= O + x_3(X - O) + y_3(Y - O) + z_3(Z - O) \\ P &= O + x(X - O) + y(Y - O) + z(Z - O) \end{aligned}$$

Sest

1) korrutades teise punkti  $P_2$  kolm esimest liiget kolmanda punkti  $P_3$  omadega, saaduse siis neljanda punkti  $P$  omadega ja selle saaduse veelgi esimese punkti  $P_1$ , neljanda liikmega ja muutes märgi (sellepärast, et see saadus ilma märgi muutmata oleks üks liige korrutises  $P_2P_3PP_1$ , millest saab korrutis  $P_1P_2P_3P$  alles siis, kui kolm korda vahetatakse kahe teguri kohad:  $PP_1 \rightarrow P_1P$ ,  $P_3P_1 \rightarrow P_1P_3$ ,  $P_2P_1 \rightarrow P_1P_2$  ja sellepärast kolm korda ka märk [V 2]), saamegi ruumala lihtsustatud valemi esimese liikme;

2) niisama saame selle valemi teise liikme korrutades kolm esimest liiget punktidel  $P_3P_1P$  (selles järjekorras) ja saaduse veel punkti  $P_2$  neljanda liikmega ja muutes märgi, selle valemi kolmanda liikme — korrutades kolm esimest liiget punktidel  $P_1, P_2, P$  ja saaduse veel punkti  $P_3$  neljanda liikmega ja muutes märgi, ja ka selle valemi viimase liikme — korrutades kolm esimest liiget punktidel  $P_3, P_2, P_1$  ja saaduse veel punkti  $P$  neljanda liikmega ja muutes märgi, ja

3) muud enam selle nelja punkti korrutises ei saa ollagi sellepärast, et selle korrutise igas osakorrutises (mis ei ole null) peab olema üheks teguriks ühe korrutatava punkti neljas liige ja niisugused osakorrutised on juba kõik selle nelja saaduse sees.

See nelja punkti korrutis kirjutataksegi lühidalt neljarealise determinandi abil (nagu meie juba ruumala oleme kirjutanud), sest neljarealisteks determinandiks nimetatakse nelja realine ja nelja veeruline arvude tabel, mille ette ja taha pandud püstkriipsudega näidatakse, et selle tabeli arvudega tulevad teha tehted nagu siis, kui on neli punkti kirjutatud nelja põhipunkti abil nii, et esimesel punktil on põhipunktide kordajateks (nende põhipunktide kindlas järjekorras) selle tabeli esimese rea arvud, teisel teise rea omad jne., ja need neli punkti korrutatakse. Punktid  $P_1$  jne. ei ole siin küll kirjutatud otsekohe nelja põhipunkti  $O, X, Y, Z$  abil, vaid teiste ja  $O$  vahede abil, aga punktide vahede korrutised on ka alternatiivsed ja

$$O(X - O)(Y - O)(Z - O) = OXYZ.$$

Märkus 3. Eelmises märkuses kirjeldatud ruumala arvu saamine oleks nagu loomulikum siis, kui seal kolme punkti kolm esimest liiget korrutatakse nimelt nende punktide antud järjekorras  $P_1P_2P_3P$ . Siis saaks

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 & z_1 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_2 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_2 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_3 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_3 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_3 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_3 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix}.$$

Õeldakse, et sellel ühevõrdusel on pahem pool tema parema poole (neljarealise determinandi) arendus neljanda veeru elementide  $z_1, z_2$  jne. järgi, ja nende

elementide kordajaid selles arenduses (ühes nende + või — märkidega) nimetatakse nendele elementidele vastavateks alamdeterminantideks. Niisama (kolmel korrutataval punktil kolme — vahest mitte kolme esimest — liiget korrutades ja siis saadust korrutades neljanda punkti neljanda — vahest mitte viimase — liikmega) saame neljarealise determinandi arendada tema mis veeru või rea elementide järgi tahes. Näiteks arendatakse täsapinna võrrandil V 74 tema pahem pool harilikult viimase rea elementide (tundmatute) järgi ja kirjutatakse siis veel esimene liige viimaseks, nii et saab esimese astme võrrand

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad 75$$

Märkus 4. Neljarealist determinanti on hõlpsam arvutada Laplace'i viisil, s. o. korrutades esiteks punktid  $P_1$  ja  $P_2$ , siis punktid  $P_3$  ja  $P$  ja siis korrutised  $P_1P_2$  ja  $P_3P$  ja seades selle juures (tarvilikul korral märki muutes) ikka põhipunktid järjekorda  $OXYZ$ . Nii saame ruumala valemile järgmise kuju:

$$P_1P_2P_3P = P_1P_2 \cdot P_3P = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_3 & z_3 \\ x & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & z_3 \\ 1 & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & y_3 \\ 1 & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 1 & x \end{vmatrix} \right\} OXYZ.$$

Märkus 5. Determinandi ühe rea (või veeru) elementidele võib juurde lisada või nendest lahutada iga muu rea (või veeru) need elemendid, mis seisavad nendega ühes veerus (või reas), sest ridade liitmine või lahutamine on samane korrutatavate punktide liitmisega või lahutamisega ja veergude liitmine või lahutamine on samane põhipunktide liitmisega või lahutamisega, mis tõesti korrutist ei muuda:  $(A \pm B)BC \dots = ABC \dots \pm BBC \dots = ABC \dots$

Harjutus 106. Tõendada, et valemis 75 on viimane liige —  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

nimelt nelitahu  $P_1P_2P_3O$  ruumala arv.

H. 107. Vaadeldes mingit nelitahku  $P_1P_2P_3P$  ja nelitahkusid  $P_1P_2P_3O$ ,  $P_2P_1PO$ ,  $P_3P_2PO$  ja  $P_1P_3PO$  teha selgeks, et on

$$P_1P_2P_3P = P_1P_2P_3O + P_2P_1PO + P_3P_2PO + P_1P_3PO.$$

Tuletada siit eelmise harjutuse abil uus valem nelitahu ruumala jaoks.

H. 108. Võttes mitu nelitahku (nende nukkide numbriliste koordinaatidega), arvutada igähe ruumala, kontrolliks vähemalt kahel viisil. (Näiteks on punktide  $P_1=(5; 3; 7)$ ,  $P_2=(2; 9; 4)$ ,  $P_3=(11; 13; 15)$  ja  $P=(7; 10; 19)$  vaheline pindala Laplace'i viisil  $P_1P_2P_3P = (-3OX + 6OY - 3OZ + 39XY + 6XZ - 51YZ) \times (-4OX - 3OY + 4OZ + 19XY + 104XZ +$

$$\begin{aligned}
 + 97 YZ) &= (-291 + 204 - 624 + 18 - 57 + 156) OXYZ = -594 OXYZ = \\
 &= -99 \text{ kuupmõõtu, või } P_1 P_2 P_3 P = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 9 & 4 \\ 1 & 11 & 13 & 15 \\ 1 & 7 & 10 & 19 \end{vmatrix} OXYZ = \begin{vmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & 10 & 8 \\ 2 & 7 & 12 \end{vmatrix} OXYZ = \\
 &= -3 \begin{vmatrix} 22 & 2 \\ 11 & 10 \end{vmatrix} OXYZ, \text{ kui lahutame esimese rea elemendid teiste omadest,} \\
 &\text{arendame siis esimese veeru järgi, saadud kolmerealises determinandis lisame} \\
 &\text{teise veeru elementidele juurde esimese omad kahekordselt, kolmanda veeru} \\
 &\text{omadest lahutame nad ja siis arendame esimese rea järgi.)}
 \end{aligned}$$

**22. Kolme punkti vaheline pindala ehk kolmnurga pindala ruumis. Punkti kaugus tasapinnast. Sirge joone võrrandid ruumis.** Olgu ruumis antud kolm punkti  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  ja  $P = (x, y, z)$ . Kui need kolm punkti ei ole ühe sirge joone peal ja kui tasapind  $P_1 P_2 P$  ei ole paralleelne ühegi koordinaatide teljega, siis saame kolmnurga  $P_1 P_2 P$  ilma pindala ja tasapinda muutmata teisendada nii, et tema uued küljed on igaüks paralleelne ühe koordinaatide tasapinnaga. Võtame tasapinna  $P_1 P_2 P$  peal näiteks 1) punkti  $P_4$  [J 29] nii, et oleks  $P_1 P_4 \parallel yz$  ja  $P_2 P_4 \parallel PP_1$ , 2) punkti  $P_5$  nii, et oleks  $PP_5 \parallel P_1 P_4$  ja  $P_1 P_5 \parallel zx$ , ja 3) joontel  $P_1 P_4$  ja  $P_1 P_5$  punktid  $P_6$  ja  $P_7$  nii, et oleks  $P_6 P_7 \parallel xy$  ja  $P_1 P_6 : P_1 P_4 = P_1 P_5 : P_1 P_7$ . Siis on  $P_1 P_2 P = P_1 P_4 P = P_1 P_4 P_5 = P_1 P_6 P_7$ , sest esimesed kaks teisendus jättsid kumbki muutmata kolmnurga ühe külje pikkuse ja ka vastasnuki kauguse sellest küljest ja kolmas teisendus jättis muutmata kolmnurga ühe nurga ja selle nurga juuresolevate külgede korrutise. Vahest näib selle teisenduse esimese kahe sammu järele kolmas olevat võimatu, nagu joonisel 29 siis, kui võtame  $P_1 P_5 \parallel xy$ . See võimatus on selle täheks, et paralleelsus tuleb saada teise koordinaatide pinnaga.

Saadud uuel kolmnurgal on ka uued projektsioonid koordinaatide pindade peal (s. o. kolmnurgad, mille nukkideks on selle kolmnurga nukke projektsioonid), kuid nende projektsioonide pindalad on ühevõrdsed endise kolmnurga projektsioonide omadega, sest muutmata küljel ja nurgal jäävad muutmata ka projektsioonid (s. o. selle külje kõigi punktide projektsioonide kogu ja selle nurga külgede projektsioonide paar) ja ühe sirge joone tükid on proportsionaalsed oma projektsioonidega.

Saadud kolmnurga projektsioonide pindalad saavad silmanähtavaks, kui tema iga külje läbi mõtleme tasapinna paralleelse selle koordinaatide pinnaga, millega on see külg paralleelne. Nende tasapindade ühine punkt  $O'$  [J 29] seisab nii, et on  $O'P_1 \parallel OZ$ ,  $O'P_6 \parallel YO$  ja  $O'P_7 \parallel OX$ , ja kolmnurgad  $O'P_6P_7$ ,  $P_1P_6O'$  ja  $P_1O'P_7$ , ongi ühtivad projektsioonidega  $P'_1P'_6P'_7$ ,  $P''_1P''_6P''_7$  ja  $P'''_1P'''_6P'''_7$  (nagu püstprismade ülemised põhjad alumistega). Antud kolmnurga projektsioonide pindalad olid

$$P'_1P'_6P'_7 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} |OXY|, \quad P''_1P''_6P''_7 = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y & z \end{vmatrix} |OXY| \text{ ja} \\ P'''_1P'''_6P'''_7 = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & x_1 \\ 1 & z_2 & x_2 \\ 1 & z & x \end{vmatrix} |OXY|.$$

Niisugused (järgemööda) on siis ka kolmnurkade  $O'P_6P_7$ ,  $P_1P_6O'$  ja  $P_1O'P_7$  pindalade väärtused.

Antud kolmnurga pindala (s. o. pindala arv) on ruutjuur tema projektsioonide pindalade ruutude summast, s. o.

$$|P_1P_2P_3| = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y & z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & z_1 & x_1 \\ 1 & z_2 & x_2 \\ 1 & z & x \end{vmatrix}^2} \cdot |OXY| \quad 76$$

sest selle kolmnurgaga ühevõrdne kolmnurk  $P_1P_6P_7$  on täisnurkses (s. o. täisnurkse kolmetahuse nurgaga) nelitahus täisnurga vastastahk ja selle ruut on teiste tahkude ruutude summa, nagu see silma paistab täisnurksest nelitahust  $ABCO$  [J 29], kus on  $CD \perp BD$  ja siis ka  $OD \perp AB$  ja sellepärast (siis, kui pindala mõõduks on pool ruutmõõtu ja  $ABC$ ,  $AB$  jne. arvud kirjutame  $\overline{ABC}$ ,  $\overline{AB}$  jne.)

$$\overline{ABC}^2 = \overline{AB}^2 \cdot \overline{CD}^2 = (\overline{AO}^2 + \overline{OB}^2)(\overline{DO}^2 + \overline{OC}^2) = \overline{AB}^2 \cdot \overline{DO}^2 + \overline{AO}^2 \cdot \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2 \cdot \overline{OC}^2$$

Näiteks on harjutuse 108 näites tetraeedri tahul  $P_1P_2P_3$  pindala arv  $\overline{P_1P_2P_3} = \sqrt{(-30 - 36)^2 + (48 + 30)^2 + (-18 + 24)^2} = \sqrt{(-66)^2 + 78^2 + 6^2} = 6\sqrt{291} = 6 \cdot 17,06 = 102,4$ .

Kolmurga pindala valemist ja nelitahu ruumala valemist saame valemi punkti  $P=(x, y, z)$  kauguse arvu  $\delta$  jaoks tasapinnast  $P_1P_2P_3=(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2)(x_3, y_3, z_3)$ . See arv oleks siis nelitahu  $P_1P_2P_3P$  ruumala arv, kui pindala  $P_1P_2P_3$  oleks üks mõõt —  $|OXY|$  — ja ruumala mõõduks ikka nelitahk  $OXYZ$ . Sest kui nelitahkudel ehk püramiididel  $OXYZ$  ja  $P_1P_2P_3P$  on põhjade pindalad  $OXY$  ja  $P_1P_2P_3$  ühevõrdsed, siis on nende kõrgused proportsionaalsed ruumaladega ja püramiidi  $OXYZ$  kõrguse arv on ju  $OZ$  pikkusearv 1 ja püramiidi  $P_1P_2P_3P$  kõrguse arv on punkti  $P$  kauguse arv pinnast  $P_1P_2P_3$ . Kui pindala  $P_1P_2P_3$  ei ole üks mõõt, siis on tema suuruse arv valemi 76 järgi ruutjuur tema projektsioonide pindala arvude ruutude summast ja nelitahu  $P_1P_2P_3P$  ruumala arv on selle arvu kordselt  $\delta$ . Sellega on

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix} : \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & z_1 & x_1 \\ 1 & z_2 & x_2 \\ 1 & z_3 & x_3 \end{vmatrix}^2} \quad 77$$

Selle valemi järgi saab punkti  $P$  kaugus pinnast  $P_1P_2P_3$  siis negatiivne, kui krurvijärjekord  $P_1P_2P_3P$  läheb vastupidi järjekorrale  $OXYZ$ , sest siis saab jagatav ruumala negatiivne.

Kolme punkti  $P_1=(x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2=(x_2, y_2, z_2)$  ja  $P=(x, y, z)$  vahel ei ole pindala siis, kui need punktid on ühe sirge joone peal. Siis on ka selle kolme punkti projektsioonid iga tasapinna peal ühe sirge joone punktid ja siis nende vahelised pindalad nullid, s. o.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} 1 & z_1 & x_1 \\ 1 & z_2 & x_2 \\ 1 & z & x \end{vmatrix} = 0,$$

ja iga arvude kolmik, mis rahuldab neid võrrandiid on joone  $P_1P_2$  ühe punkti koordinaatide kolmik. Sellepärast nimetatakse neid võrrandiid sirge joone võrranditeks. Kui nendes determinantides lahutamé esimese rea elemendid teiste omadest, siis saame

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0 \quad \text{ehk} \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$(y_2 - y_1)(z - z_1) - (y - y_1)(z_2 - z_1) = 0 \quad \text{ehk} \quad \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{ja}$$

$$(z_2 - z_1)(x - x_1) - (z - z_1)(x_2 - x_1) = 0 \quad \text{ehk} \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

kus viimane proportsioon silmanähtavalt järgneb kahest eelmisest, nii et sellest kolmest võrrandist on ainult kaks olulist. Need võrrandid kirjutatakse harilikult koos

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}} \quad 78$$

Märkus. Sirge joone võrrandites ei saa olla arvud  $x_2 - x_1$ ,  $y_2 - y_1$ ,  $z_2 - z_1$ , kõik kolm korraga nullid, sest muidu oleks punkt  $P_1$  samane punktiga  $P_2$  ja üks punkt ei määra sirget joont. Kui nendest arvudest on mõni null, siis ei saa sellega jagada. Kuid kui valem 78 on juba kirjutatud, siis kõlbab ta ka selleks juhuseks. Kui näiteks  $x_2 - x_1$  ei ole null, aga on  $y_2 - y_1 = 0$ , siis ei saa selle valemi järgi  $y - y_1$  olla muud kui null, sest vastasel korral oleks valemis esimene murd lõplik, aga teine lõpmata ja sellega valem mitte rahuldatud, ja et  $y_2 - y_1 = 0$  korral tõesti peab olema ka  $y - y_1 = 0$ , see järgneb võrrandist  $(x_2 - x_1)(y - y_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0$ .

Harjutus 109. Tõendada valem 76 juhusel, kui tasapind  $P_1P_2P$  on paralleelne ühe teljega, ja tuletada sirge joone võrrandid vaadeldes mingit kahte punkti  $(x_1, y_1, z_1)$  ja  $(x_2, y_2, z_2)$ , sellest kahest punktist läbimineva sirge joone mingit muud punkti  $(x, y, z)$ , punkte  $(x_1, y_2, z_1)$ ,  $(x_1, y, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_1)$ ,  $(x, y, z_1)$  ja kolmnurke  $(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_1)(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_1, y_1, z_1)(x, y, z_1)(x, y, z)$ ,  $(x_1, y_1, z_1)(x_1, y_2, z_1)(x_2, y_2, z_1)$  ja  $(x_1, y_1, z_1)(x_1, y, z_1)(x, y, z_1)$ .

H. 110. Leida alguspunkti  $(0; 0; 0)$  kaugus  $\delta$  tasapinnast, mis läheb läbi kolme antud punkti.

**23. Kahe punkti vaheline kaugus ruumis. Sirge joone sihikoosinused.** Olgu joonisel 28 punkti  $P$  koordinaadid  $x, y$  ja  $z$ . Kirjutame joone  $OP$  ühe tähega  $r$  ja sellesama tähega ka selle joone tüki  $OP$  pikkuse arvu. Siis järgneb täisnurksetest kolmnurkadest  $OP''P$  ja  $OP_yP''$  Pythagoras'e lause põhjal, et (siis, kui on  $OX \perp OY \perp OZ$  ja  $|OX| = |OY| = |OZ|$ ) on

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Nurkade  $\widehat{xr} = \widehat{POX} = \widehat{OPP''}$ ,  $\widehat{yr} = \widehat{POY}$  ja  $\widehat{zr} = \widehat{POZ} = \widehat{OPP''}$  koosinusi nimetatakse joone  $r$  sihikoosinusteks ja nad kirjutame sagedasti lüheduseks  $\alpha, \beta$  ja  $\gamma$ . Nende väärtused on

$$\alpha = \cos \widehat{xr} = OP_x : |OP| = P''P : |OP| = x : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{r},$$

$$\beta = \cos \widehat{yr} = OP_y : |OP| = \frac{y}{r} \quad \text{ja} \quad \gamma = \cos \widehat{zr} = OP_z : |OP| =$$

$$= P_y P'' : |OP| = \frac{z}{r} \quad \text{ja sellega}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Niisama on igal joonel  $P_1P_2$  siis, kui on  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  ja  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  (ja ikka  $OX \perp OY \perp OZ$  ja  $|OX| = |OY| = |OZ|$ ), tema tüki  $P_1P_2$  pikkus:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad |OX| \quad 79$$

ja kui selle joone ja ka tema tüki  $P_1P_2$  pikkuse arvu kirjutame tähega  $s$ , siis on tema sihikoosinused

$$\alpha = \cos \widehat{xs} = \frac{x_2 - x_1}{s}, \quad \beta = \cos \widehat{ys} = \frac{y_2 - y_1}{s} \quad \text{ja}$$

$$\gamma = \cos \widehat{zs} = \frac{z_2 - z_1}{s} \quad 80$$

$$(\text{kus on } s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2})$$

Sest võttes läbi punkti  $P_1$  paralleelid telgedele ja leides nende joonte peal kui ka nende joonte paaride läbi minevate tasapindade peal punktile  $P_2$  ristprojektsioonid, saame joonise, mis on samane joonisega 28, kui seal mõeldakse punktide  $O$  ja  $P$  asemel punktid  $P_1$  ja  $P_2$  ja esimese kahe punkti koordinaatide vahede  $x$ ,  $y$  ja  $z$  asemel teise kahe omad  $x_2 - x_1$ ,  $y_2 - y_1$  ja  $z_2 - z_1$ .

Harjutus 111. Tõendada, et iga võrrandite paar

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n},$$

kus on  $x_1, y_1, z_1, l, m$  ja  $n$  mingid antud arvud, esitab sirge joone, mille sihikoosinused on:  $\alpha = l : \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$ ,  $\beta = m : \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$  ja  $\gamma = n : \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$ . [On ju siin  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  ja  $P_2 = (x_1 + l, y_1 + m, z_1 + n)$ .]

H. 112. Kui võrrandites V 78 kirjutame kolme jagatise ühise väärtuse ühe tähega näiteks  $t$ , siis saame niinimetatud parameetrilised sirge joone võrrandid:  $x = x_1 + (x_2 - x_1)t$ ,  $y = y_1 + (y_2 - y_1)t$  ja  $z = z_1 + (z_2 - z_1)t$ . Kui siin on  $x_2 - x_1 = a$ ,  $y_2 - y_1 = \beta$  ja  $z_2 - z_1 = \gamma$  (s. o. sihi-koosinused), siis nimetatakse neid parameetrilisi võrrandiid

$$x = x_1 + at, y = y_1 + \beta t \text{ ja } z = z_1 + \gamma t$$

81

ka normaalseteks. Võttes mitu numbrilist sirge joone võrrandite paari [H 111], tuletada nendest normaalsed parameetrilised ja teha selgeks, mille arv on seal parameeter  $t$ .

H. 113. Kirjutada võrrand, mida rahuldavad alguspunkti  $r$  mõõdu kaugusel seisvate punktide koordinaadid  $x$ ,  $y$  ja  $z$  ja ainult need. Vabastada see võrrand radikaalist.

H. 114. Kirjutada võrrand, mida rahuldavad antud punkti  $(x_0, y_0, z_0)$   $r$  mõõdu kaugusel seisvate punktide koordinaadid  $x$ ,  $y$  ja  $z$  ja ainult need. Vabastada see võrrand radikaalist ja võrreldes teda sirge joone, ringjoone ja tasapinna võrranditega otsustada, mille võrrandiks tuleb teda nimetada.

H. 115. Leida alguspunkti  $O = (0; 0; 0)$  kaugus  $\delta$  sirgest joonest, mis läheb läbi kahe antud punkti  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  ja  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ .  $\left[ \delta = \frac{|P_1 P_2 O|}{|P_1 P_2|} \right]$

**24. Esimese astme võrrand kolme tundmatuga.** Kui ruumi punktile on korraldatud Cartesiuse koordinaadid, siis saame iga tasapinna jaoks esimese astme võrrandi V 75, sest selle tasapinna peal võime võtta mingi kolm punkti  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  ja  $(x_3, y_3, z_3)$ . Ümberpöörduvalt esitab iga antud esimese astme võrrand kolme tundmatuga

$$ax + by + cz + d = 0$$

(kus ei ole  $a$ ,  $b$  ja  $c$  kõik korraga nullid) tasapinna, kui need tundmatud on ruumi punktide Cartesiuse koordinaadid. Sest

1) kui  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ja  $d$  ei ole ükski null, siis rahuldavad seda võrrandit selle kolme punkti  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  ja  $(x_3, y_3, z_3)$  koordinaadid, millel on  $y_1 = 0 = z_1$  ja siis (võrrandi järgi)  $x_1 = \frac{-d}{a}$ ,

$x_2 = 0 = z_2$  ja siis  $y_2 = \frac{-d}{b}$ , ja  $x_3 = 0 = z_3$  ja siis  $z_3 = \frac{-d}{c}$ , nii

et võrrandi V 75 jaoks saab

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{d}{a} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{d}{b} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{d^2}{ab}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} = \frac{d^2}{ac},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \frac{d^2}{bc}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \frac{d^3}{abc}$$

ja siis sellest kolmest punktist läbimineva tasapinna võrrand

$$\frac{d^2}{bc}x + \frac{d^2}{ac}y + \frac{d^2}{ba}z + \frac{d^3}{abc} = 0,$$

mille kõiki liikmeid jagades arvuga  $\frac{d^2}{abc}$  saamegi antud võrrandi;

2) kui on  $d=0$ ,  $a \neq 0 \neq b$ ,  $c \neq 0$ , siis rahuldavad seda võrrandit alguspunkti koordinaadid  $x_1=y_1=z_1=0$  ja selle punkti koordinaadid, millel on  $x_2=1$ ,  $y_2=0$  ja siis (võrrandi järgi)

$z_2 = \frac{-a}{c}$ , ja veel selle punkti koordinaadid, millel on  $y_3=1$ ,  $z_3=0$

ja siis  $x_3 = \frac{-b}{a}$ , ja sellest kolmest punktist läbimineva tasapinna võrrand saab valemi 75 järgi

$$\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y + z = 0, \text{ ehk } ax + by + cz = 0,$$

mis ongi antud võrrand;

3) kui on  $a=0=b$ ,  $c \neq 0$ , siis rahuldavad seda võrrandit kõigi nende punktide koordinaadid, mis seisavad  $xy$ -pinnast  $\frac{-d}{c}$

mõõdu kaugusel, sest siis on  $z = \frac{-d}{c}$  ja võrrandis ei esine  $y$  ega  $x$ ,

nii et nende väärtused võivad olla igasugused, ja kui on  $b=0=c$ ,  $a \neq 0$  või jälle  $c=0=a$ ,  $b \neq 0$ , siis rahuldavad seda võrrandit

kõigi nende punktide koordinaadid, mis seisavad  $yz$ -pinnast  $\frac{-d}{a}$

mõõdu kaugusel või  $zx$ -pinnast  $\frac{-d}{b}$  mõõdu kaugusel;

4) kui on ainult  $c=0$ , siis rahuldavad seda võrrandit selle kolme punkti  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  ja  $(x_3, y_3, z_3)$  koordinaadid, millel on  $z_1=0=y_1$  ja siis  $x_1=\frac{-d}{a}$ ,  $x_2=0=z_2$  ja siis  $y_2=\frac{-d}{b}$  ja  $z_3=1, y_3=0$  ja siis  $x_3=\frac{-d}{a}$ , aga sellest kolmest punktist läbimineva tasapinna võrrand saab valemi 75 järgi

$$\frac{d}{b}x + \frac{d}{a}y + \frac{d^2}{ab} = 0,$$

mis ongi antud võrrand ja esitab nimelt  $z$ -teljega paralleelse tasapinna, näiteks  $P_1P_2P'_1$  [J 29], sest  $z$ -telje ühegi punkti koordinaadid (kus on ikka  $x=0$  ja  $y=0$ ) ei rahulda seda võrrandit.

Niisama esitab võrrand  $ax + by + cz + d = 0$  siis, kui on ainult  $b=0$ ,  $y$ -teljega paralleelse tasapinna ja ainult  $a=0$  korral  $x$ -teljega paralleelse. Sellega esitab iga võrrand

$$ax + by + cz + d = 0,$$

millel ei ole  $a, b$  ja  $c$  kõik kolm korraga nullid, tasapinna, võrrand  $ax + by + cz = 0$  nimelt tasapinna läbi koordinaatide alguspunkti, võrrandid  $ax + d = 0, by + d = 0$  ja  $cz + d = 0$  nimelt koordinaatide pindadega paralleelsed tasapinnad ja võrrandid  $by + cz + d = 0, ax + cz + d = 0$  ja  $ax + by + d = 0$  nimelt telgedega paralleelsed. Tasapind, mille võrrand on  $ax + by + cz + d = 0$ , nimetatakse ka lühidalt pind  $ax + by + cz + d = 0$ . Kui see tasapind on kirjutatud veel kuidagi teisiti, näiteks ühe tähega  $\pi$ , siis tähendatakse seda samasuse märgi  $\equiv$  abil, kirjutades

$$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0.$$

Harjutus 116. Kirjutada mitu (enam kui kolm) numbrilist esimese astme võrrandit kolme tundmatuga, joonistada nende võrranditega esitatud pindade lõikejooned koordinaatide pindadega (nende jäljed koordinaatide pindade peal) ja arvutada iga kolme pinna lõikepunkti koordinaadid (silmaspidades, et kolme pinna ühise punkti koordinaadid peavad rahuldama nende kõikide võrrandiid).

H. 117. Kui on antud kaks tasapinda  $\pi_0$  ja  $\pi_u$  ja esimese pinna võrrandil  $a_0x + b_0y + c_0z + d_0 = 0$  korrutame kõik liikmed mingi arvuga  $k_0$  ja teise pinna omal  $a_u x + b_u y + c_u z + d_u = 0$  mingi arvuga  $k_u$  ja siis liidame esimese võrrandi pooled teise omadega, siis saame uue võrrandi

$$\pi_0 \equiv a_0x + b_0y + c_0z + d_0 = 0 \quad | \quad k_0$$

$$\pi_u \equiv a_u x + b_u y + c_u z + d_u = 0 \quad | \quad k_u$$

$$\pi \equiv (k_0 a_0 + k_u a_u)x + (k_0 b_0 + k_u b_u)y + (k_0 c_0 + k_u c_u)z + k_0 d_0 + k_u d_u = 0,$$

või, tema kõiki liikmeid arvuga  $k_0$  jagades ja kirjutades  $\frac{k_u}{k_0} = \lambda$ , veel lihtsamal kujul

$$\pi \equiv (a_0 + \lambda a_u)x + (b_0 + \lambda b_u)y + (c_0 + \lambda c_u)z + d_0 + \lambda d_u = 0.$$

Tõendada, et 1) pind  $\pi$  läheb läbi pindade  $\pi_0$  ja  $\pi_u$  lõikejoone (mida kirjutame ka  $\pi_0 \times \pi_u$ ) ja et 2)  $\lambda$  on selle pinna ristjagatiskoordinaat lehtede kimbus  $\pi_0 \times \pi_u$ , kui seal on algusleheks  $\pi_0$ , abileheks  $\pi_u$  ja mõõduleheks

$$\pi_1 = (a_0 + a_u)x + (b_0 + b_u)y + (c_0 + c_u)z + d_0 + d_u = 0,$$

s. o. et on

$$\lambda = \frac{\sin \hat{\pi}_0 \pi}{\sin \hat{\pi}_u} : \frac{\sin \hat{\pi}_0 \pi_1}{\sin \hat{\pi}_u}$$

[Tõenduseks tuleb vaadata nende pindade lõikepunktisid ühe teljega või, kui nad kõik lähevad läbi alguspunkti, mõne muu joonega, näiteks joonega, kus on  $x=1$ ,  $y=0$  või  $y=1$ ,  $z=0$  või  $x=0$ ,  $z=1$ , ja tuleb silmaspidada, et otsitav ristjagatis on nende lõikepunktide omaga ühevõrdne [11; H 18].]

H. 118. Et võrrandi kõiki liikmeid võib jagada mis arvuga tahes (peale nulli) sellepärast saab tasapinna võrrandile vahel anda kuju

$$ux + vy + wz + 1 = 0.$$

(Millal ei ole see kuju võimalik?) Arvused  $u$ ,  $v$  ja  $w$  nimetatakse siin telgede lõikude negatiivseteks ümberpööratud väärtusteks. Võttes mitu niisugust numbrilist võrrandit, joonistada nendega esitatud tasapinnad ja selle juures leida telgede lõikude nimetamise põhjendus.

Märkus. Kui võrrandis  $ax + by + cz + d = 0$  on  $a = 0 = b = c$ , aga  $d \neq 0$ , siis saab temale anda kuju  $ux + vy + wz + 1 = 0$ , kus on  $u = 0 = v = w$ . Öeldakse, et see võrrand on lõpmata kauge tasapinna ehk ebalehe võrrand, sest mida kaugemal on tasapind ruumi koordinaatide algusest, s. o. mida kaugemal algusest lõikab see pind telgi, seda ligemad saavad arvud  $u$ ,  $v$  ja  $w$  nullile. Kui oleme ka ebalehe mõiste tarvitusele võtnud, siis võib küll ütelda, et võrrand  $ax + by + cz + d = 0$  esitab tasapinna alati siis, kui ei ole  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ja  $d$  kõik neli korraga nullid.

Harjutus 119 Tasapinna võrrandis  $ax + by + cz + d = 0$  võib arvused  $a$ ,  $b$  ja  $c$  lugeda selle pinna ühe kolmnurga projektsioonide pindala arvudeks koordinaatide pindade peal. Sest võttes näiteks ühe punkti jaoks  $y_1 = 0 = z_1$ , nii et saab  $x_1 = \frac{-d}{a}$ , ja teise punkti jaoks  $y_2 = 1$ ,  $z_2 = 0$ , nii et saab  $x_2 = \frac{-d-b}{a}$ , ja kolmanda punkti jaoks  $y_3 = 0$ ,  $z_3 = a$ , nii et saab  $x_3 = \frac{-d-ca}{a}$  saamegi

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = a, \quad \begin{vmatrix} 1 & z_1 & x_1 \\ 1 & z_2 & x_2 \\ 1 & z_3 & x_3 \end{vmatrix} = b, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = c \quad \text{ja} \quad - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = d.$$

Tõendada, et siis, kui jagame võrrandi  $ax + by + cz + d = 0$  kõik liikmed arvuga  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ , saab võrrandi pahem pool  $\frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$  nimelt punkti  $(x, y, z)$  kauguse arvuks [V 77] pinnast  $ax + by + cz + d = 0$  ehk

$$\frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$

(Sellel viimasel kujul — jagatult tundmatute kordajate ruutude summa ruutuurega — nimetatakse tasapinna võrrandit normaalseks.)

H. 120. Vaadeldes tasapindade

$$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0 \quad \text{ja} \quad \pi' \equiv a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

jälgi  $xy$ -pinnal [H. 116] (kus on  $z = 0$ )

$$ax + by + d = 0 \quad \text{ja} \quad a'x + b'y + d' = 0$$

ja niisama ka nende jälgi teiste koordinaatide pindade peal, tuletada tasapindade  $\pi$  ja  $\pi'$  paralleelsuse tunnus

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

82

H. 121. Tuletada sirgete joonte

$$s \equiv \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \quad \text{ja} \quad s' \equiv \frac{x - x'_1}{l'} = \frac{y - y'_1}{m'} = \frac{z - z'_1}{n'}$$

$$\text{paralleelsuse tunnus} \quad \frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} \quad [\text{H } 111].$$

H. 122. Joonisel 29 on  $ON$  tasapinnale  $ABC$  (kus  $A, B$  ja  $C$  on järjesti  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -telje punktid) ristjoon algusest. (Punkt  $N$  tasapinna  $ABC$  peal on joonte  $CD$  ja  $AE$  lõikepunkt, kui on  $OD \perp AB$  ja  $OE \perp BC$ . Joonel  $OE$  on ka pilt risti joone  $BC$  omaga [20 M 2]. Joone  $OD$  saamiseks on täisnurkne kolmnurk  $AOB$  pööratud oma tasapinda mööda nuki  $O$  ümber täisnurga võrra kolmnurgaks  $A_0OB_0$ , s. o. nii, et pildil on  $|OB_0| : |OX| = |OB| : |OY|$  ja  $|OA_0| : |OY| = |OA| : |OX|$ , ja siis võetud  $OD \parallel A_0B_0$ .) Tõendada selle joonise järgi, et kui 1) tasapinna  $ABC$  ristjoonele  $ON$  ja sellega ka tasapinnale  $ABC$  ise on määratud poolsus (näiteks  $ON$ , s. o. seda joont loetakse minevaks punktist  $O$  punkti  $N$  poole, nagu  $x$ -telge punktist  $O$  punkti  $X$  poole, ja siis tasapinnal  $ABC$  positiivseks see pool, kuhu see ristjoon läheb selle tasapinna punktist  $N$  — kus on selle ristjoone positiivne pool, nagu  $yz$ -pinnal see pool, kuhu läheb  $x$ -telg ehk kus on punkt  $X$ ) ja kui 2) poolsusega sirgete joonte või tasapindade vahelise nurga väärtuseks ühest teiseni

loetakse nimelt selle nurga väärtust, mille võrra tuleks esimest joont või pinda selleks pöörda, et tema positiivne pool saaks teise omaks, siis on selle tasapinna ja koordinaatide pindade vaheliste kahetahuste nurkade väärtused samased selle tasapinna ristjoone ja koordinaatide telgede vaheliste nurkade väärtustega.

[Nurkade  $\widehat{xy} \cdot ABC$  ja  $\widehat{NO}C$  ühevõrdus järgneb täisnurksete kolmnurkade  $NOC$ ,  $ODC$  ja  $NDO$  sarnasusest ja joonte  $CD$  ja  $OD$  ristseisust joonega  $AB$ .]

H. 123. Leida alguspunkti  $(0; 0; 0)$  kaugus  $p$  tasapinnast

$$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$$

[H 119] ja vaadeldes selle tasapinna lõikepunktisid telgedega ( $A$ ,  $B$  ja  $C$ ) ja ristjoont algusest ( $ON$  joonisel 29), mille kirjutame ka tähega  $p$ , tuletada selle ristjoone sihikoosinuste valemid:

$$\alpha = \cos \hat{x}p = a : r, \quad \beta = \cos \hat{y}p = b : r \quad \text{ja} \quad \gamma = \cos \hat{z}p = c : r$$

$$(\text{kus on } r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2})$$

83

mis on ka [H 122] tasapinna ja koordinaatide pindade vaheliste kahetahuste nurkade koosinuste valemid. [Täisnurksest kolmnurgast  $AON$  on koosinuse mõiste järgi  $\cos \hat{x}p = ON : OA$ .  $ON$  pikkuse arv on  $-p = -d : \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ , sest  $p$  pidi olema alguspunkti kauguse arv tasapinnast ( $p = d : \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ), s. o. nimelt  $NO$  pikkuse arv, ja on ju  $NO = -ON$ .  $OA$  pikkuse arv on punkti  $A$  esimene koordinaat ja saab tasapinna võrrandist  $x = -\frac{d}{a}$ , sest punktil  $A$  on teine ja kolmas koordinaat nullid.]

H. 124. Eelmise harjutuse põhjal tõendada 1) et tasapinna  $\pi$  ristjoon läbi alguse on  $p \equiv \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$  ja 2) et selle tasapinna normaalse võrrandi

[H 119] võib kirjutada (*Hesse*) kujul

$$\pi \equiv x \cos \hat{x}p + y \cos \hat{y}p + z \cos \hat{z}p + p = 0.$$

H. 125. Mis tuleb muuta harjutustes 38–41, et nad saaksid kolme-mõõtelise geomeetria harjutusteks?

H. 126. Projektides sirge joone

$$s \equiv \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

ühe mõõdu pikkuse tüki  $P_1P_2$  asemel murdjoone  $P_1(x_2, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_1)P_2$  [H 39] (millel on osad järgemööda paralleelsed  $x$ -,  $y$ -, ja  $z$ -teljega ja sellepärast pikkuse arvudega  $\alpha = \cos \hat{x}s$ ,  $\beta = \cos \hat{y}s$  ja  $\gamma = \cos \hat{z}s$ ) teise sirge joone

$$s' \equiv \frac{x - x'_1}{l'} = \frac{y - y'_1}{m'} = \frac{z - z'_1}{n'}$$

peale, tõendada kahe sirge joone vahelise nurga koosinuse valem

$$\cos \hat{s}s' = \alpha \cdot \cos \hat{x}s' + \beta \cdot \cos \hat{y}s' + \gamma \cdot \cos \hat{z}s' = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = \frac{l'l' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}} \quad 84$$

ja sellest valemist tuletada kahe sirge joone  $s$  ja  $s'$  ristseisu tunnus

$$l'l' + mm' + nn' = 0 \quad 85$$

ja ka kahe tasapinna  $\pi$  ja  $\pi'$  [H 120] ristseisu tunnus

$$aa' + bb' + cc' = 0 \quad 86$$

[Kahe tasapinna vahelise kahetahuse nurga väärtus on samane nende tasapindade ristjoonte vahelise nurga väärtusega [H 122], kui nendel ristjoontel ja siis ka nendel tasapindadel on määratud poolsus.]

H. 127. Tõendada sirge joone  $s$  [H 126] ja tasapinna  $\pi$  [H 120] paralleelsuse ja ristseisu tunnused

$$\begin{aligned} s \parallel \pi, & \text{ kui on } la + mb + nc = 0 \text{ ja} \\ s \perp \pi, & \text{ kui on } \frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} \end{aligned} \quad 87$$

[Ristjoon tasapinna ristjoonele on paralleelne selle tasapinnaga.]

H. 128. Kirjutada võrrand tasapinnale, mis läheb läbi antud punkti  $(x_0, y_0, z_0)$  ja on risti antud joonega

$$s \equiv \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0$$

H. 129. Leida numbriliste võrranditega antud kahe sirge joone  $s$  ja  $s'$  [H 126] ühine ristjoon  $s'' \equiv \frac{x - x''_1}{l''} = \frac{y - y''_1}{m''} = \frac{z - z''_1}{n''}$ . [Ristseisu tunnustest

$$l'' + mm'' + nn'' = 0 \text{ ja } l'l'' + m'm'' + n'n'' = 0 \text{ järgneb } l'' : m'' : n'' = \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}. \text{ Punktiks } (x''_1, y''_1, z''_1) \text{ võime võtta tasapinna } ss'' \text{ lõikepunkti joonega } s'. \text{ See tasapind läheb läbi joone } s \text{ ja sellega ka läbi}$$

punkti  $(x_1, y_1, z_1)$  ja ta on risti joonte  $s$  ja  $s''$  ühise ristjoonega, nii et ta on [H 128]:  $\begin{vmatrix} m & n \\ m'' & n'' \end{vmatrix} (x-x_1) + \begin{vmatrix} n & l \\ n'' & l'' \end{vmatrix} (y-y_1) + \begin{vmatrix} l & m \\ l'' & m'' \end{vmatrix} (z-z_1) = 0$ . Selle tasapinna ja joone  $s'$  lõikepunkti koordinaadid saame muidugi lahendades selle võrrandi koos  $s'$  kahe võrrandiga näiteks  $\frac{x-x'_1}{l'} = \frac{y-y'_1}{m'}$  ja  $\frac{y-y'_1}{m'} = \frac{z-z'_1}{n'}$ .]

## 25. Bilineaarne võrrand kahe kolmiku tundmatutega.

Bilineaarne võrrand kahe kolmiku tundmatutega [16]

$$\begin{aligned} & (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{10})x + \\ & + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{20})y + \\ & + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{30})z + \\ & + a_{01}x' + a_{02}y' + a_{03}z' + a_{00} = 0 \end{aligned}$$

88

(mis on lineaarne kummagi kolmiku tundmatutele, kui teise kolmiku omad on tuntud) on loomulikuks vahelülis kolme tundmatuga esimese ja teise astme võrrandite vahel. Kui see võrrand on kirjutatud nii, et seal üks kolmik tundmatuid on võetud sulgude taha, ja veel nelja realiselt, nagu valemis 88, siis paistab silma selle võrrandi determinant [lhk. 38 M]

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{00} \end{vmatrix}$$

Kui see determinant on sümmeetriline, s. o. kui on  $a_{12} = a_{21}$  ja üldiselt  $a_{ik} = a_{ki}$ , siis on ka bilineaarne võrrand sümmeetriline, s. o. ta ei muutu, kui vahetatakse  $xyz$  ja  $x'y'z'$ . Meie käsitame siin ainult sümmeetrilisi bilineaarseid võrrandiid kahe kolmiku tundmatutega, sest juba nende juures tulevad esile kõik tähtsamad mõisted, millega on tegemist kolme tundmatuga teise astme võrrandite käsitamisel.

1) Korrelatiivsus ruumis. Bilineaarsest võrrandist V 88 saame (kui neljal võrrandil

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10} = 0, \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{20} = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{30} = 0 \text{ ja } a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z + a_{00} = 0$$

89

ei ole ühist lahendust) iga antud punkti

$$(x', y', z')$$

korral tasapinna

$$ax + by + cz + d = 0,$$

kus on

$$a = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{10}, \quad b = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{20}, \\ c = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{30} \text{ ja } d = a_{01}x' + a_{02}y' + a_{03}z' + a_{00}$$

90

Niisama saame siis ka igale antud tasapinnale

$$ax + by + cz + d = 0$$

leida punkti

$$(x', y', z'),$$

mille korral võrrandist V 88 see antud tasapind saaks, sest otsitava punkti koordinaadid peavad rahuldama proportsioonisid [lhk. 40]

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{10}) : a = (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{20}) : b = \\ = (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{30}) : c = (a_{01}x' + a_{02}y' + a_{03}z' + a_{00}) : d$$

91

kust saame (kui ei ole  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ja  $d$  kõik neli nullid) kolm esimese astme võrrandit otsitava punkti kolme koordinaadi jaoks.

Sellega määrab iga bilineaarne võrrand kahe kolmiku tundmatutega [V 88] siis, kui need tundmatud on ruumi punktide Cartesiuse koordinaadid ja kui neljal võrrandil V 89 ei ole ühist lahendust, üksühese vastavuse ruumi punktide ja tasapindade vahel. Seda vastavust nimetatakse üldiselt korrelatiivsuseks ruumis.

2) Polaarne süsteem ruumis. Sel samal viisil nagu kahemõtelises geomeetrias [16 2]) tuleme ka siin otsusele, et sümmeetrilise bilineaarse võrrandiga määratud vastavuses ruumis läheb mingile punktile  $(x_1, y_1, z_1)$

vastava tasapinna iga punkti  $(x_2, y_2, z_2)$  vastav tasapind esimesest punktist  $(x_1, y_1, z_1)$  läbi. Sellepärast nimetatakse sümmeetrilise bilineaarse võrrandiga määratud vastavuses ruumis ka iga punkti tema vastava tasapinna pooluseks, tasapinda oma vastava punkti polaar(tasa)pinnaks, pooluste ja polaarpindade vastavust polaarseks süsteemiks ja siis seda bilineaarset võrrandit, mis polaarse süsteemi määrab, ka polaarse süsteemi võrrandiks.

Harjutus 130. Võttes numbrilise sümmeetrilise bilineaarse võrrandi [V 88] leida ühele punktile (näiteks punktile  $(1; 0; 0)$ ) polaarpind [V 90], võtta selle polaarpinna mitu punkti ja joonistada nende punktide polaarpinnad.

3) Keskpunkt ja tema polaarpind ehk ebaleht. Kui polaarses süsteemis on punkt, mille polaarpinna võrrandi jaoks saab valemitega  $90 a = b = c = 0$ , aga  $d \neq 0$ , siis nimetatakse seda punkti selle polaarse süsteemi keskpunktiks. Keskpunkti koordinaatide jaoks, mida kirjutatakse sagedasti tähtedega  $x_0, y_0$  ja  $z_0$ , saame valemitega 90 võrrandid (kus on  $a_{ik} = a_{ki}$ )

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{10} = 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{20} = 0 \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{30} = 0 \\ a_{01}x_0 + a_{02}y_0 + a_{03}z_0 + a_{00} \neq 0 \end{cases}$$

92

ja neid lahendades need koordinaadid ise

$$x_0 = A_{10} : A_{00}, \quad y_0 = A_{20} : A_{00} \quad \text{ja} \quad z_0 = A_{30} : A_{00},$$

kus on  $A_{00} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  (s. o. polaarse süsteemi võrrandi

determinandist elemendile  $a_{00}$  vastav alamdeterminant [21 M 3]) ja  $A_{10}, A_{20}$  ja  $A_{30}$  (elementidele  $a_{10}, a_{20}$  ja  $a_{30}$  vastavad alamdeterminandid) saadud sellest, pannes sinna vabaliikmed vastupidiste märkidega  $x_0$  kordajate asemele, või  $y_0$  kordajate asemele, või viimaks  $z_0$  kordajate asemele.

Seda punkti nimetatakse selle polaarse süsteemi keskpunktiks sellepärast, et alguspunktist küllalt kaugel seisvatel tasapindadel on kõigil poolused (selle polaarse süsteemi järgi) selle punkti ligidal

ja sellepärast lähevad alguspunkti küllalt kaugel seisvatel punktidel kõigil polaarpinnad selle punkti ligemast ümbrusest läbi. Sest kui tasapinna võrrandis  $ax + by + cz + d = 0$  ei ole  $d = 0$ , siis võib seal, kui tarvis, kõiki liikmeid jagada niisuguse arvuga, et saab  $d = 1$ , ja sellega on alguspunkti kaugus sellest tasapinnast [H 110]

$\delta = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$  küllalt suur ainult siis, kui on  $a$ ,  $b$  ja  $c$  kõik kolm küllalt väikesed ja siis lähevad selle tasapinna pooluse koordinaatide jaoks valemist 90 saadavad võrrandid vähe lahku keskpunkti võrranditest V 92.

Näiteks on sellel polaarsel süsteemil, mille võrrandis on  $a_{12} = 0$  jne. iga  $a_{ik} = 0$ , kui ei ole  $i = k$ , aga  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$  ja  $a_{00}$  ei ole ükski null, s. o. millel on lihtne võrrand

$$a_{11}x'x + a_{22}y'y + a_{33}z'z + a_{00} = 0$$

93

keskpunkti koordinaatide võrrandid

$$a_{11}x_0 = 0, \quad a_{22}y_0 = 0 \quad \text{ja} \quad a_{33}z_0 = 0$$

ja sellega keskpunktiks nimelt koordinaatide alguspunkt  $(0; 0; 0)$ . Iga tasapinna  $ax + by + cz + 1 = 0$  pooluse koordinaatide jaoks saavad valemist 91 võrrandid  $a_{11}x' = a \cdot a_{00}$ ,  $a_{22}y' = b \cdot a_{00}$  ja  $a_{33}z' = c \cdot a_{00}$  ja siis on selle pooluse kaugus keskpunkti (s. o.

siin koordinaatide alguspunkti)  $r = a_{00} \sqrt{\frac{a^2}{a_{11}^2} + \frac{b^2}{b_{22}^2} + \frac{c^2}{a_{33}^2}}$ , mis küllalt kaugel tasapinna korral, s. o. küllalt väikeste  $a$ ,  $b$  ja  $c$  korral saab kui väike tahes.

Polaarse süsteemi keskpunktil ei ole (selles polaarses süsteemis) polaarpinda, sest tema koordinaatide järgi saavad valemist 90  $a$ ,  $b$  ja  $c$  kõik kolm nullid (aga  $d$  mitte null). Aga sellepärast, et keskpunktile küllalt ligidatel punktidel on polaarpinnad temast väga kaugel ja veel ligematel järjest kaugemal, nagu oleks keskpunkt ise kõige kaugema tasapinna poolus. Harilikult ruumi mõiste järgi ei ole ruumis kõige kaugemat tasapinda. Temast kõneldakse siiski kui lõpmata kaugest tasapinnast ehk ebalehest mille võrrandiks on

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \text{kus on } a = b = c = 0 \text{ ja } d \neq 0,$$

sest siis on vastavusi käsitada hõlpsam. Näiteks võib siis ütelda, et polaarses süsteemis on iga punkt ühe tasapinna poolus ja et selle süsteemi keskpunktiks nimetatakse ebalehe poolust.

On polaarseid süsteeme, millel ei ole (päris) keskpunkti. Niisugune (keskpunktita) on näiteks see polaarne süsteem, mille, võrrandis on  $a_{00} = a_{12} = a_{13} = a_{10} = a_{23} = a_{20} = a_{33} = 0$ , aga  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  ja  $a_{30}$  ei ole ükski null, s. o. millel on lihtne võrrand

$$a_{11}x'x + a_{22}y'y + a_{30}z + a_{30}z' = 0 \quad 94$$

sest keskpunkti koordinaatide ühine jagaja saab siin

$$A_{00} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ kuna kolmanda koordinaadi lugeja saab}$$

$$A_{30} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{30} \end{vmatrix} = -a_{11}a_{22}a_{30} \neq 0.$$

Märkus. Keskpunkti koordinaadid kirjutasime kohe mitme tundmatuga niimitme lineaarse võrrandi lahenduste nimetajate ja lugejate kokkuseadmise reegli järgi. *Grassmann* töendas selle reegli (1844) punktisid korrutades. Näiteks saame siis, kui antud kolmel kolme tundmatuga võrrandil korrutame esimesel kõik liikmed punktiga  $O$ , teisel punktide vahel  $X-O$ , kolmandal vahel  $Y-O$  ja liidame nende võrrandite pooled, ühe ainsa võrrandi:

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad O \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \quad X-O \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \quad Y-O \end{array}$$

$$a_1P_1x + b_1P_2y + c_1P_3z + d_1P_0 = 0,$$

$$\text{kus } P_1 = O + \frac{a_2}{a_1}(X-O) + \frac{a_3}{a_1}(Y-O) = \left( \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1} \right) \quad [V6], \quad P_2 = \left( \frac{b_2}{b_1}, \frac{b_3}{b_1} \right),$$

$P_3 = \left( \frac{c_2}{c_1}, \frac{c_3}{c_1} \right)$  ja  $P_0 = \left( \frac{d_2}{d_1}, \frac{d_3}{d_1} \right)$  on kõik neli ühe tasapinna punktid. Kui sellel ühel võrrandil korrutame kõik liikmed korrutisega  $P_2P_3$ , siis saame  $a_1P_1P_2P_3x + d_1P_0P_2P_3 = 0$  ehk

$$x = \frac{-d_1P_0P_2P_3}{a_1P_1P_2P_3}, \text{ ja niisama saame } y = \frac{-d_1P_1P_0P_3}{b_1P_1P_2P_3} \text{ ja } z = \frac{-d_1P_1P_2P_0}{c_1P_1P_2P_3} \text{ siis,}$$

kui korrutame korrutistega  $P_1P_3$  või  $P_1P_2$  ja lugejas ja nimetajas teisendame tegurite järjekorra sellekohaselt. Need saadused saavadi reeglipärasteks,

kui 1) paneme punktide korrutiste asemele nende väärtused valemist 9, 2) kaotame saadud determinantides murrud (selle põhjal, et determinantid ühe rea või veeru elementisid ühe arvuga korrutades korrutame determinandi, nagu see silma paistab siis, kui determinandi arendame [21 M 2] selle rea või veeru elementide järgi) ja 3) seame nendes determinantides veerud samanimelisteks ridadeks (millest nende väärtus ei muutu, nagu see silma paistab kaherealisel determinandil  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$  otsekohe ja kolmerealisel, neljarealisel jne. siis, kui nad arendame esimese veeru elementide järgi ja loeme selle arenduse esimese rea elementide järgi olevaks.)

Harjutus 131. Tõendada, et polaarse süsteemi võrrandis on siis  $a_{10} = a_{20} = a_{30} = 0$ , kui on koordinaatide alguseks selle polaarse süsteemi keskpunkt, s. o.  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ . [V 92]

4) Diameetri(tasa)pind ja diameeter. Kui polaarsel süsteemil [V 88] on keskpunkt, siis nimetatakse keskpunktist läbiminevat tasapinda selle polaarse süsteemi diameetri(tasa)pinnaks ja keskpunktist läbiminevat kiirt diameetriks. Diameetripinnal ei ole (selles polaarses süsteemis) poolust, sest selle pooluse koordinaadid peaksid rahuldama keskpunkti polaarpinna võrrandit (s. o. võrrandit V 88 siis kui sinna on pandud sulgudesse ja viimaseks reaks avaldused V 92) mida ei rahulda ükski (lõplikkude) arvude kolmik.

Diameetripinna jaoks saame üldisema mõiste, kui vaatleme ühe sirge joone punktide polaarpindu. Olgu sirge joone sihikoosi- nused  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  ja siis tema normaalsed parameetrilised võrrandid

$$x = x_1 + at, \quad y = y_1 + \beta t \quad \text{ja} \quad z = z_1 + \gamma [V 81].$$

Asetades need  $x$ ,  $y$  ja  $z$  väärtused polaarse süsteemi võrrandisse V 88  $x'$ ,  $y'$  ja  $z'$  asemele ja jagades siis kõik liikmed arvuga  $t$ , saame selle sirge joone igale punktile, kus ei ole  $t = 0$  polaarpinna võrrandiks

$$\begin{aligned} & \left[ a_{11} \left( \frac{x_1}{t} + \alpha \right) + a_{12} \left( \frac{y_1}{t} + \beta \right) + a_{13} \left( \frac{z_1}{t} + \gamma \right) + \frac{a_{10}}{t} \right] x + \left[ a_{21} \left( \frac{x_1}{t} + \alpha \right) + \right. \\ & \left. + a_{22} \left( \frac{y_1}{t} + \beta \right) + a_{23} \left( \frac{z_1}{t} + \gamma \right) + \frac{a_{20}}{t} \right] y + \left[ a_{31} \left( \frac{x_1}{t} + \alpha \right) + a_{32} \left( \frac{y_1}{t} + \beta \right) + \right. \\ & \left. + a_{33} \left( \frac{z_1}{t} + \gamma \right) + \frac{a_{30}}{t} \right] z + a_{01} \left( \frac{x_1}{t} + \alpha \right) + a_{02} \left( \frac{y_1}{t} + \beta \right) + a_{03} \left( \frac{z_1}{t} + \gamma \right) + \\ & \quad + \frac{a_{00}}{t} = 0. \end{aligned}$$

Kui siin on  $t$  küllalt suur, siis on nende liikmete kogu, kus on  $t$  jagajaks, kui ligidal tahes nullile ja siis see võrrand ise kui ligidal tahes võrrandile

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma)x + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma)y + \\ + (a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma)z + a_{01}\alpha + a_{02}\beta + a_{03}\gamma = 0 \quad 95$$

Selle võrrandiga esitatud tasapinda (sihikoosinustega  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  kiirte ühise ebapunkti polaarpinda) nimetatakse polaarse süsteemi V 88 diameetripinnaks (olgu sellel polaarsel süsteemil keskpunkt või mitte) ja nimelt kiirtele sihikoosinustega  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  kaasdiameetripinnaks ja neid kiiri ise selle diameetripinna kaaskiirteks. Näiteks on  $x$ -teljel ja tema paralleelidel  $\alpha=1$  ja  $\beta=\gamma=0$  ja sellega nende kaasdiameetripind  $a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z + a_{01} = 0$ . Niisama on  $y$ -telje kaasdiameetripind  $a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z + a_{02} = 0$  ja  $z$ -telje oma  $a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{03} = 0$ .

Kahe diameetripinna ühist joont nimetatakse diameetriks ja nimelt sellele diameetripinnale kaasdiameetriks, mille kaaskiirte hulgas ta on.

Märkus 1. Diameetripinna võrrand V 95 on homogeenne  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  kohta. Sellepärast saame kiirele

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t$$

kaasdiameetripinna ka pannes valemis 95  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  asemele  $l$ ,  $m$  ja  $n$ .

Märkus 2. Polaarne süsteem ruumis määrab iga kiire peal kaaspunktide vastavuse ehk involuutsuse, kui punkti kaaspunktiks loeme punkti, mis on esimese punkti polaarpinna peal. Sest pannes valemis 88 tundmatute  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $x'$ ,  $y'$  ja  $z'$  asemele nende väärtused selle kiire võrrandist [M 1]:  $x_0 + lt$ ,  $y_0 + mt$ ,  $z_0 + nt$ ,  $x_0 + lt'$ ,  $y_0 + mt'$  ja  $z_0 + nt'$ , saame bilineaarse võrrandi tundmatutega  $t$  ja  $t'$ :

$$att' + bt + bt' + c = 0,$$

kus üksikute tundmatutega liigetel on ühine kordaja  $b = (a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n)x_0 + (a_{12}l + a_{22}m + a_{23}n)y_0 + (a_{13}l + a_{23}m + a_{33}n)z_0 + a_{10}l + a_{20}m + a_{30}n$ , nii et saadud võrrand on tõesti sümmeetriline [6] (involuutsuse võrrand).

Kordaja  $b$  selles võrrandis on selle kiire kaasdiameetripinna võrrandi pahem pool [V 95; M 1], ja kui sellel kiirel on punktiks  $(x_0, y_0, z_0)$  nimelt lõikepunkt tema kaasdiameetripinnaga (selle kiire involuutsuse keskpunkt [H 89]), siis on see kordaja  $b=0$ . Siis saab involuutsuse võrrand  $att' + c=0$  ja siit

ruutvõrrand  $at^2 + c = 0$  selle kiire nende punktide parameetri väärtuste jaoks, mis on oma polaarpinna peal (iseenesed kaaspunktid) ja mida nimetatakse ka kahekordseteks punktideks. Need parameetri väärtused on siis  $t_1 = \sqrt{-c:a}$  ja  $t_2 = -\sqrt{-c:a}$ , nii et kiirel on mõlemad kahekordsed punktid tema kaasdiameetripinnast (tema involuutsuse keskpunktist) ühekaugusel teine teisel pool (sest  $t$  on kauguse arv punktist  $(x_0, y_0, z_0)$  kui mõõduks on  $|OX| \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$ ). Sellega poolitab diameetripind oma kaaskiirte tükid kahekordsete punktide vahel.

Harjutus 132. Tõendada, et keskpunktiga polaarsel süsteemil läheb iga diameetripind V 95 (ja siis ka iga diameeter) läbi keskpunkti. [Valemis 95 avame sulud ja võtame siis sulgude taha  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$ . Siis saavad sulgudesse keskpunkti võrrandite V 92 pahemad pooled.]

H. 133. Leida koordinaatide telgede kaasdiameetripinnad polaarsel süsteemidel V 93 ja V 94. [Viimasel saab  $z$ -telje kaasdiameetripinnaks ebaleht.]

H. 134. Tõendada, et keskpunktita polaarsel süsteemil V 94 on kõik diameetrid omavahel paralleelsed. [Iga diameetripind (valemi 95 järgi)  $a_{11}\alpha + a_{22}\beta + a_{33}\gamma = 0$  on paralleelne  $z$ -teljega.]

5) Peatasapinnad ja teljed. Kui polaarse süsteemi diameetripind on risti oma kaaskiirtega, siis nimetatakse seda diameetripinda polaarse süsteemi peatasapinnaks ja kahe peatasapinna ühist joont polaarse süsteemi teljeks. Kui diameetripind V 95 on risti oma kaaskiirtega, mille sihikoosinused on  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$ , siis on tema võrrandis tundmatute kordajad nimelt nende kaaskiirte sihikoosinused — vahest korrutatud mingi arvuga [H 123], mille siin kirjutame tähega  $\lambda$ . Sellega on peatasapinnal

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma &= \lambda\alpha \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma &= \lambda\beta \\ a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma &= \lambda\gamma \end{aligned}$$

96

Need kolm võrrandit ehk  $(a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0$ ,  $a_{12}\alpha + (a_{22} - \lambda)\beta + a_{23}\gamma = 0$  ja  $a_{13}\alpha + a_{23}\beta + (a_{33} - \lambda)\gamma = 0$  on homogeensed  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  kohta [lhk. 96]. Jagades neil võrranditel kõik liikmed näiteks arvuga  $\gamma$  (kui see ei ole null), saame uuteks tundmatuteks  $\alpha:\gamma$  ja  $\beta:\gamma$ , mida saame leida juba kahest võrrandist, näiteks esimesest ja teisest [V 21; lhk. 43]:

$$\alpha : \gamma = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} - \lambda & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad 97$$

$$\beta : \gamma = - \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}$$

s. o.  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  on proportsionaalsed selle kolme võrrandi (kordajate) determinandis viimase rea elementidele vastavate alamdeterminantidega (ja niisama ka esimese või teise rea elementidele vastavate alamdeterminantidega, sest võib ju  $\alpha : \gamma$  ja  $\beta : \gamma$  leida teisest ja kolmandast või kolmandast ja esimesest võrrandist). Kolmanda võrrandi homogeensuse pärast võime sinna panna  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  asemele need nendega proportsionaalsed alamdeterminandid ja saame siis  $\lambda$  jaoks sekula arvõrrandi [V 64]

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \quad 98$$

ehk arvutades selle determinandi, korraldades  $\lambda$  astmete järgi ja muutes märgid :

$$\lambda^3 - I\lambda^2 + J\lambda - A_{00} = 0,$$

kus on  $I = a_{11} + a_{22} + a_{33}$  ja  $99$

$$J = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - a_{31}^2 - a_{12}^2$$

Sellel kolmanda astme võrrandil on vähemalt üks juur, s. o. vähemalt üks  $\lambda$ -väärtus, mis selle võrrandi pahema poole nulliks teeb. Sest

(1) on sellel pahemal poolel esimene liige juba siis muude liigete summast absoluutselt suurem, kui on  $|\lambda| > |I| + \sqrt{|J|} + \sqrt[3]{|A_{00}|}$  (saame ju korrutades selle isevõrduse pooli arvuga  $|\lambda|^2$  :

$\lambda^3 > |I| \cdot |\lambda|^2 + \sqrt{|J|} \cdot |\lambda|^2 + \sqrt[3]{|A_{00}|} \cdot |\lambda|^2 > |I| \cdot |\lambda|^2 + |J| \cdot |\lambda| + |A_{00}|$  sellepärast, et on  $|\lambda| > \sqrt{|J|}$  ja  $|\lambda|^2 > \sqrt[3]{|A_{00}|^2}$ ),

(2) on siis absoluutselt nii suure negatiivse  $\lambda$ -väärtuse korral ka sekulaarvõrrandi pahem pool negatiivne ja absoluutselt nii suure positiivse  $\lambda$ -väärtuse korral positiivne (nagu selle pahema poole esimene liige) ja

(3) kui  $\lambda$  muutub sellest negatiivsest väärtusest pidevalt (s. o. kõiki vahemisi väärtusi saades) selle positiivse väärtuseni, siis peab sekulaarvõrrandi pahem pool  $\lambda$  järgi pidevalt negatiivsest positiivseks muutudes vähemalt kord nulliks saama (muutub ju pidevalt summa oma liidetavate järgi ja korrutis oma tegurite järgi).

Olgu see üks sekulaarvõrrandi juur  $\lambda = \lambda_1 \neq 0$ . Siis saame kohe ühe peatasapinna (kui diameetripinna võrrandi V 95 lühendame valemite 96 abil, paneme  $a$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  asemele nendega proportsionaalsed alamdeterminandid valemist 97 ja  $\lambda$  asemele selle ühe juure  $\lambda_1$  ja kirjutame veel vabaliikme determinandi kujul):

$$\lambda_1 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} - \lambda_1 & a_{23} \end{vmatrix} x - \lambda_1 \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} y + \\ + \lambda_1 \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_1 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_1 & a_{23} \\ a_{10} & a_{20} & a_{30} \end{vmatrix} = 0$$

Jagades sekulaarvõrrandil V 99 pahema poole vahega  $\lambda - \lambda_1$ , saame (sellepärast, et on  $\lambda_1^3 - I\lambda_1^2 + J\lambda_1 - A_{00} = 0$ )

$$(\lambda^3 - I\lambda^2 + J\lambda - A_{00}) : (\lambda - \lambda_1) = \lambda^2 - (I - \lambda_1)\lambda + J - (I - \lambda_1)\lambda_1.$$

Et see teiseastmeline avaldus on sekulaarvõrrandi pahema poole teguriks, sellepärast on iga  $\lambda$ -väärtus, mis selle avalduse nulliks teeb, s. o. ruutvõrrandi

$$\lambda^2 - (I - \lambda_1)\lambda + J - (I - \lambda_1)\lambda_1 = 0$$

kumbki juur ( $\lambda_2$  või  $\lambda_3$ ) ka sekulaarvõrrandi juureks ja sellega sekulaarvõrrandil kolm juurt:  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  ja  $\lambda_3$ . Kui need juured on isevõrdsed ja ükski neist ei ole null, siis on peatasapindu veel teine ja kolmas, mille võrrandid saavad esimese omast, kui seal pannakse  $\lambda_1$  asemele  $\lambda_2$  või  $\lambda_3$ .

Sekulaarvõrrandi kahe isevõrdse (ja nullist erineva) juure  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$  järgi saadud peatasapinnad on omavahel risti. Sest kui kirjutame  $\lambda_1$  järgi saadud peatasapinnal ristjoone sihikoosinused tähtedega  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  ja  $\gamma_1$  (nad saa-

vad ühevõrduse  $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$  pärast valemite 97 või peatasapinna võrrandi normaalsest kujust nimelt  $\alpha_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} - \lambda_1 & a_{23} \end{vmatrix}$

$$\cdot \sqrt{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} - \lambda_1 & a_{23} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_1 \end{vmatrix}^2} \quad \text{jne.) ja}$$

$\lambda_2$  järgi saadud peatasapinnal tähtedega  $\alpha_2, \beta_2$  ja  $\gamma_2$  ja võtame võrrandid V 96 üks kord arvudega  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  ja  $\lambda_1$ , korrutame esimesel võrrandil kõik liikmed arvuga  $\alpha_2$ , teisel arvuga  $\beta_2$  ja kolmandal  $\gamma_2$  ja siis liidame nendel võrranditel esimesed pooled omavahel ja teised omavahel, ja teine kord võtame need võrrandid arvudega  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  ja  $\lambda_2$  ja liidame korrutades arvudega  $\alpha_1, \beta_1$  ja  $\gamma_1$ , siis saame esimeste poolte summa sellesama, mis esimene kordki, nii et ka teiste poolte summa saab endise võrdne, s. o.

$$\lambda_2 \alpha_1 \alpha_2 + \lambda_2 \beta_1 \beta_2 + \lambda_2 \gamma_1 \gamma_2 = \lambda_1 \alpha_1 \alpha_2 + \lambda_1 \beta_1 \beta_2 + \lambda_1 \gamma_1 \gamma_2$$

ehk  $(\lambda_2 - \lambda_1)(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2) = 0$ , kust  $\lambda_2 \neq \lambda_1$  korral järgnebki

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0 \quad [\text{V } 86].$$

Sellest viimasest ühevõrdusest järgneb ka (*Cauchy* järgi), et sekulaarvõrrandil on kõik juured reaalsed. Sest kui oleks  $\lambda_2 = a + bi$ , siis oleks (sellesama ruutvõrrandi teine juur)  $\lambda_3 = a - bi$  ja siis ka nende järgi saadud sihikoonused nimelt kaaskompleksarvud:  $\alpha_2 = a_1 + b_1 i$  ja  $\alpha_3 = a_1 - b_1 i$ ,  $\beta_2 = a_2 + b_2 i$  ja  $\beta_3 = a_2 - b_2 i$ ,  $\gamma_2 = a_3 + b_3 i$  ja  $\gamma_3 = a_3 - b_3 i$ , kus  $a_1, a_2, a_3$  ja  $b_1, b_2, b_3$  oleks sellekohased reaalsed arvud, nii et saaks

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2 = 0,$$

mis oleks võimalik ainult siis, kui oleks  $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 0$  ja siis ka  $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$ , kuna peab olema  $a_2^2 + b_2^2 = \gamma_2^2 = 1$ .

Kui sekulaarvõrrandil V 99 on üks juur null, siis on tema vabaliige (keskpunkti koordinaatide ühine nimetaja)  $A_{00} = 0$  ja sellega see polaarne süsteem keskpunktita, ja ümberpöörduvalt saab võrrandist V 99  $A_{00} = 0$  korral võrrand

$$\lambda(\lambda^2 - I\lambda + J) = 0,$$

millel on üheks juureks  $\lambda_1 = 0$  ja teised leiduvad ruutvõrrandist

$$\lambda^2 - I\lambda + J = 0.$$

Märkus 1. Kui sekulaarvõrrandis ei ole  $A_{00} = 0$ , siis võib tema ühe juure  $\lambda_1$  leida ilma kolmanda astme võrrandi erilahendamisviisita lihtsalt katsumise teel. Olgu näiteks antud polaarne süsteem

$$(6,7x' + 7,2y' - 13z' - 17)x + (7,2x' + 19y' - 5z' + 12)y + (-13x' - 5y' - 11z' + 5,5)z - 17x' + 12y' + 5,5z' - 3 = 0.$$

Tema sekulaarvõrrand  $V_{99}$  on

$$\lambda^3 - 14,7\lambda^2 - 401,24\lambda + 3272,56 = 0.$$

Kui on  $\lambda = 0$ , siis on selle võrrandi pahem pool, mida kirjutatakse ka märgiga  $\Delta(\lambda)$ ,  $\Delta(0) = 3272,56$ . Kui on  $\lambda = 10$ , siis on  $\Delta(10) = 1000 - 1470 - 4012,4 + 3272,56 = -1209,84$ . Sellega on  $\lambda$  väärtus 0 ja 10 vahel ja näivalt enam kui kaks korda ligemal kümnele. Sellepärast katsume 7. Kui on  $\lambda = 7$ , siis on  $\Delta(7) = 343 - 720,3 - 2808,68 + 3272,56 = 86,58$ . Sellega on  $\lambda_1$  7 ja 10 vahel ja näivalt korda 14 ligemal seitsmele. Sellepärast katsume 7,2. Kui  $\lambda$  väärtusele tuleb juurde 0,2, siis tuleb  $\Delta(7)$  väärtusele esimesele liikmele juurde  $29,4 + 0,84 + 0,008 = 30,248$ , teisele liikmele  $-14,7 \cdot 2,84 = -41,748$  ja kolmandale liikmele  $-401,24 \cdot 0,2 = -80,248$ , nii et siis, kui on  $\lambda = 7,2$ , on  $\Delta(7,2) = 86,58 + 30,248 - 41,748 - 80,248 = -5,168$ . Sellega on  $\lambda_1$  7 ja 7,2 vahel, viimasele näivalt ligi 17 korda ligemal ja sellega õige ligidalt  $\lambda_1 = 7,19$ .

Jagades sekulaarvõrrandi pooled vahega  $\lambda - 7,19$ , saame  $\lambda_2$  ja  $\lambda_3$  jaoks ruutvõrrandi

$$\lambda^2 - 7,51\lambda - 455,24 = 0$$

ja seda lahendades  $\lambda_2 = 25,4$  ja  $\lambda_3 = -17,9$ .

Märkus 2. Keskpunktita polaarsel süsteemil on peatasapindu ainult kaks (sest kui sekulaarvõrrandi üks juur on null, siis saab selle järgi üheks peatasapinnaks ebaleht [lhk. 135]) ja sellepärast on keskpunktita polaarsel süsteemil üks ainus telg (selle kahe peatasapinna ühine joon). Selle ainsa telje sihikoosinused saavad valemist 97 (kui seal on  $\lambda = 0$ ) [lhk. 136]:

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} : \sqrt{\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}^2} \text{ jne.}$$

Harjutus 135. Tõendada, et polaarsel süsteemil  $V_{93}$  on sekulaarvõrrandi juurteks  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  ja  $a_{33}$  ja peatasapindadeks koordinaatide pinnad (sellega telgedeks koordinaatide teljed).

H. 136. Tõendada, et polaarsel süsteemil  $V_{94}$  on  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  ja  $a_{33} = 0$  sekulaarvõrrandi juurteks,  $yz$ - ja  $zx$ -pind peatasapindadeks ja  $xy$ -pind alguspunkti polaarpinnaks.

H. 137. Tõendada, et 1) iga keskpunktiga polaarsete süsteemi võrrandil on valemi 93 kuju, kui koordinaatide pindadeks on peatasapinnad ja 2) iga keskpunktita polaarsete süsteemi võrrandil valemi 94 kuju, kui  $yz$ - ja  $zx$ -pinnaks on peatasapinnad ja alguseks tipp, s. o. (ainsa) telje see punkt, mis on oma polaarpinna peal. [1] Kui koordinaatide pindadeks on peatasapinnad (mis on diameetripinnad), siis on alguseks keskpunkt ja sellega  $a_{10} = a_{20} = a_{30} = 0$  [H 131]. Valemist 96 (kui sinna paneme  $x$ -telje sihikoosinused  $a_1 = 1$ ,

$\beta_1 = \gamma_1 = 0$  või  $y$ -telje omad  $\alpha_2 = \gamma_2 = 0, \beta_2 = 1$ ) saame  $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ .  
 2) tipu ehk alguse polaarpind  $a_{10}x + a_{20}y + a_{30}z + a_{00} = 0$  [V 88] on nimelt  $xy$ -pind ( $z = 0$ ) ja sellega on  $a_{10} = a_{20} = a_{00} = 0$ . On ju tipp kummagi peatasapinna ( $yz$ -pinna ja  $zx$ -pinna) peal ja tema polaarpind peab siis minema läbi kummagi peatasapinna pooluse, mis on nende peatasapindade kaaskiirte (nende ristjoonte) peal ja sellega  $x$ - ja  $y$ -telje peal.]

Märkus 3. Kui koordinaatide pindadeks ei ole polaarse süsteemi peatasapinnad, siis võib need peatasapinnad võtta uuteks koordinaatide pindadeks. Kirjutame uued koordinaadid polaartasapinna jooksval punktil  $x'', y''$  ja  $z''$  ja poolusel  $x''', y'''$  ja  $z'''$ . Siis on endiste koordinaatide pindade normaalsed võrrandid uutes koordinaatides:  $yz$ -pinna oma  $a_1x'' + a_2y'' + a_3z'' + x_0 = 0$ ,  $zx$ -pinna oma  $\beta_1x'' + \beta_2y'' + \beta_3z'' + y_0 = 0$  ja  $xy$ -pinna oma  $\gamma_1x'' + \gamma_2y'' + \gamma_3z'' + z_0 = 0$ , kus on  $a_1, \beta_1, \gamma_1$  uue  $x$ -telje sihikoosinused,  $a_2, \beta_2, \gamma_2$  uue  $y$ -telje omad ja  $a_3, \beta_3, \gamma_3$  uue  $z$ -telje omad ja  $x_0, y_0, z_0$  uue alguse vanad koordinaadid. Iga punkti vanad koordinaadid  $x, y$  ja  $z$  või  $x', y'$  ja  $z'$  on siis uute  $x'', y''$  ja  $z''$  või  $x''', y'''$  ja  $z'''$  järgi (kui selle punkti kauguste arvud endistest koordinaatide pindadest)

$$\begin{aligned} x &= a_1x'' + a_2y'' + a_3z'' + x_0, & y &= \beta_1x'' + \beta_2y'' + \beta_3z'' + y_0, \\ & & z &= \gamma_1x'' + \gamma_2y'' + \gamma_3z'' + z_0 \\ x' &= a_1x''' + a_2y''' + a_3z''' + x_0, & y' &= \beta_1x''' + \beta_2y''' + \beta_3z''' + y_0, \\ & & z' &= \gamma_1x''' + \gamma_2y''' + \gamma_3z''' + z_0 \end{aligned}$$

100

Pannes siit  $x, y, z, x', y',$  ja  $z'$  väärtused polaarse süsteemi võrrandisse V 88, saame võrrandi, mis on lineaarne nii  $x'', y''$  ja  $z''$  kui ka  $x''', y'''$  ja  $z'''$  kohta (sest pannes lineaarses võrrandis tundmatute asemele lineaarsed avaldused [V 100] uutes tundmatutes, saame lineaarse võrrandi nendes uutes tundmatutes). See võrrand saab ka sümmeetriline kolmikute  $x'', y'', z''$  ja  $x''', y''', z'''$  kohta, sest nende kolmikute vahetamine on valemite 100 järgi samaväärne kolmikute  $x, y, z$  ja  $x', y', z'$  vahetamisega ja see viimane vahetamine ei muuda võrrandit V 88 (kui seal on  $a_{ik} = a_{ki}$ ), sellega ka esimene vahetamine mitte seda sealt saadud võrrandit. Sellega on saadud võrrand ka polaarse süsteemi võrrand ja tal peab juba olema valemi 93 või 94 kuju.

6) Korralduspind. Kanoonilised võrrandid. Nende punktide kogu, mis polaarses süsteemis on oma polaarpindade peal, nimetame (*v. Staudt'i* järgi) selle polaarse süsteemi korralduspinnaks (Ordnungsfläche). neid polaarpindu, mis oma poolustest läbi lähevad, selle korralduspinna puutetasapindadeks ja nende pooluseid puutepunktideks. Sellega peavad polaarse süsteemi korralduspinna punktide koordinaadid rahuldama seda võrrandit, mis saab polaarse süsteemi võrrandist V 88 siis, kui

seal saavad polaarpinna jooksvad koordinaadid  $x$ ,  $y$  ja  $z$  samasteks pooluse koordinaatidega  $x'$ ,  $y'$  ja  $z'$  (polaarse süsteemi korralduspinna üldist võrrandit):

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0 \quad 101$$

See võrrand on siis, kui koordinaatide pindadeks on peatasapinnad või keskpunktita polaarse süsteemi korral  $yz$ -pinnaks ja  $zx$ -pinnaks peatasapinnad ja alguseks tipp, lihtsam [H 137]

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{00} = 0 \quad [V 93]$$

või

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{30}z = 0 \quad [V 94].$$

Esimesest lihtsamast võrrandist paistab silma, et polaarse süsteemi keskpunkt on selle polaarse süsteemi korralduspinna sümmeetriakeskpunkt. Sest kui seda võrrandit rahuldavad mingi punkti  $(x_1, y_1, z_1)$  koordinaadid, siis rahuldavad teda ka punkti  $(-x_1, -y_1, -z_1)$  koordinaadid, ja see teine punkt on alguspunktist (keskpunktist) niisama kaugel kui esimene, aga vastupidisel pool

(selle kiire  $r \equiv \frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$  peal, mis läheb esimesest punktist

alguspunktsisse), s. o. teine on nimelt sümmeetriline esimesele punktile alguspunkti (keskpunkti) kohta. Niisama paistab mõlemast lihtsamast võrrandist silma, et polaarse süsteemi peatasapinnad ja teljed (polaarsel süsteemil V 93 kõik kolm koordinaatide pinda ja telge ja polaarsel süsteemil V 94  $yz$ -pind ja  $zx$ -pind ja  $z$ -telg) on selle polaarse süsteemi korralduspinna (rist)sümmeetria tasapinnad ja (rist)sümmeetria teljed, sest kui neid võrrandit rahuldavad näiteks mingi punkti  $(x_1, y_1, z_1)$  koordinaadid, siis rahuldavad neid ka punkti  $(-x_1, y_1, z_1)$  ja veel ka punkti  $(-x_1, -y_1, z_1)$  omad, ja punkt  $(-x_1, y_1, z_1)$  on ju sümmeetriline punktile  $(x_1, y_1, z_1)$   $yz$ -pinna kohta (punktist  $(x_1, y_1, z_1)$  sellele pinnale mineva ristkiire peal sellest pinnast niisama kaugel teisel pool) ja niisama ka punkt  $(-x_1, -y_1, z_1)$  sümmeetriline punktile  $(x_1, y_1, z_1)$   $z$ -telje kohta. Kui siin

esimesel lihtsamal võrrandil jagame kõik liikmed arvuga  $-a_{00}$  ja kirjutame

$$\left| \frac{-a_{00}}{a_{11}} \right| = a^2, \quad \left| \frac{-a_{00}}{a_{22}} \right| = b^2 \quad \text{ja} \quad \left| \frac{-a_{00}}{a_{33}} \right| = c^2 \quad 102$$

siis saame keskpunktiga polaarseste süsteemide korralduspindade jaoks niinimetatud kanoonilised võrrandid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

mille järgi on küll vahest kõige mõnusam neid pindu käsitada.

(1) Ellipsoid. Olgu selles võrrandis kolm esimest liiget kõik positiivsed :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad 103$$

Kui on  $a = b = c$ , siis saab see võrrand (V 103)

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0,$$

nii et ta esitab nimelt nende punktide kogu, mis seisavad kõik alguspunktist  $a$  mõõdu kaugusel, s. o. kerapinna raadiusega  $a$ . Kerapinnal (s. o. kerapinna polaarsel süsteemil  $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ ) on iga diameetritasapind V 95

$$ax + \beta y + \gamma z - a^2 = 0$$

risti [V 87] oma kaaskiirtega (mille sihikoosinused on ju  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$ ) ja on siis peatasapinnaks. Sellepärast peavad üldisest võrrandist V 101 (ehk V 88) siis, kui ta esitab kerapinna, saama võrrandid V 96 niisugused, et neid rahuldavad igasugused  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  väärtused. Sellest järgneb kerapinna tunnus

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \lambda \quad \text{ja} \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0 \quad 104$$

Kõveraid pindu (nagu kerapinda) uuritakse nende kuju poolest nende tasaste lõigete järgi, s. o. nende joonte järgi, mis on ühised kõveral pinnal mõnede tasapindadega ehk mida mõõda

mõned tasapinnad lõikavad seda kõverat pinda. Sest näiteks juba siis, kui kõverast pinnast on teada tema lõiked mitme paralleelse tasapinnaga ja veel mõne muu tasapinnaga, saab sellest pinnast isegi mudeli teha, valmistades nende lõigete mudelid traadist või papist ja kinnitades siis paralleelsete lõigete mudelid teiste omade külge [J 30, J 31 jne.].

Kerapinnal (s. o. võrrandiga V 103 esitatud pinnal siis, kui seal on  $a=b=c$ ) on, nagu tuttav, kõik tasased lõiked ringid. Võrrandist V 103 paistab silma, et koordinaatide pindadega paralleelsed tasapinnad lõikavad selle võrrandiga esitatud pinda (olgu seal  $a$ ,  $b$  ja  $c$  missugused tahes) ikka ellipsiid mööda, millel on poolteljed proportsionaalsed arvudega  $a$  ja  $b$ , või  $b$  ja  $c$ , või  $c$  ja  $a$  selle järgi, kas lõikaja tasapind on paralleelne  $xy$ -pinnaga, või  $yz$ -pinnaga, või  $zx$ -pinnaga. Sest näiteks  $xy$ -pinnaga paralleelsel tasapinnal  $z=z_1$  on pinnaga V 103 ühised need punktid, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit V 103 siis, kui seal on  $z=z_1$ , s. o. võrrandit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1 = 0 \text{ ehk } \frac{x^2}{a^2(c^2 - z_1^2)} : c^2 + \frac{y^2}{b^2(c^2 - z_1^2)} : c^2 - 1 = 0$$

ja see on nimelt pooltelgedega  $a\sqrt{c^2 - z_1^2} : c$  ja  $b\sqrt{c^2 - z_1^2} : c$  ellipsi võrrand selle lõikaja tasapinna peal (kus  $x$ - ja  $y$ -väärtused on tõesti Cartesiuse ristkoordinaadid, millel on alguseks selle tasapinna lõikepunkt  $z$ -teljega, telgedeks tema lõikejooned  $zx$ - ja  $yz$ -pinnaga ja mõõdupunktideks nende telgede lõikepunktid pindadega  $x=1$  ja  $y=1$ ). Sellepärast nimetatakse pinda V 103 ellipsoidiks pooltelgedega  $a$ ,  $b$  ja  $c$  (nii et kerapind on ühesuuruste pooltelgedega ellipsoid).

Arvud  $a$ ,  $b$  ja  $c$  on võrrandi V 103 järgi nimelt ellipsoidi tippude (s. o. nende punktide, kus ellipsoidi lõikavad tema teljed) ja keskpunkti (siin alguspunkti) vaheliste kauguste arvud. On viisiks võtta ellipsoidi telgedest nimelt seda  $x$ -teljeks, mille peal on tipp keskpunktist kõige kaugemal, ja siis  $z$ -teljeks nimelt seda, mille peal on tipp kõige ligemal, nii et saab  $a$  suuremaks poolteljeks,  $b$  keskmiseks ja  $c$  vähemaks. Joonis 30 (lhk. 146) kujutab ellipsoidi

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 - 1 = 0$$

(poolteljedega 3; 2 ja 1), tema lõiget tasapinnaga  $z=0,5$  ja veel tasapinda  $z=-1$ , millel on ellipsoidiga ainult punkt  $(0; 0, -1)$  ühine. See viimane tasapind on ellipsoidi puutetasapind selles punktis, sest punkti  $(0; 0, -1)$  polaartasapind polaarses süsteemis  $\frac{xx'}{9} + \frac{yy'}{4} + zz' - 1 = 0$  on tõesti  $-z - 1 = 0$ .

(2) Kahekattene hüperboloid. Kui keskpunktiga polaarse süsteemi korralduspinna kanoonilises võrrandis on kolmest esimesest liikmest ainult üks positiivne (harilikult antakse telgedele nimed nii, et see positiivne liige saab nimelt kolmandaks)

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0} \quad 105$$

siis nimetatakse seda pinda kahekatteseks hüperboloidiks, sest tema lõikejooned mingi  $yz$ -pinnale paralleelse tasapinnaga  $x=x_1$  ja mingi  $zx$ -pinnale paralleelse pinnaga  $y=y_1$  saavad hüperboolid (esimesed pooltelgedega  $c\sqrt{a^2+x_1^2}:a$  ja  $b\sqrt{a^2+x_1^2}:a$  ja teise  $c\sqrt{b^2+y_1^2}:b$  ja  $a\sqrt{b^2+y_1^2}:b$ ) ja ainult lõiked mingi  $xy$ -pinnale paralleelse tasapinnaga  $z=z_1$  ellipsid

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1 = 0 \text{ ehk } \frac{x^2}{a^2(z_1^2 - c^2):c^2} + \frac{y^2}{b^2(z_1^2 - c^2):c^2} - 1 = 0,$$

mis on reaalsed ainult siis, kui on  $|z_1| > c$ , nii et  $xy$ -pind ise ja temaga paralleelsed tasapinnad, mis on temast eemal vähem kui  $c$  mõõtu, ei lõika seda kõverat pinda: see kõver pind on tõesti kaheosaline, teine osa  $xy$ -pinnast teisel pool  $c$  mõõdu kaugusel. Joonis 31 (lhk. 147) kujutab kahekattesel hüperboloidil

$$-\frac{x^2}{4} - y^2 + \frac{z^2}{9} - 1 = 0$$

(reaalse poolteljega 3 ja imaginaarsete pooltelgedega 2 ja 1 [16 14]) tükikesi tasapindade  $z=4,5$  ja  $z=-4,5$  vahel ja ka puutetasapinda  $z=3$  punktis  $(0; 0; 3)$  (mis on tõesti selle punkti polaartasapind

$$\text{polaarses süsteemis } -\frac{x'x}{4} - y'y + \frac{z'z}{9} - 1 = 0).$$

(3) Ühekattene hüperboloid. Kui keskpunktiga polaarse süsteemi korralduspinna kanoonilises võrrandis on kolmest

esimesest liikmest ainult üks negatiivne (harilikult antakse telgedele nimed nii, et see negatiivne liige saab nimelt kolmandaks):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

106

siis nimetatakse seda pinda ühekatteseks hüperboloidiks, sest tema lõikejooned mingi  $yz$ -pinnale paralleelse tasapinnaga  $x = x_1$  ja mingi  $zx$ -pinnale paralleelse tasapinnaga  $y = y_1$  on hüperboolid

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right) = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - \left(1 - \frac{y_1^2}{b^2}\right) = 0$$

(mis kõduvad siis sirgete joonte paarideks  $\frac{y}{b} \pm \frac{z}{c} = 0$  või

$\frac{x}{a} \pm \frac{z}{c} = 0$ , kui on  $|x_1| = a$  või  $|y_1| = b$ ) ja ainult lõiked mingi  $xy$ -pinnale paralleelse tasapinnaga  $z = z_1$  on (alati reaalsed) ellipsid  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \left(\frac{z_1^2}{c^2} + 1\right) = 0$ . Joonis 32 (lhk. 147) kujutab ühekattesel hüperboloidil

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} - 1 = 0$$

tükki tasapindade  $z = 3$  ja  $z = -3$  vahel ja ka pinda  $x = +2$ , mis lõikab seda hüperboloidi kahte sirget joont mööda ja mida tuleb lugeda puutetasapinnaks punktis  $(2; 0; 0)$  sellepärast, et ta on tõesti selle punkti polaartasapind polaarses süsteemis

$$\frac{xx'}{4} + yy' - \frac{zz'}{9} - 1 = 0.$$

(4) Imaginaarne ellipsoid. Kui keskpunktiga polaarsete süsteemi korralduspinna kanoonilises võrrandis on kõik liikmed negatiivsed ehk pärast märgi muutmist kõik positiivsed

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

107

siis ei rahulda seda võrrandit ühegi punkti koordinaadid, nii et polaarsel süsteemil

$$\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} + \frac{z'z}{c^2} + 1 = 0$$

ei ole korralduspinda. Öeldakse et sellel (reaalsel) polaarsel süsteemil on korralduspinnaks imaginaarne ellipsoid, sest andes võrrandis V 107 ühele tundmatule mingi väärtuse näiteks  $x = x_1$ , saame pinna V 107 ja tasapinna  $x = x_1$  lõikejooneks imaginaarse

$$\text{ellipsi } \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \left(1 + \frac{x_1^2}{a^2}\right) = 0.$$

(5) Elliptiline paraboloid. Kui keskpunktita polaarse süsteemi korralduspinna lihtsamal võrrandis

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{30}z = 0$$

jagame kõik liikmed arvuga  $-2a_{30}$  ja kirjutame

$$\left| \frac{-2a_{30}}{a_{11}} \right| = a^2 \quad \text{ja} \quad \left| \frac{-2a_{30}}{a_{22}} \right| = b^2 \quad 108$$

siis saame kanoonilised võrrandid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0.$$

Kui siin on kaks esimest liiget mõlemad positiivsed (kui nad oleks mõlemad negatiivsed, siis saaksime nad teha positiivseteks muutes  $z$ -telje poolsuse, s. o. lugedes tema endise negatiivse poole nüüd positiivseks)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0 \quad 109$$

siis nimetatakse seda pinda elliptiliseks paraboloidiks, sest tema lõikejooned tasapindadega  $z = z_1$  on ellipsid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z_1 = 0 \quad \text{ehk} \quad \frac{x^2}{a^2 z_1} + \frac{y^2}{b^2 z_1} - 1 = 0$$

(mis on reaalsed ainult siis, kui on  $z_1$  positiivne), aga lõikejooned

tasapindadega  $x=x_1$  või  $y=y_1$  on parabolid

$$\frac{y^2}{b^2} - z + \frac{x_1^2}{a^2} = 0 \quad \text{või} \quad \frac{x^2}{a^2} - z + \frac{y_1^2}{b^2} = 0,$$

millel on teljed paralleelsed  $z$ -teljega. Joonis 33 (lhk. 148) kujutab elliptilise paraboloidi

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - z = 0$$

tükikest tipu ja pinna  $z=1$  vahel. ( $xy$ -pind  $z=0$  on puute-tasapind tipus, sest tipu  $(0; 0; 0)$  polaartasapind polaarses süsteemis  $\frac{xx'}{4} + yy' - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z' = 0$  on  $\frac{1}{2}z=0$ .)

(6) Hüperboolne paraboloid. Kui keskpunktita polaarse süsteemi korralduspinna kanoonilises võrrandis on kahest esimesest liikmest ainult üks negatiivne (joonistamiseks on mõnusam anda telgedele nimed nii, et see negatiivne liige saaks nimelt esimeseks):

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0}$$

110

siis nimetatakse seda pinda hüperboolseks paraboloidiks, sest tema lõikejooned tasapindadega  $z=z_1$ , on hüperboolid (mis kõduvad siis sirgete joonte paariks  $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ , kui on  $z_1=0$ ), aga lõikejooned tasapindadega  $x=x_1$  ja  $y=y_1$  on parabolid, millel on teljed paralleelsed  $z$ -teljega. Joonis 34 (lhk. 149) kujutab hüperboolse paraboloidi

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z = 0$$

tükikest tasapindade  $y=\pm 3$  ja  $z=-1$  vahel ja tema lõikejooni tasapindadega  $z=-0,5$  ja  $y=\pm 2$ . ( $xy$  pind  $z=0$  on puute-tasapind tipus, sest tipu  $(0; 0; 0)$  polaartasapind polaarses süsteemis

$$-\frac{xx'}{4} + \frac{yy'}{9} - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z' = 0$$

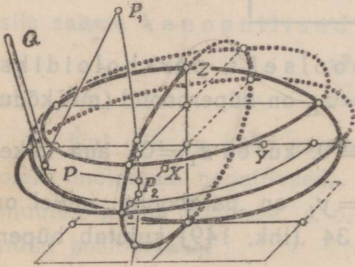
on  $-\frac{1}{2}z=0$ .)

Märkus. Kui ellipsoidil on kaks pooltelge ühesuurused, s. o.  $a = b$  või  $b = c$ , siis nimetatakse teda pöördellipsoidiks. Tal on siis ühele koordinaatide pinnale paralleelsed lõiked ühesuuruste pooltelgedega ellipsid, s. o. ringid (paralleelringid), mille keskpunktid on ellipsoidi ühe sümmeetria telje (pöördtelje) peal. Pöördellipsoidi lõiked pöördteljest läbimisevate tasapindadega (meridiaanipindadega) on kõik ühtivad (meridiaanid). Niisama nimetatakse hüperboloide V 105 ja V 106 siis pöördhüperboloidideks ja elliptilist paraboloidi V 109 siis pöördparaboloidiks, kui neil on  $a = b$ .

Harjutus 138. Tõendada, 1) et polaarse süsteemi korralduspind on pöördpind siis, kui sekulaarvõrrandil on paar ühevõrdseid juuri, ja 2) et pöördpinnal on peatasapinnaks iga tasapind, mis läheb läbi pöördtelje. (1) H 135, H 136, V 102 ja V 108. 2) Lihtsamate võrrandite V 93 või V 94 korral on diameetripind läbi  $z$ -telje valemi 95 järgi (kui  $z$ -teljega paralleelne tasapind)  $a_{11}ax + a_{22}by = 0$  ehk pöördpinna korral (kui  $z$ -telg on pöördteljeks ja sellepärast  $a_{11} = a_{22}$ )  $ax + by = 0$ , nii et tema kaaskiirte sihikoosinused  $\alpha$ ,  $\beta$  ja 0 on tõesti ka tema ristjoone omadeks [H 129.]

7) Asümptoodiline koonus. Kui polaarses süsteemis diameeter

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma} = t$$



Joonis 30.

on oma kaasdiameetripinna V 95 peal, siis nimetame seda diameetrit selle polaarse süsteemi ja siis ka tema korralduspinna asümptoodiks. Sellest järgneb, et asümptoodi sihikoosinused peavad rahuldama selle diameetri ja tema kaasdiameetri paralleelsuse tunnust [V 87]

$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma)\alpha + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma)\beta + (a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma)\gamma = 0$ , sest pinna pealolemine on erijuhus paralleelsusest selle pinnaga. Asümptoodi sihikoosinused peavad muidugi rahuldama veel üldist sihikoosinuste võrrandit  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ . Need kaks võrrandit on teise astme võrrandid, sellepärast võivad neil ka (reaalsed) lahendused puududa. Need kaks võrrandit on veel kolme tundmatuga, nii et võib olla lõpmata palju arvude kolmikuid, mis neid rahuldavad, ja siis ka sellel polaarse süsteemi korraldus-

pinnal, millel asümptoodid on, neid lõpmata palju. Kõigil neil asümptootidel peavad iga punkti koordinaadid  $x$ ,  $y$  ja  $z$  rahuldama seda võrrandit, mis saab diameetri ja tema kaasdiameetripinna paralleelsuse tunnusest siis, kui sinna pannakse  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  asemele nendega proportsionaalsed väärtused (diameetri võrranditest)

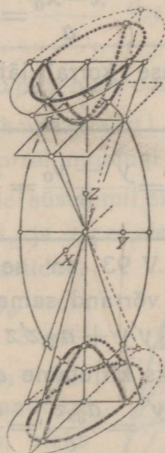
$$x - x_0 = at, \quad y - y_0 = \beta t \quad \text{ja} \quad z - z_0 = \gamma t,$$

nii et saab (pärast endiste sulgude avamist)

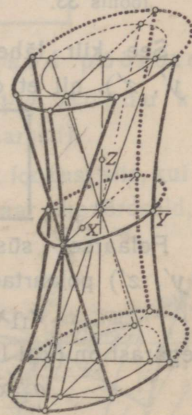
$$a_{11}(x-x_0)^2 + 2a_{12}(x-x_0)(y-y_0) + a_{22}(y-y_0)^2 + \\ + 2a_{13}(x-x_0)(z-z_0) + 2a_{23}(y-y_0)(z-z_0) + a_{33}(z-z_0)^2 = 0$$

111

Selle võrrandiga esitatud punktide kogul on lõikejooned koordinaatide pindadele paralleelsete tasapindadega ka teise järgu jooned, nagu polaarsete süsteemide korralduspindadel. Teda nimetakse polaarse süsteemi asümptoodiliseks koonuseks, sest koonuseks nimetakse pinda, mille sünnitavad ühest punktist (selle koonuse tipust) ühe joone (tema juhtjoone) punktidesse minevad sirged jooned (selle koonuse sünnitajad [J 31, J 32]).



Joonis 31.



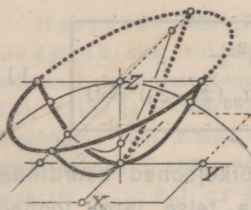
Joonis 32.

Näiteks saavad ellipsoidide ja hüperboloidide kanoonilistest võrranditest nende asümptoodiliste koonuste võrrandid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{ja} \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

(sest keskpunkti koordinaadid  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  on siin nullid). Esimest võrrandit rahuldavad ainult keskpunkti (ehk tipu) koordinaadid. Öeldakse ka, et see on imaginaarse koonuse võrrand.

8) Fookused ja fokaaljooned. Kui polaarses süsteemis on mükhisid (ühest punkti — mühi keskpunkti — läbiminevate kiirte ja lehtede kogusid) kus iga leht on risti oma kaaskiirega (selle lehe poolusest läbimineva kiirega), siis nimetatakse nende mükhide keskpunktsid selle polaarse süsteemi ja siis ka tema korralduspinna tulipunktideks ehk fookusteks. Meie käsitame siin fookusi ainult polaarsel süsteemidel V 93 ja V 94 [5] M 3].



Joonis 33.

Olgu otsitav fookus  $F = (x_0, y_0, z_0)$ . Siis on temast läbimineva tasapinna võrrand

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Selle tasapinna ristkiir läbi fookuse on [V 87]

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

See kiir läheb fookuse korral läbi selle tasapinna pooluse  $(x', y', z')$ , nii et on

$$\frac{x' - x_0}{a} = \frac{y' - y_0}{b} = \frac{z' - z_0}{c} \quad 112$$

Polaarsel süsteemil V 93 on selle tasapinna kui punkti  $(x', y', z')$  polaartasapinna võrrand samane võrrandiga

$$a_{11}x'x + a_{22}y'y + a_{33}z'z + a_{00} = 0.$$

Sellepärast on (kui lüheduseks kirjutame  $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ )

$$\frac{a_{11}x'}{a} = \frac{a_{22}y'}{b} = \frac{a_{33}z'}{c} = \frac{a_{00}}{d} \text{ ja siis}$$

$$\frac{x'}{a} = \frac{a_{00}}{a_{11}d}, \quad \frac{y'}{b} = \frac{a_{00}}{a_{22}d} \text{ ja } \frac{z'}{c} = \frac{a_{00}}{a_{33}d}.$$

Pannes siit  $x':a$  jne. väärtused valemisse 112, saamegi fookuse koordinaatide  $x_0, y_0$  ja  $z_0$  jaoks võrrandid

$$\frac{a_{00}}{a_{11}d} - \frac{x_0}{a} = \frac{a_{00}}{a_{22}d} - \frac{y_0}{b} = \frac{a_{00}}{a_{33}d} - \frac{z_0}{c} \quad 113$$

mis peavad rahulduma, olgu  $a, b$  ja  $c$  missugused tahes.

Kerapinnal (millel on  $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ ) taandub valem 113 (sellepärast, et on  $\frac{x'}{a} = \frac{y'}{b} = \frac{z'}{c}$ ) võrranditeks  $\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c}$ , mida  $a$ ,  $b$  ja  $c$  igasuguste väärtuste korral rahuldavad ainult  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ , nii et kerapinna fookuseks on tema keskpunkt. Pöördpindadel (millel on  $a_{11} = a_{22}$ ) taandub võrranditest V 113 ainult esimene niisuguseks  $\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b}$ , kust järgneb  $x_0 = y_0 = 0$  ja siis  $d = -cz_0$  ja sellega teiseks võrrandiks

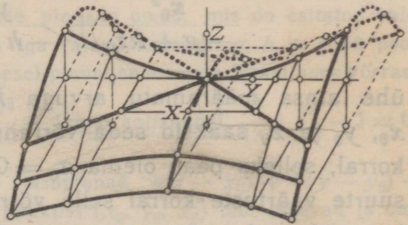
$$\frac{a_{00}}{-a_{11}cz_0} = \frac{a_{00}}{-a_{33}cz_0} - \frac{z_0}{c} \quad \text{ehk} \quad z_0^2 = \frac{a_{00}}{a_{11}} - \frac{a_{00}}{a_{33}},$$

nii et (kui läheduseks kirjutame

$$\frac{a_{00}}{a_{11}} - \frac{a_{00}}{a_{33}} = g \quad \text{ja} \quad \frac{a_{00}}{a_{22}} - \frac{a_{00}}{a_{33}} = h \quad (114)$$

keskpunktiga pöördpinnal on fookused pöördtelje peal keskpunktist kummalgi pool  $\sqrt{g}$  mõõdu kaugusel (ja siis  $g < 0$  korral muidugi imaginaarsed).

Keskpunktiga polaarsel süsteemil ei saa olla fookust siis, kui võrrandis V 93 arvudest  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  ja  $a_{33}$  ei ole ükski paar ühevõrdseid, sest kui siis fookuse koordinaatidest oleks kaks, näiteks  $x_0$  ja  $y_0$ , nullid, siis järgneks valemi 113 esimesest võrrandist kohe  $a_{11} = a_{22}$ , ja kui fookuse koordinaatidest kaks, näiteks  $x_0$  ja  $y_0$ , ei oleks nullid, siis võiksime ju võtta  $a$  ja  $b$  väärtusteks  $a = x_0$  ja  $b = y_0$  ja jälle järgneks sellest samast võrrandist  $a_{11} = a_{22}$ . Kuid igal



Joonis 34.

polaarsel süsteemil on punkte, kust läbiminevatel tasapindadel kuigi mitte kõik, siis ometi lõpmata palju, on risti oma sealt samast läbiminevate kaaskiirtega. Nende punktide koordinaadid saame võrranditest V 113 siis, kui seal arvudest  $a$ ,  $b$  ja  $c$  avaldame kaks kolmanda abil ja võtame need  $x_0$ ,  $y_0$  ja  $z_0$  väärtused, mis rahul-

davad võrrandid V 113, olgu arvudest  $a$ ,  $b$  ja  $c$  ühel väärtus missugune tahes.

Võrranditest V 113 saame võrrandi, kus kolme määratu arvu  $a$ ,  $b$  ja  $c$  asemel esineb ainult üks, vahest küll kõige lühemalt sel teel, et nende võrrandite kõik liikmed korrutame arvuga  $d$ , nii et saavad lineaarsed võrrandid nende jagatiste  $d:a$ ,  $d:b$  ja  $d:c$  kohta, mida lüheduseks kirjutame ka üksikute tähtedega  $d:a = -i$ ,  $d:b = -j$  ja  $d:c = -k$ . Nimelt saame siis valemi 113 esimese ja kolmanda osa ühevõrdusest

$$\frac{a_{00}}{a_{11}} + ix_0 = \frac{a_{00}}{a_{33}} + kz_0 \quad \text{ehk [V 114]} \quad i = \frac{-g + kz_0}{x_0}$$

ja teise ja kolmanda osa ühevõrdusest

$$\frac{a_{00}}{a_{22}} + jy_0 = \frac{a_{00}}{a_{33}} + kz_0 \quad \text{ehk [V 114]} \quad j = \frac{-h + kz_0}{y_0}$$

ja pannes need  $i$  ja  $j$  väärtused võrrandisse

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0 \quad \text{ehk (kui jagame arvuga } d)$$

$$\frac{x_0}{i} + \frac{y_0}{j} + \frac{z_0}{k} - 1 = 0,$$

saamegi võrrandi

$$\frac{x_0^2}{-g + kz_0} + \frac{y_0^2}{-h + kz_0} + \frac{z_0}{k} - 1 = 0$$

ühe ainsa määratu arvuga  $k$ . Et mingi punkti koordinaadid  $x_0$ ,  $y_0$  ja  $z_0$  saaksid seda võrrandit rahuldada igasuguse  $k$ -väärtuse korral, selleks peab olema  $z_0 = 0$ , sest muidu saaks arvu  $k$  küllalt suurte väärtuste korral selle võrrandi kolme esimese liikme summa kui väike tahes, kuna ta peab olema 1.

Selsamal viisil saame võrrandid

$$\frac{x_0}{i} + \frac{y_0^2}{g - h + ix_0} + \frac{z_0^2}{g + ix_0} - 1 = 0 \quad \text{ja}$$

$$\frac{x_0^2}{h - g + jy_0} + \frac{y_0}{j} + \frac{z_0^2}{h + jy_0} - 1 = 0,$$

kus esimesel peab olema  $x_0 = 0$  ja teisel  $y_0 = 0$ . Sellega näib olevat keskpunktiga polaarsel süsteemil koguni kolm punktide kogu

$$\begin{array}{l}
 1) \frac{x_0^2}{-g} + \frac{y_0^2}{-h} - 1 = 0 \text{ ja } z_0 = 0 \\
 2) \frac{y_0^2}{g-h} + \frac{z_0^2}{g} - 1 = 0 \text{ ja } x_0 = 0 \\
 3) \frac{x_0^2}{h-g} + \frac{z_0^2}{h} - 1 = 0 \text{ ja } y_0 = 0
 \end{array}$$

kus igast punktist läheb lõpmata palju niisuguseid tasapindu, mis on risti oma sealt samast läbiminevate kaaskiirtega. Võrranditest V 115 on näha, et need punktide kogud on nimelt ellipsid või hüperboolid peatasapindade (koordinaatide tasapindade) peal. Neid nimetatakse selle polaarse süsteemi ja siis ka tema korralduspinna fokaaljoonteks.

Harjutus 139. Tõendada, et keskpunktiga polaarse süsteemi kolmest fokaaljoonest on üks ellips, üks hüperbool ja üks imaginaarne ellips. [Valemis 115 tulevad läbi vaadata kõik neli võimalust: 1)  $g > 0$  ja  $h > 0$ ; 2)  $g > 0$ , aga  $h < 0$ ; 3)  $g < 0$ , aga  $h > 0$ , ja 4)  $g < 0$  ja  $h < 0$ .]

H. 140. Kirjutada nende pindade fokaaljoonte võrrandid, mis on kujutatud joonistel 30, 31 ja 32, ja ka nende pindade omad, mis on esitatud valemitega 103, 105 ja 106 (s. o. avaldada iga valemi kohaselt  $g$ ,  $h$  ja  $g-h$  pooltelgede ruutude  $a^2$ ,  $b^2$  ja  $c^2$  abil). [Esimesel pinnal on esimese fokaaljoone võrrand  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0$ , teisel pinnal  $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{10} + 1 = 0$ , kolmandal  $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{10} - 1 = 0$ ]

H. 141. Tõendada, et need tasapinnad  $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$ , mis fokaaljoone ühest punktist  $(x_0, y_0, z_0)$  läbi lähevad ja oma sealt samast läbiminevate kaaskiirtega risti on, lähevad kõik läbi fokaaljoone puutuja (on kõik ühest lehtede kimburst, mille teljeks on see puutuja). [Jagades selle tasapinna võrrandi kõik liikmed arvuga  $-d$  ja pannes siis näiteks esimese fokaaljoone korral (kus on  $z_0 = 0$ )  $-\frac{a}{d}$  ehk  $\frac{1}{i}$  ja  $-\frac{b}{d}$  ehk  $\frac{1}{j}$  asemele nende väärtused arvu  $-\frac{c}{d}$  ehk  $\frac{1}{k}$  abil [lhk. 150], saame võrrandi  $\frac{x_0(x-x_0)}{-g} + \frac{y_0(y-y_0)}{-h} + kz = 0$ , mis selle fokaaljoone antud punktis  $(x_0, y_0, 0)$

esitab arvu  $k$  iga ise väärtuse korral ise tasapinna, millel aga kõigil on pinnaga  $z = 0$  ühine joon

$$\frac{x_0(x-x_0)}{-g} + \frac{y_0(y-y_0)}{-h} = 0 \text{ ehk } \frac{x_0x}{-g} + \frac{y_0y}{-h} - \frac{x_0^2}{-g} - \frac{y_0^2}{-h} = 0,$$

mis on tõesti selle fokaaljoone puutuja selles punktis, sest selle võrrandi pahema poole kahe viimase liikme summa on  $-1$  [V 115 1].]

H. 142. Tõendada, et ühe fokaaljoone fookused on (ühe) teise fokaaljoone peal ja nimelt selle tippudeks. [Kui näiteks esimesel fokaaljoonel (valemis 115) on fookused  $x$ -telje peal, siis on nad  $(\sqrt{h-g}, 0; 0)$  ja  $(-\sqrt{h-g}, 0; 0)$  Nende punktide koordinaadid rahuldavad tõesti kolmanda fokaaljoone võrrandit ja on nimelt selle tipud  $x$ -telje peal.]

H. 143. Tõendada, et ühe fokaaljoone punktidel  $P$  on kauguste vahe teise fokaaljoone mingist kahest antud punktist  $P_1$  ja  $P_2$  kõigil seesama, s. o.  $(\overline{P_2P} - \overline{P_1P})$  on see sama, olgu  $P$  kus tahes esimese fokaaljoone peal. [Olgu näiteks  $P = (x, y, 0)$  mingi punkt esimese fokaaljoone peal (J 30, V 115) ja  $P_1 = (x_1, 0, z_1)$  ja  $P_2 = (x_2, 0, z_2)$  mingi kaks antud punkti teise fokaaljoone peal. Siis on  $\overline{P_1P^2} = (x-x_1)^2 + y^2 + z_1^2$ , mis fokaaljoonte võrrandite iseärase koosseisu pärast saab täisruuduks, kui paneme  $y^2$  asemele tema väärtuse  $x$  abil võrrandist V 115 1), ja niisama  $z_1^2$  asemele võrrandist V 115 3), s. o.  $y^2 = -h - \frac{h}{g}x^2$  ja  $z_1^2 = h + \frac{h}{g-h}x_1^2$ . Nimelt koonduvad siis  $-h$  ja  $h$  ja kui veel sulud avame ja liidame  $-\frac{h}{g}x^2 + x^2 = \frac{g-h}{g}x^2 = \left(\sqrt{\frac{g-h}{g}}x\right)^2$  ja  $\frac{h}{g-h}x_1^2 + x_1^2 = \frac{g}{g-h}x_1^2 = \left(\sqrt{\frac{g}{g-h}}x_1\right)^2$ , siis saame tõesti  $\overline{P_1P^2} = \left(\sqrt{\frac{g-h}{g}}x - \sqrt{\frac{g}{g-h}}x_1\right)^2$ , nii et on  $\overline{P_1P} = \sqrt{\frac{g-h}{g}}x - \sqrt{\frac{g}{g-h}}x_1$  ja siis ka  $\overline{P_2P} = \sqrt{\frac{g-h}{g}}x - \sqrt{\frac{g}{g-h}}x_2$ . Sellega on  $\overline{P_2P} - \overline{P_1P} = \sqrt{\frac{g}{g-h}}(x_1 - x_2)$ , mis tõesti oleneb ainult punktide  $P_1$  ja  $P_2$ , mitte punktist  $P$ .]

Märkus 1. Keskpunktita polaarsel süsteemil  $a_{11}x'x + a_{22}y'y + a_{30}z + a_{30}z' = 0$  järgneb proportsioonidest

$$\frac{a_{11}x'}{a} = \frac{a_{22}y'}{b} = \frac{a_{30}}{c} = \frac{a_{30}z'}{d}, \text{ et on } \frac{x'}{a} = \frac{a_{30}}{a_{11}c}, \frac{y'}{b} = \frac{a_{30}}{a_{22}c} \text{ ja } \frac{z'}{c} = \frac{d}{c^2},$$

ja siis järgnevad valemist 112 fookuse koordinaatide võrrandid

$$\frac{a_{30}}{a_{11}c} - \frac{x_0}{a} = \frac{a_{30}}{a_{22}c} - \frac{y_0}{b} = \frac{d}{c^2} - \frac{z_0}{c}$$

Need rahuldavad (kui  $a$ ,  $b$  ja  $c$  on missugused tahes) ainult  $a_{11} = a_{22}$  (s. o. pöörparaboloidi) korral väärtustega  $x_0 = 0 = y_0$  ja siis  $z_0 = -\frac{a_{30}}{2a_{22}}$  (sest on ju  $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ ), nii et pöörparaboloidil on ainus fookus pöördtelje pealtipust  $-\frac{a_{30}}{2a_{22}}$  mõõdu kaugusel. Muil paraboloididel on ainult fokaaljooned, mille võrrandid saame valemist 116 korrutades seal kõik liikmed arvuga  $c$ , kirjutades lüheduseks  $-\frac{c}{a} = i'$ ,  $-\frac{c}{b} = j'$  ja

$$\frac{a_{30}}{a_{11}} - \frac{a_{30}}{a_{22}} = g' \quad 117$$

leides siis valemi 116 esimesest võrrandist  $\left( \frac{a_{30}}{a_{11}} + i'x_0 = \frac{a_{30}}{a_{22}} + j'y_0 \right)$

$$i' = \frac{-g' + j'y_0}{x_0} \text{ või } j' = \frac{g' + i'x_0}{y_0}$$

ja pannes  $i'$  väärtuse valemi 116 teise ja kolmanda osa ühevõrdsusse, nii et saab

$$\frac{a_{30}}{a_{22}} + j'y_0 = \frac{x_0^2}{-g' + j'y_0} + \frac{y_0}{j'} - 2z_0.$$

või jälle pannes  $j'$  väärtuse selle valemi esimese ja kolmanda osa ühevõrdsusse, nii et saab

$$\frac{a_{30}}{a_{11}} + i'x_0 = \frac{x_0}{i'} + \frac{y_0^2}{g' + i'x_0} - 2z_0.$$

Sest siit järgnevadki keskpunktita polaarse süsteemi V 94 fokaaljoonte võrrandid

$$\begin{array}{l} 1) \frac{x_0^2}{-g'} - 2z_0 - \frac{a_{30}}{a_{22}} = 0 \text{ ja } y_0 = 0 \\ 2) \frac{y_0^2}{g'} - 2z_0 - \frac{a_{30}}{a_{11}} = 0 \text{ ja } x_0 = 0 \end{array} \quad 118$$

Harjutus 144. Kirjutada nende pindade fokaaljoonte võrrandid, mis on kujutatud joonistel 33 ja 34 ja ka nende pindade omad, mis on esitatud valemitega 109 ja 110 [H 140].

H. 145. Tõendada harjutuste 141–143 laused keskpunktita polaarse süsteemi korral. [Kui siin on  $P = (x, 0, z)$  mingi punkt esimese fokaaljoone peal (valemis 118) ja  $P_1 = (0, y_1, z_1)$  ja  $P_2 = (0, y_2, z_2)$  mingi kaks antud punkti teise fokaaljoone peal, siis on  $\overline{P_1P_2} = x^2 + y_1^2 + (z - z_1)^2 = (z - z_1 - g')^2$ , s. o.  $\overline{P_1P} = z - z_1 - g'$  ja siis niisama ka  $\overline{P_2P} = z - z_2 - g'$ , nii et  $\overline{P_2P} - \overline{P_1P} = z_1 - z_2$  tõesti ei olene punktist  $P$ .]

Märkus 2. Harjutustes 143 ja 145 tõendatud lause põhjal on võimalik konstruuda iga kõdumata teise järgu joont niidi abil. Võib ju iga kõdumata teise järgu joont lugeda ühe ruumi polaarse süsteemi fokaaljooneks ja tema (kanoonilise) võrrandi järgi kohe kirjutada selle polaarse süsteemi teise fokaaljoone võrrandi [V 117, V 118, V 115]. Nimetame seda teist joont siin abijooneks. Sellest abijoonest võtame ainult kaks punkti  $P_1$  ja  $P_2$ , kinnitame sinna küllalt pika niidi otsad, paneme pliatsi tipu konstruitava joone ühe punkti  $P$  peale ja seame niidi nii, et teda parajalt kohalt  $Q$  pingule tõmmates tõmbame niidi ühe haruga  $QPP_1$  pliatsi tippu ühest küljest ja teise haruga  $QPP_2$  teisest küljest ([ 30]). Kui siis pliatsi otsa niidi harude vahel edasi nihutame seda tasapinda mööda, kus see konstruitav joon pidi olema (ikka nii, et pingulhoidmise koht  $Q$  jääb niidi peal selleks samaks ja niidi osad  $QP$ ,  $PP_1$  ja  $PP_2$  ikka sirgeteks), siis joonistabki pliats soovitud ellipsi, hüperbooli või parabooli (tegelikult küll väga puuduliku täpsusega).

Märkus 3. Harjutustes 143 ja 145 kaugusi  $P_1P$  ja  $P_2P$  arvutades võime need ka negatiivsed saada. Kui neist on üks ainus negatiivne, siis on nende vahe absoluutne väärtus nende oma absoluutsete väärtuste summa ja niidi abil konstruimine saab lihtsam. (Nimelt missugune?) Kuid see võib juhtuda ainult ellipsit konstruudes, sest hüperboolil ja paraboolil on väga kaugeid punktisid, mille kauguste summa abijoonest kahest antud punktist ei saa olla ühevõrdne ligemate punktide omaga. Ka ellipsil (millel on abijooneks hüperbool) saab kaugustest  $P_1P$  ja  $P_2P$  ainult siis üks negatiivne, kui punktid  $P_1$  ja  $P_2$  on teine abihüperbooli teise osa peal, s. o. kui harjutuses 143 on arvudest  $x_1$  ja  $x_2$  ainult üks negatiivne, nagu see silma paistab selles ellipsi

punktis, kus on  $x=0$  ja siis  $P_1P = -\sqrt{\frac{g}{g-h}x_1}$  ja  $P_2P = -\sqrt{\frac{g}{g-h}x_2}$ .

**26. Teise astme võrrand kolme tundmatuga. Teise järgu pind.** Võrrand V 101 on teise astme võrrand kolme tundmatuga [17]. Tema kümnest kordajast on muidugi ainult üheksa olulist. Kui need kordajad on niisugused, et neljal tasapinnal V 89 ei ole ühist (päris- ega eba-)punkti (mille koordinaadid teeksid valemis 91 kõik jagatavad nulliks), siis esitab võrrand V 101 korralduspinna polaarsel süsteemil V 88. Kui tasapindadel V 89 on ühine punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  siis saab valemist 89  $a_{10} = -a_{11}x_0 - a_{12}y_0 - a_{13}z_0$ ,  $a_{20} = -a_{12}x_0 - a_{22}y_0 - a_{23}z_0$ ,  $a_{30} = -a_{13}x_0 - a_{23}y_0 - a_{33}z_0$  ja siis  $a_{00} = (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0)x_0 + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0)y_0 + (a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0)z_0$  ja pannes need väärtused võrrandisse V 101 arvude  $a_{10}$ ,  $a_{20}$ ,  $a_{30}$  ja  $a_{00}$  asemele, saame sellele võrrandile lihtsama kuju V 111. See võrrand on homogeenne vahede  $x-x_0$ ,  $y-y_0$  ja  $z-z_0$  kohta, nii et kui teda

rahuldavad peale punkti  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  veel mingi muu punkti  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  koordinaadid, siis ka kiire  $P_0P_1 \equiv \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$  iga punkti omad. Sellega esitab niisugune

kolme tundmatuga teise astme võrrand koonuse, millele punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  on tipuks ja mis on nimelt teise järgu koonus, s. o. millel lõikejoon mingi mitte tipust läbimineva tasapinnaga (tasane juhtjoon) on teise järgu joon, näiteks (kui ei ole  $z_0=0$ ) lõikejoon pinnaga  $z=0$  nimelt  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$  [V 101].

Kui tasapindadel V 89 on ühiseks punktiks ebapunkt, siis esitab võrrand V 101 koonuse, millel tipp on ebapunkt ja siis tema sünnitajad [lhk. 147] omavahel paralleelsed ja nimelt paralleelsed kõige nelja tasapinnaga V 89, nii et nende sünnitajate sihikoosinused  $\alpha_0, \beta_0$  ja  $\gamma_0$  rahuldavad paralleelsuse tunnuseid [V 87]:

$$\begin{array}{l} a_{11}\alpha_0 + a_{12}\beta_0 + a_{13}\gamma_0 = 0, \quad a_{12}\alpha_0 + a_{22}\beta_0 + a_{23}\gamma_0 = 0, \\ a_{13}\alpha_0 + a_{23}\beta_0 + a_{33}\gamma_0 = 0 \quad \text{ja} \quad a_{10}\alpha_0 + a_{20}\beta_0 + a_{30}\gamma_0 = 0 \end{array} \quad 119$$

Siis ei saa küll võrrandit V 101 teisendada võrrandiks V 111, kuid siis on juba ilma teisendamata selge, et igal sihikoosinustega  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  sirgel joonel rahuldavad siis iga punkti koordinaadid  $x_0 + \alpha_0 t, y_0 + \beta_0 t$  ja  $z_0 + \gamma_0 t$  võrrandit V 101, kui tal ühe punkti omad  $x_0, y_0$  ja  $z_0$  seda teevad. Sest võrrand V 101 saab võrrandist V 88, kui seal saab  $x' = x$  jne., ja kui seal paneme  $x'$  ja  $x$  asemele  $x_0 + \alpha_0 t, y'$  ja  $y$  asemele  $y_0 + \beta_0 t$  jne., siis kaovad (paralleelsuse tunnuste põhjal) sulgudest ja neljandast reast kohe liikmed, kus esineb  $t$ , ja pärast sulgude avamist ka kõik järelejäänud niisugused liikmed. Niisuguse võrrandiga esitatud punktide kogul on lõikejooned koordinaatide tasapindadega (kus on  $x=0$ , või  $y=0$ , või  $z=0$ ) muidugi teise järgu jooned, nii et ta on teise järgu silinder, sest pinda, mis on koos omavahel paralleelsetest ja ühe joone (juhtjoone) punktide läbi minevatest sirgetest joontest (tema sünnitajatest), nimetatakse silindriks ja nimelt tema juhtjoone järgi veel elliptiliseks, paraboolseks või hüperboolseks.

Kui teise järgu koonusel või silindril on juhtjooneks sirgete joonte paar (kõdunud teise järgu joon), siis on see kõdunud koonus või silinder tasapindade paar. Imaginaarse juhtjoone korral kõneldakse ka imaginaarsest koonusest või silindrist.

Sellega esitab kolme tundmatuga teise astme võrrand siis, kui need tundmatud on ruumi punktide Cartesiuse koordinaadid, kas (reaalse) ellipsoidi, või imaginaarse ellipsoidi, või hüperboloidi, või paraboloidi, või (reaalse) koonuse, või imaginaarse koonuse, või (reaalse) silindri, või imaginaarse silindri, või paari tasapindu, või viimaks veel paari imaginaarseid tasapindu. Öeldakse, et see teise astme võrrand esitab ruumis teise järgu pinna (on teise järgu pinna võrrand). Sellega on kõik nimetatud pinnad nimelt teise järgu pinnad. Nende hulgas nimetatakse koonuseid, silindriid ja tasapindade paarisid veel kõdunud teise järgu pindadeks.

Kui sümmeetrilisest bilineaarsest võrrandist V 88 saab teise astme võrrand V 101 nimelt kõdunud pinna oma, siis nimetatakse selle sümmeetrilise bilineaarse võrrandiga määratud (punktide ja tasapindade) vastavust ka selle pinna (kõdunud) polaarseks süsteemiks. See vastavus ei ole juba üksühene, sest sellele punktile, mille koordinaadid teevad valemis 91 kõik jagatavad nulliks, vastab siis iga tasapind (kui ühevõrdsetel jagatistel on jagatavad nullid, siis võivad jagajad olla missugused tahes).

Harjutus 146. Leida polaarsestel süsteemidel V 93 ja V 94 juhtsilindrid, s. o. pooluste kogud nendel tasapindadel, mis lähevad läbi fokaaljoone puutujate (fokaaljoone puutujatele kaaskiirte kogud). [Näiteks on valemis 115 esimese fokaaljoone puutujast  $\left(\frac{x_0x}{-g} + \frac{y_0y}{-h} - 1 = 0; z = 0\right)$  läbiminevate tasapindade ühine võrrand  $\frac{x_0x}{-g} + \frac{y_0y}{-h} + kz - 1 = 0$  [H 141], nii et nende tasapindade poolustel peavad koordinaadid  $x', y'$  ja  $z'$  rahuldama võrrandid [V 91]  $a_{11}x' = \frac{x_0}{-g} = -a_{22}y' = \frac{y_0}{-h} = a_{33}z' : k = a_{00} : -1$  ehk  $\frac{ga_{11}x'}{a_{00}} = x_0, \frac{ha_{22}y'}{a_{00}} = y_0$  ja  $\frac{a_{33}z'}{a_{00}} = -k$ . Siit paistab silma, et otsitav punktide kogu on tõesti silinder, sest fokaaljoone iga punkti  $(x_0, y_0)$  jaoks saavad  $x'$  ja  $y'$  kindlad väärtused, kuna  $z'$  võib  $k$  järgi olla missugune tahes. Selle silindri sünnitajad on paralleelsed  $z$ -teljega. Tema juhtjoone  $xy$ -pinnal ( $z = 0$ ) saame, kui paneme fokaaljoone

võrrandisse  $x_0$  ja  $y_0$  väärtused  $ga_{11}x':a_{00}$  ja  $ha_{22}y':a_{00}$  (ja kaotame murrud), nimelt  $ga_{11}^2x'^2 + ha_{22}^2y'^2 + a_{00}^2 = 0$ . See ongi otsitava silindri võrrand, sest teda rahuldavad selle silindri iga punkti koordinaadid ja ainult need.]

H. 147. Sirge joone ja teise järgu pinna ühiste punktide koordinaadid peavad rahuldama sirge joone kahte (esimese astme) võrrandit ja ka teise järgu pinna (teise astme) võrrandit. Leides esimestest kaks koordinaati kolmanda abil ja pannes saadud väärtused viimasesse võrrandisse, saame kolmanda koordinaadi jaoks ruutvõrrandi. Kui sellel võrrandil on juured reaalsed ja isevõrdsed, siis nimetatakse seda sirget joont selle teise järgu pinna lõikajaks, kui juured on ühevõrdsed (või määramatud), siis puutujaks ja kui nad on imaginaarsed, siis väliseks jooneks. Sirge joone ja teise järgu pinna ühiseid punkte nimetatakse esimesel juhul lõikepunktideks, teisel puutepunktideks ja kolmandal juhul öeldakse, et nad on imaginaarsed. Võttes teise järgu pinna peal kaks punkti  $(x_1, y_1, z_1)$  ja  $(x_2, y_2, z_2)$  s. o. nii, et on

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + 2a_{13}x_1z_1 + 2a_{23}y_1z_1 + a_{33}z_1^2 + 2a_{10}x_1 + 2a_{20}y_1 + 2a_{30}z_1 + a_{00} = 0 \text{ ja}$$

$$a_{11}x_2^2 + 2a_{12}x_2y_2 + a_{22}y_2^2 + 2a_{13}x_2z_2 + 2a_{23}y_2z_2 + a_{33}z_2^2 + 2a_{10}x_2 + 2a_{20}y_2 + 2a_{30}z_2 + a_{00} = 0,$$

saame nendest punktidest läbimineva lõikaja võrrandiks

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2},$$

millest saab puutuja võrrand punktis  $(x_1, y_1, z_1)$  siis, kui saab punkt  $(x_2, y_2, z_2)$  samaseks punktiga  $(x_1, y_1, z_1)$ . Tõendada, et (igal) puutujal punktis  $(x_1, y_1, z_1)$  kõigi punktide koordinaadid  $x, y$  ja  $z$  rahuldavad punkti  $(x_1, y_1, z_1)$  polaartasapinna võrrandit (mille pärast seda oma poolusest läbiminevat tasapinda nimetataksegi puutetasapinnaks). [Esimese ühevõrduse liigetest tulevad lahutada teise omad, saaduses lahutada ruutude vahed teguriteks ja korrutiste vahed osadeks, millel oleks teguriteks kolmanda ühevõrduse nimetajad (näiteks  $x_1y_1 - x_2y_2 = (x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2$ ). Nii saab saadus homogeenne  $x_1 - x_2, y_1 - y_2$  ja  $z_1 - z_2$  kohta, mille asemele võib siis panna nendega proportsionaalsed  $x - y_1, y - y_1$  ja  $z - z_1$ . Siis saab võrrand, mida rahuldavad punktidest  $(x_1, y_1, z_1)$  ja  $(x_2, y_2, z_2)$  läbimineva kiire kõigi punktide koordinaadid ja mis saab punkti  $(x_1, y_1, z_1)$  polaartasapinna võrrandiks V 88 siis, kui saab  $x_2 = x_1, y_2 = y_1$  ja  $z_2 = z_1$ .]

H. 148. Võttes mitu numbrilist kolme tundmatuga teise astme võrrandit, kirjutada nende võrranditega esitatud teise järgu pindade polaarsete süsteemide võrrandid (s. o. teise astme võrrandite järgi need sümmeetrilised bilineaarsed võrrandid, millest need teise astme võrrandid saavad).

H. 149. Eelmise harjutuse teise järgu pindadel võtta igaühe peal vähemalt üks punkt (näiteks punkt, kus on  $x = 0$  ja  $y = 0$ , või  $x = 0$  ja  $y = 1$ , või kaheks koordinaadiks mingid muud kergesti käsitatavad arvud) ja kirjutada selle teise järgu pinna puutetasapinna võrrand selles punktis.

Märkus 1. Tasapinnal, millel ei ole teise järgu pinnaga kõik punktid ühised, on selle teise järgu pinnaga ühine teise järgu joon, sest tasapinna võrrandist saame ühe koordinaadi jaoks lineaarse avalduse kahe teise koordinaadi abil ja pannes selle avalduse selle koordinaadi asemele teise järgu pinna võrrandisse, saamegi teise astme võrrandi kahe tundmatuga. Saadud võrrandis on tundmatud tõesti selle tasapinna punktide Cartesiuse koordinaadid (vahest küll kaldkoordinaadid), millel näiteks siis, kui nad on  $x$  ja  $y$ , on telgedeks selle tasapinna lõikejooned tasapindadega  $y=0$  ja  $x=0$  ja mõõdupunktideks nende telgede lõikepunktid tasapindadega  $x=1$  ja  $y=1$ . Lõikavad ju ühelaiuste vahedega paralleelsed tasapinnad  $x=0$ ,  $x=1$ ,  $x=2$  jne. nagu ka  $y=0$ ,  $y=1$ ,  $y=2$  jne. muid tasapindu ühelaiuste vahedega paralleelsid mööda.

Märkus 2. Teise järgu pinda on vist küll kõige kohasem uurida kiire (ütleme katsekiire)

$$\frac{x-x'}{\alpha} = \frac{y-y'}{\beta} = \frac{z-z'}{\gamma} = t \text{ ehk } x=x'+\alpha t, y=y'+\beta t \text{ ja } z=z'+\gamma t \quad 120$$

abil, mis läheb läbi määramatu punkti  $(x', y', z')$  määramatute sihikoosinustega  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$ . Seda tahavad näidata järgmised tükikesed.

(1) Lõikaja, puutuja ja väline kiir. Pannes teise järgu pinna võrrandisse V 101  $x$ ,  $y$  ja  $z$  asemele nende väärtused katsekiire võrranditest V 120 (avades siis sulud ja koondades liikmed teguriga  $t^2$ , nagu ka liikmed teguriga  $t$ ), saame teise astme võrrandi

$$a't^2 + 2b't + c' = 0 \quad 121$$

kus kordajateks on

$$\begin{aligned} a' &= (a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma)\alpha + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma)\beta + (a_{13}\alpha + a_{23}\beta + \\ &\quad + a_{33}\gamma)\gamma \\ b' &= (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{10})\alpha + (a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{20})\beta + \\ &\quad + (a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z' + a_{30})\gamma \\ c' &= a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + a_{33}z'^2 + 2a_{10}x' + \\ &\quad + 2a_{20}y' + 2a_{30}z' + a_{00} \end{aligned} \quad 122$$

ja kus arv  $t = (-b' \pm \sqrt{b'^2 - a'c'}) : a'$  on katsekiire ja pinna V 101 ühise punkti kaugus punktist  $(x', y', z')$ . Et ühe tundmatuga teise astme võrrandil (kui tal ei ole kõik kordajad nullid) on kaks lahendust ja et katsekiir V 120 võib olla mis kiir tahes, sellepärast on võrrandi V 121 järgi igal kiirel teise järgu pinna

peal (kui mitte kõik tema punktid, siis) kas kaks isesugust punkti — lõikaja kiire lõikepunktid, või üks punkt (võrrandi järgi) kahekordselt — puutuja kiire puutepunkt, või (nagu võrrandi lahenduste järgi öeldakse) kaks imaginaarset punkti — välisel kiirel. Lõikaja tunnuseks on siis võrrandis  $V 121$   $a'c' - b'^2 < 0$ , puutuja tunnuseks  $a'c' - b'^2 = 0$  ja välise kiire tunnuseks  $a'c' - b'^2 > 0$ .

(2) Diameetritasapind ja keskpunkt. Võttes punktiks  $(x', y', z')$  lõikepunktide vahelise kiiretüki — kõõlu — keskpunkti, saame võrrandis  $V 121$

$$b' = 0$$

123

sest ainult siis annab võrrand  $V 121$  lõikepunktide kauguste jaoks punktist  $(x', y', z')$  kaks absoluutselt ühesuurust ja vastupidiste märkidega väärtust. Kui võrrandis  $V 123$  [teine võrrand  $V 122$ ] anname sihikoosinustele  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  mingid kindlad väärtused (nii et seal tundmatuteks jäävad  $x'$ ,  $y'$  ja  $z'$ ), siis rahuldavad seda võrrandit kõigi sellesihiliste (sihikoosinustega  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$ ) kõõlude keskpunktide koordinaadid. See võrrand on tundmatutes  $x'$ ,  $y'$  ja  $z'$  lineaarne. Sellega on teise järgu pinnal paralleelsete kõõlude keskpunktid ühe tasapinna peal — nende kõõlude ja nende paralleelsete kiirte (selle tasapinna kaaskõõlude ja kaaskiirte) kaasdiameetritasapinna peal [V 95].

Kui on punkt, mille koordinaadid  $x' = x_0$ ,  $y' = y_0$  ja  $z' = z_0$  teevad valemi 122 teises võrrandis sihikoosinustel  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  kordajad kõik nulliks [V 92] (nii et on  $b' = 0$ , olgu  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  missugused tahes), siis on see punkt keskpunktiks igale temast läbiminevale kõõlule — keskpunktiks teise järgu pinnale.

(3) Peatasapinnad ja teljed. Tipud ja poolteljed. Otsides diameetritasapindade hulgas niisuguseid, mis oleks sümmeetria- ehk peatasapindadeks, s. o. mis oleks risti oma kaaskõõludega (poolitaks oma riskõõlud), tuleme ristseisu tunnustest  $V 96$  sekulaarvõrrandi  $V 98$  või  $V 99$  juurte  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  ja  $\lambda_3$  juurde ja sellega otsusele, et peatasapinnad, kui neid on ainult kolm (või kaks), on omavahel risti [lhk. 135], nagu ka iga kahe peatasapinna lõikejooned ehk teljed omavahel. Keskpunktiga teise järgu pinnal on tema tippude (telje ja pinna lõikepunktide) kaugused keskpunktist ehk poolteljed  $a$ ,  $b$  ja  $c$  võrrandi  $V 121$  juurte absoluutsed väärtused siis, kui seal on  $x'$ ,  $y'$  ja  $z'$  keskpunkti koordinaadid  $x_0$ ,  $y_0$  ja  $z_0$  ja  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  ühe telje sihikoosinused  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  ja  $\gamma_1$ , või  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  ja  $\gamma_2$ , või  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$  ja  $\gamma_3$ . Siis on selles võrrandis esimeseks kordajaks kas  $a' = \lambda_1$ , või  $a' = \lambda_2$ , või  $a' = \lambda_3$ , nagu see selgub, kui valemi 96 ühevõrdustes on näiteks  $a = \alpha_1$ ,  $\beta = \beta_1$  ja  $\lambda = \lambda_1$  ja nende ühevõrduste pooled korrutame esimesel arvuga  $\alpha_1$ , teisel arvuga  $\beta_1$  ja kolmandal arvuga  $\gamma_1$  ja siis liidame ja võrdleme saadust valemi 122 esimese ühevõrdusega. Teine kordaja võrrandis  $V 121$  on siis muidugi  $b' = 0$  [(2)] ja kolmas kordaja [V 122, V 92, 19 M 1, 21 M 3]

$$c' = a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{30}z_0 + a_{00} = \\ = (a_{10}A_{10} + a_{20}A_{20} + a_{30}A_{30} + a_{00}A_{00}) : A_{00} = A : A_{00}$$

124

ja sellega on pooltelgede ruudud

$$a^2 = \left| -\frac{A}{\lambda_1 A_{00}} \right|, \quad b^2 = \left| -\frac{A}{\lambda_2 A_{00}} \right| \quad \text{ja} \quad c^2 = \left| -\frac{A}{\lambda_3 A_{00}} \right|$$

125

(4) Puutesilinder. Andes puutuja tunnuses [V 121, 122]

$$a'c' - b'^2 = 0$$

126

sihikoosinustele  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  [V 122] mingid kindlad väärtused, saame võrrandi kõigi nende punktide koordinaatide  $x'$ ,  $y'$  ja  $z'$  jaoks, kust nende sihikoosinustega kiired on puutujad pinnale V 101. Et nendel puutujatel on iga punkt niisugune, sellepärast esitab võrrand V 126 nende omavahel paralleelsete (sihikoosinustega  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$ ) puutujate kõigi punktide kogu — puutesilindri.

Puutepunktide koordinaadid rahuldavad muidugi teise järgu pinna võrrandit V 101. Sellepärast on puutepunktides  $c' = 0$  [V 122] ja siis valemi 126 järgi ka  $b' = 0$  (sest  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  ei saa olla suuremad kui 1 ja sellepärast ei saa  $a'$  olla lõpmatus), nii et puutepunktid on puutujate kaasdiameetritasapinna peal ja sellega puutesilindri sünnitajate kaasdiameetritasapinna ja teise järgu pinna ühine joon juhtjooneks sellele silindrile.

(5) Puutekoonus ja puutetasapind. Kui puutuja tunnuses V 126 anname arvudele  $x'$ ,  $y'$  ja  $z'$  mingid kindlad väärtused, siis rahuldavad seda võrrandit kõigi punktist  $(x', y', z')$  pinnale V 101 minevate puutujate sihikoosinused ja ainult need. Nende sihikoosinuste kohta on see võrrand homogeenne [lhk. 96], nii et seal võib arvude  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  asemele panna nendega proportsionaalsed arvud  $x - x'$ ,  $y - y'$  ja  $z - z'$  valemist 120. Siis saab võrrand, mis esitab punktist  $(x', y', z')$  minevate puutujate kõigi punktide kogu — puutekoonuse tipuga  $(x', y', z')$ .

Kui teise järgu puutekoonusel on tipp  $(x', y', z')$  selle pinna peal, siis on selle koonuse võrrandis  $c' = 0$  ja see võrrand taandub võrrandiks  $b' = 0$  (kus  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  asemel on  $x - x'$ ,  $y - y'$  ja  $z - z'$ ), s. o. tasapinna võrrandiks

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{10})(x - x') + (a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{20})(y - y') + \\ + (a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z' + a_{30})(z - z') = 0,$$

millele (teisi sulge avades ja silmaspidades, et siin on  $c' = 0$  [V 122]) saame valemi 88 kuju. Sellega esitab võrrand V 88 siis, kui seal on  $x'$ ,  $y'$  ja  $z'$  pinna V 101 mingi punkti koordinaadid, sellest punktist sellele pinnale minevate puutujate kõigi punktide kogu — puutetasapinna puutepunktiga  $(x', y', z')$ .

(6) Polaartasapind ja poolus. Ühest punktist  $(x', y', z')$  minevatel kiirtel on pinna V 101 lõikepunktide vaheliste tükide harmoonilised keskpunktid selle ühise punkti kohta [H 60] kõik ühe tasapinna peal — punkti  $(x', y', z')$  (selle tasapinna pooluse) polaartasapinna peal. Sest nendel harmoonilistel keskpunktidel on kaugus  $t$  punktist  $(x', y', z')$  nimelt  $t = -c' : b'$  [V 121, H 60] nii et on

$$b't + c' = 0$$

127

ja pannes siia valemist 120 arvude,  $at$ ,  $bt$  ja  $gt$  asemele arvud  $x-x'$ ,  $y-y'$  ja  $z-z'$  saame tõesti tasapinna võrrandi ja (seal teisi sulge avades ja sarnaseid liikmeid koondades) nimelt valemi 88 kujul. Sellega esitab võrrand V 88 alati punkti  $(x', y', z')$  polaartasapinna, nii et puutetasapind [(5)] on oma puutepunkti polaartasapind.

(7) Asümptoodiline koonus. Teise järgu pinna V 101 puutekoonusel punktist  $(x', y', z')$  on kõik puutepunktid (s. o. pinna V 101 pealolevad punktid) selle koonuse tipu  $(x', y', z')$  polaartasapinna peal. Sest kui sellel koonusel on tipp selle teise järgu pinna peal, siis on see koonus ise kõdunud puutetasapinnaks, mis ongi ka tipu polaartasapinnaks, ja kui tal tipp ei ole selle teise järgu pinna peal, siis on valemite 121, 122, 126 ja 127  $c' \neq 0$  (kui seal on  $x'$ ,  $y'$  ja  $z'$  selle tipu koordinaadid) ja siis saame selle polaartasapinna võrrandi V 127 korrutades valemil 121 kõik liikmed arvuga  $c'$  ja pannes seal siis  $a'c'$  asemele  $b'^2$  (valemist 126), nii et tõesti igal punktil, millel kaugus  $t$  punktist  $(x', y', z')$  ja sihikoosinused  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  (mis määravad, kus pool punktist  $(x', y', z')$  see punkt seisab) rahuldavad võrrandit V 126 ja V 121, rahuldavad nad ka võrrandit V 127. Sellega on keskpunktist mineval puutekoonusel — asümptoodilisel koonusel — puutepunktid nimelt ebapunktid, sest keskpunktile  $(x', y', z') = (x_0, y_0, z_0)$  saab valemi 92 järgi polaartasapind V 88 nimelt ebaleht.

Märkus 3. Võttes keskpunktiga teise järgu pinna jaoks Cartesiuse ristkoordinaatide pindadeks peatasapinnad (s. o. asetades võrrandisse V 101  $x$ ,  $y$  ja  $z$  väärtused  $x''$ ,  $y''$  ja  $z''$  järgi valemist 100), saame selle pinna võrrandile lihtsama kuju

$$a'_{11}x''^2 + a'_{22}y''^2 + a'_{33}z''^2 + a'_{00} = 0$$

128

Sest kui koordinaatide pinnad on sümmeetriatasapinnad, siis peab teise järgu pinna võrrandist kahe koordinaadi iga antud väärtuste paari järgi kolmandale koordinaadile saama kaks absoluutselt ühesuurst vastupidiste märkidega väärtust, ja see on võimalik ainult siis, kui võrrandi üheski liikmes ei esine selle (kolmanda) koordinaadi esimene aste. Selle lihtsama võrrandi kordajad on

$$a'_{00} = A : A_{00}, a'_{11} = \lambda_1, a'_{22} = \lambda_2 \text{ ja } a'_{33} = \lambda_3$$

129

Selle tõenduseks tarvitseb ainult märgata, 1) et kui valemis 100 on  $x, y$  ja  $z$  väärtustel vabaliikmed  $x_0, y_0$  ja  $z_0$  nimelt keskpunkti koordinaadid, siis saab valemist 101 uus vaba liige  $a'_{00}$  seesama, mis on  $c'$  valemites 121 ja 122 siis, kui on  $(x', y', z') = (x_0, y_0, z_0)$  ja 2) et valemid 121 ja 128 on siis samased, kui on veel esimeses  $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1$  ja  $\gamma = \gamma_1$  ja teises  $y'' = 0 = z''$ , või esimeses  $\alpha = \alpha_2, \beta = \beta_2$  ja  $\gamma = \gamma_2$  ja teises  $x'' = 0 = z''$ , või esimeses  $\alpha = \alpha_3, \beta = \beta_3$  ja  $\gamma = \gamma_3$  ja teises  $x'' = 0 = y''$ .

Näiteks on lhk. 137 (M 1) käsitatud polaarse süsteemi korralduspinnal keskpunkti koordinaadid  $x_0 = A_{10} : A_{00} = -6868,90 : -3272,56 = 2,10, y_0 = A_{20} : A_{00} = 5694,35 : -3272,56 = -1,74$  ja  $z_0 = A_{30} : A_{00} = 3893,17 : -3272,56 = -1,19$  ja siis selle pinna lihtsama võrrandi jaoks  $a'_{00} = a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{30}z_0 + a_{00} = -17,2,10 - 12,1,74 - 5,5,1,19 = -63,1$  ja see lihtsam võrrand  $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + a'_{00} = 0$  (kui sekundi märgid ära jätame) ise nimelt [lhk. 137]

$$7,19x^2 + 25,4y^2 - 17,9z^2 - 63,1 = 0,$$

nii et see pind on ühekattene hüperboloid pooltelgedega [V 125]

$$a = \sqrt{63,1 : 7,19} = 3,0, \quad b = \sqrt{63,1 : 25,4} = 1,6 \quad \text{ja} \quad c = \sqrt{63,1 : 17,9} = 1,9.$$

Märkus 4. Võttes keskpunktita teise järgu pinna jaoks Cartesiuse ristkoordinaatide  $yz$ - ja  $zx$ -pinnaks kaks peatasapinda ja alguseks teisejärgu pinna ainsa tipu  $(x_0, y_0, z_0)$  (s. o. asetades jälle valemisse 101  $x, y$  ja  $z$  väärtused valemist 100), saame selle pinna võrrandile lihtsama kuju

$$a'_{11}x''^2 + a'_{22}y''^2 + 2a'_{30}z'' = 0 \quad 130$$

Sest 1) ei või selle võrrandi liigetes jälle esineda  $x''$  ega  $y''$  esimesel astmel, 2) peab siin olema  $a_{00} = 0$  sellepärast, et tipu uued koordinaadid  $x'' = 0, y'' = 0$  ja  $z'' = 0$  peavad seda võrrandit rahuldama ja 3) peab siin olema  $a'_{33} = 0$  sellepärast, et muidu saaks keskpunkti koordinaatidele nimetaja

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ja pind ei oleks keskpunktita. Selle lihtsama võrrandi}$$

kordajad on

$$a'_{11} = \lambda_1, \quad a'_{22} = \lambda_2 \quad \text{ja} \quad a'_{30} = a_{10}\alpha_3 + a_{20}\beta_3 + a_{30}\gamma_3 \quad 131$$

Selle tõenduseks tarvitseb ainult märgata järgmist kolme asjaolu. 1)  $a'_{11}, a'_{22}$ , ja  $a'_{33}$  saavad siin (valemitest 100 ja 101) niisama kui valemi 128 jaoks. (Siin on  $a'_{33} = \lambda_3 = 0$ , kuna lehekülje 136 lõpul oli lihtsam seda sekulaarvõrrandi nulljuurt esimeseks nimetada.) 2) Valemid 121 ja 130 on siis samased, kui on esimeses  $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$  ja  $(x', y', z') = (x_0 + \alpha_3, y_0 + \beta_3, z_0 + \gamma_3)$  ja teises  $y'' = 0$  ja  $z'' = 1$ , või esimeses  $\alpha = \alpha_2, \beta = \beta_2, \gamma = \gamma_2$  ja  $(x', y', z') = (x_0 + \alpha_3, y_0 + \beta_3, z_0 + \gamma_3)$  ja teises  $x'' = 0$  ja  $z'' = 1$  (sest punkt  $(x_0 + \alpha_3, y_0 + \beta_3, z_0 + \gamma_3)$  on ju uue  $z$ -telje peal tipust  $(x_0, y_0, z_0)$  üks mõõt eemal —

positiivsel pool). 3) Pannes valemi 122 kolmandas ühevõrduses  $x'$ ,  $y'$  ja  $z'$  asemele  $x_0 + \alpha_3$ ,  $y_0 + \beta_3$  ja  $z_0 + \gamma_3$ , saame selle ühevõrduse paremale poolele valemi 121 pahema poolele kuju, kus on  $t=1$ , esimeseks liikmeks  $\lambda_3=0$ , viimaseks  $a'_{00}=0$  ja siis keskmiseks (ainukeseks) liikmeks kahekordselt valemi 122 teise ühevõrduse parem pool ehk valemi 95 pahem pool, kui seal on  $a=\alpha_3$ ,  $\beta=\beta_3$  ja  $\gamma=\gamma_3$ , ja see taandubki  $\lambda_3=0$  pärast valemi 96 järgi oma viimase kolme liikme summaks, nii et siis tõesti on  $2a'_{30}=2(a_{10}\alpha_3 + a_{20}\beta_3 + a_{30}\gamma_3)$ .

H a r j u t u s 150. Uurida teise järgu joon tasapinnal katsekiire abil. [M 2]

H. 151. Võttes mitu numbrilist kolme tundmatuga teise astme võrrandit leida, mis liiki pindu ja kui suurte pooltelgedega nad esitavad. [M 3, M 4]

H. 152. Koonusel on iga sünnitaja tema puutujaks [H 147]. Tõendada, et (teise järgu) koonuse puutetasapind selle koonuse ühes punktis (tema ühe punkti polaartasapind) on puutetasapinnaks sellest punktist läbimineva sünnitaja igas punktis (et selle sünnitaja kõik punktid on sellele tasapinnale puutepunktideks). [Koonusel V 111 — tipuga  $(x_0, y_0, z_0)$  — on puutetasapind tema mingis punktis  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  [H 147]:

$$[a_{11}(x_1 - x_0) + a_{12}(y_1 - y_0) + a_{13}(z_1 - z_0)](x - x_1) + [a_{12}(x_1 - x_0) + a_{22}(y_1 - y_0) + a_{23}(z_1 - z_0)](y - y_1) + [a_{13}(x_1 - x_0) + a_{23}(y_1 - y_0) + a_{33}(z_1 - z_0)](z - z_1) = 0$$

ja selle koonuse mingis teises punktis  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ :

$$[a_{11}(x_2 - x_0) + a_{12}(y_2 - y_0) + a_{13}(z_2 - z_0)](x - x_2) + [a_{12}(x_2 - x_0) + a_{22}(y_2 - y_0) + a_{23}(z_2 - z_0)](y - y_2) + [a_{13}(x_2 - x_0) + a_{23}(y_2 - y_0) + a_{33}(z_2 - z_0)](z - z_2) = 0.$$

Need kaks tasapinda on siis tõesti samased, kui punktid  $P_1$  ja  $P_2$  on ühe sünnitaja peal, nii et on  $\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{y_2 - y_0} = \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}$ . Sest siis on esimese tasapinna võrrandis jooksvate koordinaatide  $x$ ,  $y$  ja  $z$  kordajad proportsionaalsed teise omadega, nii et need tasapinnad on paralleelsed, ja peale selle lähevad nad mõlemad läbi selle sama sünnitaja  $P_1P_2$ ].

H. 153. Tõendada, et teise järgu pinna puutekoonus on siis pöördkoonus (s. o. tema sünnitajad teevad tipus kõik ühesuurused nurgad ühe kiirega — pöördteljega), kui tema tipp on selle teise järgu pinna fokaaljoone peal. [Puutekoonus puutetasapind on ka selle teise järgu pinna puutetasapind, sest puutepunktis on puutekoonusel ja teise järgu pinnal kaks ühist puutujat: 1) sealt läbiminev koonuse sünnitaja ja 2) koonuse tipu polaartasapinna lõikejoone puutuja selles punktis ([7]). Teise järgu pinna fokaaljoone punktist sellele pinnale minev puutetasapind on risti selle tasapinnaga, mis läheb läbi fokaaljoone puutuja (selles punktis) ja läbi esimese tasapinna pooluse (läbi puutepunkti), sest esimene tasapind läheb siis ka läbi teise tasapinna pooluse [25 2]] ja see on selle teise tasapinna ristjoone peal (sellest fokaaljoone punktist) [lk, 151]. Sellega on puutekoonusel, millel on tipp fokaaljoone peal, iga puutetasapind risti selle tasapinnaga, mis ühendab fokaaljoone puutujat (koonuse tipus) selle puutetasapinna pealoleva sünnitajaga. Kui selle koonuse lõikame läbi tasapinnaga, mis on risti sellele fookaljoone puutujale, siis saab

lõikejooneks teise järgu joon, millel kõik normaali lõikuvad ühes punktis (fokaaljoone selle puutuja peal). Niisugune teise järgu joon  $s$  a a b olla ainult ring, sest parabolil V 35 on normaali võrrand mingis punktis  $(x_1, y_1)$ :  $y_1x + py - y_1x_1 - py_1 = 0$  [H 97] ja sellega kolmes punktis  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  ja  $(x_3, y_3)$  võetud normaalide ühise punkti tingimuseks [17 M 2]

$$\begin{vmatrix} y_1 & p & -y_1x_1 - py_1 \\ y_2 & p & -y_2x_2 - py_2 \\ y_3 & p & -y_3x_3 - py_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ ehk } \begin{vmatrix} y_1 & 1 & y_1x_1 \\ y_2 & 1 & y_2x_2 \\ y_3 & 1 & y_3x_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ [lk. 113],}$$

ja ellipsil või hüperboolil V 38 on normaalide võrrandid mingis kolmes punktis  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  ja  $(x_3, y_3)$  nimelt  $\pm \frac{y_1}{b^2}x - \frac{x_1}{a^2}y + x_1y_1 \left( \frac{1}{a^2} \mp \frac{1}{b^2} \right) = 0$  jne. ja sellega nende ühise punkti tingimuseks

$$\begin{vmatrix} \pm \frac{y_1}{b^2} - \frac{x_1}{a^2} & x_1y_1 \left( \frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2} \right) \\ \pm \frac{y_2}{b^2} - \frac{x_2}{a^2} & x_2y_2 \left( \frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2} \right) \\ \pm \frac{y_3}{b^2} - \frac{x_3}{a^2} & x_3y_3 \left( \frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2} \right) \end{vmatrix} = 0 \text{ ehk } \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & x_1y_1 \\ y_2 & x_2 & x_2y_2 \\ y_3 & x_3 & x_3y_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ [lk. 113]}$$

(kui ei ole  $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 0$ , s. o. kui ellips ei ole ring), aga need tingimused ei rahuldu näiteks parabolil punktides  $(0, 0)$ ,  $(1, y_2)$  ja  $(2, y_3)$ , ellipsil punktides  $(a, 0)$ ,  $(0, b)$  ja  $\left( \frac{a}{2}, y_3 \right)$  ja hüperboolil punktides  $(a, 0)$ ,  $(2a, y_2)$  ja  $(-2a, y_2)$ . Nii on siis see puutekoonus tõesti pöördkoonus, mille pöördteljeks on fokaaljoone puutuja.]

H. 154. Leida n a b apunktid ehk ümmaruspunktid, s. o. lõikepunktid oma fokaaljoontega, pindadel V 103, V 105, V 109. [Näiteks on esimesel pinnal  $g = c^2 - a^2$  ja  $h = c^2 - b^2$  [V 114] ja siis kolmas fokaaljoon [V 115]  $\frac{x_0^2}{a^2 - b^2} + \frac{z_0^2}{c^2 - b^2} - 1 = 0$  ja  $y_0 = 0$ , nii et otsitavatel punktidel on  $y_0 = 0$  ja  $x_0$  ja  $z_0$  peavad rahuldama võrrandiid  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0$  ja  $\frac{x_0^2}{a^2 - b^2} + \frac{z_0^2}{c^2 - b^2} - 1 = 0$ , kust järgneb  $x_0 = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$ ]

H. 155. Ristjoont teise järgu pinna puutetasapinnale puutepunktis nimetatakse selle teise järgu pinna normaaliiks. Leida pindadel V 103, V 105 ja V 109 normaalid nende nabapunktides ja näidata, et need normaalid on fokaaljoonte puutujad.

H. 156. Tõendada, et teise järgu pinna lõikaja tasapinna kaasdiameeter (selle tasapinna poolusest läbiminev diameeter) läheb selle tasapinna ja teise järgu pinna lõikejoone keskpunkti läbi. [Lõikaja tasapinna igal kiirel läheb tema

ebapunkti polaartasapind — selle kiire kaasideametrilasapind — läbi selle lõikaja tasapinna pooluse [25 2]) ja sellega läbi lõikaja tasapinna kaasideametri. Sellega poolitab lõikaja tasapinna ja tema kaasideametri ühine punkt kõik seltest punktist seda tasapinda mööda minevad kõõlud.]

H. 157. Tõendada, et teise järgu pinna paralleelsetel lõigetel, s. o. tema lõikejoontel paralleelsete tasapindadega, on keskpunktid ühe sirge joone peal. [H. 156]

H. 158. Leida antud teise järgu pinna ja tasapinna lõikejoonel 1) keskpunkt ja 2) poolteljed ja 3) tõendada, et teise järgu pinna paralleelsetel lõigetel on teljed paralleelsed ja poolteljed proportsionaalsed. [1] Olgu antud teise järgu pind oma üldise võrrandiga  $V 101$  ja teda lõikaja tasapind võrrandiga  $ux + vy + wz + s = 0$ . Siis on otsitav keskpunkt selle tasapinna ja tema kaasideametri ühine punkt. Selle punkti koordinaadid — kirjutame nad  $x'$ ,  $y'$  ja  $z'$  — leiame lahendades antud tasapinna võrrandi koos selle tasapinna kahe kiire kaasideametri tasapinna võrranditega, näiteks (siis, kui antud tasapind ei ole paralleelne ei  $xy$ - ega  $yz$ -pinnaga) võrranditega  $(a_{11}v - a_{12}u)x + (a_{12}v - a_{22}u)y + (a_{13}v - a_{23}u)z + a_{01}v - a_{02}u = 0$  ja  $(a_{12}w - a_{13}v)x + (a_{22}w - a_{23}v)y + (a_{23}w - a_{33}v)z + a_{02}w - a_{03}v = 0$ , mis on kaasideametri tasapindade võrrandid antud tasapinna lõikejoontele  $xy$ -pinnaga ja  $yz$ -pinnaga. Sest lõikejoonel  $xy$ -pinnaga, kus on  $z = 0$ , järgnevad sihikoosinused  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  ja  $\gamma_1$  paralleelsusetunnustest [V 87]  $0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \beta_1 + 1 \cdot \gamma_1 = 0$  ja  $u\alpha_1 + v\beta_1 + w\gamma_1 = 0$  nimelt proportsionaalsed arvudega  $v$ ,  $-u$  ja  $0$  ja lõikejoonel  $yz$ -pinnaga, kus on  $x = 0$ , sihikoosinused  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  ja  $\gamma_2$  paralleelsuse tunnustest  $\alpha_2 = 0$  ja  $v\beta_2 + w\gamma_2 = 0$  nimelt proportsionaalsed arvudega  $0$ ,  $w$  ja  $-v$  [lhk. 132 M 1].

2) Lõikejoone iga diameetri poole pikkuse arvu annab võrrand V 121, kui katsekiir on võetud lõikejoone keskpunktist ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ) lõikajat tasapinda mööda, s. o. nii, et on  $ua + vb + w\gamma = 0$ . See diameetri poole pikkuse arv  $t = \sqrt{-c' : a'}$  (sest  $b'$  on ju siin null) ongi siis otsitav pooltelg, kui see diameeter on risti oma kaasideametriga, s. o. risti oma kaasideametrilasapinna ja lõikaja tasapinna ühise joonega. Kaasideametrilasapinna V 95 ja lõikaja tasapinna  $ux + vy + wz + s = 0$  ühise joone sihikoosinused  $\alpha'$ ,  $\beta'$  ja  $\gamma'$  järgnevad paralleelsuse tunnustest

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma)\alpha' + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma)\beta' + (a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma)\gamma' = 0$$

$$\text{ja} \quad u\alpha' + v\beta' + w\gamma' = 0.$$

Telgede korral peavad need kaks võrrandit rahulduma koos ristseisu tunnusega  $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$ , s. o. (kui esimeses võrrandis kirjutame arvudel  $\alpha'$ ,  $\beta'$  ja  $\gamma'$  kordajad lüheduseks üksikute tähtedega  $a$ ,  $b$  ja  $c$ ) peab olema [lhk. 96]:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0 \text{ ehk } \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ 0 & v & w \\ 1 & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & c \\ u & 0 & w \\ \alpha & 1 & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & a' \\ u & v & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Need teised determinaadid saame esimesest siis, kui sinna püüame saada arvu  $a' = a\alpha + b\beta + c\gamma$  [V 122], mis meile pooltelje annaks (sest arv  $c'$  on

keskpunkti ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ) järgi teada) ja kui selleks korrutame esimese veeru elemendid arvuga  $a$  ja liidame teise veeru  $\beta$ -kordse vastava elemendiga ja kolmanda veeru  $\gamma$ -kordse vastava elemendiga, või jälle esiti korrutame mõne muu veeru elemendid ja siis liidame sel viisil korrutatud vastavate elementidega teistest veergudest. Need determinandid saavad veel lihtsamaks, kui teiste veergude elementidest lahutame selle omad, kus on arv 1, ja nimelt nende teiste veergude viimaste elementide kordselt:

$$\begin{vmatrix} b - a'\beta & c - a'\gamma \\ v & w \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a - a'a & c - a'\gamma \\ u & w \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} a - a'a & b - a'\beta \\ u & v \end{vmatrix} = 0,$$

ehk

$$\frac{b - a'\beta}{v} = \frac{c - a'\gamma}{w} = \frac{a - a'a}{u} = -r \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} a - a'a + ur = 0 \\ b - a'\beta + vr = 0 \\ c - a'\gamma + wr = 0 \end{cases}$$

(kui kolme jagatise ühise väärtuse kirjutame tähega  $-r$ ). Et on  $a = a_{11}a + a_{12}\beta + a_{13}\gamma$  jne., siis on need kolm viimast võrrandit ühes paralleelsuse (või pealolemise) tunnusega  $ua + v\beta + w\gamma = 0$  homogeenne  $a$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ja  $r$  kohta ja nimelt:

$$\begin{cases} (a_{11} - a')a + a_{12}\beta + a_{13}\gamma + ur = 0 \\ a_{12}a + (a_{22} - a')\beta + a_{23}\gamma + vr = 0 \\ a_{13}a + a_{23}\beta + (a_{33} - a')\gamma + wr = 0 \\ ua + v\beta + w\gamma = 0 \end{cases} \quad 132$$

Kui siit leiame kolmest võrrandist  $a:r$ ,  $\beta:r$  ja  $\gamma:r$  ja paneme saadud väärtused neljandasse (mille liikmed võiks ju ka jagada arvuga  $r$ ), siis saame

$$\begin{vmatrix} a_{11} - a' & a_{12} & a_{13} & u \\ a_{12} & a_{22} - a' & a_{23} & v \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - a' & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad 133$$

mis on ruutvõrrand otsitava arvu  $a'$  kohta.

3) Kui teise järgu pinnal ühel lõikel on diameeter risti oma kaasdiameetri-tasapinna ja selle lõike tasapinna ühise joonega, siis on igal selle lõikega paralleelsel lõikel selle diameetriga paralleelsel diameetril lugu niisama, sest nendel paralleelsetel (lõigete) diameetritel on kaasdiameetri tasapind ühine ja see lõikab paralleelsete lõigete tasapindu muidugi paralleelseid jooni mööda. Sellega on paralleelsetel lõigetel tõesti teljed paralleelsed. Nende poolteljed on proportsionaalsed sellepärast, et  $a'$  (V 133 järgi) ei olene lõikaja tasapinna võrrandi vabast liikmest ja on siis ühine kõigil paralleelsetel lõigetel.]

H. 159. Leida lihtsamate võrrandite korral [V 128, V 130] teise järgu pinnal ringlõiked, s. o. leida tasapinnad,  $ux + vy + wz + s = 0$ , mille

lõikejooned teise järgu pinnaga oleksid ringjooned. [Ringlõikel on iga dia-meeter teljeks. Sellepärast peavad ringlõike korral telje sihikoosinused  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  saama võrranditest V 132 määratud, s. o. jagatiste  $\alpha : r$ ,  $\beta : r$  ja  $\gamma : r$  väärtustel peavad lugejad ja nimetajad saama nullid (määramatuse avaldus on ju 0:0), olgu need väärtused leitud valemi 132 missugusest kolmest võrrandist tahes. Lihtsamate võrrandite korral (kus on  $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ ) saame siis  $u$ ,  $v$ ,  $w$  ja  $a'$  jaoks võrrandid: 1)  $u(a_{22} - a')(a_{33} - a') = 0$ ; 2)  $v(a_{11} - a')(a_{33} - a') = 0$ ; 3)  $w(a_{11} - a')(a_{22} - a') = 0$ ; 4)  $(a_{11} - a')(a_{22} - a')(a_{33} - a') = 0$ ; 5)  $(a_{22} - a')w^2 + (a_{33} - a')v^2 = 0$ ; 6)  $(a_{33} - a')uv = 0$ ; 7)  $(a_{22} - a')uw = 0$ ; 8)  $(a_{11} - a')vw = 0$ ; 9)  $(a_{11} - a')v^2 + (a_{22} - a')u^2 = 0$  ja 10)  $(a_{11} - a')w^2 + (a_{33} - a')u^2 = 0$ . Võrrandist 4) on näha, et  $a'$  on kas  $a_{11}$ , või  $a_{22}$ , või  $a_{33}$  ja võrrandite 5), 9), ja 10) järgi peab ta sellest kolmest arvust olema nimelt selle suurune, mis kahest teisest lahkudes jätab vastupidiste märkidega jäägid. Olgu  $a' = a_{11}$ . Siis on võrrandi 1), või 9), või 10) järgi  $u = 0$  (kui antud pind ei ole pöördpind) ja siis võrrandi 5) järgi  $v : w = \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22}) : (a_{33} - a_{11})}$ , nii et ringlõikeid on kaks parve [H 158 3]. Keskpunktita pinnal on  $a_{33} = 0$ .  $a'$  ei saa null olla, sest ta on ringi raadiuse ruudu nimetaja [H 158]. Sellega peab siin olema kas  $a' = a_{11}$  või  $a' = a_{22}$  ja teisest nendest lahkudes peab ta võrrandi 5) või 10) järgi jätma jäägi, mille märk on samane tema omaga. Sellepärast on keskpunktita pindadel ringlõiked võimalikud ainult elliptilisel paraboloidil.]

H. 160. Leida kanooniliste võrrandite korral teise järgu pindade n a b a -punktid ehk ümmaruspunktid, s. o. pinna lõikepunktid oma fokaaljoontega [J 30, J 31, J 33], ja tõendada, et puutetasapind nabapunktis on ringlõike tasapind (kui lõikejoone raadius on null).

H. 161. Leida lihtsamate võrrandite [V 128, V 130] korral teise järgu pinna (s i r g e d) s ü n n i t a j a d, s. o. kiired, mis on täiesti teise järgu pinna peal. [Võtame otsitava kiire katsekiireks [lhk. 158]. Kui katsekiir on täiesti teise järgu pinna peal, siis rahuldavad tema punkti  $(x', y', z')$  koordinaadid selle pinna võrrandit, nii et on  $c' = 0$  [V 122]. Selle kiire teine ühine punkt teise järgu pinnaga on määratu. Sellepärast peab võrrandis V 121 olema ka  $a' = 0$  ja  $b' = 0$ , s. o. keskpunktiga pinnal (siis, kui on  $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{01} = a_{02} = a_{03} = 0$ ) [V 122]

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 = 0 \text{ ja } a_{11}x'a + a_{22}y'\beta + a_{33}z'\gamma = 0$$

ehk selle kiire punktide jooksvates koordinaatides  $x$ ,  $y$  ja  $z$  [V 120]

$$a_{11}(x - x')^2 + a_{22}(y - y')^2 + a_{33}(z - z')^2 = 0 \text{ ja}$$

$$a_{11}x'(x - x') + a_{22}y'(y - y') + a_{33}z'(z - z') = 0.$$

Need kaks võrrandit määravadki keskpunktiga teise järgu pinna sünnitajad. Esimene võrrand esitab koonuse, mille sünnitajad on paralleelsed asümptoodilise koonuse omadega [V 111] ja mille tipuks on  $(x', y', z')$ , teine on puutetasapinna võrrand selles punktis. Leides teisest võrrandist  $(z - z')$ :  $(x - x')$  ja pannes saadud väärtuse esimesse võrrandisse, saame sealt  $(y - y') : (x - x') = (-a_{11}a_{22}x'y' \pm a_{33}z' \sqrt{a_{00}a_{11}a_{22}a_{33}}) : [a_{22}(a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2)]$ .

Siit näeme, et sirged sünnitajad on (reaalsed) ainult sellel keskpunktiga kõdu-  
mata pinnal, millel on arvudest  $a_{00}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  ja  $a_{33}$  nimelt kaks negatiivsed ja  
kaks positiivsed, s. o. ainult ühekattesel hüperboloidil.

Keskpunktita pinnal (siis, kui on  $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{33} = a_{01} = a_{02} = 0$ )  
saavad võrrandid  $a' = 0$  ja  $b' = 0$  nimelt

$a_{11}(x - x')^2 + a_{22}(y - y')^2 = 0$  ja  $a_{11}x'(x - x') + a_{22}y'(y - y') + a_{03}(z - z') = 0$   
ja siit

$$(y - y') : (x - x') = \pm \sqrt{-a_{11} : a_{22}},$$

nii et (reaalsed) sünnitajad on ainult sellel pinnal, kus on arvud  $a_{11}$  ja  $a_{22}$   
teine teise märgiga, s. o. hüperboolsel paraboloidil.]

H. 162. Kirjutada ühekattese hüperboloidi ja hüperboolse paraboloidi  
sünnitajate võrrandid kohe nende pindade kanooniliste võrrandite järgi. [Võr-  
randis V 106 viime teisele poole ühe positiivse ja ühe negatiivse liikme ja  
lahutame saadud võrrandi pooled teguriteks, näiteks

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

Siis on tasapindadel

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda \left(1 + \frac{y}{b}\right) \text{ ja } \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad 134$$

parameetri  $\lambda$  iga väärtuse korral ühine joon täiesti hüperboloidi V 106 pinnal,  
sest iga arvude kolmik  $x$ ,  $y$  ja  $z$ , mis rahuldab võrrandit V 134, rahuldab  
ka seda võrrandit, mis saab siis, kui nende võrrandite ühenimelised pooled  
oma vahel korrutatakse, aga siis saabki tagasi võrrand V 106 (kuna kordaja  
 $\lambda$  iseenesest kõrvaldub). Sellega esitavad võrrandid V 134 iga  $\lambda$  väärtuse  
korral hüperboloidi V 106 ühe sünnitaja. Öeldakse: võrrandid V 134 esitavad  
ühe parve sünnitajaid sellele hüperboloidile. Teise parve esitavad  
võrrandid

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu \left(1 - \frac{y}{b}\right) \text{ ja } \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{y}{b}\right) \quad 135$$

Niisama saame võrrandis V 110 liiget  $-z$  teisele poole viies ja siis  
saadud võrrandi pooli teguriteks lahutades ( $z = 1, z$ ) hüperboolsele parabo-  
loidile kaks parve sünnitajaid

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda, \quad -\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{\lambda} \text{ ja } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \mu z, \quad -\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{\mu} \quad 136$$

H. 163. Tõendada, et kaks sünnitajat ühest parvest ei lõiku, aga iga  
sünnitaja ühest parvest lõikub igaühega teisest.

[Kahel sünnitajal parameetritega  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  oleks nende ühises punktis valemi 134 esimese võrrandi järgi  $\lambda_1 \left(1 + \frac{y}{b}\right) = \lambda_2 \left(1 + \frac{y}{b}\right)$  ja sellega  $1 + \frac{y}{b} = 0$  ehk  $y = -\frac{1}{b}$  aga teise võrrandi järgi jälle  $1 - \frac{y}{b} = 0$  ehk  $y = +\frac{1}{b}$ , mis on võimata. Valemi 136 esimese võrrandi järgi oleks  $\lambda_1 = \lambda_2$  vastu oletust  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

Agaga iga kiir esimesest parvest (mingi parameetriga  $\lambda$ ) lõikub iga kiirega teisest (mingi parameetriga  $\mu$ ) sellepärast, et kolmest võrrandist V 134 ja V 135 või jälle V 136 leitud  $x$ ,  $y$  ja  $z$  väärtused rahuldavad ka neljanda.]

H. 164. Valmistada 1) hüperboolse paraboloidi mudel sirgete servadega papitükkidest ja 2) teiste teise järgu pindade mudelid mitmesuguse suurusega ringikujulistest papitükkidest. [1) Valemi 136 esimesest ja viimasest võrrandist on näha, et hüperboolse paraboloidi sünnitajad esimesest parvest on paralleelsed tasapinnaga  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$  ja teisest tasapinnaga  $-\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ . Sellepärast saab papitükkide sirgetest servadest kobe hüperboolse paraboloidi mudel, kui need papitükid laotakse lapiti üksteise peale nii, et neil kõigil (ühed) sirged servad (ühe parve sünnitajate esitajad) puutuvad kokku näiteks kahe joonlaua servadega (mis esitavad kahte sünnitajat teisest parvest). 2) Harjutuse 159 järgi on näiteks pindadel  $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} + 1 = 0$ ,  $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} - 1 = 0$  ja  $\frac{x^2}{4} + y^2 - z = 0$  [J 31, J 32, J 33] ringlõigete tasapinnad  $ux + vy + wz + s = 0$  risti  $yz$ -pinnaga, nii et neil on  $u = 0$  ja siis  $v : w = \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22}) : (a_{33} - a_{11})}$ , s. o. esimesel ja teisel pinnal  $v : w = \pm \sqrt{-\frac{3}{4} : -\frac{13}{63}} = \pm \sqrt{27} : \sqrt{13}$ , aga kolmandal (kus on  $a_{33} = 0$ )  $v : w = \pm \sqrt{-\frac{3}{4} : -\frac{1}{4}} = \pm \sqrt{3} : 1$ . Sellega saame esimese pinna jaoks mudeli siis, kui (1) võtame  $yz$ -pinna mudeliks papilehe, (2) joonistame selle lehe peale hüperbooli  $\frac{z^2}{9} - y^2 - 1 = 0$  (selle kahekattese hüperboloidi lõikejoone  $yz$ -pinnaga), (3) joonistame sellele hüperboolil rea paralleelseid kõõle — nimelt paralleelseid ühe parve ringlõigete tasapindadega, s. o. paralleelseid näiteks joonega  $\sqrt{27}y + \sqrt{13}z = 0$ , (4) lõikame nende kõõlude asemele praod, mille laius oleks papi paksuse suurune, ja (5) seame iga praod läbi ringikujulise papiketta, mille läbimõõt on selle praod pikkune.]

H. 165. Leida antud teise järgu pinnale puutetasapinnad läbi antud sirge joone. [Puutetasapind on oma puutepunkti polaartasapind

selle teise järgu pinna polaarses süsteemis. Ühest sirgest joonest läbiminevatel tasapindadel on kõigil poolused ühe teise sirge joone peal ja nimelt esimese joone kahe punkti polaartasapindade ühise joone peal (sest igal sellest kahest punktist läbimineval tasapinnal peab poolus olema kummagi punkti polaartasapinna peal ja sellega nimelt nende polaartasapindade ühise joone peal) [lhk. 127 2]. Sellepärast saame otsitavate tasapindade puutepunktid siis, kui 1) võtame antud sirge joone peal kaks punkti, 2) kirjutame nende punktide polaartasapindade võrrandid ja 3) lahendame need võrrandid koos antud teise järgu pinna võrrandiga.]

H. 166. Kerapinna tunnuste V 104 põhjal saame kera võrrandile anda niinimetatud normaalse kuju:  $x^2 + y^2 + z^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0$ . Selle võrrandi pahema poole väärtust, kui sinna on pandud  $x$ ,  $y$  ja  $z$  asemele mingi punkti  $(x, y, z)$  koordinaatide väärtused, nimetatakse selle punkti potentsiks selle kera kohta. Tõendada, et punkti potents kera kohta on nimelt sellest punktist sellele kerale mineval puutujal selle punkti ja puutepunkti vahelise tüki pikkuse arvu ruut. [H 93].

H. 167. Teisendada harjutused 94, 95 ja 96 kolmemõõtelise geomeetria omadeks.

H. 168. Leida võrrand kerapinnale, millest on teada neli punkti. [Kerapinna normaalsesse võrrandisse [H 166]  $x$ ,  $y$  ja  $z$  asemele antud punktide koordinaatid pannes saame neli lineaarset võrrandit tundmatute  $a_{10}$ ,  $a_{20}$ ,  $a_{30}$  ja  $a_{00}$  jaoks.]

H. 169. Millal ei määra neli antud punkti nendest läbiminevat kerapinda veel täiesti?

H. 170. Mitu punkti üldises seisus (s. o. mitte mõnes eriseisus, nagu need neli punkti, mis nendest läbiminevat kerapinda veel täiesti ei määra) on selleks tarvis, et nendega oleks määratud üks ja ainus teise järgu pind, mis neist kõigist läbi läheb. [H 168].

H. 171. Tõendada, et teise järgu pinna V 101 kõrdumise tunnuseks [lhk. 156] on  $A = 0$ , kus  $A$  on selle pinna võrrandi determinant [lhk. 126]. [ $A = 0$  on ühevääriline võrrandite süsteemiga V 89.]

**27. Kolme tundmatuga teise astme võrrandi lihtsustamine. Kaldkoordinaadid ruumis.** Kolme tundmatuga teise astme võrrandi V 101 saame lihtsustada nagu masinlikult sel teel, et 1) korrutame selle võrrandi kõik liikmed tema ühe tundmatu ruudu kordajaga, näiteks  $a_{11}$ , kui see ei ole null, ja 2) lisame siis sellele liikmete salgale, kus esineb see tundmatu, positiivselt ja järeljäänud liikmete salgale negatiivselt juurde niisugused liikmed, et esimesest salgast ühes juurdelisatud liikmetega saaks täisruut. Selle jaoks tuleb siis, kui tahame esimese tundmatuga liikmed täisruuduks täiendada ja selleks oleme juba võrrandi kõik liikmed korrutanud arvuga  $a_{11}$ , juurde lisada nimelt  $(a_{12}y + a_{13}z + a_{10})^2$ .

Nii saame

$$1) a_{11} | a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0$$

$$2) \frac{+(a_{12}y + a_{13}z + a_{10})^2 - (a_{12}y + a_{13}z + a_{10})^2}{(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10})^2 + b_{11}y^2 + 2b_{12}yz + b_{22}z^2 + 2b_{10}y + 2b_{20}z + b_{00}} = 0,$$

kus on  $b_{11} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ ;  $b_{22} = a_{11}a_{33} - a_{13}^2$ ;  $b_{10} = a_{11}a_{20} - a_{12}a_{10}$ ;  $b_{20} = a_{11}a_{30} - a_{13}a_{10}$  ja  $b_{00} = a_{11}a_{00} - a_{10}^2$ . Selles saaduses täisruudust järelejäädud liikmetega toimetades, nagu leheküljel 74 siis, kui seal oleks  $a$ ,  $x$  ja  $y$  asemel  $b$ ,  $y$  ja  $z$  (ja neid liikmeid mingi arvuga korrutades, korrutades sellesama arvuga muidugi ka saadud täisruutu), saame viimaks

$$b_{11}B_{00}(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10})^2 + B_{00}(b_{11}y + b_{12}z + b_{10})^2 + (B_{00}z - B_{20})^2 + b_{11}B = 0.$$

Võttes nüüd uuteks tundmatuteks

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10}, \quad y' = b_{11}y + b_{12}z + b_{10}$$

$$\text{ja } z' = B_{00}z - B_{20}$$

137

saamegi antud võrrandile lihtsa kuju

$$b_{11}B_{00}x'^2 + B_{00}y'^2 + z'^2 + b_{11}B = 0$$

138

Kui on  $B_{00} = 0$ , s. o.  $b_{11}b_{22} = b_{12}^2$ , siis paistab pärast korrutamist arvuga  $b_{11}$  kohe silma, et esimesest täisruudust järele jäänud liikmete salgas on kolm esimest liiget koos juba kakslükme ruut  $(b_{10}y + b_{12}z)^2$ . Võttes siis uuteks tundmatuteks

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10}, \quad y' = b_{11}y + b_{12}z$$

$$\text{ja } z' = b_{11}(2b_{10}y + 2b_{20}z + b_{00})$$

139

saame antud võrrandi lihtsamaks kujuks

$$b_{11}x'^2 + y'^2 + z' = 0$$

140

Nagu lehekülgedel 76 ja 77, nii tuleme ka siin otsusele, et need uued tundmatud on ka antud teise järgu pinna punktide Cartesiuse koordinaadid alguspunktiga ( $x' = 0, y' = 0, z' = 0$ ), koordinaatide pindadega  $x' = 0, y' = 0, z' = 0$  ja telgedega ( $y' = 0, z' = 0$ ), ( $z' = 0, x' = 0$ ) ja ( $x' = 0, y' = 0$ ). On ju näiteks pinnad  $x' = 0, x' = 1, x' = 2$  jne. (s. o.  $a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{10} = 0, a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{10} = 1, a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{10} = 2$  jne.) omavahel paralleelsed ja ühesuuruste (nimelt:  $1 : \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2}$  mõõdu laiuste) vahedega, nii et nad lõikavad  $x'$ -telje (kus on  $y' = 0$  ja  $z' = 0$ ) ühepikkusteks tükkideks. Igal punktil ( $x', y', z'$ ) on siis  $x'$  tõesti selle punkti kauguse arv pinnast  $x' = 0$ , kui seda kaugust mõõdetakse paralleelselt  $x'$ -teljega ja mõõduks võetakse selle telje tükk pinnast  $x' = 0$  pinnani  $x' = 1$ . Kui pinnad  $x' = 0, y' = 0$  ja  $z' = 0$  ei ole üksteisega risti, siis nimetatakse neid koordinaatisid kaldkoordinaatideks ruumis.

Sel viisil lihtsustades saame näiteks pinna

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 4xz + 5yz - 6z^2 - 7x - 8y - 9z - 10 = 0$$

jaoks (kui murdudest hoidumiseks korrutame kohe arvuga 2):

$$2 \mid 2x^2 + 4xy + 6y^2 + 8xz + 10yz - 12z^2 - 14x - 16y - 18z - 20 = 0 \\ + (2y + 4z - 7)^2 - (2y + 4z - 7)^2$$

$$2 \mid (2x + 2y + 4z - 7)^2 + 8y^2 + 4yz - 40z^2 - 4y + 20z - 89 = 0 \\ + (z - 1)^2 - (z - 1)^2$$

$$9 \mid 2(2x + 2y + 4z - 7)^2 + (4y + z - 1)^2 - 81z^2 + 42z - 90 = 0 \\ - 7^2 + 7^2$$

$$18x'^2 + 9y'^2 - z'^2 - (9 \cdot 90 - 7^2) = 0,$$

kus on

$$x' = 2x + 2y + 4z - 7, y' = 4y + z - 1 \text{ ja } z' = 27z - 7 \quad 137a$$

Märkus. Siin tuli teise täisruudu saamiseks korrutada ainult arvuga 2 sellepärast, et  $2 \cdot 8y^2 = 16y^2$  on juba ruut, ja kolmanda täisruudu saamiseks on veel korrutatud arvuga 9 ainult selle jaoks, et  $9z - \frac{7}{3}$  asemele saaks täiskakslige  $27z - 7$ .  $x', y'$  ja  $z'$  on siin kaldkoordinaadid, sest uued koordinaatide tasapinnad  $2x + 2y + 4z - 7 = 0, 4y + z - 1 = 0$  ja  $27z - 7 = 0$  ei ole omavahel risti [V 86].

Harjutus 172. Eelmises näites saadud lihtsama võrrandi järgi tõendada, et uued koordinaatide tasapinnad on käsitataval pinnal uute telgede kaasdiameetri tasapinnad. [lhk. 159]

H. 173. Leida selle pinna [H-172] keskpunkt  $\left[ \frac{43}{27}, \frac{5}{27}, \frac{7}{27} \right]$  ja joonistada see pind. [Tulevad leida veel uute telgede mõõdupunktid (näiteks

$X' = (x' = 1, y' = 0, z' = 0) = \left( \frac{8}{27}, \frac{5}{27}, \frac{7}{27} \right)$ ), nende läbi joonistada uued

teljed, nende järgi  $x'y'$ -pinnal joon  $18x'^2 + 9y'^2 - 761 = 0$ , võtta  $x'$ -teljele ja  $y'$ -teljele paralleelid  $z'$ -telje punktidest  $z' = \pm 10$  ja joonistada seal jooned  $18x'^2 + 9y'^2 - 100 - 761 = 0$  ja siis nende joonte vahele  $y'z'$ -pinnale joone  $9y'^2 - z'^2 - 761 = 0$  tükid ja  $z'x'$ -pinnale joone  $18x'^2 - z'^2 - 761 = 0$  tükid.]

H. 174. Teise järgu pinna liigi määravad selle pinna lihtsama võrrandi liikmete positiivsus või negatiivsus selsamal viisil kaldkoordinaatide korral, nagu ristkoordinaatide korralgi. Sest pinna liigi määravad kummalgi korral nimelt selle pinna lõikejooned koordinaatide pindadega ja teise järgu joonte lihtsamad võrrandid on kaldkoordinaatides ja ristkoordinaatides samakujulised [lhk. 75—81]. Lihtsustada võrrandid V 138 ja V 140 veel edasi järgmisteks [V 48, V 45]:

$$\text{ellipsoidi korral } x''^2 + y''^2 + z''^2 - 1 = 0$$

$$\text{kahek. hüp. „ } -x''^2 - y''^2 + z''^2 - 1 = 0$$

$$\text{ühek. „ „ } x''^2 + y''^2 - z''^2 - 1 = 0$$

$$\text{ellipt. par. „ } x''^2 + y''^2 - z'' = 0$$

$$\text{hüp. „ „ } x''^2 - y''^2 + z'' = 0$$

141

ja veel

$$\text{kahek. hüp. korral } -x'''^2 + y'''z''' - 1 = 0$$

$$\text{ühek. „ „ } x'''^2 - y'''z''' - 1 = 0$$

$$\text{hüp. parab. „ } x'''^2 + y'''z''' = 0$$

142

H. 175. Leida ruumala ellipsoidil pooltelgedega  $a$ ,  $b$  ja  $c$ . [Võttes selle ellipsoidi võrrandis  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ , uteks tundmatuteks

$x' = x : a$ ,  $y' = y : b$  ja  $z' = z : c$ , saame uue võrrandi  $x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 = 0$  kus  $x'$ ,  $y'$  ja  $z'$  on ka Cartesiusse ristkoordinaadid (olguigi igaüks oma mõõduga)

Selle võrrandi järgi on see ellipsoid affiinne mõõdukera  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$  [lhk. 84], nii et igale mõõdule  $OXYZ$  selle kera ruumalas vastab mõõt  $OX'Y'Z' = abc$   $OXYZ$  selles ellipsoidi ruumalas (ja ka

ümberpöördult). Et mõõdukera ruumala on  $8\pi OXYZ$  ehk  $\frac{4}{3}\pi$  kuupmõõtu,

sis on otsitav ruumala  $8\pi OX'Y'Z' = 8\pi abc OXYZ$  ehk  $\frac{4\pi}{3} abc$  kuupmõõtu.]

28. **Koordinaatide teisendamine ruumis.** Valemid 100, 137, 139 ja 137a on Cartesiuse koordinaatide teisendusvalemid Cartesiuse koordinaatideks [19]. Nende täislineaarsete teisendusvalemite täielik üldine kuju ruumis on

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1, & y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \\ & \text{ja } z' &= a_3z + b_3y + c_3z + d_3 \end{aligned} \quad 143$$

Kui uued koordinaadid  $x'$ ,  $y'$  ja  $z'$  saadakse sel teel, et endistest  $x$ ,  $y$  ja  $z$  lahutatakse mõne kindla punkti koordinaadid  $x_0$ ,  $y_0$  ja  $z_0$ , nii et on

$$\begin{aligned} x' &= x - x_0, & y' &= y - y_0, & z' &= z - z_0 \text{ ja siis} \\ x &= x' + x_0, & y &= y' + y_0, & z &= z' + z_0 \end{aligned} \quad 144$$

siis saab punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  uueks alguspunktiks. See alguse edasiviimine on üks tähtsam täislineaarse teisendamise erijuhus.

Teiseks tähtsamaks erijuhuseks on telgede pöörmine, s. o.

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1z, & y' &= \alpha_2x + \beta_2y + \gamma_2z, & z' &= \alpha_3x + \beta_3y + \gamma_3z \\ x &= \alpha_1x' + \alpha_2y' + \alpha_3z', & y &= \beta_1x' + \beta_2y' + \beta_3z', & z &= \gamma_1x' + \gamma_2y' + \gamma_3z' \end{aligned} \quad 145$$

kus on  $\alpha_1 = \cos \widehat{xx'}$ ,  $\beta_1 = \cos \widehat{yx'}$ ,  $\gamma_1 = \cos \widehat{zx'}$ ,  $\alpha_2 = \cos \widehat{xy'}$  jne. Selle valemi teine rida saab, kui esimese rea võrrandid lahendatakse  $x$ ,  $y$  ja  $z$  kohta, näiteks korrutades esimese võrrandi liikmed arvuga  $\alpha_1$ , teise omad arvuga  $\alpha_2$  ja kolmanda omad arvuga  $\alpha_3$  ja siis liites. Sest näiteks on ju uue teljestiku järgi (kui uued teljed on omavahel risti)  $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = \cos \widehat{xy}$  ja see on null, kuna sel samal põhjusel on  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ .

Algust edasi viies ja telgi pöördes saab iga antud teise astme võrrandi V 101 lihtsustada.

1) Pannes  $x$ ,  $y$  ja  $z$  asemele nende väärtused valemi 144 teisest reast uutes koordinaatides ja tundmatutes  $x_0$ ,  $y_0$  ja  $z_0$ , saame

võrrandi, kus uute koordinaatide esimeste astmete kordajad on  $a'_{10} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{10}$ ,  $a'_{20} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{20}$ ,  $a'_{30} = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{30}$ . Katsume leida niisugused  $x_0$ ,  $y_0$  ja  $z_0$  väärtused, et need kordajad saaksid nulliks. Selleks tulevad lahendada kolm võrrandit kolme tundmatuga [V 92]. Lahendused on, nagu selgub, antud pinna keskpunkti koordinaadid.

2) Pannes  $x$ ,  $y$  ja  $z$  asemele nende väärtused valemi 145 teisest reast uutes koordinaatides  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , ja uute telgede tundmatutes sihikoosinustes  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  ja  $\gamma_i$  ( $i=1; 2; 3$ ), saame võrrandi, kus uut koordinaatide korrutiste kordajad  $a'_{12}$ ,  $a'_{13}$  ja  $a'_{23}$  on  $a'_{ik} = (a_{11}\alpha_i + a_{12}\beta_i + a_{13}\gamma_i)\alpha_k + (a_{12}\alpha_i + a_{22}\beta_i + a_{23}\gamma_i)\beta_k + (a_{13}\alpha_i + a_{23}\beta_i + a_{33}\gamma_i)\gamma_k$ .

Katsume leida niisuguste sihikoosinustega uued teljed, et saaks  $a'_{12} = 0$ ,  $a'_{13} = 0$  ja  $a'_{23} = 0$ .  $a'_{ik}$  avaldusest paistab silma, et kõik need kolm kordajat saavad siis nulliks, kui leiame  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  ja  $\gamma_i$  nii, et selles avalduses oleks sulud järgemööda proportsionaalsed arvudega  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  ja  $\gamma_i$  nagu valemis 96, sest siis saavad need kordajad ise proportsionaalsed uute telgede vaheliste nurkade koosinustega, mis on tõesti nullid. Otsitavad uued koordinaatide pinnad on, nagu selgub, antud pinna peatasapinnad, mis leiduvad sekulaarvõrrandi V 99 lahendamise najal.

Märkus 1. Alguse edasiviimisel ja telgede pöörmisel, s. o. koordinaatide teisendamisel nii, et saab  $x = a_1x' + a_2y' + a_3z' + x_0$  jne. [V 65], jäävad muutmatuks antud teise astme võrrandi determinandi väärtus A [lhk. 126], tema elemendile  $a_{00}$  vastav alamdeterminant  $A_{00}$  ja sekulaarvõrrandi V 99 teised kordajad I ja J. A ja  $A_{00}$  muutmatuse saab tõendada ruumis näiteks selsamal viisil, nagu tasapinnalgi [lhk. 98 ja 99]. Nende invariantide abil saame pärast sekulaarvõrrandi lahendamist kirjutada keskpunktiga pinna lihtsama võrrandi ilma keskpunkti koordinaatid arvutamata [V 128, V 129, V 68]. Nende abil saame ka keskpunktita pinna lihtsama võrrandi V 130 jaoks leida  $a'_{30}$  ilma  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$  ja  $\gamma_3$  arvutamata, nimelt leides A väärtuse antud võrrandist V 101, kirjutades ka tema muutmatu väärtuse võrrandist V 130 ja lahendades nende ühevõrdusest saadud võrrandi [V 131]

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a'_{30} \\ 0 & 0 & a'_{30} & 0 \end{vmatrix} = A, \text{ kust järgneb}$$

$$a'_{30} = \pm \sqrt{-A : (\lambda_1 \lambda_2)}$$

Märkus 2. Cartesiuse koordinaatide korral nimetatakse koordinaatide tasapindu ja nendega paraleelseid tasapindu koordinaatpindadeks ja nende lõikejooni koordinaatjoonteks. Võib ütelda, et  $x$ -väärtusega on nummerdatud pind  $x=0$  ja kõik koordinaatpinnad  $x=a$  (kus on  $a$  mingi kindel arv — konstant),  $y$ -väärtusega pinnad  $y=b$  ja  $z$ -väärtusega pinnad  $z=c$ . Siis võib ka ütelda, et punkti Cartesiuse koordinaadid ruumis on sellest punktist läbiminevate koordinaatpindade numbrid.

Kui ruumis või ruumi osas on kuidagi määratud kolm parve pindu nii, et 1) ükski pind ühest parvest ei lõiku teise pinnaga sellest samast parvest, et 2) igast punktist läheb läbi üks ja ainus pind igast parvest ja et 3) igas parves on kõik pinnad nummerdatud, s. o. igale pinnale määratud oma arv, mis vastab ainult sellele pinnale, siis on selle ruumi või ruumi osa iga punkti jaoks kolm arvu, mis selle punkti seal täiesti määravad. Need arvud võib võtta nende punktide koordinaatideks. Siis nimetatakse need pinnad koordinaatpindadeks ja nende lõikejooned koordinaatjoonteks, ja kui need jooned ei ole kõik sirged, siis öeldakse, et need koordinaadid on kõverjoonelised. Tasapinnal on kõverjoonelised koordinaadid näiteks polaarkoordinaadid [lhk. 94], elliptilised [lhk. 102] ja paraboolsed koordinaadid [lhk. 103]. Ruumis on punkti  $P=(x, y, z)$  kõverjoonelised koordinaadid näiteks polaarkoordinaadid: 1)  $\rho = \overline{OP}$ , s. o. kaugus alguspunktist punktini  $P$ , 2)  $\varphi = (zx)(\widehat{POZ})$ , s. o. nurk  $zx$ -pinnast selle punkti ja  $z$ -telje läbimineva tasapinnani ( $zy$ -pinna poole) ja 3)  $\vartheta = \widehat{ZOP}$ , s. o. nurk  $z$ -teljest selle kiireni, mis läheb alguspunktist punktisse  $P$ . Koordinaatpindadeks on siin kerapinnad (alguspunkti ümber)  $\rho = \text{konstant}$ , tasapinnad (läbi  $z$ -telje)  $\varphi = \text{konstant}$  ja koonused (tipuga alguses ja ühise  $z$ -teljega)  $\vartheta = \text{konstant}$ . Teiseks näiteks on silindrilised koordinaadid  $z, \varphi$  ja  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , s. o. kaugus  $xy$ -pinnast, nurk  $zx$ -pinnast tasapinnani  $POZ$  ja kaugus  $z$ -teljest. Koordinaatpindadeks on siin  $xy$ -pinnale paralleelsed tasapinnad  $z = \text{konst.}$ ,  $z$ -telje läbiminevad tasapinnad  $\varphi = \text{konst.}$  ja ühise  $z$ -teljega silindrid  $r = \text{konstant}$ .

Harjutus 176. Tuletada valemid Cartesiuse koordinaatide teisendamiseks polaarseteks ja ümberpöördult:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \vartheta \cos \varphi, & y &= \rho \sin \vartheta \sin \varphi, & z &= \rho \cos \vartheta, \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & \varphi &= \arctan(y : x), & \vartheta &= \arctan(\sqrt{x^2 + y^2} : z) \end{aligned}$$

147

H. 177. Tõendada, et võrrand

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} - 1 = 0$$

148

kus on  $a, b$  ja  $c$  antud arvud ( $a^2 > b^2 > c^2$ ), aga  $\lambda$  tundmatu (parameeter). esitab ellipsoide, kui on  $\lambda = \lambda_1 < c^2$ , ühekatteseid hüperboloide, kui on  $\lambda = \lambda_2$  ja  $b^2 > \lambda_2 > c^2$ , ja kahekatteseid hüperboloide, kui on  $\lambda = \lambda_3$  ja  $a^2 > \lambda_3 > b^2$ , ja et nendel pindadel on kõigil ühised fokaaljooned (et nad on konfokaalsed).

H. 178. Kui võrrandisse V 148 paneme  $x$ ,  $y$  ja  $z$  asemele mingi punkti koordinaadid ja kaotame nimetajad, siis saame võrrandi,  $x^2(b^2 - \lambda)(c^2 - \lambda) + y^2(a^2 - \lambda)(c^2 - \lambda) + z^2(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) - (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)(c^2 - \lambda) = 0$ . See võrrand on kolmanda astme võrrand  $\lambda$  kohta, nii et kolm  $\lambda$ -väärtust  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  ja  $\lambda_3$  teevad tal pahema poole nulliks, on talle juurteks. See pahem pool muutub pidevalt  $\lambda$  väärtuse järgi. Tõendada, et selle võrrandi pahem pool on siis positiivne, kui on  $\lambda > a^2$  või  $\lambda = a^2$ , siis negatiivne, kui on  $\lambda = b^2$ , jälle positiivne, kui on  $\lambda = c^2$ , ja viimaks jälle negatiivne, kui on  $\lambda$  negatiivne ja küllalt suure absoluutse väärtusega, — nii et üks juur on  $\lambda_1 < c^2$ , teine  $\lambda_2 > c^2$ ,  $\lambda_2 < b^2$  ja kolmas  $\lambda_3 > b^2$ ,  $\lambda_3 < a^2$ . [Liige  $\lambda^3$  saab viimasel juhusel teiste summast absoluutselt suurem ja on negatiivne.]

H. 179. Eelmise kahe harjutuse järgi läheb ruumi iga punkti läbi konfokaalsetest pindadest V 148 üks ellipsoid  $\lambda_1 = \text{konstant}$ , üks ühekattene hüperboloid  $\lambda_2 = \text{konst.}$  ja üks kahekattene hüperboloid  $\lambda_3 = \text{konstant}$ . Tõendada, et need elliptilised koordinaadid on ortogonaalsed, s. o. et ühest punktist ( $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  ja  $\lambda_3$ ) läbiminevatel koordinaatpindadel on seal puutetasapinnad üksteisega risti. [H 101]

H. 180. Tõendada et võrrand

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - z + \frac{\lambda}{4} = 0$$

149

kus on  $a$  ja  $b$  antud arvud ( $a^2 > b^2$ ), aga  $\lambda$  tundmatu (parameeter), esitab konfokaalseid (s. o. ühiste fokaaljoontega) paraboloidide: elliptilisi, kui on  $\lambda_1 < b^2$ , hüperboolseid, kui on  $a^2 > \lambda_2 > b^2$ , ja endistele ühise teljega, aga vastupidisele poole minevaid elliptilisi, kui on  $\lambda_3 > a^2$ . [Kui siin võtame  $z - \frac{1}{4}\lambda$  asemele  $z'$ , kirjutame võrrandid V 118 ja seal  $z'_0$  asemele  $z_0 - \frac{1}{4}\lambda$ , siis kaob  $\lambda$ .]

H. 181. Arvutada selle punkti Cartesiusse koordinaadid, mille paraboolseid koordinaadid  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  ja  $\lambda_3$  on antud, s. o. millest lähevad läbi antud võrrandiga V 149 määratud konfokaalsed paraboloidid, millel on ühel  $\lambda = \lambda_1$ , teisel  $\lambda = \lambda_2$  ja kolmandal  $\lambda = \lambda_3$  (kui on  $\lambda_1 < b^2$ ,  $a^2 > \lambda_2 > b^2$  ja  $\lambda_3 > a^2$ ). Kas otsitav punkt on üheselt määratud? [Pannes antud võrrandisse V 149  $\lambda$  asemele kord  $\lambda_1$ , teine kord  $\lambda_2$  ja kolmas kord  $\lambda_3$ , saame kolm lineaarset võrrandit  $x^2$ ,  $y^2$  ja  $z$  jaoks]

H. 182. Tõendada, et teise järgu pinnal igal kolmel üksteisega ristiseisval puutetasapinnal on ühine punkt ühe ja selle sama kerapinna peal, millel on selle teise järgu pinnaga ühine keskpunkt ja mis sellepärast siis on tasapind, kui see teise järgu pind on keskpunktita (s. o. lõpmata kauge keskpunktiga). [Näiteks on ellipsoidil V 103 puutetasapind tema punktis ( $x_1$ ,  $y_1$  ja  $z_1$ )

$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} + \frac{z_1 z}{c^2} - 1 = 0$  ja siis selle puutetasapinna ristjoone sihkoo-sinusused [H 123]  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  ja alguspunkti kaugus temast  $p_1$  proportsionaalsed arvudega  $x_1 : a^2$ ,  $y_1 : b^2$ ,  $z_1 : c^2$  ja  $-1$ . Sellest järgneb, et on

$$x_1 : a = -a\alpha_1 : p_1, \quad y_1 : b = -b\beta_1 : p_1, \quad \text{ja} \quad z_1 : c = -c\gamma_1 : p_1.$$

Siis on sellepärast, et punkt  $(x_1, y_1, z_1)$  on ellipsoidi V 103 oma,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1 = (a^2\alpha_1^2 + b^2\beta_1^2 + c^2\gamma_1^2) : p_1^2 \text{ ehk } p_1^2 = a^2\alpha_1^2 + b^2\beta_1^2 + c^2\gamma_1^2.$$

Niisama saame teise ja kolmanda puuetasapinna jaoks

$$p_2^2 = a^2\alpha_2^2 + b^2\beta_2^2 + c^2\gamma_2^2 \text{ ja } p_3^2 = a^2\alpha_3^2 + b^2\beta_3^2 + c^2\gamma_3^2 \text{ ja siis liites}$$

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = a^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + b^2(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) + c^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) = a^2 + b^2 + c^2.$$

See ongi otsitava punkti kauguse arvu ruut ellipsoidi keskpunktist, sest selle kolme tasapinna ristseisu pärast võime nad võtta uuteks koordinaatide tasapindadeks ja siis on  $p_1, p_2$  ja  $p_3$  vana alguse ehk ellipsoidi keskpunkti uued koordinaadid (nagu ka  $\alpha_1, \alpha_2$  ja  $\alpha_3$  vana  $x$ -telje uued sihikoosinused jne.),

Teiseks näiteks on elliptilisel paraboloidil V 109 puuetasapind punktis

$$(x_1, y_1, z_1) \quad \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} - \frac{z}{2} - \frac{z_1}{2} = 0 \text{ ja siis tema ristjoone sihikoosinused}$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  ja alguspunkti kaugus temast  $p_1$  proportsionaalsed arvudega  $x_1 : a^2,$

$y_1 : b^2, -\frac{1}{2}$  ja  $-z_1 : 2$ . Sellest järgneb, et on  $x_1 : a = -a\alpha_1 : 2\gamma_1$  ja

$y_1 : b = -b\beta_1 : 2\gamma_1$ . Siis on sellepärast, et punkt  $(x_1, y_1, z_1)$  on paraboloidi

V 109 oma,

$$z_1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{a^2\alpha_1^2}{4\gamma_1^2} + \frac{b^2\beta_1^2}{4\gamma_1^2} \text{ ja puuetasapind } -\frac{\alpha_1 x}{2\gamma_1} - \frac{\beta_1 y}{2\gamma_1} - \frac{z}{2} = \frac{a^2\alpha_1^2 + b^2\beta_1^2}{8\gamma_1^2}$$

ehk  $-4\alpha_1\gamma_1 x - 4\beta_1\gamma_1 y - 4\gamma_1^2 z = a^2\alpha_1^2 + b^2\beta_1^2$ . Sarnased võrrandid saame ka teise ja kolmanda puuetasapinna jaoks ja siis liites  $-4z = a^2 + b^2$ ; mida peavad rahuldama selle kolme tasapinna ühise punkti koordinaadid.]

Lõpp.

### Tähtsamad trükivead :

Lhk. 19	rida 17	alt	1	peab olema	$\frac{1}{0}$
" 33	" 1	ülevalt	$c$	" "	$b$
" 60	" 1	alt	$a : e$	" "	$e : a$
" 67	" 16	ülevalt	27	" "	26
" "	" 6	alt ( $x_0$ nimetajas)	$a_{21}$	" "	$a_{22}$
" 100	" 9	alt	<i>apli-</i>	" "	<i>apli-</i>
" 143	" 7 ja 9	alt	1	" "	2

Lhk. 21–24 ( $ABCD$ ), ( $abcd$ ), ( $\alpha\beta\gamma\delta$ ), ( $POP'C$ ),  $((x)(i)(x')(-i))$  peab olema ( $ACBD$ ), ( $acbd$ ), ( $\alpha\gamma\beta\delta$ ), ( $PP'OC$ ),  $((x)(x')(i)(-i))$ .

Lhk. 134 valemi 98 sisu peab olema püstkriipsude vahel ja tema järel  $= 0$ .

## Sisu — tükide järgi.

	Lhk.
1. Analüütiline geomeetria . . . . .	3
2. Analüütilise geomeetria jaotus . . . . .	3
3. Cartesiuse koordinaadid sirge joone peal . . . . .	3
4. Kahe punkti vaheline kaugus . . . . .	4
5. Esimese astme ehk lineaarne võrrand . . . . .	6
6. Bilineaarne võrrand . . . . .	9
7. Teise astme võrrand ühe tundmatuga . . . . .	14
8. Teise astme võrrandi lihtsustamine . . . . .	15
9. Cartesiuse koordinaatide teisendamine . . . . .	16
10. Kaugustejagatiskoordinaadid . . . . .	18
11. Ristjagatiskoordinaadid . . . . .	20
12. Tasapinna punktide Cartesiuse koordinaadid . . . . .	24
13. Kolme punkti vaheline pindala. Sirge joon läbi kahe punkti . . . . .	27
14. Kahe punkti vaheline kaugus. Punkti kaugus sirgest joonest. Kahe kiire vaheline nurk . . . . .	31
15. Esimese astme võrrand kahe tundmatuga . . . . .	32
16. Bilineaarne võrrand kahe paari tundmatutega . . . . .	37
17. Teise astme võrrand kahe tundmatuga. Teise järgu joon . . . . .	65
18. Kahe tundmatuga teise astme võrrandi lihtsustamine. Kaldkoordinaadid . . . . .	74
19. Koordinaatide teisendamine tasapinnal. Polaarkoordinaadid . . . . .	88
20. Ruumi punktide Cartesiuse koordinaadid . . . . .	104
21. Nelja punkti vaheline ruumala. Tasapind läbi kolme punkti . . . . .	107
22. Kolme punkti vaheline pindala ehk kolmnurga pindala ruumis. Punkti kaugus tasapinnast. Sirge joone võrrandid ruumis . . . . .	114
23. Kahe punkti vaheline kaugus ruumis. Sirge joone sihikoosinused . . . . .	117
24. Esimese astme võrrand kolme tundmatuga . . . . .	119
25. Bilineaarne võrrand kahe kolmiku tundmatutega . . . . .	126
26. Teise astme võrrand kolme tundmatuga. Teise järgu pind . . . . .	154
27. Kolme tundmatuga teise astme võrrandi lihtsustamine . . . . .	170
28. Koordinaatide teisendamine ruumis . . . . .	174

## Sisu — tähestiku järgi.

Abstsiss lhk. 100	arendus 68, 112
affiinsus 84, 173	asemelepanu 89
alamdeterminant 68, 113	asümptoot 48, 80, 146
alguse edasiviimine 17, 89, 174	Bilineaarne kuju 16
alguspunkt 3, 25, 77, 105	Brianchoni lause 73
alternatiivne 6	Determinant 9, 16, 30, 38, 68, 112
aluspunktjoon 72	diameeter 45, 132, 159
Apolloniuse lause 86	

- Eba-kiir 34, -leht 129, -punkt 19, 44  
ekstsentriskus 53, 63, numbriline — 64  
ellips 54, — i pindala 86  
ellipsoid 141, — i ruumala 173
- Fokaaljooned 151, 153  
fookus 52, 148
- Harmooniline salk 23  
homogeenne 96  
hüperboloid, kahekattene — 141, ühe-  
kattene — 143  
hüperbool 57, püst — 74  
hüperboolne koosinus 85, — siinus 85
- Imaginaarne ellips 63, — ellipsoid 144  
— koonus 147, — joonte paar 67,  
— punkt 23, 69, 157, 159
- invariant 99, 100, 175  
inversioon 12  
involuutsus 88
- Juht-joon 54, 147, -silinder 156
- Kaas-diaameeter 46, 132, 159, -kiir 46,  
132, -punkt 132  
kahekordsed punktid 133  
kanooniline 62, 90, 140  
katsekiir 158  
katsumise teel 137  
kera normaalne võrrand 170  
kerapinna tunnus 140  
keskpunkt 42, 54, 70, 88, 128, 130, 159  
kimp 20, 24, 69, 101, 151  
konfokaalsed 59, 61, 102, 176, 177  
koonus 147, 155  
koonuselõige 64  
koordinaadid 4, 25, 105, elliptilised —  
102, 177, ortogonaalsed kõverjoone-  
lised — 103, 177, paraboosled —  
103, 177, kald — 77, polaar — 94,  
176, silindrilised — 176
- koordinaat-jooned 176, -pinnad 176  
koosinuse valem 37, 125  
korraldus-joon 56, -pind 138  
korrelatiivsus 41, 127  
kruvijärjekord 108  
kõdumise tunnus 68, 170  
kõdunud 67, 156
- Laplace'i viis 113  
lõikaja 69, 157, 159, — tunnus 159  
lõiked, ring — 166, tasased — 140  
lõikepunkt 69, 157, 159
- Mõõdu-kera 173, -ring 85  
mõõdu muutmine 17  
Möbiuse reegel 108
- Nabapunktid 154, 164, 167  
normaal 102, 164  
normaalne 35, 36, 123, 124, 170
- Ordinaat 100
- Paraboloid, elliptiline — 144, hüper-  
boolne — 145  
parabool 57  
paralleelsuse tunnus 35, 123, 125  
parameetiline 85, 87, 119  
Pascali lause 69  
peatasapinnad 133, 159  
peegeldus 11, 100  
polaar 41, -ne süsteem 41, 128  
polaartasapind 128, 161  
poolsus 5, 23  
pooltelg 63, 159, imaginaarne — 63,  
keskmine — 141, suurem — 63, 141,  
vähem — 63, 141, tasase lõike — 165  
poolus 41, 94, 128, 161  
potents 101, 170, -joon 102  
projektiivsus 13, 24  
projektsioon 24, 25, 28, 105, 108  
punktide arvutamine 7, — korrutis 6  
puute-koonus 160, -punkt 69, 138, 157,  
159, -silinder 160, -tasapind 138,  
157, 160, 165  
puutuja 57, 69, 157, 159, — tunnus 159  
pöörd-ellipsoid 146, -hüperboloid 146,  
-paraboloid 146, -telg 146
- Radikaaltelg 101  
ringi tunnus 47 (V 25)  
ringjoone normaalne võrrand 101  
ringjärjekord 28  
ristseisu tunnus 36, 125
- Sekulaarvõrrand 96, 134  
silinder 155  
substitutsioon 89, 90  
sümmeetria 11, 63, 139, 159  
sümmeetiline 10, 38, 63, 77, 126, 139  
sünnitajad 147, 167, 168
- Teise järgu pindade mudelid 169  
telsendusvalemid 16, 88, 174  
telg 25, 34, 47, 77, 105, 133, 139, 151, 159  
telgede pöörmine 90, 174 -vahetus 100  
tipp 63, 137, 147  
täisnurkne nelitahk 115
- Vastavus, kahekordne — 13, üks-  
ühene — 5  
välise kiire tunnus 159