TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI
TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

715

Ligikaudsete meetodite koondumine korrektsete ja mittekorrektsete ülesannete lahendamisel

Сходимость приближенных методов в корректных и некорректных задачах

Matemaatika- ja mehhaanikaalaseid töid

Труды по математике и механике

TARTU 1985

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 715 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г.

Ligikaudsete meetodite koondumine korrektsete ja mittekorrektsete ülesannete lahendamisel

Сходимость приближенных методов в корректных и некорректных задачах

Matemaatika- ja mehhaanikaalaseid töid

Труды по математике и механике

ТАРТУ 1985

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1985,715,3-11.

О ПОНЯТИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Г. Вайникко

Предлагается новое определение наибольшего отклонения метода решения некорректной задачи в случае, когда не только правая часть, но и оператор решаемого уравнения известны приближенно. Анализируются соответствующие понятия оптимальности методов по точности. В частности, известный результат об оптимальности метода Тихонова со случая точно заданного оператора распространяется на случай приближенно заданного оператора.

1. Наибольшее отклонение в случае точно заданного оператора. Пусть E и F - банаховы пространства, $A: E \to F$ - непрерывный (вообще говоря, нелинейный) оператор. Пусть правая часть f уравнения

$$Au = f \tag{1}$$

известна приближенно $(\|f_\delta - f\| \le \delta)$, а оператор A известен точно. Следуя [3], под методом решения уравнения (1) понимаем любое отображение $\mathcal{P}: F \to E$ (не обязательно непрерывное). Точность метода $\mathcal{P}$ на множестве $\mathcal{M} \subset E$ характеризуется **наибольшим отклонением** (см. [3])

$$\varphi(\delta; \mathcal{M}; \mathcal{P}; A) = \sup_{f_\delta \in F,\ u \in \mathcal{M},\ \|Au - f_\delta\| \le \delta} \|\mathcal{P} f_\delta - u\|. \tag{2}$$

Метод $\mathcal{P}_\delta : F \to E$ называется **оптимальным** на $\mathcal{M}$, если

$$\varphi(\delta; \mathcal{M}; \mathcal{P}_\delta; A) = \inf_{\mathcal{P}} \varphi(\delta; \mathcal{M}; \mathcal{P}; A);$$

асимптотически оптимальным на $\mathcal{M}$, если

$$\lim_{\delta \to 0} \left[\varphi(\delta; \mathcal{M}; \mathcal{P}_\delta; A) \Big/ \inf_{\mathcal{P}} \varphi(\delta; \mathcal{M}; \mathcal{P}; A) \right] = 1;$$

оптимальным по порядку на $\mathcal{M}$, если

$$\varphi(\delta; \mathcal{M}; \mathcal{P}_\delta; A) \le c \inf_{\mathcal{P}} \varphi(\delta; \mathcal{M}; \mathcal{P}; A), \quad 0 < \delta \le \delta_0, \quad c = \mathrm{const}$$

(инфимум берется по всем методам).

Хорошо известно (см. [3]), что

$$\frac{1}{2}\Omega(2\delta;\mathcal{M};A)\le \inf_{\mathcal{P}} \varphi(\delta;\mathcal{M};\mathcal{P};A)\le \Omega(2\delta;\mathcal{M};A), \qquad (3)$$

где

$$\Omega(\delta;\mathcal{M};A)=\sup_{u_1,u_2\in\mathcal{M},\ \|Au_1-Au_2\|\le\delta}\|u_1-u_2\|. \qquad (4)$$

Если A обратим, то $\Omega(\delta;\mathcal{M};A)$ представляет собой модуль непрерывности A^{-1} на $A\mathcal{M}$.

В [3] неравенства (3) установлены при некоторых ограничениях на $\mathcal{M}$, которые можно снять. В целях полноты изложения воспроизведем доказательство. Зададим $\varepsilon>0$ и возьмем такие $u_1,u_2\in\mathcal{M}$, что $\|Au_1-Au_2\|\le 2\delta$ и $\|u_1-u_2\|\ge\Omega(2\delta;\mathcal{M};A)-2\varepsilon$. Сузив в (2) супремум по $u\in\mathcal{M}$ до максимума по элементам u_1 и u_2, для любого метода $\mathcal{P}$ имеем

$$\varphi(\delta;\mathcal{M};\mathcal{P};A)\ge\max\Big\{\sup_{\substack{f_\delta\\ \|Au_1-f_\delta\|\le\delta}}\|\mathcal{P}f_\delta-u_1\|,\ \sup_{\substack{f_\delta\\ \|Au_2-f_\delta\|\le\delta}}\|\mathcal{P}f_\delta-u_2\|\Big\}.$$

Затем зафиксируем $f_\delta=\bar f_\delta=(Au_1+Au_2)/2$; очевидно, $\|Au_1-\bar f_\delta\|\le\delta$, $\|Au_2-\bar f_\delta\|\le\delta$. В результате

$$\varphi(\delta;\mathcal{M};\mathcal{P};A)\ge\max\{\|\mathcal{P}\bar f_\delta-u_1\|,\ \|\mathcal{P}\bar f_\delta-u_2\|\}\ge\frac{1}{2}\|u_1-u_2\|\ge$$
$$\ge\frac{1}{2}\Omega(2\delta;\mathcal{M};A)-\varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon>0$ этим доказано левое неравенство (3). Правое неравенство (3) очевидно: для всякого метода $\mathcal{P}_\delta$, обладающего тем свойством, что в случае непустого множества $\{u\in\mathcal{M}:\ \|Au-f_\delta\|\le\delta\}$ оно содержит $\mathcal{P}_\delta f_\delta$, имеем

$$\varphi(\delta;\mathcal{M};\mathcal{P}_\delta;A)\le\Omega(2\delta;\mathcal{M};A).$$

2. <u>Наибольшее отклонение в случае приближенно заданного оператора</u>. Допустим, что вместо $A:E\to F$ известно его приближение $A_\eta:E\to F$, такое что

$$\|A_\eta u-Au\|\le b\eta \quad \forall u\in\mathcal{M},\ b=b_{\mathcal{M}}=const. \qquad (5)$$

Под методом решения уравнения (I) будем понимать (ср. [3]) любое отображение $Q:F\times\mathfrak{A}\to E$, где $\mathfrak{A}$ - некоторое подмножество операторов из E в F, содержащее точный оператор A уравнения (I). Точность метода Q на множестве $\mathcal{M}\subset E$ охарактеризуем н а и б о л ь ш и м о т к л о н е н и е м

$$\psi(\delta,\eta;\mathcal{M};Q;A)=\sup_{\substack{u\in\mathcal{M},\, f_\delta\in F,\, A_\eta\in\mathfrak{A}_\eta\\ \|A_\eta u-f_\delta\|\le\delta+b\eta}}\|Q(f_\delta,A_\eta)-u\|, \quad (6)$$

где $\mathfrak{A}_\eta$ - множество операторов $A_\eta\in\mathfrak{A}$, подчиненных условию (5). Метод $Q_{\delta\eta}:F\times\mathfrak{A}\to E$ назовем $\mathfrak{A}$ - оптимальным на $\mathcal{M}$, если

$$\psi(\delta,\eta;\mathcal{M};Q_{\delta\eta};A)=\inf_Q\psi(\delta,\eta;\mathcal{M};Q;A);$$

асимптотически $\mathfrak{A}$ - оптимальным на $\mathcal{M}$, если

$$\lim_{\delta,\eta\to0}\left[\psi(\delta,\eta;\mathcal{M};Q_{\delta\eta};A)\Big/\inf_Q\psi(\delta,\eta;\mathcal{M};Q;A)\right]=1;$$

$\mathfrak{A}$ - оптимальным по порядку на $\mathcal{M}$, если

$$\psi(\delta,\eta;\mathcal{M};Q_{\delta\eta};A)\le c\inf_Q\psi(\delta,\eta;\mathcal{M};Q;A),\quad 0<\delta\le\delta_0,\quad 0<\eta\le\eta_0$$

($c=const$; инфимум берется по всем методам $Q:F\times\mathfrak{A}\to E$).

Покажем, что

$$\tfrac12\Omega(2(\delta+b\eta);\mathcal{M};A)\le\inf_Q\psi(\delta,\eta;\mathcal{M};Q;A)\le$$
$$\le\Omega(2(\delta+2b\eta);\mathcal{M};A). \quad (7)$$

Действительно, рассуждая от противного, допустим, что нарушено левое неравенство (7): для некоторого $Q:F\times\mathfrak{A}\to E$ имеем $\psi(\delta,\eta;\mathcal{M};Q;A)<\frac12\Omega(2(\delta+b\eta);\mathcal{M};A)$. Положив в (6) $A_\eta=A$, получаем, в частности,

$$\sup_{\substack{u\in\mathcal{M},\, f_\delta\in F\\ \|Au-f_\delta\|\le\delta+b\eta}}\|Q(f_\delta,A)-u\|<\tfrac12\Omega(2(\delta+b\eta);\mathcal{M};A).$$

Но $\mathcal{P}=Q(\cdot,A):F\to E$ является методом в смысле п. I, и последнее неравенство противоречит левому неравенству (3). Этим доказано левое неравенство (7). Для доказательства правого неравенства (7) введем в рассмотрение любой метод $Q_{\delta\eta}:F\times\mathfrak{A}\to E$, обладающий тем свойством, что в случае непустого множества $\{u\in\mathcal{M}:\|A_\eta u-f_\delta\|\le\delta+b\eta\}$ оно содержит приближение $u_{\delta\eta}=Q_{\delta\eta}(f_\delta,A_\eta)$. Для такого метода

$$\psi(\delta,\eta;\mathcal{M};Q_{\delta\eta};A)=\sup_{\substack{u\in\mathcal{M},\, f_\delta\in F,\, A_\eta\in\mathfrak{A}_\eta\\ \|A_\eta u-f_\delta\|\le\delta+b\eta}}\|Q(f_\delta,A_\eta)-u\|\le$$

2

$$\leq \sup_{\substack{u\in\mathcal{M},\, f_\delta\in F,\, A_\eta\in\mathfrak{A}_\eta \\ \|Au-Au_{\delta\eta}\|\leq 2\delta+4b\eta}} \|u_{\delta\eta}-u\| \leq \sup_{\substack{u_1,u_2\in\mathcal{M} \\ \|Au_1-Au_2\|\leq 2\delta+4b\eta}} \|u_1-u_2\| =$$

$$=\Omega(2\delta+4b\eta;\mathcal{M};A),$$

что и следовало доказать; мы учли, что из условий $u_{\delta\eta}\in\mathcal{M}$, $u\in\mathcal{M}$, $\|A_\eta u_{\delta\eta}-f_\delta\|\leq\delta+b\eta$, $\|A_\eta u-f_\delta\|\leq\delta+b\eta$ в силу (5) следует $\|Au-Au_{\delta\eta}\|\leq 2\delta+4b\eta$.

В [3] в случае приближенно заданного оператора привлекается другое определение наибольшего отклонения метода $Q:F\times\mathfrak{A}\to E$. В рассматриваемой нами ситуации это определение выглядит так:

$$\psi_1(\delta,\eta;\mathcal{M};Q;A_\eta)=\sup_{\substack{u\in\mathcal{M},\, f_\delta\in F,\, A\in\mathfrak{A}_\eta \\ \|Au-f_\delta\|\leq\delta}} \|Q(f_\delta,A_\eta)-u\|$$

(варьирование проводится не по A_η, а по A с центром в "точке" A_η). Из результатов [3] следует, что в случае линейных операторов A и A_η и некоторых специальных подмножеств $\mathcal{M}\subset E$ справедлив аналог неравенств (7):

$$c_0\Omega(\delta+b\eta;\mathcal{M};A)\leq\inf_Q\psi_1(\delta,\eta;\mathcal{M};Q;A_\eta)\leq c_1\Omega(\delta+b\eta;\mathcal{M};A),$$
$$0<c_0,\ c_1=\mathrm{const}$$

(более обозримые оценки $\inf\psi_1$ получены через модуль непрерывности A_η^{-1}). Отсюда и из (7) следует, что совпадают понятия оптимальности методов по порядку, соответствующие ψ и ψ_1. Понятия оптимальности и асимптотической оптимальности различаются.

3. <u>Построение $\mathfrak{A}$-оптимального метода</u>. Допустим, что для каждого фиксированного $A\in\mathfrak{A}$ в нашем распоряжении имеется некоторый оптимальный или оптимальный по порядку метод $\mathcal{P}_\delta=Q_\delta(\cdot,A)$ на $\mathcal{M}$:

$$\sup_{\substack{u\in\mathcal{M},\, f_\delta\in F \\ \|Au-f_\delta\|\leq\delta}}\|Q_\delta(f_\delta,A_\eta)-u\|\leq c\inf_{\mathcal{P}}\sup_{\substack{u\in\mathcal{M},\, f_\delta\in F \\ \|Au-f_\delta\|\leq\delta}}\|\mathcal{P}f_\delta-u\|,\quad 0<\delta\leq\delta_0, \tag{8}$$

где постоянная $c\geq 1$ не зависит от A. Убедимся, что тогда метод $Q_{\delta+b\eta}:F\times\mathfrak{A}\to E$ является $\mathfrak{A}$-оптимальным, соответственно, $\mathfrak{A}$-оптимальным по порядку на $\mathcal{M}$:

$$\psi(\delta,\eta;Q_{\delta+b\eta};\mathcal{M};A)\leqslant c\inf_Q \psi(\delta,\eta;Q;\mathcal{M};A). \qquad (9)$$

Действительно, запишем (8) для $A_\eta\in\mathfrak{A}_\eta$ с уровнем невязки $\delta+b\eta$ (вместо уровня δ):

$$\sup_{u\in\mathcal{M},\,f_\delta\in F,\,\|A_\eta u-f_\delta\|\leqslant\delta+b\eta}\|Q_{\delta+b\eta}(f_\delta,A_\eta)-u\|\leqslant$$

$$\leqslant c\inf_Q \sup_{u\in\mathcal{M},\,f_\delta\in F,\,\|A_\eta u-f_\delta\|\leqslant\delta+b\eta}\|Q(f_\delta,A_\eta)-u\|.$$

Беря супремум по $A_\eta\in\mathfrak{A}_\eta$ и учитывая, что

$$\sup_x\inf_y \chi(x,y)\leqslant\inf_y\sup_x\chi(x,y),$$

приходим к неравенству (9).

Таким образом, для построения $\mathfrak{A}$-оптимальных методов достаточно уметь строить оптимальные методы при точно заданном операторе.

4. <u>Случай линейной задачи</u>. В случае линейного ограниченного оператора $A\in\mathcal{L}(E,F)$ имеем (см. (4))

$$\Omega(\delta;\mathcal{M};A)=\omega(\delta,\mathcal{M}';A)\equiv\sup_{u\in\mathcal{M}',\,\|Au\|\leqslant\delta}\|u\|, \qquad (10)$$

где

$$\mathcal{M}'=\mathcal{M}-\mathcal{M}=\{u\in E:\ u=u_1-u_2,\ u_1\in\mathcal{M},\ u_2\in\mathcal{M}\}$$

– центрально-симметричное множество. Если $\mathcal{M}$ выпукло, то выпуклым будет и $\mathcal{M}'$. Если $\mathcal{M}$ выпукло и центрально-симметрично, то $\mathcal{M}'=2\mathcal{M}$, и неравенства (3) и (7) приобретают вид

$$\omega(\delta;\mathcal{M};A)\leqslant\inf_{\mathcal{P}}\varphi(\delta;\mathcal{M};\mathcal{P};A)\leqslant 2\omega(\delta;\mathcal{M};A), \qquad (11)$$

$$\omega(\delta+b\eta;\mathcal{M};A)\leqslant\inf_Q\psi(\delta,\eta;\mathcal{M};Q;A)\leqslant 2\omega(\delta+2b\eta;\mathcal{M};A). \qquad (12)$$

Следующая теорема уточняет соответствующий результат [2].

<u>Теорема I</u> (случай точно заданного оператора). Пусть $A\in\mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{M}\subset E$ – центрально-симметричное выпуклое множество, а метод $\mathcal{P}_\delta: F\to E$ таков, что в случае непустого множества $\{u\in\mathcal{M}:\|Au-f_\delta\|\leqslant\delta\}$ выполняются соотношения

$$\mathcal{P}_\delta f_\delta\in c_1\mathcal{M},\qquad \|A(\mathcal{P}_\delta f_\delta)-f_\delta\|\leqslant c_2\delta. \qquad (13)$$

Тогда этот метод оптимален по порядку на $\mathcal{M}$:

$$\varphi(\delta;\mathcal{M};\mathcal{P}_\delta;A)\le[1+\max\{c_1,c_2\}]\inf_{\mathcal{P}}\varphi(\delta;\mathcal{M};\mathcal{P};A). \quad (14)$$

<u>Доказательство</u>. Имеем (см. (2))

$$\varphi(\delta;\mathcal{M};\mathcal{P}_\delta;A)=\sup_{\substack{f_\delta\in F\\ \{u\in\mathcal{M}:\,\|Au-f_\delta\|\le\delta\}\ne\emptyset}}\ \sup_{\substack{u\in\mathcal{M}\\ \|Au-f_\delta\|\le\delta}}\|\mathcal{P}_\delta f_\delta-u\|.$$

Здесь в силу (13) $\mathcal{P}_\delta f_\delta-u\in(c_1+1)\mathcal{M}$, $\|A(\mathcal{P}_\delta f_\delta)-Au\|\le(c_2+1)\delta$, поэтому

$$\varphi(\delta;\mathcal{M};\mathcal{P}_\delta;A)\le\omega((c_2+1)\delta;\ (c_1+1)\mathcal{M};A)\le\omega(c\delta;\ c\mathcal{M};A)=$$

$$=c\,\omega(\delta;\mathcal{M};A)\le c\inf_{\mathcal{P}}\varphi(\delta;\mathcal{M};\mathcal{P};A),\quad c=\max\{c_1+1,\ c_2+1\}$$

(см. (11)). Теорема 1 доказана.

<u>Теорема 2</u> (случай приближенно заданного оператора). Пусть $A, A_\eta\in\mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{M}\subset E$ — центрально-симметричное выпуклое множество, а метод $Q_{\delta\eta}:F\times\mathfrak{A}\to E$ таков, что в случае непустого множества $\{u\in\mathcal{M}:\ \|A_\eta u-f_\delta\|\le\delta+b\eta\}$ выполняются соотношения

$$u_{\delta\eta}\equiv Q_{\delta\eta}(f_\delta,A_\eta)\in c_1\mathcal{M},\quad \|A_\eta u_{\delta\eta}-f_\delta\|\le c_2(\delta+b\eta). \quad (15)$$

Тогда этот метод $\mathfrak{A}$-оптимален по порядку на $\mathcal{M}$:

$$\psi(\delta,\eta;\mathcal{M};Q_{\delta\eta};A)\le[1+\max\{c_1,c_2\}]\inf_{Q}\psi(\delta,\eta;\mathcal{M};Q;A). \quad (16)$$

<u>Доказательство</u>. При фиксированном $A_\eta\in\mathfrak{A}_\eta$ для $\mathcal{P}_\delta=$ $=Q_{\delta\eta}(\cdot\,,A_\eta)$ на основании теоремы 1 имеем

$$\sup_{u\in\mathcal{M},\,f_\delta\in F,\,\|A_\eta u-f_\delta\|\le\delta+b\eta}\|Q_{\delta\eta}(f_\delta,A_\eta)-u\|=$$

$$=\varphi(\delta+b\eta;\mathcal{M};\mathcal{P}_\delta;A_\eta)\le[1+\max\{c_1,c_2\}]\inf_{\mathcal{P}}\varphi(\delta+b\eta;\mathcal{M};\mathcal{P};A_\eta)=$$

$$=[1+\max\{c_1,c_2\}]\inf_{Q}\ \sup_{u\in\mathcal{M},\,f_\delta\in F,\,\|A_\eta u-f_\delta\|\le\delta+b\eta}\|Q(f_\delta,A_\eta)-u\|$$

Беря супремум по $A_\eta\in\mathfrak{A}_\eta$, приходим к неравенству (16). Теорема 2 доказана.

5. Оптимальность метода Тихонова в случае приближенно заданного оператора. Пусть теперь E и F – гильбертовые пространства. Допустим, что некоторое третье гильбертово пространство H компактно вложено в E. Обозначим через $J \in \mathcal{L}(E,H)$ оператор, сопряженный к оператору вложения H в E:

$$(u,v)_E = (Ju, v)_H \quad \forall u \in E,\ v \in H.$$

Он вполне непрерывен ввиду компактности вложения $H \subset E$; тем более, он будет вполне непрерывен как оператор из H в H; кроме того, $J \in \mathcal{L}(H,H)$ самосопряжен и неотрицателен.

В пространстве E введем подмножество

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_\rho = \{u \in H:\ \|u\|_H \le \rho\} \subset E.$$

Операторы $A, A_\eta \in \mathcal{L}(E,F)$ можно рассматривать и как линейные непрерывные операторы из H в F, т.е. $A, A_\eta \in \mathcal{L}(H,F)$; условие (5) означает, что $\|A_\eta - A\|_{\mathcal{L}(H,F)} \le b\rho^{-1}\eta$. Под $A^*, A^*_\eta \in \mathcal{L}(F,H)$ будем понимать сопряженные операторы, построенные по паре пространств H, F (а не E, F). Известно (см. [I, 4]), что в методе Тихонова

$$u_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^* f_\delta$$

в случае точно заданного оператора A возможен такой выбор параметра $\alpha = \alpha(\delta; \mathcal{M}_\rho; A)$, что метод будет оптимальным на $\mathcal{M}_\rho$:

$$\sup_{\substack{f_\delta \in F,\ u \in \mathcal{M}_\rho \\ \|Au - f_\delta\| \le \delta}} \|u_\alpha - u\|_E = \inf_{\mathcal{P}} \sup_{\substack{f_\delta \in F,\ u \in \mathcal{M}_\rho \\ \|Au - f_\delta\| \le \delta}} \|\mathcal{P} f_\delta - u\| = \omega(\delta; \mathcal{M}_\rho; A),$$

$$\omega(\delta; \mathcal{M}_\rho; A) = \sup_{u \in \mathcal{M}_\rho,\ \|Au\| \le \delta} \|u\|_E$$

(в (II) левое неравенство превращается в равенство). Предписание для вычисления $\alpha = \alpha(\delta; \mathcal{M}_\rho; A)$ заключается в следующем:

а) вычисляем наибольшее собственное значение $\lambda = \lambda(t)$ задачи

$$Ju = \lambda\left(\frac{t}{\rho^2} I + \frac{1-t}{\delta^2} A^*A\right)u, \quad 0 \le t \le 1; \qquad (I7)$$

б) находим точку $t_* \in [0,1]$, в которой выпуклая на $[0, 1]$ функция $\lambda(t)$ достигает своего минимума;

в) полагаем $\alpha = \dfrac{t_*}{1-t_*}\left(\dfrac{\delta}{\rho}\right)^2$.

При этом $\omega(\delta; \mathcal{M}_\rho; A) = \delta\rho\|u_{t_*}\|_E / [t_*\delta^2\|u_{t_*}\|_H^2 + (1-t_*)\rho^2\|Au_{t_*}\|^2]^{1/2}$, где u_t – собственный элемент задачи (I7), соответствующий $\lambda(t)$.

Из результата п. 3 следует, что метод Тихонова

$$u_\alpha = (\alpha I + A_\eta^* A_\eta)^{-1} A_\eta f_\delta, \qquad \alpha = \alpha(\delta + b\eta; \mathcal{M}_\rho; A_\eta),$$

будет $\mathcal{L}(E,F)$ - оптимальным на $\mathcal{M}_\rho$:

$$\sup_{\substack{u\in\mathcal{M}_\rho, f_\delta\in F, A_\eta \\ \|A_\eta - A\|_{\mathcal{L}(H,F)}\le b\rho^{-1}\eta \\ \|A_\eta u - f_\delta\|\le\delta+b\eta}} \|u_\alpha - u\|_E = \inf_Q \sup_{\substack{u\in\mathcal{M}_\rho, f_\delta\in F, A_\eta \\ \|A_\eta - A\|_{\mathcal{L}(H,F)}\le b\rho^{-1}\eta \\ \|A_\eta u - f_\delta\|\le\delta+b\eta}} \|Q(f_\delta, A_\eta) - u\| =$$

$$= \sup_{\|A_\eta - A\|_{\mathcal{L}(H,F)}\le b\rho^{-1}\eta} \omega(\delta+b\eta; \mathcal{M}_\rho; A_\eta) \le \omega(\delta+2b\eta; \mathcal{M}_\rho; A)$$

(обычно и в последнем неравенстве достигается знак равенства). В приведенном выше предписании для вычисления α следует лишь задачу (I7) заменить задачей

$$J u = \lambda\left(\frac{t}{\rho^2} I + \frac{1-t}{(\delta+b\eta)^2} A_\eta^* A_\eta\right) u, \quad 0\le t\le 1. \qquad (I8)$$

Наибольшее собственное значение $\lambda = \lambda(t)$ и соответствующий ему собственный элемент u_t задачи (I8) можно найти итерационным методом. Точку минимума t_* функции $\lambda(t)$ проще всего приблизить методом деления отрезка. Для этого нужно уметь судить, в какой стороне от очередного приближения $t\in(0,1)$ находится t_*. Можно показать, что

$$t_* = t, \text{ если } (\delta+b\eta)\|u_t\|_H = \rho\|A_\eta u_t\|_F;$$
$$t_* \le t, \text{ если } (\delta+b\eta)\|u_t\|_H < \rho\|A_\eta u_t\|_F;$$
$$t_* \ge t, \text{ если } (\delta+b\eta)\|u_t\|_H > \rho\|A_\eta u_t\|_F.$$

Литература

I. А г е е в А.Л. К вопросу о построении оптимального метода решения линейного уравнения I-го рода. Изв. высш. учебн. завед. Математика, 1983, № 3, 67-68.

2. В а й н и к к о Г. Об одном классе методов регуляризации при наличии априорной информации о решении. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1984, вып. 672, 3-9.

3. И в а н о в В.К., В а с и н В.В., Т а н а н а В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. Москва, Наука, 1978.

4. M e l k m a n, A.A., M i c c h e l l i, C.A. Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data. SIAM J. Numer. Anal., 1979, 16, № 1, 87-105.

Поступило
9 IУ 1985

ON THE CONCEPT OF THE OPTIMALITY OF APPROXIMATE METHODS FOR ILL-POSED PROBLEMS

G. Vainikko

Summary

A new definition of the maximal deviation of approximative methods is introduced (see (6)) assuming that the absolute term as well as the operator of the equation are known inexactly. The corresponding optimality concepts of the methods are introduced and analysed. The optimality of Tikhonov's method with a suitable choice of the regularization parameter is proved.

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1985,715,12-20.

О ПРИНЦИПЕ НЕВЯЗКИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Т. Раус

В настоящей работе рассматривается некоторая модификация принципа невязки при решении линейных некорректны поставленных задач с несамосопряженным оператором. Для некоторых методов (метода Тихонова, явного и неявного итерационного метода) даются оценки погрешности без требования "истокопредставимости" решения. Аналогично как в случае самосопряженного оператора (см.[2]), погрешность оценивается через наименьшую погрешность метода с данным уровнем погрешности правой части.

Рассмотрим уравнение

$$Au = f, \qquad f \in R(A), \tag{1}$$

где $A \in \mathcal{L}(H,F)$ – линейный непрерывный оператор из гильбертова пространства H в гильбертого пространство F; допускается незамкнутость области значений $R(A) \subseteq F$. Предполагается, что вместо f задано $f_\delta \in F$ такое, что $\|f_\delta - f\| \le \delta$.

Рассмотрим класс методов решения уравнения (1), подробно изученный в [1]. Пусть $\{g_n\}_{n\in(0,\infty)}$ – семейство вещественно-значных функций, определенных и измеримых по Борелю на таком отрезке $[0,a]$, $a>0$, что спектр $\sigma(A^*A) \subseteq [0,a]$. Пусть при $n \geq 0$ выполняются неравенства

$$\sup_{0\le\lambda\le a} |g_n(\lambda)| \le \gamma n, \tag{2}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le a} \lambda^p |1-\lambda g_n(\lambda)| \le \gamma_p n^{-p} \quad (0 \le p \le p_0), \tag{3}$$

где $\gamma, \gamma_p = const$, $\gamma_0 = 1$, $p_0 > 0$. Наибольшее p_0, при котором (3) имеет место, называется квалификацией метода. Приближенное решение уравнения (1) строится по формуле

$$u_n = (I - A^*A g_n(A^*A))u_0 + g_n(A^*A)A^* f_\delta, \tag{4}$$

где I – единичный оператор, $A^* \in \mathcal{L}(F,H)$ – сопряженный к $A \in \mathcal{L}(H,F)$ оператор и u_0 – начальное приближение. Для методов (4) важную роль играют величины

$$\gamma_* = \sup_{n>0} \{n^{-1/2} \sup_{0\le\lambda\le a} \lambda^{1/2} |g_n(\lambda)|\}, \quad \hat\gamma_* = \overline{\lim_{n\to\infty}} \{n^{-1/2} \sup_{0\le\lambda\le a} \lambda^{1/2}|g_n(\lambda)|\}.$$

Далее рассмотрим подробнее следующие методы этого класса.

1. Метод Тихонова. За приближенное решение примем $u_r = (r^{-1}I + A^*A)^{-1}(A^*f_\delta + r^{-1}u_0)$. Это приближение имеет форму (4) с функцией $g_r(\lambda) = r/(1+r\lambda)$, для которой $\gamma = 1$, $\gamma_p = p^p(1-p)^{1-p}$, $p_0 = 1$, $\gamma_* = \hat{\gamma}_* = 1/2$.

2. Неявный итерационный метод. Пусть $\alpha = const > 0$. Рассмотрим итерации

$$(\alpha I + A^*A)u_n = \alpha u_{n-1} + A^*f_\delta, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

В качестве параметра регуляризации возьмем $r = n$. Для $u_r = u_n$ имеет место представление (4) с функцией

$$g_r(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^j \frac{1}{\alpha+\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^r\right],$$

для которой $\gamma = \alpha^{-1}$, $\gamma_p = (\alpha p)^p$, $p_0 = \infty$, $\hat{\gamma}_* = \gamma_* = b/\sqrt{\alpha}$, $b \approx 0{,}6382$.

3. Явный итерационный метод. Пусть $\mu \in (0, 2/\|A^*A\|)$. Рассмотрим итерации

$$u_n = u_{n-1} - \mu A^*(Au_{n-1} - f_\delta), \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Положив опять $r = n$, $u_r = u_n$, имеем для u_r представление (4) с функцией

$$g_r(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} \mu(1-\lambda\mu)^j = \frac{1}{\lambda}\left[1 - (1-\lambda\mu)^r\right],$$

для которой $\gamma = \mu$, $\gamma_p = [p/(\mu e)]^p$, $p_0 = \infty$, $\gamma_* = \sqrt{\mu}$, $\hat{\gamma}_* = b\sqrt{\mu}$.

Отметим, что для этих методов выполнены ещё следующие соотношения:

$$|1 - \lambda g_{r_1}(\lambda)| \le |1 - \lambda g_{r_2}(\lambda)| \quad (0 \le \lambda \le a,\ 0 \le r_2 \le r_1), \tag{5}$$

$$\lambda_1 |g_r(\lambda_1)|/\lambda_2 \le |g_r(\lambda_2)| \le |g_r(\lambda_1)| \quad (r \ge 0,\ 0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le a), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{sign}\,[(1-\lambda g_{r_1}(\lambda))\, g_{r_2}(\lambda)] = \\ &= \mathrm{sign}\,[(1-\lambda g_{r_2}(\lambda))\, g_{r_1}(\lambda)] \qquad (0 \le \lambda \le a,\ r_1, r_2 \ge 0). \end{aligned} \tag{7}$$

Сформулируем теперь правила выбора параметра. Введём оператор B_r, положив

$$B_r = \begin{cases} (I - A^*Ag_r(A^*A))^{\frac{1}{2p_0}}, & \text{если } p_0 < \infty, \\ I, & \text{если } p_0 = \infty. \end{cases}$$

Правило III. Зададим числа $b_1 > 1$, $b_2 \ge b_1$. Если $\|B_0(Au_0 - f_\delta)\| \le b_2\delta$, то положим $r = 0$. В противном случае выберем такое $r > 0$, чтобы выполнялись неравенства

$$b_1\delta \le \|B_r(Au_r - f_\delta)\| \le b_2\delta. \tag{8}$$

Для методов, приближенное u_r для которых можно вычислить при каждом $r \ge 0$ (например метод Тихонова), параметр выбирается по правилу П1; для итерационных методов используется

Правило П2. Зададим число $b>1$. Если $\|B_0(Au_0-f_\delta)\|\le b\delta$, то положим $n=0$. В противном случае выберем наименьшее число $n>0$, при котором выполняется неравенство

$$\|B_n(Au_n-f_\delta)\|\le b\delta. \tag{9}$$

Поскольку для методов I–3 $\|B_n(Au_n-f_\delta)\|$ – убывающая функция от n и $\|B_n\|\le 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|Au_n-f_\delta\|\le\delta$ (см.[I]), то выбор параметра по правилам П1 и П2 всегда гарантирован и легко реализован. В отличие от обычного принципа невязки в данном случае для методов конечной квалификации к невязке предварительно применяется оператор $(I-A^*Ag_n(A^*A))^{1/(2p_0)}$. Отметим, что для метода Тихонова и его итерированного варианта – $B_n=(I+nA^*A)^{-1/2}$ и норму $\|B_n(Au_n-f_\delta)\|$ можно вычислить через скалярное произведение

$$\|B_n(Au_n-f_\delta)\| = \sqrt{(B_n^2(Au_n-f_\delta),\ Au_n-f_\delta)}.$$

Теорема. Пусть $\|f_\delta-f\|\le\delta$ и u_* – ближайшее к начальному приближению решение уравнения (I). Если для метода I параметр выбран по правилу П1 или для методов 2 и 3 по правилу П2, то для этих методов имеет место оценка

$$\|u_{n(\delta)}-u_*\| \le \gamma_* s(c_*)\delta + \tag{I0}$$

$$+\max(c_{b_1},c_{b_2})\times\max\Big\{c_M\times\beta_A\times\sup_{\tilde f,\ \|\tilde f-f\|\le\delta}\ \inf_{n\ge 0}\|\tilde u_n-u_*\|,\ c_M\|A\|^{-1}\delta,\ g_M\hat\gamma_*\delta\Big\},$$

где
$$\tilde u_n=(I-A^*Ag_n(A^*A))u_0+g_n(A^*A)A^*\tilde f, \tag{II}$$

$$\beta_A=\max_{\lambda\in\sigma(A^*A)}\ \min_{\lambda'\in\sigma(A^*A),\ \lambda'>\lambda}(\lambda'/\lambda)^{1/4}, \tag{I2}$$

$$c_{b_1}=\begin{cases}1+\dfrac{\gamma_*\bar\gamma_{1/2}}{b_1-1} & \text{при}\quad b_1\le b_*=1+\dfrac{\hat\gamma_*^2\bar\gamma_{1/2}}{2\gamma_*}\left(1+\sqrt{1+\left(\dfrac{2\gamma_*}{\hat\gamma_*}\right)^2}\right),\\[2ex] \left(\dfrac{\gamma_*}{\hat\gamma_*}\right)^2+\dfrac{(b_1-1)^2}{(b_1-1)^2-(\hat\gamma_*\bar\gamma_{1/2})^2} & \text{при}\quad b_1>b_*,\end{cases} \tag{I3}$$

$$\bar\gamma_{1/2}=\begin{cases}\gamma_{1/2} & \text{при}\quad p_0=\infty,\\ \left[\gamma_{p_0/(2p_0+1)}\right]^{(2p_0+1)/2p_0} & \text{при}\quad p_0<\infty,\end{cases} \tag{I4}$$

$$c_{b_2}=\sqrt{(\gamma_*/\hat\gamma_*)^2+c_*\cdot\omega(c_*)},\quad c_*=2\gamma(b_2+1)^2/\hat\gamma_*^2; \tag{I5}$$

для методов I, 2,и 3, соответственно,

$$\omega(c)=(3\sqrt[3]{c}-2)^{-1};\quad (1+\ln c)^{-1};\quad (1+\ln c)^{-1}, \tag{I6}$$

$$s(c) = 0;\ 1;\ \max(1, \sqrt{\ln c}/\sqrt{2}),$$

$$\rho_M = 0;\ 1;\ 1{,}92, \qquad c_M = 1{,}03;\ 1{,}28;\ 1{,}04;$$

для методов 2 и 3 $b_1 = b_2 = b$.

Доказательству теоремы предпошлем некоторые леммы.

Лемма I. Для методов I–3 имеет место неравенство

$$\inf_{n\geq 0} \{\|(I-A^*Ag_n(A^*A))(u_0-u_*)\|^2 + \hat{\gamma}_*^2 n\delta^2\}^{1/2} \leq \tag{I7}$$

$$\leq \max\{\rho_M\hat{\gamma}_*\delta,\ c_M \sup_{\lambda\geq 0}\inf_{n\geq 0}[\|(I-A^*Ag_n(A^*A))(u_0-u_*)\|^2 + \lambda g_n^2(\lambda)\delta^2]^{1/2}\},$$

где $\rho_M = 0;\ 1;\ 1{,}92$ и $c_M = 1{,}03;\ 1{,}28;\ 1{,}04$ соответственно для методов I, 2 и 3.

Доказательство. Обозначая через n_* точку минимума функции $f(n) = \|(I-A^*Ag_n(A^*A))(u_0-u_*)\|^2 + \hat{\gamma}_*^2 n\delta^2$ и $n_0 = f(n_*)/(\hat{\gamma}_*\delta)^2$, получим

$$\|(I-A^*Ag_n(A^*A))(u_0-u_*)\|^2 \geq (n_0-n)\hat{\gamma}_*^2\delta^2 \text{ при } n\leq n_0.$$

Поскольку $g_n(\lambda)$ неубывающая функция от n, то, используя последнее неравенство, получим

$$\sup_{\lambda\geq 0}\inf_{n\geq 0}\{\|(I-A^*Ag_n(A^*A))(u_0-u_*)\|^2 + \lambda g_n^2(\lambda)\delta^2\} \geq$$

$$\geq \sup_{\lambda\geq 0}\min\{\inf_{n\leq n_0}[\hat{\gamma}_*^2(n_0-n)\delta^2 + \lambda g_n^2(\lambda)\delta^2],\ \inf_{n\geq n_0}\lambda g_n^2(\lambda)\delta^2\} = \tag{I8}$$

$$= \delta^2 \sup_{\lambda\geq 0}\min\{\inf_{n\leq n_0}[\hat{\gamma}_*^2(n_0-n) + \lambda g_n^2(\lambda)],\ \lambda g_{n_0}^2(\lambda)\}.$$

Для метода I функция $f(n) = \hat{\gamma}_*^2(n_0-n) + \lambda g_n^2(\lambda)$ имеет вид $f(n) = (n_0-n)/4 + n^2\lambda/(1+n\lambda)^2$ и легко проверить, что в случае $\lambda\leq b_0/n_0$ ($b_0 \approx 0{,}236$) функция $f(n)$ имеет на отрезке $[0, n_0]$ единственную точку минимума – точку $n = n_0$, а в случае $\lambda > b_0/n_0$ точка минимума может быть в точке $n = b_0/\lambda$ или $n = n_0$. Учитывая, что $f(n_0) = n_0^2\lambda/(1+n_0\lambda)^2 = \lambda g_{n_0}^2(\lambda)$, получим теперь после несложных вычислений

$$\delta^2 \sup_{\lambda\geq 0} \min\left\{\inf_{n\leq n_0}\left[\frac{n_0-n}{4} + \frac{n^2\lambda}{(1+n\lambda)^2}\right], \frac{n_0^2\lambda}{(1+n_0\lambda)^2}\right\} =$$

$$= \delta^2\max\left\{\sup_{\lambda,\ \lambda\leq b_0/n_0}\frac{\lambda n_0^2}{(1+n_0\lambda)^2},\ \sup_{\lambda,\ \lambda > b_0/n_0}\left[\min\left(\frac{\lambda n_0^2}{(1+\lambda n_0)^2},\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{n_0}{4} - \frac{b_0}{4\lambda} + \frac{b_0^2}{\lambda(1+b_0^2)^2}\right)\right]\right\} \approx 0{,}236\, n_0\delta^2 \approx \frac{f(n_*)}{(1{,}03)^2},$$

что вместе с (I8) доказывает лемму для метода I.

Для метода 2 рассмотрим случай $n_0 > 1$ (в случае $n_0 \le 1$ справедливость неравенства (I7) очевидна). Используя неравенство $(1+n_0^{-1})^{-n} \le 2^{-n/n_0}$ при $n_0 > 1$ и выбрав $\lambda = \lambda_0 = 1/(\alpha n_0)$, получим

$$\delta^2 \sup_{\lambda \ge 0} \min\left\{ \inf_{n \le n_0} \left[\hat{\gamma}_*^2(n_0 - n) + \lambda g_n^2(\lambda)\right], \lambda g_{n_0}^2(\lambda)\right\} \ge$$

$$\ge \frac{\delta^2}{\alpha} \min\left\{ \inf_{n \le n_0} \left[b^2(n_0-n) + n_0(1-(1+n_0^{-1})^{-n})^2\right], n_0(1-(1+n_0^{-1})^{-n_0})^2\right\} \ge$$

$$\ge \frac{\delta^2}{\alpha} \min\left\{ \inf_{n \le n_0} \left[b^2(n_0-n) + n_0(1-2^{-n/n_0})^2\right], \frac{n_0}{4}\right\} = \frac{n_0 \delta^2}{4\alpha} \approx \frac{f(n_*)}{(1{,}28)^2} .$$

Для метода 3 рассмотрим случай $n_0 > \rho_M$. Используя неравенство $(1-\rho_M/n_0)^n \le e^{-n\rho_M/n_0}$ при $n_0 > \rho_M$ и выбрав $\lambda = \lambda_0 = \rho_M/(\mu n_0)$, доказательство проводится аналогично.

Лемма 2. Для методов I–3 имеет место неравенство

$$\sup_{\lambda \ge 0} \inf_{n \ge 0} \left\{ \|(I - A^*A g_n(A^*A))(u_0 - u_*)\|^2 + \lambda g_n^2(\lambda)\delta^2 \right\}^{1/2} \le$$

$$\le \max\left\{ \beta_A \sup_{\tilde{f},\, \|\tilde{f}-f\| \le \delta} \inf_{n \ge 0} \|\tilde{u}_n - u_*\|, \ \delta \|A\|^{-1} \right\},$$

где величина β_A определена формулой (I2).

Доказательство. Обозначим

$$\psi(n,\lambda) = \left\{ \|(I - A^*A g_n(A^*A))(u_0 - u_*)\|^2 + \lambda g_n^2(\lambda)\delta^2 \right\}^{1/2}$$

и докажем сначала, что

$$\sup_{\lambda \ge 0} \inf_{n \ge 0} \psi(n,\lambda) \le \max\left\{ \beta_A \sup_{\lambda \in \sigma(A^*A)} \inf_{n \ge 0} \psi(n,\lambda), \ \delta\|A\|^{-1}\right\}. \quad (I9)$$

Обозначим через $n(\lambda)$ некоторое значение параметра n, при котором $\inf_n \psi(n,\lambda) = \psi(n(\lambda),\lambda)$, и через λ_0 некоторое значение параметра λ, при котором

$$\sup_{\lambda \ge 0} \inf_{n \ge 0} \psi(n,\lambda) = \psi(n(\lambda_0),\lambda_0).$$

Предположим сначала, что $\lambda_0 \le \|A^*A\|$. Обозначим

$$\lambda_1 = \min_{\lambda \in \sigma(A^*A),\, \lambda \ge \lambda_0} \lambda \ ; \qquad \lambda_2 = \max_{\lambda \in \sigma(A^*A),\, \lambda < \lambda_0} \lambda .$$

Тогда, очевидно, справедливы неравенства

$$\psi(n(\lambda_0),\lambda_0) \le \psi(n(\lambda_i),\lambda_0) \qquad (i=1,2),$$

$$\sup_{\lambda \in \sigma(A^*A)} \inf_{n \ge 0} \psi(n,\lambda) \ge \psi(n(\lambda_i),\lambda_i) \qquad (i=1,2).$$

На основании последних неравенств и (6) получим

$$\frac{\sup\limits_{\lambda\geq 0}\inf\limits_{n\geq 0}\psi(n,\lambda)}{\sup\limits_{\lambda\in\sigma(A^*A)}\inf\limits_{n\geq 0}\psi(n,\lambda)} \leq \min_{i=1,2}\left\{\frac{\psi(n(\lambda_i),\lambda_0)}{\psi(n(\lambda_i),\lambda_i)}\right\} \leq$$

$$\min_{i=1,2}\max\left\{1,\ \frac{\sqrt{\lambda_0}\,g_{n(\lambda_i)}(\lambda_0)}{\sqrt{\lambda_i}\,g_{n(\lambda_i)}(\lambda_i)}\right\} \leq \min\left(\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_2}},\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}\right) \leq \sqrt[4]{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}},$$

откуда, учитывая произвольность величин $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, вытекает неравенство (I9).

Если $\lambda_0 > \|A^*A\|$, то, учитывая неравенство $\lambda g_n(\lambda) \leq 1$ при каждом $n, \lambda \geq 0$, получим

$$\sup_{\lambda\geq 0}\inf_{n\geq 0}\psi(n,\lambda) = \psi(n(\lambda_0),\lambda_0) \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\psi(n,\lambda_0) = \delta/\sqrt{\lambda_0} \leq \delta/\|A\|$$

и неравенство (I9) имеет место и в этом случае.

Нетрудно показать, что для каждого $\lambda\in\sigma(A^*A)$ существует $f_\lambda\in F$ такое, что $\|f_\lambda - f\| = \delta$ и

$$\lambda g_n^2(\lambda)\delta^2 \leq \|g_n(A^*A)A^*(f_\lambda - f)\|^2 \qquad \forall n\geq 0.$$

Отсюда с помощью равенства

$$\tilde{u}_n - u_* = (I - A^*Ag_n(A^*A))(u_0 - u_*) + g_n(A^*A)A^*(\tilde{f} - f)$$

и соотношения (7) получим

$$\sup_{\lambda\in\sigma(A^*A)}\inf_{n\geq 0}\{\|(I-A^*Ag_n(A^*A))(u_0-u_*)\|^2 + \lambda g_n^2(\lambda)\delta^2\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \sup_{\tilde{f},\ \|\tilde{f}-f\|\leq\delta}\ \inf_{n\geq 0}\{\|(I-A^*Ag_n(A^*A))(u_0-u_*)\|^2 + \|g_n(A^*A)A^*(\tilde{f}-f)\|^2\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \sup_{\tilde{f},\ \|\tilde{f}-f\|\leq\delta}\ \inf_{n\geq 0}\|\tilde{u}_n - u_*\|,$$

что вместе с (I9) доказывает лемму.

Лемма 3. Пусть $c>1$, $n_1\geq 0$. Тогда для методов I–3 при любом $v\in H$ и при любом n_2 таком, что $n_2\geq n_1$, справедливо неравенство

$$\|(I - A^*Ag_{n_1}(A^*A))v\|^2 \leq c\,\omega(c)\,\|(I - A^*Ag_{n_2}(A^*A))v\|^2 +$$

$$+ 2\,\omega(c)(n_2 - n_1 + d(c))\,\gamma\,\|B_{n_1}(I - A^*Ag_{n_1}(A^*A))Av\|^2,$$

где функция $\omega(c)$ определена формулой (I6) и $d(c) = 0;\ 0;\ \ln c/2$ соответственно для методов I, 2 и 3.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2 в [2] и здесь опускается.

Доказательство теоремы. Докажем сначала, что имеет место неравенство

$$\|u_{n(\delta)}-u_*\| \le \gamma_*\, s(c_*)\,\delta + \max(c_{\ell_1}, c_{\ell_2}, \gamma_*/\hat{\gamma}_*) \inf_{n\ge 0}\{\|(I-A^*Ag_n(A^*A))(u_0-u_*)\|^2+\hat{\gamma}_*^2 n\delta^2\}^{1/2}. \tag{20}$$

Имеем

$$u_n-u_* = (I-A^*Ag_n(A^*A))(u_0-u_*)+g_n(A^*A)A^*(f_\delta-f), \tag{21}$$

$$B_n(Au_n-f_\delta) = B_n(I-A^*Ag_n(A^*A))A(u_0-u_*) - B_n(I-A^*Ag_n(A^*A))(f_\delta-f). \tag{22}$$

Из (21), (3) следует, что

$$\|u_n-u_*\| \le \|(I-A^*Ag_n(A^*A))(u_0-u_*)\|+\gamma_*\sqrt{n}\,\delta, \tag{23}$$

$$\|B_n(I-A^*Ag_n(A^*A))\| \le 1. \tag{24}$$

Для определяемого по правилу П1 или П2 $n=n(\delta)$ на основании (8), (9), (22) и (24) получим

$$\|B_{n(\delta)}(I-A^*Ag_{n(\delta)}(A^*A))A(u_0-u_*)\| \le (\ell_2+1)\delta, \tag{25}$$

$$\|B_{n(\delta)-q}(I-A^*Ag_{n(\delta)-q}(A^*A))A(u_0-u_*)\| \ge (\ell_1-1)\delta, \tag{26}$$

где $q=0$ для метода 1 и $q=1$ для методов 2 и 3. Обозначим через n_* значение параметра, при котором функция $f(n)= \|(I-A^*Ag_n(A^*A))(u_0-u_*)\|^2+\hat{\gamma}_*^2 n\delta^2$ достигает минимума.

Предположим сначала, что $n_* \le n(\delta)$. Тогда в силу (5)

$$\|(I-A^*Ag_{n(\delta)}(A^*A))(u_0-u_*)\| \le \|(I-A^*Ag_{n_*}(A^*A))(u_0-u_*)\|. \tag{27}$$

Элементарный счет при $n_* \le n(\delta)-q$ дает для методов 1–3

$$\|B_{n(\delta)-q}(I-A^*Ag_{n(\delta)-q}(A^*A))A(I-A^*Ag_{n_*}(A^*A))^{-1}\| \le$$
$$\le \max_{\lambda\ge 0} B_{n(\delta)-q}(\lambda)(1-\lambda g_{n(\delta)-q}(\lambda))\sqrt{\lambda}\,(1-\lambda g_{n_*}(\lambda))^{-1} \le$$
$$\le \bar{\gamma}_{1/2}\,(n(\delta)-q-n_*)^{-1/2},$$

откуда

$$\|B_{n(\delta)-q}(I-A^*Ag_{n(\delta)-q}(A^*A))A(u_0-u_*)\| \le$$
$$\le \bar{\gamma}_{1/2}\,(n(\delta)-q-n_*)^{-1/2}\,\|(I-A^*Ag_{n_*}(A^*A))(u_0-u_*)\|,$$

и на основании (26) получим

$$\|(I-A^*Ag_{n_*}(A^*A))(u_0-u_*)\| \ge (\bar{\gamma}_{1/2})^{-1}\sqrt{n(\delta)-q-n_*}\,(\ell_1-1)\delta. \tag{28}$$

Используя неравенства (27), (28), после несложных вычислений получим

$$\frac{\|(I-A^*Ag_{n(\delta)}(A^*A))(u_0-u_*)\| + \gamma_*\sqrt{n(\delta)}\,\delta}{\inf\limits_{n\geq 0}\{\|(I-A^*Ag_n(A^*A))(u_0-u_*)\|^2+\hat{\gamma}_*^2 n\delta^2\}^{1/2}+\gamma_* s(c_*)\delta} \leq$$

$$\leq \max\Big\{ \max_{n_*,\ n(\delta)-q\leq n_*\leq n(\delta)}\ \max_{y\geq 0} \frac{y+\gamma_*\sqrt{n(\delta)}/\hat{\gamma}_*}{\sqrt{y^2+n_*}+s(c_*)},$$

$$\max_{n_*,\ n_*\leq n(\delta)-q}\ \max_{y,\ y\geq(\tilde{\gamma}_{*}\hat{\gamma}_*)^{-1}\sqrt{n(\delta)-q-n_*}\,(b_1-1)} \frac{y+\gamma_*\sqrt{n(\delta)}/\hat{\gamma}_*}{\sqrt{y^2+n_*}+s(c_*)}\Big\} \leq$$

$$\leq \max(\gamma_*/\hat{\gamma}_*,\ c_{b_1}),$$

откуда на основании (23) вытекает неравенство (20) при $n_*\leq n(\delta)$.

Предположим теперь, что $n_*\geq n(\delta)$. Так как $c_*=2\gamma(b_2+1)^2/\hat{\gamma}_*^2>1$ при $b_2>1$, то выбрав в лемме 3 $c=c_*$, с помощью (25) получим

$$\|(I-A^*Ag_{n(\delta)}(A^*A))(u_0-u_*)\|^2 \leq$$

$$\leq 2\omega(c_*)(n_*-n(\delta)+d(c_*))\gamma(b_2+1)^2\delta^2 + c_*\omega(c_*)\,\|(I-A^*Ag_{n_*}(A^*A))(u_0-u_*)\|^2.$$

Поскольку на основании последнего неравенства

$$\frac{\|(I-A^*Ag_{n(\delta)}(A^*A))(u_0-u_*)\| + \gamma_*\sqrt{n(\delta)}\,\delta}{\inf\limits_{n\geq 0}\{\|(I-A^*Ag_n(A^*A))(u_0-u_*)\|^2+\hat{\gamma}_*^2 n\delta^2\}^{1/2}+\gamma_* s(c_*)\delta} \leq$$

$$\leq \max_{y\geq 0}\ \max_{n_*,\ n_*\geq n(\delta)} \frac{\sqrt{\omega(c_*)}\sqrt{2(n_*-n(\delta)+d(c_*))\gamma(b_2+1)^2\delta^2+c_*y}+\gamma_*\sqrt{n(\delta)}\,\delta}{\sqrt{y+\hat{\gamma}_*^2(n_*+d(c_*))\delta^2}} \leq$$

$$\leq \max_{\tilde{y}\geq 0}\ \max_{x,\ x\geq n(\delta)} \frac{\sqrt{c_*\,\omega(c_*)}\sqrt{x-n(\delta)+\tilde{y}}+\gamma_*\sqrt{n(\delta)}/\hat{\gamma}_*}{\sqrt{\tilde{y}+x}} =$$

$$= \sqrt{(\gamma_*/\hat{\gamma}_*)^2+c_*\omega(c_*)} = c_{b_2},$$

то в силу (23) неравенство (20) имеет место и в случае $n_*\geq n(\delta)$.

Теперь, учитывая неравенство $\max(c_{b_1}, c_{b_2})\geq \gamma_*/\hat{\gamma}_*$ при $b_1\leq b_2$ из (20) и лемм I, 2 непосредственно вытекает утверждение теоремы.

Без доказательства отметим, что в условиях теоремы оценка (I0)–(I5) имеет место ещё для итерированного варианта метода Тихонова и для метода задачи Коши (их определения см. в [I]), причём соответственно

$$\omega(c) = ((2m+1)c^{1/(2m+1)}-2m)^{-1};\quad \rho_M=0;\quad c_M=1{,}15;\quad s(c)=0;$$

$$\omega(c) = (1+\ln c)^{-1};\quad \rho_M=0;\quad c_M=1{,}04;\quad s(c)=0.$$

Для метода спектральной срезки в виде $u_n=(A^*A)^{-1}(I-P(\frac{1}{n}))A^*f_\delta$ удается доказать оценку (доказательство в некоторой мере отличается от приведенного)

$$\| u_{n(\delta)} - u_* \| \le \max(c_{b_1}, c_{b_2}) \sup_{f, \|\tilde f - f\| \le \delta} \inf_{n \ge 0} \| \tilde u_n - u_* \|,$$

где

$$c_{b_1} = b_1 / \sqrt{b_1^2 - 1}, \quad c_{b_2} = b_2 + 1.$$

Если вместо оператора A известно приближение $A_\eta \in \mathcal{L}(H, F)$ такое, что $\|A_\eta - A\| \le \eta$, и в правилах П1 и П2 вместо δ положить $\delta + \eta \|u_*\|$, то теорема имеет место, если в ее формулировке вместо δ, A и f положить, соответственно, $\delta + \eta \|u_*\|$, A_η и $A_\eta u_*$

В заключение приведена зависимость коэффициента $c = \max(c_{b_1}, c_{b_2})$ от $b_1 = b_2 = b$ для некоторых методов. В таблице подчеркнуты наименьшие значения коэффициента c для соответственного метода.

Метод \ b	1,10	1,14	1,18	1,23	1,28	2,00	10,00
Тихонова	2,92	<u>2,37</u>	2,39	2,42	2,44	2,80	5,99
итер. неявн.	5,51	4,22	3,50	2,96	<u>2,66</u>	3,20	9,01
итер. явн.	5,29	4,06	3,38	<u>2,88</u>	2,92	3,42	9,09
задачи Коши	3,74	2,95	<u>2,57</u>	2,61	2,66	3,20	9,01
спектр. срезки	2,40	<u>2,14</u>	2,18	2,23	2,28	3,00	11,00

Литература

1. В а й н и к к о Г. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту, ТГУ, 1982.

2. Р а у с Т. О принципе невязки при решении некорректных задач. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1984, 672, 16-26.

Поступило
29 III 1985

RESIDUE PRINCIPLE FOR ILL-POSED PROBLEMS WITH NON-SELF-CONJUGATE OPERATOR

T. Raus

Summary

A modification of residue principle for ill-posed problems with non-self-conjugate operator is studied. Error estimations are deduced without the requirement of the smoothness of solutions.

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1985,715,21-29

СВЕДЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НАСЛЕДСТВЕННОЙ СРЕДЫ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Я. Янно

I. Введение. Рассмотрим задачу, которая описывает колебания однородного наследственно-упругого стержня на интервале $0\le x<\infty$ с временем $t\in[0,\infty)$:

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt}(x,t)+\int_0^t K(t-s)u_{tt}(x,s)ds=a^2u_{xx}(x,t),\\ &0\le x<\infty,\quad 0\le t<\infty,\\ &u(x,0)=u_t(x,0)=0,\quad u_x(0,t)=\varphi_0(t). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Здесь $u(x,t)$ – перемещение материальной точки стержня, $\varphi_0(t)$ – заданная деформация в точке $x=0$ и $K(t)$ – функция, характеризующая наследственные свойства стержня. Функция $K(t)$ называется ядром ползучести. Её резольвенту $R(t)$, которая определяется формулой

$$R(t)-K(t)+\int_0^t R(t-s)K(s)ds=0$$

называют ядром релаксации. Иногда используют и модифицированные ядра $R_1(t)$ и $K_1(t)$, которые связаны с $R(t)$ и $K(t)$ формулами

$$R(t)=R_1(t)-\frac14\int_0^t R_1(t-s)R_1(s)ds,$$

$$K(t)=K_1(t)+\frac14\int_0^t K_1(t-s)K_1(s)ds \qquad (2)$$

Согласно физическому существу $R_1(t), K_1(t), R(t)$, $K(t)$ непрерывны, положительны и $\int_0^\infty R(t)dt<1$, $\int_0^\infty R_1(t)dt<\infty$, $\int_0^\infty K_1(t)dt<\infty$, $\int_0^\infty K(t)dt<\infty$ (см. [5]). Отмеченные свойства функций $R_1(t)$, $K_1(t)$, $K(t)$ математически являются следствиями свойств $R(t)$. Во многих наследственных моделях делают более строгие предположения о $K(t)$, а именно, что она монотонно убывающая и выпукла. Это тоже связано с физическим существом модели. Такой подход был использован, например, в [1] для изучения свойств фундаментального решения волнового оператора с памятью. Но эти свойства $K(t)$ уже не являются следствиями соответствующих свойств $R(t)$.

Наша цель – исследовать разрешимость обратной задачи, которая была поставлена в [3]. Она состоит в следующем: найти такое ядро $K(t)$, при котором решение прямой задачи (I) $U(x,t)$ удовлетворяет дополнительному условию $U_x(\ell,t)=\varphi_\ell(t)$, где $\varphi_\ell(t)$ – заданная функция. В [3] и [4] рассматривалась возможность решения обратной задачи на основе методов оптимизации. В данной статье мы сведем задачу к интегральному уравнению Вольтерра первого рода.

2. О существовании и единственности решения прямой задачи

Теорема I. Пусть функция $K(t)$ непрерывна, положительна, монотонно убывающая, выпукла и $\int_0^\infty K(t)dt<\infty$. Пусть $\varphi_0(t)\in C^3[0,\infty)$, $\varphi(0)=\varphi_0'(0)=0$ и найдутся константы $M>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$ такие, что $|\varphi_0^{(\gamma)}(t)|<Me^{\alpha t}$, где $\gamma=0,1,$ 2, 3. Тогда задача (I) имеет в классе функций

$$U=\{U(x,t)\in C^2([0,\infty)\times[0,\infty)) : \exists M>0, \alpha\in\mathbb{R} : |U(x,t)|<$$

$$<Me^{\alpha t},\ |U_\gamma(x,t)|<Me^{\alpha t},\ \gamma=x,xx,t,tt\}$$ единственное решение, причём $U(x,t)=0$ при $x\geq at$.

Доказательство. Применяем к задаче (I) преобразование Лапласа по переменной t ($f(p)=\mathcal{L}_{t\to p}(F(t))=\int_0^\infty F(t)e^{-pt}dt$, $p\in\mathbb{C}$). Обозначим $\mathcal{L}(K(t))=k(p)$, $\mathcal{L}(U(x,t))=u(x,p)$, $\mathcal{L}(\varphi_0(t))=\bar\varphi_0(p)$. В результате получим задачу

$$\left.\begin{aligned} &u_{xx}(x,p)-\frac{p^2}{a^2}(k(p)+1)u(x,p)=0,\\ &u_x(0,p)=\bar\varphi_0(p). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Общее решение уравнения в (3) следующее:

$$u(x,p)=C_1(p)e^{\frac{xp}{a}\sqrt{k(p)+1}}+C_2(p)e^{-\frac{xp}{a}\sqrt{k(p)+1}} \tag{4}$$

Здесь и в последующем из двух значений квадратного корня выбираем

$$\sqrt{k(p)+1}=\sqrt{\frac{|k(p)+1|+Re(k(p)+1)}{2}}+i\frac{Im(k(p)+1)}{\sqrt{2(|k(p)+1|+Re(k(p)+1))}}$$

(как ниже увидим, знаменатель второго слагаемого не равен нулю).

Рассмотрим поведение функции $Re\left(-\frac{xp}{a}\sqrt{\kappa(p)+1}+pt_0\right)$ на полуплоскости $Re\,p>\varkappa>0$. В силу свойств функции $\mathcal{K}(t)$ $Re\,\kappa(p)=\int_0^\infty e^{-Re\,pt}\mathcal{K}(t)\cos \Im m\,pt\,dt\geq 0$, $Re\,p>0$, $\Im m\,p\in\mathbb{R}$, $\Im m\,\kappa(p)=-\int_0^\infty e^{-Re\,pt}\mathcal{K}(t)\sin \Im m\,pt\,dt\leq 0$, $Re\,p>0$, $\Im m\,p\geq 0$ (см. [I]), и значит $\operatorname{sign}\Im m\,\kappa(p)=-\operatorname{sign}\Im m\,p$, $Re\,p>0$. Следовательно

$$Re\left(-\frac{px}{a}\sqrt{\kappa(p)+1}+pt_0\right)=-\frac{x}{a}Re\,p\sqrt{\frac{|\kappa(p)+1|+Re(\kappa(p)+1)}{2}}+$$

$$+\frac{x}{a}\frac{\Im m\,p\,\Im m(\kappa(p)+1)}{\sqrt{2(|\kappa(p)+1|+Re(\kappa(p)+1))}}+Re\,pt_0\leq$$

$$\leq -Re\,p\left(\frac{x}{a}\sqrt{\frac{|\kappa(p)+1|+Re\,\kappa(p)+1}{2}}-t_0\right)\leq$$

$$\leq -Re\,p\left(\frac{x}{a}\sqrt{\frac{2Re\,\kappa(p)+2}{2}}-t_0\right)\leq -Re\,p\left(\frac{x}{a}-t_0\right)\leq -\varkappa\left(\frac{x}{a}-t_0\right) \quad (5)$$

при $Re\,p>\varkappa>0$, $\frac{x}{a}>t_0$. Отсюда следует, что

$$Re\left(-\frac{xp}{a}\sqrt{\kappa(p)+1}\right)\leq -\frac{\varkappa}{a}x\,,\quad Re\,p>\varkappa>0. \quad (5')$$

Изображения функций $\mathcal{U}(x,t)$ из класса U имеют свойство $u(x,p)\to 0$ при $Re\,p\to\infty$ равномерно по x и $\Im m\,p$. Действительно,

$$|u(x,p)|=\left|\int_0^\infty \mathcal{U}(x,t)e^{-pt}dt\right|\leq \int_0^\infty|\mathcal{U}(x,t)|e^{-Re\,pt}dt\leq$$

$$\leq M\int_0^\infty e^{(\alpha-Re\,p)t}dt=\frac{M}{Re\,p-\alpha}.$$

Если теперь допустить, что $C_1(p)$ в формуле (4) имеет ненулевые значения в точках, где p имеет сколь угодно большую действительную часть, то в силу оценки (5') в этих точках при $x\to\infty$ первое слагаемое по модулю возрастает неограниченно, а второе слагаемое сходится к нулю. Но это противоречит полученной оценке $u(x,p)$. Следовательно $C_1(p)\equiv 0$ в какой-то полуплоскости $Re\,p>\gamma$ и из формулы (4) с учетом начального условия в (3) получим

$$u(x,p)=-\frac{\bar{\varphi}_0(p)}{\frac{p}{a}\sqrt{\kappa(p)+1}}\,e^{-\frac{xp}{a}\sqrt{\kappa(p)+1}}\,,\quad Re\,p>\gamma. \quad (6)$$

Тем самым доказана и единственность решения задачи (I) в классе .

Для доказательства существования решения используем следующий результат (см. [2]): Теорема А. Если функция комплексной переменной $f(p)$ аналитична в какой-то полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma$ и оценима $|f(p)| < C|p|^{-\nu}$, $\nu > 1$, то существует оригинал $\mathcal{L}^{-1}_{p\to t}(f(p)) = F(t)$, причём функция $F(t)$ непрерывна на $[0,\infty)$, $F(0)=0$ и $|F(t)| < Me^{\alpha t}$.

Известно, что $K(p) \to 0$ при $\operatorname{Re} p \to \infty$ равномерно по $\operatorname{Im} p$ (см. [I]). Также $|\mathcal{L}(\varphi_0'''(t))| \le M(\operatorname{Re} p - \alpha)^{-1}$. Поскольку

$$\mathcal{L}(\varphi_0'''(t)) = p^3\bar{\varphi}_0(p) - p^2\varphi_0(0) - p\varphi_0'(0) - \varphi_0''(0) = p^3\bar{\varphi}_0(p) - \varphi_0''(0),$$

то $|\bar{\varphi}_0(p)| < C|p|^{-3}$ при $\operatorname{Re} p > \gamma$. Так и $|K(p)| < 1$ при $\operatorname{Re} p > \gamma$. Учитывая ещё (5'), получим из (6)

$$|u(x,p)| < C|p|^{-4}, \quad \operatorname{Re} p > \gamma.$$

Отсюда $|p^2 u(x,p)| < C|p|^{-2}$, $\operatorname{Re} p > \gamma$ и из уравнения в (3) $|u_{xx}(x,p)| < C|p|^{-2}$, $\operatorname{Re} p > \gamma$. Функция $u(x,p)$ аналитична при $\operatorname{Re} p > \gamma$ в силу аналитичности $K(p)$ и $\bar{\varphi}_0(p)$ (свойство преобразования Лапласа (см. [2])). Условия теоремы А выполнены для $u(x,p)$, $p^2 u(x,p)$, $u_{xx}(x,p)$. Их оригиналы есть $U(x,t)$, $U_{tt}(x,t)$, $U_{xx}(x,t)$. В силу этой же теоремы функция $U(x,t)$ принадлежит классу U.

В заключение докажем утверждение $U(x,t) = 0$, $x \ge at$. Фиксируя $t_0 < \frac{x}{a}$ и используя формулу обращения преобразования Лапласа, имеем

$$U(x,t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{pt_0}\left(-\frac{\bar{\varphi}_0(p)}{\frac{p}{a}\sqrt{K(p)+1}}\, e^{-\frac{xp}{a}\sqrt{K(p)+1}}\right) d\operatorname{Im} p =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{\bar{\varphi}_0(p)}{\frac{p}{a}\sqrt{K(p)+1}}\, e^{-\frac{xp}{a}\sqrt{K(p)+1}+pt_0}\right) d\operatorname{Im} p =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}_{p\to t}\left(-\frac{\bar{\varphi}_0(p)}{\frac{p}{a}\sqrt{K(p)+1}}\, e^{-\frac{xp}{a}\sqrt{K(p)+1}+pt_0}\right)\Bigg|_{t=0} = 0,$$

поскольку функция

$$-\frac{\bar{\varphi}_0(p)}{\frac{p}{a}\sqrt{K(p)+1}}\, e^{-\frac{xp}{a}\sqrt{K(p)+1}+pt_0}$$

тоже удовлетворяет условиям теоремы А (экспоненциальный член ограничен в силу (5)). Теорема доказана.

Проведенное рассуждение позволяет установить существование обобщенного решения задачи (I), если начальные данные обладают меньшей гладкостью, чем в теореме I. Естественно назвать обобщенным решением задачи (I) функцию $U(x,t)$, преобразование Лапласа по t которой является решением задачи (3). В дальнейшем нам понадобится величина $U_x(l,t)$. Поэтому от обобщенного решения желательна гладкость $C^1([0,\infty)\times[0,\infty))$.

Несложная модификация доказательства теоремы I дает следующий результат

Теорема 2. Пусть для $K(t)$ выполнены условия теоремы I. Пусть $\varphi_0(t)\in C^2[0,\infty)$, $\varphi_0(0)=0$ и найдутся $M>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$ такие, что $|\varphi_0^{(\gamma)}(t)|<Me^{\alpha t}$, $\gamma=0,1,2$. Тогда задача (3) имеет единственное решение $u(x,p)$, оригинал которого $U(x,t)=$
$=\mathcal{L}^{-1}_{p\to t}(u(x,p))$ принадлежит классу $\hat{U}=\{U(x,t)\in C^1([0,\infty)\times$
$[0,\infty)) : |U(x,t)|<Me^{\alpha t}, |U_t(x,t)|<Me^{\alpha t}, |U_x(x,t)|<Me^{\alpha t}\}$, т.е. у задачи (I) найдется единственное обобщенное решение из класса $\hat{U}$. Кроме того, $U(x,t)=0$ при $x\geq at$.

3. Сведение обратной задачи к интегральному уравнению. Поставим теперь задачу определения $K(t)$, располагая дополнительным данным $U_x(\ell,t)=\varphi_\ell(t)$ о решении задачи (I).

Теорема 3. Пусть функции $\varphi_0(t)$ и $K(t)$ удовлетворяют условиям теоремы I. Пусть функция $K_1(t)$, определяемая выражением (2), непрерывна, положительна и $\int_0^\infty K_1(t)\,dt<\infty$. Тогда $K_1(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению первого рода

$$\int_0^{t_1} G(t_1,s)K_1(s)\,ds=f(t_1)\ ,\quad 0\leq t_1<\infty\ , \tag{7}$$

где

$$G(t_1,s)=\int_{\ell/a}^{t_1+\ell/a-s}\left(-s\varphi_0'(t_1+\ell/a-s-\tau)\varphi_\ell(\tau)+\varphi_0(t_1+\ell/a-s-\tau)\varphi_\ell(\tau)\right)d\tau, \tag{7'}$$

$$f(t_1)=\int_{\ell/a}^{t_1+\ell/a}\frac{2a}{\ell}\left(-\frac{2\ell}{a}+2s-t_1\right)\varphi_0(t_1+\ell/a-s)\varphi_\ell(s)\,ds \tag{7''}$$

и $\varphi_\ell(t)=U_x(\ell,t)$.

Доказательство. Обозначим $\mathcal{L}(\varphi_\ell(t))=\Phi_\ell(p)$, $\mathcal{L}(K_1(t))=$
$=k_1(p)$. В силу (2)

$$k(p)=k_1(p)+\frac{1}{4}k_1^2(p).$$

Свойства $K_1(t)$ гарантируют сходимость $k_1(p)\to 0$, $\mathrm{Re}\,p\to\infty$ (см. [I]). Согласно тому, как мы фиксировали значение квадратного корня в доказательстве теоремы I, $\sqrt{k(p)+1}=\frac{1}{2}k_1(p)+1$ и из формулы (6) имеем

$$\Phi_\ell(p)=u_x(\ell,p)=\Phi_0(p)e^{-\frac{p\ell}{a}\sqrt{k(p)+1}}=\Phi_0(p)e^{-\frac{p\ell}{a}\left(\frac{1}{2}k_1(p)+1\right)} \tag{8}$$

Делим полученное равенство на $\Phi_0(p)$ и дифференцируем по p. Это возможно, поскольку изображение Лапласа является аналитичным. Итак,

$$\frac{\bar{\varphi}_\ell'(p)\,\bar{\varphi}_0(p)-\bar{\varphi}_\ell(p)\,\bar{\varphi}_0'(p)}{\bar{\varphi}_0^2(p)} = \left(-\frac{\ell}{a}\left(\frac{1}{2}K_1(p)+1\right)-\frac{\ell p}{2a}K_1'(p)\right)e^{-\frac{\ell p}{a}\left(\frac{1}{2}K_1(p)+1\right)} =$$

$$=\left(-\frac{\ell}{a}\left(\frac{1}{2}K_1(p)+1\right)-\frac{\ell p}{2a}K_1'(p)\right)\frac{\bar{\varphi}_\ell(p)}{\bar{\varphi}_0(p)},$$

или

$$\bar{\varphi}_0(p)\bar{\varphi}_\ell(p)\left(K_1(p)+pK_1'(p)\right)=\frac{2a}{\ell}\bar{\varphi}_\ell(p)\bar{\varphi}_0'(p)-\frac{2a}{\ell}\bar{\varphi}_\ell'(p)\bar{\varphi}_0(p)-2\bar{\varphi}_0(p)\bar{\varphi}_\ell(p). \qquad (9)$$

Применим к этому выражению обратное преобразование Лапласа (оригинал $f'(p)$, как известно, есть $-t\,\mathcal{L}^{-1}(f(p))$ (см. [2])). Получим

$$\int_0^t K_1(s)\int_0^{t-s}\varphi_0(t-s-\tau)\varphi_\ell(\tau)\,d\tau\,ds+\int_0^t K_1(s)(-s)\int_0^{t-s}\varphi_0'(t-s-\tau)\varphi_\ell(\tau)\,d\tau\,ds=$$

$$=\frac{2a}{\ell}\int_0^t(-s)\,\varphi_0(s)\varphi_\ell(t-s)\,ds-\frac{2a}{\ell}\int_0^t(-s)\,\varphi_\ell(s)\varphi_0(t-s)\,ds-$$

$$-2\int_0^t\varphi_0(t-s)\varphi_\ell(s)\,ds,$$

откуда после преобразований имеем

$$\int_0^t K_1(s)\int_0^{t-s}\left(-s\varphi_0'(t-s-\tau)\varphi_\ell(s)+\varphi_0(t-s-\tau)\varphi_\ell(\tau)\right)d\tau\,ds=$$

$$=\int_0^t\frac{2a}{\ell}\left(-\frac{\ell}{a}+2s-t\right)\varphi_0(t-s)\varphi_\ell(s)\,ds.$$

Так как $\varphi_\ell(t)=0$ при $t<\ell/a$, то

$$\int_0^{t-\ell/a}K_1(s)\int_{\ell/a}^{t-s}\left(-s\varphi_0'(t-s-\tau)\varphi_\ell(\tau)+\varphi_0(t-s-\tau)\varphi_\ell(\tau)\right)d\tau\,ds=$$

$$=\int_{\ell/a}^t\frac{2a}{\ell}\left(-\frac{\ell}{a}+2s-t\right)\varphi_0(t-s)\varphi_\ell(s)\,ds,$$

где $\ell/a\le t<\infty$. После замены переменной $t_1=t-\ell/a$ приходим к уравнению (7) с (7') и (7"). Теорема доказана.

Теорема 4. При фиксированном $\varphi_0(t)$, удовлетворяющем условиям теоремы I, не найдется двух различных ядер $K(t)$, для которых выполнялись бы условия теоремы I и которые давали бы равные $\varphi_\ell(t)$. Также при фиксированных $\varphi_0(t)$ и $K(t)$, удовлетворяющих условиям теоремы I, не найдется двух различных решений $K_1(t)$ уравнения (7), для которых выполнялись бы условия теоремы 3.

Доказательство. Из формулы (8) получим

$$\sqrt{K(p)+1}=-\frac{a}{\ell p}\ln\left(\frac{\bar{\varphi}_\ell(p)}{\bar{\varphi}_0(p)}\right)+\frac{a}{\ell p}n\pi i, \quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

Если нам удастся показать, что в семействе, стоящем в правой части выражения, найдется только один член, который соответствует условиям, наложенным на $K(t)$, то этим единственност будет доказана. Рассмотрим разность двух членов этого семейства:

$$\sqrt{k(p)+1} - \sqrt{\bar{k}(p)+1} = \frac{a}{\tau p} n\pi i \; . \tag{10}$$

Допустим, что $\mathcal{L}^{-1}(k(p))$ и $\mathcal{L}^{-1}(\bar{k}(p))$ удовлетворяют условиям теоремы. Поскольку $\int_0^\infty \mathcal{K}(t)dt < \infty$ и $\int_0^\infty \bar{\mathcal{K}}(t)dt < \infty$, то преобразование Лапласа для них применимо на всей полуплоскости $Re\, p > 0$ и $k(p)$ и $\bar{k}(p)$ аналитичны на $Re\, p > 0$. Так как выражение (6), и следовательно (8), имеет место при $Re\, p > \gamma > 0$, то это же относится и к формуле (10). Но в силу аналитического продолжения выражение (10) переносится на всю полуплоскость $Re\, p > 0$. Левая часть в (10) ограничена, так как

$$|k(p)| = \left|\int_0^\infty e^{-pt}\mathcal{K}(t)dt\right| \le \int_0^\infty \mathcal{K}(t)dt < C_{\mathcal{K}} \; , \; |\bar{k}(p)| < C_{\bar{\mathcal{K}}} \; ,$$

а правая часть неограниченно возрастает при $p \to 0$ $(Re\, p > 0)$, если $n \ne 0$. Этим единственность $\mathcal{K}(t)$ доказана.

Для доказательства единственности решения уравнения (7) в интересующем нас классе сделаем в обратной последовательности преобразования, приведенные в доказательстве теоремы 2 и придём к (9). Решая это дифференциальное уравнение относительно $k_1(p)$, получим

$$k_1(p) = -\frac{2a}{\tau p} \ln\left(\frac{\Phi_\ell(p)}{\Phi_0(p)}\right) - 2 + \frac{c}{p} \; ,$$

где $c \in \mathbb{C}$ – неопределенная константа. Но поскольку $\mathcal{L}^{-1}_{p\to t}\left(\frac{c}{p}\right) = c$, то $\mathcal{K}_1(t)$ определена с точностью до аддитивной константы и это не повредит единственности определения $\mathcal{K}_1(t)$ такой, что $\int_0^\infty \mathcal{K}_1(t)dt < \infty$. Теорема доказана.

Теоремы 3 и 4 легко переносятся на случай обобщенного решения.

<u>Теорема 5</u>. Пусть для функций $\varphi_0(t)$ и $\mathcal{K}(t)$ выполнены условия теоремы 2, а для функции $\mathcal{K}_1(t)$, определённой формулой (2) – условия теоремы 3. Тогда $\mathcal{K}_1(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (7) с ядром (7') и свободным членом (7")

<u>Теорема 6</u>. При фиксированном $\varphi_0(t)$, удовлетворяющем условиям теоремы 2, не найдется двух различных ядер $\mathcal{K}(t)$, для которых выполнялись бы условия теоремы 2 и которые давали бы равные $\varphi_\ell(t)$. Также при фиксированных $\varphi_0(t)$ и $\mathcal{K}(t)$, удовлетворяющих условиям теоремы 2, не найдется двух различных решений $\mathcal{K}_1(t)$ уравнения (7), для которых выполнялись бы условия теоремы 5.

Как уже было сказано, уравнение Вольтерра первого рода

(7) имеет решение с точностью до аддитивной константы. Для регуляризации можно использовать общие методы, например, метод Тихонова. Но, конечно, интерес представляет и возможность регуляризации уравнения (7) методами, которые сохраняют вольтерровость. В теории таких методов существенным является предположение, что с некоторым $n \geq 1$

$$\frac{\partial^j}{\partial t_1^j} G(t_1, s)\Big|_{s=t_1} \equiv 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, n-2), \quad \frac{\partial^{n-1}}{\partial t_1^{n-1}} G(t_1, s)\Big|_{s=t_1} \neq 0,$$

$s \in [0, \infty)$.

В случае классического решения задачи (I) у нас $\varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = 0$ и $\varphi_\ell(\ell/a) = \varphi_\ell'(\ell/a) = 0$ (последнее вследствие непрерывности $\varphi_\ell(t), \varphi_\ell'(t)$ и тождества $u(x,t) = 0$, $x \geq at$). Тогда можно легко убедиться, что $G(t_1, s)\,|_{s=t_1} \equiv 0$, $\frac{\partial^i}{\partial t_1^i} G(t_1, s)\,|_{s=t_1} \equiv 0$, $i = 1, 2, 3$. Поведение функций $\frac{\partial^4}{\partial t_1^4} G(t_1, s)$ на диагонали зависит от поведения функций $\varphi_0''(t)$ в точке $t = 0$ и $\varphi_\ell''(t)$ в точке $t = \ell/a$. В случае обобщенного решения свойства уравнения (7) несколько лучше. Тогда получим, что $G(t_1, s)\,|_{s=t_1} \equiv 0$, $\frac{\partial}{\partial t_1} G(t_1, s)\,|_{s=t_1} \equiv 0$ и поведение функции $\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} G(t_1, s)$ на диагонали зависит от поведения $\varphi_0'(t)$ при $t = 0$ и $\varphi_\ell'(t)$ при $t = \ell/a$. Для окончательного уточнения вопроса о вольтерровой регуляризации уравнения (7) нужны дополнительные исследования.

Литература

I. Локшин А.А., Суворова Ю.В., Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М., 1982.

2. Романовский П.И., Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. М., 1980.

3. Тобиас Т., Об обратной задаче определения ядра наследственной среды. Изв. АН ЭССР. Физ.-матем., 1984, № 2, 182-187.

4. Янно Я., Об одной обратной задаче для гиперболического

уравнения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1984, 672, 40-46.
5. N i g u l, U., The modified theory of viscoelasticity. Preprint of the Academy of Sciences of ESSR. Tallinn, 1983.

Поступило
17 IУ 1984

REDUCTION OF AN INVERSE PROBLEM OF MEDIUM WITH MEMORY TO INTEGRAL EQUATION

J. Janno

Summary

We consider an inverse problem for determining the kernel function $\mathcal{K}(t)$ from (1), if the derivative of solution $u_x(l,t) = \varphi_l(t)$ is given. This problem, with using the Laplace transformation, is reduced to the Volterra integral equation of the first kind (formulae (7), (7'), (7") and (2)).

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1985,715,30-36

О ВЫЧИСЛЕНИИ ГРАДИЕНТА ФУНКЦИИ СТОИМОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

А.Тийман

§ I. Введение

После ряда упрощений (основные из них приведены в [3]) уравнение Навье—Стокса в одномерном случае можно привести к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 1 \qquad (I.I)$$

где $u(x,t)$ - скорость движения несжимаемой жидкости в круглой трубке с постоянным по длине сечением и абсолютно жесткими стенками. Коэффициент $a(x)$ характеризует трубулентную вязкость жидкости. В лаборатории гидромеханики при кафедре санитарной техники Таллинского политехнического института была поставлена задача определения $a(x)$ из уравнения (I.I), если, вдобавок начальному и граничным условиям для этого уравнения

$$u(x,0) = 0, \qquad (I.2)$$

$$u(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \qquad (I.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad t \in [0,T], \qquad (I.4)$$

задано ещё одно условие, так называемое наблюдение системы. Математически это означает, что на множестве решений краевой задачи (I.I)-(I.4) задан конкретный оператор C, значение которого нам известно. Используя эту дополнительную информацию, определим коэффициент $a(x)$, прибегнув к теории оптимального управления. Минимизацию функции стоимости можно провести при этом, например, градиентными методами. Вводя сопряжённую к (I.I)-(I.4) задачу (см. [I]), покажем, как выражается градиент функции стоимости через решения прямой (т.е. (I.I)-(I.4)) и сопряжённой к ней задачи.

§ 2. Прямая задача

Прямая задача представляет собой параболическое уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f \qquad (2.I)$$

и звязанные с ней начальное и граничные условия:

$$u(x,0)=0, \tag{2.2}$$

$$u(1,t)=0, \quad t\in[0,T], \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0, \quad t\in[0,T], \tag{2.4}$$

где $x\in\Omega=(0,1)$, а функция $a(x)\in M$, $M=\{b(x)\,|$

$b(x)\in L_\infty(0,1),\ b(x)\geq b_0>0,\ x\in[0,1]\}$.

Введём пространство

$V=\{v\,|\,v\in L^1_{loc}(0,1),\ v'\in L^1_{loc}(0,1),\ x^{1/2}v\in L_2(0,1),\ x^{1/2}v'\in L_2(0,1),\ v(1)=0\}$,

где $L^1_{loc}(0,1)$ - пространство локально-интегрируемых функций на интервале $(0,1)$. Скалярное произведение в V зададим в виде

$$(v_1,v_2)_V=\int_0^1(xv_1v_2+xv_1'v_2')\,dx.$$

Пространство V является гильбертовым (см. [4]).

Введём также пространство

$$\tilde{H}=\{h\,|\,h\in L^1_{loc}(0,1),\ x^{1/2}h\in L_2(0,1)\}$$

с скалярным произведением

$$(h,q)_{\tilde{H}}=\int_0^1 xhq\,dx.$$

Это пространство является предгильбертовым (см. [4]). Его пополнение в норме $\|h\|=(h,h)^{1/2}_{\tilde{H}}$ обозначим через H.

Имеет место плотное и непрерывное вложение $V\subset H$. Отождествляя H с его двойственным H', получим также плотное и непрерывное вложение $H\subset V'$, где V' - пространство, двойственное к V. Решение задачи (2.I)-(2.4) будем искать в пространстве

$$W=\{w\,|\,w\in L_2(0,T;V),\ \frac{dw}{dt}\in L_2(0,T;V')\}.$$

Снабжённое нормой

$$\|w\|_W=\left(\int_0^T\|w\|^2_V dt+\int_0^T\left\|\frac{dw}{dt}\right\|^2_{V'}dt\right)^{1/2}$$

это пространство становится также гильбертовым. Справедливо утверждение: $W\subset C^0([0,T];H)$, где $C^0([0,T];H)$ - пространство непрерывных отображений $[0,T]\to H$ (см. [2]). Обозначим $W_0=\{w\,|\,w\in W,\ w(0)=0\}$

В пространстве V рассмотрим множество

$$D=\{v\,|\,v\in C^1[0,1],\ v'(0)=v(1)=0\}.$$

Это множество всюду плотно в V. Определим на нём оператор $\tilde{A}$ следующим образом:

$$\tilde{A}: D \to V', \quad \tilde{A}v = -\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x a(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad v \in D, \quad a(x) \in M.$$

Что оператор $\tilde{A}$ линеен, это ясно. Докажем, что на множестве D он ограничен. Для любых $u \in V$ и $v \in D$ имеем $\tilde{A}v \in V'$ и

$$|(\tilde{A}v, u)| = \left|\int_0^1 x a(x) v' u' dx\right| \leq m \int_0^1 x|v'|\cdot|u'| dx \leq m\,(|v'|, |u'|)_H \leq$$

$$\leq m \| |v'| \|_H \cdot \| |u'| \|_H \leq c_1 \|v\|_V \cdot \|u\|_V, \quad c_1 = \mathrm{const}, \quad m = \operatorname{vrai\,sup} a(x).$$

Теперь продолжим этот оператор по непрерывности на все пространство V, т.е., обозначив через A продолжение $\tilde{A}$, имеем

$$A \in \mathcal{L}(V, V'), \quad (Au, v) = \int_0^1 x a(x) u' v' dx, \quad \forall u, v \in V. \tag{2.5}$$

Согласно Лионсу [1], задача (2.1)-(2.4), переписанная в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f, \qquad f \in L_2(0, T; V'), \tag{2.6}$$

$$u(x, 0) = 0, \tag{2.7}$$

при любом $f \in L_2(0, T; V')$ имеет в пространстве W_0 единственное решение, если

1) $|(Au, v)| \leq c_1 \|u\|_V \cdot \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V,$

2) $(Au, u) \geq c_0 \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V, \quad c_0 = \mathrm{const}.$

Выполнение первого условия проверено выше. Покажем, что выполнено и второе. Поскольку

$$(Au, u) = \int_0^1 x a(x) u'^2 dx \geq b_0 \int_0^1 x u'^2 dx,$$

то достаточно показать, что

$$\int_0^1 x u^2 dx \leq c \int_0^1 x u'^2 dx, \quad \forall u \in V.$$

Имеем

$$u(x) = \int_1^x \xi^{1/2} u'(\xi) \cdot \xi^{-1/2} d\xi,$$

$$|u(x)| \leq \left(\int_0^1 \xi u'^2(\xi) d\xi\right)^{1/2} \cdot \left(\left|\int_x^1 \frac{d\xi}{\xi}\right|\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 x u'^2(x) dx\right)^{1/2} \cdot |\ln x|^{1/2},$$

$$x u^2(x) \leq x |\ln x| \cdot \int_0^1 x u'^2(x) dx,$$

$$\int_0^1 x u^2(x) dx \leq \int_0^1 x |\ln x| dx \cdot \int_0^1 x u'^2(x) dx = c \int_0^1 x u'^2 dx, \quad \forall u \in V,$$

$$c = \int_0^1 x |\ln x| dx.$$

Итак, прямая задача (2.6)-(2.7) (и ей эквивалентная (2.I)-(2.4)) имеет при любом $f \in L_2(0,T;V')$ единственное решение $u \in W_0$.

§ 3. Обратная задача

Пусть состояние гидромеханической системы определяется как решение краевой задачи (2.I)-(2.4) (или ей эквивалентной (2.6)-(2.7)) с $f = 1$. Определим оператор $\Phi: W_0 \times M \to L_2(0,T;V')$, сопоставляющий функциям $u \in W_0$ и $a(x) \in M$ величину, определённую левой частью уравнения (2.6). Очевидно, оператор Φ непрерывно дифференцируем, причём $\Phi'_a(u,a)\cdot b = A(b)u$, $b \in L_\infty(0,1)$ и $\Phi'_u(u,a)\cdot v = \frac{\partial v}{\partial t} + A(a)v$, $v \in W_0$, где $A(b)$, $A(a)$ – оператор A из (2.6) соответственно с коэффициентом $b(x)$ и $a(x)$. Согласно [I], оператор $\Phi'_u(u,a): W_0 \times M \to L_2(0,T;V')$ имеет ограниченный обратный. Применив теорему о неявной функции, получаем, что существует дифференцируемое отображение $u = u(a)$ такое, что $\Phi(u(a),a) = 1$, $\forall a \in M$.

Как было отмечено в § I, дополнительной информацией для решения обратной задачи является оператор наблюдения $C \in \mathcal{L}(L_2(0,T;V), L_2(0,T))$, значения которого на множестве решений краевой задачи (2.I)-(2.4) с $f = 1$ нам известны. Этот оператор определён формулой

$$Cu = \int_0^1 ux\,dx, \quad u \in L_2(0,T;V). \tag{3.I}$$

Каждой функции $a(x) \in M$ сопоставим функцию стоимости

$$J(a) = \|Cu(a) - z_g\|^2_{L_2(0,T)} = \int_0^T \Big[\int_0^1 u(a)x\,dx - z_g\Big]^2 dt, \tag{3.2}$$

где $u(a) \in L_2(0,T;V)$-решение краевой задачи (2.I)-(2.4), а z_g – данный элемент пространства $L_2(0,T)$. Тогда задачу определения $a(x)$ можно сформулировать следующим образом:

найти такое $\hat{a}(x) \in M$, что

$$J(\hat{a}) \le J(a), \quad \forall a \in M.$$

Поскольку задача нахождения минимума функционала $J(a)$ поставлена некорректно, то для её регуляризации воспользуемся методом Тихонова, т.е. вместо (3.2) минимизируем функционал вида

$$J_\alpha(a) = \|Cu(a) - z_g\|^2_{L_2(0,T)} + \alpha\|a(x) - a_0\|^2_{W_2^1}, \quad a_0 \in W_2^1, \quad \alpha > 0, \tag{3.3}$$

где $a_0 \in W_2^1$ – некоторое априорно известное приближение, например, $a_0(x) \equiv b_0$.

W_2^1 – обычное пространство Соболева:

$$W_2^1 = \{ w \mid w \in L_2(0,1),\ w' \in L_2(0,1) \}.$$

Минимизацию $J_\alpha(a)$ можно провести, например, градиентными методами. Поскольку нахождение градиента от второго слагаемого в правой части (3.3) не представляет труда, то сосредоточим своё внимание на определении градиента от $J(a)$, данного формулой (3.2).

Введем сопряжённую к (2.I)-(2.4) задачу (ср. [5])

$$-\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x a(x) \frac{\partial p}{\partial x}\right) = -2C^*(Cu(a) - z_g), \quad (3.4)$$

$$p(x,T) = 0, \quad (3.5)$$

$$p(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad (3.7)$$

где $x \in (0,1)$, $C^* \in \mathcal{L}(L_2(0,T), L_2(0,T;V'))$ – сопряжённый оператор к оператору наблюдения C. (Здесь учтено, что в пространстве H оператор A (см. (2.5)) является самосопряжённым.) Поскольку при $u(a) \in L_2(0,T;V)$ и $z \in L_2(0,T)$

$$(Cu(a), z)_{L_2(0,T)} = \int_0^T \left(\int_0^1 u(a) x\, dx \right) z\, dt =$$

$$= (u(a), C^* z)_{L_2(0,T;H)} = \int_0^T \left(\int_0^1 x u(a) C^* z\, dx \right) dt,$$

то оператор C^* определён формулой $C^* z = z$, $C^* z \in L_2(0,T;V')$, $z \in L_2(0,T)$.

Теперь продифференцируем функционал (3.2) по a:

$$J'(a)\cdot \Delta a = 2(Cu(a) - z_g, Cu'_a(a)\cdot \Delta a)_{L_2(0,T)} =$$

$$= 2(C^*(Cu(a) - z_g), u'_a(a)\cdot \Delta a)_{L_2(0,T;V), L_2(0,T;V')}, \quad \Delta a \in L_\infty(0,1),$$

где $(\cdot,\cdot)_{L_2(0,T;V), L_2(0,T;V')}$ обозначает дуальное произведение между пространствами $L_2(0,T;V)$ и $L_2(0,T;V')$, порождённое скалярными произведением $L_2(0,T;H)$. Заметим, что $C^*(Cu(a) - z_g) = Cu(a) - z_g \in L_2(0,T;V')$ не зависит от x. Обозначив для краткости дифференциал $u'_a(a)\cdot \Delta a$ через $v_\Delta(a)$ и воспользовавшись уравнением (3.4), перепишем дифференциал функционала $J(a)$ в виде

$$J'(a)\cdot\Delta a = 2\int_0^T\Big(\Big[\int_0^1 u(a)x\,dx - z_g\Big]\cdot\int_0^1 v_\Delta(a)x\,dx\Big)dt =$$

$$= \int_0^T\Big(\int_0^1\Big[-\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\Big(xa(x)\frac{\partial p}{\partial x}\Big)\Big]v_\Delta(a)x\,dx\Big)dt. \qquad (3.8)$$

Как отмечалось, оператор $\Phi(u,a)\colon W_0\times M\to L_2(0,T;V')$ непрерывно дифференцируем. Продифференцировав тождество $\Phi(u(a),a)=1$, получаем $\Phi'_u(u(a),a)\cdot u'_a(a)\cdot\Delta a + \Phi'_a(u(a),a)\cdot\Delta a = 0$, т.е.

$$\frac{\partial v_\Delta(a)}{\partial t} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\Big(xa(x)\frac{\partial v_\Delta(a)}{\partial x}\Big) = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x\Delta a(x)\frac{\partial u(a)}{\partial x}\Big). \qquad (3.9)$$

Из уравнений (2.2)-(2.4) имеем

$$v_\Delta(a)(x,0) = 0, \qquad (3.10)$$

$$v_\Delta(a)(1,t) = 0, \quad t\in[0,T], \qquad (3.11)$$

$$\frac{\partial v_\Delta(a)}{\partial x}(0,t) = 0, \quad t\in[0,T]. \qquad (3.12)$$

Теперь, учитывая (3.9)-(3.12), проинтегрируем уравнение (3.8) один раз по частям относительно t и два раза относительно x (вместо интегрирования можно воспользоваться определением (2.5) продолженного оператора $A\in\mathcal{L}(V,V')$). В результате (3.8) преобразуется к виду

$$J'(a)\cdot\Delta a = -\int_0^T\Big(\int_0^1\Big[\frac{\partial v_\Delta(a)}{\partial t}x - \frac{\partial}{\partial x}\Big(xa(x)\frac{\partial v_\Delta(a)}{\partial x}\Big)\Big]p\,dx\Big)dt =$$

$$= \int_0^1 \Delta a\cdot\Big[\int_0^T x\frac{\partial u(a)}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x}dt\Big]dx = \Big(\int_0^T x\frac{\partial u(a)}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x}dt,\ \Delta a\Big)_{L_2(0,1)} =$$

$$= \Big(G\Big(\int_0^T x\frac{\partial u(a)}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x}dt\Big),\ \Delta a\Big)_{W_2^1},$$

где p – решение сопряжённой задачи (3.4)-(3.7), а $G = L^{-1}\in\mathcal{L}(L_2,W_2^1)$ – оператор Грина краевой задачи $Lu = -u''+u$, $u'(0)=u'(1)=0$.

Итак, для определения градиента функционала $J(a)$, заданного формулой (3.2) мы должны решить прямую задачу (2.I)-(2.4) и сопряжённую задачу (3.4)-(3.7), причём обе задачи линейны. Заметим также, что сопряжённая задача (3.4)-(3.7) корректно поставлена. Заменой времени $\tau = T - t$ она сводится к задаче типа (2.I)-(2.4), к которой применима сформулированная выше теорема Лионса о существовании и единственности решения.

Литература

I. Л и о н с Ж.-Л., Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными произведениями. М., Мир, 1978.

2. Л и о н с Ж.-Л., М а д ж е н е с Э., Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., Мир, 1971.

3. П о п о в Д.М., Нестационарные гидромеханическое процессы. М., 1969.

4. Э д в а р д с Р., Функциональный анализ. Теория и приложения. М., Мир, 1969.

5. C h a v e n t, G., Identification of Distributed Parameters, Third IFAC Symposium on Identification, The Hague, 1973.

6. C h a v e n t, G., D u p u y, M., L e m o n n i e r, P., History Matching by Use of Optimal Theory, Society of Petroleum Engineers Journal, 1975, 15(1), 74-86.

Поступило
17 IУ 1985

ABOUT THE CALCULATION OF THE GRADIENT OF THE COST FUNCTION IN THE INVERSE PROBLEM

A. Tiiman

Summary

The optimal control theory has been applied to the problem of determining the coefficient of turbulent viscosity in the partial differential equation of parabolic type, which describes water flowing in the pipe. We may use the gradient methods for the minimization of the cost function. In this article it is shown how we can get the formula of the gradient of the cost function, when we use the adjoint equation.

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1985,715,37-43

УТОЧНЕНИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ II

О. Карма

Рассматривается одна возможность уточнения собственного значения и проекции одного собственного элемента для задачи $A(\lambda)u=0$, при которой применяется та-же дискретизация пространств и операторов, что и при нахождении уточняемых величин. Статья является обобщением рассуждений статей [3, 4] на случай, когда размерность собственного подпространства может быть больше единицы (но предполагается, что индекс собственного значения равен единице).

I. Регулярная аппроксимация оператор-функций. Пусть $\mathcal{U},\mathcal{V}$, X_i, Y_i $(i\in N)$ – банаховы пространства над $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$ и пусть на области $\Lambda\subseteq\mathbb{K}$ заданы оператор-функции $A:\Lambda\to\mathcal{B}(\mathcal{U},\mathcal{V})$, $B_i:\Lambda\to\mathcal{B}(X_i,Y_i)$ $(i\in N)$, причем A один раз, а B_i $d\geq 1$ раз дифференцируемы на Λ как абстрактные функции от λ. Пусть при каждом λ из Λ и i из N операторы $A(\lambda)$ и $B_i(\lambda)$ фредгольмовы (с индексом 0) и пусть последовательность (B_i) аппроксимирует A регулярно на Λ в следующем смысле:

1) заданы операторы $p_i:\mathcal{U}\to X_i$, $q_i:\mathcal{V}\to Y_i$ $(i\in N)$ (связывающие операторы, операторы проектирования) такие, что:

а) $\|p_i(\alpha u'+\beta u'')-\alpha p_i u'-\beta p_i u''\|\to 0$ $(i\in N)$ $\forall u',u''\in\mathcal{U}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, (1)

б) $\|q_i(\alpha v'+\beta v'')-\alpha q_i v'-\beta q_i v''\|\to 0$ $(i\in N)$ $\forall v',v''\in\mathcal{V}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, (2)

в) $\|p_i u\|\to\|u\|$, $\|q_i v\|\to\|v\|$ $(i\in N)$ $\forall u\in\mathcal{U}, v\in\mathcal{V}$, (3)

2) для каждой последовательности $\lambda_i\to\lambda$ с $\lambda_i,\lambda\in\Lambda$:

а) $\exists c: \|B_i^{(j)}(\lambda_i)\|\leq c$ $(i\in N,\ j=0,1,\dots,d)$, (4)

б) $\|B_i^{(j)}(\lambda_i)p_i u-q_i A^{(j)}(\lambda)u\|\to 0$ $\forall u\in\mathcal{U}$ $(i\in N,\ j=0,1)$, (5)

3) для каждой $\lambda\in\Lambda$ и последовательности (x_i) с $x_i\in X_i$, $\|x_i\|\leq 1$

$$\exists v\in\mathcal{V},\ N'\subseteq N: \|B_i(\lambda)x_i-q_i v\|\to 0\ (i\in N')\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\exists u\in\mathcal{U},\ N''\subseteq N': \|x_i-p_i u\|\to 0\ (i\in N''). \quad (6)$$

Отметим, что в случае голоморфных на $\Lambda\subseteq\mathbb{C}$ оператор-функций требование 2) при $j\geq 1$ является следствием этого же требования при $j=0$.

2. <u>Вспомогательный результат</u>. Рассмотрим случай, когда A имеет в Λ только одно собственное значение λ_0, причем индекс точки λ_0 равен единице, т.е.:

$$A(\lambda_0)u^0=0,\ \|u^0\|=1 \Rightarrow \neg\exists u^1\in\mathcal{U}:\ A(\lambda_0)u^1+A'(\lambda_0)u^0=0. \qquad (7)$$

Обозначим $\mathcal{N}=\{u\in\mathcal{U}: A(\lambda_0)u=0\}$, $m=\dim\mathcal{N}$ и пусть:

I) $(\bar\lambda_i)$ – некоторая последовательность приближений для λ_0:

$$|\bar\lambda_i-\lambda_0|\to 0 \quad (i\in\mathbb{N}), \qquad (8)$$

2) (x_{ik}), $k=1,\ldots,m$ – некоторые последовательности элементов $x_{ik}\in X_i$, линейные оболочки $\mathcal{L}(x_{i1},\ldots,x_{im})$ которых являются приближениями для $\mathcal{N}$:

а) $$\|x_{ik}\|\le c,\ dist(x_{ik},p_i\mathcal{N})\to 0 \quad (i\in\mathbb{N},\ k=1,\ldots,m), \qquad (9)$$

б) $$dist\,(x_{ik},\mathcal{L}(x_{i1},\ldots,x_{i,k-1},x_{i,k+1},\ldots,x_{im})\ge\alpha>0 \quad (i\in\mathbb{N},\ k=1,\ldots,m), \qquad (10)$$

3) $(\bar x_i)$ – некоторая последовательность линейных комбинаций $\bar x_i=\alpha_{i1}x_{i1}+\ldots+\alpha_{im}x_{im}$ с $0<\alpha'\le\|\bar x_i\|\le\alpha''$,

4) (L_i) – некоторая последовательность операторов $L_i\in\mathcal{B}(X_i,\mathbb{K}^m)$ такая, что $\|L_i\|\le c$ и

$$x_i\in\mathcal{L}(x_{i1},\ldots,x_{im}),\ \|L_ix_i\|\to 0\ (i\in\mathbb{N}) \Rightarrow \|x_i\|\to 0 \quad (i\in\mathbb{N}) \qquad (11)$$

(т.е. сужения L_i' операторов L_i на $\mathcal{L}(x_{i1},\ldots,x_{im})$ при достаточно больших i обратимы и $\|(L_i')^{-1}\|\le c$).

Отметим, что в случае голоморфных на $\Lambda\subseteq\mathbb{C}$ оператор-функций в качестве $\mathcal{L}(x_{i1},\ldots,x_{im})$ можно брать линейную оболочку корневых подпространств всех собственных значений для B_i вблизи λ_0 (см. [I, 2]). Операторы L_i можно построить, используя, например, биортогональную к $\{x_{i1},\ldots,x_{im}\}$ систему функционалов.

<u>Предложение I</u>. При всех достаточно больших $i\in\mathbb{N}$ операторы[I)] $T_i\in\mathcal{B}(X_i\times\mathbb{K}^m,\ Y_i\times\mathbb{K}^m)$, определенные соотношением

$$T_i(x_i;\beta_1,\ldots,\beta_m)=(B_i(\bar\lambda_i)x_i+\beta_1B_i'(\bar\lambda_i)x_{i1}+\ldots+\beta_mB_i'(\bar\lambda_i)x_{im};\ L_ix_i), \qquad (12)$$

непрерывно обратимы и $\|T_i^{-1}\|\le c$.

<u>Доказательство</u>. Операторы T_i фредгольмовы как суммы фредгольмовых и конечномерных операторов

$$T_i=\begin{pmatrix}B_i(\bar\lambda_i) & 0\ldots 0\\ 0 & 0\ldots 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & B_i'(\bar\lambda_i)x_{i1} & \ldots & B_i'(\bar\lambda_i)x_{im}\\ L_i & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}.$$

Допустим от противного, что на некоторой подпоследовательности индексов $\mathbb{N}'\subseteq\mathbb{N}$ равномерно ограниченных по норме обратных операторов T_i^{-1} не существует. Ввиду фредгольмовости опе-

---

I) Будем считать, что $\|(x_i;\beta_1,\ldots,\beta_m)\|_{X_i\times\mathbb{K}^m}=\|x_i\|+|\beta_1|+\ldots+|\beta_m|$.

раторов T_i тогда должна существовать последовательность элементов $(x_i; \beta_{i1}, \dots, \beta_{im})_{i\in N'}$ такая, что $\|x_i\|+|\beta_1|+\dots+|\beta_m|=1$, а

$$\|B_i(\bar\lambda_i)x_i+\beta_{i1}B_i'(\bar\lambda_i)x_{i1}+\dots+\beta_{im}B_i'(\bar\lambda_i)x_{im}\|\to 0,\quad \|L_ix_i\|\to 0 \quad (i\in N'). \tag{13}$$

Далее, так как $|\beta_{ik}|\le 1$ $(i\in N',\ k=1,\dots,m)$ и имеют место (9) и (10), то найдутся подпоследовательность индексов $N''\subseteq N'$, числа β_k^* и элементы $u_k\in\mathcal{N}$ $(k=1,\dots,m)$ такие, что

$$\beta_{ik}\to\beta_k^*,\quad \|x_{ik}-p_iu_k\|\to 0\quad (i\in N'',\ k=1,\dots,m),$$
$$dist\,(u_k, \mathcal{L}(u_1,\dots,u_{k-1},u_{k+1},\dots u_m))\ge\alpha>0\quad (k=1,\dots,m). \tag{14}$$

При этом, ввиду (4) и (5), имеем

$$\|\beta_{ik}B_i'(\bar\lambda_i)x_{ik}-\beta_{ik}q_iA'(\lambda_0)u_k\|\to 0\quad (i\in N'',\ k=1,\dots,m), \tag{15}$$

а из (13) и (15), вместе с (2), (3), следует, что

$$\|B_i(\bar\lambda_i)x_i-q_iA'(\lambda_0)(\beta_1^*u_1+\dots+\beta_m^*u_m)\|\to 0\quad (i\in N''). \tag{16}$$

Учитывая еще (6) и (4) мы можем утверждать, что существуют подпоследовательность индексов $N'''\subseteq N''$ и элемент u_0 такие, что

$$\|x_i-p_iu_0\|\to 0\quad (i\in N'''). \tag{17}$$

Значит, применив предположения (4) и (5) будем иметь

$$\|B_i(\bar\lambda_i)x_i-q_iA(\lambda_0)u_0\|\to 0\quad (i\in N'''). \tag{18}$$

Но из (18) и (16) вытекает, ввиду (2) и (3), что

$$A(\lambda_0)u_0+A'(\lambda_0)(\beta_1^*u_1+\dots+\beta_m^*u_m)=0. \tag{19}$$

Последнее же возможно, по условию (7), только при $\beta_1^*u_1+\dots+\beta_m^*u_m=0$, т.е., ввиду (14), только при $\beta_1^*=\dots=\beta_m^*=0$. Но тогда из того, что $\beta_{ik}\to\beta_k^*$ $(i\in N'',\ k=1,\dots,m)$ следует, что $\|x_i\|\to 1$ $(i\in N'')$. Поэтому из (17) и (3) получим, что $\|u_0\|=1$. Учитывая еще (19), (17) и то, что $\|L_i\|\le c$, $\|L_ix_i\|\to 0$ $(i\in N')$, имеем

$$u_0\in\mathcal{N},\quad \|u_0\|=1,\quad \|L_ip_iu_0\|\to 0\quad (i\in N'''). \tag{20}$$

Так как $dim\,\mathcal{N}=m$, то из (9) и (10) следует, что

$$dist\,(p_iu_0, \mathcal{L}(x_{i1},\dots,x_{im}))\to 0\quad (i\in N)$$

и поэтому существует последовательность (x_{i0}) такая, что

$$x_{i0}\in\mathcal{L}(x_{i1},\dots,x_{im}),\quad \|x_{i0}-p_iu_0\|\to 0\quad (i\in N). \tag{21}$$

Так как $\|L_i\|\le c$, то из (20) и (21) вытекает, что $\|L_ix_{i0}\|\to 0$ $(i\in N)$ и, ввиду (11), имеем $\|x_{i0}\|\to 0$ $(i\in N)$. Последнее же противоречит с (21), так как $\|u_0\|=1$ и по (3) имеем $\|x_{i0}\|\to 1$ $(i\in N)$.

Полученное противоречие доказывает, что из сделанных предположений вытекает существование равномерно ограниченных по норме обратных операторов T_i^{-1} при всех достаточно больших $i\in N$.

3. <u>Формальное уравнение для поправок</u>. Пусть (u_i^0) - последовательность элементов $u_i^0 \in \mathcal{N}$ такая, что

$$L_i p_i u_i^0 = L_i \bar{x}_i \ , \quad \| \bar{x}_i - p_i u_i^0 \| \to 0 \qquad (i \in N), \tag{22}$$

а $\mu_i = \lambda_0 - \bar{\lambda}_i$, $z_i = p_i u_i^0 - \bar{x}_i$ (величины $\bar{\lambda}_i, \bar{x}_i$ введены в п. 2).

<u>Замечание I</u>. Для практического вычисления поправок μ_i и z_i элементы u_i^0 нам не понадобятся, они нужны только для промежутных пояснений. Если $p_i \in \mathcal{B}(\mathcal{U}, X_i)$, то при всех достаточно больших i имеем $u_i^0 = (L_i^{\prime\prime})^{-1} L_i \bar{x}_i$, где $L_i^{\prime\prime}$ - сужения операторов L_i на $p_i \mathcal{N}$ (операторы $L_i^{\prime\prime}$ будут при всех достаточно больших i обратимы и $\|(L_i^{\prime\prime})^{-1}\| \le c$). При этом, если обозначить через (u_i^*) последовательность элементов $u_i^* \in p_i \mathcal{N}$ таких, что $dist(\bar{x}_i, p_i \mathcal{N}) = \| \bar{x}_i - p_i u_i^* \|$, то

$$\| \bar{x}_i - p_i u_i^0 \| = \| \bar{x}_i - p_i u_i^* + (L_i^{\prime\prime})^{-1} L_i (p_i u_i^* - p_i u_i^0) \| \le \| \bar{x}_i - p_i u_i^* \| + \| (L_i^{\prime\prime})^{-1} L_i (p_i u_i^* - \bar{x}_i) \|$$

и поэтому имеем

$$dist(\bar{x}_i, p_i \mathcal{N}) \le \| \bar{x}_i - p_i u_i^0 \| \le c \, dist(x_i, p_i \mathcal{N}). \tag{23}$$

Рассмотрим следующие формальные системы уравнений относительно $(x_i ; \beta_1, \dots, \beta_m)$:

$$\begin{cases} B_i(\bar{\lambda}_i) x_i + \beta_1 B_i'(\bar{\lambda}_i) x_{i1} + \dots + \beta_m B_i'(\bar{\lambda}_i) x_{im} = \\ \qquad = [B_i(\lambda_0) p_i u_i^0 - q_i A(\lambda_0) u_i^0] - B_i(\bar{\lambda}_i)\bar{x}_i - \mu_i B_i'(\bar{\lambda}_i) z_i - \\ \qquad - \sum\limits_{j=2}^{d} \frac{1}{j!} \mu_i^j B_i^{(j)}(\bar{\lambda}_i) p_i u_i^0 - [B_i(\lambda_0) - B_i(\bar{\lambda}_i) - \dots - \frac{\mu_i^d}{d!} B_i^{(d)}(\bar{\lambda}_i)] p_i u_i^0 , \\ L_i x_i = L_i p_i u_i^0 - L_i \bar{x}_i . \end{cases} \tag{24}$$

Системы (24) можно рассматривать, как операторные уравнения $T_i(x_i ; \beta_1, \dots, \beta_m) = (y_i ; 0)$ с операторами T_i , определенными в (I2). При этом, если $q_i 0 = 0$, то одним решением системы (24) будет $(z_i ; \alpha_{i1}\mu_i, \dots, \alpha_{im}\mu_i)$, а при всех достаточно больших i это решение единственное. Конечно, правую часть системы (24) невозможно практически вычислить, но если её немного изменить, изменяется немного и решение системы. Это дает нам возможность найти решения системы (24) с точностью, определенной как гладкостью B_i , так и возможной точностью вычисления ошибки аппроксимации $B_i p_i - q_i A$ на решении (λ_0, u_i^0).

4. <u>Нахождение поправок</u>. Пусть (h_i) - некоторая последовательность чисел $h_i > 0$, стремящихся к нулю : $h_i \to 0$ $(i \in N)$. Пусть нам известны такие выражения $R_i^{\Delta \tau_\ell}(\lambda_0, p_i u_i^0)$, $0 \le \tau_1 \le \tau_2 \le \dots$ главной части ошибки аппроксимации $B_i p_i - q_i A$ на решении (λ_0, u_i^0), что

$$\| B_i(\lambda_0) p_i u_i^0 - q_i A(\lambda_0) u_i^0 - h_i^\Delta R_i^{\Delta \tau_\ell}(\lambda_0, \ _i u_i^0) \| = \mathcal{O}(h_i^{\Delta + \tau_\ell} \| u_i^0 \|), \tag{25}$$

$$\| R_i^{\Delta \tau_\ell}(\lambda_0 + \lambda, p_i u_i^0 + x_i) - R_i^{\Delta \tau_\ell}(\lambda_0, p_i u_i^0) \| \le c \, (|\lambda| + \| x_i \|) \tag{26}$$

для всех $|\lambda|, \| x_i \| \le \varepsilon$ с некоторым $\varepsilon > 0$.

Приближенные значения поправок $\mu_i = \lambda_0 - \bar{\lambda}_i$ и $z_i = p_i u_i^0 - \bar{x}_i$ мы будем искать итерационным процессом

$$\begin{cases} B_i(\bar{\lambda}_i) z_i^{\ell} + \beta_{i1}^{(\ell)} B_i'(\bar{\lambda}_i) x_{i1} + \ldots + \beta_{im}^{(\ell)} B_i'(\bar{\lambda}_i) x_{im} = \\ \qquad = h_i^0 R_i^{0\tau_\ell}(\bar{\lambda}_i + \mu_i^{(\ell-1)}, \bar{x}_i + z_i^{\ell-1}) - B_i(\bar{\lambda}_i)\bar{x}_i - \\ \qquad - \mu_i^{(\ell-1)} B_i'(\bar{\lambda}_i) z_i^{\ell-1} - \sum\limits_{j=2}^{d_\ell} \frac{1}{j!} (\mu_i^{(\ell-1)})^j B_i^{(j)}(\bar{\lambda}_i)(\bar{x}_i + z_i^{\ell-1}), \\ L_i z_i^{\ell} = 0, \\ \mu_i^{(\ell)} = \sum\limits_{k=1}^{m} \gamma_{ik}^{(\ell)} \beta_{ik}^{(\ell)} \Big/ \sum\limits_{k=1}^{m} \gamma_{ik}^{(\ell)} \alpha_{ik} \qquad \Big(\sum\limits_{k=1}^{m} \gamma_{ik}^{(\ell)} \alpha_{ik} \geq \gamma > 0\Big) \end{cases} \tag{27}$$

где $\mu_i^{(0)} = 0$, $z_i^0 = 0$ и $d_\ell \leq d$.

Замечание 2. В формулах (27) допускают зависимость τ_ℓ (точности главной части ошибки аппроксимации на решении) и d_ℓ (верхнего индекса суммирования) от номера итерации. Это дает возможность согласовать точность (и сложность) применяемых формул со степенью точности величин $\mu_i^{(\ell-1)}$ и $z_i^{\ell-1}$.

Теорема I. Пусть для последовательности чисел $h_i \to 0$ $(i \in N)$ имеют место соотношения (25), (26) и, кроме того,

$$|\mu_i| = |\lambda_0 - \bar{\lambda}_i| = O(h_i^p), \quad \| z_i \| = \| p_i u_i^0 - \bar{x}_i \| = O(h_i^q), \qquad p, q > 0. \tag{28}$$

Пусть для $\mu_i^{(\ell-1)}$ и $z_i^{\ell-1}$ $(\ell \geq 1)$ справедлива оценка

$$\max\{|\mu_i - \mu_i^{(\ell-1)}|, \| z_i - z_i^{\ell-1} \|\} = \max\{|\lambda_0 - \bar{\lambda}_i - \mu_i^{(\ell-1)}|, \| p_i u_i^0 - \bar{x}_i - z_i^{\ell-1} \|\} = O(h_i^{\tau_{\ell-1}}), \tag{29}$$

где $\tau_{\ell-1} \geq \min(p, q)$.

Тогда для $\mu_i^{(\ell)}$ и z_i^{ℓ}, найденных по формулам (27), справедлива оценка

$$\max\{|\mu_i - \mu_i^{(\ell)}|, \| z_i - z_i^{\ell} \|\} = \max\{|\lambda_0 - \bar{\lambda}_i - \mu_i^{(\ell)}|, \| p_i u_i^0 - \bar{x}_i - z_i^{\ell} \|\} = O(h_i^{\tau_\ell}), \tag{30}$$

где

$$\tau_\ell = \min(s + \tau_\ell, s + \tau_{\ell-1}, p + \tau_{\ell-1}, q + \tau_{\ell-1}, p(d_\ell + g_\ell)), \tag{31}$$

и $g_\ell \geq 0$ такое число, что

$$\Big\| \Big[B_i(\lambda_0) - B_i(\bar{\lambda}_i) - \sum_{j=1}^{d_\ell} \frac{1}{j!} (\lambda_0 - \bar{\lambda}_i)^j B_i^{(j)}(\bar{\lambda}_i)\Big] p_i u_i^0 \Big\| = O(|\lambda_0 - \bar{\lambda}_i|^{d_\ell + g_\ell} \| p_i u_i^0 \|). \tag{32}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\| z_i^{\ell-1} \| = \| z_i \| + \| z_i - z_i^{\ell-1} \| = O(h_i^q + h_i^{\tau_{\ell-1}}),$$

$$|\mu_i^{(\ell-1)}| = |\mu_i| + |\mu_i - \mu_i^{(\ell-1)}| = O(h_i^p + h_i^{\tau_{\ell-1}}),$$

$$|(\mu_i^{(\ell-1)})^j - (\mu_i)^j| = |\mu_i^{(\ell-1)} - \mu_i| \, O((h_i^p + h_i^{\tau_{\ell-1}})^{j-1}).$$

Теперь теорема I следует из предложения I, так как норма разности правых частей систем (24) и (27) имеет порядок $O(h_i^{\tau_\ell})$.

Следствие I. Пусть $p=q=s$. Тогда при итерациях по формулам (27) с $\mu_1^{(0)}=0,\ z_i^0=0$ имеет место оценка (30) с $\tau_\ell=(\ell+1)p$, если только величины τ_ℓ и d_ℓ можно выбрать и выбраны так, что $\tau_\ell \geq \ell p,\ d_\ell+g_\ell \geq \ell+1$, где $g_\ell \geq 0$ такое число, что имеет место (32).

Замечание 3. Пусть $p \geq s$. Тогда при первой итерации $(\ell=1)$ по формулам (27) с $\mu_i^{(0)}=0,\ z_i^0=0$ можно в первом уравнении в правой части ограничиться лишь первыми двумя членами. Это не ухудшает порядка τ_1 в оценке (30), так как норма изменения правой части системы (27) оценивается величиной $O(h_i^{p+q}+h_i^{p+p})$.

5. Уравнение для поправок. Пусть нам известны выражения $R_i^{s\tau}(\lambda_0, p_i u_i^0)$, $\tau \geq 0$, $i \in N$ такие, что

$$\|B_i(\lambda_0)p_i u_i^0 - q_i A(\lambda_0)u_i^0 - h_i^s R_i^{s\tau}(\lambda_0, p_i u_i^0)\| = O(h_i^{s+\tau}\|u_i^0\|), \qquad (33)$$

$$\|R_i^{s\tau}(\lambda', x_i') - R_i^{s\tau}(\lambda'', x_i'')\| \leq c(|\lambda'-\lambda''| + \|x_i'-x_i''\|), \quad \lambda', \lambda'' \in \Lambda. \qquad (34)$$

Пусть B_i дифференцируемы по λ $d \geq 1$ раз, причем для $g \geq 0$

$$\|[B_i(\lambda_0) - B_i(\bar\lambda_i) - \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{j!}(\lambda_0-\bar\lambda_i)^j B_i^{(j)}(\bar\lambda_i)]p_i u_i^0\| = O(|\lambda_0-\bar\lambda_i|^{d+g}\|p_i u_i^0\|). \qquad (35)$$

Рассмотрим следующую систему уравнений для $(x_i;\beta_1,\dots,\beta_m)$:

$$\left\{\begin{aligned} &B_i(\bar\lambda_i)x_i + \beta_1 B_i'(\bar\lambda_i)x_{i1} + \dots + \beta_m B_i'(\bar\lambda_i)x_{im} = \\ &\qquad = h_i^s R_i^{s\tau}(\bar\lambda_i+\lambda_i, \bar x_i + x_i) - B_i(\bar\lambda_i)\bar x_i - \\ &\qquad - \lambda_i B_i'(\bar\lambda_i)x_i - \sum_{j=2}^{d}\frac{1}{j!}\lambda_i^j B_i^{(j)}(\bar\lambda_i)(\bar x_i + x_i), \\ &L_i x_i = 0, \\ &\lambda_i = \sum_{k=1}^{m}\gamma_{ik}\beta_k \Big/ \sum_{k=1}^{m}\gamma_{ik}\alpha_{ik} \qquad \Big(\sum_{k=1}^{m}\gamma_{ik}\alpha_{ik} \geq \gamma > 0\Big). \end{aligned}\right. \qquad (36)$$

Системы (36) будем рассматривать как операторные уравнения $T_i w_i = K_i w_i$, где $w_i=(x_i;\beta_1,\dots,\beta_m) \in X_i \times \mathbb{K}^m$, операторы T_i определены соотношением (I2), и операторы $K_i: X_i \times \mathbb{K}^m \to Y_i \times \mathbb{K}^m$ определены левой частью системы (36). Напомним, что $\|w_i\| = \|x_i\| + |\beta_1| + \dots + |\beta_m|$.

Предложение 2. Для всех достаточно больших i имеют место следующие оценки:

I) $\|T_i^{-1}K_i(w_i'-w_i'')\| \leq \eta(w_i', w_i'', h_i)\cdot\|w_i'-w_i''\|$, (37)

где

$$\eta(w_i', w_i'', h_i) \to 0 \qquad (\|w_i'\|, \|w_i''\|, h_i \to 0), \qquad (38)$$

2) $\|w^0 - T_i^{-1}K_i w\| \leq \eta(w^0, w, h_i) + c h_i^{s+\tau} + c|\lambda_0-\bar\lambda_i|^{d+g} + \|q_i A(\lambda_0)u_i^0\|$, (39)

где $w^0 = (p_i u_i^0 - \bar x_i;\ \alpha_{i1}(\lambda_0-\bar\lambda_i), \dots, \alpha_{im}(\lambda_0-\bar\lambda_i))$.

Доказательство. Ввиду предложения I и сделанных предположений, оценки (37), (38) ясны из вида системы (36). Оценка (39) получается сравнением систем (24) и (36), так как w^0 является решением системы (24), если $q_i 0 = 0$.

Прямым следствием предложения 2 является следующая

Теорема 2. Пусть $|\lambda_0-\bar{\lambda}_i|\to 0$, $\|p_i u_i^0-\bar{x}_i\|\to 0$ $(i\in N)$. Тогда при достаточно малом ε (не зависящем от i) и при всех достаточно больших i система (36) имеет в ε-окрестности V_ε точки $(p_i u_i^0-\bar{x}_i;\ \alpha_{i1}(\lambda_0-\bar{\lambda}_i),\dots,\alpha_{im}(\lambda_0-\bar{\lambda}_i))$ из $X_i\times K^m$ единственное решение. Это решение $(x_i^*;\beta_{i1}^*,\dots,\beta_{im}^*)$ можно найти методом итераций (с любым начальным приближением из V_ε) и для него справедлива оценка

$$\max(\|p_i u_i^0-\bar{x}_i-x_i^*\|,|\alpha_{i1}\mu_i-\beta_{i1}^*|,\dots,|\alpha_{im}\mu_i-\beta_{im}^*|)=$$
$$=O(h_i^{s+r}+|\lambda_0-\bar{\lambda}_i|^{g+d}+\|q_i A(\lambda_0)u_i^0\|).$$

Литература

I. Вайникко Г.М., Карма О.О., О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., I974, I4. № 6, I393-I404.

2. Карма О., Аппроксимация в проблеме собственных значений с голоморфной зависимостью оператора от параметра (I). Рукопись деп. в ВИНИТИ II.0I.82 г. № I30-82 Деп. (II). Уч. зап. Тартуск. ун-та, I982, 633, I9-28.

3. Карма О., Уточнение решения нелинейной задачи на собственные значения I. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I984, 672, 62-70.

4. Chu K.W., Spence A., Deferred correction for the integral equation eigenvalue problem. J. Austral. Math. Soc. (Ser. B), 1981, 22, 474-487.

Поступило
I5 У I985

DEFERRED CORRECTION FOR THE NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEM II

O. Karma

Summary

The deferred correction approach is used in the eigenvalue problem with nonlinear dependence on the parameter. The results of [4, 3] are generalized in the framework of the regular approximation of the operator functions. It is not required that the eigenvalue is simple, but it is proposed that the index of the eigenvalue is equal to 1.

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1985,715,44-51

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПРИ ПОМОЩИ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВИНЕРА-ХОПФА

Р.Лепик

Будем рассматривать смешанные задачи для линейных дифференциальных уравнений. Изучаем разрешимость таких задач двухслойными разностными схемами и, что является главной проблемой статьи, установим условия устойчивости решений данных разностных уравнений. Хорошо известно, что сложности появляются лишь при наличии границ. При отсутствии границ можно в принципе всегда решить вопрос о сходимости разностного метода, сравнительно легко решается и вопрос об устойчивости решений. В одномерном случае в полупространстве $x>0$ теория хорошо выработана Г.Стренгом (см.[5]), в многомерном случае общая теория до сих пор отсутствует.

Обозначим традиционным образом: R - множество всех вещественных чисел, $R^n=\{x=(x_1,x_2,\dots,x_n):\ x_i\in R,\ i=1,2,\dots,n\}$, $R^n_+=\{x\in R^n:\ x_i\geq 0,\ i=1,2,\dots,n\}$ – положительный "октант", Z - множество всех целых чисел, $Z^n=\{x=(x_1,x_2,\dots,x_n):\ x_i\in Z,\ i=1,2,\dots,n\}$, $Z^n_+=\{x\in Z^n:\ x_i\geq 0, i=1,2,\dots,n\}$. Через $\mathcal{L}(E,F)$ обозначим пространство линейных ограниченных операторов из E в F, $\ell^2(Z^n_+)$ - пространство сеточных функций с носителем в Z^n_+ и ℓ^2- нормой, P_+ - соответствующий этому пространству естественный проектор.

Рассмотрим смешанную задачу

$$\begin{cases} u_t = a u_{xx} + b u_x + c u, \\ u(0,x) = u_0(x), \\ u(t,x) = 0, \text{ при } x<0, \end{cases} \tag{I}$$

где a,b,c - постоянные ($a>0$), $u_0(x)$ - некоторая заданная функция. Используя простейшие разностные соотношения, заменим с ними производные и получим разностное уравнение

$$u_j^{m+1} = \left(\frac{\tau a}{h^2}+\frac{\tau b}{2h}\right)u_{j+1}^m + \left(-\frac{2\tau a}{h^2}+\tau c+1\right)u_j^m + \left(\frac{\tau a}{h^2}-\frac{\tau b}{2h}\right)u_{j-1}^m, \tag{2}$$

где τ и h шаги по t и x соответственно. Из начального условия получим

$$u_j^0 = u_0(jh),$$

а краевое условие запишем в таком виде: $u^m=\{u_j^m\}\in\ell^2(Z^n_+)$.

Запишем уравнение (2) в виде

$$u^{m+1} = P_+ C u^m, \tag{3}$$

где $u^{m+1}, u^m \in \ell^2(Z_+)$, а оператор $P_+C \in \mathcal{L}(\ell^2(Z_+), \ell^2(Z_+))$ является дискретным оператором Винера-Хопфа с коэффициентами

$$c_0 = 1 + \tau c - \frac{2\tau a}{h^2}, \quad c_1 = \frac{\tau a}{h^2} + \frac{\tau b}{2h}, \quad c_{-1} = \frac{\tau a}{h^2} - \frac{\tau b}{2h}, \quad c_i = 0 \quad (i \neq 0, \pm 1),$$

т.е. оператор P_+C представим матрицей

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_{-1} & c_{-2} & c_{-3} \dots \\ c_1 & c_0 & c_{-1} & c_{-2} \dots \\ c_2 & c_1 & c_0 & c_{-1} \dots \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Таким образом мы можем записать всякие двухслойные разностные уравнения. В случае неявной разностной схемы на левой стороне уравнения (3) стоит тоже некоторый дискретный оператор Винера-Хопфа, который будем обозначать через P_+B.

Теперь наша задача имеет вид

$$\begin{cases} P_+ B u^{m+1} = P_+ C u^m, \\ u_j^0 = u_0(jh), \\ u^m, u^{m+1} \in \ell^2(Z_+). \end{cases} \tag{4}$$

В случае нескольких пространственных переменных задача таким-же образом приводится к виду (4), разница только в том, что тогда $u^m, u^{m+1} \in \ell^2(Z_+^n)$ и операторы P_+B и P_+C многомерные дискретные операторы Винера-Хопфа.

Напомним коротко определение дискретного оператора Винера-Хопфа. Рассмотрим действующий в пространстве $\ell^2(Z^n)$ оператор

$$A = \sum_{j \in Z^n} a_j \mathcal{U}^j, \tag{5}$$

где a_j $(j \in Z^n)$ заданные комплексные числа, такие, что

$$\sum_{j \in Z^n} |a_j| < \infty,$$

оператор сдвига $\mathcal{U}^j$ действует по правилу

$$(\mathcal{U}^j x)_k = x_{k-j}, \quad k \in Z^n, \quad x \in \ell^2(Z^n). \tag{6}$$

Пусть $D \subset Z^n$. Соответствующий пространству $\ell^2(D)$ естественный проектор P_D определим соотношением

$$(P_D x)_k = \begin{cases} x_k, \text{ при } k \in D, \\ 0, \text{ при } k \notin D. \end{cases}$$

В частности обозначим $P_+ = P_{Z_+^n}$. Пользуясь введенными обозначениями, запишем многомерный дискретный оператор Винера-Хопфа в виде $P_+A: \ell^2(Z_+^n) \longrightarrow \ell^2(Z_+^n)$. Символом оператора A, а также и оператора P_+A называется функция

$$a(t)=\sum_{j\in Z^n} a_j e^{ijt} \quad (t\in R^n).$$

Сформулируем здесь и теорему об обратимости оператора P_+A (см.[2]), которая будет нам нужна в дальнейшем.

<u>Теорема I</u>. Для того, чтобы дискретный оператор Винера-Хопфа $P_+A \in \mathcal{L}(\ell^2(Z_+^n),\ell^2(Z_+^n))$ был обратим и $(P_+A)^{-1} \in \mathcal{L}(\ell^2(Z_+^n),\ell^2(Z_+^n))$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

I° $a(t)=a(t_1,\dots,t_n)\neq 0, \ t\in R^n$;

2° $ind\, a_1=\frac{1}{2\pi}\left[\arg a(t_1,0,\dots,0)\right]_{t_1=0}^{2\pi}=0,$

. . . .

$ind\, a_n=\frac{1}{2\pi}\left[\arg a(0,\dots,0,t_n)\right]_{t_n=0}^{2\pi}=0;$

3° при любом разбиении множества индексов $\{1,\dots,n\}$ на два непересекающиеся подмножества $\{k_1,\dots,k_r\}$ и $\{\ell_1,\dots,\ell_s\}$ с $r\geq 1, s\geq 2$ и $r+s=n$ и при любых $t_{k_1},\dots,t_{k_r}$ из R s-мерное однородное уравнение Винера-Хопфа

$$P_{Z_+^s}\hat{A}_{k_1\dots k_r}(t_{k_1},\dots,t_{k_r})x \equiv P_{Z_+^s}\sum_{j\in Z^n} a_j e^{ij_{k_1}t_{k_1}}\dots e^{ij_{k_r}t_{k_r}}\,U_{\ell_1}^{j_{\ell_1}}\dots U_{\ell_s}^{j_{\ell_s}}x=0$$

имеет в пространстве $\ell^2(Z_+^s)$ лишь нулевое решение;

4° уравнение $P_+Ax=0$ имеет в пространстве $\ell^2(Z_+^n)$ лишь нулевое решение.

Теорема I является нужным при установлении разрешимости разностного уравнения (4). Но при решении разностных задач возникает и вопрос об устойчивости разностных схем. В одномерном случае Г.Стренгом в [5] установлено необходимое и достаточное условие устойчивости:

$$|r(t)|\leq 1 \quad (t\in R),$$

где $r(t)=\frac{c(t)}{b(t)}$, $c(t)$ и $b(t)$ - символы операторов P_+C и P_+B соответственно. Доказательство достаточности этого условия не обобщается на случай нескольких пространственных переменных.

Проводим доказательство достаточности подобного условия устойчивости для задачи

$$\begin{cases} P_+ B u^{m+1} = P_+ C u^m, \ m = 0,1,2,\dots, \\ u^m \in \ell^2(Z_+^n), \ m = 0,1,2,\dots \end{cases} \tag{7}$$

при двух дополнительных условиях:

I⁰ оператор $P_+ B$ самосопряженный, т.е. $P_+ B = (P_+ B)^*$,

2⁰ оператор $P_+ B$ положительный, т.е. $P_+ B \geq \gamma I$, где I – единичный оператор в $\ell^2(Z_+^n)$.

Отметим, что первое условие в самом деле означает, что используемые разностные схемы должны быть симметричны на $(m+1)$ – ом слое. Тогда получается $b_j = b_{\sigma j}$, где $j \in Z^n$, $\sigma = \{\sigma_i\}$ с $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ и $\sigma j = (\sigma_1 j_1, \sigma_2 j_2, \dots, \sigma_n j_n)$. Известно, что символ самосопряженного оператора $P_+ B$ имеет лишь вещественные значения.

Второе условие переписывается таким образом: $\exists \gamma > 0 : b(t) \geq \gamma$. Отметим, что имеется большое количество примеров, в которых условия I⁰ и 2⁰ выполняются. В этих условиях оператор $P_+ B$ является и обратимым и $(P_+ B)^{-1} \in \mathcal{L}(\ell^2(Z_+^n), \ell^2(Z_+^n))$.

В качестве средств доказательства приводим понятие числового радиуса оператора (см.[4], стр.II8).

Числовый радиус оператора $A \in \mathcal{L}(E, F)$ определяется как

$$w(A) = \sup_{\|u\|=1} |(Au, u)|. \tag{8}$$

В [4] приведены следующие нужные нам свойства:

$$\tfrac{1}{2} \|A\| \leq w(A) \leq \|A\|, \tag{9}$$

$$w(A) \leq 1 \Rightarrow w(A^m) \leq 1, \ m \in N = \{1, 2, \dots\}. \tag{I0}$$

Из (9) и (I0) следует свойство

$$w(A) \leq 1 \Rightarrow \|A^m\| \leq 2, \ m \in N. \tag{II}$$

Для доказательства условий устойчивости задачи (7) определим пространства (имея в виду условия I⁰ и 2⁰) H_B и H_{P_+B}, в которых скалярное произведение определяется

$$(u, v)_B = (Bu, v)_{\ell^2(Z^n)}, \quad u, v \in \ell^2(Z^n),$$

$$(u, v)_{P_+B} = (P_+ B u, v)_{\ell^2(Z_+^n)} = (Bu, v)_{\ell^2(Z^n)}, \quad u, v \in \ell^2(Z_+^n).$$

Последнее равенство верно ввиду $v \in \ell^2(Z_+^n) \subset \ell^2(Z^n)$. Учитывая определения числового радиуса (8) и нормы в H_{P_+B}, вычислим

$$w_{P_+B}((P_+B)^{-1}P_+C) = \sup_{u\in l^2(Z^n_+)} \frac{|((P_+B)^{-1}P_+Cu,u)_{P_+B}|}{(u,u)_{P_+B}} =$$

$$= \sup_{u\in l^2(Z^n_+)} \frac{|(P_+Cu,u)|}{(P_+Bu,u)} .$$

Перенесем проектор P_+ от первого члена к второму, заметим, что $P_+u=u$ для $u\in l^2(Z^n_+)$ и $l^2(Z^n_+)\subset l^2(Z^n)$. Продолжим оценку

$$w_{P_+B}((P_+B)^{-1}P_+C) = \sup_{u\in l^2(Z^n_+)} \frac{|(Cu,u)|}{(Bu,u)} \le \sup_{u\in l^2(Z^n)} \frac{|(Cu,u)|}{(Bu,u)} =$$

$$= \sup_{u\in l^2(Z^n)} \frac{|(B^{-1}Cu,u)_B|}{(u,u)_B} = w_B(B^{-1}C) \le \|B^{-1}C\|_{H_B\to H_B}.$$

Здесь мы учли понятие нормы в H_B, определение (8) и неравенство (9). Ввиду самосопряженности и положительности оператора B (и также $B^{1/2}$) запишем

$$\|B^{-1}C\|_{H_B\to H_B} = \sup_{u\in l^2(Z^n)} \frac{\|B^{-1}Cu\|_{H_B}}{\|u\|_{H_B}} = \sup_{u\in l^2(Z^n)} \frac{|(BB^{-1}Cu,B^{-1}Cu)|^{1/2}}{(Bu,u)^{1/2}} =$$

$$= \sup_{u\in l^2(Z^n)} \frac{|(B^{1/2}B^{-1}Cu,B^{1/2}B^{-1}Cu)|^{1/2}}{(B^{1/2}u,B^{1/2}u)^{1/2}} =$$

$$= \sup_{u\in l^2(Z^n)} \frac{|(B^{-1/2}Cu,B^{-1/2}Cu)|^{1/2}}{(B^{1/2}u,B^{1/2}u)^{1/2}} =$$

$$= \sup_{v=B^{1/2}u\in l^2(Z^n)} \frac{(B^{-1/2}CB^{-1/2}v,B^{-1/2}CB^{-1/2}v)^{1/2}}{(v,v)^{1/2}} =$$

$$= \sup_{v\in l^2(Z^n)} \frac{\|B^{-1/2}CB^{-1/2}v\|_{l^2(Z^n)}}{\|v\|_{l^2(Z^n)}} = \|B^{-1/2}CB^{-1/2}\|_{l^2(Z^n)\to l^2(Z^n)}.$$

Здесь оператор $B^{-1/2}\in\mathcal{L}(l^2(Z^n),l^2(Z^n))$ существует ввиду самосопряженности и положительности оператора $B^{1/2}$.

Как известно, норму операторов Винера–Хопфа, действующих во всем пространстве $l^2(Z^n)$ можно выразить в терминах символа оператора (см.[I]).

Продолжим оценку

$$w_{P_+B}((P_+B)^{-1}P_+C) \le \| B^{-1/2} C B^{-1/2} \|_{\ell^2(Z^n) \to \ell^2(Z^n)} = \sup_{t \in R^n} | b^{-1/2}(t) c(t) b^{-1/2}(t) | =$$

$$= \sup_{t \in R^n} \frac{c(t)}{b(t)} = \sup_{t \in R^n} | r(t) | .$$

Если потребуем, чтобы выполнялось

$$\sup_t | r(t) | \le 1 , \tag{I2}$$

то, учитывая (I0), имеем

$$w_{P_+B}([(P_+B)^{-1} P_+ C]^m) \le 1 \quad , m \in N ,$$

а с помощью свойства (II) получаем

$$\| [(P_+B)^{-1} P_+ C]^m \|_{H_{P_+B} \to H_{P_+B}} \le 2 . \tag{I3}$$

Нам нужна оценка нормы (I3) в пространстве $\ell^2(Z_+^n)$. Для того выпишем

$$\| (P_+B)^{1/2} [(P_+B)^{-1} P_+ C]^m \|_{\ell^2(Z_+^n) \to \ell^2(Z_+^n)} = \sup_{u \in \ell^2(Z_+^n)} \frac{|((P_+B)^{1/2} [(P_+B)^{-1} P_+ C]^m u, (P_+B)^{1/2} [(P_+B)^{-1} P_+ C]^m u)|^{1/2}}{((P_+B)^{-1} P_+ B u, u)^{1/2}} \le$$

$$\le \sup_{u \in \ell^2(Z_+^n)} \frac{|(P_+B [(P_+B)^{-1} P_+ C]^m u, [(P_+B)^{-1} P_+ C]^m u)|^{1/2}}{\inf_t b^{-1/2}(t) \cdot (P_+ B u, u)^{1/2}} =$$

$$= \sup_{u \in \ell^2(Z_+^n)} \frac{\| [(P_+B)^{-1} P_+ C]^m u \|_{H_{P_+B}}}{\inf_t b^{-1/2}(t) \, \| u \|_{H_{P_+B}}} =$$

$$= \sup_{t \in R^n} b^{1/2}(t) \, \| [(P_+B)^{-1} P_+ C]^m \|_{H_{P_+B} \to H_{P_+B}} .$$

В силу неравенства (I3) имеем

$$\| (P_+B)^{1/2} [(P_+B)^{-1} P_+ C]^m \|_{\ell^2(Z_+^n) \to \ell^2(Z_+^n)} \le 2 \sup_{t \in R^n} b^{1/2}(t) ,$$

откуда

$$\inf_{t \in R^n} b^{1/2}(t) \, \| [(P_+B)^{-1} P_+ C]^m \|_{\ell^2(Z_+^n) \to \ell^2(Z_+^n)} \le 2 \sup_{t \in R^n} b^{1/2}(t) .$$

В итоге доказано, что при условии (I2)

$$\| [(P_+B)^{-1} P_+ C]^m \|_{\ell^2(Z_+^n) \to \ell^2(Z_+^n)} \le 2 \, \frac{\sup_t b^{1/2}(t)}{\inf_t b^{1/2}(t)} = const , \; m \in N .$$

Это означает, что разностная схема устойчива. Этим доказана следующая теорема.

<u>Теорема 2</u>. Пусть выполняются условия:

I^0 оператор B самосопряженный, т.е. $b_j = b_{\sigma j}$, где $\sigma j = (\sigma_1 j_1, \sigma_2 j_2, \ldots, \sigma_n j_n)$ с $\sigma_i \in \{-1, 1\}$;

2^0 оператор B положительный, т.е. $\exists\, \gamma > 0 : b(t) \geq \gamma,\ t \in R^n$.

Тогда разностное уравнение (7) разрешимо при любом $m = 1, 2, \ldots$. Если, кроме того, выполняется условие

$$|r(t)| \leq 1, \quad t \in R^n,$$

то разностная схема устойчива.

Приведем примеры разностных уравнений, для которых выполнены условия теоремы 2.

Рассмотрим задачу

$$u_t = a u_{xx} + b u_{yy}, \tag{I4}$$

где a и b положительные постоянные. Дискретизируем задачу следующим образом (обозначив $u^n_{jk} = u(jh, kk, n\tau)$, $h = \Delta x$, $k = \Delta y$, $\tau = \Delta t$)

$$\frac{u^{n+1}_{jk} - u^n_{jk}}{\tau} = a\,\frac{\theta(u^{n+1}_{j+1,k} - 2u^{n+1}_{jk} + u^{n+1}_{j-1,k}) + (1-\theta)(u^n_{j+1,k} - 2u^n_{jk} + u^n_{j-1,k})}{h^2} +$$

$$+ b\,\frac{\theta(u^{n+1}_{j,k+1} - 2u^{n+1}_{jk} + u^{n+1}_{j,k-1}) + (1-\theta)(u^n_{j,k+1} - 2u^n_{jk} + u^n_{j,k-1})}{k^2},$$

где конкретизируя значения $0 \leq \theta \leq 1$ можно получить разные известные разностные методы.

По определению дискретного оператора Винера-Хопфа (5) и оператора сдвига U (см.(6)) легко выписываются отличные от нуля коэффициенты операторов P_+B и P_+C (см.(7)) в данном примере:

$$b_{0,0} = 1 + 2\frac{\tau a}{h^2}\theta + 2\frac{\tau b}{k^2}\theta, \qquad c_{0,0} = 1 - 2\frac{\tau a}{h^2}(1-\theta) - 2\frac{\tau b}{k^2}(1-\theta),$$

$$b_{1,0} = b_{-1,0} = -\frac{\tau a}{h^2}\theta, \qquad c_{1,0} = c_{-1,0} = \frac{\tau a}{h^2}(1-\theta),$$

$$b_{0,1} = b_{0,-1} = -\frac{\tau b}{k^2}\theta, \qquad c_{0,1} = c_{0,-1} = \frac{\tau b}{k^2}(1-\theta).$$

Отсюда

$$r(t) = \frac{1 - 2\frac{\tau a}{h^2}(1-\theta)(1-\cos t_1) - 2\frac{\tau b}{k^2}(1-\theta)(1-\cos t_2)}{1 + 2\frac{\tau a}{h^2}\theta(1-\cos t_1) + 2\frac{\tau b}{k^2}\theta(1-\cos t_2)}, \quad t = (t_1, t_2).$$

Заметим, что условие самосопряженности оператора B выполняется. Также выполняется второе условие, поскольку

$$b(t) = 1 + 2\frac{\tau a}{h^2}\theta(1-\cos t_1) + 2\frac{\tau b}{k^2}\theta(1-\cos t_2) \geq 1.$$

Остается проверить условие устойчивости $|r(t)| \leq 1$. В вычислениях выяснилось, что при $1/2 \leq \theta \leq 1$ это условие всегда выполняется, а при $0 \le \theta < 1/2$ условие выполняется только при специальном выборе шагов, так что

$$\frac{\tau a}{h^2} + \frac{\tau b}{k^2} \le \frac{1}{2-4\theta}.$$

Данный результат в полной мере соответствует аналогичным результатам в одномерном случае (см.[3], стр.190).

При наличии производных первого порядка в задаче (7) условия теоремы 2 могут не выполняться.

Литература

1. Л е п и к Р., Об обратимости дискретного оператора Винера-Хопфа с операторными коэффициентами. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, 492, 15-24.
2. Л е п и к Р., Обратимость дискретного оператора Винера-Хопфа в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^n_+)$. Республиканская конференция "Численное решение краевых задач и интегральных уравнений". Тезисы докладов, Тарту, 1981, 51-53.
3. Р и х т м а й е р Р., М о р т о н К., Разностные методы решения краевых задач. М., 1972.
4. Х а л м о ш П., Гильбертово пространство в задачах. М., 1970.
5. S t r a n g, G., Wiener-Hopf Difference Equations. J. Math. and Mech., 1964, 13, N°1, 85-96.

Поступило
25. 04. 1985

STABILITY INVESTIGATIONS OF MULTIDIMENSIONAL DIFFERENCE EQUATIONS USING DISCRETE WIENER-HOPF OPERATORS

R. Lepik

Summary

Mixed initial-boundary value problems in the part of space $t \ge 0, x \in R^n_+$ and their difference analogues are considered. Most of the difference equations are possible to write in the terms of discrete Wiener-Hopf operators (see (7)). The solvability and stability problems of these equations are solved in multidimensional case in this paper (see Theorems 1 and 2). In one-dimensional case the problems are solved by G. Strang in [5].

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1985,715,52-62

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ НАХОЖДЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

П. Мийдла

В работе [6] без доказательства приведены две теоремы, утверждающие сходимость некоторых вычислительных схем методов коллокации, Галеркина и конечных разностей отыскания периодических решений системы

$$z'(t) = F(z(t)) . \tag{I}$$

В данной статье приведём доказательства.

I. Постановка задачи и предположения

Рассмотрим систему (I), где z и F – m-мерные вектор-функции, $F(z) = (f_1(z), \ldots, f_m(z))$, $z = z(t) = (z_1(t), \ldots$ $\ldots, z_m(t))$. Пусть

(i) вектор-функция F непрерывна по совокупности переменных $z_1, \ldots, z_m$ и задача Коши для системы (I) однозначно разрешима при любых начальных данных.

Основная задача заключается в нахождении нетривиального, т.е. отличного от состояния равновесия периодического решения системы (I) и в определении периода этого решения. Последнее обстоятельство является затруднительным при подходе к этой задаче, кроме того, задача в такой общей постановке имеет континуум решений, если она, конечно, вообще разрешима. Введем следующее предположение:

(ii) система (I) имеет нетривиальное периодическое решение $z^* = z^*(t)$ периода $\omega^* > 0$.

Непосредственная подстановка покажет, что ω^* - периодическим решением системы (I) будут и все вектор-функции вида $z^*(t+\theta)$, где θ – любая фиксированная константа.

Чтобы облегчить исследование поставленной задачи о периодических решениях системы (I), обычно делается замена независимой переменной $t \mapsto \lambda t$, где $\lambda = 2\pi/\omega$, а ω – искомый период решения. Тогда придём к нелинейной задаче собственных значений: определить значение параметра λ, при котором система

$$X'(t) = \frac{1}{\lambda} F(X(t)) \qquad (2)$$

имеет нетривиальное 2π -периодическое решение. Конечно, нужно найти и это решение.

Предположение (ii) гарантирует разрешимость задачи (2). Введем обозначения $\lambda^* = 2\pi/\omega^*$, $X^*(t) = Z^*(t/\lambda^*)$.

Задача (2) допускает эквивалентное представление в форме

$$X(t) = A(\lambda) X(t) \equiv X(2\pi) + \frac{1}{\lambda}\int_0^t F(X(s))\,ds \qquad (3)$$

с семейством вполне непрерывных операторов $A(\lambda)$. Операторы $A(\lambda)$ рассмотрим действующими в пространстве $C = C([0, 2\pi]; \mathbb{R}^m)$ непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$ вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^m$;

$$\|X\|_C = \max_{0 \le t \le 2\pi} \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k(t)|^2 \right)^{1/2}.$$

Неподвижные точки оператора $A(\lambda^*)$ являются 2π -периодическими решениями системы (2) при $\lambda = \lambda^*$ и наоборот; кроме того, они образуют в C замкнутую кривую

$$\mathcal{D} = \{ X_\theta = X_\theta(t) : X_\theta(t) = X^*(t+\theta),\ \theta \in [0, 2\pi] \}.$$

В фазовом пространстве $\mathbb{R}^m$ системы (2) кривой $\mathcal{D}$ соответствует цикл Γ, движение по которому определяет решение X^*. Если

(iii) цикл Γ изолирован,

т.е. в некоторой окрестности цикла Γ нет замкнутых фазовых траекторий системы (2), то операторы $A(\lambda)$ при $\lambda^*/2 < \lambda < \lambda^*$ и $\lambda^* < \lambda$ в некоторой окрестности кривой $\mathcal{D} \subset C$ не имеют неподвижных точек. (Неподвижные точки операторов $A(\lambda^*/2)$ соответствуют $2\omega^*$-периодическим решениям системы (I).) Для определения периодического решения системы (I) теперь достаточно найти значение λ^* и любую точку кривой $\mathcal{D}$; эту искомую точку мы и в дальнейшем будем обозначать через X^*.

Дальнейшей целью будет построение операторного уравнения вида (3) с оператором, неподвижные точки которого были бы изолированными и чтобы при этом сохранялась эквивалентность наших задач. Для этого используем метод функционализации параметра (см. [2], § 55). Такое построение осуществляется введением функционала $\varphi: C \to \mathbb{R}$, который определен в окрестности Ω точки X^* и удовлетворяет условиям:

а) $\varphi(X^*) = \frac{1}{\lambda^*}$

б) произведение $\Theta \cdot [\varphi(X^*(t+\Theta)) - \frac{1}{\lambda^*}]$ отлично от нуля и сохраняет знак при малых по абсолютной величине ненулевых Θ. Если произведение в условий б) положительна (отрицательна), то φ называется функционалом первого (второго) рода в Ω. Такое определение функционала φ гарантирует изолированность точек пересечения кривой $\mathcal{D}$ с гиперплоскостью $\varphi(X) = \frac{1}{\lambda^*}$ (в общем случае число таких точек даже конечно), тем самым и изолированность неподвижных точек в C оператора T:

$$TX = X(2\pi) + \varphi(X)\int_0^t F(X(s))\,ds. \tag{4}$$

В частности, по построению, $X^* = TX^*$ и X^* – единственная в Ω неподвижная точка оператора T.

Отметим, что пока все наши построения являются неконструктивными. Для продвижения вперед постараемся, во-первых, уточнить выбор функционала φ. Укажем две возможности для этого.

А. Если конкретная задача позволяет предполагать существование второй производной у некоторой (для конкретности предполагаем, что первой) компоненты решения $X^*(t) = (x_1^*(t), \dots, x_m^*(t))$ и справедливость неравенства $x_1^{*\prime\prime}(0) \neq 0$, то функционал φ можно выбрать в форме

$$\varphi(X) = x_1'(0) + \frac{1}{\lambda^*}.$$

Операторное уравнение (4) примет вид

$$T_1 X = X(2\pi) + \frac{1}{\lambda}\int_0^t F(X(s))\,ds, \tag{5}$$

причем задача доопределяется условием

$$x_1'(0) = 0. \tag{6}$$

Легко проверить, что для φ условия а) и б) выполнены и что "представитель" кривой $\mathcal{D}$ – эта точка X^*, для которой $x_1^{*\prime}(0) = 0$, $x_1^{*\prime\prime}(0) \neq 0$.

Б. Если известно число α, такое, что для некоторой (допустим опять – первой) компоненты $x_1^*(0) = \alpha$, $x_1^{*\prime}(0) \neq 0$, то функционал φ можно подобрать так:

$$\varphi(X) = x_1(0) - \alpha + \frac{1}{\lambda^*}.$$

Задача (4) представляется опять в виде (5) с дополнительным условием

$$x_1(0) = \alpha . \qquad (7)$$

В зависимости от конкретной задачи можно использовать и другие способы выбора функционала φ . Для теоретических рассуждений достаточно указания возможности конкретизации вида φ . В работе [6], например, указан лишь вариант Б выбора функционала.

Во-вторых, для продвижения вперед, рассмотрим вопрос существования неподвижных точек у оператора (4). До сих пор мы, якобы, предполагали знание X^*. Как же поступить, если у нас имеется конкретная задача (2), произведен выбор функционала φ и, тем самым, построен оператор (4)? Оказывается, что тогда можно применить понятие вращения векторного поля.

Вращение $\gamma(I-T;\partial\Omega)=\gamma(I-T;\partial\Omega;E)$ векторного поля $X-TX$ с вполне непрерывным оператором $T:\bar{\Omega}\longrightarrow E$ на границе $\partial\Omega$ открытого ограниченного множества Ω банахова пространства E – это некоторое целое число, характеризующее алгебраическое число неподвижных точек оператора T внутри Ω . Определение вращения корректно, если T не имеет неподвижных точек на $\partial\Omega$. С понятием вращения можно ознакомиться, например, по книге [2]. Основная "сила" понятия вращения заключается в том, что из неравенства $\gamma(I-T;\partial\Omega)\neq 0$ вытекает существование в Ω неподвижной точки у оператора T ; отметим, что единственности в общем случае не вытекает. Кроме того, во многих случаях удается доказать сохранение значения вращения при преобразовании и видоизменении оператора T или области Ω . В частности, в работе [4] доказано, что

$$\gamma(I-A;\partial\mathfrak{A};C\times\mathbb{R})=\gamma(I-T;\partial\Omega;C), \qquad (8)$$

где оператор T представлен формулой (4),

$$\mathfrak{A}=\Omega\times(\lambda',\lambda'')\subset C\times\mathbb{R};\ 0<\frac{1}{\lambda''}<\varphi(X)<\frac{1}{\lambda'}\leq\frac{2}{\lambda^*}$$

для $X\in\Omega$; Ω – определенная при описании оператора T область; оператор A имеет вид

$$A(\{X,\lambda\})=\begin{pmatrix} X(2\pi)+\frac{1}{\lambda}\int_0^t F(X(s))\,ds \\ \lambda\left(1+\frac{1}{\varphi(X)}-\lambda^*\right)\end{pmatrix}; \qquad (9)$$

функционал φ удовлетворяет условиям а) и б). Если теперь предположить, что

$$(iv)\ \gamma(I-T;\ \partial\Omega;\ C)\neq 0$$

для некоторой открытой ограниченной области $\Omega\subset C$, на границе которой оператор (4) не имеет неподвижных точек, то формально можем отказаться от условия (ii), так как оно вытекает из (iv).

2. Нахождение тригонометрического приближения

Рассмотрим задачу нахождения неподвижных точек оператора A, определенного соотношением (9), т.е. задачу решения операторного уравнения

$$\{X,\lambda\} = A(\{X,\lambda\}), \tag{I0}$$

где $A:\bar{\mathfrak{A}}\longrightarrow C\times\mathbb{R}$. Пусть выполнены преположения (i), (iii), (iv) и в области Ω функционал φ удовлетворяет условиям а) и б). Будем искать приближенное решение уравнения (I0) в виде $\{X_n,\lambda_n\}$, где $\lambda_n\in(\lambda',\lambda'')$; $X_n\in\Omega$ и имеет компоненты в виде тригонометрического многочлена порядка n :

$$x_{in}(t)=\frac{c_{i0}}{2}+\sum_{k=1}^{n}(c_{ik}\cdot\cos kt+d_{ik}\sin kt), \tag{II}$$

$X_n=(x_{1n},\ldots,x_{mn})$.

Коэффициенты в разложениях (II) можно определить методом коллокации или методом Галеркина. Для получения соответствующих приближенных задач применим к уравнению (2), соответственно, проектор Лагранжа P_n проектирующий на подпространство вектор-функций с компонентами вида (II) или ортопроектор O_n. Применение P_n равносильно построению интерполяционного тригонометрического многочлена по равноотстоящим узлам; применение же O_n означает отбрасывание остаточного члена в ряде Фурье. В результате применения, например, P_n получим систему

$$X_n'(t)=\frac{1}{\lambda}P_nF(X_n(t)). \tag{I2}$$

Переходя, аналогично сделанному в первом параграфе, к операторному уравнению в $C\times\mathbb{R}$, получим задачу нахождения неподвижной точки в области $\mathfrak{A}$ оператора

$$A_n(\{X_n,\lambda_n\})=\begin{pmatrix} X_n(2\pi)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t P_nF(X_n(s))\,ds \\ \lambda_n\left(1+\frac{1}{\varphi(X_n)}-\lambda^*\right)\end{pmatrix}. \tag{I3}$$

Оператор, получающийся после применения ортопроектора O_n обозначим через B_n, вид B_n совершенно аналогичен (I3).

С другой стороны, из системы (I2) легко вытекает вычислительная схема для определения коэффициентов разложения (II) компонентов приближенного решения X_n. Метод коллокации вместе с дополнительным условием (7), например, для выбора функционала φ способом Б приведет нас к алгебраической системе определения коэффициентов приближения $X_n(t)=(x_{1n}(t),\dots,x_{mn}(t))$:

$$\begin{cases} X_n'(t_i)=\frac{1}{\lambda}F(X_n(t_i)), \ i=0,1,\dots,2n, \\ x_{1n}(0)=\alpha. \end{cases} \tag{I4}$$

Здесь $t_i=i\cdot h$, $h=2\pi/2(n+1)$. Аналогично, метод Галеркина дает схему

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} e_i(t)X_n'(t)dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^{2\pi} e_i(t)F(X_n(t))dt, \ i=0,1,\dots,2n, \\ x_{1n}(0)=\alpha. \end{cases} \tag{I5}$$

Здесь $e_{2k}(t)=\cos kt$, $e_{2k+1}(t)=\sin kt$, $k=0,1,\dots$.

Докажем сходимость приближений $\{X_n,\lambda_n\}$ к решению $\{X^*,\lambda^*\}$ задачи (2). Более точно, рассмотрим уравнение (I0),

$$\{X,\lambda\}=A(\{X,\lambda\})$$

и приближенное к нему

$$\{X_n,\lambda_n\}=A_n(\{X_n,\lambda_n\}). \tag{I6}$$

Как было отмечено в § I, разрешимость задачи (I0) вытекает из предположения (iv) и равенства (8). Что же можно сказать о существовании решения уравнения (I6)? Обозначим через $\delta=$ $=\inf\limits_{\{X,\lambda\}\in\partial\Omega}\|\{X,\lambda\}-A(\{X,\lambda\})\|_{C\times\mathbb{R}}$. В пространстве $C\times\mathbb{R}$ норма определяется соотношением $\|\{X,\lambda\}\|_{C\times\mathbb{R}}=\|X\|_C+|\lambda|$.

Из отсутствия на $\partial\Omega$ неподвижных точек вполне непрерывного оператора A следует, что $\delta>0$. Имеет место соотношение (см. [2]):

если

$$\sup_{\{X,\lambda\}\in\partial\Omega}\|A_n(\{X,\lambda\})-A(\{X,\lambda\})\|\leqslant\delta, \tag{I7}$$

то

$$\gamma(I-A_n;\partial\Omega)=\gamma(I-A;\partial\Omega). \tag{I8}$$

Находим

$$\delta_n = \| A_n(\{X,\lambda\}) - A(\{X,\lambda\}) \|_{C\times\mathbb{R}} = \| \varphi(X) [\int_0^t P_n F(X(s))\, ds -$$

$$- \int_0^t F(X(s))\, ds] \|_C \leqslant |\varphi(X)| \cdot \| \int_0^t [P_n F(X(s)) - F(X(s))]\, ds \|_C .$$

Известно (см. [I]), что имеют место соотношения

$$\| P_n \|_{C \to L_2} \leqslant const \quad \forall\, n \; ; \qquad (19)$$

$$\| P_n X - X \|_{L_2} \longrightarrow 0 , \quad n \longrightarrow \infty \quad \forall\, X \in C . \qquad (20)$$

Здесь $L_2 = L_2([0,2\pi]\,;\mathbb{R}^m)$,

$$\| X \|_{L_2} = \{ \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{m} | x_k |^2\, dt \}^{1/2} \leqslant \sqrt{2}\, \| X \|_C . \qquad (21)$$

Из ограниченности (в силу (20)) вытекает сходимость к нулю величин δ_n а также существование числа n_0 , такого, что для $n \geqslant n_0$ имеет место соотношение (I7). Следовательно, для $n \geqslant n_0$ справедливо также равенство (I8). Тем самым доказано существование в $\mathfrak{O}$ хотя бы одного решения $\{X_n^*, \lambda_n^*\}$ уравнения (I6). Отметим, что то же самое можем сказать о методе Галеркина

$$\{ X_n , \lambda_n \} = B_n(\{ X_n , \lambda_n \}) \qquad (22)$$

(см. формулу (I3)), так как ортопроектор $\mathcal{O}_n$ тоже удовлетворяет условиям (I9) и (20).

Докажем теперь сходимость решений $\{X_n^*, \lambda_n\}$ уравнения (I0) к $\{X^*, \lambda^*\}$. Оказывается, что для любой последовательности $\{\{ X_n , \lambda_n \}\} \subset \mathfrak{O}$ последовательность $\{ A_n(\{X_n , \lambda_n\}) \}$ будет компактной в $C \times \mathbb{R}$.

Действительно, справедливы следующие импликации:

$$\{\{ X_n , \lambda_n \}\} \subset \mathfrak{O} \Rightarrow \| X_n \|_C \leqslant const \quad \forall\, n \implies$$

$$\implies \| F(X_n) \|_C \leqslant const \quad \text{(ввиду (i))} \implies$$

$$\implies \| P_n F(X_n) \|_{L_2} \leqslant const \quad \text{(ввиду (I9))} \implies$$

$$\implies \| \int_0^t P_n F(X_n(s))\, ds \|_{H^1} \leqslant const \quad \text{(ввиду (i))} \implies$$

$$\implies \| \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t P_n F(X_n(s))\, ds \|_{H^1} \leqslant const \quad \text{(ввиду ограниченности } \frac{1}{\lambda_n}) \implies$$

$$\Longrightarrow \left\{ \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t P_n F(X_n(s))\, ds \right\}$$ компактна в C (так как H^1 компактно вложено в C) $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left\{ X_n(2\pi) + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t P_n F(X_n(s))\, ds \right\}$$ компактна в C

(в силу компактности ограниченной числовой последовательности $\{X_n(2\pi)\}$ $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left\{\left\{ X_n(2\pi) + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t P_n F(X_n(s))\, ds,\ \lambda_n\left(1 + \frac{1}{\varphi(X_n)} - \lambda^*\right)\right\}\right\}$$ компактна

в $C \times \mathbb{R}$ (ввиду компактности в $\mathbb{R}$ ограниченной числовой последовательности $\{\lambda_n(1 + \frac{1}{\varphi(X_n)} - \lambda^*)\}$.

Здесь $H^1 = H^1([0,2\pi]; \mathbb{R}^m)$ – пространство Соболева,

$$\|X\|_{H^1} = \max\{\|X\|_{L_2}, \|dX/dt\|_{L_2}\}.$$

Так как при $n \geq n_0$ уравнение (16) имеет в $\mathfrak{A}$ хотя бы одно решение $\{X_n^*, \lambda_n^*\}$ и только что мы показали компактность последовательности $\{A_n(\{X_n^*, \lambda_n^*\})\}$, то компактной будет и последовательность $\{\{X_n^*, \lambda_n^*\}\} \subset \mathfrak{A}$, так как $\{X_n^*, \lambda_n^*\} = A_n(\{X_n^*, \lambda_n^*\})$.

Рассмотрим теперь сходящуюся последовательность $\{\{X_n, \lambda_n\}\} \subset \mathfrak{A}$, $\{\{X_n, \lambda_n\}\} \longrightarrow \{X, \lambda\}$, т.е. $\|X_n - X\|_C + |\lambda_n - \lambda| \to 0, n \to \infty$. Исследуем разницу

$$\|A_n(\{X_n, \lambda_n\}) - A(\{X, \lambda\})\|_{C\times\mathbb{R}} \leq \|A_n(\{X_n, \lambda_n\}) -$$

$$- A_n(\{X, \lambda\})\|_{C\times\mathbb{R}} + \|A_n(\{X, \lambda\}) - A(\{X, \lambda\})\|_{C\times\mathbb{R}} =$$

$$= \|A_n(\{X_n, \lambda_n\}) - A_n(\{X, \lambda\})\|_{C\times\mathbb{R}} + \delta_n .$$

Как было показано выше, $\delta_n \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$.

Оценим величину

$$\|A_n(\{X_n, \lambda_n\}) - A_n(\{X, \lambda\})\|_{C\times\mathbb{R}} \leq \alpha_n + \beta_n + \gamma_n ,$$

где

$$\alpha_n = \|X_n(2\pi) - X(2\pi)\|_C ,$$

$$\beta_n = \left\| \varphi(X_n) \int_0^t P_n F(X_n(s))\, ds - \varphi(X) \int_0^t P_n F(X_n(s))\, ds \right\|_C ,$$

$$\gamma_n = \left| \lambda_n\left(1 + \frac{1}{\varphi(X_n)} - \lambda^*\right) - \lambda_n\left(1 + \frac{1}{\varphi(X)} - \lambda^*\right) \right| .$$

Почленно:

$$\alpha_n \leq \| X_n - X \|_C \longrightarrow 0, \ n \longrightarrow \infty ;$$

$$\gamma_n \leq |\lambda_n - \lambda| + |\lambda^*| \cdot |\lambda - \lambda_n| + \left| \frac{\lambda_n}{\varphi(X_n)} - \frac{\lambda}{\varphi(X)} \right| ,$$

$$\left| \frac{\lambda_n}{\varphi(X_n)} - \frac{\lambda}{\varphi(X)} \right| \leq \left| \frac{1}{\varphi(X_n)} \right| \cdot |\lambda_n - \lambda| + |\lambda| \cdot \left| \frac{1}{\varphi(X_n)} - \frac{1}{\varphi(X)} \right| \longrightarrow 0$$

при $n \longrightarrow \infty$, следовательно и $\gamma_n \longrightarrow 0, \ n \longrightarrow \infty$;

$$\beta_n \leq |\varphi(X_n)| \cdot \left\| \int_0^t [P_n F(X_n(s)) - P_n F(X(s)) \, ds \right\|_C +$$

$$+ |\varphi(X_n) - \varphi(X)| \cdot \left\| \int_0^t P_n F(X(s)) \, ds \right\|_C .$$

Из соотношений (I9) и (20) вытекает также сходимость $\beta_n \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$. Мы получили следующий результат:

$$\{\{X_n, \lambda_n\}\} \longrightarrow \{X, \lambda\} \Rightarrow \{A_n(\{X_n, \lambda_n\})\} \longrightarrow A(\{X, \lambda\}) . \qquad (23)$$

Стало быть, предельные точки последовательности $\{\{X_n^*, \lambda_n^*\}\} \subset \subset \mathfrak{A} \subset \overline{\mathfrak{A}}$ являются неподвижными точками оператора A.

Если $\{X^*, \lambda^*\}$ – единственная неподвижная точка оператора A в $\mathfrak{A}$, то последовательность $\{\{X_n^*, \lambda_n^*\}\}$ будет сходиться именно к этой точке.

Все приведенные рассуждения справедливы и для метода Галеркина. Мы доказали следующий результат.

<u>Теорема</u>. Пусть для системы (I) выполнены предположения (i), (ii), (iii), (iv) и пусть нам известно некоторое число α, допускающее выбор функционала φ в форме Б.

Тогда метод коллокации (I4) (метод Галеркина (I5)) при всех $n \geq n_0$ определяет хотя бы одно решение $\{X_n^*, \lambda_n^*\}$ и предельные точки последовательности $\{\{X_n^*, \lambda_n^*\}\}$ будут решениями системы (2).

Здесь n_0 – некоторое фиксированное число, существование которого также доказывалось.

<u>Замечания</u>. I. Формально в предположениях теоремы можно опустить условия (ii) и (iii), если к (iv) добавить требование о том, что X^* – единственная в открытой области Ω неподвижная точка оператора T, определенного соотношением (4). Из сказанного вытекает изолированность в C кривой $\mathcal{D}$ неподвижных точек оператора $A(\lambda^*)$, что, в свою очередь, равносильно (iii). О возможности снятия предположение (ii) было сказано в ходе доказательства.

2. Предположение об однозначной решаемости задачи Коши для системы (I) существенно в настоящей трактовке, так как корректность определения вращения в (iv) (т.е. независимость её зна-

чения для векторного поля $X-TX$ от выбора функционала φ) требует непрерывности оператора сдвига по решениям системы (I) (см. [2]).

3. Установление неравенства (iv) в общем случае сложно. Однако, если имеется дополнительная качественная информация о фазовой картине в окрестности цикла, отвечающего периодическому решению, то проверка этого условия может оказаться совсем простым. Например (см. [2]), если известно, что цикл Γ - орбитально асимптотически устойчив, то $\gamma(I-T; \partial\Omega; C) = I$ для достаточно малой окрестности Ω неподвижной точки X^* оператора T (см. (4)). Следовательно, можно сформулировать результат, утверждающий разрешимость системы (I4) (или (I5)) и сходимость соответствующих приближений в предположениях, что выполнено условие (i) и, кроме того, известно некоторое число α, принадлежащее области значений некоторой (скажем, первой) компоненты орбитально асимптотически устойчивого периодического решения системы (2).

4. Система (I4) (а также система (I5)) для фиксированного n - эта нелинейная алгебраическая система относительно $m(2n+1)+1$ неизвестных:-коэффициентов компонентов вида (11) вектор-функций X_n, и параметра λ. Решение этой системы является самостоятельной и непростой задачей, особенно если вектор-функция F недифференцируема. Если же, F - дифференцируема, то можно предложить итерационно-аппроксимационный алгоритм (см. [5]). Его суть заключается в переходе при построении последовательности приближений от n не к $n+1$ а к $2n$, чтобы сохранить в случае метода коллокации узлы совпадения. Используется итерационный метод Ньютона и при переходе к большему n начальным приближением берется решение предыдущего аппроксимационного шага. В статье [5] доказана сходимость метода Ньютона для решения автономного уравнения порядка m.

5. Аналогичный нашей теореме результат можно доказать и для конечноразностного приближения периодическому решению системы (2) и соответствующему значению параметра λ. Техника доказательства та же, которая использована в § 3 работы [3]; в той статье рассматривается также задачи (I), но схемы вычислений несколько отличаются от приведенных здесь. Приведем аналогичную к (I4) схему разностного метода. Именно, пусть X_k- сеточная вектор-функция, определенная на равномерной сетке на отрезке $[0, 2\pi]$. т.е. каждая из её m компонент - обычная сеточная функция со значениями в $\mathbb{R}$. Если выполнены предпосылки теоремы и дан разностный оператор численного дифференциро-

вания D_h, который удовлетворяет условию устойчивости (см., например, [3]), то при $h \to 0$ имеет место поточечная сходимость приближений, определяемых уравнениями

$$D_h X_h = \frac{1}{\lambda} F_h (X_h), \quad x_{1,0}^h = \alpha$$

к решению задачи (2). Здесь F_h - разностный аналог функции F; во втором соотношении указано значение первой компоненты X_h в первой точке сетки $t_0 = 0$.

Литература

1. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. I, II. Москва, 1965.
2. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Геометрические методы нелинейного анализа. Москва, Наука, 1975.
3. Мийдла П., Изучение сходимости приближенных методов отыскания автоколебаний. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979 492, 69-79.
4. Мийдла П., Инвариантность функциональной характеристики цикла автономной системы. Тезисы конференции "Теоретические и прикладные вопросы математики". Тарту, 1980, 202-204.
5. Мийдла П., Некоторые коллокационно- итерационные алгоритмы отыскания автоколебаний. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 448, 139-148.
6. Мийдла П., О нахождении периодического решения автономной системе с недифференцируемой правой частью. - В кн. IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Киев, Наукова думка, 1984, т. I, с. 268-269.

Поступило
03 IУ 1985

COMPUTATIONAL METHODS OF FINDING PERIODIC SOLUTION OF AUTONOMOUS SYSTEMS

P. Miidla

Summary

In this paper the convergation theorem of the methods of collocations, Galerkin's and finite differences for the finding of periodic solutions of autonomous system (1) is proved. The approximational operator equations give us effective numerical schemes (14) and (15). The right parts of (1) must not be differentiable.

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1985,715,63-70

СХЕМА КРАНКА—НИКОЛСОНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

М. Фишер

В статьях [1, 2] исследовались явная и неявная схема для решения параболической задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u = f, \quad x \in \Omega, \ t \in (0,T], \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u = u(x,t) \in H_0^2(\Omega), \ t \in [0,T] \tag{3}$$

где $A(t)u = -\sum\limits_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$, $m = 2,3$,

$a_{ij}(x,t,u) = a_{ji}(x,t,u)$, $f = f(x,t) \in L_2(\Omega)$ $\forall t \in (0,T]$,

$H_0^2(\Omega) = \{v, v \in H_0^2(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0\}$, $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ - пространство Соболева; $\Omega = \{0 < x_i < 1, \ i = 1,\dots,m\}$, $\partial\Omega$ - граница, $\bar{\Omega}$ - замыкание.

Здесь подлежит исследованию схема Кранка—Николсона для приближенного решения приведенной задачи (1), (2), (3).

Предположим, что выполнены условия:

(I) для каждого $a > 0$ существует такое число $\varkappa_a > 0$, что при всех $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0,T]$, $\xi_i \in R$, $u \in [-a,a]$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x,t,u)\xi_i\xi_j \geqslant \varkappa_a \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 \quad ;$$

(II) функции $a_{ij}(x,t,u)$ дифференцируемы и

$$\left|\frac{\partial^{\mu_0+\mu_1} a_{ij}(x,t,u)}{\partial x_l^{\mu_0}\,\partial u^{\mu_1}}\right| \leq d_a, \ \mu_0,\mu_1 = 0,1,2,3; \ \mu_0+\mu_1 \leq 3$$

$\forall x \in \Omega$, $t \in [0,T]$, $u \in [-a,a]$, $l = 1,\dots,m$.

Равномерную сетку с шагом h в $\bar{\Omega}$ обозначим через $\bar{\Omega}_h$, причем $\Omega_h = \bar{\Omega}_h \cap \Omega$, $\partial\Omega_h = \bar{\Omega}_h \cap \partial\Omega$. На отрезке $[0,T]$ введем сетку с шагом $\tau = T/N$:

$$\omega_\tau = \{t_k = k\cdot\tau, \ k = 0,1,\dots,N\}$$

и обозначим

$$\omega_\tau^+ = \{ t \in \omega_\tau \ , 0 < t \le T \} .$$

В дальнейшем $\partial_i , \bar\partial_i$ – либо разность вперед, либо разность назад по пространственным переменным в i-том направлении, а

$$y_{\bar t} = \frac{1}{\tau} (y - \check y) \ , \ \check y = y(x, t-\tau).$$

Для приближенного решения задачи (I), (2), (3) исследуем схему Кранка—Николсона

$$y_{\bar t} + A_{h\tau}(t')\bar y = f_{h\tau} \ , \ x \in \Omega_h \ , \ t \in \omega_\tau^+ \ , \tag{4}$$

$$y(x,0) = u_0(x) \ , \ x \in \Omega_h \ , \tag{5}$$

$$y = y(t) = y(x,t) \in H_0^2(\Omega_h), \tag{6}$$

где $t' = t - \tau/2$, $\bar y = \frac{1}{2}(y + \check y)$,

$$A_{h\tau}(t)\, y = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} [\partial_i (a_{ij}(x,t,y)\bar\partial_j y) + \bar\partial_i (a_{ij}(x,t,y)\partial_j y)],$$

$$f_{h\tau} = f_{h\tau}(x,t) \in L_2(\Omega_h), \ t \in \omega_\tau \ , \ H_0^k(\Omega_h) =$$

$$= \{ y \in H^k(\Omega_h), \ y|_{\partial\Omega_h} = 0 \} \ , \ H^k(\Omega_h) = W^{k,2}(\Omega_h).$$

В пространствах $H_0^1(\Omega_h)$ и $H_0^2(\Omega_h)$ воспользуемся соответственно нормами

$$\|y\|_1 = \|\Delta_h^{1/2} y\|_0 , \ \|y\|_2 = \|\Delta_h y\|_0 , \ \Delta_h = -\sum_{i=1}^{m} \partial_i \bar\partial_i , \ \|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{L_2(\Omega_h)}.$$

Введем связывающие операторы $p_h \in \mathcal{L}(H_0^2(\Omega), H_0^2(\Omega_h))$, $q_h \in \mathcal{L}(L_2(\Omega), L_2(\Omega_h))$, действующие соответственно по формулам

$$(p_h u)(\xi) = u(\xi) \ , \ \xi \in \bar\Omega_h \ ,$$

$$(q_h u)(\xi) = h^{-m}\int_{\Pi(\xi)} u(x)\,dx \ , \ \xi \in \Omega_h \ ,$$

где $\Pi(\xi)$ элементарная ячейка обьема h^m с центром в точке $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Omega_h$:

$$\Pi(\xi) = \{ x = (x_1,\dots,x_m) \ , \ \xi_j - \frac{h}{2} < x_j \le \xi_j + \frac{h}{2} \ , \ j = 1,\dots,m \}.$$

При исследовании сходимости схемы (4), (5), (6) будем пользоваться неравенством коэрцитивности (см. [3]) и результатами из [4]. Приведем краткий обзор результатов [4].

Пусть имеется двухслойная разностная схема

$$F(t, y(t), y(t-\tau)) = 0 , y(0) = y_0 , \qquad (7)$$

где $t \in \omega_\tau^+$, $y = y(t) \in E_h$ – конечномерное евклидово пространство, зависящее от h.

Пусть w – фиксированный элемент пространства

$$X = \{v : v(t) \in E_h , t \in \omega_\tau\} , \Psi(w)(t) = -F(t, w(t), w(t-\tau))$$

при $t \in \omega_\tau^+$, $\Psi(w)(0) = 0$, $\|\cdot\|$ – норма на E_h при $t \in \omega_\tau^+$. В пространстве X определяется окрестность

$$\mathcal{U}_\delta(w) = \{\eta \in X : \max_{t \in \omega_\tau} \|\eta(t) - w(t)\| \le \delta .$$

Операторно-разностная схема (7) называется (w, δ) корректной (или локально корректной), если на $E_h \times X$ существует непрерывный, неотрицательный функционал $\mathcal{J}(y, z)$ такой что $\mathcal{J}(0,0) = 0$ и как только $\mathcal{J}(y_0 - w(0), \Psi(w)) \le \delta$, то схема (7) имеет решение $y \in \mathcal{U}_\delta(w)$ и справедлива оценка

$$\max_{t \in \omega_\tau^+} \|y(t) - w(t)\| \le \mathcal{J}(y_0 - w(0), \Psi(w)).$$

Пусть $\mathcal{J}_1(v, w)$, $\mathcal{J}_2(z)$, $\mathcal{J}_3(z)$, $\mathcal{J}_4(z)$ – некоторые функционалы, непрерывные по v при каждом $t \in \omega_\tau$ на $\mathcal{U}_\delta(w)$, такие, что

$$\mathcal{J}_i(z) > 0 , \mathcal{J}_i(0) = 0 , i = \overline{2,4} , z = v - w ,$$

$$\mathcal{J}_2(z) \ge c_2 \|z\|^p , p > 1 , c_2 = c_2(\delta) \ge \beta_0 > 0 , \qquad (8)$$

$$|\mathcal{J}_1(v, w)| \le c_3 \mathcal{J}_2(z) + \mathcal{J}_3(z) , c_3 = c_3(\delta), 0 \le c_3 < 1 .$$

Имеет место теорема (см. [4]).

<u>Теорема I</u>. Пусть $\tau \le \tau_0$, $h \le h_0$, $Q(t) : E_h \to E_h, Q(t) > 0$, $|\alpha| \le 1$, такие, что как только $v(t) \in \mathcal{U}_\delta(w)$, то справедливо

$$(F(t, v, \check{v}), Q(t)(z - \alpha \check{z})) \ge \mathcal{J}_2(z) + (1 + c_1\tau) \mathcal{J}_2(\check{z}) +$$

$$+ \tau [\mathcal{J}_1(v, w)]_{\bar{t}} - \tau \mathcal{J}_4(z) , z = v - w , c_1 = c_1(\delta) \ge 0 .$$

Тогда схема (7) корректна, причем функционал, определяющий корректность схемы (7) имеет вид

$$\mathcal{J}(y(0) - w(0), \Psi(w)) \equiv [M(\mathcal{J}_2(y(0) - w(0)) + 3 \max_{t \in \omega_\tau^+} \mathcal{J}_3(\Psi(w)) + \sum_{t \in \omega_\tau^+} \tau \mathcal{J}_4(\Psi(w)(t)))]^{1/p} , \qquad (9)$$

где

$$M=(1+c_1\tau+c_3)(1+c_3)(c_2(1-c_3))^{-1}\exp(c_1(T-\tau)/(1-c_3)).$$

В дальнейшем предположим, что задача (I), (2), (3) имеет решение $u^*(x,t)$, у которого существуют и ограничены производные

$$\frac{\partial^{\mu_0+\mu_1}u^*(x,t)}{\partial x_i^{\mu_0}\partial x_j^{\mu_1}},\quad \frac{\partial^2 u^*(x,t)}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 u^*(x,t)}{\partial t\,\partial x_i}\quad \frac{\partial^3 u^*(x,t)}{\partial t\,\partial x_i^2}$$

$$\frac{\partial^3 u^*(x,t)}{\partial t^3},\ \mu_0,\mu_1=0,1,\dots,4,\ \mu_0+\mu_1\le 4,\ i,j=1,\dots,m,\ \forall x\in\bar\Omega,\ t\in[0,T]. \tag{IO}$$

Рассмотрим окрестность.

$$\mathcal{U}_\delta=\{v(t)\in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_h),\ t\in\omega_\tau^+,\ \max_{t\in\omega_\tau^+}\|v(t)-p_hu^*(t)\|_1\le$$
$$\le c_0\cdot h=\delta\},\ c_0>0.$$

Отметим, что для элементов $v(t)\in\mathcal{U}_\delta$ справедливо

$$\|v(t)\|_2\le\|v(t)-u^*(t)\|_2+\|u^*(t)\|_2\le$$
$$\le\frac{c}{h}\|v(t)-u^*(t)\|_1+\|u^*(t)\|_2<const=a.$$

Теперь для $y,v\in\mathcal{U}_\delta$, $t\in\omega_\tau$ имеет место неравенство коэрцитивности (см. [3])

$$(A_{h\tau}(t)y-A_{h\tau}(t)v,\Delta_h(y-v))\geqslant\frac{\varkappa_a}{2}\|y-v\|_2^2-c_a\|y-v\|_1^2,$$

где c_a – положительная постоянная, зависящая от a.

Прежде чем исследовать корректность схемы (4), (5), (6), исследуем ее погрешность аппроксимации

$$\psi=f_{h\tau}-(p_hu^*)_{\bar t}-A_{h\tau}(t')(\overline{p_hu^*})$$

Справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 2</u>. Пусть выполнено условие (II) и пусть задача (I), (2), (3) имеет решение $u^*(x,t)$, удовлетворяющее условиям гладкости (IO). Тогда

$$\|(p_hu^*)_{\bar t}+A_{h\tau}(t')(\overline{p_hu^*})-q_h[\frac{\partial u^*(x,t)}{\partial t}+A(t')u^*(x,t')]\|_0=$$
$$=O(h^2+\tau^2),\ t\in\omega_\tau^+.$$

Корректность схемы (4), (5), (6) характеризуется следующей теоремой.

<u>Теорема 3</u>. Пусть выполнены условия (I), (II), (IO). Пусть $\tau\le r\cdot h^{1/2}$, $r=const>0$ такая, что выполняется $1-\tau c_a>0$.

Тогда при достаточно малых h и τ схема (4), (5), (6) имеет единственное решение $y^*(t)\in M_\delta$ и при $\|f_{h\tau}-q_h f(x,t')\|_0 = = O(h^2+\tau^2)$ имеет место оценка

$$\max_{t\in\omega_\tau} \|y^*(t)-p_h u^*(t)\|_1 = O(h^2+\tau^2).$$

Доказательство. Убедимся в том, что для схемы (4), (5), (6 выполнены условия теоремы I. Пусть $z=v-p_h u^*$, $v= =v(t)\in M_\delta$, $\alpha=-1$, $Q=\tau\Delta_h$. Оценим скалярное произведение $\tau\,(F(t,v,\check v),\ \Delta_h(z+\check z))$ с $F(t,v,\check v)=v_{\bar t}-A_{h\tau}(t')\bar v-f_{h\tau}$.

Имеем

$$\tau\,(F(t,v,\check v),\ \Delta_h(z+\check z))=\tau\,(z_{\bar t},\Delta_h(z+\check z))+$$
$$\tau\,(A_{h\tau}(t')\bar v-A_{h\tau}(t')(\overline{p_h u^*}),\Delta_h(z+\check z))-\tau\,(\Psi,\Delta_h(z+\check z)),\tag{II}$$

где

$$\Psi=f_{h\tau}-(p_h u^*)_{\bar t}-A_{h\tau}(t')(\overline{p_h u^*}).$$

Оценим слагаемые в (II). Первое из них легко преобразуется к виду:

$$\tau\,(z_{\bar t},\Delta_h(z+\check z))=\|z\|_1^2-\|\check z\|_1^2.$$

Из неравенства коэрцитивности для второго слагаемого в (II) пс лучаем

$$\tau\,(A_{h\tau}(t')\bar v-A_{h\tau}(t')(\overline{p_h u^*}),\ \Delta_h(z+\check z))=$$
$$=2\tau\,(A_{h\tau}(t')\bar v-A_{h\tau}(t')(\overline{p_h u^*}),\ \Delta_h\bar z)\geqslant\tau\varkappa_a\|\bar z\|_2^2-2\tau c_a\|z\|_1^2.$$

Для третьего слагаемого в (II) справедливо

$$|\tau\,(\Psi,\Delta_h(z+\check z))|\le 2\tau\,\|\bar z\|_2\cdot\|\Psi\|_0\le\tau\varepsilon\|\bar z\|_2^2+\frac{\tau}{\varepsilon}\|\Psi\|_0^2.$$

Таким образом

$$\tau\,(F(t,v,\check v),\ \Delta_h(z+\check z))\geqslant$$
$$\geqslant\|z\|_1^2-\|\check z\|_1^2+\tau(\varkappa_a-\varepsilon)\|\bar z\|_2^2-2\tau c_a\|\bar z\|_1^2+\frac{\tau}{\varepsilon}\|\Psi\|_0^2.$$

Выбираем $\varepsilon=\varkappa_a$ и учитываем, что

$$\|\bar z\|_1^2\le\frac{1}{2}\left(\|z\|_1^2+\|\check z\|_1^2\right).$$

Имеем

$$\tau\,(F(t,v,\check v),\Delta_h(z+\check z))\geqslant(1-\tau c_a)\|z\|_1^2-(1+\tau c_a)\|\check z\|_1^2-\frac{\tau}{\varkappa_a}\|\Psi\|_0^2.$$

Введем обозначения

$$c_2=1-\tau c_a,\quad c_1=\frac{2c_a}{1-\tau c_a},\quad J_2(z)=c_2\|z\|_1^2,\quad J_4=\frac{1}{\varkappa_a}\|\Psi\|_0^2.\tag{I2}$$

Тогда

$$\tau\,(F(t,v,\check v),\,\Delta_h(z+\check z)) \geqslant \mathfrak{I}_2(z)-(1+c_1\tau)\,\mathfrak{I}_2(\check z)-\tau\,\mathfrak{I}_4(\psi).$$

Относительно функционалов $\mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_4$ справедливы условия (8), причем $\mathfrak{I}_1\equiv 0$, $\mathfrak{I}_3\equiv 0$. Функционал (9) имеет вид

$$\mathfrak{I}(y(0)-p_h u^*(0),\,\psi)=$$

$$=\left\{\frac{1+c_1\tau}{c_2}\,e^{c_1(T-\tau)}\left[\mathfrak{I}_2(y(0)-p_h u^*(0))+\sum_{t\in\omega_\tau^+}\tau\,\mathfrak{I}_4(\psi(t))\right]\right\}^{1/2},$$

где c_1, c_2 определены в (12). Так как $\mathfrak{I}_2(y(0)-p_h u^*(0))=0$, то остается оценить функционал Оценим:

$$\|\psi\|_0=\|(p_h u^*)_{\bar t}+A_{h\tau}(t')(\overline{p_h u^*})-f_{h\tau}\|_0\leq$$

$$\leq\|(p_h u^*)_{\bar t}+A_{h\tau}(t')(\overline{p_h u^*})-q_h\left[\frac{\partial u^*(x,t')}{\partial t}+A(t')u^*(x,t')\right]\|_0+$$

$$+\|f_{h\tau}-q_h f(x,t')\|_0.$$

Так как $\|f_{h\tau}-q_h f(x,t')\|_0=O(h^2+\tau^2)$, то из теоремы 2 следует, что

$$\|\psi\|_0=O(h^2+\tau^2).$$

Значит, при достаточно малых $h, r_1\,(\tau\leq r_1\cdot h^{1/2})$ имеет место

$$\mathfrak{I}(y(0)-p_h u^*(0),\,\psi)=O(h^2+\tau^2)\leq c_0 h=\delta\,.$$

Отсюда в силу теоремы I вытекает, что разностная схема (4), (5), (6) имеет в $\mathcal{U}_\delta$ решение, для которого справедлива оценка

$$\max_{t\in\omega_\tau^+}\|y^*(t)-p_h u^*(t)\|_1=O(h^2+\tau^2).$$

Для доказательства единственности решения $y^*(t)$ предположим противное. Пусть разностная схема (4), (5), (6) имеет два решения $y_1(t),\,y_2(t)\in\mathcal{U}_\delta$. Их разность $z=y_1-y_2$ удовлетворяет уравнению

$$z_{\bar t}+A_{h\tau}(t')\,\bar y_1-A_{h\tau}(t')\,\bar y_2=0\,. \tag{I3}$$

Умножим последнее скалярно на $\tau\,\Delta_h(z+\check z)$:

$$\tau\,(z_{\bar t}+A_{h\tau}(t')\,\bar y_1-A_{h\tau}(t')\,y_2,\,\Delta_h(z+\check z))=$$

$$=\tau\,(z_{\bar t},\Delta_h(z+\check z))+\tau\,(A_{h\tau}(t')\,\bar y_1-A_{h\tau}(t')\,\bar y_2,\,\Delta_h(z+\check z)).$$

Оценим оба члена в правой части последнего равенства, как и раньше.

Будем иметь

$$\tau\,(z_{\bar t}+A_{h\tau}(t')\bar y_1-A_{h\tau}(t')\bar y_2,\ \Delta_h(z+\check z))\geq$$
$$\geq(1-\tau c_a)\|z\|_1^2-(1+\tau c_a)\|\check z\|_1^2$$

или, учитывая (I3),

$$(1-\tau c_a)\|z\|_1^2\leq(1+\tau c_a)\|\check z\|_1^2 .$$

В обозначениях (I2) последнее неравенство принимает вид

$$\mathcal{J}_2(z)\leq(1+c_1\tau)\,\mathcal{J}_2(\check z) .$$

Суммируя полученное неравенство по $s=\tau,\dots,t$, получим

$$\mathcal{J}_2(z(t))\leq c_1\tau\sum_{s=\tau}^{t}\mathcal{J}_2(z(s))+\mathcal{J}_2(z(0))=$$
$$=c_1\tau\sum_{s=\tau}^{t-\tau}\mathcal{J}_2(z(s))+(1+c_1\tau)\,\mathcal{J}_2(z(0)).$$

Пользуясь сеточным аналогом леммы Гронуола (см. [5]), будем иметь

$$\mathcal{J}_2(z(t))\leq e^{c_1(T-\tau)}(1+c_1\tau)\,\mathcal{J}_2(z(0))\leq e^{c_1 t}\,\mathcal{J}_2(z(0)) .$$

Значит $(1-\tau c_a)\|z\|_1^2\leq 0$, откуда вытекает, что $y_1=y_2$.
Теорема 3 доказана.

Литература

I. Фишер М. Исследование разностных схем для нелинейных параболических уравнений. - В кн.: Тезисы докладов конференции "Методы алгебры и анализа". Тарту: Изд-во Тартуск. ун-та, I983, с. I4I-I44.

2. Фишер М. Сходимость разностного метода для нелинейного параболического уравнения. - В кн.: Ш симпозиум Методы решения нелинейных уравнений и задач оптимизации. Таллин: Изд-во "Валгус", I984, с. I0I-I02.

3. Фишер М. О сходимости разностного метода в сильной норме для нелинейной задачи эллиптического типа. - Уч. зап. Тартуск. ун-та, I982, вып. 633, с. 55-66.

4. Ляшко А.О., Федотов Е.М. О корректности нелинейных двухслойных операторно-разностных схем. - Дифференц. уравнения, I98I, т. I7, № 7, с. I304-I3I6.

5. Самарский А.А. Классы устойчивых схем. - Ж. вычисл. матем. и матем. физ., I967, т. 7, № 5. с. I096-II33.

Поступило
23 IУ 1985

CRANK-NICOLSON SCHEMA FÜR NICHTLINEARE PARABOLISCHE AUFGABE

M.Fischer

Zusammenfassung

Man untersucht die parabolische Differentialgleichung mit den schwachen Nichtlinearitäten in den Koeffizienten. Es wird gezeigt, daß das Crank-Nicolson Schema korrekt ist.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS INHALT

Ученые записки Тартуского государственного университета.
Выпуск 715.
СХОДИМОСТЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ В КОРРЕКТНЫХ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ.
Труды по математике и механике.
На русском языке.
Резюме на английском и немецком языках.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Ответственный редактор Э. Тамме.
Корректоры А. Тийман, Х. Пулк.
Подписано к печати 09.10.1985.
МВ 10404.
Формат 60x90/16.
Бумага писчая.
Машинопись. Ротапринт.
Учетно-издательских листов 3,74. Печатных листов 4,5.
Тираж 380.
Заказ № 861.
Цена 55 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Пялсона, 14.

2 - 2