TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Riina Org

# Lie algebroidid

Magistritöö (30 EAP)

Juhendaja: prof. Viktor Abramov

Tartu 2015

## Lie algebroidid

Magistritöö

Riina Org

**Lühikokkuvõte.** Käesolevas magistritöös defineeritakse Lie algebroid ja tuuakse ka mõned näited. Enne Lie algebroidide mõiste andmist defineerime muutkonna ja räägime mitmemuutuja funkstiooni diferentseeruvusest. Edasises defineeritakse diferentseeruv muutkond ja antakse ka seosed Lie rühmade ja regulaarsete alammuutkondade vahel. Poissoni muutkonna juures näitame, et Jacobi samasus on võrdne Shouteni tingimusega.

**Märksõnad.** Topoloogiline muutkond, diferentseeruv(sile) muutkond, regulaarne alammuutkond, Lie rühm, vektorkihtkond, Poissoni muutkond, Lie algebroid

## Lie algebroidid

Master's Thesis

Riina Org

**Abstract.** In this master's thesis we give a definition of Lie algebroids and give some examples. Before we give the definition of Lie algebroids we define a manifold and talk about differentiability of function of several variables. Next we define the differentiable manifold and give some relations between Lie groups and regular submanifolds. At the Poisson manifolds we show that Jacobi identity is equal to Shouten condition.

**Keywords.** Topological manifold, smooth manifold, Lie group, vector bundle, Poisson manifold, Lie algebroid.

# Sisukord

# Sissejuhatus

Selles töös räägime Lie algebroidist, mis on Lie algebrate ja puutujavektorkihtkondade üldistus. Lie algebroid on väga tähtis, sest on seotud mitte ainult matemaatika valdkonnaga, vaid teoreetilise füüsika ja mehaanikaga. Eriti on Lie algebroidid seotud diferentsiaal operaatorite teooriaga nagu näiteks vormi välistuletis ja Lie tuletis vektorvälja suhtes [1]-[3]. Lie algebroid on vektorkihtkond, mis rahuldab kahte tingimust. Ka Poissoni muutkonnal saab konstrueerida Lie algebroidi struktuuri. Poissoni muutkond on sile muutkond, millel on antud Poissoni sulg, mis rahuldab kolme tingimust.

Lie Algebroide tustvustas esimest korda Jean Pardines, kes on Prantsuse matemaatik ja on töötanud pikka aega Paul Sabatier' nimelises ülikoolis.Poissoni muutkonna ajalugu on üsnagi keeruline,sest see muutkond taasavastati mitu korda erinevate nimede all. Poissoni muutkond ilmes paljude inimeste töödes. Nendeks inimesteks olid Lie, Paul Diraci, Lichnerowicz ja paljud teised. Nime Poissoni muutkonna andis sellele André Lichnerowicz, kes oli Prantsuse geomeeter.

Töös defineerime esmalt topoloogilise muutkonna ja toome väja ka mõned näited lisaks anname Brouwer'i teoreemi ruumi $\mathbb{R}^n$ piirkonna invariantsusest. Muutkonna mõiste on peamiseks paljudes geomeetria osades ja modernses matemaatilises füüsikas, kuna võimaldab kirjeldada ja mõista keerulisemaid struktuure. Üheks tähtsaks muutkondade klassiks on diferentseeruvad muutkonnad.

Tähtsaks teemaks on ka Lie rühmad. Nendega puutume kokku ernevates diferentsiaalgeomeetria valdkondades nagu näiteks Riemann geomeetria ja sümplektiline geomeetria.

Selles töös defineerime ka vektorkihtkonna. Vektorkihtkond moodustab tähtsa muutkondade klassi, mis omab füüsikas üsnagi suurt tähtsust. Konkreetsemalt öeldes, kõiksugu tensorvälju, mis ilmnevad füüsikalistes mudelites, võime ilma koordinaatideta vaadelda kindla vektorkihtkonna lõikena. Vektorkihtkond on kahe sileda muutkonna kujutus koos kahe tingimusega.

# 1 Topoloogiline muutkond

Enne, kui defineerime topoloogilise muutkonna, tuletame meelde mõned üldise topoloogia mõisteid [5],[8]. Topoloogilise ruumi $\mathcal{T}$ lahtiste hulkade peret $\mathcal{S}$ nimetatakse selle ruumi lahtise topoloogia baasiks, kui $\mathcal{T}$ iga lahtise hulga $U$ korral leiduvad hulgad $S_\alpha \in \mathcal{S}, \forall \alpha \in \mathcal{A}$, kus $\mathcal{A}$ on indeksite mingi hulk, sellised, et $U = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} S_\alpha$. Topoloogilist ruumi $\mathcal{T}$ nimetatakse sidusaks topoloogiliseks ruumiks, kui ruumi $\mathcal{T}$ ei ole võimalik esitada kahe mittetühja ühisosata lahtise hulga $U, V$, ühendina, st $\mathcal{T} = U \cup V, U \cap V = \emptyset$. Topoloogilist ruumi $\mathcal{T}$ nimetatakse joonsidusaks, kui suvalise kahe punkti $p, q \in \mathcal{T}$ korral leidub neid ühendav pidev joon, st pidev kujutus $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathcal{T}, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q$. Topoloogilist ruumi $\mathcal{T}$ nimetatakse ühelisidusaks, kui selle ruumi fundamentaalrühm $\pi_1(\mathcal{T})$ on triviaalne ehk iga pideva kinnise joone $\gamma : [a, b] \to \mathcal{T}, \gamma(a) = \gamma(b)$ võib pidevate teisendustega ruumis $\mathcal{T}$ transformeerida punktiks. Ruumi $\mathcal{T}$ lahtiste hulkade pere on selle ruumi lahtise topoloogia baas parajasti siis, kui iga punkti $x \in \mathcal{T}$ ja selle punkti iga ümbruse $U$ korral leidub hulk $S$ perest $\mathcal{S}$ nii, et $x \in S \subseteq U$.Toploogilise ruumi $T$ lahtiste hulkade peret $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, kus iga $\alpha$ korral $U_\alpha \subset T$, nimetatakse ruumi $T$ lahtiseks katteks, kui $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = T$. Topoloogilist ruumi nimetatakse kompaktseks, kui iga lahtise katte korral leidub selle katte lõplik alamkate.

Olgu $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ on topoloogilised ruumid, siis kujutust $\phi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ nimetatakse homöomorfismiks, kui

- $\phi$ on bijektsioon;
- $\phi$ on pidev kujutus;
- pöördkujutus $\phi^{-1}$ on ka pidev.

Kui leidub homöomorfism $\phi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$, siisöeldakse, et topoloogilised ruumid $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ on homöomorfsed, . Topoloogilist ruumi nimetatakse Hausdorffi ruumiks, kui suvaliste punktide $x, y \in \mathcal{T}$ korral leiduvad punkti $x$ ümbrus $U$ ja punkti $y$ ümbrus $V$ nii, et $U \cap V = \emptyset$.

**Definitsioon 1.1.** Topoloogilist ruumi $M$ nimetatakse $n$-mõõtmeliseks topoloogiliseks muutkonnaks või topoloogiliseks $n$-muutkonnaks, kui ta rahuldab kolme tingimust:

- $M$ on Hausdorffi ruum;
- ruumis $M$ leidub loenduv baas;
- $M$ on lokaalselt eukleidiline ruum, st suvalise punkti $x \in M$ korral leidub selle punkti ümbrus, mis on homöomorfne ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtise hulgaga.

Topoloogilist $n$-muutkonda $M$ nimetatakse kompaktseks (sidusaks, joonsidusaks, ühelisidusaks), kui $M$ on kompaktne (sidus, joonsidus, ühelisidus) topoloogiline ruum.

Arvu $n$ nimetatakse muutkonna $M$ dimensiooniks ja tähistatakse $\dim M = n$. Muutkonna definitsiooni kolmas tingimus on samaväärne sellega, et suvalise punkti $x \in M$ korral leiduvad selle punkti ümbrus $U \subset M$, ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtine hulk $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ ja homöomorfism $\phi : U \to U'$. Paari $(U, \phi)$ nimetatakse $n$-muutkonna $M$ lokaalseks kaardiks või lokaalseks koordinaadisüsteemiks. Kui $q \in U$, siis arve $x^1(q), x^2(q), \ldots, x^n(q)$, mis on määratud valemiga $\phi(q) = (x^1(q), x^2(q), \ldots, x^n(q))$, nimetatakse punkti $q$ koordinaatideks (lokaalses koordinaadisüsteemis $(U, \phi)$). Punkti $q$ $i$-s koordinaat $x^i(q)$ on punkti $q$ pidev funktsioon ja funktsiooni $x^i : U \to \mathbb{R}$ nimetatakse $i$-ndaks koordinaatfunktsiooniks. Mainime, et kolmandas tingimuses üldsust kitsendamata võime nõuda, et suvalise punkti korral leiduks tema ümbrus, mis on homöomorfne ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtise keraga või kuubiga.

**Näide.** Topoloogilise $n$-muutkonna lihtsaimaks näideks on ruum $\mathbb{R}^n$. Tõepoolest, üldisest topoloogiast teame, et ruumi $\mathbb{R}^n$ korral definitsiooni 1.1 esimesed kaks tingimust on täidetud. Kolmas tingimus on ka täidetud, kuna homöomorfismiks võime võtta samasuskujutuse $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Kui topoloogiline $n$-muutkond $M$ on homöomorfne ruumiga $\mathbb{R}^n$ (või selle lahtise keraga $B \subset \mathbb{R}^n$), siis öeldakse, et $M$ on triviaalne $n$-muutkond.

**Näide.** Ruumi $\mathbb{R}^n$ iga lahtine hulk $U \subset \mathbb{R}^n$ on toploogiline $n$-muutkond alamruumi topoloogia suhtes. Tõesti, sest definitsiooni 1.1 esimesed kaks tingimust on täidetud, kuna

$U$ saab oma topoloogia "päranduseks"ruumist $\mathbb{R}^n$. Kolmanda tingimuse täitmist saab näidata järgmiselt: suvalise punkti $x \in U$ korral leidub lahtine kera $B^n_\epsilon(x) \subset U$, nüüd homöomorfismiks võtame $\mathrm{id} : B^n_\epsilon(x) \to B^n_\epsilon(x)$.

Topoloogilise muutkonna definitsioonis on tegelikult üks nüanss. Me võime vabalt opereerida sellise mõistega nagu topoloogilise muutkonna dimensioon. Muutkonna dimensiooniks nimetame mudelruumi $\mathbb{R}^n$ dimensiooni $n$. Kuid selleks, et dimensiooni mõiste oleks korrektne, tuleb näidata, et arv $n$ on üks ja sama iga muutkonna $M$ punkti korral, sest kui leidub punkt $p \in M$ ja selle ümbrus $U$, mis on homöomorfne lahtise hulgaga $U' \subset \mathbb{R}^m, m \neq n$, siis dimensiooni mõistes ei ole mõtet. Dimensiooni küsimus on keeruline ja seega mainime, et dimensiooni mõiste korrektsus tugineb Brouwer'i teoreemile.

**Teoreem 1.1.** *(Brouwer'i teoreem ruumi $\mathbb{R}^n$ piirkonna invariantsusest) Kui $U \subset \mathbb{R}^n$ on ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtine alamhulk ja $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ on bijektiivne ning pidev kujutus, siis alamhulga $U$ kujutis $V = \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ on lahtine hulk ja $\phi$ on homöomorfism $U$ ja $V$ vahel.*

# 2 Mitme muutuja funktsiooni diferentseeruvus

Olgu $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtine hulk ja $f : U \to \mathbb{R}$ reaalväärtustega funktsioon. Oletame, et hulga $U$ igas punktis $p \in U$ on funktsiooni $f$ osatuletised

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n},$$

määratud. Seega on meil $n$ funktsioon $\frac{\partial f}{\partial x^i} : U \to \mathbb{R}$. Kui funktsiooni $f$ osatuletised on pidevad funktsioonid, siis funktsiooni $f$ nimetame pidevalt diferentseeruvaks funktsiooniks

või klassi $C^1$ funktsiooniks. Pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulka tähistame $C^1(U)$. Funktsiooni $f : U \to \mathbb{R}$ nimetame diferentseeruvaks funktsiooniks punktis $p \in U$, kui leidub selline lineaarfunktsioon $\sum_{i=1}^n b_i(x^i - p^i)$ (kus $b_i$ on reaalarvud), et funktsioon $f(p) + \sum_{i=1}^n b_i(x^i - p^i)$ aproksimeerib funktsiooni $f$ punkti $p$ läheduses selles mõttes, et

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p) - \sum_{i=1}^n b_i(x^i - p^i)}{||x - p||} = 0.$$

Funktsiooni $f : U \to \mathbb{R}$ nimetame diferentseeruvaks punktis $p \in U$, kui leiduvad reaalarvud $b_1, b_1, \ldots, b_n$, punkti $p$ ümbrus $V \subset U$ ja funktsioon $r(x, p) : V \to \mathbb{R}$ selliselt, et funktsioon $f$ on ümbruses $V$ esitatav kujul

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n b_i(x^i - p^i) + ||x - p||\, r(x, p),$$

ja $\lim_{x \to p} r(x, p) = 0$. Funktsiooni $f$ nimetame diferentseeruvaks hulgal $U$, kui $f$ on diferentseeruv selle hulga igas punktis.

**Lause 2.1.** *Kui funktsioon $f : U \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis $p \in U$, siis $f$ on pidev funktsioon punktis $p$ ja punktis $p$ on määratud funktsiooni $f$ osatuletised ja*

$$b_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Seega, kui $f$ on diferentseeruv punktis $p \in U$, siis punkti $p$ läheduses funktsioon $f$ on esitatav kujul

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p (x^i - p^i) + ||x - p||\, r(x, p).$$

Võrduse paremal poolel asuvat avaldist

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p (x^i - p^i)$$

nimetatakse funktsiooni $f$ diferentsiaaliks punktis $p$ ja tähistatakse $df\big|_p$. Tähistades $dx^i = x^i - p^i$, saame diferentsiaali klassikalise kuju

$$df\big|_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p dx^i \quad \text{või} \quad df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

**Lause 2.2.** *Kui funktsiooni $f : U \to \mathbb{R}$ osatuletised on määratud punkti $p$ ümbruses ja nad on pidevad funktsioonid punktis $p$, siis $f$ on diferentseeruv funktsioon punktis $p$.*

Niisiis, kui funktsioon on klassi $C^1$ funktsioon, siis $f$ on diferentseeruv. Funktsiooni $f : U \to \mathbb{R}$ nimetame klassi $C^r$ funktsiooniks hulgal $U$, kui selle funktsiooni esimest järku osatuletised on klassi $C^{r-1}$ funktsioonid hulgal $U$. Kui suvalise naturaalarvu $r \in \mathbb{N}$ korral funktsioon $f : U \to \mathbb{R}$ on klassi $C^r$ funktsioon, siis funktsiooni $f$ nimetame siledaks funktsiooniks hulgal $U$. Siledate funktsioonide hulka tähistame $C^\infty(U)$.

Kujutust $\alpha : I \to U$, kus $I \subset \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$ ja $\alpha(t) = (x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$, nimetame siledaks parameetriliseks jooneks, kui iga $x^i : I \to \mathbb{R}$ on sile funktsioon hulgal $I$ (kuna iga $x^i(t)$ on ühemuutuja funktsioon, siis sileduse nõue on samaväärne funktsiooni $x^i$ mistahes järku tuletise olemasoluga hulgal $I$). Eespool antud definitsioonis $I \subseteq \mathbb{R}$ on kas vahemik $(a, b) \subset \mathbb{R}$, poollõik $[a, b), (a, b]$ või lõik $[a, b]$. Kui $I$ on lõik (või poollõik), siis sileduse nõue tähendab, et leidub vahemik $(c, d)$ ja sile funktsioon $\tilde{x}^i : (c, d) \to \mathbb{R}$ selliselt, et $I \subset (c, d)$ ning $\tilde{x}^i\big|_I \equiv x^i$. Kui $g : U \to \mathbb{R}$ on sile funktsioon, siis $g \circ \alpha : I \to \mathbb{R}$ on sile funktsioon hulgal $I$. Igas punktis $t_0 \in I$ kehtib valem

$$\frac{d(g \circ \alpha)}{dt}\Big|_{t=t_0} = \sum_i \frac{\partial g}{\partial x^i}\Big|_{\alpha(t_0)} \frac{dx^i}{dt}\Big|_{t=t_0}. \tag{2.1}$$

Valemit 2.1 nimetatakse ahelreegliks.

Olgu $p, q \in U$ punktid. Punktide $p, q$ ühendavaks sirglõiguks nimetame parameetrilist joont $\overline{pq} : [0,1] \to U$, kus $\overline{pq}(t) = p + t\,(q-p), 0 \le t \le 1$, st $x^i(t) = p^i + t\,(q^i - p^i)$. $\overline{pq}$ on sile parameetriline joon. Lahtist hulka $U \subset \mathbb{R}^n$ nimetame tähekujuliseks punkti $p \in U$ suhtes, kui suvalise punkti $q \in U$ korral punktide $p, q$ ühendav sirglõik kuulub hulka $U$, st $\operatorname{Im} \overline{pq} \subset U$.

**Teoreem 2.3.** *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ tähekujuline hulk punkti $p \in U$ suhtes ja $g : U \to \mathbb{R}$ diferentseeruv funktsioon. Suvalise punkti $x \in U$ korral leidub $0 < \theta < 1$ nii, et*

$$g(x) - g(p) = \sum_i \frac{\partial g}{\partial x^i}\Big|_{\overline{px}(\theta)} (x^i - p^i).$$

**Lause 2.4.** *Kui $U \subset \mathbb{R}^n$ on punkti $p$ suhtes tähekujuline hulk ja $g : U \to \mathbb{R}$ diferenteeruv funktsioon, mille osatuletised rahuldavad võrratust $|\frac{\partial g}{\partial x^i}| < K$, kus $K$ on konstant, siis suvalise $x \in U$ korral kehtib*

$$|g(x) - g(p)| < K\sqrt{n}\,||x - p||.$$

# 3 Kujutused ja Jacobi maatriksid

Eeskirja, mis igale punktile $x \in U$ seab vastavusse üheselt määratud punkti $F(x) \in \mathbb{R}^m$, nimetatakse kujutuseks $F : U \to \mathbb{R}^m$, kus $U \subset \mathbb{R}^n$ on lahtine hulk. Iga $i = 1, 2, \dots, m$ korral defineerime funktsiooni $\pi^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ valemiga $\pi^i(x^1, x^2, \dots, x^m) = x^i$. Funktsioone $f^1, f^2, \dots, f^m$, kus $f^i : U \to \mathbb{R}, f^i = \pi^i \circ F$, nimetatakse kujutuse koordinaatfunktsioonideks. On ilmne, et kujutus $F$ on üheselt määratud oma koordinaatfunktsioonidega, st $F = (f^1, f^2, \dots, f^m)$. Kui vaadelda ruumi $\mathbb{R}^m$ kui vektorruumi, siis kujutust $F : U \to \mathbb{R}^m$ võime nimetada vektorväärtustega funktsiooniks, nagu teevad mõned autorid. Meie kasutame siiski terminit kujutus. Üldisest topoloogiast teame, et kujutus $F$ on pidev kujutus, kui selle kujutuse iga koordinaatfunktsioon on pidev.

**Definitsioon 3.1.** Diferentseeruvaks (klassi $C^1$, klassi $C^r$, siledaks) kujutuseks nimetame kujutust $F : U \to \mathbb{R}^m$, kui selle kujutuse koordinaatfunktsioonid $f^1, f^2, \dots, f^m$ on vastava klassi funktsioonid.

Kui $F$ on diferentseeruv kujutus, siis koordinaatfunktsioonide osatuletised on määratud ja kujutusega $F$ assotsieerub $m \times n$ maatriks

$$DF = \frac{\partial(f^1, f^2, \dots, f^m)}{\partial(x^1, x^2, \dots, x^n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Maatriksit $DF$ nimetatakse kujutuse $F$ Jacobi maatriksiks. Jacobi maatriksi väärtust punktis $x \in U$ tähistame $DF(x)$, mis on arvmaatriks. Jacobi maatriks on funktsioonaalmaatriks, kuna tema elemendid on funktsioonid hulgal $U$. Jacobi maatriksi elemendid on pidevad funktsioonid, kui kujutus $F$ on klassi $C^1$ kujutus. Kujutuse diferentseeruvusele võime anda teise sõnastuse, mida meie kasutame järgnevas.

**Teoreem 3.1.** *Kujutus $F : U \to \mathbb{R}^m$ on diferentseeruv punktis $p \in U$ (hulgal $U$) parajasti siis, kui leidub $m \times n$ maatriks $A$, mille elemendid on reaalarvud (funktsioonid hulgal*

*$U$), punktist $p$ sõltuv kujutus $R : U \to \mathbb{R}^m$ (kujutus $R : U \times U \to \mathbb{R}^m$), kus $R(x,p) = (r^1(x,p), r^2(x,p), \dots, r^m(x,p))$ on selline, et $||R(x,p)|| \to 0$, kui $x \to p$, ning suvalise $x \in U$ korral kehtib*

$$F(x) = F(p) + A \cdot (x - p) + ||x - p||\, R(x,p). \tag{3.2}$$

*Kui sellised $A, R(x,p)$ leiduvad, siis $A$ on määratud üheselt ja on võrdne kujutuse $F$ Jacobi maatriksiga $DF(p)$ ($DF$).*

**Märkus.** Valemis (3.2) teist liidetavat tõlgendame maatriksi $A$ ja üheveerulise maatriksi $x - p$ korrutisena ja viimast liidetavat arvu $||x - p||$ ja uheveerulise maatriksi $R(x,p)$ korrutisena. Valemi (3.2) kuju koordinaatfunktsioonides on järgmine

$$f^i(x) = f^i(p) + a^i_j(x^j - p^j) + ||x - p||\, r^i(x,p),$$

või

$$f^i(x) = f^i(p) + \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x^j - p^j) + ||x - p||\, r^i(x,p).$$

**Lause 3.2.** *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ punkti $p$ suhtes tähekujuline hulk ja $F : U \to \mathbb{R}^m$ diferentseeruv kujutus, mille koordinaatfunktsioonide osatuletised rahuldavad võrratust $|\frac{\partial f^i}{\partial x^j}| < K$ iga $1 \leq i \leq m$ ja $1 \leq j \leq n$ korral. Siis suvalise $x \in U$ korral kehtib*

$$||F(x) - F(p)|| \leq K\sqrt{nm}\, ||x - p||. \tag{3.3}$$

Selle peatüki lõpetuseks kirjutame ahelreegli kujutuse kompositsiooni korral. Olgu $F : U \to V \subset \mathbb{R}^m, G : V \to \mathbb{R}^k$, kus $U \subset \mathbb{R}^n$. On määratud kujutuste kompositsioon $H = G \circ F : U \to \mathbb{R}^k$ ja selle kompositsiooni koordinaatfunktsioonid $H(x) = (h^1(x), h^2(x), \dots, h^k(x))$ avalduvad kujutuste $F, G$ koordinaatfunktsioonide kaudu järgmiselt

$$h^i(x) = g^i(f^1(x), f^2(x), \dots, f^m(x)), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

**Teoreem 3.3.** *Kui $F$ on punktis $p \in U$ diferentseeruv kujutus ning $G$ on punktis $q = F(p)$ diferentseeruv kujutus, siis $H$ on punktis $p$ diferentseeruv kujutus ja*

$$DH(p) = DG(F(p)) \cdot DF(p). \quad \textit{(ahelreegel kujutuste korral)} \tag{3.4}$$

*Kui $F$ on diferentseeruv hulgal $U$, $G$ on diferentseeruv hulgal $V$, siis $H$ on diferentseeruv hulgal $U$ ja valem (3.4) kehtib hulga $U$ igas punktis.*

# 4 Diferentseeruvad muutkonnad

## 4.1 Diferentseeruva muutkonna mõiste

Olgu $M$ topoloogiline $n$-muutkond ja $(U, \phi), (V, \psi)$ selle muutkonna lokaalsed kaardid, kusjuures $U \bigcap V \neq \emptyset$. Meenutame, et $\phi$ ja $\psi$ on homöomorfismid. Kui $p \in U \bigcap V$, siis on määratud punkti $p$ lokaalsed koordinaadid

$$\begin{aligned} \phi(p) &= (x^1(p), x^2(p), \ldots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n, \\ \psi(p) &= (y^1(p), y^2(p), \ldots, y^n(p)) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Kuidas avalduvad punkti $p$ ühed lokaalsed koordinaadid teiste lokaalsete koordinaatide kaudu? Kuna $\phi$ ja $\psi$ on homöomorfismid, siis on meil määratud järgmised kujutused:

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \bigcap V) \to \psi(U \bigcap V), \quad \phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \bigcap V) \to \phi(U \bigcap V). \tag{4.2}$$

Eespool defineeritud kujutused $\psi \circ \phi^{-1}, \phi \circ \psi^{-1}$ on ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtiste hulkade $\phi(U \bigcap V)$ ja $\psi(U \bigcap V)$ homöomorfismid, kusjuures nad on teineteise pöördkujutused. Kirjutame komponentides:

$$\psi \circ \phi^{-1} \quad : \quad y^i = h^i(x^1, x^2, \ldots, x^n), \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.3}$$

$$\phi \circ \psi^{-1} \quad : \quad x^i = g^i(y^1, y^2, \ldots, y^n), \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.4}$$

Järelikult, iga $i$ korral funktsioonid $h^i, g^i$ on pidevad funktsioonid ja kehtivad samasused:

$$h^i\big(g^1(y), g^2(y), \ldots, g^n(y)\big) \equiv y^i, \tag{4.5}$$

$$g^i\big(h^1(x), h^2(x), \ldots, h^n(x)\big) \equiv x^i. \tag{4.6}$$

Meenutame, et funktsioone $h^i, g^i$ nimetatakse üleminekufunktsioonideks. Diferentseeruva muutkonna idee seisneb selles, et topoloogilise muutkonna kaartide abil konstrueerida atlase, mille kõik üleminekufunktsioonid on diferentseeruvad [4], [10].

**Definitsioon 4.1.** Olgu $(U, \phi), (V, \psi)$ topoloogilise $n$-muutkonna $M$ lokaalsed kaardid. Kahte kaarti $(U, \phi), (V, \psi)$ nimetatakse $C^\infty$-kooskõlalisteks, kui tingimusest $U \bigcap V \neq \emptyset$ järeldub, et üleminekufunktsioonid $h^i(x), g^j(y)$ on lõpmata diferentseeruvad, st nad on klassi $C^\infty$ funktsioonid ehk siledad funktsioonid. Viimane tingimus on samaväärne sellega, et kujutused $\psi \circ \phi^{-1}, \phi \circ \psi^{-1}$ on ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtiste hulkade $\phi(U \bigcap V)$ ja $\psi(U \bigcap V)$ difeomorfismid.

**Definitsioon 4.2.** Diferentseeruvaks struktuuriks või $C^\infty$-struktuuriks (siledaks struktuuriks)topoloogilisel $n$-muutkonnal $M$ nimetatakse lokaalsete kaartide kogumit $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, kui on täidetud järgmised tingimused:

i) $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$, st $\{U_\alpha\}$ on muutkonna $M$ kate;

ii) iga $\alpha, \beta$ korral lokaalsed kaardid $(U_\alpha, \phi_\alpha), (U_\beta, \phi_\beta)$ on $C^\infty$-kooskõlalised;

iii) kui $(V, \psi)$ on topoloogilise muutkonna $M$ lokaalne kaart, mis on $C^\infty$-kooskõlaline kogumi $\mathcal{U}$ iga kaardiga, siis $(V, \psi) \in \mathcal{U}$.

Topoloogilist $n$-muutkonda $M$ koos temal määratud diferentseeruva struktuuriga $\mathcal{U}$ nimetatakse diferentseeruvaks (siledaks) $n$-muutkonnaks.

Lähtudes diferentseeruva muutkonna definitsioonist võib näidata, et definitsiooni tingimused *i* ja *ii* on olulised, kuid viimane tingimus on rohkem teoreetiline, st kui mingi atlas on konstrueeritud, siis muutkonna diferentseeruv struktuur on sellega üheselt määratud, kuna võime formaalselt täiendada konstrueeritud atlast kõikvõimalike kaartidega [7].

**Teoreem 4.1.** *Olgu $M$ topoloogiline $n$-muutkond. Kui $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ on muutkonna $M$ atlas, mis koosneb $C^\infty$-kooskõlalistest lokaalsetest kaartidest, siis muutkonnal $M$ eksisteerib üks ja ainult üks diferentseeruv struktuur, mis sisaldab atlast $\mathcal{U}$.*

**Näide.** Olgu $E^2$ eukleidiline tasand ristkoordinaatteljestikuga $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ja vastavatega ristkoordinaatidega $x, y$. Kui $p$ on tasandi suvaline punkt, siis on määratud punkti $p$

ristkoordinaadid $x(p), y(p)$ ja seega on määratud kujutus $\psi : E^2 \to \mathbb{R}^2$. On ilmne, et $\psi$ on homöomorfism . Seega on eukleidiline tasand kaetud ühe koordinaadikaardiga $(V, \psi)$, kus $V = E^2, \psi(p) = (x(p), y(p))$. Teoreemi (4.1) tõttu meil on määratud diferentseeruv struktuur. Seega $E^2$ on diferentseeruv muutkond.

Olgu $\{O^*; \mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*\}$ eukleidilise tasandi mingi teine ristreeper, mille vastavad ristkoordinaadid on $x^*, y^*$. Seega on määratud teine koordinaadikaart $(V, \psi)$ eukleidilisel tasandil, kus $V = E^2$ ja $\psi(p) = (x^*(p), y^*(p))$. Juhime tähelepanu sellele, et kaart $(V, \psi)$ erineb eespool defineeritud kaardist, kuna kujutused $\phi$ ja $\psi$ on erinevad. Teame, et leidub nurk $\theta$ nii, et

$$
\begin{aligned}
x &= x^* \cos\theta - y^* \sin\theta + h^1 \\
y &= x^* \sin\theta + y^* \cos\theta + h^2.
\end{aligned}
$$

Järelikult, üleminekufunktsioonid on lõpmata diferentseeruvad ja kaardid $(V, \phi)$ ja $(V, \psi)$ on $C^\infty$-kooskõlalised ja teine kaart kuulub esimese kaardi poolt määratud diferentseeruvasse struktuuri.

Olgu $U \subset E^2$ eukleidilise tasandi lahtine alamhulk, kus $U = E^2 \setminus L$ ja $L$ on punktist $O$ lähtuv kiir. Olgu $p \in U$, $r$ punkti $p$ kaugus punktini $O$, $\theta$ nurk lõigu $Op$ ja kiire $L$ vahel (kiirt $L$ pöörame ümber punkti $O$ kellaosuti liikumisele vastupidises suunas niikaua, kui ta ühtib lõiguga $Op$). Seega on määratud koordinaadikaart $(U, \xi)$, kus

$$
\xi(p) = (r(p), \theta(p)) : U \to \mathbb{R}^2, \xi(U) = \{(r, \theta) : 0 < r < \infty,\ 0 < \theta < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2,
$$

ja $\xi$ on homömorfism. On ilmne, et $r(p), \theta(p)$ on punkti $p$ polaarkoordinaadid. Kui kiireks $L$ valime $x$-telje, siis

$$
x = r \cos\theta, \quad y = r \sin\theta,
$$

ja üleminekufunktsioonid näitavad, et kaart $(U, \xi)$ on $C^\infty$-kooskõlaline kaardiga $(V, \phi)$. Seega on tegemist ühe ja sama diferentseeruva struktuuriga.

**Näide.** On lihtne näidata, et diferentseeruva $n$-muutkonna $M$ iga lahtine alamhulk $U$ on diferensteeruv $n$-muutkond. Tõepoolest, hulga $U$ atlase $\{(V^*, \phi^*)\}$ konstrueerime järgmiselt: kui $(V, \phi)$ on muutkonna $M$ lokaalne kaart selline, et $V \bigcap U \neq \emptyset$, siis kaardi $(V^*, \phi^*)$ defineerime valemitega

$$V^* = V \bigcap U, \quad \phi^* = \phi\Big|_{V^*}.$$

$\{V^*\}$ on $U$ kate, kaardid $\{(V^*, \phi^*\})$ on $C^\infty$-kooskõlalised ja seega on meil konstrueeritud diferentseeruv struktuur hulgal $U$, mille suhtes ta on diferentseeruv $n$-muutkond.

Olgu $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ ristkülikmaatriks. Defineerime kujutuse $\phi : \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{kn}$ valemiga

$$\phi(A) = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22} \dots, a_{2n}, \dots, a_{kn}).$$

Kujutus $\phi$ on bijektsioon ja kasutades kujutust $\phi$, võime defineerida hulgal $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ topoloogia (mille suhtes $\phi$ on homöomorfism) ja diferentseeruva struktuuri, mis on määratud ühe kaardiga $(\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R}), \phi)$. Seega $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ on diferentseeruv $kn$-muutkond.

**Teoreem 4.2.** *Olgu $M, N$ kaks diferentseeruvat muutkonda, mille dimensioonid on vastavalt $m$ ja $n$. Otsekorrutis $M \times N = \{(p, q) : p \in M,\ q \in N\}$ on diferentseeruv muutkond dimensiooniga $m + n$, kusjuures diferentseeruv struktuur $\mathcal{U}$ on määratud koordinadikaartide kogumiga $(U \times V, \phi \times \psi)$, kus $(U, \phi)$ on muutkonna $M$ lokaalne kaart, $(V, \psi)$ on muutkonna $N$ lokaalne kaart ja $\phi \times \psi(p, q) = (\phi(p), \psi(q)) \in \mathbb{R}^{m+n}$.*

**Näide.** Ühikringjoon $S^1$ on ühedimensionaalne diferentseeruv muutkond.

**Näide.** Projektiivne ruum $P^n(\mathbb{R})$ on diferentseeruv $n$-muutkond.

## 4.2 Diferentseeruvad funktsioonid muutkonnal

Topoloogilise muutkonna korral on määratud pideva funktsiooni mõiste topoloogilisel muutkonnal. Oletada võib, et diferentseeruva muutkonna korral on määratud diferentseeruva funktsiooni mõiste [11].

Olgu $f$ funktsioon määramispiirkonnaga $W_f$, kus $W_f$ on diferentseeruva muutkonna $M$ lahtine alamhulk, st $W_f \subseteq M$. Seega $f : W_f \to \mathbb{R}$. Olgu $(U, \phi)$ muutkonna $M$ lokaalne kaart lokaalsete koordinaatidega $x^1, x^2, \ldots, x^n$ selline, et $W_f \bigcap U \neq \emptyset$. Funktsioon $f$ tekitab $n$-muutuja funktsiooni $\hat{f} = f \circ \phi^{-1}$, mille määramispiirkond on $\phi(W_f \bigcap U) \subset \mathbb{R}^n$. Kehtib, et

$$f(p) = \hat{f}(x^1(p), x^2(p), \ldots, x^n(p)) = \hat{f}(\phi(p)),\ p \in W_f \bigcap U.$$

Järgnevas tähistame nii funktsiooni $f$, kui ka tema poolt tekitatud $n$-muutuja funktsiooni $\hat{f}$, ühe ja sama tähega $f$ (funktsioon $\hat{f}$ on funktsiooni $f$ avaldis kaardi lokaalsetes koordinaatides). Kui tegemist on kahe kaardiga $(U, \phi), (V, \psi)$, kus $W_f \bigcap U \bigcap V \neq \emptyset$, siis vastava kaardi koordinaatidega näitame, millise funktsiooniga tegemist on, st

$$f(p) = f(x^1(p), x^2(p), \ldots, x^n(p)) = f(y^1(p), y^2(p), \ldots, y^n(p)).$$

**Definitsioon 4.3.** $C^\infty$-funktsiooniks (siledaks funktsiooniks, diferentseeruvaks funktsiooniks) nimetame funktsiooni $f : W_f \to \mathbb{R}$, kui suvalise $p \in W_f$ korral leidub muutkonna $M$ lokaalne kaart $(U, \phi)$ nii, et $p \in U \bigcap W_f$ ning funktsioon $\hat{f} = f \circ \phi^{-1}$ on $C^\infty$-funktsioon ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtisel alamhulgal $\phi(W_f \bigcap U)$.

Mainime, et vastavalt tähistustele on $x^i$ nii muutuja kui ka koordinaadifunktsioon, st kui koordinaadifunktsiooni määratakse valemiga $x^i(p) = \pi^i \circ \phi(p) : U \to \mathbb{R}$, kus $\pi^i(q^1, q^2, \ldots, q^n) = q^i$. Ilmselt iga koordinaadifunktsioon on sile. Tõepoolest,sest kehtib, et

$$\begin{aligned} \hat{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) &= x^i \circ \phi^{-1}(x^1, x^2, \ldots, x^n) \\ &= (\pi^i \circ \phi) \circ \phi^{-1}(x^1, x^2, \ldots, x^n) = x^i. \end{aligned}$$

Definitsioonist lähtues saab näidata, et kehtivad järgmised omadused:

1. kui $f : W_f \to \mathbb{R}$ on sile funktsioon ja $V \subset W_f$ on lahtine alamhulk, siis $f\Big|_V$ on sile funktsioon hulgal $V$;

2. kui $W_f = \bigcup_\alpha U_\alpha$ ja iga $\alpha$ korral $f$ on sile funktsioon hulgal $U_\alpha$, siis $f$ on sile funktsioon hulgal $W_f$.

**Definitsioon 4.4.** Olgu $M, N$ diferentseeruvad muutkonnad ja$W \subseteq M$. Kujutust $F : W \to N$ nimetatakse $C^\infty$-kujutuseks (siledaks kujutuseks, diferentseeruvaks kujutuseks), kui iga $p \in W$ korral leiduvad lokaalsed kaardid $(U, \phi), U \subset M, (V, \psi), V \subset N, p \in U \subset W, F(p) \in V, F(U) \subset V$ selliselt, et kujutus $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$ on $C^\infty$-kujutus.

**Teoreem 4.3.** *Olgu $M$ diferentseeruv muutkond ja $F \subset M$ kinnine alamhulk ning $K \subset M$ kompaktne alamhulk,kusjuures $F \bigcap K = \emptyset$.Siis sile funktsioon $f : M \to [0, 1]$ nii, et hulga $K$ igas punktis on funktsiooni $f$ väärtus 1, st $x \in K$ korral $f(x) \equiv 1$ ja $x \in F$ korral $F(x) \equiv 0$.*

**Teoreem 4.4.** *Olgu $U$ muutkonna $M$ lahtine alamhulk, $p \in U$ ja sile funktsioon $f : U \to \mathbb{R}$.Siis leiduvad punkti $p$ ümbrus $V \subset U$ ja sile funktsioon $f^* : M \to \mathbb{R}$ nii, et $f^*\Big|_V \equiv f$ ja $f^*\Big|_{M \setminus U} \equiv 0$.*

**Definitsioon 4.5.** Difeomorfismiks nimetatakse kujutust $F : M \to N$, kui

1. $F$ on homömorfism;

2. $F$ on sile;

3. $F^{-1}$ on sile.

Kui leidub muutkondade $M, N$ vahel difeomorfism $F : M \to N$, siis öeldakse, et muutkonnad $M, N$ on difeomorfsed.

**Näide.** Olgu $\mathbb{R}$ hariliku diferentseeruva struktuuriga diferentseeruv muutkond , st $U = \mathbb{R}$ ja $\phi = \mathrm{id}_\mathbb{R}$. Tähistame $\phi(t) = \tau$, kus $t \in \mathbb{R}, \tau \in U$. Niisiis, $\tau$ on kaardiga $(U, \phi)$ määratud koordinaat. Olgu $V = \mathbb{R}$ ja $\psi(t) = t^3 = \sigma$. Järelikult, $(V, \psi)$ on muutkonna $\mathbb{R}$ teine koordinaadikaart. Näitame, et kaardid $(U, \phi)$, $(V, \psi)$ ei ole $C^\infty$-kooskõlalised. Tõepoolest, üleminekufunktsioon on $\phi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja selle avaldus vastavates koordinaatides on $\tau = \sqrt[3]{\sigma}$. On ilmne, et üleminekufunktsioon on homöomorfism ja, seega, tegemist on ühe ja sama topoloogilise muutkonnaga. Kuid funktsioon $\tau = \sqrt[3]{\sigma}$ ei ole lõpmata diferentseeruv (ta isegi ei ole pidevalt diferentseeruv), kuna tuletis

$$\frac{dt}{d\sigma} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\sigma^2}}$$

ei ole pidev funktsioon punktis $\sigma = 0$. Järelikult on meil ühel ja samal topoloogilisel muutkonnal $\mathbb{R}$ kaks erinevat diferentseeruvat struktuuri. Antud näide on lihtne ja vastavad struktuurid on difeomorfsed (ekvivalentsed). Tõepoolest, olgu $F : \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$, kus $\mathbb{R}$ on $\mathbb{R}$ hariluku diferentseeruva struktuuriga ja $\tilde{\mathbb{R}}$ on $\mathbb{R}$ teise diferentseeruva struktuuriga, $F(t) = t^3$. Kirjutades kujutuse $F$ vastavates koordinaatides saame $\phi \circ F \circ \psi^{-1} : \tau = F(\sqrt[3]{\sigma}) = (\sqrt[3]{\sigma})^3 = \sigma$, mis näitab, et $F$ on difeomorfism.

Seega, ülalpool toodud näides ühel ja samal topoloogilisel muutkonnal on kaks diferentseeruvat struktuuri, mis ei ole $C^\infty$-kooskõlalised, kuid nad on isomorfsed. Diferentseeruvate muutkondade teooria üheks fundamentaalküsimuseks on küsimus: kas ühel ja samal topoloogilisel muutkonnal (või homöomorfsetel muutkondadel) eksisteerivad erinevad mittedifeomorfsed diferentseeruvad struktuurid?

Lõpetame selle punkti kriteeriumiga. Olgu $M$ diferentseeruv muutkond, $U \subset M$ lahtine alamhulk, $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ homöomorfism. Paar $(U, \phi)$ on koordinaadikaart diferentseeruval muutkonnal $M$ parajasti siis, kui $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ on difeomorfism. Järgnevas nimetame paari $(V, \phi^{-1})$ muutkonna $M$ lokaalseks parametriseerimiseks.

## 4.3 Kujutuse astak. Immersiooni mõiste

Olgu $N, M$ diferentseeruvad muutkonnad, $F : N \to M$ diferentseeruv kujutus. Olgu $p \in N$, $F(p) \in M$ ja $(U, \phi), (V, \psi)$ lokaalsed kaardid vastavalt punkti $p$ ja punkti $F(p)$

ümbruses, kusjuures $F(U) \subset V$. Kirjutades kujutuse $F$ vastavate kaartide lokaalsetes koordinaatides, saame

$$\begin{aligned} y^1 &= \hat{f}^1(x^1, x^2, \ldots, x^n), \\ y^2 &= \hat{f}^2(x^1, x^2, \ldots, x^n), \\ & \ldots \\ y^m &= \hat{f}^m(x^1, x^2, \ldots, x^n), \end{aligned}$$

ehk

$$y^\alpha = \hat{f}^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m,$$

kus

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^m.$$

**Definitsioon 4.6.** Kujutuse $F$ astakuks punktis $p \in M$ nimetame kujutuse $\hat{F}$ astakut punktis $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$ (Jacobi maatriksi $D\hat{F}(\phi(p))$ astakut) ja tähistame $\operatorname{rank} F(p)$.

Seega, kujutuse $F$ astak punktis $p$ on Jacobi maatriksi $D\hat{F}(\phi(p))$ astak, st

$$\operatorname{rank} F(p) = \operatorname{rank} \left( \frac{\partial \hat{f}^\alpha}{\partial x^i}\Big|_{\phi(p)} \right).$$

Osutub, et kehtib järgmine teoreem (ilma tõestuseta):

**Teoreem 4.5.** *(*`Teoreem kujutuse astakust`*) Olgu $N, M$ diferentseeruvad muutkonnad, $\dim N = n$, $\dim M = m$ ja $F : N \to M$ diferentseeruv kujutus, mille astak muutkonna $M$ igas punktis on $k \leq \min(n, m)$. Muutkonna $N$ suvalise punkti $p \in N$ korral leiduvad punktide $p \in N$, $F(p) \in M$ koordinaatümbrused $(U, \phi), (V, \psi), F(U) \subset V$ sellised, et*

- *$\phi(p) = (0, 0, \ldots, 0)$ (n-korda), $\psi(F(p)) = (0, 0, \ldots, 0)$ (m-korda);*
- *kujutuse $\hat{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$ kuju lokaalsetes koordinaatides on*

$$y^1 = x^1, \ y^2 = x^2, \ \ldots, \ y^k = x^k, \ y^{k+1} = 0, \ \ldots, \ y^m = 0,$$

- $\phi(U) = C_\epsilon^n(0), \psi(V) = C_\epsilon^m(0)$, *kus* $\epsilon > 0$ *ja* $C_\epsilon^n(0), C_\epsilon^m(0)$ *on kuubid, st nt*

$$C_\epsilon^n(0) = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : |x^i| < \epsilon\}.$$

Teoreemist järeldub, kui $F : N \to M$ on difeomorfism, siis $\dim N = \dim M$. Tõesti, oletame, et $\dim N \neq \dim M$, nt $m < n$. Sel juhul $k \leq \min(n, m) = m < n$. Olgu koordinaatümbrused valitud nii, nagu teoreemis, siis kujutuse $F$ kuju lokaalsetes koordinaatides on

$$y^1 = x^1,\ y^2 = x^2,\ \dots,\ y^k = x^k,\ y^{k+1} = 0,\ \dots,\ y^m = 0$$

ja hulga $\phi(U)$ kõikide punktide $(0, \dots, 0, x^{k+1}, \dots, x^n)$ kujutis on ruumi $\mathbb{R}^m$ alguspunkt, st $\hat{F}(0, \dots, 0, x^{k+1}, \dots, x^n) = 0$. Siit järeldub, et $F$ ei saa olla bijektiivne isegi lokaalselt.

**Definitsioon 4.7.** Diferentseeruvat kujutust $F : N \to M$, kus $N, M$ on diferentseeruvad muutkonnad, nimetatakse immersiooniks, kui $\operatorname{rank} F = n = \dim N$. Diferentseeruvat kujutust $F : N \to M$ nimetatakse submersiooniks, kui $\operatorname{rank} F = m = \dim M$. Kui $F$ on injektiivne immersioon, mille abil kujutis $\tilde{N} = F(N) \subset M$ on varustatud topoloogiaga (mille suhtes $F$ on homöomorfism) ja diferentseeruva struktuuriga (mille suhtes $F$ on difeomorfism), siis kujutist $\tilde{N} \subset M$ nimetatakse muutkonna $M$ alammuutkonnaks või immersiooni $F$ poolt tekkitatud alammuutkonnaks.

immersiooni korral $\dim N \leq \dim M$ ja submersiooni korral $\dim N \geq \dim M$. Juhime tähelepanu sellele, et sisestatud alammuutkonna struktuur sõltub nii muutkonnast $N$, kui ka kujutusest $F$ ja kujutisest $\tilde{N}$. Üldiselt $M$ ei pea olema topoloogiline alamruum.

## 4.4 Regulaarse alammuutkonna mõiste

Eelmises punktis oli defineeritud alammuutkonna mõiste. Diferentseeruva muutkonna $M$ alammuutkond $N \subset M$ on diferentseeruva muutkonna $\tilde{N}$ kujutis $N = F(\tilde{N})$, kui kujutus

$F : \tilde{N} \to M$ on injektiivne immersioon, kusjuures $F : \tilde{N} \to N \subset M$ on difeomrfism. See on kõige üldisem alammuutkonna mõiste ja teda hakkati laialt kasutama (ta osutus eriti effektiivseks Lie rühmade teoorias) Claude Chevalley teadustööde mõjul (vt [6]). Alammuutkonna $N$ diferentseeruv struktuur on difeomorfne (ekvivalentne) muutkonna $N$ diferentseeruva struktuuriga ja üldiselt kaudselt seotud muutkonna $M$, mille alamhulgaks ta on, diferentseeruva struktuuriga.

**Definitsioon 4.8.** Olgu $N \subset M$ diferentseeruva $m$-muutkonna $M$ alamhulk. Öeldakse, et alamhulgal $N$ on *$n$-alammuutkonna omadus*, kui $\forall p \in N$ korral leidub punkti $p$ koordinaatümbrus $(U, \phi), U \subset M$ koordinaatidega $x^1, x^2, \ldots, x^m$ selline, et

- $\phi(p) = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$,,
- $\phi(U) = C_\epsilon^m(0)$, kus $C_\epsilon^m(0)$ on $m$-mõõtmeline kuub keskpunktiga alguspunktis ja $\epsilon > 0$,
- $\phi(U \bigcap N) = \{x \in C_\epsilon^m(0) : x^{n+1} = \ldots = x^m = 0\}$.

Kui $N$ on alamhulk $n$-alammuutkonna omadusega, siis koordinaatümbrust ülalpool kirjeldatud omadustega nimetatakse punkti $p$ *eelistatavaks koordinaatümbruseks* $N$ suhtes.

Olgu $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, kus $m \geq n$, projektsiooni kujutus

$$\pi(x^1, x^2, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^m) = (x^1, x^2, \ldots, x^n).$$

**Lemma 4.6.** *Kui $N \subset M$ on diferentseeruva $m$-muutkonna $M$ alamhulk $n$-alammuutkonna omadusega ($n < m$), siis $N$ on diferentseeruv $n$-muutkond järgmise struktuuriga:*

1. *$N$ on topoloogiline $n$-muutkond muutkonna $M$ alamruumi topoloogia suhtes,*
2. *diferentseeruv struktuur on määratud atlasega $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, kus $V_\alpha = U_\alpha \bigcap N \subset N$, $\psi_\alpha = \pi \circ \phi_\alpha \Big|_{V_\alpha} : V_\alpha \to \mathbb{R}^n$, kus $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ on muutkonna $M$ kõikide eelistatavate koordinaatkaartide alamhulga $N$ suhtes kogum,*

3. *sisaldamine* $i : N \to M$ *on sisestus muutkondade* $N$ *ja* $M$ *diferentseeruvate struktuuride suhtes.*

**Definitsioon 4.9.** Diferentseeruva $m$-muutkonna $M$ regulaarseks $n$-alammuutkonnaks $N$ nimetatakse muutkonna $M$ alamhulka $N \subset M$ $n$-alammuutkonna omadusega ja diferentseeruva struktuuriga, mis on määratud muutkonna $M$ eelistatavate koordinaatkaartide ($N$ suhtes) kogumiga (vt Lemma 4.6 punkt 2).

# 5 Lie rühmad

Olgu $G$ diferentseeruv muutkond. Oletame, et $G$ on ka algebraline rühm korrutamistehtega $(x, y) \in G \times G \to x \cdot y \in G$ ja pöördelemendiga $x \in G \to x^{-1} \in G$. Meenutame, et muutkondade otsekorrutis $G \times G$ on ka diferentseeruv muutkond.

**Definitsioon 5.1.** Muutkonda $G$ nimetatakse Lie rühmaks, kui

1. $G$ on algebraline rühm korrutamistehtega $(x, y) \in G \times G \to x \cdot y \in G$,
2. kujutused $(x, y) \in G \times G \to x \cdot y \in G$ ja $x \in G \to x^{-1} \in G$ on diferentseeruvad kujutused.

Muutkonda $G$ nimetatakse topoloogiliseks rühmaks või pidevaks rühmaks, kui $G$ on nii algebraline rühm kui ka topoloogiline muutkond ning kujutused $(x, y) \in G \times G \to x \cdot y \in G$ ja $x \in G \to x^{-1} \in G$ on pidevad [6], [9].

**Näide.** Regulaarsete $n$-järku maatriksite rühm $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ on Lie rühm. Tõepoolest, punktis 4.1 näidatakse, et maatriksite rühm $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ on diferentseeruv muutkond. Meenutame, et $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ atlas koosneb ühest koordinaatkaardist $(\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}), \phi)$, st $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ on triviaalne muutkond, kusjuures maatriksi $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ koordinaadid selles koordinaatkaardis on

$$\phi(A) = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22} \ \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}.$$

Näitame, et kujutused $(x, y) \in G \times G \to x \cdot y \in G$ ja $x \in G \to x^{-1} \in G$ on diferentseeruvad. Kui $A = (a_{ij}), B = (b_{kl}) \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ siis

$$A \cdot B = C = (c_{ik}) = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}),$$

millest järeldub, et korrutamisega määratud kujutus on diferentseeruv kujutus, kuna korrutise koordinaadid avalduvad polünomiaalselt maatriksite $A$ ja $B$ koordinaatide kaudu .

Kujutuse $A \to A^{-1}$ kuju koordinaatides on

$$A^{-1} = \Big((-1)^{i+j}\frac{M_{ij}}{\det A}\Big)^T, \ (M_{ij} \text{ on elemendi } a_{ij} \text{ täiendusmiinor}).$$

Niisiis on pöördmaatriksi koordinaadid ratsionaalfunktsioonid, kusjuures nimetaja ei võrdu nulliga, kuna maatriks on regulaarne. Järelikult on kujutus $A \to A^{-1}$ diferentseeruv ja $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ on $n^2$-dimensionaalne Lie rühm.

**Näide.** Olgu $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$, kus $\mathbb{C}$ on kompleksarvude korpus. $\mathbb{C}^*$ on 2-dimensioonalne Lie rühm kompleksarvude korrutamise suhtes. Tõepoolest,kuna sellest, et $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ järeldub $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}^*$ ja $z_1^{-1} = \frac{1}{z_1} \in \mathbb{C}^*$ ning ühikelement on arv 1, siis $\mathbb{C}^*$ on algebraline rühm. $\mathbb{C}^*$ on diferentseeruv 2-muutkond ühe koordinaatkaardiga $(\mathbb{C}^*, \phi)$, kus $\phi(z) = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, kui $z = x + i\,y \in \mathbb{C}^*$. Mainime, et koordinaatkaardiga $(\mathbb{C}^*, \phi)$ määratud diferentseeruv struktuur on reaalne diferentseeruv struktuur selles mõttes, et komplekstasandi alamhulgal $\mathbb{C}^*$ määratud funtsioon $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ määrab kujutuse $\mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}^2$, kus $z = (x,y) \to (u(x,y), v(x,y))$ ja $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$. Kujutus on diferentseeruv eespool määratud diferentseeruva struktuuri suhtes parajasti siis, kui $u(x,y), v(x,y)$ on lõpmata diferentseeruvad funktsioonid.

Kui $G_1$ ja $G_2$ kaks algebralist rühma. Siis $G_1 \times G_2$ on algebraline rühm korrutamistehtega $(g_1, g_2)\cdot(g_1', g_2') = (g_1 \cdot g_1', g_2 \cdot g_2')$. Ühikelement on paar $(e, e')$, kus $e \in G_1,\ e' \in G_2$.

**Teoreem 5.1.** *Olgu $G_1$ ja $G_2$ kaks Lie rühma. Siis $G_1 \times G_2$ on Lie rühm muutkondade $G_1, G_2$ otsekorrutise diferentseeruva struktuuri suhtes.*

**Teoreem 5.2.** *Kui $H$ on Lie rühma $G$ algebraline alamrühm ja $H \subset G$ on muutkonna $G$ regulaarne alammuutkond, siis $H$ on Lie rühm alammuutkonna diferentseeruva struktuuri suhtes.*

**Näide.** Ühikringjoon $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ on algebraline rühm kompleksarvude korrutamise suhtes. Kuna $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ on Lie rühma $\mathbb{C}^*$ algebraline alamrühm ning

$S^1 \subset \mathbb{R}^2 - \{0\}$ on regulaarne alammuutkond, siis teoreemi 5.2 tõttu $S^1$ on Lie rühm. Teoreemist 5.1 järeldub, et $T^n = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$ on Lie rühm. Lie rühma $T^n$ nimetatakse toroidaalseks rühmaks. Toroidaalne rühm on Abeli rühm.

Olgu $G$ Lie rühm. Kui $g \in G$, siis elemendiga $g$ määratud vasaknihkeks nimetatakse kujutust $L_g : G \to G$, mis defineeritakse valemiga $L_g(x) = g \cdot x$. Analoogiliselt kujutust $R_g : G \to G$, kus $R_g(x) = x \cdot g$, nimetatakse paremnihkeks. Vasaknihe $L_g$ (paremnihe $R_g$) on diferentseeruv kujutus (teisendus). Suvalise $g \in G$ korral vasaknihe $L_g : G \to G$ on bijektsioon, kuna $L_{g^{-1}} : G \to G$ on teisenduse $L_g$ pöördteisendus, st $L_{g^{-1}} = L_g^{-1}$. Kuna pöördteisendus on ka diferentseeruv, $L_g$ on difeomorfism. Olgu $\mathrm{Diff}\,(G)$ Lie rühma $G$ difeomorfismide hulk. $\mathrm{Diff}\,(G)$ on (algebraline) rühm, kui korrutamistehteks on difeomorfismide kompositsioon. Kujutus $g \in G \to L_g \in \mathrm{Diff}\,(G)$ on (algebraliste) rühmade homomorfism, st $L_{g \cdot g'} = L_g \circ L_{g'}$.

**Näide.** Väljateooriates on väga tähtsad unitaarsed rühmad $\mathrm{SU}(N)$. Väljateooriat nimetatakse kalibratsiooniväljateooriaks, kui ta baseerub Lie rühmal. Kõige tuntum kalibratsiooniväljateooria on Yang-Millsi väljateooria, mis baaserub Lie rühmal SU(2), st Yang-Millsi kalibratsioonirühm on SU(2). Yang-Millsi väljateooria on Maxwelli teooria üldistus. Rühm SU(3) on kromodünaamika kalibratsioonirühmaks. Meenutame

$$\mathrm{SU}(N) = \{U \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) : \det U = 1,\, U \cdot U^\dagger = E\},$$

kus $U^\dagger = \bar{U}^T$. Maatriksit nimetatakse unitaarseks maatriksiks, kui ta rahuldab $U \cdot U^\dagger = E$. Näitame, et SU(2) on Lie rühm. Kehtib

$$U \cdot U^\dagger = E \quad \Leftrightarrow \quad U^{-1} = U^\dagger.$$

Olgu

$$U = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}.$$

Unitaarsuse tingimus annab

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_{11} & \bar{z}_{21} \\ \bar{z}_{12} & \bar{z}_{22} \end{pmatrix} = U^{\dagger},$$

või

$$\bar{z}_{11} = z_{22}, \quad z_{12} = -\bar{z}_{21}.$$

Seega

$$U \in \mathrm{SU}(2) \quad \Rightarrow \quad U = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ -\bar{z}_{12} & \bar{z}_{11} \end{pmatrix}, |z_{11}|^2 + |z_{12}|^2 = 1.$$

Olgu $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ maatriksite

$$U = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ -\bar{z}_{12} & \bar{z}_{11} \end{pmatrix}$$

hulk. Olgu $z_{11} = x_1 + ix_2, z_{12} = x_3 + ix_4$. Defineerime $\phi : \mathcal{M}(2, \mathbb{C}) \to \mathbb{R}^4$ järgmiselt

$$\phi(U) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4.$$

On ilmne, et $\phi$ on bijektsioon. Seega, $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ on neljamõõtmeline diferentseeruv muutkond. Rühm SU(2) on eraldatud tingimusega

$$|z_{11}|^2 + |z_{12}|^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

Kolmemõõtmeline sfäär $S^3$ on muutkonna $\mathbb{R}^4$ regulaarne alammuutkond. Korrutamisega määratud kujutuse $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ komponendid muutkonna $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ koordinaatides on järgmised: kui $\phi(U) = (x_1, x_2, x_3, x_4), \phi(V) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, siis $\phi(U \cdot V) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y), \varphi_4(x, y))$, kus

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y) &= x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4, \\
\varphi_2(x, y) &= x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3, \\
\varphi_3(x, y) &= x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2, \\
\varphi_4(x, y) &= x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1.
\end{aligned}$$

Kuna funktsioonid $\varphi_i(x,y)$ , kus $i = 1,...,4$, on polünoomid koordinaatide suhtes, siis nad on lõpmata diferentseeruvad ja kujutus $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ on diferentseeruv kujutus. Kui diferentseeruvat kujutust ahendada regulaarsele alammuutkonnale $\varphi\Big|_{S^3\times S^3} : S^3 \times S^3 \to S^3$, siis ahend $\varphi\Big|_{S^3\times S^3}$ on diferentseeruv kujutus. Analoogiliselt kujutus $U \to U^{-1}$ on diferentseeruv. Seega, SU(2) on 3-dimensionaalne Lie rühm.

**Järeldus 5.3.** *Lie rühm $SU(2)$ on difeomorfne 3-sfääriga $S^3$*

**Definitsioon 5.2.** Olgu antud kaks Lie rühma $G_1$ ja $G_2$. Lie rühmade homomorfismiks nimetatakse kujutust $F : G_1 \to G_2$, kui

- $F$ on algebraline homomorfism,
- $F$ on diferentseeruv kujutus.

**Näide.** Muutkond $G_1 = \mathbb{R}$ on Lie rühm reaalarvude liitmise suhtes (reaalarvude aditiivne rühm), $G_2 = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ on Lie rühm kompleksarvude korrutamise suhtes. Kujutus $F : G_1 \to G_2$, kus $F(t) = e^{i2\pi t}$ on Lie rühmade homomorfism. Analoogiliselt, $G_1 = \mathbb{R}^n$ on Lie rühm liitmise suhtes, $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ on toroidaalne Lie rühm, siis kujutus $F : G_1 \to G_2$, kus $F(t_1, t_2, \ldots, t_n) = (e^{i2\pi t_1}, e^{i2\pi t_2}, \ldots, e^{i2\pi t_n})$ on Lie rühmade homomorfism.

**Definitsioon 5.3.** Olgu $G$ Lie rühm. Alamhulka $H \subset G$ nimetatakse Lie rühma alamrühmaks, kui

- $H$ on $G$ algebraline alamrühm, st $x, y \in H \;\Rightarrow\; x \cdot y^{-1} \in H$,
- $H$ on $G$ alammuutkond ja $H$ on Lie rühm alammuutkonna diferentseeruva struktuuri suhtes.

**Teoreem 5.4.** *Kui $H \subset G$ on Lie rühma $G$ alamrühm ja $H$ on regulaarne alammuutkond, siis $H$ on $G$ kinnine alamhulk.*

Kehtib ka pöördteoreem: kui $H \subset G$ on Lie rühma $G$ alamrühm ja $H$ on $G$ kinnine alamhulk, siis $H$ on regulaarne alammuutkond. Tegelikult saab tõestada teoreemi (vt [8]): Kui $H \subset G$ on algebraline alamrühm ja kinnine alamhulk, siis $H$ on Lie rühma $G$ alamrühm ja, kuna $H$ on kinnine alamhulk, $H$ on regulaarne alammuutkond.

**Definitsioon 5.4.** Olgu $G$ Lie rühm ja $M$ diferentseeruv muutkond. Öeldakse, et Lie rühm $G$ toimib vasakult muutkonnal $M$ kui on määratud kujutus $\theta : G \times M \to M$, mis rahuldab tingimusi:

- $\theta$ on $C^\infty$-kujutus (diferentseeruv),
- $\theta(e, x) = x$, kus $e \in G$ on ühikelement ja $x \in M$,
- $\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1 \cdot g_2, x)$, kus $g_1, g_2 \in G,\ x \in M$.

Kui $\theta : G \times M \to M$ on Lie rühma $G$ vasaktoime muutkonnal $M$ ja $g \in G$ on fikseeritud, siis $\theta$ indutseerib kujutust $\theta_g : M \to M$, kus $\theta_g(x) = \theta(g, x)$. Definitsiooni 5.4 teisest tingimusest järeldub, et $\theta_e = \mathrm{id}_M$. Iga $g \in G$ korral kujutus $\theta_g : M \to M$ on bijektsioon. Tõepoolest, $\theta_{g^{-1}}$ on kujutuse $\theta_g$ pöördkujutus (järeldub definitsiooni 5.4 viimasest tingimusest). Kuna nii $\theta_g$, kui ka $\theta_{g^{-1}}$ on diferentseeruvad, siis iga $g \in G$ korral kujutus $\theta_g$ on muutkonna $M$ difeomorfism. Olgu $\mathrm{Diff}\, M$ muutkonna $M$ difeomorfismide rühm. Definitsiooni 5.4 viimane tingimus on ekvivalentne sellega, et kujutus $g \in G \to \theta_g \in \mathrm{Diff}\, M$ on homomorfism, st $\theta_{g_1 \cdot g_2} = \theta_{g_1} \circ \theta_{g_2}$. Järgnevas kirjutame sageli Lie rühma toime kujul $x \to g \cdot x$, jättes vahele $\theta$. Vasaktoime $G \times M \to M$ indutseerib homomorfismi $G \to \mathrm{Diff}\, M$. Vasaktoimet nimetatakse efektiivseks, kui selle homomorfismi tuum koosneb ainult ühikelemendist $e \in G$.

**Definitsioon 5.5.** Olgu $V$ lõplikumõõtmeline vektorruum, $G$ Lie rühm, ja $\mathrm{Gl}(V)$ vektorruumi $V$ lineaarteisenduste Lie rühm ($L \in \mathrm{Gl}\,(V) \Leftrightarrow \ker L = \{0\}$). Lie rühmade homomorfismi $\rho : G \to \operatorname{Lin} V$ nimetatakse Lie rühma lineaaresituseks. Esitust nimetatakse taandumatuks esituseks, kui ei leidu sellist vektorruumi $V$ alamruumi $K$ ($K$ on mittetriviaalne alamruum, st $K \neq \{0\}, V$), et $\forall g \in G, \forall x \in K$ korral $\rho(g)\, x \in K$, st $\rho(g)\, K \subset K$.

Rühma $G$ esitus $\rho : G \to \mathrm{Gl}\,(V)$ tekitab rühma vasaktoimet $\theta : G \times V \to V$, kus $\theta(g, x) = \rho(g)\, x$.

**Definitsioon 5.6.** Olgu $\theta : G \times M \to M$ Lie rühma vasaktoime muutkonnal $M$. Muutkonna $M$ punkti $p$ orbiidiks $Gp \subset M$ nimetatakse hulka

$$Gp = \{q \in M : q = \theta(g, p),\ g \in G\}.$$

Kui $Gp = \{p\}$ (orbiit koosneb ainult punktist $p$), siis punkti $p$ nimetatakse muutkonna püsipunktiks Lie rühma $G$ vasaktoime suhtes. Kui $Gp = M$, siis vasaktoimet nimetatakse *transitiivseks*

**Näide.** Olgu Lie rühm $G = \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ ja diferentseeruv muutkond $M = \mathbb{R}^n$. Lie rühma $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ vasaktoimet muutkonnal $\mathbb{R}^n$ defineerime valemiga

$$\theta(A, x) = A \cdot x,$$

kus $A$ on regulaarne maatriks ja $x$ on üheveeruline maatriks, mille elemendid on punkti $x$ koordinaadid, st

$$\theta^i(A, x) = A^i_j\, x^j.$$

antud toime on transitiivne toime alammuutkonnal $\mathbb{R}^n - \{0\}$ ja efektiivne.

# 6 Vektorkihtkond

Olgu $M$ n-mõõtmeline sile muutkond ja olgu $E$ $(m+n)-$mõõtmeline sile muutkond ning olgu $\mathbb{K}$ kompleksarvude või reaalarvude korpus.

**Definitsioon 6.1.** Vektorkihtkonnaks nimetatakse kujutust $\pi : E \to M$, kui on täidetud järgmised tingimused:

1) suvalise punkti $x \in M$ korral on $\pi^{-1}(x) \subset E$ $m-$mõõtmeline vektorruum üle korpuse $\mathbb{K}$. Vastavat ruumi $\pi^{-1}(x) = E_x$ nimetatakse kihiks punktis $x$;

2) on täidetud lokaalse triviaalsuse tingimus, st suvalise punkti $x \in M$ korral leidub punkti ümbrus $U_x \subset M$ ja difeomorfism $\psi : \pi^{-1}(U_x) \to U_x \times \mathbb{R}^m$ on selline, et kujutus
$\psi(x) : E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
on vektorruumide isomorfism.

Muutkonda $M$ nimetatakse vektorkihtkonna baasmuutkonnaks, kujutust $\pi$ nimetatakse vektorkihtkonna projektsiooniks ja muutkonda $E$ nimetatakse vektorkihtkonna ruumiks [11].

**Definitsioon 6.2.** Arvu rank$E = m$ nimetatakse vektorkihtkonna astakuks.

**Definitsioon 6.3.** Kujutust $s : M \to E$ nimetatakse kihtkonna $E$ lõikeks, kui ta rahuldab seost $\pi \circ s(x) = x$ suvalise punkti $x \in M$ korral ehk $\pi \circ s = Id_M$, kus $Id_M$ on muutkonna $M$ samasusteisendus ja $\pi : E \to M$ on vektorkihtkond.

Olgu $\Gamma^\infty(E)$ siledate lõigete vektorruum.
Vektorkihtkonna lokaalse struktuuri kirjeldus:
Olgu $e_1, e_2, ..., e_m \in \Gamma^\infty_U(E)$ ja määramispiirkond $U \in M$, st iga $e_i : U \to \pi^{-1}(U)(i = 1, ..., m)$ kus suvalise punkti $x \in U$ korral on $\{e_1(x), e_2(x), ..., e_m(x)\}$ kihi $E_x$ baas. Süsteemi

$\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ nimetatakse vektorkihtkonna lokaalseks reeperiks. Kui lokaalne reeper on antud, siis on triviaalsuse tingimus täidetud.

Eeldame, et $U$ on lokaalne. Olgu $p \in \pi^{-1}(U)$ selline, et $\pi(p) = x = (x^1, x^2, ..., x^n)$ ja punk $p(x^1, x^2, ..., x^n, v^1, v^2, ..., v^m)$ avaldub kujul $p = v^1 e_1(x) + v^2 e_2(x) + ... + v^m e_m$, kus $x^1, x^2, ..., x^n, v^1, v^2, ..., v^m$ on kihtkonna lokaalsed koordinaadid.

Olgu nüüd teine määramispiirkond $U^{'}$ lokaalse reeperiga $\{e_1^{'}, e_2^{'}, ..., e_m^{'}\}$. Eedame, et $U \cap U^{'} \neq \varnothing$. Üleminek ühelt lokaalselt reeperilt teisele lokaalsele reeperile toimub baasiteisenduse maatriksi abil. Baasiteisenduse maatriks on $A = (A_i^{i^{'}})$, kus $A_i^{i^{'}}$ $(i = 1, ..., m)$ on punkti $x \in U \cap U^{'}$ funktsioon. Reeperi koordinaadid avalduvad kujul

$$e_\alpha = A_\alpha^{\alpha^{'}} e_{\alpha'} \; (\alpha = 1, ..., m).$$

Lokaalsete koordinaatide teisenduste süsteem on

$$\begin{cases} x^{\alpha^{'}} = x^{\alpha^{'}}(x^1, x^2, ..., x^n), \\ v^{x^{'}} = A_\alpha^{\alpha^{'}} v^\alpha, \end{cases}$$

kus $\alpha = 1, ..., m$.

**Näide.** Olgu $M$ $n-$mõõtmeline muutkond ja $T_x M$ muutkonna $M$ puutujaruum, kus punkt $x \in M$. Kui on antud lokaalne ümbrus ehk lokaalne kaart, siis puutujaruumi baasiks on $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_x, \frac{\partial}{\partial x^2}|_x, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}|_x\}$ .

Vektorkihtkonnaks on puutujakihtkond $TM$, kus

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M.$$

Kihtkonna projektsioon $\pi : TM \to M$ on selline, et $\pi(T_x M) = x$. Puutujakihtkonna astak on $n$, sest puutujakihtkonna kiht on puutujaruum, mille dimensioon on võrdne muutkonna dimensiooniga. Kui vaatleme puutujakihtkonda muutkonnana, siis kihtkonna astak on $2n$.

Puutujakihtkonna $TM$ lõiget nimetatakse vektorväljaks. Vektorväljade vektorruum on $\Gamma^\infty(TM)$. Olgu $X \in \Gamma^\infty(TM)$. Iga vektorväli esitub lokaalselt kujul

$$X|_U = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + X^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + ... + X^n \frac{\partial}{\partial x^n}$$

ja lokaalsete koordinaatide teisenduse süsteem on

$$\begin{cases} X^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, ..., x^n), \\ X = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} X^i, \end{cases}$$

kus $i = 1, ..., m$.

**Definitsioon 6.4.** Olgu antud kaks vektorkihtkonda $\pi_E : E \to M$ ja $\pi_F : F \to N$ üle muutkondade M ja N, siis vektorkihtkondade homomorfismiks nimetatakse diferentseeruvate kujutuste paari $(\varphi, \widehat{\varphi})$, kus $\varphi : E \to F$, $\widehat{\varphi} : M \to N$ ja

1) $\pi_F \circ \varphi = \widehat{\varphi} \circ \pi_E$,

2) suvalise punkti $x \in M$ korral on kujutus $\varphi_{E_x} : E_x \to F_{\widehat{\varphi}(x)}$ lineaarkujutus.

Teisiti öeldes nimetatakse vektorkihtkondade homomorfismiks kahte kujutust $\varphi, \widehat{\varphi}$, kui järgmine diagramm on kommutatiivne:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_E} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_F} \\ M & \xrightarrow{\widehat{\varphi}} & N \end{array} .$$

Erijuhul, kui $\widehat{\varphi} = Id_M$ on samasusteisendus, siis vektorkihtkondade homomorfismiks nimetatakse kahte kujutust $\varphi, \widehat{\varphi}$, kui järmine diagramm on kommutatiivne:

$$\begin{array}{ccccc} E & & \xrightarrow{\varphi} & & F \\ & \searrow \pi_E & & \swarrow \pi_F & \\ & & M & & \end{array} .$$

Tehted vektorruumidega saab üle kanda vektorkihtkondadele. Olgu $E, F$ vektorkihtkonnad üle baasi $M$. Järgmised vektorkihtkonnad on võimalik konstrueerida vektorkihtkondade $E$ ja $F$ abil:

1. $E \oplus F$;

2. $E \otimes F$;

3. $Hom(E, F)$;

4. $E^*$. Vektorkihtkondade otsesumma defineeritakse näiteks järgmiselt:

$$E \oplus F = \cup_{x \in M} E_x \oplus F_x.$$

**Definitsioon 6.5.** Olgu antud vektorkihtkond $\pi : E \to M$. Hulka $F$ nimetatakse alamkihtkonnaks, kui on täidetud järgmised tingimused:

1) $F \subset E$ on alammuutkond;

2) suvalise punkti $x \in M$ korral ühisosa $F \cap E_x$ on vektorruum;

3) $F$ on vektorkihtkond ja tema kihtkond on indutseeritud järgmselt $\pi|_F : F \to M$, st suvalise punkti $x \in M$ korral leidub ümbrus $U_x$ nii, et $k < m$ korral

$$\begin{array}{ccc} E|_{U_x} & \approx & U_x \times \Re^m \\ \uparrow_i & & \uparrow_j \\ F|_{U_x} & \approx & U_x \times \Re^k \end{array}.$$

# 7 Poissoni muutkond

**Definitsioon 7.1.** Poissoni muutkond $M$ on lõplikumõõtmline sile muutkond, millel on antud Poissoni sulg $\{,\} : C^\infty(M) \otimes C^\infty(M) \to C^\infty(M)$,nii et iga $f, g, h \in C^\infty(M)$ korral on täidetud järgmised tingimused:

1) kaldsümmeetrilisus, st $\{f, g\} = -\{f, g\}$;

2) Jacobi samasus, st $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$;

3) Leibnizi valem, st $\{fg, h\} = g\{f, h\} + f\{g, h\}$.

**Definitsioon 7.2.** Sümplektiliseks muutkonnaks nimetatakse muutkonda $M$, mille dimensioon on $dimM = 2n$ ja tähistame $M^{2n}$, mis on varustatud sümplektilise vormiga: on antud $2-$vorm $\omega \in \Omega^2(M)$, nii et

- $d\omega = 0$;
- iga punkti $x \in M$ ja iga vektori $v \in T_xM$ korral leidub teine vektor $w \in T_xM$ selliselt, et $\omega_x(v, w) \neq 0$, st 2-vorm on mittekidunud.

Öeldakse, et muutkonnal $M$ on antud teist järku kovariantne tensorväli, kui selle muutkonna atlase igas lokaalses kaardis on antud funktsioonide kogum

$$\{\eta_{ij}(x)\}_{i,j}^n$$

iga punkti $x \in M$ korral ja üleminek ühelt lokaalselt koordinaadilt teisele lokaalsele koordinaadile need funktsioonid teisenevad järgmiselt:

$$\eta_{ij}^{'} = \frac{\partial(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x}{\partial x^j}\eta_{i'j'}.$$

Tensorvälja hakkame tähistama tähega $\eta$ ja vastavaid koordinaate nimetame komponentideks. Teist järku tensorvälja nimetame kaldsümmeetriliseks, kui $\eta_{ij} = -\eta_{ji}$.

**Teoreem 7.1.** *Olgu $M$ $n-$mõõtmeline sile muutkond ja muutkonnal $M$ olgu antud teist järku kovariantne tensorväli $\eta$. Kui $\eta$ komponendid rahuldavad tingimust*

$$\sum_l \Big(\eta_{kl}\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial x^l} + \eta_{il}\frac{\partial \eta_{jk}}{\partial x^l} + \eta_{jl}\frac{\partial \eta_{ki}}{\partial x^l}\Big) = 0,$$

*siis valem*

$$\{f,g\} = \sum_{i,j=1}^n \eta_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}$$

*määrab muutkonnal $M$ Poissoni struktuuri ja $M$ on Poissoni muutkond.*

*Tõestus.* Näitame, et valem $\{f,g\} = \sum_{i,j=1}^n \eta_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}$ rahuldab kaldsümmeetrilisust, Jacobi samasust ja Leibnizi valemit.

1) Kaldsümmeetrilisuse saame $\eta$ kaldsümmeetrilisusest:
$\{f,g\} = \sum_{i,j=1}^n \eta_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j} = -\sum_{i,j=1}^n \eta_{ji}\frac{\partial g}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} = -\{g,f\}$.

2) Jacobi samasuse tõestus:

$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$

$A : \{f,\{g,h\}\} = \sum_{k,l}\sum_{i,j}\eta_{kl}\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^l}\Big(\eta_{ij}\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial x^j}\Big) = \sum_{k,l}\sum_{i,j}\Big(\eta_{kl}\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial x^l}\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial x^j} + \eta_{kl}\eta_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^l}\frac{\partial h}{\partial x^j} + \eta_{kl}\eta_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial^2 h}{\partial x^j \partial x^l}\Big)$

Analoogiliselt

$B : \{g,\{h,f\}\} = \sum_{i,l}\sum_{j,k}\Big(\eta_{il}\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial \eta_{jk}}{\partial x^l}\frac{\partial h}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k} + \eta_{il}\eta_{jk}\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial^2 h}{\partial x^j \partial x^l}\frac{\partial f}{\partial x^k} + \eta_{il}\eta_{jk}\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial x^j}\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}\Big)$

$C : \{h,\{f,g\}\} = \sum_{j,l}\sum_{k,i}\Big(\eta_{jl}\frac{\partial h}{\partial x^j}\frac{\partial \eta_{ki}}{\partial x^l}\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial g}{\partial x^i} + \eta_{jl}\eta_{ki}\frac{\partial h}{\partial x^j}\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}\frac{\partial g}{\partial x^i} + \eta_{jl}\eta_{ki}\frac{\partial h}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^l}\Big)$.

Arvutuste põhjal

$A+B+C = \{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\}$
$= \sum_{i,j,k}\sum_l\Big(\eta_{kl}\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial x^l} + \eta_{il}\frac{\partial \eta_{jk}}{\partial x^l} + \eta_{jl}\frac{\partial \eta_{ki}}{\partial x^l}\Big)\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial x^j}$,

kuna $\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial x^j}$ on arv, mille väärtuse võime võtta nullist erineva, siis $A+B+C=0$ parajasti siis, kui $\sum_l\Big(\eta_{kl}\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial x^l} + \eta_{il}\frac{\partial \eta_{jk}}{\partial x^l} + \eta_{jl}\frac{\partial \eta_{ki}}{\partial x^l}\Big) = 0^*$.

---

*Tingimust $\sum_l\Big(\eta_{kl}\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial x^l} + \eta_{il}\frac{\partial \eta_{jk}}{\partial x^l} + \eta_{jl}\frac{\partial \eta_{ki}}{\partial x^l}\Big) = 0$ nimetatakse Schouteni tingimuseks.

3) Leibnizi valemi tõestus:
$\{fg, h\} = \sum_{ij} \eta_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x^i}(fg) \dfrac{\partial h}{\partial x^j} = \sum_{ij} \eta_{ij} \dfrac{\partial f}{\partial x^i} g \dfrac{\partial h}{\partial x^j} + \sum_{ij} \eta_{ij} f \dfrac{\partial g}{\partial x^i} \dfrac{\partial h}{\partial x^j} = g \sum_{ij} \eta_{ij} \dfrac{\partial f}{\partial x^i} \dfrac{\partial h}{\partial x^j} +$
$f \sum_{ij} \eta_{ij} \dfrac{\partial g}{\partial x^i} \dfrac{\partial h}{\partial x^j} = g\{f, h\} + f\{g, h\}.$ □

Defineerime Poissoni muutkonna teisiti.

Olgu $M^n$ $n-$mõõtmeline sile muutkond ning olgu punkt $x \in M^n$. Tema puutujaruum punktis $x$ on $T_x M^n$. Kuna $T_x M^n$ on vektorruum, siis igas punktis $x$ on määratud Grassmani algebra $\bigwedge T_x M^n = \oplus_{p=0}^n \bigwedge^p T_x M^n$.
Olgu $x^1, x^2, ..., x^n$ muutkonna $M^n$ lokaalsed koordinaadid .
Kui $\rho$ on $k-$vektorväli, siis $\rho|_U = \sum_{i_1 < ... < i_k} \rho^{i_1 ... i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}$, kus kordajad sõltuvad punktist $x$.

**Definitsioon 7.3.** Poissoni muutkonnaks nimetatakse $n-$mõõtmelist muutkonda $M^n$, millel on antud bivektorväli $\eta$. Oletame, et on antud lokaalne kaart lokaalsete koordinaatidega. Lokaalsetes koordinaatides bivektorvälja kuju on $\eta^{ij}$, mida nimetatakse tensorväljaks, st

$$\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, ..., x^n), \\ \eta^{i' j'} = \dfrac{\partial x^{[i'}}{\partial x^i} \dfrac{\partial x^{j']}}{\partial x^j} \eta^{ij}, \end{cases}$$

kus $\dfrac{\partial x^{[i'}}{\partial x^i} \dfrac{\partial x^{j']}}{\partial x^j} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} - \dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}.$

Olgu antud $\Gamma^\infty(\bigwedge TM^n)$,$\eta \in \Gamma^\infty(\bigwedge^p TM^n)$ ja $\rho \in \Gamma^\infty(\bigwedge^q TM^n)$, siis väliskorrutis $\eta \wedge \rho \in \Gamma^\infty(\bigwedge^{p+q} TM^n)$.

# 8 Lie algebroid

Meenutame, et vektorruumi $V$ üle korpuse $\mathbb{K}$, nimetatakse algebraks üle korpuse $\mathbb{K}$, millel on defineeritud bilineaarne korrutamine $V \times V \to V$.

Lie algebraks nimetatakse algebra $\mathfrak{g}$ üle korpuse $\mathbb{K}$, kui iga $x, y, z \in \mathfrak{g}$ korral tema korrutamine $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ rahuldab järgmisi tingimusi:

1. $[x, y] = -[y, x]$
2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

Esimest samasust nimetatakse kaldsümmeetrilisuseks ja teist samasust nimetatakse Jacobi samasuseks. Elementide $x$ ja $y$ Lie suluks nimetatakse korrutist $[x, y]$.
Olgu $f \in C^\infty(M)$.

**Definitsioon 8.1.** Vektorkihtkonda $\pi : E \to M$ nimetatakse Lie algebroidiks, kui vektorkihtkond rahuldab järgmisi tingimusi:

1) vektorkihtkonna lõigete ruum $\Gamma^\infty(E)$ on Lie algebra, st iga lõigu $g, h, z \in \Gamma^\infty(E)$ korral on antud Lie sulg $[g, h] \in \Gamma^\infty(E)$ nii, et on täidetud tingimused $[g, h] = -[h, g]$ ja $[g, [h, z]] + [h, [z, g]] + [z, [g, h]] = 0$.

2) on antud ankurkujutus $\rho : E \to TM$, mis on vektorkihtkondade homomorfism ja rahuldab järgmist seost $[g, fh] = f[g, h] + (\rho \circ g(f))h$, kus $g, h \in \Gamma^\infty(E)$.

**Näide.** I Olgu $\mathfrak{G}$ Lie algebra ja punkt $p \in M$ ja $M = \{p\}$ ning olgu muutkond $E = \{p\} \times \mathfrak{G}$. Selle projektsioon on $\pi_E : E \to \{p\}$. Tema ankurkujutus on $\rho : E \to \{0\}$. Olgu $h_1, h_2 \in \Gamma^\infty(E)$, siis seos $[h_1, fh_2] = f[h_1, h_2] + ((\rho \circ h_1)f)h_2 = 0$.

II Olgu antud puutujakihtkond $TM$. Siis ankurkujutus on $\rho : TM \to TM$, ehk $\rho = Id_M$. Olgu $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$, siis $[X, fY] = f[X, Y] + X(f) \circ Y$, sest
$[X, fY] = X \circ (fY) - f(Y) \circ X = X(f)Y + fX \circ Y - fY \circ X = f[X, Y] + X(f) \circ Y$.

Kui $\widetilde{TM} \subset TM$ on integreeruv alamkihtkond, st $\widetilde{DM} = \Gamma^\infty\widetilde{(TM)}$, kui $X, Y \in \widetilde{DM}$, siis $[X, Y] \in \widetilde{DM}$.

III Kui $M$ on Poissoni muutkond, siis muutkonna $M$ kopuutujakihtkond $T^*M$ on Lie algebroid muutkonnal M. Ankurkujutus on $\rho^* : T^*M \to TM$.Iga funktsiooni $f, g \in C^\infty(M)$ korral 1−vormide Lie sulg $[,]$ rahudab seost $[df, dg] = d\{f, g\}$, kus $\{f, g\} = \eta(df, dg)$ , on $\eta$ järgi funktsioonide Poissoni sulg.

# Viited


[1] Charles-Michel Marle, *Lie,symplectic and Poisson groupoids and their Lie algebroids*, Universit*é* Pierre et Marie Curie, Paris,France 7.02.2014.

[2] http://www.dpmms.cam.ac.uk/ agk22/vb.pdf (vaadatud 21.05.2015)

[3] http://www.math.polytechnicue.fr/ kosmann/algd.pdf (vaadatud 22.05.2015)

[4] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemanninan Geometry*, Academic Press, 2003.

[5] S.S. Chern, W. H. Chen and K. S. Lam, *Lectures on Differential Geometry*, World Scientific, 2000.

[6] C. Chevalley, *Theory of Lie groups*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1999.

[7] S. Donaldson, *An Application of Gauge Theory to the topology of 4-manifolds*, J. Diff. Geom., **18** (1983), 269–316.

[8] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001.

[9] Brian Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*, Graduate Text in Mathematics. Springer, 2003

[10] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics **94**, Springer-Verlag, 1983

[11] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Graduate Student Series in Physics, Institute of Physics Publishing, 1998.

**Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, Riina org (sünnikuupäev: 23.10.1990),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Lie algebroidid“, mille juhendaja on Prof. Viktor Abramov,
   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu kuni autoriõiguse kehtivusaja tähtaja lõppemiseni:
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile;
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellekutaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **03.06.2015**