ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА

16

ТАРТУ
1969

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА

Р. Р. МУЛЛАРИ

К ТЕОРИИ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА
(ИНДИКАТРИСЫ КРИВИЗНЫ, ГЛАВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ, ЭВОЛЮТЫ)

ВЫПУСК 16

ТАРТУ · 1969

ВВЕДЕНИЕ

Объект геометрии многомерного евклидова пространства R_n прежде всего представляет интерес как естественное, относительно простое, в некотором смысле только количественное обобщение наиболее важных, а именно метрических отношений окружающего нас мира (в их первом приближении). Результаты этой геометрии представляют наибольший интерес как естественные обобщения классических и, как правило, давно уже известных результатов геометрии "обычного" пространства R_3. Последние откроются перед нами в общем только как предельные, крайне вырожденные случаи результатов исключительно богатой многомерной - но совсем "похожей" с классической - геометрии. Особенно ярко это выражается в теории поверхностей $V_m \subset R_n$, так как в классическом случае $V_2 \subset R_3$ размерности как поверхности, так и объемлющего ее пространства имеют минимальные возможные значения (если не считать за поверхность кривую V_1).

В главе II настоящей работы рассматривается присоединяющаяся к каждой точке M поверхности $V_m \subset R_n$ последовательность инвариантных многообразий I^l, где $l=1,2,\ldots$, находящихся в соответствующих нормальных плоскостях к V_m в M. До определенного значения $l=\varkappa$, равного порядку кривизны поверхности V_m, индикатрисы I^l в общем являются довольно сложными алгебраическими поверхностями, а при $l > k$ совпадают с M. В классическом случае $V_2 \subset R_3$ имеет место $k=1$, а индикатриса I^1 или выроҗдена в точку, или же в отрезок прямой, проходящей через точку M.

Ранее более подробно исследованы индикатрисы I^1 (индикатрисы нормальной кривизны). Соответствующие результаты резюмированы в труде И.А. Схоутена и Д.Дж. Стройка [17]. Следует отметить, что индикатрисы I^1 характеризуют строение поверхности V_m вблизи M "в первом приближении" и, с другой стороны, они по строению наиболее просты. По возрастанию l индикатрисы I^l характеризуют все более тонкие подробности строения V_m вблизи M и, в то же время, сложность строения самой индикатрисы I^l быстро возрастает. Поэтому в случае $l>1$ мы пока почти совсем не умеем сопоставить различных свойств поверхности V_m вблизи M со строением соответствующей индикатрисы I^l. Ранее ряд результатов об индикатрисах I^l в общем значении l, но при $m=2$, получены О. Борувка в [24].

Результаты главы III работы можно истолковать как обобщение классических понятий главного направления поверхности и сопряженных направлений и вообще как выяснение их значения в более общем случае. Приведено сравнение данных обобщений с другими подобными обобщениями, сделанными И.А. Схоутеном и Д.Дж. Стройком в [17], Д.И.Перепелкиным в [13] и Ван Юн-чжоу в [30].

Объект исследований главы IV – эволюта поверхности $V_m \subset R_n$ – в классическом случае $V_2 \subset R_3$ уже в такой мере вырожден, что он встречается только в виде центра сферы. Поэтому для приведения "классического" примера нам следует прибегнуть к кривой $V_1 \subset R_3$, где эволюта встречается в виде развертывающейся поверхности $V_2 \subset R_3$. Эволюта поверхности $V_2 \subset R_4$ рассмотрена А.В. Чакмазяном в [18]. Довольно близкие к теме главы ряд результаты Х.Кюне в [27], К.Коммереля в [26], Д.И. Перепелкина в [12, 13] и В.Т. Базылева в [1, 2].

Все изложение работы основывается на применении технического аппарата, построенного в главе I в виде векторов кривизны и формул Бартельса-Френе для многомерной поверхности*). Эти формулы существенно отличаются от соответствующих формул, выведенных в [28], [17] и [29]. Основное различие заключается в том, что в нормальных к V_m в M плоскостях различного порядка в виде векторов базиса используются ортогональные проекции соответствующих пфаффовых производных от векторов касательного к V_m в M репера - векторы кривизны. Эти векторы могут быть и линейно зависимыми - зато они тесно связаны со строением поверхности V_m вблизи M. Во многих случаях (но далеко не всегда) это облегчает получение и интерпретацию инвариантных результатов.

Большая часть выведенных ниже результатов получены автором ранее в [6 - 11].

Автор искренно благодарен доц. Ю.Г. Лумисте за многие ценные указания при составлении этой работы.

---

*) Название "формулы Бартельса-Френе" (вместо "формулы Френе") оправдывается тем, что М.Бартельс, как выяснено (см. [5]), применял сопровождающий трехгранник при изучении кривых (уже за 17 лет) до Ф.Френе.

Глава I

ТЕХНИЧЕСКИЙ АППАРАТ

§ I. Формулы Бартельса-Френе

1. Пусть на поверхности V_m евклидова пространства R_n задан подвижный касательный репер $R=(M,\bar{I}_1,\ldots,\bar{I}_m)$ и соответствующий кобазис $\Omega=(\omega^1,\ldots,\omega^m)$. Параллельное инфинитезимальное перенесение репера R на V_m описывается уравнениями

$$\begin{cases} d'\bar{M} = \omega^c \bar{I}_c \\ d'\bar{I}_a = \omega^c \bar{I}_{ac}, \end{cases} \tag{1}$$

где векторы $\bar{I}_{ac}$ $(\perp \bar{I}_b)$ определяют первую нормальную плоскость $R_{(1)}$ к V_m в точке M, а символом d' обозначается соответствующее дифференцирование.

Далее, можно писать

$$d'\bar{I}_{ab} = \omega^c(\bar{A}_{abc}+\bar{B}_{abc}+\bar{I}_{abc}).$$

Здесь векторы $\bar{A}_{abc}$ лежат в m-мерной касательной плоскости $R_{(0)}$ к V_m в точке M, $\bar{B}_{abc}$ – в плоскости $R_{(1)}$, а векторы $\bar{I}_{abc}$ определяют вторую нормальную к V_m в M плоскость $R_{(2)}$. Продолжая таким образом, получим уравнения

$$d'\bar{l}_{a_0\ldots a_l}=\omega^c(\bar{A}_{a_0\ldots a_l c}+\bar{B}_{a_0\ldots a_l c}+\bar{l}_{a_0\ldots a_l c}), \qquad (2)$$

где $l=1,2,\ldots$, векторы $\bar{A}_{a_0\ldots a_l c}$ и $\bar{B}_{a_0\ldots a_l c}$ лежат соответственно в $(l-1)$-ой и l-ой нормальных плоскостях к V_m в точке M, а векторы $\bar{l}_{a_0\ldots a_l c}$ определяют $(l+1)$-ую нормальную плоскость $R_{(l+1)}$. В том, что дифференциал вектора $\bar{l}_{a_0\ldots a_l}$, кроме плоскостей $R_{(l-1)}$, $R_{(l)}$ и $R_{(l+1)}$, не имеет компонентов в плоскостях $R_{(l-s)}$, где $s>1$, можно убедиться, если предполагать обратное, а затем дифференцировать тождества

$$\bar{l}_{a_0\ldots a_l}\,\bar{l}_{b_0\ldots b_{l-s}}\equiv 0.$$

Назовем $\bar{l}_{a_0\ldots a_l}$ векторами l-ой кривизны поверхности V_m в M, а $\bar{A}_{a_0\ldots a_l c}$ и $\bar{B}_{a_0\ldots a_l c}$ векторами отражения l-ой кривизны и векторами l-ого кручения соответственно. Очевидно, что все эти векторы определены при заданном касательном к V_m репере $\mathcal{R}$ однозначно.

Так как пространство R_n имеет конечную размерность n, то найдется такая минимальная величина k, что все векторы $\bar{l}_{a_0\ldots a_{k+1}}$ тождественно равны нулю. Поэтому для l в (1) достаточно придать лишь значения $l=1,\ldots k$. Эту величину k назовем порядком кривизны поверхности V_m.

2) Подвергнем векторы $\bar{l}_a$ в точке M линейному преобразованию $\bar{l}'_a=A_a^c\,\bar{l}_c$. Тогда векторы $\bar{l}_{a_0\ldots a_l}$ подвергаются преобразованию

$$\bar{l}'_{a_0\ldots a_l}=A_{a_0}^{c_0}\ldots A_{a_l}^{c_l}\,\bar{l}_{c_0\ldots c_l}.$$

Если преобразование – инфинитезимальное, т.е. $A_a^b=\delta_a^b+\omega_a^b$, то получим

$$d''\bar{I}_{a_0\ldots a_l}=\sum_{i}\omega^{o}_{a_i}\bar{I}_{a_0\ldots a_{i-1}oa_{i+1}\ldots a_l}. \qquad (3)$$

Здесь символом $d''=d(\mathrm{mod}\,(\omega^1,\ldots,\omega^m))$ обозначается дифференцирование при фиксированной точке М.

Произвольное дифференцирование d, очевидно, можно разложить на "компоненты" $d=d'+d''$. Поэтому в силу (1), (2) и (3) можно писать для общего случая

$$\left\{\begin{aligned}
&d\bar{M}=\omega^{o}\bar{I}_{o}\\
&d\bar{I}_{a}=\omega^{o}\bar{I}_{ao}+\omega^{o}_{a}\bar{I}_{o}\\
&d\bar{I}_{a_0\ldots a_l}=\omega^{o}(\bar{A}_{a_0\ldots a_l o}+\bar{B}_{a_0\ldots a_l o}+\bar{I}_{a_0\ldots a_l o})+\\
&\qquad\qquad+\sum_{i}\omega^{o}_{a_i}\bar{I}_{a_0\ldots o\ldots a_l}.
\end{aligned}\right. \qquad (4)$$

Эту систему естественно называть формулами Бартельса-Френе для поверхности V_m. Сходство со соответствующими формулами для кривой легче заметить, если иметь в виду разложения

$$\bar{A}_{a_0\ldots a_l o}=A^{c_0\ldots c_{l-1}}_{a_0\ldots a_l o}\,\bar{I}_{c_0\ldots c_{l-1}},$$

$$\bar{B}_{a_0\ldots a_l o}=B^{c_0\ldots c_l}_{a_0\ldots a_l o}\,\bar{I}_{c_0\ldots c_l}.$$

Разумеется, векторы кривизны не всегда линейно независимы и приведенные разложения поэтому не всегда однозначны. Это, однако, не вызывает затруднений, так как в случае надобности можно фиксировать произвольное одно из многих возможных разложений.

Ранг векторов $\bar{I}_{a_0\ldots a_l}$, т.е. размерность l-ой нормальной плоскости $R_{(l)}$ к V_m, будем обозначать через m_l.

(3) К уравнениям (4) следует в соответствующей форме добавить еще уравнения инвариантности метрики

$$
\begin{cases}
\bar A_{a_0\dots a_l b_l}\bar l_{b_0\dots b_{l-1}} = -\bar l_{a_0\dots a_l}\bar l_{b_0\dots b_l} \\[2ex]
d(\bar l_a \bar l_b) = \omega_a^c \bar l_c \bar l_b + \omega_b^c \bar l_a \bar l_c \\[2ex]
d(\bar l_{a_0\dots a_l}\bar l_{b_0\dots b_l}) = \omega^c(\bar B_{a_0\dots a_l c}\bar l_{b_0\dots b_l} + \bar B_{b_0\dots b_l c}\bar l_{a_0\dots a_l}) + \\
+ \sum_i \omega^c_{a_i}\bar l_{a_0\dots c\dots a_l}\bar l_{b_0\dots b_l} + \sum_i \omega^c_{b_i}\bar l_{a_0\dots a_l}\bar l_{b_0\dots c\dots b_l},
\end{cases}
$$

которые получаются при дифференцировании тождеств $\bar l_{a_0\dots a_l}\bar l_{b_0\dots b_{l-1}} \equiv 0$ и скалярных произведений $\bar l_a \bar l_b$ и $\bar l_{a_0\dots a_l}\bar l_{b_0\dots b_l}$ с учетом (4). Тензор $\bar l_{a_0\dots a_l}\bar l_{b_0\dots b_l}$ назовем <u>тензором l-ой кривизны</u> поверхности V_m.

(4) Систему (4) можно истолковать по-разному в зависимости от того, считаем ли мы формы ω_a^b независимыми от форм ω^c, или же имеем в виду определенные линейные зависимости между ними. Далее будем однако предполагать, что в (4) не имеют места линейные зависимости между ω_a^b и ω^c. Для другого более важного частного случая, где все формы ω_a^b выражаются через формы ω^c посредством инволютивных зависимостей

$$\omega_a^b = P^b_{ac}\omega^c,$$

выпишем новую систему

$$
\begin{cases}
d\bar M = \omega^c \bar l_c \\[2ex]
d\bar l_a = \omega^c(\bar P_{ac} + \bar l_{ac}) \\
d\bar l_{a_0\dots a_l} = \omega^c(\bar A_{a_0\dots a_l c} + \bar P_{a_0\dots a_l c} + \bar l_{a_0\dots a_l c})
\end{cases}
\qquad (6)
$$

с соответствующими уравнениями инвариантности метрики

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{A}_{a_0\ldots a_l b_l}\bar{l}_{b_0\ldots b_{l-1}} = -\bar{l}_{a_0\ldots a_l}\bar{l}_{b_0\ldots b_l} \\ d(\bar{l}_a\bar{l}_b) = \omega^c(\bar{P}_{ac}\bar{l}_b + \bar{P}_{bc}\bar{l}_a) \\ d(\bar{l}_{a_0\ldots a_l}\bar{l}_{b_0\ldots b_l}) = \omega^c(\bar{P}_{a_0\ldots a_l c}\bar{l}_{b_0\ldots b_l} + \bar{P}_{b_0\ldots b_l c}\bar{l}_{a_0\ldots a_l}). \end{array}\right. \tag{7}$$

Здесь $\bar{P}_{ac} = P^d_{ac}\bar{l}_d$ и $\bar{B}_{a_0\ldots a_l c} = \bar{B}_{a_0\ldots a_l c} + \sum_i P^d_{a_i c}\bar{l}_{a_0\ldots d\ldots a_l}$. Векторы $\bar{P}_{a_0\ldots a_l c}$ будем также называть векторами l-ого кручения поверхности V_m в M. Таким образом, векторы кручения зависят от заданных между формами ω^b_a и ω^c зависимостей. Если этих зависимостей вообще нет, то обозначим векторы кручения через $\bar{B}_{a_0\ldots a_l c}$, если же все формы ω^b_a выражаются через формы ω^c посредством инволютивных зависимостей, то - через $\bar{P}_{a_0\ldots a_l c}$.

Если система (4) связана только с поверхностью V_m в R_n, то система (6), кроме того, связана и определенной системой заданных на V_m касательных реперов R.

§ 2. Условия интегрируемости

I. Произвольная система (4) определяет при заданной системе величин $A^{c_0\ldots c_{l-1}}_{a_0\ldots a_l c}$ и $B^{c_0\ldots c_l}_{a_0\ldots a_l c}$ и согласующихся с ней посредством (5) начальных значениях векторов $\bar{M}$, $\bar{1}_a$ и $\bar{1}_{a_0\ldots a_l}$ в R_n поверхность V_m тогда и только тогда, когда соблюдены определенные условия интегрируемости. Эти условия получаются с помощью внешнего дифференцирования из уравнений (4). Уравнения (5), как уравнения инвариантности метрики, дифференциальных следствий не имеют.

Внешнее дифференцирование первого из уравнений (4) дает

$$D\omega^c \bar{1}_c + d\bar{1}_c \wedge \omega^c = 0,$$

т.е. (с учетом (4))

$$D\omega^a = \omega^c \wedge \omega^a_c, \tag{8}$$

$$\bar{1}_{ab} = \bar{1}_{ba}. \tag{9}$$

Для второго уравнения получим

$$D\omega^c \bar{1}_{ac} + d\bar{1}_{ac} \wedge \omega^c + D\omega^c_a \bar{1}_c + d\bar{1}_c \wedge \omega^c_a = 0,$$

т.е.

$$D\omega^b_a = \omega^c_a \wedge \omega^b_c + A^b_{acd}\omega^c \wedge \omega^d, \tag{10}$$

$$\bar{B}_{acd} = \bar{B}_{adc}, \tag{11}$$

$$\bar{1}_{acd} = \bar{1}_{adc}. \tag{12}$$

Для третьего уравнения (4) выпишем сразу компоненты внешнего дифференциала отдельно в плоскостях

$R_{(l-2)}$, $R_{(l-1)}$, $R_{(l)}$, $R_{(l+1)}$ и $R_{(l+2)}$:

$$A^{c_0\ldots c_{l-1}}_{a_0\ldots a_l c}\bar{A}_{c_0\ldots c_{l-1}d}\,\omega^c\wedge\omega^d = 0, \tag{13}$$

$$\Big[dA^{c_0\ldots c_{l-1}}_{a_0\ldots a_l c}\bar{l}_{c_0\ldots c_{l-1}} + (A^{c_0\ldots c_{l-1}}_{a_0\ldots a_l c}\bar{B}_{c_0\ldots c_{l-1}d} +$$

$$+ B^{c_0\ldots c_l}_{a_0\ldots a_l c}\bar{A}_{c_0\ldots c_l d})\omega^d + A^{c_0\ldots c_{l-1}}_{a_0\ldots a_l c}\sum_{i=0}^{l-1}\omega^d_{c_i}\bar{l}_{c_0\ldots d\ldots c_{l-1}} - \tag{14}$$

$$-\sum_{i=0}^{l}\omega^d_{a_i}\bar{A}_{a_0\ldots d\ldots a_l c} - \bar{A}_{a_0\ldots a_l d}\omega^d_c\Big]\wedge\omega^c = 0,$$

$$\Big[dB^{c_0\ldots c_l}_{a_0\ldots a_l c}\bar{l}_{c_0\ldots c_l} + (A^{c_0\ldots c_{l-1}}_{a_0\ldots a_l c}\bar{l}_{c_0\ldots c_{l-1}d} + \bar{A}_{a_0\ldots a_l cd} +$$

$$+ B^{c_0\ldots c_l}_{a_0\ldots a_l c}\bar{B}_{c_0\ldots c_l d} - \sum_{i=0}^{l}A^g_{a_i cd}\bar{l}_{a_0\ldots g\ldots a_l})\omega^d + \tag{15}$$

$$+ B^{c_0\ldots c_l}_{a_0\ldots a_l c}\sum_{i=0}^{l}\omega^d_{c_i}\bar{\bar{l}}_{c_0\ldots d\ldots c_l} - \bar{B}_{a_0\ldots a_l d}\omega^d_l -$$

$$-\sum_{i=0}^{l}\omega^d_{a_i}\bar{B}_{a_0\ldots d\ldots a_l c}\Big]\wedge\omega^c = 0,$$

$$(B_{a_0\ldots a_l c}^{c_0\ldots c_l}\bar{l}_{c_0\ldots c_l d} + \bar{B}_{a_0\ldots a_l cd})\omega^d\wedge\omega^c = 0, \qquad (16)$$

$$\bar{l}_{a_0\ldots a_l cd}\omega^d\wedge\omega^c = 0. \qquad (17)$$

(2) Соотношения (9), (12) и (17), если учитывать значение векторов l-ой кривизны $\bar{l}_{a_0\ldots a_l}$ в (4), равносильны требованию симметричности векторов $\bar{l}_{a_0\ldots a_l}$ по всем индексам. Отсюда векторы $\bar{A}_{a_0\ldots a_l c}$ и $\bar{B}_{a_0\ldots a_l c}$ симметричны по $l+1$ первым индексам. Далее будем все векторы $\bar{l}_{a_0\ldots a_l}$ с одинаковым набором индексов $a_0\ldots a_l$, но с различной их последовательностью, считать одним и тем же вектором и по своему геометрическому смыслу. (Только тогда можно говорить, например, о линейно независимых векторах $\bar{l}_{a_0\ldots a_l}$ и т.п.)

Число различных по геометрическому смыслу векторов $\bar{l}_{a_0\ldots a_l}$ будет тогда равно

$$r_{ml} = \frac{1}{(l+1)!}\, m(m+1)\ldots(m+l).$$

В силу (5) можно писать

$$A_{a_0\ldots a_l c}^{c_0\ldots c_{l-1}}\bar{A}_{c_0\ldots c_{l-1} d}\bar{l}_{b_0\ldots b_{l-2}} =$$

$$= -A_{a_0\ldots a_l c}^{c_0\ldots c_{l-1}}\bar{l}_{c_0\ldots c_{l-1}}\bar{l}_{b_0\ldots b_{l-2} d} =$$

$$= \bar{l}_{a_0\ldots a_l}\bar{l}_{b_0\ldots b_{l-2} dc}.$$

Отсюда видно, что (13) - следствие из требования симметричности векторов кривизны.

Обозначим производную по форме Пфаффа ω^a от произвольной функции f через f_a. Тогда после некоторых упрощений равенство (14) можно представить в виде

$$\left(A^{c_0\dots c_{l-1}}_{a_0\dots a_l c}\, d^{\bar{l}}{}_{c_0\dots c_{l-1}} + A^{c_0\dots c_{l-1}\bar{}}_{a_0\dots a_l c}\, \bar{B}_{c_0\dots c_{l-1}d} + B^{c_0\dots c_l}_{a_0\dots a_l c}\, \bar{A}_{c_0\dots c_l d}\right)\omega^c \wedge \omega^d = 0. \tag{18}$$

Если выписать из (5) тождество

$$A^{c_0\dots c_{l-1}}_{a_0\dots a_l c}\, \bar{l}_{c_0\dots c_{l-1}}{}^{\bar{l}}{}_{b_0\dots b_{l-1}} = -\bar{l}_{a_0\dots a_l}{}^{\bar{l}}{}_{b_0\dots b_{l-1}c},$$

а затем его производную по форме ω^d и провести с ней определенные несложные преобразования с учетом (16), то выяснится, что (18) (следовательно, и (14)) является следствием условия интегрируемости (16).

Аналогично тому, как для (14), придаем более компактную форму для (15):

$$\left[B^{c_0\dots c_l}_{a_0\dots a_l c}\, d^{\bar{l}}{}_{c_0\dots c_l} + B^{c_0\dots c_l}_{a_0\dots a_l c}\, \bar{B}_{c_0\dots c_l d} + \bar{A}_{a_0\dots a_l cd} + A^{c_0\dots c_{l-1}}_{a_0\dots a_l c}\, \bar{l}_{c_0\dots c_{l-1}d} - \sum_{i=0}^{l} A^{g}_{icd}\, \bar{l}_{a_0\dots g\dots a_l}\right]\omega^c \wedge \omega^d = 0. \tag{19}$$

В итоге условиями интегрируемости системы (4), если рассмотреть только независимые условия и предположить симметричность векторов кривизны по всем индексам, являются (8), (10), (11), (16) и (19). Все эти условия, вместе взятые, обозначим через (A).

3. Таким же образом можно получить условия интегрируемости для системы (6):

$$D\omega^a = P^a_{cd}\,\omega^c \wedge \omega^d, \tag{20}$$

$$\begin{cases} \left[P^g_{cd}\bar{I}_{ag} + P^g_{ad}\bar{I}_{gc} + \bar{P}_{adc}\right]\omega^c \wedge \omega^d = 0 \\ \left[P^g_{cd}\bar{I}_{a_0\ldots a_l g} + P^{c_0\ldots c_l}_{a_0\ldots a_l d}\bar{I}_{c_0\ldots c_l c} + \bar{P}_{a_0\ldots a_l dc}\right]\omega^c \wedge \omega^d = 0, \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} \left[P^g_{ad}\,{}_c\bar{I}_g + P^g_{ad}\bar{P}_{gc} + P^g_{cd}\bar{P}_{ag} + \bar{A}_{adc}\right]\omega^c \wedge \omega^d = 0 \\ \left[P^{c_0\ldots c_l}_{a_0\ldots a_l d}\,{}_c\bar{I}_{c_0\ldots c_l} + P^{c_0\ldots c_l}_{a_0\ldots a_l d}\bar{P}_{c_0\ldots c_l c} + P^g_{cd}\bar{P}_{a_0\ldots a_l g} + \right. \\ \left. + A^{c_0\ldots c_{l-1}}_{a_0\ldots a_l d}\,\bar{I}_{c_0\ldots c_{l-1} c} + \bar{A}_{a_0\ldots a_l dc}\right]\omega^c \wedge \omega^d = 0, \end{cases} \tag{22}$$

где $l=\bar{1},\ldots k$. Эти условия, вместе взятые, обозначим через (В).

§ 3. Определение поверхности тензорами кривизны

1. В (4), (5) и (А) мы имеем дело с тремя системами величин существенно различного значения:

$$A^{c_0\ldots c_{l-1}}_{a_0\ldots a_l c}, \quad B^{c_0\ldots c_l}_{a_0\ldots a_l c} \quad \text{и} \quad \bar{I}_{a_0\ldots a_l}\ \bar{I}_{b_0\ldots b_l}.$$

Уравнения (5) и (А) налагают определенные зависимости между этими системами величин. Представляет интерес выяснить, достаточно ли для определения поверхности V_m задания только некоторой одной или двух систем. Для этого достаточно показать, что остальные системы величин можно тогда вычислить посредством (5) и (А).

Из первого уравнения (5) непосредственно вытекает, что величины $A^{c_0\dots c_{l-1}}_{a_0\dots a_l c}$ полностью определяются координатами тензоров кривизны $\bar{l}_{a_0\dots a_l}\bar{l}_{b_0\dots b_l}$ (в случае линейно зависимых векторов кривизны это определение неоднозначное, что однако не меняет сущности проблемы, так как расположение вектора $\bar{A}_{a_0\dots a_l c}$ среди векторов $\bar{l}_{a_0\dots a_{l-1}}$ тем не менее определено однозначно).

В силу того же первого уравнения системы (5) можно писать

$$\bar{l}_{a_0\dots a_l}\bar{l}_{b_0\dots b_l} = -A^{c^1_0\dots c^1_{l-1}}_{a_0\dots a_l b_l}\bar{l}_{c^1_0\dots c^1_{l-1}}\bar{l}_{b_0\dots b_{l-1}} = \dots =$$

$$=(-1)^l A^{c^1_0\dots c^1_{l-1}}_{a_0\dots a_l b_l} A^{c^2_0\dots c^2_{l-2}}_{c^1_0\dots c^1_{l-1} b_{l-1}} \dots A^{c^l_0}_{c^{l-1}_0 c^{l-1}_1 b_2}\bar{l}_{c^l_0}\bar{l}_{b_0}.$$

В итоге получается, что система, состоящая из метрического тензора $\bar{l}_a\bar{l}_b$ и всех величин $A^{c_0\dots c_{l-1}}_{a_0\dots a_l c}$, равносильна системе всех тензоров кривизны $\bar{l}_{a_0\dots a_l}\bar{l}_{b_0\dots b_l}$ (метрический тензор= = тензор нулевой кривизны).

2. Несколько сложнее исследование зависимости системы величин $B^{c_0\dots c_l}_{a_0\dots a_l c}$ от других систем.

Выпишем из (5) выражение пфаффового производного

$$(\bar{l}_{a_0\dots a_l}\bar{l}_{b_0\dots b_l})_{,c} = \bar{B}_{a_0\dots a_l c}\bar{l}_{b_0\dots b_l} + \bar{B}_{b_0\dots b_l c}\bar{l}_{a_0\dots a_l} \tag{23}$$

и составляем из (11), (16) и (23) систему для определения $B^{c_0\dots c_l}_{a_0\dots a_l c}$.

Обозначим

$$\bar{B}_{a_0\dots a_{l-1}dc} = B^{c_0\dots c_{l-1}}_{a_0\dots a_{l-1}d}\bar{l}_{c_0\dots c_{l-1}c} + \bar{B}_{a_0\dots a_{l-1}dc}, \tag{24}$$

$$\bar{B}_{ado} = \bar{B}_{ado}, \tag{25}$$

$$E_{a_0\ldots a_l b_0\ldots b_l c} = (\bar{I}_{a_0\ldots a_l}\bar{I}_{b_0\ldots b_l})_{,c} +$$

$$+ B^{c_0\ldots c_{l-1}}_{a_0\ldots a_{l-1}a_l}\bar{I}_{c_0\ldots c_{l-1}c}\bar{I}_{b_0\ldots b_l} + \tag{26}$$

$$+ B^{c_0\ldots c_{l-1}}_{b_0\ldots b_{l-1}b_l}\bar{I}_{c_0\ldots c_{l-1}c}\bar{I}_{a_0\ldots a_l},$$

$$E_{a_0 a_1 b_0 b_1 c} = (\bar{I}_{a_0 a_1}\bar{I}_{b_0 b_1})_{,c}. \tag{27}$$

Тогда вместо (23) можно писать

$$E_{a_0\ldots a_l b_0\ldots b_l c} = \bar{E}_{a_0\ldots a_l c}\bar{I}_{b_0\ldots b_l} + \bar{E}_{b_0\ldots b_l c}\bar{I}_{a_0\ldots a_l}. \tag{28}$$

В силу (11) и (16), векторы $\bar{E}_{a_0\ldots a_l c} = E^{c_0\ldots c_l}_{a_0\ldots a_l c}\bar{I}_{c_0\ldots c_l}$ симметричны относительно всех своих индексов.

Допустим, что при заданных величинах $E_{a_0\ldots a_l b_0\ldots b_l c}$ система (28) однозначно определяет расположение векторов $\bar{E}_{a_0\ldots a_l c}$ среди $\bar{I}_{a_0\ldots a_l}$. Тогда из (25) и (24) можно последовательно по возрастанию l однозначно определить векторы $\bar{B}_{a_0\ldots a_l c}$ (т.е. их расположение среди векторов $\bar{I}_{a_0\ldots a_l}$). Они определяются через величины $E_{a_0\ldots a_s b_0\ldots b_s c}$ и $\bar{I}_{a_0\ldots a_s}\bar{I}_{b_0\ldots b_s}$, где $s \le l$. А далее при помощи (27) и (26) можно векторы $\bar{B}_{a_0\ldots a_l c}$ последовательно по возрастанию l однозначно определить через величины $\bar{I}_{a_0\ldots a_s}\bar{I}_{b_0\ldots b_s}$ и $(\bar{I}_{a_0\ldots a_s}\bar{I}_{b_0\ldots b_s})_{,d}$, где $s \le l$. Итак, если система (28) однозначно определяет векторы $\bar{E}_{a_0\ldots a_l c}$, то система величин $B^{c_0\ldots c_l}_{a_0\ldots a_l c}$ полностью определяется через координаты тензоров кривизны (и через их производные). Займемся рассмотрением системы (28).

(3.) Введем обозначение

$$\bar{E}_{a_0\ldots a_1 c}{}^{I}{}_{b_0\ldots b_1} = \begin{Bmatrix} \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m \\ \beta_1\beta_2\ldots\beta_m \end{Bmatrix},$$

где α_a и β_b число значений a и b соответственно в наборах индексов $a_0\ldots a_1 c$ и $b_0\ldots b_1$. Например,

$$\bar{E}_{1121}{}^{I}{}_{113} = \begin{Bmatrix} 310 \\ 201 \end{Bmatrix},$$

где $m=3$. Тогда система (28) принимает вид

$$E_{a_0\ldots a_1 b_0\ldots b_1 c} = E_{b_0\ldots b_1 a_0\ldots a_1 c} = \begin{Bmatrix} \alpha_1\ldots\alpha_m \\ \beta_1\ldots\beta_m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \beta_1'\ldots\beta_m' \\ \alpha_1'\ldots\alpha_m' \end{Bmatrix}, \qquad (29)$$

где

$$\begin{cases} \alpha_a' = \alpha_a, & \text{если} \quad a \neq c \\ \alpha_c' = \alpha_c - 1, & (\alpha_c > 0) \\ \beta_a' = \beta_a, & \text{если} \quad a \neq c \\ \beta_c' = \beta_c + 1 \end{cases}$$

и $\quad \sum_a \alpha_a = \sum_a \beta_a' = 1+2, \quad \sum_a \alpha_a' = \sum_a \beta_a = 1+1.$

Матрица системы (29) состоит только из двоек, единиц и нулей. При этом в каждой строке или одна двойка (если $\alpha_a=\beta_a'$) и нули, или две единицы и нули. Число ненулевых элементов в столбце, соответствующем неизвестной $\begin{Bmatrix}\alpha_1 \dots \alpha_m \\ \beta_1 \dots \beta_m\end{Bmatrix}$, равно числу ненулевых значений α_a. Нетрудно установить, что число строк матрицы равно числу столбцов (= числу неизвестных) только при $m=2$. При $m>2$ число строк превышает число столбцов. Однако здесь нет смысла рассмотреть случаи, когда условия интегрируемости не соблюдены. Поэтому предполагаем, что система (29) непротиворечива.

Допустим, что между столбцами матрицы системы (29) имеет место определенная линейная зависимость L, в которую входит с ненулевым множителем столбец $\begin{Bmatrix}\alpha_1 \dots \alpha_m \\ \beta_1 \dots \beta_m\end{Bmatrix}$ (т.е. столбец, соответствующий неизвестной $\begin{Bmatrix}\alpha_1 \dots \alpha_m \\ \beta_1 \dots \beta_m\end{Bmatrix}$). Очевидно, что в этом столбце не может быть двоек. Поэтому он состоит только из единиц и нулей. Пусть L нормирована, так что множитель столбца $\begin{Bmatrix}\alpha_1 \dots \alpha_m \\ \beta_1 \dots \beta_m\end{Bmatrix}$ равен единице. Тогда все те столбцы, которые имеют единицу на тех же строках, где и столбец $\begin{Bmatrix}\alpha_1 \dots \alpha_m \\ \beta_1 \dots \beta_m\end{Bmatrix}$ (а число таких столбцов определяется ненулевыми значениями среди $\alpha_1 \dots \alpha_m$), входят также в L с множителями -1. Отсюда, в свою очередь, следует существование в L определенных столбцов с множителем 1 и т.д. Оказывается, что при любом исходном столбце $\begin{Bmatrix}\alpha_1 \dots \alpha_m \\ \beta_1 \dots \beta_m\end{Bmatrix}$ можно показать, что тот же столбец должен находиться в L как с множителем +1 так и с множителем -1. Идея доказательства этого проста и прозрачна, а так как запись доказательства довольно сложна, ограничимся приведением примера. Пусть $m=3$ и $l=2$, а исходным столбцом выбран $\begin{Bmatrix}310 \\ 201\end{Bmatrix}$. Если учесть уравнение

$$E_{112,113,1} = \begin{vmatrix}310 \\ 201\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}301 \\ 210\end{vmatrix} \quad (c = 1),$$

то столбец $\begin{Bmatrix}301\\210\end{Bmatrix}$ должен быть в L с множителем -1. Далее, с помощью уравнения

$$B_{111,112,3} = \begin{Bmatrix}301\\210\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}211\\300\end{Bmatrix} \quad (c = 3)$$

получим, что столбец $\begin{Bmatrix}211\\300\end{Bmatrix}$ в L с множителем 1, и отсюда, в силу

$$B_{113,111,3} = \begin{Bmatrix}211\\300\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}310\\201\end{Bmatrix},$$

исходный столбец $\begin{Bmatrix}310\\201\end{Bmatrix}$ в L с множителем -1. Символически запишем это все в следующем виде:

$$\underset{+1}{\begin{Bmatrix}310\\201\end{Bmatrix}} \xrightarrow{c=1} \underset{-1}{\begin{Bmatrix}301\\210\end{Bmatrix}} \xrightarrow{c=3} \underset{+1}{\begin{Bmatrix}211\\300\end{Bmatrix}} \xrightarrow{c=2} \underset{-1}{\begin{Bmatrix}310\\201\end{Bmatrix}}.$$

Полученное противоречие доказывает линейную независимость столбцов матрицы системы (29). Отсюда ранг системы (29) равен числу неизвестных и поэтому (28) однозначно определяет векторы $\bar{B}_{a_0 \ldots a_1 c}$.

(4.) В итоге доказано, что система величин $B^{c_0 \ldots c_1}_{a_0 \ldots a_1 c}$ полностью определяется координатами тензоров кривизны (и их производными). Отсюда следует, что одни только тензоры кривизны определяют в пространстве R поверхность V с точностью до движения.

Это было в несколько другой форме получено Э. Бомпьяни, а затем Майером и Бурстином, которые доказали теорему об ределении поверхности V_m с помощью инвариантных форм Бомпьяни, которые в нашей записи примут вид

$$\omega_1 = (\omega^{o_o}\dots\omega^{o_1}\bar{I}_{o_o\dots o_1})^2$$

(см. (20),(2I),(22),(23),(25), а также (I6)).

Глава II

ИНДИКАТРИСЫ КРИВИЗНЫ

§ 1. Определение индикатрисы

1. С помощью векторов l-ой кривизны можно с каждым одномерным касательным направлением ($\sim$ единичным касательным вектором)

$$\bar{x} = x^{o}\bar{I}_{o} \qquad (x^{o}x^{d}\bar{I}_{o}\bar{I}_{d} = 1)$$

к V_m в M инвариантно связать вектор

$$\bar{p}(\bar{x}^{l+1}) = x^{o_o}\ldots x^{o_l}\bar{I}_{o_o\ldots o_l}$$

в l-ой нормальной к V_m в M плоскости $R_{(l)}$. Назовем $\bar{p}(\bar{x}^{l+1})$ <u>вектором l-ой кривизны поверхности V_m в направлении $\bar{x}$</u>. В случае $l=1$ он совпадает с известным вектором нормальной кривизны (см., например, [17]).

В качестве примера укажем на вектор $\underbrace{\bar{I}_{a\ldots a}}_{l+1}$, который является $|\bar{I}_a|^{l+1}$-кратным вектором l-ой кривизны в направлении $\bar{I}_a$. Если репер R ортонормирован, то $\bar{p}(\bar{I}_a^{\,l+1}) = \underbrace{\bar{I}_{a\ldots a}}_{l+1}$.

Пусть направление $\bar{x}$ вращается свободно в касательной плоскости $R_{(o)}$. Тогда конечная точка вектора $\bar{M}+\bar{p}(\bar{x}^{l+1})$ описывает в $R_{(l)}$ некоторое точечное множество I^l, которое будем называть <u>индикатрисой l-ой кривизны поверхности V_m в M.</u> В случае l=1 эта индикатриса совпадает с известной индикатрисой нормальной кривизны (см., например, [17]).

Введем обозначение

$$X^{a_0\ldots a_l} = \frac{(l+1)!}{\alpha_1!\ldots\alpha_m!}\, x^{a_0}\ldots x^{a_l},$$

где α_a - число значений a в наборе индексов $a_0\ldots a_l$. Тогда имеем

$$x^{c_0}\ldots x^{c_l}\bar{I}_{c_0\ldots c_l} = X^{c_0\ldots c_l}\bar{I}_{<c_0\ldots c_l>},$$

где в заключенном в скобках "< ... >" наборе индексы могут принимать значения только в неубывающей последовательности. В силу этого равенства, уравнения

$$\begin{cases} X^{a_0\ldots a_l} - \dfrac{(l+1)!}{\alpha_1!\ldots\alpha_m!}\sqrt[l+1]{X^{a_0\ldots a_0}\ldots X^{a_l\ldots a_l}} = 0 \\ \sqrt{X^{c\ldots c}\, X^{d\ldots d}}\, I_c I_d - 1 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

являются уравнениями индикатрисы I^l в аффинной координатной системе $(M, \bar{I}_{a_0\ldots a_l})$ плоскости $R_{(l)}$. (Здесь мы не ставим никаких ограничений на линейную зависимость или же независимость векторов $\bar{I}_{a_0\ldots a_l}$.)

2. Так как конкретный вид индикатрисы I^l и ее расположение относительно точки M повехности V_m, очевидно, в определенной мере характеризуют локальное строение V_m вблизи M, то для теории поверхностей V_m имеет значение и самостоятельное изучение индикатрис I^l, а также конфигураций $F^l = M \cup I^l$,

т.е. пар, состоящих из начала координат М и точечного многообразия I^1, представляемого системой (1).

Если скалярные произведения $\bar{I}_a \bar{I}_b$ считать заданными (что всегда можно сделать; например, $\bar{I}_a \bar{I}_b = \delta_{ab}$), то конфигурация F^1 зависит только от системы $(M, \bar{I}_{a_0 \ldots a_1})$. При этом, если будем изучать произвольные конфигурации F^1, нас вообще не будет интересовать геометрическое значение этой системы. Мы будем ее истолковывать как систему исходящих из произвольной точки произвольных векторов. В том, что векторы $\bar{I}_{a_0 \ldots a_1}$, в зависимости от выбора поверхности V_m и ее точки M, действительно могут приобрести произвольные значения, можно убедиться, если посмотреть на них как на начальные условия некоторой интегрируемой системы дифференциальных уравнений (I 4).[ж)]

Произвольное линейное отображение L приводит заданную систему $(M, \bar{I}_{a_0 \ldots a_1})$ опять-таки в некоторую систему $(M', \bar{I}'_{a_0 \ldots a_1})$. А так как система (1) одинакова для обеих систем, то это же линейное отображение приводит конфигурацию F^1, соответствующую $(M, \bar{I}_{a_0 \ldots a_1})$, в конфигурацию F'^1, соответствующую $(M', \bar{I}'_{a_0 \ldots a_1})$. Отсюда следует, что множество всевозможных конфигураций F^1 замкнуто относительно линейных отображений. Так как всевозможные системы $(M, \bar{I}_{a_0 \ldots a_1})$ можно получить с помощью линейных отображений от произвольной системы $(M, \bar{I}^0_{a_0 \ldots a_1})$, где векторы $\bar{I}^0_{a_0 \ldots a_1}$ линейно независимы, то и все конфигурации F^1 можно получить этим же путем

ж) т.е. уравнений (4) из главы I; такая система ссылок используется и в дальнейшем.

от соответствующей конфигурации F^1_0.

③ Предположим, что векторы $\bar{I}_{a_0\dots a_1}$ линейно независимы. Тогда размерность плоскости $R_{(1)}$ равна

$$r_{m1} = \frac{1}{(1+1)!}\, m(m+1)\dots(m+1)$$

(числу векторов $\bar{I}_{a_0\dots a_1}$), а индикатриса I^1 является, в силу (1), $(m-1)$-мерной конечной алгебраической поверхностью. Для определения ее порядка выделим в плоскости $R_{(1)}$ произвольно некоторую подплоскость R_s, где $s=r_{m1}-(m-1)$, и найдем число точек (действительных или комплексных), в которых плоскость R_s пересекается с индикатрисой I^1.

Искомые точки являются решениями системы, состоящей из (1) и $m-1$ линейных уравнений плоскости R_s. Исключая из этой системы величины $X^{a_0\dots a_1}$, у которых не все индексы равны, получаем для определения m величин $X^{a\dots a}$ некоторую новую систему, которую обозначим через (*). Из нее с помощью обозначений

$$x^a = \sqrt[1+1]{X^{a\dots a}}$$

получим систему

$$\begin{cases} b^i_{c_0\dots c_1} x^{c_0}\dots x^{c_1} + b^i = 0 & (i=1,\dots,m-1) \\ x^c x^d \bar{I}_c \bar{I}_d - 1 = 0, & \end{cases} \tag{2}$$

состоящую из одного квадратичного уравнения и из $m-1$ уравнений $(1+1)$-ой степени. Такая система (2) имеет $2(1+1)^{m-1}$ решений. Однако порядок индикатрисы I^1, как алгебраической поверхности, равен числу решений не системы (2), а системы (ж). Поэтому будем сопоставлять множества решений этих систем.

Если $\bar{x}_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^m)$ является решением системы (2), то

$$\bar{X}_0 = ((x_0^1)^{l+1}, \ldots, (x_0^m)^{l+1})$$

является решением системы (ж) и определяется при этом однозначно. Все решения системы (2), соответствующие указанным образом одному и тому же значению $\bar{X}_0$, должны, очевидно, иметь вид

$$\bar{x}_0' = (p_1 x_0^1, \ldots, p_m x_0^m),$$

где

$$p_a = \sin\left(\frac{2q_a}{l+1}\pi\right) + i\cos\left(\frac{2q_a}{l+1}\pi\right)$$

– корни единицы (q_a – целые числа). Так как величины $b^i_{c_0 \ldots c_l}$ и b^i в (2) (и в (ж)) могут, в силу произвольности выбора плоскости R_s, приобрести произвольные вещественные, а q_a – только целочисленные, дискретные значения, то нетрудно установить равенства $q_1 = \ldots = q_m = q$.

Первые $m-1$ уравнения из обеих систем (2) и (ж) не налагают никаких ограничений на величину q. Зато из последнего уравнения следует, что при нечетном l имеет место $q = \frac{1}{2} r(l+1)$, а при четном l только $q = r(l+1)$, где r – произвольное целое число. Следовательно, каждому решению $\bar{X}_0$ системы (ж), в зависимости от четности или нечетности величины l, соответствует или одно или два решения $\bar{x}_0$ системы (2).

Если теперь учесть еще, что каждая система линейно зависимых векторов $\bar{l}_{a_0 \ldots a_l}$ можно представить как результат предельного перехода от некоторой системы линейно независимых векторов $\bar{l}_{a_0\ldots a_l}(t)$, где $t \neq t_0$, так что

$$\bar{l}_{a_0\ldots a_l} = \lim_{t \to t_0} \bar{l}'_{a_0\ldots a_l}(t),$$

то может быть сформулирована

Теорема 2.1 Индикатриса l-ой кривизны I^l поверхности V_m в ее точке М является или $(m-1)$-мерной конечной алгебраической поверхностью порядка $2(l+1)^{m-1}$, когда l четна, и порядка $(l+1)^{m-1}$, когда l нечетна, или же конечной фигурой, получаемой из такой алгебраической поверхности предельным переходом.

Теорема согласуется с результатами, полученными в [17] для случая $l=1$, а также с результатами О.Борувка (см. [24]) для $m=2$.

§ 2. Сечение индикатрисы

1. Пусть касательное направление $\bar{x}$ к V_m в точке М вращается не во всей касательной плоскости $R_{(0)}$, а в некоторой двумерной плоскости R_2, содержащейся в $R_{(0)}$ (и проходящей через точку М). При подходящем выборе ортонормированного подвижного репера R траекторию конечной точки вектора $\bar{M} + \bar{x}$ можно задавать следующими формулами Бартельса-Френе:

$$\begin{cases} \bar{l}_1' = \bar{l}_2 \\ \bar{l}_2' = -\bar{l}_1, \end{cases} \qquad (3)$$

где $\bar{l}_1 = \bar{x}$, а запятая над вектором означает производную по углу поворота α направления $\bar{x}$. Эти формулы Бартельса-Френе равносильны системе

$$\begin{cases} \omega_1^2 = -\omega_2^1 = d\alpha \\ \omega_1^{a+2} = \omega_2^{a+1} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

При вращении $\bar{1}_1$ в R_2, конец вектора $\bar{M}+\bar{p}(\bar{1}_1{}^{l+1})=\bar{M}+\bar{1}_{\underbrace{1\ldots1}_{l+1}}$ описывает на индикатрисе I^l некоторое точечное многообразие S^l, которое назовем сечением индикатрисы I^l для R_2. В случае $m=2$ сечение S^l совпадает с I^l.

Займемся изучением строения сечения S^l. Для этого введем обозначение

$$\bar{1}_{a_0\ldots a_l} = \{\alpha_1\ldots\alpha_m\},$$

где α_a - число значений a в наборе индексов $a_0\ldots a_l$. Если учесть ортонормированность $R(\omega_a^b=-\omega_b^a)$, то (I,3) можно записать в следующем виде

$$d^*\{\alpha_1\ldots\alpha_m\}=\sum_{a,b:a<b}\omega_a^b(\alpha_a\{\alpha_1\ldots\alpha_a-1\ldots\alpha_b+1\ldots\alpha_m\}- \\ -\alpha_b\{\alpha_1\ldots\alpha_a+1\ldots\alpha_b-1\ldots\alpha_m\}), \tag{5}$$

откуда с учетом (4) получим

$$\frac{d^*}{d\alpha}\{l+1-s,s,0\ldots0\} = (l+1-s)\{l-s,s+1,0\ldots0\}- \\ -s\{l+2-s,s-1,0\ldots0\}, \tag{6}$$

где $s=0,1,\ldots,l+1$ и $\{-1,l+2,0\ldots0\}=\{l+2,-1,0\ldots0\}=0$.

Назовем эллипсом l-ой степени кривую, описываемую конечной точкой вектора $\bar{a}_0(\alpha)$, являющегося решением системы

$$\begin{cases} \bar{a}_0' = (l+1)\bar{a}_1 \\ \bar{a}_1' = \qquad l\bar{a}_2 - \bar{a}_0 \\ \bar{a}_s' = (l+1-s)\bar{a}_{s+1} - s\bar{a}_{s-1} \\ \bar{a}_{l+1}' = \qquad -(l+1)\bar{a}_l \end{cases} \qquad (7)$$

при произвольных линейно независимых начальных значениях векторов $\bar{a}_0,\dots,\bar{a}_{l+1}$. В частности, нетрудно убедиться, что понятия "эллипс", "эллипс нулевой степени" и "эллипс первой степени" совпадают.

Если сравнить (6) и (7) и учесть то, что векторы $\bar{I}_{1\dots 12\dots 2}$ в точке М в зависимости от строения и расположения поверхности V_m вблизи М могут иметь произвольные значения, то нами доказана следующая

Теорема 2. 2. Сечение S^l индикатрисы l-ой кривизны I^l для произвольной R_2 является или эллипсом l-ой степени, или его конечной вырожденной формой. С другой стороны, каждый эллипс l-ой степени или его конечная вырожденная форма может быть сечением S^l некоторой индикатрисы I^l.

2. Если вспомнить определение индикатрисы I^l и ее сечения S^l для двумерной плоскости R_2, уравнения (3) (отсюда $x^1 = \cos\alpha$, $x^2 = \sin\alpha$), теорему 2.2 и соответствие

$$\bar{a}_s \longleftrightarrow \{l+1-s, s, 0\dots 0\},$$

то эллипс l-ой степени может быть представлен вектор-функцией

$$\bar{a}_0(\alpha) = \sum_{s=0}^{l+1} C_{l+1}^{s} \cos^{l+1-s}\alpha \, \sin^{s}\alpha \, \bar{a}_s.$$

Отсюда имеем

$$\bar{a}_0(0) = \bar{a}_0(2n\pi) = \bar{a}_0,$$

$$\bar{a}_0(\tfrac{\pi}{2}) = \qquad = \bar{a}_{l+1},$$

$$\bar{a}_0(\pi) = \qquad = (-1)^{l+1}\bar{a}_0,$$

$$\bar{a}_0(\tfrac{3}{2}\pi) = \qquad = (-1)^{l+1}\bar{a}_{l+1}.$$

При четном значении l справедливо $\bar{a}_0(\alpha+\pi) = -\bar{a}_0(\alpha)$, т.е. вектор-функция $\bar{a}_0$ симметрична относительно своей начальной точки, которая, следовательно, геометрически связана с соответствующим эллипсом l-ой степени (как, например, центр с окружностью). Период функции $\bar{a}_0$ равен 2π.

Если l нечетна, то период функции $\bar{a}_0$ равен π. Чтобы выяснить, как здесь начальная точка вектора $\bar{a}_0$ связана с соответствующим эллипсом l-ой степени, прибавим к вектору $\bar{a}_0$ (перемещая его начальную точку) произвольный постоянный вектор $\bar{a}$ и обозначим

$$\bar{A}_0 = \bar{a}_0 + \bar{a}.$$

Постараемся теперь, соблюдая (7), выписать для $\bar{A}_0$ систему (7). Тогда последовательно получим:

$$\bar{A}_1 = \bar{a}_1, \ \bar{A}_2 = \bar{a}_2 + \frac{1}{l}\bar{a}, \ \bar{A}_3 = \bar{a}_3, \ \bar{A}_4 = \bar{a}_4 + \frac{3}{l(l-2)}\bar{a}$$

и т.д. Вообще, оказывается, что

$$\bar{A}_s = \begin{cases} \bar{a}_s & \text{при нечетном } s \\ \bar{a}_s + \dfrac{(s-1)!!}{l(l-2)\dots(l+2-s)}\,\bar{a} & \text{при четном } s. \end{cases}$$

Так как l нечетна, то в силу (7) - независимо от выбора $\bar{a}$ - имеет место равенство

$$\bar{A}'_{l+1} + (l+1)\bar{A}_l = 0. \qquad (8)$$

Поэтому для $\bar{A}_0$ можно выписать систему, аналогичную (7) (при том же параметре α). Следовательно, начальная точка вектора $\bar{a}_0$ геометрически никак не связана с соответствующим эллипсом l-ой степени. (Вопрос о существовании центра симметрии у решения системы (7) обсуждается в приложении I к настоящей главе.)

Если же истолковать эллипс l-ой степени как сечение S^l индикатрисы I^l для R_2, то можно утверждать следующее.

При нечетном значении l точка M поверхности V_m инвариантно связана с произвольным сечением S^l соответствующей индикатрисы I^l, являясь для него центром симметрии. Поэтому точка M является центром симметрии и для индикатрисы I^l. Это свойство, очевидно, не нарушается и в том случае, когда векторы $\bar{l}_{a_0 \dots a_l}$ линейно зависимы (см. §I п.2). Конфигурация F^l определяется заданием только индикатрисы I^l.

В случае же нечетного значения l строение сечения S^l не несет в себе никакой информации о расположении относительно него точки M поверхности V_m.

(3) Чтобы показать каноничность параметра α для эллипса

1-ой степени, перейдем в (7) к новой переменной t, так что $\alpha=\alpha(t)$ и $\dot\alpha=\frac{d\alpha}{dt}\neq 0$. Выпишем последовательно:

$$\bar A_0 = \bar a_0,$$

$$\dot{\bar A}_0 = (1+1)\dot\alpha\bar a_1 = (1+1)\bar A_1,$$

т.е.

$$\bar A_1 = \dot\alpha\bar a_1,$$

а далее

$$\dot{\bar A}_1 = \ddot\alpha\bar a_1 + \dot\alpha^2\bar a_1' = (1-\dot\alpha^2)\bar a_0 + \ddot\alpha_1\bar a_1 + 1\dot\alpha^2\bar a_2 - \bar A_0.$$

Отсюда

$$\bar A_2 = \frac{1-\dot\alpha^2}{1}\bar a_0 + \frac{\ddot\alpha}{1}\bar a_1 + \dot\alpha^2\bar a_2.$$

Общее выражение для $\bar A_s$ является весьма сложным. Тем не менее нетрудно найти, что коэффициент q_s вектора $\bar a_s$ в выражении суммы

$$\dot{\bar A}_s + s\bar A_{s-1}$$

равен

$$q_s = \sum_{m=1}^{s-1} m\dot\alpha^{s-2}\ddot\alpha.$$

Для того, чтобы при новой переменной также получать систему в виде (7), необходимо и достаточно соблюдать равенство (8) (имея в нем в виду производное по t), а для этого - так как по определению эллипса 1-ой степени векторы $\bar a_s$ линейно независимы - необходимо равенство

$$q_{l+1} = \sum_{u=1}^{l} u\dot{\alpha}^{l-1}\ddot{\alpha} = 0.$$

Отсюда получим, что $\ddot{\alpha}=0$ и, далее, также $\dddot{\alpha}=\ddddot{\alpha}=\ldots=0$. Теперь нетрудно определять коэффициент p_{s-1} вектора $\bar{a}_{s-1}$ в выражении суммы $\dot{\bar{A}}_s+s\bar{A}_{s-1}$. Приравняв $p_1=0$, получим $1-\dot{\alpha}^2=0$.

Таким образом, вид системы (7) сохраняется только при замене переменной $t=\pm\alpha+\alpha_0$, где α_0 - постоянная. Поэтому параметр α является для эллипса l-ой степени (7) каноническим.

4. Выясним, может ли на индикатрисе I^1 существовать эллипс l-ой степени, не являющийся сечением индикатрисы для некоторой двумерной плоскости R_2.

Пусть конец единичного вектора $\bar{x}$ описывает в плоскости $R_{(0)}$, касательной к V_m в M, произвольную кривую L с произвольным параметром α. Аналогично (3), для L можно выписать формулы Бартельса-Френе

$$\begin{cases} \bar{l}_1' = \varkappa_1 \bar{l}_2 \\ \bar{l}_2' = -\varkappa_1 \bar{l}_1 + \varkappa_2 \bar{l}_3 \\ \bar{l}_a' = -\varkappa_{a-1}\bar{l}_{a-1} + \varkappa_a \bar{l}_{a+1} \\ \bar{l}_m' = -\varkappa_{m-1}\bar{l}_{m-1} \end{cases} \tag{9}$$

или, что то же самое, систему

$$\begin{cases} \omega_a^{a+1} = \varkappa_a d\alpha \\ \omega_a^{a+s} = 0, \end{cases} \tag{10}$$

где $s>1$. При этом $\bar{l}_1=\bar{x}$ и касательный репер R ортонормирован.

Следует выяснить, при каких значениях величин $\varkappa_i$ соответствующий вектор $\bar{p}(\bar{x}^{l+1})=\bar{l}_{1\ldots1}=\{l+1,0\ldots0\}$ можно представить в виде решения системы (7), если учесть (5) и (10).

В данном случае имеем

$$\bar{a}_0 = \{l+1,0\ldots0\},$$

$$\bar{a}_0' = (l+1)\,\varkappa_1\{1\,1\,0\ldots0\},$$

откуда

$$\bar{a}_1 = \varkappa_1\{1\,1\,0\ldots0\}.$$

Общее выражение для вектора $\bar{a}_s$ является весьма сложным. Тем не менее нетрудно найти, что коэффициент q_s вектора $\{l+1-s, s-1,1\,0\ldots0\}$ в выражении суммы $\bar{a}_s'+s\bar{a}_{s-1}$ равен

$$q_s = \frac{s(s+1)}{2}\varkappa_1^2\varkappa_2.$$

Пусть вектор $\{0\,1\,1\,0\ldots0\}$ линейно независим от других векторов l-ой кривизны. Тогда необходимым условием того, чтобы соблюдался вид системы (7), является равенство

$$q_{l+1} = \frac{(l+1)(l+2)}{2}\varkappa_1^{l+1}\varkappa_2 = 0,$$

т.е. равенство

$$\varkappa_2 = 0.$$

Но тогда для кривой L вместо (9) можно писать

$$\begin{cases} \bar{l}_1' = \varkappa_1\bar{l}_2 \\ \bar{l}_2' = -\varkappa_1\bar{l}_1, \end{cases}$$

т.е. L является окружностью, плоскость R_2 которой проходит через точку M. Поэтому эллипс 1-ой степени, описываемый конечной точкой вектора $\bar{M}+\bar{p}(\bar{x}^{1+1})$, является сечением индикатрисы I^1 для плоскости R_2.

В итоге доказана

<u>Теорема 2.3.</u> Пусть 1-ая нормальная плоскость $R_{(1)}$ к поверхности V_m в ее точке M имеет максимальную возможную размерность $m_1 - r_{m1} = \frac{1}{(1+1)!} m(m+1)\dots(m+1)$. Тогда через произвольные точки P_1 и P_2 индикатрисы 1-ой кривизны I^1, соответствующим неколлинеарным касательным к V_m в M направлениям $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$, проходит на I^1 ровно один эллипс 1-ой степени. Этот эллипс 1-ой степени является сечением индикатрисы I^1 для двумерной плоскости R_2, определяемой направлениями $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$.

Аргумент α в (3) - это угол поворота направления $\bar{x}$. Тот же (посредством (6)) параметр α в (7) является для эллипса 1-ой степени (сечения S^1) каноническим. Следовательно, разность значений параметра α в двух точках P_1 и P_2 сечения S^1 равна углу между соответствующими касательными к V_m в M направлениями $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$.

Поэтому, в силу теоремы 2.3 может быть сформулирована

<u>Теорема 2.4.</u> Пусть поверхности V_m и V'_m имеют в заданных точках M и M' конгруэнтные между собой индикатрисы 1-ой кривизны I^1 и I'^1, причем соответствующие 1-ые нормальные плоскости $R_{(1)}$ и $R'_{(1)}$ имеют максимальную возможную размерность r_{m1}. Пусть P и P' - соответствующие точки этих конгруэнтных индикатрис I^1 и I'^1, а $\bar{x}$ и $\bar{x}'$ - касательные к V_m в M и к V'_m в M' направления, соответствующие точкам P и P'. Получаемое таким образом соответствие $\bar{x} \to \bar{x}'$

между касательными к V_m в M и к V_m' в M' направлениями является изометрией.

5. Теорема 2.4 указывает на ту роль, которую имеют индикатрисы кривизны I^1 (и конфигурации F^1), рассматриваемые как только точечные многообразия (без наперед известного соответствия $\bar{x} \leftrightarrow P$ между направлениями $\bar{x}$ плоскости $R_{(o)}$ и точками P индикатрисы I^1), при характеризации дифференциальной окрестности точки M поверхности V_m. Если при условиях теоремы заданы только точка M, плоскость $R_{(o)}$ и индикатриса I^1, то при одной только этой информации соответствия $\bar{x} \longleftrightarrow P$ может быть установлено с точностью до ортогональных преобразований в плоскости $R_{(o)}$. Однако большее уже не может быть достигнуто, так как во всей пространстве E_n существует группа движений, оставляющая точки плоскости $R_{(1)}$ (и конфигурации F^1) неизменными и индуцирующая всевозможные ортогональные преобразования плоскости $R_{(o)}$.

Если векторы 1-ой кривизны $\bar{l}_{a_o \ldots a_l}$ линейно зависимы, т.е. размерность плоскости $R_{(1)}$ меньше r_{m1}, то индикатриса I^1 (и конфигурация F^1), рассматриваемая как только точечное многообразие, может нести и меньшую информацию о дифференциальной окрестности точки M поверхности V_m.

<u>Пример</u>. Пусть заданы поверхности V_3 и V_3', причем в точке $M \in V_m$ векторы первой кривизны равны $\bar{l}_{11}=\bar{l}_{22}=\bar{l}_{12}=\bar{l}_{13}=\bar{l}_{23}=0$, $\bar{l}_{33}=\bar{a}\neq 0$, а в точке $M' \in V_3'$ эти векторы равны $\bar{l}'_{11}=\bar{l}'_{12}=\bar{l}'_{13}=\bar{l}'_{23}=0$, $\bar{l}'_{22}=\bar{l}'_{33}=\bar{a}$. Касательные реперы в обеих случаях ортонормированы. Тогда соответствующие индикатрисы I^1 и I'^1 (и конфигурации F^1 и F'^1) конгруэнтны, а соответствие $\bar{x} \leftrightarrow \bar{x}'$ касательных направлений, устанавливаемое равенством $\bar{p}(\bar{x}^2)=\bar{p}(\bar{x}'^2)$ не

изометрично, больше того, оно также неоднозначно.

Для устранения этого недостатка мы далее часто будем рассматривать индикатрисы I^l (и конфигурации F^l) вместе с их "параметризациями", т.е. вместе с соответствиями $P \leftrightarrow \bar{x}$, рассматриваемыми с точностью до ортогональных преобразований в $R_{(0)}$. В частности, точку P индикатрисы I^l, соответствующую нескольким касательным направлениям $\bar{x}$, условно будем рассматривать как несколько различных (по своему геометрическому смыслу) точек.

6. При выводе результатов этого параграфа нам было достаточно использовать только понятие сечения индикатрисы I^l для двумерной плоскости R_2. Вообще говоря, можно ввести и понятие сечения S^l индикатрисы I^l для q-мерной плоскости R_q : S^l описывается конечной точкой вектора $\bar{M}+\bar{p}(\bar{x}^{l+1})$, когда направление $\bar{x}$ свободно вращается в плоскости R_q($M \in R_q \subset R_{(0)}$, $q < m$). По своему строению сечение S^l для R_q можно истолковать как индикатрису I'^l в точке M' некоторой поверхности V'_q. Верна следующая

<u>Теорема 2. 5.</u> Пусть S^l - сечение индикатрисы I^l поверхности V_m в ее точке M для плоскости R_q, а V_q - подповерхность поверхности $V_m (\supset V_q)$, касающаяся в точке M плоскость R_q. Сечение S^l является индикатрисой первой кривизны поверхности V_q в M, тогда и только тогда, когда V_q на V_m в точке M - геодезическая.

Теорема непосредственно вытекает из следующих соображений.

Если V_q на V_m в M геодезическая, то соответствующие векторы первой кривизны поверхностей V_q и V_m в направления

$\bar{x} \subset R_q$ совпадут. Если же V_q на V_m в М не геодезическая, то существует такое касательное направление $\bar{x}_0 \subset R_q$, что вектор первой кривизны поверхности V_q в направлении $\bar{x}_0$ имеет, кроме компоненты в плоскости $R_{(1)}$, ненулевую компоненту в ортогональном дополнении плоскости R_q до плоскости $R_{(o)}$.

При значениях $l > 1$ подобная теорема не имеет места, так как векторы l-ой кривизны в точке М поверхности V_q, геодезической на V_m в М, в общем случае не лежат в l-ой нормальной плоскости $R_{(l)}$ к V_m в М.

§ 3. Плоскость индикатрисы

Плоскостью заданной поверхности V назовем плоскость наименьшей размерности, в которой поверхность V помещается. Плоскость индикатрисы I^l обозначим через R_{I^l}.

1. Займемся определением размерностей нормальных плоскостей различных порядков к индикатрисе I^l в произвольной ее точке Р и порядком кривизны индикатрисы I^l. При этом предположим, что l-ая нормальная плоскость $R_{(l)}$ к V_m в точке М имеет максимальную возможную размерность, т.е. $m_l = r_{ml}$ (все векторы $\bar{l}_{a_0 \ldots a_l}$ предполагаются линейно независимыми). Касательный к V_m в М репер R выбираем так, чтобы он был ортонормирован и чтобы имело место равенство

$$\bar{P} = \bar{M} + \bar{p}(\bar{l}_1^{l+1}) = \bar{M} + \bar{l}_{\underbrace{1 \ldots 1}_{l+1}} \qquad (11)$$

Дифференциалы от (11) по $\mathrm{mod}(\omega^1, \ldots, \omega^m)$ (см. (1 3) или (5)) определяют касательную к I^l в Р плоскость. Если при этом базис составить из форм $\frac{1}{l+1}\omega_1^A$, где $A=2,3,\ldots,m$, то соответствующим касательным репером к I^1 в R будет $(P,\bar{I}_{1\ldots 1A})$[ж)]. Касательную к I^1 в P плоскость обозначим через $\{P;\bar{I}_{1\ldots 1A}\}$. (Подобным обозначением плоскостей будем пользоваться и в дальнейшем.)

Векторы $I_{1\ldots 1A}$ вместе с их первыми дифференциалами по $\mathrm{mod}(\omega^a)$ определяют вторую соприкасающуюся плоскость к I^1 в P (линейное пространство, натянутое на касательную и первую нормальную плоскость) и т.д. Однако на этом пути мы натолкнемся на серьезные технические трудности, так как векторы, определяющие различные соприкасающиеся плоскости, выражаются в общем случае довольно сложными линейными комбинациями векторов $\bar{I}_{a_0\ldots a_1}$. Эти трудности можно обойти, если вместо индикатрисы I^1 (и конфигурации F^1) принимать в рассмотрение ее отображение $L\,I^1$, где L линейное отображение такое, что

ж) В дальнейшем мы всегда будем под касательной плоскостью к I^1 в конечной точке вектора $\bar{M}+\bar{p}(\bar{x}^{1+1})$ подразумевать плоскость, получаемую в результате следующей конструкции.

Выбираем ортонормированный к V_m в M репер так, чтобы имело место $\bar{I}_1=\bar{x}$. Тогда искомая плоскость определяется конечной точкой вектора $\bar{M}+\bar{I}_{1\ldots 1}$ и векторами $\bar{I}_{1\ldots 1A}$ (это плоскость, определяемая первыми дифференциалами вектора $\bar{p}(\bar{x}^{1+1})$, отложенными от конечной точки вектора $\bar{M}+\bar{p}(\bar{x}^{1+1})$).

В случае линейно независимых векторов $\bar{I}_{1\ldots 1A}$ определяемая таким образом касательная плоскость совпадает с обычной. В противном случае это не всегда так (пример: касательная плоскость к I^1 в конечной точке вектора $\bar{M}+\bar{I}_{11}$, если m=3,

$$\bar{I}_{11}=\bar{I}_{12}=\bar{I}_{13}=\bar{I}_{23}=0 \text{ и } \bar{I}_{22}=-\bar{I}_{33}\neq 0).$$

$$L\,\bar{I}_{a_0\ldots a_l}=\begin{cases}\bar{I}_{a_0\ldots a_l}, & \text{если } a_0\ldots a_l\neq 1\ldots 1\\ 0, & \text{если } a_0\ldots a_l = 1\ldots 1\end{cases}$$

(при этом $LP=LM$).

(2.) Векторы $L\bar{I}_{a_0\ldots a_l}$ и точечное многообразие LI^l можно истолковать как векторы и индикатрису l-ой кривизны в точке LM некоторой другой поверхности V'_m (множество всевозможных видов индикатрис I^l замкнуто относительно линейных отображений (см. § 1 п. 2)). Касательный репер к V'_a в точке LM также ортонормирован, так как скалярные произведения $\bar{I}'_a\bar{I}'_b$ определяются системой (1), не изменяющейся при отображении L. К тому же

$$L\bar{M}+L\,\bar{I}_{1\ldots 1}=L\bar{M}+0=L\bar{P}$$

(ср. с (11)).

Дифференциалы векторов $L\bar{I}_{a_0\ldots a_l}$ (истолкованные как векторы l-ой кривизны поверхности V_m) по $\mathrm{mod}(\omega^a)$ вычисляются по формулам (1 3) (или (5)) после замены в них векторов $\bar{I}_{a_0\ldots a_l}$ векторами $L\bar{I}_{a_0\ldots a_l}$. Таким образом (с учетом $L\bar{I}_{1\ldots 1}=0$ и $L\bar{I}_{1\ldots 1A_0\ldots A_s}=\bar{I}_{1\ldots 1A_0\ldots A_s}$) нетрудно установить, что первой соприкасающейся (= касательной) плоскостью к LI^l в точке LP является плоскость $\{LP;\ \bar{I}_{1\ldots 1A}\}$, второй – плоскость $\{LP;\ \bar{I}_{\underbrace{1\ldots 1}_{l}A},\ \bar{I}_{\underbrace{1\ldots 1}_{l-1}A_0A_1}\}$, третьей – плоскость $\{LP;\ \bar{I}_{1\ldots 1A},\ \bar{I}_{1\ldots 1A_0A_1},\ \bar{I}_{1\ldots 1A_0A_1A_2}\}$ и т.д., где $A_1=2,\ldots,m$.

Отсюда (i+1)-ой соприкасающейся плоскостью к $L\,I^l$ в точке LP является плоскость $\{LP;\ \bar{I}_{Aa_i\ldots a_l}\}$, т.е. плоскость LR_{I^l}. Тогда и плоскость $R_{LI^l}(=LR_{I^l})$ индикатрисы LI^l совпадает с плоскостью $LR_{(l)}$ и порядок кривизны индикатрисы LI^l равен 1.

Из выражений соприкасающихся плоскостей к индикатрисе LI^l в ее точке LP непосредственно видно, что размерность Lp_s s-ой нормальной плоскости к LI^l в LP при $s < l$ равна числу векторов $I_{\underbrace{1\ldots1}_{l-s}A_s\ldots A_s}$, т.е.

$$Lp_s = r_{m-1,s}\left(= \frac{1}{(s+1)!}(m-1)m\ldots(m+s-1)\right). \qquad (12)$$

При $s > l$ получим $Lp_s = 0$.

3. Отображение L не может повысить размерности соприкасающейся плоскости к поверхности. Поэтому для размерности p_s s-ой нормальной к I^l в P плоскости имеем $p_s \geq Lp_s$. А так как при $s < l$ верно $Lp_s = r_{m-1,s}$, то должно иметь место

$$p_s = r_{m-1,s} \qquad (s \leq l).$$

В силу того, что порядок кривизны индикатрисы LI^l равен 1, а ее плоскость R_{LI^l} совпадает с плоскостью $LR_{(l)}$, размерность Lm_l которой равна $m_l - 1$, то верно или

A) $p_{l+1} = 1$, $p_{l+u} = 0$ $(u > 1)$ – тогда $R_{I^l} = R_{(l)}$, порядок кривизны индикатрисы I^l равен $l+1$, или же

B) $p_{l+u} = 0$ $(u > 0)$ – тогда R_{I^l} является гиперплоскостью в $R_{(l)}$, порядок кривизны индикатрисы I^l равен l.

В силу § 2 п. 2 при четном значении l имеет место $M \in R_{I^l}$ и поэтому $I_{1\ldots1} \parallel R_{I^l}$. Отображение L, таким образом, уменьшает на единицу размерность плоскости R_{I^l}. Следовательно, при четном l имеет место случай А.

В случае же В размерности плоскостей R_{Il} и LR_{Il} равны, так как в противном случае имело бы место $R_{Il}=R_{(l)}$, т.е. случай А. Поэтому, в силу определения отображения L, $\bar{I}_{1\ldots 1} \nparallel R_{Il}$. Следовательно, $M \notin R_{Il}$. Укажем, что случай В имеет место при нечетном значении l (и $m_l = r_{ml}$) (в силу же § 2 п. 2 мы пока можем утверждать это только для случая $m=2$).

4. Сначала выясним, может ли существовать конфигурация F^l, состоящаяся из двух несовпадающих точек M и $P(=I^l)$. Существование подобной конфигурации F^l равносильно существованию соответствующей ей системы векторов $\bar{I}_{a_0\ldots a_l}$. Предположим, что эта система векторов (как и соответствующая поверхность V_m и касательный к ней в точке M ортонормированный репер $\mathcal{R}$) заданы и изучаем ее свойства.

Укажем, что все векторы $\bar{I}_{a_0\ldots a_l}$ остаются при преобразовании (ортонормированного) касательного репера $\mathcal{R}$ неизменными.

Векторы $\bar{I}_{a\ldots a}$ постоянны, так как здесь они, независимо от выбора репера $\mathcal{R}$, всегда равны $\bar{P}-\bar{M}$. Производными векторов $\bar{I}_{a\ldots a}$ при преобразовании касательного к V_m в M репера, в силу (5), являются векторы $(l+1)\bar{I}_{\underbrace{a\ldots a}_{l}A}$, которые, следовательно, равны нулю, т.е. постоянны. Аналогично выясняется постоянство и остальных векторов $\bar{I}_{a_0\ldots a_l}$.

Теперь для рассматриваемого случая вместо (5) можно писать

$$\alpha_a\{\alpha_1\ldots\alpha_a-1\ldots\alpha_b+1\ldots\alpha_m\} = \alpha_b\{\alpha_1\ldots\alpha_a+1\ldots\alpha_b-1\ldots\alpha_m\}$$

или, что то же самое $(\alpha_a-1\to\alpha_a,\ \alpha_b+1\to\alpha_b)$,

$$\{\alpha_1\ldots\alpha_a\ldots\alpha_b\ldots\alpha_m\} = \frac{\alpha_b-1}{\alpha_a+1}\{\alpha_1\ldots\alpha_a+2\ldots\alpha_b-2\ldots\alpha_m\},$$

где предполагается, что $\alpha_b \neq 0$.

В результате кратного использования последнего соотношения получим

$$\{\alpha_1 \ldots \alpha_a \ldots \alpha_b \ldots \alpha_m\} = \frac{(\alpha_b-1)!!}{(\alpha_a+1)(\alpha_a+3)\ldots(\alpha_a+\alpha_b+1)}\{\alpha_1 \ldots \alpha_a+\alpha_b \ldots 0 \ldots \alpha_m\},$$

если $\alpha_b (\neq 0)$ четна, и

$$\{\alpha_1 \ldots \alpha_a \ldots \alpha_b \ldots \alpha_m\} = 0,$$

если α_b нечетна. Отсюда можем далее писать

$$\{\alpha_1 \ldots \alpha_m\} = \frac{(\alpha_1-1)!! \ldots (\alpha_m-1)!!}{l!!}\{l+1, 0 \ldots 0\} =$$

$$= \frac{(\alpha_1-1)!! \ldots (\alpha_m-1)!!}{l!!}(\bar{P}-\bar{M}),$$

если все величины α_a - четны (условимся, что $(-1)!!=1$) и $\{\alpha_1 \ldots \alpha_m\}=0$, если хотя бы одна из величин α_a - нечетна.

5. Отсюда следует, что в случае четного значения l конфигурации P^l, состоящейся из двух несовпадающихся точек M и P ($=I^l$), не существует (это вполне согласуется с нашим прежним результатом: $M \in R_{Il}$). При нечетном же значении l соответствующая конфигурация P^l существует. Она является примером случая, где точка M находится вне плоскости R_{Il} ($=P$). Этим свойством должно, в силу § I п. 2, обладать и конфигурация P^l_o, соответствующая линейно независимым векторам $\bar{I}^o_{a_o \ldots a_l}$. Следовательно, при нечетном значении l (и $m_l = r_{ml}$) имеет место случай B.

Если наряду с другими полученными выше результатами учесть еще то обстоятельство, что при линейном отображении L', отображающем конфигурацию $F^1_0 = M \cup I^1_0$ в пару несовпадающих-ся точек M и $P(=I^1)$, в вектор $\bar{P} - \bar{M}$ отображаются те и только те исходящие из M векторы, концы которых лежат в плоскости $R_{I^1_0}$, а в нулевые – те и только те векторы, которые параллельны к плоскости $R_{I^1_0}$, то в итоге может быть сформулирована

<u>Теорема 2. 6</u>, Если величина l четна, то плоскость R_{I^l} индикатрисы I^l l-ой кривизны в точке M поверхности V_m совпадает с соответствующей l-ой нормальной плоскостью $R_{(l)}$, т.е. $R_{I^l} = R_{(l)}$. Если же l – нечетна, то плоскость R_{I^l} проходит через конечные точки векторов

$$\bar{M} + \frac{l!!}{(\alpha_1 - 1)!! \ldots (\alpha_m - 1)!!} \{\alpha_1 \ldots \alpha_m\} \tag{13}$$

($\sum\limits_a \alpha_a = l + 1$, $(-1)!! = 1$ и все величины α_a четны; касательный к V_m в M репер R предполагается ортонормированным) и параллельна всем таким векторам, у которых хотя бы одна из величин α_a нечетна. Этих данных достаточно для определения плоскости R_{I^l}.

<u>Следствие</u>. Необходимым и достаточным условием того, чтобы при нечетном значении l имело место $R_{I^l} = R_{(l)}$, является разложимость произвольного "четного" вектора l-ой кривизны (все величины α_a – четны) по разностям векторов вида (13) и "нечетным" векторам l-ой кривизны (хотя бы одна из величин α_a – нечетна). Очевидно, что в упомянутых в следствии разностях один из векторов (13) может быть зафиксирован, его можно положить равным, например, вектору $\bar{M} + \bar{l}_{1 \ldots 1}$.

(6.) Пусть между векторами l-ой кривизны $\bar{I}_{a_0\ldots a_l}$, где l нечетна и репер R ортонормирован, задана линейная зависимость

$$x^{c_0\ldots c_l}\bar{I}_{c_0\ldots c_l} = 0. \qquad (14)$$

Требуется выяснить, какому условию должны удовлетворять коэффициенты $x^{c_0\ldots c_l}$ этой зависимости, чтобы из нее следовало, что точка M поверхности V_m находится на плоскости R_{I^l} соответствующей индикатрисы I^l, т.е. $M \in R_{I^l}$ или, что равносильно, - $R_{I^l} = R_{(l)}$. Для удобства изложения, назовем зависимость (14) эффективной, если из нее можно вывести соотношение $M \in R_{I^l}$, и неэффективной в противном случае. Для примера, в силу теоремы 2 6, зависимость $\bar{I}_{1\ldots 1} = 0$ эффективна, а зависимость $\bar{I}_{1\ldots 1A} = 0$ - неэффективна.

В силу следствия теоремы 2 6 для эффективности зависимости (14) необходимо и достаточно, чтобы из (14) вытекала разложимость вектора $\bar{I}_{1\ldots 1}$ по разностям

$$\frac{l!!}{(\alpha_1-1)!!\ldots(\alpha_m-1)!!}\{\alpha_1\ldots\alpha_m\} - \bar{I}_{1\ldots 1},$$

где все величины α_a четны, и по "нечетным" векторам l-ой кривизны.

Разделим левую сторону зависимости (14) на две части, в левую из которых соберем все "четные" члены, а во вторую - "нечетные". Тогда (14) можно записать в следующем виде:

$$\sum x_{\alpha_1\ldots\alpha_m}\{\alpha_1\ldots\alpha_m\} + \bar{X} = 0, \qquad (15)$$

где суммирование происходит по всем четным значениям α_a. Для получения интересующего нас разложения, вместо (15) напишем

$$\sum\frac{(\alpha_1-1)!!\dots(\alpha_m-1)!!}{l!!}x_{\alpha_1\dots\alpha_m}\left[\frac{l!!}{(\alpha_1-1)!!\dots(\alpha_m-1)!!}\left\{{}^{\alpha}_{1}\dots{}^{\alpha}_{m}\right\}-\right.$$

$$\left.-\bar{I}_{1\dots 1}\right]+\bar{I}=-\sum\frac{(\alpha_1-1)!!\dots(\alpha_m-1)!!}{l!!}x_{\alpha_1\dots\alpha_m}\bar{I}_{1\dots 1}.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что упомянутое разложение существует - т.е. зависимость (14) эффективна - тогда и только тогда, когда

$$\sum(\alpha_1-1)!!\dots(\alpha_m-1)!!x_{\alpha_1\dots\alpha_m}\neq 0. \qquad (16)$$

Так как линейные комбинации неэффективных зависимостей неэффективны - что непосредственно видно из (16) - то может быть сформулирована

Теорема 2. 7. Точка M поверхности V_m находится вне плоскости R_{I^l} соответствующей индикатрисы кривизны I^l тогда и только тогда, когда l нечетна и когда для всех базисных линейных зависимостей $x_1^{c_0\dots c_l}\bar{I}_{c_0\dots c_l}=0$ между векторами l-ой кривизны в точке M имеет место равенство

$$\sum(\alpha_1-1)!!\dots(\alpha_m-1)!!x^1_{\alpha_1\dots\alpha_m}=0.$$

(Касательный к V_m в M репер R предполагается ортонормированным.)

Условно "зависимость" $\sum_{c_0\dots c_l} 0\cdot\bar{I}_{c_0\dots c_l}=0$ (l - нечетна) назовем неэффективной зависимостью (условие (16) не соблюдается).

(7) Для дальнейшего нам понадобится следующая

<u>Лемма</u>. Если в некоторой окрестности $U\subset V_m$ точки M имеет место линейная зависимость (14), то на U также имеют место зависимости

$$x^{c_0\dots c_l}\bar{l}_{c_0\dots c_l a_1\dots a_s} = 0 \tag{17}$$

(для произвольного s и любого набора индексов $a_1\dots a_s$).

Лемма может быть доказана при помощи кратного дифференцирования (14) с учетом (I 4). Зависимости (17) назовем <u>индуцированными</u> зависимостью (14).

(Один пример об использовании индуцированных зависимостей приведен в приложении 2.)

Пусть в некоторой окрестности $U\subset V_m$ точки M имеют место соотношения (15) и (16). Выпишем для каждого значения а индуцированную зависимость

$$\sum x_{\alpha_1\dots\alpha_m}\{\alpha_1\dots\alpha_a + 2\dots\alpha_m\} + \bar{X}_a = 0, \tag{18}$$

которая получается из (15), если в ней кратность индекса а в каждом векторе l-ой кривизны $\bar{l}_{a_0\dots a_l}$ увеличить на два. При этом "четные" векторы остаются "четными", а "нечетные" - "нечетными". Поэтому обозначения в (18) имеют тот же смысл, что и в (15).

Для краткости введем обозначение

$$(\alpha_1-1)!!\dots(\alpha_m-1)!!x_{\alpha_1\dots\alpha_m} = y_{\alpha_1\dots\alpha_m}.$$

Теперь условие неэффективности для (18) принимает вид

$$\sum (\alpha_a+1)\, y_{\alpha_1\ldots\alpha_m} = 0. \qquad (19)$$

Но, в силу (16), имеет место неравенство

$$\sum_{a=1}^{m} \sum (\alpha_a+1)\, y_{\alpha_1\ldots\alpha_m} = (l+m+1) \sum y_{\alpha_1\ldots\alpha_m} \neq 0.$$

Поэтому существует такое значение $a=a_0$, что (19) не соблюдается, т.е. зависимость (18) эффективна. Следовательно, имеет место

<u>Теорема 2. 8.</u> Если плоскость R_{I^l} индикатрисы I^l (l - нечетна) проходит через соответствующую ей точку M поверхности V_m и это условие соблюдается также в некоторой окрестности $U \subset V_m$ точки M, то и плоскости $R_{I^{l+s}}$ всех индикатрис I^{l+s} проходят через точку M.

Утверждение теоремы может быть выражено и в следующей форме:

Каждая эффективная зависимость между векторами $I_{a_0\ldots a_l}$ (l - нечетна) индуцирует некоторые эффективные зависимости между векторами $I_{a_0\ldots \bar{a}_{l+s}}$ (s - четна).

Следует однако подчеркнуть, что и неэффективные зависимости могут индуцировать эффективные зависимости. Пример: зависимость $I_{12}=0$ - неэффективна, а индуцированная ею зависимость $I_{1122}=0$ - эффективна.

§ 4. Индикатрисы $I^{l,s}$

1. Назовем вектор

$$\bar{p}(\bar{x}_1^{s_1}\dots\bar{x}_t^{s_t}) = \underbrace{x_1^{o_q}\dots x_1^{o_r}}_{s_1}\dots\underbrace{\bar{x}_t^{o_u}\dots x_t^{o_v}}_{s_t} l_{o_q\dots o_r\dots o_u\dots o_v}, \tag{2C}$$

где

$$|\bar{x}_1| = \dots = |\bar{x}_t| = 1$$

и

$$\sum_{i=1}^{t} s_i = l + 1$$

<u>вектором l-ой кривизны поверхности V_m в направлениях $\bar{x}_1^{s_1},\dots,\bar{x}_t^{s_t}$.</u> Символом $\bar{x}^s$ – который встречается у нас не впервые – обозначается система из s одинаковых направлений $\bar{x}$. Вектор $\bar{p}(\bar{x}_1^{s_1}\dots\bar{x}_t^{s_t})$ симметричен относительно всех $\bar{x}_i^{s_i}$.

Заметим, например, что в случае ортонормированного касательного репера R можно писать

$$\bar{p}(\bar{i}_1^{\alpha_1}\dots\bar{i}_m^{\alpha_m}) = \{\alpha_1\dots\alpha_m\}.$$

Пусть направление $\bar{x}$ вращается свободно в касательной плоскости $R_{(0)}$ к V_m в M. Конец вектора $\bar{p}(\bar{x}_1^{s_1}\dots\bar{x}_t^{s_t}\bar{x}^s)$, где $s + \sum_{i=1}^{t} s_i = l+1$, отложенного из M, описывает при заданных $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_t$ в $R_{(l)}$ некоторое точечное многообразие

$$I^{l,s} = I^l(\bar{x}_1^{s_1}\dots\bar{x}_t^{s_t}),$$

которое назовем индикатрисой l-ой кривизны поверхности V_m в направлениях $\bar{x}_1^{s_1},\ldots,\bar{x}_t^{s_t}$. В частности, $I^{1,1+1}=I^1$. Из (20) видно, что индикатриса $I^{1,s}$ имеет строение некоторой индикатрисы I^{s-1} и в общем случае имеет поэтому более простое строение, чем индикатриса I^1. Это обстоятельство позволяет в случае надобности ввести некоторые упрощения, если изучение локальной окрестности точки M поверхности V_m заменить изучением этой окрестности, так сказать, относительно некоторых заданных касательных направлений.

Представление о взаимном расположении индикатрис $I^{1,s}$ дает

Теорема 2. 9. Индикатриса $I^{1,s}=I^1(\bar{x}_1^{s_1}\ldots\bar{x}_t^{s_t})$ огибается семейством индикатрис $I^{1,s-r}=I^1(\bar{x}_1^{s_1}\ldots\bar{x}_t^{s_t}\bar{y}^r)$ при изменении направления $\bar{y}$. Точкой соприкосновения индикатрис $I^{1,s}$ и $I^{1,s-r}$ является конечная точка вектора $\bar{M}+\bar{p}\,(\bar{x}_1^{s_1}\ldots\bar{x}_t^{s_t}\bar{y}^r)$.

Теорема вытекает из соотношения

$$\frac{1}{s}\lim_{|d\bar{x}|\to 0}\frac{1}{|d\bar{x}|}\,\bar{p}(\bar{x}_1^{s_1}\ldots\bar{x}_t^{s_t}(\bar{x}+d\bar{x})^s)\Big|_{\bar{x}=\bar{y}} =$$

$$=\frac{1}{s-r}\lim_{|d\bar{x}|\to 0}\frac{1}{|d\bar{x}|}\,\bar{p}(\bar{x}_1^{s_1}\ldots\bar{x}_t^{s_t}\bar{y}^r(\bar{x}+d\bar{x})^{s-r})\Big|_{\bar{x}=\bar{y}}.$$

2. Простейшее строение из всех индикатрис кривизны $I^{1,s}$ имеют индикатрисы $I^{1,1}$. Введем обозначение

$$\bar{p}_a = x_1^{o_q}\ldots x_1^{o_r}\ldots x_t^{o_u}\ldots x_t^{o_v}l_{c_q\ldots s_r\ldots o_u\ldots o_v a}.$$

Тогда индикатриса $I^{1,1}$ имеет в аффинной координатной системе, определяемой репером $(M,\bar{p}_a)$, уравнение $x^c x^d \bar{p}_c \bar{p}_d = 1$ и, следовательно, в случае линейно независимых векторов $\bar{p}_a$ является $(m-1)$-мерным эллипсоидом с центром в M. Если же векторы $\bar{p}_a$ линейно зависимы, то $I^{1,1}$ является вырожденной фигурой, получаемой от $(m-1)$-мерного эллипсоида при стремлении длин некоторых из его осей к нулю. Это может быть установлено при помощи предельного перехода от некоторой системы линейно независимых векторов $\bar{p}_a(t)$, где $t \neq t_0$, таких что

$$\lim_{t \to t_0} \bar{p}_a(t) = \bar{p}_a.$$

Так же получается и

<u>Теорема 2. 10.</u> Число отличающихся по длине от нуля осей индикатрисы $I^{1,1}$ равно рангу системы векторов $\bar{p}_a$.

Пусть задана произвольная индикатриса $I^{1,1}$, произвольное касательное к V_m в M направление $\bar{x}$ и его дифференциал $d\bar{x}$ $(\bar{x} \perp d\bar{x})$. Тогда $\bar{p} = x^c \bar{p}_c$ – соответствующий направлению $\bar{x}$ радиус-вектор индикатрисы $I^{1,1}$. Производное вектора $\bar{p}$ выражается в виде

$$\frac{d\bar{p}}{|d\bar{x}|} = \lim_{|d\bar{x}| \to 0} \frac{(x^c + dx^c)\bar{p}_c - x^c \bar{p}_c}{|d\bar{x}|}. \tag{21}$$

Выберем ортонормированный касательный репер так, чтобы $\bar{1}_1 = \bar{x}$ и $\bar{1}_2 \parallel d\bar{x} (= \alpha \bar{1}_2)$. Тогда $\bar{p} = \bar{p}_1$, а для производной (21) получим

$$\frac{d\bar{p}}{|d\bar{x}|} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\bar{p}_1 + \alpha \bar{p}_2 - \bar{p}_1}{\alpha} = \bar{p}_2.$$

Поэтому может быть сформулирована

Теорема 2. 11. Векторы $\bar{p}(\bar{x}_1^{s_1}\ldots\bar{x}_t^{s_t}\bar{x})$ и $\bar{p}(\bar{x}_1^{s_1}\ldots\bar{x}_t^{s_t}\bar{y})$ являются сопряженными радиусами-векторами индикатрисы $I^{1,1}=I(\bar{x}_1^{s_1}\ldots\bar{x}_t^{s_t})$ тогда и только тогда, когда направления $\bar{x}$ и $\bar{y}$ ортогональны.

Приложения

1. Как выяснилось, при четном значении l эллипс l-ой степени обладает центром симметрии. Возникает естественный вопрос: как обстоит дело в случае нечетного значения l.

Рассмотрим произвольный эллипс l-ой степени (l – нечетна), описываемый системой (7). Если бы этот эллипс l-ой степени обладал центром симметрии S, то – так как период функции $\bar{a}_0$ равен π – симметричными относительно S оказались бы точки, соответствующие значениям параметра α и $\alpha + \frac{\pi}{2}$, т.е. конечные точки векторов $\bar{a}_0(\alpha)$ и $\bar{a}_0(\alpha + \frac{\pi}{2})$. Это звучит вполне убедительно, если учесть, что параметр α для эллипса l-ой степени является каноническим (см. § 2 п.3). Поэтому центром симметрии S должен являться конечная точка вектора $\frac{1}{2}\left[\bar{a}_0(\alpha) + \bar{a}_0(\alpha + \frac{\pi}{2})\right]$, а, следовательно, и вектора $\frac{1}{2}(\bar{a}_0 + \bar{a}_{l+1})$. Производное (см. (7)) последнего вектора однако равно

$$\frac{1}{2}(l+1)(\bar{a}_1-\bar{a}_l),$$

т.е. равняется нулю только в случае $\bar{a}_1=\bar{a}_l$ (в частности, в случае $l=1$).

В итоге можем утверждать, что если l нечетна и $l\neq 1$, то кривая, описываемая системой (7), обладает центром симметрии только тогда, когда между начальными значениями векторов $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_l$ имеют место определенные линейные зависимости.

2. При помощи индуцированных линейных зависимостей можно легко составить ограничения на размерности высших нормальных к V_m плоскостей, если известны линейные зависимости между

векторами кривизны меньшего порядка. Можно, например, доказать, что если l-ая нормальная плоскость к двумерной поверхности V_2 имеет размерность $p < l+2$, то размерность всех более высоких нормальных плоскостей не превышает p.

Идея доказательства проста и прозрачна. Поэтому можем ограничиться только приведением соответствующего примера.

Пусть заданы базисные линейные зависимости между векторами второй кривизны двумерной поверхности V_2:

$$\begin{cases} x_0\bar{l}_{111} + x_1\bar{l}_{112} + x_2\bar{l}_{122} + x_3\bar{l}_{222} = 0 \\ y_0\bar{l}_{111} + y_1\bar{l}_{112} + y_2\bar{l}_{122} + y_3\bar{l}_{222} = 0\,, \end{cases}$$

так что $l=2$ и $p=2$. Эти зависимости запишем в виде матрицы

$$A_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & x_2 & y_3 \end{pmatrix} \end{array},$$

ранг которой равен двум.

При l, равной, например, четырем, аналогичная матрица для индуцированных зависимостей имеет вид

$$A_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & & \\ y_0 & x_1 & y_2 & y_3 & & \\ & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \\ & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & \\ & & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ & & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ранг этой матрицы $\geqslant 4$ и размерность 4-ой нормальной к V_2 плоскости, поэтому, не больше двух.

Глава III

ГЛАВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

§ 1. Общие положения

1. Индикатрисы $I^{l,s}=I^l(\bar{x}_1^{s_1}\ldots\bar{x}_t^{s_t})$ l-ой кривизны поверхности V_m в направлениях $\bar{x}_1^{s_1},\ldots,\bar{x}_t^{s_t}$ позволяют в касательной плоскости R_m к V_m в M определить различные соответствия между направлениями. Можно, например, определить такие направления $\bar{x}$, в которых вектор $\bar{p}(\bar{x}_1^{s_1}\ldots\bar{x}_t^{s_t}\bar{x}^s)$, отложенный от точки M, в своей конечной точке ортогонален к индикатрисе

$$I^l(\bar{x}_1^{s_1}\ldots\bar{x}_t^{s_t})$$ ж)

(условно будем это обозначать через $\bar{p}\perp I^{l,s}$). В результате получается вполне определенное соответствие

$$\bar{x}_1^{s_1}\ldots\bar{x}_t^{s_t}\to\bar{x}. \qquad (1)$$

Если имеет место $s_1=\ldots=s_t=0$, т.е. $s=l+1$, то определяемые нами направления x уже непосредственно связаны с самой поверхностью V_m. Направления с подобным свойством можно также

ж) Касательные плоскости к $I^{l,s}$ мы будем определять аналогично тому, как это делается в II, § 3 п.1 для случая I^l.

получить, если не зафиксировать направления $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_t$, а потребовать, чтобы соответствие (1) обладало некоторыми специальными особенностями.

Все это дает средства как для определения, так и для более глубокого изучения различных свойств поверхностей, и позволяет выделить специальные классы поверхностей.

. 2. Так как конечная точка вектора $\bar{M}+\bar{p}(\bar{x}_1^{s_1}\dots\bar{x}_t^{s_t}\bar{x}^{s})$ описывает при вращении направления $\bar{x}$ в R_m соответствующую индикатрису $I^{1,s}$ то требование $\bar{p}\perp I^{1,s}$ равносильно требованию $\bar{p}d\bar{p}=0$, т.е. $d(\bar{p})^2=0$. Другими словами, нахождение таких направлений $\bar{x}$, для которых имеет место $\bar{p}\perp I^{1,s}$, равносильно нахождению стационарных значений функции $(\bar{p})^2$ или - что то же самое - функции $(x^{c_1}\dots x^{c_s}\bar{E}_{c_1\dots c_s})^2$ при условии $|\bar{x}|=1$, где

$$\bar{E}_{a_1\dots a_s} = \underbrace{x_1^{c_q}\dots x_1^{c_r}}_{s_1}\dots\underbrace{x_t^{c_u}\dots x_t^{c_v}}_{s_t}\bar{l}_{c_q\dots c_r\dots c_u\dots c_v a_1\dots a_s}.$$

Пусть потребуется найти такие направления $\bar{x}$, в которых вектор $\bar{p}$ приобретает не стационарный квадрат, а стационарную длину. Если $\bar{p}\neq 0$, то имеем

$$d|\bar{p}| = d\sqrt{(\bar{p})^2} = \frac{\bar{p}d\bar{p}}{|\bar{p}|}.$$

Следовательно, вектор $\bar{p}$ приобретает одновременно как стационарный квадрат, так и стационарную длину.

Если же при заданном значении $\bar{x}$ имеет место $\bar{p}=0$, то можно записать

$$d|\bar{p}| = |\bar{p}+d\bar{p}| - |\bar{p}| = |d\bar{p}|. \qquad (2)$$

8.

В то же время верно

$$d|\bar{p}|^2 = 2\bar{p}d\bar{p} = 0.$$

Таким образом, для нахождения направлений $\bar{x}$, для которых вектор $\bar{p}$ приобретает стационарную длину, следует из тех направлений $\bar{x}$, в которых вектор $\bar{p}$ ортогонален к индикатрисе $I^{1,s}$ (= функция $(\bar{p})^2$ приобретает стационарное значение), исключить такие направления $\bar{x}$, для которых верно $\bar{p}=0$ (тогда $M \in I^{1,s}$) и соответствующая касательная плоскость к индикатрисе $I^{1,s}$ не выроздена в точку ($d\bar{p} \neq 0$).

(3.) Для общего значения s система дли определения направлений $\bar{x}$, в которых верно $\bar{p} \perp I^{1,s}$, довольно сложна и мы пока не умеем дать достаточно содержательную геометрическую интерпретацию полученных результатов при $l > 1$. Поэтому далее ограничимся случаем $s=1$, где соответствующая система является относительно $\bar{x}$ линейной, и случаем $l=1$ как геометрически наиболее содержательным. Оказывается, что случай $s=2$, $l=1$ редуцируется на такие случаи, где определяемое при $s=1$, $l=1$ соответствие $\bar{x}_1 \to \bar{x}$ обладает специальными особенностями.

Дальнейшее изложение начнем с изучения взаимного расположения близких касательных плоскостей к V_m. Как выяснится, эта задача непосредственно связана с изучением индикатрис $I^{1,1}$ и определяемого ими соответствия $\bar{x}_1 \to \bar{x}$.

Взаимное расположение близких касательных плоскостей в случае поверхности $V_2 \subset R_4$ изучал Ван Юн-чжоу в [30].

§ 2. Главные направления относительно касательного направления.

1. Пусть на поверхности V_m задана произвольная точка M с проходящей через нее кривой $M(s)$, где s - длина дуги и $M(0)=M$. Пусть, далее, на кривой $M(s)$ задан подвижной касательный к V_m репер $(\bar{I}_a(s))$. Касательную плоскость к V_m в $M(s)$ обозначим через $R_{(0)}(s)$. Для простоты вместо $\bar{I}_a(0)$, $\bar{I}_{ab}(0)$ и $R_{(0)}(0)$ будем писать $\bar{I}_a$, $\bar{I}_{ab}$ и $R_{(0)}$.

Выберем в плоскостях $R_{(0)}$ и $R_{(0)}(s)$ по одному свободно изменяющемуся направлению $\bar{x}=x^c\bar{I}_c\in R_{(0)}$ и $\bar{x}'=x'^c\bar{I}_c(s)\in R_{(0)}(s)$ и обозначим через α $(=\arccos \bar{x}\,\bar{x}')$ угол между ними.

При каждом заданном $s\neq 0$ на плоскостях $R_{(0)}$ и $R_{(0)}(s)$ определяются системы ортогональных направлений (не обязательно одномерных) $У(s)$ и $У'(s)$ соответственно, между которыми косинус (а вместе с тем и квадрат) угла α приобретает стационарные значения (см. [14]). При стремлении точки $M(s)$ к M (т.е. $s\to 0$) системы $У(s)$ и $У'(s)$ определяют в $R_{(0)}$ некоторую предельную систему

$$У = \lim_{s\to 0} У(s) = \lim_{s\to 0} У'(s).$$

Теорема 3.1. Предельная система $У$ совпадает с той системой направлений $\bar{x}$, в которых вектор $\bar{p}(\bar{y},\bar{x})$ ортогонален к индикатрисе $I^1(\bar{y})$ ($\bar{y}$ - касательное направление к кривой $M(s)$ в точке M).

Доказательство. Системы $У(s)$ и $У'(s)$ являются ортогональными проекциями друг в друга на плоскости $R_{(0)}$ и $R_{(0)}(s)$

(см. [14]). Следовательно, углы α, имеющие стационарный квадрат, реализируются между векторами вида $\bar{x}$ и $\bar{x}^*(\ )$, где $\bar{x}^*(s)$ – вектор в плоскости $R_{(0)}(s)$, ортогонально проектирующийся в плоскость $R_{(0)}$ в вектор $\bar{x}$.

Разложим функцию $\bar{1}_a(s)$ в ряд

$$\bar{1}_a(s)=\bar{1}_a+d\bar{1}_a+\ldots=\bar{1}_a+\omega_a^c\bar{1}_c+\omega^c\bar{1}_{ac}+\ldots .$$

Отсюда соответствующий вектору $\bar{x}=x^c\bar{1}_c$ вектор $\bar{x}^*(s)$ имеет вид

$$\bar{x}^*(s)=x^c(\bar{1}_c+\omega^d\bar{1}_{cd}+\bar{0}_c(s)),$$

где $\lim \frac{1}{s}\bar{0}(s)=0$ и $\omega^c\bar{1}_c$ – главная линейная часть вектора $\bar{M}(s)$ – $\bar{M}$, т.е. $\omega^c=sy^c$. Таким образом, угол α между векторами $\bar{x}$ и $\bar{x}^*(s)$ выразится формулой

$$\alpha=\operatorname{arstg}|\bar{x}^*-\bar{x}|=\operatorname{arstg}|sx^c y^d\bar{1}_{cd}+\bar{0}(s)|.$$

Теперь уже нетрудно показать, что искомая система У определяется решениями системы

$$x^b(\bar{1}_{bc}\bar{1}_{ad}y^c y^d-k\bar{1}_a\bar{1}_b)=0, \tag{3}$$

где к – корень уравнения

$$|\bar{1}_{bc}\bar{1}_{ad}y^c y^d-k\bar{1}_a\bar{1}_b|=0. \tag{4}$$

Ту же систему получим для определения направлений $\bar{x}$, в которых функция $(x^c y^d\bar{1}_{cd})^2$ приобретает стационарные значения.

Теорема доказана.

Направления, образующие систему У, назовем <u>главными</u> направлениями относительно направления $\bar{y}$. Каждому р-кратному корню уравнения (4) соответствует р-мерное главное направление относительно $\bar{y}$. Тот результат, что система У определяется только направлением $\bar{y}$ на V_m, можно рассмотреть как обобщение известной теоремы Менье из теории поверхностей $V_2 \subset R_3$.

2. Если учесть, что индикатриса $I^{1,1}$ является или $(m-1)$-мерным эллипсоидом с центром в точке М или же конечной вырожденной формой такого эллипсоида (см. II § 4 п. 2) и условие $\bar{p}(\bar{x},\bar{y}) \perp I^1(\bar{y})$ для главных направлений относительно $\bar{y}$, то может быть сформулирована

Теорема 3. 2. Направление $\bar{x}$ есть главное направление относительно $\bar{y}$ тогда и только тогда, когда $\bar{p}(\bar{x},\bar{y})$ есть главный радиус-вектор индикатрисы $I^1(\bar{y})$.

Верны также следующие теоремы.

Теорема 3. 3. Корни уравнения (4) равны квадратам главных радиусов-векторов индикатрисы $I^1(\bar{y})$.

Для доказательства достаточно выбрать касательный репер R так, чтобы его векторы оказались решениями системы (3), (4).

Теорема 3. 4. Если направления $\bar{x}$ и $\bar{y}$ на V_m сопряжены, то каждое из них является главным направлением относительно другого.

Эта теорема непосредственно вытекает из определения $x^c y^d \bar{l}_{cd}=0$ сопряженных направлений $\bar{x}$ и $\bar{y}$ (см. [17]).

В силу теоремы 3 3, направления, сопряженные с направлением $\bar{y}$, соответствуют нулевым корням уравнения (4). Необходимым и достаточным условием существования сопряженных направлений для $\bar{y}$ является вырождение индикатрисы $I^1(\bar{y})$.

Нетрудно установить, что в случае $\bar{p}(\bar{x},\bar{y})=0$ соответствующая направлению $\bar{x}$ касательная плоскость индикатрисы $I^1(\bar{y})$ вырождена в точку тогда и только тогда, когда сама индикатриса $I^1(\bar{y})$ вырождена в точку M, т.е. когда поверхность V_m тангенциально вырождена в направлении $\bar{y}$ (см. [15]). Поэтому, если поверхность V_m не является тангенциально вырожденной в направлении $\bar{y}$, то в силу § 1 п. 2, направление $\bar{x}$, в котором вектор $\bar{p}(\bar{x},\bar{y})$ приобретает стационарную <u>длину</u>, является именно несопряженным главным направлением относительно $\bar{y}$.

Одна возможность связать при помощи индикатрисы $I^1(\bar{y})$ с направлением $\bar{y}$ еще одну ортогональную систему направлений, описывается в приложении I.

3. В случае двумерной поверхности V_2 и ортонормированного касательного репера R, систему (3), (4) для определения главных направлений $\bar{x}$ относительно касательного направления $\bar{y}$ можно заменить уравнением

$$\operatorname{tg}2\theta = 2\frac{\bar{l}_{12}\bar{l}_{22}\operatorname{tg}^2\varphi+(\bar{l}_{11}\bar{l}_{22}+\bar{l}_{12}^2)\operatorname{tg}\varphi+\bar{l}_{11}\bar{l}_{12}}{(\bar{l}_{12}^2-\bar{l}_{22}^2)\operatorname{tg}^2\varphi+2\bar{l}_{12}(\bar{l}_{11}-\bar{l}_{22})\operatorname{tg}\varphi+\bar{l}_{11}^2-\bar{l}_{12}^2} . \quad (5)$$

Здесь φ - угол между направлениями $\bar{i}_1$ и $\bar{y}$, а θ - угол между $\bar{i}_1$ и главными направлениями $\bar{x}$ относительно $\bar{y}$. Если в (5) только знаменатель обратится в нуль, то следует предположить, что $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$. Если же знаменатель и числитель одновременно обращаются в нуль, то главные направления $\bar{x}$ относительно $\bar{y}$ не определены (вернее, существует двумерное - т.е. совпадающее с $R_{(0)}$ - главное направление относительно $\bar{y}$). Для случая $V_2 \subset R_4$ аналогичное уравнение получил Ван Юн-чжоу в [30].

§ 3. Главные направления поверхности

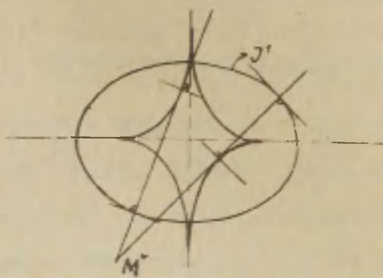
1. Если будем искать касательных к V_m направлений, для которых соответствие между направлениями $\bar{y}$ и главными направлениями $\bar{x}$ относительно $\bar{y}$ обладает специальными особенностями, то одними из первых привлекают внимание такие касательные направления $\bar{x}$, которые являются главными относительно самого себя. В силу теоремы 3 2, направление $\bar{x}$ является главным направлением относительно самого себя тогда и только тогда, когда $\bar{p}(\bar{x}^2)$ является главным радиусом-вектором индикатрисы $I^1(\bar{x})$. Если учесть еще теорему 2 9, то может быть сформулирована

<u>Теорема 3. 5.</u> Касательное к V_m в M направление $\bar{x}$ является главным относительно самого себя тогда и только тогда, когда вектор первой кривизны $\bar{p}(\bar{x}^2)$ в направлении $\bar{x}$, отложенный из точки M, ортогонален к соответствующей индикатрисе I^1, т.е. когда $\bar{p}(\bar{x}^2) \perp I^1$.

(Всп. утверждение в § 1 п. 3, что случай $s=2$, $l=1$ редуцируется на случай $s=1$, $l=1$.)

<u>Пример 1.</u> Пусть $m=2$ и длины осей индикатрисы I^1 в точке M различны и отличны от нуля. Тогда существует 4, 3 или 2 различных главных относительно самого себя касательных направления $\bar{x}$, в зависимости от того, находится ли ортогональная проекция M^* точки M поверхности V_2 в плоскости R_I, индикатрисы I^1 или 1) внутри эволюты индикатрисы I^1, или 2) в

неособой точке эволюты, или же 3) либо вне эволюты, либо в особой ее точке.



В силу теорем 3 5 и 2 5 очевидна.

Теорема 3. 6. Если направление $\bar{x}$ является главным относительно самого себя в точке M поверхности V_m, то оно является главным относительно самого себя и на любой подповерхности $V_q \subset V_m$, геодезической на V_m в M и касающей в M направлении $\bar{x}$. Имеет место и обратное утверждение, причем q может быть фиксирована.

(2) Выразим величину k из одного из уравнений (3) и подставим в остальные уравнения. Тогда (3) примет вид

$$x^g x^h y^c y^d \bar{l}_{gc}(g_{ah}\bar{l}_{db}-g_{bh}\bar{l}_{da})=0, \tag{6}$$

где $g_{ab}=\bar{l}_a\bar{l}_b$. Если здесь взять $\bar{y}=\bar{x}$, то получим систему

$$x^g x^h x^c x^d \bar{l}_{gc}(g_{ah}\bar{l}_{db}-g_{bh}\bar{l}_{da})=0 \tag{7}$$

для определения направлений, главных относительно самого себя.

В частности, при помощи (7) нетрудно найти признак того, что все касательные направления к V_m в M являются главными относительно самого себя (это необходимо и достаточно для того, чтобы индикатриса I^1 находилась на сфере с центром в M).

В ортонормированном касательном репере необходимыми и достаточными условиями этого являются следующие соотношения между координатами тензора первой кривизны:

$$\begin{cases} \bar{l}_{aa}\bar{l}_{ab} = 0 \\ \bar{l}_{aa}\bar{l}_{bb} + 2\bar{l}^2_{ab} - \bar{l}^2_{aa} = 0 \\ \bar{l}_{aa}\bar{l}_{bc} + 2\bar{l}_{ab}\bar{l}_{ac} = 0 \\ \bar{l}_{ab}\bar{l}_{cd} + \bar{l}_{ad}\bar{l}_{bc} + \bar{l}_{ac}\bar{l}_{db} = 0, \end{cases}$$

которые должны выполняться для всех различных между собой значений a, b, c и d.

(3.) Известно классическое определение главного направления поверхности $V_2 \subset R_3$ как такого направления, в котором нормальная кривизна поверхности приобретает экстремальное значение. В случае $n > 3$ здесь вместо нормальной кривизны более естественно говорить о длине вектора первой (= вектора нормальной) кривизны. Дело, однако, несколько усложняется тем, что при $n > 3$ имеют место случаи, когда длина вектора первой кривизны не экстремальна, а только стационарна. Выделение таких случаев затруднительно.

Пример 2. Пусть ортогональная проекция M^* точки M поверхности V_2 на плоскость R_I, индикатрисы I^1 (см. пример 1) находится в неособой точке эволюты индикатрисы I^1. Тогда длина вектора первой кривизны в одном из трех главных относительно самого себя направлений - стационарна, но не экстремальна.

К тому же, такое асимптотическое направление, в котором поверхность не является тангенциально вырожденной ($\bar{p}(\bar{x}^2)=0$, $d\bar{p}\neq 0$), является, в силу (2), (единственным) примером такого случая, где длина вектора $\bar{p}(\bar{x}^2)$ экстремальна, но не стационарна.

По тем причинам естественно определить <u>главное направление поверхности $V_m \subset R_n$</u> как такое направление, <u>в котором длина вектора первой кривизны поверхности V_m приобретает стационарную длину</u>. Требованием стационарности не квадрата, а длины вектора первой кривизны, в силу § 1 п. 2, из общей совокупности исключаются те и только те главные относительно самого себя направления, которые являются асимптотическими, но в которых поверхность V_m не вырождена тангенциально.

В случае $m=2$ и $n=3$ приведенное определение полностью сводится к классическому.

Кстати, не совсем точно к классическому определению сводится заданное в [17] определение главного направления поверхности V_m как такого направления, в котором вектор нормальной кривизны поверхности приобретает экстремальную длину отличную от нуля. (Исключается асимптотическое направление развертывающейся поверхности.)

4. Если наряду с теоремой 3 1 учесть приведенное в предыдущем пункте различие между понятиями "главное направление поверхности" и "главное направление относительно самого себя", то может быть сформулирована

<u>Теорема 3. 7.</u> Пусть на поверхности V_m заданы точка M и полученная из нее в результате инфинитезимального смещения в касательном направлении $\bar{y}$ точка M'. Соответствующие касательные плоскости к V_m обозначим через $R_{(0)}$ и $R'_{(0)}$.

Пусть $\bar{x}$ - свободно изменяющееся направление в $R_{(0)}$. Направление $\bar{y}$ является главным для поверхности V_m тогда и только тогда, когда угол α между $\bar{x}$ и его ортогональной проекцией на $H'_{(0)}$ приобретает при $\bar{x}=\bar{y}$ стационарное значение. Когда квадрат угла α приобретает при $\bar{x}=\bar{y}$ стационарное значение - и только тогда - , то направление $\bar{y}$ - главное относительно самого себя.

В случае $V_2 \subset R_3$ это характеристическое свойство главного направления непосредственно вытекает из известной формулы Родрига.

Сравнение понятия "главное направление поверхности" с определенным в [12, 13] понятием "направление кривизны" дано в приложении 2.

§ 4. Паратактические направления

1. Определим паратактическое направление поверхности V_m в M как такое касательное к V_m направление $\bar{y}$, относительно которого все касательные к V_m направления $\bar{x}$ являются главными. Другими словами, $\bar{y}$ является паратактическим направлением тогда и только тогда, когда существует m-мерное главное относительно него направление, т.е. когда соблюдаются следующие равносильные между собой условия: (а) индикатриса $I^1(\bar{y})$ является или $(m-1)$-мерной сферой или точкой (см. теорему 3 2), (б) уравнение (4) имеет m-кратный корень, (в) система (6) превращается относительно $\bar{x}$ в тождество.

Из последнего требования получим для определения паратактических направлений $\bar{y}$ систему

$$y^c y^d\left[\bar{l}_{gc}(g_{ah}\bar{l}_{db}-g_{bh}\bar{l}_{da})+\bar{l}_{hc}(g_{ag}\bar{l}_{db}-g_{bg}\bar{l}_{da})\right]=0. \qquad (8)$$

По определению, паратактическое направление является в то же время главным направлением относительно самого себя. Так как при асимптотическом главном направлении $\bar{y}$ индикатриса $I^1(\bar{y})$, очевидно, вырождена в точку (т.е. поверхность V_m в направлении $\bar{y}$ тангенциально вырождена), то каждое паратактическое направление является и главным направлением поверхности.

В силу теоремы 3 I, можно утверждать, что две касательных плоскости $R_{(0)}$ и $R'_{(0)}$ к V_m в точках M и M', где точка M' получается посредством инфинитезимального смещения точки M на V_m в паратактическом направлении, - паратактические (см. [14]).

Понятие сечения индикатрисы I^1 для плоскости $R_q(\subset R_{(0)})$ и теорема 2 5 естественным образом распространяются и на случай индикатрисы $I^1(\bar{y})$. Если учесть этого, станет очевидным, что о паратактических направлениях дословно верно все то, что в теореме 3 6 сказано о главных относительно себя направлениях.

Пусть касательный к V_m в M репер R ортонормирован. Тогда, в силу теоремы 2 11, векторы $\bar{l}_{1a}$ составляют сопряженную систему радиусов-векторов индикатрисы $I^1(\bar{l}_1)$. Поэтому соотношения

$$\begin{cases} \bar{l}_{1a}\bar{l}_{1b} = 0 \\ \bar{l}_{1a}^2-\bar{l}_{1b}^2 = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

для всех $a \neq b$ являются необходимым и достаточным условием того, чтобы направление $\bar{l}_1$ было паратактическим.

Разумеется, это же условие может быть получено и исходя из (8).

Если $n < 2m$, то для соблюдения (9) необходимы равенства $\bar{l}_{1a}=0$. Это равносильно тангенциальному вырождению поверхности V_m в направлении $\bar{l}_1$, т.е. в паратактическом направлении.

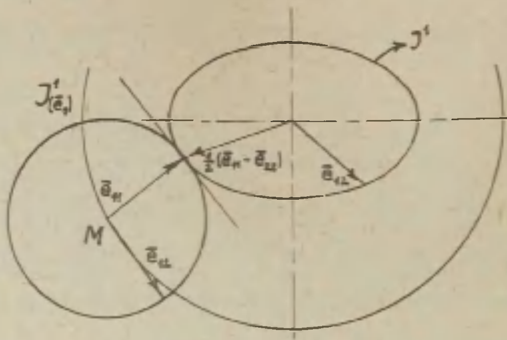
(2.) Далее выводим для случая $m=2$ одно довольно наглядное условие существования паратактического направления (т.е. условие разрешимости (8)).

При помощи (2 7) ($l=I$) нетрудно установить, что если касательный к V_2 репер $\mathfrak{R}$ ортонормирован, то конечная точка вектора $\bar{M} + \bar{H}$, где $\bar{H}= \frac{1}{2}(\bar{l}_{11} + \bar{l}_{22})$ - вектор средней кривизны поверхности V_2 в M (см., например, [3]), является центром соответствующей индикатрисы I^1, а векторы $\frac{1}{2}(\bar{l}_{11} - \bar{l}_{22})$ и $\bar{l}_{12}$ ее сопряженными радиусами-векторами. Если учесть еще (9) (см. также пример 3), можно утверждать следущее.

Точка P на индикатрисе I^1 соответствует паратактическому направлению $\bar{y}$ тогда и только тогда, когда соответствующая для I^1 точка M поверхности V_m находится на $(n-2)$-мерной сфере L, центр которой в точке P, плоскость ортогональна к I^1 в P, а радиус равен длине того радиуса-вектора индикатрисы I^1, который сопряжен с соответствующим точке P радиусом-вектором индикатрисы I^1.

Пример 3.

$M \in R_{I^1}$



Пусть для определенности длины a и b главных радиусов-векторов индикатрисы I^1 отличны от нуля и $a > b$. Тогда при перемещении точки P на I^1 соответствующая сфера L описывает некоторую гиперповерхность Ω. Эта поверхность Ω является каналовой поверхностью, линией центров которой является индикатриса I^1. Она пересекает плоскость R_{I^1} по двум окружностям, имеющих общий центр с индикатрисой I^1, а радиусы которых равны $a+b$ и $a-b$ (см. пример 3). Точками самопересечения поверхности Ω являются те точки $(n-2)$-мерной сферы S, проходящей через фокусы индикатрисы I^1 ортогонально к ее плоскости R_{I^1}, расстояние которых от плоскости R_{I^1} больше

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-b^2}\,.$$

Во всем этом можно убедиться после довольно простых выкладок.

При помощи предельных переходов $a \to b$, $b \to 0$ и $\begin{cases} a \to 0 \\ b \to 0 \end{cases}$ соответствующее многообразие Ω и подмногообразие ее точек самопересечения можно связать с произвольной индикатрисой I^1. В итоге получается

<u>Теорема 3. 8.</u> Нахождение точки М поверхности V_2 на соответствующем ей многообразии Ω является необходимым и достаточным условием существования паратактического направления в точке М. Нахождение точки М на самопересечении многообразия Ω необходимо и достаточно для существования двух паратактических направлений.

Все, что сказано о присоединении многообразия Ω к индикатрисе I^1 и его значении при $m=2$, почти дословно переносится и на случай сечения индикатрисы I^1 для двумерной плоскости при $m>2$. На основе этого и результатов п. I может быть сформулирована

<u>Теорема 3. 9.</u> Касательное к V_m в М направление $\bar{y}$ является паратактическим тогда и только тогда, когда точка М лежит в пересечении многообразий Ω, соответствующих сечениям индикатрисы I^1 для всех двумерных подплоскостей касательной к V_m в М плоскости $R_{(0)}$, проходящих через $\bar{y}$.

3. Пусть все касательные направления к поверхности V_2 в ее точке М - паратактические, т.е. на V_2 существует двумерное паратактическое направление. Тогда все касательные к V_2 направления являются и главными направлениями поверхности. Поэтому индикатриса I^1 находится на сфере (с центром в М) и, следовательно, является или окружностью, или точкой. Если репер $\mathfrak{R}$ ортонормирован, то радиус индикатрисы I^1 равен $|\bar{I}_{12}|$ (см. начало п. 2) и поэтому, в силу (9), точка М совпадает с центром индикатрисы I^1 (подмногообразие точек самопересечения многообразия Ω вырождено в центр индикатрисы I^1). Таким обра-

зом, M на V_2 является минимальной точкой с окружностью - индикатрисой первой (нормальной) кривизны (см., например, [4]). В частности, при этом верно

$$\bar{l}_{11} = -\bar{l}_{22}. \tag{10}$$

Таким же путем и к такому же результату (10) приходим, если предположим, что на $V_m (m > 2)$ существует двумерное паратактическое направление, параллельное векторам $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$. Если потребовать существования на V_m трехмерного паратактического направления, параллельного векторам $\bar{l}_1, \bar{l}_2$ и $\bar{l}_3$, то получим кроме (10) еще $\bar{l}_{11} = -\bar{l}_{33} = \bar{l}_{22}$, т.е. $\bar{l}_{11} = \bar{l}_{22} = \bar{l}_{33} = 0$.

В итоге может быть сформулирована

Теорема 3. 10. Существование на поверхности V_m более чем двумерного паратактического направления равносильно тангенциальному вырождению поверхности в этом направлении. Если на поверхности все направления паратактические, то поверхность является или плоскостью, или двумерной минимальной поверхностью с окружностями-индикатрисами первой кривизны I^1.

§ 5. Абсолютно главные направления

1. Кроме соответствия, сопоставляющего каждому касательному к V_m в M направлению $\bar{y}$ ортогональную систему X касательных направлений $\bar{x}$, главных относительно $\bar{y}$, естественно рассмотреть и обратное соответствие, сопоставляющее или заданному касательному направлению $\bar{x}$, или же системе X ортогональных направлений те касательные направления $\bar{y}$, относитель-

но которых они являются главными.

Если векторы ортонормированного репера $\mathfrak{R}$ выбрать в направлениях системы X, то в силу (6) система

$$y^c y^d \bar{l}_{ac} \bar{l}_{bd} = 0 \qquad (11)$$

для всех $a \neq b$ определяет все направления $\bar{y}$, относительно которых X является главной. Эту систему (11) можно выписать и исходя из теоремы 3 2, так как имеет место $y^c \bar{l}_{ac} = \bar{p}(\bar{y}, \bar{l}_a)$.

При $m=2$ (см. (5)) система (11) заменяется уравнением

$$\bar{l}_{11}\bar{l}_{12} tg^2\varphi + (\bar{l}_{11}\bar{l}_{22} + \bar{l}_{12}^2) tg\,\varphi + \bar{l}_{11}\bar{l}_{12} = 0 . \qquad (12)$$

Отсюда видно, что система X на V_2 может быть главной относительно 0, 1, 2 или всех касательных направлений. Подробнее об этом см. в приложении 3. В приложении 4 приведем еще несколько теорем об обратном соответствии в случае $m=2$.

2. Определим абсолютно главное направление поверхности V_m (в M) как такое касательное к V_m направление, которое является главным относительно всех касательных направлений. В случае $V_2 \subset R_4$ такие направления определил Ван Юн-чжоу в [30].

Для нахождения абсолютно главных направлений, в силу (6), получим систему

$$x^g x^h \left[\bar{l}_{gc}(g_{ah}\bar{l}_{db} - g_{bh}\bar{l}_{da}) + \bar{l}_{gd}(g_{ah}\bar{l}_{cb} - g_{bh}\bar{l}_{ca})\right] = 0.$$

Поэтому в случае ортонормированного репера $\mathfrak{R}$ соотношения

$$\bar{l}_{1a}\bar{l}_{bc} + \bar{l}_{1b}\bar{l}_{ac} = 0 \qquad (13)$$

(для всех a, b и $c \neq 1$) являются необходимым и достаточным условием того, чтобы направление $\bar{1}_1$ было абсолютно главным. В случае $m=2$ эти соотношения примут вид

$$\bar{1}_{11}\bar{1}_{22} + \bar{1}_{12}^2 = \bar{1}_{11}\bar{1}_{12} = \bar{1}_{12}\bar{1}_{22} = 0 \tag{14}$$

(ср. с (12)). В частности, отсюда видно, что в случае $V_2 \subset R_3$ единственным примером абсолютно главных направлений служат главные направления в параболической точке поверхности V_2.

По определению, абсолютно главное направление является в то же время главным направлением относительно себя. Если в (13) принимаем $a=1$, $b=c$ и $\bar{1}_{11}=0$, то получим $\bar{1}_{1c}=0$. Отсюда следует, что если абсолютно главное направление является асимптотическим, то поверхность V_m в этом направлении тангенциально вырождена. Поэтому каждое абсолютно главное направление является и главным направлением поверхности.

Так же, по определению, если в точке M поверхности V_m существует несколько абсолютно главных направлений, то те направления, которые на являются поднаправлениями абсолютно главных направлений большей размерности, вполне ортогональны. Очевидно, что сумма размерностей таких направлений не может быть $m-1$.

3. Если учесть тот факт, что главный радиус-вектор эллипсоида является главным и на всех содержащих его эллипсоидах, получаемых как сечения данного эллипсоида, то об абсолютно главных направлениях можно сказать все то, что в теореме 3 6 сказано о главных относительно себя направлениях. Однако, если имеем в виду обратное утверждение в теореме 3

6, то в случае $m>2$ следует потребовать, чтобы было и $q>2$. То, что вектор $\bar{p}(\bar{x},\bar{y})$ при $\bar{x}\neq\pm\bar{y}$ и $m>2$ является главным радиусом-вектором индикатрисы $I^1(\bar{y})$, не может быть установлено сечениями индикатрисы только для двумерных плоскостей, так как двумерная плоскость здесь фиксирована направлениями $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

На основе (14) (см. еще начало § 4 п. 2) может быть доказана.

Теорема 3. 11. Касательное направление $\bar{x}$ в точке M поверхности V_2 является абсолютно главным тогда и только тогда, когда ему соответствует больший главный радиус-вектор индикатрисы I^1 и когда точка M находится на окружности S, проходящей через фокусы индикатрисы I^1 ортогонально к ее плоскости R_{I^1}.

(Ср. с приложением 3А.)

В случае $V_2\subset R_4$, где окружность S заменена парой фокусов индикатрисы I^1, эта теорема доказана в [30].

На основе теоремы 3 11 и результатов § 4 п. 2 верна.

Теорема 3. 12. Пусть в точке M поверхности V_2 существует два паратактических направления. Тогда в M существуют и абсолютно главные направления, являющиеся их биссектрисами.

Последнее утверждение теоремы вытекает из симметричности индикатрисы I^1 относительно своей главной оси.

4. Выясним условия существования многомерных абсолютно главных направлений на V_m.

Пусть двумерное направление, натянутое на векторы $\bar{i}_1$ и $\bar{i}_2$, является абсолютно главным. Тогда условия (13) инварианты относительно преобразования репера

$$\begin{cases} \bar{I}'_1 = \cos\alpha\, \bar{I}_1 + \sin\alpha\, \bar{I}_2 \\ \bar{I}'_2 = -\sin\alpha\, \bar{I}_1 + \cos\alpha\, \bar{I}_2 \\ \bar{I}'_A = \bar{I}_A \end{cases},$$

где $A>2$ и угол α может быть фиксирован при любом значении $\alpha_0 \neq \frac{k\pi}{2}$. После несложных вычислений получим искомые условия в виде

$$\begin{cases} \bar{I}_{11} + \bar{I}_{22} = 0 & \bar{I}_{11}\, \bar{I}_{AB} = 0 \\ \bar{I}_{11}\, \bar{I}_{12} = 0 & \bar{I}_{12}\, \bar{I}_{AB} = 0 \\ \bar{I}^2_{11} - \bar{I}^2_{12} = 0 & \bar{I}_{1A} = \bar{I}_{2A} = 0. \end{cases}$$

В частности, отсюда видно, что сечение индикатрисы I^1 для двумерного абсолютно главного направления - окружность (или точка), а точка M поверхности V_m находится в центре этой окружности.

Далее, так же как и теорему 3 10 о паратактических направлениях, можно доказать такую же теорему и об абсолютно главных направлениях. В частности, следует отметить, что при $m>2$ и когда поверхность V_m в этом направлении тангенциально не вырождена, то двумерное абсолютно главное направление не является паратактическим.

О некоторых поверхностях, несущих поля абсолютно главных направлений, см. в [6].

Приложения

(1.) Пусть направление $\bar{x}$ вращается в касательной плоскости R_m к V_m в M так, чтобы оно всегда осталось ортогональным к касательному направлению $\bar{y}$. Тогда конечная точка вектора $\bar{M}+\bar{p}(\bar{x},\bar{y})$ описывает на индикатрисе $I^1(\bar{y})$ некоторое точечное многообразие, которое в силу теоремы 2 11 естественно назвать сопряженным сечением индикатрисы $I^1(\bar{y})$. Это сечение является или $(m-2)$-мерным эллипсоидом с центром в точке M, или же конечной вырожденной формой такого эллипсоида (ср. с II § 4 п. 2). Плоскость сопряженного сечения индикатрисы $I^1(\bar{y})$, в силу теоремы 2 9, параллельна касательной плоскости к индикатрисе I^1 в конечной точке вектора $\bar{M}+\bar{p}(\bar{y}^2)$.

Аналогично теореме 2 10 верна.

Теорема 3. 13. В случае асимптотического направления $\bar{y}(\bar{p}(\bar{y}^2)=0)$ число отличающихся по длине от нуля осей сопряженного сечения индикатрисы $I^1(\bar{y})$ равно рангу системы векторов $y^c\bar{l}_{ac}$. В случае неасимптотического $\bar{y}$ число таких осей на единицу меньше.

Аналогично теореме 2 11 верна.

Теорема 3. 14. Векторы $\bar{p}(\bar{y},\bar{x})$ и $\bar{p}(\bar{y},\bar{x}')(\bar{x}\bar{y}=\bar{x}'\bar{y}=0)$ являются сопряженными радиусами-векторами сопряженного сечения индикатрисы $I^1(\bar{y})$ тогда и только тогда, когда направления $\bar{x}$ и $\bar{x}'$ ортогональны.

Определим главные направления второго рода относительно $\bar{y}$ как такие направления $\bar{x}(\perp \bar{y})$, в которых вектор $\bar{p}(\bar{x},\bar{y})$ является главным радиусом-вектором сопряженного сечения индикатрисы $I^1(\bar{y})$. Соответствующие направления $\bar{x}$ являются решениями системы

$$\begin{cases} x^b(\bar{l}_{bc}\bar{l}_{ad}y^c y^d - k\bar{l}_b\bar{l}_a) - l\,\bar{l}_a\bar{l}_c y^c = 0 \\ \bar{x}\bar{y} = 0 \\ |\bar{x}| = 1 \end{cases} \quad (15)$$

Пусть ортонормированные векторы $\bar{l}_a$ выбраны так, чтобы $\bar{l}_1 = \bar{y}$, а остальные из них являлись решениями системы (15). Тогда (15) примет вид

$$\bar{l}_{1a}\bar{l}_{1b} - k\delta_{ab} - l\delta_{1a} = 0,$$

где $b \neq 1$. Векторы $\bar{l}_{1b}$ являются здесь главными радиусами-векторами сопряженного сечения индикатрисы $I^1(\bar{y})$, а $\bar{l}_{11}$ — вектором кривизны в направлении $\bar{y}$. На основе этого можем утверждать, что величина k в (15) равна квадрату соответствующего главного радиуса-вектора сопряженного сечения индикатрисы $I^1(\bar{y})$, а l равна скалярному произведению этого главного радиуса-вектора с вектором $\bar{p}(\bar{y}^2)$.

Если учесть теорему 3 2 и общие свойства эллипсоида, то может быть установлена

Теорема 3. 15. Все главные направления второго рода относительно направления $\bar{y}$ являются также главными направлениями относительно $\bar{y}$ тогда и только тогда, когда направление $\bar{y}$ является главным относительно самого себя.

(2.) В докторской диссертации Д.И.Перепелкина [13] (см.

также [12]) определяется направление кривизны как естественное обобщение главного направления поверхности $V_2 \subset R_3$. Направление кривизны - это такое касательное к поверхности V_m направление, которое имеет ортогональное к нему сопряженное направление большей размерности, чем это имеет место при той же размерности m_1 первой нормальной плоскости $R_{(1)}$ к V_m в общем случае. Например, если m_1 достаточно мала, то касательное направление $\bar{x}$ к V_m обычно имеет не более чем $(m-m_1)$-мерное сопряженное направление. В этом лежит не более чем $(m-m_1-1)$-мерное ортогональное к $\bar{x}$ сопряженное направление. Направление кривизны имеет не менее чем $(m-m_1)$-мерное ортогональное направление.

В силу § 2 п. 2, сопряженным направлениям для $\bar{y}$ соответствуют нулевые, а поэтому в то же время и главные радиусы-векторы индикатрисы $I^1(\bar{y})$. Ортогональным же к $\bar{y}$ направлениям, в силу теоремы 2 [11] (см. также приложение 1), соответствуют сопряженные с $\bar{p}(\bar{y}^2)$ радиусы-векторы индикатрисы $I^1(\bar{y})$. Увеличение размерности ортогонального к $\bar{y}$ сопряженного с ним направления может, таким образом, произойти по двум различным причинам: 1) вектор $\bar{p}(\bar{y}^2)\neq 0$ является главным радиусом-вектором индикатрисы $I^1(\bar{y})$ и 2) направление $\bar{y}$ имеет вообще сопряженное с ним направление большей размерности, чем произвольно взятое касательное к V_m в M направление. Во втором случае направление $\bar{y}$ не обязательно является главным направлением поверхности.

Пусть, например, в точке M поверхности V_3 при заданном ортонормированном репере имеют место соотношения

$$\bar{I}_{11}=\bar{I}_{22}=\bar{I}_{33}=\bar{I}_{12}=\bar{a}\neq 0,\quad \bar{I}_{23}=\bar{b}\neq 0,\quad \bar{I}_{13}=0 \text{ и } \bar{a}\bar{b}=0.$$

Тогда $\bar{I}_1$ является направлением кривизны, но не главным направлением поверхности. В то же время $\bar{I}_3$ является как направлением кривизны, так и главным направлением поверхности.

Если же размерность первой нормальной плоскости $R_{(1)}$ к V_m равен $m_1=r_{m1}$, то сопряженных направлений, а поэтому и направлений кривизны вообще не существует. Тем не менее существуют главные направления поверхности.

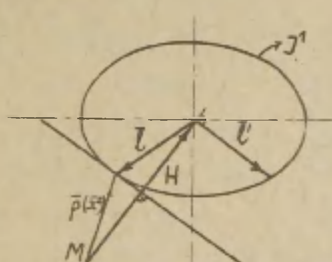
3. Довольно сложно получить наглядное представление о том, как зависит число решений системы (12) от взаимного расположения векторов первой кривизны или - другими словами - как зависит число касательных направлений к V_2, относительно которых заданная в $M \in V_2$ пара ортогональных направлений X является главной, от строения соответствующей конфигурации $F^1(=M \cup I^1)$ и расположения на индикатрисе I^1 соответствующей паре X оси. Поэтому ограничимся простейшими случаями. Вывод следующих результатов (см. также п. 4) опирается на геометрический смысл векторов первой кривизны, заданный в начале § 4 п. 2.

А) Пусть паре X соответствует большая главная ось (длины 2a) индикатрисы I^1. Пусть заданы гиперсферы S_1 и S_2, центры которых находятся в конечных точках малой главной оси (длины $2b>0$) индикатрисы I^1, а радиусы равны a. Тогда пара X является главной относительно 0, 1, 2 или всех касательных направлений, в зависимости от того, находится ли точка M соответственно 1) внутри одной и вне другой сферы, 2) только на одной из этих сфер, 3) внутри или вне обеих сфер, 4) на обеих сферах, т.е. на их пересечении (см. § 4 п. 2 - сфера s).

В) Все сказанное в А дословно переносится на тот случай, когда паре X соответствует малая главная ось индикатрисы I^1. Только здесь центры сфер s_1 и s_2 в конечных точках большой главной оси, а радиусы их равны b. Пересечение сфер s_1 и s_2 - пусто.

4. Приведем несколько теорем о касательных направлениях $\bar{y}$ к поверхности V_2 в ее точке M и главных относительно них направлениях $\bar{x}$. Пусть a и b - длины главных полуосей индикатрисы I^1. Для простоты предположим, что $a > b > 0$.

Теорема 3. 16. Пусть $\bar{b}'$ - сопряженный с $\bar{b}=\bar{p}(\bar{x}^2)-\bar{H}$ радиус-вектор индикатрисы I^1. Направления $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$, относительно которых $\bar{x}$ является главным, ортогональны тогда и только тогда, когда ортогональны векторы $\bar{b}'$ и $\bar{H}$. Единственное исключение составляет случай, когда точка M находится на окружности, проходящей ортогонально к плоскости R_{I^1} через фокусы индикатрисы I^1.



Для доказательства выберем ортонормированный репер R

11.

так, чтобы $\bar{x}$ оказался вектором репера. Остается выяснить, при каких условиях решения φ_1 и φ_2 уравнения (12) отличаются на $\frac{\pi}{2}$, т.е. когда $\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 = -1$.

Следствие. Необходимым и достаточным условием того, чтобы любые два касательных направления $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$, имеющие одни и те же главные относительно них направления, были ортогональными, является ортогональность вектора средней кривизны $\bar{\bar{H}}$ к плоскости R_{I^1} индикатрисы I^1. Единственное исключение составляет случай, когда имеет место равенство $|\bar{\bar{H}}| = \sqrt{a^2-b^2}$.

Теорема 3. 17. Соответствие между направлениями $\bar{y}$ и главными относительно них направлениями $\bar{x}$ является взаимным (т.е. $\bar{y}$ является также главным относительно $\bar{x}$) только в двух случаях:

1) в точке M на V_2 имеет место $\bar{\bar{H}}=0$;

2) индикатриса I^1 является окружностью и вектор средней кривизны $\bar{\bar{H}}$ ортогонален к плоскости R_{I^1} индикатрисы I^1 ($a=b$ и $\bar{\bar{H}} \perp R_{I^1}$).

Для доказательства можно исходить из уравнения (5), которое здесь симметрично относительно θ и φ. Использование следствия теоремы 3 16 позволяет упростить вычисления.

Теорема 3. 18. Пусть ортогональные направления $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ главные относительно $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ и пусть $\bar{\bar{h}}$ и $-\bar{\bar{h}}$ - радиусы-векторы индикатрисы I^1, сопряженные радиусами-векторами $\bar{\bar{k}}=\bar{\bar{p}}(\bar{x}_1^2)-\bar{\bar{H}}$ и $-\bar{\bar{k}}=\bar{\bar{p}}(\bar{x}_2^2)-\bar{\bar{H}}$. Одно из направлений $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ является биссектрисой между направлениями $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ тогда и только тогда, когда верно одно из равенств: или $|\bar{\bar{H}}+\bar{\bar{h}}| = |\bar{\bar{k}}|$ или $|\bar{\bar{H}}-\bar{\bar{h}}| = |\bar{\bar{k}}|$.

Для доказательства выберем $\bar{I}_1=\bar{x}_1$ и $\bar{I}_2=\bar{x}_2$. Остается выяснить, при каких условиях одним из решений уравнения (12) является или $tg\varphi=1$ или $tg\varphi=-1$.

Теорема 3. 19. Направления $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ и главные относительно них направления $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ имеют общую биссектрису тогда и только тогда, когда направлениям $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ соответствует один из главных осей индикатрисы I^1.

Для доказательства выберем $\bar{1}_1=\bar{x}_1$ и $\bar{1}_2=\bar{x}_2$. Остается выяснить, при каких условиях решения φ_1 и φ_2 уравнения (12) выражаются в виде $\varphi_1=\frac{\pi}{4}+\alpha$, $\varphi_2=\frac{\pi}{4}-\alpha$.

В случае $V_2\subset R_4$ эта теорема доказана Ван Юн-чжоу в [30].

Глава IУ

ЭВОЛЮТНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

§ 1. Присоединенная поверхность.

1. Пусть пространство R_n совпадает с плоскостью поверхности V_m (это требование будем соблюдать далее везде). Тогда каждую точку M^* в плоскости R_{n-m}, нормальной к поверхности V_m в ее точке M, можно представить радиусом-вектором

$$\bar{M}^* = \bar{M} + \sum_{l=1}^{k} x^{c_o \ldots c_l} \bar{I}_{c_o \ldots c_l}. \qquad (1)$$

Представляет интерес, при каких условиях дифференциал вектора $\bar{M}^*$ является параллельным к плоскости R_{n-m}.

Из (1) после дифференцирования по формулам (I 6) получим

$$d\bar{M}^* = \omega^c (\bar{I}_c + x^{c_o c_1} \bar{A}_{c_o c_1 c} + \bar{N}_c),$$

где $\bar{N}_c \parallel R_{n-m}$. Пусть касательный к V_m в M репер R ортонормирован. Тогда, в силу (I 7), имеет место

$$\bar{A}_{abc} = -\sum_d (\bar{I}_{ab} \bar{I}_{cd}) \bar{I}_d.$$

Поэтому, обозначив ортогональную проекцию точки M^* на первую нормальную плоскость $R_{(1)}$ к V_m в M через M_1^*, можем писать

$$\bar{I}_c + x^{c_0 c_1}\bar{A}_{c_0 c_1 c} = \sum_a \left\{ \delta_{ac} - (\bar{M}_1^* - \bar{M})\bar{I}_{ac} \right\} \bar{I}_a.$$

С каждым касательным к V_m направлением $\bar{x}$ в M можно, таким образом, в плоскости $R_{(1)}$ инвариантно связать некоторое многообразие $K(\bar{x})$, состоящее из точек M_1^*, для которых (при всех a) имеет место равенство

$$x^c\left\{(\bar{M}_1^* - \bar{M})\bar{I}_{ac} - \delta_{ac}\right\} = 0. \tag{2}$$

При дифференцировании в направлении $\bar{x}$ дифференциалы радиусов-векторов точек многообразия $K(\bar{x})$ параллельны плоскости R_{n-m} (это, очевидно, верно и для всех точек M^*, для которых $M_1^* \in K(\bar{x})$). Таким образом, многообразие $K(\bar{x})$ является пересечением нормальной плоскости R'_{n-m} в точке M', полученной инфинитезимальным перемещением точки M в направлении $\bar{x}$, с первой нормальной плоскостью $R_{(1)}$ к V_m в точке M. Другими словами, $K(\bar{x})$ является совокупностью находящихся в подплоскости $R_{(1)}(\subset R_{n-m})$ фокальных точек плоскости R_{n-m}, если точка $M \in V_m$ перемещается в направлении $\bar{x}$.

2. Объединение многообразий $K(\bar{x})$, т.е. $K = \bigcup_{\bar{x}} K(\bar{x})$ является гиперповерхностью в $R_{(1)}$, которая называется <u>присоединенной поверхностью</u> к V_m в M.

Обозначим $|\bar{M}_1^* - \bar{M}| = \frac{1}{k}$ и $k(\bar{M}_1^* - \bar{M}) = \bar{n}$. Тогда (2) принимает вид

$$x^c(\bar{n}\bar{I}_{ac} - k\delta_{ac}) = 0, \tag{3}$$

где $\bar{n}$ – единичный ортогональный к V_m в М вектор. Отсюда для к получается уравнение

$$|\bar{n}\bar{I}_{ac} - k\delta_{ac}| = 0. \tag{4}$$

Систему (3), (4) можно истолковать как систему для определения многообразия $K(\bar{x})$ (т.е. соответствующих значений к и $\bar{n}$) по заданному касательному направлению $\bar{x}$. Так же можно ее истолковать как систему для определения касательных направлений $\bar{x}$ и значений к, соответствующих заданному ортогональному к V_m в М направлению $\bar{n}$. В последнем истолковании (3) и (4) совпадают с системой определения главных (касательных) направлений $\bar{x}_b$ относительно одномерной нормали $\bar{n}$ и соответствующих главных кривизн k_b (для направлений $\bar{x}_b$ скалярное произведение $\bar{p}(\bar{x}^2)\bar{n}$ приобретает стационарное значение) (см. например, [19]).

В общем случае уравнение (4) имеет (относительно к) m различных решений k_b. Им соответствует m главных относительно $\bar{n}$ (ортогональных) направлений $\bar{x}_b$ и m точек пересечения направления $\bar{n}$ с присоединенной поверхностью К (в расстояниях $\frac{1}{k_b}$ от точки М).

Эти и множество других результатов в этом направлении выведены в трудах Д.И.Перепелкина ([12, 13]) и В.Т.Базылева ([1, 2]). Представляет интерес рассмотреть их в связи с нашими результатами об индикатрисе кривизны I^1 ь главных направлениях поверхности.

3. Выберем касательный к V_m в М репер так, чтобы $\bar{x}=\bar{I}_1$. Теперь (2) принимает вид

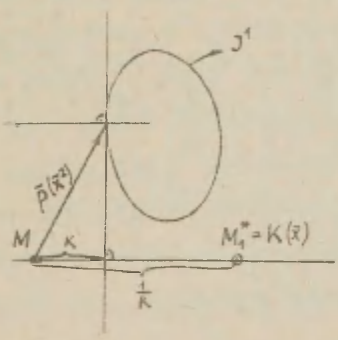
$$(\bar{M}_1^* - \bar{M})\bar{I}_{1a} - \delta_{1a} = 0.$$

А так как здесь $\bar{p}(\bar{x}^2) = \bar{I}_{11}$ и плоскость $\{\bar{M}+\bar{I}_{11};\ \bar{I}_{1A}(A\neq 1)\}$ является касательной к индикатрисе I^1 в конечной точке вектора $\bar{M}+\bar{p}(\bar{x}^2)$, то может быть сформулирована

<u>Теорема 4. 1.</u> Пусть через точку M на поверхности V_m проходит кривая L с касательным направлением $\bar{x}$. Точка M^* в нормальной к V_m в M плоскости R_{n-m} является фокальной для семейства нормальных к V_m плоскостей, взятых по кривой L, тогда и только тогда, когда вектор $\bar{M}_1^*-\bar{M}$ ортогонален к плоскости, касательной к индикатрисе I^1 в точке, соответствующей направлению $\bar{x}$, и, кроме того, имеет место равенство

$$(\bar{M}_1^* - \bar{M})\bar{p}(\bar{x}^2) = 1.$$

<u>Пример.</u> Для наглядности представим на рисунке случай $m=2$, $M \in R_{I^1}$. Здесь многообразие $K(\bar{x})$ не содержит больше одной точки.



В силу того, что направление $\bar{1}_1$ является неасимптотическим главным направлением поверхности тогда и только тогда, когда $\bar{1}_{11}\neq 0$ и $\bar{1}_{11}\bar{1}_{1A}\neq 0$ (см. главу III § 3), можно дать следующее определение:

Направление $\bar{x}$ является неасимптотическим главным направлением поверхности V_m тогда и только тогда, когда луч вектора $\bar{p}(\bar{x}^2)$, исходящего из точки M, пересекает многообразие $K(\bar{x})$.

Назовем центром кривизны поверхности V_m в направлении $\bar{x}$ конечную точку вектора $\bar{M}+\frac{1}{(\bar{p}(\bar{x}^2))^2}\bar{p}(\bar{x}^2)$. Тогда можно дать и следующее определение:

Направление $\bar{x}$ является неасимптотическим главным направлением поверхности V_m тогда и только тогда, когда центр кривизны поверхности V_m в направлении $\bar{x}$ является фокальной точкой семейства нормальных к V_m плоскостей R_{n-m}, взятых вдоль произвольной кривой L с касательным направлением $\bar{x}$.

Если учесть еще тот факт, что асимптотическое направление является главным только в случае тангенциального вырождения поверхности V_m в этом направлении, то приведенные определения неасимптотического главного направления поверхности V_m в случае поверхности $V_2\subset R_3$ непосредственно приводят к классическому результату: нормали, взятые вдоль линии кривизны, образуют развертывающуюся поверхность. (Если $\bar{p}(\bar{x}^2)\neq 0$, то - так как здесь нормальная плоскость R_{n-m} одномерна - требование, чтобы направление вектора $\bar{p}(\bar{x}^2)$ пересекало многообразие $K(\bar{x})$, равносильно существованию многообразия $K(\bar{x})$, т.е. фокальных точек на нормали.)

В приложении I приведем еще специальную, довольно наглядную конструкцию, позволяющую по заданной конфигурации $M \cup I^1$ построить соответствующую присоединенную поверхность К.

§ 2. Определение эволюты

1. Под огибающей семейства плоскостей мы подразумеваем здесь поверхность наибольшей размерности, касательные плоскости к которой являются подплоскостями всех плоскостей данного семейства (за исключением, быть может, только плоскостей некоторого подсемейства). Огибающую семейства нормальных к поверхности V_m плоскостей R_{n-m} назовем (следуя [18]) эволютной поверхностью или просто эволютой для V_m и обозначим через W (или W^1).

Точка $M^* \in R_{n-m}(M)$ является точкой эволюты W для V_m тогда и только тогда, когда все первые дифференциалы вектора $\bar{M}^*$ параллельны плоскости $R_{n-m}(=R_{n-m}(M))$. В силу результатов § 1 п. 1, это требование выражается в форме

$$M_1^* \in K^* = \bigcap_{\bar{x}} K(\bar{x})$$

- т.е. точка M_1^* должна находиться в пересечений K^* всех многообразий $K(\bar{x})$. В силу (2), равносильное требование есть

$$(\bar{M}_1^* - \bar{M})\bar{l}_{ab} - \delta_{ab} = 0. \qquad (6)$$

Эта система, если она не противоречива, определяет точку $M_1^* \in R_{(1)}$ однозначно. Поэтому и многообразие K^*, если оно существует, состоит из единственной точки. Назовем эту точку K^* <u>перицентром</u> поверхности V_m в точке M.

(2.) Плоскость R_{I^1} индикатрисы I^1 проходит через конечные точки векторов $\bar{M}+\bar{l}_{aa}$ и параллельна векторам $\bar{l}_{ab}$, где $a \neq b$ (см. теорему 2 6). Отсюда, в силу (6), следует, что

$$\bar{K}^* - \bar{M} \perp R_{I^1} \quad \text{и} \quad |\bar{K}^* - \bar{M}| = \frac{1}{p},$$

где p – расстояние точки M от плоскости R_{I^1}. Перицентр K^* не существует тогда и только тогда, когда имеет место $M \in R_{I^1}$.

Тот же результат можно получить и с помощью теоремы 4 1. Следует учесть, что вектор $\bar{M}_1^*-\bar{M}$ ортогонален ко <u>всем</u> касательным к индикатрисе I^1 плоскостям и (5) также удовлетворено для <u>всех</u> $\bar{x}$.

В итоге может быть сформулирована

<u>Теорема 4. 2.</u> Пусть в пространстве R_n задана поверхность V_m. Эволютная поверхность W для V_m существует тогда и только тогда, когда точки M поверхности V_m (за исключением, может быть, точек некоторого подмногообразия $V' \subset V_m$) не находятся в плоскостях R_{I^1} соответствующих им индикатрис первой кривизны I^1. (Те точки $M (\in V')$, для которых это условие не выполнено, соответствуют бесконечно удаленным точкам эволюты W.) При этом, эволюта W состоит из $(n-m-m_1)$-мерных плоскостей $R'^1 = \{K^*; \bar{l}_{a_0 \ldots a_l} (l > 1)\}$, т.е. $W = \bigcup_M R'^1$; здесь m_1 – размерность первой нормальной к V_m в M плоскости $R_{(1)}$, $K^* \in R_{(1)}$, $\bar{K}^*-\bar{M} \perp R_{I^1}$, $|\bar{K}^*-\bar{M}| = \frac{1}{p}$ и p – расстояние точки M от плоскости R_{I^1}.

Если имеет место $M \notin R_{I^1}$ и $m_1 < r_{m1} (= \frac{1}{2}m\,(m+1))$, то точку M называют полуомбилической точкой поверхности V_m (см. [12],

[13]). Основные предложения теоремы могут быть выражены и в следующей форме:

Эволютная поверхность W для V_m существует тогда и только тогда, когда или первые нормальные к V_m плоскости $R_{(1)}$ имеют максимальную возможную размерность $m_1 = r_{m1}$, или поверхность V_m состоит из полуомбилических точек.

То же самое можно выразить и следующим образом:

Эволютная поверхность W для V_m существует тогда и только тогда, когда между векторами $\bar{I}_{ab}$ первой кривизны поверхности V_m нет эффективных зависимостей.

Пример 1. В случае гиперповерхности $V_{n-1} \subset R_n$ условие $M \notin R_{T^1}$, т.е. $W \neq \emptyset$, где $\emptyset$ – пустое множество, выполнено тогда и только тогда, когда индикатриса I^1 вырождена в точку, не совпадающую с M. Следовательно, M – омбилическая точка поверхности V_{n-1}, а V_{n-1} – сфера. Эволюта W совпадает с центром сферы.

Пример 2. В случае $V_{n-2} \subset R_n$ условие $M \notin R_{I^1}$, т.е. $W \neq \emptyset$, выполнено тогда и только тогда, когда индикатриса I^1 вырождена в отрезок прямой, не проходящей через M. В случае $n=4$ это является характеристическим свойством двойственно нормализированной поверхности D_2 (см. [18]).

3. На эволюте W естественно выделяется подповерхность

$$V^1 = \bigcup_M K^*,$$

которую назовем перицентроидом для V_m. Дифференцируем (6), заменив M_1^* с K^*. Тогда получим

$$\bar{i}^1_c \bar{i}_{ab} + (\bar{K}^* - \bar{M})\bar{P}_{abc} = 0, \tag{7}$$

где $\bar{i}^1_c$ - касательные векторы к V^1 в ее точке K^*. Далее, в силу того же (6), имеем

$$\bar{i}^1_c \bar{i}_{ab} + \sum_d P^{dd}_{abc} = 0.$$

Этим определяются компоненты векторов $\bar{i}^1_a$ в плоскости $R_{(1)}$.

Пусть $\bar{K}^*-\bar{M}=x^{cd}\bar{i}_{cd}$. Тогда компоненты векторов $\bar{i}^1_a$ на плоскости $R_{(2)}$ равны $x^{cd}\bar{i}_{cd}$(x^{cd}, согласно (6), являются решениями системы $x^{cd}\bar{i}_{cd}\bar{i}_{ab} - \delta_{ab} = 0$).

Кроме названных, векторы $\bar{i}^1_a$, в силу $K^* \in R_{(1)}$ и $dK^* \perp R_{(0)}$, больше компонентов не имеют. Поэтому касательная плоскость $R^1=\{K^*; \bar{i}^1_a\}$ к перицентроиду V^1 в ее точке K^* находится в плоскости, натянутой на плоскости $R_{(1)}$ и $R_{(2)}$, т.е.

$$R^1 \subset R_{(1)} + R_{(2)}.$$

Из (7) видно, что плоскости R^1 и $R_{(1)}$ ортогональны (равносильное условие было бы $R^1 \subset R'^1$, где $R'^1=\{K^*; \bar{i}_{a_0 \ldots a_l}(l>1)\}$ - плоская образующая эволюты W (см. теорему 4 2)) тогда и только тогда, когда все дифференциалы векторов $\bar{i}_{ab}$ первой кривизны ортогональны к вектору $\bar{K}^*-\bar{M}$ ($\equiv$ все векторы $\bar{P}_{abc}$ параллельны к плоскости R_{I}). Для ортогональности же плоскостей R^1 и $R_{(2)}$ необходимы определенные линейные зависимости между векторами $\bar{i}_{abc}$ второй кривизны. В частности, тогда ортогональны и плоскости R^1 и R'^1.

Касательная к эволюте W в ее точке K^* плоскость R^{*1} совпадает с плоскостью, натянутой на плоскости R^1 и R'^1, т.е.

$$R^{*1} = R^1 + R'^1. \tag{8}$$

В этом можно убедиться, если совершать инфинитезимальное перемещение с точки K^* в близкую ей точку $'M^*$ эволюты W в два шага: сначала перемещение с K^* в точку $'K^*$, находящуюся в той же самой образующей $'R'^1$ эволюты W, что и точка $'M^*$, а затем перемещение с $'K^*$ в $'M^*$.

4. Из тождества $\bar{l}_a\bar{l}^1_b=0$ после дифференцирования получается:

$$\bar{l}_{ac}\bar{l}^1_b + \bar{l}_a\bar{l}^1_{bc} = 0, \tag{9}$$

где $\bar{l}^1_{ab}$ - векторы первой кривизны перицентроида V^1. Нетрудно установить, что они, независимо от возможных линейной зависимостей между векторами $\bar{l}^1_a$, симметричны по своим индексам. Далее, в силу (9), произведение $\bar{l}_{ab}\bar{l}^1_c$ симметрично по всем своим индексам.

Если плоскость R^1 ортогональна к плоскости R_{I^1} индикатрисы I^1, то имеют место равенства

$$\bar{l}^1_a(\bar{l}_{aa} - \bar{l}_{bb}) = 0 \quad \text{и} \quad \bar{l}^1_b\bar{l}_{ab} = 0(a\neq b).$$

Тогда, учитывая также (9), можем записать

$$\bar{l}^1_a\bar{l}_{aa} = \bar{l}^1_a\bar{l}_{bb} = \bar{l}^1_b\bar{l}_{ab} = 0.$$

Поэтому ортогональны и плоскости R^1 и $R_{(1)}$. Т.е., из соотношения $R^1\perp R_{I^1}$ следует соотношение $R^1\perp R_{(1)}(=R^1\| R_{(2)})$. Иначе говоря, если касательная плоскость R^1 перицентроида V^1 ортогональна к плоскости R_{I^1} индикатрисы I^1, то она ортогональна и к первой нормальной плоскости $R_{(1)}$ (поверхности V_m).

§ 3. Последовательность огибающих

1. Тот факт, что эволюта W^1 представляется в виде объединения плоскостей $R'^1(\subset R_{n-m})$ приводит к вопросу о существовании огибающей W^2 для W^1, являющейся объединением плоскостей $R'^2(\subset R'^1)$, или вообще, к вопросу о существовании последовательности поверхностей $W^1, W^2, \ldots, W^s, \ldots$, где

$$W^s = \bigcup_{M\in V_m} R'^s \qquad \text{и} \qquad R'^s \subset R'^{s-1},$$

а W^s является огибающей для W^{s-1}. Если $W^{s-1}=\emptyset$ (т.е. если $R'^{s-1}=\emptyset$), то и $W^s=\emptyset$. Назовем W^s s-ой эволютой для V_m (таким образом, ранее рассмотренная эволюта - это I-ая эволюта). Если под W^0 подразумевать конгруэнцию плоскостей $W^0 = \bigcup_{M\in V_m} R_{n-m}$, то все эволюты для V_m подлежат единому рекуррентному определению.

2. Определим в точке М поверхности V_m последовательность точек M^0, M^1, $M^2, \ldots$ с помощью рекуррентных формул

$$|\bar{M}^s-\bar{M}^{s-1}| = \min_{M^{(s)}\in R'^s} |\bar{M}^{(s)}-\bar{M}^{s-1}|,$$

где $M^0=M, M^s\in R'^s$ и $s=1,2,\ldots$. Очевидно, что точка M^s не существует (что условно обозначим через $M^s=\emptyset$) тогда и только тогда, когда $R'^s=\emptyset$. Имеет место равенство

$$M^1 = K^*.$$

Назовем точку M^s s-ым перицентром для V_m в точке M.

Определим поверхность V^s как объединение

$$V^s = \bigcup_M M^s.$$

(В частности, $V^0=V_m$.) Назовем поверхность $V^s(\subset W^s)$ s-ым перицентроидом для V_m. Равенства $V^s=\emptyset$ и $M^s=\emptyset$ равносильны. Касательную плоскость к V^s в ее точке M^s обозначим

$$R^s(\subset R'^{s-1}).$$

Она определяется производными $\bar{1}^s_a$ от вектора $\bar{M}^s$ по формам ω^a, т.е.

$$R^s = \{M^s;\ \bar{1}^s_a\}.$$

Касательную плоскость к W^s в M^s обозначим через R^{*s}. Аналогично (8), справедливо равенство

$$R^{*s} = R^s + R'^s .$$

3. Методом математической индукции нетрудно обобщить некоторые результаты, относящиеся к поверхностям W^1 и V^1, к случаю поверхностей W^s и V^s. Например, справедлива

Теорема 4. 3. Образующее R'^s s-ой эволюты W^s для V_m определяется точкой M^s и всеми векторами $\bar{1}_{a_0\ldots a_l}$ $(l > s)$ (оно параллельно этим векторам), т.е.

$$R'^s = \{M^s;\ \bar{1}_{a_0\ldots a_l}(l > s)\}. \qquad (10)$$

(Если $M = \emptyset$, то и $R'^s = \emptyset$).

Доказательство. Допустим, что (10) справедливо при некотором значении s. Так как $R'^{s+1} \subset R'^{s}$, то произвольную точку $M^{(s+1)} \in R'^{s+1}$ можно представить вектором вида

$$\bar{M}^{(s+1)} = \bar{M}^{s} + \sum_{l>s} x^{c_0 \ldots c_l} \bar{I}_{c_0 \ldots c_l}. \qquad (11)$$

По определению имеем $\bar{M}^{(s+1)}_{;c} \in R^{s}$, где $\bar{M}^{(s+1)}_{,c}$ – производное по форме ω^{c} от вектора $\bar{M}^{(s+1)}$. Равносильное этому условие есть $\bar{M}^{(s+1)}_{;c} \bar{I}_{\bar{a}_0 \ldots a_s} = 0$, а это, в силу (II), равносильно соотношению

$$(\bar{I}^{s}_{0} + x^{c_0 \ldots c_{s+1}} \bar{A}_{c_0 \ldots c_{s+1} c}) \bar{I}_{a_0 \ldots a_s} = 0.$$

В силу уравнений инвариантности метрики (I 7) можем писать

$$x^{c_0 \ldots c_{s+1}} \bar{I}_{a_0 \ldots c_{s+1}} \bar{I}_{a_0 \ldots a_s 0} - \bar{I}^{s}_{c} \bar{I}_{a_0 \ldots a_s} = 0 \qquad (12)$$

или, что то же самое,

$$(\bar{M}^{(s+1)} - \bar{M}^{s}) \bar{I}_{a_0 \ldots a_s 0} - \bar{I}^{s}_{c} \bar{I}_{a_0 \ldots a_s} = 0. \qquad (13)$$

Последняя система, если она не противоречива, определяет ровно один вектор, параллельный к плоскости $R_{(s+1)}$, который, очевидно, равен $\bar{M}^{s+1} - \bar{M}^{s}$. На коэффициенты же $x^{c_0 \ldots c_l}$ при $l > s+1$ система (I2) не налагает никаких ограничений. Поэтому в самом деле можно писать

$$R'^{s+1} = \left\{ M^{s+1};\ \bar{I}_{a_0 \ldots a_l} (l > s+1) \right\}.$$

Так как справедливо $R'^{1} = \{ M^{1};\ \bar{I}_{a_0 \ldots a_l} (l > 1) \}$, то теорема доказана.

При доказательстве теоремы 4 3 выяснилось, что вектор $\bar{M}^{s+1}-\bar{M}^{s}$ параллелен к (s+1)-ой нормальной плоскости $R_{(s+1)}$ к V_m в M. Задав здесь для s последовательно значения $s=0,\dots,l-1$, установим, что перицентр M^l находится в (l+1)-ой соприкасающейся плоскости к V_m в M, т.е.

$$M^l \in \sum_{s=0}^{l} R_{(s)}. \qquad (14)$$

(Более точной оценкой была бы $M^l \in \sum_{s=1}^{l} R_{(s)}$.) Если учесть еще теорему 4 3, то может быть сформулирована

<u>Теорема 4. 4.</u> Плоская образующая R'^l l-ой эволюты W^l в l-ом перицентре M^l ортогонально дополняет (l+1)-ую соприкасающуюся плоскость $\sum_{s=0}^{l} R_{(s)}$ до всего пространства R_n (R'^l, M^l и $\sum_{s=0}^{l} R_{(s)}$ - все взятые в точке M поверхности V_m).

(4.) Из того, что существование перицентра M^l и разрешимость системы (13) (при s=l) равносильны существованию плоскости R'^{l+1}, следует

<u>Теорема 4. 5.</u> Поверхность V_m обладает (l+1)-ой эволютой W^{l+1} тогда и только тогда, когда существует l-ая эволюта W^l и когда имеющиеся линейные зависимости между векторами $\bar{l}_{a_0\dots a_{l+1}}$ (l+1)-ой кривизны не нарушаются, если в них все векторы $\bar{l}_{a_0\dots a_{l+1}}$ заменить скалярными произведениями $\bar{l}_{a_0\dots a_l}\bar{l}^l_{a_{l+1}}$. В частности, это имеет место всегда, когда $W^l \neq \emptyset$ и все линейные зависимости между векторами $\bar{l}_{a_0\dots a_{l+1}}$ индуцированы линейными зависимостями между векторами $\bar{l}_{a_0\dots a_l}$ (см. II § 3 п. 7).

Следствие. Если между векторами $\bar{l}_{ab}$ первой кривизны имеют место только неэффективные зависимости и между векторами $\bar{l}_{a_0 \ldots a_l}$ имеют место только индуцированные ими зависимости, то существуют все эволюты $W^1, \ldots, W^l$. В частности, эти условия соблюдены, когда l-ая нормальная плоскость $R_{(l)}$ к V_m имеет максимальную возможную размерность, т.е. когда $m_l = r_{ml}$.

Для того, чтобы l-ая эволюта W^l оказалась последней в последовательности $W^1, W^2, \ldots$, следовательно, необходимо, чтобы уменьшение размерности m_{l+1} плоскости $R_{(l+1)}$ (по сравнению с $r_{m,l+1}$) было больше, чем то уменьшение, которое вызвано индуцированными зависимостями между векторами $\bar{l}_{a_0 \ldots a_{l+1}}$.

Последнее утверждение справедливо и в случае $m=1$, т.е. в случае кривой V_1. Пусть при $m=1$ имеет место $W^l \neq \emptyset$ и $W^{l+1} = \emptyset$. Так как $r_{1l} = r_{1,l+1} = 1$, то возможен только случай $m_l = 1$ и $m_{l+1} = 0 (< r_{1,l+1})$ (случай $m_l = 0$ приводит к требованию $m_{l+1} < 0$). Следовательно, порядок кривизны кривой V_1 равен l, она лежит в своей (l+1)-ой соприкасающейся плоскости.

Следует отметить, что теорема 4 5 справедлива и в случае l=0. Тогда $\bar{l}_a^o = \bar{l}_a$. Если из линейной зависимости

$$x^{cd} \bar{l}_{cd} = 0 \qquad (15)$$

следует равенство $x^{cd} \bar{l}_c \bar{l}_d^o = 0$, т.е. имеет место

$$\sum_c x^{cc} = 0$$

(репер R ортонормирован), то зависимость (15) неэффективна (см. II § 3 п. 6). А если все зависимости между векторами $\bar{1}_{ab}$ неэффективны, то $M \notin R_{1^1}$, т.е. $w^1 \neq \emptyset$.

(5.) Пусть существует 1-ая эволюта для V_m, т.е. $w^1 \neq \emptyset$. Рассмотрим в перицентре M^1 плоскости R'^1, R^1 и R^{*1}, первая из которых является образующей 1-ой эволюты w^1, вторая - касательной плоскостью к 1-ому перицентроиду v^1, а третья - касательной плоскостью к 1-ой эволюте w^1. Размерности этих плоскостей обозначим соответственно через m'^1, m^1 и m^{*1}.

Аналогично (8), справедливо соотношение

$$R^{*1} = R^1 + R'^1,$$

откуда

$$m^{*1} \leq m^1 + m'^1.$$

Размерность плоскости R^1 равна рангу векторов $\bar{1}^1_a$. Следовательно, $m^1 = m$, для m'^1 получим

$$m'^1 = \sum_{s>l} m_s = n-m-\sum_{s=1}^{l} m_s,$$

где m_s - размерность s-ой нормальной плоскости $R_{(s)}$ к V_m в M. В частности, $m'^1 = 0$ (т.е. R'^1 совпадает с точкой M^1) тогда и только тогда, когда величина l равна порядку кривизны поверхности V_m. Это необходимо и достаточно для того, чтобы имело место $w^1 = v^1$.

Так как $M^1 \in R'^1$, то в силу определения R'^1, $R^1 \subset R'^{1-1}$ и поэтому на основе теоремы 4 4 имеет место $R^1 \perp \sum_{s=0}^{l-1} R_{(s)}$. С другой стороны, в силу (14), имеем $R^1 \perp \sum_{s>l+1} R_{(s)}$. Отсюда получается, что

$$R^l \subset \left\{M^l; R_{(l)} + R_{(l+1)}\right\}^{*)}.$$

Компоненты векторов $\bar{l}^l_a (\subset R^l)$ в плоскости $\left\{M^l;\ R_{(l+1)}\right\}$ равны

$$x^{c_o \ldots c_l}\ \bar{l}_{c_o \ldots c_l a}, \tag{16}$$

где величины $x^{c_o \ldots c_l}$ определяются из системы (12) (при $s = l-1$). В этом можно убедиться при дифференцировании вектора

$$\bar{M}^l = \bar{M} + \sum_{s=1}^{l-1} x^{c_o \ldots c_s}\ \bar{l}_{c_o \ldots c_s} + x^{c_o \ldots c_l}\ \bar{l}_{c_o \ldots c_l}.$$

Компоненты же векторов $\bar{l}^l_a$ в плоскости $\left\{M^l;\ R_{(l)}\right\}$ в силу (13) (при $s=l$), определяют расположение точки M^{l+1} в плоскости $\left\{M^l;\ R_{(l+1)}\right\}$, отнесенной к реперу $(M^l,\ \bar{l}_{a_o \ldots a_{l+1}})$.

Для того, чтобы имело место $R^l \perp R_{(l+1)}$ (равносильные условия были бы $R^l \subset \left\{M^l;\ R_{(l)}\right\}$ и $R^l \perp R'^l$; в частности, тогда имеет место и $m^{*l} = m^l + m'^l$) необходимо и достаточно, чтобы все векторы (16) равнялись нулю. Если соответствующие линейные зависимости между векторами $\bar{l}_{a_o \ldots a_{l+1}}$ не являются индуцированными, то требование $R^l \perp R_{(l+1)}$ налагает дополнительное ограничение (т.е. сверх того ограничения, которое вызвано индуцированными зависимостями между векторами $\bar{l}_{a_o \ldots a_{l+1}}$) на раз-

---

*) Пусть K – произвольная точка и R – произвольная плоскость. Под $\{K;R\}$ подразумеваем плоскость той же размерности, что и R, параллельную к R и проходящую через K.

мерность m_{l+1} плоскости $R_{(l+1)}$. В противном случае имеем

$$x^{c_o\ldots c_l}\,\bar{l}_{c_o\ldots c_l} = \bar{M}^l - \bar{M}^{l-1} = 0.$$

Следовательно, перицентры M^l и M^{l-1} совпадут, и поэтому

$$V^l = V^{l-1}.$$

(В частности, так как $(R_{(0)}=)R^o \perp R_{(1)}$, то условно можем записать $(V_m =)\ V^o=V^{-1}$.) Следует отметить, что выполнение условия $R^l \perp R_{(l+1)}$ является необходимым и достаточным для того, чтобы семейство плоскостей $\bigcup\limits_M \{M^l;\ R_{(l)}\}$ имело огибающую. Ей является перицентроид V^l.

Пусть плоскости R^l и $R_{(l)}$ ортогональны, т.е. $R^l \perp R_{(l)}$ (равносильные условия были бы $R^l \subset \{M^l;\ R_{(l+1)}\}$, $R^l \subset R'^l$ и $m^{*l} = m'^l$). Здесь все скалярные произведения $\bar{l}^l_c\,\bar{l}_{a_o\ldots a_l}$, а поэтому, в силу (I3) (при $s=l$), и $(\bar{M}^{l+1}-\bar{M}^l)\bar{l}_{a_o\ldots a_{l+1}}$ равны нулю. А так как $\bar{M}^{l+1}-\bar{M}^l \parallel R_{(l+1)}$, то необходимо имеет место $M^{l+1}=M^l$, т.е.

$$V^{l+1} = V^l.$$

6. Пусть имеет место $V^{l-1}=V^l = V^{l+1}$. Отсюда

$$R^{l-1}=R^l=R^{l+1}.$$

Но так как

$$R^{l-1} \subset \{M^{l-1};R_{(l-1)}+R_{(l)}\},\ R^l \subset \{M^l;R_{(l)}+R_{(l+1)}\}$$

и

$$R^{l+1} \subset \left\{ M^{l+1}; R_{(l+1)} + R_{(l+2)} \right\},$$

то плоскость $R^l (= R^{l-1} = R^{l+1})$ совпадает с перицентром $M^l (= M^{l-1} = M^{l+1})$. Все дифференциалы перицентра M^l, следовательно, равны нулю и поэтому также перицентроид V^l совпадает с перицентром M^l, т.е. $V^l = M^l$. Так как точка M^l принадлежит теперь всем плоскостям R_{n-m}, то поверхность V_m находится на гиперсфере пространства R_n с центром в M^l.

Пусть перицентр M^l находится в $(l-1)$-ой соприкасающейся плоскости $\sum_{s=0}^{l-2} R_{(s)}$, то векторы $\bar{M}^l - \bar{M}^{l-1}$ и $\bar{M}^{l-1} - \bar{M}^{l-2}$, так как они параллельны плоскости $R_{(l-1)} + R_{(l)}$, равны нулю. Поэтому $M^l = M^{l-1} = M^{l-2}$ и, в силу прежнего, поверхность V_m находится на гиперсфере пространства R_n с центром в перицентре M^l.

Допустим, что поверхность V_m находится на гиперсфере пространства R_n с центром в $M^*(\in \bigcap_M R_{n-m})$. Очевидно, что $M^* = \bigcap_M R_{n-m}$, так как в противном случае поверхность V_m находилась бы в пересечении нескольких гиперсфер и тем самым в некоторой гиперплоскости пространства R_n. Это противоречит предположению.

Так как производные $\bar{l}^*_a$ по формам ω^a от вектора $\bar{M}^*$ равны нулю, то $\bar{l}^*_a \parallel R_{n-m}$. Следовательно, $M^* \in R'^l$. В общем получается, что $M^* \in R^l (M^* \in \bigcap_M R^l)$. В силу того, что $M^* \neq \emptyset$ и $\bar{l}^*_a = 0$, для любого значения l имеем $R'^l \neq \emptyset$, т.е. $W^l \neq \emptyset$.

Пусть k - порядок кривизны поверхности V_m. Тогда $R'^k = M^k$. Поэтому верно $M^* = M^k (= V^k = W^k)$.

Допустим, что l_o - такое минимальное значение l, что $M^* = M^{l_o}$. Для каждого значения $l \geq l_o$ имеет место $M^* = M^l (= V^l)$. Так как здесь $R^{l_o} \perp R_{(l_o+1)}$ и $V^{l_o-1} \neq V^{l_o}$, то, как видим (см.

п. 5), налагаются определенные (неиндуцированные) линейные зависимости на векторы (l_0+1)-ой кривизны и, тем самым, дополнительные ограничения на размерность плоскости $R_{(l_0+1)}$.

На основе этого, а также результатов п. 5 и следствия из теоремы 4 5 может быть сформулирована

Теорема 4. 6. Если между векторами $\bar{l}_{ab}$ первой кривизны поверхности V_m имеют место только неэффективные зависимости и если между векторами $\bar{l}_{a_0\ldots a_l}$ l-ой кривизны имеют место только индуцированные ими зависимости (в частности, когда $m_l=r_{ml}$), то среди перицентроидов $V^1,\ldots,V^l$ имеется не менее $^l/_2$ различных. Если при этом поверхность V_m находится на гиперсфере пространства R_n, то центр M^* гиперсферы находится вне l-ых соприкасающихся к V_m плоскостей $\sum\limits_{s=0}^{l-1} R_{(s)}$. Если $M^*\in \sum\limits_{s=0}^{l} R_{(s)}$, то на размерность m_{l+1} плоскости $R_{(l+1)}$ налагается дополнительное ограничение (т.е. между векторами $\bar{l}_{a_0\ldots a_{l+1}}$ имеют место неиндуцированные зависимости).

7. Если взять производную по форме ω^l от тождества $\bar{l}_{a_0\ldots a_{l-1}}\bar{l}^l_a=0$, то получим:

$$\bar{l}_{a_0\ldots a_{l-1}c}\bar{l}^l_a + \bar{l}_{a_0\ldots a_{l-1}}\bar{l}^l_{ac} = 0, \tag{17}$$

где $\bar{l}^l_{ab}$ - векторы первой кривизны поверхности V^l (ср. § 2 п. 4). Отсюда вытекает симметричность скалярного произведения $\bar{l}_{a_0\ldots a_l}\bar{l}^l_a$ по всем нижним индексам. (То же самое следует из (13) ($s=l$), однако при условии, что $W^{l+1}\neq \emptyset$.)

Из (17) видно, что векторы $\bar{l}^l_{ab}$ ортогональны к векторам $\bar{l}_{a_0\ldots a_{l-1}}$ тогда и только тогда, когда $\bar{l}^l_a$ ортогональны к

$\bar{l}_{a_0\ldots a_l}$. В силу этого и результатов, полученных в конце п. 5 может быть сформулирована

Теорема 4. 7. Первая нормальная плоскость $R^l_{(1)}$ перицентроида V^l в ее точке M^l ортогональна к $(l-1)$-ой нормальной плоскости $R_{(l-1)}$ поверхности V_m в M тогда и только тогда, когда касательная плоскость R^l к V^l в M^l ортогональна к l-ой нормальной плоскости $R_{(l)}$ к V_m в M, т.е. когда $V^l = V^{l+1}$.

Некоторые, относящиеся к перицентроидам V^l дополнительные замечания, сделаны в приложениях 2, 3, 4 и 5.

Приложения

(I) Пусть в первой нормальной к V_m в M плоскости $R_{(1)}$ через точку M проходит произвольная прямая L. Пусть задана еще соответствующая индикатриса I^1. Требуется найти точки пересечения прямой L с присоединенной поверхностью K.

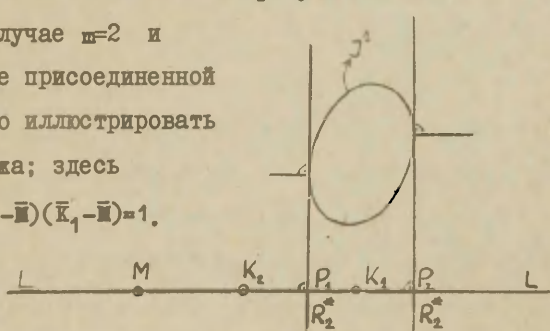
Построим в $R_{(1)}$ ортогональную к L гиперплоскость R^* и будем перемещать ее вдоль L до касания с индикатрисой I^1 (т.е. пока R^* содержит некоторую касательную к I^1 плоскость). Пусть в тот момент R^* пересекает L в точке P. Тогда конечная точка вектора

$$\bar{M} + \frac{1}{|\bar{P}-\bar{M}|^2}(\bar{P}-\bar{M})$$

является точкой поверхности K. Зафикоируя таким образом все положения касания перемещаемой плоскости R^* с I^1 и, с другой стороны, задавая для L всевозможные направления, мы получим все точки присоединенной поверхности K.

Конструкция основывается на теорему 4 I.

Пример. В случае $m=2$ и $M \in R_{I^1}$ построение присоединенной поверхности можно иллюстрировать при помощи чертежа; здесь $(\bar{P}_2-\bar{M})(\bar{K}_2-\bar{M})=(\bar{P}_1-\bar{M})(\bar{K}_1-\bar{M})=1$.



② Если для перицентроидов для V_m верны соотношения $V^l = V^{l+1} \neq \emptyset$ и $V^{l+2} = V^{l+3} \neq \emptyset$, то перицентроиды V^l и V^{l+2} – эквидистантные (т.е. расстояние их соответствующих друг другу точек M^l и M^{l+2} – постоянно, не изменяется при перемещении M^l на V^l). Это следует из того, что в этом случае плоскости R^l и R^{l+2} обе ортогональны к вектору $\bar{M}^{l+2} - \bar{M}^l$.

Если $V^1 = V^2 \neq \emptyset$, то поверхности V_m и V^1 – эквидистантные (ср. с § 3 п. 5 : $V^o = V^{-1}$).

③ Если поверхность V_m является орбитой некоторой группы Ли движений в R_n и $V^l \neq \emptyset$, то V^l является орбитой той же группы. При этом все поверхности V^s ($s \leq l$) попарно эквидистантные.

Если, в частности, поверхность V_m является максимально симметричной (см. [7]) и $V^l \neq \emptyset$, то V^l является или точкой, или максимально симметричной поверхностью той же размерности m. В противном случае нам удалось бы при помощи соответствия $M \leftrightarrow M^l$ выделить на V_m некоторые особые точки или направления, что, однако, противоречит условиям максимальной симметричности V_m.

④ Порядок кривизны перицентроида V^l для V_m не больше порядка кривизны к поверхности V_m.

Доказательство этого утверждения основывается на соответствие $M \rightarrow M^l$. Все $(k+s)$-ые дифференциалы вектора $\bar{M}$ выражаются линейными комбинациями его дифференциалов до $(k+1)$--ого порядка. Точно такие же линейные зависимости между соответствующими дифференциалами вектора $\bar{M}^l$.

⑤ Пусть $V^l \neq \emptyset$. Ортонормированный касательный к V_m в M репер $\mathcal{R}$ можно всегда выбрать так, чтобы соответствующие векторам $\bar{1}_a$ касательные к V^1 в M^1 векторы $\bar{1}^1_a$ были взаимно ортогональны.

Для доказательства заметим, что каждому касательному к V_m в M вектору $\bar{x}=x^c\bar{1}_c$, где $|\bar{x}|=1$ и касательный репер R не обязательно ортонормирован, соответствует вектор $\bar{x}^1=x^c\bar{1}^1_c$ в плоскости R^1. При свободном вращении вектора $\bar{x}$ в R_m, конец соответствующего вектора $\bar{x}^1$, отложенного от перицентра M^1, описывает некоторое точечное многообразие K^1, которое является или $(m-1)$-мерным эллипсоидом с центром в M^1, или его конечной вырожденной формой (ср. с II § 4 п. 2).

Искомые ортогональные векторы $\bar{x}^1_a$ определяются из системы

$$x^c(\bar{1}^1_c\bar{1}^1_d-k\bar{1}_c\bar{1}_d)=0,$$

$$|\bar{x}|=1, \qquad (18)$$

$$|\bar{1}^1_c\bar{1}^1_d-k\bar{1}_c\bar{1}_d|=0$$

как главные радиусы-векторы многообразия K^1. Ортогональны и соответствующие векторы $\bar{x}_a$.

Корни k_a уравнения (18) равны квадратам главных радиусов-векторов многообразия K^1 (ср. с теоремой 3 3). Если же все корни k_a различны, то соответствующие друг другу ортогональные реперы в плоскостях R_m и R^1 однозначно определены. Это условие является и необходимым. Число отличных от нуля корней k_a равно размерности m^1 поверхности V^1.

Очевидно, что соответствующие друг другу на V_m и V^1 ортогональные сети или обе голономные, или обе неголономные.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

I. Базылев В.Т., О многомерных сетях в евклидовом пространстве. Литовск. матем. сб., 1966, УI, № 4, 475-49I.

2. Базылев В.Т., Об одном аддитивном представлении тензора Риччи р-поверхности евклидова пространства. Сиб. матем. журнал, т. УII, № 3, М.1966, 499-5II.

3. Лумисте Ю.Г., К теории двумерных минимальных поверхностей I. Теория кривизны. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 196I, I02, I6-28.

4. Лумисте Ю.Г., К теории двумерных минимальных поверхностей IУ. Поверхности с окружностями кривизны. Уч.зап.Тартуск.ун-та, 1962, I29, 90-I02.

5. Лумисте Ю.Г., Предвосхищение формул Френе в сочинении К.Э. Зенфа. В сб."Вопр.истории физ.-матем. наук", Москва, 1963, I4I-I47.

6. Муллари Р.Р., О поверхностях с полями абсолютно главных направлений. Уч.зап.Тартуск.ун-та, 196I, I02, 275-288.

7. Муллари Р.Р., О максимально симметричных поверхностях многомерного евклидова пространства. Уч. зап.Тартуск.ун-та, 1962, I29, 62-73.

8. Муллари Р.Р., О главных направлениях m-мерной поверхнос-

ти. Докл.АН СССР,1962,144,989-992.

9. Муллари Р.Р., Исследования по теории многомерных поверхностей евклидова пространства. Кандид.дисс., Тарту,1963.

10. Муллари Р.Р., Индикатрисы кривизны и огибающие нормальных плоскостей для V_m в евклидовом R_n I. Уч. зап.Тартуск.ун-та,1966,192,47-64.

11. Муллари Р.Р., Индикатрисы кривизны и огибающие нормальных плоскостей для V_m в евклидовом R_n II. Уч.зап.Тартуск.ун-та,1967,206,22-36.

12. Перепелкин Д.И., Кривизна и нормальные пространства многообразия V_m в R_n. Матем.сб.42,№ 1, 1935, 81-120.

13. Перепелкин Д.И., Исследования по теории многообразий в римановом пространстве. Докторск.дисс., Москва,1942.

14. Розенфельд Б.А., Неевклидовы геометрии. Москва,1955.

15. Рыжков В.В., О тангенциально вырожденных поверхностях. Докл. АН СССР,1960,135,20-22.

16. Рыжков В.В., Римановы геометрии высшего рода. Задача погружения. Труды геом.семинара,т.1,М.1966, 265-330.

17. Схоутен И.А., Стройк Д.Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии,т.II,Москва-Ленинград,1948.

18. Чакмазян А.В., Эволютные поверхности двумерной двойственно нормализированной D_2 в E_4. Докл. АН СССР,1962,144,№ 6,1233-1236.

19. Эйзенхарт Л.П., Риманова геометрия. ИЛ,Л.,1948.

20. Bompiani E., Problemi nuovi di geometria metrico-differenziale. Rend.Accad.Lincei, 1915,5,№ 24, 126-131.

21. Bompiani E., Basi analitiche per una teoria della deformazioni delle superficie di specie superiore. Rend.Accad.Lincei, 1916,5,№ 25, 627-634.

22. Bompiani E., Geometrie riemanniane di specie superiore. Mem.Accad.Ital.,1935,6,№ 8,269-520.

23. Bompiani E., Geometrie riemanniennes d'espèce superieure. Colloq.de gèom.diff.Louvain,1951, 125-156.

24. Borůvka O., Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n-dimensions à courbure constante I. Publ.Fac.Sci.Univ.Masaryk, 1932,165,1-22.

25. Burstin C., Mayer W., Das Formenproblem der l-dimensionalen Hyperflächen in n-dimensionalen Räume konstanter Krümmung.Monatshefte f.Math. und Phys.,1926,34,89-136.

26. Kommerell K., Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen.Math.Ann.,1905,60,546-596.

27. Kühne H., Über die Krümmung einer beliebigen Mannigfaltigkeit.Archiv der Mathem.u.Physik,1904, 6,251-260.

28. Schouten J.A., Kampen E.R., Über die Krümmung einer V_m

in V_n; eine Revision der Krümmungstheorie. Math.Ann.,1931,105,144-159.

29. Wong Y.Ch., On the Frenet formulae for a V_m in a V_n. Quart.J.Math.,1940,11,146-160.

30. Yung-Chow Wong, A new curvature theory for surfaces in an Euclidean 4-space. Comment.Math.Helv., 1952,26,152-170.

Р Ю Н Н О   М У Л Л А Р И

2 декабря 1968 г. закончился одиннадцатилетний мужественный поединок талантливого эстонского математика Р ю н н о Р а й у в и ч а   М у л л а р и (Rünno Mullari) с тяжелой неизлечимой болезнью. На 37 году жизни скончался способный исследователь, который за менее чем девять лет научной деятельности (в том числе последние четыре года будучи прикован к постели) достиг значительных успехов в двух областях науки – в дифференциальной геометрии и в теоретической кибернетике.

Р.Муллари родился 7 декабря 1931 г. в г. Таллине в семье служащего. После окончания средней школы в 1949 г. он поступил в Таллинский политехнический институт на специальность тепловой энергетики, но занятия были прерваны четырехлетним (1950–1954)пребыванием в лагерях лесозаготовки Архангельской области (позднее был полностью реабилитирован). В 1955 г. он поступил на заочное отделение математики Тартуского университета.Закончив I курс с исключительным успехом, он перешел на очное отделение, где также показал выдающиеся способности, и после окончания университета в 1960 г. был направлен на работу в Вычислительный центр Тартуского университета. Пройдя путь от старшего лаборанта до старшего научного сотрудника (с 1964 г.), Р.Муллари стал скоро ведущим исследователем Вычислительного центра. В феврале 1964 г. он защитил кандидатскую диссертацию "Исследования по теории многомерных поверхностей евклидова пространства", основы которой были заложены еще в его дипломной работе. Проблемами теории многомерных поверхностей он занимался до последних дней своей жизни. В то же время Р.Муллари провел ряд значительных исследований по математическим методам управления и планирования промышленного производства, работы заводов и их цехов. Под его руководством работала исследовательская группа, многие его последние статьи написаны совместно с сотрудниками этой группы.

Р.Муллари принимал активное участие в работе ряда конференций по геометрии (Киев 1962, Вильнюс 1963, Харьков 1964, Тарту 1965) и по математической экономике (Москва 1962, Тарту 1963 и 1966, Ленинград 1963 и 1964). Им написан ряд статей глубокого философского содержания об отношениях математики и действительности, мышления и машин (см. [16], [17], [33], [34]). Он смело вмешивался в полемику по этим вопросам на страницах периодики. Свой самоотверженный труд он не прекращал даже в годы обострившейся болезни. Он перенес две тяжелейшие операции (в 1957 и 1964 г.), первая из которых принесла временное облегчение, вторая сохранила жизнь. Последние четыре года он не смог сделать ни единого шага и покидал иногда свою комнату лишь для очередного курса лечения в больнице. Несмотря на это он до последнего месяца своей жизни остался активнейшим сотрудником Вычислительного центра ТГУ.

Р.Муллари пользовался искренней симпатией всех знавших его. Глубокое уважение вызывали его мужество и сила духа, с которым он переносил самые большие испытания. Когда приходили друзья, сотрудники, студенты, которыми он руководил, он был неизменно бодрым, оптимистичным, полным энергии и всегда поражал своими глубокими суждениями, оригинальными идеями, умным и тонким юмором. Отличительными чертами его характера были простота, доброжелательность, готовность всегда и во всем помочь. Память о нем навсегда сохранится в сердцах его товарищей по работе и всех его многочисленных друзей.

× × ×

Исследования Р.Муллари по дифференциальной геометрии посвящены теории многомерных поверхностей в евклидовых пространствах. Уже его дипломная работа ("Исследование главных направлений поверхности") является выдающимся исследованием в этой области. Многие результаты дипломной работы вошли в последующие публикации. Р.Муллари отмечает, что понятие главного направления в теории m-поверхности, введенное И.А.Схоутеном в 1924, не нашло применений и мало известно о его значении в указанной теории. Он по-новому подходит к этому понятию. Его подход можно в геометрической трактовке характеризовать следующим образом. В двух точках M и M' m-поверхности рассматриваются касательные m-плоскости и на них определяются направления, между которыми косинус угла приобретает стационарное значение. На каждом из них существует полная система поларно вполне ортогональных направлений. Предельные положения этих направлений зависят только от одномерного направления, в котором M' стремится к M, и называются главными направлениями относительно последнего. В [3] найдена система для их определения. Главное относительно самого себя одномерное направление характеризуется тем, что скалярный квадрат вектора нормальной кривизны поверхности в этом направлении стационарен. Если здесь скалярный квадрат заменить длиной, то получается понятие главного направления по Схоутену.

Если все направления в касательной плоскости являются главными относительно данного направления, то последний называется паратактическим. Если данное направление является главным относительно всех касательных направлений, то оно называется абсолютно главным. В [I] доказывается, что двумерное абсолютно главное направление и его ортогональное дополнение в касательной плоскости составляют сопряженную систему. Тангенциально невырожденная поверхность с такой системой является поверхностью переноса. Подробно исследуются m-поверхности с m-сопряженной системой одномерных абсолютно главных направлений, частным случаем которых являются m-поверхности Клиффорда в гиперсфере (как в эллиптическом пространстве), введенные Б.А.Розенфельдом.

Рассматривая поверхности, в точках которых все направления являются главными, Р.Муллари пришел к интересному классу поверхностей, которые он назвал максимально симметричными поверхностями [4], [5]. Так он называет m-мерные орбиты $\frac{1}{2}m(m+1)$ параметрических подгрупп движений n-мерного евклидова пространства R_n. Если такая орбита лежит в своей соприкасающейся плоскости к-го порядка, то она обозначается S_m^k. В [5] получена общая пфаффовая система, определяющая S_m^k, и проведена ее интегрирование в случае к=1. Кроме сферы получается некоторая S_m^1 в R_n с $n=\frac{1}{2}m(m+3)$, лежащая в гиперсфере в виде ее минимальной подповерхности. При $m=2$ такая S_2^1 была найдена О.Борувка в 1928 (при общем m, как впоследствии оказалось, также Д.Блануша и А.С.Солодовниковым). Р.Муллари исследует, кроме самой S_m^1, также поверхности центров ее 1-мерных геодезических подповерхностей.

Эти результаты легли в основу кандидатской диссертации [9] Р.Муллари. Из неопубликованных разделов диссертации отметим исследование поверхностей с паратактическими направлениями (результаты которой аналогичны результатам о поверхностях с абсолютно главными направлениями) и интегрирование пфаффовой системы для S_m^k в случае, когда размерность нормальной плоскости 3-го порядка к S_m^k не превышает 1. Кроме плоскостей и сфер получается ровно четыре вида таких S_m^k.

Самостоятельный интерес представляет применяемый Р. Муллари аппарат - новая и удобная форма формул Бартельса-Френе для многомерной поверхности (они приведены в [9], анонсированы в. [10]; их подробный вывод дается в [24]).

В дальнейшем внимание Р. Муллари привлекает две задачи теории многомерных поверхностей. Он познавал решающее значение так называемых индикатрис нормальных кривизн в теории поверхностей евклидова (или риманова) пространства и первым подверг систематическому исследованию индикатрисы кривизны высшего порядка. Результаты он докладовал на II Всесоюзной геометрической конференции [13], их развернутое изложение дано в [24], [28] и [37]. Р.Муллари находит порядок индикатрисы кривизны 1-го порядка (как алгебраической поверхности) а также плоскость, в которой,она лежит; изучает кривые,описываемые на индикатрисе концом вектора нормальной кривизны при вращении касательного направления в произвольном двумерном направлении; дает теорему об изометричности линейных отображений касательных пространств, индуцирующих изометрии индикатрисы кривизны данного порядка.

Другой задачей, вызывающей интерес Р.Муллари, является задача исследования огибающих конгруэнции нормальных плоскостей многомерной поверхности. Огибающей он называет поверхность, касательные плоскости которой во всех точках (кроме множества меры нуль) принадлежат плоскостям конгруэнции. Первый итог его результатов дан в докладе на II Прибалтийской геометрической конференции [19], подробное изложение содержится в [24], [28] и [37]. Такие огибающие тесно связаны с индикатрисами кривизны. Доказывается, например, что огибающая существует тогда и только тогда, когда плоскость индикатрисы кривизны 1-го порядка не проходит через соответствующую точку поверхности, причем вектор, соединяющий точку M^* огибающей в нормальной плоскости 1-го порядка с точкой M поверхности, ортогонален к плоскости индикатрисы, а произведение его длины на расстояние точки M от этой плоскости равно 1. Огибающая, если она существует, состоит из плоскостей, вполне ортогональных к нормальной плоскости 1-го порядка в точке M^*. Поэтому она, как семейство плоскостей, может также иметь огибающую, являющуюся семейством плоскостей и т.д. Возникает последовательность огибающих, ряд свойств которой исследуются в [26].

В своей последней работе [37], опубликованном в настоящем выпуске, Р.Муллари, не будучи еще удовлетворен изложением своих результатов в предыдущих публикациях, подверг его сильной переработке, проведя вместе с тем ряд дополнительных исследований. Рукопись работы была им полностью закончена, он успел также проверить первоначальный машинописный текст с вписанными формулами.

x x x

Основные направления исследований Р.Муллари по кибернетике связаны с проблемами использования математических методов и ЭВМ в планировании и управлении производством. Его первые работы в этой области ([6], [7], [8], [11])посвящены постановке соответствующих математических задач и выявлению основных зависимостей. Одновременно он активно участвовал в поэтапном внедрении полученных результатов и в практическом использовании ЭВМ при планировании работы завода и отдельных цехов (отчеты об этих работах опубликованы в [12], [14], [20], [21], [25], [26], [35]).

На базе этих отдельных работ у Р.Муллари и его сотрудников формировались некоторые общие выводы и складывалась схема подхода к проблемам текущего планирования вообще [15] [18], [22], [36]). По этой схеме переход от опытно-интуитивных методов к математическим методам планирования и управления производством может и должен происходить только постепенно, путем последовательной формализации отдельных элементов управления. Дальнейшее развитие и уточнение этих идей Р.Муллари дал в [30], а также в обширной статье, основную часть которой он оставил лишь в виде черновика и над окончательным оформлением которой сейчас работают его сотрудники.

Основным моментом решения задач текущего планирования является учет случайностей. Р.Муллари был страстным противником широко распространенного стремления наперед составлять жесткие календарные графики работ на длительные периоды времени, при этом он указывал, что требование строгого соблюдения таких графиков будет скорее мешать, чем помогать производству. Он выдвинул идею составления (на более длительные периоды) лишь ориентировочных графиков, в которых случайные величины учитываются в виде своих математических ожиданий и законов распределения.

Определение и исследование таких законов распределения Р.Муллари считал работой первостепенной важности и уделял этому в последние годы свое основное внимание. При этом он неоднократно указывал на невозможность и даже недопустимость исследования этих законов путем простого наблюдения за действительным ходом производства. Чтобы освободиться от односторонности получаемых данных он взялся за имитирование интересующих нас сторон хода производства на соответствующих кибернетических моделях. По результатам этих исследований опубликованы статьи [29] и [31]. Так, например, удалось дать оценки для сроков ожидания (лучшие,чем получаемые по известной формуле Хинчина), доказать некоторые преимущества метода ориентировочных графиков, сравнить и исследовать основные виды форсажа и т.д.

Наряду с вопросами планирования и управления работой завода или цеха Р.Муллари участвовал и во многих других исследованиях по экономической кибернетике. Так, по его идее был разработан оригинальный алгоритм обращения балансовых матриц ([23], [27]), который уже в течение ряда лет успешно используется при расчетах межотраслевых балансов во всех прибалтийских республиках.

Следует также отметить работу [32] по исследованию нового метода решения задач целочисленного программирования. В этом методе очень простая идея Данцига искусно связана с приемами методов типа ветвей и границ.

Хотя работы по указанным проблемам продолжаются теперь уже без личного участия Р.Муллари, есть полное основание считать его по крайней мере соавтором будущих исследований. Столько оригинальных идей оставил он своим сотрудникам, и сам остался для них примером стойкого мужества и бескорыстного служения делу.

Список печатных работ Р.Муллари

I96БI

I. О поверхностях с полями абсолютно главных направлений. Ученые записки Тартуск.ун-та,I02,I96I,275-288.

I96Б2

2. Matemaatiliste meetodite kasutamisest tehaste juhtimisel ja planeerimisel. (О применении математических методов при управлении и планировании работы заводов; на эст. яз.) ENSV matemaatikute ja füüsikute II teaduslik-pedagoogilise konverentsi lühiettekannete kogumik. Tartu,1962,64-67.

3. О главных направлениях m-мерной поверхности. Доклады АН СССР,т.I44,№ 5,I962,989-992.

4. О максимально симметричных поверхностях многомерного евклидова пространства. Первая всесоюзная геометрическая конференция 25 мая - 2 июня I962 г. Тезисы и аннотации обзорных докладов и кратких сообщений. Киев,I962,73.

5. О максимально симметричных поверхностях многомерного евклидова пространства. Ученые записки Тартуск. ун-та,I29,I962,63-73.

6. О планировании работы механических цехов. Научные труды (Московский инженерно-экономический институт), I962,вып.I9,I86-I9I (совм. с Каазик Ю.).

7. О применении математических методов в планировании промышленного производства. Коммунист Эстонии, 1962, № 7, 44-51 (совм. с Выханду Л.).

1963

8. Matemaatiliste meetodite rakendamisest tehase töö kalendrilisel planeerimisel. (О применении математических методов при календарном планировании работы завода; на эст.яз.) Majandusliku analüüsi alane teaduslik konverents 11.-13. okt. 1963. Teesid. Tartu, 1963, 23-25 (совм. с Каазик Ю.).

9. Исследования по теории многомерных поверхностей евклидова пространства. Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук, 1963, 7 стр.

10. Формулы Френе для многомерной поверхности. [Тезисы доклада Первой Прибалтийской геометрической конференции по вопросам дифференциальной геометрии.] Литовский математический сборник, т.3, № 2, 1963, 242.

11. К задаче календарного планирования работы цеха. Тезисы докладов межвузовской научной конференции "Применение математики и электронно-вычислительной техники в экономике". Ленинград, 1963, 46-48.

1964

12. Majandusmatemaatika-alaseid töid Tartu Riikliku Ülikooli Arvutuskeskuses. (Работы по математической экономике в Вычислительном центре Тартуского государственного университета; на эст.яз.) Matemaatika ja kaasaeg, 2, 1964, 47-50 (совм. с Каазик Ю., Саарeсте Э.).

13. Индикатрисы кривизны. Тезисы докладов Второй Всесоюзной геометрической конференции. Харьков, 1964, 182-183

14. Расчеты загруженности станочного парка завода. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, 1964, № 4, 3-67 (совм. с Лухт С., Рахенди М., Крулль М.).

1965

15. Kalendrilise planeerimise ülesannete matemaatiline lahendamine. (Математическое решение задач календарного планирования; на эст. яз.) Matemaatika ja kaasaeg, 7, 1965, 40-47 (совм. с Каазик Ю.).

16. Matemaatika ja tegelikkus. (Математика и действительность; на эст. яз.) Matemaatika ja kaasaeg, 8, 1965, 3-11.

17. Masinad ja mõtlemine. (Машины и мышление; на эст. яз.) Matemaatika ja kaasaeg, 9, 1965, 40-51.

18. Matemaatiliste meetodite rakendamisest tehase töö kalendrilisel planeerimisel. (на эст. яз.; резюме на русск. яз.: О применении математических методов при календарном планировании работы завода.) Ученые записки Тартуск. ун-та, 169, 1965, 55-62 (совм. с Каазик Ю.).

19. Огибающая конгруэнции нормальных к $V_m \subset R_n$ плоскостей. Материалы Второй Прибалтийской геометрической конференции по вопросам дифференциальной геометрии. Тарту, 1965, 126-129.

20. Механическое составление производственных заданий. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 6, 1965, 11-31 (совм. с Крулль М., Лухт С.).

21. О календарном планировании работы литейного цеха. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 6, 1965,32-50 (совм. с Сикк А., Тинн В.).

22. О подходе к математическому решению задач текущего планирования. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 6,1965,1-10 (совм. с Каазик Ю.).

23. Об одном методе обращения балансовых матриц. Ученые записки Тартуск. ун-та, 177,1965,159-164 (совм. с Тапфер Ю.).

1966

24. Индикатрисы кривизны и огибающие нормальных плоскостей для V_m в евклидовом R_n. I. Ученые записки Тартуск. ун-та, 192,1966,47-64.

25. К задаче календарного планирования работы цеха. Труды Ленингр. инж.-экон. ин-та, вып. 58,1966,142-145 (совм. с Каазик Ю.).

26. Механическое составление производственных заданий. Всесоюзная конференция "Использование математики и вычислительной техники в экономике". Тезисы докладов. Тарту,1966,39-40 (совм. с Лухт С.).

27. Расчеты на ЭВМ. Методы составления и анализа вариантов планового межотраслевого баланса республики. Таллин,1966,137-142 (совм. с Тапфер Ю.).

1967

28. Индикатрисы кривизны и огибающая нормальных плоскостей многомерной поверхности евклидова пространства. II. Ученые записки Тартуск. ун-та,206,1967,22-36.

29. Имитирование работы цеха на ЭВМ. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 11,1967,21-67(совм. с Праги У.).

30. Производство - управление - ЭВМ. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 11,1967,3-20 (совм. с Саарнийт И.).

1968

31. Форсаж работы и отклонения при запуска детале-партий (имитирование на ЭВМ). Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 14,1968,3-45 (совм. с Праги У.).

32. К решению задач целочисленного линейного программирования. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 14,1968,46-59 (совм. с Аллсалу В.).

33. Kaks pähklit majandusküberneetikale katkihammustamiseks. (О двух проблемах в математической экономике; на эст. яз.) Matemaatika ja kaasaeg, 15,1968,48-52.

34. Kiri "Matemaatika ja tegelikkuse" autorile. (Письмо автору "Математика и действительность"; на эст. яз.) [Рец. на книгу : Н.А.Киселева "Математика и действительность", Изд. МГУ,1967.] Matemaatika ja kaasaeg, 15,1968,127-128.

35. Механическое составление производственных заданий. Сборник "Применение экономико-математических методов и ЭВМ в управлении промышленным предприятием".Москва, 1968,260-264 (совм. с Эрманн С.).

36. О подходе к математическому решению задач текущего планирования. Сборник "Применение экономико-математических методов и ЭВМ в управлении промышленным пред-

приятием". Москва,1968,412-416 (совм. с Каазик Ю.).

1969

37. К теории многомерных поверхностей евклидова пространства. Индикатрисы кривизны, главные направления, эволюты. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 16,1969,3-111.

Ю. Лумисте, Ю. Каазик.

СОДЕРЖАНИЕ

ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА

Выпуск I6

На русском языке

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, I8

Ответственный редактор Ю. Лумисте

Корректор М. Салупере

Ротапринт ТГУ 1969. Сдано в печать 26/III 1969 г.
Печ. листов 8,0 (условных 7,44). Учетн.-издат.
листов 3,73. Бумага 30х42.I/4. Тираж 250 экз
МВ 03902. Заказ № 240

Цена 25 коп.

Цена 25 коп.