TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Geomeetria kateedri aspirant

Endel Jürimäe

ÜLDISTATUD SUMMEERIMIS-MENETLUSTE MÕNINGAIST OMADUSIST

Dissertatsioon
füüsika-matemaatika teaduste kandidaadi
teadusliku kraadi taotlemiseks

Teaduslik juhendaja:
Tartu Riikliku Ülikooli professor
füüsika-matemaatika teaduste doktor G. Kangro

Tartu 1959

S I S U K O R D

III SUMMEERIMISMENETLUSTE ÜLDINE KÄSITLUS

S I S S E J U H A T U S

Seoses ridade teooria arenguga on arvridade (või siis arvjadade) summeerimise kõrval hakatud vaatlema ka funktsionaalridade summeerimist, kuna viimased omavad praktilise rakenduse seisukohalt eriti suure tähtsuse. Kuna aga juba funktsionaalridade koonduvuse uurimisel tuleb meil kokku puutuda mitmete koonduvuse liikidega (ühtlane koonduvus, koonduvus möödu järgi jne.), siis sama olukord esineb ka summeerimisega seotud küsimuste vaatlemisel. Et mitte uurida summeerimismenetlusi iga koonduvuse puhul eraldi, hakati vaatlema üldistatud maatriksmenetlusi, kus teisendatava ja teisendatud jada elemendid kuuluvad suvalistesse Banachi ruumidesse (vt. näit. [6, 20, 31]).

Teiselt poolt, jälgides ridade teooria arengut arvridade summeerimisel, näeme, et juba maatriksmenetluste käsitlemisel vaadeldakse mitmeid teisenduste liike (jada-jada, rida-jada jne. teisendused). Kõrvuti maatriksmenetlustega on võetud vaatluse alla ka funktsionaalsed menetlused (vt. [36, 37, 22]). Kõikide nende (eeskätt koonduvust säilitavate) menetluste omadusi on uuritud eraldi.

Selline erinevate menetluste küllaltki suur hulk juba arvjadade puhul tingis asjaolu, et hakati otsima üldisemat menetluse definitsiooni, mis hõlmaks senituntud menetluste definitsioonid. Niisuguse üldise menetluse definitsiooni andis Sikorski [8], kuid temal õnnestus sel viisil lahendada vaid mõningad menetluste kooskõlaga seotud küsimused.

Käesoleva töö eesmärgiks on maatriksmenetluste (arvjadade puhul) jaoks mitmete hästituntud omaduste ülekandmine ühelt poolt üldistatud maatriksmenetlustele (töö I ja II ptk.) ning teiselt poolt Sikorski menetlustele (töö III ptk.). Seoses sellega on üldistatud Sikorski menetluste jaoks mõiste k o o n d u v u s t s ä i l i t a v ning mõlemate eelpoolmainitud menetluste jaoks mõisted k o r e g u l a a r n e ja k o n u l l - m e n e t l u s. Nende mõistete üldistamisel on silmas peetud, et nad oleksid hästi kooskõlas funktsionaalanalüüsi aparatuuriga, sest seda on kasutatud käesolevas töös vaadeldavate üldistatud menetluste omaduste saamisel.

Funktsionaalanalüüsi meetodite laialdasem kasutamine ridade teoorias algab juba poola matemaatikute Banachi, Mazuri ja Orlicz'i töödega (vt. näiteks [1, 16]). Kahjuks ilmus aga nende tähtsaim töö sellelt alalt [16] ilma tõestusteta, mistõttu nimetatud meetodite põhjalikum sissetungimine ridade teooriasse algab alles saksa matemaatiku Zelleri tööga [28], kes tõestas, et mistahes maatriksmenetluste summeerimisväli kujutab endast FK-ruumi, ning andis ühtlasi pideva lineaarse funktsionaali üldise kuju menetluse summeerimisväljas. Neid üldisi tulemusi ära kasutades, õnnestus Zelleril tõestada terve rida teoreeme maatriksmenetluste kohta.

Kuna Zelleri poolt arendatud metoodika on küllalt laialdaselt rakendatav (näit. kordsete ridade puhul [38]), siis on kasutatud seda ka käesolevas töös, mille I ptk. ongi näidatud, et üldistatud maatriksmenetluse summeerimisväli on samuti FK-ruum. Edasi on antud pideva lineaarse funktsionaali üldine kuju selles ruumis ning tõestatud üldised teoreemid menetluste sisalduvuse ja kooskõla kohta.

I ptk. § 4 on antud koregulaarse ja konullmenetluse definitsioonid. Nagu nähtub, on need definitsioonid kooskõlas Wilansky poolt [34] arvjadade puhul antud definitsioonidega, kuid nad on enam sobivad funktsionaalanalüüsi meetoditele, mistõttu osutub, et mõningate tulemuste saamine on käesoleval juhul lihtsam võrreldes Wilansky poolt sisse toodud karakteristiku kasutamisega.

Sisuliselt sama, kuigi vormiliselt mõnevõrra teistsugust definitsiooni kasutame ka III ptk. vaadeldud Sikorski menetluste puhul, mistõttu on rakendatavad samad tõestusmeetodid.

Töö II ptk. ja III ptk. §§ 4-5 on pühendatud vastavate koonduvust säilitavate menetluste uurimisele. Vaatluse alla on võetud kaks küllaltki suurt küsimuste ringi, nimelt menetluste võimsus ja kooskõla.

Menetluste võimsuse käsitlemisel on näidatud (II ptk.

§ 3 ja III ptk. § 4), et koonduvust säilitav üldistatud maatriksmenetlus kui ka Sikorski menetlus summeerivad eeskätt tõkestamata elemente, kui nad üldse summeerivad elemente väljaspool koonduvate elementide klassi. Vastav teoreem maatriksmenetluste puhul arvjadade jaoks on tõestuseta antud Mazuri ja Orlicz'i poolt [16]. Erijuhtudel on selle tõestanud Hill [13] (menetlus perfektne), Darevski [4] (menetlus regulaarne), Wilansky [33] (menetlus pööratav). Üldjuhul on tõestus antud Zelleri poolt [28, 32]. Mazur ja Orlicz andsid oma tõestuse alles 1954.a. [19].

Seoses selle teoreemiga tekib nüüd menetluste võimsuse uurimisel kohe küsimus, millal menetlus summeerib ka tõkestatud hajuvaid elemente. Selle küsimusega on arvjadade puhul tegelnud väga mitmed matemaatikud, nagu Agnew ja Hill [10], Brudno [2, 3], Copping [11, 12], Petersen [23], Tropper [27], Wilansky ja Zeller [35] jt. Käesolevas töös on üldistatud Wilansky ja Zelleri tulemus (vt. [35] teoreem 1) vaadeldatavatele üldistele menetlustele (vt. II ptk. § 4 ja III ptk. §§ 4, 8).

Menetluste kooskõla uurimisel on peatutud kolmel küsimusel: kooskõla tõkestatud jadade hulgal, kooskõla tugevama menetlusega ja menetluste perfektsus. Esimest küsimust käsitledes on üldistatud vastav Mazur-Orlicz'i teoreem (vt. teoreem 2. 3). On näidatud, et menetlus on kooskõlas tugevama menetlusega parajasti siis, kui ta on perfektne (vt. teoreem 2. 2). Menetluste perfektsuse küsimuse käsitlemisel on üldistatud Mazur-Banachi teoreem pööratava menetluse perfektsusest.

Töö III ptk. on algul käsitletud (§§ 1-5) Sikorski poolt antud üldiste menetluste puhul eespoolmärgitud küsimusi. Saadud tulemusi on rakendatud funktsionaalsete menetluste (§ 6), rida-jada teisendustena antud menetluste (§ 7) ja integraalmenetluste juures (§§ 8 ja 9).

I. ÜLDISTATUD MAATRIKSMENETLUSED B-RUUMIS, KOREGULAARSED JA KONULL-MENETLUSED

§ 1. Mõningaid mõisteid ja tähistusi

Kahes esimeses peatükis vaatleme summeerimismenetlusi, mis on määratud teisendusega [1)]

$$y_n = \sum_k A_{nk} x_k \quad (n = 0, 1, \dots),$$

kus A_{nk} $(n, k = 0, 1, \dots)$ on pidevad lineaarsed operaatorid Banachi ruumist X Banachi ruumi Y. Niisiis vaatleme teatud B-ruumi X jadade $\mathscr{C} = \{x_k\}$ $(x_k \in X)$ summeerimist üldistatud maatriksmenetlustega. Jada $\mathscr{C} = \{x_k\}$ on summeeruv menetlusega $\mathcal{A} = (A_{nk})$, kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_n y_n = y.$$

Elementi y nimetatakse jada $\mathscr{C}$ $\mathcal{A}$-summaks. Me tähistame seda sümboliga $\mathcal{A}\{\mathscr{C}\}$.

Kõigi koonduvate jadade hulka ruumis X (s.t.

---

1) Lihtsuse mõttes kirjutame sümbolite $\sum_{k=0}^{\infty}$, $\lim_{n\to\infty}$ ja $\sup_{0\le k<\infty}$ asemel vastavalt $\sum_k$, $\lim_n$, $\sup_k$.

eksisteerib $x=\lim_k x_k$) tähistame sümboliga c_X. Analoogselt tähistame kõigi nulliks koonduvate ja tõkestatud jadade hulka vastavalt c_X^0 ja m_X. Sümbolid c_Y, c_Y^0 ja m_Y tähistavad samasuguseid hulki ruumis Y.

Kõigi nende jadade $\mathscr{C}=\{x_k\}$ hulka, mille puhul $\mathscr{y}=\{y_n\}=\{\sum_k A_{nk}x_k\}\in c_Y$, nimetatakse menetluse $\mathcal{A}$ summeerimisväljaks $\mathcal{A}^*$. Nullsummeerimisväljaks $\mathcal{A}_0^*$ (tõkestatuse väljaks $\mathcal{A}_0$) nimetatakse nende jadade $\mathscr{C}=\{x_k\}$ hulka, mille puhul $\mathscr{y}\in c_Y^0$ (vastavalt $\mathscr{y}\in m_Y$). Kui aga teisendatud jada $\mathscr{y}$ kuulub mingisse lähemalt määratlemata ruumi R_Y, siis vastavate jadade hulka märgime $R_Y\mathcal{A}$.

Menetlust $\mathcal{A}=(A_{nk})$ nimetame p ö ö r a t a v a k s, kui võrrandsüsteem

$$y_n=\sum_k A_{nk}x_k \qquad (n=0,1,\dots)$$

on üheselt lahenduv iga jada $\mathscr{y}\in c_Y$ puhul. Kui menetlus $\mathcal{A}=(A_{nk})$ on selline, et $A_{nk}=0$ iga $k>n$ puhul, siis nimetame menetlust k o l m n u r k s e k s. N o r m a a l s e k s nimetame sellist kolmnurkset menetlust, mille puhul kõik operaatorid A_{nn} $(n=0,1,\dots)$ on pööratavad. On ilmne, et kõik normaalsed menetlused on pööratavad.

Edaspidises osutuvad eriti tähtsaiks jadad

$$\mathscr{n}(x)=\{x,x,\dots,x,\dots\}$$

ning

$$\mathscr{n}_k(x)=\{\overbrace{0,\dots,0}^{k\ \text{nulli}},x,0,\dots\}$$

$(x \in X\,;\ k=0,1,\ldots)$, millised moodustavad põhihulga ruumis c_X. Tuleb märkida, et hulgad c_X, c_X^0 ja m_X osutuvad B-ruumideks, kui defineerida norm

$$\|\mathscr{C}\| = \sup_k \|x_k\|.$$

On ilmne, et nad on siis ka sellised ruumid, milles leiab aset koonduvus koordinaatide järgi, s.t. FK-ruumid [2].

Järgnevas kasutame mõistet jada $\mathscr{C}=\{x_k\}$ lõige

$$\mathscr{C}^{(n)}=\{x_0, x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots\}.$$

Kui vaadeldavas ruumis

$$\mathscr{C}^{(n)} \to \mathscr{C},$$

siis öeldakse, et jada $\mathscr{C}$ puhul leiab aset lõikekoonduvus. Kui aga

$$f(\mathscr{C}^{(n)}) \to f(\mathscr{C})$$

iga pideva lineaarse funktsionaali f puhul vaadeldavas ruumis, siis öeldakse, et jada $\mathscr{C}$ puhul leiab aset nõrk lõikekoonduvus. On ilmne, et esimesest järeldub teine.

§ 2. Menetluse summeerimisväli

Harilike arvjadade puhul on maatriksmenetluste üldiste omaduste uurimisel eriti viljakaiks osutunud funktsionaalanalüüsi meetodid, kus menetluse summeerimisvälja

---

[2] Käesolevas töös mõistame F-ruumi all alati lokaalselt kumerat täielikku meetrilist ruumi, s.t. sellist täielikku ruumi, mille topoloogia on defineeritud ülimalt loenduva hulga kvaasinormide abil. FK-ruumiks on jadaruum, mis kujutab F-ruumi, milles leiab aset koonduvus koordinaatide järgi.

vaadeldakse teatud meetrilise ruumina. Vastav üldine teooria on antud saksa matemaatiku K. Zelleri poolt 1951.a. [28]. Kui rakendada Zelleri teooriat antud juhul, siis tuleb meil selles pidevad lineaarsed funktsionaalid (vt. teoreem 4.8 [28]) asendada pidevate lineaarsete operaatoritega (nendeks osutuvad read $\sum_k A_{nk} x_k$). Seda märkust arvestades võib tõestada teoreemi, mis on üldistuseks Zelleri poolt antud teoreemile 4.10.

T e o r e e m 1. 1. Olgu $\mathcal{A} = (A_{nk})$ mingi operaatormaatriks, $[R_Y; q_j]$ FK-ruum. Sel juhul on jadade $\mathscr{C} = \{x_k\}$ hulk R_X, mille puhul $\mathcal{A}(\mathscr{C}) \in R_Y$, FK-ruum kvaasinormidega

$$\sup_l \left\| \sum_{k=0}^{l} A_{nk} x_k \right\| \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$\| x_k \| \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$q_j(y) = q_j(\mathcal{A}(\mathscr{C})) \qquad (j = 0, 1, \ldots).$$

Erijuhtudena saame sellest teoreemist menetluse summeerimisvälja, nullsummeerimisvälja ning tõkestatuse välja kvaasinormid, kui ruumiks R_Y valime vastavalt ruumid c_Y, c_Y^0 ja m_Y. Kuna c_Y, c_Y^0 ja m_Y osutuvad kõik B-ruumideks normiga $\|y\| = \sup_n \|y_n\|$, siis $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{A}_0^*$ ja $\mathcal{A}_0$ on ühesuguste kvaasinormidega FK-ruumid.

T e o r e e m 1. 2. Hulgad $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{A}_0^*$ ja $\mathcal{A}_0$ osutuvad FK-ruumideks kvaasinormidega

$$p_{2n-1}(\mathscr{C}) = \sup_l \left\| \sum_{k=0}^{l} A_{nk} x_k \right\|,$$

$$p_{2n}(\mathscr{C}) = \| x_n \| \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$p_0(\mathscr{C}) = \sup_n \left\| \sum_k A_{nk} x_k \right\|.$$

Kui menetlus $\mathcal{A}$ on pööratav, siis tema summeerimisväli osutub B-ruumiks normiga

$$\|\mathfrak{x}\| = \sup_n \|\sum_k A_{nk} x_k\|.$$

Kogu edaspidises teoorias etendavad tähtsat osa pidevad lineaarsed funktsionaalid, mistõttu on oluline teada nende üldist kuju menetluse summeerimisväljas. Vastavalt üldisele teooriale (vt. [18 , 28]) avaldub iga pidev lineaarne funktsionaal $f(\mathfrak{x})$ ruumis $\mathcal{A}^*$ summana

$$f(\mathfrak{x}) = h(\mathfrak{x}) + g(\mathfrak{y}), \quad \mathfrak{y} = \mathcal{A}(\mathfrak{x}),$$

kus $g(\mathfrak{y})$ on pidev lineaarne funktsionaal ruumis c_Y ning $h(\mathfrak{x})$ - kvaasinormide $p_{2n-1}(\mathfrak{x})$ ja $p_{2n}(\mathfrak{x})$ poolt määratud ruumis, s.t. ruumis, kus eksisteerivad summad $\sum_k A_{nk} x_k \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

Lihtne on veenduda, et viimati mainitud ruumis leiab aset lõikekoonduvus, mistõttu iga pidev lineaarne funktsionaal selles ruumis avaldub kujul

$$h(\mathfrak{x}) = \sum_k \psi_k(x_k),$$

kus ψ_k on pidev lineaarne funktsionaal ruumis X . Viimane väide järeldub asjaolust, et kui ruumis iga elemendi puhul leiab aset lõikekoonduvus, siis jadad $n_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ moodustavad seal põhihulga (vt. [29]).

Mis puutub pideva lineaarse funktsionaali üldisesse kujusse ruumis c_Y , siis selle leidmiseks kasutame ära tõsiasja, et ruumis c_Y

$$\mathfrak{y} = \lim_r \sum_{k=0}^{r} n_k(y_k - y) + n(y).$$

Sellest

$$g(y) = \sum_n \varphi_n(y_n - y) + \overline{\varphi}(y),$$

kus φ_n $(\varphi_n(y) = g(\varkappa_n(y)))$ ja $\overline{\varphi}$ $(\overline{\varphi}(y) = g(\varkappa(y)))$ on pidevad lineaarsed funktsionaalid ruumis Y.

Kuna me nõuame rea $\sum_n \varphi_n(y_n - y)$ koonduvust iga $y = \{y_n\} \in C_Y$ puhul, siis Banach-Steinhausi teoreemi põhjal peab funktsionaalide $g_m(y) = \sum_{n=0}^{m} \varphi_n(y_n)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ puhul kehtima võrratus

(1) $$\|g_m\| = \sup_{\|y_n\| \leq 1} \|\sum_{n=0}^{m} \varphi_n(y_n)\| \leq M \quad (m = 0, 1, \ldots).$$

Arvutame funktsionaali g_m normi. Kuna

$$|g_m(y)| \leq \sup_n \|y_n\| \cdot \sum_{n=0}^{m} \|\varphi_n\|,$$

siis

(2) $$\|g_m\| \leq \sum_{n=0}^{m} \|\varphi_n\|.$$

Normi definitsiooni kohaselt leidub element y_n' selliselt, et

$$|\varphi_n(y_n')| > (\|\varphi_n\| - \frac{\varepsilon}{m+1}) \|y_n'\| \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Kui võtame

$$y_n'' = \frac{y_n'}{\|y_n'\|},$$

siis

$$|\varphi_n(y_n'')| = \frac{1}{\|y_n'\|} |\varphi_n(y_n')| > \|\varphi_n\| - \frac{\varepsilon}{m+1}.$$

Nüüd, valides jada $\overline{y} = \{\overline{y}_n\}$, kus

$$\overline{y}_n = \begin{cases} \operatorname{sgn} \varphi_n(y_n'') \cdot y_n'', & n < m, \\ 0, & n > m, \end{cases}$$

saame

(3) $$|g_m(\bar{y})| = \sum_{n=0}^{m} |\varphi_n(y_n'')| > \sum_{n=0}^{m} \|\varphi_n\| - \varepsilon .$$

Võrratuste (2) ja (3) põhjal
$$\|g_m\| = \sum_{n=0}^{m} \|\varphi_n\| .$$

Seega saame tingimusest (1)
$$\sum_{n=0}^{m} \|\varphi_n\| \leq M \quad (m = 0, 1, \dots),$$

millest

(4) $$\sum_n \|\varphi_n\| < \infty .$$

Arvestades tingimust (4), võime funktsionaali teisendada järgmiselt
$$g(y) = \sum_n \varphi_n(y_n) + \bar{\varphi}(y) - \sum_n \varphi_n(y) .$$

Tähistades
$$\varphi(y) = \bar{\varphi}(y) - \sum_n \varphi_n(y),$$

saame pideva lineaarse funktsionaali üldiseks kujuks ruumis c_Y
$$g(y) = \sum_n \varphi_n(y_n) + \varphi(y),$$

kus φ_n ja φ on pidevad lineaarsed funktsionaalid ruumis Y .

Eelnevast kokkuvõtet tehes, saame seega järgmise tulemuse.

T e o r e e m 1. 3. a) Iga pidev lineaarne funktsionaal menetluse $\mathcal{A}$ summeerimisväljas $\mathcal{A}^*$ avaldub kujul

$$f(\mathfrak{c}) = \sum_k \psi_k(x_k) + \sum_n \varphi_n(y_n) + \varphi(y),$$

kus ψ_k on pidev lineaarne funktsionaal ruumis X, φ_n, φ - ruumis Y, $y_n = \sum_k A_{nk} x_k$, $y = \lim_n y_n$ ning $\sum_n \|\varphi_n\| < \infty$.

b) Kui menetlus $\mathcal{A}$ on pööratav, siis võib funktsionaali $f(\mathfrak{c})$ nii esitada, et kõik funktsionaalid ψ_k on nullid.

§ 3. Menetluste sisalduvuse ja kooskõla üldised teoreemid

Kui meil on kaks menetlust $\mathcal{A} = (A_{nk})$ ja $\mathcal{B} = (B_{nk})$ siis öeldakse, et menetlus $\mathcal{A}$ sisaldab menetlust $\mathcal{B}$, kui kehtib vahekord $\mathcal{A}^* \supseteq \mathcal{B}^*$ Kui peale selle veel $\mathcal{A}\{\mathfrak{c}\} = \mathcal{B}\{\mathfrak{c}\}$ iga $\mathfrak{c} \in \mathcal{B}^*$ puhul, siis öeldakse, et menetlused $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on omavahel kooskõlas.

Järgnevas tõestame ühe üldise teoreemi, millest erijuhuna saame teoreemi menetluste sisalduvuse kohta.

T e o r e e m 1. 4. Olgu $\mathcal{A} = (A_{nk})$ normaalne, $\mathcal{B} = (B_{nk})$ suvaline menetlus ning R FK-ruum. Vahekord $R\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}_0^*$ kehtib parajasti siis, kui

1° $\mathfrak{y} = \mathcal{B}(\mathfrak{c})$ on määratud iga $\mathfrak{c} \in \mathcal{A}_0^*$ puhul,

2° $\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}$ kujutab ruumi c_Y^0 ruumi R.

T õ e s t u s. Et $\mathcal{A}$ on normaalne, siis $\mathfrak{c} = \mathcal{A}^{-1}(\mathfrak{y}) \in \mathcal{A}_0^*$, kui $\mathfrak{y} \in c_Y^0$. Kujutus $\mathcal{A}^{-1}(c_Y^0) = \mathcal{A}_0^*$ on $\mathcal{A}$ normaalsuse tõttu üks-ühene. Seega tuleb uurida tingimusi, millal

$$R\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}^{-1}(c_Y^\circ).$$

See kehtib parajasti siis, kui $\mathcal{B}$ kujutab $\mathcal{A}^{-1}(c_Y^\circ)$ ruumi R, s.t. $\mathcal{B}[\mathcal{A}^{-1}(c_Y^\circ)] \subseteq R$. Seega peab

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}^{-1}y) \in R, \text{ kui } y \in c_Y^\circ.$$

Tarvilikkus. On teada, et $\mathcal{B}(\mathcal{A}^{-1}y) \in R$, kui $y \in c_Y^\circ$. Tingimuse 1° tarvilikkus on kohe ilmne. Tingimuse 2° tarvilikkuse tõestamiseks näitame, et

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}^{-1}y) = (\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1})y, \text{ kui } y \in c_Y^\circ,$$

kusjuures $\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}$ all mõistame kahe maatriksi korrutisena saadud maatriksit.

Olgu

$$\mathcal{A}^{-1} = (H_{nk}),$$

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}^{-1}y) = \{z_n\}, \quad y = \{y_\nu\}.$$

Siis

$$z_n = \sum_k B_{nk} \sum_\nu H_{k\nu} y_\nu = \sum_k \sum_\nu B_{nk} H_{k\nu} y_\nu = \sum_k \sum_\nu P_{k\nu}^n y_\nu,$$

kus $P_{k\nu}^n = B_{nk} H_{k\nu}$.

Leiame maatriksiga $\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1} = (\sum_k B_{nk} H_{k\nu})$ saadud kujutise

$$(\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1})y = \{z_n'\},$$

kus

$$z_n' = \sum_\nu \sum_k B_{nk} H_{k\nu} y_\nu = \sum_\nu \sum_k P_{k\nu} y_\nu.$$

Et näidata võrdust

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}^{-1}y) = (\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1})y, \text{ kui } y \in c_Y^\circ,$$

tuleb tõestada, et viimati saadud summas võib muuta summeerimisjärjekorda.

Kui $y \in C_Y^0$, siis

$$y = \lim_r \sum_{\mu=0}^{r} n_\mu(y_\mu).$$

Tähistades

$$F(y) = \sum_\kappa \sum_\nu P_{\kappa\nu}^n y_\nu ,$$

saame arvutamisel

$$F(y) = \sum_\mu F(n_\mu(y_\mu)) = \sum_\mu \sum_\kappa P_{\kappa\mu}^n y_\mu = \sum_\nu \sum_\kappa P_{\kappa\nu}^n y_\nu ,$$

kuna

$$F(n_\mu(y_\mu)) = \sum_\kappa P_{\kappa\mu}^n y_\mu .$$

Saadud tulemus ütlebki, et summeerimisjärjekorra muutmine on lubatud, millega

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}^{-1}y) = (\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1})y \quad \text{iga} \quad y \in C_Y^0 \quad \text{korral.}$$

Piisavus. Kui 1° on täidetud, siis $\mathcal{B}(\mathcal{A}^{-1}y)$ on määratud iga $y \in C_Y^0$ korral. Tingimuse 2° põhjal

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}^{-1}y) = (\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1})y \in R ,$$

kuna $y \in C_Y$. Seega ongi meie teoreem tõestatud.

Tõestatud teoreemist võime saada rea teoreeme menetluste sisalduvuse kohta, valides sobivalt ruumi R. Vaatleme siin vaid ühte.

T e o r e e m 1. 5. Olgu antud normaalne menetlus $\mathcal{A}$ ja suvaline menetlus $\mathcal{B}$. Vahekord $\mathcal{B}^* \supseteq \mathcal{A}^*$

kehtib parajasti siis, kui

1° $\mathcal{B}(\mathscr{C})$ on iga $\mathscr{C} \in \mathcal{A}_0^*$ puhul määratud;

2° $\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}$ kujutab nulljadade ruumi c_Y^0 ruumi c_Z ;

3° $\mathcal{B}$ kujutab jada $\mathscr{C} = \mathcal{A}^{-1}(\varkappa(y))$ iga $y \in Y$ puhul ruumi c_Z .

T õ e s t u s. Olgu vastavad menetlused $\mathcal{A} = (A_{nk})$, kus $A_{nk} \in (X \to Y)$, ja $\mathcal{B} = (B_{nk})$, $B_{nk} \in (X \to Z)$.

Rakendame teoreemi 1. 4, võttes $R = c_Z$ ning arvestame, et iga $\mathscr{C} \in \mathcal{A}^*$ laseb end esitada kujul

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 + \mathcal{A}^{-1}(\varkappa(y)),$$

kus

$$\mathscr{C}_1 \in \mathcal{A}_0^*, \text{ s.t. } \mathcal{A}\{\mathscr{C}_1\} = 0.$$

Tarvilikkus. On teada, et $\mathcal{B}^* \supseteq \mathcal{A}^*$. Tingimuste 1° ja 3° tarvilikkus on ilmne seosest $\mathcal{B}^* \supseteq \mathcal{A}^*$. Tingimuse 2° tarvilikkus järeldub eelmisest teoreemist.

Piisavus. Kehtigu tingimused 1°, 2° ja 3°. Avaldame

$$\mathcal{B}(\mathscr{C}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}^{-1}\eta_1) + \mathcal{B}(\mathcal{A}^{-1}(\varkappa(y))),$$

kus $\eta_1 = \mathcal{A}^{-1}(\mathscr{C}_1)$. Arvestades tingimusi 1°, 2° ja 3° on ilmne, et

$$\mathcal{B}(\mathscr{C}) \in c_Z,$$

millega ongi teoreem tõestatud.

Teoreemidele 1. 4 ja 1. 5 analoogsed teoreemid arvjadade puhul on tõestatud Zelleri poolt [29], kelle tõestusmeetodit on käesolevas kasutatud.

Me saime tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, millal üks suvaline menetlus sisaldab normaalset menetlust. Tekib küsimus, millised tingimused on tarvilikud ja piisavad selleks, et need menetlused oleksid kooskõlas. Vastuse sellele annab

T e o r e e m 1. 6. Menetlus $\mathcal{B}$ on kooskõlas normaalse menetlusega $\mathcal{A}$ parajasti siis, kui lisaks teoreemi 1. 5 tingimustele 1°- 3° on täidetud tingimused

$$4^\circ \quad \mathcal{B}\{\mathcal{A}^{-1}(n_k(y))\} = 0 \qquad (k = 0, 1, \dots),$$

$$5^\circ \quad \mathcal{B}\{\mathcal{A}^{-1}(n(y))\} = y \qquad (y \in Y).$$

T õ e s t u s. Et üldse rääkida menetluste kooskõlast, tuleb ilmselt teha eeldus $Y = Z$, kus $B_{nk} x \in Z$.

Tarvilikkus. Ilmne.

Piisavus. Tingimuste 4° ja 5° täidetus ütleb, et menetlus $\mathcal{B}$ summeerib kõik need jadad nulliks, mille puhul $\mathcal{A}(\xi) = n_k(y)$ $(y \in Y)$ (seega ka $\mathcal{A}\{\xi\} = 0$), ning need jadad elemendiks y , mille puhul $\mathcal{A}(\xi) = n(y)$ $(y \in Y)$ (siis ka $\mathcal{A}\{\xi\} = y$). Teiste sõnadega, tingimused 4° ja 5° nõuavad menetluste $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ kooskõla kõikide seda tüüpi jadade ξ puhul, kus $\mathcal{A}(\xi)$ kujutab endast ruumi c_Y põhihulga jada, s.t. $n_k(y)$ või $n(y)$ $(y \in Y;\ k = 0, 1, \dots)$. Kuna aga ruumis c_Y iga η puhul

$$\eta = \lim_r \sum_{k=0}^{r} n_k(y_k - y) + n(y),$$

siis siit järeldub $\mathcal{A}$ normaalsuse tõttu vahetult teoreemi väide.

§ 4. Koregulaarsed ja konull-menetlused

Vaadeldes maatriksmenetlusi arvjadade puhul, on teada, et erilist osa etendavad nn. konull-menetlused, s.t. koonduvust säilitavad menetlused, mille puhul karakteristika

$$\rho(\mathcal{A}) = \lim_n \sum_k A_{nk} - \sum_k \lim_n A_{nk} = 0,$$

kus $\mathcal{A} = (A_{nk})$. Ülejäänud menetlusi, mille puhul $\rho(\mathcal{A}) \neq 0$, nimetatakse koregulaarseteks (vt. [34]).

Vaadeldavate üldistatud maatriksmenetluste puhul on tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et menetlus oleks koonduvust säilitav, antud Zelleri poolt [31].

T e o r e e m 1. 7. Menetlus $\mathcal{A} = (A_{nk})$ on koonduvust säilitav parajasti siis, kui

1° $\lim_n A_{nk} x = A_k x \qquad (x \in X;\ k = 0,1,\dots);$

2° $\lim_n \sum_k A_{nk} x = Ax \qquad (x \in X);$

3° $\sup_{\|x_k\| \leq 1} \left\| \sum_{k=0}^{p} A_{nk} x_k \right\| \leq M \qquad (n, p = 0,1,\dots).$

Nagu selgub edaspidises, on ka vaadeldavate koonduvust säilitavate menetluste puhul vajalik jagamine kaheks klassiks: koregulaarseteks ja konull-menetlusteks. See ei saa aga toimuda arvjadade juhule analoogse karakteristika määramise teel, kuna nüüd rida $\sum_k A_k x$ ei tarvitse olla koonduv. Järgmises paragrahvis anname selle kohta ühe eitava näite (vt. näide 4). Seepärast tuleb üldistatud maatriksmenetluste uurimisel käia mõnevõrra üldisemat ning funktsionaalanalüüsi meetoditele omasemat teed. Arvestame asjaolu, et koonduvust säilitava menetluse korral jadad $\eta(x)$ ja $\eta_k(x)$ $(x \in X;\ k=0,1,\dots)$ kuuluvad menetluse summeerimisvälja $\mathcal{A}^*$.

Me nimetame koonduvust säilitavat menetlust $\mathcal{A}$ konull-menetluseks, kui ruumis $\mathcal{A}^*$ jadade $\eta(x)$ $(x \in X)$ puhul leiab aset nõrk lõikekoonduvus. Vastasel korral nimetame menetlust koregulaarseks.

Kasutades pideva lineaarse funktsionaali üldist kuju

$$f(\xi) = \sum_k \psi_k(x_k) + \sum_n \varphi_n(y_n) + \varphi(y)$$

ruumis $\mathcal{A}^*$, võime anda tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et $\mathcal{A}$ oleks konull-menetlus. Nõrgaks lõikekoonduvuseks jada $\eta(x)$ puhul on ilmselt vaja, et

$$\eta_r^*(x) = \eta(x) - \sum_{k=0}^{r} \eta_k(x)$$

koonduks nõrgalt nulliks, kui $r \to \infty$.

Banach andis tarvilikud ja piisavad tingimused nõrgaks koonduvuseks ruumis c (koonduvate arvjadade ruum) (vt. [1] ptk. IX). Analoogselt sellele võib ka antud juhul veenduda, et jada $y_r = \{y_n^r\}$ koondub nõrgalt nulliks ruumis c_Y parajasti siis, kui on täidetud tingimused:

a) $\lim\limits_r \varphi(y_n^r) = 0$ iga n ja iga φ puhul;

b) $\lim\limits_r \varphi(\lim\limits_n y_n^r) = 0$ iga φ puhul;

c) jada $\{y_r\}$ on tõkestatud.

Kontrollides neid tingimusi jada $\mathcal{A}(\varkappa_r^*(x))$ puhul, näeme, et a) ja c) on täidetud teoreemi 1. 7 tingimuste põhjal. Tingimusest b) saame

$$\lim_r \varphi(\lim_n \sum_{k=r+1}^{\infty} A_{nk} x) = \lim_r \varphi(Ax - \sum_{k=0}^{r} A_k x) = 0.$$

Seega:

menetlus $\mathcal{A}$ on konull-menetlus parajasti siis, kui on täidetud tingimus

$$(K) \qquad \lim_r \varphi(Ax - \sum_{k=0}^{r} A_k x) = 0$$

iga $x \in X$ ja iga φ puhul ruumis Y.

Selline konull-menetluse definitsioon võimaldab teha kaks küllaltki tähtsat järeldust, kasutades järgmist teoreemi (vt. [28]).

T e o r e e m 1. 8. Olgu R_1 ja R_2 FK-ruumid, kusjuures $R_1 \subseteq R_2$. Kui

$$\mathcal{C}_r \to \mathcal{C} \text{ ruumis } R_1,$$

siis ka

$$\mathcal{C}_r \to \mathcal{C} \text{ ruumis } R_2.$$

Sellest teoreemist, mille tõestus on täiesti analoogne teoreemi 4. 5 [28] tõestusega, järeldub ilmselt, et iga pidev lineaarne funktsionaal ruumis R_1 on seda ka ruumis R_2. Viimast asjaolu arvestades, kehtivad järgmised laused.

T e o r e e m 1. 9. Ükski koregulaarne menetlus $\mathcal{A}$ ei saa sisaldada konull-menetlust $\mathcal{B}$.

T e o r e e m 1. 10. Kui kahe menetluse summeerimisväljad langevad kokku, siis on need menetlused mõlemad kas koregulaarsed või konull-menetlused.

Arvjadade puhul on vastavad tulemused Zelleri poolt (vt. [28]) saadud seosest

$$\varrho(\mathcal{B}) = \alpha \cdot \varrho(\mathcal{A}),$$

mis kehtib juhul kui $\mathcal{B}^* \supseteq \mathcal{A}^*$.

§ 5. Näiteid koregulaarsetest ja konull-menetlustest

Selles paragrahvis vaatleme mõningaid näiteid, mille najal selgitame küsimuse, millises seoses on käesolevas töös antud konull-menetluse definitsioon Wilansky omaga [34] (näide 1). Samuti näitame, et nõrga lõikekoonduvuse nõuet ei saa asendada tugeva lõikekoonduvusega (näide 2). Viimase näitega vastame juba eelmises paragrahvis tekkinud küsimusele, miks on antud üldisel juhul vaja käia tingimata erinevat teed võrreldes maatriksmenetlustega arvjadade puhul.

N ä i d e 1. Olgu $X = Y = R_1$, kus R_1 on ühedimensionaalne kompleksne eukleidiline ruum, ning A_{nk} kompleksarvud. Sel juhul on Wilansky defineerinud menetluse karakteristika võrdusega

$$\varrho(\mathcal{A}) = A - \sum_k A_k,$$

kus $A = \lim_n \sum_k A_{nk}$ ja $A_k = \lim_n A_{nk}$ (vt. [34]).

Tingimus (K) annab antud juhul

$$\alpha \cdot \lim_r \mathcal{A}\{e_r^*\} = \alpha \cdot \rho(\mathcal{A}) = 0,$$

kus $e_r^* = e - \sum_{k=0}^{r} e_k$, $e = \{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$, $e_k = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Kuna võrdus $\alpha \cdot \rho(\mathcal{A}) = 0$ peab kehtima iga α puhul, siis on ilmne, et meie poolt antud konull-menetluse definitsioon on kooskõlas Wilansky omaga. Ilmselt on siis kooskõlas ka koregulaarsete menetluste definitsioonid.

N ä i d e 2. Olgu menetluse $\mathcal{A} = (A_{nk})$ maatriks defineeritud järgmiselt:

$$A_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{kui } k = n, \\ -1, & \text{kui } k = n+1, \\ 0, & \text{ülejäänud juhtudel.} \end{cases}$$

Arvutades võime veenduda, et selle menetluse puhul $\rho(\mathcal{A}) = 0$. Teiselt poolt saab näidata, et selle menetluse summeerimisväljas jada $e = \{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ puhul ei leia aset lõikekoonduvus. Seega nõrga lõikekoonduvuse nõuet ei saa asendada tugevaga.

N ä i d e 3. Olgu $X = Y$. Sel juhul võime kõnelda regulaarsetest menetlustest nagu arvjadadegi puhul. Ilmselt siis $Ax = x$ ja $A_k x = 0$ iga $x \in X$ ja $k = 0, 1, \ldots$ puhul. Tingimusest (K) saame, et iga regulaarne menetlus on koregulaarne (arvjadade puhul $\rho(\mathcal{A}) = 1$).

N ä i d e 4. Olgu $X=c$, $Y=c_0$. Defineerime menetluse $\mathcal{A}=(A_{nk})$ järgmiselt:

$$A_{nk}x=\begin{cases}\xi_k e_k & , k<n,\\ \xi_n e_n-\xi\sum\limits_{\nu=0}^{n}e_\nu, & k=n,\\ 0 & , k>n.\end{cases}$$

Sel juhul

$$1^\circ \quad \lim_n A_{nk}x=A_k x=\xi_k e_k\ , \quad x=\{\xi_k\},$$

ning

$$\sum_{k=0}^{n}A_{nk}x=\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k e_k+\xi_n e_n-\xi\sum_{\nu=0}^{n}e_\nu=\sum_{k=0}^{n}(\xi_k-\xi)e_k,$$

millest

$$2^\circ \quad \lim_n \sum_k A_{nk}x=Ax=\sum_k(\xi_k-\xi)e_k.$$

Kas selliselt defineeritud menetlus on koonduvust säilitav? Näitame, et ta on seda tõepoolest. Selleks veendume, et kui $\mathscr{C}=\{x_k\}\in c_X$, s.t. eksisteerib $\lim\limits_k x_k=x$, siis ka $\mathcal{A}(\mathscr{C})\in c_Y$. Olgu $x_k=\{\xi_\nu^k\}$ ja $x=\{\xi_\nu\}$, kus $\lim\limits_\nu \xi_\nu^k=\xi^k$ ja $\lim\limits_\nu \xi_\nu=\xi$. Seega

$$A_{nk}x_k=\begin{cases}\xi_k^k e_k & , k<n,\\ \xi_n^n e_n-\xi^n\sum\limits_{\nu=0}^{n}e_\nu, & k=n,\\ 0 & , k>n.\end{cases}$$

Arvutame

$$\sum_k A_{nk}x_k=\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k^k e_k+\xi_n^n e_n-\xi^n\sum_{\nu=0}^{n}e_\nu=$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n}(\xi_\nu^\nu-\xi^n)e_\nu=\{\xi_0^0-\xi^n,\xi_1^1-\xi^n,\dots,\xi_n^n-\xi^n,0,\dots\}.$$

Meid huvitab küsimus, kas eksisteerib

$$\lim_n \sum_k A_{nk} x_k ?$$

Kui see peaks eksisteerima, siis valemi

$$\lim_n y_n = Ax + \sum_k A_k (x_k - x), \quad \mathscr{C} = \{x_k\} \in C_X,$$

(vt. [31]) põhjal

$$\mathcal{A}\{\mathscr{C}\} = \lim_n \sum_k A_{nk} x_k = \sum_k (\xi_k^k - \xi) e_k .$$

Siin aga tekib kohe küsimus, kas viimati kirjutatud rida üldse koondub?

See osutub siiski koonduvaks reaks, kuna saab näidata, et

$$\lim_k (\xi_k^k - \xi) = 0 .$$

Meil on teada, et $x_k \to x = \{\xi_\nu\}$, kus $x \in C$, millest

(1) $$\lim_\nu \xi_\nu = \xi .$$

Tingimus $x_k \to x$ annab

$$\lim_k \sup_\nu |\xi_\nu^k - \xi_\nu| = 0$$

ehk teisiti

(2) $|\xi_\nu^k - \xi_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}$, kui $k > N$ iga ν puhul,

Hinnates vahet $|\xi_k^k - \xi|$, näeme, et

(3) $$|\xi_k^k - \xi| \leq \underbrace{|\xi_k^k - \xi_k|}_{\hat{\frac{\varepsilon}{2}}\ (2)} + \underbrace{|\xi_k - \xi|}_{\hat{\frac{\varepsilon}{2}}\ (1)} < \varepsilon .$$

Seega tõesti rida $\sum_k (\xi_k^k - \xi) e_k$ on koonduv.

Jääb näidata, et

$$\lim_n \underbrace{\sum_{\nu=0}^{n} (\xi_\nu^\nu - \xi^n) e_\nu}_{y_n} = \underbrace{\sum_\nu (\xi_\nu^\nu - \xi) e_\nu}_{y}.$$

Selleks arvutame vahe

$$y - y_n = \sum_\nu (\xi_\nu^\nu - \xi) e_\nu - \sum_{\nu=0}^{n} (\xi_\nu^\nu - \xi^n) e_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} (\xi_\nu^\nu - \xi - \xi_\nu^\nu + \xi^n) e_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (\xi_\nu^\nu - \xi) e_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} (\xi^n - \xi) e_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (\xi_\nu^\nu - \xi) e_\nu .$$

Siit on ilmne, et

$$\lim_n (y - y_n) = \lim_n \sum_{\nu=0}^{n} (\xi^n - \xi) e_\nu .$$

Vaja on niisiis tõestada, et

$$\lim_n \sum_{\nu=0}^{n} (\xi^n - \xi) e_\nu = \{0, 0, \ldots, 0, \ldots\}.$$

Piisab näidata, et

$$\lim_n |\xi^n - \xi| = 0.$$

Viimane aga järeldub seostest (2) ja (3), kuna

$$|\xi^n - \xi| \le |\xi^n - \xi_n^n| + |\xi_n^n - \xi|.$$

Seega vaadeldav menetlus on tõepoolest koonduvust säilitav. Kas ta on koregulaarne või konull-menetlus? Kontrollime tingimust (K).

Kuna $Y = c_0$, siis

$$\varphi(y) = \sum_\mu \alpha_\mu \eta_\mu ,$$

kus $y = \{\eta_\mu\}$ ja $\sum_\mu |\alpha_\mu| < \infty$.

Leiame

$$Ax - \sum_{k=0}^{r} A_k x = \sum_k (\xi_k - \xi) e_k - \sum_{k=0}^{r} \xi_k e_k =$$

$$= -\xi \sum_{k=0}^{r} e_k + \sum_{k=r+1}^{\infty} (\xi_k - \xi) e_k =$$

$$= \{-\xi, -\xi, \ldots, -\xi, \xi_{r+1} - \xi, \xi_{r+2} - \xi, \ldots\}$$

ning

$$\varphi(Ax - \sum_{k=0}^{r} A_k x) = \sum_{\mu=0}^{r} (-\xi)\alpha_\mu + \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \alpha_\mu (\xi_\mu - \xi).$$

Siit

$$\lim_r \varphi(Ax - \sum_{k=0}^{r} A_k x) = \lim_r \sum_{\mu=0}^{r} (-\xi)\alpha_\mu + \lim_r \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \alpha_\mu (\xi_\mu - \xi) =$$

$$= -\xi \lim_r \sum_{\mu=0}^{r} \alpha_\mu = -\xi \sum_\mu \alpha_\mu .$$

Saadud tulemusest on ilmne, et vaadeldav menetlus on koregulaarne.

§ 6. Tingimus (T)

Käesolevas paragrahvis anname ühe tarviliku tingimuse selleks, et tõkestatud jadad oleksid hulga C_X kuhjumispunktideks ruumis $\mathcal{A}^*$ (tingimus (T)). Selle tingimuse (T) abil osutub võimalikuks II ptk. lahendada terve rida olulisi küsimusi seoses koonduvust säilitavate menetlustega.

Me ütleme, et menetlus $\mathcal{A} = (A_{nk})$ kuulub klassi

$\mathcal{T}$ $(\mathcal{A} \in \mathcal{T})$, kui on täidetud järgmine tingimus:

(T) võrdusest $\lim_{r} \varphi(Ax - \sum_{k=0}^{r} A_k x) = 0$ iga $x \in X$ puhul järeldub, et φ on nullfunktsionaal.

On ilmne, et selliste menetluste hulk moodustab teatud koregulaarsete menetluste klassi, mis ei ole tühi, kuna sinna kuuluvad kõik menetlused, mille puhul rida $\sum_{k} A_k x$ koondub iga $x \in X$ korral ning võrdusega $Px = Ax - \sum_{k} A_k x$ määratud operaator omab parempoolse pöördoperaatori. Juhul $X = Y$ on tingimus (T) täidetud iga regulaarse menetluse puhul. Kui $Y = R_1$ on ühedimensionaalne kompleksne eukleidiline ruum, siis kõik koregulaarsed menetlused rahuldavad tingimust (T), seega ka kõik harilike arvjadade puhul tuntud koregulaarsed maatriksmenetlused. Järelikult kõik tulemused, mis me saame menetluste klassi $\mathcal{T}$ kohta, on kehtivad arvjadade puhul.

Tingimust (T) rahuldavate menetluste jaoks saab näidata, et iga tõkestatud jada ruumis $\mathcal{A}^*$ on koonduvate jadade hulga kuhjumispunktiks. Selle näitamiseks vaatleme pidevat lineaarset funktsionaali ruumis $\mathcal{A}^*$

$$f(\mathcal{C}) = \sum_{k} \psi_k(x_k) + \sum_{n} \varphi_n(y_n) + \varphi(y).$$

Uurime eraldi liiget

$$\sum_{n} \varphi_n(y_n) = \sum_{n} \varphi_n\left(\sum_{k} A_{nk} x_k\right)$$

ning selgitame, millisel juhul võib viimases avaldises muuta summeerimisjärjekorda. Kuna meil on tegu koonduvust säilitavate menetlustega, siis teoreemi 1. 7 tingimuse 3^0 põhjal iga pideva lineaarse funktsionaali g puhul ruumis Y

$$\Big\|\sum_{k=0}^{p} gA_{nk}x_k\Big\| \leq M\|g\| \quad (p,n=0,1,\dots),\ \|x_k\|\leq 1.$$

Rakendades mõttekäiku, mida kasutasime pideva lineaarse funktsionaali $g_m(y)$ normi leidmisel (vt. lk. 11) saame, et

$$\sum_k \|gA_{nk}\| \leq M\|g\| \quad (n=0,1,\dots)$$

iga pideva lineaarse funktsionaali g puhul ruumis Y. Viimast asjaolu arvestades võime öelda, et rida

$\sum_n \varphi_n(\sum_k A_{nk}x_k)$ on absoluutselt koonduv iga tõkestatud jada $\mathscr{C}=\{x_k\}$ puhul. Seega tõkestatud jadade korral

$$\sum_n \varphi_n\Big(\sum_k A_{nk}x_k\Big) = \sum_k \sum_n \varphi_n A_{nk}x_k .$$

Kui tähistame

$$g_k = \psi_k + \sum_n \varphi_n A_{nk},$$

siis

$$f(\mathscr{C}) = \sum_k g_k(x_k) + \varphi(y).$$

Arvestades viimast võrdust, on lihtne veenduda, et tingimust (T) täitvate menetluste puhul iga tõkestatud jada on koonduvate jadade hulga kuhjumispunktiks ruumis $\mathcal{A}^*$. Selle tõestamiseks piisab näidata, et iga pidev lineaarne funktsionaal ruumis $\mathcal{A}^*$, mis saab nulliks koonduvate jadade hulgal, saab seda ka kõigi ruumi $\mathcal{A}^*$ kuuluvate tõkestatud jadade puhul.

Tõepoolest, olgu

$$f(\mathscr{C})=0 \quad \text{iga} \quad \mathscr{C}\in c_X \quad \text{korral.}$$

Valides jada $x_r^*(x) = x(x) - \sum_{k=0}^{r} x_k(x)$, arvutame

$$\lim_r f(x_r^*(x)) = \lim_r \sum_{k=r+1}^{\infty} g_k(x_k) + \lim_r \varphi(Ax - \sum_{k=0}^{r} A_k x) = 0,$$

millest tingimuse (T) põhjal φ on nullfunktsionaal.
Kui valime jada $\bar{\mathscr{C}} = \{\bar{x}_k\}$, kus

$$\bar{x}_k = \begin{cases} \operatorname{sgn} g_k(x) \cdot x &, k \le m, \\ 0 &, k > m, \end{cases}$$

siis tingimusest $f(\bar{\mathscr{C}}) = 0$ nähtub, et kõik funktsionaalid g_k $(k = 0, 1, \dots)$ on nullfunktsionaalid. Sellest järeldubki, et

$$f(\mathscr{C}) = 0 \quad \text{iga} \quad \mathscr{C} \in m_X \cap \mathcal{A}^* \quad \text{puhul,}$$

kui vaid

$$f(\mathscr{C}) = 0 \quad \text{iga} \quad \mathscr{C} \in c_X \quad \text{korral.}$$

N ä i d e: Vaatleme eelmise paragrahvi näites 4 toodud menetlust, mis osutus koregulaarseks menetluseks. Kas selline menetlus täidab ka tingimust (T) ? Kontrollime, kas võrdusest

$$\lim_r \varphi(Ax - \sum_{k=0}^{r} A_k x) = 0 \qquad (x \in c)$$

järeldub, et φ on nullfunktsionaal.

Antud juhul saame sellest tingimusest, et võrdusest

$$\sum_{\mu} \alpha_{\mu} = 0 \qquad \left(\sum_{\mu} |\alpha_{\mu}| < \infty\right)$$

peab järelduma $\alpha_{\mu} = 0$ $(\mu = 0, 1, \dots)$. Siit on ilmne, et vaadeldav menetlus ei rahulda tingimust (T) .

II KOONDUVUST SÄILITAVATE MENETLUSTE OMADUSI

§ 1. Menetluste kooskõla

Käesolevas paragrahvis vaatleme mõningaid üldistatud maatriksmenetluste kooskõlaga seotud küsimusi. Tõestatavad teoreemid on üldistusteks vastavatele Zelleri tulemustele [28].

T e o r e e m 2. 1. Kui menetlus $\mathcal{A}$ on koregulaarne ja $\mathcal{D}$ konullmenetlus, siis ei leidu menetlust $\mathcal{B}$, mis oleks kooskõlas menetlusega $\mathcal{D}$ ning mille puhul $\mathcal{B}^*=\mathcal{A}^*$.

T õ e s t u s. Kui $\mathcal{B}^*=\mathcal{A}^*$, siis teoreemi 1. 10 põhjal on menetlus $\mathcal{B}$ koregulaarne.

Teiselt poolt, arvestades, et $\mathcal{D}$ on kooskõlas menetlusega $\mathcal{B}$ (ilmselt kehtib vahekord $\mathcal{A}^*=\mathcal{B}^*\subset\mathcal{D}^*$), peab

$$\lim_n \sum_{k=r+1}^{\infty} D_{nk}x = \lim_n \sum_{k=r+1}^{\infty} B_{nk}x \qquad (r=0,1,\dots)$$

ehk teisiti

$$Dx - \sum_{k=0}^{r} D_k x = Bx - \sum_{k=0}^{r} B_k x \qquad (r=0,1,\dots).$$

Siit on aga ilmne, et kui tingimus (K) on täidetud menetluse $\mathcal{D}$ korral, siis ka $\mathcal{B}$ puhul, kust $\mathcal{B}$ on konull-menetlus. Saime vastuolu, mis tõestabki antud teoreemi.

T e o r e e m 2. 2. a) Olgu jada $\mathscr{C}_0 \in \mathcal{A}^*$ hulga c_X puutepunktiks ruumis $\mathcal{A}^*$. Menetlus $\mathcal{B}$ olgu mittenõrgem menetlusest $\mathcal{A}$ ja kehtigu seosed

$$(1) \quad \begin{aligned} &\lim_n \sum_k A_{nk} x = \lim_n \sum_k B_{nk} x , \\ &\lim_n A_{nk} x = \lim_n B_{nk} x \quad (k=0,1,\dots) \end{aligned}$$

iga $x \in X$ korral. Neil tingimusil $\mathcal{B}\{\mathscr{C}_0\} = \mathcal{A}\{\mathscr{C}_0\}$.

b) Kui jada $\mathscr{C}_0$ ei ole hulga c_X puutepunktiks menetluse $\mathcal{A}$ summeerimisväljas $\mathcal{A}^*$, siis vastavalt igale elemendile $y_0 \in Y$ leidub menetlus $\mathcal{B}$, mis on mittenõrgem menetlusest $\mathcal{A}$, rahuldab tingimusi (1) ning summeerib jada $\mathscr{C}_0$ summaks y_0, s.t. $\mathcal{B}\{\mathscr{C}_0\} = y_0$.

T õ e s t u s. a) Tingimuste (1) põhjal

$$\mathcal{B}\{\mathscr{C}\} = \mathcal{A}\{\mathscr{C}\} \quad \text{iga } \mathscr{C} \in c_X \text{ puhul.}$$

Kuna $\mathscr{C}_0$ on hulga c_X puutepunkt, siis leidub jada $\mathscr{C}_m \in c_X$ $(m=0,1,\dots)$, nii et

$$\mathscr{C}_m \to \mathscr{C}_0 .$$

Et aga

$$\mathcal{A}\{\mathscr{C}_m\} = \mathcal{B}\{\mathscr{C}_m\} \quad (m=0,1,\dots),$$

siis ilmselt

$$\mathcal{A}\{\mathscr{C}_0\} = \mathcal{B}\{\mathscr{C}_0\},$$

kuna maatriksmenetlusega defineeritud summa kujutab endast pidevat lineaarset operaatorit.

b) Kui $\mathscr{C}_0$ ei ole hulga c_X puutepunkt ruumis $\mathcal{A}^*$, siis Banach-Hahni teoreemi järelduse põhjal leidub selline pidev lineaarne funktsionaal, et

$$f(\mathscr{C}) = \begin{cases} 0, \text{ kui } \mathscr{C} \in c_X, \\ 1, \text{ kui } \mathscr{C} = \mathscr{C}_0. \end{cases}$$

Seosest

$$F(\mathscr{C}) = \mathcal{A}\{\mathscr{C}\} + (y_0 - \mathcal{A}\{\mathscr{C}_0\}) f(\mathscr{C})$$

nähtub, et leidub pidev lineaarne operaator F ruumist $\mathcal{A}^*$ ruumi Y, nii et $F(\mathscr{C}) = \mathcal{A}\{\mathscr{C}\}$, kui $\mathscr{C} \in c_X$ ja $F(\mathscr{C}_0) = y_0$. Näitame, et leidub menetlus $\mathcal{B} = (B_{nk})$, mille puhul

$$F(\mathscr{C}) = \mathcal{B}\{\mathscr{C}\} \quad \text{iga } \mathscr{C} \in \mathcal{A}^* \text{ korral.}$$

Tõepoolest,

$$F(\mathscr{C}) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} A_{nk} x_k + (y_0 - \mathcal{A}\{\mathscr{C}_0\}) \left[\sum_k \psi_k(x_k) + \sum_n \varphi_n(y_n) + \varphi(y) \right] =$$

$$= \lim_n \sum_{k=0}^{n} A_{nk} x_k + (y_0 - \mathcal{A}\{\mathscr{C}_0\}) \lim_n \sum_{k=0}^{n} c_{nk}(x_k) =$$

$$= \lim_n \sum_{k=0}^{n} B_{nk} x_k ,$$

kus

$$c_{nk} = \psi_k + \varphi_0 A_{0k} + \varphi_1 A_{1k} + \ldots + \varphi_{n-1} A_{n-1,k} + \varphi A_{nk}$$

ja

$$B_{nk} x = A_{nk} x + (y_0 - \mathcal{A}\{\mathscr{C}_0\}) c_{nk}(x).$$

T e o r e e m 2. 3. Olgu $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$ ja $\mathscr{C}^* \in m_X \cap \mathcal{A}^*$.

Kui menetlus $\mathcal{B}$ on mitte nõrgem menetlusest $\mathcal{A}$ ning on temaga kooskõlas koonduvate jadade hulgal, siis

$$\mathcal{B}\{\mathcal{C}^*\} = \mathcal{A}\{\mathcal{C}^*\}.$$

T õ e s t u s. Kuna $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$, siis iga jada hulgast $m_x \cap \mathcal{A}^*$ on koonduvate jadade hulga puutepunktiks ruumis $\mathcal{A}^*$ (vt. I ptk. § 6). Seega jada $\mathcal{C}^*$ puhul on täidetud teoreemi 2. 2 a) tingimused ning me saame teoreemi 2. 3 väite järeldusena teoreemist 2. 2.

Saadud teoreem on üldistus Mazur-Orlicz'i poolt antud teoreemile menetluste kooskõla kohta tõkestatud jadade puhul (vt. teoreem 2 [19], teoreem 6 [16] või teoreem 6. 4 [28]).

§ 2. Menetluste perfektsus

Menetlust $\mathcal{A}$ nimetatakse perfektseks, kui ta on kooskõlas kõigi temast mittenõrgemate menetlustega $\mathcal{B}$ $(\mathcal{B}^* \supseteq \mathcal{A}^*)$, eeldusel, et kooskõla leiab aset hulgal $E = \{u(x), u_k(x)\}$ $(x \in X;\ k = 0, 1, \ldots)$. Teoreemi 2. 2 põhjal võime väita, et menetlus $\mathcal{A}$ on perfektne parajasti siis, kui E moodustab põhihulga ruumis $\mathcal{A}^*$.

Arvjadade puhul annab Mazur-Banachi teoreem [1] tarviliku ja piisava tingimuse pööratava menetluse perfektsuseks. Käesolevas üldistame selle teoreemi tingimust (T) täitvatele menetlustele, tõestades teoreemi MacPhail'i [15] poolt kasutatud meetodiga.

T e o r e e m 2. 4. Pööratav menetlus $\mathcal{A}\in\mathcal{T}$ on perfektne parajasti siis, kui tingimustest

$$\sum_n \|\varphi_n\| < \infty ,$$

$$\sum_n \varphi_n A_{nk} x = 0 \qquad (x\in X;\ k=0,1,\dots)$$

järeldub, et φ_n $(n=0,1,\dots)$ on nullfunktsionaal.

T õ e s t u s. Menetlusi, mille puhul on täidetud käesoleva teoreemi tingimused, nimetatakse M-tüüpi menetlusteks. Meil on vaja näidata, et pööratav menetlus $\mathcal{A}\in\mathcal{T}$ on M-tüüpi parajasti siis, kui hulk E moodustab põhihulga ruumis $\mathcal{A}^*$. Viimane nõue on ilmselt ekvivalentne nõudega, et iga pidev lineaarne funktsionaal mis saab nulliks hulgal E, saab seda ka kogu ruumis $\mathcal{A}^*$ s.t. tingimustest

$$\sum_n \|\varphi_n\| < \infty ,$$

$$\varphi A_k x + \sum_n \varphi_n A_{nk} x = 0 \quad (k=0,1,\dots),$$

$$\varphi A x + \sum_n \varphi_n \sum_k A_{nk} x = 0$$

peab järelduma, et φ ja φ_n $(n=0,1,\dots)$ on nullfunktsionaalid.

Kerge on näha, et viimane nõue on ekvivalentne meie teoreemi nõudega. Tõepoolest, summeerides viimati kirjutatud tingimustest teist k järgi $(k=0,1,\dots,r)$, lahutades kolmandast ning minnes piirile $(r\to\infty)$, saame, et tingimustest

$$\sum_n \|\varphi_n\| < \infty ,$$

$$\varphi A_k x + \sum_n \varphi_n A_{nk} x = 0 \qquad (k=0,1,\dots),$$

$$\lim_r \varphi\left(Ax - \sum_{k=0}^{r} A_k x\right) = 0$$

peab järelduma, et φ ja φ_n $(n=0,1,\dots)$ on nullfunktsionaalid.

Kuna $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$, siis tingimuse (T) põhjal φ on nullfunktsionaal ning seega on saadud tingimused ekvivalentsed teoreemi tingimustega. Viimane asjaolu tõestabki teoreemi.

Kui meil on tegu konull-menetlustega, siis võime ka nende puhul saada analoogse teoreemi, arvestades asjaolu, et konull-menetluse puhul jada $\mathcal{N}(x)$ on nulljadade hulga puutepunktiks ruumis $\mathcal{A}^*$. Seega perfektse konull-menetluse summeerimisväljas peavad jadad $\mathcal{N}_k(x)$ $(x \in X;\ k=0,1,\dots)$ moodustama põhihulga, s.t. kui pidev lineaarne funktsionaal on null hulgal $E' = \{\mathcal{N}_k(x)\}$ $(x \in X;\ k=0,1,\dots)$, siis ka kogu ruumis $\mathcal{A}^*$. Teiste sõnadega, tingimustest

$$\sum_n \|\varphi_n\| < \infty ,$$

$$\varphi A_k x + \sum_n \varphi_n A_{nk} x = 0 \qquad (k=0,1,\dots)$$

peab järelduma, et φ, φ_n $(n=0,1,\dots)$ on nullfunktsionaalid. Eelpoolöeldut võime kokku võtta järgmiseks teoreemiks.

T e o r e e m 2. 5. Pööratav konull-menetlus $\mathcal{A}$ on perfektne parajasti siis, kui tingimustest

$$\sum_{n} \|\varphi_n\| < \infty ,$$

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \varphi_n A_{nk} x = 0 \qquad (k=0,1,\dots ; A_{-1,k} = A_k)$$

järeldub, et $\varphi_n \ (n=-1,0,1,\dots)$ on nullfunktsionaalid.

§ 3. Tõkestamata jada olemasolu summeerimisväljas

Konull-menetluse definitsioonist on ilmne, et jada $u(x)$ on hulga c_X^0 puutepunktiks ruumis $\mathcal{A}^*$. Kuna aga selline olukord ei leia aset ruumis m_X, siis ei saa kehtida vahekord $m_X \supset \mathcal{A}^*$, millest järeldub

T e o r e e m 2. 6. Iga konull-menetlus summeerib tõkestamata jada.

Koregulaarsete menetluste puhul ilmselt selline teoreem ei kehti, kuna näiteks koonduvusmenetlus (regulaarne) summeerib vaid koonduvaid jadasid. Siin osutub olukord hoopiski komplitseeritumaks. Tõestame selles suunas mõned teoreemid, kust erijuhtudena saame arvjadade puhul tuntud tulemused.

T e o r e e m 2. 7. Kui nulljadade hulgal regulaarne menetlus $\mathcal{A}$ summeerib mingi tõkestatud hajuva jada $\mathscr{C}$ nulliks, siis summeerib ta ka tõkestamata jada.

T õ e s t u s. Vaatleme jada $\mathscr{C}$ lõikeid

$$\mathscr{C}_r = \{x_0, x_1, \dots, x_r, 0, \dots\} \qquad (r = 0, 1, \dots)$$

ning näitame, et jada $\mathscr{C}$ puhul leiab aset nõrk lõikekoonduvus ruumis $\mathcal{A}^*$.

Kuna $\mathscr{C} \in \mathcal{A}_0^*$, s.t. $y = \mathcal{A}\{\mathscr{C}\} = 0$, siis iga pideva lineaarse funktsionaali puhul ruumis $\mathcal{A}^*$

$$f(\mathscr{C}) = \sum_k \psi_k(x_k) + \sum_n \varphi_n\Big(\sum_k A_{nk} x_k\Big).$$

Arvestades menetluse $\mathcal{A}$ regulaarsust nulljadade puhul ($\mathcal{A}\{\mathscr{C}_r\} = 0$), leiame

$$f(\mathscr{C}_r) = \sum_{k=0}^{r} \psi_k(x_k) + \sum_n \varphi_n\Big(\sum_{k=0}^{r} A_{nk} x_k\Big).$$

Meil tuleb näidata, et

$$\lim_r f(\mathscr{C}_r) = f(\mathscr{C}),$$

s.t. et jada $\mathscr{C}$ puhul leiab aset nõrk lõikekoonduvus. On ilmne, et selleks on tarvilik ja piisav jada y_r nõrk koonduvus jadaks y ruumis C_Y^0, kus $y_r = \sum_{k=0}^{r} A_{nk} x_k$ ja $y = \sum_k A_{nk} x_k$. Viimane olukord aga kehtib parajasti siis, kui

d) $\lim_r \varphi\Big(\sum_{k=0}^{r} A_{nk} x_k\Big) = \varphi\Big(\sum_k A_{nk} x_k\Big)$ iga n ja iga φ puhul ruumis Y;

e) jada $\{y_r\}$ on tõkestatud.

(vt. tingimused a) ja c) I ptk. § 4).

Tingimus d) on antud juhul täidetud, sest iga $\mathscr{C} \in \mathcal{A}^*$ puhul isegi

$$\lim_{r} \sum_{k=0}^{r} A_{nk} x_k = \sum_{k} A_{nk} x_k .$$

Ka tingimus e) on täidetud, sest jada $\mathscr{C}$ on tõkestatud, s.t. $\sup_k \|x_k\| = M_1$, ja teoreemi 1. 7 põhjal

$$\left\| \sum_{k=0}^{r} A_{nk} x_k \right\| \leq M \quad (n, r = 0, 1, \dots), \ \|x_k\| \leq 1,$$

millest

$$\left\| \sum_{k=0}^{r} A_{nk} x_k \right\| = M_1 \left\| \sum_{k=0}^{r} A_{nk} \frac{x_k}{M_1} \right\| \leq M_1 \cdot M \quad (n, r = 0, 1, \dots).$$

Seega jada $\mathscr{C}$ puhul leiab aset nõrk lõikekoonduvus, millest järeldub, et jada $\mathscr{C}$ on hulga C_X^0 puutepunktiks ruumis $\mathcal{A}^*$. Kuna ta aga seda ei ole ruumis m_X, siis ilmselt ei saa kehtida vahekord $m_X \supset \mathcal{A}^*$ (vt. teoreem 1. 8). Sellest aga järeldubki, et ruumis $\mathcal{A}^*$ peab leiduma tõkestamata jada.

Tõestatud teoreemist saame järeldustena veel kaks samasuunalist teoreemi.

T e o r e e m 2. 8. Kui nulljadade puhul regulaarne menetlus summeerib samaks summaks ühe koonduva ja ühe tõkestatud hajuva jada, siis see menetlus summeerib ka tõkestamata jada.

T e o r e e m 2. 9. Kui regulaarne menetlus summeerib vaid tõkestatud jadasid, siis ainult koonduvaid.

Arvjadade puhul on teoreemile 2. 9 analoogne teoreem tõestatud mistahes koregulaarse menetluse puhul (vt. [28 , 32 , 19]). Antud üldistatud menetluste juhul aga ei ole vastavat teoreemi õnnestunud saada. Seda võib aga saada nende menetluste puhul, kus on täidetud tingimus (T)

T e o r e e m 2. 10. Kui koregulaarne menetlus $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$ summeerib vaid tõkestatud jadasid, siis ainult koonduvaid.

T õ e s t u s. Summeerigu menetlus $\mathcal{A}$ jada $\mathcal{C}_1 \in m_X (\mathcal{C}_1 \bar{\in} c_X)$. Nagu nägime I ptk. § 6, peab jada $\mathcal{C}_1$ sel juhul olema hulga c_X puutepunkt ruumis $\mathcal{A}^*$. Kuna aga c_X on kinnine ruumis m_X, siis ei saa kehtida vahekord $m_X \supset \mathcal{A}^*$ (vt. teoreem 1. 8), mistõttu peab leiduma $\mathcal{C}_2 \in \mathcal{A}^*$, nii et $\mathcal{C}_2 \bar{\in} m_X$.

I ptk. § 6 tehtud märkuste põhjal saame äsjatõestatud teoreemist järeldustena eelmise teoreemi kui ka teoreemi 7. 1 [28].

§ 4. Tõkestatud hajuvate jadade summeerimine

Eelmises paragrahvis nägime, et kui koonduvust säilitav menetlus summeerib hajuvaid jadasid, siis - eeskätt tõkestamata jadasid. Tekib küsimus, millistel tingimustel menetlus summeerib tõkestatud hajuvaid jadasid.

Saab näidata, et ükski koregulaarne menetlus ei saa summeerida kõiki tõkestatud jadasid. See järeldub tingimusist, mis on tarvilikud ja piisavad selleks, et maatriks $\mathcal{A}=(A_{nk})$ teisendaks ruumi m_X ruumi c_Y (vt. [6, 14]). Tõepoolest, kuna sel juhul peab olema täidetud tingimus

$$\lim_n \|\sum_{k=0}^{r}(A_{nk}-A_k)x\|=0$$

(ühtlaselt p suhtes), siis

$$\lim_n \sum_k A_{nk}x=\sum_k A_k x,$$

millest

$$\lim_r \varphi(Ax-\sum_{k=0}^{r}A_k x)=0$$

iga $x\in X$ ja iga φ puhul ruumis Y, s.t. menetlus $\mathcal{A}$ on konull-menetlus.

Viimati tõestatu annab meile erijuhuna Steinhausi teoreemi (vt. [25] või [7]).

Nüüd tekib küsimus, millistel tingimustel koregulaarne menetlus üldse summeerib tõkestatud hajuvaid jadasid? Arvjadade puhul annab sellele küsimusele vastuse Wilansky ja Zelleri poolt tõestatud teoreem (vt. [35]). Käesolevas üldistame selle teoreemi juhule, kus meil on tegu menetlustega, mis täidavad tingimust (T).

T e o r e e m 2.11. Kui $\mathcal{A}\in\mathcal{T}$, siis on järgmised tingimused ekvivalentsed:

(a) c_X on kinnine ruumis $\mathcal{A}^*$;

(b) $\mathcal{A}$ ei summeeri tõkestatud hajuvat jada.

T õ e s t u s. Kasutame fakti, et kui c_X ei ole kinnine ruumis $\mathcal{A}^*$, siis topoloogia

(I) $$\|\mathscr{C}\|=\sup_k\|x_k\|$$

on rangelt tugevam topoloogiast

$$\begin{aligned} &p_0(\mathfrak{C}) = \sup_n \Big\| \sum_k A_{nk} x_k \Big\|, \\ \text{(II)} \qquad &p_{2n-1}(\mathfrak{C}) = \sup_l \Big\| \sum_{k=0}^{l} A_{nk} x_k \Big\| \qquad (n = 0, 1, \ldots), \\ &p_{2n}(\mathfrak{C}) = \| x_n \|, \end{aligned}$$

s.t. leidub jada, mis on koonduv topoloogia (II) järgi, kuid ei ole koonduv topoloogia (I) järgi.

(a) → (b). Oletame, et c_X on kinnine ruumis $\mathcal{A}^*$. Sellest järeldub, et $\mathcal{A}$ on koregulaarne, kuna konull-menetluse puhul oleks jada $\mathfrak{n}(x)$ nulljadade hulga c_X^0 puutepunktiks ruumis $\mathcal{A}^*$. Hulga c_X kinnisuse tõttu peaks selline olukord aset leidma ka topoloogia (I) järgi (sel juhul topoloogiad on samaväärsed), mis aga ilmselt~~selt~~ ei ole õige.

Kui $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$, siis iga tõkestatud jada ruumis $\mathcal{A}^*$ on hulga c_X kuhjumispunktiks, mistõttu peab kehtima vahekord

$$c_X \subset m_X \cap \mathcal{A}^* \subset \bar{c}_X,$$

millest c_X kinnisuse tõttu $c_X = m_X \cap \mathcal{A}^*$, s.t. menetlus ei summeeri tõkestatud hajuvat jada.

(b) → (a). Eeldame vastupidist, s.t. et c_X ei ole kinnine ruumis $\mathcal{A}^*$. Siis leidub jada $\{\mathfrak{C}_r\}$ $(\mathfrak{C}_r \in c_X)$, nii et

$$\mathfrak{C}_r \to \mathfrak{C} \quad (r \to \infty),$$

kus $\mathfrak{C} \bar{\in} c_X$. Kui $\mathfrak{C} \in m_X \cap \mathcal{A}^*$, siis ilmselt (b) → (a), Seepärast võime eeldada, et $\mathscr{C} \in m_x \cap \mathcal{A}^*$. Sel juhul on tõestus analoogne teoreemi 3. 1 [21] tõestusele, mille juures me käesolevas ei peatu. Seda tõestusmeetodit kasutame III ptk. § 8, kus tõestame kaks lemmat. Tuleb märkida, et teoreemi 3. 1 [21] tõestus annab rohkem, kui on väljendatud teoreemi sõnastusega. Nimelt,

kui FK-ruumis R tõkestamata jada $\mathscr{C}$ osutub koonduvate jadade hulga kuhjumispunktiks, siis leidub ruumis R ka tõkestatud hajuv jada.

Teoreemi 2.11 tõestuse põhjal võime teha kaks küllaltki huvitavat järeldust.

J ä r e l d u s 2. 12. Iga konull-menetlus summeerib ka tõkestatud hajuva jada.

J ä r e l d u s 2. 13. Kui perfektne menetlus $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$ summeerib mittekoonduvaid jadasid, siis summeerib ta nii tõkestatud kui ka tõkestamata hajuvaid jadasid.

III SUMMEERIMISMENETLUSTE ÜLDINE KÄSITLUS

§ 1. Menetluse definitsioon

Käesolevas vaatleme Sikorski [8] poolt antud summeerimismenetluse definitsiooni, millest erijuhtudena saame maatriksmenetluse (arvjadade puhul), funktsionaalse menetluse (vt. [36]) ning integraalmenetluse (vt. kasvõi [29]).

Olgu N_0 ja $\mathcal{N}_0$ mingid reaalarvude kompaktsed hulgad, n_0 ja ν_0 vastavalt nende kuhjumispunktid (s.t. mitte isoleeritud punktid). Tähistame

$$N = N_0 - \{n_0\},$$

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 - \{\nu_0\}.$$

Eeldame veel, et N_0 kujutab endast meetrilist ruumi, milles vaatleme hulki

$$N_\mu = \underset{n \in N}{E}\left(\varrho(n, n_0) \geq \frac{1}{\mu}\right) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

Olgu $\mathcal{X}$ mingi fikseeritud F-ruum, milles igale arvule $\nu \in \mathcal{N}$ on vastavusse seatud mingi ruumi $\mathcal{X}$ pidev lineaarne kujutis $\mathcal{T}_\nu$ iseendasse $(x_\nu = \mathcal{T}_\nu(x) \in \mathcal{X},\ \nu \in \mathcal{N})$.

Operaatorid $\mathcal{T}_\nu$ rahuldagu tingimusi:

(a) $\lim\limits_{\nu \to \nu_0} x_\nu = x$ ruumis $\mathcal{X}$;

(b) $\mathcal{T}_\nu \mathcal{T}_{\nu'} = \mathcal{T}_{\nu'} \mathcal{T}_\nu = \mathcal{T}_{min(\nu,\nu')}$, s.t. $(x_\nu)_{\nu'} = x_{min(\nu,\nu')}$.

Edasi eeldame, et igale punktile $n \in N$ vastab mingi lineaarne (pidevus pole oluline) funktsionaal f_n, mis on määratud ruumis $\mathcal{X}'$, kus $\mathcal{X}'$ koosneb kõigist elementidest x_ν, mille puhul $x \in \mathcal{X}$ ja $\nu \in \mathcal{N}$. Funktsionaalide kohta eeldame, et nad rahuldavad järgmisi tingimusi:

(c) iga fikseeritud $x \in \mathcal{X}$ puhul on $f_{n\nu}(x) = f_n(x_\nu)$, kui muutujate n ja ν funktsioon, pidev ruumis $N \times \mathcal{N}$;

(d) fikseeritud $n \in N$ ja $\nu \in \mathcal{N}$ puhul on lineaarne funktsionaal $f_{n\nu}$ (määratud ruumis $\mathcal{X}$) pidev.

Iga sellist süsteemi

$$\mathcal{A} = [\mathcal{X}, \mathcal{N}, \nu_0, N, n_0, \{\mathcal{T}_\nu\}, \{f_n\}],$$

mis rahuldab eelpool nimetatud tingimusi, nimetatakse summeerimismenetluseks. Edaspidises uurimegi lähemalt selliseid summeerimismenetlusi, mistõttu eeldame, et kõik ülalmainitud tingimused on täidetud. Summeerimismenetluse $\mathcal{A}$ puhul nimetatakse elemendi x $\mathcal{A}$-summaks lõplikku piirväärtust

$$\lim_{n \to n_0} \lim_{\nu \to \nu_0} f_n(x_\nu) = f(x).$$

Järgnevas vaatleme mõningaid näiteid, kus ruumiks $\mathcal{X}$ on mingi jada- või siis funktsionaalruum. Sel viisil saamegi, määrates sobivalt ka funktsionaalid f_n , juba tuntud summeerimismenetlused.

N ä i d e 1. Olgu $\mathfrak{X}=s$ (kõikide arvjadade ruum), N ja $\mathfrak{N}$ kõikide naturaalarvude hulgad ($n_0 = \nu_0 = \infty$). Operaator $\mathcal{T}_\nu$ olgu defineeritud järgmiselt

$$x_\nu = \mathcal{T}_\nu(x) = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu, 0, 0 \ldots\}, \quad x = \{\xi_k\},$$

ning funktsionaalid

$$f_n(x_\nu) = \sum_{k=0}^{\nu} a_{nk} \xi_k,$$

kus (a_{nk}) on lõpmatu maatriks.

Sel viisil saame nn. jada-jada teisenduse kujul antud maatriksmenetluse.

N ä i d e 2. Kui tahame saada jada-rida teisendusega antud menetlust, siis hulgad N ja $\mathfrak{N}$ defineerime nagu eelmises näites, samuti ka operaatorid $\mathcal{T}_\nu$, ainult vastavate funktsionaalide puhul

$$f_n(x_\nu) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_{ik} \xi_k,$$

kus (α_{ik}) on lõpmatu maatriks.

N ä i d e 3. Olgu $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{N}$, ν_0 ja $\mathcal{T}_\nu$ nagu esimeses näites. Hulgaks N võtame mingi reaaltelje pool-lõigu $[m_0, n_0)$ (n_0 on kas lõplik või lõpmatu) ning funktsionaalideks

$$f_n(x_\nu) = \sum_{k=0}^{\nu} a_k(n) \xi_k,$$

kus $\{a_k(n)\}$ on selline hulgal N määratud funktsioonide jada, et on täidetud tingimus (c) . Saame Wlodarski [36 , 37] poolt vaadeldud funktsionaalse menetluse.

N ä i d e 4. Olgu $\mathcal{X}$ kõikide funktsioonide ruum, mis on määratud vahemikus $[0,\infty)$ ja on Lebesgue'i mõttes integreeruvad igal lõplikul lõigul $[0,t]$. Selline ruum on F-ruum (vt. [29]). Olgu $N=\mathcal{N}=[0,\infty)$ ning $n_0=\nu_0=\infty$. Siin

$$x_\nu = x_\nu(t) = \begin{cases} x(t) & , t\le \nu, \\ 0 & , t>\nu, \end{cases}$$

ning

$$f_n(x_\nu) = \int_0^\nu \mathcal{K}(n,t)\,x(t)\,dt,$$

kus $\mathcal{K}(n,t)$ on tingimusi (c) ja (d) rahuldav funktsioon. Seega saame integraalmenetluse.

§ 2. Menetluse summeerimisväli

Refereerime siin Sikorski [8] tulemuse selle kohta, et kõigi nende elementide $x\in\mathcal{X}$ hulk, mis on summeeruvad menetlusega $\mathcal{A}$, on teatav F-ruum. Elemendi x $\mathcal{A}$-summeeruvus tähendab, et peab eksisteerima lõplik piirväärtus

$$\lim_{n\to n_0}\lim_{\nu\to\nu_0} f_n(x_\nu) = f(x).$$

Kõigepealt määrame nende punktide $x\in\mathcal{X}$ hulga $\mathcal{X}^\circ$, mille puhul $f_n(x_\nu)$ koondub peaaegu ühtlaselt (s.t. ühtlaselt igal hulga N kompaktsel alamhulgal), kui $\nu\to\nu_0$. Selline hulk osutub F-ruumiks kõigi $\mathcal{X}$ kvaasinormidega ning kvaasinormidega:

$$\|x\|_\mu = \sup_{\substack{\nu \in \mathcal{N} \\ n \in N_\mu}} |f_n(x_\nu)| \qquad (\mu = 1, 2, \ldots).$$

Tingimuse (b) põhjal $\mathcal{X}'$ kuulub ruumi $\mathcal{X}^\circ$. Võttes $f_n(x) = \lim\limits_{\nu \to \nu_0} f_n(x_\nu)$, laiendame f_n definitsiooni kogu ruumile $\mathcal{X}^\circ$.

Menetluse $\mathcal{A}$ summeerimisväli $\mathcal{A}^*$ on lineaarne ruum kõikidest sellistest punktidest $x \in \mathcal{X}^\circ$, mille puhul eksisteerib $f(x) = \lim\limits_{n \to n_0} f_n(x)$. Ruum $\mathcal{A}^*$ osutub F-ruumiks kõigi $\mathcal{X}^\circ$ kvaasinormidega ning kvaasinormiga

$$\|x\|_0 = \sup_{n \in N} |f_n(x)| .$$

Eelnevatest märkustest saab järeldada, et $f_n(x)$ (iga $n \in N$ puhul) ja $f(x)$ osutuvad pidevaiks lineaarseteks funktsionaalideks ruumis $\mathcal{A}^*$.

Ruumi $\mathcal{A}^*$ meetrikast järeldub vahetult, arvestades Mazuri ja Orlicz'i poolt arendatud teooriat [18],

T e o r e e m 3. 1. Iga pidev lineaarne funktsionaal φ ruumis $\mathcal{A}^*$ avaldub kujul

$$\varphi(x) = F(x) + \int_{N_0} f_n(x)\, d\tau(n),$$

kus $F(x)$ on pidev lineaarne funktsionaal ruumis $\mathcal{X}^\circ$ ja $\tau(n)$ loenduvalt aditiivne funktsioon kõigil hulga N_0 Boreli alamhulkade klassil.

Olgu $\bar{\mathcal{A}}$ kõigi nende $x \in \mathcal{A}^*$ hulk, mille puhul on täidetud tingimused :

1° $f(x_\nu) = \lim\limits_{n \to n_0} f_n(x_\nu)$ eksisteerib iga $\nu \in \mathcal{N}$ puhul;

2° $\lim\limits_{\nu \to \nu_0} f(x_\nu)$ eksisteerib;

3° $\sup\limits_{\substack{\nu \in \mathcal{N} \\ n \in N}} |f_n(x_\nu)| < \infty$.

Nendest tingimustest järeldub (vt. [8])

T e o r e e m 3. 2. Kui φ on pidev lineaarne funktsionaal ruumis $\mathcal{A}^*$ ning $x \in \bar{\mathcal{A}}$, siis

$$\varphi(x) = \lim_{\nu \to \nu_0} \varphi(x_\nu) + \tau(n_0)\left[f(x) - \lim_{\nu \to \nu_0} f(x_\nu)\right].$$

§ 3. Koregulaarsed ja konull-menetlused

Käesolevas paragrahvis üldistame mõisted "koregulaarne" ja "konull" menetlusele

$$\mathcal{A} = [\mathcal{X}, \mathcal{N}, \nu_0, N, n_0, \{T_\nu\}, \{f_n\}].$$

Üldistuse teeme selliselt, et arvjadade puhul tuntud tulemused oleks võimalik saada erijuhtudena üldisest teooriast.

Olgu ruumis $\mathcal{X}$ kinnine alamruum $\mathcal{X}_1$. Siin eeldame, et ruum $\mathcal{X}_1$ on samuti F-ruum. Sel juhul koonduvusest ruumis $\mathcal{X}_1$ järeldub koonduvus ruumis $\mathcal{X}$ (vt. [29]). Eeldame veel, et ruum $\mathcal{X}_1$ sisaldab hulga $\mathcal{X}'$ (vt. lk. 44), millest täielikustamise teel moodustame ruumi $\mathcal{X}_1$ kinnise alamruumi $\mathcal{X}_0$. Olgu siinjuures $\mathcal{X}_0 \neq \mathcal{X}_1$ (hulgateoreetilises mõttes). Niisiis saame ruumid $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ ja $\mathcal{X}$, mille puhul kehtib vahekord

$$\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X},$$

kusjuures ikka koonduvusest kitsamas ruumis järeldub koonduvus laiemas ruumis, s.t. ruumid $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_1$ ja $\mathcal{X}_0$ moodustavad teatud F-süsteemi. Lineaarse ruumi $\mathcal{X}$ poolt moodustatud F-süsteemiks nimetatakse ruumi $\mathcal{X}$ lineaarsete alamruumide $\mathcal{X}_k$ hulka, mille puhul on täidetud tingimused:

(α) $\mathcal{X}_k$ on F-ruum;

(β) kui $x_\nu \to x$ ruumis $\mathcal{X}_k$, siis ka ruumis $\mathcal{X}$ (vt. [29]).

Edasi vaatleme selliseid menetlusi $\mathcal{A}$, mille puhul $\bar{\mathcal{A}} \supset \mathcal{X}_1$. Seega ka ruumid $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{A}^*$ ja $\mathcal{X}$, mille puhul kehtib vahekord

$$\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}_1 \subset \mathcal{A}^* \subset \mathcal{X},$$

moodustavad samuti F-süsteemi.

Arvjadade puhul on tehtud eeldused kõik täidetud, kui võtame $\mathcal{X}_0 = c_0$, $\mathcal{X}_1 = c$, $\mathcal{X} = s$ ning vaatleme koonduvust säilitavaid menetlusi, millisel juhul $\bar{\mathcal{A}} = m \cap \mathcal{A}^*$.

Nimetame nüüd menetlust $\mathcal{A}$ r u u m i $\mathcal{X}_1$ s u h t e s k o r e g u l a a r s e k s, kui ruumis $\mathcal{X}_1$ leidub element x^*, mille puhul x_ν^* ei koondu nõrgalt punktiks x^* ruumis $\mathcal{A}^*$. Teoreemist 3. 2 saame tarviliku ja piisava tingimuse menetluse $\mathcal{A}$ koregulaarsuseks ruumi $\mathcal{X}_1$ suhtes.

D e f i n i t s i o o n 3. 3. Menetlus $\mathcal{A}$ on koregulaarne ruumi $\mathcal{X}_1$ suhtes parajasti siis, kui ruumis $\mathcal{X}_1$ leidub selline element x^*, mille puhul

$$f(x^*) \neq \lim_{\nu \to \nu_0} f(x_\nu^*).$$

Kõik ülejäänud menetlused, mille puhul $\bar{\mathcal{A}} \supset \mathcal{X}_1$, nimetame k o n u l l - m e n e t l u s t e k s r u u m i $\mathcal{X}_1$ s u h t e s. Ka siin saame analoogse tarviliku ja piisava tingimuse.

D e f i n i t s i o o n 3. 4. Menetlus $\mathcal{A}$ on konull-menetlus ruumi $\mathcal{X}_1$ suhtes parajasti siis, kui

$$f(x) = \lim_{v \to v_0} f(x_v) \quad \text{iga} \quad x \in \mathcal{X}_1 \quad \text{puhul.}$$

Selline menetluste jaotus lubab kohe teha kaks küllaltki huvitavat järeldust, kui arvestame Sikorski tulemust IX [8], mis väidab, et kui $\mathcal{B}^* \supset \mathcal{A}^*$ siis $\mathcal{A}^*$ samasuskujutus ruumis $\mathcal{B}^*$ on pidev.

T e o r e e m 3. 5. Ükski ruumi $\mathcal{X}_1$ suhtes koregulaarne menetlus ei saa sisaldada ruumi $\mathcal{X}_1$ suhtes konull-menetlust.

T e o r e e m 3. 6. Kui kahe menetluse summeerimisväljad langevad kokku, siis on nad mõlemad ruumi $\mathcal{X}_1$ suhtes kas koregulaarsed või konull-menetlused.

§ 4. Menetluste võimsus

Selles paragrahvis püüame iseloomustada vaadeldavaid summeerimismenetlusi nende poolt summeeritavate elementide $x \in \mathcal{X}$ kaudu. Selleks valime ruumi $\mathcal{X}$ sellise kinnise alamruumi $\mathcal{X}_2$, et $\mathcal{X}_2$ kuuluks $\mathcal{X}$ poolt moodustatud F-süsteemi, kusjuures $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_2 \subset \mathcal{X}$ ning $\mathcal{X}_2 \neq \mathcal{X}$ (hulgateoreetilises mõttes). Vaatleme seejuures jällegi menetlusi, mille puhul $\mathcal{X}_1 \subset \bar{\mathcal{A}}$ (s.t. ruumi $\mathcal{X}_1$ suhtes kas koregulaarseid või siis konull-menetlusi). Ruumi $\mathcal{X}_1$ suhtes konull-menetluse definitsioon annab vahetult järgmise tulemuse, mis konkreetsetel juhtudel osutub küllaltki huvitavaks.

T e o r e e m 3. 7. Ruumi $\mathcal{X}_1$ suhtes konull-menetlus summeerib elemendi väljaspool ruumi $\mathcal{X}_2$.

Tõepoolest, kuna konull-menetluse definitsioonist järeldub, et iga element ruumis $\mathcal{X}_1$ on hulga $\mathcal{X}_0$ kuhjumispunktiks ruumis $\mathcal{A}^*$, mis aga ei ole õige ruumi $\mathcal{X}_2$ topoloogia mõttes, siis saamegi kohe vastava väite.

Vastuse leidmine küsimusele, millal ruumi $\mathcal{X}_1$ suhtes koregulaarne menetlus summeerib elemendi väljaspool ruumi $\mathcal{X}_2$, osutub aga hoopiski raskemaks. Teatud vastuse selles suunas annab

T e o r e e m 3. 8. Kui menetluse summeerimisväljas $\mathcal{A}^*$ iga element hulgast $\mathcal{X}_2 \cap \mathcal{A}^*$ osutub hulga $\mathcal{X}_1$ kuhjumispunktiks, siis kas menetlus summeerib vaid hulga $\mathcal{X}_1$ elemente või siis summeerib ka elemendi väljaspool ruumi $\mathcal{X}_2$.

Tõepoolest, olgu $x^\circ \in \mathcal{X}_2 \cap \mathcal{A}^*$, kus $x^\circ \bar{\in} \mathcal{X}_1$. Sel juhul x° on hulga $\mathcal{X}_1$ kuhjumispunkt ruumi $\mathcal{A}^*$ topoloogia mõttes, kuid ei ole seda $\mathcal{X}_2$ topoloogia mõttes. Järelikult peab leiduma element $x' \in \mathcal{A}^*$ selliselt, et $x' \bar{\in} \mathcal{X}_2$, mis tõestabki teoreemi.

Kui ruum $\mathcal{X}_2$ on selline, et $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{X}_2 \cap \mathcal{A}^*$, siis võib anda teoreemi 3. 8 järgmisel mõnevõrra lihtsamal kujul.

T e o r e e m 3. 9. Kui ruumi $\mathfrak{X}_1$ suhtes koregulaarne menetlus, kus $\bar{A} = \mathfrak{X}_2 \cap A^*$, summeerib elemendi väljaspool ruumi $\mathfrak{X}_1$, siis ka väljaspoolt ruumi $\mathfrak{X}_2$.

T õ e s t u s. Olgu $x^\circ \in \bar{A} = \mathfrak{X}_2 \cap A^*$, kuid $x^\circ \bar{\in} \mathfrak{X}_1$. Sel juhul on x° hulga $\mathfrak{X}_1$ kuhjumispunkt ruumis A^*. Teiselt poolest, menetluse koregulaarsuse tõttu leidub $x^* \in \mathfrak{X}_1$, mille puhul $f(x^*) \neq \lim_{\nu \to \nu_0} f(x^*_\nu)$. Sikorski tulemuse põhjal (vt. [8] VIII) iga $x \in \bar{A}$ puhul

$$(x - \lambda x^*)_\nu + \lambda x^* \dashrightarrow x$$

ruumis A^*. Sellest järeldub, et iga pidev lineaarne funktsionaal, mis on võrdne nulliga hulgal $\mathfrak{X}_1$ (iga $x_\nu \in \mathfrak{X}_1$), on seda ka hulgal $\bar{A}$. Seega tõesti iga $\bar{A}$ punkt - järelikult ka punkt x° - on hulga $\mathfrak{X}_1$ kuhjumispunkt ruumis A^*. Kuna aga selline olukord ei leia aset ruumis $\mathfrak{X}_2$, siis peabki leiduma element $x' \in A^*$, kus $x' \bar{\in} \mathfrak{X}_2$.

Eelnevatest tulemustest nähtub, et ruumi $\mathfrak{X}_1$ suhtes koregulaarne menetlus summeerib esmajärjekorras elemendi väljaspool ruumi $\mathfrak{X}_2$, kui ta üldse summeerib elemente peale ruumi $\mathfrak{X}_1$ omade. Millal ta summeerib aga elemendi ruumist $\mathfrak{X}_2$? Järgneva teoreemiga anname sellele küsimusele osalise vastuse. Konkreetsetel juhtudel saame sealt tarviliku ja piisava tulemuse selleks, millal menetlus

$$A = [\mathfrak{X}, \mathfrak{N}, \nu_0, N, n_0, \{\mathfrak{T}_\nu\}, \{f_n\}]$$

summeerib elemendi ruumist $\mathfrak{X}_2$, nagu selgub järgnevates paragrahvides. See teoreem sisaldab erijuhuna osa Wilansky ja Zelleri teoreemist (vt. [35]), samuti ka osa vastavast

Orlicz'i poolt tõestatud teoreemist (vt. [22]).

T e o r e e m 3. 10. Kui $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{X}_2 \cap \mathcal{A}^*$ ning $\mathcal{X}_1$ on kinnine ruumis $\mathcal{A}^*$, siis menetlus $\mathcal{A}$ ei summeeri sellist elementi $x^\circ \in \mathcal{X}_2$, mille puhul $x^\circ \bar{\in} \mathcal{X}_1$.

Arvestades Sikorski tulemust, mida kasutasime ka eelneva teoreemi puhul, võime öelda, et iga element hulgast $\mathcal{X}_2 \cap \mathcal{A}^*$ on $\mathcal{X}_1$ kuhjumispunktiks. Seetõttu

$$\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_2 \cap \mathcal{A}^* \subset \bar{\mathcal{X}}_1 ,$$

millest hulga $\mathcal{X}_1$ kinnisuse tõttu $\mathcal{X}_2 \cap \mathcal{A}^* = \mathcal{X}_1$. Saadud võrdus tõestabki teoreemi.

Äsjatõestatud teoreemi puhul on huvitav märkida, et siin peab tingimata menetlus $\mathcal{A}$ olema ruumi $\mathcal{X}_1$ suhtes koregulaarne. Tõepoolest, konull-menetluse puhul iga $\mathcal{X}_1$ element osutub hulga $\mathcal{X}_0$ kuhjumispunktiks ruumis $\mathcal{A}^*$. Kuna aga $\mathcal{X}_1$ kinnisuse tõttu $\mathcal{A}^*$ ja $\mathcal{X}_1$ topoloogiad on samaväärsed, siis peaks selline olukord aset leidma ka ruumis $\mathcal{X}_1$, mis aga ilmselt ei ole õige.

§ 5. Menetluste kooskõla

Ülalmärgitud menetluste kooskõla küsimusi käsitles juba Sikorski [8]. Vaadeldes kaht menetlust

$$\mathcal{A} = [\mathcal{X}, \mathcal{N}, \nu_0, N, n_0, \{\mathcal{T}_\nu\}, \{f_n\}]$$

ja

$$\mathcal{B} = [\mathcal{X}, \mathcal{N}, \nu_0, N, n_0, \{\mathcal{T}_\nu\}, \{g_n\}],$$

andis ta kaks järgmist teoreemi.

T e o r e e m 3. 11. Olgu $x \in \bar{A}$ ning $f(x) = \lim_{\nu \to \nu_0} f(x_\nu)$. Kui $\mathcal{B}$ on mitte nõrgem menetlusest $\mathcal{A}$ ning $f(x_\nu) = g(x_\nu)$ $(\nu \in \mathcal{N})$, siis $f(x) = g(x)$.

T e o r e e m 3. 12. Eksisteerigu selline element $x^* \in \bar{A}$, et $f(x^*) \neq \lim_{\nu \to \nu_0} f(x^*_\nu)$. Kui $\mathcal{B}$ on mitte nõrgem menetlusest $\mathcal{A}$ ja $\lim_{\nu \to \nu_0} f(x_\nu) = \lim_{\nu \to \nu_0} g(x_\nu)$, $\lim_{\nu \to \nu_0} f(x^*_\nu) = \lim_{\nu \to \nu_0} g(x^*_\nu)$, $f(x^*) = g(x^*)$, siis $f(x) = g(x)$.

Käesolevas paragrahvis üldistame mõningad maatriksmenetluste kooskõla kohta käivad teoreemid arvjadade juhult vaadeldavale üldisele juhule.

T e o r e e m 3. 13. Kui $\mathcal{A} = [\mathcal{X}, \mathcal{N}, \nu_0, N, n_0, \{\mathcal{T}_\nu\}, \{f_n\}]$ on koregulaarne ning $\mathcal{D} = [\mathcal{X}, \mathcal{N}, \nu_0, N, n_0, \{\mathcal{T}_\nu\}, \{h_n\}]$ konull-menetlus ruumi $\mathcal{X}_1$ suhtes, siis ei leidu menetlust $\mathcal{B} = [\mathcal{X}, \mathcal{N}, \nu_0, N, n_0, \{\mathcal{T}_\nu\}, \{g_n\}]$, mis oleks kooskõlas menetlusega $\mathcal{D}$ ning mille puhul $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^*$.

T õ e s t u s. Teoreemi 3. 6 põhjal järeldub tingimusest $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^*$, et menetlus $\mathcal{B}$ on koregulaarne ruumi $\mathcal{X}_1$ suhtes.

Teiselt poolt, kuna on nõutud menetluste $\mathcal{B}$ ja $\mathcal{D}$ kooskõla, siis $h(x) = g(x)$ iga $x \in \mathcal{B}^*$ puhul (on ju ilmne, et $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{D}^*$) ning $h(x_\nu) = g(x_\nu)$, sest hulk $\mathcal{X}'$ kuulub iga menetluse $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ summeerimisvälja. Siit aga järeldub, et kui

$$h(x) = \lim_{\nu \to \nu_0} h(x_\nu) \text{ iga } x \in \mathcal{X}_1 \text{ puhul,}$$

siis ka

$$g(x) = \lim_{\nu \to \nu_0} g(x_\nu) \qquad \text{iga } x \in \mathcal{X}_1 \text{ puhul,}$$

millest nähtub, et menetlus $\mathcal{B}$ on konull-menetlus ruumi $\mathcal{X}_1$ suhtes. Viimane tulemus on aga vastuolus eelpool saaduga, milline asjaolu tõestabki teoreemi.

Arvestades asjaolu, et kui $\mathcal{B}^* \supset \mathcal{A}^*$, siis elemendi x $\mathcal{B}$-summa kujutab endast pidevat lineaarset funktsionaali ruumis $\mathcal{A}^*$ (vt. X [8]), võib lihtsalt üle kanda antud üldisele juhule ka maatriksmenetluste puhul tuntud perfektsuse mõiste ning ka mõningad tulemused perfektsete menetluste kohta. Nimetame ka siin menetlust perfektseks, kui ta on kooskõlas kõigi temast mittenõrgemate menetlustega, eeldades, et kooskõla leiab aset teatud hulgal E. Kui vaatleme ruumi $\mathcal{X}_1$ suhtes koregulaarseid ja konull-menetlusi, siis valime $E = \mathcal{X}_1$. Ilmselt kehtivad siis järgmised tulemused.

T e o r e e m 3. 14. Ruumi $\mathcal{X}_1$ suhtes koregulaarne menetlus on perfektne parajasti siis, kui $\mathcal{X}_1$ moodustab põhihulga ruumis $\mathcal{A}^*$.

See tulemus on üldistuseks teoreemile 6. 4 [27].

T e o r e e m 3. 15. Ruumi $\mathcal{X}_1$ suhtes konull-menetlus on perfektne parajasti siis, kui $\mathcal{X}_0$ moodustab põhihulga ruumis $\mathcal{A}^*$.

§ 6. Rakendus jadaruumide puhul

Käesolevas vaatleme summeerimismenetlusi $\mathcal{A} = [\mathcal{X}, \mathcal{K}, \nu_0, N, n_0, \{\mathcal{T}_\nu\}, \{f_n\}]$, mis on määratud teatud jadateisendusega. Siia rühma kuuluvad sellised üldtuntud teisendused nagu jada-jada, jada-rida ning jada-funktsioon teisendus. Viimase all mõistame Włodarski [36 , 37] poolt vaadeldud funktsionaalseid menetlusi (vt. näide 3). Kõikidel neil juhtudel võime võtta $\mathcal{X} = s$, $\mathcal{X}_2 = m$, $\mathcal{X}_1 = c$ ja $\mathcal{X}_0 = c_0$. Lihtne on veenduda, et kõik püstitatud nõuded on sel juhul täidetud.

Operaatorid $\mathcal{T}_\nu$ võime antud juhul defineerida järgmiselt:

$$\mathcal{T}_\nu(x) = x_\nu = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu, 0, 0, \ldots\},$$

kus $x = \{\xi_k\}$. Seega operaator $\mathcal{T}_\nu$ seab jadale x vastavusse tema ν-nda lõike.

Rakendades vastavaid tingimusi koonduvuse säilivuse kohta (vt. [24 , 36]), veendume, et $\bar{\mathcal{A}} = m \cap \mathcal{A}^*$, mistõttu võime kasutada paragrahvides 3-5 saadud üldisi tulemusi.

Kuna ruumis c hulk c_0 koos jadaga $e = \{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ moodustab põhihulga, siis on ilmne, et menetlus $\mathcal{A}$ on ruumi c suhtes konullmenetlus (nim. edaspidi lihtsalt koregulaarne ja konull-menetlus) parajasti siis, kui jada e puhul leiab ruumis $\mathcal{A}^*$ aset nõrk lõikekoonduvus.

Arvesatades tehtud märkusi, võib üldised teoreemid

3. 5 - 3. 15 sõnastada antud konkreetsetel juhtudel.

Formuleerime mõned tulemused funktsionaalsete menetluste (näide 3) korral:

T e o r e e m 3. 7'. Iga funktsionaalne konullmenetlus summeerib tõkestamata jada.

T e o r e e m 3. 9'. Kui funktsionaalne koregulaarne menetlus summeerib hajuva jada, siis summeerib ta ka tõkestamata jada.

T e o r e e m 3. 10'. Funktsionaalne menetlus ei summeeri tõkestatud hajuvat jada parajasti siis, kui c on kinnine ruumis $\mathcal{A}^*$.

T e o r e e m 3. 14'. Funktsionaalne koregulaarne menetlus $\mathcal{A}$ on perfektne parajasti siis, kui c moodustab põhihulga ruumis $\mathcal{A}^*$.

Teoreemid 3. 7', 3. 9' ja 3.14' on vahetud järeldused vastavalt teoreemidest 3.7, 3.9 ja 3. 14. Teoreemi 3. 10' puhul piisavus järeldub vahetult teoreemist 3. 10, tarvilikkust saab näidata, kasutades Meyer--König'i ja Zelleri poolt antud tõestust teoreemile 3. 1 [21].

Äsjasõnastatud teoreemid on otseselt tõestatud nn. p i d e v a t e funktsionaalsete menetluste jaoks Wlodarski [37] ja Orlicz'i [22] poolt. Tuleb märkida, et Wlodarski (definitsioon 8 [36]) ja Orlicz'i poolt antud pidevate funktsionaalsete menetluste definitsioonid mõnevõrra erinevad. Lihtsamaks ja üldisemaks osutub Orlicz'i poolt antud definitsioon . Tema nimetab funktsionaalset menetlust pidevaks, kui on täidetud tingimused:

1) funktsioonid $a_k(n)$ $(k=0,1,\ldots)$ on pidevad hulgal N;

2) ridade $\sum_k a_k(n)\xi_k$ $(n\in N)$ koonduvusest hulgal N järeldub nende ühtlane koonduvus mistahes lõigul $[m_0, m]$, kus $m_0 < m < n_0$.

Võib veenduda, et nii Orlicz'i kui ka Wlodarski poolt defineeritud pidevad menetlused kuuluvad näites 3 vaadeldud menetluste klassi (tingimus (c) on täidetud).

§ 7. Rakendus ridaruumide puhul

Käesolevas paragrahvis vaatleme selliseid rakendusi, kus ruumideks $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ ja $\mathcal{X}$ on teatud „ridade ruumid", s.t. sellised jadaruumid, kus jada elementideks on mingi rea liikmed. Erinevate funktsionaalide valikuga võiksime siis saada rida-jada, rida-rida ja rida-funktsioon teisendused. Lähemalt peatume siinkohal vaid esimestel.

Ruumideks $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_1$ ja $\mathcal{X}_0$ valime vastavalt kõikide ridade ruumi - s_r, tõkestatud osasummadega ridade ruumi - m_r, koonduvate ridade ruumi - c_r ja nulliks koonduvate ridade ruumi - n_r. Need on kõik FK-ruumid (vt. [26]), kui punkti $x=\{\xi_k\}$ kvaasinormid defineerida järgmiselt:

ruumis s_r: $|\xi_k|$ $(k=0,1,\dots)$

ruumides m_r, c_r, n_r: $\sup_n |\sum_{k=0}^{n} \xi_k|$.

Edasi on vaja defineerida operaator $\mathcal{T}_\nu$ selliselt, et temaga saadud kujutis kuulub ruumi n_r. Selleks paneme tähele, et jadad

$$e_k = \{\underbrace{0,0,\dots,0}_{k},1,0,\dots\} \quad (k=0,1,\dots)$$

moodustavad põhihulga ruumis n_r.

Defineerime

$$\mathcal{T}_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \xi_k(e_k - e_{\nu+1}) = \{\xi_k'\},$$

kus

$$\xi_k' = \begin{cases} \xi_k & , \quad k \le \nu, \\ -\sum_{k=0}^{\nu} \xi_k & , \quad k = \nu+1, \\ 0 & , \quad k > \nu+1. \end{cases}$$

Sellest definitsioonist on ilmne, et

$$\mathcal{T}_\nu(x) = x_\nu \in n_r \subset s_r.$$

Lihtne on veenduda, et operaatori $\mathcal{T}_\nu$ kohta püstitatud tingimused (a) ja (b) (vt. § 1) on täidetud.

Vaadeldes rida-jada teisendust defineerime

$$f_n(x_\nu) = \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_{nk}\xi_k - \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_{n,\nu+1}\xi_k$$

ning kontrollime, millal on täidetud tingimused 1°- 3° (vt. III ptk. § 2), kui vaadelda koonduvust säilitavaid teisendusi

$$\eta_n = \sum_k \alpha_{nk}\xi_k \quad (n=0,1,\dots).$$

Rida-jada maatriks $\mathcal{A}=(\alpha_{nk})$ on koonduvust säilitav parajasti siis, kui

1) $\lim\limits_{n} \alpha_{nk} = \alpha_k \qquad (k=0,1,\dots)$,

2) $\sum\limits_{k} |\alpha_{nk} - \alpha_{n,k+1}| = \sum\limits_{k} |\Delta_k \alpha_{nk}| \leq M \quad (n=0,1,\dots)$

(vt. [5]).

Tingimus 1^0 on alati täidetud, kuna

$$\lim_{n} f_n(x_\nu) = \lim_{n} \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_{nk}\xi_k - \lim_{n} \alpha_{n,\nu+1} \sum_{k=0}^{\nu} \xi_k = \\ = \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_k \xi_k - \alpha_{\nu+1} \sum_{k=0}^{\nu} \xi_k .$$

Tingimuse 3^0 puhul

$$\sup_{n,\nu} \left| \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_{nk}\xi_k - \alpha_{n,\nu+1} \sum_{k=0}^{\nu} \xi_k \right| =$$

$$= \sup_{n,\nu} \left| \sum_{k=0}^{\nu-1} \Delta_k \alpha_{nk} \sum_{\mu=0}^{k} \xi_\mu + (\alpha_{n\nu} - \alpha_{n,\nu+1}) \sum_{\mu=0}^{\nu} \xi_\mu \right| =$$

$$= \sup_{n,\nu} \left| \sum_{k=0}^{\nu} \Delta_k \alpha_{nk} \sum_{\mu=0}^{k} \xi_\mu \right|,$$

kust näeme, et vaadeldav tingimus on täidetud, kui $x \in m_\kappa \cap \mathcal{A}^*$.

Lõpuks 2^0 puhul

$$\lim_{\nu} \left(\sum_{k=0}^{\nu} \alpha_k \xi_k - \alpha_{\nu+1} \sum_{k=0}^{\nu} \xi_k \right) =$$

$$= \lim_{\nu} \left(\sum_{k=0}^{\nu-1} \Delta\alpha_k \sum_{\mu=0}^{k} \xi_\mu + \Delta\alpha_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} \xi_\mu \right) =$$

$$= \lim_{\nu} \sum_{k=0}^{\nu} \Delta\alpha_k \sum_{\mu=0}^{k} \xi_\mu .$$

1) ja 2) põhjal

$$\sum_{k} |\alpha_k - \alpha_{k+1}| < \infty .$$

Seega ka tingimus 2^0 on täidetud iga $x \in m_\kappa \cap \mathcal{A}^*$ puhul.

Eelnevast on näha, et koonduvust säilitava rida-jada teisenduse korral $\bar{\mathcal{A}} = m_r \cap \mathcal{A}^*$, mis lubab meil jällegi saadud üldised teoreemid (3. 5 - 3. 15) sõnastada antud konkreetsel juhul.

§ 8. Abiteoreemid

Käesolevas vaatleme selliseid funktsioonide $x = x(t)$ $(0 \leq t < \infty)$ ruume, mis osutuvad F'-ruumideks ning milles leiab aset koonduvus koordinaatide järgi, s.t. piirprotsessist $\lim_n x_n = x$ vaadeldavas ruumis järeldub $\lim_n x_n(t) = x(t)$ (iga t korral).

Funktsiooni $x=x(t)$ lõike all mõistame funktsiooni $x_\tau = x_\tau(t)$, mille puhul

$$x_\tau(t) = 0, \text{ kui } t > \tau .$$

Nimetame funktsiooni $x=x(t)$ koonduvaks, kui eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_t x(t),$$

vastasel juhul aga - hajuvaks.

L e m m a 3. 16. Olgu R mingi koordinaatide järgi koonduvusega F'-ruum funktsioonidest $x=x(t)$ $(0 \leq t < \infty)$. Kui selles ruumis tõkestatud lõiked moodustavad põhihulga, siis ruum R koosneb kas ainult koonduvaist elementidest, või siis sisaldab ka tõkestatud hajuva elemendi.

T õ e s t u s. Oletame, et ruumis R leidub hajuv element z, mille puhul $\sup_t |z(t)| = \infty$ (vastasel juhul pole ju enam midagi tõestada).

Koonduvusest koordinaatide järgi ja asjaolust, et tõkestatud lõiked moodustavad põhihulga ruumis R, järeldub, et funktsioon $z(t)$ $(0 \le t < \infty)$ ei saa tõkestamatult kasvada lõplikus ulatuses.

Põhihulga nõude tõttu leidub nüüd selline lõigatud funktsioonide jada $x_{\tau_n}(t)$, et

(1) $$x_{\tau_n} \to z \quad (n \to \infty).$$

Siin

$$x_{\tau_n}(t) = 0, \quad t > \tau,$$

kus jada $\{\tau_n\}$ valime selliselt, et $\tau_\alpha < \tau_\beta$, kui $\alpha < \beta$. Koonduvusest koordinaatide järgi järeldub, et $x_{\tau_n}(t) \to z(t)$ iga t puhul.

Otsitava tõkestatud hajuva elemendi konstrueerime teatud trepp-funktsioonide summana, mille liikmed määrame rekursiivselt. Sel eesmärgil konstrueerime funktsioonid

$$\omega_j(t) = a_r^j \quad (\mu_r \le t < \mu_{r+1}, \ r = 0, 1, \ldots, m; \ \mu_0 = 0, \mu_{r+1} = \infty)$$

ning jadad

$$\begin{aligned} &p_j && (0 < p_1 < p_2 < \ldots), \\ &q_j && (1 < q_1 < q_1 + 1 < q_2 < q_2 + 1 < \ldots), \\ &\lambda_j && (0 < \lambda_j < 1). \end{aligned}$$

Olgu $p_0 = q_0 = 0$.

Eeldame, et meil on leitud ω_j, p_j, q_j, λ_j, mille puhul on täidetud tingimused:

(2) $$\|\omega_j\|_l \leq \frac{1}{2^j}, \quad l = 0,1,\dots,j;$$

(3) $$|a_r^j| \leq \frac{1}{2^j}, \quad r = 0,1,\dots,q_{j-1}+1;$$

(4) $$a_r^j = 0, \quad r = q_j+1, q_j+2, \dots;$$

(5) $$\max\{|a^j_{q_{j-1}+2}|, \dots, |a^j_{q_j}|\} = |a^j_{p_j}| = \frac{1}{\lambda_j}, \quad q_{j-1}+2 \leq p_j \leq q_j.$$

Näitame nüüd, kuidas leida vastavad elemendid indeksi $j+1$ puhul.

Kuna $x_{\tau_n} \to z$, siis

(6) $$\lim_{p,q\to\infty} \|x_{\tau_q} - x_{\tau_p}\|_i = 0 \quad (i = 0,1,\dots)$$

ja ka

$$\lim_{p,q\to\infty} |x_{\tau_q}(t) - x_{\tau_p}(t)| = 0 \text{ iga } t \text{ puhul}.$$

Seega võime p ja q nii valida, et $q > p$ ja

$$|x_{\tau_q}(t) - x_{\tau_p}(t)| \leq \frac{1}{2^{j+1}}, \text{ kui } t < \mu_{q_j+1}.$$

Võtame nüüd

$$a_r^{j+1} = x_{\tau_q}(t_0) - x_{\tau_p}(t_0),$$

kus $\mu_r \leq t_0 < \mu_{r+1}$ $(r = 0,1,\dots,q_j+1)$. Seega

(3') $$|a_r^{j+1}| \leq \frac{1}{2^{j+1}}, \quad r = 0,1,\dots,q_j+1.$$

Tingimust (6) arvestades võime saavutada, et

(2') $$\|\omega_j\|_l \leq \frac{1}{2^{j+1}} \quad (l = 0,1,\dots,j+1).$$

Kuna $\sup_t |z(t)| = \infty$, siis ilmselt võime valida $m \geq p+1$ selliselt, et $|z(t_1)| > 1$ $(t_1 > \tau_m)$. Sellest ka $|x_{\tau_q}(t_1)| > 1$ $(q > p)$. Võttes

$$a_m^{j+1} = x_{\tau_q}(t_1) - x_{\tau_p}(t_1),$$

näeme, et

$$|a_m^{j+1}| = |x_{\tau_q}(t_1)| > 1,$$

kuna tingimuse (1) tõttu $x_{\tau_p}(t_1) = 0$. Seega

(4') $$a_r^{j+1} = 0 \quad (r = q+1, q+2, \dots)$$

Siit koos võrratusega (3') järeldub, et $q_j + 2 \leq m \leq q$, eriti aga $q_j + 1 < q$. Võtame nüüd $q_{j+1} = q$. Seega (2')-(4') tõttu kehtivad ka (2)-(4), kui j asendada indeksiga $j+1$. Suurima väärtustest

$$|a_r^{j+1}| \quad (r = q_j + 2, \dots, q_{j+1}),$$

mille puhul $|a_r^{j+1}| > 1$, tähistame $\frac{1}{\lambda_{j+1}}$, kust $0 < \lambda_{j+1} < 1$. Lõpuks tähistame p_{j+1}-ga indeksit $(q_j + 2 \leq p_{j+1} \leq q_{j+1})$, mille puhul $|a_{p_{j+1}}^{j+1}| = \frac{1}{\lambda_{j+1}}$. Kuna $p_j \leq q_j$ (vt. (5) või vastavalt $p_0 = q_0 = 0$), siis $p_j < p_{j+1}$ ning (5) on täidetud, kui j asendada $(j+1)$-ga. Sellega on järk-järguline menetlus konstrueeritud ning me võime eeldada, et tingimused (2)-(5) on täidetud iga $j = 0, 1, \dots$ puhul.

Tingimuste $0 < \lambda_j < 1$ ja (2) tõttu on rida $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \omega_\nu$ koonduv. Võtame $y = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \omega_\nu$. Olgu edasi $j \geq 1$. Koonduvusest koordinaatide järgi ja tingimusest (4)

(7) $$c_r = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu a_r^\nu = \sum_{\nu=j}^{\infty} \lambda_\nu a_r^\nu, \quad r > q_{j-1},$$

kust

$$|c_r| \leq \lambda_j |a_r^j| + \sum_{\nu=j+1}^{\infty} |a_r^\nu|, \quad q_{j-1} < r \leq q_j.$$

Sellest, hinnates esimest liidetavat tingimustega (5) ja (3), ülejäänud liidetavaid $(\nu = j+1, j+2, \dots)$ aga võrratusega (3), saame

$$|c_k| \leq 1 + \frac{1}{2^j},$$

mistõttu funktsioon y on tõkestatud.

Võrdusest (7) saame $k = p_j$ puhul, et

$$|c_{p_j}| \geq \lambda_j |a^j_{p_j}| - \sum_{\nu=j+1}^{\infty} |a^{\nu}_{p_j}| \geq 1 - \frac{1}{2^j},$$

millest

$$\overline{\lim_k} |c_k| \geq 1 .$$

Teiselt poolt

$$|c_{q_{j-1}+1}| \leq \sum_{\nu=j}^{\infty} |a^{\nu}_{q_{j-1}+1}| \leq \sum_{\nu=j}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu}} = \frac{1}{2^{j-1}},$$

millest $\underline{\lim}_k |c_k| = 0$. Seega funktsioon y on hajuv.

L e m m a 3. 17. Olgu R mingi koordinaatide järgi koonduvusega F-ruum funktsioonidest $x = x(t)$ $(0 \leq t < \infty)$. Kui selles ruumis tõkestatud lõiked k o o s konstantsetega moodustavad põhihulga, siis ruum R koosneb kas ainult koonduvaist elementidest või siis sisaldab ka tõkestatud hajuva elemendi.

T õ e s t u s. Tähistame tõkestatud lõigete hulga kinnise lineaarse katte sümboliga $\overline{R}$. Ilmselt $\overline{R} \neq R$.

Veendume kõigepealt selles, et konstantne funktsioon $a(t) = 1$ ei kuulu ruumi $\overline{R}$. Valime $x \in R$. Põhihulga nõude tõttu leiduvad konstandid λ_p ja funktsioonid x_{τ_p} $(p = 0, 1, \ldots)$, nii et

$$\lambda_p a + x_{\tau_p} \to x \quad (p \to \infty).$$

Oletades, et $a \in \overline{R}$, peaks leiduma funktsioonid, et $y_{\tau_p} \to a$. Arvestades seda asjaolu, võime saavutada, et

$$|\lambda_p| \, \| y_{\tau_p} - a \|_l < \frac{1}{p+1} \quad (l = 0, \ldots, p; \; p = 0, 1, \ldots),$$

s.t.

$$\lambda_p (y_{\tilde{\tau}_p} - a) \to 0 \quad (p \to \infty).$$

Võtame $z_{\tau_p} = x_{\tau_p} - \lambda_p y_{\tilde{\tau}_p}$. Seega

$$z_{\tilde{\tau}_p} = (\lambda_p a + x_{\tau_p}) + \lambda_p (y_{\tau_p} - a) \to x .$$

Kuna $z_{\tilde{\tau}_p} \in \bar{R}$, siis ka $x \in \bar{R}$, s.t. $\bar{R} = R$ (vastupidiselt eeldusele). Seega $a \bar{\in} \bar{R}$.

Arvestades eeltoodut ning koonduvuse mõistet F-ruumis, leidub $i_0 \geq 0$ selliselt, et vähemalt üks võrratustest

$$\| x_\tau - a \|_\ell < \frac{1}{i_0+1} \quad (\ell = 0, 1, \dots, i_0)$$

pole õige, kui $x_\tau \in \bar{R}$. Vastasel korral leiduks iga $i = 0, 1, \dots$ puhul lõige x_{τ_i} , nii et

$$\| x_{\tau_i} - a \|_\ell < \frac{1}{i+1} \quad (\ell = 0, 1, \dots, i),$$

millest $x_{\tau_i} \to a$, s.t. $a \in \bar{R}$.

Meie lähim eesmärk on näidata, et iga $x \in R$ saab esitada kujul $x = \lambda a + x_\tau$ kus $x_\tau \in \bar{R}$. Valime mingi i_0. Edasi olgu λ_p ja $x_{\tilde{\tau}_p}$ sellised, et

$$y_p = \lambda_p a + x_{\tilde{\tau}_p} \to x , \quad p \to \infty .$$

Vastavalt arvule $\varepsilon > 0$ leidub siis p_0 selliselt, et

(8) $$\| y_q - y_p \|_\ell < \frac{\varepsilon}{i_0+1} \quad (\ell = 0, 1, \dots, i_0), \; q > p > p_0 .$$

Fikseerime ühe paaridest (p, q), kus $q > p > p_0$ ning näitame, et $|\lambda_q - \lambda_p| < \varepsilon$. Olgu $\lambda_q - \lambda_p \neq 0$. Siis

$$y_q - y_p = (\lambda_q - \lambda_p)(a - z_\tau),$$

kus $z_\tau \in \bar{R}$. Eelpool vaadeldud omaduse tõttu leidub ℓ_0 ($0 \leq \ell_0 \leq i_0$), nii et

$$\| z_\tau - a \|_{\ell_0} \geq \frac{1}{i_0+1} .$$

Tingimusest (8) järeldub $\ell = \ell_0$ puhul, et

$$|\lambda_q - \lambda_p| \, \|a - z_{\tau}\| < \frac{\varepsilon_0}{i_0+1}$$

See saab kehtida vaid siis, kui

$$|\lambda_q - \lambda_p| < \varepsilon,$$

millega jada λ_p koonduvus on näidatud $(\lambda_p \to \lambda)$. Kuna

$$x_{\tau_p} = y_p - \lambda_p a \to x - \lambda a \quad (p \to \infty),$$

siis $(x - \lambda a) \in \overline{R}$. Niisiis

$$x = \lambda a + (x - \lambda a)$$

kujutabki endast soovitud esitist.

Meid huvitava väite annab eelmine lemma, kuna selle järgi on iga $x_{\tau} \in \overline{R}$ (seega ka $x = \lambda a + x_{\tau}$) kas koonduv või siis leidub tõkestatud hajuv element.

Äsjatõestatud lemmad on üldistuseks järgmisele Meyer-König'i ja Zelleri poolt tõestatud teoreemile 3. 1 [21].

Kui FK-ruumis R jadad e_k $(k=0,1,\dots)$ üksinda või koos jadaga e moodustavad põhihulga, siis iga jada $x \in R$ on kas koonduv või siis leidub tõkestatud hajuv jada $y \in R$.

§ 9. Rakendus integraalmenetlusele

Selles paragrahvis vaatleme integraalmenetlusi, mis on antud teisendusega

$$y(u) = \int_0^\infty K(u,t)\, x(t)\, dt$$

(vt. näide 4). Meie ülesandeks on moodustada teatud

F-süsteem, mis antud konkreetsel juhul vastab üldisele süsteemile $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ ja $\mathcal{X}$. Teiste sõnadega: meil on vaja neli F-ruumi, mille puhul $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_2 \subset \mathcal{X}$. Valime neiks ruumid $\mathcal{L}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{U}$ ja $\mathcal{U}_0$, kus

ruum $\mathcal{L}$ on igal lõplikul lõigul Lebesgue'i mõttes integreeruvate funktsioonide ruum kvaasinormidega

$$p_r(x) = \int_0^r |x(t)|\, dt \qquad (r = 1, 2, \dots)$$

(vt. [29] lk. 173);

ruum $\mathcal{W}$ on kõikide vahemikus $[0, \infty)$ tõkestatud funktsioonide ruum normiga

$$\|x\| = \sup_t |x(t)|$$

(vt. [29] lk. 178);

ruum $\mathcal{U}$ on kõigi funktsioonide $x(t) \in \mathcal{W}$ ruum, mille puhul eksisteerib $\lim_t x(t)$, normiga

$$\|x\| = \sup_t |x(t)|$$

(vt. [29] lk. 173);

ruum $\mathcal{U}_0$ on kõikide funktsioonide $x(t) \in \mathcal{U}$ ruum, mille puhul $\lim_t x(t) = 0$, normiga

$$\|x\| = \sup_t |x(t)| .$$

Nende ruumide definitsioonist on ilmne, et kehtib vahekord

$$\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{L},$$

kusjuures kitsama ruumi koonduvusest järeldub koonduvus laiemas ruumis, s.t. ruumid $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ ja $\mathcal{L}$ moodustavad teatud F-süsteemi.

Nüüd võime kõik paragrahvides 3, 4 ja 5 saadud tulemused üle kanda sellistele integraalmenetlustele, mille puhul $\bar{A} \supset \mathfrak{N}$. Siin $\bar{A}$ on nende funktsioonide $x(t)$ hulk, mis rahuldavad tingimusi:

1^{00} $\lim_{n} \int_{0}^{v} K(n,t)\, x(t)\, dt$ eksisteerib iga $v \in [0,\infty)$ puhul;

2^{00} $\lim_{v} \lim_{n} \int_{0}^{v} K(n,t)\, x(t)\, dt$ eksisteerib;

3^{00} $\sup_{n,v} \left| \int_{0}^{v} K(n,t)\, x(t)\, dt \right| < \infty$.

Arvestades tingimusi, mille puhul integraalteisendus on koonduvust säilitav (vt. [29]), ja nõudeid, mis on püstitatud tuuma $K(n,t)$ kohta (vt. näide 4), võime veenduda, et koonduvust säilitavate integraalmenetluste korral $\bar{A} = \mathcal{W} \cap A^*$. Niisiis võime saada üldisest teooriast vahetult näiteks järgmised teoreemid (siin nimetame ruumi $\mathfrak{N}$ suhtes koregulaarset menetlust lihtsalt koregulaarseks):

1) Kui koregulaarne integraalmenetlus summeerib mõne hajuva funktsiooni, siis ka tõkestamata funktsiooni.

2) Integraalmenetlus on perfektne parajasti siis, kui $\mathfrak{N}$ moodustab põhihulga summeerimisväljas.

Kasutades eelmises paragrahvis toodud lemmasid ning teoreemi 3. 10, saame järgmised tulemused:

1) Integraalmenetlus ei summeeri tõkestatud hajuvat funktsiooni parajasti siis, kui hulk $\mathfrak{N}$ on kinnine ruumis A^*.

2) Iga konull-integraalmenetlus summeerib ka tõkesta-

tud hajuva funktsiooni.

3) Iga perfektne integraalmenetlus summeerib nii tõkestatud kui ka tõkestamata hajuva funktsiooni, kui ta üldse summeerib funktsiooni väljaspoolt ruumi Vr.

Kasutatud kirjandus

1. Б а н а х С. С. - Курс функціонального анализу, 1948.
2. Б р у д н о А. Л. - Суммирование ограниченных последовательностей линейными регулярными методами, Докл. АН СССР, 43, 1944, 191-193.
3. Б р у д н о А. Л. - Суммирование ограниченных последовательностей матрицами, Матем. сб., 16 (58), 1945, 191-247.
4. Д а р е в с к и й В. М. - О внутренне совершенных методах суммирования, Изв. АН СССР. Сер. матем., 10, 1946, 97-104.
5. К а н г р о Г. Ф. - О множителях суммируемости, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 37, 1955, 191-229.
6. К а н г р о Г. Ф. - О матричных преобразованиях последовательсвей в банаховых пространствах, Изв. АН Эст. ССР. Сер. техн. и физ.-мат. наук, 2, 1956, 108-126.
7. О г и е в е ц к и й И. И. - К теории суммирования ограниченных последовательностей матрицами Теплица, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 2, 1959, 183-187.

8. Сикорский Р. - Некоторые замечания о теории суммируемости Мазура-Орлича, Бюл. Польской АН. Отд. 3, 3, 1955, II-I5.

9. Харди Г. - Расходящиеся ряды, 1951.

10. Agnew, R.P., Hill, J.D. - Summability of bounded sequences, Duke Math. J., 11, 1944, 573-574.

11. Copping, J. - $\mathcal{K}$-matrices which sum no bounded divergent sequence, J. London Math. Soc., 30, 1955, 123-127.

12. Copping, J. - Conditions for a $\mathcal{K}$-matrix to evaluate some bounded divergent sequences, J. London Math. Soc., 32, 1957, 217-227.

13. Hill, J. D. - Some properties of summability. II, Bull. Amer. Math. Soc., 50, 1944, 227-230.

14. Kull, I. - Kahekordsete jadade maatriksteisendused Banachi ruumides. Käsikiri.

15. MacPhail, M. S. - On some recent developments in the theory of series, Canad. J. Math., 1954, 405-409.

16. Mazur, S., Orlicz, W. - Sur les méthodes linéaires de sommation, C. R. Acad. sci., 196, 1933, 32-34.

17. Mazur, S., Orlicz, W. - Sur les espaces métriques linéaires. I, Studia math., 10, 1948, 184-208.

18. M a z u r, S., O r l i c z, W. - Sur les espaces métriques linéaires. II, Studia math., 13, 1953, 137-179.

19. M a z u r, S., O r l i c z, W. - On linear methods of summability, Studia math., 14, 1954, 129-160.

20. M e l v i n - M e l v i n, H. - On generalized $\mathcal{K}$ -transformations in Banach spaces, Proc. London Math. Soc., 53, 1951, 83-108.

21. M e y e r - K ö n i g, W., Z e l l e r, K. - Lückenumkehrsätze und Lückenperfektheit, Math. Z., 66, 1956, 203-224.

22. O r l i c z, W. -- On the summability of bounded sequences by continous methods, Bull. Acad. polon. sci. Ce 3, 6, 1958, 549-556.

23. P e t e r s e n G. M. - Summability methods and bounded sequences, J. London Math. Soc., 31, 1956, 324-326.

24. S c h u r, I. -- Über lineare Transformationen in des Theorie der unendlichen Reihen, J. reine und angew. Math., 151, 1921, 79-111.

25. S t e i n h a u s, H. - Kilka stów o uogólnienin pojecia granicy, Prace Matematycno--Fizyczne, 22, 1911, 121-134.

26. S õ r m u s, T. - Tõkestatud ja tõkestamata osasummadega read maatriksmenetluse summeerimisväljas, Diplomitöö, Tartu, 1954.

27. T r o p p e r, A. M. - A sufficient condition for a re-

gular matrix to sum a bounded divergent sequence, Proc. Amer. Math. Soc., 4, 1953, 671-677.

28. Z e l l e r, K. - Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren, Math. Z., 53, 1951, 463-487.

29. Z e l l e r, K. - Abschnittskonvergenz in FK-Räumen, Math. Z., 55, 1952, 55-70.

30. Z e l l e r, K. - Über Stetigkeit von Integraltransfomationen, Math. Z., 55, 1952, 167-182.

31. Z e l l e r, K. - Verallgemeinerte Matrixtranformationen, Math. Z., 56, 1952, 18-20.

32. Z e l l e r, K. - Faktorfolgen bei Limitierungsverfahren, Math. Z., 56, 1952, 134-151.

33. W i l a n s k y, A. - A necessary and sufficient condition that a summability method be stronger than convergence, Bull. Amer. Math. Soc., 55, 1949, 914-916.

34. W i l a n s k y, A. - An application of Banach linear functionals to summability, Trar trans. Amer. Math. Soc., 67, 1949, 59-68.

35. W i l a n s k y, A., Z e l l e r, K. - Summation of bounded divergent sequences, topological methods, Trans. Amer. Math. Soc., 78, 1955, 50-1509.

36. W l o d a r s k i, L. - Sur les méthodes continues de limitation (I), Studia math., **14**, 1954, 161-187.

37. W l o d a r s k i, L. - Sur les méthodes continues de de limitation (II), Studia math., 14, 1954, 188-199.

38. J ü r i m ä e, E. - Funktsionaalanalüüsi meetodid kahekordsete ridade teoorias, Tartu Ülikooli Toim., **55**, 1958, 3-7.