TPI

H. Roos

Funktsioonid ja nende graafikud

TALLINN
1966

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT

Matemaatika kateeder

H. Roos

FUNKTSIOONID JA NENDE GRAAFIKUD

Konspekt kaugüliõpilastele

Tallinn
1966

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Кафедра математики

Х. Роос

ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Конспект для студентов-заочников

На эстонском языке

Vastutav toimetaja E. Etverk

Trükkimisele antud 25. X 66. Paber 60x84/1/16
Trükipg. 3,0. Tingpg. 2,79. Tiraaz 1500
MB-08236. TPI rotaprint, 1966. Hind 8 kop.
tell. 380

§ 1. Suurus ja arv

1. Suurus. Kõike, mis on avaldatav või iseloomustatav arvuga, nimetatakse suuruseks. Nii on näiteks mere sügavus, inimese vanus, sademete hulk, järjekorranumber jne. suurused, sest neid iseloomustatakse arvude abil.

2. Reaalarvud ja arvsirge

a. Naturaalarvud. Kõige lihtsamad arvud on arvud, mis saadakse loendamise tulemusena: 1, 2, 3, ... Neid arve nimetatakse loomulikkudeks arvudeks ehk naturaalarvudeks.

Naturaalarve saab liita ja korrutada, s.o. iga kahe naturaalarvu summa ja korrutis on jällegi naturaalarv.

b. Täisarvud. Lahutada saab naturaalarve ainult siis, kui vähendatav on suurem lahutatavast. Kui vähendatav on võrdne lahutatavaga, on vahe uus arv, mis kannab nime null: $a - a = 0$. Kui aga vähendatav on lahutatavast väiksem, on vahe negatiivne täisarv, näiteks $2 - 3 = -1$. Naturaalarve nimetatakse ka positiivseteks täisarvudeks. Positiivseid ja negatiivseid täisarve ning arvu null nimetatakse ühise nimega täisarvudeks. Täisarve saab liita, lahutada ja korrutada.

c. Ratsionaalarvud. Kahe täisarvu jagatist, kui jagaja pole null, nimetatakse ratsionaalarvuks.

Iga ratsionaalarv on esitatav täisarvu t ja temaga ühistegurita naturaalarvu n jagatisena kujul $\frac{t}{n}$. Kui $n = 1$, siis $\frac{t}{1}$ esitab täisarvu t. Kui $n \neq 1$, siis nimetatakse ratsionaalarvu $\frac{t}{n}$ murruks. Ratsionaalarvudega saab teha kõiki nelja põhitehet: liita, lahutada, korrutada ja jagada.

d. Ratsionaalarvu avaldamine kümnendmurruna. Iga murd $\frac{t}{n}$ on teisendatav kümnendmurruks.

Kui nimetaja n sisaldab algteguritena ainult arve 2 ja 5, siis teisendatakse murd kümnendmurruks selle laiendamise teel ja tulemuseks on lõplik kümnendmurd, näiteks $\frac{13}{20} = \frac{13}{2^2 \cdot 5} = \frac{13 \cdot 5}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{65}{10^2} = 0{,}65$.

Kui nimetaja sisaldab aga kas või üheainsa 2-st ja 5-st erineva teguri, ei saa murdu laiendada nii, et nimetajaks tuleks 10 täisaste. Järelikult ei saa niisugust murdu teisendada lõplikuks kümnendmurruks, küll aga võib lugejat nimetajaga jagada ning jagatise avaldada kümnendmurruna. Et saadud kümnendmurd ei saa olla lõplik, siis on ta lõpmatu. Seega peavad kõik jagamisel tekkivad jäägid olema nullist erinevad.

Et aga iga jääk on jagajast väiksem, siis võib jagamisel arvuga n saada maksimaalselt n - 1 erinevat jääki. Nii peab üks juba varem esinenud jääkidest korduma hiljemalt siis, kui pärast koma on saadud n - 1 numbrit. Ilmselt korduvad siis aga ka kõik järgnevad jäägid, samuti korduvad jagatises numbrid täpselt endises järjekorras. Seega hakkab jagatises lõpuks korduma teatud numbrite rühm, mida nimetatakse perioodiks.

Näiteks

$$\frac{6}{11} = 6 : 11 = 0{,}5454\ldots = 0{,}(54).$$
$$\begin{array}{l} 60 \\ \underline{50} \\ 6 \end{array}$$

Niisiis iga ratsionaalarv on teisendatav kas lõplikuks või lõpmatuks, kuid perioodiliseks kümnendmurruks.

M ä r k u s: Ka lõplikku kümnendmurdu ning täisarvu võib vaadelda lõpmatu perioodilise kümnendmurruna ja pealegi kahel viisil: perioodiga 0 ja perioodiga 9.

Esimene on endastmõistetav, näiteks 0,65 = 0,65(0) ja 1 = 1,(0).

Teine järeldub järgmisest arutelust: kui x = 0,(9), siis 10x = 9,(9) ehk 10x = 9 + 0,(9). Seega 10x = 9 + x, millest 9x = 9 ja $x = \frac{9}{9} = 1$.

Niisiis 1 = 0,(9). Seega 2,(0) = 2 = 1 + 1 = 1 + 0,(9) = = 1,(9), 3,(0) = 3 = 2 + 0,(9) = 2,(9). Samuti on eespool toodud lõplik kümnendmurd 0,65 kirjutatav kujul 0,64(9). Tõe-

poolest $0,64(9) = 0,64 + 0,00(9) = 0,64 + 0,01 \cdot 0,(9) =$
$= 0,64 + 0,01 \cdot 1 = 0,65$ ehk $0,65 = 0,64(9)$.

Edaspidi me ei kasuta perioodina numbreid 0 ja 9, vaid eelistame lõplikke kümnendmurde.

e. <u>Irratsionaalarvud</u>. Lõpmatu kümnendmurd võib olla ka mitteperioodiline.

Kirjutame näiteks nulli ja koma järele numbri 1, selle järele 2, siis 1, selle järele kaks korda numbri 2, siis 1, selle järele kolm korda numbri 2, siis 1, edasi neli korda numbri 2 jne. jne. Saame kümnendmurru

$$0,12122122212222 12,\ldots,$$

mis on <u>lõpmatu mitteperioodiline kümnendmurd</u>.

Et iga ratsionaalarv on teisendatav kas lõplikuks või lõpmatuks perioodiliseks kümnendmurruks, siis lõpmatu mitteperioodiline kümnendmurd ei ole ratsionaalarv. Teda nimetatakse <u>irratsionaalarvuks</u>.

Irratsionaalarvu numbrite kirjutamiseks pole sageli võimalik anda küllalt lihtsat eeskirja. Niisugusteks irratsionaalarvudeks on näiteks paljud murrulise astendajaga astmed ehk juured, arv π, samuti paljude arvude logaritmid ning enamiku nurkade siinused, koosinused, tangensid ja kootangensid.

f. <u>Reaalarvud</u>. Ratsionaalarve ja irratsionaalarve nimetatakse ühise nimega <u>reaalarvudeks</u>.

Iga reaalarv on esitatav ühel ainsal viisil (kui perioodi 0 ja 9 mitte kasutada), kas lõpliku või lõpmatu kümnendmurruna.

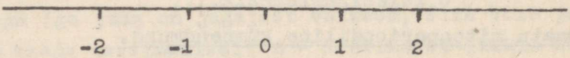
Reaalarv on antud või on teada, kui on antud eeskiri tema iga numbri leidmiseks.

Tundes naturaalarvude suurusjärjestust, saab iga kahe reaalarvu puhul otsustada, kumb neist on suurem:

Kahest positiivsest arvust on see suurem, mille täisosa on suurem. Kui täisosad on võrdsed, siis võrdleme nende kümnendikke, kui viimased on võrdsed, siis sajandikke jne., üldiselt samal kümnendkohal seisvaid järkarve. Suurem on see arv, milles esimene erinev järkarv on suurem.

Positiivne arv on suurem 0-st ja igast negatiivsest arvust. Null on suurem igast negatiivsest arvust. Kahest negatiivsest arvust on suurem see, mille absoluutväärtus on väiksem (vt.p.3,a).

g. <u>Arvsirge</u>. Niisiis on igal reaalarvul suuruse järgi üks kindel koht teiste reaalarvude hulgas, samuti nagu sirge igal punktil on üks kindel koht selle sirge ülejäänud punktide hulgas. See asjaolu võimaldabki meil juba tuntud viisil igale reaalarvule vastavaks seada sirge ühe punkti ja ümberpöördult, sirge igale punktile vastavaks seada ühe reaalarvu (joon. 1.)



Joon. 1

Sirget, mille punktid on vastavusse seatud reaalarvudega, nimetatakse <u>arvsirgeks</u>.

Reaalarvude ja sirge punktide üksühese vastavuse tõttu kasutatakse sageli sõna "arv" asemel sõna "punkt" ja ümberpöördult.

3. Suuruse ligikaudne väärtus ja selle viga

a. <u>Arvu absoluutväärtus ja selle omadusi</u>. Vastavalt eelnevale tähistatakse tõsiasja, et reaalarv r on positiivne arv, lihtsalt sümboliga $r>0$, ja tõsiasja, et r on negatiivne arv sümboliga $r<0$.

Arvu r absoluutväärtust tähistatakse sümboliga $|r|$ ja defineeritakse järgmiselt:

$$|r| = \begin{cases} r, & \text{kui } r \geqslant 0 \\ -r, & \text{kui } r<0. \end{cases}$$

Nii on

$$|+3| = |3| = 3, \text{ sest } +3 = 3>0,$$
$$|-3| = -(-3) = 3, \text{ sest } -3<0.$$

Definitsioonist järelduvad absoluutväärtuse järgmised omadused.

1. Arvu absoluutväärtus on mittenegatiivne: $|r| \geq 0$.

2. Arv ei ole suurem oma absoluutväärtusest: $r \leq |r|$.

3. Kui $|r|<a$, siis $-a<r<a$.

4. Kui $a>0$ ja $|r|>a$, siis on kaks võimalust: $r>a$ või $r<-a$.

5. Summa absoluutväärtus ei ole suurem liidetavate absoluutväärtuste summast:

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Tõepoolest:

kui $a + b \geq 0$, siis

$$|a + b| = a + b \leq |a| + |b|;$$

kui $a + b<0$, siis

$$|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|.$$

6. Vahe absoluutväärtus ei ole väiksem vähendatava ja lahutatava absoluutväärtuste vahest:

$$|a - b| \geq |a| - |b|.$$

Eelneva põhjal on $|a| = |b + (a - b)| \leq |b| + |a - b|$, millest

$$|a - b| \geq |a| - |b|.$$

b. <u>Suuruse ligikaudne väärtus</u>. Praktikas esinevate suuruste arvulisi väärtusi leiame tavaliselt mõõtmise teel. Mõõtmine võimaldab kindlaks teha mõõdetavat suurust väljendava arvu ehk mõõtarvu mõne esimese numbri. Mõõtmine ei võimalda leida mõõtarvu mistahes numbrit. Seetõttu pole mõõtmise teel võimalik kindlaks teha, kas mõõdetav suurus väljendub ratsionaal- või irratsionaalarvuga.

Iga mõõtmise korral leitakse õieti kaks niisugust ratsionaalarvu a ja b, mis otsitava mõõtarvu x suhtes rahuldavad tingimusi $a \leq x \leq b$.

Mõõtmine ei võimalda niisiis mõõtarvu leida, vaid teeb kindlaks ainult vahemiku, kuhu mõõtarv kuulub. Mõõtarv asendatakse tegelikult mingi sobiva ratsionaalarvuga, mis kuulub kõne all olevasse vahemikku ja mida nimetatakse mõõdetava suuruse <u>ligikaudseks väärtuseks</u> ehk <u>lähisväärtuseks</u>.

Suuruse ligikaudset väärtust kasutatakse sageli ka siis, kui täpne väärtus on teada. Eranditult tehakse seda suuruse irratsionaalarvulise väärtuse puhul, samuti ka ratsionaalarvulise väärtuse korral, kui seda väljendav kümnendmurd osutub kas lõpmatuks või lõplikuks, kuid paljunumbriliseks.

c. Ligikaudse väärtuse viga. Kui suuruse täpne väärtus on A ja ligikaudne väärtus a, siis nimetatakse vahet $A - a = \Delta a$ ligikaudse väärtuse a tõeliseks veaks.

Kasutades näiteks arvu 2,37285683 asemel lähisväärtust 2,363, on selle lähisväärtuse viga 2,37285683 - 2,373 = = -0,00014317.

Et täpne väärtus A pole enamasti teada, siis pole võimalik teada ka ligikaudse väärtuse viga. Seetõttu kasutatakse vea asemel vea absoluutväärtuse ülemmäära, s.o. võimalikult väikest ja lihtsat positiivset ratsionaalarvu α, mis rahuldab võrratust

$$|\Delta a| \leqslant \alpha \quad \text{ehk} \quad |A - a| \leqslant \alpha.$$

Arvu α nimetatakse ka ligikaudse arvu a absoluutseks veaks.

Viimasest võrratusest järeldub, et

$$-\alpha \leqslant A - a \leqslant \alpha,$$

millest

$$a - \alpha \leqslant A \leqslant a + \alpha.$$

Saadud võrratuste asemel kasutatakse sageli järgmist kirjutusviisi:

$$A = a \pm \alpha.$$

Näiteks, kui raamatu pikkuse mõõtmisel on saadud 32 cm ja seejuures tehtav viga ei ületa 0,3 cm, siis ütleme, et raamatu pikkus on (32 ± 0,3) cm. Analoogiliselt tuleb mõista väidet, et krundi pikkus on (522 ± 0,2) meetrit.

Ligikaudse väärtuse täpsuse hindamiseks ei ole absoluutne viga sobiv. Seetõttu on kasutusele võetud veel nn. relatiivne viga.

Ligikaudse väärtuse a relatiivseks veaks nimetatakse jagatist $\frac{\alpha}{a}$, mida tavaliselt väljendatakse protsentides või promillides.

Ligikaudne väärtus loetakse seda täpsemaks, mida väiksem on tema relatiivne viga.

Ülaltoodud näites on raamatu mõõtmisel tehtud relatiivne viga $\frac{0,3}{32} = 0,009 = 0,9\%$, krundi mõõtmisel tehtud relatiivne viga aga $\frac{0,2}{525} = 0,0004 = 0,04\%$. Seega on krundi mõõtmine andnud täpsema tulemuse kui raamatu mõõtmine.

4. <u>Arvutamine ligikaudsete arvudega</u>. Kui andmed mingi suuruse arvutamiseks on teada ligikaudu, siis saab nende andmete põhjal suuruse jaoks samuti ainult ligikaudse väärtuse. Me peame aga oskama hinnata arvutatava suuruse ligikaudse väärtuse viga.

Olgu $x = a \pm \alpha$ ja $y = b \pm \beta$,

siis

$$a - \alpha \leq x \leq a + \alpha,$$
$$b - \beta \leq y \leq b + \beta.$$

a. <u>Summa absoluutne viga</u>. Et summal on suurim väärtus, kui liidetavad on võimalikult suured, ja vähim väärtus, kui liidetavad on võimalikult väikesed, siis

$$(a - \alpha) + (b - \beta) \leq x + y \leq (a + \alpha) + (b + \beta)$$

ehk

$$(a + b) - (\alpha + \beta) \leq x + y \leq (a + b) + (\alpha + \beta).$$

Sellest järeldub, et

$$x + y = (a + b) \pm (\alpha + \beta),$$

s.t. <u>ligikaudsete arvude summa absoluutne viga võrdub liidetavate absoluutsete vigade summaga</u>.

b. <u>Vahe absoluutne viga</u>. Et vahel on suurim väärtus, kui vähendatav on võimalikult suur ja lahutatav võimalikult väike, ning vähim väärtus, kui esineb vastupidine juhtum, siis

$$(a - \alpha) - (b + \beta) \leq x - y \leq (a + \alpha) - (b - \beta)$$

ehk

$$(a - b) - (\alpha + \beta) \leq x - y \leq (a - b) + (\alpha + \beta),$$

millest järeldub, et

$$x - y = (a - b) \pm (\alpha + \beta).$$

Seega kahe ligikaudse arvu vahe absoluutne viga võrdub antud arvude absoluutsete vigade summaga.

c. <u>Korrutise absoluutne viga</u>. Olgu $a>0$ ja $b>0$. Et korrutisel on suurim väärtus, kui positiivsed tegurid on võimalikult suured, ja vähim väärtus, kui esineb vastupidine juhtum, siis

$$(a-\alpha)\cdot(b-\beta)\leq xy\leq(a+\alpha)(b+\beta)$$

ehk

$$ab-(a\beta+b\alpha-\alpha\beta)\leq xy\leq ab+(a\beta+b\alpha+\alpha\beta).$$

Et α ja β on väiksed, võrreldes vastavalt arvudega a ja b, siis on ka korrutis $\alpha\beta$ väike, võrreldes arvudega $a\beta$ ja $b\alpha$. Seetõttu võime korrutise tõkete avaldistes liikme $\alpha\beta$ jätta arvestamata:

$$ab-(a\beta+b\alpha)\leq xy\leq ab+(a\beta+b\alpha).$$

Sellest järeldub, et

$$xy=ab\pm(a\beta+b\alpha),$$

millest nähtub, et

<u>kahe teguri korrutise absoluutne viga võrdub esimese teguri ja teise teguri vea ning teise teguri ja esimese teguri vea korrutiste summaga</u>.

d. <u>Jagatise absoluutne viga</u>. Olgu jällegi $a>0$ ja $b>0$. Et jagatisel on suurim väärtus, kui positiivne jagatav on võimalikult suur ja positiivne jagaja võimalikult väike, ja vähim väärtus, kui esineb vastupidine juhtum, siis

$$\frac{a-\alpha}{b+\beta}\leq\frac{x}{y}\leq\frac{a+\alpha}{b-\beta},$$

millest

$$\frac{(a-\alpha)(b-\beta)}{b^2-\beta^2}\leq\frac{x}{y}\leq\frac{(a+\alpha)(b+\beta)}{b^2-\beta^2}$$

ehk

$$\frac{ab}{b^2-\beta^2}-\frac{a\beta+b\alpha-\alpha\beta}{b^2-\beta^2}\leq\frac{x}{y}\leq\frac{ab}{b^2-\beta^2}+\frac{a\beta+b\alpha+\alpha\beta}{b^2-\beta^2}.$$

Jättes siin eespool näidatud põhjusel arvestamata lisaks liikmele $\alpha\beta$ veel ka β^2, saame:

$$\frac{a}{b}-\frac{a\beta+b\alpha}{b^2}\leq\frac{x}{y}\leq\frac{a}{b}+\frac{a\beta+b\alpha}{b^2},$$

millest nähtub, et

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \pm \frac{a\beta + b\alpha}{b^2},$$

s.t. jagatise absoluutne viga võrdub murruga, mille nimetajaks on jagaja ruut, lugejaks aga jagatava ja jagaja korrutise absoluutne viga.

e. Korrutise ja jagatise relatiivne viga. Korrutise relatiivne viga on (eeldades allpool kõikjal, et $a>0$ ja $b>0$):

$$\frac{a\beta + b\alpha}{ab} = \frac{a\beta}{ab} + \frac{b\alpha}{ab} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}.$$

Jagatise relatiivne viga on:

$$\frac{a\beta + b\alpha}{b^2} : \frac{a}{b} = \frac{a\beta + b\alpha}{ab} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}.$$

Seega kahe ligikaudse arvu korrutise kui ka jagatise relatiivne viga võrdub nende ligikaudsete arvude relatiivsete vigade summaga.

N ä i t e i d:

1. Kuubi serva pikkus on $a \pm \alpha$. Leida: a) kuubi ühe tahu pindala ligikaudse väärtuse a^2 absoluutne ja relatiivne viga; b) kuubi ruumala ligikaudse väärtuse a^3 absoluutne ja relatiivne viga.

a) Et $a^2 = aa$, siis ligikaudse väärtuse a^2 absoluutne viga on $a\alpha + a\alpha = 2a\alpha$ ja relatiivne viga $\frac{2\alpha}{a}$ ehk $2 \cdot \frac{\alpha}{a}$.

b) Et $a^3 = a^2 \cdot a$, siis ligikaudse väärtuse a^3 absoluutne viga on $a^2\alpha + a \cdot 2a\alpha = 3a^2\alpha$ ja relatiivne viga $\frac{3\alpha}{a}$ ehk $3 \cdot \frac{\alpha}{a}$.

2. Ruudu pindala on $a \pm \alpha$. Leida ruudu külje pikkuse ligikaudse väärtuse $a^{\frac{1}{2}}$ ehk $\sqrt{a}$ absoluutne ja relatiivne viga.

Olgu ruudu külje pikkuse absoluutne viga β, seega ruudu külje pikkus on $a^{\frac{1}{2}} \pm \beta$ ehk $\sqrt{a} \pm \beta$. Külje pikkuse ruudu absoluutne viga on siis eelneva näite põhjal $2a^{\frac{1}{2}}\beta$ ehk $2\sqrt{a}\beta$, mis sisuliselt on aga ruudu pindala absoluutne viga α. Niisiis

$$2\sqrt{a}\,\beta = \alpha,$$

millest

$$\beta = \frac{\alpha}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \alpha .$$

Ruudu külje pikkuse relatiivne viga on seega $\frac{\beta}{\sqrt{a}} = \frac{\alpha}{2a}$ ehk $\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{a}$, s.t. pool ruudu pindala relatiivsest veast.

3. Kuubi ruumala on $a \pm \alpha$. Leida kuubi serva pikkuse ligikaudse väärtuse $a^{\frac{1}{3}}$ ehk $\sqrt[3]{a}$ absoluutne ja relatiivne viga.

Olgu kuubi serva pikkuse absoluutne viga β, seega kuubi serva pikkus on $a^{\frac{1}{3}} \pm \beta$ ehk $\sqrt[3]{a} \pm \beta$.

Kuubi serva pikkuse absoluutne viga on siis $3(a^{\frac{1}{3}})^2\beta = 3\, a^{\frac{2}{3}} \beta = 3\sqrt[3]{a^2}\,\beta$, mis sisuliselt on kuubi ruumala absoluutne viga α. Seega

$$3\sqrt[3]{a^2}\,\beta = \alpha,$$

millest

$$\beta = \frac{\alpha}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3} a^{-\frac{2}{3}} \alpha .$$

Serva pikkuse relatiivne viga on seega $\frac{\alpha}{3a}$ ehk $\frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{a}$, s.t. üks kolmandik kuubi ruumala relatiivsest veast.

Esitatud näidetest selgub, et kui arvu a absoluutne viga on α, siis astme

$$a^2,\ a^3,\ a^{\frac{1}{2}},\ a^{\frac{1}{3}}$$

absoluutne viga on vastavalt

$$2a\alpha,\quad 3a^2\alpha,\ \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \alpha\ ,\ \frac{1}{3} a^{-\frac{2}{3}} \alpha,$$

seega vaadeldud juhtudel astme a^k absoluutne viga on

$$k \cdot a^{k-1} \alpha$$

ja relatiivne viga

$$k\, a^{k-1} \alpha : a^k = k \cdot \frac{\alpha}{a}.$$

Edaspidi näeme, et need valemid on õiged k iga väärtuse puhul.

M ä r k u s 1. Sageli antakse mõõtmistulemus mõõtmisviga märkimata, näiteks toa pikkus on 3,4 m. Niisugust mõõtmistulemust vaadeldakse nagu ümardatud arvu ja eeldatakse, et absoluutne viga ei ületa poolt viimase koha ühikut. Niisiis, toa pikkus on (3,4 ± 0,05) m.

M ä r k u s 2. Ligikaudsete arvude liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise puhul võib kasutada ka A.N.Krõlovi poolt antud järgmisi juhiseid:

1. Summa ja vahe puhul tuleb anda nii mitu kümnendkohta, kui neid on vähima kümnendkohtade hulgaga andmes.

Näiteks 2,3 + 3,567 + 8,9134 = 14,8.

2. Korrutise ja jagatise puhul tuleb anda nii mitu tüvikohta, kui neid on vähima tüvikohtade hulgaga andmes.

Näiteks 0,0271 · 14,521 ≈ 0,394.

M ä r k u s 3. Arvul 2,3 on üks kümnendkoht ja kaks tüvikohta, arvul 0,0271 on neli kümnendkohta ja kolm tüvikohta, arvul 14,521 on kolm kümnendkohta ja viis tüvikohta.

§ 2. F u n k t s i o o n

1. Muutumatu suurus ja muutuv suurus. Suurusi on kahte liiki: muutumatud suurused ja muutuvad suurused.

Muutumatuks ehk jäävaks suuruseks ehk konstandiks nimetatakse niisugust suurust, millel on ainult üks arvuline väärtus.

Muutumatu suurus on näiteks kolmnurga sisenurkade summa, valguse kiirus, maakera tiirlemisperiood ja pöörlemisperiood, antud riidekanga ühe meetri hind, antud aine erikaal jm.

Muutuvaks suuruseks nimetatakse niisugust suurust, mis võib omandada mitmesuguseid arvulisi väärtusi.

Muutuv suurus on näiteks õhu temperatuur, inimese vanus, tehase päevane toodangu hulk, kauba koguhind jne.

Arvuhulka, mis koosneb kõikidest väärtustest, mida muutuv suurus võib omandada, nimetatakse selle muutuva suuruse m u u t u m i s p i i r k o n n a k s.

Kui muutumispiirkond koosneb kõikidest arvudest x, mis rahuldavad võrratusi $a \leq x \leq b$, siis nimetatakse muutumispiirkonda k i n n i s e k s v a h e m i k u k s. Kui aga muutumispiirkond koosneb kõikidest võrratusi $a < x < b$ rahuldavaist arvudest, siis nimetatakse teda l a h t i s e k s v a h e m i k u k s.

2. Funktsioon. Kui ühe muutuva suuruse x igale väärtusele tema muutumispiirkonnast on mingil viisil vastavaks seatud teise muutuva suuruse y üks kindel väärtus, siis öeldakse, et suurus y sõltub suurusest x ehk y on suuruse x funktsioon. Suurust x aga nimetatakse sõltumata muutujaks ehk argumendiks.

Nii näiteks vastab ruudu külje pikkuse x igale väärtusele selle ruudu pindala y üks väärtus. Ruudu pindala on niisiis külje pikkuse funktsioon, kusjuures sõltuvus on väljendatav võrrandiga $y = x^2$.

Samuti vastab näiteks antud kohas ööpäeva igale momendile õhu temperatuuri teatud väärtus. Õhu temperatuur on seega aja funktsioon.

Üldiselt tähistatakse tõsiasja, et suurus y on suuruse x funktsioon, sümboliga $y = f(x)$ või $y = \varphi(x)$ või $y = g(x)$ jne., kus tähed f, φ, g jne. tähistavad seadust või eeskirja, mille järgi igale argumendi väärtusele on vastavaks seatud funktsiooni väärtus. Funktsiooni väärtust, mis vastab argumendi kindlale väärtusele $x = a$, tähistatakse aga vastavalt kas $f(a)$ või $\varphi(a)$ või $g(a)$ jne.

Argumendi väärtuste hulka, mille puhul funktsioon on defineeritud, nimetatakse funktsiooni määramispiirkonnaks.

Toodud esimese näite puhul on funktsiooni määramispiirkonnaks kõik positiivsed arvud, sest ruudu külje pikkuseks võib olla mistahes positiivne arv.

Kui me aga suuruse x igale väärtusele vastavaks seame suuruse y selle väärtuse, mis võrdub argumendi ruuduga, siis on sõltuvus samuti väljendatav võrrandiga $y = x^2$, funktsiooni määramispiirkonnaks on aga kõik arvud.

Toodud teise näite puhul on argumendiks aeg ühe ööpäeva ulatuses. Kui aega mõõta tundides, siis on funktsiooni määramispiirkonnaks kõik arvud nullist kuni kahekümne neljani.

Kõiki arve, mis kuuluvad funktsiooni muutumispiirkonda, nimetatakse funktsiooni väärtuste hulgaks.

Nii on näiteks funktsiooni x^2 väärtuste hulgaks kõik mittenegatiivsed arvud: $x^2 \geq 0$.

3. Funktsiooni määramisviise

a. Tabel. Kui argumendi väärtustele vastavad funktsiooni väärtused saadakse vaatluse või katse tulemusena, siis antakse argumendi ja funktsiooni väärtused tavaliselt tabelina.

Õhu temperatuuri sõltuvust ajast ühe ööpäeva jooksul on võimalik anda näiteks järgmise tabelina:

Kellaaeg a	0	3	6	9	12	15	18	21	24
Temperatuur t	-2	-3	-5	-2	1	6	5	2	0

b. Graafik. Kui argumendi väärtused võtta abstsissideks ja vastavad funktsiooni väärtused ordinaatideks, siis saab argumendi ja funktsiooni vastavaid väärtuspaare kujutada punktidena koordinaattasapinnal. Saadud punktihulka nimetatakse funktsiooni graafikuks.

Ümberpöördult, kui koordinaattasapinnal on antud mingi punktihulk (tavaliselt mõne joone punktid), siis on sellega antud niisugune funktsioon, mille määramispiirkonnaks on antud punktide abstsisside väärtuste hulk ja funktsiooni väärtusteks vastavate ordinaatide väärtuste hulk, kusjuures igale argumendi väärtusele vastab just see funktsiooni väärtus, mis on argumendi väärtusega võrdse abstsissiga punkti ordinaadi väärtuseks.

c. Valem. Kui funktsioon on defineeritud selliselt, et matemaatiliste sümbolite abil on võimalik üles kirjutada funktsiooni sõltuvust argumendist, siis öeldakse, et funktsioon on antud oma avaldisega või valemiga ehk võrrandiga. Nii näiteks väljendub ruudu pindala y küljepikkuse x kaudu avaldisega x^2 või valemiga ehk võrrandiga $y = x^2$.

Funktsiooni määramisviisidest tuleb avaldist või valemit eelistada tabelile ja graafikule, sest avaldise põhjal saab alati koostada tabeli ning konstrueerida graafiku. Ümberpöördult, graafiku või tabeli põhjal pole aga funktsiooni avaldist üldiselt võimalik koostada.

4. Funktsioonide liigitelu

a. Paarisfunktsioon ja paaritu funktsioon. Kui funktsiooni f(x) määramispiirkonna igas punktis x kehtib seos

$$f(-x) = f(x),$$

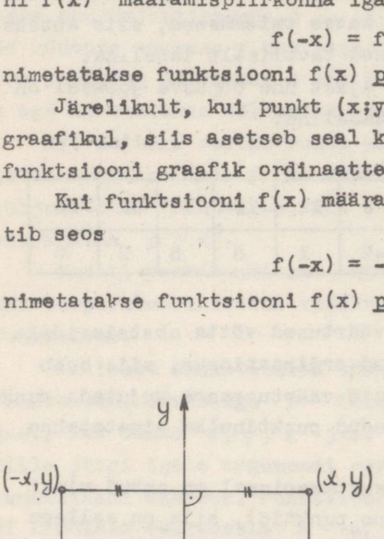
nimetatakse funktsiooni f(x) paarisfunktsiooniks.

Järelikult, kui punkt (x;y) asetseb paarisfunktsiooni graafikul, siis asetseb seal ka punkt (-x;y). Seega on paarisfunktsiooni graafik ordinaattelje suhtes sümmeetriline (joon.2).

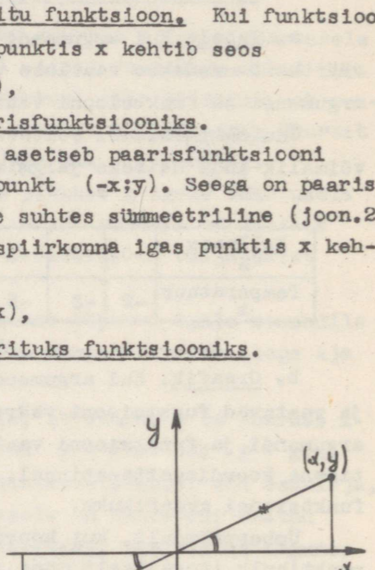
Kui funktsiooni f(x) määramispiirkonna igas punktis x kehtib seos

$$f(-x) = -f(x),$$

nimetatakse funktsiooni f(x) paarituks funktsiooniks.



Joon. 2



Joon. 3

Järelikult kui punkt (x;y) asetseb paaritu funktsiooni graafikul, asetseb seal ka punkt (-x;-y). Seega on paaritu funktsiooni graafik sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes (joon. 3).

b. Perioodiline funktsioon. Kui leidub niisugune konstant $k \neq 0$, et iga x puhul on kehtiv seos

$$f(x + k) = f(x),$$

siis nimetatakse funktsiooni $f(x)$ perioodiliseks.

Kui $f(x)$ on perioodiline funktsioon, s.o. kui $f(x + k) = f(x)$ ja n on täisarv, siis $f(x + nk) = f(x)$.

Tõestus: $f(x + nk) = f\{[x + (n - 1)k] + k\} = f[x + (n-1)k] =$

$$= f\{[x + (n - 2)k] + k\} = f\{x + (n - 2)k\} = \ldots$$

$$\ldots = f(x + 2k) = f[(x + k) + k] = f(x + k) = f(x).$$

Väikseimat positiivset arvu k_0, mille puhul $f(x + k_0) = f(x)$ iga x korral, nimetatakse funktsiooni perioodiks.

c. Monotoonselt kasvav ja monotoonselt kahanev funktsioon. Kui vahemikus $a \leq x \leq b$ iga $x_2 > x_1$ puhul kehtib kas võrratus $f(x_2) > f(x_1)$ või võrratus $f(x_2) < f(x_1)$, nimetatakse vahemikku $a \leq x \leq b$ funktsiooni $f(x)$ monotoonsuspiirkonnaks. Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse juhul $f(x_2) > f(x_1)$ monotoonselt kasvavaks, juhul $f(x_2) < f(x_1)$ aga monotoonselt kahanevaks.

Monotoonselt kasvava funktsiooni graafikut nimetatakse tõusvaks jooneks (joon. 5 ja 7), monotoonselt kahaneva funktsiooni graafikut aga langevaks jooneks (joon. 6 piirkonnas $x < 0$ ja joon. 9).

d. Liitfunktsioon. Kui funktsiooni $\varphi(x)$ väärtuste hulga mingi osa kuulub funktsiooni $f(x)$ määramispiirkonda, siis võib moodustada kolmanda funktsiooni $F(x)$ sel teel, et teise funktsiooni $f(x)$ avaldises argumendi x asendame esimese funktsiooniga $\varphi(x)$. Saame funktsiooni $F(x) = f[\varphi(x)]$, mida nimetatakse liitfunktsiooniks.

Näiteks $\varphi(x) = \sin x$ väärtuste hulgaks on kõik arvud -1-st 1-ni, $-1 \leq \sin x \leq 1$, funktsiooni $\sqrt{x}$ määramispiirkonnaks on kõik mittenegatiivsed arvud, $x \geq 0$. Seega kuulub funktsiooni $\sin x$ väärtuste hulga üks osa, $0 \leq \sin x \leq 1$, funktsiooni $\sqrt{x}$ määramispiirkonda. Järelikult võime moodustada liitfunktsiooni $F(x) = \sqrt{\sin x}$.

Liitfunktsiooni $f(\varphi(x))$ puhul nimetatakse funktsiooni $f(x)$ väliseks funktsiooniks ja funktsiooni $\varphi(x)$ sisemiseks funktsiooniks.

Nagu eelnevast selgub, on liitfunktsiooni $f(\varphi(x))$ määramispiirkonnaks sisemise funktsiooni $\varphi(x)$ määramispiirkonna see osa, millele vastavad sisemise funktsiooni väärtused kuuluvad välise funktsiooni määramispiirkonda.

Nii on liitfunktsiooni $\sqrt{\sin x}$ määramispiirkonnaks sisemise funktsiooni $\sin x$ määramispiirkonna see osa, mille puhul $0 \leq \sin x \leq 1$, seega

$$2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(vaata joon. 17).

e. Pöördfunktsioon. Kui üks funktsioon on antud tabeliga

x	a_1	a_2	...	a_n
y	b_1	b_2	...	b_n

ja teine funktsioon tabeliga

x	b_1	b_2	...	b_n
y	a_1	a_2	...	a_n

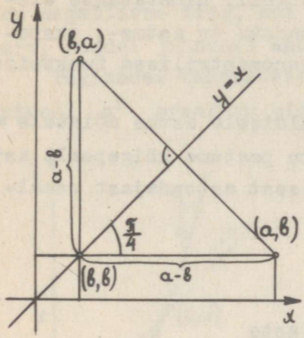
,

siis nimetatakse neid kahte funktsiooni teineteise pöördfunktsioonideks.

Nagu tabelitest näha, osutuvad teineteise pöördfunktsioonide korral ühe funktsiooni argumendi väärtused teise funktsiooni väärtusteks ja ümberpöördult.

Edasi on tabelist näha, et monotoonselt kasvava funktsiooni pöördfunktsioon on samuti monotoonselt kasvav ja monotoonselt kahaneva funktsiooni pöördfunktsioon ka monotoonselt kahanev.

Samuti on silmanähtav, et kui funktsiooni graafik koosneb punktidest (a;b), siis pöördfunktsiooni graafik koosneb punktidest (b;a). Sellest järeldub aga, et funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni graafikud on sümmeetrilised sirge $y = x$ suhtes (joon. 4).



Joon. 4.

Eelnevast järeldub, et kui funktsiooni väärtused y ja argumendi väärtused x rahuldavad võrrandit $y = f(x)$, siis tema pöördfunktsiooni väärtused y ja selle argumendi väärtused x rahuldavad võrrandit $x = f(y)$. Avaldades viimasest võrdusest funktsiooni y argumendi x kaudu, $y = \varphi(x)$, saame antud funktsiooni $f(x)$ pöördfunktsiooni $\varphi(x)$. Asendades nüüd võrrandis $x = f(y)$ suuruse y leitud avaldisega $\varphi(x)$, saame:

$$x = f(\varphi(x)).$$

Niisiis liitfunktsioon, mille seesmiseks funktsiooniks on välise funktsiooni pöördfunktsioon, võrdub argumendiga.

N ä i d e. Kui $y = \frac{2x - 5}{3x}$, siis pöördfunktsiooni leiame võrrandist $x = \frac{2y - 5}{3y}$. Saame $3xy = 2y - 5$, millest $y(3x - 2) = -5$ ja $y = \frac{5}{2 - 3x}$. Seega funktsioonid $\frac{2x - 5}{3x}$ ja $\frac{5}{2 - 3x}$ on teineteise pöördfunktsioonid.

Võttes nüüd ühe nendest funktsioonidest liitfunktsiooni väliseks ja teise seesmiseks funktsiooniks, saamegi argumendi x:

$$\frac{2 \cdot \frac{5}{2 - 3x} - 5}{3 \cdot \frac{5}{2 - 3x}} = \frac{10 - 5(2 - 3x)}{15} = \frac{15x}{15} = x \quad \text{või}$$

$$\frac{5}{2 - 3 \cdot \frac{2x - 5}{3x}} = \frac{5x}{2x - 2x + 5} = x.$$

§ 3. Elementaarfunktsioonid

1. Elementaarsed põhifunktsioonid. Kõige lihtsamaid funktsioone, mis on väljendatavad avaldise abil, nimetatakse elementaarseteks põhifunktsioonideks. Nendeks on astme-, eksponent- ja logaritmfunktsioon ning trigonomeetrilised funktsioonid koos oma pöördfunktsioonidega.

Kolm esimest nendest tuginevad üldisele astme mõistele a^r, kus $a>0$ ja r on reaalarv. Seetõttu peatume kõigepealt astme mõiste laiendamisel naturaalarvulisest astendajast reaalarvulise astendajani.

2. Astmefunktsioon

a. Naturaalarvulise astendajaga aste

Definitsioon 1. Kui a on reaalarv ja n naturaalarv, siis avaldist

$$a^n = \begin{cases} a, & \text{kui } n = 1 \\ \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{\text{tegurite arv } n}, & \text{kui } n>1, \end{cases}$$

nimetatakse astmeks, kusjuures arvu a nimetatakse astendatavaks ehk astme aluseks ja arvu n astendajaks.

Sellest definitsioonist järelduvad astmete järgmised omadused:

1. $0^n = 0$.
2. $1^n = 1$.
3. Kui $a>1$ ja $m<n$, siis $0<a^m<a^n$,

sest positiivse arvu korrutamisel ühest suurema teguriga tekib korrutis, mis on esialgsest arvust suurem.

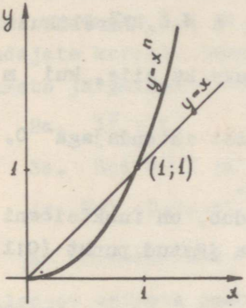
4. Kui $0<a<1$ ja $m<n$, siis $0<a^n<a^m$, sest positiivse arvu korrutamisel ühest väiksema arvuga tekib korrutis, mis on esialgsest arvust väiksem.
5. Kui $0<a<b$, siis $0<a^n<b^n$,

sest kui kahel positiivsete teguritega korrutisel on võrdne arv tegureid, siis on see korrutis suurem, millel on suuremad tegurid.

6. $0 \leq a^{2n} = (-a)^{2n}$.

7. Kui $a > 0$, siis $0 < a^{2n+1} = -(-a)^{2n+1}$ (sest korrutis on negatiivne siis, kui negatiivsete tegurite arv on paaritu arv, muudel juhtudel aga positiivne).

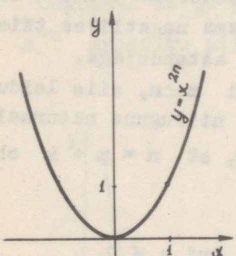
Tuginedes omadustele 1 - 5, saame skitseerida astmefunktsiooni x^n graafiku piirkonnas $x \geq 0$ (joon.5).



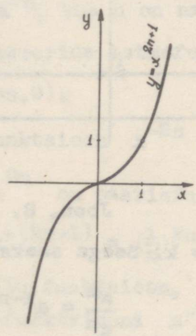
Joon. 5.

Omadusest 6 järeldub, et paarisarvulise astendajaga aste x^{2n} on paarisfunktsioon. Seega on tema graafik kogu määramispiirkonna $-\infty < x < +\infty$ ulatuses sümmeetriline y-telje suhtes (joon. 6).

Omadusest 7 järeldub, et paarituarvulise astendajaga aste x^{2n+1} on paaritu funktsioon. Järelikult on joon $y = x^{2n+1}$ piirkonnas $-\infty < x < +\infty$ sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes (joon. 7).



Joon. 6.



Joon. 7.

b. <u>Aste astendajaga 0</u>. Et definitsiooni 1 järgi astendaja tähendab tegurite arvu, siis ei luba see definitsioon astendajale anda ühtki väärtust peale naturaalarvu. Seetõttu tuleb muude astendaja väärtuste korral astet uuesti defineerida. Seda tehakse otstarbekohasust silmas pidades. Nagu teada, kehtib naturaalarvulise astendajaga astmete kohta järgmine arvutuseeskiri:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ kui } m > n \text{ ja } a \neq 0.$$

Kui loeksime selle seaduse kehtivaks ka siis, kui m = n, saaksime:

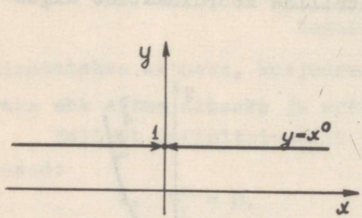
$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^o, \text{ kui } a \neq 0.$$

Teisalt aga teame, et $\frac{a^m}{a^m} = 1$, kui $a \neq 0$. Järelikult lugedes kõne all oleva arvutuseeskirja õigeks ka siis, kui $m = n$, peaks kehtima võrdus $a^o = 1$.

Vastavalt sellele defineerimegi astet astendajaga 0.

<u>Definitsioon 2.</u> $a^o = 1$, kui $a \neq 0$.

Nagu sellest definitsioonist järeldub, on funktsiooni x^o graafik sirgjoon $y = 1$, millest on ära jäetud punkt (0;1) (joon.8).



Joon. 8.

c. <u>Negatiivse täisarvulise astendajaga aste</u>. Lugedes eespool toodud arvutuseeskirja õigeks ka siis, kui $m<n$, peaksime astme mõistet laiendama negatiivse täisarvulise astendajaga.

Kui $m<n$, siis leidub nimelt niisugune naturaalarv k, et $n = m + k$ ehk $n - m = k$. Seega saaksime:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{-(n-m)} = a^{-k}, \text{ kui } a \neq 0.$$

Et aga

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+k}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^k} = \frac{1}{a^k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k, \text{ kui } a \neq 0,$$

siis tuleks õigeks lugeda võrdus

$$a^{-k} = (\frac{1}{a})^k.$$

Neil kaalutlustel annamegi järgmise definitsiooni:

Definitsioon 3. $a^{-n} = (\frac{1}{a})^n$, kui n on naturaalarv ja $a \neq 0$.

Seega oleme astme mõistet nii laiendanud, et astendajaks võib olla iga täisarv.

Definitsioonidest 1, 2 ja 3 järeldub, et eespool toodud astme omadused 2,3 ja 4 jäävad õigeks kõigi täisarvuliste astendajate korral. Seega, kui s ja t on täisarvud, siis kehtivad astmete järgmised omadused:

2a. $1^s = 1$.

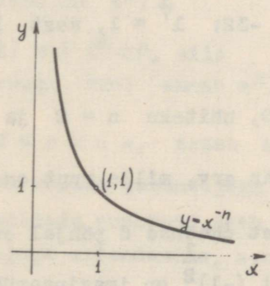
3a. Kui $a > 1$ ja $s < t$, siis $0 < a^s < a^t$.

4a. Kui $0 < a < 1$ ja $s < t$, siis $0 < a^t < a^s$.

Et võrratustest $0 < a < b$ järelduvad võrratused $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, milledest astmete omaduse 5 järgi $0 < (\frac{1}{b})^n < (\frac{1}{a})^n$ ehk def. 3 põhjal $0 < b^{-n} < a^{-n}$, siis kehtib negatiivse täisarvulise astendaja korral astmete omadus:

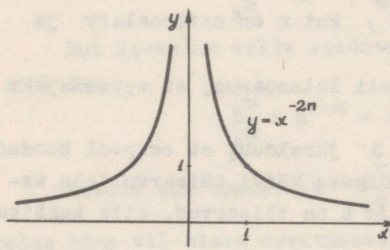
5a. Kui $0 < a < b$, siis $0 < b^{-n} < a^{-n}$, kus n on naturaalarv.

Omadused 2a ja 5a võimaldavad skitseerida astmefunktsiooni x^{-n} graafiku piirkonnas $x > 0$ (joon. 9).

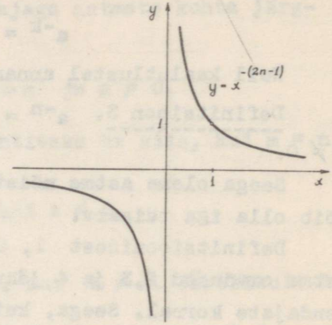


Joon. 9.

Et funktsioon $x^{-2n} = (\frac{1}{x})^{2n}$ on paarisfunktsioon ja $x^{-(2n-1)} = (\frac{1}{x})^{2n-1}$ on paaritu funktsioon, siis saab astmefunktsiooni x^{-n} graafikut piirkonnas $x < 0$ joonestada sümmeetria põhjal (joon. 10 ja 11).



Joon. 10.



Joon. 11.

d. <u>Murrulise astendaja aste</u>. Me teame, et naturaalarvude m ja n puhul kehtib astme astendamise seadus

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Lugedes selle seaduse kehtivaks ka siis, kui m on murd $\frac{1}{n}$, saaksime

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a.$$

Niisiis tähendaks aste $a^{\frac{1}{n}}$ arvu, mille n-es aste on a. Kui näiteks a = 27 ja n = 3, siis oleks $27^{\frac{1}{3}} = 3$, sest $3^3 = 27$. Samuti oleks $(-27)^{\frac{1}{3}} = -3$, sest $(-3)^3 = -27$; $32^{\frac{1}{5}} = 2$, sest $2^5 = 32$; $(-32)^{\frac{1}{5}} = -2$, sest $(-2)^5 = -32$; $1^{\frac{1}{7}} = 1$, sest $1^7 = 1$; $(-1)^{\frac{1}{7}} = -1$, sest $(-1)^7 = -1$; jne.

Kui aga n on paarisarv ja $a < 0$, näiteks $n = 2$ ja $a = -1$, siis $[(-1)^{\frac{1}{2}}]^2 = -1$, $(-1)^{\frac{1}{2}}$ an arv, mille ruut on -1. Niisiis $(-1)^{\frac{1}{2}}$ ei ole reaalarv, sest omaduse 6 põhjal on reaalarvu paarisaste mittenegatiivne arv; $(-1)^{\frac{1}{2}}$ on imaginaarühik i.

Meie piirdume ainult reaalarvudega ja vaatleme seetõttu astet $a^{\frac{1}{2k}}$, $k = 1, 2, 3...$, edaspidi ainult tingimusel $a \geqslant 0$.

Kui nüüd $a > 0$ ja n on paarisarv, näiteks $a = 4$ ja $n = 2$, siis $4^{\frac{1}{2}}$ on arv, mille ruut on 4. Omaduse 6 põhjal on aga olemas kaks niisugust arvu, need on 2 ja -2. Astme $4^{\frac{1}{2}}$ all mõistame ainult ühte nendest ja nimelt positiivset, $4^{\frac{1}{2}} = 2$.

Vastavalt eeltoodule anname järgmised definitsioonid:

Definitsioon 4. Kui $a \geqslant 0$ ja n on naturaalarv, siis aste $a^{\frac{1}{n}}$ on see positiivne arv, mille n-es aste on a:

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a, \text{ kui } a \geqslant 0.$$

Definitsioon 5. Kui $a < 0$ ja n on naturaalarv, siis aste $a^{\frac{1}{2n+1}}$ on see arv, mis astendamisel arvuga $2n + 1$ annab a:

$$\left(a^{\frac{1}{2n+1}}\right)^{2n+1} = a.$$

Et iga ratsionaalarv on kirjutatav kujul $\frac{m}{n}$, kus m on täisarv ja n naturaalarv, ning $a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$, siis on nüüd teada ka aste mistahes ratsionaalse astendaja $\frac{m}{n}$ puhul:

1) kui $a^m > 0$, siis $a^{\frac{m}{n}}$ on see positiivne arv, mille n-es aste on a^m;

2) kui $a^m < 0$, siis $a^{\frac{m}{2k+1}}$ on see arv, mis astendamisel arvuga $2k+1$ annab a^m.

M ä r k u s. Astet $a^{\frac{m}{n}}$ tähistatakse ka $\sqrt[n]{a^m}$; $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Murrulise astendajaga astmed on üldiselt irratsionaalarvud, millede numbreid saab leida ühtse skeemi järgi astendaja nimetajaga astendamise, s.o. korrutamise teel.

Definitsiooni 4 järgi on näiteks $22^{\frac{1}{2}}$ positiivne arv, mille ruut on 22.

Arv $22^{\frac{1}{2}}$ ei ole täisarv, sest $4^2 = 16 < 22$ ja $5^2 = 25 > 22$. See arv ei ole ka murd, sest ühegi murru ruut ei ole täisarv. Seega $22^{\frac{1}{2}}$ ei ole ratsionaalarv.

Et ratsionaalarvu ruut on niisiis kas suurem või väiksem arvust 22, siis saame moodustada lõpmatu kümnendmurru a järgmise eeskirja alusel:

1. Naturaalarvude reast otsime niisuguse kõrvutiseisva arvupaari, et esimese arvu ruut on väiksem ja teise arvu ruut suurem 22-st.

Väiksema arvu võtame arvu a täisosaks. Seega arvu a täisosa on 4:

$a = 4,...$

2. Kui arvude

4,0 4,1 4,2 4,3 4,4 4,5 4,6 4,7 4,8 4,9

hulgas leidub niisugune kõrvutiseisvate arvude paar, et esimese arvu ruut on väiksem ja teise ruut suurem 22-st, siis võtame esimese arvu viimase numbri arvu a kümnendikkude numbriks. Kui aga kirjeldatud arvupaari ei leidu, võtame arvu a kümnendikkude numbriks 9.

Et $4,6^2 = 21,16 < 22$ ja $4,7^2 = 22,09 > 22$, siis $a = 4,6...$

3. Kui arvude

4,60 4,61 4,62 4,63 4,64 4,65 4,66 4,67 4,68 4,69

hulgas leidub kaks niisugust kõrvutiseisvat arvu, et esimese arvu ruut on väiksem ja teise ruut suurem 22-st, siis võtame esimese arvu viimase numbri arvu a sajandikkude numbriks. Kui aga kirjeldatud arvupaari ei leidu, võtame arvu a sajandikkude numbriks 9.

Et $4,69^2 = 21,9961 < 22$, siis

$a = 4,69...$

Analoogiliselt leiame arvu a edasised numbrid.

Et arv a on <u>suurem igast</u> lõplikust kümnendmurrust, mille ruut on <u>väiksem</u> 22-st, siia a^2 <u>ei saa olle väiksem</u> arvust 22, $a^2 \geq 22$.

Et arv a on väiksem igast lõplikust kümnendmurrust, mille ruut on suurem 22-st, siis a^2 ei saa olla suurem arvust 22, $a^2 \leq 22$.

Seega saab kehtida ainult võrdus

$$a^2 = 22.$$

Järelikult ei saa kirjeldatud viisil konstrueeritud arv a olla perioodiline kümnendmurd. Ta on lõpmatu mitteperioodiline kümnendmurd ehk irratsionaalarv, mille ruut on 22; $a = 4{,}69\ldots = 22^{\frac{1}{2}}$.

Üldiselt, kui k, r ja n on naturaalarvud ning $k^n < r < (k+1)^n$, saab analoogiliselt (ruutude asemel n-daid astmeid arvutades) konstrueerida irratsionaalarvu a, mis rahuldab tingimust

$a^n = r$ ehk $a = r^{\frac{1}{n}}$.

e. Ratsionaalse astendajaga aste. Eespool antud astme definitsioonide puhul jäävad ratsionaalsete astendajate r ja R korral kehtima astmete omadused 1 - 5 järgmisel kujul:

1a. Kui $r > 0$, siis $0^r = 0$.

2b. $1^r = 1$.

3b. Kui $a > 1$ ja $r < R$, siis $0 < a^r < a^R$

ehk

ühest suurema arvu aste on positiivne ja suureneb astendaja suurenemisel.

4b. Kui $0 < a < 1$ ja $r < R$, siis $0 < a^R < a^r$

ehk

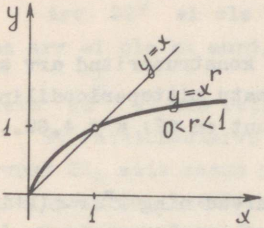
ühest väiksema positiivse arvu aste on positiivne ja väheneb astendaja suurenemisel.

5b. Kui $0 < a < b$ ja $r > 0$, siis $0 < a^r < b^r$ ja $0 < b^{-r} < a^{-r}$

ehk

kui alus on positiivne, siis aste on positiivne; aluse suurenemisel aste positiivse astendaja korral suureneb, aga negatiivse astendaja korral väheneb.

Omadustele 1a ja 2b-5b tuginedes saab skitseerida funktsiooni x^r graafiku piirkonnas $x \geq 0$. Kui $r > 1$, siis asub graafik sirge $y = x$ suhtes nii, nagu näha jooniselt 5, kui aga $0<r<1$, siis nii, nagu näha jooniselt 12. Kui $r<0$, siis graafik on niisugune nagu joonisel 9.



Joon. 12.

Kui r on paarisarvulise nimetajaga taandumatu murd, siis funktsiooni x^r määramispiirkond koosnebki ainult positiivsetest arvudest.

Kui aga r on paarituarvulise nimetajaga murd, kuuluvad ka negatiivsed arvud funktsiooni x^r määramispiirkonda ning funktsiooni graafik on sümmeetriline kas y-telje suhtes (paarisarvulise lugeja korral) või koordinaatide alguspunkti suhtes (paarituarvulise lugeja korral).

g. Irratsionaalse astendajaga aste. Astme omadused 3b ja 4b võimaldavad defineerida astet u^α, kus u on positiivne reaalarv ja α irratsionaalarv.

Olgu α positiivne irratsionaalarv, mille ratsionaalsed lähisväärtused on a ja A, nii et $a<\alpha<A$.

Kui $u>1$, siis astmete omaduse 3b põhjal on $u^a<u^A$. Kui aga $0<u<1$, siis astmete omaduse 4b põhjal on $u^A<u^a$.

Arve a ja A, nagu teada, võib aga valida nii, et nad erineksid teineteisest kuitahes vähe. Seetõttu võib arvudele a ja A võtta niisuguseid väärtusi, et ka astmed u^a ja u^A erineksid teineteisest kuitahes vähe. Seega saab moodustada ühe uue arvu v, mille lähisväärtusteks on arvud u^a ja u^A. Seda arvu v nimetataksegi arvu u astmeks irratsionaalse astendajaga α, $v = u^\alpha$.

Kui $0<u<1$, siis $u^A \leq v = u^\alpha \leq u^a$. Kui $u>1$, siis $u^a < v = u^\alpha < u^A$.

Kui aga $u<0$, siis ei saa iga a ja A puhul moodustada astmeid u^a ja u^A, seega pole sel juhul mõtet rääkida ka astmest u^α.

Irratsionaalse astendaja korral peab astme alus olema positiivne.

Näitena arvutame 2^{π}.

Et $3,14<\pi<3,15$ ning $2^{3,14}\approx 8,812$ ja $2^{3,15}\approx 8,874$, siis $2^{\pi} = 8,8...$

Edasi teame, et $3,141<\pi<3,142$ ning $2^{3,141}\approx 8,820$ ja $2^{3,142}\approx 8,826$, seega $2^{\pi} = 8,82...$

Nüüd võtame $3,1415<\pi<3,1416$ ning arvutame $2^{3,1415}\approx$ $\approx 8,8244$ ja $2^{3,1416}\approx 8,8250$. Niisiis $2^{\pi} = 8,824...$

Edasi teame, et $3,14159<\pi<3,14160$, $2^{3,14159}\approx 8,82496$

ja $2^{3,14160}\approx 8,82502$. Seega $2^{\pi} = 8,8249...$

Et aga $3,141592<\pi<3,141593$ ning $2^{3,141692}\approx 8,82497$ ja $2^{3,141593}\approx 8,82498$, siis $2^{\pi} = 8,82497...$

Nii edasi arvutades saaksime arvu 2^{π} kirjutamiseks kuitahes palju numbreid.

Et astme omadused 1a, 2b-5b kehtivad u^a ja u^A puhul, siis loetakse nad õigeks ka u^{α} korral. Seega võib lausetes 1a, 2b-5b arvude r ja R all mõista mistahes reaalarve. Vastavalt sellele on funktsiooni x^{α} graafik $\alpha>1$ puhul joonise 5-, $0<\alpha<1$ puhul joonise 12- ja $\alpha<0$ puhul joonise 9-kujuline.

h. Astmefunktsiooni pöördfunktsioon. Kui astmefunktsioon y ja argument x rahuldavad võrrandit $y = x^r$, kus r on nullist erinev reaalarv, siis astmefunktsiooni pöördfunktsioon y ja argument x rahuldavad võrrandit $x = y^r$.

Astendades viimast võrrandit arvuga $\frac{1}{r}$, saame $x^{\frac{1}{r}} = (y^r)^{\frac{1}{r}}$ ehk $y = x^{\frac{1}{r}}$.

Seega astmefunktsiooni x^r $(r \neq 0)$ pöördfunktsioon on jällegi astmefunktsioon, nimelt funktsioon $x^{\frac{1}{r}}$.

3. Eksponentfunktsioon. Nagu eespool selgus, võib astendaja olla mistahes reaalarv. Järelikult on $a>0$ puhul aste a^x määratud x iga väärtuse korral. Et $1^x = 1$, siis võtame $a \neq 1$.

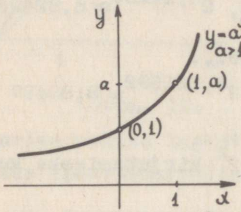
Funktsiooni a^x, kus $a>0$ ja $a \neq 1$, nimetatakse eksponentfunktsiooniks.

Astmete omaduste 3b ja 4b põhjal on $a^x > 0$.

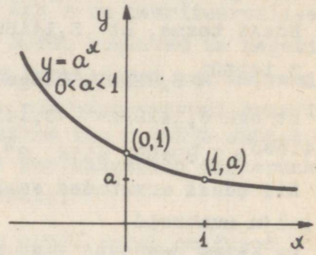
Kui $a > 1$, siis on a^x monotoonselt kasvav (omaduse 3b põhjal.)

Kui $0 < a < 1$, siis on a^x monotoonselt kahanev (omaduse 4b põhjal).

Definitsiooni 1 põhjal läbib funktsiooni a^x graafik punkti (1;a) ja definitsiooni 2 põhjal punkti (0;1) (joon.13 ja 14).



Joon. 13.



Joon. 14.

4. Logaritmfunktsioon. Eksponentfunktsiooni $y = a^x$ pöördfunktsiooni nimetatakse logaritmfunktsiooniks. Seega peab logaritmfunktsioon rahuldama võrrandit $x = a^y$.

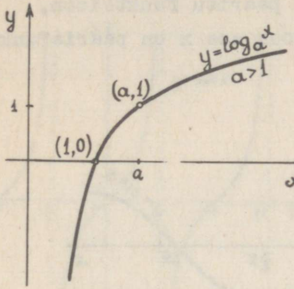
Niisiis tähendavad logaritmfunktsiooni väärtused sisuliselt astendajat, millega tuleb astendada arvu a, et saada argumendi väärtus.

Võrrandist $x = a^y$ ei saa aga suurust y avaldada ei liitmise, lahutamise, korrutamise, jagamise ega astendamise teel. Tema avaldamiseks on kasutusele võetud uus sümbol $y = \log_a x$.

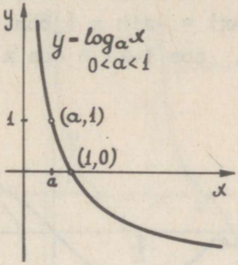
Muidugi võib logaritmfunktsiooni alus a omandada ainult neidsamu väärtusi, mida ta omas eksponentfunktsiooni puhul, s.o. $a > 0$, $a \neq 1$. Logaritmfunktsiooni argument x võib aga omandada ainult neid väärtusi, mis osutusid eksponentfunktsiooni väärtusteks, s.o. ainult positiivseid väärtusi.

Et eksponentfunktsiooni a^x graafik läbib punkte (0;1) ja (1;a), siis logaritmfunktsiooni $\log_a x$ graafik läbib punkte (1;0) ja (a;1) (joon.15 ja 16).

Matemaatilises analüüsis eelistatakse eksponent- ja logaritmfunktsiooni alusena irratsionaalarvu $e = 2{,}718\ldots$ Loga-



Joon. 15.



Joon. 16.

ritme alusel e nimetatakse naturaallogaritmideks ja tähistatakse ln x (vt. E.Etverk, Piirväärtus ja pidevus, § 1, p.6 ja 7).

5. Trigonomeetrilised funktsioonid. Trigonomeetrilistest funktsioonidest peame teadma järgmisi: sin x, cos x, tan x, cot x.

Matemaatilises analüüsis vaadeldakse niihästi funktsiooni kui ka argumendi väärtusi nimeta arvudena. Seetõttu ei tähenda trigonomeetriliste funktsioonide puhul argument x mitte nurga suurust kraadides, vaid absoluutmõõdus (radiaanides). Kasutusel olevates tabelites on aga nurga suurused antud kraadimõõdus. Nende tabelite kasutamist matemaatilises analüüsis selgitab järgmine näide.

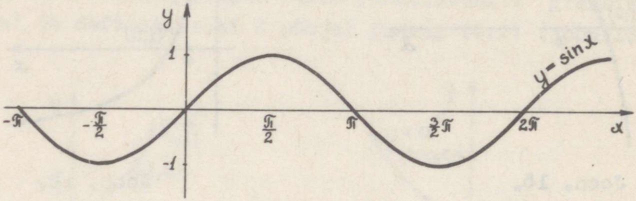
Leiame sin x, kui x = 5, s.o. leiame sin 5.

Nagu teada, on 360° absoluutmõõdus $2\pi \approx 2 \cdot 3{,}1416 = 6{,}2832$ ja 270° on absoluutmõõdus $3 \cdot \frac{\pi}{2} \approx 4{,}7124$.

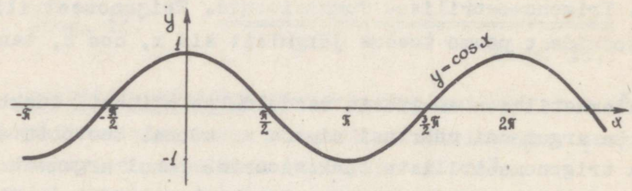
Et $4{,}7124 < 5 < 6{,}2832$, siis antud nurk on neljanda veerandi nurk ja erineb täispöördest $6{,}2832 - 5 \approx 1{,}2832$ võrra. Koolis kasutusel olevatest V.M.Bradise tabelitest (XVI.Radiaanmõõt) leiame, et nurk 1,2832 on $73^\circ 31'$. Seega sin 5 = $= \sin(360^\circ - 73^\circ 31') = -\sin 73^\circ 31' = -0{,}9589$.

Funktsioonide sin x ja cos x määramispiirkonnaks on kõik arvud, funktsioonid on perioodilised perioodiga 2π, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ja $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Mõlemad funktsioonid on tõkestatud: $|\sin x| \leq 1$ ja $|\cos x| \leq 1$ ehk $-1 \leq \sin x \leq 1$

ja $-1 \leq \cos x \leq 1$. Funktsioon $\sin x$ on paaritu funktsioon, $\sin(-x) = -\sin x$ (joon. 17), funktsioon $\cos x$ on paarisfunktsioon, $\cos(-x) = \cos x$ (joon. 18).



Joon. 17.

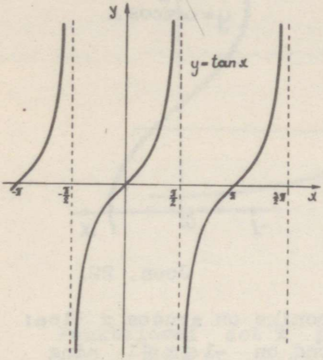


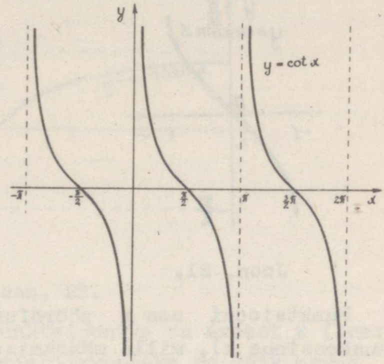
Joon. 18.

Funktsioonid $\tan x$ ja $\cot x$ on paaritud ning perioodilised funktsioonid perioodiga π.

Funktsioon $\tan x$ on määratud kõikide argumendi väärtuste puhul, välja arvatud $x = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ (n on täisarv), mis on funktsiooni lõpmatusekohtadeks (joon. 19).

Funktsioon $\cot x$ määramispiirkonnaks on kõik arvud, välja arvatud $x = n\pi$ (n on täisarv), mis on $\cot x$ lõpmatusekohtadeks (joon. 20).





Joon. 19. Joon. 20.

6. <u>Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid</u> ehk <u>arkusfunktsioonid</u>. Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioone moodustatakse nende funktsioonide ühes monotoonsuspiirkonnas:

$\sin x$ puhul piirkonnas $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$,

$\tan x$ " " $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$,

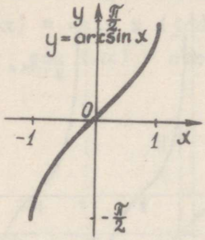
$\cos x$ " " $0 \leq x \leq \pi$,

$\cot x$ " " $0 < x < \pi$.

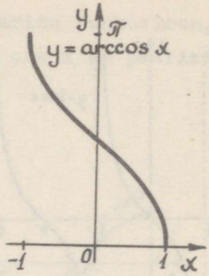
Kui funktsioon ja argument on seotud võrrandiga $y = \sin x$ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, siis selle funktsiooni pöördfunktsioon ja vastav argument on seotud võrrandiga $x = \sin y$, millest $y = \arcsin x$ (loe arkussiinus x). Niisiis funktsiooni $\sin x$ pöördfunktsioon on $\arcsin x$, kusjuures $-1 \leq x \leq 1$ ja $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$ (joon. 21).

Seega $\arcsin x$ tähendab absoluutmõõdus väljendatud positiivset või negatiivset teravnurka, mille siinus on x:

$$\sin(\arcsin x) = x.$$



Joon. 21.



Joon. 22.

Funktsiooni cos x pöördfunktsiooniks on arccos x (loe: arkuskoosinus x), mille määramispiirkond on $-1 \leq x \leq 1$ ning funktsiooni väärtuste hulk $0 \leq \arccos x \leq \pi$ (joon. 22).

Seega arccos x tähendab absoluutmõõdus väljendatud vähimat positiivset nurka, mille koosinus on x:

$$\cos(\arccos x) = x.$$

Et $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, siis ka

$$\sin(\arcsin x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right).$$

Võrduse (1) põhjal järeldub sellest, et

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right),$$

ja arkuskoosinuse definitsiooni põhjal, et

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

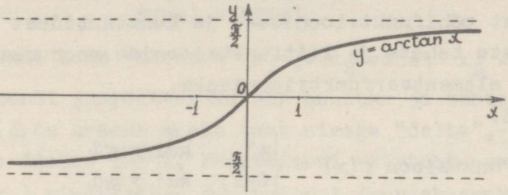
ehk

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Funktsiooni tan x pöördfunktsioon on arctan x (loe: arkustangens x), mille määramispiirkonnaks on kõik arvud $-\infty < x < +\infty$, ning funktsiooni väärtuste hulgaks arvude $-\frac{\pi}{2}$ ja $\frac{\pi}{2}$ vahelised arvud: $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$ (joon. 23).

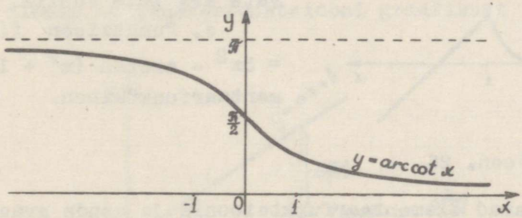
Seega arctan x tähendab absoluutmõõdus väljendatud positiivset või negatiivset teravnurka, mille tangens on x:

$$\tan(\arctan x) = x. \qquad (2)$$



Joon. 23.

Funktsiooni cot x pöördfunktsiooniks on arccot x (loe: arkuskootangens x), mille määramispiirkonnaks on kõik arvud $-\infty<x<+\infty$, ning funktsiooni väärtusteks arvud 0-st π-ni: $0<\text{arccot } x<\pi$ (joon. 24).



Joon. 24.

Seega arccot x tähendab absoluutmõõdus väljendatud vähimat positiivset nurka, mille kootangens on x:

$$\cot(\text{arccot } x) = x.$$

Et $\tan\alpha = \cot(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, siis ka

$$\tan(\arctan x) = \cot(\frac{\pi}{2} - \arctan x).$$

Võrduse (2) põhjal järeldub sellest, et $x = \cot(\frac{\pi}{2} - \arctan x)$ ja seega

$$\text{arccot } x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

ehk

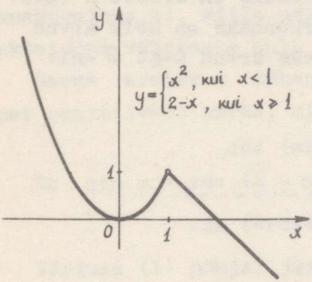
$$\text{arccot } x + \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

7. Elementaarfunktsioonid. Kõiki funktsioone, mis on väljendatavad üheainsa avaldisega, kui see avaldis on saadud elementaarsetest põhifunktsioonidest ja konstantidest lõpliku arvu aritmeetiliste tehete ja liitfunktsioonide moodustamise teel, nimetatakse elementaarfunktsioonideks.

Näiteid:

a. Funktsioon $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x < 1 \\ 2-x, & \text{kui } x \geq 1 \end{cases}$

ei ole elementaarfunktsioon, sest tema väljendamiseks on vaja kahte avaldist, x^2 ja $2 - x$ (joon. 25).



Joon. 25.

b. Funktsioon $f(x) = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$, kus n on mistahes naturaalarv, pole samuti elementaarfunktsioon, sest f(x) on summa, kus liidetavate arv pole lõplik.

c. Funktsioon $f(x) = 3x^2 - \arctan(x^2 + 1)$ on elementaarfunktsioon.

8. Tähtsamad elementaarfunktsioonid ja nende graafikud

a. Lineaarfunktsioon. Funktsiooni $f(x) = ax + b$, kus a ja b on konstandid, nimetatakse lineaarfunktsiooniks. Lineaarfunktsiooni määramispiirkonnaks on kõik arvud. Nagu analüütilisest geomeetriast teada, on lineaarfunktsiooni graafik sirgjoon, mille tõus on a ja algordinaat b.

Juhul kui $b = 0$ ja $a \neq 0$, nimetatakse lineaarfunktsiooni $f(x) = ax$ võrdeliseks sõltuvuseks. Tema graafik läbib koordinaatide alguspunkti.

Võrdelise sõltuvuse põhiomadus seisab selles, et argumendi korrutamisel arvuga k korrutub funktsiooni väärtus samuti arvuga k.

Tõepoolest, kui $f(x_1) = ax_1$ ja $x_2 = kx_1$, siis $f(x_2) = ax_2 = akx_1 = k(ax_1) = kf(x_1)$. Seega

$$f(kx) = kf(x).$$

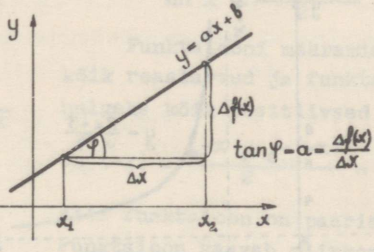
Argumendi kahe väärtuse x_1 ja x_2 vahet $x_2 - x_1$ nimetatakse argumendi juurdekasvuks ehk muuduks ja tähistatakse sümboliga Δx (Δ on kreeka keele täht nimega "delta", sümbolit Δx loetakse "delta iks"). Funktsiooni väärtuste vahet $f(x_2) - f(x_1)$ nimetatakse funktsiooni juurdekasvuks ehk muuduks ja tähistatakse sümboliga $\Delta f(x)$.

Lineaarfunktsiooni puhul on funktsiooni juurdekasv võrdeline argumendi juurdekasvuga.

Tõepoolest, kui $f(x) = ax + b$, siis $f(x_1) = ax_1 + b$ ja $f(x_2) = ax_2 + b$. Seega $f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1)$ ehk

$$\Delta f(x) = a\,\Delta x.$$

Sama ilmneb ka lineaarfunktsiooni graafikust (joon. 26).



Joon. 26.

b. Ruutfunktsioon. Funktsiooni $ax^2 + bx + c$, kus $a \neq 0$, nimetatakse ruutfunktsiooniks.

Nagu analüütilisest geomeetriast teada, on ruutfunktsiooni graafik ruutparabool.

c. Murdlineaarne funktsioon. Funktsiooni $\frac{ax + b}{cx + d}$, kus $c \neq 0$, nimetatakse murdlineaarseks funktsiooniks.

Konstrueerime murdlineaarse funktsiooni $\frac{2x + 3}{x - 4}$ graafiku.

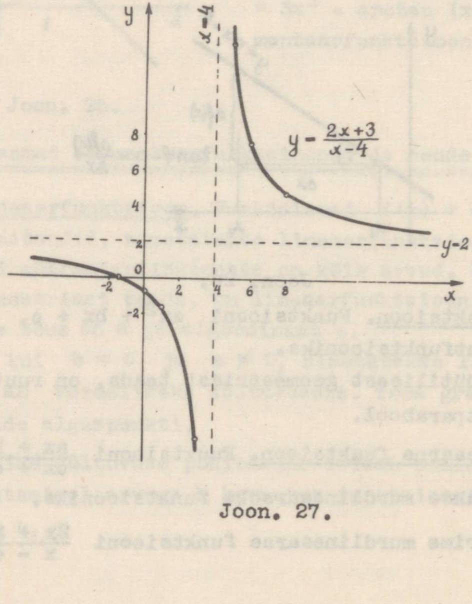
Funktsiooni määramispiirkonnaks on kõik arvud, välja arvatud $x = 4$. Kui x läheneb arvule 4, siis läheneb lugeja arvule $2 \cdot 4 + 3 = 11$, nimetaja aga arvule 0. Järelikult funktsiooni absoluutväärtus kasvab tõkestamatult, jäädes positiivseks siis, kui $x > 4$ ja negatiivseks siis, kui $x < 4$. Sirget $x = 4$ nimetatakse funktsiooni graafiku püstasümptoodiks.

Et näha, kuidas funktsioon muutub argumendi absoluutväärtuse suurenemisel, selleks anname funktsiooni avaldisele kuju

$$\frac{2x + 3}{x - 4} = 2 + \frac{11}{x - 4}.$$

Kui x tõkestamatult kasvab, siis läheneb murru $\frac{11}{x - 4}$ väärtus nullile. Seega joon $y = 2 + \frac{11}{x - 4}$ läheneb sirgele $y = 2$. Sirget $y = 2$ nimetatakse antud funktsiooni graafiku rõhtasümptoodiks.

Graafiku joonestamiseks arvutame veel järgmised graafiku punktid (5;13), (6;7,5), (8;4,75), (3;-9), (1;-1,7), (1,5;0) ja (0;-0,75) (joon. 27).



Joon. 27.

d. Hüperboolsed funktsioonid

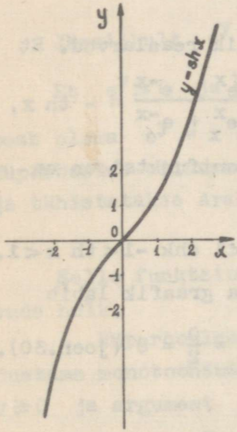
1. Hüperboolseks siinuseks nimetatakse funktsiooni $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, mida tähistatakse sh x:

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Funktsiooni määramispiirkonnaks on kõigi reaalarvude hulk. Funktsiooni väärtuste hulgaks on kõik reaalarvud. Et

$$\text{sh } (-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = - \text{sh } x,$$

siis on sh x paaritu funktsioon. Funktsioon on kõikjal monotoonselt kasvav. Tema graafik läbib punkti (0;0), sest $\text{sh } 0 = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$ (joon. 28).



Joon. 28.

2. Hüperboolseks koosinuseks nimetatakse funktsiooni $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, mida tähistatakse ch x:

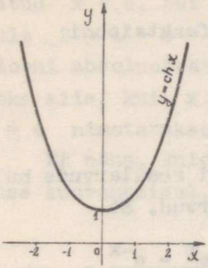
$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Funktsiooni määramispiirkonnaks on kõik reaalarvud ja funktsiooni väärtuste hulgaks kõik positiivsed arvud. Et

$$\text{ch } (-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \text{ch } x,$$

siis funktsioon on paarisfunktsioon. Funktsioon kasvab piirkonnas $x \geqslant 0$ ja kahaneb piirkonnas $x < 0$. Funktsiooni graafik läbib punkti (0;1), sest

$\text{ch } 0 = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$ (joon. 29). Definitsioonidest järeldub, et $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.



Joon. 29.

Tõepoolest,

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} =$$

$$= \frac{(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x})}{4} - \frac{(e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x})}{4} =$$

$$= \frac{4e^x e^{-x}}{4} = e^0 = 1.$$

3. Hüperboolseks tangensiks nimetatakse funktsiooni $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, mida tähistatakse th x:

$$\mathrm{th}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} .$$

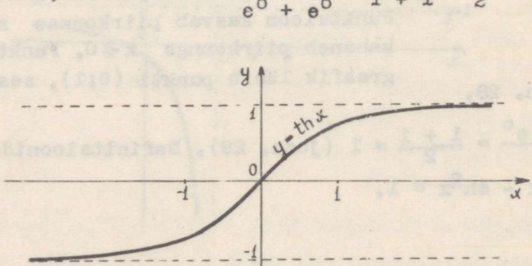
Funktsiooni määramispiirkonnaks on kõik reaalarvud. Et

$$\mathrm{th}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = - \mathrm{th}\, x,$$

siis th x on paaritu funktsioon. Et eksponentfunktsioon on kõikjal positiivne, siis

$$|e^x - e^{-x}| < e^x + e^{-x}, \text{ seega } |\mathrm{th}\, x| < 1 \text{ ehk } -1 < \mathrm{th}\, x < 1.$$

Funktsioon on kõikjal kasvav ning tema graafik läbib punkti (0;0), sest $\mathrm{th}\, 0 = \frac{e^0 - e^0}{e^0 + e^0} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$ (joon.30).



Joon. 30.

Et

$$\text{th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}, \text{ siis } \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}.$$

e. <u>Hüperboolsete funktsioonide pöördfunktsioonid ehk areafunktsioonid</u>.

1. Hüperboolse siinuse pöördfunktsioon y ja argument x peavad rahuldama võrrandit

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Seega

$$e^y - \frac{1}{e^y} = 2x, \text{ millest } (e^y)^2 - 1 = 2\,x\,e^y.$$

Avaldise e^y saame niisiis ruutvõrrandist

$$(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0.$$

Järelikult $e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$.

Et $e^y > 0$ ja $\sqrt{x^2 + 1} > |x|$, mistõttu $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$, siis peab olema $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$, Seega $y = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$. Hüperboolse siinuse pöördfunktsiooni nimetatakse <u>areasiinuseks</u> ja tähistatakse Arsh x:

$$\text{Arsh } x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Selle funktsiooni määramispiirkonnaks on kõigi reaalarvude hulk.

2. Hüperboolse koosinuse $y = \text{ch } x$ pöördfunktsiooni moodustame monotoonsuspiirkonnas $x \geq 0$, kus $y \geq 1$. Pöördfunktsioon $y \geq 0$ ja argument $x \geq 1$ peavad rahuldama võrrandit

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \text{ ehk } (e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0,$$

millest

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

Et $y \geq 0$, siis $e^y \geq 1$, seega peab olema $x \pm \sqrt{x^2 - 1} \geq 1$.

Kui $x \geq 1$, siis $x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1$, aga $x - \sqrt{x^2 - 1} =$

$$= \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x^2 - x^2 + 1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \leq 1.$$

Järelikult

$$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

millest

$$y = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Saadud funktsiooni nimetatakse areakoosinuseks ja tähistatakse $\operatorname{Arch} x$.

Niisiis funktsiooni $\operatorname{ch} x$ pöördfunktsioon on

$$\operatorname{Arch} x = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}), \text{ kus } x \geq 1.$$

3. Hüperboolse tangensi pöördfunktsioon y ja argument x peavad rahuldama võrrandit

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}.$$

Seega

$$xe^y + xe^{-y} = e^y - e^{-y},$$

millest

$$x(e^y)^2 + x = (e^y)^2 - 1$$

ja

$$(e^y)^2 = \frac{1 + x}{1 - x}.$$

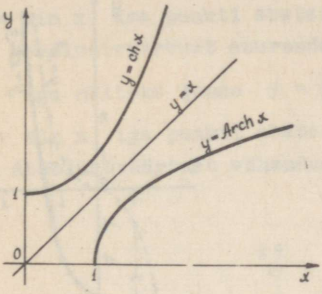
Et $e^y > 0$, siis $e^y = \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^{\frac{1}{2}}$, millest $y = \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$.

Hüperboolse tangensi pöördfunktsiooni nimetatakse areatangensiks ja tähistatakse $\operatorname{Arth} x$:

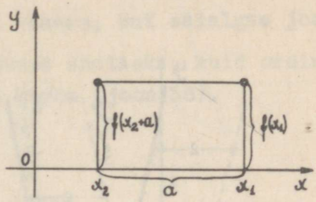
$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \text{ kus } -1 < x < 1.$$

Areafunktsioonide graafikud on sümmeetrilised vastavate hüperboolsete funktsioonide graafikutega sirge $y = x$ suhtes. Joonisel 31 on esitatud funktsiooni Arch x graafik.

9. Võtteid funktsiooni graafiku konstrueerimiseks. Kui on antud funktsiooni $f(x)$ graafik, siis saab selle abil kergesti konstrueerida funktsioonide $f(x + a)$, $f(x) + b$, $Af(x)$ ja $f(kx)$, kus a, b, A ja k on konstandid, graafikuid.



Joon. 31.



Joon. 32.

a. Leiame kõigepealt need argumendi väärtused, millede puhul funktsioonidel $f(x)$ ja $f(x + a)$ on võrdsed väärtused.

Kui $x_1 = x_2 + a$ ehk $x_2 = x_1 - a$, siis on $f(x_2 + a) = f(x_1)$

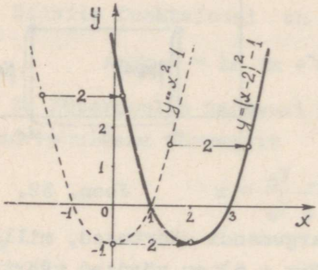
Järelikult on joonisel $y = f(x)$ kohal x_1 ja joonel $y = f(x + a)$ kohal $x_2 = x_1 - a$ võrdsed ordinaadid (joon.32).

Seega saadakse joone $y = f(x + a)$ graafik sel teel, et joont $y = f(x)$ x-telje sihis a ühiku võrra edasi nihutatakse, $a > 0$ puhul vasakule ja $a < 0$ puhul paremale.

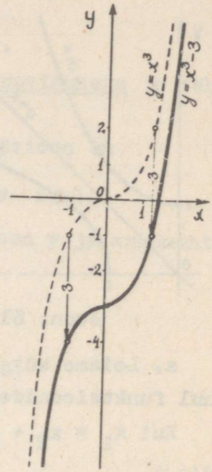
Olgu näiteks $f(x) = x^2 - 1$ ja $a = -2$, siis $f(x + a) = (x - 2)^2 - 1$. Joone $y = (x - 2)^2 - 1$ saame, kui joont $y = x^2 - 1$ x-telje sihis kahe ühiku võrra paremale nihutame (joon. 33).

b. Et funktsiooni $f(x) + b$ väärtus iga argumendi väärtuse korral erineb $f(x)$ väärtusest b võrra, siis saadakse funktsiooni $y = f(x) + b$ graafik esialgse joone $y = f(x)$ nihutamisel ordinaattelje sihis b ühiku võrra $b > 0$ puhul ülespoole ja $b < 0$ puhul allapoole.

Olgu näiteks $f(x) = x^3$ ja $b = -3$, siis $f(x) + b = x^3 - 3$. Joone $y = x^3 - 3$ saame, kui joone $y = x^3$ ordinaattelje sihis kolme ühiku võrra allapoole nihutame (joon.34).

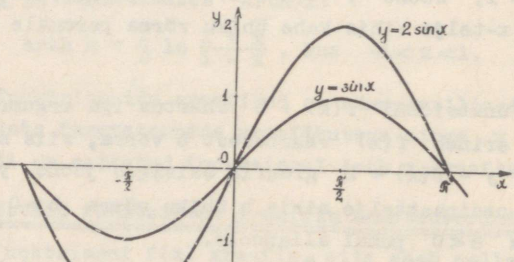


Joon. 33.



Joon. 34.

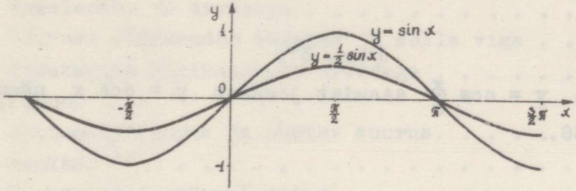
c. Et joone $y = A\,f(x)$ iga punkti ordinaat on joone $y = f(x)$ vastavalt sama abstsissiga punkti ordinaadi A-kordne, siis saadakse $y = A\,f(x)$ graafik esialgse joone $y = f(x)$ iga punkti ordinaatlõigu pikkuse A-kordsel suurendamisel, kui $A > 1$, ja samasugusel vähendamisel, kui $0 < A < 1$.



Joon. 35.

Olgu näiteks $f(x) = \sin x$ ja $A = 2$, siis $Af(x) = 2 \sin x$. Joone $y = 2 \sin x$ saame, kui esialgse joone $y = \sin x$ iga punkti abstsissi jätame endiseks, aga ordinaadi absoluutväärtust suurendame 2 korda (joon.35).

Aga näiteks joone $y = \frac{1}{2} \sin x$ saame, kui esialgse joone $y = \sin x$ iga punkti abstsissi jätame endiseks, kuid ordinaadi absoluutväärtust vähendame kaks korda (joon.36).



Joon. 36.

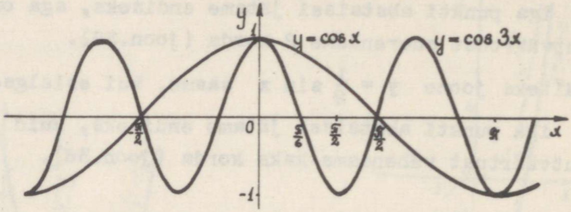
Jooned $y = Af(x)$ ja $y = -Af(x)$ on sümmeetrilised x-telje suhtes.

d. Kui $x_1 = kx_2$ ehk $x_2 = \frac{x_1}{k}$, siis $f(kx_2) = f(x_1)$.

Järelikult on joonel $y = f(x)$ kohal x_1 ja joonel $y = f(kx)$ kohal $x_2 = \frac{x_1}{k}$ võrdsed ordinaadid. Kui $k > 1$, siis on $|x_2| < |x_1|$. Kui $0 < k < 1$, siis on $|x_2| > |x_1|$.

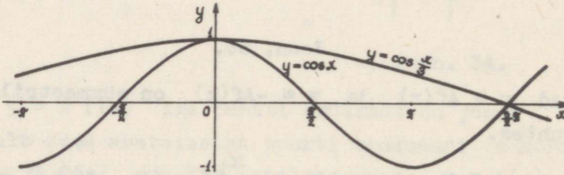
Seega saadakse funktsiooni $y = f(kx)$ graafik esialgsest joonest $y = f(x)$ selle iga punkti abstsisslõigu pikkuse k-kordsel suurendamisel, kui $0 < k < 1$, ja samalaadilisel vähendamisel, kui $k > 1$.

Olgu näiteks $f(x) = \cos x$ ja $k = 3$, seega $f(kx) = \cos 3x$. Joone $y = \cos 3x$ saame, kui joone $y = \cos x$ iga punkti abstsissi absoluutväärtust vähendame kolm korda, ordinaadi aga jätame endiseks (joon. 37).



Joon. 37.

Joone $y = \cos \frac{x}{3}$ saamist joonest $y = \cos x$ näeme joonisel 38.



Joon. 38.

Jooned $y = f(kx)$ ja $y = f(-kx)$ on sümmeetrilised ordinaattelje suhtes. See nähtub sellest, et $-k(-x) = kx$, seega $f[-k(-x)] = f(kx)$. Niisiis, kui joonel $y = f(kx)$ asub punkt $[x;f(kx)]$, siis joonel $y = f(-kx)$ asub punkt $[-x;f(kx)]$.

e. Äsja kirjeldatud võtteid üksteise järele rakendades saame konstrueerida joone $y = Af(ax + b) + B$. Selleks tuleb kõigepealt joonestada joon $y = f(x)$ ja seejärel järgmised jooned:

1) $y = f(ax)$ (võte d),
2) $y = f(ax + b)$ (võte a),
3) $y = Af(ax + b)$ (võte c),
4) $y = Af(ax + b) + B$ (võte b).

S i s u k o r d

Hind 8 kop.