



TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Aspirant L i i a E i n a s t o

LINEAARSE DIFERENTSI AALVÖRRANDI LAHENDAMISEST
IRREGULAARSE PUNKTI ÜMBRUSES

D i s s e r t a t s i o o n
füüsika-matemaatika teaduste kandidaadi
teadusliku kraadi taotlemiseks

Teaduslik juhendaja:

Tartu Riikliku Ülikooli professor
füüsika-matemaatika teaduste doktor H. J a a k s o n

Tartu 1954

S I S S E J U H A T U S .

Käesolevas töös vaadeldakse harilikke n -ndat järku lineaarseid diferentsiaalvõrrandeid

$$\frac{d^n w}{dz^n} + \sum_{\kappa=1}^n P_{\kappa}(z) \frac{d^{n-\kappa} w}{dz^{n-\kappa}} = 0, \quad (1.1)$$

kus z ja w on kompleksmuutujad ja

$$P_{\kappa}(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_{\kappa k} z^k \quad (\kappa=1, 2, \dots, n), \quad (1.2)$$

P_{κ} on reaali- või kompleksarvud. Punktid $z = 0$ ja $z = \infty$ on võrrandi (1.1) kordajate iseärased punktid.

1865.a. ilmus L.Fuchsi töö [1], milles näidatakse, et võrrandi (1.1) lahendil on iseärase punkti $z = 0$ ümbruses järgmine kuju:

$$w = z^{\rho} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k z^k, \quad (1.3)$$

kus kordajad g_k ja astendaja ρ on reaali- või kompleksarvud ning rida paremal koondub. Lahendi kuju uurimisel võib üldjuhtu kitsendamata piirduda selle juhu käsitlemisega, sest iga iseärasest punkti $z = a$ saab lihtsa teisendusega tuua alguspunkti.

Lihtsamatel juhtudel on Laurent'i reas (1.3) liikmeid z negatiivsete astmetega lõplik arv ning lahend on kirjutatav kujul

$$w = z^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k. \quad (1.4)$$

Niisugust lahendit nimetatakse regulaarseks. Regulaarse lahendi kuju punkti $z = \infty$ ümbruses on järgmine:

$$w = z^p \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k}. \quad (1.4^a)$$

Kui võrrandi (1.1) kõik lahendid vaadeldava iseärase punkti ümbruses on regulaarsed, siis nimetatakse seda iseärast punkti diferentsiaalvõrrandi regulaarseks punktiks. Punkt $z = 0$ on võrrandile (1.1) regulaarne punkt siis ja ainult siis, kui

$$P_n(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} p_{nk} z^k. \quad (1.2^a)$$

Sel juhul on $p_1, p_0, p_1, p_2, \dots$ rekurrentselt arvutatavad määrata kordajate meetodiga ning saadud rida koondub.

Kui vähemalt ühel diferentsiaalvõrrandi (1.1) lahendil on iseärase punkti $z = 0$ (või $z = \infty$) ümbruses kuju (1.3), kus Laurenti rida sisaldab lõpmata palju liikmeid z negatiivsete astmetega, siis nimetatakse seda iseärast punkti irregulaarseks.

Mõningatel juhtudel saab diferentsiaalvõrrandit ka irregulaarses punktis formaalselt rahuldada reaga (1.4), kuid saadud rida hajub. Sel teel saadud nn. formaalseid lahendeid leidsid esimesena L.W.Thomé [2] ning Poincaré [3]. Viimane näitas ühtlasi, et formaalne lahend iseloomustab tõelist lahendit asümptootiliselt. Formaalseid lahendite moodustamise kõigil võimalikel erijuhtudel töötas välja K.J. Latõševa [4] - [9], kelle tulemusi käsitleme käes-

oleva töö I ptk. 1 paragrahvis.

Diferentsiaalvõrrandi (1.1) lahendamisel irregulaarses punktis Laurent'i reaga määramata kordajate meetodil tekib lõpmatu lineaarne võrrandisüsteem, mille kordajad sisaldavad veel otsitava suuruse ρ . Seda süsteemi uuris üksikasjalikult H.v.Koch. Ülevaade tema tööst [10], [11] on antud I ptk. 2. paragrahvis. H.v. Koch kasutas lõpmatute determinantide meetodit, mis andis tulemusi küll küsimuse teoreetilises käsitluses, kuid ei sobi praktiliseks rakendamiseks.

Käesolevas töös on säetud eesmärgiks leida meetod diferentsiaalvõrrandi (1.1) lahendiks oleva Laurent'i rea kordajate ning astendaja ρ praktiliseks arvutamiseks.

II peatükis näidatakse, kuidas arvutada lahendi hargnemist iseloomustavat suurust ρ . Aluseks on võetud analüütilise jätkamise idee, mida kasutas L. Fuchs lahendi kuju teoreetiliseks selgitamiseks, ning püütakse välja töötada arvutuskeem, mis oleks sobiv arvutamiseks kaas-
aegseil arvutusmasinail.

Kui ρ on leitud, siis saame rea (1.3) kordajate g_k jaoks lõpmatu võrrandisüsteemi, mille kordajad on teada. Lõpmatute võrrandisüsteemide kui erijuhuliste funktsionaalvõrrandite lahendamiseks on praegu olemas küllaltki sobivaid meetodeid. Neid rakendatakse käesoleva erijuhu jaoks III peatükis.

I. KIRJANDUSES KÄSITLETUD
KÜSIMISI LINEAARSE DIFERENTSI-
AALVÖRRANDI LAHENDAMISE KOHTA
IRREGULAARSE PUNKTI ÜMBRUSES.

§ 1. Formaalsed lahendid.

Vaatleme algul diferentsiaalvõrrandi (1.1) lahendamist regulaarse punkti $z = 0$ ümbruses. Kordajad on siin antud valemiga (1.2^a) ning lahendiks on rida (1.4). Määramata kordajate meetodiga saame g_k arvutamiseks rekurrentsed valemid:

$$\varphi(\rho+j)g_j + \sum_{k=0}^{j-1} A_{jk} g_k = 0 \quad (j=0, 1, 2, \dots), \quad (1.5)$$

kus

$$\varphi(\rho) = \sum_{s=0}^n \rho(\rho-1) \dots (\rho-n+s+1) p_{s,-s} \quad (1.6)$$

ja

$$A_{jk} = \sum_{s=1}^n (\rho+k)(\rho+k-1) \dots (\rho+k-n+s+1) p_{s,j-k-s} \quad (1.7)$$

Võttes $j = 0$ saame nn. määrava võrrandi

$$\varphi(\rho) = 0, \quad (1.8) \checkmark$$

kust arvutame n väärtust $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$. Kordaja g_0 jääb suvaliseks. Vastavalt ρ väärtustele $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ leiame n rida (1.4), mis osutuvad koonduvaks ja kujutavad seega diferentsiaalvõrrandi lahendeid. Siinkohal me ei peatu erijuhtudel, kus $\varphi(\rho+j) = 0$ mingi $j = j_1$ korral ning kõik lahendid ei tarvitse esitada kujul (1.4), vaid võivad sisaldada $\ln z$. ✓✓

Peatume nüüd lühidalt formaalseil lahendeil. Kasutame K.J.Latõševa tulemusi, mis on saadud töödes [4] - [9].

ega esita tõestusi ja põhjendusi.

Olgu diferentsiaalvõrrandi (1.1) kordajad järgmised:

$$P_n(z) = \sum_{k=m_n}^{M_n} p_{nk} z^k \quad (n=1, 2, \dots, n), \quad (1.2')$$

kus m_r ja M_r on täisarvud.

Arvu $p = 1 + \max \frac{M_r}{r}$ nimetatakse diferentsiaalvõrrandi (1.1) astakuks, arvu $m = -1 - \min \frac{m_r}{r}$ anti-astakuks. Astak ja antiastak on kergesti arvutatavad, neid teades on aga hõlbust kindlaks teha, kus punkt $z = \infty$ (vst. $z = 0$) on diferentsiaalvõrrandile irregulaarne või regulaarne punkt. On kerge veenduda, et irregulaarses punktis $z = \infty$ on $p > 0$, punkti $z = \infty$ regulaarsuse korral $p = 0$ ning vastupidi: kui $p > 0$, siis $z = \infty$ on irregulaarne, kui $p = 0$, siis $z = \infty$ on regulaarne punkt, kuna harilikku punkti $z = \infty$ iseloomustavad p väärtused $p < 0$. Analoogiliselt $z = 0$ korral $m > 0$, $m = 0$ või $m < 0$ vastavalt sellele, kus $z = 0$ on diferentsiaalvõrrandile irregulaarseks, regulaarseks või harilikuks punktiks.

Kui diferentsiaalvõrrandi astak $p = \frac{p_1}{q}$, kus $\frac{p_1}{q}$ on taandumatu murd (või antiastak $m = \frac{m_1}{q}$), siis saame teisendusega

$$z = t^q \quad (1.9)$$

uue diferentsiaalvõrrandi, mille astak või antiastak on täisarv.

Kui võrrandi kordajail (1.2') on kuju $P_r(z) = z^{n-r} P_r(z^q)$ ($r = 1, 2, \dots, n$), kus q on täisarv, siis teisendus

$z^q = t$ alandab võrrandi astaku $\nu = \frac{(k+1)(q-1)}{2}$ antiastaku $\mu = \frac{n(q-1)}{2}$ ühiku võrra. Seda teisendust kasutame, kui alandatud astak (antiastak) tuleb välja täisarv.

Võrrandit, mille astakut ei saa alandada teisendusega $z^q = t$, nimetatakse minimaalse astakuga võrrandiks. K.J.Latõševa käsitles oma töödes minimaalse täisarvulise astakuga võrrandeid.

Kui püüame irregulaarses punktis $z = 0$ ($m > 0$) diferentsiaalvõrrandit rahuldada reaga (1.4), siis määrava võrrandi aste $n_1 < n$; kui $n_1 = 0$, siis diferentsiaalvõrrand (1.4) ei ole rahuldav reaga (1.4); kui $0 < n_1 < n$, siis saame n_1 rida kujul (1.4), mis aga kõik hajuvad ning kujutavad seega diferentsiaalvõrrandi formaalseid lahendeid.

Osutub, et iga diferentsiaalvõrrandit saab teisendada võrrandiks, millel on formaalseid lahendeid kujul (1.4) või vastavalt (1.4^a). Vaatleme ligemalt olukorda irregulaarses punktis $z = \infty$. Teostame diferentsiaalvõrrandis (1.1) kordejatega (1.2^b), kus olgu $p > 0$, muutujate vahetuse

$$w = e^{Q_1(z)} u \quad (1.10)$$

Siin

$$Q_1(z) = \sum_{s=1}^n \frac{d_{p-s} z^s}{s} \quad (1.11)$$

ning d_0, d_1, \dots, d_p esialgu määramata konstandid. Siis u rahuldab diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{d^n u}{dz^n} + \sum_{n=1}^n Q_n(z) \frac{d^{n-n} u}{dz^{n-n}} = 0, \quad (1.12)$$

kus $R_n(z)$ avaldub $P_j(z)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) ning $Q_1(z)$ ja tema tuletiste kaudu. K. J. Latõševa näitas [4], et kui d_{p-s} määrata võrrandeist, mille saame, võrrutades $R_n(z)$ avaldises arvult p z kõrgema astme kordajat nulliga, siis diferentsiaalvõrrand (1.12), omades üldjuhul küll sama astakut, mis lähtevõrrand (1.1), on siiski formaalselt rahuldav reaga

$$W = z^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{-k}. \quad (1.13)$$

Seega on diferentsiaalvõrrandil (1.1) formaalne lahend

$$W = e^{Q_1(z)} z^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{-k}, \quad (1.14)$$

mida nimetatakse Thomé p -ndat järku normaalreaks. Kui normaalrida osutub koonduvaks z küllalt suurte väärtuste korral, siis esitab (1.14) nn. normaallahendi.

Normaallahend võib esineda, kui normaalrida katkeb. Siis on diferentsiaalvõrrandil lahend lõplikul kujul. Väga üksikutel juhtudel võib teisendus (1.10) alandada diferentsiaalvõrrandi astakut. Kui uue võrrandi (1.12) astak on null, siis on $z = 0$ temale regulaarseks punktiks ning võrrandil (1.12) on regulaarne lahend (1.13). Valem (1.14) esitab siis antud võrrandile normaallahendi.

Analoogiliselt leitakse formaalsed lahendid irregulaarses punktis $z = 0$. Siin teostame diferentsiaalvõrrandis (1.1)

muutujate vahetuse

$$w = e^{Q_2\left(\frac{1}{z}\right)} u, \quad (1.15)$$

kus

$$Q_2\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{s=1}^m \frac{\beta_s}{s z^s},$$

β_s on esialgu määramata konstandid. Tulemuseks saame dife-

rentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^n u}{dz^n} + \sum_{r=1}^n S_r(z) \frac{d^{n-r} u}{dz^{n-r}} = 0 \quad (1.17)$$

Siin $S_m(z)$ on avaldatav $P_j(z)$ ($j=1,2,\dots,n$) ning $Q_2(\frac{1}{z})$ ja tema tuletiste kaudu. β_s ($s=1,2,\dots,m$) leiame võrrandeist, mis saame $S_m(z)$ avaldises arvult m z madalama astme korra daja nulliga võrrutamisel. Siis on võrrand (1.17) formaalselt rahuldatav reaga

$$u = z^\beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,$$

mis üldjuhul hajub, ning võrrandil (1.1) on seega formaalne lahend

$$u = e^{Q_2(\frac{1}{z})} z^\beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \quad (1.18)$$

Formaalne lahend (1.18) võib osutada tõeliseks samadel juhtudel, nagu nägime punkti $z = \infty$ korral.

Selleks, et leida lahendeid lõplikul kujul, kui neid on olemas, on sobiv juhul $p > 0$, $m > 0$ otsida diferentsiaalvõrrandile lahendit kujul

$$w = e^{Q_1(z) + Q_2(\frac{1}{z})} z^p \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k z^k \quad (1.19)$$

Kui võrrandi astak on võrdne murdarvuga, siis teostame teisenduse (1.9). Antud võrrandile leiame siis formaalse lahendi nn. allnormaalreana

$$w = e^{Q_1(z^{\frac{1}{t}})} z^{\frac{p}{t}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-\frac{k}{t}},$$

kus Q_1 avaldub $t = z^{\frac{1}{t}}$ kaudu valemi (1.11) järgi. Analoogiliselt leiame murrulise m korral formaalse lahendi punktis $z = 0$:

$$w = e^{Q_2(\frac{1}{z^{\frac{1}{t}}})} z^{\frac{p}{t}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{\frac{k}{t}}.$$

Kui me ei saa diferentsiaalvõrrandile n erinevat for-

maalset lahendit kujul (1.14) või (1.18), mille põhjuseks on asjaolu, et võrrandid $\alpha_s(\beta_s)$ jaoks ei anna n erinevat lahendit, siis võib osa formaalseid lahendeid sisaldada logaritmi. Neid juhte on käsitletud töödes [6] ja [7].

Märgime veel, et formaalse lahendi avaldistes (1.14), (1.18) esinevad astendajad α ja β osutuvad üldjuhul erinevaks tõeselises lahendis (1.3) figureerivast ρ väärtusest.

§ 2. Laurent'i rea kordajate arvutamine lõpmatute determinantide meetodiga.

Diferentsiaalvõrrandis (1.1) võime alati lihtsa teisendusega saavutada, et $\frac{d^{n-1}W}{dz^{n-1}}$ kordaja oleks identsest võrdne nulliga. Sellepärast võime üldjuhtu kitsendamata piirduda järgmise diferentsiaalvõrrandi käsitlemisega:

$$\frac{d^n W}{dz^n} + \sum_{r=2}^n P_r(z) \frac{d^{n-r} W}{dz^{n-r}} = 0, \quad (1.1^a)$$

Olgu kordajad arendatud Laurent'i ritta:

$$P_r(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_{rk} z^k \quad (r=2, \dots, n). \quad (1.2)$$

Otsime lahendit kujul

$$W = z^\rho \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k z^k \quad (1.3)$$

määramata kordajate meetodiga. Kordajate g_k arvutamiseks saame lõpmatu võrrandisüsteemi

$$\varphi(\rho+j) g_j + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{jk} g_k = 0 \quad (j \neq k), \quad (1.19)$$

kus

$$\varphi(\rho) = \rho(\rho-1) \dots (\rho-n+1) + \sum_{s=2}^n \rho(\rho-1) \dots (\rho-n+s+1) p_{s,-s} \quad (1.20)$$

ja

$$A_{jk}(\rho) = \sum_{s=2}^n (\rho+k)(\rho+k-1) \dots (\rho+k-n+s+1) p_{s,j-k-s}. \quad (1.21)$$

Tähistades

$$\alpha_{jk}(\rho) = \frac{A_{jk}(\rho)}{\varphi(\rho+j)} \quad (j \neq k), \quad \alpha_{jj} = 1, \quad (1.22)$$

võime kirjutada süsteemi (1.4) kujul

$$\varphi(\rho+j) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{jk}(\rho) g_k = 0. \quad (1.23)$$

Seega on diferentsiaalvõrrandi (1.1^a) lahendamine taandunud lõpmatu lineaarse homogeense võrrandisüsteemi (1.23) lahendamisele.

Süsteemi (1.23) uuris põhjalikult H.v.Koch oma töödes [10] ja [11], kasutades siin lõpmatuid determinante. See meetod pole küll sobiv rea (1.3) kordajate numbriliseks arvutamiseks, kuid võimaldab uurida lahendite kuju teoreetiliselt. Esitame siin lühidalt H.v.Kochi olulisemad tulemused, kusjuures alustame lõpmatu determinandi mõistega.

Tähistame $|C_{jk}|$ $j, k = -m, \dots, m = D_m$, kui on olemas $\lim_{m \rightarrow \infty} D_m = |C_{jk}|$ $j, k = -\infty, \dots, +\infty$, siis nimetame seda

lõpmatuks determinandiks ja märgime tänega D . Tähistame

$C_{jk} = c_{jk}$, kui $j \neq k$ ja $C_{kk} = 1 + c_{kk}$. Saab näidata, et kahekordse rea $\sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} |c_{jk}|$ koonduvuse korral eksisteerib

lõpmatu determinant $D = |C_{jk}|$ $j, k = -\infty, \dots, +\infty$.

Niisugust lõpmatut determinanti nimetatakse normaal-determinandiks. Normaaldeterminante käsitles esimesena Poincaré, kes vaatles juhtu, kus kõik peadiagonaali elemendid on võrdsed ühega. Üldjuhtu käsitles H.v.Koch. Ta näitas, et lõpmatu võrrandisüsteemi (1.23) determinant

$$\Omega(\rho) = |\alpha_{jk}(\rho)|, \quad (1.24)$$

kus α_{jk} on antud valemiga (1.22), on normaaldeterminant.

Vaatleme seepärast mõningaid normaaldeterminandi omadusi ning normaaldeterminandiga lõpmatu võrrandisüsteemi lahendamist.

Kochi töös [11] on näidatud, et normaaldeterminandi on analoogilised omadused lõplikku järku determinandiga. Nii näiteks võib normaaldeterminandis omavahel vahetada read ja veerud; kahe rea (veeru) vahetamisel muutub determinandi märk vastupidiseks; kui determinandis on kaks võrdset rida (veergu), siis on determinandi väärtus null; ühe rea (veeru) elementide korrutamisel konstantse teguriga korrutub determinandi väärtus selle teguriga jne.

Esitame mõned vajalikud mõisted normaaldeterminandi kohta.

a/ Nimetame normaaldeterminandi D r -ndat järku miinoriks determinanti, mille saame, kui tõmbame temas maha read indeksitega j_1, j_2, \dots, j_r ja veerud indeksitega k_1, k_2, \dots, k_r ning tähistame $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_r \\ k_1 & k_2 & \dots & k_r \end{pmatrix}$. Normaaldeterminandi miinorid osutuvad ka normaaldeterminantideks. Kui $D = 0$ ja kõik tema $1, 2, \dots, (r-1)$. järku miinorid on ka võrased nulliga, aga vähemalt üks r -ndat järku miinor erineb nullist, siis öeldakse, et D astak on r . Normaaldeterminandi astak on alati lõplik arv. Eriti aga leidub igas normaaldeterminandis lõplikku järku nullist erinev järgmist tüüpi miinor: $\begin{pmatrix} -m & \dots & +m \\ -m & \dots & +m \end{pmatrix}$.

Märkus. Esitasime lõpmatu determinandi astaku mõiste nii, nagu see on antud Kochi töös. Kirjanduses ei ole siin

ühtlast terminoloogiat. Näiteks Kagan [12] defineerib lõpmatu determinandi astaku ning alamdeterminandid analoogiliselt lõplikku järku determinandi juhuga, kusjuures astaku mõiste asemel /Kochi järgi/ on kasutatud dekrementi mõistet.

b/ Vaatleme normaaldeterminanti $D(\rho)$, mille elemendid sõltuvad teatavast parameetrist ρ . Olgu ρ_1 normaaldeterminandi $D(\rho)$ μ -kordne nullkoht. Siis $D(\rho)$ jagub vahe $\rho - \rho_1$ μ -nda astmega. $D(\rho)$ astak olgu r ning $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{r-1}$ vahe $\rho - \rho_1$ kõrgeimad astmed, millega võivad jaguda $1, 2, \dots, (r-1)$ järku miinorid. On selge, et $\mu > \mu_1 > \dots > \mu_{r-1}$, $\mu - \mu_1 > \mu_1 - \mu_2 > \dots > \mu_{r-1}$. Alati saab indeksid j_1, j_2, \dots, j_r ja k_1, k_2, \dots, k_r nii järjestada, et ρ_1 oleks miinoreile

$$\binom{j_1}{k_1}, \binom{j_1 j_2}{k_1 k_2}, \dots, \binom{j_1 j_2 \dots j_{r-1}}{k_1 k_2 \dots k_{r-1}} \quad (1.25)$$

parajasti vastavalt $\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \dots, \mu_{r-1}^{-1}$ kordseks nullkohaks.

Miinoreid (1.25) nimetatakse $D(\rho)$ karakteristlikeks miinoreiks ja arve $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{r-1}$ $D(\rho)$ karakteristlikeks arvudeks.

c/ Normaaldeterminanti $D = C_{jk}$ saab järgmisel viisil arendada ridade veergude järele:

$$D = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{jk} \binom{j}{k}, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{ek} \binom{j}{k} = 0;$$

$$D = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_{jk} \binom{j}{k}, \quad \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_{ek} \binom{j}{k} = 0; \quad (1.26)$$

$$D = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_r=-\infty}^{+\infty} \begin{vmatrix} C_{j_1 k_1} & \dots & C_{j_1 k_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{j_r k_1} & \dots & C_{j_r k_r} \end{vmatrix} \binom{j_1 \dots j_r}{k_1 \dots k_r} \quad (1.27)$$

d/ Vaatleme lõpuks lõpmatu lineaarse homogeenise võrrandisüsteemi lahendamist. Olgu antud võrrandisüsteem

$$u_j = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{jk} g_k = 0 \quad (j = -\infty, \dots, +\infty), \quad (1.28)$$

mille determinant $D = |C_{jk}|_{jk=-\infty, \dots, +\infty}$ on normaalne. Süsteemi lahenduvuseks tarvilik ja piisav tingimus on $D \neq 0$. Kui leidub vähemalt üks nullist erinev 1. järku alamdeterminant $\begin{pmatrix} j_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$, siis on süsteemil (1.28) üks ainus, konstantse teguri täpsuseni määratud nulllahendist erinev lahend

$$g_k = \frac{\begin{pmatrix} j_1 \\ k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} j_1 \\ k_1 \end{pmatrix}} g_{k_1} \quad (k = -\infty, \dots, +\infty), \quad (1.29)$$

kus g_{k_1} jääb suvaliseks ning j. võrrand osutub teiste järelduseks.

Üldjuhul olgu D astak r ning $\begin{pmatrix} j_1 j_2 \dots j_r \\ k_1 k_2 \dots k_r \end{pmatrix}$ nullist erinev r-ndat järku miinor. Siis osutuvad võrrandid $u_{j_1} = 0, u_{j_2} = 0, \dots, u_{j_r} = 0$ teiste võrrandite järelduseks. Otsitavad $g_{k_1}, g_{k_2}, \dots, g_{k_r}$ jäävad suvaliseks ning ülejäänud avalduvad nende kaudu järgmiselt:

$$\begin{pmatrix} j_1 j_2 \dots j_r \\ k_1 k_2 \dots k_r \end{pmatrix} g_k = \begin{pmatrix} j_1 j_2 \dots j_r \\ k k_2 \dots k_r \end{pmatrix} g_{k_1} + \dots + \begin{pmatrix} j_1 \dots j_{r-1} j_r \\ k_1 \dots k_{r-1} k \end{pmatrix} g_{k_r} \quad (k = -\infty, \dots, +\infty). \quad (1.30)$$

Valides sobivalt suvaliste tundmatute väärtused, saame võrrandisüsteemile (1.28) r lineaarselt sõltumatut lahendit.

Vaatleme nüüd võrrandisüsteemi (1.23), mille võime eeldusel $\varphi(p+j) \neq 0 \quad (j = -\infty, \dots, +\infty)$ kirjutada järgmiselt:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{jk}(p) g_k = 0. \quad (1.23^a)$$

Kuna süsteem (1.23^a) on homogeenne ja tema determinant normaalne, siis on süsteemi lahenduvuseks tarvilik ja pii-

sav tingimus $\Omega(\rho) = 0$. Sellest võrrandist tulebki määrata astendaja ρ .

Uurime determinandi $\Omega(\rho)$ struktuuri, selleks et teha hiljem kindlaks tema nullkohtade arvu. Valemeist (1.20)-(1.22) nähtub kergesti, et $\Omega(\rho+1) - \Omega(\rho)$. Nimetame võrdseid või üksteisest täisarvu võrra erinevaid ρ väärtusi kongruentseteks. $\Omega(\rho)$ inkongruentseteks iseärasusteks punktideks võivad valemi (1.22) põhjal olla ainult võrrandi $\varphi(\rho) = 0$ lahendid. Seega $\Omega(\rho)$ iseäraseid punkte on poolused, mille kordsus võib olla ülimalt võrdne n -ga.

Esitame nüüd $\Omega(\rho)$ kujul, millest on kohe näha tema nullkohtade arv. Olgu $\rho^{(\ell)}$ polünoomi $\varphi(\rho)$ $s^{(\ell)}$ -kordne nullkoht ning inkongruentsete nullkohtade arv m , nii et $\sum_{\ell=1}^m s^{(\ell)} = n$, kus n on $\varphi(\rho)$ aste. Siis pooluse $\rho^{(\ell)}$ ümbruses

$$\Omega(\rho) = \mathcal{P}(\rho - \rho^{(\ell)}) + \frac{\mathcal{M}_\ell}{\rho - \rho^{(\ell)}} + \sum_{k=1}^{s^{(\ell)}-1} \mathcal{M}_{\ell k} \frac{d^k}{d\rho^k} \left(\frac{1}{\rho - \rho^{(\ell)}} \right),$$

kus \mathcal{P} on täisfunktsioon ja $\mathcal{M}_\ell, \mathcal{M}_{\ell k}$ konstandid. Niisugust funktsiooni võib kirjutada kujul

$$\Omega(\rho) = \mathcal{M} + \sum_{\ell=1}^m \left[\mathcal{M}_\ell \pi \cot(\rho - \rho^{(\ell)}) \pi + \sum_{k=1}^{s^{(\ell)}-1} \mathcal{M}_{\ell k} \frac{d^k}{d\rho^k} (\pi \cot(\rho - \rho^{(\ell)})) \pi \right],$$

kus võrdust $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Omega(\rho) = 1$ kasutades leiame kergesti, et $\mathcal{M} = 1$ ning

$$\sum_{\ell=1}^m \mathcal{M}_\ell = 0. \text{ Kui tähistame}$$

$$e^{2\pi i \rho} = \lambda \quad \text{ja} \quad e^{2\pi i \rho^{(\ell)}} = \lambda^{(\ell)}, \quad (1.31)$$

siis

$$\Omega(\rho) = 1 + \pi i \sum_{\ell=1}^m \left[\mathcal{M}_\ell \frac{\lambda + \lambda^{(\ell)}}{\lambda - \lambda^{(\ell)}} + \sum_{k=1}^{\ell-1} \mathcal{M}_{\ell k} \frac{d^k}{d\rho^k} \left(\frac{\lambda + \lambda^{(\ell)}}{\lambda - \lambda^{(\ell)}} \right) \right]. \quad (1.32)$$

Kuna võrrandil

$$1 + \pi i \sum_{\ell=1}^m \left[\mathcal{M}_\ell \frac{\lambda + \lambda^{(\ell)}}{\lambda - \lambda^{(\ell)}} + \sum_{k=1}^{\ell-1} \mathcal{M}_{\ell k} \frac{d^k}{d\rho^k} \left(\frac{\lambda + \lambda^{(\ell)}}{\lambda - \lambda^{(\ell)}} \right) \right] = 0$$

on ülimalt n erinevat lahendit, siis on võrrandil $\mathcal{D}_B(\rho) = 0$ seoste (1.31) tõttu ülimalt n mittekongruentset lahendit. See oligi oodatav tulemus, sest diferentsiaalvõrrandil (1.1)^a saab olla ülimalt n lahendit kujul (1.3), kus ρ esineb astendajana.

Võrrandisüsteemi (1.23)^a determinandil $\mathcal{D}_B(\rho)$ on poolused punktides $\rho = \rho^{(l)}$, kuid teda on võimalik teisendada samaväärselt võrrandisüsteemiks, mille determinant on ρ täisfunktsioon. Selleks tähistame

$$h_0 = 1, \quad h_j(\rho) = \frac{1}{j^n} e^{-\frac{\rho-\rho^{(1)}}{j}} e^{-\frac{\rho-\rho^{(2)}}{j}} \dots e^{-\frac{\rho-\rho^{(n)}}{j}} \quad (1.33)$$

ning korrutame võrrandisüsteemis (1.23) j -nda võrrandi teguriga $h_j(\rho)$. Siis saame uue võrrandisüsteemi

$$\varphi(\rho+m) h_j(\rho) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{jk}(\rho) g_k = 0, \quad (1.34)$$

mis on identne võrrandisüsteemiga (1.23), kusjuures tema determinant \mathcal{D} erineb determinandist $\mathcal{D}_B(\rho)$ teguri $\mathcal{H}(\rho)$ pooldest:

$$\mathcal{D}(\rho) = \mathcal{H}(\rho) \mathcal{D}_B(\rho),$$

kus

$$\mathcal{H}(\rho) = \prod_{j=-\infty}^{+\infty} h_j \varphi(\rho+j) = \prod_{l=1}^n \left(1 + \frac{\rho-\rho^{(l)}}{j}\right) e^{-\frac{\rho-\rho^{(l)}}{j}} = \prod_{l=1}^n \frac{\sin(\rho-\rho^{(l)})\pi}{\pi} \quad \text{VVV}$$

$\mathcal{D}(\rho)$ on niisamuti normaalkujuline kui $\mathcal{D}_B(\rho)$, kuid temal ei ole pooluseid. Ta on ka perioodiline: $\mathcal{D}(\rho+1) = (-1)^n \mathcal{D}(\rho)$. $\mathcal{D}(\rho)$ nullkohad on võrased $\mathcal{D}_B(\rho)$ nullkohtadega ja neid on sama palju. Tähistame need $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$. Siis võime kirjutada

$$\mathcal{D}(\rho) = C \prod_{l=1}^n \frac{\sin(\rho-\rho^{(l)})\pi}{\pi}, \quad \text{VVVV}$$

kus osutub, et $C = 1$. Peale selle saab näidata, et kehtib seos

$$\sum_{\ell=1}^n \rho^{(\ell)} = \sum_{\ell=1}^n \rho_{\ell} = \frac{1}{2} n(n-1). \quad (1.35)$$

Vaatleme lõpmatu võrrandisüsteemi (1.34) lahendamist.

Tähistame siin

$$h_j(\rho) A_{jk}(\rho) = b_{jk}(\rho), \quad h_j(\rho) \varphi(\rho+j) = b_{jj}(\rho), \quad (1.36)$$

siis võime ta esitada kujul

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{jk}(\rho) g_k = 0 \quad (1.37)$$

ning

$$D(\rho) = |b_{jk}(\rho)|_{j,k=-\infty, \dots, +\infty}. \quad (1.38)$$

$D(\rho)$ on normaaldeterminant olenemata ρ väärtusest. Olgu $D(\rho)$

inkongruentsed nullkohad $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ ja nende kordsused

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, nii et $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = n$. Vastavalt igale ρ_j

väärtusele peame leidma μ_j lineaarselt sõltumatut võrrandi-

süsteemi (1.37) lahendit $\{g_k\}$ ($k = -\infty, \dots, +\infty$), et saada

diferentsiaalvõrrandile (1.1) kokku n lineaarselt sõltu-

matut lahendit.

a/ Olgu näiteks ρ_1 determinandi $D(\rho)$ ühekordne null-

koht. Kuna $\frac{dD(\rho)}{d\rho} = \sum_{j,k} \frac{db_{jk}}{d\rho} \binom{j}{k}$ ning käesoleval juhul

$$\frac{dD(\rho_1)}{d\rho_1} \neq 0, \quad \text{siis peab leiduma vähemalt üks nullist}$$

erinev 1. järku miinor $\binom{j_1}{k_1}$. Lõpmatul võrrandisüsteemil

(1.37) on seega valemi (1.29) põhjal lahend

$$\binom{j_1}{k_1} g_k = \binom{j_1}{k} g_{k_1} \quad (k = -\infty, \dots, +\infty),$$

kusjuures g_{k_1} jääb suvaliseks. Vastavalt sellele on

diferentsiaalvõrrandil (1.1^a) lahend

$$w = z^{\rho_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k z^k. \quad (1.39)$$

b/ Olgu ρ_1 determinandi $D(\rho)$ μ_1 -kordne nullikoht. Kui

märgime $D(\beta_2)$ astaku tähega r , siis üldjuhul $\kappa \leq \mu_1$. Vaatleme algul juhtu, kus $\kappa = \mu_1$. $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \dots & \kappa_n \end{pmatrix}$ olgu r -ndat järku nullist erinev miinor. Lõpmatu võrrandisüsteemi (1.37) lahend avaldub siis valemi (1.30) järgi kujul

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \dots & \kappa_n \end{pmatrix} g_{\kappa} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ \kappa & \kappa_2 & \dots & \kappa_n \end{pmatrix} g_{\kappa_1} + \dots + \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_{\kappa-1} & j_n \\ \kappa_1 & \dots & \kappa_{\kappa-1} & \kappa \end{pmatrix} g_{\kappa_n} \quad (\kappa = -\infty, \dots, +\infty).$$

Valides sobivalt suvaliste tundmatute $g_{\kappa_1}, \dots, g_{\kappa_n}$ väärtused, leiame lõpmatu võrrandisüsteemile r lineaarselt sõltumatut lahendit g_{κ} ja seega r lineaarselt sõltumatut lahendit

$$w_j = \mathcal{I}^{\beta_1} \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} g_{j\kappa} \mathcal{I}^{\kappa} \quad (j=1, 2, \dots, r) \quad (1.40)$$

diferentsiaalvõrrandile (1.1^a).

c/ Üldjuhul on β_1 determinandi $D(\beta_1)$ μ_1 -kordne nullkoht ning $\kappa < \mu_1$. Vaatame, kuidas leida käesoleval juhul diferentsiaalvõrrandile μ_1 lineaarselt sõltumatut lahendit, mis vastavad astendajale β_1 . Olgu

$$\begin{pmatrix} j_1 \\ \kappa_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ \kappa_1 & \kappa_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \dots & \kappa_n \end{pmatrix}$$

determinandi $D(\beta_1)$ karakteristikud miinorid ja $\mu_1, \mu_{11}, \dots, \mu_{1, n-1}$ tema karakteristikud väärtused. Märgime $\mu_1 - \mu_{11} = \nu_{11}, \mu_{11} - \mu_{12} = \nu_{12}, \dots, \mu_{1, n-1} = \nu_{1n}$. Vaatleme funktsiooni

$$w_1(z, \beta) = \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} g_{1\kappa}(\beta) \mathcal{I}^{\beta+\kappa}, \quad (1.41)$$

kus

$$g_{1\kappa}(\beta) = e_{11}(j_{\kappa}).$$

Siin j_{κ} kujutab $D(\beta)$ miinorit ja e_{11} on mingi konstant. ✓

Asetame lahendi (1.41) diferentsiaalvõrrandisse (1.1^a).

mille vasaku poole märgime $P(w)$. Kasutame valemeid (1.19) ja (1.36).

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[w_1(z, \rho)] &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} [\varphi(\rho+j) g_{1j}(\rho) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{jk} g_{1k}(\rho)] z^{\rho+j-n} = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{h_j(\rho)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{jk}(\rho) g_{1k}(\rho) \right] z^{\rho+j-n}. \end{aligned}$$

Valemi (1.26) põhjal

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \binom{j_1}{k} b_{jk} = \begin{cases} D(\rho), & \text{kui } j = j_1 \\ 0, & \text{" } j \neq j_1 \end{cases}$$

järelikult

$$\mathcal{P}[w_1(z, \rho)] = e_{11} \frac{D(\rho)}{h_{j_1}(\rho)} z^{\rho+j_1-n} \quad (1.43) \checkmark$$

on saadud võrduse paremale poolele μ_1 -kordne nullikont, seega ka vasakule poolele. Järelikult

$$\mathcal{P}(w_1) = 0, \quad \mathcal{P}\left(\frac{dw_1}{d\rho}\right) = 0, \dots, \mathcal{P}\left(\frac{d^{\mu_1-1} w_1}{d\rho^{\mu_1-1}}\right) = 0, \quad (1.44)$$

kui $\rho = \rho_1$. See tähendab aga, et funktsioonid

$$w_1, \frac{dw_1}{d\rho}, \dots, \frac{d^{\mu_1-1} w_1}{d\rho^{\mu_1-1}}$$

on võrrandi (1.1^a) lahendeiks. Kuid osa neist võivad olla identselt nullid.

Kui $\mu_{11} = 0$ (see tähendab, et $r = 1$ ning vähemalt üks 1.järku miinor $(d_{k_1}^1) \neq 0$), siis $g_{1k_1}(\rho_1) \neq 0$ ning μ_1 lahendit (1.45) ei ole identselt nullid. Teostades ρ järgi diferentseerimise, leiame diferent siaalvõrrandite μ_1 lahendit kujul

$$\begin{aligned} w_1 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k(\rho_1) z^{\rho_1+k} \\ w_2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [g_k'(\rho_1) + g_k(\rho_1) \ln z] z^{\rho_1+k} \end{aligned}$$

$$w_{\mu_1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=0}^{\mu_1} \left[\binom{\mu_1}{s} g_k^{(\mu_1-s)}(\rho_2) \ln^s z \right] z^{\rho_2+k} \quad (1.46)$$

Kui $\mu_{11} > 0$ (ρ_1 on kõigile 1.järku miinoreile vähemalt μ_{11} -kordseks nullkohaks), siis valemi (1.42) põhjal $w_1(z, \rho_1)$,

$\frac{\partial w_1}{\partial \rho_1}, \dots, \frac{\partial^{\mu_{11}-1} w_1}{\partial \rho_1^{\mu_{11}-1}}$ on identselt nullid, aga $\frac{\partial^{\mu_{11}} w_1}{\partial \rho_1^{\mu_{11}}}$ ei ole

identselt null. Seega saame diferentsiaalvõrrandile $\mu_1 - \mu_{11} = \nu_{11}$

lahendit kujul

$$w_{11} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{1k}^{(\mu_{11})}(\rho_2) z^{\rho_2+k}$$

$$w_{12} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[g_{1k}^{(\mu_{11}+1)}(\rho_2) + \frac{\mu_{11}+1}{1!} g_{1k}^{(\mu_{11})}(\rho_2) \ln z \right] z^{\rho_2+k} \quad (1.47)$$

$$w_{1\nu_{11}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[g_{1k}^{(\mu_{11}-1)}(\rho_2) + \frac{\mu_{11}-1}{1!} g_{1k}^{(\mu_{11}-2)}(\rho_2) \ln z + \dots + \frac{(\mu_{11}-1) \dots (\mu_{11}+1)}{(\nu_{11}-1)!} g_{1k}^{(\mu_{11})}(\rho_2) \ln^{\nu_{11}-1} z \right] z^{\rho_2+k}$$

Puuduvate lahendite leidmiseks vaatleme edasi funktsiooni

ooni

$$w_2(z, \rho) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{2k}(\rho) z^{\rho+k} \quad (1.48)$$

kordajatega

$$g_{2k}(\rho) = c_{21} \binom{j_1}{k} \binom{j_2}{k} + c_{22} \binom{j_1}{k_1} \binom{j_2}{k_2}, \quad (1.49)$$

kus c_{21} ja c_{22} on suvalised konstandid. H.v.Koch näitas,

et käesoleval juhul

$$\mathcal{P}[w_2(z, \rho)] = \frac{1}{h_{j_1}(\rho)} [c_{21} \binom{j_2}{k_2} - c_{22} \binom{j_2}{k_1}] z^{\rho+j_1-n} + \frac{1}{h_{j_2}(\rho)} [-c_{21} \binom{j_1}{k_2} + c_{22} \binom{j_1}{k_1}] z^{\rho+j_2-n} \quad (1.50)$$

ρ_1 on võrduse (1.50) paremale poolele μ_{11} -kordne nullkoht, järelikult ka vasakule poolele. Seega funktsioonid

$w_2, \frac{\partial w_2}{\partial \rho_1}, \dots, \frac{\partial^{\mu_{11}-1} w_2}{\partial \rho_1^{\mu_{11}-1}}$ rahuldavad diferentsiaalvõrrandit (1.1^a) • Kuid (1.49) põhjal on neist μ_{12} esimest identselt nullid ning diferentsiaalvõrrandule saame $\mu_{11} - \mu_{12} = \nu_{12}$

lahendit

$$W_{21} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{2k}^{(\mu_{12})}(\rho_1) z^{\rho_1+k}$$

$$W_{22} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[g_{2k}^{(\mu_{12}+1)}(\rho_1) + \frac{\mu_{12}+1}{1!} g_{2k}^{(\mu_{12})}(\rho_1) \ln z \right] z^{\rho_1+k} \quad (1.51)$$

$$W_{2\nu_2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[g_{2k}^{(\mu_{11}-1)}(\rho_1) + \frac{\mu_{11}-1}{1!} g_{2k}^{(\mu_{11}-2)}(\rho_1) + \dots + \frac{(\mu_{11}-1) \dots (\mu_{12}+1)}{(\nu_2-1)!} g_{1k}^{(\mu_{12})}(\rho_1) \ln^{\nu_2-1} z \right] z^{\rho_1+k}$$

Samal viisil toimime edasi, kuni jõuame lahendini

$$W_n(z, \rho) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{nk}(\rho) z^{\rho+k}, \quad (1.52)$$

kus

$$g_{nk}(\rho) = c_{n1} \binom{j_1 \ j_2 \ \dots \ j_r}{k \ k_1 \ \dots \ k_r} + \dots + c_{nr} \binom{j_1 \ \dots \ j_{r-1} \ j_r}{k_1 \ \dots \ k_{r-1} \ k},$$

siin c_{n1}, \dots, c_{nr} on suvalised konstandid. Nii nagu enne,

saab ka siin näidata, et $W_n, \frac{dW_n}{d\rho}, \dots, \frac{d^{\mu_n-1}W_n}{d\rho^{\mu_n-1}}$ rahul-

davad diferentsiaalvõrrandit ning

$$W_{n1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{nk}(\rho_1) z^{\rho_1+k}$$

$$W_{n2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[g_{nk}^2(\rho_1) + g_{nk}(\rho_1) \ln z \right] z^{\rho_1+k} \quad (1.53)$$

$$W_{n,\nu_n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[g_{nk}^{(\mu_{n-1}-1)}(\rho_1) + \frac{\mu_{n-1}-1}{1!} g_{nk}^{(\mu_{n-1}-2)}(\rho_1) \ln z + \dots + g_{nk}(\rho_1) \ln^{\mu_{n-1}-1} z \right] z^{\rho_1+k}$$

Kokku leidsime $\nu_{11} + \nu_{12} + \dots + \nu_{1n} = \mu$ lahendit. Suvalised konstandid saab valida nii, et need lahendid on lineaarselt sõltumatud (näiteks $c_{ll} = 1, c_{l1} = c_{l2} = \dots = c_{l,l-1} = 0, l = 1, 2, \dots, n$).

Astendajale ρ_1 vastavad lahendid moodustavad r alamrühma, kusjuures l alamrühm sisaldab ν_{1l} lahendit, millest esimene on logaritmivaba, kuna teised sisaldavad

$\ln z$ ja selle astmeid.

Selleks, et μ astendaja ρ_1 juurde kuuluvad lahendid ei sisaldaks logaritmi, on tarvilik ja piisav tingimus $r = \mu$. Siis karakteristikud arvud on $\mu, \mu-1, \mu-2, \dots, 1$.

Tarvilik ja piisav tingimus selleks, et astendaja ρ_1 juurde kuuluvad lahendid moodustaksid üheainsa alamrühma (1.46), on $r = 1$.

Nagu nägime, võimaldas lõpmatute determinantide meetod H.v. Kochil üksikasjalikult uurida lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendite kuju irregulaarse punkti ümbruses. Kuid lõpmatute võrrandisüsteemide, eriti ka käesolevas töös esineva tüübi lahendamiseks on kaasajal olemas sobivamaid meetodeid, mida vaatleme III peatükis.

Lõpmatu võrrandisüsteemi (1.23) lahendamisel on tarvis kõigepealt teada astendaja ρ väärtust. Võrrandi $D(\rho) = 0$ (või $\mathcal{R}(\rho) = 0$, kuna neil on samad lahendid) lahendamisel võiks lähtuda H.v Kochi poolt antud valemit (1.32). Kuid siin esinevate konstantide M_2 arvutamine osutub väga tülikaks juba ühel lihtsal erijuhul, mida Koch vaatles oma töös [11] (2. järku võrrand, kus $m = \mu = 1$). Sellepärast läheme käesolevas töös teist teed ning püüame ρ arvutada nn. põhivõrrandist, mida käsitleme järgmises peatükis.

II. PÕHIVÖRRAND.

§ 3. Põhivõrrandi mõiste.

Näitame, millise meetodiga Fuchs määras kindlaks diferentsiaalvõrrandi lahendite kuju singulaarse punkti ümbruses.

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit (1.1) ning tema korrajate iseärase punkti $z = 0$ ümbruses mingit harilikku punkti $z = a$. Võrrandi lahendiks selles punktis teatud algtingimuste juures olgu vektor

$$\vec{u}_a(z) = [u_{1a}(z), u_{2a}(z), \dots, u_{na}(z)].$$

Jätkame seda lahendit analüütiliselt mööda kinnist kõvera ümber punkti $z = 0$. Tulemuseks saame punktis $z = a$ uue lahendi $\vec{u}_a(z)^*$, mis on lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendi põhiomaduse põhjal lähtelahendiga seotud lineaarteisendusega

$$\vec{u}_a(z)^* = C \vec{u}_a(z), \quad (2.1)$$

mida nimetatakse põhiteisenduseks.

Olgu $\vec{w}_a(z)$ diferentsiaalvõrrandi (1.1) teine lahend punktis $z = a$, mis on seotud lahendiga $\vec{u}_a(z)$ järgmiselt: $\vec{w}_a(z) = Y \vec{u}_a(z)$. $\vec{w}_a(z)$ teisene analüütilisel jätkamisel ümber nullpunkti mingi lineaarteisendusega \tilde{C} :

$$\vec{w}_a(z)^* = \tilde{C} \vec{w}_a(z). \quad (2.2)$$

Näitame, et matriksid C ja \tilde{C} on sarnased. Tõepoolest,

$$\vec{u}_a^* = Y^{-1} \vec{w}_a^*; \quad \vec{u}_a^* = Y^{-1} \tilde{C} \vec{w}_a = Y^{-1} \tilde{C} Y \vec{u}_a. \text{ Seega erinevate}$$

algtingimustega määratud lahendele vastavad sarnased põhi-

teisendused. Lahendi $\vec{w}_0(z)$ võime valida niisuguse, et C oleks kanoonilise kujuga.

Maatriksi C karakteristlikku võrrandit

$$C - \lambda E = 0 \quad (2.3)$$

nimetatakse $z = 0$ juurde kuuluvaks põhivõrrandiks. Olgu

põhivõrrandi lahendid $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($n^2 \leq n$) ja nende kordused $\mu_1,$

μ_2, \dots, μ_n . ($\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = n$). λ_j esinegu maatriksi $C - \lambda E$ elementaar-

jagajates astmetel $\nu_{j1}, \nu_{j2}, \dots, \nu_{j\ell}$. ($\nu_{j1} + \nu_{j2} + \dots + \nu_{j\ell} = \mu_j$). Siis on VV

maatriks C taanduv järgmisele kvaasidiagonaalkujule:

$$\tilde{C} = [A_1, A_2, \dots, A_n], \quad (2.4)$$

kus

$$A_j = [A_{j1}, A_{j2}, \dots, A_{j\ell}] \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.5)$$

ning

$$A_{j\ell} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_j & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{pmatrix} \quad (\ell=1, 2, \dots, \mu_j). \quad (2.6)$$

Näitame, kuidas põhiteisenduse kanooniline kuju ise-

loomustab diferentsiaalvõrrandi lahendi hargnemist vaadeldava

iseärase punkti ümbruses. Vaatleme näiteks karakteristlikule

väärtusele λ_1 vastavat ν_{11} reaalset Jordani kastikest. Vale-

mite (2.2), (2.4) - (2.6) põhjal teisenevad lahendi $\vec{w}_0(z)$

komponendid $w_1, w_2, \dots, w_{\nu_{11}}$ ringil $z = 0$ järg-

miselt:

$$w_1^* = \lambda_1 w_1$$

$$w_2^* = w_1 + \lambda_1 w_2$$

$$w_{\nu_{11}}^* = w_{\nu_{11}-1} + \lambda_1 w_{\nu_{11}}$$

(2.7)

Valemeist (2.7) on võimalik välja lugeda funktsioonide

$w_1, w_2, \dots, w_{\nu_{11}}$ kuju. Kui tähistame tähtedega $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_{\nu_{11}}(z)$ mõnesugused nullpunkti ümbruses ühesed analüütilised funktsioonid, mis on teatavasti arendatavad Laurent'i ritta, siis on kerge kontrollida, et funktsioonid omadusega (2.7) peavad omama järgmise kuju :

$$\begin{aligned} w_1 &= z^{\rho_1} \varphi_1 \\ w_2 &= z^{\rho_1} \left[\frac{\varphi_1}{\lambda_1} \frac{\ln z}{2\pi i} + \frac{\varphi_2}{\lambda_1} \right] \\ w_3 &= z^{\rho_1} \left[\frac{\varphi_1}{2\lambda_1^2} \frac{\ln z}{2\pi i} \left(\frac{\ln z}{2\pi i} - 1 \right) + \frac{\varphi_2}{\lambda_1^2} \frac{\ln z}{2\pi i} + \frac{\varphi_3}{\lambda_1^2} \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} w_{\nu_{11}} &= z^{\rho_1} \left[\frac{\varphi_1}{(\nu_{11}-1)! \lambda_1^{\nu_{11}-1}} \frac{\ln z}{2\pi i} \left(\frac{\ln z}{2\pi i} - 1 \right) \dots \left(\frac{\ln z}{2\pi i} - \nu_{11} + 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varphi_2}{(\nu_{11}-2)! \lambda_1^{\nu_{11}-2}} \frac{\ln z}{2\pi i} \left(\frac{\ln z}{2\pi i} - 1 \right) \dots \left(\frac{\ln z}{2\pi i} - \nu_{11} + 2 \right) + \dots + \frac{\varphi_{\nu_{11}-1}}{1! \lambda_1^{\nu_{11}-1}} \frac{\ln z}{2\pi i} + \frac{\varphi_{\nu_{11}}}{\lambda_1^{\nu_{11}-1}} \right] \end{aligned}$$

Siin
$$\rho_1 = \frac{\ln \lambda_1}{2\pi i} \quad (2.9)$$

Õeldakse, et diferentsiaalvõrrandi lahendid (2.8) vastavad astendajale ρ_1 (või karakteristlikule väärtusele λ_1).

Analoogiliselt saame esitada kõik lahendi $w(z)$ komponendid.

Karakteristlikule väärtusele λ_1 vastavad diferentsiaalvõrrandi lahendid jagunevad r alamrühma, kus r on maatriksi $C - \lambda E$ nende elementaarjagajate arv, milles esineb tegur $\lambda - \lambda_1$. Iga alamrühm sisaldab $\nu_{1\ell}$ ($\ell = 1, 2, \dots, r$) diferentsiaalvõrrandi lahendit kujuga (2.8), kus $\nu_{1\ell}$ on aste, millisel esineb $\lambda - \lambda_1$ vastavas elementaarjagajas.

λ_1 -le vastab $\sum_{\ell=1}^r \nu_{1\ell} = \mu_1$ lahendit.

Kui põhiteisenduse maatriks C taandub diagonaalkujule (elementaarjagajad ei sisalda kordseid tegureid), siis on diferentsiaalvõrrandi (1.1) kõik lahendid logaritmi vabad ning avalduvad kujul $w = z^{\rho} \varphi(z)$ ehk

$$w = z^{\rho} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k z^k. \quad (1.3)$$

Karakteristlikule väärtusele λ_j vastavad diferentsiaalvõrrandi lahendid moodustavad üheainsa alamrühma kujuga (2.8), kui tegur $\lambda - \lambda_j$ sisaldub ühesainsas elementaarjagajas (astmel μ_j).

H.v. Koch [11] näitas, kuidas põhivõrrand on seotud võrrandiga $D(\rho) = 0$, kus $D(\rho)$ tähendab lõpmatu võrrandisüsteemi (1.37) determinanti:

$$C - \lambda E = (-1)^n (2\pi i)^n e^{\frac{n(n-1)\pi i}{2}} \cdot e^{n\pi i \rho} D(\rho), \quad V (2.10)$$

kus

$$\lambda = e^{2\pi i \rho}$$

Seega võrrandil $C - e^{2\pi i \rho} E = 0$ ja $D(\rho) = 0$ on samad lahendid $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$.

§ 4. Põhivõrrandi koostamine.

Teades põhiteisendust C , saame koostada ja lahendada põhivõrrandi $C - \lambda E = 0$, mille kaudu leiame kergesti astendajad diferentsiaalvõrrandi lahendit esitavas avaldises (1.3): $\rho_j = \frac{\ln \lambda_j}{2\pi i}$. Esitame nüüd skeemi põhiteisenduse leidmiseks vajaliku analüütilise jätkamise sooritamiseks.

Fikseerime komplekstasandil korrapärase m -nurga ($m = 2m_1$), mille keskpunkt asetseb alguspunktis ja tipud A_j ($j = 1, 2, \dots, m$) ühikringjoonel, koordinaatidega

$$a_j = e^{\frac{j-1}{m} \cdot 2\pi i} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2.11)$$

Tippude A_j ja A_{j+1} vahelise külje keskpunkti märgime tähega B_j ning leiame tema koordinaadid b_j :

$$b_j = \cos \frac{\pi}{m} e^{\frac{2j-1}{m} \cdot 2\pi i} = \cos \frac{\pi}{m} e^{\frac{\pi i}{m}} a_j. \quad (2.12)$$

Lahendame nüüd diferentsiaalvõrrandi (1.1) punktides

A_j ($j=1, 2, \dots, m$) vastavalt algtingimustele

$$\begin{aligned} \vec{w}_{A_j} &= (1, 0, \dots, 0) \\ \vec{w}_{A_j} &= (0, 1, \dots, 0) \\ &\dots \\ \vec{w}_{A_j}^{(n-1)} &= (0, 0, \dots, 1). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Lahendid avalduvad siin Taylori ridadena:

$$\vec{w}_{A_j} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_{1A_j}^{(k)}}{k!} (z - \alpha_j)^k, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_{2A_j}^{(k)}}{k!} (z - \alpha_j)^k, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_{nA_j}^{(k)}}{k!} (z - \alpha_j)^k \right). \quad (2.14)$$

$w_{sA_j}^{(k)}$ ($s=1, 2, \dots, m+1; k=n, n+1, \dots$) arvutame järgmiselt. ✓

Diferentseerime järjest võrrandi (1.1) vasakut poolt, siis saame $w^{(k)}$ rekurrentselt avaldada madalamat järku tuletiste kaudu. Kui diferentsiaalvõrrandi (1.1) kordajad sisaldavad lõpliku arvu liikmeid z negatiivsete astmetega ning võrrand on seega esitatav kujul

$$z^M w^{(n)} + \sum_{n=1}^n P_n(z) w^{(n-n)} = 0, \quad (1.1^a)$$

kus

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk} z^k, \quad (1.2^c)$$

siis saame valemi

$$z^M w^{(k)} + \sum_{j=1}^k \left[\binom{k-n}{j} M(M-1) \dots [M-(j-1)] z^{M-j} + \sum_{s=1}^n \binom{k-n}{j-s} P_s^{(j-s)}(z) \right] w^{(k-j)} = 0, \quad (2.15)$$

mis on kergesti tõestatav täieliku induktsiooni meetodiga.

$w_{sA_j}^{(k)}$ leidmiseks võtame saadud võrduses $z = a_j$ ning $w_{sA_j}^{(k-j)}$ asendame juba leitud väärtustega. Kui $P_r(z)$ on M_s -astme polünoomid, siis liidetavate arv rekurrentseis seoseis (2.15) ei ületa maksimaalset arvudest $M, M_s + 1 + s$ ($s=1, 2, \dots, n$). Valemi (2.15) põhjal saame iga konkreetse võrrandi jaoks koostada arvutusmasinal arvutamiseks hästi sobivad skeemid.

Kuna kõigis punktides arvutame lahendid ühesuguste algtingimustega (2.13) ja $a_{r+1+j} = \overline{a_{r+1-j}}$ ($j=1, 2, \dots, m-2$), siis $\overrightarrow{w_{A_{n+1+j}}} = \overrightarrow{w_{A_{n+1-j}}}$ ($j=1, 2, \dots, m-2$). Siin \bar{a} tähendab arvu a ^{kaas} kompleksarvu.

Tähistame lahendi $\overrightarrow{w_{A_j^{(2)}}}$ väärtused ilmselt tema koordinaatvusringis asetsevais punktides B_j ja B_{j-1} vastavalt $\overrightarrow{w_{A_j, B_j}}$ ja $\overrightarrow{w_{A_j, B_{j-1}}}$ ($j=1, 2, \dots, m$), mõistes siin $\overrightarrow{w_{A_1, B_0}}$ all $\overrightarrow{w_{A_1, B_m}}$. Selleks tuleb, nagu näha valemist (2.14), leitud $w_{s, A_j}^{(k)}$ väärtused korrutada teguritega $\frac{(b_j - a_j)^k}{k!}$ ja $\frac{(b_{j-1} - a_j)^k}{k!}$ ($k=0, 1, 2, \dots$).

Punktid A_j ja B_j on valitud nii, et nimetatud astmete arvutamine toimuks võimalikult lihtsal viisil. Tõepoolest, (2.11) ja (2.12) järgi

$$\begin{aligned} b_j - a_j &= i \sin \frac{\pi}{m} e^{\frac{\pi}{m} i} a_j, \\ b_{j-1} - a_j &= -i \sin \frac{\pi}{m} e^{-\frac{\pi}{m} i} a_j. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Märgime veel, et

$$a_j^k = a_{k(j-1)+1}, \quad (2.17)$$

kusjuures peame silmas võrdust

$$a_j = a_{j-1} e^{i\pi/m},$$

kus ℓ ja k on naturaalarvud. Siis

$$\begin{aligned} \frac{(a_j - b_j)^k}{k!} &= \frac{\sin^k \frac{\pi}{m}}{k!} i^k e^{\frac{k}{m} \pi i} a_{k(j-1)+1}, \\ \frac{(b_{j-1} - a_j)^k}{k!} &= \frac{\sin^k \frac{\pi}{m}}{k!} (-i)^k e^{-\frac{k}{m} \pi i} a_{k(j-1)+1}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Eriti, kui $\frac{m+2}{4} = \ell$ (l täisarv), siis

$$\begin{aligned} \frac{(b_j - a_j)^k}{k!} &= \frac{\sin^k \frac{\pi}{m}}{k!} a_{k(j+\ell-1)+1}, \\ \frac{(b_{j-1} - a_j)^k}{k!} &= \frac{\sin^k \frac{\pi}{m}}{k!} a_{k(j+\ell-1)+1}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Vaatame siin konkreetseid juhte $m=6$ ($\ell=2$) ja $m=10$ ($\ell=3$).

$$\begin{array}{llllll}
 m & b_j - a_j & (b_j - a_j)^k & b_{j-1} - a_j & (b_{j-1} - a_j)^k & \\
 6 & \frac{1}{2} a_{j+2} & \frac{1}{2^k} a_{k(j+1)+1} & \frac{1}{2} a_{j-2} & \frac{1}{2^k} a_{k(j-3)+1} & (2.21) \\
 10 & \sin \frac{\pi}{10} a_{j+3} & (\sin \frac{\pi}{10})^k a_{k(j+2)+1} & \sin \frac{\pi}{10} a_{j-3} & (\sin \frac{\pi}{10})^k a_{k(j-4)+1} &
 \end{array}$$

Sellel on eelnevad arvutused sooritatud ning võime asuda põhiteisenduse C leidmisele.

Diferentsiaalvõrrandi (1.1) lahendite $\overrightarrow{w_{A_1}(z)}$ ja $\overrightarrow{w_{A_2}(z)}$ koonduvusringidel on ühine osa, milles need lahendid on seotud

teatava lineaarteisendusega C_1 : $\overrightarrow{w_{A_1}^{(k)}(z)} = C_1 \overrightarrow{w_{A_2}^{(k)}(z)}$ ($k=0, 1, \dots, n-1$).

Muuhulgas kehtib see seos lahendite ja nende tuletiste vahel ka punktis B_1 :

$$\overrightarrow{w_{A_1, B_1}^{(k)}} = C_1 \overrightarrow{w_{A_2, B_1}^{(k)}} \quad (k=0, 1, \dots, n-1). \quad (2.22)$$

Siit saame arvutada teisenduse C_1 , kuna $\overrightarrow{w_{A_1, B_1}}$ ja $\overrightarrow{w_{A_2, B_1}}$ on teada. Teisendust C_1 kasutame selleks, et analüütiliselt jätkata diferentsiaalvõrrandi (1.1) lahendit ringist keskpunktiga A_1 ringi keskpunktiga A_2 . Nimelt $C_1 \overrightarrow{w_{A_2}(z)}$ ongi $\overrightarrow{w_{A_1}(z)}$ analüütiliseks jätkuks nimetatud ringis.

Samal viisil toimetame edasi lahendi analüütilist jätkamist ringist keskpunktiga A_j ringi keskpunktiga A_{j+1} ($j = 2, 3, \dots, m-1$). Punktide A_j ja A_{j+1} ümbruses arvutatud lahendid on oma koonduvusringide ühisosas seotud lineaarteisendusega C_j . Nimelt kehtivad järgmised seosed:

$$C_{j-1} \overrightarrow{w_{A_j}(z)} = C_j \overrightarrow{w_{A_{j+1}}(z)} \quad (j=2, 3, \dots, m), \quad (2.23)$$

kusjuures C_j saame arvutada, kasutades valemit (2.23) kehtivust punktis B_j :

$$C_{j-1} \overrightarrow{W_{A_j B_j}^{(k)}} = C_j \overrightarrow{W_{A_{j+1} B_j}^{(k)}} \quad (k=0, 1, \dots, n-1). \quad (2.24)$$

Viimasest võrdusest, kui $j = m$,

$$C_{m-1} \overrightarrow{W_{A_m B_m}} = C_m \overrightarrow{W_{A_1 B_m}} \quad \vee \quad (2.25)$$

arvutame C_m , mis ongi ilmselt otsitav põhiteisendus C .

Kui kirjutame võrrandi (2.24) üksikasjalikult välja, siis saame lineaarse algebralise mittehomogeense võrrandisüsteemi $2n^2$ võrrandist ja $2n^2$ tundmatuga $\operatorname{Re}\{C_j\}_{ik}$ ja $\operatorname{Im}\{C_j\}_{ik}$ ($i, k=1, 2, \dots, n$). Lähemal vaatlusel selgub, et see süsteem laguneb n iseseisvaks $2n$ -võrrandiliseks süsteemiks, kus tundmatuteks on matriksi C_j ℓ -nda rea elementide reaali- ja imaginaarosad ($\ell = 1, 2, \dots, n$).

$$\sum_{s=1}^n \{C_j\}_{es} \overrightarrow{W_{s A_{j+1} B_j}^{(k)}} = \sum_{s=1}^n \{C_{j-1}\}_{es} \overrightarrow{W_{s A_j B_j}^{(k)}} \quad (k=0, 1, \dots, n-1, \ell=1, 2, \dots, n). \quad (2.26)$$

Kui eraldame siin reaali- ja imaginaarosad, siis saame

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n \operatorname{Re}\{C_j\}_{es} \operatorname{Re} \overrightarrow{W_{s A_{j+1} B_j}^{(k)}} - \sum_{s=1}^n \operatorname{Im}\{C_j\}_{es} \operatorname{Im} \overrightarrow{W_{s A_{j+1} B_j}^{(k)}} = \\ = \sum_{s=1}^n \operatorname{Re}\{C_{j-1}\}_{es} \operatorname{Re} \overrightarrow{W_{s A_j B_j}^{(k)}} - \sum_{s=1}^n \operatorname{Im}\{C_{j-1}\}_{es} \operatorname{Re} \overrightarrow{W_{s A_j B_j}^{(k)}}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n \operatorname{Re}\{C_j\}_{es} \operatorname{Im} \overrightarrow{W_{s A_{j+1} B_j}^{(k)}} + \sum_{s=1}^n \operatorname{Im}\{C_j\}_{es} \operatorname{Re} \overrightarrow{W_{s A_{j+1} B_j}^{(k)}} = \\ = \sum_{s=1}^n \operatorname{Re}\{C_{j-1}\}_{es} \operatorname{Im} \overrightarrow{W_{s A_j B_j}^{(k)}} + \sum_{s=1}^n \operatorname{Im}\{C_{j-1}\}_{es} \operatorname{Re} \overrightarrow{W_{s A_j B_j}^{(k)}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

$(k=0, 1, \dots, n-1).$

(2.27) ja (2.28) koos moodustavadki $2n$ -võrrandilise süsteemi.

$2n$ tundmatuga $\operatorname{Re}\{C_j\}_{es}$ ja $\operatorname{Im}\{C_j\}_{es}$ ($s=1, 2, \dots, n$).

Kokku tuleb lahendada n niisugust süsteemi vastavalt ℓ väärtustele $\ell = 1, 2, \dots, n$. Näeme aga, et need n süsteemi erinevad ainult vabaliikmete poolest. Seega tuleb matriksi C_j elementide leidmiseks tegelikult lahendada üks $2n$ -võrran-

diline lineaarne mittehomogeenne algebraline võrrandisüsteem n erineva vabaliikmete veeru korral. Kokku tuleb lahendada m niisugust võrrandisüsteemi vastavalt j väärtustele $j = 1, 2, \dots, m$. $C_m = C$ ongi otsitav põhiteisendus.

Seega põhiteisenduse leidmiseks tuleb lahendada diferentsiaalvõrrand $m_1 + 1$ harilikus punktis, leida nende lahendite väärtused kokku m punktis ja lõpuks lahendada järjest m lineaarset algebralist mittehomogeenset $2n$ -võrrandilist võrrandisüsteemi, igauks n erineva vabaliikmete veeru korral. Lõpuks arvutame põhiteisenduse karakteristikud väärtused $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ põhivõrrandi lahendamise teel ning leiame $\rho_j = \frac{\ln \lambda_j}{2\pi i}$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Edaspidiste arvutuste jaoks on soovitatav leida veel põhiteisenduse kanooniline kuju \tilde{C} .

Mida suurema m valime, seda kiiremini koonduvad read $\overrightarrow{w_j; \beta_j}$, kuid seda rohkem tuleb neid arvutada ning seda enam tuleb lahendada ka lineaarseid võrrandisüsteeme. Sellepärast on soovitatav kõne alla tulevaist m väärtustest $m = 4, 6, 8, 10$ valida $m = 6$.

Teatavaks kontrolliks lõpptulemusele on valem (1.35), sest $\sum_{l=1}^n \rho^{(l)}$ on kergesti arvutatav.

III. LAURENT'I REA KORDAJATE ARVUTAMINE.

§ 5. Lõpmatu võrrandisüsteemi lahendamine .

Käesolevas paragrahvis süeme eesmärgiks Laurent'i rea kordajate praktilise arvutamise lõpmatust võrrandisüsteemist.

Teises paragrahvis saime diferentsiaalvõrrandi (1.1^a) lahendit esitava rea

$$W = z^p \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k z^k \quad (1.3)$$

kordajate arvutamiseks lõpmatu võrrandisüsteemi

$$\varphi(p+j)g_j + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{jk}(p)g_k = 0 \quad (j \neq k), \quad (1.19)$$

kus

$$\varphi(p+j) = (p+j)(p+j-1) \dots (p+j-n+1) + \sum_{s=2}^n (p+j)(p+j-1) \dots (p+j-n+s+1) p_{s,-s} \quad (1.20)$$

ja

$$A_{jk}(p) = \sum_{s=2}^n (p+k)(p+k-1) \dots (p+k-n+s+1) p_{s,j-k-s}. \quad (1.21)$$

Eeldusel $\varphi(p+j) \neq 0$ iga j puhul võisime võrrandisüsteemi

(1.19) esitada kujul

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{jk}(p)g_k = 0, \quad (1.23^a)$$

mille determinant on normaalne, kusjuures tema lahenduvuse tarvilik ja piisav tingimus on järgmine:

$$|a_{jk}(p)| \neq 0.$$

Võrrandisüsteemi (1.19) uurimisel Koch, mitte teades p konkreetset väärtust, teisendas selle samaväärseks süsteemiks (1.37), mille determinant on normaalne olenemata p väärtusest ning sellest, kas süsteemis iga üksiku võrrandi kordajad on tõkestatud või mitte.

Meie eeldame, et p on juba arvutatud põhivõrrandist, siis

saame otsekohe kontrollida, kas $\varphi(s+j) \neq 0$ iga j puhul. Kui see nii on, siis on süsteemi (1.23^a) determinant normaalne ning tema kohta kehtib kõik, mis on öeldud teises paragrahvis süsteemi (1.37) kohta.

Kui $\varphi(s+j) = 0$, kuid $\varphi_1(s+j) = (s+j)(s+j-1)\dots(s+j-n+1) \neq 0$ iga j korral, siis võime süsteemi (1.19) uurida kujul

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{jk}(s) g_k = 0, \quad (1.23^c)$$

kus

$$c_{jk}(s) = \frac{f_{jk}(s)}{p_1(s+j)} \quad (j \neq k), \quad c_{kk}(s) = \frac{\varphi(s+j)}{p_1(s+j)}$$

Enne võrrandisüsteemi (1.23^a) lahendamisele asumist tutvume regulaarse ja kvaasiregulaarse lõpmatu võrrandisüsteemi mõistega.

Lõpmatut võrrandisüsteemi

$$x_j + \sum_{k=1}^{\infty} d_{jk} x_k = \beta_j \quad (j=1, 2, 3, \dots) \quad (3.1)$$

nimetatakse regulaarseks, kui on täidetud tingimus

$$\sum_{k=1}^{\infty} |d_{jk}| \leq \alpha < 1 \quad (3.2)$$

ning vabaliikmed on tõkestatud. Regulaarset süsteemi saab üheselt lahendada reduktsioonimeetodiga, s.t. tema lahend on leitav lõplike süsteemide

$$x_j + \sum_{k=1}^n d_{jk} x_k = b_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3.3)$$

lahendite x_j^n piirväärtuseha:

$$x_j = \lim_{n \rightarrow \infty} x_j^n \quad (3.4)$$

Märkus: Kasutame siinkohal lõpliku süsteemi võrrandite arvu märkimiseks kirjanduses välja kujunenud tava kohaselt tähte n , kuna siin pole karta segamist diferentsiaalvõrrandi järguga n .

Lõpmatut võrrandisüsteemi

$$x_j + \sum_{k=1}^{\infty} d_{jk} x_k = \beta_j \quad (j=1, 2, 3, \dots) \quad (3.5)$$

nimetatakse kvaasiregulaarseks, kui leidub naturaalarv N , nii et

$$1) \sum_{k=N+1}^{\infty} |d_{jk}| < +\infty \quad (j=1, 2, \dots, \omega) \quad (3.6)$$

$$2) \sum_{k=N+1}^{\infty} |d_{N+j,k}| \leq \alpha < 1 \quad (j=1, 2, 3, \dots). \quad (3.7)$$

Kvaasiregulaarse süsteemi lahendamiseks kirjutame ta alates $(N+1)$. võrrandist kujul

$$x_j + \sum_{k=N+1}^{\infty} d_{jk} x_k = \beta_j - \sum_{k=1}^N d_{jk} x_k \quad (3.8)$$

Saadud süsteem on regulaarne ning temast saab avaldada

tundmatud x_{N+1}, x_{N+2}, \dots arvult N esimese otsitava x_1, x_2, \dots, x_N

kaudu. Viimased leiame lõplikust süsteemist

$$x_j + \sum_{k=1}^N d_{jk} x_k = \beta_j \quad (j=1, 2, \dots, \omega), \quad (3.9)$$

kus x_{N+1}, x_{N+2}, \dots on asendatud süsteemist (3.8) leitud väärtustega.

Käsitledes kvaasiregulaarseid süsteeme oma töös [13], märkis L.V.Kantorovitš, et seda tüüpi on ka meid huvitav süsteem (1.23^a). Vaatleme seepärast ligemalt regulaarsete ning kvaasiregulaarsete lõpmatute võrrandisüsteemide lahendamist.

Selgitame, kui täpselt iseloomustab lõigatud süsteemi (3.3) lahend lõpmatu võrrandisüsteemi (3.1) lahendit, teiste sõnadega, milline tuleks valida n , et süsteemi (3.3) lahend iseloomustaks süsteemi (3.1) lahendit soovitud täpsusega.

Kasutame L.V. Kantorovitši töös [14] saadud tulemusi. Kantorovitš vaatles üldiste funktsionaalvõrrandite lahenda-

mist, eriti ka ühte konkreetset lõpmatu võrrandisüsteemi tüüpi (nimelt süsteemi, kus otsitavad kuuluvad ruumi ℓ^2).

Vaatleme regulaarset süsteemi (3.1) kui funktsionaalvõrrandit tõkestatud jadade ruumis $X = m = \{x_k\}$, lõigatud süsteemi aga n -mõõtmelises vektorruumis $\bar{X} = m_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Elementide normid nendes ruumides on defineeritud järgmiselt:

$$\|x\| = \sup_j |x_j|, \quad \|\bar{x}\| = \max_j |x_j|. \quad (3.10)$$

Lõpmatu võrrandisüsteemi (3.1) kirjutame võrrandina

$$\mathcal{L}x = x + \mathcal{H}x = y, \quad (3.11)$$

kus H on matriksiga (d_{jk}) määratud teisendus ning vabaliige $y = \{\beta_j\}$ kuulub samuti ruumi m . Lõigatud süsteemi (3.3) kirjutame järgmiselt:

$$\bar{\mathcal{L}}\bar{x} = \bar{x} + \bar{\mathcal{H}}\bar{x} = \bar{y}. \quad (3.12)$$

Siin \bar{H} on määratud matriksiga (d_{jk}) ($j, k = 1, 2, \dots, n$), ruum

\bar{X} on isomorfne ruumi X alamruumiga $X' = \{x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots\} = \{x'\}$.

Oma teooriat arendades püstitas Kantorovitš tingimuse, mille järgi elemendid $\mathcal{H}x$ peavad olema aproksimeeritavad elementidega x' , s.t. peab olema

$$\|\mathcal{H}x - x'\| \leq \varepsilon_1 \|x\|. \quad (3.13)$$

Kontrollime, kas see tingimus on antud juhul täidetud.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}x - x'\| &= \|(0, 0, \dots, 0, \sum_{k=1}^{\infty} d_{n+1,k} x_k, \sum_{k=1}^{\infty} d_{n+2,k} x_k, \dots)\| = \\ &= \sup_j \left| \sum_{k=1}^{\infty} d_{n+j,k} x_k \right| \leq \sup_j \sum_{k=1}^{\infty} |d_{n+j,k}| \cdot \sup_k |x_k| = \\ &= \sup_j \sum_{k=1}^{\infty} |d_{n+j,k}| \|x\| = \varepsilon_1 \|x\|. \end{aligned}$$

Seega

$$\varepsilon_1 = \sup_{j \geq n+1} \sum_{k=1}^{\infty} |d_{jk}|. \quad (3.14)$$

Kui $n \rightarrow \infty$, siis $\varepsilon_1 \rightarrow 0$. Ruum \bar{Y} on isomorfne Y alam-
ruumiga $Y' = \{y'\} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, 0, 0, \dots)$. Kantorovitši
poolt antud teise tingimuse järgi peavad elemendid y
olema aproksimeeritavad elementidega y' :

$$\|y - y'\| \leq \varepsilon_2 \|y\|. \quad (3.15)$$

Käesoleval juhul

$$\|y - y'\| = \sup_{j > n+1} |\beta_j| = \varepsilon_2. \quad (3.16)$$

Avaldame veel siin esinevate operaatorite H, \bar{H} normid,
kasutades Kantorovitši töös antud avaldisi.

$$\|H\| = \sup_j \sum_{k=1}^{\infty} |d_{jk}| \quad (j=1, 2, \dots), \quad (3.17)$$

$$\|\bar{H}\| = \max_j \sum_{k=1}^n |d_{jk}| \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (3.18)$$

$$\|K\| = 1 + \|H\|, \quad \|\bar{K}\| = 1 + \|\bar{H}\|. \quad (3.19)$$

Kuna lõpmatu võrrandisüsteemi regulaarsuse tõttu $\|H\| < 1$
ning $\|\bar{H}\| < 1$ (tingimus (3.2)), siis saame avaldada $K = J + H$
ning $\bar{K} = J + \bar{H}$ pöördoperaatorite normid. Kergesti saab
näidata, et

$$\mathcal{L}^{-1} = (J + H)^{-1} = J - H + H^2 - H^3 + \dots, \quad (3.20)$$

seega

$$\|K^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|H\|}, \quad \text{analoogiliselt } \|\bar{K}^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\bar{H}\|} \quad (3.21)$$

Kantorovitši teoreemi 10 järgi saame regulaarse süsteemi
jaoks hinnangu

$$\sup_{1 \leq k \leq n} [|x_k - \bar{x}_k|, |x_k|] \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \|K\|) (1 + \|K\| \|\bar{K}^{-1}\|) \|x\|, \quad (3.22)$$

kus $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \|K\|, \|\bar{K}^{-1}\|$ on antud valemitega (3.14), (3.16),
(3.19), (3.17), (3.18), (3.21).

Esitame otsekohe vastavad hinnangud kvaasiregulaarse
süsteemi jaoks, vaadeldes teda tõkestatud jadade ruumis
(x_{w+1}, x_{w+2}, \dots).

$$\|x\| = \sup_j |x_{\mathcal{N}+j}| \quad (j=1, 2, \dots); \quad \|\bar{x}\| = \max_j |x_{\mathcal{N}+j}| \quad (j=1, 2, \dots, \mathcal{N}-\mathcal{N}). \quad (3.23)$$

$$\varepsilon_1 = \sup_{j \geq \mathcal{N}+1} \sum_{k=\mathcal{N}+1}^{\infty} |\alpha_{\mathcal{N}+j, k}|; \quad \varepsilon_2 = \sup_{j \geq \mathcal{N}+1} \left[|\beta_{\mathcal{N}+j}| + \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} |\alpha_{\mathcal{N}+j+k}| \right], \quad (3.24)$$

$$\|\mathcal{H}\| = \sup_j \sum_{k=\mathcal{N}+1}^{\infty} |\alpha_{\mathcal{N}+j, k}|; \quad \|\bar{\mathcal{H}}\| = \max_j \sum_{k=\mathcal{N}+1}^{\mathcal{N}+\mathcal{N}} |\alpha_{\mathcal{N}+j, k}| \quad (j=1, 2, \dots, \mathcal{N}), \quad (3.25)$$

$$\sup_{\mathcal{N}+1 \leq k \leq \mathcal{N}+\mathcal{N}} [|x_k - \bar{x}_k|, |x_k|] \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \|\mathcal{H}\|)(1 + \|\mathcal{H}\| \|\bar{\mathcal{H}}^{-1}\| \|x\|). \quad (3.26)$$

Asume nüüd lõpmatu võrrandisüsteemi

$$g_j + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{jk} g_k = 0 \quad (1.23^a)$$

vaatlusele. (Selle kirjutusviisi puhul summas ei esine liidetavat $a_{jj} g_j$, kuna $a_{jj} = 1$). Fikseerime, N nii et oleks

$$\sum_{|k| > \mathcal{N}} |a_{jk}| < 1 \quad (|j| > \mathcal{N}). \quad (3.27)$$

Nüüd on järgmine süsteem regulaarne:

$$g_j + \sum_{|k| > \mathcal{N}} a_{jk} g_k = - \sum_{k=-\mathcal{N}}^{\mathcal{N}} a_{jk} g_k \quad (|j| > \mathcal{N}). \quad (3.28)$$

Siit leiame g_k ($|k| > \mathcal{N}$) arvult $2N + 1$ esimese tundmatu $g_{-\mathcal{N}}, \dots, g_{\mathcal{N}}$ kaudu:

$$g_k = \sum_{s=-\mathcal{N}}^{\mathcal{N}} d_s^k g_s \quad (|k| > \mathcal{N}), \quad (3.29)$$

kuna need omakorda arvutame lõplikust süsteemist

$$g_j + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{jk} g_k = 0 \quad (j = -\mathcal{N}, \dots, \mathcal{N}), \quad (3.30)$$

kus g_k ($|k| > \mathcal{N}$) on asendatud lõpmatust süsteemist (3.28)

leitud väärtustega. Kirjutame välja veel lõpmatust süsteemist (3.28) lõigatud lõpliku süsteemi:

$$g_j + \sum_{k=-\mathcal{N}-1}^{-\mathcal{N}-1} a_{jk} g_k + \sum_{k=\mathcal{N}+1}^{\mathcal{N}+\mathcal{N}} a_{jk} g_k = - \sum_{k=-\mathcal{N}}^{\mathcal{N}} a_{jk} g_k \quad (\mathcal{N}+1 \leq |j| \leq \mathcal{N}+\mathcal{N}). \quad (3.31)$$

Võrrandit (3.28) vaatleme tõkestatud jadade ruumis $\mathcal{X} = (\dots, g_{-1}, \dots, g_{-\mathcal{N}-1}, g_{\mathcal{N}+1}, \dots)$, võrrandit (3.31) aga ruumis $\bar{\mathcal{X}} = (g_{-\mathcal{N}-1}, \dots, g_{-\mathcal{N}-1}, g_{\mathcal{N}+1}, \dots, g_{\mathcal{N}+\mathcal{N}})$. Märgime maatriksiga $(a_{jk})_{|j|, |k| > \mathcal{N}}$ määratud operaatori tähega A . Operaator \bar{A} olgu määratud maatriksiga (a_{jk}) , kus $\mathcal{N} < |j|, |k| \leq \mathcal{N}+\mathcal{N}$.

Kasutades eelpool saadud valemeid kirjutame välja avaldised operaatorite A, \bar{A} normide ning suuruste $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ jaoks käesoleval juhul.

$$\|A\| = \sup_{|j| > N} \sum_{|k| > N} |a_{jk}|, \quad \|\bar{A}\| = \max_{|j| < N+n} \sum_{|k| < N+n} |a_{jk}|; \quad (3.32)$$

$$\varepsilon_1 = \sup_{j > n+1} \sum_{|k| > N} |a_{j+j, k}|; \quad \varepsilon_2 = \sup_{|j| > N} \sum_{k=-N}^N a_{jk} g_k. \quad (3.33)$$

Viga, mille teeme, lahendades lõpmatu süsteemi (1.23a) asemel lõpliku süsteemi (3.31), avaldub valemiga

$$\sup_{N+1 \leq |k| \leq N+n} [|g_k - \bar{g}_k|, |g_k|] \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \|X\|) (1 + \|X\| \|\bar{X}^{-1}\|) \|x\|. \quad (3.34)$$

Siin $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \|X\| \leq 1 + \|A\|, \|\bar{A}^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$ tuleb leida valemist (3.32) ja (3.33).

Vaatleme veel üksikasjalikult niisugust diferentsiaalvõrrandit, mille kordajad on polünoomid. Olgu diferentsiaalvõrrand antud normaalkujul

$$z^n w^{(n)} + \sum_{\kappa=2}^n z^{n-\kappa} \tilde{P}_\kappa(z) w^{(n-\kappa)} = 0, \quad (1.1^b)$$

kus

$$\tilde{P}_\kappa(z) = \sum_{s=-M}^M \tilde{d}_{\kappa s} z^s. \quad (1.2^c)$$

Lõpmatu võrrandisüsteemi saame kujul

$$g_j + \sum_{\kappa=j-M}^{j+M} a_{j\kappa} g_\kappa = 0, \quad (1.23^d)$$

kus

$$a_{j\kappa} = \frac{A_{j\kappa}}{\varphi(s+j)},$$

$$\varphi(s+j) = (s+j)(s+j-1) \dots (s+j-n+4) + (s+j)(s+j-1) \dots (s+j-n+3) \tilde{d}_{20} + \dots + \tilde{d}_{n0}$$

$$A_{j\kappa} = (s+\kappa)(s+\kappa-1) \dots (s+\kappa-n+3) \tilde{d}_{2, j-\kappa} + \dots + \tilde{d}_{n, j-\kappa}$$

Kirjutame süsteemi (1.23^b) üksikasjalikult välja.

$$g_{-w-s} + \sum_{k=-w-s-\mu}^{-w-1} a_{-w-s,k} g_k + \sum_{k=w+1}^{-w-s+\mu} a_{-w-s,k} g_k = - \sum_{k=-w}^w a_{-w-s,k} g_k \quad (s=1,2,\dots) \quad (3.34^a)$$

$$g_j + \sum_{k=j-\mu}^{j+\mu} a_{j,k} g_k = 0 \quad (|j| \leq w) \quad (3.34^b)$$

$$g_{w+s} + \sum_{k=w+s-\mu}^{-w-1} a_{w+s,k} g_k + \sum_{k=w+1}^{w+s+\mu} a_{w+s,k} g_k = - \sum_{k=-w}^w a_{w+s,k} g_k \quad (s=1,2,\dots). \quad (3.34^c)$$

Kui

$$2(w+1) > \mu, \quad (3.35)$$

siis võrrandisüsteemid (3.34^a) ja (3.34^c) ei sisalda ühtesid ja samu otsitavaid. N võime alati valida nii suure, et tingimused (3.27) ja (3.35) oleksid korraga rahuldatud. Siis (3.34) esitub kujul

$$g_{-w-s} + \sum_{k=-w-s-\mu}^{-w-1} a_{-w-s,k} g_k = - \sum_{k=-w}^{-w-s+\mu} a_{-w-s,k} g_k \quad (s=1,2,\dots) \quad (3.36^a)$$

$$g_{w+s} + \sum_{k=w+1}^{w+s+\mu} a_{w+s,k} g_k = - \sum_{k=w+s-\mu}^w a_{w+s,k} g_k \quad (s=1,2,\dots) \quad (3.36^c)$$

$$g_j + \sum_{k=j-\mu}^{j+\mu} a_{j,k} g_k = 0 \quad (|j| \leq w).$$

Arvestades, et $N + s + \mu > N + 1 > N + s - \mu$ ainult siis, kui $s = 1, 2, \dots, N$, saame (3.36^a) üksikasjalikult kirjutada järgmiselt:

$$g_{-w-s} + \sum_{k=-w-s-\mu}^{-w-1} a_{-w-s,k} g_k = - \sum_{k=-w}^{-w-s+\mu} a_{-w-s,k} g_k \quad (s=1,2,\dots,\mu), \quad (3.37)$$

$$g_{-w-s} + \sum_{k=-w-s-\mu}^{-w-s+\mu} a_{-w-s,k} g_k = 0 \quad (s > \mu).$$

Analoogiliselt esitub ka (3.36^c):

$$g_{w+s} + \sum_{k=w+1}^{w+s+\mu} a_{w+s,k} g_k = - \sum_{k=w+s-\mu}^w a_{w+s,k} g_k \quad (s=1,2,\dots,\mu), \quad (3.38)$$

$$g_{w+s} + \sum_{k=w+s-\mu}^{w+s+\mu} a_{w+s,k} g_k = 0 \quad (s > \mu).$$

Kirjutame välja veel lõigatud süsteemid, kusjuures olgu $n > \mu$:

$$g_{-w-s} + \sum_{k=\max(-w-s-m, -w-n)}^{-w-1} a_{-w-s,k} g_k = - \sum_{k=-w}^{-w-s+m} a_{-w-s,k} g_k \quad (s=1,2,\dots,m), \quad (3.39)$$

$$g_{-w-s} + \sum_{k=\max(-w-s-m, -w-n)}^{-w-s+m} a_{-w-s,k} g_k = 0 \quad (m > m),$$

$$g_{w+s} + \sum_{k=w+1}^{\min(w+s+m, w+n)} a_{w+s,k} g_k = - \sum_{k=w+s-m}^w a_{w+s,k} g_k \quad (s=1,2,\dots,m), \quad (3.40)$$

$$g_{w+s} + \sum_{k=w+s-m}^{\min(w+s+m, w+n)} a_{w+s,k} g_k = 0 \quad (m > m).$$

Esitame vajalikud hinnangud süsteemi (3.38) jaoks.

$$\|A_a\| = \sup_s \sum_{k=\max(w+1, w+s-m)}^{w+s+m} |a_{w+s,k}|, \quad \|\bar{A}_a\| = \max_{1 \leq s \leq n} \sum_{k=\max(w+1, w+s-m)}^{\min(w+s+m, w+n)} |a_{w+s,k} g_k| \quad (3.41)$$

Siin operaatorid A_a, \bar{A}_a on määratud vastavalt võrrandisüsteemide (3.38), (3.40) maatriksitega.

$$\varepsilon_1 = \sup_{s \geq n+1} \sum_{k=w+s-m}^{w+s+m} |a_{w+s,k}| \quad (3.42)$$

Kerge on näha, et käesoleval juhul $\varepsilon_2 = 0$. Viga ligikaudse ja tõelise lahendi vahel on antud valemiga

$$\sup_{\substack{w+1 \leq k \leq w+n \\ k \geq w+n}} [|x_k - \bar{x}_k|, |x_k|] \leq \varepsilon_1 (1 + \|K\| \|K^{-1}\|) \|x\|, \quad (3.43)$$

arvestades, et $\|K\| \leq 1 + \|K\|$ ning $\|K^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|K\|}$, leiame

$$\sup_{\substack{w+1 \leq k \leq w+n \\ k \geq w+n}} [|x_k - \bar{x}_k|, |x_k|] \leq \varepsilon_1 \left(1 + \frac{1 - \|A_a\|}{1 - \|\bar{A}_a\|} \right) \|x\|. \quad (3.44)$$

Analoogilised tulemused saame süsteemi (3.37) jaoks.

Analüüsime ligemalt lõpmatu võrrandisüsteemi (1.23^a) ja sellele vastavalt diferentsiaalvõrrandi (1.1^a) lahendeid. Kuna süsteem (3.28) on regulaarne, siis peab lõpliku süsteemi (3.30) astak R olema seotud lõpmatu süsteemi

astakuga r järgmiselt:

$$R = 2N + 1 - r \quad (3.45)$$

(Me ei saa väljendada nii, et vaadeldava lõpliku süsteemi astak on võrdne lõpmatu süsteemi astakuga, sellepärast et lõpmatu süsteemi astak on defineeritud teisiti kui lõpliku süsteemi oma).

R saame vahetult leida ning seejärel arvutada r .

Teiselt poolt on meil teada $\rho_j = \frac{\ln \lambda_j}{2\pi i}$ ($j=1, 2, \dots, n$) ning nende kordused. Seega saame otseselt kasutada H.v.Kochi tulemusi lahendite struktuuri kohta, mille esitasime I peatüki lõpus. Siin võivad esineda järgmised juhud.

a/ Olgu λ_1 põhivõrrandi ühekordne lahend, siis $\rho_1 = \frac{\ln \lambda_1}{2\pi i}$ on $\Omega(\rho)$ lihtne nullkoht ning $r = 1$. Lõpliku süsteemi astak peab seega olema $R = 2N$, üks võrrand süsteemis (3.30) osutub teiste järelduseks ning üks tundmatu jääb suvaliseks. Diferentsiaalvõrrandile leiame lahendi $w = z^{\rho_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k z^k$.

b/ Olgu λ_1 põhivõrrandi μ -kordne lahend, siis $\rho_1 = \frac{\ln \lambda_1}{2\pi i}$ on $R \Omega(\rho)$ μ -kordne nullkoht. Nagu teame, $r \leq \mu$ ehk $R \geq 2N + 1 - \mu$. Olgu algul $R = 2N + 1 - \mu$. Siis jääb võrrandisüsteemis (3.30) μ tundmatut $g_{k_1}, g_{k_2}, \dots, g_{k_\mu}$ suvaliseks. Diferentsiaalvõrrandil on $\mu = r$ lineaarselt sõltumatut lahendit kujul (1.3).

c/ Üldjuhul on λ_1 põhivõrrandi μ -kordne lahend ning $r < \mu$ ($R > 2N + 1 - \mu$).

Vaatleme algul juhtu $r = 1$ ($R = 2N$). Lõplikus süsteem

mis (3.30) jääb vabaks üks tundmatu g_{κ_1} . Seega on lõp-
matul võrrandisüsteemil (1.23^a) üksainus lahend ning dife-
rentsiaalvõrrandil üks logaritmi vaba lahend kujul (1.3) :

$$w = \int^{\rho_1} \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} g_{\kappa} z^{\kappa} . \quad \text{Lk. 19 nägime, et diferentsiaalvõrran-}$$

dit rahuldavad ka $\frac{\partial w_1}{\partial \rho}, \dots, \frac{\partial^{\mu-1} w_1}{\partial \rho^{\mu-1}}$, mis käesoleval juhul ei ole

identselt nullid. Need lahendid on antud valemitega (1.46).

Diferentseerime võrrandisüsteemi

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} a_{j\kappa}(\rho) g_{\kappa} = 0 \quad (1.23^a)$$

mõlemaid pooli, siis leiamegi võrrandisüsteemid $g_{\kappa}, \frac{\partial g_{\kappa}}{\partial \rho}, \dots, \frac{\partial^{\mu-1} g_{\kappa}}{\partial \rho^{\mu-1}}$

arvutamiseks.

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} a_{j\kappa}(\rho) \frac{\partial g_{\kappa}}{\partial \rho} &= - \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} a'_{j\kappa}(\rho) g_{\kappa} \\ \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} a_{j\kappa}(\rho) \frac{\partial^2 g_{\kappa}}{\partial \rho^2} &= - \left[\sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} (2 a'_{j\kappa}(\rho) \frac{\partial g_{\kappa}}{\partial \rho} + a''_{j\kappa}(\rho) g_{\kappa}) \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} a_{j\kappa}(\rho) \frac{\partial^{\mu} g_{\kappa}}{\partial \rho^{\mu}} = - \left[\sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{s=0}^{\mu-1} \binom{\mu-1}{s} a'_{j\kappa}(\rho) \frac{\partial^s g_{\kappa}}{\partial \rho^s} \right) \right] .$$

(3.46) kujutab lineaarset mittehomogeenset süsteemi, mille
determinant $|a_{j\kappa}(\rho)|$ on võrdne nulliga.

Käesolevas töös me ei käsitle lahendite praktilist

leidmist üldjuhul $1 < r < \mu$ ($2N > R > 2N + 1 - \mu$) .

Lõpmatust võrrandisüsteemist leitud kordajatega ridade
koonduvus on näidatud H.v. Kochi töös [11] anumaaldeterminandi
omadusi kasutades.

§ 6. Regulaarsed lahendid.

Regulaarseks nimetatakse diferentsiaalvõrrandi lahendit

$$w = z^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k \quad (1.4)$$

Niisugused on diferentsiaalvõrrandi lahendid regulaarse punkti ümbruses. Siis on võrrandi kordajatel kuju (1.2a). Vaatleme regulaarsete lahendite esinemise võimalust irregulaarses punktis $z = 0$.

Diferentsiaalvõrrand olgu antud kujul (1.1a) kordajatega

$$P_n(z) = \sum_{k=-n-m}^{\infty} p_{nk} z^k \quad (n=2, \dots, n) \quad (1.2)$$

Otsides lahendit kujul (1.4) saame rekurrentsed valemid

$$\begin{aligned} A_{00}(\rho) g_0 &= 0 \\ A_{10}(\rho) g_0 + A_{11}(\rho) g_1 &= 0 \\ \dots & \\ A_{m-1,0}(\rho) g_0 + A_{m-1,1}(\rho) g_1 + \dots + A_{m-1,m-1}(\rho) g_{m-1} &= 0 \\ \varphi_1(\rho+j) g_j + \sum_{k=0}^{j+m} A_{j+m,k} g_k &= 0 \quad (j=0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (3.47)$$

kus A_{jk} on antud valemitega (1.21) ning $\varphi_1(\rho) = \rho(\rho-1) \dots (\rho-n+1)$. Võrrandisüsteemi (3.47) lahenduvuseks on tarvilik, et ρ rahuldaks võrrandit $A_{00}(\rho) = 0$. Siis g_0 jääb suvaliseks. Nagu näha saadud valemest, tuleb rida (1.4) suvaliselt g_0 korral hajuv. Seega ei saa regulaarseid lahendeid irregulaarses punktis (kui neid on olemas) leida rekurrentselt nagu regulaarsel juhul.

Lõpmatul võrrandisüsteemil (3.47) võib siiski olla tõekestatud lahend. Nimelt kujutab ta eeldusel $\varphi_1(\rho+j) \neq 0$, \dots

kus ρ on võrrandi $A_{00}(\rho) = 0$ lahend ning j mistahes mitte-negatiivne täisarv, kvaasiregulaarset süsteemi. Kui naturaalarv N on leitud tingimusest

$$\sum_{k=N}^{j+m} \left| \frac{A_{j+m,k}(\rho)}{\varphi_k(\rho+j)} \right| < 1 \quad (j \geq N), \quad (3.48)$$

siis on süsteem

$$\sum_{k=N}^{j+m} \frac{A_{j+m,k}(\rho)}{\varphi_k(\rho+j)} g_k = - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_{j+m,k}(\rho)}{\varphi_k(\rho+j)} g_k \quad (j \geq N) \quad (3.49)$$

regulaarne ning temast saab avaldada g_N, g_{N+1}, \dots

arvult N erineva otsitava g_0, g_1, \dots, g_{N-1} kaudu järgmiselt:

$$g_k = \sum_{s=0}^{N-1} d_s^k g_s \quad (k \geq N) \quad (3.50)$$

Asendame otsitavad g_N, g_{N+1}, \dots võrrandisüsteemi (3.47)

N esimeses võrrandis leitud avaldistega (3.50). Kui saadud lõplik homogeenne võrrandisüsteem on lahenduv, siis on diferentsiaalvõrrandil regulaarne lahend; vastasel korral regulaarset lahendit ei ole.

Regulaarsete lahendite leidmist ülalnäidatuga analoogilisel meetodil käsitles V.I. Krölov oma töös [15].

§ 7. Laurent'i rea kordajate avaldamine Besseli funktsioonide kaudu.

Näitame, kuidas saab ühel erijuhul leida Laurent'i rea kordajaid ilma lõpmatu võrrandisüsteemi lahendamiseta.

Vaatleme järgmist tüüpi 2. järku diferentsiaalvõrrandit:

$$z^2 w'' + z \left(\frac{n-1}{z} + p_{02} + p_{11} z \right) w' + \left(\frac{n-1}{z} + p_{02} + p_{12} z \right) w = 0 \quad (3.51)$$

Lahendi

$$W = z^{\rho} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k z^k \quad (1.3)$$

kordajate g_k arvutamiseks saame valemid

$$[(\rho+k-1)\rho_{-11} + \rho_{-12}]g_{k+1} + [(\rho+k)(\rho+k-1) + (\rho+k)\rho_{01} + \rho_{02}]g_k + [(\rho+k-1)\rho_{11} + \rho_{12}]g_{k-1} = 0 \quad (3.52)$$

Võib osutada, et siin g_{k+1} , g_k , g_{k-1} ($k=-\infty, \dots, +\infty$) kordajail on ühine lineaartegur $\rho+k$ suhtes. Pärast sellega läbi jagamist saame

$$l g_{k+1} = \mu(\rho+k+m)g_k + n g_{k-1} \quad (3.53)$$

Kasutades Besseli funktsioonide vahelist seost

$$J_{k-1}(z) + J_{k+1}(z) = \frac{2k}{z} J_k(z) \quad (3.54)$$

leiame valemist (3.53) g_k jaoks avaldised

$$g_k = C i^k n^{\frac{k}{2}} l^{-\frac{k}{2}} J_{k+m+\rho} \left(\frac{2i\sqrt{en}}{\rho} \right), \quad (3.55)$$

kus C on suvaline konstant.

Kordajate g_k Besseli funktsiooni kaudu avaldamise meetodit kasutas V.J.Krölov [15], uurides regulaarsete lahendite esinemise võimalust ühe konkreetse võrrandi puhul tüübist (3.51).

Tuleb silmas pidada, et vaadeldaval juhul võib võrrand (3.51) olla integreeruv lõplikul kujul. Seda on kerge näha järgmisel viisil:

Vaatleme 1.järku diferentsiaalvõrrandit

$$zW' + \left(\frac{b_0}{z} + b_0 + b_1 z \right) W = 0, \quad (3.56)$$

mille lahend avaldub lõplikul kujul:

$$W = z^{-b_0} e^{\frac{b_0-1}{z} - b_1 z} \quad (3.57)$$

Otsides lahendit Laurent'i reana, saame kordajate arvutamiseks valemid

$$b_{-1} g_{k+1} = -\kappa g_k - b_1 g_{k-1} \quad (3.58)$$

Kui valem (3.53) osutub identseks valemiga (3.58), siis on ka võrrand (3.51) lahenduv lõplikul kujul. Alati saab valida 1. järku võrrandi (3.56) kordajad järgmiselt: $b_{-1} = -\frac{\ell}{r}$,

$b_1 = \frac{n}{r}$. Olgu võrrandi (3.51) lahendis (1.3) esinev astendaja ρ põhivõrrandi kaudu leitud. Kui osutub, et $\rho + m = 0$, siis on võrrandil (3.51) lahend kujul (3.57):

$$W = z^{-m} e^{-\frac{\ell}{r} \cdot \frac{1}{z} - \frac{n}{r} z} \quad (3.59)$$

Vastasel korral tuleb lahend leida reana (1.3), kus kordajad on antud valemiga (3.55). Diferentsiaalvõrrandi (3.51) tegelikul lahendamisel me muidugi ei lähtu ρ arvutamisest, vaid kontrollime, kas (3.59) rahuldab võrrandit.

Kirjutame välja võrrandi (3.56) lahendi Besseli funktsioonide kaudu, kasutades valemid (3.58) ja (3.54):

$$g_k = i^k (-b_1)^{\frac{k}{2}} (b_{-1})^{-\frac{k}{2}} J_k(2\sqrt{b_1 b_{-1}}) \quad (3.60)$$

Järelikult on kehtiv järgmine valem:

$$e^{-\frac{b_1}{z} - b_1 z} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k z^k, \quad (3.61)$$

kus g_k on antud valemiga (3.60). Valem (3.61) on üldisem tuntud valemist

$$e^{\frac{b}{z}(z - \frac{1}{z})} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(b) z^k \quad (3.62)$$

K I R J A N D U S E L O E T E L U .

- I. L. Fuchs, Programm städt. Gewerbe- Schule, Berlin, 1865;
Crelle J. 66 /1866/, 121 - 160
2. L.W. Thomé , Crelle J. 83 /1877/, 89 - 111.
3. H. Poincare , C.R. 101 /1885/ , 939-941, 990- 992 .
4. К. Я. Латышева, Наукові записки КДУ, Том VIII, вып. IV,
Мат. сб. № 3 (1949), 79 - 98.
5. К. Я. Латышева, Наукові записки КДУ, Том VIII, вып. IV,
Мат. сб. № 3 (1949), 95 - 103.
6. К. Я. Латышева, Доповіді АН Укр. РСР № I (1951), 14-20.
7. К. Я. Латышева, Украинский матем. журн., Том IV, № 2
(1952), 124 - 135.
8. К. Я. Латышева, Доповіді АН Укр. РСР № 2 (1952), 100-106.
9. К. Я. Латышева, Автореферат диссертации (1952).
10. H.v. Koch , Acta Mathematica 15 /1891/, 53-63.
11. H.v. Koch , Acta Mathematica 16 /1892-93/, 217-295 .
12. В. Ф. Каган, Основания теории определителей (1922).
13. Л. В. Канторович, Ученые записки ЛГУ № 17, т. III (1937),
24 - 50.
14. А. В. Канторович, Успехи матем. наук, т. III, 6 (1948),
89 - 186.
15. В. И. Крылов, Матем. сборник, т. XXXVI 3 - 4 (1929),
415 - 433.

S I S U K O R D.

Sissejuhatus	2
I. Kirjanduses käsitletud küsimusi lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamise kohta irregulaarse punkti ümbruses	5
§ 1. Formaalsed lahendid	5
§ 2. Laurent'i rea kordajate arvutamine lõpmatute determinantide meetodiga	10
II. Põhivõrrand	23
§ 3. Põhivõrrandi mõiste	23
§ 4. Põhivõrrandi koostamine	26
III. Laurent'i rea kordajate arvutamine	32
§ 5. Lõpmatu võrrandisüsteemi lahendamine	32
§ 6. Regulaarsed lahendid	43
§ 7. Laurent'i rea kordajate avaldamine Besseli funktsioonide kaudu	44
Kirjanduse loetelu	47