

TARTU ÜLIKOOL  
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND  
MATEMAATILISE STATISTIKA INSTITUUT

Helis Puksand

Ekspektilid ja nende kasutamine riskimõõduna

Magistritöö (30 EAP)

Finants- ja kindlustusmatemaatika eriala

Juhendaja:  
Meelis Käärrik, PhD

TARTU  
2015

## **Ekspektiilid ja nende kasutamine riskimõõduna**

Käesoleva magistritöö eesmärk on anda ülevaade ekspektiilidest, nende leidmisest, omadustest ning võimalikust kasutamisest riskimõõduna. Töös tutvustatakse kaofunktsioonil põhinevat kvantiilide definitsiooni ning antakse lühike ülevaade üldistatud kvantiilidest. Avaldatakse ekspektiilide leidmise võrrandid enam levinud kahjujaotuste – eksponentjaotuse, log-normaalse jaotuse, Pareto jaotuse, gammajaotuse ja Weibulli jaotuse jaoks. Lühidalt antakse ülevaade riskist ja riskimõõtudest. Uuritakse kahjujaotusel põhinevate riskimõõtude  $VaR$ , keskmine suurkahju ja ekspektiilide koherentsust ning tuuakse välja üldistatud kvantiilide seos kasulikkusfunktsiooniga. Töö praktilises osas leitakse testandmestikule kvantiilid, keskmine suurkahju ja ekspektiilid ning võrreldakse neid nimetatud jaotuste teoreetiliste näitajatega. Seeläbi püütakse hinnata testandmestikule sobitatava jaotuse sobivust.

**Märksõnad:** Riskiteooria, ekspektiil, kvantiil,  $VaR$ , keskmine suurkahju, koherentsus

## **Expectiles and their usage as a risk measure**

The purpose of this master's thesis is to give an overview of expectiles, discuss their properties, show how they are calculated and give a possible use of expectiles as a risk measure. In order we present definition of quantiles based on loss function and give a general overview of generalized quantiles. We express equations for finding expectiles for some common loss distributions: the exponential, log-normal, Pareto, gamma and Weibull distributions. We give a short overview of risk and different ways of measuring it. Furthermore, we examine the coherence of  $VaR$ , expected shortfall and expectiles. We point out the connection between the zero utility premium principle and generalized quantiles. In the practical part of the thesis we find the quantiles, expected shortfall and expectiles for a set of test data and compare them with theoretical distribution indicators. Through this we evaluate the suitability of different distributions to the test data.

**Keywords:** risk theory, expectile, quantile, Value at Risk, expected shortfall, coherence

# Sisukord

<b>Sissejuhatus</b> .....	<b>4</b>
<b>1 Kvantiilid, üldistatud kvantiilid ja ekspektiilid</b> .....	<b>6</b>
1.1 Kvantiilid .....	6
1.2 Üldistatud kvantiilid .....	13
1.2.1 Optimaalsuse kriteerium üldistatud kvantiilide korral .....	15
1.3 Ekspektiilid.....	17
1.3.1 Optimaalsuse kriteerium ekspektiilide korral .....	23
<b>2 Ekspektiilid konkreetsete jaotuse korral</b> .....	<b>24</b>
2.1.1 Eksponentjaotus .....	24
2.1.2 Log-normaalne jaotus.....	26
2.1.3 Pareto jaotus .....	29
2.1.4 Gammajaotus.....	31
2.1.5 Weibulli jaotus .....	34
<b>3 Riskimõõdud</b> .....	<b>37</b>
3.1 Risk ja riski hindamine .....	37
3.2 Kasulikkusfunktsioon .....	38
3.3 Kahjujaotusel põhinevad riskimõõdud .....	39
3.4 Koherentsed riskimõõdud.....	41
<b>4 Riskimõõtude kasutamine jaotuse sobivuse hindamiseks</b> .....	<b>44</b>
<b>Kokkuvõte</b> .....	<b>49</b>
<b>Kirjanduse loetelu</b> .....	<b>50</b>

## Sissejuhatus

Üha kiiremini arenevas ja muutuvras keskkonnas peavad ettevõtted paratamatult võtma ja aktsepteerima aina rohkem erinevaid riske. Seda olulisem on riskide võimalikult täpne hindamine ning juhtimine. Käesolev magistritöö käsitleb kvantiile ja ekspektiile ning nendel põhinevaid riskimõõte.

Üks enam levinud riski hindamise meetoditest on kvantiilil põhinev *VaR* (ingl *Value at Risk*), mis leiab laialdast kasutamist tänu oma lihtsusele ja kergesti mõistetavusele. Samas on nimetatud meetodil mitmeid puuduseid. Üks olulisemaid omadusi, mis heal riskimõõdul võiks olla, on koherentsus. *VaR* aga ei vasta kõigile vajalikele tingimustele, mis nimetatud omaduse jaoks peavad kehtima. Lisaks ei arvesta *VaR* ka suurte kahjude jaotusega, mistõttu ei ole võimalik teada, kui suur võib olla kahju, kui selle tõenäosus realiseerub. Alternatiivseks võimaluseks riski hindamisel on keskmine suurkahju (ingl *expected shortfall*), mis põhineb samuti kvantiilil, kuid võtab arvesse ka ekstreemsete väärtuste suurust. Vähem uuritud riski hindamise võimalus on aga ekspektiilid, mis on üldistatud kvantiilide erijuht. Käesoleva töö eesmärk on tutvustada ekspektiile ja võrrelda nimetatud riskimõõte.

Töö koosneb neljast osast. Esimeses peatükis on esitatud kvantiili definitsioon kaofunktsiooni kaudu ning toodud lihtsaid näiteid, kuidas nii diskreetse kui ka pideva jaotuse korral kvantiili väärtust leida, kasutades selleks nimetatud definitsiooni. Tutvustatakse üldistatud kvantiile, nende omadusi ning leidmist optimaalsuse kriteeriumit kasutades ning defineeritakse üldistatud kvantiilide erijuht – ekspektiilid. Ka ekspektiili väärtuse leidmise kohta on toodud lihtsaid näiteid, nimetatud on ekspektiili kasulikke omadusi ning näidatud, millisele kujule lihtsustub optimaalsuse tingimus ekspektiili korral.

Teises peatükis on avaldatud ekspektiilide leidmise võrrandid viie väga levinud jaotuse jaoks – eksponentjaotuse, log-normaalse jaotuse, Pareto jaotuse, gammajaotuse ja Weibulli jaotuse jaoks.

Kolmandas peatükis tutvustatakse lühidalt riski ja selle hindamist. Põhjalikumalt vaadatakse kolme kahjujaotusel põhinevat riskimõõtu – *VaR*, keskmine suurkahju ja ekspektiilid.

Tuuakse sisse koherentsuse mõiste ning uuritakse, kas ekspektiilid vastavad sellele olulisele riskimõõdu omadusele. Lisaks on toodud üldistatud kvantiilide seos kindlustuses olulise riskijuhtimisviisiga – kasulikkusfunktsiooniga.

Viimases peatükis katsetatakse nimetatud riskimõõde reaalse kahjukindlustuse andmete peal. Selleks sobitatakse esmalt andmetele viit eespool nimetatud jaotust. Seejärel leitakse testandmestiku empiirilise jaotuse põhjal  $VaR$ -id, keskmised suurkahjud ja ekspektiilid ning võrreldakse neid uuritavate jaotuste teoreetiliste näitajatega. Praktilises osas on kasutatud juriidilise kahju andmeid.

Magistritöö põhineb peamiselt artiklil Bellini, Klar, Müller ja Gianin (2013), kus on vaadeldud üldistatud kvantiile riskimõõduna ning tutvustatud omadused ja tulemused on väga üldisel kujul. Töö on kirjutatud tekstitöötlusprogrammiga *MS Word*, graafikud ja praktiline osa on viidud läbi statistikatarkvaraga *R*.

Autor tänab juhendajat Meelis Käärikut arvukate selgituste, paranduste ja töö struktuuri puudutavate ideede eest.

# 1 Kvantiilid, üldistatud kvantiilid ja ekspektiilid

Antud peatükis anname lühikese ülevaate kvantiilidest ning tutvustame alternatiivset kvantiilide definitsiooni. Defineerime kaofunktsioonide kaudu üldistatud kvantiilid ja ekspektiilid, vaatame nende omadusi ning väärtuse leidmist.

Kui pole viidatud teisiti, on peatüki kirjutamisel tuginetud allikale Bellini, Klar, Müller ja Gianin (2013).

## 1.1 Kvantiilid

**Definitsioon 1.1.** Juhusliku suuruse  $X$  kvantiiliks (või  $\alpha$ -kvantiiliks)  $q_\alpha(X)$  nimetatakse sellist arvu, mille korral

$$P(X < q_\alpha(X)) \leq \alpha \leq P(X \leq q_\alpha(X)), \quad (1.1)$$

kus  $\alpha \in [0,1]$ .

Seega on kvantiil juhusliku suuruse väärtus, millest väiksemate väärtuste esinemise tõenäosus on kõige rohkem  $\alpha$  ja millest väiksemate või võrdsete väärtuste esinemise tõenäosus kokku on vähemalt  $\alpha$ . Jaotuse kvantiilide teadmine annab palju praktilist informatsiooni. Näiteks, kui kuu netosissetuleku jaotuse 0,05-kvantiil on  $q_{0,05} = 400$ , siis see näitab, et 5% isikutel on netopalk väiksem kui 400 eurot. Ka riski hindamisel annab kvantiilide teadmine palju kasulikku informatsiooni. Näiteks on oluline minimiseerida kindlustusandja maksejõuetuse tõenäosust, et kindlustusleping ei kaotaks katet. Sel juhul käitub nõutav solventsuse ehk maksejõulisuse marginaal kui kvantiil, sest näitab, millise tõenäosusega on kulud suuremad kui ettevõtte maksta jõuab. Toome lihtsa näite diskreetse jaotusega juhusliku suuruse kvantiili leidmise kohta. Vaatame selleks täringuviset.

**Näide 1.1.** Olgu tegemist täringuvisetega ja otsime 0,95-kvantiili. Kirjutame välja täringuviske jaotuse

<b>F(x)</b>	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1
<b>x</b>	1	2	3	4	5	6

Valime  $\alpha = 0,95$  ja näeme, et kehtivad võrratused  $0,95 \leq P(X \leq 6) = 1$  ning  $P(X < 6) = \frac{5}{6} \leq 0,95$ . Järelikult antud juhul on 0,95-kvantiil  $q_{0,95}(X) = 6$ .

Kvantiili leidmist võib vaadata ka kui mingi kriteeriumi mõttes parima (optimaalse) punkti leidmist juhuslikule suurusele  $X$ . Erinevate kriteeriumite järgi parima punkti leidmiseks võime kasutada kaofunktsiooni. Kaofunktsioon, mida tähistame  $\rho$ -ga, on funktsioon, millega kirjeldame juhusliku suuruse  $X$  erinevust punktist  $u$ . Täpsemalt, me otsime punkti, mis minimiseerib keskmise kao  $E\rho(X - u)$ . Tuntumad näited on keskväärtuse leidmine ruutkaofunktsiooni abil:

$$\begin{aligned} \arg \min_u E(X - u)^2 &= \arg \min_u [E(X - EX + EX - u)^2] \\ &= \arg \min_u [E(X - EX)^2 + 2E((X - EX)(EX - u)) + E(EX - u)^2] \\ &= \arg \min_u [DX + 0 + (EX - u)^2] = EX \end{aligned}$$

ja mediaani leidmine absoluutkaofunktsiooni abil:

$$\arg \min_u E|X - u| = \text{med } X.$$

Seda arvestades anname kvantiilide hindamiseks kvantiili definitsiooni alternatiivsel kujul, kasutades selleks kaofunktsiooni.

**Definitsioon 1.2.** Juhusliku suuruse  $X$  kvantiiliks  $q_\alpha(X)$  nimetatakse tükiti lineaarse kaofunktsiooni miinumkohta

$$q_\alpha(X) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \{\alpha E[(X - x)^+] + (1 - \alpha)E[(X - x)^-]\}, \quad (1.2)$$

kus  $x^+ := \max\{x, 0\}$  ja  $x^- := \max\{-x, 0\}$  ning  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Lause 1.1.** Olgu meil juhuslik suurus  $X$  selline, et  $E|X| < \infty$ , siis juhusliku suuruse kvantiili definitsioonid 1.1. ja 1.2 on samaväärsed. (Koenker, 2005)

**Tõestus.** Vaatleme kaofunktsiooni  $\rho_\alpha(u) = |u(\alpha - \mathbb{I}_{(u < 0)})|$ , siis

$$\rho_\alpha(X - v) = |(X - v)(\alpha - \mathbb{I}_{(X-v < 0)})| = \begin{cases} \alpha \cdot (X - v), & X \geq v \\ (\alpha - 1) \cdot (X - v), & X < v \end{cases}$$

Vastav minimeerimisülesanne on kujul:

$$\min_v E(\rho_\alpha(X - v)) = \min_v \left( (\alpha - 1) \int_{-\infty}^v (x - v) dF_X(x) + \alpha \int_v^{\infty} (x - v) dF_X(x) \right).$$

Punktides, kus toodud funktsioon on diferentseeruv, leiame miinimumi, kui võtame tuletise ja võrdsustame selle nulliga:

$$(1 - \alpha) \int_{-\infty}^{q_\alpha(X)} dF_X(x) - \alpha \int_{q_\alpha(X)}^{\infty} dF_X(x) = 0,$$

millest

$$F_X(q_\alpha(X)) - \alpha F_X(q_\alpha(X)) - \alpha + \alpha F_X(q_\alpha(X)) = 0.$$

Seega diferentseeruvate punktide korral

$$F_X(q_\alpha(X)) = \alpha.$$

Juhul kui kvantiil  $q_\alpha$  asub punktis, kus minimeeritav funktsioon ei ole diferentseeruv (st, kus asub tõenäosusmass), siis tähistagu  $q_\alpha^-$  mingit punkti, mis asub  $q_\alpha$  vasakpoolses vahetus ümbruses, ning  $q_\alpha^+$  mingit punkti, mis asub  $q_\alpha$  parempoolses vahetus ümbruses. Nendes punktides on  $\rho_\alpha(X - v)$  diferentseeruv ning kui kehtivad tingimused:

$$\begin{cases} \left( E \left( \rho_\alpha(X - q_\alpha^+(X)) \right) \right)' > 0 \\ \left( E \left( \rho_\alpha(X - q_\alpha^-(X)) \right) \right)' < 0 \end{cases}$$

siis on tegemist lokaalse miinumumiga. Eelneva tõestuskäiguga analoogiliselt saame, et

$$\begin{cases} F_X(q_\alpha^+(X)) > \alpha \\ F_X(q_\alpha^-(X)) < \alpha \end{cases}$$

mis tähendab, et  $P(X < q_\alpha(X)) < \alpha < P(X \leq q_\alpha(X))$ . Järelikult definitsioonid 1.1 ja 1.2 on samaväärsed.

■

Toome definitsiooni 1.2 abil kvantiili leidmise kohta illustreeriva näite nii diskreetsel kui ka pideval juhul.

**Näide 1.2.** Olgu jällegi tegemist täringuviskega ning otsime 0,95-kvantiili ja 0,5-kvantiili. 0,95-kvantiili korral saab valem (1.2) kuju:

$$q_{0,95}(X) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ 0,95 \cdot \frac{1}{6} \left( \max(1-x, 0) + \max(2-x, 0) + \dots + \max(6-x, 0) \right) + 0,05 \cdot \frac{1}{6} \left( \max(x-1, 0) + \max(x-2, 0) + \dots + \max(x-6, 0) \right) \right\}.$$

On ilmne, et kvantiili leidmiseks peaks summa esimene liige olema minimaalne. Kui  $x \geq 6$ , siis summa esimene liige on 0 ning teine liige

$$0,05 \cdot \frac{1}{6} (x-1 + x-2 + x-3 + x-4 + x-5 + x-6) = 0,05 \left( x - \frac{21}{6} \right) \geq 0,05 \cdot 2,5 = 0,125.$$

Vaatame võrdluseks ka juhtu kui  $5 \leq x < 6$ , siis saab algne võrrand kuju:

$$0,95 \cdot \frac{1}{6} (6-x) + 0,05 \cdot \frac{1}{6} (x-1 + x-2 + x-3 + x-4 + x-5) = 0,95 \frac{6-x}{6} + 0,05 \frac{5x-15}{6} > 0,125.$$

Järelikult, kuna funktsioon on tükiti lineaarne, siis saame, et funktsioon on minimaalne  $x = 6$  korral. Seega saime sama tulemuse, mis kvantiili definitsiooni 1.1 korral,  $q_{0,95}(X) = 6$ .

Vaatame ka 0,5-kvantiili ehk mediaani leidmist:

$$q_{0,5}(X) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ 0,5 \cdot \frac{1}{6} \left( \max(1-x, 0) + \max(2-x, 0) + \dots + \max(6-x, 0) \right) + 0,5 \cdot \frac{1}{6} \left( \max(x-1, 0) + \max(x-2, 0) + \dots + \max(x-6, 0) \right) \right\}.$$

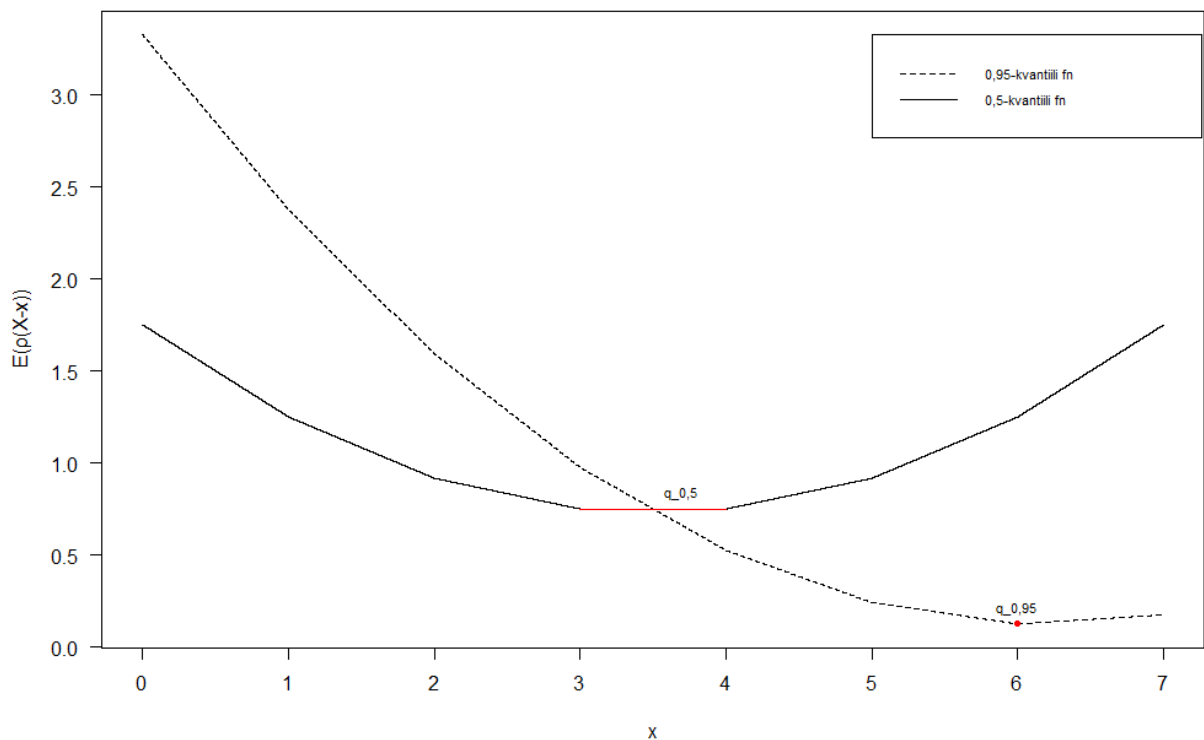
Lahendi leidmiseks peavad mõlemad summa liikmed olema võimalikult väikesed. Seega vaatame juhtu, kui  $x = 3$ ,

$$0,5 \cdot \frac{1}{6} (4-x+5-x+6-x) + 0,5 \cdot \frac{1}{6} (x-1+x-2) = 0,5 + 0,5 \cdot \frac{1}{2} = 0,75.$$

Võrdluseks vaatame juhtu, kui  $x = 4$ ,

$$0,5 \cdot \frac{1}{6} (5-x+6-x) + 0,5 \cdot \frac{1}{6} (x-1+x-2+x-3) = 0,5 \cdot \frac{1}{2} + 0,5 = 0,75.$$

Kuna vahemikus  $3 \leq x \leq 4$  on funktsioon konstantne, siis sobib mediaaniks ükskõik milline reaalarv  $x \in [3; 4]$ .



**Joonis 1.1.** 0,95-kvantiili ja 0,5-kvantiili leidmise funktsioonid täringuviske korral

Vaatame kvantiile ka pidevate jaotuste korral. Pideva jaotuse korral saab valem (1.2) kujul:

$$q_{\alpha}(X) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \max(t - x, 0) f(t) dt + (1 - \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \max(x - t, 0) f(t) dt \right\}.$$

**Näide 1.3.** Olgu  $X$  standardse ühtlase jaotusega juhuslik suurus,  $X \sim U(0,1)$ , siis tema tihedusfunktsioon on kujul:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

Seega vastav 0,95-kvantiil on järgneva võrrandi lahend:

$$\begin{aligned}
q_{0,95}(X) &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ 0,95 \int_0^1 \max(t-x, 0) \cdot 1 dt + 0,05 \int_0^1 \max(x-t, 0) \cdot 1 dt \right\} \\
&= \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ 0,95 \int_x^1 (t-x) dt + 0,05 \int_0^x (x-t) dt \right\} \\
&= \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ 0,95 \cdot \left( \frac{t^2}{2} - xt \right) \Big|_x^1 + 0,05 \cdot \left( xt - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^x \right\} \\
&= \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ 0,95 \cdot \left( \frac{1}{2} - x - \frac{x^2}{2} + x^2 \right) + 0,05 \cdot \left( x^2 - \frac{x^2}{2} \right) \right\} \\
&= \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{x^2}{2} - 0,95x + 0,475 \right\}
\end{aligned}$$

Leiame miinimumkoha:

$$x - 0,95 = 0,$$

kust saame, et standardse ühtlase jaotusega juhusliku suuruse  $X$  0,95-kvantiil on  $q_{0,95}(X) = 0,95$ .

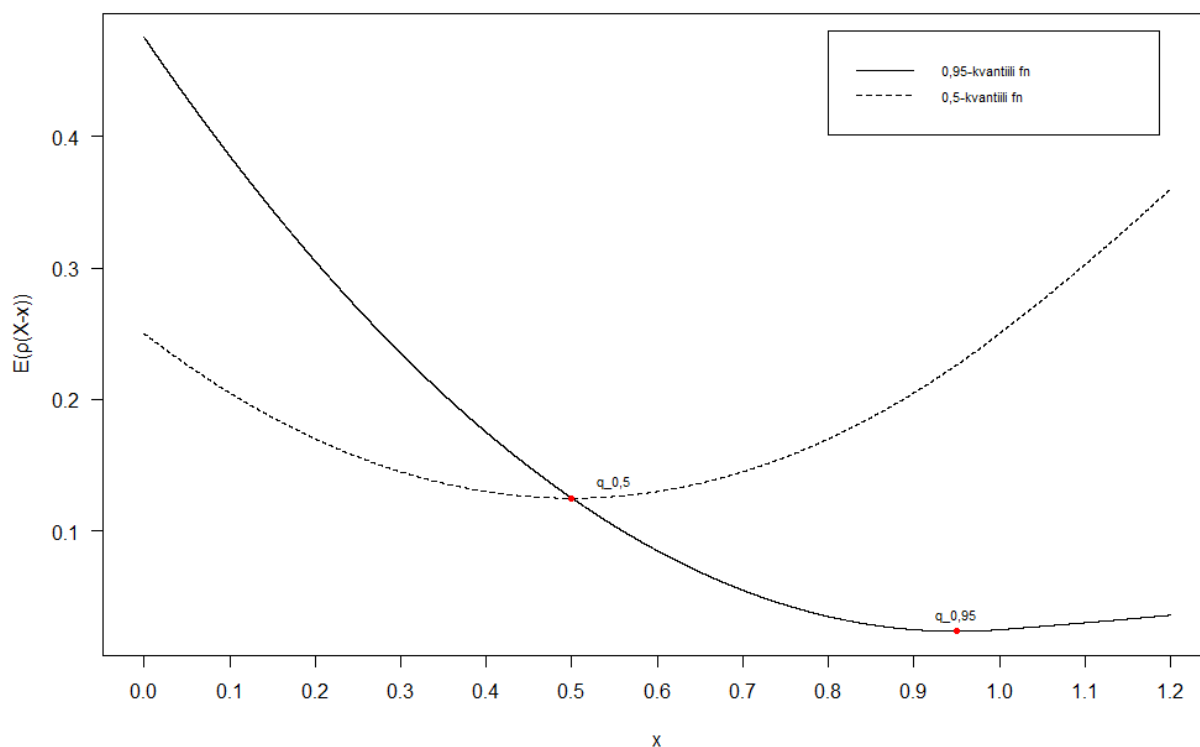
Vaatame ka ühtlase jaotuse mediaani:

$$\begin{aligned}
q_{0,5}(X) &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ 0,5 \int_0^1 \max(t-x, 0) \cdot 1 dt + 0,5 \int_0^1 \max(x-t, 0) \cdot 1 dt \right\} \\
&= \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ 0,5 \cdot \left( \frac{t^2}{2} - xt \right) \Big|_x^1 + 0,5 \cdot \left( xt - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^x \right\} \\
&= \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \{ 0,5x^2 - 0,5x + 0,25 \}.
\end{aligned}$$

Võttes tuletise:

$$x - 0,5 = 0,$$

saame miinimumkoha ja seega on standardse ühtlase jaotusega juhusliku suuruse mediaan  $q_{0,5}(X) = 0,5$ .



**Joonis 1.2.** 0,95-kvantiili ja 0,5-kvantiili leidmise funktsioonid standardse ühtlase jaotuse korral

## 1.2 Üldistatud kvantiilid

Üldistatud kvantiilide defineerimiseks vaatame kaofunktsiooni kujul:

$$\rho(X - v) = \begin{cases} \alpha \cdot \Phi_1(X - v), & X - v \geq 0 \\ (1 - \alpha) \cdot \Phi_2(-(X - v)), & X - v < 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

kus  $\Phi_1, \Phi_2: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  on kumerad rangelt kasvavad funktsioonid, mis rahuldavad tingimusi:

$$\Phi_i(0) = 0 \text{ ja } \Phi_i(1) = 1. \quad (1.4)$$

**Definitsioon 1.3.** Juhusliku suuruse  $X$  üldistatud kvantiiliks nimetatakse suurust

$$x_\alpha^* \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \pi_\alpha(X, x),$$

kus

$$\pi_\alpha(X, x) := \alpha E[\Phi_1((X - x)^+)] + (1 - \alpha) E[\Phi_2((X - x)^-)]. \quad (1.5)$$

Mõned olulisemad üldistatud kvantiilide omadused on toodud ära järgnevas lemmas. Selleks aga tähistame enne mõned vajalikud suurused.

**Definitsioon 1.4.** Luxemburgi normiks nimetatakse suurust

$$\|Y\|_\Phi := \inf \left\{ a > 0 : E \left[ \Phi \left( \frac{|Y|}{a} \right) \right] \leq 1 \right\}.$$

Olgu funktsioon  $\Phi$  punktis (1.4) kirjeldatud omadustega. Olgu tõenäosusruum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ja ruum  $L^0$  olgu kõigi juhuslike suuruste ruum sellel tõenäosusruumil. Sel juhul on Orliczi süda

$$M^\Phi := \left\{ X \in L^0 : E \left[ \Phi \left( \frac{|X|}{a} \right) \right] < +\infty \text{ iga } a > 0 \text{ korral} \right\}$$

Banachi ruum Luxemburgi normi suhtes.

**Definitsioon 1.5.** Juhusliku suuruse  $Y$  alumiseks üldistatud kvantiiliks nimetatakse suurust

$$x_\alpha^{*-} := \inf \{ x \in \mathbb{R} : g^+(X, x, \alpha) \geq 0 \},$$

kus  $g^+(X, x, \alpha)$  tähistab parempoolset tuletist, ja ülemiseks üldistatud kvantiiliks suurust

$$x_\alpha^{*+} := \sup \{ x \in \mathbb{R} : g^-(X, x, \alpha) \leq 0 \},$$

kus  $g^-(X, x, \alpha)$  tähistab vasakpoolset tuletist.

Tähistagu  $X \geq_{st} Y$  omadust, kus võrratus  $P(X \leq x) \leq P(Y \leq x)$  kehtib iga  $x \in \mathbb{R}$  korral. Sellist omadust nimetatakse esimest järku stohhastiliseks domineerimiseks.

**Lemma 1.1.** Olgu  $\Phi_1, \Phi_2: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  kumerad, rangelt kasvavad funktsioonid, mis rahuldavad tingimust (1.4). Olgu  $X \in M^{\Phi_1} \cap M^{\Phi_2}$ ,  $\alpha \in (0,1)$  ja olgu  $\pi_\alpha(X, x)$  defineeritud valemiga (1.5). Tähistame juhusliku suuruse  $Y$  alumise ja ülemise üldistatud kvantiili vastavalt  $y_\alpha^{*-}, y_\alpha^{*+}$  ning juhusliku suuruse  $X$  samad näitajad vastavalt  $x_\alpha^{*-}, x_\alpha^{*+}$ . Toodud tingimustel on üldistatud kvantiilidel järgmised omadused.

- Üldistatud kvantiilid on invariantse nihke suhtes, st  $Y = X + h$ , kus  $h \in \mathbb{R} \Rightarrow [y_\alpha^{*-}; y_\alpha^{*+}] = [x_\alpha^{*-} + h; x_\alpha^{*+} + h]$ ;
- Kui  $\Phi_1(x) = \Phi_2(x) = x^\beta$ , kus  $\beta \geq 1$ , siis üldistatud kvantiilid on positiivselt homogeensed, st kui  $Y = \lambda X, \lambda > 0 \Rightarrow [y_\alpha^{*-}; y_\alpha^{*+}] = [\lambda x_\alpha^{*-}; \lambda x_\alpha^{*+}]$ ;
- Üldistatud kvantiilid on monotoonsed, st kui  $X \geq_{st} Y$ , siis  $x_\alpha^{*-} \geq y_\alpha^{*-}$  ja  $x_\alpha^{*+} \geq y_\alpha^{*+}$ ;
- Kui juhuslik suurus  $X$  on konstantne, siis on ka üldistatud kvantiilid konstantsed, st kui  $X = c$  a. s., siis  $x_\alpha^{*-} = x_\alpha^{*+} = c$ ;
- Üldistatud kvantiilid on  $\alpha$  suhtes monotoonselt kasvavad, st kui  $\alpha_1 \leq \alpha_2$ , kus  $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$ , siis  $x_{\alpha_1}^{*-} \leq x_{\alpha_2}^{*-}$  ja  $x_{\alpha_1}^{*+} \leq x_{\alpha_2}^{*+}$ .

Kuna üldistatud kvantiil on minimeerimisülesande lahend, siis saab selle leidmiseks kasutada optimaalsuse kriteeriumit.

### 1.2.1 Optimaalsuse kriteerium üldistatud kvantiilide korral

Vaatame minimeerimisülesannet  $\pi_\alpha(X) := \inf_{x \in \mathbb{R}} \pi_\alpha(X, x)$ , kus  $\pi_\alpha(X, x)$  on defineeritud valemiga (1.5). Seega kaofunktsioon on kujul (1.3). Võttes sellest tuletise  $v$  järgi saame funktsiooni:

$$\psi(X - v) := \rho'(X - v) = \begin{cases} -\alpha \cdot \Phi_1'(X - v), & X - v \geq 0 \\ (1 - \alpha) \cdot \Phi_2'(-(X - v)), & X - v < 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Funktsioonid  $\Phi_1, \Phi_2$  ei pruugi olla igas punktis diferentseeruvad, aga kuna need on kumerad, siis saab üldistatud kvantiile määratleda optimaalsuse kriteeriumit kasutades (ingl *first order condition*). Üldisel kujul on kriteerium esitatud järgmises lemmas.

**Lemma 1.2.** Olgu  $\Phi_1, \Phi_2: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  kumerad, rangelt kasvavad funktsioonid, mis rahuldavad tingimust (1.4). Olgu  $X \in M^{\Phi_1} \cap M^{\Phi_2}, \alpha \in (0,1)$  ja olgu  $\pi_\alpha(X, x)$  defineeritud seosega (1.5). Sel juhul:

- a.  $\pi_\alpha(X, x)$  on lõplik, mittenegatiivne, kumer ja rahuldab tingimust

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \pi_\alpha(X, x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \pi_\alpha(X, x) = +\infty;$$

- b.  $x_\alpha^* \in \arg \min \pi_\alpha(X, x)$  parajasti siis, kui

$$\begin{cases} \alpha E[\mathbf{1}_{\{X > x_\alpha^*\}} \Phi'_{1-}((X - x_\alpha^*)^+)] \leq (1 - \alpha) E[\mathbf{1}_{\{X \leq x_\alpha^*\}} \Phi'_{2+}((X - x_\alpha^*)^-)] \\ \alpha E[\mathbf{1}_{\{X \geq x_\alpha^*\}} \Phi'_{1+}((X - x_\alpha^*)^+)] \geq (1 - \alpha) E[\mathbf{1}_{\{X < x_\alpha^*\}} \Phi'_{2-}((X - x_\alpha^*)^-)] \end{cases} \quad (1.7)$$

kus  $\Phi'_{i-}$  ja  $\Phi'_{i+}$  tähistavad vasakut ja paremat  $\Phi_i$  tuletist;

- c. kui  $\Phi_1$  ja  $\Phi_2$  on rangelt kumerad, siis  $x_\alpha^{*-} = x_\alpha^{*+}$ .

**Näide 1.4.** Olgu  $\Phi_1(x) = \Phi_2(x) = x$ , mis tähendab, et tegemist on tavaliste kvantiilidega ja  $\Phi'_1(x) = \Phi'_2(x) = 1$ . Sellest tulenevalt saab tavaliste kvantiilide korral võrrandisüsteem (1.7) lihtsama kuju:

$$\begin{cases} \alpha E[\mathbf{1}_{\{X > q_\alpha\}}] \leq (1 - \alpha) E[\mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}] \\ \alpha E[\mathbf{1}_{\{X \geq q_\alpha\}}] \geq (1 - \alpha) E[\mathbf{1}_{\{X < q_\alpha\}}] \end{cases}$$

ehk lihtsustades

$$\begin{cases} \alpha P(X > q_\alpha) \leq (1 - \alpha) P(X \leq q_\alpha) \\ \alpha P(X \geq q_\alpha) \geq (1 - \alpha) P(X < q_\alpha) \end{cases}$$

Teades, et  $P(X > q_\alpha) = 1 - P(X \leq q_\alpha)$ , saame lihtsama kuju:

$$P(X < q_\alpha) \leq \alpha \leq P(X \leq q_\alpha).$$

Kui  $\Phi_1(x) = \Phi_2(x) = x$ , siis taanduvad üldistatud kvantiilid tavalisteks kvantiilideks. Seega on tavalised kvantiilid üldistatud kvantiilide erijuhuks. Üldistatud kvantiilide erijuhuks on ka ekspektilid.

### 1.3 Ekspektilid

**Definitsioon 1.6.** Juhusliku suuruse  $X$  ekspektiliks  $e_\alpha(X)$  nimetatakse asümmeetrilise ruutkaofunktsiooni miinimumkohta

$$e_\alpha(X) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \{ \alpha E[(X - x)^+]^2 + (1 - \alpha) E[(X - x)^-]^2 \}.$$

Vaatame ka ekspektilide leidmist kahe näite – täringuviske ja standardse ühtlase jaotuse korral.

**Näide 1.5.** Olgu  $X$  ühe täringuviske silmade arv ning otsime 0,95-ekspektili ja 0,5-ekspektili. 0,95-ekspektili korral:

$$e_{0,95}(X) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ 0,95 \cdot \frac{1}{6} \left( (\max(1 - x, 0))^2 + (\max(2 - x, 0))^2 + \dots + (\max(6 - x, 0))^2 \right) + 0,05 \cdot \frac{1}{6} \left( (\max(x - 1, 0))^2 + (\max(x - 2, 0))^2 + \dots + (\max(x - 6, 0))^2 \right) \right\},$$

milles ekspektili leidmiseks peab 0,95-ga korrutatud liige olema minimaalne. Kui  $x = 6$ , siis summa esimene liige on 0 ning teine liige

$$\begin{aligned} 0,05 \cdot \frac{1}{6} ((x - 1)^2 + (x - 2)^2 + (x - 3)^2 + (x - 4)^2 + (x - 5)^2 + (x - 6)^2) = \\ = 0,05 \cdot \frac{1}{6} (6x^2 - 42x + 91) \approx 0,46. \end{aligned}$$

Vaatame ka juhtu kui  $5 \leq x < 6$ , siis saab algne võrrand kuju:

$$\begin{aligned}
0,95 \cdot \frac{1}{6}(6-x)^2 + 0,05 \cdot \frac{1}{6}((x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2) = \\
= 0,95 \cdot \frac{1}{6}(36 - 12x + x^2) + 0,05 \cdot \frac{1}{6}(5x^2 - 30x + 55).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Leiame miinimumkoha:

$$\frac{2}{5}x - 2\frac{3}{20} = 0,$$

millest

$$x = 5,375.$$

Kui  $x = 5,375$ , siis funktsiooni (1.8) väärtus on ligikaudu 0,38. Seega on 0,95-ekspektiili väärtus  $e_{0,95}(X) = 5,375$ .

Vaatama ka 0,5-ekspektiili leidmist:

$$\begin{aligned}
e_{0,5}(X) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ 0,5 \cdot \frac{1}{6} \left( (\max(1-x, 0))^2 + (\max(2-x, 0))^2 + \dots + (\max(6-x, 0))^2 \right) \right. \\
\left. + 0,5 \cdot \frac{1}{6} \left( (\max(x-1, 0))^2 + (\max(x-2, 0))^2 + \dots + (\max(x-6, 0))^2 \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Lahendi leidmiseks peavad mõlemad summa liikmed olema võimalikult väikesed. Seega vaatame juhtu, kui  $x = 3$ ,

$$\begin{aligned}
0,5 \cdot \frac{1}{6}((4-x)^2 + (5-x)^2 + (6-x)^2) + 0,5 \cdot \frac{1}{6}((x-1)^2 + (x-2)^2) = \\
= 0,5 \cdot \frac{1}{6}(77 - 30x + 3x^2) + 0,5 \cdot \frac{1}{6}(2x^2 - 6x + 5) \approx 1,58.
\end{aligned}$$

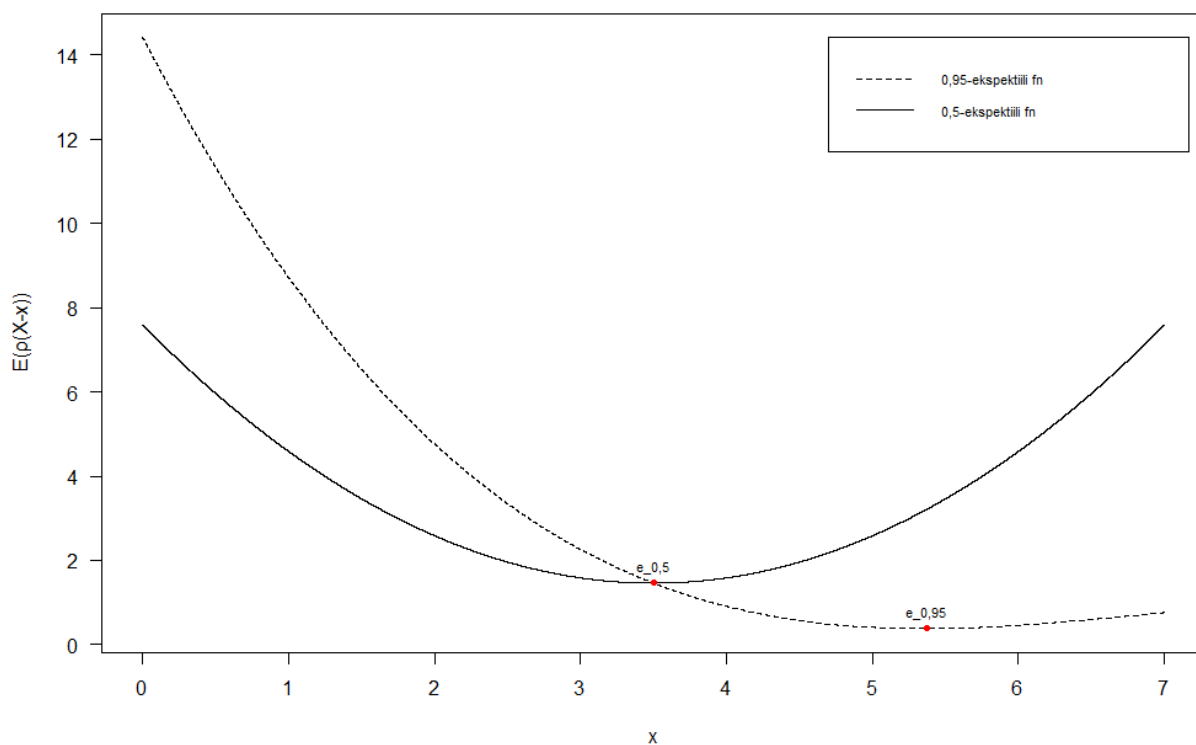
Vaatame juhtu, kui  $3 < x \leq 4$ :

$$\begin{aligned} & 0,5 \cdot \frac{1}{6}(4 - x + 5 - x + 6 - x) + 0,5 \cdot \frac{1}{6}(x - 1 + x - 2 + x - 3) = \\ & = 0,5 \cdot \frac{1}{6}(77 - 30x + 3x^2) + 0,5 \cdot \frac{1}{6}(3x^2 - 12x + 14), \end{aligned} \quad (1.9)$$

mille minimeerimisel saame miinimumkoha:

$$x = 3,5.$$

Kui  $x = 3,5$ , siis funktsiooni (1.9) väärtus on ligikaudu 1,46. Seega on 0,5-ekspektiili väärtus  $e_{0,5}(X) = 3,5$ .



**Joonis 1.3.** 0,95-ekspektiili ja 0,5-ekspektiili leidmise funktsioonid täringuviske korral

Nagu ka kvantiili korral, toome võrdluseks näite ekspektiilide leidmise kohta ka pideval juhul.

**Näide 1.6.** Olgu  $X$  standardse ühtlase jaotusega juhuslik suurus,  $X \sim U(0, 1)$ . Vastav 0,95-ekspektil on järgmise võrrandi lahend:

$$\begin{aligned}
 e_{0,95}(X) &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ 0,95 \int_0^1 (\max(t-x, 0))^2 \cdot 1 dt + 0,05 \int_0^1 (\max(x-t, 0))^2 \cdot 1 dt \right\} \\
 &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ 0,95 \int_x^1 (t-x)^2 dt + 0,05 \int_0^x (x-t)^2 dt \right\} \\
 &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ 0,95 \cdot \left( \frac{(t-x)^3}{3} \right) \Big|_x^1 - 0,05 \cdot \left( \frac{(x-t)^3}{3} \right) \Big|_0^x \right\} \\
 &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ 0,95 \cdot \frac{(1-x)^3}{3} + 0,05 \cdot \frac{(x)^3}{3} \right\} \\
 &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ -\frac{3x^3}{10} + 0,95x^2 - 0,95x + \frac{19}{60} \right\}
 \end{aligned}$$

Lahendame minimeerimisülesande:

$$-\frac{9x^2}{10} + 1,9x - 0,95 = 0,$$

mille lahend  $x \approx 0,813$  on standardse ühtlase jaotuse 0,95-ekspektil,  $e_{0,95}(X) = 0,813$ .

Leiame ka ühtlase jaotuse 0,5-ekspektiili:

$$\begin{aligned}
 e_{0,5}(X) &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ 0,5 \int_0^1 (\max(t-x, 0))^2 \cdot 1 dt + 0,5 \int_0^1 (\max(x-t, 0))^2 \cdot 1 dt \right\} \\
 &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ 0,5 \cdot \left( \frac{(t-x)^3}{3} \right) \Big|_x^1 - 0,5 \cdot \left( \frac{(x-t)^3}{3} \right) \Big|_0^x \right\} \\
 &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ 0,5x^2 - 0,5x + \frac{1}{6} \right\}.
 \end{aligned}$$

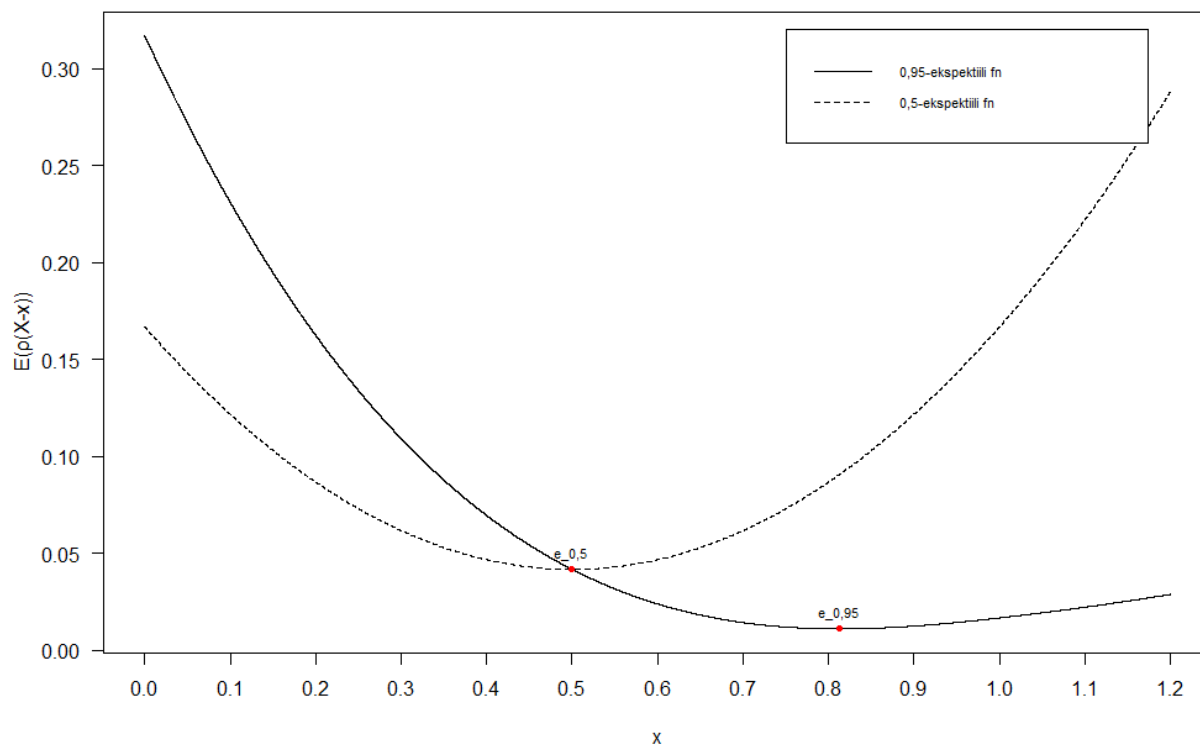
Leiame miinimumkoha:

$$x - 0,5 = 0$$

ehk

$$x = 0,5.$$

Standardse ühtlase jaotusega juhusliku suuruse  $X$  korral on 0,5-ekspektiil  $e_{0,5}(X) = 0,5$ , mis on antud juhul sama, mis 0,5-kvantiil.



**Joonis 1.4.** 0,95-ekspektiili ja 0,5-ekspektiili leidmise funktsioonid standardse ühtlase jaotuse korral

On teada, et kui  $\alpha = 0,5$ , siis kvantiil on sama, mis mediaan. Näitame aga, et  $\alpha = 0,5$  korral on juhusliku suuruse 0,5-ekspektiil võrdne juhusliku suuruse keskvärtusega.

**Lause 1.2.** Kui  $\alpha = 0,5$ , siis on vastav ekspektiil võrdne juhusliku suuruse keskvaärtusega.

**Tõestus.** Kui  $\alpha = 0,5$ , siis ekspektiili korral saab kaofunktsioon (1.3) kuju:

$$\rho(X - v) = \begin{cases} 0,5 \cdot (X - v)^2, & X - v \geq 0 \\ 0,5 \cdot (v - X)^2, & X - v < 0 \end{cases} = 0,5(X - v)^2.$$

Peame lahendama minimeerimisülesande

$$\min_v E[\rho(X - v)],$$

mis tähendab, et ekspektiili saame lahendina võrrandist  $E[\psi(X - v)] = 0$ , kus

$$\psi(X - v) = \rho'(X - v) = v - X.$$

Järelikult on juhusliku suuruse  $X$  0,5-ekspektiil võrdne juhusliku suuruse keskvaärtusega:

$$E[\psi(X - e_{0,5}(X))] = E(e_{0,5}(X) - X) = 0 \Rightarrow e_{0,5}(X) = EX.$$

■

Lisaks kõikidele üldistatud kvantiilidele kehtivatele omadustele on ekspektiilidel veel mõned kasulikud omadused.

**Lemma 1.3.** Olgu  $X, Y \in L^1$ , siis juhuslike suuruste  $X$  ja  $Y$  vastavatel  $\alpha$ -ekspektiilidel  $e_\alpha(X)$  ja  $e_\alpha(Y)$  on järgmised omadused:

- Ekspektiilid on tugevalt monotoonsed, st kui  $X \leq Y$  ja  $P(X < Y) > 0$ , siis  $e_\alpha(X) < e_\alpha(Y)$ .
- Kui  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ , siis  $e_\alpha(X + Y) \leq e_\alpha(X) + e_\alpha(Y)$ .
- $e_\alpha(X) = -e_{1-\alpha}(-X)$ .

### 1.3.1 Optimaalsuse kriteerium ekspektilide korral

Kui lisada  $X$ -i jaotusele või funktsioonidele  $\Phi_1$  ja  $\Phi_2$  sileduse nõue, siis saab esitada võrratustesüsteemi (1.7) ühe võrrandina. Vaatame seda omadust lähemalt ekspektilide korral.

**Näide 1.7.** Kui  $\Phi_1(x) = \Phi_2(x) = x^2$ , siis  $\Phi_1'(x) = \Phi_2'(x) = 2x$  ja võrratustesüsteem (1.7) saab kuju:

$$\begin{cases} \alpha E[\mathbf{1}_{\{X > e_\alpha\}} 2(\max(X - e_\alpha(X), 0))] \leq (1 - \alpha) E[\mathbf{1}_{\{X \leq e_\alpha\}} 2(\max(e_\alpha(X) - X, 0))] \\ \alpha E[\mathbf{1}_{\{X \geq e_\alpha\}} 2(\max(X - e_\alpha(X), 0))] \geq (1 - \alpha) E[\mathbf{1}_{\{X < e_\alpha\}} 2(\max(e_\alpha(X) - X, 0))] \end{cases}$$

Kuna  $\Phi_1'(0) = \Phi_2'(0) = 0$ , siis

$$2\alpha E[\mathbf{1}_{\{X > e_\alpha\}}(\max(X - e_\alpha(X), 0))] = 2\alpha E[\mathbf{1}_{\{X \geq e_\alpha\}}(\max(X - e_\alpha(X), 0))]$$

ja

$$2(1 - \alpha) E[\mathbf{1}_{\{X \leq e_\alpha\}}(\max(e_\alpha(X) - X, 0))] = 2(1 - \alpha) E[\mathbf{1}_{\{X < e_\alpha\}}(\max(e_\alpha(X) - X, 0))].$$

Järelikult saab ekspektilide korral esitada võrratustesüsteemi (1.7) kujul:

$$\alpha E[\max(X - e_\alpha(X), 0)] = (1 - \alpha) E[\max(e_\alpha(X) - X, 0)]. \quad (1.10)$$

Saab näidata, et saadud tulemus kehtib ka üldisemal juhul. (Bellini, Klar, Müller ja Gianin, 2013, lk 7)

**Lemma 1.4.** Olgu eeldused samad, mis lemmas 1.2. ning olgu  $\Phi_1$  ja  $\Phi_2$  diferentseeruvad funktsioonid. Kui  $\Phi_{1+}'(0) = \Phi_{2+}'(0) = 0$  või kui  $X$ -i jaotus on pidev, siis võrratustesüsteem (1.7) saab kuju:

$$\alpha E[\Phi_1'((X - x_\alpha^*)^+)] = (1 - \alpha) E[\Phi_2'((X - x_\alpha^*)^-)]. \quad (1.11)$$

## 2 Ekspektiilid konkreetsete jaotuse korral

Avaldame võrrandid ekspektiilide leidmiseks viie väga levinud jaotuse jaoks – eksponentjaotuse, log-normaalse jaotuse, Pareto jaotuse, gammajaotuse ja Weibulli jaotuse jaoks. Vaatame kõigepealt lähemalt eksponentjaotust.

### 2.1.1 Eksponentjaotus

Olgu  $X$  eksponentjaotusega juhuslik suurus parameetriga  $\lambda$ ,  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Eksponentjaotuse tihedusfunktsioon on kujul:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Kasutame ekspektiili leidmiseks optimaalsuse kriteeriumi (1.10). Kuna eksponentjaotus on pidev jaotus, siis leiame ekspektiilid järgmise võrrandi lahendina:

$$\alpha \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} (t - e_\alpha(X)) \lambda e^{-\lambda t} dt - (1 - \alpha) \int_0^{e_\alpha(X)} (e_\alpha(X) - t) \lambda e^{-\lambda t} dt = 0. \quad (2.1)$$

Avaldame esmalt (2.1) esimese integraali:

$$\begin{aligned} \alpha \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} (t - e_\alpha(X)) \lambda e^{-\lambda t} dt &= \alpha \lambda \left( \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} t e^{-\lambda t} dt - e_\alpha(X) \cdot \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} e^{-\lambda t} dt \right) \\ &= \alpha \left( \left( -t e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) \Big|_{e_\alpha(X)}^{\infty} - (-e_\alpha(X) \cdot e^{-\lambda t}) \Big|_{e_\alpha(X)}^{\infty} \right) \\ &= \alpha \left( e_\alpha(X) \cdot e^{-\lambda e_\alpha(X)} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda e_\alpha(X)} - e_\alpha(X) \cdot e^{-\lambda e_\alpha(X)} \right) \\ &= \frac{\alpha}{\lambda} e^{-\lambda e_\alpha(X)}. \end{aligned}$$

Vaatame nüüd ka võrrandi (2.1) teist integraali:

$$\begin{aligned}
 (1 - \alpha) \int_0^{e_\alpha(X)} (e_\alpha(X) - t)\lambda e^{-\lambda t} dt &= (1 - \alpha)\lambda \left( e_\alpha(X) \cdot \int_0^{e_\alpha(X)} e^{-\lambda t} dt - \int_0^{e_\alpha(X)} t e^{-\lambda t} dt \right) \\
 &= (1 - \alpha) \left( (-e_\alpha(X) \cdot e^{-\lambda t}) \Big|_0^{e_\alpha(X)} - \left( -t e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) \Big|_0^{e_\alpha(X)} \right) \\
 &= (1 - \alpha) \left( -e_\alpha(X) \cdot e^{-\lambda e_\alpha(X)} + e_\alpha(X) + e_\alpha(X) \cdot e^{-\lambda e_\alpha(X)} + \frac{e^{-\lambda e_\alpha(X)}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) \\
 &= (1 - \alpha) \left( e_\alpha(X) + \frac{e^{-\lambda e_\alpha(X)}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right).
 \end{aligned}$$

Kokkuvõttes

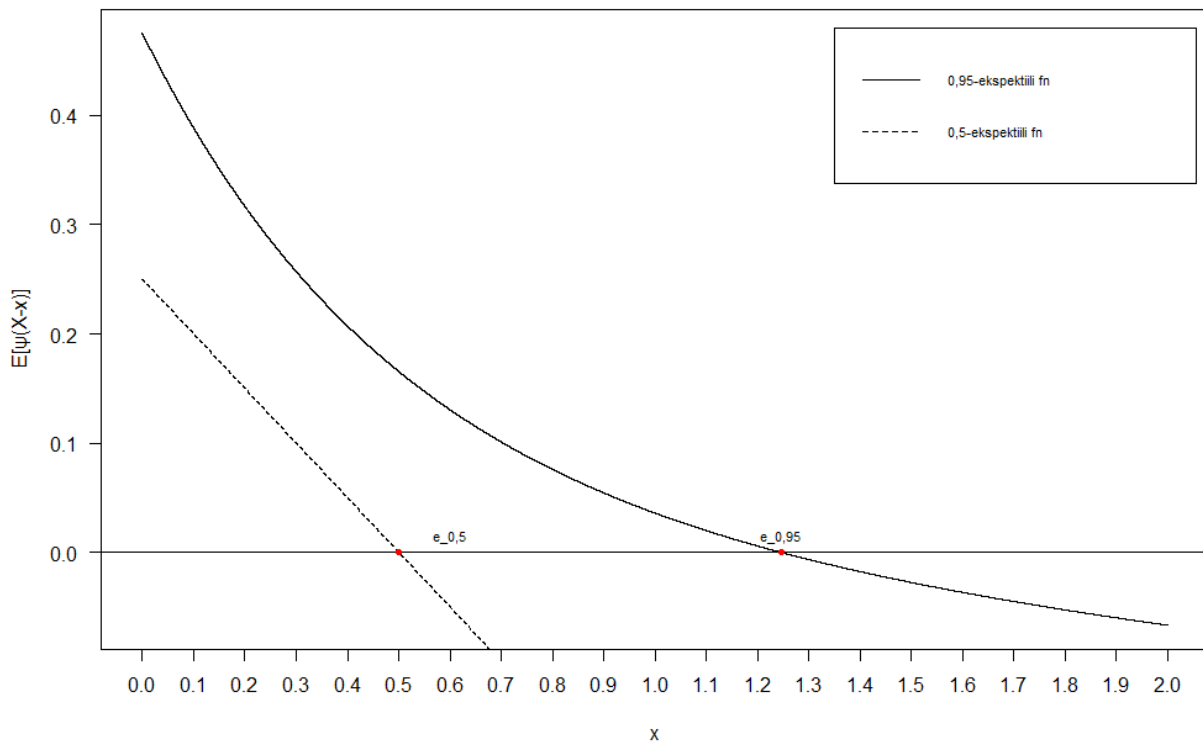
$$\frac{\alpha}{\lambda} e^{-\lambda e_\alpha(X)} - (1 - \alpha) \left( e_\alpha(X) + \frac{e^{-\lambda e_\alpha(X)}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) = 0.$$

Ekspontijaotuse korral saab ekspektiili leidmise võrrand küllaltki lihtsa kuju. Esitame saadud tulemuse lemmana.

**Lemma 2.1.** Ekspontijaotusega juhusliku suuruse  $X$ ,  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , ekspektiilid leitakse lahendina võrrandist:

$$(2\alpha - 1) \frac{e^{-\lambda e_\alpha(X)}}{\lambda} + (\alpha - 1) \left( e_\alpha(X) - \frac{1}{\lambda} \right) = 0.$$

Toome näiteks välja 0,5-ekspektiili ja 0,95-ekspektiili. Olgu juhuslik suurus  $X$  ekspontijaotusega, parameetriga  $\lambda = 2$ ,  $X \sim \text{Exp}(2)$ . Sel juhul on juhusliku suuruse  $X$  0,5-ekspektiil  $e_{0,5}(X) = 0,5$  ja 0,95-ekspektiil  $e_{0,95}(X) = 1,245$ .



**Joonis 2.1.** Eksponentjaotusega juhusliku suuruse  $X$ ,  $X \sim \text{Exp}(2)$ , 0,95-ekspektiili ja 0,5-ekspektiili leidmise funktsioonid

### 2.1.2 Log-normaalne jaotus

Järgnevalt uurime, kuidas avalduvad ekspektiilid log-normaalse jaotusega juhusliku suuruse korral. Olgu juhuslik suurus  $Y$  normaaljaotusega,  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ , st  $EY = \mu$  ja  $DY = \sigma^2$ . Olgu  $X = e^Y$ , siis juhuslik suurus  $X$  on log-normaalne jaotusega,  $X \sim \ln N(\mu, \sigma^2)$ , kus parameetrid on  $\mu = E(\ln X)$  ja  $\sigma^2 = D(\ln X)$ .

Log-normaalne jaotuse tihedusfunktsioon on kujul:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Optimaalsuse kriteerium (1.10) on log-normaalse jaotusega juhusliku suuruse  $X$  korral kujul:

$$\alpha \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} (t - e_\alpha(X)) \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt - (1 - \alpha) \int_0^{e_\alpha(X)} (e_\alpha(X) - t) \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt = 0 \quad (2.2)$$

Kasutame integraalide leidmiseks magistritöös Žegulova (2009) kirjeldatud tehnikat, kus integraalialused funktsioonid on viidud lihtsamale kujule:

$$\begin{aligned} t \cdot \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} &= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \cdot \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \sigma^2 - \mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \cdot \frac{1}{t} \cdot f_Y(\ln t - \sigma^2) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} F'_Y(\ln t - \sigma^2) \end{aligned}$$

ja

$$e_\alpha(X) \cdot \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} = e_\alpha(X) \cdot \frac{1}{t} \cdot f_Y(\ln t) = e_\alpha(X) \cdot F'_Y(\ln t).$$

Kasutades lihtsustatud funktsioone, avaldame võrrandi (2.2) esimese integraali

$$\begin{aligned} \alpha \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} (t - e_\alpha(X)) \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt &= \\ &= \alpha \left( \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} t \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt - e_\alpha(X) \cdot \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt \right) \\ &= \alpha \left( \left( e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \cdot F_Y(\ln t - \sigma^2) \right) \Big|_{e_\alpha(X)}^{\infty} - e_\alpha(X) \cdot (F_Y(\ln t)) \Big|_{e_\alpha(X)}^{\infty} \right) \\ &= \alpha \left( e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \left( 1 - \phi \left( \frac{\ln e_\alpha(X) - \sigma^2 - \mu}{\sigma} \right) \right) - e_\alpha(X) \left( 1 - \phi \left( \frac{\ln e_\alpha(X) - \mu}{\sigma} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

ja ka võrrandis (2.2) oleva teise integraali

$$\begin{aligned}
(1 - \alpha) \int_0^{e_\alpha(X)} (e_\alpha(X) - t) \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt &= \\
&= (1 - \alpha) \left( \int_0^{e_\alpha(X)} e_\alpha(X) \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt - \int_0^{e_\alpha(X)} t \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt \right) \\
&= (1 - \alpha) \left( e_\alpha(X) \cdot (F_Y(\ln t)) \Big|_0^{e_\alpha(X)} - \left( e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \cdot F_Y(\ln t - \sigma^2) \right) \Big|_0^{e_\alpha(X)} \right) \\
&= (1 - \alpha) \left( e_\alpha(X) \cdot \phi\left(\frac{\ln e_\alpha(X) - \mu}{\sigma}\right) - e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \cdot \phi\left(\frac{\ln e_\alpha(X) - \sigma^2 - \mu}{\sigma}\right) \right).
\end{aligned}$$

Kokkuvõttes

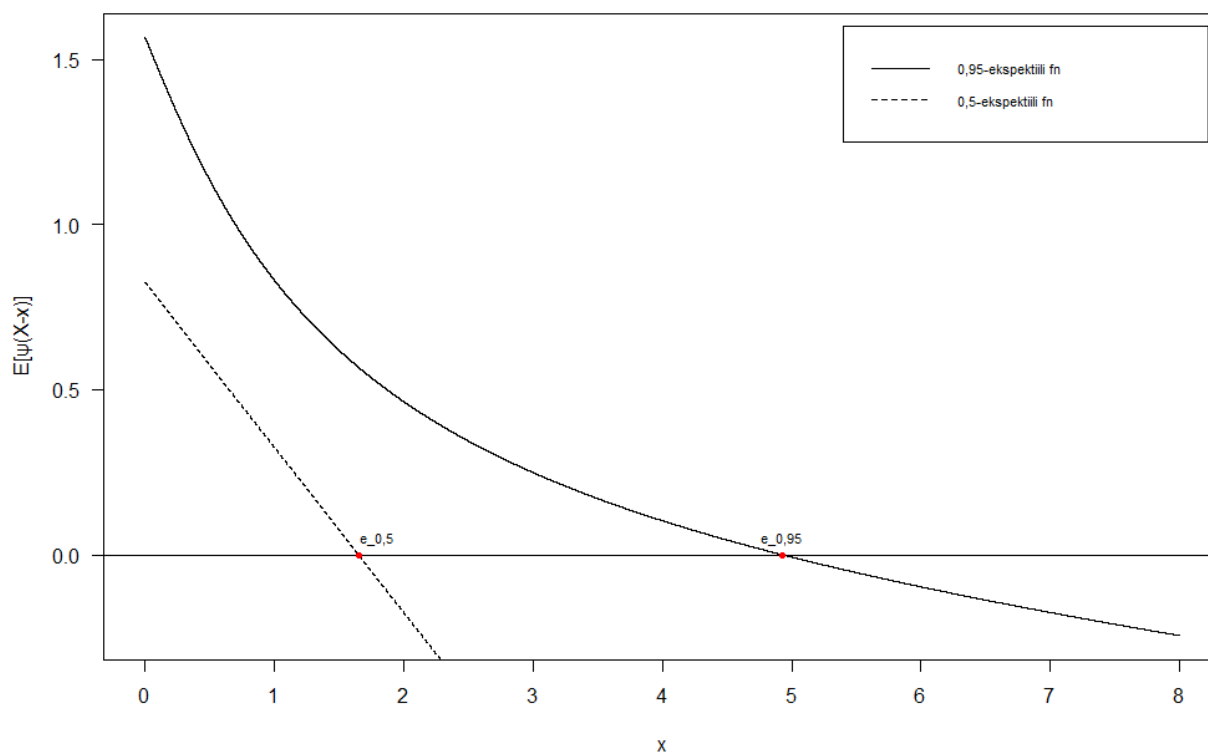
$$\begin{aligned}
&\alpha \left( e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \left( 1 - \phi\left(\frac{\ln e_\alpha(X) - \sigma^2 - \mu}{\sigma}\right) \right) - e_\alpha(X) \left( 1 - \phi\left(\frac{\ln e_\alpha(X) - \mu}{\sigma}\right) \right) \right) \\
&\quad - (1 - \alpha) \left( e_\alpha(X) \cdot \phi\left(\frac{\ln e_\alpha(X) - \mu}{\sigma}\right) - e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \cdot \phi\left(\frac{\ln e_\alpha(X) - \sigma^2 - \mu}{\sigma}\right) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Seega log-normaalse jaotuse korral on ekspektili leidmise kriteerium veidi keerukamal kujul kui eksponentjaotuse korral.

**Lemma 2.2.** Log-normaalse jaotusega juhusliku suuruse  $X$ ,  $X \sim \ln N(\mu, \sigma^2)$ , ekspektilid leitakse lahendina võrrandist:

$$(1 - 2\alpha) \cdot e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \cdot \phi\left(\frac{\ln e_\alpha(X) - \sigma^2 - \mu}{\sigma}\right) + (2\alpha - 1) \cdot e_\alpha(X) \cdot \phi\left(\frac{\ln e_\alpha(X) - \mu}{\sigma}\right) + \alpha \left( e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} - e_\alpha(X) \right) = 0.$$

Olgu  $X$  log-normaalse jaotusega juhuslik suurus. Vaatame jaotust, kus parameetrid on  $\mu = 0$  ja  $\sigma^2 = 1$ ,  $X \sim \ln N(0, 1)$ . Sel juhul on juhusliku suuruse  $X$  0,5-ekspektil  $e_{0,5}(X) = 1,649$  ja 0,95-ekspektil  $e_{0,95}(X) = 4,927$ .



**Joonis 2.2.** Log-normaalse jaotusega juhusliku suuruse  $X$ ,  $X \sim \ln N(0,1)$ , 0,95-ekspektiili ja 0,5-ekspektiili leidmise funktsioonid

### 2.1.3 Pareto jaotus

Olgu nüüd  $X$  Pareto jaotusega juhuslik suurus parameetritega  $\gamma > 0, \beta > 0$ ,  $X \sim Pa(\gamma, \beta)$ . Pareto jaotuse tihedusfunktsioon on kujul:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\gamma\beta^\gamma}{(\beta+x)^{\gamma+1}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Ekspektiili leidmise kriteerium (1.10) on Pareto jaotuse korral kujul:

$$\alpha \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} (t - e_\alpha(X)) \frac{\gamma\beta^\gamma}{(\beta+t)^{\gamma+1}} dt - (1-\alpha) \int_0^{e_\alpha(X)} (e_\alpha(X) - t) \frac{\gamma\beta^\gamma}{(\beta+t)^{\gamma+1}} dt = 0. \quad (2.3)$$

Avaldame võrrandist (2.3) esimese integraali:

$$\begin{aligned} \alpha \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} (t - e_\alpha(X)) \frac{\gamma \beta^\gamma}{(\beta + t)^{\gamma+1}} dt &= \alpha \left( \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} \frac{t \gamma \beta^\gamma}{(\beta + t)^\gamma} dt - \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} e_\alpha(X) \frac{\gamma \beta^\gamma}{(\beta + t)^{\gamma+1}} dt \right) \\ &= \alpha \left( \left( -\frac{(\beta + t)^{-\gamma} (\gamma t + \beta) \beta^\gamma}{\gamma - 1} \right) \Big|_{e_\alpha(X)}^{\infty} - (-e_\alpha(X) \cdot \beta^\gamma (\beta + t)^{-\gamma}) \Big|_{e_\alpha(X)}^{\infty} \right) \\ &= \alpha \frac{(\beta + e_\alpha(X))^{-\gamma} (\gamma e_\alpha(X) + \beta) \beta^\gamma}{\gamma - 1} - \alpha \cdot e_\alpha(X) \beta^\gamma (\beta + e_\alpha(X))^{-\gamma} \end{aligned}$$

ja teise integraali:

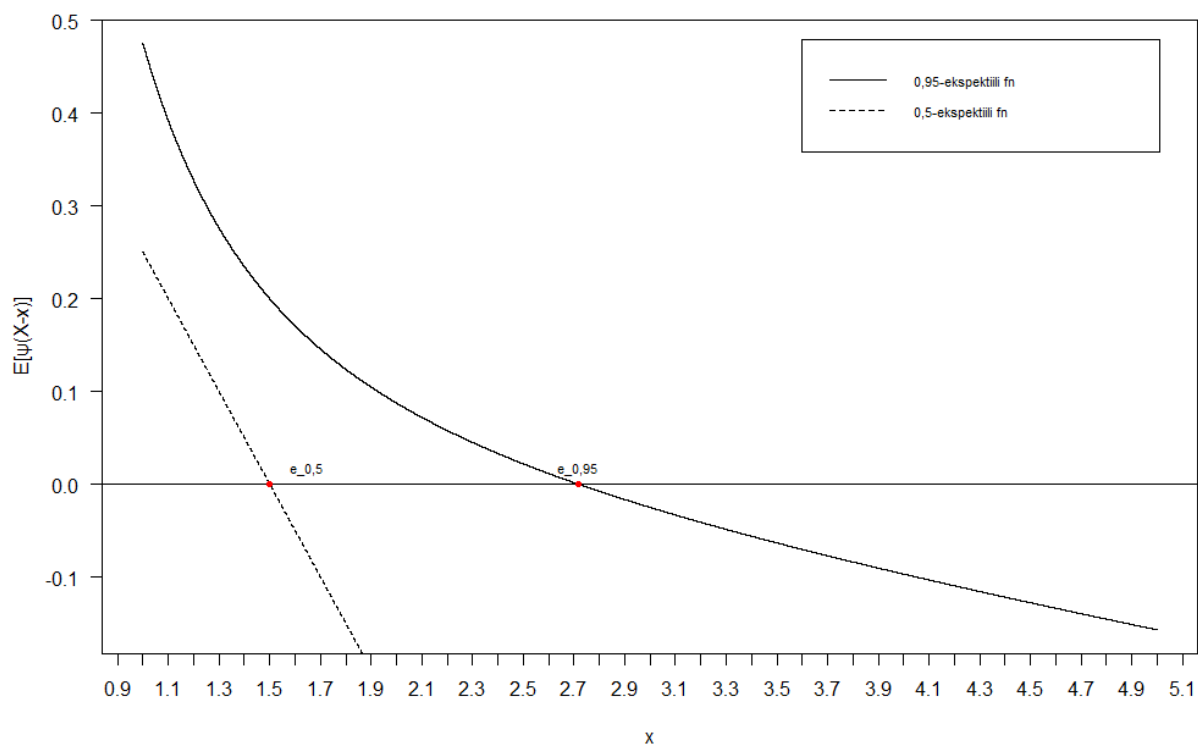
$$\begin{aligned} (1 - \alpha) \int_0^{e_\alpha(X)} (e_\alpha(X) - t) \frac{\gamma \beta^\gamma}{(\beta + t)^{\gamma+1}} dt &= \\ &= (1 - \alpha) \left( (-e_\alpha(X) \cdot \beta^\gamma (\beta + t)^{-\gamma}) \Big|_0^{e_\alpha(X)} - \left( -\frac{(\beta + t)^{-\gamma} (\gamma t + \beta) \beta^\gamma}{\gamma - 1} \right) \Big|_0^{e_\alpha(X)} \right) \\ &= (1 - \alpha) \left( -e_\alpha(X) \beta^\gamma (\beta + e_\alpha(X))^{-\gamma} + e_\alpha(X) + \frac{(\beta + e_\alpha(X))^{-\gamma} (\gamma e_\alpha(X) + \beta) \beta^\gamma}{\gamma - 1} - \frac{\beta}{\gamma - 1} \right). \end{aligned}$$

Kokkuvõttes, esitame tulemuse lemmana.

**Lemma 2.3.** Pareto jaotusega juhusliku suuruse  $X$ ,  $X \sim Pa(\gamma, \beta)$ , ekspektiilid leitakse lahendina võrrandist:

$$(2\alpha - 1) \frac{(\beta + e_\alpha(X))^{-\gamma} (\gamma e_\alpha(X) + \beta) \beta^\gamma}{\gamma - 1} + (1 - 2\alpha) e_\alpha(X) \beta^\gamma (\beta + e_\alpha(X))^{-\gamma} + (\alpha - 1) \left( e_\alpha(X) - \frac{\beta}{\gamma - 1} \right) = 0.$$

Vaatame näiteks juhtu, kui juhuslik suurus  $X$  on Pareto jaotusega, ( $X \sim Pa(3, 1)$ ). Sel juhul on juhusliku suuruse  $X$  0,5-ekspektiil  $e_{0,5}(X) = 1,5$  ja 0,95-ekspektiil  $e_{0,95}(X) = 2,718$ .



**Joonis 2.3.** Pareto jaotusega juhusliku suuruse  $X \sim \text{Pa}(3, 1)$  0,95-ekspektiili ja 0,5-ekspektiili leidmise funktsioonid

### 2.1.4 Gammajaotus

Olgu  $X$  gammajaotusega juhuslik suurus kujuparameetriga  $\gamma > 0$  ja pöördskaala parameetriga  $\beta = \frac{1}{\theta} > 0$ , kus  $\theta$  on skaalaparameeter,  $X \sim \Gamma(\gamma, \beta)$ . Gammajaotuse tihedusfunktsioon on sel juhul kujul:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} e^{-\beta x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Gammajaotuse ekspektiilid saame lahendina järgmisest võrrandist:

$$\alpha \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} (t - e_\alpha(X)) \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1} e^{-\beta t} dt - (1 - \alpha) \int_0^{e_\alpha(X)} (e_\alpha(X) - t) \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1} e^{-\beta t} dt = 0. \quad (2.4)$$

Teame, et gammafunktsioon defineeritakse integraaliga

$$\Gamma(\gamma) := \int_0^{\infty} t^{\gamma-1} e^{-t} dt$$

ning ülemine mittetäielik gammafunktsioon integraaliga

$$\Gamma(\gamma, x) := \int_x^{\infty} t^{\gamma-1} e^{-t} dt.$$

Sellest tulenevalt saame, et alumine mittetäielik integraal on võrdne gamma funktsiooni ja ülemise mittetäieliku gamma funktsiooni vahega:

$$\Gamma(\gamma) - \Gamma(\gamma, x) = \int_0^x t^{\gamma-1} e^{-t} dt.$$

Avaldame võrrandis (2.4) integraali, mis on korrutatud  $\alpha$ -ga:

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} (t - e_\alpha(X)) \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1} e^{-\beta t} dt = \\ & = \alpha \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \left( \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} t^\gamma e^{-\beta t} dt - \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} e_\alpha(X) t^{\gamma-1} e^{-\beta t} dt \right) \\ & = \alpha \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} (\beta^{-\gamma-1} \cdot \Gamma(\gamma + 1, \beta \cdot e_\alpha(X)) - e_\alpha(X) \cdot \beta^{-\gamma} \Gamma(\gamma, \beta \cdot e_\alpha(X))) \\ & = \alpha \frac{\Gamma(\gamma + 1, \beta \cdot e_\alpha(X))}{\beta \cdot \Gamma(\gamma)} - \alpha \frac{e_\alpha(X) \cdot \Gamma(\gamma, \beta \cdot e_\alpha(X))}{\Gamma(\gamma)}. \end{aligned}$$

Vaatame nüüd ka teist integraali:

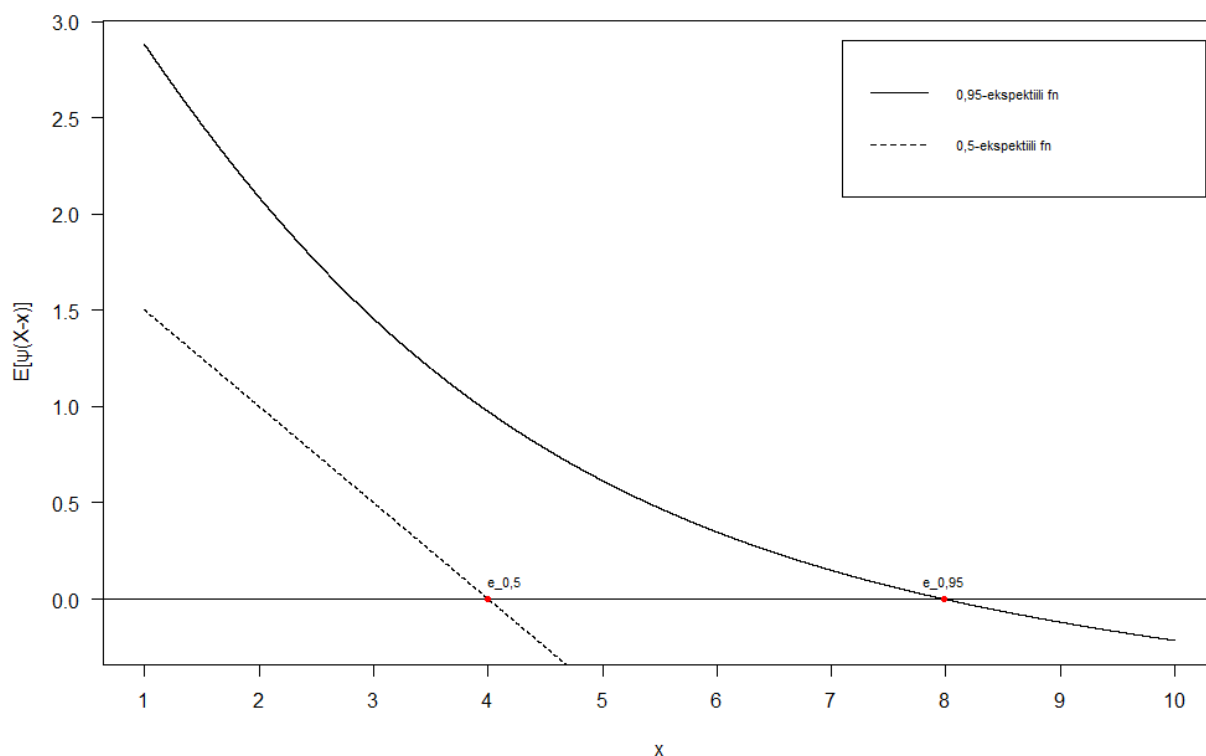
$$\begin{aligned}
(1 - \alpha) \int_0^{e_\alpha(X)} (e_\alpha(X) - t) \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1} e^{-\beta t} dt &= \\
&= (1 - \alpha) \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \left( \int_0^{e_\alpha(X)} e_\alpha(X) \cdot t^{\gamma-1} e^{-\beta t} dt - \int_0^{e_\alpha(X)} t^\gamma e^{-\beta t} dt \right) \\
&= (1 - \alpha) \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} (\beta^{-\gamma} e_\alpha(X) [\Gamma(\gamma) - \Gamma(\gamma, \beta \cdot e_\alpha(X))] \\
&\quad - \beta^{-\gamma-1} [\Gamma(\gamma + 1) - \Gamma(\gamma + 1, \beta \cdot e_\alpha(X))]) \\
&= (1 - \alpha) \left( e_\alpha(X) - \frac{e_\alpha(X) \cdot \Gamma(\gamma, \beta \cdot e_\alpha(X))}{\Gamma(\gamma)} + \frac{\Gamma(\gamma + 1, \beta \cdot e_\alpha(X))}{\beta \cdot \Gamma(\gamma)} - \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\beta \cdot \Gamma(\gamma)} \right)
\end{aligned}$$

Teades, et  $\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma)} = \gamma$ , saame gammajaotuse ekspektili leidmise võrrandi esitada lemmana.

**Lemma 2.4.** Gammajaotusega juhusliku suuruse  $X$ ,  $X \sim \Gamma(\gamma, \beta)$ , ekspektilid leitakse lahendina võrrandist:

$$(1 - 2\alpha) \frac{e_\alpha(X) \cdot \Gamma(\gamma, \beta \cdot e_\alpha(X))}{\Gamma(\gamma)} + (2\alpha - 1) \frac{\Gamma(\gamma + 1, \beta \cdot e_\alpha(X))}{\beta \cdot \Gamma(\gamma)} + (\alpha - 1) \left( e_\alpha(X) - \frac{\gamma}{\beta} \right) = 0.$$

Seega kui juhuslik suurus  $X$  on gammajaotusega, mille parameetrid on näiteks  $\gamma = 2$  ja  $\beta = 0,5$ , ( $X \sim \Gamma(2; 0,5)$ ), siis selle juhusliku suuruse  $X$  0,5-ekspektil  $e_{0,5}(X) = 4$  ja 0,95-ekspektil  $e_{0,95}(X) = 7,983$ .



**Joonis 2.4.** Gammajaotusega juhusliku suuruse  $X$ ,  $X \sim \Gamma(2; 0,5)$  0,95-ekspektiili ja 0,5-ekspektiili leidmise funktsioonid

### 2.1.5 Weibulli jaotus

Olgu  $X$  Weibulli jaotusega juhuslik suurus kujuparameetriga  $k > 0$  ja skaalaparameetriga  $\lambda > 0$ ,  $X \sim W(k, \lambda)$ . Weibulli jaotuse tihedusfunktsioon on kujul:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Ekspektiilid saame lahendina võrrandist (1.10), mis on Weibulli jaotuse korral kujul:

$$\alpha \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} (t - e_\alpha(X)) \frac{k}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} dt - (1 - \alpha) \int_0^{e_\alpha(X)} (e_\alpha(X) - t) \frac{k}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} dt = 0. \quad (2.5)$$

Leiame võrrandis (2.5) esimese integraali:

$$\begin{aligned}
\alpha \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} (t - e_\alpha(X)) \frac{k}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} dt &= \\
&= \alpha \left( \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} k \left(\frac{t}{\lambda}\right)^k e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} dt - \int_{e_\alpha(X)}^{\infty} e_\alpha(X) \frac{k}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} dt \right) \\
&= \alpha \left( -\lambda \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}, \left(\frac{t}{\lambda}\right)^k\right) \Big|_{e_\alpha(X)}^{\infty} - \left(-e_\alpha(X) \cdot e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k}\right) \Big|_{e_\alpha(X)}^{\infty} \right) \\
&= \alpha \lambda \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}, \left(\frac{e_\alpha(X)}{\lambda}\right)^k\right) - \alpha e_\alpha(X) \cdot e^{-\left(\frac{e_\alpha(X)}{\lambda}\right)^k}.
\end{aligned}$$

Lihtsustame ka teist integraali:

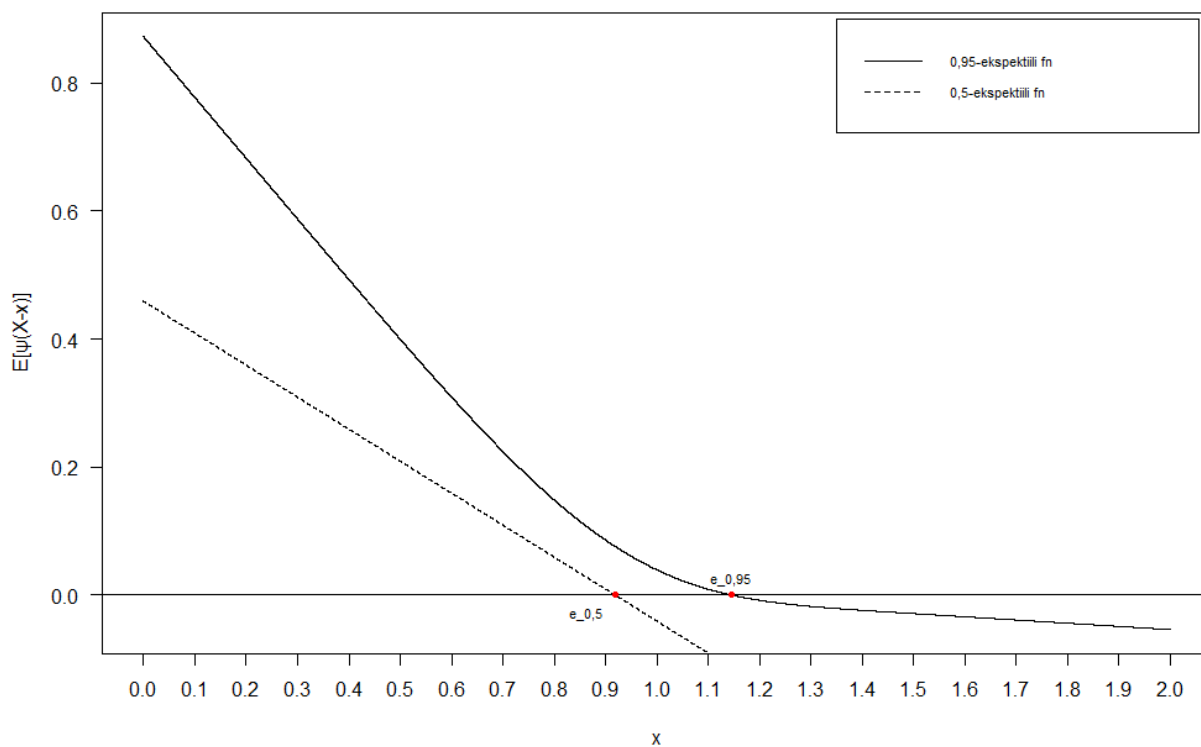
$$\begin{aligned}
(1 - \alpha) \int_0^{e_\alpha(X)} (e_\alpha(X) - t) \frac{k}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} dt &= \\
&= (1 - \alpha) \left( \int_0^{e_\alpha(X)} e_\alpha(X) \frac{k}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} dt - \int_0^{e_\alpha(X)} k \left(\frac{t}{\lambda}\right)^k e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} dt \right) \\
&= (1 - \alpha) \left( -e_\alpha(X) \cdot e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} \Big|_0^{e_\alpha(X)} - \left(-\lambda \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}, \left(\frac{t}{\lambda}\right)^k\right)\right) \Big|_0^{e_\alpha(X)} \right) \\
&= (1 - \alpha) \left( -e_\alpha(X) \cdot e^{-\left(\frac{e_\alpha(X)}{\lambda}\right)^k} + e_\alpha(X) + \lambda \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}, \left(\frac{e_\alpha(X)}{\lambda}\right)^k\right) - \lambda \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right)
\end{aligned}$$

Esitame tulemuse lemmana.

**Lemma 2.5.** Weibulli jaotusega juhusliku suuruse  $X$ ,  $X \sim W(k, \lambda)$ , ekspektiliid leitakse lahendina võrrandist:

$$(2\alpha - 1)\lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}, \left(\frac{e_\alpha(X)}{\lambda}\right)^k\right) + (1 - 2\alpha)e_\alpha(X) \cdot e^{-\left(\frac{e_\alpha(X)}{\lambda}\right)^k} + (\alpha - 1) \left(e_\alpha(X) - \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = 0.$$

Näiteks Weibulli jaotusega juhusliku suuruse  $X$ ,  $X \sim W(5, 1)$ , 0,5-ekspektiil on  $e_{0,5}(X) = 0,918$  ja 0,95-ekspektiil on  $e_{0,95}(X) = 1,144$ .



**Joonis 2.5.** Weibulli jaotusega juhusliku suuruse  $X$ ,  $X \sim W(5, 1)$ , 0,95-ekspektiili ja 0,5-ekspektiili leidmise funktsioonid

### 3 Riskimõõdud

Antud peatükis anname lühikese ülevaate riskist ja erinevatest võimalustest riski hindamiseks. Pikemalt vaatame kahjujaotusel põhinevaid riskihindamismeetodeid – *VaR*, keskmine suurkahju ja ekspektiil. Lisaks defineeritakse koherentsus ja vaadatakse, millised nimetatud riskimõõdud on koherentsed ja millised mitte. Põgusalt tutvustatakse ka kasulikkusfunktsiooni.

Riski ja riskihindamise meetodite tutvustamisel on tuginetud allikatele McNeil, Frey, Embrechts (2005) ja Artzner, Delbaen, Eber, Heath (1998).

#### 3.1 Risk ja riski hindamine

Riskiks nimetatakse negatiivse sündmuse toimumise võimalikkust. Ettevõtted on avatud erinevatele riskidele näiteks äririskile, finantsriskile, operatsiooniriskile jne. Mõnede ohufaktorite realiseerumise tagajärjed on väga väikesed või ebaolulised või on sündmuse toimumine nii väikese tõenäosusega, et nendele riskidele tähelepanu ei pöörata. Teisi riske on aga vaja vältida nii palju kui võimalik või vähendada tekkivat kahju minimaalseks. Palju on ka selliseid ettevõtteid, mille suhtumine riski ei ole kaitsev, sest riski võtmisega saab teenida kasumit. Näiteks pangad või kindlustusseltsid võtavad koguaeg aktiivselt riske. Samamoodi võtab investeringut tegev ettevõtte omale teadlikult suure riski.

Riskimõõduga saab mõõta negatiivse sündmuse tõsidust, sündmuse toimumise tõenäosust või kombinatsiooni mõlemast. Ettevõtte optimeerib võetavat riski ning selleks ongi vaja hinnata nii kahju toimumise tõenäosust kui ka kahju suurust. Seeläbi saab ettevõtte riskimõõde kasutades piirata erinevate riskide suurusi või hajutada neid. Finantssektoris on riskijuhtimise üks põhilisemaid eesmärke määrata, kui suur peab olema kapitali hulk, et katta ootamatuid kahjusid. Kindlustuses aga peavad kindlustuspreemiad katma kindlustusseltsi võimalike kahjude riski.

Riski hindamisel on erinevaid lähenemisi, mida Raukas (2008) välja toob:

- Nimiväärtuse meetod, mille korral näiteks portfelli risk saadakse sinna kuuluvate väärtpaberite nimiväärtuste summana. Seda meetodit kasutatakse ka Baseli komitee reeglite standardiseeritud lähenemises.
- Faktor-tundlik meetod, mille korral muudetakse konkreetset riskifaktorit ning vaadatakse kui palju muutus näiteks portfelli väärtus. Võlakirjade portfelli kestus on üks olulisimaid faktor-tundlikke riskimõõde.
- Kahjujaotusel põhinevad riskimõõded, mida kasutatakse põhiliselt siis, kui riskijuhtimise keskne huviobjekt on kahjum.
- Stsenariumil põhinev meetod, mille korral muudetakse erinevaid riskifaktoreid ning mõõdetakse portfelli kahjumit erinevate stsenaariumite korral.

Antud töös keskendutakse kahjujaotusel põhinevatele riskimõõtudele, milleks on *VaR* (ingl *Value at Risk*), keskmine suurkahju *ES* (ingl *expected shortfall*) ja võrreldakse neid ekspektiividega.

### 3.2 Kasulikkusfunktsioon

Riskiga toimetulekuks on võimalik ka riski tagajärjed kanda üle kolmandale osapoolle. Tavaliselt on selleks kindlustusfirma, mis võtab riski realiseerudes majandusliku kahjukatmise enda peale. Küsimus seisneb aga selles, kui palju on üks osapool nõus teisele maksma, et võimalikku kahju ülekanda ehk kui kasulikuks hindab osapool riski ülekandmise tehingut. Kindlustuses on kasulikkust võimalik hinnata kasulikkusfunktsiooniga (ingl *utility function*)  $u(\cdot)$ , mis seab kindlustuspreemia  $H$  vastavusse kindlustatava riski suurusega  $X$ .

Kuigi isiku kasulikkusfunktsiooni ei ole võimalik hinnata täpselt, siis on sellel funktsioonil mõned loogiliselt mõistetavad omadused. Kasulikkusfunktsioon peab olema mittekahanev funktsioon, sest kallima vara korral ollakse valmis riski ülekandmiseks ka rohkem maksma. Lisaks eelistatakse tavaliselt fikseeritud kahjusummat sama keskväertusega juhuslikule kahjusummale. Järelikult võib eeldada, et kahjufunktsioon  $u(x)$  on diferentseeruv, kasvav ( $u'(x) > 0$ ) ja nõgus funktsioon, mis tähendab, et kui vara hinna  $x$  väärtus kasvab, siis suhteline raha väärtus väheneb ( $u''(x) < 0$ ). (Käärik, 2013)

Kasulikkusfunktsiooni saab arvestada ka kindlustuspreemiate leidmisel. Näiteks nullkasu printsiip nõuab, et kasulikkus  $u(0)$  pärast riski ülekandmist kindlustuspreemia  $H$  vastu oleks võrdne keskmise kasulikkusega  $E[u(H - X)]$  enne riski ülekandmist. Seega kui  $u(0) = 0$ , siis on nullkasu printsiibi põhjal leitud preemia antud võrrandiga (Pfeifer, Heidergott, 1997):

$$E[u(H - X)] = 0.$$

Vaatame nüüd üldistatud kvantiile. Olgu  $\Phi_1, \Phi_2: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  kumerad, rangelt kasvavad funktsioonid, mis rahuldavad tingimust (1.4). Lisaks olgu  $\Phi_1$  ja  $\Phi_2$  diferentseeruvad funktsioonid ning  $\Phi_{1+}'(0) = \Phi_{2+}'(0) = 0$  või olgu  $X$ -i jaotus pidev. Olgu

$$\psi(t) := \begin{cases} \alpha \cdot \Phi_1'(t), & t \geq 0 \\ -(1 - \alpha) \cdot \Phi_2'(-t), & t < 0 \end{cases}$$

siis  $\psi(0) = 0$  ja  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on rangelt kasvav funktsioon. Sel juhul sobib üldistatud kvantiil nullkasu printsiibi erijuhuks:

$$E[\psi(X - x_\alpha^*)] = 0,$$

kus  $x_\alpha^*$  on võrrandi unikaalne lahend (Bellini, Klar, Müller, Gianin, 2013). Märgime, et kuigi üldistatud kvantiilide minimiseerimisülesanne on samal kujul kui preemia leidmine kasulikkuse printsiibi korral, ei pruugi üldistatud kvantiilide korral vastav funktsioon olla nõgus (näiteks ekspektiilide korral, kui  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ , siis  $\psi$  on kumer funktsioon).

### 3.3 Kahjujaotusel põhinevad riskimõõdud

Kahjujaotusel põhinevad riskimõõdud on näitajad, mis kirjeldavad riski varem realiseerunud kahjude jaotuse põhjal. Kahjujaotustel baseeruvatel riskimõõtetel on mitmeid eeliseid. Näiteks saab kahjujaotusi võrrelda üle portfelli ning kui jaotus on korrektselt hinnatud, siis kajastab see diversifitseerimise ja positsioonide sidumise efekti. Samas leidub ka negatiivseid külgi – jaotust on väga raske täpselt hinnata ning hinnang saab põhineda ainult mineviku andmetel. Kui muutub majanduslik olukord või muudetakse seadusi, siis mineviku andmeid

saab kasutada ainult piiratud juhtudel. Sellegi poolest ei anna need probleemid alust kahjujaotust mitte kasutada.

Järgnevalt toome  $VaR$  ja keskmise suurkahju definitsioonid pidevate jaotuste korral ning nende sisulise tähenduse.

**Definitsioon 3.1.**  $VaR$  usaldusnivool  $\alpha \in (0,1)$  on vähim  $x$ , mille korral  $X > x$ , nii et see pole suurem kui  $(1 - \alpha)$  ehk

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R}: P(X > x) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{x \in \mathbb{R}: \alpha \leq F_X(x)\}, \quad (3.1)$$

kus  $F_X$  on juhusliku suuruse  $X$  jaotusfunktsioon.

Kuna vaatame pidevaid ja rangelt kasvavaid funktsioone, siis saame  $VaR_\alpha(X)$  esitada pöördfunktsioonina:

$$VaR_\alpha(X) = F^{-1}(\alpha).$$

Näeme, et  $VaR$  on juhusliku suuruse  $X$  kvantiil ja sisuliselt tähendab, et teatud etteantud tõenäosusega on  $X$ -i väärtus väiksem kui  $VaR$ -i väärtus. Näiteks kui kahjude  $VaR = 1000$  eurot usaldusnivool  $\alpha = 0,95$ , siis see tähendab, et 95% kahjudest on väiksemad või võrdsed 1000 euroga.

$VaR$  on intuiitiivne ning seetõttu kergesti arusaadav ka inimestele, kellel ei ole matemaatilist tausta. Lisaks on andmeid küllaltki lihtne koguda ja analüüsida.  $VaR$ -i suureks puuduseks on aga see, et see võtab arvesse ainult ekstreemsete väärtuste suhtelist sagedust (esinemise tõenäosust) ja ei arvesta võimalike väärtuse suurust juhul, kui see tõenäosus realiseerub. Seeläbi võib juhtuda, et riski hinnatakse liiga liberaalselt.

**Definitsioon 3.2.** Olgu juhuslik suurus  $X$  jaotusfunktsiooniga  $F_X$  ja olgu  $E(|X|) < \infty$ .  $X$ -i keskmine suurkahju usaldusnivool  $\alpha \in (0,1)$  on pideva jaotuse korral defineeritud järgnevalt:

$$ES_\alpha = E[X | X \geq VaR_\alpha(X)]$$

kus  $VaR_\alpha(X)$  on defineeritud valemiga (3.1).

Näeme, et erinevalt  $VaR$ -ist, mille väärtus saadakse fikseeritud usaldusnivool  $\alpha$ , saadakse keskmine suurkahju kõigi  $VaR$ -i ületavate väärtuste keskvärtusena. Sisuliselt näitab  $ES_\alpha$  kui suur on keskmine kahju, juhul kui  $VaR$  ületatakse. Näiteks kui jällegi kahjude  $VaR = 1000$  eurot, siis  $ES$  on 1000 eurost suuremate kahjude keskmine väärtus.

On selge, et ka  $ES_\alpha$  sõltub  $X$ -i jaotusest ning  $ES_\alpha \geq VaR_\alpha(X)$ . Keskmine suurkahju võtab arvesse ekstreemsete väärtuste suurust, samas võib olla analüüsi tegemine raskendatud, kuna harva esinevate sündmuste korral on vajalikke andmeid vähe.

### 3.4 Koherentsed riskimõõdud

Vaatame, millised omadused on eespool nimetatud riskimõõdudel. Olgu riski kujutavate juhuslike suuruste hulk  $\mathcal{M} \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Kuna riskimõõdud on reaalarvuliste väärtustega funktsioonid, siis tähistame riskimõõdu:  $\rho: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Eeldame, et kui riskid  $L_1 \in \mathcal{M}$  ja  $L_2 \in \mathcal{M}$ , siis  $L_1 + L_2 \in \mathcal{M}$  ning kui  $L_1 \in \mathcal{M}$ , siis  $\lambda L_1 \in \mathcal{M} \forall \lambda > 0$  korral. (Artzner, Delbaen, Eber, Heath, 1998)

**Definitsioon 3.3.** Koherentne riskimõõt on selline funktsioon  $\rho: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , mis rahuldab järgmisi tingimusi:

- a. Riskimõõt on invariantne konstantse juurdekasvu suhtes, st iga riski  $L \in \mathcal{M}$  ja iga konstandi  $l \in \mathbb{R}$  korral kehtib võrdus

$$\rho(L + l) = \rho(L) + l.$$

- b. Riskimõõt on subaditiivne, st iga riski  $L_1, L_2 \in \mathcal{M}$  korral kehtiv võrratus

$$\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2).$$

- c. Riskimõõt on positiivselt homogeenne, st iga riski  $L \in \mathcal{M}$  ja  $\lambda > 0$  korral kehtib võrdus

$$\rho(\lambda L) = \lambda \rho(L).$$

d. Riskimõõt on monotoonne, st iga riski  $L_1, L_2 \in \mathcal{M}$  korral, kui  $L_1 \leq L_2$ , siis

$$\rho(L_1) \leq \rho(L_2) \text{ a. s.}$$

Hea riskimõõt on koherentne. Seega riskimõõt on hea, kui see vastab neljale tingimusele:

- Liites riskile  $L$  juurde lõpliku arvu  $l$ , muutub riskimõõt sama summa võrra.
- Riskide liitmine ei tekita täiendavat riski.
- Suurendades riski  $L$  mingi arv  $\lambda$  korda, suureneb ka riskimõõt sama arv korda.
- Suuremate riskidega kaasneb suurem riskimõõt.

$VaR$  ei ole koherentne riskimõõt, kuna see ei ole subadiitiivne, mis tähendab, et erinevaid riske liites võib juhtuda, et hindame riski suuremaks kui juhul, kui vaataksime riske eraldi. Näiteks hindame liikluskindlustuse riski ja kaskokindlustuse riski, siis võib juhtuda, et nende hinnangute summa on väiksem kui hinnang, mis on leitud mõlema kindlustusliigi peale kokku. Hea riski mõõdu korral on eraldi riske hinnates kogurisk võrdne või suurem kui kõiki riske korraga vaadates. Erinevalt  $VaR$ -ist vastab keskmine suurkahju  $ES$  kõigile ülalnimetatud tingimustele ning on seega koherentne. Järgnev artiklis Bellini, Klar, Müller, Gianin (2013) pakutud lemma märgib, et üldistatud kvantiil on koherentne riskimõõt ainult juhul, kui ta on ekspektil ning  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ .

**Lemma 3.1.** Olgu  $\Phi_1, \Phi_2: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  sellised kumerad ja diferentseeruvad funktsioonid, et  $\Phi_i(0) = 0, \Phi_i(1) = 1$  ning  $\Phi'_{1+}(0) = \Phi'_{2+}(0) = 0$ . Olgu  $\alpha \in (0, 1)$  ja

$$x_\alpha^*(X) = \arg \min \{ \alpha E[\Phi_1((X - x)^+)] + (1 - \alpha) E[\Phi_2((X - x)^-)] \}.$$

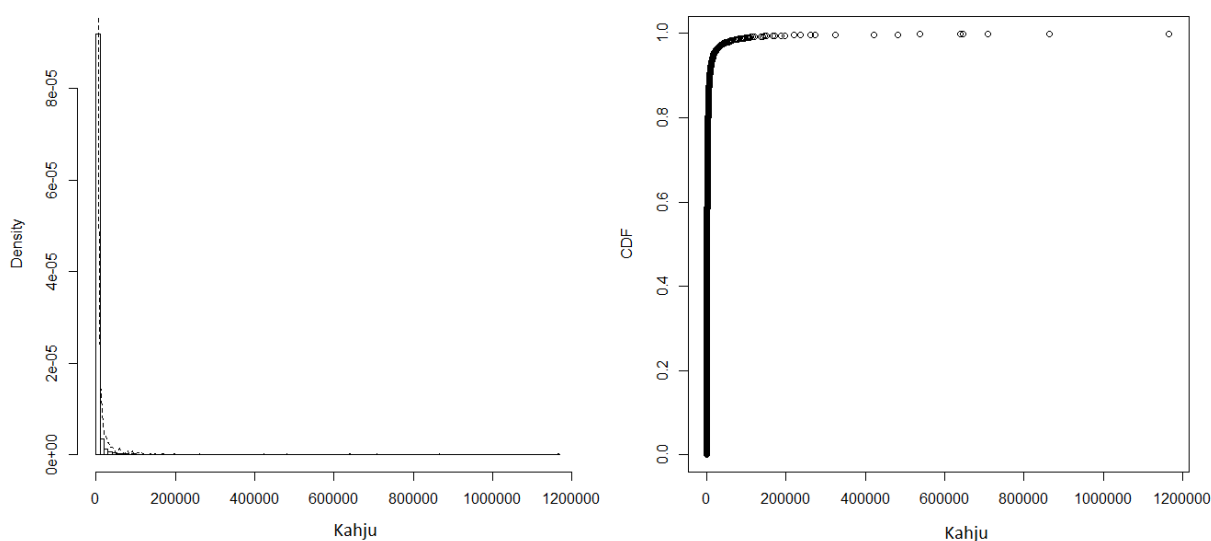
- $x_\alpha^*(X)$  on positiivselt homogeenne parajasti siis, kui  $\Phi_1(x) = \Phi_2(x) = x^\beta$ , kus  $\beta > 1$ .
- $x_\alpha^*(X)$  on kumer parajasti siis, kui funktsioon  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , mis on defineeritud valemiga (1.6), on kumer; see on nõgus parajasti siis, kui  $\psi$  on nõgus;

c.  $x_\alpha^*(X)$  on koherentne parajasti siis, kui  $\Phi_1(x) = \Phi_2(x) = x^2$  ja  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ .

Varasemalt teame lemmast 1.1, et kõik üldistatud kvantiilid on monotoonsed ja vastavad nõudele, mille kohaselt peab riskimõõt olema invariantne konstantse juurdekasvu suhtes. Positiivse homogeensuse nõue on aga täidetud ainult juhul, kui  $\Phi_1(x) = \Phi_2(x) = x^\beta$ , kus  $\beta \geq 1$ , kui  $\Phi_1, \Phi_2$  on lisaks kumerad ja rangelt kasvavad funktsioonid, või  $\beta > 1$ , kui funktsioonid  $\Phi_1, \Phi_2$  on rangelt kumerad, diferentseeruvad ning  $\Phi'_{1+}(0) = \Phi'_{2+}(0) = 0$ . Selleks aga, et üldistatud kvantiil oleks subaditiivne peab  $x_\alpha^*(X)$  olema kumer. Lemmast 3.1 teame, et  $x_\alpha^*(X)$  on kumer parajasti siis, kui funktsioon  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , mis on defineeritud valemiga (1.6), on kumer. Järeldub, et  $\Phi'_1$  peab olema kumer ja  $\Phi'_2$  nõgus funktsioon ning  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ . Kuna positiivse homogeensuse jaoks on vaja, et  $\Phi_1(x) = \Phi_2(x) = x^\beta$ , siis ainuke funktsioon, mille tuletis võib olla nii kumer kui ka nõgus, on ruutfunktsioon, sest selle tuletis on lineaarne funktsioon, mis kuulub piirjuhuna nii kumerate kui ka nõgusate funktsioonide alla. Seega ainuke üldistatud kvantiil, mis on koherentne, on ekspektiil juhul, kui  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ .

## 4 Riskimõõdude kasutamine jaotuse sobivuse hindamiseks

Sobitame reaalsele andmetele erinevaid levinumaid kahujaotusi ning võrdleme riskimõõdude väärtusi andmestikule vastava empiirilise jaotuse ja sobitatavate teoreetiliste jaotuste korral. Andmestikus on 2 797 juriidilise kahju suurused. Minimaalne kahjusuurus on 15,27 ja maksimaalne 1 166 171. Jooniselt 4.1 on näha, et suurem osa kahjusid on alla 200 000, kuid on ka arvestatav osa üksikuid väga suuri kahjusid, mis venitavad histogrammi saba väga pikaks. Kahjude mediaan on 952,97 ning keskmine kahju on 6 671,067.



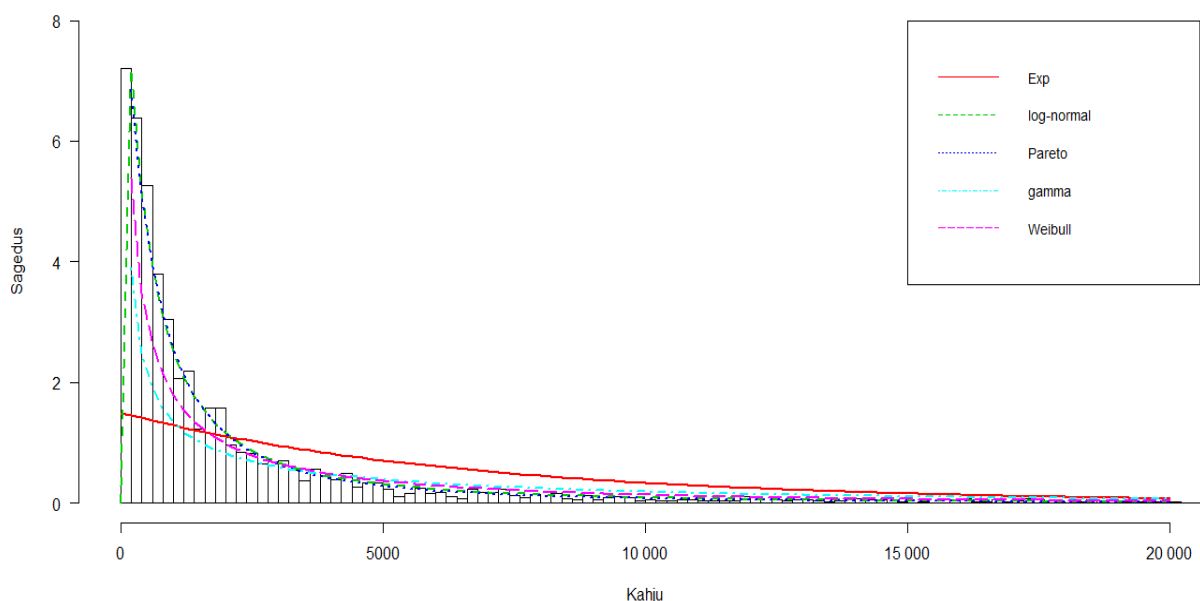
**Joonis 4.1.** Kahjusummade empiiriline jaotus ja kumulatiivne jaotus

Sobitame andmestikule eksponentjaotust, log-normaalset jaotust, Pareto jaotust, gammajaotust ja Weibulli jaotust. Selleks on tabelis 4.1 toodud nimetatud jaotuste hinnatud parameetrid.

**Tabel 4.1.** Sobitatud jaotuste hinnatud parameetrid koguandmestikule

Jaotus	Parameetrid	
	Skaalaparameeter	Kujuparameeter
Eksponentjaotus	$\theta = 1/\lambda = 1/0,0001499$	
Log-normaalne jaotus	$\mu = 6,973237$	$\sigma = 1,591730$
Pareto jaotus	$\beta = 1141,904091$	$\gamma = 1,097458$
Gammajaotus	$\theta = 1/\beta = 1/0,0000547$	$\gamma = 0,3645587$
Weibulli jaotus	$\lambda = 2462,2045795$	$k = 0,5383542$

Jaotuste sobivusele parema visuaalse hinnangu andmiseks on joonisel 4.2 toodud ainult jaotuse piirkond, kuhu jääb enamik kahjusid, mis tähendab, et jooniselt on jaotuse saba ära lõigatud. Pildilt on näha, et andmestiku algosa järgib kõige halvemini eksponentjaotus ning kõige paremini võiks sobida log-normaalne või Pareto jaotus.



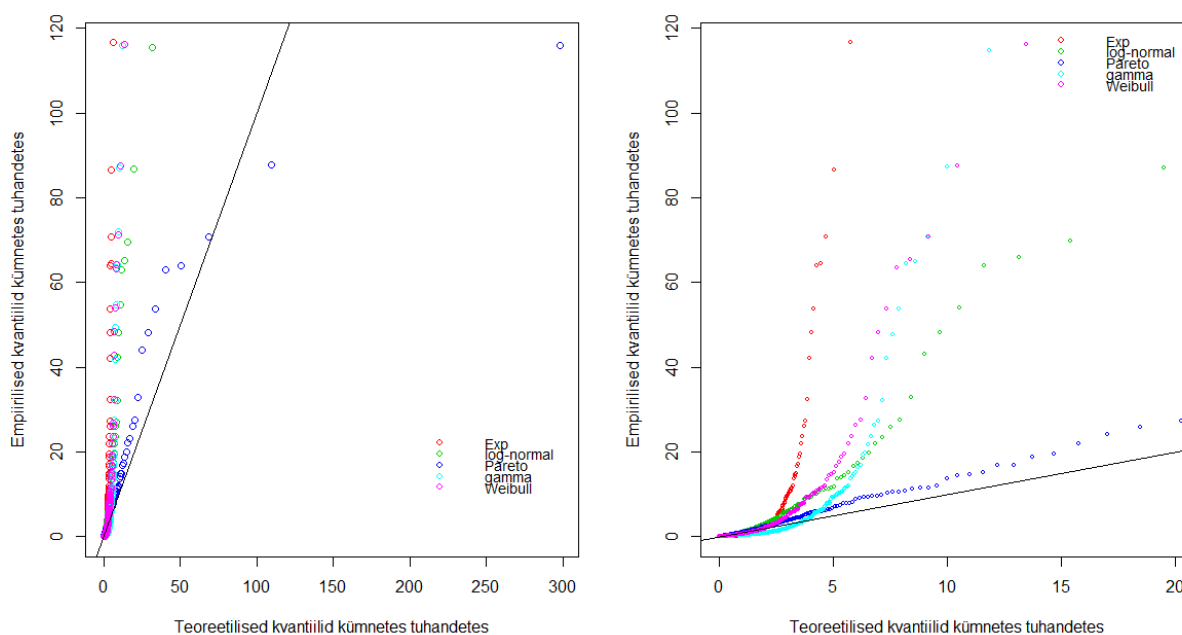
**Joonis 4.2.** Koguandmestikule sobitatud jaotused ilma andmestiku sabata

Tabelis 4.2 toodud Kolmogorov-Smirnovi statistik kui ka Akaike informatsiooni kriteerium näitavad samuti, et kõige paremini võiks sobida log-normaalne jaotus, kuid Cramer-von Mises'i näitaja järgi võiks sobida paremini Pareto jaotus.

**Tabel 4.2.** Sobivuse (ingl *goodness of fit*) näitajad proovitud jaotuste jaoks

Kriteerium	EkspONENT- jaotus	Log-normaalne jaotus	Pareto jaotus	Gamma- jaotus	Weibulli jaotus
Kolmogorov-Smirnovi statistik	0,4277	0,0335	0,0428	0,2117	0,1177
Cramer-von Mises'e statistik	238,2194	1,0955	0,6582	48,6553	13,9247
AIC	3331,52	-1972,61	-1959,62	314,92	-939,09

Kvantiil-kvantiil graafikutelt on aga näha, et ükski proovitud jaotustest ei sobi andmestiku empiirilise jaotusega väga hästi. Joonise 4.3 järgi võiks väiksemate kahjude korral Pareto jaotus isegi sobida, kuid jaotuse saba ei vasta ikkagi andmestiku jaotuse sabale. Ülejäänud jaotused ei sobi kvantiil-kvantiil graafiku järgi ka väiksemate kahjude jaotusega.



**Joonis 4.3.** Kvantiil-kvantiil graafikud kogu andmestikul ja samad kvantiilid ilma andmestiku sabata

Tabelis 4.3 on viie erineva  $\alpha$  korral leitud  $VaR$ -id nii andmestiku empiirilisele jaotusele kui ka varem nimetatud jaotustele. Nagu ka kvantiil-kvantiil graafikult näha oli, siis väljatoodud  $VaR$ -idest kõige rohkem sarnanevad andmestiku  $VaR$ -idele Pareto jaotuse näitajad. Väidet, et kõige enam erineb andmestiku jaotusest eksponentjaotus, kinnitavad ka need viis  $VaR$ -i. Kui  $VaR$ -id  $\alpha = 0,95$  korral on Pareto ja Weibulli jaotuse puhul veel küllaltki sarnased andmestiku omadele, siis võttes  $\alpha = 0,99$ , jäävad  $VaR$ -id uuritavate jaotuste korral märgatavalt väiksemaks kui andmestikul. Seega on andmestikul märgatavalt raskem saba, kui proovitud jaotustel.

**Tabel 4.3.** Empiirilise ja sobitatavate jaotuste *VaR*-id

<b>Jaotus</b>	<b><math>\alpha = 0,5</math></b>	<b><math>\alpha = 0,8</math></b>	<b><math>\alpha = 0,9</math></b>	<b><math>\alpha = 0,95</math></b>	<b><math>\alpha = 0,99</math></b>
Empiiriline jaotus	953	3 635	7 554	17 405	102 327
EkspONENTjaotus	4 624	10 737	15 361	19 985	30 721
Log-normaalne jaotus	1 068	4 076	8 210	14 638	43 311
Pareto jaotus	1 006	3 807	8 165	16 362	74 720
Gammajaotus	2 160	10 631	19 138	28 607	52 662
Weibulli jaotus	1 246	5 960	11 592	18 899	42 006

Vaadates tabelis 4.4 keskmiste suurkahjude võrdlust, on tulemused *VaR*-ist märgatavalt erinevad. Kui  $\alpha = 0,90$  või on väiksem, siis sarnanevad kõige rohkem testandmestiku empiiriliste keskmiste suurkahjudega eksponentjaotuse ja gammajaotuse keskmised suurkahjud. Ka  $\alpha = 0,95$  korral on keskmine suurkahju eksponentjaotuse puhul küllaltki sarnane uuritava andmestiku omale, kuid  $\alpha = 0,99$  puhul on see näitaja eksponentjaotusel väga palju suurem kui empiiriline.  $\alpha = 0,99$  korral on kõige lähem väärtus log-normaalse jaotuse keskmine suurkahju, kuid sama jaotuse teised väärtused on oluliselt väiksemad kui andmesiku empiirilisel jaotusel.

Selgelt on näha, et kõige enam erinevad andmestiku keskmised suurkahjud Pareto jaotuse omadest – need on kordades suuremad. Põhjus võib olla selles, et kui Pareto jaotuse kujuparameeter  $\gamma$  kuulub poollõiku ( $\gamma \in (1; 2]$ ), siis Pareto jaotuse dispersioon on lõpmatu. Saadud hinnatud parameetrite korral  $\gamma = 1,097458$  ning seetõttu Pareto jaotusega kahjud võivad saada väga suuri väärtuseid.

**Tabel 4.4.** Empiirilise ja sobitatavate jaotuste keskmised suurkahjud

<b>Jaotus</b>	<b><math>\alpha = 0,5</math></b>	<b><math>\alpha = 0,8</math></b>	<b><math>\alpha = 0,9</math></b>	<b><math>\alpha = 0,95</math></b>	<b><math>\alpha = 0,99</math></b>
Empiiriline jaotus	12 945	29 460	53 775	96 053	316 660
EkspONENTjaotus	11 295	28 238	56 475	112 951	564 755
Log-normaalne jaotus	7 157	17 893	35 785	71 570	357 852
Pareto jaotus	23 040	57 601	115 202	230 404	1 152 020
Gammajaotus	12 784	31 959	63 918	127 836	639 179
Weibulli jaotus	8 305	20 763	41 526	83 053	415 264

Samal põhjusel, miks erinesid Pareto jaotuse keskmised suurkahjud uuritava andmestiku omadest, on ka Pareto jaotuse ekspektiilid kordades suuremad kui andmestiku empiirilise jaotuse ekspektiilid. Teiste jaotuste ekspektiilid jäävad aga märgatavalt andmestiku omadele alla. Ühegi proovitud jaotuse ekspektiilid ei vasta ligilähedaseltki andmestiku empiirilise jaotuse omadele.

**Tabel 4.5.** Andmestiku ja jaotuste ekspektiilid

<b>Jaotus</b>	<b><math>\alpha = 0,5</math></b>	<b><math>\alpha = 0,8</math></b>	<b><math>\alpha = 0,9</math></b>	<b><math>\alpha = 0,95</math></b>	<b><math>\alpha = 0,99</math></b>
Empiiriline jaotus	6 671	18 345	33 285	56 683	169 080
Eksponentjaotus	6 671	10 697	13 610	16 617	24 158
Log-normaalne jaotus	3 790	8 353	13 108	19 607	45 334
Pareto jaotus	11 717	36 706	74 044	143 306	632 047
Gammajaotus	6 670	13 221	18 574	24 488	40 499
Weibulli jaotus	4 335	9 028	13 256	18 323	34 026

On näha, et andmestiku empiirilise jaotuse korral on ekspektiilid alati suuremad kui *VaR*-id, kuid samas väiksemad kui keskmised suurkahjud. Sobitatud jaotuste kohta sama öelda ei saa. Nende jaotuste korral on mediaan alati väiksem kui keskväärtus ning seetõttu on loomulik, et 0,5-ekspektiilid on suuremad kui *VaR*-id. On ka näha, et mida kergem on jaotuse saba, seda väiksemast  $\alpha$ -st alates jäävad ekspektiilid väiksemaks kui kvantiilid. Keskmistele suurkahjudele jäävad ekspektiilid iga  $\alpha$  korral märgatavalt alla.

## Kokkuvõte

Käesolevas töös tutvustasime ekspektiile ning võrdlesime neid kvantiilidega. Selleks tõime välja kaofunktsioonil põhineva kvantiilide definitsiooni ning tutvustasime üldistatud kvantiile. Andsime ülevaate ekspektiilide omadustest, näitasime, et ekspektiil on  $\alpha = 0,5$  korral võrdne keskväärtusega ning lihtsustasime optimaalsuse kriteeriumit ekspektiilide leidmiseks. Lisaks on ekspektiilide leidmise võrrand avaldatud eksponentjaotuse, log-normaalse jaotuse, Pareto jaotuse, gammajaotuse ja Weibulli jaotuse jaoks.

Töö teises pooles vaatasime ekspektiilide võimalikku kasutust riskimõõduna. Selleks tutvustasime lühidalt riski ning selle hindamise viise. Veidi lähemalt tutvustasime riskimõõte  $VaR$  ja keskmine suurkahju. Riskimõõdu oluliseks headuse näitajaks on koherentsus, mida tutvustasime ka töös ning vaatasime, millistel riskimõõtetel on see omadus olemas. Selgus, et ainuke üldistatud kvantiil, millel on koherentsuse omadus, on ekspektiil, kui  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ .

Viimaks võrdlesime  $VaR$ -i, keskmist suurkahju ja ekspektiile kahjuandmete peal. Selleks sobitasime andmestikule varem nimetatud jaotuseid ja hindasime vastavad jaotuste parameetrid. Kõige enam sarnanesid hinnatud jaotuste  $VaR$ -id testandmete samadele näitajatele, kuigi ka sel juhul  $\alpha = 0,99$  korral jäid näitajad väga erinevaks. Testandmestiku ekspektiilidega ei sarnanenud aga ühegi proovitud jaotuse ekspektiilid ligilähedaseltki. Probleemiks oli ka andmestiku suur varieeruvus, mistõttu hinnatud Pareto jaotuse dispersioon oli lõpmatu. Sel põhjusel olid nii keskmised suurkahjud kui ka ekspektiilid kordades suuremad kui andmestiku omad. Ekspektiilid olid testandmestiku empiirilise jaotuse korral alati suuremad kui  $VaR$ , aga väiksemad kui keskmised suurkahjud. Tuli ka välja, et mida kergem on jaotuse saba, seda väiksemast  $\alpha$ -st alates on ekspektiilid väiksemad kui kvantiilid.

## Kirjanduse loetelu

- [1] Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D., 1998. Coherent measures of risk. Finance and Stochastics 9.
- [2] Bellini F., Klar B., Müller A., Gianin E.R., 2013. Generalized quantiles as risk measures. Elsevier B.V.
- [3] Koenker R., 2005. Quantile Regression. Cambridge University Press, New York.
- [4] Käärik M., 2013. Non-Life Insurance Mathematics. Loengu konspekt. Tartu.
- [5] McNeil A.J., Frey R., Embrechts P., 2005. Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools. Princeton University Press, Princeton New Jersey.
- [6] Pfeifer D., Heidegott B., 1997. The zero utility principle for scale families of risk distributions. Elsevier B.V., Hamburg.
- [7] Raukas P., 2008. Riski mõõtmise. Magistritöö. Tartu.
- [8] Žegulova A., 2009. Kahju jaotuse ja riskimõõtude hindamine. Magistritöö. Tartu.

## **Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, Helis Puksand,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Ekspektiivid ja nende kasutamine riskimõõduna,

mille juhendaja on dotsent Meelis Käärik,

- 1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
- 1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtajalõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 13.05.2015