TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI

TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

672

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ КОРРЕКТНО И НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

KORREKTSETE JA MITTEKORREKTSETE ÜLESANNETE DISKRETISEERIMINE

Труды по математике и механике

Matemaatika- ja mehhaanikaalaseid töid

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 672 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г.

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ КОРРЕКТНО И НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

KORREKTSETE JA MITTEKORREKTSETE ÜLESANNETE DISKRETISEERIMINE

Труды по математике и механике

Matemaatika- ja mehhaanikaalaseid töid

TARTU 1984

Ученые записки Тартуского государственного университета.
Выпуск 672.
ДИСКРЕТИЗАЦИЯ КОРРЕКТНО И НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ.
Труды по математике и механике.
На русском языке.
Резюме на английском и немецком языках.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Ответственный редактор Э. Тамме.
Корректоры А. Тийман. Т. Тийман, Я. Соонвальд.
Подписано к печати 21.05.1984.
МБ 05901.
Формат 60x90/16.
Бумага писчая.
Машинопись. Ротапринт.
Учетно-издательских листов 4,6. Печатных листов 5,5.
Тираж 350.
Заказ № 597.
Цена 70 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Пялсона, 14.
2 - 2

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1984,672,3-9

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МЕТОДОВ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ О РЕШЕНИИ

Г. Вайникко

В данной заметке указывается, как можно модифицировать класс методов регуляризации [2-4], если известна априорная информация о принадлежности решения образу некоторого линейного оператора.

I. Решаемая задача и класс методов. Рассмотрим уравнение

$$Au = f, \tag{I}$$

где $A \in \mathcal{L}(H, F)$ – линейный непрерывный оператор из гильбертова пространства H в гильбертово пространство F ; допускается незамкнутость области значений $\mathcal{R}(A) \subseteq F$.

В [2-4] изучен класс методов регуляризации, строя аппроксимации псевдообратного к A^*A в виде функций от A^*A. А именно, пусть $\{g_r\}_{r\in(0,\infty)}$ – семейство ограниченных измеримых по Борелю функций $g_r : [0,a] \to \mathbb{R}$, таких что $\|A^*A\| \le a$ и

$$\left.\begin{aligned} &\sup_{0\le\lambda\le a} |g_r(\lambda)| \le \gamma r \quad (r>0), \\ &\sup_{0\le\lambda\le a} \lambda^p |1-\lambda g_r(\lambda)| \le \gamma_p r^{-p} \quad (r>0,\ 0\le p\le p_0), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где γ, γ_p – некоторые постоянные, $p_0 \geqslant 1/2$. Приближенное решение уравнения (I) строилось в виде

$$u_r = g_r(A^*A)A^*f, \tag{3}$$

где $A^* \in \mathcal{L}(F, H)$ – сопряженный к $A \in \mathcal{L}(H, F)$ оператор. Такое приближение хорошо ведет себя, если точное решение u уравнения (I) истокопредставимо (т.е. представимо в виде $u = (A^*A)^p v$, $p > 0$). Если же точное решение имеет вид $u = Bv$ с другим оператором B, то приближение (3) может себя вести неоптимальным образом.

Ниже будем считать априори известным, что решение уравнения (I) принадлежит образу линейного непрерывного оператора $B = L^{-1} \in \mathcal{L}(G, H)$, где G – еще одно гильбертово пространство, а $L : \mathcal{D}(L) \subset H \to G$ – линейный неограниченный обратимый оператор. Более того, в некоторых алгоритмах будем считать известным число $\rho > 0$ такое что решение уравнения (I) принадлежит множеству

$$\mathcal{M}_\rho = \{u \in H : u = Bv, \|v\|_G \le \rho\} = \{u \in \mathcal{D}(L) : \|Lu\|_G \le \rho\}. \quad (4)$$

Введем на $\mathcal{D}(L) \subset H$ скалярное произведение

$$(u, v)_{H_{L^*L}} = (Lu, Lv)_G, \quad u, v \in \mathcal{D}(L).$$

Тем самым $\mathcal{D}(L) = H_{L^*L}$ превращается в гильбертово пространство. Оператор уравнения (I) можно рассматривать и как оператор из $H_{L^*L} \subset H$ в F. Сопряженный к $A \in \mathcal{L}(H_{L^*L}, F)$ оператор $A^\# \in \mathcal{L}(F, H_{L^*L})$ выражается формулой

$$A^\# = BB^*A^*.$$

Вместо (3) введем приближение

$$u_r = g_r(A^\# A) A^\# f_\delta \quad (5)$$

(считаем, что $\|A^\# A\| \le a$). Здесь f_δ – известное нам приближение к $f \in \mathcal{R}(AB)$,

$$\|f_\delta - f\| \le \delta.$$

Укажем, как выглядит приближение (5) для некоторых наиболее распространенных методов, укладывающихся в рамки условий (2).

Метод Тихонова соответствует функции $g_r(\lambda) = 1/(r^{-1} + \lambda)$, условия (2) выполнены с $p_0 = 1$; приближение (5) принимает широко известный вид

$$u_r = (r^{-1} L^*L + A^*A)^{-1} A^* f_\delta. \quad (6)$$

Неявная итерационная схема: $u_0 = 0$,

$$(\alpha L^*L + A^*A) u_r = \alpha L^*L u_{r-1} + A^* f_\delta, \quad r = 1, 2, \dots; \quad \alpha = const > 0.$$

Явная итерационная схема: $u_0 = 0$,

$$L^*L u_r = L^*L u_{r-1} - \mu A^*(A u_{r-1} - f_\delta), \quad r = 1, 2, \dots;$$
$$\mu = const \in (0, 2/\|A^\# A\|).$$

Для последних двух методов условия (2) выполнены с $p_0=\infty$ (см. [2, 3]).

2. <u>Проблема оптимальности</u>. Напомним некоторые понятия и результаты, связанные с оптимальностью методов решения некорректно поставленных задач. Под методом решения уравнения (I) понимается любое отображение $P: F\to H$, а его точность на множестве решений $\mathcal{M}\subset H$ характеризуется наибольшим возможным отклонением приближения Pf_δ от истинного решения $u\in\mathcal{M}$ (см. [5]):

$$\Delta(\delta,\mathcal{M},P)=\sup_{\substack{u\in\mathcal{M},\ f_\delta\in F\\ \|Au-f_\delta\|\le\delta}}\|Pf_\delta-u\|_H .$$

Метод P_δ называется оптимальным (по точности) на $\mathcal{M}$, если

$$\Delta(\delta,\mathcal{M},P_\delta)=\inf_P \Delta(\delta,\mathcal{M},P)\qquad (0<\delta\le\delta_0),$$

и методом оптимального порядка на $\mathcal{M}$, если

$$\Delta(\delta,\mathcal{M},P_\delta)\le c\inf_P\Delta(\delta,\mathcal{M},P)\quad (0<\delta\le\delta_0),\quad c=const$$

(инфимум берется по всем методам). Известно, (см. [5, 2]), что в случае выпуклого центрально-симметрического множества

$$\inf_P\Delta(\delta,\mathcal{M},P)\ge\omega_A(\delta,\mathcal{M})\equiv\sup_{u\in\mathcal{M},\ \|Au\|\le\delta}\|u\|. \qquad (7)$$

Обозначим

$$\mathcal{N}(f,\delta)=\{u\in H:\ \|Au-f\|\le\delta\}.$$

<u>Лемма I</u>. Пусть $\mathcal{M}$ – центрально-симметрическое выпуклое ограниченное множество. Тогда для всякого $f\in F$, для которого $\mathcal{M}\cap\mathcal{N}(f,\delta)$ непусто, выполняется неравенство

$$diam\ \mathcal{M}\cap\mathcal{N}(f,\delta)\le diam\ \mathcal{M}\cap\mathcal{N}(0,\delta). \qquad (8)$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $u_1,u_2\in\mathcal{M}\cap\mathcal{N}(f,\delta)$ таковы, что $\|u_1-u_2\|\ge diam\ \mathcal{M}\cap\mathcal{N}(f,\delta)-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ произвольно мало). Ввиду центральной симметрии $\mathcal{M}$ имеем $-u_1\in\mathcal{M}$, $-u_2\in\mathcal{M}$, а ввиду выпуклости $\mathcal{M}$ также $v_1\equiv(u_1-u_2)/2\in\mathcal{M}$, $v_2\equiv$ $\equiv(u_2-u_1)/2\in\mathcal{M}$. Далее, из $u_1,u_2\in\mathcal{N}(f,\delta)$ следует, что

$$\|Av_1\|=\|(Au_1-f)-(Au_2-f)\|/2\le(\|Au_1-f\|+\|Au_2-f\|)/2\le\delta,$$

т.е. $v_1,v_2\in\mathcal{N}(0,\delta)$. Таким образом, $v_1,v_2\in\mathcal{M}\cap\mathcal{N}(0,\delta)$, и

$$diam\ \mathcal{M}\cap\mathcal{N}(0,\delta)\ge\|v_1-v_2\|=\|u_1-u_2\|\ge diam\ \mathcal{M}\cap\mathcal{N}(f,\delta)-\varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon>0$ отсюда получаем (8). Лемма I доказана.

Заметим, что $\mathcal{M}\cap\mathcal{N}(0,f)$ центрально-симметрично и выпукло вместе с $\mathcal{M}$, и

$$\operatorname{diam}\mathcal{M}\cap\mathcal{N}(0,\delta)=2\omega_A(\delta,\mathcal{M}). \qquad (9)$$

Для определенных в (4) множеств $\mathcal{M}_\rho$ имеем

$$\omega_A(b\delta,\mathcal{M}_{b\rho})=b\,\omega_A(\delta,\mathcal{M}_\rho), \qquad b=const>0. \qquad (10)$$

Лемма 2. Пусть метод $P_\delta : F\to H$ таков, что для каждого $f_\delta\in F$, для которого $\operatorname{dist}(f_\delta, A\mathcal{M}_\rho)\le\delta$, выполняются условия

$$P_\delta f_\delta\in\mathcal{M}_{b\rho}, \quad \|A(P_\delta f_\delta)-f_\delta\|\le b\delta \quad (b=const\ge 1). \qquad (11)$$

Тогда метод P_δ оптимален по порядку на $\mathcal{M}_\rho$:

$$\Delta(\delta,\mathcal{M}_\rho,P_\delta)\le 2b\inf_P\Delta(\delta,\mathcal{M}_\rho,P). \qquad (12)$$

Доказательство. Имеем

$$\Delta(\delta,\mathcal{M}_\rho,P_\delta)=\sup_{\substack{f_\delta\in F\\ \operatorname{dist}(f_\delta,A\mathcal{M}_\rho)\le\delta}}\ \sup_{\substack{u\in\mathcal{M}_\rho\\ \|Au-f_\delta\|\le\delta}}\|P_\delta f_\delta-u\|\le$$

$$\le\sup_{\substack{f_\delta\in F\\ \operatorname{dist}(f_\delta,A\mathcal{M}_\rho)\le\delta}}\operatorname{diam}\mathcal{M}_{b\rho}\cap\mathcal{N}(f_\delta,b\delta);$$

мы учли, что по условиям (11) $P_\delta f_\delta\in\mathcal{M}_{b\rho}\cap\mathcal{N}(f_\delta,b\delta)$. Отсюда при помощи (8)-(10) и (7) получаем (12):

$$\Delta(\delta,\mathcal{M}_\rho,P_\delta)\le\operatorname{diam}\mathcal{M}_{b\rho}\cap\mathcal{N}(0,b\delta)=2\omega_A(b\delta,\mathcal{M}_{b\rho})=$$
$$=2b\,\omega_A(\delta,\mathcal{M}_\rho)\le 2b\inf_P\Delta(\delta,\mathcal{M}_\rho,P).$$

Лемма 2 доказана.

3. Выбор параметра регуляризации. Из (5) усматривается, что $u_r\in\mathcal{R}(B)$; представив его в виде $u_r=Bv_r$, имеем $\|u_r\|_{H_{L^*L}}=\|v_r\|_G$. Итак, условие $u_r\in\mathcal{M}_\rho$ означает, что $\|u_r\|_{H_{L^*L}}\le\rho$. Применение леммы 2 дает следующий результат: если для всех f_δ $(\|f_\delta-f\|\le\delta,\ f\in A\mathcal{M}_\rho)$ удается подобрать $r=r(\delta,f_\delta)$ таким образом, что для приближения (5)

$$\|u_r\|_{H_{L^*L}} \le b\rho, \quad \|Au_r - f_\delta\| \le b\delta \qquad (b \ge 1), \tag{13}$$

то мы придем к оптимальному по порядку на $\mathcal{M}_\rho$ методу:

$$\sup_{\substack{u\in\mathcal{M}_\rho,\, f_\delta\in F\\ \|Au-f_\delta\|\le\delta}} \|u_r - u\|_H \le 2b \inf_P \sup_{\substack{u\in\mathcal{M}_\rho,\, f_\delta\in F\\ \|Au-f_\delta\|\le\delta}} \|Pf_\delta - u\|_H .$$

Добиться выполнения условий (13) можно, если известно хотя бы одно из чисел δ и ρ.

а) Известны δ и ρ. В таком случае можно обойтись априорным выбором параметра r в виде

$$r = d\rho^2\delta^{-2}, \qquad d = const > 0.$$

Конкретизируем постоянную d, предполагая дополнительно к (2), что

$$0 \le 1 - \lambda g_r(\lambda) \le 1 \qquad (0 \le \lambda \le a, \quad r > 0). \tag{14}$$

Из (5) следует, что

$$u_r = g_r(A^*A)A^*(f_\delta - f) + g_r(A^*A)A^*Au,$$

$$Au_r - f_\delta = -A(I - A^*Ag_r(A^*A))u - (I - AA^*g_r(AA^*))(f_\delta - f),$$

где u – любое решение уравнения (1) из $\mathcal{M}_\rho$. Отсюда в силу (2) и (14)

$$\|u_r\|_{H_{L^*L}} \le \gamma_* r^{1/2}\delta + \rho, \tag{15}$$

$$\|Au_r - f_\delta\|_F \le \gamma_{1/2} r^{-1/2}\rho + \delta, \tag{16}$$

где

$$\gamma_* = \sup_{r>0}\Big[r^{-1/2} \sup_{0\le\lambda\le a} \lambda^{1/2}|g_r(\lambda)|\Big] \le \sqrt{\gamma}\,.$$

При

$$r = \frac{\gamma_{1/2}}{\gamma_*}\rho^2\delta^{-2}$$

из (15) и (16) получаем (13) с $b = 1 + (\gamma_*\gamma_{1/2})^{1/2}$.

б) Известно только δ. Зададим числа b_1 и b_2 ($b_2 \ge b_1 > 1$) и подберем r так, что

$$b_1\delta \le \|Au_r - f_\delta\| \le b_2\delta. \tag{17}$$

Из (16) тогда следует

$$r \le \left(\frac{\gamma_{1/2}}{b_1 - 1}\right)^2 \rho^2\delta^{-2},$$

что совместно с (I5) дает

$$\|u_r\|_{H_{L^*L}} \leq \left(1 + \frac{\gamma_* \gamma_{1/2}}{b_1 - 1}\right)\rho .$$

Итак, условия (I3) выполнены с $b = max\left\{1+\frac{\gamma_*\gamma_{1/2}}{b_1-1},\ b_2\right\}$. При $b_1 = b_2 = 1+(\gamma_*\gamma_{1/2})^{1/2}$ условие (I3) выполнено с $b = 1+(\gamma_*\gamma_{1/2})^{1/2}$, как и в случае априорного задания r при известных δ и ρ.

Поскольку $\lim\limits_{r\to\infty} \|Au_r - f_\delta\| \leq \delta$ (см. [2, 3]), то при $\|f_\delta\| > b_1\delta$ выбор r по принципу невязки (I7) осуществим. Если же $\|f_\delta\| \leq b_1\delta$, то можно положить $r=0$, $u_r|_{r=0} = 0$.

в) Известно только ρ. Зададим снова числа b_1 и b_2 ($b_2 \geqslant b_1 > 1$) и подберем r так, что

$$b_1\rho \leq \|u_r\|_{H_{L^*L}} \leq b_2\rho . \tag{I8}$$

Из (I5) тогда следует

$$r \geqslant \left(\frac{b_1-1}{\gamma_*}\right)^2 \rho^2 \delta^{-2},$$

что совместно с (I6) дает

$$\|Au_r - f_\delta\| \leq \left(1 + \frac{\gamma_*\gamma_{1/2}}{b_1-1}\right)\delta .$$

Условия (I3) опять выполнены с $b = max\left\{1+\frac{\gamma_*\gamma_{1/2}}{b_1-1},\ b_2\right\}$. Значениям $b_1 = b_2 = 1+(\gamma_*\gamma_{1/2})^{1/2}$ соответствует $b = 1+(\gamma_*\gamma_{1/2})^{1/2}$.

Отметим, что $\|u_r\|_{H_{L^*L}} \to \infty$ при $r\to\infty$, если $f_\delta \notin \mathcal{R}(AB)$. Если же $f_\delta \in \mathcal{R}(AB)$ и $\|u_r\|_{H_{L^*L}} < b_1\rho$ при всех $r>0$, то r можно брать сколь угодно большим.

Итак, во всех трех случаях достижима точность, отличающаяся от оптимальной не более, чем множителем

$$2b = 2\left[1 + (\gamma_*\gamma_{1/2})^{1/2}\right].$$

Например, для метода Тихонова (6) имеем $\gamma_* = 1/2$, $\gamma_{1/2} = 1/2$ и $2b = 3$. Следует, однако, подчеркнуть, что из результатов [7] вытекает существование такого r, при котором метод Тихонова (6) оптимален (не только по порядку!) на $\mathcal{M}_\rho$; в [I] указан более эффективный способ вычисления оптимального r в методе Тихонова при известных δ и ρ. По поводу оптимальности метода Тихонова (6) см. также монографии [5, 6] и литературу в них.

В заключение отметим, что результаты данной заметки без труда переносятся на случай, когда оператор A тоже задан приближенно.

Литература

I. А г е е в А.Л. К вопросу о построении оптимального метода решения линейного уравнения I-го рода. Изв.высш. учебн. завед. Математика, 1983, № 3, 67–68.

2. В а й н и к к о Г. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту, ТГУ, 1982.

3. В а й н и к к о Г.М. Принцип невязки для одного класса регуляризационных методов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1982, 22, № 3, 499–515.

4. В а й н и к к о Г.М. Критический уровень невязки в методах регуляризации. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, 23, № 6, 1283–1297.

5. И в а н о в В.К., В а с и н В.В., Т а н а н а В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. Москва, Наука, 1978.

6. М о р о з о в В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. Москва, МГУ, 1974.

7. M e l k m a n, A.A., M i c c h e l l i, C.A. Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data. SIAM J. Numer. Anal., 1979, 16, № 1, 87–105.

Поступило
27 II 1984

ABOUT A CLASS OF REGULARIZATION METHODS WHEN A PRIORI INFORMATION ABOUT SOLUTION IS GIVEN

G. Vainikko

Summary

Let H, F, G be Hilbert spaces, $A\in\mathcal{L}(H,F)$, $B=L^{-1}\in\mathcal{L}(G,H)$. Consider equation (1) with an imprecisely known data f, $\|f_\delta-f\|\le\delta$. The following a priori information about the solution u of (1) let be given: $u\in\mathcal{R}(B)$ or $u\in\mathcal{M}_\rho=\{u\in H: u=Bv, \|v\|\le\rho\}$. A class of regularization methods $\{(2), (5)\}$ is constructed (with $A^*=BB^*A^*$). For some choices of regularization parameter τ we obtain methods of optimal accuracy degree on $\mathcal{M}_\rho$. Three cases are considered: a) we know δ and ρ ; b) we known only δ ; c) we know only ρ .

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1984,672,10-15

О МЕТОДЕ ЗАДАЧИ КОШИ В НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ПОМЕХАХ

А. Веретенников

Установлена теорема о регуляризации и найдены оценки скорости сходимости и величины момента останова для метода задачи Коши в некорректных задачах при наличии случайных ошибок.

1. Постановка задачи. Рассматривается линейное уравнение

$$A_0 u = f_0, \tag{1}$$

где $A_0 \in \mathcal{L}(H,F)$ – линейный ограниченный оператор, действующий из гильбертова пространства H в гильбертово пространство F. Для отыскания приближенного решения применим метод задачи Коши

$$\begin{aligned} &\dot{u}(t) = -A^*A\,u(t) + A^*f + \beta\,\dot{w}(t), \quad t \geq 0, \\ &u(0) = u_0, \end{aligned} \tag{2}$$

или, в интегральном виде,

$$u(t) = u_0 + \int_0^t (-A^*A\,u(s) + A^*f)\,ds + \beta\,w(t). \tag{3}$$

Здесь $A - A_0$, $f - f_0$ и $w(t)$ – ошибки вычислений, β – параметр, и ошибки могут зависеть от этого параметра. Требуется так определить правило останова, чтобы оно регуляризовало задачу (1). Предполагается, что пространства H и F сепарабельны, $\|A\|$, $\|A_0\| \leq 1$, $\|A - A_0\| \leq \eta$, $\|f - f_0\| \leq \delta$, $w(t) = w^\beta(t)$ – слабо непрерывный по t случайный процесс на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ со значениями в H. Задача (1) предполагается разрешимой, т.е. $f_0 \in R(A_0)$. При некотором $\lambda > 0$ предполагаются выполненными условия

$$\lim_{t\to\infty} \inf_\beta P(\|w(s)\| \leq \lambda s,\ s \geq t) = 1, \tag{4}$$

$$\lim_{C\to\infty} \inf_\beta P\left(\int_0^t \|w(s)\|\,ds \leq C\right) = 1 \tag{5}$$

для всякого $t > 0$. Таким условиям удовлетворяет, в частности, винеровский процесс со значениями в H. Символ $\dot{w}$ в (2) понимается как обобщенный процесс.

Рассматриваются следующие правила останова (постоянные $a>0$, $b_1, b_2>1$, $b_*>\|u_*\|$, где u_* – нормальное решение относительно u_0, т.е. решение с минимальным значением $\|u_*-u_0\|$; m – момент останова):

π_1	$\varepsilon = b_1\delta + b_*\eta$, $m=\inf(t\geq 0: \|Au(t)-f\|\leq\varepsilon$, либо $t\geq a\varepsilon^{-2})$
π_2	$\varepsilon_t = b_1\delta + b_2\|u(t)\|\eta$, $m=\inf(t\geq 0: \|Au(t)-f\|\leq\varepsilon_t$, либо $t\geq a\varepsilon_t^{-2})$

Регуляризация устанавливается при следующем соотношении между малыми параметрами δ, η и β:

$$\beta \leq K(\delta+\eta)^3, \quad K=const>0. \tag{6}$$

Настоящая работа продолжает исследование регуляризующих свойств итерационных методов при детерминированных (см. [I-2]) и случайных (см. [3]) возмущениях.

2. <u>Основные результаты.</u> <u>Теорема I.</u> Справедливы соотношения

$$m(\delta+\eta)^2 \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при} \quad \delta,\eta\to 0, \tag{7}$$

$$\|u(m)-u_*\| \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при} \quad \delta,\eta\to 0. \tag{8}$$

<u>Теорема 2.</u> Пусть $u_0-u_*=(A_0^*A_0)^p v$, $p>0$, $\|v\|\leq r$. Тогда выполняются соотношения

$$P(m\leq c_{p,r}(\delta+\eta)^{-2/(2p+1)})\to 1, \quad \delta,\eta\to 0, \tag{9}$$

$$P(\|u(m)-u_*\|\leq c'_{p,r}(\delta+\eta)^{2p/(2p+1)})\to 1, \quad \delta,\eta\to 0. \tag{10}$$

3. <u>Вспомогательные утверждения.</u> Пусть $G=e^{-A^*A}$, $G_0=e^{-A_0^*A_0}$, $q(t)=u(t)-u_*$, $v(t)=Au(t)-f$. Интегрируя уравнение (2), получаем следующий результат.

<u>Лемма I.</u> Справедливы соотношения

$$q(t)=G^t q(0)+\int_0^t G^{t-s}A^*(f-Au_*)ds + \beta w(t)-\beta\int_0^t A^*AG^{t-s}w(s)ds, \tag{11}$$

$$v(t)=AG^tq(0)-G^t(f-Au_*)+\beta Aw(t)-\beta\int_0^t AA^*AG^{t-s}w(s)ds. \tag{12}$$

Лемма 2 (см. [2], с. 45 и с. 78). При всяком $x \in H \ominus \mathcal{N}(A_0^* A_0)$ справедливы равенства

$$\lim_{\eta \to 0,\ t \to \infty} \| G^t x \| = 0,$$

$$\lim_{\eta \to 0,\ t \to \infty} t^{1/2} \| A G^t x \| = \lim_{\eta \to 0,\ t \to \infty} t^{1/2} \| (A^* A)^{1/2} G^t x \| = 0.$$

Лемма 3 (см. [2], лемма 3.2). Если $p > 0$, то имеет место соотношение

$$\| ((A^* A)^{1/2} G^t - (A_0^* A_0)^{1/2} G_0^t)(A_0^* A_0)^p \| \le \varepsilon_{t,p}\, \eta,$$

где $\varepsilon_{t,p} \to 0$ при $t \to \infty$.

4. Доказательство теоремы I. Рассмотрим правило π_1. Пусть $\dot u^0(t) = -A^* A u^0(t) + A^* f$, $u^0(0) = u_0$, $0 < \gamma < 1$, $\gamma b_1 > 1$, $\gamma b_* > \| u_* \|$, $m_0 = \inf(t \ge 0 : \| A u^0(t) - f \| \le \varepsilon_0 \equiv \gamma \varepsilon)$. При $t < m_0$ имеем $v^0(t) \equiv \| A u^0(t) - f \| > \varepsilon_0$, поэтому

$$t \varepsilon_0 / 2 < \int_{t/2}^{t} \| A u^0(s) - f \| ds = \int_{t/2}^{t} \| A G^s q(0) - G^s (f - A u_*) \| ds \le$$

$$\le (t/2)(\| A G^{t/2} q(0) \| + \| G^{t/2} (f - A u_*) \|),$$

и, значит,

$$t^{1/2} \varepsilon_0 < t^{1/2} \| A G^{t/2} q(0) \| + t^{1/2} (\delta + \| u_* \| \eta).$$

Стало быть, если только $m^0 < \infty$, то

$$m_0^{1/2} \varepsilon_0 \le m_0^{1/2} \| A G^{m_0/2} q(0) \| + m_0^{1/2} (\delta + \| u_* \| \eta),$$

откуда следует соотношение

$$m_0^{1/2} \varepsilon_0 \to 0, \quad \delta, \eta \to 0.$$

На самом деле всегда $m_0 < \infty$, поскольку при достаточно больших t справедливо неравенство

$$(t/2)\varepsilon_0 > (t/2)((\delta + \| u_* \| \eta) + \| A G^{t/2} q(0) \|) \ge$$

$$\ge \int_{t/2}^{t} \| A u^0(s) - f \| ds.$$

В силу условий (4) и (5) можно так выбрать функции $0 < C(\delta, \eta) \to \infty$ и $0 < T(\delta, \eta) \to \infty$, $\delta, \eta \to 0$, чтобы выполнялись соотношения

$$P\left(\int_0^{T(\delta,\eta)} \| w(s) \| ds \le C(\delta, \eta)\right) \to 1, \quad \delta, \eta \to 0, \tag{13}$$

$$C(\delta,\eta)\, m_0\, \varepsilon^2 \to 0, \qquad \delta,\eta \to 0. \tag{14}$$

Тогда получаем

$$\lim_{\delta,\eta\to 0} P\Big(\|v(m_0)\| < \varepsilon_0 + \beta \|A w(m_0)\| + \beta \int_0^{m_0} \|w(s)\|\, ds \le$$

$$\le \varepsilon_0 + 2\beta\lambda m_0 + \beta m_0 C(\delta,\eta) \le \varepsilon \Big) = 1.$$

Значит, $P(m \le m_0) \to 1$, $\delta,\eta \to 0$. Отсюда следует соотношение (7).

Докажем, что (7) влечет (8). Имеем

$$\|q(m)\| \le \|G^m q(0)\| + m^{1/2}(\delta + \|u_*\|\eta) +$$

$$+ \beta\|w(m)\| + \beta \|A^*A \int_0^m G^{m-s} w(s)\, ds\|.$$

Поскольку $G_0^t q(0) \ne 0$ $(t \geqslant 0)$, то $m \xrightarrow{P} \infty$ в силу (11). Поэтому $\|G^m q(0)\| \xrightarrow{P} 0$. В силу (7) имеем $m^{1/2}(\delta + \|u_*\|\eta) \xrightarrow{P} 0$. Наконец,

$$P\Big(\beta\|w(m)\| + \beta\|A^*A\int_0^m G^{m-s} w(s)\, ds\| \le$$

$$\le \beta(2\lambda + C(\delta,\eta))\, m\Big) \to 1,$$

и

$$\beta(2\lambda + C(\delta,\eta))\, m \xrightarrow{P} 0, \qquad \delta,\eta \to 0.$$

Стало быть,

$$\|q(m)\| \xrightarrow{P} 0, \qquad \delta,\eta \to 0.$$

Случай правила π_2 стандартным образом сводится к случаю правила π_1 (см. [1-2]).

5. <u>Доказательство теоремы 2.</u> Рассмотрим случай правила π_1. Для доказательства формулы (9) достаточно установить соотношение

$$m_0 \le \mathrm{const}\, (\delta + \eta)^{-2/(2p+1)} \qquad (\delta,\eta \to 0). \tag{15}$$

Имеем

$$\varepsilon_0 = 2 m_0^{-1} \int_{m_0/2}^{m_0} v^0(t)\, dt \le \|A G^{m_0/2} q(0)\| +$$

$$+ \|G^{m_0/2}(f - A u_*)\| \le \|A G^{m_0/2} q(0)\| + (\delta + \|u_*\|\eta),$$

откуда $$\varepsilon_0 \le \mathrm{const}\, \|A G^{m_0/2} q(0)\| \qquad (\delta,\eta \to 0).$$

Далее,
$$\|A_0 G_0^{m_0/2}(A_0^* A_0)^p v\| \le \text{const}\ m_0^{-(p+\frac{1}{2})},$$
и в силу леммы 3
$$\| A_0 G_0^{m_0/2}(A_0^* A_0)^p v\| = \|(A_0^* A_0)^{1/2} G_0^{m_0/2}(A_0^* A_0)^p v\| \geqslant$$
$$\geqslant \|(A^* A)^{1/2} G^{m_0/2}(A_0^* A_0)^p v\| -$$
$$- \|((A^*A)^{1/2} G^{m_0/2} - (A_0^* A_0)^{1/2} G_0^{m_0/2})(A_0^* A_0)^p v\| \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon_0 - \varepsilon_{m_0, p}\, \eta.$$
Отсюда
$$\varepsilon_0 \le \text{const}\ m_0^{-(p+\frac{1}{2})}, \qquad \delta, \eta \to 0,$$
т.е. в самом деле выполняется соотношение (13), а с ним и (9).

Соотношение (10) следует из (9). В самом деле, имеем с некоторой постоянной $N > 0$
$$P(\|q(m)\| \le \|G^m q(0)\| + N(\delta+\eta)^{1-\frac{1}{2p+1}} +$$
$$+ N\beta(2\lambda + C(\delta,\eta))(\delta+\eta)^{-\frac{2}{2p+1}}) \to 1, \quad \delta,\eta \to 0.$$
В то же время,
$$(\delta+\eta)^{1-\frac{1}{2p+1}} + \beta(2\lambda + C(\delta,\eta))(\delta+\eta)^{-\frac{2}{2p+1}} \le$$
$$\le (\delta+\eta)^{2p/(2p+1)} + c\,(2\lambda + C(\delta,\eta))(\delta+\eta)^{2-\frac{2}{2p+1}}.$$
Не ограничивая общности, мы можем и будем считать, что для функции $C(\delta,\eta)$ кроме (13) и (14) еще выполнено соотношение
$$C(\delta,\eta)(\delta+\eta)^{2p/(2p+1)} \le \text{const}.$$
Тогда получаем
$$P(\|q(m)\| \le \|G^m q(0)\| + \text{const}\ \varepsilon^{2p/(2p+1)}) \to 1$$
при $\delta, \eta \to 0$. Значит, достаточно установить соотношение
$$P(\|G^m q(0)\| \le \text{const}\ (\delta+\eta)^{2p/(2p+1)}) \to 1, \ \delta,\eta \to 0,$$
или, поскольку $P(m \le m_0) \to 1$, соотношение
$$\|G^{m_0} q(0)\| \le \text{const}\ (\delta+\eta)^{2p/(2p+1)} \qquad (\delta,\eta \to 0).$$

В силу неравенства моментов и леммы 3.2 из [2]

$$\|G^{m_0} q(0)\| = \|G^{m_0}(A_0^* A_0)^p v\| \leq$$

$$\leq \|G^{m_0}(A^*A)^p v\| + c_p \eta^{\min(1,2p)} \ln \eta \leq$$

$$\leq \|A G^{m_0}(A^*A)^p v\|^{\frac{2p}{2p+1}} \|G^{m_0} v\|^{\frac{1}{2p+1}} + c_p \eta^{\min(1,2p)} \ln \eta .$$

Поскольку $\|A G^{m_0} q(0)\| \leq k_1 \varepsilon_0$, то в силу леммы 3

$$\|G^{m_0} q(0)\| \leq (\|A G^{m_0}(A_0^* A_0)^p v\| +$$

$$+ \varepsilon_{m_0,p}\, \eta)^{\frac{2p}{2p+1}} \|v\|^{\frac{1}{2p+1}} + c_p \eta^{\min(1,2p)} \ln \eta \leq$$

$$\leq \text{const}\ (\delta + \eta)^{\frac{2p}{2p+1}} \qquad (\delta, \eta \to 0).$$

В заключение автор приносит искреннюю благодарность Г.М.Вайникко за ряд полезных советов.

Литература

I. В а й н и к к о Г.М. Оценки погрешности метода последовательных приближений для некорректных задач. Автоматика и телемеханика, 1980, № 3, 84-92.

2. В а й н и к к о Г. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту, ТГУ, 1982.

3. В е р е т е н н и к о в А.Ю. и К р а с н о с е л ь с к и й М.А. Регуляризующие правила останова в условиях случайных ошибок. ДАН СССР, 1983, № 3, 521-524.

Поступило
16 III 1984

ON THE CAUCHY PROBLEM METHOD FOR ILL-POSED PROBLEMS WITH RANDOM ERRORS

A. Veretennikov

Summary

Let H, F be separable Hilbert spaces, $A_0 \in \mathcal{L}(H,F)$. To regularize equation (1), Cauchy problem method (2) or (3) is applied. Theorems of regularization are established and estimations of the rate of convergence are obtained.

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1984,672,16-26

О ПРИНЦИПЕ НЕВЯЗКИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Т. Раус

Рассматривается некоторая модификация принципа невязки для одного класса регуляризационных методов при решении линейных некорректно поставленных задач в гильбертовом пространстве. При некоторых хорошо известных методах, как метод Лаврентьева, явный и неявный итерационный метод, даются оценки погрешности без требования "истокопредставимости" решения. Погрешность оценивается через наименьшую погрешность метода с данным уровнем погрешности правой части.

Рассмотрим уравнение

$$Au = f, \qquad f \in R(A), \tag{I}$$

где A – линейный ограниченный самосопряженный неотрицательный оператор в гильбертовом пространстве H; его область значений $R(A)$, вообще говоря, незамкнута, а ядро $N(A)$, вообще говоря, нетривиально. Предполагается, что вместо f задана $f_\delta \in H$ такое, что $\|f_\delta - f\| \le \delta$.

Рассмотрим класс методов решения уравнения (I), подробно изученный в [I]. Пусть $\{g_n\}_{n\in(0,\infty)}$ – семейство вещественно-значных функций, определенных и измеримых по Борелю на таком отрезке $[0,a]$, $a>0$, что спектр $\sigma(A) \subseteq [0,a]$. Пусть при $n>0$ выполняются неравенства

$$\sup_{0\le\lambda\le a} |g_n(\lambda)| \le \gamma n, \tag{2}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le a} \lambda^p |1-\lambda g_n(\lambda)| \le \gamma_p n^{-p} \quad (0 \le p \le p_0), \tag{3}$$

где $\gamma, \gamma_p = \mathrm{const}$, $\gamma_0 = 1$, $p_0 > 0$. Наибольшее p_0, при котором (3) имеет место, называется квалификацией метода. Приближенное решение уравнения (I) строится по формуле

$$u_n = (I - A g_n(A))u_0 + g_n(A) f_\delta, \tag{4}$$

где I – единичный оператор, u_0 – начальное приближение.

Далее рассмотрим поподробнее следующие методы этого класса.

I. <u>Итерированный вариант метода Лаврентьева</u>. Зададим натуральное число $m \geqslant 1$ и начальное приближение $u_0 \in H$, вычислим m итераций

$$u_{n,\alpha} = (\alpha^{-1} I + A)^{-1} (\alpha^{-1} u_{n-1,\alpha} + f_\delta), \quad n = 1, 2, \ldots, m;$$
за приближенное решение уравнения (I) примем $u_\alpha = u_{m,\alpha}$. Это приближение имеет форму (4) с функцией

$$g_\alpha(\lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\alpha^{-j}}{(\alpha^{-1}+\lambda)^{j+1}} = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \frac{1}{(1+\alpha\lambda)^m}\right],$$

для которой условия (2) и (3) выполнены с $\gamma = m$, $\gamma_p = (p/m)^p (1 - p/m)^{m-p}$, $p_0 = m$. При $m = 1$, $u_0 = 0$ имеем дело с методом Лаврентьева:

$$u_\alpha = (\alpha^{-1} I + A)^{-1} f_\delta .$$

2. Неявный итерационный метод. Пусть $\alpha = \mathrm{const} > 0$. Рассмотрим итерации

$$(\alpha I + A) u_n = \alpha u_{n-1} + f_\delta, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

В качестве параметра регуляризации возьмем $\alpha = n$. Для $u_\alpha = u_n$ имеет место представление (4) с функцией

$$g_\alpha(\lambda) = \sum_{j=0}^{\alpha-1} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^j \frac{1}{\alpha+\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^\alpha\right],$$

для которой условия (2) и (3) выполнены с $\gamma = \alpha^{-1}$, $p_0 = \infty$; при $n \geq p$ имеем $\gamma_p = (\alpha p)^p$.

3. Явный итерационный метод. Пусть $\mu \in (0, 2/\|A\|)$. Рассмотрим итерации

$$u_n = u_{n-1} - \mu (A u_{n-1} - f_\delta), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Положив опять $\alpha = n$, $u_\alpha = u_n$, имеем для u_α представление (4) с функцией

$$g_\alpha(\lambda) = \sum_{j=0}^{\alpha-1} (1 - \lambda\mu)^j \mu = \frac{1}{\lambda}[1 - (1 - \lambda\mu)^\alpha],$$

для которой условия (2) и (3) выполнены с $\gamma = \mu$, $p_0 = \infty$; при $\mu \in (0, 1/\|A\|]$ имеем $\gamma_p = [p/(\mu e)]^p$.

Отметим, что для этих методов выполнены ещё следующие соотношения:

$$|1 - \lambda g_{\alpha_2}(\lambda)| \leq |1 - \lambda g_{\alpha_1}(\lambda)| \quad (0 \leq \lambda \leq a,\ 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2), \tag{5}$$

$$|g_\alpha(\lambda_1)| \leq |g_\alpha(\lambda_2)| \quad (\alpha \geq 0,\ 0 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 \leq a), \tag{6}$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq a} |g_\alpha(\lambda)| = g_\alpha(0) = \gamma\alpha, \tag{7}$$

$$\mathrm{sign}\,[(1 - \lambda g_{\alpha_1}(\lambda)) g_{\alpha_1}(\lambda)] =$$
$$= \mathrm{sign}\,[(1 - \lambda g_{\alpha_2}(\lambda)) g_{\alpha_2}(\lambda)] \quad (0 \leq \lambda \leq a,\ \alpha_1, \alpha_2 \geq 0). \tag{8}$$

Сформулируем теперь правило выбора параметра. Введем оператор B_n, который зависит от квалификации метода p_0, положив

$$B_n = \begin{cases} (I - Aq_n(A))^{\frac{1}{p_0}} & \text{при} \quad p_0 < \infty, \\ I & \text{при} \quad p_0 = \infty. \end{cases}$$

Правило II. Зададим числа $b_1 > 1$, $b_2 > b_1$. Если $\| B_0(Au_0 - f_\delta) \| \le b_2\delta$, то положим $n = 0$. В противном случае выберем такое $n > 0$, чтобы выполнялись неравенства

$$b_1\delta \le \| B_n(Au_n - f_\delta) \| \le b_2\delta. \tag{9}$$

Таким образом, в случае методов бесконечной квалификации параметр выбирается по обычному принципу невязки, основательно изученному во многих работах (см. [I] и литературу в ней); в случае методов конечной квалификации к невязке предварительно применяется оператор $(I - Aq_n(A))^{1/p_0}$. Отметим, что для метода Лаврентьева такой выбор параметра рекомендован в [2]. Сформулируем сперва один побочный результат.

Теорема I. Пусть $\| f_\delta - f \| \le \delta$, u_* – ближайшее к u_0 решение уравнения (I). Если $n = n(\delta)$ в приближении (4) выбран по правилу II, то

$$\delta\, n(\delta) \to 0, \quad \| u_{n(\delta)} - u_* \| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

В случае начальной погрешности

$$u_* - u_0 = A^p v, \quad \|v\| \le \rho, \quad 0 < p \le p_0, \tag{I0}$$

справедливы оценки

$$n(\delta) \le d_p\, \rho^{\frac{1}{p+1}}\, \delta^{-\frac{1}{p+1}},$$

$$\| u_{n(\delta)} - u_* \| \le c_p\, \rho^{\frac{1}{p+1}}\, \delta^{\frac{p}{p+1}}, \qquad 0 < p \le p_0,$$

где

$$d_p = \left(\frac{\bar{\gamma}_{p+1}}{b_1 - 1} \right)^{\frac{1}{p+1}}, \qquad c_p = (b_2 + 1)^{\frac{p}{p+1}} + \gamma d_p,$$

$$\bar{\gamma}_{p+1} = \begin{cases} \gamma_{p+1} & \text{при} \quad p_0 = \infty, \\ \left[\gamma_{p_0(p+1)/(p_0+1)} \right]^{1 + \frac{1}{p_0}} & \text{при} \quad p_0 < \infty. \end{cases}$$

В случае $p_0 = \infty$ теорема I была сформулирована и доказана в [I], в случае $p_0 < \infty$ доказательство проводится аналогично и здесь опускается.

Обсудим результат подробнее для итерированного варианта метода Лаврентьева. Понимая под u_n приближение $u_{m,n}$,

имеем $B_\alpha = \alpha^{-1}(\alpha^{-1}I + A)^{-1}$, $\quad B_\alpha(Au_\alpha - f_\delta) = Au_{m+1,\alpha} - f_\delta$.
Выбирая параметр $\alpha = \alpha(\delta)$ по правилу II, в случае начальной погрешности (I0) имеем

$$\|u_{m,\alpha(\delta)} - u_*\| \le c_{m,p}\, \rho^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}}, \quad 0 < p \le m, \tag{II}$$

где

$$c_{m,p} = (b_2+1)^{\frac{p}{p+1}} + m\left(\frac{\gamma_{m+1,p+1}}{b_1 - 1}\right)^{\frac{1}{p+1}},$$

так как $\bar\gamma_{m,p+1} = \gamma_{m+1,p+1}$. Правило II можно трактовать и как обычный принцип невязки для приближения $u_{m+1,\alpha}$ и в соответствии с результатом [I] имеем

$$\|u_{m+1,\alpha(\delta)} - u_*\| \le c_{m+1,p}\, \rho^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}}, \quad 0 < p \le m, \tag{I2}$$

где

$$c_{m+1,p} = (b_2+1)^{\frac{p}{p+1}} + (m+1)\left(\frac{\gamma_{m+1,p+1}}{b_1 - 1}\right)^{\frac{1}{p+1}}.$$

Поскольку $c_{m,p} \le c_{m+1,p}$ то, судя по оценкам (II), (I2) приближение $u_{m,\alpha(\delta)}$ более точное, чем $u_{m+1,\alpha(\delta)}$.

Для методов I–3 погрешность $\|u_{\alpha(\delta)} - u_*\|$ можно оценить через наименьшую погрешность метода с данным уровнем погрешности правой части, не прибегая к условию (I0). Под u_* понимаем, как и раньше, ближайшее к начальному приближению u_0 решение уравнения (I).

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\|f_\delta - f\| \le \delta$ и параметр $\alpha = \alpha(\delta)$ выбран по правилу II. Тогда для методов I, 2 имеет место оценка

$$\|u_{\alpha(\delta)} - u_*\| \le \max(c_{b_1}, c_{b_2}) \sup_{\|\tilde f - f\| \le \delta} \inf_\alpha \|\tilde u_\alpha - u_*\|, \tag{I3}$$

где

$$\tilde u_\alpha = (I - Ag_\alpha(A))u_0 + g_\alpha(A)\tilde f,$$

$$c_{b_1} = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{\gamma\bar\gamma_1}{b_1 - 1}\right)^2}, \quad c_{b_2} = \sqrt{\tau(c_*)}\,(b_2+1), \tag{I4}$$

c_* – решение уравнения

$$\sqrt{\tau(c)}\,(b_2+1) = \sqrt{1 + \eta(c)}, \tag{I5}$$

причём в случае метода I

$$\tau(c) = \left[m\,(c^{\frac{1}{m}} - 1)((m+1)c^{\frac{1}{m}} - m)\right]^{-1},$$
$$\eta(c) = c^2\,(m + 1 - mc^{-\frac{1}{m}})^{-1}, \tag{I6}$$

а в случае метода 2

$$\gamma(c) = (\ln c(1+\ln c))^{-1}, \quad \eta(c) = c^2(1+\ln c)^{-1}. \tag{I7}$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для метода 3 имеют место утверждения: если $n(\delta) \geq n_*(b_2)$, то

$$\|u_{n(\delta)} - u_*\| \leq \max(c_{b_1}, c_{b_2}(n(\delta))) \sup_{\|\tilde f - f\| \leq \delta} \inf_n \|\tilde u_n - u_*\|,$$

если $n(\delta) < n_*(b_2)$, то

$$\|u_{n(\delta)} - u_*\| \leq$$

$$\leq \max\{d(\beta, n(\delta))\gamma\delta,\ \max(c_{b_1}, c_{b_2}(\beta, n(\delta))) \sup_{\|\tilde f - f\| \leq \delta} \inf_n \|\tilde u_n - u_*\|\}.$$

Здесь

$$n_*(b_2) = \frac{\ln c_*}{2c_1}\left(1 + \sqrt{1+4c_1^2}\right),$$

$$c_{b_2}(n(\delta)) = \sqrt{c_1^2 + \frac{n^2(\delta)}{n^2(\delta) - (\ln c_*)^2}},$$

$$d(\beta, n(\delta)) = n(\delta) + c_1 \beta \ln c_*,$$

$$c_{b_2}(\beta, n(\delta)) = \begin{cases} \dfrac{\beta c_1 \ln c_* + n(\delta)}{n(\delta) + (\beta - 1)\ln c_*} & \text{при } n(\delta) \leq \ln c_*, \\[2ex] \dfrac{\beta c_1 \ln c_* + n(\delta)}{((\beta^2-1)(\ln c_*)^2 + n^2(\delta))^{1/2}} & \text{при } \ln c_* \leq n(\delta) \leq n_*(b_2), \end{cases}$$

$$c_1 = (b_2 + 1)/\sqrt{\ln c_* (\ln c_* + 1)},$$

c_* – решение уравнения

$$b_2 + 1 = c\sqrt{\ln c}, \quad c > 1,$$

константа c_{b_1} определена формулой (I4) и

β – произвольное вещественное число, такое, что $\beta > 1$.

Доказательству теорем 2 и 3 предпошлем две леммы.

Лемма I. Пусть выполнены условия (6)–(8). Тогда имеет место неравенство

$$\sup_{\|\tilde f - f\| \leq \delta} \inf_n \|\tilde u_n - u_*\|^2 \geq \inf_n \{\|(I - A g_n(A))(u_0 - u_*)\|^2 + \gamma^2 n^2 \delta^2\}. \tag{I8}$$

Доказательство. Имеем

$$\tilde u_n - u_* = (I - A g_n(A))(u_0 - u_*) + g_n(A)(\tilde f - f). \tag{I9}$$

Пусть ядро $N(A)$ нетривиально. Тогда при элементе f_0 таком, что $f_0 - f \in N(A)$, $\|f_0 - f\| = \delta$ в силу (7), (I9) и соотношения $u_0 - u_* \perp f_0 - f$ получим

$$\|\tilde{u}_n - u_*\|^2_{\tilde{f}=f_0} = \|(I - Ag_n(A))(u_0 - u_*)\|^2 + \gamma^2 n^2 \delta^2,$$

откуда вытекает неравенство (I8).

Пусть ядро $N(A)$ тривиально. Поскольку спектр оператора A имеет точку накопления в точке нуль,то можем с конструировать последовательность вещественных чисел $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant$ $\geqslant s_k \geqslant s_{k+1} \geqslant \ldots$ такую, что выполняются условия: $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = 0$; в каждом отрезке $[s_{k-1}, s_k]$ имеем по крайней мере одну точку спектра оператора A.

Пусть $P(\lambda)$ – спектральное семейство проекторов оператора A. В силу (8) и конструкции $\{s_k\}$ можем сконструировать последовательность $\{f_k\}$ такую, что $f_k - f \in P(s_k)H \ominus P(s_{k+1})H$, $\|f_k - f\| = \delta$ и

$$[g_n(A)(f_k - f), (I - Ag_n(A))(u_0 - u_*)]_H \geqslant 0$$

при каждом $n \geqslant 0$. Обозначая через n_k точку минимума функции $f(n) = \|(I - Ag_n(A))(u_0 - u_*)\|^2 + \|g_n(A)(f_k - f)\|^2$ (она для методов I–3 единственно), получим

$$\sup_{\|\tilde{f} - f\| \leqslant \delta} \inf_n \|\tilde{u}_n - u_*\|^2 \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \inf_n \|\tilde{u}_n - u_*\|^2_{\tilde{f}=f_k} \geqslant$$

$$\geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \inf_n \left\{\|(I - Ag_n(A))(u_0 - u_*)\|^2 + \|g_n(A)(f_k - f)\|^2\right\} = \qquad (20)$$

$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} \left\{\|(I - Ag_{n_k}(A))(u_0 - u_*)\|^2 + \|g_{n_k}(A)(f_k - f)\|^2\right\}.$$

Поскольку в силу (6), (7)

$$\lim_{k\to\infty} \|g_n(A)(f_k - f)\|^2 = \lim_{k\to\infty} \int_0^{\|A\|} g_n^2(\lambda)\, d\langle P(\lambda)(f_k - f), (f_k - f)\rangle =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{s_{k+1}}^{s_k} g_n^2(\lambda)\, d\langle P(\lambda)(f_k - f), (f_k - f)\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{k\to\infty} g_n^2(s_k) \int_{s_{k+1}}^{s_k} d\langle P(\lambda)(f_k - f), (f_k - f)\rangle =$$

$$= \lim_{k\to\infty} g_n^2(s_k)\delta^2 = \gamma^2 n^2 \delta^2$$

при каждом $n \geqslant 0$ и

$$\|g_n(A)(f_k - f)\|^2 \leqslant g_n^2(s_{k+1})\delta^2 \leqslant \|g_n(A)(f_{k+1} - f)\|^2, \quad (k = 1, 2 \ldots),$$

то $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = n_*$, где n_* – точна минимума функции $f(n) =$ $= \|(I - Ag_n(A))(u_0 - u_*)\|^2 + \gamma^2 n^2 \delta^2$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \left(\|(I - Ag_{n_k}(A))(u_0 - u_*)\|^2 + \|g_{n_k}(A)(f_k - f)\|^2\right) =$$

6

$$= \inf_n \left(\| (I - Aq_n(A))(u_0 - u_*)\|^2 + \gamma^2 n^2 \delta^2 \right),$$

что вместе с (20) доказывает лемму.

Лемма 2. Пусть $c > 1$, $n_1 \geqslant 0$. Тогда для методов I–3 при любом $v \in H$ и при любом n_2 таком, что $n_2 \geqslant n_1$, справедливо неравенство

$$\| (I - Aq_{n_1}(A))v\|^2 \leq$$

$$\leq \tau(c)\,\omega^2(n_2, n_1)\gamma^2 \|B_{n_1}(I - Aq_{n_1}(A))Av\|^2 + \eta(c)\|(I - Aq_{n_2}(A))v\|^2, \tag{21}$$

где

$$\omega(n_2, n_1) = \begin{cases} n_2 - n_1 & \text{для методов I, 2,} \\ n_2 - n_1 + \ln c & \text{для метода 3,} \end{cases}$$

а функции $\tau(c)$ и $\eta(c)$ для метода I определены формулами (I6), для методов 2, 3 – формулами (I7).

Доказательство. Достаточно показать, что

$$(1 - \lambda q_{n_1}(\lambda))^2 \leq$$

$$\leq \tau(c)\,\omega^2(n_2, n_1)\gamma^2 B^2_{n_1}(\lambda)(1 - \lambda q_{n_1}(\lambda))^2 \lambda^2 + \eta(c)(1 - \lambda q_{n_2}(\lambda))^2,$$

где

$$B_n(\lambda) = \begin{cases} (1 - \lambda q_n(\lambda))^{1 + \frac{1}{p_0}} & \text{при } p_0 < \infty, \\ 1 & \text{при } p_0 = \infty. \end{cases}$$

Проведем доказательство для метода I. Легко проверить, что функция

$$f(x) = m\left(c^{\frac{1}{m}}(c^{\frac{1}{m}} - 1)\right)^{-1}\left(\left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right)^2 + x^2$$

имеет на отрезке $[0, c]$ единственную точку минимума в точке $x = 1$ и

$$\min_{0 \leq x \leq c} f(x) = m + 1 - mc^{\frac{1}{m}}. \tag{22}$$

Тогда обозначая $x = c\,[(1 + n_1\lambda)/(1 + n_2\lambda)]^m$, получим

$$\tau(c)\,\omega^2(n_2, n_1)\gamma^2 B^2_{n_1}(\lambda)(1 - \lambda q_{n_1}(\lambda))^2 \lambda^2 +$$

$$+ \eta(c)(1 - \lambda q_{n_2}(\lambda))^2 = (1 + n_1\lambda)^{-2m}(m + 1 - mc^{-\frac{1}{m}})^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \frac{m(n_2 - n_1)^2 \lambda^2}{c^{\frac{1}{m}}(c^{\frac{1}{m}} - 1)(1 + n_1\lambda)^2} + c^2\left(\frac{1 + n_1\lambda}{1 + n_2\lambda}\right)^{2m} \right\} =$$

$$= (1 + n_1\lambda)^{-2m} = (1 - \lambda q_{n_1}(\lambda))^2.$$

Для метода I лемма доказана.

Для методов 2 и 3 доказательство проведем аналогично, используя в случае метода 2 вместо (22) соотношения

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^{2(n_2-n_1)} \geq e^{-2\lambda(n_2-n_1)/\alpha},$$

$$\min_{x\geq 0}\left\{(\ln c)^{-1}x^2+c^2e^{-2x}\right\}=1+\ln c \tag{23}$$

и обозначение $x=2\lambda(n_2-n_1)/\alpha$ для метода 3 используем соотношения

$$c^2 \geq \left(1+\ln c/(n_2-n_1)\right)^{2(n_2-n_1)},$$

$$\min_{0\leq x\leq 2}\left\{(\ln c)^{-1}(n_2-n_1+\ln c)^2x^2+\left(1+\ln c/(n_2-n_1)\right)^{2(n_2-n_1)}\times\right.$$
$$\left.\times(1+x)^{2(n_2-n_1)}\right\}=1+\ln c \tag{24}$$

и обозначение $x=\mu\lambda$. Отметим, что в случае (23) минимум достигается в точке $x=\ln c$, а в случае (24) – в точке $x=1-(n_2-n_1)/(n_2-n_1+\ln c)$.

Доказательство теоремы 2. Имеем

$$u_n-u_* = (I-Ag_n(A))(u_0-u_*)+g_n(A)(f_\delta-f), \tag{25}$$

$$B_n(Au_n-f_\delta)=B_n(I-Ag_n(A))A(u_0-u_*)-$$
$$-B_n(I-Ag_n(A))(f_\delta-f). \tag{26}$$

Из (2), (3) следует, что

$$\|g_n(A)(f_\delta-f)\|\leq\gamma n\delta, \tag{27}$$

$$\|B_n(I-Ag_n(A))\|\leq 1. \tag{28}$$

Для определяемого по правилу П $n=n(\delta)$ на основании (9), (28) имеем

$$\|B_{n(\delta)}(I-Ag_{n(\delta)}(A))A(u_0-u_*)\|\leq(b_2+1)\delta, \tag{29}$$

$$\|B_{n(\delta)}(I-Ag_{n(\delta)}(A))A(u_0-u_*)\|\geq(b_1-1)\delta. \tag{30}$$

Поскольку для методов I, 2 выполнены условия (6)-(8), то из лемма I и (25), (27) следует, что

$$\|u_{n(\delta)}-u_*\|\leq$$
$$\leq\frac{\|(I-Ag_{n(\delta)}(A))(u_0-u_*)\|+\gamma n(\delta)\delta}{\left(\inf_n\left\{\|(I-Ag_n(A))(u_0-u_*)\|^2+\gamma^2n^2\delta^2\right\}\right)^{1/2}}\times\sup_{\|\tilde f-f\|\leq\delta}\inf_n\|\tilde u_n-u_*\|. \tag{31}$$

Обозначим через n_* значение параметра, при котором функция $f(n)=\|(I-Ag_n(A))(u_0-u_*)\|^2+\gamma^2n^2\delta^2$ достигает минимума.

Предположим сначала, что $n_*\leq n(\delta)$. Тогда в силу (5)

$$\|(I-Aq_{n(\delta)}(A))(u_0-u_*)\| \le \|(I-Aq_{n_*}(A))(u_0-u_*)\|. \tag{32}$$

Элементарный счет при $n_* \le n(\delta)$ дает для методов I–3

$$\|B_{n(\delta)}(I-Aq_{n(\delta)}(A))A(I-Aq_{n_*}(A))^{-1}\| \le$$

$$\le \max_{\lambda\ge 0} B_{n(\delta)}(\lambda)(1-\lambda q_{n(\delta)}(\lambda))\lambda(1-\lambda q_{n_*}(\lambda))^{-1} \le \bar{\gamma}_1/(n(\delta)-n_*).$$

Поэтому

$$\|B_{n(\delta)}(I-Aq_{n(\delta)}(A))A(u_0-u_*)\| \le$$

$$\le \gamma_1 (n(\delta)-n_*)^{-1} \|(I-Aq_{n_*}(A))(u_0-u_*)\|,$$

откуда на основании (30) получим

$$\|(I-Aq_{n_*}(A))(u_0-u_*)\| \ge \bar{\gamma}_1^{-1}(n(\delta)-n_*)(b_1-1)\delta. \tag{33}$$

В силу (31)–(33) после несложных вычислений получим теперь

$$\frac{\|(I-Aq_{n(\delta)}(A))(u_0-u_*)\| + \gamma n(\delta)\delta}{\left(\inf_n \{\|(I-Aq_n(A))(u_0-u_*)\|^2 + \gamma^2 n^2\delta^2\right)^{1/2}} \le$$

$$\le \max_{n_*,\ n_*\le n(\delta)} \ \max_{y,\ y\ge\bar{\gamma}_1^{-1}(n(\delta)-n_*)(b_1-1)\delta} \frac{y+\gamma n(\delta)\delta}{\sqrt{y^2+\gamma^2 n_*^2\delta^2}} =$$

$$= \sqrt{1+\left(1+\frac{\bar{\gamma}_1\gamma}{b_1-1}\right)^2} = c_{b_1},$$

$$\|u_{n(\delta)}-u_*\| \le c_{b_1} \sup_{\|\tilde{f}-f\|\le\delta} \inf_n \|\tilde{u}_n - u_*\|. \tag{34}$$

Предположим теперь, что $n(\delta)\le n_*$. Так как $c_* > 1$ при $b_2 > 1$, где c_* – решение уравнения (15), то выбрав в лемме 2 $c=c_*$, с помощью (29) получим

$$\|(I-Aq_{n(\delta)}(A))(u_0-u_*)\|^2 \le$$

$$\le J(c_*)(n_*-n(\delta))^2\gamma^2(b_2+1)^2\delta^2 + \eta(c_*)\|(I-Aq_{n_*}(A))(u_0-u_*)\|^2.$$

Поскольку на основании последнего неравенства

$$\frac{\|(I-Aq_{n(\delta)}(A))(u_0-u_*)\| + \gamma n(\delta)\delta}{\left(\inf_n \{\|(I-Aq_n(A))(u_0-u_*)\|^2 + \gamma^2 n^2\delta^2\}\right)^{1/2}} \le$$

$$\le \max_{n_*,\ n_*\ge n(\delta)} \ \max_{y\ge 0} \frac{\sqrt{J(c_*)(n_*-n(\delta))^2(b_2+1)^2+\eta(c_*)y^2}+n(\delta)}{\sqrt{y^2+n^2}};$$

$$\leq \max\left(\sqrt{J(c_*)}\,(l_2+1),\ \sqrt{\eta(c_*)+1}\right) - c_{l_2},$$

то в силу (31) получим

$$\|u_{n(\delta)} - u_*\| \leq c_{l_2} \sup_{\|\tilde f - f\| \leq \delta} \inf_n \|\tilde u_n - u_*\|,$$

что вместе с (34) доказывает теорему.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2. Отметим только, что при доказательстве используем следующее утверждение: если $c > 0$, $c_1 > 1$, $n_0 \geq 0$, $\beta > 1$ и $f(y,n) = (c_1\sqrt{(n-n_0+c)^2+y} + n_0)/\sqrt{y+n^2}$, то при $n_0 \geq \bar n_*(c,c_1) = c(1+\sqrt{1+4c_1^2})/2c_1$ имеет место равенство

$$\max_{n \geq n_0,\ y \geq 0} f(y,n) = \sqrt{c_1^2 + n_0^2/(n_0^2 - c^2)}$$

и при $n_0 < \bar n_*(c,c_1)$ равенство

$$\max_{n \geq n_0,\ y \geq 0,\ (n-n_0+c)^2 + y \geq \beta^2 c^2} f(y,n) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\beta c_1 c + n_0}{(\beta-1)c + n_0} & \text{при} \quad n_0 \leq c, \\[2ex] \dfrac{\beta c_1 c + n_0}{\sqrt{(\beta^2-1)c^2 + n_0^2}} & \text{при} \quad c < n_0 < \bar n_*(c,c_1). \end{cases}$$

Без доказательства отметим, что в условиях теоремы 2 оценка (13) имеет место ещё для методов спектральной срезки и для метода задачи Коши. В случае методов спектральной срезки

$$u_n = A^{-1}(I - P(\tfrac{1}{n}))f_\delta \tag{35}$$

или

$$u_n = A^{-1}(I - P(\tfrac{1}{n}))f_\delta + nP(\tfrac{1}{n})f_\delta \tag{36}$$

коэффициенты c_{l_1} и c_{l_2} выражаются соответственно

$$c_{l_1} = l_1/\sqrt{l_1^2 - 1}, \qquad c_{l_2} = l_2 + 1,$$

$$c_{l_1} = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(1 + \frac{1}{2(l_1-1)}\right)^2}, \quad c_{l_2} = \sqrt{1+c_*}\,(l_2+1) + 1,$$

где c_* – решение уравнения

$$(1+c)(l_2+1)^2 + \sqrt{1+c}\,(l_2+1) = 1 + 1/c.$$

Для метода задачи Коши (см. [1], стр. 27) коэффициенты c_{l_1} и c_{l_2} определены формулами (14), (15), (17).

В таблице 2 приведена зависимость коэффициентов от $l = l_1 = l_2$ для метода 3, в таблице 1 для остальных методов.

В таблице I подчеркнуты наименьшие значения коэффициента $c = \max(c_{\ell_1}, c_{\ell_2})$ для данного метода.

Т а б л и ц а I

Метод \ ℓ	I,I4	I,22	I,53	2,06	3,00	I0,00
Лаврентьева ($m=1$)	2,96	2,36	<u>I,78</u>	I,87	2,0I	2,87
итер. неявн.	8,2I	5,64	3,06	<u>2,I8</u>	2,46	4,46
задачи Коши	3,77	2,85	<u>2,00</u>	2,I8	2,46	4,46
спектр. срезки (35)	<u>2,I4</u>	2,22	2,53	3,06	4,00	II,00
спектр. срезки (36)	4,60	<u>3,37</u>	3,67	4,I9	5,I0	I2,05

Т а б л и ц а 2

ℓ	$n_*(\ell)$	c_{ℓ_1}	$n(\delta)\geq 5$	$n(\delta)=2$	$n(\delta)=1,\ \beta=2$		$n(\delta)=1,\ \beta=1$	
			$c_{\ell_2}(n(\delta))$	$c_{\ell_2}(n(\delta))$	$c_{\ell_2}(\beta,n(\delta))$	$d(\beta,n(\delta))$	$c_{\ell_2}(\beta,n(\delta))$	$d(\beta,n(\delta))$
I,30	I,I9	2,44	2,04	2,09	2,24	4,I4	2,57	2,57
I,70	I,28	I,83	2,I7	2,24	2,43	4,84	2,92	2,92
2,I0	I,39	I,66	2,30	2,38	2,56	5,46	3,23	3,23
3,00	I,57	I,55	2,57	2,69	2,89	6,98	3,99	3,99

Литература

I. В а й н и к к о Г. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту, ТГУ, I982.

2. М о р о з о в В.А. О регуляризирующих семействах операторов. Вычислительные Методы и программирование. Вып. 8. Москва, МГУ, I967, 63-95:

Поступило
4 II I984

RESIDUE PRINCIPLE FOR ILL-POSED PROBLEMS

T. Raus

Summary

A modification of residue principle for ill-posed problems is studied. Error estimations are deduced without requirement of smoothness of solution.

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1984,672,27-34

ПРИНЦИП НЕВЯЗКИ ВЫБОРА РАЗМЕРНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ПРОЕКЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

У. Хямарик

1. Введение. Для решения операторного уравнения

$$Au = f \tag{1}$$

на ЭВМ оно дискретизируется. При некорректно поставленных задачах необходима и регуляризация [6]. Эти процедуры можно объединить, если удается найти корректную дискретизацию первоначального уравнения, т.е. если решение u_n дискретизированного уравнения сходится к (нормальному) решению u_* исходного уравнения при $n \to \infty$. Тогда при правильном согласовании размерности n дискретизированного уравнения с уровнями погрешностей η и δ оператора A и правой части f происходит саморегуляризация: $u_{n(\delta,\eta)} \to u_*$ при $\delta, \eta \to 0$.

Условия саморегуляризации уравнения (1) проекционными методами с априорным выбором размерности n исследовались в [8, 11, 12]. Проекционные методы с апостериорным выбором n изучены в [2, 3]. Принцип невязки выбора n в методе спектральной срезки обоснован в [1]. В настоящей статье изучается принцип невязки выбора размерности уравнений, спроектированных методами [8].

2. Задача и проекционные методы. Пусть H и F гильбертовы пространства, $A \in \mathcal{L}(H,F)$ – вполне непрерывный оператор с, вообще говоря, нетривиальным $\mathcal{N}(A)$, а $f \in \mathcal{R}(A)$. Пусть вместо A и f известны приближения $A_\eta \in \mathcal{L}(H,F)$ и f_δ такие, что $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|f_\delta - f\| \le \delta$.

Для решения уравнения (1) используем проекционные методы [8]. Выбираем n-мерные подпространства $H_n \subset H$ и $F_n \subset F$ с соответствующими ортопроекторами P_n и Q_n. В качестве приближённого решения (1) берём $u_n \in H_n$ такое, что

$$Q_n A_\eta P_n u_n = Q_n f_\delta . \tag{2}$$

Обозначим $\varkappa_n = \|(Q_n A P_n)^{-1} Q_n\|$ и $\varkappa_{n,\eta} = \|(Q_n A_\eta P_n)^{-1} Q_n\|$, считая их бесконечными при отсутствии соответствующего обратного оператора. Укажем одну возможность нахождения величин $\gamma_{n,\eta}$. После выбора базиса H_n или F_n уравнение (2) представляет собой систему линейных уравнений. При ортонормированном базисе минимальное собственное значение μ_n матрицы системы совпадает с величиной $\gamma_{n,\eta}^{-1/2}$ в методах наименьших квадратов и наименьшей ошибки, с величиной $\gamma_{n,\eta}^{-1}$ в методе Галеркина. Значение μ_n может быть найдено одновременно с решением системы итерационными методами (см. напр. [7].

3. <u>Правила выбора размерности по невязке. Правило П1</u>. Зададим числа $b>1$, $b_*\geq\|u_*\|$ и $\Theta\in(0,1)$. Если при $n=1$

$$\|A_\eta u_n - f_\delta\| \leq b(\delta + b_*\eta), \tag{3}$$

то положим $n=1$. В противном случае выбираем любое такое n, что (3) выполнено, но для некоторого $m\in[\Theta n,\ n]$

$$\|A_\eta u_m - f_\delta\| > b(\delta + b_*\eta). \tag{4}$$

<u>Правило П2</u>. Зададим числа $b>1$, $b_*\geq\|u_*\|$, $d>0$ и $\Theta\in(0,1)$. Если при $n=1$ выполнено хотя бы одно из неравенств (3) и

$$\gamma_{n,\eta}\cdot\eta \geq d, \tag{5}$$

то положим $n=1$. В противном случае выбираем любое такое n, что выполнено (3) или (5), но для некоторого $m\in[\Theta n,\ n]$ выполнено (4) и

$$\gamma_{m,\eta}\cdot\eta \leq d. \tag{6}$$

<u>Правило П3</u>. Зададим числа $b>1$, $d>0$, $\Theta\in(0,1)$. Если при $n=1$ выполнено хотя бы одно из неравенств (5) и

$$\|A_\eta u_n - f_\delta\| \leq b(\delta + \|u_n\|\eta), \tag{7}$$

то положим $n=1$. В противном случае выбираем любое такое n, что выполнено (5) или (7), но для некоторого $m\in[\Theta n,\ n]$ выполнено (6) и

$$\|A_\eta u_m - f_\delta\| > b(\delta + \|u_m\|\eta). \tag{8}$$

4. <u>Условия регуляризации.</u> Приведём условия, при которых проекционные методы [8] с правилами П1-П3 выбора размерности n уравнения (2) определяют регуляризующие алгоритмы и имеют место стремления

$$(\delta+\eta)\gamma_{n(\delta,\eta)} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta,\eta\to 0, \tag{9}$$

$$\|u_{n(\delta,\eta)} - u_*\| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta,\eta\to 0. \tag{10}$$

Буквами c, c_i обозначим в дальнейшем постоянные, не зависящие от n. В разных местах значения c, вообще говоря, разные, но c_i совпадают.

Теорема I. Пусть уравнение (I) решается методом наименьших квадратов ($F_n = A_\eta H_n$; тогда $\gamma_n = \sup\{\|u_n\|/\|Au_n\|,\ u_n \in H_n\}$). Пусть $H_n \cap \mathcal{N}(A) = \{0\}$ и $P_n u \to u$ для $u \in \overline{\mathcal{R}(A^*)}$ при $n \to \infty$. Предположим, что

$$\|(I - P_n) A^*\| \cdot \gamma_n \leq c. \tag{II}$$

Тогда утверждения (9), (IO) имеют место при выборе n по любому из правил ПI, П2, П3.

Теорема 2. Пусть $F = H$, $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$ и уравнение (I) решается методом Галеркина ($F_n = H_n$; тогда $\gamma_n = \sup\{\|u_n\|^2/(Au_n, u_n),\ u_n \in H_n\}$). Пусть $H_n \cap \mathcal{N}(A) = \{0\}$ и $P_n u \to u$ для $u \in \overline{\mathcal{R}(A)}$ при $n \to \infty$. Предполагаем, что

$$\|(I - P_n) A^{1/2}\| \cdot \gamma_n^{1/2} \leq c_1. \tag{I2}$$

Тогда утверждения (9), (IO) имеют место при выборе n :

I) по правилу ПI, если $A_\eta = A$ и $b > c_1 + 1$;

2) по правилам П2 или П3, если $b > c_1 + 2 + 2(c_1 + 1) d^{1/2}$.

Теорема 3. Пусть уравнение (I) решается методом наименьшей ошибки ($H_n = A_\eta^* F_n$; тогда $\gamma_n = \sup\{\|f_n\|/\|A^* f_n\|,\ f_n \in F_n\}$). Пусть $F_n \cap \mathcal{N}(A^*) = \{0\}$ и $Q_n f \to f$ для $f \in \overline{\mathcal{R}(A)}$ при $n \to \infty$. Предполагаем, что

$$\|A(I - Q_n)\| \cdot \gamma_n \leq c_2. \tag{I3}$$

Тогда утверждения (9), (IO) имеют место при выборе n :

I) по правилу ПI, если $A_\eta = A$ и $b > c_2 + 1$;

2) по правилам П2 или П3, если $b > 2c_2 + 2 + (c_2 + 1) d$.

5. Приложения. В обозначении пространств $L_2 = L_2[0, 1]$ и т.п. отрезок [0, 1] везде опускаем. Для $A: L_2 \to L_2$ сопряженный оператор будем обозначать через $A^* = A^T: L_2 \to L_2$, подчеркивая этим, что сопряжение берется относительно пары пространств L_2, L_2. Скажем, что оператор $A: L_2 \to L_2$ имеет индекс сглаживания l, если A является гомоморфизмом из L_2 в V^l, где V^l такое замкнутое подпространство пространства Соболева H^l,

что $\mathring{H}^\ell \subseteq V^\ell \subseteq H^\ell$. Обозначим через S_n^κ подпространство сплайнов на $[0, 1]$ порядка $\kappa-1$ с узлами $t_i = i/n$, $i=0,\dots,n$.

Предложение I. Если транспонированный оператор A^T имеет индекс сглаживания ℓ, то в методе наименьших квадратов для уравнения (I) с $H_n = S_n^\kappa$ справедливо $\vartheta_n \asymp n^\ell$. При $\kappa \geqslant \ell$ выполнено условие (II).

Предложение 2. Если оператор A имеет индекс сглаживания ℓ, то в методе наименьшей ошибки для уравнения (I) с $F_n = S_n^\kappa$ справедливо $\vartheta_n \asymp n^\ell$. При $\kappa > \ell$ выполнено условие (I3).

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра I рода

$Au(t) \equiv \int_0^t \mathcal{K}(t,s)\,(t-s)^{\ell-1} u(s)ds = f(t)$ с оператором $A: L_2 \to L_2$.

Здесь ℓ - положительное целое число. Пусть $\mathcal{K}(t,t)>0$ при каждом $t\in[0,1]$. Тогда оператор A (или A^T) имеет индекс сглаживания ℓ, если ограничены функции $\frac{\partial^i \mathcal{K}(t,s)}{\partial t^i}(t-s)^{i-1}$, $i=1,\dots,\ell$, $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ (соответственно $\frac{\partial^i \mathcal{K}(t,s)}{\partial s^i}(s-t)^{i-1}$, $i=1,\dots,\ell$, $0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$). Действительно, в этих условиях ℓ-кратным дифференцированием уравнения (I) (или $A^T v = u$) получаем уравнение, имеющее единственное решение, следовательно

$$\mathcal{R}(A) = \{v(t) \mid v(t)\in H^\ell,\quad v^{(i)}(0)=0,\quad i=0,\dots,\ell-1\}$$

$$(\mathcal{R}(A^T) = \{v(t) \mid v(t)\in H^\ell,\quad v^{(i)}(1)=0,\quad i=0,\dots,\ell-1\}).$$

6. Доказательство теоремы I. Согласно [8], в условиях теоремы I при $\eta\vartheta_n<1$ справедлива оценка

$$\|u_n-u_*\| \leqslant c\,[\|(I-P_n)u_*\| + (\delta+\eta)\vartheta_n]. \tag{I4}$$

В силу (II) для невязки имеем

$$\|A_\eta u_n - f_\delta\| = \min\{\|A_\eta a_n - f_\delta\|,\ a_n\in H_n\} \leqslant \|A_\eta P_n u_* - f_\delta\| \leqslant \|A(P_n-I)^2 u_*\| +$$
$$+ \|(A_\eta - A)P_n u_*\| + \|f-f_\delta\| \leqslant c\,\vartheta_n^{-1}\|(P_n-I)u_*\| + \eta\|u_*\| + \delta \tag{I5}$$

Случай правила III. Если правило III выдает $n\leqslant const$ при всех $\delta,\eta>0$, то утверждения (9), (I0) тривиальны. Пусть правило III дает n и $m\in[\theta n, n]$, $n(\delta,\eta)\to\infty$ при $\delta,\eta\to 0$. Из (4) и (I5) получим $\vartheta_m(\delta+\eta b_*) \leqslant$ $\leqslant c(b-1)^{-1}\|(P_m-I)u_*\|$, откуда с учётом $n\leqslant m/\theta$ вытекает стремление (9), а в силу (I4) также (I0).

С л у ч а й п р а в и л а П2. При малых δ, η правило П2 работает как правило П1, так как по (9) и неравенству $\gamma_{n,\eta} \le \gamma_n/(1-\eta\gamma_n)$ при $\eta\gamma_n<1$ (см. [8]) условие (3) менее ограничительно, чем (5).

С л у ч а й п р а в и л а П3. Сперва докажем от противного, что

$$\varliminf_{n\to\infty,\ \delta\to 0,\ \eta\to 0} \|u_n\| > \|u_*\|. \tag{16}$$

Если $\lim \|u_{n_k}\| \le \|u_*\|$ при $n_k\to\infty$, $\delta_{n_k}\to 0$, то $\{u_{n_k}\}$ слабо компактно, т.е. $\exists u'$: $u_{n_k} \rightharpoonup u'$ при $n_k\to\infty$. Так как $Au_{n_k}\to f$ при $n_k\to\infty$, то $Au'=f$. В силу слабой сходимости $\|u'\| \le \le \varliminf \|u_{n_k}\| \le \|u_*\|$. Это противоречие к определению u_* как нормального решения (1) доказывает (16). Согласно (16) при больших n выполняется неравенство (7). Пусть правило П3 выдает n и $m\in[\theta n, n]$. Докажем от противного равносильное (9) утверждение $\gamma_{m(\delta,\eta)}(\delta+\eta)\to 0$ при $\delta,\eta\to 0$. Если $\gamma_m(\delta+\eta)\ge c$, то $\gamma_m^{-1}\|(I-P_m)u_*\|/(\delta+\eta)\to 0$ при $\delta,\eta\to 0$. При малых δ и η это противоречит по (15) и (16) неравенству (8). Утверждение (9) доказано, утверждение (10) следует из (14).

7. <u>Доказательство теоремы 2.</u> Согласно [8], в условиях теоремы 2 при $\eta\gamma_n<1$ справедлива оценка (14). Обозначим $A_{\eta,n}=P_nA_\eta P_n$. Учитывая (2) и то, что метод Галеркина для уравнения $A_\eta u=A_\eta u_*$ минимизирует $\|A_\eta^{1/2}(v_n-u_*)\|$, $v_n\in H_n$, оценим невязку:

$$\|A_\eta u_n-f_\delta\| = \|(I-P_n)(A_\eta u_n-f_\delta)\| \le \|(I-P_n)A_\eta(A_{\eta,n}^{-1}P_nA_\eta u_*-u_*)\| +$$
$$+\|(I-P_n)(A_\eta A_{\eta,n}^{-1}P_n-I)\|\,\|f_\delta-A_\eta u_*\| \le \|(I-P_n)A_\eta^{1/2}\|\,\|A_\eta^{1/2}(P_n-I)u_*\|+$$
$$+\{\|(I-P_n)A_\eta^{1/2}\|\,\|A_\eta^{1/2}P_nA_{\eta,n}^{-1}\|+1\}(\delta+\eta\|u_*\|). \tag{17}$$

Из (12) и оценки $\|A_\eta^{1/2}-A^{1/2}\| \le 2\eta^{1/2}$ (см. [1]) имеем $\|(I-P_n)A_\eta^{1/2}\| \le c_1\gamma_n^{-1/2}+2\eta^{1/2}$, а также $\|(I-P_n)A_\eta^{1/2}\|^2 = =\|(I-P_n)A_\eta(I-P_n)\| \le \|(I-P_n)A^{1/2}\|^2+\|A-A_\eta\| \le c_1^2\gamma_n^{-1}+\eta$. Из (17) ввиду этих оценок и равенства $\|A_\eta^{1/2}P_nA_{\eta,n}^{-1}\|=\gamma_{n,\eta}^{1/2}$ (см. [8]) получим

$$\|A_\eta u_n-f_\delta\| \le (c_1^2\gamma_n^{-1}+\eta)\,\|(I-P_n)u_*\| +$$
$$+\{1+(c_1\gamma_n^{-1/2}+2\eta^{1/2})\gamma_{n,\eta}^{1/2}\}(\delta+\eta\|u_*\|). \tag{18}$$

С л у ч а й п р а в и л а П2. Пусть правило П2 выдает n и $m\in[\Theta n, n]$. Из (4), (6), (I8) и неравенства $\vartheta_{m,\eta}^{1/2}/\vartheta_m^{1/2}\le$ $\le 1+2\eta^{1/2}\vartheta_{m,\eta}^{1/2}$, которое вытекает из оценки $\|A_\eta^{1/2}-A^{1/2}\|\le 2\eta^{1/2}$, имеем $(b-c_1-2-2(c_1+1)d^{1/2})\vartheta_m(\delta+\eta b_*)\le c_1^2\,\|(I-P_m)u_*\|$. Ввиду $n\le m/\Theta$ отсюда следует стремление (9), но с учётом (I4) и утверждение (I0).

В с л у ч а е п р а в и л а П3 теорема 2 доказывается аналогично теореме I.

С л у ч а й п р а в и л а П1. При $A_\eta=A$ повторение выкладок при оценке невязки дает вместо (I8) оценку $\|Au_n-f_\delta\|\le c_1^2\cdot\vartheta_n^{-1}\|(I-P_n)u_*\|+(c_1+1)\delta$. Дальнейшее доказательство теоремы аналогично случаю правила П2.

8. <u>Доказательство теоремы 3.</u> Согласно [8], в условиях теоремы 3 при $\eta\vartheta_n<1$ справедлива оценка (I4). Обозначим $A_{\eta,n}=Q_nA_\eta$. По (2) имеем

$$\|A_\eta u_n-f_\delta\|=\|(I-Q_n)(A_\eta u_n-f_\delta)\|\le\|(I-Q_n)A_\eta\|\,\|A_{\eta,n}^{-1}Q_nA_\eta u_*-u_*\|+$$
$$+\{\|(I-Q_n)A_\eta\|\,\|A_{\eta,n}^{-1}Q_n\|+1\}\,(\delta+\eta\|u_*\|). \tag{19}$$

В силу (I3) справедливо $\|(I-Q_n)A_\eta\|\le c_2\vartheta_n^{-1}+\eta$. По (I9) и оценкам $\|(A_{\eta,n}^{-1}Q_nA_\eta-I)u_*\|\le\|(P_n-I)u_*\|+\eta\vartheta_n\|u_*\|$ и $\|(A_{\eta,n}^{-1}Q_nA_\eta-I)u_*\|\le\|u_*\|$ (см. [8]) получим

$$\|A_\eta u_n-f_\delta\|\le c_2\vartheta_n^{-1}\|(I-P_n)u_*\|+(c_2+1)\eta\|u_*\|+$$
$$+\{1+(c_2\vartheta_n^{-1}+\eta)\vartheta_{n,\eta}\}\,(\delta+\eta\|u_*\|). \tag{20}$$

С л у ч а й п р а в и л а П2. Пусть правило П2 дает n и $m\in[\Theta n,n]$. Из (4), (6), (20) и неравенства $\vartheta_{m,\eta}/\vartheta_m\le$ $\le 1+\eta\vartheta_{m,\eta}$ имеем $[b-2c_2-2-(c_2+1)d]\,\vartheta_m(\delta+\eta b_*)\le$ $\le c_2\|(I-P_m)u_*\|$. Ввиду $n\le m/\Theta$ отсюда следует (9), но с учетом (I4) и утверждение (I0).

В с л у ч а е п р а в и л а П3 теорема 3 доказывается аналогично к теореме I.

В с л у ч а е п р а в и л а П1 доказательство теоремы 3 аналогично случаю правила П2, вместо (20) используется неравенство $\|Au_n-f_\delta\|\le c_2\vartheta_n^{-1}\|(I-P_n)u_*\|+(c_2+1)\delta$, имеющее место при $A_\eta=A$.

9. <u>Доказательство предложения I.</u> Так как A^T гомеоморфизм из L_2 в V^ℓ, то легко видеть, что A является гомеоморфизмом из $(V^\ell)^*$ в L_2, где пространство $(V^\ell)^*$ снабжено нормой $\|u\|_{(V^\ell)^*} = \sup \{ |(u, v)|, \ v \in V^\ell, \ \|v\|_{H^\ell} = 1 \}$. С учётом $\mathring{H}^\ell \subseteq V^\ell$ имеем

$$c\|Au_n\|_{L_2} \geqslant \|u_n\|_{(V^\ell)^*} \geqslant \sup \{ |(u_n, v_n)|, \ v_n \in \mathring{H}^\ell, \ \|v_n\|_{H^\ell} = 1 \} = \|u_n\|_{H^{-\ell}}.$$

Согласно [5], пространства S_n^k обладают свойством $\|u_n\|_{H^{-\ell}} \geqslant$ $\geqslant c n^\ell \|u_n\|_{L_2}$. Из этих соотношении вытекает свойство $\|Au_n\|_{L_2} \geqslant c n^\ell \|u_n\|_{L_2}$, т.е. $\gamma_n \leqslant c n^\ell$. Согласно [10] (стр.159), $\gamma_n \geqslant \lambda_n^{-1}$, где λ_n есть n -ое сингулярное число оператора A. Из свойства $\mathcal{R}(A^T) \subseteq H^\ell$ вытекает $\lambda_n \leqslant c\, n^{-\ell}$ (см. [4], стр. 196), поэтому $\gamma_n \asymp n^\ell$. Так как $A^* w \in H^\ell$ при $w \in L_2$ и пространства $H_n = S_n^k$ обладают свойством $\|(I - P_n) w\| \leqslant c_w n^{-k}$ при $w \in H^k$ (см. [5]), то $\|(I - P_n) A^*\| \leqslant c\, n^{-\ell}$ при $k \geqslant \ell$ и условие (II) выполнено. Предложение I доказано.

Доказательство предложения 2 отличается от доказательства предложения I главным образом тем, что величины A, u_n, H_n, P_n заменены величинами A^*, f_n, F_n и Q_n.

В заключение отметим, что в [9] изучена дополнительная регуляризация уравнений, спроектированных методами [8].

Автор выражает глубокую благодарность Г.Вайникко за руководство работой.

Литература

I. В а й н и к к о Г. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту, ТГУ, 1982.

2. Г а п о н е н к о А.Л., Г а п о н е н к о Ю.Л. Об одном методе регуляризации для операторных уравнений I рода. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, 16, № 3, 577-584.

3. Д е н и с о в А.М. Метод решения уравнений I рода в гильбертовом пространстве. Докл. АН СССР, 1984, 274, № 3, 528-530.

4. К р е й н С.Г. и др. Функциональный анализ СМБ. Москва, Наука, 1972.

5. О б э н Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. Москва, Мир, 1977.

6. Т и х о н о в А.Н., А р с е н и н В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва, Наука, 1979.
7. Т р у ш н и к о в В.Н. Итеративные методы, решающие одновременно частичную проблему собственных значений и систему линейных алгебраических уравнений. Докл. АН СССР, 1983, 273, № 3, 540-542.
8. Х я м а р и к У.А. Проекционные методы для регуляризации линейных некорректных задач. Труды ВЦ ТГУ, 1983, № 50, 69-90.
9. Х я м а р и к У. Регуляризованные проекционные методы для некорректных задач. Изв. АН Эст.ССР, Физ. мат., 1984, 33, № 2.
10. F r i e d r i c h s, K.O. Spectral theory of operators in Hilbert space. New York -Heidelberg-Berlin, Springer-Verlag, 1980.
11. N a t t e r e r, F. Regularisierung schlecht gestellter Probleme durch Projektionsverfahren. Numer. Math., 1977, 28, № 3, 329-341.
12. R i c h t e r, G.R. Numerical solution of integral equations of the first kind with nonsmooth kernels. SIAM J. Numer. Anal., 1978, 15, № 3, 511-522.

Поступило
II III 1984

RESIDUE PRINCIPLE FOR CHOICE OF DIMENSION SOLVING ILL-POSED PROBLEMS BY PROJECTION METHODS

U. Hämarik

Summary

This article deals with solving ill-posed problem by projection methods. The rules are given for choosing appropriate dimension according to discrepancy. Conditions are stated by which projection methods with offeded rules of dimension choosing are regularization algorithms.

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1984,672,35-39

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОПЕРАТОРНЫХ ИТЕРАЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОГРЕШНОСТИ ОКРУГЛЕНИЯ

А. Минц

В настоящей работе исследуется влияние погрешности округления на близость приближенного решения операторного уравнения к точному, если для вычисления очередного приближения применяется метод операторных итераций.

Уравнение

$$Au=f, \tag{I}$$

где A – самосопряженный неотрицательный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H, решается методом операторных итераций

$$B_k=B_{k-1}(2I-AB_{k-1}),\ B_0=g(A). \tag{2}$$

Здесь $g(\lambda)\in C[0;1],\ 0\le g(\lambda)\le 2/\lambda,\ \|A\|\le 1$, причём приближение к решению (I) вычисляется следующим образом:

$$u_n=(I-AB_k)u_0+B_kf, \qquad \text{где } u_0\in H,\ n=2^k.$$

Предположим, что на каждом шаге итераций (2) делается ошибка с нормой, не превосходящей некоторого числа, которое будем называть погрешностью округления:

$$\tilde B_k=\tilde B_{k-1}(2I-A\tilde B_{k-1})+C_k,\ \tilde B_0=g(A)+C_0. \tag{2'}$$

Обозначим $\varepsilon_k=\|B_k-\tilde B_k\|\quad(k=0,1,2,\ldots)$.

<u>Теорема I.</u> Пусть $\|C_k\|\le\varepsilon\ (k=0,1,2,\ldots)$. Тогда при $0\le k\le-\lg_2\varepsilon-2$ справедлива оценка

$$\varepsilon_k\le 3\cdot 2^k\varepsilon. \tag{3}$$

<u>Доказательство.</u> Из (2) и (2') легко получить равенство

$$\tilde B_k-B_k=(I-AB_{k-1})(\tilde B_{k-1}-B_{k-1})+(\tilde B_{k-1}-B_{k-1})(I-A\tilde B_{k-1})+C_k,$$

из которого следует, что

$$\varepsilon_k\le\varepsilon_{k-1}(2+\varepsilon_{k-1})+\varepsilon\quad(k=1,2,\ldots). \tag{4}$$

Повторным применением этого неравенства находим

$$\varepsilon_1 \le 2\varepsilon(3/2+\varepsilon/2),$$
$$\varepsilon_2 \le 4\varepsilon(7/4+11/4\,\varepsilon+3/2\,\varepsilon^2+1/4\,\varepsilon^3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{5}$$
$$\varepsilon_k \le 2^k\varepsilon\left(c_0^k+c_1^k\varepsilon+\ldots+c_{2^k-1}^k\varepsilon^{2^k-1}\right),$$

где c_i^k – некоторые коэффициенты. Из (4) и (5) для c_i^k нетрудно получить следующие соотношения:

$$c_i^{k+1}=c_i^k+2^{k-1}\left((c^k_{\frac{i-1}{2}})^2+2(c_0^k c_{i-1}^k+c_1^k c_{i-2}^k+\ldots+c^k_{\frac{i-1}{2}-1}\cdot c^k_{\frac{i-1}{2}+1}\right) \tag{6}$$

при нечётном i, $1<i\le 2^k-1$,

$$c_i^{k+1}=c_i^k+2^k\left(c_0^k c_{i-1}^k+c_1^k c_{i-2}^k+\ldots+c^k_{i/2}\cdot c^k_{i/2-1}\right) \tag{6'}$$

при чётном i, $0<i\le 2^k-1$,

причём при $i>2^k-1$ положим $c_i^k=0$.

Найдём c_0^k, c_1^k, c_2^k. Обозначим за d_0^k выражение $2^k c_0^k$. Тогда $\varepsilon_{k+1}\le(d_0^k\varepsilon+P_2(\varepsilon))(2+d_0^k\varepsilon+P_2(\varepsilon))+\varepsilon$, где $P_2(\varepsilon)$ – многочлен, содержащий степени ε, не меньшие 2. Отсюда $d_0^{k+1}\le 2d_0^k+1$, причём $d_0^0=1$. Поэтому $d_0^k\le 2^{k+1}-1$, а, следовательно,

$$c_0^k\le 2-1/2^k. \tag{7}$$

Обозначим за d_1^k выражение $2^k\cdot c_1^k$. Тогда

$$\varepsilon_{k+1}\le(d_0^k\varepsilon+d_1^k\varepsilon^2+P_3(\varepsilon))(2+d_0^k\varepsilon+d_1^k\varepsilon^2+P_3(\varepsilon))+\varepsilon,$$

где $P_3(\varepsilon)$ – многочлен, содержащий степени ε, не меньшие 3. Отсюда

$$d_1^{k+1}\le(d_0^k)^2+2d_1^k\le 2^{2k+2}+2d_1^k\le 2^{2k+2}+2^{2k+1}+4d_1^{k-1}\le\ldots$$
$$\le 2^{2k+2}+2^{2k+1}+\ldots+2^{k+2}\le 2^{2k+3}.$$

Поэтому $d_1^k\le 2^{2k+1}$, а

$$c_1^k\le 2^{k+1}. \tag{7'}$$

Из формулы (6') имеем

$$c_2^{k+1}\le c_2^k+2^k(2c_1^k+c_0^k c_1^k)\le c_2^k+2^{k+2}\cdot c_1^k\le c_2^k+2^{2k+3}\le$$
$$\le\sum_{i=0}^{k}2^{2i+3}=8\cdot\frac{4^{k+1}-1}{3}\le\frac{8}{3}\cdot 4^{k+1}\le 4^{k+2}=2^{2k+4}$$

Таким образом,

$$c_2^k\le 2^{2(k+1)} \tag{7''}$$

Покажем, что

$$c_i^k \le 2^{i(k+1)} \qquad (i=1,2,\dots, k=0,1,2,\dots). \qquad (8)$$

Доказываем по индукции. Пусть i чётно. Для $i=2$ неравенство (8) выполнено. Пусть оно выполнено для c_i^k. Тогда

$$c_i^{k+1} \le 2^{i(k+1)} + 2^k \cdot 2^{(i-1)(k+1)}(i/2+1) = 2^{i(k+1)}\left(1+\frac{i/2+1}{2}\right) \le 2^{i(k+2)}.$$

Таким образом, неравенство (8) для чётных i доказано. Доказательство для нечётных i проводится аналогично.

Итак, имеем

$$\varepsilon_k \le 2^k \varepsilon\left(2 + 2^{k+1}\varepsilon + 2^{2(k+1)}\varepsilon^2 + \dots + 2^{(2^k-1)(k+1)}\cdot\varepsilon^{2^k-1}\right) =$$
$$= 2^k\varepsilon\left(1+\frac{1-(2^{k+1}\varepsilon)^{2^k}}{1-2^{k+1}\varepsilon}\right).$$

Рассмотрим выражение $\frac{1-(2^{k+1}\varepsilon)^{2^k}}{1-2^{k+1}\varepsilon}$. Пусть $k \le -\lg_2\varepsilon - 2$. Тогда $2^{k+1}\varepsilon \le 1/2$, а наше выражение не превосходит двух. Таким образом,

$$\varepsilon_k \le 2^k\cdot\varepsilon\cdot 3 \quad \text{при} \quad k \le -\lg_2\varepsilon - 2.$$

Теорема I доказана.

Если 0 принадлежит спектру оператора A (задача (I) поставлена некорректно), то нормы $\|B_k\|$ в итерациях (2) растут как 2^k:

$$\|B_k\| \le \gamma\cdot 2^k, \ \gamma = \mathrm{const}.$$

Поэтому естественно считать, что и погрешность округления на каждом шаге пропорциональна 2^k.

<u>Теорема 2.</u> Пусть $\|C_k\| \le 2^k\cdot\varepsilon$. Обозначим $k_* = \max\{k : (k+1)\cdot 2^{k-1}\varepsilon < 1\}$. Тогда для $k < k_*$ выполняется неравенство

$$\varepsilon_k \le 2^{k+1}(k+1)\varepsilon. \qquad (9)$$

<u>Доказательство</u>. Аналогично (4) получаем, что в данном случае

$$\varepsilon_k \le \varepsilon_{k-1}(2+\varepsilon_{k-1}) + 2^k\varepsilon. \qquad (10)$$

Формулы (5), (6), (6') остаются в силе. Далее, имеем

$$\varepsilon_k \le (d_0^{k-1}\varepsilon + P_2(\varepsilon))(2 + d_0^k\varepsilon + P_2(\varepsilon)) + 2^k\varepsilon,$$

поэтому $d_0^k \le 2\cdot d_0^{k-1} + 2^k$, причём $d_0^1 = 4$. Отсюда получаем: $d_0^k \le 2^{k+1} + (k-1)\cdot 2^k = 2^k(k+1)$, а, следовательно,

$$c_0^k \le k+1. \qquad (11)$$

Аналогично

$$d_1^{k+1} \le (d_0^k)^2 + 2d_1^k \le 2^{2k}(k+1)^2 + 2^{2k-1}\cdot k^2 + 4d_1^{k-1} \le \dots$$
$$\le \sum_{i=0}^{k} 2^{2k-i}(k-i+1)^2 = \sum_{l=1}^{k+1} 2^{l+k-1}\cdot l^2 = 2^{k-1}\cdot\sum_{l=1}^{k+1} 2^l\cdot l^2.$$

Обозначим $f(x)=\sum_{\ell=0}^{k+1} x^{\ell} = \frac{x^{k+2}-1}{x-1}$. Тогда

$x\cdot f'(x)=\sum_{\ell=0}^{k+1} \ell\cdot x^{\ell}$, а $x\cdot(x\cdot f'(x))'=\sum_{\ell=0}^{k+1} \ell^2\cdot x^{\ell}$.

Поэтому $\sum_{\ell=1}^{k+1} 2^{\ell}\cdot \ell^2 = (x\cdot(x\cdot f'(x))')\big|_{x=2}$. Подсчитав это, имеем:

$$d_1^k \le 2^{k-2}(2^{k+1}(k^2-2k+3)-3)\le 2^{2k-1}(k^2-2k+3)-3\cdot 2^{k-2},$$ а

$$c_1^k \le 2^{k-1}(k+1)^2. \qquad (I2)$$

Аналогично доказательству неравенства (8) проводится доказательство неравенства

$$c_i^k \le 2^{i(k-1)}(k+1)^{i+1}. \qquad (I3)$$

Из (I3) и (5) имеем

$$\varepsilon_k \le 2^k\varepsilon\,(k+1+2^{k-1}(k+1)^2\varepsilon+\ldots+2^{(2^k-1)(k-1)}(k+1)^{2^k}\varepsilon^{2^k-1})=$$

$$=2^k\varepsilon\cdot(k+1)\cdot\frac{1-((k+1)\cdot 2^{k-1}\varepsilon)^{2^k}}{1-(k+1)\cdot 2^{k-1}\varepsilon}.$$

Рассмотрим выражение $\frac{1-((k+1)\cdot 2^{k-1}\varepsilon)^{2^k}}{1-(k+1)\cdot 2^{k-1}\varepsilon}$. Поскольку $(k_*+1)\cdot 2^{k_*-1}\varepsilon<1$, то $(k+1)\cdot 2^{k-1}\varepsilon<1/2$ при $k<k_*$, а рассматриваемое выражение меньше 2.

Поэтому

при $k<k_*$, $\varepsilon_k\le 2^{k+1}\varepsilon\,(k+1)$.

Теорема 2 доказана.

Проиллюстрируем зависимость ε_k от числа итераций к на численном примере. Рассмотрим задачу

$$h\cdot\sum_{j=1}^{N} a_{ij}u_j=f_i \quad (i=1,\ldots,N) \qquad (I4)$$

в которой

$h=\frac{1}{N}$, $a_{ij}=\pi^2\cdot ih(1-jh)$ при $i\le j$, $a_{ij}=a_{ji}$ $(i,j=1,\ldots,N)$.

Матрица $A=(h a_{ij})$ симметрична и неотрицательна. Задача (I4) некорректно поставлена. Пусть $Q_k=\max_{i,j=1,\ldots,N}|b_{ij}^k-\tilde b_{ij}^k|$, где b_{ij}^k, $\tilde b_{ij}^k$ – элементы матриц B_k и $\tilde B_k$ соответственно;

E_k – правая часть неравенства (9). Если $N=30$, $\varepsilon=10^{-4}$, то зависимость Q_k от к выглядит следующим образом.

K	I	2	3	4	5
Q_k	0.0004	0.00I2	0.0032	0.0079	0.0I9I
E_k	0.0008	0.0024	0.0048	0.0I6	0.0384
K	6	7	8	9	I0
Q_k	0.0445	0.I0I8	0.2288	0.5083	I.II82
E_k	0.0896	0.2048	0.4608	I.024	2.2528
K	II	I2	I3	I4	I5
Q_k	2.4395	5.28I7	II.3555	24.2383	5I.2852
E_k	4.9I52	I0.6496	I0.6496	49.I520	I04.8576
K	I6	I7			
Q_k	I07.I796	5949I.47			
E_k	222.2224	47I.8592			

Литература

I. Вайникко Г. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту, ТГУ, I982.

2. Минц А. О росте погрешности при операторных итерациях. Тезисы докладов конференции "Методы алгебры и анализа". Тарту, ТГУ, I27-I29.

Поступило
I3 III I984

ON STABILITY OF OPERATOR ITERATIONS WITH RESPECT TO ROUNDING ERROR

A. Mints

Summary

This work deals with an influence which the error of rounding-off has on a nearness of the approximate solution of the operator equation $Au = f$ to the correct solution, when the approximate solution is calculated by means of operator iterations method. There are also given limits of the increase of an error of calculation in dependence on the error of rounding-off and number of iterations.

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1984, 672,40-46

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Я. Янно

Введение. В этой работе рассматривается задача определения ядра $K(t)$ из уравнения (см. [3])

$$u_{tt}(x,t) + \int_0^t K(t-s)u_{tt}(x,s)ds = a^2 u_{xx}(x,t)$$

при начальных и граничных условиях

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = \varphi_0(t),$$

если на какой-то прямой $x = \ell$ задана

$$u_x(\ell,t) = \varphi_\ell(t).$$

Введем семейство ядер $K(t,\alpha)$, где $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$.

Задачу можно решать минимизацией функционала

$$J(\alpha) = \int_0^T (u_x(\ell,t,\alpha) - \varphi_\ell(t))^2 dt.$$

В работе получено выражение для производной $J(\alpha)$, что позволяет применять градиентные методы для минимизации $J(\alpha)$.

I. О прямой задаче. В рассуждениях будем использовать некоторые результаты о прямой задаче

$$\left.\begin{aligned} & u_{tt}(x,t) + \int_0^t K(t-s)u_{tt}(x,s)ds = a^2 u_{xx}(x,t) + F(x,t), \\ & x \in [0,\infty),\ t \in [0,\infty), \\ & u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = \varphi_0(t). \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

Требуется найти функцию $u(x,t)$. Введем следующие предположения.

Функция $F(x,t)$ и ее производные $F_\gamma(x,t)$, где $\gamma = t, tt, x, xt, xtt$, непрерывны и экспоненциально ограничены по t, т.е. найдутся константные M и α такие, что

$$|F(x,t)| < Me^{\alpha t},\ |F_\gamma(x,t)| < Me^{\alpha t}$$

при указанных γ. Ещё требуем, что $F(x,0) = 0$.

Функция $K(t) \in C^1[0,\infty)$ и экспоненциально ограничена вместе с производной:

$$|K(t)| < Me^{\alpha t},\ |K'(t)| < Me^{\alpha t}.$$

Функция $\varphi_0(t) \in C^3[0,\infty)$, причём $\varphi_0(t)$ сама и её производные экспоненциально ограничены.

При этих предположениях справедливы следующие утверждения.

А. Применяя преобразование Лапласа (см. [I]) для задачи (I) и обозначая малыми буквами изображения функций (а также $\mathcal{L}(\varphi_0(t)) = \bar{\varphi}_0(p)$), получим на какой-то полуплоскости $\operatorname{Re} p > \varkappa$ задачу

$$\left.\begin{aligned} &u_{xx}(x,p) - \frac{p^2}{a^2}(k(p)+1)u(x,p) = -\frac{1}{a^2}f(x,p),\ x \in [0,\infty), \\ &u_x(0,p) = \bar{\varphi}_0(p). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Если найдутся M и α такие, что $|u(x,t)| < Me^{\alpha t}$, то имеет место сходимость $u(x,p) \to 0$ при $\operatorname{Re} p \to \infty$ равномерно по x. Оказывается, что эта сходимость однозначно определяет решение задачи (2) на какой-то полуплоскости $\operatorname{Re} p > \varkappa$

$$u(x,p) = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\psi(p)}\,x}{a^2\sqrt{\psi(p)}} \int_x^\infty f(s,p)\, e^{-s\sqrt{\psi(p)}}\, ds +$$

$$+ \frac{e^{-x\sqrt{\psi(p)}}}{a^2\sqrt{\psi(p)}} \int_0^x f(s,p) \operatorname{ch}\sqrt{\psi(p)}\, s\, ds - \frac{\bar{\varphi}_0(p)}{\sqrt{\psi(p)}} e^{-x\sqrt{\psi(p)}}, \qquad (3)$$

где $\psi(p) = \frac{p^2}{a^2}(k(p)+1)$.

Б. В классе функций $U = \{u(x,t) \in C^2[0,\infty)\times[0,\infty):$ $\exists M, \alpha : |u(x,t)| < Me^{\alpha t},\ |u_\mu(x,t)| < Me^{\alpha t},\ \mu = x, xx, t, tt\}$ задача (1) имеет единственное решение.

2. <u>Обратная задача</u>. Рассмотрим задачу с однородным уравнением:

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt}(x,t) + \int_0^t K(t-s)\, u_{tt}(x,s)\, ds = a^2 u_{xx}(x,t), \\ &u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = \varphi_0(t). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Требуется найти такое ядро $K(t)$, при котором решение $u(x,t)$ задачи (4) удовлетворяет условию $u_x(\ell,t) = \varphi_\ell(t)$, где $\varphi_\ell(t)$ – заданная функция.

Для решения поставленной обратной задачи в [2] предложена следующая идея.

Введем функционал

$$\Phi(K)=\int_0^T (u_K(\ell,t)-\varphi_\ell(t))^2 dt, \tag{5}$$

где $u(x,t)$ решение задачи (4) с ядром $K(t)$. Решением обратной задачи берём функцию $K(t)$, при которой функционал $\Phi(K)$ имеет наименьшее значение.

Более конкретную формулировку получим с помощью введения семейства ядер $K(t,\alpha)$, $\alpha\in M$ где M - выпуклое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Определим функционал

$$J(\alpha)=\int_0^T (u_x(\ell,t,\alpha)-\varphi_\ell(t))^2 dt \tag{6}$$

и ищем такую α_*, что

$$J(\alpha_*)=\min_{\alpha\in M} J(\alpha).$$

Полученную задачу минимизации можно решать градиентными методами. Для этого понадобятся производные функционалов $\Phi(K)$ и $J(\alpha)$. Нахождению последних и посвящается остальная часть статьи.

3. Теорема. Пусть $\varphi_0(t)\in C^4[0,\infty)$, $\varphi_0(t)$ сама и её производные экспоненциально ограничены и выполнены условия согласованности: $\varphi_0(0)=\varphi_0'(0)=\varphi_0''(0)=0$. Пусть функции $K(t)$ и $\tilde K(t)$ непрерывно дифференцируемы, причём

$$|K(t)|<Me^{\alpha t},\ |K'(t)|<Me^{\alpha t},\ |\tilde K(t)|<Me^{\alpha t},\ |\tilde K'(t)|<Me^{\alpha t}.$$

Функциям $K(t)$ и $\tilde K(t)$ соответствуют решения $u(x,t)$ и $\tilde u(x,t)$ задачи (4). Если

$$\sup_{t\geq 0} e^{-\alpha t}|\tilde K(t)-K(t)|\leq\varepsilon \tag{7}$$

или

$$\left(\int_0^\infty e^{-2\alpha t}(\tilde K(t)-K(t))^2 dt\right)^{1/2}\leq\varepsilon, \tag{7'}$$

то

$$\tilde u_x(\ell,t)-u_x(\ell,t)=\frac{\ell}{2a^2}\int_0^t u_{tt}(\ell,t-s)(\tilde K(s)-K(s))ds+R(t), \tag{8}$$

где $|R(t)|<C\varepsilon^2 e^{\beta t}$, а константы C и β зависят только от M,α и функции $\varphi_0(t)$

Доказательство. Для задачи (4), сначала с ядром $K(t)$, а затем с ядром $\tilde K(t)$ применяем преобразование Лапласа. Вычитая из второй задачи первую, получим следующую задачу:

$$\left.\begin{aligned}&\tilde u_{xx}(x,p)-u_{xx}(x,p)-\frac{p^2}{a^2}(k(p)+1)(\tilde u(x,p)-u(x,p))=\frac{1}{a^2}(\tilde k(p)-k(p))p^2\tilde u(x,p),\\&\tilde u_x(0,p)-u_x(0,p)=0,\\&\tilde u(x,p)-u(x,p)\to 0 \quad \text{при } \operatorname{Re}p\to\infty \text{ равномерно по } x\,.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

Покажем, что решением этой задачи является

$$\tilde u(x,p)-u(x,p)=(\tilde k(p)-k(p))\,p^2(s(x,p)+\tau(x,p)),\tag{10}$$

где $s(x,p)$ и $\tau(x,p)$ – решения задач

$$\left.\begin{aligned}&s_{xx}(x,p)-\frac{p^2}{a^2}(k(p)+1)s(x,p)=\frac{1}{a^2}u(x,p),\\&s_x(0,p)=0\,,\ s(x,p)\to 0 \quad \text{при } \operatorname{Re}p\to\infty \text{ равномерно по } x\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

и

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{xx}(x,p)-\frac{p^2}{a^2}(k(p)+1)\tau(x,p)=\frac{1}{a^2}(\tilde u(x,p)-u(x,p)),\\&\tau_x(0,p)=0\,,\ \tau(x,p)\to 0 \quad \text{при } \operatorname{Re}p\to\infty \text{ равномерно по } x\,.\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что правая часть равенства (10) удовлетворяет уравнению и начальному условию из (9).

Используя свойства преобразования Лапласа (см. [1]) и предположения о $\varphi_0(t)$ и $\mathcal{K}(t)$, можно получить оценки $|k(p)|<C|p|^{-1}$, $|\tilde k(p)|<C|p|^{-1}$, $\operatorname{Re}\sqrt{1+k(p)}>\gamma>0$, $|\varphi_0(p)|<C|p|^{-4}$ при $\operatorname{Re}p>\varkappa$. Константы C и $\varkappa$ зависят только от M, α и $\varphi_0(t)$. Формула (3) дает сначала $|u(x,p)|<C|p|^{-5}$ и $|\tilde u(x,p)|<C|p|^{-5}$ при $\operatorname{Re}p>\varkappa$, а затем $|s(x,p)|<C|p|^{-6}$ и $|\tau(x,p)|<C|p|^{-6}$ при $\operatorname{Re}p>\varkappa$. Следовательно, правая часть в (10) оценивается через $C|p|^{-5}$ при $\operatorname{Re}p>\varkappa$ и третье требование в (9) выполнено.

Из (10) получим равенство

$$\tilde u_x(x,p)-u_x(x,p)=(\tilde k(p)-k(p))\,p^2 s_x(x,p)+(\tilde k(p)-k(p))\,p^2\tau_x(x,p).$$

Дифференцируя уравнение в (11), можно легко проверить, что $s_x(x,p)=x/2a^2\cdot u(x,p)$. Используя свойства преобразования Лапласа (см. [1]), получим

$$\mathcal{L}^{-1}((\tilde k(p)-k(p))\,p^2 s_x(x,p))=\frac{x}{2a^2}\int_0^t u_{tt}(x,t-s)(\tilde{\mathcal{K}}(s)-\mathcal{K}(s))\,ds.$$

С помощью формулы преобразования Лапласа из (7) или (7') получим оценки

$$|\bar{K}(p)-K(p)|<\frac{\varepsilon}{Re\,p-\alpha}, \quad |\bar{K}(p)-K(p)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2(Re\,p-\alpha)}} \quad \text{при } Re\,p>\alpha .$$

Формула (3) дает $|\tau_x(x,p)|<C\varepsilon|p|^{-4}$ при $Re\,p>\varkappa$, где C и $\varkappa$ зависят только от M,α и $\ell_0(t)$. Отсюда уже с помощью обратного преобразования Лапласа (см. [I]), получим оценку

$$|R(t)|=|\mathcal{L}^{-1}((\bar{K}(p)-K(p))p^2\tau_x(x,p))|<C\varepsilon^2e^{\beta t},$$

где C и β зависят только от M,α и $\ell_0(t)$. Теорема доказана.

4. <u>Производные функционалов $\Phi(K)$ и $J(\alpha)$</u>. Пусть оператор A сопоставляет ядру $K(t)$ функцию $u_K(\ell,t)$, рассматриваемую как элемент пространства $C[0,T]$. Ядра $K(t)$ будем брать из различных функциональных пространств.

I) Пусть $K(t)\in C^1_\alpha$, где

$$C^1_\alpha=\{K(t)\in C^1[0,\infty),\ \exists M>0:|K(t)|<Me^{\alpha t},\ |K'(t)|<Me^{\alpha t}\}$$

– банахово пространство с нормой $\|K\|=\sup\limits_{t\geq 0}e^{-\alpha t}(|K(t)|+|K'(t)|)$.

Производная оператора $A: C^1_\alpha\mapsto C[0,T]$ выражается тогда следующей формулой:

$$A'(K(t))(\bar{K}(t)-K(t))=\frac{\ell}{2a^2}\int_0^t u_{tt}(\ell,t-s)(\bar{K}(s)-K(s))ds. \tag{I3}$$

Проверим это. Пусть $\|\bar{K}-K\|\leq\varepsilon$. Тогда

$$\eta:=\sup_{t\geq 0}e^{-\alpha t}|\bar{K}(t)-K(t)|\leq\|\bar{K}-K\|\leq\varepsilon .$$

На основании теоремы имеет место (8), где $|R(t)|<C\eta^2e^{\beta t}$.

Отсюда получим, что

$$\frac{1}{\varepsilon}\|R(t)\|<\frac{1}{\varepsilon}C\eta^2e^{\beta T}\leq\frac{1}{\varepsilon}C\varepsilon^2e^{\beta T}=C\varepsilon e^{\beta T}\to 0 \quad \text{при } \varepsilon\to 0 .$$

Ограниченность оператора $A'(K(t))$ можно получить из ограниченности функции $u_{tt}(\ell,t)$ на отрезке $[0,T]$; линейность оператора очевидна.

2) Пусть $K(t)\in H_\alpha$, где H_α состоит из тех же элементов, что C^1_α, но

$$\|K\|_{H_\alpha}=\left(\int_0^\infty e^{-2\alpha t}(K^2(t)+K'^2(t))dt\right)^{1/2}$$

Ясно, что H_α есть предгильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\tilde{\kappa},\kappa)=\int_0^\infty e^{-2\alpha t}(\tilde{\kappa}(t)\kappa(t)+\tilde{\kappa}'(t)\kappa'(t))dt .$$

Аналогично как в случае I) показывается, что производная оператора $A: H_\alpha \mapsto C[0,T]$ выражается формулой (I3).

3) Пусть теперь $\kappa(t)\in X_{M,\alpha}$, где

$$X_{M,\alpha}=\{\kappa(t)\in C^1[0,\infty),\ |\kappa(t)|<Me^{\alpha t},\ |\kappa'(t)|<Me^{\alpha t}\} .$$

Видно, что $X_{M,\alpha}$ есть ограниченное подмножество банахова пространства

$$C_\alpha=\{\kappa(t)\in C[0,\infty):\ \exists M:\ |\kappa(t)|<Me^{\alpha t}\}$$

с нормой

$$\|\kappa\|=\sup_{t\geq 0} e^{\alpha t}|\kappa(t)| .$$

Если $\kappa(t)\in X_{M,\alpha}$, $\tilde{\kappa}(t)\in X_{M,\alpha}$ и $\|\tilde{\kappa}-\kappa\|\leq\varepsilon$, то имеет место (8). Следовательно

$$A(\tilde{\kappa}(t))-A(\kappa(t))=\frac{\ell}{2a^2}\int_0^t u_{tt}(\ell,t-s)(\tilde{\kappa}(s)-\kappa(s))ds+R(t),$$

где $\|R(t)\|/\|\tilde{\kappa}-\kappa\|\to 0$ при $\|\tilde{\kappa}-\kappa\|\to 0$, если только $\kappa(t)$ и $\tilde{\kappa}(t)$ остаются в $X_{M,\alpha}$. В принципе можно теперь ввести производную оператора A, которая определяется только на множестве $X_{M,\alpha}$ и выражается формулой (I3).

Рассмотрим функционал B который сопоставляет функции $u_x(\ell,t)\in C[0,T]$ значение

$$B(u_x(\ell,t))=\int_0^T(u_x(\ell,t)-\varphi_\ell(t))^2dt .$$

Производная этого квадратичного функционала имеет вид

$$B'(u_x(\ell,t))(\tilde{u}_x(\ell,t)-u_x(\ell,t))=$$

$$=2\int_0^T(u_x(\ell,t)-\varphi_\ell(t))(\tilde{u}_x(\ell,t)-u_x(\ell,t))dt$$

и следовательно во всех трех случаях производная функционала $\Phi(\kappa)$, определенного в (5), выражается формулой

$$\Phi'(\kappa)(\tilde{\kappa}(t)-\kappa(t))=$$

$$=\frac{\ell}{a^2}\int_0^T(u_x(\ell,t)-\varphi_\ell(t))\int_0^t u_{tt}(\ell,t-s)(\tilde{\kappa}(s)-\kappa(s))ds\,dt . \qquad (I4)$$

Отметим, что во всех трех случаях для $u_x(\ell,t)$ вместо $C[0,T]$ можно использовать пространство C_β. Тогда вместо функционала (5) можно ввести функционал

$$\Phi_1(\kappa)=\int_0^\infty e^{-2\beta t}(u_x(\ell,t)-\varphi_\ell(t))^2dt ,$$

который информативнее. Но, к сожалению, в выражение производной $\Phi_1(\kappa)$ входит константа β, которую мы не знаем.

Наконец, выпишем ещё производную от $J(\alpha)$, определенного в (6). При достаточной гладкости функции $K(t,\alpha)$, по параметру α получим

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha_i} = \frac{\ell}{a^2}\int_0^T (u_x(\ell,t,\alpha) - \varphi_\ell(t))\int_0^t u_{tt}(\ell,t-s,\alpha)\frac{\partial K(s,\alpha)}{\partial \alpha_i}\,ds\,dt, \tag{15}$$

$i = 1 \ldots n$.

Литература

1. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. Москва, Наука, 1980.
2. Тобиас Т. О некоторых методах решения обратной задачи определения ядра наследственной среды. В сб.: Тезисы докладов конференции "Методы алгебры и анализа". Тарту, ТГУ, 1983, 139-140.
3. Nigul, U. The modified theory of viscoelasticity. Preprint of the Academy of Sciences of Estonian SSR. Tallinn, 1983.

Поступило
28 II 1984

ABOUT AN INVERSE PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATION

J. Janno

Summary

We consider an inverse problem to determine the kernel function $K(t)$ from (4), when the derivative of solution $u_x(\ell,t) = \varphi_\ell(t)$ is given. We introduce a family of functions $K(t,\alpha)$, which depends on parameter $\alpha \in M$, where M is a closed convex subset in $\mathbb{R}^n$. This problem is observed as a problem of minimization with respect to functional (6) over all $\alpha \in M$. In the end the derivative of the functional is found (expression (15)).

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1984, 672,47-54

ЛОКАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

М. Фишер

Исследуется разностный метод для решения задачи Дирихле нелинейного эллиптического уравнения второго порядка. Показывается сходимость разностного метода в метрике соболевского пространства H^2.

§ 1. Решаемая задача и разностная схема

Рассмотрим задачу

$$Au = f, \quad u = u(x) \in H_0^2(\Omega), \quad f \in H^0(\Omega) = L_2(\Omega), \tag{1}$$

где

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \quad a_{ij}(x,u) = a_{ji}(x,u),$$

Ω – m -мерный единичный куб с границей $\partial\Omega$ и с замыканием $\bar\Omega$, $m = 2$ или $m = 3$,

$$H_0^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ – пространства Соболева.

Таким образом, решению подлежит задача Дирихле.

Предполагается, что выполнены следующие условия:

1) оператор A эллиптический, т.е. для каждого $a > 0$ существует такое число $\varkappa_a > 0$, что при всех $\xi_i \in R$, $x \in \bar\Omega$, $u \in [-a, a]$ справедливо неравенство
$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x,u)\xi_i\xi_j \geq \varkappa_a \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 \quad ;$$

2) функции $a_{ij}(x,u)$ дифференцируемы и
$$\left|\frac{\partial^{\mu+\nu} a_{ij}(x,u)}{\partial x_l^{\mu}\,\partial u^{\nu}}\right| \leq d_a\,, \quad \mu,\nu = 0,1,\dots,s\,, \quad \mu+\nu \leq s\,,$$
$l = 1,\dots,m$, $\forall x \in \Omega$, $\forall u \in [-a,a]$, d_a положительная постоянная, зависящая от a.

Введем обозначения

$$\bar\Omega_h = \{\xi = (\xi_1,\dots,\xi_m),\ \xi_i = k_i h,\ k_i = 0,1,\dots,n;\ i = 1,\dots,m\},$$
$$h = \frac{1}{n}, \quad \Omega_h = \bar\Omega_h \cap \Omega, \quad \partial\Omega_h = \bar\Omega_h \cap \partial\Omega\ .$$

Задачу (I) аппроксимируем разностной задачей

$$A_h y = f_h, \quad y = y_h = y_h(x) \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega_h), \quad f_h \in H^0(\Omega_h), \tag{2}$$

где

$$A_h y = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\left[\partial_i (a_{ij}(x,y)\bar\partial_j y) + \bar\partial_i (a_{ij}(x,y)\partial_j y)\right],$$

$$\overset{\circ}{H}{}^k(\Omega_h) = \{y \in H^k(\Omega_h),\ y|_{\partial\Omega_h} = 0\},$$

$H^k(\Omega_h) = W^{k,2}(\Omega_h)$ – дискретное пространство Соболева. В пространствах $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_h)$ и $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega_h)$ используются соответственно нормы

$$\|y\|_1 = \|\Delta_h^{1/2} y\|_0, \quad \|y\|_2 = \|\Delta_h y\|_0,$$

где

$$\Delta_h y = -\sum_{i=1}^{m} \partial_i \bar\partial_i y,$$

$$\|y\|_0 = (y,y)^{1/2}, \quad (y,v) = h^m \sum_{\xi\in\Omega_h} y_h(\xi) v_h(\xi).$$

Обозначим через $L_p(\Omega_h)(1 \le p < \infty)$ пространство сеточных функций $y: \Omega_h \to R$ с нормой

$$\|y\|_{L_p(\Omega_h)} = (h^m \sum_{\xi\in\Omega_h} |y_h(\xi)|^p)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|y\|_{C(\Omega_h)} = \|y\|_{L_\infty(\Omega_h)} = \max_{\xi\in\Omega_h} |y_h(\xi)|, \quad p = \infty.$$

§ 2. Дискретные теоремы вложения

При исследовании сходимости разностного метода центральное место имеют некоторые дискретные аналоги теорем вложения Соболева.

Введем оператор $q_h \in \mathcal{L}(L_p(\Omega), L_p(\Omega_h))$, $p \in [1,\infty]$, положив

$$(q_h u)(\xi) = h^{-m}\int_{\Pi(\xi)} u(x)\,dx, \quad \xi \in \Omega_h,$$

где $\Pi(\xi)$ – элементарная ячейка объема h^m с центром в точке $\xi = (k_1 h, \ldots, k_m h)$ $(k_i = 1, \ldots, n-1;\ i = 1, \ldots, m)$

$$\Pi(\xi) = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \Omega : \xi_j - \frac{h}{2} < x_j \le \xi_j + \frac{h}{2},\ j = 1, \ldots, m\}.$$

В качестве оператора $Q_h \in \mathcal{L}(L_p(\Omega_h), L_p(\Omega))$, $p \in [1,\infty]$ рассмотрим оператор кусочно-постоянного восполнения, переводящий сеточные функции $y: \Omega_h \to R$ в ступенчатые функции $(Q_h y)(x)$ следующим образом. Функция y, заданная в Ω_h продолжается на границу $\partial\Omega_h$ значением в ближайшем узле $\xi \in \Omega_h$. Таким образом продолженную функцию обозначим через $\bar y$. Оператор Q_h определяем формулой

$$Q_h y(x) = \begin{cases} \bar{y}(\xi), x \in T(\xi) \ , \\ \bar{y}([\frac{x}{h}]), x \in \bar{\Omega} \setminus \bigcup\limits_{\xi \in \Omega_h} T(\xi) \ , \end{cases}$$

где $[\frac{x}{h}] = ([\frac{x_1}{h}], \dots [\frac{x_m}{h}])$.

Операторы q_h, Q_h удовлетворяют условиям

$$\|q_h\|, \ \|Q_h\| \le c \ , \tag{3}$$

$$\lim_{h \to 0} Q_h q_h u = u, \ u \in L_p(\Omega), 1 \le p < \infty. \tag{4}$$

Определим при помощи оператора Δ_h интерполяционные пространства $H^{2\beta}(\frac{1}{2} < \beta < 1)$ сеточных функции $y: \Omega_h \to R$, продолженных нулем на границу $\partial \Omega_h$, с нормой

$$\|y\|_{2\beta} = \|\Delta_h^{\beta} y\|_0 \ .$$

Пусть N – множество натуральных чисел; $\hat{\partial}_i$ – либо разность ∂_i, либо $\bar{\partial}_i$, либо симметрическая разность $\tilde{\partial}_i$. На основе результатов из [2] имеет место

<u>Теорема I</u>. Пусть $y: \Omega_h \to R$ сеточные функции, продолженные нулем на границу $\partial \Omega_h$. Тогда имеют места неравенства

$$\|y_h\|_{C(\Omega_h)} \le c \|y_h\|_{2\beta}, \ \ \beta > \frac{m}{4} \ , \ m = 2,3 \ , \tag{5}$$

$$\|\hat{\partial}_i y_h\|_{L_4(\Omega_h)} \le c \ \|y_h\|_{2\beta}, \ \beta > \frac{m+4}{8} \ , \ m = 2,3 \ , \tag{6}$$

причем из условия $\|y_h\|_{2\beta} \le const \ (n \in N)$ следует, что последовательности (y_h), $(\hat{\partial}_i y_h)$ дискретно компактны в следующем смысле: для каждого бесконечного подмножества $N' \subset N$ существует бесконечное подмножество $N'' \subset N'$ и функция u, такие что

$$\|y_h - q_h u\|_{C(\Omega_h)} \to 0 \ , \ \|\hat{\partial}_i y_h - q_h \frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L_4(\Omega_h)} \to 0 \ , n \in N''.$$

§ 3. <u>Исследование сходимости разностного метода</u>

Кроме введенного выше оператора q_h, будем пользоваться оператором $p_h \in \mathcal{L}(H_0^2(\Omega), H_0^2(\Omega_h))$, действующим по формуле

$$(p_h u)(\xi) = u(\xi) \ , \ \xi \in \bar{\Omega}_h \ .$$

Ниже предполагается, что уравнение (I) имеет решение

$u^* \in H_0^2(\Omega)$: $\|u^*\|_2 < a$.

Лемма I. Пусть выполнены условия I) и 2) ($s=2$).
Тогда оператор $A: H_0^2(\Omega) \to H^0(\Omega)$ дифференцируем по Фреше в точке u^* и $A'(u^*) \in \mathcal{L}(H_0^2(\Omega), H^0(\Omega))$ фредгольмов с $ind\, A'(u^*) = 0$.

Доказательство. В силу условия 2) оператор A дифференцируем в точке u^* и его производная имеет вид

$$A'(u^*)v = -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,u^*)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) - \sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial a_{ij}(x,u^*)}{\partial u}\frac{\partial u^*}{\partial x_j} v\right) =$$
$$= A_1(u^*)v + A_2(u^*)v.$$

Непосредственно видно, что $A_1(u^*): H_0^2(\Omega) \to H^0(\Omega)$. Для $A_2(u^*)$ имеем

$$A_2(u^*)v = -\sum_{i,j=1}^{m}\left[\frac{\partial a_{ij}(x,u^*)}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_i \partial x_j} v + \frac{\partial u^*}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 a_{ij}(x,u^*)}{\partial x_i \partial u} + \frac{\partial^2 a_{ij}(x,u^*)}{\partial u^2}\frac{\partial u^*}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u^*}{\partial x_j} v\right].$$

Отсюда с учетом вложений $H^2(\Omega) \subset W^{1,4}(\Omega)$ и $H^2(\Omega) \subset C(\Omega)$ следует, что $A_2(u^*): H_0^2(\Omega) \to H^0(\Omega)$. В итоге получаем, что оператор $A'(u^*)$ действительно действует из пространства $H_0^2(\Omega)$ в $H^0(\Omega)$.

Для доказательства фредгольмовости с нулевым индексом оператора $A'(u^*)$ достаточно показать, что $A_1(u^*)$ обратим и $A_2(u^*)$ вполне непрерывен. Из условия I) вытекает, что

$$(A_1(u^*)v, v) = \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x,u^*)\frac{\partial v}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \geqslant \varkappa_a \|v\|_1^2 .$$

Значит, однородное уравнение $A_1(u^*)v = 0$ имеет только тривиальное решение, откуда в силу свойств линейных эллиптических операторов следует, что существует $[A'(u^*)]^{-1} \in \mathcal{L}(H^0(\Omega), H_0^2(\Omega))$.

Исследуем оператор $A_2(u^*)$. Учтем, что вложения $H^2(\Omega) \subset W^{1,4}(\Omega)$ и $H^2(\Omega) \subset C(\Omega)$ при $m=2,3$ компактны, т.е. ограниченные множества функций из $H^2(\Omega)$ компактны в $W^{1,4}(\Omega)$ и $C(\Omega)$.

Пусть $\{v_k(x)\}$, $k=1,2,\dots$ – последовательность элементов пространства $H_0^2(\Omega)$ с равномерно ограниченными нормами

$$\|v_k\|_2 \leq c \ , \quad k=1,2,\dots \ .$$

Так как пространство $H_0^2(\Omega)$ компактно вложено в $W^{1,4}(\Omega)$ и

$C(\Omega)$ при $m=2,3$, то из последовательности $\{v_k(x)\}$ можно выделить сильно сходящуюся соответственно в $W^{1,4}(\Omega)$ и в $C(\Omega)$ подпоследовательность. Считаем, что последовательность $\{v_k(x)\}$ сама сходится сильно в $W^{1,4}(\Omega)$ и в $C(\Omega)$. Имеем

$$\|A_2(u^*)(v_k-v_m)\|_0=\|\sum\Big[\frac{\partial a_{ij}(x,u^*)}{\partial u}\Big(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_i\partial x_j}(v_k-v_m)+\frac{\partial u^*}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(v_k-v_m)\Big)+$$

$$+\Big(\frac{\partial^2 a_{ij}(x,u^*)}{\partial x_i\,\partial u}+\frac{\partial^2 a_{ij}(x,u)}{\partial u^2}\frac{\partial u^*}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial u^*}{\partial x_j}(v_k-v_m)\Big)\Big]\|_0 .$$

Оценим последние, используя неравенство Коши–Буняковского и условие 2:

$$\|A_2(u^*)(v_k-v_m)\|_0\le d_a\big[\|u^*\|_2\|v_k-v_m\|_C+\|u^*\|_{1,4}\|v_k-v_m\|_{1,4}+$$

$$+(\|u^*\|_1+\|u^*\|^2_{1,4})\|v_k-v_m\|_C\big].$$

Так как $\|u^*\|_2<a$, $\|v_k-v_m\|_C\to 0$, $\|v_k-v_m\|_{1,4}\to 0$, $k,m\to\infty$ то последовательность $\{A_2(u^*)v_k\}$ сходится сильно в $H^0(\Omega)$ и тем самым оператор $A_2(u^*)$ является вполне непрерывным. Лемма I доказана.

Приведем еще ряд элементарных лемм.

Лемма 2. Пусть выполнено условие 2) с $s=3$. Тогда оператор $A_h: H_0^2(\Omega_h)\to H^0(\Omega_h)$ дифференцируем по Фреше и имеет место неравенство

$$\|A_h'(y)-A_h'(p_hu^*)\|_0\le$$

$$\le d_a\|y-p_hu^*\|_2(6+5\|p_hu^*\|_2+\|p_hu^*\|_2^2+\|y\|_2),\ y\in H_0^2(\Omega_h), \tag{7}$$

где

$$A_h'(y)v=-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\big[\partial_i(a_{ij}(x,y)\bar\partial_j v)+\bar\partial_i(a_{ij}(x,y)\partial_j v)\big]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\Big[\partial_i\Big(\frac{\partial a_{ij}(x,y)}{\partial u}\bar\partial_j y\cdot v\Big)+\bar\partial_i\Big(\frac{\partial a_{ij}(x,y)}{\partial u}\partial_j y\cdot v\Big)\Big]=$$

$$=A_{h1}(y)v+A_{h2}(y)v,\ v\in H_0^2(\Omega_h).$$

Лемма 3. Пусть выполнены условия I) и 2) с $s=1$. Тогда

$$\|A_{h1}(p_hu^*)v\|_0\geqslant\frac{\varkappa_a}{2(\varkappa_a+c_a)}\|v\|_2,\ v\in H_0^2(\Omega_h), \tag{8}$$

где $c_a=3d_a(1+c\|p_hu^*\|_2\varepsilon^{-\beta})$ и $\varepsilon>0$ удовлетворяет уравнение $3cd_a\|p_hu^*\|_2\varepsilon^{1-\beta}=\frac{1}{2}\varkappa_a$, $\beta=\frac{3}{4}\ (m=2)$, $\beta=\frac{7}{8}\ (m=3)$, $c=const>0$.

Замечание. Результат, приведенный в лемме 3, по существу известен из [3], но данная лемма позволяет более точно определить коэффициент в неравенстве (8).

Лемма 4. Пусть $y, v \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega_h)$ такие, что $\|y\|_2, \|v\|_2 \le a$. Пусть выполнено условие 2) с $s = 2$. Тогда имеет место

$$\|A_h y - A_h v\|_0 \le M_a \|y - v\|_2 , \tag{9}$$

где $M_a = d_a \cdot c(2 + 4a + a^2) \ge \sup_{\|\eta\|_2 \le a} \|A_h'(\eta)\|_{\mathcal{L}(\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega_h), H^0(\Omega_h))}$.

Лемма 5. Пусть выполнено условие 2) с $s = 3$. Тогда

$$\|A_h p_h u - q_h A u\|_0 = O(h^2) \quad \text{при} \quad u \in C^4(\bar{\Omega}), \tag{10}$$

$$\|A_h p_h u - q_h A u\|_0 \to 0 \quad \text{при} \quad u \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega). \tag{11}$$

Лемма 6. Пусть выполнено условие 2) с $s = 4$. Тогда

$$\|A_h'(p_h u^*) y_h - q_h A'(u^*) u\|_0 \to 0 \text{ при } \|y_h - p_h u\|_2 \to 0 . \tag{12}$$

Лемма 7. Пусть выполнены условие I) и 2) с $s = 4$. Тогда последовательность операторов $A_h'(p_h u^*)$ регулярно сходится к оператору $A'(u^*)$.

Доказательство. Так как

$$A_h'(p_h u^*) v = A_{h1}(p_h u^*) v + A_{h2}(p_h u^*) v ,$$

то (см. [I], стр. 40) достаточно показать, что $A_{h1}(p_h u^*) \to A_1(u^*)$ устойчиво, а $A_{h2}(p_h u^*) \to A_2(u^*)$ компактно. Первое из этих утверждений следует из леммы 3, для второго воспользуемся теоремой I. Именно, пусть $(y_h(x))_{h \in N}$ последовательность элементов пространства $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega_h)$ такая, что $\|y_h\|_2 \le const$. Тогда по теореме I для произвольного $N' \subset N$ существует такое $N'' \subset N'$ и функция u, что

$$\|y_h - q_h u\|_{C(\Omega_h)} \to 0, \ \|\hat{\partial}_i y_h - q_h \frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L_4(\Omega_h)} \to 0, \ h \in N'' . \tag{13}$$

Оценим разность

$$\begin{aligned} \|A_{h2}(p_h u^*) y_h - q_h A_2(u^*) u\|_0 \le \|A_{h2}(p_h u^*) y_h - A_{h2}(p_h u^*) p_h u\|_0 + \\ + \|A_{h2}(p_h u^*) p_h u - q_h A_2(u^*) u\|_0 , \ h \in N'' . \end{aligned} \tag{14}$$

По лемме 6 второе слагаемое в (I4) стремится к нулю, для первого имеем

$$\begin{aligned} \|A_{h2}(p_h u^*) y_h - A_{h2}(p_h u^*) p_h u\|_0 \le \\ \le \|A_{h2}(p_h u^*)(y_h - q_h u)\|_0 + \|A_{h2}(p_h u^*)(q_h u - p_h u)\|_0 . \end{aligned} \tag{15}$$

Так как $\|q_h u - p_h u\|_2 \to 0$ при $h \to 0$, то

$$\|A_{h2}(p_h u^*)(q_h u - p_h u)\|_0 \le \|A_{h2}(p_h u^*)\|\|q_h u - p_h u\|_2 \to 0. \quad (16)$$

Здесь мы учитывали, что норма оператора $A_{h2}(p_h u^*)$ ограничена (см. лемму 4).

Для первого слагаемого в правой части неравенства (I5) имеем:

$$\|A_{h2}(p_h u^*)(y_h - q_h u)\|_0 =$$

$$= \Big\|\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\Big\{\frac{\partial a_{ij}(x, p_h u^*)}{\partial u}\big[\partial_i(\bar\partial_j(p_h u^*)(y_h - q_h u) + \bar\partial_i(\partial_j(p_h u^*)(y_h - q_h u)\big]+$$

$$+\partial_i\,\frac{\partial a_{ij}(x, p_h u^*)}{\partial u}(\bar\partial_j(p_h u^*)(y_h - q_h u))^{+1i} +$$

$$+\bar\partial_i\,\frac{\partial a_{ij}(x, p_h u^*)}{\partial u}(\partial_j(p_h u^*)(y_h - q_h u))^{-1i}\Big\|_0,$$

где $y^{+1i} = y(x + he_i)$, $y^{-1i} = y(x - he_i)$, $e_i = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{im})$.

Оценим последнее при помощи неравенства Коши-Буняковского:

$$\|A_{h2}(p_h u^*)(y_h - q_h u)\| \le d_a \|p_h u^*\|_2 (2\|y_h - q_h u\|_{C(\Omega_h)} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}[\|\partial_i(y_h - q_h u)\|_{L_4(\Omega_h)} + \|\bar\partial_i(y_h - q_h u)\|_{L_4(\Omega_h)}] + \|p_h u^*\|_2 \|y_h - q_h u\|_{C(\Omega_h)})$$

На основе соотношений (I3) отсюда вытекает сходимость

$$\|A_{h2}(p_h u^*)(y_h - q_h u)\|_0 \to 0. \quad (17)$$

Теперь из соотношений (I4), (I5), (I6) (I7) следует, что

$$\|A_{h2}(p_h u^*) y_h - q_h A_2(u^*) u\|_0 \to 0, \ h \in N''.$$

Следовательно, последовательность операторов $A_{h2}(p_h u^*)$ сходится компактно к оператору $A_2(u^*)$. Тем самым доказана и регулярная сходимость $A_h'(p_h u^*) \to A'(u^*)$.

Теперь из лемм I, 2, 5, 6, 7 на основе теоремы I из [I], стр. 54, вытекает следующий основной результат.

<u>Теорема 2.</u> Пусть выполнены условия I) и 2) с $s = 4$, $u^* \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ $(\|u^*\|_2 < a)$, $\|f_h - q_h f\|_0 \to 0$, $h \in N$. Пусть однородное уравнение $A'(u^*)v = 0$ имеет в $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ лишь тривиальное решение. Тогда найдется такое $\delta_0 > 0$, что уравнение (2) для почти всех h имеет в шаре $\|y_h - p_h u^*\|_2 \le \delta_0$ единственное решение y_h^*, причем

$$\|y_h^* - p_h u^*\|_2 \to 0.$$

Если $u^* \in C^4(\bar{\Omega})$ и $\|f_h - q_h f\|_0 = O(h^4)$, то

$$\|y_h - p_h u^*\|_2 = O(h^2).$$

Замечание I. Приведенные результаты остаются верными и в случае, когда оператор A содержит члены с производными более низкого порядка.

Замечание 2. Условие о том (см. формулировку теоремы 2), что однородное уравнение $A'(u^*)v = 0$ имеет в $H_0^2(\Omega)$ лишь тривиальное решение, выполнено, в частности, при достаточно малых по норме $f \in H^0(\Omega)$, если коэффициенты $a_{ij}(x,u) = a_{ij}(u)$, т.е. зависят только от u.

Литература

I. В а й н и к к о Г. Анализ дискретизационных методов. Тарту, ТГУ, I976.

2. Г у р о в а И.Н. Дробные степени разностных операторов и их приложения в теории разностных схем. Канд. диссертация. Воронеж, I980.

3. Д ь я к о н о в Е.Г. Разностные методы решения краевых задач. Вып. I. Москва, МГУ, I97I.

Поступило
IO II I984

LOKALE KONVERGENZ DER DIFFERENZENMETHODE FÜR NICHTLINEARE ELLIPTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNG

M. Fischer

Zusammenfassung

Man untersucht die Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den schwachen Nichtlinearitäten in den Koeffizienten. Es wird gezeigt da die Differenzenmethode in der Umgebung der Lösung der Differentialgleichung in der Metrik des Sobolev--Raumes H^2 konvergiert.

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1984,672,55-61

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА СЕТОК В НОРМЕ W_2^4 ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Э. Тамме

Во многих работах исследована сходимость метода сеток в норме W_2^2 при решении уравнения четвертого порядка (см., напр., [I-3, 5, 8, 9]). В работе [7] установлена оценка коэрцитивности в нормах дискретных весовых гельдеровых пространств в случае, когда область – n-мерный куб и левая часть уравнения – сумма производных четвертого порядка. В [6] доказана аналогичная оценка для разностного бигармонического уравнения в угле. В настоящей работе получена оценка скорости сходимости метода сеток в норме W_2^4 для прямоугольной области и уравнения, частным случаем которого является бигармоническое уравнение.

§ I. Разностная схема

В прямоугольной области $\Omega=\{x=(x_1,x_2):\ 0<x_\alpha<l_\alpha;\ \alpha=1,2\}$ с границей Γ рассмотрим задачу

$$p_{11}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}+p_{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+p_{22}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}=f,\quad u\big|_\Gamma=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\Big|_\Gamma=\mu, \tag{I}$$

где p_{11}, p_{12}, p_{22} – заданные положительные постоянные, f и μ – заданные функции и $\partial^2 u/\partial\nu^2$ – вторая производная по нормали к границе Γ.

Введем прямоугольную сетку

$$\bar\Omega_h=\{x_i=x_{i_1 i_2}=(i_1h_1,\ i_2h_2):\ i_\alpha=-1,0,\dots,N_\alpha+1;\ \alpha=1,2\}$$

с шагами $h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha$. Задачу (I) аппроксимируем разностной задачей

$$\begin{aligned}&L_h y_i\equiv p_{11}\partial_1^2\bar\partial_1^2 y_i+p_{12}\partial_1\bar\partial_1\partial_2\bar\partial_2 y_i+p_{22}\partial_2^2\bar\partial_2^2 y_i=f_i,\quad x_i\in\Omega_h\\ &y_i=0,\quad x_i\in\Gamma_h,\quad \partial_\nu\bar\partial_\nu y_i=\mu_i,\quad x_i\in\Gamma_{h0},\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\Omega_h=\Omega\cap\bar\Omega_h,\quad \Gamma_h=\Gamma\cap\Omega_h,\quad \Gamma_{h0}=\Gamma_h\setminus\{(0,0),(0,l_2),(l_1,0),(l_1,l_2)\},$$

$$f_i=f(x_i),\quad \mu_i=\mu(x_i),\quad \partial_1 y_i=(y_{i_1+1,i_2}-y_i)/h_1,$$

$$\bar\partial_1 y_i = (y_i - y_{i_1-1,i_2})/h_1,\quad \partial_2 y_i = (y_{i_1,i_2+1} - y_i)/h_2,\quad \bar\partial_2 y_i = (y_i - y_{i_1,i_2-1})/h_2,$$

$\partial_\nu \bar\partial_\nu y_i = \partial_1 \bar\partial_1 y_i$ при $i_1 = 0, N_1$ и $\partial_\nu \bar\partial_\nu y_i = \partial_2 \bar\partial_2 y_i$ при $i_2 = 0, N_2$.

§ 2. Априорная оценка

Выведем априорную оценку погрешности $z_i = u_i - y_i$, где $u_i = u(x_i)$ – значения решения задачи (I) и y_i – их приближения, найденные как решения задачи (2). Из (2) вытекает, что погрешность z_i является решением задачи

$$L_h z_i = \psi_i,\ x_i \in \Omega_h,\quad z_i = 0,\ x_i \in \Gamma_h,\quad \partial_\nu \bar\partial_\nu z_i = \varphi_i,\ x_i \in \Gamma_{hc}, \tag{3}$$

где $\psi_i = L_h u_i - f_i,\ \varphi_i = \partial_\nu \bar\partial_\nu u_i - \mu_i.$

Введем пространство $H_+(\Omega_h)$ сеточных функций z_i, определенных на сетке

$$\bar\Omega_h \setminus \{(-h_1,-h_2), (-h_1,(N_2+1)h_2), ((N_1+1)h_1,-h_2), ((N_1+1)h_1,(N_2+1)h_2)\}$$

и удовлетворяющих условиям $z_{0i_2} = z_{N_1 i_2} = 0,\quad z_{i_1 0} = z_{i_1 N_2} = 0.$ В $H_+(\Omega_h)$ пользуемся нормой пространства Соболева $W_2^4(\Omega_h)$

$$\|z\|_4 = \Big\{ \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} \big[(\partial_1^2 \bar\partial_1^2 z_i)^2 + (\partial_1 \bar\partial_1 \partial_2 \bar\partial_2 z_i)^2 + (\partial_2^2 \bar\partial_2^2 z_i)^2 \big] h_1 h_2 +$$

$$+ \sum_{i_1=0}^{N_1-1} \sum_{i_2=0}^{N_2-1} \big[(\partial_1^2 \bar\partial_1 \partial_2 z_i)^2 + (\partial_1 \partial_2^2 \bar\partial_2 z_i)^2 \big] h_1 h_2 + \sum_{i_1=0}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} \big[(\partial_1^2 \bar\partial_1 z_i)^2 +$$

$$+ (\partial_1 \partial_2 \bar\partial_2 z_i)^2 \big] h_1 h_2 + \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=0}^{N_2-1} \big[(\partial_2^2 \bar\partial_2 z_i)^2 + (\partial_1 \bar\partial_1 \partial_2 z_i)^2 \big] h_1 h_2 +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} \big[(\partial_1 \bar\partial_1 z_i)^2 + (\partial_2 \bar\partial_2 z_i)^2 \big] h_1 h_2 + \sum_{i_1=0}^{N_1-1} \sum_{i_2=0}^{N_2-1} (\partial_1 \partial_2 z_i)^2 h_1 h_2 \Big\}^{1/2}.$$

При помощи формулы суммирования по частям (см., напр.,[8]) получаем для произвольного $z \in H_+(\Omega_h)$ тождество

$$\sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} L_h z_i \,(\partial_1^2 \bar\partial_1^2 z_i + \partial_2^2 \bar\partial_2^2 z_i - \partial_1 \bar\partial_1 z_i - \partial_2 \bar\partial_2 z_i + z_i)\, h_1 h_2 =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} \big[p_{11} (\partial_1^2 \bar\partial_1^2 z_i)^2 + (p_{11} + p_{22}) (\partial_1 \bar\partial_1 \partial_2 \bar\partial_2 z_i)^2 + p_{22} (\partial_2^2 \bar\partial_2^2 z_i)^2 \big] h_1 h_2 +$$

$$+\sum_{i_1=0}^{N_1-1}\sum_{i_2=0}^{N_2-1} p_{12}\left[(\partial_1^2\bar\partial_1\partial_2 z_i)^2+(\partial_1\partial_2^2\bar\partial_2 z_i)^2\right]h_1h_2+$$

$$+\sum_{i_1=0}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\left[p_{11}(\partial_1^2\bar\partial_1 z_i)^2+(p_{12}+p_{22})(\partial_1\partial_2\bar\partial_2 z_i)^2\right]h_1h_2+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=0}^{N_2-1}\left[p_{22}(\partial_2^2\bar\partial_2 z_i)^2+(p_{12}+p_{11})(\partial_1\bar\partial_1\partial_2 z_i)^2\right]h_1h_2+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\left[p_{11}(\partial_1\bar\partial_1 z_i)^2+p_{22}(\partial_2\bar\partial_2 z_i)^2\right]h_1h_2+p_{12}\sum_{i_1=0}^{N_1-1}\sum_{i_2=0}^{N_2-1}(\partial_1\partial_2 z_i)^2h_1h_2+$$

$$+\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\Big\{\partial_2\bar\partial_2\partial_1\bar\partial_1 z_{0i_2}\left[(p_{11}+p_{22})\partial_1\partial_2\bar\partial_2 z_{0i_2}-p_{12}\partial_1^2\bar\partial_1 z_{0i_2}\right]-$$

$$-\partial_2\bar\partial_2\partial_1\bar\partial_1 z_{N_1i_2}\left[(p_{11}+p_{22})\partial_1\partial_2\bar\partial_2 z_{N_1-1,i_2}-p_{12}\partial_1^2\bar\partial_1 z_{N_1-1,i_2}\right]+$$

$$+p_{11}\partial_1\bar\partial_1 z_{0i_2}(\partial_1^2\bar\partial_1 z_{0i_2}-\partial_1\partial_2\bar\partial_2 z_{0i_2}+\partial_1 z_{0i_2})-$$

$$-p_{11}\partial_1\bar\partial_1 z_{N_1i_2}(\partial_1^2\bar\partial_1 z_{N_1-1,i_2}-\partial_1\partial_2\bar\partial_2 z_{N_1-1,i_2}+\partial_1 z_{N_1-1,i_2})\Big\}h_2+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\Big\{\partial_1\bar\partial_1\partial_2\bar\partial_2 z_{i_10}\left[(p_{11}+p_{22})\partial_1\bar\partial_1\partial_2 z_{i_10}-p_{12}\partial_2^2\bar\partial_2 z_{i_10}\right]-$$

$$-\partial_1\bar\partial_1\partial_2\bar\partial_2 z_{i_1N_2}\left[(p_{11}+p_{22})\partial_1\bar\partial_1\partial_2 z_{i_1,N_2-1}-p_{12}\partial_2^2\bar\partial_2 z_{i_1,N_2-1}\right]+$$

$$+p_{22}\partial_2\bar\partial_2 z_{i_10}(\partial_2^2\bar\partial_2 z_{i_10}-\partial_1\bar\partial_1\partial_2 z_{i_10}+\partial_2 z_{i_10})-$$

$$-p_{22}\partial_2\bar\partial_2 z_{i_1N_1}(\partial_2^2\bar\partial_2 z_{i_1,N_2-1}-\partial_1\bar\partial_1\partial_2 z_{i_1,N_2-1}+\partial_2 z_{i_1,N_2-1})\Big\}h_1+$$

$$+(p_{11}+p_{22})\sigma, \tag{4}$$

где

$$\sigma=\partial_1\bar\partial_1\partial_2 z_{00}\,\partial_1\partial_2\bar\partial_2 z_{00}-\partial_1\bar\partial_1\partial_2 z_{0,N_2-1}\,\partial_1\partial_2\bar\partial_2 z_{0N_2}-$$

$$-\partial_1\bar\partial_1\partial_2 z_{N_10}\,\partial_1\partial_2\bar\partial_2 z_{N_1-1,0}+\partial_1\bar\partial_1\partial_2 z_{N_1,N_2-1}\,\partial_1\partial_2\bar\partial_2 z_{N_1-1,N_2}.$$

Двукратные суммы в правой стороне тождества (4) оцениваются снизу величиной $\varkappa\|z\|_4^2$, где $\varkappa=min(p_{11},p_{12},p_{22})$. Абсолютные величины остальных членов оценим сверху. При этом пользуемся следующими неравенствами, имеющими место при $z\in H_+(\Omega_h)$ и $j_1=0,1,\dots,N_1-1$

$$\sum_{i_2=1}^{N_2-1}(\partial_1 z_{j_1 i_2})^2 h_2 \le \frac{l_1}{3}\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}(\partial_1\bar\partial_1 z_i)^2 h_1 h_2, \tag{5}$$

$$\sum_{i_2=1}^{N_2-1}(\partial_1\partial_2\bar\partial_2 z_{j_1 i_2})^2 h_2 \le \frac{l_1}{3}\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}(\partial_1\bar\partial_1\partial_2\bar\partial_2 z_i)^2 h_1 h_2, \tag{6}$$

$$\sum_{i_2=1}^{N_2-1}(\partial_1^2\bar\partial_1 z_{j_1 i_2})^2 h_2 \le \left(l_1+\frac{1}{l_1}\right)\Big[\sum_{i_1=0}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}(\partial_1^2\bar\partial_1 z_i)^2 h_1 h_2 +$$

$$+\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}(\partial_1^2\bar\partial_1^2 z_i)^2 h_1 h_2\Big]. \tag{7}$$

Неравенства (5) и (6) следуют из леммы I статьи [9], неравенство (7) доказывается следующим образом. Зафиксируем сперва i_2 и введем обозначения

$$v_{j_1 i_2} = \partial_1^2\bar\partial_1 z_{j_1 i_2}, \quad |v_{K i_2}| = \min_{j_1=0,\dots,N_1-1}|v_{j_1 i_2}|.$$

Из соотношений

$$v_{j_1 i_2} = v_{K i_2} + \sum_{i_1=K+1}^{j_1}\bar\partial_1 v_{i_1 i_2} h_1 \quad \text{при} \quad K<j_1,$$

$$v_{j_1 i_2} = v_{K i_2} - \sum_{i_1=j_1+1}^{K}\bar\partial_1 v_{i_1 i_2} h_1 \quad \text{при} \quad K>j_1$$

следует, что

$$|v_{j_1 i_2}| \le |v_{K i_2}| + \sum_{i_1=1}^{N_1-1}|\bar\partial_1 v_i| h_1 \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{l_1}}\left[\sum_{i_1=0}^{N_1-1}(v_i)^2 h_1\right]^{1/2} + \sqrt{l_1}\left[\sum_{i_1=1}^{N_1-1}(\bar\partial_1 v_i)^2 h_1\right]^{1/2}$$

Применяя неравенство Коши и суммируя по i_2 получаем неравенство (7).

Используя неравенство Коши, неравенства (5)-(7) и аналогичные неравенства для сумм по i_1 получаем из тождества (4) оценку

$$\|z\|_4^2 \le 2s\|z\|_4 + t, \tag{8}$$

где

$$s = \frac{1}{\varkappa}\left(1+\frac{l_1^2}{16}\right)\left(\sum_{\Omega_h}\varphi_i^2 h_1 h_2\right)^{1/2} + \frac{1}{\varkappa}\max_{\alpha=1,2}\sqrt{l_\alpha+\frac{1}{2l_\alpha}}\left(\sum_{\Gamma_{h0}}\varphi_i^2 h_\tau\right)^{1/2} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}\,\varkappa}\left(p_{11}+p_{22}+\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,p_{12}\right)\max_{\alpha=1,2}\sqrt{\ell_\alpha+\frac{1}{\ell_\alpha}}\left[\sum_{\Gamma_{h0}}\left(\partial_\tau\bar\partial_\tau\varphi_i\right)^2 h_\tau\right]^{1/2},$$

$$t=\frac{1}{\varkappa}\left(p_{11}+p_{22}\right)|\sigma|.$$

При этом считаем, что $\varphi_{00}=\varphi_{N_1 0}=\varphi_{0N_2}=\varphi_{N_1N_2}=0$ и что $h_\tau=h_2$, $\partial_\tau\bar\partial_\tau\varphi_i=\partial_2\bar\partial_2\varphi_i$ при $i_1=0,N_1$ и $h_\tau=h_1$, $\partial_\tau\bar\partial_\tau\varphi_i=\partial_1\bar\partial_1\varphi_i$ при $i_2=0,N_2$.

Решая квадратичное неравенство (8), получаем для решения задачи (3) априорную оценку

$$\|z\|_4\le s+\sqrt{s^2+t}. \tag{9}$$

§ 3. Сходимость метода

Выведем формулы для разделенных разностей при помощи которых оцениваются величины σ, ψ_i, φ_i и $\partial_\tau\bar\partial_\tau\varphi_i$, входящие в выражении s и t.

Пусть $v(x)$ - функция одной переменной. Применяя формулу интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned}\partial v(x)&=\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=\int_0^1 v'(x+th)\,dt=\\&=v'(x)+h\int_0^1(1-t)v''(x+th)\,dt=\\&=v'(x)+\frac{h}{2}v''(x)+\frac{h^2}{2}\int_0^1(1-t)^2v'''(x+th)\,dt,\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\bar\partial v(x)&=\frac{v(x)-v(x-h)}{h}=\int_0^1 v'(x-th)\,dt=\\&=v'(x)-\frac{h}{2}v''(x)+\frac{h^2}{2}\int_0^1(1-t^2)v'''(x-th)\,dt.\end{aligned}$$

Из этих формул вытекает, что

$$\partial\bar\partial v(x)=v''(x)\quad\frac{h^2}{6}\int_0^1(1-t)^3\left[v^{IV}(x+th)+v^{IV}(x-th)\right]dt. \tag{11}$$

Предположим, что решение задачи (I) $u\in C^6(\bar\Omega)$. Используя способ, описанный в [4, стр. 27], продолжим это решение за границы прямоугольника с сохранением гладкости. Тогда и расширенное решение удовлетворяет условиям $u(0,x_2)=u(\ell_1,x_2)=0$, $u(x_1,0)=u(x_1,\ell_2)=0$.

При помощи формулы (II) получаем, что, например,

$$\partial_1\bar\partial_1\partial_2 z_{00} = \partial_2(\partial_1\bar\partial_1 u_{00} - \mu_{00}) =$$

$$= \frac{h_1^2}{6}\int_0^1 (1-t)^3\left[\partial_2 \frac{\partial^4 u(th_1,0)}{\partial x_1^4} + \partial_2 \frac{\partial^4 u(-th_1,0)}{\partial x_1^4}\right] dt.$$

Отсюда, учитывая еще формулу (10), следует, что $|\partial_1\bar\partial_1\partial_2 z_{00}| \le \le M_1 h_1^2$. Таким образом получается оценка $|\sigma| \le M_2 h_1^2 h_2^2$. Аналогично оцениваются

$$|\psi_i| \le M_3(h_1^2+h_2^2), \quad x_i \in \Omega_h,$$

$$|\varphi_i| \le M_4(h_1^2+h_2^2), \quad |\partial_\tau\bar\partial_\tau\varphi_i| \le M_5(h_1^2+h_2^2), \quad x_i \in \Gamma_{h0}.$$

Следовательно,

$$s \le M_6(h_1^2+h_2^2), \quad t \le M_7 h_1^2 h_2^2$$

и из (9) вытекает оценка погрешности

$$\|z\|_4 \le M(h_1^2+h_2^2).$$

Литература

I. А н д р е е в В.Б. Устойчивость разностных схем для эллиптических уравнений четвертого порядка в прямоугольнике по граничным условиям первого рода. Вычислительные методы и программирование. Вып. 27. Москва, МГУ, 1977, 116-164.

2. Г а в р и л ю к И.П. и др. Оценки скорости сходимости разностных схем для уравнений четвертого порядка эллиптического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, 23, № 2, 355-365.

3. Л а з а р о в Р.Д. О сходимости разностных решений к обобщенным решениям в прямоугольнике. Дифференц. уравнения, 1981, 17, № 7, 1295-1303.

4. Л и о н с Ж.-Л., М а д ж е н е с Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. Москва, Мир, 1971.

5. Л я ш к о А.Д. Разностные схемы для задачи об изгибе тонких пластин. Сб. Численные методы мех. сплошн. среды. Новосибирск, 1973, 4, № 1, 71-83.

6. П р и м а к о в а С.И. О коэрцитивной разрешимости некоторых краевых задач с разностным бигармоническим

оператором. Методы решения операторных уравнений, Воронеж, ВГУ, 1978, 112-118.
7. Примакова С.И., Соболевский П.Е. О коэрцитивной разрешимости разностных уравнений четвертого порядка. Дифференц. уравнения, 1974, 10, № 9, 1699-1713.
8. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. Москва, Наука, 1976.
9. Тамме Э. О решении квазилинейной краевой задачи четвертого порядка методом конечных разностей. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, 253, 258-275.

Поступило
7 II 1984

DIE KONVERGENZ DES DIFFERENZENVERFAHRENS IN DER NORM DES RAUMES W_2^4 BEI DER LÖSUNG DER RANDWERTAUFGABE DER DIFFERENTIALGLEICHUNG VIERTER ORDNUNG

E. Tamme

Zusammenfassung

Es wird das Differenzenverfahren für die Lösung der zweiten Randwertaufgabe der linearen Differentialgleichung vierter Ordnung im Rechteck Ω betrachtet. Wenn die Lösung der Randwertaufgabe $u \in C^6(\Omega)$, dann ist die Konvergenz des Verfahrens mit der Geschwindigkeit $O(h_1^2 + h_2^2)$ in der Norm des diskreten Sobolev-Raumes W_2^4 bewiesen.

Уч.зап.Тартуск. ун-та, 1984, 672, 62-70

УТОЧНЕНИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ I

О. Карма

Для задач на собственные значения с нелинейным вхождением параметра рассматривается одна возможность последовательного уточнения решения. Используется общая схема регулярной аппроксимации оператор-функций [4, 3, 8, 5] и обобщаются некоторые рассуждения из [7]. Важно то, что для уточнения решения размерность задач, приближающих точное уравнение, не увеличиваются.

§ 1. Регулярная аппроксимация оператор-функций

Для обоснования некоторых из дальнейших предположений напомним один результат из теории регулярной аппроксимации. Эта теория с успехом может быть применена при исследовании конкретных методов дискретизации интегральных и дифференциальных уравнений (см., например, [1, 2, 6]).

Пусть, в этом пункте, $\mathcal{U}, \mathcal{V}, X_i, Y_i$ $(i \in \mathbb{N})$ – комплексные банаховы пространства[1] и пусть на области $\Lambda \subset \mathbb{C}$ заданы голоморфные фредгольмовы оператор-функции[2] $A: \Lambda \to \mathcal{B}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $B_i: \Lambda \to \mathcal{B}(X_i, Y_i)$ $(i \in \mathbb{N})$. Пусть выполнены следующие предположения П 1 (где $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) и П2:

П1: заданы операторы $p_i: \mathcal{U} \to X_i$, $q_i: \mathcal{V} \to Y_i$ такие, что[3]

а) $\| p_i(\alpha u' + \beta u'') - \alpha p_i u' - \beta p_i u'' \| \to 0$ $(i \in \mathbb{N})$ $\forall u', u'' \in \mathcal{U}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

б) $\| q_i(\alpha v' + \beta v'') - \alpha q_i v' - \beta q_i v'' \| \to 0$ $(i \in \mathbb{N})$ $\forall v', v'' \in \mathcal{V}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

в) $\| p_i u \| \to \| u \|$, $\| q_i v \| \to \| v \|$ $(i \in \mathbb{N})$ $\forall u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$ (1)

---

[1] Как правило, элементы пространств будут обозначены соответствующими маленькими буквами.

[2] Через $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ будет обозначено нормированное пространство линейных ограниченных операторов. Фредгольмовость оператор-функции A на Λ означает, что при каждом $\lambda \in \Lambda$ оператор $A(\lambda)$ фредгольмов с индексом 0.

[3] Запись $\alpha_i \to \alpha$ $(i \in \mathbb{N})$ означает сходимость последовательности $\{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ к α при $i \to \infty$.

П2: оператор-функции B_i аппроксимируют оператор-функцию A регулярно на Λ, т.е. [4, 3, 5]:

а) нормы $\|B_i(\lambda)\|$ равномерно ограничены по $i\in\mathbb{N}$ и λ на каждом компакте $\Lambda_0\subset\Lambda$,

б) $\|B_i(\lambda)p_iu-q_iA(\lambda)u\|\to 0 \quad (i\in\mathbb{N}) \quad \forall u\in\mathcal{U},\lambda\in\Lambda$, (2)

в) при каждом фиксированном[4] $\lambda\in\Lambda$

$$\exists v\in\mathcal{V}, N'\subset\mathbb{N}:\ \|x_i\|\le c,\ \|B_i(\lambda)x_i-q_iv\|\to 0\ (i\in N')\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \exists u\in\mathcal{U},\ N''\subset N':\ \|x_i-p_iu\|\to 0\ (i\in N''). \quad (3)$$

Пусть выполнено еще следующее предположение П3:

П3: точка $\lambda_0\in\Lambda$ – единственное собственное значение для A в Λ, причём ее полная кратность равна единице:

а) $\dim N(A,\lambda_0)=\dim\{u\in\mathcal{U}: A(\lambda_0)u=0\}=1$, (4)

б) $A(\lambda_0)u=0,\ \|u\|=1 \Rightarrow \neg\exists u'\in\mathcal{U}:\ A(\lambda_0)u'+A'(\lambda_0)u=0.$ (5)

Известно [4, 5, 9], что тогда в любом компакте $\Lambda_0\subset\Lambda$ с $\lambda_0\in\Lambda_0\setminus\partial\Lambda_0$ при всех достаточно больших i существует точно одно собственное значение ν_i оператор-функции B_i. При этом для λ_0,ν_i, $u^0\in N(A,\lambda_0)$ с $\|u^0\|=1$ и $x_i\in N(B_i,\nu_i)$ с $\|x_i\|=1$ имеют место следующие асимптотические оценки:

$$|\lambda_0-\nu_i|\le c\|B_i(\lambda_0)p_iu^0-q_iA(\lambda_0)u^0\|,$$
$$\|p_iu^0-x_i\|\le c\|B_i(\lambda_0)p_iu^0-q_iA(\lambda_0)u^0\|.$$

При исследовании конкретных дискретизационных методов правую сторону этих оценок обычно удается оценить величиной типа ch_i^{τ}, где $h_i\to 0 \quad (i\in\mathbb{N})$. А часто удается найти и явное выражение для главного члена погрешности аппроксимации $B_i(\lambda_0)p_iu^0-q_iA(\lambda_0)u^0$.

§ 2. Уравнение для поправок

Пусть теперь $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, X_i, Y_i $(i\in\mathbb{N})$ – банаховы пространства над $K\in\{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$ и пусть на области $\Lambda\subset\mathbb{K}$ заданы фредгольмовы оператор-функции $A:\Lambda\to\mathcal{B}(\mathcal{U},\mathcal{V})$, $B_i:\Lambda\to\mathcal{B}(X_i,Y_i)$ $(i\in\mathbb{N})$, дифференцируемые по λ как абстрактные функции.

Пусть выполнены предположения П1–П3 (см. § 1) и, кроме того, следующие предположения[5] П4 и П5:

[4] Через c будут обозначены константы, в разных местах, вообще говоря, разные.

[5] В условиях § 1 предположение П4 выполняется автоматически.

П4: $\lambda_i \to \lambda \in \Lambda \quad (i \in N) \to$

а) $\exists c: \quad \| B_i'(\lambda_i) \| \le c,$ (6)

б) $\| B_i'(\lambda_i) p_i u - q_i A'(\lambda) u \| \to 0 \quad (i \in N) \ \forall u \in \mathcal{U}, \lambda \in \Lambda$, (7)

П5: последовательности $\{\nu_{i0}\}_{i\in N}$ с $\nu_{i0} \in \Lambda$, $\{x_i^0\}_{i \in N}$ с $x_i^0 \in X_i$ и $\{\ell_i\}_{i\in N}$ с $\ell_i \in \mathcal{B}(X_i, K)$ такие, что

$$|\lambda_0 - \nu_{i0}| \to 0 \quad (i \in N),$$

$$\exists u^0 \in N(A, \lambda_0): \| x_i^0 - p_i u^0 \| \to 0 \quad (i \in N), \tag{8}$$

$$\ell_i x_i^0 = 1, \ \|\ell_i\| \le c, \ \exists \ell \in \mathcal{B}(\mathcal{U}, K): \ell_i p_i u \to \ell u \ (i \in N) \ \forall u \in \mathcal{U} \tag{9}$$

<u>Замечание 1</u>. Из П2а), П2б) и П4 следует, что

$$\lambda_i \to \lambda \in \Lambda, \quad \| x_i - p_i u \| \to 0 \quad (i \in N) \to$$
$$\to \| B_i^{(\ell)}(\lambda_i) x_i - q_i A^{(\ell)}(\lambda) u \| \to 0 \quad (i \in N), \quad \ell = 0, 1. \tag{10}$$

<u>Замечание 2</u>. Элемент u^0 в (8) не может равняться нулю, так как $\ell u^0 = 1$. (Действительно,

$$\ell_i p_i u^0 = \ell_i x_i^0 - \ell_i (x_i^0 - p_i u^0) \to 1 \quad (i \in N). \quad)$$

Обозначим (при всех достаточно больших $i \in N$)

$$\mu_i = \lambda_0 - \nu_{i0}, \quad u_i^0 = u^0 / \ell_i p_i u^0, \quad z_i = p_i u_i^0 - x_i^0,$$
$$R_i(\lambda) = B_i(\lambda) p_i - q_i A(\lambda) \tag{11}$$

и отметим, что для последовательности $\{u_i^0\}_{i \in N}$ имеем

$$\ell_i u_i^0 = 1, \quad \| u_i^0 - u^0 \| \to 0, \quad \| x_i^0 - p_i u_i^0 \| \to 0 \quad (i \in N), \tag{12}$$

так как

$$\| u_i^0 - u^0 \| \le \| u^0 \| \cdot |1 - \ell_i p_i u^0| / |\ell_i p_i u^0|,$$

$$\| x_i - p_i u_i^0 \| \le \| x_i - p_i u^0 \| + \| p_i u^0 \| \cdot |1 - \ell_i p_i u^0| / |\ell_i p_i u^0|.$$

Зададимся целью найти уравнение для определения μ_i и z_i, если известны ν_{i0} и x_i^0.

Исходим из системы

$$\begin{cases} A(\lambda) u = 0, \\ \ell_i p_i u = 0, \end{cases} \tag{13}$$

имеющей при $\lambda \in \Lambda$ единственное решение (λ_0, u_i^0). Имеем

$$\begin{cases} B_i(\nu_{i0} + \mu_i)(x_i^0 + z_i) = B_i(\lambda_0) p_i u_i^0 = R_i(\lambda_0) u_i^0, \\ \ell_i (x_i^0 + z_i) = \ell_i p_i u_i^0 = 1, \end{cases} \tag{14}$$

откуда получаем

$$
\begin{cases}
B_i(v_{i0})z_i+\mu_i B_i'(v_{i0})x_i^0=R_i(\lambda_0)u_i^0-B_i(v_{i0})x_i^0- \\
\quad -\mu_i B_i'(v_{i0})z_i-[B_i(v_{i0}+\mu_i)-B_i(v_{i0})-\mu_i B_i'(v_{i0})]\mu_i u_i^0, \\
l_i z_i=0,
\end{cases} \tag{15}
$$

ли, в матричном виде,

$$
\begin{pmatrix} B_i(v_{i0}) & B_i'(v_{i0})x_i^0 \\ l_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_i \\ \mu_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_i(\lambda_0)u_i^0-\dots \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Система (14) имеет единственное решение с $v_{i0}+\mu_i\in\Lambda$, как и исходная система (13). Нашей целью будет итеративное нахождение приближений к μ_i, z_i и нахождение асимптотических оценок для этих прибли..ний. Поэтому для нас важным является следующий результат.

Предложение 1. Пусть выполнены предположения П1–П5. Тогда операторы[6]

$$
T_i=\begin{pmatrix} B_i(v_{i0}) & B_i'(v_{i0})x_i^0 \\ l_i & 0 \end{pmatrix}\in\mathcal{B}(X_i\times K, Y_i\times K) \tag{16}
$$

при всех достаточно больших i непрерывно обратимы, причем нормы $\|T_i^{-1}\|$ равномерно ограничены по $i\in N$.

Доказательство. Операторы T_i фредгольмовы с индексом 0, как суммы фредгольмовых операторов с индексом 0 и конечномерных операторов:

$$
T_i=\begin{pmatrix} B_i(v_{i0}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & B_i'(v_{i0})x_i^0 \\ l_i & 0 \end{pmatrix}.
$$

Допустим от противного, что на некоторой подпоследовательности индексов $N'\subset N$ равномерно ограниченные по норме обратные операторы T_i^{-1} не существуют. Ввиду фредгольмовости операторов T_i тогда должна существовать последовательность элементов $\{(z_i,\mu_i)\}_{i\in N'}$ такая, что

$$
\|z_i\|+|\mu_i|=1, \quad T_i(z_i,\mu_i)\to 0 \quad (i\in N'),
$$

т.е.

$$
\|z_i\|+|\mu_i|=1,\ \|B_i(v_{i0})z_i+\mu_i B_i'(v_{i0})x_i^0\|\to 0,\ l_i z_i\to 0 \quad (i\in N'). \tag{17}
$$

Так как $|\mu_i|\le 1$, то найдутся $N''\subset N'$ и $\mu\in K$ такие, что $\mu_i\to\mu$ $(i\in N'')$. При этом, ввиду (6), (8) и (10), имеем

$$
\|\mu_i B_i'(v_{i0})x_i^0-\mu q_i A'(\lambda_0)u^0\|\to 0 \quad (i\in N''), \tag{18}
$$

[6] Будем считать, что $\|(z_i,\mu_i)\|_{X_i\times K}=\|z_i\|+|\mu_i|$.

откуда, вместе с (17), следует что

$$\| B_i(\nu_{i0}) z_i - q_i(\mu A'(\lambda_0) u^0) \| \to 0 \quad (i \in N''). \tag{19}$$

Но (19), вместе с $\| z_i \| \le 1$, по П2в) влечет существование таких $z \in \mathcal{U}$ и $N''' \subset N''$, что

$$\| z_i - p_i z \| \to 0 \quad (i \in N'''). \tag{20}$$

Из (20), (8) и (10) следует, что

$$\| B_i(\nu_{i0}) z_i - q_i A(\lambda_0) z \| \to 0 \quad (i \in N'''), \tag{21}$$

а из (19) и (21) получаем

$$\| q_i A(\lambda_0) z + q_i (\mu A'(\lambda_0) u^0) \| \to 0 \quad (i \in N'''),$$

$$\| q_i (A(\lambda_0) z + \mu A'(\lambda_0) u^0) \| \to 0 \quad (i \in N'''). \tag{22}$$

Но (22), ввиду (1), означает что

$$A(\lambda_0) z + \mu A'(\lambda_0) u^0 = 0. \tag{23}$$

Для того, чтобы (23) имело место при выполнении предположения П3, величина μ должна, по замечанию 2 и условию (5), **равняться** нулю. Но тогда из (17), (20) и (2) получаем

$$\| z_i \| \to 1, \quad \| p_i z \| \to 1 \quad (i \in N'''), \qquad \| z \| = 1,$$

а из (23), (20), (17) и (1) вытекает, что

$$A(\lambda_0) z = 0, \quad \| \ell_i p_i z \| \to 0 \ (i \in N'''), \qquad \ell z = 0. \tag{24}$$

Однако, ввиду (4), равенства в (24) противоречат предположению П5, по которому $\ell u^0 = 1$ (см. замечание 2) и $\ell z = \ell(u^0/\|u^0\|) = \ell u^0/\|u^0\| \ne 0$.

Предложение 1 доказано.

§ 3. Асимптотические оценки для поправок

Будем придерживаться предположений и обозначений § 2 и введем дальнейшие предположения П6–П8:

П6: при некотором $\alpha > 0$ для каждого компакта $\Lambda_0 \subset \Lambda$

а) $\exists c$: $\quad \| B_i'(\lambda) \| \le c \quad \forall \lambda \in \Lambda_0, \ i \in N,$ (25)

б) $\exists c$: $\quad \| B_i(\lambda) - B_i(\nu) - (\lambda - \nu) B_i'(\nu) \| \le c |\lambda - \nu|^{1+\alpha}$ (26)

$\forall \lambda, \nu \in \Lambda_0, \ i \in N,$

П7: для последовательностей $\{\nu_{i0}\}_{i \in N}$, $\{x_i^0\}_{i \in N}$ из П5 и последовательности $\{u_i^0\}_{i \in N}$ с $u_i^0 = u^0/\ell_i p_i u^0$ (с u^0 и ℓ_i из П5) имеют место оценки

$$|\lambda_0 - \nu_{i0}| \le c h_i^{\tau}, \quad \| x_i^0 - p_i u_i^0 \| \le c h_i^{\tau} \quad i \in N, \tag{27}$$

где $\tau > 0$ и $h_i \to 0 \ (i \in N)$.

П8: последовательность операторов $\{S_{i\tau}\}_{i\in N}$ с $S_{i\tau}$: $\Lambda\times X_i\to Y_i$ такая, что для последовательностей $\{v_{i0}\}_{i\in N}$, $\{x_i^0\}_{i\in N}$ и $\{u_i^0\}_{i\in N}$ в П7 с некоторым $s>0$ имеет место оценка

$$\| S_{i\tau}(v_{i0},x_i^0)-R_i(\lambda_0)u_i^0\|\le c h_i^{\tau+s}\ ; \quad i\in N \tag{28}$$

Замечание 3. Если вместо (27) известно, что для $\{x_i^0\}_{i\in N}$ и u^0 из П5 имеет место оценка $\|x_i^0-p_iu^0\|\le ch_i^\tau$, то и для $\{u_i^0\}$ верна оценка $\|x_i^0-p_iu_i^0\|\le ch_i^\tau$. Действительно,

$$\|x_i^0-p_iu_i^0\|\le\|x_i^0-p_iu^0\|+\|p_iu^0\|\cdot|1-\ell_ip_iu^0|/|\ell_ip_iu^0|,$$

а $|1-\ell_ip_iu^0|\le\|\ell_i\|\|x_i^0-p_iu^0\|$.

Замечание 4. На проверке предположения П8, а также аналогичного предположения 10(ниже) в данной статье мы останавливаться не будем. В частном случае интегрального уравнения $\lambda u=Ku$ для метода механических квадратур с использованием формулы трапеции в [7] доказано выполнение предположений П8 и П10 с $s=\tau=2$.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения П1–П8. Тогда для найденных по формулам

$$\begin{cases} B_i(v_{i0})z_i^1+\mu_{i1}B_i'(v_{i0})x_i^0=S_{i\tau}(v_{i0},x_i^0)-B_i(v_{i0})x_i^0\ , \\ \ell_iz_i^1=0 \end{cases} \tag{29}$$

величин μ_{i1}, z_i^1 имеют место оценки

$$\begin{aligned} &|\mu_i-\mu_{i1}|=|\lambda_0-(v_{i0}+\mu_{i1})|\le ch_i^{\tau+\sigma_1} \quad (i\in N),\\ &\|z_i-z_i^1\|=\|p_iu_i^0-(x_i^0+z_i^1)\|\le ch_i^{\tau+\sigma_1} \quad (i\in N), \end{aligned} \tag{30}$$

где $\sigma_1=\min(\tau,s,\alpha\tau)$.

Доказательство. Сравнивая (27) с (15), мы для величин

$$z_i-z_i^1\ ,\quad \mu_i-\mu_{i1}$$

получаем, учитывая (28), (11), (27), (25) и (26), что

$$\left\| T_i\begin{pmatrix} z_i-z_i^1\\ \mu_i-\mu_{i1}\end{pmatrix}\right\|\le ch_i^{\tau+s}+ch_i^{2\tau}+ch_i^{\tau+\alpha\tau} \tag{31}$$

Оценки (30) являются следствием (31) и предложения 1.

Теорема 1 доказана.

Заменяя v_{i0}, x_i^0 и τ на $v_{i0}+\mu_{i1}$, $x_i^0+z_i^1$ и $\tau+\sigma_1$ можно, если только известны подходящие $S_{i,\tau+\sigma_1}$, повторить вычисления по формулам (29) и рассуждения доказательства теоремы 1, получая более точные приближения к λ_0 и $p_iu_i^0$ и т.д. При этом на каждом шаге приходится заново найти оператор T_i.

Но возможен и такой алгоритм нахождения более точных приближений к λ_0 и $p_iu_i^0$, в котором операторы T_i не изменяются. Для этого нам понадобятся еще следующие предположения П9 и П10:

П9: Оператор-функции $B_i : \Lambda \to \mathcal{B}(X_i, Y_i)$ m $(m \geq 2)$ раз дифференцируемы, причем

а) для каждого компакта $\Lambda_0 \subset \Lambda$ и фиксированного $l = 0, \dots, m$

$$\exists\, c: \ \|B_i^{(l)}(\lambda)\| \leq c \qquad \forall \lambda \in \Lambda_0, \ i \in N, \tag{32}$$

б) при некотором $\alpha > 0$ для каждого компакта $\Lambda_0 \subset \Lambda$ существует константа c такая, что

$$\|B_i(\lambda) - B_i(\nu) - \sum_{j=1}^{m} \frac{(\lambda-\nu)^j}{j!} B_i^{(j)}(\nu)\| \leq c\,|\lambda - \nu|^{m+\alpha} \quad \forall \lambda, \nu \in \Lambda_0, \ i \in N, \tag{33}$$

П10: для $\kappa = 0, 1, \dots, \varkappa$ последовательность операторов $\{S_{i\tau_\kappa}\}_{i \in N}$ с $S_{i\tau_\kappa} : \Lambda \times X_i \to Y_i$ такая, что для последовательностей $\{\nu_{i\kappa}\}_{i \in N}$, $\{x_i^\kappa\}_{i \in N}$, найденных по формулам (36)–(39) (см. ниже) и удовлетворяющих неравенствам

$$|\lambda_0 - \nu_{i\kappa}| \leq c h_i^{\tau_\kappa}, \ \|p_i u_i^0 - x_i^\kappa\| \leq c h_i^{\tau_\kappa} \qquad i \in N, \tag{34}$$

с некоторым $s > 0$ имеет место оценка

$$\|S_{i\tau_\kappa}(\nu_{i\kappa}, x_i^\kappa) - R_i(\lambda_0) u_i^0\| \leq c h_i^{\tau_\kappa + s} \qquad i \in N; \tag{35}$$

здесь $u_i^0 = u^0 / l_i p_i u^0$ с u^0 и l_i, определенными в П5, $\sigma = \min(\tau, s)$, $\tau_\kappa = \min(\tau + \kappa\sigma, (m+\alpha)\tau)$.

<u>Теорема 2</u>. Пусть выполнены предположения П1–П10. Обозначим

$$\sigma = \min(\tau, s), \quad \tau_\kappa = \min(\tau + \kappa\sigma, (m+\alpha)\tau).$$

Тогда для найденных по формулам

$$\begin{cases} B_i(\nu_{i0}) z_i^{\kappa+1} + \mu_{i,\kappa+1} B_i'(\nu_{i0}) x_i^0 = S_{i,\tau_\kappa}(\nu_{i\kappa}, x_i^\kappa) - B_i(\nu_{i0}) x_i^0 - \\ \qquad - \mu_{i,\kappa} B_i'(\nu_{i0}) z_i^\kappa - \sum\limits_{j=2}^{m} \frac{\mu_{i\kappa}^j}{j!} B_i^{(j)}(\nu_{i0}) x_i^\kappa, & (36) \\ l_i z_i^{\kappa+1} = 0, & (37) \\ \nu_{i,\kappa+1} = \nu_{i0} + \mu_{i,\kappa+1}, \quad x_i^{\kappa+1} = x_i^0 + z_i^{\kappa+1} \quad \kappa = 0, 1, \dots, \varkappa, & (38) \\ \mu_{i0} = 0, \ z_i^0 = 0, \quad \nu_{i0}, \ x_i^0 \text{ и } u_i^0 \text{ определены в П7} & (39) \end{cases}$$

величин $\mu_{i,\kappa+1}$, $z_i^{\kappa+1}$, $\nu_{i,\kappa+1}$, $x_i^{\kappa+1}$ имеют место оценки

$$|\mu_i - \mu_{i,\kappa+1}| = |\lambda_0 - \nu_{i,\kappa+1}| \leq c h_i^{\tau_{\kappa+1}} \qquad i \in N, \tag{40}$$

$$\|z_i - z_i^{\kappa+1}\| = \|p_i u_i^0 - x_i^{\kappa+1}\| \leq c h_i^{\tau_{\kappa+1}} \qquad i \in N. \tag{41}$$

При этом в (36) верхний индекс суммирования m может быть заменен на любое число $m_\kappa < m$ такое, что $(m_\kappa + 1)\tau \geq \tau_{\kappa+1}$, т.е. $(\kappa+1)\sigma/\tau \leq m_\kappa < m$.

<u>Доказательство</u> проведем индукцией по κ.

Для $\kappa = 0$ теорема 2 является следствием теоремы 1 (ввиду (32) с $m \geq 2$ неравенство (26) выполняется с $\alpha = 1$).

Пусть, далее, при некотором $\kappa < \varkappa$ имеют место оценки

$$|\mu_i-\mu_{ik}| \le c h_i^{\tau_k}, \quad \|z_i-z_i^k\| \le c h_i^{\tau_k}. \tag{42}$$

Покажем, что тогда справедливы и оценки (40), (41).

Используя в (14) соотношение (33), получим

$$\begin{cases} B_i(v_{i0})z_i+\mu_i B_i'(v_{i0})x_i^0 = R_i(\lambda_0)u_i^0 - B_i(v_{i0})x_i^0 - \\ \qquad -\mu_i B_i'(v_{i0})z_i - \sum\limits_{j=2}^{m}\frac{\mu_i^j}{j!}B_i^{(j)}(v_{i0})p_i u_i^0 - y_i, \\ l_i z_i = 0, \end{cases} \tag{43}$$

где $\|y_i\| \le c|\mu_i|^{m+1}$. Заметим теперь, что

$$\|\mu_{ik}B_i'(v_{i0})z_i^k-\mu_i B_i'(v_{i0})z_i\| \le |\mu_{ik}-\mu_i|\,\|B_i'(v_{i0})\|\,\|z_i^k\| + \\ + |\mu_i|\,\|B_i'(v_{i0})\|\,\|z_i^k-z_i\| \le c h_i^{\tau_k+\tau} \qquad i\in N, \tag{44}$$

так как

$$\|z_i^k\| \le \|z_i\|+\|z_i-z_i^k\| \le c h_i^{\tau}, \quad \|B_i'(v_{i0})\| \le c, \quad |\mu_i| \le c h_i^{\tau}.$$

А для $j=2,\dots,m$ имеют место оценки

$$\|\mu_{ik}^j B_i^{(j)}(v_{i0})x_i^k-\mu_i^j B_i^{(j)}(v_{i0})p_i u_i^0\| \le |\mu_{ik}^j-\mu_i^j|\,\|B_i^{(j)}(v_{i0})\,x_i^k\| + \\ + |\mu_i^j|\,\|B_i^{(j)}(v_{i0})\|\,\|x_i^k-p_i u_i^0\| \le c h_i^{\tau_k+(j-1)\tau}+c h_i^{j\tau+\tau_k} \qquad i\in N, \tag{45}$$

так как

$$|\mu_{ik}^j-\mu_i^j| = |\mu_{ik}-\mu_i|\,|\mu_{ik}^{j-1}+\mu_{ik}^{j-2}\mu_i+\dots+\mu_{ik}\mu_i^{j-2}+\mu_i^{j-1}|,$$
$$\|x_i^k\| \le \|x_i^0\|+\|z_i^k\| \le c, \qquad \|B_i^{(j)}(v_{i0})\| \le c.$$

Сравнивая (36), (37) и (43), мы для величин

$$\mu_i-\mu_{i,k+1}, \quad z_i-z_i^{k+1}$$

получим, учитывая (44) и (45), что

$$\left\| T_i \begin{pmatrix} z_i-z_i^{k+1} \\ \mu_i-\mu_{i,k+1} \end{pmatrix} \right\| \le c h_i^{\tau_k+\Delta} + c h_i^{\tau_k+\tau} + c h_i^{\tau_k+\tau} + \gamma_i. \tag{46}$$

В (46) $\gamma_i \le c h_i^{\tau(m+1)}$, если в (36) верхний индекс суммирования равен m, и $\gamma_i \le c h_i^{(m_k+1)\tau}$, если в (36) верхний индекс суммирования равен $m_k < m$.

Оценки (40), (41) являются следствием (46) и предложения 1. Теорема 2 доказана.

Литература

1. Вайникко Г. Анализ дискретизационных методов. Тарту, ТГУ, 1976.

2. Вайникко Г.М. Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений. Итоги науки и техн. мат. анализ, 1979, 16, 5-53.

3. В а й н и к к о Г.М., К а р м а О.О. О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1974, 14, № 6, 1393-1408.
4. К а р м а О. Об аппроксимации оператор-функций и сходимости приближенных собственных значений. Канд. диссертация. Тарту, 1971.
5. К а р м а О. Аппроксимация в проблеме собственных значений с голоморфной зависимостью оператора от параметра (I). Рукопись деп. в ВИНИТИ 11.01.82 г. № 130-82Деп.
6. Т а м м е Э. О сходимости метода сеток решения задачи Неймана. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981, 580, 24-30.
7. C h u K.W., S p e n c e A. Deferred correction for the integral equation eigenvalue problem. J. Austral. Math. Soc. (Ser. B), 1981, 22, 474-487.
8. G r i g o r i e f f R.D., J e g g l e H. Approximation von Eigenwertproblemen bei nichtlinearer Parameterabhängigkeit. Manuscr. math., 1973, 10, 245-271.
9. W o l f R. Zur Stabilität der algebraischen Vielfachheit von Eigenwerten von holomorphen Fredholm-Operatorfunctionen. Appl. Analysis, 1979, 9, 165-177.

Поступило
12 IУ 1984

DEFERRED CORRECTION FOR THE
NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEM I

O. Karma

Summary

The defect correction approach is used for the eigenvalue problem with nonlinear dependence in parameter and some discussions of [7] are generalized in the framework of the regular approximation of the operator-functions [4, 3, 8].

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1984,672,71-78

ЭРМИТОВЫ КВАДРАТИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

П. Оя

Приближение функций интерполяционными линейными сплайнами отличается простотой реализации, а на классах функций небольшой гладкости они по точности не уступают сплайнам более высокой степени. Эрмитовы кубические сплайны обеспечивают более высокую степень точности для более гладких интерполируемых функций и являются вспомогательным средством при получении точных оценок остаточного члена нелокальных интерполяционных кубических сплайнов [1]. Изучение интерполяционных свойств квадратических сплайнов начато в [3], наиболее полное изложение имеется в [2]. В настоящей работе, дополняющей [2], приводятся оценки остаточного члена эрмитовых квадратических сплайнов, причем используется методика, развитая в [1]. Дается взаимосвязь и краткое сравнение точности между эрмитовыми и локальными квадратическими сплайнами, изученными в [2].

§ 1. Обозначения

Будем рассматривать класс $C^k[a,b]$ функций, имеющих на отрезке $[a,b]$ непрерывную производную порядка k. Через $L^\infty[a,b]$ обозначим пространство (классов) измеримых и ограниченных в существенном функций, а через $W^k_\infty[a,b]$ — класс функций, имеющих на $[a,b]$ абсолютно непрерывную производную порядка $k-1$ и производную порядка k из $L^\infty[a,b]$. Для сетки $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ обозначение $C^k C^l_\Delta[a,b]$ (соответственно $C^k W^l_{\Delta,\infty}[a,b]$) (причем $k < l$) будем использовать для класса функций f, удовлетворяющих условиям $f \in C^k[a,b]$, $f \in C^l[x_i,x_{i+1}]$ (соответственно $f \in W^l_\infty[x_i,x_{i+1}]$), $i = 0,\ldots,N-1$. Для функции $f \in C[a,b]$ используем колебание на отрезке $[x_i,x_{i+1}]$

$$\omega_i(f) = \max_{x,y\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x) - f(y)|,$$

а также
$$\omega(f) = \max_{0 \le i \le N-1} \omega_i(f).$$
Норму в $L^{\infty}[a,b]$ обозначим через $\|\cdot\|_{\infty}$.

§ 2. Интерполяция эрмитовыми квадратическими сплайнами

Пусть в узлах сетки Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ (для простоты изложения пусть N четно) заданы значения функции $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, N$ и ее производной $f_i' = f'(x_i)$, $i = 1, 3, \ldots, N-1$. Эрмитовым квадратическим сплайном будем называть функцию S_2, которая на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ является квадратическим многочленом и удовлетворяет условиям
$$\begin{aligned} S_2(x_i) &= f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \\ S_2'(x_i) &= f_i', \quad i = 1, 3, \ldots, N-1. \end{aligned} \tag{1}$$

Если положить $h_i = x_{i+1} - x_i$, $x = x_i + t h_i$, то при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ сплайн S_2 имеет представление
$$S_2(x) = (1-t^2) f_i + t^2 f_{i+1} + h_i t (1-t) f_i', \quad i = 1, 3, \ldots, N-1, \tag{2}$$
$$S_2(x) = (1-t)^2 f_i + t(2-t) f_{i+1} - h_i t (1-t) f_{i+1}', \quad i = 0, 2, \ldots, N-2. \tag{3}$$

Отметим, что в действительности N может быть также нечетным и для любого отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ должно быть известно значение производной функции f в точке x_i или x_{i+1}.

Оценим остаточный член и его производные $R^{(j)} = S_2^{(j)} - f^{(j)}$, $j = 0, 1, 2$, в зависимости от гладкости функции f. Положим $h = \max_{0 \le i \le N-1} h_i$.

Теорема. Если сплайн S_2 удовлетворяет интерполяционным условиям (1), то имеют место оценки
$$\max_{a \le x \le b} |S_2^{(j)}(x) - f^{(j)}(x)| \le R_j, \quad j = 0, 1, 2,$$
где R_j даны в таблице 1. Все приведенные в этой таблице оценки неулучаемы.

Доказательство. Понятно, что из соображений симметрии достаточно оценить $R^{(j)}$ только для представления (2).

1. Начнем с оценки R. Разлагая f_i и f_{i+1} в точке $x = x_i + t h_i$ по формуле Тейлора, получаем
$$R(x) = h_i (1-t^2) t \left(f'(\xi) - f'(\eta)\right),$$
где $\xi, \eta \in (x_i, x_{i+1})$. Из этого получается оценка $|R(x)|$

Таблица 1

Класс функций	R_0	R_1	R_2
$C^1[a,b]$	$\frac{2\sqrt{3}}{9} h\,\omega(f')$	$2\,\omega(f')$	—
$W^2_\infty[a,b]$	$\frac{5\sqrt{5}-11}{2} h^2 \|f''\|_\infty$	$\frac{1}{2} h \|f''\|_\infty$	—
$C^1C^2_\Delta[a,b]$	$\frac{5\sqrt{5}-11}{4} h^2 \omega(f'')$	$\frac{1}{4} h\,\omega(f'')$	$\omega(f'')$
$C^1W^3_{\Delta,\infty}[a,b]$	$\frac{1}{81} h^3 \|f'''\|_\infty$	$\frac{1}{6} h^2 \|f'''\|_\infty$	$\frac{2}{3} h \|f'''\|_\infty$

для класса $C^1[a,b]$, если учесть, что $(1-t^2)t$ достигает максимума при $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Используя в формуле Тейлора остаточные члены в интегральном виде, имеем

$$R(x)=(1-t^2)\int_x^{x_i} f'(x)\,dx+t^2\int_x^{x_{i+1}} f'(x)\,dx+h_i t(1-t)f_i'.$$

Отсюда видно, что квазиэкстремальной является функция, для которой

$$f'(x)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad x=x_i,\\ -1 & \text{при} \quad x_i+\varepsilon\le x\le x_i+\frac{1}{\sqrt{3}}h_i-\varepsilon,\\ 1 & \text{при} \quad x_i+\frac{1}{\sqrt{3}}h_i+\varepsilon\le x\le x_{i+1},\\ \in[-1,1] & \text{при других} \quad x\in[x_i,x_{i+1}].\end{cases}$$

В классах $W^2_\infty[a,b]$ и $C^1C^2_\Delta[a,b]$ имеем

$$R(x)=h_i^2\left\{(1-t^2)\int_0^t\left(\tau-\frac{t}{1+t}\right)f''(x_i+\tau h_i)\,d\tau+t^2\int_t^1(1-\tau)f''(x_i+\tau h_i)\,d\tau\right\},\quad (4)$$

откуда

$$|R(x)|\le t^2\,\frac{1-t}{1+t}\,h_i^2\,\|f''\|_\infty$$

или

$$R(x)=\frac{1}{2}\,t^2\,\frac{1-t}{1+t}\,h_i^2\left(f''(\xi)-f''(\eta)\right).$$

Они дают приведенные в таблице 1 оценки при $t^*=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Из представления (4) видно, что в классе $W^2_\infty[a,b]$ экстремальна функция, для которой

$$f''(x_i+th_i)=\begin{cases}-1 & \text{при} \quad 0\le t<\frac{t^*}{1+t^*},\\ 1 & \text{при} \quad \frac{t^*}{1+t^*}\le t\le 1,\end{cases}$$

а ее сглаживанием в окрестности $t=\frac{t^*}{1+t^*}$ получается квазиэкстремальная функция для класса $C^1 C^2_\Delta [a,b]$.

Если $f \in C^1 W^3_{\Delta,\infty}[a,b]$, то получаем представление

$$R(x) = h_i^3 \left\{ \frac{1}{2}(1-t^2)\int_0^t \tau\left(\frac{2t}{1+t} - \tau\right) f'''(x_i + \tau h_i)\,d\tau + \frac{1}{2}t^2 \int_t^1 (1-\tau)^2 f'''(x_i + \tau h_i)\,d\tau \right\}, \quad (5)$$

откуда

$$|R(x)| \le \frac{1}{6} t^2 (1-t) h_i^3 \, \| f''' \|_\infty .$$

Максимальное значение правой части достигается при $t = \frac{2}{3}$. Из (5) видно, что в классе $C^1 W^3_{\Delta,\infty}[a,b]$ экстремальной функцией является любой многочлен третьей степени.

2. Приступим к оценке производной от R. Исходя из (2), получаем

$$R'(x) = \frac{1}{h_i}\left(-2t f_i + 2t f_{i+1} + h_i(1-2t) f_i'\right) - f'(x).$$

В классе $C^1[a,b]$ при $0 \le t \le 1/2$ получается

$$R'(x) = f'(\xi) - f'(x),$$

а при $1/2 \le t \le 1$

$$R'(x) = 2t\left(f'(\xi) - f'(\eta)\right).$$

Из последнего при $t = 1$ следует оценка таблицы 1. Имеем еще

$$R'(x_{i+1}) = \frac{2}{h_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(\sigma)\,d\sigma - f_i' - f'(x_{i+1}),$$

значит, квазиэкстремальной является функция, для которой

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad x = x_i, \\ 1 & \text{при} \quad x_i + \varepsilon \le x \le x_{i+1} - \varepsilon, \\ -1 & \text{при} \quad x = x_{i+1}, \\ \in [-1,1] & \text{при других} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$

В классах $W^2_\infty[a,b]$ и $C^1 C^2_\Delta [a,b]$ получаем

$$R'(x) = h_i\left\{-2t\int_0^t \left(\tau + \frac{1-2t}{2t}\right) f''(x_i + \tau h_i)\,d\tau + 2t\int_t^1 (1-\tau) f''(x_i + \tau h_i)\,d\tau\right\}.$$

Отсюда при $0 \le t \le 1/2$ следует

$$|R'(x)| \le 2t(1-t)^2 h_i \, \| f'' \|_\infty$$

или

$$R'(x) = h_i t (1-t)^2 \left(f''(\xi) - f''(\eta)\right).$$

Но при $1/2 \le t \le 1$ из представления

$$R'(x) = h_i\Big\{-2t\int\limits_0^{\frac{2t-1}{2t}}\left(\tau+\frac{1-2t}{2t}\right)f''(x_i+\tau h_i)\,d\tau -$$

$$-2t\int\limits_{\frac{2t-1}{2t}}^{t}\left(\tau+\frac{1-2t}{2t}\right)f''(x_i+\tau h_i)\,d\tau + 2t\int\limits_t^1(1-\tau)f''(x_i+\tau h_i)\,d\tau\Big\} \quad (6)$$

вытекают оценки

$$|R'(x)| \le \varphi(t)\,h_i\,\|f''\|_\infty,$$

$$|R'(x)| \le \frac{1}{2}\varphi(t)\,h_i\,\omega(f''),$$

где $\varphi(t) = 2t\left(\left(\frac{2t-1}{2t}\right)^2+(1-t)^2\right)$. Функция φ на отрезке $1/2 \le t \le 1$ принимает максимальное значение при $t=1$,что дает требуемые оценки. Из (6) видно, что в классе $W^2_\infty[a,b]$ экстремальна функция, для которой

$$f''(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x_i \le x \le x_i + \frac{h_i}{2}, \\ -1 & \text{при} \quad x_i + \frac{h_i}{2} < x \le x_{i+1}, \end{cases}$$

а ее сглаживание квазиэкстремальна в классе $C^1C^2_\Delta[a,b]$

В классе $C^1W^3_{\Delta,\infty}[a,b]$ получаем

$$R'(x) = h_i^2\Big\{t\int\limits_0^t\left(\tau^2+\frac{1-2t}{t}\tau\right)f'''(x_i+\tau h_i)\,d\tau + t\int\limits_t^1(1-\tau)^2 f'''(x_i+\tau h_i)\,d\tau\Big\}.$$

Из этого при $0 \le t \le 1/2$ следует

$$|R'(x)| \le \frac{1}{6}t\left(2-3t-t^3\right)h_i^2\,\|f'''\|_\infty,$$

а при $1/2 \le t \le 1$

$$|R'(x)| \le \frac{1}{6}\left(2\left(\frac{2t-1}{t}\right)^3+2(1-t)^3+t\left(2t^2-6t+3\right)\right)h_i^2\,\|f'''\|_\infty.$$

Правая часть последнего неравенства достигает максимума при $t=1$. Опять, любой многочлен третьей степени экстремален для класса $C^1W^3_{\Delta,\infty}[a,b]$.

3. Рассмотрим, наконец, оценки второй производной остаточного члена. Имеем (для представления (2))

$$R''(x) = \frac{1}{h_i^2}\left(-2f_i+2f_{i+1}-2h_i f_i'\right)-f''(x).$$

В классе $C^1C^2_\Delta[a,b]$ получаем

$$R''(x) = 2\int_0^1 (1-\tau) f''(x_i+\tau h_i)d\tau - f''(x) = f''(\xi) - f''(x).$$

Из этого, кроме оценки таблицы 1, видно также, что квазиэкстремальной является функция, для которой

$$f''(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} - \varepsilon, \\ -1 & \text{при} \quad x = x_{i+1}, \\ \in[-1,1] & \text{при других} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Для нее $R''(x_{i+1}) = \omega(f'')$.

Если $f \in C^1 W^3_{\Delta,\infty}[a,b]$, то из представления

$$R''(x) = h_i\left\{\int_0^t (\tau^2 - 2\tau) f'''(x_i+\tau h_i)d\tau + \int_t^1 (1-\tau)^2 f'''(x_i+\tau h_i)d\tau\right\}$$

следует, что

$$|R''(x)| \leq \frac{1}{3}\left(2(1-t)^3 - (1-3t)\right) h_i \|f'''\|_\infty .$$

Здесь максимум достигается при $t=1$ и экстремальной функцией будет любой многочлен третьей степени.

Теорема доказана.

§ 3. Использование приближенных производных

Если f_i', $i = 1,3,\ldots,N-1$, неизвестны, то их можно заменить формулами численного дифференцирования. Пусть $h_{i-1} = h_i$, $i = 1,3,\ldots,N-1$. Вместо f_i' в (2) запишем её приближение $(f_{i+1} - f_{i-1})/(2h_i)$, тогда вместо S_2 получаем

$$\widetilde{S}_2(x) = -\frac{1}{2}t(1-t)f_{i-1} + (1-t^2)f_i + \frac{1}{2}t(1+t)f_{i+1}. \qquad (7)$$

Аналогично, приближение к представлению (3) есть

$$\widetilde{S}_2(x) = \frac{1}{2}(1-t)(2-t)f_i + t(2-t)f_{i+1} - \frac{1}{2}t(1-t)f_{i+2}. \qquad (8)$$

Непосредственно проверяется, что на любом отрезке $[x_i, x_{i+2}]$, $i=0,2,\ldots,N-2$, формулами (7) и (8) задается один и тот же квадратический многочлен. Отметим, что $\widetilde{S}_2$ удовлетворяет интерполяционным условиям

$$\widetilde{S}_2(x_i) = f_i, \quad i = 0,1,\ldots,N. \qquad (9)$$

В [2] рассмотрены локальные квадратические сплайны $\overline{S}_2$ на сетке $\overline{\Delta}: a = \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \ldots < \overline{x}_M = b$, удовлетворяющие интерполяционным условиям

$$\bar{S}_2(\bar{x}_i) = f_i, \quad i = 0,1,\dots,M,$$
$$\bar{S}_2(\bar{x}_{i+1/2}) = f_{i+1/2}, \quad i = 0,1,\dots,M-1, \tag{10}$$

где $\bar{x}_{i+1/2} = (\bar{x}_i + \bar{x}_{i+1})/2$, а $f_i = f(\bar{x}_i)$, $f_{i+1/2} = f(\bar{x}_{i+1/2})$ заданы. Если предполагать, что $N = 2M$ и $\bar{x}_i = x_{2i}, i = 0,\dots,M$, то интерполяционные условия (9) и (10) совпадают, значит, совпадают сплайны $\tilde{S}_2$ и $\bar{S}_2$. Положим $H_i = \bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i$, $i = 0,1,\dots,M-1$, $H = \max\limits_{0 \le i \le M-1} H_i$. В таблице 2 даны оценки для $|\bar{S}_2^{(j)}(x) - f^{(j)}(x)| \le R_j$, $j = 0,1,2$, полученные в [2].

Таблица 2

Класс функций	R_0	R_1	R_2
$C C_{\Delta}^{1}[a,b]$	$\frac{7\sqrt{7}-10}{54} H\,\omega(f')$	$\frac{3}{2}\,\omega(f')$	—
$C W_{\Delta,\infty}^{2}[a,b]$	$0{,}037661\, H^2 \|f''\|_\infty$	$\frac{H}{3} \|f''\|_\infty$	—
$C C_{\Delta}^{2}[a,b]$	$0{,}01883\, H^2 \omega(f'')$	$\frac{H}{6}\,\omega(f'')$	$\omega(f'')$
$C W_{\Delta,\infty}^{3}[a,b]$	$\frac{\sqrt{3}}{216} H^3 \|f'''\|_\infty$	$\frac{H^2}{12} \|f'''\|_\infty$	$\frac{H}{2} \|f'''\|_\infty$

<u>Замечание</u>. В [2] оценка $|R''(x)|$ для класса $C C_{\Delta}^{2}[a,b]$ приведена в виде $\frac{1}{2}\,\omega(f'')$, но это опечатка.

Если учитывать, что $H = 2h$ и $\omega(H;f) \le 2\,\omega(h;f)$, то при одинаковых порядках оценки в таблице 1 имеют меньшие коэффициенты.

Отметим, что эрмитовы квадратические сплайны S_2, рассмотренные нами, могут быть использованы при оценке остаточного члена интерполяции нелокальными сплайнами подобно тому, как это делается в [2] при помощи локальных квадратических сплайнов $\bar{S}_2$.

Литература

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. Москва, Наука, 1980.

2. Квасов Б.И. Интерполяция квадратическими сплайнами. Ин-т теор. и прикл. мех. СО АН СССР, Препр., 1981, № 3.

3. Marsden, M.J. Quadratic spline interpolation. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, 80, № 5, 903-906.

Поступило
25 I 1983

THE HERMITE QUADRATIC SPLINES

P. Oja

Summary

The paper deals with the quadratic analogues of the Hermite cubic splines which use the derivatives of a function at the knots of interpolation. The error of interpolation and its derivatives are estimated in maximum norm. It is shown also that there estimations cannot be improved. A brief comparison with the local quadratic splines studied in [2] is made.

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1984,672,79-86

О СОСТОЯНИЯХ РАВНОВЕСИЯ ПРОЦЕССА КОРРЕКТИРОВКИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

П. Мийдла, С. Перминов

В настоящей статье рассмотрены некоторые вопросы, связанные с математической моделью экономического процесса корректировки вероятностных предпочтений. После постановки задачи исследуется существование точки покоя одной автономной системы дифференциальных уравнений, которая является нужной моделью, а также излагаются некоторые подходы к установлению устойчивости состояния равновесия.

§ I. Постановка задачи. Используемые результаты

Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\pi_s' = \frac{\alpha_s(\pi)\cdot\pi_s}{(\alpha(\pi),\pi)} - \pi_s \equiv f_s(\pi)\,,\ s=1,2,\ldots,n. \qquad (\mathrm{I})$$

Здесь $\pi_s=\pi_s(t)$, $s=1,2,\ldots,n$; $\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_n)$;

$$\alpha_s(\pi)=\frac{1}{\beta_s}\sum_{i=1}^{\ell}\frac{c_i\, b_{si}}{\sum_{j=1}^{n}\pi_j\gamma_{ij}}\,,\quad s=1,2,\ldots,n;$$

$$(\alpha(\pi),\pi)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(\pi)\cdot\pi_k\,;\quad \beta_s=\sum_{i=1}^{\ell}b_{si}\,,\ s=1,2,\ldots,n.$$

Матрицы $B=(b_{ij})$, $\Gamma=(\gamma_{pq})$ $(i,q=1,2,\ldots,n;\ j,p=1,2,\ldots,\ell)$ и вектор $c=(c_1,\ldots,c_\ell)$ считаются в пределах настоящей статьи заданными, причем Γ и c – с неотрицательными элементами.

Система (I) является математической моделью процесса корректировки вероятностных предпочтений π в ходе принятия хозяйственных решений, детально описанного в [I]. При переходе от одного решения к другому происходит накопление опыта, иначе говоря, хозяйственный руководитель адаптируется к ситуации, задаваемой параметрами B, Γ и c. В конце концов, определяется неподвижная точка данного процесса – точка покоя системы (I). В книге [I] приведены достаточные условия глобальной устойчивости этого процесса, которые являются весьма сильными – матрица B полагается единичной и Γ имеет специальный вид. В то же время многочисленные экспериментальные расчеты показывают, что асимптотическая устойчивость имеет место и при значительно более слабых условиях.

В данной статье приводятся некоторые соображения по поводу решения проблемы устойчивости именно на основе системы (I). Исследуется также существование точки покоя у системы (I).

При изучении устойчивости мы будем использовать следующие результаты, доказанные, например, в книге [2].

Пусть для системы (I) точка $\pi^* = (\pi_1^*, \ldots, \pi_n^*)$ является точкой покоя, т.е. $f_s(\pi^*) = 0$, $s = 1, 2, \ldots, n$. Пусть функции f_s, $s = 1, 2, \ldots, n$ непрерывно дифференцируемы по всем компонентам π в некоторой окрестности точки π^*. Если все собственные значения матрицы Якоби A с элементами

$$a_{ij} = \partial f_i(\pi^*)/\partial \pi_j \quad , \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

имеют отрицательные действительные части, то положение равновесия π^* системы (I) асимптотически устойчиво.

Если же действительная часть хотя бы одного собственного значения положительна, то положение равновесия неустойчиво.

Мы используем классические понятия устойчивости (по Ляпунову) и асимптотической устойчивости положения равновесия системы дифференциальных уравнений, поэтому здесь формулировать их не будем. Сошлемся опять, например, на книгу [2].

§ 2. Существование точек покоя

Точки покая системы (I) определяются из условий

$$f_s(\pi) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Будем условно называть нетривиальными точками покоя такие решения системы (2), все компоненты которых (строго) положительны. Остальные назовем тривиальными.

Легко видеть, что система обладает тривиальными точками покоя вида $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ – векторы, на i -том месте которых единица, на всех остальных – нули. Действительно, например, для e_1 имеем $f_s(e_1) = 0$, $s = 1, 2, \ldots, n$, причем

$$\alpha_p(e_1) = \frac{1}{\beta_p} \sum_{i=1}^{l} \frac{c_i b_{pi}}{\gamma_{i1}} \quad , \quad p = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

По существу задачи нас интересуют лишь нетривиальные решения. Из соотношений (I) и (2) получим условия для них

$$\alpha_p(\pi) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\pi) \cdot \pi_k \quad , \quad p = 1, 2, \ldots, n,$$

т.е. в случае нетривиального решения все величины α_k будут равны между собой. Отсюда вытекает ещё одно условие:

$$\sum_{k=1}^{n} \pi_k = 1 \ . \tag{4}$$

Другими словами, нетривиальные точки покоя системы (I), если они существуют, находятся в выпуклой оболочке $S \subset \mathbb{R}^n$ точек e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Равенство между собой всех α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ означает, что существует некоторое число α^* такое, что в точке равновесия

$$\alpha_k(\pi) \equiv \frac{1}{\beta_k} \sum_{i=1}^{l} \frac{c_i b_{ki}}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j \gamma_{ij}} = \alpha^*, \; k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (5)$$

Число α^* определяется нормирующим условием (4). При практическом нахождении нетривиальных точек покоя можно α^* в системе (5) зафиксировать. Если взять, например, $\alpha^* = 1$, тогда положительное решение (т.е. решение, все компоненты которого строго положительны) соответствующей системы (5) после нормирования уже окажется искомой точкой покоя системы (I). Действительно, пусть существует вектор $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_1, \ldots, \hat{\pi}_n)$, $\hat{\pi}_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, такой, что $\alpha_k(\hat{\pi}) = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда вектор π^* с компонентами

$$\pi_i^* = \hat{\pi}_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} \hat{\pi}_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

удовлетворяет условию (4), систему (5) с

$$\alpha^* = 1 \Big/ \sum_{j=1}^{n} \hat{\pi}_j = \alpha_k(\pi^*), \; k = 1, 2, \ldots, n,$$

а тем самым и соотношениям (2).

Описанная ситуация возникает, например, если удается найти положительное решение системы

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j \gamma_{ij} = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, l, \qquad (6)$$

которое, очевидно, является также положительным решением системы (5) с $\alpha^* = 1$ (обратное, конечно, неверно).

Система вида (6) для нахождения нетривиальной точки равновесия возникает также, когда B - диагональная матрица ($n = l$), а справа - только величины c_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, деленные на соответствующие диагональные элементы матрицы B. Если же все элементы матрицы B равны между собой и ненулевые, то остается лишь одно уравнение вида (6) (также и при $n \neq l$), и в этом случае система (I) имеет бесконечно много нетривиальных точек покоя - ими являются все векторы множества S, компоненты которых положительны.

В настоящем пункте мы рассматривали только такие тривиальные решения системы (2), у которых только одна компонента отлична от нуля. Что касается остальных, то их нахождение сводится к решению системы (2) с меньшим n, т.е. к задаче меньшей размерности. Например, если допустить, что только две компоненты (без ограничения общности можно предполагать, что первая и вторая) отличны от нуля, то соотношения (2) будут иметь вид

$$\frac{\alpha_1(\tilde{\pi})\cdot\pi_1}{\alpha_1(\tilde{\pi})\cdot\pi_1+\alpha_2(\tilde{\pi})\cdot\pi_2}-\pi_1=0,$$

$$\frac{\alpha_2(\tilde{\pi})\cdot\pi_2}{\alpha_1(\tilde{\pi})\cdot\pi_1+\alpha_2(\tilde{\pi})\cdot\pi_2}-\pi_2=0,$$

где $\tilde{\pi}=(\pi_1,\pi_2)$. Но это соответствует первоначальной задаче (I) с $r=2$. При $l=2$ для решения последней системы с помощью соотношений (5) легко получается условие

$$\pi_1\cdot(c_1\gamma_{21}-c_2\gamma_{11})=\pi_2\cdot(c_1\gamma_{12}-c_2\gamma_{22}),$$

если только $\frac{b_{11}}{\beta_1}\neq\frac{b_{21}}{\beta_2}$ (в случае равенства решениями системы (2) при $r=2$ будут любые π_1 и π_2). Полученное уравнение на основе нормирующего условия (4) дает нетривиальную точку покоя тогда и только тогда, когда величины $c_1\gamma_{21}-c_2\gamma_{11}$ и $c_1\gamma_{12}-c_2\gamma_{22}$ отличны от нуля и имеют одинаковый знак.

§ 3. Устойчивость тривиальных точек покоя

Следуя цитированным в пункте I результатам, мы должны оценить действительные части собственных значений соответствующей матрицы Якоби . Для нашей задачи (I) проделаем это при тривиальном решений e_1 ; для остальных e_i , $i=2,3,\dots,r$ рассуждения аналогичны.

Непосредственная проверка показывает, что в матрице $A=(a_{ij})$, $a_{ij}=\partial f_i(e_1)/\partial\pi_j$, $i,j=1,2,\dots,r$ ненулевые элементы находятся только на главной диагонали и в первом ряду:

$$a_{1j}=\frac{\partial f_1(e_1)}{\partial\pi_j}=-\frac{\alpha_j(e_1)}{\alpha_1(e_1)},\quad j=1,2,\dots,r;$$

$$a_{ii}=\frac{\partial f_i(e_1)}{\partial\pi_i}=\frac{\alpha_i(e_1)}{\alpha_1(e_1)}-1,\quad i=1,2,\dots,r;$$

$$\alpha_j(e_1)=\frac{1}{\beta_j}\sum_{i=1}^{l}\frac{c_i b_{ji}}{\gamma_{i1}},\quad j=1,2,\dots,r. \qquad (7)$$

Характеристическое уравнение для A имеет вид

$$\prod_{i=1}^{r}(a_{ii}-\lambda)=-(1+\lambda)\cdot\prod_{i=2}^{r}\left(\frac{\alpha_i(e_1)}{\alpha_1(e_1)}-1-\lambda\right)=0,$$

т.е. собственные значения матрицы A все действительны и их можно выписать:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_i = \frac{\alpha_i(e_1)}{\alpha_1(e_1)} - 1, \quad i = 2,3,\dots,r.$$

По упомянутым результатам из пункта I тривиальное состояние равновесия e_1 является асимптотически устойчивым тогда, когда выполняются неравенства

$$\alpha_i(e_1) < \alpha_1(e_1), \quad i = 2,3,\dots,r.$$

Учитывая формулы (7) на основе этих неравенств можно установить различные достаточные условия асимптотической устойчивости точки e_1, касающихся начальных данных задачи, т.е. матриц B и Γ и вектора c. Например, если суммы рядов матрицы B отличны от нуля, то асимптотическая устойчивость точки e_1 гарантируется неравенствами

$$\frac{b_{1i}}{\beta_1} > \frac{b_{ki}}{\beta_k}, \quad k = 2,3,\dots,r; \quad i = 1,2,\dots,\ell.$$

В общем, если после нормирования по рядам оказывается, что в ряду с индексом m самые большие элементы соответствующих столбцов, то e_m - асимптотически устойчивое состояние равновесия системы (I).

Существование тривиальных точек покоя $e_1,\dots,e_r$ у системы (I) доказывается без всяких предположений о начальных данных, поэтому при установлений устойчивости нужно, конечно, предполагать определенность всех величин, в первую очередь величин (7). Для e_1, например, все γ_{i1}, $i = 1,2,\dots,\ell$ должны отличаться от нуля и то же самое надо требовать от $\alpha_1(e_1)$.

Устойчивость остальных тривиальных решений остается, однако, всегда неопределенной, по крайней мере с точки зрения подходов настоящей статьи, так как соответствующая матрица Якоби имеет в качестве k-кратного собственного значения ноль, если в тривиальной точке покоя k компонентов равны нулю.

§ 4. Об устойчивости нетривиального решения

Пусть π^* - нетривиальная точка покоя системы (I), т.е. все ее компоненты положительны и их сумма - единица. Установление устойчивости этой точки весьма сложно, так как придется оценить собственные значения "полной" матрицы $A = (a_{ij})$

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(\pi^*)}{\partial \pi_j} = \frac{\pi_i^*}{\alpha^*} \cdot \left(\alpha_{ij}^{*\prime} - \sum_{k=1}^{r} \alpha_{kj}^{*\prime} \pi_k^* - \alpha^*\right), \qquad (8)$$
$$i, j = 1,2,\dots,r,$$

где α^* – общее значение величин $\alpha_i(\pi^*)$, $i=1,2,\dots,n$ (см. (5));

$$\alpha_{ij}^{*\prime}=\frac{\partial\alpha_i(\pi^*)}{\partial\pi_j}=-\frac{1}{\beta_i}\sum_{p=1}^{l}\frac{c_p\cdot b_{ip}\cdot\gamma_{ij}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\pi_k^*\gamma_{pk}\right)^2}\quad. \tag{9}$$

Покажем сначала, что π^* не является вполне неустойчивым (см. напр. [2]). Для этого достаточно доказать, что всегда существует собственное значение матрицы A с отрицательной действительной частью.

Находим

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=\frac{1}{\alpha^*}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}^{*\prime}\pi_i^*-\frac{1}{\alpha^*}\sum_{i=1}^{n}\pi_i^*\cdot\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kj}^{*\prime}\pi_k^*-1=-1;\ j=1,\dots,n.$$

Здесь мы использовали условие (4) для π^*. Если теперь в характеристической матрице $A-\lambda E$ для A сложить, например, к первому ряду все остальные, то в силу последнего равенства, там появляются одинаковые элементы $-(1+\lambda)$. Следовательно, $\det(A-\lambda E)$ можно разложить по первому ряду и характеристическое уравнение для A будет иметь вид $(1+\lambda)\cdot P_{n-1}(\lambda)=0$, где $P_{n-1}(\lambda)$ – многочлен степени $n-1$ от λ. Это означает, что матрица A всегда имеет собственное значение $\lambda=-1$.

Остальные собственные значения так просто не выписываются. Проиллюстрируем это при $n=2$ и $n=3$.

а) $n=2$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda-1-a_{11}-a_{22}=0,$$

откуда получаем $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1+a_{11}+a_{22}=a_{22}-a_{21}$. Для асимптотической устойчивости состояния равновесия нужно, чтобы $\lambda_2<0$. Учитывая соотношения (8) и (4), это равносильно неравенству

$$\alpha_{11}^{*\prime}+\alpha_{22}^{*\prime}-\alpha_{12}^{*\prime}-\alpha_{21}^{*\prime}<0,$$

которое в силу (9) сводится к

$$\sum_{i=1}^{l}\frac{c_i}{[\gamma_{i2}+\pi_1^*(\gamma_{i1}-\gamma_{i2})]^2}\cdot\left[(\gamma_{i1}-\gamma_{i2})\cdot\left(\frac{b_{2i}}{\beta_2}-\frac{b_{1i}}{\beta_1}\right)\right]<0.$$

То-есть, выполнение последнего неравенства для начальных данных является условием асимптотической устойчивости точки покоя

Учитывая результаты, полученные в конце пункта 2, можно показать, что при $l=2$ условием устойчивости и асимптотической устойчивости будет выполнение неравенства

$$\left(\frac{b_{21}}{\beta_2}-\frac{b_{11}}{\beta_1}\right)\Big/\left(c_1(\gamma_{21}-\gamma_{22})-c_2\cdot(\gamma_{11}-\gamma_{12})\right)>0.$$

Доказательство технически довольно громоздкое, поэтому мы его здесь излагать не будем.

b) При $n=3$ характеристическое уравнение следующее:

$$(1+\lambda)\cdot[\lambda^2+(1+a_{11}+a_{22}+a_{33})\cdot\lambda+$$
$$+a_{33}(a_{22}-a_{21})+a_{32}(a_{21}-a_{23})+a_{31}(a_{23}-a_{22})=0.$$

Однако, формулы для λ_2 и λ_3, выраженные через коэффициенты матрицы A имеют уже весьма сложный вид и мы здесь их выписывать не будем.

Теперь покажем устойчивость множества S, определенного в пункте 2, относительно траекторий системы (I). С этой целью проделаем замену переменных

$$\pi_s=\pi_s^* e^{x_s},\ s=1,2,\dots,n, \tag{10}$$

после чего система (I) принимает вид (для простоты формул мы используем прежнее обозначение π):

$$x_s'=\frac{\alpha_s(\pi)}{(\alpha(\pi),\pi)}-1,\ s=1,2,\dots,n.$$

Введем функцию $V(x)=(\sum_{s=1}^{n}\pi_s^* e^{x_s}-1)^2$. Очевидно, $V(0)=0$. Найдем её производную по t, учитывая систему (I):

$$V'(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_k}\cdot x_k'=2(\sum_{s=1}^{n}\pi_s^* e^{x_s}-1)\cdot\sum_{k=1}^{n}\pi_k^* e^{x_k}\cdot x_k'=$$
$$=2(\sum_{s=1}^{n}\pi_s^* e^{x_s}-1)\cdot(1-\sum_{k=1}^{n}\pi_k^* e^{x_k})=-2V(x).$$

Имеем:

$$V(x)=0 \Leftrightarrow V'(x)=0;\ V(x)>0 \Leftrightarrow V'(x)<0.$$

Следофательно, $V(x)$ – функция Ляпунова для множества $\{x: V(x)=0\}$, которая является образом множества S относительно регулярной замены переменных (10). Это значит, что множество S тоже устойчиво относительно траекторий системы (I), причем при любых начальных данных, т.е. матриц B и Γ и вектора c.

Отметим ещё, что изучение устойчивости тривиальных точек тоже может способствовать решению проблемы устойчивости нетривиальных решений. Именно, иногда удается установить радиус асимптотической устойчивости. Если же радиус известен для какой-либо тривиальной точки равновесия, то ясно, что все остальные точки покоя, в том числе и нетривиальные, которые окажутся внутри шара с этим радиусом, не могут быть устойчивыми.

Литература

I. П е р м и н о в С.Б. Имитационное моделирование процессов управления в экономике. Новосибирск, Наука, 1981.
2. П о н т р я г и н Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва, Наука, 1974.

Поступило
4 II 1984

STATIONARY POINTS OF A CORRECTING PROCESS

P. Miidla, S.Perminov

Summary

In this paper we deal with the mathematical model of an economic process.

The model is an autonomous system of ordinary differential equations (1). We are interested in the existence and stability of the stationary points of this system. We have shown the existence of the trivial stationary points and some conditions of the existence of the nontrivial stationary points (only those have some interest in the practical), but also some stability conditions of the stationary points.

In the end of the article we introduce a function of Liapunov, which shows the stability of the whole set of the nontrivial stationary points.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS INHALT