Untersuchungen

über eine

Gleichung des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

Eine zur Erlangung des Magistergrades

verfaßte und

Einer Hochverordneten physico-mathematischen Facultät

der Kaiserlichen Universität zu Dorpat

vorgelegte

Abhandlung

von

Karl Weihrauch.

Dorpat.

Druck von C. Mattiesen.

1869.

Gedruckt auf Verfügung der physico-mathematischen Facultät.

Dorpat, den 28. Februar 1869.

Nr. 15.

Prof. Dr. P. Helmling.

d. Z. Decan der physico-mathem. Facultät.

Inhalt.

Einleitung.

Untersuchungen über eine Gleichung des ersten Grades mit n Unbekannten und ganzzahligen Coefficienten, wobei die Bedingung gestellt ist, daß sämmtliche Unbekannte nur ganzzahlige Werthe > 0 annehmen dürfen, bilden den Gegenstand, mit welchem sich diese Blätter beschäftigen sollen. Die Behandlung desselben greift allerdings nicht in die höheren Zweige des mathematischen Wissens ein und im Großen und Ganzen finden solche Gleichungen selten Verwendung, worin auch der Grund liegen mag, daß jenes Gebiet, so weit uns bekannt ist, nirgends in eingehender Weise beleuchtet ist [1]); wir hoffen indessen, es werden die Resultate, die wir im Verlaufe der Untersuchung zu Tage fördern wollen, die Behauptung rechtfertigen, daß dem Gegenstande ein gewisses theoretisches Interesse nicht abgesprochen werden kann, während wir zugleich eine Lücke, welche in der Theorie bisher vorhanden war, auszufüllen versuchen.

Das zunächst zu erstrebende Ziel wurde durch folgende Ueberlegung bestimmt: Die praktische Auflösung einer Gleichung der obengenannten Art wird in der Regel durch direkte Anwendung des bei einer Gleichung mit 2 Unbekannten meistentheils benutzten Euler'schen Verfahrens bewerkstelligt; man erhält dabei stets Gleichungen, durch welche jede einzelne Unbekannte ganzzahlig dargestellt wird. Es zeigt sich nun, daß man durch erlaubte Veränderungen im Gange der Rechnung zu äußerlich gänzlich verschiedenen Resultaten kommen kann, was an einem Beispiel dargelegt werden möge.

Die Gleichung $21x + 29y + 53z = 800$ liefert, je nachdem man zuerst nach x und dann nach y, oder nach y und dann nach z auflöst

$$\begin{aligned} x &= 42 - 3v - 14t \qquad & \text{oder } x &= 1 - 2r + 5s \\ y &= -1 + 4v + t & y &= 36 - 15r + 11s \\ z &= -1 - v + 5t & z &= -5 + 9r - 8s \end{aligned}$$

wobei v, t, r, s, ganzzahlige Größen vorstellen, deren Grenzen noch so zu bestimmen sind, daß je ein Werth von v oder r mit einem passenden von t und s combinirt, positive Werthe für x, y, z liefert, welche der gegebenen Gleichungen genügen. Wir werden jene Größen in Ermangelung einer anderen passenden Bezeichnung die Veränderlichen der Endgleichungen nennen. Es fragt sich nun zunächst, ob beide Formen, wie das System der Endgleichungen heißen mögen, genau dieselben Lösungen liefern, und wenn dies der Fall ist, weiter, ob sie in der That alle Lösungen geben, deren die vorgelegte Gleichung fähig ist? Die bezeichnete Antwort auf diese Frage liegt durchaus noch nicht in der Natur des Verfahrens selbst. Es wird später bewiesen werden, daß das Euler'sche Verfahren immer vollständige Formen, d. h. solche liefert, welche in der That alle Lösungen einer Gleichung umfassen. Andere Methoden können häufig unvollständige Formen liefern. So genügt der erwähnten Gleichung die auf anderem Wege gewonnene Form

$$\begin{aligned} x &= 14 - 87p - 17q \\ y &= 1 + 10p + 5q \\ z &= 9 + 29p + 4q \end{aligned}$$

wie man sich durch Substitution leicht überzeugt. Während aber die beiden ersten Formen die Lösung $x = 19$, $y = 12$, $z = 1$ liefern, fehlt dieselbe unter den Lösungen der letzten Form. Für ein Gleichung mit 2 Unbekannten $ax + by = c$ ist die vollständige Form bekanntlich

$$\begin{aligned} x &= \alpha + bt \\ y &= \beta - at \end{aligned}$$

1) Vorarbeiten findet man in dem vom Verfasser 1866 geschriebenen Programm des Gymnasiums zu Arensburg: „Beiträge zur Lehre von den unbestimmten Gleichungen des ersten Grades.“

wenn $x = \alpha$, $y = \beta$ für sich der Gleichung genügen, und t dieselbe Bedeutung wie oben hat. Es sei nämlich $x = \alpha + m$, $y = \beta + n$ irgend eine andere Lösung, so muß $am + bn = o$ sein, was, da a und b relative Primzahlen sind, nur möglich ist, wenn m ein Vielfaches von b, n dasselbe Vielfache von $-a$ ist, also $m = bt$, $n = -at$. Eine Ausdehnung dieser Betrachtungsweise auf eine Gleichung mit 3 Unbekannten zeigt dieselbe sofort als unzureichend.

Dies Alles drängt zu den Fragen nach der Gestalt der Formen, nach dem Kriterium für die Vollständigkeit derselben, und nach der Art und Weise, wie der Zusammenhang zweier Formen vermittelt wird.

Die Beantwortung soll den ersten Theil unserer Untersuchungen ausmachen. Im zweiten Theil wollen wir uns dann mit der nicht weniger interessanten Frage nach der Anzahl der Lösungen, welche eine gegebene Gleichung besitzt, beschäftigen.

Erster Theil.

Untersuchung der Formen, in denen die Auflösungen enthalten sind.

I. Aufstellung einer Form.

Es sei eine Gleichung von ersten Grade mit n Unbekannten und ganzzahligen positiven oder, wenn das Absolutglied immer possitiv vorausgesetzt wird, höchstens $n - 1$ negativen Coefficienten gegeben:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + \ldots\ldots + A_n x_n = A \quad \ldots . \; 1)$$

Die allgemeinste Bedingung für die Auflösbarkeit dieser Gleichung in ganzen positiven Zahlen besteht bekanntlich darin, daß die Coefficienten A_p keinen allen gemeinsamen Theiler > 1 haben dürfen, den nicht auch das Absolutglied hätte, weil sonst durch Division der ganzen Gleichung mit jenem Theiler eine Summe ganzer Zahlen gleich einem wirklichen Bruche würde. Es darf also vorausgesetzt werden, daß ein solcher Theiler überhaupt nie existire, weil er immer sofort entfernt werden kann. Dagegen dürfen je $n - 1$ oder eine geringere Anzahl von Coeficienten sehr wohl einen gemeinsamen Theiler > 1 besitzen. Zunächst muß festgestellt werden, von wieviel veränderlichen Größen t (in derselben Bedeutung wie oben) die Unbekannten in den für sie auftretenden Endgleichungen abhängen werden. Es läßt sich hier leicht nachweisen, daß die Anzahl dieser t immer um 1 kleiner als die Anzahl der Unbekannten ist. Aus 1) folgt

$$x_1 = (A - A_2 x_2 - A_3 x_3 - \ldots . - A_n x_n) : A_2 \quad \ldots . \; 2)$$

Bezeichnet man die bei der Division $M : N$ erhaltenen Ganzen durch $E(M : N)$, den Rest durch $R(M : N)$, so ist

$$x_1 = E(A : A_1) - x_2 E(A_2 : A_1) - x_3 E(A_3 : A_1) - \ldots\ldots - x_n E(A_n : A_1)$$
$$+ \frac{R(A : A_1) - x_2 R(A_2 : A_1) - x_3 R(A_3 : A_1) - \ldots\ldots - x_n R(A_n : A_1)}{A_1} \quad \ldots . \; 3)$$

Setzt man letztern Bruch gleich einer ganzen Zahl t_1, entwickelt in derselben Weise x_2, führt für den entstandenen Bruch die Zahl t_2 ein u. s. f. so kommt man schließlich auf die Gleichung

$$x_{n-2} = B - b\, x_{n-1} - c x_n + \frac{B_1 - b_1\, x_{n-1} - c_1\, x_{n-1}}{d} \quad \ldots . \; 4)$$

wo B und B_1 neben absoluten Zahlen die bis jetzt eingeführten Größen $t_1, t_2, \ldots . t_{n-3}$ enthalton und b, c, b_1, c_1, d bestimmte ganze Zahlen sind. Setzt man den Bruch in 4) gleich t_{n-2}, so enthält die neue Gleichung noch 2 der ursprünglichen Unbekannten, und es gelingt dann bekanntlich dieselben von einer neuen Veränderlichen t_{n-1} abhängig darzustellen. Wir erhalten also im Ganzen $n-1$ Größen t, welche im Allgemeinen beim Rückwärtssubsistuiren in den Endgleichungen für alle Unbekannte auftreten werden. So wird z. B. x_n nicht durch t_{n-1} allein ausgedrückt sein, sondern wegen des Umstandes, daß B_1 die Veränderlichen $t_1, t_2 \ldots . t_{n-3}$ einschließt, wozu aus der letzten Gleichung noch t_{n-2} kommt, sämmtliche Veränderliche in seiner Endgleichung aufweisen. Nicht selten jedoch wird man bei praktischer Auflösung auf Fälle stoßen, wo manche Veränderliche aus einigen Endgleichungen, nie aus allen verschwinden.

Bezeichnen $M_1, M_2, M_3 \ldots . M_{n-1}, M_n$ specielle, positive oder negative ganzzahlige Werthe für $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$, welche 1) genügen, so daß also

$$A_1 M_1 + A_2 M_2 + A_3 M_3 + \ldots\ldots + A_n M_n = A \quad \ldots . \; 5)$$

ist, und stellen wir die Coefficienten von t durch α vor, so hat die Form, wie wir das System der Endgleichungen nennen wollen, folgende Gestalt:

$$
6) \ldots \left\{
\begin{array}{l}
x_1 = M_1 + a_{1,1}\, t_1 + a_{1,2}\, t_2 + a_{1,3}\, t_3 + \ldots\ldots + a_{1,n-1}\, t_{n-1} \\
x_2 = M_2 + a_{2,1}\, t_1 + a_{2,2}\, t_2 + a_{2,3}\, t_3 + \ldots\ldots + a_{2,n-1}\, t_{n-1} \\
x_3 = M_3 + a_{3,1}\, t_1 + a_{3,2}\, t_2 + a_{3,3}\, t_3 + \ldots\ldots + a_{3,n-1}\, t_{n-1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-1} = M_{n-1} + a_{n-1,1}\, t_1 + a_{n-1,2}\, t_2 + a_{n-1,3}\, t_3 + \ldots + a_{n-1,n-1}\, t_{n-1} \\
x_n = M_n + a_{n,1}\, t_1 + a_{n,2}\, t_2 + a_{n,3}\, t_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{n,n-1}\, t_{n-1}.
\end{array}
\right.
$$

II. Ermittelung einer speciellen Lösung.

Die Form 6) wird am einfachsten durch die Anwendung des Euler'schen Verfahrens aus der ursprünglichen Gleichung gewonnen. Will man dieselbe jedoch unmittelbar aufstellen, so werden die Größen M wohl am bequemsten erhalten, wenn man $n - 2$ der Unbekannten x in 1) willkürliche Werthe, z. B. allen den Werth 1 beilegt und dann die Gleichung

$$A_p\, x_p + A_r\, x_r = A - SA_k \quad \ldots\ldots 7)$$

wo das Summenzeichen sich auf alle mit einem Index versehenen A, ausgenommen A_p und A_r, bezieht, in bekannter Weise, durch Euler's Verfahren, durch Kettenbrüche, Kettenreihen, Congruenzen oder mittelst Formeln, wie sie für die Lösung der Congruenz $ax \equiv b \pmod c$ existiren, auflöst ohne Rücksicht darauf, daß x_p und x_r vielleicht negative Werthe erhalten. Wenn aber A_p u. A_r einen gemeinsamen Theiler > 1 besitzen, den die rechte Seite in 7) nicht hat, so ist 7) unlösbar und dies zeigt an, daß wir nicht allen jener $n - 2$ Unbekannten x denselben Werth, oben 1, beilegen dürfen. Durch Auswahl anderer Unbekannten wird man diesen Uebelstand zu heben suchen, und nur, wenn jeder der Coefficienten A mit jedem andern einen gemeinsamen Theiler > 1 besitzt, wird man zu einem Verfahren genöthigt, das wir am einfachsten an einem Beispiel zeigen. Es sei

$$70\, x_1 + 42\, x_2 + 30\, x_3 + 105\, x_4 = 8009$$

Wir setzen $8009 - 105\, x_4 = 2z$, gewinnen daraus $x_4 = 1$, $z = 3952$, $35\, x_1 + 21\, x_2 + 15\, x_3 = 3952$ Dann sei $3952 - 15\, x_3 = 7\, y$, woraus wir erhalten $x_3 = 4$, $y = 556$, $5\, x_1 + 3\, x_2 = 556$, $x_1 = 8$, $x_2 = 172$.

Weit eleganter, wenn auch praktisch in den seltensten Fällen anwendbar, ist folgende Methode zur Bestimmung der M. Man entwickelt das Produkt

$$Sz^{hA_1} . Sz^{hA_2} . Sz^{hA_3} \ldots\ldots Sz^{hA_n} \quad \ldots\ldots 8)$$

wo für die Coefficienten h die Glieder der natürlichen Zahlenreihe zu setzen sind, nach Potenzen von z, bleibt bei dem ersten Theilsatz, der z^A liefert, stehen und verfolgt die Entstehung des Exponenten A rückwärts. Ergiebt sich, daß zur Entstehung mitgewirkt haben die Potenzen $z^{i_1 A_1}$, $z^{i_2 A_2}$, $z^{i_3 A_3}$, $\ldots\ldots$ $z^{i_n A_n}$, so erhält man sofort $M_1 = i_1$ $M_2 = i_2$, $M_3 = i_3 \ldots\ldots M_n = i_n$. Dabei kann es sich leicht ereignen, daß einige der Größen i Null werden, was indessen nicht schadet. Um die Rechnung verfolgen zu können, wird man bei jedem Exponenten seine Entstehung hinzufügen müssen, und zur Erleichterung der Operation werden alle Theilsätze, welche schon vorhandene Potenzen liefern, unberücksichtigt gelassen.

Die beiden hier auseinandergesetzten Methoden haben allerdings keinen großen Werth für die Praxis. Wir haben sie hier gegeben, einmal der Vollständigkeit wegen, dann aber auch, weil die erste derselben der nächstliegende Weg scheint, wenn die übrigen Bestandtheile der Form schon bekannt sind, und weil sich später Untersuchungen an die zweite Methode anknüpfen werden.

III. Eigenschaften der Coefficienten a.

Wir gehen zu einer genaueren Betrachtung des Systems 6) über. Wegen der Unabhängigkeit der Größen t von einander darf zwischen den Coefficienten a einer Endgleichung keinenfalls eine Relation existiren, die in derselben Weise für die correspondirenden Größen a aller andern Endgleichungen gilt. Es würde sich nämlich aus der Existenz einer solchen Relation folgern lassen, daß an Stelle der $n - 1$ Veränderlichen t, $n - 2$ neue Veränderliche gesetzt werden könnten, was dem in I. bewiesenen Satze widerspricht. So darf nicht $a_{p,1} = m . a_{p,2}$ sein, wenn man p alle Werthe von 1 bis n durchlaufen läßt, weil sonst die beiden Veränderlichen t_1 und t_2 durch die eine neue $s = mt_1 + t_2$ mit den Coefficienten $a_{p,2}$ ersetzt werden können.

Da das System 6) und die Gleichung 1) genügen soll, so ergiebt sich durch Substitution in letztern mit Berücksichtigung von 5) und mit Bezugnahme darauf, daß die Veränderlichen t unabhängig von einander sind, sofort

$$
9) \ldots \left\{
\begin{array}{l}
A_1\, a_{1,1} + A_2\, a_{2,1} + A_3\, a_{3,1} + \ldots\ldots + A_n\, a_{n,1} = O \\
A_1\, a_{1,2} + A_2\, a_{2,2} + A_3\, a_{3,2} + \ldots\ldots + A_n\, a_{n,2} = O \\
A_1\, a_{1,3} + A_2\, a_{2,3} + A_3\, a_{3,3} + \ldots\ldots + A_n\, a_{n,3} = O \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_1\, a_{1,n-1} + A_2\, a_{2,n-1} + A_3\, a_{3,n-1} \pm \ldots + A_n\, a_{n,n-1} = O
\end{array}
\right.
$$

Genügen die Coefficienten a diesen $n - 1$ Gleichungen, so stellt das System 6) eine Form dar, welche eine gewisse Anzahl Lösungen der Gleichung 1) umschließt. Ob diese Form eine vollständige, alle Lösungen umfassende, oder eine unvollständige, nur einen Theil derselben liefernde, sei, bleibt noch unentschieden. Das Kriterium für die Vollständigkeit vermehrt, wie sich später zeigen wird die Anzahl der Bedingungsgleichungen 9) nur um 1, sodaß dann zur Bestimmung der $n\,(n - 1)$ Größen a nur n Gleichungen vorhanden sind. Nur wenn $n\,(n - 1) = n$ d. h. $n = 2$, ist (bei vollständigen Formen) die Anzahl der Gleichungen gerade zur Bestimmung der a ausreichend; es kann mithin für eine Gleichung mit 2 Unbekannten nur eine einzige vollständige Form (neben unendlich vielen unvollständigen) existiren. In allen andern Fällen ist die Anzahl der aufstellbaren vollständigen Formen unendlich groß, da die Coefficientengleichungen unbestimmt werden und negative Werthe der a durchaus nicht ausgeschlossen werden können. Wollte man zur Aufstellung einer Form die Bestimmung der a durch das System 9) vornehmen, so könnte man durch Auflösung einer einzigen Gleichung mit 2 Unbekannten ans Ziel gelangen. Legen wir den Coefficienten $a_{3,1}$, $a_{4,1}, \ldots a_{n,1}$ die willkürlichen Werthe δ_3, $\delta_4, \ldots \delta_n$ bei, so bleibt zur Bestimmung von $a_{1,1}$ und $a_{2,1n}$

$$10) \ldots\ldots A_1\, a_{1,1} + A_2\, a_{2,1} = - S_3\, A_p\, \delta_p$$

Haben A_1 und A_2 den größten gemeinsamen Theiler q_1, so dürfen wir voraussetzen, daß auch die rechte Seite von 10) denselben besitze, da man, um dies zu erreichen, nur jedes δ mit dem Theiler q_1 behaftet, zu wählen braucht. Sind dann δ_1 und δ_2 specielle Lösungen obiger Gleichungen, so wird im Fall eines geraden n der ersten Gleichung in 9) genügt durch

$$
11) \ldots \left\{
\begin{array}{ll}
a_{1,1} = \delta_1 + (A_2 : q_1)\, s_1 & a_{2,1} = \delta_2 - (A_1 : q_1)\, s_1 \\
a_{3,1} = \delta_3 + (A_4 : q_2)\, s_2 & a_{4,1} = \delta_4 - (A_3 : q_2)\, s_2 \\
a_{5,1} = \delta_5 + (A_6 : q_3)\, s_3 & a_{6,1} = \delta_6 - (A_5 : q_3)\, s_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n-1,1} = \delta_{n-1} + \left(A_n : q_{\frac{n}{2}}\right) s_{\frac{n}{2}} & a_{n,1} = \delta_n - \left(A_{n-1} : q_{\frac{n}{2}}\right) s_{\frac{n}{2}}
\end{array}
\right.
$$

wenn q_r den größten gemeinsamen Theiler zwischen A_{2r-1} und A_{2r} vorstellt, und s_1, $s_2, \ldots s_{\frac{n}{2}}$ Veränderliche von der Natur der oben benutzten t sind. Aehnlich ist der Ausdruck für den Fall eines ungeraden n; man darf nur einer Größe z. B. $a_{h,1}$, einen constanten Werth beilegen. Durch willkürliche Wahl von Werthen für die Veänderliche s gelangt man zu beliebig vielen Systemen zusammengehöriger Werthe der a, welche den Gleichungen 9) genügen.

Als Beispiel wählen wir die in II. gegebene Gleichung $70\, x_1 + 42\, x_2 + 30\, x_3 + 105\, x_4 = 8009$

Es ist zunächst $70\, a_{1,1} + 42\, a_{2,1} + 30\, a_{3,1} + 105\, a_{4,1} = O$ zu lösen. Nehmen wir $\delta_3 = 7$, $\delta_4 = 2$, so findet sich $\delta_1 = - 3$, $\delta_2 = - 5$, also, da außerdem $q_1 = 14$, $q_2 = 15$ ist.

$$
\begin{array}{ll}
a_{1,1} = - 3 + 3\, s_1 & a_{2,1} = - 5 - 5\, s_1 \\
a_{3,1} = 7 + 7\, s_2 & a_{4,1} = 2 - 2\, s_2
\end{array}
$$

Für $s_1 = 1$, $s_2 = - 2$ haben wir $a_{1,1} = 0$, $a_{2,1} = - 10$, $a_{3,1} = - 7$, $a_{4,1} = 6$

$s_1 = 3$, $s_2 = 1$ $\quad$ $a_{1,2} = 6$, $a_{2,2} = - 20$, $a_{3,2} = 14$, $a_{4,2} = 0$

$s_1 = - 2$, $s_2 = 2$ $\quad$ $a_{1,3} = - 9$, $a_{2,3} = 5$, $a_{3,3} = 21$, $a_{4,3} = - 2$

Mit Zuziehung der früher gefundenen speciellen Lösung findet man somit eine Form für die vorgelegte Gleichung

$$
\begin{array}{llll}
x_1 = 8 & & + 6\, t_2 & - 9\, t_3 \\
x_2 = 172 & - 10\, t_1 & - 20\, t_2 & + 5\, t_3 \\
x_3 = 4 & - 7\, t_1 & + 14\, t_2 & + 21\, t_3 \\
x_4 = 1 & + 6\, t_1 & & - 2\, t_3
\end{array}
$$

Wir werden später auf diese Form zurückkommen.

Das System 9) läßt eine Umformung zu, welche uns von wesentlichem Nutzen sein wird. Eliminirt man aus jenen $n - 1$ Gleichungen die $n - 2$ Größen A_3, $A_4 \ldots A_n$, so ergiebt sich als Resultat

$$12)\; A_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{3,1}, & a_{4,1}, & \ldots\ldots & a_{n-1,1}, & a_{n,1} \\ a_{1,2}, & a_{3,2}, & a_{4,2}, & \ldots\ldots & a_{n-1,2}, & a_{n,2} \\ a_{1,3}, & a_{3,3}, & a_{4,3}, & \ldots\ldots & a_{n-1,3}, & a_{n,3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n-2}, & a_{3,n-2}, & a_{4,n-2}, & \ldots & a_{n-1,n-2}, & a_{n,n-2} \\ a_{1,n-1}, & a_{3,n-1}, & a_{4,n-1}, & \ldots & a_{n-1,n-2}, & a_{n,n-1} \end{vmatrix} + A_2 \begin{vmatrix} a_{2,1}, & a_{3,1}, & a_{4,1}, & \ldots\ldots & a_{n-1,1}, & a_{n,1} \\ a_{2,2}, & a_{3,2} & a_{4,2}, & \ldots\ldots & a_{n-1,2}, & a_{n,2} \\ a_{2,3}, & a_{3,3}, & a_{4,3} & \ldots\ldots & a_{n-1,3}, & a_{n,3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2,n-2}, & a_{3,n-2}, & a_{4,n-2}, & \ldots & a_{n-1,n-2}, & a_{n,n-2} \\ a_{2,n-1}, & a_{3,n-1}, & a_{4,n-1}, & \ldots & a_{n-1,n-1}, & a_{n,n-1} \end{vmatrix} = 0$$

Statt dieser aus je $(n-1)^2$ Gliedern gebildeten Determinanten kann man durch Vertauschung der Zeilen mit den Colonnen setzen

$$13)\; A_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots\ldots & a_{1,n-2}, & a_{1n-1} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & \ldots\ldots & a_{3,n-2}, & a_{3,n-1} \\ a_{4,1}, & a_{4,2}, & a_{4,3}, & \ldots\ldots & a_{4,n-2}, & a_{4,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & a_{n-1,3}, & \ldots & a_{n-1,n-2}, & a_{n-1,n-1} \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3} & \ldots\ldots & a_{n,n-2}, & a_{n,n-1} \end{vmatrix} + A_2 \begin{vmatrix} a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots\ldots & a_{2,n-2}, & a_{2,n-1} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & \ldots\ldots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} \\ a_{4,1}, & a_{4,2}, & a_{4,3}, & \ldots\ldots & a_{4,n-2}, & a_{4,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & a_{n-1,3}, & & a_{n-1,n-2}, & a_{n-1,n-1} \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \ldots\ldots & a_{n,n-2}, & a_{n,n-1} \end{vmatrix} = 0$$

wo jetzt die Glieder der Zeilen mit den Reihen der Coefficienten a in den n Gleichungen 6) übereinstimmen, nur daß immer je eine dieser Gleichungen garnicht vertreten ist. Wir wollen kürzer schreiben

$$14)\; \ldots\ldots A_1 . D\,(1,\ 3,\ 4, \ldots n-1,\ n) + A_2 . D\,(2,\ 3,\ 4 \ldots\ldots n-1,\ n) = 0$$

D bedeutet „Determinante gebildet aus", die Ziffern stellen entsprechend die Coefficientenreihen der 1^{ten}, 2^{ten}, ... n^{ten} Gleichung des System's 6) vor, so daß $D\,(1,\ 2, \ldots .\ 6,\ 8,\ 9, \ldots n)$ heißt, man soll aus den Coefficienten a aller Gleichungen in 6, die 7^{te} ausgenommen, in der Ordnung, wie sie dort stehen, die Determinante bilden.

Die Gleichung 14) läßt sich schreiben

$$15)\; \ldots\ldots A_1 : A_2 = -D\,(2,\ 3,\ 4, \ldots . n-1,\ n) : D\,(1,\ 3,\ 4 \ldots . n-1,\ n)$$

Bildet man die analogen Ausdrücke für die übrigen Größen A, so erhält man folgendes System von $n-1$ Gleichungen, welches wir an Stelle von 9) weiter untersuchen wollen:

$$16)\;.\; \begin{cases} A_1 : A_2 = -D\,(2,\ 3,\ 4, \ldots . n-1,\ n) : D\,(1,\ 3,\ 4, \ldots . n-1,\ n) \\ A_2 : A_3 = -D\,(3,\ 4,\ 5, \ldots\ldots n, 1) : D\,(2,\ 4,\ 5, \ldots . n, 1) \\ A_3 : A_4 = -D\,(4,\ 5,\ 6, \ldots . n, 1, 2) : D\,(3'\ 5,\ 6, \ldots . n, 1, 2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_p : A_{p+1} = -D\,(p+1,\ p+2,\ p+3, \ldots n, 1, 2 \ldots p-1) : D\,(p,\ p+2,\ p+3, \ldots n, 1, 2, \ldots p-1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n-1} : A_n = -D\,(n, 1, 2 \ldots n-3, n-2) : D\,(n-1, 1, 2, \ldots n-3,\ n-2) \end{cases}$$

Um die Determinanten, welche denselben Coefficienten A entsprechen, z. B. $D\,(2, 4, 5 \ldots n, 1)$ und $D\,(4, 5, 6 \ldots n,\ 1,\ 2)$, die zu A_3 gehören, identisch zu machen, bedienen wir uns des Satzes, daß die Vertauschung zweier Horizontalreihen nur das Zeichen der Determinanten ändert. Ist nun n gerade, so ist die Anzahl der jedesmal zur Verwendung kommenden Horizontalreihen in 6) ungerade, und man hat dann zur Ueberführung, wie sie oben beabsichtigt wurde, eine gerade Anzahl, $n-2$ von Vertauschungen nöthig, so daß die Determinante ihr Zeichen behält; bei ungeraden n dagegen tritt ein Zeichenwechsel ein. Daraus folgt, daß das System 16) auch geschrieben werden kann

$$17^{a})\; \begin{cases} A_1 : A_2 = (-1)^{n+1}\ D\,(2,\ 3,\ 4 \ldots n-1,\ n) : D\,(3, 4, 5 \ldots n, 1) \\ A_2 : A_3 = (-1)^{n+1}\ D\,(3, 4, 5 \ldots n, 1) : D\,(4, 5, 6 \ldots n, 1, 2) \\ A_3 : A_4 = (-1)^{n+1}\ D\,(4, 5, 6 \ldots n, 1, 2) : D\,(5, 6, 7, \ldots n, 1, 2, 3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$17^{b})\; \begin{cases} A_p : A_{p+1} = (-1)^{n+1}\ D\,(p+1, p+2, p+3, \ldots n, 1, 2 \ldots p-1) : D\,(p+2, p+3, p+4, \ldots n, 1, 2, \ldots p) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n-1} : A_n = (-1)^{n+1}\ D\,(n, 1, 2, \ldots n-3,\ n-2) : D\,(1, 2, 3, \ldots n-2,\ n-1) \end{cases}$$

Stellen wir durch K eine Zahl vor, von der noch weiter die Rede sein soll, so folgt aus 17)

$$18)\; \ldots \begin{cases} D\,(2, 3, 4 \ldots n-1,\ n) = K . A_1 \\ D\,(3,\ 4, 5 \ldots n, 1) = (-1)^{n+1}\ K . A_2 \\ D\,(4, 5, 6 \ldots n, 1, 2) = K . A_3 \\ D\,(5, 6, 7 \ldots n, 1, 2, 3) = (-1)^{n+1}\ K . A_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D\,(2p, 2p+1, 2p+2, \ldots n, 1, 2, \ldots 2p-2) = K . A_{2p-1} \\ D\,(2p+1, 2p+2, 2p+3, \ldots n, 1, 2 \ldots 2p-1) = (-1)^{n+1}\ K . A_{2p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D\,(n, 1, 2, \ldots n-3,\ n-2) = K . A_{n-1} \\ D\,(1,\ 2,\ 3 \ldots n-2,\ n-1) = (-1)^{n+1}\ K . A_n \end{cases}$$

K kann niemals ein wahrer Bruch sein, weil sonst wegen der Ganzzahligkeit der Determinanten sämmtliche Coefficienten A durch den Nenner dieses Bruches theilbar sein müßten, was nach der ursprünglichen Voraussetzung nicht möglich ist. Ferner kann K nie Null sein; dies würde nämlich sämmtliche Determinanten verschwinden machen, was nichts anders hieße, als daß in 9) eine oder mehrere Gleichungen von den übrigen abhängig wären; dazu aber ist ein Zusammenhang zwischen den Coefficienten a, wie wir ihn vorher als unstatthaft nachgewiesen haben, erforderlich. In anderer Weise läßt sich die Unmöglichkeit, daß K bei einer brauchbaren Form verschwinde, folgendermaßen zeigen. In $n-1$ der n Gleichungen 18) kommen, wie man leicht sieht, die $n-1$ Coefficienten a der ersten Horizontalreihe des Systems 9) vor; werden alle übrigen a als bekannt vorausgesetzt, so würde das Verschwinden der Absolutglieder jener $n-1$ Gleichungen, da nach dem Bildungsgesetz der Determinanten jedes Monom einen Coefficienten jener ersten Horizontalreihe als Factor enthält, eine Bestimmung der $n-1$ Unbekannten a unmöglich machen, während doch das System 9) in dem hier vorausgesetzten Fall dieselben sofort liefert. Jede Form, bei welcher sich K gleich Null herausstellt, muß daher als unbrauchbar verworfen werden. Unser Resultat ist also, daß K nur eine ganze, positive oder negative Zahl sein kann. Wir wollen ihr den Namen Charakteristik beilegen, weil von ihr, wie sich zeigen wird, ganz allein die Entscheidung über Vollständigkeit oder Unvollständigkeit der Formen abhängig ist.

Als Beispiel diene wieder die Gleichung $70\,x_1 + 30\,x_3 + 42\,x_2 + 105\,x_4 = 8009$, für welche die Form aufgestellt wurde

$$\begin{aligned} x_1 &= 8 & &+ 6\,t_2 & &- 9\,t_3 \\ x_2 &= 172 & -10\,t_1 & & -20\,t_2 & &+ 5\,t_3 \\ x_3 &= 4 & -7\,t_1 & & +14\,t_2 & &+ 21\,t_3 \\ x_4 &= 1 & +6\,t_1 & & & &- 2\,t_3 \end{aligned}$$

Die hier zu bildenden Determinanten sind

$$\begin{vmatrix} -10, & -20, & 5 \\ -7, & 14, & 21 \\ 6, & 0, & -2 \end{vmatrix} = -34.70 \begin{vmatrix} -7, & 14, & 21 \\ 6, & 0, & -2 \\ 0, & 6, & -9 \end{vmatrix} = +34.42 \begin{vmatrix} 6, & 0, & -2 \\ 0, & 6, & -9 \\ -7, & 14, & 21 \end{vmatrix} = -34.30 \begin{vmatrix} 0, & 6, & -9 \\ -10, & -20, & 5 \\ -7, & 14, & 21 \end{vmatrix} = 34.105$$

IV. Von den Grenzen der Veränderlichen.

Die Form 6) liefert folgendes System von Ungleichungen

$$19) \ldots \begin{cases} M_1 + a_{1,1}\, t_1 + a_{1,2}\, t_2 + a_{1,3}\, t_3 + \ldots + a_{1,n-1}\, t_{n-1} > O \\ M_2 + a_{2,1}\, t_1 + a_{2,2}\, t_2 + a_{2,3}\, t_3 + \ldots + a_{2,n-1}\, t_{n-1} > O \\ M_3 + a_{3,1}\, t_1 + a_{3,2}\, t_2 + a_{3,3}\, t_3 + \ldots + a_{3,n-1}\, t_{n-1} > O \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_n + a_{n,1}\, t_1 + a_{n,2}\, t_2 + a_{n,3}\, t_3 + \ldots + a_{n,n-1}\, t_{n-1} > O \end{cases}$$

Diese n Ungleichungen müssen benutzt werden, um für die Veränderlichen t Grenzen abzuleiten. Sind die A_p sämmtlich positiv, so ist die Anzahl der Auflösungen für die ursprüngliche Gleichung immer eine beschränkte; das System 9) zeigt dann, daß unter den Coefficienten a einer Colonne in 6) mindestens ein negativer sein muß, höchstens $n-1$ negative sein dürfen, damit die Summe Null erzeugt werden könne. Ist auch nur eine einzige der Größen A_p negativ, so sind immer unendlich viele Lösungen möglich. Erwägen wir für den ersten Fall, daß die Gleichung 1) auch geschrieben werden kann

$$20) \ldots\ldots x_1 = (A : A_1) - x_2\,(A_2 : A_1) - x_3\,(A_3 : A_1) \ldots\ldots - x_n\,(A_n : A_1)$$

eine Schreibart, welche den früher streng bewiesenen Satz, daß jede Unbekannte von $n-1$ Veränderlichen abhänge, gleichsam unmittelbar vor die Augen führt, halten wir dann 20) mit der ersten Gleichung von 6) zusammen

$$21) \ldots\ldots x_1 = M_1 - a_{1,1}\, t_1 - a_{1,2}\, t_2 - \ldots\ldots - a_{1,n-1}\, t_{n-1}$$

wo also an die Stelle der Unbekannten x in 20) rechts die Veränderlichen t getreten sind, so ergiebt sich folgendes: Da die Größen x in bestimmten Grenzen eingeschlossen sind, die sich leicht für jede einzelne finden lassen, wenn man allen übrigen den Minimalwerth 1 beilegt, so daß z. B.

$$22) \ldots\ldots x_1 > O \qquad x_1 \overline{\overline{<}}\, E\,((A - A_2 - A_3 - \ldots\ldots - A_n) : A_1)$$

so muß dasselbe mit den Größen t, welche durch 6) mit den Unbekannten x linear verbunden sind, der Fall sein, d. h. es muß möglich sein für jedes t aus dem System 19) eine obere und eine untere Grenze zu bestimmen. (Ebenso haben wir einen zweiten Fall, Unbegrenztheit der x nach einer Seite und darum auch nur einseitige Begrenzung der t). Man kann mithin jedenfalls zweimal aus den n Ungleichungen $n-1$ derselben so auswählen, daß durch Multiplicationen mit positiven Größen und darauffolgende Additionen alle t mit Ausnahme eines vorher bestimmten verschwinden, daß man also 2 Ungleichungen erhält, welche unmittelbar, die obere und untere Grenze des gewählten t liefern. Allgemein ist diese Operation nicht ausführbar, es läßt sich nur angeben, daß die Coefficienten der t in den Ungleichungen Determinanten von der in III behandelten Art sind. Man erhalte z. B.

$$23) \ldots \left.\begin{matrix} t_1 . D\,(p + 1, p + 2, \ldots\ldots n, 1, 2, \ldots p-1) > F \\ t_1 . D\,(r + 1, r + 2, \ldots\ldots n, 1, 2, \ldots r-1) < G \end{matrix}\right\}$$

wo F und G ihre Entstehung den Absolutgliedern der Ungleichungen 19) verdanken, und wir die Determinanten als positiv betrachten dürfen. Mit Rücksicht auf 18) folgern wir dann

$$24) \ldots\ldots \begin{matrix} t_1 > F : (K A_p) \,. \\ t_1 < G : (K A_r) \end{matrix}$$

Ist die Grenzbestimmung für t_1 erfolgt und kann dasselbe m Werthe annehmen, so erhält man durch Ein setzen derselben in 6) m neue Systeme, die eine Veränderliche weniger enthalten und ebenso behandelt werden müssen, wie eben 9) behandelt wurde, um schließlich, nach Bestimmung der Grenzen für die letzte Veränderliche durch Einsetzen der für sie gültigen Werthe sämmtliche Lösungen der 1) zu erhalten.

Man erhält, z. B. für die in III benutzte Form der Gleichung $70\, x_1 + 42\, x_2 + 30\, x_3 + 105\, x_4 = 8009$ die Grenzen

$$t_1 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \qquad t_2 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \qquad t_3 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix}$$

Aus den Grenzungleichungen 24) ergiebt sich sofort, daß der Spielraum der Veränderlichen im umgekehrten Verhältniß zur Größe der Charakteristik K steht, während die Anzahl von Lösungen, welche eine aufgestellte Form umfaßt, sich im Allgemeinen in direkter Beziehung zur Größe des Spielraums der t befindet. Daraus würde folgen, daß für den kleinsten Werth von K, welcher nach III offenbar ± 1 ist, die größtmögliche Anzahl von Lösungen umschlossen würde, d. h. $K = \pm 1$ müßte das Kennzeichen für die Vollständigkeit einer Form sein. Indessen ist dieser Beweis nicht streng genug und nur für eine Gleichung mit positiven Coefficienten A gültig. Wir geben deswegen im Folgenden strenge Nachweise des Kriteriums für die Vollständigkeit einer Form.

V. Aufstellung des Kriteriums für die Vollständigkeit der Formen.

Eliminirt man aus den $n-1$ Gleichungen des Systems 6) alle t mit Ausnahme von t_1, so ergiebt sich

$$25) \,.\, t_1 \,.\, \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots & a_{1,n-1} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots & a_{2,n-1} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & \ldots & a_{3,n-1} \\ \ldots & & & & \\ \ldots & & & & \\ a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & a_{n-1,3}, & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - A_1, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots & a_{1,n-1} \\ x_2 - A_2, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots & a_{2,n-1} \\ x_3 - A_3, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & \ldots & a_{3,n-1} \\ \ldots & & & & \\ \ldots & & & & \\ x_{n-1} - A_{n-1}, & a_{n-1,2}, & a_{n-1,3}, & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

oder wenn wir die rechte Seite mit N_1 bezeichnen

$$26) \ldots\ldots t_1 . D\,(1, 2, 3, \ldots n - 1) = N_1$$

und mit Berücksichtigung von 18)

$$27) \ldots\ldots (-1)^{n+1}\, K . A_n\, t_1 = N_1$$

Bildet man die analogen Ausdrücke, indem man nicht die n^{te}, sondern die $n - 1^{\text{te}}$ Gleichung in 6) ausläßt und dann die n^{te} Gleichung als erste ansieht u. s. w., so entsteht folgendes System:

$$28) \ldots\ldots \begin{cases} (-1)^{n+1}\, K\, A_n\, t_1 = N_1 \\ \qquad\quad K\, A_{n-1}\, t_1 = N_2 \\ (-1)^{n+1}\, K\, A_{n-2}\, t_1 = N_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^{n+1}\, K\, A_2\, t_1 = N_{n-1} \\ \qquad\quad K\, A_1\, t_1 = N_n \end{cases}$$

Diesen Gleichungen müssen alle Werthe, die t_1 annehmen darf, genügen. Wir haben dasselbe ganzzahlig vorausgesetzt, es könnte aber sehr wohl sein, daß diesem System gebrochene Werthe für t_1 genügten, wenn nämlich der Nenner des betreffenden Bruches in K aufginge; in die Größen A kann derselbe nicht aufgehen, weil diese keinen gemeinsamen Theiler > 1 haben. Für die Größe t_1 und analog für die übrigen t ließen sich demnach folgende wirkliche Brüche als dem System 28) genügend setzen:

$$29) \ldots\ldots t_1 = \frac{1}{K}, \frac{2}{K}, \frac{3}{K}, \ldots \frac{K-1}{K}, \frac{K+1}{K}, \frac{K+2}{K}, \ldots \frac{2K-1}{K}, \frac{2K+1}{K}, \frac{2K+2}{K}, \ldots \text{u. s. f.}$$

Dies weist unbedingt darauf hin, daß die Gleichung 1) noch Lösungen besitzt, welche aus der Form 6) mit der Charakteristik K nicht erhalten werden können, weil dieselben gebrochenen Werthen der Veränderlichen entsprechen, während diese in 6) nur als ganzzahlig angesehen werden dürfen. Dieses Vorhandensein weiterer Lösungen ist nur dann nicht möglich, wenn

$$30) \ldots\ldots K = \pm 1$$

ist, so daß hierin nothwendig das Kriterium für eine vollständige Form gegeben ist. Alle Formen, bei denen $K^2 > 1$ ist, sind als unvollständig zu betrachten, wiewohl es in einigen speciellen Fällen vorkommen kann, daß ein Unterschied zwischen vollständigen und unvollständigen Formen nicht existirt. So sind für die Gleichung $11\, x_1 + 17\, y_1 = 157$ die beiden Formen

$$\begin{matrix} x_1 = 5 + 17\, t & \quad \text{und} \quad & x_1 = 5 + 51\, t \\ x_2 = 6 - 11\, t & & x_2 = 6 - 33\, t \end{matrix}$$

von denen die erste die Charakteristik $+ 1$, zweite $+ 3$ hat, vollständig, weil eben nur eine Lösung für jene Gleichung existirt. Im Allgemeinen sind unsere obigen Behauptungen richtig.

Für eine vollständige Form lautet das System 18) so:

$$31) \ldots \left\{\begin{array}{l} D(2, 3, 4, \ldots n-1, n) = \pm A_1 \\ D(3, 4, 5, \ldots n, 1) = \pm(-1)^{n+1} A_2 \\ D(4, 5, 6, \ldots n, 1, 2) = \pm A_3 \\ D(5, 6, 7, \ldots n, 1, 2, 3) = \pm(-1)^{n+1} A_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ D(2p, 2p+1, 2p+2 \ldots n, 1, 2 \ldots 2p-2) = \pm A_{2p-1} \\ D(2p+1, 2p+2, 2p+3 \ldots n, 1, 2 \ldots 2p-1) = \pm(-1)^{n+1} A_{2p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ D(n, 1, 2, \ldots n-3\; n-2) = \pm A_{n-1} \\ D(1, 2, 3, \ldots n-2, n-1) = \pm(-1)^{n+1} A_n \end{array}\right.$$

wo die oberen Vorzeichen und ebenso die untern zusammengehören.

Wenden wir das Gefundene auf die einfachsten Fälle an, so ist zunächst für

$$32) \ldots A_1 x_1 + A_2 x_2 = A$$

bei einer vollständigen Form $D(2) = a_{2,1} = \pm A_1$, $D(1) = a_{1,1} = \pm(-1)^3 A_2 = \mp A_2$, so daß für eine Gleichung mit 2 Unbekannten nur eine einzige vollständige Form

$$33) \ldots \left\{\begin{array}{l} x_1 = M_1 \mp A_2 t_1 \\ x_2 = M_2 \pm A_1 t_1 \end{array}\right.$$

existirt, wie auch schon in III. gezeigt wurde. Die doppelten Vorzeichen reichen nicht hin einen Anspruch a uf 2 vollständige Formen zu begründen. Für

$$34) \ldots A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = A$$

hat man bei einer vollständigen Form

$$35) \ldots \left\{\begin{array}{l} D(2,3) = a_{2,1}\, a_{3,2} - a_{3,1}\, a_{2,2} = \pm A_1 \\ D(3,1) = a_{3,1}\, a_{1,2} - a_{1,1}\, a_{3,2} = \pm A_2 \\ D(1,2) = a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{2,1}\, a_{1,2} = \pm A_3 \end{array}\right.$$

Eine Anwendung auf die in der Einleitung für die Gleichung $21x + 29y + 53z = 800$ aufgestellten 3 Formen zeigt, daß die beiden ersten vollständig sind, während die letzte wegen der Charakteristik -5 unvollständig ist. Die in III. für die Gleichung $70x_1 + 42x_2 + 30x_3 + 105x_4 = 8009$ aufgestellte Form ergiebt sich ebenfalls als eine unvollständige, weil sie die Charakteristik -34 besitzt.

Da die Frage nach dem Kriterium für die Vollständigkeit der Formen einen wesentlichen Theil unserer Untersuchungen ausmacht, so möge noch ein zweiter Beweis für den Satz, daß die vollständigen Formen durch $K = \pm 1$ charaktrisirt sind, hier Platz finden. Soll das System 6) vollständig sein, so muß man, wenn irgend eine Lösung der Gleichung 1) durch

$$36) \ldots x_1 = L_1,\quad x_2 = L_2,\quad x_3 = L_3 \ldots x_n = L_n$$

dargestellt wird, wo L und M als nicht identisch angenommen werden, aus dem System

$$37) \ldots \left\{\begin{array}{l} L_1 = M_1 + a_{1,1} t_1 + a_{1,2} t_2 + a_{1,3} t_3 + \ldots + a_{1,n-1} t_{n-1} \\ L_2 = M_2 + a_{2,1} t_1 + a_{2,2} t_2 + a_{2,3} t_3 + \ldots + a_{2,n-1} t_{n-1} \\ L_3 = M_3 + a_{3,1} t_1 + a_{3,2} t_2 + a_{3,3} t_3 + \ldots + a_{3,n-1} t_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_n = M_n + a_{n,1} t_1 + a_{n,2} t_2 + a_{n,3} t_3 + \ldots + a_{n,n-1} t_{n-1} \end{array}\right.$$

unter allen Umständen ganzzahlige Werthe für die Größen t ableiten können. Für t_1 erhält man aus 37)

$$38) \ldots t_1 . D(1, 2, 3 \ldots n-2, n-1) = \left|\begin{array}{l} L_1 - M_1,\ a_{1,2},\ a_{1,3}, \ldots a_{1,n-1} \\ L_2 - M_2,\ a_{2,2},\ a_{2,3}, \ldots a_{2,n-1} \\ L_3 - M_3,\ a_{3,2},\ a_{3,3}, \ldots a_{3,n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_{n-1} - M_{n-1},\ a_{n-1,2},\ a_{n-1,3}, \ldots a_{n-1,n-1} \end{array}\right|$$

Aus den Gleichungen

$$A_1 M_1 + A_2 M_2 + A_3 M_3 + \ldots + A_{n-1} M_{n-1} + A_n M_n = A \ldots (39$$
$$A_1 L_1 + A_2 L_2 + A_3 L_3 + \ldots + A_{n-1} L_{n-1} + A_n L_n = A \ldots (40$$

welche nach 5) stattfinden, ergiebt sich

$$A_1 (L_1 - M_1) + A_2 (L_2 - M_2) + A_3 (L_3 - M_3) + \ldots + A_{n-1} (L_{n-1} - M_{n-1}) + A_n (L_n - M_n) = 0 \ldots (41$$

eine Gleichung, welche dasselbe Aussehen hat, wie die des Systems 9). Daraus schließen wir, daß sich für 1) auch folgende Form aufstellen läßt:

$$42) \ldots \left\{\begin{array}{l} x_1 = M_1 + (L_1 - M_1) t_1 + a_{1,2} t_2 + a_{1,3} t_3 + \ldots + a_{1,n-1} t_{n-1} \\ x_2 = M_2 + (L_2 - M_2) t_1 + a_{2,2} t_2 + a_{2,3} t_3 + \ldots\ a_{2,n-1} t_{n-1} \\ x_3 = M_3 + (L_3 - M_3) t_1 + a_{3,2} t_2 + a_{3,3} t_3 + \ldots + a_{3,n-1} t_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = M_{n-1} + (L_{n-1} - M_{n-1}) t_1 + a_{n-1,2} t_2 + a_{n-1,3} t_3 + \ldots + a_{n-1,n-1} t_{n-1} \\ x_n = M_n + (L_n - M_n) t_1 + a_{n,2} t_2 + a_{n,3} t_3 + \ldots\ a_{n,n-1} t_{n-1} \end{array}\right.$$

heißt die zu 42) gehörige Charakteristik k, so geht 38) mit Rücksicht auf 18) über in

$$43) \ldots (-1)^{n+1} K . A_n t_1 = (-1)^{n+1} k A_n$$

$$44) \ldots \text{oder } t_1 = k : K$$

Da k von der Wahl der speciellen Lösung L abhängt, im Allgemeinen also in keiner Beziehung zu K steht, so kann t_1 (und Gleiches gilt für die übrigen t) nur dann immer eine ganze Zahl werden, wenn

$$45) \ldots K = \pm 1$$

ist; dies ist aber das schon früher angegebene Kriterium.

VI. Das Euler'sche Verfahren.

In der Einleitung wurde darauf hingewiesen, daß die Frage, ob die jedenfalls für die Praxis immer zu empfehlende Euler'sche Auflösungsmethode stets allgemeine Formen liefere, noch nicht beantwortet sei. In den bisherigen Entwickelungen liegen nun die Mittel zur Bejahung dieser Frage, wie jetzt gezeigt werden soll. Es liege wieder vor

$$46) \ldots A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_{n-1} x_{n-1} + A_n x_n = A$$

Die Auflösung dieser Gleichung läßt sich auf die einer Gleichung mit $n-1$ Unbekannten in folgender Weise zurückführen:

Es werde $A - A_n x_n = z_n$ gesetzt, was nur in dem einzigen Falle modificirt werden müßte, wenn die Größen $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$ einen gemeinsamen Theiler $q > 1$ hätten; um die Betrachtung nicht zu verwickeln, wollen wir diesen Fall ganz bei Seite lassen; wir bemerken nur, daß $A - A_n x_n = q z_n$ zu setzen wäre, wodurch in den nachfolgenden Operationen nur unwesentliche Modificationen eintreten. Die Auflösung der Gleichung

$$47) \ldots A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_{n-1} x_{n-1} = z_n$$

nach dem Euler'schen Verfahren, ergebe folgendes System mit $n-2$ Veränderlichen

$$48) \ldots \left\{\begin{array}{l} x_1 = m_1 + a_{1,2} t_2 + a_{1,3} t_3 + \ldots + a_{1,n-1} t_{n-1} \\ x_2 = m_2 + a_{2,2} t_2 + a_{2,3} t_3 + \ldots\ a_{2,n-1} t_{n-1} \\ x_3 = m_3 + a_{3,2} t_2 + a_{3,3} t_3 + \ldots + a_{3,n-1} t_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = m_{n-1} + a_{n-1,2} t_2 + a_{n-1,3} t_3 + \ldots + a_{n-1,n-1} t_{n-1} \end{array}\right.$$

welches die Charakteristik K_{n-2} besitze, so daß mit Rücksicht auf 24)

$$49) \ldots\ldots \left|\begin{array}{l} a_{2,2},\ a_{2,3},\ \ldots\ a_{2,n-1} \\ a_{3,2},\ a_{3,3}\ \ldots\ a_{3,n-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n-1,2},\ a_{n-1,3},\ \ldots\ a_{n-1,n-1} \end{array}\right| = K_{n-2}\, A_1$$

Die Größen m in 48) enthalten alle noch z_n d. h. x_n; substituirt man deswegen daselbst für z_n wieder den Werth $A - A_n x_n$, so entsteht, wenn $m_p = M_p + d_p x_n$ ist, für 46) folgende Form:

$$50) \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} x_1 = M_1 + d_1 x_n + a_{1,2} t_2 + a_{1,3} t_3 + \ldots\ldots + a_{1,n-1} t_{n-1} \\ x_2 = M_2 + d_2 x_n + a_{2,2} t_2 + a_{2,3} t_3 + \ldots\ldots + a_{2,n-1} t_{n-1} \\ x_3 = M_3 + d_3 x_n + a_{3,2} t_2 + a_{3,3} t_3 + \ldots\ldots + a_{3,n-1} t_{n-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n-1} = M_{n-1} + d_{n-1} x_n + a_{n-1,2} t_2 + a_{n-1,3} t_3 + \ldots + a_{n-1,n-1} t_{n-1} \\ x_n = \qquad\quad + x_n \end{array}\right.$$

in welcher eine Unbekannte die Rolle einer Veränderlichen übernommen hat. Es sei die Charakteristik von 50) gleich K_{n-1}, so ist nach 18)

$$51) \ldots\ldots \left|\begin{array}{l} d_1,\ a_{1,2},\ a_{1,3},\ \ldots\ a_{1,n-1} \\ d_2,\ a_{2,2},\ a_{1,3},\ \ldots\ a_{2,n-1} \\ d_3,\ a_{3,2},\ a_{3,3},\ \ldots\ a_{3,n-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ d_{n-1},\ a_{n-1,2}\ a_{n-1,3}\ \ldots\ a_{n-,n-1} \end{array}\right| = K_{n-1}\,(-1)^{n+1}\, A_n$$

Substituirt man die Gleichungen 50) in 46) so entsteht folgendes System, welches 9) analog ist:

$$52) \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} A_1 d_1 + A_2 d_2 + A_3 d_3 + \ldots\ldots + A_{n-1} d_{n-1} = - A_n \\ A_1 a_{1,2} + A_2 a_{2,2} + A_3 a_{3,2} + \ldots + A_{n-1} a_{n-1,2} = O \\ A_1 a_{1,3} + A_2 a_{2,3} + A_3 a_{3,3} + \ldots + A_{n-1} a_{n-1,3} = O \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_1 a_{1,n-1} + A_2 a_{2,n-1} + A_3 a_{3,n-1} + \ldots + A_{n-1} a_{n-1,n-1} = O \end{array}\right.$$

Hieraus folgt

$$53) \ldots A_1 . \left|\begin{array}{l} d_1,\ d_2,\ d_3,\ \ldots\ldots\ d_{n-1} \\ a_{1,2},\ a_{2,2},\ a_{3,2},\ \ldots\ldots\ a_{n-1,2} \\ a_{1,3},\ a_{2,3},\ a_{2,3},\ \ldots\ldots\ a_{n-1,3} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{1,n-1},\ a_{2,n-1},\ a_{3,n-1},\ \ldots\ldots\ a_{n-1,n-1} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{l} -A_n,\ d_2,\ d_3,\ \ldots\ldots\ d_{n-1} \\ O,\ a_{2,2},\ a_{3,2},\ \ldots\ a_{n-1,2} \\ O,\ a_{2,3},\ a_{3,3},\ \ldots\ a_{n-1,3} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ O,\ a_{2,n-1},\ a_{3,n-1},\ \ldots\ a_{n-1,n-1} \end{array}\right|$$

Die Determinante links ist bekanntlich identisch mit der in 51). Die Determinante rechts reducirt sich auf

$$54) \ldots\ldots - A_n . \left|\begin{array}{l} a_{2,2},\ a_{3,2},\ \ldots\ldots\ a_{n-2,2} \\ a_{2,3},\ a_{3,3},\ \ldots\ldots\ a_{n-1,3} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{2,n-1},\ a_{3n-1}\ \ldots\ a_{n-,n-1} \end{array}\right|$$

und diese Determinante ist wieder identisch mit der in 49), so daß wir haben

$$55) \ldots\ldots (-1)^{n+1} K_{n-1} A_1 A_n = - K_{n-2} A_1 A_n$$

$$56) \ldots\ldots \text{oder } (-1)^n K_{n-1} = K_{n-2}$$

Es läßt sich nun die Lösung der Gleichung 47) ebenso auf die Gleichung mit $n-2$ Unbekannten

$$57) \ldots\ldots A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots\ldots + A_{n-2} x_{n-2} = z_{n-1}$$

zurückführen, wenn $z_n - A_{n-1} x_{n-1} = z_{n-1}$ gesetzt wird; die entstehende Form habe die Charakteristik K_{n-3}, dann haben wir analog 56)

$$58) \ldots\ldots (-1)^{n-1} K_{n-2} = K_{n-3}$$

und bei entsprechendem weitern Zurückgehen

$$59) \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} (-1)^{n-2} K_{n-3} = K_{n-4} \\ (-1)^{n-3} K_{n-4} = K_{n-5} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \qquad K_3 = K_2 \\ \quad - K_2 = K_1 \end{array}\right.$$

indem wir schließlich bei der Gleichung $A_1 x_1 + A_2 x_2 = z_3$ anlangen. Es ist also nur noch nachzuweisen, daß das Euler'sche Verfahren bei einer Gleichung mit 2 Unbekannten eine vollständige Form liefere. Dasselbe kommt hierbei im Wesentlichen auf die Verwandlung des Bruches $A_1 : A_2$ in einen Kettenbruch hinaus, so daß das schließlich vorzunehmende Rückwärtssubstituiren den eingeführten Veränderlichen nothwendig die Coefficienten A_2 und A_1 wieder liefert; wir haben nun in V gezeigt, daß die einzige vollständige Form für eine Gleichung mit 2 Unbekannten jene Coefficienten A_2 und A_1 enthalten muß; es muß folglich

$$60) \ldots\ldots K_1 = \pm 1$$

sein, und die Gleichungen 56), 58) und 59) ergeben dann augenblicklich, daß auch

$$61) \ldots\ldots K_{n-2} = \pm 1 \quad 62)\ K_{n-1} = \pm 1$$

ist, wodurch die Form 50), welche durch das auf eine Gleichung mit $n-1$ Unbekannten angewandte Euler'sche Verfahren erhalten wurde, als eine vollständige charakterisirt wird.

VII. Construction der ursprünglichen Gleichung.

Nachdem die Hauptfragen im Vorhergehenden erledigt worden, wenden wir uns zu andern Untersuchungen, welche zu einer einigermaßen vollständigen Behandlung des betreffenden Gebietes nothwendig scheinen.

Die Aufgabe zu einer gegebenen Form die ursprüngliche Gleichung zu construiren kann mit Hülfe früherer Sätze leicht gelöst werden. Zunächst bildet man die Determinanten des System's 18); dadurch gewinnt man $K.A_1$ $K.A_2$ . . . KA_n, woraus durch Weglassung des größten gemeinsamen Theilers die Coefficienten A der Urgleichung hervorgehen. Das Absolutglied wird dann durch die Gleichung

$$63) \ldots\ldots A = \overset{n}{S}_1 A_p M_p$$

gewonnen, wodurch alle Theile der Gleichung bekannt sind.

Ebenso ist nun die Lösung der Aufgabe möglich, aus n gegebenen Lösungen, welche jedoch einer nachher zu besprechenden Bedingung genügen müssen, die Urgleichung abzuleiten. Die Lösungen seien, wenn die in den einzelnen Colonnen stehenden Größen zusammengehören, vorgestellt durch

$$64) \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} x_1 = m_{1,1},\ m_{1,2},\ m_{1,3},\ \ldots\ldots\ m_{1,n} \\ x_2 = m_{2,1},\ m_{3,2},\ m_{2,3},\ \ldots\ldots\ m_{2,n} \\ x_3 = m_{3,1},\ m_{3,2},\ m_{3,3},\ \ldots\ldots\ m_{3,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = m_{n,1},\ m_{n,2}\ m_{n,3},\ \ldots\ m_{n,n} \end{array}\right.$$

In derselben Weise wie bei 39), 40), 41), ergiebt sich, daß für die Coefficienten a der Form, die wir zunächst aufzustellen beabsichtigen, Ausdrücke wie $m_{p,q} - m_{r,s}$ verwendet werden können, wodurch z. B. folgendes System gewonnen wird:

$$65) \ldots \begin{cases} x_1 = m_1 + (m_{1,1} - m_{1,2})\, t_1 + (m_{1,1} - m_{1,3})\, t_2 + (m_{1,1} - m_{1,4})\, t_3 + \ldots + (m_{1,1} - m_{1,n})\, t_{n-1} \\ x_2 = m_2 + (m_{2,1} - m_{2,2})\, t_1 + (m_{2,1} - m_{2,3})\, t_2 + (m_{2,1} - m_{2,4})\, t_3 + \ldots + (m_{2,1} - m_{2,n})\, t_{n-1} \\ x_3 = m_3 + (m_{3,1} - m_{3,2})\, t_1 + (m_{3,1} - m_{3,3})\, t_2 + (m_{3,1} - m_{3,4})\, t_3 + \ldots + (m_{3,1} - m_{3,n})\, t_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = m_n + (m_{n,1} - m_{n,2})\, t_1 + (m_{n,1} - m_{n,3})\, t_2 + (m_{n,1} + m_{n,4})\, t_3 + \ldots + (m_{n,1} - m_{n,n})\, t_{n-1} \end{cases}$$

Daraus bestimmt man in der vorher angegebenen Weise die Coefficienten und das Absolutglied der Urgleichung. Diese Bestimmung wird jedoch unmöglich, wenn die Determinanten des Systems 65) Null werden, was bei allen eintritt, wenn eine einzige verschwindet; denn da keiner der Coefficienten A Null werden kann, so muß dann K verschwinden. Tritt dieses ein, so ist damit angedeutet, daß für jede Zeile in 64) ein und dieselbe Gleichung existirt, welche die n^{te} Lösung aus den n—1 übrigen zu berechnen erlaubt, d. h. daß die in 64) gegebenen Lösungen nicht unabhängig von einander sind. Unabhängigkeit der Lösungen von einander ist also wesentliche und einzige Bedingung. Es ist übrigens gleichgiltig, wie man die Differenzen $m_{p,q} - m_{r,s}$ zur Bildung der Form auswählt, die Charakteristik bleibt stets dieselbe. Ein Blick auf eine der Determinanten, z. B.

$$66) \ldots \begin{vmatrix} m_{1,1} - m_{1,2}, & m_{1,1} - m_{1,3}, & m_{1,1} - m_{1,4} & \ldots & m_{1,1} - m_{1,n} \\ m_{2,1} - m_{2,2}, & m_{2,1}, - m_{2,3}, & m_{2,1} - m_{2,4} & \ldots & m_{2,1} - m_{2,n} \\ m_{3,1} - m_{3,2}, & m_{3,1} - m_{3,3}, & m_{3,1} - m_{3,4} & \ldots & m_{3,1} - m_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n-1,1} - m_{n-1,2}, & m_{n-1,1} - m_{n-1,3}, & - m_{n-1,1} - m_{n-1,4} & \ldots & m_{n-1,1} - m_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

zeigt, daß alle möglichen Differenzen $m_{p,q} - m_{r,s}$, soweit sie den n—1 ersten Zeilen von 65) angehören können, in 66) durch den Satz der Determinantenlehre hervorgerufen werden können, nach welchem der Werth einer Determinante unverändert bleibt, wenn zu den Elementen einer Colonne die mit einem beliebigen gemeinschaftlichen Factor multiplicirten Elemente einer anderen Colonne addirt werden.

Ein weiterer Schluß ist der, daß 2 unbestimmte Gleichungen des ersten Grades mit je n Unbekannten höchstens n—1 von einander unabhängige Lösungen gemeinsam haben können. Besitzen sie mehr gemeinsame, so müssen sich aus jenen n—1 Lösungen die übrigen ableiten lassen.

Wir geben ein einfaches Beispiel; es sei

$$\begin{aligned} x_1 &= 17 \quad 13 \quad 10 \quad 3 \\ x_2 &= 5 \quad 6 \quad 8 \quad 13 \\ x_3 &= 4 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \\ x_4 &= 1 \quad 5 \quad 6 \quad 9 \end{aligned}$$

Daraus läßt sich folgende Form bilden:

$$\begin{aligned} x_1 &= 17 + 4\, t_1 + 7\, t_2 + 14\, t_3 \\ x_2 &= 5 - t_1 - 3\, t_2 - 8\, t_3 \\ x_3 &= 4 + 2\, t_1 + t_2 + 3\, t_3 \\ x_4 &= 1 - 4\, t_1 - 5\, t_2 - 8\, t_3 \end{aligned}$$

Man findet ferner

$D(2,3,4) = 29 = + K.A_1$; $D(3,4,1) = -28 = -K.A_2$; $D(4,1,2) = 6 = K.A_3$; $D(1,2,3) = -25 = -K.A_4$

Es ist mithin $K = +1$, die Form also eine vollständige, ferner $A = 17\, A_1 + 5\, A_2 + 4\, A_3 + A_4 = 682$, so daß die ursprüngliche Gleichung für das gegebene Lösungssystem heißt:

$$29\, x_1 + 28\, x_2 + 6\, x_3 + 25\, x_4 = 682.$$

VIII. Transformation der Formen.

Um den Zusammenhang zweier Formen für eine und dieselbe Urgleichung ausfindig zu machen, ist es nothwendig, die Art und Weise, wie man aus einer Form beliebig viele andere herleiten kann, zu beleuchten. Wir wollen zu diesem Zweck in 6) an Stelle der Veränderlichen t, die Veränderlichen s setzen, die mit jenen durch folgendes System verknüpft sind:

$$67) \ldots \begin{cases} t_1 = b_{1,1}\, s_1 + b_{1,2}\, s_2 + b_{1,3}\, s_3 + \ldots + b_{1,n-1}\, s_{n-1} \\ t_2 = b_{2,1}\, s_1 + b_{2,2}\, s_2 + b_{2,3}\, s_3 + \ldots + b_{2,n-1}\, s_{n-1} \\ t_3 = b_{3,1}\, s_1 + b_{3,2}\, s_2 + b_{3,3}\, s_3 + \ldots + b_{3,n-1}\, s_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{n-1} = b_{n-1,1}\, s_1 + b_{n-1,2}\, s_2 + b_{n-1,3}\, s_3 + \ldots + b_{n-1,n-1}\, s_{n-1} \end{cases}$$

wo die Größen b ganzzahlig sind. Bezeichnen wir die aus demselben in der Ordnung, wie sie in 67) stehen, gebildete Determinante durch $D\,(\mathfrak{B})$, so ergiebt sich bekanntlich unter der zur Unabhängigkeit der Gleichungen 67) von einander nöthigen Voraussetzung, daß $D\,(\mathfrak{B})$ nicht Null sei

$$68) \ldots \quad s_1 = \frac{(D\,(\mathfrak{B}))\, b_{p,1} = t_p}{D\,(\mathfrak{B})}$$

wo man den Zähler erhält, wenn in der Determinante $D\,(\mathfrak{B})$ an die Stelle von $b_{1,1}, b_{2,1}, \ldots b_{n-1,1}$, die Größen $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ gesetzt werden. Analog sind die Ausdrücke für die übrigen s, der Nenner ist immer $D\,(\mathfrak{B})$.

Die Form 6) geht durch 67) über in

$$69) \ldots \begin{cases} x_1 = M_1 + (a_{1,1}\, b_{1,1} + a_{1,2}\, b_{2,1} + a_{1,3}\, b_{3,1} + \ldots + a_{1,n-1}\, b_{n-1,1})\, s_1 \\ \qquad + (a_{1,1}\, b_{1,2} + a_{1,2}\, b_{2,2} + a_{1,3}\, b_{3,2} + \ldots + a_{1,n-1}\, b_{n-1,2})\, s_2 \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad + (a_{1,1}\, b_{1,n-1} + a_{1,2}\, b_{2,n-1} + a_{1,3}\, b_{3,n-1} + \ldots + a_{1,n-1}\, b_{n-1,n-1})\, s_{n-1} \\ x_2 = M_2 + (a_{2,1}\, b_{1,1} + a_{2,2}\, b_{2,1} + a_{2,3}\, b_{3,1} + \ldots + a_{2,n-1}\, b_{n-1,1})\, s_1 \\ \qquad + (a_{2,1}\, b_{1,2} + a_{2,2}\, b_{2,2} + a_{2,3}\, b_{3,2} + \ldots + a_{2,n-1}\, b_{n-1,2})\, s_2 \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad + (a_{2,1}\, b_{1,n-1} + a_{2,2}\, b_{2,n-1} + a_{2,3}\, b_{3,n-1} + \ldots + a_{2,n-1}\, b_{n-1,n-1})\, s_{n-1} \\ x_3 = \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = M_n + (a_{n,1}\, b_{1,1} + a_{n,2}\, b_{2,1} + a_{n3}\, b_{3,1} + \ldots + a_{n,n-1}\, b_{n-1,1})\, s_1 \\ \qquad + (a_{n,1}\, b_{1,2} + a_{n,2}\, b_{2,2} + a_{n,3}\, b_{3,2} + \ldots + a_{n,n-1}\, b_{n-1,2})\, s_2 \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad + (a_{n,1}\, b_{1,n-1} + a_{n,2}\, b_{2,n-1} + a_{n,3}\, b_{3,n-1} + \ldots + a_{n,n-1}\, b_{n-1,n-1})\, s_{n-1} \end{cases}$$

Die Coefficienten der s in 69) sind in derselben Weise gebildet, wie die Elemente der Determinante, welche durch Multiplication zweier Determinanten von gleicher Elementenzahl entsteht. Bezeichnen wir die neuen Coefficienten durch c und stellen durch $D\,(\mathfrak{C}p)$ eine Determinante vor, welche aus den Größen c aller Gleichungen in 69) mit Ausschluß der p^{ten} in der Art gebildet ist, daß die $p + 1^{te}$ und die darauf folgenden Gleichungen an die Spitze gestellt werden, durch $D\,(\mathfrak{A}p)$ also die analog aus 6) gebildete und früher durch $D\,(p+1, p+2, \ldots n, 1, 2 \ldots p-1)$ bezeichnete, so ist

$$70) \ldots \quad D\,(\mathfrak{C}p) = D\,(\mathfrak{A}p)\,.\,D\,(\mathfrak{B})$$

Nach 18) kann man hierfür, wenn k die Charakteristik von 69) ist, schreiben

$$71) \ldots \quad k = K\,.\,D\,(\mathfrak{B})$$

Soll mithin die Charakteristik der Form 6) bei der Transformation, abgesehen vom Zeichen, ungeändert bleiben, so muß

$$72) \ldots \quad D\,(\mathfrak{B}) = \pm 1$$

sein. Dann werden die beiden Formen 6) und 69) als äquivalent, d. h. als solche bezeichnet werden dürfen, welche genau dieselben Lösungen liefern; denn aus 68) geht hervor, daß unter jener Bedingung alle s ganzzahlig werden, daß mithin die zu einer Auflösung von 1) gehörigen Werthe von t correspondirende Werthe von s liefern, welche dieselbe Lösung aus 69) finden lassen und umgekehrt. Gleichheit der Charakteristik (abgesehen vom Zeichen) und der besonderen Lösung reicht indessen durchaus noch nicht zur Aequivalenz hin; es muß vielmehr, wenn dieselbe stattfinden soll, eine Transformation mit dem Modulus ± 1 möglich sein. Untersuchen wir deshalb, wenn sich die Form 6) in eine andere

$$73) \ldots\ldots \begin{cases} x_1 = M_1 + c_{1,1}\,s_1 + c_{1,2}\,s_2 + c_{1,3}\,s_3 + \ldots + c_{1,n-1}\,s_{n-1} \\ x_2 = M_2 + c_{2,1}\,s_1 + c_{2,2}\,s_2 + c_{2,3}\,s_3 + \ldots + c_{2,n-1}\,s_{n-1} \\ x_3 = M_3 + c_{3,1}\,s_1 + c_{3,2}\,s_2 + c_{3,3}\,s_3 + \ldots + c_{3,n-1}\,s_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = M_n + c_{n,1}\,s_1 + c_{n,2}\,s_2 + c_{n,3}\,s_3 + \ldots + c_{n,n-1}\,s_{n-1} \end{cases}$$

transformiren läßt, wenn wir die Substitution 67) jedoch ohne die Bedingung 72) voraussetzen. Wir haben beiden Formen dieselben besonderen Lösungen gegeben, weil beide Formen, soll anders eine Transformation überhaupt denkbar sein, mindestens eine Lösung, die wir zur besondern machen dürfen, gemeinsam haben müssen. Vergleichen wir 69) und 73) Glied für Glied, so ergeben sich für die $(n-1)^2$ Unbekannten b scheinbar $n\,(n-1)$ Gleichungen, mehr also, als nöthig sind. Erwägt man jedoch, daß, wenn in einer Colonne von 69) $n-1$ Coefficienten mit denen der entsprechenden Colonne in 73) übereinstimmen, diese Uebereinstimmung sich wegen 9) auch auf die beiden n^{ten} Coefficienten erstrecken muß, so reducirt sich die Zahl der Gleichungen auf die der zu bestimmenden Größen b. Diese $(n-1)^2$ Gleichungen lassen sich in $n-1$ Systeme zerlegen, so daß jedes System von $n-1$ Gleichungen die Coefficienten b einer Colonne in 67) als Unbekannte erhält. Wir haben

$$74) \ldots \left\{ \begin{array}{ll} \begin{array}{c}\text{Erstes}\\ \text{System.}\end{array} & \begin{cases} a_{1,1}\,b_{1,1} + a_{1,2}\,b_{2,1} + a_{1,3}\,b_{3,1} + \ldots + a_{1,n-1}\,b_{n-1,1} = c_{1,1} \\ a_{2,1}\,b_{1,1} + a_{2,2}\,b_{2,1} + a_{2,3}\,b_{3,1} + \ldots + a_{2,n-1}\,b_{n-1,1} = c_{2,1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1}\,b_{1,1} + a_{n-1,2}\,b_{2,1} + a_{n-1,3}\,b_{3,1} + \ldots + a_{n-1,n-1}\,b_{n-1,1} = c_{n-1,1} \end{cases} \\ \begin{array}{c}\text{Zweites}\\ \text{System.}\end{array} & \begin{cases} a_{1,1}\,b_{1,2} + a_{1,2}\,b_{2,2} + a_{1,3}\,b_{3,1} + \ldots + a_{1,n-1}\,b_{n-1,2} = c_{1,2} \\ a_{2,1}\,b_{1,2} + a_{2,2}\,b_{2,2} + a_{2,3}\,b_{3,2} + \ldots + a_{2,n-1}\,b_{n-1,2} = c_{2,2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1}\,b_{1,2} + a_{n-1,2}\,b_{2,2} + a_{n-1,3}\,b_{3,1} + \ldots + a_{n-1,n-1}\,b_{n-1,2} = c_{n-1,2} \end{cases} \\ & \begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \\ \begin{array}{c}n-1^{tes}\\ \text{System.}\end{array} & \begin{cases} a_{1,1}\,b_{1,n-1} + a_{1,2}\,b_{2,n-1} + a_{1,3}\,b_{3,n-1} + \ldots + a_{1,n-1}\,b_{n-1,n-1} = c_{1,n-1} \\ a_{2,1}\,b_{1,n-1} + a_{2,2}\,b_{2,n-1} + a_{2,3}\,b_{3,n-1} + \ldots + a_{2,n-1}\,b_{n-1,n-1} = c_{2,n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1}\,b_{1,n-1} + a_{n-1,2}\,b_{2,n-1} + a_{n-1,3}\,b_{3,n-1} + \ldots + a_{n-1,n-1}\,b_{n-1,n-1} = c_{n-1,n-1} \end{cases} \end{array} \right.$$

Wir wollen die weiteren Untersuchungen nur für $b_{1,1}$ führen, da die Resultate sich sofort auf die übrige b ausdehnen lassen. Das erste System ergiebt für $b_{1,1}$

$$75) \ldots\ldots b_{1,1} = \begin{vmatrix} c_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n-1} \\ c_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n-1} \\ c_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & a_{n-1,3} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} : D\,(1,\,2,\,3 \ldots {}_{n-2,n-1})$$

Bedenkt man, daß wegen

$$76) \ldots\ldots A_1\,c_{1,1} + A_2\,c_{2,1} + A_3\,c_{3,1} + \ldots + A_{n-1}\,c_{n-1,1} + A_n\,c_n = O$$

das System

$$77) \ldots\ldots \begin{cases} x_1 = M_1 + c_{1,1}\,t_1 + a_{1,2}\,t_2 + \ldots + a_{1,n-1}\,t_{n-1} \\ x_2 = M_2 + c_{2,1}\,t_1 + a_{2,2}\,t_2 + \ldots + a_{2,n-1}\,t_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = M_{n-1} + c_{n-1,1}\,t_1 + a_{n-1,2}\,t_2 + \ldots + a_{n-1,n-1}\,t_{n-1} \\ x_n = M_n + c_{n,1}\,t_1 + a_{n,2}\,t_2 + \ldots + a_{n,n-1}\,t_{n-1} \end{cases}$$

ebenfalls eine Form für 1) wäre, so geht, wenn $K_{1,1}$ die Charakteristik derselben und K, wie gewöhnlich die der Form 6) vorstellt, die Gleichung 75) auf Grundlage von 18) über in

$$78) \ldots\ldots b_{1,1} = (-1)^{n+1}\,K_{1,1}\,A_n : (-1)^{n+1}\,K.A_n = K_{1,1} : K_n$$

ganz allgemein ist also

$$79) \ldots\ldots b_{p,q} = K_{p,q} : K$$

Da die Größen b ganze Zahlen sein sollen, so ergeben sich daraus unmittelbar folgende Sätze:

Aus einer Form läßt sich eine zweite nur dann durch eine Substitution ableiten, sobald sämmtliche Charakteristiken, welche man erhält, wenn dadurch, daß man alle Colonnen der zweiten Form nach einander in Stelle je einer Colonne der ersten Form setzt, neue und zwar $(n-1)^2$ Formen entstanden sind, durch die Charakteristik der ersten Form theilbar sind. Die Quotienten sind zugleich die Coefficienten der Substitutionsgleichungen. Ist dann $D\,(\mathfrak{B})$ oder, was dasselbe ist, $D\,(\mathfrak{K})$ gleich ± 1, so sind die ursprünglichen Formen aequivalent. Wegen $K = \pm 1$ läßt sich jede vollständige Form in jede andere vollständige oder unvollständige transformiren. Für den ersten Fall wird $D\,(\mathfrak{B}) = \pm 1$, für den zweiten Fall $(D\,(\mathfrak{B}))^2 = q^2 > 1$ sein müssen. Die Anzahl der vollständigen Formen wie die der unvollständigen ist stets unendlich groß, da

$$80) \ldots\ldots D\,(\mathfrak{B}) = \pm 1 \text{ und } (D\,(\mathfrak{B}))^2 = q^2$$

immer unendlich viele Auflösungen zulassen; eine Ausnahme findet für erstere Gleichung nur statt, wenn $n = 2$ ist; man erhält

$$81) \ldots\ldots D\,(\mathfrak{B}) = b_{1,1} = \pm 1$$

so daß die einzige Substitution dann, $t_1 = \pm s_1$ ist, wodurch die Form, abgesehen vom Vorzeichen, in sich selbst übergeht. Als Beispiel wählen wir die in der Einleitung für die Gleichung $21\,x_1 + 29\,x_2 + 53\,x_3 = 800$ aufgestellten drei Formen mit den Charakteristiken $+1$, $+1$, -5

$$\text{I}\ \begin{aligned} x_1 &= 14 - 3\,t_1 - 14\,t_2 \\ x_2 &= 1 + 4\,t_1 + t_2 \\ x_3 &= 9 - t_1 + 5\,t_2 \end{aligned} \qquad \text{II}\ \begin{aligned} x_1 &= 14 - 2\,s_1 + 5\,s_2 \\ x_2 &= 1 - 15\,s_1 - 11\,s_2 \\ x_3 &= 9 + 9\,s_1 - 8\,s_2 \end{aligned} \qquad \text{III}\ \begin{aligned} x_1 &= 14 - 87r_1 - 17r_2 \\ x_2 &= 1 + 10r_1 + 5r_2 \\ x_3 &= 9 + 29r_1 + 4r_2 \end{aligned}$$

wo wir nur die beiden ersten Formen, welche vollständig sind, die besondere Lösung der dritten, unvollständigen gegeben und eine neue Bezeichnung der Unbekannten und der Veränderlichen eingeführt haben. Um I in II überzuführen sind folgende Determinanten zu bilden:

$$\begin{vmatrix} -2, & -14 \\ -15, & 1 \end{vmatrix} = -4.53 \quad \begin{vmatrix} 5, & -14 \\ 11, & 1 \end{vmatrix} = 3.53 \quad \begin{vmatrix} -3, & -2 \\ +4, & -15 \end{vmatrix} = 1.53 \quad \begin{vmatrix} -3, & 5 \\ +4, & 11 \end{vmatrix} = -1.53$$

woraus sich wegen $K = 1$ ergiebt, daß I in II übergeht durch

$$\begin{aligned} t_1 &= -4\,s_1 + 3\,s_2 \\ t_2 &= s_1 - s_2. \end{aligned}$$

Um I in III überzuführen, berechnet man

$$\begin{vmatrix} -87, & -14 \\ 10, & 1 \end{vmatrix} = 1.53 \quad \begin{vmatrix} -17, & -14 \\ 5, & 1 \end{vmatrix} = 1.53 \quad \begin{vmatrix} -3, & -87 \\ 4, & 10 \end{vmatrix} = 6.53 \quad \begin{vmatrix} -3, & -17 \\ 4, & +5 \end{vmatrix} = 1.53;$$

man müßte also setzen

$$\begin{aligned} t_1 &= r_1 + r_2 \\ t_2 &= 6\,r_1 = r_2 \end{aligned}$$

Die Zusammensetzung beider Substitutionen, gilt für die Ueberführung von II in III

$$\begin{aligned} s_1 &= -19\,r_1 - 4\,r_2 \\ s_2 &= -25\,r_1 - 5\,r_2. \end{aligned}$$

IX. Umwandlung unvollständiger Formen in vollständige.

Es sei unsere jetzige Aufgabe nachzuweisen, daß das System 6) wenn K noch nicht ± 1 sein sollte, stets in eine vollständige Form transformirt werden kann. Wenn wir im vorhergehenden Abschnitt gezeigt haben, daß sich jede vollständige Form durch eine stets ermittelbare Substitution in eine gegebene unvollständige umwandeln läßt (und man könnte darin einen neuen Beweis sehen, daß nur die Formen mit der Charakteristik ± 1 Ansprüche auf Vollständigkeit erheben dürfen), so erhellt aus 71) unmittelbar, daß die Umkehrung nicht statthaft ist. Ueber diese Schwierigkeit hilft uns folgende Betrachtung hinweg:

Die Charakteristik K kann in der Form 6) auf verschiedene Weisen auftreten, die wir aufzählen wollen.

1) Es ist weder K noch irgend ein Theiler desselben irgendwo Faktor der Coefficienten einer Colonne in 6).

2) Es kommt vor, daß die Coefficienten einer Colonne in 6) den gemeinsamen Faktor $q \begin{smallmatrix} > 1 \\ < K \end{smallmatrix}$ besitzen, durch welchen, wie die Bildung der Determinanten in 18) zeigt, K jedenfalls theilbar sein muß.

3) Es ist K selbst Factor der Coefficienten einer Colonne in 6).

In letzterem Falle ist das System durch Weglassung des Faktors K, wobei immer noch den Gleichungen 9) genügt wird, augenblicklich in eine vollständige Form transformirt.

Im zweiten Fall liefert die Weglassung des Factors q eine Form mit der kleineren Charakteristik $K : q$. Dieses Weglassen muß, je nach den Umständen in einer oder in mehreren Colonnen geschehen und macht entweder die Form zu einer vollständigen oder führt auf den ersten Fall zurück. Für diesen selbst ergiebt sich somit der Fingerzeig, daß man eine Substitution aufzusuchen habe, welche allen Coefficienten einer Colonne den gemeinsamen Theiler K verschafft, während sie zugleich 72) genügt. Es möge jene Colonne die erste des neuen Systems sein. Wir werden dann die Größen $c_{1,1}, c_{2,1} \dots c_{n,1}$, so bestimmen, daß sie der Bedingungsgleichung 9)

$$82) \dots A_1 c_{1,1} + A_2 c_{2,1} + A_3 c_{3,1} + \dots + A_n c_{n,1} = 0$$

ohne gemeinsamen Theiler > 1 genügen. An Stelle des ersten Systems in 74) lösen wir dann

$$83) \dots \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1} b_{1,1} + a_{1,2} b_{2,1} + \dots + a_{1,n-1} b_{n-1,1} = K c_{1,1} \\ a_{2,1} b_{1,1} + a_{2,2} b_{2,1} + \dots + a_{2,n-1} b_{n-1,1} = K c_{2,1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1,1} b_{1,1} + a_{n-1,2} b_{2,1} + \dots + a_{n-1,n-1} b_{n-1,1} = K c_{n-1,1} \end{array} \right.$$

in Bezug auf die Größen b auf. Eine Vergleichung mit 75) ergiebt, daß sich die jetzigen Resultate von den dortigen nur durch das Auftreten des Factors K im Zähler unterscheiden, mithin

$$84) \dots b_{1,1} = K_{1,1}$$

und analog

$$85) \dots b_{p,1} = K_{p,1}$$

wird. Ist diese Bestimmung erfolgt, so werden die übrigen Größen b, nämlich

$$\begin{array}{l} b_{1,2}, b_{2,2}, \dots b_{n-1,2} \\ b_{1,3}, b_{2,3}, \dots b_{n-1,3} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{1,n-1}, b_{2,n-1}, \dots b_{n-1,n-1} \end{array}$$

wie dieselben dem 2^{ten}, 3^{ten} ... n^{ten} System in 74 angehören, auf unendlich viele Arten durch Auflösung der unbestimmten Gleichung

$$86) \dots D(\mathfrak{B}) = \pm 1$$

welche zur Beibehaltung der Charakteristik nothwendig ist, bestimmt werden können, wobei allerdings der Fall $n = 2$ ausgeschlossen ist. Dabei bleiben im Allgemeinen $n(n-3)$ jener $(n-1)(n-2)$ Größen b ganz willkürlich mit der einzigen Bedingung, daß die Coefficienten der beiden übrig bleibenden b relative Primzahlen werden müssen. Durch Auflösung einer Gleichung mit 2 Unbekannten werden dann jene beiden b bestimmt. Sind so alle Größen b aufgefunden, so liefern die $n-2$ letzten Systeme in 74) die Größen c mit Ausschluß der schon oben bestimmten ersten Colonne. Stellt man die neue Form zusammen, so hat dieselbe wegen 86) die Charakteristik K, wegen 83) in einer Colonne überall den Factor K; sie geht mithin durch Weglassung desselben in eine vollständige Form über.

Die Auflösung von 86) wird unmöglich, wenn die Größen $b_{p,1}$ oder $K_{p,1}$ einen gemeinsamen Theiler > 1 besitzen, da in jedem Monom der Determinanten eine der Größen $b_{p,1}$ als Factor vorkommt. Dies beweist, daß

dann die in 82) für die Größen $c_{p,1}$ getroffene Wahl einer andern Platz machen muß. Es läßt sich übrigens leicht einsehen, daß sich stets eine passende Wahl treffen läßt. Man lasse die $c_{p,1}$ noch unbestimmt, und stelle die $b_{p,1}$ durch dieselben mit Hilfe von 83) dar; die Substitution in 86) liefert dann eine Gleichung, deren Absolutglied A_n und deren Unbekannten $c_{1,1}, c_{2,1}, \dots c_{n-1,1}$ und alle übrigen Größen b sind, und zu welcher noch die Gleichung 82) mit der weiteren Unbekannten $c_{n,1}$ tritt, so daß wir 2 Gleichungen mit $(n-1)^2 + 1$ Unbekannten zu lösen haben. Dies kann stets ausgeführt werden, da diese Unbekannten auch negative Werthe annehmen dürfen. Für $n = 2$ hat eine unvollständige Form die Gestalt:

$$37) \dots \left\{ \begin{array}{l} x_1 = M_1 \pm K A_2 \\ x_2 = M_2 \mp K A_1 \end{array} \right.$$

kann also sofort reducirt werden.

Als Beispiel wählen wir die Form, die wir in III für $70 x_1 + 42 x_2 + 30 x_3 + 105 x_4 = 8009$ aufgestellt haben, nämlich

$$\begin{array}{l} x_1 = 8 \phantom{{}-10 t_1} + 6 t_2 - 9 t_3 \\ x_2 = 172 - 10 t_1 - 20 t_2 + 5 t_3 \\ x_3 = 4 - 7 t_1 + 14 t_2 + 21 t_3 \\ x_4 = 1 + 6 t_1 \phantom{{}+14 t_2} - 2 t_3 \end{array}$$

Sie besitzt, wie in III gezeigt wurde die Charakteristik -34, und man sieht, daß in der Colonne für t_2 überall der Factor 2 erscheint, durch dessen Weglassen eine neue Form mit der Charakteristik -17 gewonnen wird:

$$\begin{array}{l} x_1 = 8 \phantom{{}-10 t_1} + 3 t_2 - 9 t_3 \\ x_2 = 172 - 10 t_1 - 10 t_2 + 5 t_3 \\ x_3 = 4 - 7 t_1 + 7 t_2 + 21 t_3 \\ x_4 = 1 + 6 t_1 \phantom{{}+7 t_2} - 2 t_3 \end{array}$$

Das Auftreten der gemeinsamen Factoren in den Coefficienten jeder einzelnen Zeile kann nicht befremden; es ist in Folge der Gleichung 9) eine Nothwendigkeit, da je drei der Coefficienten der gegebenen Gleichung gemeinsame Theiler besitzen.

Die letzte Form wollen wir in eine allgemeine verwandeln. Es ist nach 82) zuerst

$$70 c_{1,1} + 42 c_{2,1} + 30 c_{3,1} + 105 c_{4,1} = 0$$

Man genügt dieser Gleichung durch $c_{1,1} = 6$, $c_{2,1} = -25$, $c_{3,1} = 14$, $c_{4,1} = 2$. Weiter erhält man

$$K_{1,1} = \begin{vmatrix} 6, & 3, & 9 \\ -25, & -10, & 5 \\ 14, & 7, & 21 \end{vmatrix} : 105 = 6 \quad K_{2,1} = \begin{vmatrix} 0, & 6, & -9 \\ -10, & -25, & 5 \\ -7, & 14, & 21 \end{vmatrix} : 105 = 37 \quad K_{3,1} = \begin{vmatrix} 0, & 3, & 6 \\ -10, & -10, & -25 \\ -7, & +7, & 14 \end{vmatrix} : 105 = 1$$

Also $b_{1,1} = 6$, $b_{2,1} = 37$, $b_{3,1} = 1$. Wählt man nun noch für $b_{1,2}, b_{2,2}, b_{3,2}, b_{3,3}$ die Werthe 1, 2, 3, 5, so hat man

$$D(\mathfrak{B}) = \begin{vmatrix} 6, & 1, & b_{1,3} \\ 37, & 2, & b_{2,3} \\ 1, & 3, & 5 \end{vmatrix} = 1$$

Daraus findet sich leicht $b_{1,3} = 1$, $b_{2,3} = -1$ und es geht durch die Substitution

$$\begin{array}{l} t_1 = 6 s_1 + s_2 + s_3 \\ t_2 = 37 s + 2 s_2 - s_3 \\ t_3 = s_1 + 3 s_2 + 5 s_3 \end{array}$$

die Form mit der Charakteristik -17 über in

$$\begin{array}{l} x_1 = 8 + 102 s_1 - 21 s_2 - 48 s_3 \\ x_2 = 172 - 425 s_1 - 15 s_2 + 25 s_3 \\ x_3 = 4 + 238 s_1 + 70 s_2 + 91 s_3 \\ x_4 = 1 + 34 s_1 \phantom{{}+70 s_2} - 4 s_3 \end{array}$$

aus welcher man durch Weglassung des allen Coefficienten von t_1 gemeinsamen Factors 17 folgende vollständige Form erhält:

$$\begin{aligned} x_1 &= 8 + 6\, s_1 - 21\, s_2 - 48\, s_3 \\ x_2 &= 172 - 25\, s_1 - 15\, s_2 + 25\, s_3 \\ x_3 &= 4 + 14\, s_1 + 70\, s_2 + 91\, s_3 \\ x_4 &= 1 + 34\, s_1 - 4\, s_3 \end{aligned}$$

Wir machen schließlich noch auf den besondern Fall aufmerksam, wo man in 82) $c_{2,1} = c_{3,1} = \dots . c_{n-1,1} = O$ wählt. Für $c_{1,1}$ hat man dann den Werth A_n, für $c_{n,1}$ den Werth $-A_1$, wenn A_1 und A_n relativ prim sind. Es läßt sich dann leicht zeigen, daß die Größen $b_{1,1}, b_{2,1} \dots . b_{n-1,1}$ nichts anders sind, als die ersten Minoren von D (1, 2, 3 .... $n-1$), gehörig zu $a_{1,1}, a_{2,1} \dots . a_{n-1,1}$, was natürlich für die Rechnnng bequem ist.

Zweiter Theil.

Die Anzahl der Auflösungen.

I. Einleitende Bemerkungen.

Die Frage nach der Zahl der Lösungen, welche eine unbestimmte Gleichung des ersten Grades besitzt, ist sicherlich eine der interssantesten in dem ganzen Gebiete der unbestimmten Analysis. Da dieselbe, so weit wir in Erfahrung bringen konnten, noch nicht ausführlich behandelt worden ist, so wollen wir in Folgenden das mittheilen, was unsere Untersuchungen darüber ergeben haben. Selbstverständlich schließen wir alle Gleichungen, bei denen auch nur ein einziger Coefficient negativ ist, wegen der unendlich großen Zahl der Lösungen aus. Wir sehen uns ferner genöthigt in allen Gleichungen vorauszusetzen, daß alle Coefficienten, zu zwei und zwei genommen, relative Primzahlen seien, weil sich uns ergeben hat, daß beim Vorkommen gemeinschaftlicher Factoren der Gang der Rechnung und die Gestalt der Resultate sich sehr bedeutend compliciren. Wir werden eine Gleichung mit 2, 3, 4, 5 und 6 Unbekannten untersuchen und dabei die Methode gewinnen, wie man zu der Formel für die Anzahl der Lösungen einer Gleichung mit n Unbekannten gelangen kann, wenn die entsprechende für eine Gleichung mit $n-1$ Unbekannten bereits bekannt ist; daran sollen sich Betrachtungen schließen, welche zur Darstellung der Formel für eine Gleichung mit n Unbekannten führen, und schließlich mag eine Anzahl nicht uninteressanter, nebenbei gewonnener Resultate folgen. Das Hauptergebniß der ganzen Untersuchung läßt sich folgendermaßen [untersuchen] darstellen: Nimmt in einer gegebenen Gleichung das Absolutglied nach und nach Werthe an, welche Glieder einer arithmetischen Reihe erster Ordnung mit einer bestimmten Differenz sind, so sind die zugehörigen Lösungszahlen Glieder einer arithmetischen Reihe von bestimmter höherer Ordnung, deren sämmtliche Differenzen bekannt sind. In jedem besonderen Falle ist mithin nur das Anfangsglied zu ermitteln. Ueber diese Schwierigkeit sind wir nicht hinausgekommen, und es scheint uns, daß sich für das Anfangsglied keine allgemeine Darstellung geben läßt. Ehe wir unsere eigentlichen Untersuchungen vorlegen, wollen wir auf eine Methode zur Auffindung der Lösungszahlen aufmerksam machen, welche theoretisch sehr einfach, praktisch in den seltensten Fällen verwendbar ist. Im ersten Theile, Abschnitt II, wurde dargelegt, daß das Produkt

$$1) \; \dots . \; S z^{dA_1} . S z^{dA_2} . S z^{dA_3} \dots . S z^{dA_n}$$

wo für die Coefficienten d die Glieder der natürlichen Zahlenreihe zu setzen sind, benutzt werden könne, um eine specielle Lösung aufzufinden. Während wir jedoch dort uns Abkürzungen der Rechnung erlaubten, werde jetzt die Entwicklung nach Potenzen von z so weit ausgeführt, bis nur noch höhere Potenzen als z^A auftreten; es ist dann klar, daß, wenn in dieser Entwicklung das Monom $i . z^A$ erhalten wird, i die Anzahl aller möglichen Lösungen der Gleichung 1) des ersten Theils ist. Gelänge es also allgemein den Coefficienten i zu bestimmen, so wäre die Aufgabe gelöst. Es wurde uns nahe gelegt $i\, z^A$ durch ein bestimmtes Integral auszudrücken, allein die Ermittelung eines solchen ist uns nicht gelungen, und die Möglichkeit derselben erschien durch weitere, von anderen Gesichtspunkten ausgehende Untersuchungen fraglich.

Bevor wir die Untersuchung einer Gleichung mit 2, 3, 4, 5 und 6 Unbekannten beginnen, schicken wir eine Anzahl von Bezeichnungen, deren wir fortwährend bedürfen, voraus, bemerken jedoch gleich, daß wir dieselben später durch einfachere ersetzen werden, was vorläufig nicht möglich ist.

Unsere Gleichungen werden sein — die Anzahl der Lösungen derselben sei

$$2) \; \dots . \; \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 = A_2 & \qquad f_2(A_2) \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = A_3 & \qquad f_3(A_3) \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = A_4 & \qquad f_4(A_4) \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 = A_5 & \qquad f_5(A_5) \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 + a_6 x_6 = A_6 & \qquad f_6(A_6) \end{cases}$$

Es sei ferner

$$\begin{cases} a_1\, a_2 = P_2 \\ a_1\, a_2\, a_3 = P_3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a_1 + a_2 = Q_2 \\ a_1 + a_2 + a_3 = Q_3 \end{matrix}$$

$$3) \ldots\ldots \begin{cases} a_1\, a_2\, a_3\, a_4 = P_4 & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = Q_4 \\ a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 = P_5 & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = Q_5 \\ a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6 = P_6 & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + {}_6 = Q_6 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = T_3 & a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 = U_4 \\ a_1^2 + a^2_2 + a_3^2 + a_4^2 = T_4 & a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 + a_5^3 = U_5 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = T_5 & a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 + a_5^3 + a_6^3 = U_6 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = T_6 & \\ \qquad a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4 + a_5^4 = V_5 & \\ \qquad a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4 + a_5^4 + a_6^4 = V_6. & \end{cases}$$

II. Die Gleichung mit 2 Unbekannten.

Wir werden die Gleichung

$$4) \ldots .\ a_1\, x_1 + a_2\, x_2 = A_2$$

untersuchen, um $f_2\,(A_2)$ zu bestimmen. Wenn wir dabei ausführlicher verweilen, so geschieht dies, weil die Sache von verschiedenen Gesichtspunkten aus aufgefaßt werden kann. Als vollständige Lösung obiger Gleichung habe man gefunden

$$5) \ldots .\ \begin{cases} x_1 = a_1 + a_2\, t_1 \\ x_2 = a_2 - a_1\, t_1 \end{cases}$$

Daraus ergeben sich folgende Grenzen für t_1

$$6) \ldots\ldots\ t_1 > -\, a_1 : a_2 \qquad t_1 < a_2 : a_1$$

so daß t_1 im Allgemeinen einen Spielraum

$$7) \ldots\ldots\ E\,(a_2 : a_1 - (-\, a_1 : a_2)) = E\,(a_1\, a_1 + a_2\, a_2) : P_2) = E\,(A_2 : P_2)$$

erhält (s. erst. Th. I); ist also $A_2 > P_2$, so hat die Gleichung 4) mindestens eine Lösung, oder in der Entwickelung des Produkts $Sz^{da_1} \,.\, Sz^{da_2}$ treten sicherlich alle Poteuzen auf, deren Exponenten $> P_2$ sind. Der Ausdruck $E\,(A_2 : P_2)$ wird nur dann ungenau, wenn A_2 ein Vielfaches von P_2 ist; wäre

$$8) \ldots\ldots\ a_1\, x_1 + a_2\, x_2 = q\, P_2$$

so genügt man dieser Gleichung durch

$$9) \ldots\ldots \begin{cases} x_1 = a_2\, t_1 \\ x_2 = q\, a_1 - a_1\, t_1 \end{cases}$$

mit den Grenzen $t_1 > 0$, $t_1 < q$, so daß im Ganzen nur $q - 1 = E\,(A_2 : P_2) - 1$ Lösungen existiren. Die Formel $E\,(A_2 : P_2)$ kann ferner einen um 1 zu kleinen Werth für $f_2\,(A_2)$ liefern, was z. B. stattfindet, wenn a_1 negativ, a_2 positiv und $R\,(a_1 : a_2) > R\,(a_2 : a_1)$ ist. Die Anzahl der Lösungen für 4) ist also entweder

$$10) \ldots\ldots\ E\,(A_2 : P_2) - 1 \text{ oder } E\,(A_2 : P_2) \text{ oder } E\,(A_2 : P_2) + 1$$

Die weitere Untersuchung wird diese Unbestimmtheit verschwinden machen. Das gewonnene Resultat läßt sich noch auf einem ganz andern Wege ableiten, den wir hier andeuten wollen, da wir bei einer andern Gelegenheit auf denselben zurückkommen werden.

$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 = A_2$ stellt, geometrisch betrachtet, eine gerade Linie vor, welche die x_1-achse in der Entfernung $A_2 : a_1$, die x_2-achse in der Entfernung $A_2 : a_2$ vom Ursprung schneidet. Zertheilt man bei Voraussetzung eines orthogonalen Systems den ganzen ersten Quadranten durch Normalen, die in der Entfernung 1, 2, 3, ... vom Ursprung auf den Achsen errichtet werden, in Quadrate, so stellen die Coordinaten aller Quadratecken, durch welche die gegebene Linie läuft, mit Ausschluß der etwa auf den Achsen liegenden, die sämmtlichen Lösungen der Gleichung 4) vor, die Fußpunkte der dazu gehörigen x_2 coordinaten sind auf der Strecke $A_2 : a_1$ der x_1-achse im Abstande a_2 gleichmäßig vertheilt, wie aus 5) hervorgeht. Ihre Anzahl, also auch die der Lösungen, ist mithin

$$11) \ldots\ldots\ E\,(A_2 : a_1\, a_2) - 1 \text{ oder } E\,(A_2 : a_1\, a_2) \text{ oder } E\,(A_2 : a_1\, a_2) + 1$$

je nach der Lage des dem Ursprunge nächsten Fußpunktes; liegt dieser z. B. im Ursprunge selbst und ist A_2 durch a_1 theilbar, so erhält man den ersten Ausdruck. Man kommt hierdurch auf das früher Aufgestellte zurück.

Aus dem Bisherigen läßt sich folgendes schließen:

Alle	Zahlen	A_2	von	1	bis	P_2	liefern	0	oder	1 Lösung.
„	„	„	„	$P_2 + 1$	„	$2\, P_2$	„	1	„	2 Lösungen.
„	„	„	„	$2\, P_2 + 1$	„	$3\, P_2$	„	2	„	3 „
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
„	„	„		$(p-1)\, P_2 + 1$	„	$p\, P_2$	„	$p - 1$	„	p „

Wir sehen uns deshalb veranlaßt alle Zahlenwerthe, die A_2 annehmen kann, in Klassen von je P_2 Gliedern abzutheilen und stellen folgenden Satz auf:

Ist

$$12) \ldots\ldots\ A_2 \equiv m_2\ (mod\ P_2)$$

wo m_2 eine Zahl der ersten Klasse von 1 bis P_2 ist, und ferner

$$13) \ldots\ldots\ (A_2 - m_2) : P_2 = p_2$$

$$14) \ldots\ldots\ A_2 = p_2\, P_2 + m_2$$

so ist

$$15) \ldots\ldots\ f_2\,(A_2) = p_2 + f_2\,(m_2)$$

d. h. für die Glieder der arithmetischen Reihe erster Ordnung mit der Differenz P_2

$$m_2,\ m_2 + P_2,\ m_2 + 2\, P_2, \ldots\ldots\ m_2 + p_2\, P_2$$

bilden die zugehörigen $f_2\,(m_2)$, $f_2\,(m_2 + P_2)$, $f_2\,(m_2 + 2\, P_2)$, ... $f_2\,(m_2 + p_2\, P_2)$ eine arithmetische Reihe erster Ordnung mit der Differenz 1 oder $P_2{}^0$ und dem Anfangsglied $f_2\,(m_2)$, welches entweder 0 oder 1 ist.

Hierdurch ist die in 10) aufgetretene Unbestimmtheit beseitigt. Der Beweis dieses Satzes ist leicht geführt Hat die Gleichung

$$16) \ldots .\ a_1\, x_1 + a_2\, x_2 = m_2$$

die vollständige Form

$$17) \ldots .\ \begin{cases} x_1 = \beta_1 + a_2\, t_1 \\ x_2 = \beta_2 - a_1\, t_1 \end{cases}$$

so kann als vollständige Form der Gleichung

$$18) \ldots .\ a_1\, x_1 + a_2\, x_2 = A_2 = p_2\, P_2 + m_2$$

aufgestellt werden

$$19) \ldots .\ \begin{cases} x_1 = \beta_1 + a_2\, t_1 \\ x_2 = \beta_2 + p_2\, a_1 - a_1\, t_1 \end{cases}$$

d. h. t_1 darf dieselben Werthe wie in 17) und außerdem noch p_2 weitere annehmen, so daß sich ergiebt

$$20) \ldots .\ f_2\,(A_2) = p_2 + f_2\,(m_2)$$

was bewiesen werden sollte. Es liegt hierin ausgesprochen, daß sich zwei Absolutglieder A_2 und B_2 hinsichtlich der $f_2\,(A_2)$ und $f_2\,(B_2)$ nur dann auf einander reduciren lassen, wenn

$$21) \ldots .\ A_2 \equiv B_2\ (mod\ P_2)$$

ein Satz, der später benutzt werden wird.

Wir wollen noch, der späteren Verwandlung wegen, die Frage beantworten, wie viele Zahlen $m_2 < P_2 + 1$ existiren, für welche $f_2\,(m_2) = 1$ ist, für welche also die Gleichung $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 = m_2$ eine Lösung hat. Wir schlagen wieder den geometrischen Weg ein. Nehmen wir auf der x_1 achse das Stück a_2, auf der x_2 achse das Stück a_1 vom Ursprung an und verbinden die Endpunkte, so stellt die Verbindungslinie die Gleichung $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 = P_2$ vor. Denken wir uns den ersten Quadranten wieder wie früher in Quadrate zerlegt, so ergiebt sich sofort, daß die Gleichung keine Lösung haben kann; denn die Diagonale des Rechtecks aus den Seite a_1 und x_2 kann durch keine Quadratecke gehen (mit Ausnahme zweier auf den Achsen liegender), weil das Verhältniß $a_1 : a_2$ nicht in kleineren ganzen Zahlen ausdrückbar ist. Für eine Linie $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 = m_2$ werden die Achsenabschnitte kleiner als a_1 und a_2, d. h. die Linie ist im ersten Quadranten ganz innerhalb des durch die Diagonale des obigen Rechtecks gebildeten Dreiecks, dessen dritte Ecke der Ursprung ist, gelegen und der Diagonale parallel, kann also höchstens eine Quadratecke innerhalb des Dreiecks treffen, was ebenso wie der betreffende Fall bei der Diagonale bewiesen wird. Die Anzahl der Quadratecken, welche in jenen Dreiecken liegen, ohne auf die Seiten desselben zu fallen, ist mithin die gesuchte Zahl der m_2, welche eine Lösung liefern. Die Gesammtzahl der Quadratecken des Rechtecks ist $(a_1 + 1)$ $(a_2 + 1)$, daran fallen die auf dem Umfang liegenden, der Zahl nach $2\,(a_1 + a_2)$, weg, so daß ins Innere des Dreiecks zu liegen kommen,

$$22) \;.\;.\;.\;.\; \frac{(a_1 - 1)(a_2 - 1)}{2} = \frac{P_2 - Q_2 + 1}{2}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Division stets ausführbar ist. Da nun $f_2(m_2)$ immer 1 oder 0 ist, so ist gleichzeitig

$$23) \;.\;.\;.\;.\; f_2(1) + f_2(2) + f_2(3) + \dots + f_2(P_2) = \frac{P_2 - Q_2 + 1}{2}$$

oder in kürzerer Form, wie wir es später anwenden wollen

$$24) \;.\;.\;.\;.\; \overset{P_2}{\underset{1}{S}} f_2(m_2) = \frac{P_2 - Q_2 + 1}{2}$$

Es ist sehr leicht diese Summirung weiter auszudehnen; da wir dies später nicht benutzen, so geben wir nur die Formel

$$25) \;.\;.\;.\;.\; \overset{p_2 P_2}{\underset{1}{S}} f_2(m_2) = \frac{p_2(p_2 P_2 - Q_2 + 1)}{2}$$

Einen algebraischen Weg zur Ermittelung der Formel 24) werden wir später kennen lernen.

Am Schlusse von V findet sich in Tabellenform ein Zahlenbeispiel, welches wir nothwendigerweise äußerst einfach wählen mußten, weil es sonst, wegen des raschen Wachsens der f unmöglich geworden wäre für die Gleichungen mit mehreren Unbekannten tabellarische Beispiele zu geben. Die Art und Weise, wie die Tabellen b) und c) aus a) berechnet wurden, wird später erörtert werden.

Wir haben in Tabelle a) die f für die Gleichung $4x_1 + 5x_2 = A_2$ zusammen gestellt; man findet aus a) für die arithmetische Reihe 13, 33, 53, ... die Werthe 1, 2, 3, ... als Lösungszahlen. Bildet man die Summe der ersten Colonne der f_2, so erhält man 6. Nach Formel 23) ist $f_2(1) + f_2(2) + \dots + f_2(20) = \frac{20 - 9 + 1}{2} = 6$.

III. Die Gleichung mit 3 Unbekannten.

Wir gehen zur Aufsuchung der Lösungszahl für die Gleichung

$$26) \;.\;.\;.\;.\; a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = A_3$$

über. Die Entwickelung des Produktes $Sz^{da_1} \,.\, Sz^{da_2}$ liefert lauter Theilsätze von don der Gestalt $f_2(b) \,.\, z^b$. Bei 26) wäre das Produkt $Sz^{da_1} \,.\, Sz^{da_2} \,.\, Sz^{da_3}$ zu bilden; da nun der hinzugetretene Factor in jedem einzelnen seiner Theilsätze nur den Coefficienten 1 hat, während das allgemeine Glied der Entwickelung wieder durch $f_3(c) \,.\, z^c$ dargestellt werden kann, so ist es klar, daß $f_3(c)$ ein Aggregat von Ausdrücken wie $f_2(b)$ sein muß. Nun lassen sich zwei Ausdrücke f_2 nach II nur dann auf einander zurückführen, wenn sich die zugehörigen A_2 um Vielfache von P_2 unterscheiden, so daß dieselben die Gestalten $r P_2 + m$ und $q P_2 + m$ haben müssen. Jedenfalls kommen in der Entwickelung von $Sz^{da_1} \,.\, Sz^{da_2}$ die beiden Ausdrücke $f_2(r P_2 + m) \, z^{r P_2 + m}$ und $f_2(q P_2 + m) \,.\, z^{q P_2 + m}$ vor. Beim Hinzutreten des dritten Factors Sz^{da_3} werde jener Ausdruck unter andern mit $z^{v a_3}$, dieser mit $z^{w a_3}$ multiplicirt. Sollen die einzelnen Coefficienten der neuen Potenzen $z^{r P_2 + m + v a_3}$ und $z^{q P_2 + m + w a_3}$ unter einander reducirbar bleiben, so muß

$$27) \;.\;.\;.\;.\; r P_2 + m + v a_3 \equiv q P_2 + m + w a_3 \; (mod \; P_2)$$

sein, d. h.

$$28) \;.\;.\;.\;.\;.\; v = w + P_2 t$$

Wir schließen daraus, daß eine Reduction nur bei denjenigen Potenzen möglich ist, deren Exponenten um Vielfache von $P_2 a_3$, d. h., P_3, von einander verschieden sind, sehen uns also veranlaßt alle Zahlen von 1 an in Klassen von je P_3 Gliedern abzutheilen. Der Satz für die Lösungszahlen heißt dann: Ist

$$29) \;.\;.\;.\;.\; A_3 \equiv m_3 \; (mod \; P_3)$$

wo m_3 eine Zahl der ersten Classe ist, und ferner

$$30) \;.\;.\;.\;.\; A_3 = p_3 P_3 + m_3$$

so ist

$$31) \;.\;.\;.\;.\; f_3(A_3) = \frac{P_3 p_3^2}{2} - \frac{(Q_3 - m_3)}{2} p_3 + f_3(m_3)$$

d. h. für die Glieder der arithmetischen Reihe erster Ordnung mit der Differenz P_3

$$m_3,\; m_3 + P_3,\; m_3 + 2 P_3,\; \dots \; m_3 + p_3 P_3$$

bilden die zugehörigen $f_3(m_3)$, $f_3(m_3 + P_3)$, $f_3(m_3 + 2 P_3) \dots f_3(m_3 + p_3 P_3)$ eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der ersten Differenz $\frac{P_3 - Q_3}{2} + m_3$, der zweiten P_3.

Den Beweis dieses Satzes führen wir folgendermaßen:

In der Entwickelung von $Sz^{da_1} \,.\, Sz^{da_2} \,.\, Sz^{da_3}$ entsteht die Potenz $z^{A_3} = z^{p_3 P_3 + m_3}$ aus folgenden Produkten:

$$32) \;.\;.\;.\;.\; \begin{cases} f_2(p_3 P_3 + m_3 - a_3) \,.\, z^{p_3 P_3 + m_3 - a_3} \,.\, z^{a_3} \\ f_2(p_3 P_3 + m_3 - 2 a_3) \,.\, z^{p_3 P_3 + m_3 - 2 a_3} \,.\, z^{2 a_3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_2(p_3 P_3 + m_3 - P_2 a_3) \,.\, z^{p_3 P_3 + m_3 - P_2 a_3} \,.\, z^{P_2 a_3} \\ f_2(p_3 P_3 + m_3 - (P_2 + 1) a_3) \,.\, z^{p_3 P_3 + m_3 - (P_2 + 1) a_3} \,.\, z^{(P_2 + 1) a_3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_2(p_3 P_3 + m_3 - 2 P_2 a_3) \,.\, z^{p_3 P_3 + m_3 - 2 P_2 a_2} \,.\, z^{2 P_2 a_3} \\ f_2(p_3 P_3 + m_3 - (2 P_2 + 1) a_3) \,.\, z^{p_3 P_3 + m_3 - (2 P_2 + 1) a_3} \,.\, z^{(2 P_2 + 1) a_3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_2(p_3 P_3 + m_3 - ((p_3 - 1) P_2 + 1) a_3) \,.\, z^{p_3 P_3 + m_3 - ((p_3 - 1) P_2 + 1) a_3} \,.\, z^{((p_3 - 1) P_2 + 1) a_3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_2(p_3 P_3 + m_3 - p_3 P_2 a_3) \,.\, z^{p_3 P_3 + m_3 - p_3 P_2 a_3} \,.\, z^{p_3 P_2 a_3} \end{cases}$$

ferner aus (es ist $P_2 a_3 = P_3$)

$$33) \;.\;.\;.\;.\; \begin{cases} f_2(m_3 - a_3) \,.\, z^{m_3 - a_3} \,.\, z^{(p_3 P_2 + 1) a_3} \\ f_2(m_3 - 2 a_3) \,.\, z^{m_3 - 2 a_3} \,.\, z^{(p_3 P_2 + 2) a_3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_2(m_3 - l a_3) \,.\, z^{m_3 - l a_3} \, z^{(p_3 P_2 + l) a_3} \end{cases}$$

wenn $E(m_3 : a_3) = l$ ist.

Es ist also $f_3(A_3)$ nichts anderes als die Summe sämmtlicher Coefficienten f_2 in den Ausdrücken 32) und 33). Ferner ist es leicht zu sehen, daß 33) geradezu $f_3(m_3)$ liefert, wenn man die dortigen f_2 addirt, weil in 33) alle möglichen Entstehungen der Potenz z^{m_3} registrirt sind, sobald man in den Exponenten der zweiten Factoren z überall $p_3 P_2$ wegläßt. Die Größen f_2 in 32) lassen sich zwar durch einen einzigen Summenausdruck darstellen, nämlich

$$\overset{p_3 P_2}{\underset{1}{S}} f_2(p_3 P_3 + m_3 - h a_3)$$

wo die Summation sich auf h bezieht, allein wir ziehen es vor 32) in p_3 Systeme von je P_2 Gliedern zu spalten und die f_2 eines jeden Systems durch einen Summenausdruck darzustellen. Wir haben in dieser Weise, wenn die Summation sich auf h bezieht,

$$34) \ldots \begin{cases} f_3(A_3) = f_3(m_3) + \mathop{S}\limits_{1}^{P_2} f_2(p_3 P_3 + m_3 - h a_3) \\ \qquad + \mathop{S}\limits_{P_2+1}^{2P_2} f_2(p_3 P_3 + m_3 - h a_3) \\ \qquad + \mathop{S}\limits_{2P_2+1}^{3P_2} f_2(p_3 P_3 + m_3 - h a_3) \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + \mathop{S}\limits_{(p_3-1)P_2+1}^{p_3 P_2} f_2(p_3 P_3 + m_3 - h a_3) \end{cases}$$

Ist nun

$$35) \ldots p_3 P_3 + m_3 - h a_3 \equiv r_h \ (mod\ P_2), \text{ wo } r_h \leqq P_2$$

so haben wir nach 15), weil das dortige p_2 jetzt gleich $(p_3 P_3 + m_3 - h a_3 - r_{h\,3}) : P_2$ ist und für m_2 der Werth r_h gesetzt werden muß:

$$36) \ldots f_2(p_3 P_3 + m_3 - h a_3) = \frac{p_3 P_3 + m_3 - h a_3 - r_h}{P_2} + f_2(r_h)$$

also

$$37) \ldots \mathop{S}\limits_{1}^{P_2} f_2(p_3 P_3 + m_3 - h a_3) = \frac{P_2(p_3 P_3 + m_3) - a_3 \mathop{S}\limits_{1}^{P_2} h - \mathop{S}\limits_{1}^{P_2} r_h}{P_2} + \mathop{S}\limits_{1}^{P_2} f_2(r_h)$$

Da wir P_2 Summanden haben, und nur h und r_h sich ändern. Es ist einleuchtend, daß

$$38) \ldots \begin{cases} p_3 P_3 + m_3 - a_3 \equiv p_3 P_3 + m_3 - (P_2+1) a_3 \equiv p_3 P_3 + m_3 - (2 P_2 + 1) a_3 \ldots (mod\ P_2) \\ p_3 P_3 + m_3 - 2 a_3 \equiv p_3 P_3 + m_3 - (P_2+2) a_3 \equiv p_3 P_3 + m_3 - (2 P_2 + 2) a_3 \ldots (mod\ P_2) \end{cases}$$

u. s. w.

d. h. die Reste r_h in der ersten Summation kehren genau in derselben Reihenfolge in der zweiten, dritten, .. $p_3$ten wieder. Außerdem ist

$$39) \ldots\ldots \mathop{S}\limits_{1}^{P_2} r_h = 1 + 2 + 3 + \ldots + P_2$$

weil unter den P_2 Resten der ersten Summation nie zwei identisch sein können, wie man leicht beweist, so daß die Reihe jener Reste alle Zahlen von 1 bis P_2 umfassen muß. Wir haben analog 37)

$$40) \ldots \begin{cases} \mathop{S}\limits_{1}^{P_2} f_2(p_3 P_3 + m_3 - h a_3) = \dfrac{P_2(p_3 P_3 + m_3) - a_3 \mathop{S}\limits_{1}^{P_2} h - \mathop{S}\limits_{1}^{P_2} r_h}{P_2} + \mathop{S}\limits_{1}^{P_2} f_2(r_h) \\ \mathop{S}\limits_{P_2+1}^{2P_2} f_2(p_3 P_3 + m_3 - h a_3) = \dfrac{P_2(p_3 P_3 + m_3) - a_3 \mathop{S}\limits_{P_2+1}^{2P_2} h - \mathop{S}\limits_{1}^{P_2} r_h}{P_2} + \mathop{S}\limits_{1}^{P_2} f_2(r_h) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathop{S}\limits_{(p_3-1)P_2+1}^{p_3 P_2} f_1(p_3 P_3 + m_3 - h a_3) = \dfrac{P_2(p_3 P_3 + m_3) - a_3 \mathop{S}\limits_{(p_3-1)P_2+1}^{p_3 P_2} h - \mathop{S}\limits_{1}^{P_2} r_h}{P_2} + \mathop{S}\limits_{1}^{P_2} f_1(r_h) \end{cases}$$

also, da wir p_3 Summationen haben

$$41) \ldots\ldots f_3(A_3) = f_3(m_3) + \frac{p_3 P_2(p_3 + m_3) - a_3 \mathop{S}\limits_{1}^{p_3 P_2} h - p_3 \mathop{S}\limits_{1}^{P_2} z\, h}{P_2} + p \mathop{S}\limits_{1}^{P_2} f_2(r_h)$$

Nun ist

$$42) \ldots\ldots \mathop{S}\limits_{1}^{p_3 P_2} h = \frac{p_3 P_2 (p_3 P_2 + 1)}{2}$$

ferner nach 39)

$$43) \ldots\ldots \mathop{S}\limits_{1}^{P_2} r_h = \frac{P_2(P_2+1)}{2}$$

nach 24), wenn an Stelle von m_2 die Größe r_h tritt

$$44) \ldots\ldots \mathop{S}\limits_{1}^{P_2} f_2(r_h) = \frac{P_2 - Q_2 + 1}{2}$$

so daß sich aus 41) nach einigen Reductionen ergiebt

$$45) \ldots\ldots f_3(A_3) = \frac{P_3 p_3^2}{2} - \left(\frac{Q_3}{2} - m_3\right) p_3 + f_3(m_3)$$

wie wir oben behaupteten; dabei ist in Anschlag zu bringen, daß

$$46) \ldots\ldots P_2\, a_3 = P_3 \qquad Q_2 + a_3 = Q_3$$

Nach dem Gange, den wir bei einer Gleichung mit 2 Unbekannten eingeschlagen haben, liegt es nun nahe die Frage aufzuwerfen, wie groß

$$47) \ldots\ldots \mathop{S}\limits_{1}^{P_3} f_3(m_3) = f_3(1) + f_3(2) + f_3(3) + \ldots + f_3(P_3)$$

sei. Der stereometrische Weg, wonach die Gleichung $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = P_3$ eine Ebene mit den Achsenabschnitten $a_2 a_3$, $a_1 a_3$, $a_1 a_2$ vorstellt, und man den ganzen ersten Octanten in Würfel zerfällt, deren Eckcoordinaten, wenn die Ecke in jene Ebene und nicht zugleich in die Coordinatebenen fällt, Lösungen der Gleichung vorstellen, — jener Weg hat uns kein Resultat gegeben. Eine algebraische Behandlung in der Weise, wie sie in 32) vorgenommen ward, führte auf eine doppelte Summation, die wir, da die Ausführung derselben nicht gelang, hier übergehen wollen. Es wird sich indessen zeigen, daß die Aufgabe in einer Weise lösbar ist, welche zugleich bei allen weiteren Gleichungen mit 4, 5 .... n Unbekannten anwendbar bleibt. Jene Summe wird nämlich für eine Gleichung mit s Unbekannten stets bei der Entwickelung der Formel für eine Gleichung mit $s + 1$ Unbekannten gleichsam als Nebenproduct gewonnen.

Wir geben auch hier ein Zahlenbeispiel, welches sich direkt an das in II. mitgetheilte anschließt. Es sei

$$4 x_1 + 5 x_2 + x_3 = A_3$$

dann wird die Formel 31), da $P_3 = 20$, $Q_3 = 10$ ist

$$f_3(A_3) = 10\, p_3^2 - (5 - m_3)\, p_3 + f_3(m_3)$$

Die bei V. angehängte Tabelle b) kann zur Erprobung der Formel benutzt werden. Für $A_3 = 55$ ist $m_3 = 15$, $p_3 = 2$, also

$$f_3(55) = 10 . 2^2 + 10 . 2 + 3 = 63$$

wie es die Tabelle giebt. Bildet man daselbst $\mathop{S}\limits_{1}^{20} f_3(m_3)$, was durch Addition der Zahlen der ersten Colonne erreicht wird, so findet man 30, eine Zahl, die uns später zur Erprobung einer Formel dienen wird.

IV. Die Gleichung mit 4 Unbekannten.

Bei der Untersuchung einer Gleichung mit 4 Unbekannten

$$48) \ldots a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = A_4$$

sehen wir uns aus Gründen, welche den bei der Gleichung mit 3 Unbekannten aufgeführten ganz analog sind, veranlaßt, alle Zahlen in Klassen von je P_4 Gliedern abzutheilen und stellen dann folgenden Satz auf:

Ist

$$49) \ldots\ldots A_4 \equiv m_4 \ (mod\ P_4)$$

50) ..... wo m_4 eine Zahl der ersten Classe von 1 bis P_4 ist, ferner $A_4 = p_4 P_4 + m_4$

51) ..... so ist $f_4(A_4) = \dfrac{P_4^2\, p_4^3}{6} - P_4 \left(\dfrac{Q_4}{2} - m_4\right) \dfrac{p_4^2}{2} + \left(\left(\dfrac{Q}{2} - m\right)^2 - \dfrac{T_4}{12}\right) \dfrac{p}{2} + f_4(m_4)$

d. h. für die Glieder der arithmetischen Reihe erster Ordnung mit der Differenz P_4

$$m_4,\ m_4 + P_4,\ m_4 + 2 P_4,\ \ldots\ m_4 + p_4 P_4 \ldots$$

bilden die zugehörigen $f_4\,(m_4)$, $f_4\,(m_4 + P_4)$, $f_4\,(m_4 + 2\,P_4)$, $\ldots f_4\,(m_4 + p_4\,P_4)$ eine arithmetische Reihe dritter Ordnung mit der ersten Differenz $\frac{P_4^{\,2}}{6} - \frac{P_4}{2}\,\frac{(Q_4}{2} - m_4) + \frac{1}{2}\,(\frac{Q_4}{2} - m_4)^2 - \frac{T_4}{24}$, der zweiten $P_4^{\,2} - P_4\,(\frac{Q_4}{2} - m_4)$, der dritten $P_4^{\,2}$. Die Beweisart schließt sich vollständig an die in III. gegebene an. Zunächst haben wir, wie sich leicht ergiebt, für $f_4\,(A_4)$ die Ausdrücke 32) und 33), wenn f_2 durch f_3, P_2 durch P_3, p_3 durch p_4, a_3 durch a_4 ersetzt werden. Der Gleichung 34) entsprechend erhalten wir

$$52) \ldots f_4\,(A_4) = f_4\,(m_4) + \overset{P_3}{\underset{1}{S}} f_3\,(p_4\,P_4 + m_4 - h\,a_4)$$
$$+ \overset{2\,P_3}{\underset{P_3+1}{S}} f_3\,(p_4\,P_4 + m_4 - h\,a_4)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \overset{p_4\,P_3}{\underset{(p_4-1)\,P_3+1}{S}} f_3\,(p_4\,P_4 + m_4 - h\,a_4)$$

Ist nun wieder

$$53) \ldots\ldots (p_4\,P_4 + m_4 - h\,a_4 \equiv r_h\,(mod\ P_3), \text{ wo } r_h \overline{\gtrless} P_3$$

so haben wir nach 31)

$$54) \,.\, f_3\,(p_4\,P_4 + m_4\,h\,a_4) = \frac{P_3}{2}\left(\frac{p_4\,P_4 + m_4 - ha_4 - r_h}{P_3}\right)^2 - \left(\frac{Q_3}{2} - r_h\right)\left(\frac{p_4\,P_4 + m_4 - ha_4 - r_h}{P_3}\right) + f_3\,(r_h)$$

da an Stelle von p_3 nun der aus 53) resultirende Quotient, an Stelle von m_3 aber r_h tritt. Die Reste r_h fallen, analog den früheren, mit der Zahlenreihe von 1 bis P_3 zusammen und kehren in jeder der p_4 Summationen 52) wieder. Man erhält aus 54) nach einigen leichten Reductionen als dem System 40) entsprechend

$$55) \,.\, \overset{P_3}{\underset{1}{S}} f_3\,(p_4\,P_4 + m_4 - h\,a_4) = \left(\frac{p_4\,P_4 + m_4}{2}\right)^2 + \frac{a_4^{\,2}}{2\,P_3}\overset{P_3}{\underset{1}{S}}(h^2) + \frac{a_4}{P_3}\left(\frac{Q_3}{2} - (p_4\,P_4 + m_4)\right)\overset{P_3}{\underset{1}{S}}(h)$$
$$- \frac{1}{2\,P_3}\overset{P_3}{\underset{1}{S}}(r_h)^2 + \frac{Q_3}{2\,P_3}\overset{P_3}{\underset{1}{S}}(r_h) - \frac{Q_3}{2}(p_4\,P_4 + m_4) + \overset{P_3}{\underset{1}{S}} f_3\,(r_h)$$

u. s. w.

wo wir die weiteren Ausdrücke für die zweite, dritte .... p^{te} Summation in 52) nicht schreiben wollen, da sie aus 55) hervorgehen, wenn man in der Summation hier h^2 und h nach einander die Grenzen $P_3 + 1$ bis $2\,P_3$, $2\,P_3 + 1$ bis $3\,P_3$ u. s. f. einsetzt, während die Summationen für r_h, $(r_h)^2\,f_3\,(r_h)$ ungeändert bleiben. Zieht man 55) zusammen, so entsteht der p_4 Summationen wegen

$$56) \,.\,.\, f_4\,(A_4) = f_4\,(m_4) + \frac{p_4\,(p_4\,P_4 + m_4)^2}{2} + \frac{a_4^{\,2}}{2\,P_3}\overset{p_4\,P_3}{\underset{1}{S}}(h^2) + \frac{a_4}{P_3}\left(\frac{Q_3}{2} - (p_4\,P_4\,m_4)\right)\overset{p_4\,P_3}{\underset{1}{S}}h - \frac{p_4}{2\,P_3}\overset{P_3}{\underset{1}{S}}(r_h)^2$$
$$+ \frac{p_4\,Q_3}{2\,P_3}\overset{P_3}{\underset{1}{S}}(r_h) - \frac{p_4\,Q_3}{2}(p_4\,P_4 + m_4) + p_4\overset{P_3}{\underset{1}{S}} f_3\,(r_h)$$

Berücksichtigt man, daß

$$57) \ldots\ldots P_3\,a_4 = P_4 \qquad Q_3 + a_4 = Q_4$$

$$58) \ldots\,.\, \overset{p_4\,P_3}{\underset{1}{S}}(h^2) = \frac{p_4 P_3\,(p_4\,P_3 + 1)\,(2\,p_4\,P_3 + 1)}{6} \qquad \overset{p_4\,P_3}{\underset{1}{S}}(h) = \frac{p_4\,P_3\,(p_4\,P_3 + 1)}{2}$$

$$59) \ldots\,.\, \overset{P_3}{\underset{1}{S}}(r_h)^2 = \frac{P_3\,(P_3 + 1)\,(2\,P_3 + 1)}{6} \qquad \overset{P_3}{\underset{1}{S}}(r_h) = \frac{P_3\,(P_3 + 1)}{2}$$

ist, so entsteht nach Ausführung der Multiplicationen und gehöriger Reduction der Ausdruck

$$f_4\,(A_4) = f_4\,(m_4) + \frac{P_4^{\,2}\,p_4^{\,3}}{6} - P_4\left(\frac{Q_4}{2} - m_4\right)\frac{p_4^{\,2}}{2} + \left(\frac{m_4^{\,2}}{2} - \frac{m_4\,Q_4}{2} + \frac{a_4^{\,2}}{12} + \frac{Q_3\,a_4}{4} - \frac{P_3^{\,2}}{6} - \frac{P_3}{4} + \frac{P_3\,Q_3}{4}\right.$$
$$\left. + \frac{Q_3}{4} - \frac{1}{12} + \overset{P_3}{\underset{1}{S}} f_3\,(r_h)\right)p_4$$

Es wäre also die Kenntniß von $\overset{P_3}{S} f_3\,(r_h)$ nothwendig; folgende Ueberlegung liefert uns diesen Werth:

Sicherlich ist der Coefficient von p_4 in 60) in Bezug auf a_1, a_2, a_3, a_4 symmetrisch; Theilsätze wie $\frac{m_4^{\,2}}{2}$ und $\frac{m_4\,Q_4}{2}$ kommen also nicht weiter in Betracht, da sie schon symmetrisch sind, wohl aber die übrigen. Nun liefert $\overset{P_3}{\underset{1}{S}} f_3\,(r_h)$ nur Ausdrücke, welche a_1, a_2, a_3, und etwa bestimmte Zahlen enthalten. Soll mithin Symetrie eintreten, so muß diese Symmetrie enthalten:

1) Alle Ausdrücke im Coefficienten von p_4, welche a_4 garnicht enthalten, mit Ausschluß der vorher angeführten, jedoch mit umgekehrten Zeichen; dahin gehören $-\frac{P_3^{\,2}}{6}$, $-\frac{P_3}{4}$, $+\frac{P_3\,Q_3}{4}$, $+\frac{Q_3}{4}$;

2) solche Ausdrücke in a_1, a_2, a_3, welche diejenigen in den Coefficienten von p_4, die a_4 enthalten, aber noch nicht symmetrisch sind, symmetrisch machen; so wird $\frac{a_4^{\,2}}{12}$ symmetrisch durch $\frac{T_3}{12}$, ebenso $\frac{Q_3\,a_4}{4}$ durch $\frac{a_1\,a_2 + a_1\,a_3 + a_2\,a_3}{4}$.

3) allenfalls eine bestimmte Zahl; darüber läßt sich allgemein nicht entscheiden; ein Zahlenbeispiel liefert jene Zahl sofort; wir anticipiren, daß $\frac{1}{12}$ hinzutreten muß, was an und für sich schon wahrscheinlich war. Wir erhalten so

$$61) \ldots \overset{P_3}{\underset{1}{S}} f_3\,(r_h) \text{ oder } \overset{P_3}{\underset{1}{S}} f_3\,(m_3) = \frac{P_3^{\,2}}{6} + \frac{P_3}{4} - \frac{P_3\,Q_3}{4} - \frac{Q_3}{4} + \frac{T_3}{12} + \frac{a_1\,a_2 + a_1\,a_3 + a_2\,a_4}{4} + 1$$

Nun läßt sich $a_1\,a_2 + a_1\,a_3 + a_2\,a_3$ durch $(Q_3^{\,2} - T_3)$: 2 darstellen, so daß 61) nach einigen Reductionen übergeht in

$$62) \ldots\ldots \overset{P_3}{\underset{1}{S}} f_3\,(m_3) = \frac{3\,(P_3 - Q_3 + 1)^2 + (P_3^{\,2} - T_3 - 1)}{24}$$

daran läßt sich wieder wie in 25) die Entwickelung von $\overset{q\,P_3}{\underset{1}{S}} f_3\,(m_3)$ knüpfen; wir übergehen dies der geringen Wichtigkeit wegen. Aus 60) wird mit Hilfe von 62)

$$63) \ldots\,.\, f_4\,(A_4) = \frac{P_4^{\,2}\,p_4^{\,3}}{6} - P_4\,(\frac{Q_4}{2} - m_4)\,\frac{p_4^{\,2}}{2} + \left((\frac{Q_4}{2} - m_4)^2 - \frac{T_4}{12}\right)\frac{p_4}{2} + f_4\,(m_4)$$

was bewiesen werden sollte. Zur Erprobung von 62) kann dies in III. gewählte Beispiel dienen; es ist dort $P_3 = 20$, $Q_3 = 10$, $T_3 = 42$, mithin $\overset{20}{\underset{1}{S}} f_3\,(m_3) = \frac{3\,.\,11^2 + 357}{12} = 30$, was mit dem früher angegebenen übereinstimmt. Dadurch wird die Zufügung von $\frac{1}{12}$ in 61) gerechtfertigt.

Wir können hier des Raumes wegen kein so ausführliches Beispiel berechnen, wie in II. und III., beschränken uns vielmehr darauf für die Gleichung $4\,x_1 + 5\,x_2 + x_3 + 3\,x_4 = A_4$ die Größen $f_4\,(m_4)$ zu berechnen und in der Tabelle c) niederzulegen.

Es werde hier diese Gleichung verlangt f_4 (6 5 4), so ist, da $P_4 = 60$, $Q_4 = 13$, $T_4 = 51$, $m_4 = 54$, $p_4 = 10$, f_4 (54) nach der Tabelle c) gleich 296 ist, in Folge der Formel 63) $f_4 = 754056$, d. h. die Gleichung $5\,x_1 + 4\,x_2 + x_3 + 3\,x_4 = 654$ besitzt 754056 Lösungen.

Tab. a), zu II. gehörig

m_2	f_2	A_2	f_2	A_2	f_2
1	0	21	1	41	2
2	0	22	1	42	2
3	0	23	1	43	2
4	0	24	1	44	2
5	0	25	1	45	2
6	0	26	1	46	2
7	0	27	1	47	2
8	0	28	1	48	2
9	1	29	2	49	3
10	0	30	1	50	2
11	0	31	1	51	2
12	0	32	1	52	2
13	1	33	2	53	3
14	1	34	2	54	3
15	0	35	1	55	2
16	0	36	1	56	2
17	1	37	2	57	3
18	1	38	2	58	3
19	1	39	2	59	3
20	0	40	1	60	2

Tab. b), zu III. gehörig

m_3	f_2	A_3	f_3	A_3	f_3
1	0	21	6	41	32
2	0	22	7	42	34
3	0	23	8	43	36
4	0	24	9	44	38
5	0	25	10	45	40
6	0	26	11	46	42
7	0	27	12	47	44
8	0	28	13	48	46
9	0	29	14	49	48
10	1	30	16	50	51
11	1	31	17	51	53
12	1	32	18	52	55
13	1	33	19	53	57
14	2	34	21	54	60
15	3	35	23	55	63
16	3	36	24	56	65
17	3	37	25	57	67
18	4	38	27	58	70
19	5	39	29	59	73
20	6	40	31	60	76

Tab. c) zu V. gehörig.

m_4	f_4	m_4	f_4	m_4	f_4	m_4	f_4	m_4	f_4	m_4	f_4
1	0	11	0	21	8	31	40	41	113	51	243
2	0	12	0	22	10	32	45	42	123	52	260
3	0	13	1	23	12	33	51	43	134	53	278
4	0	14	1	24	14	34	57	44	145	54	296
5	0	15	1	25	17	35	63	45	157	55	315
6	0	16	2	26	20	36	70	46	170	56	335
7	0	17	3	27	23	37	78	47	183	57	356
8	0	18	4	28	27	38	86	48	197	58	378
9	0	19	5	29	31	39	94	49	212	59	400
10	0	20	6	30	35	40	103	50	227	60	423

Die Tabellen b) und c) sind sehr leicht aus Tabelle a) zu berechnen, da z. B. $f_4\ 37 = f_4\ 34 + f_3\ 34$, überhaupt ganz allgemein

$$64) \ldots . f_q(m) = f_q(m - a_q) + f_{q-1}(m - a_q)$$

ist, denn analog 32), 49), und 52) ist

$$65) \ldots\ldots f_q(m) = f_{q-1}(m - a_q) + f_{q-1}(m - 2a_q) + f_{q-1}(m - 3a_q) + \ldots .$$

$$66) \ldots\ldots f_q(m - a_q) = f_{q-1}(m - 2a_q) + f_{q-1}(m - 3a_q) + \ldots .$$

woraus augenblicklich 64) hervorgeht. Diese Formel, welche natürlich nicht nur für die gewöhnlich durch m vorgestellten Werthe, sondern auch für alle übrigen A gilt, ist zur Tabellenberechnung sehr brauchbar.

V. Die Gleichung mit 5 und 6 Unbekannten.

Bei der Gleichung mit 5 Unbekannten

$$67) \ldots .\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 = A_5$$

werden wir uns kürzer fassen da der Gang dem bei den früheren Gleichungen analog ist. Man hat folgenden Satz:

$$68)\ \text{Ist} \ldots A_5 = m_5\ (mod\ P_5)$$

wo m_5 eine Zahl der ersten Klasse ist, da wir uns hier veranlaßt sehen, alle Zahlen in Klassen von je P_5 Gliedern abzutheilen,

$$69)\ \text{ferner} \ldots A_5 = p_5 P_5 + m_5$$

so erhält man

$$70) \ldots . f_5(A_5) = \frac{P_5^3 p_5^4}{24} - P_5^2\left(\frac{Q_5}{2} - m_5\right)\frac{p_5^3}{6} + P_5\left(\left(\frac{Q_5}{2} - m_5\right)^2 - \frac{T_5}{12}\right)\frac{p_5^2}{4} - \left(\left(\frac{Q_5}{2} - m_5\right)^3 - \frac{T_5}{4}\left(\frac{Q_5}{2} - m_5\right)\right)\frac{p_5}{6} + f_5(m_5)$$

d. h. für die Glieder der arithmetischen Reihe erster Ordnung mit der Differenz P_5

$$m_5,\ m_5 + P_5,\ m_5 + 2P_5,\ \ldots\ldots m_5 + p_5 P_5$$

bilden die zugehörigen $f_5(m_5)$, $f_5(m_5 + P_5)$, $f_5(m_5 + 2P_5)$, $\ldots f_5(m_5 + p_5 P_5)$ eine arithmetische Reihe 4^{ter} Ordnung mit der ersten Differenz

$$\frac{P_5^3}{24} - \frac{P_5^2}{6}\left(\frac{Q_5}{2} - m_5\right) + \frac{P_5}{4}\left(\left(\frac{Q_5}{2} - m_5\right)^2 - \frac{T_5}{12}\right) - \left(\left(\frac{Q_5}{2} - m_5\right)^3 - \frac{T_5}{4}\left(\frac{Q_5}{2} - m_5\right)\right). \frac{1}{6}$$

der zweiten $\frac{7P_5^3}{12} - P_5^2\left(\frac{Q_5}{2} - m_5\right) + \frac{P_5}{2}\left(\left(\frac{Q_5}{2} - m_5\right)^2 - \frac{T_5}{12}\right)$, der dritten $\frac{3P_5^3}{2} - P_5^2\left(Q_5 - m_5\right)$, der vierten P_5^3.

Der Beweis ergiebt sich folgendermaßen:
Analog dem System 52) haben wir:

$$71) \ldots .\ f_5(A_5) = f_5(m_5) + \overset{P_4}{\underset{1}{S}} f_4(p_5 P_5 + m_5 - ha_5)$$
$$+ \overset{2P_4}{\underset{P_4+1}{S}} f_4(p_5 P_5 + m_5 - ha_5)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \overset{p_5 P_4}{\underset{(p_5-1)P_4+1}{S}} f_4(p_5 P_5 + m_5 - ha_5)$$

Ist nun wieder $p_5 P_5 + m_5 - ha_5 \equiv r_h\ (mod\ P_4)$, wo $r_h \overset{=}{<} Q_4$

so hat man an Stelle von p_4 und m_4 in 63) zu setzen $\frac{p_5 P_5 + m_5 - ha_5 - r_h}{P^4}$ und r_h und dann die Summation 71) auszuführen. Da die Rechnung sehr weitläufig wird, so setzen wir dieselbe nicht hierher, sondern bemerken nur, daß alle Theilsätze, die r_h und h gleichzeitig als Factoren enthalten, verschwinden, daß alle Theilsätze, welche weder r noch h in sich schließen, mit $p_5\ P_4$, d. h. der Anzahl der Summanden multiplicirt werden müssen und daß endlich in Bezug auf die Reste r_h ganz demjenigen Analoges gilt, was wir schon früher mehrfach hervorhoben; bei h und seinen Potenzen wird die Summation von 1 bis $P_4\ p_5$ ausgedehnt, bei r_h und seinen Potenzen dagegen nur von 1 bis P_4, das Resultat ist aber in diesem Falle noch mit p_5, der Anzahl der Summationen zu multipliciren. Die Ausführung der Rechnung ergiebt

$$73) \ldots .\ f_5(A_5) = f_5(m_5) + \frac{P_5^3 p_5^4}{24} - P_5^2\left(\frac{Q_5}{2} - m_5\right)\frac{p_5^3}{6} + P_5\left(\left(\frac{Q_5}{2} - m_5\right)^2 - \frac{T_5}{12}\right)\frac{p_5^2}{4} + G.\,p_5$$

wenn wir mit G folgenden Ausdruck bezeichnen:

$$74) \ldots \quad G = \frac{m_5^3}{6} - \frac{Q_5\, m_5^2}{4} + \frac{Q_4^2\, m_5}{8} - \frac{T_4\, m_5}{24} + \frac{a_5^2\, m}{12} + \frac{a_5\, Q_4\, m}{4} \qquad (= e)$$

$$- \frac{P_4^3}{24} - \frac{P_4^2}{12} - \frac{P_4}{24} + \frac{P_4^2\, Q_4}{12} + \frac{P_4\, Q_4}{8} + \frac{Q_4}{24} - \frac{Q_4^2\, P_4}{16} + \frac{T_4\, P_4}{48} - \frac{Q_4^2}{16} + \frac{T}{48} \qquad (= f)$$

$$- \frac{a_5^2\, Q_4}{24} - \frac{a_5\, Q_4^2}{16} + \frac{a_5\, T_4}{16} \qquad (= g)$$

$$+ \mathop{S}\limits_{1}^{P_4} f_4\,(r_h)$$

Die Ausdrücke e gehen durch $Q_4 = Q_5 - a_5$, $T_4 = T_5 - a_5^2$ über in die in Bezug auf den Coefficienten a symmetrischen

$$75) \ldots \ldots - \tfrac{1}{6} \left(\frac{Q_5}{2} - m_5 \right)^3 - \frac{T_5\, m_5}{24} + \frac{Q_5^3}{48}$$

Die Ausdrücke G geben entwickelt

$$76) \ldots \ldots - \frac{a_5^2\,(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + a_5\,(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)}{24}$$

$$77) \ldots \ldots - \frac{a_5\,(a_1\, a_2 + a_1\, a_3 + a_1\, a_4 + a_2\, a_3 + a_2\, a_4 + a_3\, a_4)}{8}$$

76) wird symmetrisch durch

$$78) \ldots \ldots - \frac{a_1^2\,(a_2 + a_3 + a_4) + a_2^2\,(a_1 + a_3 + a_4) + a_3^2\,(a_1 + a_2 + a_4) + a_4^2\,(a_1 + a_2 + a_3)}{24} = - \frac{T_4\, Q_4 - U_4}{24}$$

77) dagegen durch

$$79) \ldots \ldots - \frac{a_4\,(a_1\, a_2 + a_1\, a_3 + a_2\, a_3) + a_3\,(a_1\, a_2)}{8} = - \tfrac{1}{48} \left(Q_4^3 - 3\, T_4\, Q_4 + 2\, U \right)$$

Alles nach der Theorie der symmetrischen Funktionen. Es muß also nothwendigerweise

$$80) \ldots \quad \mathop{S}\limits_{1}^{P_4} f_4\,(r_h) = - f - \frac{T_4\, Q_4 - U_4}{24} - \frac{Q_4^3 - 3\, T_4\, Q_4 + 2\, U_4}{48}$$

sein was ebenso wie in IV. erschlossen wird; es treten, wie ein Beispiel zeigen wird, keine bestimmten Zahlenwerthe dazu. Durch gehörige Reduction geht 80) über in

$$81) \ldots \quad \mathop{S}\limits_{1}^{P_4} f_4\,(r_h) = \mathop{S}\limits_{1}^{P_4} f_4\,(m_4) = \frac{(P_4 - Q_4 + 1)^3 + (P_4 - Q_4 + 1)\,(P_4 - T_4 - 1)}{48}$$

aus 74) wird

$$82) \ldots \quad G = - \tfrac{1}{6} \left(\frac{Q_5}{2} - m_5 \right)^3 - \frac{T_5\, m_5}{24} + \frac{Q_5^3}{48} - \frac{T_5\, Q_5 - U_5}{24} - \frac{Q_5^3 - 3\, T_5\, Q_5 + 2\, U_5}{48}$$

wenn man den Werth von 80) benutzt und die Ausdrücke 76), 77), 78), 79) nach der Theorie der symmetrischen Functionen zusammen zieht. Eine leichte Reduction ergiebt dann:

$$83) \ldots \quad G = - \tfrac{1}{6} \left(\left(\frac{Q_5}{2} - m_5\right)^3 - \frac{T_5}{4} \left(\frac{Q_5}{2} - m_5\right) \right)$$

wodurch 73) sofort in 70) übergeht.

Um die Formel 81) zu prüfen, kann man die Tabelle c) in IV. benutzen. Es ist dort $P_4 = 60$, $Q_4 = 13$, $T_4 = 51$, nach der Formel also

$$\mathop{S}\limits_{1}^{60} f_4\,(m_4) = f_4\,(1) + f_4\,(2) + \ldots + f_4\,(60) = 5852.$$

Genau diese Summe erhält man, wenn man alle f_4 jener Tabelle addirt.

Wir haben in derselben Weise wie sie bei der Gleichung mit 3, 4, 5 Unbekannten angewandt wurde, auch für die Gleichung mit 6 Unbekannten $\mathop{S}\limits_{1}^{6} a_k\, x_k = A_6$ die Formel berechnet; die Weitläufigkeit der Entwickelung zwingt uns jedoch uns mit der Angabe der Resultate, die wir geprüft haben, zu begnügen.

Ist $A_6 \equiv m_6 \;(mod\; P_6)$ und $A_6 = p_6\, P_6 + m_6$, so hat man

$$f_6\,(A_6) = \frac{P_6^4\, p_6^5}{120} - \frac{P_6^3}{24} \left(\frac{Q_6}{2} - m_6\right) p_6^4 + \frac{P_6^2}{12} \left(\left(\frac{Q_6}{2} - m_6\right)^2 - \frac{T_6}{12} \right) p_6^3 - \frac{P_6}{12} \left(\left(\frac{Q_6}{2} - m_6\right)^3 \right.$$

$$\left. - \frac{T_6}{4} \left(\frac{Q_6}{2} - m_6\right) \right) p_6^2 + \left(\left(\frac{Q_6}{2} - m_6\right)^4 - \frac{T_6}{2} \left(\frac{Q_6}{2} - m_6\right)^2 + \frac{T_6^2}{48} + \frac{V_6}{120} \right) \frac{p_6}{24} + f_6\,(m_6)$$

VI. Die Gleichung mit n Unbekannten.

Wir sind durch die für f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, erhaltenen Resultate vorläufig noch nicht im Stande die Formel für die Gleichung mit n Unbekannten abzuleiten, müssen uns dies vielmehr für einen späteren Abschnitt vorbehalten; wir wollen jedoch die Methode feststellen, wie man diese Formel aufstellen könnte, wenn die entsprechende für eine Gleichung mit $n - 1$ Unbekannten bereits gegeben ist.

Bezeichnet man die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$85) \ldots \ldots \mathop{S}\limits_{1}^{n-1} a_k\, x_k = A_{n-1}$$

durch $f_{n-1}\,(A_{n-1})$, und ist

$$86) \ldots \ldots A_{n-1} \equiv m_{n-1} \;(mod\; P_{n-1})$$

wenn man alle Zahlen in Classen von je $P_{n-1} = a_1 \,.\, a_2 \ldots a_{n-1}$ Zahlen abtheilt, und m_{n-1} eine Zahl der ersten Classe ist, ferner

$$87) \ldots \ldots A_{n-1} = p_{n-1}\; P_{n-1} + m_{n-1}$$

$$88) \ldots \ldots \mathop{S}\limits_{1}^{n-1} a_k = Q_{n-1},\; \mathop{S}\limits_{1}^{n-1} (a_k)^2 = T_{n-1},\; \mathop{S}\limits_{1}^{n-1} (a_k)^3 = U_{n-1},\; \mathop{S}\limits_{1}^{n-1} (a_k)^4 = V_{n-1} \text{ u. s. f.}.$$

dann ist

$$89) \ldots \ldots f_{n-1}\,(A_{n-1}) = F\,(P_{n-1},\, p_{n-1},\, m_{n-1},\, Q_{n-1},\, T_{n-1},\, U_{n-1},\, V_{n-1}, \ldots) + f_{n-1}\,(m_{n-1})$$

wo F Functionszeichen ist; wir setzen diese Funktion als bekannt voraus. Um nun für die Gleichung

$$90) \ldots \ldots \mathop{S}\limits_{1}^{n} a_k\, x_k = A_n$$

den Ausdruck $f_n\,(A_n)$ zu gewinnen, theilen wir alle Zahlen in Classen von $P = a_1 \,.\, a_2 \ldots\ldots a_n$ Gliedern ab und bezeichnen durch m_n eine Zahl der ersten Classe. Es sei

$$91) \ldots \ldots A_n \equiv m_n \;(mod\; P_n)$$

$$92) \ldots \ldots A_n = p_n\; P_n + m_n$$

also analog 71)

$$93) \ldots \ldots f_n\,(A_n) = f_n\,(m_n) + \mathop{S}\limits_{1}^{p_n\, P_{n-1}} f_{n-1}\,(p_n\; P_n + m_n - h a_n)$$

Ist nun

$$94) \ldots \ldots p_n\; P_n + m_n - h a_n \equiv r_h \;(mod\; P_{n-1})$$

wo $r_h \gtreqless P_{n-1}$, so setzen wir in 89) an Stelle von p_{n-1} den Werth $\dfrac{p_n\; P_n + m_n - h a_n - r_h}{P_{n-1}}$, ebendaselbst statt m_{n-1} den Werth r_h und entwickeln den Ausdruck

$$95) \ldots \ldots F\,\left(P_{n-1},\, \frac{p_n\, P_n + m_n - h\, a_n - r\, h}{P_{n-1}},\, r\, h,\, Q_{n-1},\, T_{n-1}, \ldots\right)$$

in Monome; dann sind folgende Operationen auszuführen:

1 Alle Monome, die weder h noch rh enthalten, sind mit der Anzahl der Summanden in 93), $p_n\, P_{n-1}$ zu multipliciren; bezeichnen wir das entstehende Aggregat durch H.

2) Alle Monome, die eine Potenz von h enthalten, bekommen das Zeichen $\mathop{S}\limits_{1}^{p_n\, P_{n-1}}$, wo die Summation sich auf h bezieht; das durch Ausführung der Summationen auftretende Aggregat heiße K.

3) Alle Monome die eine Potenz von $r\, h$ als Faktor haben, werden mit p_n (entsprechend 52) und 71)) multiplicirt und erhalten das Zeichen $\mathop{S}\limits_{1}^{P_{n-1}}$, wo die Summation sich wieder auf h bezieht, da die verschiedenen Größen $r\, h$ mit der Zahlenreihe 1, 2, ... P_{n-1} zusammenfallen. Das Aggregat heiße L.

Hinzutritt, dem Früheren analog $p_n \overset{P_{n-1}}{\underset{1}{S}} f_{n-1}(r_h)$, so daß wir an Stelle von 93) erhalten

$$96) \;\ldots\; f_n(A) = H + K + L + p_n \overset{P_{n-1}}{\underset{1}{S}} f_{n-1}(r_h) + f_n(m_n)$$

Wir bemerken, daß bei der Entwicklung von 95), alle Theilsätze, welche h und $r\,h$ gleichzeitig als Factoren enthalten, sich aufheben müssen, da sich bei der Unbestimmtheit der Art und Weise wie die $r\,h$ nacheinander die Glieder der Zahlenreihe von 1 bis P_{n-1} liefern, eine Summation des Produkts $h.r\,h$ nicht ausführen läßt. Man wird also in jener Entwickelung jeden Theilsatz, der h und $r\,h$ als Factoren einschließen würde, ohne weiteres weglassen.

Entwickelt man 96) nach Potenzen von p_n, so müssen sich die Coefficienten von $p^2{}_n, p^3{}_n, \ldots p_n{}^{n-1}$, welches offenbar nach Analogie II., III., IV., V., die höchste Potenz wird, durch Zuziehung der Gleichung

$$97) \;\ldots\; P_{n-1} = P_n : p_n,\; Q_{n-1} = Q_n - a_n,\; T_{n-1} = T_n - a_n{}^2,\; U_{n-1} = U_n - a_n{}^3 \;\ldots\; \text{u. s. w.}$$

symmetrisch in Beziehung auf die Coefficienten $a_1, a_2 \ldots a_n$ gestalten.

Eine besondere Betrachtung verdient der Coefficient von $p^1{}_n$; er sei $N + \overset{P_{n-1}}{\underset{1}{S}} f_{n-1}(r_h)$. Dann muß diese Summation folgende Theile in sich schließen.

1) sämmtliche mit entgegengesetzten Zeichen gewonnenen Theilsätze in N, welche nur aus $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ bestehen, mit Ausschluß derjenigen, welche m_n oder eine Potenz davon enthalten; es muß aber bei letzteren durch Benutzung der Gleichungen 97) möglich sein Symmetrie hinsichtlich a_1, a_2, a_n herzustellen.

2) solche aus den Coefficienten $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ gebildete Ausdrücke, welche die in N mit a_n oder einer Potenz davon behafteten Theilsätze zu symmetrischen hinsichtlich $a_1, a_2, \ldots a_n$ machen; dabei leistet die Theorie der symmetrischen Funktionen wesentliche Dienste, indem sie die Mittel in die Hand giebt, jene Ausdrücke durch die Summen gleichhoher Potenzen der $a_1\; a_2 \ldots a_{n-1}$ darzustellen. Eben diese Summen werden in 97) benutzt.

3) Unter Umständen bestimmte Zahlen, worüber ein Beispiel entscheidet. Wir werden später eine Gleichung angeben, die zu diesem Zwecke stets sehr leicht benutzt werden kann.

Hat man so $\overset{P_{n-1}}{\underset{1}{S}} f_{n-1}(r_h)$ oder $\overset{P_{n-1}}{\underset{1}{S}} f_{n-1}(m_{n-1})$ gewonnen, so macht die Einführung desselben auch den Coefficienten von $p^1{}_n$ symmetrisch, und man hat die endgiltige Formel für $f_n(A_n)$ hergestellt.

VII. Das Bildungsgesetz der Formeln.

Der bedeutende Aufwand von Rechnungen, den schon die Formel für die Gleichung mit 6 Unbekannten erfordert, macht ein weiteres Vordringen in dieser Weise, um endlich das Bildungsgesetz erschließen zu können, unthunlich. Wir sehen uns deswegen genöthigt im Folgenden fortwährend nach Analogien zu schließen; haben aber die so gewonnenen Resultate vielfachen numerischen Prüfungen unterworfen, wodurch die Richtigkeit derselben stets bestätigt wurde.

Wenn man die für die Gleichung mit 2, 3, 4, 5, 6 Unbekannten entwickelten Formeln betrachtet, so ergeben sich verschiedene Gesetzmäßigkeiten, die wir, mit Weglassung der Indices, kurz andeuten wollen.

1) Es ist p^r stets mit P^{r-1} verknüpft, und in anderer Verbindung kommt P überhaupt nicht vor.

2) Die Größe Q tritt stets nur in der Verbindung $\frac{Q}{2} - m$ auf.

3) Die Coefficienten von p sind stets nach Potenzen von $\frac{Q}{2} - m$ so geordnet, daß die Exponenten dieser Potenzen eine fallende arithmetische Reihe mit der Differenz 2 bilden; gleichzeitig wechseln die Potenzen im Zeichen ab.

4) Der höchste Exponent von p ist immer um 1 kleiner als die Anzahl der Unbekannten.

5) Bei der Formel für eine Gleichung mit 4 Unbekannten tritt die Summe der 2ten Potenz der Coefficienten a, nämlich T, bei der für eine Gleichung mit 6 Unbekannten die Summe der 4ten Potenzen, V, auf. Es fehlen dagegen die Summen der ungeraden Potenzen.

6) In der zuletzt genannten Formel treten T^2 und V nebeneinander auf, beide Polynome vom 4ten Grade. Dies ist einer der wichtigsten Fingerzeige.

7) Es finden beständig Zeichenwechsel bei den Potenzen p statt; nur $f_n(m)$ ist stets positiv.

Es bleibe noch übrig eine Gesetzmäßigkeit für die in den Formeln auftretenden bestimmten Zahlen ausfindig zu machen. Dies gelingt leicht für den größten Theil derselben, wie man an der unten folgenden Zusammenstellung sehen kann. Ehe wir dieselben geben, wollen wir eine bequemere Bezeichnungsweise einführen. Es sei

$$98) \;\ldots\ldots\; \overset{n}{\underset{1}{S}}\, a\,k\,x\,k = A$$

die vorgelegte Gleichung

$$99) \;\ldots\ldots\; a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ldots\ldots a_n = P$$

$$100) \;\ldots\ldots\; A \equiv m \;(mod\; P)$$

wenn die Zahlen in Klassen von P Gliedern abgetheilt sind und m eine Zahl der ersten Klasse ist, ferner

$$101) \;\ldots\ldots\; A_n = p\,P + m$$

$$102) \;\ldots \left\{ \begin{array}{l} \overset{n}{\underset{1}{S}}\; a_k = \underset{1}{S} \\ \underset{2}{S_1} - m = R \end{array} \right.$$

$$103) \;\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \overset{n}{\underset{1}{S}}\,(a_k)^2 = S_2 \\ \overset{n}{\underset{1}{S}}\,(a_k)^4 = S_4 \\ \overset{n}{\underset{1}{S}}\,(a_k)^6 = S_6 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \overset{n}{S}\,(a_k)^{2q} = S_{2q} \end{array} \right.$$

Die in II. V. mitgetheilte Formeln werden dann, wenn man die dortigen Größen Q, T, V durch 102) und 103) ersetzt und ein anderes Arrangement der Divisoren trifft

$$104) \;\ldots \left\{ \begin{array}{l} f_2(A) = \frac{p^1}{1!} + f_2(m) \\ f_3(A) = \frac{P p^2}{2!} - R \,.\, \frac{p^1}{1!} + f_3(m) \\ f_4(A) = \frac{P^2 p^3}{3!} - P \,.\, R \,.\, \frac{p^2}{2!} + \left(\frac{R^2}{2!} - \frac{S_2}{2.2!6}\right) \frac{p^1}{1!} + f_4(m) \\ f_5(A) = \frac{P^3 p^4}{4!} - P^2 \,.\, R \,.\, \frac{p^3}{3!} + P \left(\frac{R^2}{2!} - \frac{S_2}{2.2!6}\right) \frac{p^2}{2!} - \left(\frac{R^3}{3!} - R \,.\, \frac{S_2}{2.2!6}\right) \frac{p^1}{1!} + f_5(m) \\ f_6(A) = \frac{P^4 p^5}{5!} - P^3 R \,.\, \frac{p^4}{4!} + P^2 \left(\frac{R^2}{2!} - \frac{S_2}{2.2!6}\right) \frac{p^3}{3!} - P \left(\frac{R^3}{3!} - R \,.\, \frac{S_2}{2.2!6}\right) \frac{p^2}{2!} + \\ \qquad\qquad + \left(\frac{R^4}{4!} - \frac{R^2}{2!} \,.\, \frac{S_2}{2.2!6} + \frac{\left(\frac{S_2}{2.2!6}\right)^2}{2!} + \frac{S_4}{4.4!30}\right) \frac{p^1}{1!} + f_6(m) \end{array} \right.$$

Daraus geht Folgendes hervor:

1) Jede Potenz von p erhält die Facultät ihres Exponenten als Divisor

2) Die Größe S_2 und S_4 sind von constanten Divisoren begleitet.

3) Die Potenzen von R und den mit diesen Divisoren versehenen Größen S werden durch die Facultät ihres Potenzexponenten dividirt.

4) Die Coefficienten von p^r sind homogene Ausdücke vom Grade $n - r - 1$, wenn man vom Factor P absieht und R als homogen vom ersten Grade rechnet.

Man sieht ferner daß der Uebergang von f_2 auf f_3, und von f_4 auf f_5 sehr leicht ist, daß überhaupt zum Weitergeben immer nur die Kenntniß des Coefficienten von p_1 in der Formel des nächsten geraden n erforderlich ist. So hätte man, nm $f_8(A)$ zu ermitteln, nur $y \,.\, \frac{p_1}{1!}$ zu bestimmen, wenn y den Coefficienten bezeichnet; dieses y muß nun der Analogie nach heißen:

$$105) \ldots\ldots \frac{R^6}{6!} - \frac{R^4}{4!} \cdot \frac{S_2}{2.2!6} + \frac{R_2}{2!}\left(\frac{\left(\frac{S_2}{2.2!6}\right)^2}{2!} + \frac{S_4}{4.4!30}\right) - \left(\frac{\left(\frac{S_2}{2.2!6}\right)^2}{3!} + \frac{S_2}{2.2!6} \cdot \frac{S_4}{4.4!30} + \frac{S_6}{z}\right)$$

da der Theilsatz ohne R vom 6ten Grade sein muß. Es käme also nur darauf an den Divisor z zu bestimmen Wir benutzen dazu folgendes Mittel:

Werden alle Coefficienten a gleich 1, so müssen die in II. und V. aufgestellten Formeln richtig bleiben, obschon sie ursprünglich für die Voraussetzung aufgestellt sind daß a untereinander relativ prim sein müssen, was jede Gleichheit derselben an und für sich ausschließt. Die Formeln liefern dann für

$$106) \ldots \begin{cases} x_1 + x_2 = q & f_2(q) = q - 1 \quad \text{oder } f_2(q) = p \\ x_1 + x_2 + x_3 = q & f_3(q) = \frac{(q-1)(q-2)}{2!} \quad f_3(q) = \frac{p(p-1)}{2!} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = q & f_4(q) = \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{3!}; \ f_4(q) = \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} \end{cases}$$

u. s. w.

Da allgemein $P = 1$, $m = 1$, $p = q - 1$ wird.

$$107) \ldots\ldots \text{Für die Gleichung } \overset{n}{\underset{1}{S}} x_k = q$$

müßte man analog haben

$$108) \ldots f_n(q) = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+2)}{(n-1)!}$$

Entwickelt man dies nach Potenzen von p, so erhält p^1, wenn n gerade vorausgesetzt wird, den Coefficienten $\frac{(n-2)!}{(n-1)!}$ oder $\frac{1}{n-1}$.

Für das eben gewählte Beispiel ist $n = 8$, man hätte also den Ausdruck 105) dem in der aufzustellenden Formel, offenbar das Zeichen $+$ ertheilt werden wird, gleich $\frac{1}{7}$ zu setzen, und zu bemerken, daß

$$110) \ldots R = \frac{S_1}{2} - m = \tfrac{8}{2} - 1 = 3,\ S_2 = S_4 = S_6 = 8 \text{ ist; da } \overset{8}{\underset{1}{S}} x_k = q \text{ untersucht wird.}$$

Die Auflösung der entstehenden Gleichung

$$111) \ldots z = 181440 = 6.6!42$$

Wir haben dieselbe Rechnung für die Coefficienten von S_8 und S_{10} durchgeführt, wo die betreffenden Ausdrücke, die dem Ausdrucke 105) entsprechen, gleich $\frac{1}{9}$ und $\frac{1}{11}$ zu setzen sind; es findet sich das Resultat

$$112) \ldots \frac{S_8}{8.8!30} \text{ und } \frac{5\,S_{10}}{10.10!66}$$

Stellen wir die bis jetzt ermittelten Größen S zusammen:

$$113) \ldots \frac{S_2}{2.2!6},\ \frac{S_4}{4.4!30},\ \frac{S_6}{6.6!42},\ \frac{S_8}{8.8!30},\ \frac{5\,S_{10}}{10.10!66}$$

so erkennt man in den Factoren $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66}$ die Bernouilli'schen Zahlen. Ihr Auftreten erklärt sich einfach dadurch, daß bei der Art und Weise, wie die Formeln gewonnen werden, Summationen von Potenzen der natürlichen Zahlenreihe ($r\,h$) vorkommen, Operationen, bei denen die Bernouilli'schen Zahlen eine Hauptrolle spelen. Behalten wir die gewöhnlichen Bezeichnungen derselben durch B_1, B_3, $B_5 \ldots$, bei, so haben wir

$$114) \ldots \frac{S_2 B_1}{2.2!},\ \frac{S_4 . B_3}{4.4!},\ \frac{S_6 . S_5}{6.6!},\ \ldots \frac{S_{2r} . B_{2r-1}}{2r.(2r)!}$$

Wir haben für S_{12} eine Prüfung angestellt, und ein richtiges Resultat erhalten.

Wir wollen zur Abkürzung setzen

$$115) \ldots \frac{S_{2r} . B_{2r-1}}{2r.(2r)!} = C_{2r}$$

und gehen zu der Art nnd Weise über, wie die Größen C die einzelnen Coefficienten der Potenzen von R zusammensetzen, wobei wir bemerken, daß wir die Formel bis zur Gleichung mit 10 Unbekannten aufgestellt und wiederholt geprüft haben. Als sehr empfehlungswerth zu solchen Prüfungen nennen wir Gleichungen von der Form $\overset{n-1}{\underset{1}{S}} x_k + a_n x_n = a_n + 1$, wo immer, wenn $n > 2$, $f_n(a_n + 1) = o$ ist.

Wir wollen jene Coefficienten mit D bezeichnen und ihnen den Namen Diophantische Summen beilegen, zu Ehren des Mannes, der zuerst unbestimmte Gleichungen behandelte, vorausgesetzt, daß dieselben nicht schon in einem

andern Zweige der Wissenschaft Verwendung gefunden haben, was unseres Wissens noch nicht geschehen ist. Die Größen D sind homogene Funktionen, von geradem Grade; da nun die sie bildenden Größen C nur die Summen gerader Potenzen der Coefficienten a enthalten, so ergiebt sich zur Bildung der D folgende Regel:

Man stellt alle Combinationen der geraden Zahlen zur Summe $2s$ auf; D_{2s} besteht dann aus so viel einzelnen Theilsätzen, als derartige Combinationen möglich sind; die geraden Zahlen, welche in einen Complexion vorkommen, macht man zu Indices der C, faßt das Ganze als Product auf, zieht gleiche Factoren zu Potenzen zusammen und giebt jeder Potenz die Facultät ihres Exponenten zum Divisor. Hätte man z. B.

$$116) \ldots 2\alpha + 4\beta + 6\gamma + 8\delta + \ldots = 2s$$

als eine der Combinationen, dann wird das A entsprechende Glied der diophantischen Summe D_{2s} gleich

$$117) \ldots\ldots \frac{C_2^{\alpha}}{\alpha!} . \frac{C_4^{\beta}}{\beta!} . \frac{C_6^{\gamma}}{\gamma!} . \frac{C_8^{\delta}}{\delta!} \ldots$$

Wir lassen eine Anzahl diophantischer Summen hier folgen:

$$118) \begin{cases} D_2 = C_2 \\ D_4 = \frac{C_2^2}{2!} + C_4 \\ D_6 = \frac{C_2^3}{3!} + C_2 . C_4 + C_6 \\ D_8 = \frac{C_2^4}{4!} + \frac{C_2^2}{2!} C_4 + C_2 . C_6 + \frac{C_4^2}{2!} + C_8 \\ D_{10} = \frac{C_2^5}{5!} + \frac{C_2^3}{3!} C_4 + \frac{C_2^2}{2!} . C_6 + C_2 . C_8 + C_2 . \frac{C_4^2}{2!} + C_4 . C_6 + C_{10}. \\ D_{12} = \frac{C_2^6}{6!} + \frac{C_2^4}{4!} . C_4 + \frac{C_2^3}{3!} . C_6 + \frac{C_2^2}{2!} . C_8 + \frac{C_2^2}{2!} . \frac{C_4^2}{2!} + C_2 . C_{10} + C_2 . C_4 . C_6 + \frac{C_4^3}{3!} + C_4 . C_8 + \frac{C_6^2}{2!} + C_{12} \end{cases}$$

Aus dem System 104) und den früher gemachten Bemerkungen schließen wir nun, daß die Theilsätze, aus denen $f_n(A)$ besteht, folgende Gestalt haben:

$$119) \ldots (-1)^r P^{n-r-2} \frac{p^{n-r-1}}{(n-r-1)!}\left(\frac{R^r}{r!} - \frac{R^{r-2}}{(r-2)!} D_2 + \frac{R^{r-4}}{(r-4)!} D_4 - \frac{R^{r-6}}{(r-6)!} D_6 + \ldots\right)$$

Dieser Ausdruck läßt sich darstellen durch

$$120) \ldots (-1)^r P^{n-r-2} \frac{p^{n-r-1}}{(n-r-1)!} \mathop{\mathbf{S}}_{q=o}^{q=\varepsilon\left(\frac{r}{2}\right)} (-1)^q \frac{R^{r-2q}}{(r-2q)!} D_{2q}$$

wenn man D_o und $o!$ gleich 1 setzt. Für $f_n(A)$ erhält man dann

$$121) \ldots f_n(A) = f_n(m) + \mathop{\mathbf{S}}_{r=o}^{r=n-2} (-1)^r P^{n-r-2} \frac{p^{n-r-1}}{(n-r-1)!} \mathop{\mathbf{S}}_{q=o}^{q=\varepsilon\left(\frac{r}{2}\right)} (-1)^q \frac{R^{r-2q}}{(r-2q)!} D_{2q}$$

wodurch die Formel für die Anzahl der Lösungen der Gleichung $\overset{n}{\underset{1}{S}} a_k x_k = A$ geliefert ist, wobei wir nicht umhin können zu wiederholen, daß sie nur gilt, wenn der größte gemeinschaftliche Theiler zwischen je 2 der Coefficienten a immer nur 1 ist. Die Formel 121) zeigt, daß für Werthe von A, welche eine arithmeiische Reihe erster Ordnung mit der Differenz P bilden, die zugehörigen f eine arithmetischen Reihe $n - 1$ter Ordnung mit der $n - 1$ten Differenz P^{n-2} bilden.

Wir verzichten auf die Wiedergabe der Formel für 7, 8, 9 ... Unbekannte, da in den Gleichungen 118) und 121) das Material zum Aufbau derselben bis zu einer Gleichung mit 15 Unbekannten vollständig gegeben ist

VIII. Schluß.

Wir wollen schließlich die eigenthümlichen Ausdrücke, die wir in II—V. für die Größen $\overset{P}{\underset{1}{S}} f(m)$ fanden, noch etwas verfolgen. Es ergab sich dort, wenn wir die Indices weglassen, und statt der Größen Q, T, die in VII. benutzten s_1 s_2 einführen:

$$122) \ldots . \overset{P}{\underset{1}{S}} f_2(m) = \frac{P - S_1 + 1}{2}$$

$$\overset{P}{\underset{1}{S}} f_3(m) = \frac{3(P - S_1 + 1)^2 + (P^2 - S_2 - 1)}{24}$$

$$\overset{P}{\underset{1}{S}} f_4(m) = \frac{(P - S_1 + 1)^3 + (P - S_1 + 1)(P^2 - S_2 - 1)}{48}$$

Diese Formeln zeigen in ihrem Aufbau, namentlich bei der Schreibweise, in der wir sie unten wiedergeben werden, solche Analogien mit den Coefficienten von p in 104), daß wir ohne Weiteres zur Construction von $\overset{P}{\underset{1}{S}} f_5(m)$, $\overset{P}{\underset{1}{S}} f_6(m)$ u. s. w. gingen. Die Resultate, die wir sorgfältig geprüft haben, sind folgende.

$$123)\begin{cases} \overset{P}{\underset{1}{S}} f_2(m) = \left(\frac{P - S_1 + 1}{2}\right) \\ \overset{P}{\underset{1}{S}} f_3(m) = \frac{\left(\frac{P - S_1 + 1}{2}\right)^2}{2!} - \frac{S_2 - P^2 + 1}{2.2!\,6} \\ \overset{P}{\underset{1}{S}} f_4(m) = \frac{1}{3!}\left(\frac{P - S_1 + 1}{2}\right)^3 - \left(\frac{P - S_1 + 1}{2}\right) . \frac{S_2 - P^2 + 1}{2.2!\,6} \\ \overset{P}{\underset{1}{S}} f_5(m) = \frac{\left(\frac{P - S_1 + 1}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{P - S_1 + 1}{2}\right)^2}{2!} . \frac{S_2 - P^2 + 1}{2.2!\,6} + \frac{\left(\frac{S_2 - P^2 + 1}{2.2!\,6}\right)^2}{2!} + \frac{S_4 - P^4 + 1}{4.4!\,30} \\ \overset{P}{\underset{1}{S}} f_6(m) = \frac{\left(\frac{P - S_1 + 1}{2}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{P - S_1 + 1}{2}\right)^3}{3!} . \frac{S_2 - P^2 + 1}{2.2!\,6} + \left(\frac{P - S_1 + 1}{2}\right) \left(\frac{\left(\frac{S_2 - P^2 + 1}{2\,2!\,6}\right)^2}{2!} \right. \\ \left. + \frac{S_4 - P^4 + 1}{4.4!\,30}\right) \end{cases}$$

u. s. w. Wir haben die numerischen Prüfungen bis $\overset{P}{S} f_8(m)$ ausgedehnt, indem wir Gleichungen von der in VII. angegebenen Art benutzten. Die Analogie der Größen $\frac{P - S_1 + 1}{2}$; $S_2 - P^2 + 1$, $S_4 - P^4 + 1, \ldots$ mit R, S_2 $S_4 \ldots$ in 104) und 105) ist augenscheinlich. Wir setzen daher

$$124) \ldots . \frac{P - S_1 + 1}{2} = H$$

$$125) \ldots . \frac{(S_{2q} - P^{2q} + 1)\, B_{2q-1}}{2_q . (2_q)!} = J_{2q}$$

analog 115). Es wird dann z. B.

$$\overset{P}{\underset{1}{S}} f_r(m) = \frac{H^6}{6!} - \frac{H_4}{4!} J_2 + H^2 \left(\frac{J_2^2}{2!} + J_4\right) - \left(\frac{J_2^3}{3!} + J_2 J_4 + J_6\right)$$

Dem System 118) entsprechend setzen wir

$$126) \ldots . \begin{cases} G_2 = J_2 \\ G_4 = \frac{J_2^2}{2!} + J_4 \\ G_6 = \frac{J_2^3}{3!} + J_2 J_4 + J_6 \\ G_8 = \frac{J_2^4}{4!} + \frac{J_2^2 J_4}{2!} + J_2 . J_6 + \frac{J_4^2}{2!} + J_8 \end{cases}$$

u. s. w. Den Größen G legen wir den Namen Diophantische Functionen bei.

Es ergiebt sich dann, dem Ausdruck 120) entsprechend für die Gleichung $\overset{n}{\underset{1}{S}} a_k x_k = m$

$$127) \ldots . f_n(1) + f_n(2) + \ldots . f_n(P) = \overset{P}{\underset{1}{S}} f_n(m) = \overset{q = \varepsilon\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\underset{q = o}{S}} (-1)^q \frac{H^{n-1-2q}}{(n-1-2q)!} G_{2q}$$

wenn $G_o = 1$ gedacht wird.

Wir schließen mit folgender Bemerkung über die Ganzzahligkeit des Ausdrucks 127)

Es sei $\qquad 128) \ldots . n = 2u + 1$

und n eine Primzahl; der Ausdruck 127) verwandelt sich dann in

$$129) \ldots . \overset{P}{\underset{1}{S}} f_{2u+1}(m) = \overset{q = u}{\underset{q = o}{S}} (-1)^q \frac{H^{2u - 2q}}{(2u - 2q)!} G_{2q}$$

Das erste Glied der entwickelten Formel erhält den Nenner $(2u)!$ alle übrigen Divisoren sind niedrigere, Facultäten. Schließlich tritt das Glied $\pm G_{2u}$ auf. Betrachtet man das System 126), so sieht man, daß G_{2u} aus einer Reihe von Theilsätzen J besteht, in denen als höchster Divisor $u!$ vorkommt, während diese Reihe mit J_{2u} abschließt. Nach 125) ist

$$130) \ldots . J_{2u} = \frac{(S_{2u} - P^{2u} + 1)\, B_{2u-1}}{2u . (2u)!}$$

Die Formeln für die Bernouillischen Zahlen (vergl. Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis, 1862 pag. 211) zeigen nun, daß im Nenner von B_{2u-1} der Factor $2^{2u} - 1$ auftritt. Ist aber $2u + 1 = n$ eine Primzahl, so ist nach dem Fermat'schen Satze

$$131) \ldots . . 2^{2u} - 1 \equiv o \ (mod\ 2u + 1)$$

Es erscheint folglich im Nenner von J_{2u} für diesen Fall der Factor $2u + 1$. Da nun unter allen andern Theilsätzen von 129) kein einziger im Nenner einen Factor $\overline{\gtrless}\ 2u + 1$ hat, so ist die Ganzzahligkeit von $\overset{P}{\underset{1}{S}} f_{2u+1}$ nur möglich, wenn in 130)

$$132) \ldots . S_{2u} - P^{2u} + 1 \equiv 0 \ (mod\ 2u + 1)$$

ist, wobei wir in Erinnerung bringen, daß

$$133) \ldots . \begin{cases} S_{2u} = \overset{2u+1}{\underset{1}{S}} (a)^{2u} \\ P = a_1 . a_2 . a_3 \ldots . a_{2u+1} \end{cases}$$

sein muß.

Mit Hilfe des Fermatschen Satzes ist die Richtigkeit jener Congruenz leicht zu erweisen.

Es ist $\qquad 134) \ldots . a_k^{2u} \equiv 1 \ (mod\ 2u + 1)$

mit alleiniger Ausnahme des Falles, wo a_k durch $2u + 1$ theilbar ist; offenbar kann dies höchstens bei einem der Coefficienten a vorkommen; schließen wir diesen Fall einstweilen aus, so ist

$$135) \ldots . . \overset{2u+1}{\underset{1}{S}} (a_k)^{2u} \equiv 2u + 1 \equiv o \ (mod\ (2u + 1)$$

ferner $\qquad 136) \ldots . P^{2u} \equiv 1 \ (mod\ (2u + 1))$

also $\qquad 137) \ldots . S_{2u} - P^{2u} + 1 \equiv o \ (mod\ 2u + 1)$

Ist einer der Coefficienten a durch $2u + 1$ theilbar, so wird

$$138) \ldots . S_{2u} \equiv 2u \ (mod\ 2u + 1)$$

$$139) \ldots . P^{2u} \equiv 0 \ (mod\ 2u + 1)$$

also wiederum $\qquad 140) \ldots . S_{2u} - P^{2u} + 1 \equiv 2u + 1 \equiv o \ (mod\ 2u + 1).$

Corrigenda.

Seite 10 Zeile 10 v. o. nach: „D bedeutet Determinante gebildet aus . . . . . . in der Ordnung wie sie da stehn die Determinante bilden“ ist einzuschieben.

Alle diese mit D bezeichneten Determinanten sind zusammengefaßt in der Determinante n^{ten} Grades

$$\begin{vmatrix} 1, & a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots & a_{1,n-1} \\ 1, & a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots & a_{2,n-1} \\ 1, & a_{3,1}, & a_{3,2}, & \ldots & a_{3,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

welche nach den Elementen der ersten Colonne entwickelt n Theilsätze liefert, die, abgesehen vom Zeichen, mit obigen Determinanten übereinstimmen.

Seite 11 Zeile 11 v. u. unmittelbar vor: „Als Beispiel diene wieder die Gleichung: $70\,x +$ u. s. w.“ ist einzuschieben:

Eine andere Abtheilung der Gleichung 18) ist folgende:

Die Resultante aller Gleichungen 6) müßte, wenn die t nun die Unbekannten vorstellten, die Urgleichung 1) sein, da die t verschwinden müssen, und für die x im Zusammenhange nur eine Gleichung, nämlich 1), existirt.

Dies giebt:

$$18)^a \ldots \begin{vmatrix} x_1, & a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots & a_{1,n-1} \\ x_2, & a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots & a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n, & a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_1, & a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots & a_{1,n-1} \\ M_2, & a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots & a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M_n, & a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

Wird die früher durch $D\,(p+1,\ p+2, \ldots n,\ 1,\ 2, \ldots p-1)$ bezeichnete Determinante nur kurz durch μ_p dargestellt, so geht 18)^a über in

$$18)^b \ldots \mathop{S}_{p=1}^{p=n} (-1)^{(n-1\,(p+1)} x_p\,\mu_p = \mathop{S}_{p=1}^{p=n} (-1)^{(n-1)\,(p+1)} M_p\,\mu_p$$

Es muß folglich nach 1)

$$18)^c \ldots (-1)^{(n-1)\,(n+1)}\,\mu_p = K.A_p$$

sein, wodurch auch die rechte Seite nach 5) in 18)^b in $K\,A$ übergeht.

Es läßt sich leicht zeigen, daß der in 18)^c gefundene Ausdruck für μ_p oder $D\,(p+1,\ p+2 \ldots n,\ 1,\ 2, \ldots p-1)$ mit dem in 18) gegebenen übereinstimmt.

Seite 12 Zeile 10 v. u. Vor: „Man erhält für die Gleichung $70\,x_1 + \ldots$ u. s. w.“ ist einzuschieben:

Je nach der Auswahl jener $n-1$ Gleichungen kann man übrigens engere und weitere Grenzen erhalten; bei einer wirklichen Ausrechnung müßte man alle möglichen Auswahlen treffen und die weitesten Gränzen, die sich ergeben, annehmen.

Man erhält z. B. für die in III. benutzte Form der Gleichung $70\,x_1 + 42\,x_2 + 30\,x_3 + 105\,x_4 = 8009$ als weiteste Gränzen:

$$t_1 \begin{matrix} > -4 \\ < \ \ 14 \end{matrix} \qquad t_2 \begin{matrix} > -1 \\ < \ \ 13 \end{matrix} \qquad t_3 \begin{matrix} > -7 \\ < \ \ 43 \end{matrix}$$

Thesen.

1) Eine krumme Linie hat keine Länge.
2) In jedem geradlinigen Dreieck ist die Summe zweier Seiten gleich der dritten.
3) Es ist unmöglich die Anzahl der Auflösungen einer unbestimmten Gleichung vom ersten Grade nur durch Absolutglied und Coefficienten der Unbekannten darzustellen.
4) Die Sonne ist ein Planet.
5) Jede gerade Linie läuft bei hinreichender Verlängerung in sich selbst zurück.
6) Es existirt ein Gesetz der großen Zahlen.

Druckfehler.

Seite 5 Zeile 16 von unten l. „möge“ statt „mögen“.
„ 5 „ 15 „ „ l. „bejahende“ statt „bezeichnete“.
„ 7 „ 6 v. o. l. „positiv“ statt „possitiv“
„ 7 Gleichung 2) l. „: A_1“ statt „: A_2“
S. 8 Z. 2 v. u. l. „der Gleichung“ statt „und die Gleichung“.
S. 11 fehlt unten: „Also ist $K = -34$.
S. 12 Z. 3 nach Gleichnng 22) l. „im zweiten Fall“ statt „einen zweiten Fall“.
S. 12 Zeile 8 von unten: „$t_1 \begin{smallmatrix} > -4 \\ < \ 14 \end{smallmatrix}$ $\quad t_2 \begin{smallmatrix} > -1 \\ < \ 13 \end{smallmatrix}$ $\quad t_3 \begin{smallmatrix} > -7 \\ < \ 43 \end{smallmatrix}$
S. 13 Z. 2 von oben l. „$n-1$ ersten Gleichungen“ statt „$n-1$ Gleichungen“.
S. 17 Z. 1 von VII. l. „charakterisirt“ statt „charaktresirt“.
S. 17 Gleichung 63) l. „$\overset{n}{\underset{1}{S}}$“ statt „$\overset{n}{S}_1$“
S. 20 Z. 2 von oben l. „wann“ statt „wenn“.
S. 21. Z. 6 nach Gleichung 79) l. „$D(K_{p,q} : K)$“ statt „D (K)“
S. 25 Z. 6 von oben bis „im Folgenden“ statt „in Folgenden“.
S. 25 Z. 16 von oben muß „(untersuchen)“ wegfallen.
S. 27. Z. 2 nach Gleichung 21) l. „Verwendung“ statt „Verwandlung“.
S. 27 Z. 7 nach Gleichung 21) l. „α_2“ statt „x_2“
S. 30 muß es in Gleichung 2) des Systems 40) heißen: „$- \alpha_3^2 \overset{P_2}{\underset{P_2+1}{S}} {}^2 h$“ statt „$- \alpha_3^2 \overset{P_2}{S} {}^2 h$“
S. 30 muß es in der letzten Gleichung des Systems 40) heißen: „$- \overset{P_2}{\underset{1}{S}} r_h$“ statt „$- \overset{P_2}{\underset{1}{S}} \frac{\gamma}{1}$“
S. 30 muß es in Gleichung 41) heißen: „$- p_3 \overset{P_2}{\underset{1}{S}} r_h$“ statt „$- p_3 \overset{P_2}{\underset{1}{S}} z h$“
S. 32 Zeile 2 nach Gleichung 55) l. „für“ statt „hier“.
S. 33 Zeile 1 von oben lies „$\overset{P_3}{\underset{1}{S}} f_3 (r_h)$“ statt „$\overset{P_3}{S} f_3 (rh)$“
S. 33 Zeile 6 von oben lies „Summation“ statt „Symmetrie“.
S. 33 Z. 1 nach Gleichung 63) lies „das“ statt „dies“.
S. 33 Zeile 3 von unten lies „für statt „hier“.
S. 36 Zeile 1 nach Gleichung 75) lies „g“ statt „ϑ“
S. 37 ist mehrfach statt $r h$ zu lesen r_h z. B. in Gleichung 95), in der 2ten Zeile nachher, in der dritten Zeile von unten, ebenso Seite 38, Zeile 3, 4, 5, 6.
Seite 39, in Gleichung 98) lies „$\overset{n}{\underset{1}{S}} a_k \, x_h = A$“ statt „$\overset{n}{\underset{1}{S}} a \, k \, x \, k = A$“
S. 40 Gleichung 110) lies $\overset{8}{\underset{1}{S}} x_k$ statt $\overset{8}{\underset{1}{S}}{}_8 \, x_k$
In der folgenden Zeile, fehlt „ergiebt“.
S. 41 in 117) l. „$\frac{C_2^{\alpha}}{\alpha!} \cdot \frac{C_4^{\beta}}{\beta!} \cdot \frac{C_6^{\gamma}}{\gamma!} \ldots$ statt $\frac{\overset{\alpha}{C}_2}{\alpha!} \cdot \frac{\overset{\beta}{C}_4}{\beta!} \cdot \frac{\overset{\gamma}{C}_6}{\gamma!} \ldots$
S. 41 in Gleichung 120) und 121) lies „$E(\frac{r}{2})$“ statt „$\varepsilon(\frac{r}{2})$“
S. 42, in Gleichung 125) lies „$f_r\,(m)$“ statt „$f^r\,(m)$“
S. 42 in Gleichung 127) lies „$E\left(\frac{n-1}{2}\right)$“ statt „$\varepsilon\left(\frac{n-1}{2}\right)$“
S. 44, in Gleichung 18) lies „$(p+1)$“ statt „$(n+1)$“