ТАРТУСКИЙ ГОС.
УНИВЕРСИТЕТ

ЗАОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

5

ТАРТУ 1966

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 3 НА ТЕМУ "АБСОЛЮТНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА"

Тарту 1966

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

На русском языке

Составил Е. Габович

Ответственный редактор Х.Тэрнпу
Корректор Ю.Сарв

Ротапринт ТГУ 1966. Печ.листов 1,25 (условных 1,14).
Учетн.издат.листов 0,98. Тираж 400 экз.
Бумага 30x42. 1/4. Сдано в печать 9/VI 1966 г.
МВ-05387. Заказ № 281.

Цена 3 коп.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3.

I. Решить уравнения:

1^0. $|2x+1| - |3-x| = |x-4|$;

2^0. $||x+1| - 2| = 1$;

3^0. $||3-2x| - 1| = 2|x| - 4$.

2. Построить графики следующих функций:

1^0. $y = |2x+1| - |3-x| - |x-4|$;

2^0. $y = ||x+1| - 2| - 1$;

3^0. $y = ||3-2x| - 1| -2|x|$.

3. На плоскости дана точка (x_0, y_0). Где располагаются точки (x, y), для которых $|x-x_0| = 1$ и $|y-y_0| \geqslant 2$?

4. Решить неравенство

$$|3 - |x-2|| \leqslant |x-7|.$$

5. Где на плоскости располагаются точки (X, y), для которых

1^0. $|x| + x = |y| + y$;

2^0. $\dfrac{x}{|x|} = \dfrac{y}{|y|}$

6. Доказать, что $\sqrt{x^2} = |x|$.

7. Решить уравнения:

1^0. $|x^2-4| - |9-x^2| = 5$;

2^0. $|x^2+2x| - |2-x| = x^2-x$.

8. Построить графики следующих функций:

1^0. $x = |2-y|\,|y+3|$;

2^0. $|y| = 9 - x^2 + |x-3|$;

3^0. $y = 2^{|x-1|}$.

9. У каждого человека имеется мать и отец, две бабушки и два

дедушки, четыре прабабушки и четыре прадедушки и т.д. Предполагается, что в течение одного века рождаются 4 новых поколения. Сколько людей было на Земле 200 лет назад, если теперь их $3 \cdot 10^9$? Сколько их было 2000 лет назад?

10. Двое играют в следующую игру. Сперва первый игрок называет какое-нибудь из чисел 2, 1, -1, -2, -3, -4, -5 или -6. Затем его партнер прибавляет к этому числу еще какое-нибудь из этих чисел. После этого первый игрок вновь выбирает какое-нибудь число и прибавляет его к полученной ранее сумме и т.д. При этом нужно выбирать все время числа или только положительные, или только отрицательные (какие именно числа выбирать - решает каждый из игроков сам, извещая о выборе своим первым ходом). Победителем считается тот, кто первым назовет число, равное по абсолютной величине 50-ти. Например, если оба игрока выбрали на первом ходу отрицательные числа, игра может развиваться так

I игрок	- 6	-16	-22	-29	-35	-40	-45	
II игрок	-12	-21	-28	-33	-36	-43	-50	победа

Существует ли в этой игре стратегия, придерживаясь которой можно всегда победить? Кто победит при такой стратегии - игрок, делающий первый ход, или его партнер? Приведите свои рассуждения.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 3 НА ТЕМУ
"АБСОЛЮТНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА"

Задача I.

I^0. При решении этого уравнения нужно рассмотреть на числовой оси четыре числовых области:

$$\left(-\infty,\ -\frac{I}{2}\right],\ \left[-\frac{I}{2},\ 3\right],\ [3,\ 4]\ \text{ и }\ [4,\ +\infty).$$

В каждой из этих областей нужно определить, какой вид имеет уравнение.

Если $x \leqslant -\frac{I}{2}$, то $|2x + I| = -2x - I$, $|3 - x| = 3 - x$ и $|x - 4| = -x + 4$. Поэтому наше уравнение будет иметь вид

$$-2x - I - 3 + x = -x + 4 \quad \text{или} \quad -4 = 4.$$

Ясно, что ни при каком значении x это равенство не выполняется, так что при $x \leqslant -\frac{I}{2}$ уравнение решений не имеет.

Если $-\frac{I}{2} \leqslant x \leqslant 3$, то уравнение имеет вид

$$2x + I - 3 + x = -x + 4 \quad \text{или} \quad 4x = 6.$$

Отсюда $x = \frac{3}{2}$, что ввиду $-\frac{I}{2} < \frac{3}{2} < 3$ дает одно из решений уравнения.

Если $3 \leqslant x \leqslant 4$, то будем иметь дело с уравнением

$$2x + I + 3 - x = -x + 4 \quad \text{или} \quad 2x = 0.$$

Отсюда $x = 0$, что, однако, не дает нам решения исходного уравнения ввиду $0 < 3$.

Если, наконец, $x \geqslant 4$, то уравнение вновь сводится к равенству $4 = -4$, так что и в этом случае новых решений уравнения получить невозможно.

Итак, уравнение имеет одно единственное решение $x = \frac{3}{2}$.

2^0. В тексте контрольной работы эта задача напечатана неправильно – потеряны знаки абсолютной величины, в результате чего задача стала тривиальной: из

$$|x + 1| - 2 = 1 \quad \text{или} \quad |x + 1| = 3$$

сразу следует, что $x = 2$ или $x = -4$. Правильное условие задачи следующее:

$$||x + 1| - 2| = 1$$

Приведем ее решение.

При $x \geqslant -1$ наше уравнение превратится в уравнение

$$|x - 1| = 1,$$

решениями которого являются $x = 2$ и $x = 0$. Поскольку оба эти значения больше -1, то они являются и решениями исходного уравнения.

Если же $x \leqslant -1$, то уравнение примет вид

$$|-x - 1 - 2| = 1 \quad \text{или} \quad |x + 3| = 1.$$

Отсюда $x = -2$ или $x = -4$, что опять-таки не противоречит условию $x \leqslant -1$.

Итак, уравнение имеет четыре решения:

$$x = -4, \quad x = -2, \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = 2.$$

3^0. Выделим концы тех промежутков на числовой оси, в которых уравнение принимает различный вид. Два таких числа находятся непосредственно – это $x = 0$ и $x = \frac{3}{2}$. Два других найдем, если рассмотрим какой вид имеет выражение, стоящее в левой части уравнения по разные стороны от точки $x = \frac{3}{2}$.

Если $x \leqslant \frac{3}{2}$, то $||3 - 2x| - 1| = |3 - 2x - 1| = |2 - 2x|$,

а если $x \geqslant \frac{3}{2}$, то $||3 - 2x| - I| = |2x - 3 - I| = |2x - 4|$.
Поэтому другими двумя точками являются $x = I$ и $x = 2$. А теперь остается определить только вид уравнения в каждой из следующих числовых областей $(-\infty, 0]$, $[0, I]$, $[I, \frac{3}{2}]$, $[\frac{3}{2}, 2]$ и $[2, +\infty)$, что и сделано в приводимой ниже таблице, в которой уже найдены и решения рассматриваемого уравнения.

Таблица I

Числовая область	Вид уравнения в этой области	Решения
$(-\infty, 0]$	$\|2-2x\| = -2x-4$ или $2-2x = -2x-4$	отсутствуют
$[0, I]$	$\|2-2x\| = 2x-4$ или $2-2x = 2x-4$	"
$[I, \frac{3}{2}]$	$\|2-2x\| = 2x-4$ или $2x-2 = 2x-4$	"
$[\frac{3}{2}, 2]$	$\|2x-4\| = 2x-4$ или $4-2x = 2x-4$	$x = 2$
$[2, +\infty)$	$\|2x-4\| = 2x-4$ или $2x-4 = 2x-4$	$[2, +\infty)$

Итак, уравнению удовлетворяют все $x \geqslant 2$.

Задача 2.

Анализ, проведенный при решении предыдущей задачи значительно облегчает построение искомых графиков. Применив эти рассмотрения к данным функциям, мы удостоверимся, что они имеют в разных числовых областях вид, указанный в следующей таблице.

Таблица 2

Функция	Числовая область	Вид функции в этой области
	$(-\infty, -\frac{I}{2}]$	$y= -8$
	$[-\frac{I}{2}, 3]$	$y= 4x - 6$
$y=\|2x+I\|-\|3-x\|-\|x-4\|$	$[3, 4]$	$y= 2x$
	$[4, +\infty)$	$y= 8$
	$(-\infty, -3]$	$y=\|x+I\|- 3 = -x-4$
	$[-3, -I]$	$y= I -\|x+I\|= x+2$
$y= \|\|x+I - 2\| - I$	$[-I, I]$	$y= I -\|x+I\|= -x$
	$[I, +\infty)$	$y=\|x+I\|- 3 = x-2$
	$(-\infty, 0]$	$y= 3 - 2x - I + 2x = 2$
	$[0, I]$	$y= 3 - 2x - I - 2x = -4x+2$
$y= \|\|3-2x\| -I\|-2\|x\|$	$[I, \frac{3}{2}]$	$y= I - 3 + 2x - 2x = -2$
	$[\frac{3}{2}, 2]$	$y= I + 3 - 2x - 2x = -4x+4$
	$[2, +\infty)$	$y= -3 + 2x - I - 2x = - 4$

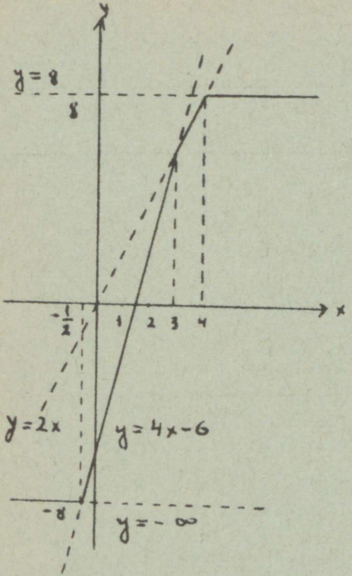
Таким образом, все три графика представляют собой ломаные линии, конкретный вид которых указан на чертежах I,2 и 3.

Задача 3.

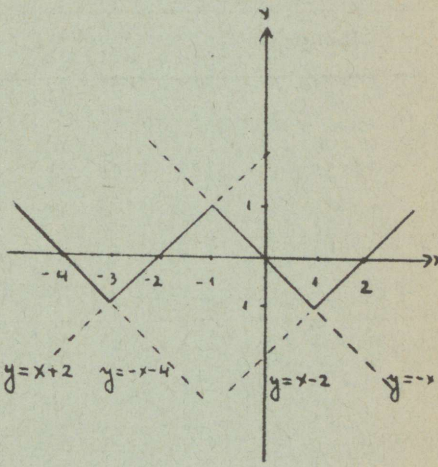
Искомые точки могут иметь абсциссу x_0+I или x_0-I, а их ординаты можно найти, решив неравенство

$$|y - y_0| \geq 2.$$

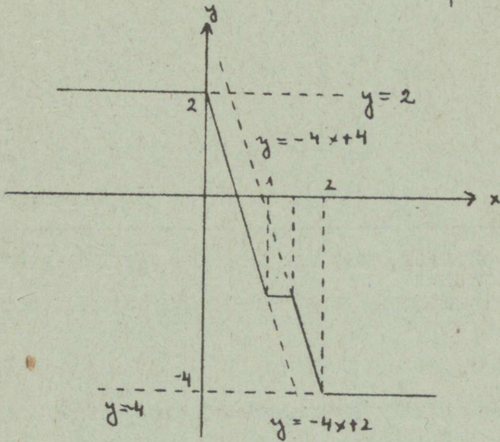
При $y \geq y_0$ имеем $y - y_0 \geq 2$ или $y \geq y_0 + 2$, а при



Черт. 1.

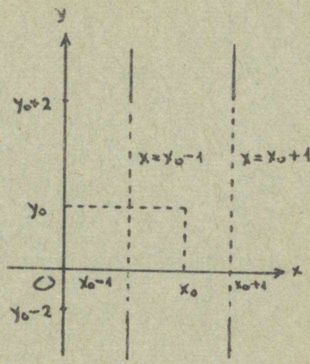


Черт. 2.



Черт. 3.

$y \leqslant y_0$ $y_0 - y \geqslant 2$ и $y \leqslant y_0 - 2$. Итак, искомые точки находятся на четырех полупрямых (лучах), исходящих из точек $(x_0-I,\ y_0-2)$, $(x_0-I,\ y_0+2)$, $(x_0+I,\ y_0+2)$ и $(x_0+I,\ y_0-2)$ и расположенных на прямых $x=x_0-I$ и $x = x_0+I$, как показано на черт. 4.



Черт. 4.

Задача 4.

Выясним сначала при каких значениях x выражение $3-|x-2|$ неотрицательно, а при каких отрицательно. Для этого решим неравенство

$$3-|x-2| \geqslant 0 \quad \text{или} \quad 3 \geqslant |x-2|$$

При $x \geqslant 2$ это неравенство превращается в $3 \geqslant x-2$ или $5 \geqslant x$, т.е. в этом случае оно справедливо для всех x отрезка $[2;\ 5]$, а при $x \leqslant 2$ неравенство имеет вид

$$3+x-2 \geqslant 0 \quad \text{или} \quad x+I \geqslant 0,$$

что справедливо для $x \geqslant -I$, т.е. для x из отрезка $[-I;\ 2]$. Итак, $3-|x-2|$ неотрицательно на отрезке $[-I;\ 5]$ и отрицательно для всех остальных x.

Ввиду этого будем рассматривать следующие четыре числовые области: $(-\infty\ ;\ -I]$, $[-I;\ 5]$, $[5;\ 7]$ и $[7;\ -\infty)$.

В следующей таблице показано какой вид принимает наше неравенство в каждой из числовых областей. При этом отрезок

$[-I; 5]$ приходится разбить на две части $[-I; 2]$ и $[2; 5]$, ибо в одной из них $|x-2|$ принимает значение $-x+2$, а в другой – $x-2$.

Т а б л и ц а 3

Числовая область	Вид неравенства в этой области		Решение в этой области
$(-\infty, I]$	$\|x-2\|-3 \leqslant -x+7$ или	$2-x-3 \leqslant -x+7$	$(-\infty, -I]$
$[-I, 2]$	$3-\|x-2\| \leqslant -x+7$ или	$3+x-2 \leqslant -x+7$	$[-I, 2]$
$[2, 5]$		$3-x+2 \leqslant -x+7$	$[2, 5]$
$[5, 7]$	$\|x-2\|-3 \leqslant -x+7$ или	$x-2-3 \leqslant -x+7$	$[5, 6]$
$[7, +\infty)$	$\|x-2\|-3 \leqslant x-7$ или	$x-2-3 \leqslant x-7$	отсутствуют

Ответ: неравенство справедливо для всех x, принадлежащих полуотрезку $(-\infty, 6]$.

Задача 5.

I^0. Координатная плоскость, как известно, разбивается осями на четыре четверти. Рассмотрим для каждой из четвертей наше условие $|x| + x = |y| + y$.

I четверть. Здесь $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Поэтому наше условие примет вид $x + x = y + y$ или $x = y$, которому удовлетворяют в первой четверти все точки биссектрисы угла между осями координат.

П четверть. Здесь $x \leqslant 0$ и $y \geqslant 0$, так что будем иметь

$$-x + x = y + y \quad \text{или} \quad y = 0.$$

Но при $y = 0$ единственное, что ограничивает выбор абсциссы, это условие $|x| + x = 0$ или $|x| = -x$, которое выполняется при любом x в этой четверти. Итак, искомые точки расположены на отрицательной половине оси x.

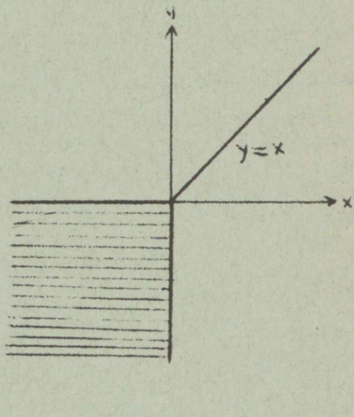
Ш четверть. Ввиду $x \leq 0$ и $y \leq 0$ наше условие принимает вид

$$-x + x = -y + y$$

и будет тождественно выполняться для любой точки этой четверти.

IУ четверть. Здесь картина аналогична той, которую мы наблюдали во П четверти и искомые точки заполняют отрицательную половину оси y.

Резюмируя, можно сказать, что искомые точки заполняют всю третью четверть, включая и сами оси, а вне этой четверти еще и ту часть прямой $y = x$, которая находится в I четверти (см. черт. 5).



Черт. 5.

2^0. Дробь $\frac{x}{|x|}$ может принимать только два значения -1 и 1 (в точке $x = 0$ она не определена). То же самое можно сказать и о дроби $\frac{y}{|y|}$. Поскольку в I четверти обе эти дроби имеют значение 1, а в Ш - значение -1, то для любой точки из этих четвертей (кроме точки $(0, 0)$, конечно) условие

$$\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$$

выполняется. Этим искомое множество точек уже исчерпывается, ибо во второй и четвертой четвертях x и y имеют разные знаки, так что одна из дробей принимает для точек этих четвертей значение -1, в то время как вторая - значение 1.

Задача 6.

По определению арифметического квадратного корня из числа a (только он обозначается знаком $\sqrt{a}$!) $\sqrt{a}$ есть такое неотрицательное число b, что $b^2 = a$. При $a = x^2$ есть только два числа, квадрат которых есть x^2 - это числа x и $-x$. Какое из них выбрать в качестве b? Которое из них неотрицательно? Конечно, то, которое равно $|x|$; при $x \geqslant 0$ $b = x$, а при $x < 0$ $b = -x$. Итак, в любом случае $b = |x|$, так что

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Замечание. Школьники часто путают понятия арифметического корня и просто квадратного корня из данного числа a, т.е. такого числа c, что $c^2 = a$ (c - может быть и отрицательным). Корень квадратный выражается через арифметический корень следующим образом:

$$c = \pm b = \pm\sqrt{a}.$$

Задача 7.

1°. Будем исходить из того, что

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2-4, \text{ если } x^2-4 \geqslant 0, \text{ т.е. при } x \leqslant -2 \text{ и } x \geqslant 2, \\ 4-x^2, \text{ если } x^2-4 \leqslant 0, \text{ т.е. при } -2 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

$$|9 - x^2| = \begin{cases} 9-x^2, \text{ если } 9-x^2 \geqslant 0, \text{ т.е. при } -3 \leqslant x \leqslant 3, \\ x^2-9, \text{ если } 9-x^2 \geqslant 0, \text{ т.е. при } x \leqslant -3 \text{ и } 3 \leqslant x. \end{cases}$$

Поэтому рассмотрим пять числовых областей

$(-\infty, -3]$, $[-3, -2]$, $[-2, 2]$, $[2, 3]$ и $[3, +\infty)$ и

определим, какой вид принимает уравнение в каждой из этих областей. Результаты такого рассмотрения собраны в следующей таблице.

Таблица 4

Числовая область	Вид уравнения в этой области	Решения из этой области
$(-\infty, -3]$	$x^2 - 4 - (x^2-9) = 5$ или $5 = 5$	$(-\infty, -3]$
$[-3, -2]$	$x^2 - 4 - (9 - x) = 5$ или $x^2 = 9$	$x = -3$
$[-2, 2]$	$4 - x^2 - (9-x^2) = 5$ или $-5 = 5$	отсутствуют
$[2, 3]$	$x^2 - 4 - (9-x^2) = 5$ или $x^2 = 9$	$x = 3$
$[3, +\infty)$	$x^2 - 4 - (x^2-9) = 5$ или $5 = 5$	$[3, +\infty)$

Таким образом, уравнение имеет бесчисленное множество решений, которые заполняют два полуотрезка $(-\infty, -3]$ и $[3, +\infty)$.

2^0. Множество всех корней выражений $x^2 + 2x$, $2 - x$ и $x^2 - x$ состоит из четырех чисел: -2, 0, 2 и 1, так что в числовых областях

$$(-\infty, -2], \ [-2, 0], \ [0, 1], \ [1, 2] \text{ и } [2, +\infty)$$

уравнение имеет различный вид. В том, что в отдельных областях эти выражения имеют именно тот вид, который указан в привдимой ниже таблице, читатель убедится самостоятельно.

Т а б л и ц а 5

Числовая область	Вид уравнения в данной области	Решения в данной области
$(-\infty, -2]$	$x^2 + 2x - (2-x) = x^2 - x$ или $2x = I$	отсутствуют
$[-2, 0]$	$-x^2 - 2x - (2-x) = x^2 - x$ или $x^2 + I = 0$	отсутствуют
$[0, I]$	$x^2 + 2x - (2-x) = x - x^2$ или $x^2 + x - I = 0$	$x = \frac{-I + \sqrt{5}}{2}$
$[I, 2]$	$x^2 + 2x - (2-x) = x^2 - x$ или $2x = I$	отсутствуют
$[2, +\infty)$	$x^2 + 2x + (2-x) = x^2 - x$ или $x + I = 0$	отсутствуют

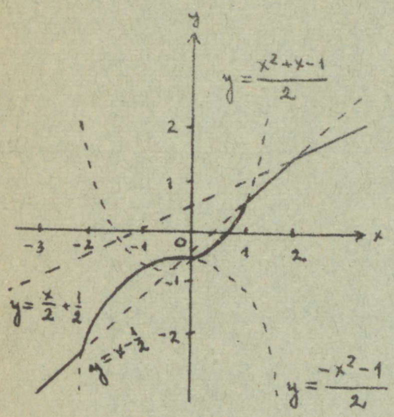
Итак, данное уравнение имеет только одно решение

$$x = \frac{\sqrt{5} - I}{2}$$

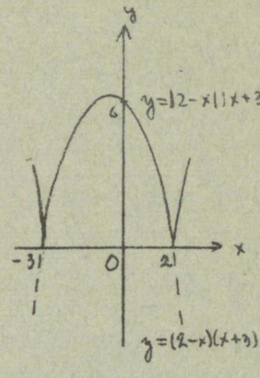
Геометрически это означает, что график функции

$$y = |x^2 + 2x| - |2 - x| - |x^2 - x|$$

пересекает ось абсцисс только в одной точке (на чертеже 6



Черт. 6.



Черт. 7.

приведен график функции $\frac{y}{2}$, т.е. "приплюснутый", сжатый в два раза график функции y).

Задача 8.

I°. Мы можем сначала построить график функции

$$y = |2 - x|\,|x + 3|,$$

а затем, зеркально отразив его относительно прямой $y = x$, получить искомый график. Для построения графика функции $y = |2 - x|\,|x + 3|$ начертим сперва параболу $y = (2-x)(x+3)$ (на чертеже 7 она обозначена пунктиром), а затем ту ее часть, которая расположена под осью абсцисс, зеркально отразим относительно этой оси наверх. Полученный график (на чертеже 7 он изображен сплошной линией) и будет являться графиком функции

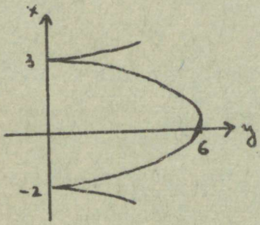
$$y = |2 - x|\,|x + 3|.$$

Действительно, полученная после зеркального отражения кривая является частью графика параболы $y = (x-2)(x+3)$, а функция $y = |2-x|\,|x+3|$, как видно из нижеприводимой таблицы, как раз и совпадает с этой параболой при $x \leqslant -3$ и $x \geqslant 2$.

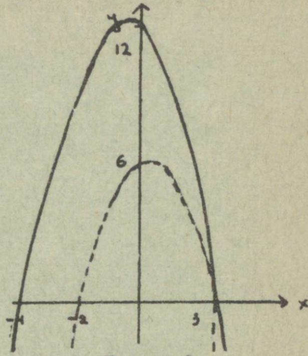
Таблица 6

Числовая область	Вид функции $y = 2 - x \;\; x + 3$ в этой области
$(-\infty, -3]$	$y = (2-x)[-(x+3)] = (x-2)(x+3)$
$[-3, 2]$	$y = (2 - x)(x + 3)$
$[2, +\infty)$	$y = (x-2)(x + 3)$

График функции $x = |2 - y|\,|y + 3|$ приведен на чертеже 8.



Черт. 8.



Черт. 9.

2^0. Рассмотрим сначала функцию $y = 9 - x^2 + |x - 3|$.

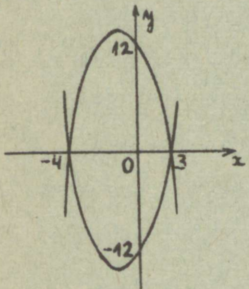
Если $x \geqslant 3$, то функция примет вид:

$$y = 9 - x^2 + x - 3 = -x^2 + x + 6 = -(x-3)(x+2).$$

Если же $x \leqslant 3$, то и график будет совпадать с графиком параболы

$$y = 9 - x^2 + 3 - x = -x^2 - x + 12 = -(x-3)(x+4).$$

Эти два графика пересекаются в точке (3, 0). График функции $y = 9 - x^2 + |x - 3|$ обведен на чертеже 9 сплошной линией. График искомой функции образуется, если к точкам полученной кривой прибавить все точки кривой, симметричной ей относительно оси x (см. черт. I0).



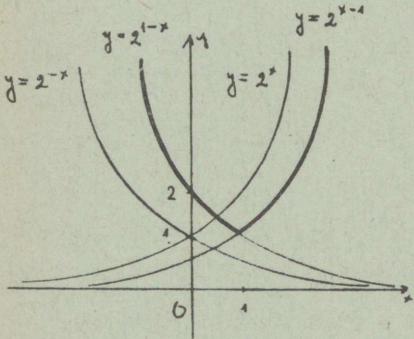
Черт. I0.

3^0. При $x \geqslant I$ искомый график совпадает с графиком функции

$$y = 2^{x-I},$$

а при $x \leqslant I$ с графиком функции

$$y = 2^{I-x}.$$



Черт. II.

Для получения этих графиков графики функций

$$y = 2^x \text{ и } y = 2^{-x},$$

которые симметричны друг другу относительно оси ординат, нужно соответственно сдвинуть на единицу вправо. Искомый график обведен на чертеже жирной линией.

Заметим, что оставшиеся не обведенными части графиков функций $y = 2^{x-I}$ и $y = 2^{I-x}$ образуют график функции

$$y = 2^{-|x-I|}$$

Задача 9.

Эта задача - первоапрельская шутка. Ее автор рассчитывал на то, что решающий, исходя из числа живущих в настоящее время на земном шаре людей, которое принято за $3 \cdot I0^9$, решит, что 25 лет тому назад на Земле жило $6 \cdot I0^9$ человек, 50 лет тому назад $I2 \cdot I0^9$ человек и т.д., так что столетий тому назад число людей было $2^4 \cdot 3 \cdot I0^9$. В этом случае двести лет тому назад это число должно было быть

$$2^8 \cdot 3 \cdot I0^9 = 256 \cdot 3 \cdot I0^9 \approx 7{,}5 \cdot I0^{II},$$

а 2000 лет тому назад -

$$2^{80}\cdot 3\cdot 10^{9} = (1024)^{8}\cdot 3\cdot 10^{9} \approx 4\cdot(1000)^{8}\, 10^{9} = 4\cdot 10^{33}$$

Однако такое количество людей чувствовало бы себя на Земле довольно неуютно: даже если считать, что вся Земля состоит из суши, то и тогда площадь суши не отличалась бы существенно от

$$4\pi\cdot 6000^{2}\,\text{км}^{2} \approx 4\cdot 10^{8}\ \text{км}^{2} = 4\cdot 10^{14}\ \text{м}^{2} = 4\cdot 10^{20}\ \text{мм}^{2}$$

(6000 км - радиус Земли), так что на 1 мм^2 суши приходилось бы около 10^{13} человек, что в несколько тысяч раз больше числа всех живущих на Земле людей.

На самом деле население земного шара было 2000 лет назад гораздо меньше, чем в настоящее время и продолжает увеличиваться, хотя и не в таком темпе, который был описан выше.

Текст задачи не дает ни малейшей возможности установить какие-либо пусть даже приближенные оценки числа людей, живущих на Земле определенное число лет тому назад, так как не описывает процесса изменение численности населения.

Задача 10.

Первый игрок может всегда выиграть в этой игре. Для этого ему достаточно назвать на первом ходу число -1, а в дальнейшем придерживаться правильной тактики, которая состоит в следующем.

Если второй игрок ответит на этот ход тем, что назовет какое-нибудь положительное число, то нужно просто все время называть число -6, а последним ходом назвать число -6+к, где число к таково, что назвав последним ходом -6, первый игрок набрал бы -50-к очков. Если же второй игрок тоже выберет на первом ходу отрицательное число, то первый должен все время называть числа, дополняющие только что названные противником числа до числа - 7, т.е. он должен назвать одно из чисел

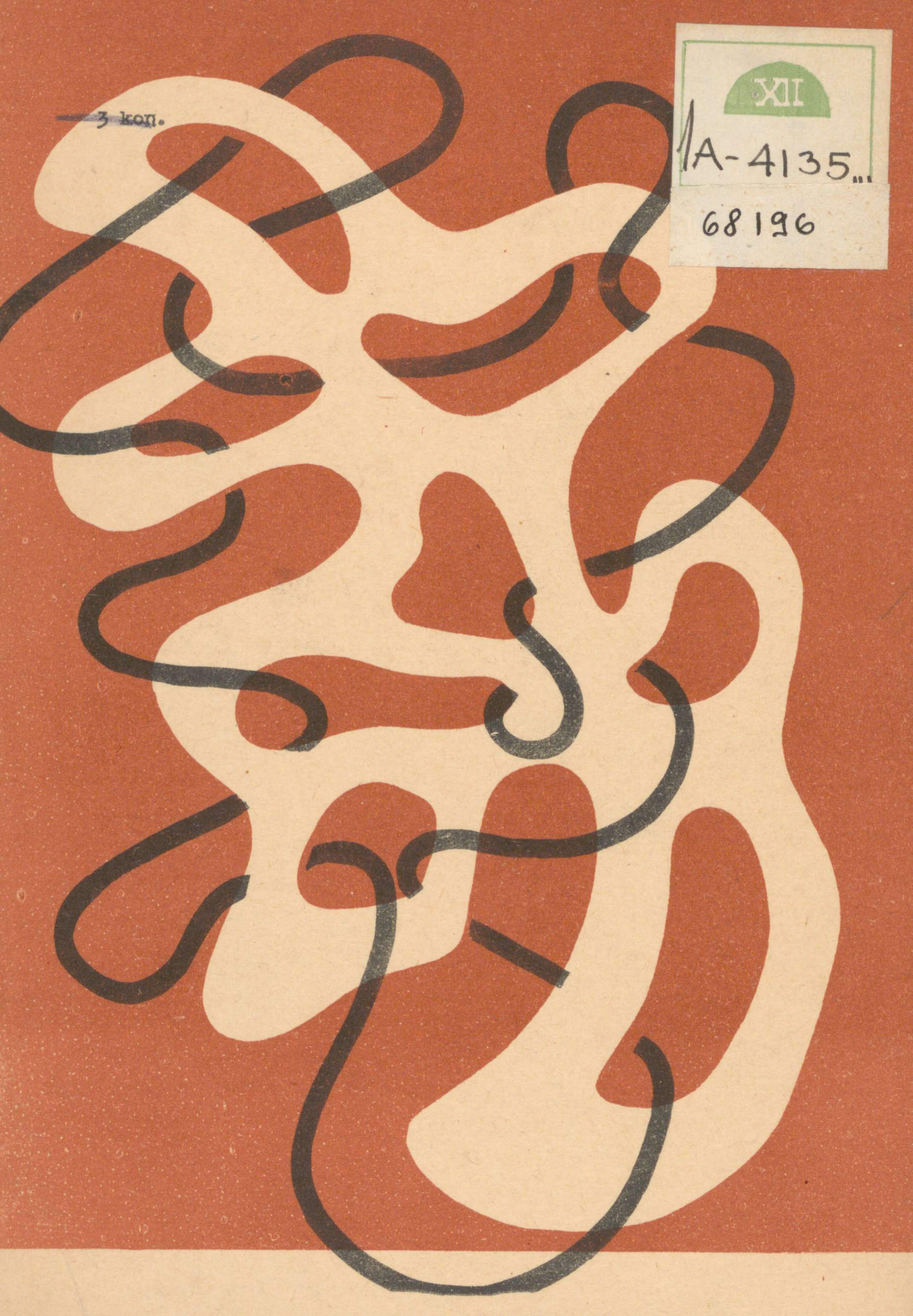
-I, -8, -I5, -22, -23, -6, -43, -50.

Эти числа образуют "лестницу", неуклонно ведущую к победе.

Если первый игрок ошибется и назовет в начале или в процессе игры какой-нибудь другое число, то его противник сможет захватить инициативу и победить, пользуясь вышепредложенной тактикой.

Если первый игрок назвал первым ходом число I, то у второго игрока появится еще один путь, наверняка ведущий к победе. Он может дойти до 50-ти по другой "победной лестнице", а именно,

2, 5, 8, ..., 2 + 3к, ..., 44, 47, 50.



~~3~~ коп.