

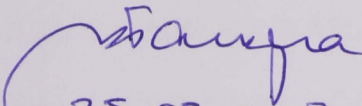
TARTU ÜLIKOOL  
Eksperimentaalfüüsika ja tehnoloogia instituut

PEETER PIKSARV

**KOONILISTE LAINEVÄLJADE KASUTAMINE  
MIKROOSAKESTE RUUMILISEL  
HOLOGRAFEERIMISEL**

Bakalaureusetöö

Juhendaja: TÜ FI õppedirektor PhD KAIDO REIVELT

Lubatud vaitmisele  
  
25.05.2007.

Tartu 2007

# SISUKORD

<b>1</b>	<b>SISSEJUHATUS</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>ÜLEVAADE LAINEVÄLJADEST</b>	<b>5</b>
2.1	Laineväljade difraktsioon ekraanilt/maskilt . . . . .	5
2.1.1	Lainevõrrand ja selle lahendid . . . . .	5
2.1.2	Valguse levik vabas ruumis . . . . .	5
2.1.3	Fresneli lähendus . . . . .	7
2.1.4	Fresneli difraktsioon . . . . .	8
2.2	Koonilised laineväljad . . . . .	9
<b>3</b>	<b>MIKROOSAKESED KOONILISES LAINEVÄLJAS</b>	<b>13</b>
3.1	Geomeetrilise optika lähendus . . . . .	13
3.2	Difraktsioon kahe tasalaine ristumiskohas . . . . .	15
3.3	Difraktsioon koonilises laineväljas . . . . .	20
<b>4</b>	<b>MIKROOSAKESTE RUUMILINE HOLOGRAAFIA</b>	<b>26</b>
4.1	Mikroosakeste difraktsioonipildi sõltuvus osakese suurusest . . . . .	26
4.2	Difraktsioonipilt mitme takistuse korral . . . . .	30
4.3	Mikroosakeste ruumiline holograafia . . . . .	31
4.4	Lahutusvõime mikroosakeste ruumilisel holografeerimisel . . . . .	34
<b>5</b>	<b>KOKKUVÕTE</b>	<b>39</b>
<b>6</b>	<b>SUMMARY</b>	<b>40</b>
	<b>KASUTATUD KIRJANDUS</b>	<b>41</b>
<b>A</b>	<b>LISA: KOONILISE VALGUSKIMBU MUDELI LÄHTEKOOD <i>POV-RAY'S</i></b>	<b>43</b>
<b>B</b>	<b>LISA: <i>MATHCAD</i>'I TÖÖLEHT DIFRAKTSIOONI ARVUTAMISEKS KAHE TASALAINE RISTUMISEL</b>	<b>44</b>
<b>C</b>	<b>LISA: <i>MATHCAD</i>'I TÖÖLEHT DIFRAKTSIOONI ARVUTAMISEKS KOONILISES LAINEVÄLJAS</b>	<b>48</b>

# 1 SISSEJUHATUS

Läbi ajaloo on inimene loonud ja otsinud vahendeid oma taju avardamiseks. Juba loomult uudishimulikuna on ta püüdnud näha sinna, kuhu palja silmaga ei näe. Optiline mikroskoop on olnud asendamatuks töövahendiks bioloogias alates Anthony van Leeuwenhoek' (1632–1723) ja Robert Hooke'i (1635–1703) aegadest. Mikroskoopia on muidugi vahepeal oluliselt edasi arenenud ning paljude meetoditega täienenud, kuid sellega ei ole kaugeltki rahuldatud tänapäeva teaduse ambitsioonid.

Mikroskoopias 1980ndatel välja töötatud algoritmid on paljuski just viimasel kümnendil jõudnud rakendustesse difraktsioon-pilditehnikas, mis üritab lahendada mitteperioodilise ruumilise struktuuriga objektilt hajunud kiirguse faasi probleemi. Neutron-, röntgen- või elektronikiirguse difraktsioonipildile lähenetakse Fourier' pöördega, otsides võimalust ruumilise pildi taaskonstrueerimiseks. Peamine huvi on koondunud rakkude ja nanoosakeste tomograafiale [1].

Besseli kimbud, esimesena käsitletud 1987. aastal J. Durnini poolt [2], [3] kui näiliselt difraktsioonile mittealluvaid lainevõrrandi lahendite kogumid. Nendest lihtsaima lainevälja energiajaotus on kirjeldatav radiaalsuunas esimest liiki nullindat järku Besseli funktsiooni ruuduga  $J_0^2$ . Besseli kimpude omadusi on 2004. aastal kokkuvõtvalt käsitlenud D. McGloin ja K. Dholakia oma artiklis [4]. Besseli kimbud pakuvad jätkuvalt huvi ja uusi võimalusi mikroosakeste juhtimisel optilistes potentsiaalides, mittelineaarses optikas, femtosekund-optikas ja mujal [4], [5].

Digitaalses holograafias on hiljaaegu välja pakutud lihtne ja elegantne meetod võimaldamaks ühe kaadriga jäädvustada täieliku elektrivälja,  $E(x, y, t)$ , mis P. Gabolde ja R. Trebino poolt ristitud kui „Spatially and Temporally Resolved Intensity and Phase Evaluation Device: Full Information from a Single Hologram“ (STRIPED FISH) [6]. On ilmunud mitmeid artikleid holograafiliste meetodite kohta, kus käsitletakse kujutise taastamist arvutis: [7], [8], [9] ja [10]. Digitaalne holograafiline mikroskoopia on tulemas erinevatesse rakendustesse võimaldades jälgida palju objekte üheaegselt läbi kolmemõõtmelise ruumi, mis pole võimalik traditsioonilise mikroskoopiaga (näiteks [11], [12] ja [13]).

Käesoleva töö eesmärgiks on uurida kooniliste laineväljade kasutamist mikroosakeste ruumilise konfiguratsiooni määramiseks. Peamiseks küsimuseks, millele vastust lõppkokkuvõttes otsitakse, on see, kuidas rakendada Besseli kimpu ruumilises holograafias. Huvitab samuti, kas on võimalik lugeda välja informatsiooni ka ainult intensiivsusaotuse järgi, kui on teada mingite mikroosakeste karakteristikud suurused.

Meetod mikroosakeste ruumilise pildi ülesvõtmiseks võib ilmselt huvi pakkuda bioloogias. Lähenedes probleemile digitaalse holograafia meetoditega võiks olla

võimalik ka osakeste ruumilise liikumise registreerimine koos taasesitusega arvuti-simulatsioonis.

Pärast sissejuhatust esitatakse lühike ülevaade laineväljade difraktsioonist ja koonilistest lainetest. Probleemile lähenetakse esmalt geomeetrilise optika lähenduses: uuritakse koonilises laineväljas tekkivaid varje. Edasi käsitletakse juba laine-optiliselt, Fresneli lähenduses difraktsiooni takistuselt kahe tasalaine ristumiskohas ja lõpuks ka koonilises laineväljas. Järgneb tulemuste analüüs ja kokkuvõte. Hin-natakse ka meetodi kasutamist reaalsete rakenduste puhul.

## 2 ÜLEVAADE LAINEVÄLJADEST

### 2.1 Laineväljade difraktsioon ekraanilt/maskilt

#### 2.1.1 Lainevõrrand ja selle lahendid

Käesolevas töös käsitletakse valguse levikut lineaarse süsteemina, mis allub Fourier' analüüsile. Selles alapeatükis on refereeritud Fourier' optikat ja Fresneli difraktsiooni puudutavaid peatükke raamatutest [14], [15], [16] ja [17].

Difraktsiooni põhiprobleem on leida optilise lainevälja jaotus, kui on teada lainevälja kuju mingis tasandis või kui valguslaine leviku teele jäävad ette takistused. Käesolevas töös on uuritud skalaarseid välju. Maxwelli võrranditest järeldub, et matemaatiliselt taandub difraktsioon lainevõrrandi lahendamisele kindlate ääretingimuste olemasolul:

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \\ + \text{ääretingimused.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Vaatluse all on monokromaatne laineväli

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} [\Psi(\vec{r}) e^{i\omega t} + \Psi^*(\vec{r}) e^{-i\omega t}], \quad (2.2)$$

kus  $\omega$  on laine nurksagedus ja  $\Psi(\vec{r})$  lainevälja ajast sõltumatu osa, nn kompleksne amplituud. Asendades lainevälja avaldise (2.2) lainevõrrandisse (2.1), saame  $\Psi(\vec{r})$  jaoks võrrandi, mida tuntakse Helmholtz'i võrrandi nime all:

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}) + k^2 \Psi(\vec{r}) = 0, \quad (2.3)$$

kus  $k = \frac{\omega}{c}$  on lainearv,  $c$  valguse kiirus ja  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  Laplace'i operaator. Lihtsaimaks lahendiks on sellele võrrandile tasalaine

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}. \quad (2.4)$$

Helmholtz'i võrrandi lineaarsusest järeldub, et antud võrrandit rahuldavad ka kõikvõimalikesse suundadesse levivate tasalainete lineaarsed kombinatsioonid. Järelikult saab difraktsiooni probleemile läheneda spektraalses arenduses, kus suvalise optilise lainevälja saab esitada tasalainete superpositsioonina. [16, lk 252–253].

#### 2.1.2 Valguse levik vabas ruumis

Skalaarse valguslaine elektrivälja kirjeldab vabas ruumis lainevõrrand (2.1). Vaatleme täpsemalt monokromaatse laine difraktsiooni. Sellisel juhul on ülesandeks vale-

mi (2.3) lahendamisel koos ääretingimusega

$$\Psi(x, y, 0) = \Psi_0(x, y). \quad (2.5)$$

Eeldame, et tasandil  $z = 0$  on teada kahemõõtmeline laineväli  $\Psi_0(x, y)$ , mille avaldame Fourier' integraalina järgmiselt:

$$\Psi_0(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} A_0(k_x, k_y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (2.6)$$

Siin  $A_0(k_x, k_y)$  avaldub Fourier' pöördteisenduse kaudu kujul

$$A_0(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (2.7)$$

Esitame nüüd lainevälja  $\Psi(x, y, z)$  suvalises ruumipunktis sarnaselt valemile (2.6), kuid nüüd juba ruumikoordinaadist  $z$  sõltuva Fourier' esituse kaudu

$$\Psi(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (2.8)$$

Asendades valemi (2.8) Helmholtz'i võrrandisse (2.3), saame

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) A = 0, \quad (2.9)$$

mille lahendiks on

$$A(k_x, k_y, z) = A_0(k_x, k_y) e^{-i\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}z}. \quad (2.10)$$

Asendades valemi (2.10) valemisse (2.8) võime lainevälja  $\Psi(x, y, z)$  avaldada kui

$$\Psi(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} A_0(k_x, k_y) e^{-i(k_x x + k_y y + \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}z)} dk_x dk_y$$

või, kui võtta arvesse valemit (2.7), siis

$$\Psi(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(x', y') h(x - x', y - y', z) dx' dy', \quad (2.11)$$

kus

$$h(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k_x x + k_y y + \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z)} dk_x dk_y. \quad (2.12)$$

Tuues sisse funktsiooni

$$\chi(k_x, k_y, z) = e^{-i\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z}, \quad (2.13)$$

saame valemist (2.12) kirjutada

$$\chi(k_x, k_y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y, z) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

ja vastupidi

$$h(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \chi(k_x, k_y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (2.14)$$

Valemitest (2.10) ja (2.13) järeldub, et

$$A(k_x, k_y, z) = A_0(k_x, k_y) \chi(k_x, k_y, z).$$

Funktsioone  $h(x, y, z)$  ja  $\chi(k_x, k_y, z)$  nimetatakse antud lineaarse süsteemi jaoks vastavalt impulss- ja sageduskosteks. [16, lk 316–318].

### 2.1.3 Fresneli lähendus

Kostefunktsiooni avaldist (2.13) saab lihtsustada paraksiaalsete kiirte jaoks, kui valguskimp on nõrgalt hajuv,

$$k_x^2, k_y^2 \ll k^2,$$

mis tähendab, et lainevektori  $x$  ja  $y$  komponendid on suhteliselt väikesed, kuivõrd eeldatakse laine levimist  $z$ -telje suunas. Sellisel juhul kehtib lähendus

$$\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \approx k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}$$

ja sageduskoste saab esitada kujul

$$\chi(k_x, k_y, z) = \exp \left[ -ikz + i \left( \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} \right) z \right], \quad (2.15)$$

see tähendab, et lainevõrrandis (2.4) esinev eksponent  $\exp(-ik_z z)$  on lähendatud kui

$$e^{-ik_z z} \approx e^{-ik_z z + i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} z}.$$

Asendades sageduskoste Fresneli lähenduses (2.15) valemisse (2.14), mis seob oma vahel impulss- ja sageduskostet, saame impulsskoste jaoks järgmise avaldise Fresneli lähenduses:

$$h(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} \exp \left[ -ik \left( z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \right) \right]. \quad (2.16)$$

Asendades (2.16) lainevälja esitusse selle impulsskoste kaudu valemis (2.11) annab lainevälja jaoks integraali

$$\Psi(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} e^{-ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(x', y') e^{-\frac{ik}{2z} [(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx' dy', \quad (2.17)$$

mis on difraktsiooni integraaliks Fresneli lähenduses. [16, lk 319].

Sagedusesituse  $A(k_x, k_y, z)$  põhjal, mille annab korrutis  $\chi(k_x, k_y, z) A_0(k_x, k_y)$ , võib lainevälja  $\Psi(x, y, z)$  ka avaldada kui

$$\Psi(x, y, z) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 e^{-ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} A_0(k_x, k_y) e^{\frac{iz}{2k} (k_x^2 + k_y^2)} e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (2.18)$$

Fresneli lähenduse kehtivustingimuseks, kui  $a$  on suurim radiaalne kaugus tasandil  $z > 0$  ja  $\theta_m \approx \frac{a}{z}$  suurim nurk optilise teljega, on

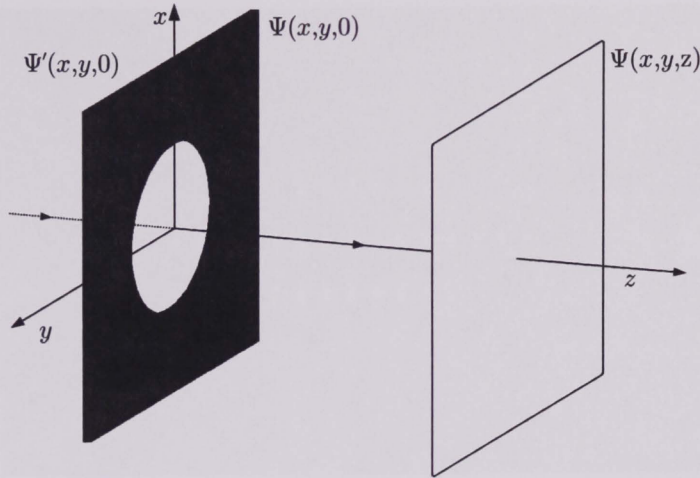
$$\frac{N_F \theta_m^2}{4} \ll 1,$$

kus  $N_F = \frac{a^2}{\lambda z}$  on Fresneli number [14, lk 118–120].

#### 2.1.4 Fresneli difraktsioon

Fresneli difraktsioon põhineb eeldusel, et apertuurile või maskile langev laine läbib apertuuri muutmata kujul, kuid teisel pool ekraani läbipaistmatut osa tema amplituud võrdub nulliga. Kui  $\Psi'(x, y, 0)$  ja  $\Psi(x, y, 0)$  kirjeldavad komplekset amplituudi vastavalt vasakul ja paremal pool ekraani (joonis 2.1), siis

$$\Psi(x, y, 0) = \Psi'(x, y, 0) T(x, y),$$



Joonis 2.1: Laine  $\Psi'(x, y, 0)$  levik läbi apertuuri  $T(x, y)$  moodustades vahetult pärast maski laine komplekse amplituudiga  $\Psi(x, y, 0) = \Psi'(x, y, 0)T(x, y)$ . Kaugusel  $z$  ekraanist avaldub difraktsioonipilt intensiivsusega  $I(x, y, z) = |\Psi(x, y, z)|^2$ .

kus

$$T(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{apertuuri sees} \\ 0 & \text{väljaspool apertuuri} \end{cases}$$

on ekraani läbipaistvust kirjeldav funktsioon.

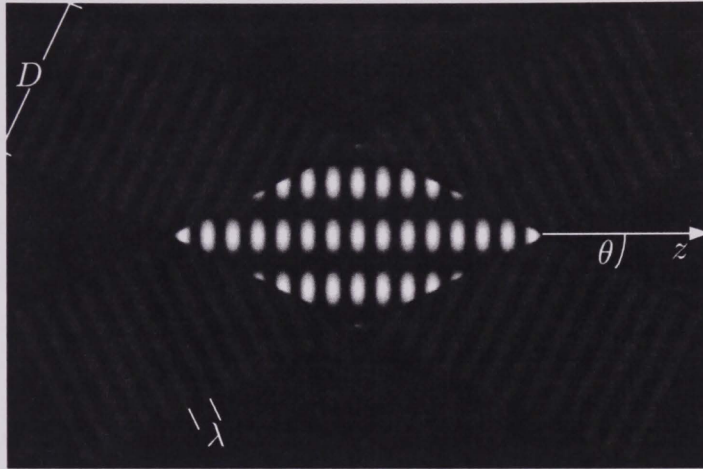
Fresneli difraktsioonile vastab olukord, kui valguse levik vabas ruumis on kirjeldatud Fresneli lähenduses sagedus- ja impulsskostega kujul vastavalt (2.15) ja (2.16). Kui on teada  $\Psi(x, y, 0)$  (ehk  $A(k_x, k_y, 0)$ ) siis  $\Psi(x, y, z)$  on leitav valemi (2.17) või (2.18) põhjal. [14, lk 127–128].

## 2.2 Koonilised laineväljad

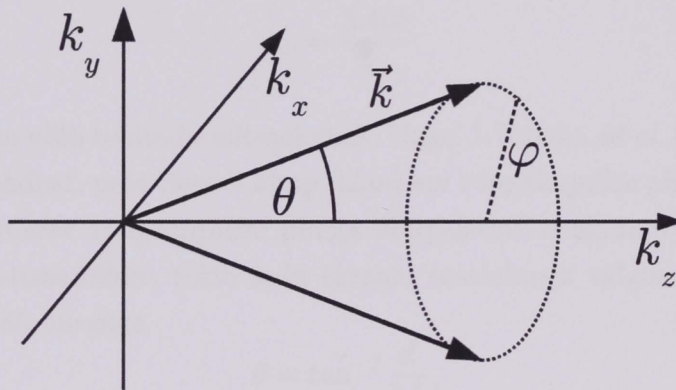
Kahe monokromaatse tasalaine, mis levivad teineteise suhtes nurga  $2\theta$  all, interferentsipilti piirkonnas, kus kimbud kattuvad, iseloomustab amplituudi kosinusoidaalne jaotus. Intensiivsuse jaotus  $I = (\cos \vec{k}_1 \vec{r} + \cos \vec{k}_2 \vec{r})^2$ , kus lainearv  $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$  on ära toodud joonisel 2.2. Interferentsi pildi ulatus piki  $z$ -telge on  $z_{max} = \frac{D}{\sin \theta}$ , kus  $D$  on kiirtekimbu laius, ja faasikiirus  $z$ -telje sihis  $v = \frac{c}{\cos \theta}$ , kus  $c$  on tasalaine liikumise kiirus [18].

Koonilise lainevälja saamiseks summeeritakse kõik sellised tasalainete paarid, mille tasandit on pööratud ümber  $z$ -telje üle kõikvõimalike nurkade  $\varphi$  vahemikus 0 kuni  $\pi$ , nagu on näidatud joonisel 2.3. Selle tulemusena on lainevälja intensiivsuse jaotus kirjeldatav  $z$ -teljega ristuv tasandis esimest liiki nullindat järgu Besseli funktsiooniga  $J_0^2$  (vt joonis 2.4) [19].

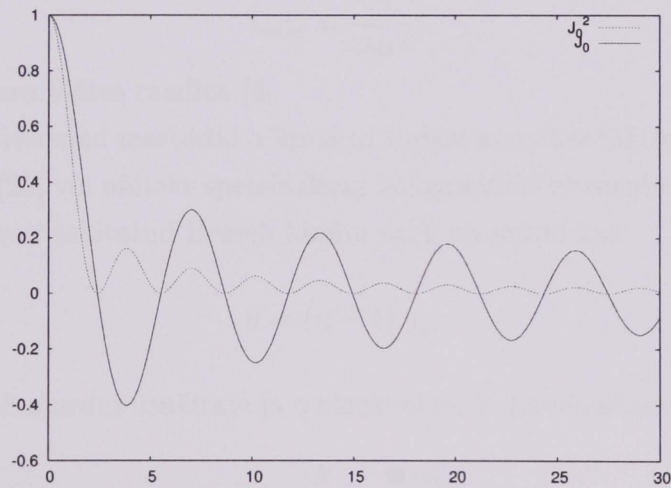
Ideaalne  $z$ -telje sihis leviv Besseli kimp on silinderkoordinaadistikus kirjeldatud



Joonis 2.2: Kahe tasalainekimbu, mis levivad teineteise suhtes nurga  $2\theta$  all, interferentsi pilt.



Joonis 2.3: Besseli kimpu moodustavate tasalaine  $\vec{k}$ -vektorid paiknevad koonusel.



Joonis 2.4: Besseli kimbu laineväli  $J_0$  (pidev joon) ja intensiivsus  $J_0^2$  (punktir) levimissuunaga risti oleval tasandil.

kui

$$\Psi(\rho, \varphi, z) = A_0 e^{ik_z z} J_n(k_\rho \rho) e^{\pm in\varphi},$$

kus  $J_n$  on esimest liiki  $n$ -järku Besseli funktsioon ning  $k_z$  ja  $k_\rho$  on vastavalt piki-suunalise ja radiaalse lainevektori komponendid, et  $k = \sqrt{k_z^2 + k_\rho^2} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , kui  $\lambda$  on Besseli kimpu moodustava elektromagnetlainelaine lainepikkus [4].

Besseli kimpu moodustavate tasalainete levikusuuna nurk  $z$ -telje suhtes  $\theta$ , mis avaldub kui

$$\theta = \tan^{-1} \frac{k_\rho}{k_z},$$

määrab ära lainevälja omadused. Selle nurga konstantsus on Besseli kimpude defineeriv omadus [20] ja jooniselt 2.3 on ka näha, miks nimetatakse neid koonilisteks laineväljadeks. Lähtuvalt Besseli funktsiooni  $J_0$  nullkohtadest [21, lk 409] Besseli kimbu keskkoha raadius avaldub [4]

$$r_0 = \frac{2.405}{k_\rho}.$$

Besseli kimpu võib tekitada mitmel viisil. Nagu J. Durnin *et al.* [3] algselt jälgisid selle kimbu lähendust, pole Besseli kimp muud kui rõngakujulise pilu Fourier' pööre. Paigutades peenikese rõngakujulise piluga läbipaistmatu ekraani koondava läätse eesmisesse fokaaltasandisse, tekib seda ekraani tasalainega valgustades läätse taga kooniline laineväli nurgaga

$$\theta = \tan^{-1} \frac{d}{2f},$$

kus  $d$  on rõnga raadius ja  $f$  läätse fokaalkaugus. Selle kimbu leviulatust saab hinnata geomeetriliselt

$$z_{max} = \frac{R}{\tan \theta},$$

kus  $R$  on koondava läätse raadius [4].

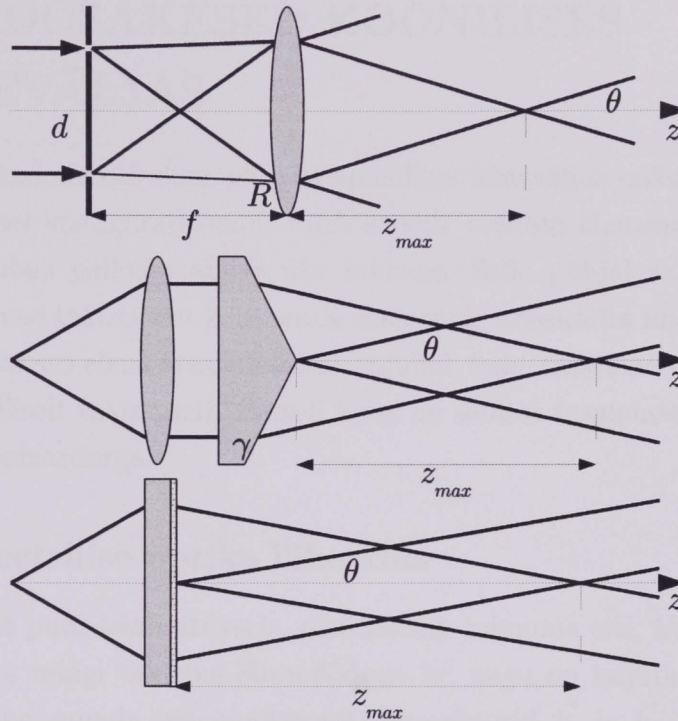
Teised, efektiivsemad meetodid hõlmavad endast koonilise läätse ehk nn aksikoni kasutamist [22], [23] või näiteks spetsiaalseid holograafilisi elemente – lensakone [24], [25]. Aksikoni poolt tekitatud Besseli kimbu nurk on antud kui

$$\theta = (n - 1) \gamma,$$

kus  $n$  on materjali murdumisnäitaja ja  $\gamma$  aksikoni nurk. Levikusügavus avaldub seega

$$z_{max} = \frac{k}{k_r} R_a \approx \frac{R_a}{\theta},$$

kus  $R_a$  on aksikoni raadius. Aksikoni kasutamine võrreldes rõngaspiluga on oluliselt



Joonis 2.5: Besseli kimbu moodustamine erinevate skeemidega: rõngaspilu, aksikoni ja lensakoniga [18].

efektiivsem, kuid võrd viimasel juhul neelab valdava osa pealelangevast valgusest läbi-  
paistmatu ekraan [4]. Koonilise lainevälja moodustamiseks kasutatavaid skeeme on  
kujutatud joonisel 2.5.

### 3 MIKROOSAKESED KOONILISES LAINEVÄLJAS

Selleks, et rehkendada difraktsioonipilti koonilises laineväljas mikroosakeste mingisugusel ruumilisel konfiguratsioonil, tuleb esmalt vaadata elementaarset juhtumit, kus Besseli kimbus paikneb ainult üks takistus. Selle põhjal saab leida difraktsioonipildi mitmest takistusest koosnevale süsteemile arvestades lineaarsust. Esialgu on vaatluse all ka see elementaarülesanne erijuhul, kahe tasalaine interferentsipildis difraktsiooni selliselt takistuselt. Besseli kimp on selliste tasalainete paaride superpositsioon üle polaarnurga.

#### 3.1 Geomeetrilise optika lähendus

Esmalt vaatleme puht kvalitatiivselt, mis hakkab toimuma siis, kui kahe tasalaine ristumisel on ees mingi takistus läbimõõduga  $2r$ , nagu on kujutatud joonisel 3.1. Tasalainete leviku suunda iseloomustavad lainevektorid  $\vec{k}_1$  ja  $\vec{k}_2$ , millede vaheline nurk on  $2\theta$ . On näha, et takistuse taha tekib kummalegi tasalainele vastav vari. Kui  $x_1$  ja  $x_2$  on ekraanil tekkivate varjude keskpunktide koordinaadid, siis takistuse vastav koordinaat avaldub kui

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (3.1)$$

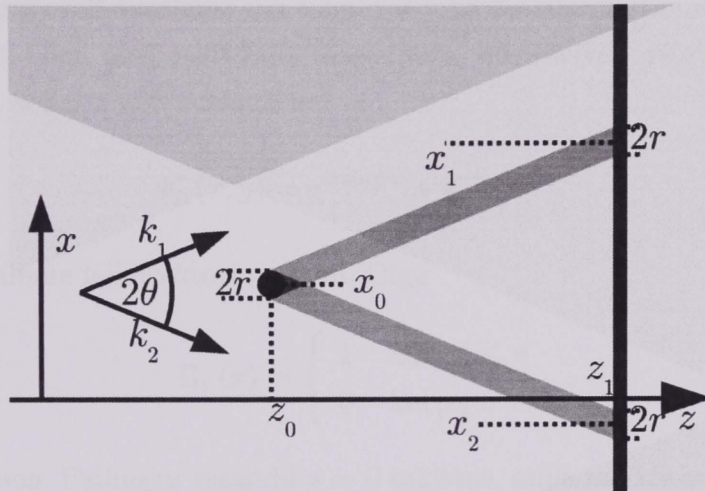
Teades tasalainete vahelist nurka  $2\theta$ , võib avaldada ka takistuse kauguse ekraanist

$$\begin{aligned} z_1 - z_0 &= \frac{x_1 - x_0}{\tan \theta} = \frac{x_0 - x_2}{\tan \theta} \\ z_1 - z_0 &= \frac{x_1 - x_2}{2 \tan \theta} \end{aligned} \quad (3.2)$$

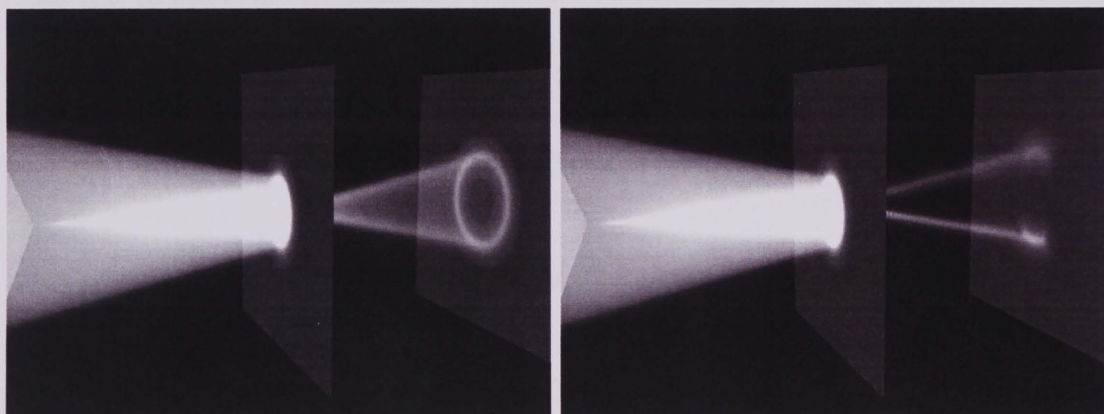
Kolmemõõtmelisel juhul tekib samuti üldjuhul kaks varju. Takistuse paiknemisel optilisel teljel koonduvad need kaks varju üheks rõngakujuliseks varjuks. Vastavat olukorda ilmestab joonis 3.2, kus on kiirteoptika lähenduses seda modelleeritud programmiga *POV-Ray (Persistence of Vision(tm) Ray Tracer Version 3.6.1)*, vt lisa A. On näha, et põhimõtteliselt on difraktsioonipildis olemas info osakese  $z$ -koordinaadi kohta.

### 3.2 Difraktsiooniga seotud nähtused

#### 3.2.1 Kõrgtaselise kiirteoptika lähenduse nähtused



Joonis 3.1: Takistus kahe tasalaine ristumiskohas. Kui ei arvestata difraktsiooniga äärtelt, vastab igale takistusele teravate servadega varjude paar.



(a)

(b)

Joonis 3.2: Kiirteoptika lähenduses valguse levimine pärast auguga ( $d = 0.2$ ) maski koonilises valgusvihus ( $\theta \approx 0.19$  rad). (a) auk optilisel teljel, (b) avaus nihutatud üles 0.3 ühiku võrra.

### 3.2 Difraktsioon kahe tasalaine ristumiskohas

Kahe tasalaine liitumisel tekivad interferentsimuster on toodud ära juba eelnevalt joonisel 2.2. Järgnevalt vaatleme siin toimuvat juba detailselt laineoptiliselt Fresneli lähenduses. Olgu meil tegu kahe tasalainega, mis levivad  $z$ -teljega nurga  $\theta$  all nii, et laineväli kohal  $z = 0$  avaldub kui

$$\Psi'_0(x, y) = e^{ik \sin \theta \cdot x} + e^{-ik \sin \theta \cdot x}, \quad (3.3)$$

kus  $k$  on tasalainete lainevektori moodul. Olgu

$$\Pi_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{kui } |x| \leq r \\ 0 & \text{kui } |x| > r \end{cases}$$

nn kastfunktsioon. Paiknegu tasandil  $z = 0$  takistus, mille mõõde  $x$ -telje sihis on  $2r$  ja mille keskkoha  $x$ -koordinaat on  $x_0$ . Kuivõrd difraktsioon on lineaarne nähtus ja koguvälja võib esitada osaväljade summamana, siis võib asendada ka antud ülesande teisega. Difraktsioon takistuselt on samaväärne juhuga, kui vaadelda difraktsiooni ainult piirkonnast, mis jääb takistuse taha, ning lahutada see difraktsioonist ilma takistuseta olukorra puhul. Sellisel juhul kirjeldab süsteemi läbilaskvusfunktsioon

$$T(x, y) = 1 - \Pi_r(x - x_0). \quad (3.4)$$

Laineväli vahetult pärast takistust on seega esitatav kujul

$$\Psi_0(x, y) = \Psi'_0(x, y) T(x, y). \quad (3.5)$$

Sagedusesituses vastavalt definitsioonile (2.7)

$$A_0(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi'_0(x, y) T(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy,$$

millest lainevälja ja takistuse avaldiste (3.3), (3.4) põhjal ning kasutades Fourier' pöörde omadusi [15, lk 3–5]

$$A_0(k_x, k_y) = \left\{ \delta(k_x + k \sin \theta) - \frac{r}{\pi} \text{sinc} [r(k_x + k \sin \theta)] \right\} e^{i(k_x + k \sin \theta)x_0} + \left\{ \delta(k_x - k \sin \theta) - \frac{r}{\pi} \text{sinc} [r(k_x - k \sin \theta)] \right\} e^{i(k_x - k \sin \theta)x_0} \cdot 4\pi^2 \delta(k_y),$$

kus  $\text{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$ . Vastavalt Fresneli lähendusele sageduskoste jaoks (2.15) saab esi-

tada

$$A(k_x, k_y, z) = e^{-ikz + i\left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}\right)z} A_0(k_x, k_y).$$

Kasutades kompuuter-algebra tarkvara *Maxima* (v. 5.11.0) ja tehes mõningad teisendused võib leida Fresneli difraktsiooni integraali (2.17) põhjal lainevälja sõltuvana  $z$ -koordinaadist ( $z > 0$ ):

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z) &= \frac{ik}{2\pi z} e^{-ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(x', y') e^{-\frac{ik}{2z}[(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx' dy' \\ \Psi(x, y, z) &= e^{-ikz} \left\{ e^{i\frac{1}{2}k \sin^2 \theta \cdot z + ik \sin \theta \cdot x} + e^{i\frac{1}{2}k \sin^2 \theta \cdot z - ik \sin \theta \cdot x} - \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{i\frac{1}{2}k \sin^2 \theta \cdot z + ik \sin \theta \cdot x} \cdot \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{z}} (i+1) (\sin \theta \cdot z + x + r - x_0) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{z}} (i+1) (\sin \theta \cdot z + x - r - x_0) \right) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{i\frac{1}{2}k \sin^2 \theta \cdot z - ik \sin \theta \cdot x} \cdot \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{z}} (i+1) (\sin \theta \cdot z - x + r + x_0) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{z}} (i+1) (\sin \theta \cdot z - x - r + x_0) \right) \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Edaspidi on uuritud probleemi numbriliselt kasutades tarkvara *Mathcad* (v. 13.1). Antud juhu jaoks koostatud töölehele väljatrükk on toodud lisas B. Parameetrid lainepikkuse, tasalainete leviku suuna ja  $z$ -telje vahelise rurga ning digitaliseerimise sammu jaoks on valitud järgmiselt:

$$\begin{cases} \lambda = 0.6 \mu m, \\ \theta = 0.223^\circ, \\ a = 9 \mu m. \end{cases} \quad (3.7)$$

Takistuse ulatuseks  $x$ -telje sihis on võetud

$$2r = 549 \mu m. \quad (3.8)$$

Nende parameetrite valikul on jälgitud, et need oleksid ka eksperimendis teostatavad. Seda nii käesolevas, kahe tasalaine liitumist käsitlevas osas, kui ka edaspidi kooniliste

laineväljade modellerimisel. Omad piirangud difraktsioonipildi detailsusele seab ka *Mathcad*'is teostatud algoritmi (vt lisa C) ressursinõudlikus, mis ei luba arvutada alusmaatriksitega, mis on suuremad kui  $2^{10} \times 2^{10}$ , erijuhtudel  $2^{11} \times 2^{11}$ .

Simulatsioonis on arvatud laineväli meelevaldsel  $z$ -tasandil lähtudes, et teada on laineväli tasandil  $z_0$  ( $z > z_0$ ), kus paikneb huvi pakkuv takistus. Selleks on kasutatud Fresneli lähenduses leitud lainevälja analüütilist avaldist (3.6) eespool kirjeldatud juhu jaoks, kus laineväli tasandil  $z_0$  on kirjeldatud valemiga (3.5). Arvuti-eksperimenti tulemus on toodud joonisel 3.3. (Siin ja edaspidi on kasutatud graafikute koostamisel *Mathcad*'i väljundist programmi *Gnuplot* v. 4.0.)

Järgnevalt on vaadeldud lähemalt intensiivsuse jaotust takistusest kaugusel  $z = 480 \text{ mm}$ . Joonise (3.4) põhjal on näha, et geomeetrilise varju ala läheduses, mis on antud joonisel tähistatud punktiiridega, on märgata kahte lokaalset miinimumi. Eeldades, et need miinimumid vastavad difraktsioonile takistuse äärtelt, võib määrata analoogselt geomeetrilise optika lähendile koordinaadid, mis vastavad takistuse keskkohale:

$$\begin{aligned} (a) : \quad x'_1 &= \frac{1692+2079}{2} = 1885.5 \mu\text{m}, \\ x'_2 &= \frac{-1692-2079}{2} = -1885.5 \mu\text{m}; \\ (b) : \quad x'_1 &= \frac{2232+2619}{2} = 2425.5 \mu\text{m}, \\ x'_2 &= \frac{-1539-1152}{2} = -1345.5 \mu\text{m}. \end{aligned}$$

Kasutades geomeetrilise optika valemeid varju järgi takistuse asukoha määramiseks, (3.1) ja (3.2), võib leida järgnevat:

$$\begin{aligned} (a) : \quad x'_0 &= 0 \mu\text{m}, \\ z' &\approx 484.4 \text{ mm}; \\ (b) : \quad x'_0 &= 540 \mu\text{m}, \\ z' &\approx 484.4 \text{ mm}. \end{aligned}$$

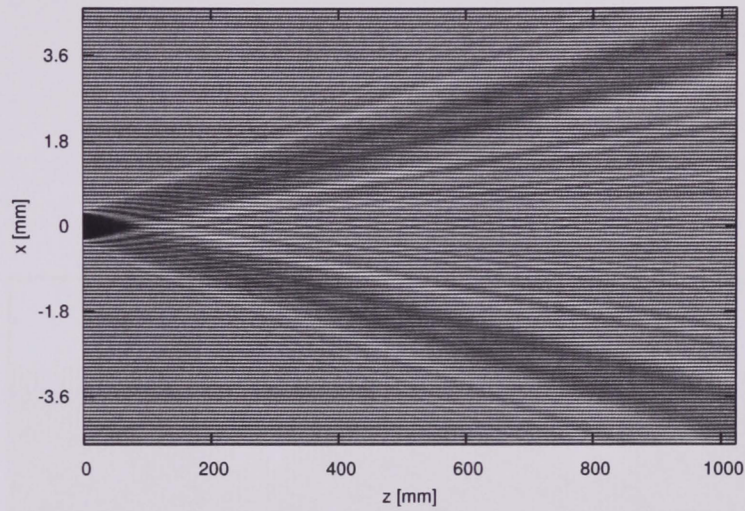
Arvestades, et  $x$ -koordinaadi määramise täpsus on jämedalt võetuna võrdne ühe diskreetimise sammuga ehk

$$\Delta x = \pm 9 \mu\text{m}$$

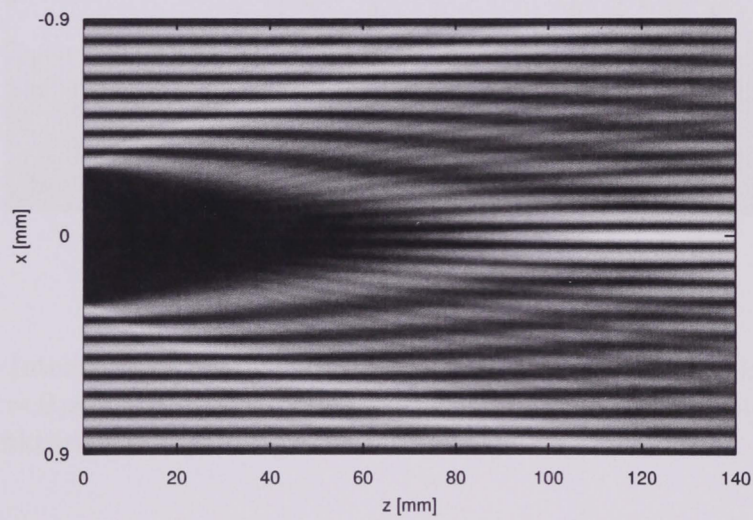
ja sellest tulenevalt  $z$ -koordinaadi jaoks antud juhul

$$\Delta z = \frac{1}{\tan \theta} \Delta x \approx \pm 2.3 \text{ mm},$$

siis langevad geomeetrilise optika tulemused Fresneli difraktsiooni põhjal arvatutuga kokku osakese algkoordinaadi osas antud seadet ja takistust iseloomustavate parameetrite valiku juures: (3.7), (3.8). Küll aga on sellel kaugusel difraktsioonist tulenev takistuse varju hajumine diskreetimisveast ligi kaks korda suurem. Oluline

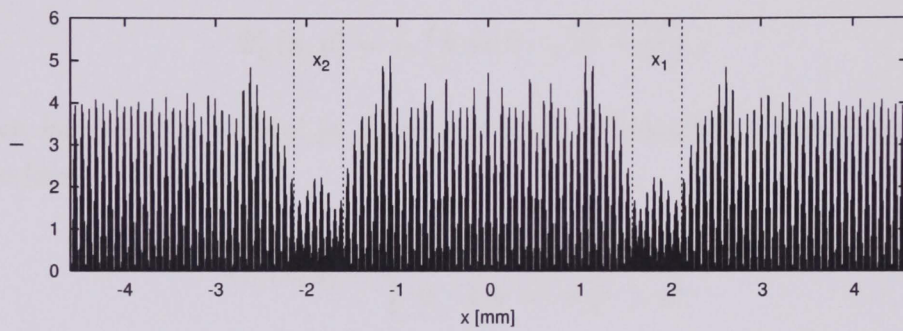


(a)

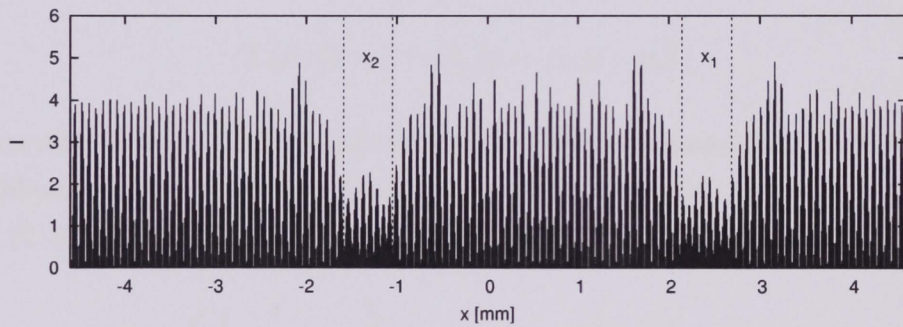


(b)

Joonis 3.3: Difraktsioon piki  $z$ -telge kahe tasalaine ristumiskohas paiknevalt takistuselt Fresneli lähenduses: (a) – laineväli kaugusel  $0 \dots 1024 \text{ mm}$  takistusest; (b) – kaugusel  $0 \dots 140 \text{ mm}$ , kus nähtav esialgse lainevälja taasmoodustumine takistuse taga.



(a)



(b)

Joonis 3.4: Intensiivsuse jaotus takistusest  $z = 480 \text{ mm}$  kaugusel: (a) – takistus tsentris,  $x_0 = 0 \mu\text{m}$ ; (b) – takistus nihutatud läbimõõdu võrra  $x$ -telje suunas,  $x_0 = 549 \mu\text{m}$ . Punktiriiga tähistatud geomeetrilise varju ala.

on siinjuures see, et piisavalt suure apertuuri korral, mis tuleneb lainevälja avaldisest (3.6), ei sõltu intensiivsuse kahe miinimumi omavaheline kaugus takistuse asukohast  $x$ -teljel. Ilmselt on võimalik suhteliselt lihtsalt tuletada piiratud apertuuri jaoks sarnane lainevälja avaldis nagu leitud lõpmatu lainevälja jaoks valemi (3.6) näol.

### 3.3 Difraktsioon koonilises laineväljas

Koonilises laineväljas (vt alapeatükk 2.2), mida moodustav nurk on  $\theta$ , avaldub laineväli kohal  $z = 0$  kui

$$\Psi'_0(x, y) = J_0\left(k \sin \theta \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad (3.9)$$

kus  $k$  on lainevektori moodul ja  $J_0$  esimest liiki nullindat järku Besseli funktsioon. Defineerides funktsiooni

$$O_r(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{kui } x^2 + y^2 \leq r^2, \\ 0 & \text{kui } x^2 + y^2 > r^2, \end{cases}$$

on keskpunkti  $(x_0, y_0)$  ja raadiusega  $r$  määratud takistuse läbilaskvusefunktsioon

$$T(x, y) = 1 - O_r(x - x_0, y - y_0). \quad (3.10)$$

Lainevälja  $\Psi$  kuju sõltuvus  $z$ -koordinaadist on leitud samamoodi nagu kahe tasalaine lõikumisel, lähtudes lainevälja  $\Psi_0$  spektraalsest esitusest  $A_0$  tasandil  $z = 0$  mm, valemi (2.18) põhjal:

$$\Psi(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 e^{-ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} A_0(k_x, k_y) e^{\frac{iz}{2k}(k_x^2 + k_y^2)} e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y,$$

kus  $A_0$  on defineeritud valemiga (2.7) kui

$$A_0(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy.$$

Võib kirjutada probleemi üles ka silindrilistele koordinaatides

$$x = \rho \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \varphi,$$

$$z = z.$$

Sedasi on seatud valemitele (3.9) ja (3.10) vastavusse järgnevad avaldised:

$$\begin{aligned}\Psi'_0(\rho, \varphi) &= \Psi'_0(\rho) = J_0(k \sin \theta \cdot \rho), \\ T(\rho, \varphi) &= 1 - O_{\rho_0 \varphi_0 r}(\rho, \varphi),\end{aligned}\tag{3.11}$$

kus

$$O_{\rho_0 \varphi_0 r}(\rho, \varphi) = \begin{cases} 1 & \text{kui } \rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2 \leq r^2, \\ 0 & \text{kui } \rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2 > r^2 \end{cases}$$

ning lainevälja jaoks vahetult pärast takistust

$$\Psi_0(\rho, \varphi) = \Psi'_0(\rho, \varphi) T(\rho, \varphi).\tag{3.12}$$

Analoogia põhjal olgu sagedusruumi koordinaadid

$$\begin{aligned}k_x &= k_\rho \cos k_\varphi, \\ k_y &= k_\rho \sin k_\varphi, \\ k_z &= k_z.\end{aligned}$$

Seega

$$A_0(k_\rho, k_\varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Psi_0(\rho, \varphi) e^{ik_\rho \rho \cos(\varphi - k_\varphi)} \rho d\rho d\varphi,\tag{3.13}$$

millesse asendades lainevälja avaldise vahetult pärast takistust (3.12)

$$A_0(k_\rho, k_\varphi) = \int_0^\infty J_0(k \sin \theta \cdot \rho) \int_0^{2\pi} [1 - O_{\rho_0 \varphi_0 r}(\rho, \varphi)] e^{ik_\rho \rho \cos(\varphi - k_\varphi)} d\varphi \rho d\rho.$$

Tähistades vastavalt ilma takistuseta olukorra jaoks

$$A'_0(k_\rho, k_\varphi) = \int_0^\infty J_0(k \sin \theta \cdot \rho) \int_0^{2\pi} e^{ik_\rho \rho \cos(\varphi - k_\varphi)} d\varphi \rho d\rho$$

ja ainult takistuselt lähtuva lainevälja jaoks

$$A''_0(k_\rho, k_\varphi) = \int_0^\infty J_0(k \sin \theta \cdot \rho) \int_0^{2\pi} O_{\rho_0 \varphi_0 r}(\rho, \varphi) e^{ik_\rho \rho \cos(\varphi - k_\varphi)} d\varphi \rho d\rho,$$

nii et

$$A_0(k_\rho, k_\varphi) = A'_0(k_\rho, k_\varphi) - A''_0(k_\rho, k_\varphi).\tag{3.14}$$

Arvestades, et esimest liiki  $n$ -järku Besseli funktsiooni võib esitada integraalina [21, lk 360] kui

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta$$

ja Besseli funktsioonide suletuse tingimusest [26, lk 696], on võimalik ilma takistuseta lainevälja jaoks avaldada

$$A'_0(k_\rho, k_\varphi) = \frac{2\pi}{k \sin \theta} \delta(k_\rho - k \sin \theta). \quad (3.15)$$

Vaba ruumi sageduskoste Fresneli lähenduses (2.15) avaldub silindrilistes koordinaatides

$$\chi(k_\rho, k_\varphi, z) = \exp \left[ -ikz + i \frac{k_\rho^2}{2k} z \right]$$

ning vastavalt üldavaldisele (2.18) avaldub difrageerunud laineväli kujul

$$\Psi(\rho, \varphi, z) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 e^{-ikz} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty A_0(k_\rho, k_\varphi) e^{\frac{iz}{2k} k_\rho^2} e^{-ik_\rho \rho \cos(\varphi - k_\varphi)} k_\rho dk_\rho dk_\varphi.$$

Arvestades sagedusesitust (3.14), kus eraldatud ilma takistuseta ja takistuselt lähtuvad laineväljad, (3.15) põhjal

$$\Psi'(\rho, \varphi, z) = e^{-ikz + i \frac{k}{2} \sin^2 \theta \cdot z} J_0(k \sin \theta \cdot \rho)$$

ja

$$\Psi''(\rho, \varphi, z) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 e^{-ikz} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty A''_0(k_\rho, k_\varphi) e^{\frac{iz}{2k} k_\rho^2} e^{-ik_\rho \rho \cos(\varphi - k_\varphi)} k_\rho dk_\rho dk_\varphi,$$

nii et

$$\Psi(\rho, \varphi, z) = \Psi'(\rho, \varphi, z) - \Psi''(\rho, \varphi, z). \quad (3.16)$$

Kuivõrd antud tulemus 3.16 on mitmed integraalid, mis ei avaldu analüütiliselt, siis edaspidi on lahendatud ülesannet numbriliselt. Arvutusteks kasutatud *Mathcad*'i töölehe väljatrükk on toodud lisas C ja tulemused vormistatud joonisel 3.5. Lainevälja jaoks on kasutatud samu parameetreid, mis eelmises etapis: (3.7), (3.8).

Algoritm baseerub *Mathcad*'i kiirel Fourier' teisendusel kompleksel kujul. Laineväli on arvutatud Fresneli difraktsiooni valemite (2.7), (2.15) ja (2.18) põhjal. Antud algoritm on oluliselt aeglasem ja märksa nõudlikum arvuti mälumahu suhtes, kui eelmises punktis kasutatud lisas B ära toodud *Mathcad*'i tööleht. Ilmselt vastava

algoritmi teostamine tulevikus mõnes programmeerimiskeeles annaks töökiiruse ja mälu optimaalsema kasutamise pealt olulist võitu.

Seoses diskreetimisega üle lõpliku tasandi ilmneb algoritmis puudus, mis väljendub lainevälja äärtelt levivatest häiritustest, millel puudub antud kontekstis füüsikiline põhjendus (vt joonis 3.5 a ja b, kui  $z = 320 \text{ mm}$ ). Seletatav on see sellega, et diskreetse Fourier' pöörde puhul saadud spekter vastab perioodilisele signaalile ja niisugustes arvutustes me tegelikult modelleerime laineväljade difraktsiooni kõrvutipaiknevatest alusmaatriksitest koosnevalt tasandilt [26, lk 914–917].

Probleemi aitaks vältida, kui valida suurem alusmaatriks lainevälja arvutamiseks ning rakendada esialgsele laineväljale täiendavat apertuuri. See aga nõuaks oluliselt rohkem arvutusressurssi. Antud simulatsioonis ei saa sellist apertuuri rakendada, kuivõrd kasutatud alusmaatriksi suuruse juures jääks selle lainevälja kirjeldav osa liiga väikeseks. On eeldatud, et tehtav viga lainevälja keskosas ei ole suur.

Arvestades sellega, et takistustest tekkivate varjude kontrastsus on suhteliselt madal, võib parema eristatuse saamiseks kasutada meetodit, mille puhul lahutatakse takistustega registreeritud difraktsioonipildist

$$I = \Psi\Psi^* = (\Psi' - \Psi'')(\Psi' - \Psi'')^*$$

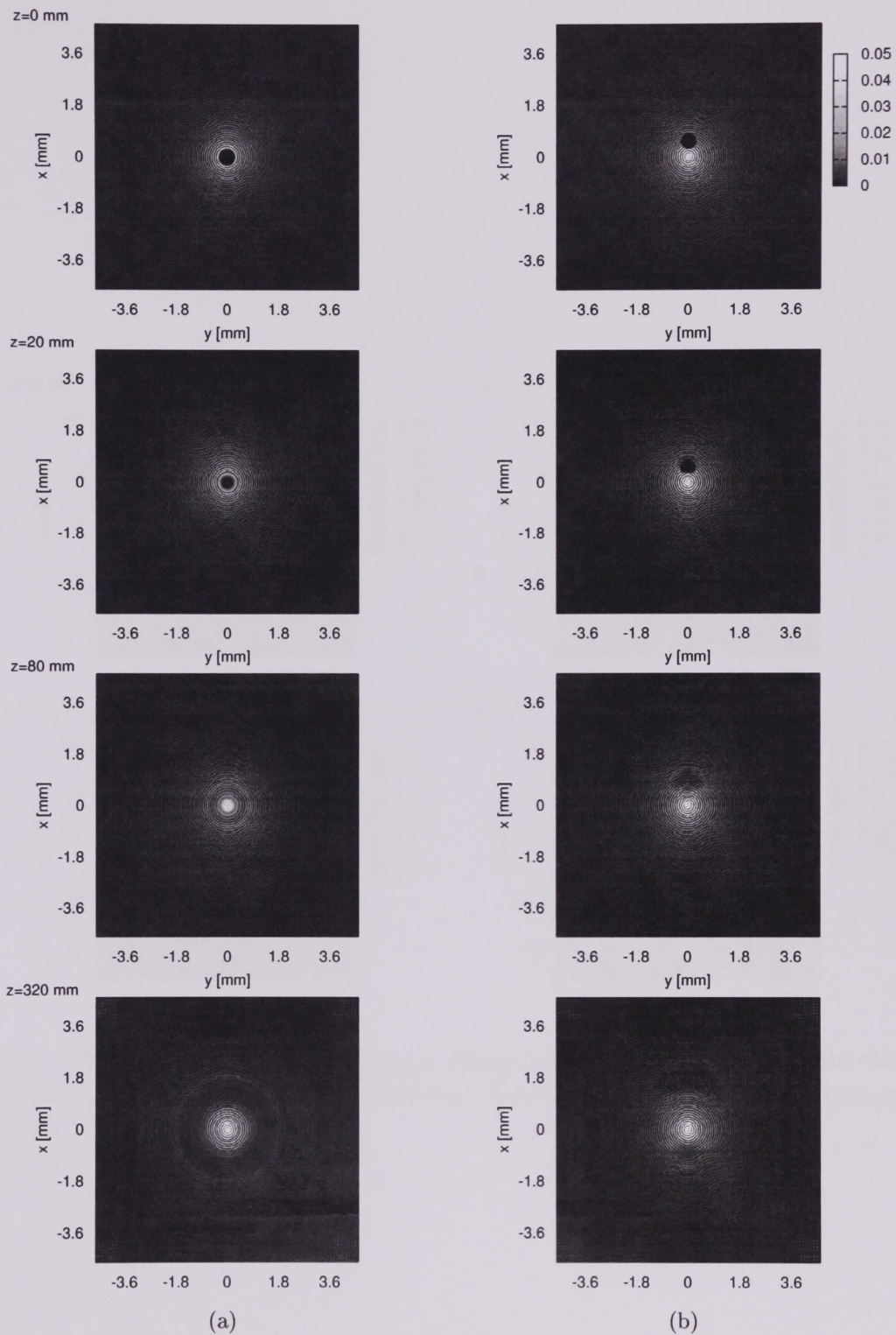
intensiivsuse jaotus

$$I' = \Psi'\Psi'^*$$

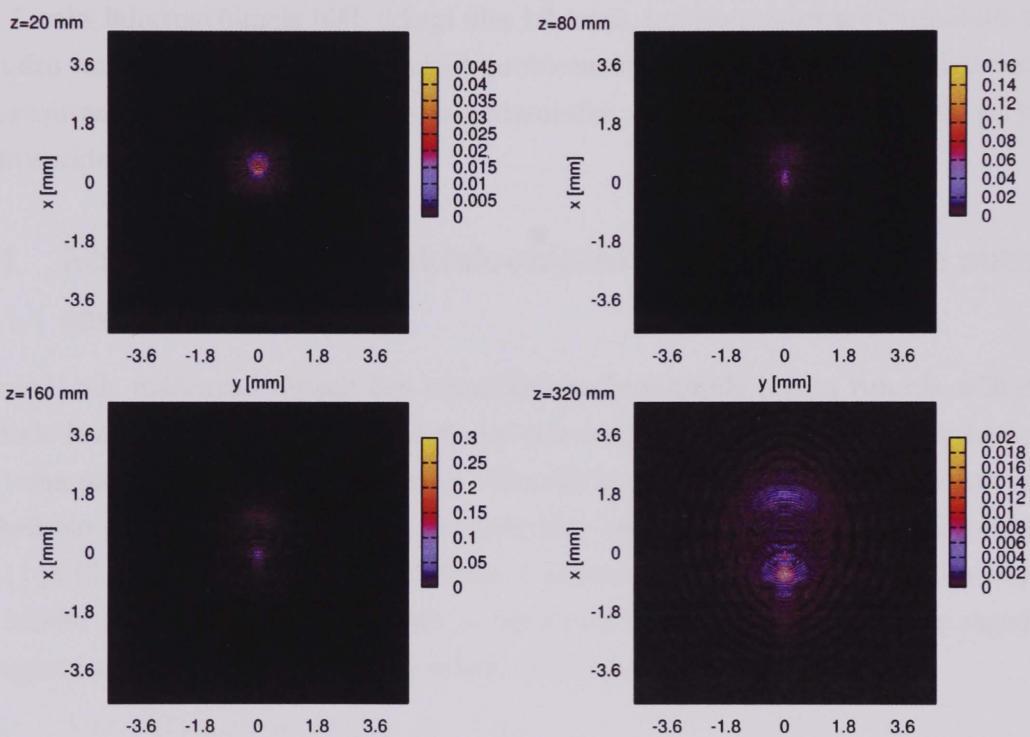
juhul, kui takistused puuduvad. Sedasi saadud intensiivsuste vahe avaldub laineväljade kaudu kui

$$I - I' = -2\text{Re}(\Psi'\Psi''^*) + \Psi''\Psi''^*, \quad (3.17)$$

kus  $\Psi''$  on ainult takistuselt lähtuv laineväli, mis esialgsest laineväljast on maha lahutatud. Edaspidi on kasutatud antud intensiivsuste vahe (3.17) absoluutväärtust. Joonisel 3.6 on ära toodud vastav tulemus samade parameetritega läbi viidud simulatsiooni kohta, mis eelnevalt toodud joonisel 3.5b.



Joonis 3.5: Intensiivsuse jaotus vastavalt  $z = 0, 20, 80$  ja  $320$  mm kaugusel takistusest: (a) – takistus paikneb tsentris,  $x_0 = 0 \mu\text{m}$ ; (b) – takistus nihutatud läbimõõdu võrra  $x$ -telje suunas,  $x_0 = 549 \mu\text{m}$ . (Et tuua paremini välja difraktsioonipildi struktuuri, on kõik suhtelised intensiivsused  $\geq 0.05$  kujutatud valgena, võrdluseks tsentraalse maksimumi suhteline intensiivsus  $J_0^2(0) = 1$ .)



Joonis 3.6: Takistusega ja takistuseta intensiivsuse jaotuste vahe absoluutväärtus erinevatel kaugustel  $z$ . Takistus nihutatud läbimõõdu võrra  $x_0 = 549 \mu\text{m}$ .

## 4 MIKROOSAKESTE RUUMILINE HOLOGRAAFIA

Eelmises peatükis näidati ja kirjeldati, kuidas koonilises laineväljas paiknevalt takistuselt tekib intensiivsusaotus, kus on märgata kahte varju, illustreeriti Besseli kimbus toimuva interferentsi iseloomu ning põhiolemust. Järgnevalt huvitab see, kuidas saab difraktsioonipildi põhjal kindlaks teha laineväljas paiknevate takistuste mõõtmeid ja asukohti mingil antud ajahetkel. Oleks oluline teada, kui suuri või kui lähedasi objekte võiks olla veel võimalik eristada.

Lisaks lahutusvõimele jääb ikkagi üles küsimus, kuidas määrata võimalikult täpselt ära varjude asukohad. Siia alla käib probleemistik, mis käsitleb füüsikaliste seoste ärakasutamist pildi kontrastsuse suurendamiseks, kuid ka pilditöötluslikult varjude kontuuride määramist.

### 4.1 Mikroosakeste difraktsioonipildi sõltuvus osakese suurusest

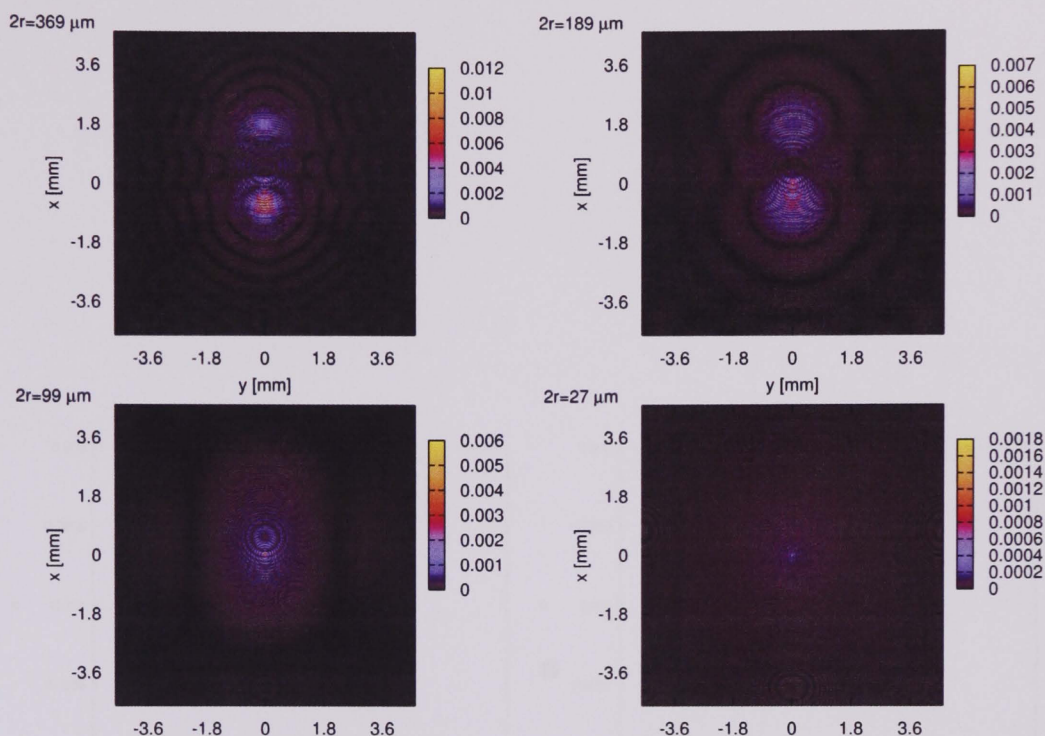
Seosed, mis määravad täpselt ära intensiivsusiinimumide leviku ruumis, sõltuvad ilmselt lisaks koonilist lainevälja defineerivale nurgale  $\theta$  nii takistuse asukohast kui ka tema mõõtmetest. Sellegipoolest on võimalik anda esialgne hinnang osakeste omavahelisele paiknemisele kasutades geomeetrilise optika lähenduse tulemusi valemite (3.1) ja (3.2) näol; seda eelkõige väikeste  $z$  väärtuste korral. Siiski tuginedes Besseli  $J_0$  kimbu silindrilisele sümmeetriale ja tema nurkspektri mittesõltumisele sageduse tangentsiaalsest komponendist  $k_\varphi$  valemi (3.15) järgi

$$A'_0(k_\rho, k_\varphi) = \frac{2\pi}{k \sin \theta} \delta(k_\rho - k \sin \theta),$$

on takistuse, mille asukoht määratud tasandil  $z_0$  polaarkoordinaatides  $(\rho_0, \varphi_0)$ , polaarnurk  $\varphi_0$  otseselt määratav difraktsioonipildist. Nii ongi näha takistuse puhul, mis ei paikne  $z$ -teljel, kahe varju liikumine raadiusvektori sihis, kusjuures üks varjudest liigub raadiusvektori suunas lainevälja keskpunktist eemale ning teine vastassuunas.

Siinkohal on arvutisimulatsioonis vaatluse all difraktsioon mikroosakeselt kui häiritus Besseli kimbus ja selle ulatuse muutumine sõltuvalt osakese mõõtmetest. Kasutatud on sealjuures samu parameetreid lainepikkuse, tasalainete lainevektorite ja  $z$ -telje vahelise nurga ning digitaliseerimise sammu jaoks, mis kahes eelnevas punktis (3.7).

Takistuse jaoks, mis on nihutatud  $z$ -teljelt  $x_0 = 549 \mu m$  võrra eemale, on erinevate diameetrite korral toodud lahutatud difraktsioonipildid joonisel 4.1. Märgata



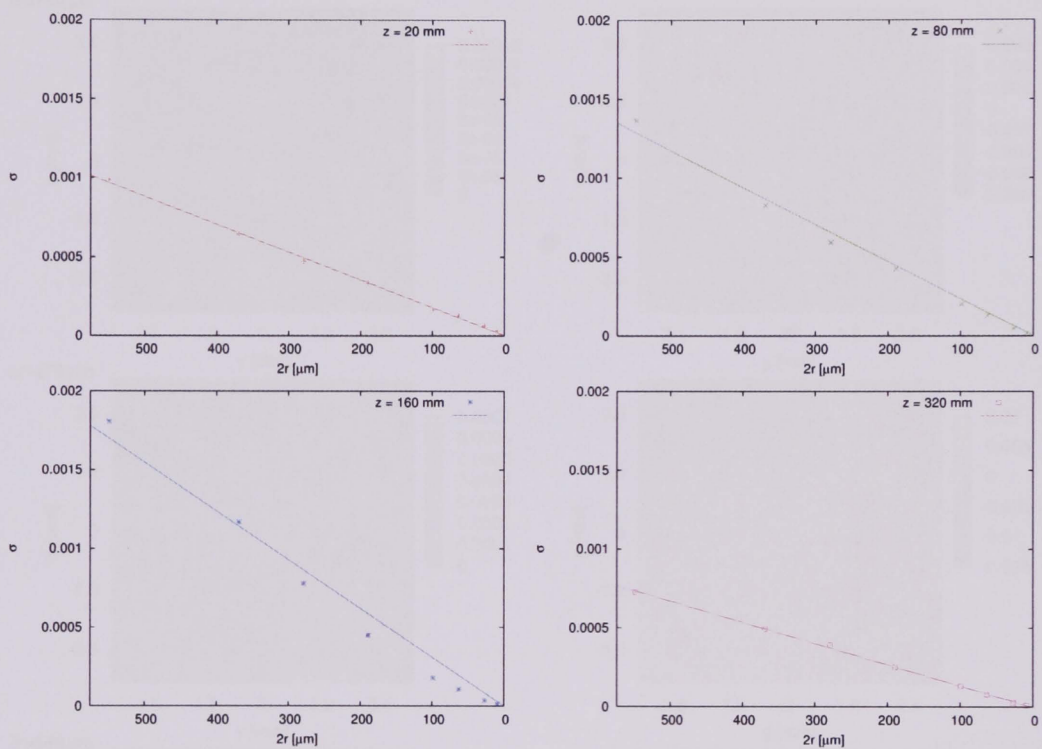
Joonis 4.1: Lahutatud intensiivsusjaotus kaugusel  $z = 320 \text{ mm}$  takistusest erinevate takistuste läbimõõtude korral. Takistus nihutatud  $x$ -telje suunas  $x_0 = 549 \mu\text{m}$  võrra.

on seda, et osakese mõõtmete vähenedes algselt konkreetsed varjud difraktsioonipildis hajutatakse üle tasandi ning vahe puhta Besseli ja difraktsioonipildi vahel väheneb. Viimast asjaolu ilmestavad ka graafikud joonisel 4.2, kus on toodud lahutatud intensiivsuse väärtused, mis ruutkeskmistatud üle  $2^{10} \times 2^{10}$  laineväljamaatriksi.

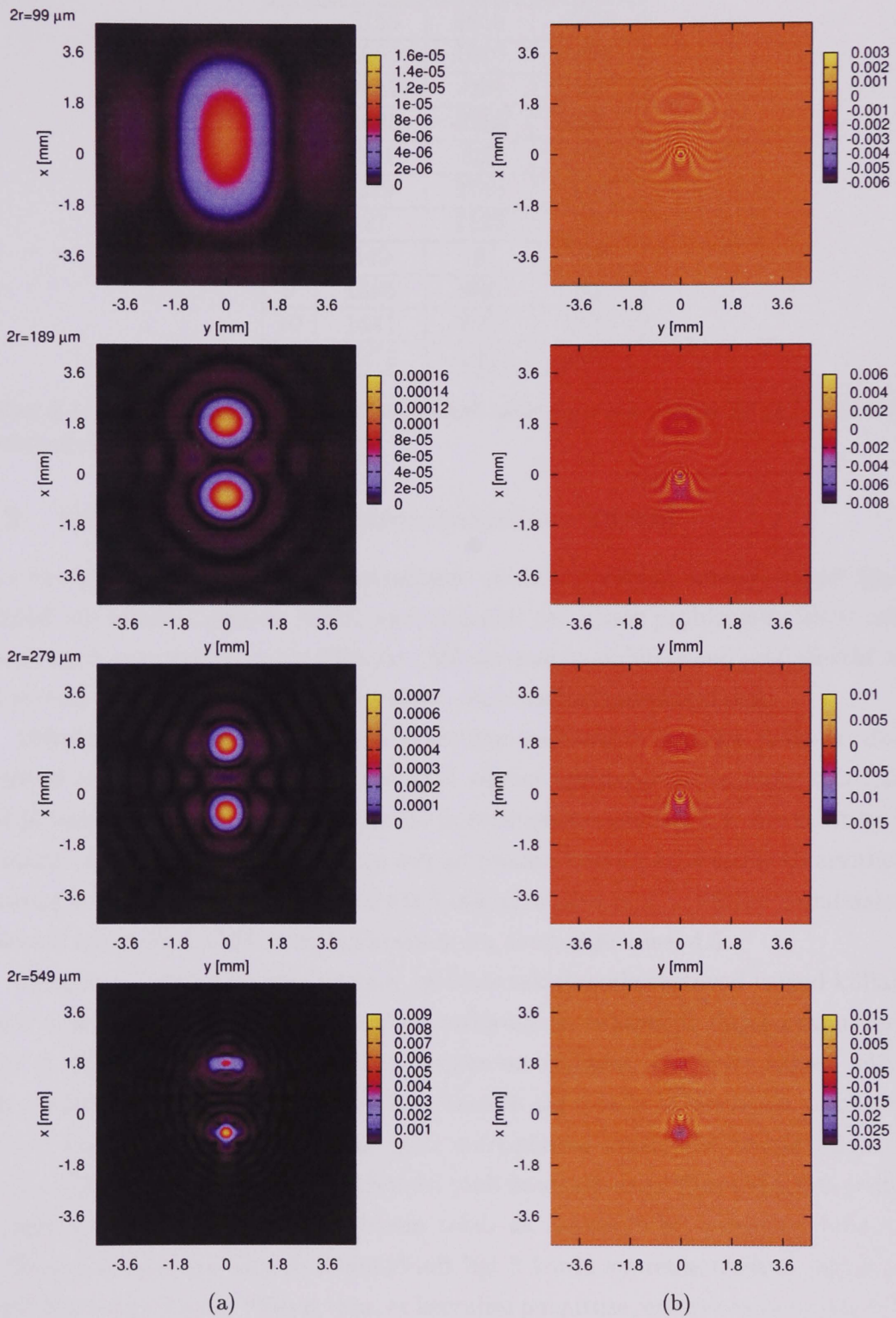
Jooniselt 4.1 ilmneb ka asjaolu, et takistuse läbimõõdu vähenedes, on lahutatud intensiivsus määratud liikme  $2\text{Re}(\Psi'\Psi''^*)$  kujuga, mis intensiivsuste vahes (3.17),

$$I - I' = -2\text{Re}(\Psi'\Psi''^*) + \Psi''\Psi''^*,$$

vastab takistuselt lähtuva lainevälja  $\Psi''$  ja algse Besseli besseli kimbu  $\Psi'$  omavahelelisele interferentsile. Seega takistuse mõõtmete vähenemisel on teatud osakese suuruse juures täheldatav varjude kuju muutus lahutatud difraktsioonipildis: vari, mis on teisel pool lainevälja tsentrit, saab nõgusa kontuuri. Siinjuures on täheldatavat säärane nähtus antud koonilise lainevälja parameetrite juures, kui takistuse läbimõõt väiksem kui  $2r \leq 270 \mu\text{m}$ . Vastavad liikmed,  $\Psi''\Psi''^*$  ja  $2\text{Re}(\Psi'\Psi''^*)$ , on eri kauguste jaoks välja rehkendatud joonisel 4.3.



Joonis 4.2: Puhta Besseli kimbu ja häiritud Besseli kimbu intensiivsusaotuse ruutkeskmistatud erinevuse vähenemine osakese läbimõõdu vähenedes erinevatel kaugustel takistusest. Takistuse asukoht  $x_0 = 549 \mu\text{m}$ .



Joonis 4.3: (a) – Difraktsioonipilt ainult takistuselt lähtuvalt laineväljalt,  $\Psi'\Psi'^*$ , ning (b) – interferents takistuselt lähtuva lainevälja ja ilma takistuseta lainevälja vahel,  $2\text{Re}(\Psi'\Psi'^*)$ , kaugusel  $z = 320 \text{ mm}$  takistusest erinevate takistuse läbimõõtude korral.

$n$	$x_0 [\mu m]$	$y_0 [\mu m]$	$2r [\mu m]$
1	-3159	2016	369
2	-3051	1620	279
3	-2637	-900	369
4	-1026	-2907	369
5	-531	450	189
6	-279	2745	189
7	-27	2196	27
8	549	0	549
9	1305	936	63
10	1341	-2097	279
11	1971	-1053	279

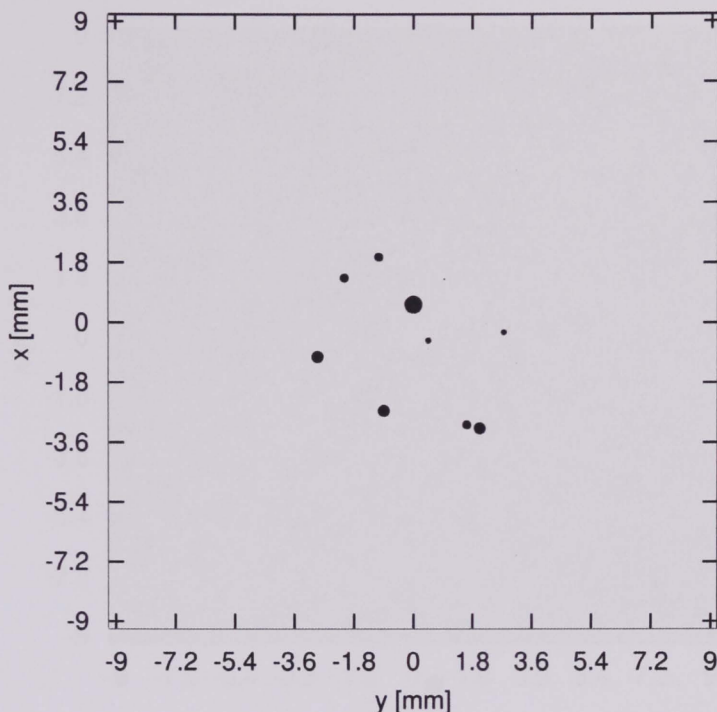
Tabel 4.1: Joonise 4.5 koostamisel kasutatud takistuste koordinaadid ja läbimõõdud kompuutersimulatsioonis.

## 4.2 Difraktsioonipilt mitme takistuse korral

Kui ühe takistuse korral lasub raskuspunkt pilditöötluslikult varjude täpsel fikseerimisel, siis mitme takistuse puhul osutub ilmselt peamiseks probleemiks ühele takistusele kuuluvate varjupaaride leidmine. Mitme osakese puhul lisanduvad efektid, mis on seotud eri takistustel lähtuvate lainete omavahelise interferentsiga.

Difraktsiooni mitmete koonilises laineväljas paiknevate osakeste jaoks on illustreeritud arvutisimulatsioonis meelevaldselt valitud takistuste jaoks, mille koordinaadid ja läbimõõdud on toodud tabelis 4.1 ja paiknemine joonisel 4.4. Arvutusteks kasutatud endiselt *Mathcad*'i töölehte, mis on toodud lisa C, kuid laineväli arvutatud senisest 4 korda suuremal alusmaatriksil ehk võetud  $n = 2^{11}$ . Vastav simulatsiooni tulemus kaugusel  $z = 240 \text{ mm}$  takistustest on toodud joonisel 4.5.

Joonise 4.5 põhjal on intensiivsuse jaotuses takistustele vastavad varjud küllaltki hästi eraldatavad isegi antud konfiguratsioonis ka osakestelt järjekorranumbriga 1 ja 2, millede vaheline minimaalne kaugus on väiksem, kui neist kahest väiksema osakese raadius. Küll ei ole pildilt võimalik täheldada takistustele numbritega 7 ja 9 vastavaid varje, mis on ka igati ootuspärane arvestades nende läbimõõte ning eelmises alapeatükis leitud tulemusi pildi kontrastsuse sõltuvuse kohta osakese läbimõõdust (vt joonis 4.2). Probleem tekib ka osakesele nr 5 vastava teise varju fikseerimisega, mis langeb läbimõõdult ligi 3 korda suurema osakese varju lähedusse lainevälja keskel. Võib arvata, et keerulise paigutuse, erineva kuju ja suurusega lähedaste takistuste, korral on ka lahutatud pildist küllaltki raske välja lugeda midagi, mis isegi meenutaks esialgset objekti.



Joonis 4.4: Tabelis 4.1 toodud takistuste paiknemine mitme osakesega difraktsiooni simulatsioonis.

### 4.3 Mikroosakeste ruumiline holograafia

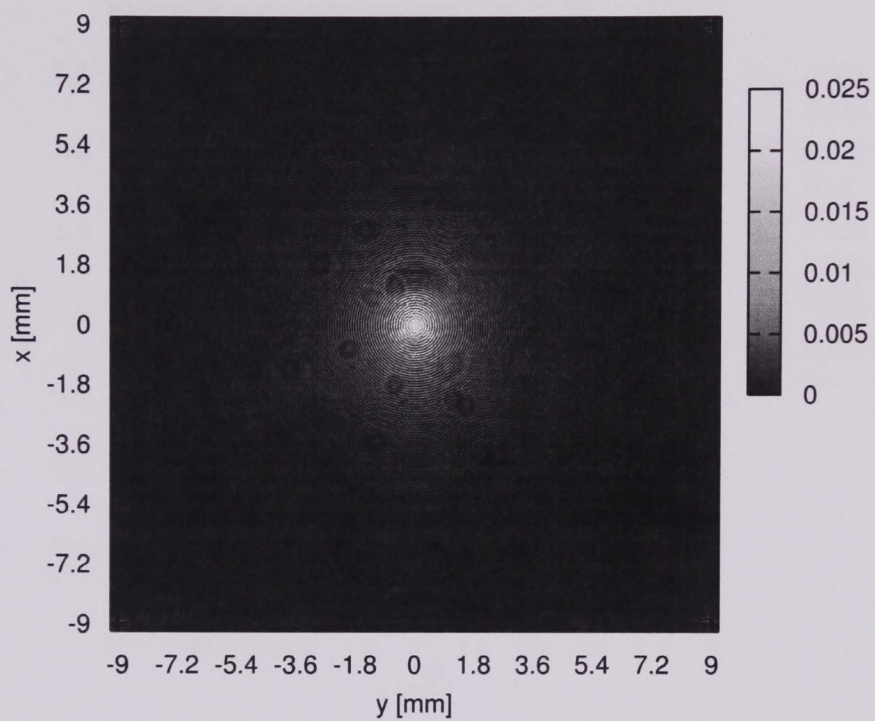
Kui mõõta lisaks intensiivsusele ära ka lainevälja faas  $z$ -tasandil – näiteks kasutades P. Gabolde ja R. Trebino STRIPED FISH-i [6] või digitaalse holograafia meetodit –, on ainult takistuselt lähtuv laineväli  $\Psi''$  lihtsasti arvutatav vahest

$$\Psi'' = \Psi - \Psi',$$

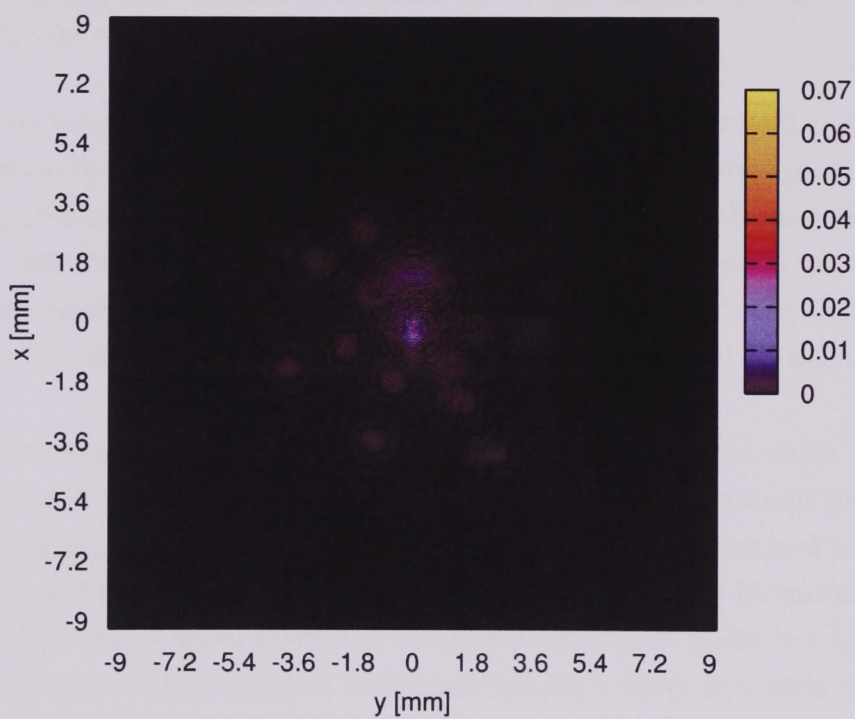
kus  $\Psi$  on mõõdetud laineväli koos takistustega ja  $\Psi'$  on laineväli ilma takistusteta. Nagu jooniselt 4.3a võib veenduda, vastab sellisel juhul difraktsioonipildis  $I'' = \Psi''\Psi''^*$  ühele takistusele kaks või üks selgelt eristuvat maksimumi olenevalt takistuse suurusest, kaugusest ning konkreetse Besseli kimbu parameetritest.

Teades tasandil  $z_1$  (vt joonis 3.1) lainevälja  $\Psi(x, y, z_1)$  on võimalik Fresneli difraktsioonivalemeid (2.17), (2.18) kasutades arvutada välja laineväli meelevaldsel tasandil  $z$ . Selleks, et arvutada laineväli tasandil  $z_0 < z_1$ , tuleb valida antud valemities  $z < 0$ .

Arvutades laineväljad teatud sammu tagant tasanditel  $z$ , võib konstrueerida lainevälja terves kolmemõõtmelises ruumis ning sedasi ära määrata takistuste täpse asukoha ja mõõtmed. See on aga väga arvutusmahukas ülesanne.

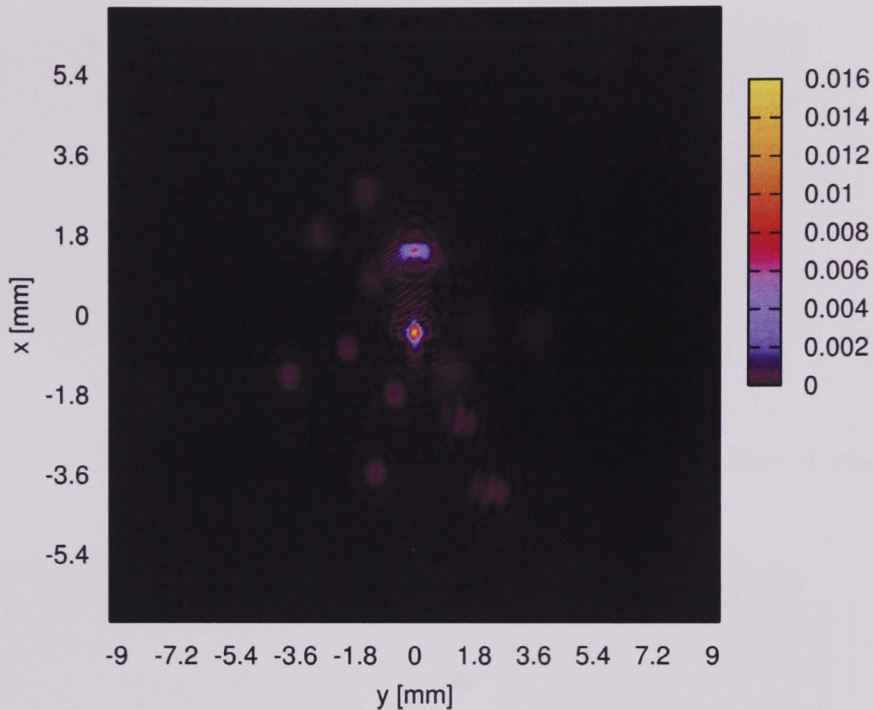


(a)



(b)

Joonis 4.5: Difraktsioon koonilises laineväljas mitmelt takistuselt: (a) – intensiivsusaotus kaugusel  $z = 240$  mm takistustest, (b) – intensiivsuse erinevus võrreldes takistusteta olukorraga. Takistuste paiknemine toodud joonisel 4.4.

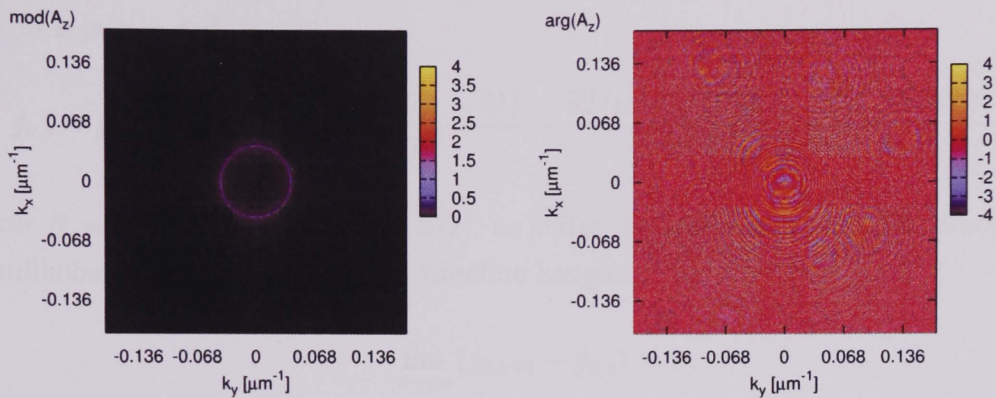


Joonis 4.6: Interferents takistustelt lähtuvas laineväljas kaugusel  $z = 240 \text{ mm}$ , osakeste paiknemine vastavalt joonisele 4.4.

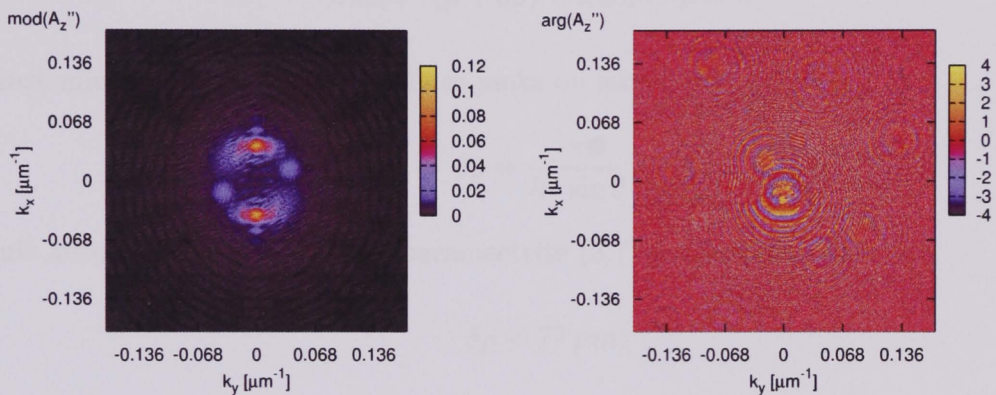
Kasutades holograafilisi meetodeid lainevälja  $\Psi$  mõõtmiseks tasandil  $z_1$ , siis leitav ka difraktsioonipilt  $\Psi''\Psi''^*$  juhu jaoks analoogselt joonisel 4.3a kujutatuga, mis vastab tasandil  $z_0$  läbilaskvusefunktsioonile  $T^+ = 1 - T$ . See võimaldab vaadelda ainult takistustelt lähtuvate lainete interferentsi ilma algse lainevälja poolt põhjustatud segava modulatsioonita, mis avaldub intensiivsuste vahes  $I - I'$ , mis defineeritud valemiga (3.17). Joonisel 4.4 kujutatud takistustele vastavat pilti on näha joonisel 4.6.

On eelnevalt näidatud valemi (3.15) põhjal, et Besseli kimbule, mille lainevektori moodul on  $k$  ja koonust defineeriv nurk  $\theta$ , vastab Fourier' tasandil tasalainete nurkspektri  $A'(k_\rho, k_\varphi)$  näol rõngas raadiusega  $k \sin \theta$ . Seega igasugused takistused kimbu teel avalduvad häiritustena rõngakujulises nurkspektris. Järgnevalt on seda illustreeritud juba eelpool kasutatud takistuste paiknemise jaoks, mis kujutatud joonisel 4.4. Joonisel 4.5a kujutatud difraktsioonipildile vastava lainevälja  $\Psi(x, y, z)$  spektri  $A(k_x, k_y, z)$  moodul ja faas on toodud joonisel 4.7 ning vastavalt joonise 4.6  $\Psi''(x, y, z)$  spektri  $A''(k_x, k_y, z)$  jaoks joonisel 4.8.

Kui tasalainele vastab Fourier' tasandil punkt ja difraktsioonile laineväljas häiritused selle punkti ümber, siis koonilises laineväljale vastavale rõngale annab difraktsiooni tekitavate osakeste kohta käivat informatsiooni rohkem paigutada ja seda ka



Joonis 4.7: Joonisel 4.5a kujutatud lainevälja  $\Psi$  Fourier' teisenduse  $A$  moodul ja faas kaugusel  $z = 240 \text{ mm}$  takistusest.



Joonis 4.8: Joonisel 4.6 kujutatud lainevälja  $\Psi''$  Fourier' teisenduse  $A''$  moodul ja faas kaugusel  $z = 240 \text{ mm}$  takistusest.

paremini dešifreerida. Sagedusesituses ei esine ka sellist otsest osakese suurust piiravat kriteeriumi, nagu võib leida intensiivsusaotusest lähtudes valemi 4.1 näol. Kuid sagedusesituse kaudu lähenemine ulatab juba üle antud töö mahu ning on üheks võimalikuks arengusuunaks tulevikuks.

#### 4.4 Lahutusvõime mikroosakeste ruumilisel holograferimisel

Lahutusvõime täpne defineerimine osutus märksa keerulisemaks kui algselt oli arvatud. Ühele osakesele vastav aparaatfunktsioon on arvutatav ühe või kahe objekti korral, suuremate osakeste arvu juures osutub probleem juba põhimõtteliselt matemaatiliselt keerukaks.

Üksik takistus võib olla veel eristatav üldiselt laineväljast, kui tema mõõtmed on suuremad, kui Besseli funktsiooni kahe järjestikuse nullkoha kaugused osakese asukohas. Arvestades, et Besseli funktsiooni  $J_\nu$   $s$ -ndas nullkoht avaldub juhul, kui

$s \gg \nu$  ja  $\mu = 4\nu^2$ ,

$$j_{\nu,s} \approx \beta - \frac{\mu - 1}{8\beta} - \frac{4(\mu - 1)(7\mu - 31)}{3(8\beta)^3} - \frac{32(\mu - 1)(83\mu^2 - 982\mu + 3779)}{15(8\beta)^5} - \dots,$$

kus  $\beta = (s + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{4})\pi$  [21, lk 371], on leitav funktsiooni  $J_0$  kahe kõrvutiasetseva nullkoha,  $J_0(j_{0,s+1})$  ja  $J_0(j_{0,s})$ , vaheline kaugus

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (j_{0,s+1} - j_{0,s}) = \pi.$$

Seega saab koonilise lainevälja avaldise (3.11) põhjal kirjutada

$$k \sin \theta \cdot (\rho + \delta\rho) - k \sin \theta \cdot \rho = \pi,$$

kust minimaalse eristatava raadiuse jaoks on leitav, et

$$\delta\rho = \frac{\pi}{k \cdot \sin \theta}, \quad (4.1)$$

mis antud arvutiekspriimendi parameetrite (3.7) juures omab väärtust

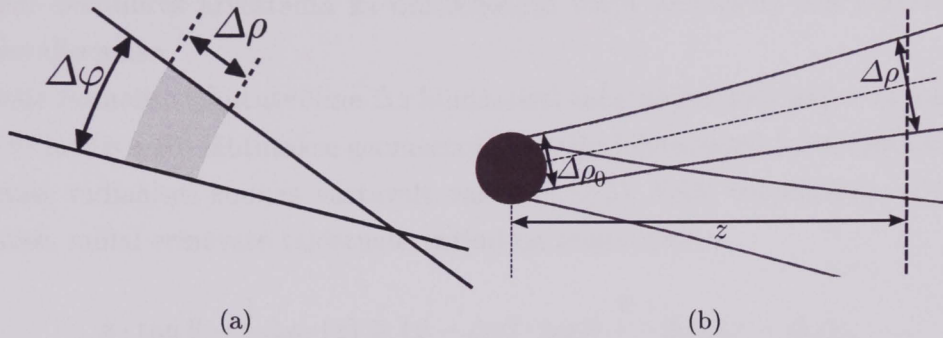
$$\delta\rho \approx 77 \mu\text{m}.$$

Suurus  $\delta\rho$  määrab ära takistuse mõõtme, millest alates on takistus lõikab Besseli kimbust välja tüki, mille ulatus piki radiaalsuunda on suurem kui ühe rõnga läbimõõt, seega ka intensiivsusaotuses takistuse paiknemise tasandil eristatav.

Järgnevalt on skitseeritud meetod, mille järgi on kaks kõrvutiasetsevat osakest difraktsioonipildis veel eristatavad. Antud käsitluses on eraldi vaadeldud difraktsiooni polaarses ja radiaalses suunas. Lähtutud on difraktsiooni hindamisel on lähitud elementaartakistusest kujuga, mis toodud joonisel 4.9a. Sellisel juhul on osake koordinaatidega  $(\rho_0, \varphi_0, z_0)$  määratud tema mõõtmega radiaalsuunas  $\Delta\rho_0$  ja nurkläbimõõduga  $\Delta\varphi_0$ . Fresnelli difraktsiooni tõttu takistuse servalt, hakkab vari ruumis hajuma. Võib öelda, et kaks osakest on veel eristatavad kui nende varjude kaugus tasandil  $z$  on vastavalt  $\Delta\rho$  või  $\Delta\varphi$ .

Selleks, et hinnata varju laienemist difraktsioonipildis, on lähendatud probleemi tasalaine difraktsiooniga pilult, mille läbilaskvus muutub radiaalsuunas Gaussi kõvera järgi. On teada ([16, lk 273–275], [14, lk 133–134]), et apertuurilt, mille läbilaskvusfunktsioon on kirjeldatav tasandil  $z_0$  Gaussi funktsiooniga

$$T(\rho) = e^{-\frac{\rho^2}{2r_0}},$$



Joonis 4.9: (a) – Lahutusvõime määravad  $z$ -teljega ristivas tasandis ära miroosakese varju ulatus radiaalsuunas  $\Delta\rho$  ja tema nurkläbimõõt  $\Delta\varphi$ . (b) – Takistuse varju ulatuse  $\Delta\rho_0$  laienemine radiaalsuunas difraktsiooni tõttu.

kus  $r_0$  on kimbu poollaius  $e^{-1}$  tasemel maksimumist, on Fresneli difraktsioon (2.17) sellelt takistuselt täpselt lahenduv. Intensiivsusjaotus sõltub kaugusest  $d$  osakese paiknemise tasandist piki tasalaine lainevektori suunda kui

$$I(\rho, d) = I_0 \left[ \frac{r_0}{r^2(d)} \right] e^{-\frac{\rho^2}{r^2(d)}},$$

kus levikusuunaga risti olevas tasandis kimbu poollaius avaldub kui

$$r(d) = \sqrt{r_0^2 + \left( \frac{d}{k \cdot r_0} \right)^2}. \quad (4.2)$$

Viimase avaldise (4.2) põhjal, võttes  $r_0$ -i võrdseks osakese raadiusega ja arvestades, et kaugus osakesest piki Besseli kimpu moodustavate tasalainete lainevektorite sihti  $d = \frac{z}{\cos\theta}$  ning  $\theta \ll 1$ , saabki hinnata lahutusvõimet sõltuvana  $z$ -koordinaadist:

$$\Delta\rho(z) = \sqrt{\Delta\rho_0^2 + \left( \frac{4 \cdot z}{k \cdot \Delta\rho_0 \cdot \cos\theta} \right)^2}. \quad (4.3)$$

Kui  $\Delta\rho_0 = 279 \mu m$ ,  $k = \frac{2\pi}{0.6} \mu m^{-1}$ ,  $\theta = 0.223^\circ$  ja  $z = 240 mm$  – mis vastab tabelis 4.1 osakesele nr 2 arvutatud difraktsioonipildile joonistel 4.5 ja 4.6 –, siis valemi 4.3 järgi

$$\Delta\rho(z) \approx 431 \mu m.$$

Lahutusvõime hindamiseks polaarnurga  $\Delta\varphi$  jaoks saab põhimõtteliselt lähtuda samadest kaalutlustest, mis radiaalsuunalise lahutusvõime  $\Delta\rho$  jaoks, kuid arvestades, et geomeetrilise optika lähenduses muutub ühele takistusele vastava varju laius lineaarselt mööda  $z$ -telge. Seoses Besseli kimpude spetsiifiliste omadustega

peaksime sealjuures arvestama ka difraktsiooni varju servadelt, mis muudab pilti veel keerulisemaks.

$z$ -telje suunalise lahutusvõime  $\Delta z$  hindamisel kahe järjestikku paikneva takistuse vahel (vt joonis 4.10) lähtutakse geomeetrilise optika lähendusest arvestades ka varju laienemist radiaalses suunas vastavalt valemile (4.3). Selle tulemusena võib leida tingimuse, millal erinevate takistuste varjud on eristatavad:

$$z \cdot \tan \theta - \frac{1}{2} \Delta \rho_1(z) \geq (z - \Delta z) \cdot \tan \theta + \frac{1}{2} \Delta \rho_2(z - \Delta z),$$

kus  $\Delta \rho_1(z)$  ja  $\Delta \rho_2(z)$  on vastavalt esimese ja teise osakese varju radiaalsuunaline ulatus sõltuvana  $z$ -koordinaadist, mis on määratud valemiga (4.3). Avaldades antud valemist  $\Delta z$ , võib leida piirtingimuseks

$$\Delta z(z) = \frac{\tan \theta \cdot \Delta \rho_1(z) - 2\vartheta z}{2[\tan^2 \theta - \vartheta]} + \frac{\sqrt{[\tan \theta \cdot \Delta \rho_1(z) - 2\vartheta z]^2 - [\tan^2 \theta - \vartheta][\Delta \rho_1^2(z) - \Delta \rho_2^2(z)]}}{2[\tan^2 \theta - \vartheta]}, \quad (4.4)$$

kus  $\vartheta = 4(k \cdot \Delta \rho_{20} \cos \theta)^{-2}$ .

Leides valemi (4.4) põhjal hinnangu  $\Delta z$  jaoks tasandil  $z = 1024 \text{ mm}$ , kui takistuste mõõtmed  $\Delta \rho_{10} = \Delta \rho_{20} = 549 \mu\text{m}$ :

$$\Delta z \approx 216 \text{ mm}.$$

Difraktsioon ühelt selliselt takistuselt on toodud eelnevalt joonisel 3.3. Märkime veel, et selline suur määramatus on põhjustatud konkreetsest parameetrite valikust, kus Besseli kimpu moodustavate tasalaine nurk  $z$ -teljega on väga väike,  $\theta = 0.223^\circ$ . Kui valiksimine nurga näiteks  $\theta = 45^\circ$ , siis oleks selline määramatus osakese diameetri suurusjärgus.

Kui vaatleme difraktsiooni mitme takistuse korral üldjuhul, siis võivad erinevatelt takistuselt lähtuvad varjud teatud ruumi piirkonnades kattuda, kuid teistes jälle mitte. Sellisel juhul ei saa lähtuda geomeetrilise optika baasil leitud lihtsatele, kvalitatiiivsetele seostele, vaid tuleb arvestada ka takistuselt lähtuvate lainete omavaheolist interferentsi.

## 5. KOKKUVÕTE

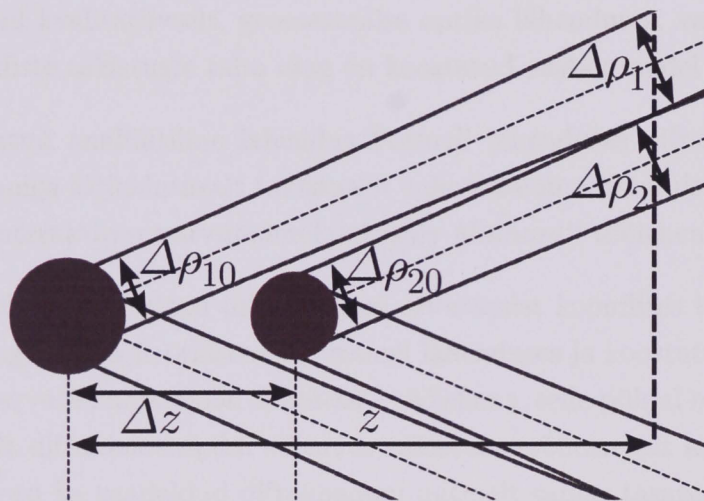
Kõrvaldada on suurim võimalik kaugus, millest kahe objekti varjud eristatavad. Kui kaugus on suurem, siis varjud eristatavad ei ole. Kui kaugus on väiksem, siis varjud eristatavad on. Kui kaugus on võrdne, siis varjud eristatavad on. Kui kaugus on suurem, siis varjud eristatavad ei ole.

Tähtsustada

Kõrvaldada on suurim võimalik kaugus, millest kahe objekti varjud eristatavad.

Varjud eristatavad on, kui kaugus on väiksem, kui kaugus on võrdne, siis varjud eristatavad on.

Kaugus, millest kahe objekti varjud eristatavad, on suurim võimalik kaugus.



Joonis 4.10: Kaks üksteise taga paiknevat takistust on eristatavad veel siis, kui nende varjud kaugusel  $z$  on eristatavad.

## 5 KOKKUVÕTE

Käesolevas töös on uuritud kooniliste laineväljade kasutamist mikroosakeste ruumilise konfiguratsiooni määramiseks, st on otsitud vastust küsimusele, kuidas rakendada Besseli kimpu ruumilises holograafias. Sellise informatsiooni sisaldumist difraktsioonipildis on käsitletud nii intensiivsusaotuse järgi kui ka holograafia meetoditega.

Töö tulemusena:

- on esitatud põgus ülevaade skalaarsete laineväljade difraktsiooni teooriast, täpsemalt Fresneli lähendusest laineväljade difraktsiooni jaoks, ning koonilistest laineväljadest, nende omadustest ja moodustamise meetoditest;
- on uuritud kvalitatiivselt, geomeetrilise optika lähenduses, varjude tekkimist ringikujuliste takistuste taha ning on koostatud vastav mudel *POV-Ray*'s;
- on tuletatud analüütiline lahendus Fresneli lähenduses difraktsioonile kast-funktsiooniga kirjeldatavalt takistuselt kahe tasalaine ristumisalas ja rakendatud see interaktiivses arvutisimulatsioonis *Mathcad*'i töölehenähtel;
- on analüütiliselt uuritud difraktsiooni arvutamist koonilises laineväljas paiknevalt ringikujuliselt takistuselt Fresneli lähenduses ja koostatud vastav interaktiivne arvutisimulatsioon *Mathcad*'i töölehenähtel, selle põhjal on näidatud kvalitatiivselt difraktsioonipildi sõltuvus takistuse mõõtmetest konkreetsetel erijuhtudel, on ka vaadeldud difraktsiooni mitmelt samas tasapinnas paiknevalt eri mõõtmete ja omavahelise kaugusega takistuselt;
- on veendunud, et informatsioon osakese kohta on eraldatav lainevälja intensiivsusest tasandil otsese vajaduseta kasutada tehniliselt keerukamaid ja arvutusmahukamaid digitaalse holograafia meetodeid lainevälja arvutamiseks üle ruumi.

Käesoleva töö autor tänab oma juhendajat Kaido Reivelti, kes on pühendanud märkimisväärselt aega oma ideede ja teadmiste jagamiseks. Tänuavaldused ka TÜ laineoptika professorile akadeemik Peeter Saarile kaasamõtlemast ja täpsustavate selgituste jagamisest ja ka kõigile teistele, kes antud töö valmimise juures toeks ja abiks olnud.

## 6 SUMMARY

### **Spatial holography of microparticles by the use of conical waves**

In this thesis conical waves have been studied to consider their possible applications for determining the spatial configuration of microparticles. Different approaches have been considered for extracting this information.

The following results have been obtained.

- A short overview of the scalar diffraction theory, in particular the Fresnel diffraction theory, and the conical waves, their properties and generation has been given.
- The formation of shadows behind circular obstacle has been studied qualitatively by means of ray optics and an according model has been constructed with *POV-Ray* raytracing application.
- Fresnel diffraction in the crossing of two plane waves from a discrete obstacle with a pupil function of rectangular shape has been analytically solved. An interactive worksheet has been assembled in *Mathcad* for this problem.
- Fresnel diffraction in the Bessel beam from cylindrical obstacle has been analytically considered and an according interactive worksheet has been composed in *Mathcad*. It has been used to show qualitatively the dependence of the diffraction pattern of the size of the obstacles in a couple of examples. Also the diffraction from a plane with multiple obstacles of different size and period has been observed.
- It has been shown that information about particle's location can be extracted from the diffraction pattern without the need for technically complex and intensive calculations of the entire wave by means of digital holography.

## KASUTATUD KIRJANDUS

- [1] J. C. H. Spence, „Diffractive (lensless) imaging,“ kogumikus *Science of Microscopy*, vol 2., P. W. Hawkes, J. C. H. Spence, toimet. (Springer, 2007), lk 1196–1227.
- [2] J. Durnin, „Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory,“ *J. Opt. Soc. Am. A* **4**, 651–654 (1987).
- [3] J. Durnin, J. J. Miceli, Jr., J. H. Eberly, „Diffraction-free beams,“ *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1499–1501 (1987).
- [4] D. McGloin, K. Dholakia, „Bessel beams: diffraction in a new light,“ *Cont. Phys.* **46**, 15–28 (2005).
- [5] C. A. Dartora, K. Z. Nobrega, A. Dartora, H. E. Hernandez-Figueroa, „Superposition of monochromatic Bessel beams in  $(k_\rho, k_z)$ -plane to obtain wave focusing: Spatial localized waves,“ *Opt. Comm.*, **249**, 407–413 (2005).
- [6] P. Gabolde, R. Trebino, „Single-shot measurement of the full spatio-temporal field of ultrashort pulses with multispectral digital holography,“ *Opt. Express* **14**, 11460–11467 (2006).
- [7] P. Guo, A. J. Devaney, „Comparison of reconstruction algorithms for optical diffraction tomography,“ *J. Opt. Soc. Am. A* **22**, 2338–2347 (2005).
- [8] L. Yu, Y. An, L. Cai, „Numerical reconstruction of digital holograms with variable viewing angles,“ *Opt. Express* **10**, 1250–1257 (2002).
- [9] B. Javidi, E. Tajahuerce, „Three-dimensional object recognition by use of digital holography,“ *Opt. Lett.* **25**, 610–612 (2000).
- [10] S. Paško, R. Jó Wicki, „Novel Fourier approach to digital holography,“ *Opto-Electron. Rev.* **10**, 89–95 (2002).
- [11] J. Garcia-Sucerquia, W. Xu, S. K. Jericho, P. Klages, M. H. Jericho, H. J. Kreuzer, „Digital in-line holographic microscopy,“ *Appl. Opt.* **45**, 836–850 (2006).
- [12] W. Xu, M. H. Jericho, H. J. Kreuzer, I. A. Meinertzhagen, „Tracking particles in four dimensions with in-line holographic microscopy,“ *Opt. Lett.* **28**, 164–166 (2003).

- [13] J. Garcia-Sucerquia, W. Xu, M. H. Jericho, H. J. Kreuzer, „Immersion digital in-line holographic microscopy,“ *Opt. Lett.* **31**, 1211–1213 (2006).
- [14] B. E. A. Saleh, M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991).
- [15] P. P. Banerjee, T.-C. Poon, *Principles of Applied Optics* (Irwin, Homewood, Boston, 1991).
- [16] S. A. Akhmanov, S. Yu. Nikitin, *Physical Optics* (Clarendon Press, Oxford, 1999).
- [17] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (Roberts & Co., Englewood, Colorado, 2005).
- [18] H. Sõnajalg, P. Saari, „Valgusimpulsid, mis levivad laienemata, kuid pole solitonid,“ EFS aastaraamat 1996, 49–57 (Tartu, 1997).
- [19] H. Valtna, „Superluminaalsete lokaliseeritud valguslainete tekitamise võimalikkus,“ magistritöö, Tartu Ülikool (Tartu, 2006).
- [20] A. Vasara, J. Turunen, and A. T. Friberg, „Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms,“ *J. Opt. Soc. Am. A* **6**, 1748–1754 (1989).
- [21] F. W. J. Olver, „Bessel Functions J and Y,“ §9.1–§9.5 raamatus *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 10. trükk, M. Abramowitz, I. A. Stegun (toim.-d), (New York, Dover, 1972).
- [22] J. H. McLeod, „The axicon: A new type of optical element,“ *J. Opt. Soc. Am.* **44**, 592–597 (1954).
- [23] G. Indebetouw, „Nondiffracting optical fields: some remarks on their analysis and synthesis,“ *J. Opt. Soc. Am. A* **6**, 150–152 (1989).
- [24] R. P. MacDonald, J. Chrostowski, S. A. Boothroyd, B. A. Syrett, „Holographic formation of a diode laser nondiffracting beam,“ *Appl. Opt.* **32**, 6470–6474 (1993).
- [25] V. P. Koronkevich, I. A. Mikhaltsova, E. G. Churin, Y. I. Yurlov, „Lensacon,“ *Appl. Opt.* **34**, 5761–5772 (1995).
- [26] G. B. Arfken, H. J. Weber, „Bessel Functions,“ §11 raamatus *Mathematical Methods for Physicists*, 6. trükk, (Elsevier Academic Press, 2005).

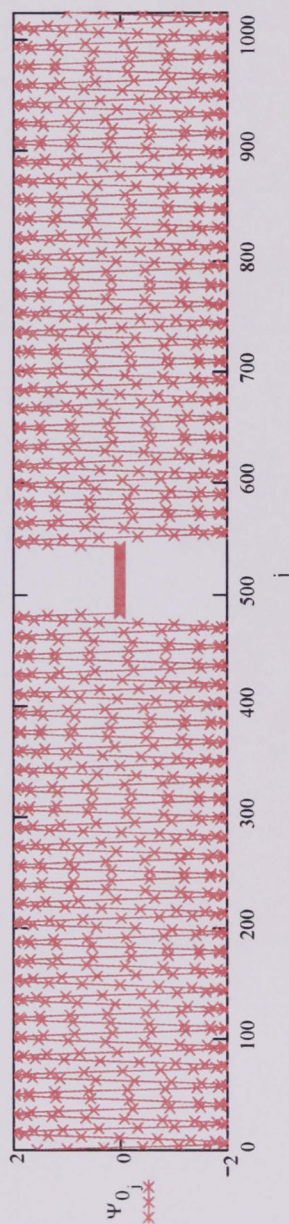
# A LISA: KOONILISE VALGUSKIMBU MUDELI LÄHTEKOOD *POV-RAY'S*

```
#include "colors.inc"
#declare klaas = material{      \\klaasobjektide kirjeldus
  texture {
    pigment {White filter 1}    \\valge läbipaistev
    finish {
      ambient .01 diffuse .05 reflection 0.1 }}
  interior {
    ior 1.5                      \\murdumisnäitaja n=1.5
    media {scattering {         \\kiir nähtavaks
      1 , rgb 0.2*<0.1, 0.1, 0.1> extinction 0.000001 }}}}}
global_settings {
  max_trace_level 10
  photons {                      \\levikusuunaline ray-trace
    count 100000 autostop 0 media 100 max_trace_level 10 }}
camera {
  location <10,5,-30>
  look_at <20,0,0> angle 40 }    \\kaamera vaatab maski keskkoha
//valgusallikas - paralleelne kiirtekimp:
light_source {
  <0,0,0>                        \\valgusallikas koord. algpunktis
  color 0.6*<1,1,1> cylinder radius 4 falloff 4 point_at <5,0,0> }
//aksikon:
cone {
  <6,0,0>, 10,
  <10,0,0>, 0
  material {klaas}
  photons {target reflectionoff refractionon collectoff}
  hollow }
// mask auguga:
difference{
  box{
    <20,-6,-6>, <20,6,6>
    pigment {color White}}
  /*=====*/
  cylinder {
    <19,0.3,0>, <21,0.3,0>, 0.2
    /*<19,0,0>, <21,0,0>, 0.2*/ }
  /*=====*/ }
//ekraan:
box {
  <30,-6,-6>, <30,6,6>
  pigment {color White} }
#declare keskkond = material{      \\järgnev vajalik kiirte nähtavale
  texture {pigment {White filter 1}} \\toomiseks, ilma märksa kiirem arvutus
  interior {media {scattering {
    1 , rgb 1*<0.1, 0.1, 0.1> extinction 0.000001 }}}}}
box {
  <-100,-10,-100>, <100,100,100>
  material {keskkond}
  hollow }
```

# B LISA: MATHCAD'I TÖÖLEHT DIFRAKTSIOONI ARVUTAMISEKS KAHE TASALAINE RISTUMISEL

Tasalainete nurk z-teellega  $\theta := 0.223 \text{deg}$   
 Lainepikkus  $0.6 \mu\text{m}$   $k_0 := 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{0.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}}$   
 Takistuse asukoht  $x_0 := 0 \text{ mm}$   $j_0 := j_c + \frac{x_0}{a}$   $j_c := \frac{n}{2}$   
 ja raadius piksliites  $r := 30$   
 Laineväli sisendis vahetult enne takistust  $\Psi_{0j} := e^{i \cdot k_0 \cdot x_j \cdot \sin(\theta)} + e^{-i \cdot k_0 \cdot x_j \cdot \sin(\theta)}$   
 $\Psi_{0j} := e^{i \cdot k_0 \cdot x_j \cdot \sin(\theta)} + e^{-i \cdot k_0 \cdot x_j \cdot \sin(\theta)}$   
 Takistus raadiusega  $\left(r + \frac{1}{2}\right) \cdot a$   $T_j := \text{if}(|j - j_0| \leq r, 0, 1)$   
 Laineväli vahetult pärast takistust  $\Psi_{0j} := \Psi_{0j} \cdot T_j$  Intensiivsus  $I_0 := \text{MOD2}(\Psi_0)$

Piksliite arv  $n := 2^{10}$   $n = 1.024 \times 10^3$   
 Kaamera piksli mõõt  $a := 9 \times 10^{-6} \text{ m}$   $j := 0..n - 1$   
 Laineväli keskkoha indeks  $j_c := \frac{n}{2}$





z-tejel liikumise semm

$$dz := 2 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Laineväli

$$E := Z^{(0)} \leftarrow \Psi_0$$

for  $\zeta \in 1..n-1$

$$z \leftarrow \zeta \cdot dz$$

for  $j \in 0..n-1$

$$Z_{j,\zeta} \leftarrow \exp(-i \cdot k_0 \cdot z) \cdot \left[ \exp\left[ i \cdot \frac{1}{2} \cdot k_0 \cdot (\sin(\theta))^2 \cdot z + i \cdot k_0 \cdot \sin(\theta) \cdot x_j \right] + \exp\left[ i \cdot \frac{1}{2} \cdot k_0 \cdot (\sin(\theta))^2 \cdot z - i \cdot k_0 \cdot \sin(\theta) \cdot x_j \right] \dots \right. \\
+ \frac{-1}{2} \exp\left[ i \cdot \frac{1}{2} \cdot k_0 \cdot (\sin(\theta))^2 \cdot z + i \cdot k_0 \cdot \sin(\theta) \cdot x_j \right] \cdot \left[ \operatorname{erf}\left[ \frac{\sqrt{k_0}}{2 \cdot \sqrt{z}} \cdot (i+1) \cdot \left[ \sin(\theta) \cdot z + x_j + \left( r + \frac{1}{2} \right) \cdot a - x_0 \right] \right] \dots \right. \\
+ \left. \operatorname{erf}\left[ \frac{\sqrt{k_0}}{2 \cdot \sqrt{z}} \cdot (i+1) \cdot \left[ \sin(\theta) \cdot z + x_j - \left( r + \frac{1}{2} \right) \cdot a - x_0 \right] \right] \right] \\
+ \frac{-1}{2} \exp\left[ i \cdot \frac{1}{2} \cdot k_0 \cdot (\sin(\theta))^2 \cdot z - i \cdot k_0 \cdot \sin(\theta) \cdot x_j \right] \cdot \left[ \operatorname{erf}\left[ \frac{\sqrt{k_0}}{2 \cdot \sqrt{z}} \cdot (i+1) \cdot \left[ \sin(\theta) \cdot z - x_j + \left( r + \frac{1}{2} \right) \cdot a + x_0 \right] \right] \dots \right. \\
+ \left. \operatorname{erf}\left[ \frac{\sqrt{k_0}}{2 \cdot \sqrt{z}} \cdot (i+1) \cdot \left[ \sin(\theta) \cdot z - x_j - \left( r + \frac{1}{2} \right) \cdot a + x_0 \right] \right] \right] \left. \right]$$

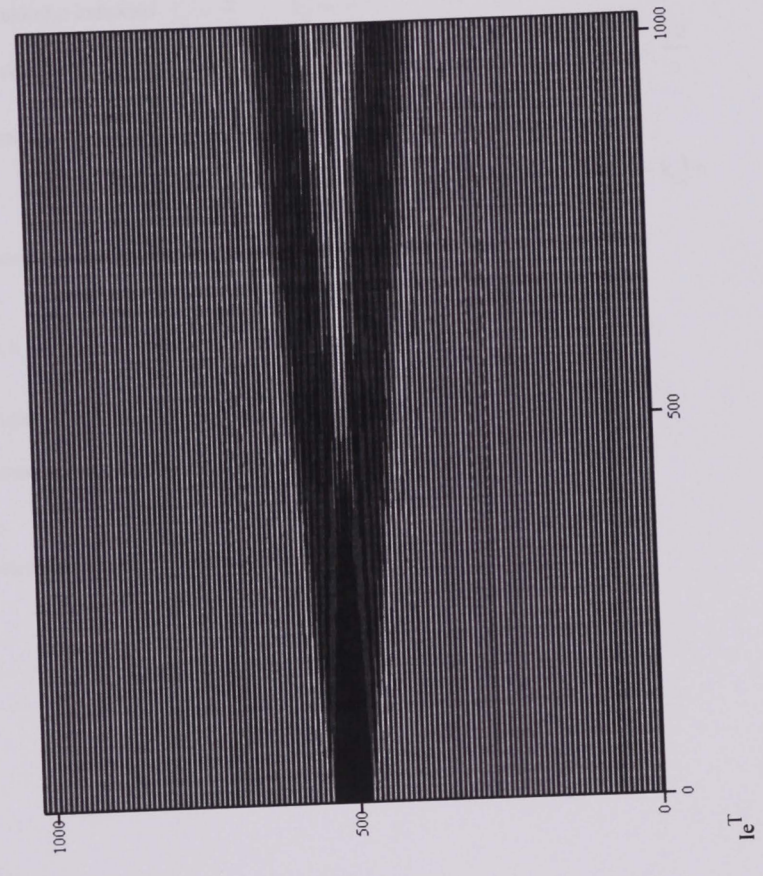
Z

le :=  
lisaB-Iz\_0.6mm.dat

lisaB-Iz\_0.2mm.dat

le

le := MOD2(E)



## C LISA: MATHCAD'I TÖÖLEHT DIFRAKTSIOONI ARVUTAMISEKS KOONILISES LAINEVÄLJAS

$$\theta := 0.223 \text{deg}$$

Lainepikkus  $0.6 \mu\text{m}$   $k_0 := 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{0.6 \cdot 10^{-6} \text{m}}$

Pikslite arv  $n := 2^{10}$   $n = 1.024 \times 10^3$

Kaamera piksli mõõt  $a := 9 \times 10^{-6} \text{m}$

Lainevälja keskkohta indeksid  $j_c := \frac{n}{2}$   $k_c := \frac{n}{2}$

Takistuse asukoht  $x_0 := 0.549 \text{mm}$   $y_0 := 0 \text{mm}$   $j_p := j_c + \frac{x_0}{a}$   $k_p := k_c + \frac{y_0}{a}$

ja raadius pikslites  $r := 30$   $\left(r + \frac{1}{2}\right) \cdot a = 0.275 \text{mm}$

$$j := 0..n-1 \quad x_j := (j - j_c) \cdot a \quad k := 0..n-1 \quad y_k := (k - k_c) \cdot a$$

Laineväli sisendis vahetult enne takistust

$$\Psi_{0i_{j,k}} := J_0 \left[ k_0 \cdot \sin(\theta) \cdot \sqrt{(x_j)^2 + (y_k)^2} \right]$$

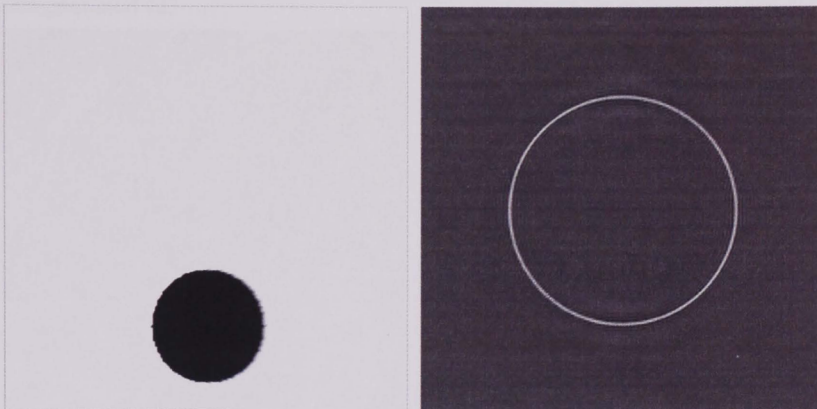
Takistus raadiusega  $\left(r + \frac{1}{2}\right) \cdot a$   $T_{j,k} := \text{if} \left[ \sqrt{(j - j_p)^2 + (k - k_p)^2} \leq r, 0, 1 \right]$

Laineväli vahetult pärast takistust  $\Psi_{0i_{j,k}} := \Psi_{0i_{j,k}} \cdot T_{j,k}$

Intensiivsus  $I_0 := \text{MOD2}(\Psi_0)$

Sagedusesituses, kasutatud Fourier teisenduse võtmiseks detsentreerimist

$$A_0 := \text{VAHETA}(\text{cfft}(\text{VAHETA}(\Psi_0)))$$



T

$A_0$

ekraani kaugus  $z := 240\text{mm}$

Süsteemi sageduskoste Fresneli lähenduses avaldub kui

$$\chi(k_x, k_y, z) := \exp\left[-i \cdot k_0 \cdot z + i \cdot \left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{2 \cdot k_0}\right) z\right]$$

Arvestades, et j-nda elemendiga seotud sagedus arvutatakse kui  $f_j = \frac{j}{n} \cdot f_s$

Antud juhu jaoks  $k_{x_j} = 2\pi \cdot \frac{j - j_c}{n} \cdot \frac{1}{a}$   $k_{y_k} = 2\pi \cdot \frac{k - k_c}{n} \cdot \frac{1}{a}$

Tehes mõningad teisendused antud avaldisega, saame tulemuseks

$$\chi_{j,k} := \exp\left[-i \cdot k_0 \cdot z + i \cdot \frac{1}{2k_0} \cdot \left[\left(2\pi \frac{j - j_c}{n \cdot a}\right)^2 + \left(2\pi \frac{k - k_c}{n \cdot a}\right)^2\right] \cdot z\right]$$

Sagedusesitus, laineväli ja moodul kaugusel z, kasutades Fresneli lähendust

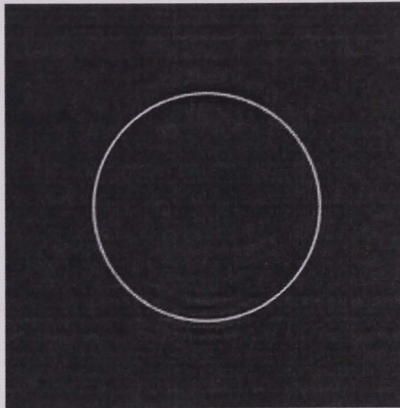
$$\begin{aligned} A_{z,j,k} &:= A_{0,j,k} \cdot \chi_{j,k} \\ \Psi_z &:= \text{VAHETA}(\text{icfft}(\text{VAHETA}(A_z))) \\ I_z &:= \text{MOD2}(\Psi_z) \end{aligned}$$

Difrageerunud väli



$I_z$

Fourier teisenduse reaalosa



$A_z$

Leiame lainevälja takistuse puudumisel

$$A_{0i} := \text{VAHETA}(\text{cff}(\text{VAHETA}(\Psi_{0i})))$$

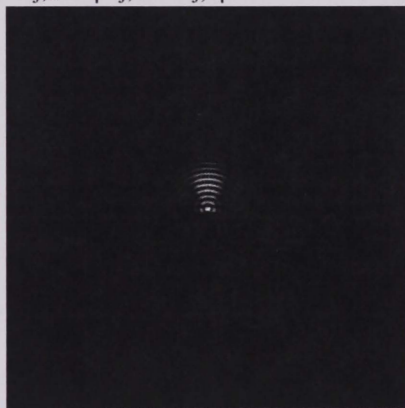
$$\Psi_{zi} := \text{VAHETA}(\text{icff}(\text{VAHETA}(A_{zi})))$$

Lahutame saadud tulemused

$$I_{zc,j,k} := |I_{z,j,k} - I_{zi,j,k}|$$

$$A_{zi,j,k} := A_{0i,j,k} \cdot \chi_{j,k}$$

$$I_{zi} := \text{MOD2}(\Psi_{zi})$$



$I_{zc}$

**ARVAMUS**

**Peeter Piksarve bakalaureusetöö kohta**

30.mai 2007

Peeter Piksarve bakalaureusetöö “Kooniliste laineväljade kasutamine mikroosakeste ruumilisel holografeerimisel” on pühendatud Besseli kimpude uudsete rakendusvõimaluste uurimisele. Töö on teoreetiline ja baseerub nii analüütilistel arvutustel kui ka Mathcad’iga teostatud arvutisimulatsioonidel. Huvi optilise mikroskoopia võimaluste edasiarendamise vastu on alati suur olnud, kuid eriti kuumaks on need küsimused muutunud just viimastel aastatel eelkõige seoses holograafiliste meetodite kaasamisega. Seega käesoleva töö teema aktuaalsus on tähelepanuväärne.

Töö esimeses osas on autor andnud lühikese, kuid sisult selge ja loogilise ülevaate elementaarses difraktsiooniteoorias kasutatavast Fresneli lähendusest ning Besseli kimpude füüsikalisest olemusest. Ülejäänud kaks peatükki käsitlevad autori poolt läbiviidud originaalset uurimistööd ja sisaldavad rida huvipakkuvaid tulemusi. Näiteks on tuletatud valemid difraktsioonipildi arvutamiseks Fresneli lähenduses koonilises laineväljas paiknevalt ringikujuliselt takistuselt. Eriti aga väärub märkimist tulemus, et vajalikku informatsiooni mikroosakeste mõõtmete ja paiknemise kohta on võimalik saada ka ainuüksi lainevälja intensiivsusest ilma arvutusmahukaid digitaalse holograafia meetodeid rakendamata.

Peeter Piksarve bakalaureusetöö tugeva küljena tooksin esile kõigepealt oskuslikku analüütiliste ja numbriliste meetodite sümbioosi keeruliste difraktsiooniprobleemide lahendamisel. Positiivne on kindlasti ka materjali ladus esitus ja illustratsioonide kvaliteetne teostus. Negatiivse poole pealt märgiksin järgmist. Esiteks, sissejuhatuses ei ole piisavalt selgelt lahti kirjutatud töö motivatsioon. Teiseks, autor oleks võinud lühidalt peatuda ka probleemil, mis hakkab juhtuma siis, kui kõik objektid ei paikne ühes tasandis (kannab ju käesolev töö pealkirja “...ruumilisel holografeerimisel”).

Kokkuvõtteks võib öelda, et antud tööga on pandud korralik alus huvitavatele uuringutele optikas, millel suure tõenäosusega on ka tegus praktiline väärtus. Seega on Peeter Piksarv tõestanud oma suutlikkust teadustöök valitud erialal ja tema bakalaureusetöö väärib väga head hinnet.



Peep Adamson

TÜ FI vanemteadur

## **Juhendaja arvamus Peeter Piksarve bakalaureusetööle “Kooniliste laineväljade kasutamine mikro-osakeste ruumilisel holografeerimisel”**

Peeter Piksarve bakalaureusetöö eesmärgiks oli teoreetiliselt uurida Besseli kimpude difraktsiooni sfäärilistel mikro-osakestel, kus võimalikuks rakenduseks oleks meetodi väljatöötamine niisuguste osakeste asukohtade detekteerimiseks reaajas.

Ehkki Besseli kimpude difraktsioon takistustelt on olemuselt lihtne ning ka kirjanduses mõningast kajastamist leidnud, on niisugune teemapüstitus juhendaja parimat teadmist mööda uudne.

Peeter Piksarv alustas oma tööd 2006.a. sügisel kolmanda kursuse tudengina. Töö alguses selgitas juhendaja töö põhilist ideed, formuleeris töö võimalikud tulemused ning andis viited allikatele. Edasises piirdus juhendaja roll tehniliste näpunäidete ning nõuannetega.

Peeter Piksarv näitas oma töös üles märkimisväärset vilumust matemaatilise analüüsi võtete kasutamisel – ühiste arutluste tulemusena sündinud ideed oskas ta ilma juhendaja abi või suunamiseta korrektselt (juhendaja arvates ka elegantselt) matemaatiliselt formuleerida. Probleeme ei tekkinud ka numbriliste arvutuste läbiviimisel ning tulemuste vormistamisel.

Peeter Piksarve töö tulemusena viidi läbi lähteülesande esmane matemaatiline ja sisuline (füüsikaline) analüüs, kusjuures juhendaja arvates suutis juhendatav ära teha kõik, mis antud teema juures esmase tutvuse käigus tehtav on – edasised sammud nõuavad juba oluliselt sügavamat ja keerukamat probleemikäsitlust.

Oma töös ilmutas Peeter Piksarv märkimisväärset algatusvõimet, sihikindlust ja iseseisva töö oskust.

Soovitaksin komisjonil hinnata Peeter Piksarve tööd vastavalt väljakujunenud kriteeriumidele, aga mitte madalamalt, kui hindegaga “B”.

/Kaido Reivelt/

28.05.2007