JOH. SÜTT

MATEMAATILINE ANALÜÜS

(REAALKOOLIDELE)

I

1921

Mimeograafbüroo K. Kenk. Köötri tän. 3

Tartus.

Matemaatiline analüüs.

Joh. Sütt.

1.

Püsiv- ja muutuvarv. Matemaatlistes arvutustes ja operatsioonides tuleb meil alatasa tegemist teha kahte liiki suurustega. Ühed on niisugused suurused, millede väärtus operatsiooni vältel ei muutu. Näit., kui arvutame mingisugust ekvatsiooni $ax + by + c = 0$, siis on meil koeffitsiendid a ja b ja vabaliige c igatehte korral ikka ühe väärtusega igaüks, kuna aga x ja y kui ekvatsiooni juured, mitmesuguste väärtustega võivad olla. Samuti on meil ringi ümbermõõdu avalduses $2\pi R$ esimesed kaks arvu 2 ja π kindlad suurused, maksvad igasuguse ringi suhtes, kuna R kui ringi raadius, määramata on ja võib omada igasuguseid suurusi, selle järele, kui suurt ringi meie vaatleme.

Esimene liik neist arvudest on n.n. püsivarvud, teised aga muutuvarvud.

Muutuvuse intervall. Kui meie, opereerides muutuvarvuga, seame üles mingisugused tingimised muutuvarvu suuruse suhtes, siis saame n.n. muutuvuse intervalli ehk muutuvuse ulatuse, mis piirab muutumist. Näit., kui meid huvitab küsimus, missugused suurused omab y ekvatsioonis $2x - y + 1 = 0$ kui teine juur x omab väärtused 1st kuni 10^{ni}, siis väljendame seda matemaatliselt: avaldada y väärtused, kui x muutub intervallis $(1, 10)$. Samuti, tahtes arvutada ringi pinda, kui raadius on muutuvsuurus, tuleks meil arvesse võtta raadiuse kõiksugusi suurusi 0 kuni lõpmatuseni (∞). Kui aga meie ülesanne sarnast määramatust ei nõua, vaid huvitavad meid ainult juhused, kui raadius on piiratud suurus, näit., a....st kuni b....ni, siis on meil jälle tegemist muutuvuse intervalliga (a, b) ehk teisiti kujutatult $a < \ldots\ldots r \ldots\ldots < b$. Arvud a ja b ise, milledest üks näitab, et raadius ei pea mitte vähem võetud saada kui a, ja teine näitab, et raadius ei või ka mitte suurem võetud saada, kui b, on sega muutuvarvu piirid. Nendest on a alumine piir ehk raja ja b ülemine piir ehk raja.

Muutuvarvu piiriks nimetame sega püsivarvu, mille suuruseni muutuvarvu x võib muutuda, kas vähenedes ehk suurenedes. Kui muutuvarv võib väheneda kuni lõpmatuseni, siis on tema piiriks $-\infty$ ja kujutame seda sümboolselt $\lim x = -\infty$. Kui aga x suureneb lõpmatuseni, siis kirjutame $\lim x = \infty$. Kui x....si väärtus muutub ainult positiivses intervallis, siis on tema alumine piirväärtus $\mathrm{Lim}\, x = 0$. Samuti kui x muutub negatiivses intervallis, siis on tema ülemine piirvaartus ka $\mathrm{Lim}\, x = 0$. Kui muutuvarv x esineb mõnes avalduses, näit., $ax + b$, siis avaldame terve avalduse piiri järgmiselt: $\mathrm{Lim}(ax+b) = b$. Kui aga x....il on mõlemad piirid $x = 0$ olemas, siis avaldame seda järgmiselt:

$$\mathop{\mathrm{Lim.}}_{\substack{x=0 \\ x=\infty}} (ax+b) = (b) = (\infty)_{\infty}$$

Arusaadav, et muutuvarvu piiridena ei tarvitse olla üksi 0 ja ∞, vaid selleks võivad olla igasugused arvud, missugused aga üks ehk teine ülesanne määrab.

Kõrgemas matemaatikas käsitatakse piirimõistet järgmiselt: Muutuvarv, mille muutumine piiratud, lähineb mingisuguse püsivsuurusele, piirile, kas suurenedes ehk vähenedes, aga ei jõua selle juures siiski iialgi piirsuuruseni, jäädes temast lõpmatu vähe lahkuminevaks. Teiste sõnadega, muutuvarv tungib, püüab piirsuuruseni ja võib saada viimsele nii lähidale, et vahe tema ja piirsuuruse vahel saab vähemaks igasugusest kui väiksest tahes arvust, mis aga iganes ettekujutada võib. Näituseks võime ettekujutada õige väikese suuruse $\frac{1}{100000000}$, aga ikka võib vahe muutuvarvu ja tema piiri vahel sellest veel vähemaks saada. Selle juures tuleb mõista, et muutumise protsessis piirile lähinemise sihis, kus muutumine sünnib pidevalt, voolavalt, vahetpidamatu, ilma mingisuguse hüppeta ühest väärtusest teise, ei ole võimalik määrata mingisugusid, kui väikesi tahes, suurusi, millede võrra muutuvarv kasvab ehk väheneb, minnes ühest väärtusest järgmisse. Selge, et sarnase pideva muutumisprotsessi juures ei saa mõista otsekohest muutuvarvu üleminekut piirsuurusse, vaid võib ainult toonitada viimasele lõpmatu lähidale saamist. Näituseks, teame arithmeetikast, et perioodmurd 0,7777..... on ühevääriline liht murruga $\frac{7}{9}$, aga kirjutades murrule 0,7777... ikka murdmärke paremale poolele juurde, ei jõua meie siiski teda iialgi niikaugele viia, et võiks vastuvaidlemata kirjutada $0{,}777\ldots = \frac{7}{9}$. Kirjutades murdmärke kuni lõpmatuseni meie ainult lähendame arvu 0,777.... arvule $\frac{7}{9}$ ja viime selle lähendamise niikaugele, et vahe nende vahel saab vähemaks igasugusest kui väiksest tahes, ettekujutatavast arvust. Sellepärast, olles võimetu muutuvarvu viia tema piirini, võime ainult tähistada sümboolselt lõpmatu lähinemist piirile ja selle lähinemise märkimiseks tarvitame sümbooli Lim. (ladina keelest: limes, limen; prantsuskeelest limite; mõlemate tähendus: piir, raja). Tarvitades seda sümbooli, võime paigutada muutuvarvu ja tema piirsuuruse vahele võrdsusmärgi: $\mathrm{Lim}.\ 0{,}777\ldots = \frac{7}{9}$.

<u>Lõpmatu väiksed arvud.</u> Süvendades piirimõistet, tuli meil tegemist teha sarnaste arvudega, mis ettekujutamatu väiksed on. Siin avaneb meile matemaatikas koguni uus ilm, millesse tungida võime ainult ettekujutuse abil. Meie opereerime arvudega, mida meie üleskirjutada ei saa. Meie võime küll üleskirjutada õige väiksed arvud 0,0001, 0,00000001 j.n.e., kuid kus on sellel piir, missugune arv on siiski kõige väiksem? Võime kujutada ette kui tahes väikest arvu, aga ikka tungib ettekujutus temast kaugemale ja ütleb: siiski on veel väiksemad olemas. Siin saavub meil analoogia rakukestega loodusteaduse alalt, kuid analoogia ainult jämejooneline. Kui meil on ees mõni kogu mingisugust ainet, siis teame, et see on mingisugune lõplik rakukeste summa. Kui aga meie silmi ees on mingisugune arv, siis ei saa meie mitte öelda, et see oleks lõpmatu väikeste arvude lõplik summa. Kui tahame avaldada, et lõpmatu väiksed arvud summas annaks mingisuguse katsutava suuruse, siis peab liitma neid lõpmatu väikseid arve <u>lõpmatu</u>, mitte lõplik, <u>hulk</u>. Sarnane lõpmatu summeerimine esineb meile tagapool integraalarvamises.

Nimetades lõpmatu väikesteks arvudeks arve, mis oma väiksuse poolest väljaspool igasugust ettekujutust, ja olles võimetu nende otsekoheseks kujutamiseks, võime neid jällegi ainult sümboolselt kujutada. Sellel alal ei ole aga ühtegi kindlat sümbooli veel tarvitusele võetud, mis rahvusvahelist iseloomu kannaks, nagu seda on piirisümbool Lim. Harilikult kujutatakse lõpmatu väikesi arve greeka tähestiku abil $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots\ldots \varepsilon, \tau, \omega$ j.n.e. Sellejuures tuleb aga igakord nimetada, et arv on lõpmatu väike. Samuti kujutatakse neid veel lihtmurdude abil $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$ j.n.e., millisel korral nimetada tuleb, et murrunimetaja n, m j.n.e. on lõpmatu suur.

Oma iseloomu poolest kuulub lõpmatu väike arv muutuvarvude hulka. Asjaolu, et <u>lõpmatu väike arv on muutuvarv</u>, on üheks tema peaomaduseks. Kui muutuvarvul on temal ka oma piir ja see piir on 0. Lõpmatu väike arv on seega muutuvarv, mille suurus lähineb kadumisele, lähineb nullile. Asjaolu, et igaühe lõpmatu väikese arvu piir on null, ei tähenda veel, et lõpmatu väiksed arvud on kõik ühesuguse suurusega piirile lähinemise protsessis. Kui ühes muutumisprotsessis esinevad mitu lõpmatu väikest arvu, siis lähinevad nemad nullile kõik ühel ajal, ühekorraga, kuid selle protsessi võtted ei tarvitse nad olla ühevääartuslised. Igaühe väärtused on tingitud piirile lähinemise kiirusest. Näituseks, võtame lõpmatu väikse arvu $\frac{1}{n}$, kus $\text{Lim.}\, n=\infty$. Ühes selle arvuga lähinevad ka nullile arvud $\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3} \ldots \frac{1}{n^m}$. Selge, et viimased palju suurema kiirusega lähinevad nullile, kui $\frac{1}{n}$, kuid esinedes ühes ja samas muutumisprotsessis, peavad püüdma piirile ühel ajal, üheskoos. Kui võrdleme kahte lõpmatu väikest $\frac{1}{n}$ ja $\frac{1}{n^2}$, siis näeme, et nende vahekord $\frac{1}{n} : \frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{n} = n$ on lõpmatu suur. Üks neist $\frac{1}{n}$ on terveni n korda suurem kui teine $\frac{1}{n^2}$. Kui võrdleme kahte lõpmatu väikest $\frac{1}{n}$ ja $\frac{1}{kn}$, kus n lõpmatu suur, aga k mingisugune lõplik, püsivarv, siis on vahekord $\frac{1}{n} : \frac{1}{kn} = \frac{kn}{n} = k$. Üks neist $\frac{1}{n}$ on teisest $\frac{1}{kn}$ suurem lõplik arv k korda. Sellest näeme, et kahe lõpmatu väikse arvu suhe $\frac{\varepsilon}{\varepsilon}$ võib olla igasugune suurus, suur ehk väike. See on teine nende omadus.

Kolmas omadus on järgmine: Lõpmatu väikeste arvude lõplik summa on ka lõpmatu väike. Tõepoolest, kui tahame, et l väikeste α, β, γ.. j.n.e. summa s oleks vähem igasugusest ettekujutatavast väiksest arvust ε,

$$\underbrace{\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots\mu,\nu}_{p} = s < \varepsilon, \text{ kus } p \text{ on lõplik},$$

siis tarvitseb ainult igat liiget kujutada vähemana kui $\frac{\varepsilon}{p}$, näit., $\alpha < \frac{\varepsilon}{p}$, $\beta < \frac{\varepsilon}{p}$ j.n.e. (seda meie võime, sest $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ on vähemad kui igasugune ettekujutav arv).

Märkus: Eelmine omadus on maksev ainult siis, kui lõpmatu väikeste kogu p on lõplik arv. Nii on näit. arvud $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \ldots\ldots \frac{k}{n}$ lõpmatu väiksed, kui $\text{Lim.}\, n=\infty$, aga arv $\frac{n}{n}$, kus ka lugeja on lõpmatu suur, ei ole enam lõpmatu väike; arvud $\frac{2n}{n}, \frac{3n}{n}$ j.n.e. on juba ükskõik missuguse suurusega; summa $\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}_{n^2} = \frac{n^2}{n} = n$ on juba isegi lõpmatu suur.

Neljas lõpmatu väikeste omadus on: Lõpmatu väikese arvu kasvatis lõpliku arvuga on ka lõpmatu väike. Tõepoolest, kui võtame kasvatise $\frac{1}{n} \cdot k$, kus k lõplik, siis võime seda kujutada summana $\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\ldots\ldots}_{k}$ ja see summa on eelmise omaduse tõttu lõpmatu väike.

Viies lõpmatu väikeste arvude omadus on: Lõpmatu väikeste arvude kasvatis on ka lõpmatu väike. See on selge juba otsekohe. Näit. on kasvatis $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}$ tingimata lõpmatu väike, sest nimetaja nm, milles n ja m lõpmatu suured, on iseenesestki mõista lõpmatu suur.

__Lõpmatu väikeste arvude järgud.__ Vaadeldes lõpmatu väikeste arvude omadusi, nägime, et nad oma suuruste poolest õige lahkuminevad üksteisest on; üks neist võib olla isegi lõpmatu suur võrreldes teisega, nagu seda on $\frac{1}{n}$ ja $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^2}$ ja $\frac{1}{n^3}$ j.n.e. Kui võtame lõpmatu väiksed arvud väheneva järjekorras, siis näeme, et lõpmatu väike $\frac{1}{n}$ on lõpmatu väike ainult igasuguse lõpliku arvu p.... suhtes; $\frac{1}{n^2}$ on lõpmatu väike p ja $\frac{1}{n}$ suhtes; $\frac{1}{n^3}$ on lõpmatu väike p, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ suhtes j.n.e. Selle järele nimetame ka lõpmatu väikeste järgud. Nii on $\frac{1}{n}$ esimese järgu l.v., $\frac{1}{n^2}$ teise järgu l.v., $\frac{1}{n^3}$ kolmanda järgu l.v. j.n.e. Greeka tähestiku abil kujutades on α esimese järgu, α^2 teise järgu, α^3 kolmanda järgu j.n.e. lõpmatu väiksed. Samuti on $\alpha\beta$ teise järgu l.v., $\alpha\beta\varepsilon$ kolmanda järgu l.v. j.n.e. __Oma suuruse poolest on iga järgu lõpmatu väike kaduv suurus võrreldes eelmise järgu lõpmatu väiksega.__

__Piirimõiste definitsioon.__ Tutvunedes lõpmatu väikeste arvudega, võime saada juba muutuvarvu piiri määramiseks matemaatilise definitsiooni. See oleks järgmine: Muutuvarvu piiriks nimetakse püsivsuurust, millele muutuvarv suurenedes ehk vähenedes lähineb, nii et nende vahe saab lõpmatu väikseks. Selle definitsiooni tõttu võime sümboolselt muutuvarvu ja tema piiri siduda kahte viisi: 1) $\lim\limits_{x \to a} x = a$, kus märk $\rightarrow$ tähendab lähinemist;

2) $x = a + \varepsilon$, kus ε tähendab lõpmatu väikest suuruste vahet. Selle juures mõistame ε all kui positiivist, nõnda ka negatiivist arvu. Kuju $x = a + \varepsilon$ all tuleb mõista $x = a \pm \varepsilon$ ehk $x = a + (\pm \varepsilon)$.

__Lõpmatu suured arvud.__ Täiesti vastandid lõpmatu väikeste arvudele on lõpmatu suured arvud. Need on jällegi ainult ettekujutatavad suurused, mis muutudes saavad suuremaks, kui igasugune ettekujutatav suur arv. Seega on nad ka väljaspool meie ettekujutuse võimet suuruse suhtes.

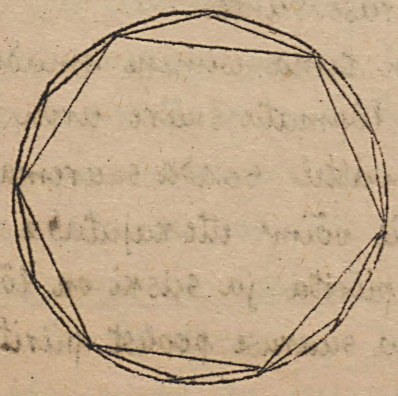
__Lõpmatu suur arv on muutuvarv__ ja see on tema esimene omadus. Ainult kujutades ette muutuvat arvu, võime oletada lõpmatu suure arvu teist omadust: lõpmatu suur arv võib muutumisprotsessi vältel saada suuremaks, kui igasugune kui suur tahes ettekujutatav arv. Meie võime ette kujutada õige suuri arve 1000^{10}, 1000^{1000} j.n.e. kuid see on ilma piirita ja siiski on lõpmatu suur arv ikka veel suurem. Tema on seega oma suuruse poolest piirita, ehk avaldades seda matemaatiliselt, lõpmatu suure arvu piir on lõpmatus, $\lim n = \infty$. Et lõpmatus ∞ on määramatu suurus, väljaspool ettekujutuse võimet, seega on ka lõpmatu suur arv määramatu suurusega arv.

Võrreldes lõpmatu suuri arve, näeme, et nemad oma suuruse poolest on samuti lahkuminevad, kui lõpmatu väiksed. Kõik nad lähinevad piirile ∞; esinedes ühes ja samas muutumisprotsessis, püüavad piirile üheskoos, ühekorraga, kuid mitmesuguste kiirustega, jäädes kogu protsessi vältel suuruste poolest lahkuminevaiks. Nii näituseks, kui l suur arv n püüab piirile ∞, siis püüavad ka sellesama piirile temaga üheskoos arvud $n^2, n^3 \dots\dots n^n$ j.n.e; kuid selle juures on n^2 terveni lõpmatu korda suurem kui n. Ühes arvudega $n, n^2, n^3 \dots\dots$ püüavad piirile ka arvud $kn, (kn)^2, (kn)^3 \dots\dots$, kus k lõplik, kuid viimaste suurused on alati mingisuguse püsivsuuruse k, k^2, k^3 j.n.e. kord suuremad kui esimestel. Sellest näeme, et lõpmatu suurte arvude vahekord võib olla igasugune suurus. Edasi, lõpmatu suurte arvude lõplik ja ka lõpmatu summa on lõpmatu suur; lõpmatu suurte arvude kasvatis lõplikarvudega on lõpmatu suur; lõpmatu suurte arvude kasvatis lõpmatu suurtega on lõpmatu suur; j.n.e. Lõpmatu suur arv n on esimese, n^2 — teise, n^3 — kolmanda j.n.e. järgu lõpmatu suured. Samuti on n ja m esimese, $n.m$ — teise, $n.m.r$ — kolmanda j.n.e. järgu lõpmatu suured. Iga järgu lõpmatu suur on omakord lõpmatu suur võrreldes eelmise järguga.

3.

Piirimõiste geomeetriline käsitus.

Kui meil on ringi sisse joonistatud hulknurk, mille külgede arv on m,



siis teame, et selle hulknurga perimeeter P_m on vähem kui ringi pikkus C, $P_m < C$. Kui joonistame teise hulknurga, mille külgede arv $2m$, siis on selle perimeeter juba suurem kui esimese oma, kuid ikkagi vähem kui ringjoone pikkus: $P_m < P_{2m} < C$. Edasi saame samal teel $P_m < P_{2m} < P_{3m} \dots\dots < P_{km} < P_{pm} < P_n < C$.

Kui palju meie ka suurendaks külgede arvu, ikkagi jääb perimeeter ringjoone pikkusest väiksemaks, kuid perimeetri ja ringjoone pikkuste vahe väheneb ja võib saada lõpmatu väikseks. Seega on ringjoon sissejoonistud hulknurga perimeetri piir külgede arvu n kasvades.

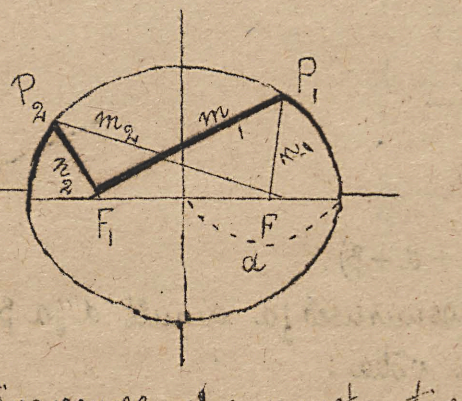
$$C = \lim_{n\to\infty} P_n \text{ ehk } C = \lim_{\substack{n\to\infty\\ a\to 0}} (n \cdot a) = 2\pi r.$$

Samuti, kui arvutame ringi pinda, siis võtame mõne sissejoonistud hulknurga pinna, mille avaldus on $S_{hulkn.} = \frac{P_n \cdot \alpha}{2}$, kus α on apotheem, ehk, avaldades $\frac{P_n}{2}$ lihtsamalt p_n (poolperimeeter), $S_{hulkn.} = p_n \cdot \alpha$. Kui aga $n \to \infty$, siis $\alpha \to r$, ja meie saame piiris $\lim P_n = C$ ja $\lim \frac{P_n \cdot \alpha}{2} = \frac{C \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2 = S_{rin.}$

Edasi, kui tahame arvutada koonuse ruumalat, siis võtame korrapärase hulktahuse püramiidi, mille külgtahkude arv n on muutuv kuni lõpmatuseni. Selle püramiidi maht on $V_{püram} = S_{põhip.} \cdot \frac{1}{3} h$. Kui külgtahkude arv n kasvab lõpmatuseni, siis $\lim_{n\to\infty} S_{põhip.} = S_{ring} = \pi r^2$. Koonuse maht on siis:

$$V_{koonus} = \lim V_{püram} = \lim S_{põhip.} \cdot \frac{1}{3} h = \frac{1}{3} h \cdot \lim_{n\to\infty} S_{põhip.} = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

<u>Jäävarv, konstant.</u> Püsivarvuks meie nimetasime arvu, mille suurus ei muutu, kui tema esineb mingisuguses protsessis ühes muutuvarvuga. Nüüd eraldame püsivarvudest veel ära ühe tüübi, mida nimetaksime jäävarvudeks. Need on arvud, mis määravad muutuvarvude <u>püsivat vahekorda</u>. Näituseks on ellipsi punkti P kauguste summa $m + n$ alati üks ja sama suurus,



võrdne pikema teljele, olenematu sellest, kus kohal ellipsil punkt P asub: $m_1 + n_1 = 2a$, $m_2 + n_2 = 2a$ j.n.e. Siin on kaks muutuvarvu m ja n, kuid nende summa on alati terve muutumisprotsessi vältel ikka üks ja sama $2a$, kus a on kindel püsiv suurus. Arv $2a$ näitab siin kahe muutuvarvu kindlat muutumatu vahekorda ja nimetakse <u>jäävarvuks</u> ehk konstantiks (ladina keeles constans, prantsuskeeles constante – muutumatu).

Samuti on ka ringjoone ja diameetri vahekord ikka kindel muutumatu suurus π, olenematu sellest, missugust ringi vaatleme. π on seega konstant. Kui võrdleme kahte konstanti $2a$ ja π, siis näeme, et neil on ka veel vahe: $2a$ on konstant ainult ühe ellipsi suhtes, mille suurem telg $2a$, kuid π on konstant igasuguse ringi suhtes. Seega on π üldisemas mõttes konstant kui $2a$. Võtame ekvatsiooni $Ax+By=0$, milles nähtavasti $y=-\frac{A}{B}x=mx$. Kui x muutub, siis muutub ka y, kuid püsima jääb alati vahekord $\frac{y}{x}=m$. Arv m on saadud püsivarvudest A ja B ja on seega püsivarv. Et ta peale selle veel muutuvarvude vahekorra kindlaks määrab, siis on ta sellega ühtlasi ka constans.

4.

Algebraliste tehete piirid.

Muutuvarvude summa piir. Kui tahame kokkuarvata muutuvarve ja tahame selle juures teada, missugune on nende summa piir, siis võime seda saavutada lihtsalt, võttes muutuvarvude asemel nende piirid. Olgu meile antud kaks muutuvarvu u ja v ja tahame arvutada $\text{Lim.}(u+v)$, kui $\text{Lim.}\, u=m$ ja $\text{Lim.}\, v=n$. Ülesande lahendamiseks vaatleme u ja v enne piiri ehk õigem öelda piiri lähikonnas, s.t. vaatleme nende suurusi, mis lõpmatu vähe piiridest lahkuminevad, kas pisut suuremad ehk pisut vähemad. Sellest vaatekohast võime kirjutada $x=m+\alpha$, $y=n+\beta$, kus α ja β on lõpmata väiksed suurused, kas positiivsed ehk negatiivsed selle järele, kas oleme võtnud x ja y piiridest vähematena ehk suurematena.

Nüüd kokkuarvates, saame:

$$x=m+\alpha$$
$$\underline{y=n+\beta}$$
$$x+y=m+n+\alpha+\beta$$

Võttes summa mõlemate poolte piirid, saame

$$\text{Lim.}(x+y)=\text{Lim}(m+n+\alpha+\beta).$$

Arvesse võttes, et teises pooles on m ja n püsivsuurused ja ainult α ja β muutuvsuurused, võime a ja b piiri märgist välja võtta:

$$\text{Lim}(x+y)=m+n+\text{Lim.}(\alpha+\beta).$$

Et aga piiris x omab väärtuse m ja y omab väärtuse n, siis saavad α ja β selle juures nulli väärtuslisteks ja meie saame:

$$\text{Lim}(x+y)=m+n.$$

Seega võime kinnitada: muutuvvaruvde summa piir võrdub nende piiride summale.

Vahendi piir. Toimetame samuti, kui eelmiselgi juhusel. $\lim x = m$, $\lim y = n$;

$x = m + \alpha$, $y = n + \beta$:

$$x - y = m - n + \alpha - \beta$$

$$\lim (x - y) = m - n + \lim_{\substack{\alpha = 0 \\ \beta = 0}} (\alpha - \beta)$$

$$\lim (x - y) = m - n.$$

Definitsioon. Muutuvvaruvde vahendi piir võrdub piiride vahendile.

Korrutise piir. $x = m + \alpha$, $y = n + \beta$;

$$xy = (m + \alpha)(n + \beta) = mn + \alpha n + m\beta + \alpha\beta$$

$$\lim (xy) = \lim (mn + \alpha n + m\beta + \alpha\beta)$$

$$= m.n + \lim_{\substack{\alpha = 0 \\ \beta = 0}} (\alpha n + m\beta + \alpha\beta)$$

$$\lim xy = mn.$$

Definitsioon. Muutuvvaruvde korrutise piir võrdub piiride korrutisele.

Jagatise piir. $x = m + \alpha$, $y = n + \beta$;

$$\frac{x}{y} = \frac{m + \alpha}{n + \beta}$$

Ülesande lahendamiseks võtame võrdsuse mõlemilt poolelt ära murru $\frac{m}{n}$

$$\frac{x}{y} - \frac{m}{n} = \frac{m + \alpha}{n + \beta} - \frac{m}{n};$$

$$\frac{x}{y} - \frac{m}{n} = \frac{n(m + \alpha) - m(n + \beta)}{n(n + \beta)};$$

$$\frac{x}{y} - \frac{m}{n} = \frac{\cancel{mn} + n\alpha - \cancel{mn} - m\beta}{n(n + \beta)}$$

$$\frac{x}{y} - \frac{m}{n} = \frac{n\alpha - m\beta}{n(n + \beta)}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n} + \frac{n\alpha - m\beta}{n(n + \beta)}$$

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{m}{n} + \lim \frac{n\alpha - m\beta}{n(n + \beta)}$$

Vaadeldes liiget $\lim_{\substack{\alpha = 0 \\ \beta = 0}} \frac{n\alpha - m\beta}{n(n + \beta)} = \lim \frac{n\alpha - m\beta}{n^2 + n\beta}$, näeme, et lugeja muutub nulliks, kuna nimetajasse jääb alles n^2. Seega on siis terve see liige võrdne nullile. Järjelikult jääb

$$\text{Lim}\ \frac{x}{y} = \frac{m}{n}.$$

__Definitsioon.__ Jagandi piir võrdub piiride jagandile.

__Astme piir.__ $x = m + \alpha;\ x^p = (m+\alpha)^p = m^p + pm^{p-1}.\alpha + \frac{p(p-1)}{1.2} m^{p-2} \alpha^2 + \dots \alpha$

Võrdsuse teises pooles on ainult esimene liige m^p püsisuurus, kuna kõigis teistes esineb lõpmatu väike α, mis piiris nulliks muutub. Järjelikult:

$$\text{Lim.}\ x^p = m^p.$$

__Definitsioon:__ Muutuvarvu astme piir võrdub tema piiri astmele.

__Juure piir.__ Kui $x = m + \alpha$, siis ka $\sqrt[p]{x} = \sqrt[p]{m+\alpha}$.

$$\text{Lim}\ \sqrt[p]{x} = \text{Lim.}\ \sqrt[p]{m+\alpha} = \sqrt[p]{\text{Lim}\,(m+\alpha)} = \sqrt[p]{m + \text{Lim}\ \alpha}.$$

Et α saab nulliks, siis jääb:

$$\text{Lim}\ \sqrt[p]{x} = \sqrt[p]{m}$$

__Definitsioon.__ Muutuvarvu juure piir võrdub tema piiri juurele.

Kõike kokku võttes võime avaldada üldefinitsiooni: Muutuvarvude tehete piirid võrduvad nende piiride __samasuguste__ tehetele.

__Perioodmurru piir.__ Eespool sai meil tarvitud kujutust $\text{Lim.}\ 0{,}777\dots = \frac{7}{9}$.
Nüüd vaatame, kuidas see saadub. Arendame arvu $0{,}777\dots$ geomeetriliseks progressiooniks:

$$0{,}777\dots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots =$$

$$= \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \dots \frac{7}{10^n} =$$

$$= 7\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \frac{1}{10^n}\right) = 7.\frac{a - lq}{1-q}$$

kus $a = \frac{1}{10}$, $l = \frac{1}{10^n}$, $q = \frac{1}{10}$.

Asendades, saame:

$$0{,}777\dots = 7\,\frac{\frac{1}{10} - \frac{1}{10^n}\cdot\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 7.\frac{\frac{1}{10} - \frac{1}{10^{n+1}}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

Võttes piiri, saame:

$$\text{Lim}\ 0{,}777\dots = \text{Lim}_{n\to\infty}\ \frac{7}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{7}{9}\,\text{Lim}_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{7}{9}.$$

<u>Avalduse $\frac{x}{\sin x}$ piir, kui $x \to 0$.</u> Selle ülesande lahendamiseks võtame abiks trigonomeetriast tuttava väikeste nurkade kohta maksva lause

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x .$$

Jagades kõik liikmed $\sin x$....ga, saame:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} ;$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} .$$

Edasi arutame järgmiselt: kui kaar x omab suuruse 0, s.t. kaob ära, siis $\cos x = 1$. See annab meile:

$$1 < \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} < \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} ;$$

$$1 < \lim_{x = 0} \frac{x}{\sin x} < 1 ;$$

Arvesse võttes, et $\lim \frac{x}{\sin x}$ ei saa ühel hoobil olla suurem kui 1 ja ka vähem kui 1, jääb meil üle:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 .$$

<u>Avalduse $\frac{x}{\operatorname{tg} x}$ piir, kui $x \to 0$.</u> Seda ülesannet lahendame samuti, kui eelmistki.

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

$$\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} < \frac{x}{\operatorname{tg} x} < 1 ;$$

$$\cos x < \frac{x}{\operatorname{tg} x} < 1 ;$$

$$\lim \cos x < \lim \frac{x}{\operatorname{tg} x} < 1 ;$$

Arvesse võttes, et $\lim_{x=0} \cos x = 1$, saame:

$$1 < \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} < 1 ;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1 ;$$

Avalduse $(1+\frac{1}{m})^m$ piir, kui $m \to \infty$. Lahendamiseks võtame selle avalduse enne piiri ja arendame tä reaks Newtoni binoomi valemi abil.

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1^m + m \cdot 1^{m-1} \cdot \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot 1^{m-2} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1^{m-3} \left(\frac{1}{m}\right)^3 + \ldots\ldots$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + m \cdot \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot m^4} + \ldots\ldots$$

Lühendades arenduses teist liiget m....ga, kolmandat m^2....ga, neljandat m^3...ga j.n.e., saame:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{m}}{1 \cdot 2} + \frac{(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})(1-\frac{3}{m})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots\ldots$$

Arvesse võttes, et m piiris saab lõpmatuseks, võime oletada, et murrud $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, $\frac{3}{m}$, j.n.e. on lõpmata väikseb suurused ja muutuvad piiris nulliks.
See asjaolu lubab meil kirjutada:

$$\lim_{m \to \infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots\ldots \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots m}$$

Saadud võrdsuse teine pool on avalduse $(1+\frac{1}{m})^m$ piir, kui $m \to \infty$. Et see rida, nagu näeme, lõpmatu hulgast liikmeist koos seisab, siis ei saa meie tema liikmete täpset summat arvutada. Seepärast teeme seda ligikaudselt.
Arvesse võttes, et rea liikmed on vähenevad murrud, ei tee meie väga suurt viga, kui näituseks jätame maha kõik liikmed peale kolme esimese.
Siis võime kirjutada:

$$\lim_{m \to \infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m > 2\frac{1}{2};$$

Edasi, kui meie avalduses

$$\lim_{m \to \infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots\ldots$$

võtaks arvude 3, 4, 5 j.n.e. asemele suuruse 2, siis vähendaks meie sellega igaühe murru nimetajat; sellega ühenduses iga murd saaks pisut suuremaks ja meil tuleks siis kirjutada:

$$\lim_{m \to \infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots\ldots$$

Nüüd on meil teises pooles geomeetriline progressioon (lõpmatu vähenev) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots$ ja võime kirjutada tema liikmete summa:

$$S=\frac{a-lq}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^m}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}},$$

sest $a=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, $l=\frac{1}{2^m}$.

Koondades, saame:

$$S=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^m}\right)}{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^m}.$$

Võttes summa piiri, näeme, et $\frac{1}{2^m}$ saab nulliks, sest nimetaja on lõpmatus. Seega siis:

$$\lim S=1.$$

See asjaolu annab meile õiguse kirjutada:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<3.$$

Nüüd oleme saanud intervalli

$$2\tfrac{1}{2}<\ldots\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\ldots<3.$$

Avaldust $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ nimetatakse matemaatikas Neperi arvuks ja kujutatakse tähe e abil. Tema suurus on ühismõõduta ja on ligikaudselt avaldatuna 2,71828......

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e=2{,}71828\ldots\ldots$$

See arv on matemaatikas võetud naturaal- ehk n. n. Neperi logariitsüstemi põhiarvuks.

<u>Avalduse N^α piir, kui $\alpha\to 0$.</u> Algebrast teame, et $N^0=1$. Praegune meie ülesanne läheb sellest aga lahku nimelt sellepärast, et meie ei taha mitte otsekohe võtta $\alpha=0$, vaid vaatleme seda avaldust kogu α muutuvuse protsessi vältel, mille juures α on lõpmatu väike suurus ja ligineb nullile.

Arvesse võttes, et $N^0=1$, võime oletada et N^α on suuruse poolest väga lähidane 1....le, sest α on lähidane nullile. Sellepärast võime kirjutada: $N^\alpha=1+\varepsilon$, kus ε lõpmatu väike arv. Et α on lõpmatu väike, siis võime seda kujutada murru näol $\alpha=\frac{1}{n}$, kus n on lõpmatu suur. Siis saame $N^{\frac{1}{n}}=1+\varepsilon$ ehk $\sqrt[n]{N}=1+\varepsilon$. See annab $N=(1+\varepsilon)^n=1^n+n.1^{n-1}\varepsilon+$ $+\frac{n(n-1)}{1.2}1^{n-2}\varepsilon^2+n(n-1)(n-2)1^{n-3}\varepsilon^3+\ldots\ldots$ ehk $N=(1+\varepsilon)^n=1+n\varepsilon+$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\varepsilon^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\varepsilon^3+\ldots\ldots$$

Jättes binoomi arenduses võtmata liikmed, milledes esineb $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4 \ldots$ j.n.e. (võik need liikmed on lõpmatu väikse suurusega), saame $N > 1 + n\varepsilon$ ehk $N - 1 > n\varepsilon$. Avaldades ε, saame $\varepsilon < \frac{N-1}{n}$. Varemalt oli meil olemas $N^\alpha = 1 + \varepsilon$, millest $\varepsilon = N^\alpha - 1$. Asendades, saame $N^\alpha - 1 < \frac{N-1}{n}$. Võttes selle võrratuse piiri, saame $\operatorname{Lim}(N^\alpha - 1) < \operatorname{Lim} \frac{N-1}{n}$ ehk $\lim_{\alpha \to 0} N^\alpha - 1 < \lim_{n \to \infty} \frac{N-1}{n}$.

Võrratuse teises pooles on nimetaja n lõpmatu suur, kuna lugeja $N-1$ püsiv suurus on; seega on siis $\frac{N-1}{n}$ lõpmatu väike ja saab piiris nulliks.

Siis võime kirjutada

$$\lim_{\alpha \to 0} N^\alpha - 1 = 0 \quad \text{ehk} \quad \lim_{\alpha \to 0} N^\alpha = 1$$

Seesama seadus, mis meie eelmises peatükis saime algebraliste tehete suhtes, on maksev ka igasuguste teiste avalduste suhtes. Näit., võime kirjutada

$\operatorname{Lim} \sin x = \sin \operatorname{Lim} x = \sin m$, kus m on x....si piir.

Tõenduseks võtame vahendi $\sin x - \sin m$, sest enne piiri on see vahend igatahes olemas ja ei ole võrdne nullile.

Trigonomeetriast teame

$$\sin x - \sin m = 2 \sin \frac{x - m}{2} \cos \frac{x + m}{2}.$$

Arvesse võttes, et $x = m + \alpha$, kus α lõpmatu väike, saame $x - m = \alpha$ ja

$$\sin x - \sin m = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{m + \alpha + m}{2}$$

$$\sin x - \sin m = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos\left(m + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Võttes piiris, saame

$$\lim_{x \to m} (\sin x - \sin m) = \operatorname{Lim} \left[2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos\left(m + \frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$$\lim_{x \to m} \sin x - \sin m = 2 \lim_{\alpha \to 0} \left[\sin \frac{\alpha}{2} \cos\left(m + \frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

Nagu näeme muutub võrdsuse teine pool nulliks, sest $\lim_{\alpha = 0} \sin \frac{\alpha}{2} = 0$; siis saame

$$\lim_{x \to m} \sin x - \sin m = 0 \quad \text{ehk} \quad \lim_{x \to m} \sin x = \sin m.$$

$$\operatorname{Lim} \sin x = \sin \operatorname{Lim} x$$

Avalduse N^x piir, kui $\lim x = m$.

Võttes jälle vahendi:

$$N^x - N^m,$$

võime oletada, et enne piiri on see vahend nullist lahkuminev. Algebra põhjal kirjutame:

$$N^x - N^m = N^{m+\alpha} - N^m = N^m(N^\alpha - 1).$$

Võttes piiris, saame:

$$\lim(N^x - N^m) = N^m \lim(N^\alpha - 1)$$

$$\lim N^x - N^{\lim x} = N^m \lim(N^\alpha - 1).$$

Arvesse võttes, et teises pooles $\lim N^\alpha = 1$, näeme, et $\lim N^\alpha - 1 = 0$ ja seega terve teine pool muutub nulliks, tuleme otsusele, et

$$\lim N^x = N^m = N^{\lim x}.$$

Avalduse $\log_a x$ piir.

Avalduses $\log_a x = y$, kus y on ka muutuvsuurus, võtame logariitele vastavad arvud:

$$x = a^y, \text{ kust } \lim x = a^{\lim y}$$

Logaritmides piiravaldust, saame:

$$\log_a \lim x = \lim y \cdot \log_a a \quad \text{ehk}$$

$$\log_a \lim x = \lim y.$$

Teades, et $\lim y = \lim \log_a x$, võime kirjutada:

$$\log \lim x = \lim \log x.$$

Harjutused.

1). Leida avalduse $\frac{x^2 - 3x + 2}{5x - x^2 - 6}$ piir, kui $x \to 2$.

Kui antud avaldusse paneme otsekohe piirväärtuse $x = 2$, siis saame:

$\dfrac{2^2-3.2+2}{5.2-2^2-6}=\dfrac{0}{0}$. See on määramatus. Et sarnasest resultaadist mööda saada, seks lahutame lugeja ja nimetaja algteguriteks ja koondame. Sarnasel viisil võime lahti saada teguritest, mis tingivad määramatu resultaadi. Nii saame:

$$x^2-3x+2=x^2-x-2x+2=(x^2-x)-(2x-2)=(x-1)(x-2);$$

$$5x-x^2-6=3x-2x-x^2-6=(3x-6)+(2x-x^2)=(3x-6)-(x^2-2x)=3(x-2)-x(x-2)=$$

$$=(3-x)(x-2).$$

Nagu näeme, on lugejas ja nimetajas ühine tegur $x-2$, millest määramatus tingitud on, sest $\lim\limits_{x=2}(x-2)=0$.

Seda arvesse võttes, võime kirjutada:

$$\lim_{x=2}\frac{x^2-3x+2}{5x-x^2-6}=\lim_{x=2}\frac{(x-1)(x-2)}{(3-x)(x-2)}=\frac{\lim(x-1)}{\lim(3-x)}=1$$

2) Leida $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}$. Kui otsekohe võtame piiri, siis saame jälle määramatuse $\frac{0}{0}$. Sellest pääseme mööda, kui kasvatame lugejat ja nimetajat avaldusega $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}$. Siis saame:

$$\lim_{x=0}\frac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=\lim_{x=0}\frac{(a+x)-(a-x)}{x(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})}=$$

$$\lim_{x=0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=\lim_{x=0}\frac{2}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}=\frac{2}{\lim\sqrt{a+x}+\lim\sqrt{a-x}}=$$

$$\frac{2}{\sqrt{a+0}+\sqrt{a-0}}=\frac{2}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

3). Leida $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{-1}}{\operatorname{ctg} x}$. Otsekohe võttes, saame jälle $\frac{0^{-1}}{\infty}=\frac{1}{0.\infty}$ ...... määramatus. Aga muutes kuju saame:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{-1}}{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1.$$

4). Leida $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg}x-\sin x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin x-\sin x\cos x}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin x \cos x}{x}} = \frac{\lim \cos x}{\lim \frac{\sin x}{x} - \lim \frac{\sin x}{x} \cdot \lim \cos x} =$$

$$= \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

5). $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left[\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{1 - \operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \lim \frac{2\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{(1-\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{tg} x)} \underbrace{=}_{1=\operatorname{tg}45^\circ=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} \lim \frac{2\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} x\right)} =$$

$$= \lim \frac{2\operatorname{tg} x \cdot \cancel{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x\right)}}{\cancel{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x\right)}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} x\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} x\right)} = \frac{\lim 2\operatorname{tg} x}{(1 + \lim \operatorname{tg} x)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \lim \operatorname{tg} x\right)} =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

6). $$\lim_{x=\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\pi - 2x} \underbrace{=}_{1=\sin 90^\circ = \sin\frac{\pi}{2}} \lim \frac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin x}{\pi - 2x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}} \cdot \lim \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cdot$$

Arvesse võttes, et piiri lähidal $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \varepsilon$, kus ε lõpmatu väike, saame:

$$\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0 .$$

5.

Reaal- ja immaginaararv. Igasugust arvu, mis mingisugust tõesti võimalikku suurust, kas positiivset ehk negatiivset, püsivat ehk muutuvat, lõpmatu väikest ehk lõpmatu suurt, kujutab, nimetame meie reaalseks arvuks, sellepärast, et tema suurus on tõesti reaalselt olemas, teisiti väljendades, on reaalselt võimalik. Ümberpöörtult, sarnast arvu aga, mis kujutab suurust, mis reaalselt olematu, võimatu on, nimetame immaginaararvuks. Immaginaararvu tüübina esinevad meile paarisastme juured negatiivsetest arvudest, näit. $\sqrt{-a}$, $\sqrt[4]{-a}$, $\sqrt[2n]{-a}$, $\sqrt{-25}$, $\sqrt[4]{-16}$ j.n.e. Tõepoolest, meie ei saa ettekujutada, missugune arv annab paarisastmes negatiivse suuruse. Küll teame meie, et kui positiivsed, nii ka negatiivsed arvud paarisastetes annavad alati positiivse resultaadi ja mitte kunagi negatiivset. Nii on $(+B)^2 = B^2$, $(-B)^2 = B^2$, $(-B)^4 = B^4$, $(-B)^{2n} = B^{2n}$. Ümberpöörtult: $\sqrt{B^2} = \pm B$; $\sqrt[4]{B^4} = \pm B$; $\sqrt[2n]{B^{2n}} = \pm B$. Aga missugune on juur $\sqrt{-B^2}$, $\sqrt[4]{-B^4}$ j.n.e., seda meie ei tea. See juur on nõnda öelda olematu, võimatu suurus, immaginaar ehk kujuta suurus. Immaginaararvu võime ainult osalt avaldada. Näit. $\sqrt{-25} = \sqrt{25}.\sqrt{-1} = 5\sqrt{-1}$; $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}\sqrt[4]{-1} = 2\sqrt[4]{-1}$. Nagu näeme, saame ainult nii kaugele, et kõik suurused saame avaldada peale $\sqrt{-1}$. See radikaal on n.n. immaginaarühik ja kujutakse tähega i, nii et $\sqrt{-1} = i$; $\sqrt{-25} = 5i$ j.n.e. Ülendades $\sqrt{-1} = i$ teise astmesse, saame $-1 = i^2$.

6.

Logariidi üldmõiste.

Algebrast teame: logariit on astmenäitaja, millesse tuleb põhiarv ülendada, et saada käesolevat arvu. $\lg_a N = n$; $a^n = N$. Algebras on tarvitusel peaasjalikult kümnendik süsteem, milles põhiarvuks on 10. Analüüsis saame aga opereerima ka teistsuguste põhiarvudega ja sellepärast peame käsitama logariite üldisemal kujul. Kümnendik süsteemis on: $\lg 1 = 0$; $\lg 2 = 0{,}30103$, $\lg 3 = 0{,}47712$, $\lg 10 = 1$, $\lg 20 = 1{,}30103$, $\lg 30 = 1{,}47712$, $\lg 100 = 2$, $\lg 200 = 2{,}30103$, $\lg 300 = 2{,}47712$ j.n.e.

See tähendab:

$$10^0 = 1;\ 10^{0,30103} = 2;\ 10^{0,47712} = 3;\ 10^1 = 10;\ 10^{1,30103} = 20;\ 10^{1,47712} = 30;\ 10^2 = 100;$$
$$10^{2,30103} = 200 \text{ j.n.e.}$$

Kui nüüd kirjutame kaks rida, ühe arvudest ja teise nende logariitest

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 10, & 100, & 1000, & 10.000\ldots\ldots \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4\ldots\ldots, \end{array}$$

siis näeme, et esimene on geomeetriline progressioon teguriga 10, teine arithmeetiline progressioon vahendiga 1. Need read võime veel teisiti kirjutada:

$$\begin{array}{ccccc} 10^0, & 10^1, & 10^2, & 10^3, & 10^4,\ldots\ldots \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4\ldots\ldots \end{array}$$

Nüüd näeme selgesti, missuguse korrapärasusega saabuvad arvud ja nende logariidid. Kumbagi ritta võime veel paigutada kõiksuguseid vahepealseid arvud:

$$\begin{array}{ccccccccc} 10^0; & 10^{0,30103}; & 10^{0,47712}; & \ldots\ldots 10^1; & 10^{1,30103}; & 10^{1,47712}; & \ldots\ldots 10^2 \text{ j.n.e.} \\ 0; & 0,30103; & 0,47712; & \ldots\ldots 1; & 1,30103; & 1,47712; & \ldots\ldots 2 \text{ j.n.e.} \end{array}$$

Nüüdsi võime igasuguseid arvud neis ridades vastavate kohtadele paigutada ja ikka on meil kaks korrapärast rida, milledest esimene on geomeetriline progressioon ja kujutab arve kasvavas järjekorras, teine aga kujutab nende arvude logariite samas järjekorras ja on arithmeetiline progressioon.

Tähelepannes seda asjaolu, võime öelda, et samuti on lugu ka siis, kui põhiarvuks on ükskõik missugune arv, sest seadus on kõigi kohta maksev ja 10 on ainult üks erijuhus. Nii võime kirjutada

$$\begin{cases} a^{-3b}, & a^{-2b}, & a^{-b}, & a^{-1}, & a^0, & a^1, & a^b, & a^{2b}, & a^{3b}\ldots\ldots \\ -3b, & -2b, & -b, & -1, & 0, & 1, & b, & 2b, & 3b\ldots\ldots \end{cases}$$

Ülemine rida on geomeetriline progressioon ja kujutab arve, alumine on arithmeetiline rida ja kujutab nende arvude logariite. Põhiarvuks võime valida a ükskõik missuguses astmes, samuti kui meil enne oli võetud 10 esimesel astmel. Kui võtame ka esimese astme, siis on meil logariitsüsteem põhiarvuga a, kui võtame $a^0 = 1$, siis on süsteem põhiarvuga 1 j.n.e. Kui ülemises reas on mõni arv võrdne 10 (see leidub tingimata, kui meie ritta mahutame lõpmatu hulka arve ja igaüks lahkub eelmisest lõpmatu vähe lahku), ja võtame selle arvu põhiarvuks, siis saame kümnendik süsteemi. Harilikult valitakse põhiarvuks sarnane ülemise rea liige, mille astme näitaja on 1. See põhimõte on kõigis süsteemes maksvaks võetud. Selle järele oleks siis põhiarvu logariit alati võrdne ühele, olgu süsteem missugune tahes.

Nagu logariittabelitest näeme, on logariitsüsteemi loomisel tarvilik saada kõiksuguseid arvud, missuguseid praktikas ettetulla võivad ja sellepärast on tarvilik, et arvude reas esineksid kõiksuguseid arvud, tähendab, mitte ainult täisarvud 1, 2, 3, 4 ..... j.n.e., vaid ka vahepealsed murdarvud ja neid peab olema võimalikult palju. Kahe täisarvu vahel on lugematu hulk murdarve. Et seda kõike saada, siis võtame geomeetrilise progressiooni algliikmeks arvu $1+\frac{1}{n}$, kus n võib olla igasuguse suurusega nullist kunni lõpmatuseni. Kui n on õige suur, siis on arv $1+\frac{1}{n}$ väga vähe 1....st lahkuminev.

Kirjutame geomeetrilise progressiooni:

$$(1+\tfrac{1}{n})^0 ; (1+\tfrac{1}{n})^{\frac{1}{n}} ; (1+\tfrac{1}{n})^{\frac{2}{n}} ; (1+\tfrac{1}{n})^{\frac{3}{n}} ; \ldots\ldots (1+\tfrac{1}{n})^{\frac{1n}{n}} ; (1+\tfrac{1}{n})^{\frac{2n}{n}} ; (1+\tfrac{1}{n})^3 \ldots\ldots ;$$

$$(1+\tfrac{1}{n})^n \ldots\ldots (1+\tfrac{1}{n})^{2n} ; (1+\tfrac{1}{n})^{3n} ; \ldots\ldots (1+\tfrac{1}{n})^{n^2} \ldots\ldots$$

Nüüd kirjutame arithmeetilise progressiooni:

$$0, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, \quad \frac{3}{n} \ldots\ldots 1, \quad 2, \quad 3, \ldots\ldots$$

$$n, \quad 2n, \quad 3n \ldots\ldots \quad n^2 \ldots\ldots$$

Esimene rida kujutab arve kasvavas järjekorras 1st kunni ∞, kui $n \to \infty$, teine rida aga kujutab nende arvude logariite. Nüüd vaatame, missuguse arvu logariit on 1. See arv on nagu näeme $1+\frac{1}{n}$; tema on seega süsteemi põhiarv. Kui võtame $n=\frac{1}{9}$, siis $\frac{1}{n}=9$ ja $1+\frac{1}{n}=10$. Selle arvu logariit on, nagu näeme, 1. Seega oleme saanud kümnendik logariitsüsteemi. Andes aga n....ile igasuguseid suurusid, saame ka igasuguseid süsteemid. Logariitsüsteem, mille põhiarvuks on $1+\frac{1}{n}$, kus n on lõpmatu suur, on n. n. üldsüsteem. Tema võimaldab kõikide arvude logariitide saamise ja temast võivad saavuda igasugused teised süsteemid, kui n....le anname vastava väärtuse.

Üks erijuhustest üldsüsteemist on nõnda nimetud __naturaal - ehk Neperi logariitsüsteem__, milles põhiarvuks on võetud geomeetrilisest reast liige $(1+\frac{1}{n})^n$, mille juures $n \to \infty$. See on nagu eelpool nägime Neperi arv $e=(1+\frac{1}{n})^n =$
$$=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots n}.$$
Et liige $(1+\frac{1}{n})^n$ võiks olla põhiarvuks, selleks on tarvis, et tema logariit vorduks 1ga, tähendab, arithmeetilises progressioonis peab vastav liige olema 1. Et seda saada üldkujust, selleks võtame niisuguse kombinatsiooni, et astetesse ülenduks igas ühes liikmes mitte $1+\frac{1}{n}$, vaid $(1+\frac{1}{n})^n$. Siis saame progressioonid:

$$[(1+\tfrac{1}{n})^n]^0, \; [(1+\tfrac{1}{n})^n]^{\frac{1}{n}}, [(1+\tfrac{1}{n})^n]^{\frac{2}{n}}, \ldots\ldots [(1+\tfrac{1}{n})^n]^1, \; [(1+\tfrac{1}{n})^n]^2, [(1+\tfrac{1}{n})^n]^3, \ldots\ldots [(1+\tfrac{1}{n})^n]^n \ldots$$

$$0, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, \ldots\ldots \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots\ldots \quad n \ldots\ldots$$

Et saada lühemat kuju, avaldame $(1+\frac{1}{n})^n_{n\to\infty} = e = 2{,}71828$, ja $\frac{1}{n}=\alpha$.
Et $n\to\infty$, siis α on lõpmatu väike arv. Nüüd omavad progressioonid kuju:

$e^0, e^{\alpha}, e^{2\alpha}, e^{3\alpha}, \ldots\ldots e, e^2, e^3, \ldots\ldots e^n, \ldots\ldots$

$0, \quad \alpha, \quad 2\alpha, \quad 3\alpha, \ldots\ldots 1, \quad 2, \quad 3, \ldots\ldots n = \frac{1}{\alpha}, \ldots\ldots$

Nagu meie neid rida paremale poole lõpmatuseni võime laiendada, samuti võime seda teha ka pahemale poole negatiivarvude abil. Siis saame

$e^{-n}, \ldots e^{-3}, e^{-2}, e^{-1}, e^0, e^{\alpha}, e^{2\alpha}, e^{3\alpha}, \ldots\ldots e, e^2, e^3, \ldots\ldots e^n$

$-n, \ldots -3, -2, -1, 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots\ldots 1, 2, 3, \ldots\ldots n, \ldots\ldots$

See on Neperi logariitsüsteemi kujutus.

Logariitsüsteemide teisendus.

Eespool nägime, et logariitsüsteem võib ehitud olla missugusele alusele tahes. Ühel juhusel on kasulik tarvitada kümnendik süsteemi, teisel korral Neperi süsteemi, kolmandal mõne teise põhiarvuga j.n.e. Et opereerida mitmesuguste süsteemega, selleks on tarvis leida mingisugust teisendus abinõu ühest süsteemist üleminekuks teise süsteemile.

Olgu meil ühe ja sama arvu N logariit avaldatud kahe süsteemi järele, näit.

$$\left.\begin{aligned} \lg_a N &= x \\ \lg_b N &= y \end{aligned}\right\}$$

Esimesel juhusel on N logaritmitud põhja a järele, teisel aga põhja b järele. Edasi kirjutame $a^x = N$ ja $b^y = N$, ehk $a^x = b^y$. Logaritmides avaldust $a^x = b^y$ ühe põhiarvu järele, näituseks a järele saame:

$$x \lg_a a = y \lg_a b.$$

Arvesse võttes, et $\lg_a a = 1$, saame $x = y \lg_a b$. Logaritmides aga võrdsust $a^x = b^y$ põhiarvu b järele, saame $x \lg_b a = y \lg_b b$, kus $\lg_b b = 1$. Järjelikult jääb

$$x \lg_b a = y.$$

Avaldustest $x = y \lg_a b$ ja $y = x \lg_b a$ võime kirjutada:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x}{\lg_a b} = x \cdot \frac{1}{\lg_a b} = x \cdot \lg_b a \\ x &= \frac{y}{\lg_b a} = y \cdot \frac{1}{\lg_b a} = y \cdot \lg_a b. \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \frac{1}{\lg_a b} &= \lg_b a; \\ \frac{1}{\lg_b a} &= \lg_a b; \\ \lg_b a \cdot \lg_a b &= 1 \end{aligned}$$

Murrud $\frac{1}{\lg_a b}$ ja $\frac{1}{\lg_b a}$ on logariitsüsteemide teisendus.

Moodulid.

Harjutus. Kui tahame 10 süsteemist üle minna 5 süsteemile, siis kasutame vastavat moodulit:

$$\left.\begin{array}{l} a = 10 \\ b = 5 \\ N = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 10^x = N = 2 \\ 5^y = N = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} lg_{10} 2 = 0{,}30103 = x; \\ lg_5 2 = \quad ? \quad = y; \end{array}$$

Valemi järele kirjutame:

$$y = x \cdot \frac{1}{lg_a b} = 0{,}30103 \cdot \frac{1}{lg_{10} 5} = \frac{0{,}30103}{0{,}69897} = 0{,}43065$$

Sellega siis $lg_5 2 = 0{,}43065$.

Kümnendik- ja Neperi süsteemide vahetusmoodul.

$$\left.\begin{array}{l} a = 10 \\ b = e \end{array}\right\} \quad 10^x = N = e^y; \quad y = x \cdot \frac{1}{lg_{10} e}; \quad x = y \cdot \frac{1}{lg_e 10}.$$

Võtame tingimisi tarvitusele järgmised kujutused: Kümnendik logaritmi kujutame sümbooliga lg, Neperi logaritmi aga sümbooliga L. Siis saame

$$y = x \cdot \frac{1}{lge}; \quad x = y \cdot \frac{1}{L\,10}; \quad lge \,.\, L10 = 1;$$

Harjutus. $N = 2; \quad 10^x = 2 = e^y; \quad \left\{\begin{array}{l} lg 2 = 0{,}30103 = x \\ L 2 = \quad ? \quad = y. \end{array}\right.$

$$y = x \cdot \frac{1}{lge} = x \cdot \frac{1}{lg\,2{,}71828} = \frac{0{,}30103}{lg\,2{,}71828} = \frac{0{,}30103}{0{,}43429} = 0{,}69314.$$

Järjelikult $L2 = 0{,}69314$.

7.

Arvrea üldmõiste.

Arvreaks nimetakse sarnast arvude rida, millest igaüks saabub eelmisest mingisuguse kindla korra järele. Algebras on meil tegemist arvridadega geomeetrilise ja arithmeetilise progressioonide kujul. Neis saabub iga liige eelmisest kindla korra järele, geomeetrilises progressioonis kasvatades eelmist liiget teguriga q ja arithmeetlises progressioonis eelmisele liikmele juurde lisades vahet d. Erijuhisena arithmeetlistest progressioonidest esineb meile nõnda nimetud naturaal arv rida.

$$-n, \ldots\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots n, \text{ kus } d = 1 \text{ ja } n = \infty.$$

Käsitades arvridu üldises mõttes, ei ole tarvilik, et meil oleks liikmete siduvaks korraks sarnane viis, kui geomeetrilises ehk arithmeetlises progressioonides, vaid ükskõik missuguse korra järele liikmed saavuvad, kui aga see kord kindel on, tähendab, ühesugune iga ükskui liikme suhtes.

Näituseks on $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \frac{1}{n}$ arvrida. Tema liikmed saavuvad ühesuguse kindla korra järele. Seda rida nimetakse <u>harmooniliseks reaks.</u>

Samuti on $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\frac{1}{1.2.3\ldots n}$ ka arvrida. See rida on nõnda nimetud <u>Neperi rida</u>, sest nagu teame on selle rea liigete summa meile juba tuntud <u>Neperi arv</u>

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Naturaalarvrea astmed annavad meile jälle uued read, näituseks

$$1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots\ldots n^2$$

$$1, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, \ldots\ldots n^3$$

j. n. e.

Et arvridades liikmete sidekord meile vabaks jääb, siis võime igasugusid rida saada igasuguse iseloomuga. Kõrvale jättes ükskuid erilüübid, käsitame rida üldises mõttes.

Eriti käsitab ridade omadusi n. n. <u>ridade teooria.</u> Meie ülesandeks on ainult pääliskaudne tutvunemine ridadega. Matemaatikas leiavad käsitust peaasjalikult lõpmatud read, s.t. lõpmatu suure liikmete arvuga. Üheks ülesandeks nende käsitusel on liikmete summa arvutamine / ridade summeerimine /. Ainult väheste ridade summa on kergesti arvutadav. Näituseks saame naturaalrea $1, 2, 3, 4 \ldots n$ summa arithmeetlise progressiooni summa valemi abil $S=\frac{(1+n)n}{2}$. Et n lõpmatu suur, siis on ka S lõpmatu suur. Harmoonilise rea $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots\frac{1}{n}$ summa saame järgmiselt / ligikaudne summa /:

Gruppime liikmed

$$S = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\ldots\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

Paneme esimeses sulus kõigile murdudele nimetajaks 4, teises sulus 8, kolmandas 16 j. n. e., millega meie osa liikmete suurust vähendame. Siis saame võrratuse:

$$S > 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots\frac{1}{16}\right)}_{\frac{1}{2}}+\ldots$$

$$S > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots\ldots\frac{1}{2}+\ldots$$

$$S > 1+n\cdot\frac{1}{2}; \qquad S > 1+\frac{n}{2}$$

See summa on ka lõpmatu suur, sest $n\to\infty$.

Neperi rea $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3\ldots n}$ summa on, nagu juba teame 2,71828......

Nende näituste juures juba näeme, et üheo read on kindla liikmete summaga, nagu seda Neperi rida näituseks on. Temas võime liikmeid kunni lõpmatuseni võtta ja selle lõpmatu rea summal on siiski kindel piir, arv 2,71828..... Rida, nõnda öelda, koondub selle arvu ümber. Neperi rida on seega koonduva rea tüüp. Ümberpöörtult naturaalarvrida ja harmooniline rida annavad nagu nägime lõpmatu suure ehk määramatu summa, kui liikmete arv lõpmatu suur. Nende summad ei koondu mingisuguse piiri ümber. Need read on seega mõlemad koondumatu ridade tüübid. Et igasuguse rea üle selgusele jõuda, kas tema summal on piir; tähendab, kas ta on koonduv rida, selleks on isesugused tundmärgid ehk koonduvustingimused olemas. Nende laiemast käsitusest meie aga loobume. Üheks tingimuseks koonduvusel on asjaolu, et rea liikmed oleks vähenevad suurused ja lõpuliikme piir oleks null. Kuid see tingimus üksi ei määra veel koonduvust ära. Näituseks on lõpmatu vähenev geomeetriline progressioon küll koonduv rida, sest $S=\frac{a}{1-q}$, mille juures a ja q on kindlad suurused. Samuti on Neperi rida koonduv. Aga harmooniline rida, mille liikmed ka vähenevad ja lõpuliige lähineb nullile, nagu nägime, ei ole koonduv. Seega on siis veel mõned lisa tingimused koonduvuse määramiseks tarvilikud, kuid neid meie vaatlema ei hakka.

8
Funktsiooni mõiste.

Opereerides muutuvarvudega, näeme et igasugused tehted muutuvarvudega annavad alati mingisuguse resultaadi. Sarnast tehteresultaati nimetame muutuvarvude funktsiooniks.

Igakord ei ole resultaat küll muutuv, kuid siiski nimetame teda kui muutuvarvude tehteresultaati ikkagi funktsiooniks, olenematu sellest, kas tema suurus muutub ühes muutuvteguritega ehk ei. Näituseks on ellipsi suhtes maksev tehteresultaat $m+n=2a$, kus m ja n on muutuvtegurid, aga resultaat 2a on const. Ringi ekvatsioonis $x^2+y^2=r^2$ on x ja y muutuvarvud, aga r püsivarv. Samuti ekvatsioonis $Ax+By+C=0$ muutuvad x ja y alati sarnases püsivvahekorras, et ekvatsiooni teine pool jääb ikka võrdseks nullile. Siin on $2a$, r^2 ja 0 kahe muutuja funktsioonid. Sümboolselt avaldame seda asjaolu järgmiselt:

$$m + n = f(m, n) = 2a; \quad x^2 + y^2 = \varphi(x, y) = r^2;$$
$$Ax + By + C = F(x, y) = 0,$$

kus sümboolid f, φ ja F kujutavad tehteid muutuvarvudega.

Kui funktsiooni avalduses tehted muutuvarvudega on terves muutumisprotsessis ühed ja needsamad ja koguresultaat saavub igakord ka üks ja seesama, siis nimetame funktsiooni püsivfunktsiooniks. Eeltoodud näitused on seega püsivfunktsioonid. Püsivfunktsiooniga on meil tegemist siis alati, kui muutujad on oma vahel seotud ekvatsiooniga. Kui aga seda ei ole, siis jääb muutujate vahekord vabaks ja ühes sellega saab ka muutuvaks resultaat. See on n.n. muutuvfunktsioon.

Näituseks, kui tasapinnal määrame punkti asendi koordinaatide abil, siis on see asend koordinaatide funktsioon. Muutes koordinaate vabalt, saame igakord isesuguse asendi. Ühendades need asendid joonega, võime saada igasuguse kõverjoone, mille punktide vahel puudub igasugune kindel vahekord, sest et koordinaadid mõlemad igakord vabalt valitavad on. See on nõnda nimetud määramata kõverjoon, ilmeta kõverjoon. Iga tema punkti asend üksikult on koordinaatide funktsioon, kuid kõik need asendid kokku seinnitavad määramata ehk muutuvfunktsiooni. Meie huvipiirkonda need funktsioonid ei kuulu. Pöörame tagasi püsivfunktsioonide käsitlusele. Vaadeldes mingisugust muutuvarvude tehet, ütleme, et selle tehte resultaat on tehtes ettetulevate muutuvarvude funktsioon. Kui esineb ainult üks muutuja, siis on meil tegemist ühe muutuja funktsiooniga; kui kaks muutujat, siis saame kahe muutuja funktsiooni j.n.e.

Nii on asi siis, kui igaüks muutuja muutub iseseisvalt mingisuguse kindla seaduse järele. Kui aga muutuvarvud on seotud ekvatsiooniga, siis on mõni muutujatest tingimata olenev teiste suurustest. Näituseks on ekvatsioon $Ax + By + Cz + D = 0$ võimalik ainult siis kui üks muutuja, näit. z, muutub x ja y suuruste järele, olati nendest olenedes. Seejuures nimetame x ja y iseseisvateks muutujateks ehk argumentideks, z aga nimetame rippuvmuutujaks ehk funktsiooniks $z = f(x, y)$. Tervet ekvatsiooni $Ax + By + Cz + D = 0$ võime kujutada sümboolselt $F(x, y, z) = 0$, kus x ja y on argumendid ja $z = f(x; y)$. Kui ekvatsioon on kahe muutujaga $Ax + By + C = 0$, siis kujutame seda $F(x, y) = 0$, kus

$y = f(x)$. Viimane kuju $y = f(x)$ näitab y ja x vahekorda funktsioonis $F(x, y) = 0$. Sisuliselt on mõlemad kujutused $F(x, y) = 0$ ja $y = f(x)$ ühe väärtuslised. Kuju $F(x, y) = 0$ on nõndanimetud <u>varjatud funktsioon</u>, sest temas on y ja x vahekord varjatud kujul olemas. Kui aga ekvatsioonis $Ax + By + C = F(x, y) = 0$ avaldame ühe muutuja vahekorra teisega $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, siis saame funktsiooni $y = f(x)$, mis kannab <u>avaliku funktsiooni</u> nime, sest temas on argumenti ja funktsiooni vahekord otsekoheselt nähtav.

Kokkuvõttes eelmist, anname funktsioonile järgmise definitsiooni: funktsioon on muutevsuurus, mis muutub kindla seaduspärasusega teise muutuja, argumenti, järele, jäädes viimasega terves muutumis protsessis kindlasse vahekorda.

<u>Otse- ja vastasfunktsioon.</u> Kui meie ekvatsioonis $Ax + By + C = 0$ võime avaldada $y = f(x)$, siis samuti on meil õigus avaldada ka ümberpöörult $x = \varphi(y) = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A}$. Sega on x ja y vastaspidised funktsioonid. Tingimisi nimetame neist ühte, näit. $y = f(x)$ otsefunktsiooniks, teist aga $x = \varphi(y)$ vastasfunktsiooniks.

<u>Funktsioonide geomeetriline käsitus.</u> Geomeetrias on iga kõverjoon, iga sirgjoon, iga pind, maht funktsiooni kujul avaldatav. Näituseks on sirgjoon $Ax + By + C = 0$ oma punktide koordinaate funktsioon $F(x, y) = 0$ ehk $y = f(x)$; ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ on samuti $F_1(x, y) = 0$ ehk $y = f_1(x)$, ring on $F_2(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$ ehk $y = f_2(x)$ j.n.e.

Ka elementaargeomeetrias on funktsiooni mõiste tarvitatav. Näituseks on kolmnurk oma elementide (küljed ja nurgad) funktsioon: $\Delta = f(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$. Selle juures on kolm elementi argumentid ja teised kolm nende funktsioonid. Samuti on korrapärase hulknurga perimeeter tema raadiuse ja külje funktsioon; ring on raadiuse funktsioon $C = f(r) = 2\pi r$; ringi pind on ka raadiuse teistsugune funktsioon $S = \varphi(r) = \pi r^2$; kera maht on jällegi raadiuse funktsioon $v = \varphi(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$; koonuse maht on raadiuse ja kõrguse funktsioon $v = \theta(r, h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

<u>Funktsioonide mehaaniline käsitus.</u> Mehaanikas vaatleme igasugust liikumist liikumistegurite funktsioonina. Sarnaste teguritena esinevad meile seal aeg ja liikumist määrajad tungid. Nii on ühtlases liikumises liikumistee pikkus $S = f(v, t)$, kus v on kiirus ja t liikumisaeg; kiirenduvliikumises on $S = F(v, j, t)$, kus v algkiirus, j kiirendus.

Funktsioonide liigitamine.

Asudes funktsioonide käsitusele, on tarvilik neid liigitada.

Esiteks määrame kaks pealiiki, millidesse kõik funktsioonid jagunevad, nimelt algebraal- ja transtsendentfunktsioon.

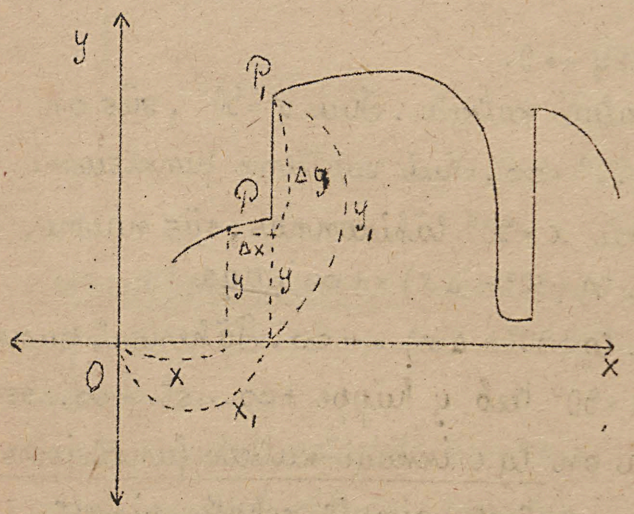
Algebraalfunktsiooniks nimetame sarnast funktsiooni, mis saavub argumentist lõpliku arvu algebraaltehete abil. Näit. on funktsioonid $y = (a + x)^x$; $y = x^n - b^n$, kus n on püsivsuurus, $y = \sqrt[n]{x}$ j.n.e. algebraalfunktsioonid.

Transtsendentfunktsiooniks nimetame sarnast funktsiooni, mis saavub määramatu arvu algebraaltehete abil, ehk milles on iseäralised tehted. Näituseks on funktsioonid $y = a^x$; $y = Lg^x$, $y = \sin x$, $y = \arcsin x$ j.n.e. transtsendentfunktsioonid. Samuti on $\pi = 3,14159\ldots\ldots$ ja $e = 2,71828\ldots\ldots$, kui mitte täpsed suurused, ehk õigem öelda mitte täpselt saadavad suurused, ka transtsendent arvud.

Ratsionaalfunktsiooniks nimetame sarnast funktsiooni, mille avalduses puuduvad juurearvutused /radikaalid/, ehk milles raadikaalid kaotatud on.

Irratsionaalfunktsiooniks nimetame ümberpöördult sarnast funktsiooni, mille avalduses figureerivad radikaalid. Näit. on funktsioon $y = \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{x-a}}$ irratsionaalfuntsioon.

*) Katkevfunktsiooniks nimetame sarnast funktsiooni, mis argumenti lõpmata väikse muutmise korral võib muutuda mitte lõpmatu vähe, vaid teeb nõnda nimetud hüppeid ühe suuruse juurest teiseni. Katkevat funktsiooni avaldame järgniselt:



$$y_1 = f(x + \Delta x)$$
$$y = f(x)$$
$$y_1 - y = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = m,$$

kus m võib igasuguse suurusega olla kunni $m \to \pm\infty$.

Nagu joonisest näeme, ei ole kõverjoon katkeva funktsiooni korral mitte nõnda öelda voolavalt, pidevalt muutuv, kui seda näigime katketu funktsiooni korral, vaid teeb äkilised kõverused, hüpped. Igakord, kui meile esineb mingisugune funktsioon $y = f(x)$ ja tahame teada, kas see funktsi-

*) Katkevfunktsioon tuleb järjekorras pääle katketu- ehk pidevfunktsiooni. /Vaata lhk 29/

oon on pidev ehk katkev, siis katsume järele, missugune on vahend Δy

$$y_1 - y = \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Kui see vahend on lõpmatu väike, siis on funktsioon pidev; kui Δy ei ole lõpmatu väike, siis on funktsioon katkev.

Harjutused.

1). $y = px+q$. $y_1 = p(x+\Delta x)+q = px + p.\Delta x + q$;

$$\Delta y = y_1 - y = (px+p.\Delta x+q) - (px+q) = \cancel{px} + p.\Delta x \cancel{+q} \cancel{-px} \cancel{-q} = p.\Delta x.$$

Et Δx on lõpmatu väike, siis on ka $p.\Delta x$ lõpmatu väike. Seega on Δy lõpmatu väike.

Funktsioon $y = px+q$ on seega katketu funktsioon.

2). $y = x^2$. $y_1 = (x+\Delta x)^2$; $\Delta y = y_1 - y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = \cancel{x^2} + 2x.\Delta x + \Delta x^2 \cancel{-x^2}$;

$$\Delta y = 2x.\Delta x + \Delta x^2 = (2x+\Delta x).\Delta x.$$

Et $\Delta x \to 0$, siis ka $(2x+\Delta x).\Delta x \to 0$.

Funktsioon $y = x^2$ on katketu ehk pidev.

3). $y = a^x$; $\Delta y = y_1 - y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$.

Et $\Delta x \to 0$, siis $a^{\Delta x} \to 1$, $\mathrm{Lim}(a^{\Delta x} - 1) = 0$. Seega siis ka $\Delta y = a^x(a^{\Delta x} - 1)$ on lõpmatu väike.

4). $y = \sin x$; $\Delta y = y_1 - y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\cancel{x}+\Delta x\cancel{-x}}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}$;

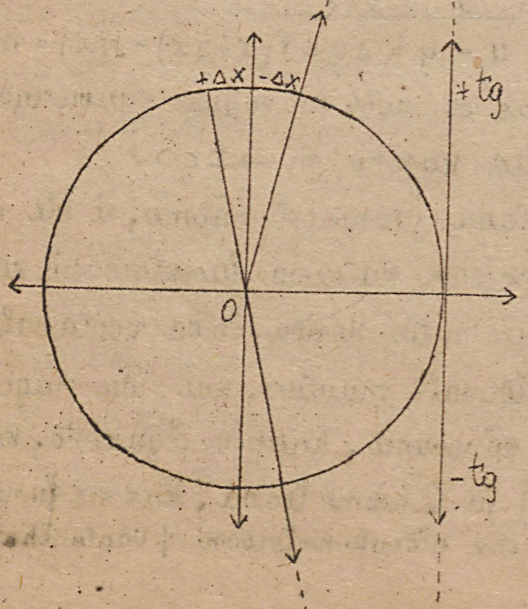
$$\Delta y = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Et $\Delta x \to 0$, siis ka $\sin\frac{\Delta x}{2} \to 0$. Seega ka $\Delta y = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ on lõpmatu väike.

5). $y = \mathrm{tg}\,x$; $\Delta y = \mathrm{tg}(x+\Delta x) - \mathrm{tg}\,x = \frac{\sin(\cancel{x}+\Delta x\cancel{-x})}{\cos(x+\Delta x)\cos x}$.

Et $\Delta x \to 0$, siis ka $\sin\Delta x \to 0$. Seega $\Delta y \to 0$.

Märkus. Funktsioon $y = \mathrm{tg}\,x$ ei ole mitte alati katketu. Kui $x = 90°$, siis on



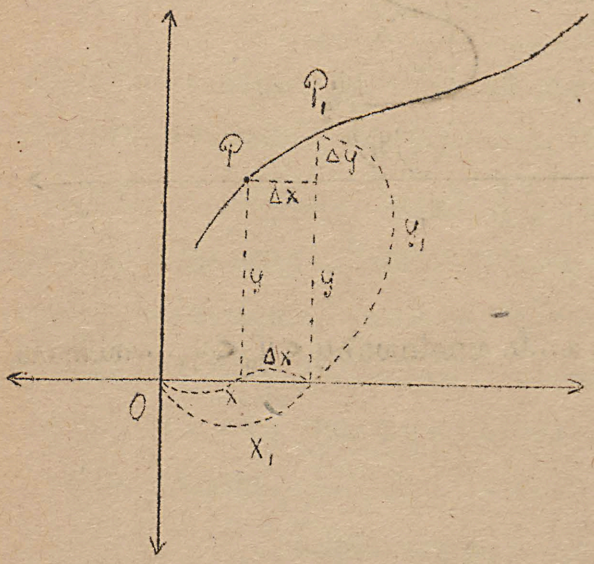
$y = \mathrm{tg}\,90° = \infty$. Kui vaatleme funktsiooni punkti $x = 90°$ lähikonnas, siis näeme, et $\mathrm{Lim}\ \mathrm{tg}(90° - \Delta x) = +\infty$, aga $\mathrm{Lim}\ \mathrm{tg}(90° + \Delta x) = -\infty$. Tähendab punktis $x = 90°$ teeb y hüppe $+\infty$...st $-\infty$...sse. Seega on tg x ikkagi katkev funktsioon. Ta on katketu ainult kohati, nimelt muutudes $x = 0 .... 90°$. Punktis $x = 90°$ on tg katkev, minnes üle $+\infty$ ..... $-\infty$.

Edasi muutudes $x = 90° \ldots\ldots 270°$ on tg jälle katketu, saades suurused $-\infty \ldots\ldots 0 \ldots\ldots +\infty$. Punktis $x = 270°$ teeb tg jälle korraga hüppe $+\infty$...st $-\infty$...sse.

Katketu- ehk pidevfunktsiooniks nimetame sarnast funktsiooni, milles funktsiooni y tähendus muutub lõpmatu vähe igakord kui argumendi x tähendus lõpmatu vähe muutub. Näituseks võtame kaks ühe ja sellesama funktsiooni väärtust $y_1 = ax_1 + b$ ja $y_2 = ax_2 + b$. Kui x_2 läheb lõpmatu vähe lahku x_1...st, tähendab $x_2 = x_1 + \alpha$, kus α on lõpmatu väike, ja selle juures ka y_2 läheb lõpmatu vähe lahku y_1.....st, tähendab

$$y_2 - y_1 = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = \beta,$$

kus β lõpmatu väike suurus, siis on funktsioon $y = ax + b$ katketu funktsioon. Tema iseloom on, nagu näeme, see, et igakord, kui x muutub lõpmatu vähe, siis tingimata ka y muutub lõpmatu vähe. Selgituseks vaatame seda asjalu veel geomeetrilises käsituses. Olgu meil mingisugune kõverjoon, mille punktide ordinaat on avaldatud abstsissi funktsioonina, $y = f(x)$. Võtame punkti P_1, mis lõpmatu lähidal on punktile P; siis on $y_1 = f(x_1)$ ehk $y = f(x + \Delta x)$, kus Δx on lõpmatu väike suurus ($\Delta x \to 0$). Kui selle juures ka $y_1 - y$ ehk $(y + \Delta y) - y = \Delta y$ on lõpmatu väike ($\Delta y \to 0$), siis on ka funktsioon $y = f(x)$ katketu /: pidev :/ funktsioon.



Ainult sarnaste funktsioonidega saame meie edaspidi tegemist tegema. Katketu funktsiooni matemaatiline kujutus on

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \varepsilon \ldots\ldots (\varepsilon \text{ on lõpmatu väike}) \quad \varepsilon \to 0 \quad {}^{x)}$$

Perioodfunktsiooniks nimetame sarnast funktsiooni, mis muutub kindlas korrapärases perioodis. Nii on näituseks kõik trigonomeetrilised funktsioonid perioodsed.

$y = \sin x$ muutub katketult perioodis $0 \ldots\ldots 1 \ldots\ldots 0 \ldots\ldots -1 \ldots\ldots 0 \ldots\ldots 1 \ldots\ldots 0 \ldots\ldots -1$ jne.

$y = \cos x$ muutub katketult perioodis $1 \ldots\ldots 0 \ldots\ldots -1 \ldots\ldots 0 \ldots\ldots 1 \ldots\ldots 0 \ldots\ldots -1$ jne.

$y = \operatorname{tg} x$ muutub perioodis $0 \ldots\ldots +\infty$ | $-\infty \ldots\ldots 0 \ldots\ldots +\infty$ | $-\infty \ldots\ldots 0 \ldots\ldots +\infty \ldots\ldots$

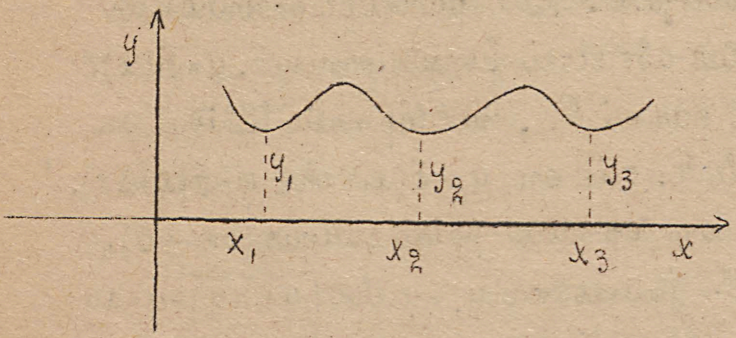
katketu | katkeb | katketu | katkeb

x) Järgneb katkevfunktsioon /: vaata lhk. 27/.

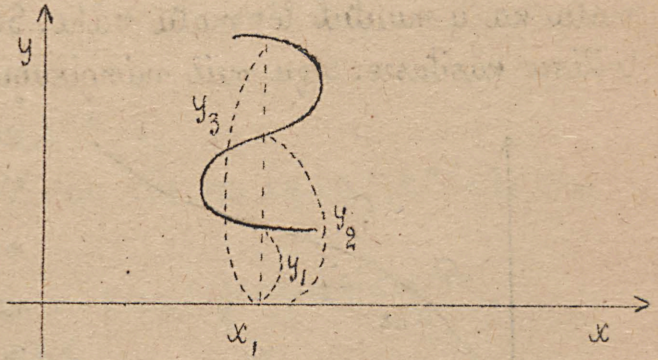
$y = \operatorname{ctg} x$ muutub samuti püüdes $+\infty, 0, -\infty$, katkedes üleminekuis $+\infty \mid -\infty$.

<u>Ühene ja mitmene funktsioon</u>. Üheseks funktsiooniks nimetame sarnast, mis iga argumenti väärtuse korral saab ainult ühe vastava väärtuse. Vastasel korral on funktsioon mitmene. Näituseks on $y = f(x) = ax + b$ ühene funktsioon, aga $y = \varphi(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ on mitmene funktsioon, sest et radikaali ees võib alati kaks märki $+$ ehk $-$ võtta. Samuti on $y = \sin x$ ühene, kuna $y = \arcsin x$ mitmene funktsioon on, sest ühele sinuse väärtusele vastab lõpmatu hulk kaariväärtusi.

<u>Märkus:</u> Üheseks nimetame funktsiooni ainult siis, kui igale x...si suurusele vastab igakord ainult üks y...i suurus. Kui aga mitmele x....si suurusele vastab üks ja sama y....i suurus, siis on funktsioon ikkagi ühene. Vaatleme seda joonise abil



$x_1 < x_2 < x_3$, aga $y_1 = y_2 = y_3$ ..... ühene f.



ühele x...le vastavad $y_1 < y_2 < y_3$....mitmene

10.
<u>Tuletisfunktsioon.</u>

Katketu funktsioonide suhtes saime definitsiooni: kui argument muutub lõpmatu vähe, siis muutub ka funktsioon lõpmatu vähe. Sellest väljaminnes, vaatleme katketu funktsiooni omadusi ligemalt.

Võtame kaks lõpmatu lähidat funktsiooni väärtust $y = f(x)$ ja $y_1 = f(x + \Delta x)$, kus Δx on x...si lõpmatu väike lisand, kas positiivne ehk negatiivne, ükskõik. Võttes vahendi $y_1 - y$, saame ka y...i lõpmatu väikse lisandi:

$$y_1 - y = \pm \Delta y = f(x \pm \Delta x) - f(x)$$

ehk $y_1 - y = \mp \Delta y = f(x \pm \Delta x) - f(x)$.

Üldisel kujul avaldame seda

$$y_1 - y = \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x),$$

kus Δy ja Δx on ükskõik missuguste märkega. Meile on ainult esiotsa tähtis, et mõlemad on lõpmatu väiksed: $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Nüüd võtame vahekorra $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

Selle vahekorra piir kannab funktsiooni $y = f(x)$ tuletisfunktsiooni ehk lihtsalt tuletise nime.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ldots\ldots \text{tuletis.}$$

Funktsiooni $y = f(x)$ tuletist avaldame lühidalt sümbooliga y' ehk $f'(x)$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Käsitades lõpmatu väikeste arvude omadusi, nägime, et nende kasvatis, näiteks, on alati ka lõpmatu väike: $\Delta x \cdot \Delta y \to 0$. Seda aga ei saa öelda nende vahekorra suhtes. Jaond $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ei ole mitte lõpmatu väike, vaid võib olla igasugune suurus. Sellest võime oletada, et tuletis $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ võib olla ükskõik missugune suurus, väärtuse poolest nullist kuni $\pm\infty$. Tõepoolest, tehes jaondi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ analüüsi, näeme:

1) kui $\Delta x = 0$, aga $\Delta y \neq 0$, olles ainult lõpmatu vähe lahkuminev nullist, siis saame

$$\frac{\pm \Delta y}{0} = \pm\infty.$$

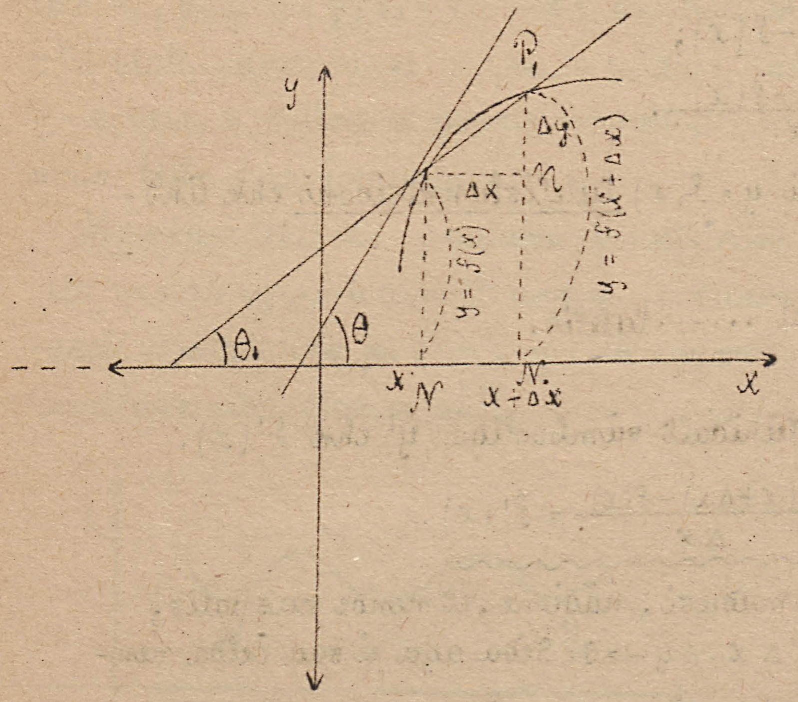
2) Kui $\Delta y = 0$, aga $\Delta x \neq 0$, olles ainult lõpmatu vähe nullist lahkuminev, siis saame

$$\frac{0}{\pm \Delta x} = 0.$$

Sega siis $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \ldots\ldots\ldots \pm\infty$.

Märkus. Tuletises on juhused $\Delta x = 0$ ehk $\Delta y = 0$ ainult kui erijuhused tähelpandavad. Üldises mõttes ei ole meile need erijuhused tähtsad, vaid meie mõistame sümbooli $x \to 0$ all ainult lõpmatu lähinemist nullile. Tähendab üldiks mõttes on tuletisel $y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ükskõik missugune tähendus, kas suur ehk väike, nulli ja lõpmatuse vahel.

Tuletise geomeetriline käsitus. Geomeetriliselt võime tuletise kohta iseäranis kergesti selgusele jõuda. Võtame koordinaadistikus mingisuguse kõverjoone, mida võime avaldada abstsissfunktsioonis



$$y = f(x).$$

Kui x muutub $x+\Delta x$.... ks, siis ka y muutub $f(x)$....st $f(x+\Delta x)$...ks ehk $y+\Delta y$....ks. Võttes vahekorra $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, näeme et see vahekord on lõikjoone nurga tangens:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\theta_1 .$$

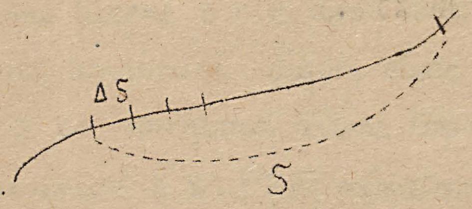
Kui Δx lähineb nullile, siis lähineb ka Δy nullile, järjelikult lõikjoon lähineb puutuvjoonele. Sellega siis nurk θ_1 lähineb nurga θ...le. Tähendab $\lim \theta_1 = \theta$ ja $\lim tg\theta_1 = tg\theta$. Kui võtame nüüd avaldise

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\theta_1$$

piiri, siis saame $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim tg\theta_1 = tg\theta$. $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ on aga meie definitsiooni järele funktsiooni $y=f(x)$ tuletis y'. Seega tuleme otsusele, et tuletis on puutuvjoone nurga tangens. Sellel asjaolul on suur tähtsus. Nimelt, uurides mingisugust kõverjoont $y=f(x)$, võime kõverjoone asemel uurida tema punktide puutuvjooni, mis ülesande kergemaks teeb. Samuti, tahtes joonistada kõverjoont $y=f(x)$, võtame rea punkte $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, $y_3=f(x_3)$..... ja avaldame nende punktide suhtes tuletised y'_1, y'_2, y'_3 ...... Need tuletised näitavad, missuguse nurga moodustavad neis punktides puutuvjooned; seega võime igas punktis joonistada puutuvjoone ja nende järele on juba kergem kõverjoont joonistada.

Tuletise mehaaniline tähendus. Füüsikas mehaanika osas vaatleme meie liikumist kui aja funktsiooni. Oletame, et mingisugune keha liikudes t aja vältel, jõuab edasi kauguse s; siis on see kaugus aja funktsioon

$s = f(t)$. Vaadeldes liikumist lõpmatu väikeste momentide järele, näeme, et lõpmatu väikse aja Δt vältel jõuab keha edasi kauguses Δs. Meie teame, kui kauguse s jagame aja t....ga, siis saame kiiruse $v = \frac{s}{t}$. See on aga maksev siis, kui liikumine on ühetaoline. Muutuva kiirusega liikumise korral on see küsimus raskem. Kui meie aga vaatleme liikumist lõpmatu väikeste momentide järele, siis saame iga liikumist jaotada lõpmatu hulgaks ühetaolisteks liikumisteks ja vaadelda tervet liikumist kui nende summat.



Aja t vältel on liikumine s;

kiirus $v = \frac{s}{t}$.

Aja Δt vältel on liikumine Δs,

kiirus $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Võttes Δt lõpmatu väikse, lähineva nullile saame $\mathrm{Lim}\,\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$..... kiirus.

Seega on liikuva keha kiirus v liikumisfunktsiooni $s = f(t)$ tuletis. See on nähtavasti maksev alati, olenematu sellest, kas funktsioon $s = f(t)$ kujutab sirgjoonelist ehk kõverjoonelist, ühetaolist ehk mitte ühetaolist liikumist.

Harjutused.

1) Arvutada tuletis, kui $y = f(x) = 2x^3 - 3x + 5$.

$$y + \Delta y = 2(x+\Delta x)^3 - 3(x+\Delta x) + 5 = f(x+\Delta x);$$

$$\Delta y = (y+\Delta y) - y = f(x+\Delta x) - f(x) = \left[2(x+\Delta x)^3 - 3(x+\Delta x) + 5\right] - (2x^3 - 3x + 5) =$$

$$= \cancel{2x^3} + 6x^2.\Delta x + 6x.\Delta x^2 + 2\Delta x^3 \cancel{-3x} - 3\Delta x \cancel{+5} \cancel{-2x^3} \cancel{+3x} \cancel{-5};$$

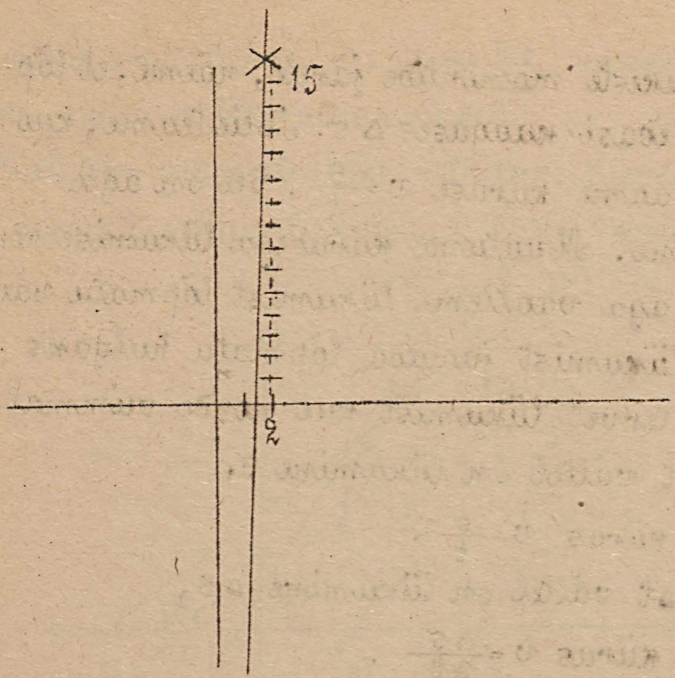
$$\Delta y = 6x^2.\Delta x + 6x.\Delta x^2 + 2\Delta x^3 - 3\Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x^2.\Delta x + 6x.\Delta x^2 + 2\Delta x^3 - 3\Delta x}{\Delta x} = 6x^2 + 6x.\Delta x + 2\Delta x^2 - 3.$$

Kui $\Delta x \to 0$, siis ka liikmed $6x.\Delta x \to 0$, $2\Delta x^2 \to 0$.

Seega $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 - 3 = y'$.

2) Joonistada puutujajoon punktis $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2x^3 - 3x + 5. \end{cases}$



$y = 2.2^3 - 3.2 + 5 = 15.$

$y' = 6x^2 - 3 = 6.2^2 - 3 = 21 = tg\theta.$

$tg\theta = 21$

$lgtg\theta = 1,32222.$

$\theta = 87^\circ 16' 25''.$

Märkus. Võttes veel mõned x....si tähendused, näit. $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$ j.n.e võime arvutada vastavad y suurused. Sellega leiame mitu kõverjoone punkti. Joonistades igas punktis tuletise abil puutujooned, näeme kohe missuguse kuju-line peab kõverjoon $y = 2x^3 - 3x + 5$.

11.

Differentsiaal.

Kui meil on mingisugune funktsioon $y = f(x)$, siis, nagu nägime, on selle funktsiooni tuletis

$$\mathrm{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = y'.$$

Kui nüüd vaatleme suhet $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ enne piiri, nii öelda piiri läheduses, siis ei või meie mitte kirjutada $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, sest see võrdsus on maksev ainult $\mathrm{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kohta. Järjelikult peame siis kirjutama

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \lesseqgtr f'(x) \quad \text{ehk} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

kus ε on lõpmatu väike reguleeriv suurus, mis näitab et $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ja tuletis $f'(x)$ lõpmatu vähe üksteisest lahkuminevad on.

Avaldame viimsest lausest Δy:

$$\Delta y = [f'(x) + \varepsilon].\Delta x = \Delta x . f'(x) + \Delta x . \varepsilon .$$

Vaadeldes selle avalduse teist poolt, näeme et meil on tegemist kahe lõpmatu väikse suuruse summaga. Esimene liige $\Delta x . f'(x)$ on lõpmatu väike, sest et Δx on l. väike. Teine liige $\Delta x.\varepsilon$ on lõpmatu väike; sest Δx ja ε on mõlemad lõpmatu väiksed. Peale selle on $\Delta x.\varepsilon$ veel nõndanimetud teise järgu lõpmatu väike / kahe l. väikse kasvatis /. Teise järgu lõpmatu väike on aga kaduv suurus võrreldes esimese järgu l. väiksega. Nü on siis ka $\Delta x.\varepsilon$ kaduv suurus võrreldes $\Delta x . f'(x)$...ga. Sellepärast ei tee meie suurt viga, kui avalduses

$$\Delta y = \Delta x . f'(x) + \Delta x . \varepsilon$$

jätame liikme $\Delta x.\varepsilon$ ära. Siis jääks meil üle $\Delta y = \Delta x . f'(x)$. See on võrdsus ainult tingimisi. Õigem oleks kirjutada $\Delta y \neq \Delta x . f'(x)$ ehk $\Delta y \pm \alpha = \Delta x . f'(x)$, kus α on kõrgema astme lõpmatu väike kui Δy.

Suurust $\Delta x . f'(x)$ nimetame funktsiooni $y = f(x)$ differentsiaaliks. Nagu näeme on differentsiaal, mida kujutame sümboolselt tähega d, lõpmatu vähe lahkuminev funktsiooni lõpmatu väiksest lisandist Δy...st.

$$\Delta x . f'(x) = \Delta y \pm \alpha ;$$

$$\Delta x . f'(x) = dy ;$$

$$dy = \Delta y \pm \alpha .$$

Nüüd vaatame, missugune on suhte $\frac{\Delta y}{dy}$ piir.
Lisandi Δy avalduseks oli meil eespool

$$\Delta y = \Delta x . f'(x) + \Delta x . \varepsilon .$$

Differentsiaali dy avalduseks on

$$dy = \Delta x . f'(x) .$$

Siis on

$$\frac{\Delta y}{dy} = \frac{\Delta x . f'(x) + \Delta x . \varepsilon}{\Delta x . f'(x)} = 1 + \frac{\cancel{\Delta x} . \varepsilon}{\cancel{\Delta x} . f'(x)} ;$$

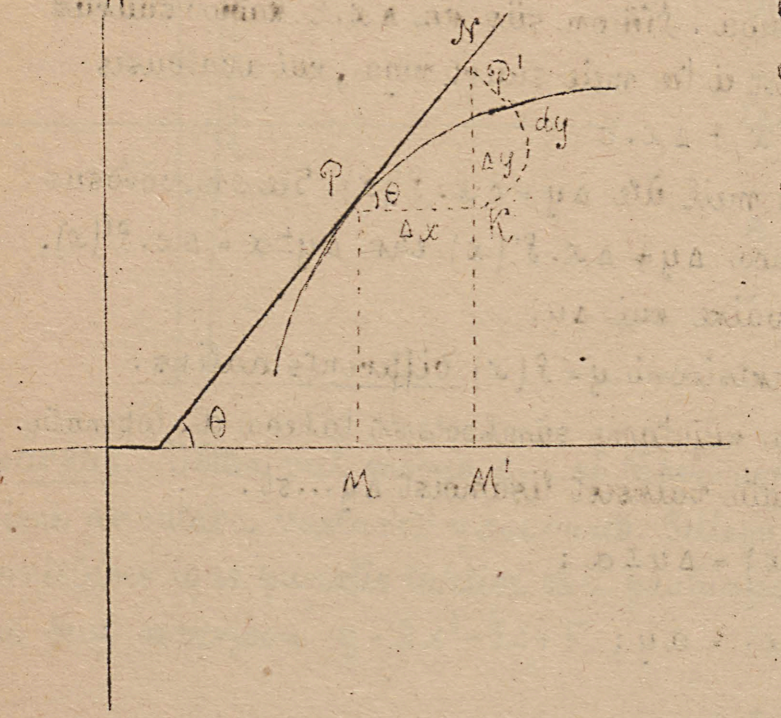
Võttes piiri, saame

$$\operatorname{Lim} \frac{\Delta y}{dy} = \operatorname{Lim} \left[1 + \frac{\varepsilon}{f'(x)} \right] = 1 + \operatorname{Lim} \frac{\varepsilon}{f'(x)} .$$

Aga $\operatorname{Lim} \frac{\varepsilon}{f'(x)} = 0$, sest ε on lõpmatu väike, kuna $f'(x)$ igasugune suurus võib olla.

Siis jääb meil
$$\lim \frac{\Delta y}{dy} = 1.$$
See asjaolu kinnitab ka, et lisand Δy ja differentsiaal dy lõpmatu lähidased üksteisele oma suuruste poolest on.

Differentsiaali geomeetriline käsitus. Võtame kõverjoonel kaks lõpmatu lähidat punkti P ja P_1. Siis on argumenti x...si lõpmatu väike lisand Δx ja funktsiooni lõpmatu väike lisand $\Delta y = KP'$. Kui punkt P' lõpmatu lähineb punktile P, siis saame piiris



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = y' = \operatorname{tg}\theta.$$

See on tuletis. Kui nüüd võtame puutujjoone argumenti ja funktsiooni lisandid, siis on temal x...si lisand seesama Δx, aga y...i lisand on $dy = KN$.

Kolmnurgast PKN saame $dy = \Delta x \cdot \operatorname{tg}\theta = \Delta x \cdot f'(x)$.

Tähendab, dy s. o. puutujjoone ordinaadi lisand s. o. on seesama, mis meie eelpool nimetasime funktsiooni differentsiaaliks. Võrreldes dy ja Δy, näeme, et $dy = \Delta y + \alpha$, kus $\alpha = P'N$. Kui punkt P' lõpmatu lähineb punktile P, siis väheneb α kiiremini kui Δx ja Δy. Tema on seega kõrgema järgu lõpmatu väike võrreldes Δy...ga. Võttes ka siin $\frac{\Delta y}{dy}$ piiri, saame
$$\lim \frac{\Delta y}{dy} = 1.$$

Tingimisi märkides kõverjoone punkti koordinaatide lisandid sümbolide Δx ja Δy abil, puutujjoone koordinaatide lisandid aga sümbolide dx ja dy abil, tuleme otsusele, et $dx = \Delta x$, sest $dx = PK$ ja $\Delta x = PK$, kuna aga $dy \neq \Delta y$, $KN \neq KP'$.

Kokku võttes võime kinnitada:

1) argumenti differentsiaal on võrdne argumenti lisandile Δx...le;

2) funktsiooni differentsiaali dy vahekorra piir lisandiga Δy on võrdne 1.

Tuletise ja differentsiaali vaheline side.

Eestpoolt juba teame, et $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = y' = tg\theta$, kus θ on puutujajoone nurk x.... teljega. Samuti nägime, et $\delta y = \Delta x . tg\theta = \Delta x . f'(x) = \Delta x . y'$.
Arvesse võttes, et $\Delta x = dx$, kirjutame:

$$dy = dx . tg\theta = f'(x) dx = y' dx .$$

Sellest saame

$$\frac{dy}{dx} = tg\theta = f'(x) = y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Näeme, et tuletis on funktsiooni ja argumenti differentsiaalide suhe.

Iseseisva muutuja (argumenti) tuletis.

Iseseisvat muutujat võime kujutada funktsioonina:

$$f(x) = y = x,$$

milles funktsioon y on seesama, mis argument x.
Võttes tuletise, saame:

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = x' .$$

Et $y = x$, siis ka $dy = dx$, ja saame

$$\frac{dy}{dx} = x' = 1 .$$

Seega näeme, et argumenti tuletis võrdub ühele.

Püsivarvu tuletis ja differentsial.

Tihti on meil tegemist avaldustega, mis kannavad ainult funktsiooni kuju, kuid tõepoolest kujutavad enesest alati kindlat püsivsuurust.
Näituseks võtame avalduse $\sin^2 x + \cos^2 x$.
See on tingimata argumenti x.... i funktsioon:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = f(x) = y .$$

Kuid oma suuruse poolest on siin alati $y = 1$, olgu x missugune tahes.
Sarnast funktsiooni, mis võrdub mingisuguse kindla püsivsuurusele, nagu seda on $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nimetame lihtsalt püsivsuuruseks, püsivfunktsiooniks, constans. Näituseks on kolmnurgas nurkade summa $\alpha + \beta + \gamma = 2d$....

const.; ringjoone ja diameetri pikkuste vahekord $\frac{C}{D}=\pi$.... const.;

$\lim\limits_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^m = e$ ..... const.

Kui meil on tegemist mõne sarnase funktsiooniga, mis on püsiv, siis võime seda kujutada järgmiselt: $y = f(x) = a$, kus a on püsivarv.

Võttes tuletise üldise definitsiooni järele

$$y = a = f(x);$$

$$y + \Delta y = a \text{...(akui püsivarvul ei ole lisandit).}$$

$$y + \Delta y - y = a - a = 0$$

$$\Delta y = 0;\ \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{0}{\Delta x} = 0 = a'.$$

Sega on püsivfunktsiooni a tuletis võrdne nullile. Et aga meie igasugust püsivarvu võime vaadelda kui mingisugust püsivfunktsiooni, siis võime öelda ka, et igasuguse püsivarvu tuletis on null.

Edasi tuleme otsusele, et ka püsivarvu differentsiaal on null. Tõepoolest, kui meil on mingisugune arv N, siis võime teda näituseks kujutada järgmiselt: $N = a^n$, kus n on püsiv. Sega on $N = f(a) = f(x)$. Nagu näeme, võib siin x....l olla ükskainuke tähendus a (võttes ilma $x=a$ märgita). Et x ei muutu, siis ei saa siin juttu olla ka lisandist Δx ja differentsiaalist dx, sest need mõlemad on nullid.

$$\Delta x = \Delta a = 0;$$

$$dx = da = 0;$$

Et aga $dN = f'(a)\,da$, siis on ka $dN = 0$.

13.

Funktsiooni funktsioon tema tuletis ja differentsiaal.

Kui funktsioon avaldub ainult ühes tehtes argumentist, siis nimetame teda ühelisfunktsiooniks ehk ühekordseks funktsiooniks. Näituseks on $y = ax$, $y = x^2$, $y = x + a$ ühelisfunktsioonid. Kui aga funktsioon avaldub mitmes tehtes, siis nimetame teda mitmekordseks funktsiooniks ehk mitmelisfunktsiooniks. Näituseks on $y = a(x+b)$, $y = x^p$, $y = (ax+b)^c$ j.n.e. mitmelisfunktsioonid. Siin on x.... i juures enne mitu tehet tarvilikud, et leida y.... i suurust. Mitmelisfunktsiooni võime omakord lahutada mitmeks ühelis-, kahelis- j.n.e. funktsiooniks. Võtame näituseks funktsiooni $y=a(x+b)=f(x)$. Sulgudes olev avaldus $x+b$ on ka x... funktsioon. Kujutame teda $x+b=u$. Siis saame $y=au$ ehk $y=\varphi(u)$. Kus φ on funktsiooni au sümboolne kujutus. Nüüd oleme avaldanud y....i mitte otsekohe algargumenti x funktsioonis, vaid vaheargumenti u funktsioonis, kus u omakorda on x.... i funktsioon. Et u ei ole iseseisev argument, vaid ainult vaheargument, siis on y nõndanimetatud funktsiooni funktsioon. Sümboolselt avaldame seda järgmiselt:

$$y=\varphi(u)=\varphi[\psi(x)].$$

Sümbol ψ näitab, et u on omakord algargumenti x.... i funktsioon.

Kui meil on olemas mingisugune funktsioon y, mis avaldatud vaheargumenti funktsioonina

$$y=f(u), \text{ kus } u=\varphi(x),$$

ja tahame avaldada selle funktsiooni tuletist, siis teeme seda järgmiselt:

Võttes u argumentina, saame

$$dy=f'(u)\,du.$$

Et aga u ei ole mitte algargument, vaid omakord on x....i funktsioon, siis:

$$du=\varphi'(x)\,dx=u'dx.$$

Asendades, saame

$$dy=f'(u)u'\,dx.$$

See on funktsioonfunktsiooni diferentsiaal.

Sellest saame

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)u'.$$

Selle võrdsuse esimene pool on funktsiooni tuletis algargumenti järele. Tähendab:

$$y'=f'(u)u'.$$

Algebraalfunktsioonide tuletised ja differentsiaalid.

Alguses arvutasime meie tuletist üldvalemi järele:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Kui aga funktsioon kergesti lahendub mitmeks osafunktsiooniks, siis võime tuletist saada kergemal teel.

Näituseks kui $y = x^p + (bx)^q$, siis võime x^p ja $(bx)^q$ avaldada osafunktsioonidena $x^p = u$ ja $(bx)^q = v$. Funktsiooni avaldus omab siis kahe osafunktsiooni summa kuju $y = u + v$. Samuti $y = \sin^2 x$ võime avaldada $y = u^2$, kus $u = \sin x$. Nüüd on meil tegemist vaheargumenti astmega.

Summa tuletis ja differentsiaal.

Olgu meile antud funktsioon $y = u + v$, milles u ja v on vahefunktsioonid x.... st

$$[u = \varphi(x);\ v = \psi(x)].$$

Kui argument x muutudes lõpmatu vähe omab lisandi Δx, siis saavad ka u, v ja y, kui selle argumenti funktsioonid vastavalt lisandid Δu, Δv ja Δy.

Selle järele võime kirjutada:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v).$$

Võttes vahendi $(y + \Delta y) - y$, saame:

$$-\begin{cases} y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) \\ y \quad\quad\ = u \quad\quad\ + v \end{cases}$$
$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$

Jagades Δx.... ga, saame:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Võttes piiri, saame:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

$$y' = u' + v', \text{ ehk } (u+v)' = u' + v'$$

sest $\lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$ ja $\lim \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$.

Saadud valem $y' = u' + v'$ on funktsioonide summa tuletise valem.

Kasvatades dx....ga, saame:

$$y'dx = u'dx + v'dx \quad \text{ehk}$$
$$dy = du + dv;$$
$$d(u+v) = du + dv,$$

See valem avaldab funktsioonide summa differentsiaali.

Vahendi tuletis ja differentsiaal.

$y = u - v;$

$$-\begin{cases} y + \Delta u = (u + \Delta u) - (v + \Delta v) \\ -y = -u \mp v \end{cases}$$
$$\Delta u = \Delta u - \Delta v;$$

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim \frac{\Delta v}{\Delta x};$$

$$y' = (u-v)' = u' - v'$$

$$y'dx = (u-v)'dx = u'dx - v'dx;$$
$$dy = d(u+v) = du - dv.$$

Kasvatise tuletis ja differentsiaal.

$y = u.v;$

$$-\begin{cases} y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u.\Delta v + v.\Delta u + \Delta u.\Delta v, \\ y = \ldots\ldots\ldots\ldots u.v \end{cases}$$
$$\Delta y = u.\Delta v + v.\Delta u + \Delta u.\Delta v.$$

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim u.\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim v.\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim \frac{\Delta u.\Delta v}{\Delta x};$$

Viimne liige $\lim \frac{\Delta u.\Delta v}{\Delta x}$ kui lõpmatu väike saab võrdseks 0 ja meile jääb:

$$y' = (uv)' = u.v' + v.u'.$$
$$y'dx = (uv)'dx = u.v'dx + vu'dx$$
$$dy = d(uv) = udv + vdu.$$

Jaondi tuletis ja differentsiaal.

$y = \frac{u}{v}$;

$u = v \cdot y$; $\quad u' = vy' + yv'$; $\quad$ Sellest avaldame y':

$$vy' = u' - yv' = u' - \frac{u}{v} v' = \frac{uv' - uv'}{v};$$

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$y' dx = \frac{vu' dx - uv' dx}{v^2};$$

$$dy = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Kasvatise ja jaondi tuletiste teisendid.

Kui $y = u \cdot v$, siis $y' = uv' + vu'$

Jagame tuletise kõik liikmed y... ga:

$$\frac{y'}{y} = \frac{uv'}{y} + \frac{vu'}{y}; \quad \frac{y'}{y} = \frac{\cancel{u}v'}{\cancel{u}v} + \frac{\cancel{v}u'}{u\cancel{v}};$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{v'}{v} + \frac{u'}{u};$$

Samuti saame ka differentsiaali teisendi:

$$dy = udv + vdu$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{udv}{y} + \frac{vdu}{y}; \quad \frac{dy}{y} = \frac{\cancel{u}dv}{\cancel{u}v} + \frac{\cancel{v}du}{u\cancel{v}};$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}.$$

Kui $y = \frac{u}{v}$, siis võime kirjutada $yv = u$;

Sellest saame:

$$\frac{y'}{y} + \frac{v'}{v} = \frac{u'}{u},$$

millest

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}.$$

Kasvatades kõiki liikmeid dx... ga, saame differentsiaali:

$$\frac{y'dx}{y} = \frac{u'dx}{u} - \frac{v'dx}{v};$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v};$$

Üldistamine.

1). $y = u + v + w;$ $\qquad y' = u' + v' + w';$

2). $y = u + v - w;$ $\qquad y' = u' + v' - w';$

3). $y = uv.w;$ $\qquad \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w};$

4). $y = \frac{uv}{w.s};$ $\qquad \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} - \frac{w'}{w} - \frac{s'}{s}.$

Erijuhused.

1). $y = mu$, kus m on püsivarv.

siis: $\qquad y' = m'u + u'm = mu'$, sest $m' = 0;$

2). $y = \frac{u}{m} = \frac{1}{m} \cdot u;$ $\quad y' = \frac{1}{m}u';$

$y = \frac{m}{u};$ $\qquad y' = \frac{m'u - u'm}{u^2} = -\frac{mu'}{u^2}$, sest $m' = 0.$

Astme tuletis ja differentsiaal.

$y = u^m$, kus m on püsivarv.

$y = u.u.u.u\ldots\ldots;$ $\quad \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{u'}{u} + \frac{u'}{u} + \frac{u'}{u} + \ldots\ldots;$

$$\frac{y'}{y} = \frac{mu'}{u}; \qquad y' = \frac{myu'}{u} = \frac{m.u^{m-1}u'}{\cancel{u}}$$

$$y' = mu^{m-1}u'.$$

$$y'dx = mu^{m-1}u'dx; \qquad dy = mu^{m-1}du.$$

Juure tuletis ja differentsiaal.

$y = \sqrt[n]{u}$. $\quad y^n = u;$ $\quad u' = ny^{n-1}y';$

$$y' = \frac{u'}{ny^{n-1}};$$

Arvesse võttes, et $y = \sqrt[n]{u}$, teame $y^{n-1} = \sqrt[n]{u^{n-1}}$.

Asendades, saame:

$$y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

$$y'dx = \frac{u'du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}; \qquad dy = \frac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

Erijuhus. $n=2$; $y=u^2$; $y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Harjutused.

1). $y=5x^4$; $y'=5(x^4)'=5.4x^3x'=20x^3 \ldots (x'=1)$.

2). $y=1-3x$; $y'=-3$.

3). $y=1-x^2$; $y'=-2x$;

4). $y=2x^4+x$; $y'=(2x^4)'+x'=8x^3+1$.

5). $y=3x^2+4x^3$; $y'=(3x^2)'+(4x^3)'=6x+12x^2$.

6). $y=x(x+2)$; $y'=x'(x+2)+(x+2)'x=x+2+x=2x+2=2(x+1)$.

7). $y=(5-3x)(2+7x)$; $y=(5-3x)'(2+7x)+(2+7x)'(5-3x)=$
$=-3(2+7x)+7(5-3x)=-6-21x+35-21x=29-42x$.

8). $y=\dfrac{1-x}{1+x}$; $y'=\dfrac{(1-x)'(1+x)-(1+x)'(1-x)}{(1+x)^2}=\dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=\dfrac{-2}{(1+x)^2}$

9). $y=\dfrac{1+x}{1+x+x^2}$; $y'=\dfrac{(1+x)'(1+x+x^2)-(1+x+x^2)'(1+x)}{(1+x+x^2)^2}=$

$$=\frac{(1+x+x^2)-(1+2x)(1+x)}{(1+x+x^2)^2}=-\frac{2x+x^2}{(1+x+x^2)^2}.$$

10). $y=\sqrt[4]{x^3}$; $y'=\dfrac{(x^3)'}{4\sqrt[4]{(x^3)^3}}=\dfrac{3x}{4\sqrt[4]{x^3}}=\dfrac{3}{4x\sqrt[4]{x}}$.

11). $y=(1-\sqrt{x})^2$; $y'=2(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x})'=2(1-\sqrt{x})(-\sqrt{x})'=2(1-\sqrt{x})\cdot\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}=-\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

12). $y=\sqrt{x^2-a^2}$; $y'=\dfrac{(x^2-a^2)'}{2\sqrt{x^2-a^2}}=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}$.

15.

Transtsendentfunktsioonide tuletised ja differentsiaalid.

Astmefunktsiooni tuletis ja differentsiaal.

$y=a^x$.

$$-\begin{cases} y+\Delta y = a^{x+\Delta x} \\ y = a^x \end{cases}$$

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x}-1).$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}.$$

Võttes piiri, saame:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = \frac{a^x(1-1)}{0} = \frac{0}{0}.$$

Tuleb välja, et $y' = \frac{0}{0}$, tähendab määramatu suurus. Et sarnasest määramatusest mööda pääseda, muudame avalduse kuju enne piiri. Meie teame, et $\lim a^{\Delta x} = 1$, sest $\Delta x \to 0$. Enne piiri aga on meil $a^{\Delta x} = 1$, ehk $a^{\Delta x} - 1 = \varepsilon$, kus ε on lõpmatu väike. Sellest saame: $a^{\Delta x} = 1 + \varepsilon$; logaritmides saame $\Delta x \lg_a a = \lg_a (1+\varepsilon)$ ehk $\Delta x = \lg_a (1+\varepsilon)$. Nüüd võime kirjutada:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = \frac{a^x \cdot \varepsilon}{\lg_a(1+\varepsilon)}.$$

Oletades et ε on lõpmatu väike $\frac{1}{n}$; kus n lõpmatu suur, saame:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x \cdot \frac{1}{n}}{\lg_a(1+\frac{1}{n})} = \frac{a^x}{n \lg_a(1+\frac{1}{n})} = \frac{a^x}{\lg_a(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a^x}{\lg_a e}.$$

Käsitades logaritme, näigime et $\frac{1}{\lg_a e} = \lg_e a = \mathrm{L}a$, kus tähega L on märgitud Neperi logaritm.

Asendades, saame:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \mathrm{L}a.$$

Võttes nüüd piiri, saame tuletise $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = (a^x)' = a^x \cdot \mathrm{L}a.$

Erijuhus. $y = e^x$. Valemi järele saame

$$y' = e^x \mathrm{L}e = e^x,$$ sest $\mathrm{L}e = 1$, kui põhiarvu logaritm.

Kui $y = a^u$, kus u on vahefunktsioon, siis saame funktsioonfunktsiooni põhimõtte järele

$$y' = a^u \cdot \mathrm{L}a \cdot u'.$$

Kui $y = e^u$, siis $y' = e^u \cdot u'$.

Astmefunktsiooni differentsiaali saame tuletisest:

$$y' = a^u \mathrm{L}a \cdot u';$$

$$y'dx = a^u \mathrm{L}a\, u'dx;$$

$$dy = a^u \mathrm{L}a\, du$$

Logaritmfunktsiooni tuletis ja differentsiaal.

$y = \lg_a u$. Logaritmi definitsiooni põhjal võime kirjutada $u = a^y$. Differentseides seda funktsiooni saame:

$$u' = a^y \ln a \, y', \text{ millest } y' = \frac{u'}{a^y \ln a} \text{ ehk } y' = \frac{u'}{u \ln a}.$$

Differentsiaali saame tuletisest:

$$y' dx = \frac{u' dx}{u \ln a}; \qquad dy = \frac{du}{u \ln a}.$$

Erijuhus. Kui funktsioon on antud Neperi logaritmis $y = \ln u$, siis

$$y' = \frac{u'}{u \ln e} = \frac{u'}{u}; \qquad dy = \frac{du}{u}.$$

Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised ja differentsiaalid.

Sinuse tuletis ja differentsiaal.

$y = \sin x$

$$-\begin{cases} y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) \\ y = \sin x \end{cases}$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2};$$

$$\Delta y = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

Jagades teises poles lugejat ja nimetajat 2....ga, saame:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Võttes piiri, saame:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = (\sin x)' = \lim \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$y' = (\sin x)' = \cos x.$$

Sarnase resultaadi saime sellepärast, et $\lim \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$. Kui meil oleks funktsioonifunktsioon $y = \sin u$, siis loomulikult:

$$y' = (\sin u)' = \cos u \, . \, u'.$$

Sinuse differentsiaal on:

$$dy = \cos u \, . \, du.$$

Cosinuse tuletis ja differentsiaal.

Teades sinuse tuletist, saame otsekohe cosinuse tuletise.

$y = \cos u$; $\quad y' = (\cos u)' = [\sin(90^\circ - u)]' = [\sin(\frac{\pi}{2} - u)]' =$

$= \cos(\frac{\pi}{2} - u)u' = -\sin u \cdot u'$.

Differentsiaal on:

$$dy = d(\cos u) = -\sin u \,.\, du.$$

Tangensi tuletis ja differentsiaal.

$y = \operatorname{tg} u$. $\quad y = \frac{\sin u}{\cos u}$; $\quad y' = \left(\frac{\sin u}{\cos u}\right) =$

$$= \frac{(\sin u)' \cos u - (\cos u)' \sin u}{\cos^2 u} = \frac{\cos^2 u \,.\, u' + \sin^2 u \, u'}{\cos^2 u};$$

$$y' = (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

Kui $y = \operatorname{tg} x$, siis $y' = \frac{1}{\cos^2 u}$.

Differentsiaal on:

$$y' dx = \frac{u' dx}{\cos^2 u}; \qquad dy = \frac{du}{\cos^2 u}$$

Cotangensi tuletis ja differentsiaal.

$y = \operatorname{ctg} u$; $\quad y' = (\operatorname{ctg} u)' = [\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - u)]' = \frac{u'}{\cos^2(\frac{\pi}{2} - u)}$,

$$y' = (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

Differentsiaal on:

$$dy = -\frac{du}{\sin^2 u}.$$

Ringfunktsioonide tuletised ja differentsiaalid.

1). $y = \arcsin u$; $\quad u = \sin y$;

$u' = (\sin y)' = \cos y \,.\, y'$; $\quad y' = \frac{u'}{\cos y}$

Arvesse võttes, et $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$, saame:

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}} = (\arcsin u)';$$

$$dy = d(\arcsin u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

2). $y = \arccos u.$ $\quad u = \cos y;$

$$u' = (\cos y)' = -\sin y \cdot y';$$

$$y' = -\frac{u'}{\sin y} = -\frac{u'}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = (\arccos u)'$$

$$dy = d(\arccos u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

3). $y = \operatorname{arctg} u;$ $\quad u = \operatorname{tg} y;$ $\quad u' = \frac{y'}{\cos^2 y};$

$$y' = u' \cdot \cos^2 y = \frac{u'}{1+\operatorname{tg}^2 y} = (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$dy = d(\operatorname{arctg} u) = \frac{du}{1+u^2};$$

4). $y = \operatorname{arccot} u;$ $\quad u = \operatorname{ctg} y;$ $\quad u' = -\frac{y'}{\sin^2 y};$

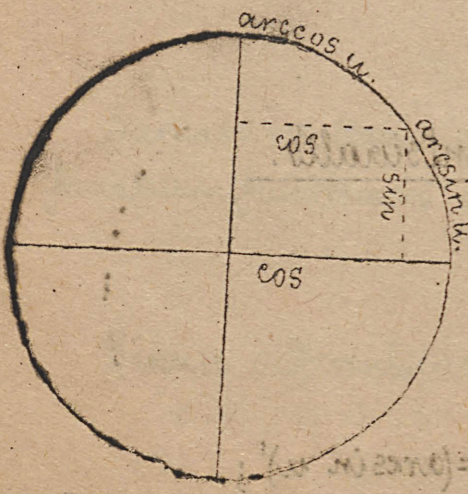
$$y' = -u' \sin^2 y = -\frac{u'}{1+\cot^2 y} = -\frac{u'}{1+u^2};$$

$$y' = (\operatorname{arccot} u)' = -\frac{u'}{1+u^2};$$

$$dy = d(\operatorname{arccotg} u) = -\frac{du}{1+u^2}$$

Võrreldes ringfunktsioonide tuletisi, leiame, et $(\arccos u)' = -(\arcsin u)'$; $(\operatorname{arccot} u)' = -(\operatorname{arctg} u)'$.

Seda võime ka joonisest leida:



$$\arccos u + \arcsin u = \frac{\pi}{2};$$

Diferentsides, saame:

$$(\arccos u)' + (\arcsin u)' = 0;$$
$$(\arccos u)' = -(\arcsin u)'.$$

Samasuguse sideme leiame ka arctg. ja arccot. suhtes.

Harjutused.

Leida tuletisfunktsioonid:

1). $y = \sin x + \cos x;$ $\quad y' = (\sin x)' + (\cos x)' = \cos x - \sin x.$

2). $y=\sqrt{\sin x}$; $y'=(\sqrt{\sin x})'=\frac{(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}}=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin}}$.

3). $y=\sqrt{\operatorname{tg} x}$; $y'=(\sqrt{\operatorname{tg} x})'=\frac{(\operatorname{tg} x)'}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}}=\frac{1}{2\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

4). $y=2\cos^2 x$; $y'=(2\cos^2 x)'=2(\cos^2 x)'=2.2\cos x.(\cos x)'=-4\cos x\sin x=-2\sin 2x$.

Võime tarvitada ka asetust vahefunktsioonis:

$$\left.\begin{array}{l}\cos x=z\\ z'=(\cos x)'=-\sin x\end{array}\right\} y=2z^2;\quad y'=(2z^2)'=2.2z.z'=4zz'=-4\cos x\sin x=-2\sin 2x.$$

5). $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; $\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{2}=z;\\ z'=\frac{1}{2};\end{array}\right\}$ $y=\operatorname{tg} z$; $y'=(\operatorname{tg} z)'=\frac{z'}{\cos^2 z}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$.

6). $y=\operatorname{tg} 2x$; $y'=(\operatorname{tg} 2x)'=\frac{(2x)'}{\cos^2 2x}=\frac{2}{\cos^2 2x}$.

7). $y=\lg x^2$; $x^2=z$; $z'=(x^2)'=2x$;

$y'=(\lg z)'=\frac{z'}{z}=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$;

8). $y=\lg\cos x$; $\cos x=z$; $z'=-\sin x$;

$y'=(\lg z)'=\frac{z'}{z}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\operatorname{tg} x$;

9). $y=\lg\operatorname{ctg} 2x$; $2x=z$; $z'=(2x)'=2$; $\operatorname{ctg} 2x=\operatorname{ctg} z$;

$\operatorname{ctg} z=u$; $u'=(\operatorname{ctg} z)'=-\frac{z'}{\sin^2 z}=-\frac{2}{\sin^2 2x}$;

$$y'=(\lg\operatorname{ctg} z)'=(\lg u)'=\frac{u'}{u}=\frac{-\frac{2}{\sin^2 2x}}{\operatorname{cotg} 2x}=-\frac{2}{\sin^2 2x\operatorname{ctg} 2x}=$$

$$=-\frac{2\cancel{\sin 2x}}{\sin^{\cancel{2}} 2x\,.\,\cos 2x}=-\frac{2}{\sin 2x\cos 2x}=-\frac{4}{\sin 4x};$$

10). $y=\sin x.\sin(30^\circ+x)$; $\sin x=z$; $z'=\cos x$;

$\sin(30^\circ+x)=u$; $u'=\cos(30^\circ+x)(30^\circ+x)'=\cos(30^\circ+x)$;

$y'=z'u+u'z=\cos x.\sin(30^\circ+x)+\cos(30^\circ+x)\sin x=\sin(x+30^\circ+x)=\sin(2x+30^\circ)$.

11). $y=x\lg x$; $\lg x=z$; $z'=(\lg x)'=\frac{1}{x}$;

$y'=x'z+z'x=1.\lg x+\frac{1}{x}\cdot x=\lg x+1$.

12). $y=\arcsin\frac{x}{2}$; $\frac{x}{2}=z$; $z'=\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2}$;

$$y' = (\arcsin z)' = \frac{z'}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

13). $y = \lg\lg x; \quad \lg x = z; \quad z' = (\lg x)' = \frac{1}{x};$

$$y = \lg z; \quad y' = (\lg z)' = \frac{z'}{z} = \frac{\frac{1}{x}}{\lg x} = \frac{1}{x\lg x}.$$

14). $y = \frac{1+\sin x}{\cos x}; \qquad y' = \frac{(1+\sin x)'\cos x - (\cos x)'(1+\sin x)}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x(1+\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$$

16.

Varjatud funktsiooni differentsimine.

Kui funktsioon on antud varjatud kujul $F(x,y)=0$, siis võib teda differentsida otsekohe, ilma et tarvitseks temale avaliku funktsiooni kuju anda. Selle juures tuleb ainult silmas pidada, et differentsimine sünniks nende põhimõtete piirides, mis eespool käsitud. Nimelt vaatleme differentsitavas avalduses ühte muutujat kui argumenti, mille tuletis on alati võrdne ühele, ja teisi muutujaid kui selle argumenti funktsione.

Harjutused.

1). $x^2+y^2=r^2$ . . . . . (ringi ekvatsioon).

Differentsides iga liiget, saame:

$$2xx' + 2yy' = 0;$$

arvesse võttes, et $x'=1$, kirjutame:

$$\cancel{2}x + \cancel{2}yy' = 0.$$

Sellest avaldusest saame y':

$$y' = -\frac{x}{y}; \qquad dy = -\frac{x}{y}dx.$$

2). $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1$ . . . . . (ellipsi ekvatsioon).

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2; \qquad (b^2x^2)' + (a^2y^2)' = (a^2b^2)';$$

$$\cancel{2}b^2x + \cancel{2}a^2yy' = 0; \qquad y' = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

Järjestiktuletised ja differentsiaalid.

Igasugune funktsioon, olgu mis astmeline tahes, kujutab geomeetriliselt mingisugust kõverjoont. Funktsiooni tuletis aga, nagu nägime, on puutujjoone nurga tangens x..... teljega. Kui funktsioon on kõrgema astmeline kui 1, siis jääb ka tuletise avaldusse muutuvargument x sisse. See näitab, et puutujjoone nurga tangens on muutuv, tähendab-ka puutujjoone nurk on muutuv. See peabki nii olema, sest igas punktis kõverjoonel on puutujjoone siht isesugune, seega ka nurk x.... teljega ka isesugune igakord.

Võttes arvesse, et tuletise avalduses on muutuvsuurused, võime vaadelda tuletise avaldust kui uut funktsiooni, mis omakord uut kõverjoont kujutab. Kui see on nii, siis peab sellel funktsioonil jälle tuletis olema, mis määrab tema puutujjoonte nurkade tangensid. Niiviisi saame nõndanimetud teise järgu tuletise ehk teise tuletise, lugedes algfunktsioonist. Kui teise tuletise avalduses veel esinevad muutuvsuurused, siis vaatleme teda jälle kui uut funktsiooni, mis jälle ühte kõverjoont kujutab. Differentsides seda funktsiooni, saame jälle uue tuletise (kolmanda). Nii võime toimetada dasi, kunni saame tuletise, milles argument enam ei esine. Siis on tuletis püsivum ja temast uus tuletis saab juba nulliks. Et meie lõpude lõpuks nullini jõuame, on loomulik, sest iga differentsimise korral alaneb argumenti astme näitaja.

<u>Märkus</u>: Viimast lauset ei tule laiendada kõigekujuliste funktsioonide peale, sest on siiski olemas funktsioonid (transtsendentsed), mida võib differentsida lõpmatuseni.

<u>Harjutused</u>.

1). $y = 4x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 1$;

$y^{I} = 20x^4 - 12x^3 + 15x^2$; .... esimene tuletis;

$y^{II} = 80x^3 - 36x^2 + 30x$; .... teine tuletis;

$y^{III} = 240x^2 - 72x + 30$; .... kolmas tuletis;

$y^{IV} = 480x - 72$; .... neljas tuletis (sirgjoon);

$y^{V} = 480$ .... viies tuletis (paralleeljoon x.... teljele);

$y^{VI} = 0$ .... kuues tuletis (x.... telg).

Edasine differentsimine võimatu.

2). $y = a^x$;
$y' = a^x La$;
$y'' = a^x (La)^2$;
$y''' = a^x (La)^3$;
$y^{IV} = a^x (La)^4$;
. . . .
$y^n = a^x (La)^n$
differentsub lõpmatuseni

3). $y = e^x$;
$y' = e^x$;
$y'' = e^x$;
$y''' = e^x$;
$y^{IV} = e^x$;
. . . .
$y^n = e^x$;
Kõik tuletised võrdsed.

4). $y = \sin x$;
$y' = \cos x$;
$y'' = -\sin x$;
$y''' = -\cos x$;
$y^{IV} = \sin x$;
$y^{V} = \cos x$;
$y^{VI} = -\sin x$; j.n.e.

nelja järguline perioodsus.

5). $y = \cos x$;
$y' = -\sin x$;
$y'' = -\cos x$;
$y''' = \sin x$;
$y^{IV} = \cos x$;
$y^{V} = -\sin x$;
$y^{VI} = -\cos x$
j.n.e.

nelja järguline perioodsus.

6). $y = \sin x$;
$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;
$y'' = \cos\left(-x \mp \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$;
$y''' = \cos(-x \mp \pi) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$;
$y^{IV} = \cos\left(-x \mp \frac{3}{2}\pi\right) = \sin\left(x + \frac{4\pi}{2}\right)$;
- -
$y^n = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

7. $y = \cos x$;
$y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;
$y'' = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x + \pi)$;
$y''' = -\sin(x + \pi) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$;
$y^{IV} = -\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos(x + 2\pi)$;
- -
$y^n = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Siin lisame iga-kordse differentsimise korral argumentile püsivarvu $\frac{\pi}{2}$ juurde, mis argumenti tuletist ei muuda. Sellel teel saame kasutades valemisi:
$\cos x = \cos(-x)$;
$-\sin x = \sin(-x)$;
ja $\cos x = -\sin(x + 90°)$,
avaldada kõik tuletised ühtlaselt.

Järjestikdifferentsiaalid saavuvad järgmiselt:
Funktsiooni differentsiaal, nagu teame on

$$dy = f'(x)\,dx\,;$$

Differentsides seda võrdsust kasvatise valemi järele, saame:

$$d^2y = d[f'(x)]dx + d(dx).f'(x) =$$
$$= [f'(x)]'dx.dx + 0.f'(x) = f''(x)dx^2\,;$$

Siin juures sai meil võetud $d(dx)=0$. Seda teeme, oletades et dx on püsiv-suurus. Käsitades eelpool differentsiaali mõistet, määrasime sümbooliga dx argumenti lõpmatu väikse lisandi. Sella juurde teeme siinkohal täienduse; nimelt, meie vaatleme ainult ühetaolist argumenti muutuvust; see tähendab, igas punktis omab argument x lisandi dx oma suurusele juurde ja see lisand on alati ühesuguse suurusega lõpmatu väike. Järjelikult tuleb differentsimise juures teda vaadelda kui püsiva suurusega elementi. Selle eelduse järele võime ütelda, et $d(dx)=0$.

Märkus. Teise differentsiaali avalduses

$$d^2y = f''(x)\,dx^2$$

teeme vahet kujutuste d^2y ja dx^2 vahel. Esimene neist d^2y tähendab teist järjestikdifferentsiaali, kuna teine dx^2 tähendab differentsiaali teist astet.

Differentsiaali järjekorra tunnuseks paneme järjekorra märgi alati muutuja juurde. Sellega tähendaks dx^2 sedasama, mis on $(dx)^2$. Sümbool dx^2 ei tähenda siis mitte muutuja astme differentsiaali; viimast tuleb meil eksituste ärahoidmiseks alati kujutada sulgudes: $d(x^2)$.

Võtame edasi kolmanda differentsiaali.

$$d^3y = d(d^2y) = d[f''(x)dx^2] = d[f''(x)]dx^2 + d(dx^2)f''(x) = [f''(x)]'dx.dx^2 + 0.f''(x) =$$
$$= f'''(x).dx^3.$$

Niisamuti saame

$$d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Nüüd võime näha tuletiste ja differentsiaalide vahekorda:

$$dy = f'(x)\,dx\,; \qquad f'(x) = \frac{dy}{dx}\,;$$
$$d^2y = f''(x)\,dx^2\,; \qquad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}\,;$$
$$d^3y = f'''(x)dx^3\,; \qquad f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}\,;$$
$$- - - - - - - - - - - - - - -$$
$$d^ny = f^n(x)\,dx^n\,; \qquad f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}\,.$$

<u>Märkus.</u> Järjestikdifferentsiaalid s[illegible]
nult kui differentsimine sünnib algargumendi x.... j[illegible]
tsioon on antud vahefunktsiooni u järele, siis on differentsimise protsess hulga raskem. Selle käsitusest meie loobume.

18.

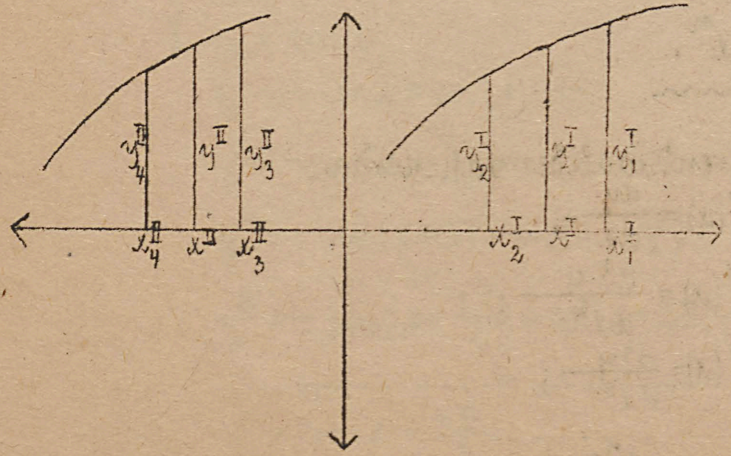
Tuletisfunktsioonide põhilaused.

Käsitades tuletisfunktsioone, võtsime oma huvikonda ainult pidevad funktsioonid. Edaspidises piirame oma huvikonda veel, opereerides funktsioonidega, mis peale pidevuse oleks veel 1) ühesed (igale x väärtusele vastab ainult üks y väärtus) ja 2) lõplikud (iga x lõpliku eri väärtuse korral on ka y....l lõplik kindel väärtus). Kui aga siiski tulevad meil ette funktsioonid, millistel need kolm tingimust, pidevus, ühesus ja lõplikus terves funktsiooni ulatuses puuduvad, kas kõik, ehk mõni neist, siis võime sarnast funktsiooni uurida jaoti, valides ainult sarnased intervallid, kus kõik need tingimused olemas.

Asudes tuletisfunktsioonide põhilausete käsitusele, jagame enne funktsioonid veel kahte liiki:

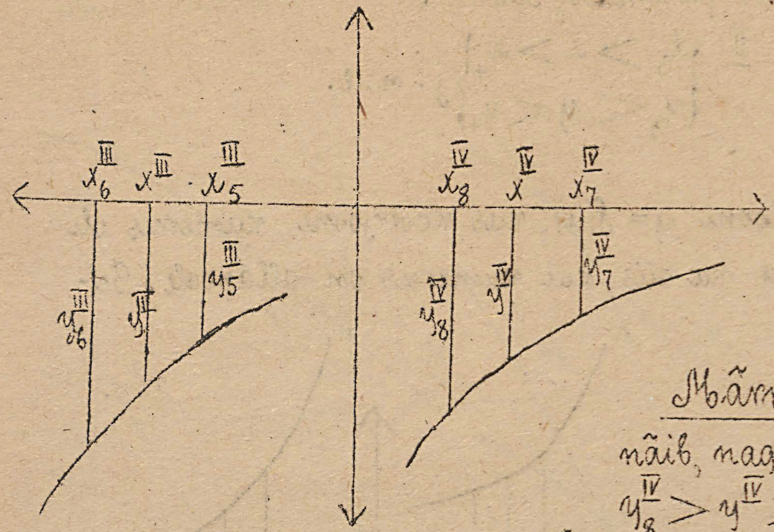
1) tõusev ehk ülenev funktsioon ja
2) vajuv ehk alanev funktsioon.

<u>Tõusevfunktsiooniks</u> nimetame funktsiooni siis, kui 1) x....si suurenemisel suureneb ka y, 2) x....si vähenemisel väheneb ka y.



$$y = f(x); \quad \begin{Bmatrix} x_2^{I} < x^{I} < x_1^{I} \\ y_2^{I} < y^{I} < y_1^{I} \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} x_4^{II} < x^{II} < x_3^{II} \\ y_4^{II} < y^{II} < y_3^{II} \end{Bmatrix};$$



$$\begin{Bmatrix} x_6^{III} < x^{III} < x_5^{III} \\ y_6^{III} < y^{III} < y_5^{III} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_8^{IV} < x^{IV} < x_7^{IV} \\ y_8^{IV} < y^{IV} < y_7^{IV} \end{Bmatrix}$$

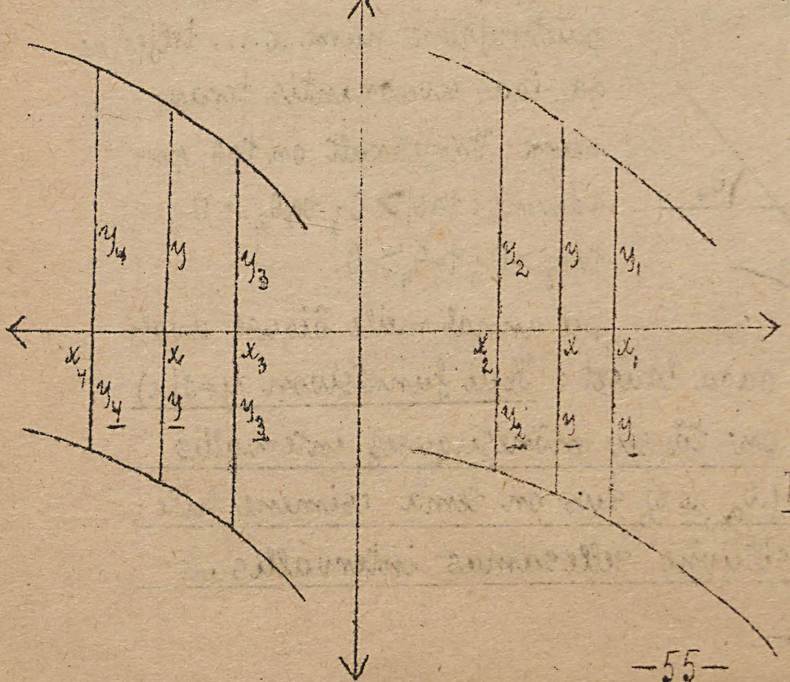
Märkus: Ehk küll joonise järele näib, nagu oleks $y_6^{III} > y^{III} > y_5^{III}$ ja $y_8^{IV} > y^{IV} > y_7^{IV}$, kuid arvesse võttes, et III ja IV kvadrantes on y negatiivne suurus ja negatiivsetest arvudest on ikka see suurem, millel vähem absoluutne suurus, (näit. $-6 < -5$; $-8 < -7$), võime ikkagi kirjutada $y_6^{III} < y^{III} < y_5^{III}$ ja $y_8^{IV} < y^{IV} < y_7^{IV}$.. Igatahes on meil siin igas kvadrantis maksev üks ja sama kord: x....si suurenedes suureneb ka y. Seega on meil funktsioon $y = f(x)$ tõusev ehk ülenev funktsioon.

Ümberpöördult, kui vaatleme x....si vähenemise protsessi, siis saame:

$$\begin{Bmatrix} x_1^{I} > x^{I} > x_2^{I} \\ y_1^{I} > y^{I} > y_2^{I} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} x_3^{II} > x^{II} > x_4^{II} \\ y_3^{II} > y^{II} > y_4^{II} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} x_5^{III} > x^{III} > x_6^{III} \\ y_5^{III} > y^{III} > y_6^{III} \end{Bmatrix}.$$

Nagu näeme, saame resultaadi: x....si vähenedes, väheneb ka y. See on samuti tõusevfunktsiooni iseloom.

Vajuv ehk alanev funktsiooniks nimetame funktsiooni siis, kui 1) x.....si suurenemisel y väheneb ehk 2) x..... vähenemisel y suureneb.



$y = f(x)$:

I $\begin{Bmatrix} x_2 < x < x_1 \\ y_2 > y > y_1 \end{Bmatrix}$;

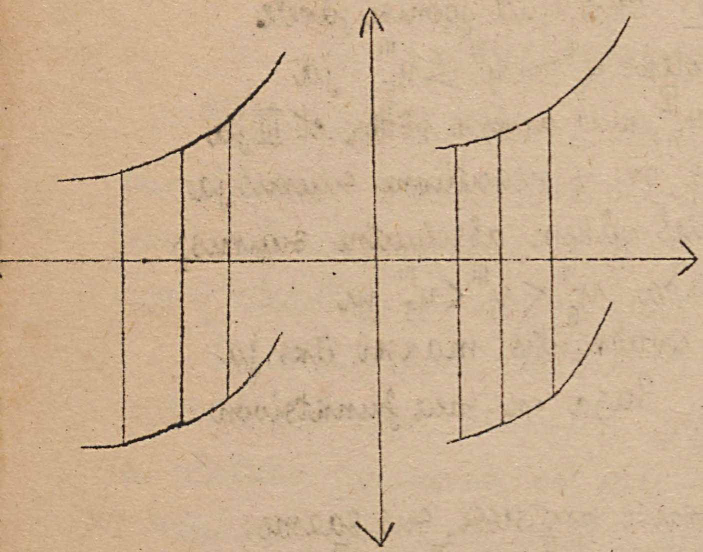
II $\begin{Bmatrix} x_4 < x < x_3 \\ y_4 > y > y_3 \end{Bmatrix}$;

III. $\begin{Bmatrix} x_4 < x < x_3 \\ \underline{y_4} > \underline{y} > \underline{y_3} \end{Bmatrix}$; IV. $\begin{Bmatrix} x_2 < x < x_1 \\ \underline{y_2} > \underline{y} > \underline{y_1} \end{Bmatrix}$.

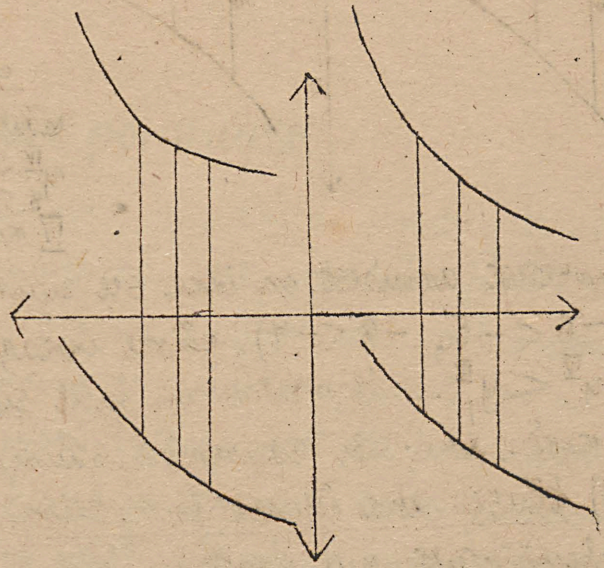
Ümberpöörtult, minnes paremalt poot pahemale, saame:

$$\text{I}\ \begin{Bmatrix} x_1 > x > x_2 \\ y_1 < y < y_2 \end{Bmatrix}; \quad \text{II}\ \begin{Bmatrix} x_3 > x > x_4 \\ y_3 < y < y_4 \end{Bmatrix} \text{ j.n.e.}$$

Märkus. Meie vaatlesime funktsiooni $y = f(x)$, kus kõverjoone kumerus oli ülespoole; seesama resultaat saavub aga ka siis, kui kumerus on allapoole. Selgesti näeme seda joonistes

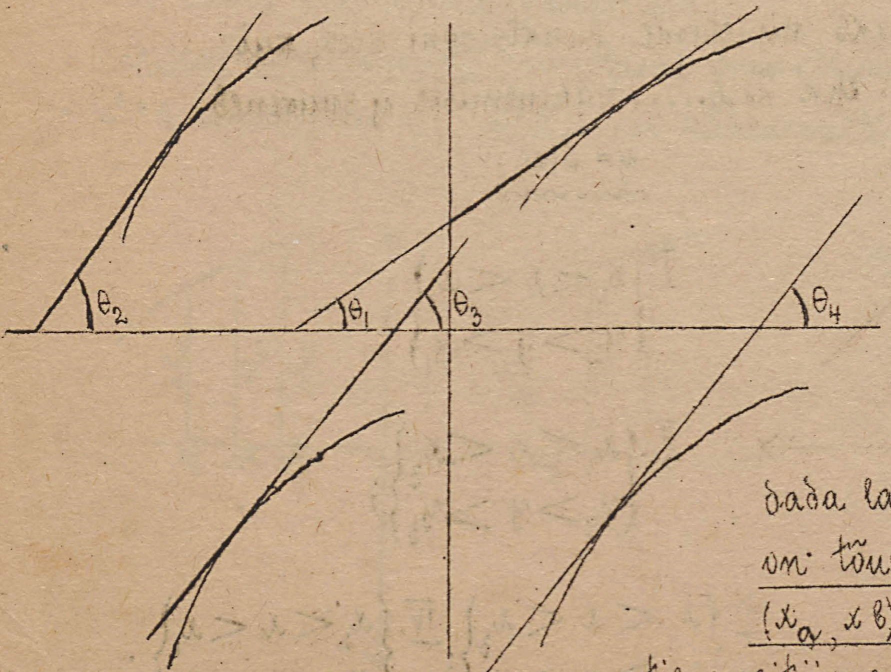


$y = f_1(x)$..... tõusevfunkts.



$y = f_2(x)$..... vajuvfunkts.

Nüüd vaatame edasi, missugune iseloom on tõusev- ja vajuvfunktsiooni tuletisel.

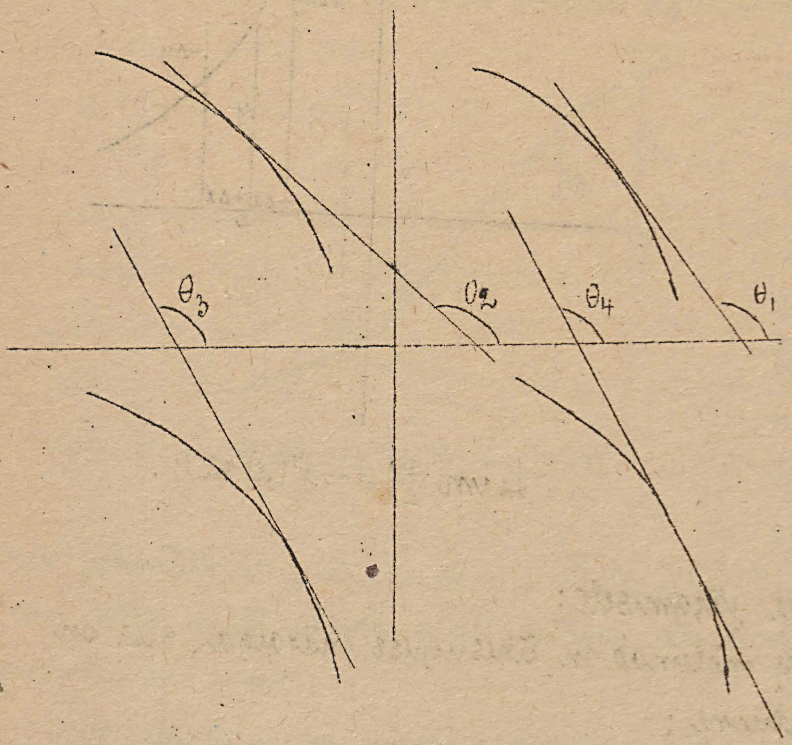


$$y = f(x)$$
$$y' = f'(x) = \text{tg}\,\theta.$$

Nagu joonisest näeme, on puutujoone nurk x.... teljega igas kvadrantis teravnurk. Järjelikult on $\text{tg}\,\theta$ positiivne: $\text{tg}\,\theta_1 > 0$; $\text{tg}\,\theta_2 > 0$; $\text{tg}\,\theta_3 > 0$; $\text{tg}\,\theta_4 > 0$.

See annab meile õiguse avaldada lauset: <u>Kui funktsioon $y=f(x)$ on tõusev mõnesuguses intervallis (x_a, x_b), siis on tema esimene tuletis positiivne sellesamas intervallis.</u>

Nüüd võtame vajufunktsiooni: $y=f(x)$; $y'=f'(x)=tg\theta$.



Joonisest näeme, et θ on nürinurk igas kvadrantis; seega on tema tangens negatiivne suurus: $tg\theta_1<0$; $tg\theta_2<0$; $tg\theta_3<0$; $tg\theta_4<0$. See õigustab meid avaldama lauset: Kui funktsioon $y=f(x)$ on vajuv mõnesuguses intervallis (x_1, x_2), siis on tema esimene tuletis sellessamas intervallis negatiivne.

Ümberpöörtult, võime avaldada ka vastulaused:

1) kui $f'(x)>0$, siis $f(x)$ on tõusev;

2) kui $f'(x)<0$, siis $f(x)$ on vajuv.

Matemaatiliselt võime eelmisi lauseid avaldada järgmiselt:

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x); \text{ enne piiri aga on } \frac{\pm\Delta y}{\pm\Delta x}=\pm f'(x)\pm\varepsilon.$$

Viimases avalduses on teises pooles liige ε lõpmatu väike; tema märk järjelikult ei ole mõõduandev terve avalduse märgi kohta. Sellega oleneks tuletise $f'(x)$ märk ainult Δy ja Δx märkidest. Võttes kõik märkide kombinatsioonid, saame neli avaldust:

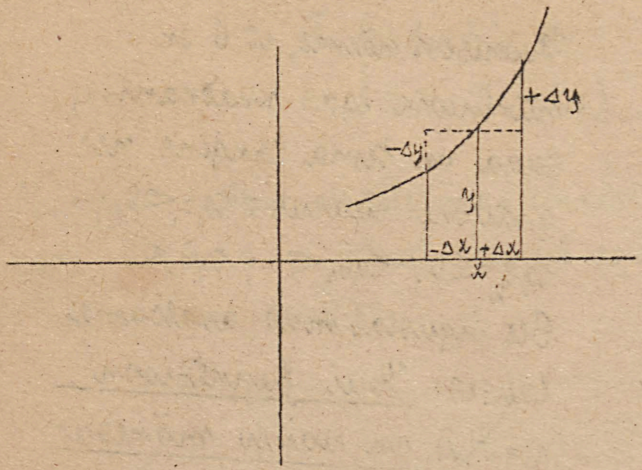
1) $\frac{+\Delta y}{+\Delta x}=+f'(x)+(\pm\varepsilon)\ldots\ldots f'(x)>0$;

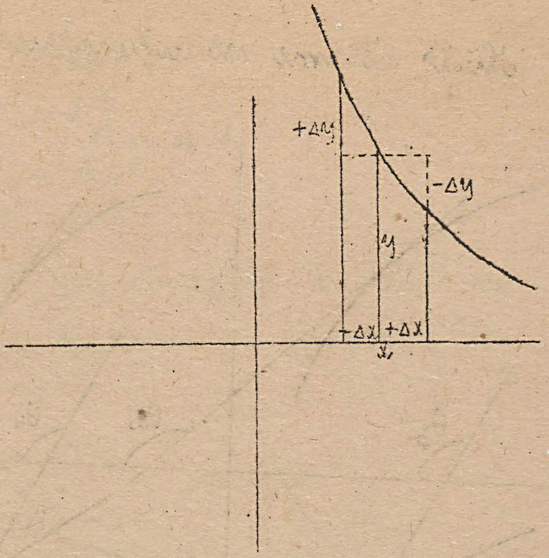
2) $\frac{-\Delta y}{-\Delta x}=+f'(x)+(\pm\varepsilon)\ldots\ldots f'(x)>0$;

3) $\frac{+\Delta y}{-\Delta x}=-f'(x)+(\pm\varepsilon)\ldots\ldots f'(x)<0$;

4) $\frac{-\Delta y}{+\Delta x}=-f'(x)+(\pm\varepsilon)\ldots\ldots f'(x)<0$.

Kaks esimest kombinatsiooni käivad tõusevfunktsiooni kohta, kaks viimast aga vajuvfunktsiooni kohta.





$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = +f'(x) > 0;$ $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -f'(x) < 0.$

Eelmis võime resümeerida lühidalt järgmiselt:

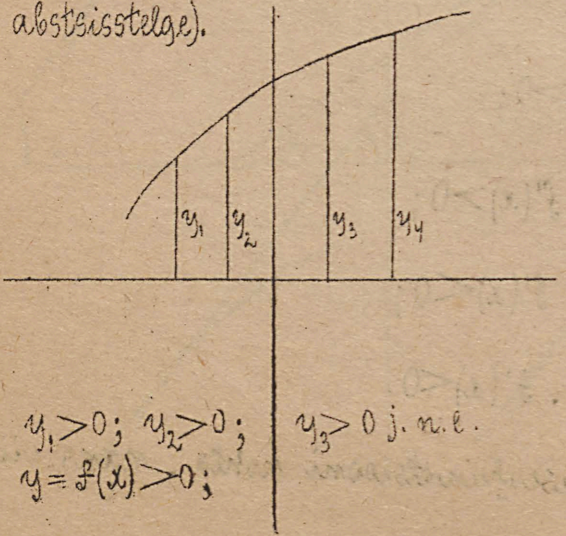
1). Kui funktsioonis $y=f(x)$ Δx ja Δy mõlemad on ühesuguse märgiga, siis on funktsioon tõusev ja tuletis positiivne;

2) kui funktsioonis $y=f(x)$ Δx ja Δy on mitmesuguste märkega, siis on funktsioon vajuv ja tuletis negatiivne.

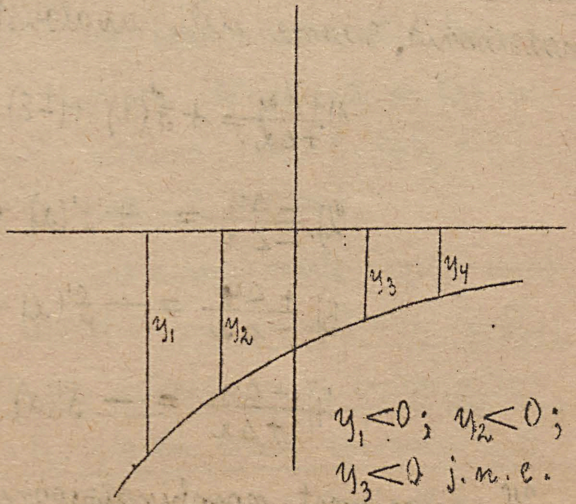
19.

Pidevfunktsiooni peaomadus.

Kui mõnel kõverjoonel koordinaadistikus ordinaadi avaldame abstsissi funktsioonina $y=f(x)$, siis on võimalikud juhused: 1) $y=f(x)$ on positiivne (kõverjoon asub ülevelpool abstsisstelge; 2) $y=f(x)$ on negatiivne (kõverjoon asub allpool abstsisstelge).

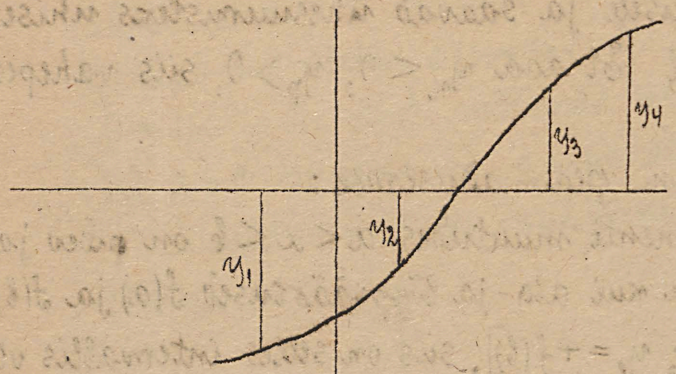


$y_1 > 0$; $y_2 > 0$; $y_3 > 0$ j. n. e.
$y = f(x) > 0$;



$y_1 < 0$; $y_2 < 0$;
$y_3 < 0$ j. n. e.
$y = f(x) < 0$.

Peale nende kahe juhuse on võimalik veel kolmas juhus, nimelt, kui kõverjoon on osalt ülevel, osalt allpool abstsisstelge. Sarnasel korral on $y=f(x)$ ühes osas positiivne, teises osas negatiivne. Tähendab, $y=f(x)$ muudab oma märki. Muutuvsuurus võib aga (pidevalt muutudes) negatiivsest saada positiivseks (ehk ümberpööratult) ainult siis, kui ta läheb üle null väärtuse. Sellest järeldame, et kõverjoonel peab olema punkt, kus $y=f(x)=0$. Kui aga $y=0$, siis tähendab see, et punkt on abstsisstelgil. Joonisest näeme tõesti, et kõverjoon, olles osalt ülevel, osalt allpool abstsisstelge, läheb viimsest läbi ja lõikpunktis on $y=0$.

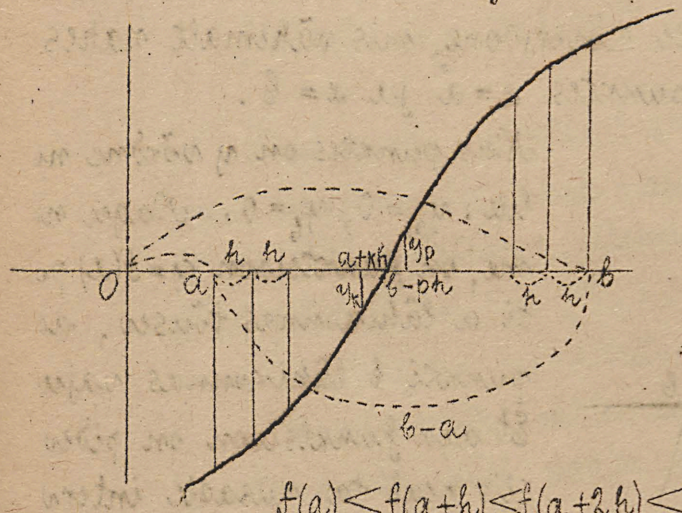


$y_1<0$; $y_2<0$; $y_3>0$; $y_4>0$.

Seda asjaolu, mis iseenesest väga selge, võime siiski ka matemaatiliselt näidata. Vaatleme kõverjoont intervallis $(x=a\,;\ x=b)$. Jagame selle intervalli (a,b) väikestesse osadesse:

$$\frac{b-a}{n}=h\,;\quad nh=b-a.$$

Siis saame terve rea funktsiooni eriväärtusi $f(a)$; $f(a+h)$; $f(a+2h)$; $f(a+3h)$; ..... $f(a+kh)$, $f(a+\overline{k+1}h)$..... $f(a+\overline{n-3}h)$; $f(a+\overline{n-2}h)$; $f(a+\overline{n-1}h)$; $f(a+nh)=f(b)$.



Võrreldes suuruste järele, võime kirjutada:

$$f(a)<f(a+h)<f(a+2h)<\ldots<f(a+kh)<f(a+\overline{k+1}h)<\ldots$$
$$\ldots<f(b-2h)<f(b-h)<f(b).$$

Sellest näeme, et suurused a, $a+h$, $a+2h$, j.n.e. kasvavad, saades ikka suuremaks kui a, ja suurused b, $b-h$, $b-2h$ j.n.e. kahanevad, saades ikka vähemaks kui b. Nüüd liiame terves reas kaks naabrusväärtust $a+kh$ ja $b-ph$, milledest esimene suureneja paremale poole, teine väheneja pahemale poole. Kui n on lõpmatu suur, siis on intervall $(a+kh,\ b-ph)$ lõpmatu väike ja piiris, kui $n=\infty$, saame:

$$\mathrm{Lim}[b-ph-(a+kh)]=\mathrm{Lim}(b-a-ph-kh)=\mathrm{Lim}(nh-ph-kh)=\lim_{h=0} h[n-(k+p)]=$$
$$=\lim_{h=0} h[\cancel{n}-(\cancel{n}-1)]=0,$$ sest nähtavasti on $k+1+p=n$.

Et intervall $(a + \kappa h, b - ph)$ piiris lähineb nullile, siis ka kaks funktsiooni väärtust $y_\kappa = f(a+\kappa h)$ ja $y_p = f(b-ph)$, milledest esimene negatiivne, teine positiivne, lõpmatu lähinevad üksteisele ja saavad ühesuurusteks ühises piiris $\text{Lim}\, y$, mis on y_κ ja y_p vahel. Et aga $y_\kappa < 0$, $y_p > 0$, siis vahepealne väärtus on $y_{\kappa, p} \lessgtr 0$ ehk $\text{Lim}\, y_{\kappa, p} = 0$.

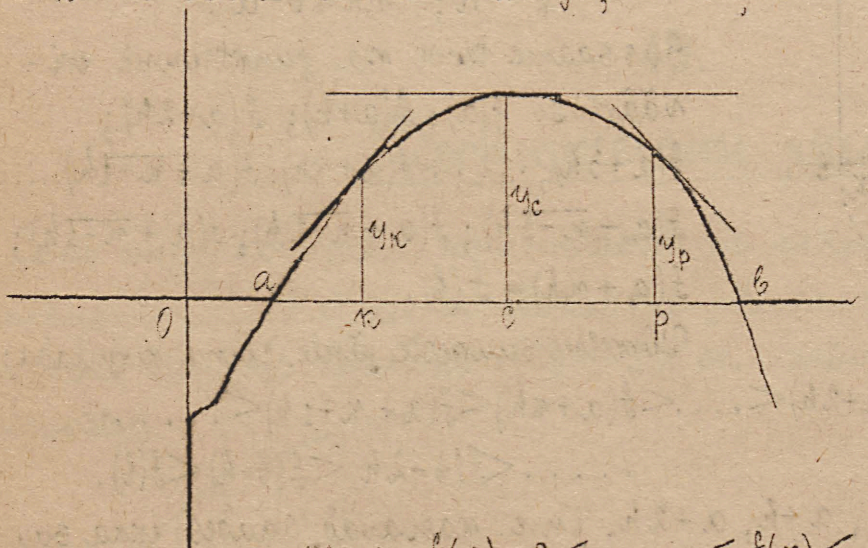
Kokkuvõttes saame pidevfunktsiooni peaomaduslause:

Kui funktsioon $y = f(x)$ argumenti muutudes $a < x < b$ on pidev ja ühene terves intervallis (a, b) ja kui alg- ja lõppväärtused $f(a)$ ja $f(b)$ on vastasmärkega $[y_a = -f(a);\ y_b = +f(b)]$, siis on selles intervallis olemas argumenti väärtus $x = c$, millel funktsioon $y = f(x)$ võrdub nullile: $y_c = f(c) = 0$.

20.

Rolle'i teoreem.

Võtame koordinaadistikus sarnase kõverjoone, mis vähemalt kahes kohas läheb läbi abstsissteljе, näit. punktes $x = a$ ja $x = b$.



Neis punktes on y võrdne nullile: $y_a = 0$, $y_b = 0$. Nagu näeme, on funktsioon $y = f(x)$ punkti a lähikonnas tõusev, aga punkti b lähikonnas vajuv. Et aga funktsioon on pidev siis peab ta kusagil intervallis (a, b) tõusust üleminema vajumisele. Võime kirjutada rea:

$$f(a) = 0 < \ldots\ldots < f(\kappa) < \ldots\ldots < f(c) > \ldots\ldots > f(p) > \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots > f(b) = 0,$$

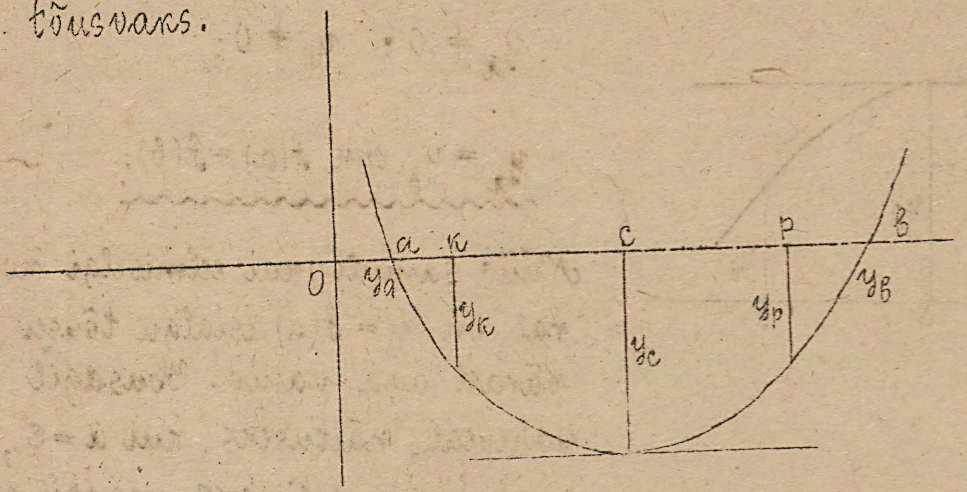
kus c on argumenti väärtus, milles funktsioon suurenemise lõpetab ja algab vähenemist.

Vaatame nüüd, mis sünnib tuletisega.

Niikaua kui funktsioon $y = f(x)$ tõuseb, on tuletis $f'(x) = tg\,\theta > 0 \ldots\ldots$ (positiivne); see kestab kuni $y'_c = f'(c)$; siis aga hakkab funktsioon $y = f(\ldots$

vajuma ja tema tuletis on $f'(x) = tg\theta < 0 \ldots\ldots$ (negatiivne). Järjelikult ülemineku punktis, kus $x = c$, muudab tuletis $f'(x)$ oma märki, saades positiivsest negatiivseks. Sarnane üleminek võib pideva muutumise korral sündida ainult nullist ülemineku korral. Tähendab, ülemineku punktis c peab siis olema $f'(c) = tg\theta = 0$. Et $tg\theta = 0$, siis peab olema $\theta = 0$ ehk $\theta = 180^\circ = \pi$. Need mõlemad θ väärtused näitavad, et argumendi väärtusel $x = c$ puutujoon on paralleelne $x \ldots\ldots$ teljega.

Samuti on lugu, kui funktsioon on esialgu vajuv ja saab vahepeal tõusvaks.



$y_a = f(a) = 0$;

$y_b = f(b) = 0$;

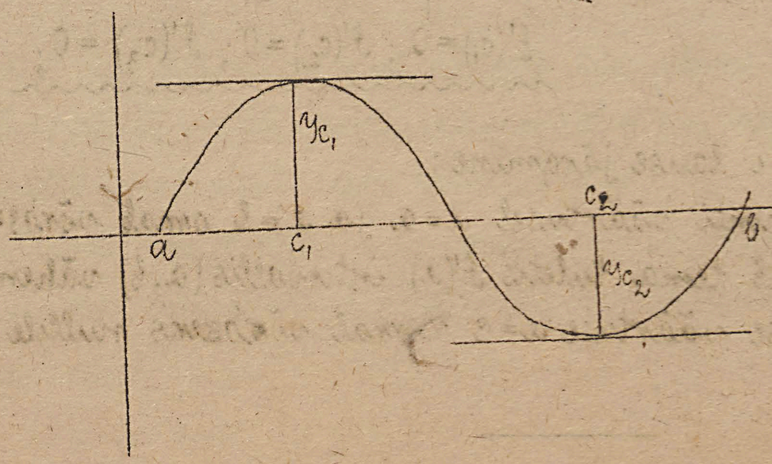
$y_k = f(k) < 0$;

$y_p = f(p) < 0$;

$$f(a) = 0 \ldots\ldots > f(k) > \ldots\ldots > f(c) < \ldots\ldots < f(p) < \ldots\ldots < f(b) = 0.$$

Argumendi väärtusel $x = c$ funktsioon $y = f(x)$ lõpetab vähenemise ja algab suurenemist, saab vajuvast tõusvaks. Tähendab, jällegi tuletis $f'(x)$ on enne $f'(c)$ negatiivne, üleminnes väärtusest $f'(c)$ saab ta positiivseks. Järjelikult on siis $f'(c) = 0 = tg\theta$. See näitab, et argumendi väärtusel $x = c$ on puutujoon paralleelne $x \ldots\ldots$ teljele.

Kombineerides mõlemad juhused, saame kõverjoone, millel puutujoon mitu korda võib saada paralleelseks $x \ldots\ldots$ teljele.



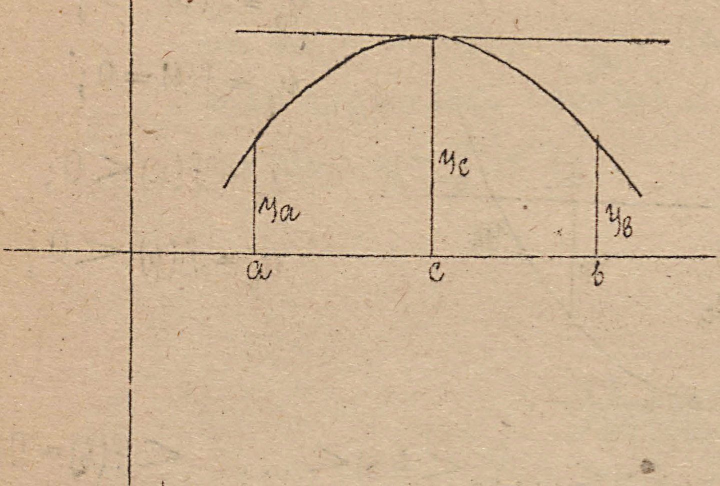
$f'(c_1) = 0$;

$f'(c_2) = 0$.

Kokkuvõttes võime avaldada järgmise lause: kui pidev, ühene ja lõplik funktsioon $f(x)$, mille tuletis $f'(x)$ ka pidev, ühene ja lõplik saab nulliks argumendi kahe väärtuse (a ja b) korral $f(a)=0$ ja $f(b)=0$, siis saab ka tuletis nulliks vähemalt argumenti ühe vahepealse c väärtuse korral: $f'(c)=0$.

See on nõndanimetud Rolle'i lause ehk teoreem.

Kui aga oletame, et $f(x)$ ei saa mitte nulliks, kui $x=a$ ja $x=b$, vaid omab ainult mõlemil korral ühesugused väärtused, siis saame laiendatud Rolle'i lause

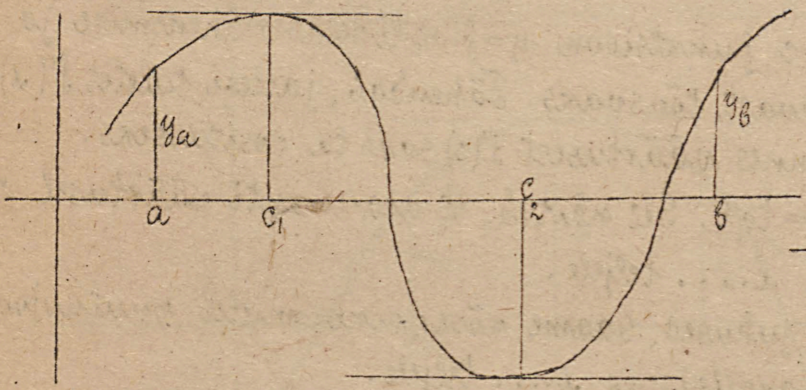


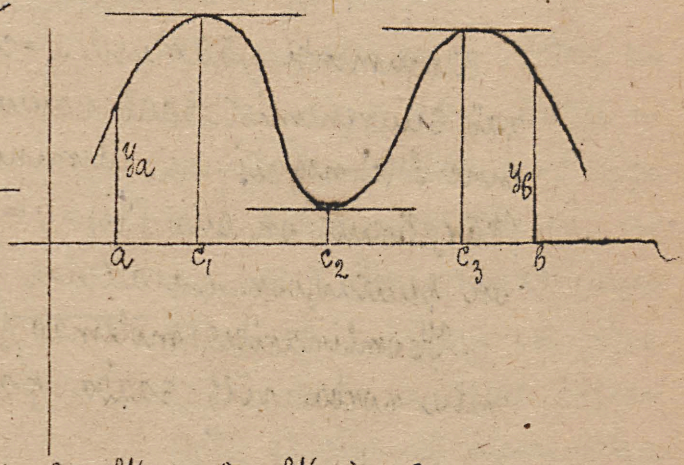
$$y_a \neq 0; \quad y_b \neq 0;$$

$$y_a = y_b \text{ ehk } f(a)=f(b).$$

Nüüd samuti, kui eelmiselgi korral, on $y=f(x)$ esialgu tõusev, pärast aga vajuv. Kusagil vahepeal, näituseks, kui $x=c$, saab $f'(x)$ positiivsest negatiivseks.

Sellest järeldame, et argumenti väärtusel $x=c$ peab olema $y'_c = f'(c) = 0$.





$y_a = y_b$; $f(a)=f(b)$;

$f'(c_1)=0$; $f'(c_2)=0$; $f'(c_3)=0$;

Selle järele oleks Rolle'i lause järgmine:

Kui $f(x)$ kahel argumenti väärtusel $x=a$ ja $x=b$ omab võrdsed tähendused $f(a)=f(b)$, siis saab tema tuletis $f'(x)$ intervallis (a,b) vähemalt üks kord argumenti vahepealse väärtuse $x=c$ korral võrdseks nullile, $f'(c)=0$.

21.

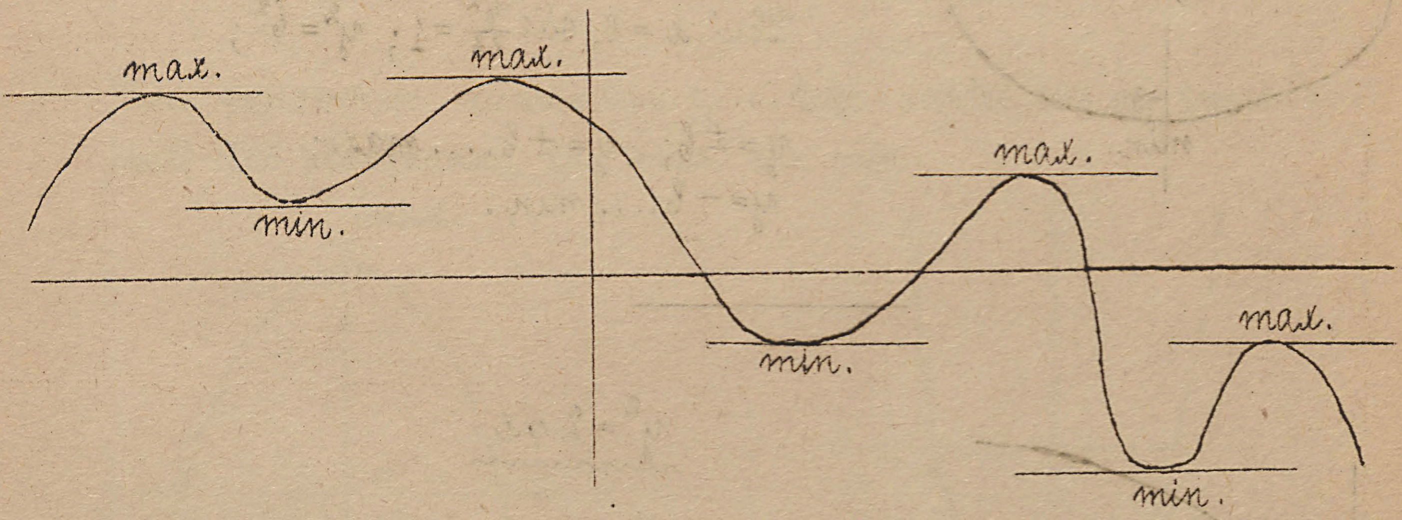
Pöördpunktid.

Punkte, millistes kõverjoon lõpetab tõusu ja algab vajumist, ja millistes puutujajoon saab parallelseks x..... teljele, nimetame pöördpunktideks.

Need pöördpunktid jagunevad kahte liiki.

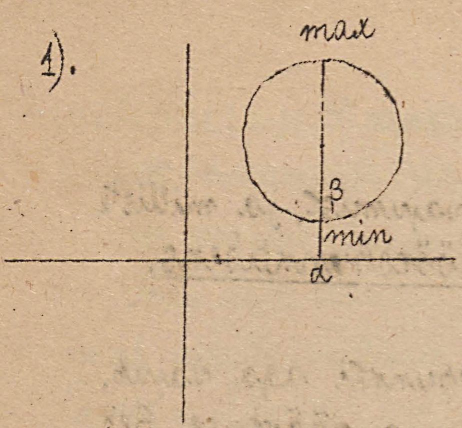
1) kui $f(x)$ enne pöördpunkti on tõusev, pärast pöördpunkti aga vajub, siis näitab see et pöördpunktis saab $f(x)$ kõige suurema väärtuse. Sed väärtust nimetame funktsiooni maximaalväärtuseks ehk lihtsa maximumiks.

2). Kui $f(x)$ enne pöördpunkti on vajuv; pärast pöördpunkti aga tõusev, siis näitab see, et pöördpunktis funktsioon lõpetab vähenemise ja hakkab suurenema, tähendab saab pöördpunktis kõige vähema väärtuse Seda väärtust nimetame funktsiooni minimaalväärtuseks ehk lihtsalt minimumiks.



Et $f(x)$ kujutab kõverjoont üldiselt, siis võime tema all mõista igasugust kõverjoont, millel hulk maximaal= kui ka minimaalpunkte on. Erijuhustel võib nende arv piiratud olla.

Näituseks on ringil üks max. ja üks min.; ellipsil samuti; parabolil ka üks min. ja üks max.; hüperbolil aga kaks max. ja kaks min.

1). 

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0$ ehk $y=f(x)$

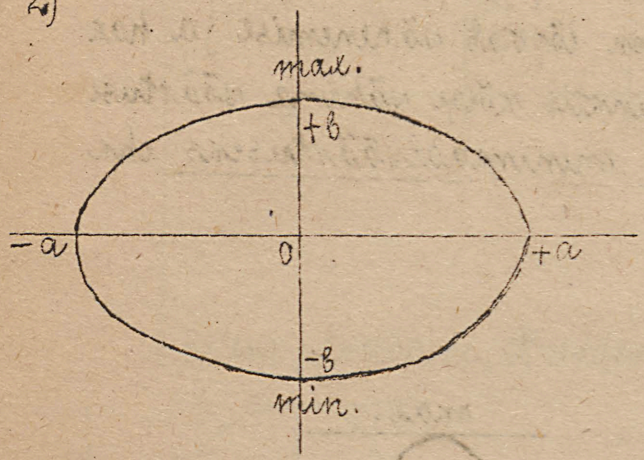
kui $x=\alpha$, siis saame pöördpunktid.

$(y-\beta)^2=r^2$; $y^2-2y\beta+\beta^2-r^2=0$;

$$y=\beta\pm\sqrt{\beta^2-(\beta^2-r^2)}=\beta\pm r.$$

Kahest väärtusest o $y=\beta+r$ max. ja $y=\beta-r$ min.

---

2) 

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

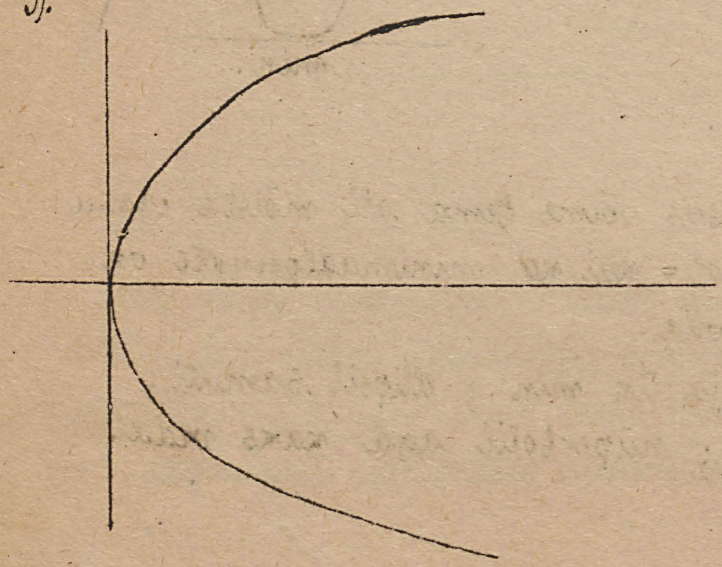
Pöördpunktid on argumenti väärtuse $x=0$ korral.

Kui $x=0$, siis $\frac{y^2}{b^2}=1$; $y^2=b^2$;

$y=\pm b$; $y=+b$.... max.;

$y=-b$.... min.

---

3). 

$y^2=2px$.

Nagu joonisest näeme, on parabooli pöördpunktid lõpmatuses, nimelt kui $x=\infty$.

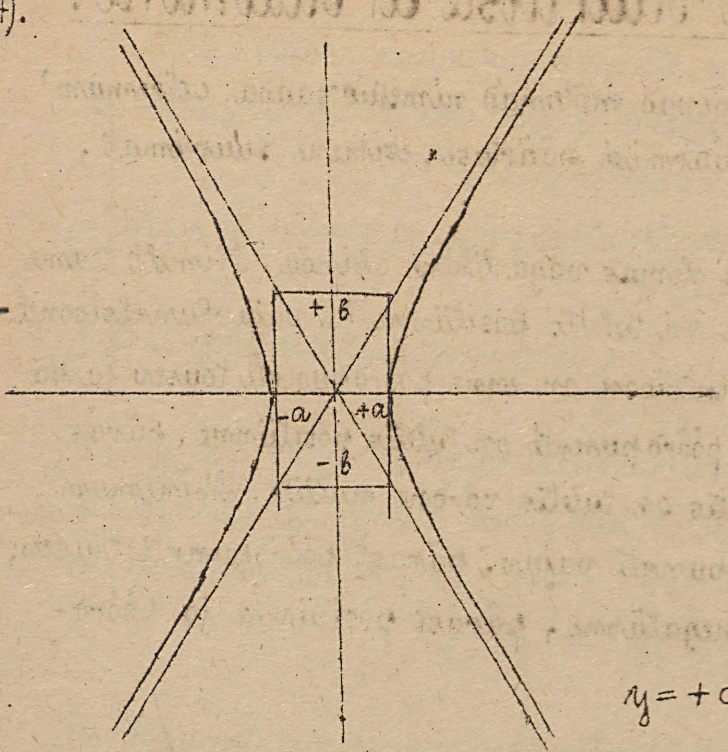
Sarnasel korral $y^2=\infty$;

$$y=\pm\sqrt{\infty}=\pm\infty;$$

$y=+\infty$.... max.,

$y=-\infty$.... min.

4). $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;



Pöördpunktid on jälle lõpmatuses.

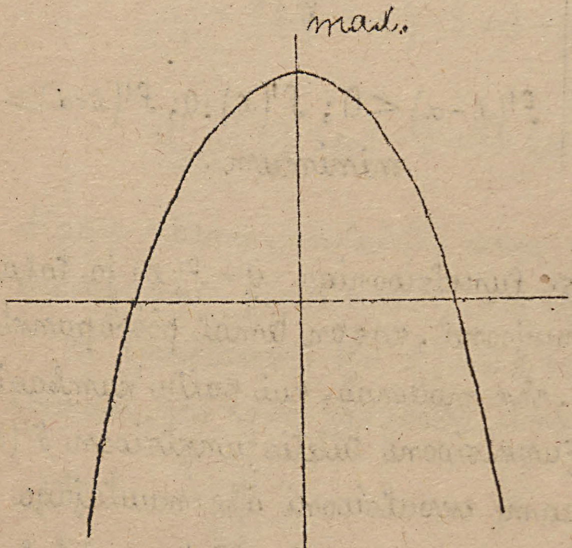
Kui $x = +\infty$, siis
$y = \pm\infty$;

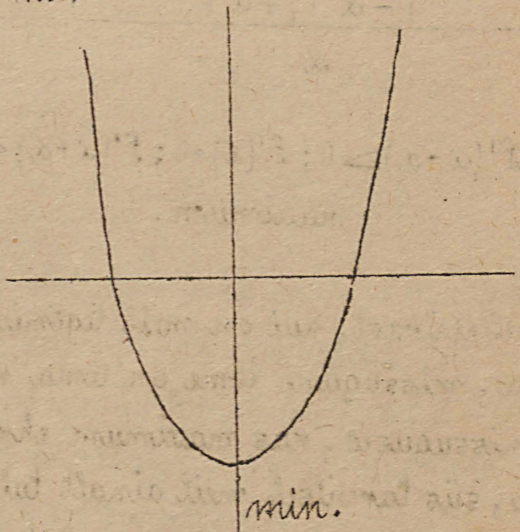
$y = +\infty \ldots$ max;
$y = -\infty \ldots$ min.

Kui $x = -\infty$, siis samuti
$y = \pm\infty$;
$y = +\infty \ldots$ max.; $y = -\infty \ldots$ min.

---

5). Kui parabol on sümeetriline y... telje suhtes, siis on temal ainult üks pöördpunkt, kas max. ehk min.

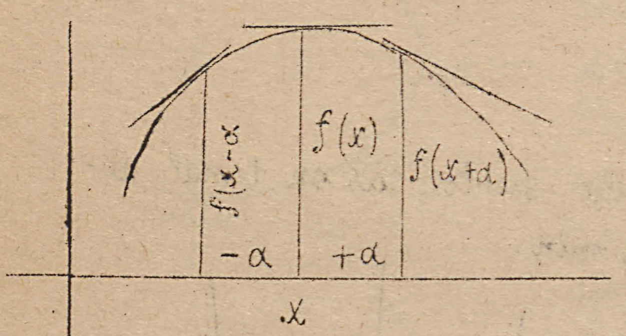




Funktsiooni extremaal väärtuste arvutamine.

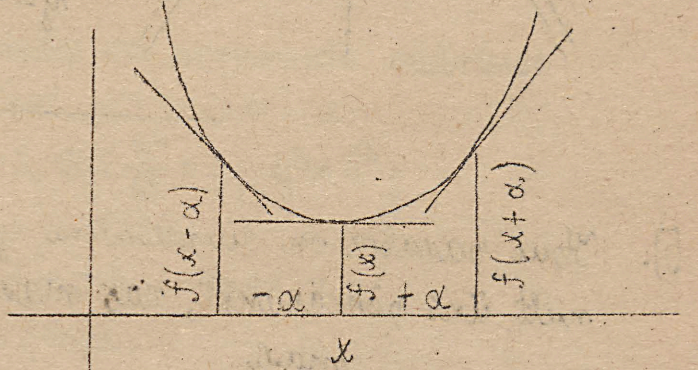
Maximum ja minimum üldmõistes võivad mõlemad nimetud saada extremum'iteks, sest mõlemad kujutavad funktsiooni äärmisi väärtusi, esimene suureimat, teine väheimat.

Extremaal väärtuste määramiseks on olemas väga lihtne abinõu. Nimelt teame meie juba eestpoolt, et tõusevfunktsioonil on tuletis positiivne ja vajuvfunktsioonil negatiivne. Maximum on siis, kui funktsioon on enne pöördpunkti tõusev ja pärast pöördpunkti vajuv; tähendab, enne pöördpunkti on tuletis positiivne, pärast pöördpunkti aga negatiivne; pöördpunktis on tuletis võrdne nullile. Minimum on siis, kui funktsioon on enne pöördpunkti vajuv, pärast pöördpunkti tõusev; tähendab, enne pöördpunkti on tuletis negatiivne, pärast positiivne ja pöördpunktis läheb jällegi üle nulli.



$f'(x-\alpha)>0;\ f'(x)=0;\ f'(x+\alpha)<0;$

maximum.



$f'(x-\alpha)<0;\ f'(x)=0;\ f'(x+\alpha)>0:$

minimum.

Sellepärast, kui on meil tegemist mõnesuguse funktsiooniga $y = f(x)$ ja tahame teada, missugune ilme on tema kujutatud kõverjoonel, kas on temal pöördpunktid ja missugused, kas maximum ehk minimum, ehk mõlemad, kui palju kumbagi liiki, siis tarvitseb meil ainult tuletada selle funktsiooni tuletisfunktsioon $f'(x)$ ja anda sellele nullväärtus $f'(x)=0$. Siis saame ekvatsiooni ühe muutujaga x....ga, millest arvutame x...si väärtuse. Saadud x...si väärtus näitab, kus kohal on pöördpunkt ja mitu tükki neid on. Edasi vaatleme tuletist pöördpunkti lõpmatus läheduses $f'(x-\alpha)$ ja $f'(x+\alpha)$; kui $f'(x-\alpha)>0$ ja $f'(x+\alpha)<0$, siis on tegemist maximumiga, kui aga $f'(x-\alpha)<0$ ja $f'(x+\alpha)>0$ siis on meil minimum.

Extremumi leidmisviisi selgituseks võtame näituse.

Kui tahame koordinaadistikus joonistada kõverjoont, näit. $y = x^2 - 3x + 5$, siis on tähtis teada, kus kohal on selle kõverjoone pöördpunktid, ja missugune on kõveruse ilme. Selleks võtame tuletisfunktsiooni

$$y' = (x^2 - 3x + 5)' = 2x - 3.$$

Teades, et pöördpunktides on tuletis võrdne nullile, kirjutame

$$2x - 3 = 0.$$

Sellest ekvatsioonist arvutame x:

$$2x = 3; \quad x = \frac{3}{2}.$$

Saime x...si jaoks üheainsa väärtuse, mis näitab, et kõverjoonel on ükssainus pöördpunkt ja nimelt seal, kus $x = \frac{3}{2}$. Pöördpunkti ordinaatväärtuse leiame algekvatsioonist $y = x^2 - 3x + 5$, pannes x...si asemele $\frac{3}{2}$.

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 5 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 5 = 2\frac{3}{4}.$$

Pöördpunkti koordinaadid järjelikult on $\left(\frac{3}{2}, 2\frac{3}{4}\right)$. Nüüd seame üles küsimuse, kas pöördpunktis on maximum ehk minimum. Selleks vaatleme tuletist punkti $\left(\frac{3}{2}, 2\frac{3}{4}\right)$ lähikonnas, enne ja pärast pöördpunkti.

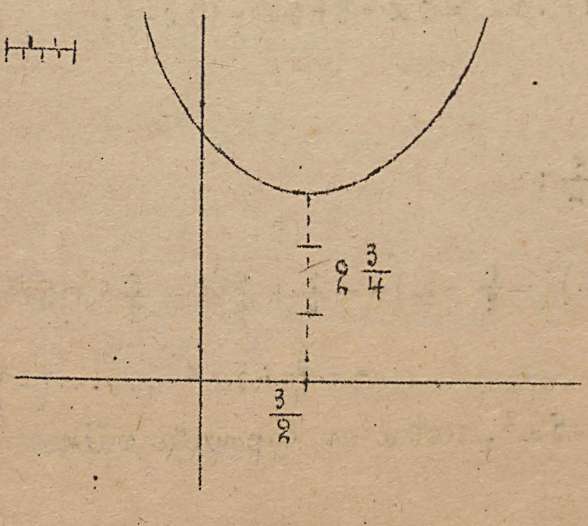
$$y' = 2x - 3; \quad y_1' = f'\left(\frac{3}{2} - \alpha\right) = ?; \quad y' = f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0; \quad y_2' = f'\left(\frac{3}{2} + \alpha\right) = ?$$

$y_1' = 2\left(\frac{3}{2} - \alpha\right) - 3 = \cancel{3} - 2\alpha - \cancel{3} = -2\alpha$ .... /negatiivne/;

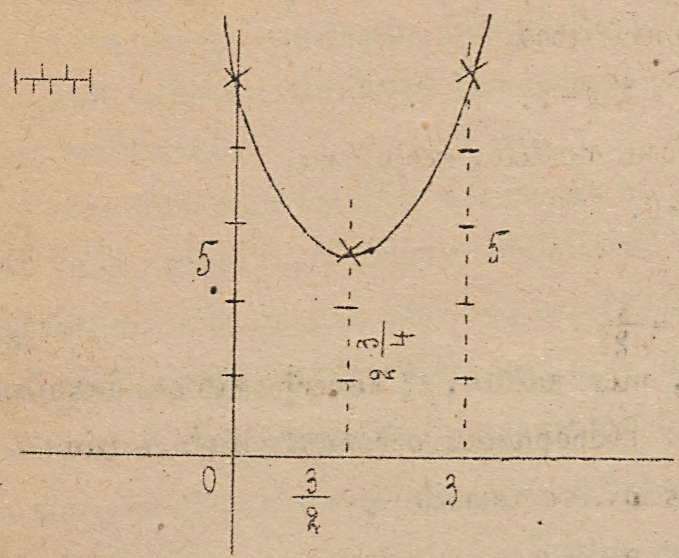
$y_2' = 2\left(\frac{3}{2} + \alpha\right) - 3 = \cancel{3} + 2\alpha - \cancel{3} = +2\alpha$ .... /positiivne/.

Nagu näeme, on tuletis enne pöördpunkti negatiivne ja saab pärast pöörd- pöördpunkti positiivseks. Tähendab, meil on tegemist minimumiga.

Et funktsioon $y = x^2 - 3x + 5$ on pidev, ühene ja lõplik ja temal on üks ekstremum, siis võime järeldada, et meil on tegemist paraboliitaolise kõverjoonega, mille tipp on punktis $\left(\frac{3}{2}, 2\frac{3}{4}\right)$.



Joonistades võime saada senniste andmete järele ainult kõverjoone tüübi. Kõverjoont $y = x^2 - 3x + 5$ meie veel ei saa. Joonises on meil kindlaks määratud ainult pöördpunkt. Peale selle on meil veel teada, et kõverjoone harud lähevad ülespoole; kas kõverjoone harude tõus on lame ehk otsene, seda meie veel ei tea.



Et seda teada, võtame pöördpunktile kaks naabruspunkti, ükskõik kui kaugel temast. Näiteks võtame punktid, kus $x = 0$ ja $x = 3$. Siis on esimesel korral $y = 5$ ja teisel korral ka $y = 5$. Need punktid võimaldavad kõverjoone kuju saamise.

Harjutused.

Leida extremum avaldustes:

1) $y = 3 - 2x - 3x^2$; $y' = -2 - 6x$; $-2 - 6x = 0$; $x = -\frac{1}{3}$;

$$y_1' = y'_{-\frac{1}{3} - \alpha} = -2 - 6\left(-\frac{1}{3} - \alpha\right) = -2 + 2 + 6\alpha = 6\alpha \ldots\ldots (+);$$

$$y_2' = y'_{-\frac{1}{3} + \alpha} = -2 - 6\left(-\frac{1}{3} + \alpha\right) = -2 + 2 - 6\alpha = -6\alpha \ldots\ldots (-);$$

maximum.

Maximumpunkti asukoht on (x_{max}, y_{max}):

$$y_{max.} = 3 - 2x_{max.} - 3x^2_{max.} = 3 - 2\left(-\frac{1}{3}\right) - 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 3 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 2;$$

2) $y = 5x(x-1)$; $y' = (5x)'(x-1) + (x-1)' \cdot 5x = 5x - 5 + 5x = 10x - 5$;

$10x - 5 = 0$; $2x - 1 = 0$; $x_{extr.} = \frac{1}{2}$;

$y_{extr.} = 5x_{extr.}(x_{extr.} - 1) = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$;

$$y_1' = y'_{\frac{1}{2} - \alpha} = 5\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\left(\frac{1}{2} - \alpha - 1\right) = \left(\frac{5}{2} - 5\alpha\right)\left(-\frac{1}{2} - \alpha\right) = -\frac{5}{4} + \cancel{\frac{5}{2}\alpha} - \cancel{\frac{5}{2}\alpha} + 5\alpha^2 =$$

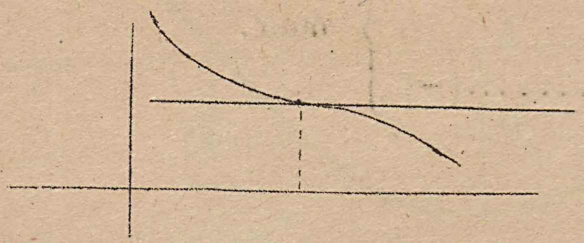
$$= -\frac{5}{4} + 5\alpha^2 \ldots\ldots (-)$$

Märkus: y_1' märk ei olene mitte liikmest $5\alpha^2$, sest α on lõpmatu väike suurus; järjelikult on domineeriv esimese liikme $\frac{5}{4}$ märk.

$$y'_2 = y'_{\frac{1}{2}+\alpha} = 5\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\left(\frac{1}{2}+\alpha-1\right) = \left(\frac{5}{2}+5\alpha\right)\left(\alpha-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{5}{2}\alpha} + 5\alpha^2 - \frac{5}{4} - \cancel{\frac{5}{2}\alpha} = -\frac{5}{4}+5\alpha^2 \ldots\ldots (-).$$

Märkus: Et tuletis enne kui ka pärast pöördpunkti on ühesuguse märgiga, siis ei ole meil ei maximumi ega minimumi, vaid on tegemist nõndanimetud <u>paindpunktiga</u>, kus kõverjoon muudab ainult oma kumerust. Sarnane kõverjoon on kujutud meil joonises.



3) $\underset{\sim\sim\sim}{y = x(a-x)^2}$; $\quad y' = x'(a-x)^2 + [(a-x)^2]' \cdot x = (a-x)^2 + 2(a-x)(a-x)' \cdot x =$

$$= (a-x)^2 + 2x(a-x)(-1) = (a-x)^2 - 2x(a-x) = \underset{\sim\sim\sim}{(a-x)(a-3x)};$$

$(a-x)(a-3x) = 0$; siin on kaks võimalust $a-x=0$ ehk $a-3x=0$. See näitab, et kõverjoonel on kaks pöördpunkti.

I extr. $\quad a - x = 0$; $\quad x_{extr.} = a$;

$$y_{extr.} = x_{extr.}(a - x_{extr.})^2 = a(a-a)^2 = 0.$$

$$y'_{a-\alpha} = [a-(a-\alpha)][a-3(a-\alpha)] = \alpha(-2a+3\alpha) = -\alpha(2a-3\alpha).$$ Nähtavasti on $y_{a-\alpha}$ negatiivne.

$y_{a+\alpha}$ saame, kui võtame $-\alpha$ asemele $+\alpha$;

$$y_{a+\alpha} = +\alpha(2a-3\alpha) \ldots\ldots\ldots /\text{positiivne}/.$$

Järjelikult, on punktis $(a, 0)$ minimum.

II extr. $\quad a - 3x = 0$; $\quad x_{extr.} = \frac{a}{3}$;

$$y_{extr.} = x_{extr.}(a - x_{extr.})^2 = \frac{a}{3}\left(a - \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a}{3}\cdot\frac{4}{9}a^2 = \frac{4}{27}a^3.$$

$$y'_{\frac{a}{3}-\beta} = \left[a - \left(\frac{a}{3}-\beta\right)\right]\left[a - 3\left(\frac{a}{3}-\beta\right)\right] = 3\beta\left(\frac{2a}{3}+\beta\right) \ldots\ldots\ldots (+).$$

Muutes märki β juures, saame

$$y'_{\frac{a}{3}+\beta} = -3\beta\left(\frac{2a}{3}-\beta\right) \ldots\ldots (-).$$

Tähendab, punktis $\left(\frac{a}{3}, \frac{4a^3}{27}\right)$ on maximum.

4) $y = \sin x.$ $\quad y' = \cos x;$ $\quad \cos x_{extr.} = 0;$ $\quad x_{extr.} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots\ldots$

Nagu näeme, on extremumpunkte lõpmatu palju.

$$y_{extr.} = \sin x_{extr.} = \sin\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{3\pi}{2},\ \sin\frac{5\pi}{2}\ \ldots\ldots$$
$$+1,\quad -1,\quad +1,$$

I extr. $x = \frac{\pi}{2};$ $\quad y = +1;$

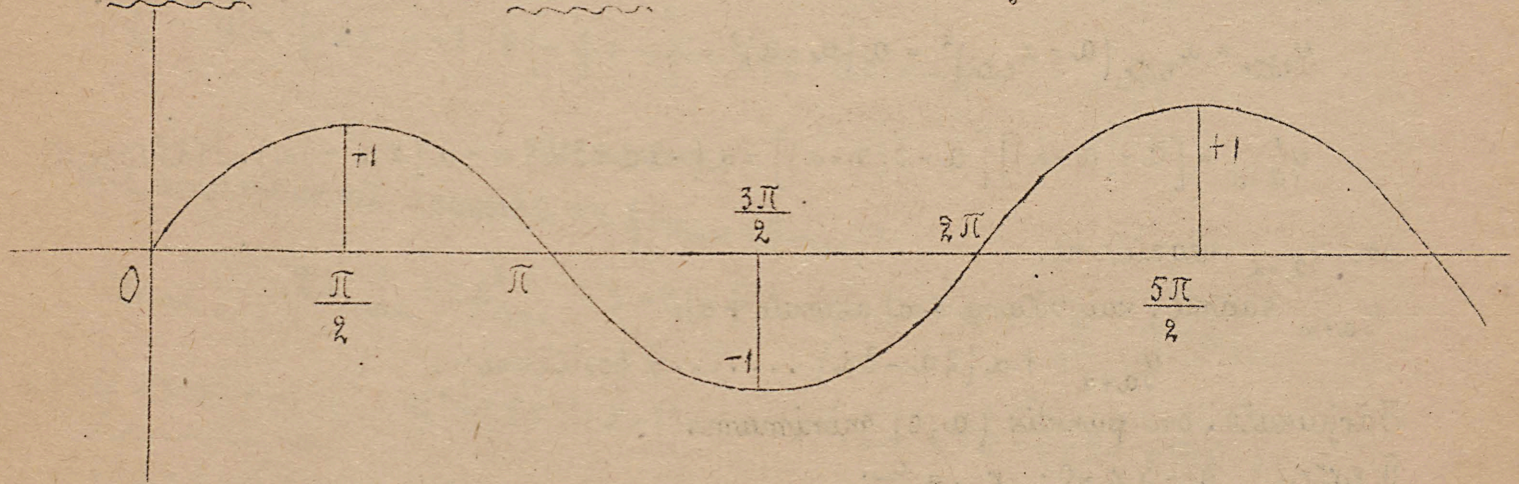
$$\left.\begin{array}{l} y'_{\frac{\pi}{2}-\alpha} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha \ldots\ldots\ldots (+) \\ y_{\frac{\pi}{2}+\alpha} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha \ldots\ldots\ldots (-) \end{array}\right\} \text{max.}$$

II extr. $x = \frac{3}{2}\pi,$ $\quad y = -1;$

$$\left.\begin{array}{l} y'_{\frac{3\pi}{2}-\alpha} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\sin\alpha \ldots\ldots (-) \\ y'_{\frac{3\pi}{2}+\alpha} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\alpha \ldots\ldots (+) \end{array}\right\} \text{min.}$$

III extr. $x = \frac{5}{2}\pi;$ $\quad y = +1;$ $\quad y'_{\frac{5\pi}{2}-\alpha} = \cdots (+);$ $\quad y'_{\frac{5\pi}{2}+\alpha} = \cdots (-) \ldots$ max.

IV extr. ..... min; V extr. ..... max. ..... j. n. e.



5) $y = \cos x;$ $\quad y' = -\sin x;$ $\quad -\sin x_{extr.} = 0;$

$$x_{extr.} = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi \ldots\ldots$$

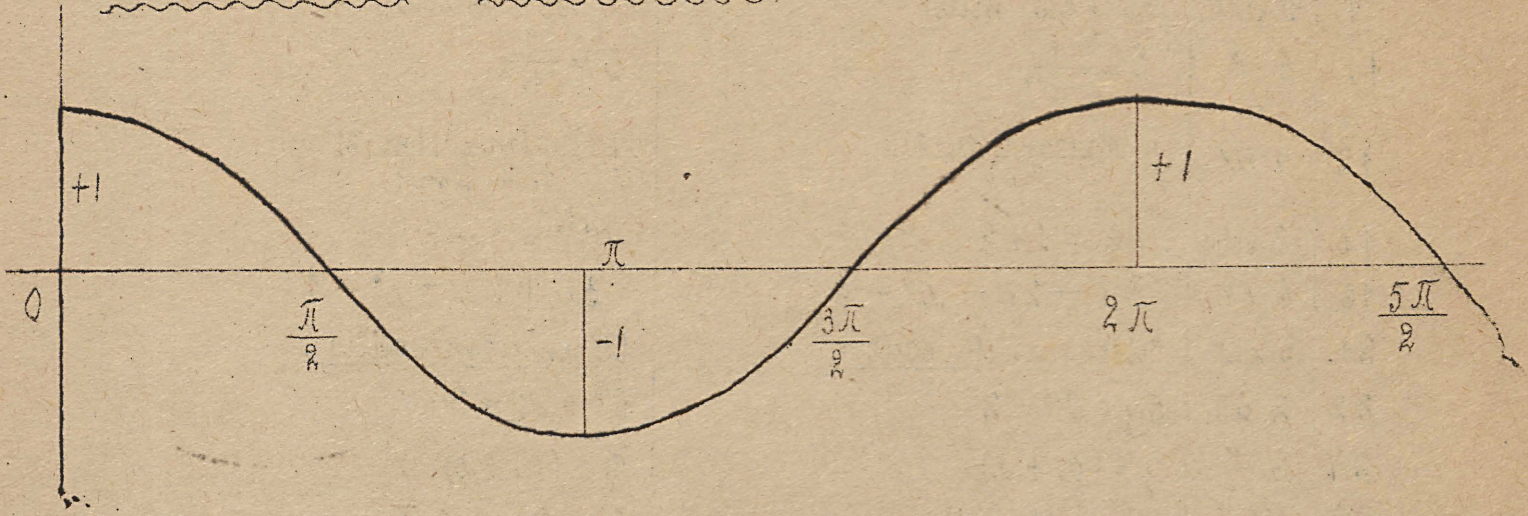
$$y_{extr.} = \cos 0,\ \cos\pi,\ \cos 2\pi,\ \cos 3\pi,\ \ldots\ldots$$
$$+1,\quad -1,\quad +1,\quad -1,\ \ldots\ldots$$

I extr. $x = 0,$ $\quad y = +1;$

$$\left.\begin{array}{l} y'_1 = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha \ldots\ldots (+) \\ y'_2 = -\sin\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots (-) \end{array}\right\} \text{max.}$$

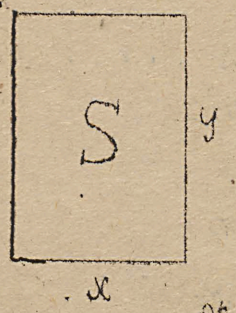
$\underset{\sim\sim\sim}{\text{II extr.}}$ $x = \pi,\ y = -1;$ $\left.\begin{array}{l} y'_1 = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin\alpha \ \ldots\ldots (-) \\ y'_2 = -\sin(\pi + \alpha) = \sin\alpha \ \ldots\ldots (+) \end{array}\right\}$ min.

III extr. .... max.; IV extr. .... min. j. n. e.



6) Leida maximaalpinnaga täisnelinurk, mille perimeeter on 14.

Lahendus:



$S = xy;\quad 2x + 2y = 14;\quad x + y = 7;\quad y = 7 - x;$

$S = x(7 - x) = 7x - x^2;$

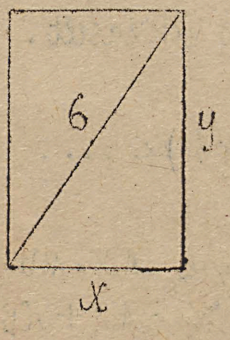
$S' = 7 - 2x;\quad S'_{max.} = 7 - 2x_{max} = 0;$

$x_{max.} = \frac{3}{2};\quad y = 7 - x;\quad y_{max} = 7 - x_{max} = 7 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2};$

Otsitav täisnelinurk on ruut, mille külg $= \frac{3}{2}$.

7) Leida maximaalperimeetriga täisnelinurk, kui diagonaal on 6.

Lahendus: $P = 2x + 2y;\quad y = \sqrt{36 - x^2};$



$P = 2x + 2\sqrt{36 - x^2};$

$P' = 2 + \frac{2(36 - x^2)'}{4\sqrt{36 - x^2}} = 2 + \frac{-x}{\sqrt{36 - x^2}};$

$P'_{max} = 2 - \frac{x_{max}}{\sqrt{36 - x^2_{max}}} = 0;\quad 2\sqrt{36 - x^2_{max}} - x_{max} = 0;$

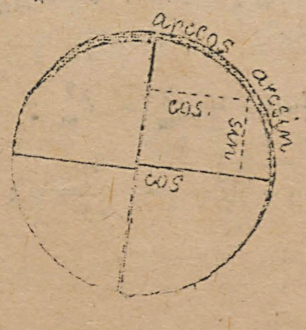
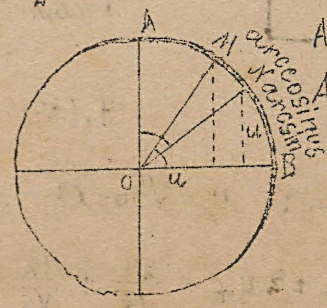
$4.(36 - x_m^2) = x_m^2;\quad 144 - 4x_m^2 = x_m^2;\quad 144 = 5x^2_{max};$

$x_{max} = \frac{12}{\sqrt{5}};\quad y = \sqrt{36 - x^2};\quad y_{max} = \sqrt{36 - \frac{144}{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}};$

$P_{max} = 2x_m + 2y_m = \frac{24}{\sqrt{5}} + \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{36}{\sqrt{5}}.$

73.15

Trükivead.

lhk.	rida	on	peab olema
1	9 alt	ei pea mitte	ei või mitte
10	5 "	$l = \frac{1}{n^n}$	$l = \frac{1}{10^n}$
12	4 ül.	$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 m^3}$
13	3 alt	$N^{\frac{1}{n}} = 1 + \varepsilon$	$N^{\frac{1}{n}} = 1 + \varepsilon$.
16	6 ül.	$= 3x - 2x - x^2 - 6$	$= 3x + 2x - x^2 - 6$
21	3 alt	teisendus. Moodulid.	teisendusmoodulid.
22	2 ül.	$5y = N = 2$	$5^y = N = 2$.
27	6 "	$y = (a + x)^x$	$y = (a + x)^n$.
29	16 "	$y = f(x + \Delta x)$	$y_1 = f(x + \Delta x)$.
34	3 "	peab kõverjoon	peab olema kõverjoon.
37	4 "	$\Delta x = dy$	$\Delta x = dx$.
39	3 "	$y = \varphi(u)$. Kusg.....	$y = \varphi(u)$, kus......
42	4 "	$= \frac{uv' - uv'}{v}$	$= \frac{vu' - uv'}{v}$.
45	5 "	$a^{\Delta x} = 1$, ehk	$a^{\Delta x} \neq 1$, ehk
45	10 "	$= \frac{a^x}{\lg_a (1 + \frac{1}{n})}$	$= \frac{a^x}{\lg_a (1 + \frac{1}{n})^n}$.
47	8 "	$y' = \left(\frac{\sin . u}{\cos . u}\right) =$	$y' = \left(\frac{\sin . u}{\cos . u}\right)'$.
48	12 alt	$(\arccos u)' = -(\arcsin u)$.	$(\arccos u)' = -(\arcsin u)'$.
50	5 ül.	$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$	$\frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$.
52	1 alt	kõik tuletised	kõik tuletised vähtlaselt.
56	2 alt	(x_a, x_b)	$(x_a; x_b)$.
59	10 "	$< f(a + n + 1h) < \ldots$	$< f(a + \overline{n+1}\, h) < \ldots$
71	10, 11 alt	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$
48	——		 $AN = MB = \arccos u$. $AN + NB = \arccos u + \arcsin u = \frac{\pi}{2}$.