

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Rakendusmatemaatika instituut

Helle Hallik
Monotoonsust säilitav
histopoleerimine
Magistritöö

Juhendajad: Malle Fischer ja Peeter Oja

TARTU 2006

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Histopolatsiooniülesande püstitus	5
2 Histopolandi ühesus	7
3 Histopoleeriva splaini esitus	9
4 Pidevuse tingimused	12
5 Aprioorsed hinnangud	17
6 Kaasmonotoonne strateegia	26
7 Modifitseeritud kaasmonotoonne strateegia	29
8 Näited	35
9 Bibliograafilised märkused	40
10 Kirjandus	41
Summary	44
Lisad	46

Sissejuhatus

Funktsioonide taastamisel mõõtmistulemuste või katseandmete põhjal on praktikas esinevatel juhtudel tihti oluline, et säilitataks algandmete geomeetrilisi omadusi: positiivsust (mittenegatiivsust), monotoonsust. On teada, et üldiselt siledad polünoomiaalsed interpoleerivad splineid ei säilita lähteandmete geomeetrilisi omadusi. Klassikaline näide selle kohta on funktsioon $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in [-2, -0.2]$, ja tema interpoleerimine kuupsplineidega [10]. See funktsioon on ka näide sellest, kuidas andmete positiivsus, monotoonsus ja kumerus ei säili ruutsplineidega interpoleerimisel [24], samuti histopoleerimisel [5].

Käesoleva magistritöö eesmärgiks on leida histopoleeriva splinei konstrueerimise viise, kasutades lineaar/lineaar ratsionaalfunktsioone ja ruutpolünoome sellisel, et, nii palju kui võimalik, oleks säilitatud lähteandmete monotoonsus.

Interpolatsiooniülesandes on antud võrk $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ja võrgu sõlmedele x_i vastavad funktsiooni väärtused f_i , $i = 0, \dots, n$. On vaja leida funktsioon $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nii, et oleks täidetud interpolatsioonitingimused

$$S(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Histopolatsiooniülesandes on antud võrk $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ja arvud z_i , $i = 1, \dots, n$, mis väljendavad taastatava funktsiooni keskmisi väärtusi osalõikudel. Otsitakse funktsiooni $T : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nii, et oleks täidetud histopolatsioonitingimused

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} T(x) dx = z_i(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Kui meil on antud histopolatsiooniülesanne, siis võime võtta $f_0 \in \mathbb{R}$ suvaliselt ja $f_i = f_{i-1} + z_i(x_i - x_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$. Leides nende andmete abil interpolandi S , on vahetult kontrollitav, et S' on algselt antud histopolatsiooniülesande lahend. Teisipidi, kui on antud interpolatsiooniülesanne,

arvutame $z_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$, $i = 1, \dots, n$. Leides nüüd histopolandi T , osutub funktsioon

$$S(x) = f_0 + \int_a^x T(s) ds$$

interpolatsiooniülesande lahendiks. See arutelu näitab, et kui on vaja leida interpolant või histopolant, võib lahendada ekvivalentse teist liiki ülesande.

Olgu meil ülesandeks konstrueerida monotoonne histopolant. Üks võimalus on moodustada ekvivalentne interpolatsiooniülesanne ja selle lahendi S tuletis S' võtta histopolandiks T . Küllaldase sileduse korral on T monotoonselt kasvav parajasti siis, kui $T'(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, mis on samaväärne sellega, et $S''(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, ehk S on kumer. Seega saab monotoonse histopolandi leidmise ülesande taandada kumera interpolandi leidmise ülesandele. Kumeraks interpolandiks sobib näiteks ruut/lineaar ratsionaalfunktsioonidest koosnev klassi C^2 kuuluv splain [18]. Kuid ruut/lineaar ratsionaalfunktsiooni tuletis ei pruugi olla lineaar/lineaar ratsionaalfunktsioon, seepärast ei saada selliselt järgnevas magistritöös kirjeldatud meetodit. Lisaks sellele on ruut/lineaar ratsionaalfunktsioonidest koosnevate splainidega interpolatsiooniülesannet raskem lahendada.

Magistritöö koosneb üheksast osast. Esimeses punktis püstitatakse histopolatsiooniülesanne. Teises vaatleme histopolandi ühesust. Sellele järgnevas osas tegeleme histopoleeriva splaini esitusega. Neljandas punktis anname histopoleeriva splaini pidevuse tingimused. Järgnevas punktis anname mõningad aprioorsed hinnangud. Kuuendas ja seitsmendas osas tegeleme vastavalt kaasmonotoonse ja modifitseeritud kaasmonotoonse strateegia abil histopolatsiooniülesande lahendamise. Eelviimases punktis on toodud mõned näited nende strateegiate kasutusest. Näited on realiseeritud paketi Mathcad. Magistritöö viimases osas on esitatud bibliograafilisi märkusi.

Magistritöö kirjutamisel on võetud aluseks peamiselt artiklid [3] ja [4].

Märk \square tähistab tõestuste lõppu.

1 Histopolatsiooniülesande püstitus

Vaatleme lõiku $[a, b]$, kus $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ja valime sellel lõigul punktid $x_i, i = 0, \dots, n$, järgmisel viisil:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lisaks olgu antud reaalarvud $z_i, i = 1, \dots, n$. Soovime konstrueerida funktsiooni klassist C^1 lõigul $[a, b]$ nii, et see oleks igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, kas ruutpolünoom või lineaar/lineaar ratsionaalfunktsioon kujul

$$S(x) = \frac{a_i + b_i(x - x_{i-1})}{1 + d_i(x - x_{i-1})}, \quad (1.1)$$

kus $1 + d_i(x - x_{i-1}) > 0$, ja rahuldaks histopolatsioonitingimusi

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} S(x) dx = z_i(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Vaadeldaval juhul on igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$) spline S määratud 3 parameetriga ning seetõttu on splaini S konstrueerimiseks vajalik parameetrite arv $3n$.

Nõudest, et $S \in C^1[a, b]$, saame splainile $2(n-1)$ lisatingimust, histopolatsioonitingimustest (1.2) n tingimust. Seega vabade parameetrite arv, millest spline S jääb sõltuma, on

$$3n - 2(n-1) - n = 2.$$

Niisiis vajame lisaks kahte tingimust, milleks valime rajatingimused kujul

$$S'(x_0) = \alpha, \quad S'(x_n) = \beta \quad (1.3)$$

või kujul

$$S(x_0) = \alpha, \quad S(x_n) = \beta. \quad (1.4)$$

Rajatingimustena võib kasutada ka kombinatsiooni, kus ühes punktides x_0 või x_n võetakse üks tingimustest (1.3) ja teises punktis üks tingimustest (1.4), näiteks $S'(x_0) = \alpha$ ja $S(x_n) = \beta$.

Leides tuletise S' valemist (1.1)

$$S'(x) = \frac{b_i - a_i d_i}{(1 + d_i(x - x_{i-1}))^2}, \quad (1.5)$$

näeme, et see säilitab märki ja seetõttu on S rangelt kasvav, rangelt kahanev või konstantne lõigul $[x_{i-1}, x_i]$.

2 Histopolandi ühesus

Vaatleme eelmises punktis püstitatud histopolatsiooniülesannet, kus antud on sõlmed x_i , $i = 0, \dots, n$, ja arvud z_i , $i = 1, \dots, n$. Olgu iga osalõigu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, korral määratud, kas spline S on sellel ruutpolünoom või lineaar/lineaar ratsionaalfunktsioon kujul (1.1).

Teoreem 1. Ülesandel, mis koosneb histopolatsiooningimustest (1.2) ja rajatingimustest (1.3) või (1.4), ei saa olla kahte erinevat lahendit.

Tõestus. Olgu S_1 ja S_2 kaks erinevat splaini, mis on osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ mõlemad kas ruutpolünoomid või lineaar/lineaar ratsionaalfunktsioonid. Tähistame $g = S_1 - S_2$ ja uurime funktsiooni g' nullkohti lõigul $[x_{i-1}, x_i]$. Kui S_1 ja S_2 on mõlemad ruutpolünoomid sellel lõigul, siis g on ruutpolünoom ja g' on lineaarne, mistõttu $g'(x) = 0$ kõikjal või ülimalt ühes punktis lõigul $[x_{i-1}, x_i]$.

Kui aga S_1 ja S_2 on mõlemad lineaar/lineaar ratsionaalfunktsioonid lõigul $[x_{i-1}, x_i]$, siis

$$S_1(x) = \frac{a_{1i} + b_{1i}(x - x_{i-1})}{1 + d_{1i}(x - x_{i-1})}$$

ja

$$S_2(x) = \frac{a_{2i} + b_{2i}(x - x_{i-1})}{1 + d_{2i}(x - x_{i-1})},$$

kui $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Kasutades tähiseid $c_{1i} = b_{1i} - a_{1i}d_{1i}$ ja $c_{2i} = b_{2i} - a_{2i}d_{2i}$, saame

$$g'(x) = \frac{c_{1i}}{(1 + d_{1i}(x - x_{i-1}))^2} - \frac{c_{2i}}{(1 + d_{2i}(x - x_{i-1}))^2}.$$

Võrrand $g'(x) = 0$ on samaväärne võrdusega

$$\frac{c_{1i}}{(1 + d_{1i}(x - x_{i-1}))^2} = \frac{c_{2i}}{(1 + d_{2i}(x - x_{i-1}))^2}.$$

Arvestades nimetaja märki splaini esituses (1.1) (s.o. $1 + d_{1i}(x - x_{i-1}) > 0$ ja $1 + d_{2i}(x - x_{i-1}) > 0$), näeme, et c_{1i} ja c_{2i} on sama märgiga. Kui $c_{1i} = c_{2i} = 0$, siis $g'(x) = 0$ kõikjal lõigul $[x_{i-1}, x_i]$. Kui aga $c_{1i}c_{2i} > 0$, siis $g'(x) = 0$ on samaväärne võrdusega

$$\frac{1 + d_{1i}(x - x_{i-1})}{1 + d_{2i}(x - x_{i-1})} = \left(\frac{c_{1i}}{c_{2i}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ehk

$$1 + d_{1i}(x - x_{i-1}) = \left(\frac{c_{1i}}{c_{2i}}\right)^{\frac{1}{2}} (1 + d_{2i}(x - x_{i-1})).$$

Viimane lineaarne võrrand on rahuldatud kas ülimalt ühes punktis lõigul $[x_{i-1}, x_i]$ või kõikjal. Taas oleme saanud, et $g'(x) = 0$ kõikjal või ülimalt ühes punktis lõigul $[x_{i-1}, x_i]$. Järelikult, kui ei ole osalõiku, kus $g'(x) = 0$ kõikjal, saab funktsioonil g' lõigul $[x_0, x_n]$ olla ülimalt n nullkohta.

Eeldame, et S_1 ja S_2 rahuldavad tingimusi (1.2) samade arvudega z_i ja rajatingimustega. Siis

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

mis tähendab, et leidub $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ nii, et $g(\xi_i) = 0$.

Eeldame kõigepealt, et ei leidu lõiku $[x_{i-1}, x_i]$, kus $g'(x) = 0$ kõikjal. Tingimused (1.4) annavad, et $g(x_0) = 0$ ja $g(x_n) = 0$. See tähendab, et funktsioonil g on vähemalt $n + 2$ erinevat nullkohta lõigul $[x_0, x_n]$. Funktsioonil g' on Rolle'i teoreemi põhjal $n + 1$ erinevat nullkohta vahemikus (x_0, x_n) . See on aga vastuolus sellega, et funktsioonil g' on ülimalt n nullkohta. Teistest rajatingimustest (1.3) saame, et $g'(x_0) = 0$ ja $g'(x_n) = 0$. Lisaks on funktsioonil g' punktide $\xi_i, i = 1, \dots, n$, vahel $n - 1$ erinevat nullkohta. Seega oleme ka sel juhul tuvastanud funktsiooni g' nullkohtade arvuks vähemalt $n + 1$, mis pole aga võimalik. Näeme, et igal juhul võrdusest (1.2), koos rajatingimustega (1.3) või (1.4) järeldub, et funktsioonil g' on vähemalt $n + 1$ nullkohta lõigul $[x_0, x_n]$, mis on vastuolu.

Kui leidub lõik $[x_{i-1}, x_i]$, kus $g'(x) = 0$ kõikjal, on sama arutlus rakendatav igale maksimaalsele lõikude ühendile, kus funktsioon g' ei ole samaselt null. Kui sellise maksimaalse lõikude ühendi otspunktiks satub $x_i, i = 1, \dots, n - 1$, siis võib kasutada rajatingimust $g(x_i) = 0$ või $g'(x_i) = 0$.

Niisiis, vastuoluni ei vii ainult olukord, kus $g'(x) = 0$ kõikjal lõigul $[x_0, x_n]$ ja tingimus (2.1) annab, et $g(x) = 0$ kõikjal. Sellega on teoreem tõestatud.

□

3 Histopoleeriva splaini esitus

Vaatleme punktis 1 püstitatud ülesannet, kus splain S klassist C^1 on igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ kas ruutpolünoom või lineaar/lineaar ratsionaalfunktsioon. Vastavalt splaini S kujule räägime ruut- või ratsionaallõigust $[x_{i-1}, x_i]$. Lisaks eeldame, et on antud arvud z_i ja histopolatsioonitingimused (1.2).

Selles punktis anname splaini S edaspidises arutelus sobiva esituse nii ratsionaallõigul kui ruutlõigul.

Kui tähistada $c_i = b_i - a_i d_i$, $i = 1, \dots, n$, võime ratsionaalsplaini (1.1) tuletisele (1.5) lõigul $[x_{i-1}, x_i]$ anda kuju

$$S'(x) = \frac{c_i}{(1 + d_i(x - x_{i-1}))^2}. \quad (3.1)$$

Olgu $S'(x_i) = m_i$, $i = 0, \dots, n$, ja $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. Tuletise esitusest (3.1), saame

$$c_i = m_{i-1} \quad (3.2)$$

$$\frac{c_i}{(1 + h_i d_i)^2} = m_i. \quad (3.3)$$

Kui $m_i \neq 0$, saame võrdustest (3.2) ja (3.3)

$$\frac{m_{i-1}}{m_i} = (1 + h_i d_i)^2,$$

millest

$$d_i = \frac{1}{h_i} \left(\left(\frac{m_{i-1}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right). \quad (3.4)$$

Olgu $d_i \neq 0$. Siis

$$S(x) = \frac{b_i}{d_i} - \frac{c_i}{d_i(1 + d_i(x - x_{i-1}))}. \quad (3.5)$$

Kuna

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} S(x) dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\frac{b_i}{d_i} - \frac{c_i}{d_i(1 + d_i(x - x_{i-1}))} \right] dx \\ &= \frac{b_i}{d_i} h_i - \frac{c_i}{d_i^2} \log(1 + h_i d_i), \end{aligned}$$

siis histopolatsioonitingimustest (1.2) järeldub võrdus

$$\frac{b_i}{d_i} - \frac{c_i}{h_i d_i^2} \log(1 + h_i d_i) = z_i. \quad (3.6)$$

Võrdustega (3.2), (3.4) on ratsionaalsplaini (1.1) kordajad c_i ja d_i avaldatud parameetrite m_{i-1} ja m_i kaudu. Võrdusest (3.6) leiame

$$\frac{b_i}{d_i} = z_i + \frac{c_i}{h_i d_i^2} \log(1 + h_i d_i).$$

Seega avaldub ratsionaalsplain (3.5) kujul

$$S(x) = z_i + \frac{m_{i-1}}{h_i d_i^2} \log(1 + h_i d_i) - \frac{m_{i-1}}{d_i(1 + d_i(x - x_{i-1}))}, \quad (3.7)$$

ehk, arvestades võrdust (3.4), kujul

$$\begin{aligned} S(x) &= z_i + h_i \frac{m_{i-1}}{\left(\left(\frac{m_{i-1}}{m_i}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right)^2} \log\left(\frac{m_{i-1}}{m_i}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - h_i \frac{m_{i-1}}{\left(\left(\frac{m_{i-1}}{m_i}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) \left(1 + t \left(\left(\frac{m_{i-1}}{m_i}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right)\right)}, \quad (3.8) \\ &\quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n, \quad t = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}. \end{aligned}$$

Juhul kui $d_i = 0$, siis $m_{i-1} = m_i$ ja $b_i = c_i = m_i$. Tingimustest (1.2) saame

$a_i = z_i - \frac{1}{2} h_i m_i$ ja lõigul $x \in [x_{i-1}, x_i]$ esitub splain S kujul

$$S(x) = z_i + m_i \left(x - \left(x_{i-1} + \frac{h_i}{2} \right) \right).$$

On selge, et kui $m_i = 0$, siis $S(x) = z_i$, $x \in [a, b]$.

Ruutlõigul $[x_{i-1}, x_i]$ lähtume splaini S esitusest

$$S(x) = a_0 + a_1(x - x_{i-1}) + a_2(x - x_{i-1})^2.$$

Splaini S tuletisest $S'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_{i-1})$ saame, et

$$\begin{aligned}S'(x_{i-1}) &= a_1 = m_{i-1}, \\S'(x_i) &= a_1 + 2a_2h_i = m_i.\end{aligned}$$

Viimastest võrdustest leiame

$$a_2 = \frac{1}{2h_i}(m_i - m_{i-1}).$$

Histopolatsioonitingimuste (1.2) abil saame avaldada

$$a_0 = z_i - \frac{1}{6}h_i(m_i + 2m_{i-1}).$$

Seega esitub splain S ruutlõigul $[x_{i-1}, x_i]$ kujul

$$S(x) = z_i + \frac{h_i}{6}(-2 + 6t - 3t^2)m_{i-1} + (-1 + 3t^2)m_i, \quad (3.9)$$

kus $x = x_{i-1} + th_i$.

4 Pidevuse tingimused

Selles ja järgmises punktis teeme tehnilist eeltööd histopolatsiooniülesande lahendi olemasolu tõestamiseks. Töö käigus tuletame võrrandisüsteemid, mis tuleb splaini tegelikul leidmisel lahendada.

Kui tähistame $m_i = S'(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, ja esitame splaini S osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ parameetrite m_{i-1} ja m_i kaudu iga i korral, siis tegelikult lepime kokku, et $m_i = S'(x_i - 0)$ ja $m_i = S'(x_i + 0)$, $i = 1, \dots, n - 1$, mis tähendab splaini tuletise S' pidevust punktides x_1, \dots, x_{n-1} .

Olgu lõigud $[x_{i-1}, x_i]$ ja $[x_i, x_{i+1}]$ mõlemad ratsionaallõigud. Vaatleme juhtu, kus $m_i > 0$ iga i korral (juht $m_i < 0$ on analoogiline). Olgu $d_i \neq 0$. Kuna $m_{i-1} = m_i(1 + h_i d_i)^2$, võime valemi (3.7) põhjal kirjutada

$$\begin{aligned}
 S(x_i - 0) &= z_i + h_i m_i \frac{(1 + h_i d_i)^2 \log(1 + h_i d_i) - h_i d_i (1 + h_i d_i)}{h_i^2 d_i^2} \\
 &= z_i + h_i m_i \frac{(1 + h_i d_i)^2 (\log(1 + h_i d_i) - 1) + 1 + h_i d_i}{h_i^2 d_i^2} \\
 &= z_i + h_i m_i \frac{\frac{m_{i-1}}{m_i} \left(\log \left(\frac{m_{i-1}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) + \left(\frac{m_{i-1}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\left(\frac{m_{i-1}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2}. \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Samuti leiame valemist (3.7) lähtuvalt

$$\begin{aligned}
 S(x_{i-1} + 0) &= z_i + h_i m_{i-1} \frac{\log(1 + h_i d_i) - h_i d_i}{h_i^2 d_i^2} \\
 &= z_i - h_i m_{i-1} \frac{(1 + h_i d_i)^{-2} (\log(1 + h_i d_i)^{-1} - 1) + (1 + h_i d_i)^{-1}}{((1 + h_i d_i)^{-1} - 1)^2}
 \end{aligned}$$

$$= z_i - h_i m_{i-1} \frac{\frac{m_i}{m_{i-1}} \left(\log \left(\frac{m_i}{m_{i-1}} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) + \left(\frac{m_i}{m_{i-1}} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\left(\frac{m_i}{m_{i-1}} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2}. \quad (4.2)$$

Järgnevas võtame kasutusele funktsiooni

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x^2(\log x - 1) + x}{(x - 1)^2}, & \text{kui } x > 0, x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{kui } x = 1. \end{cases}$$

Kasutades funktsiooni φ , saame võrdused (4.1) ja (4.2) kirja panna vastavalt kujul

$$S(x_i - 0) = z_i + h_i m_i \varphi \left(\left(\frac{m_{i-1}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (4.3)$$

ja

$$S(x_{i-1} + 0) = z_i - h_i m_{i-1} \varphi \left(\left(\frac{m_i}{m_{i-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (4.4)$$

Ratsionaalsplaini S pidevuse tingimusest $S(x_i - 0) = S(x_i + 0)$, $i = 1, \dots, n - 1$, saame

$$m_i \left(h_i \varphi \left(\left(\frac{m_{i-1}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right) + h_{i+1} \varphi \left(\left(\frac{m_{i+1}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) = \delta_i, \quad (4.5)$$

kus $\delta_i = z_{i+1} - z_i$. Eeldusel, et $m_i > 0$, on ratsionaalsplain S rangelt kasvav ja järelikult peame eeldama, et $\delta_i > 0$.

Kui $d_i = 0$ ja $d_{i+1} = 0$, siis võrdustest

$$S(x_i - 0) = z_i + \frac{h_i}{2} m_i \quad (4.6)$$

ja

$$S(x_{i-1} + 0) = z_i - \frac{h_i}{2} m_i$$

saame

$$m_i (h_i + h_{i+1}) = 2\delta_i. \quad (4.7)$$

Kui $d_i = 0$ ja $d_{i+1} \neq 0$ (juht $d_i \neq 0$, $d_{i+1} = 0$ on analoogiline), siis võrdused (4.6) ja (4.4) koos annavad

$$m_i \left(\frac{h_i}{2} + h_{i+1} \varphi \left(\left(\frac{m_{i+1}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) = \delta_i. \quad (4.8)$$

Märgime, et valemid (4.7) ja (4.8) on erijuhud võrdusest (4.5). Tõepoolest, tingimus $d_i = 0$ on samaväärne sellega, et $m_{i-1} = m_i$, siinjuures on tarvilik meenutada, et $\varphi(1) = \frac{1}{2}$.

Rajatingimused (1.3) fikseerivad väärtused $m_0 = \alpha$ ja $m_n = \beta$. Rajatingimused (1.4) võib aga esitada, ilma, et nad sõltuksid väärtustest d_0 ja d_n , kujul

$$\begin{aligned} z_1 - h_1 m_0 \varphi \left(\left(\frac{m_1}{m_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right) &= \alpha, \\ z_n + h_n m_n \varphi \left(\left(\frac{m_{n-1}}{m_n} \right)^{\frac{1}{2}} \right) &= \beta. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Paneme tähele, et võrdusi (4.9) võib vaadelda, kui erijuhte võrdusest (4.5), kus $i = 0$, $i = n$ ja $h_0 = 0$, $z_0 = \alpha$, $h_{n+1} = 0$, $z_{n+1} = \beta$.

Kokkuvõttes, kui lõigud $[x_{i-1}, x_i]$ ja $[x_i, x_{i+1}]$ on ratsionaallõigud, siis splaini S pidevus punktis x_i , $i = 1, \dots, n-1$, annab meile võrduse

$$m_i = \varphi_i(m) = \frac{\delta_i}{h_i \varphi \left(\left(\frac{m_{i-1}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right) + h_{i+1} \varphi \left(\left(\frac{m_{i+1}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right)}. \quad (4.10)$$

Ruutlõigul $[x_{i-1}, x_i]$ saame võrdusest (3.9), et

$$S(x_i - 0) = z_i + \frac{h_i}{6} (m_{i-1} + 2m_i), \quad (4.11)$$

$$S(x_{i-1} + 0) = z_i + \frac{h_i}{6} (-2m_{i-1} - m_i). \quad (4.12)$$

Kui lõigud $[x_{i-1}, x_i]$ ja $[x_i, x_{i+1}]$ on ruutlõigud, siis splaini S pidevuseks punktis x_i , $i = 1, \dots, n-1$, peab samuti olema täidetud võrdus $S(x_i - 0) = S(x_i + 0)$. Sellest tingimusest saame

$$z_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{6}(-2m_i - m_{i+1}) = z_i + \frac{h_i}{6}(m_{i-1} + 2m_i)$$

ehk

$$\frac{h_i}{6}m_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}m_i + \frac{h_{i+1}}{6}m_{i+1} = \delta_i,$$

mille kirjutame kujul

$$m_i = \varphi_i(m) = \frac{6\delta_i - h_i m_{i-1} - h_{i+1} m_{i+1}}{2(h_i + h_{i+1})}. \quad (4.13)$$

Olgu lõik $[x_{i-1}, x_i]$ ratsionaallõik ja $[x_i, x_{i+1}]$ ruutlõik. Kasutades võrdusi (4.3) ja (4.12), saame splaini pidevuse nõudest

$$z_i + h_i m_i \varphi \left(\left(\frac{m_{i-1}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right) = z_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{6}(-2m_i - m_{i+1})$$

ehk

$$h_i m_i \varphi \left(\left(\frac{m_{i-1}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right) - \frac{h_{i+1}}{6}(-2m_i - m_{i+1}) = \delta_i,$$

selle võrrandi kirjutame kujul

$$m_i = \varphi_i(m) = \frac{\delta_i - \frac{h_{i+1}}{6}m_{i+1}}{h_i \varphi \left(\left(\frac{m_{i-1}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{h_{i+1}}{3}}. \quad (4.14)$$

Edaspidiste arutluste paremaks jälgimiseks vaatleme ka juhtu, kus lõik $[x_{i-1}, x_i]$ on ruutlõik ja $[x_i, x_{i+1}]$ ratsionaallõik. Kasutades võrdusi (4.11) ja (4.4), saame splaini S pidevuse nõudest punktis x_i , $i = 1, \dots, n-1$,

$$z_i + \frac{h_i}{6}(m_{i-1} + 2m_i) = z_{i+1} - h_{i+1} m_i \varphi \left(\left(\frac{m_{i+1}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

ehk

$$\frac{h_i}{6}(m_{i-1} + 2m_i) + h_{i+1}m_i\varphi\left(\left(\frac{m_{i+1}}{m_i}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \delta_i,$$

mille viime kujule

$$m_i = \varphi_i(m) = \frac{\delta_i - \frac{h_i}{6}m_{i-1}}{\frac{h_i}{3} + h_{i+1}\varphi\left(\left(\frac{m_{i+1}}{m_i}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}. \quad (4.15)$$

Splaini tegelikul leidmisel tuleb lahendada $n + 1$ (üldiselt mittelineaarsest) võrrandist koosnev süsteem, milles on $n + 1$ tundmatut m_0, \dots, m_n . Süsteemi moodustavad võrrandid on vastavalt osalõikude liigile (4.10), (4.13), (4.14) või (4.15), lisaks kaks võrrandit, mis saadakse rajatingimustest. Märgime, et nendes võrrandites on juba arvestatud histopolatsioonitingimuste (1.2) täidetust. Kui parameetrid m_0, \dots, m_n on leitud, on histopoleeriv splain määratud ratsionaallõigul esitusega (3.8) ja ruutlõigul esitusega (3.9).

5 Aprioorseid hinnangud

Siiani esitatu põhjal on võimalik leida histopolatsiooniülesande lahendiks olevat splaini, kui on teada, millised osalõigud valida ratsionaal-, millised ruutlõikudeks. Selle valiku võimalusi käsitleme hiljem, esialgu jätkame eeltööd lahendi olemasolu uurimiseks.

Järgnevas anname mõningaid aprioorseid hinnanguid kinnistel osalõikudel funktsioonidele φ_i , mis on defineeritud võrdustega (4.10), (4.13), (4.14) ja (4.15). Neid hinnanguid kasutame hiljem histopolatsiooniülesande lahendi olemasolu tõestamisel.

Lemma 2. Funktsioonil φ on järgmised põhilised omadused:

- 1) $\varphi(x) > 0$, $\varphi'(x) > 0$, kui $x > 0$,
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi'(x) = \frac{1}{3}$,
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\varphi(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{\log x} = 1$,
- 4) $\frac{1}{2} < \frac{\varphi(x)}{x} < 1$, kui $0 < x < 1$,
- 5) $\varphi\left(\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \leq \log \frac{R}{r}$, kui $\frac{R}{r} \geq 1.84$.

Tõestus. 1) Eeldame, et $x > 0$ ja vaatleme avaldist $\frac{x^2(\log x - 1) + x}{(x - 1)^2}$. Siin on lugeja piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (x^2(\log x - 1) + x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log x - 1}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-x^2}{2} = 0.$$

Seepärast $\lim_{x \rightarrow 0+} \varphi(x) = 0$.

Järgmiseks leiame $x > 0$, $x \neq 1$ korral

$$\varphi'(x) = \frac{(2x(\log x - 1) + x^2 \cdot \frac{1}{x} + 1)(x - 1)^2}{(x - 1)^4} - \frac{(x^2(\log x - 1) + x) \cdot 2(x - 1)}{(x - 1)^4}$$

$$= \frac{x^2 - 2x \log x - 1}{(x-1)^3}.$$

Kui $x > 1$, siis nimetaja $(x-1)^3 > 0$. Olgu $f(x) = x^2 - 2x \log x - 1$. On selge, et $f(1) = 0$. Nüüd $f'(x) = 2x - 2 \log x - 2 = 2(x - \log x - 1)$. Näeme, et $f'(1) = 0$. Lisaks $f''(x) = 2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) > 0$, kui $x > 1$, seega $f'(x) > 0$, kui $x > 1$, mis annab ka, et $f(x) > 0$, kui $x > 1$. Niisiis, $\varphi'(x) > 0$, kui $x > 1$.
Leiname

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 - 2x \log x - 1}{(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{2}{x^2}}{6} = \frac{1}{3} > 0.$$

Vaatleme nüüd piirkonda $0 < x < 1$ ja uurime $\varphi'(x)$ märki. Siis nimetaja $(x-1)^3 < 0$. Funktsiooni $f(x) = x^2 - 2x \log x - 1$ korral $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -1$ ja $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \infty$. Peale selle $f''(x) = 2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) < 0$, kui $0 < x < 1$, s.t. $f'(x)$ on rangelt kahanev vahemikus $(0, 1)$. Võrduse $f'(1) = 0$ tõttu tähendab see, et $f'(x) > 0$ vahemikus $(0, 1)$. See omakorda annab, et $f(x)$ on rangelt kasvav vahemikus $(0, 1)$. Järelikult $f(x) < 0$, kui $0 < x < 1$. Niisiis, alati $\varphi'(x) > 0$, kui $0 < x < 1$. Lisaks saame võrduse $\lim_{x \rightarrow 1-} \varphi(x) = \frac{1}{3}$. Kokkuvõttes oleme tõestanud, et $\varphi'(x) > 0$, kui $x > 0$, mis tähendab, et φ on rangelt kasvav $x > 0$ korral. Arvestades veel eespool saadud omadust $\lim_{x \rightarrow 0+} \varphi(x) = 0$, oleme näidanud, et $\varphi(x) > 0$, kui $x > 0$.

2) Vaatame piirväärtusi $\lim_{x \rightarrow 1+} \varphi(x)$ või $\lim_{x \rightarrow 1-} \varphi(x)$. Saame

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x(\log x - 1) + x^2 \cdot \frac{1}{x} + 1}{2(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x \log x - x + 1}{2(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2 \log x + 2x \cdot \frac{1}{x} - 1}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2 \log x + 1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Samuti leiame, et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \frac{1}{2}.$$

Arvestades veel, et $\varphi(1) = \frac{1}{2}$, oleme tõestanud võrduse

$$\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = \frac{1}{2}.$$

Selle omaduse teine väide on juba tõestatud omaduse 1) tõestuses.

3) Arvutades leiame

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(\log x - 1) + 1}{(x - 1)^2} = 1,$$

sest $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$. Võime kirjutada

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{\log x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(\log x - 1)}{(x - 1)^2 \log x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(x - 1)^2 \log x},$$

eeldusel, et kaks viimast piirväärtust eksisteerivad. Siin $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(x - 1)^2 \log x} = 0$.

Seega

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{\log x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x - 1)^2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x - 1}{\log x},$$

kus paremas pooles mõlemad piirväärtused võrduvad nulliga. Oleme saanud

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{\log x} = 1.$$

4) Tähistame $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{x(\log x - 1) + 1}{(x - 1)^2}$. Siis

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{\left((\log x - 1) + x \cdot \frac{1}{x} \right) (x - 1)^2 - (x(\log x - 1) + 1) \cdot 2(x - 1)}{(x - 1)^4} \\ &= \frac{-(x + 1) \log x + 2(x - 1)}{(x - 1)^3}. \end{aligned}$$

Uurime $\psi'(x)$ märki $x \in (0, 1)$ korral.

Kasutame viimase murru lugeja jaoks tähistust $\chi(x) = -(x+1)\log x + 2(x-1)$. Siis $\lim_{x \rightarrow 0^+} \chi(x) = \infty$. On selge, et $\chi(1) = 0$. Peale selle saame

$\chi''(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x+1}{x^2} > 0$, kui $0 < x < 1$. Seega χ' kasvab piirkonnas $0 < x < 1$. Arvestades veel võrdust $\chi'(1) = 0$, kehtib $\chi'(x) < 0$, kui $0 < x < 1$, mis tähendab, et χ kahaneb vahemikus $0 < x < 1$. Võttes nüüd arvesse võrduse $\chi(1) = 0$, saame, et $\chi(x) > 0$, kui $0 < x < 1$. Sellega oleme näidanud, et $\psi'(x) = \frac{\chi(x)}{(x-1)^3} < 0$, kui $0 < x < 1$. Niisiis, funktsioon $\frac{\varphi(x)}{x}$ on

kahenev vahemikus $0 < x < 1$. Omadustes 3) ja 2) võrdused $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x)}{x} = 1$ ja $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{1}{2}$ lubavad nüüd väita omaduse 4) kehtivust.

5) Omadusest 3) järeldub, et kui x on küllalt suur, siis $\frac{\varphi(x)}{\log x} \leq 2$ ehk $\varphi(x) \leq 2 \log x$. Leiame võrrandi $\varphi(x) = 2 \log x$ suurima lahendi x^* . Märgime, et $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ ja $\log 1 = 0$ tõttu $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\varphi(x)}{\log x} = \infty$, seepärast x^* eksisteerib. Kui $x \geq x^*$, siis $\frac{\varphi(x)}{\log x} \leq 2$. Tegelikult $x^* < \sqrt{1.84}$, seepärast, kui $x \geq \sqrt{1.84}$, siis $x \geq x^*$ ja $\frac{\varphi(x)}{\log x} \leq 2$.

Sellega on lemma tõestatud. \square

Lemma 3. Olgu $[x_{i-1}, x_i]$ ja $[x_i, x_{i+1}]$ ratsionaallõigud, kus $\delta_i > 0$. Eeldame, et $K_j = [r_j, R]$, $r_j > 0$, $j = i-1, i, i+1$. Kui $m_j \in K_j$, $j = i-1, i, i+1$, siis $\varphi_i(m) \in K_i$ eeldusel, et on rahuldatud võrratused

$$2\delta_i \leq (h_i r_{i-1}^{\frac{1}{2}} + h_{i+1} r_{i+1}^{\frac{1}{2}}) R^{\frac{1}{2}}$$

ja

$$\frac{\delta_i}{h_i + h_{i+1}} \geq r_i \log \frac{R}{r_i}.$$

Tõestus. Olgu $[x_{i-1}, x_i]$ ja $[x_i, x_{i+1}]$ ratsionaallõigud, kus $\delta_i > 0$. Siis

$$\varphi_i(m) = \frac{\delta_i}{h_i \varphi\left(\left(\frac{m_{i-1}}{m_i}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + h_{i+1} \varphi\left(\left(\frac{m_{i+1}}{m_i}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}.$$

Eeldame, et $K_j = [r_j, R]$, $r_j > 0$, ja $m_j \in K_j$, $j = i-1, i, i+1$.

Funktsiooni φ_i väärtuse $\varphi_i(m)$ ülevalt hindamine annab

$$\begin{aligned} \varphi_i(m) &= \frac{\delta_i}{h_i \varphi\left(\left(\frac{m_{i-1}}{m_i}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + h_{i+1} \varphi\left(\left(\frac{m_{i+1}}{m_i}\right)^{\frac{1}{2}}\right)} \\ &\leq \frac{\delta_i}{h_i \varphi\left(\left(\frac{r_{i-1}}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + h_{i+1} \varphi\left(\left(\frac{r_{i+1}}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}. \end{aligned}$$

Kasutades lemmas 2 toodud funktsiooni φ omadust 4), saame, et

$$\varphi\left(\left(\frac{r_{i-1}}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\right) > \frac{1}{2} \left(\frac{r_{i-1}}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ja

$$\varphi\left(\left(\frac{r_{i+1}}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\right) > \frac{1}{2} \left(\frac{r_{i+1}}{R}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Edasi hinnates jõuame võrratuseni

$$\varphi_i(m) \leq \frac{2\delta_i}{h_i \left(\frac{r_{i-1}}{R}\right)^{\frac{1}{2}} + h_{i+1} \left(\frac{r_{i+1}}{R}\right)^{\frac{1}{2}}} \leq R,$$

kui

$$2\delta_i \leq \left(h_i r_{i-1}^{\frac{1}{2}} + h_{i+1} r_{i+1}^{\frac{1}{2}}\right) R^{\frac{1}{2}}.$$

Väärtuse $\varphi_i(m)$ alt hindamine viib tulemuseni

$$\begin{aligned} \varphi_i(m) &= \frac{\delta_i}{h_i \varphi\left(\left(\frac{m_{i-1}}{m_i}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + h_{i+1} \varphi\left(\left(\frac{m_{i+1}}{m_i}\right)^{\frac{1}{2}}\right)} \\ &\geq \frac{\delta_i}{h_i \varphi\left(\left(\frac{R}{r_i}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + h_{i+1} \varphi\left(\left(\frac{R}{r_i}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}. \end{aligned}$$

Lemma 2 väitest 5) järel dub $\varphi\left(\left(\frac{R}{r_i}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \leq \log \frac{R}{r_i}$, kui $\frac{R}{r_i} \geq 1.84$. Edasi hinnates tekib võrratus

$$\varphi_i(m) \geq \frac{\delta_i}{(h_i + h_{i+1}) \log \frac{R}{r_i}} \geq r_i,$$

kui

$$\frac{\delta_i}{h_i + h_{i+1}} \geq r_i \log \frac{R}{r_i}.$$

Sellega on lemma tõestatud. \square

Lemma 4. Olgu $[x_{i-1}, x_i]$ ja $[x_i, x_{i+1}]$ ruutlõigud, kus $\delta_i \geq 0$. Eeldame, et $K_{i-1} = [-R, -\varepsilon_{i-1}]$, $K_i = [\varepsilon_i, R]$, $K_{i+1} = [-R, -\varepsilon_{i+1}]$ ja $\varepsilon_j \geq 0$, $j = i-1, i, i+1$. Kui $m_j \in K_j$, $j = i-1, i, i+1$, siis $\varphi_i(m) \in K_i$ eeldustel

$$6\delta_i \leq (h_i + h_{i+1})R$$

ja

$$6\delta_i + h_i\varepsilon_{i-1} + h_{i+1}\varepsilon_{i+1} \geq 2(h_i + h_{i+1})\varepsilon_i, \quad (5.1)$$

seejuures erijuhuna peame silmas (5.1) rahuldatust kujul

$$\varepsilon_{i+1} = 2\left(1 + \frac{h_i}{h_{i+1}}\right)\varepsilon_i - \frac{h_i}{h_{i+1}}\varepsilon_{i-1},$$

kui $\delta_i = 0$.

Tõestus. Olgu $[x_{i-1}, x_i]$ ja $[x_i, x_{i+1}]$ ruutlõigud, kus $\delta_i \geq 0$. Siis

$$\varphi_i(m) = \frac{6\delta_i - h_im_{i-1} - h_{i+1}m_{i+1}}{2(h_i + h_{i+1})}.$$

Eeldame, et $K_{i-1} = [-R, -\varepsilon_{i-1}]$, $K_i = [\varepsilon_i, R]$, $K_{i+1} = [-R, -\varepsilon_{i+1}]$ ning $\varepsilon_j > 0$ ja $m_j \in K_j$, $j = i-1, i, i+1$.

Kõigepealt hindame funktsiooni φ väärtust $\varphi_i(m)$ ülevalt. Saame

$$\begin{aligned} \varphi_i(m) &= \frac{6\delta_i - h_im_{i-1} - h_{i+1}m_{i+1}}{2(h_i + h_{i+1})} \\ &\leq \frac{6\delta_i + R(h_i + h_{i+1})}{2(h_i + h_{i+1})} \leq R, \end{aligned}$$

kui

$$6\delta_i + R(h_i + h_{i+1}) \leq 2R(h_i + h_{i+1})$$

ehk

$$6\delta_i \leq R(h_i + h_{i+1}).$$

Hinnates väärtust $\varphi_i(m)$ alt, saame

$$\begin{aligned}\varphi_i(m) &= \frac{6\delta_i - h_i m_{i-1} - h_{i+1} m_{i+1}}{2(h_i + h_{i+1})} \\ &\geq \frac{6\delta_i + h_i \varepsilon_{i-1} + h_{i+1} \varepsilon_{i+1}}{2(h_i + h_{i+1})} \geq \varepsilon_i,\end{aligned}$$

kui

$$6\delta_i + h_i \varepsilon_{i-1} + h_{i+1} \varepsilon_{i+1} \geq 2(h_i + h_{i+1})\varepsilon_i.$$

Kui $\delta_i = 0$, siis võrdus

$$h_i \varepsilon_{i-1} + h_{i+1} \varepsilon_{i+1} = 2(h_i + h_{i+1})\varepsilon_i$$

ehk

$$\varepsilon_{i+1} = 2 \left(1 + \frac{h_i}{h_{i+1}} \right) \varepsilon_i - \frac{h_i}{h_{i+1}} \varepsilon_{i-1}$$

tagab võrratuse (5.1) täidetuse. Sellega on lemma tõestatud. \square

Lemma 5. Olgu $[x_{i-1}, x_i]$ ratsionaallõik ja $[x_i, x_{i+1}]$ ruutlõik, kus $\delta_i \geq 0$. Eeldame, et $K_{i-1} = [\varepsilon_{i-1}, R]$, $K_i = [\varepsilon_i, R]$, $K_{i+1} = [-R, -\varepsilon_{i+1}]$, seejuures $\varepsilon_{i-1} > 0$, $\varepsilon_i > 0$ ja $\varepsilon_{i+1} \geq 0$. Kui $m_j \in K_j$, $j = i-1, i, i+1$, siis $\varphi_i(m) \in K_i$ eeldustel

$$\delta_i \leq \frac{h_i}{2}(\varepsilon_{i-1}R)^{\frac{1}{2}} + \frac{h_{i+1}}{6}R$$

ja

$$\delta_i + \frac{h_{i+1}}{6}\varepsilon_{i+1} \geq h_i \varepsilon_i \log \frac{R}{\varepsilon_i} + \frac{h_{i+1}}{3}\varepsilon_i.$$

Sümmeetrilisel juhul, s.t. kui $[x_{i-1}, x_i]$ on ruutlõik ja $[x_i, x_{i+1}]$ ratsionaallõik, kus $\delta_i \geq 0$, võtame $K_{i-1} = [-R, \varepsilon_{i-1}]$, $K_i = [\varepsilon_i, R]$, $K_{i+1} = [\varepsilon_{i+1}, R]$, seejuures $\varepsilon_{i-1} \geq 0$, $\varepsilon_i > 0$ ja $\varepsilon_{i+1} > 0$ ning eeldame, et

$$\delta_i \leq \frac{h_i}{6}R + \frac{h_{i+1}}{2}(\varepsilon_{i+1}R)^{\frac{1}{2}}$$

ja

$$\delta_i + \frac{h_i}{6} \varepsilon_{i-1} \geq \frac{h_i}{3} \varepsilon_i + h_{i+1} \varepsilon_i \log \frac{R}{\varepsilon_i}.$$

Tõestus. Olgu $[x_{i-1}, x_i]$ ratsionaallõik ja $[x_i, x_{i+1}]$ ruutlõik, kus $\delta_i \geq 0$. Siis

$$\varphi_i(m) = \frac{\delta_i - \frac{h_{i+1}}{6} m_{i+1}}{h_i \varphi \left(\left(\frac{m_{i-1}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{h_{i+1}}{3}}.$$

Eeldame, et $K_{i-1} = [\varepsilon_{i-1}, R]$, $K_i = [\varepsilon_i, R]$, $K_{i+1} = [-R, -\varepsilon_{i+1}]$, kus $\varepsilon_{i-1} > 0$, $\varepsilon_i > 0$ ja $\varepsilon_{i+1} \geq 0$ ning $m_j \in K_j$, $j = i-1, i, i+1$.

Alustame jälle funktsiooni φ_i väärtuse $\varphi_i(m)$ hinnanguga ülevalt. Saame

$$\varphi_i(m) = \frac{\delta_i - \frac{h_{i+1}}{6} m_{i+1}}{h_i \varphi \left(\left(\frac{m_{i-1}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{h_{i+1}}{3}} \leq \frac{\delta_i + \frac{h_{i+1}}{6} R}{h_i \varphi \left(\left(\frac{\varepsilon_{i-1}}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{h_{i+1}}{3}}.$$

Kasutades lemma 2 väidet 4), saame $\varphi \left(\left(\frac{\varepsilon_{i-1}}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \right) > \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_{i-1}}{R} \right)^{\frac{1}{2}}$. Edasi hinnates saame

$$\varphi_i(m) \leq \frac{\delta_i + \frac{h_{i+1}}{6} R}{\frac{h_i}{2} \left(\frac{\varepsilon_{i-1}}{R} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{h_{i+1}}{3}} \leq R,$$

kui

$$\delta_i + \frac{h_{i+1}}{6} R \leq \frac{h_i}{2} \left(\frac{\varepsilon_{i-1}}{R} \right)^{\frac{1}{2}} R + \frac{h_{i+1}}{3} R$$

ehk

$$\delta_i \leq \frac{h_i}{2} (\varepsilon_{i-1} R)^{\frac{1}{2}} + \frac{h_{i+1}}{6} R.$$

Lõpuks hindame väärtust $\varphi_i(m)$ alt. Saame

$$\varphi_i(m) = \frac{\delta_i - \frac{h_{i+1}}{6} m_{i+1}}{h_i \varphi \left(\left(\frac{m_{i-1}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{h_{i+1}}{3}} \geq \frac{\delta_i + \frac{h_{i+1}}{6} \varepsilon_{i+1}}{h_i \varphi \left(\left(\frac{R}{\varepsilon_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{h_{i+1}}{3}}.$$

Kasutades lemma 2 väidet 5), saame $\varphi\left(\left(\frac{R}{\varepsilon_i}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \leq \log \frac{R}{\varepsilon_i}$, kui $\frac{R}{\varepsilon_i} \geq 1.84$.

Funktsiooni $\varphi_i(m)$ edasi hinnates saame

$$\varphi_i(m) \geq \frac{\delta_i + \frac{h_{i+1}}{6}\varepsilon_{i+1}}{h_i \log \frac{R}{\varepsilon_i} + \frac{h_{i+1}}{3}} \geq \varepsilon_i,$$

kui

$$\delta_i + \frac{h_{i+1}}{6}\varepsilon_{i+1} \geq h_i \varepsilon_i \log \frac{R}{\varepsilon_i} + \frac{h_{i+1}}{3}\varepsilon_i.$$

Sümmeetrilisel juhul on hinnangute tõestus sisuliselt samasugune.

Sellega on lemma tõestatud. \square

Märgime, et vastupidise märgiga arvude δ_i korral kehtivad loomulikud lemmade 3–5 modifikatsioonid.

6 Kaasmonotoonne strateegia

Selles punktis tõestame histopolatsiooniülesande lahendi olemasolu eeldusel, et lähteandmetel on nn. nõrga alterneerimise omadus. Ühtlasi järeldub sellest tulemusest lahendi olemasolu erijuhul, kui lähtehistogramm on kas rangelt kasvav või rangelt kahanev.

Tähistame

$$\delta_i = z_{i+1} - z_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\delta_0 = \alpha, \quad \delta_n = \beta \quad (\text{rajatingimuste (1.3) korral}),$$

$$\delta_0 = z_1 - \alpha, \quad \delta_n = \beta - z_n \quad (\text{rajatingimuste (1.4) korral}).$$

Kaasmonotoonseks strateegiaks nimetame sellist lõikude liigi valikut, kus lõik $[x_{i-1}, x_i]$ on ratsionaallõik, kui $\delta_{i-1}\delta_i > 0$ ja ruutlõik teistel juhtudel.

Õeldakse, et ruutlõikude sektsioonil, s.t. maksimaalsel ruutlõikude ühendil, leiab aset andmete nõrk alterneerimine, kui lõik $[x_{i-1}, x_i]$ on ratsionaallõik, lõigud $[x_i, x_{i+1}], \dots, [x_{i+k-1}, x_{i+k}]$ on ruutlõigud ja $[x_{i+k}, x_{i+k+1}]$ ratsionaallõik, nii et

$$\delta_i > 0, \delta_{i+1} \leq 0, \delta_{i+2} \geq 0, \dots, (-1)^k \delta_{i+k-1} \leq 0, (-1)^k \delta_{i+k} > 0$$

või

$$\delta_i < 0, \delta_{i+1} \geq 0, \delta_{i+2} \leq 0, \dots, (-1)^k \delta_{i+k-1} \geq 0, (-1)^k \delta_{i+k} < 0.$$

Teoreem 6. Kui osalõikude liigid valida kaasmonotoonse strateegia kohaselt ja kui ruutlõikude sektsioonil leiab aset andmete nõrk alterneerimine, siis histopolatsiooniülesandel on olemas lahend ning see on rangelt monotoonne ratsionaallõikudel.

Tõestus. Tõestuse põhiidee on järgmine. Vaatleme kõigile sõlmedele vastavaid võrduseid kujul (4.10), (4.13) – (4.15) koos kahe lisatingimusega rajatingimustest, mis on viidud kujule $m_i = \varphi_i(m)$. Leiame kinnised lõigud K_i , selliselt, et $\varphi_i : K \rightarrow K_i$ ja funktsioonid φ_i on pidevad, kus

$K = \prod_{i=0}^n K_i \subset \mathbb{R}^{n+1}$. On selge, et K on kompaktne ja kumer. Siis Bohl–Brouweri püsipunkti printsiibi kohaselt eksisteerib süsteemil $m_i = \varphi_i(m)$, $i = 0, \dots, n$, lahend.

Iga ratsionaallõigu $[x_{i-1}, x_i]$ jaoks, juhul kui $\delta_{i-1} > 0$, $\delta_i > 0$ valime $K_{i-1} = K_i = [r, R]$ ja juhul $\delta_{i-1} < 0$, $\delta_i < 0$ olgu $K_{i-1} = K_i = [-R, -r]$, kus $0 < r < R$. Eeldame, et ratsionaallõikude $[x_{i-1}, x_i]$ ja $[x_{i+k}, x_{i+k+1}]$ vahel on ruutlõigud $[x_i, x_{i+1}], \dots, [x_{i+k-1}, x_{i+k}]$, millel on andmete nõrk alterneerimine. Kui $K_i = [r, R]$, siis valime $K_{i+1} = [-R, 0]$, $K_{i+2} = [0, R], \dots$. Kui aga $K_i = [-R, -r]$, siis võtame $K_{i+1} = [0, R]$, $K_{i+2} = [-R, 0], \dots$. Valime $m \in K$ ehk $m_i \in K_i$, $i = 0, \dots, n$. Edasi analüüsime kolme põhilist juhtu.

Vaatleme kõigepealt olukorda, kus $[x_{i-1}, x_i]$ ja $[x_i, x_{i+1}]$ on ratsionaallõigud ja $\delta_i > 0$. Lemma 3 põhjal, kus $r_j = r$, $j = i - 1, i, i + 1$, saame $\varphi_i(m) \in K_i$, kui

$$2\delta_i \leq (h_i + h_{i+1})(rR)^{\frac{1}{2}} \quad (6.1)$$

ja

$$\frac{\delta_i}{h_i + h_{i+1}} \geq r \log \frac{R}{r}. \quad (6.2)$$

Teiseks, olgu lõigud $[x_{j-1}, x_j]$ ja $[x_j, x_{j+1}]$ ruutlõigud. Kui näiteks $\delta_j \geq 0$, siis $K_j = [0, R]$ ja $K_{j-1} \subset [-R, 0]$, $K_{j+1} \subset [-R, 0]$. Lemmast 4 jäeldub, et $\varphi_j(m) \in K_j$, kui

$$6\delta_j \leq (h_j + h_{j+1})R. \quad (6.3)$$

Kolmandaks, olgu näiteks $[x_{i-1}, x_i]$ ratsionaallõik ja $[x_i, x_{i+1}]$ ruutlõik. Olgu $K_{i-1} = K_i = [r, R]$ ja seepärast $\delta_i > 0$. Siis $K_{i+1} = [-R, 0]$ või $K_{i+1} = [-R, -r]$ (seda juhul, kui $[x_{i+1}, x_{i+2}]$ on ratsionaallõik). Lemma 5 põhjal $\varphi_i(m) \in K_i$, kui

$$\delta_i \leq \frac{h_{i+1}}{6}R \quad (6.4)$$

ja

$$\delta_i \geq h_i r \log \frac{R}{r} + \frac{h_{i+1}}{3}r. \quad (6.5)$$

Valime kõigepealt arvu R nii, et tingimused (6.3) ja (6.4) oleksid täidetud. Paneme tähele, R suurendamine ei riku nende tingimuste täidetust. Siis,

vajadusel vähendades r väärtust ja suurendades R väärtust, saame rahuldada nii tingimusi (6.1), (6.2), kui ka nende analooge teiste kõrvuti asetsevate ratsionaallõikude paaride jaoks ja kõiki võrratusi (6.5).

Seega oleme tõestanud histopoleeriva splaini olemasolu. Lisaks näitas tõestus, et ratsionaallõikude rajapunktides ei ole splaini esimene tuletis null, millega oleme tõestanud ka teoreemi viimase väite. Sellega on teoreem tõestatud. \square

Märkus 7. Kui kõik $\delta_i \neq 0$, $i = 0, \dots, n$, siis leiab aset andmete nõrk alterneerimine ruutlõikude sektsioonil.

Järeldus 8. Kui lähteandmed on rangelt monotoonsed, s.t. kas $\delta_i > 0$, $i = 0, \dots, n$, või $\delta_i < 0$, $i = 0, \dots, n$, siis histopolatsiooniülesandel on olemas lahend, mis on lineaar/lineaar ruutsplain.

7 Modifitseeritud kaasmonotoonne strateegia

Vaatleme lõpuks juhtu, kus mingil ruutlõikude sektsioonil puudub andmete nõrk alterneerimine. Selleks on vajalik, et leiduks vähemalt üks sisesõlm, kus $\delta_i = 0$, s.t. et histogrammi kaks naabertulpa on võrdse kõrgusega.

Erijuht 1. Vaatleme histogrammi, kus $\delta_{i-2} > 0$, $\delta_{i-1} > 0$, $\delta_i = 0$, $\delta_{i+1} < 0$, $\delta_{i+2} < 0$. Valime lõigud $[x_{i-2}, x_{i-1}]$ ja $[x_{i+1}, x_{i+2}]$ ratsionaallõikudeks. Analüüsime kõigepealt kaasmonotoonset strateegiat sisemiste lõikude valikul.

Näide. Kaasmonotoonse strateegia kohaselt olgu lõigud $[x_{i-1}, x_i]$ ja $[x_i, x_{i+1}]$ ruutlõigud. Kirjutame võrdused (4.14), (4.13) ja (4.15) sõlmede x_{i-1} , x_i ja x_{i+1} jaoks kujul

$$\frac{h_i}{6}(2m_{i-1} + m_i) + h_{i-1}m_{i-1}\varphi\left(\left(\frac{m_{i-2}}{m_{i-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \delta_{i-1}, \quad (7.1)$$

$$h_im_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})m_i + h_{i+1}m_{i+1} = 0, \quad (7.2)$$

$$\frac{h_{i+1}}{6}(m_i + 2m_{i+1}) + h_{i+2}m_{i+1}\varphi\left(\left(\frac{m_{i+2}}{m_{i+1}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \delta_{i+1}. \quad (7.3)$$

Säilitades üldise tähistuse, vaatleme punkte x_{i-2} ja x_{i+2} kui rajasõlmi ning olgu seejuures fikseeritud $m_{i-2} = S'(x_{i-2}) > 0$ ja $m_{i+2} = S'(x_{i+2}) < 0$.

Fikseerime samuti h_j , $j = i - 1, \dots, i + 2$, ja δ_{i+1} . Oletame, et $\delta_{i-1} \rightarrow \infty$. Süsteemi (7.1) – (7.3) lahendi korral $m_{i-1} > 0$ ja $m_{i+1} < 0$. Esiteks annab (7.1), et $m_{i-1} \rightarrow \infty$ või $m_i \rightarrow \infty$. Tingimus $m_i \rightarrow \infty$ ja võrdus (7.3) annavad, et $m_{i+1} \rightarrow -\infty$. Võttes arvesse koondumist $\frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow 1$, kui $x \rightarrow 0_+$, saame uuesti võrdusest (7.3), et $\frac{m_i}{m_{i+1}} \rightarrow -2$, ja järelikult $m_{i+1} = -\frac{m_i}{2} + o(m_i)$.

Kuna nüüd ühelt poolt võrdus (7.2) omandab kuju

$$h_im_{i-1} + (2h_i + \frac{3}{2}h_{i+1})m_i + o(m_i) = 0,$$

teiselt poolt aga peab $m_{i-1} > 0$ ja $m_i \rightarrow \infty$, siis oleme konstrueerinud vastuolu. Juht $m_i \rightarrow -\infty$ ei sobi, kui kehtib võrdus (7.3) ja $m_{i+1} < 0$. Kui

m_i jääb tõkestatuks, siis võrdus (7.3) annab m_{i+1} tõkestatuse, aga see, koos tingimusega $m_{i-1} \rightarrow \infty$ on vastuolus võrdusega (7.2).

Nagu selgus näitest võib üldiselt juhtuda, et kaasmonotoonne strateegia ei taga histopoleeriva splaini olemasolu. Detailsem analüüs näitab, et mõningatel juhtudel viib kaasmonotoonne strateegia lahendini ka siis, kui mingil ruutlõikude sektsioonil ei ole andmete nõrka alterneerimist.

Näide sunnib igasuguste lähteandmete korral lahendi olemasolu saamiseks loobuma kaasmonotoonses strateegiast. Jäädes erijuhu 1 raamidesse, valime ikka lõigud $[x_{i-2}, x_{i-1}]$ ja $[x_{i+1}, x_{i+2}]$ ratsionaallõikudeks. Lisaks valime ka lõigu $[x_{i-1}, x_i]$ ratsionaallõiguks. Siis lõik $[x_i, x_{i+1}]$ peab olema ruutlõik. Olgu $K_{i-2} = K_{i-1} = [r, R]$, $K_{i+1} = K_{i+2} = [-R, -r]$ ja $K_i = [\varepsilon, R]$, kus $\varepsilon > 0$. Eeldame, et $m_j \in K_j$ iga j korral. Lemma 3 põhjal saame, et $\varphi_{i-1}(m) \in K_{i-1}$, kui

$$2\delta_{i-1} \leq h_{i-1}(rR)^{\frac{1}{2}} \quad (7.4)$$

ja

$$\frac{\delta_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} \geq \log \frac{R}{r}. \quad (7.5)$$

Lemmast 5, kus $\delta_i = 0$, saame $\varphi_i(m) \in K_i$, kui

$$\frac{h_{i+1}}{6}r \geq h_i\varepsilon \log \frac{R}{\varepsilon} + \frac{h_{i+1}}{3}\varepsilon. \quad (7.6)$$

Lõpuks lemma 5 sümmeetrilise osa põhjal saame $\varphi_{i+1}(m) \in K_{i+1}$, kui

$$|\delta_{i+1}| \leq \frac{h_{i+1}}{6}R + \frac{h_{i+2}}{2}(rR)^{\frac{1}{2}} \quad (7.7)$$

ja

$$|\delta_{i+1}| \geq \frac{h_{i+1}}{3}r + h_{i+2}r \log \frac{R}{r}. \quad (7.8)$$

Kokkuvõttes valime kõigepealt arvud r ja R selliselt, et nad andmete nõrga alterneerimise piirkonnas rahuldaksid tingimusi, mis on kirjeldatud teoreemi 6 tõestuses. Seejärel vähendades vajadusel r väärtust ja suurendades R väärtust, saame rahuldada võrratused (7.4), (7.5), (7.7) ja (7.8). Lõpuks valime arvu ε nii, et kehtib võrratus (7.6). Siis Bohl-Brouweri püsipunkti printsiibi põhjal on histopolatsiooniülesandel lahend olemas.

Viimase aruteluga kirjeldasime erijuhu 1 jaoks modifitseeritud kaasmonotoonset strateegiat ja näitasime, et selle korral on lahendi olemasolu tõestatav.

Erijuht 2. Oletame jälle, et histogrammil ei leidu andmete nõrka alterneerimist mingil ruutlõikude seksioonil. Vaatleme juhtu, kus $\delta_{i-2} > 0$, $\delta_{i-1} > 0$, $\delta_i = 0, \dots, \delta_{i+k} = 0$, $(-1)^k \delta_{i+k+1} < 0$, $(-1)^k \delta_{i+k+2} < 0$. Erijuht 1 kajastab sama juhtu, kui $k = 0$. Erijuhust 1 teame, et kaasmonotoonse strateegia korral ei pruugi leiduda histopoleerivat splaini. Oletame nüüd, et $k \geq 1$. Näites toodud põhjendused lahendi mitteolemasolu kohta kehtivad ka $k \geq 1$ korral. Näiteks valides $\delta_{i-1} \rightarrow 0$ ja jättes teised parameetrid fikseerituks, saame lahendi olemasolu eeldusel vastuolu.

Kirjeldame järgnevas modifitseeritud kaasmonotoonset strateegiat osalõikude liigi valikul. Lõigud $[x_{i-2}, x_{i-1}]$ ja $[x_{i+k+1}, x_{i+k+2}]$ valitakse igal juhul ratsionaallõikudeks. Analoogiliselt erijuhus 1 tehtule, valime lõigu $[x_{i-1}, x_i]$ ratsionaallõiguks ja lõigud $[x_i, x_{i+1}], \dots, [x_{i+k}, x_{i+k+1}]$ ruutlõikudeks. Tõestame, et siis on lahendi olemasolu garanteeritud.

Olgu $K_{i-2} = K_{i-1} = [r, R]$, $K_j = [\varepsilon_j, R]$, $j = i, i+2, \dots$, $K_j = [-R, -\varepsilon_j]$, $j = i+1, i+3, \dots$, $K_{i+k+1} = K_{i+k+2} = [r, R]$, kui k on paaritu ja $K_{i+k+1} = K_{i+k+2} = [-R, -r]$, kui k on paaris. Näitame, et teatud tingimustel kehtib $\varphi_j(m) \in K_j$, $j = i-1, \dots, i+k+1$, kui $m_j \in K_j$ iga j korral. Kui kehtivad tingimused (7.4) ja (7.5), saame, et $\varphi_{i-1}(m) \in K_{i-1}$. Kui

$$\frac{h_{i+1}}{6} \varepsilon_{i+1} = h_i \varepsilon_i \log \frac{R}{\varepsilon_i} + \frac{h_{i+1}}{3} \varepsilon_i, \quad (7.9)$$

siis $\varphi_i(m) \in K_i$. Lemma 4 põhjal, $\varphi_j(m) \in K_j$, $j = i+1, \dots, i+k-1$, kui

$$\varepsilon_{j+1} = 2 \left(1 + \frac{h_j}{h_{j+1}} \right) \varepsilon_j - \frac{h_j}{h_{j+1}} \varepsilon_{j-1}, \quad (7.10)$$

ja $\varphi_{i+k}(m) \in K_{i+k}$, kui

$$r \geq 2 \left(1 + \frac{h_{i+k}}{h_{i+k+1}} \right) \varepsilon_{i+k} - \frac{h_{i+k}}{h_{i+k+1}} \varepsilon_{i+k-1}. \quad (7.11)$$

Lemma 5 annab meile, et $\varphi_{i+k+1}(m) \in K_{i+k+1}$, kui

$$|\delta_{i+k+1}| \leq \frac{h_{i+k+1}}{6} R + \frac{h_{i+k+2}}{2} (rR)^{\frac{1}{2}} \quad (7.12)$$

ja

$$|\delta_{i+k+1}| \geq \frac{h_{i+k+1}}{3}r + h_{i+k+2}r \log \frac{R}{r}. \quad (7.13)$$

Valime arvud r ja R tingimustest (7.4), (7.5), (7.12), (7.13) ja tingimustest teistes sõlmedes, mis asuvad väljaspool antud ruutlõikude sektsiooni. Valides alguses suhteliselt väikese ε_i , määrame suuruse ε_{i+1} tingimusest (7.9) ja järgmised ε_j väärtused tingimusest (7.10), saame rahuldada võrratuse (7.11).

Märkus 9. Eelnevalt esitatud arutelu sobib ka juhul, kui $j = i+1, \dots, i+k$ korral, kas $\delta_j > 0$, siis valime $K_j = [\varepsilon_j, R]$, või $\delta_j < 0$, siis valime $K_j = [-R, -\varepsilon_j]$. Sobiva märgiga δ_j ei riku $|\varphi_j(m)|$ hinnangut ülevalt (arv R peab olema suhteliselt suur) ja aitab vähesel määral parandada alt hinnangut ilma, et oleks vaja teha muutusi tingimustes (7.4), (7.5), (7.9) – (7.13).

Märkus 10. Lõigu $[x_{i-1}, x_i]$ asemel võime valida ratsionaallõiguks ka lõigu $[x_{i+k}, x_{i+k+1}]$. Seda juhul, kui $\delta_j = 0$, $j = i, \dots, i+k$.

Üldine juht. Kirjeldame modifitseeritud kaasmonotoonset strateegiat üldisel juhul, kui mingil ruutlõikude sektsioonil ei ole nõrka alterneerimist. Vaatleme olukorda, kus $\delta_{i-2} > 0$, $\delta_{i-1} > 0$, $\delta_i \leq 0$, \dots , $(-1)^l \delta_{i+k} \geq 0$, $(-1)^l \delta_{i+k+1} < 0$, $(-1)^l \delta_{i+k+2} < 0$. Lõigud $[x_{i-2}, x_{i-1}]$ ja $[x_{i+k+1}, x_{i+k+2}]$ on ratsionaalsed. Kinniste lõikude K_{i-2} , K_{i-1} , K_{i+k+1} ja K_{i+k+2} valik on sama, mis erijuhtudel. Arvestame, et $\delta_i \leq 0$, $\delta_{i+1} \geq 0, \dots$ märgid on sobivad, et leiduks andmete nõrk alterneerimine. Näiteks teisel erijuhul on kõik $\delta_i, \dots, \delta_{i+k}$ sobivate märkidega ja esimene mittesobiva märgiga δ_{i+k+1} . Modifitseeritud kaasmonotoonse strateegiaga saame teisel erijuhul, kui valime ühe osalõigu lisaks ratsionaalseks, ruutlõikude sektsiooni, kus kõigi andmete δ_j märgid on sobivad. Järgides sama ideed, valime esimese mittesobiva märgiga δ_{i+p} korral (juhul, kui $\delta_{i+p} \neq 0$ ja $\delta_{i+p+1} = 0$) lõigu $[x_{i+p-1}, x_{i+p}]$ ratsionaallõiguks ja lõigud $[x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{i+p-2}, x_{i+p-1}]$ ruutlõikudeks. Sel juhul K_j kuju, $j = i, \dots, i+p$, on määratud lõiguga $K_j = [\varepsilon_j, R]$ või $K_j = [-R, -\varepsilon_j]$. Sarnaselt erijuhtudele võtame $\varepsilon_{i+p-1} = \varepsilon_{i+p}$. Jätkame sarnaselt osaga $\delta_{i+p-1}, \dots, \delta_{i+k+2}$, kus lõigud $[x_{i+p-1}, x_{i+p}]$ ja $[x_{i+k+1}, x_{i+k+2}]$ on võetud ratsionaallõikudeks. Märkused 9 ja 10 lubavad saada sisalduvuse $\varphi_j(m) \in K_j$ kõigi j korral. Lahendi olemasolu järeldub jälle Bohl–Brouweri

püsipunkti printsiibist.

Märkus 11. Selle asemel, et alustada ruutlõikude sektsiooni vasakust otsast, võime märkuse 10 ideed kasutades alustada ka paremast. Sel juhul saame mõned osalõigud teist liiki, kui nad oleksid vasakult alustamisel.

Modifitseeritud kaasmonotoonse strateegia põhiidee on selles, et ruutlõikude sektsioonis, kus ei ole andmete nõrka alterneerimist, asendatakse otsmine ruutlõik ratsionaallõiguga ja luuakse niiviisi uus ruutlõikude sektsioon, kus andmetel on nõrga alterneerimise omadus.

Võttes arvesse teoreemi 1, oleme saanud järgmise tulemuse.

Teoreem 12. Igasuguste andmete ja rajatingimuste korral on võimalik konstrueerida histopoleeriv splain, mis on lineaar/lineaar ratsionaalfunktsioon või ruutpolünoom modifitseeritud kaasmonotoonse strateegiaga määratud liigiga lõikudel. Selliselt saadud splain on üheselt määratud valitud liigiga lõikude korral.

Vaatleme uuesti erijuhtu 2 ja modifitseeritud kaasmonotoonset strateegiat. See lähenemine sisaldab mittesümmeetrilisust splaini konstrueerimisel. Eeldataud lähteandmete korral on meil tegelikult $m_{i-1} > 0$, $m_i > 0$ ja võrdus (4.14) annab $m_{i+1} < 0$, samuti $|m_{i+1}| > 2m_i$. Kasutame võrdust (4.13) kujul

$$m_{j+1} = - \left(2 + \frac{3h_j}{3h_{j+1}} \right) m_j - \frac{h_j}{2h_{j+1}} (m_j + 2m_{j-1}), \quad j = i + 1, \dots, i + k,$$

saame, induktsiooni abil, et $(-1)^{j-i} m_j > 0$, $|m_j| > 2|m_{j-1}|$, $j = i + 1, \dots, i + k + 1$. Seepärast võib modifitseeritud kaasmonotoonse strateegiaga saadud lahend tugevalt ostsilleeruda, mistõttu otsime ka teisi lähenemisi.

Teine strateegia võiks olla järgmine. Suhteliselt suure k korral histopoleerime eraldi lõikudel $[x_0, x_i]$ ja $[x_{i+k}, x_n]$, kus rajatingimused on $S(x_i) = z_i$ ja $S(x_{i+k}) = z_{i+k} = z_i$. Samuti valime $S(x) = z_i$, kui $x \in [x_i, x_{i+k}]$. Selle strateegia puudus on võimalik sileduse C^1 puudumine punktides x_i ja x_{i+k} .

Märgime, et üks võimalus on histopoleerida eraldi lõikudel $[x_0, x_{i-1}]$ ja $[x_{i+k+1}, x_n]$, rajatingimustega $S(x_{i-1}) = z_i$ ja $S(x_{i+k+1}) = z_{i+k}$. Kui võtta

$S(x) = z_i$, $x \in [x_{i-1}, x_{i+k+1}]$, siis see on ebaloomulik ja pole siledusega C^1 punktides x_{i-1} ja x_{i+k+1} .

Kolmas võimalus on histopoleerida eraldi lõikudel $[x_0, x_i]$ ja $[x_{i+k}, x_n]$ nagu teisegi strateegia puhul. Siin aga valime funktsiooni S lõikudel $[x_{i-1}, x_i]$ ja $[x_{i+k}, x_{i+k+1}]$ kuuppolünoomiks koos rajatingimustega $S(x_i) = z_i, S'(x_i) = 0$ ja $S(x_{i+k}) = z_{i+k}, S'(x_{i+k}) = 0$, jättes $S(x) = z_i$, $x \in [x_i, x_{i+k}]$. Sellisel juhul säilitab funktsioon S sileduse C^1 .

Kaks viimast ettepanekut strateegiateks ei taga funktsiooni S konstantsust lõigul $[x_{i-1}, x_{i+k+1}]$. Sellise eesmärgi nimel võime võtta $S(x) = z_i$, $x \in [x_{i-1}, x_{i+k+1}]$, ning funktsiooni S lõikudel $[x_{i-2}, x_{i-1}]$ ja $[x_{i+k+1}, x_{i+k+2}]$ kuuppolünoomidena selliste rajatingimustega punktides x_{i-1} ja x_{i+k+1} , et funktsioon S oleks siledusega C^1 . Siis $x \in [x_{i-2}, x_{i-1}]$ korral võib splaini näiteks esitada kujul

$$S(x) = z_{i-1} + \delta_{i-1}(-1 + 6t^2 - 4t^3) + \frac{h_{i-1}}{6}(-1 + 6t - 9t^2 + 4t^3),$$

kus $x = x_{i-2} + th_{i-1}$, millest saame

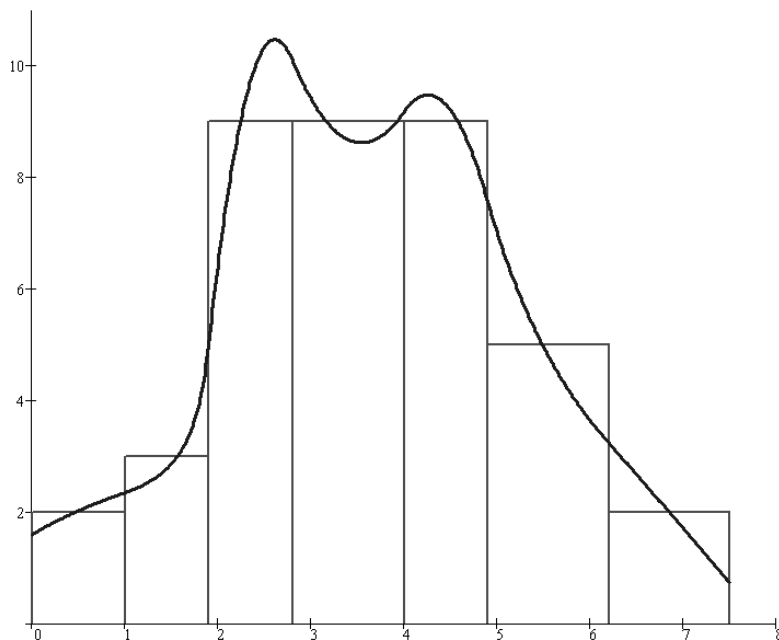
$$S'(x) = \frac{12}{h_{i-1}}\delta_{i-1}(t - t^2) + m_{i-2}(1 - 3t + 2t^2).$$

Meenutame, et eeldasime tingimuse $\delta_{i-1} > 0$ täidetust. Otsene analüüs näitab [7], et $S'(x) \geq 0$, $x \in [x_{i-2}, x_{i-1}]$, parajasti siis, kui $0 \leq m_{i-2} \leq 12\frac{\delta_{i-1}}{h_{i-1}}$. Vastupidisel juhul viib see meetod mittekasvava kuuppolünoomini. Sel juhul on võimalik kasutada pingul splainide teooriat, kus lõigul $[x_{i-2}, x_{i-1}]$ on S funktsioon lineaar- ja kuuppolünoomi vahel [7].

8 Näited

Splaini S esituseks võrdustega (3.8) ja (3.9) vastavalt ratsionaallõigul ja ruutlõigul on meil vaja teada parameetreid m_i . Need on leitavad võrrandisüsteemist, mis koosneb võrranditest (4.10), (4.13), (4.14) või (4.15), koos vastavate rajatingimustega. Sellise süsteemi lahendamiseks saab edukalt kasutada Newtoni meetodit [3, 4].

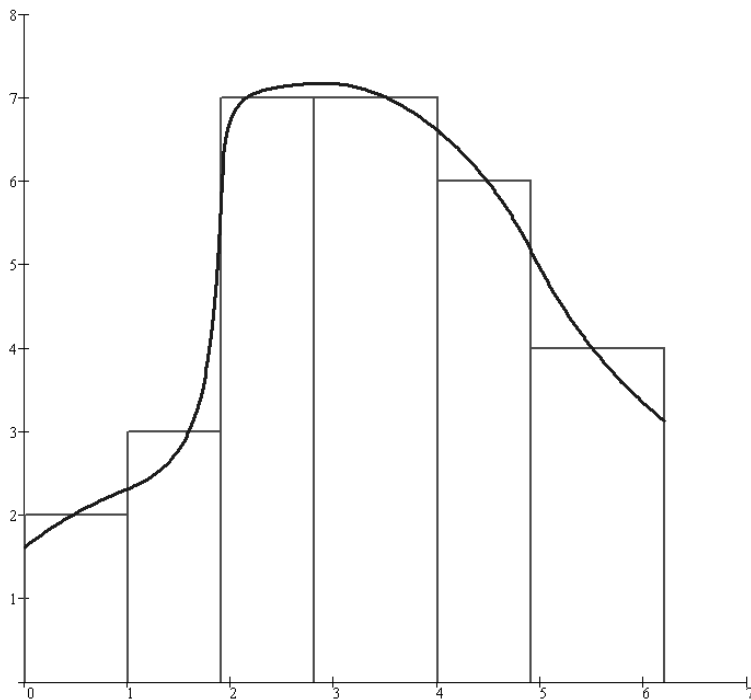
Järgnevalt vaatame mõningaid näiteid. Esimeses neist on tegemist andmete nõrga alterneerimisega. Vaatleme võrku $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1.9$, $x_3 = 2.8$, $x_4 = 4$, $x_5 = 4.9$, $x_6 = 6.2$, $x_7 = 7.5$ ning histogrammi kõrgusi $z_1 = 2$, $z_2 = 3$, $z_3 = z_4 = z_5 = 9$, $z_6 = 5$, $z_7 = 2$. Sellele lisame rajatingimused $S'(0) = 1$ ja $S'(7.5) = -2$. Lõigud $[x_2, x_3]$, $[x_3, x_4]$ ja $[x_4, x_5]$ on ruutlõigud, ülejäänud ratsionaallõigud. Tulemuseks saadud splain on joonisel 1.



Joonis 1.

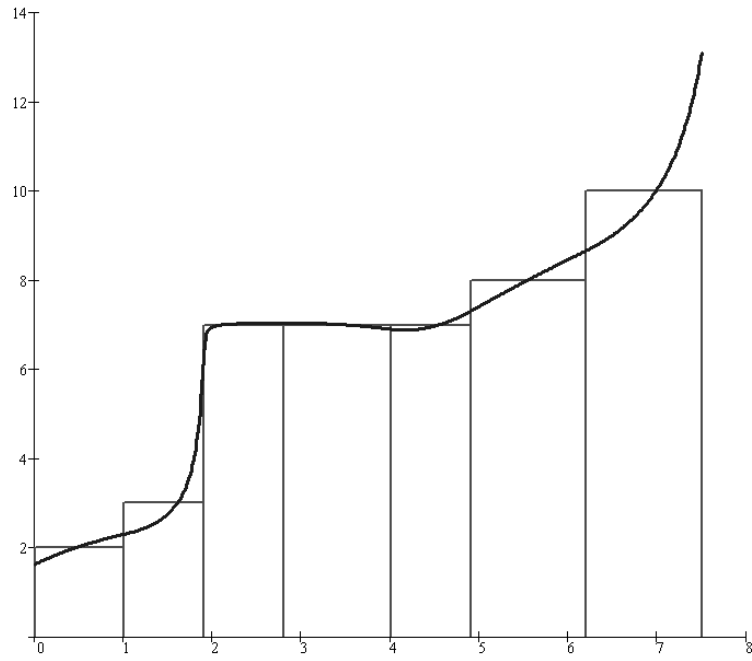
Järgneva nelja näite korral puudub andmete nõrk alterneerimine.

Teises näites on meil antud võrk $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1.9, x_3 = 2.8, x_4 = 4, x_5 = 4.9, x_6 = 6.2$ ning histogrammi kõrgused $z_1 = 2, z_2 = 3, z_3 = z_4 = 7, z_5 = 6, z_6 = 4$. Kasutame rajatingimusi $S'(0) = 1$ ja $S'(6.2) = -1$. Splaini leidmisel kasutame modifitseeritud kaasmonotoonset strateegiat ja valime lõigu $[x_2, x_3]$ ratsionaallõiguks. Siis saame, et lõik $[x_3, x_4]$ on ruutlõik ja ülejäänud ratsionaallõigud. Selliselt saadud splain on joonisel 2.

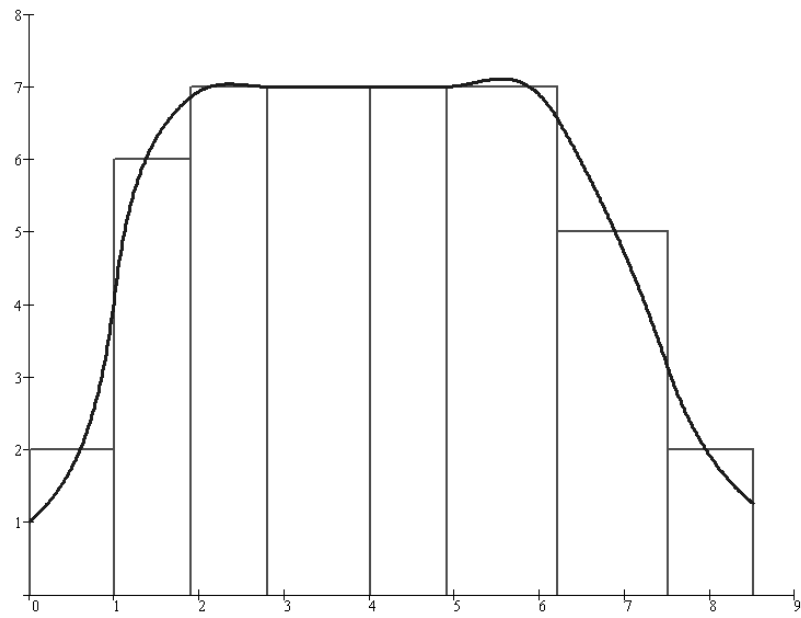


Joonis 2.

Kolmandas näites võtame võrgu $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1.9, x_3 = 2.8, x_4 = 4, x_5 = 4.9, x_6 = 6.2, x_7 = 7.5$, histogrammi kõrgused on $z_1 = 2, z_2 = 3, z_3 = z_4 = z_5 = 7, z_6 = 8, z_7 = 10$ ja rajatingimused $S'(0) = 1$ ja $S'(7.5) = 12$. Lõigud $[x_3, x_4]$ ja $[x_4, x_5]$ on ruutlõigud ja ülejäänud ratsionaallõigud (lõik $[x_2, x_3]$ on valitud ratsionaallõiguks modifitseeritud kaasmonotoonse strateegia alusel). Selliselt saadud histopoleeriv splain on ära toodud joonisel 3. Jooniselt 3 on näha, et parameetrite m_i absoluutväärtused kasvavad ruutlõikude seksioonil vasakult paremale liikudes.



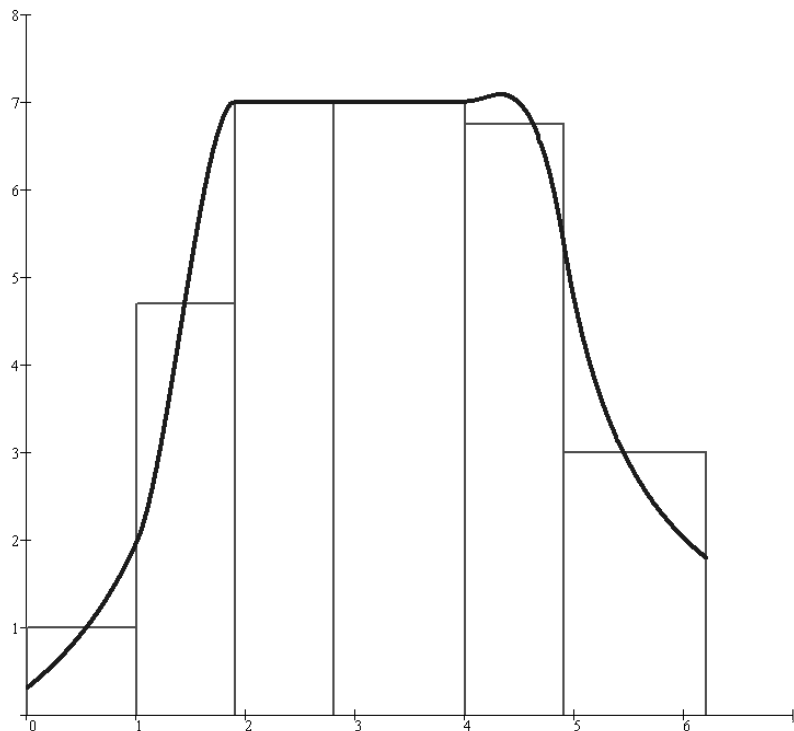
Joonis 3.



Joonis 4.

Selles näites kasutame histopoleeriva splaini konstrueerimiseks konstantset funktsiooni lõikudel $[x_3, x_4]$ ja $[x_4, x_5]$ ja kuuppolünoomi lõikudel $[x_2, x_3]$ ja $[x_5, x_6]$. Ülejäänud lõigud on ratsionaallõigud.

Neljandas näites on meil antud võrk $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1.9, x_3 = 2.8, x_4 = 4, x_5 = 4.9, x_6 = 6.2, x_7 = 7.5, x_8 = 8.5$ ja histogrammi kõrgused on $z_1 = 2, z_2 = 6, z_3 = z_4 = z_5 = z_6 = 7, z_7 = 5, z_8 = 2$. Valime rajatingimustega $S'(0) = 1$ ja $S'(8.5) = -1$. Saadud histopoleeriv splain on joonisel 4.



Joonis 5.

Viimases näites on meil antud võrk $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1.9, x_3 = 2.8, x_4 = 4, x_5 = 4.9, x_6 = 6.2$. Histogrammi kõrgused on $z_1 = 1, z_2 = 4.7, z_3 = z_4 = 7, z_5 = 6.75, z_6 = 3$. Histopoleeriv splain, mis on näha joonisel 5, on konstantne lõikudel $[x_2, x_3]$ ja $[x_3, x_4]$, lineaar/lineaar ratsionaalfunktsioon lõikudel $[x_0, x_1]$ ja $[x_5, x_6]$ ning kuuppolünoom lõikudel $[x_1, x_2]$ ja $[x_4, x_5]$.

Arvestatud on rajatingimustega $S'(0) = 1$ ja $S'(6.2) = -1$ ja sileduse C^1 tingimustega punktides x_2 ja x_4 . Välja arvutatud väärtused $m_1 = 2.801$ ja $m_5 = -7.549$ viitavad vastavalt monotoonsele ja mitte-monotoonsele kuuppolünoomile (tingimuse $0 \leq m_{i-2} \leq 12 \frac{\delta_{i-1}}{h_{i-1}}$ tõttu).

9 Bibliograafilised märkused

Geomeetriliste omaduste säilitamiseks on kaks traditsioonilist lähenemist, mõlemad kasutavad vabade parameetrite sobivat valikut. Esimene neist on lisasõlmede valik splineile [8, 9, 11-13, 22]. Teine strateegia kasutab kõrgema astme splaine koos väiksema siledusega [17, 20, 21]. Raamatus [7] ja artiklis [23] on üldine informatsioon ja viited geomeetrilisi omadusi säilitava funktsioonide lähendamise kohta. Ka artiklis [19] tegeleb autor histopolatsiooniülesande lahendi geomeetriliste omaduste säilitamisega. Samas ratsionaalsplained säilitavad geomeetrilisi omadusi iseenesest. Näiteks lineaar/lineaar ratsionaalsplained klassist C^1 on alati monotoonne ja ruut/lineaar ratsionaalsplained klassist C^2 säilitab lähteandmete kumeruse. Sellisel juhul võib splinei parameetrite arv olla minimaalne. Seda ideed on kasutatud allikates [3, 14-16, 18]. Lineaar/lineaar ratsionaalfunktsioonidega on võimalik lahendada ka näiteks ülesanne, kus histogrammi kõrgused teevad järsu hüppe [3] (selle näite algandmed on esitatud artiklis [1]). Artiklis [3] kasutatakse koonduvuskiiruse arvutamiseks klassikalist tulemust Newtoni meetodi koondumisest (näiteks [6]).

Raamatus [2] on esitatud meetod splinei konstrueerimiseks, mis rahuldab ruumala säilimise, positiivsuse (mittenegatiivsuse) ja lokaalse monotoonsuse tingimusi ette antud histogrammi korral.

Kaasmonotoonne kujusäilitav interpoleeriv spline on alati üheselt leitav, kui kombineerida splaine, mis on lineaar/lineaar ratsionaalfunktsioonid või ruutfunktsioonid kindlatel lõikudel [16].

10 Kirjandus

1. Akima, A., A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures, *J. Assoc. Comput. Mach.*, 1970, **17**, 589-602.
2. Constantini, P., Pelosi, F., Constrained bivariate histosplines, *Curve and Surface Design: Saint-Malo 2002*, Nashboro Press, Nashville, 2003, 83-92.
3. Fischer, M., Oja, P., Monotonicity preserving rational spline histopolation, *J. Comput. Appl. Math.*, 2005, **175**, 195-208.
4. Fischer, M., Oja, P., Trossmann, H., Comonotone shape-preserving spline histopolation, *J. Comput. Appl. Math.*, 2006, (*to appear*).
5. Hallop, G., Histopoleerivad ruutsplainid, nende seotus interpoleerivate kuupsplainidega ning monotoonsuse ja kumeruse säilitamine, *Bakalau-reusetöö*, Tartu, 2005.
6. Krasnoselskii, M. A., Vainikko, G. M., Zabreiko, P. P., Rutickii, Ya. B., Stecenko, V. Ya., *Approximate Solution of Operator Equations*, Groningen, Noordhoff, 1972.
7. Kvasov, B. I., *Methods of Shape-Preserving Spline Approximation*, World Scientific Publishing Co, River-Edge, NJ, 2000.
8. Lahtinen, A., Shape preserving interpolation by quadratic splines, *J. Comput. Appl. Math.*, 1990, **29**, 15-24.
9. Lahtinen, A., On the choice of parameters in shape-preserving quadratic spline interpolation, *J. Comput. Appl. Math.*, 1992, **39**, 109-113.
10. McAllister, D. F., Passow, E., Roulier, J. A., Algorithms for Computing Shape Preserving Spline Interpolations to Data, *Math. Comput.*, 1977, **31**, 139, 717-725.
11. McAllister, D. F., Roulier, J. A., Interpolation by convex quadratic splines, *Math. Comput.*, 1978, **32**, 1154-1162.

12. McAllister, D. F., Roulrier, J. A., An algorithm for computing a shape-preserving osculatory quadratic spline, *ACM Trans. Math. Softwear*, 1981, **7**, 331-347.
13. Morandi, R., Costantini, P., Piecewise monotone quadratic histosplines, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 1989, **10**, 397-406.
14. Oja, P., Low degree rational spline interpolation, *BIT*, 1997, **37**, 900-908.
15. Oja, P., Rational spline interpolation to monotonic data, *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.*, 1999, **48**, 22-30.
16. Oja, P., Comonotone adaptive interpolating splines, *BIT*, 2002, **42**, 4, 842-855.
17. Sakai, M., Usmani, R. A., A shape preserving area true approximation of histogram by rational splines, *BIT*, 1988, **28**, 329-339.
18. Schaback, R. Adaptive rational splines, *Constr. Approx.*, 1990, **6**, 167-179.
19. Schmidt, J. W., Constrained smoothing of histograms by quadratic splines, *Computing*, 1992, **48**, 97-109.
20. Schmidt, J. W., Heß, W., Shape preserving C^2 -spline histopolation, *J. Approx. Theory*, 1993, **75**, 325-345.
21. Schmidt, J. W., Heß, W., Nordheim, Th., Shape preserving histopolation using rational quadratic splines, *Computing*, 1990, **44**, 245-258.
22. Schumaker, L. L., On shape preserving quadratic spline interpolation, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1983, **20**, 854-864.
23. Späth, H., One Dimensional Spline Interpolation Algorithms, Peters, A. K., Massachusetts, 1995.
24. Trossmann, H., Andmete monotoonsuse ja kumeruse säilitamine interpoleerivate kuupsplainidega, Bakalaureusetöö, Tartu, 2004.

25. Завьялов, Ю. С., Квасов, Б. И., Мирошниченко, В. Л., Методы сплайн-функций, Москва, 1980.

Monotonicity preserving histopolation

Helle Hallik

Summary

Let x_i be given points in the interval $[a, b]$ such that

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

and let z_i , $i = 1, \dots, n$, be given real numbers. We want to construct a C^1 function S on $[x_0, x_n]$ that is either a quadratic polynomial or a rational function of the form

$$S(x) = \frac{a_i + b_i(x - x_{i-1})}{1 + d_i(x - x_{i-1})}$$

with $1 + d_i(x - x_{i-1}) > 0$ for $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, satisfying the histopolation (area-matching) conditions

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} S(x) dx = z_i(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (10.1)$$

In addition to (10.1), we impose the boundary conditions

$$S'(x_0) = \alpha, \quad S'(x_n) = \beta \quad (10.2)$$

or

$$S(x_0) = \alpha, \quad S(x_n) = \beta. \quad (10.3)$$

Denote

$$\delta_i = z_{i+1} - z_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\delta_0 = \alpha, \quad \delta_n = \beta \quad (\text{for boundary conditions (10.2)}),$$

$$\delta_0 = z_1 - \alpha, \quad \delta_n = \beta - z_n \quad (\text{for boundary conditions (10.3)}).$$

We determine a subinterval $[x_{i-1}, x_i]$ to be rational if $\delta_{i-1}\delta_i > 0$ and quadratic otherwise. We say that a quadratic section, i.e. maximal sequence of adjacent quadratic intervals, has a weak alternation of data if the interval $[x_{i-1}, x_i]$ being rational, intervals $[x_i, x_{i+1}], \dots, [x_{i+k-1}, x_{i+k}]$ quadratic and $[x_{i+k}, x_{i+k+1}]$ again rational then

$$\delta_i > 0, \quad \delta_{i+1} \leq 0, \quad \dots \quad (-1)^k \delta_{i+k-1} \leq 0, \quad (-1)^k \delta_{i+k} > 0$$

or

$$\delta_i < 0, \delta_{i+1} \geq 0, \dots, (-1)^k \delta_{i+k-1} \geq 0, (-1)^k \delta_{i+k} < 0.$$

We prove that, if the weak alternation of data takes place on quadratic sections, then a unique histopolating spline exists for any data x_i, z_i and is monotone on rational intervals. If there is no weak alternation of data we propose to use a modified comonotone adaptive strategy. By this strategy we replace first (or last) quadratic interval on quadratic section without weak alternation of data by rational one. If this solution has an undesirable amplifying effect we use constant function on adjacent quadratic intervals and cubic polynomial on neighbouring intervals of constant functions.

We consider five different particular histograms with or without weak alternation of data and present the figures about constructed combined splines. In all cases numerical examples support theoretical results.

Lisad: Programmid

Näide 1.

$$f(x) := \frac{x^2 \cdot (\ln(x) - 1) + x}{(x - 1)^2} \quad \phi(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{if } x = 1 \end{cases} \quad \alpha := 1 \quad \beta := -2$$

$$x := (0 \ 1 \ 1.9 \ 2.8 \ 4.0 \ 4.9 \ 6.2 \ 7.5)^T \quad n := \text{last}(x) \quad i := 1..n \quad h_i := x_i - x_{i-1}$$

$$z := (0 \ 2 \ 3 \ 9 \ 9 \ 9 \ 5 \ 2)^T \quad i := 1..n-1 \quad \delta_i := z_{i+1} - z_i$$

$$m_1 := 0.5 \quad m_2 := 0.3 \quad m_3 := -0.01 \quad m_4 := 0.1 \quad m_{n-2} := -3 \quad m_{n-1} := -4$$

Given

$$m_1 \cdot \left(h_1 \cdot \phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m_1}}\right) + h_2 \cdot \phi\left(\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right) \right) = \delta_1$$

$$m_2 \cdot h_2 \cdot \phi\left(\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right) + \frac{h_3}{6} \cdot (2 \cdot m_2 + m_3) = \delta_2$$

$$h_3 \cdot (m_2 + 2 \cdot m_3) + h_4 \cdot (2 \cdot m_3 + m_4) = 6 \cdot \delta_3$$

$$h_4 \cdot (m_3 + 2 \cdot m_4) + h_5 \cdot (2 \cdot m_4 + m_5) = 6 \cdot \delta_4$$

$$\frac{h_{n-2}}{6} \cdot (m_{n-3} + 2 \cdot m_{n-2}) + m_{n-2} \cdot h_{n-1} \cdot \phi\left(\sqrt{\frac{m_{n-1}}{m_{n-2}}}\right) = \delta_{n-2}$$

$$m_{n-1} \cdot \left(h_{n-1} \cdot \phi\left(\sqrt{\frac{m_{n-2}}{m_{n-1}}}\right) + h_n \cdot \phi\left(\sqrt{\frac{\beta}{m_{n-1}}}\right) \right) = \delta_{n-1}$$

$$mm := \text{Find}(m) \quad m := mm \quad m_0 := \alpha \quad m_n := \beta$$

```

H(x, z) :=
  n ← last(x)
  u0 ← x0
  u1 ← x0
  u3·n-1 ← xn
  u3·n ← xn
  v0 ← 0
  v1 ← z1
  v3·n-1 ← zn
  v3·n ← 0
  for i ∈ 1..n-1
    u3·i-1 ← xi
    u3·i ← xi
    u3·i+1 ← xi
    v3·i-1 ← zi
    v3·i ← 0
    v3·i+1 ← zi+1
  augment(u, v)

```

$U := H(x, z)^{\langle 0 \rangle}$ $V := H(x, z)^{\langle 1 \rangle}$

$$R(i, t, m, \sigma, h) := \sigma_i + h_i \cdot \frac{m_{i-1}}{\left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}} - 1\right)^2} \cdot \ln\left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}}\right) - h_i \cdot \frac{m_{i-1}}{\left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}} - 1\right) \cdot \left[1 + t \cdot \left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}} - 1\right)\right]}$$

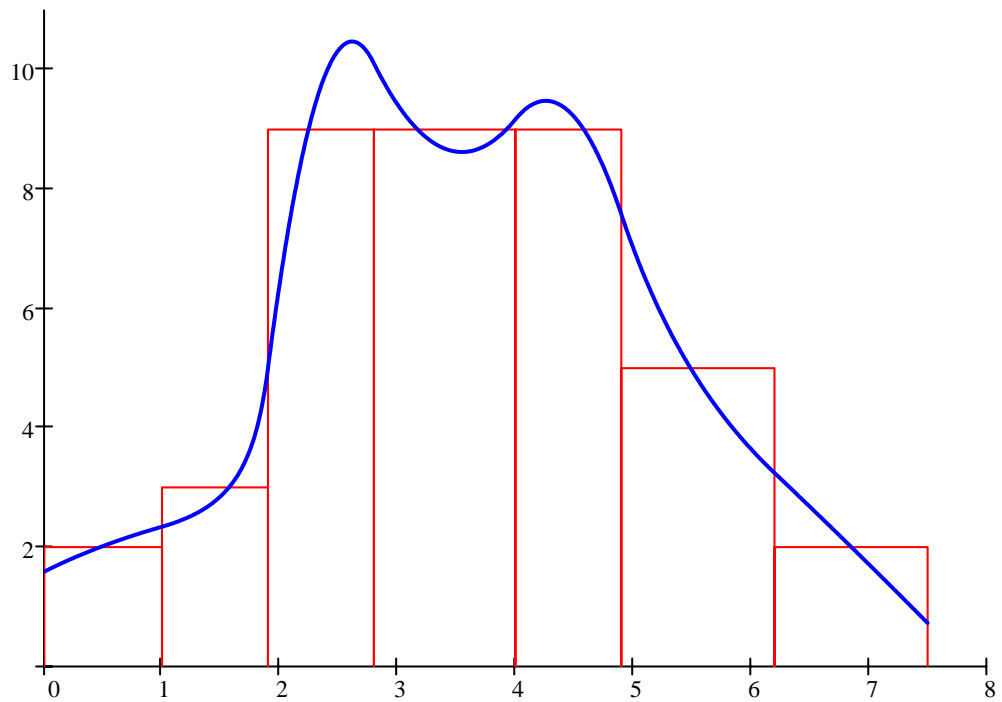
$$P(i, t, m, \sigma, h) := \sigma_i - \frac{h_i}{6} \cdot \left[(2 - 6 \cdot t + 3 \cdot t^2) \cdot m_{i-1} + (1 - 3 \cdot t^2) \cdot m_i \right]$$

```

SPL2(x, m, ζ, σ) :=
  n ← last(x)
  for i ∈ 1..n
    if xi-1 ≤ ζ ≤ xi
      hi ← xi - xi-1
      t ←  $\frac{\zeta - x_{i-1}}{h_i}$ 
      S ← R(i, t, m, σ, h) if i = 1 ∨ i = 2 ∨ i = n - 1 ∨ i = n
      S ← P(i, t, m, σ, h) otherwise
  S

```

u := 0, 0.01 .. 7.5



Näide 2.

$$f(x) := \frac{x^2 \cdot (\ln(x) - 1) + x}{(x - 1)^2} \quad g(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \frac{[2 \cdot x \cdot (\ln(x) - 1) + x + 1]}{(x - 1)^2} - 2 \cdot \frac{[x^2 \cdot (\ln(x) - 1) + x]}{(x - 1)^3}$$

$$\phi(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{if } x = 1 \end{cases} \quad D\phi(x) := \begin{cases} g(x) & \text{if } x \neq 1 \\ \frac{1}{3} & \text{if } x = 1 \end{cases} \quad \alpha := 1 \quad \beta := -1$$

$$x := (0 \ 1 \ 1.9 \ 2.8 \ 4.0 \ 4.9 \ 6.2)^T \quad n := \text{last}(x) \quad i := 1..n \quad h_i := x_i - x_{i-1}$$

$$z := (0 \ 2 \ 3 \ 7 \ 7 \ 6 \ 4)^T \quad i := 1..n - 1 \quad \delta_i := z_{i+1} - z_i$$

$$R(i, t, m, \sigma, h) := \sigma_i + h_i \cdot \frac{m_{i-1}}{\left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}} - 1\right)^2} \cdot \ln\left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}}\right) - h_i \cdot \frac{m_{i-1}}{\left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}} - 1\right) \cdot \left[1 + t \cdot \left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}} - 1\right)\right]}$$

$$P(i, t, m, \sigma, h) := \sigma_i - \frac{h_i}{6} \cdot \left[(2 - 6 \cdot t + 3 \cdot t^2) \cdot m_{i-1} + (1 - 3 \cdot t^2) \cdot m_i \right]$$

$$\text{SPL2}(x, m, \zeta, \sigma) := \begin{cases} n \leftarrow \text{last}(x) \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{if } x_{i-1} \leq \zeta \leq x_i \\ \quad \quad \begin{cases} h_i \leftarrow x_i - x_{i-1} \\ \quad \quad \zeta - x_{i-1} \\ t \leftarrow \frac{\quad}{h_i} \\ S \leftarrow R(i, t, m, \sigma, h) \text{ if } i = 1 \vee i = 2 \vee i = 3 \vee i = n - 1 \vee i = n \\ S \leftarrow P(i, t, m, \sigma, h) \text{ otherwise} \end{cases} \\ S \end{cases}$$

$$m_1 := 1 \quad m_2 := 1 \quad m_3 := 0.5 \quad m_{n-2} := -1 \quad m_{n-1} := -1$$

Given

$$m_1 \cdot \left(h_1 \cdot \phi \left(\sqrt{\frac{\alpha}{m_1}} \right) + h_2 \cdot \phi \left(\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \right) \right) = \delta_1$$

$$m_2 \cdot \left(h_2 \cdot \phi \left(\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \right) + h_3 \cdot \phi \left(\sqrt{\frac{m_3}{m_2}} \right) \right) = \delta_2$$

$$m_3 \cdot h_3 \cdot \phi \left(\sqrt{\frac{m_2}{m_3}} \right) + \frac{h_4}{6} \cdot (2 \cdot m_3 + m_4) = \delta_3$$

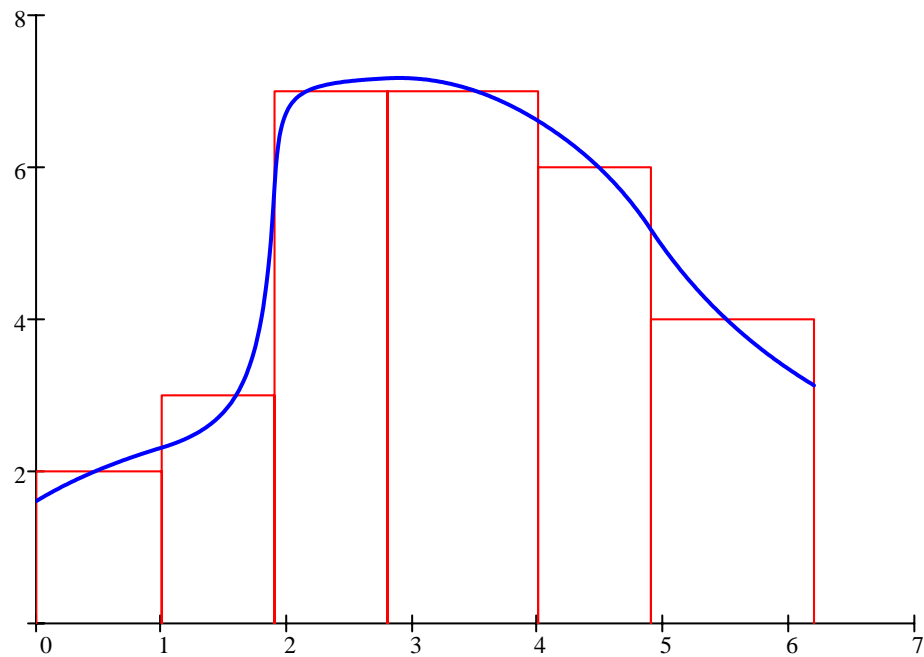
$$\frac{h_{n-2}}{6} \cdot (m_{n-3} + 2 \cdot m_{n-2}) + m_{n-2} \cdot h_{n-1} \cdot \phi \left(\sqrt{\frac{m_{n-1}}{m_{n-2}}} \right) = \delta_{n-2}$$

$$m_{n-1} \cdot \left(h_{n-1} \cdot \phi \left(\sqrt{\frac{m_{n-2}}{m_{n-1}}} \right) + h_n \cdot \phi \left(\sqrt{\frac{\beta}{m_{n-1}}} \right) \right) = \delta_{n-1}$$

$$mm := \text{Find}(m) \quad m := mm \quad m_0 := \alpha \quad m_n := \beta$$

$$U := H(x, z) \langle 0 \rangle \quad V := H(x, z) \langle 1 \rangle$$

u := 0,0.01 .. 6.2



Näide 3.

$$f(x) := \frac{x^2 \cdot (\ln(x) - 1) + x}{(x - 1)^2} \quad g(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \frac{[2 \cdot x \cdot (\ln(x) - 1) + x + 1]}{(x - 1)^2} - 2 \cdot \frac{[x^2 \cdot (\ln(x) - 1) + x]}{(x - 1)^3}$$

$$\phi(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{if } x = 1 \end{cases} \quad D\phi(x) := \begin{cases} g(x) & \text{if } x \neq 1 \\ \frac{1}{3} & \text{if } x = 1 \end{cases} \quad \alpha := 1 \quad \beta := 12$$

$$x := (0 \ 1 \ 1.9 \ 2.8 \ 4.0 \ 4.9 \ 6.2 \ 7.5)^T \quad n := \text{last}(x) \quad i := 1 .. n \quad h_i := x_i - x_{i-1}$$

$$z := (0 \ 2 \ 3 \ 7 \ 7 \ 7 \ 8 \ 10)^T \quad i := 1 .. n - 1 \quad \delta_i := z_{i+1} - z_i$$

$$m_1 := 0.5 \quad m_2 := 30 \quad m_3 := 0.01 \quad m_4 := -0.1 \quad m_{n-2} := 3 \quad m_{n-1} := 4$$

Given

$$m_1 \cdot \left(h_1 \cdot \phi \left(\sqrt{\frac{\alpha}{m_1}} \right) + h_2 \cdot \phi \left(\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \right) \right) = \delta_1$$

$$m_2 \cdot \left(h_2 \cdot \phi \left(\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \right) + h_3 \cdot \phi \left(\sqrt{\frac{m_3}{m_2}} \right) \right) = \delta_2$$

$$m_3 \cdot h_3 \cdot \phi \left(\sqrt{\frac{m_2}{m_3}} \right) + \frac{h_4}{6} \cdot (2 \cdot m_3 + m_4) = \delta_3$$

$$h_4 \cdot (m_3 + 2 \cdot m_4) + h_5 \cdot (2 \cdot m_4 + m_5) = 6 \cdot \delta_4$$

$$\frac{h_{n-2}}{6} \cdot (m_{n-3} + 2 \cdot m_{n-2}) + m_{n-2} \cdot h_{n-1} \cdot \phi \left(\sqrt{\frac{m_{n-1}}{m_{n-2}}} \right) = \delta_{n-2}$$

$$m_{n-1} \cdot \left(h_{n-1} \cdot \phi \left(\sqrt{\frac{m_{n-2}}{m_{n-1}}} \right) + h_n \cdot \phi \left(\sqrt{\frac{\beta}{m_{n-1}}} \right) \right) = \delta_{n-1}$$

$$\text{mm} := \text{Find}(m) \quad m := \text{mm} \quad m_0 := \alpha \quad m_n := \beta$$

$$R(i, t, m, \sigma, h) := \sigma_i + h_i \cdot \frac{m_{i-1}}{\left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}} - 1 \right)^2} \cdot \ln \left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}} \right) - h_i \cdot \frac{m_{i-1}}{\left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}} - 1 \right)} \cdot \left[1 + t \cdot \left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}} - 1 \right) \right]$$

$$P(i, t, m, \sigma, h) := \sigma_i - \frac{h_i}{6} \cdot \left[(2 - 6 \cdot t + 3 \cdot t^2) \cdot m_{i-1} + (1 - 3 \cdot t^2) \cdot m_i \right]$$

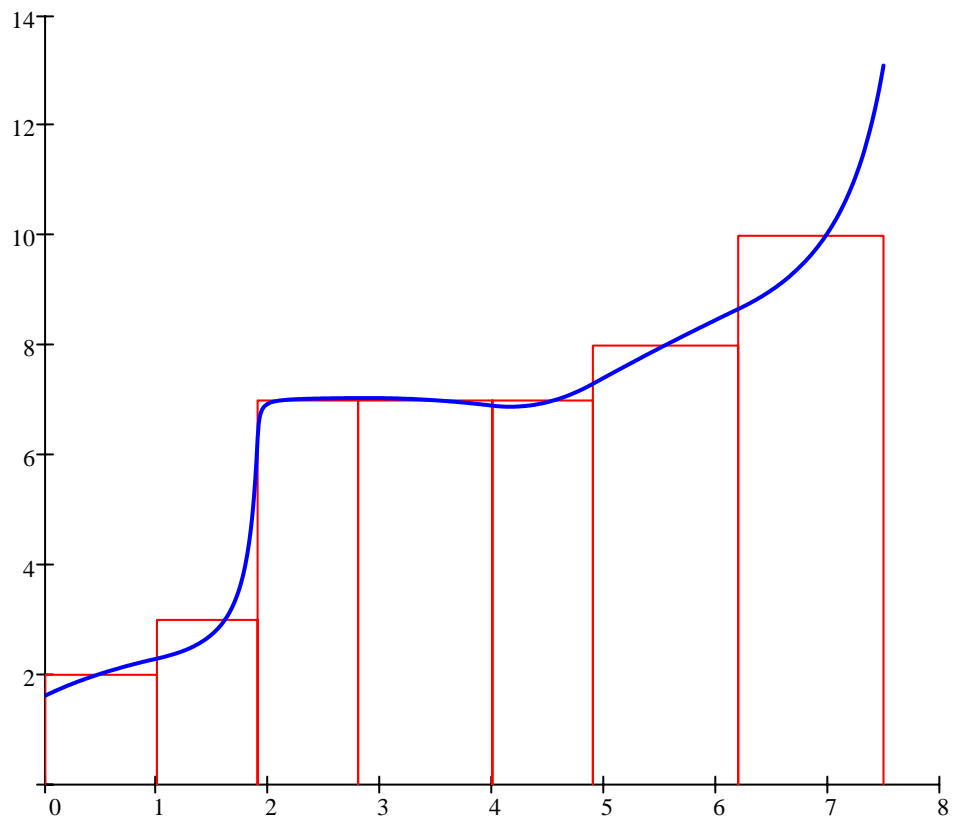
```

SPL2(x, m, ζ, σ) :=
  n ← last(x)
  for i ∈ 1..n
    if xi-1 ≤ ζ ≤ xi
      hi ← xi - xi-1
      t ←  $\frac{\zeta - x_{i-1}}{h_i}$ 
      S ← R(i, t, m, σ, h) if i = 1 ∨ i = 2 ∨ i = 3 ∨ i = n - 1 ∨ i = n
      S ← P(i, t, m, σ, h) otherwise
  S

```

U := H(x, z)^{⟨0⟩} V := H(x, z)^{⟨1⟩}

u := 0, 0.01 .. 7.5



Näide 4.

$$f(x) := \frac{x^2 \cdot (\ln(x) - 1) + x}{(x - 1)^2} \quad \phi(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{if } x = 1 \end{cases} \quad \alpha := 1 \quad \beta := -1$$

$$x := (0 \ 1 \ 1.9 \ 2.8 \ 4.0 \ 4.9 \ 6.2 \ 7.5 \ 8.5)^T \quad n := \text{last}(x) \quad i := 1 .. n \quad h_i := x_i - x_{i-1}$$

$$z := (0 \ 2 \ 6 \ 7 \ 7 \ 7 \ 7 \ 5 \ 2)^T \quad i := 1 .. n - 1 \quad \delta_i := z_{i+1} - z_i$$

$$m1 := 2 \quad m2 := 3$$

Given

$$m1 \cdot \left(h_1 \cdot \phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m1}}\right) + h_2 \cdot \phi\left(\sqrt{\frac{m2}{m1}}\right) \right) = \delta_1$$

$$h_2 \cdot m2 \cdot \phi\left(\sqrt{\frac{m1}{m2}}\right) + \frac{h_3}{6} \cdot m2 = \delta_2$$

$$mA := \text{Find}\left(\begin{pmatrix} m1 \\ m2 \end{pmatrix}\right)$$

$$m6 := -6 \quad m7 := -5$$

Given

$$\frac{h_6}{6} \cdot m6 + h_7 \cdot m6 \cdot \phi\left(\sqrt{\frac{m7}{m6}}\right) = \delta_6$$

$$m7 \cdot \left(h_7 \cdot \phi\left(\sqrt{\frac{m6}{m7}}\right) + h_8 \cdot \phi\left(\sqrt{\frac{\beta}{m7}}\right) \right) = \delta_7$$

$$mL := \text{Find}\left(\begin{pmatrix} m6 \\ m7 \end{pmatrix}\right)$$

$$m_0 := \alpha \quad m_1 := mA_0 \quad m_2 := mA_1 \quad m_{n-2} := mL_0 \quad m_{n-1} := mL_1 \quad m_n := \beta$$

$$R(i, t, m, z, h) := z_i + h_i \cdot \frac{m_{i-1}}{\left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}} - 1\right)^2} \cdot \ln\left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}}\right) - h_i \cdot \frac{m_{i-1}}{\left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}} - 1\right) \cdot \left[1 + t \cdot \left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}} - 1\right)\right]}$$

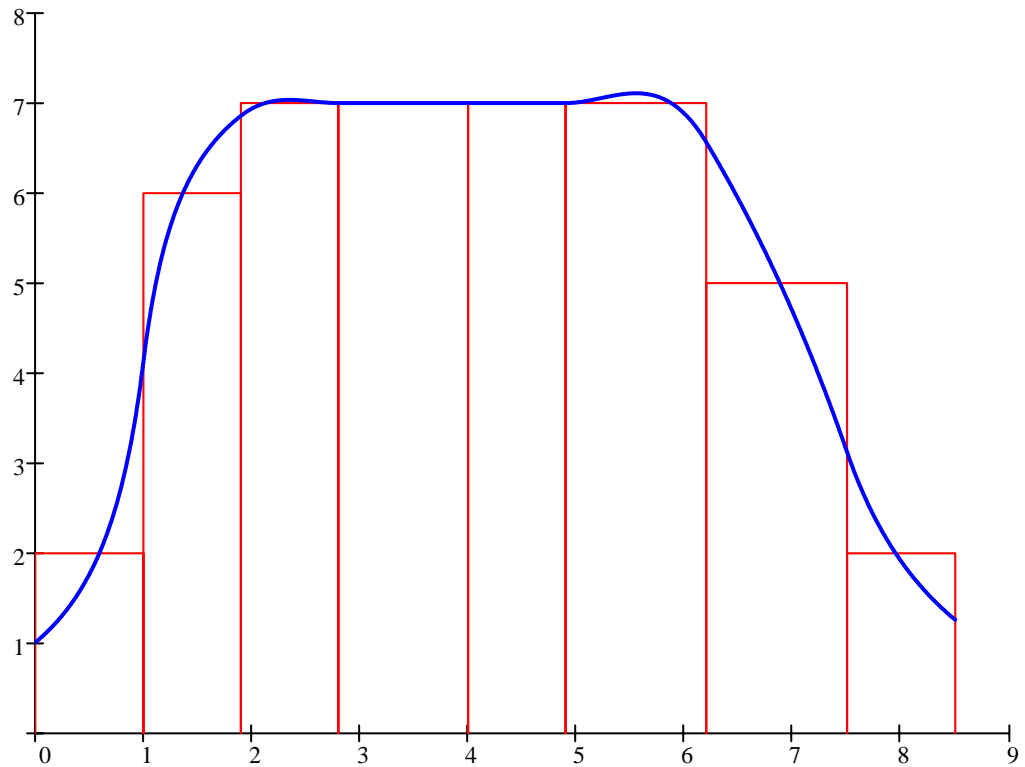
$$K1(i, t, m, z, h) := z_i - \frac{h_i}{6} \cdot m_{i-1} \left[1 - 6 \cdot t + t^2 \cdot (9 - 4 \cdot t)\right]$$

$$K2(i, t, m, z, h) := z_i + \frac{h_i}{6} \cdot m_i \cdot t^2 \cdot (4 \cdot t - 3)$$

$$SPL2(x, m, \zeta, z) := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \text{last}(x) \\ \text{for } i \in 1..n \\ \text{if } x_{i-1} \leq \zeta \leq x_i \\ \quad \left| \begin{array}{l} h_i \leftarrow x_i - x_{i-1} \\ \quad \zeta - x_{i-1} \\ t \leftarrow \frac{\quad}{h_i} \\ S \leftarrow R(i, t, m, z, h) \text{ if } i = 1 \vee i = 2 \vee i = n - 1 \vee i = n \\ S \leftarrow K1(i, t, m, z, h) \text{ if } i = 3 \\ S \leftarrow K2(i, t, m, z, h) \text{ if } i = n - 2 \\ S \leftarrow z_3 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ S \end{array} \right.$$

$$U := H(x, z)^{\langle 0 \rangle} \quad V := H(x, z)^{\langle 1 \rangle}$$

u := 0,001..8.5



Näide 5.

$$f(x) := \frac{x^2 \cdot (\ln(x) - 1) + x}{(x - 1)^2} \quad \phi(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{if } x = 1 \end{cases} \quad \alpha := 1 \quad \beta := -1$$

$$x := (0 \ 1 \ 1.9 \ 2.8 \ 4.0 \ 4.9 \ 6.2)^T \quad n := \text{last}(x) \quad i := 1..n \quad h_i := x_i - x_{i-1}$$

$$z := (0 \ 1 \ 4.7 \ 7 \ 7 \ 6.75 \ 3)^T \quad i := 1..n-1 \quad \delta_i := z_{i+1} - z_i$$

$$g(y) := h_1 \cdot y \cdot \phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{y}}\right) + \frac{h_2}{6} \cdot y - \delta_1 + \delta_2 \quad y := 3 \quad \text{root}(g(y), y) = 2.801$$

$$m_0 := \alpha \quad m_1 := \text{root}(g(y), y) \quad m_6 := \beta$$

$$g1(t) := \frac{h_5}{6} \cdot t + h_6 \cdot t \cdot \phi\left(\sqrt{\frac{\beta}{t}}\right) - \delta_5 + \delta_4 \quad t := 1 \quad \text{root}(g1(t), t) = -7.549 \quad m_5 := \text{root}(g1(t), t)$$

$$R(i, t, m, z, h) := z_i + h_i \cdot \frac{m_{i-1}}{\left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}} - 1\right)^2} \cdot \ln\left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}}\right) - h_i \cdot \frac{m_{i-1}}{\left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}} - 1\right) \cdot \left[1 + t \cdot \left(\sqrt{\frac{m_{i-1}}{m_i}} - 1\right)\right]}$$

$$K1(i, t, m, z, h) := 2 \cdot z_i - z_{i+1} + 2 \cdot (z_{i+1} - z_i) \cdot t^2 \cdot (3 - 2 \cdot t) - \frac{h_i}{6} \cdot m_{i-1} \cdot [1 - 6 \cdot t + t^2 \cdot (9 - 4 \cdot t)]$$

$$K2(i, t, m, z, h) := z_{i-1} + 2 \cdot (z_i - z_{i-1}) \cdot t^2 \cdot (3 - 2 \cdot t) + \frac{h_i}{6} \cdot m_i \cdot t^2 \cdot (4 \cdot t - 3)$$

$$\text{SPL2}(x, m, \zeta, z) := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \text{last}(x) \\ \text{for } i \in 1 .. n \\ \quad \text{if } x_{i-1} \leq \zeta \leq x_i \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} h_i \leftarrow x_i - x_{i-1} \\ \quad \zeta - x_{i-1} \\ t \leftarrow \frac{\quad}{h_i} \\ S \leftarrow R(i, t, m, z, h) \text{ if } i = 1 \vee i = n \\ S \leftarrow K1(i, t, m, z, h) \text{ if } i = 2 \\ S \leftarrow K2(i, t, m, z, h) \text{ if } i = n - 1 \\ S \leftarrow z_3 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ S \end{array} \right.$$

$$U := H(x, z)^{\langle 0 \rangle} \quad V := H(x, z)^{\langle 1 \rangle}$$

$u := 0,001 \dots 6.2$

