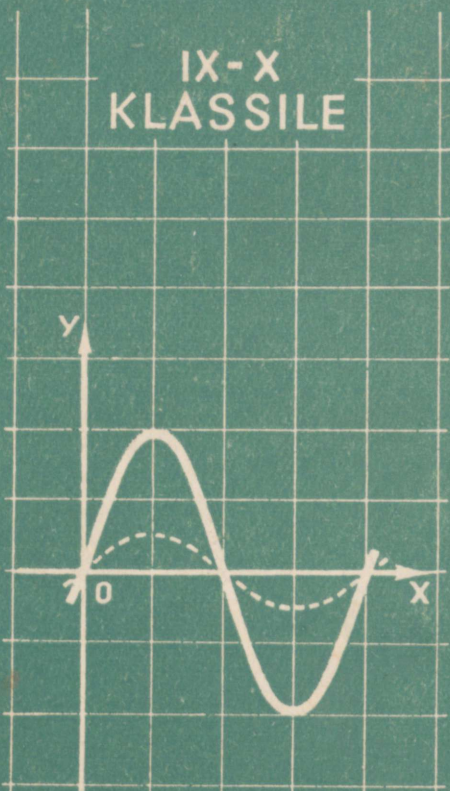


S. Novosjolov

# TRIGONOMETRIA

IX-X  
KLASSILE



2/51107

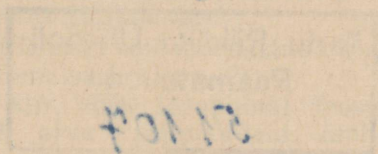




S. NOVOSJOLOV

# TRIGONOMEETRIA

KESKKOOLI IX—X KLASSILE



ARHIIVIKOGU

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS  
TALLINN 1961

Originaali tiitel:

С. И. Новоселов. Тригонометрия.

Учебник для 9—10 классов средней школы.

Утверждён Министерством  
просвещения РСФСР.

Учпедгиз 1959.

Tõlkinud *Ü. Kaasik*

Tõlge kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt.

2

Tartu Riikliku Ülikooli  
Raamatukogu

51107

ARHIIVKOGU

## I peatükk.

### NURGAD JA KAARED; NENDE MÖÖTMINE.

#### § 1. Mistahes suurusega nurgad.

Geomeetrias nimetatakse nurgaks kujundit, mille moodustavad kaks ühest punktist väljuvat kiirt.

Iga nurga võib moodustada tasapinnal oma alguspunkti ümber pöörlev kiir. Nii moodustub nurk  $AOB$  kiire pöörlemisel ümber punkti  $O$  lähteasendist  $OA$  lõppasendini  $OB$  (joon. 1).

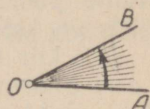
Trigonomeetrias vaadeldakse nurka kui tasapinnal oma alguspunkti ümber pöörleva kiire poolt läbitud teed.

Kiire pöörlemisel võib moodustuda sirg-nurgast suurem nurk (joon. 2).

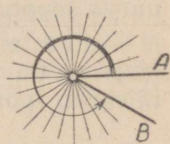
Pöörlev kiir, olles tasapinnal teostanud teatud arvu täispöördeid ümber punkti  $O$ , langeb ühte oma esialgse asendiga.

Kiire poolt teostatud pööre võib koosneda mitmest täispöördest ning nurgast, mis moodustab osa täispöördest (joon. 3). Näiteks võib tuua pöörleva ratta kodara liikumise.

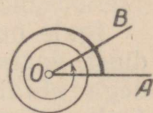
Kiir võib tasapinnal pöörelda kahes teineteisele vastupidises suunas (joon. 4). Nii näiteks kaks ühesuguse raadiusega ning teineteisega joonisel 5 näidatud viisil hambuvat hammasrattast pöörlevad vastupidistes suundades ja ühe hammasratta pöördumisel mingi nurga võrra pöördub teine samauguse nurga võrra, kuid vastupidises suunas.



Joon. 1.



Joon. 2.

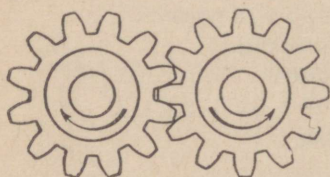


Joon. 3.



Joon. 4.

Kahest võimalikust pöörlemise suunast tasapinnal loeme ühte positiivseks, teist aga negatiivseks. Nurka, mille moodustab positiivses suunas pöörlev kiir, loeme positiivseks; nurka, mille moodustab negatiivses suunas pöörlev kiir, negatiivseks.



Joon. 5.

Positiivseks võib lugeda ükskõik kumma kahest võimalikust pöörlemise suunast tasapinnal. Edaspidi loeme positiivseks pöörlemise suunaks suunda, mis on vastu-

**pidine** pöörlemistasapinnal numbrilauaga vaatleja poole asetseva kella osutite pöörlemisele.

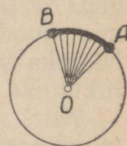
Kui kiir  $OA$ , sooritamata mingit pööret, jäi esialgsesse asendisse, siis öeldakse, et kiire pöördenurk võrdub nulliga.

**Definitsioon.** Pöörleva kiire lähteasendit nimetatakse vastava pöördenurga lähtehaaraks; kiire lõppasendit selle nurga lõpphaaraks.

Antud asendit omava lähte- ja lõpphaaraga nurki on lõpmatu hulk; kõik need nurgad erinevad üksteisest täisarvu (positiivsete või negatiivsete) täispöörete poolest.

## § 2. Ringjoone mistahes suurusega kaared.

Igale nurgale, mille moodustavad ringjoone kaks raadiust, vastab selle ringjoone antud raadiuste lõpp-punktidega piiratud kaar (joon. 6). Kui raadius  $OA$  pöörleb ümber keskpunkti  $O$ , siis raadiuse lõpp-punkt  $A$  liigub ringjoonel. Öeldakse, et punkt liigub ringjoonel positiivses (negatiivses) suunas, kui teda keskpunktiga ühendav raadius pöörleb positiivses (vastavalt negatiivses) suunas.



Joon. 6.

Ringjoonel positiivses suunas liikuva punkti poolt moodustatud kaart nimetatakse positiivseks; negatiivses suunas liikuva punkti poolt moodustatud kaart aga negatiivseks (joon. 7).

Kui raadius teeb (positiivse või negatiivse) täis-

pöörde, siis tema lõpp-punkt, olles kirjeldanud täisringjoone, jõuab tagasi lähteasendisse.

Võib vaadelda kaari, mis sisaldavad ükskõik millise arvu positiivseid või negatiivseid täisringjooni. Ettekujutuse niisugusest kaarest annab rullile keritud peenike niit: rullil võib olla kuitahes palju ühes või teises suunas keritud keerde.



### § 3. Nurkade ja kaarte mõõtmine.

Joon. 7.

Nurkade mõõtmise mõiste on teada geometriast. Nurkade mõõtmiseks valitakse teatud kindel nurk mõõtühikuks ja mõõdetakse selle abil kõik teised nurgad.

*Mõõtühikuks võib valida mistahes nurga.*

Praktikas mõõdetakse nurki sageli kraadides, valides mõõtühikuks  $\frac{1}{360}$  täispöördest, mida nimetataksegi kraadiks. Suuremat täpsust nõudvate mõõtmiste puhul jagatakse kraad 60-ks võrdseks osaks — minutiteks; minut jagatakse 60-ks võrdseks osaks — sekunditeks.

Geomeetrias mõõdetakse nurki mõnikord «*d osades*», valides mõõtühikuks täisnurga.

Tehnikas valitakse nurkade mõõtühikuks sageli täispööre. Nii mõõdetakse masina ratta või lennuki propelleri pöördumist tavaliselt pöörete (s. t. täispöörete) arvuga.

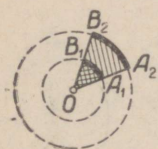
Suurtükiväes valitakse nurkade mõõtühikuks  $\frac{1}{60}$  täispöördest, s. o.  $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$ ; seda nurka nimetatakse nurgamõõtja suureks jaotuseks. Nurkade täpsemaks mõõtmiseks jagatakse nurgamõõtja suur jaotus sajaks võrdseks osaks; nurka  $\frac{6^\circ}{100} = 3'36''$  nimetatakse tavaliselt väikeseks jaotuseks e. tuhandikuks.

*Positiivse nurga suurust väljendatakse positiivse arvuga; negatiivse nurga suurust negatiivse arvuga.*

Trigonomeetrias uuritavad nurgad võivad mõõtuda iga reaalarvuga, sest kiire pöörlemisel võib moodustuda mistahes suurusega nurk (positiivne, negatiivne,

võrdne nulliga või nurk, mis sisaldab mistahes arvu täispöördeid).

Antud ringjoone kaarte mõõtmisel valitakse mõõtühikuks kaar, millele toetub nurkade mõõtühikuks valitud kesknurk. Siis kaare ja temale toetuda kesknurga suurused väljenduvad ühe ning sama arvuga vastavalt kaare- ja nurgahikutes.



Joon. 8.

**Nurkade ja kaarte radiaanmõõt.** Geomeetriast on teada, et ühe ning sama kesknurga puhul kahe ringjoone kaarte pikkused suhtuvad nagu nende ringjoonte raadiused (joon. 8)\*:

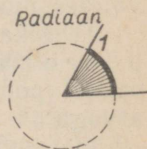
$$\frac{\widehat{A_1B_1}}{\widehat{A_2B_2}} = \frac{R_1}{R_2} \text{ ehk } \frac{\widehat{A_1B_1}}{R_1} = \frac{\widehat{A_2B_2}}{R_2}.$$

Seega, ühe ning sama kesknurga puhul ringjoone kaare pikkuse suhe raadiusesse ei sõltu raadiuse suuruselt.

Kesknurga muutudes selle suhte väärtus muutub.

**Definitsioon.** Nurga radiaanmõõduks nimetatakse sellele nurgale kui kesknurgale vastava ringjoone kaare pikkuse suhet selle ringjoone raadiusesse.

Nurkade mõõtmise puhul radiaanmõõdus on mõõtühikuks positiivne kesknurk, mis toetub pikkuselt raadiusega võrdsele kaarele. Seda nurka nimetatakse radiaaniks (joon. 9).



Joon. 9

Kaarte mõõtmise puhul radiaanmõõdus on mõõteühikuks kaareradiaan, s. t. kaar, mille pikkus võrdub raadiusega.

Üleminek kraadimõõdult radiaanmõõdule. Positiivse täispöörde radiaanmõõt võrdub ringjoone pikkuse ja raadiuse jagatisega.

$$\frac{2\pi R}{R} = 2\pi = 6,283185 \dots$$

Nurga  $1^\circ$  radiaanmõõt on  $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} = 0,017453 \dots$

Kui nurk sisaldab  $A^\circ$ , siis tema radiaanmõõt  $a$  on:

\* Sektorid  $OA_1B_1$  ja  $OA_2B_2$  on sarnased.

$$\alpha = \frac{A\pi}{180}$$

(1)

Arvutame nurga 1' radiaanmõõdu:

$$1' = \frac{1}{60} \text{ (kraadi)} = \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180} \text{ (radiaani)} = 0,00029088 \dots$$

(radiaani).

Mõningate sageli esinevate nurkade radiaanmõõdud on antud järgmises tabelis:

Kraadid	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radiaanid	$\frac{\pi}{6} \approx$ $\approx 0,5236$	$\frac{\pi}{4} \approx$ $\approx 0,7854$	$\frac{\pi}{3} \approx$ $\approx 1,0472$	$\frac{\pi}{2} \approx$ $\approx 1,5708$	$\pi \approx$ $\approx 3,1416$	$\frac{3\pi}{2} \approx$ $\approx 4,7124$	$2\pi \approx$ $\approx 6,2832$

Üleminek radiaanmõõdult kraadimõõdule. Võrdusest (1) järeldub, et nurk, mis võrdub  $\alpha$  radiaaniga, sisaldab

$$A^\circ = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi}$$

Eriti saame siit:

$$1 \text{ radiaan} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,295 \text{ (kraadi)} \approx 3438' \approx 206265'' = 57^\circ 17' 45''$$

**Näide.** Kahe radiaani suuruse nurga kraadimõõt (minutilise täpsusega) on

$$\frac{2 \cdot 180^\circ}{\pi} = 2 \cdot (57^\circ 17' 45'') \approx 114^\circ 36'$$

(sekundid jätame ära ümardamise reeglite kohaselt).

Mingi suuruse mõõtmise tulemusel saadud arvule tuleb reegli kohaselt lisada mõõtühiku nimetus, näiteks 5 km, 10 rbl., 7° jne. Nurkade ja kaartide radiaanmõõdu puhul tehakse aga tavaliselt erand: *nurga (või kaare) suurus radiaanides kirjutatakse nimeta arvuna*. Sõnade «nurk, mille mõõtary on  $\alpha$ » asemel öeldakse lühidalt «nurk  $\alpha$ ». Nii näiteks öeldakse «nurk 0,5», selle asemel, et ütelda «nurk, mille suurus on 0,5 radiaani».

Uleminekuks kraadimõõdult radiaanmõõdule võib kasutada vastavaid tabelleid. V. Bradise neljakohalistes matemaatilistes tabelites keskkoolidele, tabelis XVI, on antud 0 ja  $90^\circ$  vahel asetsevate nurkade radiaanmõõdu väärtused iga 6 minuti tagant. Need väärtused on arvutatud ligikaudselt, täpsusega kuni neljanda kümnendkohani.

Näiteid. 1) Leida nurga  $130^\circ 26'$  radiaanmõõd  $\alpha$ .

Lahendus. Antud nurk koosneb nurgast  $90^\circ$  ja nurgast  $40^\circ 26'$ . Tabelist leiame nurkade  $90^\circ$  ja  $40^\circ 24'$  radiaanmõõdu; tabeli parempoolsest servast leiame  $2'$  jaoks paranduse, mis tuleb liita viimasele kümnendkohale:

$$\begin{array}{r} 90^\circ \quad -1,5708 \\ 40^\circ 24' -0,7051 \\ \quad 2' \quad - \quad 6 \\ \hline \alpha = 2,2765. \end{array}$$

2. Leida (täpsusega  $1^\circ$ ) sellise nurga kraadimõõd, mis (ligikaudu) võrdub 1,25 radiaaniga.

Lahendus. V. Bradise tabelis (lk. 48) leiame, et arvule 1,2500 lähim arv on 1,2497, millele vastab nurk  $71^\circ 36'$ .

Ümardame saadud väärtuse täpsusega  $1^\circ$ , saades (ligikaudu)  $72^\circ$ .

Teades ringjoone raadiust  $R$  ja kaare radiaanmõõtu  $\alpha$ , võib arvutada selle kaare pikkuse  $l$ . Tõepoolest, radiaanmõõdu definitsiooni kohaselt:

$$\alpha = \frac{l}{R}, \text{ kust } l = \alpha R.$$

Seega, ringjoone kaare pikkus võrdub tema radiaanmõõdu ja raadiuse korrutisega.

Näide. Ratas, mille raadius on 2,2 m, pöördus nurga  $30^\circ,5$  võrra; leida ratta põial asuva punkti poolt läbitud tee pikkus.

Lahendus. Valemi  $l = \alpha R$  kohaselt leiame tee pikkuse:

$$l \approx 2,22 \cdot 0,53 \approx 1,2.$$

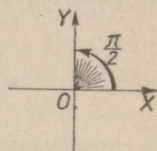
Märkus. Nurga  $30^\circ 30'$  radiaanmõõd 0,5323 on võetud V. Bradise tabelist. Kuna  $R$  ligikaudne väärtus on antud kahe tüvenumbriga, siis tuleb ka  $\alpha$  väärtus ümardada, säilitades vaid kaks tüvenumbrit:  $\alpha \approx 0,53$ .

#### § 4. Koordinaattasapind; ühikring.

Valime tasapinnal pöörlemise positiivse suuna ja koordinaatteljed. Ordinaattelje positiivne suund valitakse alati nii, et abstsissitelje positiivse kiire  $OX$  pööramisel positiivse täisnurga võrra ühtiks see ordinaattelje positiivse

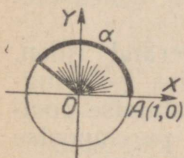
kiirega  $OY$ . Nii on joonisel 10 näidatud: pöörlemise positiivne suund — vastupidine kellaõsuti liikumise suunale, abstsissitelje positiivne suund — paremale, ordinaattelje positiivne suund — üles.

Nurki paigutatakse koordinaatasapinnale tavaliselt järgmiselt: nurga tipuks võetakse koordinaatide algus ning lähtehaaraks positiivne abstsisspooltelg. Antud arvuga mõotava nurga lõpphaara saamiseks tuleb pöörata kiirt lähteasendist  $OX$  selle arvuga mõotava nurga võrra (joon. 11).



Joon. 10.

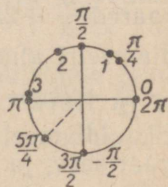
Koordinaatide algusest väljuv kiir on lõpphaaraks lõpmata tulle hulgaile nurkadele, mille lähtehaaraks on positiivne pooltelg  $OX$ ; need nurgad erinevad üksteisest täisarvu täispöorete võrra: kui  $\alpha$  on ühe niisuguse nurga suurus, siis selle hulga mistahes nurga suurus  $\beta$  väljendub arvuga  $\beta = 2k\pi + \alpha$ , kus  $k$  on mistahes täisarv, s. t.  $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Nurk  $\beta$  koosneb nurgast  $\alpha$  ja  $k$  (positiivsest või negatiivsest) täispöördest. Nii näiteks kiir, mis moodustab abstsisssteljega nurga  $30^\circ$ , on lõpphaaraks nurkadele  $30^\circ$  ( $k=0$ ),  $390^\circ$  ( $k=1$ ),  $-330^\circ$  ( $k=-1$ ),  $750^\circ$  ( $k=2$ ) jne.



Joon. 11.

**Definitsioon.** Ringi, mille keskpunkt asetseb koordinaatide alguses ja raadius võrdub ühega, nimetatakse ühikringiks ja tema ringjoont ühikringjooneks.

Iga reaalarvu  $\alpha$  võib kujutada ühikringjoone punktina. Tavaliselt kantakse selleks ühikringjoonele, alates tema horisontaaldiameetri parempoolsest otspunktist  $A(1, 0)$ , arvuga  $\alpha$  mõotuv kaar (vt. joon. 11). Kui  $\alpha$  on kaare raadiiaanmõõt, siis tuleb punktist  $A$  kanda  $\alpha > 0$  puhul positiivses suunas ja  $\alpha < 0$  puhul negatiivses suunas kaar, mille pikkus on  $|\alpha|$ ; selle kaare lõpp-punkt kujutabki arvu  $\alpha$ . Arvu null,  $\alpha = 0$ , kujutab lähte-punkt  $A(1, 0)$ .



Joon. 12.

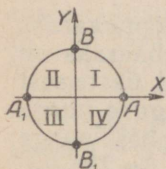
Joonisel 12 on näidatud mitmesuguseid reaalarve kujutavaid ühikringjoone punkte.

Kaks erinevat reaalarvu  $\alpha$  ja  $\beta$  kujutuvad ühe ning sama punktina ühikringjoonel siis ja ainult siis, kui nende arvudega mõõtvud kaared erinevad teineteisest täisarvu täisringjoonte võrra, s. t.  $\beta - \alpha = 2k\pi$  ehk

$$\beta = \alpha + 2k\pi,$$

kus  $k$  on (positiivne või negatiivne) täisarv.

Koordinaatteljed jaotavad tasapinna ning koos temaga ka ühikringi ja -ringjoone neljaks võrdseks osaks, milliseid nimetatakse (vastavalt tasapinna, ühikringi või -ringjoone) veeranditeks.



Joon. 13.

Kui nurga lõpphaar (või kaare lõpppunkt) asetseb tasapinna (või ühikringjoone) mingis veerandis, siis öeldakse, et antud nurk (kaar) lõpeb selles veerandis.

Ühikringjoone I ja II veerand (joon. 13) moodustavad koos ülemise poolringjoone, III ja IV veerand — alumise poolringjoone. I ja IV veerand moodustavad parempoolse ning II ja III veerand — vasakpoolse poolringjoone.

Horisontaaldiameetri parempoolses otspunktis  $A$  lõpevad kaared, mis mõõtvud arvudega  $2k\pi$  (ehk kraadides  $360^\circ \cdot k$ ), aga selle diameetri vasakpoolses otspunktis  $A_1$  kaared, mis mõõtvud arvudega  $\pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$  [ehk kraadides  $(2k+1) \cdot 180^\circ$ ], kus  $k$  on mistahes täisarv.

Kaared  $n\pi$  ehk  $180^\circ \cdot n$  (kus  $n$  on täisarv) lõpevad horisontaaldiameetri otspunktides: paarisarvulise  $n=2k$  puhul punktis  $A$  ja paarituarvulise  $n=2k+1$  puhul punktis  $A_1$ .

Vertikaaldiameetri ülemises otspunktis  $B(0, 1)$  lõpevad kaared  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  (ehk kraadides  $90^\circ + 360^\circ \cdot k$ ). Vertikaaldiameetri alumises otspunktis  $B_1(0, -1)$  lõpevad kaared  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + (2k-1)\pi$ . Kaared  $\frac{\pi}{2} + n\pi$  lõpevad vertikaaldiameetri otspunktides: punktis  $B$ , kui  $n=2k$  on paarisarv, ja punktis  $B_1$ , kui  $n=2k-1$  on paaritu arv.

Kaared  $k \frac{\pi}{2}$  (ehk  $90^\circ \cdot k$ ) lõpevad kas horisontaal- või

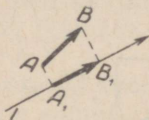
vertikaaldiaameetri otspunktides. Kui  $k=0, 1, 2, 3, 4, \dots$ , siis saame järjekorras punktid  $A, B, A_1, B_1, A, \dots$ ;  $k=-1, -2, -3, -4, \dots$  puhul saame aga järjekorras punktid  $B_1, A_1, B, A, \dots$ .

### § 5. Vektori projektsioon teljel\*.

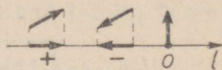
Vektoriks nimetatakse suunatud sirglõiku (joon. 14). Vektori tähistamisel kirjutatakse esimesele kohale tema lähte- ja teisele kohale lõpp-punkt. Vektorit  $\overline{AB}$  võib vaadelda kui lähteasendist  $A$  sirgjooneliselt lõppasendisse  $B$  liikunud punkti poolt läbitud teed. Paljud füüsikalised suurused, nagu näiteks jõud, kiirused, kiirendused jne., on vektoriaalsed; neid suurusi kujutatakse suunatud sirglõikudega.



Joon. 14.



Joon. 15.



Joon. 16.

**Definitsioon.** Vektori  $\overline{AB}$  projektsiooniks teljel  $l$  nimetatakse niisuguse sirglõigu  $A_1B_1$  pikkust, mis ühendab vektori  $\overline{AB}$  lähte- ja lõpp-punkti projektsioone teljel  $l$  (joon. 15).

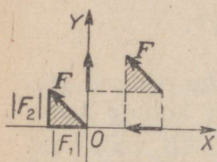
Projektsiooni loetakse positiivseks (või negatiivseks), kui lõigu  $A_1B_1$  suund ühtib (või on vastupidine) telje  $l$  positiivse suunaga. Kui vektor on teljega  $l$  risti, siis tema projektsioon sellel teljel võrdub nulliga (joon. 16). Mõnikord kasutatakse nimetust «projektsioon» mitte ainult lõigu  $A_1B_1$  pikkuse, vaid ka vektori  $\overline{A_1B_1}$  jaoks.

Olgu  $\vec{F}$  vektor koordinaatasapinnal; tähistame tema projektsioonid abstsiss- ja ordinaatteljel vastavalt  $F_1$  ja  $F_2$ , tema pikkuse aga sümbooliga  $|\vec{F}|$ .

\* Telje all mõistame sirget, millel on valitud positiivne suund ja pikkuste mõõtmiseks mõõtühik.

**Teoreem.** Vektori pikkuse ruut võrdub koordinaattelgedel võetud tema projektsioonide ruutude summaga.

**Tõestus.** Vektori paralleelsel ülekandmisel tema projektsioon teljel ei muutu (joon. 17). Kanname vektori paralleelselt üle nii, et tema lähtepunkt satuks koordinaatide algusesse. Tõmmates vektori  $\vec{F}$  lõpp-punktist ristlõigu teljele  $OX$ , saame täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuus võrdub vektori pikkusega ning kaatedid koordinaattelgedel võetud vektori projektsioonide absoluutväärtustega  $|F_1|$  ja  $|F_2|$ . Pythagorase teoreemi kohaselt.



Joon. 17.

$$|\vec{F}|^2 = |F_1|^2 + |F_2|^2.$$

Kuna arvu absoluutväärtuse ruut võrdub selle arvu ruuduga, siis võime absoluutväärtuse märgid võrduse paremal poolel ära jätta. Nii saamegi nõutud võrduse

$$\boxed{|\vec{F}|^2 = F_1^2 + F_2^2}, \text{ m. o. t. t.}$$

**Märkus.** Kui vektor  $\vec{F}$  asetseb ühel koordinaatteljel, siis kolmnurk muutub sirglõiguks, kuid ka sel juhul on teoreem kehtiv. Näiteks kui vektor asetseb abstsissisteljel, siis  $F_2 = 0$  ja  $|\vec{F}| = F_1$ ; sama tulemuse saame ka leitud valemist:

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{F_1^2} = |F_1|.$$

## § 6. Kaugus kahe punkti vahel koordinaattasapinnal.

**Teoreem.** Koordinaattasapinnal asetseva kahe punkti  $M(x_1, y_1)$  ja  $N(x_2, y_2)$  vahelise kauguse  $d$  ruut võrdub nende punktide samanimeliste koordinaatide vahede ruutude summaga:

$$\boxed{d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**Tõestus.** Vaatleme koordinaattasapinnal vektorit, mille lähte- ja lõpp-punktiks on antud punktid  $M$  ja  $N$  (joon. 18). Vektori  $\vec{MN}$  projektsioon abstsissisteljel võrdub

teljel  $OX$  asetseva (suunatud) lõigu  $M_1N_1$  pikkusega. Ühel teljel asetsevate suunaga lõikude pikkuste liitmise reegli\* kohaselt saame:

$$OM_1 + M_1N_1 = ON_1, \text{ kust } M_1N_1 = ON_1 - OM_1.$$

Kuna

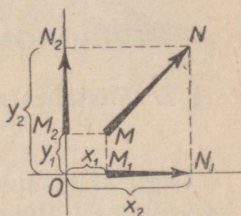
$$OM_1 = x_1 \text{ ja } ON_1 = x_2, \text{ siis } \text{pr}_x \overline{MN} = M_1N_1 = x_2 - x_1.$$

Projekteerides vektori  $\overline{MN}$  ordinaatteljel, saame täpselt samuti:

$$\text{pr}_y \overline{MN} = M_2N_2 = y_2 - y_1.$$

Kuna vektori pikkuse ruut võrdub koordinaattelgedel võetud tema projektsioonide ruutude summaga (vt. § 5), siis

$$\begin{aligned} d^2 &= (M_1N_1)^2 + (M_2N_2)^2 = \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \\ &\text{m. o. t. t.} \end{aligned}$$



Joon. 18.

**M ä r k u s.** Tõestatud valem on õige punktide  $M$  ja  $N$  igasuguse paigutuse puhul tasapinnal (mitte aga ainult siisuguse paigutuse puhul, mis on esitatud joonisel 18). Tõepoolest, teljel asetsevate suunaga lõikude pikkuste liitmise reegel, mille kohaselt me arvutasime lõikude  $M_1N_1$  ja  $M_2N_2$  pikkused, on kehtiv lõikude lähte- ja lõpp-punktide mistahes asetuse puhul (antud teljel).

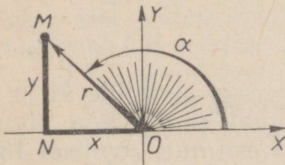
\* Selle reegli võib sõnastada näiteks järgmiselt: kui punktid  $A, B$  ja  $C$  asetsevad kõik ühel teljel, siis nende omavahelisest paiknemisest sõltumata on suunaga lõigu  $AB$  pikkus võrdne suunaga lõikude  $AC$  ja  $CB$  pikkuste summaga:  $AB = AC + CB$ . (Tõlk.)

## II peatükk.

### TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID.

#### § 7. Mistahes nurga trigonomeetriliste funktsioonide definitsioon.

Olgu  $M$  tasapinna mingi punkt, mis erineb koordinaatide algusest (joon. 19).



Joon. 19.

**Definitsioon.** Koordinaatide algust punktiga  $M$  ühendavat vektorit  $\overline{OM}$  nimetatakse punkti  $M$  raadiusvektoriks ehk liikuvaks raadiuseks.

Tähistame liikuva raadiuse  $\overline{OM}$  pikkuse tähega  $r$  ning tema lõpp-punkti abstsissi ja ordinaadi vastavalt  $x$ -ga ja  $y$ -ga.

**Teoreem.** Kui liikuv raadius  $\overline{OM}$  moodustab abstsiss-teljega antud nurga, siis suhted

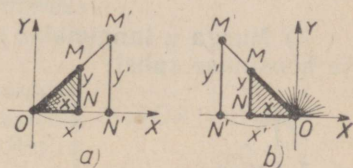
$$\frac{x}{r} \text{ ja } \frac{y}{r} \quad (1)$$

ei sõltu raadiusvektori  $OM$  pikkusest.

**Tõestus.** Kanname antud nurga  $\alpha$  koordinaattasapinnale nii, et lähtehaaraks oleks positiivne abstsisspooltelg. Valime nurga  $\alpha$  lõpphaaral meelevaldselt kaks teineteisest ning koordinaatide algusest erinevat punkti  $M$  ja  $M'$ . Näitame, et raadiusvektorite  $\overline{OM}$  ja  $\overline{OM'}$  jaoks moodustatud vastavad suhted (1) on omavahel võrdsed. Projekteerides punktid  $M$  ja  $M'$  abstsiss-teljel (joon. 20,  $a$  ja  $b$ ), saame kaks sarnast kolmnurka  $OMN$  ja  $OM'N'$ . Kolmnurga  $OMN$  kaatetite pikkused võrduvad punkti  $M$  koordinaatide absoluutväärtustega  $|x|$  ja  $|y|$ , hüpotenuusi pikkus

on aga  $r$ . Kolmnurga  $OM'N'$  kaatetite ja hüpoteenuusi pikkused on vastavalt  $|x'|$ ,  $|y'|$  ja  $r'$ . Kolmnurkade  $OMN$  ja  $OM'N'$  sarnasusest järeldub, et  $\frac{|x|}{r} = \frac{|x'|}{r'}$  (vastavate külgede suhted on võrdsed).

Suhted  $\frac{x}{r}$  ja  $\frac{x'}{r'}$  on ka ühesuguse märgiga. Tõepoolest, lõigud  $ON$  ja  $ON'$  on samasuunaliste raadiusvektorite  $\overline{OM}$  ja  $\overline{OM'}$  projektsioonid. Järelikult on ka nemad samasuunalised ning nende pikkused  $x$  ja  $x'$  samamärgilised (joonisel 20a on  $x$  ja  $x'$  positiivsed, joonisel 20b aga negatiivsed). Järelikult,



Joon. 20.

$$\frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}$$

Samuti tõestatakse suhete  $\frac{y}{r}$  ja  $\frac{y'}{r'}$  võrdsus (projekteerides punktid  $M$  ja  $M'$  teljel  $OY$ ), millega teoreem ongi tõestatud.

Märkus. Kui nurga  $\alpha$  lõpphaar on suunatud mööda üht koordinaattelge, siis kolmnurgad  $OMN$  ja  $OM'N'$  muutuvad lõikudeks, kuid teoreem on õige ka sellel juhul. Näiteks kui nurga lõpphaar on suunatud mööda positiivset abstsisspooltelge, siis  $\frac{x}{r} = 1$  ning  $\frac{y}{r} = 0$ ; kui aga lõpphaar on suunatud mööda negatiivset abstsisspooltelge, siis  $\frac{x}{r} = -1$  ning  $\frac{y}{r} = 0$ .

**Definitsioon.** 1) nurga  $\alpha$  koosinuseks nimetatakse abstsisssteljega nurka  $\alpha$  moodustava liikuva raadiuse lõpppunkti abstsissi ja selle raadiuse pikkuse suhet:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

2) Nurga  $\alpha$  siinuseks nimetatakse abstsisssteljega nurka

$\alpha$  moodustava liikuva raadiuse lõpp-punkti ordinaadi ja selle raadiuse pikkuse suhet:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

3) Nurga  $\alpha$  tangensiks nimetatakse selle nurga siinuse ja koosinuse suhet:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

4) Nurga  $\alpha$  kootangensiks nimetatakse selle nurga koosinuse ja siinuse suhet:

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Suhete  $\cos \alpha$ ,  $\sin \alpha$ ,  $\tan \alpha$  ja  $\cot \alpha$  väärtused ei sõltu liikuva raadiuse pikkusest.

Tangensi ja kootangensi definitsioonist järeldub, et nurga  $\alpha$  tangens võrdub abstsisssteljega nurka  $\alpha$  moodustava liikuva raadiuse lõpp-punkti ordinaadi ja abstsissi suhtega ning kootangens võrdub selle liikuva raadiuse lõpp-punkti abstsissi ja ordinaadi suhtega:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} \quad \text{ja} \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{x}{y}.$$

Suhete  $\tan \alpha = \frac{y}{x}$  saab moodustada siis, kui  $x \neq 0$ . Kui aga  $x = 0$ , siis antud suhet moodustada ei saa (nulliga ei saa jagada); sel juhul nurga lõpphaar on suunatud mööda ordinaattelge ja  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ehk kraadides  $90^\circ + 180^\circ \cdot k$  (kus  $k$  on mistahes täisarv). Järelikult  $\tan \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$  ei eksisteeri.

Nurkade  $k\pi$  (ehk kraadides  $180^\circ \cdot k$ ) lõpphaar on suunatud mööda abstsissstelge ning suhe  $\frac{x}{y}$  kaotab mõtte, sest  $y = 0$ . Need nurgad ei oma kootangensit.

Igale nurgale  $\alpha$  vastavad suhete

$$\cos \alpha, \sin \alpha, \tan \alpha \text{ ja } \cot \alpha$$

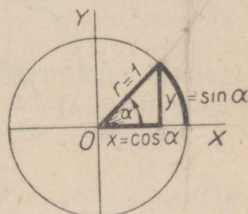
kindlad väärtused (kui need suhted vaid omavad mõtte). Seega need suhted on nurga  $\alpha$  funktsioonid. Neid funktsioone nimetatakse trigonomeetrilisteks funktsioonideks; nurk  $\alpha$  on nende argument.

Peale nimetatud nelja funktsiooni võetakse mõnikord vaatluse alla veel kaks trigonomeetrilist funktsiooni — seekans ja koosseekans:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{r}{x}$$

ja

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{r}{y}$$



Joon. 21.

Need kaks funktsiooni ei oma aga laiemat rakendamist.

Kuna trigonomeetriliste funktsioonide väärtused ei sõltu liikuva raadiuse pikkusest, siis võime selle raadiuse valida alati ühe ning sama pikkusega. Tavaliselt valitakse  $r=1$ ; siis liikuva raadiuse lõpp-punkt asetseb ühikringjoonel ja nurga moodustavad selle ringjoone kaks raadiust (joon. 21). Sel juhul

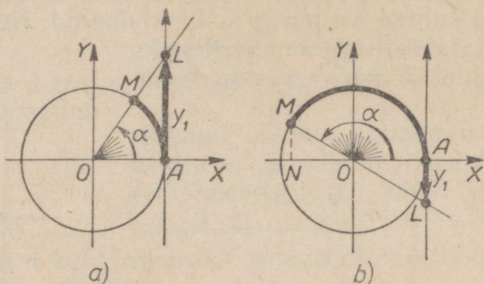
$$\cos \alpha = x, \sin \alpha = y, \tan \alpha = \frac{y}{x}, \cot \alpha = \frac{x}{y}$$

Seega, nurga  $\alpha$  koosinus ja siinus võrduvad ühikringjoone niisuguse liikuva raadiuse lõpp-punkti abstsissi ja ordinaadiga, mis lähteraadiusega moodustab nurga  $\alpha$ ; selle nurga tangens ja kootangens võrduvad aga vastavalt liikuva raadiuse lõpp-punkti ordinaadi ning abstsissi ja abstsissi ning ordinaadi suhetega.

Trigonomeetriliste funktsioonide argumentiks võib lugeda mitte ainult nurka, vaid ka ühikringjoone kaart. Antud kaare puhul võib konstrueerida vastava punkti ühikringjoonel (s. t. liikuva raadiuse lõpp-punkti) ja leida trigonomeetriliste funktsioonide väärtused.

Ühikringjoone puutujat horisontaaldiameetri otspunktis  $A(1,0)$  nimetatakse tangensiteljeks. Positiivne suund tan-

gensteljel valitakse samasugune nagu ordinaatteljel (joonis 22, alt üles.) Olgu  $M$  nurgale  $\alpha$  vastav ühikringjoone punkt. Jätkates raadiust  $OM$  kuni lõikumiseni tangenstel-

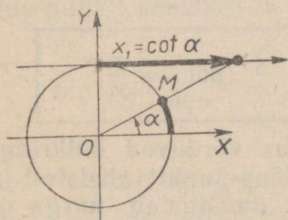


Joon. 22.

jega, saame sel teljel punkti  $L$  (seda konstruktsiooni ei saa teostada siis, kui punkt  $M$  asetseb ordinaatteljel).

**Nurga  $\alpha$  tangens võrdub tangenstelje vastava punkti ordinaadiga.**

Tõepoolest, kui nurk  $\alpha$  lõpeb parempoolses pooltasandis, siis, võttes  $\overline{OL}$  liikuvaks raadiuseks, saame



Joon. 23.

$$\tan \alpha = \frac{AL}{OA} = \frac{AL}{1} = y_1,$$

kus  $y_1$  on punkti  $L$  ordinaat (joon. 22a).

Kui nurk  $\alpha$  lõpeb vasakpoolses pooltasandis (joon. 22b), siis punktide  $M$  ja  $L$  samanimelised koordinaadid on vastandmargilised, ordinaadi ja abstsissi suhe on aga mõlema punkti puhul ühesugune (kolmnurgad  $ONM$  ja  $OAL$  on sarnased):

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{NM}{ON} = \frac{AL}{OA} = \frac{y_1}{1} = y_1.$$

Märkus. Kui punkt  $M$  asetseb ordinaatteljel, siis punkt  $L$  ega ka  $\tan \alpha$  ei eksisteeri.

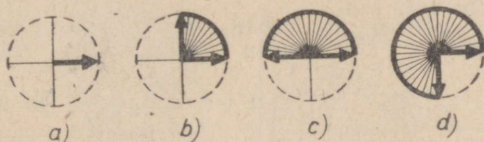
*Kootangensteljeks nimetatakse ühikringjoone puutujat*

vertikaaldiameetri otspunktis  $B(0, 1)$ . Positiivne suund sellel teljel valitakse samasugune nagu abstsisssteljel.

Nurga  $\alpha$  kootangens on kootangenstelje vastava punkti abstsiss  $x$  (joon. 23).

### § 8. Trigonomeetriliste funktsioonide väärtused mõnede nurkade puhul.

Kui nurk  $\alpha=0$  (joon. 24), siis ühikringjoone liikuva raadiuse lõpp-punkti koordinaadid on  $x=1$ ,  $y=0$  ning seega  $\cos 0=1$ ,  $\sin 0=0$ ,  $\tan 0=\frac{y}{x}=0$ , kuid  $\cot 0$  ei eksisteeri.



Joon. 24.

Kui nurk  $\alpha=\frac{\pi}{2}$  (ehk kraadides  $\alpha=90^\circ$ ), siis liikuva raadiuse lõpp-punkti koordinaadid on  $x=0$ ,  $y=1$  (joon. 24b) ja seega  $\cos \frac{\pi}{2}=\cos 90^\circ=0$ ,  $\sin \frac{\pi}{2}=\sin 90^\circ=1$ ,  $\tan \frac{\pi}{2}=\tan 90^\circ$  ei eksisteeri,  $\cot \frac{\pi}{2}=\cot 90^\circ=0$ .

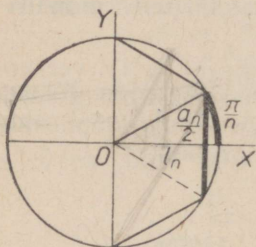
Kui  $\alpha=\pi$  (joon. 24c), siis  $x=-1$ ,  $y=0$  ja seega  $\cos \pi=\cos 180^\circ=-1$ ,  $\sin \pi=\sin 180^\circ=0$ ,  $\tan \pi=\tan 180^\circ=0$ ,  $\cot \pi=\cot 180^\circ$  ei eksisteeri.

Kui  $\alpha=\frac{3}{2}\pi$  (joon. 24d), siis  $x=0$ ,  $y=-1$  ja seega  $\cos \frac{3}{2}\pi=\cos 270^\circ=0$ ,  $\sin \frac{3}{2}\pi=\sin 270^\circ=-1$ ,  $\tan \frac{3}{2}\pi=\tan 270^\circ$  ei eksisteeri,  $\cot \frac{3}{2}\pi=\cot 270^\circ=0$ .

Olgu  $a_n$  ühikringi korrapärase kõõl- $n$ -nurga külj ja  $l_n$  tema apoteem. Paigutame  $n$ -nurga nii, et positiivne abstsisspooltelg poolitaks tema ühe külje. Jooniselt 25 leiame siis:

$$\cos \frac{\pi}{n} = \cos \frac{180^\circ}{n} = l_n \text{ ja } \sin \frac{\pi}{n} = \sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{a_n}{2}$$

Kui  $n=3$ , siis saame kõõlkolmnurga (joon. 26a). Geomeetriast on teada, et  $a_3 = \sqrt{3}$  ja  $l_3 = \frac{1}{2}$ ; järelikult



Joon. 25.

$$\cos \frac{\pi}{3} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \tan 60^\circ = \sqrt{3};$$

$$\cot \frac{\pi}{3} = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Kui  $n=4$ , siis saame kõõlruudu (joon. 26b), mille puhul

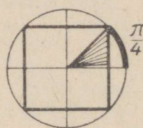
$$a_4 = \sqrt{2}, l_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ja seega}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin \frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = \tan 45^\circ = 1; \cot \frac{\pi}{4} = \cot 45^\circ = 1.$$



a)



b)



c)

Joon. 26.

Kui  $n=6$ , siis saame kõõlkuusnurga (joon. 26c), mille puhul  $a_6 = 1$ ,  $l_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ja seega

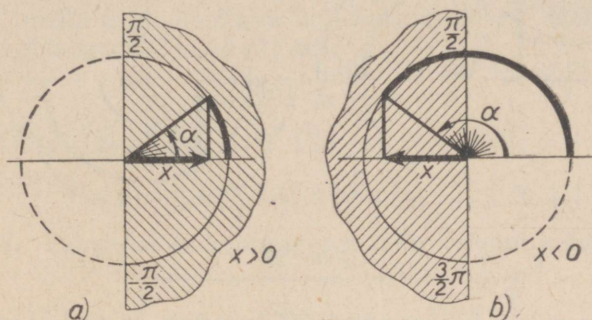
$$\cos \frac{\pi}{6} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sin \frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\tan \frac{\pi}{6} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cot \frac{\pi}{6} = \cot 30^\circ = \sqrt{3}.$$

## § 9. Trigonomeetriliste funktsioonide märgid.

Kuna  $\cos \alpha$  on ühikringi selle raadiuse lõpp-punkti abstsiss, mis moodustab teljega  $OX$  nurga  $\alpha$ , siis koosinuse väärtused on positiivsed (negatiivsed) nendes veerandites lõppevate nurkade puhul, milles punktide abstsissid on positiivsed (negatiivsed).

Järelikult, parempoolses pooltasandis (I ja IV veerandis) lõppevate nurkade (kaarte) koosinused on positiivsed; vasakpoolses pooltasandis (II ja III veerandis) lõppevate nurkade koosinused on negatiivsed (joon. 27).



Joon. 27.

Eriti on  $-\frac{\pi}{2}$  ja  $\frac{\pi}{2}$  vahel asetsevate nurkade, s. t.  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  (ehk kraadides  $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ ), puhul  $\cos \alpha > 0$ . Nurkade puhul, mis asetsevad  $\frac{\pi}{2}$  ja  $\frac{3}{2}\pi$  vahel, s. t. kui  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ , on  $\cos \alpha < 0$ .

Kuna  $\sin \alpha$  on ühikringi selle raadiuse lõpp-punkti ordinaat, mis moodustab teljega  $OY$  nurga  $\alpha$ , siis on siinuse väärtused positiivsed (negatiivsed) nendes veerandites lõppevate nurkade puhul, milles punktide ordinaadid on positiivsed (negatiivsed).

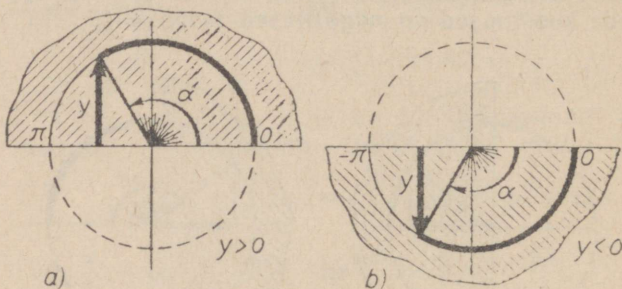
Järelikult, ülemises pooltasandis (I ja II veerandis) lõppevate nurkade (kaarte) siinused on positiivsed; alumises

ses pooltasandis (III ja IV veerandis) lõppevate nurkade siinused on negatiivsed (joon. 28).

Eriti on 0 ja  $\pi$  vahel asetsevate nurkade, s. t.  $0 < \alpha < \pi$  (ehk kraadides  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ) puhul  $\sin \alpha > 0$ . Nurkade puhul, mis asetsevad  $-\pi$  ja 0 vahel, s. t. kui  $-\pi < \alpha < 0$ , on  $\sin \alpha < 0$ .

Kuna  $\tan \alpha$  ja  $\cot \alpha$  on liikuva raadiuse lõpp-punkti koordinaatide suhted,

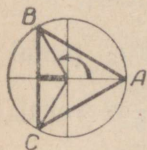
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x}; \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x}{y},$$



Joon. 28.

siis tangensi ja kootangensi väärtused on positiivsed (negatiivsed) nendes veerandites lõppevate nurkade puhul, millede punktide koordinaadid on ühesuguste (vastupidiste) märkidega.

Järelikult, I ja III veerandis lõppevate nurkade tangensid ja kootangensid on positiivsed, II ja IV veerandis lõppevate nurkade tangensid ja kootangensid aga negatiivsed.



Joon. 29.

Näide. Vaadeldes joonisel 29 näidatud viisil paigutatud võrdkülgse kolmnurga tippu B ja C, saame:

$$\cos \frac{2}{3}\pi = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}; \quad \sin \frac{2}{3}\pi = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\tan \frac{2}{3}\pi = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}.$$

$$\cos \frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}; \quad \sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \tan \frac{4}{3}\pi = \sqrt{3}.$$

## § 10. Trigonomeetrilised põhisamused ja järeldusi nendest.

Leiame põhiseosed, mis ühendavad nelja trigonomeetrilise funktsiooni väärtusi argumendi antud väärtuse puhul.

I. Ühe ning sama argumendi koosinuse ja siinuse ruutude summa võrdub ühega:

$$\boxed{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1} \quad (I)$$

Tõestus. Olgu  $\alpha$  mistahes nurk (kaar). Abstsisssteljega nurka  $\alpha$  moodustava ühikringi raadiuse  $OM$  projektsioonid telgedel  $OX$  ja  $OY$  on

$$x = \cos \alpha \text{ ja } y = \sin \alpha.$$

Kuna  $OM$  pikkus on 1, siis (vt. joon. 20):

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ ehk } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \text{ m. o. t. t.}$$

II. Tangensi ja kootangensi definitsiooni kohaselt:

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} \quad (II)$$

Järeldusi. Korrutades samasused (II) liikmeti, saame samasuse

$$\boxed{\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1} \quad (III)$$

Jagades samasuse (I) liikmeti kord suurusega  $\cos^2 \alpha$ , kord suurusega  $\sin^2 \alpha$ , saame samasused:

$$1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ ja } \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

ehk

$$\boxed{1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}} \text{ ja } \boxed{1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}} \quad (IV)$$

Teisiti võib neid samasusi kirjutada kujul

$$\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha \quad \text{ja} \quad \operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha.$$

**Selgitus.** Iga trigonomeetriline samasus on võrdus, mis kehtib argumenti  $\alpha$  kõigi lubatavate väärtuste puhul, s. t. argumenti kõigi nende väärtuste puhul, millede korral nii võrduse vasak kui ka parem pool omavad mõtte. Nii näiteks võrdus  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$  kehtib  $\alpha$  kõigi väärtuste puhul, millede korral  $\tan \alpha$  ja  $\cot \alpha$  omavad mõtte, s. t.  $\alpha$  kõigi väärtuste puhul, välja arvatud nurgad (kaared)  $k \frac{\pi}{2}$ , mis lõpevad kas horisontaal- või vertikaaldiameetri otspunktides (nurkade  $k \frac{\pi}{2}$  puhul kas tangens või kootangens kaotab mõtte).

Trigonomeetrilised põhisamasused võimaldavad teostada trigonomeetrilisi funktsioone sisaldavate avaldiste samasusteisendusi ja tõestada mitmesuguseid uusi trigonomeetrilisi samasusi. Selleks kasutatakse üldisi reegleid tehete kohta algebraliste avaldistega, trigonomeetrilisi põhisamasusi ja järeldusi nendest.

**Näiteid.** 1) Tõestada samasus:

$$\frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1}.$$

**Tõestus.** Teisendame tõestatava samasuse vasakut poolt, asendades lugejas 1 summaga  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ . Saame:

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} &= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Jagame lugeja ja nimetaja suurusega  $\cos \alpha$ :

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1}.$$

Seega saime sama avaldise, mis asetseb tõestatava samasuse paremal poolel. Seda aga oligi tarvis tõestada.

2) Lihtsustada avaldis:

$$P = \sqrt{\frac{2}{1 + \sin \alpha} + \frac{2}{1 - \sin \alpha}}.$$

L a h e n d u s. Teostame teisendused:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\frac{2}{1+\sin \alpha} + \frac{2}{1-\sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2(1-\sin \alpha) + 2(1+\sin \alpha)}{1-\sin^2 \alpha}} = \\ &= \sqrt{\frac{4}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} = \frac{2}{|\cos \alpha|}. \end{aligned}$$

Järelikult  $P = \frac{2}{\cos \alpha}$ , kui  $\cos \alpha > 0$ , s. t. kui nurk  $\alpha$  lõpeb parempoolses pooltasandis, ja  $P = -\frac{2}{\cos \alpha}$ , kui  $\cos \alpha < 0$ , s. t. kui nurk  $\alpha$  lõpeb vasakpoolses pooltasandis.

### § 11. Trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste arvutamine, kui on teada mingi ühe trigonomeetrilise funktsiooni väärtus.

Trigonomeetriliste põhisamasuste abil saab iga trigonomeetrilise funktsiooni avaldada sama argumendi mis tahes teise trigonomeetrilise funktsiooni kaudu.

Trigonomeetriliste funktsioonide avaldised koosinuse kaudu. Samasusest (I) saab avaldada siinuse koosinuse kaudu:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

Asendades  $\sin \alpha$  jaoks saadud avaldise samasustesse (II), saame tangensi ja kootangensi avaldised koosinuse kaudu:

$$\tan \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}; \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}.$$

Trigonomeetriliste funktsioonide avaldised siinuse kaudu. Samasustest (I) ja (II) saame (samuti nagu eelmisel juhul):

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}; \quad \tan \alpha = \pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}; \\ \cot \alpha &= \pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Trigonomeetriliste funktsioonide avaldised tangensi kaudu. Samasustest (IV) ja (II) (esimestest) saame:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}; \quad \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Neist võrdustest ja samasusest (III) järeldub

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}; \quad \sin \alpha = \pm \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}; \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Trigonomeetriliste funktsioonide avaldised kootangensi kaudu. Samasustest (IV), (II) ja (III) leiame:

$$\cos \alpha = \pm \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}; \quad \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}; \quad \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}.$$

*Teades ühe trigonomeetrilise funktsiooni väärtust, võimaldavad saadud valemid arvutada ülejäänud trigonomeetriliste funktsioonide väärtused argumendi sama väärtuse puhul.*

Juuri sisaldavates valemites tuleb märk + või - panna sõltuvalt sellest, missuguses veerandis lõpeb nurk (kaar)  $\alpha$ .

**Näide.** On antud  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ; arvutada teiste trigonomeetriliste funktsioonide väärtused, kui  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

**Lahendus.** Nurk  $\alpha$  lõpeb II veerandis, kus koosinus, tangens ja kootangens on negatiivsed. Seega

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5};$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}; \quad \cot \alpha = -\frac{4}{3}.$$

## § 12. Trigonomeetrilised funktsioonid kui paaritud või paarifunktsioonid.

Funktsiooni nimetatakse paarifunktsiooniks, kui tema väärtus  $y$  ei muutu argumendi mistahes väärtuse  $x$  asendamisel vastand arvuga  $(-x)$ . Paarifunktsioon on näiteks  $y = x^2$ , sest

$$(-x)^2 = x^2 = y.$$

Funktsiooni nimetatakse paarituks, kui tema väärtus  $y$  asendub vastand arvuga  $(-y)$  argumendi mistahes väärtuse  $x$  asendamisel vastand arvuga  $(-x)$ . Paaritu funktsioon on näiteks  $y = x^3$ , sest

$$(-x)^3 = -x^3 = -y.$$

Näitena funktsioonist, mis pole ei paaris ega paaritu, võib tuua funktsiooni  $x^2+x$ . Tõepoolest,  $x$  asendamisel vastand arvuga  $(-x)$  saame:

$$(-x)^2 + (-x) = x^2 - x,$$

millega aga ( $x \neq 0$  puhul) ei võrdu ei  $x^2+x$  ega ka  $-(x^2+x)$ .

**Teoreem. Koosinus on paarisfunktsioon:**

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

siinus, tangens ja kootangens on paaritud funktsioonid:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha; \quad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha; \\ \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

Lühidalt võib seda teoreemi sõnastada ka järgmiselt: koosinuse argumendi ees võib jätta miinusemärgi kirjutamata; siinuse, tangensi ja kootangensi argumendi eest võib miinusemärgi tuua funktsiooni sümboli ette.

**Tõestus.** Olgu  $\alpha$  antud nurk; vaatleme nurka  $(-\alpha)$ . Vastandnurgad  $\alpha$  ja  $(-\alpha)$  moodustatakse liikuva raadiuse ühesuguse pööramisega ühisest lähteasendist  $OA$  vastupidistes suundades. Seetõttu on nende nurkade lõpphaarad  $OM$  ja  $ON$  sümmeetrilised abstsissitelje suhtes (joon. 30). Järelikult on punktide  $M$  ja  $N$  abstsissid võrdsed, ordinaadid aga vastand arvud. Võrreldes punkti  $M(x, y)$  koordinaate:

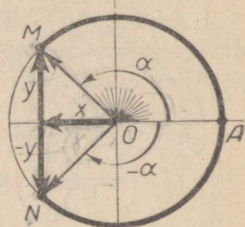
$$x = \cos \alpha \text{ ja } y = \sin \alpha,$$

punkti  $N(x, -y)$  koordinaatidega:

$$x = \cos(-\alpha) \text{ ja } -y = \sin(-\alpha),$$

saame:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha; \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$



Joon. 30.

Edasi leiame

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha;$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\cot \alpha, \text{ m. o. t. t.}$$

Näiteid.

$$1) \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3};$$

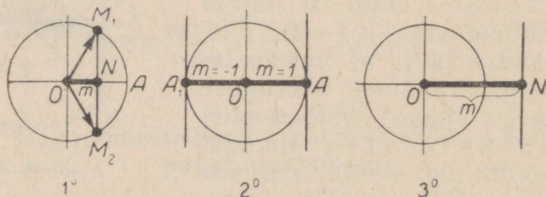
$$2) \cos(-135^\circ) = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin(-135^\circ) = -\sin 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tan(-135^\circ) = -\tan 135^\circ = 1; \quad \cot(-135^\circ) = -\cot 135^\circ = 1.$$

### § 13. Nurga konstrueerimine tema trigonomeetrilise funktsiooni antud väärtuse järgi.

**Ülesanne I.** On antud arv  $m$ ; konstrueerida nurk (kaar)  $\alpha$ , mille koosinus on  $m$ .

L a h e n d u s. Konstrueerime teljel  $OX$  punkti  $N$  abstsissiga  $x=m$  ja joonestame läbi selle punkti teljega  $OY$  paralleelse sirge.



Joon. 31.

Võivad esineda järgmised juhtumid (joon. 31):

**Juhtum 1°.**  $|m| < 1$  puhul punkt  $N(m, 0)$  asetseb ühikringi sees. Teljega  $OY$  paralleelne sirge lõikub ühikringjoonega k a h e s erinevas punktis, milledest üks punkt  $M_1$  asetseb ü l e m i s e s, teine punkt  $M_2$  aga a l u m i s e s pooltasandis. Iga niisuguse haaraga  $OM_1$  või haaraga  $OM_2$  lõppeva nurga  $\alpha$  koosinus on  $m$ :

$$\cos \alpha = m.$$

Juhtum 2°.  $m = \pm 1$  puhul punkt  $N(m, 0)$  ühtib horisontaaldiameetri ühe otspunktiga ning ordinaatteljega paralleelne sirge puudutab ühikringjoont (joon. 31, 2°). Otsitava nurga lõpphaaraks saab olla ainult kas  $OA$  (kui  $m = 1$ ) või  $OA_1$  (kui  $m = -1$ ). Vastavalt  $\alpha = 2k\pi$  (kui  $m = 1$ ) või  $\alpha = (2k+1)\pi$  (kui  $m = -1$ ), kus  $k$  on mistahes täisarv:  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Juhtum 3°.  $|m| > 1$  puhul punkt  $N(m, 0)$  asetseb väljaspool ühikringi ja ordinaatteljega paralleelne sirge, mis läbib punkti  $N$ , ei lõiku ühikringjoonega. Seega pole olemas nurki, mille koosinus on  $m$ .

Väikseim mittenegatiivne nurk (kaar)  $\alpha_0$  kõigi nende hulgest, mille koosinus on  $m$  (kus  $|m| \leq 1$ ), asetseb  $0$  ja  $\pi$  vahel (ülemises pooltasandis). Seda nurka (kaart) nimetatakse arkuskoosinus  $m$  ja tähistatakse  $\alpha_0 = \arccos m$ .

**Definitsioon.** Arkuskoosinus  $m$  on nurk (kaar)  $0$  ja  $\pi$  vahel:

$$0 \leq \arccos m \leq \pi,$$

mille koosinus on  $m$ .

Kui  $|m| > 1$ , siis kirjutus  $\arccos m$  ei oma mõtet, sest pole olemas nurki, mille koosinus oleks  $m$ .

Näiteid. 1)  $\arccos 1 = 0$ ;

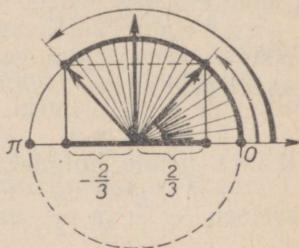
$$\arccos(-1) = \pi; \arccos 0 = \frac{\pi}{2};$$

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}; \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi;$$

$\arccos 5$  ei oma mõtet.

2) Joonisel 32 on näidatud nur-

$$\arccos \frac{2}{3} \text{ ja } \arccos\left(-\frac{2}{3}\right).$$



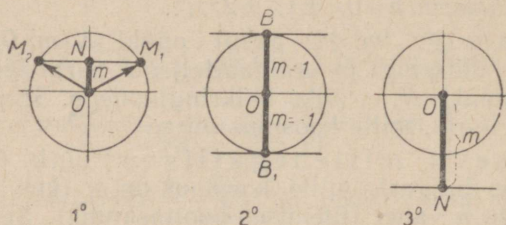
Joon. 32.

**Ülesanne II.** On antud arv  $m$ ; konstrueerida nurk  $\alpha$ , mille siinus on  $m$ .

Lahendus on analoogiline eelmise ülesande lahendusega: ordinaatteljel konstrueerime punkti  $N(0, m)$  ja läbi selle abstsisseljega paralleelse sirge (joon. 33).

\* Esimesed kolm tähte  $\arccos$  on ladinakeelse sõna  $arcus =$  kaar lühendus.

Juhtum 1°  $|m| < 1$  puhul teljega  $OX$  paralleelne sirge lõikub ühikringjoonega kahes punktis, milledest üks punkt  $M_1$  asetseb parempoolses, teine punkt  $M_2$  aga vasakpoolses pooltasandis. Raadiusvektorid  $\overline{OM_1}$  ja  $\overline{OM_2}$  annavad otsitavate nurkade lõpphaara kaks erinevat asendit.



Joon. 33.

Juhtum 2°.  $m = \pm 1$  puhul saab nurga  $\alpha$  lõpphaaraks olla ainult kas  $OB$  (kui  $m = 1$ ) või  $OB_1$  (kui  $m = -1$ ). Vastavalt  $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  (kui  $m = 1$ ) või  $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  (kui  $m = -1$ ), kus  $k$  on mistahes täisarv.

Juhtum 3°.  $|m| > 1$  puhul ülesanne ei oma lahendit: pole olemas nurki, mille siinus oleks  $m$ .

Väikseima absoluutväärtusega nurk (kaar) nende hulgast, mille siinus on  $m$  (kus  $|m| \leq 1$ ), asetseb  $-\frac{\pi}{2}$  ja  $\frac{\pi}{2}$  vahel (parempoolses pooltasandis).

**Definitsioon.** Arkussiinus  $m$  on nurk (kaar)  $-\frac{\pi}{2}$  ja  $\frac{\pi}{2}$  vahel:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin m \leq \frac{\pi}{2},$$

mille siinus on  $m$ .

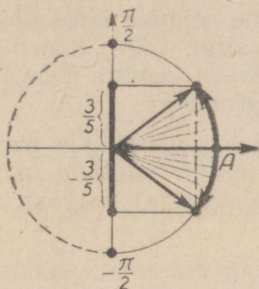
Kui  $|m| > 1$ , siis kirjutus  $\arcsin m$  ei oma mõtet.

Näiteid. 1)  $\arcsin 0 = 0$ ;  $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ ;  $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ ;

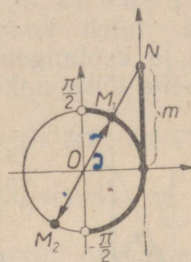
$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}; \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

2) Joonisel 34 on näidatud nurkade  $\arcsin \frac{3}{5}$  ja  $\arcsin \left(-\frac{3}{5}\right)$  konstrueerimine.

3) Leida (ligikaudselt)  $\arcsin 0,4226$ . Tabelist (vt. V. Bradise tableis tabel VIII) leiame (kraadimõõdus)  $\arcsin 0,4226 \approx 25^\circ$ .



Joon. 34.



Joon. 35.

**Ülesanne III.** On antud arv  $m$ ; konstrueerida nurk (kaar)  $\alpha$ , mille tangens on  $m$ .

Lahendus. Konstrueerime tangensteljel punkti  $N(1, m)$ , mille ordinaat on  $m$  (joon. 35). Sirge, mis ühendab punkti  $N$  koordinaatide algusega, lõikub ühikringjoo- nega kahes diametraalselt paiknevas punktis  $M_1$  ja  $M_2$ , millede raadiusvektorid annavad otsitava nurga lõpphaara kaks erinevat asendit.

Väikseima absoluutväärtusega nurk (kaar) kõigi antud tangensit omavate nurkade (kaarte) hulgast asetseb  $-\frac{\pi}{2}$  ja  $\frac{\pi}{2}$  vahel.

**Definitsioon.** Arkustangens  $m$  on nurk (kaar)  $-\frac{\pi}{2}$  ja  $\frac{\pi}{2}$  vahel:

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan m < \frac{\pi}{2},$$

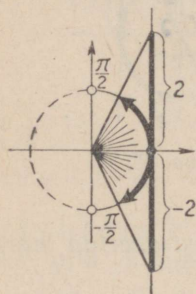
mille tangens on  $m$ .

Näiteid. 1)  $\arctan 0 = 0$ ;  $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ ;  $\arctan (-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ ;  $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ ;  $\arctan (-1) = -\frac{\pi}{4}$ .

2) Joonisel 36 on näidatud nurkade  $\arctan 2$  ja  $\arctan(-2)$  konstrueerimine.

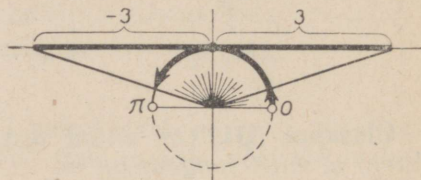
**Ülesanne IV.** On antud arv  $m$ ; konstrueerida nurk (kaar)  $\alpha$ , mille kootangens on  $m$ .

L a h e n d u s on analoogiline eelmise ülesande lahendusega: tuleb konstrueerida sirge läbi koordinaatide alguse ja kootangensteljel asetseva punkti  $N(m, 1)$  ning leida selle lõikepunktid ühikringjoonega.



Joon. 36.

Väikseim positiivne nurk (kaar) kõigi antud kootangensit omavate nurkade (kaarte) hulgast asetseb 0 ja  $\pi$  vahel.



Joon. 37.

**Definitsioon.** Arkuskootangens  $m$  on nurk (kaar) 0 ja  $\pi$  vahel:

$$0 < \arccot m < \pi,$$

mille kootangens on  $m$ .

Näiteid. 1)  $\arccot 0 = \frac{\pi}{2}$ ;  $\arccot 1 = \frac{\pi}{4}$ ;  $\arccot(-\sqrt{3}) = \frac{5}{6}\pi$ .

2) Joonisel 37 on näidatud nurkade  $\arccot 3$  ja  $\arccot(-3)$  konstrueerimine.

Õeldust järeldub, et funktsioonid  $\cos \alpha$  ja  $\sin \alpha$  võivad omandada iga reaalarvulise väärtuse  $m$ , mille absoluutväärtus ei ole suurem kui 1. Seega

$$|\cos \alpha| \leq 1; \quad |\sin \alpha| \leq 1,$$

ehk teisiti kirjutatult:

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1; \quad -1 \leq \sin \alpha \leq 1.$$

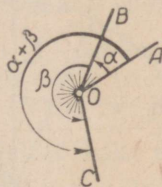
Funktsioonid  $\tan \alpha$  ja  $\cot \alpha$  võivad omandada igasuguse reaalarvulise väärtuse.

### III peatükk.

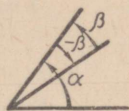
## LIITMISVALEMID JA JÄRELDUSI NENDEST.

### § 14. Nurkade liitmine ja lahutamine.

Vaatleme kaht nurka, mille mõõtardvud on vastavalt  $\alpha$  ja  $\beta$ . Olgu punkti  $O$  ümber nurga  $\alpha$  võrra pööratud kiir  $OA$  omandanud asendi  $OB$  ja seejärel asendist  $OB$  lähtudes pööratud veel nurga  $\beta$  võrra, omandades asendi  $OC$ . Need kaks järjestikust pööret võib asendada üheainsa pöördega niisuguse nurga võrra, mille lähtehaaraks on  $OA$  ja lõpphaaraks  $OC$  ning mille mõõtardv on  $\alpha + \beta$ . Seda nurka nimetatakse nurkade  $\alpha$  ja  $\beta$  summaks (joon. 38).



Joon. 38.



Joon. 39.

Nurkade lahutamine on liitmise pöördtehe: kahe nurga  $\alpha$  ja  $\beta$  vahe  $\alpha - \beta$  on niisugune nurk, mille summa nurgaga  $\beta$  on nurk  $\alpha$ . Nurkade  $\alpha$  ja  $\beta$  vahet võib esitada nurga  $\alpha$  ja nurga  $\beta$  vastandnurga ( $-\beta$ ) summamana. Tõepoolest, kui kiirt pöörata algul nurga  $\alpha$  võrra, seejärel nurga ( $-\beta$ ) võrra ning lõpuks nurga  $\beta$  võrra, siis tema lõppasend ühtib nurga  $\alpha$  lõpphaaraga (joon. 39):

$$[\alpha + (-\beta)] + \beta = \alpha.$$

Ringjoone kaari liidetakse ja lahutatakse samade reeglite järgi, millede järgi liidetakse ja lahutatakse neile vastavaid kesknurki.

### § 15. Liitmisvalemid koosinuse jaoks.

Liitmisvalemite näol püstitatakse trigonomeetrias eeskirjad, millede abil saab argumentide  $\alpha$  ja  $\beta$  trigonomeetri-

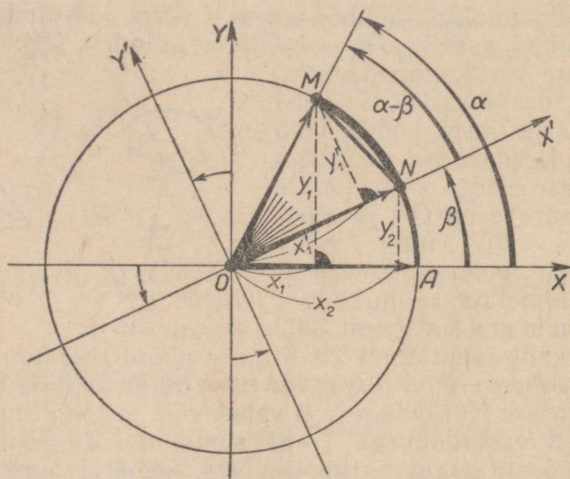
lisi funktsioone teades arvutada nende argumentide summa ja vahe ( $\alpha \pm \beta$ ) trigonomeetrilised funktsioonid.

**Teoreem.** Kahe argumendi summa (vahe) koosinus võrdub antud argumentide koosinuste korrutise ja siinuste korrutise vahega (summaga):

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (I)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (II)$$

**Tõestus.** Tõestame valemi (II). Tõestus tugineb sellele asjaolule, et tasapinna pöörlemisel ümber punkti ei



Joon. 40.

muutu sirglõikude pikkused. Olgu  $M$  ja  $N$  ühikringjoone punktid, milledes lõpevad antud kaared  $\alpha$  ja  $\beta$ :

$$\angle AOM = \alpha \text{ ja } \angle AON = \beta \quad (\text{joon. 40}).$$

Punktide  $M$  ja  $N$  koordinaadid süsteemis  $XOY$  on järgmised:

$$x_1 = \cos \alpha, \quad y_1 = \sin \alpha; \quad x_2 = \cos \beta, \quad y_2 = \sin \beta;$$

nende punktide vahelise kauguse ruut on võrdne:

$$\begin{aligned}
 d^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \\
 &- \sin \alpha)^2 = (\cos^2 \beta + \cos^2 \alpha - 2 \cos \beta \cos \alpha) + (\sin^2 \beta + \sin^2 \alpha - \\
 &- 2 \sin \beta \sin \alpha) = (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - \\
 &- 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \\
 &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta).
 \end{aligned}$$

Pöörame koordinaattelgi ümber punkti  $O$  nurga  $\beta$  võrra. Abstsisstelje uus suund  $OX'$  langeb ühte raadiuse  $ON$  suunaga. Raadius  $OM$  moodustab teljega  $OX'$  nurga  $\alpha - \beta$ . Tõepoolest,  $\angle XOX' + \angle X'OM = \angle XOM$  ehk  $\beta + \angle X'OM = \alpha$ , kust  $\angle X'OM = \alpha - \beta$ .

Süsteemis  $X'OY'$  on punktidel  $M$  ja  $N$  järgmised koordinaadid:

$$x_1' = \cos(\alpha - \beta), \quad y_1' = \sin(\alpha - \beta); \quad x_2' = 1, \quad y_2' = 0.$$

Arvutame punktide  $M$  ja  $N$  vahelise kauguse ruudu, kasutades nende punktide koordinaate süsteemis  $X'OY'$ :

$$\begin{aligned}
 d^2 &= (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 = [1 - \cos(\alpha - \beta)]^2 + \\
 &+ \sin^2(\alpha - \beta) = [\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)] + \\
 &+ 1 - 2 \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta).
 \end{aligned}$$

Võrrutame suuruse  $d^2$  jaoks leitud kaks avaldist:

$$2 - 2 \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta),$$

kust saamegi valemi (II):

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Valemi (I) tuletamiseks kirjutame valemis (II) argumenti  $\beta$  asemele  $(-\beta)$ :

$$\cos[\alpha - (-\beta)] = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta).$$

Arvestades, et siinus on paaritu ja koosinus paarisfunktsioon, saame:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad \text{m. o. t. t.}$$

Tõestatud valemid (I) ja (II) on õiged mistahes nurkade  $\alpha$  ja  $\beta$  puhul. Tõepoolest, nende valemite tõestamisel me kasutasime ainult nurkade ja kaartide liitmise ja lahutamise üldist reeglit ning kahe punkti vahelise kauguse valemit, kuid viimane valem on õige punktide iga-suguse paiknemise puhul.

**Näide.** Arvutada  $\cos 15^\circ$ .

Lahendus. Kuna  $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$  ja on teada, et  $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ja  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ , siis

$$\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1) \approx 0,9659.$$

## § 16. Valemid täiendusnurkade jaoks.

Õeldakse, et nurgad (kaared)  $\alpha$  ja  $\beta$  täiendavad teineteist täisnurgani [või lihtsalt: on täiendusnurgad (-kaared)], kui nende summa on  $\frac{\pi}{2}$ , s. t. kui  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  ehk  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ .

**Lemma.** Ühe täiendusnurga koosinus võrdub teise siinusega:  $\cos \beta = \sin \alpha$ ;  $\cos \alpha = \sin \beta$ .

Tõestus. Kasutades vahe koosinuse valemit, saame:

$$\cos \beta = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha$$

ja

$$\cos \alpha = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \beta + \sin \frac{\pi}{2} \sin \beta.$$

Asendades  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  ja  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ , saamegi tõestatavad samasused.

Näiteid. 1)  $\cos \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ .

2)  $\cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) = \sin \left[ \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right] = \sin \frac{2}{3} \pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

## § 17. Liitmisvalemid siinuse jaoks.

**Teoreem.** Kahe argumendi summa (vahe) siinus võrdub esimese argumendi siinuse ja teise argumendi koosinuse korrutise ning esimese argumendi koosinuse ja teise argumendi siinuse korrutise summaga (vahega):

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{III})$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{IV})$$

Tõestus. Summa  $\alpha + \beta$  siinus võrdub täiendusnurga  $\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$  koosinusega; viimast nurka võib aga kujutada  $\alpha$  täiendusnurga  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  ja  $\beta$  vahena, s. t.

$$\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta.$$

Järelikult (vahe koosinuse ning täiendusnurkade valemid kasutades):

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos \left[ \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right] = \cos \left[ \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \beta \right] = \\ &= \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \beta + \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta + \\ &\quad + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Kirjutades äsjatõestatud valemis (III)  $\beta$  asemele  $(-\beta)$ , saame vahe siinuse valemi:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin[\alpha + (-\beta)] = \sin \alpha \cos(-\beta) + \\ &+ \cos \alpha \sin(-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \text{ m. o. t. t.} \end{aligned}$$

Näide. Arvutada  $\sin 15^\circ$ .

Lahendus.

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1) \approx 0,2588. \end{aligned}$$

## § 18. Liitmisvalemid tangensi jaoks.

**Teoreem.** Argumentide  $\alpha$  ja  $\beta$  kõigi lubatavate väärtuste puhul kehtib valem

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad (\text{V})$$

Selgitus. Argumentide  $\alpha$  ja  $\beta$  lubatavad väärtused on sellised, millede puhul kaarte  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\alpha + \beta$  tangensid omavad mõtte. Järelikult need kaared ei tohi lõppeda verti-

kaaldiameetri otspunktides ja siis on kõigi kolme vaadeldava kaare koosinused nullist erinevad.

Tõestus.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

Jagades selle murru lugeja ja nimetaja korrutisega  $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$ , saamegi valemi (V):

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}, \text{ m. o. t. t.}$$

Kirjutame valemis (V)  $\beta$  asemele  $(-\beta)$  ja arvestame, et tangens on paaritu funktsioon:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha - \beta) &= \tan[\alpha + (-\beta)] = \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha \tan(-\beta)} = \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}. \end{aligned}$$

Seega oleme saanud valemi:

$$\boxed{\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}} \quad (\text{VI})$$

Näide. Leida  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ .

Lahendus.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \alpha}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}.$$

## § 19. Liitmisvalemitest mitme argumendi puhul.

Kahe argumendi jaoks saadud liitmisvalemite järjestikuse rakendamise teel võib tuletada liitmisvalemid trigonomeetriliste funktsioonide jaoks kolme, nelja jne. argumendi summast. Nii näiteks on liitmisvalemid trigonomeetriliste funktsioonide jaoks kolme argumendi summast järgmised:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta + \gamma) &= \sin[(\alpha + \beta) + \gamma] = \sin(\alpha + \beta) \cos \gamma + \\ &+ \cos(\alpha + \beta) \sin \gamma = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \cos \gamma + \\ &+ (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \sin \gamma = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \\ &+ \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma; \end{aligned}$$

analoogiliselt

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos(\alpha + \beta) \cos \gamma - \sin(\alpha + \beta) \sin \gamma = \\ &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \\ &\quad - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma;\end{aligned}$$

ning lõpuks

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta + \gamma) &= \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos(\alpha + \beta + \gamma)} = \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \beta - \tan \alpha \tan \gamma - \tan \beta \tan \gamma}.\end{aligned}$$

## § 20. Taandamisvalemid.

*Taandamisvalemeks nimetatakse valemeid, mis avaldavad argumentide*

$$-\alpha, \frac{\pi}{2} \pm \alpha, \pi \pm \alpha, \frac{3}{2}\pi \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha$$

*trigonomeetrilised funktsioonid argumenti  $\alpha$  trigonomeetriliste funktsioonide kaudu, kus  $\alpha$  on argumenti mistahes (lubata) väärtus. Kõik need valemid on mahutatud järgnevasse tabelisse (lk. 41).*

Taandamisvalemite tabelit tuleb kasutada järgmiselt.

Olgu näiteks vaja arvutada  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ . Võtame tabelis

selle rea, kus argumentiks on märgitud  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  (s. t. teise rea) ning selle veeru, mille pealkirjaks on  $\tan$  (s. t. kolmanda veeru); nende ristumiskohale on kirjutatud ( $-\cot \alpha$ ). Vastav taandamisvalem omab seega kuju:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha.$$

*Taandamisvalemid ei vaja erilist tõestust. Tabeli esimese rea valemid väljendavad trigonomeetriliste funktsioonide kui paaritute või paarisfunktsioonide omadusi (vt. § 12), ülejäänud valemid järelduvad liitmisvalemitest siinuse ja koosinuse jaoks. Näiteks tuletame valemid argumenti  $\frac{3}{2}\pi + \alpha$  puhul. Arvestades, et  $\cos \frac{3}{2}\pi = 0$  ja*

*$\sin \frac{3}{2}\pi = -1$ , saame:*

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) &= \cos\frac{3}{2}\pi \cos\alpha - \sin\frac{3}{2}\pi \sin\alpha = \\ &= -(-1)\sin\alpha = \sin\alpha;\end{aligned}$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin\frac{3}{2}\pi \cos\alpha + \cos\frac{3}{2}\pi \sin\alpha = -\cos\alpha;$$

$$\tan\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha^*;$$

$$\cot\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha.$$

Tabeli viimases veerus on antud taandamisvalemite 1—9 geomeetiline selgitus juhul, kui  $\alpha$  on teravnurk (võrdsed kolmnurgad on viirutatud).

Neljanda ja kaheksanda rea valemid on ka geomeetriselt tõestatavad. Kui nurgale  $\alpha$  liita  $\pi$ , s. t. pool täispöörret, siis liikuv raadius omandab diametraalselt vastupidise asendi. Liikuva raadiuse lõpp-punkti abstsiss  $x$  ja ordinaat  $y$ , s. t. nurga  $\alpha$  koosinus ja siinus, muutuvad vastandmargilisteks (kusjuures absoluutväärtus jääb samaks):

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha; \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha,$$

nende suhted aga ei muutu:

$$\tan(\pi + \alpha) = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \tan\alpha,$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \cot\alpha.$$

Kui nurgale  $\alpha$  liita mistahes täisarv täispöördeid, siis liikuv raadius omandab esialgse asendi ning tema lõpp-punkti koordinaadid ei muutu. Seetõttu trigonomeetriliste funktsioonide väärtused argumentidest  $\alpha$  ja  $\alpha + 2k\pi$  on iga täisarvu  $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$  puhul omavahel võrdsed:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + 2k\pi) &= \cos\alpha; \quad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha; \\ \tan(\alpha + 2k\pi) &= \tan\alpha; \quad \cot(\alpha + 2k\pi) = \cot\alpha.\end{aligned}$$

---

\* Summa tangensi valem pole rakendatav, sest  $\tan\frac{3\pi}{2}$  ei eksisteeri.

Jkr. nr.	Funksioon	cos	sin	tan	cot	
	Argument radiaanides (kraadides)					
1	$-\alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$	
2	$\frac{\pi}{2} + \alpha$ ( $90^\circ + \alpha$ )	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$	
3	$\frac{\pi}{2} - \alpha$ ( $90^\circ - \alpha$ )	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cot \alpha$	$\tan \alpha$	
4	$\pi + \alpha$ ( $180^\circ + \alpha$ )	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$	
5	$\pi - \alpha$ ( $180^\circ - \alpha$ )	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$	
6	$\frac{3}{2}\pi + \alpha$ ( $270^\circ + \alpha$ )	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$	
7	$\frac{3}{2}\pi - \alpha$ ( $270^\circ - \alpha$ )	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cot \alpha$	$\tan \alpha$	
8	$2\pi + \alpha$ ( $360^\circ + \alpha$ )	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$	
9	$2\pi - \alpha$ ( $360^\circ - \alpha$ )	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$	

Kui  $k=1$ , siis saame siit tabeli kaheksandasse ritta kirjutatud valemid.

Taandamisvalemid näitavad, et *praktilistes arvutustes piisab teravnurkade (isegi mitte suuremate kui  $45^\circ$ ) trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste teadmisesest.*

Tõepoolest, olgu  $\beta$  mistahes nurk. Kui  $\beta$  on negatiivne, siis saab (kasutades seda, et kõik trigonomeetrilised funktsioonid on kas paaritud või paarisfunktsioonid) tema trigonomeetriliste funktsioonide väärtused avaldada nende väärtuste kaudu positiivsest nurgast ( $-\beta$ ).

Olgu  $\beta$  mistahes positiivne nurk. Kui  $\beta > 360^\circ$ , siis võime ära jätta täisarvu täispöördeid ja seega avaldada nurga  $\beta$  trigonomeetrilised funktsioonid niisuguse positiivse nurga trigonomeetriliste funktsioonide kaudu, mis on väiksem kui  $360^\circ$ .

Olgu  $\beta$  mistahes positiivne nurk, mis on väiksem kui  $360^\circ$ . Vaatleme nurga  $\beta$  lõpphaara ja koordinaattelgede vahel asetsevat kaht teravnurka ning tähistame ühe neist tähega  $\alpha$  (väikseim neist nurkadest ei ole suurem kui  $45^\circ$ ). Sobivate taandamisvalemite abil saab nüüd nurga  $\beta$  trigonomeetrilised funktsioonid avaldada nurga  $\alpha$  trigonomeetriliste funktsioonide kaudu.

**Näide.** Arvutada  $\cos(-1000^\circ)$ .

**Lahendus.**

$$\begin{aligned} \cos(-1000^\circ) &= \cos 1000^\circ = && \text{(koosinus on paarisfunktsioon)} \\ &= \cos(2 \cdot 360^\circ + 280^\circ) = \cos 280^\circ = && \text{(täispöörete eraldamine)} \\ &= \cos(270^\circ + 10^\circ) = \sin 10^\circ \approx && \text{(taandamisvalem)} \\ &\approx 0,1736 && \text{(V. Bradise tabel VIII).} \end{aligned}$$

Taandamisvalemite kasutamisel võib juhinduda järgmisest reeglist.

**Reegel.** Kui nurga  $\alpha$  lähtehaar tuleb paigutada horisontaaldiaameetrile (valemid nurkade  $-\alpha$ ,  $\pi \pm \alpha$ ,  $2\pi \pm \alpha$  jaoks), siis on funktsioonid võrduse mõlemal poolel samanimelised; kui nurga  $\alpha$  lähtehaar tuleb paigutada vertikaaldiaameetrile (valemid nurkade  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ,  $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$  jaoks), siis on funktsioonid võrduse mõlemal poolel sarnasnimelised (siinus ja koosinus, tangens ja kootangens);

märgi määramiseks võrduse paremal poolel oleva trigonomeetrilise funktsiooni ees tuleb lihtsalt määrata võrduse vasaku poole märk, lugedes nurga  $\alpha$  teravnurgaks.

Näide. Koostada taandamisvalem  $\tan\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$  jaoks.

Lahendus. Kuna nurga  $\alpha$  lähtehaar (lahutamisel nurgast  $\frac{3}{2}\pi$ ) tuleb paigutada vertikaaldiameetrile, siis võrduse paremal poolel saame kootangensi. Kuna valem peab olema õige kõigi (lubatavate)  $\alpha$  väärtuste puhul, siis on ta õige ka teravnurga puhul; kui aga  $\alpha$  on teravnurk, siis  $\frac{3}{2}\pi - \alpha$  lõpeb III veerandis, kus kootangens on positiivne. Järelikult  $\tan\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \cot \alpha$  (kontrollida tabeli järgi).

## § 21. Argumendi kahekordistamise valemid.

*Argumendi kahekordistamise valemid avaldavad kahekordse argumendi  $2\alpha$  trigonomeetrilised funktsioonid argumendi  $\alpha$  trigonomeetriliste funktsioonide kaudu.*

Võttes summa koosinuse valemis  $\alpha = \beta$ , saame:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.\end{aligned}$$

Seega, kahekordse argumendi koosinus võrdub antud argumendi koosinuse ja siinuse ruutude vahega:

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \quad (\text{VII})$$

Võttes summa siinuse valemis  $\alpha = \beta$ , saame:

$$\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Seega, kahekordse argumendi siinus võrdub antud argumendi siinuse ja koosinuse kahekordse korrutisega:

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (\text{VIII})$$

Analoogiliselt tuletatakse argumendi kahekordistamise valem tangensi jaoks:

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}} \quad (\text{IX})$$

Näide.

$$\cos 120^\circ = \cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}.$$

Liitmisvalemite järjestikuse rakendamise teel võib tule-  
tada kordse argumendi, s. t.  $3\alpha$ ,  $4\alpha$  jne. trigonomeetriliste  
funktsioonide valemid.

Näide.

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = \\ &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha = \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha.\end{aligned}$$

Asendades  $\sin^2 \alpha$  avaldisega  $1 - \cos^2 \alpha$ , saame:

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha = 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha.\end{aligned}$$

Asendades  $\cos^2 \alpha$  avaldisega  $1 - \sin^2 \alpha$ , saame:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

## § 22. Argumendi poolitamise valemid.

*Argumendi poolitamise valemid avaldavad poole argu-  
mendi  $\frac{\alpha}{2}$  trigonomeetrilised funktsioonid argumendi  $\alpha$  tri-  
gonomeetriliste funktsioonide kaudu.*

Asendame kahekordse argumendi koosinuse valemis  
argumendi  $\alpha$  poole argumendiga  $\frac{\alpha}{2}$ :

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

Kasutades samasust

$$1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (2)$$

liidame ja lahutame samasused (1) ning (2) liikmeti; siis  
saame:

$$2\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha; \quad 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha,$$

kust leiame

$$\boxed{\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} \quad (X)$$

ja

$$\boxed{\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}} \quad (\text{XI})$$

Jagades samasused (XI) ja (X) liikmeti, saame

$$\boxed{\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}} \quad (\text{XII})$$

Märgid juurte ees tuleb valida vastavalt sellele, millises veerandis lõpeb nurk  $\frac{\alpha}{2}$ .

Näiteid. 1) Arvutada  $\sin \frac{\pi}{8} = \sin 22^{\circ},5$  ja  $\cos \frac{\pi}{8} = \cos 22^{\circ},5$ .

Lahendus. Kuna  $\cos \frac{\pi}{4} = \cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , siis

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2};$$

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Juurte ees on märk + sellepärast, et  $\frac{\pi}{8}$  on teravnurk.

2) On antud, et  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ , kus  $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ ; arvutada  $\cos \frac{\alpha}{2}$ ;  $\sin \frac{\alpha}{2}$ ;  $\tan \frac{\alpha}{2}$ .

Lahendus. Leiame  $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$ . Kuna nurk  $\frac{\alpha}{2}$  lõpeb teises veerandis, siis  $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$ ,  $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$  ja  $\tan \frac{\alpha}{2} < 0$ .  
Seega

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{10};$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}; \quad \tan \frac{\alpha}{2} = -3.$$

§ 23. Valemid, mis võimaldavad trigonomeetriliste funktsioonide korrutise teisendada summaks.

Liidame liikmeti samasused

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (I)$$

ja

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (II)$$

vahetame saadud võrduse pooled ning jagame need kahega.

Seega saame järgmise valemi, mis teisendab kahe koosinuse korrutise summaks:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2} \quad (XIII)$$

Kahe koosinuse korrutis võrdub nende argumentide vahe koosinuse ja summa koosinuse poolsummaga.

Kui samasusest (II) liikmeti lahutada samasus (I), siis saame valemi siinuste korrutise teisendamiseks:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2} \quad (XIV)$$

Kahe siinuse korrutis võrdub nende argumentide vahe koosinuse ja summa koosinuse poolvahega.

Liites liikmeti  $\sin(\alpha + \beta)$  ja  $\sin(\alpha - \beta)$  valemid, saame siinuse ja koosinuse korrutise teisendamise valemi:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2} \quad (XV)$$

Siinuse korrutis koosinusega võrdub nende argumentide summa siinuse ja vahe siinuse poolsummaga.

Järeldus: Kui  $\alpha = \beta$ , siis saame valemid:

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Tuletatud valemite järjestikuse rakendamise teel võib teisendada summaks siinuste ja koosinuste ning nende (naturaalarvuliste) astmete igasuguse korrutise.

Näiteid. 1) Teisendada summaks korrutis  $\cos 2\alpha \cos 4\alpha$ .

Lahendus.

$$\cos 4\alpha \cos 2\alpha = \frac{\cos 6\alpha + \cos 2\alpha}{2}.$$

2) Teisendada summaks  $\sin^4 \alpha \cos^2 \alpha$ .

Lahendus.

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha &= \sin^2 \alpha (\sin \alpha \cos \alpha)^2 = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \cdot \frac{\sin^2 2\alpha}{4} = \\ &= \frac{1}{8} (1 - \cos 2\alpha) \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} = \frac{1}{16} (1 - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 2\alpha \cos 4\alpha) = \\ &= \frac{1}{16} \left( 1 - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \frac{\cos 6\alpha + \cos 2\alpha}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{16} - \frac{\cos 2\alpha}{32} - \frac{\cos 4\alpha}{16} + \frac{\cos 6\alpha}{32}. \end{aligned}$$

## § 24. Valemid, mis võimaldavad trigonomeetriliste funktsioonide summa teisendada korrutiseks.

Need valemid võimaldavad kahe trigonomeetrilise funktsiooni summa ja vahe kujutada (mingite teiste argumentide) trigonomeetriliste funktsioonide korrutisena.

Kahe koosinuse summa valem:

$$\boxed{\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} \quad (\text{XVI})$$

Kahe koosinuse summa võrdub nende argumentide poolsumma koosinuse ja poolvahe koosinuse kahekordse korrutisega.

Tõestuseks tuleb vaid parempoolne korrutis teisendada summaks:

$$\begin{aligned} &2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \\ &= 2 \frac{\cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right)}{2} = \\ &= \cos \alpha + \cos \beta, \text{ m. o. t. t.} \end{aligned}$$

Samal viisil tõestatakse järgmised kolm valemit.

Kahe siinuse summa valem:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{XVII})$$

Kahe siinuse summa võrdub nende argumentide poolsumma siinuse ja poolvahe koosinuse kahekordse korrutisega.

Koosinuste vahe valem:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{XVIII})$$

Kahe koosinuse vahe võrdub nende argumentide poolsumma siinuse ja poolvahe siinuse kahekordse korrutise vastandavuga.

Siinuste vahe valem:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{XIX})$$

Kahe siinuse vahe võrdub nende argumentide poolsumma koosinuse ja poolvahe siinuse kahekordse korrutisega.

Tangensite summa ja vahe valemid:

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \quad (\text{XX})$$

ja

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \quad (\text{XXI})$$

Nurkade (kaarte)  $\alpha$  ja  $\beta$  jaoks on lubatavad kõik väärtused peale  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ .  $\alpha$  ja  $\beta$  kõigi lubatavate väärtuste

puhul funktsioonid  $\tan \alpha$  ja  $\tan \beta$  omavad mõtte ning  $\cos \alpha \neq 0$ ,  $\cos \beta \neq 0$ .

Tõestuseks teostame järgmised teisendused:

$$\begin{aligned} \tan \alpha + \tan \beta &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \\ &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \end{aligned}$$

Sama meetodiga saab tõestada samasuse (XXI).

Valemeid (XVI) — (XXI) nimetatakse ka logaritmitavale kujule teisendamise valemiteks, sest, teostades arvutusi logaritmidel tabelite või arvutuslükati abil on mugav arvutada korrutisi, mitte aga summasid ja vahesid.

Summat  $1 \pm \cos \alpha$  saab teisendada korrutiseks valemite (XVI) ja (XVIII) abil. Arvestades, et  $1 = \cos 0$ , saame  $1 \pm \cos \alpha = \cos 0 \pm \cos \alpha$  ning lõplikult

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Näiteid. Teisendada korrutiseks:

$$1) \sin 24^\circ + \sin 22^\circ = 2 \sin 23^\circ \cos 1^\circ;$$

$$\begin{aligned} 2) \sin \alpha + \cos \beta &= \sin \alpha + \sin \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) = \\ &= 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) 1 - \sin \alpha &= \sin \frac{\pi}{2} - \sin \alpha = 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

(argumendid  $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$  ja  $\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$  täiendavad teineteist täisnurgani).

## § 25. Avaldise $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ teisendamine korrutiseks.

Olgu  $a$  ja  $b$  nullist erinevad arvud. Konstrueerime tasapinnal punkti  $M(a, b)$ , mille abstsiss on  $a$  ja ordinaat  $b$ . Raadiusvektori  $\overline{OM}$  pikkus on  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Abstsissitelje ja  $\overline{OM}$  vahelise nurga  $\varphi$  kooninus ja siinus on:

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Teostame järgmised teisendused:

$$\begin{aligned} a \sin \alpha + b \cos \alpha &= \sqrt{a^2+b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \alpha \right) = \\ &= \sqrt{a^2+b^2} (\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi). \end{aligned}$$

Seega

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2+b^2} \sin (\alpha + \varphi).$$

Nurka  $\varphi$  nimetatakse a b i n u r g a k s.

$$\begin{aligned} \text{Näiteid. 1) } \sin \alpha + \cos \alpha &= \sqrt{2} \left( \sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= \sqrt{2} \left( \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2) } 2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha &= \sqrt{13} \left( \frac{2}{\sqrt{13}} \sin \alpha - \frac{3}{\sqrt{13}} \cos \alpha \right) = \\ &= \sqrt{13} \sin (\alpha + \varphi), \end{aligned}$$

kus

$$\varphi = \arccos \frac{2}{\sqrt{13}} = \arccos \frac{2 \cdot \sqrt{13}}{13} \approx \arccos 0,5548 \approx 56^\circ 18' \quad (\text{leiame tabelist}).$$

## § 26. Valemid, mis avaldavad trigonomeetrilised funktsioonid poole argumendi tangensi kaudu.

**Teoreem.** Kui  $\alpha \neq (2k+1)\pi$  (kus  $k$  on täisarv), siis  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  ja  $\tan \alpha$  avalduvad ratsionaalselt \*  $\tan \frac{\alpha}{2}$  kaudu järgmiste valemitega:

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Tõestus. Argumendi kahekordistamise valemite kohaselt

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}; \quad \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

---

\* Ratsionaalselt tähendab: juuri e. radikaale mitte sisaldavate algebraliste avaldiste kujul.

ehk

$$\sin \alpha = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

(murdude nimetajad on samaselt võrdsed ühega). Kuna  $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ , siis  $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ja järelikult  $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$ . Jagades saadud võrduste paremate poolte lugejad ja nimetajad suurusega  $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ , saame kaks esimest samasust. Neid samasusi teineteisega liikmeti jagades saame kolmanda valemi.

## IV peatükk.

### TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE PÕHIOMADUSED.

#### § 27. Arvulise argumenti trigonomeetrilised funktsioonid ja nende määramispiirkonnad.

Eelmistes peatükkides loeti trigonomeetrilise funktsiooni argumenti nurgaks või kaareks, kuid seda argumenti võib vaadelda ka kui  $arvu$ , ja nimelt: *trigonomeetrilise funktsiooni argumentiks võib lugeda mitte nurka (kaart) ennast, vaid tema suurust väljendavat arvu*. Seejuures mõõdetakse nurki ja kaari tavaliselt *radiaanides*. Nii näiteks  $\cos 2$  (s. t. arvu 2 koosinus) on sellise nurga koosinus, mille mõõtary on 2 radiaani;  $\sin 20$  on sellise nurga siinus, mille mõõtary on 20 radiaani.

Käesolevas peatükis me uurime arvulise argumenti trigonomeetriliste funktsioonide omadusi.

Funktsiooni mõiste on teada algebrast. Väide, et  $y$  on argumenti  $x$  funktsioon, tähendab järgmist: on olemas vastavuse seadus, mille järgi argumenti  $x$  igale väärtusele vastab funktsiooni  $y$  mingi kindel väärtus.

Argumenti kõigi väärtuste hulka nimetatakse antud funktsiooni *määramispiirkonnaks*.

Trigonomeetrilistel funktsioonidel on järgmised määramispiirkonnad.

1°. Funktsioonid  $\cos \alpha$  ja  $\sin \alpha$  omavad kindla väärtuse argumenti  $\alpha$  *mistahes* arvulise väärtuse puhul. Tõepoolest, ühikringjoonele võib punktist  $A(1,0)$  lähtudes kanda mistahes arvuga  $\alpha$  mõõtuva kaare; selle kaare lõpppunkti koordinaadid  $x$  ja  $y$  on funktsioonide  $\cos \alpha$  ja  $\sin \alpha$  väärtused.

Seega, funktsioonide  $\cos \alpha$  ja  $\sin \alpha$  määramispiirkonnaks on kõikide reaalarvude hulk.

2°. Funktsioon  $\tan \alpha$  omab kindla väärtuse iga kaare puhul peale nende, mis mõõtvud arvudega  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  (kus  $k$  on täisarv); viimatinimetatud kaared ei oma tangensit.

Tangensi määramispiirkonnaks on kõikide nende reaalarvude hulk, mis ei oma kuju  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ .

Kui kõikide reaalarvude hulgast eraldada arvud, mis omavad kuju  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ , siis jääb järele lõpmatu hulk vahemikke\*:

$$\dots, \left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right), \dots \text{ (joon. 41).}$$

3°. Funktsiooni  $\cot \alpha$  määramispiirkonnaks on kõikide nende reaalarvude hulk, mis ei oma kuju  $k\pi$ , s. t. lõpmatu hulk vahemikke:

$$\dots, (-\pi, 0), (0, \pi), (\pi, 2\pi) \dots$$

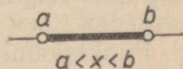
(arvudega  $k\pi$  mõõtvud kaared ei oma kootangensit).

## § 28. Trigonomeetriliste funktsioonide tõkestatus või tõkestamatus.

Funktsiooni nimetatakse tõkestatuks (tema määramispiirkonnas), kui leidub niisugune positiivne arv  $M$ , et argumendi kõikide väärtuste puhul funktsiooni väärtused ei ole absoluutväärtuse poolest suuremad arvust  $M$ . Kui funktsioon võib omandada absoluutväärtuse poolest kuitahes suuri väärtusi, siis nimetatakse teda tõkestamatuks.

Trigonomeetriliste funktsioonide tõkestatus või tõkestamatus järeldeb § 13 selgitatud omadustest. Nimelt:

\* Olgu  $a$  ja  $b$  kaks reaalarvu, kusjuures  $a < b$ . Vahemikuks  $a$ -st  $b$ -ni nimetatakse kõigi reaalarvude  $x$  hulka, mis asetsevad  $a$  ja  $b$  vahel, s. t.  $a < x < b$ . Arvsirgel (joon. 42) kujutatakse vahemik sirglõiguna, mis on piiratud punktidega  $a$  ja  $b$ , kusjuures need punktid ise vahemikku ei kuulu. Vahemik  $a$ -st  $b$ -ni tähistatakse:  $(a, b)$ .



Joon. 42.

funktsioonid  $\cos \alpha$  ja  $\sin \alpha$  on tõkestatud, sest nende väärtused ei ole absoluutväärtuse poolest suuremad kui 1 (vt. lk. 32):

$$|\cos \alpha| \leq 1, \quad |\sin \alpha| \leq 1.$$

Funktsioonid  $\tan \alpha$  ja  $\cot \alpha$  on tõkestamata, sest nad mõlemad võivad omandada mistahes reaalarvulise väärtuse.

### § 29. Vahemikud, milledes trigonomeetrilised funktsioonid säilitavad märki.

Kui mingisse vahemikku kuuluva argumendi kōikide väärtuste puhul funktsiooni väärtused on samamärgilised (kas positiivsed või negatiivsed), siis öeldakse, et funktsioon säilitab selles vahemikus märki.

Üheksandas paragrahvis öeldust järeldub:

1°. Vahemikus  $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$  (kus  $k$  on mistahes täisarv) on funktsioon  $\cos \alpha$  positiivne. Tõepoolest, kui  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , siis nurk, mille mõõt arv on  $\alpha$ , lõpeb parempoolsees pooltasandis ja seega  $\cos \alpha > 0$ . Vahemikes  $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi)$  (vasakpoolne poolringjoon) on koosinus negatiivne.

2°. Vahemikes  $(2k\pi, (2k+1)\pi)$  (ülemine poolringjoon) on funktsioon  $\sin \alpha$  positiivne ning vahemikes  $(-\pi + 2k\pi, 2k\pi)$  (alumine poolringjoon) negatiivne.

3°. Vahemikes  $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$  (paarisarvulise  $k$  puhul I veerand, paarituarvulise  $k$  puhul III veerand) on funktsioonid  $\tan \alpha$  ja  $\cot \alpha$  positiivsed ning vahemikes  $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi)$  (paarisarvulise  $k$  puhul IV veerand, paarituarvulise  $k$  puhul II veerand) negatiivsed.

### § 30. Trigonomeetriliste funktsioonide perioodilisus.

Funktsiooni nimetatakse perioodiliseks, kui leidub niisugune arv  $l \neq 0$  (mida nimetatakse perioodiks), et funktsiooni väärtus ei muutu tema argumendi mis-

tahes väärtusele selle arvu liitmise (või sellest lahutamise) puhul.

Joonisel 43 on kujutatud perioodilise funktsiooni graafik; see koosneb lõpmatust hulgast «korduvatest» kaartest.

Perioodilised funktsioonid omavad füüsikas, mehhaanikas ja tehnikas suurt tähtsust perioodiliste protsesside (võnkumiste, mehhanismide liikumiste, muutuva elektri-voolu tugevuse jne.) uurimisel.

**Teoreem 1°. Trigonomeetrilised funktsioonid on perioodilised ühise perioodiga  $2\pi$ .**



Joon. 43.

2°. Funktsioonide  $\cos \alpha$  ja  $\sin \alpha$  väikseim positiivne periood on  $2\pi$ .

3°. Funktsioonide  $\tan \alpha$  ja  $\cot \alpha$  väikseim positiivne periood on  $\pi$ .

Tõestus. Argumentide  $\alpha$  ja  $\alpha + 2k\pi$  (kus  $k$  on mistahes täisarv) iga trigonomeetrilise funktsiooni väärtused on ühesugused (vt. lk. 41):

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha, \quad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha \text{ jne.}$$

Järelikult igaüks arvudest  $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi$  jne. on kõigi nelja trigonomeetrilise funktsiooni ühine periood. Eriti on siis ka  $2\pi$  nende ühine periood.

Funktsiooni  $\cos \alpha$  puhul on  $2\pi$  väikseim positiivne periood. Oletame vastuväiteliselt, et leidub positiivne arv  $l < 2\pi$ , mis on koosinuse perioodiks. Siis võrdus  $\cos(\alpha + l) = \cos \alpha$  kehtib argumenti  $\alpha$  kõigi väärtuste puhul. Võttes selles samasuses  $\alpha = 0$ , saame  $\cos l = 1$ , mis pole aga võimalik, sest arvuga  $l < 2\pi$  mõõtv positiivne kaar ei lõpe punktis  $A(1, 0)$  ja seega tema koosinus ei võrdu ühega.

Analoogiliselt tõestatakse, et  $2\pi$  on siinuse väikseim positiivne periood: kui kehtib samasus  $\sin(\alpha + l) = \sin \alpha$ ,

siis  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  puhul saame võrduse  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + l\right) = \cos l = 1$ , mis aga  $0 < l < 2\pi$  korral pole võimalik.

Funktsiooni  $\tan \alpha$  perioodiks on ka  $\pi$ , sest argumendi  $\alpha$  iga väärtuse puhul:

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha, \quad \text{kus } \alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Arv  $\pi$  on tangensi väikseim positiivne periood. Tõepoolest, kui positiivne arv  $l < \pi$  oleks tangensi periood, siis samasusest  $\tan(\alpha + l) = \tan \alpha$  saaksime  $\alpha = 0$  puhul  $\tan l = 0$ , mis aga  $0 < l < \pi$  tõttu pole võimalik.

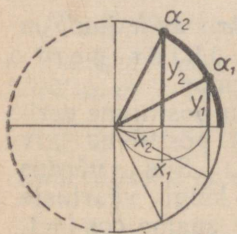
Analoogiliselt näidatakse, et arv  $\pi$  on kootangensi väikseim positiivne periood.

Funktsiooni väikseimat positiivset perioodi nimetatakse lühidalt tema perioodiks. Seepärast öeldakse, et  $2\pi$  on koosinuse ja siinuse periood ning et  $\pi$  on tangensi ja kootangensi periood.

Perioodilisuse omadus lihtsustab trigonomeetriliste funktsioonide uurimist, sest perioodilise funktsiooni omaduste uurimiseks piisab tema omaduste uurimisest mingis piirkonnas, mille pikkus võrdub perioodiga.

### § 31. Trigonomeetriliste funktsioonide monotoonsuse piirkonnad,

Funktsiooni nimetatakse mingis piirkonnas kasvavaks, kui sellesse piirkonda kuuluva argumendi iga kahe erineva väärtuse puhul argumendi suuremale väärtusele vastab funktsiooni suurem väärtus.



Joon. 44.

Funktsiooni nimetatakse mingis piirkonnas kahanevaks, kui sellesse piirkonda kuuluva argumendi iga kahe erineva väärtuse puhul argumendi suuremale väärtusele vastab funktsiooni väiksem väärtus.

Kasvavad ja kahanevad funktsioonid kuuluvad nn. monotoonsete funktsioonide klassi.

Leiame eraldi iga trigonomeetrilise funktsiooni kasvamise ja kahanemise piirkonnad.

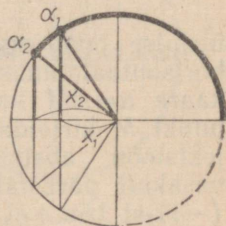
**Funktsioon  $\cos \alpha$ .** Kui argumendi väärtused  $\alpha_1$  ja  $\alpha_2$  kuuluvad esimesse veerandisse ning  $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$ , siis  $x_1 = \cos \alpha_1$  ja  $x_2 = \cos \alpha_2$  on kaugused ühikringi keskpunktist kõõludeni, mis toetuvad kaartele pikkustega vastavalt  $2\alpha_1$  ja  $2\alpha_2$  (joon. 44).

Kahest kõõlust, mis toetuvad kahele (poolringjoonest mitte suuremale) kaarele, asub suuremale kaarele toetuv kõõl keskpunktile lähemal; seega  $\alpha_1 < \alpha_2$  tõttu  $x_1 > x_2$ .

Seega  $\cos \alpha_1 > \cos \alpha_2$ , kui  $\alpha_1 < \alpha_2$ , s. t. I veerandisse kuuluva argumendi suuremale väärtusele vastab koosinuse väiksem väärtus. Järelikult, *I veerandis on  $\cos \alpha$  kahanev funktsioon.*

Suurima ja väikseima väärtuse omandab koosinus I veerandi otspunktides:  $\alpha = 0$  puhul 1 ja  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  puhul 0.

Kui argumendi väärtused  $\alpha_1$  ja  $\alpha_2$  kuuluvad II veerandisse ning  $\frac{\pi}{2} \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \pi$ , siis konstruktsiooni teostades (joon. 45) näeme, et kaugus ringi keskpunktist kaarele  $\alpha_1$  vastava kõõluni on väiksem kui kaarele  $\alpha_2$  vastava kõõluni. Need kaugused võrduvad kaarte  $\alpha_1$  ja  $\alpha_2$  lõpp-punktide abstsisside absoluutväärtustega  $|x_1|$  ja  $|x_2|$  ning seega  $|x_1| < |x_2|$ . Kuna teise veerandi punktide abstsissid on negatiivsed, siis  $x_1 > x_2$ . Järelikult,  $\cos \alpha_1 > \cos \alpha_2$ , s. t. *teises veerandis on  $\cos \alpha$  kahanev funktsioon.*



Joon. 45.

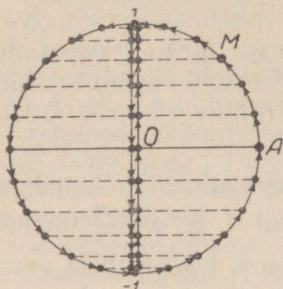
Suurima ja väikseima väärtuse omandab koosinus II veerandi otspunktides:  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  puhul 0 ja  $\alpha = \pi$  puhul  $-1$ .

Olles I ja II veerandis kahanev funktsioon, kahaneb  $\cos \alpha$  seega ülemisel poolringjoonel; suurima ja väikseima väärtuse ( $\cos 0 = 1$  ja  $\cos \pi = -1$ ) omandab ta ülemise poolringjoone otspunktides. Iga väärtuse  $m$ , mis asetseb  $-1$  ja  $1$  vahel, omandab funktsioon  $\cos \alpha$  argumendi väärtuse  $\alpha = \arccos m$  puhul.

Arvlõigule\*  $0 \leq \alpha \leq \pi$  vastab ülemine poolringjoon (koos otspunktidega).

Funktsiooni  $\cos \alpha$  esitatud omadused võib sõnastada järgmiselt: lõigul  $[0, \pi]$  funktsioon  $\cos \alpha$  kahaneb 1-st (-1)-ni.

Vaadeldes funktsiooni  $\cos \alpha$  alumisel poolringjoonel võib näidata, et lõigul  $-\pi \leq \alpha \leq 0$  (alumine poolringjoon) funktsioon  $\cos \alpha$  kasvab (-1)-st 1-ni.



Joon. 46.

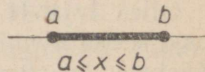
Kuna  $\cos \alpha$  on perioodiline funktsioon, perioodiga  $2\pi$ , siis kahaneb ta 1-st (-1)-ni igal lõigul  $[2k\pi, (2k+1)\pi]$  (ülemine poolringjoon) ja kasvab (-1)-st 1-ni igal lõigul  $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$  (alumine poolringjoon).

Kui punkt  $M$  liigub ühikringjoonel positiivses suunas, siis tema projektsioon abstsissiteljel liigub horisontaaldiameetril (joon. 46).

Kui punkt  $M$  kirjeldab ülemise poolringjoone, siis tema projektsioon kirjeldab horisontaaldiameetri paremalt vasakule, tema abstsiss, s. t. kaare  $\alpha = AM$  koosinus, kahaneb aga 1-st (-1)-ni. Kui punkt  $M$  kirjeldab alumise poolringjoone, siis tema projektsioon abstsissiteljel kirjeldab horisontaaldiameetri vasakult paremale; seejuures punkti  $M$  abstsiss kasvab (-1)-st 1-ni.

Kui punkt  $M$  liigub ringjoonel ühtlaselt, siis tema projektsioon sirgel sooritab perioodilist liikumist, mida füüsikas nimetatakse harmooniliseks võnkumiseks.

\* Olgu  $a$  ja  $b$  kaks reaalarvu, kusjuures  $a < b$ . Arvlõiguks ehk lihtsalt lõiguks  $a$ -st  $b$ -ni (mitte samastada sirglõigu mõistega) nimetatakse kõigi  $a$  ja  $b$  vahel asuvate reaalarvude ning arvude  $a$  ja  $b$  eneste poolt moodustatud hulka, s. t. kõigi niisuguste reaalarvude  $x$  hulka, mis rahuldavad võrratusi  $a \leq x \leq b$ . Arvsirgel (joon. 47) kujutatakse arvlõik sirglõiguna, mis on piiratud punktidega  $a$  ja  $b$ , kusjuures need punktid ise kuuluvad lõiku. Lõik  $a$ -st  $b$ -ni tähistatakse:  $[a, b]$ .



Joon. 47.

s e k s. Harmoonilist võnkumist vaadeldakse kui perioodilise liikumise lihtsaimat kuju.

**Funktsioon  $\sin \alpha$ .** Kui argumenti väärtused on  $\alpha_1$  ja  $\alpha_2$  kuuluvad esimesse veerandisse ning  $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$ , siis (joon. 44) suuremale kaarel toetub suurem kõõl, millega  $2y_1 < 2y_2$  ja  $y_1 < y_2$ . Kuna  $y_1 = \sin \alpha_1$  ja  $y_2 = \sin \alpha_2$ , siis:

$$\sin \alpha_1 < \sin \alpha_2, \text{ kui } \alpha_1 < \alpha_2.$$

Seega I veerandis argumenti suuremale väärtusele vastab siinuse suurem väärtus.

*Esimeses veerandis funktsioon  $\sin \alpha$  kasvab 0-st 1-ni.*

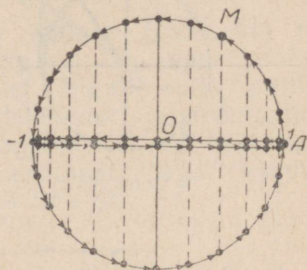
Vaadeldes funktsiooni  $\sin \alpha$  IV veerandis, võib näidata, et selles veerandis ta kasvab  $(-1)$ -st 0-ni.

I ja IV veerand moodustavad parempoolse poolringjoone. Lõigul  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  (parempoolne poolringjoon) funktsioon  $\sin \alpha$  kasvab  $(-1)$ -st 1-ni.

Funktsiooni  $\sin \alpha$  vaatlemisest vasakul poolringjoonel järeldub, et lõigul  $\left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right]$  funktsioon  $\sin \alpha$  kahaneb 1-st  $(-1)$ -ni.

Punkti  $M$  liikumisel parempoolsel poolringjoonel positiivses suunas kirjeldab tema projektsioon ordinaatteljel vertikaaldiameetri alt üles ning punkti  $M$  ordinaat, s. t. kaare

$\widehat{AM}$  siinus, kasvab  $(-1)$ -st 1-ni. Punkti liikumisel vasakpoolsel poolringjoonel kirjeldab tema projektsioon vertikaaldiameetri ülalt alla ning ordinaat kahaneb 1-st  $(-1)$ -ni (joon. 48).

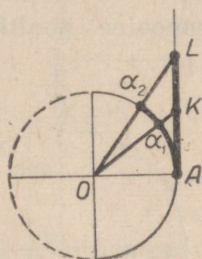


Joon. 48.

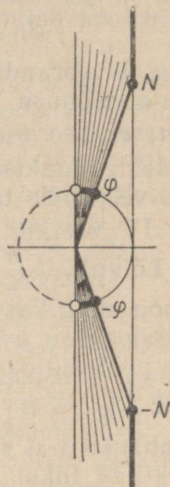
**Funktsioon  $\tan \alpha$ .** Kui argumenti väärtused  $\alpha_1$  ja  $\alpha_2$  kuuluvad esimesse veerandisse ning  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$ , siis, konstrueerides tangensteljel vastavad punktid, saame kolmnurgad  $OAK$  ja  $OAL$  (joon. 49) nurkadega  $\alpha_1$  ja  $\alpha_2$  tipu  $O$  juures. Kuna  $\alpha_2 > \alpha_1$ , siis sirge  $OL$  asetseb väljapool kolmnurka  $OAK$  ja lõikub külje  $AK$  pikendusega punktis  $L$ . Seega  $AK < AL$ , s. t.  $\tan \alpha_1 < \tan \alpha_2$ . Järelikult, *esimeses veerandis on  $\tan \alpha$  kasvav funktsioon.*

Olgu  $N$  mistahes etteantud (ükskõik kui suur) positiivne arv. Konstrueerime tangensteljel punkti  $(1, N)$  (joon. 50) ja ühikringjoone vastava kaare  $\varphi = \arctan N$ . Kui kaar, mis mõõtab arvuga  $\alpha$ , lõpeb punktide  $\varphi$  ja  $\frac{\pi}{2}$  vahel, siis  $\tan \alpha > N$ .

Seega, tangensi väärtused on mistahes etteantud positiivsest arvust  $N$  suuremad argumendi  $\alpha$  kõigi väärtuste puhul, mis on arvule  $\frac{\pi}{2}$  küllalt lähedal, kuid sellest väiksemad (nimelt  $\arctan N < \alpha < \frac{\pi}{2}$  puhul).



Joon. 49.



Joon. 50.

See tangensi omadus kirjutatakse üles kujul:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan \alpha = +\infty \quad \left( \text{kui } \alpha < \frac{\pi}{2} \right)^*.$$

Vaadeldes funktsiooni  $\tan \alpha$  IV veerandis, võib näidata, esiteks, et vahemikus  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  ta kasvab, olles negatiivne, ja teiseks, et iga etteantud arvu  $N > 0$  puhul on tal väiksemaid väärtusi, kui  $(-N)$ :

$$\tan \alpha < -N, \text{ kui } -\frac{\pi}{2} < \alpha < -\arctan N.$$

\* Seda kirjutust tuleb lugeda järgmiselt:  $\tan \alpha$  läheneb pluss lõpmatusele, kui  $\alpha$  läheneb  $\frac{\pi}{2}$ -le, jäädes sellest väiksemaks.

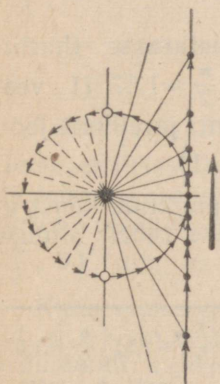
Tangensi viimane omadus kirjutatakse üles kujul:

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan \alpha = -\infty \quad \left( \text{kui } \alpha > -\frac{\pi}{2} \right).$$

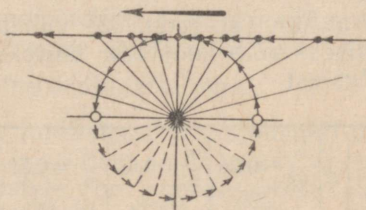
Vahemikus  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  (parempoolne poolringjoon) funktsioon  $\tan \alpha$  kasvab ja omandab mistahes reaalarvulise väärtuse  $m$  argumendi väärtuse puhul  $\alpha = \arctan m$ . Öeldakse, et vahemikus  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  kasvab funktsioon  $\tan \alpha$   $(-\infty)$ -st (miinus lõpmatuses)  $(+\infty)$ -ni (pluss lõpmatuseni).

Kuna  $\tan \alpha$  on perioodiline funktsioon, perioodiga  $\pi$ , siis kasvab ta  $(-\infty)$ -st  $(+\infty)$ -ni igas vahemikus  $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ , milledest koosneb tema määramispiirkond.

Punkti liikumisel positiivses suunas (joon. 51) nii parempoolsel kui ka vasakpoolsel poolringjoonel liigub selle punkti tsentraalprojektsioon koordinaatide algusest tangensteljel alt üles, projektsiooni ordinaat aga kasvab  $(-\infty)$ -st  $(+\infty)$ -ni.



Joon. 51.



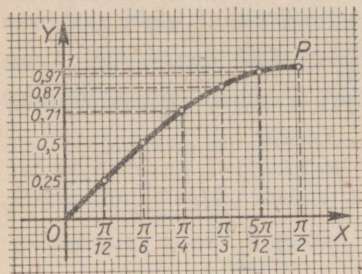
Joon. 52.

Funktsioon  $\cot \alpha$  kahaneb  $(+\infty)$ -st  $(-\infty)$ -ni igas vahemikus  $[k\pi, (k+1)\pi]$ , milledest koosneb tema määramispiirkond (joon. 52).

Kootangensit võib uurida sama meetodiga, millega me uurisime tangensit.

### § 32. Trigonomeetriliste funktsioonide graafikud.

Funktsioonide graafikute konstrueerimise mõiste on teada juba algebrast.



Joon. 53.

Järgnevalt näitame, kuidas toimub trigonomeetriliste funktsioonide graafikute konstrueerimine.

Graafiku konstrueerimiseks tuleb argumendi väärtus kujutada abstsissitelje (mitte aga ühikringjoone) punktina; sellepärast tähistame trigonomeetriliste funktsioonide argumendi tähega  $x$  ( $\alpha$  asemel).

Funktsiooni  $y = \sin x$  graafikut nimetatakse (harilikuks) sinusoidiks. Lõigul  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \approx 1,57$  (I veerand) kasvab funktsioon  $y = \sin x$  0-st 1-ni; järelt joon «tõuseb» punktist  $O(0, 0)$  punkti  $P\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ .

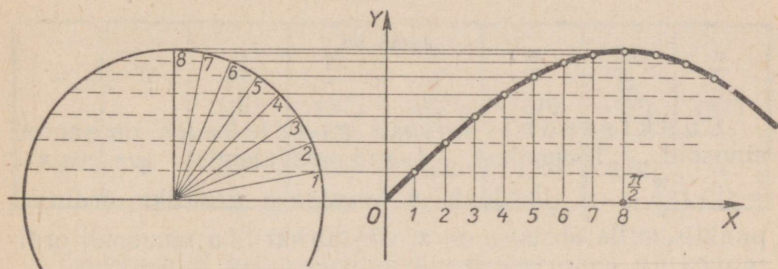
Graafiku (vt. joon. 53) vahepealsete punktide konstrueerimiseks võib koostada näiteks järgmise tabeli siinuse väärtustest:

$x$	0	$\frac{\pi}{12} \approx 0,26$ (15°)	$\frac{\pi}{6} \approx 0,52$ (30°)	$\frac{\pi}{4} \approx 0,78$ (45°)	$\frac{\pi}{3} \approx 1,05$ (60°)	$\frac{5\pi}{12} \approx 1,31$ (75°)	$\frac{\pi}{2} \approx 1,57$ (90°)
$y = \sin x$	0	0,26	0,50	0,71	0,87	0,97	1

Väärtused on võetud V. Bradise tabelleist (ümardatult teise kümnendkohani).

Sinusoidi võib kuitahes täpselt konstrueerida ka geomeetriliselt. Ühikringjoone esimese veerandi (joon. 54) ja

abstsisstelje lõigu  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \approx 1,57$ , mis on veerandring-  
 joonega ühepikkune, jaotame ühesuguseks arvuks võrdse-  
 teks osadeks (joonisel 54 kaheksaks osaks)\*. Ringjoone  
 jaotuspunktidest teljele  $OX$  tõmmatud ristlõigud (millede  
 pikkused võrduvad siinuste väärtustega) kanname üle  
 lõigu  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  vastavatesse punktidesse ordinaatidena.  
 Nende ristlõikude otspunktid asetsevad sinusoidil ning  
 sinusoidi enda praktiliseks saamiseks tuleb need punktid  
 lekaali abil ühendada sujuva joonega.



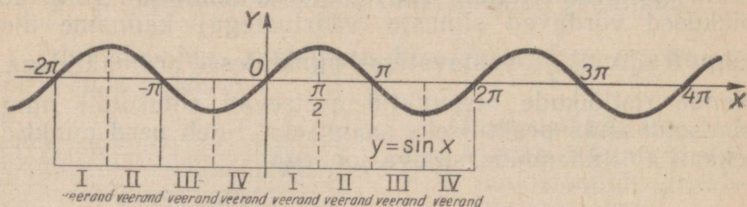
Joon. 54.

Teises veerandis  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$  siinus kahaneb 1-st 0-ni.  
 Geomeetrisest konstruktsioonist nähtub, et siinuse graafik  
 teises veerandis on sümmeetriline tema graafikuga esi-  
 meses veerandis niisuguse sirge suhtes, mis läbib punkti  
 $(\frac{\pi}{2}, 0)$  ning on paralleelne ordinaatteljega.

Kuna siinus on paaritu funktsioon, siis sinusoidi punk-  
 tid  $x$ ,  $y = \sin x$  ja  $(-x)$ ,  $-y = \sin(-x)$ , mis vastavad  
 argumendi vastandväärtustele, on koordinaatide alguse  
 suhtes sümmeetrilised. Järelikult, *sinusoid on koordinaa-  
 tide alguse suhtes sümmeetriline joon*. Seega, olles konst-  
 rueerinud siinuse graafiku lõigul  $[0, \pi]$ , saame ta süm-  
 meetria põhjal konstrueerida kohe ka lõigul  $[-\pi, 0]$ . Lõigu  
 $-\pi \leq x \leq \pi$  pikkus võrdub siinuse perioodiga, seega kogu  
 sinusoidi saamiseks tuleb sellel lõigul leitud sinusoidi osa

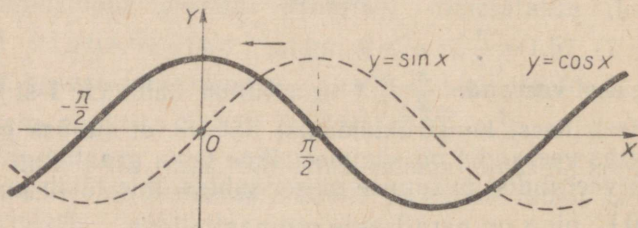
\* Joonise ülekuhjamise vältimiseks on ühikringjoon kantud vasa-  
 kule ja tema keskpunkt ei asetse koordinaatide alguses.

järk-järgult kanda paremale ja vasakule pikkuste  $2\pi$ ,  $4\pi$ ,  $6\pi$ , ... võrra. Niiviisi moodustub lainekujuline joon (joon. 55), mis koosneb ühesugustest, perioodiliselt korduvatest kaartest.



Joon. 55.

Funktsiooni  $y = \cos x$  graafikuks on samuti sinusoid. Tõepoolest, taandamisvalemist  $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$  järeldeb, et koosinuse graafiku ordinaat punktis, mille abstsiss on  $x$ , võrdub hariliku sinusoidi ordi-



Joon. 56.

naadiga punktis, mille abstsiss on  $x + \frac{\pi}{2}$ . Nii on eriti  $x=0$  puhul graafiku ordinaat  $\cos 0 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$  puhul on ordinaat  $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$  puhul on ordinaat  $\sin \pi = 0$ . Kogu graafiku (joon. 56) võib saada sinusoidi (joonisel 56 näidatud punktiiriga) paralleelsel

ülekandmisel abstsissstelje sihis vasakule  $\frac{\pi}{2}$  võrra, mis vastab argumentidele  $x$  liidetava  $\frac{\pi}{2}$  lisamisele.

Kuna  $\cos x = \cos(-x)$  (koosinus on paarisfunktsioon), siis *joon on sümmeetriline telje OY suhtes.*

Funktsiooni  $y = \tan x$  graafikut nimetatakse *tangensoidiks*. Piirkonnas  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}^*$  funktsioon  $y = \tan x$  kasvab 0-st  $\infty$ -ni. Graafiku punktide konstrueerimiseks võib koostada näiteks järgmise tabeli tangensi väärtustest (kasutades V. Bradise tabelleid):

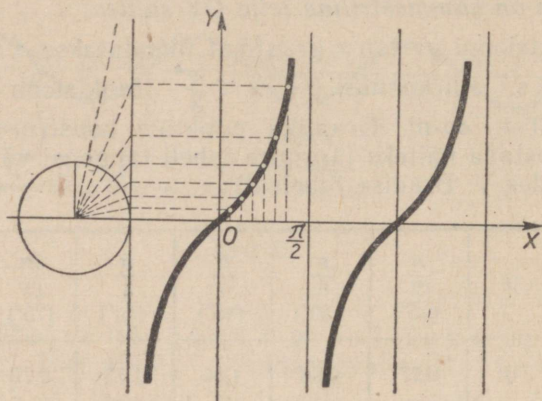
$x$	0	$\frac{\pi}{12}$ (15°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{5\pi}{12}$ (75°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
$y$	0	0,27	0,58	1,00	1,73	3,73	—

Tangensoidi geomeetriline konstrueerimine piirkonnas  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  on näidatud joonisel 57. Ühikringjoone esimene veerand ja abstsissstelje osa 0 ning  $\frac{\pi}{2}$  vahel on jaotatud mingiks arvuks (joonisel 57 kaheksaks) võrdseks osaks. Ringjoone jaotuspunktid on ringi keskpunkti projekteeritud tangensteljele ning tangenstelje lõigud seejärel ristlõikudena üle kantud abstsissstelje vastavatesse punktidesse. Nende ristlõikude otspunktid on ühendatud sujuva joonega.

Kuna  $\tan x$  on paaritu funktsioon, siis sellest järgneb, et tema *graafik on sümmeetriline koordinaatide alguse suhtes*. Seega, olles graafiku konstrueerinud piirkonnas  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ , võime teda sümmeetria põhjal jätkata ka vahemikku  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$  (IV veerandisse).

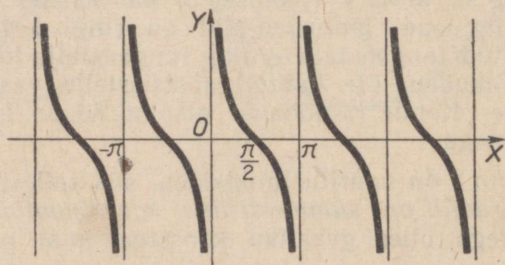
\* Niisugust piirkonda nimetatakse *poollõiguks* ja tähistatakse:  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  (Tõlk.)

Vahemiku  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  pikkus võrdub tangensi perioodiga; seega kogu tangensoidi saamiseks tuleb saadud haru järk-järgult kanda üle paremale ja vasakule pik-



Joon. 57.

kuste  $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  võrra. Niimoodi saame joone, mis koosneb lõpmatust hulgast ühesugustest, perioodiliselt korduvatest harudest.



$$y = \cot x$$

Joon. 58.

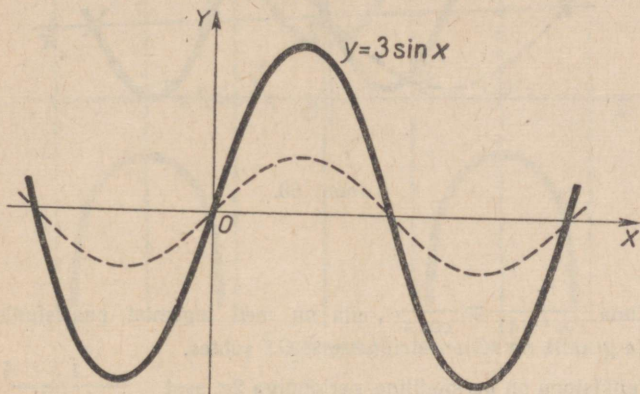
Funktsiooni  $y = \cot x$  graafik on kujutatud joonisel 58. Tema konstrueerimiseks tuleb arvestada, et vahemikus  $0 < x < \pi$  funktsioon  $\cot x$  kahaneb  $\infty$ -st

$(-\infty)$ -ni. Üksikute punktide konstrueerimiseks tuleb koostada väärtuste tabel.

### Funktsioonide graafikute konstrueerimise näiteid.

#### 1. Konstrueerida funktsiooni $y=3 \sin x$ graafik.

Lahendus. Tarvitseb vaid tähele panna, et argumendi  $x$  antud väärtuse puhul funktsiooni  $y=3 \sin x$  graafiku ordinaat on kolm korda suurem hariliku sinusoidi ordinaadist. Järelikult võime selle graafiku — deformeeritud sinusoidi — saada hariliku sinusoidi kõikide ordinaatide kolmekordseks väljavenitamise teel (joon. 59, punktiiriga on märgitud harilik sinusoid).



Joon. 59.

Funktsioon  $y=3 \sin x$  säilitab märki samades vahemikes ning omab sama perioodi  $2\pi$  nagu funktsioon  $y=\sin x$ . Tema suurim ja väiksem väärtus on  $\pm 3$ .

#### 2. Konstrueerida funktsioon $y=\sin 2x$ graafik.

Lahendus. Tarvitseb vaid tähele panna, et argumendi  $x$  antud väärtuse puhul funktsiooni  $\sin 2x$  väärtus võrdub hariliku sinusoidi ordinaadiga punktis, millel on kahekordne abstsiss  $2x$ . Nii on

$$\text{eriti } x = \frac{\pi}{6} \text{ puhul } y = \sin 2 \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x = \frac{\pi}{4} \text{ puhul } y =$$

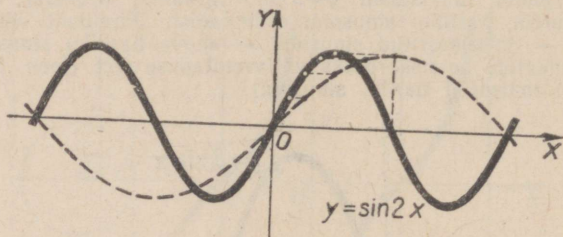
$= \sin \frac{\pi}{2} = 1$ . Järelikult otsitava graafiku, mis on jälle deformeeritud sinusoid, võime saada harilikust sinusoidist selle kahekordse kokkusuurumise teel abstsissitelje sihis (joon. 60).

Funktsioon  $\sin 2x$  on perioodiline, perioodiga  $\pi$ , sest tema väärtus ei muutu argumendile arvu  $\pi$  lisamisel:

$$\sin 2(x+\pi) = \sin (2x+2\pi) = \sin 2x.$$

3. Konstrueerida funktsioon  $y = \sec x$  graafik.

L a h e n d u s. Definiitsiooni kohaselt  $y = \frac{1}{\cos x}$ . Määramispiirkonnas  
 leiame tingimusest  $\cos x \neq 0$ , kust  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ .



Joon. 60.

Kuna  $\frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x}$ , siis on meil tegemist paarisfunktsiooniga ja graafik on sümmeetriline telje  $OY$  suhtes.

Funktsioon on perioodiline, perioodiga  $2\pi$ , sest  $\frac{1}{\cos(x+2\pi)} = \frac{1}{\cos x}$ .

Funktsioonide  $\sec x$  ja  $\cos x$  väärtused on samamärgilised: kas mõlemad positiivsed või mõlemad negatiivsed.

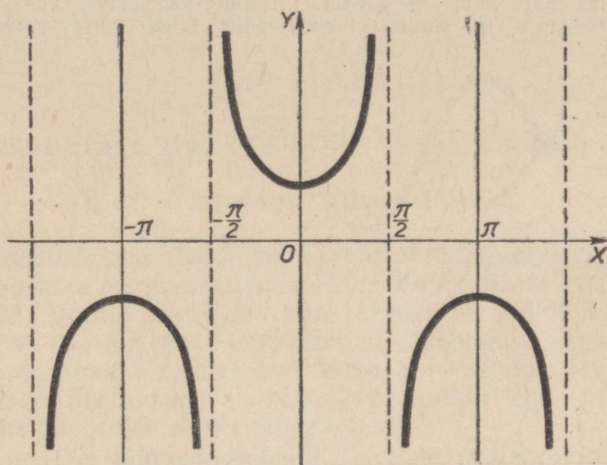
I veerandis  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  funktsioon  $\cos x$  kahaneb 1-st 0-ni,  $y = \frac{1}{\cos x}$  aga kasvab 1-st  $(+\infty)$ -ni. Graafiku (joon. 61) punktide konstrueerimiseks koostame funktsiooni väärtuste tabeli:

$x$	$\frac{\pi}{20}$ (9°)	$\frac{2\pi}{20}$ (18°)	$\frac{3\pi}{20}$ (27°)	$\frac{4\pi}{20}$ (36°)	$\frac{5\pi}{20}$ (45°)	$\frac{6\pi}{20}$ (54°)	$\frac{7\pi}{20}$ (63°)	$\frac{8\pi}{20}$ (72°)	$\frac{9\pi}{20}$ (81°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
$y$	1,01	1,05	1,12	1,24	1,41	1,70	2,20	3,24	6,41	—

See tabel on koostatud järgmiselt: koosinuse väärtused (ümardatult kolmanda kohani) on võetud V. Bradise tabelist VII, pöördväärt-

tused tabelist XVII ja tulemus ümardatud teise kümnendkohani.  
Näiteks:

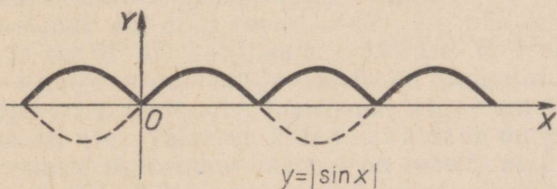
$$\sec \frac{\pi}{20} = \frac{1}{\cos 9^\circ} \approx \frac{1}{0,988} \approx 1,01.$$



$$y = \sec x$$

Joon. 61.

Seekansi graafiku konstrueerimiseks piirkonnas  $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$  tuleb I veerandis konstrueeritud graafikut jätkata sümmeetriliselt telje  $OY$  suhtes.



Joon. 62.

Vahemikus  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$  on  $y < 0$ , sealjuures piirkonnas  $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$

funktsioon  $y$  kasvab  $(-\infty)$ -st  $(-1)$ -ni, piirkonnas  $\pi \leq x < \frac{3}{2}\pi$  kahaneb aga  $(-1)$ -st  $(-\infty)$ -ni.

4. Joonisel 62 on kujutatud funktsiooni  $y=|\sin x|$  graafik, mille võime samuti saada harilikust sinusoidist. Nendes lõikudes, kus  $\sin x \geq 0$ , on  $y=\sin x$ . Nendes vahemikes, kus  $\sin x < 0$ , on  $y=-\sin x$  ja sinusoidi ordinaadid tuleb võtta vastandmärkidega.

## V peatükk.

### TABELITE KASUTAMINE ARVUTAMISEL.

#### § 33. Trigonomeetrilised tabelid.

*Praktilisteks arvutusteks kasutatakse trigonomeetriliste funktsioonide ja nende logaritmide ligikaudsete väärtuste tabeleid. Koolis tarvisminevate arvutuste puhul kasutatakse V. Bradise neljakohalisi tabeleid. Täpsemate arvutuste puhul kasutatakse tabeleid, kus funktsioonide väärtused on antud enamate tüvenumbritega (näiteks viiekohalisi, seitsmekohalisi tabeleid).*

**Loomulike väärtuste tabelid.** Tabeleid, milledes on antud trigonomeetriliste funktsioonide väärtused, nimetatakse trigonomeetriliste funktsioonide loomulike väärtuste tabeleiks. V. Bradise tabelis VIII on antud 0 ja 90° vahel asetsevate nurkade siinuste ja koosinuste ligikaudsed väärtused nelja kümnendkohaga iga 6' tagant. Täiendusnurkade jaoks saadud valemid:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha; \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

näitavad, et siinuse ja koosinuse väärtuste arvutamiseks võib kasutada üht ning sama tabelit. Nii näiteks omavad  $\sin 26^\circ$  ja  $\cos 64^\circ$  ühe ning sama väärtuse. V. Bradise tabelis on siinuse argumentide väärtused paigutatud kasvavas järjekorras ülalt alla, koosinuse argumentide väärtused aga alt üles. Täisarvu kraade sisaldava nurga siinuse või koosinuse ligikaudne väärtus on tabelis antud. Nii on näiteks  $\sin 33^\circ \approx 0,5446$  paigutatud kõige vasakpoolsemas veerus «A» asetseva reanumbri  $33^\circ$  kõrvale, kuna aga  $\cos 33^\circ \approx 0,8387$  on paigutatud parempoolses veerus «A» asetseva reanumbri  $33^\circ$  kõrvale.

Selleks et leida  $\sin 33^\circ 12'$ , otsime vasakpoolsest veerust «A» reanumbri  $33^\circ$  ja kõige ülemisest reast veerunumbri

12'. Vastava rea ning veeru lõikekohalt leiame  $\sin 33^\circ 12' \approx 0,5476$ . Samuti leiame  $\cos 33^\circ 12' \approx 0,8368$ , kusjuures ainult reanumber  $33^\circ$  tuleb otsida parempoolsest veerust «A» ja veerunumber 12' kõige alumisest reast.

Olgu tarvis leida  $\sin 33^\circ 14'$ . Tabelist leiame  $\sin 33^\circ 12' \approx 0,5476$ . Kuna funktsioon  $\sin \alpha$  on  $0$  ja  $90^\circ$  vahel kasvav, siis  $\sin 33^\circ 14' > \sin 33^\circ 12'$ . Järelikult  $\sin 33^\circ 12'$  väärtusele tuleb lisada nurgale 2' vastav parandus, mis on paigutatud põhitabelist paremal pool olevasse paranduste tabelisse. Rea  $33^\circ$  ja paranduste veeru 2' lõikekohal asetseb arv 5, mis tuleb liita  $\sin 33^\circ 12'$  neljandale kümnendkohale. Seega  $\sin 33^\circ 14' \approx 0,5481$ . Kui on tarvis leida  $\sin 33^\circ 17'$ , siis tabelist leiame  $\sin 33^\circ 18' \approx 0,5490$  ja lahutame neljandast kümnendkohast nurgale 1' vastava paranduse 2. Seega  $\sin 33^\circ 17' \approx 0,5488$ . Koosinuse väärtused leiame tabelist samal viisil, kuid järgmise erinevusega: funktsioon  $\cos \alpha$  on  $0$  ja  $90^\circ$  vahel kahanev ja seega, kui koosinus on leitud argumendi väiksema väärtuse jaoks, siis parandus tuleb lahutada (mitte aga liita); kui koosinus on leitud argumendi suurema väärtuse jaoks, siis parandus tuleb liita (mitte aga lahutada). Nii näiteks  $\cos 33^\circ 14'$  arvutamiseks leiame tabelist  $\cos 33^\circ 12' \approx 0,8368$ , mille viimasest kümnendkohast lahutame nurgale 2' vastava paranduse 3. Seega  $\cos 33^\circ 14' \approx 0,8365$ . Selleks et leida  $\cos 33^\circ 17'$ , tuleb  $\cos 33^\circ 18' \approx 0,8358$  viimasele kümnendkohale liita nurgale 1' vastav parandus 2. Seega  $\cos 33^\circ 17' \approx 0,8360$ .

V. Bradise tabelis IX on antud  $0$  ja  $76^\circ$  vahel olevate nurkade tangensid iga 6' tagant. Tabelis X on antud  $76^\circ$  ja  $89^\circ 59'$  vahel olevate nurkade tangensid iga 1' tagant. Täisnurgale lähedaste nurkade tangensite üksikasjalisema tabeli X olemasolu seletub sellega, et nende nurkade puhul tabelivahe, s. t. tangensi naaberväärtuste vahe tabelis, muutub väga kiiresti. Samade tabelite IX ja X abil leitakse ka kootangensi väärtused. Paranduste liitmise ja lahutamise reeglid on samad, mis siinuse ja koosinuse väärtuste tabeli puhul: tuleb mees pidada, et vahemikus ( $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ) tangens kasvab, kootangens aga kahaneb.

Nurga leidmiseks tema trigonomeetrilise funktsiooni antud väärtuse järgi saab kasutada neidsamu trigonomeetriliste funktsioonide loomulike väärtuste tabeleid. Selgitame seda näidetega.

1. Leida teravnurk  $\alpha$ , kui on teada, et  $\sin \alpha = 0,1016$ .

L a h e n d u s. Tabelis VIII leiame arvule 0,1016 kõige lähema arvu; selleks osutub 0,1011, mis asetseb rea  $5^\circ$  ja veeru 48' löikekohal. Siinuse antud väärtus 0,1016 on suurem kui 0,1011, seega nurga  $\alpha$  tõeline väärtus on suurem kui  $5^\circ 48'$ , sest  $\sin \alpha$  on vahemikus ( $0^\circ, 90^\circ$ ) kasvav funktsioon. Paranduste tabelis on arv 6 kõige lähem arvule 5, mille võrra erinevad arvude 0,1016 ja 0,1011 viimased kümnendkohad. Vastav parandus on  $2'$ , mida liites saame:

$$\alpha = \text{arc sin } 0,1016 \approx 5^\circ 50'.$$

2. Leia  $\beta = \text{arc cos } (-0,5375)$ .

L a h e n d u s. Kuna  $\cos \beta = -0,5375$  on negatiivne, siis otsitav nurk lõpeb teises veerandis. Leiame teravnurga  $\alpha$ , mis täiendab otsitavat nurka  $180^\circ$ -ni. Kõigepealt

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos (180^\circ - \beta) = -\cos \beta = -(-0,5375) = \\ &= 0,5375. \end{aligned}$$

Arvule 0,5375 kõige lähem tabeliväärtus on 0,5373, millele vastab nurk  $57^\circ 30'$ . Nende arvude vahe neljanda kümnendkoha kahele ühikule vastab parandus  $1'$ . See parandus tuleb lahutada. Seega

$$\alpha \approx 57^\circ 29' \text{ ja } \beta \approx 180^\circ - 57^\circ 29' = 122^\circ 31'.$$

*Arvutuste teostamisel loomulike väärtuste tabeli abil on trigonomeetriliste funktsioonide korrutis otstarbekohane teisendada summaks.*

*Arvutustel tuleb silmas pidada ligikaudse arvutamise reegleid.*

Nii näiteks, kui ligikaudsed arvud on antud kolme tüvenumbriga, siis korrutamise ja jagamise teostamisel tuleb funktsioonide tabelist võetud väärtused ümardada, säilitades neli tüvenumbrit (neljanda numbri säilitame «tagavaraks»), kõik vahepealsed arvutustulemused ümardada samuti neljanda tüvenumbrini ja lõpptulemus ümardada kolmanda tüvenumbrini. Kui ligikaudne arv on antud näiteks viie kümnendkohaga, siis tema liitmisel trigonomeetrilise funktsiooni väärtusega, mis on võetud neljakohalisest tabelist, tuleb see ligikaudne arv ümardada, säilitades neli kümnendkohta. Kui suuremat täpsust nõudvate arvutuste puhul niisugune ümardamine ei ole lubatav, siis tuleb kasutada täpsemaid tabeleid.

Näiteid. 1) Arvutada neljakohaliste tabelite abil  $\sin 70^\circ \cos 55^\circ$ .

L a h e n d u s. Teisendame korrutise summaks:

$$\sin 70^\circ \cos 55^\circ = \frac{\sin(70^\circ + 55^\circ) + \sin(70^\circ - 55^\circ)}{2} = \frac{\sin 125^\circ + \sin 15^\circ}{2}.$$

Taandamisvalemite kohaselt  $\sin 125^\circ = \sin(180^\circ - 125^\circ) = \sin 55^\circ$ .  
Väärtused  $\sin 55^\circ \approx 0,8192$  ja  $\sin 15^\circ \approx 0,2588$  leiame tabelist. Seega:

$$\sin 70^\circ \cos 55^\circ \approx \frac{1}{2} (0,8192 + 0,2588) = 0,5390.$$

2) Arvutada korrutis  $S = 0,721 \sin^2 31^\circ 12'$ .

L a h e n d u s. Teisendame korrutise vaheks, kasutades valemit

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}. \text{ Saame:}$$

$$S = 0,721 \sin^2 31^\circ 12' = \frac{1}{2} \cdot 0,721 (1 - \cos 62^\circ 24')$$

Tabelist leiame  $\cos 62^\circ 24' \approx 0,4633$  ja edasi  $1 - \cos 62^\circ 24' \approx 0,5367$ .  
Järelikult.

$$S \approx \frac{1}{2} \cdot 0,721 \cdot 0,5367 \approx 0,1935 \approx 0,194.$$

3) V. Bradise neljakohaliste tabelite abil arvutada funktsiooni

$$y = x + \sin \frac{1}{x} \text{ väärtus: a) kui } x=2, \text{ b) kui } x=\pi.$$

L a h e n d u s. a) kui  $x=2$ , siis  $y = 2 + \sin \frac{1}{2}$ . V. Bradise tabelis on trigonomeetriliste funktsioonide väärtused antud kraadimõõdus väljendatud argumendi jaoks ja seetõttu tuleb argumendi väärtus  $\frac{1}{2}$  (radiaani) kõigepealt avaldada kraadides;  $\frac{1}{2}$  (radiaani)  $\approx \frac{1}{2} (57^\circ 18') = 28^\circ 39'$ . Järelikult

$$y \approx 2 + \sin 28^\circ 39' \approx 2 + 0,4795 = 2,4795.$$

b) Kui  $x=\pi$ , siis  $y = \pi + \sin \frac{1}{\pi}$ . V. Bradise tabelite 5. leheküljel on antud  $\pi = 3,1415926 \dots$  ja  $\frac{1}{\pi} = 0,3183098 \dots$ , milliseid tuleb ümardada:  $\pi \approx 3,1416$ ;  $\frac{1}{\pi} \approx 0,3183$ .

Teisendades 0,3183 radiaani) kraadideks, saame tabelist XVI 18°14'. Järelikult

$$y \approx 3,1416 + \sin 18^\circ 14' \approx 3,1416 + 0,3129 = 3,4545.$$

**Logaritmide tabelid.** Arvutuste jaoks logaritmidega on koostatud trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste logaritmide tabelid. V. Bradise tabelleis III—VII on need logaritmid, argumendi väärtuste jaoks vahemikust ( $0^\circ, 90^\circ$ ), antud nelja kümnendkohaga.

Logaritmifunktsioon alusega 10 on kasvav funktsioon, seepärast logaritmi märgi all oleva avaldise suuremale väärtusele vastab logaritmi suurem väärtus. Kuna esimeses veerandis funktsioonid  $\sin x$  ja  $\tan x$  kasvavad ning  $\cos x$  ja  $\cot x$  kahanevad, siis ka funktsioonid  $\log \sin x$  ja  $\log \tan x$  kasvavad ning  $\log \cos x$  ja  $\log \cot x$  kahanevad.

Trigonomeetriliste funktsioonide logaritmide tabelid on samasuguse ehitusega nagu nende funktsioonide loomulike väärtuste tabelid; kasutamise reeglid on mõlemal juhul ühesugused.

1. Tabeleid kasutatakse trigonomeetriliste funktsioonide logaritmide väärtuste leidmiseks ja samuti nurkade leidmiseks nende trigonomeetriliste funktsioonide logaritmide väärtuste järgi.

2. Siinuse ja koosinuse (tangensi ja kootangensi) logaritmid leiame ühest ning samast tabelist.

3. Logaritmide väärtused on antud nurkade jaoks iga  $6'$  tagant. Parandused  $1'$ ,  $2'$  ja  $3'$  jaoks on antud eraldi tabelleis põhitabelist paremal. Paranduste liitmine ja lahutamine toimub seda silmas pidades, et vahemikus ( $0^\circ, 90^\circ$ ) on funktsioonid  $\log \sin x$  ja  $\log \tan x$  kasvavad ning  $\log \cos x$  ja  $\log \cot x$  kahanevad.

4. Nendes piirkondades, kus tabelivahe muutub kiiresti, on funktsioonide väärtused antud iga  $1'$  tagant. Nii-sugune on näiteks  $0$  ja  $14^\circ$  ( $76^\circ$  ja  $90^\circ$ ) vahel olevate nurkade siinuste (koosinuste) logaritmide väärtuste tabel III.

5. Arvutuste puhul neljakohalistel logaritmide tabelitega tuleb ligikaudsed arvud ümardada, säilitades neli tüvenumbrit.

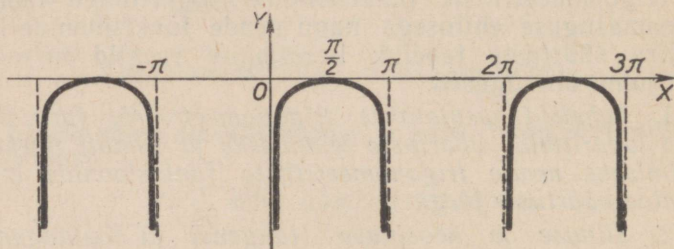
6. Negatiivseid tegureid sisaldavate korrutiste arvutamisel tuleb arvutada absoluutväärtuste korrutis ja võtta see sobiva märgiga (negatiivsete tegurite arvu järgi).

Joonisel 63 on kujutatud funktsiooni  $y = \log \sin x$  graafik. See graafik on konstrueeritud järgmiselt: I veerandis  $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$  vahepealne argument  $u = \sin x$  kasvab 0-st 1-ni ning funktsioon  $y = \log \sin x = \log u$  kasvab

$(-\infty)$ -st 0-ni. Graafiku punktide konstrueerimiseks võib koostada näiteks järgmise tabeli:

$x$	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{2\pi}{20}$	$\frac{3\pi}{20}$	$\frac{4\pi}{20}$	$\frac{5\pi}{20}$	$\frac{6\pi}{20}$	$\frac{7\pi}{20}$	$\frac{8\pi}{20}$	$\frac{9\pi}{20}$	$\frac{\pi}{2}$
$y$	-0,81	-0,51	-0,34	-0,23	-0,15	-0,09	-0,05	-0,02	-0,01	0

kus  $\log \sin x$  väärtused on (ümardatult) võetud V. Bradise tabelist III.



Joon. 63.

Piirkonnas  $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$  funktsioon  $\log \sin x$  kahaneb 0-st  $(-\infty)$ -ni, sest II veerandis  $\sin x$  kahaneb 1-st 0-ni.

Lõik  $-\pi \leq x \leq 0$  ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda, sest alumises pooltasandis  $\sin x \leq 0$  ja  $\log \sin x$  ei oma seega mõtet.

Funktsioon  $\log \sin x$  on perioodiline perioodiga  $2\pi$ , sest  $\log \sin(x+2\pi) = \log \sin x$ .

Graafik koosneb üksikutest perioodiliselt korduvatest joontest.

### § 34. Arvutuslükati kasutamisest.

Niisuguste arvutuste teostamiseks, mis ei nõua suurt täpsust (mitte enam kui kolme tüvenumbrit), võib kasutada arvutuslükatit. Arvutuslükati korpusele on paigutatud logaritmiline põhiskaala, mille ehitus on järgmine: skaala lõigu pikkus algusest kuni arvuga  $a$  märgitud punktini

võrdub arvu  $a$  logaritmi (kolmekohalise) mantissiga\*.  
 Täpselt samasugune skaala on paigutatud keele esiküljele. Keele tagaküljel asuvad siinusskaala ( $S$ ) ja tangensskaala ( $T$ ). Need skaalad on samasuguse ehitusega nagu logaritmiline põhiskaalagi. Näiteks on siinusskaalal selle lõigu pikkus, mis on võetud skaala algusest kuni antud nurka (kraadides) tähistava punktini, võrdne antud nurga siinuse logaritmi mantissiga. Kui keel ümber pöörata ja põhiskaala algus seada kohakuti trigonomeetrilise skaala algusega, siis siinus- (või tangens-) skaalal antud nurka tähistava punktiga kohakuti asetsev põhiskaala punkt on märgitud arvuga, mille moodustavad selle nurga siinuse (või tangensi) esimesed kolm tüvenumbrit. Nii näiteks asetseb siinusskaala punkti  $12^{\circ}30'$  kohal põhiskaalal arv 2—1—6, mis tähendab, et  $\sin 12^{\circ}30' \approx 0,216$ . Järelikult võib lükati abil leida trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi ja ka vastupidi: nurkade väärtusi nende trigonomeetriliste funktsioonide järgi. Lükatil ei ole koosinusskaalat, sest koosinuse võib asendada täiendusnurga siinusega. Tangensskaala on antud vaid nende teravnurkade jaoks, mis pole suuremad kui  $45^{\circ}$ , sest suurema kui  $45^{\circ}$  nurga tangensi võib leida samasusest  $\tan \alpha = \frac{1}{\tan(90^{\circ} - \alpha)}$ . Nii näiteks on  $\tan 70^{\circ} = \frac{1}{\tan 20^{\circ}}$  ja asetades nurga  $20^{\circ}$  tangensskaalal kohakuti põhiskaala parempoolse otspunktiga, loeme põhiskaalalt arvu 2—7—5, mis asetseb tangensskaala alguspunkti kohal. Arvestades, et  $\tan 70^{\circ} > 1$  (kuid  $\tan 70^{\circ} < 10$ , sest  $\arctan 10 \approx 84^{\circ}$ ), saame, et  $\tan 70^{\circ} \approx 2,75$ .

Keele sagedaste ümberpööramise vältimiseks on lükati korpuse tagaküljel kriipsud, mis asetsevad sisselõigetes täpselt põhiskaala otspunktide kohal. Kui sellise kriipsu kohale paigutada trigonomeetrilisel skaalal olev nurk, siis põhiskaala otspunkt näitab keele esiküljel vastava trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse.

Niisuguste korrutiste ning jagatiste arvutamine, mis sisaldavad tegurite või jagajatena trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi, toimub arvutuslükatil arvutamise tavaliste reeglite kohaselt. Nii näiteks selleks, et arvutada korrutist  $22,8 \cdot \sin 18^{\circ}30'$ , asetame siinusskaala alguspunkti

\* Mõõtühikuks võetakse tavaliselt 0,001 skaala pikkusest.

(olles keele ümber pööranud) põhiskaala arvu 2—2—8 kohale; siis siinusskaalal oleva nurga  $18^{\circ}30'$  kohal asetsevad põhiskaalal otsitava korrutise numbrid 7—2—3; järelikult  $22,8 \cdot \sin 18^{\circ}30' \approx 7,23$ .

**Märkus.** Väikeste nurkade puhul ei ole vastavaid märke üldisele skaalale praktiliselt võimalik kanda. Arvestades seda, et  $\sin 5^{\circ},6 \approx \tan 5^{\circ},6 \approx 0,1$  ning et väikeste nurkade siinuse ja tangensi väärtused on teineteisele lähedased, paigutatakse keele tagakülje keskele väiksemate kui  $5^{\circ},6$  nurkade siinuste ja tangensite ühine skaala (S&T). Selle skaala abil toimuvad arvutused väikeste nurkadega; arvutusreeglid jäävad endisteks.

---

## VI peatükk.

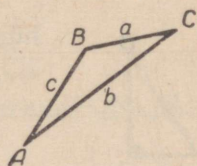
### GEOMEETRILISTE KUJUNDITE ELEMENTIDE ARVUTAMINE.

#### § 35. Kolmnurga elemendid.

Geomeetrias vaadeldakse kolmnurga mitmesuguseid elemente: külgi, nurki, übermõõtu, pindala, nurgapoolitajaid, mediaane, kõrgusi jne.

Kolmnurga külgi ja nurki nimetatakse tema põhielementideks.

Kui  $A$ ,  $B$  ja  $C$  on kolmnurga nurkade tipud, siis tähistatakse samade tähtedega ka neid nurki endid; väikeste tähtedega  $a$ ,  $b$  ja  $c$  tähistatakse külgi, mis asetsevad nendes samades suurtes tähtedega tähistatud nurkade vastas (joon. 64).



Joon. 64.

Kolmnurga põhielementide lubatavad väärtused peavad rahuldama järgmisi tingimusi:

1°. Kolmnurga nurgad on positiivsed ja nende summa on  $180^\circ$ :

$$A > 0, B > 0, C > 0 \text{ ja } A + B + C = 180^\circ.$$

2°. Kolmnurga küljed on positiivsed ja iga külg on väiksem kui ülejäänud kahe külje summa:

$$0 < a < b + c; 0 < b < c + a; 0 < c < a + b.$$

#### § 36. Kolmnurkade lahendamisest.

Geomeetrias vaadeldakse mitmesuguseid ülesandeid kolmnurga konstrueerimise kohta, kui on antud piisav arv selle kolmnurga elemente. Trigonomeetrias vaa-

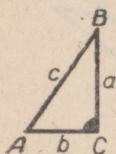
deldakse arvutusülesandeid, milledes tuleb arvutada ühed või teised elemendid, kui on antud piisav arv selle kolmnurga elementide arvulisi väärtusi. Neid ülesandeid nimetatakse tavaliselt kolmnurga lahendamise ülesanneteks. Geomeetrias uuritakse kolmnurga konstrueerimise järgmisi põhiülesandeid: *konstrueerida kolmnurk tema kolme antud põhielemendi järgi, milledest vähemalt üks on külg\**.

Trigonomeetrias lahendatakse vastavad põhiülesanded: kolmnurga kolme põhielemendi antud suuruste järgi arvutada ülejäänud kolme põhielemendi suurused (välja arvatud juhtum, kui on antud kolme nurga suurused).

### § 37. Täisnurksete kolmnurkade lahendamine.

Olgu  $ABC$  täisnurkne kolmnurk,  $C$  täisnurk,  $a$  ja  $b$  kaatetid, mis asetsevad teravnurkade  $A$  ja  $B$  vastas, ning  $c$  hüpotenuus (joon. 65). Siis saame:

Teravnurga koosinus on lähiskaateti suhe hüpotenuusi:



Joon. 65.

$$\cos A = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c} \quad (1)$$

Teravnurga siinus on vastaskaateti suhe hüpotenuusi:

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \sin B = \frac{b}{c} \quad (2)$$

Teravnurga tangens on vastaskaateti suhe lähiskaatetisse:

$$\tan A = \frac{a}{b}, \quad \tan B = \frac{b}{a} \quad (3)$$

\* Kolme nurga  $A$ ,  $B$  ja  $C$  järgi kolmnurka kas ei saa konstrueerida (kui  $A+B+C \neq 180^\circ$ ) või leidub lõpmata palju üksteisega sarnaseid kolmnurki (kui  $A+B+C = 180^\circ$ ), milledel on antud nurgad.

Teravnurga kootangens on lähiskaateti suhe vastaskaatetisse:

$$\cot A = \frac{b}{a}, \quad \cot B = \frac{a}{b} \quad (4)$$

Teravnurkade summa on  $90^\circ$ .

Põhiülesanded täisnurksete kolmnurkade puhul.

**Ülesanne I.** On antud hüpotenuus ja üks teravnurk; arutada ülejäänud elemendid.

Lahendus. Olgu antud  $c$  ja  $A$ . Nurk  $B = 90^\circ - A$  on samuti teada; kaatetid leiame valemeist (1) ja (2):

$$a = c \sin A, \quad b = c \cos A.$$

**Ülesanne II.** On antud kaatet ja üks teravnurk; arutada ülejäänud elemendid.

Lahendus. Olgu antud  $a$  ja  $A$ . Nurk  $B = 90^\circ - A$  on teada; valemeist (1) ja (3) leiame:

$$b = a \tan B (= a \cot A), \quad c = \frac{a}{\sin A}.$$

**Ülesanne III.** On antud kaatet ja hüpotenuus; arutada ülejäänud elemendid.

Lahendus. Olgu antud  $a$  ja  $c$  (kusjuures  $a < c$ ). Võrdusest (2) leiame nurga  $A$ :

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \text{kust } A = \arcsin \frac{a}{c},$$

siis  $B = 90^\circ - A$  ja lõpuks kaateti  $b$ :

$$b = c \cos A (= c \sin B).$$

**Ülesanne IV.** On antud kaatetid  $a$  ja  $b$ ; arutada ülejäänud elemendid.

Lahendus. Võrdusest (3) leiame teravnurga, näiteks  $A$ :

$$\tan A = \frac{a}{b}, \quad A = \arctan \frac{a}{b},$$

siis nurga  $B = 90^\circ - A$  ning lõpuks hüpotenuusi:

$$c = \frac{a}{\sin A} \left( = \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\cos B} \right).$$

Allpool on toodud täisnurkse kolmnurga lahendamise näide, kus kasutatakse logaritmade tabelleid.

Arvutamise puhul logaritmade tabelitega tuleb välja kirjutada vastavad valemid, logaritmid need, tabelleist leida antud elementide (või nende trigonomeetriliste funktsioonide) vajalikud logaritmid, arvutada otsitavate elementide (või nende trigonomeetriliste funktsioonide) logaritmid ja leida tabelleist otsitavad elemendid.

Näide. On antud kaatet  $a=166,1$  ja hüpotenuus  $c=187,3$ ; arvutada teravnurgad, teine kaatet ja pindala.

Lahendus. Saame:

$$\sin A = \frac{a}{c}; \log \sin A = \log a - \log c; \begin{array}{r} \log a = 2,2204 \\ \log c = 2,2725 \\ \hline \log \sin A = 1,9479 \end{array}$$

$$A \approx 62^{\circ}30'; B \approx 90^{\circ} - 62^{\circ}30' = 27^{\circ}30'.$$

Arvutame kaateti  $b$ :

$$b = a \tan B; \log b = \log a + \log \tan B; \begin{array}{r} \log a = 2,2204 \\ \log \tan B = 1,7165 \\ \hline \log b = 1,9369 \end{array}$$

$$b \approx 86,48.$$

Pindala arvutamiseks võib kasutada valemit:

$$S = \frac{1}{2} ab = 0,5a^2 \tan B; \begin{array}{r} \log 0,5 = 1,6990 \\ 2 \log a = 4,4408 \\ \log \tan B = 1,7165 \\ \hline \log S = 3,8563 \end{array} \left| \begin{array}{l} \log a = 2,2204 \\ \\ \\ \hline S \approx 7183. \end{array} \right.$$

Kontrolliks arvutame nurga  $A$  arvutuslükatil:

$$A = \arcsin \frac{a}{c} = \arcsin \frac{166}{187} = 62^{\circ}.$$

Märkus. Kaateti  $b$  võib arvutada Pythagorase teoreemist, kasutades ruutude ja ruutjuurte tabelleid (tabelid XI ja XII):

$$b = \sqrt{187,3^2 - 166,1^2} = \sqrt{35\,080 - 27\,590} \approx 86,54.$$

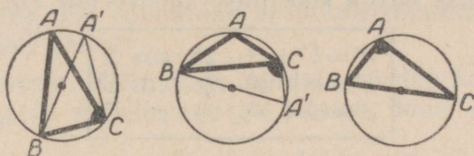
Erinevus varem saadud väärtusest  $b \approx 86,46$  seletub vigadega tabelleis, kus on antud funktsioonide ligikaudsed väärtused. Tulemus 86,54 on täpsem.

### § 38. Siinuslause.

**Teoreem.** Igas kolmnurgas on küljed võrdelised vastasnurkade siinustega:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

**Tõestus.** Joonestame antud kolmnurga  $ABC$  (joon. 66) ümber ringjoone. Olgu  $R$  selle ringjoone raadius. Võtame kolmnurga ühe tipu, näiteks  $A$ ; tõmbame läbi teise tipu, näiteks  $B$ , ümberringjoone diameetri  $BA'$ .



Joon. 66.

Abikolmnurk  $A'BC$  on täisnurkne, sest piirdenurk  $A'CB$  toetub diameetritele. Abikolmnurgast leiame:

$$a = 2R \sin A'.$$

Kui  $A$  on teravnurk, siis  $A = A'$ , sest piirdenurgad  $A$  ja  $A'$  toetuvad ühele ning samale kaarele. Kui aga  $A$  on nürinurk, siis  $A'$  on teravnurk, sest seda möödab pool kaarest  $BAC$ :

$$A' = \frac{1}{2} \widehat{BAC} = \frac{1}{2} (2\pi - \widehat{BA'C}) = \pi - \frac{\widehat{BA'C}}{2} = \pi - A.$$

Seega kas  $A' = A$  või  $A' = \pi - A$ , mõlemal juhul

$$\sin A' = \sin A,$$

ning seega

$$a = 2R \sin A.$$

Kui  $A$  on täisnurk, siis  $a = 2R$ ,  $\sin A = 1$  ja võrdus (1) on samuti õige.

Analoogiised võrdused leiame ülejäänud nurkade  $B$  ja  $C$  jaoks. Seega,

$a=2R \sin A$ ;  $b=2R \sin B$ ;  $c=2R \sin C$ ,  
 kust

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, \text{ m. o. t. t.}$$

Järeldus. Kolmnurga külje suhe vastasnurga siinusesse võrdub kolmnurga ümberringjoone diameetriga.

### § 39. Koosinuslause.

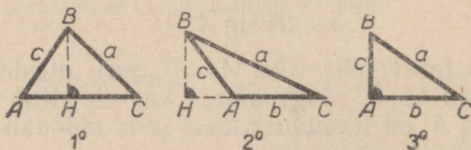
**Teoreem.** Kolmnurga külje ruut võrdub teiste külgede ruutude summaga, millest on lahutatud nende külgede ja nende vahelise nurga koosinuse kahekordne korrutis:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

Tõestus. Tõestame esimese võrduse.

Juhum 1°.  $A$  on teravnurk. Olgu  $BH$  tipust  $B$  tõmmatud kõrgus (joon. 67). Geomeetriast on teada, et

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot AH. \quad (1)$$



Joon. 67.

Täisnurksest kolmnurgast  $ABH$  leiame  $AH = c \cos A$ . Asendades selle valemisse (1), saame tõestatava võrduse.

Juhum 2°.  $A$  on nürinurk. Sel juhul

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b \cdot AH. \quad (2)$$

Kolmnurgast  $ABH$  leiame:

$$AH = c \cos(\angle BAH) = c \cos(\pi - A) = -c \cos A.$$

Asendades selle valemisse (2), saame tõestatava võrduse.

Juhtum 3°.  $A$  on täisnurk. Sel juhul (Pythagorase teoreemi põhjal)  $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  (sest  $\cos A = 0$ ).

Seega igal juhul

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \text{ m. o. t. t.}$$

#### § 40. Kolmnurga pindala valemid.

1°. Geomeetriast on teada Heroni valem:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{kus } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ on pool}$$

ümbermõõtu), mis võimaldab arvutada kolmnurga pindala tema külgede järgi.

2°. Teoreem. Kolmnurga pindala võrdub kahe külje ja nende külgede vahelise nurga siinuse poole korrutisega:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A. \quad (1)$$

Tõestus. Geomeetriast on teada, et kolmnurga pindala võrdub kolmnurga külje ja vastastipust sellele küljele tõmmatud kõrguse poole korrutisega:

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b. \quad (2)$$

Kui  $A$  on teravnurk, siis kolmnurgast  $ABH$  (joon. 67) leiame:

$$BH = h_b = c \sin A.$$

Kui  $A$  on nürinurk, siis  $BH = h_b = c \sin(\pi - A) = c \sin A$ .

Kui  $A$  on täisnurk, siis  $\sin A = 1$  ja  $h_b = AB = c = c \sin A$ .

Järelikult kõigil juhtudel  $h_b = c \sin A$ . Asendades selle võrdusesse (2), saame tõestatava valemi.

Täpselt samuti saame valemid:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B.$$

3°. Siinuslause põhjal:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Asendades need avaldised valemisse (1), saame valemi:

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

## § 41. Tangenslause.

**Teoreem.** Kolmnurga kahe külje vahe suhtub nende summasse nagu vastasnurkade poolvahe tangens suhtub nende nurkade poolsumma tangensisse:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{A-B}{2}}{\tan \frac{A+B}{2}}$$

(ning kaks analoogilist valemit ülejäänud küljeparide  $a$ ,  $c$  ja  $b$ ,  $c$  jaoks).

**Tõestus.** Siinuslause põhjal saame:

$$a-b = 2R(\sin A - \sin B) = 4R \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2};$$

$$a+b = 2R(\sin A + \sin B) = 4R \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}.$$

Neid võrdusi liikmeti jagades saamegi tõestatava valemi, m. o. t. t.

## § 42. Kolmnurga lahendamine tema kahe nurga ja ühe külje järgi.

**Ülesanne.** On antud kolmnurga kaks nurka ja üks külj; arutada ülejäänud küljed ja nurk.

On antud  $B$ ,  $C$  ja  $a$ , tuleb leida  $b$ ,  $c$  ja  $A$ .

**Lahendus.** Kolmnurga konstrueerimise võimalikkuse nõude:  $B+C < 180^\circ$ , loeme täidetuks.

Me võime arvestada, et kõik kolm nurka on teada, sest

$$A = 180^\circ - (B+C).$$

Külgede  $b$  ja  $c$  arvutamiseks tuleb vaid rakendada siinuslause:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \cdot \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}, \text{ kust } b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Pindala arvutame valemi järgi:

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

Näide. Lahendada kolmnurk järgmiste andmete järgi:  $a \approx 17,4$ ,  $B = 44^\circ 30'$ ,  $C \approx 64^\circ$ .

Lahendus loomulike väärtuste tabelite abil. Leiame nurga

$$A = 180^\circ - (B + C) \approx 180^\circ - (44^\circ 30' + 64^\circ) = 71^\circ 30'.$$

Arvutame küljed. Kuna:

$$\sin B \approx 0,7009; \sin C \approx 0,8988; \sin A \approx 0,9483,$$

siis

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} \approx \frac{17,4 \cdot 0,7009}{0,9483} \approx \frac{12,20}{0,9483} \approx 12,86 \approx 12,9$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} \approx \frac{17,4 \cdot 0,8988}{0,9483} \approx \frac{15,64}{0,9483} \approx 16,49 \approx 16,5.$$

Märkus. Jagamise arvuga  $\sin A \approx 0,9483$  võime asendada pöördarvuga korrutamisega. V. Bradise tabelleist (vt. tabel XVII)

$$\text{leiame: } \frac{1}{0,9483} \approx 1,055.$$

Arvutused on teostatud ligikaudsete arvutuste reeglite järgi. Siinuste väärtused on võetud V. Bradise tabelleist, kõikides vahepealsetes tulemustes on säilitatud neli tüvenumbrit (tagavaranumbri reegel). Lõpptulemus on ümardatud kolme tüvenumbrini.

Lahendus logaritmidest tabelite abil. Teame, et:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}; \log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A.$$

Tabelleist leiame:

$$\begin{array}{r|l} \log a = 1,2405 & \\ \log \sin B = 1,8457 & \\ - \log \sin A = 0,0230 & \\ \hline \log b = 1,1092 & \log \sin A = \bar{1},9770 \end{array}$$

V. Bradise tabelleist leiame  $b \approx 12,86$ . Kuid vastuses tuleb säilitada kolm tüvenumbrit, sest  $a$  väärtus on antud kolme tüvenumbriga, seepärast  $b \approx 12,9$ .

Külje  $c$  arvutame analoogiliselt:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}; \log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A;$$

$$\begin{array}{r|l} \log a = 1,2405 & \\ \log \sin C = 1,9537 & \\ - \log \sin A = 0,0230 & \\ \hline \log c = 1,2172; c \approx 16,5. & \end{array}$$

§ 43. Kolmnurga lahendamine kahe külje ja nende vahelise nurga järgi.

**Ulesanne.** On antud kolmnurga kaks külge ja nende vaheline nurk; arvutada kolmas külg ja kaks ülejäänud nurka.

Olgu näiteks antud  $a$ ,  $b$  ja  $C$ , tuleb arvutada  $A$ ,  $B$  ja  $c$ .

Lahendus loomulike väärtuste tabelite abil. Koosinuslause annab külje  $c$  avaldise vahetult tuntud elementide kaudu:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}.$$

Nurga  $A$  arvutamiseks võib samuti kasutada koosinuslause:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Kuna  $0 < A < 180^\circ$ , siis

$$A = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ ja lõpuks } B = 180^\circ - (A + C).$$

Lahendus logaritmidete tabelite abil. Nurkade summa  $A + B = 180^\circ - C$  on teada, kust  $\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$ . Nurkade vahe  $A - B$  võib arvutada, kui kasutada tangenslause:

$$\frac{\tan \frac{A-B}{2}}{\tan \frac{A+B}{2}} = \frac{a-b}{a+b}, \text{ kust } \tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2}.$$

Nurgad  $A$  ja  $B$  leiame võrrandisüsteemist:

$$\begin{cases} \frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2} \\ \frac{A-B}{2} = \arctan \left( \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} \right) \end{cases}$$

Külje  $c$  võib leida siinuslause abil:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

**Näide.** On antud  $a \approx 49,4$ ,  $b \approx 26,4$  ja  $C \approx 47^\circ 20'$ , leida  $A$ ,  $B$  ja  $c$ .

Lahendus loomulike väärtuste tabelite abil.

Saame

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \approx (49,4)^2 + (26,4)^2 - 2 \cdot 49,4 \cdot 26,4 \cdot \cos 47^\circ 20'.$$

Ruutude tabelleist leiame:

$$a^2 \approx (49,4)^2 \approx 2440; \quad b^2 \approx (26,4)^2 \approx 697,0$$

ja edasi

$$2 \cdot 49,4 \cdot 26,4 \cdot \cos 47^\circ 20' \approx 2 \cdot 49,4 \cdot 26,4 \cdot 0,6778 \approx 1768.$$

Järelikult

$$c^2 \approx 2440 + 697 - 1768 \approx 1369.$$

Ruutjuure tabelist  $c \approx 37,0$ .

Edasi

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx \frac{697 + 1369 - 2440}{2 \cdot 26,4 \cdot 37,0} \approx -\frac{374}{1954} \approx -0,191;$$

$A \approx \arccos(-0,191)$ ;  $A$  on nürinurk. Leiame tema täiendusnurga sirg-  
nurgani:

$$180^\circ - A \approx \arccos 0,191 \approx 79^\circ; \quad A \approx 180^\circ - 79^\circ = 101^\circ.$$

Lahendus logaritmid tabelite abil. Arvutame  
nurgad  $A$  ja  $B$ :

$$\log \tan \frac{A-B}{2} = \log(a-b) + \log \cot \frac{C}{2} - \log(a+b);$$

Abiarvutused

$$\begin{array}{l|l} \log(a-b) = 1,3617 & a-b \approx 49,4 - 26,4 = 23,0 \\ \log \cot \frac{C}{2} = 0,3583 & a+b \approx 75,8 \\ \hline -\log(a+b) = \bar{2},1203 & \frac{C}{2} \approx 23^\circ 40' \\ \log \tan \frac{A-B}{2} = \bar{1},8403 & \log(a+b) = 1,8797 \\ \frac{A-B}{2} \approx 34^\circ 40'. & \end{array}$$

Võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} \frac{A-B}{2} = 34^\circ 40' \\ \frac{A+B}{2} = 66^\circ 20' \end{cases}$$

leiame:  $A \approx 101^\circ$ ,  $B \approx 31^\circ 40'$ .

#### § 44. Kolmnurga lahendamine kahe külje ja ühe antud külje vastas asetseva nurga järgi.

**Ülesanne.** On antud kolmnurga kaks külge ja nurk, mis asetseb ühe antud külje vastas; arvutada kolmas külg ja kaks ülejäänud nurka.

Olgu antud  $a, b$  ja  $A$ ; tuleb arvutada  $B, C$  ja  $c$ .

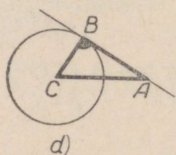
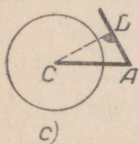
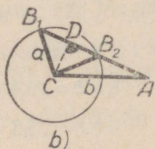
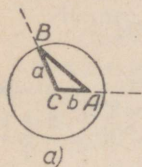
**Lahendus.** Juhtum 1°.  $a > b$ , s. t. antud nurk  $A$  asetseb suurema külje vastas. Konstruktsioon on näidatud joonisel 68a. Nurga  $A$  ühel haaral valime punkti  $C$ , mille kaugus tipust on  $b$ . Ümber punkti  $C$  tõmbame ringjoone raadiusega  $a$ . Punkt  $B$  on selle ringjoone lõikepunkt nurga  $A$  teise haaraga. Konstruktsioon on alati teostatav, ülesanne omab ühese lahendi.

Väiksema külje vastas asetseva teravnurga  $B$  leiame siinuslause abil:

$$\sin B = \frac{b}{a} \sin A, \text{ kust } B = \arcsin \left( \frac{b}{a} \sin A \right)$$

$$\text{ja siis } C = 180^\circ - (A + B).$$

Külje  $c$  leiame siinuslause abil:  $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$ .



Joon. 68.

Juhtum 2°.  $a < b$ , s. t. nurk  $A$  asetseb väiksema külje vastas; seega ei või ta olla täis- ega nürinurk. Järelikult  $A \geq 90^\circ$  puhul ülesanne ei ole lahenduv. Olgu  $A$  teravnurk. Konstruktsioonist joonisel 68b on näha, et ringjoon, mille raadius on  $a$  ja keskpunkt  $C$ , lõikub nurga  $A$  teise haaraga kahes punktis tingimusel  $a > CD$ , kus  $D$  on punktist  $C$  nurga  $A$  teisele haarale tõmmatud ristlõigu otspunkt. Kuna  $CD = b \sin A$  (kolmnurgast  $ACD$ ), siis tingimus on kirjutatav kujul:  $a > b \sin A$ . Nurk  $B$  võib omada kaks väärtust:  $B = B_1$  (teravnurk) ja  $B = B_2$  (nürinurk). Ülesanne omab kaks lahendit.

Nurga  $B$  väärtused arvutatakse siinuslause abil:

$$\sin B = \frac{b}{a} \sin A,$$

kust  $B_1 = \arcsin \left( \frac{b}{a} \sin A \right)$  ja  $B_2 = 180^\circ - B_1$ .

Nurga  $C$  ja külje  $c$  väärtused arvutatakse samal viisil nagu elemise juhtumi puhul (vt. allpool, näide).

Jooniselt 68c on näha, et  $CD = b \sin A > a$  puhul ringjoon ei lõiku nurga  $A$  teise haaraga ning ülesanne ei oma lahendeid. Sel juhul  $\sin B = \frac{b \sin A}{a} > 1$  ja nurka  $B$  ei saa arvutada.

Kui  $CD = b \sin A$  (joon. 68d), siis ülesandel on üks lahend, kolmnurk  $ABC$  on täisnurkne.

Juhtum 3°.  $a = b$  puhul kolmnurk  $ABC$  on võrdhaarne. Niisuguse kolmnurga võib lahendada sel teel, et jaotame ta kõrguse  $CD$  abil kaheks täisnurkseks kolmnurkaks:

$$B = A; C = 180^\circ - 2A; c = 2AD = 2a \cos A.$$

**Näide.** Arvutada kolmnurga küljed ja nurgad, kui on antud:

$$a \approx 73,5; b \approx 86,4; A \approx 49^\circ 0'.$$

**Lahendus.**

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} \approx \frac{86,4 \cdot 0,7547}{73,5} \approx \frac{65,21}{73,5} \approx 0,8872 \approx 0,887$$

(jagamise arvuga 73,5 võib asendada korrutamise arvuga  $\frac{1}{73,5} \approx 0,0136$ ; tabel XVII). Kuna antud juhul  $a < b$  ja  $\frac{b \sin A}{a} < 1$ , siis ülesanne omab kaks lahendit:

1)  $B_1 \approx \arcsin 0,887 \approx 62^\circ 30'$ ;  $C_1 \approx 180^\circ - (49^\circ + 62^\circ 30') = 68^\circ 30'$ ;  
(täpsusega kuni  $10'$ )

$$c_1 = \frac{a \sin C_1}{\sin A} = \frac{73,5 \cdot 0,9304}{0,755} \approx \frac{68,38}{0,755} \approx 90,56 \approx 90,6.$$

2)  $B_2 = 180^\circ - B_1 \approx 117^\circ 30'$ ;  $C_2 \approx 180^\circ - (49^\circ + 117^\circ 30') = 13^\circ 30'$ ;

$$c_2 = \frac{a \sin C_2}{\sin A} \approx \frac{73,5 \cdot 0,2334}{0,755} \approx \frac{17,15}{0,755} \approx 22,72 \approx 22,7.$$

## § 45. Kolmnurga lahendamine kolme külje järgi.

**Ülesanne.** On antud kolmnurga kolm külge; arvutada tema nurgad.

Olgu antud kolmnurga kolme külje pikkused. Tähistame kõige lühema külje tähega  $a$ , keskmise tähega  $b$  ja kõige pikema tähega  $c$ :  $a \leq b \leq c$ . Kolme antud külje järgi saab konstrueerida üheainsa kolmnurga siis, kui suurem külge on ülejäänud kahe külje summast väiksem:  $c < a + b$ . Kui

aga  $c \geq a+b$ , siis antud külgedega kolmnurka pole olemas. Eeldame, et  $c < a+b$ .

Lahendus loomulike väärtuste tabelite abil. Kolmnurga nurgad võib arvutada koosinuse abil.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

kust

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{ja} \quad A = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

sest  $0 < A < 180^\circ$ .

Analoogiliselt leiame:

$$B = \arccos \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{ja lõpuks} \quad C = 180^\circ - (A + B).$$

Lahendus logaritmid tabelite abil. Arvutame kõigepealt kolmnurga pindala (Heroni valem):

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{kus} \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Edasi:

$$S = \frac{bc \sin A}{2}, \quad \text{kust} \quad \sin A = \frac{2S}{bc}.$$

$A$  on teravnurk, sest ta asetseb väikseima külje vastas; järelikult

$$A = \arcsin \frac{2S}{bc}.$$

Täpselt samuti  $B = \arcsin \frac{2S}{bc}$  ja lõpuks  $C = 180^\circ - (A + B)$ .

Seega kolmnurga lahendamisel kolme külje järgi logaritmid tabelite abil leitakse väiksemate külgede vastas asetsevad nurgad valemitest, suurima külje vastas olev nurk arvutatakse aga kui vahe  $180^\circ$  ja kahe leitud nurga summa vahel.

**Näide.** Lahendada kolmnurk, kui on teada tema külgede (ligikaudsed) pikkused: 24,7, 22,4 ja 31,3. Tähistame:  $a \approx 22,4$ ;  $b \approx 24,7$   $c \approx 31,3$ .

Lahendus loomulike väärtuste tabelite abil. Saame:

$$\cos A \approx \frac{(24,7)^2 + (31,3)^2 - (22,4)^2}{2 \cdot 24,7 \cdot 31,3} \approx \frac{610,1 + 979,7 - 501,8}{1546} \approx 0,7038,$$

kust  $A \approx 45^\circ 20'$  (täpsusega kuni  $10'$ ).

$$\cos B \approx \frac{(22,4)^2 + (31,3)^2 - (24,7)^2}{2 \cdot 22,4 \cdot 31,3} \approx \frac{501,8 + 979,7 - 610,1}{1402} \approx 0,6215,$$

kust  $B \approx 51^\circ 30'$  ja lõpuks  $C \approx 180^\circ - (45^\circ 20' + 51^\circ 30') = 83^\circ 10'$ .

Lahendus logaritmidel tabelite abil.

$$\sin A = \frac{2S}{bc}, \quad \log \sin A = \log 2S - \log b - \log c.$$

Arvutame:

$$\begin{aligned} \log 2S &= \log [2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}] = \\ &= \log 2 + \frac{1}{2} \log p + \frac{1}{2} \log(p-a) + \frac{1}{2} \log(p-b) + \frac{1}{2} \log(p-c) \end{aligned}$$

kus

$$p = \frac{a+b+c}{2} \approx \frac{22,4+24,7+31,3}{2} = 39,2;$$

$$p-a \approx 39,2 - 22,4 = 16,8; \quad p-b \approx 14,5; \quad p-c \approx 7,9.$$

$\log 2 = 0,3010$	$\log 2 = 0,3010$	
$\frac{1}{2} \log p = 0,7966$	$\frac{1}{2} \log p = 0,7966$	$\log p = 1,5933$
$\frac{1}{2} \log(p-a) = 0,6126$	$\frac{1}{2} \log(p-a) = 0,6126$	$\log(p-a) = 1,2253$
$\frac{1}{2} \log(p-b) = 0,5807$	$\frac{1}{2} \log(p-b) = 0,5807$	$\log(p-b) = 1,1614$
$\frac{1}{2} \log(p-c) = 0,4488$	$\frac{1}{2} \log(p-c) = 0,4488$	$\log(p-c) = 0,8976$
$\log 2S = 2,7397$	$\log 2S = 2,7397$	

Edasi:

$\log 2S = 2,7397$	$\log 2S = 2,7397$	
$-\log b = 2,6073$	$-\log b = 2,6073$	$\log b = 1,3927$
$-\log c = 2,5045$	$-\log c = 2,5045$	$\log c = 1,4955$
$\log \sin A = 1,8515$	$\log \sin A = 1,8515$	
$A \approx 45^\circ 20'$	$A \approx 45^\circ 20'$	

Arvutades nurga  $B$ , saame:

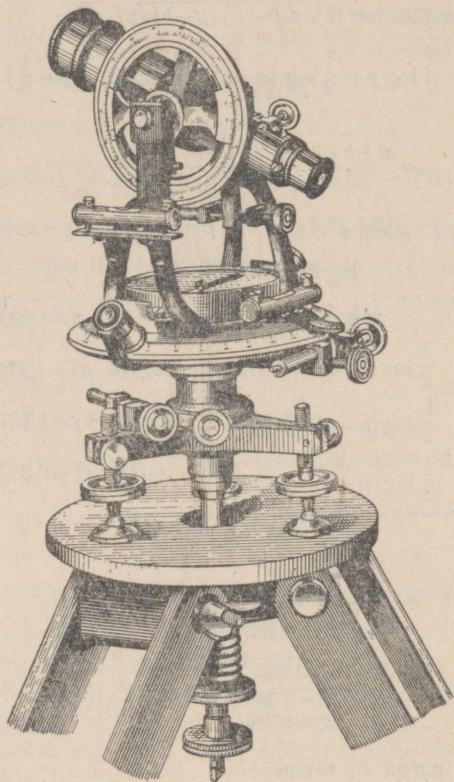
$$\log \sin B = \log 2S - \log a - \log c;$$

$\log 2S = 2,7397$	$\log 2S = 2,7397$	
$-\log a = 2,6498$	$-\log a = 2,6498$	$\log a = 1,3502$
$-\log c = 2,5045$	$-\log c = 2,5045$	
$\log \sin B = 1,8940$	$\log \sin B = 1,8940$	
$B \approx 51^\circ 30'$	$B \approx 51^\circ 30'$	

Lõpuks:  $C = 180^\circ - (A+B) \approx 83^\circ 10'$ .

## § 46. Trigonomeetria rakendamine mõõtmisteks maastikul.

Trigonomeetria abil lahendatakse paljusid mõõtmis-ülesandeid maastikul, nagu näiteks maapinna erinevate punktide vaheliste kauguste arvutamine (kui seda kaugust



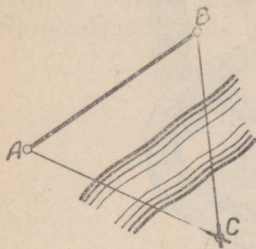
Joon. 69.

ei saa mõõta vahetult), antud eseme (mäe, ehituse jms.) kõrguse arvutamine, plaanide ja kaartide koostamine jms. Eeldame, et mõõtmised toimuvad väikesel maa-alal,

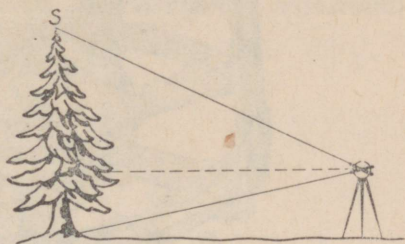
mida võib maapinna kõverust arvestamata jättes lugeda tasapinnaliseks\*.

Väikeste vahemaade mõõtmist teostatakse vahetult, näiteks terasmõõdulintide abil.

Nurkade mõõtmist maastikul teostatakse nurgamõõtjatega. Tänapäeva kõige levinumaks nurgamõõtjaks on teodoliit (joon. 69). Teodoliidi pikksilm võib pöörelda nii horisontaal- kui ka vertikaaltasapinnas.



Joon. 70.



Joon. 71.

Kui maapinna punktis  $C$  horisontaalasendis oleva pikksilma telg suunata algul punkti  $A$ , seejärel aga punkti  $B$ , siis tema pöördenurk on kolmnurga  $ABC$  nurk  $C$ ; selle nurga all paistab punktist  $C$  lõik  $AB$  (joon. 70). Pikksilma pööramise teel võib mõõta nurki ka vertikaaltasapinnas (joon. 71).

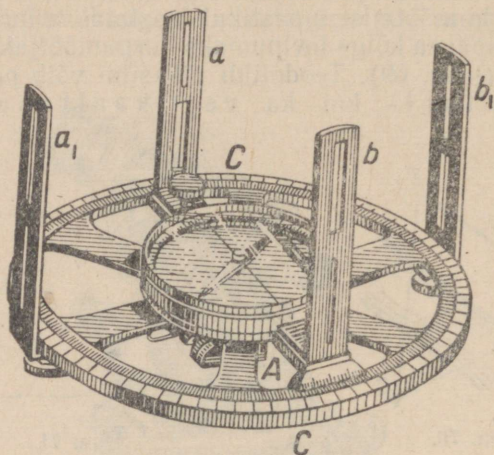
Pikksilma pöördenurki saab suure täpsusega mõõta horisontaal- ning vertikaalringil olevate jaotuste ja mikro-meeterkruvide abil.

Teodoliidi puudumisel kasutatakse (näiteks õppeotstarbel) lihtsamaid riistu. Üks selline riist — astrolaab — on kujutatud joonisel 72. Astrolaabi peamised osad on kraadideks jaotatud ring (limb) ja joonlaud (alidaad), mis võib pöörelda ümber ringi keskpunkti. Joonlaua suunamiseks antud punktile on tema otste külge kinnitatud vertikaalsed, kitsaste pikipiludega plaadid.

Vaatleme mõningaid lihtsamaid kauguste ja kõrguste arvutamise ülesandeid.

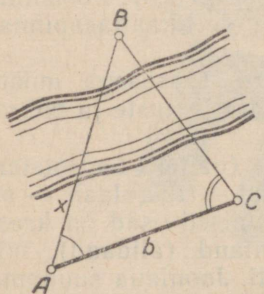
\* Arvutused, mis on seotud mõõtmistega suurtel maa-aladel, kus ei saa jätta arvestamata Maa kerakujulisust, teostatakse sfäärilise trigonomeetria meetoditega.

**Ülesanne.** Arvutada kaugus ligipääsetavast punktist  $A$  kuni ligipääsematu punktini  $B$ , mis paistab punktist  $A$  (punktid  $A$  ja  $B$  asetsevad ühes ning samas horisontaaltasapinnas, joon. 73).

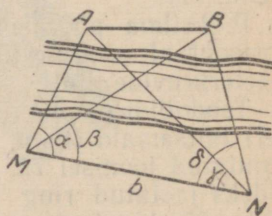


Joon. 72.

**Selgitus.** Punkt  $A$  loetakse ligipääsetavaks, kui temas võib asetseda vaateleja mõõteriistadega.



Joon. 73.



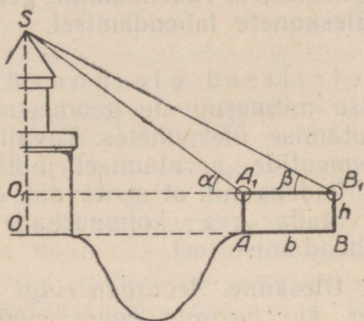
Joon. 74.

Punkti  $B$  loetakse ligipääsematuks, kui kaugust  $AB$  ei saa vahetult mõõta (näiteks, kui ees on: tõke, jõgi, org jms.).

L a h e n d u s. Valime punkti  $A$  lähedal ligipääsetava punkti  $C$ , millest on näha punkt  $B$ . Mõõdame vahetult baasi  $AC=b$  ning nurgad  $A$  ja  $C$ . Kolmnurga  $ABC$  külje  $x=c$  leiame siinuslause abil:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}, \quad \text{kust } x = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{b \sin C}{\sin(A+C)}.$$

**Ülesanne.** Arvutada kaugus kahe ligipääsematu punkti  $A$  ja  $B$  vahel, mis paistavad ligipääsetavalt maastikult. Punktide paigutus on antud joonisel 74.



Joon. 75.

L a h e n d u s. Valime ligipääsetaval maastikul baasi; mõõdame selle ja nurgad  $\alpha = \angle AMN$ ,  $\beta = \angle BMN$ ,  $\gamma = \angle ANM$ ,  $\delta = \angle BNM$  baasi ning selle otspunktidest punktidesse  $A$  ja  $B$  minevate suundade vahel. Arvutame kaugused  $MA$  ja  $MB$  (vt. eelmine ülesanne):

$$MA = \frac{b \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}; \quad MB = \frac{b \sin \delta}{\sin(\beta + \delta)}.$$

Teades kolmnurga  $AMB$  kaht külge ja nurka  $\alpha - \beta$  nende vahel, võime arvutada kolmanda külje näiteks koosinuslause abil:

$$x = AB = \sqrt{MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cos(\alpha - \beta)}.$$

**Ülesanne.** Arvutada vertikaalse eseme kõrgus, mille alus on ligipääsmatu (joon. 75).

L a h e n d u s. Oletame, et on võimalik valida horisontaalne baas  $AB=b$ , mille otspunktidest paistab mõõde-

tava eseme tipp  $S$ . Olgu  $h$  nurgamõõtja kõrgus. Mõõtes kolmnurga  $SA_1B_1$  nurgad  $\alpha$  ja  $\beta$  leiame (siinuslause abil):

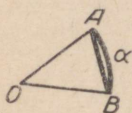
$$\frac{A_1S}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin(\alpha - \beta)}, \quad \text{kust } A_1S = \frac{b \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

ja lõpuks

$$OS = OO_1 + O_1S = h + A_1S \sin \alpha = h + \frac{b \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

### § 47. Trigonomeetria rakendamine geomeetriliste ülesannete lahendamisel.

Planimeteetriselised ülesanded. Trigonomeetria rakendatakse mitmesuguste geomeetriliste kujundite elementide arvutamise ülesannetes. Tavaliselt hulknurga elementide arvutamisel jaotatakse ta kolmnurkadeks nii, et otsitavaid elemente saaks arvutada rea kolmnurkade järkjärgulise lahendamise teel.



Joon. 76.

**Ülesanne.** Arvutada ringi segmendi pindala, kui vastava kaare mõõtaro (radiaanmõõdus) on  $\alpha$  ning ringi raadius on  $R$  (joon. 76).

**Lahendus.** Segmendi pindala  $S$  võrdub vastava sektori  $OAB$  ja kolmnurga  $OAB$  pindalade vahega. Geomeetriast on teada, et ringi sektori pindala arvutatakse valemi abil  $s_1 = \frac{1}{2} Rl$ , kus  $l$  on sektorit piirava kaare pikkus.

Kuna  $l = \alpha R$ , siis  $s_1 = \frac{1}{2} R^2 \alpha$ .

Kolmnurga pindala  $s_2 = \frac{R^2 \sin \alpha}{2}$ .

Otsitav segmendi pindala on seega

$$S = s_1 - s_2 = \frac{R^2 \alpha}{2} - \frac{R^2 \sin \alpha}{2} = \frac{R^2}{2} (\alpha - \sin \alpha).$$

**Ülesanne.** Trapetsi alused on  $a$  ja  $b$  ning haarad  $c$  ja  $d$ . Määrata trapetsi nurgad.

**Lahendus.** Olgu  $a$  suurem alus ning  $A$  külgede  $a$  ja  $c$  vaheline nurk (joon. 77). Tõmbame haaraga  $d$  paral-

leelse sirge; siis trapets jaguneb kolmnurgaks  $ABE$  ja rööpkülilikuks  $BCDE$ . Kolmnurgas  $ABE$  on teada kolme külje pikkused:  $c$ ,  $d$  ja  $a-b$ . Koosinuslause abil leiame nurga  $A$ :

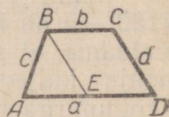
$$d^2 = (a-b)^2 + c^2 - 2c(a-b)\cos A, \text{ kust}$$

$$\cos A = \frac{(a-b)^2 + c^2 - d^2}{2c(a-b)}.$$

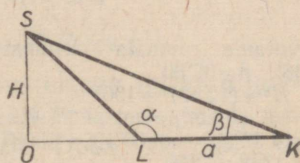
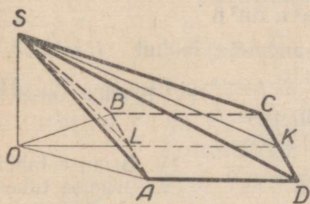
Analoogiliselt arvutame:

$$\cos D = \frac{(a-b)^2 + d^2 - c^2}{2d(a-b)} \quad \text{ja lõpuks } B = \pi - A; C = \pi - D.$$

Stereomeetrilised ülesanded. Trigonomeetriat rakendatakse ruumiliste kujundite mitmesuguste elementide: ruumalade, pindalade, lõikepindalade, tasapinnaliste ja kahetahuliste nurkade jms. arvutamiseks. Tavaliselt teostatakse abikonstruktsioonid (lõigete, joonte jms. tõmbamine) nii, et otsitavaid elemente saaks leida rea kolmnurkade järkjärgulise lahendamise teel. Arvuliste andmetega arvutusülesannete lahendamisel lahendatakse ülesanne enne tavaliselt üldkujul ja siis alles asendatakse antud arvud. Üldine lahendusvalem esitatakse järgnevatiks arvutusteks kõige mugavamal kujul.



Joon. 77.



Joon. 78.

**Ülesanne.** Püramiidi põhi on ruut. Üks külgtahk on võrdhaarne kolmnurk, mis moodustab põhjaga nürinurga  $\alpha$ . Vastastahk moodustab põhjaga nurga  $\beta$ . Püramiidi kõrgus on  $H$ . Leida püramiidi ruumala.

**Lahendus.** Olgu  $ABCD$  püramiidi põhi,  $S$  tipp,  $OS$  kõrgus,  $ASB$  tahk, mis moodustab põhjaga nurga  $\alpha$ , ja  $DSC$  tahk, mis moodustab põhjaga nurga  $\beta$  (joon. 78).

Kaldlõigud  $SA$  ja  $SB$  on võrdsed, seetõttu on võrdsed ka nende projektsioonid põhja tasandil:  $OA=OB$ . Olgu  $L$  külje  $AB$  keskpunkt. Võrdhaarsetes kolmnurkades  $AOB$  ja  $ASB$  on mediaanid  $OL$  ja  $SL$  ühtlasi kõrgusteks, seepärast  $OL \perp AB$  ja  $SL \perp AB$ . Järelikult,  $\angle OLS$  on kahetahulise nurga  $OABS$  (mille serv on  $AB$ ) joonnurk ja seega  $\angle OLS = 180^\circ - \alpha$ . Olgu  $K$  sirge  $OL$  ja külje  $CD$  lõikepunkt; siis  $DK=KC$  ja  $OK \perp CD$ . Kaldlõik  $SK \perp CD$  (kolme ristsirge teoreemi põhjal). Kolmnurgas  $SCD$  on lõik  $SK$  mediaaniks ja kõrguseks, järelikult on see kolmnurk võrdhaarne. Kuna  $OK \perp CD$  ja  $SK \perp CD$ , siis  $\angle OKS = \beta$ . Pooltasapinnad  $ABS$  ja  $DCS$  lõikuvad siis ja ainult siis, kui  $180^\circ - \alpha > \beta$ , s. t.  $\alpha + \beta < 180^\circ$  ( $180^\circ - \alpha$  on kolmnurga  $SLK$  välisnurk,  $\beta$  aga sisenurk). Eeldame, et see tingimus on täidetud. Lõik  $LK$  võrdub põhja küljega  $a$ . Kuna  $OL = H \cot(180^\circ - \alpha) = -H \cot \alpha$  (kolmnurgast  $SOL$ ) ja  $OK = H \cot \beta$  (kolmnurgast  $SOK$ ), siis  $a = OK - OL = H(\cot \beta + \cot \alpha)$ . Arvutame ruumala:

$$V = \frac{1}{3} a^2 H = \frac{1}{3} H^3 (\cot \beta + \cot \alpha)^2.$$

Vastuse selline kuju on mugav arvutusteks loomulike väärtuste tabelite abil. Kui arvutusi teostatakse logaritmidete tabelite või arvutuslükati abil, siis tuleb kootangensite summa teisendada korrutiseks:

$$V = \frac{1}{3} H^3 \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

Arvutame ruumala järgmiste andmete puhul:  $H \approx 12,53$ ,  $\alpha \approx 110^\circ 48'$ ,  $\beta = 32^\circ 30'$ .

$$1) H^3 \approx (12,53)^3 \approx 1967 \quad (\text{V. Bradise tabel XIII})$$

$$2) \cot \alpha + \cot \beta \approx \cot 32^\circ 30' + \cot 110^\circ 48' = \\ = \cot 32^\circ 30' - \cot 69^\circ 12' \approx 1,5697 - 0,3799 = \\ = 1,1898 \approx 1,190 \quad (\text{V. Bradise tabel IX})$$

$$3) (\cot \alpha + \cot \beta)^2 \approx (1,190)^2 \approx 1,416 \quad (\text{V. Bradise tabel XI})$$

$$\text{ja lõpuks } V = \frac{H^3 (\cot \alpha + \cot \beta)^2}{3} \approx \frac{1967 \cdot 1,416}{3} \approx 928,4$$

## § 48. Trigonomeetria kasutamisest füüsikas, mehhaanikas ja tehnikas.

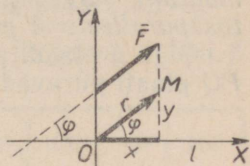
Trigonomeetrial on rohkearvuliselt rakendusi füüsika, mehhaanika ja tehnika mitmesugustes küsimustes.

I. Mehhaanikas ja füüsikas rakendatakse sageli järgmist teoreemi vektori projektsioonist teljel:

**Teoreem.** Vektori projektsioon teljel võrdub vektori pikkuse ja selle vektori ning telje poolt moodustatud nurga koosinuse korrutisega.

Tõestus. Olgu  $\vec{F}$  antud vektor,  $l$  telg (mis on joonisel kujutatud horisontaalsena) ja  $\varphi$  nurk vektori ning telje vahel (joon. 79).

Vektori paralleelsel ülekanndmisel ei muutu suuruselt tema projektsioon teljel, seepärast võib vektori üle kanda asendisse  $\vec{OM}$ , paigutades lähtepunkti telje  $l$  mingisse punkti  $O$ . Võttes punkti  $O$  koordinaatide alguseks ja telje  $l$  abstsissiteljeks, saame:



Joon. 79.

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} \quad \text{ehk} \quad x = r \cos \varphi,$$

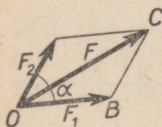
kus  $x = \text{pr}_l \vec{OM} = \text{pr}_l \vec{F}$ ;  $r = |\vec{F}|$  on aga vektori  $\vec{F}$  pikkus. Järelikult,

$$\boxed{\text{pr}_l \vec{F} = |\vec{F}| \cos \varphi}, \quad \text{m. o. t. t.}$$

Töö arvutamise. Kui keha kirjeldab jääva jõu  $\vec{F}$  mõjul sirgjoonelise tee  $S$ , siis töö  $A$  arvutamiseks tuleb tee pikkus korrutada jõu  $F$  projektsiooniga liikumisteel; seega:

$$A = \text{pr} \vec{F} \cdot S = |\vec{F}| S \cos \varphi.$$

**II.** Selleks et arvutada teineteisega nurka  $\alpha$  moodustavate tungide  $\vec{F}_1$  ja  $\vec{F}_2$  resultandi  $\vec{F}$  suurus, tuleb arvutada kolmnurga  $OBC$  (joon. 80) külje  $OC$  pikkus. Koosinuslause abil saame:



$$OC^2 = OB^2 + BC^2 - 2OB \cdot BC \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

ehk

Joon. 80.

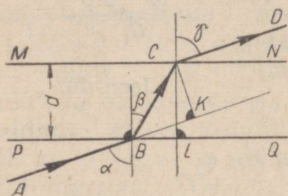
$$|\vec{F}|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \alpha.$$

**III.** Füüsikast on teada, et horisondi suhtes nurga  $\alpha$  all (kus  $0 < \alpha < 90^\circ$ ) algkiirusega  $v_0$  visatud keha lennukaugus on  $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$  (õhutakistust ei arvestata,  $g$  on

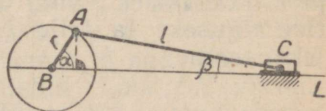
raskuskiirendus). Lennukaugus on suurim\*, kui  $\sin 2\alpha = 1$ , kust  $2\alpha = 90^\circ$  ja  $\alpha = 45^\circ$ . Seega, kui keha on visatud horisondi suhtes nurga all  $45^\circ$ , siis tema lennukaugus on suurim.

IV. Ülesanne geomeetrisest optikast: määrata valguskiire kõrvalekaldumine tema läbiminekul tasaparalleelsest plaadist (joon. 81).

Olgu  $d$  plaadi paksus,  $n$  tema murdumisnäitaja,  $MN$  ja  $PQ$  plaati piiravad tasapinnad ning  $\alpha$  kiire langemisnurk.



Joon. 81.



Joon. 82.

Kui kiir  $AB$  jõuab plaadini, siis ta muudab oma suunda ja läheb edasi mööda sirget  $BC$ , mis moodustab tasapinna  $PQ$  ristsirgema nurga  $\beta$ , kus valguse murdumise seaduse kohaselt  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ . Plaadist väljumisel moodustab kiir tasapinna  $MN$  ristsirgema nurga  $\gamma$ , kus  $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{1}{n}$ . Järelikult  $\sin \alpha = \sin \gamma$ , ning kuna  $\alpha$  ja  $\gamma$  on teravnurgad, siis  $\alpha = \gamma$ . Nihke  $KC$  leiame kolmnurgast  $BKC$ :

$$KC = BC \sin \angle CBK = BC \sin(\alpha - \beta);$$

kuid  $BC = \frac{d}{\cos \beta}$  (kolmnurgast  $BCL$ ) ja seega

$$KC = \frac{d \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}.$$

V. Väntmehhanismi liikumine. Vända varda  $AB$  pöörlemisel nihkur  $C$  liigub mööda sirget  $BL$ . Liikumine kandub edasi kepsu  $AC$  kaudu (joon. 82). Moodustagu sirge  $BL$  vändaga  $AB$  nurga  $\alpha$  ning kepsuga

\* Antud kindla algkiiruse puhul. (Tõlk.)

nurga  $\beta$ . Olgu  $r$  vända pikkus ja  $l$  kepsu pikkus. Seose  $\alpha$  ja  $\beta$  vahel võib leida kolmnurgast  $ABC$ :

$$\frac{r}{\sin \beta} = \frac{l}{\sin \alpha}, \text{ kust } \sin \beta = \frac{r}{l} \sin \alpha.$$

Paljudes mehhanismides  $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$  ja siis  $\beta = \arcsin \frac{\sin \alpha}{5}$ .

Arvutusteks võib koostada näiteks järgmise tabeli  $\beta$  ligikaudsete väärtuste jaoks:

$\alpha$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\beta$	0°	2°	4°	5,5°	7,5°	9°	10°	11°	11,5°	11,5°

Kui vänt on lähteasendist pöördunud nurga  $\alpha$  võrra, siis nihkuri kaugus pöörlemiskeskpunktist  $B$  on

$$BC = r \cos \alpha + l \cos \beta.$$

Nihkuri hälve lähteasendist on

$$r + l - (r \cos \alpha + l \cos \beta) = r(1 - \cos \alpha) + l(1 - \cos \beta).$$

**VI.** Füüsikast on teada, et vahelduvvoolu võnkumine avaldub valemiga

$$I = A \sin(\omega t + \alpha),$$

kus  $A$  on võnkeamplituud,  $\omega$  sagedus,  $l = \frac{2\pi}{\omega}$  periood ning  $\alpha$  faas.

Tavalisel kolmeafaasilisel voolul, mida toodab generaator, on kolm faasi,  $\alpha$ ,  $\alpha + \frac{2\pi}{3}$ ,  $\alpha + \frac{4\pi}{3}$ , mis tekivad üksteisest siinuse perioodi ühe kolmandiku järkjärgulise lisamise teel. Seega voolu võnkumist iga faasi jaoks eraldi väljendavad valemid:

$$I_1 = A \sin(\omega t + \alpha); \quad I_2 = A \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$I_3 = A \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Seejuures igal ajamomendil  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ . Tõepoolest:

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_2 + I_3 &= A \left[ \sin(\omega t + \alpha) + \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \right. \\
 &+ \left. \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{4\pi}{3}\right) \right] = A \left[ 2 \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3} + \right. \\
 &+ \left. \sin\left(\omega t + \alpha + \pi + \frac{\pi}{3}\right) \right] = A \left[ \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \right. \\
 &\left. - \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{3}\right) \right] = 0.
 \end{aligned}$$

## VII peatükk.

### TRIGONOMEETRILISED VÖRRANDID.

#### § 49. Lihtsaimad trigonomeetrilised võrrandid.

**Definitsioon.** Lihtsaimateks trigonomeetrilisteks võrranditeks nimetatakse võrrandeid:

$$\cos x = m; \sin x = m; \tan x = m; \cot x = m,$$

kus  $m$  on antud arv.

Lahendada lihtsaim trigonomeetriline võrrand — tähendab leida kõikide nende nurkade (kaarte) hulk, millede puhul vastav trigonomeetriline funktsioon omab antud väärtuse  $m$ . § 13 me lahendasime selle ülesande konstrueerimise teel.

1. Võrrand  $\cos x = m$ . Kui  $|m| \leq 1$ , siis leidub kaks abstsissitelje suhtes sümmeetrilist kaart

$$\arccos m \text{ ja } -\arccos m,$$

mille koosinus omab antud väärtuse (konstruktsioon vt. § 13). Need kaared lõpevad lõigul  $[-\pi, \pi]$ , mille pikkus võrdub ringjoone pikkusega (koosinuse perioodiga); kõik teised otsitavad kaared lõpevad samades punktides. Võrrandi üldlahend (s. t. tema kõikide lahendite hulk) avaldub valemiga:

$$x = \pm \arccos m + 2k\pi$$

Võrrandi mingi kindla lahendi (ehk erilahendi) saame siis, kui üldlahendi valemi paremal poolel valida märk ja anda suurusele  $k$  mingi täisarvuline väärtus.

Kui  $|m| > 1$ , siis võrrand ei oma lahendeid.

**Näiteid.** 1)  $\cos x = \frac{1}{2}$ ;  $x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2k\pi = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  (radiaanides)  $= \pm 60^\circ + 360^\circ k$  (kraadides).

2)  $\cos x = 0,7251$ ;  $x = \pm \arccos 0,7251 + 360^\circ k \approx \pm 43^\circ 32' + 360^\circ k$  (kraadides)  $\approx \pm 0,7598 + 2k\pi$  (radiaanides).

( $\arccos 0,7251$  leiame V. Bradise tabelist VIII, kraadid on teisen-  
datud radiaanideks tabeli XVI järgi)

2. Võrrand  $\sin x = m$ . Kui  $|m| \leq 1$ , siis nurkade  $\arcsin m$  ja  $\pi - \arcsin m$  siinused omavad antud väärtuse  $m$  (vt. § 13). Nende kaarte lõpp-punktid on sümmeetrilised ordinaattelje suhtes. Kõikide otsitavate kaarte hulga saame siis, kui leitud kahele kaarele lisame mistahes arvu täispöördeid (siinuse perioode):

$$x = \begin{cases} \arcsin m + 2k\pi \\ \pi - \arcsin m + 2k\pi \end{cases} = \begin{cases} \arcsin m + 2k\pi \\ -\arcsin m + (2k+1)\pi \end{cases} \quad (1)$$

Üldlahendi võib kirjutada ühe valemiga:

$$x = (-1)^n \arcsin m + n\pi$$

(kus  $n$  on mistahes täisarv).

Tõepoolest, kui  $n$  on paarisarv  $n = 2k$ , siis saame valemi (1) ülemise rea, kui aga  $n$  on paaritu arv  $n = 2k + 1$ , siis alumise rea.

Kui  $|m| > 1$ , siis võrrand ei oma lahendeid.

**Näiteid.** 1)  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + n\pi = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi$ .

2)  $\sin x = 1$ . Kõik kaared, mille siinus on 1, lõpevad vertikaal-  
diameetri ülemises otspunktis ja seega  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  (kus  $k$  on mis-  
tahes täisarv).

Täpselt samuti lahendub võrrand  $\sin x = -1$ , saame  $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ .

3. Võrrand  $\tan x = m$ . Iga  $m$  puhul leidub vahemikus  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , mille pikkus on  $\pi$ , s. t. tangensi periood, üksainus kaar  $\arctan m$ , millel on antud tangens.

Otsitavad kaared võivad lõppeda vaid kahes diameet-  
raalselt paiknevas punktis. Kõik otsitavad kaared võime  
saada, kui lisada kaarele  $\arctan m$  juurde mistahes täis-

arvu poolpöördeid (tangensi perioode). Seetõttu kõikide otsitavate kaarte hulk avaldub valemiga:

$$x = \arctan m + k\pi$$

4. Võrrand  $\cot x = m$  omab iga  $m$  puhul lõpmatu hulga lahendeid:

$$x = \operatorname{arccot} m + k\pi$$

(arutlused on samasugused nagu eelmisel juhul).

Näiteid. 1)  $\cot x = -1$ ;  $x = \operatorname{arccot}(-1) + k\pi = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ .

2)  $\tan x = \frac{1}{3}$ ;  $x = \arctan \frac{1}{3} + 180^\circ k \approx \arctan 0,3333 + 180^\circ k \approx 18^\circ 26' + 180^\circ k$  (kraadides)  $\approx 0,3217 + k\pi$  (radiaanides).

Märkus. Lihtsaimate trigonomeetriliste võrrandite  $\cos x = m$ ,  $\sin x = m$ ,  $\tan x = m$ ,  $\cot x = m$  üldlahendeid tähistatakse mõnikord ka järgmiselt:

$\operatorname{Arc} \cos m$ ,  $\operatorname{Arc} \sin m$ ,  $\operatorname{Arc} \tan m$ ,  $\operatorname{Arc} \cot m$ .

Seega:

$$\operatorname{Arc} \cos m = \pm \arccos m + 2k\pi; \operatorname{Arc} \sin m = (-1)^k \arcsin m + k\pi;$$

$$\operatorname{Arc} \tan m = \arctan m + k\pi; \operatorname{Arc} \cot m = \operatorname{arccot} m + k\pi,$$

kus  $k$  on mistahes täisarv.

Järgnevate näidetega on demonstreeritud lihtsaimateks taanduvate trigonomeetriliste võrrandite lahendamist.

Näiteid. 1) Lahendada võrrand:  $2 \sin x - 1 = 0$ .

Lahendus.

$$\sin x = \frac{1}{2}, \text{ kust } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi.$$

2) Lahendada võrrand:  $2 \cos x + 3 = 0$ .

Lahendus. Võrrand ei oma lahendeid, sest temaga ekvivalentne lihtsaim võrrand  $\cos x = -\frac{3}{2}$  ei oma lahendeid.

3) Lahendada võrrand:  $2 \cos 3x + 1 = 0$ .

Lahendus. Vahepealse argumendi  $3x$  leiame võrrandist:

$$\cos 3x = -\frac{1}{2}; 3x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \text{ siit leiame antud võrrandi üldlahendi}$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3} k\pi.$$

4) Lahendada võrrand:

$$2 \sin x + \cos x = 0. \quad (1)$$

Lahendus. Jagades võrrandi mõlemad pooled avaldisega  $\cos x$ , saame:

$$2 \tan x + 1 = 0, \quad (2)$$

kust  $\tan x = -\frac{1}{2}$  ja  $x \approx -26^\circ 34' + 180^\circ k$ .

Üleminekul võrrandile (2) kõrvaldatakse tundmatu lubatavate väärtuste hulgast arvud  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ , sest  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  puhul võrrandi (2) vasak pool kaotab mõtte. Need väärtused ei rahulda võrrandit (1) ja seega lahendite kaotamine ei toimu.

## §. 50. Ühele funktsioonile taandamise meetod.

Vaatleme näiteks võrrandit:

$$2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0,$$

mis on  $\cos x$  suhtes ruutvõrrand. Lahendades selle võrrandi koosinuse suhtes:

$$\cos x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4},$$

saame kaks lihtsaimat võrrandit:

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad \cos x = 3.$$

Esimese võrrandi üldlahend on:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad (1)$$

kuna aga teine võrrand ei oma lahendeid. Valem (1) annab antud võrrandi kõikide lahendite hulga.

Kui võrrand sisaldab tundmatu mitmesuguseid trigonomeetrilisi funktsioone, siis võib kõik need funktsioonid avaldada ühe kaudu ja asendusi teostades saada võrrandi, mis sisaldab vaid tundmatu üht trigonomeetrilist funktsiooni.

Üht trigonomeetrilist funktsiooni teise kaudu avaldavate valemite kasutamine võib võrrandisse sisse tuua juuri ja võrrandi vabastamisel neist on võimalik võõrlahendite tekkimine. Sellepärast on soovitatav (kui see on võimalik) valida niisugune asendus, mis ei too võrrandisse juuri.

**Näiteid.** 1) Lahendada võrrand:

$$2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0.$$

Lahendus. Asendame  $\cos^2 x$  avaldisega  $1 - \sin^2 x$ , saame:

$$2 - 2 \sin^2 x + 3 \sin x = 0 \text{ ehk } 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0,$$

kust  $\sin x = -\frac{1}{2}$  ja  $\sin x = 2$ .

Esimese võrrandi üldlahend on:

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + n\pi = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi,$$

teine võrrand ei oma lahendeid.

**Märkus.** Kui kasutada asendust  $\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$ , siis saame juurt sisaldava võrrandi. Seepärast on antud võrrandi lahendamisel otstarbekohasem avaldada koosinus siinuse kaudu, mitte aga siinus koosinuse kaudu.

2) Lahendada võrrand:

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Lahendus. Asendades  $\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$ , saame:

$$\sin x \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 \text{ ehk } \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 - \sin x.$$

Mõlemaid pooli ruutu tõstes ja koondades saame:

$$\sin^2 x - \sin x = 0, \quad (2)$$

kust:

$$\sin x = 1 \text{ ja } \sin x = 0.$$

Neid lihtsaimaid võrrandeid lahendades leiame kaks sarja lahendeid:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = n\pi \quad (k \text{ ja } n \text{ on täisarvud}).$$

Kontroll. Esimese lahenditesarja puhul

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0.$$

Võrrand (1) on rahuldatud. Teise lahenditesarja puhul

$$\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = \begin{cases} 1, & \text{kui } n \text{ on paarisarv;} \\ -1, & \text{kui } n \text{ on paaritu arv.} \end{cases}$$

Võrrand (1) on rahuldatud vaid paarisarvulise  $n=2m$  puhul. Teise sarja lahendid paarituarvulise  $n=2m+1$  puhul on võõrlahendid (selle võrrandi teine lahendusmeetod on toodud leheküljel 113).

Võrrandi (1) üldlahend koosneb kahest sarjast:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ja } x = 2m\pi.$$

Ka nende võrrandite puhul, mis sisaldavad tundmatut trigonomeetriliste funktsioonide märgi all liitargumendis, on real juhtudel võimalik kõiki trigonomeetrilisi funktsioone ühe kaudu avaldades saada võrrandit, mis sisaldab vaid ühe trigonomeetrilise funktsiooni tundmatust.

Näiteid. 1) Lahendada võrrand  $\cos 2x = \sin^2 x$ .

L a h e n d u s. Teostades asenduse:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

saame järgmise võrrandi, mis sisaldab vaid ühe funktsiooni tundmatust:

$$\cos 2x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ ehk } 3\cos 2x = 1,$$

kust:

$$\cos 2x = \frac{1}{3}, \quad 2x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 360^\circ k$$

ja lõpuks

$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + 180^\circ k \approx \pm 35^\circ 16' + 180^\circ k.$$

2) Lahendada võrrand:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos 2x + \sin(2x - \pi) \sin x = 0.$$

L a h e n d u s. Asendades

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \text{ ja } \sin(2x - \pi) = -\sin 2x,$$

taandame võrrandi kujule:

$$\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = 0 \text{ ehk } \cos 3x = 0,$$

kust:

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ja } x = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{3} = \frac{(2k+1)\pi}{6}.$$

## § 51. Teguriteks lahutamise meetod.

Kui pärast kõikide liikmete üleviimist võrrandi vasakule poolele saab seda poolt lahutada tegureiks, siis võrrand omandab kuju, milles korrutis võrdub nulliga. Edasi tuleb võrrutada nulliga iga tegur\*, lahendada saadud võrrandid ja ühendada kõik leitud lahendid üheks hulgaks.

\* Korrutis võrdub nulliga siis ja ainult siis, kui vähemalt üks teguritest võrdub nulliga.

Näide. Lahendada võrrand  $\sin 5x - \cos 3x = \sin x$ .

Lahendus. Viime kõik liidetavad üle vasakule poolele ja lahutame selle poole teguriteks. Järk-järgult saame:

$$\begin{aligned}(\sin 5x - \sin x) - \cos 3x &= 0; \\ 2 \sin 2x \cos 3x - \cos 3x &= 0; \\ \cos 3x(2 \sin 2x - 1) &= 0.\end{aligned}$$

Võrrutades vasaku poole tegurid nulliga, saame võrrandid:

$$2 \sin 2x - 1 = 0 \quad \text{ja} \quad \cos 3x = 0.$$

Lahendame esimese võrrandi:

$$\sin 2x = \frac{1}{2}; \quad 2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi \quad \text{ja} \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + n \frac{\pi}{2}.$$

Lahendame teise võrrandi:

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad x = \frac{2k+1}{6} \pi.$$

Antud võrrandi üldlahend koosneb kahest sarjast:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + n \frac{\pi}{2} \quad \text{ja} \quad x = \frac{2k+1}{6} \pi.$$

Kui tundmatu mõne väärtuse puhul vähemalt üks tegur muutub nulliks, aga teised (vähemalt üks) kaotavad mõtte, siis kogu korrutis kaotab mõtte; tundmatu niisugused väärtused ei ole antud võrrandi lahendid.

Näide. Kui võrrutada võrrandi

$$\sin 2x \tan x = 0 \tag{1}$$

vasaku poole tegurid eraldi nulliga, siis saame võrrandid:

$$\sin 2x = 0 \quad \text{ja} \quad \tan x = 0, \tag{2}$$

milledest leiame:

$$x = n \frac{\pi}{2} \quad \text{ja} \quad x = k\pi.$$

Teine tegur  $\tan x$  kaotab mõtte väärtuste  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1) \frac{\pi}{2}$

korral, mis sisalduvad esimese võrrandi (2) lahendite hulgas paaritu  $n = 2k+1$  puhul. Need on võõrlahendid. Paarisarvilise  $n = 2k$  puhul esimese võrrandi (2) lahendid sisalduvad teise võrrandi lahendite hulgas. Antud võrrandi (1) üldlahendi valem on  $x = k\pi$ .

§ 52. Lahendite kaotsiminekest ja võõrlahendite tekki-  
misest teisenduste teostamisel.

Antud avaldise samasusteisendused võivad muuta tema määramispiirkonda. Nii näiteks avaldis  $\frac{\sin 2x}{\sin x}$  ei oma mõtet  $x = k\pi$  ( $k$  on mistahes täisarv) puhul, sest argumenti nende väärtuste korral nimetaja muutub nulliks. Kui teostada järgmine teisendus:

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = 2 \cos x,$$

siis tekib avaldis  $2 \cos x$ , mis omab mõtte argumenti  $x$  kõikide väärtuste puhul. Argumenti  $x$  lubatavate väärtuste hulk laiienes.

Vastupidi, üleminekul avaldiselt  $2 \cos x$  esialgsele avaldisele  $\frac{\sin 2x}{\sin x}$  argumenti  $x$  lubatavate väärtuste hulk kitseneb.

*Võrrandis sisalduvate avaldiste samasusteisenduste teostamisel on võimalik võõrlahendite tekkimine, kui tundmatu lubatavate väärtuste hulk laiienes, ja on võimalik lahendite kaotsiminekest, kui see hulk kitsenes.*

**Näide.** Lahendada võrrand:

$$\frac{1 + \cos 2x}{2 \cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}. \quad (1)$$

Lahendus. Teostame murruliste avaldiste taandamise:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos 2x}{2 \cos x} &= \frac{2 \cos^2 x}{2 \cos x} = \cos x; \\ \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} &= \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x}. \end{aligned}$$

Võrrand omandab kuju:

$$\cos x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{ehk} \quad \frac{\cos x (\sin x - 1)}{\sin x} = 0. \quad (2)$$

Võrrutades lugeja tegurid nulliga:

$$\cos x = 0 \quad \text{ja} \quad \sin x - 1 = 0.$$

saame:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ja} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi.$$

$x$  väärtuste teine sari sisaldub esimeses ja mõlemad valemid võib

ühendada üheks:  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

Murruliste avaldiste taandamine üleminekul võrrandilt (1) võrrandile (2) võib tekitada võõrlahendeid. Antud näite puhul on kõik leitud lahendid võõrlahendid, sest võrrandi (1) vasak pool kaotab

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  puhul mõtte. Antud võrrand ei oma lahendeid.

Märkus. Lahendite kaotamine ei saa esineda, sest üleminekul võrrandilt (1) võrrandile (2) argumendi  $x$  lubatavate väärtuste hulk laieneb.

### § 53. Trigonomeetriliste võrrandite lahendamise erivõtteid.

Järgnevate näidetega on demonstreeritud trigonomeetriliste võrrandite lahendamist mitmesuguste erivõtetega. Need võtted võivad olla kõige mitmekesisemad, sõltuvalt võrrandi vasaku ja parema poole kujust.

Näiteid. 1) Lahendada võrrand  $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$ .

Lahendus. Teisendame vasaku ja parema poole summadeks:  $\frac{\cos 6x - \cos 8x}{2} = \frac{\cos 2x - \cos 8x}{2}$  ehk  $\cos 6x = \cos 2x$ .

Kasutame teguriteks lahutamise meetodit:

$$\cos 6x - \cos 2x = 0; \quad -2 \sin 4x \sin 2x = 0,$$

kust  $\sin 4x = 0$ ;  $\sin 2x = 0$  ja lõpuks  $x = k \frac{\pi}{4}$  ning  $x = k \frac{\pi}{2}$ . Esimene

sari sisaldab teise (paarisarvulise  $k = 2n$  puhul); seega  $x = k \frac{\pi}{4}$  on antud võrrandi üldlahendi valem.

2) Lahendada võrrand:  $\cos x + \sin x = 1$ .

Lahendus. Jagame mõlemad pooled arvuga  $\sqrt{2}$  ja, arvestades, et  $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , kujutame vasaku poole vahe koosinuseks. Järk-järgult saame:

$$\cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ja } x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

kust leiame kaks sarja lahendeid:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ja} \quad x = 2k\pi.$$

Teise meetodiga lahendasime selle võrrandi § 50 (lk. 109, näide 2). Käesolevas paragrahvis esitatud lahenduse puhul pole t a r v i s juuri kontrollida.

M ä r k u s. Selle meetodiga võib lahendada võrrandi  $a \sin x + b \cos x = c$ . Tõepöolest, abinurga sissetoomisega (vt. § 25) võib selle võrrandi teisendada kujule

$$\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) = c.$$

3) Lahendada võrrand:

$$\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 0. \quad (1)$$

L a h e n d u s. Jagades mõlemad pooled avaldisega  $\cos^2 x$ , saame:

$$\tan^2 x + \tan x - 1 = 0, \quad (2)$$

kust

$$\tan x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{ja} \quad x = \arctan \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} + k\pi.$$

Üleminekul võrrandilt (1) võrrandile (2) kitseneb võrrandi määramispiirkond, sest tundmatu lubatavate väärtuste hulgast eraldatakse arvud  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ . Kuid ükski nendest arvudest ei rahulda võrrandit (1), seega lahendite kaotsiminekut ei toimu.

M ä r k u s. See võrrand kuulub homogeensete trigonomeetriliste võrrandite klassi, sest kõik tema liikmed on ühe ning sama- (antud näite puhul teise-) astmelised  $\sin x$  ja  $\cos x$  suhtes. Toodud meetodiga tavaliselt lahendataksegi homogeenseid trigonomeetrilisi võrrandeid.

4) Lahendada võrrand  $3 \cos 4x - 5 \sin^3 x = 10$ .

L a h e n d u s. Võrrand ei oma lahendeid, sest  $3 \cos 4x$  ei ole absoluutväärtuselt suurem kui 3 ja  $5 \sin^3 x$  pole suurem kui 5, seega võrrandi parem pool ei saa olla 10.

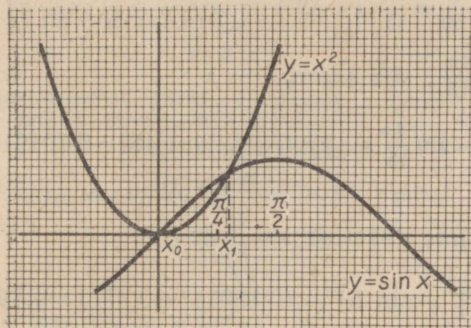
## § 54. Trigonomeetriliste võrrandite ligikaudselt lahendamisest.

Elementaararvemaatika vahenditega pole mitte alati võimalik moodustada antud võrrandi üldlahendi valemit. Sel juhul arvutatakse praktikas juured ligikaudselt graafilise meetodi ja funktsioonide väärtuste tabelite abil. Selgitame öeldut näitega.

Lahendada võrrand:  $x^2 = \sin x$ .

Hoolega joonestatud graafik (joon. 83) näitab, et jooned  $y=x^2$  ja  $y=\sin x$  lõikuvad kahes punktis, abstsissidega  $x_0=0$  ja  $x_1>0$ . Võrrand omab kaks juurt  $x_0=0$  ja  $x_1>0$ . Arvutame juure  $x_1$  täpsusega 0,1, kasutades V. Bradise tabelleid.

Jooniselt on näha, et juur  $x_1$  asetseb vahemikus  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ . Sama kinnitavad ka arvutused. Tõepoolest,



Joon. 83.

$x = \frac{\pi}{4}$  puhul on antud võrrandiga ekvivalentse võrrandi  $x^2 - \sin x = 0$  vasak pool negatiivne:

$$x^2 - \sin x = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \sin \frac{\pi}{4} \approx (0,7854)^2 - 0,7071 \approx$$

$$\approx 0,6168 - 0,7071 < 0, \quad x = \frac{\pi}{2} \text{ puhul aga positiivne:}$$

$$x^2 - \sin x \approx (1,5708)^2 - 1 > 0$$

(ruututõstmine on teostatud ruutude tabelite abil).

Jooniselt on näha, et  $x_1$  väärtus on  $\frac{\pi}{2}$  «lähedal»; see pärast, jaotades vahemiku  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$  näiteks viieks võrdseks osaks, proovime väärtust  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{20} = \frac{3\pi}{10} = (54^\circ)$ . Saame:

$$x^2 - \sin x = \left(\frac{3\pi}{10}\right)^2 - \sin 54^\circ \approx (0,9425)^2 - 0,8090 \approx$$

$=0,8883 - 0,8090 > 0$ . Kuna  $x = \frac{\pi}{4}$  puhul võrrandi  $x^2 - \sin x = 0$  vasak pool on negatiivne,  $x = \frac{3\pi}{10}$  puhul aga positiivne, siis  $\frac{\pi}{4} < x_1 < \frac{3\pi}{10}$ . Jagades vahemiku  $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{10})$  näiteks kolmeks võrdseks osaks, proovime väärtusi:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{60} = \frac{4\pi}{15} (=48^\circ) \text{ ja } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{30} = \frac{17}{60}\pi (=51^\circ).$$

Kui  $x = \frac{4\pi}{15}$ , siis saame:

$$\left(\frac{4\pi}{15}\right)^2 - \sin \frac{4\pi}{15} \approx (0,8378)^2 - \sin 48^\circ \approx 0,7019 - 0,7431 < 0. \quad (1)$$

Proovime väärtust  $x = \frac{17}{60}\pi$ :

$$\left(\frac{17}{60}\pi\right)^2 - \sin 51^\circ \approx (0,8901)^2 - 0,7771 \approx 0,7923 - 0,7771 > 0.$$

Seega juur  $x_1$  asetseb arvude  $\frac{4\pi}{15} = 0,837\dots$  ja  $\frac{17}{60}\pi = 0,890\dots$  vahel, siis ka  $0,8 < x_1 < 0,9$ . Selleks et selgitada, kumb väärtustest 0,8 või 0,9 tuleb võtta, proovime  $x = 0,85 (\approx 48^\circ 42')$ :

$$(0,85)^2 - \sin 48^\circ 42' \approx 0,7225 - 0,7513 < 0.$$

Järelikult,  $0,85 < x_1 < 0,9$  ja seega  $x_1 \approx 0,9$  (liiaga). Vahemiku edasise jaotamise teel võib  $x_1$  arvutada täpsusega 0,01 jne.

## § 55. Ratsionaliseerimismeetodist.

Ratsionaliseerimismeetod seisneb järgmises: *tuuakse sisse abitundmatu nii, et pärast asendust tekiks selle abitundmatu suhtes ratsionaalne võrrand.*

Näitena lahendame võrrandi:

$$a \sin x + b \cos x = c, \text{ kus } a \neq 0, b \neq 0 \text{ ja } c \neq 0.$$

Lahendus. Kuna  $\cos x$  ja  $\sin x$  avalduvad ratsionaalselt  $\tan \frac{x}{2}$  kaudu (vt. § 26), siis, võttes  $t = \tan \frac{x}{2}$ , saame:

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \quad \sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Pärast asendamist omandab võrrand kuju:

$$-\frac{t^2(b+c) - 2at + c - b}{1 + t^2} = 0. \quad (2)$$

Korrutades mõlemad pooled avaldisega  $-(1+t^2)$  (mis iga  $t$  puhul erineb nullist), saame ruutvõrrandi:

$$(b+c)t^2 - 2at + c - b = 0, \quad (3)$$

mis on samaväärne võrrandiga (2), kust  $b \neq -c$  puhul

$$t = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b+c}. \quad (4)$$

$t$  väärtused on reaalsed, kui  $a^2 + b^2 \geq c^2$ .

Kui  $b = -c$ , siis võrrand (3) muutub esimese astme võrrandiks, millest leiame:

$$t = \tan \frac{x}{2} = -\frac{b}{a}, \quad \frac{x}{2} = \arctan \left( -\frac{b}{a} \right) + k\pi. \quad (5)$$

Abimuutuja avaldis  $t = \tan \frac{x}{2}$  kaotab mõtte  $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$  puhul, s. t.  $x = (2k+1)\pi$  puhul. Võrrandi (1) lahendid kujul  $x = (2k+1)\pi$  (kui sellised lahendid on olemas) võivad olla kaotsi läinud. Asendades  $x = (2k+1)\pi$  võrrandisse (1), saame  $-b = c$ .

Sel juhul võrrand (1) omab sarja lahendeid  $x = (2k+1)\pi$ .

Õeldust järeldub:

1°. Kui  $a^2 + b^2 < c^2$ , siis võrrand (1) ei oma lahendeid, sest võrrand (3) ei oma reaalseid juuri.

2°. Kui  $a^2 + b^2 \geq c^2$  ja  $c \neq -b$ , siis võrrandist (4) leiame:

$$x = 2 \left( \arctan \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b+c} + k\pi \right).$$

3°. Kui  $c = -b$ , siis võrrandil (1) on kaks sarja lahendeid:  $x = (2k+1)\pi$  ja  $x = 2 \arctan \left( -\frac{b}{a} \right) + 2k\pi$  [võrrandist (5)].

## Ajalooline ülevaade.

Trigonomeetria, samuti nagu iga teinegi teaduslik distsipliin, tekkis inimkonna praktilise tegevuse vajadusist. Astronoomia, mere-sõidu, maamõõtmise ja arhitektuuri mitmesugused ülesanded löid vajaduse niisuguse meetodi väljatöötamiseks, mis võimaldaks arvutada geomeetriliste kujundite elemente nende kujundite teiste, vahetult mõõtmise teel leitud elementide väärtuste järgi. Nii näiteks arvutasid astronoomid vaatluste ja mõõtmiste tulemusel saadud andmete põhjal välja kaugused Maalt teiste taevakehadeni.

Nimetus «trigonomeetria» ise on pärit kreeka keelest ja tõlkes eesti keelde tähendab «kolmnurkade mõõtmine»;  $\tau\rho\nu\gamma\omega\nu\nu$  (trigonon) — kolmnurk,  $\mu\epsilon\tau\rho\acute{\epsilon}\iota\nu$  (meterein) — mõõtmine.

Trigonomeetria alged ulatuvad kaugesse minevikku. Juba ammu e. m. a. oskasid muinasbabüloonia teadlased ennustada päikese- ja kuuvarjutusi. Sellest võib teha järelduse, et nad tundsid mõningaid lihtsamaid fakte trigonomeetriast.

II saj. e. m. a. vajas matemaatilist läbitöötamist astronoomilistest vaatlustest kogutud materjal. Uheks trigonomeetria aluste rajajaks loetakse vana-kreeka astronoomi Hipparchost, kes elas II saj. e. m. a. Hipparchos oli esimeste trigonomeetriliste tabelite autoriks. Need tabelid ei ole meie ajani säilinud, kuid oma teoses «Almagest»\* tõi nad täiustatud kujul ära kuulus Aleksandria astronoom Klaudios Ptolemaios, kes elas II sajandi teisel poolel p. m. a. Neis tabelleis anti ringjoone kõõlude väärtused vastavate kesknurkade mitmesuguste väärtuste jaoks. Kõõlude mõõtühikuks oli  $\frac{1}{60}$  raadiusest. Need tabelid olid, tänapäeva termineid tarvitades, poole kesknurga kahekordse siinuse tabelid. Neis oli antud kõõlude väärtused nurkade  $0^{\circ},5$ ;  $1^{\circ}$ ;  $1^{\circ},5$ ;  $2^{\circ}$ ;  $2^{\circ},5$ ...;  $180^{\circ}$  jaoks. Kuid tuleb silmas pidada, et Vana-Kreekas trigonomeetria ei eraldunud iseseisvaks teaduseks, vaid teda loeti astronoomia osaks.

Tähtsa panuse trigonomeetria arengusse andis india matemaatika perioodil V—XII saj. p. m. a. India matemaatikud hakkasid arvutama mitte tervet kõõlu, nagu seda tegid kreeklased, vaid poolt sellest (s. t. siinuslõiku). Hindud koostasid «siinuste» tabeli, milles

---

\* «Almagest» on Ptolemaiose teose araabiakeelne nimetus. Kreeklased nimetasid seda teost „Μεγάλη συνταξις” (megale süntaksis = «Suur konstruktsioon»). (Tõlk.)

oli antud poolkõõlude väärtused mõõdetult ringjoone osades (minu- teis). India matemaatikud tundsid seoseid, mis tänapäeva tähistus- tes kirjutatakse:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha).$$

Perioodil IX—XV sajandini kuulus juhtiv koht matemaatika arendamises Kesk-Aasia ja Taga-Kaukaasia rahvastele. Kesk-Aasia matemaatika areng toimus samuti tihedas seoses astronoomia, geo- graafia ja geodeesia poolt püstitatud praktiliste arvutusülesannete lahendamise vajadusega. Kesk-Aasia teadlased võtsid vaatlusele kuus trigonomeetrilist lõiku (siinus-, koosinus-, tangens-, kootan- gens-, seekans- ja koosekanslõik). Päikese kõrguse määramise üles- annete lahendamiseks koostas süüria astronoom Al-Battani (elas X saj.) kootangensi väärtuste väikese tabeli. Silmapaistev astro- noom ja matemaatik Abul Vafa Horasanist (praegu Iraani territoorium) avaldas sõnaliselt algebralised seosed trigonomeetri- liste funktsioonide vahel; tema koostas ka siinuste tabeli täpsusega  $\frac{1}{60^4}$  iga  $10'$  tagant ja samuti tangensite tabeli.

Kesk-Aasia teadlaste töödega formeerus trigonomeetria iseseis- vaks teaduslikuks distsipliiniks, milles uurimismetodiks olid mitte ainult geomeetrilised konstruktsioonid, vaid ka algebralised seosed trigonomeetriliste funktsioonide vahel. Kuulus aserbaidžaaani mate- maatik ja astronoom Nasir-addin at Tusi (elas XIII saj.) esitas teoses «Traktaat täielikust nelikülükust» (traktaat on tõlgitud vene keelde) trigonomeetria iseseisva teadusena. Selles teoses toodi esmakordselt sisse rida uusi mõisteid ja saadi rida tähtsaid tulemusi.

Samarkandis (XV saj.) elanud kuulsal astronoomil Ulugbekil observatooriumis töötati välja küllaltki täpne meetod trigonomeetri- liste tabelite koostamiseks.

Kesk-Aasia matemaatika ennetas reas ülitähtsates avastustes Lääne-Euroopa teaduse. Nasir-addin ad Tusi arendas trigonomeetria- t kui iseseisvat distsipliini peaaegu 200 aastat enne Regiomontanust — trigonomeetria aluste rajajat Euroopas.

Esimesed teaduslikud tööd trigonomeetriast Lääne-Euroopas kuuluvad XV sajandisse. Meresõidu areng nõudis oskust täpselt määrata taevakehade asetust, mis omakorda lõi küllaltki täpsete trigonomeetriliste tabelite koostamise vajaduse. XV sajandil kirjutas saksa teadlane Regiomontanus (Johannes Müller) traktaadi «Viis raamatut igasugu liiki kolmnurkadest», kus anti trigonomeet- ria süstemaatiline esitus iseseisva teadusliku distsipliinina. Tema

koostas ka siinuse tabelid täpsusega  $\frac{1}{10^7}$ . Regiomontanuse tabelleis võeti raadiuse pikkuseks 10 000 000, aga mitte arv, mis oleks arvu 60 mingi kordne, s. t. tegelikult teostati üleminek mõõtmiste kuue- kümnendsüsteemilt kümnendsüsteemile.

Algebralise sümboolika areng võimaldas trigonomeetriksi seo- seid üles kirjutada valemite abil; negatiivsete arvude teooria raken- damine võimaldas vaadelda nurga ja kaare suunda ning laiendada trigonomeetriliste lõikude mõistet mistahes nurkadele. Seega moo- dustus baas trigonomeetriliste funktsioonide kui arvulise argumendi

funktsioonide uurimiseks. Analüütilise aparadi trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste arvutamiseks (mistahes täpsusega) töötas välja Newton.

Trigonomeetria edasine areng on seotud suure teadlase, Vene Teaduste Akadeemia liikme L. Euleri (1707—1783) nimega. Enne Eulerit vaadeldi trigonomeetrilisi funktsioone kui lõike ringis (nii-nimetatud trigonomeetrilised lõigud); Euler hakkas trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi vaatlema kui arve — trigonomeetriliste lõikude suurusi ringis, mille raadius on võetud ühikuks. Euler lahendas lõplikult küsimuse trigonomeetriliste funktsioonide märkidest mitmesugustes veerandites, lihtsustas ning andis üldise tõestuse reale trigonomeetria teoreemidele ning avastas seose trigonomeetriliste ja kompleksargumendi eksponentsiaalfunktsiooni vahel.

Trigonomeetriliste funktsioonide teooria analüütilise (geomeetria-st sõltumatu) ülesehituse, mida alustas Euler, viis oma töödes lõpule suur vene teadlane N. I. Lobatševski.

Trigonomeetriliste funktsioonide vaatlemine tänapäeval arvulise argumendi funktsioonidena on suurel määral tingitud füüsika, mehhaanika ja tehnika arengust. Need funktsioonid said aluseks matemaatilisele aparaadile, mille abil uuritakse mitmesuguseid perioodilisi protsesse: võnkliikumised, lainete levimine, mehhanismide liikumised, vahelduvvoolu võnkumine. Nagu näitas J. Fourier (1768—1830), on iga perioodiline liikumine kuitahes täpselt kujutatav lihtsaimate sinusoidaalsete (harmooniliste) võnkumiste summana.

Oma arengu esimestes staadiumides oli trigonomeetria geomeetria-riliste arvutusülesannete lahendamise vahendiks ja tema sisuks loeti lihtsaimate geomeetria-riliste kujundite, s. t. kolmnurkade elementide arvutamist. Tänapäeva trigonomeetrias omab iseseisvat ja sama olulist tähtsust trigonomeetriliste funktsioonide omaduste uurimine.

Need funktsioonid omavad erakordselt olulist tähtsust tänapäeva matemaatilises aparadis, mis on vajalik loodusnähtuste seaduspärasuste uurimiseks ja nende seaduspärasuste kasutamiseks inimese praktilises tegevuses.

## SISUKORD

### I peatükk. Nurgad ja kaared; nende mõõtmine.

§ 1.	Mistahes suurusega nurgad . . . . .	3
§ 2.	Ringjoone mistahes suurusega kaared . . . . .	4
§ 3.	Nurkade ja kaarte mõõtmine . . . . .	5
§ 4.	Koordinaatide tasapind; ühikring . . . . .	8
§ 5.	Vektori projektsioon teljel . . . . .	11
§ 6.	Kaugus kahe punkti vahel koordinaatide tasandil . . . . .	12

### II peatükk. Trigonomeetrilised funktsioonid.

§ 7.	Mistahes nurga trigonomeetriliste funktsioonide definitsioon	14
§ 8.	Trigonomeetriliste funktsioonide väärtused mõnede nurkade puhul	19
§ 9.	Trigonomeetriliste funktsioonide märgid . . . . .	21
§ 10.	Trigonomeetrilised põhisamasused ja järelduisi nendest . . . . .	23
§ 11.	Trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste arvutamine, kui on teada mingi ühe trigonomeetrilise funktsiooni väärtus	25
§ 12.	Trigonomeetrilised funktsioonid kui paaritud või paaris-funktsioonid	26
§ 13.	Nurga konstrueerimine tema trigonomeetrilise funktsiooni antud väärtuse järgi . . . . .	28

### III peatükk. Liitmisvalemid ja järeldused nendest.

§ 14.	Nurkade liitmine ja lahutamine . . . . .	33
§ 15.	Liitmisvalemid koosinuse jaoks . . . . .	33
§ 16.	Valemid täiendusnurkade jaoks . . . . .	36
§ 17.	Liitmisvalemid siinuse jaoks . . . . .	36
§ 18.	Liitmisvalemid tangensi jaoks . . . . .	37
§ 19.	Liitmisvalemitest mitme argumendi puhul . . . . .	38
§ 20.	Taandamisvalemid . . . . .	39
§ 21.	Argumendi kahekordistamise valemid . . . . .	43
§ 22.	Argumendi poolitamise valemid . . . . .	44
§ 23.	Valemid, mis võimaldavad trigonomeetriliste funktsioonide korrutise teisendada summaks . . . . .	46
§ 24.	Valemid, mis võimaldavad trigonomeetriliste funktsioonide summa teisendada korrutiseks . . . . .	47
§ 25.	Avaldise $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ teisendamine korrutiseks . . . . .	49
§ 26.	Valemid, mis avaldavad trigonomeetrilised funktsioonid poole argumendi tangensi kaudu . . . . .	50

#### IV peatükk. Trigonomeetriliste funktsioonide põhiomadused.

§ 27. Arvulise argumendi trigonomeetrilised funktsioonid ja nende määramispiirkonnad	52
§ 28. Trigonomeetriliste funktsioonide tõkestatus või tõkestamatus	53
§ 29. Vahemikud, milledes trigonomeetrilised funktsioonid säilitavad märki	54
§ 30. Trigonomeetriliste funktsioonide perioodilisus	54
§ 31. Trigonomeetriliste funktsioonide monotoonsuse piirkonnad	56
§ 32. Trigonomeetriliste funktsioonide graafikud	62

#### V peatükk. Tabelite kasutamine arvutamisel.

§ 33. Trigonomeetrilised tabelid	71
§ 34. Arvutuslükati kasutamisest	76

#### VI peatükk. Geomeetriliste kujundite elementide arvutamine.

§ 35. Kolmnurga elemendid	79
§ 36. Kolmnurkade lahendamisest	79
§ 37. Täisnurksete kolmnurkade lahendamine	80
§ 38. Siinuslause	83
§ 39. Koosinuslause	84
§ 40. Kolmnurga pindala valemid	85
§ 41. Tangenslause	86
§ 42. Kolmnurga lahendamine tema kahe nurga ja ühe külje järgi	86
§ 43. Kolmnurga lahendamine kahe külje ja nende vahelise nurga järgi	88
§ 44. Kolmnurga lahendamine kahe külje ja ühe antud külje vastas asuva nurga järgi	89
§ 45. Kolmnurga lahendamine kolme külje järgi	91
§ 46. Trigonomeetria rakendamine mõõtmisteks maastikul	94
§ 47. Trigonomeetria rakendamine geomeetriliste ülesannete lahendamisel	98
§ 48. Trigonomeetria kasutamisest füüsikas, mehhaanikas ja tehnikas	100

#### VII peatükk. Trigonomeetrilised võrrandid.

§ 49. Lihtsaimad trigonomeetrilised võrrandid	105
§ 50. Uhele funktsioonile taandamise meetod	108
§ 51. Teguriteks lahutamise meetod	110
§ 52. Lahendite kaotsiminekuks ja võõrlahendite tekkimisest teistenduste teostamisel	112
§ 53. Trigonomeetriliste võrrandite lahendamise erivõtteid	113
§ 54. Trigonomeetriliste võrrandite ligikaudsest lahendamisest	114
§ 55. Ratsionaliseerimismeetodist	116
Ajalooline ülevaade	118



Сергей Иосифович Новоселов

ТРИГОНОМЕТРИЯ

На эстонском языке

Эстонское Государственное Издательство  
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

Toimetaja K. Kallaste

Tehniline toimetaja Ü. Lau

Korrektorid P. Hiie ja E. Künarpu

Ladumisele antud 29. IX 1960. Trükkimisele  
antud 26. XI 1960. Paber 54×84,  $\frac{1}{16}$ . Trüki-  
poognaid 7,75. Formaadile 60×92 kohaldatud  
trükipoognaid 6,35. Arvutuspoognaid 5,52.  
Trükiarv 9000. Tellimise nr. 9106. Hans  
Heidemanni nim. trükikoda, Tartu,  
Ülikooli 17/19. I.

Hind 12 kop.

6—6







12 kop.

A-23528

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00367638 6