I 1098

EUKLIDES.

Der Druck wird unter den gesetzlichen Bedingungen gestattet.

Riga, am 31st. Januar 1841.

Dr. C. E. Napiersky

Censor.

Geometrie.

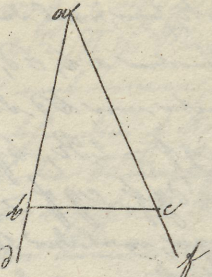
Zweiter Cursus

II.

Vom Professor Dr. G. Paucker.

Mitau $\frac{15}{27}$ Decemb. 1840.

1.

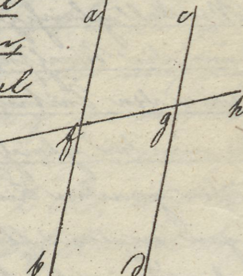


In einem Dreiecke beträgt die Summe der beiden innern Winkel weniger als zwei rechte, und die Summe der beiden Außenwinkel mehr als zwei rechte Winkel.

Wenn bc von abd, acf durchschnitten wird, so ist (I.22) $\angle acb < cbd$, also $\angle abc + acb < abc + cbd$. Aber (I.14) $\angle abc + cbd = 2R$, also $\angle abc + acb < 2R$.

Ferner ist (I.22.) $\angle cbd > acb$, also $\angle cbd + bcf > acb + bcf$. Aber (I.14) $\angle acb + bcf = 2R$, also $\angle cbd + bcf > 2R$.

2.



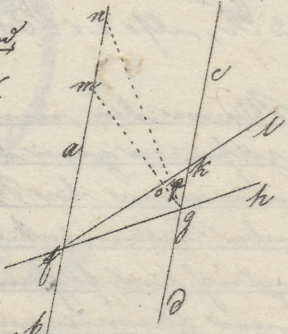
Wenn die innern Winkel zusammen zwei rechte betragen, oder wenn die Wechselwinkel oder Seitenwinkel einander gleich sind, so sind die in einer Ebene liegenden geraden Linien parallel.

Die geraden Linien ab, cd, liegen in einer Ebene und werden von der geraden Linie fgk so durchschnitten, daß die innern Winkel $afg + cgf = 2R$, oder $bfg + dgf = 2R$, oder daß die Wechselwinkel $afg = dgf$, $cgf = bfg$ oder daß die Seitenwinkel $afg = cgk$, $bfg = dgk$. Würden nun ab, cd, einander irgendwo auf der Seite von ac durchschneiden, so müßte (II.1) $afg + cgf < 2R$, $bfg + dgf > 2R$ oder (I.22) $afg < dgf$, $cgf < bfg$, $afg < cgk$,

bfg

dgk, seyn, was der Voraussetzung widerspricht. Würden ab, cd, einander irgendwo auf der Seite von bd durchschneiden, so müßte (II.1) $afg + cgf > 2R$, $bfg + dgf < 2R$, oder (I.22) $afg > dgf$, $cgf > bfg$, $afg > cgk$, $bfg < dgk$ seyn, was der Voraussetzung widerspricht. Es können daher ab, cd, einander weder auf der Seite von ac, noch auf der Seite von bd durchschneiden. Sie durchschneiden einander also nirgends, und da sie in einer Ebene liegen, so sind sie parallel.

3.



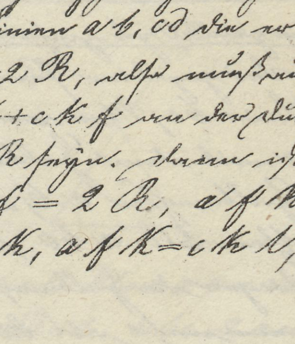
<u>Wenn die Linien parallel sind, so ist die Summe der innern Winkel gleich zwei rechten, und die Wechselwinkel, so wie die Seitenwinkel sind einander gleich.</u>

Die geraden Linien ab, cd liegen in einer Ebene, und werden von der geraden Linie fgk so durchschnitten, daß die innern Winkel $afg + cgf = 2R$, $bfg + dgf = 2R$, die Wechselwinkel $afg = dgf$, $cgf = bfg$, die Seitenwinkel $afg = cgk$, $bfg = dgk$. Also sind (II.2) die Linien ab, cd, parallel. Man ziehe durch f eine beliebige Durchschnittlinie fkl, so kommt es darauf an zu beweisen, daß auch $afk + ckf = 2R$ ist. Man ziehe aus g eine beliebige gerade Linie gm, welche die fk

in o schneidet, so ist die Summe $mfg + mgf < 2R$ und die Summe $mfo + mof < 2R$ (II. 1). Man ziehe aus g eine gerade Linie gn nach einem weiter entfernten Punkte n welche die fk in p schneidet, so ist ebenfalls die Summe $nfg + ngf < 2R$, und die Summe $nfp + npf < 2R$, gleichzeitig ist aber auch sowohl die Summe $nfg + ngf > mfg + mgf$, als auch die Summe $nfp + npf > mfo + mof$. Indem also die Punkte m, n, immer höher hinaufrücken, bleibt zwar immer sowohl die Summe der innern Winkel an der Durchschnittslinie fg, als auch die Summe der innern Winkel an der Durchschnittslinie fk kleiner als $2R$, beide Summen aber <u>wachsen gleichzeitig</u>, und <u>nähern sich gleichzeitig</u> der Gränze $2R$. Nun ist bei den Linien ab, cd die erste Summe $afg + cgf = 2R$, also muß auch die zweite Summe $afk + ckf$ an der Durchschnittslinie fk, gleich $2R$ seyn. Dann ist aber auch $bfk + dkf = 2R$, $afk = dkf$, $ckf = bfk$, $afk = ckl$, $bfk = dkl$.

4.

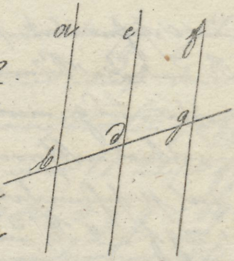
<u>Gerade Linien, welche auf einer andern geraden Linie senkrecht stehen und in einer Ebene liegen, sind parallel.</u>



$\angle abd = R$, $\angle cdf = cdb = R$

also $\angle abd + cdb = 2R$, also (II. 2), $ab \parallel cd$.

5.



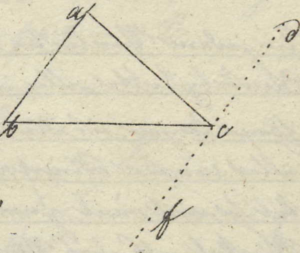
Wenn zwei gerade Linien einer dritten parallel sind, so sind sie einander parallel.

Es wird angenommen, daß die geraden Linien ab, cd, fg, in einer Ebene liegen, und daß sowohl ab als cd der Linie fg parallel sey. Da $ab \parallel fg$, so ist (II. 3) $\angle abg + fgb = 2R$, da $cd \parallel fg$, so ist (II. 3) $\angle cdg + fgb = 2R$. Folglich ist $\angle abg = cdg$, da diese Winkel Gegenwinkel sind, so sind (II. 2) $ab \parallel fg$.

Aus einem Punkte eine gerade Linie einer andern geradlinig parallel zu ziehen.

Der gegebene Punkt sey a, die gegebene Linie bc. Man verbinde ab, ac, beschreibe aus a mit dem Halbmesser bc, aus c mit dem Halbmesser ab, Kreise, und zwar in der Ebene des $\triangle abc$. Da $ab + bc > ac$ (I. 27) so betragen die Halbmesser der beiden Kreise zusammen mehr als die Entfernung der Mittelpunkte ac, also (I. 30) durchschneiden die Kreise einander in d, und es ist (I. 5. 9) $\triangle acd = cab$, also $\angle cad = acb$. Da nun diese Dreiecke acd, cab, also auch die geraden Linien ad, bc, in einer Ebene liegen, so daß ac, bd einander in f schneiden, und die Wechselwinkel $cad = acb$ sind, so sind (II. 2) $ad \parallel bc$.

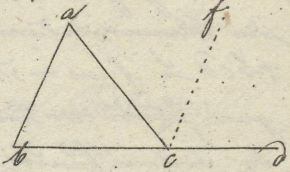
7.



In einem Dreieck ist die Summe der innern Winkel gleich der Summe von zwei rechten Winkeln.

Man ziehe $dcf \parallel ab$, so ist (II. 5) $\angle abc + dcb = 2R$, oder $\angle abc + acb + dca = 2R$, aber (II. 5) $\angle dca = bac$ also $\angle abc + acb + bac = 2R$.

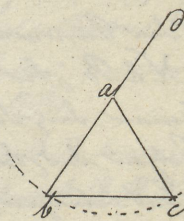
8.



An einem Dreiecke ist der Außenwinkel gleich der Summe der beiden innern Gegenwinkel.

Man ziehe $df \parallel ab$, so ist (II. 5) $\angle fcd = abc$, $\angle acf = bac$, also $\angle acd = abc + bac$

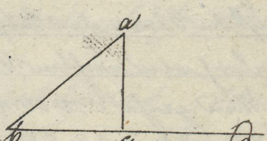
9.



An einem gleichschenkligen Dreiecke ist der Außenwinkel an der Spitze doppelt so groß als jeder Winkel an der Grundlinie.

Nach (II. 8) ist $\angle cad = abc + acb$. Aber $ab = ac$, also (I. 3) $\angle abc = acb$, also $\angle cad = 2.\ abc = 2.acb$.

10.

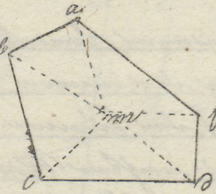


Im rechtwinkligen Dreiecke machen die beiden spitzen Winkel zusammen einen rechten Winkel aus.

Nach II 8 ist $\angle acd = abc + bac$. Aber $\angle acd = acb = R$ also $\angle abc + bac = R$.

11.

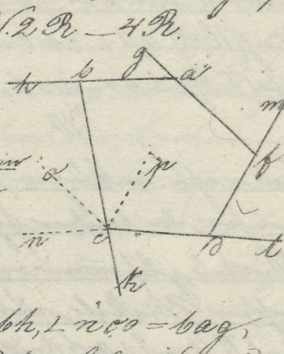
11.



In jedem Vielecke, dessen Winkelpunkte alle in einer Ebene liegen, ist die Summe aller innern Umfangswinkel, so vielmal zwei rechte Winkel als das Vieleck Seiten hat, weniger vier rechte Winkel.

Die Anzahl der Seiten des Vielecks sey N, die Summe der innern Umfangswinkel abc + bcd u. s. w. = S. Man wähle einen beliebigen Punkt m im Innern der Figur, verbinde diesen Punkt mit den Ecken a, b, c u. s. w. so ergeben sich soviel Dreiecke als das Vieleck Seiten hat, nämlich N. In jedem Dreiecke ist die Summe der Winkel = 2 R (II. 7). Also ist die Summe der Winkel aller Dreiecke N. 2 R. Die Summe der Winkel an den Grundlinien der Dreiecke ist = S. Die Winkel an den Spitzen der Dreiecke liegen um den Punkt m herum, und betragen also (I. 15) 4 R. Demnach ist N. 2 R = S + 4 R, also S = N. 2 R − 4 R.

12.



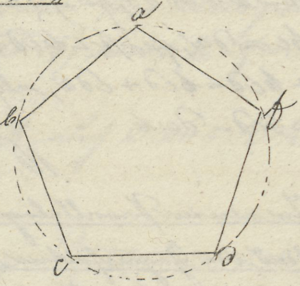
An jedem Vielecke, dessen Winkelpunkte alle in einer Ebene liegen, ist die Summe der Außenwinkel gleich vier rechten Winkeln.

Man ziehe cn ∥ bh, co ∥ ag, cp ∥ fm, so ist (II. 3) ∠ kcn = cbh, ∠ nco = bag, ∠ ocp = afm, ∠ pcd = fdt. Aber (I. 15)

∠ dck

$\angle dck + kcn + nco + ocp + pcd = 4R$, also auch
$\angle dck + cbk + bag + afm + fal = 4R$.

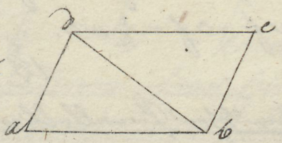
13.



Der innere Umfangswinkel eines regelmäßigen ebenen Vielecks, dessen Seiten und Winkel alle einander gleich sind, ist gleich zwei rechten Winkeln weniger dem Quotienten, welcher aus der Division von vier rechten durch die Seitenzahl entsteht.

Die Summe aller Außenwinkel ist (II. 12) $= 4R$; da alle Außenwinkel des regelmäßigen Vielecks einander gleich sind, so ist jeder $= \frac{4R}{N}$. Jeder Außenwinkel macht mit dem innern Umfangswinkel $2R$ also ist der innere Umfangswinkel gleich $2R - \frac{4R}{N}$.
z. B. beim Dreieck $\frac{2}{3}R$, beim Viereck R, beim Fünfeck $\frac{6}{5}R$, beim Sechseck $\frac{8}{6}R$, beim Siebeneck $\frac{10}{7}R$ u. s. w.

14.

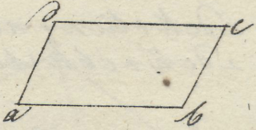


Ein Parallelogramm, d. h. ein ebenes Viereck dessen Gegenseiten parallel sind, wird von seiner Diagonallinie in zwei gleiche Dreiecke getheilt.

Da $ab \parallel cd$, so ist (II. 3) $\angle abd = cdb$. Da $bc \parallel da$, so ist $\angle cbd = adb$. Nun ist $bd = bd$, also (I. 2) $\triangle abd = cdb$.

15.

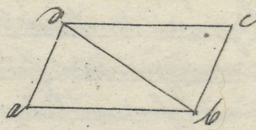
15.



In einem Parallelogramm sind die Gegenwinkel einander gleich.

Da $ab \parallel cd$, so ist (II. 3) $\angle abc + bcd = 2R$. Da $bc \parallel da$, so ist $\angle bcd + cda = 2R$. Also ist $\angle abc + bcd = bcd + cda$, also $\angle abc = cda$. Eben so ist $\angle bcd = dab$.

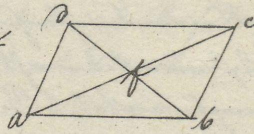
16.



In einem Parallelogramm sind die Gegenseiten einander gleich; oder Parallellinien zwischen Parallellinien sind einander gleich.

Da $ab \parallel cd$, $bc \parallel da$, so ist (II. 14) $\triangle abd = cdb$, also $ab = cd$, $bc = da$.

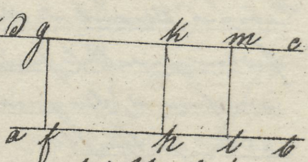
17.



In einem Parallelogramm halbiren die Diagonallinien einander.

Da $ab \parallel cd$, $bc \parallel da$, so ist (II. 3) $\angle baf = dcf$, $\angle abf = cdf$, und (II. 16) $ab = cd$. Also (I. 2) $\triangle abf = cdf$, also $bf = df = \frac{1}{2} bd$, und $af = cf = \frac{1}{2} ac$.

18.



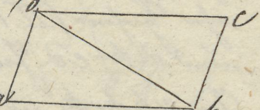
Zwischen Parallellinien sind alle senkrechten Linien einander gleich.

Jede dieser senkrechten Linien heißt daher der Abstand der Parallellinien, oder auch die Höhe des Parallelogramms oder Dreiecks, welche zwischen den Parallellinien liegen.

Es sey $ab \parallel cd$, auf ab seyen die senkrechten Linien fg, hk, lm, errichtet. Da $\angle gfh = R$, $\angle khf = R$, so ist $\angle gfh + khf = 2R$, also (II.3) $fg \parallel hk$, also $fhkg$ ein Parallelogramm, also (II.16) $fg = hk$ und (II.15) und $\angle k = f = R$, $\angle g = h = R$.

Eben so wird bewiesen, daß auch $lm = hk = fg$, und daß $\angle m = R$.

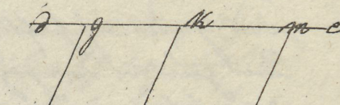
19.



Wenn zwei gerade Linien parallel und einander gleich sind, so sind auch die Verbindungslinien ihrer Endpunkte parallel und einander gleich.

Es sey $ab \parallel cd$, so ist (II.3) $\angle abd = cdb$. Aber auch $ab = cd$ und $bd = bd$, also (I.1) $\triangle abd = cdb$, also $da = bc$, und $\angle cbd = bda$, also (II.2) $da \parallel bc$.

20.

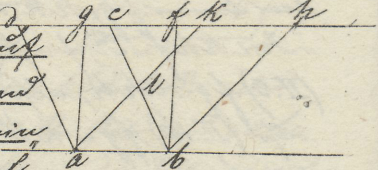


Wenn an einer geraden Linie mehrere einander gleiche Parallellinien liegen, so ist die Verbindungslinie ihrer Endpunkte eine gerade Linie, welche der Grundlinie parallel ist.–

Es sey $ab \parallel cd$, und $fg \parallel= hk \parallel= lm$, so ist (II.19) $kg \parallel fh$, $mk \parallel hl$, also (II.3) $\angle fhk + hkg = 2R$. Aber auch $\angle fhk + khl = 2R$, also $\angle hkg = khl$. Aber auch $\angle khl + hkm = 2R$ also $\angle hkg + hkm = 2R$, also

also (I. 16) gkm eine gerade Linie.

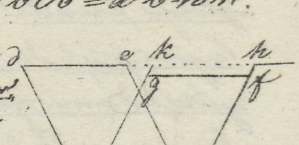
21.



Parallelogramme auf einerlei Grundlinie und von gleicher Höhe sind einander an Inhalt gleich.

Die Parallelogramme $abcd$, $abfg$, $abhk$, haben einerlei Grundlinie ab und liegen zwischen Parallellinien ab, dh, haben also gleiche Höhen (II. 18). In $abcd$ ist (II. 16) $ad = bc$ und $ab = cd$. In $abfg$ ist $ag = bf$ und $fg = ab$. In $abhk$ ist $ak = bh$ und $hk = ab$. Also ist $cd = fg = hk$; wenn man von cd, fg das Stück cg nimmt, so ist $gd = fc$. Wenn man zu cd, hk, das Stück ck hinzulegt, so ist $kd = hc$. Also (I 5) ist $\triangle\, agd = bfc$ und $\triangle\, akd = bhc$. Wenn man zu den $\triangle\, agd$, bfc, das Trapez $abcg$ hinzufügt, so ist $abcd = abfg$. Wenn man von den Dreiecken akd, bhc das gemeinschaftliche $\triangle\, clk$ wegnimmt, und zu den Trapezien $alcd$, $blhk$ das $\triangle\, abl$ hinzufügt, so ist $abcd = abhk$.

22.



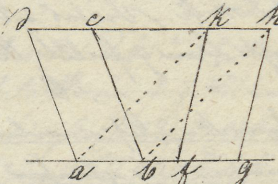
Parallelogramme auf einerlei Grundlinie und von gleichem Inhalt haben gleiche Höhe.

Die Parallelogramme $abcd$, $abfg$ sollen vermöge der Voraussetzung gleichen Inhalt haben. Da $cd = ab$, $fg = ab$, so müssen cd, fg, entweder zusammen fallen oder (II 5) pa-

rall

las seyn. Wenn cd, fg nicht zusammenfallen, so verlängere dc nach hk, dann ist (II. 21) abcd = abhk. Aber auch abcd = abfg, also abfg = abhk, was unmöglich ist, da sie um das Parallelogramm gfhk unterschieden sind. Also müssen cd, fg, zusammenfallen.

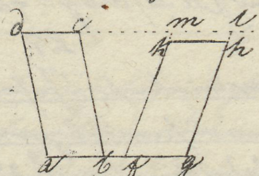
23.



Parallelogramme auf gleichen Grundlinien und von gleicher Höhe sind an Inhalt gleich.

Es wird angenommen, daß ab = fg sey. Da hk $\frown$= fg, so ist hk $\frown$= ab, also (II. 19) abhk ein Parallelogramm, also (II. 21) abcd = abhk, abhk = fghk, also abcd = fghk.

24.

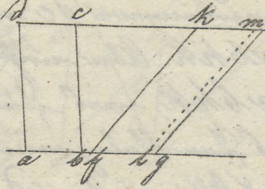


Parallelogramme von gleichen Grundlinien und gleichem Inhalt haben gleiche Höhe.

Es wird angenommen, daß ab = fg sey, daß ab, fg, in gerader Linie liegen, und daß der Inhalt abcd = fghk sey. Da hk $\frown$ fg, fg $\frown$ cd, so ist (II. 5) hk $\frown$ cd. Wenn man dc nach ml verlängert, so ist (II. 23) abcd = fglm. Also ist fghk $\frown$ fglm. Dieß ist unmöglich, wenn nicht hk, lm, zusammenfallen. Also muß hk in der Verlängerung von dc liegen.

25.

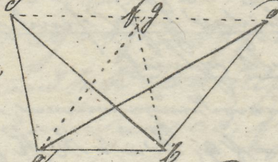
Parallelogramme von gleicher Höhe und gleichen gleichem Inhalt haben gleiche Grundlinien.



Es wird angenommen, daß $abcd = fghk$ sey, und $dchk$ eine gerade mit ag parallele Linie sey. Wäre ab nicht $= fg$, so sey $ab = fl$, man ziehe $lm \parallel fk$, so ist (II. 23) $abcd = flmk$, also auch $fghk = flmk$. Dieses ist aber unmöglich, wenn nicht l in g fällt. Also ist $ab = fg$.

26.

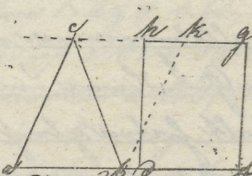
Dreiecke auf einerlei Grundlinie und von gleicher Höhe haben gleichen Inhalt.



Es wird angenommen, daß $cd \parallel ab$ sey. Man ziehe $bf \parallel ac$, $ag \parallel bd$ so ist (II. 14) $\triangle abc = \frac{1}{2}\, abfc$, $\triangle abd = \frac{1}{2}\, abdg$, und (II. 21) $abfc = abdg$, also $\triangle abc = abd$.

27.

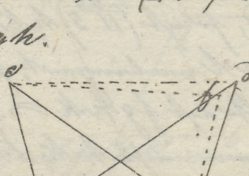
Ein Dreieck ist an Inhalt die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe.



Es wird angenommen, daß $ab = df$ und daß $chkg$ eine gerade der af parallele Linie sey. Man ziehe $bk \parallel ac$, so ist (II. 14) $\triangle abc = \frac{1}{2}\, abkc$ und (II. 23) $abkc = dfgh$, also ist $\triangle abc = \frac{1}{2}\, dfgh$.

28.

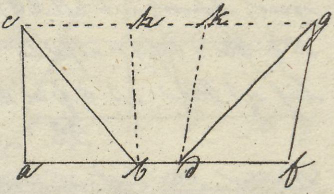
Dreiecke auf einerlei Grundlinie und von gleichem Inhalt haben gleiche Höhe.



Es wird angenommen daß die $\triangle abc$, abd an Inhalt gleich sind, und in einer Ebene liegen.

Wäre

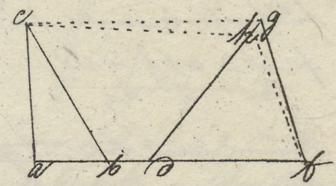
Wäre cd nicht $\parallel ab$, so sey $cf \parallel ab$, folglich (II 26) $\triangle abc = abf$, also $\triangle abf = abd$, was unmöglich ist. Also ist $cd \parallel ab$.



29.

Dreiecke auf gleichen Grundlinien und von gleicher Höhe sind an Inhalt gleich.

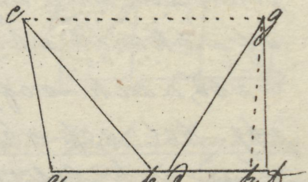
Es wird angenommen, daß $ab = df$, und daß cg eine gerade der af parallele Linie sey. Man ziehe $bh \parallel ac$, $dk \parallel fg$, so ist (II.14) $\triangle abc = \frac{1}{2} abhc$, $\triangle dfg = \frac{1}{2} dfgk$, und (II.23) $abhc = dfgk$, also $\triangle abc = dfg$.



30.

Dreiecke auf gleichen Grundlinien und von gleichem Inhalt haben gleiche Höhe.

Es wird angenommen, daß $ab = df$ sey, daß die $\triangle abc$, dfg, an Inhalt gleich sind und in einer Ebene liegen. Wäre cg nicht $\parallel af$, so sey $ch \parallel af$, dann ist (II.29) $\triangle abc = dfh$; aber auch $\triangle abc = dfg$, also $\triangle dfh = dfg$, was unmöglich ist. Also ist $cg \parallel af$.



31.

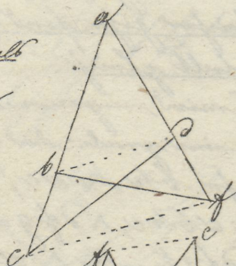
Dreiecke von gleicher Höhe und gleichem Inhalt haben gleiche Grundlinien

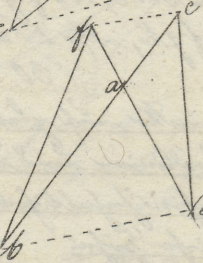
Es wird angenommen daß cg eine gerade Linie der af parallele Linie sey, und

daß

daß an Inhalt △ abc = dfg sey. Wenn ab nicht = df, so sey ab = dh, und gh gezogen, dann ist (II 29) △ abc = dhg. Aber auch △ abc = dfg, also △ dhg = dfg, was unmöglich ist. Also ist df = ab.

32.

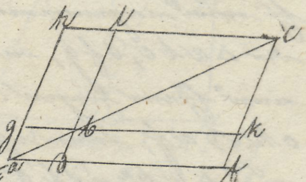




<u>Wenn die Seiten eines Winkels durch Parallellinien geschnitten werden, so sind die wechselweisen Dreiecke an Inhalt gleich.</u>

Es sey bd $\parallel$ cf, so ist (II 26) △ bdf = bdc. Addirt oder subtrahirt man das △ abd, so ist △ abf = adc.

33.

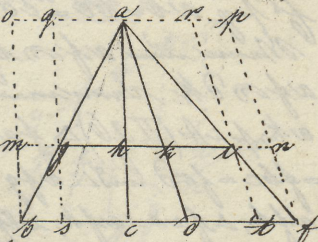


<u>Wenn man drei in gerader Linie liegenden Punkten drei Paare von Parallellinien in einer Ebene gezogen werden, so sind die an diesen Punkten liegenden Parallelogramme an Inhalt gleich.</u>

Die Punkte a, b, c, liegen in gerader Linie, und af $\parallel$ bk $\parallel$ ch; ah $\parallel$ bl $\parallel$ cf, also (II. 14) △ abg = abd, △ ach = acf, △ bcl = bck, also ach − abg − bcl = acf − abd − bck, d. h. blgh = bkfd. Ferner ach − bcl + abd = acf − bck + abg, d. h. adlh = agkf. Ferner ach − abg + bck = acf − abd + bcl d. h. ckgh = cldf.

34.

34.

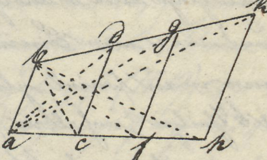


Parallellinien schneiden in Dreiecken von gleichen Grundlinien und Höhen gleiche Stücke ab.

d.h. wenn $bc = df$, und $gl \parallel bf$, so ist auch $gh = kl$.

Denn wenn man über bc, df, die Parallelogramme vollendet, so ist (II. 33) $aomh = aqsc$, $apnk = artd$. Aber (II. 23) $aomh = apnk$, also $aqsc = artd$, also (II. 25) $sc = dt$. Aber (II. 16) $sc = gh$, $dt = kl$, also $gh = kl$.

35.

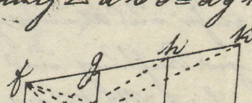


Parallellinien schneiden auf beliebigen Transversallinien gleiche Stücke ab.

d.h. wenn die Parallellinien ab, cd, fg, hk von den Transversallinien ak, bk, geschnitten werden, und $ac = fh$ ist, so ist auch $bd = gk$.

Denn wenn man ad, ag, ak, und bc, bf, bh, zieht, so ist (II. 26) $\triangle bac = abd$, $\triangle baf = abg$, $\triangle bah = abk$, also $\triangle bfh = agk$. Aber $ac = fh$, also (II. 29) $\triangle bac = bfh$, also auch $\triangle abd = agk$, also (II. 31) $bd = gk$.

36.

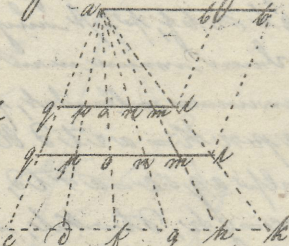


Wenn gerade Linien welche in einer Ebene liegen, in gleiche Theile getheilt werden, und zwei Verbindungslinien der Theilpunkte parallel sind, so sind auch die übrigen Verbindungslinien der Theilpunkte parallel.

es sey $ab = bc = cd$ und $fg = gh = hk$.

Wenn nun $af \parallel bg$, so ist auch $af \parallel ch$, und $af \parallel dk$. Denn man ziehe fb, fc, fd und ag, ah, ak, so ist (II. 26) $\triangle\, fab = afg$. Aber (II. 29) $\triangle\, fab = fbc = fcd$, und $\triangle\, afg = agh = ahk$, also $\triangle\, fac = afh$, $\triangle\, fad = afk$, also (II. 28) $af \parallel ch$ und $af \parallel dk$.

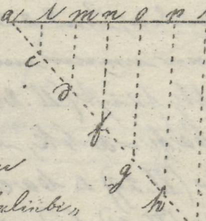
37.



Eine gerade Linie durch Diagonallinien in gleiche Theile zu theilen.

Die zu theilende Linie sey ab. Man ziehe eine beliebige Linie ac, und aus c eine Linie parallel ab, auf dieser nehme man soviel gleiche Stücke cd, df, fg u. s. w. als ab Theile erhalten soll. Den letzten Punkt k verbinde man mit a, ziehe $bl \parallel ac$ an ak, und $lq \parallel kc$, so ist (II. 16) $lq = ab$. Da $cd = df = fg$ u. s. w., so ist (II. 34) $qp = po = on$ u. s. w.

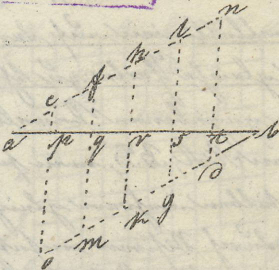
38.



Eine gerade Linie durch Parallellinien in gleiche Theile zu theilen.

Die zu theilende Linie sey ab. Man ziehe aus a eine gerade Linie in beliebiger Richtung und nehme darauf soviel gleiche Stücke ac, cd, df u. s. w. als ab Theile erhalten soll; den letzten Punkt k verbinde man mit b, ziehe mit kb Parallellinien durch die Theilpunkte an ak, so theilen diese Parallellinien auch ab in gleiche Theile; denn da $ac = cd = df$ u. s. w. und $cl \parallel dm \parallel fn$ u. s. w. so ist (II. 35) $al = lm = mn$ u. s. w.

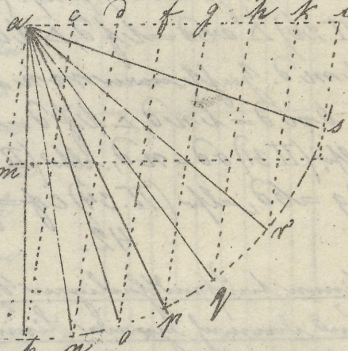
39.



Eine gerade Linie durch zwei Parallellinien in gleiche Theile zu theilen.

Die zu theilende Linie sey a b. Man ziehe aus a, b, in beliebiger Richtung zwey Parallellinien a c, b d, und nehme auf denselben soviel gleiche Stücke als a b Theile erhalten soll weniger eins. Wenn man nun den ersten Punkt c mit dem letzten o, den zweiten f mit dem zweitletzten m, u. s. w. verbindet, so theilen diese Linien die a b auf die verlangte Art. Denn da cf ⌢= om, fk ⌢= mk, u. s. w. so ist (II. 19) co ⌢ fm ⌢ kk u. s. w., also (II. 35) ap = pq = qr u. s. w.

40.

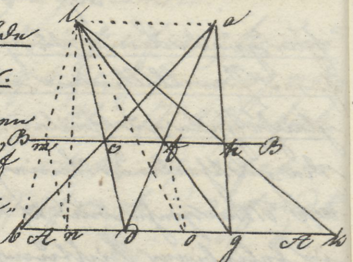


Eine gerade Linie durch Parallellinien in eine unbestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Die zu theilende Linie sey a b. Man ziehe aus a eine beliebige gerade Linie a l, nehme auf derselben eine beliebige Anzahl gleicher Stücke a c, c d, d f, u. s. w. ziehe durch die Theilpunkte nach einer beliebigen Richtung a m Parallellinien beschreibe aus a mit dem Halbmesser a b einen Kreisbogen, so wird der Halbmesser a n = a b durch c b (II. 35) in 2 gleiche Theile, a o = a b durch c b, d n, in 3 gleiche Theile, a p = a b durch c b, d n, f o in 4 gleiche Theile, u. s. w. getheilt.

41

Parallellinien auf dem Felde in gleiche Theile zu theilen.



Die gegebenen Parallellinien seyen AA, BB, man soll auf denselben mehrere gleiche Stücke durch Visiren absetzen.

Man wähle außerhalb der Parallellinien in ihrer Ebene einen Punkt a, und ziehe a l ∥ A ∥ B, von beliebiger Länge. Man verbinde a b, welche die B in c schneidet, l c, welche die A in d schneidet, a d welche die B in f schneidet, l f welche die A in g schneidet, a g welche die B in k schneidet, l k welche die A in h schneidet u. s. w. So ist b d = d g = g h u. s. w. und c f = f k u. s. w. Denn wenn l b die B in m schneidet, so ist (II. 32) △ a c d = l c b. Aber (II. 26) △ a c d = l f d, △ l c b = l m d, also △ l f d = l m d. Zieht man m n ∥ l d, f o ∥ l d, so ist (II. 26) △ l m d = l n d, △ l f d = l o d, also ist △ l o d = l n d, also (II 31) o d = n d, also (II. 16) c f = c m, also (II. 34) d g = b d, also (II. 34) c f = f k u. s. w.

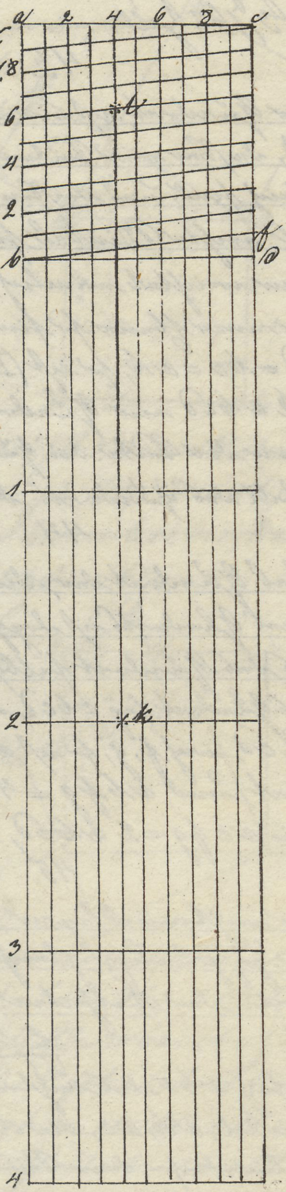
42.

Einen tausendtheiligen Maaßstab zu verfertigen, und daraus gerade Linien aufzunehmen.

Die Einheit des Längenmaaßes ist der russisch=englische Fuß von 12 Zoll. Dieser Fuß wird in 10 gleiche Theile getheilt, welche man neben einander aufträgt. Das erste Zehntel a b wird wieder in 10 gleiche Theile getheilt, jeder Theil ist also $\frac{1}{100}$ Fuß. Im Anfangspunkt a errichtet man auf a b eine senkrechte

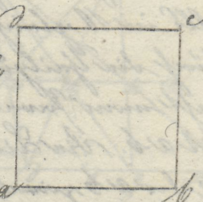
senkrechte

senkrechte Linie ac von beli-
biger Länge welche man eben-
falls in 10 gleiche Theile theilt.
Durch die Theilpunkte von ac
zieht man Parallellinien
mit ab. Die Linie cd wel-
che der ab parallel und gleich
ist wird in 10 gleiche Thei-
le getheilt, auch werden
parallele Transversalli-
nien von b nach dem
1ten Theilpunkt von
cd, von dem 1 Theil-
punkt von ab nach dem
2ten Theilpunkt von
cd u.s.w. gezogen.
Die erste Transversallinie
bf bildet mit bd ein △
bdf in welchem die durch die
Parallellinien abgeschnittenen
Stücke respective $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ u.
s.w. von df, oder $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$ von
ab, oder $\frac{1}{1000}$, $\frac{2}{1000}$, $\frac{3}{1000}$ des gan-
zen Fußes sind. Faßt nun
die zu messende Linie auf
einer der Parallellinien z.
B. von k bis l, so giebt die
Bezifferung von b nach k
die Zahl 2, von b nach a
die Zahl 6, von a nach c
die



die Zahl 4, zusammen also $\frac{264}{1000}$ oder 0,264 Fuß d. h. 3,168 Zoll.

43.

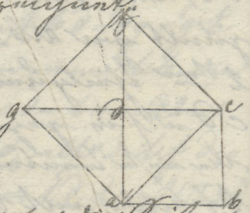


Ein Quadrat ist ein ebenes Viereck, dessen vier Seiten einander gleich sind, und dessen vier Winkel rechte Winkel sind.

Man errichtet nämlich ad, bc senkrecht auf ab, in einer Ebene so sind (II. 4) $ad \parallel bc$. Man macht $ad = bc = ab$, so ist (II. 16) $cd \parallel= ab$, also das Viereck $abcd$ ein Quadrat.

Wenn die Seite des Quadrats ab ist, so wird der Inhalt des Quadrats durch ab^2 bezeichnet.

44.



Das Quadrat der Diagonallinie eines Quadrats ist doppelt so groß als das Quadrat selbst.

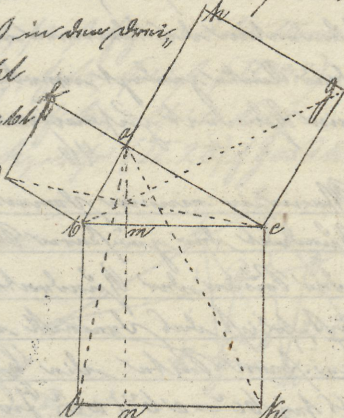
Das Quadrat sey $abcd$, man verlängere die Seiten ad, cd, nach f, g, so ist $acfg$ ebenfalls ein Quadrat, und $acfg = 4.\Delta\, acd$, $abcd = 2\,\Delta\, acd$, also $acfg = 2\, abcd$, oder $ac^2 = 2ab^2$

45.

Im rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der Katheten.

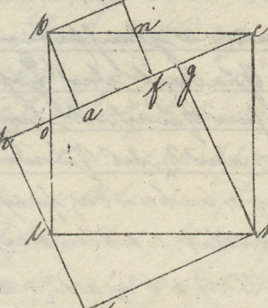
Erster Beweis

Es sey abc das rechtwinklige Dreieck, a der rechte Winkel, ab, ac, die Katheten, bc die Hypotenuse. Neben diese drei Seiten seyen die Quadrate $abdf$, $acgh$, $bckl$, beschrieben. Man ziehe die Diagonallinien ren ak, al, bg, cd, und die gerade Linie amn senkrecht auf bc und kl. Alsdann ist in den Dreiecken abl, dbc, der $\angle abl = R + abc$, der $\angle dbc = R + abc$; also $\angle abl = dbc$; auch $ab = db$, $bl = bc$, also (I.1) $\triangle abl = dbc$. Aber (II.27) $\triangle abl = \frac{1}{2} bmnl$, $\triangle dbc = \frac{1}{2} abdf$, also $bmnl = abdf$. In den $\triangle ack$, gcb, ist $\angle ack = R + acb$, $\angle gcb = R + acb$, also $\angle ack = gcb$; auch $ac = gc$, $ck = bc$; also (I.1) $\triangle ack = gcb$. Aber (II.27) $\triangle ack = \frac{1}{2} cmnk$, $\triangle gcb = \frac{1}{2} acgh$, also $cmnk = acgh$. Also $bmnl + cmnk = abdf + acgh$. Aber $bmnl + cmnk = bckl$, also $bckl = abdf + acgh$, oder $bc^2 = ab^2 + ac^2$.



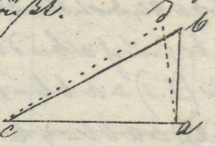
Zweiter Beweis.

Man beschreibe über ab, bc, die Quadrate $abdf$, $bckl$, fälle kg, hl, bn senkrecht auf ca; km senkrecht auf kg, so ist (II.10), $\angle bca = gkc = lkm$, also (I.2.23) $\triangle abc = gck = mlk$, also $ca = kg = km$, also $kghm = ac^2$. Ferner (II.10) $\angle dbn = abo$, also (I.2.23) $\triangle dbn = abo$, also $bn = bo$, also $cn = lo$, also (I.2.23) $\triangle cnf = loh$. Aber $bckl = abo + abnf + cnf + gck + kgol$. Aber $abo + abnf = dbn + abnf = abdf$, und $cnf + gck + kgol = loh + lkm + kgol$. Also $bckl = abdf + kghm$, oder $bc^2 = ab^2 + ac^2$.



Hieraus ersieht man wie ein Quadrat in fünf Stücke zerlegt werden kann, aus denen sich zwei Quadrate zu bilden braucht; und wie umgekehrt bei zwei Quadraten das kleinere in zwei, das größere in drei Stücke zerlegt werden kann, aus denen sich ein Quadrat zusammensetzen läßt.

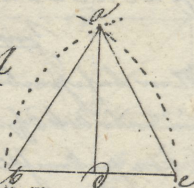
46.



Wenn in einem Dreiecke das Quadrat der größeren Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden kleineren Seiten ist; so ist das Dreieck rechtwinklig, und die größere Seite die Hypotenuse.

Es sey $bc^2 = ab^2 + ac^2$. In der Ebene des $\triangle abc$ errichte man auf ac die Senkrechte $ad = ab$, so ist (II.45) $cd^2 = ad^2 + ac^2$, also $cd^2 = ab^2 + ac^2$, also $cd^2 = bc^2$, also $cd = bc$. Also (I.5) $\triangle adc = abc$, also $\angle dac = bac$, aber $\angle dac = R$, also auch $\angle bac = R$.

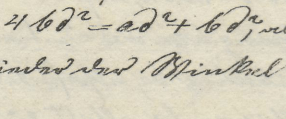
47



In einem gleichseitigen Dreiecke ist das Quadrat der Höhe gleich dem 3fachen Quadrat der halben Grundlinie, oder $\frac{3}{4}$ des Quadrats der Grundlinie.

Es sey $ab = bc = ca$, so ist, wenn man die Senkrechte ad fällt, $\triangle adb = acd$, also $bd = cd$, also $ab = 2bd$. Aber (II 45) $ab^2 = ad^2 + bd^2$, also $4bd^2 = ad^2 + bd^2$, also $ad^2 = 3bd^2 = \frac{3}{4} bc^2$. Auch ist jeder der Winkel $a = b = c = \frac{2}{3} R$ (II.7)

48.



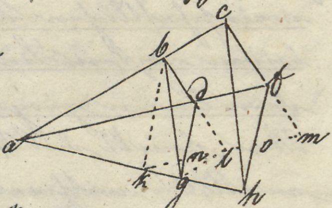
Wenn von den Seiten eines Winkels zwei Paare von Parallellinien ausgehen, so sind die Verbindungslinien der wechselweisigen Durchschnittspunkte

ebenfalls

ebenfalls parallel.

Es sey $bf \parallel ck$, $bd \parallel cg$, so ist $fg \parallel dk$. Man verbinde nämlich bc, dg, fk, so ist (II. 32) $\triangle\, adg = abc$, $\triangle\, abc = afk$, also $\triangle\, adg = afk$, also $\triangle\, fgd = fgk$, also (II. 28) $fg \parallel dk$.

179.



Wenn drei in einer Ebene liegende gerade Linien in einem Punkte zusammentreffen, und von der ersten zur zweiten ein Paar Parallellinien, von der zweiten zur dritten ein Paar Parallellinien ausgehen, so sind die Verbindungslinien der gleichnamigen Durchschnittspunkte der ersten und dritten ebenfalls parallel.

Es sey $bd \parallel cf$, $dg \parallel fk$, so ist $bg \parallel ck$. Denn da die Punkte b, g, in den Linien bd, ag, liegen, so ist, wenn man $bk \parallel gd$ an ag, und $gl \parallel ba$ an bd zieht, auch (II. 48) $kl \parallel adf$. Wenn also kl, cf, einander in m schneiden, so ist (II. 16) $lm = df$. Wenn kl die Parallellinien dg, fk, in n, o, schneidet, so ist (II. 16) $df = no$. Also ist $lm = no$. Da $gl \parallel bc$, so ist (II. 26) $\triangle\, cbg = cbl$. Da $cm \parallel bl$, so ist (II. 26) $\triangle\, cbl = mbl$. Also ist $\triangle\, cbg = mbl$. Da $lm = no$, so ist (II. 29) $\triangle\, mbl = nbo$. Also ist $\triangle\, cbg = nbo$. Da $bk \parallel ho$, so ist (II. 26) $\triangle\, bkh = bko$. Da $bk \parallel gn$, so ist (II. 26) $\triangle\, bkg = bkn$. Also ist $\triangle\, bgh = nbo$. Also ist $\triangle\, cbg = bgh$. Also ist (II. 28) $bg \parallel ch$.

50.

<u>Wenn zwei gerade Linien von ihrem gemeinschaftlichen Maaße auch dieselben ganzen Zahlen ausgemessen werden, wie zwei andere gerade Linien von ihrem gemeinschaftlichen Maaße, so sind die beiden ersten Linien den beiden andern Linien proportionirt.</u>

Man drückt das Verhältniß zweier Linien M, N, arithmetisch aus, indem man sie neben einander setzt, nämlich $M : N$. Schreibt man die erste über die zweite, indem man setzt $\frac{M}{N} = A$, so bedeutet A eine Zahl, und heißt der <u>Werth</u> oder <u>Exponent</u> des Verhältnisses $M : N$. Zwei Verhältnisse von gleichem Werthe geben eine Proportion. Es seyen nämlich bei vier Linien M, N, P, Q, $\frac{M}{N} = A$, und $\frac{P}{Q} = A$, so hat man die Proportion $M : N = P : Q$ oder $\frac{M}{N} = \frac{P}{Q}$.

Auch können zwei Dreiecke oder Parallelogramme von ihrem gemeinschaftlichen Maaße, welches denn ebenfalls ein Dreieck oder Parallelogramm seyn muß, mit denselben ganzen Zahlen ausgemessen werden, wie zwei gerade Linien von ihrem gemeinschaftlichen Maaße. Dann sind jene Dreiecke oder Parallelogramme diesen Linien proportionirt.

Wenn

Wenn zwei gerade Linien von ihrem gemeinschaftlichen Maaße nach ganzen Zahlen ausgemessen werden; d. h. wenn das gemeinschaftliche Maaß in jeder Linie eine ganze Anzahl Male enthalten ist, so haben diese geraden Linien ein *rationales Verhältniß* zu einander, und zwar das Verhältniß jener ganzen Zahlen.

Es giebt aber Fälle wo zwei gerade Linien von keinem gemeinschaftlichen Maaße jemals in ganzen Zahlen vollkommen genau ausgemessen werden können. Dann haben sie ein *irrationales* oder *incommensurables Verhältniß* zu einander.

z. B. die Seite und Diagonallinie eines Quadrats stehen zu einander in dem irrationalen Verhältniß von $1 : \sqrt{2}$ (II. 44). Die Höhe und Grundlinie eines gleichseitigen Dreiecks stehen zu einander in dem irrationalen Verhältniß von $\sqrt{3} : 2$ (II. 47).

Jedoch lassen sich immer ganze Zahlen finden, deren Verhältniß dem irrationalen Verhältniß der Linien je weiter desto genauer entspricht (V. 3.).

z. B. die genäherten Verhältnisse für die Seite und Diagonallinie eines Quadrats sind $1 : 1$, $2 : 3$, $5 : 7$, $12 : 17$, $29 : 41$; $70 : 99$; $169 : 239$; $408 : 577$; u. s. w. die genäherten Verhältnisse für die

Höhe

Höhe und Grundlinie eines gleichseitigen Dreiecks sind 1 : 1 ; 6 : 7 ; 13 : 15 ; 84 : 97 ; 181 : 209 ; 1170 : 1351 ; u. s. w.

51.

<u>Wenn zwei rationale Linienverhältnisse einander gleich sind, so ist das Rechteck oder Produkt des ersten und vierten gleich dem Rechteck oder Produkt des zweiten und dritten.</u>

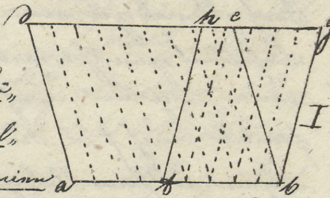
Die Linienstücke M, N, P, Q, und es sey $\frac{M}{N} = A$, $\frac{P}{Q} = A$, so ist $\frac{M}{N} = \frac{P}{Q}$ oder $M : N = P : Q$. Man hat aber auch $M = A . N$, $P = A . Q$ also $A . Q . M = A . N . P$, also $Q . M = N . P$.

Wenn zwei gerade Linien dasselbe <u>irrationale Verhältniß</u> (II. 50) zu einander haben, wie zwei andere gerade Linien, so sagt man ebenfalls, daß die beiden ersten den beiden andern proportionirt sind. Um aber zu beweisen, daß zwei irrationale Linienverhältnisse einander in aller Strenge gleich sind, muß man zeigen, daß ihnen dieselbe Eigenschaft wie den rationalen Linienverhältnissen zukommt, nämlich daß das Rechteck der ersten und vierten dem Rechteck der zweiten und dritten an Inhalt gleich sey, wozu der Satz II. 49 dient.

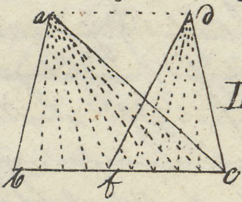
52.

52.

<u>Dreiecke oder Parallelo-grammen von gleicher Höhe verhalten sich dem Inhalte nach wie ihre Grundlinien</u>



I



II

Bei den Parallelogrammen abcd, fbgh, so wie bei den Dreiecken abc, dfc, sind die Grundlinien in gerader Linie, die Höhen gleich. Wenn die Grundlinien ein rationales Verhältniß zu einander haben, so werden sie (II. 50) von ihrem gemeinschaftlichen Maaß nach ganzen Zahlen gemessen, d. h. das Maaß wird eine ganze Anzahl Male in ihnen enthalten seyn. Durch die Theilpunkte ziehe man Parallellinien mit den Seiten der Parallelogrammen, oder gerade Linien nach den Spitzen der Dreiecke, so sind (II. 23. 29) die einzelnen kleinen Parallelogrammen oder Dreiecke einander an Inhalte gleich, also das gemeinschaftliche Maaß dieser Parallelogrammen oder Dreiecke. Also werden diese Parallelogrammen oder Dreiecke von ihrem gemeinschaftlichen Maaß nach denselben ganzen Zahlen gemessen, wie die Grundlinien von ihrem gemeinschaftlichen Maaße. Also

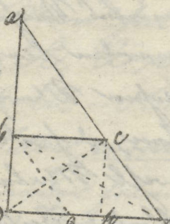
I. $abcd : fbgh = ab : fb$ oder $\frac{abcd}{fbgh} = \frac{ab}{fb}$

II $\triangle\, abc : dfc = bc : fc$ oder $\frac{abc}{dfc} = \frac{bc}{fc}$

Wenn die Grundlinien ein irrationales Verhältniß

Verhältniß zu einander haben, so werden dieselben genäherten Verhältnisse, welche man nach und nach für die Grundlinien findet, auch für die Flächen der auf ihnen ruhenden Parallelogramme oder Dreiecke von gleicher Höhe gültig seyn. Alsdann haben diese Parallelogramme oder Dreiecke von gleicher Höhe dasselbe irrationale Verhältniß zu einander, wie ihre Grundlinien, und sind also ebenfalls den Grundlinien proportionirt (II. 51).

53.



<u>Wenn die Seiten eines Winkels von Parallellinien geschnitten werden, so sind die gleichnamigen Abschnitte und Abstände proportionirt, und die Parallellinien verhalten sich wie die Abstände von den Winkelspitzen.</u>

Es sey $bc \parallel df$, man ziehe die Diagonallinien cd, bf, so ist (II. 52) $\frac{cab}{cbd} = \frac{ab}{bd}$, $\frac{cab}{bcf} = \frac{ac}{cf}$ aber (II. 26) $\triangle cbd = bcf$, also $\frac{cab}{cbd} = \frac{cab}{bcf}$, also $\frac{ab}{bd} = \frac{ac}{cf}$ oder $ab : bd = ac : cf$.

Ferner (II. 52) $\frac{cad}{cbd} = \frac{ad}{bd}$, $\frac{baf}{bcf} = \frac{af}{cf}$. Aber (II. 26) $\triangle cbd = bcf$, und (II. 32) $\triangle cad = baf$, also $\frac{cad}{cbd} = \frac{baf}{bcf}$, also $\frac{ad}{bd} = \frac{af}{cf}$, oder $ad : bd = af : cf$.

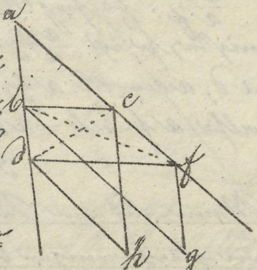
Ferner (II 52) $\frac{cab}{cad} = \frac{ab}{ad}$, $\frac{cab}{baf} = \frac{ac}{af}$, aber (II. 32) $\triangle cad = baf$, also $\frac{cab}{cad} = \frac{cab}{baf}$, also $\frac{ab}{ad} = \frac{ac}{af}$ oder $ab : ad = ac : af$.

Man ziehe $bg \parallel af$, so ist aus denselben Grün-

den

Grunde in dem $\angle d$, welcher durch die Parallel-linien bg, af, geschnitten wird, $\frac{ab}{ad} = \frac{fg}{df}$, aber $fg = bc$, also $\frac{ab}{ad} = \frac{bc}{df}$ oder $ab : ad = bc : df$. Man ziehe $ch \parallel ad$, so ist aus dem-selben Grunde in dem $\angle f$, welcher durch die Parallellinien ch, ad, geschnitten wird, $\frac{ac}{af} = \frac{dh}{df}$. Aber $dh = bc$, also $\frac{ac}{af} = \frac{bc}{df}$ oder $ac : af = bc : df$.

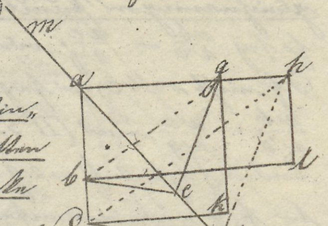
54.



<u>Wenn die Seiten eines Winkels von Parallellinien geschnitten werden, so sind die Parallelogramme der wechselweisen Seiten einander am Inhalt gleich.</u>

Es sey $bc \parallel df$, so ist (II. 32) $\triangle abf = acd$. Zieht man also $fg \parallel ab$, $bg \parallel af$, $ch \parallel ad$, $dh \parallel ac$, so ist (II. 14) $abgf = 2.\triangle abf$, $achd = 2\triangle acd$, also $abgf = achd$.

55.



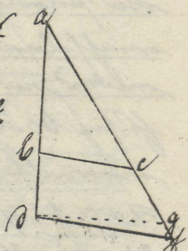
<u>Wenn die Seiten eines Winkels von Parallellinien geschnitten werden, so sind die Rechtecke der wechselweisen Seiten einander am Inhalt gleich.</u>

Es sey $bc \parallel df$. Man errichte in der Ebene von adf die ak senkrecht auf ad, und mache $ag = ac$, $ak = af$. Man verlängere ca nach m, so ist (II. 9) $\angle gam = 2.acg$, $\angle gam = 2acf$, also ist $\angle acg = afk$, also (II. 2) $cg \parallel fk$. Aber auch $bc \parallel df$, also (II. 49) $bg \sim dk$, also (II 54) $abhk = adkg$. der Inhalt eines Rechtecks wird geschrieben, indem man die beiden anliegenden Seiten neben einander setzt, und durch das Multiplicationszeichen verbindet, also statt $abhk = adkg$ setzt man $ab.ah = ad.ag$, oder $ab.af = ad.ae$.

Arithmetischer Beweis. da $bc \sim df$, so ist (II. 53) $\frac{ab}{ad} = \frac{ac}{af}$; es sey A der Werth dieses Verhältnisses, so ist $\frac{ab}{ad} = A$, $\frac{ac}{af} = A$, also $ab = A.ad$, $ac = A.af$, also $A.af.ab = A.ad.ac$, also $af.ab = ad.ac$.

56.

Wenn auf den Seiten eines Winkels die gleichnamigen Abschnitte proportionirt, oder die Rechtecke der wechselnamigen Abschnitte gleich sind, so sind die Verbindungslinien der gleichnamigen Punkte parallel.



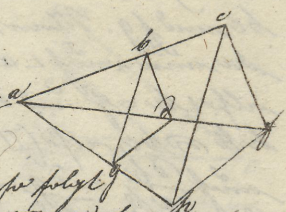
Es sey $\frac{ab}{ad} = \frac{ac}{af}$ oder $ab.af = ac.ad$. Wäre df nicht $\sim bc$, so sey $dg \sim bc$, dann ist (II. 53) $\frac{ab}{ad} = \frac{ac}{ag}$ und (II 55) $ab.ag = ac.ad$. Aus beiden folgt $af = ag$. Also müssen die Punkte f, g, zusammenfallen, und da $dg \sim bc$, so ist auch $df \sim bc$.

57.

Wenn zwei Linienverhältnisse einem dritten Linienverhältniß gleich sind, so sind sie einander selbst gleich.

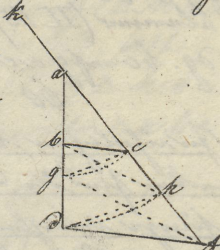
Man trage die im Verhältniß stehenden Linien

auf



auch drei Linien die in einer Ebene von einem Punkt a aus-gehen: Es sey $\frac{ab}{ac} = \frac{ad}{af}$ und $\frac{ad}{af} = \frac{ag}{ak}$ oder es sey $ab.af = ac.ad$ und $ad.ak = af.ag$ so folgt (II.56) $bd \parallel cf$, $dg \parallel fk$, also (II 49) $bg \parallel ck$, also (II.53) $\frac{ab}{ac} = \frac{ag}{ak}$, oder (II.55) $ab.ak = ac.ag$

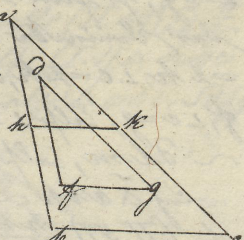
58.



Wenn vier Linien in Proportion stehen, so bleibt die Proportion richtig, wenn man die in-neren Glieder vertauscht.

Es sey $\frac{ab}{ad} = \frac{ac}{af}$, oder $ab.af = ac.ad$, so ist (II.56) $bc \parallel df$. Man mache $ag = ac$, $ak = ad$, und verlängere ca nach k, so ist (II.9) $\angle dak = 2.acg$, $\angle dak = 2.akd$, also $\angle acg = akd$, also (II.2) $cg \parallel dk$. Aber auch $cb \parallel df$, also (II.48) $bk \parallel fg$, also (II.53) $\frac{ab}{ag} = \frac{ak}{af}$, oder $\frac{ab}{ac} = \frac{ad}{af}$

59.



In ähnlichen Dreiecken sind die gleichnamigen Seiten pro-portionirt.

Aehnliche Dreiecke sind solche, deren Winkel gegenseitig gleich sind. Wenn in den $\triangle abc$, dfg, $\angle a = d$, $\angle b = f$, $\angle c = g$, ist, so ist $\triangle abc \sim dfg$. Gleich-namige Seiten sind diejenigen, welche gleichen Winkeln gegenüber liegen. In den ähnlichen Dreiecken abc, dfg, sind also die gleichnamigen Seiten ab und df; ac und dg;

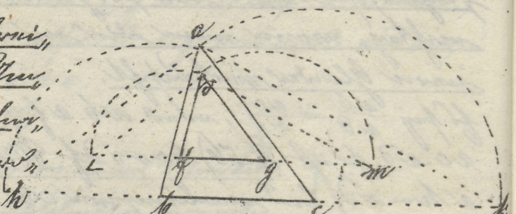
bc

bc und fg. Man mache $ah = df$, $ak = dg$; da nun auch $\angle a = d$, so ist (I.1) $\Delta\, ahk = dfg$, also $\angle h = f$ und $hk = fg$. Aber $\angle f = b$, also (II.2) $hk \parallel bc$, also (II.53) $\frac{ah}{ab} = \frac{ak}{ac} = \frac{hk}{bc}$, also auch $\frac{df}{ab} = \frac{dg}{ac} = \frac{fg}{bc}$.

Hieraus folgt auch (II.58) $\frac{df}{dg} = \frac{ab}{ac}$, $\frac{df}{fg} = \frac{ab}{bc}$, $\frac{dg}{fg} = \frac{ac}{bc}$.

Ferner (II.55) $df.ac = dg.ab$, $df.bc = fg.ab$, $dg.bc = fg.ac$.

60.



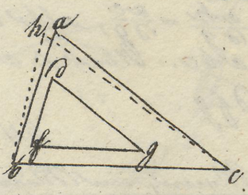
<u>In ähnlichen Dreiecken sind die Umfänge den gleichnamigen Seiten proportionirt.</u>

Es sey $\Delta\, abc \sim dfg$. Auf der Verlängerung von bc mache man $bh = ab$, $ck = ac$, auf der Verlängerung von fg mache man $fl = df$, $gm = dg$, so sind hk, lm, die Umfänge der Dreiecke abc, dfg. Nach II.9 ist $\angle b = 2h$, $\angle c = 2k$, $\angle f = 2l$, $\angle g = 2m$, aber $\angle b = f$, $\angle c = g$, also $\angle h = l$, $\angle k = m$, also $\Delta\, ahk \sim dlm$, also (II.59) $\frac{hk}{lm} = \frac{ah}{dl}$. Aber auch $\Delta\, abh \sim dfl$, also (II.59) $\frac{ah}{dl} = \frac{ab}{df}$. Also (II.57) $\frac{hk}{lm} = \frac{ab}{df} = \frac{bc}{fg} = \frac{ac}{dg}$.

<u>Arithmetischer Beweis.</u> Das Verhältniss der gleichnamigen Seiten sey durch die Zahl A ausgedrückt (II.50), so ist $ab = A.df$, $bc = A.fg$, $ac = A.dg$, also $ab + bc + ac = A(df + fg + dg)$ also $\frac{ab+bc+ac}{df+fg+dg} = A = \frac{ab}{df} = \frac{bc}{fg} = \frac{ac}{dg}$.

61.

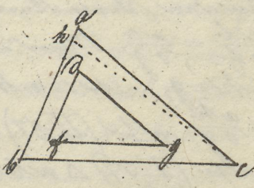
61.



Wenn die gleichnamigen Seiten proportionirt sind, so sind die Dreiecke einander ähnlich.

In den Dreiecken abc, dfg, sey $\frac{ab}{df} = \frac{bc}{fg} = \frac{ac}{dg}$. An bc setze man (I. 8) ∠ hbc = f, ∠ hcb = g, so ist auch (II. 7), ∠ bhc = d, also △ hbc ∼ dfg, also (II. 59) $\frac{hb}{df} = \frac{bc}{fg} = \frac{hc}{dg}$. Also (II 57) hb = ab, hc = ac, also (I. 5) △ hbc = abc. Aber △ hbc ∼ dfg, also △ abc ∼ dfg.

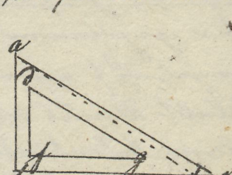
62.



Wenn ein Winkel gegenseitig gleich, und die einschließenden Seiten proportionirt sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

In den Dreiecken abc, dfg, sey ∠ b = f, und $\frac{ab}{df} = \frac{bc}{fg}$. Man mache ∠ bch = g, so ist ∠ h = d also △ hbc ∼ dfg, also (II. 59) $\frac{hb}{df} = \frac{bc}{fg}$, also (II. 57) hb = ab; also (I. 1) △ hbc = abc, aber △ hbc ∼ dfg, also △ abc ∼ dfg.

63.

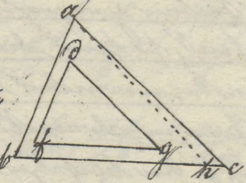


Rechtwinklige Dreiecke, in denen die Hypotenuse und eine Kathete gegenseitig proportionirt sind, sind einander ähnlich.

In den △ abc, dfg, sey b = f = R und $\frac{ab}{df} = \frac{ac}{dg}$. Man mache den ∠ bah = d, so ist △ abh ∼ dfg also (II. 59) $\frac{ab}{df} = \frac{ah}{dg}$, also (II. 57)

$\frac{ah}{dg}$.

$\frac{ah}{dg} = \frac{ac}{dg}$, also $ah = ac$, also (I. 36) $\triangle abh = abc$. Aber $\triangle abh \sim dfg$, also $\triangle abc \sim dfg$.



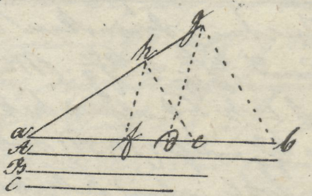
64.

Wenn ein Winkel gegenseitig gleich, die nicht einschließenden Seiten proportioniert, und der andere nicht eingeschlossene Winkel in beiden Dreiecken kleiner oder in beiden größer als ein rechter ist, so sind die Dreiecke ähnlich.

In den Dreiecken abc, dfg, sey $\angle b = f$, und $\frac{ab}{df} = \frac{ac}{dg}$. Man mache $\angle bah = d$, so ist (II 7) $\angle h = g$, also $\triangle abh \sim dfg$, also (II. 59) $\frac{ab}{df} = \frac{ah}{dg}$, also (II 57) $\frac{ah}{dg} = \frac{ac}{dg}$, also $ah = ac$, also (I. 37) $\triangle abh = abc$; aber $\triangle abh \sim dfg$, also $\triangle abc \sim dfg$.

65.

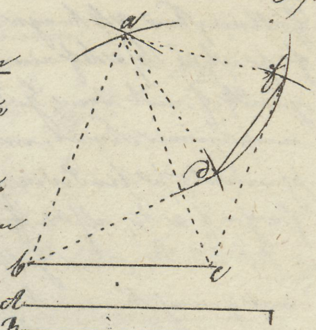
Zu drei geraden Linien die vierte Proportionallinie durch Parallellinien zu finden.



Die gegebenen Linien seyen A. B. C. Man trage auf eine gerade Linie von einem Punkt a aus $ab = A$, $ac = B$, $ad = C$, ziehe in beliebiger Richtung ag, verbinde bg, ziehe $ch \parallel bg$, verbinde dg, ziehe $hf \parallel dg$, so ist (II 53) $ab : ac = ag : ah$, $ag : ah = ad : af$, also (II. 57) $ab : ac = ad : af$, also af die gesuchte vierte Proportionallinie.

66

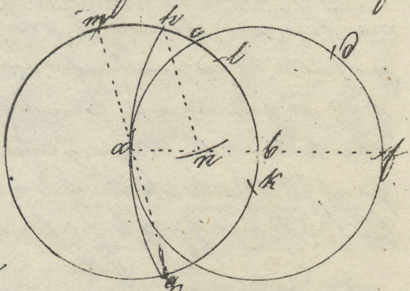
66.



Zu drei geraden Linien die vierte Proportionallinie bloß durch Kreisdurchschnitte zu finden.

Die gegebenen Linien seyen A, B C. Ueber der Grundlinie $bc = B$ beschreibe man (I. 7) ein gleichschenkliges $\Delta\, abc$, so daß $ab = ac = A$.
Aus a als Mittelpunkt beschreibe man mit dem Halbmesser C einen Kreisbogen, wähle darauf einen beliebigen Punkt d, fasse den Abstand bd in den Zirkel, und aus c als Mittelpunkt beschreibe man mit dem Halbmesser bd einen Kreisbogen, welcher jenen Bogen in f schneidet, so ist df die gesuchte vierte Proportionallinie.
Denn da $ab = ac$, $ad = af$, $bd = cf$, so ist (I. 5) $\Delta\, bad = caf$, also $\angle\, bad = caf$, also $\angle\, bac = daf$, also $\Delta\, bac \sim daf$, also (II. 59) $ab : bc = ad : df$ oder $A : B = C : df$.

67.



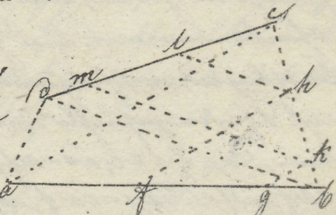
Zwischen zwei Punkten die Mitte bloß durch Kreisdurchschnitte zu finden.

Die gegebenen Punkte seyen a, b. Aus diesen Punkten als Mittelpunkten mit dem Halbmesser ab beschreibe man zwei Kreise, welche einander in c durchschneiden, so ist abc ein gleichseitiges Dreieck, also (II. 47) $\angle\, b = \frac{2}{3} R$. Denselben

Halb

Halbmesser ab trage man von c nach d, von d nach f, so ist (I. 16) abf eine gerade Linie. Aus dem Mittelpunkt f mit dem Halbmesser $fa = 2ab$ beschreibe man einen Kreis, welcher den Kreis a in g, h, schneidet, so sind die gleichschenkligen Dreiecke $fag = fah$, also $\angle fag = fah$, also (II 7) $\angle gah + afh = 2R$. Den Halbmesser ab trage man von g nach k, von k nach l, von l nach m, so ist gam eine gerade Linie, also (I. 14) $\angle gah + mah = 2R$, also $\angle mah = afh$, also $\Delta\, mah \sim afh$, also (II. 59) $\frac{ma}{ah} = \frac{ah}{af}$. Aber $\frac{ah}{af} = \frac{1}{2}$, also $\frac{ma}{ah} = \frac{1}{2}$, oder $ma = \frac{1}{2}\, ah = \frac{1}{2}\, ab$. Man beschreibe also (I. 9) über ah ein $\Delta\, anh = hma$, so ist n die Mitte von ab.

68.



Eine gerade Linie nach denselben Verhältnissen zu theilen, wie eine andere gerade Linie.

Die gegebenen Linien ab, cd liegen in einer Ebene. Eine von ihnen z. B. ab sey in f, g, beliebig getheilt. Man verbinde ac, bc, bd. Man ziehe $fh \parallel gk \parallel ac$, so ist (II. 53) $af : fg : gb = ch : hk : bk$. Man ziehe $hl \parallel km \parallel bd$, so ist (II. 53) $ch : hk : kb = cl : lm : md$. Also (II. 57. 58) $af : fg : gb = cl : lm : md$.

69.

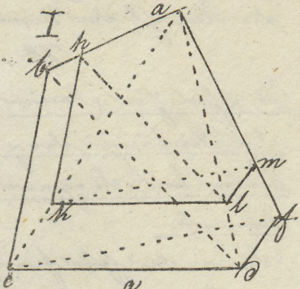
In ähnlichen ebenen Vielecken sind die gleichnamigen Seiten und Diagonallinien proportionirt.

Aehnliche Vielecke sind solche, welche durch

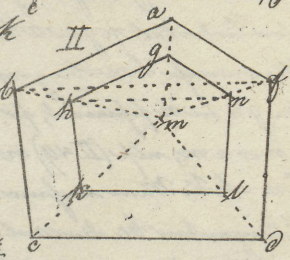
gleich

gleichnamige Diagonallinien in ähnliche Dreiecke getheilt werden. Es sey $abcdf$ das gegebene Vieleck, man ziehe (I), aus einer Ecke a nach den übrigen die Diagonallinien ac, ad. Die der ab gleichnamige Seite ah des zweiten Vielecks setze man auf ab, ziehe $hk \parallel bc$, $kl \parallel cd$, $lm \parallel df$, so ist (II. 49) $hl \parallel bd$, $km \parallel cf$, $hm \parallel bf$, also (II 53) $\frac{ah}{ab} = \frac{hk}{bc} = \frac{kl}{cd} = \frac{lm}{df} = \frac{am}{af} = \frac{ak}{ac} = \frac{al}{ad} = \frac{hl}{bd} = \frac{hm}{bf} = \frac{km}{cf}$

I



II

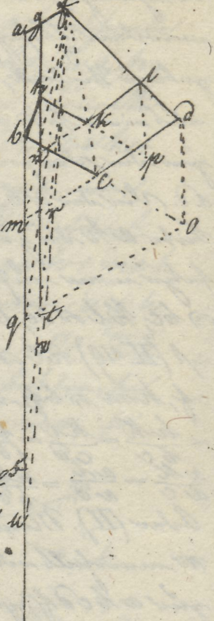


Oder (II). Man wähle einen beliebigen Punkt m innerhalb oder außerhalb in der Ebene der Figur $abcdf$, ziehe aus m nach allen Ecken derselben gerade Linien, ma, mb, mc, md, mf. Die der Linie ma gleichnamige Linie mg des zweiten Vielecks setze man auf ma, ziehe $gh \parallel ab$, $hk \parallel bc$, $kl \parallel cd$, $ln \parallel df$, so ist (II. 49) $hn \parallel bf$, $gk \parallel ac$ u. s. w. Hieraus folgt ebenfalls (II. 53) $\frac{mg}{ma} = \frac{mh}{mb} = \frac{mk}{mc} = \frac{ml}{md} = \frac{mn}{mf} = \frac{hn}{bf} = \frac{gh}{ab} = \frac{gn}{af}$ u. s. w.

Anmerkung. Durch Combination wird bewiesen: wenn die Anzahl der Ecken eines Vielecks $= n$, so ist die Anzahl der Linien, d. h. der Seiten und Diagonallinien zusammen $= \frac{n(n-1)}{1.\,2}$, die Anzahl der Diagonallinien $\frac{n(n-3)}{1.\,2}$, der Dreiecke $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3.}$, der Vierecke $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}$ u. s. w. die Anzahl der Durchschnittspunkte der Seiten und Diagonallinien

linien $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$, oder dreimal so groß, als die Anzahl der Vierecke.

72.



In ähnlichen ebenen Vielecken sind die Umfänge den gleichnamigen Seiten und Diagonallinien proportionirt.

Die in der Figur 5 vorgelegten ähnlichen Vielecke seyen abcdf, ghklf. Man mache bm = bc, ziehe fm, welche die gh in n schneidet, so ist kg ∥ ca, gn ∥ am, also (II.49) nk ∥ mc, also hn = hk. Man nehme auf der verlängerten bc, die co = cd, ziehe fo, welche die verlängerte hk in p schneidet, so folgt ebenso, daß kp = kl. Man mache bq = bo, ziehe fq, welche die verlängerte gh in r schneidet, so folgt ebenso hr = hp. Dieses Verfahren setzt man bis zur letzten Seite der Vielecke fort. Wenn bu der Umfang des Vielecks abcdf ist, und fu gezogen wird, welche die gh in v schneidet, so folgt auf die angezeigte Art, daß gv der Umfang des Vielecks ghklf ist. Also (II.53) $\frac{gv}{bu} = \frac{fg}{fa} = \frac{gh}{ab}$ u.s.w.

Arithmetischer Beweis. Das Verhältniß der gleichnamigen Seiten oder Diagonallinien sey durch die Zahl A ausgedrückt (II.50) so ist ab = A.gh, bc = A.hk, cd = A.kl, df = A.lf, fa = A.fg, also durch Addition ab + bc + cd + df + fa = A.(gh + hk + kl + lf + fg) also $\frac{ab+bc+cd+df+fa}{gh+hk+kl+lf+fg} = A = \frac{ab}{gh} = \frac{bc}{hk}$ u. s. f.