ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Парринг А. К.

МНОГООБРАЗИЯ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ПЛОСКОСТЕЙ АФФИННО-СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА И ИХ ВНУТРЕННИЕ СВЯЗНОСТИ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ТАРТУ 1975

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Парринг Айво Карлович

МНОГООБРАЗИЯ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ПЛОСКОСТЕЙ АФФИННО-СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА И ИХ ВНУТРЕННИЕ СВЯЗНОСТИ

01.01.04 - Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

ТАРТУ 1975

Работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии Тартуского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета.

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук Ю.Г.ЛУМИСТЕ

Официальные оппоненты:
доктор физ.- мат. наук Н.М.ОСТИАНУ
кандидат физ.- мат. наук Я.Х.ЛЫХМУС

Ведущее учреждение:
Калининградский государственный университет

Автореферат разослан "26". IX . . . . . 1975 г.
Защита диссертации состоится 28. X . . . . 1975 г.
в 14.00 час. на заседании Совета математического факультета Тартуского государственного университета
(гор. Тарту, ул. Юликооли I8)

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке ТГУ.

Ученый секретарь ТГУ: И. Маароос (И.Маароос)

В настоящее время имеется довольно много исследований по дифференциальной геометрии многообразий l-плоскостей (см. [1]). Теория 2-мерных многообразий прямых трехмерного евклидова пространства была заложена уже в прошлом столетии работами Монжа, Малюса, Гамильтона и Куммера. Развитие аппарата исследования, применяемого в дифференциальной геометрии, дало советским геометрам возможность начать в 1940-ых годах построение общей теории многообразий плоскостей. Впервые многообразия l-мерных плоскостей евклидова пространства рассматривались в работе [17] В.В.Вагнера. Дальше общую теорию в случае евклидова или эллиптического пространств развивает Б.А.Розенфельд в [13]. Многообразия l-плоскостей в неевклидовых и проективно-симплектических пространствах исследует Р.М.Гейдельман в [2,3]. Ю.Г. Лумисте связывает в [5,6,7] с многообразием l-плоскостей его каноническое расслоение для которого l-плоскости, как точечные многообразия, являются слоями, а само многообразие - базой. В случае евклидова пространства (см. [5]) в этом расслоении индуцируется однозначно определенная линейная связность.

Реферируемая диссертация посвящена изучению a-мерных многообразий симплектических $2m$-плоскостей аффинно-симплектического $2n$-мерного пространства. Поставлена цель - использовать в исследовании методы и результаты теории связностей на расслоениях, как и в [5] в случае евклидова пространства. Различия между аффинно-симплектическим и евклидовым пространствами часто не позволяют переносить конструкции из одной теории в другую. В теории многообразий $2m$-плоскостей аффинно-симплектического пространства возникает ряд новых явлений, о которых будет более подробно сказано ниже.

Аффинно-симплектическим пространством Sp_{2n} называется вещественное аффинное пространство с заданной регулярной кососимметрической билинейной формой, называемой метрической формой. Геометрия такого пространства развита еще сравнительно мало. Особенностью здесь является то обстоятельство, что в этой геометрии "длина" любого вектора равна нулю, в силу чего все конструкции, связанные с длиной вектора в евклидовой геометрии, не переносятся в аффинно-симплектическую геометрию.

В диссертации использованы алгебраические результаты, взятые из работ [15,16] И.М.Яглома (см. также [4,8,9,10,12]). В [15] И.М.Яглом находит канонические виды симметрических и кососимметрических билинейных форм симплектического векторного пространства. В [16] исследуются подпространства симплектического векторного пространства. Существуют подпространства, на которых индуцируемая кососимметрическая метрика частично или полностью вырождается. Подпространства, на которых метрика регулярна, называются <u>симплектическими</u>. Остальные подпространства называются <u>полусимплектическими</u> с некоторым дефектом. Размерность симплектического подпространства всегда четна; следовательно $l = 2m$.

В диссертации исследуются лишь многообразия симплектических плоскостей, потому что метрика пространства Sp_{2n} только в этом случае индуцирует в каноническом расслоении так называемую внутреннюю связность.

Диссертация состоит из введения и трех глав, которые разбиты на восемнадцать параграфов. В первой главе изучаются a-мерные многообразия симплектических $2m$-плоскостей. Во второй главе исследуется строение фокальных поверхностей конгруэнций симплектических $2m$-плоскостей со специальными внутренними связностями. В третьей главе классифицируются конгруэнции симплектических 2-плоскостей 4-мерного аффинно-симплектического пространства по кривизнам, фокальной кривой и группам голономий. Определяется также понятие индикатрисы нормальной кривизны, по типам которой конгруэнции с центральными фокальными кривыми делятся на подклассы.

Перейдем к краткому изложению содержания диссертации.

<u>Первая глава</u> содержит восемь параграфов. В §1 приведены нужные понятия: аффинно-симплектическое пространство Sp_{2n}, симплектическая группа Sp, группа симплектических движений $T_{2n} * Sp$, симплектический репер и "элементарные" элементы симплектической группы Sp (см. [16]). Даны также условия, которым удовлетворяет элемент группы Sp, элемент ее алгебры $\bar{Sp}$

и структурные уравнения пространства Sp_{2n}.

В §2 рассматривается a-мерное многообразие B симплектических $2m$-плоскостей пространства Sp_{2n}. С многообразием B связываются два его расслоения: каноническое расслоение $\pi: E \to B$ и ортогональное векторное расслоение $p: V \to B$. Здесь π и p - проекции, B - базис, E и V - тотальные многообразия этих расслоений; слоями первого расслоения являются симплектические $2m$-плоскости как точечные многообразия, слоями второго расслоения - симплектические векторные пространства, ортогонально дополняющие плоскости многообразия.

Формы Пфаффа ω^J, ω^J_K $(I, J, \ldots = 1, \ldots, 2n)$ в формулах инфинитезимального перемещения

$$d\vec{M} = \omega^J \vec{e}_J, \quad d\vec{e}_J = \omega^K_J \vec{e}_K$$

репера $\{M; \vec{e}_J\}$ и метрический тензор g_{JK} пространства Sp_{2n} удовлетворяют уравнениям

$$d\omega^J = \omega^K \wedge \omega^J_K, \quad d\omega^J_K = \omega^L_K \wedge \omega^J_L, \quad dg_{JK} = g_{LK}\omega^L_J + g_{JL}\omega^L_K.$$

В полуканоническом репере $(M; \vec{e}_i$ - на симплектической плоскости и $\vec{e}_p$ - ортогональны к векторам $\vec{e}_i$; $i, j, \ldots, r = 1, 2, \ldots 2m;$ $p, q, \ldots = 2m+1, \ldots, 2n)$ расслоения $\pi: E \to B$ и $p: V \to B$ задаются локально соответственно уравнениями

$$\omega^r = \Lambda^r_\alpha \theta^\alpha, \quad \omega^r_i = \Lambda^r_{i\alpha} \theta^\alpha$$

и

$$\omega^i_p = g^{il} g_{pr} \Lambda^r_{l\alpha} \theta^\alpha.$$

Структурные уравнения этих расслоений следующие:

$$d\theta^\alpha = \theta^\beta \wedge \theta^\alpha_\beta, \quad d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j + \Omega^i, \quad d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \Omega^i_j \qquad (1)$$

и

$$d\theta^\alpha = \theta^\beta \wedge \theta^\alpha_\beta, \quad d\omega^r_q = \omega^s_q \wedge \omega^r_s + \Omega^r_q. \qquad (2)$$

Здесь θ^α $(\alpha, \beta, \ldots = 1, \ldots, a)$ - локальные базисные формы базы B и $\Omega^i, \Omega^i_j, \Omega^r_q$ - формы кручения и кривизны, причем они выражаются по формулам

$$\Omega^i = \tfrac{1}{2} T^i_{\alpha\beta} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta, \quad \Omega^i_j = \tfrac{1}{2} R^i_{j\alpha\beta} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta, \quad \Omega^r_q = \tfrac{1}{2} R^r_{q\alpha\beta} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta,$$

$$T^i_{\alpha\beta} = 2 P^i_{[\alpha\beta]}, \quad R^i_{j\alpha\beta} = 2 Q^i_{j[\alpha\beta]}, \quad R^r_{q\alpha\beta} = 2 Q^r_{q[\alpha\beta]},$$

$$P^i_{\alpha\beta} = g_{pq} g^{il} \Lambda^p_\alpha \Lambda^q_{l\beta}, \quad Q^i_{j\alpha\beta} = g_{pq} g^{il} \Lambda^p_{j\alpha} \Lambda^q_{l\beta}, \quad Q^r_{q\alpha\beta} = g_{qs} g^{ki} \Lambda^s_{i\alpha} \Lambda^r_{k\beta}.$$

Из структурных уравнений (I) и (2) следует

2

Теорема I. На расслоениях $\pi: E \to B$ и $p: V \to B$ возникают аффинная симплектическая связность и симплектическая связность.

В §3 найдены нужные для исследования тензоры, из которых приведем следующие

$$Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{2h}} = Q^{[i_1}_{i_1\alpha_1\alpha_2} \ldots Q^{i_h]}_{i_h\alpha_{2h-1}\alpha_{2h}},$$

$$S_{\alpha_1\ldots\alpha_{2h}} = Q_{(\alpha_1\ldots\alpha_{2h})} \qquad (h=1,\ldots,2m)$$

и

$$'Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{2h}} = Q^{[p_1}_{p_1\alpha_1\alpha_2} \ldots Q^{p_h]}_{p_h\alpha_{2h-1}\alpha_{2h}},$$

$$'S_{\alpha_1\ldots\alpha_{2h}} = {}'Q_{(\alpha_1\ldots\alpha_{2h})} \qquad (h=1,\ldots,2(n-m)).$$

Первые из них даны и в [3].

В § 4 рассматривается понятие угла. Угол между векторами, как в евклидовом пространстве, определить здесь невозможно, так как длина любого вектора равна нулю. Можно, однако, определить длину бивектора $\vec{u} = u^{JK}\vec{e}_J \wedge \vec{e}_K$, где $\vec{e}_J \wedge \vec{e}_K$ составляют базис бивекторного пространства $\Lambda^2(V_{2n})$, формулой

$$|\vec{u}| = \frac{1}{2}\sqrt{u^{JK}u^{LM}g_{JL}g_{KM}}.$$

Угол между бивекторами $\vec{u}$ и $\vec{v}$ при $|\vec{u}| \neq 0$, $|\vec{v}| \neq 0$ определяется теперь формулой (см. [16])

$$\cos\varphi = \frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

<u>Углом между симплектическими 2-плоскостями</u> называется угол между бивекторами, определяемыми этими плоскостями.

В §5 дается понятие стационарного угла между симплектическими плоскостями Δ и Δ'. Если в евклидовом пространстве эти углы реализуются между I-направлениями, то при Sp_{2n} – между 2-направлениями (иначе, между бивекторами). Если применить найденные здесь условия стационарности к случаю двух бесконечно близких симплектических $2m$-плоскостей Δ и Δ' с базисами $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{e}_i + d\vec{e}_i + \vec{o}_i\}$, то получается уравнение для нахождения стационарных углов

$$\mu^{2m} - \Phi_1\mu^{2m-1} + \Phi_2\mu^{2m-2} - \ldots + \Phi_{2m} = 0,$$

где $\mu = \pm\frac{1}{2}\varphi^2$ и

$$\Phi_h = S_{\alpha_1\ldots\alpha_{2h}}\theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_{2h}}$$

Стационарные углы ортогональных дополнений $\Delta^\perp$ и $'\Delta^\perp$ к Δ и Δ' находятся из уравнения

$$\mu^{2(n-m)} - {}'\Phi_1\mu^{2(n-m)-1} + {}'\Phi_2\mu^{2(n-m)-2} - \ldots + {}'\Phi_{2(n-m)} = 0,$$

где

$$'\Phi_k = {}'S_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_{2k}}.$$

Тем самым получена геометрическая интерпретация тензоров $S_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}}$ и $'S_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}}$.

В §6 вводятся понятия стрикционной индикатрисы S и ее подмножества - фокальной поверхности f. Кроме того определяется ряд инвариантных точек, аналогичных точкам Вагнера [5]; здесь они называются также точками Вагнера.

В §7 расслоение $\pi: E \to B$ исследуется с помощью форм кручения Ω^i и форм кривизны Ω^i_j. Доказываются следующие теоремы.

Теорема 2. а) Если $\vec{\Omega} = \vec{0}$ в некоторых точках M_α с $\vec{M}_\alpha = \vec{M} + x^i_{(\alpha)} \vec{e}_i$, то $\vec{\Omega} = \vec{0}$ во всех точках плоскости Δ, натянутой на точки M_α.

б) Если вектор $\vec{\Omega}$ в точках M_α с $\vec{M}_\alpha = \vec{M} + x^i_{(\alpha)} \vec{e}_i$ перпендикулярен (параллелен) плоскости, натянутой на точки M_α, то он перпендикулярен (параллелен) к ней во всех точках этой плоскости.

в) Если векторы $\vec{\Omega}_j$ перпендикулярны к симплектической плоскости Δ, принадлежащей слою расслоения $\pi: E \to B$, то во всех точках плоскости Δ вектор $\vec{\Omega}$ имеет одинаковое значение, т.е. $\vec{\Omega}$ постоянен на Δ. То же самое получается, если $\vec{\Omega}_j$ параллельны с Δ и $\vec{\Omega}$ перпендикулярен к Δ.

Теорема 3. Если хотя бы в одной точке M вектор $\vec{\Omega}$ принадлежит линейной оболочке $L(\vec{\Omega}_j)$ векторов $\vec{\Omega}_j$, то существует, по крайней мере, одна точка $'M$ с $'\vec{M} = \vec{M} + x^i \vec{e}_i$, в которой $\vec{\Omega} = \vec{0}$.

Теорема 4. Если в некотором 2-направлении касательного пространства базы B векторы $\vec{\Omega}_j$ линейно независимы, то существует одна и только одна точка $'M$ с $'\vec{M} = \vec{M} + x^i \vec{e}_i$, где в рассматриваемом 2-направлении вектор $\vec{\Omega}$ равняется нулю.

В последнем §8 дается классификация расслоений $\pi: E \to B$ и $p: V \to B$ с двумерной базой B по аффинорам кривизн R^i_{j12} и $R^{\xi}_{\eta 12}$. На оснавании результатов из [16] выписаны канонические виды этих аффиноров.

Вторая глава содержит два параграфа. Рассматривается такой частный случай a-мерного многообразия B симплектических $2m$-плоскостей, при котором $a = 2n - 2m$. В этом случае B принято называть конгруэнцией (см. [17]). Исследуется строение ее фокальной поверхности f в произвольной плоскости многообразия B, предполагая, что внутренняя связность конгруэнции обладает некоторыми специальными свойствами. Эти свойства описываются при помощи вектора кручения $\vec{\Omega}$ внутренней связности.

В §9 для фиксированной пары (M,X) определяется тензор

$$P_{pq}(M,X) = g_{rs}\Lambda^r_p\Lambda^s_{iq}x^i.$$

(Здесь вместо $\alpha,\beta,\dots$ можно применить $p,q,\dots$, так как индексы обеих серий пробегают одинаковое множество значений.) Множество точек T, координаты T^p которых удовлетворяют уравнению

$$P_{(pq)}(M,X)\,T^pT^q = \pm 1,$$

называется <u>индикатрисой $J(M,X)$ конгруэнции</u> для данной фиксированной пары (M,X) точек. Дается геометрическая интерпретация точек $T\in J(M,X)$.

Из результатов §10 наиболее существенные выражены в следующих теоремах.

<u>Теорема 5.</u> Если на плоскости конгруэнции существует прямая l, перпендикулярная к вектору $\vec{\Omega}_M$ в некоторой ее точке $M\notin f$, то эта прямая l пересекает фокальную поверхность f в фокусах, которые симметричны относительно M. При этом в кобазисе, в котором $\omega^p=\theta^p$, тип фокуса зависит от типа собственного значения λ матрицы $\|P_{pq}(M,X)\|$, данной для пары (M,X), где $X\in l$ и отлична от M. Фокусы на прямой l могут быть вещественными при вещественном $\lambda\neq 0$, бесконечно удаленными при $\lambda=0$, чисто мнимыми при $\lambda=i\nu$ с $\nu\neq 0$ и мнимыми при $\lambda=\mu+i\nu$ с $\nu\neq 0$.

<u>Следствие.</u> Если $\vec{\Omega}_M=\vec{0}$ в некоторой точке M данной $2m$-плоскости конгруэнции, причем $M\notin f$, то любая прямая l, проходящая через точку M, либо не пересекает фокальную поверхность f, либо пересекает фокальную поверхность f в точках, которые делятся на пары, симметричные относительно M.

<u>Теорема 6.</u> Если в двух точках $2m$-плоскости конгруэнции вектор кручения $\vec{\Omega}$ перпендикулярен к прямой l, проходящей через эти точки, то $\vec{\Omega}$ перпендикулярен к прямой во всех точках этой прямой l. Сама прямая либо не пересекается с фокальной поверхностью f, либо полностью находится на фокальной поверхности f.

<u>Теорема 7.</u> Если $\|P_{pq}(M,X)\|=0$, при некоторой паре точек (M,X), где $M\neq X$ и $M\notin f$, то вектор $\vec{\Omega}_Y$ в любой точке Y симплектичес-

кой $2m$-плоскости конгруэнции перпендикулярен к прямой $l(M,X)$, проходящей через M и X. Кроме того, $\|P_{pq}(M,X)\| = 0$ при любой паре точек (M,X) прямой $l(M,X)$.

Следствие. Если $\|P_{pq}(M,X)\| = 0$ при некоторой паре точек (M,X), где $M \notin f$, то прямая $l(M,X)$ не пересекается с фокальной поверхностью, либо полностью находятся на фокальной поверхности.

Теорема 8. Пусть на каждой прямой $l(M,Y_\alpha)$ $(\alpha = 1,\dots,6)$ существует такая точка X_α, не принадлежащая фокальной поверхности f, что $\|P_{pq}(X_\alpha,Y_\alpha)\| = 0$. Тогда $\|P_{pq}(M,X)\| = 0$ и при парах (M,X), где M и X – произвольные две точки плоскости Δ, натянутой на точки $M, Y_1, \dots, Y_6$. Кроме того, в любой точке Y симплектической $2m$-плоскости вектор Ω_Y перпендикулярен к плоскости Δ. Плоскость Δ не пересекает фокальную поверхность, а плоскости, параллельные плоскости Δ, либо принадлежат фокальной поверхности f, либо не пересекают ее.

Последняя, третья глава содержит восемь параграфов. Даются классификации конгруэнций симплектических 2-плоскостей аффинно-симплектического пространства Sp_4, используя различные принципы классификации, и исследуются взаимосвязи этих классификаций.

В §10 аффиноры $\|R^i_j\| = \|R^i_{j12}\|$ и $\|R^a_b\| = \|R^a_{b12}\|$ кривизны внутренней связности расслоений $\pi: E \to B$ и $\rho: V \to B$ приводятся независимо друг от друга к одному из следующих видов

$$(I) = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{Vmatrix}, \quad (II) = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{Vmatrix}, \quad (III) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{Vmatrix}, \quad (IV) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\alpha \neq 0$ – вещественное число. Через $R(I), \dots, R(IV)$ и $r(I), \dots, r(IV)$ обозначены классы конгруэнций, у которых $\|R^i_j\|$ и $\|R^a_b\|$ приводимы соответственно к видам $(I), \dots, (IV)$. Имеет место

Теорема 9. Конгруэнции симплектических плоскостей пространства Sp_4 делятся на следующие непересекающиеся классы $\mathfrak{A}, \dots, \mathfrak{F}$: $\mathfrak{A} = R(I) = r(I)$, $\mathfrak{B} = R(II) = r(II)$, $\mathfrak{C} = R(III) \cap r(III)$, $\mathfrak{D} = R(III) \cap r(IV)$, $\mathfrak{E} = R(IV) \cap r(III)$, $\mathfrak{F} = R(IV) \cap r(IV)$.

В §§12 – 16 исследуются последовательно конгруэнции всех классов $\mathfrak{A}, \dots, \mathfrak{F}$. Дальнейшее деление на подклассы проводится по типам фокальных кривых на плоскостях конгруэнций. Доказываются теоремы существования. Из результатов этих параграфов приведем, для примера, следующие две теоремы.

Теорема IO. Конгруэнции симплектических 2-плоскостей аффинно-симплектического пространства Sp_4 делятся на одиннадцать классов $a), \dots, k)$ в зависимости от того, является ли фокальая кривая соответственно $a)$ эллипсом, $b)$ парой мнимых пересекающихся прямых, $c)$ гиперболой, $d)$ парой пересекающихся прямых, $e)$ параболой, $f)$ парой параллельных прямых, $g)$ парой мнимых параллельных прямых, $h)$ парой сливающихся прямых, $i)$ одной прямой, $j)$ пустым множеством, $k)$ плоскостью конгруэнции. Ни один из этих классов не является пустым.

Теорема II. Классификации в теоремах 9 и IO связаны следующим образом: $a \cup b = \mathcal{A}$, $c \cup d = \mathcal{B}$, $e \subset \mathcal{C}$, $f \cup h = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, $g \subset \mathcal{D}$, $j \subset \mathcal{F}$, $i \cup k = \mathcal{E} \cap \mathcal{F}$. Ни один из классов $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{F}$ не является пустым.

В §I7 изучаются группы голономий внутренних связностей расслоений $\pi : E \to B$ и $p : V \to B$, связанных с конгруэнцией B. Через χ и Ψ обозначены соответственно локальная неоднородная и локальная однородная группа голономий расслоения $\pi : E \to B$, через Φ обозначена локальная однородная группа голономий расслоения $p : V \to B$. Кроме того, через Γ обозначена параболическая подгруппа (см. [I4]), а через $\{E\}$ – подгруппа из единичного элемента группы $SGL(2;R)$. Доказаны следующие теоремы.

Теорема I2. При параллельных переносах относительно внутренней связности фокальная кривая остается неизменной.

Теорема I3. Классы конгруэнции $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{F}$ характеризуются следующими парами групп голономий (Ψ, Φ): (O_2^+, O_2^+), $({}^1O_2^+, {}^1O_2^+)$, (Γ, Γ), $(\Gamma, \{E\})$, $(\{E\}, \Gamma)$, $(\{E\}, \{E\})$.

Следующие две теоремы дают классификацию конгруэнций по группам голономий и связь этой классификации с классификацией по типам фокальной кривой.

Теорема I4. По паре (χ, Φ) конгруэнции симплектических 2-плоскостей пространства Sp_4 делятся на следующие классы, $\alpha, \dots, \iota$: $\alpha = (\{\vec{o}\} * O_2^+, O_2^+)$, $\beta = (\{\vec{o}\} * {}^1O_2^+, {}^1O_2^+)$, $\gamma = (T_1 * \Gamma, \Gamma)$, $\delta = (\{\vec{o}\} * \Gamma, \Gamma)$, $\varepsilon = (\{\vec{o}\} * \Gamma, \{E\})$, $\zeta = (T^1 * \{E\}, \Gamma)$, $\eta = (\{\vec{o}\} * \{E\}, \Gamma)$, $\varkappa = (T_1 * \{E\}, \{E\})$, $\iota = (\{\vec{o}\} * \{E\}, \{E\})$.

Теорема I5. Классы по паре групп голономий и по типам фокальной кривой связаны следующим образом: $\alpha = a \cup b$, $\beta = c \cup d$, $\gamma = g$, $\delta = (f \cup h) \cap \mathcal{C}$, $\varepsilon = \mathcal{D}$, $\zeta = i \cap \mathcal{E}$, $\eta = k \cap \mathcal{E}$, $\varkappa = i \cap \mathcal{F}$, $\iota = (j \cup k) \cap \mathcal{F}$

В §18 сперва доказывается, что симплектическое векторное пространство V_4 индуцирует в бивекторном пространстве $\Lambda^2(V_4)$ структуру евклидова пространства ${}^2E_6$. Возникает отображение Ψ, которое сопоставляет каждой симплектической 2-плоскости определяемой с ней нормированный бивектор в ${}^2E_6$. Называется это отображение <u>сферическим</u>. При классах $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ каждая конгруэнция K индуцирует на многообразии $\Psi(K)$ структуру риманова многообразия. Аналогично как в [II] определяется на $\Psi(K)$ индикатриса нормальной кривизны J. При $\Psi(K)\in\Psi(\mathfrak{a})$ индикатрисой нормальной кривизны J является эллипс, отрезок или точка, а при $\Psi(K)\in\Psi(\mathfrak{b})$ – гипербола, прямая без отрезка или точка. По типам J оба класса $\Psi(\mathfrak{a})$ и $\Psi(\mathfrak{b})$ делятся на три подкласса. В зависимости от того, $\vec{H}=\vec{0}$ или $\vec{H}\neq\vec{0}$, где $\vec{H}$ – вектор средней кривизны, каждый подкласс, в свою очередь, делится на два новых подкласса. Полученная классификация $\Psi(\mathfrak{a})$ и $\Psi(\mathfrak{b})$ индуцирует классификацию $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.

По материалам диссертации опубликованы следующие работы.

I. Парринг А.К., К дифференциальной геометрии семейств подпространств в аффинно-симплектическом пространстве. Тезисы докладов IУ всесоюзной межвузовской конференции по геометрии. Тбилиси, I969, I90-I9I.

2. Парринг А., Семейства симплектических плоскостей в аффинно-симплектическом пространстве. Уч.зап.Тартуск. ун-та, I972, 305, 2I-45.

3. Парринг А.К., Исследование фокальной поверхности Φ конгруэнции симплектических плоскостей. Тезисы докладов У всесоюзной конференции по современным проблемам геометрии. Самарканд, I972, I6I.

4. Парринг А., О строении фокальных поверхностей конгруэнций симплектических $2m$-плоскостей со специальными внутренними связностями. Уч.зап.Тартуск.ун-та, I974, 342, 5I-62.

5. Парринг А.К., Конгруэнции симплектических плоскостей в аффинно-симплектическом пространстве Sp_4. Материалы Прибалтийской геометр. конференции. Тарту, I973, 96-98.

6. Парринг А.,Классификации конгруэнций плоскостей пространства Sp_4 по типам фокальной кривой и группам голономий. Уч.зап.Тартуск.ун-та, 1975, 355, 86-110.

7. Парринг А.,Сферическое отображение конгруэнции симплектических плоскостей пространства Sp_4. Уч.зап. Тартуск.ун-та, 1975. 355, 111-118.

8. Парринг А.К.,Сферическое отображение конгруэнции симплектических плоскостей пространства Sp_4.Шестая всесоюзная геометрическая конференция по современным проблемам геометрии. Вильнюс, 1975, 181-183.

Результаты диссертации докладывались на всесоюзных конференциях по проблемам геометрии (Тбилиси, 1969; Самарканд, 1972; Вильнюс, 1975),на IУ Прибалтийской геометрической конференции (Тарту, 1973) и на Московском семинаре по классической дифференциальной геометрии в 1972 году.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гейдельман Р.М.,Дифференциальная геометрия семейств подпространств в многомерных однородных пространствах. В сб. "Алгебра.Топология.Геометрия.(Итоги науки.ВИНИТИ АН СССР)".Москва, 1967, 327-374.

2. Гейдельман Р.М.,К теории семейств плоскостей в неевклидовых пространствах.Изв.высш.учебн.заведений. Математика, 1959, 3, 30-41.

3. Гейдельман Р.М.,Основы теории семейств подпространств в симплектических пространствах.Матем.сб., 1961, 55, № 1, 7-34.

4. Лихнерович А.,Теория связностей в целом и группы голономий.Москва, 1960.

5. Лумисте Ю.Г.,К теории многообразий плоскостей евклидова пространства.Уч.зап.Тартуск.ун-та, 1966, 192, 12-46.

6. Лумисте Ю.Г.,Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях.Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1965, 177, 6-41.

7. Лумисте Ю.Г.,Канонические расслоения над пространствами орбит и внутренние связности. Тр.геом. семинара т. 4.

Москва, 1973, 285-307.

8. Мальцев А.М.,Основы линейной алгебры. Москва. 1970.

9. Номидзу К.,Группы Ли и дифференциальная геометрия.Москва, 1966.

10. Остиану Н.М.,О геометрии поверхности аффинно-симплектического пространства.Уч.зап.Моск. пед.ин-та, 1963, 208, 156-176.

11. Риманова геометрия в ортогональном репере (по лекциям Э. Картана).Москва, 1960.

12. Розенфельд Б.А.,Неевклидовы геометрии. Москва, 1955.

13. Розенфельд Б.А.,Дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей. Изв. АН СССР,сер.матем.,1947, 11, 283-308.

14. Широков П.А.,Широков А.П. , Аффинная дифференциальная геометрия. Москва, 1959.

15. Яглом И.М.,Квадратичные и кососимметричные билинейные формы в вещественном симплектическом пространстве. Тр.семинара по векторн.и тензорн. анализу с их прилож.к геометрии,механ.и физ.Моск.ун-т, 1950, 8,364-381.

16. Яглом И.М.,О линейных подпространствах симплектического пространства. Тр. семинара по векторн.и тензорн.анализу с их прилож. к геометрии,механ.и физ.Моск.ун-т, 1952, 9, 300-318.

17. Wagner V.,Differential geometry of the family of R_k's in R_n and of the family of totally geodesic S_{k-1}'s in S_{n-1} on positive curvature.Матем.сб.,1942, 10,165-212.

Парринг Айво Карлович. МНОГООБРАЗИЯ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ПЛОСКОСТЕЙ АФФИННО-СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА И ИХ ВНУТРЕННИЕ СВЯЗНОСТИ. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Тартуский государственный университет. ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18. Сдано в печать 16/09 75. Бумага печатная № 1. 30х45. 1/4. Печ.листов 1,0. Тираж 200. МВ 06287. Типография ТГУ, ЭССР, г. Тарту, ул. Пялсони, 14. Зак. № 1117. Бесплатно.

Бесплатно