

EESTI VABARIIGI TARTU ÜLIKOOLI

TOIMETUSED

ACTA ET COMMENTATIONES

UNIVERSITATIS DORPATENSIS

A

MATHEMATICA, PHYSICA, MEDICA

VIII

TARTU 1925

EESTI VABARIIGI TARTU ÜLIKOOI
TOIMETUSED

ACTA ET COMMENTATIONES
UNIVERSITATIS DORPATENSIS

A

MATHEMATICA, PHYSICA, MEDICA

VIII

TARTU 1925

Sisukord. — Contenta.

1. **Hermann Jaakson.** Sur certains types de systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Sur l'interpolation.
2. **Karl Frisch.** Die Temperaturabweichungen in Tartu (Dorpat) und ihre Bedeutung für die Witterungsprognose.
3. **O. Kuriks.** Muutused leeprahaigete silmas Eesti leprosooriumide haigete läbivaatamise põhjal.

Referat: Die Lepra des Auges.

4. **A. Paldrock.** Die Senkungsreaktion und ihr praktischer Wert.
 5. **A. Öpik.** Beiträge zur Kenntnis der Kukruse- (C_2 -) Stufe in Eesti. I.
 6. **M. Wittlich.** Einiges über den Schwefel im estländischen Ölschiefer (Kukersit) und dessen Verschmelzungsprodukten.
 7. **Hugo Kaho.** Orientierende Versuche über die stimulierende Wirkung einiger Salze auf das Wachstum der Getreidepflanzen. I.
-

**SUR CERTAINS TYPES
DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES
À UNE INFINITÉ D'INCONNUES

SUR L'INTERPOLATION**

PAR

HERMANN JAAKSON

TARTU 1925

C. Mattiesen, Tartu

Introduction.

Généralités.

1. La méthode de Fourier.

On doit à Fourier⁽¹⁾ une importante méthode permettant de résoudre une certaine catégorie de systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Elle consiste, au fond, comme l'on sait, à rejeter dans le système à résoudre toutes les équations, sauf les n premières, en n'y conservant que les n premières inconnues. On calcule les inconnues du système de n équations ainsi obtenu et appelé système réduit, et l'on passe à la limite pour $n \rightarrow \infty$. Dans bien des cas, étant finies et bien déterminées, ces limites constituent, en effet, une solution du système infini donné.

2. Remarques relatives à la méthode de Fourier.

La méthode que nous venons d'esquisser en quelques mots a été appelée par M. Riesz⁽²⁾ principe des réduites. Cependant, à notre avis, il ne serait pas bien commode de l'élever au rang d'un principe, bien qu'elle ait une importance incontestable dans la théorie des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

En effet, M. Riesz, lui-même, fait remarquer que ce principe devrait encore être beaucoup précisé. On s'en rend d'ailleurs compte aisément, puisque cette méthode n'est, au fond, qu'une règle concrète ne s'appliquant que dans des conditions assez restrictives, — et voilà pourquoi nous ne saurions pas la considérer comme un principe; nous l'appelons méthode de Fourier.

(1) Fourier, Théorie analytique de la chaleur, Art. 166 et suiv.

(2) Riesz, F., Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, p. 7.

Déjà Poincaré⁽¹⁾, en étudiant la légitimité de cette méthode, a montré qu'il y a des systèmes auxquels elle ne s'applique pas ou, si elle s'y applique, ce n'est que sous des conditions plus ou moins restrictives.

D'ailleurs, l'exemple le plus instructif, dans cet ordre d'idées, est peut-être celui que l'on doit à M. Riesz⁽²⁾. Le voici: Étant donnée une suite indéfinie de quantités

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$, on peut toujours, d'après le théorème de Weierstrass, construire une fonction entière

$$F(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots + C_n z^n + \dots$$

admettant pour zéros les quantités a_n et n'en admettant pas d'autres.

En supposant, pour fixer les idées, que les a_i soient distincts et $\neq 0$, les coefficients $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ devront satisfaire au système d'équations suivant:

$$0 = C_0 + C_1 a_i + C_2 a_i^2 + \dots + C_n a_i^n + \dots \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Mais, d'autre part, en essayant de résoudre ce système par la méthode de Fourier, on constatera aisément que ce ne sera possible que si les $|a_n|$ croissent assez rapidement.

M. Riesz en conclut: „Ainsi, nos équations peuvent être résolues en tout cas; mais le principe des réduites n'y s'applique que sous des conditions très restrictives.“

3. Le principe des réduites.

Quant au principe des réduites, en attribuant à ce mot un sens beaucoup plus large que ce qu'entend par là M. Riesz, nous l'énonçons sous la forme suivante:

Pour résoudre un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, on n'a qu'à ramener convenablement ce problème à la résolution d'un nombre fini ou, en général, d'une infinité

(1) Poincaré, Remarques sur l'emploi de la méthode... (Bull. Soc. math. de France, t. XIII, 1885, p. 19—27).

(2) Riesz, F., Les systèmes d'équations..., p. 8.

de systèmes auxiliaires, dont chacun ne contient qu'un nombre fini d'inconnues et s'appelle **système réduit**.

Nous verrons que ce principe peut être considéré comme une idée-directrice générale, suggérant des méthodes nouvelles et fécondes dans la théorie des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

En effet, dans le présent travail, nous en développerons déjà quelques-unes, en nous faisant guider, dans nos recherches concernant certains types de systèmes infinis, par le principe des réduites énoncé.

Les méthodes que nous obtiendrons ainsi, et dont nous ferons usage dans ce travail, ont tous pour base commune ledit principe; elles varient, en général, avec les types de systèmes que l'on étudiera, et ne représentent, au fond, que des modes d'application différents dudit principe.

En particulier, la méthode de Fourier n'est que l'un des modes d'application possibles de ce principe, et qui s'adapte aux systèmes infinis les plus simples admettant des solutions, qui se calculeront à l'aide d'un seul système réduit.

Mais, comme nous le montrerons dans ce travail, il y a encore d'autres modes d'application du même principe, dont l'importance incontestable consiste en ce qu'ils permettront de résoudre de tels systèmes auxquels la méthode de Fourier ne s'applique pas, et où il s'agit, en général, de ramener la résolution d'un système infini donné, à celle d'une infinité de systèmes réduits.

4. La nature des solutions.

Quand on se propose de résoudre un système infini, il est évident qu'il faut d'abord préciser ce qu'on convient d'entendre par ses solutions.

Dans le présent travail nous appelons solution d'un système infini tout ensemble des valeurs des inconnues qui satisfont à ce système, en rendant absolument convergentes toutes les séries qui y figureront.

A cette condition générale nous en ajouterons, dans certains cas, encore quelques autres; ainsi, par exemple, nous exigerons, dans les premiers trois Chapitres, qu'aucune des valeurs des inconnues ne soit zéro.

5. Les séries de Dirichlet généralisées.

Dans les premiers trois Chapitres nous allons étudier les systèmes infinis que l'on peut attacher, d'une façon naturelle, aux séries de Dirichlet.

On appelle ordinairement série de Dirichlet chaque série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z},$$

où les λ_n sont réels et $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$.

Or, cette notion peut être généralisée considérablement, comme l'a montré récemment M. Väisälä⁽¹⁾, qui appelle série de Dirichlet toute série

$$(I) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z},$$

où $\lambda_n = r_n e^{i\varphi_n}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$ (condition A).

Sans avoir l'intention de traiter cette question d'une façon détaillée, nous aurons, cependant, l'occasion de constater que la généralisation peut être poussée beaucoup plus loin, de sorte qu'elle embrasse aussi les séries de la forme suivante :

$$(II) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n z},$$

les λ_n étant, en général, des quantités complexes et l'ensemble dénombrable

$$(\dots \lambda_{-n}, \dots \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_n, \dots)$$

ayant, au moins, deux points-limites dont l'un sera l'infini et l'autre un nombre fini quelconque, zéro par exemple. Mais ce n'est qu'un cas particulier ; en général, on peut supposer qu'il y ait même une infinité de points-limites. Ainsi, dans ce travail, nous ferons usage des séries de Dirichlet généralisées

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n z},$$

(1) Väisälä, K., Verallgemeinerung des Begriffes der Dirichletschen Reihen (Acta et Commentationes Universitatis Dorpatensis A I. 2).

en supposant seulement que l'ensemble partiel

$$(\dots \lambda_{-n}, \dots \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0)$$

soit borné: $|\lambda_{-n}| < \lambda \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ (condition B),

tandis que par rapport à l'autre ensemble partiel

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n, \dots)$$

soit remplie la condition A: $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$.

6. L'objet des études.

Caractérisons maintenant en quelques mots les types de systèmes infinis dont l'étude fera l'objet de ce travail.

Le Chapitre I sera consacré aux types suivants :

$$\text{type I:} \quad 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\text{type II:} \quad 0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n x_n \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Ce sont les systèmes que l'on obtiendra, en prenant une série de Dirichlet généralisée, sous la forme (I) ou (II), en la différentiant terme à terme une infinité de fois et en égalant à zéro tous les résultats ainsi obtenus, après y avoir remplacé la variable z par zéro et désigné les coefficients indéterminés par x_n .

En attachant ainsi ces systèmes aux séries de Dirichlet, il s'ensuit que les quantités données λ_n y sont assujetties aux mêmes conditions que dans les séries correspondantes; c'est-à-dire, dans le cas du type I, à la condition (A); tandis que dans le cas du type II, aux conditions (A) et (B).

Sous ces conditions, d'une nature générale, on calculera aisément une infinité de solutions des systèmes du type I ou du type II, par une méthode que l'on peut considérer comme un nouveau mode d'application du principe des réduites.

Quant à la méthode de Fourier, elle ne s'y appliquera que sous des conditions complémentaires et très restrictives, — ce qui résulte déjà des études de Poincaré⁽¹⁾ sur certains systèmes infinis appartenant, comme cas particuliers, aux types I et II.

(1) Poincaré, Remarques sur l'emploi . . . (Bull. Soc. math. de France, t. XIII, p. 19—27).

Dans le Chapitre II nous étudierons deux types de systèmes non homogènes :

$$\text{type III:} \quad c_i = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^i x_n \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{et}$$

$$\text{type IV:} \quad c_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n^i x_n \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

qui ne diffèrent des types I et II que par les parties gauches (c_i) des équations, les c_i étant des quantités arbitrairement données, dont au moins une quelconque soit différente de zéro.

Remarquons en passant que le système traité par M. Borel ⁽¹⁾ dans sa Thèse rentre comme cas particulier dans le type III.

L'application convenable du principe des réduites aux systèmes du type III ou du type IV permettra de calculer toujours une infinité de solutions.

Dans le Chapitre III nous étudierons les systèmes que l'on obtiendra par le procédé formel suivant: Étant donnée une série de Dirichlet généralisée (sous la forme I ou II)

$$\sum_n x_n e^{-\lambda_n z}$$

à coefficients indéterminés x_n et, d'autre part, une équation différentielle linéaire

$$P_0(z) \frac{d^n y}{dz^n} + P_1(z) \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \dots + P_{n-1}(z) \frac{dy}{dz} + P_n(z) \cdot y = P(z),$$

où les $P_i(z)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) sont des polynômes entiers quelconques en z , tandis que $P(z)$ est, en général, une série entière, qui peut se réduire, en particulier, à un polynôme ou même à une constante (le zéro y compris), — on posera

$$y = \sum_n x_n e^{-\lambda_n z}$$

et l'on exigera que la série de Dirichlet satisfasse formellement à l'équation différentielle, tout comme si elle était l'une des intégrales; cela reviendra à ce que les x_n devront satisfaire à un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

(1) Borel, Sur quelques points de la Théorie des fonctions (Annales de l'Ecole Norm. sup., 3-e série, t. XII, 1895, p. 9—55).

Quant à la résolution de tels systèmes, nous verrons que ce problème peut être ramené, au moins dans des cas très étendus, complètement à celui concernant les systèmes des deux premiers Chapitres.

Il faut cependant ajouter que le procédé de formation des systèmes infinis, que nous venons de décrire, fournira dans certains cas, lorsque $P(z) \equiv 0$, des systèmes contenant des équations incompatibles et n'ayant, par conséquent, aucune solution, — ce qui ne pourra jamais arriver si $P(z) \equiv 0$, c'est-à-dire si le système est homogène.

Enfin, le Chapitre IV sera consacré à la résolution du problème d'interpolation ou, ce qui sera la même chose, à la résolution des systèmes infinis correspondants; ces derniers embrassent, en particulier, les systèmes cités, d'après M. Riesz, au n° 2.

En nous servant convenablement du principe des réduites, nous démontrerons le théorème général suivant:

Étant données trois suites indéfinies:

1° celle des (a_n) satisfaisant aux conditions suivantes:

$$a_i \neq a_j \text{ pour } i \neq j,$$

$$|a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots,$$

$$\text{et } |a_n| \rightarrow \infty \text{ pour } n \rightarrow \infty,$$

2° celle des nombres entiers et positifs quelconques ou zéros

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots,$$

3° et celle des quantités quelconques

$$c_1^{(0)}, c_1^{(1)}, \dots, c_1^{(p_1)}; c_2^{(0)}, c_2^{(1)}, \dots, c_2^{(p_2)}; \dots, c_n^{(0)}, c_n^{(1)}, \dots, c_n^{(p_n)}; \dots,$$

— on peut construire une infinité de fonctions entières $F(z)$ telles que pour $z = a_n$ l'on ait:

$$\left. \begin{aligned} F(a_n) &= c_n^{(0)} \\ F'(a_n) &= c_n^{(1)} \\ &\dots \dots \dots \\ F^{(p_n)}(a_n) &= c_n^{(p_n)} \end{aligned} \right\} (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$F^{(p_n)}(z)$ étant la dérivée d'ordre p_n de la fonction $F(z)$ et

$$F^{(0)}(z) = F(z).$$

CHAPITRE I.

Sur les systèmes d'équations linéaires et homogènes à une infinité d'inconnues attachés aux séries de Dirichlet.

I. Le problème. Les séries de Dirichlet.

7. Dans ce Chapitre nous nous proposerons de résoudre les deux types de systèmes d'équations linéaires et homogènes à une infinité d'inconnues :

$$(1) \quad 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^i x_n \quad (\text{type I}),$$

$$(2) \quad 0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n^i x_n \quad (\text{type II})$$

$$(i = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

en y supposant que les quantités données λ_n satisfassent aux conditions suivantes :

$$(3) \quad \lambda_h \neq \lambda_k \text{ pour } h \neq k,$$

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty,$$

$$(5) \quad |\lambda_{-n}| < \lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

λ étant un nombre positif quelconque.

Cela posé, démontrons que nos systèmes (1) et (2) peuvent être résolus dans tous les cas et cela de façon que les solutions soient constituées par des valeurs des inconnues dont aucune ne sera zéro.

8. Comme nous venons de voir (n° 6), les systèmes (1) et (2) peuvent être attachés aux séries de Dirichlet.

Chacune d'elles fournit un système (1) ou (2); pour l'obtenir on n'a qu'à différentier la série de Dirichlet terme à terme une infinité de fois et à exiger que les résultats ainsi obtenus s'annulent pour $z = 0$.

Sous ce point de vue, les inconnues des systèmes (1) ou (2) peuvent être considérées comme coefficients indéterminés des séries de Dirichlet, et le problème de la résolution des systèmes (1) et (2) se ramène à celui de la construction des séries de Dirichlet. En effet, chacune de ces séries est complètement caractérisée par deux suites indéfinies: celle des λ_n et celle des coefficients. Or, la suite des λ_n étant donnée d'avance, et les coefficients se calculant comme inconnues des systèmes (1) ou (2), il en résultera donc qu'à chacune des solutions des systèmes (1) et (2) on peut faire correspondre une série de Dirichlet, concrète et bien déterminée. De plus, la suite des λ_n étant donnée d'avance, il ne s'y agit évidemment que de construire des séries de Dirichlet contenant effectivement tous les λ_n donnés, c'est ce qui ne sera possible que sous la condition que les solutions du système correspondant (1) ou (2) soient constituées par des valeurs des inconnues dont aucune ne sera zéro.

Et voilà pourquoi nous ne saurions, dans le présent Chapitre (et de même dans les deux Chapitres suivants), admettre que des solutions satisfaisant à la dernière condition.

9. Sans avoir l'intention d'étudier, d'une façon détaillée, les séries de Dirichlet qui correspondent aux solutions des systèmes (1) et (2), nous nous permettrons seulement de faire à ce sujet quelques remarques d'un caractère général.

Constatons tout de suite que chacune d'elles représente une fonction $F(z)$ bien déterminée, au moins pour une valeur de la variable z , à savoir $z = 0$. En effet, les x_n constituant une solution d'un des systèmes (1) ou (2), la série $\sum x_n$ sera, d'après la première équation de ce système, absolument convergente, et aura pour somme zéro; donc,

$$F(0) = \sum_n x_n = 0.$$

De même, on s'aperçoit aisément que lorsqu'une série de Dirichlet est uniformément convergente dans une région quel-

conque, limitée par une courbe passant par l'origine, elle y représentera une fonction holomorphe $F(z)$, s'annulant avec toutes ses dérivées pour $z=0$:

$$F(0)=0; \quad F^{(n)}(0)=0 \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

En effet, chacun des termes de la série $(x_n e^{-\lambda_n z})$ étant une fonction holomorphe dans tout le plan de la variable z , il en résultera, d'après le théorème de Weierstrass, que, si la série est uniformément convergente dans une région, elle y représentera une fonction holomorphe $F(z)$, dont la dérivée d'ordre p sera

$$F^{(p)}(z) = \sum_n x_n (-\lambda_n)^p e^{-\lambda_n z};$$

donc, en tenant compte du système correspondant

$$0 = \sum_n x_n (-\lambda_n)^p \quad (p=0, 1, 2, \dots),$$

on aura évidemment, d'après l'hypothèse faite,

$$F(0)=0; \quad F^{(p)}(0)=0 \quad (p=1, 2, 3, \dots).$$

Que de tels cas peuvent se présenter en réalité, on le verra tout de suite. Supposons, par exemple, que les λ_n soient réels et $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$; alors à chacune des solutions correspondra une

série ordinaire de Dirichlet. Étant absolument convergente pour $z=0$, elle sera, d'après la théorie de telles séries, uniformément convergente dans tout le demiplan à droite de l'axe imaginaire.

Dans le cas où les λ_n représentent des quantités complexes, il s'agit des séries de Dirichlet généralisées, et alors la question, concernant la région de convergence, deviendra en général beaucoup plus compliquée, comme il résulte des recherches de M. Väisälä, citées déjà au n° 5.

Tandis que la région de convergence d'une série ordinaire de Dirichlet représente toujours, comme on le sait, un demiplan à droite d'une parallèle à l'axe imaginaire, celle-ci d'une série de Dirichlet généralisée peut être, d'après M. Väisälä, une région quelconque, limitée par une courbe convexe. Il a démontré, en effet, qu'étant donnée une région quelconque, limitée par une courbe convexe, on peut construire une infinité de séries de Dirichlet généralisées dont chacune l'admet pour région de convergence absolue.

Puisqu'il ne s'agit pas ici d'étudier les séries de Dirichlet généralisées d'une façon détaillée, nous nous contenterons de constater seulement le fait suivant :

En assujettant les arguments des quantités λ_n à certaines restrictions, on peut indiquer des régions plus ou moins vastes où les séries de Dirichlet généralisées, correspondant aux solutions des systèmes (1) et (2), seront sûrs d'être uniformément convergentes.

En effet, supposons, par exemple, que les λ_n soient tous situés dans l'angle droit, formé par deux demidroites :

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ et } \varphi = -\frac{\pi}{4},$$

issues de l'origine ; la série

$$\sum_n x_n e^{-\lambda_n z},$$

dont les coefficients x_n constituent une solution du système correspondant (1) ou (2), sera alors uniformément convergente, au moins dans l'angle droit indiqué, comme on s'en assurera aisément par le raisonnement suivant :

Soit $z = \rho e^{i\varphi}$ une valeur quelconque de la variable z dans ledit angle ; on aura donc $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{4}$. D'autre part, en désignant

$$\lambda_n = r_n e^{i\varphi_n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

on aura, d'après l'hypothèse faite,

$$\varphi_n = \psi_n \pm 2\pi m,$$

m étant un entier positif quelconque ou zéro, et

$$-\frac{\pi}{4} \leq \psi_n \leq +\frac{\pi}{4}.$$

Par conséquent, $-\lambda_n z = -r_n \rho e^{i(\varphi_n + \varphi)} = -r_n \rho e^{i(\psi_n + \varphi)}$ et

$$\left| e^{-\lambda_n z} \right| = \frac{1}{e^{r_n \rho \cos(\psi_n + \varphi)}} \leq 1, \text{ puisque } -\frac{\pi}{2} \leq \psi_n + \varphi \leq +\frac{\pi}{2};$$

donc,

$$\left| x_n e^{-\lambda_n z} \right| \leq \left| x_n \right|.$$

Aussi, la série $\sum x_n$ étant absolument convergente, la série

$$\sum x_n e^{-\lambda_n z}$$

sera-t-elle uniformément convergente, au moins dans l'angle droit indiqué, et y représentera une fonction holomorphe.

De même, il est aisé de voir que, dans le cas où

$$-\frac{\pi}{2} \leq \psi_n \leq +\frac{\pi}{2},$$

les séries de Dirichlet correspondantes (ainsi que celles que l'on en obtiendrait en les différentiant terme à terme) seraient uniformément convergentes, au moins pour les valeurs réelles et positives de la variable z , c'est-à-dire sur l'axe réel à droite de l'axe imaginaire.

Il est évident que l'on pourrait multiplier indéfiniment de tels exemples.

Des remarques précédentes nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

1° les séries de Dirichlet (ordinaires ou généralisées), correspondant aux solutions des systèmes (1) ou (2), sont absolument convergentes pour $z=0$, quels que soient les arguments des quantités λ_n ;

2° elles sont, au moins dans des cas étendus, uniformément convergentes dans des régions plus ou moins vastes et y représentent des fonctions holomorphes, s'annulant avec toutes les dérivées pour $z=0$;

3° aussi, au moins sous certaines réserves, pourrait-on interpréter le problème de la résolution des systèmes (1) et (2) comme problème de construction des séries de Dirichlet, qui représentent des fonctions $F(z)$, complètement déterminées et holomorphes dans certaines régions, et s'annulant avec leurs dérivées pour $z=0$:

$$F(0)=0, F^{(n)}(0)=0 \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

II. Sur l'application de la méthode de Fourier aux systèmes du type I.

10. Soit donné un système du type I

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^i x_n \quad (i = 0, 1, 2, \dots);$$

en exigeant alors qu'une solution soit constituée par des valeurs des inconnues (x_n) dont aucune n'est zéro, on peut supposer, en particulier, que $x_1 \neq 0$, et présenter le système donné sous la forme suivante:

$$(1a) \quad -\lambda_1^i = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n^i \left(\frac{x_n}{x_1} \right) \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

où les rapports $\left(\frac{x_n}{x_1} \right)$ joueront le rôle des inconnues. Essayons de les calculer par la méthode de Fourier. Le système réduit sera dans ce cas:

$$-\lambda_1^i = \sum_{k=2}^{n+1} \lambda_k^i \left(\frac{x_k}{x_1} \right) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

En désignant sa solution par

$$\left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{(n)}, \dots, \left(\frac{x_h}{x_1} \right)^{(n)}, \dots, \left(\frac{x_{n+1}}{x_1} \right)^{(n)}$$

et en tenant compte de ce que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_{n+1} \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_{n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2) \dots (\lambda_{n+1} - \lambda_2) \\ (\lambda_4 - \lambda_3) \dots (\lambda_{n+1} - \lambda_3) \\ \dots \\ (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \neq 0,$$

on obtiendra aisément les valeurs des inconnues $\left(\frac{x_h}{x_1} \right)^{(n)}$, à l'aide des formules:

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{(n)} = -n, \quad \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{(n)} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \text{ et généralement}$$

$$\left(\frac{x_h}{x_1}\right)^{(n)} = (-1)^{h-1} \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(h-2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (h-1)} \quad (h = 2, 3, 4, \dots).$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_h}{x_1}\right)^{(n)} = \pm \infty \quad (h = 2, 3, 4, \dots),$

c'est-à-dire, dans le cas (7), il n'y a pas de limites finies.

Supposons ensuite que les λ_n soient tels que

$$(8) \quad \lambda_n = n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

alors, en employant la formule bien connue

$$\sin \pi x = \pi x \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \dots,$$

on aura

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{h+1}}\right) \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{h+2}}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}\right) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\pi x \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right)} = \\ &= \frac{1}{2 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{h^2}\right)}, \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right) \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{n+1}}\right) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow h} \frac{\sin \pi x}{\pi x \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right)} = \\ &= (-1)^{h-1} \frac{1}{2 \left(1 - \frac{h^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{h^2}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{h^2}{(h-1)^2}\right)}; \end{aligned}$$

donc, d'après les formules (6),

$$\left(\frac{x_h}{x_1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_h}{x_1}\right)^{(n)} = (-1)^{h-1} h^2 \quad (h = 2, 3, 4, \dots).$$

Aussi, dans le cas (8), chacune des limites $\left(\frac{x_h}{x_1}\right)$ sera-t-elle finie et bien déterminée; cependant, elles ne constituent pas une solution du système (1a), puisqu'elles ne rendent pas absolument convergentes les séries qui s'y trouvent.

12. Supposons enfin que

$$(9) \quad \lambda_n = p^{n-1}, \quad p > 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

alors on aura

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{h+1}}\right) \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{h+2}}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right) \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{n+1}}\right)} &= \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p^{h-1}}\right)} \end{aligned}$$

et, par conséquent, d'après les formules (6),

$$(10) \quad \left(\frac{x_h}{x_1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_h}{x_1}\right)^{(n)} = (-1)^{h-1} \frac{p^{h-1}}{(p-1)(p^2-1)(p^3-1) \dots (p^{h-1}-1)} \\ (h = 2, 3, 4, \dots).$$

Cette fois on peut bien constater que les valeurs des inconnues $\left(\frac{x_h}{x_1}\right)$, fournies par la formule (10), rendent absolument convergente chacune des séries du système (1a).

En effet, i étant un entier positif quelconque ou zéro, examinons la $(i+1)^{\text{ème}}$ série

$$-\lambda_1^i = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n^i \left(\frac{x_n}{x_1}\right).$$

En désignant

$$u_h = \lambda_h^i \left(\frac{x_h}{x_1}\right) \quad \text{et} \quad u_{h+1} = \lambda_{h+1}^i \left(\frac{x_{h+1}}{x_1}\right),$$

on aura $\left| \frac{u_{h+1}}{u_h} \right| = \frac{p^{i+1}}{p^h - 1}$ et, par suite, $\lim_{h \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{h+1}}{u_h} \right| = 0$,

d'où se déduira immédiatement la convergence absolue. La série

$$\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k^i \left(\frac{x_k}{x_1} \right)$$

a donc une somme bien déterminée et, comme on s'en rendra compte aisément, celle-ci n'est que $-\lambda_1^i$, puisque

$$-\lambda_1^i = \sum_{k=2}^{n+1} \lambda_k^i \left(\frac{x_k}{x_1} \right)^{(n)},$$

quel que soit l'entier positif n , et, d'autre part,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k^i \left(\frac{x_k}{x_1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{n+1} \lambda_k^i \left(\frac{x_k}{x_1} \right)^{(n)} \quad (1)$$

Il en résulte donc que, sous l'hypothèse (9), la méthode de Fourier est applicable et permet de déterminer les rapports des inconnues du système donné $\left(\frac{x_h}{x_1} \right)$, de sorte qu'ils satisfassent au système (1a), et qu'aucun d'eux ne soit zéro.

En y prenant $x_1 = C$, C étant une constante arbitraire, différente de zéro, on obtiendra donc une solution du système donné (1) dépendant d'une constante arbitraire, et exprimée par les formules :

$$(11) \quad x_1 = C, \quad x_h = (-1)^{h-1} C \cdot \frac{p^{h-1}}{(p-1)(p^2-1)\dots(p^{h-1}-1)} \\ (h = 2, 3, 4, \dots).$$

Remarquons encore que, en disposant de la constante arbitraire C , on peut faire assumer à une inconnue quelconque x_n la valeur

(1) D'une façon générale, remarquons que toutes les fois que l'on aura, par la méthode de Fourier, trouvé les valeurs des inconnues d'un système donné, qui rendraient absolument convergentes les séries du système, on en tirerait immédiatement, tout comme ci-dessus, la conclusion, que ces valeurs constituent effectivement une solution de ce système, puisqu'elles rendront les parties droites des équations égales aux parties gauches correspondantes.

$a \neq 0$ arbitrairement prescrite. En effet, pour cela on n'aura qu'à choisir C de sorte que soit

$$a = (-1)^{n-1} C \cdot \frac{p^{n-1}}{(p-1)(p^2-1)\dots(p^{n-1}-1)}.$$

Donc, des trois hypothèses concrètes, relatives à la nature de la suite des λ_n , que nous venons d'examiner ci-dessus, ce n'est que la dernière, qui permet de résoudre le système correspondant par la méthode de Fourier. En la comparant aux autres, on constate tout de suite que dans ce cas la croissance des λ_n est plus rapide que dans les deux cas précédents. Il est clair que c'est bien cette circonstance à laquelle, dans ce cas-ci, on doit le succès.

13. L'hypothèse (9) est loin d'être la seule, sous laquelle un système (1) peut être résolu par la méthode de Fourier; nous allons démontrer à ce sujet la proposition plus générale suivante:

Étant donnée une suite indéfinie des λ_n telle que

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad (i \neq j)$$

$$(12) \quad \text{et} \quad \left| \frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h} \right| \geq p > 1 \quad \text{pour } h \geq N,$$

N étant un entier positif quelconque, on peut, par la méthode de Fourier, déterminer une solution du système correspondant, dépendant d'une constante arbitraire C .

En effet, les valeurs (6) des inconnues du système réduit auront pour $n \rightarrow \infty$ les limites finies et différentes de zéro:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_h}{x_1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_h}{x_1} \right)^{(n)} &= (-1)^{h-1} \frac{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{h-1}}{\lambda_h^{h-2}} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{h-1}}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_h}\right) \left(1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_h}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_h}\right)} \\ &\cdot \frac{\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{h+1}}\right) \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{h+2}}\right) \dots}{\left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right) \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}}\right) \dots} \quad (h = 2, 3, 4, \dots), \end{aligned}$$

puisque, la série

$$\frac{1}{\lambda_{h+1}} + \frac{1}{\lambda_{h+2}} + \frac{1}{\lambda_{h+3}} + \dots$$

étant, par hypothèse, absolument convergente, les produits infinis

$$\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{h+1}}\right) \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{h+2}}\right) \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{h+3}}\right) \dots$$

et

$$\left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right) \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}}\right) \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+3}}\right) \dots$$

le sont donc, eux-aussi, et diffèrent évidemment de zéro.

De plus, ces limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_h}{x_1} \right)^{(n)} = \left(\frac{x_h}{x_1} \right)$$

rendent absolument convergente chacune des séries

$$\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k^i \left(\frac{x_k}{x_1} \right),$$

i étant un entier positif quelconque ou zéro.

En effet, soit

$$u_h = \lambda_k^i \left(\frac{x_h}{x_1} \right),$$

et

$$u_{h+1} = \lambda_{h+1}^i \left(\frac{x_{h+1}}{x_1} \right);$$

alors

$$\left| \frac{u_{h+1}}{u_h} \right| = \left| \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}} \right|^{h-i-1} \cdot \frac{\left| 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_h} \right| \dots \left| 1 - \frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_h} \right|}{\left| 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{h+1}} \right| \dots \left| 1 - \frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_{h+1}} \right|} \cdot \frac{\left| 1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}} \right| \left| 1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+3}} \right| \dots}{\left| 1 - \frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_{h+2}} \right| \left| 1 - \frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_{h+3}} \right| \dots};$$

or, d'après l'hypothèse faite, on aura

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}} \right|^{h-i-1} = 0,$$

tandis que

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\left| 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_h} \right| \dots \left| 1 - \frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_h} \right|}{\left| 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{h+1}} \right| \dots \left| 1 - \frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_{h+1}} \right|} \cdot \frac{\left| 1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}} \right| \left| 1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+3}} \right| \dots}{\left| 1 - \frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_{h+2}} \right| \left| 1 - \frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_{h+3}} \right| \dots} &= \\
 = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\left| 1 - \frac{\lambda_N}{\lambda_h} \right| \left| 1 - \frac{\lambda_{N+1}}{\lambda_h} \right| \dots \left| 1 - \frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_h} \right|}{\left| 1 - \frac{\lambda_N}{\lambda_{h+1}} \right| \left| 1 - \frac{\lambda_{N+1}}{\lambda_{h+1}} \right| \dots \left| 1 - \frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_{h+1}} \right|} & \\
 \cdot \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\left| 1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}} \right| \left| 1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+3}} \right| \dots}{\left| 1 - \frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_{h+2}} \right| \left| 1 - \frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_{h+3}} \right| \dots} &< \frac{\left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p^n} \right) \right)^2}{\left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^n} \right) \right)},
 \end{aligned}$$

comme on s'en rendra aisément compte.

Donc,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{h+1}}{u_h} \right| = 0,$$

d'où se déduira immédiatement la convergence absolue.

Il en résulte que, sous l'hypothèse (12), une solution du système (1) sera fournie par les formules;

$$(13) \left\{ \begin{aligned} x_1 &= C, \quad x_h = (-1)^{h-1} C \frac{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{h-1}}{\lambda_h^{h-2}}. \\ &\frac{\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{h-1}} \right) \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{h+1}} \right) \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{h+2}} \right) \dots}{\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_h} \right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_h} \right) \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}} \right) \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}} \right) \dots} \\ &\quad (h = 2, 3, 4, \dots), \end{aligned} \right.$$

C désignant une constante arbitraire.

En disposant convenablement de C , on peut faire assumer évidemment à une inconnue quelconque x_n la valeur $\alpha \neq 0$ arbitrairement prescrite.

III. Sur l'application du principe des réduites dans un cas particulier.

14. Comme nous venons de voir (n° 11), la méthode de Fourier ne s'applique pas au système (1) dans le cas (7).

Cependant, il ne faut pas en conclure que le principe des réduites, lui-même, ne puisse pas s'appliquer. En effet, nous allons démontrer que l'on peut résoudre le système donné par une méthode nouvelle ne représentant, au fond, qu'un autre mode d'application du principe des réduites; au lieu de ramener le système donné à un seul système réduit, comme nous l'avons fait dans les cas précédents, nous le ramènerons, dans ce cas-ci, à une suite indéfinie de systèmes réduits.

Quant à la réduction, elle sera effectuée par deux étapes, à l'aide des systèmes infinis intermédiaires que l'on pourrait appeler systèmes réduits généralisés, dont chacun peut être résolu par la méthode de Fourier, c'est-à-dire être ramené à un seul système réduit fini.

En calculant les solutions des systèmes réduits, et en passant à la limite, on obtiendra les solutions des systèmes infinis intermédiaires; avec celles-ci on construira des solutions du système donné.

Notre tâche consistera donc en ce que nous aurons à fixer la loi de formation des systèmes réduits généralisés, et à déterminer le mode de construction des solutions du système donné, à l'aide de celles des systèmes réduits généralisés.

15. Étudions d'abord la loi de formation des systèmes réduits généralisés.

Le système particulier (S), que nous allons résoudre, s'écrit

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} n^i x_n \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

C'est un système appartenant au type I, et complètement caractérisé par la suite indéfinie (E) des $\lambda_n = n$:

$$(E) = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Décomposons maintenant la suite (E) en une infinité de suites partielles (E_n) de la façon suivante: Constituons avec les

éléments de la suite (E) , c'est-à-dire avec les nombres naturels, le Tableau à double entrée:

1	2^1	2^2	. . .	2^h	. . .
3	3.2^1	3.2^2	. . .	3.2^h	. . .
5	5.2^1	5.2^2	. . .	5.2^h	. . .
.	.	.	. . .	.	. . .
$(2n+1)$	$(2n+1)2^1$	$(2n+1)2^2$	. . .	$(2n+1)2^h$	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

On se rend aisément compte de ce que ce Tableau contient tous les nombres naturels, et que chacun d'eux n'y rentre qu'une seule fois en y occupant une place bien déterminée. En effet, s étant un entier positif, il est évident qu'on ne pourra le présenter que d'une seule manière sous la forme

$$s = (2n+1)2^h,$$

h et n étant certains entiers positifs ou zéros; donc, s occupera dans notre Tableau la case qui est située dans la file de rang $(n+1)$ et dans la colonne de rang $h+1$.

En entendant par (E_n) la suite

$$(E_n) = 2n+1, (2n+1)2^1, \dots (2n+1)2^h, \dots$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

et en tenant compte du Tableau à double entrée, l'on constatera immédiatement que la suite donnée (E) se décomposera, en effet, en une infinité de suites partielles (E_n) , ce que l'on peut exprimer par la formule symbolique

$$(E) = (E_0) + (E_1) + \dots + (E_n) + \dots$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, la suite (E) caractérise complètement le système donné (S) ; or, par analogie, chacune des suites partielles (E_n) déterminera, à son tour, un système (S_n) .

En désignant les inconnues du système (S_n) respectivement par $y_{n1}, y_{n2}, \dots y_{n(h+1)}, \dots$, il se présentera sous la forme suivante:

$$(S_n) \dots \quad 0 = \sum_{h=0}^{\infty} [(2n+1)2^h]^i y_{n(h+1)} \quad \left(\begin{array}{l} i = 0, 1, 2, \dots \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right).$$

Ainsi, l'on obtiendra une infinité de systèmes (S_n) bien déterminés. En les examinant de près, on verra tout de suite que, quel que soit l'entier positif n , le système (S_n) est équivalent au système (S_0)

$$0 = \sum_{h=0}^{\infty} (2^h)^i y_{0(h+1)} \quad (i=0, 1, 2, \dots),$$

les systèmes (S_n) et (S_0) ayant évidemment tous les deux les mêmes solutions. Aussi, peut-on poser tout simplement

$$y_{n(h+1)} = y_{h+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

et calculer les valeurs

$$y_1, y_2, \dots, y_{h+1}, \dots$$

à l'aide de n'importe quel système (S_n) . Or, prenons le système (S_0) et remarquons qu'il s'obtiendra du système (1) en y posant

$$\lambda_n = 2^{n-1} \quad \text{et} \quad x_n = y_n.$$

D'après le n° 12, on pourra en conclure immédiatement que le système (S_0) peut être résolu par la méthode de Fourier, les valeurs des inconnues $y_1, y_2, \dots, y_{h+1}, \dots$ s'exprimant à l'aide des formules (11), si l'on y remplace p par 2.

On aura donc

$$(14) \quad y_1 = C, \quad y_{h+1} = (-1)^h \frac{2^h}{(2-1)(2^2-1)\dots(2^h-1)} C$$

$$(h = 1, 2, 3, \dots),$$

C étant une constante arbitraire.

16. Démontrons maintenant que, en employant les solutions des systèmes (S_n) , on peut construire une solution du système donné (S) , c'est-à-dire que les systèmes (S_n) peuvent être considérés, par rapport au système (S) , comme systèmes réduits généralisés.

En effet, convenons de déterminer les valeurs des inconnues (x_s) du système donné (S) de la façon suivante:

Étant donné le rang s de l'inconnue x_s , nous le présenterons sous la forme

$$s = (2n+1)2^h \quad (\text{voir n° 15}),$$

ce qui fera correspondre à s une seule valeur bien déterminée de h , ainsi qu'une seule valeur de n .

Cela étant, nous poserons $x_s = y_{h+1}$, où y_{h+1} , dépendant d'une constante arbitraire C , sera fourni par les formules (14).

Nous verrons que, en spécifiant convenablement cette constante arbitraire C , nous obtiendrons ainsi une solution du système donné (S).

Il est clair qu'il faut spécifier C , puisque, d'après ce que nous venons de dire, on obtiendra, en particulier,

$$x_1 = C, \quad x_3 = C, \quad \dots \quad x_{2n+1} = C, \quad \dots;$$

par suite, si l'on y entendait par C une constante arbitraire, la première série du système (S)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

(pour ne parler que d'elle) contiendrait une infinité de termes tout à fait arbitraires et, par conséquent, elle n'aurait évidemment aucun sens précis.

De même, en spécifiant C , il faut tenir compte de n . En effet, si l'on prenait pour C , indépendamment de n , la même valeur quelconque $a \neq 0$, on aurait

$$x_1 = a, \quad x_3 = a, \quad \dots \quad x_{2n+1} = a, \quad \dots;$$

donc, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

contenant le même terme a une infinité de fois, ne serait pas convergente.

Or, étant $s = (2n+1)2^h$, prenons $x_s = y_{h+1}$ en posant dans les formules (14), par exemple,

$$C = \frac{1}{(n+1)! A_n},$$

où A_n est une constante quelconque assujettie à la condition

$$|A_n| \geq 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Alors on aura

$$(15) \begin{cases} x_s = \frac{1}{(n+1)! A_n} & (h=0), \\ x_s = (-1)^h \frac{2^h}{(2-1)(2^2-1)\dots(2^h-1)} \cdot \frac{1}{(n+1)! A_n} & (h=1,2,3\dots), \\ \text{étant } s = (2n+1)2^h \text{ et } n \geq 0, \end{cases}$$

et, comme nous verrons, les valeurs des x_s déterminées par ces formules constitueront une solution du système donné (S).

17. Démontrons maintenant que les x_s fournis par les formules (15) rendront absolument convergente chacune des séries du système (S), par exemple,

$$\sum_{s=1}^{\infty} s^i x_s,$$

i étant un entier positif quelconque ou zéro.

En effet, après avoir fixé i , l'on peut toujours, comme nous le verrons, indiquer respectivement un entier positif N tel que soit

$$(16) \quad |s^i x_s| < \frac{1}{s^2} \quad \text{pour } s > N.$$

Or, la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2}$$

étant convergente, on en déduirait immédiatement la convergence absolue de la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} s^i x_s.$$

Écrivons l'inégalité (16) sous la forme suivante

$$|s^{i+2} x_s| < 1,$$

et désignons

$$U_s = \frac{s^{i+2} 2^h}{(2-1)(2^2-1)\dots(2^h-1)(n+1)!};$$

alors, en tenant compte de ce que $|A_n| \geq 1$, et $s = (2n + 1)2^h$, on aura évidemment

$$|s^{i+2}x_s| \leq U_s.$$

Il en résultera donc que, si l'inégalité $U_s < 1$ pour $s > N$ était exacte, l'inégalité (16) le serait à fortiori.

Quant à U_s , il est aisé de voir qu'il s'écrit

$$U_s = P(h) \cdot Q(n),$$

où l'on désigne par $P(h)$ et $Q(n)$ les expressions suivantes :

$$P(h) = \frac{2^{h(i+3)}}{(2^1 - 1)(2^2 - 1) \dots (2^h - 1)},$$

$$Q(n) = \frac{(2n + 1)^{i+2}}{(n + 1)!}.$$

Or, sous une autre forme, $P(h)$ étant

$$P(h) = \frac{1}{2^{\frac{h}{2}(h-2i-5)} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^h}\right)},$$

on en déduira aisément que $\lim_{h \rightarrow \infty} P(h) = 0$; de même, il est clair que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = 0.$$

Par suite, l'on peut bien indiquer, d'une part, deux nombres positifs P et Q tels que

$$\begin{aligned} P &\geq P(h) & (h = 0, 1, 2, \dots), \\ Q &\geq Q(n) & (n = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

et, d'autre part, deux nombres entiers positifs h_0 et n_0 tels que

$$\begin{aligned} P \cdot Q(n) &< 1 & \text{pour } n \geq n_0, \\ Q \cdot P(h) &< 1 & \text{pour } h \geq h_0. \end{aligned}$$

Il en résultera donc que $U_s < 1$ pour $h \geq h_0$, indépendamment de n , ainsi que pour $n \geq n_0$, indépendamment de h ; par conséquent,

si pour une valeur entière et positive de $s = (2n + 1)2^h$ l'inégalité $U_s < 1$ devenait inexacte, ce ne serait possible que sous la condition que les valeurs correspondantes de n et h satisfassent à la fois aux inégalités :

$$n < n_0 \text{ et } h < h_0.$$

Donc, la valeur la plus grande de s , pour laquelle l'inégalité $U_s < 1$ pourrait éventuellement cesser d'être exacte, serait

$$[2(n_0 - 1) + 1] 2^{h_0-1} = (2n_0 - 1) 2^{h_0-1}.$$

En la désignant par N :

$$N = (2n_0 - 1) 2^{h_0-1},$$

on aura en tout cas

$$U_s < 1 \quad \text{pour} \quad s > N = (2n_0 - 1) 2^{h_0-1}.$$

Donc, la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} s^i x_s$$

sera, en effet, absolument convergente et aura, par suite, une somme bien déterminée ne dépendant ni de l'ordre des termes de la série ni des différents modes de groupement de ces termes.

D'après cela, en tenant compte de ce que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} s^i x_s$$

contient tous les termes des $(i + 1)^{\text{ièmes}}$ séries appartenant aux systèmes (S_n) , et qu'elle n'en contient pas d'autres, il en résultera immédiatement que la somme de notre série sera nécessairement nulle, puisque les sommes des $(i + 1)^{\text{ièmes}}$ séries, appartenant aux systèmes (S_n) , sont elles-mêmes nulles.

Donc, les x_s déterminés par les formules (15) constituent, en effet, une solution du système donné (S) .

En multipliant toutes ces valeurs par une constante arbitraire A , on obtiendra encore une solution du système (S) , ce dernier étant un système homogène.

18. La solution du système (S) dépendant de la constante arbitraire A et des quantités A_n , assujetties à la condition

$$|A_n| \geq 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

s'écrit sous la forme suivante :

$$(16) \begin{cases} x_s = \frac{A}{(n+1)! A_n} & \text{pour } h=0, \\ x_s = (-1)^h \frac{2^h}{(2-1)(2^2-1)\dots(2^h-1)} \cdot \frac{A}{(n+1)! A_n} & \text{pour } h=1, 2, 3, \dots, \\ \text{où } s = (2n+1)2^h \text{ et } n \geq 0. \end{cases}$$

En l'examinant de près, on constatera :

- 1° pour $A \neq 0$ aucune des inconnues x_s n'est zéro : $x_s \neq 0$;
- 2° étant donnée, d'une part, une suite finie de r quantités quelconques différentes de zéro : $a_1, a_2, \dots, a_r$, et, d'autre part, une suite de r nombres entiers positifs : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ appartenant tous à des suites partielles distinctes (E_i) (n° 15), on peut faire assumer aux inconnues

$$x_{\alpha_1}, \quad x_{\alpha_2}, \quad \dots \quad x_{\alpha_r}$$

respectivement les valeurs prescrites

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots \quad a_r :$$

$$x_{\alpha_i} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

En effet, en remplaçant dans les formules (16) les x_{α_i} respectivement par les a_i et en résolvant ces r équations par rapport aux quantités A_k , on obtiendra évidemment pour elles les valeurs satisfaisant à la condition : $|A_k| \geq 1$, si l'on attribuera à la constante arbitraire A une valeur quelconque dont le module sera assez grand.

Nous venons de supposer que les nombres entiers positifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ appartiennent tous à des suites partielles distinctes (E_i) ; remarquons que c'est une condition tout à fait essentielle, puisque de toutes les inconnues, dont les rangs appartiennent à la même suite partielle (E_k), c'est seulement une quelconque qui peut être fixée arbitrairement ; en lui faisant assumer une valeur prescrite, on attribuera du même coup à toutes les autres in-

connues du même système (S_k) les valeurs correspondantes complètement déterminées.

Donc, la nature de la solution que nous venons de construire dépend essentiellement du mode de décomposition de la suite (E).

Or, généralement une suite (E) peut être décomposée d'une infinité de manières, c'est ce qui permettra de prescrire arbitrairement les valeurs d'un nombre fini d'inconnues quelconques.

En effet, étant donnée une suite de nombres entiers positifs quelconques: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, en décomposant la suite (E) en une infinité de suites partielles (E_n), on peut faire rentrer les éléments

$$\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \dots, \lambda_{\alpha_r}$$

dans r suites partielles, de sorte que chacune d'elles ne contienne qu'une seule de ces r quantités (λ_{α_i}).

Nous le démontrerons ci-dessous, dans le cas général, où les éléments λ_n de la suite (E) ne sont assujettis qu'aux conditions (3—5, n° 7), qui caractérisent les systèmes (1) et (2).

IV. Sur la construction des solutions des systèmes du type I.

19. Étant donné un système quelconque (S) du type I

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^i x_n \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

dont les λ_n satisfont aux conditions (3) et (4) (n° 7), nous allons le résoudre par une méthode dont l'idée essentielle vient d'être exposée tout à l'heure, à propos du système particulier (n° 15).

A cet effet nous aurons:

1° à décomposer convenablement la suite

$$(E) = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$$

en une infinité de suites partielles (E_n),

2° à faire correspondre à chacune des suites partielles (E_n) un système réduit généralisé (S_n), et

3° à construire des solutions du système donné (S) à l'aide de celles des systèmes (S_n).

Examinons l'une après l'autre ces trois questions.

20. Quant à la décomposition de la suite donnée (E) , nous démontrerons la proposition suivante:

Étant donnée une suite $(E) = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty,$$

on peut la décomposer en une infinité de suites partielles (E_n) , de sorte que, en désignant les éléments de (E_n) par

$$\mu_{n1}, \mu_{n2}, \dots, \mu_{nh}, \dots,$$

ceux-ci satisfassent à la condition

$$\left| \frac{\mu_{n(h+1)}}{\mu_{nh}} \right| \geq p > 1 \quad \begin{pmatrix} h = 1, 2, 3, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix},$$

et que les r éléments:

$$\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \dots, \lambda_{\alpha_r},$$

choisis arbitrairement dans la suite (E) , soient répartis entre r suites partielles (E_n) dont chacune n'en contiendra qu'un seul, r étant d'ailleurs un entier positif quelconque.

Désignons par (E^0) la suite naturelle des nombres

$$(E^0) = 1, 2, 3, \dots,$$

et par (E_n^0) la suite partielle suivante:

$$(E_n^0) = 1.2^{n-1}, 3.2^{n-1}, 5.2^{n-1}, \dots, (2k-1)2^{n-1}, \dots, \\ (n = 1, 2, 3, \dots);$$

en examinant alors le Tableau du n° 15, on se rendra aisément compte de ce que la suite (E^0) se décomposera, d'une façon bien déterminée, en une infinité de suites partielles (E_n^0) :

$$(E^0) = (E_1^0) + (E_2^0) + \dots + (E_n^0) + \dots$$

Or, il est à remarquer qu'il y a une correspondance univoque et réciproque entre les λ_n et les nombres naturels n : $\lambda_n \longleftrightarrow n$;

cela permettra de faire correspondre à la décomposition de la suite (E^0) la décomposition de la suite donnée (E)

$$(E) = (E_1) + (E_2) + \dots + (E_n) + \dots,$$

(E_n^1) y désignant la suite partielle suivante :

$$(E_n^1) = \lambda_{1,2^{n-1}}, \quad \lambda_{3,2^{n-1}}, \quad \dots \quad \lambda_{(2k-1)2^{n-1}}, \quad \dots$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots),$$

qui jouit évidemment de la même propriété fondamentale que la suite (E) , c'est-à-dire qui a aussi pour point-limite ∞ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_{(2k-1)2^{n-1}}| = \infty.$$

Cela étant, nous allons maintenant décomposer la suite donnée (E) conformément à la proposition énoncée

$$(E) = (E_1) + (E_2) + \dots + (E_n) + \dots,$$

en procédant de la manière suivante :

Nous construirons les suites (E_n) successivement: d'abord (E_1) , ensuite (E_2) , ensuite (E_3) , et ainsi de suite.

De même, les éléments des suites (E_n) seront choisis successivement: $\mu_{n1}, \mu_{n2}, \mu_{n3}, \dots$

Nous désignerons par

$$(E) - (E_1) - (E_2) - \dots - (E_{n-1})$$

la suite partielle de (E) que l'on obtiendra en enlevant de la suite (E) tous les éléments des suites partielles

$$(E_1), (E_2), \dots (E_{n-1}).$$

Cela étant, fixons la loi de formation des suites (E_n) de la manière suivante :

1° Le premier élément μ_{n1} de la suite (E_n) soit celui des éléments de la suite $(E) - (E_1) - (E_2) - \dots - (E_{n-1})$ qui occupe le rang le plus petit; en particulier, le premier élément μ_{11} de la suite (E_1) soit λ_1 : $\mu_{11} = \lambda_1$.

2° Tous les autres éléments de la suite (E_n)

$$\mu_{n2}, \mu_{n3}, \dots \mu_{nh}, \mu_{n(h+1)}, \dots$$

seront choisis exclusivement entre les éléments de la suite (E_n^1) .

3° Dans le cas où la suite (E_n^1) contient quelques-unes des r quantités fixées arbitrairement à l'avance :

$$\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \dots, \lambda_{\alpha_r},$$

on choisira $\mu_{n2}, \mu_{n3}, \dots, \mu_{nh}, \dots$ de sorte que la suite (E_n) n'en contienne qu'une seule au plus.

4° μ_{nh} étant déterminé, l'on prendra pour $\mu_{n(h+1)}$ celui des éléments de (E_n^1) dont le module sera

$$\geq |\mu_{nh}|^p, \quad p > 1,$$

et qui occupera le rang le plus petit possible, compatible avec la condition précédente (3°), p étant un nombre positif fixe.

D'après cette loi de formation, la construction d'une suite (E_n) peut être effectuée aisément.

En effet, pour déterminer le premier élément μ_{n1} , on n'aura qu'à trouver celui des éléments de la suite

$$(E) - (E_1) - (E_2) - \dots - (E_{n-1})$$

dont l'indice sera le plus petit. Or, pour cela il suffit de déterminer seulement un nombre fini de premiers éléments des suites $(E_1), (E_2), \dots, (E_{n-1})$, de sorte que l'on ne continue le procédé de formation de chacune de ces $(n-1)$ suites que jusqu'au moment que l'on obtiendra le premier élément dont le rang sera supérieur à celui du premier élément de la suite (E_n^1) , ce dernier étant 2^{n-1} .

Il est clair que, après un nombre fini d'opérations, on trouvera tous les éléments de la suite

$$(E) - (E_1) - (E_2) - \dots - (E_{n-1})$$

dont les rangs sont inférieurs à 1.2^{n-1} , et dont le nombre sera au moins un, puisque, d'après la condition 2°, $\lambda_{1.2^{n-1}}$ appartiendra certainement à celle-là.

Or, entre ces éléments, en nombre limité, il y aura évidemment un dont l'indice sera le plus petit; c'est celui-ci que l'on désignera par μ_{n1} .

Quant aux autres éléments de la suite (E_n)

$$\mu_{n2}, \mu_{n3}, \dots, \mu_{nh}, \dots,$$

on les choisira successivement entre les éléments de la suite

$$(E_n^1) = \lambda_1 2^{n-1}, \lambda_3 2^{n-1}, \dots \lambda_{(2k-1)} 2^{n-1}, \dots$$

en tenant compte des conditions 3° et 4°.

Ainsi, à chacune des suites (E_n^1) on fait correspondre une suite bien déterminée (E_n) . Le nombre des suites (E_n^1) étant l'infini, le nombre des suites (E_n) le sera, par suite, lui-aussi.

De la loi de formation des suites (E_n) on tirera aisément les conclusions suivantes :

1° Chacune des suites (E_n) ne contient que les éléments appartenant aussi à (E) .

2° Chacun des éléments de (E) appartiendra à l'une des suites partielles (E_n) et à une seule.

3° Les n premiers éléments de (E) rentrent dans les premières suites partielles $(E_1), (E_2) \dots$ dont le nombre sera n au plus.

4° Chacune des suites (E_n) satisfait aux conditions énoncées dans notre proposition.

Il en résultera donc que la décomposition de la suite donnée (E)

$$(E) = (E_1) + (E_2) + \dots + (E_n) + \dots,$$

que nous venons d'effectuer, sera bien telle qu'on l'exige dans notre proposition.

21. Après avoir décomposé la suite (E) en une infinité de suites partielles (E_n) , nous ferons correspondre à chacune d'elles (E_n) un système réduit généralisé (S_n)

$$0 = \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{nh}^i y_{nh} \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

en y désignant les inconnues par y_{nh} .

Tous ces systèmes (S_n) appartiennent évidemment au type I et, d'après la proposition du n° 20, ils sont caractérisés par la relation

$$\left| \frac{\mu_{n(h+1)}}{\mu_{nh}} \right| \geq p > 1 \quad \left(\begin{matrix} n = 1, 2, 3, \dots \\ h = 1, 2, 3, \dots \end{matrix} \right).$$

Par suite, d'après le n° 13, leurs solutions sont fournies par les formules (13), en y remplaçant les quantités

$$C, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_h, \dots$$

respectivement par

$$C_n, \mu_{n1}, \mu_{n2}, \mu_{n3}, \dots, \mu_{nh}, \dots$$

On aura donc

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} y_{n1} = C_n; \quad y_{nh} = (-1)^{h-1} C_n \frac{\mu_{n2} \mu_{n3} \dots \mu_{n(h-1)}}{\mu_{nh}^{h-2}} \dots \\ \left(1 - \frac{\mu_{n1}}{\mu_{n2}}\right) \left(1 - \frac{\mu_{n1}}{\mu_{n3}}\right) \dots \left(1 - \frac{\mu_{n1}}{\mu_{n(h-1)}}\right) \left(1 - \frac{\mu_{n1}}{\mu_{n(h+1)}}\right) \left(1 - \frac{\mu_{n1}}{\mu_{n(h+2)}}\right) \dots \\ \left(1 - \frac{\mu_{n2}}{\mu_{nh}}\right) \left(1 - \frac{\mu_{n3}}{\mu_{nh}}\right) \dots \left(1 - \frac{\mu_{n(h-1)}}{\mu_{nh}}\right) \left(1 - \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+1)}}\right) \left(1 - \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+2)}}\right) \dots \\ (h = 2, 3, 4, \dots), \end{array} \right.$$

C_n étant une constante arbitraire.

D'après le n° 13, on peut dire que

$$y_{nh} \neq 0 \quad \text{pour } C_n \neq 0.$$

22. Il nous reste enfin à construire une solution du système donné (S) à l'aide des solutions des systèmes réduits généralisés (S_n).

A cet effet nous établirons tout d'abord une correspondance univoque et réciproque entre les inconnues x_s du système donné (S) et celles des systèmes (S_n), c'est-à-dire les y_{nh} .

Remarquons que chacun des éléments λ_n de la suite (E) entre aussi dans une des suites partielles (E_n) et dans une seule (n° 20), y étant désigné par un μ à deux indices, et qu'inversement chacun des μ à deux indices représente l'un des λ ; c'est ce qui permettra d'établir la correspondance désirée.

En effet, soit, par exemple,

$$\lambda_s = \mu_{nh};$$

en tenant alors compte de ce que λ_s est lié dans le système (S) à l'inconnue x_s et que de même μ_{nh} est lié dans le système (S_n) à l'inconnue y_{nh} , on aura immédiatement la correspondance désirée

$$x_s \longleftrightarrow \lambda_s = \mu_{nh} \longleftrightarrow y_{nh},$$

ou simplement :

$$x_s \longleftrightarrow y_{nh}.$$

Cela étant, nous allons démontrer qu'en prenant

$$x_s = y_{nh} \quad \text{pour} \quad x_s \longleftrightarrow y_{nh},$$

y_{nh} étant déterminé par les formules (17), on obtiendra une solution du système donné (S) en y spécifiant convenablement la constante arbitraire C_n .

Remarquons tout d'abord que la série

$$\sum_{h=1}^{\infty} (2nh)^3 \mu_{nh}^n y_{nh}$$

est absolument convergente, quelle que soit la valeur attribuée à la constante arbitraire C_n de laquelle dépend, d'après les formules (17), y_{nh} .

En effet, en posant

$$u_h = |\mu_{nh}^n y_{nh}| \quad \text{et} \quad v_h = |(2nh)^3 \mu_{nh}^n y_{nh}|,$$

on aura

$$\frac{v_{h+1}}{v_h} = \frac{(h+1)^3}{h^3} \cdot \frac{u_{h+1}}{u_h}.$$

Or,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{h+1}{h} \right)^3 = 1$$

et, d'après le n° 13,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{u_{h+1}}{u_h} = 0;$$

par suite,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{v_{h+1}}{v_h} = 0.$$

Il en résultera, en particulier, que, en prenant, dans les formules (17), $C_n = 1$ et en désignant par $\bar{y}_{nh}$ la valeur correspondante de y_{nh} ($h = 1, 2, 3, \dots$), on peut trouver un entier positif N_n tel que pour $h \geq N_n$ soit

$$|(2nh)^3 \mu_{nh}^n \bar{y}_{nh}| < 1,$$

le nombre des termes de la série

$$\sum_{h=1}^{\infty} (2nh)^3 \mu_{nh}^n y_{nh}$$

dont les modules sont ≥ 1 étant $N_n - 1$.

Entre ces $N_n - 1$ termes nous choisirons celui dont le module sera le plus grand, ou au moins pas plus petit que ceux des autres $N_n - 2$ termes.

En désignant son module par r_n , nous déterminons un nombre positif q_n de la façon suivante :

$$q_n = r_n, \text{ si } N_n > 1, \text{ tandis que } q_n = 1, \text{ si } N_n = 1;$$

cela étant, convenons de spécifier la constante arbitraire C_n de sorte que soit

$$C_n = \frac{1}{q_n A_n},$$

A_n y désignant une constante assujettie à la seule condition

$$|A_n| > 1.$$

D'après cela, on aura évidemment

$$|(2nh)^3 \mu_{nh}^n y_{nh}| < 1 \quad (h = 1, 2, 3, \dots);$$

par suite,

$$|\mu_{nh}^n y_{nh}| < \frac{1}{(2nh)^3},$$

ou, en tenant compte de ce que $2nh \geq n + h$, on aura

$$|\mu_{nh}^n y_{nh}| < \frac{1}{(n+h)^3}.$$

Pour $|\mu_{nh}| \geq 1$ on en déduira l'inégalité

$$(18) \quad |\mu_{nh}^i y_{nh}| < \frac{1}{(n+h)^3} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

permettant de démontrer ci-dessous la convergence absolue des séries du système (S).

23. En prenant $x_s = y_{nh}$ (pour $x_s \longleftrightarrow y_{nh}$) et en posant

$$C_n = \frac{1}{\varrho_n A_n} \quad (\text{n}^\circ 22),$$

les valeurs des x_s constitueront une solution du système donné (S).

En effet, elles rendent absolument convergente chacune des séries du système (S)

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^i x_s,$$

i étant un entier positif quelconque ou zéro.

On s'en assurera par les considérations suivantes. En remarquant que $\lambda_s = \mu_{nh}$, et $x_s = y_{nh}$ et en tenant compte du n° 20, on s'aperçoit immédiatement de ce que la $(i+1)^{\text{ième}}$ série du système (S) contient tous les termes des $(i+1)^{\text{ièmes}}$ séries des systèmes réduits généralisés (S_n) et qu'elle n'en contient que ceux-ci.

Or, désignons

$$v_{nh} = \mu_{nh}^i y_{nh} = \lambda_s^i x_s,$$

constituons le Tableau à double entrée

$ v_{11} $	$ v_{12} $	$ v_{13} $	$\cdot \cdot \cdot$	$ v_{1h} $	$\cdot \cdot \cdot$
$ v_{21} $	$ v_{22} $	$ v_{23} $	$\cdot \cdot \cdot$	$ v_{2h} $	$\cdot \cdot \cdot$
$\cdot \cdot \cdot$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cdot \cdot \cdot$
$ v_{n1} $	$ v_{n2} $	$ v_{n3} $	$\cdot \cdot \cdot$	$ v_{nh} $	$\cdot \cdot \cdot$
$\cdot \cdot \cdot$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cdot \cdot \cdot$

et servons nous du critère de convergence suivant:

La série double à termes positifs

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} |v_{nh}|$$

converge, si l'on a

$$|v_{nh}| < \frac{1}{(n+h)^2} + \varrho \quad (\varrho > 0)$$

pour $n \geq N$, indépendamment de h , et pour $h \geq H$, indépendamment de n (¹).

Nous verrons que dans ce cas-ci l'on peut bien trouver deux entiers positifs N et H tels que soit

$$|v_{nh}| < \frac{1}{(n+h)^{2+\varrho}} \quad (\varrho > 0)$$

pour $n \geq N$, indépendamment de h , et pour $h \geq H$, indépendamment de n .

En effet, en tenant compte de ce que dans la suite

$$(E) = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_3, \dots$$

les modules des éléments (λ_k) vont en croissant

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = \infty \right),$$

on peut dire que $|\lambda_k| \geq 1$ pour $k \geq k_0$, k_0 étant un certain entier positif. D'autre part, d'après le mode de décomposition de la suite (E) (n° 20), les premiers $(k_0 - 1)$ éléments de (E) sont répartis entre les premières suites partielles (E_m) dont le nombre sera $(k_0 - 1)$ au plus. Il en résultera donc que l'on pourra indiquer un entier positif N_1 tel que

$$|\mu_{nh}| \geq 1 \quad \text{pour } n \geq N_1, \text{ quel que soit } h.$$

(1) Numérotons les termes du Tableau ci-dessus d'après la règle suivante:

$$|v_{11}| = u_1; \quad |v_{21}| = u_2, \quad |v_{12}| = u_3; \quad |v_{31}| = u_4, \quad |v_{22}| = u_5, \quad |v_{13}| = u_6;$$

et ainsi de suite; en remarquant alors que sur la première diagonale se trouve un seul élément, sur la deuxième, 2 éléments, sur la troisième, 3 éléments, et ainsi de suite, on aura pour $u_m = |v_{nh}|$

$$m \leq 1 + 2 + 3 + \dots + (n+h-1) = \frac{(n+h)(n+h-1)}{2} < (n+h)^2;$$

$$\text{donc, } m^{1+\varrho_1} < (n+h)^2 + 2\varrho_1 \quad (\varrho_1 > 0)$$

et, par suite, en posant $2\varrho_1 = \varrho$, on aura, d'après l'hypothèse faite,

$$u_m = |v_{nh}| < \frac{1}{(n+h)^{2+\varrho}} < \frac{1}{m^{1+\varrho_1}} \quad (\varrho_1 > 0),$$

d'où l'on déduira immédiatement la convergence de la série double

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} |v_{nh}|.$$

Or, i étant fixé à l'avance, désignons par N celui des deux entiers i et N_1 lequel ne sera pas plus petit que l'autre; alors, d'après l'inégalité (18), on aura

$$|v_{nh}| < \frac{1}{(n+h)^{2+q}} \quad (q = 1 > 0)$$

pour $n \geq N$, indépendamment de h .

Donc, il ne nous reste qu'à examiner les termes qui occupent les premières $(N-1)$ lignes dans notre Tableau et qui appartiennent aux $(i+1)^{\text{ièmes}}$ séries des $(N-1)$ premiers systèmes réduits généralisés (S_n) . Or, on s'en assurera aisément, tout comme au n° 22, que chacune des $(N-1)$ séries:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2nh)^3 \mu_{nh}^i y_{nh} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N-1)$$

sera absolument convergente; par suite, pour chacune d'elles on pourra indiquer respectivement un entier positif H_n tel que soit

$$|(2nh)^3 \mu_{nh}^i y_{nh}| < 1 \quad \text{pour } h \geq H_n \\ (n = 1, 2, 3, \dots, N-1),$$

d'où l'on déduira

$$|\mu_{nh}^i y_{nh}| < \frac{1}{(2nh)^3} < \frac{1}{(n+h)^3}.$$

Donc, en désignant par H celui des $(N-1)$ entiers: $H_1, H_2, \dots, H_{N-1}$ qui ne sera pas plus petit que chacun des autres, on aura

$$|v_{nh}| < \frac{1}{(n+h)^{2+q}} \quad (q = 1)$$

pour $h \geq H$, indépendamment de n .

Il en résultera, d'après le critère cité, que la série double

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} |v_{nh}|$$

sera bien convergente; donc, la série

$$\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{nh}$$

sera absolument convergente.

Elle aura, par suite, une somme bien déterminée, ne dépendant ni de l'ordre ni des différents modes de groupement des termes. Or, remarquons que

$$0 = \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{nh}^i y_{nh}$$

[c'est la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation du système (S_n)]; d'après cela, on aura évidemment

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} v_{nh},$$

puisque la série double

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} v_{nh}$$

contient tous les termes des $(i+1)^{\text{ièmes}}$ séries des systèmes (S_n) et n'en contient que ceux-ci.

Enfin, la $(i+1)^{\text{ième}}$ série du système donné (S) , ayant les mêmes termes que la série absolument convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} v_{nh}$$

et ne différant de celle-ci que par le mode de groupement des termes, on en conclut immédiatement qu'elle sera absolument convergente, elle-aussi, et qu'elle aura pour somme zéro :

$$0 = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^i x_s;$$

donc, les valeurs des x_s déterminées ci-dessus satisferont bien au système donné (S) .

24. En multipliant les valeurs de toutes les inconnues constituant une solution du système donné (S) par une constante arbitraire A , on obtiendra évidemment encore une solution du système (S) , celui-ci étant un système homogène.

Aussi, une solution dépendant de la constante arbitraire A et des quantités A_n assujetties à la condition: $|A_n| > 1$ s'exprimera-t-elle à l'aide des formules suivantes:

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} x_s = \frac{A}{q_n A_n} \quad \text{pour } h=1, \\ \\ x_s = (-)^{h-1} \frac{A}{q_n A_n} \frac{\mu_{n2} \mu_{n3} \dots \mu_{n(h-1)}}{\mu_{nh}^{h-2}} \cdot \\ \\ \frac{\left(1 - \frac{\mu_{n1}}{\mu_{n2}}\right) \left(1 - \frac{\mu_{n1}}{\mu_{n3}}\right) \dots \left(1 - \frac{\mu_{n1}}{\mu_{n(h-1)}}\right) \left(1 - \frac{\mu_{n1}}{\mu_{n(h+1)}}\right) \left(1 - \frac{\mu_{n1}}{\mu_{n(h+2)}}\right) \dots}{\left(1 - \frac{\mu_{n2}}{\mu_{nh}}\right) \left(1 - \frac{\mu_{n3}}{\mu_{nh}}\right) \dots \left(1 - \frac{\mu_{n(h-1)}}{\mu_{nh}}\right) \left(1 - \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+1)}}\right) \left(1 - \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+2)}}\right) \dots} \\ \\ (h = 2, 3, 4, \dots), \end{array} \right.$$

les valeurs de n et de h qui correspondent à s étant déterminées par la décomposition de la suite (E) (n° 20): $\lambda_s = \mu_{nh}$, et q_n se calculant d'après le n° 22.

Grâce à la présence des quantités A et A_n dans les formules (19), on peut faire prendre aux inconnues

$$x_{a_1}, x_{a_2}, \dots x_{a_r}$$

du système (S) respectivement les valeurs

$$a_1, a_2, \dots a_r,$$

prescrites arbitrairement, si l'on choisit ces r inconnues d'une certaine manière, r étant d'ailleurs un entier positif quelconque.

En effet, ceux des x_s qui constituent, d'après le mode de détermination des x_s , la solution du système réduit généralisé (S_n) , dépendent tous de la même quantité $\frac{A}{A_n}$; par suite, ce n'est qu'une seule de ces inconnues à laquelle on peut faire prendre une valeur prescrite arbitrairement, en choisissant convenablement la valeur de $\frac{A}{A_n}$; celle-ci une fois fixée, toutes les autres inconnues du même système (S_n) obtiendront évidemment des valeurs complètement déterminées.

D'après cela, il faut donc que parmi les r inconnues:

$$x_{a_1}, x_{a_2}, \dots x_{a_r}$$

il n'y ait aucune paire correspondant au même système réduit (S_n) .

D'autre part, c'est aussi la condition suffisante. En effet, supposons-la satisfaite et remplaçons dans les formules (19) les

inconnues $x_{a_1}, x_{a_2}, \dots x_{a_r}$ respectivement par $a_1, a_2, \dots a_r$; en résolvant alors ces r équations par rapport aux quantités indéterminées $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots A_{n_r}$, on constatera aisément qu'il suffit d'attribuer à la constante arbitraire A des valeurs dont les modules sont assez grands, pour que les valeurs correspondantes $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots A_{n_r}$ satisfassent à la condition

$$|A_{n_i}| > 1 \quad (i = 1, 2, \dots r),$$

quel que soit l'entier positif r .

C'est donc d'une infinité de manières que l'on peut choisir $A, A_{n_1}, A_{n_2}, \dots A_{n_r}$ de sorte que l'on ait

$$x_{a_i} = a_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots r).$$

Or, les formules (19) renferment une infinité de quantités A_n ($n = 1, 2, 3, \dots$); par conséquent, après avoir fixé d'une certaine manière $A, A_{n_1}, A_{n_2}, \dots A_{n_r}$, il y restera encore une infinité de A_n indéterminés. On peut donc dire que, quel que soit l'entier positif r , en choisissant les r inconnues: $x_{a_1}, x_{a_2}, \dots x_{a_r}$ de sorte qu'il n'y ait aucune paire correspondant au même système (S_n), les formules (19) permettront de calculer une infinité de solutions numériques du système donné (S) telles que, dans tous le cas, les inconnues $x_{a_1}, x_{a_2}, \dots x_{a_r}$ prennent respectivement les valeurs arbitrairement prescrites $a_1, a_2, \dots a_r$.

En remarquant enfin que, d'après la proposition du n° 20, la suite

$$(E) = \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n, \dots$$

peut être décomposée toujours de sorte que les r éléments quelconques: $\lambda_{a_1}, \lambda_{a_2}, \dots \lambda_{a_r}$ appartiennent tous à des suites partielles distinctes (E_n), il en résultera immédiatement que l'on peut faire correspondre les r inconnues: $x_{a_1}, x_{a_2}, \dots x_{a_r}$, arbitrairement choisies à l'avance, à des systèmes réduits généralisés distincts (S_n), et leur faire prendre, par suite, les valeurs arbitrairement prescrites.

On en conclut donc qu'étant donné un système quelconque (S) du type I, l'application convenable du principe des réduites permet toujours de construire une infinité de solutions du système (S), telles qu'aucune des inconnues ne soit zéro et que les inconnues $x_{a_1}, x_{a_2}, \dots x_{a_r}$, arbitrairement

choisies à l'avance, prennent les valeurs arbitrairement prescrites (a_i) :

$$x_{a_i} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

r étant un nombre entier positif quelconque.

V. Sur la construction des solutions des systèmes du type II.

25. Étant donné un système quelconque du type II

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n^i x_n,$$

dont les λ_n satisfont aux conditions (3), (4) et (5), on peut le résoudre par un procédé tout à fait analogue à celui que nous venons d'appliquer aux systèmes du type I. A cet effet on n'aura, au fond, qu'à reprendre tous les raisonnements précédents, en n'y apportant que des modifications légères permettant d'obtenir ici les mêmes résultats que dans le cas des systèmes du type I.

La méthode de construction des solutions étant cette fois, quant à ses traits essentiels, la même que dans le cas précédent, il ne s'agira pas, ci-dessous, de la développer de nouveau, mais il suffira de mettre en évidence la légitimité et l'efficacité de l'application aux systèmes du type II de la méthode déjà exposée à propos des systèmes du type I. C'est dans cet ordre d'idées que nous allons maintenant faire quelques remarques nécessaires.

26. La proposition concernant la décomposition de la suite (E) , démontrée au n° 20, restera valable aussi dans le cas où l'on conviendra d'entendre par (E) la suite

$$\dots \lambda_{-n}, \lambda_{-(n-1)}, \dots \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n, \dots$$

qui caractérise le type II, c'est-à-dire qui satisfait aux conditions (3), (4) et (5).

En effet, en désignant

$$(E^{(1)}) = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n, \dots \quad \text{et}$$

$$(E^{(2)}) = \lambda_0, \lambda_{-1}, \lambda_{-2}, \dots \lambda_{-n}, \dots,$$

on aura

$$(E) = (E^{(1)}) + (E^{(2)}).$$

Or, les éléments de la première de ces deux suites partielles satisfaisant à la condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty,$$

on peut donc la décomposer selon la proposition énoncée:

$$(E^{(1)}) = (E_1^{(1)}) + (E_2^{(1)}) + \dots + (E_n^{(1)}) + \dots,$$

où les suites partielles

$$(E_n^{(1)}) = \mu_{n1}^{(1)}, \mu_{n2}^{(1)}, \dots, \mu_{nh}^{(1)}, \dots$$

sont telles que

$$1^\circ \quad \left| \frac{\mu_{n(h+1)}^{(1)}}{\mu_{nh}^{(1)}} \right| \geq p > 1$$

et 2° que $(E_n^{(1)})$ ne contient des r quantités: $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \dots, \lambda_{\alpha_r}$, arbitrairement choisies à l'avance, dans la suite donnée (E) , qu'une seule au plus.

D'autre part, en tenant compte de ce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_{n1}^{(1)}| = \infty,$$

on peut indiquer évidemment un entier positif M tel que

$$\left| \frac{\mu_{n1}^{(1)}}{\lambda} \right| \geq p > 1 \quad \text{pour } n \geq M,$$

λ y ayant le même sens que dans l'inégalité (5) (n° 7).

Or, à partir de la $M^{\text{ième}}$ suite partielle $(E_M^{(1)})$, associons à chacune d'elles, d'après certaine règle, un élément λ_{-i} de la suite partielle $(E^{(2)})$, de sorte que 1° la suite

$$(E_n) = \lambda_{-i}, \mu_{n1}^{(1)}, \mu_{n2}^{(1)}, \dots, \mu_{nh}^{(1)}, \dots \quad (n \geq M)$$

ne contienne des r quantités: $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \dots, \lambda_{\alpha_r}$ qu'une seule au plus, et 2° qu'à l'aide des suites (E_n) s'établisse une correspondance univoque et réciproque entre les éléments de la suite $(E^{(2)})$, d'une part, et les suites partielles $(E_n^{(1)})$, d'autre part, où $n \geq M$:

$$\lambda_{-i} \longleftrightarrow (E_n^{(1)}).$$

En faisant correspondre ainsi à chacun des éléments λ_{-i} ($i = 0, 1, 2, \dots$) une suite partielle $(E_n^{(1)})$ ($n \geq M$), on obtiendra une infinité de suites partielles (E_n) . Désignons leurs éléments de la manière suivante :

$$\lambda_{-i} = \mu_{n1}, \quad \mu_{nh}^{(1)} = \mu_{n(h+1)} \quad (n \geq M)$$

et posons pour $n < M$

$$\mu_{nh}^{(1)} = \mu_{nh}, \quad \text{ainsi que} \quad (E_n^{(1)}) = (E_n) \quad (n < M);$$

alors la décomposition de la suite (E) s'obtiendra évidemment sous la forme

$$(E) = (E_1) + (E_2) + \dots + (E_n) + \dots$$

Donc, en tenant compte de l'inégalité

$$|\lambda_{-i}| < \lambda \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{n}^\circ 7),$$

il en résultera la proposition suivante :

Étant donnée une suite

$$(E) = \dots \lambda_{-n}, \dots \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n, \dots$$

telle que l'on ait :

$$1^\circ \quad \lambda_h \neq \lambda_k \quad \text{pour } h \neq k,$$

$$2^\circ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty,$$

$$3^\circ \quad |\lambda_{-n}| < \lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

on peut la décomposer en une infinité de suites partielles (E_n) , de sorte que, en désignant les éléments de (E_n) par

$$\mu_{n1}, \mu_{n2}, \dots, \mu_{nh}, \dots,$$

ceux-ci satisfassent à la condition

$$\left| \frac{\mu_{n(h+1)}}{\mu_{nh}} \right| \geq p > 1 \quad \begin{pmatrix} h = 1, 2, 3, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix},$$

et que les r éléments : $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \dots, \lambda_{\alpha_r}$, arbitrairement choisis à l'avance, dans la suite (E) , soient

répartis entre r suites partielles (E_n) dont chacune n'en contiendra qu'un seul, r étant d'ailleurs un nombre entier positif quelconque.

27. Après avoir décomposé la suite (E) en une infinité de suites partielles (E_n) , nous ferons correspondre à chacune d'elles (E_n) un système réduit généralisé (S_n) , à savoir :

$$(S_n) \quad 0 = \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{nh}^i y_{nh} \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

dont les inconnues y_{nh} se calculeront à l'aide des formules (17) contenant des constantes arbitraires C_n .

Ensuite, nous établirons une correspondance univoque et réciproque entre les inconnues x_s du système donné (S) et celles (y_{nh}) des systèmes réduits généralisés (S'_n) , de sorte que soit

$$x_s \longleftrightarrow \lambda_s = \mu_{nh} \longleftrightarrow y_{nh}.$$

Enfin, pour obtenir une solution du système donné (S) , nous poserons

$$x_s = y_{nh} \quad \text{pour } x_s \longleftrightarrow y_{nh},$$

en spécifiant la constante arbitraire C_n de sorte que soit

$$C_n = \frac{1}{q_n A_n} \quad (|A_n| > 1),$$

q_n étant un nombre positif que l'on déterminera de la manière suivante :

Prenons, comme au n° 22, la série

$$\sum_{h=1}^{\infty} (2nh)^3 \mu_{nh}^n \bar{y}_{nh},$$

en entendant par $\bar{y}_{nh}$ la valeur de y_{nh} obtenue des formules (17) en y faisant $C_n = 1$.

Remarquons que, d'après le mode de décomposition de la suite (E) , si $n \geq M$ (n° 26), les μ_{ni} représentent les éléments de la suite partielle

$$(E^{(2)}) = \lambda_0, \lambda_{-1}, \lambda_{-2}, \dots, \lambda_{-n}, \dots$$

Or, en tenant compte de l'inégalité

$$|\lambda_{-i}| < \lambda \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

prenons un nombre positif $\mu > 1$ tel que soit

$$|\lambda_{-i}| < \mu > 1 \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

et remplaçons dans la série ci-dessus μ_{n1} par μ ($n \geq M$).

Cela étant, convenons d'entendre, pour $n \geq M$, par q_n celui des modules des termes de la série absolument convergente

$$(2n.1)^3 \mu^n \bar{y}_{n1} + \sum_{h=2}^{\infty} (2nh)^3 \mu_{nh}^n \bar{y}_{nh}$$

qui ne sera pas inférieur à aucun des autres. Pour $n < M$ soit, par exemple, $q_n = 1$ ($n < M$).

Il en résultera que, à partir d'une certaine valeur de n ,

$$(18) \quad |\mu_{nh}^i y_{nh}| < \frac{1}{(n+h)^3} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

puisque pour n assez grand on aura simultanément

$$|\mu_{n1}| < \mu > 1 \quad \text{et} \quad |\mu_{nh}| \geq 1 \quad (h \geq 2).$$

L'inégalité (18) permettra de démontrer que les valeurs des inconnues x_s , que nous venons de déterminer, constituent une solution du système donné (S). Pour s'en assurer, on n'aura qu'à répéter les raisonnements du n° 23.

Enfin, tout comme au n° 24, on en déduira le résultat suivant :

Étant donné un système quelconque (S) du type II, en y appliquant convenablement le principe des réduites, on peut toujours construire une infinité de solutions du système (S), telles qu'aucune des inconnues ne soit zéro, et que les inconnues $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_r}$, arbitrairement choisies à l'avance, prennent les valeurs arbitrairement prescrites (a_i):

$$x_{\alpha_i} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

r étant un nombre entier positif quelconque.

CHAPITRE II.

Sur les systèmes d'équations linéaires non homogènes à une infinité d'inconnues attachés aux séries de Dirichlet.

I. Généralités.

28. Dans le Chapitre II nous allons appliquer le principe des réduites à la résolution des systèmes linéaires non homogènes appartenant aux types suivants :

$$(20) \quad c_i = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \quad (\text{type III}),$$

$$(21) \quad c_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n x_n \quad (\text{type IV})$$

$$(i = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

dont les λ_n satisfont aux conditions (3), (4) et (5) (n° 7).

Ces systèmes, étant analogues respectivement aux systèmes du type I et du type II, ne diffèrent de ceux-ci que par les parties gauches des équations ; tandis que dans le cas précédent tous les c_i étaient nuls, on suppose, dans ce cas-ci, qu'au moins l'un des c_i soit différent de zéro ; et c'est la seule condition à laquelle sera assujettie la suite des c_i .

29. Les systèmes (20) et (21) peuvent être attachés aux séries de Dirichlet par le même procédé formel que les systèmes homogènes (1) et (2) (n° 8).

Étant donnée, sous la forme I ou II, une série de Dirichlet quelconque

$$\sum_n x_n e^{-\lambda_n z}$$

à coefficients indéterminés x_n , nous en déduirons une suite infinie de séries analogues

$$\sum_n (-\lambda_n) x_n e^{-\lambda_n z}, \quad \sum_n (-\lambda_n)^2 x_n e^{-\lambda_n z}, \quad \dots,$$

dont chacune s'obtiendra en différentiant terme à terme la série précédente; cela étant, il est aisé de voir qu'en faisant prendre à toutes ces séries pour $z=0$ respectivement les valeurs prescrites

$$c_0, -c_1, c_2, \dots (-1)^n c_n, \dots,$$

on obtiendra évidemment un système (20) ou (21), ayant pour inconnues les coefficients indéterminés x_n de la série de Dirichlet.

Ainsi, à chacune des séries de Dirichlet on peut faire correspondre un système (20) ou (21), en fixant d'une façon quelconque la suite des c_i ; de même, il est clair qu'inversement chacune des solutions d'un système quelconque (20) ou (21) fournira une série de Dirichlet ayant pour coefficients les valeurs des inconnues du système résolu.

Cette série représentera une fonction $F(z)$ bien déterminée, au moins pour $z=0$:

$$F(0) = c_0.$$

De plus, dans des cas assez étendus $F(z)$ sera déterminée non seulement à l'origine ($z=0$), mais certainement aussi dans des régions beaucoup plus vastes; pour s'en assurer, il suffirait d'assujettir les arguments des λ_n à certaines conditions, tout comme nous l'avons fait ci-dessus, au n° 9.

Les mêmes considérations que celles du n° 9 nous conduiront à la conclusion suivante:

On pourrait, au moins sous certaines réserves, interpréter le problème de la résolution des systèmes (20) et (21) comme celui de la construction de séries de Dirichlet qui représentent des fonctions $F(z)$ holomorphes dans certaines régions, et telles que

$$F(0) = c_0, \quad F^{(n)}(0) = (-1)^n c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

II. Sur l'application de la méthode de Fourier à certains systèmes du type III.

30. Nous allons appliquer la méthode de Fourier à certains systèmes du type III dont les c_i satisfont à la condition particulière

$$c_i = 0 \text{ pour } i \neq k \text{ et } c_k \neq 0,$$

k étant un entier positif quelconque ou zéro.

Ces systèmes se présenteront donc sous la forme suivante :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{h=1}^{\infty} x_h \\ \dots\dots\dots \\ 0 = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{k-1} x_h \\ c_k = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^k x_h \\ 0 = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{k+1} x_h \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

En y rejetant toutes les équations, sauf les n premières ($n > k$), et en ne conservant dans les parties droites de celles-ci que les n premiers termes, on obtiendra un système réduit fini.

Désignons sa solution par

$$x_1^{(n)}, \quad x_2^{(n)}, \quad \dots \quad x_h^{(n)}, \quad \dots \quad x_n^{(n)};$$

il est clair qu'on aura alors

$$x_h^{(n)} = (-1)^{h+k-1} c_k \frac{\Delta_{k+1, h}^{(n)}}{\Delta^{(n)}} \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

$\Delta^{(n)}$ et $\Delta_{k+1, h}^{(n)}$ étant les déterminants suivants :

$$\Delta^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{k+1, h}^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{h-1} & \lambda_{h+1} & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_{h-1}^{k-1} & \lambda_{h+1}^{k-1} & \dots & \lambda_n^{k-1} \\ \lambda_1^{k+1} & \lambda_2^{k+1} & \dots & \lambda_{h-1}^{k+1} & \lambda_{h+1}^{k+1} & \dots & \lambda_n^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_{h-1}^{n-1} & \lambda_{h+1}^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Comme on le sait,

$$\Delta^{(n)} = \prod (\lambda_j - \lambda_g), \quad j > g \quad \left(\begin{matrix} j = 2, 3, \dots, n \\ g = 1, 2, \dots, n-1 \end{matrix} \right) \quad (\text{n}^\circ 10).$$

Quant à $\Delta_{k+1, h}^{(n)}$, on peut le présenter sous la forme d'un produit de deux facteurs: $\Delta_{k+1, h}^{(n)} = P_1 P_2$ dont le premier sera

$$P_1 = \prod (\lambda_j - \lambda_g), \quad j > g \quad \left(\begin{matrix} j = 2, 3, \dots, h-1, h+1, \dots, n \\ g = 1, 2, \dots, h-1, h+1, \dots, n-1 \end{matrix} \right),$$

puisque $\Delta_{k+1, h}^{(n)}$, s'annulant pour $\lambda_g = \lambda_j$, aura pour facteur chacun des $(\lambda_j - \lambda_g)$.

D'autre part, $\Delta_{k+1, h}^{(n)}$ est évidemment un polynôme entier et homogène d'ordre

$$\frac{n(n-1)}{2} - k$$

des $(n-1)$ quantités:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{h-1}, \lambda_{h+1}, \dots, \lambda_n,$$

et de degré $(n-1)$ par rapport à chacun des λ_i , tandis que P_1 est un polynôme entier et homogène d'ordre

$$\frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$$

des mêmes $(n-1)$ quantités, et de degré $(n-2)$; par suite,

$$P_2 = \frac{\Delta_{k+1, h}^{(n)}}{P_1}$$

sera un polynôme entier et homogène d'ordre $(n-k-1)$, et du premier degré par rapport à chacune de ces $(n-1)$ quantités (λ_i) .

Enfin, en remarquant que toute permutation de deux λ quelconques: λ_g et λ_j ne produira dans $\Delta_{k+1, h}^{(n)}$ ainsi que dans P_1 qu'un changement de signe, on en pourra conclure immédiatement que

$$P_2 = \frac{\Delta_{k+1, h}^{(n)}}{P_1}$$

sera une fonction symétrique des $(n-1)$ quantités:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_{h+1}, \dots, \lambda_n.$$

Aussi, tous les termes de P_2 ont-ils le même coefficient numérique que l'on peut déterminer en calculant un terme quelconque de P_2 . Or, en divisant, par exemple, le terme diagonal de $\Delta_{k+1, h}^{(n)}$ par le terme de P_1

$$\lambda_2^1 \lambda_3^2 \dots \lambda_{h-1}^{h-2} \lambda_{h+1}^{h-1} \dots \lambda_n^{n-2},$$

on obtiendra le terme suivant de P_2 :

$$\lambda_{k+1} \dots \lambda_{n-1} \lambda_{h+1} \dots \lambda_n \quad (\text{pour } k < h-1),$$

$$\text{ou} \quad \lambda_{k+2} \lambda_{k+3} \dots \lambda_n \quad (\text{pour } k \geq h-1).$$

Il en résultera donc que le coefficient numérique est $+1$. Par suite, P_2 est complètement déterminé: c'est la fonction symétrique, entière et homogène, d'ordre $(n-k-1)$ des $(n-1)$ quantités: $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_{h+1}, \dots, \lambda_n$, et du premier degré par rapport à chacune d'elles, tous les termes de ce polynôme ayant le même coefficient numérique $+1$.

Nous le désignons par

$$\sum^{(n-1)} (\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \dots \lambda_{n-k}) \quad (\text{pour } h=1),$$

ou par $\sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{(n-1)} (\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \dots \lambda_{n-k}) \quad (\text{pour } h > 1).$

Dans le cas où $h=1$, c'est une fonction symétrique des $(n-1)$ quantités: $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, tandis que dans le cas où $h > 1$, c'est la même fonction des $(n-1)$ quantités:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{h-1}, \lambda_{h+1}, \lambda_n;$$

celle-ci s'obtiendra évidemment de la fonction précédente, quand on y échange entre elles seulement les quantités λ_h et λ_1 ; et voilà pourquoi nous la désignons par

$$\sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{(n-1)} \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{n-k}.$$

Remarquons, enfin, que le produit

$$\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{n-k}$$

est celui des termes de P_2 dont le poids est le plus petit pour $h=1$.

Cela étant, les valeurs des inconnues $x_h^{(n)}$ du système réduit s'exprimeront sous la forme suivante:

$$x_h^{(n)} = (-1)^{h+k-1} c_k \frac{\sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{(n-1)} \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{n-k}}{(\lambda_h - \lambda_1)(\lambda_h - \lambda_2) \dots (\lambda_h - \lambda_{h-1})(\lambda_{h+1} - \lambda_h) \dots (\lambda_n - \lambda_h)}.$$

En divisant encore le numérateur ainsi que le dénominateur par

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_{h-1} \lambda_{h+1} \dots \lambda_n,$$

on aura définitivement

$$(23) \left\{ \begin{aligned} x_h^{(n)} &= (-1)^{h+k-1} c_k \frac{\sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{(n-1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k+1}}}{\left(\frac{\lambda_h}{\lambda_1} - 1\right) \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_2} - 1\right) \dots \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_{h-1}} - 1\right) \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right) \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_n}\right)} \\ &\quad (h = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \right.$$

où l'on entend par

$$\sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{(n-1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k+1}}$$

la fonction symétrique, entière et homogène, d'ordre k des $(n-1)$ quantités :

$$\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_{h-1}}, \frac{1}{\lambda_{h+1}}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$$

et du premier degré par rapport à chacune d'elles, tous les termes de ce polynôme ayant le même coefficient numérique $+1$.

$$\sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k+1}}$$

est la même fonction des $(n-1)$ quantités :

$$\frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$$

En particulier, pour $k=0$, on aura

$$(23a) \left\{ \begin{aligned} x_h^{(n)} &= (-1)^{h-1} c_0 \frac{1}{\left(\frac{\lambda_h}{\lambda_1} - 1\right) \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_2} - 1\right) \dots \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_{h-1}} - 1\right) \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_n}\right)} \\ &\quad (h = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right.$$

31. Après avoir résolu le système réduit, formé de n équations, il nous reste à passer à la limite pour $n \rightarrow \infty$. A cet effet il faut étudier de près les expressions

$$\sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k+1}} \quad \text{et} \quad \sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k+1}}$$

Nous allons démontrer tout d'abord la formule récurrente suivante :

$$(24) \left\{ \begin{aligned} (m-1) \sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} &= s_1 \sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{m-1}} - \\ &- s_2 \sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{m-2}} + \dots + (-1)^{m-2} s_{m-1}, \end{aligned} \right.$$

où

$$s_m = \frac{1}{\lambda_2^m} + \frac{1}{\lambda_3^m} + \dots + \frac{1}{\lambda_n^m} \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

En effet, il est aisé de voir que

[illegible]

En ajoutant ces égalités, on obtiendra immédiatement la formule (24).

32. Démontrons maintenant la formule

$$(25) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} = \sum_{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} + \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_h} \right) \left\{ \sum_{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{m-1}}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{m-1}} - \right. \\ & \quad - \frac{1}{\lambda_h} \sum_{\lambda_2 \dots \lambda_{m-2}}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \dots \lambda_{m-2}} + \frac{1}{\lambda_h^2} \sum_{\lambda_2 \dots \lambda_{m-3}}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \dots \lambda_{m-3}} - \dots + \\ & \quad \left. + (-1)^{m-3} \frac{1}{\lambda_h^{m-3}} \sum_{\lambda_2}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2} + (-1)^{m-2} \frac{1}{\lambda_h^{m-2}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Il est clair que

$$\sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2} = \sum \frac{1}{\lambda_2} + \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_n} \right).$$

D'autre part, désignons par u_i la somme de tous les termes de

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{i+1}}$$

ne contenant pas $\frac{1}{\lambda_h}$; on aura alors évidemment

$$u_1 = \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_h}.$$

Donc, comme il est aisé de le voir,

$$\sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} = \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} + \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_h} \right) u_1 = \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} + \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_h} \right) \left\{ \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_h} \right\},$$

et
$$u_2 = \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} - u_1 \cdot \frac{1}{\lambda_h} = \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} - \frac{1}{\lambda_h} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_h^2};$$

de même,

$$\begin{aligned} \sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} &= \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} + \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_h} \right) u_2 = \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} + \\ &+ \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_h} \right) \left\{ \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} - \frac{1}{\lambda_h} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_h^2} \right\}, \end{aligned}$$

et

$$u_3 = \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} - u_2 \cdot \frac{1}{\lambda_h} = \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} - \frac{1}{\lambda_h} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_h^2} \sum^{n-1} \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_h^3};$$

et ainsi de suite.

Nous avons démontré que la formule (25) est valable pour $m = 2, 3, 4$.

D'autre part, on s'en assurera immédiatement que, si la formule (25) est valable pour $m = i \geq 2$, elle le sera aussi pour $m = i + 1$.

Il en résultera donc que la formule (25) sera valable, quel que soit l'entier positif $m \geq 2$.

33. Étant donnée une suite des λ_n telle que soit

$$\left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \right| \geq p > 1 \quad \text{pour } n \geq N,$$

N étant un entier positif quelconque, les expressions

$$\sum_{\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} \quad \text{et} \quad \sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m}$$

auront pour $n \rightarrow \infty$ des limites finies et bien déterminées.

En effet, étant

$$s_m = \frac{1}{\lambda_2^m} + \frac{1}{\lambda_3^m} + \dots + \frac{1}{\lambda_n^m},$$

tous les s_m auront des limites finies et bien déterminées:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_m = \sigma_m \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

puisque, par hypothèse, les séries

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m}$$

seront absolument convergentes.

Aussi, en se servant de la formule récurrente (24), établira-t-on de proche en proche l'existence des limites finies et bien déterminées:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_2}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_2 \lambda_3}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3}, \quad \dots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m}, \quad \dots$$

On aura, par exemple,

$$\begin{aligned} 1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_2}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2} &= \sigma_1, \\ 2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_2 \lambda_3}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} &= \sigma_1^2 - \sigma_2, \\ 3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} &= \sigma_1^2 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_3; \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Quant à la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m},$$

elle sera déterminée à l'aide de la formule (25):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} +$$

$$+ \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_h} \right) \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{m-1}}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{m-1}} - \dots + (-1)^{m-2} \frac{1}{\lambda_h^{m-2}} \right\}.$$

Désignons ces limites, dont l'existence vient d'être démontrée, de la façon suivante:

$$\sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m},$$

et

$$\sum_{(\lambda_h, \lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m};$$

alors, en passant à la limite pour $n \rightarrow \infty$, les formules (24) et (25) s'écriront

$$(24a) \quad \left\{ \begin{aligned} (m-1) \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} &= \sigma_1 \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{m-1}} - \\ &- \sigma_2 \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{m-2}} + \dots + (-1)^{m-2} \sigma_{m-1}, \end{aligned} \right.$$

et

$$(25a) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{(\lambda_h, \lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} &= \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} + \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_h} \right) \left\{ \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{m-1}} - \right. \\ &- \frac{1}{\lambda_h} \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{m-2}} + \dots + (-1)^{m-3} \frac{1}{\lambda_h^{m-3}} \sum \frac{1}{\lambda_2} + (-1)^{m-2} \frac{1}{\lambda_h^{m-2}} \left. \right\}. \end{aligned} \right.$$

34. Étant donnée une suite des λ_n telle que soit

$$\lambda_n = p^{n-1}, \quad p > 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

on aura

$$(26) \quad \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} = \frac{1}{(p-1)(p^2-1)\dots(p^{m-1}-1)}.$$

En effet, dans cette hypothèse, on aura

$$\sigma_m = \frac{1}{p^m} + \frac{1}{p^{2m}} + \frac{1}{p^{3m}} + \dots = \frac{1}{p^m - 1} \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

D'autre part, en prenant dans la formule (24a)

$$m = 2, 3, 4, \dots,$$

on obtiendra respectivement

$$\begin{aligned} 1. \quad \sum \frac{1}{\lambda_2} &= \sigma_1, \\ 2. \quad \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} &= \sigma_1^2 - \sigma_2, \\ 3. \quad \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} &= \sigma_1^3 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_3, \\ &\dots \dots \dots ; \end{aligned}$$

ou, en désignant

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 1, \\ \gamma_2 &= \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \frac{\sigma_3}{\sigma_2 \sigma_1}, \\ \gamma_3 &= \frac{\sigma_1}{\sigma_3} - \frac{\sigma_2}{\sigma_3 \sigma_2} + \frac{\sigma_3}{\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1}, \\ &\dots \dots \dots , \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} 1. \quad \sum \frac{1}{\lambda_2} &= \sigma_1 \gamma_1, \\ 2. \quad \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} &= \sigma_1 \sigma_2 \gamma_2, \\ 3. \quad \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \gamma_3, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Or, calculons maintenant γ_2 et γ_3 . Il est aisé de voir que, par hypothèse, on aura

$$\gamma_2 = \frac{p^2-1}{p-1} - (p-1) = 2,$$

et

$$\gamma_3 = \frac{p^3-1}{p-1} - (p^2-1) + (p^2-1)(p-1) = 3.$$

Donc, d'après cela,

$$\sum \frac{1}{\lambda_2} = \sigma_1 = \frac{1}{p-1},$$

$$\sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} = \sigma_1 \sigma_2 = \frac{1}{(p-1)(p^2-1)},$$

$$\sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \frac{1}{(p-1)(p^2-1)(p^3-1)}.$$

En désignant généralement

$$\begin{aligned} \gamma_{m-2} = & \frac{\sigma_1}{\sigma_{m-2}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{m-2} \sigma_{m-3}} + \frac{\sigma_3}{\sigma_{m-2} \sigma_{m-3} \sigma_{m-4}} - \dots + \\ & + (-1)^{m-2} \frac{\sigma_{m-3}}{\sigma_{m-2} \sigma_{m-3} \dots \sigma_3 \sigma_2} + (-1)^{m-1} \frac{\sigma_{m-2}}{\sigma_{m-2} \sigma_{m-3} \dots \sigma_2 \sigma_1}, \end{aligned}$$

nous allons démontrer que, si $\gamma_{m-2} = m-2$, il en résultera que

$$\gamma_{m-1} = m-1.$$

A cet effet calculons la différence

$$\begin{aligned} D = \gamma_{m-1} - \gamma_{m-2} = & \\ = & \sigma_1 \left(\frac{1}{\sigma_{m-1}} - \frac{1}{\sigma_{m-2}} \right) - \frac{\sigma_2}{\sigma_{m-2}} \left(\frac{1}{\sigma_{m-1}} - \frac{1}{\sigma_{m-3}} \right) + \frac{\sigma_3}{\sigma_{m-2} \sigma_{m-3}} \left(\frac{1}{\sigma_{m-1}} - \frac{1}{\sigma_{m-4}} \right) - \\ & - \dots + (-1)^{m-2} \frac{\sigma_{m-3}}{\sigma_{m-2} \sigma_{m-3} \dots \sigma_3} \left(\frac{1}{\sigma_{m-1}} - \frac{1}{\sigma_2} \right) + \\ & + (-1)^{m-1} \frac{\sigma_{m-2}}{\sigma_{m-2} \sigma_{m-3} \dots \sigma_3 \sigma_2} \left(\frac{1}{\sigma_{m-1}} - \frac{1}{\sigma_1} \right) + (-1)^m \frac{\sigma_{m-1}}{\sigma_{m-1} \sigma_{m-2} \dots \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1}. \end{aligned}$$

En tenant compte de ce que, par hypothèse,

$$\sigma_1 \left(\frac{1}{\sigma_{m-1}} - \frac{1}{\sigma_{m-2}} \right) = \frac{p^{m-1} - p^{m-2}}{p-1} = p^{m-2},$$

$$\sigma_2 \left(\frac{1}{\sigma_{m-1}} - \frac{1}{\sigma_{m-3}} \right) = p^{m-3},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sigma_{m-2} \left(\frac{1}{\sigma_{m-1}} - \frac{1}{\sigma_1} \right) = p,$$

on peut présenter D sous la forme suivante :

$$D = p^{m-2} - \frac{p^{m-3}}{\sigma_{m-2}} + \frac{p^{m-4}}{\sigma_{m-2} \sigma_{m-3}} - \dots + (-1)^{m-2} \frac{p^2}{\sigma_{m-2} \sigma_{m-3} \dots \sigma_3} +$$

$$+ (-1)^{m-1} \frac{p}{\sigma_{m-2} \sigma_{m-3} \dots \sigma_3 \sigma_2} + (-1)^m \frac{1}{\sigma_{m-2} \sigma_{m-3} \dots \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1}.$$

Or, la somme des deux derniers termes est évidemment

$$(-1)^{m-1} \frac{1}{\sigma_{m-2} \sigma_{m-3} \dots \sigma_3 \sigma_2} \left(p - \frac{1}{\sigma_1} \right) = (-1)^{m-1} \frac{1}{\sigma_{m-2} \sigma_{m-3} \dots \sigma_3 \sigma_2},$$

par suite, la somme des trois derniers termes est

$$(-1)^{m-2} \frac{1}{\sigma_{m-2} \sigma_{m-3} \dots \sigma_3} \left(p^2 - \frac{1}{\sigma_2} \right) = (-1)^{m-2} \frac{1}{\sigma_{m-2} \sigma_{m-3} \dots \sigma_3};$$

et ainsi de suite; enfin, la somme de tous les termes, sauf le premier, est

$$- \frac{1}{\sigma_{m-2}}.$$

Donc,

$$D = p^{m-2} - \frac{1}{\sigma_{m-2}} = 1, \quad \text{et}$$

$$\gamma_{m-1} = \gamma_{m-2} + 1 = m-1 \quad \text{si } \gamma_{m-2} = m-2.$$

Or, comme nous le venons de constater déjà,

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 2, \quad \gamma_3 = 3;$$

par suite, on aura $\gamma_4 = 4$, $\gamma_5 = 5$ et, généralement,

$$\gamma_{m-1} = m-1 \quad (m \geq 2).$$

D'après cela, il est facile de vérifier que, si la formule

$$\sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_i} = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{i-1}$$

est valable pour $i = 2, 3, 4, \dots (m-1)$, elle sera valable aussi pour $i = m$, et, par suite, généralement pour $m \geq 2$.

En effet, d'après notre supposition, on déduira aisément de (24a) que

$$(m-1) \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{m-1} \gamma_{m-1},$$

et il en résultera immédiatement que

$$\sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{m-1} = \frac{1}{(p-1)(p^2-1) \dots (p^{m-1}-1)},$$

puisque $\gamma_{m-1} = m-1$.

Or, nous avons démontré ci-dessus que la formule (26) est bien valable pour $m = 2, 3, 4$; par conséquent, elle le sera généralement pour $m \geq 2$.

35. Étant donnée une suite des λ_n telle que soit

$$(27) \quad \left| \frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h} \right| \geq p \geq 4 \quad (h = 1, 2, 3, \dots),$$

les modules des expressions

$$\sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} \quad \text{et} \quad \sum_{(\lambda_k, \lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m}$$

satisfont aux inégalités suivantes:

$$(28) \quad \frac{1}{2} |A| < \left| \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} \right| < \frac{3}{2} |A|,$$

$$(29) \quad \frac{1}{8} |A'| < \left| \sum_{(\lambda_k, \lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} \right| < \frac{15}{8} |A'|,$$

A et A' étant les premiers termes de ces expressions:

$$A = \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m},$$

$$A' = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{k-1} \lambda_{k+1} \dots \lambda_m} \quad (\text{pour } k < m),$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{m-1}} \quad (\text{pour } k \geq m).$$

Nous vérifions d'abord la première de ces deux inégalités.

Remarquons préalablement qu'il résulte de (27) que

$$(80) \quad \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_i} \right| \geq p^{n-i} \quad (n > i \geq 1),$$

puisque

$$\left| \frac{\lambda_n}{\lambda_i} \right| = \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-2}} \right| \dots \left| \frac{\lambda_{i+2}}{\lambda_{i+1}} \right| \cdot \left| \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \right|,$$

et chacun de ces $(n-i)$ facteurs est $\geq p$.

Cela étant, examinons de près le cas particulier

$$\lambda_n = p^{n-1}, \quad p > 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

D'après la formule (26),

$$\sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} = \frac{1}{p^{\frac{m(m-1)}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p^{m-1}}\right)};$$

d'autre part,

$$A = \frac{1}{p p^2 \dots p^{m-1}} = \frac{1}{p^{\frac{m(m-1)}{2}}};$$

par suite,

$$\sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} = A \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p^{m-1}}\right)}.$$

Or,

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p^{m-1}}\right) > \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^n}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^n}\right) &= 1 - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)(p^2-1)} - \\ &\quad - \dots + (-1)^n \frac{1}{(p-1)(p^2-1) \dots (p^n-1)} + \dots \end{aligned}$$

En effet, il est clair que

$$\begin{aligned} (1-a_1)(1-a_2) \dots (1-a_n) &= 1 - \sum^n a_i + \sum^n a_1 a_2 + \\ &\quad + \dots + (-1)^n a_1 a_2 \dots a_n; \end{aligned}$$

donc, en y posant

$$a_i = \frac{1}{p^i} \quad (p > 1, i = 1, 2, 3, \dots)$$

et en passant à la limite pour $n \rightarrow \infty$, on obtiendra, d'après la formule (26),

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^n}\right) = 1 - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)(p^2-1)} - \dots \quad (p > 1).$$

On en conclut immédiatement que pour $p \geq 4$ on aura

$$1 > \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^n}\right) > 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

et, par suite,

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p^{m-1}}\right)} < \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^n}\right)} < \frac{3}{2} \quad (\text{pour } p \geq 4).$$

Donc,

$$\sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} < \frac{3}{2} A,$$

ou

$$\frac{\sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m}}{A} < \frac{3}{2} \quad \text{pour } \lambda_n = p^{n-1} \quad (p \geq 4, n = 1, 2, 3, \dots).$$

A l'aide de la dernière inégalité nous allons maintenant démontrer qu'étant donnée une suite des λ_n satisfaisant à la condition (27), on aura

$$(31) \quad \frac{\sum \frac{1}{|\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m|}}{|A|} < \frac{3}{2}.$$

En effet, la partie gauche de l'inégalité (31) représente une série dont les termes s'écriront sous la forme suivante:

$$\left| \frac{\frac{1}{\lambda_{\nu_2} \lambda_{\nu_3} \dots \lambda_{\nu_m}}}{\frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m}} \right| = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_{\nu_2}} \frac{\lambda_3}{\lambda_{\nu_3}} \dots \frac{\lambda_m}{\lambda_{\nu_m}} \right|,$$

où $\nu_2 \geq 2, \nu_3 \geq 3, \dots, \nu_m \geq m.$

En tenant compte de ce que, sous l'hypothèse (27),

$$\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_{\nu_i}} \right| \leq \frac{1}{p^{\nu_i - i}},$$

tandis que

$$\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_{\nu_i}} \right| = \frac{1}{p^{\nu_i - i}} \quad \text{pour } \lambda_n = p^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

on en conclut immédiatement qu'aucun des termes de notre série à termes positifs ne sera plus grand sous l'hypothèse (27) qu'il ne l'est dans le cas particulier, lorsque

$$\lambda_n = 4^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Or, dans ce cas particulier, comme nous le venons de voir, la somme de la série est inférieure à $\frac{3}{2}$; par suite, elle le sera aussi sous l'hypothèse (27).

Donc, l'inégalité (31) étant vérifiée, on en déduira que

$$\left| \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} \right| \leq \sum \frac{1}{|\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m|} < \frac{3}{2} |A|,$$

et que

$$\frac{\sum \frac{1}{|\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m|} - |A|}{|A|} < \frac{1}{2}.$$

D'après cela, on aura

$$\begin{aligned} \left| \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} \right| &\geq |A| - \left| \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} - A \right| \geq \\ &\geq |A| \left(1 - \frac{\sum \frac{1}{|\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m|} - |A|}{|A|} \right) > \frac{1}{2} |A|. \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{1}{2} |A| < \left| \sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} \right| < \frac{3}{2} |A|.$$

36. Examinons maintenant

$$\sum_{(\lambda_k, \lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m}.$$

On peut le présenter sous la forme

$$\sum \frac{1}{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{m-1}}$$

si l'on désigne

$$\beta_1 = \lambda_1, \quad \beta_2 = \lambda_2, \quad \dots \quad \beta_{k-1} = \lambda_{k-1}, \quad \beta_n = \lambda_{n+1} \quad (n \geq k).$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\beta_n}{\beta_i} \right| &= \left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{i+1}} \right| && \text{pour } k \leq i < n, \\ &= \left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_i} \right| && \text{pour } i < k \leq n, \\ &= \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_i} \right| && \text{pour } i < n < k, \end{aligned}$$

on aura, d'après (30),

$$\left| \frac{\beta_n}{\beta_i} \right| \geq p^{n-i} \quad \text{pour } n > i \geq 1;$$

par suite, d'après (31),

$$\sum \frac{1}{|\beta_2 \beta_3 \dots \beta_{m-1}|} < \frac{3}{2} \left| \frac{1}{\beta_2 \beta_3 \dots \beta_{m-1}} \right|$$

et

$$\sum \frac{1}{|\beta_2 \beta_3 \dots \beta_m|} < \frac{3}{2} \left| \frac{1}{\beta_2 \beta_3 \dots \beta_m} \right|.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{|\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{m-1}|} &= \frac{1}{|\beta_1|} \sum \frac{1}{|\beta_2 \beta_3 \dots \beta_{m-1}|} + \sum \frac{1}{|\beta_2 \beta_3 \dots \beta_m|} < \frac{3}{2} \left| \frac{1}{\beta_1} \right| \\ &\cdot \left| \frac{1}{\beta_2 \beta_3 \dots \beta_{m-1}} \right| + \frac{3}{2} \left| \frac{1}{\beta_2 \beta_3 \dots \beta_m} \right| = \frac{3}{2} \left(1 + \left| \frac{\beta_1}{\beta_m} \right| \right) \left| \frac{1}{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{m-1}} \right|. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\left| \frac{\beta_1}{\beta_m} \right| \leq \frac{1}{p^{m-1}} \quad \text{et} \quad 1 + \frac{1}{p^{m-1}} \leq \frac{5}{4} \quad (p \geq 4, m \geq 2).$$

Aussi,

$$\sum \frac{1}{|\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{m-1}|} = \sum_{(\lambda_k, \lambda_1)} \frac{1}{|\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m|} < \frac{15}{8} |A'|.$$

On en déduira aisément l'inégalité (29): on n'aura qu'à répéter les raisonnements du numéro précédent par lesquels nous avons déduit de (31) l'inégalité (28).

En tenant compte des inégalités (28) et (29), on peut dire que, sous la condition (27), toutes les expressions:

$$\sum \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} \quad \text{et} \quad \sum_{(\lambda_k, \lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_m} \quad (m = 2, 3, 4, \dots)$$

sont certainement différentes de zéro.

37. Étant donné un système particulier quelconque du type III

$$c_i = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^i x_n \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

dont les c_i et λ_n satisfont respectivement aux conditions suivantes:

$$1^0 \quad c_i = 0 \text{ pour } i \neq k, \quad c_k \neq 0,$$

k étant un entier positif quelconque ou zéro,

$$2^0 \quad \left| \frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h} \right| \geq p \geq 4 \quad (h = 1, 2, 3, \dots),$$

on peut le résoudre par la méthode de Fourier.

Les valeurs des inconnues sont fournies par les formules

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} x_h &= (-1)^{h+k-1} c_k \frac{\sum_{(\lambda_h, \lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k+1}}}{\left(\frac{\lambda_h}{\lambda_1} - 1 \right) \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_2} - 1 \right) \dots \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_{h-1}} - 1 \right) \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}} \right) \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}} \right) \dots} \\ &\quad (h = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \right.$$

chacune d'elles étant différente de zéro.

En effet, dans ces conditions, les valeurs des inconnues $(x_h^{(n)})$ du système réduit, formé de n équations, auront pour $n \rightarrow \infty$ des limites bien déterminées, finies et différentes de zéro

$$x_h = \lim_{n \rightarrow \infty} x_h^{(n)},$$

puisque

$$\sum_{(\lambda_h, \lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k+1}} \neq 0 \quad (\text{n}^\circ 36), \text{ et}$$

$$\left| \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}} \right) \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}} \right) \dots \right| \geq \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^n} \right) > \frac{2}{3} \quad (\text{n}^\circ 35).$$

Ces limites s'exprimeront évidemment par les formules (32); de plus, elles satisferont au système donné, en rendant absolument convergente chacune des séries de ce système

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^i x_n,$$

i étant un entier positif quelconque ou zéro.

Pour s'en rendre compte, désignons

$$u_h = \lambda_h^i x_h \quad (h = 1, 2, 3, \dots);$$

alors on aura

$$\frac{u_{h+1}}{u_h} = - \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}} \right)^{h-i} \frac{\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_h}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_h}\right) \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+2}}\right) \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+3}}\right) \dots}{\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{h+1}}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_{h+1}}\right) \left(1 - \frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_{h+2}}\right) \left(1 - \frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_{h+3}}\right) \dots} \cdot \frac{\sum \frac{1}{(\lambda_{h+1}, \lambda_1) \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k+1}}}{\sum \frac{1}{(\lambda_h, \lambda_1) \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k+1}}}.$$

Or, d'après (27) et (29), il en résultera que

$$\left| \frac{u_{h+1}}{u_h} \right| < 15 \left[\frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p^n}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^n}\right)} \right]^2 \left(\frac{1}{p} \right)^{h-i} \quad (\text{pour } h \geq k+1);$$

par suite,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{h+1}}{u_h} \right| = 0.$$

Donc, notre proposition est bien démontrée.

III. Sur la construction des solutions des systèmes du type III dans le cas général.

38. Soit donné un système quelconque du type III

$$c_i = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^i x_n \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

dont les λ_n et les c_i ne sont assujettis qu'aux conditions suivantes :

$$1^0 \quad \lambda_h \neq \lambda_k \quad \text{pour } h \neq k,$$

$$2^0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty,$$

$$3^0 \quad \text{qu'au moins un des } c_i \text{ soit différent de zéro.}$$

Cela étant, nous allons démontrer que l'on peut toujours construire une solution de ce système, par une méthode analogue à celle que nous venons d'appliquer, dans le Chapitre I, à la construction des solutions des systèmes du type I et du type II.

Nous aurons, cette fois aussi, à décomposer convenablement la suite des λ_n en une infinité de suites partielles, à faire correspondre à chacune d'elles un système réduit généralisé, et à constituer, enfin, une solution du système donné, à l'aide de celles des systèmes réduits généralisés.

39. Examinons tout d'abord la question de la décomposition de la suite

$$(E) = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \dots$$

en une infinité de suites partielles (E_n) .

Désignons, comme au n° 20, par (E_n^1) la suite

$$(E_n^1) = \lambda_{1,2^{n-1}}, \lambda_{3,2^{n-1}}, \dots, \lambda_{(2k-1)2^{n-1}}, \dots,$$

par

$$(E) = (E_1) + (E_2) + \dots + (E_{n-1})$$

la suite partielle de (E) que l'on obtiendra en enlevant de la suite (E) tous les éléments des suites partielles

$$(E_1), (E_2), \dots, (E_{n-1}),$$

et par

$$\mu_{n1}, \mu_{n2}, \dots, \mu_{nh}, \dots$$

les éléments de la suite partielle (E_n) .

Cela étant, nous exigeons que la décomposition de la suite (E) soit effectuée d'après la règle suivante :

1° Que le premier élément de la suite (E_n) soit celui des éléments de la suite

$$(E) - (E_1) - (E_2) - \dots - (E_{n-1})$$

dont le rang est le plus petit; qu'en particulier le premier élément μ_{11} de la suite (E_1) soit λ_1 : $\mu_{11} = \lambda_1$.

2° Tous les autres éléments de la suite (E_n)

$$\mu_{n2}, \mu_{n3}, \dots, \mu_{nh}, \mu_{n(h+1)}, \dots$$

seront choisis exclusivement entre les éléments de la suite (E_n^1) .

3° On choisira une quantité positive p_n de sorte que soit

$$(33) \quad 4 \leq p_n > |c_{n-1}|^{\frac{1}{n}};$$

pour fixer les idées, nous supposons de plus que p_n soit l'entier positif le plus petit qui satisfait à la condition (33).

4° μ_{nh} étant déjà déterminé, on prendra pour $\mu_{n(h+1)}$ celui des éléments de (E_n^1) dont le module satisfait aux conditions:

$$(34) \quad \left| \frac{\mu_{n(h+1)}}{\mu_{nh}} \right| \geq p_n \quad (h \geq 1),$$

$$(35) \quad \left| \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}} \right| < \left| \frac{\mu_{n(h+1)}}{\mu_{nh}} \right| \quad \text{pour } h \geq 2$$

et dont le rang aura la valeur la plus petite, compatible avec les conditions (34) et (35).

Comme il est aisé de le voir, la décomposition de la suite (E) peut être bien effectuée, conformément à la règle que nous venons de fixer.

En effet, on n'aura qu'à répéter les raisonnements du n° 20, pour mettre en évidence qu'il suffit d'un nombre fini d'opérations, pour déterminer le premier élément de la suite (E_n) , c'est-à-dire μ_{n1} .

Celui-ci étant trouvé, on choisira, d'après (33), p_n ; alors, en tenant compte des conditions 2° et 4°, on déterminera de proche en proche

$$\mu_{n2}, \mu_{n3}, \mu_{n4}, \dots, \mu_{nh}, \mu_{n(h+1)}, \dots$$

On obtiendra ainsi la décomposition de la suite (E) en une infinité de suites partielles

$$(E) = (E_1) + (E_2) + \dots + (E_n) + \dots,$$

les éléments de la suite (E_n) satisfaisant aux conditions suivantes :

$$1^0 \quad 4 \leq p_n \leq \left| \frac{\mu_{n2}}{\mu_{n1}} \right| < \left| \frac{\mu_{n3}}{\mu_{n2}} \right| < \dots < \left| \frac{\mu_{n(h+1)}}{\mu_{nh}} \right| < \dots,$$

$$2^0 \quad 4 \leq p_n > |c_{n-1}|^{\frac{1}{n}},$$

$$3^0 \quad \lim_{h \rightarrow \infty} |\mu_{nh}| = \infty, \text{ quel que soit l'entier positif } n,$$

4⁰ tous les n premiers éléments de (E) rentrent dans les premières suites partielles : (E_1) , (E_2) , ... dont le nombre sera n au plus ; donc,

$$(36) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_{nh}| = \infty, \text{ quel que soit l'entier positif } h.$$

40. Après avoir décomposé la suite (E) en une infinité de suites partielles (E_n) , nous ferons correspondre à chacune d'elles (E_n) un système réduit généralisé (S_n)

$$\gamma_i = \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{nh}^i y_{nh} \quad (i = 0, 1, 2 \dots),$$

où $\gamma_i = 0$ pour $i \neq n-1$, $\gamma_{n-1} = c_{n-1}$ et, d'après (33) et (34),

$$\left| \frac{\mu_{n(h+1)}}{\mu_{nh}} \right| \geq p_n \geq 4.$$

Il est clair que tous les systèmes (S_n) appartiennent à la catégorie de systèmes particuliers du type III que nous venons d'étudier ci-dessus ; par suite, chacun d'eux peut être résolu, d'après le n° 37, par la méthode de Fourier, les valeurs des inconnues étant fournies par les formules (32), si l'on y remplace $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_h, \dots$ respectivement par

$$\mu_{n1}, \mu_{n2}, \mu_{n3}, \dots, \mu_{nh}, \dots,$$

x_n par y_{nh} , et k par $n-1$. On aura donc

$$(37) \left\{ \begin{aligned} & (-1)^{h+n} c_{n-1} \cdot \sum_{(\mu_{nh}, \mu_{n1})} \frac{1}{\mu_{n2} \mu_{n3} \dots \mu_{nn}} \\ y_{nh} = & \frac{1}{\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n1}} - 1\right) \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n2}} - 1\right) \dots \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}} - 1\right) \left(1 - \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+1)}}\right) \left(1 - \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+2)}}\right) \dots} \end{aligned} \right.$$

($h = 1, 2, 3, \dots$).

Remarquons que, d'après le n° 37, $y_{nh} \neq 0$, quels que soient les entiers positifs n et h .

41. En établissant une correspondance univoque et réciproque entre les inconnues du système donné (S) et celles des systèmes réduits généralisés (S_n), de sorte que

$$x_s \longleftrightarrow \lambda_s = \mu_{nh} \longleftrightarrow y_{nh},$$

et en posant

$$x_s = y_{nh} \text{ pour } x_s \longleftrightarrow y_{nh},$$

y_{nh} étant fourni par la formule (37), les valeurs des x_s ainsi déterminées constitueront une solution du système donné (S).

En effet, nous allons démontrer qu'elles rendent absolument convergente chacune des séries du système (S)

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^i x_s,$$

i étant un entier positif quelconque ou zéro, et que la somme de la $(i+1)^{\text{ième}}$ série sera c_i :

$$c_i = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^i x_s.$$

Étant $\lambda_s = \mu_{nh}$ et $x_s = y_{nh}$, il est clair que l'on peut former la série double

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{nh}^i y_{nh}$$

contenant tous les termes de la $(i+1)^{\text{ième}}$ série de (S)

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^i x_s$$

et n'en contenant que ceux-ci.

D'après le critère du n° 23, on peut dire que la série double sera absolument convergente (et, par suite, la $(i+1)^{\text{ième}}$ série du système (S) le sera aussi) si l'on a

$$|\mu_{nh}^i y_{nh}| < \frac{1}{(n+h)^{2+q}} \quad (q > 0)$$

pour $n \geq N$, indépendamment de h , et
pour $h \geq H$, indépendamment de n .

Nous verrons que, dans ce cas-ci, l'on peut assigner, en effet, deux entiers positifs: N et H tels que l'on ait

$$|\mu_{nh}^i y_{nh}| < \frac{1}{(2nh)^3}$$

ou
$$|(2nh)^3 \mu_{nh}^i y_{nh}| < 1$$

pour $h \geq H$, indépendamment de n , et
pour $n \geq N$, indépendamment de h .

Il est évident, qu'il en résulterait immédiatement la convergence absolue de la série double, ainsi que celle de la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^i x_s.$$

Remarquons, enfin, que, sans restreindre la généralité, il suffit de n'étudier ci-dessous que le cas où $i > 0$, puisqu'il est clair que, si la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^i x_s$$

est absolument convergente pour $i > 0$, elle le sera à fortiori pour $i = 0$.

Aussi, supposons-nous que i soit un entier positif fixe, choisi d'ailleurs arbitrairement.

42. En désignant

$$U_{nh} = |(2nh)^3 \mu_{nh}^i y_{nh}| =$$

$$= \left| \frac{(2nh)^3 c_{n-1} \mu_{nh}^i \cdot \sum_{(\mu_{nh}, \mu_{n1})} \frac{1}{\mu_{n2} \mu_{n3} \dots \mu_{nn}}}{\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n1}} - 1\right) \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n2}} - 1\right) \dots \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}} - 1\right) \left(1 - \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+1)}}\right) \left(1 - \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+2)}}\right) \dots} \right|,$$

on aura donc à démontrer que l'on peut trouver deux entiers : H et N tels que soit

$$U_{nh} < 1$$

pour $h \geq H$, indépendamment de n , et
pour $n \geq N$, indépendamment de h .

Remarquons que, d'après (33), (34) et le n° 35,

$$\left| \left(1 - \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+1)}}\right) \left(1 - \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+2)}}\right) \dots \right| \geq \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) > \frac{2}{3}$$

et que, d'après (29),

$$\sum_{(\mu_{nh}, \mu_{n1})} \frac{1}{\mu_{n2} \mu_{n3} \dots \mu_{nn}} < \frac{15}{8} \left| \frac{1}{\mu_{n1} \dots \mu_{n(h-1)} \mu_{n(h+1)} \dots \mu_{nn}} \right| \quad \text{pour } h < n,$$

$$\text{ou} \quad < \frac{15}{8} \left| \frac{1}{\mu_{n1} \mu_{n2} \dots \mu_{n(n-1)}} \right| \quad \text{pour } h \geq n.$$

D'autre part, d'après (34),

$$|\mu_{nh}| \geq |\mu_{n1}| p_n^{k-1} \quad \text{pour } k > 1;$$

par suite,

$$\left| \sum_{(\mu_{nh}, \mu_{n1})} \frac{1}{\mu_{n2} \mu_{n3} \dots \mu_{nn}} \right| < \frac{15}{8} \frac{1}{|\mu_{n1}^{n-1}|} \frac{1}{p_n^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}}.$$

Donc, quels que soient $n > 1$ et $h > 1$, on aura toujours

$$(38) \quad U_{nh} < \left| \frac{45}{2} \frac{n^3 h^3 c_{n-1}}{\mu_{n1}^{n-1} p_n^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}} \frac{\mu_{nh}^i}{\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n1}} - 1\right) \dots \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}} - 1\right)} \right|;$$

de même, en tenant compte de ce que, pour chaque valeur entière et positive de h ,

$$\left| \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n1}} - 1 \right) \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n2}} - 1 \right) \dots \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}} - 1 \right) \left(1 - \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+1)}} \right) \left(1 - \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h+2)}} \right) \dots \right| > \frac{2}{3},$$

on aura

$$(39) \quad U_{nh} < \left| \frac{45}{2} \frac{n^3 h^3 c_{n-1} \mu_{nh}^i}{\mu_{n1} \mu_{n2} \dots \mu_{n(n-1)}} \right|$$

pour $n > 1$, quel que soit h .

43. Examinons de près l'expression

$$\frac{\mu_{nh}^i}{\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n1}} - 1 \right) \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n2}} - 1 \right) \dots \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}} - 1 \right)},$$

en supposant que soit $h > 2i$.

Dans cette hypothèse, on aura

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mu_{nh}^i}{\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n1}} - 1 \right) \dots \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}} - 1 \right)} \right| = \\ & = \left| \frac{\mu_{n1} \mu_{n2} \dots \mu_{ni} \frac{\mu_{n(i+1)}}{\mu_{nh}} \dots \frac{\mu_{n(2i-1)}}{\mu_{nh}}}{\left(1 - \frac{\mu_{n1}}{\mu_{nh}} \right) \dots \left(1 - \frac{\mu_{n(2i-1)}}{\mu_{nh}} \right) \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(2i)}} - 1 \right) \dots \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}} - 1 \right)} \right| < \\ & < \left| \frac{3}{2} \frac{\mu_{n1}^i}{\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(2i)}} - 1 \right) \dots \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}} - 1 \right)} \right| \cdot \left| \frac{\mu_{n2} \mu_{n3} \dots \mu_{ni} \mu_{n(i+1)} \mu_{n(i+2)} \dots \mu_{n(2i-1)}}{\mu_{n1} \mu_{n1} \dots \mu_{n1} \mu_{nh} \mu_{nh} \dots \mu_{nh}} \right| = \\ & = \left| \frac{3}{2} \frac{\mu_{n1}^i}{\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(2i)}} - 1 \right) \dots \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}} - 1 \right)} \right| \cdot \prod_{k=2}^i \left(\frac{\left| \frac{\mu_{nk}}{\mu_{n1}} \right|}{\left| \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(2i-k+1)}} \right|} \right). \end{aligned}$$

Or, remarquons que, d'après (34) et (33),

$$|\mu_{nh}| > |\mu_{n(2i)}| \quad \text{pour } h > 2i,$$

et que

$$\left| \frac{\mu_{nk}}{\mu_{n1}} \right| = \left| \frac{\mu_{n2}}{\mu_{n1}} \right| \cdot \left| \frac{\mu_{n3}}{\mu_{n2}} \right| \cdots \left| \frac{\mu_{n(k-1)}}{\mu_{n(k-2)}} \right| \cdot \left| \frac{\mu_{nk}}{\mu_{n(k-1)}} \right|,$$

$$\left| \frac{\mu_{n(2i)}}{\mu_{n(2i-k+1)}} \right| = \left| \frac{\mu_{n(2i-k+2)}}{\mu_{n(2i-k+1)}} \right| \cdot \left| \frac{\mu_{n(2i-k+3)}}{\mu_{n(2i-k+2)}} \right| \cdots \left| \frac{\mu_{n(2i-1)}}{\mu_{n(2i-2)}} \right| \cdot \left| \frac{\mu_{n(2i)}}{\mu_{n(2i-1)}} \right|.$$

Ces deux produits contiennent tous les deux $(k-1)$ facteurs; or, chacun des facteurs du dernier produit étant, d'après (35), supérieur au plus grand facteur du premier produit

$$\left| \frac{\mu_{nk}}{\mu_{n(k-1)}} \right| \quad (k = 2, 3, \dots, i),$$

on aura

$$\left| \frac{\mu_{nk}}{\mu_{n1}} \right| < \left| \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(2i-k+1)}} \right| \quad \text{pour } k = 2, 3, \dots, i;$$

par suite,

$$\prod_{k=2}^i \left(\frac{\left| \frac{\mu_{nk}}{\mu_{n1}} \right|}{\left| \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(2i-k+1)}} \right|} \right) < 1.$$

D'autre part,

$$\left| \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(2i)}} - 1 \right) \cdots \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}} - 1 \right) \right| > \left| \frac{2}{3} \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(2i)}} \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(2i+1)}} \cdots \frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}} \right| \geq$$

$$\geq \frac{2}{3} p_n^{h-2i} p_n^{h-2i-1} \cdots p_n^2 p_n^1 = \frac{2}{3} p_n^{\frac{(h-2i+1)(h-2i)}{2}} \geq \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{(h-2i+1)(h-2i)}{2}}.$$

Donc,

$$(40) \quad \left| \frac{\mu_{nh}^i}{\left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n1}} - 1 \right) \cdots \left(\frac{\mu_{nh}}{\mu_{n(h-1)}} - 1 \right)} \right| < \frac{9}{4} \frac{|\mu_{n1}^i|}{4^{\frac{(h-2i+1)(h-2i)}{2}}}$$

pour $h > 2i$, quel que soit n .

44. En tenant compte des inégalités (38), (40) et (38), et en constatant que

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - n > 0 \quad \text{pour } n \geq 5,$$

on aura

$$\begin{aligned}
 U_{nh} &< \left| \frac{45}{2} \frac{n^3 h^3 c_{n-1}}{\mu_{n1}^{n-1} p_n \frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot \frac{9}{4} \frac{\mu_{n1}^i}{\frac{(h-2i+1)(h-2i)}{2}} \right| < \\
 &< \frac{405}{8} \frac{1}{|\mu_{n1}^{n-i-1}|} \frac{n^3}{p_n \frac{(n-1)(n-2)}{2} - n} \frac{h^3}{\frac{(h-2i+1)(h-2i)}{2}} \leq \\
 &\leq \frac{405}{8} \frac{1}{|\mu_{n1}^{n-i-1}|} \frac{n^3}{\frac{(n-1)(n-2)}{4} - n} \frac{h^3}{\frac{(h-2i+1)(h-2i)}{4}}
 \end{aligned}$$

pour $h > 2i$ et $n \geq 5$.

Or, d'après (36),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mu_{n1}^{n-i-1}|} = 0;$$

de même, il est clair que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{\frac{(n-1)(n-2)}{4} - n} = 0,$$

et

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{h^3}{\frac{(h-2i+1)(h-2i)}{4}} = 0;$$

par suite, on peut trouver évidemment deux entiers positifs n_0 et h_0 tels que soient

$$\frac{405}{8} \frac{1}{|\mu_{n1}^{n-i-1}|} \frac{n^3}{\frac{(n-1)(n-2)}{4} - n} < 1 \quad \text{pour } n \geq n_0,$$

et

$$\frac{h^3}{\frac{(h-2i+1)(h-2i)}{4}} < 1 \quad \text{pour } h \geq h_0,$$

et l'on en tirera immédiatement la conclusion suivante:

$$U_{nh} < 1 \quad \text{pour } n \geq n_0 \text{ et } h \geq h_0.$$

45. Allons maintenant examiner les valeurs de

$$U_{nh} \text{ pour } n < n_0.$$

n étant fixe: $n = \bar{n}$, la série à termes positifs

$$\sum_{h=1}^{\infty} U_{\bar{n}h} = \sum_{h=1}^{\infty} |(2\bar{n}h)^3 \mu_{\bar{n}h}^i y_{\bar{n}h}^-|$$

convergera, comme on s'en assurera aisément, par les mêmes raisonnements que plus haut, au n° 22.

On peut donc faire correspondre à $n = \bar{n}$ une valeur de h : $h = h_{\bar{n}}$ telle que soit

$$U_{\bar{n}h} < 1 \text{ pour } h \geq h_{\bar{n}}.$$

Aussi, aura-t-on

$$U_{1h} < 1 \text{ pour } h \geq h_1,$$

$$U_{2h} < 1 \text{ pour } h \geq h_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$U_{(n_0-1)h} < 1 \text{ pour } h \geq h_{n_0-1}.$$

Cela étant, désignons par H celui des n_0 entiers positifs:

$$h_0, h_1, h_2, \dots, h_{n_0-1}$$

qui sera le plus grand, ou, au moins, pas plus petit que chacun des autres n_0-1 entiers; alors, d'après ce que nous venons de voir, on aura évidemment

$$U_{nh} < 1 \text{ pour } h \geq H, \text{ indépendamment de } n.$$

46. Enfin, il ne faut étudier que le cas: $h < H \leq 2$. Il est clair que pour $h < H$ on aura:

$$1^\circ \quad h^3 \leq (H-1)^3,$$

$$2^\circ \quad |\mu_{nh}^i| \leq |\mu_{n(H-1)}^i|;$$

par suite, d'après (39),

$$U_{nh} < \left| \frac{45}{2} \cdot \frac{n^3(H-1)^3 c_{n-1} \mu_{n(H-1)}^i}{\mu_{n1} \mu_{n2} \dots \mu_{n(n-1)}} \right| \quad \text{pour } h < H.$$

En supposant, de plus, que soit

$$n-1 \geq H+i-2, \text{ c'est-à-dire } n \geq H+i-1,$$

on aura

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mu_{n(H-1)}^i}{\mu_{n1} \mu_{n2} \dots \mu_{n(n-1)}} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\mu_{n1} \mu_{n2} \dots \mu_{n(H-2)}} \right| \cdot \left| \frac{\mu_{n(H-1)}}{\mu_{n(H-1)}} \cdot \frac{\mu_{n(H-1)}}{\mu_{nH}} \dots \frac{\mu_{n(H-1)}}{\mu_{n(H+i-2)}} \right| \cdot \left| \frac{1}{\mu_{n(H+i-1)} \dots \mu_{n(n-1)}} \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{\mu_{n1} \mu_{n2} \dots \mu_{n(H-2)}} \right| \cdot \left| \frac{1}{\mu_{n(H+i-1)} \dots \mu_{n(n-1)}} \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{|\mu_{n1}^{H-2}|} \cdot \frac{1}{p_n^{\frac{(H-2)(H-3)}{2}}} \cdot \frac{1}{|\mu_{n1}^{n-H-i+1}|} \cdot \frac{1}{p_n^{\frac{(n+H+i-4)(n-H-i+1)}{2}}} = \\ & = \frac{1}{|\mu_{n1}^{n-i-1}|} \cdot \frac{1}{p_n^{\frac{n^2-3n+5i-2iH-i^2+2}{2}}}. \end{aligned}$$

Or, i et h étant deux entiers positifs fixes, il suffit évidemment de prendre n assez grand, pour que soit

$$\frac{n^2-3n+5i-2iH-i^2+2}{2} - n > 0.$$

D'après cela, en tenant compte de (33), on aura

$$\begin{aligned} U_{nh} &< \left| \frac{45}{2} \cdot \frac{n^3(H-1)^3}{\mu_{n1}^{n-i-1}} \cdot \frac{1}{p_n^{\frac{n^2-3n+5i-2iH-i^2+2}{2}-n}} \right| \leq \\ & \leq \frac{45}{2} \cdot \frac{(H-1)^3}{|\mu_{n1}^{n-i-1}|} \cdot \frac{n^3}{4^{\frac{n^2-5n+5i-2iH-i^2+2}{2}}} \end{aligned}$$

pour $h < H \geq 2$, n étant assez grand.

Or,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{45}{2} \cdot \frac{(H-1)^3}{|\mu_{n1}^{n-i-1}|} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{4^{\frac{n^2-5n+5i-2iH-i^2+2}{2}}}.$$

Il en résultera donc que l'on peut trouver un entier positif n_1 tel que soit

$$U_{nh} < 1$$

pour $n \geq n_1$ et $h < H \leq 2$.

Donc, en désignant par N celui des deux entiers positifs :

$$n_1 \text{ et } n_0 \text{ (n° 44)}$$

qui ne sera pas inférieur à l'autre, on aura

$$U_{nh} < 1 \text{ pour } n \geq N, \text{ indépendamment de } h.$$

47. Des résultats obtenus dans les deux derniers numéros il s'ensuit immédiatement que la série double

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{nh}^i y_{nh}$$

converge absolument et qu'elle aura, par conséquent, une somme bien déterminée. Nous allons constater tout de suite qu'elle aura pour somme c_i .

En effet, d'après le mode de détermination des y_{nh} ,

$$\sum_{h=1}^{\infty} \mu_{nh}^i y_{nh} = \gamma_i$$

où $\gamma_i = 0$ pour $n \neq i+1$ et $\gamma_i = c_i$ pour $n = i+1$ (n° 40); par conséquent, il est clair que

$$c_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{nh}^i y_{nh}.$$

Enfin, la $(i+1)^{\text{ième}}$ série du système donné (S)

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^i x_s,$$

ayant les mêmes termes que la série absolument convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{nh}^i y_{nh},$$

et ne différant d'elle que par le mode de groupement des termes, sera absolument convergente, elle-aussi, et aura pour somme c_i , comme la série double.

Donc, les x_s déterminés au n° 41

$$(x_s = y_{nh} \quad \text{pour } x_s \longleftrightarrow y_{nh})$$

sont tous différents de zéro et constituent, en effet, une solution du système donné (S).

48. Il est aisé de démontrer qu'étant donné un système quelconque du type III

$$c_i = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^i x_n \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

on peut même construire une infinité de solutions, telles que les inconnues

$$x_{\alpha_1}, \quad x_{\alpha_2}, \quad \dots \quad x_{\alpha_r},$$

arbitrairement choisies d'avance, prennent les valeurs prescrites (a_i):

$$x_{\alpha_i} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

r étant un entier positif quelconque.

En effet, décomposons la suite des λ_n

$$(E) = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \dots$$

en deux suites partielles indéfinies:

$$(E_1) = \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}, \dots, \mu_{1h}, \dots,$$

$$(E_2) = \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23}, \dots, \mu_{2h}, \dots,$$

$$(E) = (E_1) + (E_2),$$

de sorte que les éléments

$$\lambda_{\alpha_1}, \quad \lambda_{\alpha_2}, \quad \dots \quad \lambda_{\alpha_r}$$

appartiennent tous à l'une d'elles, soit, par exemple, à (E_2) .

Cela étant, nous ferons correspondre aux suites (E_1) et (E_2) les systèmes (S_1) et (S_2) suivants:

$$(S_1) \quad \dots \quad c_i = \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{1h}^i y_{1h} \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(S_2) \quad \dots \quad 0 = \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{2h}^i y_{2h} \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

dont le premier est évidemment un système du type III, tandis que (S_2) est un système du type I.

Ensuite, nous établirons une correspondance univoque et réciproque entre les inconnues (x_s) du système donné (S) et celles des systèmes auxiliaires, c'est-à-dire les y_{kh} ($k = 1, 2$), de sorte que soit

$$x_s \longleftrightarrow \lambda_s = \mu_{kh} \longleftrightarrow y_{kh} \quad (k = 1 \text{ ou } 2).$$

Supposons, pour le moment, que l'on ait résolu les systèmes auxiliaires (S_1) et (S_2) ; alors, en posant

$$x_s = y_{kh} \quad \text{pour } x_s \longleftrightarrow y_{kh},$$

on obtiendrait évidemment une solution du système donné (S) .

En effet, prenons une série quelconque du système (S) , soit, par exemple, la $(i+1)^{\text{ième}}$ série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^i x_s;$$

celle-ci contiendra tous les termes des $(i+1)^{\text{ièmes}}$ séries des systèmes (S_1) et (S_2) :

$$\sum_{h=1}^{\infty} \mu_{1h}^i y_{1h} \quad \text{et} \quad \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{2h}^i y_{2h},$$

et n'en contiendra que ceux-ci.

Les dernières deux séries étant, d'après notre supposition, absolument convergentes et ayant pour sommes respectivement c_i et 0, il en résulterait donc que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^i x_s$$

sera absolument convergente, elle-aussi, et qu'elle aura pour somme c_i .

Or, le système (S_1) , étant un système du type III, peut être résolu toujours, comme nous l'avons démontré ci-dessus. De même, le système (S_2) étant un système du type I, on peut calculer, d'après le n° 24, une infinité de solutions, de sorte que les inconnues correspondant aux

$$x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots x_{\alpha_r}$$

prennent les valeurs prescrites $a_1, a_2, \dots a_r$.

On en tirera donc la conclusion suivante :

Étant donné un système quelconque (S) du type III, l'application convenable du principe des réduites fournira une infinité de solutions de (S) , telles qu'aucune des inconnues ne sera zéro, et que les inconnues

$$x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots x_{\alpha_r},$$

arbitrairement choisies à l'avance, prendront les valeurs prescrites (a_i) :

$$x_{\alpha_i} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots r),$$

r étant un entier positif quelconque.

IV. Sur la construction des solutions des systèmes du type IV.

49. Nous allons étendre le résultat obtenu au numéro précédent aux systèmes du type IV.

A cet effet on n'aura, au fond, qu' à répéter les raisonnements du numéro précédent.

En effet, soit donné un système quelconque (S) du type IV

$$c_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n^i x_n \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Décomposons la suite des λ_n

$$(E) = \dots \lambda_{-n}, \dots \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_n, \dots$$

en deux suites partielles indéfinies :

$(E_1) = \mu_{11}, \mu_{12}, \dots \mu_{1h}, \dots$
et

$$(E_2) = \dots \mu_{2(-h)} \dots \mu_{2(-1)}, \mu_{20}, \mu_{21}, \dots \mu_{2h}, \dots,$$

de sorte que les éléments

$$\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \dots \lambda_{\alpha_r},$$

arbitrairement choisis d'avance, appartiennent tous à (E_2) , cette dernière suite jouissant du même caractère que la suite donnée (E) , c'est-à-dire ayant, au moins, deux points-limites.

De plus, nous exigerons que les éléments μ_{kh} ($k=1, 2$) satisfassent aux conditions:

$$(41) \quad \begin{cases} 1^0 & \mu_{kg} \neq \mu_{kj} \text{ pour } g \neq j, \\ 2^0 & \mu_{1m} \neq \mu_{2n}, \text{ quels que soient } m \text{ et } n, \\ 3^0 & \lim_{h \rightarrow \infty} |\mu_{kh}| = \infty \quad (k=1, 2), \\ 4^0 & |\mu_{2(-n)}| < \mu \quad (n=0, 1, 2, \dots), \end{cases}$$

μ étant un nombre positif fixe.

Il est aisé de voir que la décomposition

$$(E) = (E_1) + (E_2)$$

peut être effectuée toujours de sorte que toutes les conditions ci-dessus soient remplies.

Par exemple, on pourrait procéder de la manière suivante:

On choisira un entier positif n_0 tel que soit

$$1.2^{n_0-1} > |a_i| \quad (i=1, 2, \dots r);$$

on prendra pour (E_1) la suite

$$(E_1) = \lambda_{1.2^{n_0-1}}, \lambda_{3.2^{n_0-1}}, \dots \lambda_{(2m-1)2^{n_0-1}}, \dots,$$

et pour (E_2) la suite

$$(E_2) = (E) - (E_1);$$

alors la décomposition

$$(E) = (E_1) + (E_2)$$

satisfera évidemment à toutes nos exigences.

50. Faisons correspondre aux suites partielles (E_1) et (E_2) les systèmes réduits généralisés (S_1) et (S_2) :

$$\left. \begin{aligned} (S_1) \quad c_i &= \sum_{h=1}^{\infty} \mu_{1h}^i y_{1h} \\ (S_2) \quad 0 &= \sum_{h=-\infty}^{\infty} \mu_{2h}^i y_{2h} \end{aligned} \right\} \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Il est clair que, d'après (41), (S_1) sera un système du type III, tandis que (S_2) sera un système du type II.

Établissons une correspondance univoque et réciproque entre les x_s et les y_{kh} ($k = 1, 2$) de sorte que soit

$$x_s \longleftrightarrow \lambda_s = \mu_{kh} \longleftrightarrow y_{kh}.$$

Calculons, d'après les numéros 25, 26 et 27, une solution du système (S_2) dépendant d'une infinité de quantités indéterminées A_n assujetties à la seule condition: $|A_n| > 1$, de sorte que les r inconnues de (S_2) correspondant aux

$$x_{\alpha_1}, x_{\alpha_r}, \dots x_{\alpha_r}$$

prennent les valeurs prescrites (a_i) ($i = 1, 2, \dots r$).

D'autre part, calculons, d'après les numéros 38—47, une solution du système (S_1) .

Cela étant, prenons

$$x_s = y_{kh} \quad \text{pour} \quad x_s \longleftrightarrow y_{kh} \quad (k = 1, 2);$$

alors les x_s constitueront une solution du système donné (S) , comme on s'en rendra aisément compte, par les mêmes considérations que ci-dessus, au n° 48.

Grâce à la présence des quantités indéterminées A_n ($|A_n| > 1$), on en déduira une infinité de solutions numériques dont chacune sera telle que

$$x_{\alpha_i} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots r).$$

Enfin, les solutions de (S_1) et de (S_2) étant constituées par des valeurs des inconnues dont aucune n'est zéro, il en résultera

immédiatement que les solutions du système donné (S) auront le même caractère.

Donc, étant donné un système quelconque du type IV, l'application convenable du principe des réduites fournira une infinité de solutions, telles qu'aucune des inconnues ne sera zéro, et que les inconnues

$$x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots x_{\alpha_r},$$

arbitrairement choisies à l'avance, prendront les valeurs prescrites (a_i):

$$x_{\alpha_i} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots r),$$

r étant un entier positif quelconque.

CHAPITRE III.

Sur les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues attachés aux séries de Dirichlet et aux équations différentielles linéaires.

I. Sur le procédé de formation des systèmes du type V et du type VI.

51. Dans ce Chapitre nous allons former et étudier une certaine catégorie de systèmes linéaires à une infinité d'inconnues attachés, d'une part, aux séries de Dirichlet et, d'autre part, aux équations différentielles linéaires.

Décrivons tout d'abord le procédé de formation de ces systèmes.

Soit donnée, d'une part, une série de Dirichlet quelconque, sous la forme (I) ou (II) (n° 5)

$$\sum_n x_n e^{-\lambda_n z}$$

à coefficients indéterminés x_n , les quantités λ_n satisfaisant respectivement à la condition (A) ou aux conditions (A) et (B) (n° 5).

Soit donnée, d'autre part, une équation différentielle linéaire quelconque

$$P_0(z) \frac{d^m y}{dz^m} + P_1(z) \frac{d^{m-1} y}{dz^{m-1}} + \dots + P_m(z). \quad y = P(z)$$

dont les coefficients sont assujettis aux conditions suivantes :

1° que $P(z)$ soit, en général, une fonction entière en z

$$P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots,$$

se réduisant, en particulier, à un polynôme entier, ou même à une constante (le zéro y compris);

2° que $P_0(z)$, $P_1(z)$, ... $P_m(z)$ soient des polynômes entiers en z

$$P_i(z) = a_{i0} + a_{i1}z + a_{i2}z^2 + \dots + a_{in_i}z^{n_i} \\ (i = 0, 1, 2, \dots m).$$

Cela étant, remplaçons dans l'équation différentielle donnée

$$y, \quad \frac{dy}{dz}, \quad \frac{d^2y}{dz^2}, \quad \dots \quad \frac{d^my}{dz^m}$$

respectivement par les séries

$$\begin{aligned} & \sum_h x_h e^{-\lambda_h z}, \\ & \sum_h (-\lambda_h) x_h e^{-\lambda_h z}, \\ & \sum_h (-\lambda_h)^2 x_h e^{-\lambda_h z}, \\ & \dots \dots \dots \\ & \sum_h (-\lambda_h)^m x_h e^{-\lambda_h z}, \end{aligned}$$

dont chacune (sauf la première) se déduit de la précédente en la différentiant terme à terme.

On obtiendra ainsi

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_h \{ P_0(z) (-\lambda_h)^m + P_1(z) (-\lambda_h)^{m-1} + \dots + P_{m-1}(z) (-\lambda_h) + \\ & \quad + P_m(z) \} e^{-\lambda_h z} x_h = P(z) \end{aligned} \right.$$

ou, en tenant compte de ce que

$$P_i(z) = a_{i0} + a_{i1}z + \dots + a_{in_i}z^{n_i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots m),$$

on aura

$$\sum_h \{ \varphi_0(\lambda_h) + z\varphi_1(\lambda_h) + z^2\varphi_2(\lambda_h) + \dots + z^r\varphi_r(\lambda_h) \} e^{-\lambda_h z} x_h = P(z),$$

en y désignant par

$$\varphi_0(\lambda_h), \varphi_1(\lambda_h), \dots \varphi_r(\lambda_h)$$

les polynômes entiers en λ_h de degré m au plus:

$$\varphi_k(\lambda_h) = a_{0k}(-\lambda_h)^m + a_{1k}(-\lambda_h)^{m-1} + \dots + a_{(m-1)k}(-\lambda_h) + a_{mk} \\ (k = 0, 1, 2, \dots, r),$$

et par r celui des $(m+1)$ entiers positifs ou zéros

$$n_0, \quad n_1, \quad n_2, \quad \dots \quad n_m$$

qui n'est pas inférieur à aucun des autres.

En développant l'expression

$$\{\varphi_0(\lambda_h) + \dots\} e^{-\lambda_h z}$$

suivant les puissances croissantes de z

$$\left\{ \varphi_0(\lambda_h) + z \varphi_1(\lambda_h) + \dots + z^r \varphi_r(\lambda_h) \right\} e^{-\lambda_h z} x_h = \\ = \left\{ \varphi_0(\lambda_h) + z \varphi_1(\lambda_h) + z^2 \varphi_2(\lambda_h) + \dots + z^r \varphi_r(\lambda_h) + \right. \\ \left. + z \varphi_0(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)}{1!} + z^2 \varphi_1(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)}{1!} + \dots + z^r \varphi_{r-1}(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)}{1!} + \right. \\ \left. + z^{r+1} \varphi_r(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)}{1!} + \right. \\ \left. + z^2 \varphi_0(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^2}{2!} + \dots + z^r \varphi_{r-2}(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^2}{2!} + z^{r+1} \varphi_{r-1}(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^2}{2!} + \right. \\ \left. + z^{r+2} \varphi_r(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^2}{2!} + \right. \\ \left. \dots \dots \dots \right\} x_h,$$

l'équation (42) s'écrit

$$\sum_h \left\{ \sum_{i=0}^r \left[\varphi_0(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^i}{i!} + \varphi_1(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^{i-1}}{(i-1)!} + \dots + \varphi_{i-1}(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)}{1!} + \right. \right. \\ \left. \left. + \varphi_i(\lambda_h) \right] x_h z^i + \right. \\ \left. + \sum_{i=r+1}^{\infty} \left[\varphi_0(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^i}{i!} + \varphi_1(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^{i-1}}{(i-1)!} + \dots + \right. \right. \\ \left. \left. + \varphi_r(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^{i-r}}{(i-r)!} \right] x_h z^i \right\} = P(z).$$

Or, égalons les coefficients des mêmes puissances de z dans les deux parties de la dernière équation; alors on obtiendra évidemment un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues (x_h)

$$\left\{ \begin{aligned} c_i &= \sum_h \left[\varphi_0(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^i}{i!} + \varphi_1(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^{i-1}}{(i-1)!} + \dots + \varphi_i(\lambda_h) \right] x_h \\ &\quad (i = 0, 1, 2, \dots, r), \\ c_i &= \sum_h \left[\varphi_0(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^i}{i!} + \varphi_1(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^{i-1}}{(i-1)!} + \dots + \varphi_r(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^{i-r}}{(i-r)!} \right] x_h \\ &\quad (i \geq r+1). \end{aligned} \right.$$

En remarquant enfin que pour $i \geq r$ dans la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation de ce système les coefficients des x_h sont des polynômes entiers en λ_h de degré $(m+i)$ au plus, ne contenant que les puissances des λ_h dont les exposants sont $\geq i-r$, il en résultera que le nombre des termes y sera $(m+r+1)$ au plus.

Donc, le système obtenu par le procédé de formation que nous venons de décrire peut être présenté sous la forme suivante:

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} c_i &= \sum_h \left\{ a_{i0} \lambda_h^{m+i} + a_{i1} \lambda_h^{m+i-1} + \dots + a_{i(m+i)} \right\} x_h \\ &\quad (i = 0, 1, 2, \dots, r), \\ c_i &= \sum_h \left\{ a_{i0} \lambda_h^{m+i} + a_{i1} \lambda_h^{m+i-1} + \dots + a_{i(m+r)} \lambda_h^{i-r} \right\} x_h \\ &\quad (i \geq r+1), \end{aligned} \right.$$

les a_{ik} y désignant à leur tour des polynômes linéaires des coefficients des $P_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, m$); par exemple,

$$\begin{aligned} a_{i0} &= a_{00} \frac{(-1)^{m+i}}{i!}, \\ a_{i1} &= \left(\frac{a_{10}}{i!} + \frac{a_{01}}{(i-1)!} \right) (-1)^{m+i-1}, \\ a_{i2} &= \left(\frac{a_{20}}{i!} + \frac{a_{11}}{(i-1)!} + \frac{a_{02}}{(i-2)!} \right) (-1)^{m+i-2} \\ &\dots \end{aligned}$$

52. Nous allons constater qu'il y a des cas où les coefficients des x_h , dans la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation de (43), sont des polynômes de degré $(m+i)$ (comme l'on sait, c'est le degré le plus élevé possible); d'autre part, il y a aussi des cas où le degré maximal n'est pas effectivement atteint; il peut même arriver que notre procédé de formation des systèmes ne s'applique point à l'équation différentielle donnée, parce que la partie droite de la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation du système peut s'annuler identiquement, tandis que $c_i \neq 0$.

En effet, remarquons qu'en tenant compte de ce que

$$\alpha_{i0} = (-1)^{m+i} \frac{\alpha_{00}}{i!},$$

on en tirera immédiatement la conclusion suivante: pour que le coefficient de x_h dans la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation du système (43) soit un polynôme entier de degré $(m+i)$, il faut et il suffit que soit $\alpha_{00} \neq 0$.

D'autre part, montrons maintenant que le degré du coefficient de x_h dans la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation du système peut être inférieur à $(m+i)$.

Soient, par exemple,

$$\begin{aligned} P_0(z) &= z^m, \\ P_1(z) &= z^{m-1}, \\ &\dots \dots \dots \\ P_{m-1}(z) &= z, \\ P_m(z) &= 1; \end{aligned}$$

alors on aura évidemment

$$\begin{aligned} \varphi_0(\lambda_h) &= +1, \\ \varphi_1(\lambda_h) &= (-\lambda_h)^1, \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_m(\lambda_h) &= (-\lambda_h)^m; \end{aligned}$$

par suite,

$$\left\{ \varphi_0(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^i}{i!} + \dots + \varphi_i(\lambda_h) \right\} = (-\lambda_h)^i \left[\frac{1}{i!} + \frac{1}{(i-1)!} + \dots + \frac{1}{1!} + 1 \right]$$

$$(i=0, 1, 2, \dots m),$$

ainsi que

$$\left\{ \varphi_0(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^i}{i!} + \dots + \varphi_m(\lambda_h) \frac{(-\lambda_h)^{i-m}}{(i-m)!} \right\} = (-\lambda_h)^i \left[\frac{1}{i!} + \frac{1}{(i-1)!} + \dots + \frac{1}{(i-m)!} \right] \quad (i \geq m+1).$$

Il en résulte, en particulier, que le système que l'on obtient dans ce cas-ci appartient évidemment à l'un des quatre types étudiés déjà dans les Chapitres précédents.

Enfin, examinons le cas suivant.

Soit donnée une équation différentielle linéaire telle que l'on ait

$$\begin{aligned} c_0 &\neq 0, \\ P_0(0) &= a_{00} = 0, \\ P_1(0) &= a_{10} = 0, \\ &\dots \dots \dots \\ P_m(0) &= a_{m0} = 0; \end{aligned}$$

alors

$$\varphi_0(\lambda_h) = a_{00}(-\lambda_h)^m + a_{10}(-\lambda_h)^{m-1} + \dots + a_{m0} \equiv 0$$

et il en résultera immédiatement que notre procédé de formation des systèmes ne s'appliquera pas à l'équation différentielle donnée.

En effet, d'après ce procédé, le coefficient de x_h dans la première équation du système est $\varphi_0(\lambda_h)$; or, dans ce cas-ci $\varphi_0(\lambda_h) \equiv 0$; par conséquent, la partie droite de la première équation du système, s'annulant identiquement, ne peut pas être égale à $c_0 \neq 0$.

53. Le dernier exemple montre qu'il y a des cas où notre procédé de formation des systèmes cesse d'être applicable; d'autre part, d'après les exemples précédents, il y a des cas où il s'appliquera bien et permettra alors d'obtenir des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues de la forme (43).

Appelons systèmes du type V ceux de ces systèmes où h ne parcourt que les valeurs entières positives:

$$h = 1, 2, 3, \dots,$$

et systèmes du type VI les systèmes analogues où h parcourt toutes les valeurs entières (négatives, zéro et positives) :

$$h = \dots -n, \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots n, \dots$$

Les systèmes du type V et du type VI peuvent être caractérisés de la manière suivante :

1° Ils sont obtenus des équations différentielles linéaires en y appliquant le procédé de formation que nous venons de décrire ci-dessus, les systèmes du type V étant attachés aux séries de Dirichlet de la forme (I), et ceux du type VI, aux séries de Dirichlet de la forme (II) (n° 5).

2° Le coefficient de x_h dans la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation du système est, en général, un polynôme entier en λ_h

$$(44) \begin{cases} a_{i0} \lambda_h^{m+i} + a_{i1} \lambda_h^{m+i-1} + \dots + a_{i(m+i)} & (i = 0, 1, 2, \dots r) \quad \text{et} \\ a_{i0} \lambda_h^{m+i} + a_{i1} \lambda_h^{m+i-1} + \dots + a_{i(m+r)} \lambda_h^{i-r} & (i \geq r+1), \end{cases}$$

les a_{ik} y dépendant linéairement des coefficients des polynômes

$$P_0(z), P_1(z), \dots P_m(z),$$

et r y désignant le degré le plus élevé des $P_j(z)$ ($j=0, 1, \dots m$).

3° Les polynômes (44) ne sont pas identiquement nuls, au moins pour une infinité de valeurs entières et positives de i ; ils ne le sont pas, en particulier, lorsque $c_i \neq 0$.

4° Pour toutes ces valeurs de i le nombre des termes des polynômes (44) est donc au moins 1 et au plus $(m+r+1)$; par suite, si $a_{i0}=0$, $a_{i1}=0$, $\dots$ $a_{i(k-1)}=0$, mais $a_{ik} \neq 0$, on aura

$$0 \leq k \leq m+r.$$

D'après tout cela, un système du type V s'écrira sous la forme suivante :

$$\begin{cases} c_i = \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ a_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \dots + a_{i(m+i)} \right\} x_h & (i = 0, 1, 2, \dots r), \\ c_i = \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ a_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \dots + a_{i(m+r)} \lambda_h^{i-r} \right\} & (i \geq r+1), \\ a_{ik} \neq 0, & 0 \leq k \leq m+r. \end{cases}$$

Quant aux systèmes du type VI, ils se présenteront sous une forme tout à fait analogue; seulement

$$\sum_{h=1}^{\infty} y \text{ sera remplacé par } \sum_{h=-\infty}^{+\infty}.$$

II. Sur la résolution des systèmes du type V.

54. Nous allons montrer que le problème de la résolution des systèmes du type V peut être ramené complètement à celui de la résolution des systèmes du type III ou du type I.

Pour s'en assurer, nous démontrerons la proposition suivante:

Étant donné un système quelconque du type V

$$(45) \quad \begin{cases} c_i = \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ a_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \dots + a_{i(m+i)} \right\} x_h & (i = 0, 1, \dots, r), \\ c_i = \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ a_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \dots + a_{i(m+r)} \lambda_h^{i-r} \right\} x_h & (i \geq r+1), \end{cases}$$

$$a_{ik} \neq 0, \quad 0 \leq k \leq m+r,$$

et en supposant qu'il ait une solution (x_h) , celle-ci rendrait absolument convergentes toutes les séries

$$\sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^p x_h \quad (p = 0, 1, 2, \dots).$$

En effet, d'après l'hypothèse faite, le système donné a une solution (x_h) ; par suite, en tenant compte de ce que nous entendons par une solution (n° 4), on peut dire que la série

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left| \left\{ a_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \dots + a_{i(m+r)} \lambda_h^{i-r} \right\} x_h \right|$$

convergera pour chaque valeur entière et positive de $i \geq r+1$. Étant $a_{ik} \neq 0$, le terme général peut être présenté évidemment sous la forme suivante:

$$u_h = \left| 1 + \frac{\alpha_{i(k+1)}}{\alpha_{ik}} \cdot \frac{1}{\lambda_h} + \dots + \frac{\alpha_{i(m+r)}}{\alpha_{ik}} \cdot \frac{1}{\lambda_h^{m+r-k}} \right| \cdot \left| \alpha_{ik} \lambda_h^{m+i-k} x_h \right|.$$

Or, en remarquant que, d'après le n° 53, le coefficient de x_h dans la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation du système (45) est, en général, un polynôme entier en λ_h , c'est-à-dire $k < m+r$, et que, d'autre part,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_h|} = 0,$$

il vient

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left\{ \left| \frac{\alpha_{i(k+1)}}{\alpha_{ik}} \cdot \frac{1}{\lambda_h} \right| + \dots + \left| \frac{\alpha_{i(m+r)}}{\alpha_{ik}} \cdot \frac{1}{\lambda_h^{m+r-k}} \right| \right\} = 0.$$

Par conséquent, quelque petite que soit la valeur positive de ε , on peut indiquer respectivement un entier positif $n(\varepsilon)$ tel que soit

$$u_h > |(1-\varepsilon) \alpha_{ik}| \cdot |\lambda_h^{m+i-k} x_h| \quad \text{pour } h \geq n(\varepsilon);$$

par suite, la série dont le terme général est

$$|(1-\varepsilon) \alpha_{ik}| \cdot |\lambda_h^{m+i-k} x_h|$$

convergera, ainsi que le fera la série dont le terme général est

$$|\lambda_h^{m+i-k} x_h|.$$

On en déduira donc immédiatement la convergence absolue de la série

$$\sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^p x_h \quad \text{pour } p = 0, 1, 2, \dots, m+i-k.$$

Or, étant $m+i-k \geq i-r$ ($i > r+1$), on voit que $m+i-k$ croît indéfiniment avec i ; aussi, toutes les séries

$$\sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^p x_h \quad (p = 0, 1, 2, \dots)$$

convergeront-elles absolument.

55. La série

$$\sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^p x_h$$

étant absolument convergente, elle aura une somme bien déterminée que nous désignerons par σ_p :

$$\sigma_p = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^p x_h.$$

Cela étant, on déduit de la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation du système donné (45), dans l'hypothèse que ce système ait une solution, la relation suivante :

$$c_i = a_{ik} \sigma_{m+i-k} + a_{i(k+1)} \sigma_{m+i-k-1} + \dots + a_{i(m+r)} \sigma_{i-r} \quad (i \geq r+1).$$

Généralement, chacune des équations du système donné (45) nous fournira une relation analogue. On peut les considérer comme équations ayant pour inconnues les σ_h , et constituant un système que nous appellerons système associé.

Nous en tirerons donc la conclusion suivante. Pour qu'un système quelconque du type V (45) ait une solution (x_h) , il faut que le système associé

$$(46) \quad \begin{cases} c_i = a_{ik} \sigma_{m+i-k} + a_{i(k+1)} \sigma_{m+i-k-1} + \dots + a_{i(m+r)} \sigma_{i-r} \\ \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r), \\ c_i = a_{ik} \sigma_{m+i-k} + a_{i(k+1)} \sigma_{m+i-k-1} + \dots + a_{i(m+r)} \sigma_{i-r} \\ \quad (i \geq r+1) \end{cases}$$

ne contienne que des équations compatibles et qu'il ait une solution (σ_h) , lui-aussi.

Remarquons que le système associé (46) est un système infini récurrent. En effet, quelque grand que soit l'entier positif s , on peut toujours indiquer une valeur entière et positive de i , soit $i = i_0$, telle que

$$i - r > s \quad \text{pour } i \geq i_0;$$

par conséquent, σ_s ne peut figurer que dans un nombre fini d'équations du système associé, puisque σ_s n'entrera plus dans la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation si $i \geq i_0$.

Il est aisé de démontrer que la condition nécessaire pour l'existence d'une solution du système donné (45) est aussi suffisante.

En effet, supposons que le système associé (46) ait une solution constituée par les valeurs

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_h, \dots;$$

prenons alors le système auxiliaire

$$(47) \quad \sigma_i = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^i x_h \quad (i = 0, 1, 2, \dots);$$

celui-ci appartient au type III lorsqu'il y a entre les σ_i au moins un qui diffère de 0, ou bien au type I si $\sigma_i = 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$).

En tout cas, il aura une infinité de solutions, comme nous venons de voir dans les Chapitres précédents.

Or, on se rendra aisément compte de ce que chacune des solutions du système auxiliaire (47) est aussi une solution du système donné (45).

En effet,

$$\begin{aligned} c_i &= a_{ik} \sigma_{m+i-k} + \dots + a_{i(m+r)} \sigma_{i-r} = \\ &= a_{ik} \cdot \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{m+i-k} x_h + \dots + a_{i(m+r)} \cdot \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{i-r} x_h = \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ a_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \dots + a_{i(m+r)} \lambda_h^{i-r} \right\} x_h \quad (i \geq r+1) \end{aligned}$$

et, de même,

$$c_i = \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ a_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \dots + a_{i(m+i)} \right\} x_h \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r).$$

56. D'après cela, étant donné un système quelconque du type V, et en se proposant de le résoudre, on n'aura évidemment qu'à procéder de la manière suivante :

1° On constituera le système associé récurrent et on l'examinera de près : si ce système contient des équations non compa-

tibles, il est clair que le système donné n'aura aucune solution; dans le cas où le système associé admet des solutions on les calculera.

2° À chacune des solutions du système associé

$$(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_h, \dots)$$

on fera correspondre un système auxiliaire

$$\sigma_i = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^i x_h \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

appartenant ou bien au type III, ou bien au type I, selon les cas.

3° On calculera les solutions des systèmes auxiliaires.

Chacune d'elles sera aussi une solution du système donné du type V et celui-ci n'en aura pas d'autres, comme il résulte évidemment des considérations précédentes.

Ainsi, la résolution d'un système du type V peut être ramenée complètement à la résolution du système associé récurrent et de tous les systèmes auxiliaires correspondants.

57. L'existence des solutions du système donné du type V dépend entièrement de l'existence des solutions du système associé.

Or, remarquons que dans le cas d'un système homogène du type V (c'est-à-dire lorsque $c_i = 0$, $i = 0, 1, 2, \dots$) le système associé sera homogène, lui-aussi, et aura, par suite, toujours au moins la solution triviale

$$\sigma_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

à laquelle correspondra le système auxiliaire du type I

$$0 = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^i x_h \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Ce dernier système ayant une infinité de solutions (Chap. I), et chacune d'elles étant aussi une solution du système homogène donné (du type V), il en résulte qu'entre les systèmes homogènes du type V il n'y en a pas qui n'aient point de solution

D'autre part, il est aisé de constater que l'on peut bien former des systèmes non homogènes du type V n'ayant aucune solution.

En effet, supposons, par exemple, que soient :

$$\begin{aligned} 1^0 \quad m &= 1, \\ 2^0 \quad P_0(z) &= a_0 z \quad (a_0 \neq 0), \\ 3^0 \quad P_1(z) &= b_0 z - a_0 \quad (b_0 \neq 0), \\ 4^0 \quad \frac{c_0}{-a_0} &\neq \frac{c_1}{b_0}; \end{aligned}$$

on aura alors $\varphi_0(\lambda_h) = -a_0$ et $\varphi_1(\lambda_h) = b_0 - a_0 \lambda_h$; par suite,

$$\frac{(-\lambda_h)}{1!} \varphi_0(\lambda_h) + \varphi_1(\lambda_h) = b_0,$$

et les deux premières équations du système correspondant du type V attaché à l'équation différentielle

$$a_0 z \frac{dy}{dz} + (b_0 z - a_0) y = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

sont

$$c_0 = \sum_{h=1}^{\infty} (-a_0) x_h,$$

$$c_1 = \sum_{h=1}^{\infty} b_0 x_h;$$

aussi, les deux premières équations du système associé sont-elles

$$c_0 = -a_0 \sigma_0,$$

$$c_1 = b_0 \sigma_0.$$

D'après la condition 4⁰, celles-ci ne sont pas compatibles et, par suite, dans ce cas-ci notre système non homogène du type V n'aura aucune solution.

Remarquons enfin qu'il y a des systèmes du type V dont les systèmes associés ont une infinité de solutions numériques.

En effet, soit

$$P_0(0) = a_{00} \neq 0;$$

alors, comme nous l'avons vu, au n° 52, le coefficient de x_h dans la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation d'un système du type V sera un polynôme entier en λ_h de degré

$$(m+i) \quad (i=0, 1, 2, \dots),$$

c'est-à-dire

$$a_{i0} \neq 0 \quad \text{et} \quad k=0.$$

Aussi, est-il clair que de tous les σ qui entrent effectivement dans la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation du système associé c'est σ_{m+i} qui aura l'indice le plus grand.

On peut donc exprimer successivement tous les σ_n où $n > m-1$ en fonction de

$$\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{m-1},$$

en considérant ces derniers comme constantes arbitraires.

On obtiendra ainsi une solution du système associé, dépendant, en général, de ces m constantes arbitraires et représentant, par suite, une infinité de solutions numériques. Donc, dans ce cas-ci, le système donné du type V sera équivalent à une infinité de systèmes auxiliaires du type III ou du type I.

III. Sur la résolution des systèmes du type VI.

58. Au numéro 53 nous avons déjà constaté que le procédé de formation des systèmes du type VI, ainsi que la forme sous laquelle ils se présentent, sont presque les mêmes que dans le cas des systèmes du type V; la seule différence consiste en ce que les systèmes du type V sont attachés aux séries de Dirichlet de la forme (I), tandis que ceux du type VI, aux séries de Dirichlet de la forme (II) (n° 5).

Aussi serait-il bien naturel d'essayer d'étendre les résultats obtenus ci-dessus pour les systèmes du type V aux systèmes du type VI.

Or, en examinant de près cette question, on constatera aisément que les raisonnements du n° 54 ne s'appliqueront pas aux systèmes du type VI.

En effet, au numéro 54 nous avons démontré que chacune des solutions d'un système du type V fera converger absolument les séries

$$\sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^i x_h \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

puisque de la convergence d'une série

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left| \left\{ \alpha_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \dots + \alpha_{i(m+r)} \lambda_h^{i-r} \right\} x_h \right|$$

résultera immédiatement la convergence absolue de la série

$$\sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{m+i-k} x_h.$$

En essayant maintenant d'obtenir le même résultat pour les systèmes du type VI, on verra tout de suite que dans ce cas les raisonnements précédents se trouveront évidemment en défaut. En effet, il est clair qu'en supposant que les séries d'un système du type VI

$$\begin{aligned} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left\{ \alpha_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \dots + \alpha_{i(m+i)} \right\} x_h & \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r), \\ \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left\{ \alpha_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \dots + \alpha_{i(m+r)} \lambda_h^{i-r} \right\} x_h & \quad (i \geq r+1) \end{aligned}$$

convergent absolument, et que la suite des λ_h ne soit assujettie qu'aux conditions générales (A) et (B) (n° 5), on ne peut pas en déduire, par les raisonnements du n° 54 au moins, la convergence absolue des séries

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \lambda_h^i x_h \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Mais qu'est ce qu'on doit dire alors à propos de la question intéressante suivante?

Y a-t-il des systèmes du type VI ayant des solutions qui font converger absolument les séries du système, sans qu'elles rendent absolument convergentes les séries

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \lambda_h^i x_h \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

ou au moins quelques-unes de ces séries?

En laissant ouverte cette question délicate, nous ne nous allons occuper que de celles des solutions des systèmes du type VI qui rendent absolument convergentes toutes les séries

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \lambda_h^i x_h \quad (i = 0, 1, 2, \dots);$$

nous les appelons solutions (a).

59. Il est aisé de voir que tout ce que nous venons de dire à propos des solutions des systèmes du type V peut être étendu, au fond, aux solutions (a) des systèmes du type VI. A cet effet on n'aura qu'à répéter les raisonnements des numéros 55—57.

En procédant ainsi, on démontrera la proposition suivante:

Soit donné un système quelconque du type VI (n° 53)

$$(48) \quad \begin{cases} c_i = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left\{ a_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \dots + a_{i(m+i)} \right\} x_h & (i = 0, 1, 2, \dots, r), \\ c_i = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left\{ a_{ik} \lambda_h^{m+i-k} + \dots + a_{i(m+r)} \lambda_h^{i-r} \right\} x_h & (i \geq r+1), \\ a_{ik} \neq 0, & 0 \leq k \leq m+r; \end{cases}$$

pour qu'il ait des solutions (a), il faut et il suffit que le système associé récurrent

$$(49) \quad \begin{cases} c_i = a_{ik} \sigma_{m+i-k} + \dots + a_{i(m+i)} \sigma_0 & (i = 0, 1, 2, \dots, r) \\ c_i = a_{ik} \sigma_{m+i-k} + \dots + a_{i(m+r)} \sigma_{i-r} & (i \geq r+1) \end{cases}$$

ait, lui-aussi, au moins une solution.

En faisant correspondre à chacune des solutions du système associé

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_h, \dots$$

un système auxiliaire

$$(50) \quad \sigma_i = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \lambda_h^i x_h \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

on peut dire que l'ensemble des solutions de tous ces systèmes auxiliaires contient toutes les solutions (α) du système donné du type VI et qu'il n'en contient que ceux-ci.

Les systèmes auxiliaires (50) étant du type II ou du type IV, on se rendra aisément compte de ce que la construction des solutions (α) d'un système du type VI (48) peut être ramenée, à l'aide du système associé récurrent (49), complètement à la résolution des systèmes du type IV ou du type II.

60. L'existence des solutions (α) d'un système du type VI dépendra entièrement de l'existence des solutions du système associé correspondant.

Celui-ci aura en tout cas la solution triviale

$$\sigma_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

si le système donné du type VI est homogène, puisque dans ce cas le système associé correspondant le sera évidemment, lui-aussi.

Il en résulte donc que chacun des systèmes homogènes du type VI a une infinité de solutions (α), au moins toutes celles du système auxiliaire du type II

$$0 = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \lambda_h^i x_h \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Quant aux systèmes non homogènes du type VI, on pourrait montrer à l'aide des exemples, comme au n° 57:

1° qu'en partant de certaines équations différentielles linéaires, on obtiendra des systèmes du type VI dont les systèmes associés contiennent des équations incompatibles et n'ont, par suite, aucune solution;

2° qu'il y a, d'autre part, des systèmes non homogènes du type VI dont les systèmes associés ont un nombre fini ou même une infinité de solutions numériques.

D'après cela, on trouve, d'une part, des systèmes non homogènes du type VI qui n'ont aucune solution (α) et, d'autre part, des systèmes qui en ont une infinité.

CHAPITRE IV.

Sur l'interpolation.

I. Généralités.

61. Jusqu'ici nous avons appliqué le principe des réduites aux différents systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues attachés aux séries de Dirichlet.

Allons maintenant l'appliquer à certains systèmes d'équations linéaires attachés aux séries entières.

L'objet de nos études, dans ce dernier Chapitre, sera le problème d'interpolation que l'on peut énoncer sous une forme plus ou moins générale.

Convenons d'appeler problème spécial de l'interpolation le problème suivant :

Étant données deux suites indéfinies de quantités quelconques :

$$\begin{aligned} c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad \dots \quad c_n, \quad \dots, \\ a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \dots \quad a_n, \quad \dots, \end{aligned}$$

les éléments de la dernière satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots, \\ |a_n| \rightarrow \infty \quad \text{pour } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

former une fonction entière $F(z)$ qui, pour $z = a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ prenne respectivement les valeurs $c_1, c_2, \dots c_n, \dots$

En posant

$$F(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots + C_n z^n + \dots,$$

on n'aura qu'à déterminer les coefficients C_n de sorte qu'ils

satisfassent au système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues

$$(51) \quad c_i = C_0 + C_1 a_i + C_2 a_i^2 + \dots + C_n a_i^n + \dots \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Appelons ces systèmes (51) systèmes du type VII. Cela étant, il est clair que le problème spécial de l'interpolation équivalent à la résolution du système correspondant du type VII.

Quant au problème généralisé de l'interpolation, nous l'énoncerons sous la forme suivante:

Étant données trois suites indéfinies:

1° une suite des (a_n)

$$a_1, a_2, a_3, a_n, \dots$$

telle que

$$|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots,$$

$$|a_n| \rightarrow \infty \text{ pour } n \rightarrow \infty,$$

2° une suite de nombres entiers positifs quelconques ou zéros

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots, \text{ et}$$

3° une suite de quantités quelconques

$$c_1^{(0)}, c_1^{(1)} \dots c_1^{(p_1)}, c_2^{(0)}, c_2^{(1)}, \dots c_2^{(p_2)}, \dots, c_n^{(0)}, c_n^{(1)}, \dots c_n^{(p_n)}, \dots,$$

former une fonction entière $F(z)$ de sorte que l'on ait pour $z = a_n$

$$\left. \begin{aligned} F(a_n) &= c_n^{(0)} \\ F'(a_n) &= c_n^{(1)} \\ &\dots \dots \dots \\ F^{(p_n)}(a_n) &= c_n^{(p_n)} \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, 3 \dots),$$

c'est-à-dire que la fonction $F(z)$, elle-même, ainsi que ses p_n premières dérivées prennent pour $z = a_n$ respectivement les valeurs prescrites $c_n^{(0)}, c_n^{(1)}, \dots, c_n^{(p_n)}$, n étant un nombre entier positif quelconque.

Cela revient évidemment à résoudre le système suivant d'équations linéaires à une infinité d'inconnues:

[illegible]

Appelons ces systèmes (52) systèmes du type VIII. Cela étant, il est clair que le problème généralisé de l'interpolation équivaut à la résolution du système correspondant du type VIII.

Remarquons que dans le cas particulier où

$$c_i^{(k)} = 0 \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \dots, p_i \\ (i = 1, 2, 3, \dots),$$

ce problème a été résolu par Weierstrass; en effet, d'après son théorème célèbre, on peut construire une infinité de fonctions entières $F(z)$ telles que

$$\left. \begin{array}{l} F(a_n) = 0 \\ F''(a_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ F^{(p_n)}(a_n) = 0 \end{array} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

En appliquant convenablement le principe des réduites, nous montrerons, dans ce Chapitre, que le même résultat peut être obtenu dans le cas général, les quantités données $c_i^{(k)}$ ayant des valeurs quelconques.

Ce beau résultat mettra bien en évidence, peut-être d'une façon plus frappante que le font les Chapitres précédents, le rôle

important que joue le principe des réduites dans la théorie des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

62. Nous allons résoudre d'abord les systèmes du type VII sous l'hypothèse particulière suivante, relative à la suite des a_n :

$$(53) \quad \begin{cases} |a_1| < |a_2| < |a_3| < \dots < |a_n| < \dots, \\ |a_n| \rightarrow \infty \text{ pour } n \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Comme nous le verrons, cette hypothèse restrictive facilitera considérablement notre tâche de construction des solutions des systèmes du type VII, en permettant d'y appliquer une méthode particulièrement simple. Ensuite, nous en dégagerons aisément l'idée essentielle d'une méthode analogue, s'appliquant aux systèmes du type VII, ainsi qu'à ceux du type VIII sous l'hypothèse suivante plus générale:

$$(54) \quad \begin{cases} |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots, \\ |a_n| \rightarrow \infty \text{ pour } n \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Ajoutons que ces méthodes ont toutes les deux pour base commune le principe des réduites, n'étant, au fond, que des modes d'application distincts du même principe.

En modifiant convenablement la première d'elles, on en déduira aisément l'autre.

Au lieu de traiter séparément les systèmes du type VII et ceux du type VIII, sous l'hypothèse (54), nous nous bornerons, pour éviter des répétitions, à ne résoudre que les systèmes du type VIII, qui embrassent d'ailleurs aussi tous les systèmes du type VII, puisque chacun de ceux-ci peut être considéré évidemment comme un système du type VIII dont tous les p_n sont nuls:

$$p_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

63. Remarquons enfin que chaque système du type VIII qui admet une solution, en admettra même une infinité.

En effet, soit

$$F(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots + C_n z^n + \dots$$

une fonction entière telle que

$$\left. \begin{array}{l} F(a_n) = c_n^{(0)} \\ F'(a_n) = c_n^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ F^{(p_n)}(a_n) = c_n^{(p_n)} \end{array} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

D'autre part, d'après Weierstrass, il y a une infinité de fonctions entières $\Phi(z)$ admettant d'une façon générale a_n pour zéro d'ordre $p_n + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) et, par suite, telles que

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(a_n) = 0 \\ \Phi'(a_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \Phi^{(p_n)}(a_n) = 0 \end{array} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

il en résulte évidemment que la somme

$$F(z) + \Phi(z)$$

représente, elle-aussi, une fonction entière $F_1(z)$ telle que

$$\left. \begin{array}{l} F_1(a_n) = c_n^{(0)} \\ F_1'(a_n) = c_n^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ F_1^{(p_n)}(a_n) = c_n^{(p_n)} \end{array} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Donc, à une infinité de fonctions $\Phi(z)$ correspondra une infinité des fonctions $F_1(z) = F(z) + \Phi(z)$ dont les coefficients constituent une infinité de solutions du système correspondant du type VIII.

II. Sur la résolution du problème spécial de l'interpolation dans un cas particulier.

64. Proposons-nous, sous l'hypothèse restrictive (53), de résoudre le problème spécial de l'interpolation (n° 61), ou, en d'autres termes, de construire une solution du système (51).

Remarquons tout d'abord qu'étant donné un système quelconque tel que (51), on peut le présenter toujours sous la forme

$$(55) \quad b_i = A_1 a_i + A_2 a_i^2 + \dots + A_n a_i^n + \dots \quad \left. \vphantom{b_i} \right\} \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

où

$$a_1 \neq 0, \quad |a_n| \rightarrow \infty \text{ pour } n \rightarrow \infty,$$

$$|a_1| < |a_2| < |a_3| < \dots < |a_n| < \dots,$$

la suite indéfinie

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad \dots \quad b_n, \quad \dots$$

contenant au moins un élément différent de zéro et les inconnues y étant désignées par $A_1, A_2, A_3, \dots A_n, \dots$

En effet, il y a deux cas à distinguer:

$$1^0 \quad a_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad 2^0 \quad a_1 = 0.$$

Dans le premier cas on choisira $C_0 = c$ de sorte qu'en désignant

$$c_i - c = b_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

tous les b_i ne soient pas nuls; alors, en posant

$$A_n = C_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{et} \quad a_i = a_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

on obtiendra évidemment un système tel que (55).

Dans l'autre cas, où $a_1 = 0$, on aura $C_0 = c_1$; alors, s'il y a entre les différences $c_i - c_1$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) au moins une qui diffère de zéro, on n'aura qu'à poser

$$b_i = c_i - c_1, \quad a_i = a_{i+1} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

et

$$A_n = C_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Dans le cas contraire, étant

$$c_i - c_1 = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots,$$

on peut présenter le système donné (51) sous la forme suivante:

$$-C_1 = C_2 a_i + C_3 a_i^2 + \dots + C_n a_i^{n-1} + \dots \quad \left. \vphantom{-C_1} \right\} \quad (i = 2, 3, 4, \dots),$$

d'où l'on déduit immédiatement qu'en choisissant C_1 de sorte que soit $-C_1 = c_0 \neq 0$, et en posant

$$a_i = a_{i+1}, \quad b_i = c_0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots \quad \text{et} \quad A_{n-1} = C_n$$

pour $n = 2, 3, 4, \dots$, on obtiendra encore un système tel que (55).

D'après cela, il est clair que, sans restreindre la généralité, on peut se borner à n'étudier dès lors que les systèmes (51) où $a_1 \neq 0$, $C_0 = 0$ et la suite indéfinie

$$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$$

contient au moins un élément $c_j \neq 0$, tous les autres cas se ramenant aisément à celui-ci, comme nous venons de le voir tout à l'heure.

Donc, pour résoudre le problème spécial de l'interpolation, sous l'hypothèse (53), on n'aura qu'à montrer qu'on peut toujours construire une solution d'un système quelconque du type VII

$$(56) \quad c_i = \sum_{n=1}^{\infty} C_n a_i^n \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

tel que

$$(57) \quad \begin{cases} 1^\circ & a_1 \neq 0, \\ 2^\circ & |a_n| \rightarrow \infty \text{ pour } n \rightarrow \infty, \\ 3^\circ & |a_1| < |a_2| < |a_3| < \dots < |a_n| < \dots, \quad \text{et} \\ 4^\circ & c_j \neq 0, \end{cases}$$

j étant d'ailleurs un nombre entier positif quelconque.

65. Nous verrons que chaque système (56) satisfaisant aux conditions (57) peut être résolu à l'aide des systèmes réduits généralisés dont le $k^{\text{ième}}$ s'écrira sous la forme suivante :

$$(58) \quad \gamma_i = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_i^{h-1} y_h \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

où $\gamma_i = 0$ pour $i \neq k$, la suite indéfinie

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \dots$$

étant telle que

$$(27) \quad \left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \right| \geq p \geq 4 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Il résulte évidemment de (27) que

$$|\lambda_n| \rightarrow \infty \text{ pour } n \rightarrow \infty,$$

et

$$\left| \frac{\lambda_n}{\lambda_m} \right| \geq p^{n-m} \text{ pour } n > m,$$

quels que soient les nombres entiers positifs n et m (n° 35).

Quant aux systèmes tels que (58) dont les λ_n satisfont à la condition (27), nous allons montrer que chacun d'eux peut être résolu par la méthode de Fourier.

En effet, étant donné un système (58), désignons par

$$y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots y_h^{(n)}, \dots y_n^{(n)}$$

les valeurs des inconnues du système réduit correspondant, ne contenant que n équations et autant d'inconnues ($n \geq h$); cela étant, on aura évidemment

$$y_h^{(n)} = (-1)^{h+k} \gamma_k \frac{\Delta_{k,h}^{(n)}}{\Delta^{(n)}}$$

où

$$\Delta^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta_{k,h}^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{h-2} & \lambda_1^h & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_{k-1} & \dots & \lambda_{k-1}^{h-2} & \lambda_{k-1}^h & \dots & \lambda_{k-1}^{n-1} \\ 1 & \lambda_{k+1} & \dots & \lambda_{k+1}^{h-2} & \lambda_{k+1}^h & \dots & \lambda_{k+1}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{h-2} & \lambda_n^h & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

En comparant cette solution-ci avec celle du système réduit fini correspondant au système (22) (n° 30), on s'aperçoit aisément de ce que celle-ci s'obtient de celle-là en y remplaçant

$$k \text{ par } h-1, \quad h \text{ par } k \quad \text{et} \quad c_k \text{ par } \gamma_k.$$

Donc, d'après (23) (n° 30),

$$\left\{ \begin{aligned} y_h^{(n)} = & \frac{(-1)^{h+k} \gamma_k \cdot \sum_{(\lambda_k, \lambda_1)}^{(n-1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_h}}{\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1} - 1\right) \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_2} - 1\right) \dots \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} - 1\right) \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+2}}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right)} \\ & (h = 1, 2, 3, \dots, n), \end{aligned} \right.$$

$$\sum_{(\lambda_k, \lambda_1)}^{(n-1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_h}$$

étant la fonction symétrique, entière et homogène d'ordre $h-1$ des $n-1$ quantités :

$$\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_{k-1}}, \frac{1}{\lambda_{k+1}}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \quad (\text{n° 30}).$$

En tenant compte de la condition (27), ainsi que des considérations des numéros 33 et 37, on pourra en conclure que les limites

$$y_h = \lim_{n \rightarrow \infty} y_h^{(n)}$$

existent, étant finies, bien déterminées et, pour $\gamma_k \neq 0$, différentes de zéro :

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} y_h = & (-1)^{h+k} \gamma_k \frac{\sum_{(\lambda_k, \lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_h}}{\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1} - 1\right) \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_2} - 1\right) \dots \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} - 1\right) \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+m}}\right)} \\ & (h = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right.$$

Les valeurs des y_h , qui viennent d'être obtenues, constituent une solution du système (58) en rendant absolument convergentes toutes ses séries.

En effet, prenons, pour fixer les idées, la série $i^{\text{ième}}$, i étant un nombre entier positif fixe choisi d'ailleurs arbitrairement, et désignons par

$$u_h = \lambda_i^{h-1} y_h \quad \text{et} \quad u_{h+1} = \lambda_i^h y_{h+1}$$

ses deux termes successifs; alors, d'après (59), on aura

$$\left| \frac{u_{h+1}}{u_h} \right| = \left| \lambda_i \frac{\sum_{(\lambda_k, \lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{h+1}}}{\sum_{(\lambda_k, \lambda_1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_h}} \right|,$$

et, par suite, d'après les inégalités (29) ou (28) (n° 35),

$$\left| \frac{u_{h+1}}{u_h} \right| < 15 \left| \frac{\lambda_i}{\lambda_{h+1}} \right|;$$

donc,

$$\left| \frac{u_{h+1}}{u_h} \right| \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad h \rightarrow \infty$$

et il en résulte immédiatement que la série $i^{\text{ième}}$ converge absolument.

Les parties droites des équations du système (58) s'obtiennent de la série

$$\sum_{h=1}^{\infty} y_h z^{h-1}$$

en y faisant parcourir à z les éléments de la suite indéfinie

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \dots$$

Or, remarquons que, si l'on entend, dans cette série, par y_h respectivement les valeurs bien déterminées des inconnues du système (58) fournies par les formules (59), cette série représentera une fonction entière $\psi(z)$.

En effet, comme nous venons de le voir, elle converge absolument pour $z = \lambda_i$, i étant un nombre entier positif quelconque; par suite, elle le fera évidemment aussi dans toute l'étendue du plan de z , puisque

$$|\lambda_i| \rightarrow \infty \quad \text{pour} \quad i \rightarrow \infty.$$

Nous en concluons donc que chaque système (58) où la suite des λ_n satisfait à la condition (27) nous fournira une fonction entière

$$\psi(z) = \sum_{h=1}^{\infty} y_h z^{h-1}.$$

66. L'idée essentielle de la méthode par laquelle nous allons résoudre le problème spécial de l'interpolation, énoncé ci-dessus (n° 64), consiste en ce que nous allons former, d'après une certaine règle, une suite indéfinie de systèmes réduits généralisés

$$(S_1), (S_2), \dots (S_n), \dots$$

analogues à (58); à l'aide de ceux-ci nous construirons respectivement une suite indéfinie de fonctions

$$\psi_1(z), \psi_2(z), \dots \psi_n(z), \dots,$$

en choisissant les systèmes (S_n) de sorte que les fonctions correspondantes $\psi_n(z)$ satisfassent aux conditions suivantes:

- (I) que $\psi_n(z)$ soit une fonction entière, représentée par une série entière de z convergente dans toute l'étendue du plan de z ;
- (II) que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z)$$

soit uniformément convergente dans le même domaine;

et que l'on ait:

$$(III) \quad \psi_n(a_i) = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots n-1,$$

$$(IV) \quad \psi_n(a_n) = c_n - \psi_1(a_n) - \psi_2(a_n) - \dots - \psi_{n-1}(a_n) \\ (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Supposons, pour le moment, tout cela fait; alors, d'après (I) et (II), la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z)$$

représenterait évidemment une fonction $F(z)$ holomorphe dans toute l'étendue du plan de z , c'est-à-dire $F(z)$ serait une fonction entière; de plus, en tenant compte de (III) et (IV), on aurait

$$F(a_n) = \psi_1(a_n) + \psi_2(a_n) + \dots + \psi_n(a_n) = c_n, \\ (n = 1, 2, 3, \dots);$$

donc, la fonction $F(z)$ serait bien une fonction entière exigée prenant,

$$\text{pour } z = a_1, a_2, a_3, \dots a_m, \dots$$

respectivement les valeurs prescrites

$$c_1, c_2, c_3, \dots c_m, \dots$$

67. Quant à la règle d'après laquelle on formera les systèmes réduits généralisés (S_n) , nous nous permettrons de faire à ce sujet quelques remarques générales, avant qu'elle soit fixée définitivement.

Remarquons tout d'abord que les parties droites des équations du système donné (56) s'obtiennent de la série entière

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m z^m$$

en y faisant parcourir à z les éléments de la suite donnée

$$(A) = a_1, a_2, a_3, \dots a_m, \dots$$

D'une façon tout analogue, nous formerons les parties droites des équations du système $n^{\text{ième}}$ (S_n) , quel que soit n , en prenant une série partielle déduite d'une certaine façon de la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m z^m$$

et en y faisant parcourir à z les éléments d'une suite partielle (A_n) déduite d'une certaine façon de la suite donnée (A) .

Les rangs des termes de la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m z^m$$

constituent la suite naturelle des nombres

$$(E) = 1, 2, 3, 4, \dots m, \dots;$$

or, d'après le n° 15, celle-ci peut être décomposée en une infinité de suites partielles bien déterminées

$$(E) = (E_1) + (E_2) + \dots + (E_m) + \dots,$$

(E_m) étant

$$(E_m) = 1.2^{m-1}, 3.2^{m-1}, 5.2^{m-1}, \dots (2h-1)2^{m-1}, \dots,$$

quel que soit le nombre entier positif m .

Cela étant, convenons de former toujours la série partielle $\psi_n(z)$ de sorte qu'elle ne contienne que les termes de la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m z^m$$

dont les rangs constituent la suite partielle

$$(E_{m_n}) = 1.2^{m_n-1}, 3.2^{m_n-1}, \dots (2h-1).2^{m_n-1}, \dots,$$

m_n étant un nombre entier positif que nous déterminerons ultérieurement.

On aura donc

$$\begin{aligned} \psi_n(z) = & C_{1.2^{m_n-1}} z^{1.2^{m_n-1}} + C_{3.2^{m_n-1}} z^{3.2^{m_n-1}} + \dots + \\ & + C_{(2h-1)2^{m_n-1}} z^{(2h-1)2^{m_n-1}} + \dots \end{aligned}$$

et il est aisé de voir que, quant à la forme de $\psi_n(z)$, celle-ci est complètement caractérisée par m_n ; en tenant compte de cela, désignons dès lors cette série par $\psi_n(z, m_n)$.

Supposons, pour le moment, qu'on ait choisi d'une façon quelconque m_n , ainsi que

$$(A_n) = a_{n1}, a_{n2}, \dots a_{nn}, a_{n(n+1)}, \dots,$$

(A_n) étant une suite partielle de (A) ; alors, quel que soit le nombre entier positif i , nous exigerons que la partie droite de l'équation $i^{\text{ième}}$ du système (S_n) soit

$$\psi_n(a_{ni}, m_n).$$

Quant aux parties gauches des équations de ce système (S_n) , égalons-les toutes à zéro, sauf celle de l'équation $n^{\text{ième}}$ que nous désignons par δ_n , en nous réservant de la déterminer ultérieurement.

D'après cela, il est clair que chaque système (S_n) sera complètement donné dès que l'on a fixé d'une façon quelconque ses trois éléments caractéristiques: m_n , (A_n) et δ_n ; il en résulte donc que le procédé de construction des systèmes réduits généralisés (S_n) consiste, au fond, en ce que l'on fait, d'une certaine façon, choix de leurs éléments caractéristiques.

68. Comme nous venons de le constater tout à l'heure, les éléments caractéristiques m_n , (A_n) et δ_n déterminent un système (S_n) de la forme suivante:

$$\delta_i = \psi_n(a_{ni}, m_n) \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

où, par définition, $\delta_i = 0$ pour $i \neq n$; explicitement celui-ci s'écrit

$$\delta_i = C_{1,2}^{m_n-1} a_{ni}^{1,2^{m_n-1}} + C_{3,2}^{m_n-1} a_{ni}^{3,2^{m_n-1}} + \dots + \\ + C_{(2h-1)2}^{m_n-1} a_{ni}^{(2h-1)2^{m_n-1}} + \dots \quad \left. \vphantom{C_{1,2}^{m_n-1}} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

ou, en tenant compte de ce que

$$(2h-1)2^{m_n-1} = (h-1)2^{m_n} + 2^{m_n-1},$$

$$\frac{\delta_i}{a_{ni}^{2^{m_n-1}}} = C_{1,2}^{m_n-1} + C_{3,2}^{m_n-1} \left(a_{ni}^{2^{m_n}} \right)^1 + \dots + \\ + C_{(2h-1)2}^{m_n-1} \left(a_{ni}^{2^{m_n}} \right)^{h-1} + \dots \quad \left. \vphantom{C_{1,2}^{m_n-1}} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots);$$

enfin, en désignant

$$(60) \quad \begin{cases} \gamma_i = \frac{\delta_i}{a_{ni}^{2^{m_{n-1}}}} & (i = 1, 2, 3, \dots), \\ \lambda_i = a_{ni}^{2^{m_n}} \\ y_h = C_{(2^{h-1})2^{m_{n-1}}} & (h = 1, 2, 3, \dots), \end{cases}$$

notre système se présentera sous la même forme que le système (58):

$$\gamma_i = \sum_{h=1}^{\infty} y_h \lambda_i^{h-1} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

où $\gamma_i = 0$ pour $i \neq n$, car, par définition, $\delta_i = 0$ pour $i \neq n$.

Donc, quel que soit le nombre entier positif n , chaque système réduit généralisé (S_n) formé à l'aide de ses éléments caractéristiques m_n , (A_n) et δ_n (n° 67) peut, en effet, être mis sous la forme d'un système tel que (58).

Il ne reste, par suite, qu'à déterminer les éléments caractéristiques, de sorte que les systèmes (S_n) puissent être résolus par la méthode de Fourier, et qu'ils nous fournissent une suite indéfinie de fonctions

$$\psi_1(z, m_1), \psi_2(z, m_2), \dots, \psi_n(z, m_n), \dots$$

satisfaisant aux conditions (I), (II), (III) et (IV) (n° 66), étant

$$\psi_n(z, m_n) = \sum_{h=1}^{\infty} C_{(2^{h-1})2^{m_{n-1}}} z^{(2^{h-1})2^{m_{n-1}}}$$

où l'on entend par $C_{(2^{h-1})2^{m_{n-1}}}$ les valeurs respectives des inconnues du système (S_n) obtenues en résolvant ce système par la méthode de Fourier.

69. Examinons maintenant de près les conditions auxquelles il suffit d'assujettir les éléments caractéristiques m_n , (A_n) et δ_n , pour que les fonctions correspondantes $\psi_n(z, m_n)$ satisfassent, en effet, à toutes les conditions énoncées au n° 66.

Comme nous venons de le voir, au n° 68, chaque système (S_n) s'écrit sous la forme d'un système tel que (58), en y introduisant γ_i, λ_i, y_h à l'aide des formules (60).

D'autre part, d'après le n° 65, chaque système (58) dont la suite correspondante des λ_m satisfait à la condition (27) détermine une fonction entière de z .

Nous en tirons donc immédiatement la conclusion suivante : pour qu'un système (S_n) nous fournisse une fonction entière $\psi_n(z, m_n)$, c'est-à-dire pour que la condition (I) (n° 66) soit remplie, il suffit de choisir m_n et (A_n) de sorte que l'on ait

$$(61) \quad \left| \frac{a_{n(m+1)}}{a_{nm}} \right| 2^{m_n} \geq p \geq 4 \quad (m = 1, 2, 3 \dots).$$

De même, pour satisfaire à la condition (III) (n° 66) :

$$\psi_n(a_i, m_n) = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots, n-1,$$

il suffit évidemment de choisir (A_n) en tenant compte non seulement de (61), mais en imposant encore cette autre condition :

$$(62) \quad a_{ni} = a_i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots, n-1.$$

En effet, étant $\delta_i = 0$ pour $i \neq n$ (n° 67), il en résulte que

$$\psi_n(a_{ni}, m_n) = 0 \quad \text{pour } i \neq n;$$

par suite, lorsque $a_{ni} = a_i$ pour $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$, on aurait bien

$$\psi_n(a_i, m_n) = 0$$

pour les mêmes valeurs de i .

Ensuite, pour satisfaire à la condition (IV) (n° 66) :

$$\psi_1(a_n, m_1) + \psi_2(a_n, m_2) + \dots + \psi_n(a_n, m_n) = c_n,$$

il suffit de prendre, comme on s'en assurera aisément,

$$(63) \quad \begin{cases} a_{nm} = a_n & \text{et} \\ \delta_n = c_n - \psi_1(a_n, m_1) - \psi_2(a_n, m_2) - \dots - \psi_{n-1}(a_n, m_{n-1}), \end{cases}$$

en supposant que les fonctions entières

$$\psi_1(z, m_1), \psi_2(z, m_2), \dots \psi_{n-1}(z, m_{n-1})$$

soient déjà déterminées par les $n-1$ premiers systèmes:

$$(S_1^*), (S_2), \dots (S_{n-1}).$$

Cela étant, δ_n aurait évidemment une valeur finie et bien déterminée.

Enfin, pour que la condition (II) (n° 66) soit remplie, elle-aussi, il suffit, comme nous le montrerons ultérieurement, d'imposer à m_n encore la condition suivante:

$$(64) \quad |\gamma_n| = \left| \frac{\delta_n}{a_n^{2^{m_n-1}}} \right| < 1 \quad \text{pour } n \geq r,$$

r étant un nombre entier positif quelconque choisi de sorte que l'on ait

$$|a_m| > 1 \quad \text{pour } m \geq r.$$

Donc, il s'agit dès lors:

1° de montrer que l'on peut, en effet, satisfaire aux conditions simultanées (61), (62), (63) et (64) que nous venons d'imposer aux éléments caractéristiques m_n , (A_n) et δ_n ;

2° de fixer définitivement ces éléments au moyen de règles précises, permettant de les choisir en tenant compte de toutes les conditions mentionnées ci-dessus, et

3° de démontrer la convergence uniforme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n)$$

dans toute l'étendue du plan de la variable z , les fonctions entières $\psi_n(z, m_n)$ étant construites à l'aide des systèmes (S_n) déterminés par leurs éléments caractéristiques.

70. Occupons-nous d'abord de la première de ces trois questions.

Supposons que l'on ait déjà construit les $n-1$ premières fonctions entières :

$$\psi_1(z, m_1), \psi_2(z, m_2), \dots \psi_{n-1}(z, m_{n-1})$$

à l'aide des systèmes $(S_1), (S_2), \dots (S_{n-1})$; alors, d'après (63), δ_n sera une quantité finie est bien déterminée.

Cela étant, il est aisé de voir que l'on peut toujours supposer que soit

$$|\gamma_n| = \left| \frac{\delta_n}{a_n^{m_n-1}} \right| < 1$$

pour $n \geq r$, r étant un nombre entier positif quelconque choisi de sorte que $|a_m| > 1$ pour $m \geq r$.

En effet, étant $n \geq r$ et, par suite, $|a_n| > 1$, il en résulte immédiatement que pour chaque valeur finie de δ_n on aura $|\gamma_n| < 1$, pourvu que m_n soit respectivement un nombre positif assez grand.

En particulier, lorsque $|a_n| > 1$, et δ_n a une valeur bien déterminée, il y a évidemment un nombre entier positif le plus petit $z_n \geq 1$ satisfaisant à l'inégalité

$$\left| \frac{\delta_n}{a_n^{z_n}} \right| < 1,$$

c'est-à-dire tel que

$$z_n > \frac{\log |\delta_n|}{\log |a_n|};$$

z_n une fois calculé, on peut dire que $|\gamma_n| < 1$ pour chaque valeur entière et positive de m_n satisfaisant à la condition

$$2^{m_n-1} \geq z_n.$$

Reste enfin à examiner de près (61):

$$\left| \frac{a_{n(m+1)}}{a_{nm}} \right|^{2^{m_n}} \geq p \geq 4 \quad (m=1, 2, 3, \dots),$$

a_{nm} y désignant $m^{\text{ième}}$ élément de la suite partielle (A_n) dont les

n premiers éléments doivent être les mêmes que ceux de la suite donnée (A):

$$a_{ni} = a_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots n).$$

71. A cet effet démontrons tout d'abord la proposition suivante:

Étant donnée une suite indéfinie

$$(A) = a_1, a_2, a_3, \dots a_m, \dots$$

telle que

$$|a_1| < |a_2| < \dots < |a_m| < \dots, \quad |a_m| \rightarrow \infty \text{ pour } m \rightarrow \infty,$$

on peut toujours déterminer un nombre entier positif le plus petit $\mu_n \geq 1$, de sorte que pour $\mu'_n \geq \mu_n$ on ait

$$\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right|^{\mu'_n} \geq p \geq 4 \quad (i = 1, 2, 3, \dots n),$$

n étant un nombre entier positif quelconque, et $p \geq 4$ un nombre positif fixe.

En effet, par hypothèse,

$$\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| > 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Or, désignons par q celui des n nombres positifs:

$$\left| \frac{a_2}{a_1} \right|, \left| \frac{a_3}{a_2} \right|, \dots, \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right|, \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

qui sera le plus petit, ou, au moins, pas plus grand que chacun des autres; d'après cela, $q > 1$ et, par suite, étant donné $p \geq 4$, on peut faire correspondre à ces deux nombres fixes: q et p un nombre entier positif μ_n de sorte que soit

$$q^{\mu_n} \geq p.$$

Pour fixer les idées, entendons par μ_n le nombre entier positif le plus petit pour lequel est remplie la dernière condition.

Cela étant, on aura évidemment à fortiori

$$q^{\mu'_n} > p \quad (\mu'_n > \mu_n);$$

donc, en particulier,

$$q^{2^{m_n}} \geq p$$

pour chaque valeur entière et positive de m_n satisfaisant à la condition

$$2^{m_n} \geq \mu_n.$$

En tenant compte enfin de ce que nous entendons par q , il est aisé de voir que μ_n , qui vient d'être déterminé tout à l'heure, est bien le plus petit nombre entier positif pour lequel on aura

$$\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right|^{\mu_n} \geq p \geq 4 \quad (i = 1, 2, 3, \dots n).$$

72. Montrons maintenant qu'il est bien possible de déduire de la suite donnée (A) une suite partielle

$$(A_n) = a_{n1}, a_{n2}, \dots a_{nm}, a_{n(m+1)}, \dots,$$

et de choisir un nombre entier positif m_n de la façon que l'on ait:

$$1^0 \quad a_{ni} = a_i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots n,$$

$$2^0 \quad \left| \frac{a_{n(m+1)}}{a_{nm}} \right|^{2^{m_n}} \geq p \geq 4 \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

En effet, en posant

$$a_{ni} = a_i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots n$$

et en calculant, d'après le numéro précédent, μ_n , on aura

$$\left| \frac{a_{n(m+1)}}{a_{nm}} \right|^{\mu_n} \geq p \geq 4 \quad \text{pour } m = 1, 2, 3, \dots n-1.$$

Quant à tous les autres éléments de la suite (A_n)

$$a_{n(n+1)}, a_{n(n+2)}, \dots a_{nm}, \dots,$$

nous les choisirons de sorte que l'on ait

$$\left| \frac{a_{n(n+1)}}{a_{nm}} \right|^{\mu_n} \geq p \geq 4,$$

m étant un nombre entier positif quelconque. A cet effet on n'aura qu'à procéder de la manière suivante. Étant donné un élément quelconque a_{nm} ($m \geq n$) de la suite (A_n) , prenons pour $a_{n(n+1)}$ un élément quelconque de la suite (A) , soit a_s , tel que soit

$$\left| \frac{a_s}{a_{nm}} \right|^{\mu_n} \geq p \geq 4.$$

Or, cette dernière condition n'exigeant que ce que $|a_s|$ soit assez grand :

$$|a_s|^{\mu_n} \geq p |a_{nm}|^{\mu_n},$$

elle peut être satisfaite évidemment d'une infinité de manières, puisque $|a_m| \rightarrow \infty$ pour $m \rightarrow \infty$ et, par suite, à partir d'un certain indice N assez grand tous les éléments de la suite (A) sont tels que chacun d'eux pourra être pris pour $a_{n(n+1)}$.

Donc, en imaginant notre procédé continué indéfiniment, on obtiendra une suite indéfinie

$$(A_n) = a_{n1}, a_{n2}, \dots a_{nm}, a_{n(m+1)}, \dots$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

$$a_{ni} = a_i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots n$$

et

$$\left| \frac{a_{n(m+1)}}{a_{nm}} \right|^{\mu_n} \geq p \geq 4 \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

cette suite admettant d'ailleurs, comme il est aisé de le voir, une infinité de déterminations.

Cela étant, il est clair que

$$\left| \frac{a_{n(m+1)}}{a_{nm}} \right|^{2^{m_n}} \geq p \geq 4 \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

pour chaque valeur entière et positive de m_n telle que

$$2^{m_n} \geq \mu \quad (\text{n}^\circ 71),$$

c'est-à-dire à partir d'une valeur assez grande de m_n .

Remarquons enfin que dans le cas où

$$n \geq r \quad (\text{n}^\circ 70)$$

on aura de plus

$$|\gamma_n| < 1$$

pour chaque valeur entière et positive de m_n satisfaisant aux conditions simultanées et bien compatibles suivantes:

$$\left. \begin{array}{l} 2^{m_n} \geq \mu_n \\ \text{et} \quad 2^{m_n-1} \geq \kappa_n \end{array} \right\} \quad (\text{n}^\circ 70).$$

Nous en tirons donc la conclusion que, si les éléments caractéristiques des systèmes

$$(S_1) \ (S_2), \dots (S_{n-1})$$

satisfont aux conditions (61), (62), (63) et (64) (n° 69), ceux du système (S_n) peuvent être choisis toujours de sorte qu'ils satisfassent, eux-aussi, aux mêmes conditions, (A_n) et m_n admettant même une infinité de déterminations.

73. Pour fixer les idées, convenons de choisir (A_n) et m_n d'après certaines règles simples n'admettant pour eux qu'une seule détermination, quel que soit le nombre entier positif n .

A cet effet prenons pour (A_1) la suite indéfinie

$$(A_1) = a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots a_{1m}, \dots,$$

en déterminant ses éléments de la manière suivante : soit $a_{11} = a_1$ et, d'une façon générale, étant fixé un élément quelconque

$$a_{1m} \ (m \geq 1), \text{ soit } a_{1(m+1)} = a_s$$

où l'on entend par a_s celui des éléments de la suite donnée (A) qui satisfera à la condition

$$\left| \frac{a_s}{a_{1m}} \right| \geq p \geq 4$$

et occupera le rang le plus petit possible.

Cela étant, prenons pour (A_n) la suite indéfinie

$$(A_n) = a_{n1}, a_{n2}, \dots a_{nm}, a_{n(n+1)}, \dots$$

dont les éléments soient :

$$1^0 \quad a_{ni} = a_i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots n \quad \text{et}$$

$$2^0 \quad a_{ni} = a_{1i} \quad \text{pour } i = n+1, n+2, \dots$$

D'après cela, chaque suite (A_n) sera donc complètement déterminée, quel que soit le nombre entier positif n ; en particulier, si les éléments de la suite donnée (A) sont tels que

$$\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| \geq p \geq 4 \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

chaque suite (A_n) construite d'après la règle précédente deviendra évidemment identique à la suite (A).

Comme il est aisé de s'en assurer, les éléments de la suite (A_n) , que nous venons de construire tout à l'heure, satisfont bien à la condition

$$\left| \frac{a_{n(m+1)}}{a_{nm}} \right|^{2^{m_n}} \geq p \geq 4 \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

pour $2^{m_n} \geq \mu_n$, quel que soit n ; μ_n désigne ici, comme auparavant (n° 71), le nombre entier positif le plus petit pour lequel on a

$$\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right|^{\mu_n} \geq p \geq 4 \quad (i = 1, 2, 3, \dots n).$$

Quant à m_n , déterminons-le de la façon suivante:

1° soit $m_1 = 1$,

2° pour $n \geq 2$ soit m_n le plus petit nombre entier positif satisfaisant aux conditions simultanées suivantes:

$$2^{m_n} \geq \mu_n,$$

$$m_n > m_{n-1},$$

$$2^{m_{n-1}} \geq \kappa_n,$$

la dernière d'elles n'étant d'ailleurs imposée que lorsque $n \geq r$; on y entend par r un nombre entier positif quelconque choisi de sorte que l'on ait

$$r > 1 \text{ et } |a_m| > 1 \text{ pour } m \geq r;$$

κ_n est, d'après le n° 70, le plus petit nombre entier positif pour lequel on a

$$\left| \frac{\delta_n}{a_n^{\kappa_n}} \right| < 1,$$

étant $n \geq r$ et

$$\delta_n = c_n - \psi_1(a_n, m_1) - \psi_2(a_n, m_2) - \dots - \psi_{n-1}(a_n, m_{n-1}).$$

74. D'après les règles que nous venons de fixer au numéro précédent, il est aisé de déterminer successivement les éléments caractéristiques des systèmes réduits généralisés

$$(S_1), (S_2), (S_3) \dots (S_n) \dots$$

d'après l'ordre de grandeur de leurs indices (n); ce procédé nous fournira les éléments caractéristiques satisfaisant à toutes les conditions énoncées au n° 69.

Tout d'abord on fixera p et r de sorte que l'on ait

$$p \geq 4, \quad r > 1 \text{ et } |a_m| > 1 \text{ pour } m \geq r;$$

ensuite on formera, d'après le numéro précédent, les suites partielles

$$(A_1), (A_2), \dots (A_n), \dots$$

Le système (S_1) aura pour éléments caractéristiques

$$\delta_1 = c_1, \quad (A_1) \text{ et } m_1 = 1.$$

Les éléments de la suite (A_1) satisfaisant à la condition

$$\left| \frac{a_{1(m+1)}}{a_{1m}} \right| \geq p \geq 4,$$

le système (S_1) nous fournira, d'après les numéros 69 et 65, une fonction entière bien déterminée $\psi_1(z, m_1)$ prenant pour $z = a_1$ la valeur $\delta_1 = c_1$.

Cela étant, le système (S_2) aura pour éléments caractéristiques

$$\delta_2 = c_2 - \psi_1(a_2, m_1), (A_2) \text{ et } m_2,$$

m_2 étant le plus petit nombre entier positif satisfaisant aux conditions

$$2^{m_2} \geq \mu_2,$$

$$m_2 > m_1 = 1$$

lorsque $2 < r$, ou bien aux conditions

$$2^{m_2} \geq \mu_2,$$

$$m_2 > m_1 = 1,$$

$$2^{m_2-1} \geq \kappa_2$$

lorsque $2 = r$ (n° 73).

Les éléments caractéristiques du système (S_2) une fois déterminés, ce système nous fournira une fonction entière correspondante $\psi_2(z, m_2)$ prenant pour $z = a_1, a_2$ respectivement les valeurs 0 et δ_2 .

D'une façon générale, après avoir déterminé les éléments caractéristiques des $n - 1$ premiers systèmes :

$$(S_1), (S_2), \dots (S_{n-1})$$

et après avoir construit à l'aide de ces systèmes les fonctions entières correspondantes

$$\psi_1(z, m_1), \psi_2(z, m_2), \dots \psi_{n-1}(z, m_{n-1}),$$

on calculera

$$\delta_n = c_n - \psi_1(a_n, m_1) - \psi_2(a_n, m_2) - \dots - \psi_{n-1}(a_n, m_{n-1}).$$

D'autre part, d'après le n° 71, on calculera μ_n ; alors, si $n < r$, on n'aura qu'à tenir compte de μ_n et m_{n-1} pour déterminer m_n , tandis que dans le cas contraire où $n \geq r$ il faut encore calculer préalablement κ_n (n° 73).

Les éléments caractéristiques δ_n , (A_n) et m_n une fois obtenus, le système (S_n) nous fournira une fonction entière bien déterminée $\psi_n(z, m_n)$ prenant pour

$$z = a_1, a_2 \dots a_{n-1}, a_n$$

respectivement les valeurs

$$0, 0, \dots 0, \delta_n;$$

on s'en assurera aisément, car les conditions (61), (62), (63) et (64) sont, d'après le n° 73, bien remplies.

La fonction $\psi_n(z, m_n)$ s'écrit (n° 68)

$$(65) \quad \psi_n(z, m_n) = \sum_{h=1}^{\infty} x_{nh} z^{(2h-1)2^{m_n-1}},$$

x_{nh} y désignant la valeur de l'inconnue

$$C_{(2h-1)2^{m_n-1}}$$

obtenue en résolvant le système (S_n) par la méthode de Fourier, c'est-à-dire :

$$(66) \quad x_{nh} = (-1)^{h+n} \gamma_n \cdot \frac{\sum_{(\lambda_{nn}, \lambda_{n1})} \frac{1}{\lambda_{n2} \lambda_{n3} \dots \lambda_{nh}}}{\left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n1}} - 1\right) \left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n2}} - 1\right) \dots \left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n(n-1)}} - 1\right) \prod_{m=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_{nm}}{\lambda_{nm}}\right)}$$

où

$$\gamma_n = \frac{\delta_n}{a_{nn}^{2^{m_n-1}}} = \frac{\delta_n}{a_n^{2^{m_n-1}}}$$

et

$$\lambda_{ni} = a_{ni}^{2^{m_n}} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{n°s 65 et 68}).$$

Étant

$$\left| \frac{\lambda_{n(i+1)}}{\lambda_{ni}} \right| = \left| \frac{a_{n(i+1)}}{a_{ni}} \right|^{2^{m_n}} \geq p \geq 4 \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

il en résulte, d'après le n° 65, que x_{nh} aura, en tout cas, une valeur finie et bien déterminée; celle-ci sera différente de zéro pour $\gamma_n \neq 0$, mais nulle pour $\gamma_n = 0$, quel que soit le nombre entier positif h .

Nous en concluons donc que la fonction entière $\psi_n(z, m_n)$ ne s'annule identiquement que si $\gamma_n = 0$, c'est-à-dire si

$$\delta_n = c_n - \psi_1(a_n, m_1) - \psi_2(a_n, m_2) - \dots - \psi_{n-1}(a_n, m_{n-1}) = 0.$$

75. En imaginant le procédé de formation des fonctions entières, que nous venons de décrire, continué indéfiniment, on obtiendra ainsi une suite indéfinie

$$\psi_1(z, m_1), \psi_2(z, m_2), \dots, \psi_n(z, m_n), \dots$$

Bien que quelques-unes de ces fonctions puissent s'annuler identiquement, il est aisé de voir qu'elles ne le font pas toutes.

En effet, sans restreindre la généralité, on peut supposer, d'après le n° 64, que $c_j \neq 0$, j étant un certain entier positif.

Pour fixer les idées, supposons que c_j soit le premier élément de la suite indéfinie donnée

$$c_1, c_2, \dots, c_{j-1}, c_j, \dots, c_m, \dots$$

qui diffère de zéro:

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{j-1} = 0; c_j \neq 0;$$

alors les $j-1$ premières fonctions:

$$\psi_1(z, m_1), \psi_2(z, m_2), \dots, \psi_{j-1}(z, m_{j-1})$$

s'annulent identiquement, étant

$$\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{j-1} = 0,$$

mais $\psi_j(z, m_j)$ ne le fait pas, puisque $\delta_j = c_j \neq 0$:

$$\psi_j(a_j, m_j) = \delta_j = c_j \neq 0.$$

Donc, en formant avec les éléments de la suite indéfinie

$$\psi_1(z, m_1), \psi_2(z, m_2), \dots, \psi_n(z, m_n), \dots$$

la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n),$$

il est clair que tous ses termes ne s'annulent pas identiquement.

76. Reste enfin à démontrer la convergence uniforme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n)$$

dans toute l'étendue du plan de la variable z .

En tenant compte de (65) et en désignant

$$(67) \quad v_{nh}(z) = x_{nh} z^{(2h-1)2^{m_n-1}},$$

on peut présenter la série

$$(68) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n)$$

sous la forme de la série double

$$(69) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} v_{nh}(z)$$

pour toutes les valeurs de la variable z qui rendent absolument convergente cette série double (69).

En effet, les séries (68) et (69) contiennent toutes les deux les mêmes termes $v_{nh}(z)$; d'autre part, la somme bien déterminée d'une série double absolument convergente ne dépend ni de l'ordre ni des différents modes de groupement de ses termes. Nous en tirons donc la conclusion suivante:

La série (68) peut être considérée comme déduite de (69) en y groupant, d'une certaine façon, ses termes $v_{nh}(z)$; elle sera, par suite, absolument convergente pour chaque valeur de la variable $z = z_0$ pour laquelle le sera la série double (69), toutes les deux ayant la même somme (σ):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} v_{nh}(z_0) = \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z_0, m_n).$$

77. Démontrons d'abord que la série double (69) converge absolument pour $z = a_i$, a_i étant un élément quelconque de la suite donnée

$$(A) = a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, \dots$$

Pour cela il suffit de démontrer que l'on peut trouver deux nombres entiers positifs: H et N tels que soit

$$U_{nh} < 1$$

pour $h \geq H$, indépendamment de n , ainsi que

pour $n \geq N$, indépendamment de h ,

étant

$$U_{nh} = |v_{nh}(a_i)| (2nh)^3 \text{ ou, d'après (66) et (67),}$$

$$(70) \quad U_{nh} = \left| \frac{(2nh)^3 a_i^{(2h-1)2^{m_n}-1} \gamma_n \cdot \sum_{(\lambda_{n1}, \lambda_{n2})} \frac{1}{\lambda_{n2} \lambda_{n3} \dots \lambda_{nh}}}{\left(\frac{\lambda_{n1}}{\lambda_{n1}} - 1\right) \left(\frac{\lambda_{n2}}{\lambda_{n2}} - 1\right) \dots \left(\frac{\lambda_{nm}}{\lambda_{n(n-1)}} - 1\right) \prod_{m=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_{nm}}{\lambda_{nm}}\right)} \right|.$$

En effet, il en résulterait immédiatement que, pour les valeurs indiquées de n et h , on aurait

$$|v_{nh}(a_i)| < \frac{1}{(h+n)^{2+\varrho}} \quad (0 < \varrho \leq 1);$$

donc, d'après le critère du numéro 23, la série double (69) serait bien absolument convergente.

Cela étant, examinons de près U_{nh} .

En tenant compte de ce que

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{nm} &= \alpha_{nm}^{2^{m_n}} \quad (\text{n}^\circ 74) \\ \text{et} \quad \left| \frac{\lambda_{n(m+1)}}{\lambda_{nm}} \right| &= \left| \frac{\alpha_{n(m+1)}}{\alpha_{nm}} \right|^{2^{m_n}} \geq p > 1 \quad (\text{n}^\circ 73) \end{aligned} \right\} \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

on a, d'après le n° 35,

$$\prod_{m=n+1}^{\infty} \left| \left(1 - \frac{\lambda_{nm}}{\lambda_{nm}}\right) \right| \geq \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^m}\right) > 1 - \frac{1}{p-1} > \frac{2}{3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

d'autre part,

$$(2h-1)2^{m_n-1} = (h-1)2^{m_n} + 2^{m_n-1};$$

par suite, d'après (70), on peut écrire

$$(71) \quad U_{nh} < Q(n) \cdot P(n, h) \quad \text{où}$$

$$(72) \quad Q(n) = \left| \frac{12n^3 \gamma_n a_i^{2^{m_n-1}}}{\left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n1}} - 1\right) \left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n2}} - 1\right) \dots \left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n(n-1)}} - 1\right)} \right| \quad \text{et}$$

$$(73) \quad P(n, h) = \left| h^3 \left(a_i^{2^{m_n}}\right)^{h-1} \cdot \sum_{(\lambda_{nm}, \lambda_{n1})} \frac{1}{\lambda_{n2} \lambda_{n3} \dots \lambda_{nh}} \right|.$$

78. Étudions, à leur tour, les expressions $Q(n)$ et $P(n, h)$. Occupons-nous d'abord de la première.

Étant

$$|\gamma_n| < 1 \text{ pour } n \geq r \quad (\text{n}^\circ 69) \quad \text{et}$$

$$\lambda_{nm} = a_m^{2^{m_n}} \text{ pour } m = 1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{n}^\circ\text{s } 77 \text{ et } 73),$$

on a

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n1}} - 1\right) \left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n2}} - 1\right) \dots \left(\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_{n(n-1)}} - 1\right) \right| \geq \\ & \geq \left| \frac{a_n}{a_1} \cdot \frac{a_n}{a_2} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}} \right|^{2^{m_n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p^{n-1}}\right) > \\ & > \frac{2}{3} \left| \frac{a_n}{a_1} \cdot \frac{a_n}{a_2} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}} \right|^{2^{m_n}}; \end{aligned}$$

donc,

$$(74) \quad \left\{ \begin{aligned} & Q(n) < 18n^3 |a_i|^{2^{m_n-1}} \cdot \left| \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_2}{a_n} \dots \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|^{2^{m_n}} = \\ & = 18n^3 \left| \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_2}{a_n} \dots \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|^{2^{m_n-1}} \cdot \left| a_i \cdot \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_2}{a_n} \dots \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|^{2^{m_n-1}} \quad (k \geq r). \end{aligned} \right.$$

Or, remarquons que

$$2^{m_{n-1}} \geq 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

m_n étant, d'après le n° 73, un nombre entier positif.

D'autre part, on a évidemment

$$\left| \frac{a_j}{a_n} \right| < 1 \quad \text{pour } j = 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (\text{n° 64})$$

et

$$\left| \frac{a_1}{a_n} \right| \rightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow \infty, \text{ car } |a_n| \rightarrow \infty \text{ pour } n \rightarrow \infty;$$

il en résulte donc que, i étant fixe,

$$(75) \quad \left| a_i \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_2}{a_n} \dots \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|^{2^{m_{n-1}}} \rightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow \infty.$$

De même, il est aisé de voir que

$$(76) \quad 18n^3 \cdot \left| \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_2}{a_n} \dots \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|^{2^{m_{n-1}}} \rightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow \infty.$$

En effet,

$$\begin{aligned} 18n^3 \cdot \left| \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_2}{a_n} \dots \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|^{2^{m_{n-1}}} &= 18n^3 \left\{ \left| \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_2}{a_n} \dots \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|^{2^{m_n}} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq 18n^3 \left(\frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{1}{4^{n-2}} \dots \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{4^1} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{18n^3}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} = v_n. \end{aligned}$$

Or, la série à termes positifs dont le terme $n^{\text{ième}}$ est v_n converge évidemment, puisque

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 \cdot \frac{1}{2^n} \leq \frac{27}{32} \quad \text{pour } n \geq 2;$$

donc, $v_n \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$ et, par suite, à fortiori

$$18n^3 \cdot \left| \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_2}{a_n} \dots \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|^{2^{m_{n-1}}} \rightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow \infty.$$

En tenant compte de (74), (75) et (76), il est clair que

$$(77) \quad Q(n) \rightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow \infty.$$

Nous en concluons qu'il est bien possible d'indiquer un nombre positif Q tel que

$$Q(n) \leq Q \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots,$$

car, quelle que soit la valeur entière et positive de n , $Q(n)$ est, d'après (72), toujours fini et bien déterminé, et ses valeurs tendent vers zéro lorsque n tend vers ∞ . Donc,

$$(78) \quad U_{nh} < Q \cdot P(n, h), \quad \text{quel que soit } n.$$

79. Examinons maintenant $P(n, h)$. Étant

$$\left| \frac{\lambda_{n(m+1)}}{\lambda_{nm}} \right| \geq p \geq 4 \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

on peut écrire, d'après (28) et (29) (n° 35),

$$\left| \sum_{(\lambda_{nm}, \lambda_{n1})} \frac{1}{\lambda_{n2} \lambda_{n3} \dots \lambda_{nh}} \right| < \frac{15}{8} \left| \frac{1}{\lambda_{n1} \lambda_{n2} \dots \lambda_{n(h-1)}} \right|,$$

ainsi que

$$\left| \sum \frac{1}{\lambda_{n2} \lambda_{n3} \dots \lambda_{nh}} \right| < \frac{15}{8} \left| \frac{1}{\lambda_{n1} \lambda_{n2} \dots \lambda_{n(h-1)}} \right|;$$

aussi, en tenant compte de ce que

$$\lambda_{nm} = a_{nm}^{2^{m_n}} \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

$$a_{nm} = a_m \quad \text{pour } m = 1, 2, 3 \dots n, \quad \text{et}$$

$$|a_{nm}| \geq |a_m| \quad \text{pour } m \geq n+1,$$

a-t-on, d'après (73),

$$(Pn, h) < \frac{15 h^3}{8} \cdot \left| \frac{a_i}{a_1} \cdot \frac{a_i}{a_2} \dots \frac{a_i}{a_{h-1}} \right|^{2^{m_n}},$$

quelle que soit la valeur entière et positive de n . Or, il est clair que

$$\left| \frac{a_i}{a_1} \cdot \frac{a_i}{a_2} \cdots \frac{a_i}{a_{h-1}} \right| \rightarrow 0 \text{ pour } h \rightarrow \infty,$$

puisque

$$\left| \frac{a_i}{a_j} \right| < 1 \text{ pour } j \geq i+1, \text{ et } \left| \frac{a_i}{a_{h-1}} \right| \rightarrow 0 \text{ pour } h \rightarrow \infty.$$

Il en résulte donc que l'on peut assigner un nombre entier positif h_0 tel que

$$\left| \frac{a_i}{a_1} \cdot \frac{a_i}{a_2} \cdots \frac{a_i}{a_{h-1}} \right| < 1 \text{ pour } h \geq h_0;$$

par suite, étant $m_n \geq 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) (n° 73), on a

$$P(n, h) < \frac{15h^3}{8} \cdot \left| \frac{a_i}{a_1} \cdot \frac{a_i}{a_2} \cdots \frac{a_i}{a_{h-1}} \right|^2$$

pour $h \geq h_0$, quel que soit n .

Cela étant, remarquons que la série

$$\sum_{h=2}^{\infty} u_h$$

dont le terme général est

$$u_h = \frac{15h^3}{8} \cdot \left| \frac{a_i}{a_1} \cdot \frac{a_i}{a_2} \cdots \frac{a_i}{a_{h-1}} \right|^2,$$

converge évidemment, puisque

$$\frac{u_{h+1}}{u_h} = \left(\frac{h+1}{h} \right)^3 \cdot \left| \frac{a_i}{a_h} \right|^2,$$

$$\left(\frac{h+1}{h} \right)^3 \rightarrow 1 \text{ pour } h \rightarrow \infty \text{ et}$$

$$\left| \frac{a_i}{a_h} \right| \rightarrow 0 \text{ pour } h \rightarrow \infty;$$

par suite, $u_h \rightarrow 0$ pour $h \rightarrow \infty$ et, à fortiori,

$$(79) \quad P(n, h) \rightarrow 0 \text{ pour } h \rightarrow \infty,$$

quel que soit n .

Nous en concluons, tout comme dans le cas de $Q(n)$ (n° 78), que l'on peut trouver un nombre positif P tel que

$$P(n, h) \leq P,$$

quels que soient n et h . Donc,

$$(80) \quad U_{nh} < P \cdot Q(n),$$

quel que soit h .

80. En tenant compte, d'une part, de (78) et (79) et, d'autre part, de (77) et (80), il en résulte immédiatement que l'on peut assigner, en effet, deux nombres entiers positifs: H et N tels que

$$U_{nh} < 1$$

pour $h \geq H$, indépendamment de n , ainsi que pour $n \geq N$, indépendamment de h .

Donc, d'après le n° 77, la série double (69)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} v_{nh}(z)$$

est, en effet, absolument convergente pour $z = a_i$, a_i étant un élément quelconque de la suite donnée

$$(A) = a_1, a_2, a_3, \dots a_m, \dots$$

De plus, étant

$$|v_{nh}(z)| \leq |v_{nh}(a_i)| \quad \text{pour } |z| \leq |a_i|,$$

la série double (69) converge absolument et uniformément dans tout le cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon $|a_i|$.

En remarquant enfin que $|a_i|$ augmente indéfiniment avec i :

$$|a_i| \rightarrow \infty \quad \text{pour } i \rightarrow \infty,$$

on en conclura donc que notre série double (69) sera absolument et uniformément convergente dans

toute l'étendue du plan de z , ainsi que le sera, par conséquent, d'après les considérations du n° 76, la série (68)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n).$$

81. Comme nous venons de le voir plus haut, chacun des termes $\psi_n(z, m_n)$ de la série (68) est une fonction entière (n° 74); d'autre part, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n)$$

est uniformément convergente dans toute l'étendue du plan de la variable z (n° 80).

Nous en concluons donc, d'après Weierstrass, que la fonction

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n)$$

est holomorphe dans le même domaine, c'est-à-dire que $F(z)$ est une fonction entière, elle-aussi.

De plus, étant

$$\psi_n(a_i, m_n) = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots, n-1,$$

et

$$\psi_n(a_n, m_n) = c_n - \psi_1(a_n, m_1) - \psi_2(a_n, m_2) - \dots - \psi_{n-1}(a_n, m_{n-1}),$$

quel que soit n (n° 74), il en résulte que

$$\begin{aligned} F(a_m) &= \sum_{h=1}^{\infty} \psi_h(a_m, m_h) = \\ &= \psi_1(a_m, m_1) + \psi_2(a_m, m_2) + \dots + \psi_m(a_m, m_m) = c_m, \end{aligned}$$

m étant un nombre entier positif quelconque.

Donc, la fonction $F(z)$, que nous venons de construire, est une fonction entière prenant pour

$$z = a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, \dots$$

respectivement les valeurs prescrites

$$c_1, c_2, c_3, \dots c_m, \dots$$

Aussi, en la présentant sous la forme d'une série entière

$$F(z) = C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \dots + C_m z^m + \dots,$$

les valeurs des coefficients (C_m) ainsi obtenues constituent-elles évidemment une solution du système (56) d'équations linéaires à une infinité d'inconnues (n° 64); par suite, il est clair que le problème spécial de l'interpolation, sous l'hypothèse restrictive (53), peut être considéré comme résolu, car, d'après le n° 64, pour le résoudre, on n'a qu'à construire une solution du système correspondant (56).

82. Quant aux valeurs des coefficients (C_s), elles s'obtiennent aisément, puisque $C_s z^s$ n'est évidemment que la somme de tous les termes des séries entières

$$\psi_1(z, m_1), \psi_2(z, m_2), \dots \psi_n(z, m_n), \dots$$

ayant pour facteur z^s .

Elles s'obtiennent d'une façon particulièrement simple lorsque $m_i \neq m_j$ pour $i \neq j$, par exemple, lorsque les éléments caractéristiques (m_n) sont choisis, comme au n° 73, de sorte que

$$(81) \quad m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_n < \dots$$

En effet, d'après le n° 68, $\psi_n(z, m_n)$ ne contient que les puissances de z dont les exposants sont $(2h-1)2^{m_n-1}$ ($h=1, 2, 3, \dots$). Cela étant, il est aisé de voir que, dans l'hypothèse (81), une puissance quelconque de z , par exemple, z^s , n'est contenue que dans une seule série $\psi_n(z, m_n)$ au plus, car s ne peut être présenté sous la forme

$$s = (2p-1)2^{q-1}$$

que d'une seule manière, p et q étant des nombres entiers positifs.

Aussi, pour que z^s soit contenu effectivement dans l'une de ces séries $\psi_n(z, m_n)$, faut-il qu'il y ait dans la suite indéfinie

$$m_1, m_2, m_3, \dots m_n, \dots$$

un élément m_n égal à q : $m_n = q$; cette condition nécessaire sera évidemment aussi suffisante lorsque $\psi_n(z, m_n)$ ne s'annule pas identiquement, c'est-à-dire lorsque $\delta_n \neq 0$.

D'après cela, dans l'hypothèse (81), on n'aura qu'à présenter s sous la forme

$$s = (2p - 1)2^{q-1},$$

et à prendre

$$C_s = x_{np} \text{ si } q = m_n,$$

tandis que

$$C_s = 0 \text{ si } q \neq m_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

la valeur de x_{np} étant donnée par (66) (n° 74) en y remplaçant h par p ; on aura donc

$$x_{np} \neq 0 \text{ pour } \delta_n \neq 0, \text{ mais } x_{np} = 0 \text{ pour } \delta_n = 0.$$

83. Nous venons de construire une fonction entière prenant pour $z = a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$ respectivement les valeurs prescrites $c_1, c_2, \dots, c_m, \dots$; c'est la fonction

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n).$$

Chacun des termes $\psi_n(z, m_n)$ de cette série est fourni par un système réduit généralisé (S_n); celui-ci est déterminé par ses éléments caractéristiques δ_n , (A_n) et m_n qui satisfont, d'une part, aux conditions générales (61), (62), (63) et (64) (n° 69), et, d'autre part, aux conditions particulières imposées au n° 73.

Comme nous l'avons déjà constaté, au n° 72, (A_n) et m_n admettent même une infinité de déterminations, chacune d'elles satisfaisant aux conditions générales mentionnées tout à l'heure.

Ce n'était que pour fixer les idées que nous avons fait usage du mode de détermination particulier décrit au n° 73. Comme celui-ci, tout autre mode de détermination des éléments caractéristiques (A_n) et m_n qui satisfait aux conditions générales (n° 69) nous conduira évidemment au même résultat: il fournira, d'une façon tout analogue, des fonctions entières telles que $\psi_n(z, m_n)$, et en formant avec elles des séries analogues à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n),$$

chacune de ces séries sera uniformément convergente, elle-aussi, dans toute l'étendue du plan de la variable z .

On s'en rendra aisément compte, en remarquant que la démonstration de la convergence uniforme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n),$$

que nous venons de donner plus haut, n'est fondée que sur l'hypothèse que les conditions générales (n° 69) soient remplies; quant aux conventions spéciales faites au n° 73 pour préciser (A_n) et m_n , nous n'y en avons tiré aucun parti.

84. Nous allons montrer que l'on peut même construire une suite indéfinie de fonctions entières

$$F_1(z), F_2(z), \dots, F_m(z), \dots,$$

chacune d'elles prenant pour $z = a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$ respectivement les mêmes valeurs prescrites

$$c_1, c_2, \dots, c_m, \dots$$

En effet, prenons $F_1(z) = F(z)$ où

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, m_n) \quad (\text{n° 81});$$

alors, par l'intermédiaire des fonctions entières

$$\psi_1(z, m_1), \psi_2(z, m_2), \dots, \psi_n(z, m_n), \dots,$$

à $F_1(z)$ correspondra la suite indéfinie bien déterminée

$$(M_1) = m_1, m_2, m_3, \dots, m_n, \dots$$

Cela étant, construisons $F_2(z), F_3(z) \dots F_m(z), \dots$ par le même procédé que $F(z)$, en choisissant δ_n et (A_n) toujours d'après les règles précédentes (n° 73), mais en remplaçant la suite (M_1) successivement par des suites (M_2), (M_3), $\dots$ (M_m), $\dots$ dont la loi de formation sera fixée ci-dessous.

A cet effet désignons les éléments de la suite (M_m) par

$$m_{m1}, m_{m2}, m_{m3}, \dots, m_{mm}, \dots \quad \text{pour } m = 2, 3, 4, \dots;$$

d'autre part, supposons que c_j (n° 64) soit le premier élément différent de zéro dans la suite donnée

$$c_1, c_2, c_3, \dots, c_m, \dots,$$

c'est-à-dire

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{j-1} = 0, \quad c_j \neq 0;$$

alors, quel que soit le nombre entier positif $m \geq 2$, convenons de prendre

$$m_{mi} = m_i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots, j-1,$$

$$m_{mj} = m_{m+j}$$

et choisissons tous les autres éléments de la suite (M_m) , à partir du $(j+1)^{\text{ième}}$, d'après la même règle que ceux de la suite (M_1) (n° 73).

Cela posé, il est aisé de voir que chaque suite (M_m) sera bien déterminée; de même, lorsque $h \neq m$, les suites (M_h) et (M_m) différeront certainement, h et m étant d'ailleurs des nombres entiers positifs quelconques.

En effet, pour fixer les idées, soit $h < m$; alors, d'après la convention faite,

$$m_{hj} = \begin{cases} m_j & \text{pour } h = 1, \\ m_{h+j} & \text{pour } h \geq 2 \end{cases}$$

et

$$m_{mj} = m_{m+j};$$

or, étant $h < m$ et, d'autre part,

$$m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_n < \dots \quad (\text{n° 73}),$$

il en résulte que

$$h + j < m + j,$$

$$m_{h+j} < m_{m+j},$$

et, par suite,

$$m_{hj} < m_{mj}.$$

On en déduit aisément, en tenant compte de la loi de formation des suites (M_1) , (M_h) et (M_m) , que

$$m_{hj} < m_{mj} < m_{mn} \quad \text{pour } n \geq j+1,$$

ainsi que

$$m_{mn} = m_n < m_j \leq m_{hj} \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots, j-1.$$

Donc, d'après cela, il est clair que la suite (M_m) ne contient pas m_{nj} , qui est l'élément $j^{\text{ième}}$ de la suite (M_n) .

D'autre part, étant $m \geq 2$, convenons de construire $F_m(z)$ par le même procédé que $F(z)$.

Désignons les systèmes réduits généralisés correspondants par

$$(S_{m1}), (S_{m2}), \dots (S_{mn}), \dots,$$

et les éléments caractéristiques de (S_{mn}) par

$$(A_{mn}), \delta_{mn}, m_{mn} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Choisissons (A_{mn}) et δ_{mn} d'après les mêmes règles que (A_n) et δ_n (n° 73), tandis que m_{mn} d'après celle que nous venons de fixer tout à l'heure.

Alors, les éléments caractéristiques (A_{mn}) , δ_{mn} et m_{mn} satisferont bien aux conditions générales (61—64) (n° 69), comme on s'en assurera aisément; par suite, le système (S_{mn}) nous fournira une fonction entière $\psi_{mn}(z, m_{mn})$ tout analogue à $\psi_n(z, m_n)$. Elle ne s'annulera identiquement que lorsque $\delta_{mn} = 0$ (n° 74).

D'après la remarque faite au n° 83, on peut dire que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn}(z, m_{mn})$$

convergera uniformément dans toute l'étendue du plan de z , et nous fournira ainsi une fonction entière $F_m(z)$ prenant

$$\text{pour } z = a_1, a_2, a_3, \dots a_m, \dots$$

respectivement les valeurs prescrites $c_1, c_2, c_3, \dots c_m, \dots$, étant

$$F_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn}(z, m_{mn}).$$

Par l'intermédiaire des $\psi_{mn}(z, m_{mn})$, à $F_m(z)$ correspondra la suite (M_m) . Étant

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{j-1} = 0, \quad c_j \neq 0,$$

il en résulte que les fonctions

$$\psi_{m1}(z, m_{m1}), \quad \psi_{m2}(z, m_{m2}), \quad \dots \quad \psi_{m(j-1)}(z, m_{m(j-1)})$$

s'annulent identiquement, tandis que $\psi_{mj}(z, m_{mj})$ ne le fait pas, car

$$\delta_{mj} = c_j \neq 0 \quad (\text{n}^\circ 75).$$

En présentant la fonction entière $F_m(z)$ sous la forme d'une série entière, celle-ci contiendra donc effectivement les puissances de z dont les exposants sont

$$(2h-1)2^{m_{mj}-1} \quad (h = 1, 2, 3, \dots),$$

mais elle n'en contiendra aucune qui aurait pour exposant

$$(2p-1)2^{q-1}$$

si q n'est pas un élément de la suite (M_m) (n° 82).

Or, comme nous venons de le voir ci-dessus, étant $h < m$, il n'y a dans la suite (M_m) aucun élément égal à m_{hj} , c'est-à-dire au $j^{\text{ième}}$ élément de la suite (M_h) ; par suite, en construisant les fonctions entières $F_h(z)$ et $F_m(z)$, correspondant respectivement aux suites (M_h) et (M_m) , on obtiendra ainsi deux fonctions bien distinctes, puisque la première d'elles $F_h(z)$ se présentera sous la forme d'une série entière contenant effectivement les puissances suivantes de z :

$$z^{(2h-1)2^{m_{hj}-1}} \quad (h = 1, 2, 3, \dots),$$

tandis que la série entière de $F_m(z)$ n'en contiendra aucune.

Ce résultat restant valable, quelles que soient les valeurs entières et positives de h et m , $h < m$, on peut en conclure que la suite indéfinie

$$F_1(z), F_2(z), \dots F_h(z), \dots F_m(z), \dots$$

ne contiendra que des fonctions distinctes, chacune d'elles prenant d'ailleurs

$$\text{pour } z = a_1, a_2, \dots a_m, \dots$$

respectivement les mêmes valeurs prescrites $c_1, c_2, \dots c_m, \dots$

Ainsi, nous venons de démontrer directement, sans avoir tiré aucun parti de la remarque faite au n° 63, que le problème spécial de l'interpolation posé au n° 64 admet une infinité de solutions.

III. Sur la résolution du problème généralisé de l'interpolation.

85. Soient données trois suites indéfinies:

1) une suite des (a_n) satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(82) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } a_i \neq a_j \text{ pour } i \neq j, \\ \text{b) } |a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots, \\ \text{c) } |a_n| \rightarrow \infty \text{ pour } n \rightarrow \infty, \end{array} \right.$$

2) une suite de nombres entiers positifs ou zéros

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots, \text{ et}$$

3) une suite de quantités quelconques

$$c_1^{(0)}, c_1^{(1)}, \dots, c_1^{(p_1)}, c_2^{(0)}, c_2^{(1)}, \dots, c_2^{(p_2)}, \dots, c_n^{(0)}, c_n^{(1)}, \dots, c_n^{(p_n)}, \dots;$$

cela étant, proposons-nous de construire une fonction entière $F(z)$ telle que l'on ait pour $z = a_n$

$$\left. \begin{array}{l} F(a_n) = c_n^{(0)} \\ F'(a_n) = c_n^{(1)} \\ \dots \dots \dots \\ F^{(p_n)}(a_n) = c_n^{(p_n)} \end{array} \right\} \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

en entendant sous $F^{(i)}(z)$ la dérivée d'ordre $i^{\text{ième}}$ de $F(z)$ et sous $F^{(0)}(z)$ la fonction $F(z)$ elle-même.

Remarquons que, sans restreindre la généralité, on peut toujours supposer qu'il y ait dans la suite donnée des $(c_n^{(i)})$ des éléments différents de zéro.

En effet, lorsque tous ses éléments sont nuls, on n'aura qu'à remplacer la suite donnée par cette autre:

$$c_n^{(0)} = c \neq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots); \quad c_n^{(i)} = 0, \quad i \geq 1 \quad \text{et} \quad n \geq 1,$$

en y entendant sous c une quantité quelconque, mais différente de zéro, et à construire une fonction entière $F_1(z)$ telle que l'on ait

$$\left. \begin{array}{l} F_1(a_n) = c \\ F_1'(a_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ F_1^{(p_n)}(a_n) = 0 \end{array} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

En la supposant construite et en prenant

$$F(z) = F_1(z) - c,$$

on obtiendra évidemment une fonction entière exigée $F(z)$, jouissant de toutes les propriétés énoncées ci-dessus.

86. Nous allons résoudre ce problème d'interpolation généralisé par une méthode dont l'idée essentielle est la même que celle de la méthode que nous venons d'appliquer dans le cas précédent, en étudiant le problème spécial de l'interpolation sous l'hypothèse restrictive (53).

Nous déterminerons la fonction $F(z)$ exigée sous la forme d'une série de séries

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\nu}(z),$$

$F_{\nu}(z)$ étant un produit de deux facteurs

$$F_{\nu}(z) = \varphi_{\nu}(z) \cdot \psi_{\nu}(z)$$

dont le premier $\varphi_{\nu}(z)$ sera, en général, un certain polynôme entier de z , tandis que $\psi_{\nu}(z)$ sera une série entière fournie par un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues (système réduit généralisé).

A chacun des éléments de la suite indéfinie des $(c_n^{(i)})$ nous ferons correspondre une fonction $F_{\nu}(z)$:

$$\begin{array}{ccccccc} c_1^{(0)}, & c_1^{(1)}, & \dots & c_n^{(i)}, & \dots & & \\ F_1(z), & F_2(z), & \dots & F_{\nu}(z), & \dots & & \end{array}$$

En numérotant les éléments de cette suite dans l'ordre indiqué, on obtiendra évidemment pour rang ν de $c_n^{(i)}$

$$(83) \quad \begin{cases} \nu = (p_1 + 1) + (p_2 + 1) + \dots + (p_{n-1} + 1) + (i + 1) = \\ \quad = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + n + i. \end{cases}$$

Quant aux fonctions $F_{\nu}(z)$, nous les construirons successivement d'après l'ordre de grandeur de leurs indices, en choisissant les polynômes $\varphi_{\nu}(z)$ et les séries entières $\psi_{\nu}(z)$ de la manière suivante:

- (I) que les fonctions $F_\nu(z)$ soient holomorphes dans toute l'étendue du plan de z ;
 (II) que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(z)$$

soit uniformément convergente dans le même domaine;
 et que l'on ait:

$$(III) \quad F_\nu^{(i)}(a_n) = c_n^{(i)} - F_1^{(i)}(a_n) - F_2^{(i)}(a_n) - \dots - F_{\nu-1}^{(i)}(a_n),$$

$$(IV) \quad F_\nu^{(m)}(a_n) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, i-1),$$

$$(V) \quad F_\nu^{(m)}(a_k) = 0 \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, \dots, n-1 \\ m = 0, 1, 2, \dots, p_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \dots, \\ i = 0, 1, 2, \dots, p_n, \\ \nu = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + n + i \end{pmatrix}.$$

Comme on s'en assurerait aisément, en supposant les conditions (I) et (II) remplies, la fonction

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(z)$$

serait holomorphe dans toute l'étendue du plan de z et l'on aurait

$$F^{(p)}(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu^{(p)}(z),$$

p étant un entier positif quelconque; de plus, étant remplies les conditions (III), (IV) et (V), elles-aussi, on aurait

$$F^{(i)}(a_n) = F_1^{(i)}(a_n) + F_2^{(i)}(a_n) + \dots + F_\nu^{(i)}(a_n) = c_n^{(i)}$$

$$\begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \dots, \\ i = 1, 2, 3, \dots, p_n, \\ \nu = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + n + i \end{pmatrix}.$$

En effet, soit $\nu_1 > \nu$, ν_1 étant le rang du terme $c_{n_1}^{(i_1)}$:

$$\nu_1 = p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1-1} + n_1 + i_1 \quad (i_1 \leq p_{n_1});$$

alors on aura évidemment :

- 1) ou bien $n_1 > n$ et, par suite, $n \leq n_1 - 1$,
- 2) ou bien $n_1 = n$, mais $i_1 > i$ et, par suite, $i \leq i_1 - 1$.

Or, étant $n \leq n_1 - 1$, il en résulte que

$$F_{\nu_1}^{(i)}(a_n) = 0 \quad (i \leq p_n),$$

car, d'après la condition (V),

$$F_{\nu_1}^{(m)}(a_k) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, n_1 - 1 \\ m = 0, 1, 2, \dots, p_k \end{array} \right).$$

De même, étant $n_1 = n$, $i \leq i_1 - 1$, on aura aussi

$$F_{\nu_1}^{(i)}(a_n) = 0,$$

puisque, d'après la condition (IV),

$$F_{\nu_1}^{(m)}(a_n) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, i_1 - 1).$$

Nous en concluons donc que

$$F_{\nu_1}^{(i)}(a_n) = 0 \quad \text{pour } \nu_1 \geq \nu + 1,$$

étant

$$\nu = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + n + i.$$

Enfin, en remarquant que, d'après la condition (III),

$$F_{\nu}^{(i)}(a_n) = c_n^{(i)} - F_1^{(i)}(a_n) - F_2^{(i)}(a_n) - \dots - F_{\nu-1}^{(i)}(a_n),$$

on déduirait aisément de ce que nous venons de constater tout à l'heure que

$$F^{(i)}(a_n) = c_n^{(i)}.$$

D'après cela, il est clair que $F(z)$ serait bien une fonction entière telle que nous l'exigeons.

87. Après avoir esquissé ainsi la voie à suivre, pour construire la fonction $F(z)$, il s'agit dès lors de préciser les fonctions $F_{\nu}(z)$, c'est-à-dire les polynômes $\varphi_{\nu}(z)$, ainsi que les séries entières $\psi_{\nu}(z)$.

Nous allons le faire, en supposant d'abord que a_1 soit différent de zéro: $a_1 \neq 0$.

Cette hypothèse faite, soit

$$(84) \quad \varphi_\nu(z) = (-1)^i \frac{a_n^i}{i!} \frac{\left(1 - \frac{z}{a_1}\right)^{p_1+1} \left(1 - \frac{z}{a_2}\right)^{p_2+1} \dots \left(1 - \frac{z}{a_{n-1}}\right)^{p_{n-1}+1} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^i}{\left(1 - \frac{a_n}{a_1}\right)^{p_1+1} \left(1 - \frac{a_n}{a_2}\right)^{p_2+1} \dots \left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^{p_{n-1}+1}},$$

où

$$\nu = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + n + i \quad (n^\circ 86).$$

Comme il est aisé de voir, c'est évidemment un polynôme de degré $(\nu - 1)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(85) \quad \varphi_\nu^{(i)}(a_n) = 1,$$

$$(86) \quad \varphi_\nu^{(m)}(a_n) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, i-1) \quad \text{et}$$

$$(87) \quad \varphi_\nu^{(m)}(a_k) = 0 \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, \dots, n-1 \\ m = 0, 1, 2, \dots, p_k \end{pmatrix}.$$

En désignant par $\gamma_{\nu q}$ le coefficient de son terme général, on aura

$$(88) \quad \varphi_\nu(z) = \sum_{q=0}^{\nu-1} \gamma_{\nu q} z^q.$$

Enfin, si l'on entend par M_ν un nombre positif tel que

$$(89) \quad M_\nu \geq |\gamma_{\nu q}| \quad (q = 0, 1, 2, \dots, \nu-1),$$

on aura

$$|\gamma_{\nu q} z^q| \leq M_\nu |z|^{\nu-1}$$

pour $|z| \geq 1$ et $q = 0, 1, 2, \dots, \nu-1$.

Pour fixer les idées, soit M_ν le nombre le plus petit satisfaisant à la condition (89).

Il est clair que ce nombre M_ν existe certainement, étant fini et bien déterminé, car, d'après (82) et (84), tous les $|\gamma_{\nu q}|$ sont finis et bien déterminés, eux-aussi.

88. Reste à préciser les séries entières $\psi_p(z)$. A cet effet faisons d'abord quelques remarques sur la suite indéfinie

$$(A) = a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots$$

et proposons-nous d'en déduire, d'une certaine façon, des suites partielles, en nombre infini.

D'après (82), la suite donnée (A) renferme, en général, plusieurs éléments $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+j}$ ayant le même module ϱ :

$$|a_n| = |a_{n+1}| = \dots = |a_{n+j}| = \varrho;$$

donc, en les représentant dans le plan des quantités imaginaires par les points correspondants, ceux-ci sont tous situés sur le même cercle de rayon ϱ ayant pour centre l'origine.

Or, convenons de dire qu'un élément a_i appartient au cercle C , ayant pour centre l'origine, si le point correspondant ayant pour affixe la quantité a_i est situé sur C .

Cela étant, il est clair que chacun des éléments (a_n) de la suite donnée (A) appartient à l'un des cercles C_m et qu'il n'appartient qu'à un seul.

D'autre part, comme nous venons de le constater tout à l'heure, à un même cercle peuvent appartenir, en général, plusieurs éléments de la suite (A) ; bien que leur nombre varie, en général, avec le rayon du cercle, et qu'il puisse dépasser même tout nombre entier et positif fixe N , il est clair qu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de (A) qui appartiennent au même cercle C_m , quel que soit m , car

$$|a_n| \rightarrow \infty \text{ pour } n \rightarrow \infty \text{ (n° 85).}$$

Il en résulte immédiatement qu'à la suite indéfinie (A) correspond une suite indéfinie de cercles

$$C_1, C_2, C_3, \dots C_m, \dots$$

dont les rayons respectifs vont constamment en croissant:

$$\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 < \dots < \varrho_m < \dots$$

De même, il est bien clair que parmi les éléments de la suite (A) appartenant au même cercle C_m , quel que soit m , il y a toujours un dont l'indice est le plus petit; désignons-le par a_{τ_m} ; donc, en particulier, $a_{\tau_1} = a_1$.

La suite des cercles (C_m) étant indéfinie, la suite

$$(A_\tau) = a_{\tau_1}, a_{\tau_2}, a_{\tau_3}, \dots a_{\tau_m}, \dots$$

le sera, elle-aussi; de plus, étant $|a_{\tau_m}| = \varrho_m$, il est clair que

$$|a_{\tau_1}| < |a_{\tau_2}| < |a_{\tau_3}| < \dots < |a_{\tau_m}| < \dots$$

et que

$$|a_{\tau_m}| \rightarrow \infty \quad \text{pour } m \rightarrow \infty.$$

Donc, la suite (A_τ) satisfait aux mêmes conditions que la suite (A) , au n° 64; par suite, tous les résultats obtenus pour cette dernière aux numéros 71, 72 et 73 s'étendent immédiatement à la suite (A_τ) .

Ainsi, en appliquant cette fois la même règle qu'au n° 73, on formera avec les éléments de (A_τ) des suites partielles bien déterminées, en nombre infini,

$$(A_{\tau_1}), (A_{\tau_2}), \dots (A_{\tau_m}), \dots$$

tout analogues aux suites

$$(A_1), (A_2), \dots (A_m), \dots \quad (\text{n° 73})$$

et jouissant des mêmes propriétés que ces dernières.

Désignons, en général, par a_{mi} l'élément $i^{\text{ième}}$ de la suite (A_{τ_m}) ; d'après cela,

$$(A_{\tau_m}) = a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \dots a_{mi}, \dots \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

De même, désignons par μ_m le nombre entier positif le plus petit pour lequel on a

$$(90) \quad \left| \frac{a_{m(i+1)}}{a_{mi}} \right|^{\mu_m} \geq p \geq 4 \quad (i = 1, 2, 3, \dots);$$

il est clair que ce nombre μ_m se calculera toujours d'après le n° 71, en y remplaçant la suite (A) par (A_τ) .

Quel que soit m , on aura, d'après ce que nous venons de dire,

$$(91) \quad a_{mi} = a_{\tau_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots m) \quad \text{et}$$

$$(92) \quad \left| \frac{a_{m(i+1)}}{a_{mi}} \right|^{m_\nu} \geq p \geq 4 \quad \text{pour } m_\nu \geq \mu_m$$

$$(i = 1, 2, 3 \dots).$$

89. Allons maintenant déterminer les fonctions entières $\psi_\nu(z)$, à l'aide de systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues (S_ν) , en procédant, au fond, d'une façon tout analogue comme nous l'avons fait dans le cas précédent où il s'agissait du problème spécial de l'interpolation.

A chacun des éléments de la suite indéfinie

$$c_1^{(0)}, c_1^{(1)}, \dots c_1^{(p_1)}, c_2^{(0)}, c_2^{(1)}, \dots c_2^{(p_2)}, \dots c_n^{(0)}, c_n^{(1)}, \dots c_n^{(p_n)}, \dots$$

nous ferons correspondre, dans l'ordre indiqué, une fonction entière $\psi_\nu(z)$.

Remarquons que, si $\nu = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + n + i$, $\psi_\nu(z)$ correspondra évidemment à $c_n^{(i)}$, puisque le rang de $c_n^{(i)}$ est justement

$$\nu = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + n + i \quad (\text{n}^\circ 86).$$

Or, quelle que soit la valeur entière et positive de ν , nous proposerons de former $\psi_\nu(z)$ à l'aide d'un système (S_ν) de la forme (58).

Le système (S_ν) sera déterminé par ses trois éléments caractéristiques, tout comme on l'a fait au n° 67. Quant aux éléments caractéristiques, on aura à fixer les règles d'après lesquelles on les choisira.

A cet effet convenons de procéder de la manière suivante. Déterminons tout d'abord le rang m du cercle C_m auquel appartient a_n , dont l'indice a la même valeur que l'indice inférieur de $c_n^{(i)}$. Il est aisé de voir qu'on peut toujours trouver la valeur de m correspondant à a_n : pour cela on n'aura qu'à tenir compte des modules des n premiers éléments de la suite (A) .

Cela étant, prenons pour l'un des éléments caractéristiques du système (S_ν) , ayant pour indice (ν) le rang de $c_n^{(i)}$, la suite indéfinie

$$(93) \quad (\bar{A}_{\tau m}) = a_{m1}, a_{m2}, \dots a_{m(m-1)}, a_n, a_{m(m+1)}, a_{m(m+2)}, \dots;$$

celle-ci sera donc identique à la suite (A_{τ_m}) (n° 88) lorsque $a_n = a_{\tau_m}$, c'est-à-dire où $n = \tau_m$, tandis qu'elle ne différera de (A_{τ_m}) que par son $m^{\text{ième}}$ élément lorsque $a_n \neq a_{\tau_m}$.

Bien que l'on ait parfois $a_n \neq a_{\tau_m}$, on aura en tout cas

$$(94) \quad |a_n| = |a_{\tau_m}| \text{ et, par suite, } |a_{\tau_{m-1}}| < |a_n| < |a_{\tau_{m+1}}|,$$

car a_n et a_{τ_m} appartiennent tous les deux au même cercle C_m .

Nous pouvons en tirer immédiatement la conclusion suivante: μ_m étant, d'après le n° 88, le plus petit nombre entier positif pour lequel on a

$$\left| \frac{a_{m(i+1)}}{a_{mi}} \right|^{\mu_m} \geq p \geq 4 \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

on aura de même

$$(95) \quad \left| \frac{a_n}{a_{m(m-1)}} \right|^{\mu_m} \geq p \geq 4 \quad \text{et} \quad \left| \frac{a_{m(m+1)}}{a_n} \right|^{\mu_m} \geq p \geq 4.$$

90. Reste à déterminer les deux autres éléments caractéristiques que nous désignons par δ_{ν_m} et m_ν .

Supposons que l'on ait déjà construit, à l'aide des systèmes

$$(S_1), (S_2), \dots (S_{\nu-1}),$$

les fonctions

$$F_1(z), F_2(z), \dots F_{\nu-1}(z),$$

de sorte que chacune d'elles satisfasse aux conditions (I), (III), (IV) et (V) (n° 86).

Cela étant, soit

$$(96) \quad \delta_{\nu_m} = c_n^{(i)} - F_1^{(i)}(a_n) - F_2^{(i)}(a_n) - \dots - F_{\nu-1}^{(i)}(a_n);$$

alors, d'après l'hypothèse faite, δ_{ν_m} sera évidemment une quantité finie et bien déterminée.

Quant à m_ν , remarquons préalablement que, pour n assez grand: $n \geq N$, on aura

$$(97) \quad |a_n| > 1 \text{ et } m \geq 2,$$

N désignant ici un nombre entier positif suffisamment grand et m étant le rang du cercle auquel appartient a_n .

En effet, on s'en assurera aisément en tenant compte de ce que, d'une part, $|a_n| \rightarrow \infty$ pour $n \rightarrow \infty$ et que, d'autre part, à chacun des cercles n'appartient qu'un nombre fini d'éléments de la suite donnée (4).

Pour fixer les idées, soit N le nombre entier positif le plus petit qui satisfait aux conditions que nous venons d'imposer tout à l'heure.

Cela étant, déterminons m_ν de sorte qu'il satisfasse aux conditions suivantes:

1) lorsque $n < N$, nous entendons par m_ν un nombre entier positif tel que

$$(98) \quad m_\nu \geq \mu_m \quad (\text{n}^\circ 88);$$

2) lorsque $n \geq N$, soit m_ν un nombre entier positif satisfaisant aux deux conditions suivantes:

$$m_\nu \leq \mu_m \quad \text{et}$$

$$(99) \quad \left| \delta_{\nu m} M_\nu a_n^{\nu-1} r_\nu^3 \right| < \left| \frac{a_n}{a_1} \right|^{m_\nu},$$

$$\text{étant} \quad r_\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}.$$

Quant à ν , M_ν , m , μ_m et $\delta_{\nu m}$, ce sont les quantités bien déterminées introduites précédemment.

En effet, ν est le rang de $c_n^{(i)}$ dans la suite donnée

$$c_1^{(0)}, c_1^{(1)}, \dots, c_1^{(p_1)}, \dots, c_n^{(0)}, c_n^{(1)}, \dots, c_n^{(p_n)}, \dots;$$

$$\nu = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + n + i \quad (\text{n}^\circ 86);$$

M_ν est le plus petit nombre positif tel que

$$M_\nu \geq |\gamma_{\nu q}| \quad (q = 0, 1, 2, \dots, \nu - 1),$$

$\gamma_{\nu q}$ désignant le coefficient du terme général du polynôme

$$\varphi_\nu(z) = \sum_{q=0}^{\nu-1} \gamma_{\nu q} z^q \quad (\text{n}^\circ 87);$$

m est le rang du cercle C_m de rayon $|a_n|$ auquel appartient a_n (n° 88); μ_m est le plus petit nombre entier et positif pour lequel on a

$$\left| \frac{a_{m(i+1)}}{a_{mi}} \right|^{\mu_m} \geq p \geq 4 \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

$a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mi}, \dots$ étant les éléments de la suite partielle (A_{τ_m}) n° 88); enfin, δ_{ν_m} est déterminé ci-dessus par la formule (96).

Les conditions qui viennent d'être imposées à m_ν n'exigent, au fond, comme il est aisé de s'en apercevoir, que ce que m_ν soit un nombre positif assez grand; par suite, on peut faire assumer à lui-même une infinité de valeurs entières et positives dont chacune sera compatible avec les conditions imposées.

Pour fixer les idées, convenons d'entendre par m_ν le nombre entier positif le plus petit satisfaisant aux conditions mentionnées tout à l'heure.

D'après cela, les trois éléments caractéristiques du système (S_ν) : $(\bar{A}_{\tau_m})$, δ_{ν_m} et m_ν viennent d'être déterminés complètement.

91. Entendons par le système (S_ν) , ayant pour éléments caractéristiques $(\bar{A}_{\tau_m})$, δ_{ν_m} et m_ν , le système suivant de la forme (58):

$$(100) \quad \delta_{\nu k} = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_{mk}^{h-1} y_h \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

où, par définition, $\delta_{\nu k} = 0$ pour $k \neq m$, tandis que $\delta_{\nu m}$ est donné par (96),

$$(101) \quad \lambda_{mm} = a_n^{m_\nu} \text{ et } \lambda_{mk} = a_{mk}^{m_\nu} \quad (k = 1, 2, \dots, m-1, m+1, m+2, \dots).$$

D'après cela, quel que soit le nombre entier positif k , λ_{mk} n'est que la puissance $m_\nu^{\text{ième}}$ de l'élément $k^{\text{ième}}$ de la suite $(\bar{A}_{\tau_m})$.

Par conséquent, en tenant compte:

1° de ce que m_ν vient d'être déterminé de sorte que l'on aura toujours $m_\nu \geq \mu_m$ (n° 90), et

2° des formules (90), (95) et (92), on en déduit immédiatement que

$$(102) \quad \left| \frac{\lambda_{m(k+1)}}{\lambda_{mk}} \right| \geq p \geq 4 \quad (k = 1, 2, 3, \dots);$$

par suite, d'après le n° 65, on obtient une solution du système (S_ν) par la méthode de Fourier, les inconnues du système (y_h) se calculant à l'aide des formules (59) si l'on y remplace les λ_i respectivement par les λ_{mi} (101), k par m et γ_k par $\delta_{\nu m}$.

Donc, en désignant par $x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, \dots, x_{\nu h}, \dots$ les valeurs des inconnues fournies par ces formules, on obtiendra

$$(103) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{\nu h} = \frac{(-1)^{h+m} \delta_{\nu m} \cdot \sum \frac{1}{(\lambda_{mm}, \lambda_{m1}) \lambda_{m2} \lambda_{m3} \dots \lambda_{mh}}}{\left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m1}} - 1 \right) \left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m2}} - 1 \right) \dots \left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m(m-1)}} - 1 \right) \prod_{j=m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{mj}} \right)} \\ (h = 1, 2, 3, \dots); \end{array} \right.$$

ces valeurs sont, d'après le n° 65, des quantités finies et bien déterminées, ne s'annulant que lorsque $\delta_{\nu m} = 0$ et rendant absolument convergentes toutes les séries du système (S_ν) .

Les parties droites des équations du système (S_ν) s'obtiennent évidemment de la série

$$y_1 + y_2 z^{m\nu} + y_3 (z^{m\nu})^2 + \dots + y_h (z^{m\nu})^{h-1} + \dots$$

en y faisant parcourir à la variable z les éléments de la suite indéfinie $(\bar{A}_{\tau m})$.

Aussi, en y prenant

$$y_h = x_{\nu h} \quad (h = 1, 2, 3, \dots),$$

obtient-on une série entière bien déterminée

$$\psi_\nu(z) = x_{\nu 1} + x_{\nu 2} z^{m\nu} + x_{\nu 3} (z^{m\nu})^2 + \dots + x_{\nu h} (z^{m\nu})^{h-1} + \dots$$

jouissant des propriétés suivantes:

1° Elle converge absolument pour $z = a_n$, ainsi que pour

$$z = a_{mk} \quad (k = 1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots),$$

puisque $\psi_\nu(a_n)$ et $\psi_\nu(a_{mk})$ représentent respectivement les parties droites des équations $m^{\text{ième}}$ et $k^{\text{ième}}$ du système (S_ν) où les inconnues (y_h) sont remplacées par les valeurs bien déterminées $(x_{\nu h})$ (103), qui rendent absolument convergente chaque série de ce système.

2° Elle est uniformément convergente dans toute l'étendue du plan de la variable z .

En effet, étant absolument convergente pour $z = a_{mk}$, elle est uniformément convergente dans tout le cercle de rayon $|a_{mk}|$ ayant pour centre l'origine. Or,

$$|a_{mk}| \rightarrow \infty \text{ pour } k \rightarrow \infty;$$

aussi, quelque grand que soit un nombre positif ϱ , y a-t-il toujours des a_{mk} dont les modules sont supérieurs à ϱ ; par suite, la série $\psi_\nu(z)$ sera uniformément convergente dans chaque cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon une valeur positive quelconque ϱ ; elle représente donc une fonction entière.

$$3^\circ \quad \psi_\nu(a_n) = \delta_{\nu m} = c_n^{(i)} - F_1^{(i)}(a_n) - F_2^{(i)}(a_n) - \dots - F_{\nu-1}^{(i)}(a_n),$$

car le $m^{\text{ième}}$ élément de la suite $(\bar{A}_{\tau m})$ est, d'après la construction, a_n (93).

$$4^\circ \quad \psi_\nu(a_{mk}) = 0 \text{ pour } k \neq m, \text{ puisque } \delta_{\nu k} = 0 \text{ pour } k \neq m \text{ (100).}$$

$$5^\circ \quad \psi_\nu(z) \text{ ne s'annule identiquement que lorsque } \delta_{\nu m} = 0.$$

6° Comme fonction entière, $\psi_\nu(z)$ admet les dérivées de tous les ordres, celles-ci étant finies et bien déterminées dans toute l'étendue du plan de z .

92. Après avoir construit $\psi_\nu(z)$, ainsi que $\varphi_\nu(z)$, posons

$$(104) \quad F_\nu(z) = \varphi_\nu(z) \cdot \psi_\nu(z).$$

Il est clair que la fonction obtenue $F_\nu(z)$ est holomorphe dans tout le plan de la variable z , puisque les facteurs $\varphi_\nu(z)$ et $\psi_\nu(z)$ le sont tous les deux; elle satisfait donc à la condition (I) (n 86).

La dérivée $p^{\text{ième}}$ s'écrivant sous la forme

$$(105) \quad F_\nu^{(p)}(z) = \psi_\nu(z) \varphi_\nu^{(p)}(z) + \frac{p}{1!} \psi'_\nu(z) \varphi_\nu^{(p-1)}(z) + \\ + \frac{p(p-1)}{2!} \psi''_\nu(z) \varphi_\nu^{(p-2)}(z) + \dots + \psi_\nu^{(p)}(z) \varphi_\nu(z),$$

il en résulte immédiatement que, pour $p = i$,

$$F_{\nu}^{(i)}(a_n) = c_n^{(i)} - F_1^{(i)}(a_n) - F_2^{(i)}(a_n) - \dots - F_{\nu-1}^{(i)}(a_n),$$

comme l'exige la condition (III) (n° 86), puisque, d'après le n° 87, on a

$$0 = \varphi_{\nu}^{(i-1)}(a_n) = \varphi_{\nu}^{(i-2)}(a_n) = \dots = \varphi'_{\nu}(a_n) = \varphi_{\nu}(a_n) \quad (\text{voir 86}),$$

$$1 = \varphi_{\nu}^{(i)}(a_n) \quad (\text{voir 85}),$$

tandis que, d'après le n° 91,

$$\psi_{\nu}(a_n) = c_n^{(i)} - F_1^{(i)}(a_n) - F_2^{(i)}(a_n) - \dots - F_{\nu-1}^{(i)}(a_n).$$

De même, en tenant compte de (86) et (87), on déduira aisément de (105) que

$$F_{\nu}^{(m)}(a_n) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, i-1), \quad \text{et}$$

$$F_{\nu}^{(m)}(a_k) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, 3, \dots, n-1 \\ m = 0, 1, 2, \dots, p_k \end{array} \right),$$

c'est-à-dire que la fonction

$$F_{\nu}(z) = \varphi_{\nu}(z) \cdot \psi_{\nu}(z)$$

satisfera aussi aux conditions (IV) et (V) (n° 86).

Donc, des considérations précédentes nous tirerons la conclusion suivante:

Quel que soit le nombre entier et positif ν , en supposant que l'on ait déjà construit les $(\nu-1)$ premières fonctions:

$$F_1(z), F_2(z), \dots, F_{\nu-1}(z)$$

satisfaisant aux conditions (I), (III), (IV) et (V) (n° 86), on peut toujours construire la fonction $\nu^{\text{ième}}$ $F_{\nu}(z)$ satisfaisant aux mêmes conditions.

Donc, il est clair que notre procédé de formation des fonctions $F_{\nu}(z)$ est tel qu'il nous en fournira même une suite indéfinie

$$F_1(z), F_2(z), \dots, F_n(z), \dots,$$

pourvu que la première d'elles $F_1(z)$ soit construite effectivement.

93. Construisons $F_1(z)$.

D'après le n° 86, $F_1(z)$ doit être une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan de z , prenant pour $z = a_1$ la valeur $c_1^{(0)}$:

$$F_1(a_1) = c_1^{(0)}.$$

Nous l'obtenons en construisant la fonction entière $\psi_1(z)$, à l'aide du système (S_1) dont les éléments caractéristiques sont

$$(\bar{A}_{\tau_1}) = (A_{\tau_1}), \quad \delta_{11} = c_1^{(0)}, \quad m_1 = 1.$$

En effet, la fonction

$$\psi_1(z) = \sum_{h=1}^{\infty} x_{1h} z^{h-1}$$

ainsi construite, où

$$x_{11} = c_1^{(0)} \cdot \frac{1}{\prod_{j=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{1j}}\right)}$$

et, d'une façon générale,

$$x_{1h} = (-1)^{h+1} c_1^{(0)} \cdot \frac{\sum \frac{1}{\lambda_{12} \lambda_{13} \dots \lambda_{1h}}}{\prod_{j=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{1j}}\right)} \quad (h = 2, 3, \dots),$$

étant

$$\lambda_{1k} = a_{1k}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{voir 103}),$$

sera bien, d'après le n° 91, une fonction entière prenant pour $z = a_1$ la valeur $c_1^{(0)}$:

$$\psi_1(a_1) = c_1^{(0)}.$$

On n'aura donc qu'à poser $F_1(z) = \psi_1(z)$ pour obtenir la fonction exigée.

Ajoutons que $F_1(z)$ ne s'annule identiquement que lorsque $c_1^{(0)} = 0$ (n° 91).

La fonction $F_1(z)$ une fois formée, on peut construire,

comme nous venons de le voir, $F_2(z)$, ensuite $F_3(z)$, et ainsi de suite, ad infinitum.

Bien que quelques-unes de ces fonctions puissent s'annuler identiquement, il est clair qu'elles ne le feront pas toutes.

En effet, sans restreindre la généralité, on peut supposer, d'après le n° 85, qu'il y ait dans la suite indéfinie

$$c_1^{(0)}, c_1^{(1)}, \dots, c_1^{(p_1)}, \dots, c_n^{(0)}, c_n^{(1)}, \dots, c_n^{(p_n)}, \dots$$

des éléments différents de zéro.

Or, supposons que le premier élément différent de zéro y soit $c_s^{(r)}$ et que son rang soit t ; alors les $t-1$ premières fonctions:

$$F_1(z), F_2(z), \dots, F_{t-1}(z)$$

s'annulent identiquement, tandis que $F_t(z)$ ne le fait pas, puisqu'en désignant par q le rang du cercle auquel appartient a_s , il est évident qu'on aura

$$F_t^{(r)}(a_s) = \delta_{tq} = c_s^{(r)} \neq 0.$$

94. Allons maintenant démontrer que la série

$$\sum_{v=1}^{\infty} F_v(z)$$

est uniformément convergente dans toute l'étendue du plan de la variable z .

A cet effet remarquons d'abord qu'en tenant compte de ce que

$$\varphi_v(z) = \sum_{q=0}^{v-1} \gamma_{vq} z^q \quad (\text{n° 87})$$

et

$$\psi_v(z) = \sum_{h=1}^{\infty} x_{vh} (z^{v_h})^{h-1} \quad (\text{n° 91}),$$

on peut présenter la fonction $F_v(z)$ sous la forme d'une somme de v séries entières

$$\begin{aligned}
 F_\nu(z) &= \varphi_\nu(z) \cdot \psi_\nu(z) = \\
 &= \gamma_{\nu 0} \sum_{h=1}^{\infty} x_{\nu h} (z^{m_\nu})^{h-1} + \gamma_{\nu 1} z \sum_{h=1}^{\infty} x_{\nu h} (z^{m_\nu})^{h-1} + \dots + \\
 &\quad + \gamma_{\nu(\nu-1)} z^{\nu-1} \sum_{h=1}^{\infty} x_{\nu h} (z^{m_\nu})^{h-1} = \\
 &= \sum_{q=0}^{\nu-1} \gamma_{\nu q} z^q \sum_{h=1}^{\infty} x_{\nu h} (z^{m_\nu})^{h-1}.
 \end{aligned}$$

Numérotons-les toutes en procédant de la manière suivante: tout d'abord numérotons celles qui correspondent à $F_1(\nu)$, ensuite celles qui correspondent à $F_2(\nu)$, ensuite celles qui correspondent à $F_3(\nu)$; et ainsi de suite.

De plus, en numérotant les séries entières

$$\gamma_{\nu q} z^q \sum_{h=1}^{\infty} x_{\nu h} (z^{m_\nu})^{h-1} \quad (q = 0, 1, 2, \dots, \nu-1),$$

correspondant à la même fonction $F_\nu(z)$, suivons ici l'ordre croissant du second indice du facteur $\gamma_{\nu q}$, quel que soit ν .

D'après cela, il est clair que la série

$$\gamma_{\nu q} z^q \sum_{h=1}^{\infty} x_{\nu h} (z^{m_\nu})^{h-1}$$

aura pour rang

$$(106) \quad \begin{cases} k = 1 + 2 + 3 + \dots + (\nu-2) + (\nu-1) + q + 1 = \\ \quad = \frac{(\nu-1)\nu}{2} + q + 1; \end{cases}$$

en y prenant, en particulier, $q = \nu - 1$, on obtiendra le rang r_ν de la dernière série correspondant à $F_\nu(z)$

$$r_\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2};$$

c'est cette quantité dont nous avons fait déjà usage pour déterminer, d'après (99), m_ν .

95. Désignons

$$(107) \quad v_{kh}(z) = \gamma_{\nu q} z^q x_{\nu h} (z^{\nu})^{h-1}$$

et examinons de près la série double

$$(108) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} v_{kh}(z)$$

à l'aide de laquelle nous allons démontrer la convergence uniforme de la série

$$(109) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\nu}(z).$$

Remarquons que, si la série double est absolument convergente pour une valeur quelconque de la variable $z = z_0$, elle est uniformément convergente dans tout le cercle de rayon $|z_0|$ ayant pour centre l'origine, puisque, pour $|z| \leq |z_0|$, on aura évidemment

$$|v_{kh}(z)| \leq |v_{kh}(z_0)| \quad (\text{voir } 107).$$

De même, il est clair que la série (109) peut être considérée comme déduite de la série double (108) par un certain groupement de ses termes $[v_{kh}(z)]$.

Or, en supposant que la série double soit absolument convergente pour $z = z_0$, elle aurait une somme bien déterminée pour $|z| \leq |z_0|$ ne dépendant ni de l'ordre ni des différents modes de groupement de ses termes.

Il en résulterait donc que, pour chaque valeur de la variable telle que $|z| \leq |z_0|$, les deux séries (108 et (109) auraient certainement les mêmes sommes bien déterminées, étant toutes les deux uniformément convergentes dans le cercle de rayon $|z_0|$.

D'après cela, pour démontrer la convergence uniforme de la série (109), dans toute l'étendue du plan de z , il suffit de démontrer que la série double (108) est absolument convergente pour $z = a_s$, a_s étant un élément quelconque de la suite donnée

$$(A) = a_1, a_2, \dots, a_s, \dots,$$

où

$$|a_s| \rightarrow \infty \quad \text{pour } s \rightarrow \infty.$$

Démontrons donc qu'en désignant

$$(110) \quad U_{kh} = |v_{kh}(a_s)| (2kh)^3,$$

on peut assigner deux nombres entiers et positifs: H et K tels que

$$U_{kh} < 1$$

pour $h \geq H$, indépendamment de k , ainsi que

pour $k \geq K$, indépendamment de h .

Il en résulterait immédiatement que, pour ces valeurs de h et k , on aurait

$$|v_{kh}(a_s)| < \frac{1}{(k+h)^{2+q}} \quad (0 < q \leq 1)$$

et, par suite, d'après le critère du n° 23, la série double (108) serait bien absolument convergente pour $z = a_s$.

Remarquons que, sans restreindre la généralité, on peut supposer

$$|a_s| > 1,$$

puisque'il est clair que, si la série double converge absolument pour une valeur de z dont le module est supérieur à un, elle le fera à fortiori pour toutes les valeurs de z dont les modules sont ≤ 1 .

96. Étudions préalablement ce que font ν , n et m lorsque k parcourt la suite naturelle des nombres en tendant vers ∞ .

Remarquons à cet effet qu'étant

$$k = \frac{(\nu-1)\nu}{2} + q + 1, \quad q + 1 \leq \nu \quad (\text{voir 106}),$$

et, d'après cela,

$$k \leq \frac{\nu(\nu+1)}{2} = r_\nu,$$

il en résulte qu'à chaque valeur entière et positive de k correspond une valeur entière et positive bien déterminée de ν ; celle-ci est évidemment

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + 8k}}{2}$$

lorsque cette dernière quantité a une valeur entière; dans le cas contraire c'est le plus grand nombre entier positif contenu dans

$$\frac{+1 + \sqrt{1 + 8k}}{2}.$$

Par exemple, soit $k = 10$; alors

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + 8 \cdot 10}}{2} = 4$$

et, par suite, à $k = 10$ correspond $\nu = 4$:

$$10 = \frac{4 \cdot 5}{2} \quad (q = 0).$$

D'autre part, soit, par exemple, $k = 17$; alors $11 < \sqrt{1 + 8 \cdot 17} < 12$; d'après cela, le plus grand nombre entier positif contenu dans

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 8 \cdot 17}}{2} \text{ est } 6; \text{ donc, } \nu = 6 \text{ et } q = 1:$$

$$17 = \frac{5 \cdot 6}{2} + 1 + 1.$$

D'après ce que nous venons de constater, il est clair qu'en faisant parcourir à k la suite naturelle des nombres, la valeur correspondante de ν augmentera indéfiniment en tendant avec k vers ∞ .

De même, étant, d'après (83),

$$\nu = (p_1 + 1) + (p_2 + 1) + \dots + (p_{n-1} + 1) + (i + 1) \quad (i \leq p_n),$$

où les éléments de la suite infinie donnée

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$$

sont des nombres entiers positifs fixes ou zéros, il en résulte immédiatement qu'à chaque valeur entière et positive de ν correspond une valeur entière et positive bien déterminée de n .

En effet, désignons

$$s_0 = 0,$$

$$s_j = (p_1 + 1) + (p_2 + 1) + \dots + (p_j + 1) \quad (j = 1, 2, 3, \dots);$$

cela étant, il est clair que

$$s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_j < \dots$$

et que

$$s_j \rightarrow \infty \text{ pour } j \rightarrow \infty.$$

Donc, étant donnée une valeur quelconque $\nu = \nu_0$, il est évident qu'on pourra indiquer deux valeurs successives de l'indice j : j_0 et $j_0 + 1$ de sorte que l'on ait

$$s_{j_0} \leq \nu_0 < s_{j_0+1} \quad (j_0 \geq 0);$$

alors, comme on s'en assurera aisément,

$$\text{à } \nu = \nu_0 \text{ correspondra } n = j_0 + 1.$$

De même, il est aisé de voir qu'en faisant parcourir à ν la suite naturelle des nombres, la valeur correspondante de n augmentera indéfiniment en tendant avec ν vers ∞ .

Enfin, rappelons-nous de ce que, d'après le n° 88, à chaque valeur entière et positive de n correspond une valeur entière et positive bien déterminée de m , m étant le rang du cercle C_m auquel appartient a_n .

De plus, il est clair qu'en faisant parcourir à n la suite naturelle des nombres, la valeur correspondante de m augmentera indéfiniment en tendant avec n vers ∞ .

Des considérations précédentes nous tirons donc la conclusion suivante:

A chaque valeur entière et positive de k correspondent les valeurs bien déterminées de ν , n et m , augmentant indéfiniment avec k et tendant avec lui vers ∞ .

Il en résulte, en particulier, qu'étant donné un nombre entier positif quelconque s , on peut assigner un autre nombre entier positif k_0 tel que

$$n \geq s \text{ et } m \geq 2 \text{ pour } k \geq k_0,$$

n et m correspondant à k .

97. Examinons maintenant de près U_{kh} . D'après (110), (107) et (103), U_{kh} s'écrit

$$U_{kh} = \left| \frac{(2kh)^3 \gamma_{\nu q} a_s^q \cdot a_s^{m\nu(h-1)} \delta_{\nu m} \cdot \sum_{(\lambda_{mm}, \lambda_{m1})} \frac{1}{\lambda_{m2} \lambda_{m3} \dots \lambda_{mh}}}{\left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m1}} - 1\right) \left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m2}} - 1\right) \dots \left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m(m-1)}} - 1\right) \prod_{j=m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{mj}}\right)} \right|.$$

Donc, en désignant

$$(111) \quad P(k) = \left| \frac{8k^3 \gamma_{\nu q} \delta_{\nu m} a_s^q}{\left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m1}} - 1\right) \left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m2}} - 1\right) \dots \left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m(m-1)}} - 1\right) \prod_{j=m+1}^{\infty} \left(-1 \frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{mj}}\right)} \right|$$

et

$$(112) \quad Q(k, h) = \left| h^3 a_s^{m\nu(h-1)} \cdot \sum_{(\lambda_{mm}, \lambda_{m1})} \frac{1}{\lambda_{m2} \lambda_{m3} \dots \lambda_{mh}} \right|,$$

on aura

$$(113) \quad U_{kh} = P(k) \cdot Q(k, h).$$

Or, rappelons-nous que

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{mi} &= a_{mi}^{m\nu} = a_{\tau_i}^{m\nu} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m-1), \\ \lambda_{m1} &= a_{m1}^{m\nu} = a_{\tau_1}^{m\nu} = a_1^{m\nu}, \\ \lambda_{mm} &= a_n^{m\nu}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{n}^\circ 91 \text{ et } 88);$$

et $\left| \frac{\lambda_{m(i+1)}}{\lambda_{mi}} \right| \geq p \geq 4$

de même,

$$k \leq r_\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2} \quad (\text{n}^\circ 94),$$

$$|\gamma_{\nu q}| \leq M_\nu, \quad q \leq \nu-1 \quad (\text{n}^\circ 87),$$

$$|a_s| > 1 \quad (\text{n}^\circ 95)$$

et

$$\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^i}\right) > \frac{2}{3} \quad \text{pour } p \geq 4 \quad (\text{n}^\circ 35).$$

Cela étant, on aura évidemment

$$\left| \prod_{j=m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{mj}} \right) \right| \geq \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4^i} \right) > \frac{2}{3},$$

ainsi que

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m1}} - 1 \right) \left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m2}} - 1 \right) \cdots \left(\frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m(m-1)}} - 1 \right) \right| > \\ & > \left| \frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m1}} \cdot \frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m2}} \cdots \frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m(m-1)}} \right| \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4^i} \right) > \\ & > \frac{2}{3} \left| \frac{\lambda_{mm}}{\lambda_{m1}} \right| \cdot p^{m-2} \cdot p^{m-3} \cdots p^3 \cdot p^1 = \frac{2}{3} \left| \frac{a_n}{a_1} \right|^{m\nu} p^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}}; \end{aligned}$$

par suite, d'après (111),

$$(114) \quad P(k) < \left| r_\nu^3 M_\nu \delta_{\nu m} a_s^{\nu-1} \left(\frac{a_1}{a_n} \right)^{m\nu} 18 \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} \right|.$$

La partie droite de la dernière inégalité ayant une valeur finie et bien déterminée, il en résulte que la valeur de $P(k)$ sera finie, elle-aussi, quel que soit le nombre entier positif k .

Examinons maintenant $P(k)$, pour $k \geq k_0$, k_0 étant le nombre entier positif que nous venons de déterminer au numéro précédent, de sorte que n et m correspondant à k satisfassent aux conditions

$$n \geq s \quad \text{et} \quad m \geq 2 \quad \text{pour} \quad k \geq k_0.$$

Pour toutes ces valeurs de k on aura

$$|a_s|^{\nu-1} \leq |a_n|^{\nu-1},$$

ainsi que

$$|a_n| > |a_1|,$$

car a_n appartient au cercle ayant pour rang $m \geq 2$; par suite, d'après (114) et (99)

$$P(k) < 18 \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} \quad \text{pour} \quad k \geq k_0,$$

et il en résulte immédiatement que $P(k)$ tend vers zéro lorsque k tend vers ∞ .

En effet, k tendant vers ∞ , m le fera, lui-aussi (n° 96); or

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 18 \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} = 0.$$

Donc, il est clair que

$$(115) \quad P(k) \rightarrow 0 \quad \text{pour } k \rightarrow \infty.$$

Ainsi, nous venons de voir qu'en faisant parcourir à k la suite naturelle des nombres, $P(k)$ parcourt respectivement les valeurs (111), restant toujours finies et tendant vers zéro lorsque k tend vers ∞ .

Nous en concluons que l'on pourra indiquer un nombre positif P tel que $P(k) \leq P$, et, par suite, d'après (113),

$$(116) \quad U_{kh} \leq P \cdot Q(k, h),$$

quelle que soit la valeur entière et positive de k .

98. Quant à $Q(k, h)$, proposons-nous de l'étudier d'une façon tout analogue.

En tenant compte de (102), (28) et (29), on peut écrire

$$\left| \sum_{(\lambda_{mm}, \lambda_{m1})} \frac{1}{\lambda_{m2} \lambda_{m3} \dots \lambda_{mh}} \right| < \frac{15}{8} \left| \frac{1}{\lambda_{m1} \lambda_{m2} \dots \lambda_{m(h-1)}} \right|,$$

ainsi que

$$\left| \sum \frac{1}{\lambda_{m2} \lambda_{m3} \dots \lambda_{mh}} \right| < \frac{15}{8} \left| \frac{1}{\lambda_{m1} \lambda_{m2} \dots \lambda_{m(h-1)}} \right|.$$

D'autre part, étant, d'après (101) et (91),

$$\lambda_{mi} = a_{mi}^{m\nu} = a_{\tau_i}^{m\nu} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m-1),$$

$$|\lambda_{mm}| = |a_m|^{m\nu} = |a_{\tau_m}|^{m\nu},$$

$$|\lambda_{mi}| = |a_{mi}|^{m\nu} \geq |a_{\tau_i}|^{m\nu} \quad \text{pour } i \geq m+1,$$

on aura

$$\frac{15}{8} \left| \frac{1}{\lambda_{m1} \lambda_{m2} \dots \lambda_{m(h-1)}} \right| \leq \frac{15}{8} \left| \frac{1}{a_{\tau_1} a_{\tau_2} \dots a_{\tau_{h-1}}} \right|^{m_p}$$

et, par suite, d'après (112),

$$(117) \quad Q(k, h) < \frac{15}{8} h^3 \left| \frac{a_s^{h-1}}{a_{\tau_1} a_{\tau_2} \dots a_{\tau_{h-1}}} \right|^{m_p}.$$

La partie droite de cette inégalité (117) ayant une valeur finie et bien déterminée, nous en concluons que celle de $Q(k, h)$ reste finie, elle-aussi, quels que soient les nombres entiers positifs k et h .

De même, il est aisé de voir que la série

$$\sum_{h=2}^{\infty} u_h$$

dont le terme général est

$$u_h = \left| \frac{a_s^{h-1}}{a_{\tau_1} a_{\tau_2} \dots a_{\tau_{h-1}}} \right|$$

convergera, car

$$\left| \frac{u_{h+1}}{u_h} \right| = \left| \frac{a_s}{a_{\tau_h}} \right| \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow \infty;$$

pour s'en assurer, il suffit de rappeler que, d'après le n° 88,

$$|a_{\tau_h}| \rightarrow \infty \text{ lorsque } h \rightarrow \infty.$$

Il en résulte donc que $u_h \rightarrow 0$ pour $h \rightarrow \infty$, et nous en concluons, en particulier, que l'on pourra indiquer un nombre entier positif h_0 tel que

$$u_h < 1 \text{ pour } h \geq h_0.$$

Par suite, d'après (117),

$$(118) \quad Q(k, h) < \frac{15}{8} h^3 \left| \frac{a_s^{h-1}}{a_{\tau_1} a_{\tau_2} \dots a_{\tau_{h-1}}} \right| \text{ pour } h \geq h_0,$$

quel que soit le nombre entier positif k , ainsi que la valeur correspondante de ν , car on entend par m_ν toujours un nombre entier positif (n° 90): $m_\nu \geq 1$.

Or, en considérant la partie droite de l'inégalité (118) comme terme général de la série

$$\sum_{h=2}^{\infty} w_h,$$

on constatera, tout comme plus haut, que cette série convergera,

$$\left| \frac{w_{h+1}}{w_h} \right| \text{ tendant vers zéro lorsque } h \rightarrow \infty;$$

par suite, $w_h \rightarrow 0$ pour $h \rightarrow \infty$, et, à fortiori,

$$(119) \quad Q(k, h) \rightarrow 0 \text{ pour } h \rightarrow \infty,$$

quel que soit k .

Nous en concluons donc, tout comme au numéro précédent, que l'on pourra bien assigner un nombre positif Q tel que $Q(k, h) \leq Q$, et, par suite, d'après (118),

$$(120) \quad U_{kh} \leq P(k) \cdot Q,$$

quels que soient les nombres entiers positifs k et h .

Enfin, en tenant compte, d'une part, de (115) et (120) et, d'autre part, de (116) et (119), il en résulte immédiatement que l'on peut assigner, en effet, deux nombres entiers positifs: K et H tels que

$$U_{kh} < 1$$

pour $k \geq K$, indépendamment de h , ainsi que

pour $h \geq H$, indépendamment de k .

D'après le n° 95, on peut donc dire que la série double

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} v_{kh}(a_s)$$

est absolument convergente; or, a_s y désignant un élément de la suite donnée (A) tel que $|a_s| > 1$, choisi d'ailleurs tout

arbitrairement, on en déduit, d'après le même numéro, la convergence absolue et uniforme de la série double

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} v_{kh}(z),$$

ainsi que de la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\nu}(z),$$

dans toute l'étendue du plan de la variable z .

En tenant compte enfin de ce que chacun des termes $F_{\nu}(z)$ de la dernière série est construit de sorte qu'il représente une fonction holomorphe dans le même domaine, on en conclut, d'après Weierstrass, que la fonction

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\nu}(z)$$

est holomorphe, elle-aussi, dans toute l'étendue du plan de z , la dérivée $p^{\text{ième}}$ étant

$$F^{(p)}(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\nu}^{(p)}(z) \quad (p = 1, 2, 3, \dots).$$

C'est donc évidemment une fonction entière; de plus, d'après le n° 86, c'est une fonction entière telle que

$$\left. \begin{aligned} F(a_n) &= c_n^{(0)} \\ F'(a_n) &= c_n^{(1)} \\ &\dots\dots\dots \\ F^{(p_n)}(a_n) &= c_n^{(p_n)} \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

puisque les fonctions $F_{\nu}(z)$ satisfont aux conditions (I), (III), (IV) et (V) (n° 86), comme nous l'avons vu au n° 92.

Donc, le problème généralisé de l'interpolation (n° 85) vient d'être résolu dans le cas où $a_1 \neq 0$ (n° 87).

99. Reste à montrer que ce problème peut être résolu aussi dans le cas où $a_1 = 0$.

Comme il est aisé de s'en assurer, on n'aura, au fond, qu'à répéter à cet effet les raisonnements précédents, et à modifier légèrement le procédé de formation des fonctions

$$F_1(z), F_2(z), \dots F_\nu(z), \dots$$

Les modifications à introduire sont les suivantes :

1° Prenons, en particulier,

$$\varphi_1(z) = 1, \quad \varphi_2(z) = \frac{z}{1!}, \quad \varphi_3(z) = \frac{z^2}{2!}, \quad \dots \quad \varphi_{p_1+1}(z) = \frac{z^{p_1}}{p_1!},$$

tandis qu'en général, lorsque $\nu \geq p_1 + 2$, soit

$$\varphi_\nu(z) = (-1)^i \frac{a_n^i}{i!} \cdot \frac{z^{p_1+1} \left(1 - \frac{z}{a_2}\right)^{p_2+1} \dots \left(1 - \frac{z}{a_{n-1}}\right)^{p_{n-1}+1} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^i}{a_n^{p_1+1} \left(1 - \frac{a_n}{a_2}\right)^{p_2+1} \dots \left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^{p_{n-1}+1}}.$$

2° Entendons par (A_τ) la même suite indéfinie que plus haut, au n° 88, avec cette seule différence que cette fois soit $a_{\tau_1} = a_2$, tandis que dans le cas précédent on avait $a_{\tau_1} = a_1$.

3° Lorsque $\nu \geq p_1 + 2$, construisons les séries entières $\psi_\nu(z)$ d'après les mêmes règles que dans le cas précédent; quant aux fonctions

$$\psi_1(z), \psi_2(z), \dots \psi_{p_1+1}(z),$$

remplaçons-les respectivement par les constantes

$$c_1^{(0)}, c_1^{(1)}, \dots c_1^{(p_1)}.$$

Cela posé, prenons, comme auparavant,

$$F_\nu(z) = \varphi_\nu(z) \cdot \psi_\nu(z);$$

on obtiendra ainsi une suite indéfinie de fonctions $F_\nu(z)$ dont chacune satisfera aux mêmes conditions essentielles que plus haut (n° 86); en particulier, on aura

$$F_1(z) = c_1^{(0)}, \quad F_2(z) = \frac{c_1^{(1)}}{1!} z, \quad F_3(z) = \frac{c_1^{(2)}}{2!} z^2, \quad \dots \quad F_{p_1+1}(z) = \frac{c_1^{(p_1)}}{p_1!} z^{p_1}.$$

En répétant les raisonnements précédents, on démontrera, cette fois aussi, la convergence uniforme de la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\nu}(z)$$

dans toute l'étendue du plan de la variable z ; enfin, on en tirera la conclusion que la fonction

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\nu}(z)$$

sera bien une fonction entière fournissant une solution du problème généralisé de l'interpolation dans le cas où $a_1 = 0$.

Donc, d'après le n° 63, on déduit des considérations précédentes immédiatement le théorème général suivant:

Étant données trois suites indéfinies:

1° celle des (a_n) satisfaisant aux conditions suivantes:

$$\begin{aligned} a_i &\neq a_j \text{ pour } i \neq j, \\ |a_1| &\leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots, \text{ et} \\ |a_n| &\rightarrow \infty \text{ pour } n \rightarrow \infty; \end{aligned}$$

2° celle des nombres entiers positifs quelconques ou zéros

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots;$$

3° et celle des quantités quelconques

$$c_1^{(0)}, c_1^{(1)}, \dots, c_1^{(p_1)}, \dots, c_n^{(0)}, c_n^{(1)}, \dots, c_n^{(p_n)}, \dots;$$

on peut construire une infinité de fonctions entières $F(z)$ telles que pour $z = a_n$ l'on ait

$$\left. \begin{aligned} F_1(a_n) &= c_n^{(0)} \\ F'(a_n) &= c_n^{(1)} \\ &\dots \dots \dots \\ F^{(p_n)}(a_n) &= c_n^{(p_n)} \end{aligned} \right\} (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$F^{(p_n)}(z)$ étant la dérivée d'ordre p_n de la fonction $F(z)$ et

$$F^{(0)}(z) = F(z).$$

100. Corollaire.

Étant données les mêmes trois suites indéfinies que dans l'énoncé précédent, on peut construire une infinité de fonctions $\Phi(z-z_0)$ représentées par des séries de Laurent et telles que pour $z=a_n$ l'on ait

$$(121) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(a_n-z_0) = c_n^{(0)} \\ \Phi'(a_n-z_0) = c_n^{(1)} \\ \vdots \\ \Phi^{(p_n)}(a_n-z_0) = c_n^{(p_n)} \end{array} \right\} (n = 1, 2, 3, \dots),$$

z_0 étant un nombre fixe quelconque différent des éléments de la suite

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots$$

En effet, examinons d'abord le cas particulier où

$$z_0 = 0, \text{ étant } a_1 \neq 0.$$

Nous aurons à montrer que l'on peut construire une infinité de fonctions

$$\Phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n$$

de sorte que chacune d'elles satisfasse aux conditions (121), en y prenant $z_0 = 0$.

A cet effet présentons $\Phi(z)$ sous la forme

$$\Phi(z) = P(z) + G\left(\frac{1}{z}\right),$$

$P(z)$ étant une fonction entière de z et

$$G\left(\frac{1}{z}\right) \text{ une fonction entière de } \frac{1}{z}:$$

Dans le cas général, où $z_0 \neq 0$, nous allons procéder d'une façon tout analogue.

Prenons

$$\Phi(z-z_0) = P(z-z_0) + G\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$$

et entendons par $G\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ une fonction entière bien déterminée de $\frac{1}{z-z_0}$, par exemple,

$$G\left(\frac{1}{z-z_0}\right) = e^{\frac{1}{z-z_0}} = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{z-z_0}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^n + \dots$$

Cela posé, nous aurons à déterminer la fonction entière $P(z-z_0)$ de sorte que pour $z = a_n$ l'on ait

$$\left. \begin{aligned} P(a_n - z_0) &= c_n^{(0)} - G\left(\frac{1}{a_n - z_0}\right) \\ P'(a_n - z_0) &= c_n^{(1)} - G'\left(\frac{1}{a_n - z_0}\right) \\ &\dots \dots \dots \\ P^{(p_n)}(a_n - z_0) &= c_n^{(p_n)} - G^{(p_n)}\left(\frac{1}{a_n - z_0}\right) \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

En posant $z - z_0 = x$, ainsi que

$$a_n - z_0 = a'_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

tout revient à déterminer une fonction entière de x , $P(x)$, de sorte que pour $x = a'_n$ l'on ait

$$(123) \quad \left\{ \begin{aligned} P(a'_n) &= c_n^{(0)} - G\left(\frac{1}{a'_n}\right) \\ P'(a'_n) &= c_n^{(1)} - G'\left(\frac{1}{a'_n}\right) \\ &\dots \dots \dots \\ P^{(p_n)}(a'_n) &= c_n^{(p_n)} - G^{(p_n)}\left(\frac{1}{a'_n}\right) \end{aligned} \right\} \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

DIE TEMPERATURABWEICHUNGEN IN TARTU (DORPAT) UND IHRE BEDEU- TUNG FÜR DIE WITTERUNGSPROGNOSE

VON

KARL FRISCH

TARTU (DORPAT) 1925

C. Mattiesen, Tartu (Dorpat)

I. Als Grundlage für die vorliegende Arbeit wurden die meteorologischen Beobachtungen von Tartu (Dorpat) benutzt, die lückenlos bis zum Jahre 1866 zurückreichen. Es soll hier der Versuch gemacht werden, die Einwirkung der einzelnen meteorologischen Faktoren aufeinander zu untersuchen und festzustellen, in welchem Masse bei langen Beobachtungsreihen im Verlaufe der einzelnen meteorologischen Elemente eine Gesetzmässigkeit zum Ausdruck kommt. Dazu wurden in erster Linie die Temperaturbeobachtungen benutzt, die für die Klimatologie eines Ortes als die wichtigsten anzusehen sind, weshalb eine genaue Kenntniss derselben besonders wünschenswert ist.

Die Untersuchung bezieht sich auf die monatlichen Mitteltemperaturen und auf die Abweichungen derselben von den Mittelwerten, die aus einer Beobachtungsreihe von 57 Jahren (1866—1922) berechnet wurden. Um über die Temperaturverhältnisse in Tartu (Dorpat) eine bessere Übersicht zu gewinnen, sind in der Tab. № 1 die erwähnten Mittelwerte wie auch andere charakteristische Daten über die Temperatur gegeben.

Aus Tab. № 1 ersehen wir, dass das Klima von Tartu den Übergang vom See- zum Kontinentalklima bildet, da hier das niedrigste Temperaturmittel auf den Winter bzw. Januar und das höchste Temperaturmittel auf den Sommer bzw. Juli fällt. Dagegen ist der Oktober im Mittel etwa um 1.2° wärmer als der April, der September um 0.6° wärmer als der Mai, was wieder als Merkmal für ein Seeklima dienen dürfte.

In erster Linie scheint zwischen der Temperatur und dem Luftdruck ein gewisser Zusammenhang zu bestehen, der aber nur in einer mehrjährigen Beobachtungsreihe zum Ausdruck kommt. Um die Einwirkung der erwähnten meteorologischen Elemente aufeinander kennen zu lernen, wurden auch für den Luftdruck die Monatsmittelwerte und die Abweichungen von diesen für alle Jahrgänge berechnet. Ein Vergleich der Luftdruck- und Temperaturabweichungen zeigt, dass in den Wintermonaten

Tabelle № 1.
Monats- und Jahresübersicht der Lufttemperatur in Tartu 1866—1922.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	I	X	XI	XII	Jahr
Mittleres Monats- und Jahresmittel	— 6.66	— 6.57	— 3.23	3.63	9.96	14.90	17.04	15.17	10.56	• 4.86	— 0.59	— 4.92	4.51
Grösstes Monats- u. Jahresmittel	— 0.16	— 0.97	2.33	8.49	15.30	18.65	20.91	19.46	14.07	8.93	4.36	0.12	6.16
Kleinstes Monats- u. Jahresmittel	—14.77	—17.62	—10.79	— 0.58	3.82	10.69	14.10	12.52	7.42	— 0.20	— 5.65	—14.41	2.33
Mittleres Monats- u. Jahresmaximum	— 4.38	— 3.81	0.26	8.02	15.07	20.21	22.20	20.07	14.99	7.88	1.39	— 2.86	8.26
Mittleres Monats- u. Jahresminimum	— 9.35	— 9.71	— 6.64	— 0.20	5.02	9.66	12.17	10.86	6.76	2.04	— 2.77	— 7.40	0.87
Extremes Monats- u. Jahresmaximum	6. 5	7. 5	17. 2	24. 9	31. 4	34. 0	34. 5	35. 2	27. 8	21. 1	12. 2	8. 5	35. 2
Extremes Monats- u. Jahresminimum	—36. 2	—33. 1	—27. 4	—17. 6	— 5. 0	— 1. 5	3. 9	1. 4	— 3. 6	—12. 4	—22. 2	—34. 3	—36. 2
Mittlere Veränderlichkeit der Monats- u. Jahresmittel	2.58	2.58	1.98	1.67	1.82	1.24	1.12	1.07	1.11	1.61	1.89	2.31	0.80

grösstenteils einer negativen Temperaturabweichung eine positive des Luftdruckes entspricht und umgekehrt, während im Frühling und Sommer die Beziehung eine entgegengesetzte ist. In Tab. № 2 ist der obige Zusammenhang in Zahlen für jeden Monat angegeben. Es sind hier wie auch in den folgenden Tabellen bei derartigen Vergleichen die Resultate in Prozenten ausgedrückt, was für eine allgemeine Darstellung viel übersichtlicher ist.

Tabelle № 2.

Die Beziehung zwischen der Lufttemperatur und dem Luftdruck in Prozenten.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
65	53	54	40	28	33	32	30	35	44	53	56

Im Januar ist die Wahrscheinlichkeit für die erwähnte Beziehung zwischen Luftdruck und Lufttemperatur 65 %, im Mai dagegen, wo die hohe Lufttemperatur meist gleichzeitig mit hohem Luftdruck aufzutreten pflegt, nur 28 %. Dieselbe Erscheinung ist fortlaufend in den folgenden Monaten von Juni bis Oktober vorhanden, wo ebenso die Wärmeperioden grösstenteils mit hohem Luftdruck zusammenfallen. Der Korrelationsfaktor

$$r = \frac{\sum(x \cdot y)}{\sqrt{\sum x^2 \sum y^2}}$$

zwischen Luftdruck und Lufttemperatur beträgt im Mai 0,32, während sein wahrscheinlicher Fehler

$$F = \frac{0.6745(1-r^2)}{\sqrt{n}}$$

0,08 ist.

In derselben Weise wurden die Temperaturabweichungen mit den Abweichungen von den monatlichen Niederschlagsmengen verglichen. Die Beziehung zwischen Lufttemperatur und Niederschlagshöhen ist nicht so scharf markiert, wie zwischen Luftdruck und Temperatur. Nur in den Sommermonaten Juni, Juli, August und September pflegen die kalten bzw. warmen Perioden meist mit regenreicher bzw. trockener Witterung auf-

zutreten, da im entgegengesetzten Fall der Prozentwert nur zwischen 33 und 39 variiert (siehe Tabelle № 3).

Tabelle № 3.

Die Beziehung zwischen der Lufttemperatur und den Niederschlägen in Prozenten.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
51	53	47	53	53	33	39	39	37	56	53	60

In den übrigen Monaten von Oktober bis Mai, mit Ausnahme von März, haben wir es mit den umgekehrten Verhältnissen zu tun, wobei der grösste Prozentwert (60 %) auf den Monat Dezember fällt. Der Korrelationsfaktor zwischen Lufttemperatur und Niederschlag für Juni ist $-0,39$, sein wahrscheinlicher Fehler ist $0,08$.

Die Lufttemperatur eines Ortes steht ausser mit dem Luftdruck und den Niederschlägen auch mit dem Winde im Zusammenhang.

In den meteorologischen Beobachtungen von Tartu sind in der ganzen Beobachtungsperiode für jeden Monat die Windkomponenten angegeben; daher ist ihre Einwirkung auf die Lufttemperatur leicht festzustellen. Zu diesem Zwecke wurden für jeden Monat die Differenzen zwischen der „W“ und „O“ Komponente einerseits, und zwischen der „S“ und „N“ Komponente anderseits berechnet. Diese Differenzen wurden mit den Mitteltemperaturen des betreffenden Monats verglichen, wobei wie bei der Lufttemperatur, so auch bei der erwähnten Winddifferenz die Veränderung von einem Jahr zum anderen für jeden Monat in Betracht gezogen wurde. Es wurde nachgezählt, wie oft die Zu- oder Abnahme der Lufttemperatur eines Monats von einem Jahr zum anderen mit der Vergrösserung oder Verkleinerung der erwähnten Windkomponentendifferenzen zusammenfällt.

Es ergab sich, dass besonders die W—O Differenz mit der Lufttemperatur eng zusammenhängt, was in nahezu gleichem Masse das ganze Jahr hindurch zum Ausdruck kommt.

In folgender Tabelle (Tab. № 4) ist in Prozenten die erwähnte Beziehung zwischen der Temperatur und der W—O bzw. S—N Komponente dargestellt.

Tabelle № 4.

Der Zusammenhang zwischen der Lufttemperatur und den Windkomponenten in Prozenten.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
W—O	70	63	59	43	29	30	32	36	39	48	56	67
S—N	70	45	70	57	52	61	41	54	59	61	61	64

Aus der Tabelle ersehen wir, dass in den Wintermonaten die hohen Temperaturen meist einer Zunahme der Westkomponente entsprechen, in den Sommermonaten dagegen einer Zunahme der Ostkomponente. Was die Nord-Südwinde betrifft, so treten die hohen Temperaturen grösstenteils bei vorherrschendem Südwinde auf mit Ausnahme des Februars und Juli, wo das umgekehrte Verhältnis besteht.

II. Weiter wurde die Frage behandelt, in welchem Masse sich die Erhaltungstendenz der Temperatur für aufeinanderfolgende Monate erkennen lässt, und wie weit die erwähnte Tatsache zu einer Temperaturprognose benutzt werden kann.

Dazu wurde für jeden Monat einzeln bestimmt, in wieviel Prozent der Fälle das Vorzeichen der Temperaturabweichung für den folgenden Monat das gleiche bleibt. Da die Wahrscheinlichkeit der Fortdauer einer bestimmten Witterung allgemein mit der Länge der Periode zunimmt, sind die Berechnungen bis zu vier Monaten zurück fortgesetzt. Die Resultate sind in Prozenten in Tab. № 5 zusammengefasst.

Tabelle № 5.

Wahrscheinlichkeit der Erhaltung einer gleichnamigen Temperaturabweichung in Prozenten von Monat zu Monat in Abhängigkeit vom Alter der Periode.

	Pro Jan.	Pro Febr.	Pro März	Pro April	Pro Mai	Pro Juni	Pro Juli	Pro Aug.	Pro Sept.	Pro Okt.	Pro Nov.	Pro Dez.
Ein vorhergehend. Monat	66	62	54	65	63	65	51	51	60	56	53	68
Zwei vorhergehend. Monate	68	70	55	74	68	61	54	66	62	53	53	70
Drei vorhergehend. Monate	75	73	54	79	70	60	68	75	74	50	61	59
Vier vorhergehend. Monate	56	80	58	86	73	56	67	80	73	57	56	64

Die erste Reihe enthält in Prozenten die Wahrscheinlichkeit, dass das Vorzeichen der Temperaturabweichung des vorhergehenden Monats auch für den laufenden dasselbe bleibt, — die zweite Reihe — die Wahrscheinlichkeit, dass nach zwei vorhergehenden Monaten mit gleichnamiger Abweichung, auch der darauf folgende dritte Monat dasselbe Zeichen beibehält, — die dritte und vierte Reihe — dieselbe Wahrscheinlichkeit für drei bzw. vier vorhergehende Monate. So zum Beispiel beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass nach einem kalten Januar, auch der Februar seine Temperatur unterm Normalwert haben würde, 62 %; wenn aber schon vier vorhergehende Monate (Okt., Nov.,

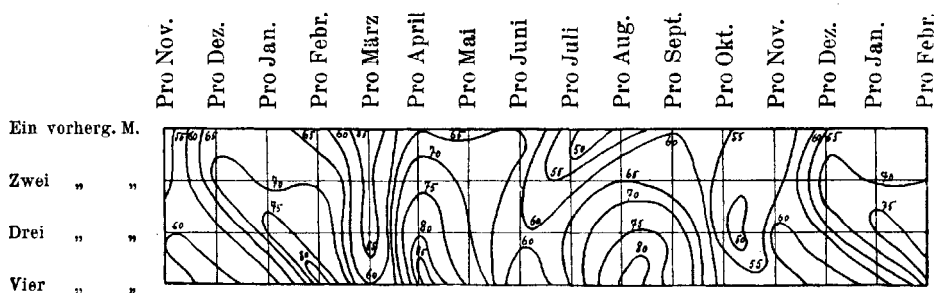


Fig. 1. Prozentwerte der Erhaltung der Vorzeichen der Temperaturabweichung von Monat zu Monat in Abhängigkeit vom Alter der Periode.

Dez., Jan.) nacheinander kalt waren, können wir den kalten Februar mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % erwarten.

Um einen Vergleich der gefundenen Daten für die einzelnen Monate zu erleichtern, ist die Tab. № 5 in Fig. № 1 graphisch dargestellt. Als Ordinaten sind die einzelnen Monate beginnend von Nov. bis Februar genommen, während die Abszissenlinien der Reihe nach ein, zwei, drei und vier vorhergehende Monate mit gleichem Vorzeichen bedeuten.

Auf den Schnittpunkten der erwähnten Linien wurden die zugehörigen Werte aus der Tab. № 5 eingetragen, und die durch Interpolation gefundenen Punkte mit 50%, 55%... u. s. w. Wahrscheinlichkeit der Zeichengleichheit durch eine Anzahl Kurven verbunden. Obwohl bei den einzelnen Kurven einige Unregelmässigkeiten hervortreten, lassen sich im allgemeinen die Hauptzüge der Erhaltungstendenz der Temperatur deutlich erkennen.

Es treten hervor drei Minima und eine gleiche Anzahl dazwischenliegender Maxima, die sich gut bis zum vierten vor-

hergehenden Monat verfolgen lassen. Es sei hervorgehoben, dass die im Verlaufe der erwähnten Linien vorkommenden Unregelmässigkeiten auf die geringe Anzahl der Beobachtungsjahre hindeuten, was besonders bei mehreren mit gleichnamiger Abweichung aufeinanderfolgenden Monaten hervortritt, da bei längeren Perioden die Zahl der Fälle schnell abnimmt.

Aus obiger Figur ist ersichtlich, dass bei der Aufeinanderfolge der Monate mit gleichen positiven oder negativen Abweichungen ein Bruch der Kontinuität am deutlichsten im März und in den Herbstmonaten Oktober und November zum Vorschein kommt. Eine dritte Verminderung der Übereinstimmung ist in den Sommermonaten Juli und August vorhanden, jedoch ist sie nicht so scharf ausgeprägt, wie die erstgenannten.

Dieselbe Frage ist bereits von vielen Forschern für verschiedene Orte behandelt worden. Das grösste Interesse dürfte ein Vergleich mit dem Temperaturverlauf des Atlantischen Ozeans beanspruchen, der ausführlich von *Pettersson*¹⁾, *Meinardus*²⁾, *Grossmann*³⁾ und anderen untersucht worden ist. Für die norwegische Küste hat *Pettersson* nach den Meeresoberflächentemperaturen von Utsire, Hellisö und Ona festgestellt, dass die Mitteltemperaturen der erwähnten Orte und damit auch die Temperatur des Golfstroms von Dezember bis April wie auch von Juli bis September ähnlich verlaufen, welche Erscheinung als Ausgangspunkt der Wettervorhersage für eine längere Periode dienen dürfte.

Was in dieser Beziehung Tartu anbelangt, so sehen wir, dass hier der Bruch der Kontinuität statt im Mai und Juni, wie für die obengenannten Orte, etwa einen Monat später, also im Juli—August stattfindet, während nur im Herbst das Minimum der Zeichenerhaltungstendenz auf die gleichen Monate fällt.

Der dritte auf dem Atlantischen Ozean im August vorkommende Kontinuitätsbruch, dessen Vorhandensein zuerst von *Grossmann* erwähnt wurde, scheint in Tartu mit demjenigen im Juli sich vereinigt zu haben, vorauf der Verlauf der in Fig. 1 eingezeichneten Kurven hindeutet.

1) *Pettersson*: „Über die Beziehungen zwischen hydrographischen und meteorologischen Phänomenen“. Met. Zeitschr., 1896.

2) *Meinardus*: „Über einige meteorologische Beziehungen zwischen dem Nordatlantische Ozean und Europa im Winterhalbjahr“. Met. Zeitschr., 1898.

3) *Grossmann*: „Die Beziehung zwischen den Temperaturen des Nordatlantischen Ozeans und von Nordwest- und Mitteleuropa“. Ann. d. Hydr., 1908.

Ausser den beschriebenen Kontinuitätsunterbrechungen im Sommer und Herbst ist in Tartu noch eine Temperaturumkehrung zwischen Februar und März vorhanden, die an der norwegischen Küste gänzlich fehlt.

Eine Erklärung dafür liesse sich im Unterschiede des jährlichen Temperaturganges zwischen Tartu und den erwähnten Küstenstationen finden, da in Tartu der Übergang von den Wintertemperaturen zum Frühling infolge der Entfernung des dämpfenden Ozeans viel steiler ausgeprägt ist, als an der norwegischen Küste.

Zum Vergleich hierzu sind in der Tab. 6 die Prozentwerte der Zeichenerhaltungen der Temperaturabweichungen für Moskau aufgeführt.

Tabelle № 6.

Wahrscheinlichkeit einer Zeichenerhaltung der Temperaturabweichung von Monat zu Monat in Moskau.

I—II	II—III	III—IV	IV—V	V—VI	VI—VII	VII—VIII	VIII—IX	IX—X	X—XI	XI—XII	XII—I
53	55	58	60	55	58	51	62	55	49	72	61

Auch für Moskau ist die Zunahme des Zeichenwechsels der Temperaturabweichungen in den Monaten Januar—Februar und Februar—März deutlich erkennbar, welche Erscheinung in dieser Beziehung den Verhältnissen von Tartu entspricht.

Allgemein scheint die Temperaturerhaltungstendenz bei der Aufeinanderfolge der einzelnen Monate zwischen verschiedenen Orten grosse Unterschiede aufzuweisen. Es sei hier in dieser Hinsicht auf Köppens Untersuchung¹⁾ hingewiesen, in der die erwähnte Frage ausführlich behandelt ist.

Weiter wurden nach derselben Methode die Temperaturabweichungen der einzelnen Jahreszeiten miteinander verglichen. Es ergab sich, dass hier der Zusammenhang in viel geringerem Masse zu erkennen ist, als bei den einzelnen Monaten, da in letzterem Falle die vergleichbaren Zeiteinheiten etwa dreimal kürzer sind, als beim Vergleiche der Jahreszeiten. Die Vergleichsergebnisse sind in Prozenten in der Tabelle № 7 aufgeführt.

1) W. Köppen: „Aufeinanderfolge warmer und kalter Monate in Norddeutschland“. Annal. d. Hydr., 1920.

Tabelle № 7.

Wahrscheinlichkeit der Zeichenerhaltung der Temperaturabweichungen zwischen den einzelnen Jahreszeiten in Tartu.

Wint.— Frühl.	Frühl.— Somm.	Somm.— Herbst	Herbst— Wint.	Wint.— Somm.
66%	53%	53%	46%	45%

Mit Ausnahme von Winter—Frühling, wo die erwähnte Wahrscheinlichkeit bis zu 66% gestiegen ist, schwanken die Übereinstimmungszahlen in der Nähe von 50%. Zwischen Herbst—Winter ist das Verhältnis sogar umgekehrt, woraus wir schliessen können, dass die Wintertemperaturen sich einigermaßen mit den Herbsttemperaturen zu kompensieren versuchen. Dieselbe Erscheinung tritt anderseits zwischen Winter und Sommer hervor, wo ebenso mit einer Wahrscheinlichkeit von 55% nach einem unter oder über der Normaltemperatur stehenden Winter, ein über oder unter der Normaltemperatur stehender Sommer zu erwarten ist.

III. Da die Temperaturerhaltungstendenz für Tartu zu gering ist, um für eine Temperaturprognose eine praktische Bedeutung zu haben, sind zu diesem Zweck die Temperaturbeobachtungen einer Reihe der ringsumliegenden Beobachtungsorte herangezogen. Es wurden dazu die monatlichen Mitteltemperaturen von folgenden Orten benutzt. Die Wahl fiel hierbei auf diejenigen Stationen, an denen die Beobachtungsreihe möglichst lückenlos war.

Tabelle № 8.

Verzeichnis der Stationen.

		φ	λ	Höhe in m.
Vardö	1871—1922	70° 22'	31° 8''	10.0
Bodö	1870—1922	67° 17'	14° 24'	7.2
Florö	1871—1921	61° 36'	5° 2'	8.0
Haparanda	1871—1922	65° 50'	24° 9'	9.2
Göteborg	1870—1922	57° 42'	11° 58'	16.5
Archangelsk ¹⁾ . .	1870—1922	64° 33'	40° 32'	6.7
Bogoslowsk	1870—1915	59° 45'	60° 1'	188.0
Moskau	1870—1922	55° 46'	37° 40'	142.9

1) Die bisher unveröffentlichten Mitteltemperaturen von Archangelsk, Bogoslowsk, Moskau, Kasan, Kiew, Odessa, Warschau und Wien sind von den meteorologischen Zentralinstituten der betreffenden Länder freundlichst zur Verfügung gestellt worden.

		φ	λ	Höhe in m.
Kasan	1870—1922	55° 47'	49° 8'	73.7
Kiew	1870—1919	50° 27'	30° 30'	183.1
Odessa	1870—1917	46° 29'	30° 44'	65.3
Warschau	1870—1922	52° 13'	21° 2'	120.6
Wien	1870—1922	48° 15'	16° 22'	202.5
Hamburg	1870—1922	53° 33'	9° 59'	40.3
Thorshavn	1870—1921	62° 25'	6° 45'	1.5
Stykkisholm	1870—1918	65° 5'	22° 46'	11.0

Die Betrachtung der Temperaturverhältnisse erstreckt sich auf den fast einheitlichen Zeitraum von 1870—1922. Als Grundlage dienten die monatlichen Temperaturabweichungen der betreffenden Stationen für die oben angegebene Reihe von Beobachtungsjahren. Es wurden die Temperaturabweichungen eines jeden Monats für alle Stationen einzeln mit der Temperaturabweichung des folgenden Monats für Tartu verglichen und nachgezählt, wie oft sie für jeden Monat gleichnamig waren.

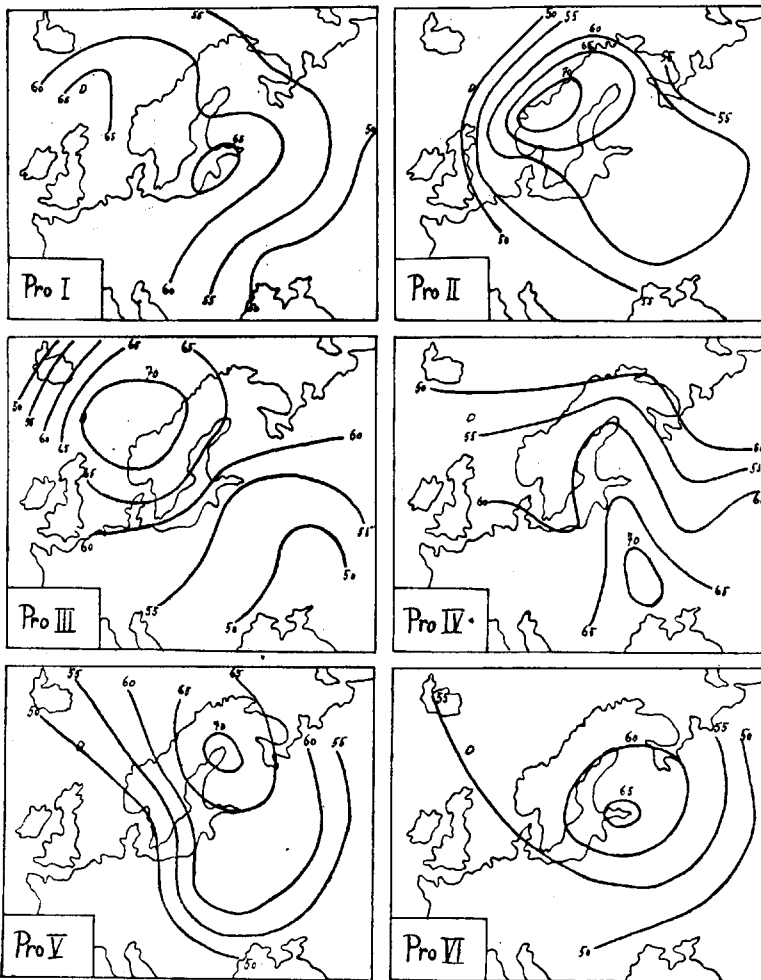
Die auf diese Weise erhaltenen Übereinstimmungsergebnisse, in Prozenten ausgedrückt, sind in Tab. № 9 aufgeführt.

Tabelle № 9.

Wahrscheinlichkeit der Gleichnamigkeit der Temperaturabweichung von Monat zu Monat zwischen Tartu und den nachstehenden Stationen.

	Pro I	Pro II	Pro III	Pro IV	Pro V	Pro VI	Pro VII	Pro VIII	Pro IX	Pro X	Pro XI	Pro XII
Vardö	55	58	62	50	67	56	43	52	56	60	44	60
Bodö	61	66	68	51	68	58	53	49	62	51	47	66
Florö	61	73	73	59	51	57	45	55	49	57	47	57
Haparanda	57	67	65	60	71	60	46	54	61	54	52	73
Göteborg	63	58	68	58	49	58	53	60	47	62	42	64
Archangelsk	56	53	62	51	64	60	58	40	53	51	49	72
Boguslawsk	54	63	57	44	44	47	52	48	41	52	54	54
Moskau	58	62	49	58	64	58	57	53	55	53	49	68
Kasan	47	60	56	62	56	52	52	49	53	51	51	66
Kiew	50	64	54	76	60	54	54	56	60	55	54	67
Odessa	49	56	48	73	54	46	48	54	54	54	57	62
Warschau	60	60	53	60	64	53	45	57	58	66	54	64
Wien	60	53	55	62	49	55	42	64	57	64	49	60
Hamburg	63	58	60	62	47	51	43	57	51	58	51	64
Thorshavn	67	50	73	52	50	60	50	63	48	42	44	44
Stykkisholm	57	47	47	49	53	55	45	51	51	49	51	45

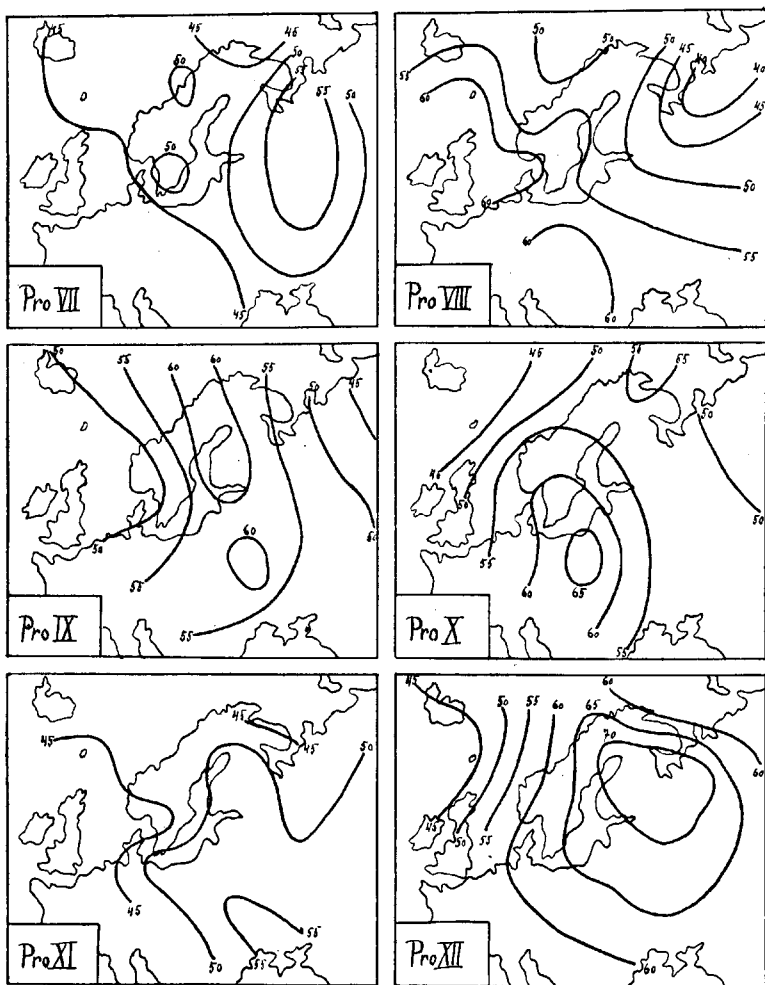
Die angegebenen Zahlenwerte der Tab. № 9 geben die Wahrscheinlichkeit in Prozenten, dass die Temperaturabweichung eines bestimmten Monats für Tartu dasselbe Vorzeichen haben wird, wie im vorhergehenden Monat für einen obenerwähnten



Ort. So würden zum Beispiel für die Witterungsprognose für den Februar die besten Resultate die Januar-temperaturbeobachtungen von Florö ergeben (73%), für den April dagegen die März-temperatur von Kiew u. s. w. Aus obiger Tabelle ersehen wir, dass einige Orte eine grössere Wahrscheinlichkeit der

Übereinstimmung aufweisen, als andere, und dass die betreffenden Prozentwerte von einem Monat zum anderen sich verändern.

Um einen Vergleich der erwähnten Werte zwischen den



einzelnen Beobachtungsorten zu erleichtern, ist die Tab. № 9 graphisch in 12 Kartogrammen dargestellt. Es wurden dazu die Prozentwerte der Gleichnamigkeit der Temperaturabweichungen für alle Stationen auf den Karten eingetragen und hierauf durch Interpolation die Kurven von 55, 55, 60 u. s. w. Prozente der

Zeichengleichheit hergestellt. Für Tartu wurden dazu die in der Tab. № 5 angegebenen Werte für einen vorhergehenden Monat verwendet.

Um festzustellen, wie stark sich in dem Zeitraum von etwa 10 Jahren der Verlauf der Kurven ändert, sind in gleicher Weise die Karten für eine 40-jährige Beobachtungsreihe (1870—1909) gezeichnet worden. Es ergab sich, dass die Veränderungen verhältnismässig gering waren, und dass das Gesamtbild der Zentra mit grösstem Prozentwerte sich nicht veränderte. Daraus ist ersichtlich, dass wir es hier mit einer Gesetzmässigkeit zu tun haben, was für die praktische Verwendbarkeit dieser Karten in der Witterungsprognose spricht.

Da die Karten durch den Linienverlauf wie auch durch das Auseinandergehen der Prozentwerte sich voneinander unterscheiden, werden wir die Betrachtung derselben gruppenweise vornehmen.

Einige ähnliche Züge zeigen die Karten vom Januar, Februar und März, da in diesen Monaten das westwärts liegende Gebiet mit den Stationen Thorshavn und Florö die grösste Wahrscheinlichkeit für eine richtige Prognose ergibt. Dieses deutet auf die Einwirkung der atlantischen Zirkulation hin, was am stärksten in den genannten Monaten zur Geltung kommt.

Für den folgenden Monat April hat sich die Lage vollständig verändert: jetzt zeigen die südwärts liegenden Stationen Kiew und Odessa die grössten Übereinstimmungswerte, während im Westen und Norden die betreffenden Zahlen viel geringer sind.

In den darauffolgenden Monaten Mai, Juni und Juli würden die nördlichen Stationen die beste Treffsicherheit geben, wobei das Gebiet der grössten Prozentsätze von Mai bis Juli sich von Haparanda auf die Linie Archangelsk — Moskau verschoben hat. Eine solche Einteilung dürfte auf eine Einwirkung der auf dem nördlichen Eismeer befindlichen Eismassen hindeuten, was ausführlich von Wiese¹⁾ untersucht worden ist.

In den Monaten August, September, Oktober, November ist eine gleichartige Verschiebung des Gebietes der grössten Übereinstimmungswerte vorhanden, und betrifft jetzt die Stationen Wien, Warschau, Kiew, Odessa. Es sei hier hervorgeho-

1) W. Wiese: „Eis im Barents-Meer und Lufttemperatur in Europa“. Nachrichten des Zentralbureaus für Hydrometeorologie, Heft III, 1924. *

ben, dass neben der Wärme des Golfstroms für die Witterungsprognose für Tartu die Temperaturen von Kleinrussland in Betracht kommen. Eine besonders ausgeprägte Beziehung ist zwischen der Märztemperatur von Kiew und der Apriltemperatur von Tartu vorhanden, deren Korrelationsfaktor $r=0,51$ und dessen wahrscheinlicher Fehler 0,07 ist.

Obwohl die meisten Sommer- und Herbstmonate viel geringere Prozentwerte aufweisen, als die Winter- und Frühlingsmonate, würden sie dennoch mit Ausnahme von Juli eine bessere Prognose ermöglichen, als die allein auf Tartu sich stützende Lokalprognose, besonders in Fällen, wo wir es nicht mit längeren Perioden zu tun haben. Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass im Sommer und Herbst der Verlauf der einzelnen Linien ein nicht so regelmässiges Bild ergibt, wie im Winter und Frühling.

Die Korrelationen zwischen den betreffenden Werten sind nicht berechnet worden, da die Temperaturerhaltungstendenz wie auch die Temperaturverhältnisse der umliegenden Stationen nur zwei aus der Zahl der für derartige Prognosen notwendigen Faktoren darstellen. Es müsste hierzu noch die Beziehung des Luftdruckes, die Passate, die Veränderungen der Aktionszentra u. s. w. herangezogen werden, was aber nicht in den Rahmen dieser Arbeit gehört.

MUUTUSED LEEPRAHAIGETE SILMAS

EESTI LEPROSOORIUMIDE HAIGETE LÄBIVAATAMISE
PÕHJAL

ASSISTENT DR. MED. O. KURIKS

REFERAT :

DIE LEPRO DES AUGES

TARTU 1925

Vanemaist töist silma leepra kohta ilmus Danielssen'i ja Boeck'i (13) poolt „Traité de la spidalskhed“ Pariisis 1848, mis on üks esimesist täielikumaist töist sel alal. Peale selle on silma leepra kohta palju töid mujal ilmunud, iseäranis Norras, kus võiks nimetada Hansen ja Bull'i (20) oma „The leprous diseases of the eye“ 1873, Lyder Borthen und Lie „Die Lepra des Auges“ 1899, ja teised.

Eestis on silma leepra üle kirjutanud Hulanicki ja Rubert.

Allpool käsitletud materjal on saadud kõigi Eesti leprosooriumide haigete läbivaatamisel ja täiendatud kirjandusliste andmetega.

Enam kui 75% kõigist leeprahaigeist kannatab mitmesuguste patoloogiliste muutuste all silmas, mille uurimiseks ma möödunud suvel läbi vaatasin kogu Eesti leprosooriumide haiget, nimelt: Muulis 16, Tervastus 89, Audakul 58 ja Kuudal 60 haiget.

Vanuse ja sugu järele jagunevad need leeprahaiged järgmiselt:

Vanus	Mehed			Naised			Mehed ja naised
	mac.	tuber.	Kokku	mac.	tuber.	Kokku	
5—10	—	1	1	—	—	—	1
11—15	—	3	3	1	2	3	6
16—20	—	4	4	—	2	2	6
21—25	4	5	9	3	8	11	20
26—30	1	2	3	6	10	16	19
31—40	4	5	9	8	14	22	31
41—50	10	15	25	12	16	28	53
51—60	3	11	14	10	13	23	37
61—70	3	10	13	—	17	17	31
71—80	2	1	3	5	9	14	17
81—90	1	1	2	1	—	1	2
	28	58	86	46	91	137	223

Neist arvulisist andmeist on näha, et tuberosa vorm tuleb nooremas elueas sagedamini ette kui maculosa. Esimest vormi leiame juba enne 20. aastat, kuna teine algab peaaesjalikult alles

21. aastaga. Haigete üldarv suureneb kuni 41. aastani, on kõige suurem 41. ja 50. a. vahel ja alaneb peale seda jälle.

Kliinilise pildi järele tuntakse leeptra kahte vormi, nimelt lepra maculo-anaesthetica ja lepra tuberosa; peale nende on veel segavorm — lepra mixta, mis sisaldab mõlemi sümptomeid.

Esimene vorm on väga pikaldase käiguga ja kestab kümneid aastaid. Selle alguses tekivad, kaua-aegsete segaste närviliste sümptomite järele, naha peal sagedasti suurenenud tundlikkusega punased täpid, mis pikkamööda pärast kollakaks muutuvad, tundlikkuse kaotavad ja kokku sulades nahale kaardisarnase välimuse annavad. Nende täppide kõrval peituvad sagedasti punakaspruunid infiltraadid, millest ka leepgrabatsille on leitud, kuid mitte alati [Groenouw (19)].

Selle leepravormi puhul on rohkem silmapaistvad mitmesugused närvihaigused, nagu pareesid, neuralgiad, hüperestesiat, troofilised korratused ja pärastpoole anestesiat, millede tõttu tekivad ka paljud vigastused ja muutused, näiteks lihaste halvatused ja neile vastavad tagajärjed, kui lagophthalmus, lontlaug ja muud.

Lepra tuberosa eraldub esimesest vormist väikeste muhkudega, mis tekivad naha peal, silmas või mujal ja pikkamööda suurenevad. Muhud on üksikud ja võivad pärastpoole kokku sulades suuremaid infiltraate põhjustada. Sagedamini tekivad need muhud näo, käte ja jalgade peal, millede nahk sel puhul pakseneb, kortsus ja kuiva välimuse omandab, nagu oleks ta puitunud.

Leproomid perifeerseis närvides sünnitavad alguses hüperestesiat ja pärast anestesiat. Muhud võivad iseenesest resorbeeruda või lagunevad ja muutuvad paiseiks, milledes leiduvad harilikult leepgrabatsillid.

Ennemalt oli leeptra Euroopas kaunis laiali lagunenud, nüüd on teda aga veel üksikuis kohtades Norras, Rootsis, Hispaanias, Bosnias, Läänemere mail, Venemaal ja mujal leida. Mõnedes neis maades on leeptra viimsel ajal märksa vähenenud, näiteks Norras, kus 1908. a. oli registreeritud 394 leeprahaiget, 1923. a. aga kõigest 140. Inglismaal on üldse ainult 24 leeprahaiget registreeritud [Talvik (48)].

Leeptra üleviimist loomade peale ei ole veel korda läinud küllalt tõendada. Hulgad katsed, infitseerida leeptrat, viies ta

paise tükke silma eeskambrisse või kõhukoopasse jänesele, kassile ja ahvile, andsid negatiivseid resultate [Koebner (26), Thin (49), Doutrelepon-Wolters (15), Calderaro (8)]. Teised [Neisser (33), Babes (2)] said nähtavad muutused infitseerimiskohal. Kolmandad [Damsch (12), Vossius (52), Stanziale (46), Melcher u. Ortmann (31), Kedrovski] saavutasid leproome osalt ka kaugemalolevais organites. Küsimus, kas need sünnitused päris leproomid on või ainult valgete verelibledel läbi passiivselt edasiviidud batsillid, on alles lahendamata [Wesener (53)].

Silmas kui ka tema ümbruses võib leepra mitmes kohas ette tulla, nimelt otsaesisel, laugudel, limanahas, sarvkiles, värvkiles, tsiliaarkehas, soonkiles ja harvemini vörkkiles. Suuremalt jaolt esineb ta korraga mitmetes silma osades, rohkem aga eespoolseis. Õige harva tekib leepra silmas esimesena [Meyer, Berger (32)], sagedamini ilmub enne mujal ja siis pärast siin sekundaarselt.

Silma ümbrus.

Maculo-anaesthetica kuju puhul leiame sagedasti otsaesise- ja kulmulihaste pareesi, mille tõttu nägu miimiliste liigutuste puudusel külma, eluta välimuse omandab; on ühtlasi ka lau närvid paralüseeritud, nii et haige ei või silmi pilgutada, siis suureneb eelnimetatud eluta pilt veelgi. Nahk atrofeerub, kaotab kulmukarvad, kortsud ja valutustub.

Tuberosa kuju tekib silma ümbruses, otsaesisel, kulmul, laugudel ja mujal kahel kujul, nimelt kui infiltraat või piiratud muhukesed. Esimene näib pealt küll sile olevat, sisaldab siiski väikesi sõlmekehi, mida võib sõrme all tunda. Paksenenud nahas tekivad vertikaalsed ja horisontaalsed jooned ja lohud, mis muhud ning infiltraadid üksteisest eraldavad ja haigele tüübilise ilme annavad. Infiltraadid ja muhud võivad resorbeeruda ja jälle uuesti tekkida, mädaneda ja armistuda, mis kõik välimusele väga kirju pildi annab.

Kul mud kannatavad *maculo-anaesthetica* kuju korral umbes 50%, *tuberosal* peaaegu 100%, kulmukarvad kui ka ripsmed kukuvad maha, alguses temporaalseis osades ja pärast nasaalseis. Infiltraat võib nii suureks minna, et nahk väljaspoolses kulmuosas allapoole ripub. Sõlmekesed kulmude kohal on mõnikord esimesed leepra tunnused silmades [Groenouw (19)].

Laud.

Et silmalaud oma anatoomilise ehituse poolest sarnanevad muude kudedega, siis ei lähe ka leeptra muutused, mis siin tekivad, teistest palju lahku. Lopez (29) loeb laugude haigusi esimesiks sümptomeiks silma leeptra puhul.

Maculo-anaesthetica kuju puhul ilmuvad laugudel, nagu mujalgi naha peal, alguses punakaskollakad täpid, milledele pärast järgnevad sügavamad degeneratiivsed muutused, mis puudutavad nahka, lihaseid kui ka kõhri ja teisi osasid. Mõlemal laul tekivad täpid harilikult sümmeetriliselt. Nende ilmutumise ajal on tundlikkus puudutamisel kõrgendatud, kuid nõrgeneb pärastpoole ja võib ka hoopis kaduda [Groenouw (19)].

Tabab halvatus näonärvi (n. facialis) otsi, mis lau lihaseid (musc. orbicularis oculi) innerveerivad, siis tekivad viimastes degeneratiivsed protsessid, millede tagajärjena lihased atrofeeruvad ja oma funktsioonid kaotavad; siis ei saa haige enam oma silmi kinni pigistada ja laud võivad ka silmamuna juurest eemale jääda ning allapoole vajuda; tähendab: meile esineb siin lagophthalmus paralyticus ja lau väljapoole pöördumine. Viimaste eelnähtustena ilmuvad harilikult alumises laus esialgu värisevad liigutused [Hansen ja Bull (20)]. Siis tuleb nõndanimetatud peidetud lagophthalmus. Sel ajal on mõned lihasekiud veel puutumata, ja kõvasti pingutades võib haige nende abil veel oma silmad täiesti kinni pigistada; tahab ta aga silmi kergesti sulgeda, nagu see harilikult magamiseks sünnib, siis ei puutu laud mitte üleni kokku, vaid jäävad nasaalses osas teineteisest eemale. See vahe suureneb aegamööda temporaalses sihis, kuni viimaks laugude välimise nurgani ulatub.

Säärasel juhusel ei lähe haigel ka kõige kangemal jõupingutusel enam korda lauge teineteise vastu suruda, kinni katta sarviket ja skleerat, mis siis kuivama ja degenerereeruma hakkavad.

75-el maculo-anaesthetica kuju haigel (29 m., 46 n.) oli lagophthalmus't 32 (42,6%), 12 m. (41,4%) ja 20 n. (43,5%), mõlemal silmal 29 juhtumust (11 m., 18 n.), ühel silmal 3 (1 m., 2 n.). Võrreldes neid andmeid Rubert'i (44) ja Borthen'i (3) omadega leiame, et esimesel oli lagophthalmus't 33,43% (43,33% m. ja 28,33% n.), teisel — 66,76% (70% m. ja 60% n.); tähendab, siin saadud arvud on keskmised nende autorite omade vahel. 12-el haigel oli lagophthalmus kergel kujul, nii et nad suure

pingutuse abil võisid silmad veel kinni pigistada, 10-el vajusid laud kõva pingutuse peale ainult temporaalses osas teineteise vastu, kuna nasaal-osas nende vahele kaunis suur pragu jäi; 4-al jäid silmad ka maksimaalsel pingutusel pilukile, 6-el olid silmad kõik aeg täitsa lahti, ka kõige paremal tahtmisel ei läinud haigeil korda lauge vähegi koomale suruda; pandi laud aga käega kokku, nii et silmamuna oli kaetud, siis jäi ka silm ajutiselt kinni; öösi magama minnes pidid need haiged alati oma silmad käega kinni suruma. Pragu laugude vahel oli alati suurem nasaalsel küljel.

Komplikatsioonidest lagophth. puhul oli 21-el alumise lau väljapoole pöördumine, 1-el lau sisepoole pöördumine, 11-el lontlaud, 1-el parempoolne näonärvi parees (n. facialis).

Ripsmete äratulemise põhjustest pikemalt allpool tuberosa kuju juures. Maculosa kujul olid ripsmed harvad igal laul 4-al (2 m., 2 n.), ainult ülemisel laul, rohkem temporaalses osas 2 m., ainult alumisel 6-el (2 m., 4 n.), ripsmed puudusid mõlemal laul 10-el (5 m., 5 n.), ainult ülemisel laul 2-el (1 m. ja 1 n.), ainult alumisel laul 6-el (4 m., 2 n.). Kokku 30 (16 m. ja 14 n.) ripsmehaigust ehk 40%. Borthenil üle 60%.

Tuberosa kuju puhul tekivad laugude peale kas infiltraadid või väikesed sõlmekesed, harilikult kesk laugu, rohkem alumise ääre pool, sagedasti sümmeetriliselt. Aja jooksul pakseneb laug mõlemite muutuste puhul või on kaetud väljapaistvate muhukestega, millede suurus ulatub väikesest herneivakesest kuni metsapähkli ja suuremani; et nad oma raskusega lau peale suruvad, vajub viimane pärast alla ja sünnib nõndanime-tatud lontlaug; maculosa kujul võib viimane tulla musc. levator palp. pareesist. Muhud seisavad aastate viisi, resorbeeruvad või hakkavad lagunema ja muutuvad paiseiks, mis mädanedes ja armistudes pärast laud täiesti ära rikuivad. Lau äärte kui ka sarvkile armistumisel tekivad distichiasis, trichiasis, ektropium, entropium.

Läbivaadatud 146-el tuberosa kuju haigel (56 m., 90 n.) oli laugudel muhke 10 (4 m., 6 n.); neist oli ühel naisterahval lau peal muhk lagunema hakanud, paistet sünnitades.

Lontlaug kergel kujul oli 19, keskmisel 7, raskel 5; viimasel juhtumisel oli sarvkile peaaegu üleni kaetud lauga, nõnda et vaatamiseks pidi haige pead ülespoole tõstma.

Lau ääred on sagedasti paksud, infiltreerunud, punetavad,

kuna nahk ülevalpool laugu on loomulikku värvi; iseäranis pak-sud lau ääred olid 5 meesterahval ja 11 naisterahval.

Arusaadav, et sedaviisi muudetud lau äärtel ei saa ripsmed enam loomulikult kasvada ja kukuvad välja. Harilikult hakkavad viimased juba siis kaduma, kui naha peal veel pole muutusi märgata. Ripsmete äratulemine on üks varasemaist ja alalise-maist leepa tunnuseist (95 %) [Carron de Villards (9)]. Nad kaovad pikkamööda, jäävad alguses harvemaks, atrofeeruvad, kuni viimaks kõik ära tulevad. Rohkem kannatavad alumise lau ripsmed. Mõnedel haigetel on ripsmed pärast jälle kasvama haka-nud; neid haigeid ravitseti süsihape-lumega. Haiguselood nr. 210, 119.

Nr. 210 K u m m, Liisa, 32 a. l. tuberosa. Pärnu maakonnast, Pati Mõisakülalt, Pikse talust, mehel 16 a., lapsi ei ole. Vane-mad, 3 venda, 4 õde on kõik terved. Elas Venemaal, Ufa kuber-mangus, kust optandina kodumaale sõitis 1921. a. Kaks kuud peale kojujõudmist tundis enese haige olevat — käevarte peale tekkisid muhud. Pöördus arsti poole, kes saatis ta Tarvastu lepro-sooriumi, kust ühe aasta pärast Muuli üle viidi; ravitsetud süsi-hape-lumega umbes 2 kord kuus; tunneb peale seda enese para-nenud olevat.

Visus oc. utr. = 1,0. Kesk mõlemat kulmu on sümmeetri-lised armid. Kulmukarvad ja ripsmed puuduvad osalt; haige ütluse järele on viimased 3 aasta eest täitsa puudunud. Parema silma ülemisel laul, ninapoolses ääres, on ripsmed palju väikse-mad ja õrnemad kui väljaspoolses ääres; need peavad nähtavasti uued ripsmed olema. Täielisel ripsme kadumisel ei puudu hari-likult muutused ka lähemas silma ümbruses. Ripsmehaiguse põhjuse leiab Lie sagedast limanaha-põletikust, Leloir (28) atroofilisist muutustist.

Tuberosa kujul olid ripsmed harvad mõlemal laul 32-el (13 m., 19 n.), ainult ülemisel laul 6-el (3 m., 3 n.), ainult alumisel laul 7-el (2 m., 5 n.); ripsmed puudusid mõlemal laul 44 (18 m., 26 n.), ainult ülemisel laul 9 (4 m., 5 n.), ainult alumisel 12-el (7 n., 5 m.). Kokku leidis ripsmehaigusi tuberosa kuju puhul 110 (47 m., 63 n.) ehk 75,4 %; Rubertil 70,54 %.

Lagophthalmus't oli tuberosa kuju 146-est haigest (56 m., 90 n.) 18-el (12,2 %), 6 m. (10,7 %), 12 n. (13,3 %); neist lagoph-thalmus mõlemal silmal 15-nel (5 m., 10 n.), ühel silmal 3-el (1 m., 2 n.); 8-al haigel oli lagophthalmus kergel kujul, 6

inimest võisid silmad ainult väljaspoolses osas kinni pigistada, 4-al olid mõlemad silmad kogu aeg lahti.

Komplikatsioonidest võiks nimetada 4-al alumise lau väljapoole pöördumine.

Tundlikkus oli laugudel vähenenud maculo-anaesthetica vormil 15 haigel = 20,0 %.

Tuberosa vormil 31 haigel = 15,6 %.

Tundlikkus oli laugudel kadunud

I vormil 7 haigel = 9,3 %,

II „ 9 „ = 6,0 %.

Limanahk

on harilikult hüperemeeritud, katarrilises olekus, iseäranis tundlikkuse puudumise ja lihaste pareesi puhul, mida võiks seletada vahest sellega, et säärases olekus ei reageeri silm korralikult sinna sattuvate kõrvaliste kehakeste ega muude väliste kahjulikkude mõjude peale. Verepuudust tuleb limanahas harva ette, kuid siiski on seda nõrkuse ja üldise verepuuduse puhul 6 korda tähele pandud Bortheni (3) poolt.

Värvi poolest muutub limanahk. Mõned autorid on selle valkja [Azavedo Lima (1), Carron de Villards (9)], teised [Rampoldi (42), Borthen (3)] kollakaspruuni leidnud olevat. Viimaks armistub limanahk, kuivab ära ja skleroseerub.

Laugude limanahast pole iseseisvaid kasvajaid leitud. Täpid ja muutused, mida tähele panid Hulanicki (24), Vossius (52) ja Azavedo Lima (1), said alguse arvatavasti naabruses olevaist kudetest ja ilmusid alles pärast limanahas.

Pedraglia (38) ja Lopez'i (29) järele saavad sõlmekesed alguse limanahast, Leloir'i (28) järele — sarvkile servalt.

Kõige sagedamini leidub sõlmekesi skleera või episkleera peal, natuke eemal limbusest, kus need algavad episkleriidi ja skleriidiga; pärast tekib seal väike sõlmeke, valge või kollakas, kuju poolest sarnane flükteeniga. Viimase kuju on harilikult kolmnurkne, mille alus on limbusel, sarvkile lähedal, kuna tipp on pöördud temporaalses sihis skleera peale. Need muhukesed on harilikult õige madalad, langevad järsku sarvkile peale ja pikamööda temporaalsele küljele; nende kõrgus tõuseb mõnikord siiski kuni 4 mm [de Vicentiis (51)], mil nad juba laugude liikumist hakkavad takistama. Teinekord asuvad siin nimetatud

kasvajad rõngakujuliselt ümber sarvkile [Meyer u. Berger (32)]. Skleriit kestab harilikult väga kaua, kuid valud võivad täiesti puududa. Infiltraat kaob tihti ilma lagunemata, halle täppe järele jättes.

Sarnase pildi leiame M. Soo'l (nr. 223), kellel asub leproom temporaal-limbusel; samal kohal on tera limbuse juurde pikerguseks kokku tõmbunud.

Sõlmekese arenemiskäiku skleeral näitab järgmine haiguse-lugu nr. 223:

Soo, Miina, 48 a. vana, pärit Äksi kihelk., Sootaguse vallast, viimased 18 a. elanud Tartus. 1923. a. kukkus luuk parema silma peale, millest nägemine siis ära kadus; 1922. a. jäi pahem silm haigeks, tekkis punane täpp väljaspool silmavalge peal; haige pöördus silmakliinikusse 7. II., mil ambulantsikaardi peale on märgitud: o.d.V.=0; Cataracta tremulans post trauma; o.s.V.=0,04, c.c.—20,0 d.=0,2—0,3; episcleritis, myopia gravis, staphyloma postic.; obscuratio corp. vitrei.

Pahema silma limbusele oli kaunis suur flükteenisarnane kõva muhk, mis oli skleera küljes kinni; limanahk muhu peal ei liikunud; ravitsemisel kollase salviga ja massaažiga ei olnud tagajärgi. Sama aasta sügisel pöördus Soo nahahaiguste-ambulantse, kus temal lepra diagnostitseeriti ja ta 4. XI. Muuli leprosooriumi saadeti.

24. III. 24. Parema silm: tera ei reageeri valguse peale, suurenes atropiini toimele, kuid mitte ad maximum; lääts on kokku tõmbunud, kortsunud, liigub silma pööramisele ja näeb välja kui mäerühmad kuu peal. Korneaalmikroskoobi abil võib järgmist konstateerida: sarvkile kõvasti injitseerunud, eeskoja nurgas, temporaalses osas, on 10 halli ümmargust ja pikergust tera; need asuvad sarvkilel, limbuse lähedal, ja ulatuvad VII—XI, vaata tähendus lhk. 20.

Pahema silm: temporaalses osas, sarvkile ja skleera peal, üle limbuse, on kollakaspunane muhk 10×6 mm, kui suur lame flükteen, kolmnurkne, alus limbusele, tipp skleeral; pind on krobeline, mõned kohad paistavad oma kollaka värvi poolest kui terad välja; nasaal-osas langeb muhk järsku, temporaalses pikka-mööda. Limanahk muhu peal ei liigu ja sisaldab palju veresoone, milledest on veenid iseäranis suured. Muhu keskpaigas puudub tundlikkus. Tera pikergune välisäär limbuse kohal leproomiga kokku kasvanud, sisemine äär läätse külge kleepunud; atro-

piini toimet ei suurene tera. Värvkile tera äärel kõvasti pigmenteerunud; läätse eelmine kapsel tume.

30. III. 24 pahemast silmast kokaiininarkoosi aegu tükk muhku ära lõigatud ja bakterioloogiliselt uuritud; temas leidis palju leeprabatsille.

1. XI. 24. Järelejäänud leproom pahemas silmas on suurenenud umbes kahe võrra pinda mööda, kuid paksemaks ei ole ta kasvanud; temporaal katab $\frac{1}{3}$ sarvkilet. Korneaalmikroskoobi abil on näha: eeskoja nurgas all V—VII, seespool sarvkilet, üsna limbuse lähedal, 8 pruunikat musta tera.

2. II. 25. Sama koha peal pahemas silmas on 10 sarnast tera, ühed neist ümmargused, teised pikergused; sklerokorneal leproom injitseerunud. Paremas silmas: eeskoja nurgas temporaalselt seisvad terad ühte liitunud, kitsast hallikat riba sünnitades.

Infiltraadi tekkimise kohta ütleb Lopez (29) järgmist: Leepra sõlmekesed sünnivad limanahas niisamuti kui mujal naha peal, kõige sagedamini asetsevad nad silmamunal, sarvkile ja skleera piiril. Nad algavad kergesti punase muhukesega ja kasvavad, kuni terve organ rikutud. Mõnikord asuvad nad aga ainult limanahas.

Väga tüübilised on need flükteenitaolised leproomid. Algu- ses tekib limbusel kollakas, läbipaistmatu täpp, kuhu jookseb palju limanaha ja episkleera veresooni. Sellest täpist kasvab pärast väike muhuke, mis ka osa sarvkilet kaasa kisub ja selle tumedaks teeb. Muhukese värv on kollakas, pekisarnane, või paljudest veresoontest vähe punane. See sõlmeke kasvab pinda mööda rohkem laiemaks kui paksemaks ja sünnitab skleriidi sümptomeid. Sõlmekesed on nii lamedad, et äralõikamisel on õige raske neid pintsetiga kinni haarata.

Sylvester'i (47) järele on sõlme algus skleeras, limbuse kohal, ja tekitab aegsasti episkleriiti. Sel kohal infiltreerub limanahk, pakseneb, liigub alguses, kasvab pärast sõlmekesega ühte. Et limanahk esiotsa kasvajast eraldub ja alles pärast sellega ühineb, siis võiks oletada, et sõlme algus ei ole igatahes mitte limanahas [Roeser (43), Hansen u. Bull (20), Neve (34)].

Need limbuse leproomid olid esimesed, mis silma leepreal tähele pandi, ja alguses peeti neid ainukesteks sümptomiteks [Sylvester (47)]. Wolf (54) pidas neid stafüloomideks, Meyer (32) ja Bull (6) leukosarkoomideks.

Täpsamad andmed nende muhukeste kohta andsid Hansen ja Bull (20). Nende kui ka teiste [Hulanicki (24)] järele saavad need kasvavad alguse episkleerast ja laienevad pärast naaberku-dede peale. Sõlmeke võib skleerast läbi kasvada, liituda värvkilega, mis sedaviisi esimese külge tõmmatakse, kuna tera loperguseks venitub; vaata haiguselugu nr. 223.

Limanahad olid hüperemeeritud, punetasid ja eritasid rähma 120 (54%) juhtumusel läbivaadatud haigeist. Säherdust limanaha-katarride arvu tuleks seletada rohkem vist küll kohalikkude elutingimustega, millede need haiged viibivad, kui leepraga, sest nad mahutuvad kaunis tihedasti väikesis ruumes, kus vähe õhku ja ka puhtus palju soovida jätab. Haigeist on mitmed juba kaunis elatanud, väga iseäralikud, kangemeelsed, kes sellepärast mitte kõiki neilt nõutavaid puhtuse- ja korrapidamis-seadusi ei täida. Meeste toad on sagedasti täis suitsu, mis omakord silmi ärritab ja katarre tekitab.

Läbivaadatud haigeist olid 4-al silmamuna peal nasaalses osas mõlemas silmas pterüügiomid, 2-el õige vanal, kõdural haigel oli märgata verevaesus limanahas. Xerosis't laugude ja muna limanahal võis 4-l haigel tähele panna.

Agedate katarride põhjuseks on troofilised muutused ja nende tagajärjed silmas, nagu lau välja- või sissepoole pöördumine, lagophthalmus, viltu kasvanud ripsmed, muhud silmamunal, lau äärtes jne. Lau väljapoole pöördumisel ärritub sagedasti limanahk, eritub rähma, ja sedaviisi võib pärast päris mädapõletik (blennorrhoea) tekkida. On seesugusel juhtumusel ka sarvkile purustatud, episkleera hüperemeeritud ja paistetunud, siis muutub silmamuna aastate jooksul punaseks lihatombuks, mis aja jooksul kortsus ja atrofeerub; ühes sellega kaovad ka katarri tunnismärgid.

Sääraseid lihatompe võis 5 haigel näha: nr. 41, 58, 96, 141, 160.

Mõnel neist haigeist prepareerisin selle granulatsioon-koe silmamuna pealt ära, millede all veel kaunis kõva infiltreerunud sarvkile peitus; viimase vastu oli surutud värvkile, nii et eeskoda täiesti puudus; peale seesugust operatsiooni tõendasid haiged, et valgusetunne olla suurenenud.

Tundlikkuse vähenemist oli limanahal märgata maculo-anaesthesia kuju puhul 27 ehk 36%, tuberoosse kuju puhul 30 ehk 20,3%.

Skleera.

Et leepraprotsess, nagu eespool nägime, harilikult episkleeras algab ja sealt siis edasi läheb, siis kannatab skleera alles pärast-poole, kui muhk viimasesse kasvab. Oma kõvaduse tõttu paneb skleera kaua vastu, kuni viimaks leproom, tema sisse tungides, ta ära purustab. Leproom võib sinna sattuda mööda mahla-torusid, harude kaupa, milledest ulatuvad mõned kuni soonkileni, kus nad, head pinda leides, jõudsasti suurenevad [Lie (3)].

Skleera võib haigeks jääda esimesena ka sügavamais osa-des, kuhu leproomid satuvad Schlemmi kanalist, värvkilest või episkleerast ja sünnitavad skleriidi [Hansen, Bull (20)]; sellevastu räägib Böckmann (7): „et leproom oleks alguse saanud skleeras, pole tähele pandud“.

Läbivaadatud 146 tuberosavormi leepראהige seas olid infilt-raadid episkleeral ja skleeral 29 (13%), Rubertil 18,5%, mõle-mas silmas sümmeetriliselt temporaalses osas 4-l, ainult paremas silmas 13-l, ainult pahemas silmas 12-l.

Suurem jagu neist kasvajaist asus, nagu eelmisedki, silma-muna temporaalses osas, neist temporaalselt ülevalpool horison-taalset meridiaani 5, allpool sama meridiaani 2 kasvajat; silma ülemises kvadrantis 3, alumises 1 kasvaja; mõlemad viimased asusid, samuti kui teisedki, limbusel, s. o. osalt skleera ja sarv-kile peal.

Ühel haigel, nr. 101, oli rõngataoline kasvaja, õige madal, kollakat värvi, paremas silmas 3 mm, pahemas 5 mm lai, levides limbusest mõlemale poole. Naabruses olev sarvkile oli tumestunud.

Haigel nr. 84 oli 2 kasvajat, milledest üks juba oli ära kadunud, teine aga veel alles; nimelt paremas silmas üleval, temporaalses osas, punakashall täpp, suuruses 4×6 mm., nähtavasti leproomi ase; samas silmas allpool, ka temporaalses osas, kollakas kasvaja 4×6 mm.

Ühel oli pahemas silmas limbusel kaunis kõva flükteen, mis kujutas arvatavasti leproomi algust. Selle haiguse loost nr. 67: mõlemas silmas olid temporaalselt ja nasaalselt, horisontaalse meridiaani kohal, vähe limbusest eemal, skleera peal, kollakad täpid, millede pikkus 6 m, laius 2 m.

Siin tähendatud kasvajad olid mitmes staadiumis, alates kõige väiksemast flükteenist ja lõppedes suure muhuga 5×20 mm; mõnel ulatus paksus kuni 10 mm. Kõige paksem koht

oli alati limbusel; siit langes ta järsku nasaalselt ja pikkamööda temporaalselt. Kasvaja pind oli harilikult sile, ainult mõnikord olid paksemad leproomid pealt vähe krobelised.

Värvi poolest tuli rohkem ette kollakaspunaseid, mõned suu-remad olid päris punased, harva juhtus sinikashalle. Muhud ise olid aluse külge kinni kasvanud, kuna neid kattev limanahk oli harilikult liikuv. Tundlikkuse muutumist oli külgepuutumisel märgata 23-el (17%), neist vähenenud 19-el, puudus 4-al.

Sarvkile.

Sarvkile haigused on kõige hädaohtlikumad silma leep-
ra puhul, sest nende läbi võib haige nägemise õige ruttu kaotada.

Maculo-anaesthetica kujul sünnib sarvkile haigeks-
jäämine peaaesjalikult lagophthalmuse puhul, mil ilmuvad esiteks
limbuse kohal kerged epiteeli degeneratiivsed muutused, mille-
dele pärast allpool sarvkile osas tihe pannus järgneb. Kestab
haigus edasi, siis tumestub sarvkile üleni, temas tekivad haavad,
ta kortsus ja kuivab viimaks ära; selle tõttu väheneb sarvkile
vastupidavus, ta surutakse ettepoole; silmamuna venib palju
pikemaks, stafüloomi sünnitades, ja degenerereerub aegamööda
(Groenouw). Stafüloome leidus 6-el haigel, neist mõlemas silmas
2-el, ühes silmas 4-al. Sarvkile ja limanaha tundlikkuse puhul
võib silm kergesti vigastuda.

Tuberosa kujul esineb sarvkile haigus harilikult ühes
silma teiste põletikkudega, harva eraldi. Neist keratiidi kujudest
oleksid nimetatavad keratitis punctata ning keratitis
parenchymatosa ja vanadusest rõngataolise tumestuse sar-
nane keratitis, mis esineb leep-
ra mõlema kuju puhul.

Esimese kuju puhul leiame sarvkile pinnas väikesi halle
täppe, mis on mõnikord nii tihedad, et kokku sulavad. Need
ilmuvad kõige esmalt limbuse kohal, temporaalses sarvkile osas;
alguses tekib seal kerge tumestus, mis suurendamisel näib
koosnevat peenikestest hallidest punktilistest infiltraatidest;
viimaseid võib mõnikord nii rohkesti olla, et sarvkile näib
kui jahutolmuga kaetud olevat, vaata haiguselugu nr. 211.,
lhk. 22. Infiltraadid resorbeeruvad paremal juhtumusel, järele
jättes halle pruunika tooniga täppe. Aastate jooksul võib see
tumestus suurened, küündida sarvkile keskpaika ja katta viimast
üleni. Sel puhul tungivad muutused sügavale sarvkile kihtidesse

ja haigus sarnaneb keratitis parenchymatosa'ga. Nende kahe siin kirjeldatud haiguse vahel on veel mitmed ülemineku-vormid.

146 tuberosast kuju haigeist eraldasid 6, kes kannatasid trachoma all ja kel sellepärast polnud võimalik kindlaks teha, kas muutused sõltuvad viimasest või leeprast. Ülejäänud 140 (54 m., 86 n.) seas oli kerat. punctata vorme 65 (20 m., 45 n.); mõnedel neist ulatusid tumestused ka sügavamaisse sarvkile kihtidesse. Tuleb ette, et kerat. punctata leidub ühes ja kerat. parenchymat. teises silmas, nagu haige nr. 133, kellel paremas silmas esimene, pahemas teine kuju.

Keratitis parenchymatosa puhul algab tumestus harilikult sarvkile äärest või sagedasti naabruses olevast leproomist ja küünib pärast üle sarvkile, mille keskkohal vahel pikemaks ajaks läbipaistvaks jääb. Seesugune tumestus koosneb pinnalisist ja sügavaist leepra infiltratsioonest; vaata haiguselugu nr. 211. Siin võib mõnikord tähele panna ka vaskularisatsioone, mis saavad alguse limanaha ja episkleera veresoontest; need on siis õige kehvad ja ei ulatu perifeerist palju kaugemale.

Sarvkile sügavamaid tumestusi, mis sarnanevad keratitis parenchymatosa'ga, leidis 10 (4 m., 6 n.).

Suurem jagu neist tumestusist sisaldas veresooni, mis limbusest sinna sisse jooksid; sarvkile epiteel oli seejuures krobeline ja tume, mattklaasi taoline.

Mitmesuguseid sarvkile tumestusi, maculae corneae, oli 26-el (10 m., 6 n.), staphyloma corneae 11-el, abplanatio corneae 5-el (1 m., 4 n.), leucoma adhaerens 2-el. Kokku sarvkile muutusi 119-el (85 %) (Rubertil 79,13 %, Borthenil 62,39 %), mehi 43 (79,7 %) (Rubertil 74 %), naisi 76 (88,3 %) [Rubertil 86 %].

Muutusi mõlemas silmas 89, ainult paremas 18, ainult pahemas 12. Ühel haigel oli iseäraline kepitaoline keratiit. Selle haiguse lugu nr. 215. Amalie Lõmps, 27 a., l. tuberosa, pärit Vana-Kariste vallast, Sossi külast, Kõrgemäe talust. Vanemad, 1 vend, 1 õde ja 1 laps on kõik terved; haigeks jäi 9 kuu eest. Alguses tekkisid täpid näole; silmade üle ei kaeba. Muuli leprosooriumis olnud 2 kuud.

Parem silm: $V = 0,5$, allpoolses sarvkile osas, parenhüümis, on sügav kepitaoline tumestus, mis koosneb nagu väikesist kepikesist, asetatud vertikaalselt.

Pahem silm: $V = 0,7$, sarvkile allpoolses osas tumestu-

nud sügavamais kihtides ja näib kui jahutolmuga kaetud olevat; epiteel on tumestusekohal tuhm, veresooni pole tumestuses näha.

Sõlmekeesi on sarvkiles kaunis sagedasti leitud [Hulanicki (24), Hirschberg (21) ja teised]; need tulevad sinna harilikult limbusel olevaist pesadest [Borthen (3), Bull u. Hansen (20)] ja põhjustavad seal kaunis suuri infiltraate. Esiteks tumestub sarvkile, pärast tekib sellele kohale väike sõlmeke, hallikas või punakas, skleera poole lame, sarvkilele järsku vallimoodi alla langedes [Blessig, Karnitzky und Weinstein (5)]. Viimaks võib see sõlmeke kogu sarvkile oma alla võtta; mõnikord lepib ta ainult perifeeriga ja jätab keskkoha puutumata. Sõlmekeste tundlikkus on puutumise korral õige nõrk, kuna valutundlikkus säilib. Lõpuks resorbeerub sõlmeke, mõnikord oma asemele hallikat täppi jättes, muutub paiseks ja sünnitab paksu kae; halvemal juhtumusel läbib sarvkile ja põhjustab raskemaid tagajärgi, millede tõttu silm võib täiesti hävida.

Leproome võis sarvkilel 10-el haigel tähele panna (4 m., 6 n.); 6 korda olid leproomid mõlemal silmal, 4 korda ainult ühel silmal. Naabruses olev sarvkile oli alati tumestunud kuni sügavamate kihtideni. Haigetil nr. 208, 211, 214 kaapisin värskest ilmunud infiltraadid sarvkilelt maha ja uurisin bakterioloogiliselt; neis leidis leprabatsille.

Haigel nr. 14 oli leproom sarvkilest läbi kasvanud. Selle haiguse lugu on järgmine:

Ann Peedu, 53 a., lepra tuberosa. Tarvastu kihelk., Tuhalaane vallast; jäi haigeks sealsamas 30-aastaselt, silmad on haiged 40-aastaselt, interneeritud 1911. a. Vanemad, 4 venda, 2 õde, 5 last — kõik on terved. Laugude nahk paks, kortsunud, kollakat värvi; limanahad injitseerunud, eritavad rähma.

Parem silm: $V = 0,05$, sarvkile tumestunud keskpaigas sügavamate kihtideni.

Pahem silm: temporaalses osas on skleera ja sarvkile peal kõva konsistentsiga kasvaja, mis katab välimise poole sarvkilest ja naabruses oleva skleera; pikkus 15 mm, laius 10 mm, paksus umbes 3 mm. Kõige paksem koht on limbusel 3 mm väljapoole; siit sarvkile poole alaneb kasvaja järsku, pind krobe-line, kuna väljapoole ta paksus väheneb pikkamööda ja näib pealt sile olevat. Kasvaja on värvilt kollakaspunane; limanahk ta peal on soonestunud, alusega kokku kasvanud. Binokulaariuubi abil on näha, et see muhk on sarvkilest läbi kasvanud ja sellega

täiesti ühtinud, kuid pole siiski eeskotta veel ulatunud. Äralõigatud kasvajast leidsin bakterioloogilisel uurimisel leeprabatsille. Naabruses olev sarvkile on diffuusselt tumestunud. Tera väike, ei reageeri valgusele, suurenes atropiini toimet. Tundlikkus on kasvajal täiesti kadunud, kuna ta mujal limanahal näib ainult vähenenud olevat.

Sarvkile haigusi saadavad harilikult komplikatsioonid, nagu iritis ja cyklitis [Djelov (14)]. Prognoos on halb, sest sügavad tumestused ei kao mitte täiesti ja nägemisteravus jääb puudulikuks. Tundlikkus oli sarvkilel vähenenud maculo-anaesthet. kujul 13 h. (17,3%), tub. kl. 30 h. (20,3%). Tundlikkus kadunud I vormil 9 haigel (12%), II vormil 6 haigel (4,1%).

Uvea.

Peaaegu pooled kõigist leeprahaigetest kannatavad uvea haiguste all; neidleidis Otschapowsky (35) — 50%, Borthen (3) — 37% maculo-anaesthetica ja 71% tuberosa vormi puhul.

Isoleeritud iritis't leidub harva, sagedamini aga irido-cykli-tis't, mõnikord ka ühes pretsipitaatidega Destsemeti kilel [Jean-selme u. Morax (25), Bistis (4)]. Korneaalmikroskoobi all võib tihti palju peeni pretsipitaate Destsemeti kilel näha, kuid haige tunneb enda seejuures täitsa terve olevat; ka objektiivselt ei ole värvkilel ega sarvkilel muid patoloogilisi muutusi märgata. Tera suurus on N, valguse peale reageerib hästi, värvkilel puudub injektsioon. Haiguselood nr. 208, 211, 214. Juhtumusi, kus oleks olnud ainult iritis või cyklitis, pole Borthenil korda läinud leida, küll aga sümptomeid, mis näitavad nende mõlemate peale; iridotsükliidi käik on krooniline ja vaheldub ägedate tõusudega. Leloir ja Borthen konstateerisid niisuguseid juhtumusi, mis ägedasti peale hakkavad ja mõne päeva pärast pimedaksjäämisega lõpevad. Eeskojas on mada harva leitud, kuid õige sagedasti saadab seda iridotsükliidi fibriin-ekssudaat [Hulanicki (24)]. Uvea-haigus järgneb harilikult episkleriidile ning keratiidile ja jätab raskeid tagajärgi, nagu seclusio ja oclusio pupillae, silma muna atrofeerumine, glaucoma ja muud.

Kasvud värvkilel on haruldased nähtused [Bull u. Hansen (20), Krüdenner (27), Collins (10), Gonzalez (11)]; kuju poolt on need hallid sõlmekesed sarnased pretsipitaatidega Dest-

semeti kilel, ja asuvad peaaesjalikult tera äärel [Dühning u. Trantas (17), Patron-Espada (37)]. Suuremaid kasvajaid on eeskambri nurgas leitud [Neve (34)]. Nõelapea suurusi želatinoosseid tuumoreid eeskojas iirise peal leidis Driel (16) 2 haigel 350 seast.

Leprooomi ilmumine on ühenduses harilikult iridotsükliidiga ja kaunis suure valuga. Ühed kasvajad kaovad, kuna teised jälle juurde tulevad [Hirschberg (22)]. Pärastpoole suurenedes täidab muhk kogu eeskoja ja võib ka sarvkilega ühendusse minna. Värvil poolest on kasvajad valkjad, kollakad või punased. Nad ilmuvad kas ükskhaaval või mitu tüki korraga, nagu Hirschbergi juhtumusel, kus neid oli 7 ühel värvkilel. Kasvajate tüübiliseks tunnuseks on nende äkiline ilmumine ja niisamuti ka kadumine [Hirschberg (22)], nagu näitab haiguselugu nr. 214, Jaan E., kellel ilmus leproom järsku värvkile nasaalses osas ja kadus jälle mõne päeva pärast. Selle iriidi käik sarnaneb tiisikuse omaga.

Kergemal juhtumusel jääb peale leprooomi seclusio või oclusio pupillae, raskemal — kortsud silmamuna.

Leproome värvkilel läks korda ainult kolmel haigel leida: nr. 28, 40 ja 214.

Nr. 28: Riig, Hendrik, 54 a., leprosoorium Tarvastu, l. tuberosa, Halliste kihelk., Vana-Kariste vallast; haigeks jäi kodus 40-aastaselt, parem silm jäi haigeks 49-a., pahem 52-aastaselt. Vanemad, 1 vend ja 2 õde on terved; 1 õde on leepiras. Ripsmed puuduvad igal laul, viimaste nahk paks, infiltreerunud limanahk injitseerunud.

Parem silm: $V =$ käeliigutus. Sarvkile degenerereerunud ja ühes silmamunaga väljapoole surutud; eeskoda kadunud, nii et sarvkile puutub kokku värvkilega. Sarvkilel näha väikesed valkjad tükid, arvatavasti lubjastused, mis teda kirjuks teevad. Ülevalt limbuselt läheb sarvkilele madal kollakas soonestunud leproom, mis katab $\frac{1}{3}$ viimasest.

Pahem silm: $V = 0$; sarvkile paksult tumestunud ja tükati läbipaistev; tera väike, valguse peale ei reageeri. Eeskojas, allpoolses osas, on valkjas muhk, mille pikkus 4 mm, laius 2 mm. Muhk algab limbuselt ja läheb osalt üles mööda värvkilet tera poole; veresooni pole temas näha.

Nr. 40: Vaher, Leena, 45 a., Tarvastu leprosoorium, l. tuberosa, Kõpu kihelk., Suure-Kõpu vallast, kus haigeks jäi 30-a., interneeritud 1921. a.

Parem silm: juba väikselt haige, $V = 0$, staphyloma tot. peale vigastust.

Pahem silm: $V = 0,02$, eeskojas, temporaalses osas, värvkilel, limbusest tera poole, on kollakaspunane muhk, ühtepidi 5 mm, teistpidi 3 mm. Muhk on kaunis lame ja tõuseb värvkilest vähe kõrgemale, tema pinnal on mõned veresooned nähtaval.

Prognosis pole nägemise ega elu suhtes hea, sest leproomide ilmumine silmas loetakse halvaks nähtuseks ja annab tunnistust raskest haigusekäigust.

Iseäralised muutused värvkilel leidsid Jeanselme ja Morax (25) kahel haigel, kellel võis luubi abil värvkilel näha palju halle muhukesi, terava nõelaotsa suurused (pointe d'aiguille). Need muhud katsid üleni tervet värvkilet; rohkemal arvul võis neid siiski tera äärel tähele panna, kus nad olid ka suuremad. Ühel teisel haigel leidsid säärased muhukesed ainult ühel kvadrandil. Kõigil neil haigil ei olnud mingisuguseid põletiku-tunnuseid värvkilel, mille karv, pind, niisamuti ka valguse reaktsioon olid täiesti korras. Eelnimetatud autorid peavad neid muhukesi miliaar-leproomideks, mis on analoogilised täpile sarvkilel, viimase pinnalise lepra põletiku puhul. Samasuguseid muhukesi on konstateerinud Rubert 4 haigel 204 seast. Ka Patron-Espada (37) nimetab ühel juhtumusel muhukesi, mis olid eelmistest suuremad, nimelt nõelapea suurused.

Umbes sarnaseid muutusi, terakesi värvkilel, kuid palju vähemaid, mis olid nii väikesed, et neid ainult korneaalmikroskoobi abil võis konstateerida, leidsin 7 haigel. Haiguselood nr. 214, 208, 211, 216, 217, 218, 222. Et neid juhtumusi literatuuris vähe on kirjeldatud ja sarnased korneaalmikroskoobilised uurimused puuduvad¹⁾, toon need haiguselood.

Nr. 214: Esko, Jaan, 25 a. Leprosoorium Muuli, l. tuberosa, Jüri kihelk., Rae vallast, Limu külast, Jaska talust, kus haigeks jäi 12-aastaselt. Isa kannatab lepra all 1905. a. saadik ja on Kuudas, tema vanemad olid terved; ema ja 2 õde terved; 1 õde lepras; poissmees.

Alguses tekkis muhk paremal labajalal; sama jala sääres olid kõvad tükid; pärast tekkisid kollakad täpid näo ja käte peale. 19-aastaselt läks Kuuda leprosooriumi, kust 5 a. pärast Muulile

1) Viimastel päevadel ilmusid literatuuris teated silma lepra korneaalmikroskoobiliste uurimiste üle Wood'i (55) ja Peter'i (39) poolt; kummalgi on 1 juhtumus.

üle viidi; ravitsetud süsihape-lumega. On paranenud, silmad on mõnikord kergemalt haiged olnud: kulmude karvad maha langenud, kude sel kohal infiltreerunud. Paremal silmal ripsmed harvad. Pahema silma ülemisel laul puuduvad ripsmed. Mõlemad ülemised laud vähe allapoole vajunud. Puutumisel puudub tundlikkus kulmul ja laugudel, on limanahal ja sarvkilel vähenenud. Strabismus divergens, astigmatismus hyperopicus parēmas silmas 4,0 d., pahemas 3,0 d.

Tähendus: Täpsamaks kohtade määramiseks värvkilel jaotan viimase kolme jakku: välimine kolmandik limbuse ääres, sisemine kolmandik tera ääres ja nende vahel keskmine kolmandik. Nende kolmandikkude peal kohtade ülesleidmiseks tähendan viimased tunninäitaja numbritega kella peal; näiteks muutus värvkile sisemisel kolmandikul, selle koha peal, kus seisab tunninäitaja kell 12, tähendan: sisemine kolmandik XII.

18. XI. 24. Parema silm: $V=0,3$; c. c. + cyl. 2,5 d. axis vert. = 0,7; tera pikergune, valguse peale reageerib nõrgalt. Värvkilel, VII ja XI (tunninäitaja) vahel sisemisel kolmandikul on kogu halle terakesi, sealt natuke väljapoole, kuni limbuseni, näha mõned üksikud samasugused terad.

Pahema silm: $V=0,3$; c. c. + cyl. 2,0 d. axis vert. = 0,7; limanahad laugudel kui ka silmamunal injitseerunud, eritavad rähma, tsiliaar-injektsioon munal selgesti nähtav. Sarvkile $\frac{1}{3}$ ülemist osa kaetud hallide täppidega, allpoolses osas on mõned samasugused täpid. Kõik need koosnevad otsekui peenikesest hallist jahutolmust. Täppide vahel on sarvkile kergesti tumestunud, epiteel sile ja läigib. Tera väike, valguse peale ei reageeri, atropiini toime suurenes vähe. Värvkilel, temporaalses osas, üsna tera lähedal ja kaugemal, I—V, on palju väikesi valkjashalle terakesi, mis asuvad niihästi pinnal kui ka sügavamais lohkudes ja impregneerivad eneste all olevat kudet; viimane näib kui peenikese liivaga kaetud olevat. Värvkilel, nasaalses osas, keskpaigas tera ja limbuse vahel, IX, on laiem kui pool värvkilet želatiinitaoline pool-läbipaistev ümmargune mass, läbimõõt umbes 5 mm; selle ääred on rohkem läbipaistvad kui keskpaik ja kaovad pikkamööda kui udu. Selle massi keskpaigas paistab massiivne tomp, mis annab osalt ka roosa refleksi; sel kohal on sarvkile vähe tumestunud. Värvkile kõvasti injitseerunud; silmapõhi annab roosa refleksi. Atropiin, kompress; ravitsetud süsihapelumega prof. Paldrocki meetodi järele.

19. XI. Sarvkile pind, iseäranis nasaalne, krobeline kui mattklaas; infiltraat eeskojas vähenenud ja rohkem läbipaistev.

20. XI. Infiltraat peaaegu kadunud, roosaid täppe oma asemele jättes; silm vähem injitseerunud. Atropiin, kompress.

25. XI. St. idem.

30. XII. Täpp infiltraadi asemelt kadunud; ärritusetunnused möödunud, sarvkile läikiv.

5. XII. St. idem.

9. XII. Värvkilel, mitte kaugel pupilli äärest, allpool ja nasaalselt, on näha väikesed mustad terad, mis ilmusid arvata-vasti peale põletikku. $V=0,3$.

19. XII. Paremas silmas 10 mm limbusest temporaalselt on punane flükteen, infiltraat.

14. XII. Infiltraat vähem.

17. XII. Infiltraat kadunud.

5. I. 25. Möödunud päeval on pahem silm punetama ja valutama hakanud; tsiliaar-injektsioon, tera väike, valguse peale ei reageeri. Sarvkile ülemises kvadrantis väike hall infiltraat, millest bakterioloogilisel uurimisel leeprobatsille leidsin; samal kohal värvkile injitseerunud. Atropiin, kompress.

8. I. Injektsioon kadunud, sarvkilel hallid täpid.

Nr. 208: Kallas, August, 23 a. Leprosoorium Muuli. Äksi kihelk., Sootaguse mõisast. Vanemad, 1 vend ja 4 õde terved. Haigeks jäi 3 a. eest; kõige pealt tekkisid täpid käte, siis näo peale, valu ei tunnud. Ilmus rahvaväe-komisjoni, kus haigust tähele pandi ja haige Muuli saadeti; ravitsetud süsihappe-lumega; on paranenud.

Mõlema silma kulmud ja laud infiltreerunud ja armistunud, ripsmed harvad, osalt puuduvad.

Parem silm: tera pikergune, valguse peale reageerib nõrgalt. $\frac{1}{3}$ sarvkilet ülevalt tumestunud sügavamate kihtideni. Tumestus koosneb peenikesist hallest täppidest kui jahutolmust, millede keskel on näha üksikud suuremad, vähe pruunikad täpid ehk terad, mis pretsipitaatide moodi välja näevad. Värvkile sise-misel kolmandikul, üsna pupilli äärel (V—VII), on suur kogu väikesi hallikaid teri, mis annavad koele ilme, kui oleks see mannapudrugaga üle määritud.

Pahem silm: tera reageerib valguse peale hästi. Epis-kleritis. Sarvkile tumestunud kui paremas silmaski ja sisaldab ka väikesi terakesi, mis analoogilised viimastele värvkilel. Mõned

terad kaapisin Grefe noaga ära ja uurisin bakterioloogiliselt; neis leidusid leeprabatsillid. Värvkilel, sisemisel kolmandikul (II—VI ja IX), samasugused terakesed kui paremas silmas, III kohal ulatuvad terad kuni keskmise kolmandikuni, sealt üles- ja alla-poole on need kitsamalt.

20. VI. 24. Nr. 211: Suurkivi, Liisa, 47 a. Leprosoorium Muuli. *L. tuberosa*. Põltsamaa kihelk., Kuriste vallast, Haidu külast, Silla talust. Interneeritud 45-aastaselt; vanemad, 1 vend ja 2 õde, 2 tütar — 23- ja 13-a. — terved. Haigeks jäi kodus 43-aastaselt; alguses tekkisid punased muhud näol ja käevartel, pärast mujal. Terad vähe lapergused, valguse peale reageerivad nõrgalt. Vaatepõllud piiratud.

Parem silm: $V = 0,6, + 1,5 d = 0,9$. Kulmukarvad puuduvad; nahk armistunud; 2 mm limbusest väljapoole on punakas muhuke, mille suurus 4×2 mm.

Pahem silm: $V = 0,3, + 5,0 d = 0,6$; kulmukarvad puuduvad. Ülemisel laul, keskpaigas, puuduvad ripsmed. Silm on temporaalses osas tihti punane olnud ja valutanud. Sarvkilel allpoolses osas, Destsemeti kilel, pretsipitaadid.

19. I. 25. Silmad punased, injitseerunud. Sarvkiled limbusest peale 2—3 mm laiuselt infiltreerunud, iseäranis ülemises osas; infiltmaat koosneb väikesist muhukesist ja täppidest, limbusel on ta paksem ja hõreneb keskpaiga poole. Grefe noaga pinnaline infiltmaat ära kaabitud, esemeklaasile viidud ja Baumgarteni järele värvitud; selles leidusid leeprabatsillid. Destsemeti kilel mõlemas silmas pretsipitaadid.

Parem silm: värvkilel VI—VIII, sisemine kolmandik paistab kui peene tolmutega kaetud olevat; XI kohal, keskmisest kolmandikust pupilli poole, leiduvad üsna väikesed, kui liivaterad.

Pahem silm: Limbusel temporaalses osas väike leproom 4×3 mm., millest bakterioloogilisel uurimisel leeprabatsille leitud.

20. VI. 24. Nr. 216: Tuulik, Pauline, 22 a. Leprosoorium Muuli. *L. tuberosa*. Hanseküla kihelk., Abroku vallast, Salme külast, Ubstani talust. Tuli 17-aastaselt Tartu, aasta pärast märkas, et oli haige; siit saadeti Tarvastusse, kust 2 kuu pärast Muulile üle toodi. Alguses tekkisid täpid jalasäärtel, pärast käevartel; ravitsetud süsihape-lumega; paranemist on märgata. 1 õde terve; isa, ema, 2 õde on leepras. Kulmude karvad harvad.

Parem silm: $V = 0,7$.

Pahem silm: $V = 0,9$, alumisel laul on ripsmed harvad,

tera suurus N, valguse peale reageerib korralikult. Värvkilel, temporaalses osas on mõned väikesed valkjad moodustused kui liivaterad.

3. IV. 25. Terad värvkilelt jäljeta kadunud, sarvkilel keskpaigas nubecula.

22. VI. 24. Nr. 217: Tuulik, Juulie, 18 a. Leprosoor. Muuli. L. tuberosa. Elukoht ja perekonna-seis vt. nr. 216. Haigeks jäi 11-aastaselt; 2 aastat oli kodus, 5 a. Audakul, siis Muulil. Kulmude karvad ja ripsmed laugude keskpaigas puuduvad. Tundlikkus kulmuldel puudub, laugudel ja limanahal kõrgenenud sarvkilel N.

Parem silm: $V = 0,9$. Värvkilel, temporaalses osas, pupilli äärel IX. on mõned üksikud hallikad terad, mis peene liiva moodi välja näevad.

Pahem silm: $V = 0,9$; nasaalses osas limbusel flükteen, episkleriit.

3. II. 25. Sarvkile temporaalses osas on sklerokorneaalne leproom, ülemisel kolmandikul kerge pinnaline, punktiline tumestus.

Nr. 218: Kangur, Loviise, 39 a. Leprosoorium Muuli. L. tuberosa. Kursi kihelkonnast, Puurmani vallast, kus ka haigeks jäi 40-aastaselt; alguses ilmusid punased täpid käevarte, pärast jalgade ja näo peale. Vanemad, 1 vend 54-a., 2 õde — 45- ja 35-a. — terved; 1 õde 46-a. leepas ja on Tarvastu leprosooriumis. Mehel 20 aastat; mees, 4 last — 8-, 12-, 14- ja 17-a. — kõik terved.

Kulmude karvad harvad. Pahema silma ülemisel laul keskpaigas puuduvad ripsmed, mujal on need harvad. Tundlikkus kulmuldel ja laugudel N, limanahal ja sarvkilel nõrgenenud. Eeskojas, Destsemeti kilel mõlemas silmas pretsipitaadid, rohkem alumises osas.

Parem silm: $V = 0,7, + 0,75 \text{ d.} = 1,0$. Värvkilel, üsna pupilli lähedal, IX—III, rida valkjaid teri, asetatud umbes pärlite taoliselt. 1 samasugune tera on VIII—IX, teine XI kohal.

Pahem silm: $V = 0,5, + 1,0 \text{ d.} = 1,0$. Värvkilel, sisemisel kolmandikul, II—V, asuvad üksikud samasugused terad, nagu paremaski silmas, sisemisel kolmandikul on 1 must tera VI, teine VII kohal.

Mõlema silma pupillid on loomulikus suuruses ja reageerivad valguse peale korralikult.

Nr. 222: Leetsi, Anna, 51 a. Leprosoor. Muuli. Lepra tuberosa. Vana-Kuuste vallast, Sipe küla, Küti mõisast. Vane-mad, mees ja 28-a. poeg terved; haigeks jäi 47-aastaselt kodus, sealt saadeti Muuli, kus ravitsetakse süsihape-lumega; on para-nenud. Kulmudel nahk sümmeetriliselt infiltreerunud, karvad harvad. V. oc. utr. = 0,7, + 1,0 d = 0,9.

P a h e m a s s i l m a s, värvkilel, sisemisel kolmandikul, üsna tera äärel, üks valkjas tera XII-l, teine II—III sisemise ja keskmise kolmandiku piiril, III-me kohal, on 3 samasugust tera, üks neist lohu sees.

Neis haiguselugudes kirjeldatud iseäralised muutused värv-kilel, terakesed või kübemed on nii väikesed, et neid võib näha ainult korneaalmikroskoobiga. Värvil poolest on nad hallikad, mõned kollakad või valkjad; k u j u poolest suuremalt jaolt ümmar-gused või pikergused, iseäralikku ehitust kui ka veresooni pole neis märgata ja nad näevad koosnevat ühetaolisest massist. Ühed neist asuvad värvkile pinnal, teised kude sees ja loh-kudes, näevad kui uduga kaetud olevat, kolmandad puutuvad ainult kergelt aluse külge ja paistavad rippuvat lohkude äärel. Ühes kohas leiduvad ainult üksikud terad, teises kohas on nad gruppide viisi ja katavad tervet värvkile pinda, nii et see näib kui peene liiva või mannaga üle külvatud olevat. Suure-mate terade vahel peituvad väiksemad, milledest mõned nii tillu-kesed ja rohkearvulised, et neid veel vaevalt võib näha, ja anna-vad oma massiga värvkilele ilme, kui oleks see ära tolmutatud või mingi rasvase ollusega üle määritud. Dühring ja Trau-tas (17) nimetavad üht leeprahaiged, kellel värvkile olnud kui lilletolmuga (Blütenstaub) kaetud.

Need muutused olid ühes silmas 4 haigel, mõlemas silmas 3 haigel, 7 silmas temporaalses osas, 1-l silma nasaalses osas, 1-l silma ülemises, 1-l silma alumises osas. Suuremalt jaolt asu-sid nad värvkilele sisemisel kolmandikul, pupilli äärel, mõni-kord natuke eemal, kuid keskmisest kolmandikust kaugemale ei ole nad ulatunud. Esko'l, nr. 214, katsid nad värvkile kuni limbuseni. Mõnel neist haigeist olid värsked põletiku tunnused sarv- ja värvkilel, teistel haiguse vanemad taga-järjed, nagu sarvkile tumestus, pupilli nõrk reaktsioon, kuna kolmandatel polnud mingisuguseid muid patoloogilisi tun-nuseid märgata ei sarv- ega värvkilel, mille pind ja valguse reaktsioon täiesti korras olid. Nagu näha, on need muutused

arvatavasti kroonilist laadi, aga mis nad õieti on, pole korda läinud veel kindlaks teha. Jeanselme ja Morax (25) peavad neid miliaarleproomideks, analoogilisteks täpile sarvkilel viimase pinnalise põletiku puhul. Läheb korda neid muutusi põhjalikumalt bakterioloogiliselt ja histoloogiliselt uurida, siis vahest saadakse nende kohta täpsamad andmed.

Et need terakesed on analoogilised sarvkile täpile, näib väga võimalik olevat, sest ka viimased ilmuvad sagedamini temporaauses osas ja võivad pikemat aega olla, ilma et suuri põletiku tundemärke sünnitaksid, ja selleläbi sarnanevad sklero-korneaalse leproomidega. Viimast arvamist võiks veel kindlamalt põhjendada uurimiste põhjal kolme haige juures: nr. 208, 211, ja 214. Neil olid sarvkile tumestuses samasugused terakesed kui värvkilel. Esimestes läks bakterioloogilise uurimise põhjal korda leeprobatsille konstateerida; analoogiliselt peaksid viimased ka värvkile elnimetatud muutustes leiduma. Nii võiks sel põhjal veel julgemalt oletada, et meil on siin tegemist miliaarleproomidega, mis rohkel arvul värvkilel ilmuvad.

Mis puutub muisse muutusesse elnimetatud haigeil, siis võiks juurde lisada, et iseäralisi muutusi silmas pole leitud Leet-sil ja P. Tuulikul; sarvkile tumestused väikeste täppidega olid Eskol, Kallasel ja Suurkivil; pretsipitaadid destsemetikilel — Kangrol ja Suurkivil; leproomid limbusel J. Tuulikul ja Suurkivil; leproom eeskojas — Eskol.

Peale elnimetatud hallide ja valgete terade värvkilel leidsid teistel haigeil samal kohal mustad ja pruunid terad, mis olid asetatud suuremalt jaolt ükshaaval või väikesis gruppides; nende seas ei olnud ka nii väikesi, mis tolmuviisi oleksid katnud värvkilet, nagu see eelmisel haigeil hallide teradega värvkilel ette tuli.

Haiguselood.

Nr. 213. Paaless, Leena, 62 a. Leprosoorium Muuli. L. tuberoosa.

Parem silm: värvkilel, üsna tera lähedal, VI—VIII, on 4 musta tera, $\frac{1}{2}$ VI on grupp väikesi musti teri.

Pahem silm: värvkilel sisemises kolmandikus V kohal on 3 väikest ja $\frac{1}{2}$ VII üks suurem must tera.

Nr. 219. Kadakas, Juulie, 27 a. Leprosoor. Muuli, L. tuberoosa.

Parem silm: värvkilel, sisemisel kolmandikul VIII kohal, terve grupp musti teri, XI ja I kohal — üksikud terad.

Pahem silm: samal kolmandikul, I—V, mustad terad. 27. septembrist 1924. a. ravitseted bismogenool'iga intramuskulaarselt kaks korda nädalas à 1,0, mille tõttu võisid hallid leproomid degenereeruda ja musta värvi omandada.

146 tuberoosa kuju haigeist eraldasid 6, kelledel silmad olid niisuguses olekus, et võimatu oli uveas patoloogilisi muutusi uurida. Ülejäänud 140 seas (54 m., 86 n.) leidsid iridotsükliiti 9 (4 m., 5 n.). Kolmel neist võis sarvkiel pretsipitaate konstateerida. Synechia posterior 14 (5 m., 9 n.), seclusio pupillae 10 (3 m., 7 n.), oclusio pup. 10 (6 m., 4 n.). Kokku uvea-haigusi 43 (30,7%). [Rubertil 28,19%, 18 m. (33,3%) ja 25 naist (29%). Suuremal jaol neist haigeist olid muutused silma teral, viimane oli oma loomuliku ümarguse kuju kaotanud, vertikaal- või horisontaalsihis pikerguseks jäänud ja synechiate pärast täiesti hambuliseks muutunud; valguse reaktsioon oli nõrk või puudus koguni.

78 maculo-anaesthetica kuju haigeil oli irido-cykliitis 2, synechia posterior 5, seclusio pup. 3, kokku 14 haigust (6 m., 8 n.), 18,6%. R. 13,09%.

Silma põhi.

Silma põhjas on leepira puhul seni veel vähe muutusi leitud, mida võiks vahest sellega seletada, et nägemisnärv (nervus opticus) ja värvkile alguses üldse puutumata jäävad, või kui nad kannatavad hilisemas haigusestaadiumis, mil silma esimesed läbipaistvad osad pikaldase protsessi järele juba tumestunud, siis pole enam võimalik oftalmoskopeerimisel neid muutusi konstateerida, sest nagu teada, algab leepira silma eespoolseis osades ja laieneb sealt siis tahapoole. Hansen ja Bull (20) on enam kui 200 leepirahaigel silma põhja hoolega läbi vaadanud, kuid pole seal patoloogilisi muutusi leidnud, samasugused resultaadid said ka Hulanicki (24), Borthen (3), Lopez (29), Patron-Espada (37), ja teised. Küll leidsid nad mikroskoobilisel preparaadil värvkilest ja soonkilest leepirabatsille ja -pesakesi. Trantas (17), Bistis (4), Dühring (17), Hollmann (23), Maucione (30), Poirier (40) leidsid muutusi ka silma põhjas, nägemisnärvil ja värvkilel. Rubert leidis silma põhjas muutusi 23% kõigist leepirahaigeist. Valettas (50) leidis mõlema leepirakuju puhul värvkilel ja soonkilel kollakaid, musti ja valgeid pesakesi,

väga sarnaseid luuesi omadega. Samal ajal konstateeriti ka sarvkile ja värvkile haigusi. Ebatüübilisi retinitis pigmentosa juhtumusi leidis Rubert (44).

Eelnimetatud 223 leeprahaige seas leidsin kahel retinitis pigmentosa sarnase pildi, ühel neist oli ka xerosis conj. ja hemeralopia, kolmandal haigel oli paremas silmas nägemisnärvi (n. opticus) näsa atroofiline. Kas need muutused on ühenduses leepraga või iseseisvad, pole võimalik kindlaks teha.

Läätse tumestused leeprahaigetil olenevad arvatavasti muist põhjustist või vanadusest ja ei ole otsekoheses ühenduses selle haigusega. Soonte ja värvkile muutused leepra puhul sünnitavad läätse toitmises korratust ja võivad kaudselt mõjuda selle tumestuseks. Leeprabatsille pole läätsest kunagi leitud [Poncet (41)]. Läätse paigast äranihkumist on Smit (45) mitu korda konstateerinud. Minu poolt läbivaadatud juhtumuste seas oli 7 läätsetumestust.

Klaaskeha tumestusi on leeprahaigetil leitud, kuid nende etioloogia pole täitsa selge.

Kanapimedus võib tekkida pärastpoolse marasmi ja verevæsuse puhul [Lopez (29)].

Nina limanaha leproosse katarri puhul võivad pisaratorud ummistuda ja vastavaid tagajärgi sünnitada.

Üldiselt kokku võttes leiame, et 223 leeprahaige seas (86 m., 137 n.) kannatasid silma leepra all 196 ehk 87,8% (inclus. ripsmed); tuberoosne kuu 146 haigest 139—95,2%

mac-anaesth. 75 „ 53—70,6%

86 meest 74—86%

137 naisest 120—87,8%.

Võrdluseks toon siin Bortheni, Hulanicki ja Ruberti andmed.

Haigete	Silmahaigete	Mehed	Naised	
üldine arv.	% ^o %			
456	80 % ^o	87 % ^o	74 % ^o	Borthen.
54	76 % ^o			Hulanicki.
202	75 % ^o			Rubert.
223	87,8 % ^o	86 % ^o	87,8	(isikl. andm.).

Neist arvulisist andmeist on näha, et minu poolt läbivaadatud haigeil on silma leeprat arvu poolest veidi rohkem kui siin tähendatud autoritel.

Pimedata suhtes jagunevad leeprahaiged järgmiselt:

	tub. f.	mac. f.	Kokku
Parem silm pime	11	4	15
Pahem silm pime	10	4	14
Mõlemad silmad pim.	13	4	17

Kokku ühe silmaga pimedaid 29 ehk 13%, mõlema silmaga pimedaid 17 ehk 7,6%.

Borthen leidis maculo-anaesthetica kujul ühe silmaga pimedaid 9,5%, mõlema silmaga 13%, tuberoosa kujul ühe silmaga pimedaid 14%, mõlemaga 22%.

Literatuur.

1. Azavedo, Lima und Quedes de Mello. Über das Vorkommen der einzelnen Lepraformen, sowie der Erscheinungen an Augen, Nase und Ohren. Monatshefte f. prakt. Dermat. 1887, № 13.
2. Babes. Die Lepra. Spez. Pathol. u. Therapie v. Nothnagel, XXIV, 2. Wien, 1901.
3. Borthen Lyder und Lie. Die Lepra des Auges. Klinische Studien mit pathol.-anatomischen Untersuchungen Leipzig, 1899.
4. Bistis. Sur la lépre de l'oeil. Arch. d'Ophth. XIX. p. 310—318.
5. Blessig, Karnitzky und Weinstein. Ein Fall von Leprom der Hornhaut. Klin. Monatsbl. f. Augenh. 47, 1909, p. 253—258.
6. Bull, O. B. Forekommer Keratitis neuroparalytica hos spedalske? Norsk. Magaz. for Lægevidenskaben (Christiania) XII. p. 740, 1882.
7. Böckmann, E. Om de spedalskes øienlidelser. Medicinsk revue 1886. Ref. Vierteljahrsschrift für Derm. und Syph. 1887, p. 563.
8. Calderaro. Ricerche cliniche anatomiche sperimentali sulla lepra nodosa del globo oculare ed annessi. Clinica oculistica X. p. 3437—3490, 1909.
9. Carron de Villards. Les affections lépreuses de l'oeil et de ses annexes. Ann. d'Oculist. 1856.
10. Collins, E. Treacher. A case of nodular leprosy affecting the eyes. Ophth. Transact. of the United Kingdom XXIX. p. 223—225, 1909.
11. Gonzalez. Leproma del pais, curacion por la radiografia. Ann. de Oft. XIV. p. 486, 1912.
12. Damsch. Übertragungsversuche von Lepra auf Tiere. Virchows Archiv f. pathol. Anat. XCII. p. 20, 1883.
13. Danielssen et Boeck. Traité de la Spédalskhed. Paris 1848.
14. Djelow. Ein Fall von Lepra des Auges. Protokoll d. Turkestan. med. Ges. Zeitschrift f. Augenheilk. VIII. p. 295, 1901.

15. Doutrelepoint und Wolters. Beiträge zur viskeralen Lepra. Arch. f. Dermatologie u. Syphilis XXXIV. p. 80—82, 1896.
16. Driel, B. M. van. Die Ergebnisse einer Augenuntersuchung bei 350 Leprakranken. Geneesk. tijdschr. v. Nederlandsch-Ind. Bd. 62. II. 6. p. 770—814, 1922. Ref. Zentbl. f. O. X. p. 393, 1923.
17. Dühring, E. und Trantas. Ophthalmoskopische Befunde bei Lepräsen. Deutsche med. Wochenschr. 1900, p. 146—148.
18. Franke. Demonstration mikroskopischer Präparate über Augenlepra. Bericht über d. 29. Vers. d. ophth. Ges. zu Heidelberg, p. 241—243, 1901.
19. Groenouw, A. Beziehungen der Allgemeinleiden und Organerkrankungen zu Veränderungen und Krankheiten der Sehorgane. Berlin, 1920.
20. Hansen and Bull. The leprous diseases of the eye. Christiania, 1873.
21. Hirschberg, J. Ein Fall von Lepra des Auges. Centralbl. f. prakt. Augenheilk. 1891, S. 291—292.
22. Hirschberg, J. Irido-cyklitis leprodes. Centralbl. f. prakt. Augenh. 1888, p. 23—24.
23. Hollmann, H. T. Erkrankungen der Nase, des Halses und der Augen bei Lepräsen. New York. med. Journ. 26 Okt. 1907.
24. Hulanicki, W. Die lepräsen Erkrankungen der Augen. Diss. Dorpat, 1892.
25. Jeanselme, E. und Morax, V. Des manifestations oculaires de la lèpre. Ann. d'Ocul. CXX. 1898.
26. Koebner. Übertragungsversuche von Lepra auf Tiere. Virchows Arch. f. pathol. Anat. LXXXVIII. p. 282, 1882.
27. Krüdener. Über Augenlepra. Petersburg. med. Wochenschr. 1908, p. 209.
28. Leloir, H. Traité pratique et théorique de la lèpre. 1886.
29. Lopez, E. Lepröse Augenkrankungen. Archiv f. Augenheilk. XXII. p. 318—335, 1890.
30. Mancione, L. Contributo clinico anatomico e terapeutico allo studio della lepra oculare. Arch. di Ottalmol. vol. 28, № 11/12. p. 247—260, 1921.
31. Melcher, R. und Ortmann, P. Übertragung von Lepra auf Kaninchen. Berlin. klin. Wochenschrift. 1885, № 13.
32. Meyer und Berger. Lepratumor der Hornhaut von sarkomähnlicher Beschaffenheit. Arch. f. Ophth. XXXIV. 4. p. 219—249 und Rec. d. Ophth. 1899, p. 1.
33. Neisser. Weitere Beiträge zur Ätiologie der Lepra. Virchows Arch. f. pathol. Anat. LXXXIV. p. 514, 1881.
34. Neve, Arthur. Notes on ocular leprosy. British Medical Journal. 1900.
35. Otschapowsky, S. V. Über die Lepraerkrankung des Auges. Vsrt. Ophth. XXV. p. 411—434, 1908.
36. Parinaud. Lèpre anesthésique de l'oeil. Soc. d'Ophth. de Paris 3. VI. 1890.
37. Patron-Espada. Troubles oculaires lépreux. Congrès troisième méd. panaméricain. Ann. d'Ocul. 1901.
38. Pedraglia. Morphötische Augenerkrankungen. Klinisches Monatsbl. f. Augenheilk. X. p. 65—84. 1872.
39. Peter, Luther C. Nodular iritis due to the bacillus of Hansen (leprosy). Slitlamp studies. Arch. of Ophth. vol. 53, Nr. 3, 1924.
40. Poirier. A propos de deux cas de lèpre: traitement et diagnostic de cette affection. Rev. d'Ophth. 1910, p. 381.

41. Poncet. Sur les lésions oculaires de la lèpre tuberculeuse. Semaine méd. p. 10 et Progr. méd. № 2. 1888.
42. Rampoldi. Un caso di lebbra oculare. Ann. di Ottalm. XIV. p. 485, 1885. Ref. Centralbl. f. Augenh. 1886, p. 187.
43. Roeser. Sur la lèpre de paupières. Congrès internat. d'ophth. de Paris. Compte rendu publié par Warlomont. 1862, p. 209.
44. Рубертъ И. О. заболѣваніяхъ глазъ при прокажѣ. Дисс. Юрьевъ 1903.
45. Smit, J. A. K. De lepra in Argentina. Nederl. Tijdschr. v. Geneesk. I. 1907.
46. Stanziale. Ulteriori ricerche sulle inoculazioni di materiale leproso nella camera anteriore dell'occhio dei conigli Clin. Ocul. Luglio. 1911.
47. Sylvester, J. H. Leprous tubercle of the eye. Transact. of the med. and physiol. soc. Bombay. 1870. Ref. Nagels Jahresbericht pro 1870.
48. Talvik, S. La III-me conférence internationale scientifique de la lèpre. Eesti Arst 1923, nr. 11/12.
49. Thin, G. Impfversuche mit Lepragewebe auf Tiere. Vierteljahrsschrift f. Dermat. u. Syphilis. XII. 3. p. 337, 1886.
50. Valettas, A. Ophthalmoskopische Veränderungen bei Lepra. Klin. Monatsbl. f. Augenheilk. LVI. p. 472—477, 1916.
51. de Vincentiis, C. Contribuzione allo studio della lepra oculare. Ann. di Ottalm. IX, I. p. 51, 1880.
52. Vossius. Übertragungsversuche von Lepra auf Kaninchen durch Impfung in die vordere Kammer. Zeitschr. f. vergl. Augenh. 1888.
Vossius. Ein Fall von Lepra des Auges. Sitz. d. Ophth. Ges. zu Heidelberg, 1884.
53. Wesener. Übertragungsversuche von Lepra auf Kaninchen. Münch. med. Wochenschr. 1887, № 16.
54. Wolf. Die Lepra arabum. Virch. Arch. XXVI. p. 49. 1863.
55. Wood D. J. Ocular leprosy. The British Journal of Ophthalmology 1925, № 1.

Deutsches Referat.

Aus der Universitäts-Augenklinik zu Tartu-Dorpat.
(Dir. Prof. Dr. E. Blessig.)

Die Lepra des Auges.

Auf Grund der Untersuchungen von Kranken in den Leprosorien
Estlands.

Assistent Dr. med. **O. Kuriks.**

Im vorigen Jahre wurden von mir in den Leprosorien Estlands 223 Kranke untersucht, nämlich: in Muuli 16, Tarwastu 89, Audaku 58 und Kuuda 60. Unter ihnen leiden an der maculösen Form 74 (28 M. u. 46 W.), an der tuberosen Form 149 (58 M. u. 91 W.).

Von der Lepra werden fast alle Teile des Auges befallen, seltener nur die Netzhaut und der Sehnerv. Die Krankheit erscheint gewöhnlich sekundär.

Bei der Parese der Stirn und Gesichtsmuskeln leidet die Mimik und der Gesichtsausdruck erscheint leblos und erstarrt.

Die Augenbrauen leiden bei der maculösen Form ungefähr um 50 %, bei der tuberosen ungefähr um 100 %. Das Ausfallen der Wimpern fängt vom temporalen Teile an und endigt im nasalen Teile.

Bei der Erkrankung der Endäste des Gesichtsnervs bildet sich Lagophthalmus paralyticus. Derselbe wurde bei maculöser Form in 32 Fällen beobachtet (42,6 %), 12 M. (41,4 %), 20 W. (43,5 %), bei tuberoser Form — in 18 F. (12,2 %), 6 M. (19,7 %) und 12 W. (13,3 %). In schweren Fällen kann der Kranke die Augenlider überhaupt nicht schliessen, die Augen bleiben die ganze Zeit offen, die Hornhaut wird trocken und es bilden sich dort degenerative Prozesse. Schliesst man die Lider mit der Hand, so verharren dieselben einige Zeit in dieser Stellung. Von Complicationen fand sich in 21 Fällen ein Auswärtswenden, und in einem Falle ein Nachinnenwenden des unteren Augenlides; eine Ptosis des oberen Lides in 11 Fällen und eine Parese des Nervus Facialis in 1 F. Entwickeln sich Leprome oder Infiltrate auf den Lidern, so senken sich dieselben, Ptosis bildend; bei der tuberosen Form gab es 28 mal solche Fälle; die Ptosis kann sich auch durch Parese der Muskeln entwickeln.

Die Ränder der Lider fallen verschiedenen leprösen Processen heim, wobei die Wimpern ausfallen; solches gehört gewöhnlich zu den ersten Symptomen der Lepra; in einigen Fällen wuchsen die Wimpern von neuem. Es waren 40 % Erkrankungen der Wimpern bei maculöser, und 75,4 % bei tuberoser Form. — Ein Fehlen der Sensibilität der Lider fand sich bei der I Form in 9,3 %, bei der II Form in 6 % aller Fälle.

Die Schleimhaut der Lider ist gewöhnlich hyperaemisch, in katarrhalischem Zustande; auf ihr sind keine Leprome gefunden worden, die letzteren bilden sich gewöhnlich auf der Episclera des temporalen Teiles des Augapfels und haben in der ersten Zeit das Aussehen einer Phlyktäne. Einige Leprome wurden ausgeschnitten und bakteriologisch untersucht, und es erwies sich, dass dieselben Leprabazillen enthielten. Leprome und Infiltrate auf der Episclera gab es bei 13 % aller tuberosen Erkrankten. Die Farbe derselben ist gelbbrot oder rot, selten blaugrau.

Von Corneaerkrankungen ist Keratitis punctata u. K. parenchymatosa am meisten anzutreffen. Cornealleiden im Ganzen 119 Fälle (85 %), Leprome auf der Cornea beobachtete man in 10 Fällen.

Eine Erkrankung der Uvea bei Leprakranken tritt gewöhnlich in Gestalt einer Iridocyklitis auf. Öfters fand man unter dem Cornealmikro-

skoje Präcipitate auf der Descemet'schen Membran, während sonst subjektiv und objektiv keine Symptome konstatiert werden konnten.

Leprome auf der Iris gehören zu den seltenen Erscheinungen und ihr Erscheinen deutet auf eine Verschlimmerung der Krankheit hin. Nur in 3 Fällen waren dieselben zu finden.

Eine besondere Veränderung auf der Iris war bei 7 Kranken zu konstatieren. Es waren dies kleine Körnchen (nur unter dem Cornealmikroskope sichtbar); ihre Farbe war grau oder gelblich, ihre Form rund oder oval, ohne einen besonderen Bau, dem Aussehen nach solidär, aus gleichförmiger Masse bestehend. Die Körnchen waren einzeln oder gruppenweise verteilt, an einigen Stellen sehr zahlreich, als ob die ganze Iris mit feinem Sande oder Griess bestreut wäre. Der bevorzugte Ort ihres Erscheinens war der temporale Teil der Iris, die Gegend vom circulus irid. minor. In 3 Fällen beobachtete man ähnliche Körnchen auch auf der Cornea. Dieselben wurden abgeschabt, bakteriologisch untersucht und erwiesen sich als Miliarleprome; aller Wahrscheinlichkeit nach gehören die auf der Iris erwähnten Körnchen zu derselben Gruppe. Ähnliche Fälle sind beschrieben von Jeanselme, Morax und Rubert. Im ganzen gab es Uvea-Erkrankungen bei tuberoser Form 43 (307%), bei maculoser Form 14 (18,6%).

Als Veränderung auf dem Augengrunde bei der Lepra gab es in 2 Fällen eine Retinitis pigmentosa und 1 Fall von Atrophia n. opt.

Im ganzen litten von 223 Leprakranken (86 M., 137 W.) an den Augen 194 Kr. (87%):

von 146 tuberos. Kr.	. . .	139 = 95,2%
„ 75 maculos. Kr	. . .	53 = 70,6%
„ 86 Männern	. . .	74 = 86, %
„ 137 Weibern	. . .	120 = 87,8 %

	mac.	tub.	im ganzen
Blinde durch Lepra auf dem rechten Auge	4	11	15
„ „ „ „ dem linken „	4	10	14
„ „ „ „ beiden Augen	4	13	17
Blinde im ganzen auf 1 Auge 29 (13%)			
„ „ „ „ beiden A. 17 (7,6%).			

DIE SENKUNGSREAKTION UND IHR PRAKTISCHER WERT

VON

PROF. A. PALDROCK IN DORPAT

VORGETRAGEN AUF DER XV. VERSAMMLUNG DER MILITÄRÄRZTE ESTLANDS
AM 25. II. 1925 IN REVAL

DORPAT 1925

C. Mattiesen, Dorpat.

Änderung der Senkungsgeschwindigkeit und ihre Ursache.

Mit der Veröffentlichung der Untersuchungen Robin Fåhræus, des Wiederentdeckers der Senkungsgeschwindigkeitsreaktion der roten Blutkörperchen, wurde 1918 diese alte Frage wieder neu angeregt, weil Fåhræus diese scheinbar einfache, in Wirklichkeit aber doch sehr komplizierte Erscheinung wissenschaftlich begründete und bis zu einem gewissen Grade beleuchtete. Sehr fruchtbringend hat seine Anregung gewirkt, indem sie Anlass wurde für die nun zahlreich erscheinenden Veröffentlichungen, welche entweder die theoretische Weiterbegründung des Senkungsphänomens anstrebten, oder aber seine diagnostische Verwendbarkeit bei verschiedenen Krankheitszuständen prüften.

Schon Galen war es aufgefallen, dass bei Gerinnung des Blutes eine sogenannte Speckhaut, die *crusta phlogistica seu inflammatoria*, sich bildet. Beobachtungen der Blutkörperchensenkungsgeschwindigkeit zeitigten (1797) in John Hunter die Meinung, dass das Blutserum des „entzündeten Blutes“ spezifisch leichter sei, als die spezifisch schweren Erythrozyten, was eine beschleunigte Senkung bedinge. Johannes Müller hat aber (1834) bewiesen, dass im defibrinierten Blute — welches ein leichteres spezifisches Gewicht hat — die Senkung langsamer vor sich geht, als im spezifisch gewichtlich schweren nicht defibrinierten Blute. Nicht Verschiebungen des spezifischen Gewichts zwischen Blutplasma oder Serum einerseits und Blutkörperchen andererseits bedingen die Beschleunigung der Blutkörperchensenkung, sondern hierbei spielen eine Rolle sowohl die langsamere Gerinnung, als auch die grössere Quantität des aufgelösten Faserstoffs.

Später machten Nasse (1842) und Lehmann (1863) darauf aufmerksam, dass agglutinierte Erythrozyten

der verkleinerten Gesamtoberfläche wegen sich rascher senken müssen, als isolierte.

So hatte die erste Hälfte des vorigen Jahrhunderts die Frage der Senkung der roten Blutkörperchen nicht endgültig gelöst, was zur Folge hatte, dass das Interesse für dieses Phänomen ganz abflaute. Vorübergehend ist es dann nochmals von Bernacki (1894) und H. Brat (1905) berührt worden, um aber darauf der Vergessenheit bis zum Jahre 1918 zu verfallen.

Fåhræus stellte fest, dass die Senkungsgeschwindigkeit der Erythrozyten bei Gesunden klein und dabei Schwankungen unterworfen ist, welche Tatsachen später von Geppert, Grafe, Leendertz, Linzenmeier und H. Löhr bestätigt worden sind. Auch ist die Reaktion abhängig vom Alter und Geschlecht; im höheren Alter ist bei beiden Geschlechtern die Suspensionsstabilität des Blutes deutlich herabgesetzt und bei Männern ist sie ungefähr 3 mal langsamer, als bei Frauen, welche letzte Erscheinung später von Plaut, Linzenmeier und Bätzold Bestätigung gefunden hat. Sie fanden bei Männern 7—9 Stunden, bei Frauen aber nur 5—6 Stunden Senkungsdauer bis zu einer gewissen Marke vom obersten Teilstrich des Senkungsröhrchens. Dasselbe hat auch Westergren in mehreren hundert Untersuchungen festgestellt. Er fand als normale Senkungswerte in einer Stunde für Männer 1—3 mm, für Frauen aber 3—7 mm; als subnormale bei Männern $\frac{1}{2}$ mm und noch weniger, bei Frauen Werte unter 2—3 mm.

Bei Neugeborenen fand Fåhræus die Erythrozytensenkung sehr verlangsamt — im Vergleich zu Erwachsenen. Eine Erfahrung, die später von Gyorgy dahin ergänzt worden ist, dass die Erythrozytensenkung bei normalen Säuglingen im Alter bis zu einem Monat im Durchschnitt sehr stark verlangsamt ist, während Säuglinge im Alter von über einem Monat eine physiologisch erhöhte Senkungsgeschwindigkeit aufweisen — und zwar am beschleunigtesten in der 6.—8. Woche. Während sie bei 6—25 Tage alten Säuglingen 360—420 Minuten ist, ist sie bei über einem Monat alten Säuglingen im Mittel nur 90 Minuten. Dass an Stelle der verlangsamten Senkung der roten Blutkörperchen im Neugeborenenblut in der 6.—8. Lebenswoche eine starke Beschleunigung eintritt, spricht nach Ansicht Gyorgys

für eine biologisch fundierte „Neugeborenenzeit“, welche die 6.—8. Woche umfasst.

Das Ergebnis der von Bardach am Blute von 13 Kindern vorgenommenen Untersuchungen war: dass kindliches Blut schneller sedimentiert, als das von Erwachsenen; dass bei gesunden Kindern grosse Schwankungen vorkommen, dass aber zwischen Knaben und Mädchen kein Unterschied besteht. Desgleichen fand Bätzold gegenüber Erwachsenen bei gesunden Säuglingen auch eine ganz erheblich beschleunigte Senkungsgeschwindigkeit; während sie bei Erwachsenen 5—7 Stunden beträgt, ist sie bei Säuglingen nur $1\frac{3}{4}$ — $2\frac{3}{4}$ Stunden.

In Übereinstimmung mit älteren Forschern fand Fåhræus weiter, dass die Senkungsgeschwindigkeit unter gewissen pathologischen Bedingungen, namentlich entzündlichen Prozessen, sehr stark zunimmt, so dass sie nicht selten das 50—100 fache derjenigen des normalen Blutes ausmacht. — Auch diese Tatsache ist später vielfach bestätigt worden.

„Die nächstliegende und entscheidende Ursache der Senkungsgeschwindigkeit der Erythrozyten sieht Fåhræus in einer Agglutination der roten Blutkörperchen“ — je grösser die Neigung zu dieser, um so schneller senken sie sich.

Auf Kataphorese-Versuche sich stützend nimmt er an, dass die Agglutination in einer Entladung der elektrisch negativgeladenen Blutkörperchen liege, wobei die Entladung vom positivgeladenen Plasma derart ausgeht, dass die Plasmahaut ihre Ladung dadurch verliert, dass die dieselbe aufbauenden Eiweisskörperchen durch Absorption irgendwie elektrisch neutralisiert werden.

Auch von Plaut, Linzenmeier und Harlinger wird erhöhte Agglutination der roten Blutkörperchen als Ursache der Senkungsbeschleunigung anerkannt; wobei Linzenmeier die Bedeutung der elektrischen Entladung beim Zustandekommen der Agglutination der roten Blutkörperchen gering bewertet, Harlinger aber sie ganz verneint und die Agglutination in engsten Zusammenhang mit dem Fibrinogengehalt des Plasmas gebracht wissen will — weil er gefunden hat, dass die Senkungsgeschwindigkeit der Erythrozyten mit dem Gehalt der Plasmen an Fibrinogen

steigt und fällt, und die Senkungsbeschleunigung parallel dem Zellzerfall im Körper verläuft. Aus der reinquantitativen Höhe der Fibrinquote auf die Senkungszeit zu schliessen; halten W. und H. Löhr nicht für richtig; bei der Senkungsbeschleunigung der roten Blutkörperchen finde eine Zunahme der Labilität des Plasmas statt — eine Verschiebung nach der grob dispersen Phase hin, was durch refraktometrische Bestimmungen nachweisbar ist an einer Zunahme des Fibrinogengehaltes. Auch nach Gerloczy deutet die Fibrinogenvermehrung nur auf einen verminderten Dispersitätsgrad des Plasmas hin, und Bennighof fand bei Untersuchungen der pathologisch sich verhaltenden Plasmen Hinweise darauf, dass dieselben in grosser Menge thermolabile Substanzen enthielten; beim Inaktivieren im Wasserbade von 55° zeigten die pathologischen Plasmen dicken flockigen Ausfall, im Gegensatz zum Plasma der Gesunden, bei denen nur eine Trübung auftritt.

Auch Sachs und Öttingen sind der Meinung, dass die Unterschiede in der Senkungsgeschwindigkeit nicht durch Vermehrung oder Verminderung einer bestimmten Eiweisssubstanz bedingt sind, sondern dass die physikalische Struktur der Eiweisskörper der Blutflüssigkeit hierfür massgebend ist; somit der Dispersitätsgrad der Eiweisskörper und nicht die Quantität des Fibrinogens den Ausschlag gibt. Von den einzelnen Eiweissfraktionen des Blutes hat den niedrigsten Dispersitätsgrad das sehr labile Fibrinogen, in der Mitte steht das Globulin, während das Albumin hochdispers und daher relativ stabil ist. Öttingen sieht in der Verschiedenheit der Erythrozytensenkung den Ausdruck einer verschiedenen Plasmastabilität. Später ist durch die Untersuchungen Powny's bestätigt worden, dass die Fibrinogenvermehrung keinen Einfluss auf die Senkungsbeschleunigung hat, dass aber die Dispersionsfähigkeit des Plasmas und auch die Beschaffenheit der Blutkörperchen eine Rolle beim Zustandekommen der Erscheinung haben.

Nach Auffassung Höber's und Mond's kommt die Aufhebung der normalen Stabilität der Blutkörperchensuspension in der Schwangerschaft und bei Krankheiten dadurch zustande, dass in der Adsorptionshülle der Blutkörperchen Globuline mehr

oder weniger an die Stelle des Albumins treten; durch Adsorption von Fibrin und Globulin an Stelle des Albumins nähert sich der isoelektrische Punkt der roten Blutkörperchen dem des neutralen Blutes, wodurch eine grössere Neigung zur Ausflockung oder Agglutination eintritt. In verschiedenen Eiweisslösungen ist die negative elektrische Ladung der Erythrozyten am grössten in den Albuminlösungen (normales Plasma), geringer im Globulin — und am geringsten in Fibrinlösungen. Die Wirkung der Eiweisskörper richtet sich aber, abgesehen von der Lage ihres isoelektrischen Punktes, auch noch nach ihrem Lösungszustande, insbesondere nach ihrer Viskosität, durch welche der Blutkörperchenoberfläche ein verschiedenes Mass von Klebrigkeit erteilt wird.

Musa hat in 24 Fällen von Gravidität in allen Monaten die Senkungsgeschwindigkeit in Beziehung zum Albumin-Globulin-Quotienten gemessen. Zur Fällung der Globuline benutzte er die von Hove angegebene Methode des Aussalzens mit Na. sulfat. Er bestimmte bei schwangeren und normalen Personen vergleichend die gesamte Globulinfraction, ohne eine Trennung in Serumglobulin und Fibrinogen durchzuführen. Er fand, dass der Globulingehalt des Plasmas Schwangerer zwischen 40 und 50% schwankt, ganz unabhängig von der Senkungsgeschwindigkeit — was gegen die Annahme Höber's spricht, dass in allen Fällen der beschleunigten Senkung eine Verschiebung der im Plasma vorhandenen Eiweissanteile zu Gunsten der Globuline vor sich gegangen ist.

Wöhlisch und Bohnen aber wenden sich gegen Musa und zeigen, dass es ihm entgangen ist, dass übereinstimmend von Lewinski, Landsberg und Krösing eine Vermehrung gerade der für die Blutkörperchensenkung besonders wichtigen Fibrinogenfraction gefunden wurde. Wöhlisch und Bohnen fanden im Blute Schwangerer elastische Fäden, durch welche die hämagglutinierten Erythrozyten miteinander zusammengehalten werden. Die Substanz dieser Fäden muss wahrscheinlich als ein Gel des Fibrinogens angesprochen werden.

Auch W. und H. Löhr, Pribram und Klein, sowie Petschacher schreiben dem Globulinanteil des Plasmas eine Rolle zu. Richter untersuchte in 123 Fällen die Blut-senkung und Isohämagglutination parallel und

fand keinen Zusammenhang zwischen beiden Erscheinungen.

Zur Entscheidung der Frage, ob das Verhalten der Senkungsgeschwindigkeit in den Blutkörperchen oder im Plasma liegt, vertauschte Bernighof Blutkörperchen von raschsenkendem Blut mit solchen von normal sich verhaltendem, und es erwies sich hierbei, dass im Plasma Substanzen vorhanden sind, welche eine Beschleunigung der Senkungsgeschwindigkeit herbeiführen können. In derselben Weise beobachtete Puxeddu schnellsenkendes lepröses und normales Blut und fand auch, dass die Beschleunigung im Plasma lag, nicht aber in den Blutkörperchen.

Während Linzenmeyer, Bönninger und Hermann das Plasma als Hauptursache ansehen, lassen sie das spezifische Gewicht der Erythrozyten nur als mitbestimmend gelten. Auf Grund seiner Versuche schliesst sich Krüger voll und ganz Abderhalden an, dass dem Plasma als solchem bei der Suspensionsstabilität des Blutes eine grosse Bedeutung zukommt, wobei jedoch die roten Blutkörperchen mitbestimmend sind. Opitz und Frei aber konnten eine Abhängigkeit der Senkungsgeschwindigkeit vom spezifischen Gewicht der Erythrozyten nur bei Anämien im Kindesalter feststellen.

Veränderung des Fibrinogens oder der elektrischen Ladung der Erythrozyten ist nach Mikulicz-Radecki die Ursache der Verlangsamung der Erythrozytensenkungsgeschwindigkeit nach stattgehabter Röntgenbestrahlung; Pewny dagegen sah der Röntgenbestrahlung eine Senkungsbeschleunigung folgen, und Richter gibt an, dass auf Röntgen-, Narkose- und medikamentöse Einwirkung die Senkungsgeschwindigkeit sich ändert, jedoch nicht die Isohämagglutination.

Die Dichte der roten Blutkörperchen, d. h. ihre Menge pro Rauminhalt, scheint nach Vida einen Einfluss auf die Senkungsgeschwindigkeit zu haben. Bennigson und auch Sadlon haben bei ihren Versuchen keinen Parallelismus zwischen Erythrozytenzahl und Senkungsgeschwindigkeit feststellen können. Krüger fand, dass mit steigender Menge der Blutkörperchen in physiol. Kochsalzlösung als Suspensionsflüssigkeit die Senkungsgeschwindigkeit abnahm; das

gleiche hat Plaut im Serum und Abderhalden im Plasma gefunden. Während Krüger fand, dass die Konzentration der als Suspensionsflüssigkeit dienenden Kochsalzlösung keine Änderung in der Senkungsgeschwindigkeit der Erythrozyten verursacht, hat Schemensky diese durch Blutverdünnung und Änderung des Salzgehalts des Serums beeinflusst gesehen.

Abderhalden (Pflügers Arch. f. d. ges. Physiologie S. 193) verlangt, dass man Senkungsgeschwindigkeitsversuche stets mit der „gleichen Masse“ Blutkörperchen ausführen soll; Bönniger und Hermann aber wollen den Fehler ausgeschaltet wissen, der durch die Verschiedenheit des ursprünglichen Blutkörperchenvolumens entsteht. Je kleiner das Blutkörperchen, desto schneller ist die Senkung; was z. B. ohne weiteres die beschleunigte Senkungsgeschwindigkeit bei den Frauen gegenüber den Männern erklärt. Die von ihnen immer nur mit gleichem Volumen von roten Blutkörperchen angestellten Versuche, zu welchen 6 Männer und 10 Frauen das Blut gaben, ergaben gleiche Mittelwerte sowohl für Männer als auch für Frauen. Damit ist nach ihrer Ansicht der Beweis erbracht, dass die bisher von allen Autoren festgestellte höhere Senkungsgeschwindigkeit bei den Frauen ausschliesslich der Nichtberücksichtigung des Blutkörperchenvolumens zuzuschreiben ist.

Vorschütz untersuchte an 331 Fällen die Wirkung unspezifischer Reize (subcutan injizierte Proteinkörper) aufs Blut und fand: die Blutkörperchenzahl ist oft gleich nach der Injektion vermindert, um 2 Stunden später vermehrt zu sein; die Blutgerinnung und Sedimentierung der Erythrozyten ist beschleunigt und die unspezifische Agglutination erhöht; rote Blutzellen hypoplastischer Form nehmen Eiweiss auf, Zellen hyperplastischer Form aber geben Eiweiss ab.

Die rote Blutzelle zeigt also infolge des Reizes die Tendenz ihr verlorenes dynamisches Gleichgewicht wieder anzustreben. Diese Tendenz hält etwa 3 Tage an.

Auch H. Löhr und Stralinger sahen nach intramuskularen und subcutanen Injektionen von Eiweisskörpern, und Löhr noch nach Milch, Pferdeserum, kolloidalen Silberpräparaten, Adrenalin- und Pilocarpininjektion, schon nach 2 Stunden, in seltenen Fällen erst nach 3—4 Stunden, eine beschleunigte Sedimentierung der Blutkörperchen eintreten,

welche bis zu 10 Tagen anhielt, wobei nach Strålinger der Fibrinogenspiegel erhöht blieb.

Raue sah alle Elektrolyte stark hemmend auf die Senkungsgeschwindigkeit der Erythrozyten wirken, was er auf eine durch Elektrolyte bedingte Quellung zurückführt; er fand, dass die hemmende Wirkung auf die Senkungsgeschwindigkeit parallel geht mit der quellenden Wirkung der Elektrolyte auf kolloidale Eiweisskörper.

Nach CO_2 -Durchströmung sah Gyorgy verlangsamte Senkung, was sich als unabhängig von der Agglutination erwies.

Stern hält die Sedimentierung für wahrscheinlich vom Ionengleichgewicht beeinflusst; Schubert aber glaubt, dass die Ursache der Senkungsbeschleunigung wahrscheinlich in der Änderung der Funktion der innersekretorischen Drüsen zu suchen sei.

Westergren sieht als Ursache der vermehrten Senkungsgeschwindigkeit eine Globulinvermehrung an, welche durch Zellzerfall im Sinne Herzfeld's und Klinger's bewirkt wird, wie es sich auch mit seinen Beobachtungen gut in Einklang bringen lässt. Nach Stuber fassen Herzfeld und Klinger die Eiweisskörper als Gemische von kolloidalem Eiweiss und Abbauprodukten derselben auf; letzteren verdanken die Eiweisskörper ihre Wasserlöslichkeit. Werden die Abbauprodukte entfernt, so fallen die Eiweisskörper aus. Sie betrachten das Fibrinogen als ein durch Eiweissabbauprodukte in Lösung gehaltenes Fibrin, letzteres als ein von seinen Spaltprodukten befreites Fibrinogen. Die Abbauprodukte müssen, um lösend zu wirken, in NaCl -Salzverbindung vorhanden sein; werden sie in CaCl_2 -Verbindungen umgewandelt, so bewirken sie Gerinnung. Die Gerinnung werde so durch alle Substanzen ausgelöst, welche dem Fibrinogen die zu seiner Lösung erforderlichen NaCl -Salz-Abbauprodukte entziehen, resp. letztere in CaCl_2 -Verbindungen überführen. Zu diesen Substanzen rechnen die Autoren das Thrombin, welches als eine CaCl_2 -Verbindung gewisser Eiweissabbauprodukte definiert wird. Diese Theorie benötigt kein eigentliches Fibrinferment zur Erklärung des Zustandekommens der Gerinnung — ist also eine rein physikalisch-chemische Betrachtungsweise und steht im Gegensatz zu der Fermenttheorie.

Nach Berde sind Bedingungen für eine erhöhte Senkungsgeschwindigkeit vor allem akute Entzündungen und Resorption von Bakteriengiften und Zellzerfallsprodukten.

Vida betont, dass als Ursache sicher nicht etwa das Fieber allein in Betracht kommt, wohl aber vielleicht Eiweissabbauprodukte, wie sie z. B. besonders reichlich bei bestrahlten Carcinomen auftreten. Wiechmann und Schröder weisen darauf hin, dass Einschwemmung von höheren Eiweisspaltprodukten in die Blutbahn eine auffallende Senkungsbeschleunigung der roten Blutkörperchen zur Folge hat.

Sadlon spricht sich dafür aus, dass die Senkungsgeschwindigkeit jedenfalls zum wesentlichen Teil auf einer Veränderung des Blutplasmas beruht, die ihrerseits wiederum vom Grade des Zellzerfalls im Körper abhängig ist.

Gerloczy fand, dass die Senkungsreaktion mit gewissen Plasmareaktionen und mit der Alkohol-Kochsalz-Fällungsreaktion des Serums (Dorányi) proportional ist; denn gleichsinnig fielen sie aus bei gewissen mit hochgradigem Eiweisszerfall verbundenen Krankheiten.

Nach Leendertz besteht eine Abhängigkeit der Sedimentierungsgeschwindigkeit von der molekulären Konzentration des Blutplasmas; Bennighof aber misst dem Konzentrationsgrade des Plasmas nur geringen Einfluss auf die Senkungsgeschwindigkeit zu.

Vorschütz bestimmte den N-Gehalt der gewaschenen Blutkörperchen bei verschiedenen Krankheiten und im Blute verschiedener Tiersorten. Es ergaben sich hier grosse Differenzen: perniziöse Anämie, Diabetes mellitus und Carcinome gaben die grössten Werte — bis zu 36%, Tuberkulosen die niedrigsten — etwa 26%. Daher nimmt er an, dass der Nukleoproteidgehalt der Zelle, analog dem Serumglobulin, die Senkungsgeschwindigkeit beeinflusst, und dass diese beiden Faktoren für den Ausfall der Senkungsgeschwindigkeit verantwortlich gemacht werden müssen. Gabbe hat Bedenken gegen diese Annahme, dass Nukleoproteide der Blutkörperchen die Ladung beeinflussen; ebenso vermag auch Globulin nicht Blutkörperchen umzuladen, weil es im Blute negativ geladen ist. Zweifelhaft erscheint auch Wiechmann die Bedeu-

tung des Eiweissgehaltes der Blutkörperchen für die Senkungsgeschwindigkeit des Blutes.

Plaut fand bei weiblichen Geisteskranken im allgemeinen Beschleunigung und erhöhte Sedimentierungszahlen, als bei männlichen Geisteskranken, was in den Verschiedenheiten des Haemoglobingehaltes seinen Grund haben konnte. Er und auch Bönniger stellten aber fest, dass Sedimentzahlen mit den Haemoglobinwerten verglichen nicht in Beziehung zueinander gebracht werden können. Wenn Bürker und seine Schüler dieses doch tun wollen auf Grund dessen, dass sie bei einer Chlorose die Senkungsgeschwindigkeit 4,2 mm pro Stunde, bei einer perniziösen Anämie aber 7,8 mm pro Stunde gefunden haben, indem sie dem Haemoglobingehalt der Erythrozyten und ihrer Grösse einen grossen Einfluss auf die Senkungsgeschwindigkeit zumessen, so müssen ihnen gegenübergestellt werden die Untersuchungen Sadlons. Sadlon untersuchte 6 Fälle von perniziöser Anämie im akuten Stadium, bei welcher Erkrankung ein gesteigerter Zellerfall und speziell ein Zerfall der Blutzellen stattfindet, und konstatierte allemal eine enorme Senkungsbeschleunigung. — Als Gegenstück dazu konnte er einen Fall von Geisböck'scher hypertotonischer Polycythaemie, bei dem mit der Möglichkeit eines den physiologischen Verhältnissen gegenüber herabgesetzten Zerfalls der Blutzellen gerechnet werden kann, wiederholte mal untersuchen und fand dabei stets: einen gegenüber dem normalen um mindestens das Fünzfach reduzierten Senkungswert. Sadlon zieht hieraus den Schluss, und das wohl mit Recht, „dass hier die Senkungsbeschleunigung abhängig ist vom Grade des Zellerfalls“; was von Bürker nicht in Betracht gezogen worden ist.

In Übereinstimmung mit den Angaben von Biernacki, de Haan, Linzenmeier, Öttingen und Starlinger fand auch Krüger, dass die Senkungsgeschwindigkeit der Blutkörperchen im Serum wesentlich vermindert ist gegenüber der Senkungsgeschwindigkeit im Plasma. Da die Viskositätsbestimmungen ergaben, dass die relative Viskosität des Plasmas grösser ist, als die des Serums, so hat eine gewisse Berechtigung die Annahme eines Zusammenhanges zwischen Viskosität der Suspensionsflüssigkeit und der Senkungsgeschwindigkeit der Ery-

throzyten — im Sinne einer Steigerung der Senkungsgeschwindigkeit mit zunehmender Viskosität. Berichten ja schon ältere Physiologen, dass mit Steigerung der Viskosität durch Zusatz visköser Lösungen zum Blut Hand in Hand geht eine Beschleunigung der Senkung der roten Blutkörperchen. Versuche dieser Art sind in letzter Zeit von Gerloczy, Kaufmann, Linzenmeier und Krüger mit Zusätzen von Agar-, Gelatine-, Stärkekleister- und anderen viskösen Lösungen zu den Suspensionsflüssigkeiten ausgeführt worden, welche alle bestätigen, dass die Senkungsgeschwindigkeit der Erythrozyten, unter sonst gleichbleibenden Bedingungen, bis zu einem gewissen Grade mit der Konzentration und Viskosität der Suspensionsflüssigkeit wächst.

Auch W. und H. Löhr fanden stets parallel zur Senkungsgeschwindigkeit eine erhebliche Viskositätszunahme, was auch von Pribram, Klein und Petschacher bestätigt worden ist, so dass sie den Satz aufgestellt haben: die höchsten Werte der relativen Viskosität finden sich immer bei den kürzesten Senkungszeiten.

Auf einen anderen Faktor weist Kürten hin, nämlich dass Cholesterin auf die Sedimentierung der roten Blutkörperchen deshalb beschleunigend wirke, weil es eine elektrische Isolation der Zelle und damit Ladungsverminderung bewirkt; antagonistisch wirkt das Lecithin, indem es die Sedimentierung hemmt und schon in geringen Spuren aufladend wirkt. Aus seinen Reagensglasversuchen schloss er, dass der Lipoidquotient auch in vivo von Einfluss sein dürfte, und das ist auch von Brinkmann, Wastl, Pribram, Klein und Gyorgy bestätigt worden; während Bennighof vom Cholesteringehalt des Blutes keine wesentliche Beeinflussung der Senkungsgeschwindigkeit gesehen hat. Gyorgy hat auf die Verlangsamung der Senkungsgeschwindigkeit gewaschener roter Blutkörperchen durch Lecithinzusatz zur Suspensionsflüssigkeit hingewiesen, und Gabbe ist der Nachweis der differenten Wirkung der Blutlipide auf die Plasmastabilität gelungen. Gyorgy und Jerisch glauben sogar den Lipoiden in der Bestimmung der kolloidalen Plasmastruktur eine ausschlaggebende Bedeutung beimessen zu dürfen. Auffällig war nach Gyorgy die Lipoid-

armut im Plasma von Neugeborenen; das Verhältnis des Cholesterins zum Lecithin ist im mütterlichen Serum (260:10) grösser, als im kindlichen Serum (165:7,5). Letzterer Befund steht in gutem Einklang mit der von Kürten nachgewiesenen senkungsbeschleunigenden Wirkung des Cholesterins und mit der erhöhten Labilität des mütterlichen Plasmas.

Rothe hält alle bisher geäusserten Theorien zum Zustandekommen der Senkung für unzureichend und daher entbehrlich. Die Senkung ist zu analysieren in drei Phasen, welche sind: 1) Präagglutination — die Phase der Einzelsenkung, des langsamen Sinkens; 2) Agglutinationssenkung — Senkung der Agglutinate, schnelles Sinken, und 3) Sackung — ein Vorgang, bei dem die Agglutinate nicht mehr fallen, sondern sich nur noch zusammensacken — die Phase der Hemmung durch Raumbeschränkung. Die Ursachen in den verschiedenen Phasen sind nicht absolut die gleichen.

Das Gesagte zusammenfassend ergibt sich Folgendes:

Die Senkungsgeschwindigkeit ist bei gesunden Menschen klein und dabei Schwankungen unterworfen. Dasselbe Zeichen am Senkungsröhrchen, welches die Senkung beim Männerblut erst in 7—9 Stunden erreicht, erreicht sie beim Frauenblut schon in 5—6 Stunden; gegenüber den Männern weisen also Frauen eine beschleunigte Senkungsgeschwindigkeit auf. Bei Säuglingen ist die Senkung in den ersten 4 Wochen sehr verlangsamt, bei älteren Säuglingen aber sehr beschleunigt — auch im Vergleich zu Erwachsenen. Am beschleunigtesten ist sie in der 6.—8. Lebenswoche, wobei ein auffallender Lipoidmangel des Blutes sich feststellen lässt, so dass man geneigt wäre von einer biologisch fundierten „Neugeborenenzeit“ zu sprechen. Im Verhalten des Kinderblutes lässt sich kein Unterschied zwischen Knaben und Mädchen finden und bestehen auch hier grosse Schwankungen.

Beschleunigt ist die Senkung unter pathologischen Bedingungen, als da sind: mit Fieber verlaufende Erkrankungen, entzündliche Prozesse, Blutkörperchenzerfall, Resorption von Bakteriengiften, Zellzerfalls- und Eiweissabbauprodukten im Körper. Die Senkungsbeschleunigung ist abhängig vom Grade des Zellzerfalls; ja zwischen Beschleunigung und Re-

sorption lässt sich ein Parallelismus feststellen. Einschwemmung von höheren Eiweisspaltprodukten in die Blutbahn hat eine auffallende Senkungsbeschleunigung zur Folge.

Parenteral in den Körper gelangtes fremdartiges Eiweiss hatte schon nach 2 Stunden eine Senkungsbeschleunigung zur Folge, und diese hielt bis zu 10 Tagen an. Dabei nahmen Blutzellen hypoplastischer Form Eiweiss auf, Zellen hyperplastischer Form aber gaben Eiweiss ab; infolge des Reizes zeigt die rote Blutzelle die Tendenz ihr verlorenes Gleichgewicht anzustreben, welche mehrere Tage anhält.

Stets ist vom Grade des Zellzerfalls im Körper abhängig der Globulingehalt des Blutplasmas. Den niedrigsten Dispersitätsgrad hat das sehr labile Fibrinogen, in der Mitte steht das Globulin, während das Albumin hochdispers und daher relativ stabil ist. Die Eiweisskörper können auch aufgefasst werden als ein Gemisch von kolloidalem Eiweiss und Abbauprodukten desselben, welche letzteren die Eiweisskörper ihre Löslichkeit verdanken. Treten im roten Blutkörperchen Globuline an die Stelle des Albumins, so ändert sich ihr isoelektrischer Punkt, der negativ ist, indem er sich mehr dem neutralen Blute nähert, wobei eine grössere Neigung zur Ausflockung oder Agglutination eintritt und zugleich auch Senkungsbeschleunigung. Senkungsbeschleunigend wirkt auch Cholesterin, indem es eine elektrische Isolation der Zelle und damit eine Ladungsverminderung bewirkt; Lecithin dagegen wirkt aufladend und damit die Sedimentierung hemmend. Elektrolyte bedingen Verlangsamung der Senkung und daher Quellung der roten Blutkörperchen, welche quellende Wirkung auf kolloidale Eiweisskörper parallel geht mit der Senkungsgeschwindigkeit. Auch durch Röntgenbestrahlung wird die Sedimentierung beeinflusst, ebenso wie durch Narkose und medikamentöse Einwirkung. CO₂-Durchströmung verlangsamt die Senkung ganz unabhängig von der Agglutination.

Als die Senkung beeinflussende Momente können in Betracht kommen Wechselbeziehungen zwischen Erythrozyten und Suspensionsflüssigkeit bezüglich ihres spezifischen Gewichts- oder Mengenverhältnisses zu einander, denn mit steigender Menge der Blutkörper-

chen verlangsamt sich die Senkungsgeschwindigkeit; weshalb die Forderung, dass Senkungsversuche immer mit dem gleichen Volumen der Blutkörperchen ausgeführt werden sollen, berechtigt ist.

Als nächstfolgende Ursache der beschleunigten Senkungsgeschwindigkeit der Erythrozyten ist ihre Agglutination zu betrachten: je grösser die Neigung zu dieser, um so schneller senken sich die roten Blutkörperchen.

Die Agglutination ihrerseits wird beschleunigt entweder durch einen vermehrten Fibrinogengehalt des Plasmas oder, was wahrscheinlicher ist, nicht durch die reinquantitative Höhe der Fibrinogenquote, sondern durch die im Plasma sich findenden Eiweissfraktionen — in Sonderheit durch den Globulinanteil. Durch letzteres wird die Agglutinationsbeschleunigung in Abhängigkeit von der Plasmastabilität gestellt, wobei in Betracht kommt die physikalische Struktur der Eiweisskörper, welche eine Verschiebung nach der grobdispersen Phase hin erfahren haben, was sich in Zunahme der Labilität des Plasmas und der Senkungsbeschleunigung äussert.

Eine wesentliche Rolle bei der Sedimentierung spielen der Lösungsgrad der roten Blutkörperchen und besonders der Viskositätsgrad der Blutflüssigkeit; zwischen Senkungsgeschwindigkeit und Viskositätszunahme besteht ein Parallelismus, denn die höchsten Werte der relativen Viskosität finden sich immer bei den kürzesten Senkungszeiten.

Die Hauptursache der Senkungsbeschleunigung liegt also im Plasma, während den roten Blutkörperchen nur eine mitbestimmende Rolle zukommt.

Analog dem Serumglobulingehalt kann die Sedimentierung auch abhängig sein vom Nukleoproteidgehalt der roten Blutkörperchen; ihr Haemoglobingehalt aber beeinflusst in keiner Weise die Senkung.

Untersuchungsmethoden für die Senkungsreaktion.

Plaut benötigt zur Ausführung seiner Untersuchungsmethode 7,5 cm Blut. In den 10 cm fassenden Probierzylinder, welcher 1 cm im Durchmesser hat und mit Millimeterstrichen versehen ist, füllt er zuerst 2,5 cm einer 1,1 prozentigen Na.citricum-Lösung, welcher 0,7 % Na.chloratum zugesetzt ist, und lässt dann tropfenweise Blut aus der vena mediana bis zum Teilstrich 10 herabtropfen. Ablesen der Senkung nach 1, 6 und 24 Stunden und Notieren der erreichten Teilstriche.

Linzenmeier saugt in eine genau graduierte 1 ccm Spritze 0,2 ccm einer frischbereiteten 5% Na.citricumlösung und darauf 0,8 ccm Blut aus der vena mediana. Durch weiteres Herausziehen des Stempels zieht man eine kleine Luftblase in die Spritze, mischt durch mehrmaliges Kippen der Spritze den Inhalt sorgfältig und füllt dann das Gemisch ins 5 mm weite Beobachtungsröhrchen — genau bis zum obersten Teilstrich, welcher 1 ccm anzeigt. Dann beobachtet man die Zeit, in welcher der obere Rand der roten Blutkörperchen jenen Teilstrich erreicht hat, der 18 mm unter dem obersten liegt.

Die Westergren'sche Methode arbeitet mit 2,5 mm weiten Röhrchen von 30 cm Länge, ein Gemisch von 2,0 Blut und 8,0 einer 3,8 % Na.citricumlösung zu einer 200 mm hohen Säule in die Röhrchen füllend. Ablesen nach 1, 2 und 3 Stunden.

Der von Katz modifizierten Westergren'schen Methode bedient sich Musa, dabei jedoch 2 mm weite Röhrchen benutzend, welche mit einer Säule von 200 mm Länge gefüllt werden. Als Untersuchungsobjekt dient ein Gemisch von 1,6 Blut und 0,4 einer 5% Na.citratlösung. Die Senkungsstrecken werden nach 1, 2 und 3 Stunden notiert. Wenn die Senkung in der ersten Stunde nicht auffallend gross ist, so berechnet man aus 3 aufeinanderfolgenden Stunden den „Senkungsmittelwert“.

Von letzterem Gemisch saugt Götze 1 ccm in die 5 mm weite Lieberg'sche Tuberkulinspritze und stellt sie dann senkrecht auf. Von oben gerechnet entspricht der 30. Teilstrich der Linzenmeier'schen 18 mm-Marke, welche als das zu erstrebende Ziel der Senkung anzusehen ist. Ablesen erfolgt alle 10 Minuten.

2 ccm desselben Gemisches füllen Peschel und Vida in 5 mm weite, graduierte Röhrchen des Sahli'schen Haemoglo-

binimeters, so dass die Säule gerade bis zur Marke 100 reicht. Das Ablesen erfolgte in der ersten Stunde alle 10 Minuten, in den nächsten 2—3 Stunden aber alle 30 Minuten. Die abgelesenen Zahlen ergaben die jeweilige Senkungshöhe in Prozenten der Gesamthöhe und wurden in Kurvenform in ein Koordinatensystem eingetragen, dessen senkrechter Schenkel die Höhe der Blutkörperchensäule und dessen wagerechter die Zeit des Ablesens angibt. Bei Senkungsbeschleunigung treten die grössten Ausschläge in der ersten und zweiten Stunde auf.

Der besseren Übersicht wegen habe ich die oben angeführten Untersuchungsmethoden in eine vergleichende Tabelle geordnet.

	Plaut	Westergren	Linzenmeier	Peschel-Vida	Katz (Musa)	Götze
Höhed. Blutsäule	113 mm	200 mm	51 mm	100 mm	200 mm	Lieberg'sche Spritze
Blutmenge	7,5 ccm	2,0 ccm	0,8 ccm	1,6 ccm	1,6 ccm	0,8 ccm
Durchmesser d. Röhrchen	1 cm	2,5 mm	5 mm	5 mm	2 mm	5 mm
Sol. natrii citrici	2,5 Gemisch 3,8%; 8,0ccm 5%; 0,2ccm 5%; 0,4ccm 5%; 0,4 ccm 5%; 0,2 ccm aus 1,1 Na.citricum + 0,7 Na.Cl.					

Plaut, Westergren, Peschel, Vida, Musa und Götze rechneten mit Teilstrichen, welche die Senkung in bestimmten Zeiteinheiten erreichte; Linzenmeier bestimmte die gebrauchte Zeit, in welcher die Senkung jenen Teilstrich erreicht hatte, der 18 mm unter dem obersten lag.

Keine der aufgezählten Methoden ist frei von Nachteilen. Hervorgehoben sei hier nur, dass die Plaut'sche zur Beobachtung grosse Blutmengen benötigt, was bei Wiederholung der Untersuchung sich als unliebsam erwiesen hat; und dass die Linzenmeier'sche sehr zeitraubend ist — besonders bei Fällen mit langsam vor sich gehender Senkung, wobei es sehr schwer ist den Zeitpunkt genau festzustellen, wann der Teilstrich 18 mm wirklich erreicht ist.

Noch auf folgendes macht Linzenmeier aufmerksam. Er untersuchte ein und dasselbe Blut in Gläschen von 5 mm Durchmesser und erhielt die Senkungsreaktion nach 12 Stunden 40 Min., in Gläschen von 4 mm Durchmesser aber war die Senkungsreaktion schon in 8 Stunden 31 Min. erreicht — engere Senkungsröhrchen beschleunigen also die Senkung, welcher Umstand beim Gegenüberstellen der von ver-

schiedenen Autoren erhaltenen Senkungswerte in Betracht gezogen werden muss.

Weiter sah er gesunde Männer die Reaktion um 8 Uhr morgens in 12 Stunden 40 Min. geben, um 2—3 Uhr nachmittags aber in 8 Stunden — also auch die Tageszeit spielt bei der Senkungsreaktion eine Rolle.

Während Josefowicz vorausgegangenen grösseren Mahlzeiten und Büscher der Nahrungsaufnahme oder gar bestimmten Nahrungsgruppen einen Einfluss auf die Senkungsreaktion zumessen, verneint das H. Löhr.

Nach Linzenmeier müssen die Gläschen der Reinigung gut zugänglich sein und sterilisiert werden können, um Bakterienwirkung als Fehlerquellen auszuschalten.

Berzeller weist darauf hin, dass schon durch eine sehr geringe Schiefstellung der Senkungsröhrchen die Senkung sehr erheblich schneller wird, als sie es in senkrechter ist. Nur peinlich genaue senkrechte Stellung der Untersuchungsröhrchen schützt vor unterlaufenden Fehlern während der Beobachtung. — Mit steigender Verdünnung verschwindet die scharfe Grenze zwischen Blutkörperchen und Plasma mehr und mehr; Schütteln bedingt Änderung im Ausfall der Reaktion; ebenso die Zeit, welche zwischen der Blutentnahme und der Untersuchung verstreicht.

Wie Josefowicz zeigte, ist die Senkungsgeschwindigkeit ausser von bestimmten Krankheitsprozessen, auch noch von rein äusseren Momenten abhängig — wie z. B. von der Temperatur, in welcher die Versuche ausgeführt werden. Diese Angabe ist von Löwenberg bestätigt worden, der die Senkungsgeschwindigkeit bei Eisschranktemperatur niedriger, bei Brutofentemperatur aber höher fand, als bei Zimmertemperatur. Das gilt nicht nur für normale Fälle, sondern auch für die meisten Fälle beschleunigter Blutkörpersenkung.

Wie vorhin schon ausgeführt, verlangt Rothe, dass man bei Senkungsbeobachtungen die hierbei zu Tage tretenden 3 Phasen analysieren solle: die Präagglutination — das langsame Sinken, die Agglutinationssenkung — das schnelle Sinken und die Sackung — die Phase der Hemmung durch Raumbeschränkung, weil die Ursachen für die verschiedenen Phasen nicht absolut die gleichen sind.

Blumenthal macht auf 3 Nebenbeobachtungen bei Sen-

kungsreaktionen aufmerksam. Nach Ablauf der Senkung kann man deutlich 3 Schichten unterscheiden; oben das klare Serum, dann die weissliche Schicht — die Leukozyten, und unten die Säule der abgesetzten Erythrozyten.

1) 24 Stunden nach aufgestellter Senkungsreaktion kann man die einzelnen Schichten miteinander vergleichen und Schlüsse aus den verglichenen Werten ziehen.

2) Die weissliche Schicht besteht aus Leukozyten, und ist normalerweise bei einer Zahl von 7000 Leukozyten im Kubikmillimeter etwa 1,3–1,5 mm breit. — Bei Leukozytosen tritt eine entsprechend breitere Scheibe auf, während bei Leukopenien nur ein ganz schmaler Saum von Leukozyten sichtbar ist.

3) Das normalerweise einen weisslichgelben Ton aufweisende Serum zeigt bei deutlich intensiv gelbem Ton mit Sicherheit eine Erhöhung des Bilirubingehaltes des Serums an und lässt dadurch wichtige Schlüsse auf vorhandene Haemolyse zu.

Durch diese 3 Nebenbeobachtungen hebt sich der Wert der Senkungsprobe.

Horvat findet, dass die Linzenmeier'sche Methode folgende Vorzüge hat: sie ist einfach, genau, allen zugänglich und billig.

Einfach, weil das Resultat leicht abzulesen ist und wenig Blut benötigt wird, was wiederholte Untersuchungen ermöglicht; die Genauigkeit hängt ab: von der untersuchten Blutmenge, Form und Durchmesser der Untersuchungsgläschen, Höhe der Blutsäule, Menge und Konzentration der verwandten Na.citricumlösung und von der Art des Ablesens der Resultate. Die von Linzenmeier verwandten, 5 mm im Durchmesser messenden Gläschen sind in ihrer ganzen Länge technisch noch genau schleifbar — schliessen also Fehlerquellen aus, die bei nicht innengeschliffenen engeren Gläschen unvermeidlich sind (ihrer wellenartigen Oberfläche wegen).

Das Reinigen der 5 mm im Durchmesser messenden Gläschen ist leicht ausführbar, was bei 3 mm-Gläschen sehr erschwert ist, besonders wenn dieselben, wie bei Westergren, 30 cm lang sind.

So hat sich die Linzenmeier'sche Methode einen grossen Anhang geschaffen, und die meisten Untersuchungen sind nach derselben ausgeführt worden.

Es galt aber einige Misstände, welche sich erst beim Arbeiten herausgestellt hatten, zu beseitigen. Schlecht sichtbare oder schlecht zugängliche Venen bei Frauen, und insbesondere bei Kindern, zwingen die Vena-Punktion zu umgehen; auch sträuben sich die Patienten gegen eine wiederholte Blutentnahme aus der Vene, wenn dies zu oft geschieht; dagegen lassen sie sich einen Tropfen Blut gern entnehmen, weshalb Linzenmeier und Raunert folgende Mikromethode ausgearbeitet haben, um mit einem einzigen Tropfen Blut die Senkungsreaktion anzustellen: in eine Kapillare, die eine lichte Weite von 1 mm hat, wird bis zur Marke a = 12,5 mm 5 % Na.citricumlösung eingesaugt; hierauf lässt man von der angestochenen Fingerbeere oder dem Ohrläppchen einen Tropfen Blut in die Kapillare bis zur Marke b = 62,5 mm nachfließen und hat auf diese Weise das Verhältnis von 1:4 zwischen Na.citricumlösung und Blut erreicht; Durchmischung durch 3 maliges vorsichtiges Höher-saugen in die angebrachte Erweiterung der Kapillare und Zurück-fließenlassen bei wagerechter Haltung; nachdem die Mischung wieder in die Kapillare zurückgeflossen ist, befestigt man die Kapillare senkrecht in einem 6 Kapillaren fassenden Gestell; Ablesen mit Hilfe von Millimeterpapier oder indem man 18 mm durch einen Reiter abgrenzt, um das Senkungsziel zu markieren.

Die Resultate dieser Mikromethode mit denen der Makromethode verglichen zeigten, dass Zeit und Plasmaschicht bei beiden genau übereinstimmten.

Die Senkungsreaktion möglichst einfach, schnell und allerorts ausführen zu können war auch der Leitgedanke Kaufmanns bei seiner Mikro- und Schnellmethode. Er arbeitet mit 10 cm hohen und 1 mm weiten Kapillaren, so dass zur Anstellung der Reaktion höchstens 2 Tropfen (0,1) Blut erforderlich sind. Die Kapillaren sind auslaufsicher mit einem Patentverschluss versehen und tragen bei 100 und 70 mm Höhe eine Graduierung. Die Fallstrecke von 30 mm entspricht der der Linzenmeier'schen Röhrchen von 18 mm nahezu genau. Ein Gestell für 12 Senkungsröhrchen, mit millimetergraduierter Milchglasskala als Hintergrund, ermöglicht genaues Ablesen nach Zeit und Höhe der Senkungssäule.

Das idealste Untersuchungsgemisch ist ein solches von 0,02 mgr Hirudin + 0,1 ccm. Blut, das unmittelbar auf der Fingerbeere

hergestellt wird; oder man bedient sich spezieller Mischkapillaren zu Herstellung von Zitratblutgemisch, welches in gleicher Weise untersucht wird. Da für den Ausfall der Senkungsreaktion die Plasmalabilisierung massgebend ist, so muss der Zusatz bestimmter kolloidaler Lösungen zum Blut eine Senkungsbeschleunigung zur Folge haben. Am besten bewährte sich der Halbzusatz einer 3% Gummiarabicum-Lösung unter Verwendung von 0,71% Na.citrat- + 0,72% Na.ClLösung zur Verdünnung, resp. zur Verhinderung der Gerinnung. Nach höchstens einer Stunde kann das Resultat der Reaktion abgelesen werden.

Ich trage Bedenken, ob eine künstliche Viskositätserrhöhung der zu untersuchenden Blutproben zulässig ist und ob dadurch nicht Fehlerquellen geschaffen werden.

Von den hier wiedergegebenen Methoden ist die Linzenmeier'sche Mikromethode die am meisten zusagende, was ich auf Grund eigener Erfahrungen bestätigen kann. Nur peinlich genaues Befolgen aller Vorschriften schützt den mit ihr Arbeitenden vor sonst sich einschleichenden Fehlern.

Die Senkungsreaktion bei Krankheiten und ihr diagnostischer und prognostischer Wert.

Schürer und Eimer berichten über Senkungsgeschwindigkeitsbestimmungen bei etwa 400 inneren Erkrankungen. Eine erhebliche Beschleunigung der Sedimentierung fand sich bei allen fieberhaften Infektionskrankheiten, aber auch bei zahlreichen anderen Erkrankungen, z. B. Nephritis, Arteriosklerose, Gicht, malignen Tumoren, Basedowscher Krankheit und Leberzirrhose. Bei Nierenerkrankheiten hat auch Bennighof extremste Beschleunigung gefunden; bei Niereninsuffizienz aber sah Leendertz durchweg Verlangsamung.

Wiechmann und Schröder untersuchten 23 Patienten mit Leberinsuffizienz nach Genuss von 300 ccm Milch im nüchternen Zustande, bei Bettruhe während der Dauer von 3 Stunden, in Intervallen von je 20 Minuten — die Leukozytenzahl, den Blutdruck und die Sedimentierungsgeschwindigkeit der roten Blutkörperchen bestimmend. Ohne über die Wertigkeit der Widal'schen Probe urteilen zu wollen, können sie aber doch

erklären, dass die Angabe Retzlaffs — die haemoklasische Krise sei bei nachweislich kranker Leber immer positiv — nicht zu Recht besteht. Bei normaler ändert sich die Senkungsgeschwindigkeit durch Milchezufuhr nicht. In Fällen, wo klinisch eine Parenchym-Schädigung der Leber zu erwarten war, ging ganz vereinzelt ein Leukozytensturz resp. Absinken des Blutdruckes mit einer Senkungsbeschleunigung parallel. — Bekanntlich sieht Widäl als Grundlage für die anaphylaktischen Erscheinungen und für die ihr folgende Antianaphylaxie eine plötzliche Zustandsänderung von Blutbestandteilen an, die er als haemoklasische Krise bezeichnet, und zwar hat sie als Ursache eine bruske Störung des physikalischen Gleichgewichts des Plasmas, resp. seiner Kolloide infolge des Übertritts unvollständig abgebauter Eiweissprodukte in die Blutbahn. An dieser Stelle sei nochmals erwähnt, dass auch für die Senkungsbeschleunigung mancherseits eine Änderung der physikalischen Struktur des Blutplasmas resp. der Dispersität der Plasmakolloide verantwortlich gemacht wird.

Nachdem es gelungen war, anaphylaktische Erscheinungen durch subkutane Eiweissinjektionen, intravenöse Einspritzungen salinischer Substanzen und sogar äussere Kälteeinwirkung (paroxysmale Haemoglobinurie) auszulösen, versuchten Caspari, Eliasberg und Fiegel mit Hilfe der Senkungsmethode einen Einblick zu bekommen in die den anaphylaktischen Erscheinungen zugrunde liegende Änderung im Gleichgewichtszustande der Blutkolloide. Ihre Untersuchungen ergaben, dass es oft möglich ist, diese Gleichgewichtsstörung auch dann nachzuweisen, wenn der Reiz, der durch parenterale Eiweisszufuhr gesetzt wird, nicht ausreicht, um die klinischen Erscheinungen der Serumkrankheit auszulösen.

Vaccinations- und Reagenzglasversuche lassen nach Leendertz an einen Zusammenhang der beschleunigten Sedimentierung mit immunisatorischen Vorgängen im Körper denken; vielleicht bedingt die Anwesenheit von Immunkörpern im Blutplasma eine Zustandsänderung im physikalisch-chemischen Sinne, die in einer Beschleunigung der Sedimentierung ihren Ausdruck findet. Stukawski prüfte den Einfluss der subkutanen, intrakutanen und perkutanen Tuberkulinapplikation auf die Sedimentierung der Erythrozyten (Senkungsreaktion), um

auf diesem Wege die Frage zu klären, ob in der Wirkung dieser 3 Anwendungsweisen des Tuberkulins auf den Körper grundsätzliche oder nur gradweise Unterschiede bestehen.

— 0,03 mg. Alttuberkulin subkutan ergab nach 24 Stunden meist Zunahme der Senkungsreaktion = positiven Ausschlag;

— bei kutaner Applikation (Ponndorf-Impfung) fand sich in 60% der Fälle verzögerte Senkungsreaktion = negativer Ausschlag, während nur 40% positiven Ausschlag gaben;

— bei perkutaner Applikation (Moros Ektebin) fand sich bei Tuberkulösen mit aktiven Prozessen ein auffallender negativer Ausschlag der Senkungsreaktion.

Bei subkutaner Applikation gelangt also das Alttuberkulin als giftiger Reizstoff zur Wirkung, — während bei intrakutaner und perkutaner Anwendung die immunisatorische Funktion der Haut in Tätigkeit tritt und auch die von derselben gebildeten Antikörper zur Wirkung gelangen.

Es besteht demnach zwischen der subkutanen Tuberkulinbehandlung einerseits und der kutanen nebst perkutanen andererseits ein grundsätzlicher, zwischen beiden letzteren nur ein gradweiser Unterschied.

Weiter sah Leendertz bei Infektionskrankheiten und Tumoren eine beschleunigte Sedimentierung der Erythrozyten im Zitratblute; dagegen aber geht die Sedimentierung bei zyanotischen Zuständen und Niereninsuffizienz durchweg langsam vor sich.

Stuhlmann fand, die Linzenmeier'sche Methode vereinfachend, bei allen Infektionskrankheiten und bei Malaria die Senkungsgeschwindigkeit beschleunigt. Während des Intervalls wird die Senkungsreaktion nicht normal, nach jedem Fieberanfall aber ist sie höher als vorher. Während der Chininbehandlung wird sie allmählich normal, was ein sicheres Zeichen für normalgewordene Blutbeschaffenheit ist.

W. Löhr teilt unter weiteren Ergebnissen mit, dass bei Strumen, Rachitis, Perthescher Hüftgelenkerkrankung und Osteochondritis keinerlei Beschleunigung beobachtet wurde. Gering war die Beschleunigung bei chronischen Entzündungen, sowie wenn es sich um Geschwürsflächen handelte,

die wenig resorbierten; sobald aber eine akute Verschlimmerung eintrat, nahm auch die Senkungsgeschwindigkeit zu. Das Gleiche liess sich bei bösartigen Tumoren beobachten.

Regelmässig war Beschleunigung bei Entzündungen, und zwar stand die Grösse des Entzündungsherdes in direkter Beziehung zur Beschleunigung — bei Pneumonie und Peritonitis 15 und 50 statt normaler 150—500 Minuten; auch bei Knochentuberkulose wurden die gleichen Erfahrungen gemacht. Senkung beschleunigend wirken auch Frakturen und operativ gesetzte Wunden bis zu ihrer Vernarbung, also 6—10 Tage lang; bei Reizkörpertherapie wurde dasselbe beobachtet, während schwerer anaphylaktischer Choks blieb aber die Beschleunigung aus.

Schubert fand als untere Grenze der Senkungsgeschwindigkeit bei normalen und pathologischen Befunden bei Männern 480 und bei Frauen 200 Minuten. Nach subc.-Injektionen von Ovoglandol bei Männern und Testiglandol bei Frauen trat bei Männern eine Verkürzung der Senkungsgeschwindigkeit um etwa 20 Minuten, bei Frauen eine Verlangsamung von 15—40 Minuten gegenüber den Kontrollen ein.

Nach Pribram und Klein tritt Beschleunigung der Senkungsgeschwindigkeit ein bei: Fieber, Tumoren, Vermehrung einer bestimmten Fraktion des Reststickstoffes, Hypercholesterinämie, Anämie, verminderter Serumrefraktion und erhöhter Viskosität; verlangsamt ist sie bei: Polyglobulie, erhöhter Serumrefraktion, verminderter Viskosität, Zyanose und Ikterus.

An 58 Patienten mit inneren Krankheiten liess sich nach Bennighof zeigen, dass die Senkungsgeschwindigkeit in weiten Grenzen bei den mannigfaltigsten Krankheitsbildern differieren kann. Das geringste Senkungsbestreben lassen Patienten mit neurasthenischen, neuralgischen und leichten Lokal-erkrankungen erkennen. Dagegen findet sich extremste Beschleunigung bei Nierenkranken und schweren Tuberkulösen.

Fähræus fand die Senkungsgeschwindigkeit im Blute Schwangerer vom 3. Monat an beschleunigt; Linzenmeier vom 4. Monat an.

Bei puerperalseptischen Erkrankungen fanden Mahnert und Horneck die Senkungsgeschwindigkeit über

die Grenzen der in normalem Wochenbett gefundenen Werte hinaus gesteigert. Die Therapie bewirkt Schwankungen der Senkungsgeschwindigkeit, und zwar nimmt sie bei klinisch günstig verlaufenden Fällen bis zum Eintritt des Schüttelfrostes ab und umgekehrt — bei den ungünstig verlaufenden Erkrankungen zu.

Rosenfeld untersuchte 500 chirurgische Patienten nach der Linzenmeier'schen Methode und fand bei Grunderkrankungen, Infektionskrankheiten, Tumoren und Frakturen die Senkungsgeschwindigkeit beschleunigt. Steril verlaufende Operationen, mit grösserem oder geringerem Zellzerfall und Resorption des Materials verbundene Frakturen, Zellzerfall der Geschwulst, Zerfall der Leukozyten bei Carcinom und geformter Elemente bei sterilen Operationen und bei Frakturen, ausserdem noch Zerfall des Fettgewebes zeigten, dass die Senkungsreaktion sich proportional verhält zur Ausdehnung, Intensität, Resorption und Dauer dieser Prozesse. Sie ermöglicht ein Urteil über den Allgemeinzustand und die Grösse des Zellzerfalls im Körper. Sie ist eine genauere Reaktion als Temperaturausschläge und kann einem Temperaturanstieg vorausgehen oder sogar ohne einen solchen verlaufen. Ihrer hochgradigen Empfindlichkeit wegen ist grosse Vorsicht bei ihrer praktischen Bewertung angezeigt.

Schon früher hat Westergren sich dafür ausgesprochen, dass die Senkungsreaktion ein weit zuverlässigeres Kriterium für die Aktivität oder besser für die Intensität eines pathologischen Prozesses ist, als die Körpertemperatur, was von Rosenfeld bestätigt worden ist.

Nach W. und H. Löhr finden sich stets parallel zur Senkungsbeschleunigung eine erhebliche Viskositätszunahme und eine Vermehrung des Globulingehaltes. Am deutlichsten zeigten sich sämtliche Veränderungen bei sterilen Operationen, wobei der Ausschlag im Verhältnis zur Grösse des Eingriffes wächst.

Haller sah bei primärheilenden Wunden beschleunigte Senkung und nach erfolgter Heilung wieder normale Werte eintreten. — Bei Eiterungsprozessen — also beim Gewebszerfall — handelte es sich stets um deutlich beschleunigte Senkungs-

geschwindigkeit. Er meint, dass auf diese Weise durch die Senkungsreaktion die Zählung der Blutkörperchen meistens ersetzt werden kann.

In 53 Carcinomfällen vorgenommene Senkungsreaktionen ergaben Hoffgaard stets starke Beschleunigung; ulcus-Kranke aber gaben normale Werte.

Plaut untersuchte 220 geisteskranken Männer, davon 48 Paralytiker, 24 mit Lues cerebri und 9 Arteriosklerosefälle. Die Mehrzahl der Fälle von Paralyse, Lues und Arteriosklerose ergab beschleunigte Senkungsreaktion; er fand aber im Gegensatz zu diesen Verlangsamung bei Psychopathien, Melancholie, Dementia praecox und Epilepsie.

Das Frauenmaterial betraf 122 Fälle, davon 40 Paralytischen. Auch bei den Frauen zeigte sich bei Paralyse sehr beschleunigte Senkung.

Löwenberg fand bei seinen Untersuchungen, dass folgende drei Psychosen immer senkungbeschleunigend wirken: am ausgesprochensten die Epilepsie und zwar unabhängig von etwaigen Anfällen, weniger deutlich die Dementia praecox, während bei der Paralyse sehr unregelmässige Kurven vorkommen — insbesondere so, dass bei Zimmertemperatur die geringste Senkungsgeschwindigkeit beobachtet wird.

Glaus und Zutt finden als Resultat ihrer Untersuchungen, dass unter den Schizophrenien die mehr katatonen und organischen Fälle, besonders im akuten Stadium, sich gegenüber anderen Formen der Schizophrenie durch verhältnismässig grosse Senkungsgeschwindigkeit und eine charakteristische Geschwindigkeitsformel abzuheben scheinen.

Dreyfuss, nach Linzenmeyers Methode arbeitend, fand bei einem 17-jährigen Mädchen nach überstandener Pneumonie, trotz völliger Entfieberung, als das einzige objektive Symptom der nicht fortschreitenden Rekonvaleszenz das Fortbestehen einer starken Senkungsbeschleunigung. Nach 5 Wochen trat ein trophisches Geschwür (*mal. perforans pedis*) am linken Fuss auf, wobei einwandfrei eine bestehende Myelitis festgestellt wurde.

Pulian und Tomovici, nach Linzenmeyers modifizierter Methode untersuchend, fanden bei organischen und funktionellen Erkrankungen des Nervensystems, welche nicht syphilitischen Ursprungs waren, normale Senkungsge-

schwindigkeit. Bei Tabes und Paralysis progressiva betrug die Senkungsgeschwindigkeit oft das 4—5-fache der des normalen Blutes und war in einigen Fällen die Sedimentierung schon in $\frac{1}{2}$ Stunde vollendet. Bei Nervenlues scheint die Beschleunigung grösser und konstanter zu sein, als bei florider; alle untersuchten Fälle aber ergaben Beschleunigung. Paraplegien auf syphilitischer Grundlage ergaben Beschleunigung, während die anderer Aetiologie sie nicht ergaben.

Tomovici und Brauer untersuchten nach Linzenmeier 40 Fälle von manifester Lues — 4 Fälle Lues I und 36 Fälle Lues II, wovon 10 behandelte. In 75% der Fälle war die Senkungsgeschwindigkeit beschleunigt und nur in 25% der Fälle war sie normal; in allen 4 Fällen von Lues I war Beschleunigung vorhanden. Zwischen der Intensität der klinischen Erscheinungen und der Senkungsgeschwindigkeit liessen sich keine Beziehungen feststellen.

Pewny betont, dass bei Lues die Senkung nicht regelmässig beschleunigt ist; nur bei generalisierten exanthematischen Formen und umfangreichen gummösen Erkrankungen wurde sie konstant gefunden; differentialdiagnostisch ist sie nicht verwertbar.

Gyorgy untersuchte nach Linzenmeier 10 frische unbehandelte Fälle von angeborener Syphilis. Ihre Senkungszeit betrug 8—23 Minuten — statt der 90 Minuten der normalen Säuglinge; also eine äusserst beschleunigte Senkungsgeschwindigkeit, die selbst die Durchschnittswerte der von Linzenmeier im Gravidenblut und der von Büscher bei der erworbenen Lues Erwachsener gefundenen erheblich übertrifft.

Bätzold untersuchte nach Linzenmeier das Blut von 43luetischen und 17 nichtluetischen Säuglingen und Kindern im Alter von 3 Wochen bis $2\frac{1}{2}$ Jahren und fand bei denluetischen Säuglingen die Senkungsgeschwindigkeit deutlich beschleunigt, was aber nach spezifischer Behandlung zurückgeht. Im Alter von 3 Wochen bis zu 1 Jahr war die mittlere Senkungszeit beiluetischen Kindern 19—38 Minuten, während sie bei nichtluetischen 90—160 Minuten war.

Berde machte 1110 Senkungsgeschwindigkeitsbestimmungen an 46 gesunden, 371 hautkranken und 349 geschlechtskranken Personen. Im Material sind 58 verschiedene Dermatosen und

verschiedene Stadien und Komplikationen der Geschlechtskrankheiten vertreten. Es gibt kaum eine Dermatoze, bei der in einzelnen Fällen die Senkungsgeschwindigkeit nicht normal sein kann; je inniger aber sich das Verhältnis zwischen Hautveränderung und Gesamtorganismus gestaltet, um so häufiger findet man eine Senkungsbeschleunigung.

Patienten mit beschleunigter Senkungsreaktion haben nach Morat immer ein organisches Leiden. Die Senkungsbeschleunigung ist kein obligates Frühsymptom der Lungentuberkulose; bei beginnender Lungentuberkulose bedeutet eine stärkere Beschleunigung der Senkungsreaktion ungünstige Prognose, bei fortgeschrittener aber ist eine normale Senkungsreaktion günstig zu beurteilen. Die Senkungsreaktion geht den übrigen Symptomen annähernd parallel. Für die Differentialdiagnose „Geschwulst oder Entzündung“ leistet sie keine Dienste.

Dreyfuss und Hecht finden auf Grund der 108 untersuchten Fälle, dass die Senkungszeit in Beziehung steht zum Charakter der Tuberkulose und wertvolle Anhaltspunkte für die Prognose gibt. Bei beginnender chronischer Lungentuberkulose findet sich nur eine geringe Beschleunigung der Senkung; zirrhotische Prozesse geben relativ hohe Senkungszahlen (100—160 Minuten), exsudative aber ganz niedrige Werte (15—30 Min.). Kavernen bedingen Beschleunigung der Senkung. Interkurrente Erkrankungen (Grippe) beeinflussen die Senkung wie eine Verschlimmerung; bei ihrem Abklingen steigt die Senkungszahl wieder an, wenn infolge der sekundären Erkrankung nicht eine Verschlimmerung der Tuberkulose eingetreten ist.

Götze untersuchte 200 Tuberkulöse und konnte bestätigen, dass die Senkungsreaktion durch ihren negativen Ausfall (Verlangsamung) die Diagnose „Keine Tuberkulose“ unterstützt; dass ihr deutlich positiver Ausfall (Beschleunigung) eine Verschlimmerung des Leidens begleitet; und dass ein jäher Absturz der Kurve wiederholt gemachter Senkungsreaktionen durchweg der in den schweren Fällen des III. Stadiums gestellten schlechten Prognose entspricht.

Nach Gyorgy weisen Tuberkulöse starke und nach Benignhof schwere Tuberkulöse extremste Beschleunigung auf; bei Knochentuberkulose stand nach W. Löhr die Grösse des Krankheitsherdes in direkter Beziehung zur Beschleunigung der Senkung.

S. Müller konstatierte einen Parallelismus zwischen der Senkungszahl und der Schwere des Lungenbefundes bei Lungentuberkulose. Die Reaktion ist jedoch nur von Wert für die Beurteilung des augenblicklichen Zustandes, gestattet aber keinen Schluss auf die weitere Entwicklung des Lungenprozesses — ist also nicht prognostisch.

Petschacher fand den Gehalt an Gesamteiweiss im Serum 29 Tuberkulosekranker erhöht; die relative Vermehrung der Globulinfraction steht in direktem Verhältnis zur Ausbreitung des Prozesses und die Blutkörperchensenkungsgeschwindigkeit nimmt mit der Aktivität des Prozesses zu, wobei aber Abweichungen nicht selten sind. Zur Vermeidung von Fehlern sind bei einer Prognosestellung alle Untersuchungsmethoden heranzuziehen.

Schürer und Eimer fanden bei fieberfreien Tuberkulosen nur die schweren progredienten Fälle sehr kurze Sedimentierungszeiten aufweisend, so dass die Senkungsreaktion hier vielleicht eine prognostische Bedeutung gewinnen kann.

Beobachtungen an 18 Fällen lehrten Schneider, dass mit der klinischen Besserung der Lungentuberkulose bei der Pneumothoraxbehandlung eine Abnahme der Senkungsgeschwindigkeit der roten Blutkörperchen zusammengeht; umgekehrt aber bei Verschlechterung eine Zunahme der Senkungsgeschwindigkeit eintritt. Im Rahmen des Gesamtbildes gibt die Senkungsprobe einen Anhaltspunkt für die Auffassung des Pneumothorax, dessen Schliessung nicht erfolgen darf, bevor der Senkungswert normal geworden ist.

Kaufmann ist der Meinung, dass die Senkungsreaktion, wenn sie auch keine spezifische ist, doch diagnostischen und prognostischen Wert bei Lungentuberkulose haben kann.

E. A. Schmidt sieht in der Senkungsreaktion eine Bereicherung der Hilfsmittel für die Diagnose der Lungentuberkulose. Da sie eine nichtspezifische Reaktion ist, so dürfen ihre Resultate nur mit Einschränkung und unter starker Kontrolle durch die übrigen Untersuchungsmethoden verwertet werden.

Alterthum fand bei aktiver Lungentuberkulose stets beschleunigte Senkung; doch kommt der Senkungsprobe für die Aktivitätsdiagnose keine grössere Bedeutung zu als der Temperaturmessung. Differentialdiagnostisch ist die Senkungsprobe

nicht verwendbar. Für die Prognose lassen sich nur fortlaufende Feststellungen der Senkungsgeschwindigkeit verwerten.

Bei tuberkulösen Kindern ist nach Pflüger der diagnostische Wert der Senkungsprobe, wenn schon sie in einzelnen Fällen einiges leistet, doch gering. Normalwerte für die einzelnen Altersstufen lassen sich nicht aufstellen. Ganz entgegengesetzter Ansicht aber ist Dehoff, welcher die Senkungszahl der Erythrozyten bei der kindlichen Tuberkulose für ein wertvolles klinisches Hilfsmittel hält in diagnostischer, differentialdiagnostischer und prognostischer Beziehung und zur Kontrolle spezifischer Therapie. Hohe Senkungszahl berechtigt zu günstiger Prognosestellung, niedere mahnt zur Vorsicht.

Bei Augenerkrankungen kommt, wie Horvath an 200 Kranken mit Augenaffektionen feststellte, der Senkungsreaktion keine diagnostische Bedeutung zu.

Stuhlmann hält ihren diagnostischen Wert bei manifester oder latenter Malaria für nicht gross — da eine manifeste Malaria auch ohnedies erkennbar ist, eine latente aber durch den Nachweis einer beschleunigten Senkungsreaktion nicht sichergestellt wird, da zuviel andere Krankheiten dieses Symptom aufweisen.

Nach Schürer und Eimer kommt eine grosse diagnostische Bedeutung der Senkungsgeschwindigkeit nicht zu, weil die Erscheinung dafür zu häufig und zu vieldeutig ist. Gelegentlich kann die Sedimentierungsbeschleunigung als objektives Krankheitszeichen von Wert sein, z. B. bei rheumatischen Beschwerden.

Pribram und Klein sind der Meinung, dass ein bindender Schluss aus dem Senkungsverlauf auf bestimmte klinische Daten nur unter Berücksichtigung aller in Betracht kommenden Faktoren möglich ist.

H. Löhr wandte das Verfahren nach Linzenmeier bei mehr als 600 Patienten an. Die Methode erscheint brauchbar bei differentialdiagnostischer Abgrenzung von entzündlichen Prozessen — gegenüber nichtentzündlichen. Die Abgrenzung von Entzündungen gegenüber Tumoren ist jedoch damit nicht möglich. — Am wertvollsten erwies sie sich in der Pathologie der Knochenerkrankungen im obenangeführten Sinne.

A. Vida kommt auf Grund von über 100 Versuchen an Frauen zum Ergebnis, dass die Senkungsgeschwindigkeit der roten Blutkörperchen zur Zeit noch nicht differentialdiagnostisch verwertet werden kann, obwohl die Probe im allgemeinen bei Fieber, Adnexerkrankungen, Gravidität, positivem Wassermann u. s. w. positiv wird.

S. Joseph und M. Marcus fanden im ganz akuten Stadium von Appendizitiden, bei denen das Auftreten der ersten Symptome nicht länger als 30 Stunden zurücklag, normale Senkungswerte, während bei Adnexitis im gleichen Zeitraum eine Senkungsbeschleunigung festgestellt wurde. Bei der Differentialdiagnose dieser beiden Erkrankungen wird die Sedimentierungsreaktion für ein brauchbares Teilsymptom gehalten.

R. Pewny nahm bei den verschiedensten gynäkologischen Affektionen Senkungsproben vor, wobei nicht derartig eindeutige Ergebnisse erhielt, dass die Methode für die Praxis als bedeutungsvoll angesehen werden kann. Differentialdiagnostisch zwischen Gravidität und Myom ist die Probe nur in den späteren Schwangerschaftsmonaten verwendbar.

G. Haselhorst untersuchte bei 800 Fällen in der Hamburger Frauenklinik die Senkungsprobe. Bei Schwangerschaft in der II. Hälfte findet Senkungsbeschleunigung statt; Ausnahmen kommen vor.

Bei der Differentialdiagnose zwischen Extrauterin-gravidität und Adnextumor leistet die Probe nicht viel.

Bei malignen Neubildungen ist die Senkung meist stark beschleunigt, aber auch hier kommen Ausnahmen vor.

Für die Frage des Rezidivs nach Operation leistet die Probe nichts.

Von Wert ist die Probe eigentlich nur bei entzündlichen Veränderungen.

Ist die Senkungsgeschwindigkeit normal, dann kann man ziemlich sicher (3 mal Fehldiagnose unter 200 Fällen) damit rechnen, ein keimfreies Operationsfeld vor sich zu haben.

Gragert bediente sich der Linzenmeierschen Methode und hält sie für eine wertvolle Bereicherung der diagnostischen Hilfsmittel, besonders zur Erkennung zweifelhafter Carcinome insonderheit des Collums. Auch zur Beurteilung der Rezidivfreiheit ist die Probe mit Erfolg heranzuziehen, da

bei geheilten Fällen sich die Werte ganz allmählich wieder den normalen nähern.

Linzenmeier hebt hervor, dass die Senkungsreaktion bei der Lues congenita eine grosse diagnostische Bedeutung hat. Gegenüber der ungemein langsamen Senkungsgeschwindigkeit im normalen Nabelvenenblut scheint die enorme Beschleunigung bei den Fällen von kongenitaler Syphilis fast pathognomisch zu sein. — Sonstige beschleunigende Momente ausgeschlossen, kann nach Gyorgy die Senkungsreaktion bei Fällen von angeborener Lues praktisch-diagnostische Dienste leisten. Sie geht mit der Wa. R. und derjenigen von Sachs-Georgi parallel und nimmt im Laufe einer antiluetischen Kur ab. — Bardach hat bei verschiedenen Erkrankungen und am häufigsten bei luetischen Kindern beschleunigte Senkung gefunden; bestimmte diagnostische Rückschlüsse aus ihr allein zu ziehen ist nicht statthaft.

Nach Pewny ist die Senkungsreaktion differential-diagnostisch bei Lues nicht verwendbar; Pulian und Tomovici betonen aber, dass durch sie entschieden werden kann, ob Paraplegien syphilitischer oder anderer Aetiologie sind.

Berde hat gezeigt, dass die diagnostische Verwertbarkeit der Senkungsreaktion bei Hautkrankheiten sehr gering ist; derselben Meinung ist auch Kersting, billigt ihr aber bei florider Syphilis eine gewisse diagnostische Bedeutung zu.

Der spezifische Charakter fehlt der Senkungsreaktion, was Berde, Kaufmann, Kersting, Rosenfeld, E. A. Schmidt und Westergren besonders betont haben.

Zusammenfassend ergibt sich, dass die Senkungsreaktion ein Urteil über den Allgemeinzustand und die Grösse des Zellerfalls im Körper ermöglicht; sie ist ein zuverlässigeres Kriterium für die Intensität des pathologischen Prozesses als Temperatúrausschläge, welchen sie vorausgeht oder sogar ohne welche sie verlaufen kann.

Beschleunigt ist sie bei: Fieber, fieberhaften Infektionskrankheiten, Entzündungen, Tuberkulose, Syphilis, Schwangerschaft nach dem 3. Monat und Adnexerkrankungen, Leberzirrhose, Gicht, Arteriosklerose, Myelitis, Frakturen, sterilen Operationen, Carcinom, Malaria, Reiztherapie, verminderter Serumrefraktion, erhöhter Viskosität des Blutplasmas und Hypercholesterinaemie.

Extreme Beschleunigung findet sich bei: schwerer Tuberkulose, Nierenkrankheiten, Paralysis, Tabes, Nervenlues und angeborener Syphilis; letztere reagiert auf Behandlung mit Langsamerwerden der Senkungsgeschwindigkeit.

Bei Malaria ist sie auch in den Intervallen nicht normal; erst nach stattgehabter Chininbehandlung kehrt sie zu normalen Werten zurück. Bei Entzündungen war die Grösse des Entzündungsherdens und ihre Intensität in direkter Beziehung zur Beschleunigung, z. B. bei Pneumonie und Peritonitis. Ein Langsamerwerden der Senkungsreaktion bei puerperalseptischen Prozessen, infolge angewandter Therapie, ist prognostisch günstig. Bei sterilen Operationen war die Beschleunigung im Verhältnis zur Grösse der gesetzten Wunden, und verlief sie proportional der Ausdehnung, dem Zellzerfall, der Resorption und der Dauer des Prozesses bis zur Vernarbung.

Durch die beschleunigte Senkungsreaktion war es möglich Gleichgewichtsstörungen im Blute schon dann nachzuweisen, wenn der Reiz, der durch parenterale Eiweisszufuhr gesetzt wird, noch nicht ausreicht um die klinischen Erscheinungen der Serumkrankheit auszulösen; ebenso ermöglichte sie den Nachweis, dass bei intra- und perkutanen Tuberkulinapplikationen die immunisatorische Funktion der Haut in Tätigkeit tritt und auch die von derselben gebildeten Antikörper zur Wirkung gelangen, während bei subkutaner Anwendung das Alt tuberkulin seine Wirkung als giftiger Stoff äussert. Weiter ist es möglich, dass die Anwesenheit von Immunkörpern im Plasma eine Zustandsänderung bedingt, die in einer Beschleunigung der Sedimentierung ihren Ausdruck findet.

Die Senkungsgeschwindigkeit differiert in weiten Grenzen bei den mannigfaltigsten Krankheiten; am extremsten beschleunigt ist sie bei schwerer Tuberkulose und Nierenkrankheiten, wogegen sie am geringsten ist bei Neurasthenie, Neuralgien und leichten Lokalerkrankungen.

Es gibt wohl keine Hautkrankheit, bei der die Senkungsreaktion nicht normal sein kann; je inniger aber das Verhältnis zwischen Hautveränderung und Gesamtorganismus sich gestaltet, um so häufiger findet sich Beschleunigung.

Wenig reagierten chronische Entzündungen, welche aber bei Exacerbation sofort mit gesteigerter Beschleunigung reagierten.

Normale Senkungsgeschwindigkeit fand sich bei: Struma, Rachitis, Osteochondritis, organischen und funktionellen Erkrankungen des Nervensystems nicht syphilitischer Aetiologie.

Verlangsamte Senkungsgeschwindigkeit zeigten: zyanotische Zustände, Ikterus, Niereninsuffizienz, Polyglobulie, Melancholie, Dementia praecox und Epilepsie; bei den beiden letzten ist aber auch mässige Beschleunigung beobachtet worden.

Senkungsbeschleunigung ist kein obligates Frühsymptom bei Lungentuberkulose; durch ihr Fehlen wird die Diagnose „nicht Tuberkulose“ unterstützt.

Bei beginnender Tuberkulose bedeutet extreme Beschleunigung eine ungünstige Prognose; zunehmende Beschleunigung während des Leidens deutet auf Verschlimmerung desselben hin und ein jäher Absturz der Senkungskurve, welche von fortlaufend gemachten Beobachtungen angelegt wurde, entspricht einer schlechten Prognose.

Zu normalen Senkungswerten zurückkehrende und annähernd normale Senkungswerte sind bei fortgeschrittener Lungentuberkulose günstig zu beurteilen.

Bei Lungentuberkulose gaben zirrhotische Prozesse mässige Senkungsbeschleunigung, dagegen reagierten aber exsudative Prozesse und Kavernen mit sehr beschleunigter Senkung; interkurrente Erkrankungen wirken wie eine Verschlimmerung der Tuberkulose — die vorübergehend eingetretene Beschleunigung verlangsamt sich aber wieder, wenn nicht als Folge eine Verschlimmerung des Prozesses nachgeblieben ist. Bei fieberfreien Tuberkulosen zeigten nur die schwerprogredienten Fälle extrem beschleunigte Senkungsgeschwindigkeiten. — Aus allem ist zu ersehen, dass die Senkungsreaktion in naher Beziehung zur Lungentuberkulose steht und wertvolle Anhaltspunkte für ihre Prognose zu geben imstande ist.

Nur fortlaufende Untersuchungen sind hier prognostisch verwertbar und es berechtigen nur hohe Senkungszahlen zu günstiger Prognose, niedrige aber mahnen zur Vorsicht; während eine einmalige Untersuchung nur für die Beurteilung des augenblicklichen Zustandes gewährleistet und keinen Schluss über den weiteren Verlauf des Lungenprozesses gestattet.

Bei Knochentuberkulose entspricht die Senkungsbeschleunigung der Grösse des Herdes und geht mit der Aktivität des Prozesses parallel.

Grosse diagnostische Bedeutung hat die Senkungsreaktion bei Lues congenita, welche extreme Beschleunigung aufweist, die fast pathognomisch genannt werden könnte.

Differentialdiagnostisch ermöglicht die Senkungsreaktion eine Abgrenzung entzündlicher Prozesse von nicht entzündlichen, sowie syphilitischer Paraplegien von solchen nicht-syphilitischer Aetiologie. Sie ist eine wertvolle Bereicherung der diagnostischen Hilfsmittel bei zweifelhaften Collumcarcinomen und kann nach Operationen zur Beurteilung der Rezidivfreiheit herangezogen werden.

Differenzialdiagnostisch nicht verwendbar ist sie bei: Geschwulst oder Entzündung, Adnextumor oder Extrauterin gravidität und bei allen Prozessen, die selbst beschleunigte Senkung bedingen; ebenso hat sie keine diagnostische Bedeutung bei Augenkrankheiten.

Epikrisis.

Die Senkungsreaktion der roten Blutkörperchen ist keine spezifische Reaktion und ist von begrenzter diagnostischer Bedeutung, weil die Erscheinung dafür zu häufig und zu vieldeutig ist. Ihrer hochgradigen Empfindlichkeit wegen ist grosse Vorsicht bei ihrer praktischen Bewertung angezeigt, weshalb bindende Schlüsse aus dem Senkungsverlauf auf bestimmte klinische Daten nur dann zulässig sind, wenn mit ihr zusammen auch die Resultate der in Betracht kommenden übrigen Untersuchungsmethoden berücksichtigt worden sind.

Literaturverzeichnis.

- Abderhalden, E.: Münch. m. Wschr. 68. Jg. 1921. № 31, S. 973 — u. Pflüger's Arch. Bd. 193, S. 236.
- Alterthum, L.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 2095.
- Bardach, M.: Klin. Wschr. 1. Jg. 1922. S. 338.
- Batzold, K.: Münch. med. Wschr. 69. Jg. 1922. S. 857 — u. Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 95.
- Bennighof, Fr.: Münch. med. Wschr. 68. Jg. 1921. S. 1319.
- Berde, K.: Ztrlbl. f. H. u. G. 1924. Bd. XII, Heft 5/6, S. 256.
- Berzeller, L. und Wastl, H.: Ztrlbl. f. H. u. G. 1924. Bd. XII, Heft 5/6, S. 256.
- Biernacki, E.: Zschr. f. physiol. Chemie. 1894. Bd. 19, S. 171.
- Blumenthal, F.: Klin. Wschr. 3. Jg. 1924. S. 114.
- Bönniger, M. und Hermann, W.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 744 — u. Klin. Wschr. 3. Jg. 1924. S. 403.
- Brat, H.: Zschr. f. klin. Med. 1905. Bd. 56, S. 380.
- Bürker, K.: Klin. Wschr. 1. Jg. 1922. S. 1474.
- Caspari, J., Eliasberg, H. und Fiegel, L.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 390.
- Dehoff, E.: Klin. Wschr. 3. Jg. 1924. S. 330.
- Dreyfuss, W.: Klin. Wschr. 1. Jg. 1922.
- Dreyfuss, W. und Hecht, P.: Münch. m. Wschr. 69. Jg. 1922. S. 775 — u. Klin. Wschr. 1. Jg. 1922. S. 2108.
- Fåhræus: Biochem. Zschr. 1918. Bd. 89, S. 356 — u. Hygiea 1918.
- Gerloczy, G. v.: Klin. Wschr. 1. Jg. 1922. S. 1387.
- Glaus, A. und Zütt, J.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 1523.
- Goetze, E.: Klin. Wschr. 3. Jg. 1924. S. 507.
- Gragert, O.: Klin. Wschr. 1. Jg. 1922. S. 1713 — u. Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 1854.
- Gyorgy, P.: Biochem. Zschr. 1921. Bd. 115, S. 71 — u. Münch. m. Wschr. 68. Jg. 1921. S. 808 — u. Klin. Wschr. 3. Jg. 1924. S. 483.
- Haan, de: Biochem. Zschr. 1918. Bd. 86, S. 298.
- Haller, E.: Klin. Wschr. 3. Jg. 1924. S. 1458.
- Haselhorst, G.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 318.
- Heise, G.: Inaug.-Dissert. Rostock 1923.
- Herzfeld u. Klinger: Biochem. Zschr. 1917 Bd. 83 u. 1918 Bd. 87.
- Höber, R. u. Mond, R.: Klin. Wschr. 1. Jg. 1922. S. 2412.
- Hoffgaard, W.: Klin. Wschr. 3. Jg. 1924. S. 1595.

- Horvat, A.: Münch. m. Wschr. 69. Jg. 1922. S. 1729 — u. Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 653.
- Horvath, B. v.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 1717.
- Hunter, J.: 1797. Bd. 2. S. 173.
- Josefowicz, J.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 178.
- Joseph, S. u. Marcus, M.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 1613.
- Kaufmann, E.: Klin. Wschr. 3. Jg. 1924. № 39, S. 1790 u. № 28, S. 1293.
- Kersting, B.: Derm. Zschr. 1923. Bd. 39, S. 33.
- Kloth, W.: Inaug.-Dissert. Rostock 1922.
- Krüger, F. v.: Zschr. f. Biologie. 1923.
- Kürten, H.: Klin. Wschr. 3. Jg. 1924. S. 1216.
- Leendertz, G.: Münch. m. Wschr. 68. Jg. 1921. S. 1629.
- Lehmann, C. G.: Lehrb. d. physiol. Chemie. 1863. Bd. II, S. 125.
- Linzenmeier, G.: I. Mitteilung, Pflüger's Arch. 1920. Bd. 181, S. 169 u. II. Mitteilung ebenda Bd. 186, S. 273 — u. Münch. m. Wschr. 70. Jg. 1923. № 40, S. 1243.
- Linzenmeier, G. u. Raunert, M.: Klin. Wschr. 3. Jg. 1924. S. 786.
- Löhr, W.: Klin. Wschr. 1. Jg. 1922. S. 436 u. S. 1173.
- Löhr, H.: Klin. Wschr. 1. Jg. 1922. S. 483.
- Löhr, W. u. H.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 178.
- Löwenberg: Klin. Wschr. 3. Jg. 1924. S. 1149.
- Mahnert, A. u. Horneck, K.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 1041.
- Mikulicz-Radecki, v.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 1427.
- Moral: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 653.
- Müller, J.: Handb. d. Physiol. d. Menschen. Koblenz 1844. Bd. I, S. 106.
- Müller, S.: Klin. Wschr. 3. Jg. 1924. S. 372.
- Musa, G.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 1591.
- Nassa, H.: Wagner's Handwörterbuch d. Physiologie. 1842. Bd. I, S. 121.
- Opitz, H. u. Frei, M.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 1085.
- Öttingen, v.: Biochem. Zschr. 1921. Bd. 118, S. 67.
- Peschel, G.: Klin. Wschr. 3. Jg. 1924. S. 1830.
- Petschacher, L.: Ztrbl. f. H. u. G. 1924. Bd. XII, Heft 5/6, S. 255.
- Pewny, R.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 1187 — u. Derm. Wschr. 1922. Bd. 74, S. 537 — u. Klin. Wschr. 1. Jg. 1922. S. 1910.
- Pflüger: Klin. Wschr. 3. Jg. 1924. S. 2027.
- Plaut, F.: Münch. m. Wschr. 1920. № 10, S. 279—282.
- Pribram, H.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 1625.
- Pulian, Em. u. Tomovici, N.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 2174.
- Puxeddu, E.: Ztrbl. f. H. u. G. 1924. Bd. XIV, S. 350.
- Raue, F.: Klin. Wschr. 1. Jg. 1922. S. 2296.
- Richter: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 1574.
- Rosenfeld, A.: Dissertation Dorpat 1924.
- Rothe, E.: Ztrbl. f. H. u. G. 1924. Bd. XII, Heft 5/6, S. 255.
- Sachs u. Öttingen, v.: Münch. m. Wschr. 68. Jg. 1921. № 12, S. 351.
- Sadlon, P.: Klin. Wschr. 1. Jg. 1922. S. 1997.
- Schemensky: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 997.
- Schmidt, E. A.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 2096.
- Schneider, M.: Klin. Wschr. 3. Jg. 1924. S. 372.

- Schürer u. Eimer: Münch. m. Wschr. 68. Jg. 1921. S. 408.
Starlinger: Biochem. Ztschr. Bd. 122, S. 105 — u. Med. Klinik 1921. № 38 u. 39.
Stern: Klin. Wschr. 3. Jg. 1924. S. 2027.
Stüber, B.: Klin. Wschr. 1. Jg. 1922. S. 2440.
Stuhlmann, W.: Klin. Wschr. 3. Jg. 1924. S. 899.
Stukowski, J.: Ztrbl. f. H. u. G. 1924. Bd. XIII, S. 43.
Tomovici, N. u. Brauner, R.: Ztrbl. f. H. u. G. 1924. Bd. XIII, S. 464.
Vida, A.: Münch. m. Wschr. 70. Jg. 1923. S. 265 — u. Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 2054.
Vorschütz, J.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 570 — u. Klin. Wschr. 3. Jg. 1924. S. 1971.
Westergren, Alf.: Klin. Wschr. 1. Jg. 1922. S. 1359 u. 2188.
Wiechmann, E. u. Schröder, E. v.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 261.
Wiechmann, E.: Klin. Wschr. 2. Jg. 1923. S. 601.
Wöhlisch, E. u. Bohnen, P.: Klin. Wschr. 3. Jg. 1924. S. 472.
-

**BEITRÄGE ZUR KENNTNIS
DER KUKRUSE- (C_2 -) STUFE IN EESTI**

I

VON

A. ÖPIK

TARTU 1925

C. Mattiesen, Tartu-Dorpat.

Inhalt. 1. Die Beziehungen der Kukruse-Stufe zum älteren Chasmopskalk des Nordbaltikums. 2. Die Unterschiede der Brandschiefer und der Kalkfazies vom Standpunkt der Versteinerungsstatistik. 3. Bemerkungen über die Entstehung des Brandschiefers. 4. Über einige bemerkenswerte oder neue Trilobiten, Krinoiden und Cystiden aus der Stufe C_2 .

1.

Wiman¹⁾ vergleicht in folgender Weise den älteren Chasmopskalk des Nordbaltischen Silurgebiets mit den ostbaltischen Kukruse- (C_2 -) Schichten:

„Auch die entsprechenden Schichten im Ostbaltikum, natürlich mit Ausnahme des Brandschiefers mit seinen Kalkbänken zeigen, soweit ich betreffs derselben Erfahrung habe, grosse Übereinstimmung mit dem nordbaltischen Gestein (p. 105).“ —

„Die Fauna²⁾ ist schwedisch oder skandinavisch. Es kommen zwar ostbaltische Arten vor, wie im Chasmopskalk *Chasmops wrangeli* und andere, aber sie treten nicht zahlreicher auf, als man sie in jedem neubearbeiteten schwedischen Silurgebiet erwarten könnte. Es ist auch nicht wahrscheinlich, dass die neubeschriebenen Trilobiten, wenn es sich in Zukunft zeigen sollte, dass sie grössere Verbreitung haben, dieses Verhältnis ändern werden, denn die ostbaltischen Trilobiten sind neuerdings und gründlich bearbeitet worden, während die schwedischen einer solchen Bearbeitung seit lange entbehren. Es ist deshalb viel wahrscheinlicher, dass die neuen Arten in Schweden wiedergefunden werden, als im Ostbaltikum“ (p. 153).

Diese Prognose scheint aber nicht in Erfüllung zu gehen, denn schon das vom Akademiker Fr. Schmidt bearbeitete Material³⁾ deutet auf eine grössere Verwandtschaft beider Faunen, und zwei Trilobiten, nämlich *Asaphus fennicus* Wiman und *Asaphus robergii* Wiman, die ursprünglich als bottnisch galten, sind auch im Brandschiefer von Kottla gefunden worden.

1) Carl Wiman, Studien über das Nordbaltische Silurgebiet, II. Upsala 1908.

2) Die Fauna des Ceratopygekalks, des Orthocerenkalks, des Chasmopskalks und des Leptaenakalks.

3) Fr. Schmidt, 1907.

Tabelle I.

Nordbaltikum	Schwe- den und Skandi- navien	Besti	Bemerkungen
<i>Pterygometopus exilis</i> Eichw. . . .	—	+	
„ <i>panderi</i> Fr. Schm.	+	+	im Echinospaeritenkalk
<i>Chasmops wrangeli</i> Fr. Schmidt . .	—	+	C ₃ [C ₁ b]
„ <i>sp.</i>	?	?	
<i>Cheirurus sp.</i>	?	?	
<i>Cybele adornata</i> Tqt.	+	—	
„ <i>sp.</i>	?	?	
<i>Lichas bottniensis</i> Wiman	—	—	
„ <i>conicotuberculatus</i> Nieszk. .	+	+	
„ <i>proboscideus</i> Dames	—	—	
<i>Remopleurides sp.</i>	?	?	
<i>Asaphus praetextus</i> Tqt.	+	+	= <i>Asaphus ornatus</i> Pomp.
„ <i>ludibundus</i> Törnq.	+	—	[C ₁₆]
„ <i>robergii</i> Wiman	—	+	
„ <i>wahlenbergii</i> Wiman	—	—	
„ <i>fennicus</i> Wiman	—	+	
„ <i>sp.</i>	?	?	
<i>Symphysurus superstes</i> Olin . . .	+	—	
<i>Holometopus nitens</i> Wiman . . .	—	—	
<i>Basilicus kuckersianus</i> ? Schm. . .	—	+	
<i>Illaenus crassicauda</i> Wahlenb. . .	+	+	
„ <i>parvulus</i> Holm	+	—	
„ <i>Schmidtii</i> Nieszk.	—	+	D ₁
„ <i>mirus</i> Wiman	—	—	
<i>Ampyx rostratus</i> Sars.	+	+	
<i>Conularia Holmii</i> Wiman	—	—	
„ <i>sp.</i>	?	?	
<i>Siphonotreta unguiculata</i> Eichw. .	—	+	
<i>Pseudometoptoma mickwitzii</i> Hüne .	—	+	
<i>Pseudocrania planissima</i> Hüne . .	—	+	
<i>Porambonites schmidtii</i> Noetl. . . .	—	+	
„ <i>sp.</i>	?	?	
<i>Clitambonites (Orthisina) sp.</i> . . .	?	?	
<i>Platystrophia biforata</i> Schloth. . .	+	+	
<i>Rafinesquina imbrex</i> Pand.	+	+	
<i>Plectambonites oblongus</i> Pand. . .	—	+	C ₁ b (Echinosp.-kalk)
„ <i>convexus</i> Pand.	+	+	
„ <i>quinquecostatus</i> M'Coy	+	+	
„ <i>sp.</i>	+	+	

Die vorstehende Tabelle I ist auf Grund der Angaben von C. Wiman, Fr. Schmidt¹⁾ und H. Bekker²⁾ zusammengestellt und zeigt deutlich das Vorwiegen der ostbaltischen Fauna der Kukruse-Stufe im älteren Chasmopskalk des nordbaltischen Silurgebiets.

Von den 25 nordbaltischen Trilobiten sind 5 Arten im ganzen Baltikum, also auch in Skandinavien und im Ostbaltikum vorhanden; 4 Arten sind bis jetzt nur im Silur des Nordbaltikums nachgewiesen worden; 6 Arten gehören gleichzeitig dem Nordbaltikum und der Kukruse-Stufe an, und nur 4 Arten kommen allein im Nordbaltikum und in Skandinavien vor. Es bleiben noch 4 Trilobiten unbestimmter Art übrig, doch diese werden in unseren Berechnungen keine grosse Änderung hervorbringen. Auch wenn die 4 sich alle als skandinavisch erweisen, wird das Verhältnis immer noch 8:6 sein, also nur zwei zu Gunsten Skandinaviens. Doch diese Möglichkeit ist wohl kaum denkbar. Es sind eigentlich 5 Trilobiten von Wiman mit „sp“ bezeichnet worden. Es scheint aber der *Basilicus* (Taf. VII, Fig. 22, Wiman 1907) ein wirklicher *kuckersianus* zu sein, wie es auch Wiman selber vermutete (ibid., p. 113).

Von den 9 von Wiman im älteren Chasmopskalk bestimmten Brachiopodenarten sind in der estnischen Kukruse-Stufe alle vorhanden, und nur 4 Arten von diesen 9 sind aus Skandinavien bekannt.

Diese Verhältnisse der Faunen des älteren Chasmopskalks des Nordbaltikums und der C₂-Stufe Eestis sind analog mit den von C. Wiman beschriebenen Beziehungen des Ostseekalks zu den entsprechenden ostbaltischen Bildungen. Deshalb können wir die Worte³⁾ Wiman's, wie er sich über den Ostseekalk äussert: „als Resultat der tiergeographischen Untersuchungen ergibt sich, dass die Fauna wenigstens ebenso viele ostbaltische Elemente enthält wie skandinavische“, — mit vollem Recht auch bezüglich des älteren Chasmopskalks anwenden, welche Meinung noch durch die Ähnlichkeit der entsprechenden Gesteine unterstützt wird.

1) Fr. Schmidt, Revision der ostbalt. Trilob., VI (Allgemeine Übersicht), 1907.

2) H. Bekker, The Kuckers Stage of the Ordovician Rocks of NE Estonia. Tartu, 1921.

3) Ein wenig abgeändert. Bei Wiman steht „skandinavische“ an erster und „ostbaltische“ an zweiter Stelle.

2.

Tabelle II.

Fundort \ Petrefakte									
	<i>Chasmops</i> odin	<i>Cheirurus</i> spinulosus	<i>Aristarella</i> nitiduloides	<i>Cyrtodonta</i> sp.	<i>Ischyodonta</i> sp.	<i>Modiolopsis</i> sp.	<i>Nucula</i> sp.	<i>Ctenodonta</i> sp.	<i>Subitities</i> priscus ?
Kohtla-Järve (Brandschieferfacies)	18 180	9 90	4 40	?	1	1	2	4 40	2
Tallinn (Reval) } Kalkfacies	26	3	101	26	16	13	0	0	12
Humala }	2	1	13 280	8 160	5 100	1	0	0	1

Diese Tabelle stellt einen Versuch dar, die faunistischen Unterschiede des Brandschiefers und der westlichen Kalksteinfazies statistisch zu illustrieren. Die Unterschiede der Gesteine sind dermassen scharf, dass man daraus schliessen kann, dass im Kukruse-Meere, den beiden Fazies entsprechend, verschiedene Lebensbedingungen geherrscht haben, welche nicht ohne Einfluss auf die Verteilung der Fauna bleiben konnten. Um eine Vorstellung von der Faunenverteilung zu erhalten, unternahm ich ein gründliches Petrefaktensammeln in den Aufschlüssen von Kohtla (Brandschieferfacies), Tallinn und Humala (Kalksteinfacies). Möglichst jede Versteinerung wurde gesammelt, und die Zahlen der Tabelle II stellen die Resultate dar. Die horizontalen Reihen geben die Zahl der Individuen verschiedener Arten an, die gleichzeitig in demselben Aufschluss gesammelt worden sind. Die vertikalen Kolumnen dagegen geben die Häufigkeit einer und derselben Art in verschiedenen Aufschlüssen an. Die Zähler der Frequenzen bedeuten die wirklich gefundene Anzahl der Petrefakten. Weil aber die Arbeitszeit in den Aufschlüssen mit der Proportion $\frac{1}{10}$ (Kohtla): 1 (Tallinn): $\frac{1}{20}$ (Humala) gegeben ist, so sind die Zahlen von Humala mit 20 und von Kohtla mit 10 multipliziert, um eine Möglichkeit zu schaffen, die Zahlen der vertikalen Reihen miteinander zu vergleichen. In der Tabelle sind diese Zahlen als Nenner eingesetzt.

Wegen der grossen Unterschiede in der Arbeitsdauer sind diese Zahlen weniger zuverlässig im Vergleich mit denen der horizontalen Reihen, welche ja ein und demselben Zeitraum entsprechen. Wo man es nur mit einem oder mit 2 Petrefakten zu tun hat, blieb

der Nenner aus, denn bei einer so kleinen Anzahl von Beobachtungen erhält die Zahl 1, mit 10 oder 20 multipliziert, einen sehr grossen Wert.

Es konnte auch nicht das ganze gesammelte Material verwertet werden: die sehr seltenen und besonders die massenhaften Petrefakte (Beispiel: *Plectambonites sericæus*) mussten ausser Betracht bleiben. In der Tabelle sind als die zuverlässigsten zwei Trilobiten und eine Reihe von Pelecypoden verzeichnet, von denen die letzteren nicht alle der Art nach bestimmt sind, weil nur Steinkerne vorhanden waren. Aus den besprochenen Gründen erscheint diese Tabelle vielfach ungenügend, aber sie ist doch anschaulicher als die allgemein gebrauchte willkürliche Skala: sehr selten, selten, vereinzelt, häufig, sehr häufig, massenhaft, gesteinsbildend. Bei der hier angewandten statistischen Methode sind zwar die extremen Glieder durch Zahlen nicht ausdrückbar; aber bei einer genügenden Anzahl von Beobachtungen, die einem möglichst gleichen Zeitraum entsprechen, wird auch dieses möglich sein; doch für „gesteinsbildend“ muss dieser Ausdruck bleiben, weil er dem „unendlich gross“ gleich ist.

Aus der Tabelle II folgt, dass die Zahl der Pelecypoden in der Richtung der Kalkfacies wächst, ausser *Otenodonta sp.* und *Nucula sp.*, welche als Bewohner des Brandschiefers erscheinen. Die Trilobiten dagegen sind im Brandschiefer weit häufiger, als im Westen: *Cheirurus spinulosus* ist im Vergleich mit *Chasmops odini* 4 mal häufiger im Brandschiefer, als bei Tallinn, was durch verschiedene Lebensart zu erklären ist.

3.

Das häufigste den Brandschiefer bildende Fossil ist *Gloeo-capsamorpha prisca* Zalesky, deren Anhäufung auf besondere Temperaturverhältnisse und Meeresströmungen deutet. Der Brandschiefer entstand weit vom Strande, aber in ruhigem, von Meeresströmungen ungestörtem Wasser, denn sonst müssten die Plankton-Algen noch lebend verschleppt werden und es könnte gar nicht zur Bildung dieses Sediments gelangen. Diese Anhäufung von Plankton-Algen wird oft als ein Beweis und ein Beispiel eines Flachsee-Sediments angeführt. Doch nicht das Vorkommen dieser Alge ist hier charakteristisch, denn sie war vielleicht gar nicht an den Boden gebunden und konnte sich auch über grosser Tiefe schwebend gut fühlen, sondern für das flache Meer zeugen die zahl-

reichen Bryozoen, Ostrakoden, Trilobiten usw.¹⁾ Die *Coelosphaeridium*-Zone²⁾, welche fast ganz frei von Bitumen ist, entspricht dann einer Änderung in der Richtung der Meeresströmung, und deren Fauna nähert sich deshalb dem westlichen (Tallinn-Humala-)Typus. Aber auch diese weitverbreitete Kalkbank ist im flachen Wasser entstanden, denn die am Boden befestigte Alge *Coelosphaeridium kohlense* Bekker konnte nur in einer Tiefe wohnen, wo noch Tageslicht genügend vorhanden war.

Vor Besprechung der Petrefakte muss noch einiges über die Gliederung der Kukruse-Stufe gesagt werden. Es wird nämlich weiter die von H. Bekker vorgeschlagene Gliederung²⁾ angewendet, welche die einzelnen Schichten zutreffend in natürliche Zonen vereinigt und folgendermassen zusammengefasst werden kann: Liegendes: C₁b (Echinosphaeritenkalk); Kukruse-Stufe (C₂): Zone der Bryozoen (Schicht I bis VII); *Coelosphaeridium*-Zone (Schicht VIII); Brachiopoden-Zone (IX bis XVI); *Mesograptus*- *Climacograptus*-Zone.

Alle abgebildeten Petrefakte, ausser *Lichas hübnéri*, welcher von Mag. Heinrichson gefunden wurde, und ausser dem growingkschen Original exemplar des *Hoplocrinus dipentus*, sind vom Autor gefunden und dem Geologischen Museum der Universität Tartu übergeben worden, wo sie sich auch eben befinden.

4.

Trilobita.

Gen. *Acidaspis*.

Acidaspis kuckersiana Fr. Schmidt. — Taf. I, Fig. 1.

1885. Fr. Schmidt, Revision der ostb. Trilobiten, II etc., pag. 4. Taf. I, Fig. 2—3.

Über diese seltene Art ist wenig neues zu sagen. Neben zwei unvollständigen Kopfschildern liegt mir ein Pygidium vor, das aber schlecht erhalten ist. Die Oberfläche ist grob gekörnt, der Rand mit 10 Stacheln versehen und die Rhachis besteht nur

1) Lindenbein, Genève 1921. Aber auch die bituminösen Kalksteine enthalten dieselbe Fauna in gleicher Anhäufung, nur die Algen kommen zerstreuter vor. Es ist deshalb möglich, dass der Brandschiefer und die Kalkbänke, im Gegensatz zur Oszillationshypothese Lindenbeins, Gäberts (Braunkohle 1921) u. a., beide in gleicher Tiefe entstanden.

2) H. Bekker, Stratigraphical and Paleontological Supplements on the Kukruse-Stage of the Ordovician Rocks of Eestl. Tartu, 1924.

aus einem wulstartigen Glied. Die Wülste des Hauptstachel-paares sind halbkugelig und stark entwickelt. Breite: 9 mm; Länge ohne Stachel: 3,5 mm. Fundort: Brandschiefer aus Kohtla. — Zone unbekannt (wahrscheinlich die Bryozoen-Zone).

Gen. *Asaphus*.

Asaphus fennicus Wiman.

1908. C Wiman, Studien über das Nordbaltische Silurgebiet. Upsala, pag. 111. Taf. VI, Fig. 14.

Auf das Vorkommen des *Asaphus fennicus* Wiman im Brandschiefer hat mich Herr Prof. H. Bekker aufmerksam gemacht. Er hat mir ein von ihm gefundenes Exemplar gezeigt, welches fast vollständig der Beschreibung Wiman's entspricht. Als einziger Unterschied ist der mehr abgerundete Umriss des Pygidiums dieses Exemplares zu nennen. Vereinzelte Pygidien, freie Wangen und andere Fragmente sind im Brandschiefer nicht selten, doch wegen ihrer Kleinheit sind sie bis jetzt den Beobachtungen entgangen.

Asaphus robergii Wiman. — Taf. I, Fig. 2.

1908. C. Wiman, Studien über das Nordbaltische Silurgebiet, II. Upsala, pag. 110. Taf. V, Fig. 3 und 4.

Ich habe von dieser Art nur einige freie Wangen gefunden, die aber wegen der charakteristisch gestielten Augen und des Laues der Gesichtsnaht gut mit dem *Asaphus robergii* Wiman übereinstimmen.

Fundort: Kohtla, Brachiopoden-Zone. Abbildungen: Taf. I, Abb. 2 stellt eine verhältnismässig guterhaltene freie Wange dar.

Zusammen mit *Asaphus fennicus* Wiman rücken diese Funde den älteren Chasmopskalk des Nordbaltischen Silurgebiets und die Kukruse-Stufe einander näher, wie dies im Eingang der vorliegenden Schrift erläutert wurde.

Basilicus kuckersianus Fr. Schmidt. — Taf. I, Fig. 3.

1904. Rev. der ostb. Trilob. etc., V, 3, pag. 23. Taf. IV, Fig. 1—7.

Auf Taf. I Fig. 3 ist ein Hypostoma abgebildet, das aus Tallinn stammt. — Von auswärtigen Funden ist bemerkenswert das schon besprochene, von Wiman im nordbaltischen Geschiebe gefundene Pygidium.

Gen. *Cheirurus*.

Cheirurus macrophthalmus? Kutorga. — Taf. I, Fig. 4.

1881. Fr. Schmidt, Revision I, p. 143. Taf. VII, Fig. 3—5; Taf. XVI, Fig. 4.

Nach Fr. Schmidt gehört diese Art dem Echinospaeritenkalk an, doch das abgebildete Hypostoma, mit der Abbildung (Taf. VII Fig. 1c, 2) von Schmidt gut stimmend, bestätigt das Vorkommen der Art in der C₂-Stufe. Von H. Bekker¹⁾ ist ein Pygidium, gleichfalls aus dem Brandschiefer von Kohtla, beschrieben worden.

Fundort: Kohtla, Brachiopoden-Zone.

Cyrtometopus plautini Fr. Schmidt. — Taf. I, Fig. 5—8.

1881. Fr. Schmidt, Rev. der ostb. Trilob. etc., p. 159. Taf. XII, Fig. 24a, b, c; Taf. XVI, Fig. 15.

Fr. Schmidt besass von dieser Art nur zwei Exemplare, die beide aus Tallinn stammen. Im Brandschiefer von Kohtla kommt nicht selten eine abweichende Form des *C. plautini* vor, die als besondere Variation bezeichnet werden kann. Den Originalen von Fr. Schmidt fehlen nämlich die Wangendorne; bei der Variation aus Kohtla dagegen sind die Wangenecken in kleine Spitzen ausgezogen (Taf. I, Abb. 8, 14b) und der Frontallobus ist stärker angeschwollen: er ragt sogar etwas über den Vorderrand hervor.

Das Hypostoma (Taf. I, Fig. 5, 68) reichte mit dem Hinterrand bis zum zweiten Lobus der Glabella; die Oberfläche ist dicht gekörnt; der Mittelkörper oval, vom Randsaum scharf abgegrenzt.

Das Pygidium ist sehr charakteristisch. Drei bogenförmige Rhachisglieder sind durch tiefe und breite Furchen getrennt; die Pleuren sind abgeplattet und mit einer Längsfurche versehen. Die Oberfläche ist fein und spitz gekörnt. Die Länge des Pygidiums beträgt $\frac{2}{3}$ der Breite.

Fundort: Kohtla, C₂, in allen Zonen vorhanden.

Gen. *Cybele* Lovén.

Cybele rex Nieszk. — Taf. I, Fig. 9.

1881. Fr. Schmidt, Revision etc., I, p. 209. Taf. XIII, Fig. 21—23 Taf. XIV, Fig. 3—4; Taf. XV, Fig. 8—9.

1) H. Bekker, The Kuckers Stage etc. Taf. IX, Fig. 12. Tartu, 1921.

Früher sind nur die Kopf- und Schwanzschilder bekannt gewesen. Das Fehlen des Thorax machte Fr. Schmidt bei der Trennung dieser Art von *Cybele grewingki* einige Schwierigkeiten. Es sind hier die gewöhnlichen Pleurenfortsätze des 6-ten Gliedes vorhanden. Aber auch die folgenden Glieder sind mit ziemlich langen „Schwertern“ versehen, bei *C. grewingki* dagegen sind diese nur zugespitzt. Folglich ist die Trennung der Arten auch in dieser Hinsicht berechtigt, aber auch die von Fr. Schmidt ausgesprochene Verwandtschaft der beiden muss immer als Tatsache gelten.

Die Thoraxglieder sind in der Mitte mit einem flachen Tuberkel versehen.

Fundort: Tallinn, beim südlichen Leuchtturm, aus den mittleren Schichten der C₂-Stufe.

Cybele xiphère sp. nov. — Taf. I, Fig. 10, 11.

Von dieser seltenen Art habe ich ausser dem abgebildeten Exemplar nur noch ein Mittelschild des Kopfes gefunden. Beide Stücke stammen aus Kohtla und, nach dem Gestein zu urteilen, aus der Brachiopodenzone.

Der Kopf ist flach gewölbt, halbmondförmig, mit abgerundeten Ecken der festen Wangen. Die Dorsalfurchen mit den einmündenden Querfurchen sind tief eingeschnitten, so dass die Loben sich stark über die Furchen wölben, weshalb die letzteren etwas ausgehöhlt erscheinen. Die erste Furche besitzt eine nach vorn gerichtete Verzweigung, deshalb sind im ganzen 4, nicht aber, wie gewöhnlich, 3 Furchen vorhanden.

Die Furchen sind kurz, sehr tief und breit; die Loben sind 3 mal breiter als die Furchen. Der Vorderrand der Glabella ist zweieckig und zweimal breiter als die Mitte derselben. Die Wangen sind wulstig emporgehoben und tragen die dünnen aber kurzen stielartigen Augenhöcker. Die Augen sind sehr nach hinten gerückt und befinden sich gegenüber dem letzten Seitenfurchenpaar. Der Nackenring ist gewölbt und von der Glabella tief getrennt. Die Oberfläche der Glabella ist gekörnt und mit zerstreuten Tuberkeln versehen, die aber beim abgebildeten Trilobiten abgenutzt sind. Die freien Wangen sind punktiert.

Der Thorax war wahrscheinlich elfgliedrig, mit langen Fortsätzen am 6-ten Pleurenpaar. Die weiteren Pleuren nur zugespitzt, die vorderen abgerundet. Die Oberfläche ist ähnlich wie bei der Glabella ziemlich fein gekörnt.

Ein ähnlicher Kopf ist bei Barrande¹⁾ unter dem Namen *C. bellatula* abgebildet, und zwar mit Verzweigung der ersten Furche. Die Zeichnung ist nach Volborth ausgeführt, doch Fr. Schmidt, der die Volborthschen Sammlungen beschrieb, erwähnt nichts von einer solchen Glabella. Es ist aber dennoch möglich, dass die *Cybele xiphère* schon von Volborth gefunden und als *Cybele* (*Zethus*) *bellatula* beschrieben worden ist.

Fundort: Kohtla.

Dimensionen: Breite des Kopfes: 16,5 mm.; Länge — 8,5 mm.; Grösste Breite der Glabella: 7 mm.; kleinste — 4 mm.

Gen. *Lichas*.

Lichas inexpectatus Fr. Schmidt. — Taf. I, Fig. 13, 14.

1907. Fr. Schmidt, Revision usw., VI (Allgemeine Übersicht), pag. 40. Taf. II, Fig. 12, 12a.

Die Art ist nur auf Grund einer freien Wange mit dem Auge beschrieben worden.

In der Abb. 14 der Taf. I finden wir unter *a* eine solche Wange, die vollständig der Beschreibung und der Abbildung bei Fr. Schmidt entspricht. Nur ist der grössere Teil des Augentieles abgebrochen.

Das Hypostoma (*b*) hat das Aussehen des Hypostoma eines *Metopias*. Es ist 24 mm breit und 13,5 mm lang; an den Seitenlappen sind scharfe reliefartige Terrassenlinien zu beobachten. Im Sinus des Hypostoma finden sich 10 hakenartig gegen die Mundöffnung gerichtete kleine Dorne, die vergrössert ($\times 2\frac{1}{2}$) in der Fig. 13 zu sehen sind. Der Mittelkörper ist grob punktiert.

Das Pygidium (*a*) ist 30,5 mm lang und 44 mm breit. Die Oberfläche ist mit nach hinten gerichteten Tuberkeln bedeckt, die dem ganzen Pygidium ein sehr charakteristisches Gepräge geben.

Der Hinterrand ist fünfeckig, was besonders gut in der

1) Barrande, Système Silurien. 1^{ère} Partie, Vol. I, Planches. Pl. 3, Fig. 1. — *Zethus bellatulus*.

Fig. 1, Taf. II zum Vorschein kommt. Es ist die Innenseite eines anderen Pygidiums, welches wahrscheinlich auch hierzu gehört.

Das ganze Stück stammt aus Kohtla, wahrscheinlich aus den oberen Schichten der Bryozoenzone.

Subg. *Conolichas*.

Lichas triconicus Dames. — Taf. I, Fig. 12.

1881. Fr. Schmidt, Rev. etc., II, pag. 87. Taf. V, Fig. 1—3.

„ „ „ „ VI (Übersicht), p. 40. Taf. II, Fig. 10, 11.

Von dieser Art, die in der Stufe C_3 (Idavere-Stufe) zuhause ist, habe ich einige Schwanzschilder in den obersten Schichten der Kukruse-Stufe bei Tallinn gefunden. Taf. I, Fig. 12.

Subg. *Metopias*.

Lichas kuckersianus Fr. Schmidt. — Taf. II, Fig. 2.

1885. Fr. Schmidt, Rev. II, pag. 67. Taf. III, Fig. 1—5.

1907. „ „ „ VI (Übersicht). Taf. II, Fig. 8.

Die Fig. 2 der Taf. II stellt einen Kopf dar, der gut mit der Abb. in der „Übersicht“ und mit der Beschreibung von Fr. Schmidt übereinstimmt.

Diese Art muss scharf von *Lichas hübnerei* getrennt werden, welcher weiter eingehender beschrieben wird. Die Oberfläche des *L. hübnerei* ist mit eingedrückten Punkten versehen, die des *L. kuckersianus* aber mit abgerundeten Körnern. „Das Pahlen'sche“ Exemplar, welches „nur die genannten Tuberkel zeigt“ („Übersicht“ s. 37, *Lichas hübnerei*, vorletzte Zeile), gehört wahrscheinlich zum *L. kuckersianus*, ganz gewiss aber nicht zum *L. hübnerei*, im Gegensatz zur Behauptung Fr. Schmidt's.

Abbildungen: Taf. II, Fig. 2 ein Kopf aus Tallinn (C_2). — Daneben, Fig. 3 — *Lichas hübnerei* Eichw.

Vorkommen: C_2 , bei Tallinn und Kohtla.

Lichas wimani sp. nov. — Taf. II, Fig. 4—6.

Diese Art gehört vielleicht nicht mehr zur Untergattung *Metopias*. Doch weil ein Verbindungsglied, nämlich *Lichas hübnerei*, vorhanden ist, der gewisse Ähnlichkeit mit unserer Art aufweist, und weil es noch nicht möglich ist, die Gruppe näher zu

bestimmen, so wird dieser Trilobit vorläufig bei *Metopias* untergebracht.

Es sind im ganzen drei Mittelschilder des Kopfes und ein Hypostoma vorhanden, die alle aus Kohtla stammen.

Die auf Taf. II, Fig. 4 abgebildete Glabella ist 8,3 mm lang und 11,4 mm breit. Die Schale ist sehr dünn und zart, glänzend-glatt und mit zahlreichen feinen punktartigen Eindrücken versehen. Die Vorderfurchen divergieren fast bis zur Nackenfurche; doch dicht vor dem hinteren Ende derselben münden sie schwach konvergierend in diese Furche. Dieser Teil der Vorderfurchen ist im Steinkern ziemlich verschwommen und kann als Verbindungsfurche aufgefasst werden; die Hauptzweige dagegen sind scharf und tief. An der Übergangsstelle beider Zweige sind zwei kleine seitliche Grübchen vorhanden. Das ganze Stück ist rundgewölbt und etwas in die Breite gestreckt. Die hinteren Seitenloben sind gleichseitige Dreiecke, mit dem stumpfen Winkel in die Dorsalfurchen gerichtet. Die Dorsalfurchen schneiden deutlich den Nackenring. Die Einbuchtung der Vorder- und Dorsalfurchen in die Nackenfurche bildet ein kleines viereckiges vertieftes Feld. — Beim kleineren Exemplar (Taf. II, Fig. 5) ist gegen die Mitte der Vorderfurchen auf den Seitenloben je eine deutliche Anschwellung zu sehen; gegen diese Anschwellungen hin sind die Vorderfurchen etwas nach aussen geknickt. Dieselbe Erscheinung, aber mehr verschwommen, ist auch beim grösseren Kopf (Fig. 4) zu beobachten. Der Abstand der Vorderfurchen beim Vorderrande beträgt die Hälfte, beim Nackenring ein Drittel der ganzen Breite des Mittelschildes.

Das Hypostoma ist fast zweimal so breit als lang; der Mittelkörper ist, wie die Glabella, punktiert, die Seitenlappen tragen Terrassenlinien. Die Einbuchtung ist schwach.

Die punktierte Oberfläche nähert unsere Art dem *L. hübnerei*, bei dem wir ebenfalls eine, wenn auch schwächere, Verbindungsfurche von den Vorderfurchen zur Nackenfurche hin finden.

Vorkommen: Kohtla, C₂.

Um die Beziehungen des *Lichas wimani* zur *Metopias*-Gruppe zu erläutern, muss hier einiges über *Lichas hübnerei* mitgeteilt werden.

***Lichas hübnerei* Eichw. — Taf. II, Fig. 3.**

1885. Fr. Schmidt, Revision usw., II, pag. 65. Taf. I, Fig. 13, 14.

1907. " " " VI, pag. 37. Taf. II, Fig. 6, 7.

Das auf der Taf. II mit 3 bezeichnete Stück gehört Herrn Mag. Heinrichson, der es im Echinospaeritenkalk der Paldiski- (Baltischport-) Halbinsel gefunden hat. Für die Erlaubnis dieses Exemplar abzubilden bin ich Herrn Heinrichson zum grössten Dank verpflichtet.

Die Vorderfurchen enden beim abgebildeten Exemplar nicht vollständig blind, sondern setzen sich schwach ausgeprägt mittels einer Verbindungsfurche bis zur Nackenfurche fort, ähnlich wie bei *Lichas wimani*, und vor der Einmündung in die Nackenfurche zeigen sie noch eine punktartige Vertiefung. Die Oberfläche ist auch punktiert, doch am Vorderrande sind die Eindrücke grösser und flach und können als „negative“ flache Tuberkeln bezeichnet werden. Die Schale ist dünn, aber bei unserem Stück gut erhalten, und besteht aus einer Schicht, nicht aber aus mehreren Schichten verschiedener Beschaffenheit. Es sind auch keine Tuberkeln, keine Erhabenheiten auf der Oberfläche vorhanden; doch wenn am Vorderrande die zwischen den Eindrücken liegenden Schalenteile zum Teil zerstört werden und mehrere von diesen eingedrückten Punkten sich vereinigen, können die „flachen Tuberkeln“, von denen Fr. Schmidt geschrieben, durch die stehengebliebenen Teile gebildet werden. Eichwald hatte vollständig Recht, als er nur von Eindrücken redete. Die Glabella ist flacher als bei *Lichas wimani*, ragt stärker nach vorne, und auch der Nackenring ist flacher und breiter.

Es sind ganz bestimmte spezifische Unterschiede beider Arten genannt worden, und es scheint, dass diese Trilobiten nicht bequem in der Untergattung *Metopias* untergebracht werden können, sondern eine Abzweigung für sich bilden. Ein vollständigeres Material wird diese Frage vielleicht lösen.

Vorkommen: Nach Fr. Schmidt im Echinospaeritenkalk C₁b bei Tallinn, und von Herrn Mag. Heinrichson in denselben Schichten bei Paldiski gefunden.

Gen. *Cyphaspis*.

Cyphaspis planifrons Eichw. — Taf. II, Fig. 7, 8.

Fr. Schmidt. Rev. IV, p. 58. Taf. IV, Fig. 40—43.

Abgebildet sind ein Mittelschild des Kopfes und eine freie Wange, die einige Unterschiede von den Abbildungen bei Fr. Schmidt zeigen. Die Glabella ist, gleichwie der ganze Kopf, etwas

stärker gewölbt; die Oberfläche ist mit rundlichen Körnern besetzt; die festen Wangen sind aufgeschwollen, so dass die niedrigen Augenhöcker etwas über die Glabella ragen; der Nackenring ist sehr stark gewölbt und trägt drei etwas nach hinten geneigte Dorne, von denen der mittlere die anderen an Grösse überragt. Die Ecke der freien Wange ist in eine gefurchte Spitze ausgezogen, und die Oberfläche ist stärker als die Glabella gekörnt. Die unvollständige Übereinstimmung mit der Beschreibung von Fr. Schmidt ist durch die weniger gute Erhaltung seiner Exemplare verursacht worden.

Fundort: Kohtla, C₂.

Gen. *Phacops*.

Pterygometopus kuckersiana Fr. Schmidt. — Taf. II, Fig. 9.

1881. Fr. Schmidt, Revision etc., I, pag. 90. Taf. V, Fig. 11–13; Taf. XI, Fig. 7; Taf. XII, Fig. 16–18.

Von Fr. Schmidt ist auch das Pygidium dieser Art beschrieben worden. Aber die Abbildung (Taf. V, 13) scheint nicht ganz gelungen. Das hier abgebildete Schwanzschild (Taf. II, Fig. 9) besitzt 12 Glieder und ist wegen seiner länglichen Form von den häufigeren kurzen Pygidien des *P. exilis* und *Chasmops odini* gut zu unterscheiden.

Fundort: Kohtla, C₂.

Gen. *Remopleurides*.

Remopleurides nanus Leucht. *var. elongata* Fr. Schmidt.

1894. Fr. Schmidt, Revision etc., IV, p. 89. Taf. VI, Fig. 36.

Die Fig. 11 auf Taf. II stellt ein winziges, das einzige bekannte Pygidium dieser Art dar. Charakteristisch ist die Furche, die den Vorderrand schneidet und in der Mitte ein Grübchen bildet. Von da an ziehen sich diagonal nach hinten einige grobe Terrassenlinien. Im ganzen aber hat das Pygidium viel Ähnlichkeit mit dem *Lichas quadrispinus* Angelin¹⁾, in dem Linnaeus²⁾ einen *Remopleurides* erkannte.

Die Abb. 17 der Taf. II stellt einen Teil des Rumpfes dar. Der lange Dorn, die zugespitzten Pleuren und der ganze Habitus

1) 1854. Palaeont. Scandinavica, p. 84, tab. XL, fig. 20.

2) K. Vet.-Ak. Handlingar 1869 p. 68, Taf. I, Fig. 23, 25.

weisen auf eine nahe Verwandtschaft mit dem *R. dorsospinifer* Portl.¹⁾ hin.

Bei unserem Stück sind wie beim *R. latus* Olin²⁾ die Hinteränder der Pleuren mit Zacken besetzt, und es lassen sich einige grobe Terrassenlinien unterscheiden. Im Gegensatz zum *latus* sind die Pleuren sehr kurz ($\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ eines Rhachisgliedes je nach der Entfernung vom Kopf) und der Dorn ist stärker entwickelt. — Ausserdem unterscheidet sich unsere Art auch wegen ihrer meist glatten Glabella von den schwedischen, die gewöhnlich Terrassenlinien aufweisen.

Fundort: Kohtla, C₂.

Crinoidea.

Gen. *Hoplocrinus* Grewingk.

1867. H. Grewingk, Über *Hoplocrinus dipentas* und *Baerocrinus ungeri*. Dorpat. 1874. Fr. Schmidt, Miscellanea II (*Hybocrinus dipentas*).

Von diesen Krinoiden ist ein reichliches Material vorhanden, das ich hauptsächlich in der Umgebung von Tallinn (Lasnamägi, beim südl. Leuchtturm) erbeutete. Es sind darunter zwei Arten zu unterscheiden, *Hoplocrinus dipentas* (Leucht.) und eine andere, die ich *Hoplocrinus grewingkii* nenne.

Hoplocrinus grewingkii sp. nov. — Taf. II, Fig. 14, 15.

Der Kelch ist gross, konisch-konvex, und die Anordnung der Tafeln ist gleich der des *H. dipentas*. Die Oberfläche der Tafeln ist grobgekörrt (Taf. II, Fig. 15); bei den R. sind die Körner parallel den Seitenrändern und dem Unterrande, bei den Basalia aber parallel dem Oberrande angeordnet.

Bis zum Seitenrand der Basalia reichen diese Körner nicht, und es bleibt ein freier Saum übrig, so dass je zwei von den Tafeln an der Berührungsstelle zusammen eine Rinne bilden. Diese Eigentümlichkeit fehlt beim *H. dipentas* vollständig. Die Armglieder sind bei *H. grewingkii* schmaler und länger.

Abbildungen: *Hoplocrinus dipentas*. Fig. 12. Ein ganzes Exemplar aus Tallinn. — 13. Originalexemplar von Grewingk. —

1) K. Vet.-Ak. Handlingar 1869 p. 68, Taf. I, Fig. 23, 25.

2) E. Olin. Om de Chasmopskalken etc. Lund 1906. p. 55, Taf. II, Fig. 8—9.

15. Gekörnte Tafeln des *H. grewingki*. — 14. Ein ganzes Exemplar mit den Rinnen zwischen den Basalia und drei Armglieder.

Alle abgebildeten Exemplare stammen aus Tallinn.

Gen. *Hybocrinus* Billings.

Die Fig. 16 in der Tafel II stellt einen Kelch dar, der einem wirklichen *Hybocrinus* angehört: doch wegen der schlechten Erhaltung bezeichne ich ihn vorläufig als *Hybocrinus* sp.

Fundort: Kohtla.

Cystoidea. — Taf. II, Fig. 18, 19.

Die Abb. 19 stellt ein ganzes Exemplar von *Chirocrinus granulatus* Jaekel dar. — Fig. 18 ist ein schönerhaltener Kelch von *Cystoblastus Kokeni* Jaekel.

Beide stammen aus den unteren Schichten der C₂-Stufe beim Obersee (Umgebung von Tallinn).

Erläuterung der Tafeln.

Tafel I.

1. *Acidaspis kuckersiana* Fr. Schmidt. Pygidium mit abgebrochenen Stacheln. × 2. Kohtla, bituminöser Kalkstein aus der Brachiopodenzone.

2. *Asaphus robergii* Wiman. Wangenschild mit erhaltenem Auge. Kohtla, Brachiopoden-Zone. Nat. Grösse.

3. *Basilicus kuckersianus* Fr. Schmidt. Hypostoma aus Tallinn. Nat. Grösse.

4. *Cheirurus macrophthalmus* Kutorga. Hypostoma aus Kohtla. Nat. Gr.

5, 6, 7, 8. *Cyrtometopus plautini* Fr. Schmidt. 5. Hypostoma von aussen.

6. Hypostoma von innen. 7. Pygidium. Alle drei zweimal vergrössert. 8. Ein Kopf mit Hypostoma. Die Wange in eine Spitze ausgezogen. Nat. Grösse. — Fundort: Kohtla, Brandschiefer.

6. *Cybele rex* Nieszk. mit auspräparierten „Schwertern“. C₂, Tallinn. Nat. Grösse.

10, 11. *Cybele xiphère* sp. n. Ansicht von der Seite (10); dasselbe von oben (11). Nat. Grösse. Kohtla.

12. *Lichas triconicus* Dames. — Pygidium aus den obersten C₂-Schichten aus Tallinn. Nat. Grösse.

13. *Lichas inexpectatus* Fr. Schmidt. Sinus des Hypostoms, mit den Häkchen. × 2. — Brandschiefer, Kohtla.

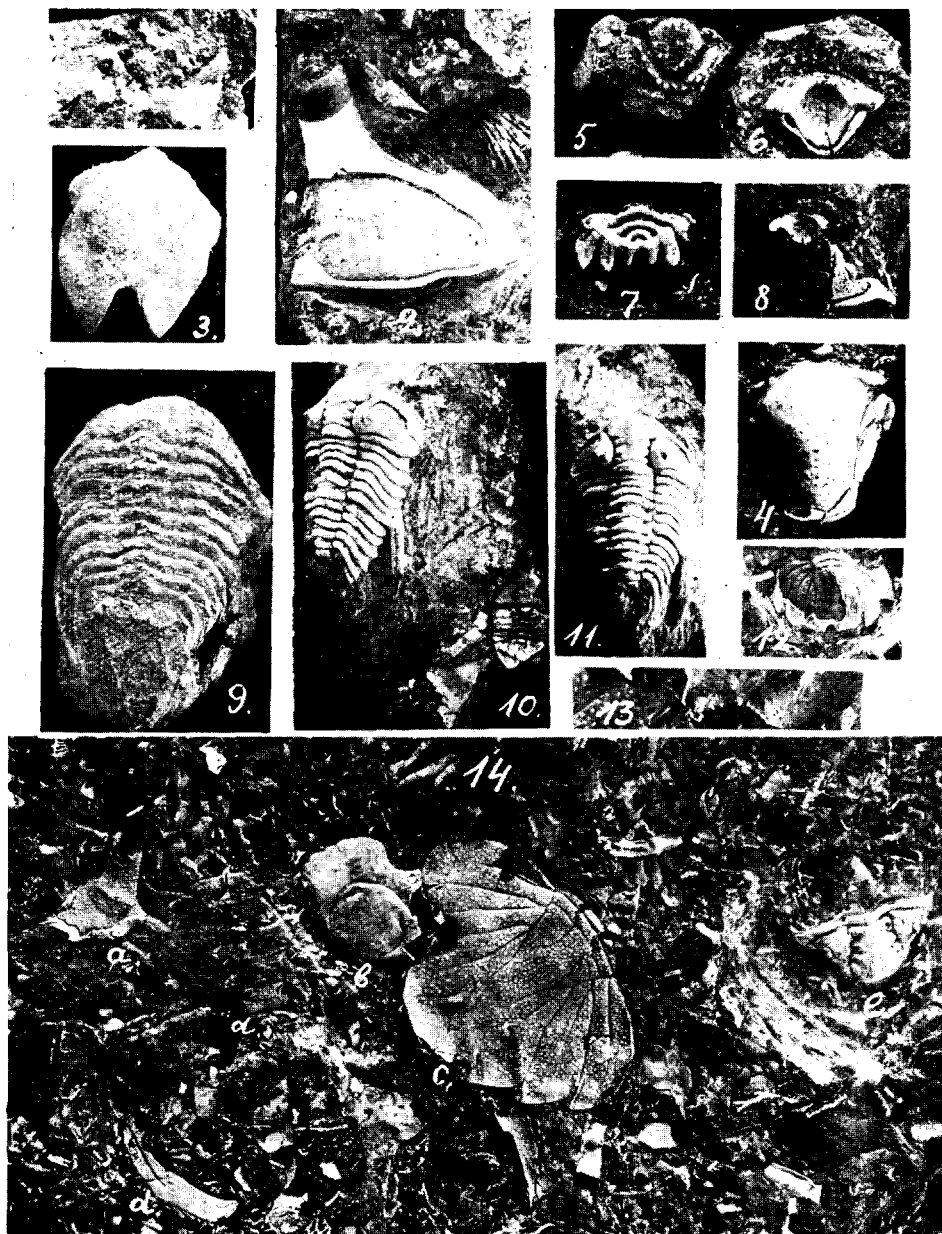
14. Eine Brandschieferplatte aus Kohtla.

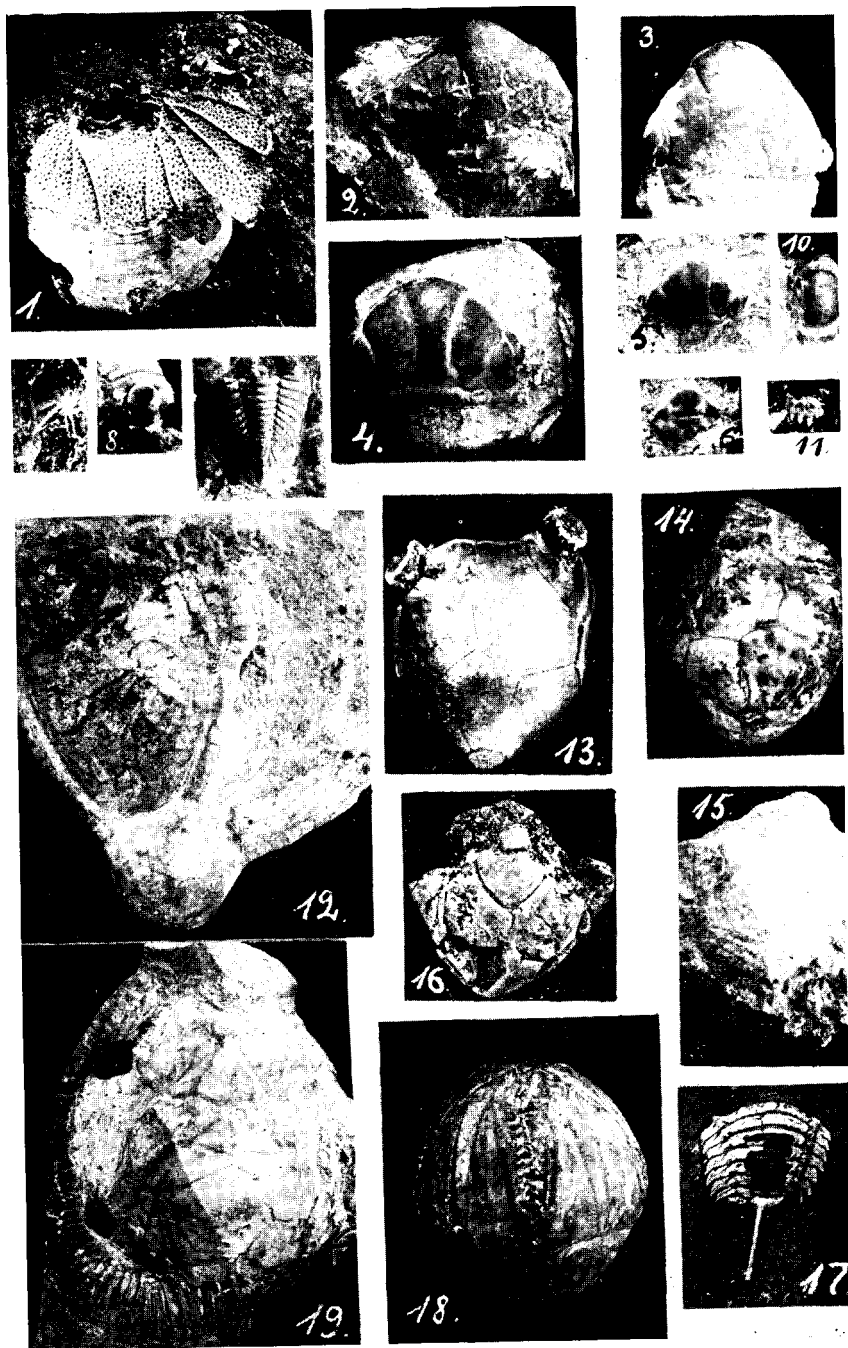
a, b, c, d. — *Lichas inexpectatus* Fr. Schmidt. — a. Freie Wange, mit abgebrochenem Auge. b. Hypostoma. Der Sinus desselben in der Fig. 13 ist in doppelter Grösse dargestellt. c. Pygidium. d—d. Zwei Pleurenfragmente. e. *Cyrtometopus plautini* Fr. Schmidt. — Ein Kopf. Dieselbe Variation, wie die Fig. 8.

Bemerkung zur Fig. 11. Rechts unten, neben der Nummer ist die innere Seite eines ganzen *Ampyx rostratus* Sars und ein Kopf desselben zu sehen.

Tafel II.

1. *Lichas inexpectatus* Fr. Schmidt. Die innere Seite des Pygidiums mit dem Umschlag und dem eckigen Hinterrand. Kohtla. Nat. Grösse.
2. *Lichas kuckersianus* Fr. Schmidt. Kopf aus Tallinn.
3. *Lichas hübnerei* Eichw. Mittelschild des Kopfes, von Herrn Heinrichson bei Baltischport im Echinospaeritenkalk gefunden. Die (rechte) Furche endet nicht blind, sondern setzt sich undeutlich bis zum Nackenring fort. Nat. Grösse.
- 4, 5, 6. *Lichas Wimani* sp. nov. 4 und 5. Zwei Glabellen aus Kohtla. Doppelte Grösse. 6. Hypostoma. Dopp. Grösse.
- 7, 8. *Cyphaspis planifrons* Eichw. 7. Freie Wange mit erhaltener Ornamentation. 8. Ein Mittelschild des Kopfes. Der Dorn auf dem Nackenring nur undeutlich zu sehen. — Beide zweimal vergrößert.
9. *Pterygometopus kuckersiana* Fr. Schmidt. Ein Pygidium aus Kohtla.
10. *Trilobites* sp. Eine Glabella $\times 2$.
- 11, 17. *Remopleurides nanus* Leucht. var. *clongata* Fr. Schmidt. Ein Pygidium. $\times 2$. Kohtla. 17. Teil des Rumpfes $\times 2,4$. Kohtla, C₂.
- 12, 13. *Hoplocrinus dipentus* Leucht. 12. Ein Kelch mit erhaltenen Armen. Tallinn, untere Hälfte der C₂-Stufe, 13. Original exemplar Grewingk's. Museum Tartu. Alle in nat. Grösse.
- 14, 15. *Hoplocrinus grewingki* sp. n. 14. Ein ganzes Exemplar aus Tallinn. Die Oberfläche schlecht erhalten. 15. Eine gekörnte Rad.-Tafel, Tallinn. Nat. Grösse.
16. *Hybocrinus* sp. Ein Kelch aus Kohtla. Nat. Grösse.
18. *Cystoblastus kokeni* Jaekel. Nat. Grösse. Tallinn.
19. *Chirocrinus granulatus* Jaekel. Nat. Grösse. Tallinn.





**EINIGES ÜBER
DEN SCHWEFEL IM ESTLÄNDISCHEN
ÖLSCHIEFER (KUKERSIT) UND DESSEN
VERSCHWELUNGSPRODUKTEN**

VON

M. WITTLICH

DORPAT 1925

Druck von C. Mattiesen, Dorpat.

In fossilen Brennstoffen findet sich der Schwefel hauptsächlich als organisch-gebundener Schwefel, als Pyrit-Schwefel (mitunter als Markasit) und als Sulfatschwefel. Der grössere Teil des Schwefels der Brennstoffe ist wahrscheinlich organischer Herkunft und stammt aus den Proteinen der tierischen und pflanzlichen Organismen, die das Material zur Entstehung der Brennstoffe geliefert haben.

Bei der langsamen Umwandlung der organischen Substanzen in fossile Brennstoffe verbleibt ein Teil des organisch gebundenen Schwefels in organischer Bindung, während der andere durch vermittelnde biologische Prozesse und wohl zumeist auf dem Umwege über Schwefelwasserstoff in anorganische Verbindungen übergeführt wird.

Eisen- und Schwefelverbindungen im besonderen entstehen ja bekanntlich überall dort, „wo eisenhaltige Wasser mit nicht basischen, reduzierenden, schwefelabgebenden Mitteln zusammenkommen oder eisenhaltige nicht basische Gesteine mit Wassern zusammenkommen, welche reduzierende und schwefelabgebende Substanzen enthalten“ (Bischoff). Die Frage, ob der Schwefel den Sinn der Umwandlungsprozesse der organischen Substanz irgendwie beeinflusst und so mitbestimmend ist für die Natur des entstandenen Brennstoffs, ist bisher kaum diskutiert worden. Der verhältnismässig hohe Schwefelgehalt der fossilen Brennstoffe berechtigt zur Annahme eines höheren Proteingehalts speziell der pflanzlichen Organismen früherer Zeitperioden, und besondere Beachtung verdient auch der Umstand, dass die Schwefelverbindungen, die sich in den Verschwelungsprodukten der verschiedenen fossilen Brennstoffe finden, recht voneinander abweichender Art zu sein scheinen. Von besonderer Art sind die Schwefelverbindungen in den einzelnen Erdölsorten, und wiederum zum Teil anderer Art die Schwefelverbindungen, die sich in den Verschwelungsölen der festen Brennstoffe vorfinden.

In der Literatur finden sich über diese Schwefelverbindungen und ihre Untersuchung nur spärliche Mitteilungen, für ihre Verschiedenheit spricht aber ihr Verhalten gegenüber den mannigfaltigen Entschwefelungsverfahren.

In den Ölen ist der Schwefel allemal ein wertvermindernder Faktor, weil der Verbraucher schwefelhaltigen Ölen mit Misstrauen begegnet. Beim Verbrennen geben ja schwefelhaltige Brennstoffe SO_2 , event. SO_3 , die stark korrodierend wirken können, sobald sie in wässriger Lösung auf Metall oder Mauerwerk einwirken; solche gefährdete Orte wären bei Dampfkesselanlagen der Ekonomiser, bei Motoren der Karburator und das Auspuffrohr. Bei richtiger Anlage und aufmerksamer Bedienung dürften allerdings derartige Kondensationserscheinungen nach Meinung der Fachleute überhaupt nicht statthaben.

Beim Destillieren und Aufbewahren der Öle begünstigt die Gegenwart von Schwefel Verharzungen und Polymerisationen; beim Veredeln der Öle durch Hydrieren wirkt der Schwefel vergiftend auf die gebräuchlichen metallischen Katalysatoren sowie auf Metalloxyde. Nach den Untersuchungen von A. Fürth und M. Jaenicke¹⁾ wird die Hydrierung erst von einem minimalen Schwefelgehalt an überhaupt technisch durchführbar, während die Wirtschaftlichkeit des Verfahrens noch nicht erwiesen ist.

Verständlicherweise ist so heute die Frage der Entschwefelung der flüssigen Brennstoffe ein Problem, das dringend eine ausreichende Lösung erheischt. Bei der Reinigung der Erdölprodukte verwendet man bekanntlich Schwefelsäure verschiedener Konzentrationen und flüssige schweflige Säure; — leider sind diese vortrefflichen Mittel bei Ölen, die viel ungesättigte oder durch Schwefelsäure absorbierbare Verbindungen enthalten, nicht anwendbar, da der Säureverbrauch zu gross und der Verlust an Ölen zu hoch wird. Zur völligen oder teilweisen Entschwefelung der Öle zweiter Art und besonders der Tieftemperaturöle scheint es zur Zeit ein wirtschaftlich befriedigendes Verfahren nicht zu geben. Die diesbezüglichen Untersuchungen und Versuche sind in den verschiedensten Richtungen ausgeführt worden, und besonders hervorzuheben wären: das Verfahren „Frasch“, das viel verwandt wird bei Reinigung von Erdölprodukten; die Behandlung mit Silica-Gel; Spaltung der Schwefelverbindung bei hohem Druck

1) Zeitschrift f. angewandte Chemie 1925. pag. 173.

und Temperatur, Behandlung mit Aluminiumchlorid bei Siedetemperatur; Behandlung mit Hypochloritlösungen, Extrahieren der Schwefelverbindung und weiter deren Abbau durch Oxydations- und Reduktionsverfahren. Im allgemeinen erfordern die verschiedenen Öltypen eine spezifische Behandlungsweise; ganz wesentlich unterscheiden sich in dieser Hinsicht auch Kracköle und Tieftemperaturöle, und eine Hauptschwierigkeit liegt darin, dass viele Mittel, die an sich gut entschwefeln, gleichzeitig auch sehr energisch auf Ölbestandteile einwirken.

Zu einer allseitig befriedigenden Lösung der Entschwefelungsfrage wird man wohl erst nach Aufhellung des Wesens der Schwefelverbindungen in den Ölen kommen, und das gilt für eine Aufgabe, an der noch viele und schwierige Arbeit zu leisten ist.

Weil auch der estländische Ölschiefer bei der Verschmelzung schwefelhaltige Öle gibt, so ist für die eben erstehende Ölschieferindustrie die Entschwefelungsfrage der Öle von ganz erheblicher Bedeutung, und als Beitrag und Material zur Discussion der Angelegenheit mögen die folgenden Untersuchungen dienen, die 1924 und 1925 im technologischen Laboratorium der Universität Tartu-Dorpat ausgeführt wurden.

1. Schwefelbestimmung im estländischen Ölschiefer (Kukersit).

Der estländische Ölschiefer findet sich bekanntlich in Flözen als besondere Facies der Kukerschen Stufe des Ordoviciums, und die einzelnen Schichten sind voneinander getrennt durch Zwischenlagen von Kalkstein, bituminösem Kalkgestein oder tonigem Kalkgestein. Es gibt keinen Kukersit von sozusagen mittlerer normaler Beschaffenheit, jede Schicht ist besonders charakterisiert, aber auch in sich nicht von völlig homogener Zusammensetzung.

Zur Herstellung von Mittelproben wurden in den staatlichen Gruben „Kohtla-Järve“ aus den einzelnen Schichten an je 12 Stellen Proben entnommen, und entsprechenderweise auf Mittelproben verarbeitet. In diesen Proben wurde einmal der Gesamtschwefel bestimmt und des weiteren der organisch und anorganisch gebundene Anteil. Die Bestimmung des Gesamtschwefels wurde nach den Methoden „Parr“ und „Eschka“ ausgeführt.

Die Methode Eschka ergab etwas höhere Werte, so dass sie für das vorliegende Material als die geeignetere anzusprechen ist.

Für die Einzelbestimmung von anorganisch und organisch gebundenem Schwefel fand sich keine zuverlässige Methode, da es kein einwandfreies Verfahren zur Trennung von organischer und anorganischer Substanz des Kukersits gibt. Es wurde daher nach einer Differenzmethode gearbeitet, und zwar der anorganische Schwefel nach J. Wibant¹⁾ bestimmt und der organische Anteil aus der Differenz: Gesamt S — anorganischer S ermittelt. Die Tab. I enthält neben den Analysenresultaten die errechneten Werte des Prozentgehaltes von Gesamtschwefel und organ. gebundenem Schwefel bezogen auf die organ. Substanz des Ölschiefers, und von anorgan. gebundenem Schwefel bezogen auf den organ. gebundenen; zu besserer Veranschaulichung der Beziehungen ist das Diagramm I angeschlossen.

Tabelle 1.

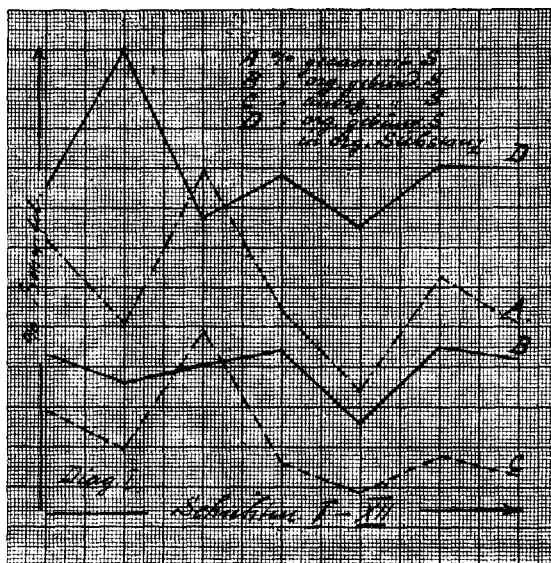
	№ der Schichten:						
	I	III	V	VII	IX	XI	XII
Gesamtschwefel	1.44%	1.11%	1.78%	1.19%	0.69%	1.25%	1.10%
Organ. gebundener S. . . .	0.86	0.72	0.80	0.88	0.52	0.90	0.84
Anorgan. „ „	0.58	0.39	0.98	0.31	0.17	0.35	0.26
Gesamts. in org. Sub. . .	2.80	3.70	3.40	2.40	2.00	2.40	2.30
Organ. gebund. „ „ . .	1.70	2.40	1.54	1.76	1.50	1.80	1.80
Anorgan. gebundener S. bezogen auf organ. geb. S.	67.0	54.0	122.0	36.0	33.0	31.0	31.0
Organische Substanz. . .	49.80	29.80	51.70	50.20	35.70	51.50	47.50

In einer früheren Mitteilung vertraten wir die Ansicht, dass der grössere Teil des Schwefels in anorganischer Form vorliege: es war damals zufälligerweise die Schicht V in Untersuchung, in der ja überraschenderweise die Verteilung des Schwefels eine von den anderen Schichten durchaus abweichende ist. In den übrigen Schichten überwiegt org. gebund. Schwefel. Eine Ursache der Eigenheiten der V-ten Schicht mag das massenhafte Vorkommen von Bryozoen in ihr sein, deren Leibessubstanz zu dem höheren S-Gehalt beigetragen haben mag und vielleicht auch zu seiner rascheren Mineralisierung. Bryozoen finden sich reichlicher

1) Brennstoffchemie 1922. pag. 273.

auch in den Schichten I und III, in denen das Verhältnis von organischem zu anorganischem Schwefel gleichfalls ein wesentlich anderes ist als in den oberen Schichten.

Anschliessend an die Schwefelbestimmungen in den Schieferproben wurden dann Schwefelbestimmungen im — nach üblichem



Verfahren gewonnenen — Koks ausgeführt. Bei der Verbrennung des Kokes nach „Parr“ wurde zur Probe reiner Rohrzucker hinzugegeben, um eine vollständige Verbrennung der an sich brennstoffarmen Substanz zu erzielen.

2. Schwefelbestimmung im Koks.

Tabelle 2.

	№ der Schichten :						
	I	III	V	VII	IX	XI	XII
% Koks	43.3 %	63.8 %	39.9 %	45.8 %	57.3 %	43.4 %	49.6 %
Schwefel im Koks	0.86	0.79	1.40	0.73	0.38	0.90	0.66
Vom Gesamtschwefel verbleiben im Koks	25.7	44.1	31.4	26.6	31.8	31.2	49.6

Aus den Analysenergebnissen ersieht man, dass sich der Gehalt von Gesamtschwefel in den einzelnen Schichten in relativ

weiten Grenzen bewegt, und zwar auch dann, wenn man ihn auf die organische Substanz bezieht. Wenn nun ein bestimmter Teil des Schwefels von *Gloeocapsomorpha prisca* und anderen Algen her stammt, so liessen sich die Abweichungen allenfalls erklären durch die recht wechselnden Beilagen faunistischer Herkunft, wie z. B. die Bryozoen in der fünften Schicht. Verhältnismässig nahe beieinander liegende Zahlen erhält man bei Bezug des organisch gebundenen Schwefels auf die organische Substanz — freilich mit Ausnahme der Schicht III. Obschon dann der Anteil von anorganischem Schwefel in den älteren Schichten bedeutend höher ist als in den oberen, jüngeren, so lassen sich die Werte doch nicht ohne weiteres zu einer Stützung der Ansicht von einer allmählichen Mineralisierung des organischen Schwefels heranziehen, es sei denn mit der zusätzlichen Annahme, dass gewisse schwefelhaltige organische Substanzen langsamer, andere rascher durch biologische oder chemische Prozesse ihren Schwefel verlieren.

Aus den Zahlen der Schwefelbestimmung im Koks ersieht man, dass in einigen Fällen offenbar ein Teil des Pyritschwefels beim Verkoken flüchtig geworden, und andererseits auch die organischen Schwefelverbindungen wechselnde Beiträge von Schwefel in den Koks abgegeben haben. Die Einzelbestimmungen von organ. und anorg. gebundenem Schwefel im Koks sind leider nicht zum Abschluss gekommen.

Ist der Ölschiefer längere Zeit atmosphärischen Einflüssen ausgesetzt gewesen, so lassen sich erhebliche Veränderungen seines Zustandes infolge stattgefundener Verwitterungsreaktionen nachweisen, die sich natürlich auch auf den Schwefel erstrecken. Nach vorläufigen Untersuchungen scheint die Neigung zum Verwittern bei den einzelnen Schichten eine verschiedene zu sein, und zwar ist es wieder Schicht V, die ein besonderes Verhalten aufweist.

3. Schwefelbestimmungen in Ölen.

Der in Untersuchung genommene Schwefelteer stammte aus der staatlichen Versuchsanlage bei Kochtel und war vermutlich erhalten aus einem zufälligen Gemisch von Schiefer aus verschiedenen Schichten. Aus dem Rohteer mit 1.08% S wurden durch zweimalige Destillation acht Fraktionen Öl gewonnen und in diesen der Schwefelgehalt bestimmt.

Die Bestimmung wurde wieder nach Methode „Parr“ gemacht, die leichteren Öle wurden in Glaskirschen eingeschmolzen, gewogen und zur Verbrennung genommen. Die aus dem Glase ins Reaktionsprodukt eintretende lösliche Kieselsäure wurde berücksichtigt.

Es wurden folgende Resultate erhalten:

Fraktion: -175° ; $\frac{175^{\circ}}{200}$; $\frac{200^{\circ}}{225}$; $\frac{225^{\circ}}{250}$; $\frac{250^{\circ}}{275}$; $\frac{275^{\circ}}{300}$; $\frac{300^{\circ}}{325}$;

% Schwefel: 1.34% 0.98% 0.87% 1.06% 1.08% 0.97% 1.18%.

Die Gesamtölausbeute in den acht Fraktionen betrug 34% des Rohteers, vom Schwefel im Rohteer waren 27% in die durch zweimalige Fraktionierung erhaltenen Öle übergegangen. Abweichend von den Ölen aus Schwefelteeren anderen Ursprungs ist hier der Schwefelgehalt in den leichteren Ölen nicht geringer als in den höheren Fraktionen. In drei Jahre alten Ölproben konnte eine Beziehung zwischen den Veränderungen der spez. Gewichte und dem jeweiligen Schwefelgehalt nicht erkannt werden.

Weiterhin wurde Fraktion 1 (-175°) über metall. Natrium umdestilliert, um ungesättigte und Sauerstoffverbindungen möglichst abzuschneiden, und danach, wiederum über Natrium, in fünf Fraktionen zerlegt, die, qualitativ geprüft, alle Schwefel enthielten. Die Untersuchung dieser Proben auf Thiophene mit Hilfe von Phenanthrenchinon gab bei der ersten Fraktion ein negatives Resultat, während die vier höheren positiv reagierten. Der überaus unangenehme Geruch der drei ersten Fraktionen erinnerte an Mercaptane.

Wie bereits erwähnt, stammte der verarbeitete Rohteer aus einem willkürlichen Gemisch von Schiefer aus verschiedenen Schichten, und überdies fehlten genauere Zahlen über die Teerausbeute. Um nun eine allgemeine Übersicht zu gewinnen über die Verteilung des Schwefels bei der Verschmelzung und weiteren Fraktionierung des Rohteers, wurde im Laboratorium eine Reihe von Verschmelzungen in der Fischer'schen Aluminiumretorte ausgeführt. Der bei einer Verschmelzungstemperatur von 520° erhaltene Teer wurde durch einmaliges vorsichtiges Destillieren in acht Fraktionen und Pech nebst Gasen geschieden, und endlich wurden in allen festen Produkten Schwefelbestimmungen ausgeführt, deren Ergebnisse die Aufstellung einer allgemeinen Schwefelbilanz erlaubten.

Die Ölschieferprobe stammte aus der wertvollsten Schicht V, der Schwefelgehalt war 2.07%, die Verschmelzungen wurden parallel mit Dampf- und ohne Dampfzutritt ausgeführt.

Ergebnis der Verschmelzung:

Tabelle 3.

	Rohteer			Koks	Gase
	Ausbeute	spez. Gew.	% S.		
Ohne Dampf	33.23%	0.9483	1.16%	52.52%	14.25%
Mit Dampf	35.77	0.9557	1.02	50.85	13.38

In Prozenten ausgedrückt, verteilt sich der Schwefel auf die Verschmelzungsprodukte folgenderweise:

im Rohteer ohne Dampf 18.62% mit Dampf 17.63%

„ Koks „ „ 44.40 „ „ „ 44.71 „

„ Gasen „ „ 36.98 „ „ „ 37.66 „

Die Resultate der, an den einzelnen Fraktionen vorgenommenen Untersuchungen sind in der Tab. 4 zusammengestellt, wo A die Ausbeute in Gramm %, und S die Prozente Schwefel bedeuten.

Tabelle 4.

	ohne Dampf			mit Dampf		
	A	S	spez. G.	A	S	spez. G.
Frakt. —175°	12.32%	1.26%	0.7557	11.74%	1.20%	0.7526
„ 175—200°	2.49	1.11	0.8438	2.35	1.08	0.8022
„ 200—225°	2.86	1.08	0.8808	3.84	1.02	0.8787
„ 225—250°	5.04	0.97	0.9017	4.74	0.99	0.8989
„ 250—275°	6.59	0.80	0.9224	4.55	0.87	0.9013
„ 275—300°	8.13	0.74	0.9509	6.87	0.76	0.9428
„ 300—325°	10.59	0.78	0.9589	13.87	0.92	0.9840
„ 325—350°	12.28	0.99	0.9904	18.35	0.90	0.9935

Die Fraktionierung wurde bei gewöhnlichem Druck durchgeführt unter möglichster Vermeidung von Zersetzungserscheinungen. Zusammengefasst war das Ergebnis in Prozenten des Rohteers folgendes:

Öle in den Fraktionen ohne Dampf 60.23% mit Dampf 66.31%

Pech „ „ 35.98 „ „ „ 30.87 „

Gase und Verluste „ „ 3.79 „ „ „ 2.82 „

Die Laboratoriumsausbeute an Rohteer beträgt fast das Doppelte der Ausbeute im Grossbetrieb, die Unterschiede im Schwefelgehalt sind hier und dort unbedeutend und der Ertrag an Ölen bei einmaliger Destillation ebenfalls zweimal höher als bei wiederholter Fraktionierung, infolge der hohen Temperaturempfindlichkeit gewisser Komponenten der Öle.

Der Schwefelgehalt der Rückstände war

im Koks ohne Dampf 1.75% mit Dampf 1.82%

im Pech „ „ 0.68% „ „ 0.76%.

Die Menge der Gase von der Fraktionierung und Verschwelung ist nicht bestimmt worden, in der folgenden Bilanz ist der auf die Gase entfallende Anteil an Schwefel aus der Differenz ermittelt worden.

Setzt man den Schwefelgehalt im verarbeiteten Ölschiefer gleich „100“, so ergibt sich nun folgende Bilanz:

S im Koks ohne Dampf 44.4% mit Dampf 44.7%

„ „ Pech „ „ 3.9 „ „ „ 4.1 „

„ „ Ölen „ „ 9.3 „ „ „ 11.0 „

„ „ Gasen „ „ 42.4 „ „ „ 40.2 „.

Der grösste Teil des ursprünglichen Schwefels verbleibt beim Laboratoriumsversuch im Koks, im Grossbetriebe wird das Verhältnis ein anderes sein, und wohl auch ein verschiedenes bei jeder Verschwelungsmethode.

Fast die gleiche Menge von Schwefel geht in die Gase, und es wäre wohl zu erwägen, ob sich nicht eine Wiedergewinnung dieses Schwefels in wirtschaftlicher Weise ermöglichen liesse.

Die Mitbenutzung von Dampf bei der Verschwelung übt auf die Schwefelverteilung in den Produkten einen geringen Einfluss aus.

Zusammenfassung: Im estländischen Ölschiefervorkommen haben die einzelnen Schichten verschiedene Schwefelgehalte, was sich zum Teil erklären lässt aus den wechselnden Mengen von Fossilien faunistischer Herkunft in den einzelnen Schichten. Von besonderem Interesse ist die Schicht V.

Die beim Verarbeiten des Rohteers anfallenden leichten Öle haben den höchsten Schwefelgehalt.

Beim Verschwelun von Schiefer aus der Schicht V in der Fischer'schen Retorte gehen vom Gesamtschwefel etwas weniger

als 20% in den Rohteer und rund 10% in die Fraktionen — bei nur einmaliger Destillation.

Jede neue Destillation vermindert bedeutend die Ölausbeute. Wasserdampfbenutzung erhöht bei der Verschwelung die Teerausbeute, beeinflusst aber nur in geringem Masse die Verteilung des Schwefels in den einzelnen Produkten.

Der Hauptteil der experimentellen Arbeit ist von meinen geschätzten jungen Mitarbeitern Magg. chem. K. Kask und K. Leinbaum geleistet worden.

Dorpat, August 1925.

ORIENTIERENDE VERSUCHE ÜBER DIE STIMULIERENDE WIRKUNG EINIGER SALZE AUF DAS WACHSTUM DER GETREIDEPFLANZEN

I

VON

HUGO KAHO

TARTU (DORPAT) 1925

Handwritten text, likely a title or header, consisting of several lines of cursive script. The text is mostly illegible due to fading and bleed-through.

In der letzten Zeit sind insbesondere von M. Popoff¹⁾ zahlreiche Versuche über die Stimulationswirkungen verschiedener chemischen Agentien auf das Wachstum der Getreidepflanzen angestellt worden. Durch diese Versuche ist es dem genannten Autor gelungen, den Ernteertrag um 30—50% zu steigern.

Ungeachtet der grossen praktischen Bedeutung, die eine durch die Hand des Experimentators willkürlich geleitete Wachstumsstimulation und die damit verbundene Erhebung des Ertrages haben könnten, sind die wissenschaftlichen Grundlagen der durch verschiedene chemische Stoffe erzielten stimulierenden Wirkung auf die pflanzliche Zelle noch völlig unbekannt. Die Meinungsäusserungen der meisten Autoren der neueren Zeit über die physiologische Natur der Stimulation tragen einen recht allgemeinen und deduktiven Charakter, sie sind grösstenteils durch keine exakten Versuche bestätigt und geben daher auch keine festen Anhaltspunkte zur näheren Begründung dieser offenbar sehr komplizierten physiologischen Erscheinung. Es gelingt heute noch nicht, sicher vorauszusagen, ob dieser oder jener Stoff gemäss seiner chemischen Konstitution in einer physiologischen Konzentration stimulierend oder hemmend auf das Wachstum einer beliebigen Pflanze wirken würde, und die bisher erhaltenen positiven Ergebnisse lassen sich kaum auf alle Pflanzen verallgemeinern.

Die Tatsache der Wachstumsstimulation durch chemische Stoffe ist nicht neu und wurde schon vor etwa fünfzig Jahren

1) Popoff, M. Über Zellstimulantien und ihre theoretische Begründung. Jahrb. der Univ. Sofia. 19, II Heft 1. 1923.

Idem. Die Zellstimulation des Saatguts und ihre Bedeutung. Deutsche Landwirtsch.-Ges. 1924. St. 12.

Idem. Über die Stimulierung der Zellfunktionen. Biolog. Zentralbl. 42, 395. 1922.

Idem. Zellstimulationen und ihre theoretische Begründung. Zellstimulationsforschungen 1, 3. 1924.

zuerst bei niederen (Schimmelpilze) und alsdann bei höheren Pflanzen (Leguminosen und and.) beobachtet. Ich verweise hier auf die Namen von Raulin¹⁾, Schultz²⁾, Pfeffer³⁾, Richards⁴⁾, Loew⁵⁾, Ono⁶⁾, Hattori⁷⁾, Kanda⁸⁾, Hueppe⁹⁾ — die dieses Phänomen näher untersucht haben; es sei hier ferner auf die übersichtliche Zusammenstellung bei Nobbe¹⁰⁾ und insbesondere bei Czapek¹¹⁾ verwiesen.

Eine experimentell begründete Theorie fehlt bei den älteren Autoren ebenfalls.

Im allgemeinen könnten bei den Wirkungen chemischer Stoffe auf Zellen folgende zwei Fälle in Betracht kommen: 1. die Wirkung erstreckt sich hauptsächlich auf die Oberflächenschichten des Plasmas und auf die Zellwand; 2. es werden alle Bestandteile der Zelle durch den Stoff beeinflusst.

Den ersteren Fall haben wir dann, wenn ein Stoff in das Plasma schwer eindringt und in erster Zeit an der Oberfläche Halt macht. Hierher gehören in erster Linie starke Mineralsäuren. Im Gegensatz zu der älteren Angabe von Pfeffer¹²⁾, wonach gewisse Säuren beinahe momentan durch das Plasma in die Vakuole permeieren, was bei den Anthozyan führenden Pflanzen durch den Farbumschlag sichtbar wird, zeigen die neuesten

1) Raulin, Etudes chimiques sur la végétation. Ann. d. scienc. nat. V Sér. 11, 252. 1869.

2) Schultz, H. Über Hefegifte. Pflügers Archiv 42, 517. 1888.

3) Pfeffer, W. Über Election organischer Nährstoffe. Jahrb. für. wiss. Bot. 28, 205. 1895.

4) Richards, H. M. Die Beeinflussung des Wachstums einiger Pilze durch chemische Reize. Jahrb. für wiss. Bot. 30, 665. 1897.

5) Loew, O., K. Aso, S. Sawa. Über die Wirkung von Manganverbindungen auf Pflanzen. Flora 91. 1902.

6) Ono, N. Über die Wachstumsbeschleunigung einiger Algen und Pilze durch chemische Reize. Journ. Coll. Science, Imp. Univ. Tokyo, 13, Pt. 1. 1900.

7) Hattori, H. Studien über die Einwirkung des Kupfersulfats auf einige Pflanzen. Journ. Coll. Science, Imp. Univ. Tokyo, 15, Pt. 3. 1901.

8) Kanda, M. Studien über die Reizwirkung einiger Metallsalze auf das Wachstum höherer Pflanzen. Journ. Coll. Science, Imp. Univ. Tokyo, 19. 1904.

9) Hueppe, F. Naturwissenschaftliche Einführung in die Bakteriologie. 1896, Wiesbaden. S. 55.

10) Nobbe, Fr. Handbuch der Samenkunde. Berlin 1876.

11) Czapek, F. Biochemie der Pflanzen I. Jena 1913.

12) Pfeffer, W. Osmotische Untersuchungen. Leipzig 1877. S. 135.

Untersuchungen von Brenner¹⁾, dass starke anorganische Säuren, wie HCl, H₂SO₄, HNO₃, H₃PO₄, sowie auch stärker dissoziierte organische Säuren, wie Oxalsäure und Zitronensäure, beim Eindringen das Plasma mehr oder minder schädigen, insbesondere die Konzentrationen 0,001 m und höher, und ferner, dass in niedrigeren Konzentrationen der Anthozyanumschlag durchaus nicht momentan erfolgt. Dieses zeigt, „dass die lebenden Pflanzenzellen für die stark dissoziierten Säuren . . . mindestens sehr schwer durchlässig sind“ (Höber²⁾).

Eine ausgesprochene stimulierende Wirkung der Säuren auf das Wachstum der Pflanzenzellen fanden Sarandinaki³⁾ und Borowikow⁴⁾. Borowikow untersuchte die Zuwachsgeschwindigkeit der Helianthuskeimlinge in saurem Medium. Es sei hier ein Beispiel angeführt.

Lösung	Zuwachs in mm					
	Nach 3 St.	In % % des Zuwachses in H ₂ O	Nach weiteren 3 St.	In % % des Zuwachses in H ₂ O	Nach weiteren 3 St.	In % % des Zuwachses in H ₂ O
H ₂ O	54	100	46	83	76	139
HCl — 0,0005 m	95	177	62	117	53	100
HNO ₃ — 0,0005 m	84	155	45	83	53	100
1/2 H ₂ SO ₄ — 0,0005 m	78	144	58	105	45	83
H ₄ C ₂ O ₂ — 0,0005 m	67	122	40	72	46	83
H ₂ O	50	94	50	94	70	128

Man sieht aus dieser Tabelle, dass die Keimlingssprosse nach 3-stündigem Aufenthalt in allen Säuren sich schneller ausstrecken als im Wasser. Im Wasser ist der Zuwachs 100%, in Säuren je nach der Stärke der Säuren 177—122%. Nach 6 Stun-

1) Brenner, W. Studien über die Empfindlichkeit und Permeabilität pflanzlicher Protoplasten für Säuren und Basen. Översigt af Finska vet. förhandl. 60, Afd. A, № 4. 1918.

2) Höber, R. Physikalische Chemie der Zelle und der Gewebe. Leipzig 1922. S. 437.

3) Sarandinaki. Beobachtungen über die Wirkung der Salze auf das Wachstum (russisch). Mém. de la Soc. des naturalistes de la Nouvelle Russie 38, 307. 1912.

4) Borowikow. Die Wirkung der salzartigen Stoffe auf die Wachstumsgeschwindigkeit des Pflanzenorganismus (russisch). Ebenda 41, 1. 1916.

den ist der Zuwachs nur in HCl und H_2SO_4 grösser als im Wasser, nach 9 Stunden ist er in allen Säuren kleiner als im Wasser, die Säuren hemmen hier schon das Wachstum. Ausserlich betrachtet sieht es im ganzen so aus, dass in den Säurelösungen das Wachstum von Pflanzengewebe anfangs stark stimuliert wird und die Beschleunigung dann allmählich ausklingt.

Es fragt sich jedoch, inwiefern diese Ausdehnung der Hypokotyle in Gegenwart von Säure mit einem Wachstumsprozess bei normalen Verhältnissen identifiziert werden könnte.

Wir wissen ja aus den wohlbekannten Untersuchungen von Hofmeister¹⁾, Wo. Pauli²⁾, Ostwald³⁾, M. H. Fischer⁴⁾ und and., dass die Elektrolyte die Quellung von Gelen beeinflussen, und zwar wird sie durch verdünnte Säurelösungen stark erhöht. Die Ausstreckung von Keimlingssprossen kommt durch das Flächenwachstum der Zellwand zustande. Bei den jungen Zellen ist die Wand im Zustande eines elastischen Gels und infolgedessen denselben kolloidchemischen Gesetzmässigkeiten wie alle toten Quellkörper unterworfen. In Säurelösungen schwillt die junge Zellwand stark auf (vgl. Kotte⁵⁾), und man könnte damit auch die rasche Verlängerung der Hypokotyle erklären, denn im allgemeinen stimmen die Ergebnisse von Sarandinaki und Borowikow mit einem Quellungsvorgang sehr gut überein: am besten dehnen sich die Sprosse in solchen Säurekonzentrationen aus, die dicht am letalen Grenzwert liegen und für das Leben der Zellen am gefährlichsten sind. In diesen Lösungen zeigen die Zellen auch eine starke Exosmose von Zellsaftstoffen, was auf eine Schädigung hinweist. Ferner sprechen noch einige andere Tatsachen, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll, dafür, dass die Wachstumsstimulierung der Keimlinge durch Säuren, die übrigens eine kurze Zeit dauert, dabei ein Maximum erreicht und dann allmählich fällt⁶⁾, eher ein rein kolloidchemischer als physiologischer Prozess ist. Dieses beweist

1) Hofmeister, F. Arch. f. exp. Path. und Pharm. 27, 395. 1890. 28, 210. 1891.

2) Pauli, Wo. Pflügers Arch. 67, 219. 1897. 71, 1. 1898.

3) Ostwald, Wo. Pflügers Arch. 108, 563. 1905.

4) Fischer, M. H. Das Oedem etc. Dresden 1910.

5) Tabulae biologicae, Bd. 1, 448. 1925.

6) Mit der Zeit sammelt sich die Säure, wenn auch langsam, in grösseren Mengen in der Vakuole, wobei das Plasma allmählich abzusterben beginnt.

auch der Umstand, dass die Entwicklung der Keimlinge in Wasserkulturen mit saurer Reaktion durch die letztere im allgemeinen nicht gefördert wird. Eine gewisse Ausdehnung der Zellwand als Folge der Quellung in Säuren müsste man wohl auch bei toten Keimlingen erwarten.

Dessenungeachtet können Säuren, insbesondere die organischen (Popoff), als Reizstoffe fungieren, die in erster Linie die Keimung der Samen anregen. So sagt Merckenschlager¹⁾: „In bestimmten für jede Säure und jeden Samen charakteristischen Konzentrationsverhältnissen sind die Säuren Reizsubstanzen und erhöhen die Entwicklung der Keime“. Welche physiologische Prozesse in den Samenzellen durch Säuren in erster Reihe angeregt werden, das ist noch vollständig unerforscht. Es ist jedoch kaum anzunehmen, dass die Wirkung der Säuren bei den Samen sich nur auf die Oberfläche der Zellen erstreckt, denn bei der Keimung kommen hauptsächlich die Vorgänge im Inneren der Zellen in Betracht, nämlich die Quellung, d. h. die Anlagerung von Wasser an die Plasmateilchen und die Stoffe im Zellraum, ferner die enzymatischen Prozesse bei der Mobilisierung der Reservestoffe, der Atmung usw.

M. Popoff²⁾ hat eine Hypothese aufgestellt, nach welcher alle Zellstimulantien eine Beschleunigung der Oxydationsprozesse im Inneren der Zelle bewirken. Dieser Autor meint, dass dieses am besten durch die Einwirkung der reduzierenden Verbindungen (!) zustande komme. Er sagt: „Nach den heutigen Auffassungen über die Zusammensetzung der Eiweisskörper wird angenommen, dass um einen inneren Kern, den Leistungskern (Ehrlich), nach Art der aromatischen Verbindungen viele Seitenketten angeordnet sind. Einige von diesen sind mit der Aufgabe betraut, den Sauerstoff aus dem umgebenden Medium labil zu binden, wir wollen sie Atmungsseitenketten nennen, und ihn dann anderen sauerstoffavidere Seitenketten des lebenden Moleküls weiterzugeben. Auf diese Weise kommt es zu einer Zirkulation des Sauerstoffs im lebenden Molekül.

Von dieser Auffassung ausgehend könnte man annehmen, dass das lebende Molekül in einem Stillstand der Lebensfunk-

1) Merckenschlager, F. Keimungsphysiologische Probleme. Freising-München, 1924. S. 13.

2) Popoff, M. Jahrbuch der Univ. Sofia 29, 52. 1923.

tionen verbleiben würde, solange die Atmungsseitenketten mit Sauerstoff gesättigt sind oder wenn die weitere Abgabe des Sauerstoffs an die anderen Seitenketten langsam vor sich geht. In dem Moment aber, in welchem das lebende Molekül in Kontakt mit einer sauerstoffaviden Verbindung kommt, muss diese letztere, je nach der Stärke der Avidität, Sauerstoff aus den Atmungsseitenketten, wie auch aus den anderen sauerstoffbindenden Seitenketten des lebenden Moleküls loslösen und an sich ziehen. Auf diese Weise werden freie Affinitäten für den Sauerstoff im lebenden Molekül geschaffen; für ihre Sättigung müssen die sauerstofflabilen Atmungsseitenketten neue Sauerstoffmengen an sich ziehen und sie an die sauerstoffavideren Seitenketten des lebenden Moleküls weitergeben. Es würde dadurch zu einem Aufleben der Sauerstoffzirkulation im lebenden Molekül, es würde zu einer Hebung der Oxydationsprozesse kommen.“

Ferner meint Popoff, dass reduzierende Stoffe nur in niedrigen Konzentrationen die Lebensprozesse der Zelle stimulieren, in höheren Konzentrationen sollen sie eine hemmende Wirkung ausüben.

Zu den reduzierenden Stoffen, die nach Popoff¹⁾ stimulierend wirken, gehören folgende Verbindungen:

- „... 1. das CO und CO₂;
2. das Mg, Mn, K, Na, Fe, Ph, Hg und deren Salze;
3. das Arsen und seine Derivate;
4. die Alkohole der Kohlenwasserstoffe;
5. die Aldehyde, die Ketone und die Säuren der Alkohole;
6. die Glukose;
7. die Phenole (ein-, zwei-, dreiwertige) und ihre leicht oxydalen Derivate; die ein- und vielwertigen Phenosäuren;
8. einige Verbindungen aus der Gruppe der Terpene und Kampfer;
9. die Hypnotica und Anaesthetica wie auch leicht oxydablen Alkaloide;
10. bestimmte fluoreszierende Lösungen.“

Die angeführten Stoffe gehören sehr verschiedenen Gruppen von Verbindungen mit recht verschiedenen che-

1) l. c.

mischen Eigenschaften an, und infolgedessen ist es kaum möglich, ihre physiologische Wirkung auf eine und dieselbe chemische Aktion zurückzuführen. So dringen die Schwermetallsalze sehr schwer oder fast gar nicht in die Zelle ein, ohne sie schwer zu schädigen, ferner wirken sie stark entquellend. Dagegen permeieren die Alkohole, Aldehyde, Ketone fast momentan in die Zelle und beeinflussen den kolloiden Zustand des Plasmas beinahe gar nicht.

Es ist sehr wahrscheinlich, dass gewisse Reizstoffe direkt oder indirekt in der Zelle eine erhöhte Atmungstätigkeit bewirken, denn eine Wachstumsstimulation bedeutet eine Beschleunigung aller Lebensprozesse in der Pflanze. Hier könnten nur exakte Versuche Klarheit schaffen und zeigen, inwiefern eine Steigerung der Atmungsintensität von dem Reduktionsvermögen der Stimulationsstoffe abhängig ist. Es ist aber ziemlich unverständlich, wie das von Popoff erwähnte CO_2 reduzierend wirken und dadurch eine Sauerstoffsättigung im Plasma beseitigen könnte. Wir wissen, dass beim Leiten des CO_2 durch Wasser Kohlensäure entsteht, wobei die isohydrischen Konzentrationen derselben eine nicht geringere Quellung der Quellskörper hervorrufen können, wie die der starken Mineralsäuren (Chiari)¹⁾. Es fragt sich darum, inwiefern die quellende Wirkung der Kohlensäure, die übrigens sehr leicht in die Zellen eindringt, die Keimung der Samen begünstigt.

Wir wollen damit nicht sagen, dass bei der chemischen Stimulation eine erhöhte Oxydation im Inneren der Zelle keine Rolle spielen könnte, doch ist es zurzeit nicht bekannt, dass alle die von Popoff erwähnten Verbindungen eine solche zu bewirken vermöchten. Es ist neuerdings von O. Warburg²⁾ exakt bewiesen worden, dass nur die Eisensalze die Oxydationsvorgänge in der Zelle fördern und für die normale Lebenstätigkeit unentbehrlich sind. Er sagt ferner: „Bekanntlich enthält die lebende Zelle an autoxydablen Metallen nicht nur Eisen, sondern auch Kupfer, Mangan und andere Metalle, und man kann fragen, ob wir nicht besser täten, statt „Eisen“ „Schwermetall“ zu schreiben. Wir tun das

1) Chiari, R. Die Glutinquellung in Säuren und Laugen. Biochem. Zeitschr. 33, 167. 1911.

2) Warburg, O. Über Eisen, den sauerstoffübertragenden Bestandteil des Atmungsferments. Biochem. Zeitschr. 152, 479. 1924.

nicht, weil wir nicht wissen, ob Kupfer und Mangan lebensnotwendig sind, und weil die Mengen dieser Metalle im Vergleich zu ihrer Reaktionsfähigkeit zu klein sind“. „Wir beschränken unsere Annahme also ausdrücklich auf das Eisen und lehnen eine Erweiterung auf andere Schwermetalle als zurzeit nicht begründbar ab“.

Versuche.

Die vorliegenden Versuche sind zur Orientierung über folgende Fragen angestellt worden:

1. Inwiefern beeinflusst das Beizen der Samen mit reinen Lösungen der Neutralsalze (d. h. wenn in der Lösung nur ein Salz vorhanden ist) den Ernteertrag: hat hier die verschiedene Quellungsaktivität der Salze eine Bedeutung?

2. Welchen Einfluss auf den Ertrag haben die Kombinationen von quellungsfördernden und quellungshemmenden Salzen?

Es ist in der letzten Zeit durch Versuche bewiesen worden, dass gerade die Quellungserscheinungen bei der pflanzlichen Zelle eine grosse Rolle spielen und mit ihnen immer in reversibler Weise gewisse physiologische Funktionsänderungen verbunden sind. Verschiedene quellungsfördernde Salze, die das Hydrationspotential der Plasmakolloide erhöhen, bewirken eine grosse Permeabilität des Plasmas, dagegen setzen die quellungshemmenden Salze die Durchlässigkeit herab¹⁾. Somit kann eine der wichtigsten Lebensfunktionen der Zelle — die Permeabilität für gelöste Stoffe — durch gewisse Elektrolyte in hohem Masse beeinflusst werden, und man könnte erwarten, dass die Vorbehandlung der Samen mit quellungsaktiven Stoffen auf die spätere Entwicklung der Pflanze nicht ohne Einfluss bleiben würde. Damit soll freilich nicht gesagt sein, dass die stimulie-

1) K a h o, H. Über die physiologische Wirkung der Neutralsalze auf das Pflanzenplasma. Acta et Comm. Univ. Dorpat. A V. 4. 1923.

I d e m. Ein Beitrag zur Permeabilität des Pflanzenplasmas für die Neutralsalze. Biochem. Zeitschr. 123, 284. 1921.

I d e m. Über die Einwirkung von Säuren auf die Hitzegerinnung des Pflanzenplasmas. Biochem. Zeitschr. 144, 104. 1924.

I d e m. Über die Beeinflussung der Hitzekoagulation des Pflanzenplasmas durch die Salze der Erdalkalien. Biochem. Zeitschr. 151, 104. 1924.

H a n s t e e n - C r a n n e r, Meldinger fra Norges Landbrukskøleskole B. 2, 1. 1922.

R u h l a n d und H o f f m a n n, Arch. für wiss. Botanik 1, 1. 1925.

rende Wirkung der Salze nur auf Quellungsprozesse zurückzuführen sei.

Zu den Versuchen diente eine Sommerweizensorte „Crescat“, die aus Berlin von Aug. Bitterhof Sohn bezogen worden war. Ich konnte leider keine inländische reine Weizensorte ausfindig machen und war gezwungen mit fremdländischen Samen zu experimentieren, ein Umstand, der allerdings bis zu einem gewissen Grade nachteilig auf die Ergebnisse der Versuche wirken könnte.

Die Samenprüfung auf der Kontrollstation des Ackerbau-ministeriums in Tallinn (Reval) (Kontrollanalyse № 5119) ergab folgendes:

die Keimungsenergie in 3 Tagen	— 87,3%
der Keimungsprozentsatz	— 90,6
das Gewicht von 1000 Samen	— 53,06 gr.

Unter den Neutralsalzen wurden zum Beizen der Samen die Kaliumsalze gewählt, die im allgemeinen die Quellung besser fördern als die Natriumsalze, und zwar folgende lyotrope Reihe: KCNS, KJ, KBr, KNO₃, KCl, KH₂PO₄, K-Tartrat, K₂SO₄. Die Konzentration der Lösungen betrug bei allen Salzen 0,1 mol. An Salzkombinationen kamen zur Anwendung folgende:

1. KCNS 0,1 mol + CaCl₂ 0,05 mol
2. KBr 0,1 mol + CaCl₂ 0,05 mol
3. KNO₃ 0,1 mol + CaCl₂ 0,05 mol
4. K₂SO₄ 0,1 mol + CaCl₂ 0,05 mol
5. KNO₃ 0,2 mol + MgCl₂ 0,1 mol
6. KNO₃ 0,2 mol + MgBr₂ 0,1 mol
7. KBr 0,2 mol + Mg(NO₃)₂ 0,1 mol
8. KNO₃ 0,3 mol + BaCl₂ 0,1 mol
9. NaCNS 0,1 mol + CoSO₄ 0,01 mol
10. NaI 0,1 mol + ZnSO₄ 0,01 mol
11. NaNO₃ 0,1 mol + NiSO₄ 0,01 mol
12. NaCl 0,1 mol + MnSO₄ 0,01 mol
13. Na₂SO₄ 0,1 mol + CoSO₄ 0,01 mol
14. u. 15. MgCl₂ + MnSO₄; MnCl₂ + MnSO₄ 3%
16. MnBr₂ 0,1 mol + CoSO₄ 0,1 mol
17. Cd(NO₃)₂ 0,1 mol + CaCl₂ 0,1 mol
18. CdBr₂ 0,1 mol + MgCl₂ 0,1 mol.

Die für die Versuche bestimmten Samen kamen auf 4—5 Stunden in die Salzlösungen, wonach die letzteren abgegossen

wurden und die feuchten bzw. etwas angetrocknenen Samen 2—3 Stunden lang bis zum Aussäen in den Glasschalen blieben. Für die Kontrollversuche wurden die Samen 1. in destilliertes Wasser parallel mit den Salzlösungen gebracht; 2. trockene Samen ausgesät.

Für die Versuche wurde ein Landstück von etwa 11×14 m. im hiesigen botanischen Garten benutzt. Um einen mehr oder weniger einheitlichen Boden zu schaffen, wurde die Erde von der Oberfläche bis zu 20 cm Tiefe weggenommen, gesiebt, gut durchgemischt und wieder zerstreut. Für die Kulturen dienten über den ganzen Versuchsplatz in ungefähr NW-Richtung parallel laufende niedrige (ca 5 cm hohe und 70 cm breite) Beete, die durch quer übergelegte Holzstäbe in 114 viereckige Stücke (Parzellen) eingeteilt wurden. Auf eine jede Parzelle wurden hundert mit ein und derselben Salzlösung gebeizte Weizenkörner ausgesät. Um die Samen in gleicher Tiefe, sowie auch in gleichen Abständen voneinander zu pflanzen, wurden alle 100 Löcher für eine jede Parzelle mit einem Mal mit Hilfe eines Brettes gemacht, an dem 100 Stäbchen, wie etwa an einer Harke, in Schachbrettordnung befestigt waren. Die Tiefe der auf solche Weise hergestellten Löcher betrug 2,7 cm, der Abstand zwischen den Reihen, die in ungefähr OW-Richtung liefen — 12,5 cm; der Abstand der Löcher in einer Reihe betrug 5 cm¹). Für einen jeden Versuch mit derselben Lösung waren vier Parzellen (400 Körner) bestimmt, die möglichst an verschiedenen Stellen des Versuchsfeldes gelegen waren.

Es sei hier noch hinzugefügt, dass etwa in der Mitte des östlichen Randes des Versuchsfeldes ein ca 20-jähriger und 5—6 m hoher Baum stand (*Phellodendron amurense*), der etwa ein Zehntel der ganzen Fläche des Feldes von Morgen bis 12 Uhr teilweise beschattete. Dieser Übelstand war leider wegen des äussersten Raummangels in unserem botanischen Garten nicht zu vermeiden. Die beschatteten Parzellen sind in den Tabellen mit einem * versehen und die Ergebnisse sind in den Durchschnittswerten nur in dem Falle miteinbegriffen, wenn sie keine markanten Abweichungen aufweisen. Ferner sind die Ergeb-

1) Für die Angaben, welche Bodentiefe und welcher Abstand für die Samen am günstigsten sind, bin ich meinem Kollegen Herrn Dozent Rootsi zum besten Danke verpflichtet.

Übersichtstabelle der Mittelwerte.

Nr	Stimulans	Das Gewicht von 100 Strohhalmern	Die Zahl der Körner in 1 Ähre	Das Gewicht von 1000 Körnern	Die Länge 1 Ähre
1.	Ohne Beizung (Kontrollvers.)	gr 264	38,3±0,093	gr 50,0±0,094	cm 9,91±0,171
2.	H ₂ O	273	41,0±0,502	53,9±4,247	10,4 ±0,051
3.	K ₂ SO ₄	265	39,3±1,042	59,2±1,957	9,85±0,235
4.	KCl	274	43,0±0,269	60,0±2,190	10,58±0,292
5.	KBr	284	39,6±0,565	57,1±3,152	10,88±0,118
6.	KNO ₃	272	38,6±1,759	58,7±2,340	10,3 ±0,451
7.	KH ₂ PO ₄	308	42,5±1,46	59,7±2,219	10,78±0,290
8.	Weinsaures K	297	40,1±1,133	57,1±2,186	10,41±0,280
9.	KI	317	41,8±2,685	56,0±1,824	9,84±0,533
10.	KCNS	298	41,6±0,211	56,3±2,157	9,75±0,674
11.	KNO ₃ +CaCl ₂	260	38,6±0,848	51,7±2,613	10,05±0,35
12.	K ₂ SO ₄ +CaCl ₂	241	39,8±1,803	51,5±0,855	9,99±0,226
13.	KCNS+CaCl ₂	243	37,4±2,317	55,9±0,809	9,1 ±0,403
14.	KBr+CaCl ₂	255	39,7±1,347	51,9±1,347	10,7 ±0,446
15.	KNO ₃ +MgCl ₂	259	42,8±0,93	50,5±0,701	10,0 ±0,244
16.	KNO ₃ +MgBr ₂	255	41,8±0,555	54,1±1,909	9,6 ±0,111
17.	KBr+Mg(NO ₃) ₂	263	42,8±0,984	51,5±1,747	10,5 ±0,223
18.	KNO ₃ +BaCl ₂	261	40,5±0,409	51,0±0,707	10,2 ±0,167
19.	NaCNS+CoSO ₄	263	39,6±1,891	50,8±4,128	9,48±0,33
20.	NaI+ZnSO ₄	274	39,1±1,82	51,8±2,788	9,87±0,391
21.	NaNO ₃ +NiSO ₄	248	38,6±3,019	56,1±2,51	9,98±0,238
22.	NaCl+MnSO ₄	271	40,4±2,21	48,1±1,756	10,21±0,423
23.	Na ₂ SO ₄ +CoSO ₄	254	37,8±0,336	52,6±1,034	10,2 ±9,158
24.	MgCl ₂ +MnSO ₄	316	41,3±0,949	48,8±0,302	11,2 ±0,506
25.	MnCl ₂ +MnSO ₄	295	44,5±1,025	53,9±1,147	10,3 ±0,152
26.	MnBr ₂ +CoSO ₄	267	38,2±0,561	51,6±0,957	9,74±0,156
27.	Ca(NO ₃) ₂ +CaCl ₂	253	36,7±0,495	49,6±1,839	9,62±0,435
28.	CdBr ₂ +MgCl ₂	260	38,3±1,14	52,2±1,224	10,1 ±0,353

nisse einiger beschatteten, wie auch aus anderen Ursachen geschädigten Parzellen hier nicht angeführt.

Die Aussaat sowie auch die Ernte geschah zur üblichen Zeit. Die Aussaat wurde den 8-ten Mai (1924) vorgenommen. Bei

der Keimung, wie auch bei der weiteren Entwicklung der Weizenpflanzen waren sonst keine besonders augenfälligen Unterschiede zwischen den Kontroll- und den gebeizten Pflanzen zu bemerken, nur bei den mit Kaliumsalzen vorbehandelten Pflanzen war hier und da ein etwas üppigeres Wachstum zu beobachten.

Die Tabelle am Ende des Textes enthält die Resultate der Versuche. Die Zahlen einer jeden Reihe sind die von einer jeden Parzelle erhaltenen Ergebnisse. Die Zahl der Körner in einer Ähre ist ein Durchschnittswert aus 20 Ähren, die Länge einer Ähre — eine Durchschnittslänge aus 50 Messungen. Das aus jeder Parzelle stammende Stroh konnte nicht ohne weiteres gewogen und verglichen werden, da in allen Parzellen eine Anzahl der Pflanzen aus verschiedenen Ursachen geschädigt war. Deswegen wurden unter allen mit demselben Stoff gebeizten Pflanzen 100 Strohhalme von einer Durchschnittsqualität zum Vergleichen ausgewählt¹⁾.

Die in der Übersichtstabelle dargestellten Resultate können in zwei Hauptgruppen eingeteilt werden: 1. die bei der Beizung mit reinen Kaliumsalzen und 2. die mit verschiedenen Salzkombinationen erhaltenen Ergebnisse.

I. Gruppe №№ 3—10.

Das Stroh ist hier in allen Versuchen schwerer als das der Kontrollpflanzen. Der Durchschnittswert $289,4 \pm 4,81$ gr (von allen Kaliumpflanzen) ist etwa um 9,5% grösser als der Kontrollwert 264 gr. Die Zahlen der Körner in den Ähren zeigen eine gewöhnliche Variationskurve, doch fällt sie nirgends niedriger als der Kontrollwert, in allen Fällen sind die Zahlen etwas grösser. Die Durchschnittszahl (40,8) übersteigt die Kontrollzahl (38,3) um 6,5%.

Eine deutlich wahrnehmbare Zunahme des Gewichts gegenüber den Kontrollpflanzen zeigen die Körner der mit den Kalisalzen behandelten Pflanzen. Durchschnittlich ist das Gewicht von 1000 Körnern um 16% grösser (58,0 gr) als das Kontrollgewicht (50,0 gr). Die vierte in der Übersichtstabelle angeführte Grösse — die Länge der Ähren — schwankt innerhalb der Variationsgrenzen der Kontrolllänge; die Durchschnittszahl (10,31 cm) ist nur sehr wenig (um 4%) grösser als die letztere.

1) Das Abwiegen des Strohs wurde 14 Tage nach der Ernte vorgenommen, nachdem das Stroh in einem warmen Raume gelegen hatte. Das Gewicht der Körner wurde etwa 3 Monate nach der Ernte bestimmt.

II. Gruppe №№ 11—28.

Hier dienen als Beizmittel die Kombinationen der Alkalisalze und der Erdalkalien (№№ 11—18), ferner der Neutralsalze und der Schwermetallsalze (№№ 19—28, ausgenommen № 25 u. 26).

Das Strohgewicht ist unter 18 Fällen in 5 Fällen höher als der Kontrollwert (Maximum bei $\text{MgCl}_2 + \text{MnSO}_4$), in allen anderen Fällen niedriger. Die Zahl der Körner in den Ähren zeigt eine Schwankung um einen Mittelpunkt (39,1), der etwas höher liegt als die Kontrollzahl (38,3). Im ganzen ist die Körnerzahl in 13 Fällen grösser (Maximum bei $\text{MnCl}_2 + \text{MnSO}_4$) und in 4 Fällen kleiner als der Kontrollwert, in einem Falle ist sie dem letzteren gleich. Das Gewicht der Körner ist hier freilich bei den meisten gebeizten Pflanzen etwas grösser als bei den Kontrollpflanzen, doch liegt es in den Variationsgrenzen der letzteren. Dasselbe kann man auch von der Ährenlänge sagen.

Aus den Daten № 2 ist ersichtlich, dass eine kurzdauernde Einquellung der Samen in Wasser einen günstigen Einfluss auf die spätere Entwicklung der Pflanzen ausübt.

Zusammenfassend kann man sagen, dass eine Vorbehandlung der Samen mit Lösungen von Kaliumsalzen eine Wachstumsstimulation und eine Hebung des Ertrages (des Stroh- und Samengewichts) um rund 10% zur Folge hat. Diese stimulierende Wirkung ist allen angewandten Kaliumsalzen mehr oder minder gemeinsam, und es ist schwierig, nach den vorliegenden Ergebnissen die einen Salze den anderen vorzuziehen, doch wirken, wie es uns scheint, Kaliumchlorid, Kaliumphosphat und bis zu einem gewissen Grade auch Kaliumnitrat und -sulfat in dieser Beziehung etwas besser.

Was die angeführten Salzgemische anbelangt, so haben sie unter den gegebenen Versuchsbedingungen keine stimulierende Wirkung. Eine unbedeutende Stimulation finden wir bei Mangansalzen, doch ist sie kleiner als bei den Kaliumsalzen.

Wir sehen also, dass gerade Kaliumsalze, insbesondere diejenigen, die als Nährsalze in Wasserkulturen Anwendung finden, das Wachstum fördern. Es bleibt die Frage unentschieden, ob wir es hier mit einem Nähreffekt zu tun haben — wenigstens teilweise, denn beim Beizen haftet das Salz an die Oberfläche der Samen, dringt in das Nährgewebe ein und könnte während der ersten Zeit von den Keimlingen als Nährsalz benutzt werden. An-

dererseits können Kaliumsalze kolloidaktiv wirken, indem sie die Quellung toter Quellskörper fördern. Zur vorläufigen Orientierung über die Frage, inwiefern die Kaliumsalze die Quellung von Samengeweben in Wasser beeinflussen, habe ich Quellungsversuche mit Weizensamen angestellt. Es kamen zur Anwendung Lösungen derselben Zusammensetzung und Konzentration, wie die, mit welchen die Samen gebeizt wurden. In jede Schale kamen 200 Weizenkörner, die von Zeit zu Zeit aus den Lösungen herausgenommen, mit Filtrierpapier getrocknet und gewogen wurden.

Die Quellung der Samen in Salzlösungen
Temp. 18—19°.

S a l z e	Das Gewicht von 200 trockenen Samen in gr.	Zunahme des Gewichts in gr			
		nach 5 St.	nach 13 St.	nach 24 St.	nach 48 St.
H ₂ O	10,03	2,42	3,51	4,39	5,27
KCNS	10,0	2,26	3,38	4,15	4,92
KI	10,01	2,27	3,32	4,11	4,83
KNO ₃	10,01	2,28	3,31	4,13	4,96
KCl	10,0	2,29	3,40	4,15	5,00
K-Tartrat	10,01	2,28	3,34	4,10	4,91
K ₂ SO ₄	10,0	2,30	3,35	4,13	4,97
KCNS + CaCl ₂	10,0	2,17	3,22	3,90	4,75
CoSO ₄ (0,1 m)	10,0	2,22	3,26	4,09	4,75
MnCl ₂ + MnSO ₄	10,02	2,18	3,24	4,09	4,75

Wir sehen aus der Tabelle, dass die Quellung der Samen am besten in Wasser vor sich geht, in allen Lösungen etwas schlechter. Die Salze wirken, wenn auch sehr schwach, quellungshemmend. Es besteht kein ausgeprägter Unterschied zwischen den Wirkungen der einzelnen Kaliumsalze, dagegen wirken die Salzgemische KCNS + CaCl₂, MnCl₂ + MnSO₄, wie auch CoSO₄ deutlich etwas mehr quellungshemmend als die reinen Kaliumsalze. Es ist aber kaum anzunehmen, dass diese kleine Differenz die einzige Ursache des Unterschiedes der physiologischen Wirkung der Kaliumsalze und der Salzgemische ist. Kaliumverbindungen beeinflussen bekanntlich stark die Permeabilität der Zellen. In reinen Lösungen dieser Salze ist sie beträchtlich grösser als in Salzgemischen.

Es könnte nicht ausgeschlossen sein, dass auch dieser Faktor hier eine Rolle spielt. Eine physiologisch gesteigerte Permeabilität könnte aber den Stoffaustausch der Keimlinge fördern.

Aus diesen Versuchen, die allerdings einen orientierenden Charakter tragen, geht ferner hervor, dass die Feldversuche für die nähere Untersuchung der Ursachen der chemischen Stimulation nicht so geeignet sind wie die Laboratoriums- bzw. Treibhausversuche, bei welchen man mit grösserer Exaktheit arbeiten kann.

Kurze Zusammenfassung.

Die vorliegenden Versuche haben gezeigt, dass eine Vorbehandlung der Weizensamen mit den Lösungen der reinen Kaliumsalze eine Wachstumsstimulation zur Folge hatte, die zu einer Steigerung des Ertrages (des getrockneten Stroh- und Körnergewichts) unter den gegebenen Versuchsbedingungen um rund 10% führte. Eine Beizung der Samen mit Gemischen von Alkalisalzen und Erdalkalien bzw. Schwermetallsalzen blieb ohne merkliche Wirkung, abgesehen von den Mangansalzen, die eine geringe Wachstumsstimulation bewirkten. Es ist nicht möglich, die Stimulationswirkung der Kaliumsalze mit ihrer Quellungsaktivität in direkten Zusammenhang zu bringen, obwohl es nicht unwahrscheinlich ist, dass der letzteren eine gewisse Bedeutung zukommt.

Eine kurzdauernde (4—5 St.) Einquellung der Samen in Wasser vor der Aussaat hatte einen günstigen Einfluss auf die spätere Entwicklung der Keimlinge.

Pflanzenphysiologisches Laboratorium
der Universität Tartu.
September 1925.

Stimulans	Das Gewicht von 100 Strohhalmen	Die Zahl der Körner in 1 Ähre	Das Gewicht von 1000 Körnern	Die Länge 1 Ähre
Kontrollversuch. Die Samen trocken ausgesät	Gr.		Gr.	cm.
264	33,7 40,2 40,6 34,2 39,8 39,9 41,2 38,0	53,0 52,4 52,5 44,0 51,0 49,5 49,0 48,7	9,7 10,35 9,25 10,4 10,15 9,1 9,9 10,4	
Aqua destill.	273	38,6* 40,4 40,5 42,3	42,7* 55,7 44,0 62,0	11,05* 10,4 10,35 10,55
K ₂ SO ₄	265	39,6 37,0 41,4	60,7 62,5 54,6	9,85 10,35 9,35
KCl	274	34,0* 49,6 40,6 39,0	44,8* 57,2 65,7 58,3	10,45* 11,3 10,25 10,2
KBr	284	38,6 40,9 38,5	60,2 49,5 61,8	11,15 10,85 10,65
KNO ₃	272	42,7 35,4 37,7	57,5 64,2 54,5	11,05 9,4 10,45
KH ₂ PO ₄	308	44,6 44,1 39,0	57,2 65,2 56,9	11,3 10,95 10,1
Wein- saures K	297	41,2 43,8 37,0 38,5	50,2 56,5 60,4 61,3	10,9 10,85 9,5 10,4
KI	317	43,0 33,5 42,6 48,0	60,2 59,2 52,1 52,4	9,7 8,2 10,2 11,25
KCNS	298	48,3 39,5 37,0	59,3 58,5 51,0	11,25 8,6 8,4
KNO ₃ + +CaCl ₂	260	38,6 39,6 40,4 35,8	58,0 53,2 52,0 43,5	10,15 9,35 10,6 10,1
K ₂ SO ₄ + +CaCl ₂	241	36,5 38,3 45,9 38,5	52,7 52,6 52,2 48,5	10,3 9,95 9,7 10,0
Stimulans	Das Gewicht von 100 Strohhalmen	Die Zahl der Körner in 1 Ähre	Das Gewicht von 1000 Körnern	Die Länge 1 Ähre
KBr+ +CaCl ₂	255	41,6 37,8 32,0*	50,0 53,8 43,5*	10,9 10,5 9,2*
KCNS+ +CaCl ₂	243	31,0 41,3 35,0 32,5	55,7 55,6 58,5 54,0	9,95 9,8 8,68 8,0
KNO ₃ + +MgCl ₂	259	43,2 44,6 33,9* 40,7	50,0 49,4 47,8* 52,2	10,1 9,5 11,45* 10,5
KNO ₃ + +MgBr ₂	255	42,0 40,4 43,5 41,5	56,5 59,0 49,5 51,5	9,9 9,3 9,7 9,5
KBr+ +Mg(NO ₃) ₂	263	43,6 41,5 44,6 39,5	49,4 49,0 57,5 50,0	11,1 10,1 10,7 10,0
KNO ₃ + +BaCl ₂	261	40,0 41,5 38,0* 40,0	51,0 49,5 47,0* 52,5	10,6 10,3 10,3* 9,8
NaCNS+ +CoSO ₄	263	35,4 42,0 25,7* 41,3	42,3 50,4 40,0* 59,8	9,3 8,95 8,8* 10,2
NaI+ +ZnSO ₄	274	40,8 38,5 34,4 42,9	45,5 55,9 58,7 47,3	10,75 9,85 10,3 8,7
NaNO ₃ + +NiSO ₄	248	35,4 48,0 39,5 31,1*	51,5 55,0 62,0 47,0*	9,5 10,5 9,95 9,75*
NaCl+ +MnSO ₄	271	45,8 39,0 36,4 33,8*	51,4 44,0 49,0 40,5*	10,9 10,55 9,2 10,4*
Na ₂ SO ₄ + +CoSO ₄	254	36,7 37,7* 37,1 38,1	54,4 41,8* 53,4 50,2	10,05 10,2* 10,65 10,0

(Fortsetzung)

Stimulans	Das Gewicht von 100 Strohhalmen	Die Zahl der Körner in 1 Ähre	Das Gewicht von 1000 Körnern	Die Länge 1 Ähre
MnBr ₂ + CoSO ₄	Gr. 267	37,6* 43,4 41,3 39,4	Gr. 46,2* 49,5 48,0 49,0	cm. 9,6* 12,5 10,55 10,75
MnCl ₂ + MnSO ₄	295	45,0 45,7 46,2 41,0	52,7 57,8 53,0 52,0	10,75 10,4 9,9 10,3
MgCl ₂ + MnSO ₄	316	37,6* 43,4 41,3 39,4	46,2* 49,5 48,0 49,0	9,6* 12,5 10,55 10,75
CdBr ₂ + MgCl ₂	260	39,6 37,0 35*	55,2 49,2 40,0*	9,85 10,35 9,75*
Cd(NO ₃) ₂ + CaCl ₂	253	36,0 37,5 24*	47,0 52,2 42,5*	10,0 9,25 9,85*

Eelmiste köidete sisu. — Contenu des volumes précédents.

A I (1921). 1. A. Paldrock. Ein Beitrag zur Statistik der Geschlechtskrankheiten in Dorpat während der Jahre 1909—1918. — 2. K. Väisälä. Verallgemeinerung des Begriffes der Dirichletschen Reihen. — 3. C. Schlossmann. Hapete mõju kolloiidide peale ja selle tähtsus patoloogias. (L'action des acides sur les colloïdes et son rôle dans la pathologie.) — 4. K. Regel. Statistische und physiognomische Studien an Wiesen. Ein Beitrag zur Methodik der Wiesenuntersuchung. — 5. H. Reichenbach. Notes sur les microorganismes trouvés dans les pêches planctoniques des environs de Couda (gouv. d'Archangel) en été 1917. — **Misc.** F. Bucholtz. Der gegenwärtige Zustand des Botanischen Gartens zu Dorpat und Richtlinien für die Zukunft.

A II (1921). 1. H. Bekker. The Kuckers Stage of the Ordovician Rocks of NE Estonia. — 2. C. Schlossmann. Über die Darmspirochäten beim Menschen. — 3. J. Letzmann. Die Höhe der Schneedecke im Ostbaltischen Gebiet. — 4. H. Kaho. Neutraalsoolade mõjust ultramaksimum-temperatuuri peale *Tradescantia zebrina* juures. (Über den Einfluss der Neutralsalze auf die Temperatur des Ultramaximums bei *Tradescantia zebrina*.)

A III (1922). 1. J. Narbutt. Von den Kurven für die freie und die innere Energie bei Schmelz- und Umwandlungsvorgängen. — 2. A. Томсонъ (A. Thomson). Значение аммонийныхъ солей для питания высшихъ культурныхъ растений. (Der Wert der Ammonsalze für die Ernährung der höheren Kulturpflanzen.) — 3. E. Blessig. Ophthalmologische Bibliographie Russlands 1870—1920. I. Hälfte (S. I—VII und 1—96). — 4. A. Lüüs. Ein Beitrag zum Studium der Wirkung künstlicher Wildunger Helenenquellensalze auf die Diurese nierenkranker Kinder. — 5. E. Opik. A statistical method of counting shooting stars and its application to the Perseid shower of 1920. — 6. P. N. Kogerman. The chemical composition of the Estonian M.-Ordovician oil-bearing mineral „Kukersite“. — 7. M. Wittlich und S. Weshnjakow. Beitrag zur Kenntnis des estländischen Ölschiefers, genannt Kukersit. — **Misc.** J. Letzmann. Die Trombe von Odenpäh am 10. Mai 1920.

A IV (1922). 1. E. Blessig. Ophthalmologische Bibliographie Russlands 1870—1920. II. Hälfte (S. 97—188). — 2. A. Valdes. Glükogeeni hulka vähendavate tegurite mõju üle südame spetsiifilise lihassüsteemi glükogeeni peale. (Über den Einfluss der die Glykogenmenge vermindernenden Faktoren auf das Glykogen des spezifischen Muskelsystems des Herzens.) — 3. E. Opik. Notes on stellar statistics and stellar evolution. — 4. H. Kaho. Raskemetallsoolade kiihtisusest taimeplasma kohta. (Über die Schwermetallgiftwirkung in bezug auf das Pflanzenplasma.) — 5. J. Piiper und M. Härms. Der Kiefernkreuzschnabel der Insel Ösel *Loxia pityopsittacus estiae* subsp. nov. — 6. L. Poska-Teiss. Zur Frage über die vielkernigen Zellen des einschichtigen Plattenepithels.

A V (1924). 1. E. Öpik. Photographic observations of the brightness of Neptune. Method and preliminary results. — 2. A. L ü ü s. Ergebnisse der Krüppelkinder-Statistik in Eesti. — 3. C. Schlossmann. Culture in vitro des protozoaires de l'intestin humain. — 4. H. Kaho. Über die physiologische Wirkung der Neutralsalze auf das Pflanzenplasma. — 5. Y. Kauko. Beiträge zur Kenntnis der Torfzersetzung und Vertorfung. — 6. A. Tamme kann. Eesti diktüoneema-kihi uurimine tema tekkimise, vanaduse ja levimise kohta. (Untersuchung des Dictyonema-Schiefers in Estland nach Entstehung, Alter und Verbreitung.) — 7. Y. Kauko. Zur Bestimmung des Vertorfungsgrades. — 8. N. Weiderpass. Eesti piparmündi-õli (*Oleum menthae esthicum*). (Das estnische Pfefferminzöl.)

A VI (1924). 1. H. Bekker. Mõned uued andmed Kukruse lademe stratigraafiast ja faunast. (Stratigraphical and paleontological supplements on the Kukruse stage of the Ordovician Rocks of Eesti (Estonia).) — 2. J. Wilip. Experimentelle Studien über die Bestimmung von Isothermen und kritischen Konstanten. — 3. J. Letzmann. Das Bewegungsfeld im Fuss einer fortschreitenden Wind- oder Wasserhose. — 4. H. Scupin. Die Grundlagen paläogeographischer Karten. — 5. E. Öpik. Photometric measures on the moon and the earth-shine. — 6. Y. Kauko. Über die Vertorfungswärme. — 7. Y. Kauko. Eigentümlichkeiten der H_2O - und CO_2 -Gehalte bei der unvollständigen Verbrennung. — 8. M. Tilzen und Y. Kauko. Die wirtschaftlichen Möglichkeiten der Anwendung von Spiritus als Brennstoff. — 9. M. Wittlich. Beitrag zur Untersuchung des Öles aus estländischem Ölschiefer. — 10. J. Wilip. Emergenzwinkel, Unstetigkeitsflächen, Laufzeit. — 11. H. Scupin. Zur Petroleumfrage in den baltischen Ländern. — 12. H. Richter. Zwei Grundgesetze (Funktion- und Strukturprinzip) der lebendigen Masse.

A VII (1925). 1. J. Vilms. Köhreglükogeeni püsivusest mõnesuguste glükogeeni vähendavate tegurite puhul. (Über die Stabilität des Knorpelglykogens unter verschiedenen das Glykogen zum Verschwinden bringenden Umständen.) — 2. E. Blessig. Ophthalmologische Bibliographie Russlands 1870—1920. Nachtrag. — 3. O. Kuriks. Trachoma Eestis (eriti Tartus) möödunud ajal ja praegu. (Das Trachom in Estland (insbesondere in Dorpat) einst und jetzt.) — 4. A. Brandt. Sexualität. Eine biologische Studie. — 5. M. Haltenberger. Gehört das Baltikum zu Ost-, Nord- oder zu Mitteleuropa? — 6. M. Haltenberger. Recent geographical work in Estonia.

B I (1921). 1. M. Vasmer. Studien zur albanesischen Wortforschung. I. — 2. A. v. Bulmerincq. Einleitung in das Buch des Propheten Maleachi. 1. — 3. M. Vasmer. Osteuropäische Ortsnamen. — 4. W. Anderson. Der Schwank von Kaiser und Abt bei den Minsker Juden. — 5. J. Bergman. Quaestiunculæ Horatianæ.

B II (1922). 1. J. Bergman. Aurelius Prudentius Clemens, der grösste christliche Dichter des Altertums. I. — 2. L. Kettunen.

Lõunavepsa häälik-ajalugu. I. Konsonandid. (Südwepsische Lautgeschichte. I. Konsonantismus.) — 3. W. Wiget. Altgermanische Lautuntersuchungen.

B III (1922). 1. A. v. Bulmerincq. Einleitung in das Buch des Propheten Maleachi. 2. — 2. M. A. Курчинский (M. A. Kurtschinsky). Социальный законъ, случай и свобода. (Das soziale Gesetz, Zufall und Freiheit.) — 3. A. R. Cederberg. Die Erstlinge der estländischen Zeitungsliteratur. — 4. L. Kettunen. Lõunavepsa häälik-ajalugu. II. Vokaalid. (Südwepsische Lautgeschichte. II. Vokalismus.) — 5. E. Kieckers. Sprachwissenschaftliche Miscellen. [I.] — 6. A. M. Tallgren. Zur Archäologie Eestis. I.

B IV (1923). 1. E. Kieckers. Sprachwissenschaftliche Miscellen. II. — 2. A. v. Bulmerincq. Einleitung in das Buch des Propheten Maleachi. 3. — 3. W. Anderson. Nordasiatische Flutsagen. — 4. A. M. Tallgren. L'ethnographie préhistorique de la Russie du nord et des États Baltiques du nord. — 5. R. Gutmann. Eine unklare Stelle in der Oxforder Handschrift des Rolandsliedes.

B V (1924). 1. H. Mutschmann. Milton's eyesight and the chronology of his works. — 2. A. Pridik. Mut-em-wija, die Mutter Amenhotep's (Amenophis') III. — 3. A. Pridik. Der Mitregent des Königs Ptolemaios II Philadelphos. — 4. G. Süss. De Graecorum fabulis satyricis. — 5. A. Berendts und K. Grass. Flavius Josephus: Vom jüdischen Kriege, Buch I—IV, nach der slavischen Übersetzung deutsch herausgegeben und mit dem griechischen Text verglichen. I. Teil. — 6. H. Mutschmann. Studies concerning the origin of „Paradise Lost“.

B VI (1925). 1. A. Saareste. Leksikaalseist vahekordadest eesti murretes. I. Analüüs. (Du sectionnement lexicologique dans les patois estoniens. I. Analyse.) — 2. A. Bjerre. Zur Psychologie des Mordes.

TARTU ÜLIKOOI TOIMETUSED ilmuvad kolmes seerias:

A: Mathematica, physica, medica. (Matemaatika-loodusteaduskonna, arstiteaduskonna, loomaarstiteaduskonna ja põllumajandusteaduskonna tööd.)

B: Humaniora. (Usuteaduskonna, filosoofiateaduskonna ja õigusteaduskonna tööd.)

C: Annales. (Aastaruanded.)

Ladu: Ülikooli Raamatukogus, Tartus.

LES PUBLICATIONS DE L'UNIVERSITÉ DE TARTU (DORPAT) se font en trois séries:

A: Mathematica, physica, medica. (Mathématiques, sciences naturelles, médecine, sciences vétérinaires, agronomie.)

B: Humaniora. (Théologie, philosophie, linguistique, histoire, jurisprudence.)

C: Annales.

Dépôt: La Bibliothèque de l'Université de Tartu, Esthonie.
