

Per. A-1459
-229

TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 229

**СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ
И
СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА**

СБОРНИК СТАТЕЙ

III

ТАЛЛИН 1965

P./5176A

W.A-1459
-229

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 229 1965

УДК 624

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ
И
СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА
III

ТАЛЛИН 1965

P₉

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

51764

УДК 624. 072. 2

И. И. Ааре

О ВЛИЯНИИ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ ПОЯСА ТОНКОСТЕННОЙ БАЛКИ НА РАБОТУ СТЕНКИ

Как показывает опыт, напряженное и деформированное состояние тонкостенной балки в значительной степени зависит от изгибной жесткости поясов.

В следующем подробно рассматривается вопрос работы опорной панели как наиболее нагруженной сдвигающими усилиями, учитывая при этом влияние изгибной жесткости поясов.

Рассмотрим пластину (фиг. 1), свободно опертую по всему контуру и подвергающуюся действию сдвигающих усилий по всем кромкам. Предполагается, что продольные края могут искривляться в плоскости опорного контура.

Граничные условия принимаем в виде

$$\begin{aligned} x = 0, \quad a \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad EI_{\Pi} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \pm \sigma_x \cdot t, \\ y = 0, \quad b \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Решаем задачу в перемещениях.

Основные уравнения теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \quad (2^a)$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = t \left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \quad (2^b)$$

Подставляя в (2^a) значения напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \\ \tau &= \frac{E(1-\mu)}{2(1-\mu^2)} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right],\end{aligned}\quad (3)$$

приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (5)$$

Аппроксимируя функцию прогиба срединной поверхности пластины выражением

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6)$$

решение уравнения (4), (5) напишем в форме:

$$\begin{aligned}u = u(x, y) + \sum_m \sin \frac{m\pi x}{a} \left[A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \left(y \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a}{m\pi} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) + D_m \left(y \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \frac{a}{m\pi} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] + \alpha x,\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}v = v(x, y) + \sum_m \left(B_m - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{a}{m\pi} C_m \right) \left\{ 1 + [(-1)^m - 1] \frac{x}{a} \right\} - \sum_m \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \\ \cdot \left[A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \left(y \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{a}{m\pi} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) + \right. \\ \left. + D_m \left(y \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{a}{m\pi} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] + \beta y + \gamma x.\end{aligned}\quad (8)$$

где $U_{(x, y)}$ и $V_{(x, y)}$ частные решения уравнения (4, 5), а A_m, B_m, \dots постоянные интегрирования, α, β и γ — постоянные.

Принимая

$$\begin{aligned}w = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = w_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + w_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + \\ + w_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} + w_{31} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + w_{33} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b},\end{aligned}\quad (9)$$

составляющие перемещений $U_{(x, y)}$ и $V_{(x, y)}$ находим при $\frac{a}{b} = 2$:

$$U_{11} \frac{\partial}{\partial \pi} = -0,5000 w_{11} w_{22} + 1,868 w_{22} w_{13} + 0,868 w_{22} w_{31} - 1,50 w_{22} w_{33},$$

$$U_{22} \frac{\partial}{\partial \pi} = -0,375 w_{11} w_{33} + 0,809 w_{13} w_{31} + 0,079 w_{11} w_{31} - 0,42 w_{11} w_{13} + 0,0625 w_{11}^2,$$

$$U_{13} \frac{\partial}{\partial \pi} = 0,0827611 w_{11} w_{22} - 0,1689554 w_{22} w_{31},$$

$$U_{15} \frac{\partial}{\partial \pi} = -0,1255073 w_{22} w_{13} + 0,09260856 w_{22} w_{33},$$

$$U_{24} \frac{\partial}{\partial \pi} = 0,13053633 w_{11} w_{33} - 0,30406 w_{13} w_{31} + 0,1524 w_{11} w_{13},$$

$$U_{26} \frac{\partial}{\partial \pi} = -0,0943937 w_{13} w_{33} + 0,0625 w_{13}^2,$$

$$U_{31} \frac{\partial}{\partial \pi} = -0,2076923 w_{11} w_{22} - 0,3307692 w_{22} w_{13},$$

$$U_{51} \frac{\partial}{\partial \pi} = -0,24673 w_{22} w_{31} - 0,18014 w_{22} w_{33},$$

$$U_{40} \frac{\partial}{\partial \pi} = -0,1125 w_{11} w_{31} + 0,025 w_{22}^2 + 0,4875 w_{13} w_{33},$$

$$U_{60} \frac{\partial}{\partial \pi} = -0,1625 w_{31}^2 + 0,0375 w_{33}^2,$$

$$U_{42} \frac{\partial}{\partial \pi} = -0,2859 w_{11} w_{33} - 0,4609375 w_{13} w_{31} + 0,19843 w_{11} w_{31},$$

$$U_{62} \frac{\partial}{\partial \pi} = -0,4211538 w_{31} w_{33} + 0,1875 w_{31}^2,$$

$$U_{33} \frac{\partial}{\partial \pi} = 0,1666 w_{11} w_{22},$$

$$U_{44} \frac{\partial}{\partial \pi} = 0,1875 w_{11} w_{33} + 0,125 w_{22}^2 + 0,3355 w_{13} w_{31},$$

$$U_{20} \frac{\partial}{\partial \pi} = -0,525 w_{11} w_{31} - 1,725 w_{13} w_{33} + 0,0125 w_{11}^2 + 0,6125 w_{13}^2,$$

$$U_{35} \frac{\partial}{\partial \pi} = 0,21034 w_{22} w_{13},$$

$$U_{53} \frac{\partial}{\partial \pi} = 0,3245 w_{22} w_{31},$$

$$U_{55} \frac{\partial}{\partial \pi} = 0,300 w_{22} w_{33},$$

$$U_{46} \frac{\partial}{\partial \pi} = 0,236437 w_{13} w_{33},$$

$$U_{64} \frac{\partial}{\partial \pi} = 0,4069 w_{31} w_{33},$$

$$U_{66} \frac{\partial}{\partial \pi} = 0,1875 w_{33}^2,$$

(10)

$$\begin{aligned}
V_{11} \frac{Q}{\pi} &= -1,0 w_{11} w_{22} - 3,064 w_{21} w_{13} - 1,064 w_{22} w_{31} - 3,0 w_{22} w_{33}, \\
V_{02} \frac{Q}{\pi} &= -0,76875 w_{11} w_{13} - 0,91875 w_{31} w_{33} - 0,115625 w_{11}^2 - 0,040625 w_{31}^2, \\
V_{22} \frac{Q}{\pi} &= -0,75 w_{11} w_{33} - 0,782 w_{13} w_{31} - 0,242 w_{11} w_{31} + 0,125 w_{11}^2 + 0,75 w_{11} w_{13}, \\
V_{13} \frac{Q}{\pi} &= -0,31424 w_{11} w_{22} - 0,25697 w_{22} w_{31}, \\
V_{15} \frac{Q}{\pi} &= -0,5818 w_{22} w_{13} - 0,55906 w_{22} w_{33}, \\
V_{24} \frac{Q}{\pi} &= -0,3602 w_{11} w_{33} - 0,33391 w_{13} w_{31} + 0,37335 w_{11} w_{13}, \\
V_{26} \frac{Q}{\pi} &= -0,72852 w_{13} w_{33} + 0,375 w_{13}^2, \\
V_{31} \frac{Q}{\pi} &= 0,630769 w_{11} w_{22} + 1,523 w_{22} w_{13}, \\
V_{51} \frac{Q}{\pi} &= 0,09441 w_{22} w_{31} + 0,9624 w_{22} w_{33}, \\
V_{04} \frac{Q}{\pi} &= -0,3656 w_{11} w_{13} - 0,23125 w_{21}^2 - 0,2906 w_{31} w_{33}, \\
V_{06} \frac{Q}{\pi} &= -0,371875 w_{13}^2 - 0,346875 w_{33}^2, \\
V_{42} \frac{Q}{\pi} &= 0,65156 w_{11} w_{33} + 0,4765625 w_{13} w_{31} + 0,2609 w_{11} w_{23}, \\
V_{62} \frac{Q}{\pi} &= 0,3346153 w_{31} w_{33} + 0,125 w_{31}^2, \\
V_{33} \frac{Q}{\pi} &= 0,333 w_{11} w_{22}, \\
V_{44} \frac{Q}{\pi} &= 0,375 w_{11} w_{33} + 0,25 w_{22}^2 + 0,371 w_{13} w_{31}, \\
V_{35} \frac{Q}{\pi} &= 0,5971 w_{22} w_{13}, \\
V_{53} \frac{Q}{\pi} &= 0,3435 w_{22} w_{31}, \\
V_{55} \frac{Q}{\pi} &= 0,60 w_{22} w_{33}, \\
V_{46} \frac{Q}{\pi} &= 0,7468 w_{13} w_{33}, \\
V_{64} \frac{Q}{\pi} &= 0,3825 w_{31} w_{33}, \\
V_{66} \frac{Q}{\pi} &= 0,375 w_{33}^2
\end{aligned}
\tag{11}$$

Контактные уравнения для определения коэффициентов A_m, B_m, \dots получаем из условий сопряжения ребра и пластины. Как видно, в данном случае постоянные

$$A'_m = \frac{A_m}{a}, \dots$$

зависят от жесткости ребер на изгиб.

Так получаем ($\mu = 0,3$, $\frac{a}{b} = 2$):

1) $\frac{a^3 t}{I_n} = 500.$

$A_1^1 = -0,198418393 R_1;$
 $B_1^1 = -0,631784257 R_1;$
 $C_1 = +4,300419168 R_1;$
 $D_1 = -2,820187028 R_1;$

$A_3^1 = +0,0132085556 R_3;$
 $B_3^1 = -0,0164696674 R_3;$
 $C_3 = +0,336316423 R_3;$
 $D_3 = -0,330327348 R_3;$

$A_2^1 = +0,0764369033 R_2$
 $B_2^1 = -0,0441072828 R_2$
 $C_2 = +0,600457445 R_2$
 $D_2 = -0,654698447 R_4$

$A_4^1 = 0,00570068629 R_4$
 $B_4^1 = -0,00538011232 R_4$
 $C_4 = +0,146485045 R_4$
 $D_4 = -0,147081365 R_4$

2) $\frac{a^3 t}{I_n} = 1000.$

$A_1^1 = -0,24396025 R_1;$
 $B_1^1 = -0,776792 R_1;$
 $C_1 = 5,2874616 R_1;$
 $D_1 = -3,467484 R_1;$

$A_3^1 = 0,02090569 R_3;$
 $B_3^1 = -0,0271854542 R_3;$
 $C_3 = 0,55513657 R_3;$
 $D_3 = -0,5452517 R_3;$

$A_2^1 = 0,09657504 R_2$
 $B_2^1 = -0,055727518 R_2$
 $C_2 = 0,7586503 R_2$
 $D_2 = -0,8271824 R_2$

$A_4^1 = 0,010270282 R_4$
 $B_4^1 = -0,0097369443 R_4$
 $C_4 = 0,2651091 R_4$
 $D_4 = -0,26610106 R_4$

3) $\frac{a^3 t}{I_n} = 2000.$

$A_1^1 = -0,27558565 R_1;$
 $B_1^1 = -0,877493279 R_1;$
 $C_1 = 5,9729075 R_1;$
 $D_1 = -3,916997 R_1;$

$A_3^1 = 0,032315888 R_3;$
 $B_3^1 = -0,0402939052 R_3;$
 $C_3 = 0,82281575 R_3;$
 $D_3 = -0,80816428 R_3;$

$A_2^1 = 0,11122681 R_2$
 $B_2^1 = -0,064182117 R_2$
 $C_2 = +0,87374754 R_2$
 $D_2 = -0,95267679 R_2$

$A_4^1 = 0,01837623 R_4$
 $B_4^1 = -0,01742160504 R_4$
 $C_4 = 0,474304 R_4$
 $D_4 = -0,4761159 R_4$

4) $\frac{a^3 t}{I_n} = 4000.$

$A_1^1 = -0,294687181 R_1;$
 $B_1^1 = -0,938314367 R_1;$
 $C_1 = 6,386903514 R_1;$
 $D_1 = -4,188492345 R_1;$

$A_3^1 = 0,0423895307 R_3;$
 $B_3^1 = -0,0532026047 R_3;$
 $C_3 = 1,086415933 R_3;$
 $D_3 = -1,066562167 R_3;$

$A_2^1 = 0,125752858 R_2$
 $B_2^1 = -0,064616583 R_2$
 $C_2 = 0,879662171 R_2$
 $D_2 = -0,98306536 R_2$

$A_4^1 = 0,0274042687 R_4$
 $B_4^1 = -0,0259810885 R_4$
 $C_4 = +0,7073906023 R_4$
 $D_4 = -0,71003757 R_4$

Здесь

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{\pi^2}{a^2} (0,57669 \omega_{22}\omega_{13} + 0,15698 \omega_{22}\omega_{31} - 0,0106355 \omega_{11}\omega_{22} - \\
 &\quad - 0,012845799 \omega_{22}\omega_{33}), \\
 R_2 &= \frac{\pi^2}{a^2} (0,7644 \omega_{11}\omega_{31} + 8,19 \omega_{13}\omega_{33} - 0,455 \omega_{11}^2 - 4,095 \omega_{13}^2 + \\
 &\quad + 0,5824 \omega_{13}\omega_{31} - 0,1456 \omega_{11}\omega_{13}), \\
 R_3 &= \frac{\pi^2}{a^2} (-0,777538 \omega_{11}\omega_{22} - 2,99124 \omega_{22}\omega_{13}), \\
 R_4 &= \frac{\pi^2}{a^2} (-0,854 \omega_{11}\omega_{31} - 1,820 \omega_{22}^2 - 8,169 \omega_{13}\omega_{33} - 0,51875 \omega_{11}\omega_{33} - \\
 &\quad - 1,27627 \omega_{13}\omega_{31})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left\{ (0,2275 w_{11} w_{13} + 2,0475 w_{31} w_{33} - 0,11375 w_{11}^2 - 1,02375 w_{31}^2) \frac{\pi^2}{\sigma^2} \cos \frac{2\pi y}{b} + \right. \\
 &\quad + (-0,2275 w_{11} w_{13} - 0,455 w_{22}^2 - 2,0475 w_{31} w_{33}) \frac{\pi^2}{\sigma^2} \cos \frac{4\pi y}{b} + (-0,11375 w_{13}^2 - \\
 &\quad - 1,02375 w_{33}^2) \frac{\pi^2}{\sigma^2} \cos \frac{6\pi y}{b} + (2,3296 w_{22} w_{13} + 2,3296 w_{22} w_{31}) \frac{\pi^2}{\sigma^2} \cos \frac{\pi x}{\sigma} \cos \frac{\pi y}{b} + \\
 &\quad + (-0,38288 w_{11} w_{22} - 1,5315 w_{22} w_{31}) \frac{\pi^2}{\sigma^2} \cos \frac{\pi x}{\sigma} \cos \frac{3\pi y}{b} + (-0,57098 w_{22} w_{13} - \\
 &\quad - 1,2847 w_{22} w_{33}) \frac{\pi^2}{\sigma^2} \cos \frac{\pi x}{\sigma} \cos \frac{5\pi y}{b} + (2,3296 w_{13} w_{31} - 0,5824 w_{11} w_{31} - 0,5824 w_{11} w_{33}) \frac{\pi^2}{\sigma^2} \cos \frac{2\pi x}{\sigma} \cos \frac{2\pi y}{b} + \\
 &\quad + (-0,4533 w_{11} w_{33} - 1,2591 w_{13} w_{31}) \frac{\pi^2}{\sigma^2} \cos \frac{2\pi x}{\sigma} \cos \frac{4\pi y}{b} + \\
 &\quad + (-0,86146 w_{13} w_{33}) \frac{\pi^2}{\sigma^2} \cos \frac{2\pi x}{\sigma} \cos \frac{6\pi y}{b} + (-0,344615 w_{11} w_{22} - 1,3784 w_{22} w_{13}) \frac{\pi^2}{\sigma^2} \cos \frac{3\pi x}{\sigma} \cos \frac{\pi y}{b} + \\
 &\quad + (0,1225 w_{22} w_{13}) \frac{\pi^2}{\sigma^2} \cos \frac{3\pi x}{\sigma} \cos \frac{5\pi y}{b} + (-0,511875 w_{11} w_{33} - \\
 &\quad - 1,421875 w_{13} w_{31} + 0,056875 w_{11} w_{31}) \frac{\pi^2}{\sigma^2} \cos \frac{4\pi x}{\sigma} \cos \frac{2\pi y}{b} + (0,5824 w_{13} w_{31}) \frac{\pi^2}{\sigma^2} \cos \frac{\pi x}{\sigma} \cos \frac{4\pi y}{b} + \\
 &\quad + 0,184275 w_{13} w_{33} \frac{\pi^2}{\sigma^2} \cos \frac{4\pi x}{\sigma} \cos \frac{6\pi y}{b} + (-0,277 w_{22} w_{31} - \\
 &\quad - 0,6232 w_{22} w_{33}) \frac{\pi^2}{\sigma^2} \cos \frac{5\pi x}{\sigma} \cos \frac{\pi y}{b} + 0,140865 w_{22} w_{31} \frac{\pi^2}{\sigma^2} \cos \frac{5\pi x}{\sigma} \cos \frac{3\pi y}{b} - \\
 &\quad - 0,77538 w_{31} w_{33} \frac{\pi^2}{\sigma^2} \cos \frac{6\pi x}{\sigma} \cos \frac{2\pi y}{b} + 0,20968 w_{31} w_{33} \frac{\pi^2}{\sigma^2} \cos \frac{6\pi x}{\sigma} \cos \frac{4\pi y}{b} + \\
 &\quad + \sum \frac{m\pi(1-\mu) \cos \frac{m\pi x}{a} \left[A_m' \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{\sigma} + B_m' \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{\sigma} + C_m \left(\frac{y}{\sigma} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{\sigma} + \frac{1}{m\pi} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1+2\mu-3\mu^2}{1-\mu^2} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{\sigma} \right) + D_m \left(\frac{y}{\sigma} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{\sigma} + \frac{1}{m\pi} \frac{1+2\mu-3\mu^2}{1-\mu^2} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{\sigma} \right) \right] \right\}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

Напряжения в срединной поверхности пластинки находим из выражений (12), (13) и (14).

$$\begin{aligned}
 \sigma_y = & \frac{E}{1-\mu^2} \left\{ (0,91 w_{11} w_{31} + 8,19 w_{13} w_{33} - 0,455 w_{11}^2 - 4,09 w_{13}^2) \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{2\pi x}{a} + \right. \\
 & + (-0,910 w_{11} w_{31} - 1,820 w_{22}^2 - 8,190 w_{13} w_{33}) \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{4\pi x}{a} + (-0,455 w_{31}^2 - \\
 & - 4,095 w_{33}^2) \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{6\pi x}{a} + (0,5824 w_{22} w_{13} + 0,5824 w_{22} w_{31}) \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \\
 & + (-0,01063 w_{11} w_{22} - 0,04254 w_{22} w_{31}) \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b} + (-0,005709 w_{22} w_{13} - \\
 & - 0,012845 w_{22} w_{33}) \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{5\pi y}{b} + (0,5824 w_{13} w_{31} - 0,1456 w_{11} w_{31} - \\
 & - 0,1456 w_{11} w_{13}) \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + (-0,028339 w_{11} w_{33} - 0,078719 w_{13} w_{31} + \\
 & + 0,00314 w_{11} w_{13}) \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{4\pi y}{b} - 0,023929 w_{13} w_{33} \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{6\pi y}{b} + \\
 & + (-0,77538 w_{11} w_{22} - 3,101538 w_{22} w_{13}) \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + 0,011029 w_{22} w_{11} \frac{\pi^2}{a^2} \\
 & \cos \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{5\pi y}{b} + (-0,511875 w_{11} w_{33} - 1,4218 w_{13} w_{31} + 0,056875 w_{11} w_{31}) \frac{\pi^2}{a^2} \\
 & \cos \frac{4\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + 0,1456 w_{13} w_{31} \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{4\pi x}{a} \cos \frac{4\pi y}{b} + 0,020475 w_{13} w_{33} \frac{\pi^2}{a^2} \\
 & \cdot \cos \frac{4\pi x}{a} \cos \frac{6\pi y}{b} + (-1,7312 w_{22} w_{31} - 3,8953 w_{22} w_{33}) \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{5\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \\
 & + 0,097823 w_{22} w_{31} \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{5\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b} + 0,117936 w_{31} w_{33} \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{6\pi x}{a} \cos \frac{4\pi y}{b} - \\
 & - \sum_m \frac{m\pi}{m} (1-\mu) \cos \frac{m\pi x}{a} \left[A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \left(\frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \frac{1}{m\pi} \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) + D_m \left(\frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{1}{m\pi} \frac{1-\mu}{1+\mu} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \left. \right\}, \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{c} = & \frac{E(1-\mu)}{2(1-\mu^2)} \left\{ (3,328 w_{22} w_{13} + 3,328 w_{22} w_{31}) \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + (-0,18232 w_{11} w_{22} - \right. \\
& - 0,72929 w_{22} w_{31}) \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} + (-0,16312 w_{22} w_{13} - 0,36702 w_{22} w_{33}) \frac{\pi^2}{a^2} \\
& \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{5\pi y}{b} + (3,328 w_{13} w_{31} - 0,832 w_{11} w_{31} - 0,832 w_{11} w_{13}) \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + \\
& + (-0,323875 w_{11} w_{33} - 0,8996 w_{13} w_{31} + 0,03598 w_{11} w_{13}) \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{4\pi y}{b} - \\
& - 0,410226 \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + (-1,4769 w_{11} w_{22} - 5,9076 w_{22} w_{13}) \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{3\pi x}{a} \\
& \sin \frac{\pi y}{b} + 0,10504 \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{5\pi y}{b} + (-1,4625 w_{11} w_{33} - 4,0625 w_{13} w_{31} + \\
& + 0,1625 w_{11} w_{31}) \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{4\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + 0,832 w_{13} w_{31} \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{4\pi x}{a} \sin \frac{4\pi y}{b} + \\
& + 0,1755 w_{13} w_{33} \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{4\pi x}{a} \sin \frac{6\pi y}{b} + (-1,97859 w_{22} w_{31} - 4,4518 w_{22} w_{33}) \frac{\pi^2}{a^2} \\
& \sin \frac{5\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + 0,33539 w_{22} w_{31} \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{5\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} + 0,44928 w_{31} w_{33} \\
& \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{6\pi x}{a} \sin \frac{4\pi y}{b} - 3,32307 w_{31} w_{33} \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{6\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + \\
& + \sum_m 2m\pi \sin \frac{m\pi x}{a} \left[A_m' \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m' \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \left(\frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{m\pi} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) + D_m \left(\frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{m\pi} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] + \\
& + \left. \sum_m [(-1)^m - 1] (B_m' - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{m\pi} C_m) + \gamma \right\} \quad (14)
\end{aligned}$$

Подставляя $\omega(x, y)$, σ_x , σ_y и τ в уравнение (2^б) и применяя метод Галеркина, получаем 5 алгебраических уравнений третьей степени. В таблицах 1 ÷ 4 представлены результаты расчета при

$$f_n = \frac{w_n}{t}; \quad f_{22} = \frac{w_n}{t}; \quad f_{13} = \frac{w_{13}}{t}; \quad f_{31} = \frac{w_{31}}{t};$$

$$f_{33} = \frac{w_{33}}{t}, \quad \frac{a}{b} = 2, \quad \mu = 0,3$$

Таблица 1

$$\frac{a^3 t}{I_n} = 500$$

γ^*	f_{11}	f_{22}	f_{13}	f_{31}	f_{33}
63,13	0	0	0	0	0
80	0,974429	0,400012	-0,0428564	-0,2839556	0,0595710
100	1,448806	0,719909	-0,0806268	-0,4454392	0,127476
150	2,166332	1,310015	-0,1640334	-0,6847336	0,3011571
200	2,682395	1,784000	-0,2420200	-0,8494708	0,4641756
250	3,088516	2,155652	-0,3074184	-0,9780368	0,6034011
300	3,441261	2,480165	-0,3654550	-1,089616	0,7259865
350	3,757229	2,77000	-0,4182560	-1,1892724	0,835659
400	4,038782	3,017999	-0,4628916	-1,2787284	0,9328185
450	4,306729	3,25999	-0,506613	-1,3635724	1,0243704
500	4,565411	3,500975	-0,5504626	-1,4451196	1,1116935

Таблица 2

$$\frac{a^3 t}{I_n} = 1000$$

γ^*	f_{11}	f_{22}	f_{13}	f_{31}	f_{33}
63,13	0	0	0	0	0
80	1,095695	0,439987	-0,0463100	-0,3006748	0,0651549
100	1,657844	0,798217	-0,0882612	-0,4629828	0,1394700
150	2,487196	1,430015	-0,1810936	-0,7008036	0,3180777
200	3,063605	1,901749	-0,2629064	-0,8638648	0,4752399
250	3,548916	2,321000	-0,3402154	-1,0008248	0,6161979
300	3,957195	2,663999	-0,4053054	-1,1156656	0,7360803
350	4,328723	2,980437	-0,4659044	-1,2202788	0,844767
400	4,671022	3,272875	-0,5221224	-1,3167248	0,9439779
450	4,993528	3,552017	-0,5759176	-1,4077012	1,0363983
500	5,311983	3,843306	-0,632474	-1,497792	1,1263083

Таблица 3

$$\frac{a^3 t}{I_n} = 2000$$

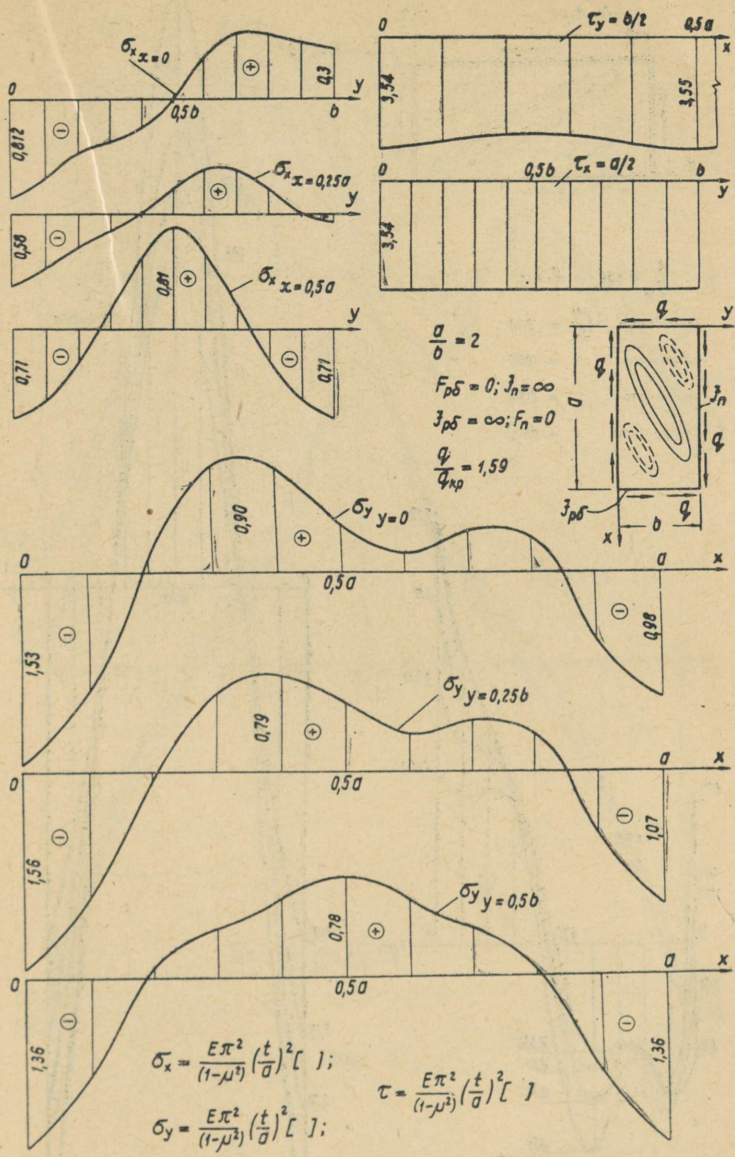
γ^*	f_{11}	f_{22}	f_{13}	f_{31}	f_{33}
63,13	0	0	0	0	0
80	1,205118	0,491999	-0,0519368	-0,3265192	0,0726627
100	1,764697	0,839843	-0,0949410	-0,4846604	0,1462341
150	2,706154	1,591499	-0,2115284	-0,755384	0,3459603
200	3,335345	2,122999	-0,3137098	-0,9330080	0,5103465
250	3,850732	2,566982	-0,4056642	-1,0772548	0,6508131
300	4,251647	2,855175	-0,4576116	-1,18968	0,7587792
400	5,0691	3,614997	-0,63154	-1,4162	0,98097
450	5,410879	3,905601	-0,6947	-1,5110436	1,1185179
500	5,720721	4,155625	-0,748899	-1,596375	1,152966

$$\frac{a^3 t}{I_n} = 4000$$

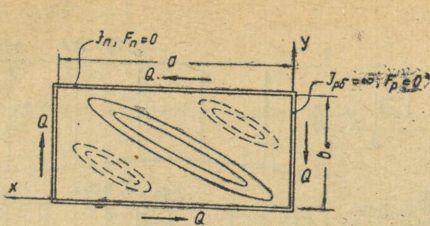
Таблица 4

γ^*	f_{11}	f_{22}	f_{13}	f_{31}	f_{33}
63,13	0	0	0	0	0
80	1,374624	0,507000	-0,0495084	-0,331679	0,07517
100	2,279604	0,975991	-0,0961654	-0,4801416	0,1587866
150	3,632786	1,794757	-0,205234	-0,720878	0,3756751
200	4,577045	2,397999	-0,30432	-0,894008	0,54314
250	5,367992	2,919921	-0,3965556	-1,0435668	0,6866
300	6,065621	3,388061	-0,4819354	-1,1762276	0,8125638
350	6,694245	3,824004	-0,5776268	-1,292236	0,9261114
400	7,202048	4,110001	-0,617426	-1,38721	1,0153392
450	7,689368	4,40659	-0,6736438	-1,4761088	1,1014371
500	8,145155	4,682023	-0,7255468	-1,5592336	1,1814648

На фиг. 1, 2, 3, даны эпюры напряжений σ_x , σ_y , и τ пластины. Кривые фиг. 4 дают зависимость максимальных прогибов пластины от жесткости пояса на изгиб. На графике видно, что при малой изгибной жесткости полки и больших нагрузках прогибы срединной поверхности быстро увеличиваются. Отсюда можно сделать вывод, что обыкновенные сварные балки с малой изгибной жесткостью поясов не пригодны для работы в послекритической стадии. В то же время балки с определенным значением изгибной жесткости (клепанные балки и сварные балки специального типа (см. фиг. 5) могут надежно работать при нагрузках, значительно превышающих критические.

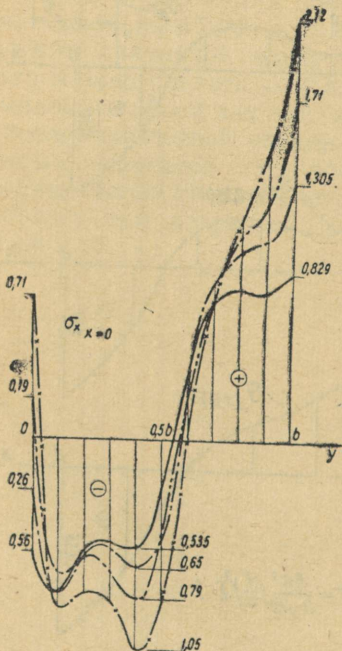


Фиг. 1

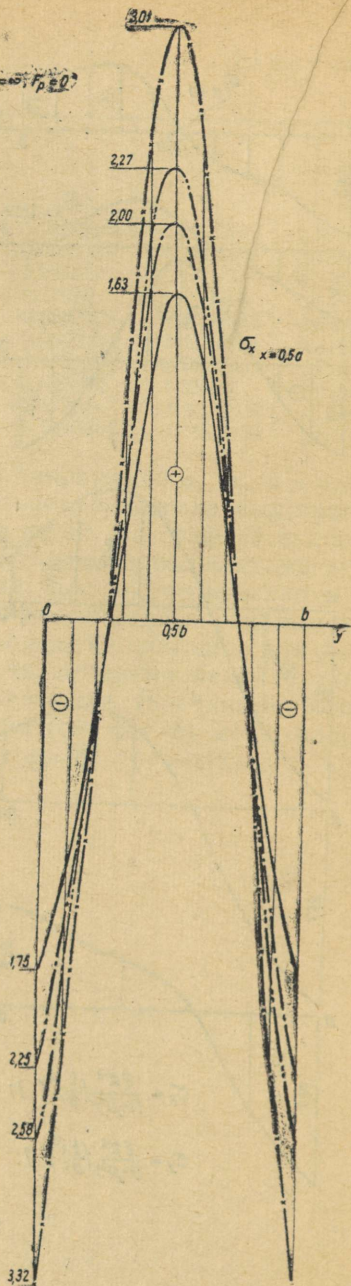


$$\frac{q}{q_{kp}} = 1,59; \quad \frac{a}{b} = 2$$

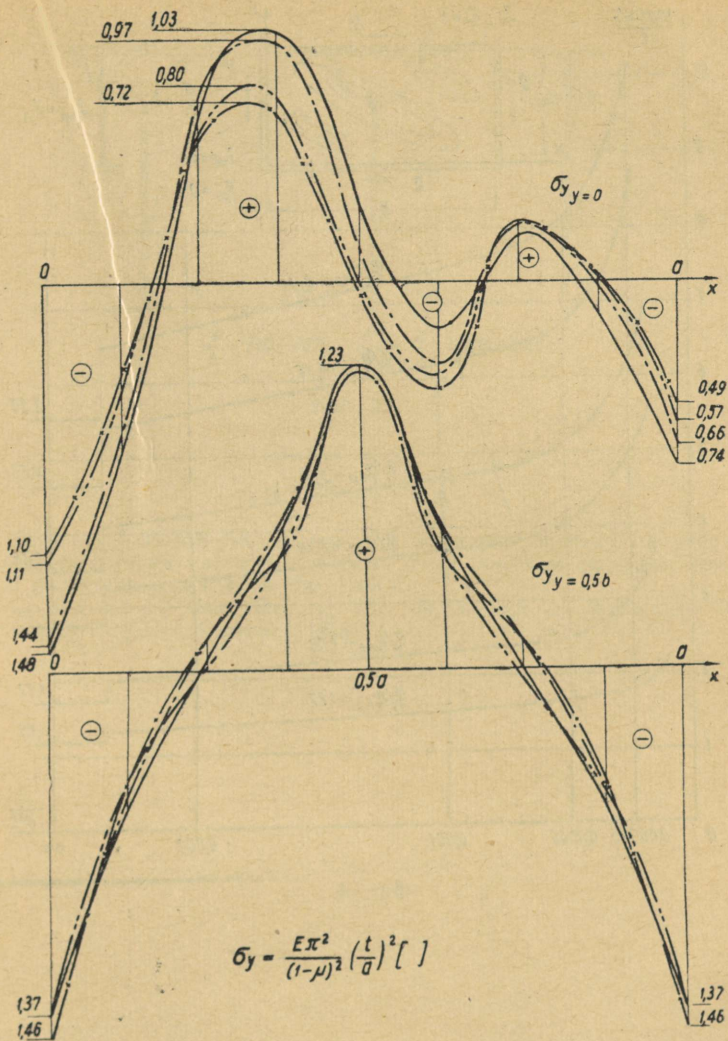
- $\frac{a^2 t}{J_n} = 500$
- - - - " = 1000
- · · · " = 2000
- · · · " = 4000



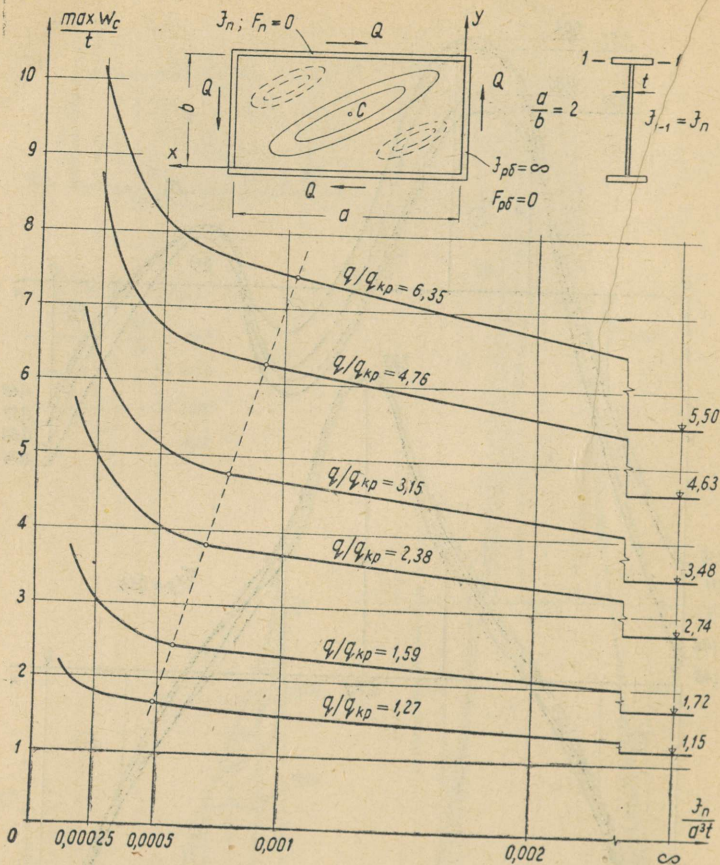
$$\sigma_x = \frac{E \pi^2}{1 - \mu^2} \left(\frac{t}{a} \right)^2 []$$



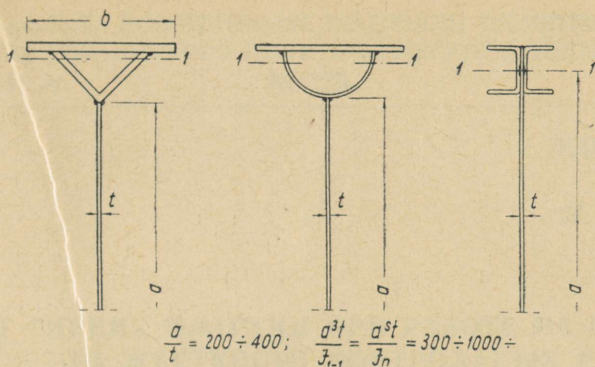
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

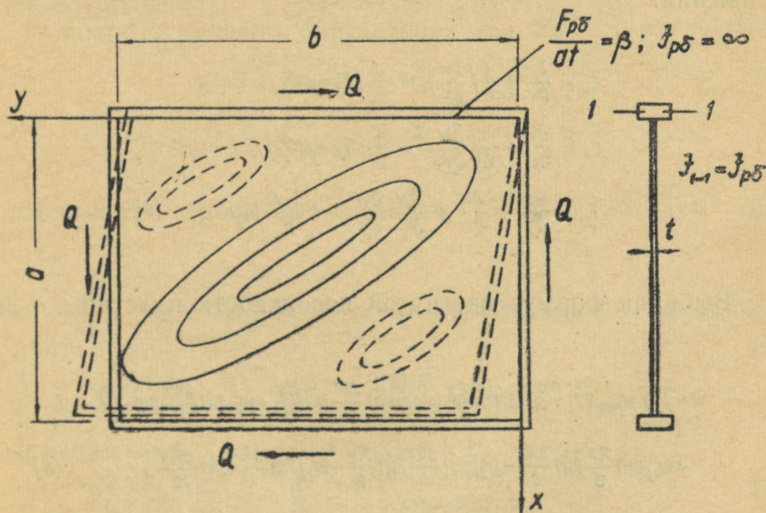
ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Ааре. Изгиб гибких пластин, шарнирно опертых по ребрам, жесткость которых на сжатие и изгиб имеет конечное значение. Труды ТПИ института, серия А, № 200, 1963 г.
2. К. С. Rocky. Web Buckling and the Design of Webplates. The Structural Engineer, February 1958.

РАСЧЕТ ГИБКИХ ПЛАСТИН ПРИ РАБОТЕ НА СДВИГ С УЧЕТОМ ЖЕСТКОСТИ КОНТРОЛЬНЫХ РЕБЕР НА СЖАТИЕ

Стенки тонкостенных балок делаются настолько тонкими, что они теряют свою устойчивость при расчетных нагрузках. Потеря устойчивости стенки не является еще потерей несущей способности стенки в целом, если стенка заключена в жесткий контур. Представляет теоретический и практический интерес исследовать работу стенки балки как гибкой пластины, нагруженной по контуру сдвигающими усилиями, учитывая при этом жесткость контурных ребер на сжатие.

Рассмотрим квадратную пластинку, шарнирно опертую по краям. Предполагается, что края не могут искривляться в плоскости опорного контура (фиг. 1).



Фиг. 1.

Состояние равновесия пластины определим решением уравнений Кармана

$$\nabla^2 \nabla^2 F = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad (1)$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = t \left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad (2)$$

где

$F(x, y)$ — функция напряжений,

$w(x, y)$ — прогиб пластины.

Функция напряжений $F(x, y)$ определяет цепные напряжения:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \quad (3)$$

Изгибные напряжения находим из выражений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x' &= \pm \frac{Et}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y' &= \pm \frac{Et}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

а компоненты деформаций срединной поверхности — из выражений:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y), \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = 2 \frac{1+\mu}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (5)$$

Выбирая форму изогнутой поверхности пластины в виде

$$\begin{aligned} w &= \sum_m \sum_n w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = w_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + w_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + \\ &+ w_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} + w_{31} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + w_{33} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (6)$$

находим для функции напряжения

$$\begin{aligned}
 F = & \sum_m \sum_n F_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_p \cos \frac{p\pi x}{a} \left(A_p \operatorname{ch} \frac{p\pi y}{a} + B_p \operatorname{sh} \frac{p\pi y}{a} + \right. \\
 & \left. + C_p y \operatorname{ch} \frac{p\pi y}{a} + D_p y \operatorname{sh} \frac{p\pi y}{a} \right) + \sum_p \cos \frac{p\pi y}{b} \left(\bar{A}_p \operatorname{ch} \frac{p\pi x}{b} + \bar{B}_p \operatorname{sh} \frac{p\pi x}{b} + \right. \\
 & \left. + \bar{C}_p x \operatorname{ch} \frac{p\pi x}{b} + \bar{D}_p x \operatorname{sh} \frac{p\pi x}{b} \right) + F_1 \frac{x^2}{2} + F_2 \frac{y^2}{2} - qxy, \quad (7)
 \end{aligned}$$

где коэффициенты F_{mn} определяются из уравнения совместности деформации (1) как функции от ω_{11} , ω_{22} , ω_{13} , ω_{31} , ω_{33} (см. табл. 1),

$A_p, B_p, \dots, F_1, F_2$ — постоянные интегрирования.

Задавая численными значениями жесткости ребер на сжатие $\beta = \frac{F_p \sigma}{at}$, определяем неизвестные постоянные A_p, B_p, \dots из условий сопряжений ребра и пластинки. Применяя метод Галеркина, определяем неизвестные параметры $\omega_{11}, \omega_{22}, \dots$ из уравнений

$$\iint_{00}^{ab} \left(\frac{D}{t} \nabla^2 \nabla^2 w - \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0 \quad (8)$$

Далее рассмотрим некоторые отдельные случаи.

А) Исследование работы свободно опертой прямоугольной пластины, когда жесткость ребер на изгиб и на сжатие бесконечно большая.

Граничные условия определения A_p, B_p, \dots следующие:

$$y = 0, b \quad \varepsilon_y^{nl} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (9)$$

$$x = 0, a \quad \varepsilon_x^{nl} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (10)$$

Используя граничные условия (9, 10), находим (при

$\frac{a}{b} = 1$):

$$\text{а) } F_1 = \frac{\pi^2}{a^2} E (0,17857 \omega_{11}^2 + 1,60714 \omega_{13}^2 + 0,714285 \omega_{22}^2 + 0,17839 \omega_{31}^2 + 1,60714 \omega_{33}^2), \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } A_1^1 &= 0,11995 N_1; & A_2^1 &= 0,01815672 N_2 \\
 B_1^1 &= -0,8690 N_1; & B_2^1 &= -0,01891347 N_2 \\
 C_1 &= -0,50713 N_1; & C_2 &= -0,22069715 N_2 \\
 D_1 &= 0,465140 N_1; & D_2 &= 0,22152311 N_2 \\
 A_3^1 &= 0,007861 N_3; & A_4^1 &= 0,003994483 N_4 \\
 B_3^1 &= -0,00784 N_3; & B_4^1 &= -0,003995457 N_4 \\
 C_3 &= -0,137223 N_3; & C_4 &= -0,09318066 N_4 \\
 D_3 &= 0,137261 N_3; & D_4 &= 0,093181638 N_4
 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\alpha = \frac{a}{b}$$

Таблица 1.

$$F_{02} = \frac{E}{32\alpha^2} (W_{11}^2 + 9W_{31}^2 + 2W_{11}W_{13} - 18W_{31}W_{33}),$$

$$F_{20} = \frac{E}{32}\alpha^2 (W_{11}^2 + 9W_{13}^2 - 2W_{11}W_{31} - 18W_{13}W_{33}),$$

$$F_{11} = \frac{4E\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} (-W_{22}W_{13} - W_{22}W_{31}),$$

$$F_{22} = \frac{E\alpha^2}{32(1+\alpha^2)^2} (-32W_{13}W_{31} + 8W_{11}W_{31} + 8W_{11}W_{13}),$$

$$F_{00} = \frac{E}{32\alpha^2} (W_{22}^2 + \frac{1}{2}W_{11}W_{13} + \frac{\theta}{2}W_{21}W_{33}),$$

$$F_{20} = \frac{E}{32}\alpha^2 (W_{22}^2 + \frac{1}{2}W_{11}W_{21} + \frac{9}{2}W_{13}W_{33}),$$

$$F_{13} = \frac{4E\alpha^2}{(1+9\alpha^2)^2} (W_{11}W_{22} + 4W_{22}W_{31}),$$

$$F_{31} = \frac{4E\alpha^2}{(9+\alpha^2)^2} (W_{11}W_{22} + 4W_{22}W_{13}),$$

$$F_{30} = \frac{E}{32\alpha^2} (\frac{1}{9}W_{13}^2 + W_{33}^2),$$

$$F_{03} = \frac{E}{32}\alpha^2 (\frac{1}{9}W_{21}^2 + W_{33}^2),$$

$$F_{13} = \frac{E\alpha^2}{(1+25\alpha^2)^2} (16W_{13}W_{22} + 36W_{22}W_{33}),$$

$$F_{31} = \frac{E\alpha^2}{(25+\alpha^2)^2} (16W_{22}W_{31} + 36W_{22}W_{33}),$$

$$F_{20} = \frac{E\alpha^2}{64(1+4\alpha^2)^2} (36W_{11}W_{33} + 100W_{13}W_{31} - 4W_{11}W_{13}),$$

$$F_{22} = \frac{E\alpha^2}{64(4+\alpha^2)^2} (36W_{11}W_{33} + 100W_{13}W_{31} - 4W_{11}W_{31}),$$

Продолжение таблицы 1.

$$F_{26} = \frac{144E\alpha^2}{64(1+9\alpha^2)^2} W_{13}W_{33},$$

$$F_{44} = -\frac{16E\alpha^2}{256(1+\alpha^2)^2} W_{13}W_{31},$$

$$F_{32} = \frac{144E\alpha^2}{64(9+\alpha^2)^2} W_{31}W_{33},$$

$$F_{45} = -\frac{36E\alpha^2}{64(4+9\alpha^2)^2} W_{13}W_{33},$$

$$F_{35} = -\frac{4E\alpha^2}{(9+25\alpha^2)^2} W_{22}W_{13},$$

$$F_{54} = -\frac{36E\alpha^2}{64(9+4\alpha^2)^2} W_{31}W_{33},$$

$$F_{53} = -\frac{4E\alpha^2}{(25+9\alpha^2)^2} W_{22}W_{31}.$$

Здесь $N_n = \sum_m F_{mn} \frac{\pi}{a} (m^2 - \mu n^2)$.

При $\mu = 0,3$, находим:

$$N_1 = \frac{\pi}{a} E(0,092 \omega_{22}\omega_{13} - 0,1143 \omega_{22}\omega_{31} + 1,318 \omega_{22}\omega_{33} + 0,348 \omega_{11}\omega_{22}),$$

$$N_2 = \frac{\pi}{a} E(-0,0375 \omega_{11}^2 - 0,3375 \omega_{31}^2 + 0,2500 \omega_{11}\omega_{13} + 0,1380 \omega_{11}\omega_{31} + 0,2250 \omega_{13}\omega_{31} + 0,3333 \omega_{11}\omega_{33} + 1,4580 \omega_{31}\omega_{33}),$$

$$N_3 = \frac{\pi}{a} E(-0,068 \omega_{11}\omega_{22} - 0,272 \omega_{22}\omega_{31} - 0,07716 \omega_{22}\omega_{31}),$$

$$N_4 = \frac{\pi}{a} E(-0,1500 \omega_{22}^2 - 0,0750 \omega_{11}\omega_{13} - 0,6750 \omega_{31}\omega_{33} - 0,0180 \omega_{11}\omega_{33} - 0,0500 \omega_{13}\omega_{31} + 0,0020 \omega_{11}\omega_{13} - 0,1750 \omega_{13}\omega_{31}).$$

Подставляя $\omega(x, y)$ и $F(x, y)$ в (8) и производя интегрирование, получаем систему из 4 алгебраических уравнений третьей степени, приведенную в табл. 2. Решая приведенную

Таблица 2

	I_y 0 =	III_y 0 =	IV_y 0 =		II_y 0 =
f_{11}^3	-0,120228	0,015750	—	$f_{11}f_{22}f_{13}$	-0,6293457
$f_{11}^2f_{13}$	0,045158	-0,713405	+0,146165	$f_{11}f_{22}f_{31}$	-0,490007
$f_{11}^2f_{31}$	0,0459068	-0,0626178	+0,146165	$f_{22}f_{13}f_{31}$	-2,1075048
$f_{11}^2f_{33}$	-0,002084	+0,145200	-0,90481	$f_{22}f_{13}f_{33}$	-1,784289
$f_{11}f_{13}f_{31}$	-0,1260274	0,809133	-1,405414	$f_{22}f_{31}f_{33}$	-1,798247
$f_{11}f_{13}f_{33}$	0,3068025	-0,00079	0,00072	$f_{22}f_{11}^2$	-0,417278
$f_{11}f_{31}f_{33}$	0,2908358	-0,00533	0,00315	f_{22}^3	-1,9285
$f_{11}f_{22}^2$	-0,49728	-0,220304	-0,123903	$f_{22}f_{13}^2$	-5,0811
$f_{11}f_{13}^2$	-1,0695133	-0,000559	0,000540	$f_{22}f_{31}^2$	-2,0736
$f_{11}f_{31}^2$	-0,35302	0,4061117	0,000315	$f_{22}f_{33}^2$	-4,14996
$f_{11}f_{33}^2$	-0,888538	—	—	f_{11}	+0,0365 q^*
$f_{13}f_{31}f_{33}$	-1,391956	-0,00533	0,00315	f_{22}	-1,4640
$f_{13}f_{22}^2$	-0,342086	-3,519464	-1,02188	f_{13}	-0,0657 q^*
$f_{13}f_{31}^2$	0,4061119	-2,29104	-0,000243	f_{31}	-0,0657 q^*
$f_{13}f_{33}^2$	—	-9,43051	—	f_{33}	+0,11828 q^*
f_{13}^3	—	-5,29906	1,26562	$f_{11}f_{22}f_{33}$	-0,221742
$f_{13}^2f_{33}$	0,40652	-0,000503	—		
$f_{13}^2f_{33}$	-0,016968	3,79688	-12,6447		
$f_{31}^2f_{33}$	—	-0,0133686	-6,21226		
f_{31}^3	—	0,003109	+1,26489		
$f_{31}f_{22}^2$	-0,202747	-1,007210	-0,734804		
$f_{31}f_{33}^2$	0,08103	—	—		
$f_{33}f_{22}^2$	-0,22776	-0,767186	-4,642		
f_{33}^3	—	—	-9,76338		
f_{11}	-0,09157	—	—		
f_{22}	0,0364 q^*	-0,0657 q^*	0,11828 q^*		
f_{13}	—	-2,2898	—		
f_{31}	—	—	—		
f_{33}	—	—	-7,4175		

систему на электронной вычислительной машине «Эстония 3», получим зависимости между параметром нагрузки $q^* = \frac{qa^2}{Et^2}$ и параметрами прогибов пластины $f_{11} = \frac{w_{11}}{t}$; $\psi_1 = \frac{w_{22}}{w_{11}}$, $\psi_2 = \psi_3 = \frac{w_{13}}{w_{11}} = \frac{w_{31}}{w_{11}}$; $\psi_4 = \frac{w_{33}}{w_{11}}$. Результаты решения представлены в табл. 3.

Таблица 3

q^*	f_{11}	ψ_1	$\psi_2 = \psi_3$	ψ_4
8,51	0	0,2955	-0,072	0,040
12	0,61227	0,415257	-0,11220	0,070295
20	0,95648	0,583144	-0,166589	0,12967
30	1,18421	0,69603	-0,198453	0,182599
40	1,3540	0,76077	-0,215353	0,218028
50	1,49798	0,80280	-0,225764	0,243094
60	1,62638	0,83229	-0,232836	0,261648
80	1,85314	0,87098	-0,241854	0,28717
100	2,052981	0,89522	-0,247360	0,303842
150	2,480436	0,92884	-0,25480	0,327805
200	2,84307	0,94623	-0,258620	0,340579
250	3,163976	0,95685	-0,26092	0,348512
300	3,45501	0,96402	-0,26245	0,353915
350	3,72326	0,96918	-0,26356	0,35783
400	3,97339	0,973073	-0,26438	0,36080

При критическом значении параметра нагрузки

$$q^*_{кр} = +8,51,$$

$$\psi_1 = +0,2955, \quad \psi_2 = -0,072,$$

$$\psi_3 = -0,072, \quad \psi_4 = +0,040.$$

Напряжения в срединной поверхности квадратной пластинки находим из выражений ($a = b$):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\sum_m \sum_n F_{mn} \frac{n^2 \pi^2}{\sigma^2} \cos \frac{m\pi x}{\sigma} \cos \frac{n\pi y}{\sigma} + F_1 + \sum_p \frac{p^2 \pi^2}{\sigma} \cos \frac{p\pi x}{\sigma} \cdot$$

$$\left[A_p' ch \frac{p\pi y}{\sigma} + B_p' sh \frac{p\pi y}{\sigma} + C_p \left(\frac{y}{\sigma} ch \frac{p\pi y}{\sigma} + \frac{2}{p\pi} sh \frac{p\pi y}{\sigma} \right) + D_p \left(\frac{y}{\sigma} sh \frac{p\pi y}{\sigma} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{2}{p\pi} ch \frac{p\pi y}{\sigma} \right) \right] - \sum_p \frac{p^2 \pi^2}{\sigma} \cos \frac{p\pi y}{\sigma} \left(A_p' ch \frac{p\pi x}{\sigma} + B_p' sh \frac{p\pi x}{\sigma} + C_p \frac{x}{\sigma} ch \frac{p\pi x}{\sigma} + \right.$$

$$\left. + D_p \frac{x}{\sigma} sh \frac{p\pi x}{\sigma} \right), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = & -\sum_m \sum_n F_{mn} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{a} + F_1 - \sum_p \frac{\rho^2 \pi^2}{a} \cos \frac{\rho\pi x}{a} \\ & \cdot \left[A_p' ch \frac{\rho\pi y}{a} + B_p' sh \frac{\rho\pi y}{a} + C_p \frac{y}{a} ch \frac{\rho\pi y}{a} + D_p \frac{y}{a} sh \frac{\rho\pi y}{a} \right] + \sum \frac{\rho^2 \pi^2}{a} \\ & \cdot \cos \frac{\rho\pi y}{a} \left[A_p' ch \frac{\rho\pi x}{a} + B_p' sh \frac{\rho\pi x}{a} + C_p \left(\frac{x}{a} ch \frac{\rho\pi x}{a} + \frac{2}{\rho\pi} sh \frac{\rho\pi x}{a} \right) + \right. \\ & \left. + D_p \left(\frac{x}{a} sh \frac{\rho\pi x}{a} + \frac{2}{\rho\pi} ch \frac{\rho\pi x}{a} \right) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = & -\sum_m \sum_n F_{mn} \frac{m n \pi^2}{a^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} + q \cdot \sum_p \frac{\rho^2 \pi^2}{a} \sin \frac{\rho\pi x}{a} \\ & \cdot \left[A_p' sh \frac{\rho\pi y}{a} + B_p' ch \frac{\rho\pi y}{a} + C_p \left(\frac{y}{a} sh \frac{\rho\pi y}{a} + \frac{2}{\rho\pi} ch \frac{\rho\pi y}{a} \right) + D_p \left(\frac{y}{a} ch \frac{\rho\pi y}{a} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{\rho\pi} sh \frac{\rho\pi y}{a} \right) \right] + \sum_p \frac{\rho^2 \pi^2}{a} \sin \frac{\rho\pi y}{a} \left[A_p' sh \frac{\rho\pi x}{a} + B_p' ch \frac{\rho\pi x}{a} + C_p \left(\frac{x}{a} sh \frac{\rho\pi x}{a} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{\rho\pi} ch \frac{\rho\pi x}{a} \right) + D_p \left(\frac{x}{a} ch \frac{\rho\pi x}{a} + \frac{2}{\rho\pi} sh \frac{\rho\pi x}{a} \right) - \sum_p \frac{2}{a} (\rho\pi B_p' + C_p) \right], \\ & \left(A_p' = \frac{A_p}{a}; B_p' = \frac{B_p}{a} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

где а)

$$\begin{aligned} & -\sum_m \sum_n F_{mn} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{a} = \\ & = E\pi^2 \left(\frac{t}{a} \right)^2 \rho_{11}^2 \left\{ (1,00 \psi_1 \psi_2 + 1,00 \psi_1 \psi_3) \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} + (-0,04 \psi_1 - 0,16 \psi_2 \psi_3) \cdot \right. \\ & \cdot \cos \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} + (-0,0237 \psi_1 \psi_3 - 0,05325 \psi_2 \psi_3) \cos \frac{5\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} + (-0,125 - 1,125 \psi_3^2 + \\ & + 0,250 \psi_2 + 2,25 \psi_3 \psi_4) \cos \frac{2\pi y}{a} + (1,00 \psi_2 \psi_3 - 0,25 \psi_3 - 0,25 \psi_2) \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} + \\ & + (-0,09 \psi_4 - 0,25 \psi_2 \psi_3 + 0,01 \psi_3) \cos \frac{4\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} - 0,09 \psi_3 \psi_4 \cos \frac{6\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} + \\ & + (-0,36 \psi_1 - 1,44 \psi_1 \psi_3) \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{a} + 0,03114 \psi_1 \psi_3 \cos \frac{5\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{a} + \\ & + (-0,50 \psi_1^2 - 0,25 \psi_2 - 2,25 \psi_3 \psi_4) \cos \frac{4\pi y}{a} + 0,25 \psi_2 \psi_3 \cos \frac{4\pi x}{a} \cos \frac{4\pi y}{a} + \\ & + 0,05325 \psi_3 \psi_4 \cos \frac{6\pi x}{a} \cos \frac{4\pi y}{a} + (-0,36 \psi_4 - 1,00 \psi_2 \psi_3 + 0,04 \psi_2) \cos \frac{2\pi x}{a} \\ & \cdot \cos \frac{4\pi y}{a} + (-0,5917 \psi_1 \psi_2 - 1,331 \psi_1 \psi_4) \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{5\pi y}{a} + 0,0865 \psi_1 \psi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \cos \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{5\pi y}{a} + (-0,125\psi_2^2 - 1,125\psi_4^2) \cos \frac{6\pi y}{a} + 0,1198\psi_2\psi_4 \cos \frac{4\pi x}{a} \\ & \cdot \cos \frac{6\pi y}{a} - 0,81\psi_2\psi_4 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{6\pi y}{a}; \end{aligned} \quad (16)$$

б)

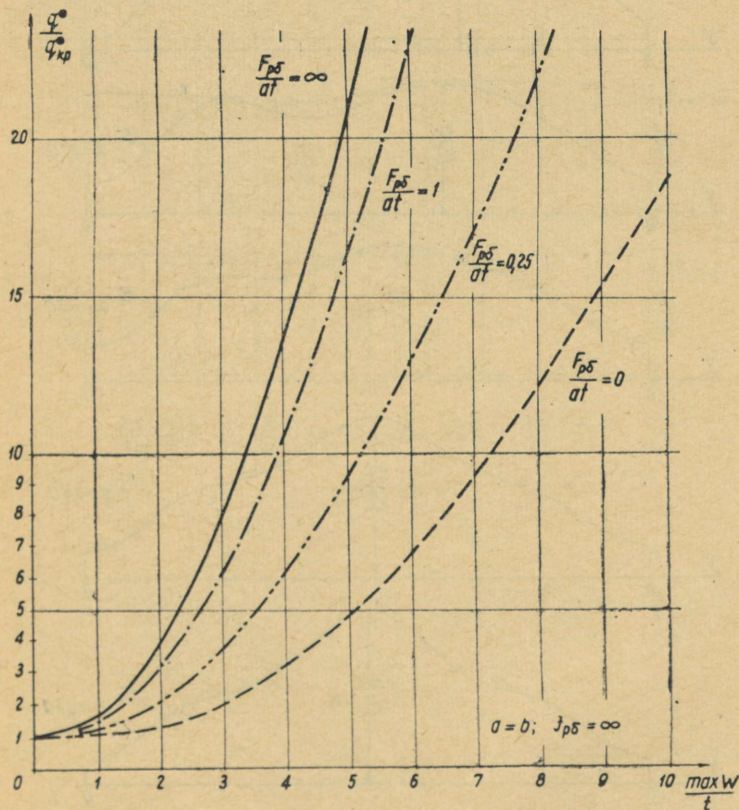
$$\begin{aligned} & - \sum_m \sum_n F_{mn} \frac{mn\pi^2}{a^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} = \\ & = E\pi^2 \left(\frac{t}{a}\right)^2 f_{11}^2 \left\{ (1,00\psi_1\psi_2 + 1,00\psi_1\psi_3) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + (0,96\psi_2\psi_3 - \right. \\ & - 0,25\psi_3 - 0,25\psi_2) \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} + (-0,12\psi_1 - 0,48\psi_1\psi_3) \sin \frac{\pi x}{a} \\ & \cdot \sin \frac{3\pi y}{a} + (-0,48\psi_1\psi_2 - 0,12\psi_1) \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{a} + (-0,50\psi_2\psi_3 - \\ & - 0,18\psi_4 + 0,02\psi_2) \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{4\pi y}{a} + (-0,18\psi_4 - 0,50\psi_2\psi_3 + 0,02\psi_3) \cdot \\ & \cdot \sin \frac{4\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} + 0,25\psi_2\psi_3 \sin \frac{4\pi x}{a} \sin \frac{4\pi y}{a} + 0,0798\psi_3\psi_4 \cdot \\ & \cdot \sin \frac{6\pi x}{a} \sin \frac{4\pi y}{a} + 0,0798\psi_2\psi_4 \sin \frac{4\pi x}{a} \sin \frac{6\pi y}{a} - 0,27\psi_2\psi_4 \cdot \\ & \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{6\pi y}{a} - 0,27\psi_3\psi_4 \sin \frac{6\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} + (-0,118\psi_1\psi_3 - \\ & - 0,266\psi_1\psi_4) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{5\pi y}{a} + (-0,118\psi_1\psi_3 - 0,266\psi_1\psi_4) \cdot \\ & \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + 0,0518\psi_1\psi_2 \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{5\pi y}{a} + 0,0518\psi_1\psi_3 \cdot \\ & \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{a} \left. \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

Изгибные напряжения находим из выражений

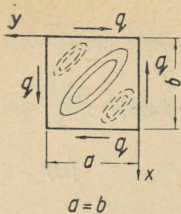
$$\begin{aligned} \sigma_x' &= \frac{E\pi^2}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \frac{w_{11}}{t} \left[(1+\mu) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + 4(1+\mu)\psi_1 \cdot \right. \\ & \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} + (1+9\mu)\psi_2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{a} + (9+\mu)\psi_3 \cdot \\ & \cdot \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + 9(1+\mu)\psi_4 \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{a} \left. \right], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\sigma_y' = \frac{E\pi^2}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2 W_{II} \left[(1+\mu) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + 4(1+\mu) \psi_1 \cdot \right. \\ \left. \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} + (9+\mu) \psi_2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{a} + (1+9\mu) \psi_3 \cdot \right. \\ \left. \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + 9(1+\mu) \psi_4 \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{a} \right]. \quad (19)$$

Зависимость максимальных прогибов пластины от параметра нагрузки представлены на фиг. 2. На фиг. 3, 4, 5, 6, 7 даны эпюры цепных и изгибных напряжений в разных сечениях пластины в зависимости от параметра нагрузки. Численные значения напряжений были вычислены на электронной



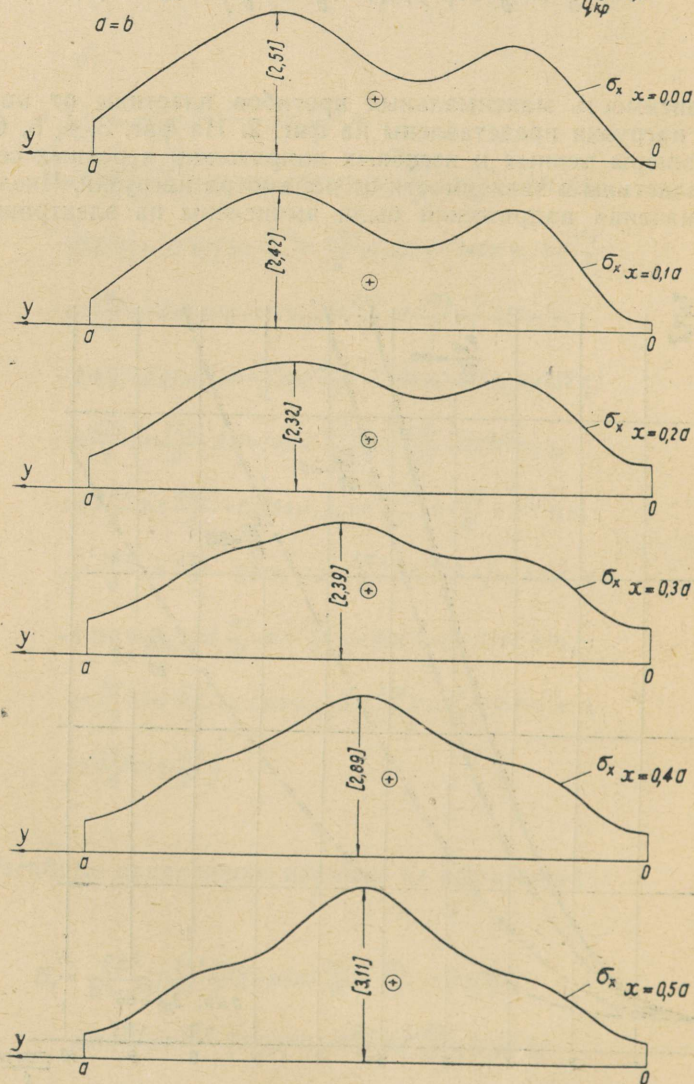
Фиг. 2



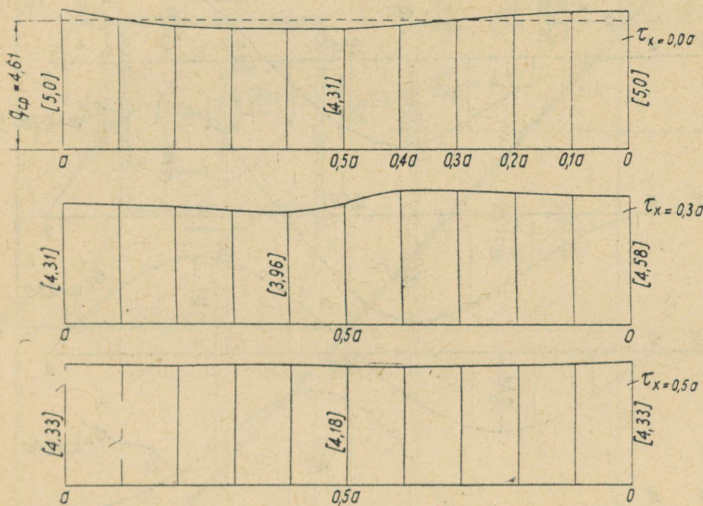
$$\sigma_x = \frac{E\pi^2}{1-\mu^2} \left(\frac{t}{a}\right)^2 [\] ; \quad \lambda_{05} = \infty,$$

$$\frac{F_{p5}}{a^2} = \infty;$$

$$\frac{q^*}{q_{kp}} = 5,9$$

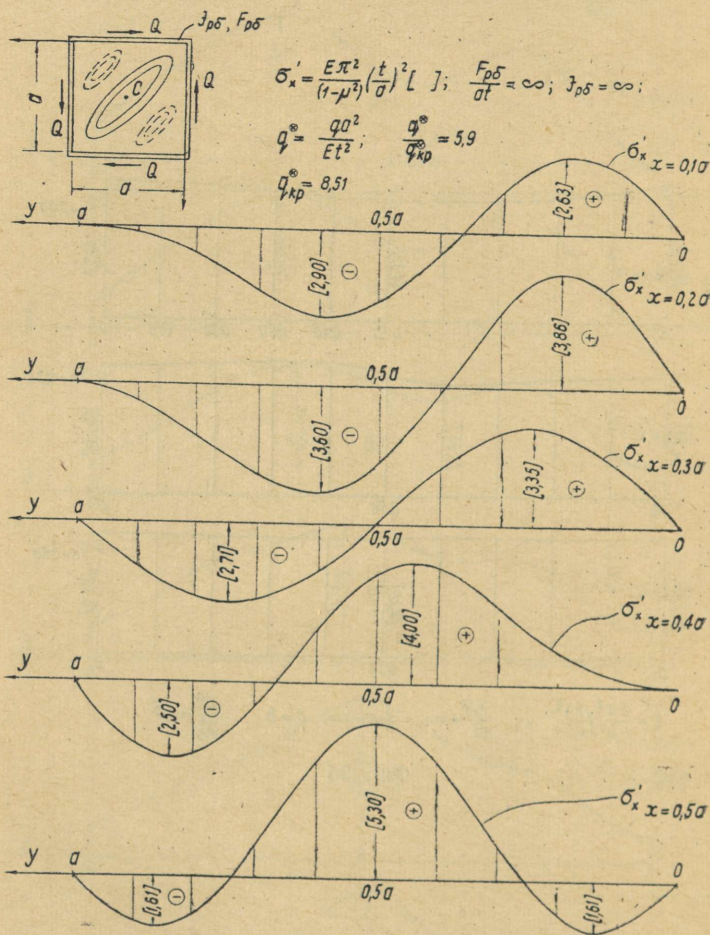


Фиг. За

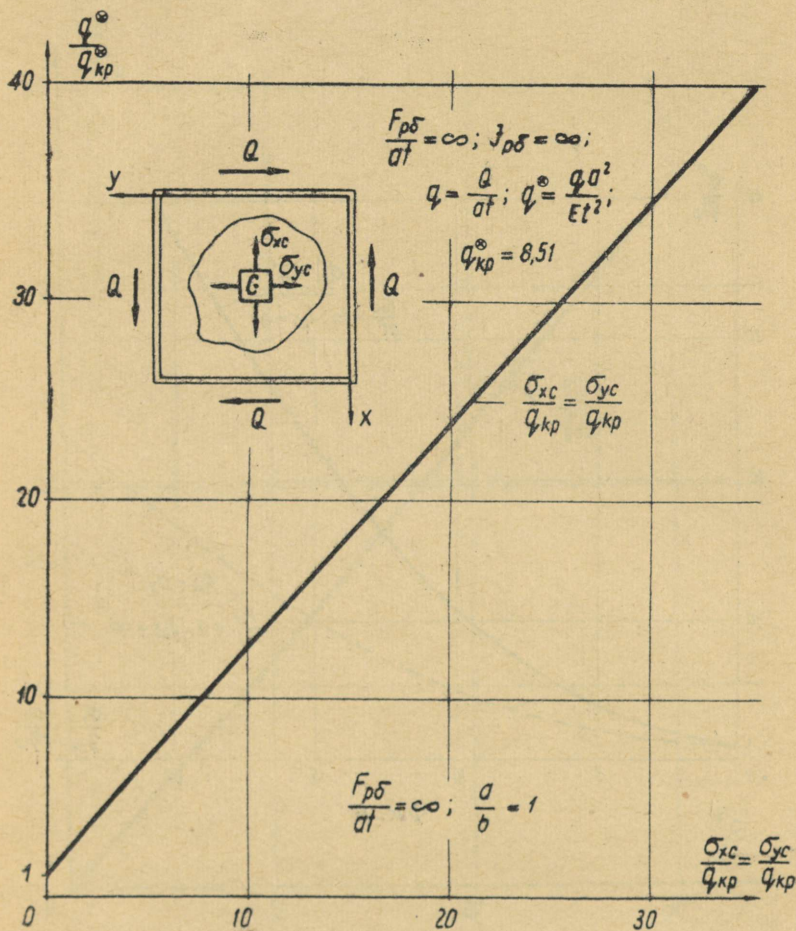


$$\tau = \frac{E\pi^2}{1-\mu^2} \left(\frac{t}{a}\right)^2 []; \quad \frac{F_{p\delta}}{a^2} = \infty, \quad J_{p\delta} = \infty; \quad a = b, \quad \frac{q^*}{q_{kp}} = 5.9$$

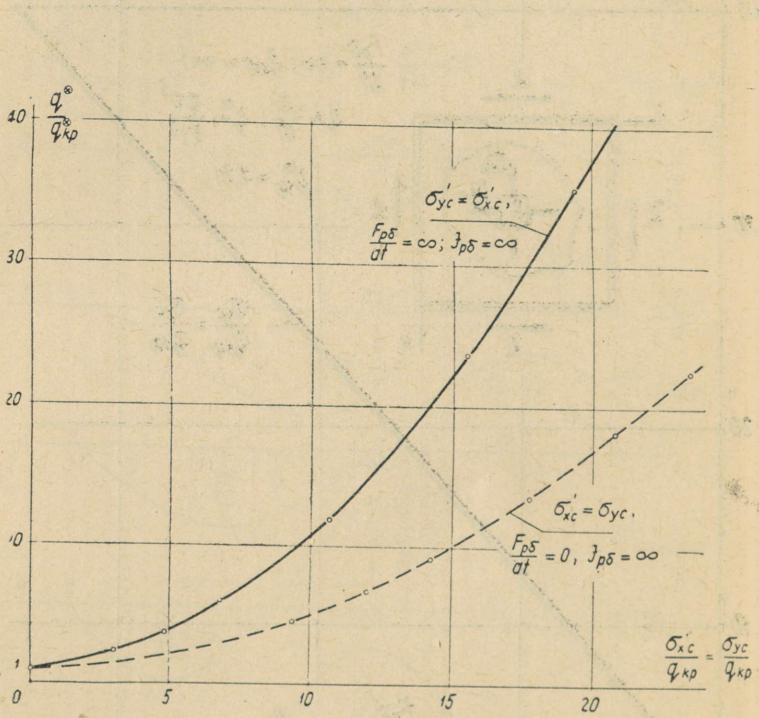
Фиг. 36



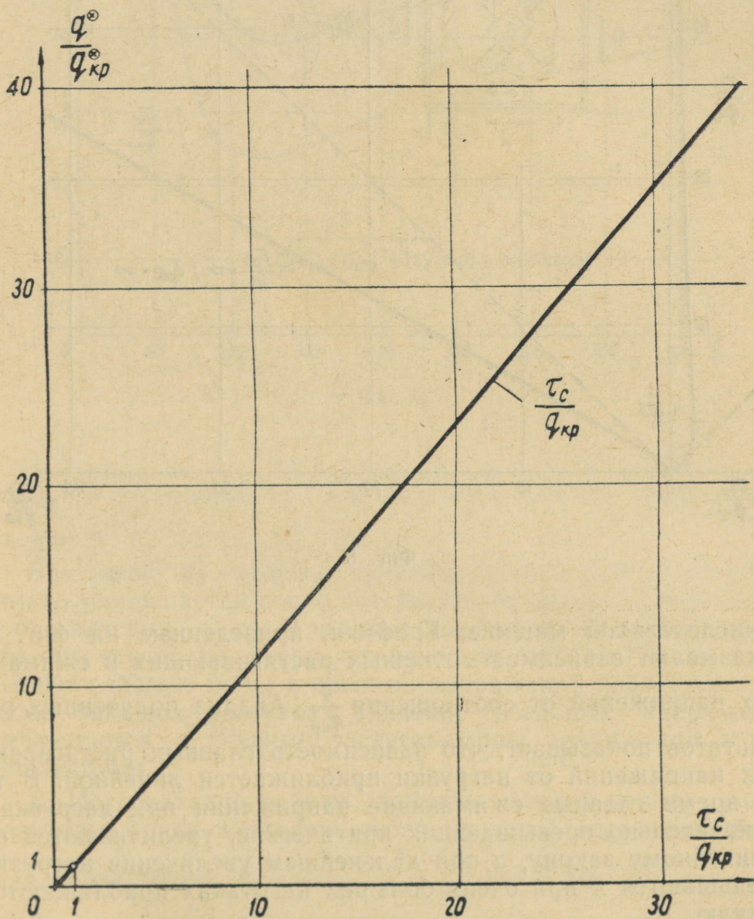
Фиг. 4



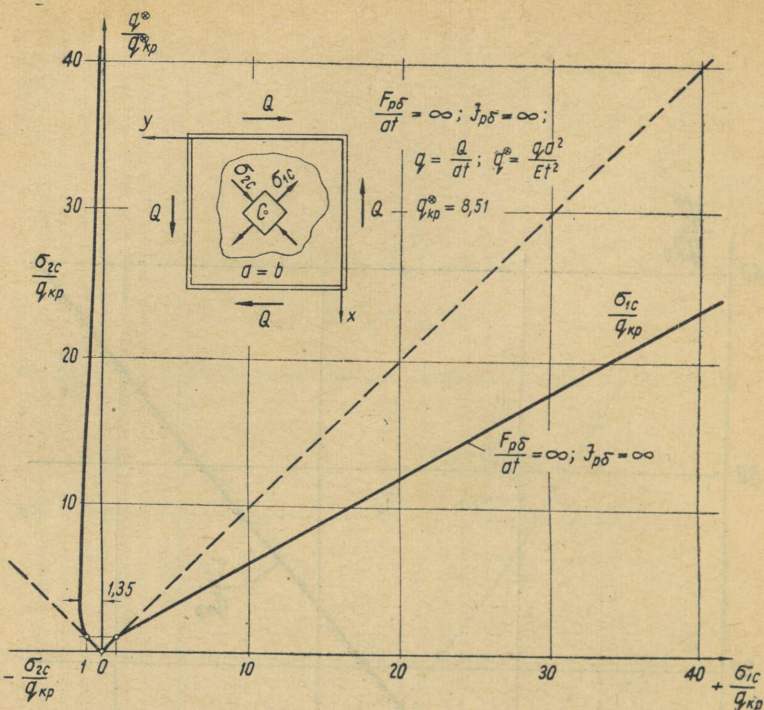
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



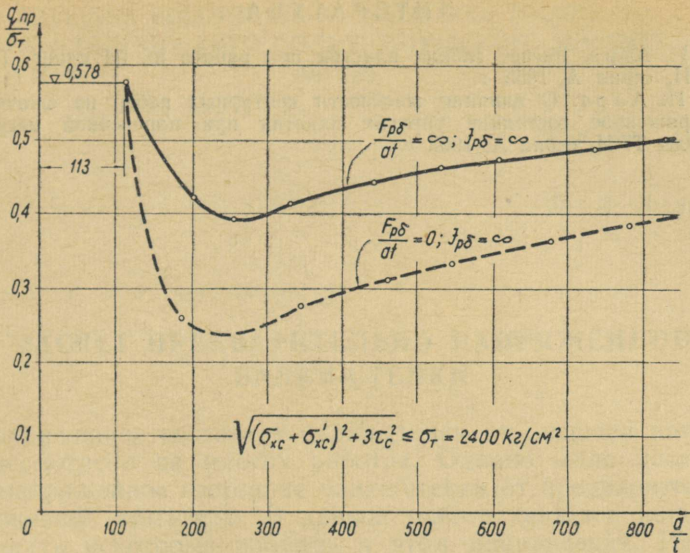
Фиг. 8

вычислительной машине. Графики, приведенные на фиг. 8, показывают зависимость главных растягивающих и сжимающих напряжений от соотношения $\frac{q}{q_{кр}}$. Анализ полученных результатов показывает, что зависимость главных растягивающих напряжений от нагрузки приближается линейной. В то же время главные сжимающие напряжения при нагрузках, незначительно превышающих критические, увеличиваются по нелинейному закону, а при дальнейшем увеличении нагрузки уменьшаются и при очень больших нагрузках приближаются к нулю.

Предельные сдвигающие нагрузки, при которых суммарные (сцепные и изгибные) напряжения достигают предела текучести, определяем согласно четвертой теории прочности по зависимости

$$\sqrt{(\sigma_x + \sigma_x^1)^2 + (\sigma_y + \sigma_y^1)^2 - (\sigma_x + \sigma_x^1)(\sigma_y + \sigma_y^1) + 3\tau^2 \sigma_T} \quad (20)$$

Зависимость предельной сдвигающей нагрузки от гибко-



Фиг. 9

сти ($\lambda = \frac{a}{t}$) пластины (при $\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$) представлена на фиг. 9.

Как видно из графика, предельная сдвигающая нагрузка сильно уменьшается после потери устойчивости до определенного значения, а далее плавно увеличивается. Объясняется это тем, что после потери устойчивости изгибные напряжения играют главную роль, а сцепные напряжения небольшие; при особо больших нагрузках значение изгибных напряжений уменьшается, а главные растягивающие напряжения станут решающими.

Б. Исследование работы свободно опертой прямоугольной пластины, когда жесткость ребер на изгиб бесконечно большая, а жесткость на сжатие $\beta = \frac{F_{p6}}{a t} = 0; 0,25; 1,0$.

Результаты по этому случаю вычислены с помощью электронной вычислительной машины аналогично предыдущему и представлены на фиг. 2 пунктирной линией.

Сравнение графиков фиг. 2 ÷ 9 показывает, что предельная сдвигающая нагрузка значительно зависит от жесткости ребер на сжатие.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Ааре. Расчет гибких пластин при работе их на сдвиг. Труды ТПИ, серия А, 1955 г.
2. И. И. Ааре. О влиянии жесткости контурных ребер на сжатие на напряженное состояние упругих пластин при поперечной нагрузке. Труды ТПИ, серия А, 1963 г.

УДК 624. 612. 4

Л. А. Алликас

РАСЧЕТ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ БАЛКИ-СТЕНКИ

Напряженное состояние балки-стенки от внешней нагрузки рассмотрено во многих работах. Однако мало исследовано напряженное состояние балки-стенки от предварительно напряженной арматуры. В данной работе делается попытка разрешить некоторые вопросы в этом направлении. Исследуется напряженное состояние однопролетной балки-стенки, предварительно напряженной от продольной и отогнутой арматуры.

При приближенном решении задачи аппроксимируется функция главного вектора

$$f(s) = \int_0^s [-Y(s) + iX(s)] ds \quad (1)$$

системой аналитических функций $a_j F_j$ с комплексным аргументом $z = x + iy$, пользуясь интегральным методом наименьших квадратов. Функции F_i ортонормируются на всем контуре C_0 так, чтобы

$$\int_{C_0} (F_i^* \bar{F}_j^* + \bar{F}_i^* F_j^*) ds = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

где

$$F_{k+1}^* = \frac{F_{k+1}^{**}}{\sqrt{2 \int_{C_0} |F_{k+1}^{**}|^2 ds}},$$

$$F_{k+1}^{**} = F_{k+1}^* + a_1^{(k+1)} F_1^* + a_2^{(k+1)} F_2^* + \dots + a_k^{(k+1)} F_k^*,$$

$$a_j^{(k+1)} = - \int_{C_0} (F_{k+1} \bar{F}_j^* + \bar{F}_{k+1} F_j^*) ds.$$

Согласно интегральному методу наименьших квадратов должен интеграл

$$I = \int_{C_0} \sum_{j=1}^n a_j F_j^* - f(s) |^2 ds$$

при данном n быть минимальным. Отсюда, исходящее условие $\frac{\partial I}{\partial a_j} = 0$, учитывая свойства ортонормированных функций, дает уравнение для вычисления коэффициентов a_i

$$a_j = \int_{c_0} (F_j^* \bar{f}(s) + \bar{F}_j^* f(s)) ds. \quad (2)$$

Исходя из этого, аппроксимирующая функция F функции главного вектора $f(s)$

$$F = a_1 F_1^* + a_2 F_2^* + a_3 F_3^* + \dots + a_n F_n^*. \quad (3)$$

Из взаимосвязи функций напряжения U и F

$$F = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y},$$

так как $\frac{\partial U}{\partial x} = \text{Re}[F]$, получают

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial \text{Re}[F]}{\partial x}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial \text{Im}[F]}{\partial y}, \\ \tau &= -\frac{\partial \text{Im}[F]}{\partial x} = -\frac{\partial \text{Re}[F]}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4)$$

Дальше решаются задачи балки-стенки, имеющей форму квадрата, согласно приведенным на фиг. 1. схемам нагрузки (сосредоточенно и распределенно расположенные предварительно напряженные арматуры).

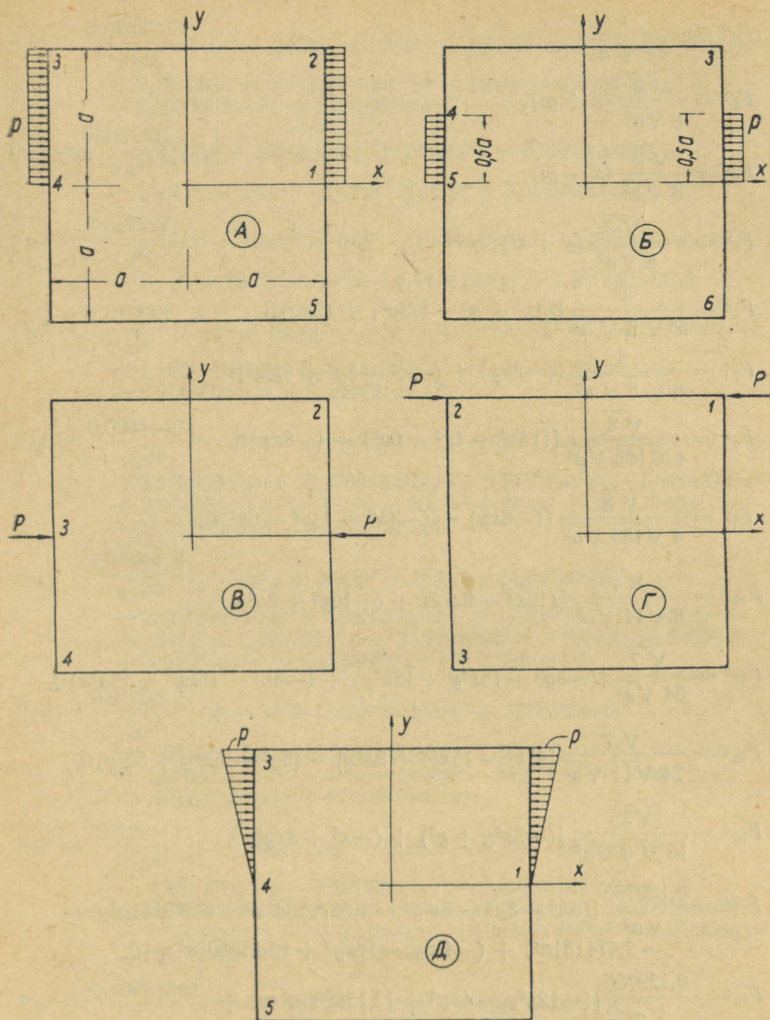
Комбинируя названными схемами нагрузки, получают нужные расположения предварительно напряженных арматур в балке-стенке. Если арматуры находятся в нижней части балки-стенки, тогда необходимо имеющиеся в уравнениях y^n перемножить на величину $(-1)^n$.

Функции F выбирают следующим образом:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1, \\ F_2 &= -1, \\ F_3 &= 2z, \\ F_4 &= \bar{z}, \\ F_5 &= -i\bar{z}, \\ F_6 &= z^2 + 2z\bar{z}, \\ &\dots \end{aligned}$$

и в общем

$$\begin{aligned} F_{4n+2} &= z^{n+1} + (n+1)z\bar{z}^n, \\ F_{4n+3} &= iz^{n+1} - i(n+1)z\bar{z}^n, \\ F_{4n+4} &= \bar{z}^{n+1}, \\ F_{4(n+1)+1} &= -i\bar{z}^{n+1}, \end{aligned}$$



Фиг. 1

где $i = 1, 2, 3, \dots, n$

После ортонормирования функций $F_j(z)$ последние получают вид

$$F_{1*} = \frac{1}{4\sqrt{a}},$$

$$F_2^* = -\frac{i}{4\sqrt{a}},$$

$$F_3^* = \frac{i\sqrt{3}}{8\sqrt{a^3}}(x + yi),$$

$$F_4^* = \frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{a^3}}(x - yi),$$

$$F_5^* = -\frac{i\sqrt{3}}{8\sqrt{a^3}}(y + xi),$$

$$F_6^* = \frac{3}{8\sqrt{5}\sqrt{a^5}}[(3x^2 + y^2 - 8/3a^2) + (2xy)i],$$

$$F_7^* = \frac{3}{8\sqrt{5}\sqrt{a^5}}[(-2xy) + (-x^2 - 3y^2 + 8/3a^2)i],$$

$$F_8^* = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{185}\sqrt{a^5}}[(13x^2 - 4y^2 - 6a^2) + (-8xy)i],$$

$$F_9^* = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{185}\sqrt{a^5}}[(-8xy) + (-4x^2 + 13y^2 - 6a^2)i],$$

$$F_{10}^* = \frac{\sqrt{7}}{8\sqrt{11}\sqrt{a^7}}[(10x^3 - 9a^2x) + (-10y^3 + 9a^2y)i],$$

$$F_{11}^* = \frac{\sqrt{7}}{64\sqrt{a^7}}[(-5y^3 - 15x^2y + 12a^2y) + (-5x^3 - 15xy^2 + 12a^2x)i],$$

$$F_{12}^* = \frac{\sqrt{7}}{24\sqrt{11}\sqrt{a^7}}[(5x^3 - 15xy^2 + 3a^2x) + (5y^3 - 15x^2y + 3a^2y)i],$$

$$F_{13}^* = \frac{\sqrt{35}}{16\sqrt{6}\sqrt{a^7}}[(-3x^2y + y^3) + (-x^3 + 3xy^2)i],$$

$$F_{14}^* = \frac{0,129765}{\sqrt{a^9}}[(5x^4 - 3y^4 - 6x^2y^2 - 1,667953a^2x^2 + 6,579151a^2y^2 - 2,474131a^4) + (-4x^3y - 12xy^3 + 13,158301a^2xy)i],$$

$$F_{15}^* = \frac{0,129765}{\sqrt{a^9}}[(-12x^3y - 4xy^3 + 13,158298a^2xy) + (-3x^4 + 5y^4 - 6x^2y^2 + 6,579149a^2x^2 - 1,667953a^2x^2 - 2,474132a^4)i],$$

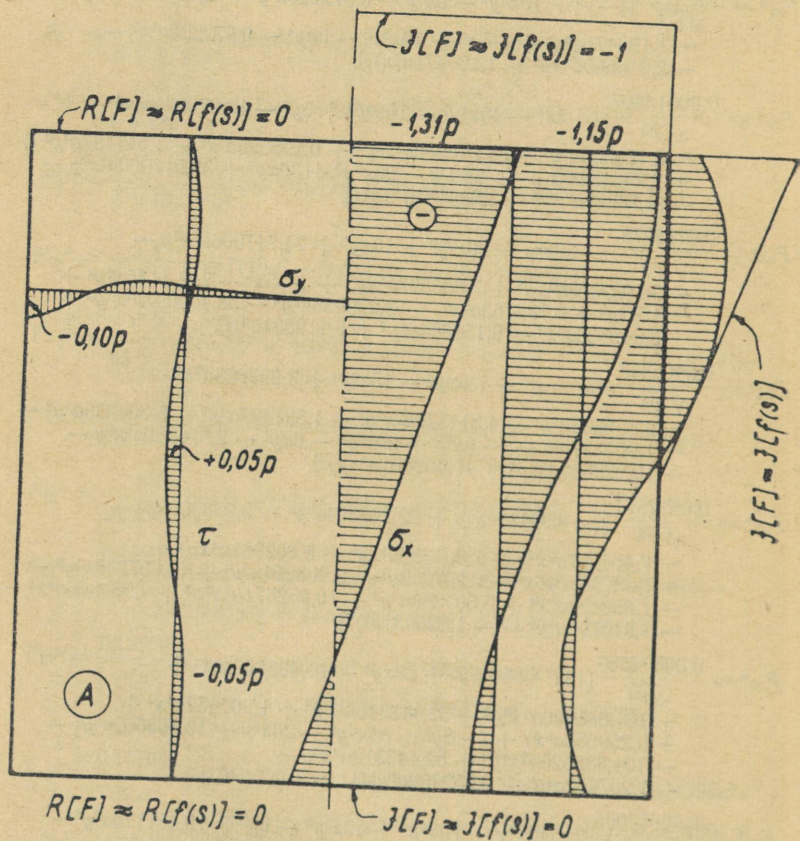
$$F_{16}^* = \frac{0,141351}{\sqrt{a^9}}[(0,979500x^4 + 1,012300y^4 - 5,975400x^2y^2 + 1,674799a^2x^2 + 0,251019a^2y^2 - 0,487154a^4) + (-3,983600x^3y + 4,049199xy^3 + 0,502036a^2xy)i],$$

$$F_{17}^* = \frac{0,141351}{\sqrt{a^9}}[(-4,049199x^3y + 3,983600xy^3 - 0,502036a^2xy) + (-1,012300x^4 - 0,979500y^4 + 5,975400x^2y^2 - 0,251019a^2x^2 - 1,674799a^2y^2 + 0,487154a^4)i],$$

$$\begin{aligned}
F_{18}^* &= \frac{0,0664768}{\sqrt{a^{11}}} [(6x^5 - 20x^3y^2 - 10xy^4 - 7,676768a^2x^3 + 23,030302a^2xy^2 + \\
&\quad + 2,251082a^4x) + (6y^5 - 20x^2y^3 - 10x^4y - 7,676768a^2y^3 + \\
&\quad + 23,030302a^2x^2y + 2,251082a^4y)i], \\
F_{19}^* &= \frac{0,117210}{\sqrt{a^{11}}} [(4y^5 - 20x^4y + 21,111111a^2x^2y - 7,037040a^2y^3) + \\
&\quad + (-4x^5 + 20xy^4 - 21,111111a^2xy^2 + 7,037040a^2x^3)i], \\
F_{20}^* &= \frac{0,128952}{\sqrt{a^{11}}} [(x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 + 4,444444a^2x^3 - 2,857143a^4x) + \\
&\quad + (-y^5 + 10x^2y^3 - 5x^4y - 4,444444a^2y^3 + 2,857143a^4y)i], \\
F_{21}^* &= \frac{0,131443}{\sqrt{a^{11}}} [(-y^5 + 10x^2y^3 - 5x^4y - 0,972220a^2y^3 - 2,916660a^2x^2y + \\
&\quad + 1,190471a^4y) + (-x^5 + 10x^3y^2 - 5xy^4 - 0,972220a^2x^3 - \\
&\quad - 2,916660a^2xy^2 + 1,190471a^4x)i], \\
F_{22}^* &= \frac{0,00614407}{\sqrt{a^{13}}} [(+7x^6 - 45x^4y^2 - 15x^2y^4 + 5y^6 - 13,275974a^2x^4 - \\
&\quad - 6,183050a^2y^4 + 58,376985a^2x^2y^2 + 0,295525a^4x^2 - 1,641437a^4y^2 + \\
&\quad + 2,256454a^6) + (-18x^5y - 20x^3y^3 + 30xy^5 + 38,917960a^2x^3y - \\
&\quad - 24,73220a^2xy^3 - 3,283051a^4xy)i], \\
F_{23}^* &= \frac{0,0714978}{\sqrt{a^{13}}} [(-30x^5y + 20x^3y^3 + 18xy^5 + 24,747006a^2x^3y - \\
&\quad - 38,933398a^2xy^3 + 7,885527a^4xy) + (-5x^6 - 7y^6 + 45x^2y^4 + \\
&\quad + 15x^4y^2 + 6,186763a^2x^4 + 13,279936a^2y^4 - 58,400097a^2x^2y^2 + \\
&\quad + 3,942638a^4x^2 - 6,156664a^4y^2 + 0,119881a^6)i], \\
F_{24}^* &= \frac{0,0405813}{\sqrt{a^{13}}} [(x^6 - y^6 - 15x^4y^2 - 15x^2y^4 + 3,993823a^2x^4 - \\
&\quad - 2,555633a^2y^4 - 4,314570a^2x^2y^2 - 1,591427a^4x^2 + 5,304833a^4y^2 - \\
&\quad - 1,900327a^6) + (-6x^5y + 20x^3y^3 - 6xy^5 - 2,876380a^2x^3y - \\
&\quad - 10,222532a^2xy^3 + 10,609661a^4xy)i], \\
F_{25}^* &= \frac{0,0922571}{\sqrt{a^{13}}} [(-9,394491x^5y + 22,262394x^3y^3 - 3,963305xy^5 - \\
&\quad - 7,401997a^2x^3y - 7,301780a^2xy^3 + 8,869961a^4xy) + \\
&\quad + (-1,565748x^6 + 0,207952y^6 - 9,908264x^2y^4 + 16,697246x^4y^2 - \\
&\quad - 1,850498a^2x^4 + 5,501389a^2y^4 - 10,952671a^2x^2y^2 + 4,389966a^4x^2 - \\
&\quad - 1,010798a^4y^2 - 1,826931a^6)i], \\
F_{26}^* &= \frac{0,00804569}{\sqrt{a^{15}}} [(8x^7 - 84x^5y^2 + 28xy^6 - 10,488662a^2x^5 + \\
&\quad + 104,886620a^2x^3y^2 - 52,443310a^2xy^4 + 1,207462a^4x^3 + \\
&\quad + 0,259588a^6x) + (-8y^7 + 84x^2y^5 - 28x^6y + 10,488662a^2y^5 - \\
&\quad - 104,886620a^2x^2y^3 + 52,443310a^2x^4y - \\
&\quad - 1,207462a^4y^3 - 0,259499a^6y)i], \\
F_{27}^* &= \frac{0,00653005}{\sqrt{a^{15}}} [(-42x^6y + 70x^4y^2 + 42x^2y^5 - 6y^7 + 10,351120a^2y^5 - \\
&\quad - 103,511205a^2x^2y^3 + 51,755602a^2x^4y - 4,784918a^4y^3 - \\
&\quad - 14,354756a^4x^2y + 15,313655a^6y) + (-42xy^6 + 70x^3y^4 + \\
&\quad + 42x^5y^2 - 6x^7 + 10,351120a^2x^5 - 103,511205a^2x^3y^2 + \\
&\quad + 51,755602a^2xy^4 - 4,784918a^4x^3 - 14,354756a^4xy^2 + \\
&\quad + 15,313655a^6x)i],
\end{aligned}$$

$$F_{28}^* = \frac{0,0229514}{\sqrt{a^{15}}} [(x^7 - 21x^5y^2 + 35x^3y^4 - 7xy^6 + 3,187716a^2x^5 - 10,625720a^2x^3y^2 - 5,312860a^2xy^4 - 9,392302a^4x^3 + 28,176906a^4xy^2 - 3,325611a^6x) + (y^7 - 21x^2y^5 + 35x^4y^3 - 7x^6y + 3,187716a^2y^5 - 10,625720a^2x^2y^3 - 5,312866a^2x^4y - 9,392302a^4y^3 + 28,176906a^4x^2y - 3,325611a^6y) i],$$

$$F_{29}^* = \frac{0,00792358}{\sqrt{a^{15}}} [(-7x^6y + 35x^4y^3 - 21x^2y^5 + y^7 + 4,304292a^2y^5 - 21,521460a^2x^4y + 29,133762a^4x^2y - 9,711258a^4y^3) + (7xy^6 - 35x^3y^4 + 21x^5y^2 - x^7 - 4,304292a^2x^5 + 21,521460a^2xy^4 - 29,133762a^4xy^2 + 9,711258a^4x^3) i].$$



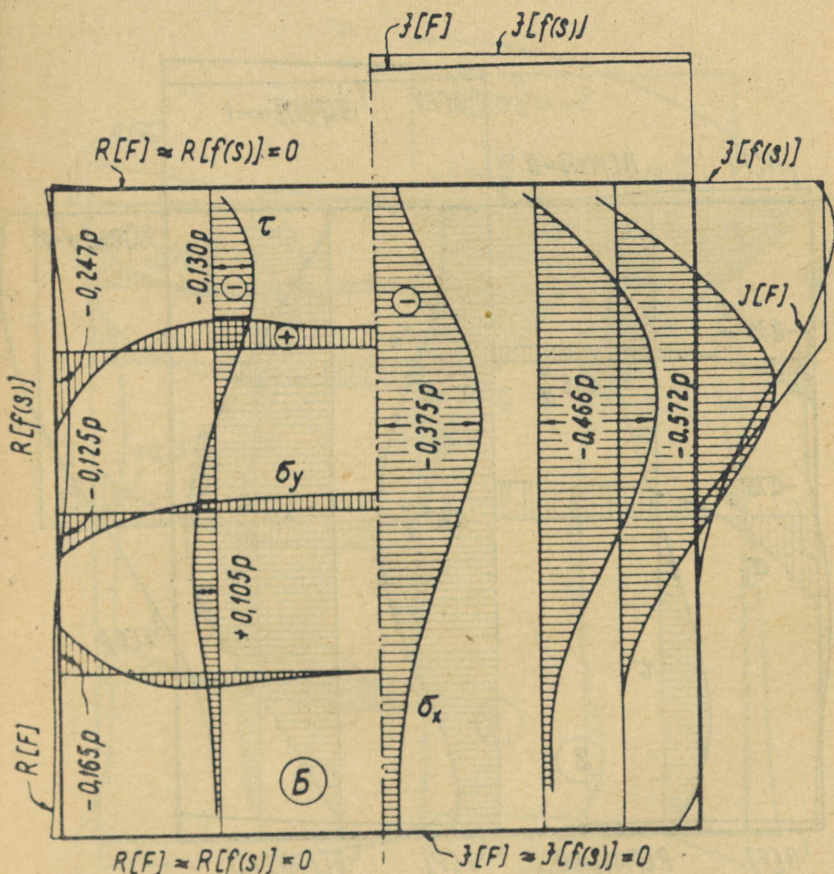
Фиг. 2

При схеме нагрузки «А», если $p = -1$, функция главного вектора равна

на участке 1—2	$f(s) = -yi,$
на участке 2—3	$f(s) = -ai,$
на участке 3—4	$f(s) = -yi,$
на участке 4—5—1	$f(s) = 0.$

Применяя формулы (2) и (3) и пользуясь безразмерными координатами $\xi = \frac{x}{a}$ и $\eta = \frac{y}{a}$, получают приближенное выражение функции главного вектора.

$$\operatorname{Re}[F] = (0,065798\eta - 0,246688\eta^3 + 0,138696\eta^5)\xi + (0,157695\eta - 0,005054\eta^3)\xi^3 - 0,135664\eta\xi^5,$$



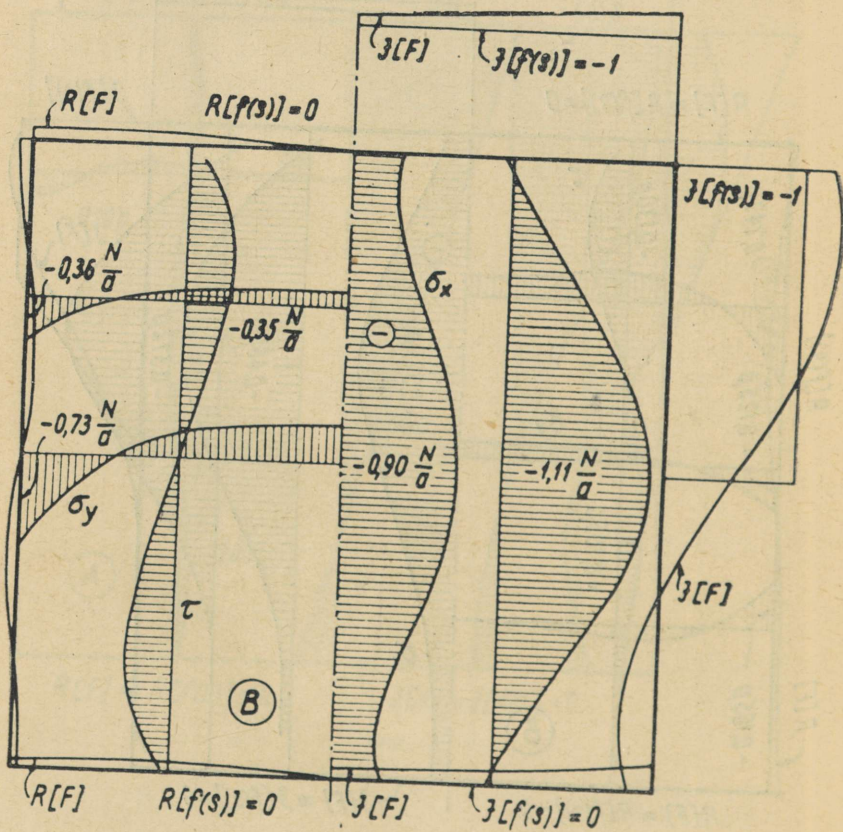
Фиг. 3

$$Im[F] = (-0,108848 - 0,500000\eta - 0,436367\eta^2 + 0,083920\eta^3 - 0,045979\eta^4) + \\ + (0,033667 - 0,370030\eta^2 + 0,346742\eta^4)\xi^2 + (0,039424 - \\ - 0,003791\eta^2)\xi^4 - 0,022611\xi^6.$$

Сравнение действительных и мнимых частей фактической и аппроксимированной функции главного вектора и согласно формуле (4) вычисленные эпюры некоторых компонентов напряжения приведены на фиг. 2.

При схеме нагрузки «Б» ($p = -2$) функция главного вектора равна

на участке 1—2	$f(s) = -2yi,$
на участке 2—3—4	$f(s) = -2ai,$
на участке 4—5	$f(s) = -2yi,$
на участке 5—6—1	$f(s) = 0.$



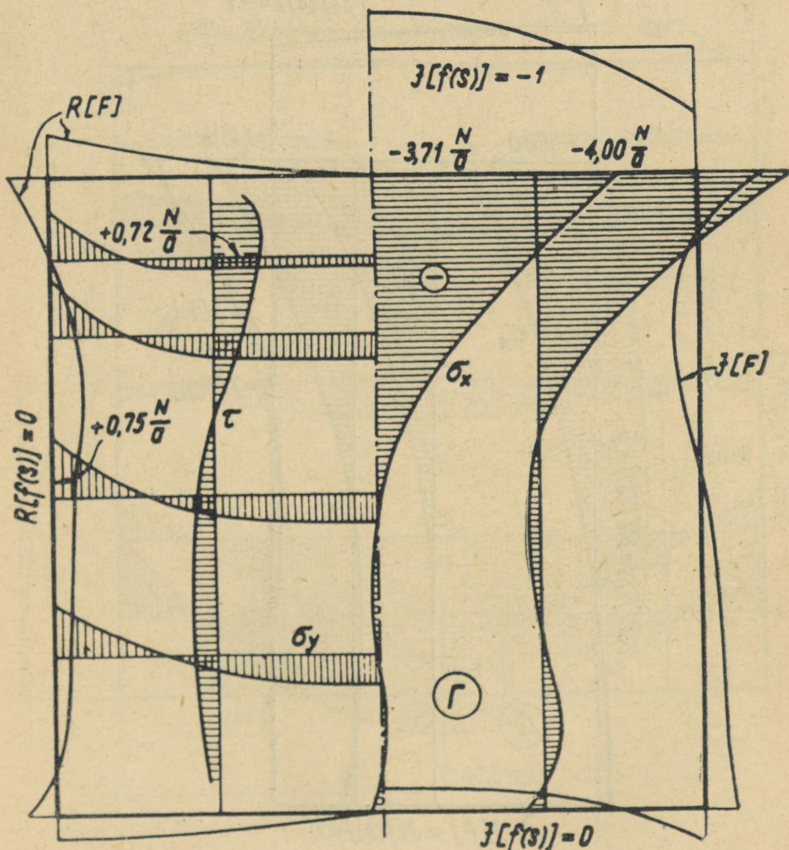
Фиг. 4

В данном случае

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[F] = & (0,144877 + 0,348789\eta - 0,318789\eta^2 - 0,720848\eta^3 + 0,066202\eta^4 + \\ & + 0,333101\eta^5 + 0,039587\eta^6)\xi + (-0,037695 + 0,343622\eta + 0,181400\eta^2 + \\ & + 0,167630\eta^3 - 0,187261\eta^4)\xi^3 + (-0,049520 - 0,433678\eta + \\ & + 0,105951\eta^2)\xi^5 - 0,004740\xi^7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[F] = & (-0,298619 - 0,641933\eta - 0,339005\eta^2 + 0,250223\eta^3 + \\ & + 0,274521\eta^4 - 0,044610\eta^5 - 0,072280\eta^6 - 0,005960\eta^7) + \\ & + (0,175164 - 0,318789\eta - 1,081279\eta^2 + 0,132406\eta^3 + 0,832750\eta^4 + \\ & + 0,118763\eta^5)\xi^2 + (+0,085906 + 0,090700\eta + 0,125723\eta^2 - \\ & - 0,187261\eta^3)\xi^4 + (-0,072280 + 0,035317\eta)\xi^6. \end{aligned}$$

На фиг. 3 приведены сравнения функций $f(s)$ и F и элюры некоторых компонентов напряжения согласно величине $p = -1$.



Фиг. 5

При схеме нагрузки «В», если $p = -1$, функция главного вектора равна

на участке 1—2—3 $f(s) = -i$,

на участке 3—4—1 $f(s) = 0$.

Действительные и мнимые части аппроксимирующей функции F функции главного вектора равны.

$$\text{Re}[F] = (0,308847\xi - 0,102036\xi^3 - 0,146125\xi^5 - 0,007069\xi^7) +$$

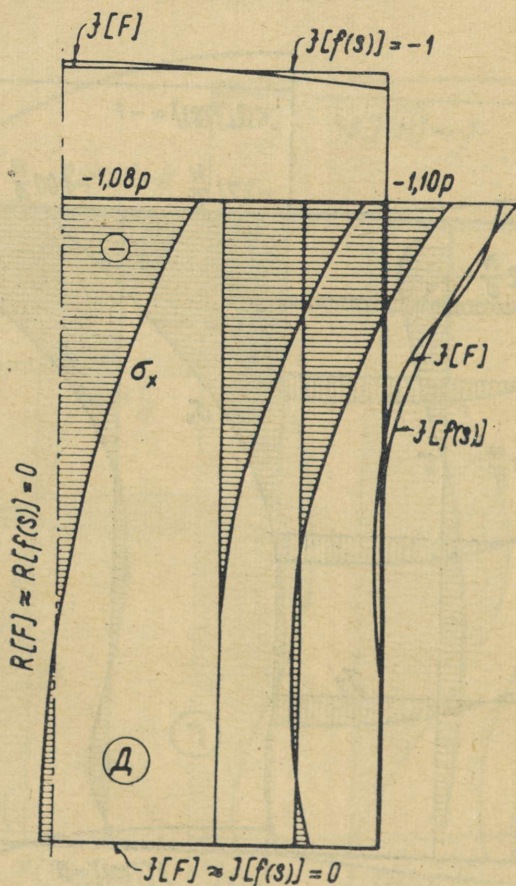
$$+ (-0,936040\xi + 0,425673\xi^3 + 0,129643\xi^5)\eta^2 +$$

$$+ (0,304949\xi - 0,184728\xi^3)\eta^4 + 0,030677\xi\eta^6,$$

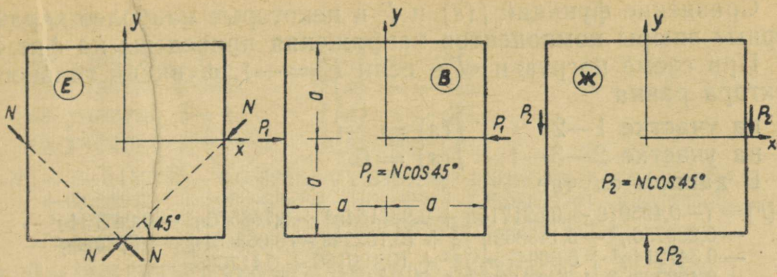
$$\text{Im}[F] = (-0,500000 - 0,912001\eta + 0,440256\eta^3 - 0,164547\eta^5 - 0,003487\eta^7) +$$

$$+ (-0,796378\eta + 0,609897\eta^3 + 0,092031\eta^5)\xi^2 +$$

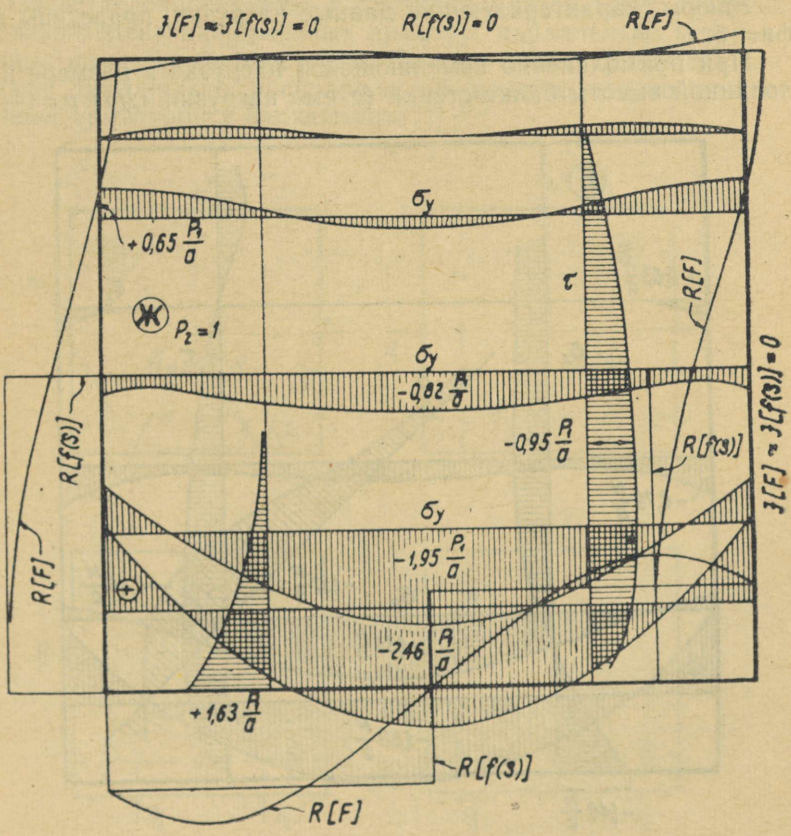
$$+ (0,212837\eta - 0,184728\eta^3)\xi^4 + 0,043215\eta\xi^6.$$



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

Сравнение функций $f(s)$ и F и некоторые наиболее характерные эпюры компонентов напряжения приведены на фиг. 4. При схеме нагрузки «Г», если $P = -1$, функция главного вектора равна

$$\text{на участке } 1-2 \quad \dot{f}(s) = -i,$$

$$\text{на участке } 2-3-1 \quad \dot{f}(s) = 0.$$

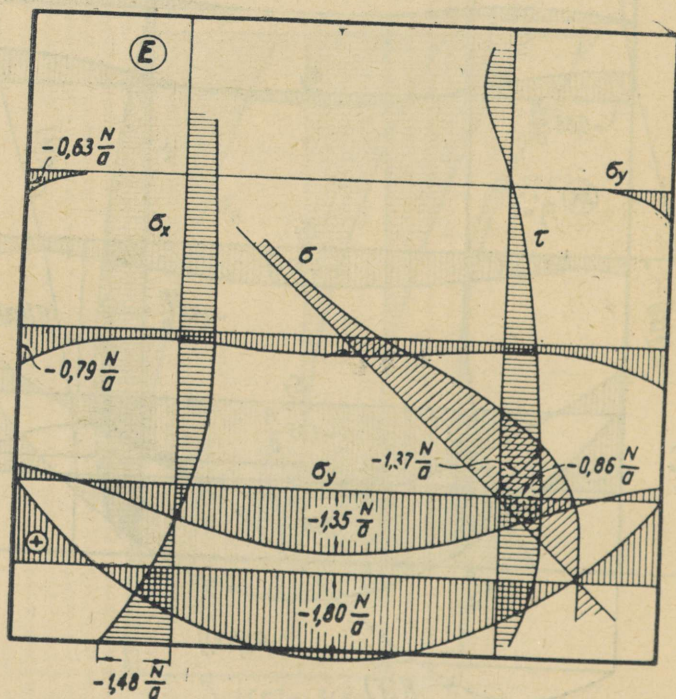
В данном случае

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[F] = & (-0,495918 - 0,521715\eta + 0,931164\eta^2 + 0,788570\eta^3 - 0,087734\eta^4 - \\ & - 0,208756\eta^5 - 0,143869\eta^6) \xi + (0,162246 - 0,063401\eta - 0,543090\eta^2 - \\ & - 0,347214\eta^3 + 0,699475\eta^4) \xi^3 + (0,126166 + 0,417085\eta - \\ & - 0,407763\eta^2) \xi^5 + 0,018750 \xi^7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[F] = & (0,187350 - 0,058406\eta - 0,453123\eta^2 - 0,783022\eta^3 - 0,378434\eta^4 + \\ & + 0,089402\eta^5 + 0,086946\eta^6 + 0,021120\eta^7) + (-0,260661 + 0,931164\eta + \\ & + 1,182853\eta^2 - 0,175466\eta^3 - 0,521891\eta^4 - 0,431607\eta^5) \xi^2 + \\ & + (-0,015850 - 0,271544\eta - 0,260410\eta^2 + 0,699475\eta^3) \xi^4 + \\ & + (0,069514 - 0,135921\eta) \xi^6. \end{aligned}$$

Эпюры, характеризующие данные нагрузки, приведены на фиг. 5.

При прямолинейно изменяющейся нагрузке в размере половинной высоты балки-стенки (схема нагрузки «Д») $p = -2$.



Фиг. 9

При этом

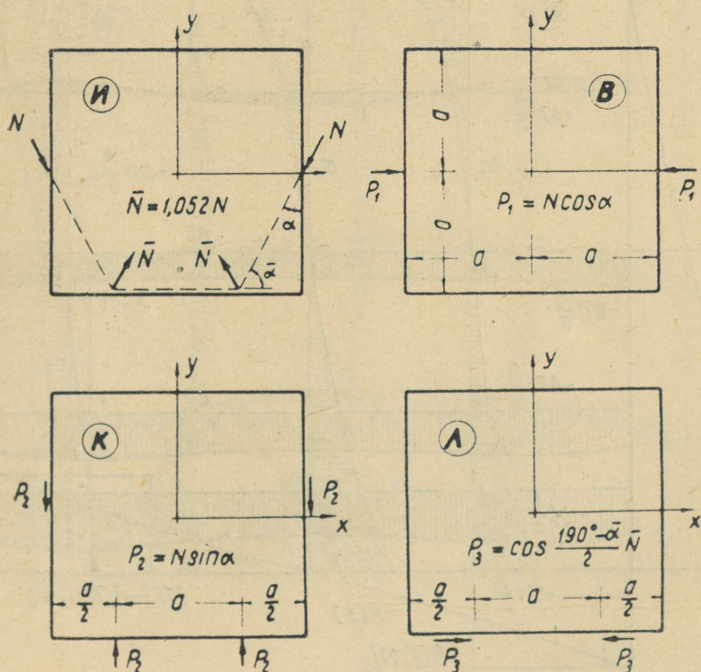
на участке 1—2 $f(s) = -y^2i$,
 на участке 2—3 $f(s) = -a^2i$,
 на участке 3—4 $f(s) = -y^2i$,
 на участке 4—5—1 $f(s) = 0$ и

$$Re[F] = (-0,157237 - 0,055231\eta + 0,388623\eta^2 + 0,045506\eta^3 - 0,113457\eta^4 + \\ + 0,024652\eta^5 - 0,035938\eta^6) \xi + (0,032974 + 0,046052\eta - 0,207755\eta^2 - \\ - 0,138625\eta^3 + 0,182496\eta^4) \xi^3 + (0,064242 + 0,058523\eta - \\ - 0,111179\eta^2) \xi^5 + 0,005374 \xi^7,$$

$$Im[F] = (0,011374 - 0,300656\eta - 0,493699\eta^2 - 0,291961\eta^3 - 0,034265\eta^4 + \\ + 0,066158\eta^5 - 0,001286\eta^6 - 0,005374\eta^7) + (0,027325 + 0,388623\eta + \\ + 0,068259\eta^2 - 0,226913\eta^3 + 0,061630\eta^4 - 0,107815\eta^5) \xi^2 + (0,011512 - \\ - 0,103877\eta - 0,103968\eta^2 + 0,182496\eta^3) \xi^4 + (0,009754 - 0,037060\eta) \xi^6.$$

Некоторые эпюры, характеризующие нагрузки, приведены на фиг. 6 согласно величине $p = -1$.

Представленные схемы нагрузки характеризуют действие предварительно напряженных арматур, параллельно установленных на краях балки-стенки. Далее рассматриваются две задачи диагонально расположенной предварительно напряженной арматурой в балке-стенке.



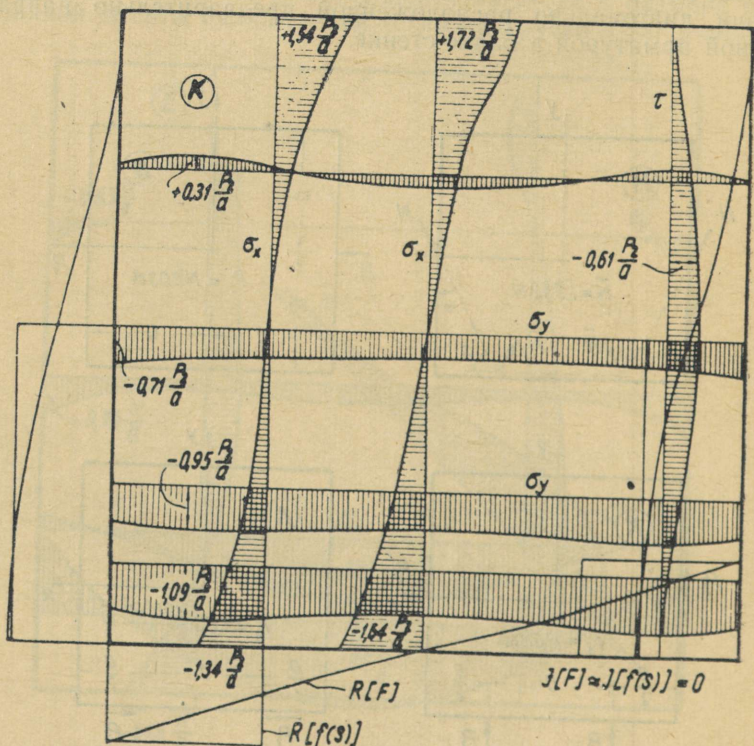
Фиг. 10

Представленный на фиг. 7 случай «E» можно разложить на две схемы нагрузки «B» и «Ж». Первая из них решена раньше, при второй, если $p_2 = 1$, тогда:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[F] &= (-0,817485\xi + 0,483585\xi^3 - 0,197293\xi^5 - 0,004327\xi^7) + \\ &+ (1,950188\xi - 0,976234\xi^3 - 0,085830\xi^5)\eta + (-0,791826\xi + \\ &+ 0,940817\xi^3 + 0,088670\xi^5)\eta^2 + (-0,508065\xi + 350804\xi^3)\eta^3 + \\ \operatorname{Im}[F] &= (-0,652940 + 0,975094\xi^2 - 0,241352\xi^4 - 0,014305\xi^6) + \\ &+ (0,231495 - 0,791826\xi^2 + 0,470408\xi^4 + 0,029557\xi^6)\eta + \\ &+ (0,168069 - 0,763309\xi^2 + 0,263103\xi^4)\eta^2 + (0,044299 + 0,091295\xi^2 - \\ &- 0,179104\xi^4)\eta^3 + (0,495790 - 0,263103\xi^2)\eta^4 + (-0,112841 + \\ &+ 0,126254\xi^2)\eta^5 + 0,024011\eta^6 - 0,006907\eta^7. \end{aligned}$$

Эпюры, характеризующие нагрузки, приведены на фиг. 8.

Эпюры напряжения, соответствующие схеме нагрузки «E», если $p = -1$, представлены на фиг. 9.

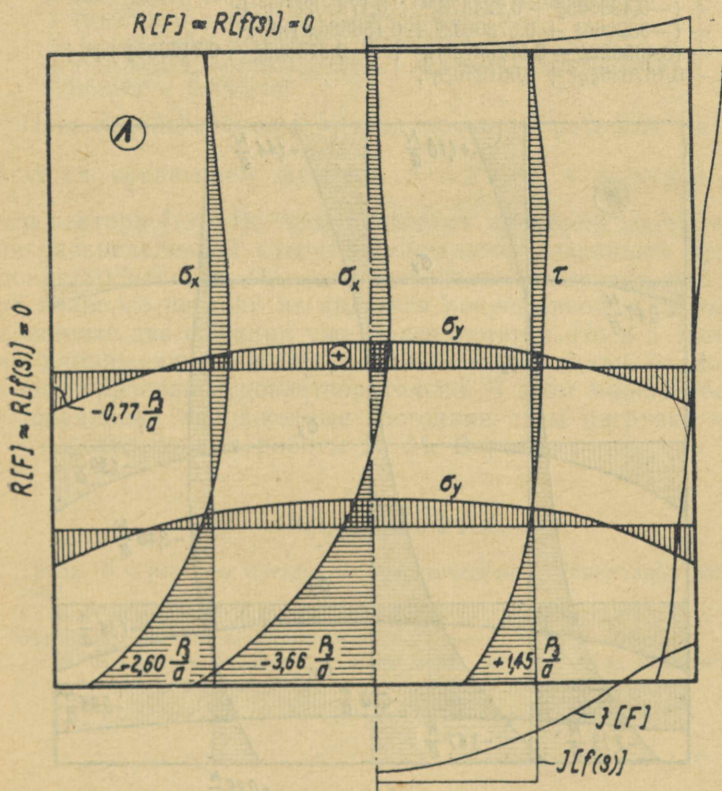


Фиг. 11

Приближенные выражения функции главного вектора при данном случае равны:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}[F] &= (-0,492155\xi + 0,428103\xi^3 - 0,359218\xi^5 - 0,016353\xi^7) + \\
 &+ (0,040648\xi - 0,179104\xi^3 - 0,124652\xi^5 + 0,042085\xi^7)\eta^2 + \\
 &+ (1,950188\xi - 0,976234\xi^3 - 0,085830\xi^5) + \\
 &+ (-1,727866\xi + 1,419158\xi^3 + 0,322402\xi^5)^2 + \\
 &+ (-0,508065\xi + 0,350804\xi^3)\eta^3 + (0,371931\xi - 0,537314\xi^3)\eta^4 - \\
 &- 0,124652\xi\eta^5 + 0,107458\xi\eta^6, \\
 \operatorname{Im}[F] &= (-1,152940 + 0,975094\xi^2 - 0,014305\xi^6 - 0,241352\xi^4 + \\
 &+ (-0,680506 - 1,588204\xi^2 + 0,683245\xi^4 + 0,072772\xi^6)\eta + \\
 &+ (0,168669 - 0,763309\xi^2 + 0,263103\xi^4)\eta^2 + (0,484555 + \\
 &+ 0,701192\xi^2 - 0,363832\xi^4)\eta^3 + (0,495790 - 0,263103\xi^2)\eta^4 + \\
 &+ (-0,276888 + 0,216285\xi^2)\eta^5 + 0,024011\eta^6 - 0,010394\eta^7.
 \end{aligned}$$

Представленная на фиг. 10 схема нагрузки «И» разделяется на три схемы нагрузки «В», «К» и «Л». Предполагая, что внутренняя сила N предварительно напряженной арматуры постоянна (потери предварительного напряжения от



Фиг. 12

трения не учитываются), получают приближенными выражениями функции главного вектора для схемы нагрузки «К» ($p_2 = 1$)

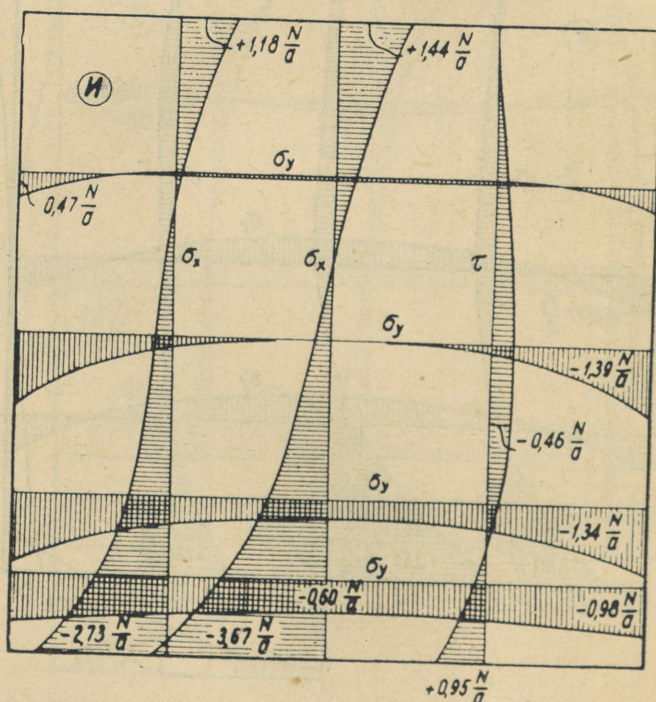
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[F] = & (-0,525610\xi - 0,031060\xi^3 - 0,022780\xi^5 + 0,002957\xi^7) + \\ & + (0,811449\xi + 0,225311\xi^3 - 0,208039\xi^5)\eta + \\ & + (-0,014785\xi + 0,125070\xi^3 - 0,045944\xi^5)\eta^2 + \\ & + (-0,591402\xi + 0,225893\xi^3)\eta^3 + (-0,011171\xi + 0,049642\xi^3)\eta^4 + \\ & + 0,072504\xi\eta^5 - 0,004542\xi\eta^6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[F] = & (-0,518635 + 0,405766\xi^2 + 0,056328\xi^4 - 0,034673\xi^6) + \\ & + (-0,043074 - 0,014785\xi^2 + 0,062525\xi^4 - 0,015314\xi^6)\eta + \\ & + (+0,469452 - 0,887104\xi^2 + 0,169419\xi^4)\eta^2 + \\ & + (0,040916 - 0,022344\xi^2 + 0,049642\xi^4)\eta^3 + (0,239372 + 0,181259\xi^2)\eta^4 + \\ & + (-0,008038 - 0,013626\xi^2)\eta^5 - 0,035463\eta^6 - 0,000121\eta^7. \end{aligned}$$

Сравнение функций $f(s)$ и F и некоторые наиболее существенные эпюры напряжения приведены на фиг. 11.

При схеме нагрузки «Л» ($p_3 = 1$)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[F] = & (0,627432\xi - 0,356320\xi^3 - 0,051441\xi^5 - 0,009045\xi^7) + \\ & + (-0,438665\xi + 0,224673\xi^3 + 0,179502\xi^5)\eta + \\ & + (-332066\xi + 0,573069\xi^3 + 0,188586\xi^5)\eta^2 + \\ & + (0,435622\xi - 0,577547\xi^3)\eta^3 + (-0,315865\xi - 0,312030\xi^3)\eta^4 + \\ & + 0,167025\xi\eta^5 + 0,061950\xi\eta^6, \end{aligned}$$



Фиг. 13

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im}[F] = & (0,148626 - 0,218046\xi^2 + 0,056169\xi^4 + 0,029917\xi^6) + \\
 & + (-0,263224 - 0,332066\xi^2 + 0,286535\xi^4 + 0,062862\xi^6)\eta + \\
 & + (-0,319516 + 0,653434\xi^2 - 0,433163\xi^4)\eta^2 + (0,578432 - \\
 & - 0,631729\xi^2 - 0,312030\xi^4)\eta^3 + (-0,273980 + 0,417566\xi^2)\eta^4 + \\
 & + (+0,069039 + 0,185850\xi^2)\eta^5 - 0,026798\eta^6 - 0,008785\eta^7.
 \end{aligned}$$

Соответствующие эпюры напряжения приведены на фиг. 12.

В случае «И'» при $N = -1$ наиболее характерные эпюры компонентов напряжения приведены на фиг. 13.

Функция «F», соответствующая случаю нагрузки «И», равна:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}[F] = & (+0,023179\xi - 0,250113\xi^3 - 0,121305\xi^5 - 0,007747\xi^7) + \\
 & + (0,482625\xi + 0,326068\xi^3 - 0,086572\xi^5)\eta + \\
 & + (-0,615909\xi + 0,643459\xi^3 + 0,167975\xi^5)\eta^2 + \\
 & + (-0,287486\xi - 0,118109\xi^3)\eta^3 + (-0,036933\xi - 0,288765\xi^3)\eta^4 + \\
 & + 0,157438\eta^5 + 0,053515\eta^6; \\
 \operatorname{Im}[F] = & (-0,769876 + 0,483798\xi^2 + 0,019245\xi^4 - 0,048196\xi^6) + \\
 & + (-0,300473 - 0,185300\xi^2 - 0,007719\xi^4 - 0,029218\xi^6)\eta + \\
 & + (0,597010 - 1,155671\xi^2 + 0,391650\xi^4)\eta^2 + \\
 & + (-0,087160 + 0,602958\xi^2 + 0,134757\xi^4)\eta^3 + \\
 & + (+0,365479 - 0,069348\xi^2)\eta^4 + (-0,119048 - 0,074052\xi^2)\eta^5 - \\
 & 0,016864\eta^6 + 0,006321\eta^7.
 \end{aligned}$$

При использованном методе точность решения характеризуется сравнением функции $F = \sum_{i=1}^n a_i F_i^*$ и функции главного вектора $f(s)$. Из проработанных примеров вытекает, что при распределенной нагрузке совпадение названных функций удовлетворительно. При сосредоточенной нагрузке, где функция главного вектора не является непрерывной, различаются названные две функции уже более заметно. Но и в этом случае напряженное состояние балки-стенки вдали от контура охарактеризовано удовлетворительно. В этом можно убедиться, сравнивая напряженные состояния схем нагрузки «B» и «Г» с результатами работы П. М. Варвака.

ЛИТЕРАТУРА

1. Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, 1962.
2. Ivo Babuška, Karel Rektorys, František Xučichlo. Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme, 1960.
3. П. М. Варвак. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластин, часть первая, 1949.

И. А. Куйсс

РАСЧЕТ СВОБОДНЫХ МНОГОЯРУСНЫХ РАМ МЕТОДОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТОВ

Для расчета свободных рам методом распределения моментов имеются различные возможности (1, 2, 3). В статье предлагается способ, где рама освобождается попеременно от связей, препятствующих повороту узлов, и от связей, препятствующих смещению ригеля. Возникающие при этом изменения моментов определяются и суммируются как и при несвободных рамах. Способ расчета является применимым, если стойки яруса одной длины.

Этапы расчета

1) Вычеркивается схема рамы в такой величине, в которой возможно написать у узлов все изменения моментов заземления, определяемые в ходе расчета (фиг. 4).

2) Вычисляются жесткости стержней $i = \frac{EI}{l}$, где E — модуль упругости, I — момент инерции и l длина стержня.

3) Вычисляются коэффициенты распределения неравно-вешенных моментов узлов (см. 8 этап) как и при несвободных рамах (1, 2).

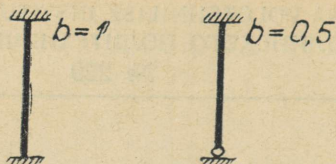
4) Вычисляются коэффициенты распределения ярусного момента (см. 6 этап) на каждом ярусе для каждого конца стойки по формуле:

$$c_i = \frac{b_i i_i}{\sum_{j=1}^n b_j i_j}$$

Здесь: c — коэффициент распределения ярусного момента; b — коэффициент, учитывающий условия закрепления концов стойки (фиг. 1);

n — общее количество концов стоек на ярусе.

Фиг. 1



Коэффициент распределения ярусного момента c_i определяет, какая часть ярусного момента воспринимает наблюдаемый конец стойки.

5. На все узлы рамы (кроме шарнирных) накладываются связи, препятствующие их повороту, и на все ригели накладываются горизонтальные связи, препятствующие их смещению. Вычисляются моменты защемления M_i^0 на концах брусьев, возникающие под воздействием внешней нагрузки. Положительными считаются моменты, действующие по часовой стрелке. Моменты защемления наносятся на схему с соответствующими знаками над брусом вблизи узла.

6. Освобождается рама от горизонтальных связей. На каждом ярусе определяется ярусный момент — сумма изменений моментов защемления стоек одного и того же яруса, возникающих при смещении ригеля. Ярусный момент $M_{я}$ определяется из следующей формулы:

$$M_{я} = -[H_{я}h_{я} + \sum_{я} (H_i h_i + M_i)]. *$$

Здесь $H_{я}$ — сумма всех горизонтальных внешних сил, действующих на верхний ригель яруса и на вышележащие части рамы;

$h_{я}$ — высота яруса; H_i и M_i — горизонтальная сила и момент, действующие на стойки наблюдаемого яруса; h_i — расстояние горизонтальной силы от нижнего конца стойки (фиг. 2), $\sum_{я} (H_i \cdot h_i + M_i)$ — сумма моментов всех сил, действующих на стойки яруса.

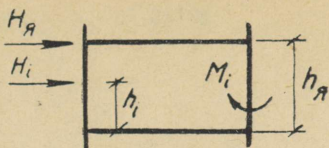
7. Распределяется ярусный момент между концами стоек яруса пропорционально их коэффициентам распределения ярусного момента, применяя формулу

$$M'_i = c_i \cdot M_{я}.$$

Здесь M'_i — момент защемления стойки от смещения ригеля. Моменты защемления записываются на схеме как и раньше. После этого шага на схеме проводится пунктирная черта, означающая, что ярусный момент распределен.

* Вытекает из уравнения равновесия горизонтальных сил, действующих на ригель.

Фиг. 2



8. Закрепляются ригели горизонтальными связями. Освобождаются узлы по одному из связей, препятствующих повороту. Определяются неуравновешенные моменты M_y в узлах, равные алгебраической сумме моментов защемления в каждом узле, взятого с обратным знаком. Неуравновешенные моменты, подлежащие распределению, записываются на схеме близ соответствующих узлов.

$$M_y = -\sum (M_i^0 + M'_i).$$

9. Распределяются неуравновешенные моменты в узлах между брусками, сходящимися в узле, пропорционально их коэффициентам распределения. Распределенные моменты M_i'' записываются также над бруском вблизи узла. После этого шага проводится черта, означающая, что узел уравновешен.

10. Моменты, полученные в шаге 9 (перед чертой), умножают на коэффициент переноса $(+1/2)$ и переносят на противоположные концы брусков.

Перенесенные моменты M_i^* записываются на схеме как и другие моменты защемления.

11. Накладываются опять связи, препятствующие повороту узлов и освобождаются ригели от горизонтальных связей. Вычисляются ярусные моменты M_y . В данном случае и в дальнейшем

$$M_y = -\sum_y (M_i'' + M_i^*),$$

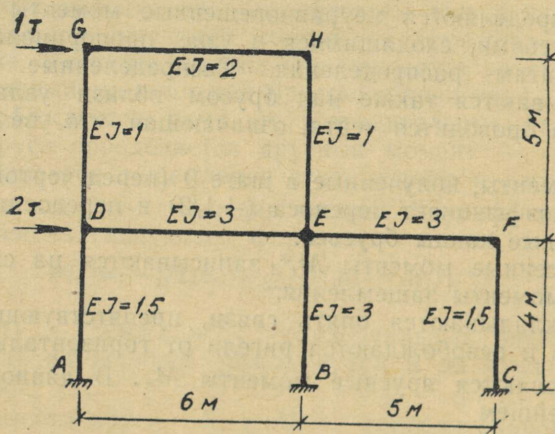
поскольку смещение ригеля причиняют только те моменты защемления стоек яруса, которые возникли после последнего распределения ярусного момента, т. е. моменты, записанные на схеме над последними пунктирными чертами.

Цикл, состоящий из шагов 11, 7, 8, 9, 10, повторяется до тех пор, пока величины изменений моментов станут такими, что ими можно пренебречь. При вычислении M_y (см. 8 этап) учитываются в дальнейшем только моменты, записанные на схеме над последними чертами:

$$M_y = -\sum (M'_i + M_i^*).$$

12. Складываются алгебраически все моменты, записанные на концах брусков, и получаются истинные моменты, которые записываются у узлов под брусками.

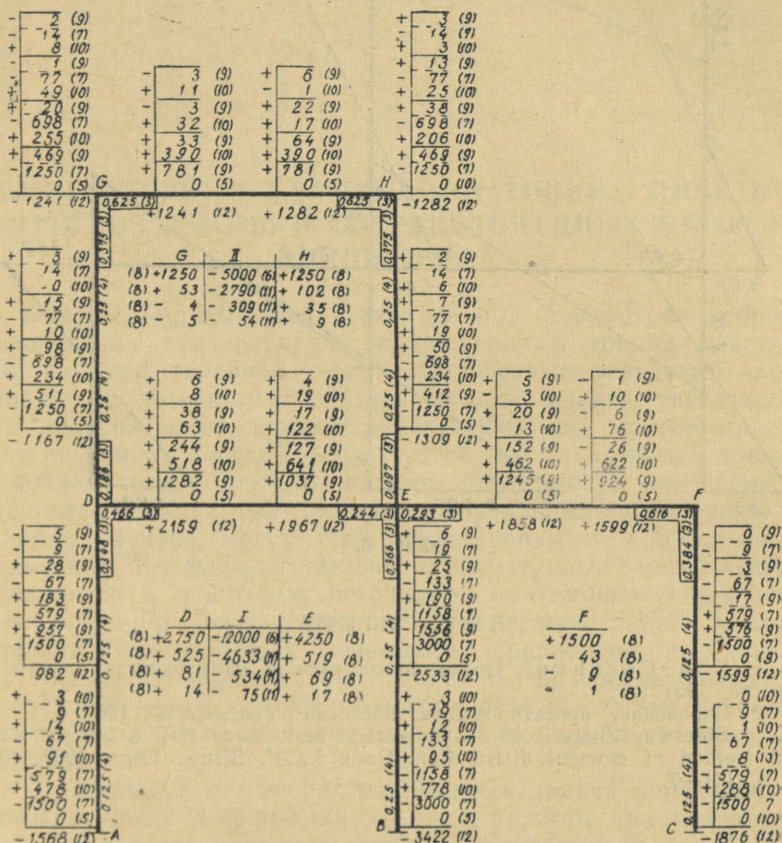
Пример.*
 Требуется рассчитать раму, показанную на фиг. 3.



Фиг. 3

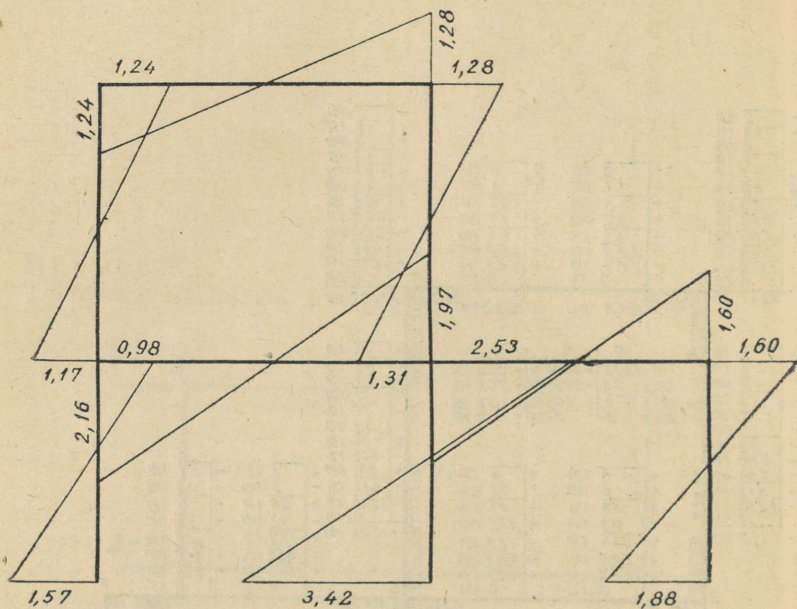
* Схема рамы и нагрузка взята из (2).

РАСЧЕТЫ $l = 1 \text{ КГ.М}$



Номеры в скобках обозначают этапы расчетов

Фиг. 4



Фиг. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Рогоцкий Новый метод расчета на прочность и устойчивость, 1961 г.
2. Справочник проектировщика. Расчетно-теоретический, 1960 г.
3. Sidesway analysis of unsymmetrical multistorey frames by a modified method of moment distribution. Gam. L.C.P. Struct. Engr. 1962, 40, № 4, 141—7.

УДК 624, 042. 5

В. Р. Кульбах

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ТОНКИХ ПЛАСТИН ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИСТОЧ- НИКОВ ТЕПЛА

В нашей предыдущей статье [2] был рассмотрен вопрос определения температурных напряжений в тонких пластинах на базе линейной теории. Полученные результаты позволяют с помощью известных методов оценки устойчивости пластин найти критические температуры, соответствующие потери их плоской формы устойчивости. В то же время линейная теория расчета не дает возможности для оценки деформаций пластины, которые в реальных конструкциях в ряде случаев могут быть существенными. Обобщенные уравнения Кармана с учетом температурных напряжений приводятся в некоторых источниках по температурным напряжениям [1]. Весьма оригинальное решение задачи исследования температурных деформаций предложена в статьях П. Вильде [3]. Однако для получения численных решений указанный метод требует большого объема математических выкладок, и автором рассмотрены лишь наиболее простые примеры.

В настоящей статье рассматривается задача определения температурных деформаций круглых пластин при воздействии сосредоточенного источника тепла в центре пластины. При этом деформации считаются упругими, а коэффициенты теплопроводности линейного температурного расширения пластины независимыми от температуры. В основу решения задачи теплопроводности принимается закон Ньютона о конвективном теплообмене между плитой и окружающей средой. Процесс теплопроводности считается установившимся; приведенная схема решения задачи при необходимости может быть распространена и на другие схемы, в том числе и на случаи неустановившихся процессов.

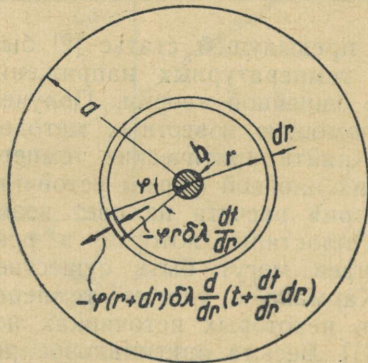
1. Температурная задача пластины

Рассмотрим установившийся процесс в тонкой круглой пластине, температура по толщине которой может быть принята одинаковой. В центре пластины на круговой площади радиусом r_0 пусть действует источник тепла интенсивностью q ккал/час, а температура на этой площади пусть имеет постоянное значение.

На боковых поверхностях пластины происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, а теплоотдачей от наружного контура ввиду малости толщины пластины можно пренебречь.

Уравнение теплопроводности выводится из условия равновесия теплообмена в элементарном кольце радиуса r и ширины dr (фиг. 1).

Фиг. 1



В указанное кольцо через внутренний контур от центра пластины за единицу времени поступает количество тепла

$$-2\pi r \delta \lambda \frac{dt}{dr},$$

а через наружный контур кольца отходит количество тепла

$$-2\pi (r + dr) \delta \lambda \frac{d}{dr} \left(t + \frac{dt}{dr} dr \right),$$

где δ — толщина пластины,

t — температура рассматриваемого элементарного кольца,

λ — теплопроводность материала пластины.

От боковых поверхностей пластины выделяется тепловой поток

$$4\pi r \kappa t dr,$$

где κ — коэффициент теплоотдачи,

а температура окружающей среды принята за начало отчета.

Приравнивая входящий и отходящие от элементарного кольца тепловые потоки, находим

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} - \frac{1}{v^2} t = 0, \quad (1)$$

где $v^2 = \frac{\lambda \delta}{2\alpha}$ — коэффициент остывания.

Решение дифференциального уравнения (1) может быть получено в Бесселевых функциях от чисто мнимого аргумента в виде

$$t = AI_0\left(\frac{r}{v}\right) + BK_0\left(\frac{r}{v}\right). \quad (2)$$

Граничные условия задачи могут быть сформулированы следующим образом:

а) через наружный контур центрального круга радиусом b передается известный тепловой поток

$$q = -2\pi b \delta \lambda \left. \frac{dt}{dr} \right|_{r=b}, \quad (3)$$

б) теплоотдача от наружного контура всей пластины отсутствует, т. е.

$$\left. \frac{dt}{dr} \right|_{r=a} = 0. \quad (4)$$

Подставляя граничные условия в формулы для производной

$$\frac{dt}{dr} = AI_1\left(\frac{r}{v}\right) - BK_1\left(\frac{r}{v}\right), \quad (5)$$

получим для коэффициентов интегрирования

$$A = \frac{-q}{2\pi b \delta \lambda \left[I_1\left(\frac{b}{v}\right) - K_1\left(\frac{b}{v}\right) \frac{I_1\left(\frac{a}{v}\right)}{K_1\left(\frac{a}{v}\right)} \right]}, \quad (6)$$

$$B = \frac{-q}{2\pi b \delta \lambda \left[I_1\left(\frac{b}{v}\right) \frac{K_1\left(\frac{a}{v}\right)}{I_1\left(\frac{a}{v}\right)} - K_1\left(\frac{b}{v}\right) \right]}. \quad (7)$$

2. Решение уравнений Кармана для температурной задачи

Обобщенные уравнения Кармана с учетом влияния температуры для осесимметричной задачи могут быть представлены в виде

$$\frac{D}{\delta} \frac{d}{dr} (\Delta^2 \omega) = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{d\omega}{dr}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{E} \frac{d}{dr} (\Delta^2 \Phi) = -\alpha \frac{dt}{dr} - \frac{1}{2r} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2, \quad (9)$$

где ω — функция прогиба,
 Φ — функция напряжений,

$\Delta^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)$ — оператор Лапласа для осесимметричной задачи,

$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластины,

α — коэффициент линейного температурного расширения материала пластины.

Для решения задачи используем метод Бубнова-Галеркина, исходя из известных решений для случаев воздействия внешней нагрузки [4].

Задаваясь функцией прогиба пластины, для сохранения наглядности ограничимся одним членом в выражении функции прогиба. Для определенности рассмотрим случай, когда наружный контур пластины не может поворачиваться, т. е.

$$\left. \frac{d\omega}{dr} \right|_{r=a} = 0. \quad (10)$$

В таком случае функция прогиба может быть задана, например, в виде

$$\omega = f\varphi_1 = f \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^2. \quad (11)$$

Наметим следующий ход решения обобщенных уравнений Кармана.

Подставим функцию прогиба по (11) и значение температуры по (2) в уравнение совместности деформаций (9). Затем путем двукратного интегрирования из (9) находим производную $\frac{d\Phi}{dr}$. После этого подставим значение производной $\frac{d\Phi}{dr}$ и производных функций прогиба в уравнение равновесия (8) и решим последнее методом Бубнова-Галеркина.

Находим последовательно необходимые производные функции прогиба

$$\frac{d\omega}{dr} = -\frac{4f}{a} \left[\frac{r}{a} - \left(\frac{r}{a} \right)^3 \right]; \quad (12)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) = -\frac{8f}{a} \left[\frac{r}{a} - 2 \left(\frac{r}{a} \right)^3 \right];$$

$$\Delta^2 \omega = -\frac{8f}{a^2} \left[1 - 2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

Из формулы (9) имеем

$$\frac{d}{dr}(\Delta^2\Phi) = -Ea \frac{dt}{dr} - \frac{8Ef^2}{a^3} \left[\frac{r}{a} - 2 \left(\frac{r}{a} \right)^3 + \left(\frac{r}{a} \right)^5 \right].$$

Первое интегрирование дает

$$\Delta^2\Phi = -Eat - \frac{4Ef^2}{a^2} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 - \left(\frac{r}{a} \right)^4 + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{a} \right)^6 \right] + C_1. \quad (14)$$

Согласно определению оператора Лапласа имеем

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) = -Eatr - \frac{4Ef^2}{a} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^3 - \left(\frac{r}{a} \right)^5 + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{a} \right)^7 \right] + C_1 r.$$

При втором интегрировании учитываем, что согласно формуле [2] при $r \leq b$

$$t = AI_0 \left(\frac{b}{v} \right) + BK_0 \left(\frac{b}{v} \right),$$

а соответствующий интеграл

$$\int t r dr = \frac{r^2}{2} \left[AI_0 \left(\frac{b}{v} \right) + BK_0 \left(\frac{b}{v} \right) \right]. \quad (15)$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned} r \frac{d\Phi}{dr} &= -\frac{Ear^2}{2} \left[AI_0 \left(\frac{b}{v} \right) + BK_0 \left(\frac{b}{v} \right) \right] - Ef^2 \left[\left(\frac{r}{a} \right)^4 - \frac{2}{3} \left(\frac{r}{a} \right)^6 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \left(\frac{r}{a} \right)^8 \right] + C_1 \frac{r^2}{2} + C_2, \\ \frac{d\Phi}{dr} &= -\frac{Ear}{2} \left[AI_0 \left(\frac{b}{v} \right) + BK_0 \left(\frac{b}{v} \right) \right] - \frac{Ef^2}{a} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^3 - \frac{2}{3} \left(\frac{r}{a} \right)^5 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \left(\frac{r}{a} \right)^7 \right] + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для области $r \geq b$ имеем соответственно

$$t = AI_0 \left(\frac{r}{v} \right) + BK_0 \left(\frac{r}{v} \right).$$

По свойствам бесселевых функций

$$\int t r dr = vr \left[AI_1 \left(\frac{r}{v} \right) - BK_1 \left(\frac{r}{v} \right) \right]. \quad (17)$$

Согласно этому соответствующее значение производной для указанной области

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dr} &= -Eav \left[AI_1 \left(\frac{r}{v} \right) - BK_1 \left(\frac{r}{v} \right) \right] - \frac{Ef^2}{a} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^3 - \frac{2}{3} \left(\frac{r}{a} \right)^5 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \left(\frac{r}{a} \right)^7 \right] + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_3}{r}. \end{aligned} \quad (18)$$

Значение коэффициента интегрирования C_2 находим из условия ограниченности напряжений σ_r при $r=0$; согласно этому

$$\left. \frac{d\Phi}{dr} \right|_{r=0} \neq \infty$$

и должно быть $C_2 = 0$.

Значения коэффициентов C_1 и C_3 должны определиться из граничных условий при $r=b$ и $r=a$. На грани $r=a$ можно предполагать, например, отсутствие радиальных напряжений. В таком случае $\left. \frac{d\Phi}{dr} \right|_{r=a} = 0$.

На грани $r=b$ должны равняться радиальные напряжения внутренней и наружной частей пластины.

Согласно этому имеем

$$C_1 = \frac{E f^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \sigma_2, \quad (19)$$

$$C_3 = \frac{b^2}{2} \sigma_1, \quad (20)$$

где

$$\sigma_1 = E\alpha \left[AI_0 \left(\frac{b}{v} \right) + BK_0 \left(\frac{b}{v} \right) \right],$$

$$\sigma_2 = E\alpha \left\{ 2 \frac{v}{b} \left[AI_1 \left(\frac{b}{v} \right) - BK_1 \left(\frac{b}{v} \right) \right] - \left[AI_0 \left(\frac{b}{v} \right) + BK_0 \left(\frac{b}{v} \right) \right] \right\}.$$

Подставляя значения C_1 и C_3 в формулы (16) и (18), соответственно находим:
для области $r \leq b$

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{1}{2} \left[\sigma_1 + \frac{b^2}{a^2} \sigma_2 \right] r + \frac{E f^2}{2a} \left[\frac{r}{a} - 2 \left(\frac{r}{a} \right)^3 + \frac{4}{3} \left(\frac{r}{a} \right)^5 - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{a} \right)^7 \right], \quad (21)$$

а для области $r \geq b$

$$\frac{d\Phi}{dr} = -E\alpha v \left[AI_1 \left(\frac{r}{v} \right) - BK_1 \left(\frac{r}{v} \right) \right] - \frac{b^2 \sigma_2}{2a^2} r + \frac{b^2 \sigma_2}{2} \frac{1}{r} + \frac{E f^2}{2a} \left[\frac{r}{a} - 2 \left(\frac{r}{a} \right)^3 + \frac{4}{3} \left(\frac{r}{a} \right)^5 - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{a} \right)^7 \right]. \quad (22)$$

Уравнение Бубнова-Галеркина может быть написано в виде

$$\int_0^a R \frac{d\varphi_1}{dr} r dr = 0, \quad (23)$$

где в нашем случае

$$R = \frac{D}{\delta} \frac{d}{dr} (\Delta^2 \omega) - \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{dw}{dr}. \quad (24)$$

Для области $r \leq b$ имеем

$$R = R_0 + R_1 + R_2 \quad (25)$$

где

$$R_0 = \frac{D}{\delta} \frac{d}{dr} (\nabla^2 \omega) = \frac{32Df}{a^3 \delta} \frac{r}{a}, \quad (26)$$

$$R_1 = \frac{2Ef^3}{a^3} \left[\frac{r}{a} - 3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 + \frac{10}{3} \left(\frac{r}{a} \right)^5 - \frac{5}{3} \left(\frac{r}{a} \right)^7 + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{a} \right)^9 \right], \quad (27)$$

$$R_2 = -\frac{2f}{a} \left[\sigma_1 + \frac{b^2}{a^2} \sigma_2 \right] \left[\frac{r}{a} - \left(\frac{r}{a} \right)^3 \right]. \quad (28)$$

Для области $r \geq b$

$$R = R_0 + R_1 + R_3 + R_4, \quad (29)$$

где

$$R_3 = \frac{2fb^2\sigma_2}{a^3} \left(\frac{a}{r} - \frac{r}{a} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right], \quad (30)$$

$$R_4 = -\frac{4Efav}{a^2} \left[AI_1 \left(\frac{r}{v} \right) - BK_1 \left(\frac{r}{v} \right) \right] \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]. \quad (31)$$

Учитывая функцию

$$r \frac{d\varphi_1}{dr} = -4 \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 - \left(\frac{r}{a} \right)^4 \right],$$

входящую в значение интеграла (23), имеем

$$\int_0^a R_0 \frac{d\varphi_1}{dr} r dr = -\frac{32Df}{3a^2\delta}, \quad (32)$$

$$\int_0^a R_1 \frac{d\varphi_1}{dr} r dr = -\frac{Ef^3}{7a^2}, \quad (33)$$

$$\int_0^b R_2 \frac{d\varphi_1}{dr} r dr = f \left(\sigma_1 + \frac{b^2}{a^2} \sigma_2 \right) \left[2 \left(\frac{b}{a} \right)^4 - \frac{8}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^6 + \left(\frac{b}{a} \right)^8 \right], \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \int_b^a R_3 \frac{d\varphi_1}{dr} r dr = & -f \frac{b^2}{a^2} \sigma_2 + \frac{4fb^2}{a^2} \sigma_2 \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^4 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a} \right)^8 \right], \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \int_b^a R_4 \frac{d\varphi_1}{dr} r dr = & \frac{128v^2f}{a^2} \left[1 + 24 \left(\frac{v}{a} \right)^2 \right] \sigma_3 - \frac{16v^2f}{a^2} \left\{ \left[1 - 16 \left(\frac{v}{a} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 192 \left(\frac{v}{a} \right)^4 \right] \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 2 \left[1 - 12 \left(\frac{v}{a} \right)^2 \right] \left(\frac{b}{a} \right)^4 + \left(\frac{b}{a} \right)^6 \right\} \sigma_1 + \\ & + \frac{32v^2f}{a^2} \left\{ \left[1 - 16 \left(\frac{v}{a} \right)^2 + 192 \left(\frac{v}{a} \right)^4 \right] \frac{b}{a} - 4 \left[1 - 12 \left(\frac{v}{a} \right)^2 \right] \left(\frac{b}{a} \right)^3 + \right. \\ & \left. + 3 \left(\frac{b}{a} \right)^5 \right\} \sigma_4, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\sigma_3 = E\alpha \left[AI_0 \left(\frac{a}{v} \right) + BK_0 \left(\frac{a}{v} \right) \right],$$

$$\sigma_4 = E\alpha \left[AI_1 \left(\frac{b}{v} \right) - BK_1 \left(\frac{b}{v} \right) \right].$$

При вычислении интеграла $\int R_4 \frac{d\varphi_1}{dr} r dr$ учтены зависимости, которые получены многократным использованием зависимостей интегрирования по частям, а также редуционных формул для цилиндрических функций разных порядков. В частности

$$\begin{aligned} \int \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 - 2 \left(\frac{r}{a} \right)^4 + \left(\frac{r}{a} \right)^6 \right] I_1 \left(\frac{r}{v} \right) dr &= v \left\{ \left[\left(\frac{v}{a} \right)^2 - 16 \left(\frac{v}{a} \right)^4 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 196 \left(\frac{v}{a} \right)^6 \right] \left(\frac{r}{v} \right)^2 - 2 \left[\left(\frac{v}{a} \right)^4 - 12 \left(\frac{v}{a} \right)^6 \right] \left(\frac{r}{v} \right)^4 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{v}{a} \right)^6 \left(\frac{r}{v} \right)^6 \right\} I_0 \left(\frac{r}{v} \right) - 2v \left\{ \left[\left(\frac{v}{a} \right)^2 - 16 \left(\frac{v}{a} \right)^4 + 196 \left(\frac{v}{a} \right)^6 \right] \frac{r}{v} - \right. \\ &\quad \left. - 4 \left[\left(\frac{v}{a} \right)^4 - 12 \left(\frac{v}{a} \right)^6 \right] \left(\frac{r}{v} \right)^3 + 3 \left(\frac{v}{a} \right)^6 \left(\frac{r}{v} \right)^5 \right\} I_1 \left(\frac{r}{v} \right); \\ \int \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 - 2 \left(\frac{r}{a} \right)^4 + \left(\frac{r}{a} \right)^6 \right] K_1 \left(\frac{r}{v} \right) dr &= -v \left\{ \left[\left(\frac{v}{a} \right)^2 - 16 \left(\frac{v}{a} \right)^4 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 196 \left(\frac{v}{a} \right)^6 \right] \left(\frac{r}{v} \right)^2 - 2 \left[\left(\frac{v}{a} \right)^4 - 12 \left(\frac{v}{a} \right)^6 \right] \left(\frac{r}{v} \right)^4 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{v}{a} \right)^6 \left(\frac{r}{v} \right)^6 \right\} K_0 \left(\frac{r}{v} \right) - 2v \left\{ \left[\left(\frac{v}{a} \right)^2 - 16 \left(\frac{v}{a} \right)^4 + 196 \left(\frac{v}{a} \right)^6 \right] \frac{r}{v} - \right. \\ &\quad \left. - 4 \left[\left(\frac{v}{a} \right)^4 - 12 \left(\frac{v}{a} \right)^6 \right] \left(\frac{r}{v} \right)^3 + 3 \left(\frac{v}{a} \right)^6 \left(\frac{r}{v} \right)^5 \right\} K_1 \left(\frac{r}{v} \right). \end{aligned}$$

В результатах интегрирования учтено и то обстоятельство, что

$$AI_1 \left(\frac{a}{v} \right) - BK_1 \left(\frac{a}{v} \right) = 0$$

вследствие граничных условий температурной задачи.

Подставляя значения интегралов (32), (33), (34), (35), и (36) в уравнение Бубнова-Галеркина (23), находим

$$\begin{aligned} \frac{Ej^3}{7a^2} + \frac{32Dj}{3a^2\delta} - f \left[2 \left(\frac{b}{a} \right)^4 - \frac{8}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^6 + \left(\frac{b}{a} \right)^8 \right] \sigma_1 + f \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 - \right. \\ \left. - 4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + 4 \left(\frac{b}{a} \right)^6 - \frac{4}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^8 \right] \sigma_2 - \frac{128v^4f}{a^4} \left[1 + 24 \left(\frac{v}{a} \right)^2 \right] \sigma_3 - \\ - \frac{16v^2f}{a^2} \left\{ \left[1 - 16 \left(\frac{v}{a} \right)^2 + 192 \left(\frac{v}{a} \right)^4 \right] \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 2 \left[1 - \right. \right. \\ \left. \left. - 12 \left(\frac{v}{a} \right)^2 \right] \left(\frac{b}{a} \right)^4 + \left(\frac{b}{a} \right)^6 \right\} \sigma_1 + \frac{32v^3f}{a^3} \left\{ \left[1 - 16 \left(\frac{v}{a} \right)^2 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ 192 \left(\frac{v}{a}\right)^4 \frac{b}{a} - 4 \left[1 - 12 \left(\frac{v}{a}\right)^2 \right] \left(\frac{b}{a}\right)^3 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^5 \} \sigma_4. \quad (37)$$

Сокращение на f превращает уравнение (37) в квадратное уравнение относительно искомого значения стрелы прогиба f , которое легко решается при известных значениях соотношений $\frac{b}{v}$ и $\frac{a}{v}$ и заданных характеристиках материала пластины и интенсивности источника тепла.

Во многих реальных случаях

$$\begin{aligned} b &\ll a \\ \text{и } b &\ll v. \end{aligned} \quad (38)$$

Тогда формула (37) значительно упрощается и дает возможность провести анализ зависимости меры выпучивания от размеров пластины и интенсивности теплового потока.

При соблюдении условий (38)

$$I_1\left(\frac{b}{v}\right) \approx \frac{1}{2} \frac{b}{v}, \quad (39)$$

$$K_1\left(\frac{b}{v}\right) \approx \frac{v}{b}, \quad (40)$$

$$K_1\left(\frac{a}{v}\right) \frac{b^2}{v^2} \ll I_1\left(\frac{a}{v}\right). \quad (41)$$

Тогда для определения температуры имеем

$$t = \frac{q}{2\pi\delta\lambda} \left[\frac{K_1\left(\frac{a}{v}\right)}{I_1\left(\frac{a}{v}\right)} I_0\left(\frac{r}{v}\right) + K_0\left(\frac{r}{v}\right) \right]. \quad (42)$$

С другой стороны, при соблюдении условий (38) из уравнения (37) можно исключить все члены, содержащие множители $\frac{r_0}{a}$ в степени выше первой, так как при $n \geq 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n [AI_0(x) + BK_0(x)] = 0, \quad (43)$$

а при $n \geq 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n [AI_1(x) + BK_1(x)] = 0. \quad (44)$$

Кроме того учитываем, что

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{b}{a} \left[AI_1\left(\frac{b}{v}\right) - BK_1\left(\frac{b}{v}\right) \right] = -\frac{q}{2\pi\delta\lambda} \frac{v}{a}. \quad (45)$$

Тогда уравнение Бубнова-Галеркина (37) в нашем случае принимает вид

$$\frac{Ej^2}{7a^2} = \frac{Eaq}{2\pi\delta\lambda} \left\{ \frac{128v^4}{a^4} \left(1 + 24 \frac{v^2}{a^2} \right) \left[\frac{K_1\left(\frac{a}{v}\right)}{I_1\left(\frac{a}{v}\right)} I_0\left(\frac{a}{v}\right) + K_0\left(\frac{a}{v}\right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{32v^4}{a^4} \left[1 - 16 \frac{v^2}{a^2} + 192 \frac{v^4}{a^4} \right] \right\} - \frac{32D}{3a^2\delta}. \quad (46)$$

Далее принимаем во внимание, что

$$\frac{v^4}{a^4} = \frac{\lambda^2\delta^2}{4\kappa^2a^4} \text{ и } D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Тогда имеем

$$f = \sqrt{\frac{28qa\lambda\delta}{\pi\kappa^2a^2} \left\{ 1 - 16 \frac{v^2}{a^2} + 192 \frac{v^4}{a^4} + \right. \\ \left. + 4 \left(1 + 24 \frac{v^2}{a^2} \right) \left[\frac{K_1\left(\frac{v}{a}\right)}{I_1\left(\frac{v}{a}\right)} I_0\left(\frac{a}{v}\right) + K_0\left(\frac{a}{v}\right) \right] \right\} - \frac{56\delta^2}{9(1-\nu^2)}}. \quad (47)$$

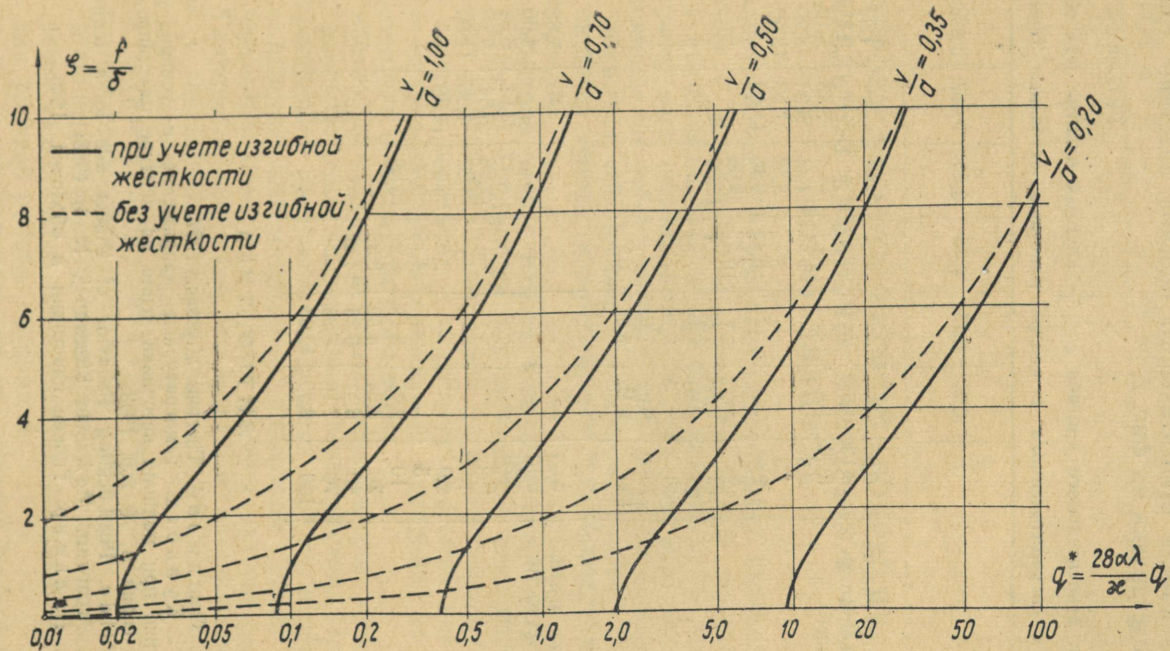
Для относительного прогиба получим

$$\xi = \frac{f}{\delta} = \sqrt{\frac{28a\lambda}{\kappa^2} Q \left\{ 1 - 16 \frac{v^2}{a^2} + 192 \frac{v^4}{a^4} + \right. \\ \left. + 4 \left(1 + 24 \frac{v^2}{a^2} \right) \left[\frac{K_1\left(\frac{a}{v}\right)}{I_1\left(\frac{a}{v}\right)} I_0\left(\frac{a}{v}\right) + K_0\left(\frac{a}{v}\right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{56}{9(1-\nu^2)} \right\}}, \quad (48)$$

где $Q = \frac{q}{\pi\delta a^2}$ — количество тепла, передаваемое пластине за единицу времени, приведенное к единице объема пластины.

Для анализа формулы (48) задаемся для стальной пластины тепловыми характеристиками α , λ , κ и $v^2 = \frac{\lambda\delta}{2\kappa}$, а также коэффициентом Пуассона ν . Тогда относительный прогиб ξ может быть представлен как функция от двух величин — Q и v .

Принимаем для примера $\nu = 0,3$, $\alpha = 0,000012$, $\lambda = 39$ ккал/м·час °С, $\kappa = 5,85$ ккал/м²час °С; тогда $v = \sqrt{\frac{1000\delta}{3}}$ [см]. Соответствующие значения ξ как функции от



Фиг. 2

Q и v с учетом и без учета изгибной жесткости пластины приведены в таблице 1.

Зависимость относительного прогиба пластины графически представлена на фиг. 2.

Таблица 1

Значения относительного прогиба $\zeta = \frac{f}{\delta}$ круглых пластин при воздействии сосредоточенного в центре пластины источника тепла

$28 \frac{\alpha \lambda}{x^2} Q$	$\frac{v}{a}$	0,2	0,25	0,35	0,50	0,667	0,833	1
При учете изгибной жесткости пластины	0,05	—	—	—	—	—	1,19	3,30
	0,10	—	—	—	—	—	3,11	5,35
	0,20	—	—	—	—	2,43	5,12	8,00
	0,5	—	—	—	1,44	5,00	8,70	13,06
	1,0	—	—	—	3,32	7,53	12,60	—
	2,0	—	—	0,41	5,36	11,00	—	—
	5	—	—	3,27	9,06	—	—	—
	10	0,70	1,80	5,31	13,09	—	—	—
	20	2,80	3,64	7,94	—	—	—	—
	40	4,73	5,78	11,53	—	—	—	—
	70	6,65	7,97	—	—	—	—	—
	100	8,15	9,67	—	—	—	—	—
	Без учета изгибной жесткости пластины	0,05	—	—	—	—	—	2,88
0,10		—	—	—	—	—	4,06	5,94
0,20		—	—	—	—	3,57	5,74	8,40
0,5		—	—	—	2,98	5,64	9,10	13,32
1,0		—	—	—	4,22	7,98	12,86	—
2,0		—	—	2,65	5,96	11,28	—	—
5		—	—	4,19	9,42	—	—	—
10		2,71	3,18	5,92	13,35	—	—	—
20		3,84	4,50	8,36	—	—	—	—
40		5,41	6,35	11,82	—	—	—	—
70		7,16	8,39	—	—	—	—	—
100		8,55	10,03	—	—	—	—	—

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Gatewood. Thermal stresses. 1957.
2. В. Р. Кульбах. Температурные напряжения в тонкой упругой пластине при наличии источника тепла на контуре пластины. Труды ТПИ, серия А, № 200. 1963.
3. Р. Wilde. Postbuckling Behavior of Plates due to a temperature Field. Archiwum Mechaniki Stoswanej, N 3. 1963.
4. А. С. Вольмир. Гибкие пластинки и оболочки. 1956.

К ВОПРОСУ РАСЧЕТА ВИСЯЧИХ ПОКРЫТИЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ, ИМЕЮЩИХ В ПЛАНЕ ФОРМУ ЭЛЛИПСА

Эллиптические в плане висячие покрытия отрицательной кривизны с ортогональной системой тросов оказываются весьма выгодными при перекрытии значительных пролетов. При применении легких элементов кровли можно пренебречь их влиянием на работу конструкций. В таком случае жесткость покрытия обеспечивается предварительным напряжением системы тросов, изменяющимся при изменении внешней нагрузки.

К расчетной оценке работы покрытия можно подойти по двум путям [1]. Первый из них приводит к решению алгебраических уравнений строительной механики сложной стержневой системы, а второй — к расчету покрытия как непрерывной предварительно напряженной мембраны по теории безмоментных оболочек особого типа.

В настоящей статье рассматривается вопрос расчета висячих покрытий как непрерывных поверхностей. При этом все упрощающие предпосылки вводятся заранее, чтобы обойтись с простым математическим аппаратом. Такой подход был предложен нами при оценке работы акустического экрана Таллинской певческой эстрады [2] и, по-видимому, принят и в составляемых институтом ЦНИИСК инструкциях по расчету висячих покрытий.

Для составления расчетных уравнений для рассматриваемого случая принимаем следующие допущения:

- 1) элементы кровли не участвуют в работе покрытия,
- 2) деформации покрытия и контура совершаются в стадии упругой работы материала,
- 3) деформации покрытия не превосходят предельных величин, соответствующих моменту исчезновения предварительного напряжения системы,

- 4) поверхность покрытия в деформированном состоянии имеет форму гиперболического параболоида,
- 5) элементарные полоски покрытия, параллельные вертикальным координатным плоскостям, соединены между собой связями, не воспринимающими сдвигающих усилий,
- 6) элементарные полоски покрытия сохраняют форму параболы после деформации.

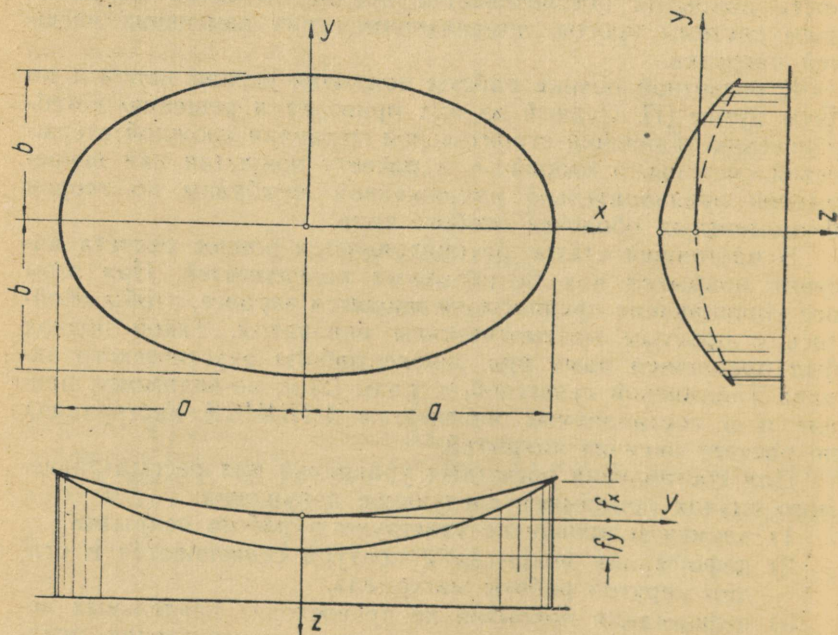
Последние два из указанных предпосылок приводят в расчет погрешность, не превышающую погрешности теории пологих оболочек.

1. Геометрические данные

Поверхность покрытия пусть представляет собой гиперболический параболоид

$$z = f_y \left(\frac{y}{b}\right)^2 - f_x \left(\frac{x}{a}\right)^2. \quad (1)$$

Эллиптический в плане контур как замкнутая пространственная кривая может быть задана своими проекциями на координатные плоскости (фиг. 1).



Фиг. 1

Если в плоскости xy имеем эллипс

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad (2)$$

то в плоскостях xz и yz контур имеет форму парабол

$$z = f_y - (f_x + f_y) \left(\frac{x}{a}\right)^2 \quad (3)$$

и

$$z = (f_x + f_y) \left(\frac{y}{b}\right)^2 - f_x. \quad (4)$$

Пролеты и стрёлы провисания элементарных вертикальных полос определяются зависимостями:

в плоскостях, параллельных плоскости xz :

$$l = 2a \left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right], \quad (5)$$

$$f = f_x \left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]^2; \quad (6)$$

в плоскостях, параллельных плоскости yz :

$$l = 2b \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right], \quad (7)$$

$$f = f_y \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2. \quad (8)$$

Углы наклона элементарных полос в местах соединения с обрамляющим контуром определяются соответственно из равенств

$$\operatorname{tg} \alpha_x = \frac{-2f_x}{a} \left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right], \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_y = \frac{2f_y}{b} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]. \quad (10)$$

2. Схема расчета тросов и обрамляющего контура

За исходное расчетное состояние покрытия принимаем деформированное максимальной расчетной нагрузкой состояние. В этом состоянии интенсивность контактной нагрузки от натягивающих тросов имеет минимальное значение. Указанное минимальное значение контактной нагрузки должно обеспечить жесткость покрытия и может быть принят в пределах

$$p_0 = (0,10 - 0,15) q_{\max}, \quad (11)$$

Несущие тросы рассчитываются по формуле

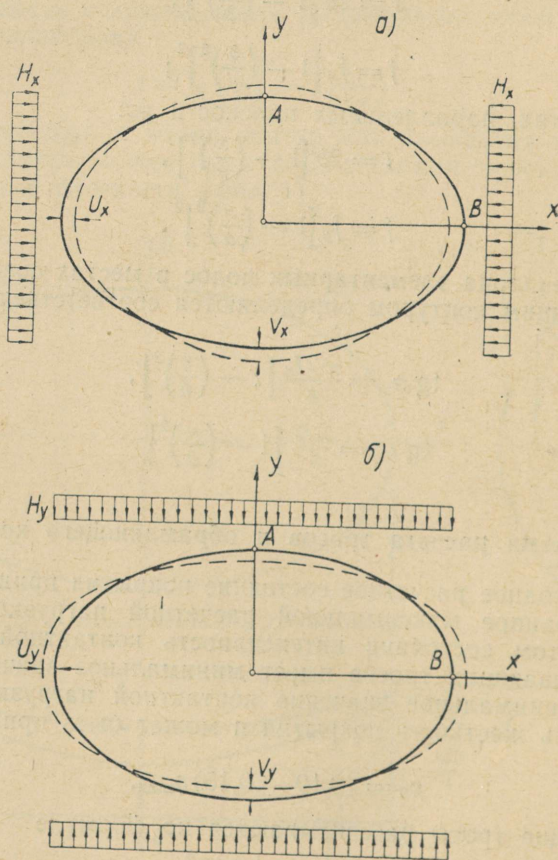
$$\max T_x = \frac{(q_{\max} + p_0) a^2}{2f_x \cos \alpha_x} \leq R_a F_x, \quad (12)$$

где α_x — максимальный угол наклона троса, определяемый равенством $\operatorname{tg} \alpha_x = \frac{2f_x}{a}$.

Усилия в натягивающих тросах будут максимальными при минимальной внешней нагрузке. Внешняя нагрузка имеет наименьшее значение или во время создания предварительного напряжения до укладки кровли, или при отсасывающем действии ветра после укладки кровли.

Натягивающие тросы рассчитываются по максимальным усилиям

$$\max T_y = \frac{(\rho_0 + \Delta\rho)b^2}{2f_y \cos \alpha_y} \leq R_a F_y, \quad (13)$$



Фиг. 2

где α_y — максимальный угол наклона троса, определяемый равенством $\operatorname{tg} \alpha_y = \frac{2f_y}{b}$,

Δp — увеличение контактной нагрузки при уменьшении внешней нагрузки от максимального значения до расчетного; Δp определяется согласно п. 3.

При рассмотрении работы контура покрытия предполагаем, что контур заанкерован в наружные стены здания и нагружен только усилиями, действующими в плоскости его наибольшей жесткости. Такими усилиями будут усилия распора поверхности покрытия, определяемые формулами (см. фиг. 2)

$$H_x = \frac{(q+p)a^2}{2f_x}, \quad (14)$$

$$H_y = \frac{pb^2}{2f_y}, \quad (15)$$

где p — интенсивность контактной нагрузки, передаваемой от натягивающих тросов на несущие.

Контур должен рассчитываться для двух стадий работы покрытия:

1) при действии нагрузки $q = q_{\max}$ и $p = p_0$;

2) при действии нагрузки $q = q_{\min}$ и $p = p_0 + \Delta p$,

где Δp определяется при $\Delta q = q_{\min} - q_{\max}$.

3. Определение деформаций покрытия и контактного давления

Функция прогиба покрытия при действии равномерно распределенной нагрузки пусть будет задана в виде

$$w = w_0 \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 - 1 \right]. \quad (16)$$

В таком случае элементарные расчетные полоски сохраняют параболическую форму и после деформации. Поэтому удлинение расчетной полоски может быть представлено в виде разности длин соответствующих отрезков парабол до и после деформации. Учитывая смещение опоры троса в горизонтальном направлении вследствие деформации контура покрытия, имеем

$$\Delta s = 2 \int_0^{a-\bar{u}} \sqrt{1 + \left[\frac{d(z+w)}{dx} \right]^2} dx - 2 \int_0^a \sqrt{1 + \left[\frac{dz}{dx} \right]^2}. \quad (17)$$

В нашем случае

$$\frac{d(z + w)}{dx} = (f_x + w_0) \frac{2x}{(a - \bar{u})^2}, \quad (18)$$

$$\frac{dz}{dx} = f_x \frac{2x}{a^2}, \quad (19)$$

где \bar{u} — горизонтальное смещение опоры полоски.

Интегрированием по (17) находим

$$\begin{aligned} \Delta s = & (a - \bar{u}) \sqrt{1 + \frac{4(f_x + w_0)^2}{(a - \bar{u})^2}} - a \sqrt{1 + \frac{4f_x^2}{a^2}} + \\ & + \frac{(a - \bar{u})^2}{2(f_x + w_0)} \operatorname{Ar sh} \frac{2(f_x + w_0)}{a - \bar{u}} - \frac{a^2}{2f_x} \operatorname{Ar sh} \frac{2f_x}{a}. \end{aligned} \quad (20)$$

Формула (20) неудобна для расчета, поэтому прибегаем к разложению в степенный ряд

$$\sqrt{1 + \xi^2} + \frac{1}{\xi} \operatorname{Ar ch} \xi = 2 + \frac{\xi^2}{3} - \frac{\xi^4}{20} + \frac{\xi^6}{56} - \dots$$

Тогда, пренебрегая малыми величинами высших порядков, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta s}{a} = & \frac{8}{3} \frac{f_x^2}{a^2} \left(1 - \frac{6}{5} \frac{f_x^2}{a^2}\right) \frac{w_0}{f_x} \left(1 + \frac{w_0}{2f_x}\right) - \\ & - 2 \frac{\bar{u}}{a} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{f_x^2}{a^2}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

Смещение \bar{u} может быть представлено в виде суммы (см. [2])

$$\bar{u} = \Delta H_x u_x + \Delta H_y u_y = \frac{(\Delta q + \Delta p) a^2}{2f_x} u_x - \frac{\Delta p b^2}{2f_y} u_y, \quad (22)$$

где u_x — смещение опорной точки полоски под действием нагрузки $\Delta H_x = 1$,

то же, под действием нагрузки $\Delta H_y = 1$.

Аналогично имеем для натягивающих тросов

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta s}{b} = & \frac{8}{3} \frac{f_y^2}{b^2} \left(1 - \frac{6}{5} \frac{f_y^2}{b^2}\right) \frac{w_0}{f_y} \left(1 - \frac{w_0}{2f_y}\right) - \\ & - 2 \frac{\bar{v}}{b} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{f_y^2}{b^2}\right), \end{aligned} \quad (23)$$

где $\bar{v} = \frac{\Delta p b^2}{2f_y} v_y - \frac{(\Delta q + \Delta p) a^2}{2f_x} v_x$.

С другой стороны, удлинения троса могут быть определены по упругим удлинениям. Для несущих тросов имеем

$$\Delta s = \frac{2\Delta H_x}{EF_x} \int_0^a \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] dx =$$

$$= \frac{(\Delta q + \Delta p)a^3}{EF_x f_x} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{f_x^2}{a^2} \right), \quad (24)$$

а для натягивающих тросов —

$$\Delta s = \frac{2\Delta H_y}{EF_y} \int_0^b \left[1 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right] dy = \frac{\Delta p b^3}{FE_y f_y} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{f_y^2}{b^2} \right). \quad (25)$$

Приравнявая теперь геометрические и статические удлинения, мы получим систему из двух уравнений для определения неизвестных смещения и изменения интенсивности контактной нагрузки:

$$\omega_0 \left(1 + \frac{\omega_0}{2f_x} \right) = A_x (c_x + u_x) (\Delta q + \Delta p) - A_y u_y \Delta p, \quad (26)$$

$$\omega_0 \left(1 - \frac{\omega_0}{2f_y} \right) = B_x v_x (\Delta q + \Delta p) - B_y (c_y + v_y) \Delta p, \quad (27)$$

где

$$A_x = \frac{3a^3 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{f_x^2}{a^2} \right)}{4f_x^2 \left(1 + \frac{6}{5} \frac{f_x^2}{a^2} \right)},$$

$$A_y = \frac{3ab^2 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{f_x^2}{a^2} \right)}{4f_x f_y \left(1 - \frac{6}{5} \frac{f_x^2}{a^2} \right)},$$

$$B_x = \frac{3a^2 b \left(1 - \frac{2}{3} \frac{f_y^2}{b^2} \right)}{4f_x f_y \left(1 - \frac{6}{5} \frac{f_y^2}{b^2} \right)},$$

$$B_y = \frac{3b^3 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{f_y^2}{b^2} \right)}{4f_y^2 \left(1 - \frac{6}{5} \frac{f_y^2}{b^2} \right)},$$

$$c_x = \frac{a \left(1 - \frac{4}{3} \frac{f_x^2}{a^2} \right)}{4EF_x \left(1 - \frac{2}{3} \frac{f_x^2}{a^2} \right)},$$

$$c_y = \frac{b \left(1 + \frac{4}{3} \frac{f_y^2}{b^2} \right)}{4EF_y \left(1 - \frac{2}{3} \frac{f_y^2}{b^2} \right)},$$

- F_x — площадь поперечного сечения несущих тросов, приведенная к единице ширины покрытия,
 F_y — то же, натягивающих тросов,
 u_x, v_x — смещение точки A в направлении оси x соответственно под действием нагрузок $\Delta H_x = 1$ и $\Delta H_y = 1$ (см. фиг. 2),
 — то же, для точки B .

Как было указано в нашей предыдущей работе [2], для предварительного подбора сечений элементов может применяться упрощенная формула

$$\Delta p = \frac{\Delta q}{1 + \frac{F_x f_x^2 b^4}{F_y f_y^2 a^4}}. \quad (28)$$

Следует все же отметить, что в случае отсутствия у контура неподвижных точек влияние деформации контура может быть весьма существенным.

4. Определение частот собственных колебаний покрытия

При определении собственной частоты колебания покрытия исходим из метода Релея-Ритца и рассмотрим только основные тоны собственных частот. При этом используются формулы для определения деформаций, полученные при оценке статической работы экрана.

Смещение в направлении оси z (см. фиг. 1) пусть представляет собой периодическую функцию от времени

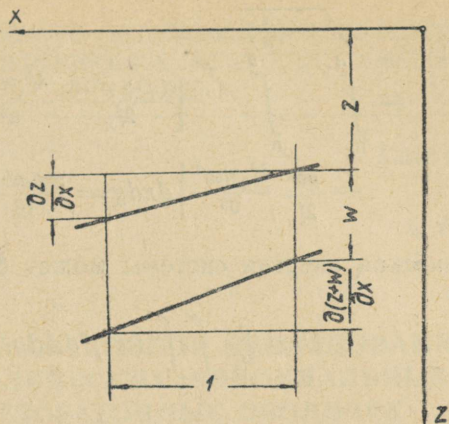
$$\bar{w} = w \cos \omega t, \quad (29)$$

где w — смещение как функция от координат x и y ,
 $f = 2\pi\omega$ — круговая частота собственных колебаний,
 ω — частота собственных колебаний.

Для нахождения потенциальной энергии системы рассмотрим деформации элемента полоски (фиг. 3). Длина элемента до деформации составляет $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$ и после смещения на

$w - \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}$. Учитывая, что покрытие пологое

Фиг. 3



$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \ll 1\right)$ и смещения малые $\left(\frac{\partial w}{\partial x} \ll \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \ll \frac{\partial z}{\partial y}\right)$, получим относительные удлинения

$$\varepsilon_x = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (30)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (31)$$

Усилие в полоске считаем постоянным по длине

$$T_x = \frac{(q+p)a^2}{2f_x}, \quad (32)$$

$$T_y = \frac{pb^2}{2f_y}. \quad (33)$$

Учитывая, что поверхность покрытия представляет собой гиперболический параболоид (1), а функция прогиба аппроксимируется одночленным выражением (16), имеем необходимые частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2f_x x}{a^2}, & \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{2w_0 x}{a^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-2f_y y}{b^2}, & \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{-2w_0 y}{b^2}. \end{aligned}$$

Максимальное значение потенциальной энергии (при $\cos \omega t = 1$) равно

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int \int (T_x \varepsilon_x + T_y \varepsilon_y) dx dy =$$

$$= \int_0^a \int_0^b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \left[\frac{(q+p)a^2}{2f_x} \frac{4f_x \omega_0 x^2}{a^2} - \frac{pb^2}{2f_y} \frac{4f_y \omega_0 y^2}{b^2} \right] dx dy = \frac{\pi \omega_0 abq}{16}. \quad (34)$$

Кинетическая энергия системы может быть представлена формулой

$$U = \frac{q}{2g} \int_S (\omega^1)^2 dx dy. \quad (35)$$

Подставляя сюда максимальное значение производной ω по t

$$\omega^1 = -\omega_0 \omega \left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 \right] \quad (36)$$

находим

$$U_{\max} = \frac{q\omega_0^2 \omega_0^2}{2g} \int_0^a \int_0^b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 \right] dx dy = \frac{\pi \omega_0^2 ab \omega_0^2 q}{24g}, \quad (37)$$

где ω_0 — статический прогиб покрытия под действием собственного веса, определяемый из системы уравнений (26), (27).

Приравнивая максимальные значения потенциальной и кинетической энергии, находим частоту собственных колебаний экрана

$$f = 2\pi\omega = 2\pi \sqrt{\frac{2\omega_0}{3g}}. \quad (38)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Х. Лауль, В. Я. Кульбах, А. А. Сумбак. О вопросах статического расчета и испытания конструкций покрытия Таллинской певческой эстрады. Труды ТПИ, серия А, № 184, 1961.
2. В. Р. Кульбах. Упрощенный расчет предварительно напряженных висячих покрытий отрицательной кривизны. Труды ТПИ, серия А, № 200, 1963.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КОНОИДАЛЬНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОБОЛОЧЕК

1. Введение

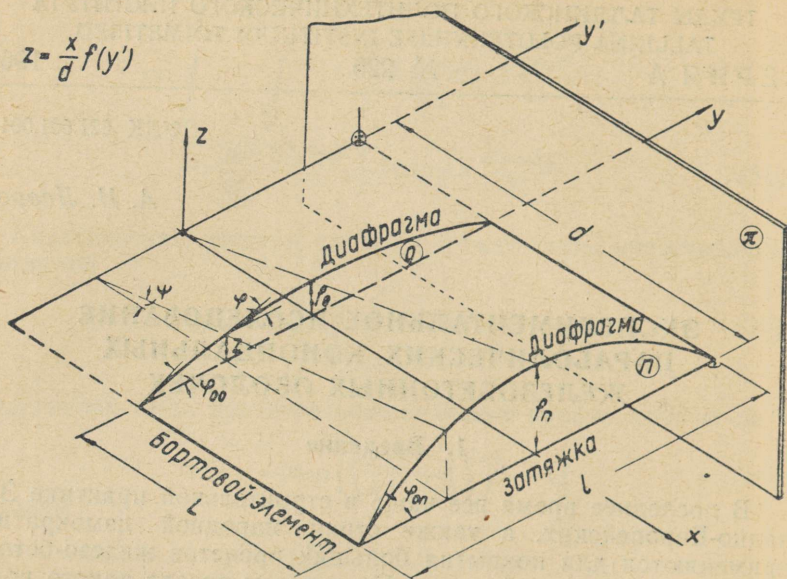
В последнее время все чаще в строительной практике Западно-Европейских, а также стран народной демократии, применяются для покрытия больших пролетов железобетонные коноидальные оболочки. По данным автора такого рода покрытия в Советском Союзе еще не возводились. Несущая способность коноидальных оболочек определялась на основе экспериментальных испытаний (результаты которых не опубликовывались) или расчета различными методами, обоснованных на безмоментной теории [4, 5], которые неправдоподобно описывают работу оболочки [1].

Поэтому возникла потребность экспериментального исследования моделей коноидальных оболочек, чтобы выяснить распределение усилий в оболочке, диафрагме и бортовом элементе, а также определить роль изгибающих моментов и несущую способность конструкции. Серия испытаний была проведена на двух типах оболочек. Модель оболочки загружалась три раза (при последнем загрузении оболочка доводилась до разрушения).

2. Геометрия и изготовление модели

Модели коноидальных оболочек, направляющими которых являлись квадратные параболы подъемами $f_n = 60$ см и $f_0 = 25$ см, изготавливались с поперечным пролетом $l = 240$ см. Продольные пролеты L равнялись 120 и 180 см. Геометрию коноидальных поверхностей см. фиг. 1.

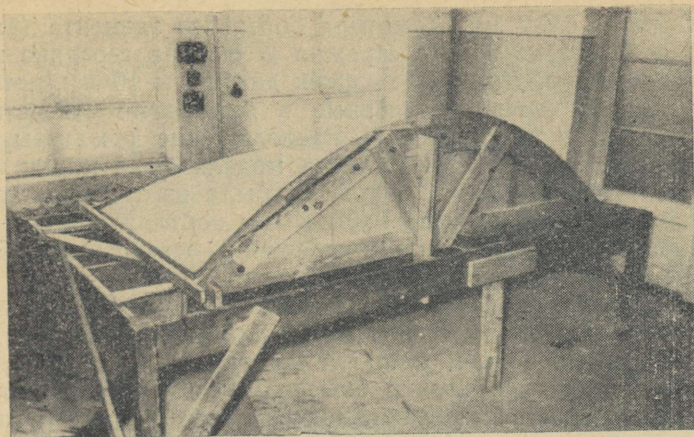
Поперечные сечения диафрагм 3×6 см и бортовых элементов 3×3 см, толщина криволинейной части 9 мм.



Фиг. 1. Схема коноидальной поверхности

Таким образом, размеры модели были в масштабе 1 : 10 и тем самым напряжения, измеренные на модели, и напряжения действительной конструкции при одинаковой внешней нагрузке на единицу поверхности равны. Несущая конструкция опалубки была изготовлена в виде ферм, к которым с внутренней стороны были прикреплены болтами два ряда косяков (толщиной 3 см), которые и являлись опалубкой диафрагмы (см. фиг. 2).

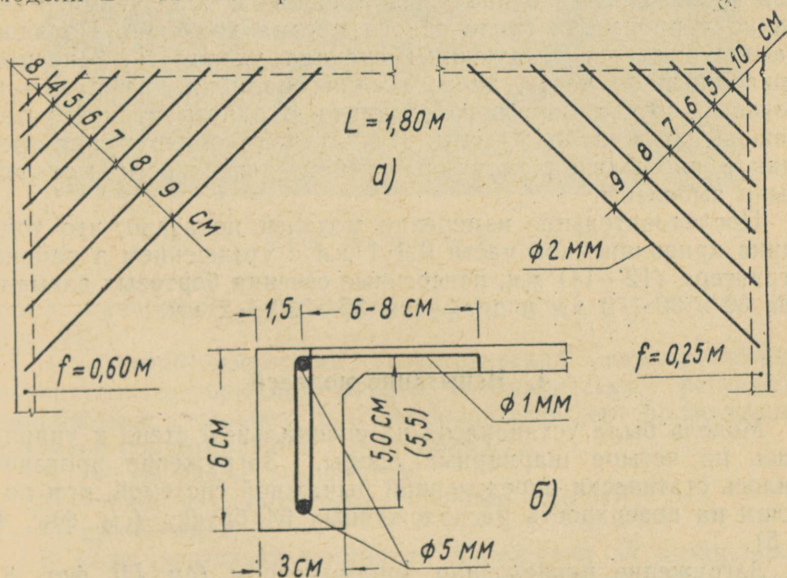
Поверхность оболочки создавалась из отдельных полос 10-миллиметровой фанеры, шириной приблизительно в 20 см, которые крепились к косякам при помощи уголков и шурупов. Для устранения провисания фанерной поверхности опалубки в середине продольного пролета была установлена деревянная ферма. При помощи клиньев поверхность была поднята на нужную высоту. Неровность поверхности опалубки была исправлена техническим пластилином. Опалубка бортового элемента была создана при помощи боковых досок. Во избежание сцепления бетона с опалубкой и увлажнения древесины опалубка модели была трижды покрыта олифой до ее полного впитывания. Непосредственно перед бетонированием поверхность была покрыта тонким слоем масла.



Фиг. 2. Общий вид опалубки модели

3. Армирование и бетонирование

Криволинейная часть оболочки не армировалась, за исключением всех углов оболочки под 45° к направляющим для модели $L=120$ см проволокой $3 \text{ } \varnothing 2$ мм и для модели $L=$



Риг. 3. а) расположение арматуры в углах оболочки, б) поперечное сечение диафрагмы

= 180 см — 6 Ø 2 мм. Арматура бортового элемента (стрингера) состояла из одного стрежня Ø 8 мм в середине поперечного сечения. Диаметр затяжек диафрагм 10 мм, которые пропускались через оставленные в диафрагме отверстия и крепились гайкой с шайбой. Расположение арматуры диафрагмы см. фиг. 3. Вся арматура модели была марки СТ-3.

Модель коноидальной оболочки была изготовлена из цементного раствора состава 1 : 3 на базе портландцемента марки «400» и песка, просеянного через сито, отверстиями 2,5 мм. Водоцементное отношение — 0,35.

Бетонирование начали с укладки цементного раствора в бортовые элементы и диафрагмы, притом уплотнение производили штыкованием и постукиванием по опалубке. Криволинейную часть оболочки бетонировали вручную и уплотняли штыкованием и заглаживанием. Нужную толщину получили заглаживанием стальным уголком, который упирался на боковые фанерные стенки опалубки диафрагмы. После бетонирования производили уход в течении двух недель. Для этого вся поверхность была покрыта тканью, которую все время увлажняли.

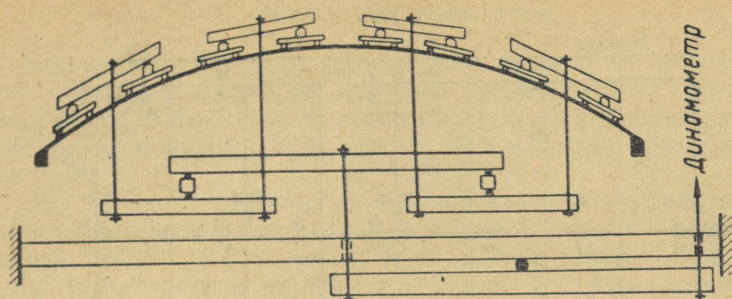
Во время бетонирования модели были изготовлены образцы (кубики, призмы, балочки и «восьмерки») для определения модулей упругости и прочности бетона. Хранение образцов происходило в одинаковых условиях с оболочками. Распалубку произвели после одного месяца хранения. Порядок распалубки был следующим: сначала удалялась фанерная криволинейная часть, далее косяки опалубки диафрагмы и боковые брусья бортового элемента с одновременной установкой затяжки диафрагмы. Для лучшего обнаружения трещин и наблюдения за их развитием поверхности моделей были выбелены.

Последовательное измерение моделей показало, что толщина криволинейной части 9 ± 1 мм с утолщением в районе стрингера (12—14) мм, поперечные сечения бортовых элементов $30 \times 30 \pm 2$ мм и диафрагм $30 \times 60 \pm 2$ мм.

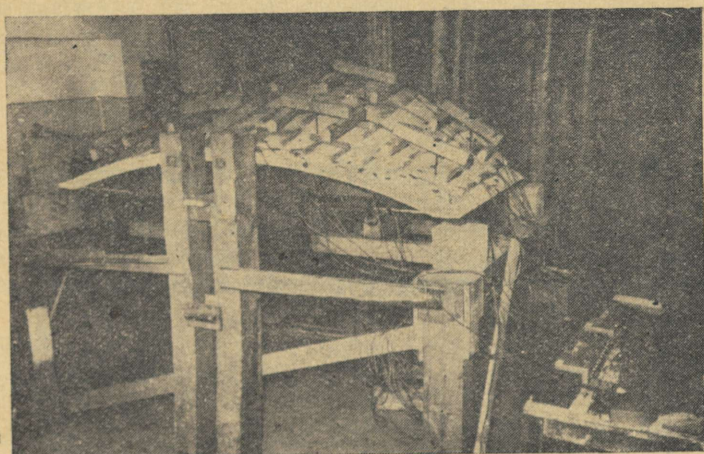
4. Испытание моделей

Модель была установлена на специальный стенд и упиралась на четыре шарнирных опоры. Загружение производилось статически определенной рычажной системой, при помощи на поверхность расположенных 64 бруска (см. фиг. 4 и 5).

Загружение происходило динамометром (см. [2], фиг. 8. и 9) по ступеням 200 кг на всю оболочку. Для определения деформаций и перемещений были использованы следующие



Фиг. 4. Схема загрузки



Фиг. 5. Общий вид модели до испытания

виды измерений (расположение средств измерений см. фиг. 6):

1) электротензометрия (электрический автоматический измеритель деформаций ЭИД-3, автоматический регулятор напряжений, переключатель датчиков, комплект проволочных датчиков сопротивления 119,5—120,0 Ω);

2) механические тензометры;

3) уровни и клинометры уровневые (см. [3]);

4) индикаторы.

В ходе испытаний постоянно наблюдали за возникновением и развитием трещин. Общий вид модели перед испытанием см. фиг. 5.

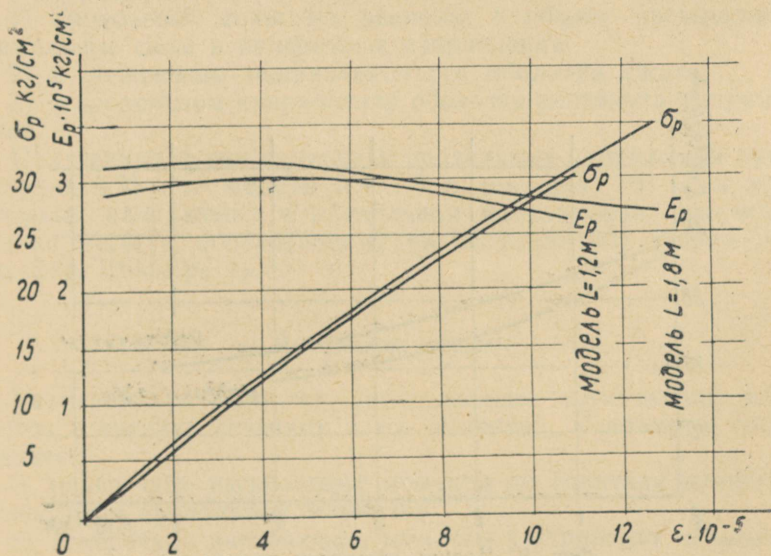
5. Результаты испытаний

Так как модули упругости бетона зависят от напряженного состояния, то для определения напряжений на образцах были определены зависимости относительного удлинения или прогиба к модулю упругости и напряжению (см. фиг. 7, 8 и 9).

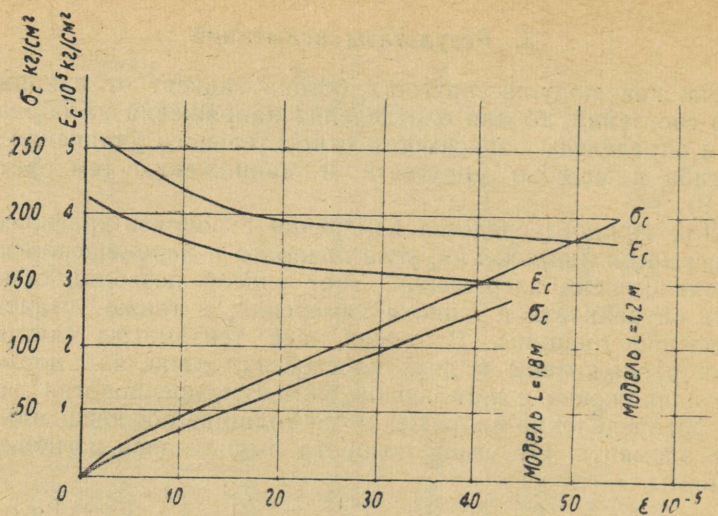
Для каждого средства измерения строились графические зависимости напряжения, угла поворота и перемещения к величине степени загрузки. Этот способ позволил обнаружить случайности и ошибки измерений, а также установить появление трещины. В точках, где тензометры (датчики) были расположены в двух плоскостях, вычисляли нормальные напряжения и изгибающие моменты, предполагая линейное распределение напряжений по толщине оболочки или высоте элемента. От углов поворота вычислялись изгибающие моменты.

а) Трещины и несущая способность

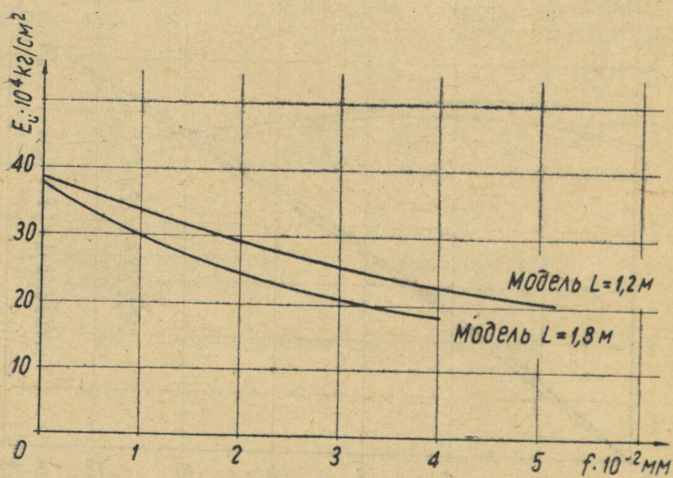
При модели $L = 1,20$ м первые трещины появились в четвертях диафрагмы низкого подъема и при нагрузке ~ 400 кг/м². Эти вертикальные трещины во внешней боковой плоскости диафрагмы развивались до нагрузки ~ 600 кг/м² (при дальнейшем нагружении развития трещин не наблюда-



Фиг. 7. Модуль упругости при растяжении



Фиг. 8. Модуль упругости при сжатии



Фиг. 9. Модуль упругости при изгибе

лось). В пределах вышеуказанных нагрузок появились трещины в нижней поверхности стрингера в середине и ближе к диафрагме меньшего подъема. При нагрузке $\sim 600 \text{ кг/м}^2$ появились трещины под 45° в углах поверхности криволинейной части оболочки только вблизи диафрагмы меньшего подъема. Разрушение произошло при нагрузке $\sim 900 \text{ кг/м}^2$ (не учитывая собственного веса модели и системы передачи нагрузки) от главных напряжений, при чем трещины образовались за пределами косой арматуры.

При модели $L = 1,80 \text{ м}$ вначале появились вертикальные трещины в четвертях диафрагмы во внешней боковой поверхности при нагрузке $\sim 300 \text{ кг/м}^2$, которые развились при дальнейшем нагружении в криволинейную часть оболочки.

При нагрузке $\sim 400 \text{ кг/м}^2$ появились трещины у низкой диафрагмы от главных растягивающих напряжений (под 45°), вследствие которых модель оболочки разрушилась при нагрузке 460 кг/м^2 . В стрингере во время нагружения никаких трещин не наблюдалось. Различие несущих способностей можно объяснить различными продольными пролетами и сроками твердения бетона (соответственно 13 и 8 недель).

б) Нормальные напряжения

Рассматривая распределение нормальных напряжений при обоих типах моделей в среднем поперечном сечении и на четвертях продольного пролета, можно отметить следующее:

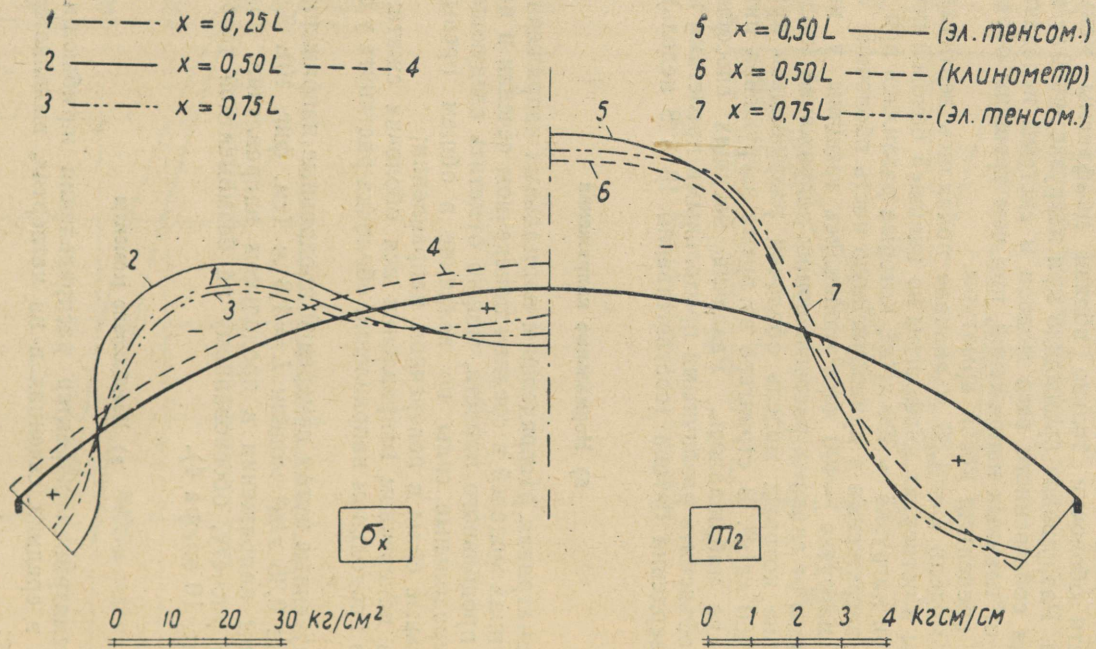
- 1) продольные силы по величине в общем превышают нормальные силы в поперечном направлении;
- 2) в поперечном направлении вся оболочка сжата;
- 3) в продольном направлении оболочка растянута у стрингеров.

Полученные путем измерений продольные напряжения при нагрузке $0,35 \text{ т/м}^2$ модели $L = 1,8 \text{ м}$ (см. фиг. 10). Так же показаны напряжения в продольном направлении, полученные по расчету, обоснованному на безмоментной теории [4] (см. фиг. 10 эпюра 4).

в) Изгибающие моменты

Рассматривая характер распределения изгибающих моментов в средних сечениях и на четвертях, выявляется следующее:

- 1) поперечные изгибающие моменты по величине намного превосходят продольные моменты;
- 2) поперечные изгибающие моменты у стрингера меньше



Фиг. 10. Элюры продольных напряжений и поперечных изгибающих моментов

по сравнению с максимальными моментами на коньке и в пролете.

Полученные путем измерений поперечные изгибающие моменты в середине продольного пролета при нагрузке $0,35 \text{ т/м}^2$ (см. фиг. 10) приблизительно равны моментам в четвертях продольного пролета.

г) Усилия стрингера

Бортовой элемент (стрингер) во всех случаях подлежал растяжению. Стрингер модели $L=1,20 \text{ м}$ испытывал сравнительно маленький изгиб, при модели $L=1,80 \text{ м}$ изгиб стрингера практически отсутствовал (об этом свидетельствовало отсутствие трещин). Наибольшие растягивающие силы наблюдались в середине продольного пролета, наименьшие у диафрагм. После первого загрузения модели $L=1,2 \text{ м}$ произошло перераспределение усилий оболочки, при том сила стрингера увеличилась, а сила затяжки уменьшилась.

д) Усилия диафрагм

В плоскости диафрагмы наблюдались сравнительно маленькие изгибающие моменты. Коньки диафрагм испытывали растяжения, а у башмака сжатие.

6. Выводы

Из результатов экспериментального исследования можно сделать следующие выводы:

1) распределение продольных сил экспериментального исследования не соответствует результатам, полученным по обоснованным на безмоментной теории расчетным методам (по методу М. Соаре и Б. Кой более-менее постоянное сжатие по всему поперечному сечению и большие напряжения у низкой диафрагмы, чем в середине продольного пролета);

2) поперечные нормальные силы в общем меньше, чем максимальные продольные силы (соответственно методам вышеуказанных авторов того же порядка или большие);

3) в поперечном направлении вся оболочка сжата, а в продольном направлении продольная сила имеет переменные знаки (по безмоментной теории только сжатие);

4) роль изгибающих моментов значительна, притом поперечные изгибающие моменты сравнительно большие, чем продольные моменты;

5) вертикальные трещины на внешних плоскостях диафрагм можно объяснить работой оболочки в безмоментном состоянии только в первоначальной стадии загружения;

6) коноидальные оболочки имеют хорошую несущую способность.

Из вышеизложенного следует, что безмоментная теория не может быть основой расчета исследуемых оболочек. В основу расчета предлагается применить т. н. полубезмоментную теорию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Х. Лауль, А. И. Лавров. О расчете коноидальных железобетонных оболочек. См. наст. сборник, стр. 95.
2. А. А. Сумбак. Экспериментальное исследование предварительно напряженных цилиндрических железобетонных оболочек. Труды ТПИ, 1959.
3. Х. Х. Лауль, В. Р. Кульбах, А. А. Субмак. О вопросах статического расчета и испытания конструкций покрытия Таллинской певческой эстрады. Труды ТПИ, 1961.
4. M. Soare. Zur Membrantheorie der Konoidschalen. Der Bauingenieur, 1958.
5. В. Коу. Praca Statyczna lupin Konoidalnych w swiecie przeprowadzonych badan. Inzynieria i budownictwo, 1958.

Х. Х. Лауль, А. И. Лавров

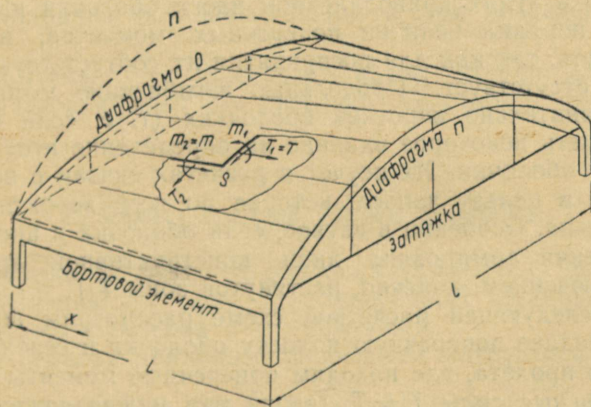
О РАСЧЕТЕ КОНОИДАЛЬНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОБОЛОЧЕК

1. Введение

В строительной практике для покрытия зданий прямоугольного планового очертания применяются коноидальные поверхности отрицательной гауссовой кривизны (например, сеткой колонн 18×12 , 18×18 , 24×18 и др. м). Вышеуказанные оболочки (см. фиг. 1) имеют ряд преимуществ:

— у продольно-многопролетных панелей вследствие различных подъемов диафрагм образуется серпообразное световое отверстие для дневного освещения середины пролета здания, где влияние бокового освещения меньше;

— эта линейная поверхность упрощает возведение опалубки и арматурные работы (например, по сравнению с пологими оболочками).



Фиг. 1

Конструкция покрытия коноидальной оболочки состоит из криволинейной поверхности, из одной, низкого подъема (O) и одной высокого подъема (n) диафрагм и сравнительно низких бортовых элементов на прямолинейных гранях (см. фиг. 1). Обычно размеры волны (поперечного пролета) l больше продольного пролета L .

Расчет коноидальных оболочек по моментной теории до сих пор не удавалось довести до численных результатов, не говоря о сложных контактных задачах на прямолинейных и криволинейных краях оболочки. В ряде случаев эта проблема решена на основании безмоментной теории, где внутренние силы T_1 ; T_2 и S находят решением дифференциальных уравнений, полученных от уравнений равновесия, при применении метода конечных разностей [3] или применением методов решения общих дифференциальных уравнений с частными производными [2, 4]. Результаты решения конечно не могут удовлетворять граничные условия на прямолинейных гранях. Еще более сложна эта проблема на криволинейной грани. Например, если удовлетворить необходимое конструктивное условие $T_1 = 0$ диафрагмы O , то не хватит постоянных интегрирования, чтобы удовлетворить такое же условие диафрагмы n . Учитывая вышеизложенное и еще обстоятельство, что краевой эффект при прямолинейных (асимптотических) краях распространяется на всю поверхность оболочки, приходим к выводу, что основная работа оболочки не может быть описана методами безмоментной (т. н. мембранной) теории.

В настоящей работе предлагается технический метод расчета коноидальных оболочек, обоснованный на т. н. полубезмоментной теории, где учитываются только поперечные изгибающие моменты $m_2 = m$. Крутящие моменты m_{12} , которые особенно в углах криволинейной части оболочки имеют, вероятно, порядка величин поперечных моментов, не могут возникнуть, так как для восприятия их соответствующая арматура отсутствует. Продольные изгибающие моменты m_1 , при сравнительно коротких оболочках (т. е. если $l:L > 2$) могут иметь некоторое влияние на определение несущей способности оболочки. Их учет в расчетах связан с некоторой ошибкой в пользу запаса, которая по всей вероятности незначительна. Особенно в случае, если оболочка в продольном направлении армирована лишь конструктивной арматурой (за исключением, конечно, растянутой зоны T_1).

В последующей расчетной схеме рассмотрим вначале в первой задаче поперечную полосу оболочки в середине продольного пролета, где находим поперечные моменты $m = m_2$, и продольные силы $T = T_1$, вводя ряд нижеизложенных допущений (см. п. 2). Во второй задаче [8] находим общие ре-

акции A_0 и A_n от всей нагрузки оболочки соответственно в диафрагмах O и n . Вертикальные составляющие данных реакций передаются на диафрагмы сдвигающими силами S . Распределение последних определяют так, чтобы было выполнено условие минимума потенциальной энергии диафрагмы. Необходимо отметить, что справедливо было бы требовать минимум потенциальной энергии всей конструкции в целом, но этому следуют почти неодолимые математические затруднения. Можно приблизительно оценить, что при неблагоприятном распределении S вдоль диафрагмы в диафрагму может накопиться в несколько раз больше потенциальной энергии, чем в криволинейную часть оболочки. Поэтому в данном случае пренебрежение потенциальной энергией поверхности оболочки не может быть связано с большой ошибкой. Это показывали и экспериментальные исследования моделей — в диафрагмах не наблюдалось значительных изгибающих моментов. Рассматривая описанную задачу, получим распределение внутренних сил в диафрагмах и максимальные растягивающие главные напряжения в углах оболочки, которые позволяют определить мощности косой арматуры.

Таким образом, не устанавливая цель определения подробного распределения усилий в криволинейной поверхности оболочки, данная схема позволяет все-таки определить все усилия для конструирования или оценки несущей способности оболочки. Ниже рассматриваются в практике наиболее встречающиеся два основных случая:

- 1) продольные края оболочек не опертые;
- 2) продольные края опертые колоннами или продольными стенами.

Последний вариант встречается в случае, когда ширина здания равняется волне оболочки, а также в случае временного подпирания бортового элемента при возведении оболочки.

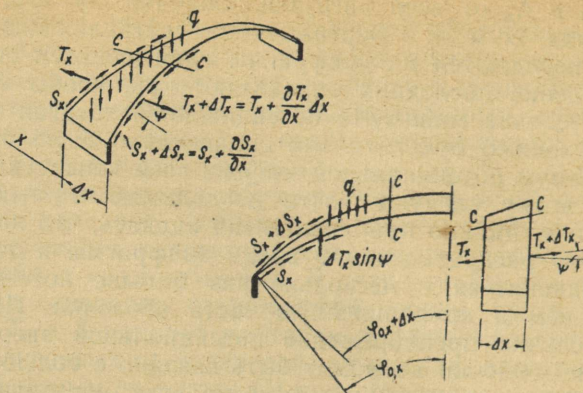
Как вытекает из нижеизложенного, второй случай не всегда благоприятный относительно некоторых внутренних сил.

2. Расчет средней полосы оболочки

Рассмотрим в середине оболочки ($x \approx 0,5L$) поперечную полосу шириной Δx (фиг. 2). Поперечный изгибающий момент $m = m_2$ в сечении $c-c$ получают:

1) от полосы приложенной внешней нагрузки q и q_0 ;

2) от сдвигающих сил S_x и $S_x + \Delta S_x = S_x + \frac{\partial S_x}{\partial x} \Delta x$;



Фиг. 2

3) от вертикальной составляющей приращения продольных сил, т. е. $\Delta T_x \sin \psi = \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \cdot \sin \psi$, где ψ см. фиг. 2.

При расчете поперечных моментов вводятся следующие упрощающие допущения:

1) поперечные моменты $m_2 = \text{const}$ вдоль оболочки, вследствие чего поперечная арматура в продольном направлении также постоянная;

2) продольные силы T_1 изменяются вдоль оболочки приблизительно по закону квадратной параболы, имея нулевые значения в диафрагмах;

3) как диафрагмы, так и разрез $x \approx 0,5 L$ очерчены по окружности, с соответствующими центральными углами $2\varphi_{00}$, $2\varphi_{0п}$ и $2\varphi_0 = \varphi_{00} + \varphi_{0п}$. Необходимо отметить, что разрез $x = 0,5 L$ не является точно частью окружности, а в некоторой мере приближается к эллипсу с таким же подъемом. Допущенная неточность вызывает очень маленькую ошибку, и, кроме того, она в пользу запаса;

4) как показывают сравнивающие вычисления (здесь не приводятся), возможно при достаточно узкой полоске, находящейся в середине продольного пролета, отказаться от влияния приращения φ_{0x} на ширине полосы Δx и при определении изгибающих моментов от сдвигающих сил вести расчет средней величиной φ_0 . Таким образом, поперечные изгибающие моменты можно вычислять от приращений сдвигающих сил

$\Delta x \cdot \frac{\partial S}{\partial x} = \Delta x \cdot \zeta$. Если ширина полоски $\Delta x = 1$, то изгибающие моменты вызывают $\zeta = \frac{\partial S}{\partial x}$;

5) в середине продольного пролета $x = 0,5L$, в районе рассматриваемой полосы приращение продольных сил $\frac{\partial T}{\partial x} \approx 0$. Тем самым отпадают поперечные моменты в поперечной полоске, вызванные вертикальными составляющими приращения продольных сил. Отметим, что поперечная полоска, которой точно соответствует только что указанное допущение, вообще извилистая.

а) Случай неопертого продольного края

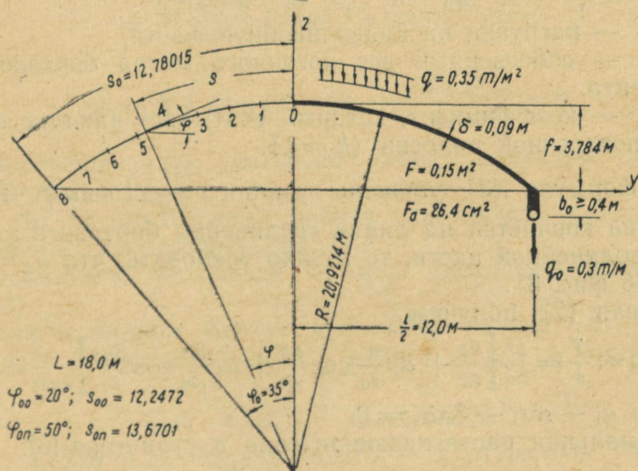
На фиг. 3 представлены геометрические характеристики оболочки. В данном случае приращение сдвигающих сил ξ для криволинейной части назначается в виде:

$$\xi = \frac{\partial S}{\partial x} = a_1 \frac{s}{s_0} + a_1 \sin \frac{\pi s}{s_0} + a_3 \sin \frac{3\pi s}{s_0}, \quad (1)$$

по высоте бортового элемента $\xi = \text{const} = a_1$.

Выбор ξ -диаграмм в виде (1) вызван следующими соображениями.

В случае большого поперечного пролета l ξ -диаграммой приходится уравнивать сравнительно большие отрицательные поперечные изгибающие моменты m_0 от внешней нагрузки q и q_0 . Для этого оболочка пытается развить возможно большие вертикальные составляющие ξ -диаграммы в районе бортового элемента. Это удастся, несмотря на сравнительно маленькую высоту бортового элемента b_0 , при помощи большой величины параметра a_1 . Выбранная система параметров (1) способствует сосредоточению основной ξ -диаграммы



Фиг. 3

в район линии соединения бортового элемента и криволинейной части оболочки.

При осуществлении этого основного принципа работы оболочки оказывает помощь еще появление трещины на протяжении бортового элемента. Таким образом арматура на дне бортового элемента работает в виде стрингера. Трещина не может выйти за пределы бортового элемента, так как тогда ухудшится восприятие отрицательных изгибающих моментов. В самом деле, тогда прямоугольная ξ -диаграмма распространяется и в криволинейную часть, что снижает величину параметра a_T и тем самым уменьшает положительные изгибающие моменты от ξ -диаграммы. На основе аналогичных соображений не уместно включить в ξ -диаграмму член $a_2 \sin \frac{2\pi s}{s_0}$.

Максимальные продольные силы в середине продольного пролета оболочки вычисляются, учитывая вышеизложенные упрощения, при помощи формулы [1]:

$$\max T = \frac{L^2}{8} \frac{\partial \zeta}{\partial s}. \quad (2)$$

Условие равновесия половины поперечной полоски в вертикальном направлении

$$ks_0q + q_0 + \left[b_0 + R \left(\frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} - \cos \varphi_0 \right) \right] a_1 + \frac{\frac{l}{2}}{\frac{\pi}{\varphi_0} - \frac{\varphi_0}{\pi}} a_1 + \frac{\frac{l}{2}}{\frac{3\pi}{\varphi_0} - \frac{\varphi_0}{3\pi}} a_3 = 0, \quad (3)$$

где q — нагрузка на криволинейную часть,
 q_0 — собственный вес погонного метра бортового элемента,
 k — коэффициент, который учитывает влияние наклона ψ поперечной полоски ($k \approx 1$).

В формуле (3) упущены усилия $\frac{\partial T}{\partial x} \cdot l \cdot \sin \psi$. Так как трещина кончается на линии соединения бортового элемента и криволинейной части, то можно требовать, что $\sigma_x = 0$ (см. точка 8 фиг. 3).

Учитывая (2), получим

$$\sigma_x = \frac{T}{\delta} = \frac{L^2}{8\delta} \left[\frac{a_1}{s_0} + a_1 \frac{\pi}{s_0} \cos \frac{\pi s}{s_0} + a_3 \frac{3\pi}{s_0} \cos \frac{3\pi s}{s_0} \right]_{s=s_0} = 0, \quad (4)$$

откуда $a_1 - \pi a_1 - 3\pi a_3 = 0$.

Максимальная растягивающая сила в стрингере [6]:

$$\max N = -a_1 \frac{L^2}{8}, \quad (5)$$

которая изменяется вдоль пролета также по закону квадратной параболы (у диафрагм $N = 0$).

Из трех параметров выражения (1) при помощи (3) и (4) можно выразить один (т. н. зависимый) через два (т. н. независимых) параметра.

В данном случае выбираем за независимый параметр a_1 . Тогда зависимые параметры можно найти при помощи выражений

$$\begin{aligned} a_1 &= k_{11}a_1 + K_1; \\ a_3 &= k_{31}a_1 + K_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая (6), получим поперечный изгибающий момент

$$\begin{aligned} m &= m_0 + a_1 m_1 + a_1 m_1 + a_3 m_3 = \\ &= m_0 + K_1 m_1 + K_3 m_3 + \\ &\quad + (m_1 k_{11} m_1 + k_{31} m_3) a_1 = \\ &= m'_0 + m'_1 a_1. \end{aligned} \quad (7)$$

где m_1, m_1, m_3 — изгибающие моменты поперечной полоски от компонентов ξ -диаграммы, если соответствующие параметры a_1, a_1 и a_3 равняются единице.

Аналогично

$$\begin{aligned} \max T &= K_1 \max T_1 + K_3 \max T_3 + \\ &+ (\max T_1 + k_{11} \max T_1 + k_{31} \max T_3) a_1 = \\ &= \max T'_0 + \max T'_1 a_1, \end{aligned}$$

так как $\max T_0 = 0$.

Независимый параметр a_1 определяют из одного условия минимума потенциальной энергии четверти оболочки

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} &= [a_1 \int_0^{s_0} (m'_1)^2 ds + \int_0^{s_0} m'_0 m'_1 ds] + \\ &+ \frac{0,2(6)\delta^2}{6} \left[\int_0^{s_0} \max T'_0 \cdot \max T'_1 ds + \right. \\ &\left. + a_1 \left(\int_0^{s_0} (\max T'_1)^2 ds + \frac{\delta}{F_a} \frac{E_b L^4}{E_a 64} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где последний член учитывает работу арматуры стрингера в бортовом элементе.

В (8) не учитывается работа сдвигающих сил, а также поперечных продольных сил T_2 .

Рассмотрим численный пример (исходные данные см. фиг. 3).

Если в данном случае $k = 1,012$, то по (3) получим $1,012 \cdot 12,780 \cdot 0,35 + 0,30 + (0,40 + 20,921 \cdot 0,1198) a_1 +$
 $+ \frac{12}{5,143 - 0,194} a_1 + \frac{12}{15,429 - 0,065} a_3 = 0,$

т. е. $4,8270 + 2,9065 a_1 + 2,4251 a_1 + 0,7811 a_3 = 0$ (А) и по (4) получим

Таблица 1

Сечение	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$-q \frac{R^2}{100} \psi_0$	-27,706	-21,013	-15,246	-10,422	-6,545	-3,600	-1,559	-0,378	0
$-q_0 \frac{R}{100} \psi_0$	-3,602	-3,123	-2,647	-2,176	-1,714	-1,262	-0,824	0,403	0
$-K_1 \frac{R^2}{100} \psi_1$	20,757	13,165	7,611	3,891	1,672	0,549	0,111	0,008	0
$-K_3 \frac{R^2}{100} \psi_3$	-3,651	-2,830	-2,157	-1,518	-0,891	-0,382	-0,095	-0,007	0
$\Sigma = m'_0$	-14,208	-13,801	-12,439	-10,225	-7,478	-4,695	-2,367	-0,780	0
$-\frac{R^2}{100} \psi_1$	-12,215	-8,568	-5,635	-3,394	-1,809	-0,749	-0,243	-0,032	0
$-k_{1I} \frac{R^2}{100} \psi_1$	12,854	8,152	4,713	2,409	1,035	0,340	0,069	0,005	0
$-k_{3I} \frac{R^2}{100} \psi_3$	-2,789	-2,157	-1,644	-1,157	-0,674	-0,291	-0,072	-0,005	0
$-q_0 \frac{R}{100} \psi_a$	-4,801	-4,162	-3,528	-2,900	-2,284	-1,682	-1,099	-0,537	0
$\Sigma = m'_I$	-6,945	-6,735	-6,094	-5,047	-3,737	-2,382	-1,345	-0,569	0

$K_1 \frac{L^2}{8} \frac{\pi}{s_0} \cos \frac{\pi s}{s_0}$	-22,2	-20,5	-15,7	-8,5	0	8,5	15,7	20,5	22,2
$K_3 \frac{L^2}{8} \frac{3\pi}{s_0} \cos \frac{\pi s}{s_0}$	22,2	8,5	-15,7	-20,5	0	20,5	15,7	-8,5	-22,2
$\Sigma = \max T'_0$	0	-12,0	-31,4	-29,0	0	29,0	31,4	12,0	0
$\frac{L^2}{8s_0}$	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1
$k_{11} \frac{L^2}{8} \frac{\pi}{s_0} \cos \frac{\pi s}{s_0}$	-13,7	-12,8	-9,8	-5,3	0	5,3	9,8	12,8	13,7
$k_{31} \frac{L^2}{8} \frac{3\pi}{s_0} \cos \frac{3\pi s}{s_0}$	16,8	6,4	-11,8	-15,5	0	15,5	11,8	-6,4	-16,8
$\Sigma = \max T'_1$	6,2	-3,3	-18,5	-17,6	3,1	23,1	24,7	9,5	0

$$a_1 = 0,3183a_1 - 3,0a_3. \quad (\text{Б})$$

из (А) и (Б) получим

$$\begin{aligned} a_1 &= -1,3809a_1 - 2,2300, \\ a_3 &= 0,5664a_1 + 0,7433. \end{aligned}$$

Используя таблицы [5] для определения m_i , производим расчет m'_0 и m'_1 (см. табл. 1). Аналогично находим $\max T'_0$ и $\max T'_1$ (см. табл. 2).

Встречающиеся интегралы в условии минимума потенциальной энергии вычисляем по методу Симпсона. Например,

$$\begin{aligned} \int (m'_1)^2 ds &= \frac{12,780}{24} (6,945^2 + 4 \cdot 6,735^2 + 2 \cdot 6,094^2 + \\ &+ 4 \cdot 5,047^2 + 2 \cdot 3,737^2 + 4 \cdot 2,382^2 + 2 \cdot 1,345^2 + \\ &+ 4 \cdot 0,569^2) = 245,61. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\int (m'_0 m'_1) ds = 499,07;$$

$$\int (\max T'_1)^2 ds = 3120; \quad \int (\max T'_0 \cdot \max T'_1) ds = 4340.$$

Условие (8) дает

$$\begin{aligned} 245,66a_1 + 499,07 + \frac{0,267 \cdot 0,09^2}{6} [4340 + \\ + a_1 \left(3120 + \frac{0,09}{0,00264} \cdot \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 18^4}{2 \cdot 10^7 \cdot 64} \right)] = 0, \end{aligned}$$

откуда

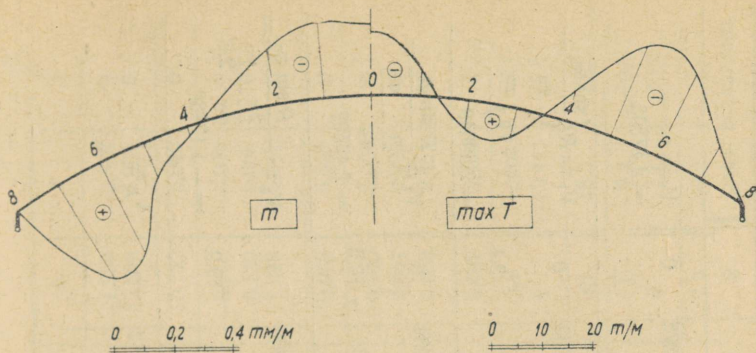
$$a_1 = -2,0122.$$

Из (6) находим $a_1 = 0,5486$ и $a_3 = -0,3964$.

Внутренние силы получим путем суммирования (см. табл. 3 и фиг. 4).

Таблица 3

Сечение	0	2	4	6	8
m'_0	-14,208	-12,439	-7,478	-2,367	0
$a_1 m'_1$	13,975	12,264	7,520	2,706	0
$\Sigma = m$	-0,233	-0,177	0,042	0,339	0
$\max T'_0$	0	-31,4	0	31,4	0
$a_1 \cdot \max T'_1$	-12,2	37,2	-6,2	-49,7	0
$\Sigma = \max T$	-12,2	+5,8	-6,2	-18,3	0
$a_1 \xi_1$	0	-0,50	-1,01	-1,51	-2,01
$a_1 \xi_1$	0	0,39	0,55	0,39	0
$a_3 \xi_3$	0	-0,28	0,40	-0,28	0
$\Sigma = \xi$	0	-0,39	-0,06	-1,40	-2,01



Фиг. 4

Максимальная растягивающая сила в стрингере (5)

$$\max N = \frac{18^2}{8} \cdot 2,0122 = 81 \text{ т.}$$

Усилия оболочки в основном сосредоточены в район бортового элемента (см. фиг. 4) для уравнивания отрицательных изгибающих моментов от внешней нагрузки. Возможно, что сосредоточение усилий в район бортового элемента еще увеличивается, если в функцию ζ ввести дополнительные члены. Таким образом продольные силы уменьшаются в районе конька (между точками 0 и 4). Но и при выбранной диаграмме поперечные изгибающие моменты маленькие и продольные силы с достаточной точностью.

Максимальные растягивающие главные напряжения в углу оболочки получаются в настоящей задаче

$$\sigma_1 = \frac{\max \zeta \cdot L}{b \cdot \delta} = \frac{2,012 \cdot 9,0}{1 \cdot 0,09} = 201,2 \text{ т/м}^2 = 20,12 \text{ кг/м}^2,$$

что очевидно требует установку косой арматуры. Необходимо отметить, что вопрос главных напряжений в углу оболочки подвергается дополнительному рассмотрению [8].

б) Случай опертого продольного края

В данном случае в поперечной полоске преобладают положительные изгибающие моменты, которые можно уменьшить за счет значительного уменьшения реакций на боковых опорах. Это достигается выбором функции ζ в виде:

$$\zeta = \frac{\partial s}{\partial x} = a_1 \frac{s}{s_0} + a_1 \sin \frac{\pi s}{s_0} + a_2 \frac{2\pi s}{s_0}, \quad (9)$$

где наоборот (1) доминирует член, содержащий параметр a_2 .

Таблица 4

Сечение	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Верг. результат
$m_0 = -q \frac{R^2}{100} \psi_0$ $T_0 = 0$	-27,706	-21,013	-15,241	-10,422	-6,545	-3,600	-1,559	-0,378	0	$V_0 = s_0 q =$ $= 4,47305$
$m_1 = -\frac{R^2}{100} \psi_1$ $T_1 = \frac{L^2}{8s_0}$	-12,215	-8,568	-5,635	-3,399	-1,809	-0,749	-0,243	-0,032	0	$V_1 = R \left(\frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} - \right.$ $\left. - \cos \varphi_0 \right) =$ $= 2,50649$
$m_1 = -\frac{R^2}{100} \psi_1$ $T_1 = \frac{L^2 \pi}{8 s_0} \cos \frac{\pi s}{s_0}$	-9,308	-5,904	-3,413	-1,745	-0,750	-0,246	-0,050	-0,004	0	$V_1 = \frac{R \sin \varphi_0}{\frac{\pi}{\varphi_0} - \frac{\varphi_0}{\pi}} =$ $= 2,42502$
$m_2 = \frac{R^2}{100} \psi_2$ $T^2 = \frac{L^2 2\pi}{8 s_0} \cos \frac{2\pi s}{s_0}$	7,769	5,873	4,024	2,400	1,176	0,429	0,094	0,006	0	$V_2 = -\frac{R \sin \varphi_0}{\frac{2\pi}{\varphi_0} - \frac{\varphi_0}{2\pi}} =$ $= -1,17780$
$m_p = -\frac{R}{100} \psi_a$ $T_p = 0$	-12,000	-10,404	-8,817	-7,249	-5,709	-4,205	-2,747	-1,342	0	$V_p = 1$

Сечение	0	1	2	3	4	5	6	7	8
m_0	-27,706	-21,013	-15,241	-10,422	-6,545	-3,600	-1,559	-0,378	0
$-4,47305 m_p$	53,677	46,538	39,441	32,426	25,536	18,810	12,286	6,004	0
$\Sigma = m'_0$	25,971	25,525	24,208	22,004	18,991	15,210	10,727	5,626	0
m_1	-12,215	-8,568	-5,635	-3,399	-1,809	-0,749	-0,243	-0,032	0
$-4,37957 m_2$	-10,718	-8,102	-5,551	-3,311	-1,622	-0,592	-0,130	-0,008	0
$-4,13135 m_p$	49,576	42,983	36,428	29,949	23,585	17,373	11,348	5,546	0
$\Sigma = m'_1$	26,643	26,313	25,242	23,239	20,154	16,032	10,970	5,506	0
m_1	-9,308	-5,904	-3,413	-1,745	-0,750	-0,246	-0,050	-0,004	0
$0,5 m_2$	3,885	2,936	2,012	1,200	0,588	0,215	0,047	0,003	0
$-1,83612 m_p$	22,033	19,103	16,190	13,311	10,482	7,721	5,043	2,465	0
$\Sigma = m'_1$	16,610	16,135	14,789	12,766	10,320	7,690	5,040	2,464	0
T_1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1
$-1,37957 \cdot T_2$	-27,4	-19,4	0	19,4	27,4	19,4	0	-19,4	-27,4
$\Sigma = T'_1$	-24,3	-16,3	3,1	22,5	30,5	22,5	3,1	-16,3	-24,3
T_1	10,0	9,2	7,0	3,8	0	-3,8	-7,0	-9,2	-10,0
$0,5 T_2$	-10,0	-7,1	0	-7,1	-10,0	-7,1	0	7,1	10,0
$\Sigma = T'_1$	20,0	16,3	7,0	-3,3	-10,0	-10,9	-7,0	-2,2	0

Кроме трех параметров a_i в данной задаче еще неизвестная опорная реакция p (т/м). Для упрощения задачи предполагают, что бортовой элемент работает как растянутый стрингер. Собственный вес бортового элемента q_0 передается непосредственно на боковую опору и в дальнейших расчетах не учитывается.

Здесь (аналогично п. 2) четыре неизвестных можно связать с двумя условиями:

1) условие равновесия в вертикальном направлении

$$ks_0q + R \left(\frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} - \cos \varphi_0 \right) a_1 + \frac{l}{2} \frac{\pi - \varphi_0}{\varphi_0 \pi} a_1 - \\ - \frac{l}{2} \frac{\pi - \varphi_0}{2\pi \varphi_0} a_2 + p = 0; \quad (10)$$

2) условие сходимости продольных напряжений на линии соединения стрингера и криволинейной части оболочки

$$a_1 - \pi a_1 + 2\pi a_2 = -\frac{\delta s_0}{F} a_1 \quad \text{или} \\ \left(1 - \frac{\delta s_0}{F} \right) a_1 = \pi a_1 + 2\pi a_2 = 0, \quad (11)$$

где F — площадь стрингера.

Необходимо составить два условия потенциальной энергии для определения двух независимых параметров (например a_2 и p). В таком случае условия минимума потенциальной энергии, учитывая только работу изгибающих моментов и продольных сил:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = \left[a_1 \int_0^{s_0} (m'_1)^2 ds + a_1 \int_0^{s_0} m'_1 m'_1 ds + \int_0^{s_0} m'_0 m'_1 ds \right] + \\ + \frac{0,2(6)\delta^2}{6} \left[\int_0^{s_0} T'_0 T'_1 ds + a_1 \int_0^{s_0} T'_1 T'_1 ds + \right. \\ \left. + a_1 \left(\int_0^{s_0} (T'_1)^2 ds + \frac{\delta L^4}{F 64} \right) \right] = 0; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} \left[a_1 \int_0^{s_0} m'_1 m'_1 ds + a_1 \int_0^{s_0} (m'_1)^2 ds + \int_0^{s_0} m'_0 m'_1 ds \right] +$$

$$+ \frac{0,2(6)\delta^2}{6} \left[\int_0^{s_0} T'_0 T'_1 ds + a_1 \int_0^{s_0} T'_1 T'_1 ds + a_1 \int_0^{s_0} (T'_1)^2 ds \right] = 0.$$

Рассмотрим численный пример, применяя данные предыдущего примера. В табл. 4 приводятся нужные расчетные данные (используя таблицы [5]).

Если $k \approx 1$, то из условия (10) получим
 $4,47305 + 2,50649a_1 + 2,42502a_1 - 1,17780a_2 + p = 0$
 и из (11), если $F = 0,15$ и $\delta = 0,09$:

$$8,66809a_1 - 3,14159a_1 + 6,28319a_2 = 0,$$

откуда $a_2 = -1,37957a_1 + 0,5a_1$;

$$p = -4,13135a_1 - 1,83612a_1 - 4,47305. \quad (12)$$

В таблице 5 представлены функции нагрузки, где зависимые параметры исключены.

Интегралы $\int_0^{s_0} m'_i \cdot m'_k ds$ и $\int_0^{s_0} \max T'_i \cdot \max T'_k ds$ находят численным интегрированием:

$$\begin{aligned} \int (m'_1)^2 ds &= 4854,5; & \int m'_1 m'_1 ds &= 2741,4; \\ \int m'_1 m'_0 ds &= 4657,4; & \int (m'_1)^2 ds &= 1560,9; \\ \int m'_1 m'_0 ds &= 2631,5; & \int (T'_1)^2 ds &= 4932; \\ \int T'_1 T'_1 ds &= -1753; & \int (T'_1)^2 ds &= 1278. \end{aligned}$$

Система уравнений минимума потенциальных энергий:

$$\frac{6}{\delta^2} (4854,5a_1 + 2741,4a_1 + 4657,4) +$$

$$+ 0,267 \cdot \left[(4932a_1 - 1753a_1) + \frac{0,09}{0,15} \frac{18^2}{64} a_1 \right] = 0;$$

$$\frac{6}{\delta^2} (2741,4a_1 + 1560,9a_1 + 2631,5) + 0,267 (-1753a_1 + 1278a_1) = 0;$$

Таблица 6

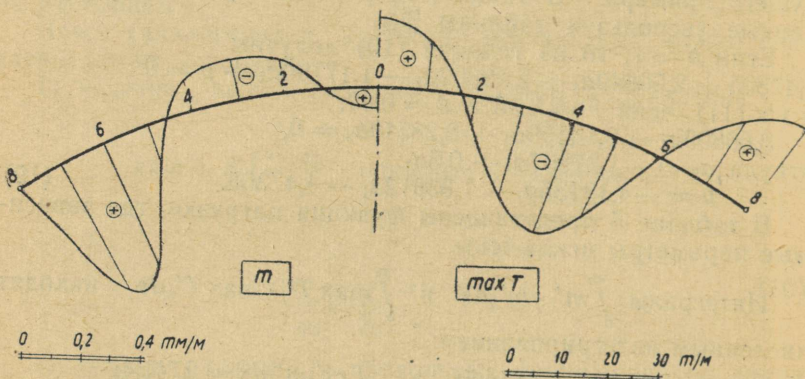
Сечение	0	2	4	6	8
m'_0	25,97	24,21	18,99	10,73	0
-0,840 m'_1	-22,38	-21,20	-16,93	-9,21	0
-0,211 m'_1	-3,52	-3,12	-2,18	-1,06	0
$\Sigma = m$	0,07	-0,11	-0,12	0,46	0
-0,840 T'_1	20,4	-2,6	-25,6	-2,6	20,4
-0,211 T'_1	-4,2	-1,5	2,1	1,5	0
$\Sigma = \max T$	16,2	-4,1	-23,5	-1,1	20,4

$$\text{или } 4,8566a_1 + 2,7408a_1 + 4,6574 = 0;$$

$$4,7408a_1 + 1,5614a_1 + 2,6315 = 0,$$

откуда $a_1 = -0,840$ и $a_1 = -0,211$.

Внутренние силы найдены путем суммирования (см. табл. 6) и представлены на фиг. 5.



Фиг. 5

Максимальная сила в стрингере (5)

$$\max N = a_1 \frac{L^2}{8} = 0,840 \cdot \frac{18^2}{8} = 34,0 \text{ т.}$$

Вычисляя из уравнения (12) $p = 0,615 \text{ т/м}$ находим, что 12,8% нагрузки передается на боковые стены. Сравнивая фиг. 4 и фиг. 5 видим, что опертый бортовой элемент не влечет за собой уменьшения внутренних сил.

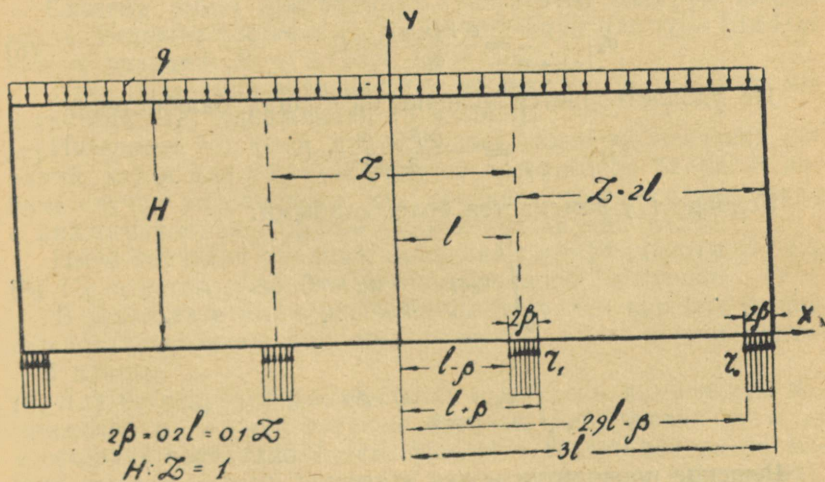
ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Лаул. Raudbetoon II, 1962.
2. В. Коу. Praca Statyczna lupin konoidalnych w swiete przeprowadzonych badan. Inzynieria i budownictwo, 1958.
3. М. Соаре. Zum Membrantheorie der Konoidschalen. Der Bauingenieur, 1958.
4. В. Д. Райзер. К расчету линейных оболочек по безмоментной теории. Строительная механика и расчет сооружений, 1962.
5. Х. Х. Лауль. Расчет цилиндрических оболочек с криволинейными частями, очерченными по окружности. Труды ТПИ, 1953.
6. Х. Х. Лауль. Применение метода Кастильяно-Ритца для расчета длинных цилиндрических оболочек со стрингерами. Труды ТПИ 1952.
7. Х. Х. Лауль. Расчет оболочки с опертым бортовым элементом. Труды ТПИ, 1952.

А. И. Лантух-Лященко

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ И НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ-СТЕНКИ

До настоящего времени нет исчерпывающих данных о напряженном состоянии неразрезных балок-стенок. Теоретически и экспериментально изучались в СССР только свободно опертые балки-стенки [1]. В строительстве промышленных сооружений находят применение неразрезные балки-стенки, например в бункерных галереях ТЭЦ, азотно-туковых заводах и др. Расчет таких балок-стенок представляет собой сложную задачу теории упругости. Имеющиеся таблицы Ф. Диндингера составлены для среднего пролета неразрезной бесконечной балки-стенки. Инженерная практика же требует решений для балок-стенок конечной длины.



Фиг. 1. Расчетная схема балки-стенки

В настоящей работе сделана попытка исследовать напряженное состояние неразрезной балки-стенки конечной длины.

Рассматривается неразрезная трехпролетная балка-стенка, с пролетами равными высоте, загруженная равномерно-распределенной нагрузкой, равной во всех пролетах и приложенной к верхней грани. Опорные реакции распределены на участках $0,1 L$, где L — длина пролета (см. фиг. 1).

Упругое решение представлено в виде ряда:

$$F(x, y) = \sum_{1, 3, 5 \dots}^{\infty} \cos \alpha x [C_1 \operatorname{sh} \alpha y + C_2 \operatorname{ch} \alpha y + C_3 \cdot y \cdot \operatorname{sh} \alpha y + C_4 \cdot y \cdot \operatorname{ch} \alpha y],$$

где

$$\alpha = \frac{\pi n}{6l}; \quad n = 1, 3, 5 \dots, \quad (1)$$

$6l$ — полная длина балки-стенки.

Удовлетворяются следующие условия на контуре:

$$\sigma_y \Big|_{\substack{x=-3l \div +3l \\ y=H}} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} = -q. \quad (2)$$

$$\sigma_y \Big|_{\substack{x=\pm(0.9l \div 1.1l) \\ \pm(2.8l \div 3l)}} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} = R, \quad (3)$$

где R — реакции.

$$\tau_{xy} \Big|_{\substack{x=-3l \div +3l \\ y=0}} = -\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = 0. \quad (4)$$

$$\tau_{xy} \Big|_{\substack{x=-3l \div +3l \\ y=H}} = -\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = 0. \quad (5)$$

$$\sigma_x \Big|_{x=\pm 3l} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (6)$$

Не удовлетворяется условие на торцах балки-стенки

$$\tau_{xy} \Big|_{x=\pm 3l} = -\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = 0. \quad (7)$$

Условие (7) заменяется более слабыми:

$$\int_0^H \tau_{xy} \Big|_{x=3l} \cdot dy = 0. \quad (8)$$

$$\int_0^H \tau_{xy} \Big|_{x=3l} \cdot y \cdot dy = 0. \quad (9)$$

Решение проводится в два этапа:

а) находим значения реакций,

б) вычисляем компоненты напряженного состояния.

Реакции находятся из выражения для перемещения нижней грани ($y=0$):

$$V = \frac{2}{E} \sum_{1,3,5\dots}^{\infty} \cos \alpha x \cdot C_4. \quad (10)$$

Как добавочное условие для нахождения реакций используется то, что перемещение точек нижней грани ($y=0$) в пределах $x = \pm(0,9l \div 1,1l)$ равно нулю. Это условие записывается в интегральном виде:

$$\int_{0,9l}^{1,1l} \frac{2}{E} \sum_{1,3,5\dots}^{\infty} \cos \alpha x \cdot C_4 \cdot dx = 0. \quad (11)$$

Разлагая нагрузки на гранях в ряды Фурье и внося в (11) выражение для коэффициента C_4 , которое получаем в результате совместного решения условий (2), (3), (4), (5), (6); получим бесконечную систему для нахождения r_1 :

$$\sum_{1,3,5\dots}^{\infty} \frac{2B(\alpha)}{n^3} \cdot r_1 \cdot \sin \frac{\pi n}{60} \cdot \cos \frac{\pi n}{6} = \sum_{1,3,5\dots}^{\infty} \frac{q}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot z(\alpha). \quad (12)$$

Здесь $B(\alpha)$ и $Z(\alpha)$ — трансцендентные функции от α , $n = 1, 3, 5 \dots$

Система имеет равномерную, достаточно быструю сходимость. Решение системы (12) дает значения для $r_1 = 10,641ql$ и т. о. реакции: $R_1 = 2,128ql$, $R_0 = 0,872ql$.

(Для получения значения r_1 с точностью до 5 знаков, мы в системе (12) удерживали 16 членов).

Интересен тот факт, что получены такие же значения реакций, как и для обычной упругой неразрезной балки. В нашем случае расхождение для средней опоры, сравнительно с аналогичной, но упругой балкой составляет 3,12%.

Имея значения реакций, вычисляем коэффициенты C_1, C_2, C_3, C_4 , а затем компоненты напряженного состояния.

В результате этого решения мы получили картину напряженного состояния для трехпролетной балки-стенки конечной длины.

Для исследуемой балки-стенки вычислены компоненты напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, а также главные напряжения σ_1 и σ_2 в сечениях через $0,25 L$ (см. фиг. 1) в девяти точках по высоте сечения (всего, учитывая симметрию — в 108 точках).

Вычислены так же значения изгибающих моментов, раз-

нодействующих растягивающих усилий и прогибы нижних волокон.

Весьма существенными являются данные о напряженном состоянии крайнего пролета.

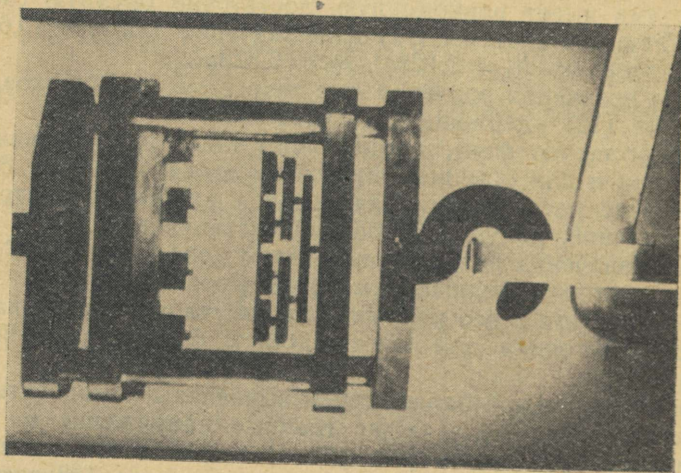
В таблице 1 приводятся вычислительные нормальные σ_x напряжения и для сравнения данные известных таблиц Ф. Дишингера, составленных для среднего пролета балки-стенки бесконечной длины.

Напряжения σ_x , множитель q

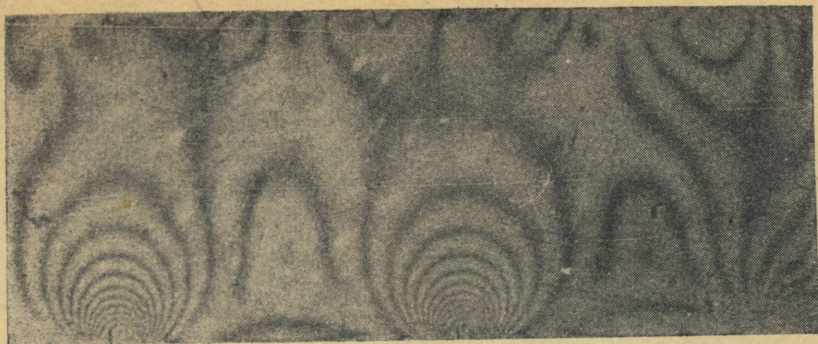
Таблица 1

y	Средний пролет $x=0$		Опорные сечения $x=\pm l$		Крайний пролет $x=\pm 2l$
	Наши вычисления	Данные Ф. Дишингера	Наши вычисления	Данные Ф. Дишингера	Наши вычисления
H	-0,066	-0,092	0,110	0,092	-0,692
0,875	-0,092	-0,047	0,067	0,047	-0,304
0,750	-0,109	-0,064	0,094	0,067	-0,121
0,657	-0,122	-0,103	0,130	0,113	-0,024
0,500	-0,130	-0,162	0,235	0,199	0,008
0,375	-0,200	-0,192	0,366	0,317	0,018
0,250	-0,145	-0,106	0,501	0,476	0,056
0,125	0,390	0,272	0,435	0,483	0,360
0,000	1,042	1,002	-11,527	-9,002	0,868

Для проверки решения был поставлен эксперимент на упругих прозрачных моделях методом фотоупругости. Иссле-



Фиг. 2. Загрузка прозрачной модели



Фиг. 3. Картина изохром при нагрузке 29,24 кг/пог.см.

довалась серия (6 шт.) моделей из оптически активного материала — полимеризованной эпоксидной смолы ЭД-6. Модели размером 30×90 мм и толщиной 5 мм и 7,9 мм.

Загружение модели производилось при помощи четырех распределяющих пластинок (фиг. 2). Нагрузку такого рода можно считать равномерно-распределенной (см. фиг. 3). Опоры имели ширину в соответствии с основной схемой (фиг. 1) и все считались шарнирно подвижными.

Исследование производилось на фотоластоциметре производства ЧССР. Фотографировалась картина изохром. Сравнивались максимальные касательные напряжения.

Таблица 2

Максимальные касательные напряжения

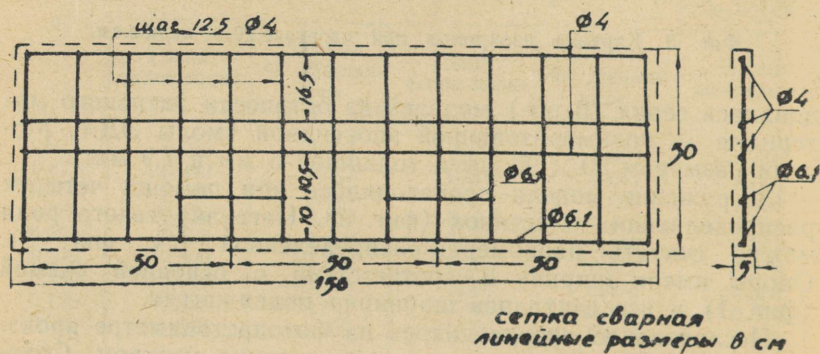
y	x = 0			x = ±l			x = ±2l		
	τ _{max}		Расхож- дение в %	τ _{max}		Расхож- дение в %	τ _{max}		Расхож- дение в %
	Экспер. кг/см	Вычис.		Экспер. кг/см	Вычис.		Экспер. кг/см	Вычис.	
0,750	8,86	8,90	-0,5	15,95	16,63	-4,2	15,95	12,00	+24,8
0,625	8,86	8,95	-1,2	16,83	17,91	-6,4	11,96	11,00	+8,7
0,500	7,26	7,62	-4,9	20,38	21,95	-7,7	8,86	8,82	+0,4
0,375	3,63	3,81	-4,9	26,58	28,21	-6,1	5,05	5,70	-12,9
0,250	0,62	0,66	-6,4	39,42	40,11	-1,7	3,10	3,68	-18,7
0,125	6,73	6,96	-3,4	68,22	67,22	+1,4	8,86	8,90	-0,5

В таблице 2 приведены значения τ_{max}, полученные путем эксперимента на модели d = 7,9 мм при нагрузке q = 25,58 кг на пог. см. модели. (Нагрузка отнесена к толщине, равной 1).

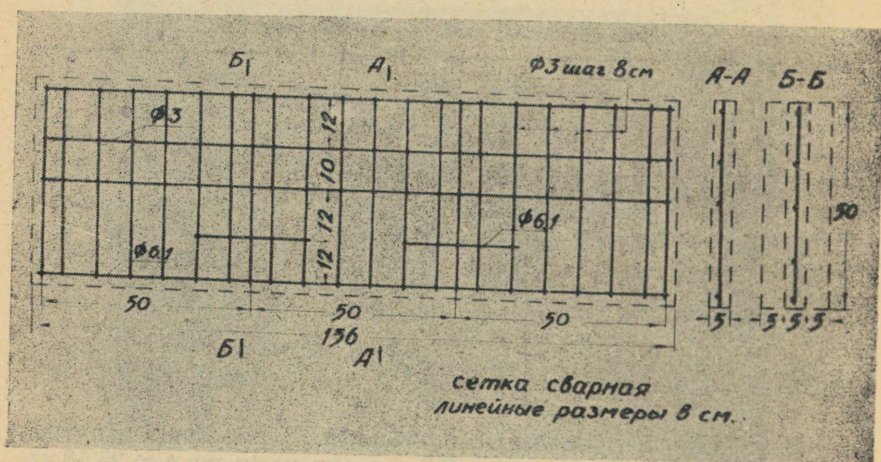
Сравнение экспериментальных и аналитических данных, часть из которых приведена в табл. 2, дает возможность считать, что смягчение граничных условий (8) и (9), принятое в решении, незначительно отражается на общей картине напряженного состояния.

Основная часть экспериментальной работы включала испытания железобетонных балок-стенок. Испытывались трехпролетные балки-стенки с длиной пролета 50 см, толщиной 5 см.

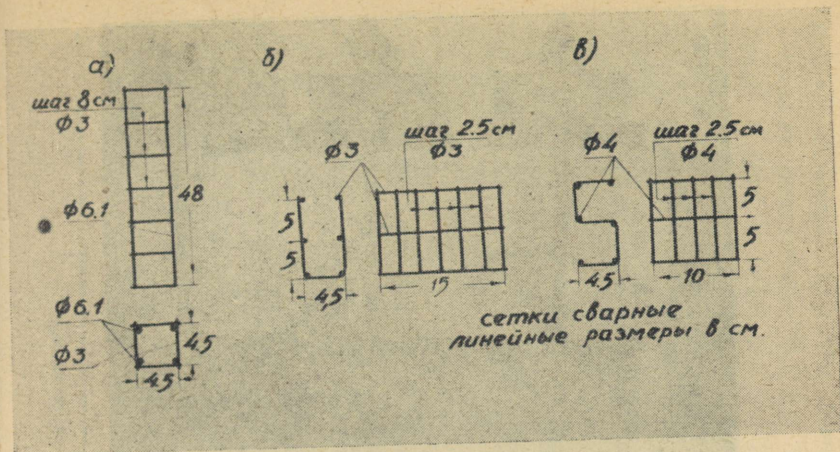
Конструктивно балки выполнялись двух типов: гладкие (сечение на фиг. 4) и с усилением в виде ребер на опорах (сечение Б-Б на фиг. 5).



Фиг. 4. Армирование балок-стенок CI и CII



Фиг. 5. Армирование балок-стенок CIII, CIV и CVI



Фиг. 6. Армирование опорных зон

Армировались опытные образцы сеткой из арматуры:

$\emptyset 6,1$ — класс А-1,	$\sigma_{пч} = 36,2 \text{ кг/мм}^2$;
$\emptyset 4$ — класс А-1,	$\sigma_{пч} = 66,1 \text{ кг/мм}^2$;
$\emptyset 3$ — проволока обыкновен.	$\sigma_{пч} = 53,6 \text{ кг/мм}^2$.

Применялось два вида сетки (фиг. 4 и 5).

Бетон применялся на гранитном щебне, с максимальной фракцией щебня 25 мм.

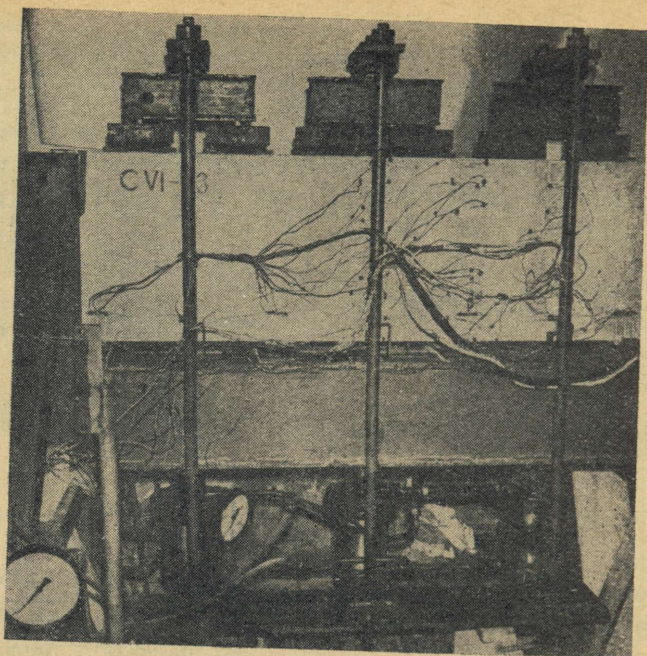
Проектные марки бетона «200» и «300».

Изготавливались образцы в металлических формах, в лежачем положении, на вибростоле. Все образцы прошли тепловлажностную обработку.

Для определения характеристик бетона бетонировались кубы $10 \times 10 \times 10 \text{ см}$, призмы $10 \times 10 \times 30 \text{ см}$ и балочки $10 \times 10 \times 40 \text{ см}$.

Испытания проводились на специальном стенде (фиг. 7) с помощью трех гидравлических домкратов мощностью 60 т каждый, включенных параллельно. Нагрузка в каждом пролете вводилась через 4 распределяющие пластины, шириной 6 см, толщиной 12 мм, из ст. 3. Контроль нагрузки осуществлялся по двум манометрам с ценой деления 5 атн (что соответствует усилию в 0,226 т на 1 домкрат).

При испытаниях ставились задачи: определение напряжений в бетоне в сечениях $x=0$; $x=l$; $x=2l$ в девяти точках по высоте сечений; определение напряжений в арматуре $\emptyset 6,1 \text{ мм}$ в сечениях $x=0$; $x=\pm l$; $x=\pm 2l$; определение



Фиг. 7. Загружение железобетонной балки-стенки

прогибов нижних волокон; определение деформаций в опорных зонах в направлении оси Y .

Фиксировались нагрузки:

- а) трещинообразующая — соответствующая появлению первых видимых трещин (ширина раскрытия $\sim 0,05$ мм),
- б) предельная эксплуатационная — соответствующая раскрытию хотя бы одной трещины до 0,2 мм,
- в) разрушающая.

Замеры деформаций бетона и арматуры производились с помощью электротензометрии. Применялись датчики сопротивления с базой 50 мм — для бетона и 20 мм — для арматуры. Измерение деформаций на каждой балке-стенке осуществлялось в 64 точках. Датчики на бетоне клеились розетками 0° — 45° — 90° .

Замеры производились тензометрическими приборами SA-2 производства ЧССР. Прогибы нижнего волокна измерялись индикаторами часового типа, с ценой деления 0,01 мм. Раннее обнаружение трещин осуществлялось по датчикам. Визуальное обнаружение трещин и замер ширины раскрытия — с помощью 24-кратного шкалового микроскопа. Испытывались балки при достижении 80% проектной прочности

Основные результаты и характеристики испытаний балок-стенок

Марка образца	Характеристика бетона		Тип балки-стенки	Армирование			$q_{тр}$ т/пог.м	$q_э$ т/пог.м	$q_{раз}$ т/пог.м	
	R_b	$R_{пр}$		F_a	F_b	$F_{оп}$				
CI	B1	197	132	Гладкая	1Ø6.1 3Ø4	13Ø4	отсутств.	13,57 11,31 11,31	23,75 22,60 23,75	
	B2	197	132							
	B3	197	132							
CII	B1	176	127	Гладкая с опорной арматурой по фиг. 6а	1Ø6.1 3Ø4	13Ø4	4Ø6.1	20,16 19,60	27,14 23,75	36,67 29,41
	B2	176	127							
CIII	B1	335	244	Гладкая с опорной арматурой фиг. 6б	1Ø6.1 3Ø4	22Ø4	5Ø3 × × 6Ø3	15,83 13,57 13,57	17,37 15,83 16,96	27,14 27,14 27,14
	B2	262	186							
	B3	262	186							
CIV	B1	262	186	С ребрами	1Ø6.1 3Ø4	22Ø4	4Ø6.1	24,90 28,28 22,62	33,93 33,93 27,15	44,11 40,71 38,45
	B2	258	173							
	B3	166	119							
CV	B1	262	186	Гладкая бетонная	отсутствует					17,34 13,57 14,70
	B2	166	116							
	B3	166	116							
CVI	B1	258	173	Гладкая с опорной арматурой фиг. 6в	1Ø6.1 3Ø4	22Ø3	6Ø4 × × 5Ø4	19,23 17,34 15,83 15,83	27,14 24,90 20,34 22,62	31,67 35,06 27,14 27,14
	B2	258	173							
	B3	166	119							
	B4	166	119							

Здесь: F_a — пролетная арматура $F_{оп}$ — опорная арматура $q_э$ — эксплуат. нагрузка
 F_b — вертикальная арматура $q_{тр}$ — нагрузка образования трещин $q_{раз}$ — разрушающая нагрузка

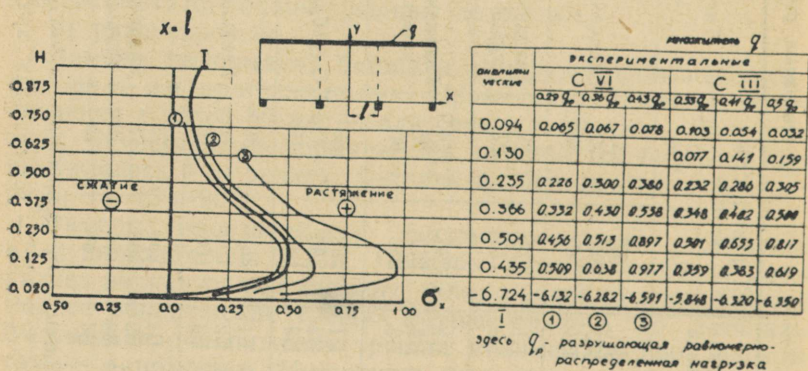
и выше. Основные результаты и характеристики испытанных балок-стенок приведены в таблице 3.

Полученные результаты эксперимента анализировались, исходя из того, что задача нами разделена на 2 самостоятельные части:

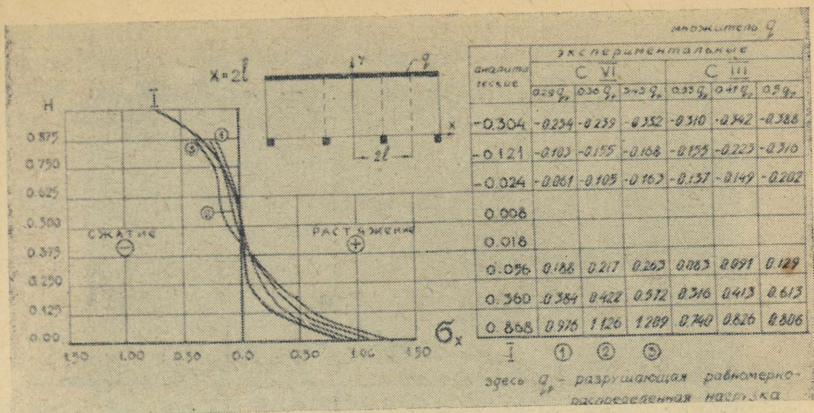
- а) работа балки-стенки в упругой стадии,
- б) напряженное состояние и поведение балки-стенки в период разрушения.

Упругой стадией работы мы считали нагружение образца до $0,4P_{раз}$ (где $P_{раз}$ — разрушающая нагрузка), пренебрегая пластическими деформациями, развивающимися на этой стадии нагружения. Полученные эпюры напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и главных напряжений σ_1 и σ_2 на этой стадии сравнивались с аналитическим решением.

Как видно из таблиц на фиг. 8 и 9, экспериментальные данные имеют удовлетворительную сходимость с аналитическим решением на стадии нагружения $\approx 0,4P_{раз}$. В дальнейшем резко возрастают пластические деформации. Результаты, часть которых приведена на фиг. 8, 9, еще раз подтверждают, что смягчение граничных условий, принятое в нашем аналитическом решении, незначительно искажает картину напряженного состояния. Кроме того, хорошее совпадение эпюр напряжений в сечении $x \pm l$ (фиг. 8) (т. е. в сечении, где приложена реакция) позволяет определенно полагать, что распределение реакций в неразрезной балке-стенке таково же, как и у обычной неразрезной балки. Этот вывод имеет практическую ценность, т. к. позволяет принять наиболее простой план решения статически неопределимой системы, представив ее как статически определимую, загруженную реакциями, определенными как для обычной неразрезной балки.



Фиг. 8. Напряжения σ_x в опорном сечении



Фиг. 9. Напряжения σ_x в середине крайнего пролета

Испытываемые балки-стенки, вопреки существующим рекомендациям (И. И. Гольденблат, Расчет балок-стенок, 1940 г.), преднамеренно имели в крайних пролетах армирование равное со средним пролетом. Мы исходили при этом из аналитического решения, в котором мы получили значения равнодействующей растягивающих напряжений:

для среднего пролета $D_x = 0,174 ql$,
 для крайнего пролета $D_x = 0,180 ql$.

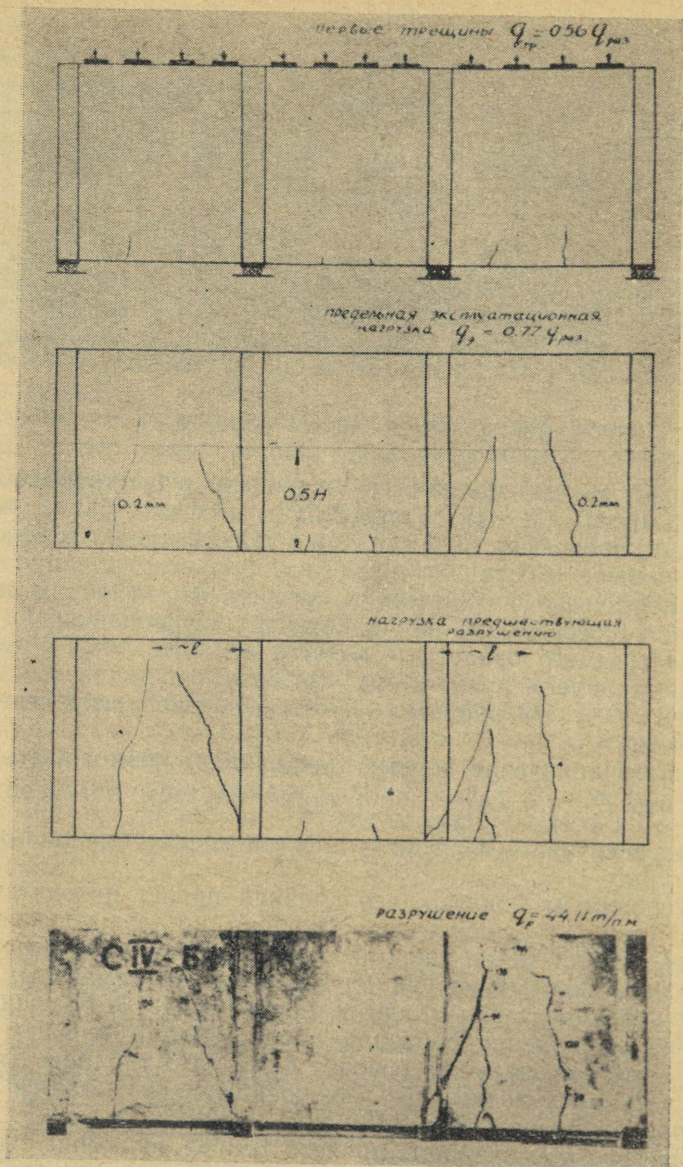
Здесь l — $1/2$ пролета, q — равномерно распределенная нагрузка.

Анализ появления первых трещин дает возможность считать, что $D_x|_{x=0} \approx D_x|_{x=2l}$ и таким образом нет необходимости увеличивать в среднем пролете количество растянутой арматуры.

Эксперимент показал, что крайний пролет находится все же в худших условиях, чем средний, но усилить крайний пролет следует не за счет увеличения растянутой арматуры, а за счет увеличения площади вертикальной арматуры, пересекающей траектории главных напряжений. В большинстве случаев разрушение образцов происходило в крайнем пролете. Это обстоятельство говорит о том, что таблицы Динингера весьма неудобны, так как по ним рассчитывается средний пролет, рассчитывать же нужно крайний.

При расчете крайнего пролета особое внимание следует уделять проверке по главным напряжениям в сечениях близких к средней опоре ($x = 1,25 l$; $x = 1,5 l$).

В результате эксперимента выяснено, что наилучшим армированием опорных зон является поперечная сетка (фиг.



Фиг. 10. Схема трещинообразования

4в). Количество этой арматуры определяется из рассмотрения опорной зоны, как объемного элемента. Растягивающие усилия, направленные из плоскости балки-стенки, должны быть восприняты поперечной сеткой и бетоном.

$$N_z \leq R_p \cdot 2\beta \cdot 0,1H + F_a^{\text{оп}} \cdot R_a. \quad (13)$$

Здесь N_z — усилие, действующее из плоскости балки в зоне опор,

R_p — нормативное сопротивление бетона на растяжение,

$F_a^{\text{оп}}$ — площадь арматуры, перпендикулярная к плоскости балки-стенки.

Армирование опорных зон по условию (13) конструктивно выполнялось по фиг. 6. Однако такое усиление опорных зон нельзя считать универсальным. Более универсальным является усиление опорных зон ребрами. Эта мера более проста конструктивно и в то же время дает существенный эффект. Эксперимент показал, что усиление опорных зон ребрами значительно увеличивает несущую способность балки-стенки (см. табл. 3, серия IV). Это увеличение несущей способности достигало 160% по сравнению с несущей способностью балок-стенок серии VI с опорной арматурой по фиг. 6в.

Выяснено также, что усиление опорных зон ребрами несколько изменяет картину напряженного состояния, особенно в части распределения касательных напряжений. В зоне примыкания ребра к пролету мы имели в эксперименте значительную концентрацию касательных напряжений. Что касается средин пролетов, то напряжения таковы же как и для гладкой балки-стенки.

О поведении конструкции в стадии разрушения в этой работе сделаем некоторые замечания.

Как показал эксперимент, достичь разрушения сжатой зоны бетона под воздействием изгибающего момента в ж. б. балках-стенках весьма сложно. Разрушение конструкции происходит прежде всего от местных напряжений в местах опирания. После предотвращения такого разрушения специальным армированием (по формуле 13) или усилением в виде ребер, потеря несущей способности происходит от действия перерезывающих сил. После предотвращения этого вида разрушения потеря несущей способности происходит от местных напряжений в местах приложения нагрузки. Этого последнего вида потери несущей способности нам не удалось достичь, однако по нашим расчетам несущая способность балки-стенки при этом будет значительно выше той, значение которой мы можем получить исходя из «СН и П П-В 1-62».

В стадии разрушения происходит значительное перераспределение усилий и эпюры напряжений отличаются от эпюр в упругой зоне весьма существенно.

Мы не имеем здесь возможности детально анализировать схемы разрушения испытанных образцов и приводим одну (фиг. 10), наиболее типичную.

Приведенная картина разрушения идентична траекториям главных напряжений.

На основании изложенного делаются выводы:

Упругое решение в виде (1) может быть принято при расчете неразрезных балок-стенок. Решение можно упростить, приняв реакции такими же как и для обычной неразрезной балки. Экспериментальные данные, приведенные здесь, подтверждают эти основные положения.

Основываясь на результатах проведенного эксперимента можно разработать методику расчета такой балки-стенки в предельном состоянии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Алликас. Расчет балок-стенок по разрушающей нагрузке. Автореферат диссертации. Таллин, 1951.
2. Г. Маслов. Неразрезная балка-стенка по методам теории упругости. Известия Ленинградского Политехнического института. 1925 год, т. XXIX.
3. Nylandez u Holst. Narga undersökningar rörande skivor och höga balkar av armerad betong. Transactions of the Royal Technical University, Nr. 2. Stockholm, 1946.
4. T. Godycki-Cwirko. Wymiarowanie żelbetowych belek-scian w fazie II na tle analizy naprżeń, powstawania rys oraz nosności. Archiwum inżynierii ładowej, tom IX — z 3/1963.

М. А. Лойтве

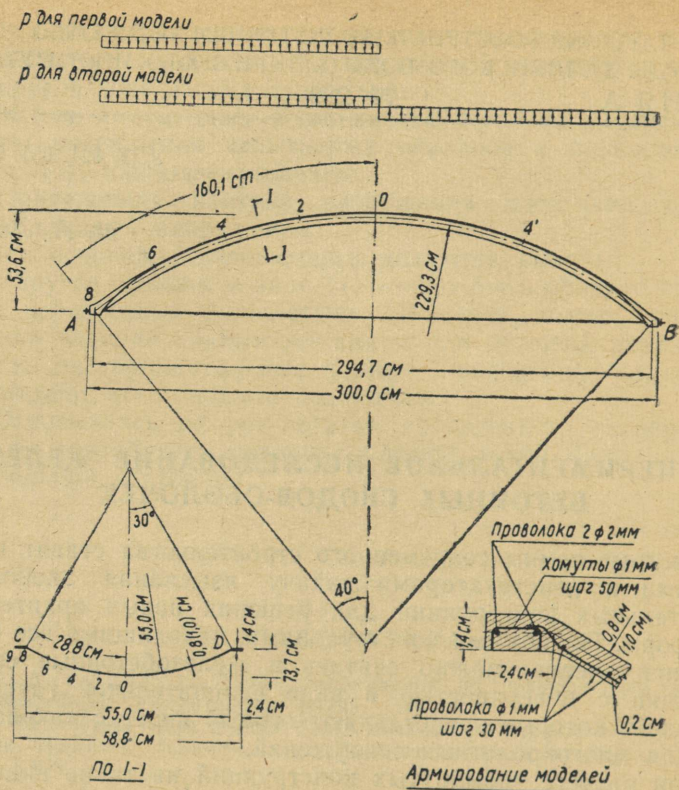
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЖЕЛЕЗО- БЕТОННЫХ СВОДОВ-ОБОЛОЧЕК

Быстрые темпы современного строительства ставят перед учеными и конструкторами задачу изыскания экономных строительных конструкций для решения новых архитектурных форм. Подобными конструкциями, находящими все большее применение, можно считать и железобетонные своды-оболочки с поверхностью в виде отрицательной гауссовой кривизны, которые представляют особый интерес как покрытия для многопролетных сооружений.

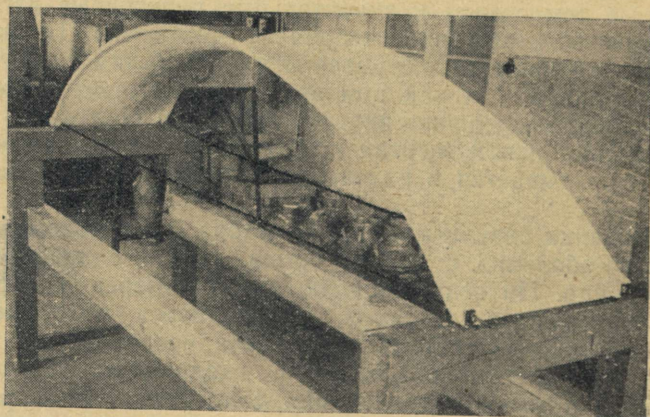
При расчете упомянутых конструкций на такие виды нагрузок, которые вызывают сравнительно большие моменты арки (например, односторонняя и обратнoсимметричная нагрузка), а тем самым и значительные поперечные изгибающие моменты, мембранная теория не применима. Точных результатов не дают также расчеты по формулам сопротивления материалов, так как при этом не учитывается возможность перераспределения внутренних сил в состоянии минимума потенциальной энергии конструкции. Последнее обстоятельство учитывается в расчетном методе, представленном в [7].

Для оценки результатов этого метода были моделированы два свода-оболочки с поверхностью в виде однополостного гиперболоида. На этих моделях, путем измерения деформаций в поперечных сечениях, определялось распределение внутренних сил соответственно степени нагружения.

Отмечая достаточно хорошую сходимость результатов экспериментального исследования с теоретическими результатами в [7], представленный расчетный метод можно считать приемлемым при инженерных расчетах.



Фиг. 1. Конструктивная схема и армирование моделей



Фиг. 2. Общий вид модели

1. Моделирование

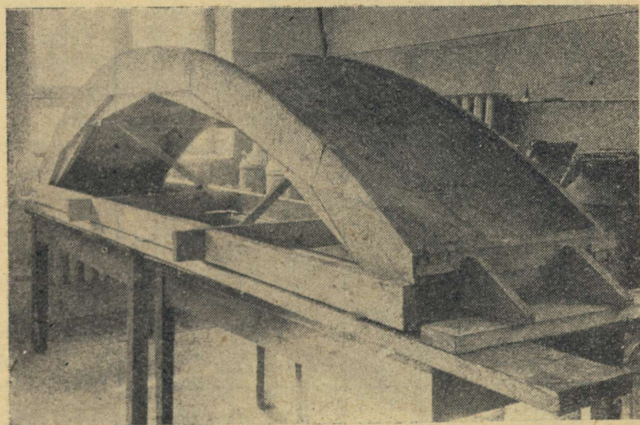
а) Геометрические данные

В целях упрощения сравнения данных, полученных при испытании моделей, с соответствующими величинами действительной конструкции, масштаб модели выбран 1:10. Тем самым напряжения, измеряемые на модели, и напряжения действительной конструкции при одинаковой внешней нагрузке на единицу поверхности равны.

Геометрические размеры модели и приложенная внешняя нагрузка представлены на фиг. 1, где толщина криволинейной части первой модели составляет 0,8 см, а второй — 1,0 см. Толщина бортового элемента обеих моделей равна 1,4 см.

б) Опалубка

Для бетонирования моделей изготовили сборную деревянную опалубку. Основными несущими конструкциями опалубки являлись две арки из косяков (см. фиг. 3), которые были соединены пространственными связями. Внешние косяки арок образовали опалубку, которая вертикально ограждала бортовые элементы. На внутренние косяки опирались криволинейные ребра шагом 40—50 см, на которые прикреплялись рейки толщиной в 5 мм, образующие кривизну нижней поверхности выбранного поперечного сечения. В пятах арки кривизна поперечного сечения была доведена до нуля.



Фиг. 3. Опалубка с моделью

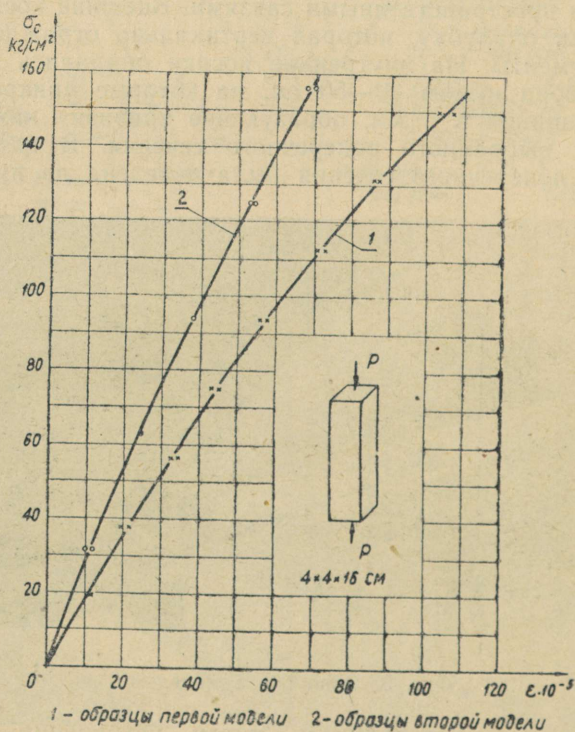
Распалубка производилась путем устранения арочных ферм и последующего опускания поверхности опалубки.

в) Используемые материалы

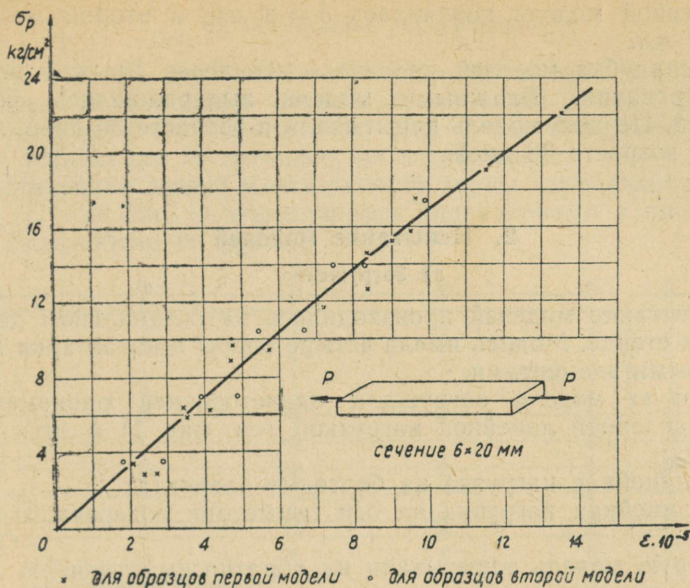
Обе модели изготовили из цементного раствора в весовом соотношении 1:2,5 (портланд-цемент марки «400» и песок диаметром частиц $\varnothing \leq 2,0$ мм). Водоцементное отношение раствора 0,47. Одновременно с моделью из того же раствора бетонировались образцы, твердение которых происходило в одинаковых условиях с моделями. На образцах определили марку раствора R , призменную прочность при сжатии $R_{пр}$, прочность при растяжении R_p и модули упругости при растяжении и сжатии. Полученные данные представлены в таблице 1 и на фиг. 4 и 5.

Таблица 1

	R	R_p	$R_{пр}$
Первая модель	322	37	225
Вторая модель	392	37	298



Фиг. 4. Графики укорочения образцов



Фиг. 5. Графики удлинения образцов

Марка раствора определялась кубиками $4 \times 4 \times 4$ см, призмная прочность при сжатии образцами $4 \times 4 \times 16$ см и прочность при растяжении «восьмерками».

Для армирования криволинейной части модели применяли холоднотянутую стальную проволоку $\varnothing 1$ мм, шаг сетки как в поперечном, так и в продольном направлении 3 см (пределная прочность при растяжении проволоки $\delta_p = 7500$ кг/см²). Бортовые элементы армированы проволокой $2 \varnothing 2$ мм ($\delta_p = 8000$ кг/см²). Схема армирования моделей показана на фиг. 1. Модели имели две затяжки $2 \varnothing 10$ мм (сталь Ст-3).

г) Бетонирование

Защитный слой раствора от нижней поверхности криволинейной части составлял 2 мм. Арматура бортовых элементов соединялась хомутами (шаг 5 см) в каркас, причем повернутые вниз концы хомутов (см. фиг. 1) опирались на дно опалубки и тем самым продольная арматура устанавливалась на горизонтальной срединной линии бортового элемента.

Бетон на поверхности разравнивался с помощью шаблона, движущегося на дугах опалубки, что обеспечивало требуемую толщину слоя раствора. Толщина криволинейной ча-

сти первой модели получилась $\delta = 8$ мм, а второй модели $\delta = 10$ мм.

Распалубка моделей производилась через 10 дней после бетонирования. Влажными модели выдерживались около 20 дней. Первую модель испытывали в возрасте 36 дней, вторую в возрасте 38 дней.

2. Испытание моделей

а) Загружение

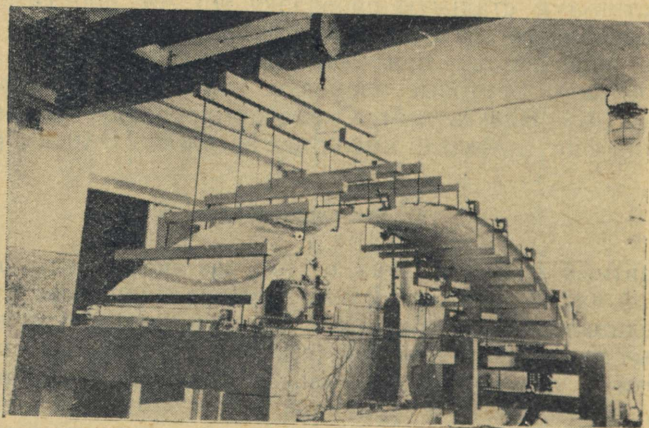
Испытание моделей производилось на специальном деревянном стенде. Модель имела четыре опоры в пятах арки под бортовыми элементами.

Первую модель загружали односторонней равномерно распределенной линейной нагрузкой (см. фиг. 1) в двух вариантах:

- 1) линейная нагрузка на бортовых элементах,
- 2) линейная нагрузка на оси симметрии поперечного сечения.

Вторую модель испытывали на обратнoсимметричную линейную нагрузку по тем же вариантам.

Нагрузка регулировалась динамометром и при помощи рычажной системы передавалась на поверхность модели, где она линейно распределялась восемью или шестнадцатью деревянными рейками на половину длины арки (в зависимости от расположения нагрузки — либо посредине поперечного сечения, либо у бортовых элементов см. фиг. 6).

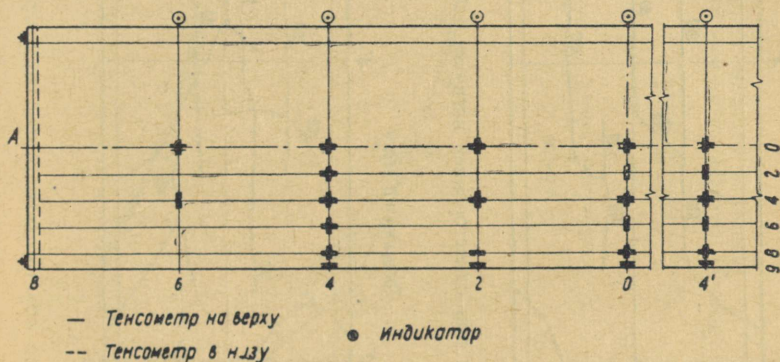


Фиг. 6. Общий вид испытания модели при нагрузке на бортовых элементах

б) Определение деформаций

Продольные деформации поверхности модели измерялись прочными датчиками сопротивления (база 20 мм). Расположение датчиков показано на фиг. 7. На поверхности модели установили 76 датчиков, на затяжках 4.

Изменение длины максимальной хорды поперечного сечения ($C-D$ фиг. 1) определялось индикаторами в пяти точках свода-оболочки (фиг. 7).



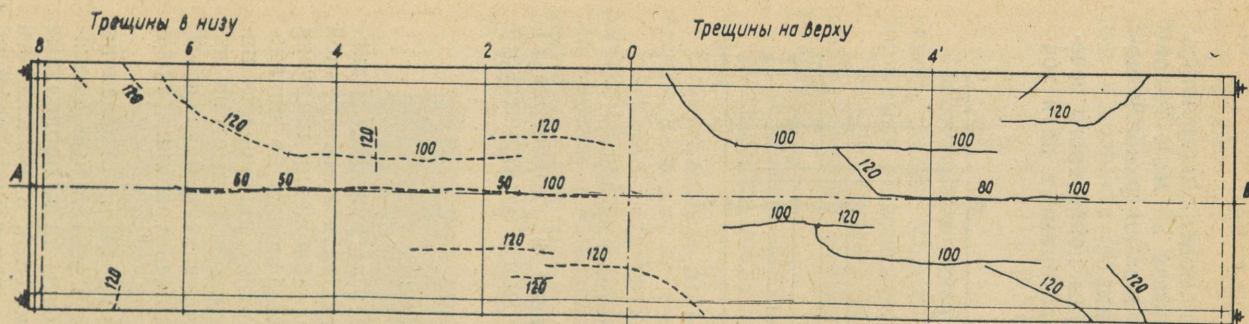
Фиг. 7. Схема расположения измерительных приборов

Деформации (относительное удлинение и укорочение ϵ) регистрировались при помощи специального электрического измерителя деформаций ЭИД.

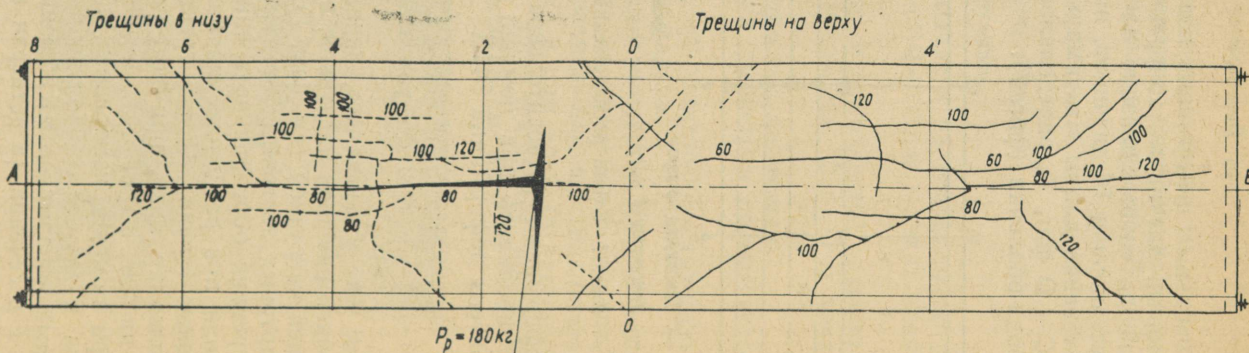
3. Результаты испытаний

Как уже указывалось, первая модель загружалась односторонней внешней нагрузкой, а вторая обратнoсимметричной внешней нагрузкой (см. фиг. 1). При расположении нагрузки на бортовых элементах загрузку прекращали до появления трещин; образование трещин и картину разрушения наблюдали при расположении нагрузки на оси симметрии поперечного сечения. Схема трещин на моделях и нагрузки P на половину арки, при которых появились трещины, показаны на фиг. 8 и 9.

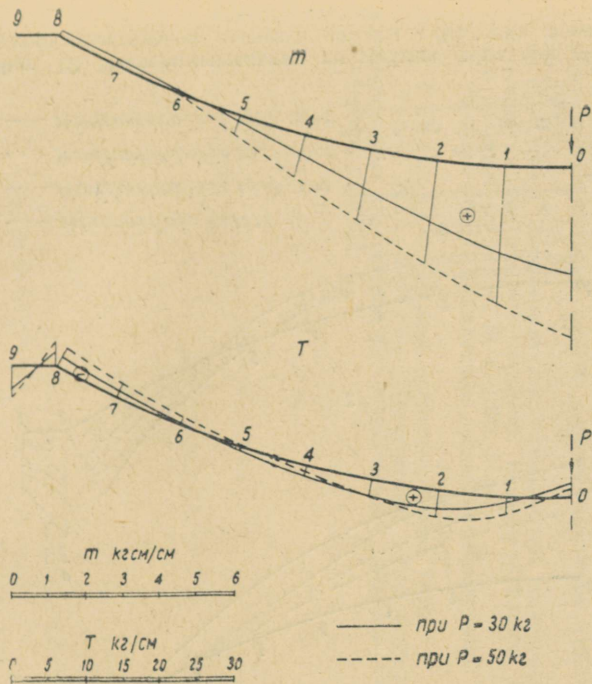
При помощи измеренных деформаций были определены усилия в моделях. Полученные экспериментальные максимальные поперечные изгибающие моменты m и продольные силы T в сечении (в четверти арки) моделей, в зависимости от распределения нагрузки на арке и в поперечном сечении, показаны на фиг. 10, 11, 12, 13. Рассматривались величины



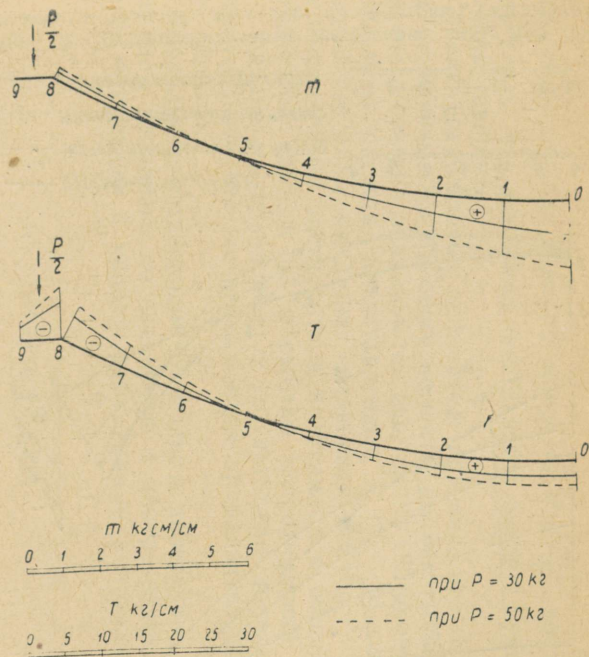
Фиг. 8. Схема трещин модели при односторонней нагрузке



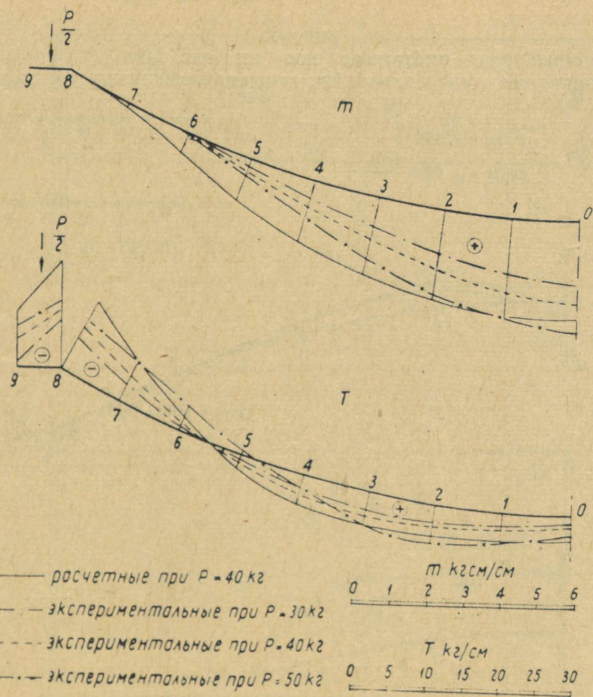
Фиг. 9. Схема трещин модели при обратнoсимметричной нагрузке



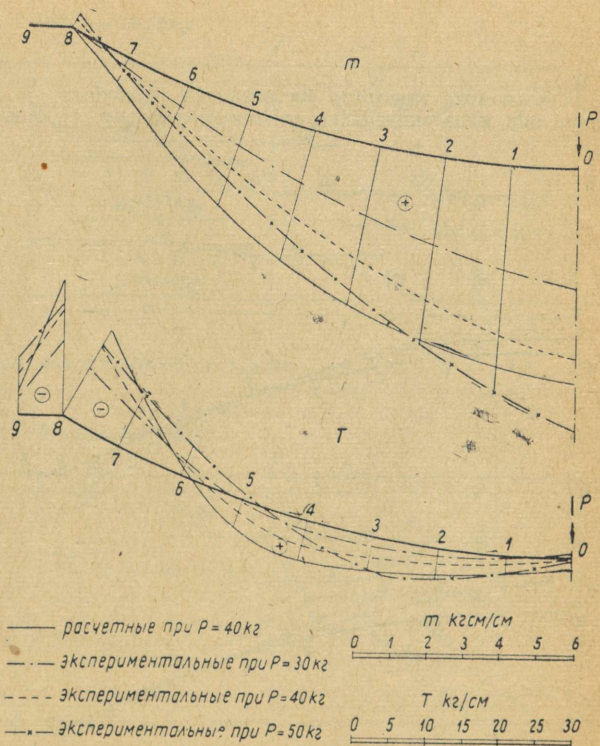
Фиг. 10. Экспериментальные внутренние силы при односторонней нагрузке на оси симметрии поперечного сечения



Фиг. 11. Экспериментальные внутренние силы при односторонней нагрузке на бортовых элементах



Фиг. 12. Экспериментальные внутренние силы при обратнoсимметричной нагрузке на оси симметрии поперечного сечения



Фиг. 13. Экспериментальные внутренние силы при обратнoсимметричной нагрузке на бортовых элементах

внутренних сил при внешней нагрузке $P = \frac{pL_0}{2}$, причем предполагалось, что материал подчиняется закону Гука (до появления трещин).

Анализ результатов испытаний показал, что максимальные поперечные изгибающие моменты на оси симметрии поперечного сечения оказываются еще на 10—20% меньше, чем результаты расчета, представленные в [7]. Максимальные продольные силы на линии соединения бортового элемента и криволинейной части хотя и получаются в общем больше результатов расчета по формулам сопротивления материалов, однако по сравнению с результатами дополнительной задачи [7] они все же оказываются приблизительно на 20—40% меньше.

Продольные изгибающие моменты и поперечные продольные силы оказались по сравнению с поперечными изгибающими моментами и продольными силами ничтожными.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Laul. Raudbetoon I ja II. Tallinn, 1960—1962.
2. Д. Финк и Х. Рорбах. Измерение напряжений и деформаций. 1961.
3. Временные указания по проектированию, изготовлению и возведению сборных железобетонных сводов двойной кривизны (РСН 11—59). Киев, 1960.
4. А. А. Цейтлин. Экспериментально-теоретические исследования железобетонных сводов двойной кривизны. Вестник Академии строительства и архитектуры УССР, № 1, 1958, и др.
5. Б. А. Миронков. Тонкостенные сводчатые конструкции покрытий. 1963.
6. А. И. Рабинович. Сборные волнистые своды. 1962.
7. Х. Х. Лаул, М. А. Лойтве. Практический метод расчета пологих железобетонных сводов-оболочек отрицательной кривизны. См. настоящий сборник, стр. 137.

Х. Х. Лаул, М. А. Лойтве

ПРАКТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОЛОГИХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СВОДОВ-ОБОЛОЧЕК ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Введение

В настоящей статье рассматриваются пологие своды-оболочки отрицательной кривизны, имеющие поверхность в форме однополостного гиперboloида.

Согласно указаниям по расчету подобных поверхностей [1] при нахождении поперечных изгибающих моментов вырезанная из арки полоска рассматривается как изгибающий элемент с криволинейным поперечным сечением. Применяются формулы сопротивления материалов (гипотеза плоских сечений), причем предполагается, что контур поперечного сечения не деформирован. Аналогичный принцип расчета применялся в Германской Федеративной Республике при проектировании ангара, построенного в 1960 г. [2]. При указанном предположении получаются при нагрузках, обуславливающих сравнительно большие изгибающие моменты в арке (обратносимметричная нагрузка), также и значительные поперечные изгибающие моменты, к восприятию которых тонкостенная конструкция не всегда способна.

Очевидно, что ввиду наличия больших поперечных изгибающих моментов также расчет по мембранной теории не может дать достоверных результатов.

Использование двойных тригонометрических рядов для определения функции напряжения F (типа Эри) и функции прогиба w при решении данной задачи на основе теории моментов [3], до настоящего времени для инженерных расчетов не подходит, так как в данном случае тригонометрические ряды слабо сходятся. Особенно трудно подобными расчетами найти значения моментов, так как последние получаются как разность двух членов, очень близких между собой значений.

В настоящей статье представлен метод расчета, где уси-

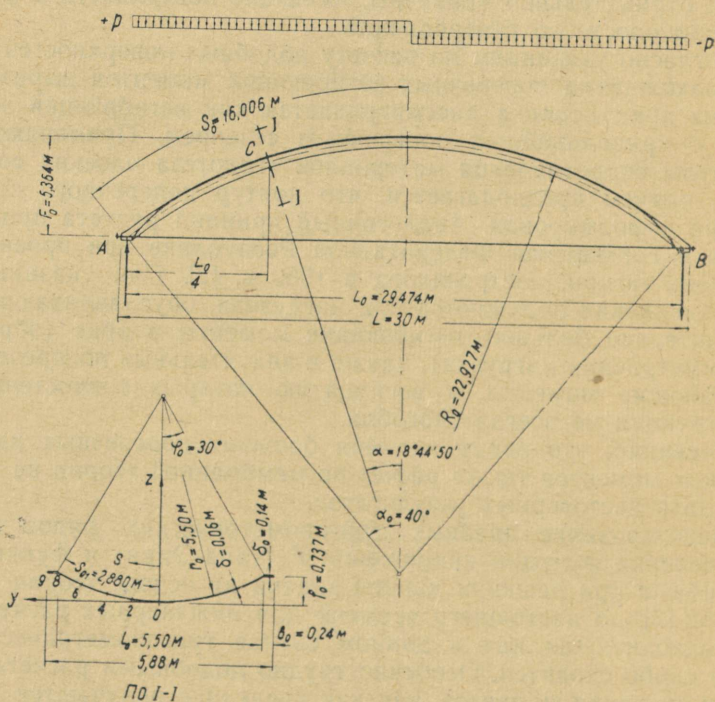
лия, найденные на основе формул сопротивления материалов, уточняются дополнительной задачей. В последней применяются условия минимума потенциальной энергии внутренних сил и некоторые дополнительные допущения.

1. Метод расчета

Рассматривается пологая свод-оболочка с поверхностью в виде однополостного гиперболоида, т. е. ось арки представляет окружность, а криволинейный контур поперечного сечения — гиперболу. Так как последний является сравнительно пологим, то для упрощения расчетов контур поперечного сечения также считается частью окружности.

Схема конструкции, нагрузка и геометрические данные для представленного ниже примера расчета приведены на фиг. 1.

Свод-оболочка опирается в четырех точках у бортовых элементов и имеет затяжку.



Фиг. 1. Конструктивная схема свода-оболочки

Данное исследование проведено при обратносимметричной вертикальной внешней нагрузке (см. фиг. 1), которая дает максимальные моменты арки в четвертях ее пролетов и одновременно также максимальные поперечные изгибающие моменты в тех же сечениях.

Сперва приводится начальная задача, где внутренние силы определяются на основе предпосылок сопротивления материалов, и затем дается т. н. дополнительная задача, основой которой является метод аппроксимации сдвигающих сил [4, 5].

а) Начальная задача

В начальной задаче свод-оболочка решена с помощью формул сопротивления материалов, применяя гипотезу плоских сечений.

Так как в случае обратносимметричной внешней нагрузки внутренняя сила затяжки $Z = 0$, то арка является статически определимой и усилия в сечениях арки находятся следующими формулами:

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \frac{\rho R_0^2}{2} (\sin \alpha_0 \sin \alpha - \sin^2 \alpha); \\ Q_\alpha &= -\rho R_0 \cos \alpha \left(\frac{1}{2} \sin \alpha_0 - \sin \alpha \right); \\ N_\alpha &= \rho R_0 \sin \alpha \left(\frac{1}{2} \sin \alpha_0 - \sin \alpha \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где M_α — момент арки в сечении α ,

Q_α — поперечные силы в сечении α ,

N_α — нормальные силы в сечении α .

Далее рассматривается поперечная полоска свода-оболочки шириной 1 м в месте расположения максимального момента арки (т. е. пролет арки в четверти сечения C), где

$$\max M_c = \frac{2\rho L_0^2}{64}. \quad (2)$$

В том же сечении $Q_c = M_c = 0$.

На рассматриваемую поперечную полоску арки действуют следующие нагрузки:

1) внешняя нагрузка, направленная по радиусу арки, которая в поперечном сечении в настоящей работе рассматривается в следующих вариантах:

а) равномерно распределенной,

б) сосредоточенной на оси симметрии поперечного сечения, и

в) сосредоточенной на бортовых элементах;

2) приращение сдвигающих сил

$$\xi_0 = \frac{1}{R_0} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} \frac{S_{0z}}{2I}, \quad (3)$$

где S_{0z} — статический момент относительно центра тяжести поперечного сечения от части поперечного сечения, расположенной выше рассматриваемого волокна,
 I — момент инерции поперечного сечения арки,
 R_0 — радиус оси арки;

3) перенаправляющие силы продольных сил T_0 , рассчитываемые по формуле

$$V_0 = \frac{T_0}{R_0} = \frac{\max M \cdot z \cdot \delta}{R_0 I}, \quad (4)$$

При нахождении поперечных изгибающих моментов из приведенных компонентов нагрузки половины полоски арки рассматриваются как консоли с сечением заделки на оси z (см. фиг. 1).

Поперечные изгибающие моменты возникают положительные (т. е. зона растяжения находится в нижней части свода-оболочки), причем максимальные поперечные изгибающие моменты получаются при расположении внешней нагрузки на линии симметрии поперечного сечения (на оси z), а минимальные — в случае расположения внешней нагрузки на бортовых элементах.

Поперечные изгибающие моменты, определяемые по схеме расчета вышеизложенной начальной задачи, зачастую оказываются сравнительно большими.

б) Дополнительная задача

В этой задаче отказываются от гипотез плоских сечений и недеформируемости контура поперечного сечения арки. Конструкция, стремясь найти состояние минимума потенциальной энергии, перераспределяет в поперечном сечении как продольные силы $T_1 = T$ (а тем самым и перенаправляющие силы V), так и приращение сдвигающих сил ξ , в результате чего в некоторой степени уменьшаются и поперечные изгибающие моменты $m_2 = m$.

В целях упрощения расчетов необходимо допустить еще следующие предпосылки:

а) Применяется т. н. полубезмоментная теория. Так как $\frac{R_0}{r_0} \gg 1$, то можем величины продольных изгибающих моментов m_1 считать близкими нулю. Восприятие моментов кручения конструктивно не обеспечивается.

б) Приращение сдвигающих сил ξ вдоль арки изменяется афинно внешней нагрузке, как и в начальной задаче. Таким образом при данной нагрузке можно считать ξ на протяжении половины арки постоянным.

Между приращением дополнительно выбранных сдвигающих сил $\Delta\xi$ и приращением соответственных максимальных продольных сил ΔT действует зависимость, найденная при расчетах цилиндрических оболочек [5]:

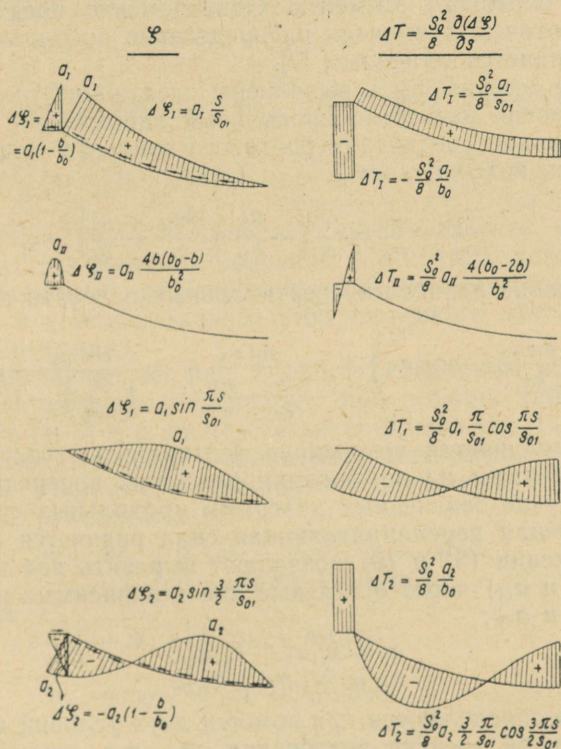
$$\Delta T = \frac{S_0^2}{8} \frac{\partial(\Delta\xi)}{\partial s}, \quad (5)$$

где множитель $\frac{S_0^2}{8}$ учитывает, как предполагается, квадратно-параболичные изменения продольных сил вдоль половины оси арки. Оказывается целесообразным выбрать $\Delta\xi$ в следующем виде (соответствующие диаграммы представлены на фиг. 2):

— в криволинейной части

$$\Delta\xi = a_1 \frac{s}{s_{01}} + a_1 \sin \frac{\pi s}{s_{01}} + a_2 \sin \frac{3}{2} \frac{\pi s}{s_{01}}, \quad (6)$$

— в бортовых элементах



Фиг. 2

$$\Delta \zeta = a_1 \left(1 - \frac{b}{b_0}\right) - a_2 \left(1 - \frac{b}{b_0}\right) + a_{II} \frac{4b(b_0 - b)}{b_0^2},$$

где a_1 , a_{II} , a_1 и a_2 искомые параметры.

Соответственно (5) максимальные значения продольных сил получаются:

— в криволинейной части

$$\Delta T = \frac{S_0^2}{8} \left[\frac{a_1}{s_{01}} + a_1 \frac{\pi}{s_{01}} \cos \frac{\pi s}{s_{01}} + a_2 \frac{3}{2} \frac{\pi}{s_{01}} \cos \frac{3}{2} \frac{\pi s}{s_{01}} \right], \quad (7)$$

— в бортовых элементах

$$\Delta T = \frac{S_0^2}{8} \left[-\frac{a_1}{b_0} + \frac{a_2}{b_0} + a_{II} \frac{4(b_0 - 2b)}{b_0^2} \right].$$

При выбранных диаграммах приращение сдвигающих сил на гранях бортовых элементов и на оси симметрии поперечного сечения равно нулю. Также выполнено условие равенства сдвигающих сил на линии соединения криволинейной части и бортового элемента. Одновременно предполагается, что в бортовых элементах распределение продольных напряжений является линейным [7].

Далее должны быть выполнены следующие условия:

1) условие равенства продольных напряжений (деформаций) на линии соединения бортового элемента и криволинейной части, которое дает:

$$\frac{a_1}{s_{01}} - \frac{\pi a_1}{s_{01}} = \frac{\delta}{\delta_0} \left(-\frac{a_1}{b_0} + \frac{4a_{II}}{b_0} + \frac{a_2}{b_0} \right); \quad (8)$$

2) условие равновесия вертикальных нагрузок поперечной полоски:

$$a_1 \left(\frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} - \cos \varphi_0 \right) + a_1 \frac{\sin \varphi_0}{\frac{\pi}{\varphi_0} - \frac{\varphi_0}{\pi}} - a_2 \frac{\cos \varphi_0}{\left(\frac{3\pi}{2\varphi_0} \right)^2 - 1} = 0, \quad (9)$$

которое получается интегрируя вертикальные составляющие из $\Delta \zeta$ диаграмм на протяжении половины поперечного сечения. В случае означенных диаграмм продольных сил (7) результирующая перенаправляющая сила равняется нулю.

Выражения (8) и (9) позволяют выразить два параметра (напр. a_1 и a_{II}) через остальные два независимых параметра (напр. a_1 и a_2):

$$\begin{aligned} a_1 &= k_{I1} a_1 + k_{I2} a_2, \\ a_{II} &= k_{II1} a_1 + k_{II2} a_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Последние определяются при помощи двух условий минимума потенциальной энергии внутренних сил, где ограничиваются только влиянием поперечных изгибающих моментов $m_2 = m$ и продольных сил $T_1 = T$.

Выражение потенциальной энергии для одной восьмой части свода-оболочки в данном случае получается в виде:

$$\Pi = S_0 \int_0^{s_{01}} \frac{m^2 ds}{2EI_r} + \int_0^{S_0} dx \oint \frac{T^2(xs)}{2EI_r} ds, \quad (11)$$

где I_r — момент инерции поперечной полоски: $I_r = \frac{1 \cdot \delta^3}{12}$,

— интеграл вдоль половины поперечного сечения свода-оболочки,
откуда условия минимума потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = & [a_1 \int_0^{s_{01}} (m_1')^2 ds + a_2 \int_0^{s_{01}} (m_1' m_2') ds + \int_0^{s_{01}} (m_0 m_1') ds] + \\ & + 0,2(6) \frac{\delta^2}{6} [a_1 \int_0^{s_{01}} (T_1')^2 ds + a_2 \int_0^{s_{01}} (T_1' T_2') ds + \int_0^{s_{01}} (T_0 T_1') ds] = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = & [a_1 \int_0^{s_{01}} (m_1' m_2') ds + a_2 \int_0^{s_{01}} (m_2')^2 ds + \int_0^{s_{01}} (m_0 m_2') ds] + \\ & + 0,2(6) \frac{\delta^2}{6} [a_1 \int_0^{s_{01}} (T_1' T_2') ds + a_2 \int_0^{s_{01}} (T_2')^2 ds + \int_0^{s_{01}} (T_0 T_2') ds] = 0. \end{aligned}$$

Множитель 0,2(6) учитывает параболическое изменение продольных сил по длине половины оси арки. В условиях минимума потенциальной энергии необходимые интегралы легко находятся с помощью какого-либо численного метода (напр. методом Симпсона).

Из приведенных на фиг. 2 $\Delta \xi$ и ΔT диаграмм поперечные изгибающие моменты определимы при помощи таблиц, приведенных в [4, 5] и в конце статьи (таблицы Пр. II, III, IV). Усилия находятся после определения параметров путем суммирования. Например, суммарный поперечный изгибающий момент выражается в виде:

$$m = m_0 + a_1 (m_1 + k_{11} m_I + k_{111} m_{II}) + a_2 (m_2 + k_{12} m_I + k_{112} m_{II}). \quad (13)$$

Обозначая

$$m_1' = m_1 + k_{11} m_I + k_{111} m_{II} \quad (13')$$

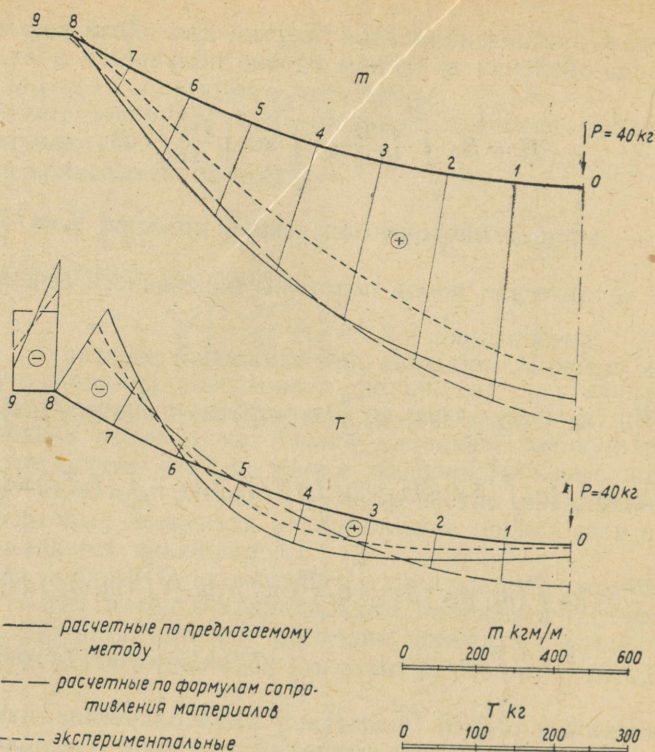
и

$$m_2' = m_2 + k_{12} m_I + k_{112} m_{II},$$

получаем

$$m = m_0 + a_1 m_1' + a_2 m_2', \quad (13'')$$

где m_0 является поперечным изгибающим моментом, определяемым из начальной задачи.



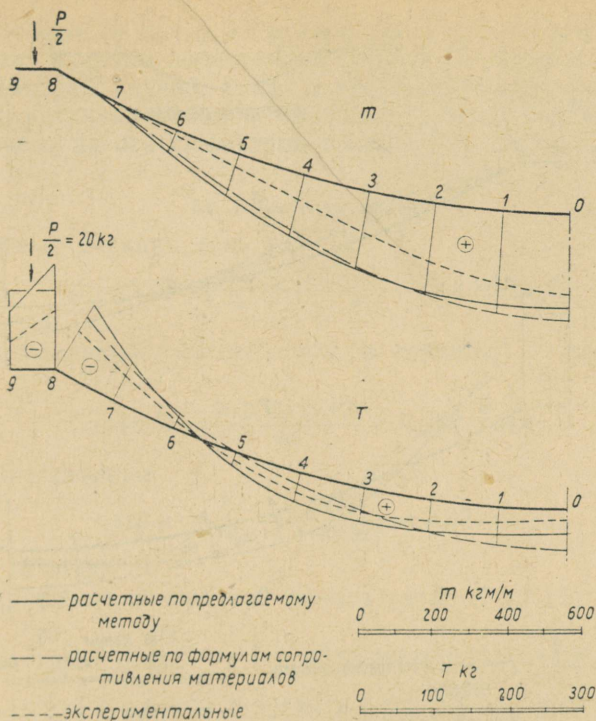
Фиг. 3

Аналогично находим суммарную продольную силу:

$$\begin{aligned}
 T &= T_0 + a_1(\Delta T_1 + k_{11}\Delta T_I + k_{111}\Delta T_{II}) + \\
 &\quad + a_2(\Delta T_2 + k_{12}\Delta T_I + k_{112}\Delta T_{II}) = \\
 &= T_0 + a_1\Delta T_1' + a_2\Delta T_2'.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Численный расчет по представленному методу производился с геометрическими размерами свода-оболочки, представленными на фиг. 1. Как выяснилось, используя дополнительную задачу представляется возможным уменьшить величины поперечных изгибающих моментов, в зависимости от расположения внешней нагрузки в поперечном сечении, на 10—20% по сравнению с поперечными изгибающими моментами, найденными из начальной задачи (фиг. 3 и 4). При этом, однако, продольная сила T имеет по сравнению с T_0 гораздо большие различия.

Представленный метод расчета можно распространить также на своды-оболочки с горизонтально закрепленными



Фиг. 4

бортовыми элементами (средние волны). В этом случае при нахождении поперечных изгибающих моментов в начальной задаче следует дополнительно учитывать также влияние горизонтальной реакции X_b (фиг. 5). Тогда поперечный изгибающий момент из начальной задачи:

$$m_0' = m_0 + X_b m_b, \quad (15)$$

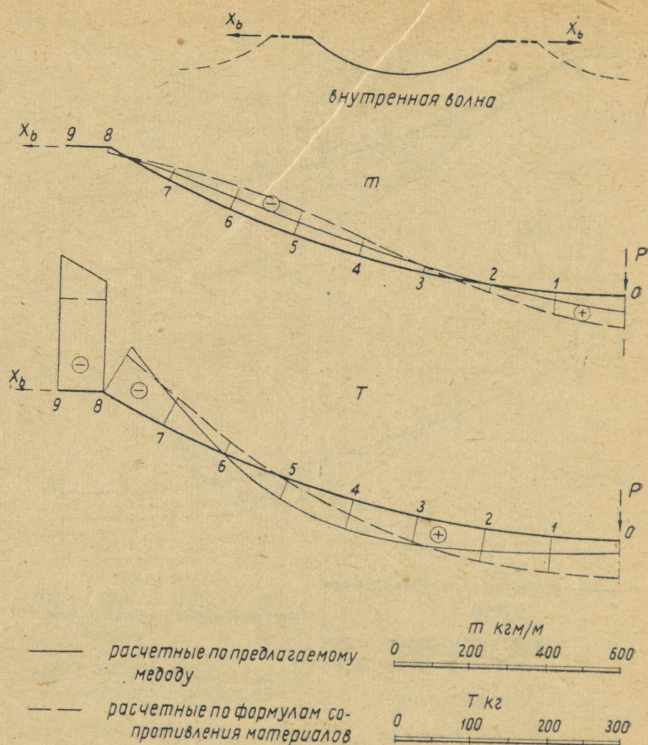
где m_0 — поперечный изгибающий момент свода-оболочки со свободными бортовыми элементами,

X_b — горизонтальная реакция на 1 м бортового элемента,

m_b — поперечный изгибающий момент при $X_b = 1$ (определяется при помощи таблиц в [4] и [5]).

Горизонтальная реакция X_b определяется из выражения

$$X_b \int_0^{s_{01}} (m_b)^2 ds + \int_0^{s_{01}} (m_0 m_b) ds = 0, \quad (16)$$



Фиг. 5

где первый интеграл легко вычисляется с помощью таблиц, приведенных в [4], [5], а второй определяется численно.

Как видно из фиг. 5, в случае закрепленных бортовых элементов поперечные изгибающие моменты становятся близкими нулю в виду того, что получаемые в начальной задаче и так уже маленькие поперечные изгибающие моменты уменьшаются дополнительной задачей еще приблизительно на 30—50%.

2. Пример расчета

а) Расчетные данные

В качестве примера произведен расчет свода-оболочки с геометрическими данными, представленными на фиг. 1. Дополнительные характеристики для поперечного сечения:

площадь поперечного сечения $F = 0,413 \text{ м}^2$,

расстояние от оси y до центра тяжести $z_0 = 0,3275$ м,
момент инерции поперечного сечения $I = 0,03034$ м⁴.

Рассмотрим случай, когда в продольном направлении обратнoсимметрично распределенная нагрузка $p = 250$ кг/м сосредоточена на оси симметрии поперечного сечения.

б) Начальная задача

Опорные реакции (см. фиг. 1)

$$A = -B = \frac{pL_0}{4} = \frac{0,25 \cdot 29,474}{4} = 1,8421 \text{ т.}$$

Максимальный момент арки в сечении C выражается из (2)

$$\max M = \frac{2 \cdot 0,25 \cdot 29,474}{64} = 6,787 \text{ тм/м.}$$

Для этого сечения

$$\sin \alpha = \frac{L_0}{4R_0} = \frac{29,474}{4 \cdot 22,927} = 0,32139$$

и $\alpha = 18^\circ 44' 50''$.

Приращение поперечной силы в точке C по (1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial S} &= \frac{1}{R_0} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} = p \left(\frac{1}{2} \sin \alpha_0 \sin \alpha + \cos 2\alpha \right) = \\ &= 0,25 \left(\frac{1}{2} 0,64279 \cdot 0,32139 + 0,79341 \right) = 0,2242 \text{ т/м.} \end{aligned}$$

Статические моменты S_{0z} определяются выражением

$$S_{0z} = 2\delta [R_0^2 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - R_0 z_0 \alpha].$$

Полученные численные значения представлены в таблице 1.

Таблица 1

Сечение	S_{0z} [см ³]
0	0
1	$1,397 \cdot 10^4$
2	$2,684 \cdot 10^4$
3	$3,787 \cdot 10^4$
4	$4,569 \cdot 10^4$
5	$4,951 \cdot 10^4$
6	$4,851 \cdot 10^4$
7	$4,144 \cdot 10^4$
8	$2,751 \cdot 10^4$

С помощью (3) определяется приращение сдвигающих сил по длине половины поперечного сечения

$$\xi_0 = \frac{224,2 \cdot S_{0z}}{2 \cdot 3034000} = 0,3695 \cdot 10^{-4} \cdot S_{0z},$$

которое представлено в таблице 2.

Таблица 2

	Сечение	ξ_0 [$\frac{кг/см}{м}$]
в криволинейной части	0	0
	1	0,516
	2	0,992
	3	1,399
	4	1,688
	5	1,829
	6	1,792
	7	1,531
в бортовом элементе	8	1,016
	9	0

Продольные силы в сечении С по (4)

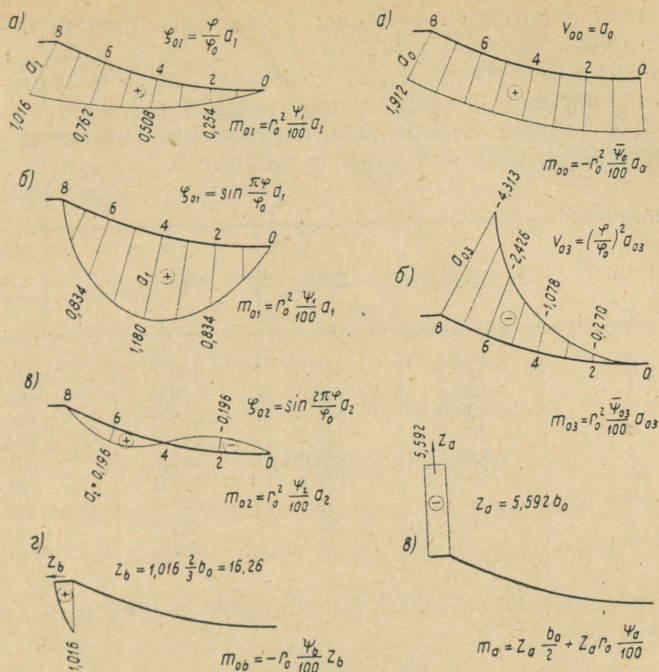
$$T_0 = \frac{\max M_c \cdot z \cdot \delta}{I} = \frac{678700}{3034000} \cdot z \cdot \delta = 0,22370 \cdot z \cdot \delta,$$

откуда перенаправляющие силы

$$V_0 = \frac{T_0}{R_0} = \frac{T_0}{22,927}.$$

Таблица 3

	Сечение	z [см]	T_0 [$\frac{кг/см}{м}$]	V_0 [$\frac{кг/см}{м}$]
в криволинейной части	0	-32,751	43,96	1,917
	1	-31,573	42,38	1,849
	2	-28,046	37,64	1,642
	3	-22,183	29,77	1,298
	4	-14,010	18,80	0,820
	5	- 3,562	4,78	0,208
	6	9,115	-12,23	-0,533
	7	23,969	-32,17	-1,403
в бортовом элементе	8	40,935	-54,94	-2,396
	9	40,935	-128,20	-5,592
	9	40,935	-128,20	-5,592



Фиг. 6

Для определения поперечных изгибающих моментов действительные ξ_0 -диаграмма и V_0 -диаграмма разлагаются на составляющие диаграммы, представленные на фиг. 6. Из начальных диаграмм поперечные изгибающие моменты опреде-

Таблица 4

Сечение	m_{01}	m_{01}	m_{02}	m_{0b}	$\Sigma = m_0 \xi$ [$\frac{\text{кгм}}{\text{м}}$]
1	54,3	48,0	6,7	-12,0	97,0
0	38,0	30,4	5,0	-11,8	61,6
2	25,0	17,6	3,4	-11,2	34,8
3	15,1	9,0	2,1	-10,3	15,9
4	8,0	3,9	1,0	-8,9	4,0
5	3,5	1,3	0,4	-7,2	-2,0
6	1,0	0,3	0,1	-5,2	-3,8
7	0,1	0	0	-2,8	-2,7
8	0	0	0	0	0

ляются при помощи таблицы I в конце статьи и таблиц, представленных в [4] и [5].

Поперечные изгибающие моменты $m_{0\xi}$ от приращения сдвигающих сил представлены в таблице 4.

Рассчитанные поперечные изгибающие моменты m_{0V} от перенаправляющих сил даны в таблице 5.

Таблица 5

Сечение	m_{00}	m_{03}	m_{0a}	$\Sigma = m_{0V}$ [$\frac{\text{кгм}}{\text{м}}$]
0	-776,9	867,6	385,2	475,9
1	-590,7	718,6	336,9	464,8
2	-430,0	571,6	288,8	430,4
3	-295,3	428,3	241,2	374,2
4	-186,4	296,0	194,1	303,7
5	-103,2	179,4	147,9	224,1
6	-45,0	85,7	102,7	143,4
7	-11,0	23,3	58,6	70,9
8	0	0	16,1	16,1

Суммарные поперечные изгибающие моменты из начальной задачи

$$m_0 = m_{0\xi} + m_{0V}.$$

сведены в таблице 6.

Таблица 6

Сечение	m_0 [$\frac{\text{кгм}}{\text{м}}$]
0	573
1	526
2	465
3	390
4	308
5	222
6	140
7	68
8	16

в) Дополнительная задача

Избранные $\Delta\xi$ -диаграммы и ΔT -диаграммы для дополнительной задачи см. на фиг. 2.

Условие равенства продольных напряжений (8) дает

$$\frac{1}{288,0} a_1 - \frac{\pi}{288,0} a_1 = \frac{6}{14} \left(-\frac{a_1}{24} + \frac{4a_{11}}{24} + \frac{a_2}{24} \right),$$

откуда

$$-6,1425a_1 + 20,5700a_{11} + 3,1416a_1 + 5,1425a_2 = 0. \quad (a)$$

Из условия равновесия вертикальных сил (9) для поперечной полоски получается

$$a_1 \left(\frac{0,50000}{0,52360} - 0,86603 \right) + a_1 \frac{0,50000}{6 - \frac{1}{6}} - a_2 \frac{0,86603}{9^2 - 1} = 0,$$

откуда

$$8,8905a_1 + 8,5714a_1 - 1,0825a_2 = 0. \quad (b)$$

Из уравнений (a) и (b) два параметра выражаются через остальные два независимых параметра:

$$a_1 = -0,96411a_1 + 0,12176a_2, \quad (c)$$

$$a_{11} = -0,44062a_1 - 0,21364a_2.$$

Поперечные изгибающие моменты из диаграмм $\Delta\zeta$ и $\Delta V = \frac{\Delta T}{R_0}$, где соответствующие параметры равняются единице (см. фиг. 2), определяются с помощью таблиц II, III, IV, приведенных в конце данной статьи, и таблиц в [4] и [5]. Расчет поперечных изгибающих моментов производится аналогично нахождению моментов в начальной задаче при помощи диаграмм. Указанные поперечные изгибающие моменты представлены в таблице 7.

Таблица 7

Сечение	$m_I = m_{\zeta I} + m_{V I}$	$m_{II} = m_{\zeta II} + m_{V II}$	$m_1 = m_{\zeta 1} + m_{V 1}$	$m_2 = m_{\zeta 2} + m_{V 2}$
0	248,92	10,56	286,42	60,20
1	229,91	10,75	261,77	48,57
2	208,11	11,31	223,28	14,19
3	183,55	12,25	175,04	-30,42
4	156,18	13,56	122,99	-69,46
5	125,95	15,23	73,92	-89,54
6	92,74	17,26	34,18	-84,37
7	56,40	19,64	8,66	-56,65
8	16,76	22,35	0	-16,76

Используя зависимости (c), находим на основе выражения (13') значения m'_1 и m'_2 (таблицы 8 и 9).

Продольные силы из компонентов ΔT определяются с помощью зависимостей

1) ΔT_1

— в бортовом элементе

m'_1

Сечение	m_1	$-0,96411 m_I$	$-0,44062 m_{II}$	$\Sigma = m'_1$
0	286,42	-239,99	-4,65	41,78
1	261,77	-221,66	-4,74	35,37
2	223,28	-200,64	-4,98	17,66
3	175,04	-176,96	-5,40	-7,32
4	122,99	-150,57	-5,97	-33,55
5	73,92	-121,43	-6,71	-54,22
6	34,18	-89,41	-7,61	-62,84
7	8,66	-54,38	-8,65	-54,37
8	0	-16,16	-9,85	-26,01

Таблица 9

 m'_2

Сечение	m_2	$0,12176 m_I$	$-0,21364 m_{II}$	$\Sigma = m'_2$
0	60,20	30,31	-2,26	88,20
1	48,57	27,99	-2,30	74,26
2	14,19	25,34	-2,42	37,11
3	-30,42	22,35	-2,62	-10,69
4	-69,46	19,02	-2,90	-53,34
5	-89,54	15,34	-3,25	-77,45
6	-84,37	11,29	-3,69	-76,77
7	-56,65	6,87	-4,20	-53,98
8	-16,76	2,04	-4,77	-19,49

$$\Delta T_I = -\frac{S_0^2}{8} \frac{1}{b_0} a_I = -\frac{16,006^2}{8} \frac{1}{0,24} a_I = -133,43 a_I;$$

— в криволинейной части

$$\Delta T_I = \frac{S_0^2}{8} \frac{1}{s_{01}} a_I = \frac{16,006^2}{8} \frac{1}{2,880} a_I = 11,12 a_I;$$

а) ΔT_{II}

— в бортовом элементе

$$\Delta T_{II} = \pm \frac{S_0^2}{8} \frac{4}{b_0} a_{II} = \pm \frac{16,006^2}{8} \frac{4}{0,24} a_{II} = \pm 533,72 a_{II};$$

— в криволинейной части

$$\Delta T_{II} = 0;$$

3) ΔT_I

— в бортовом элементе

$$\Delta T_I = 0;$$

— в криволинейной части

$$\Delta T_1 = \frac{S_0^2}{8} \frac{\pi}{s_{01}} \cos \frac{\pi}{\varphi_0} \varphi a_1 = \frac{16,006^2}{8} \frac{3,1416}{2,880} \cos 6\varphi a_1 = 34,93 \cos 6\varphi a_1;$$

4) ΔT_2

— в бортовом элементе

$$\Delta T_2 = \frac{S_0^2}{8} \frac{1}{b_0} a_2 = \frac{16,006^2}{8} \frac{1}{0,24} a_2 = 133,43 a_2;$$

— в криволинейной части

$$\begin{aligned} \Delta T_2 &= \frac{S_0^2}{8} \frac{3\pi}{2s_{01}} \cos \frac{3\pi}{2\varphi_0} \varphi a_2 = \\ &= \frac{16,006^2}{8} \frac{3 \cdot 3,1416}{2 \cdot 2,880} \cos 9\varphi a_2 = 52,40 \cos 9\varphi a_2. \end{aligned}$$

Таблица 10

	Сечение	ΔT_I	ΔT_{II}	ΔT_1	ΔT_2
в криволинейной части	0	11,12	—	34,93	52,40
	1	11,12	—	32,27	43,57
	2	11,12	—	24,70	20,05
	3	11,12	—	13,37	-10,22
	4	11,12	—	0	-37,05
	5	11,12	—	-13,37	-51,39
	6	11,12	—	-24,70	-48,41
	7	11,12	—	-32,27	-29,11
	8	11,12	—	-34,93	0
в бортовом элементе	8	-133,43	533,72	—	133,43
	9	-133,43	-533,72	—	133,43

Используя зависимости (с), получают:

T'_1

Таблица 11

	Сечение	ΔT_1	$-0,96411 \Delta T_I$	$-0,44062 \Delta T_{II}$	$\Sigma = \Delta T'_1$
в криволинейной части	0	34,93	-10,71	—	24,22
	1	32,27	-10,71	—	21,56
	2	24,70	-10,71	—	13,99
	3	13,37	-10,71	—	2,66
	4	0	-10,71	—	-10,71
	5	-13,37	-10,71	—	-24,08
	6	-24,70	-10,71	—	-35,41
	7	-32,27	-10,71	—	-42,98
	8	-34,93	-10,71	—	-45,64
в бортовом элементе	8	—	128,64	-235,17	-106,53
	9	—	128,64	235,17	363,81

T'_2

	Сечение	ΔT_2	$0,12176 \Delta T_I$	$-0,21364 \Delta T_{II}$	$\Sigma = \Delta T'_2$
в криволинейной части	0	52,40	1,35	—	53,75
	1	43,57	1,35	—	44,92
	2	20,05	1,35	—	21,40
	3	-10,22	1,35	—	-8,87
	4	-37,05	1,35	—	-35,70
	5	-51,39	1,35	—	-50,04
	6	-48,41	1,35	—	-47,06
	7	-29,11	1,35	—	-27,76
	8	0	1,35	—	1,35
в бортовом элементе	8	133,43	-16,25	-114,02	3,16
	9	133,43	-16,25	-114,02	231,20

Продольные силы, если параметры $a_I = a_{II} = a_1 = a_2 = 1$, указаны в таблице 10.

Нужные интегралы для условий минимума потенциальной энергии (12) находятся численно при использовании метода Симпсона. Например:

$$\int_0^{s_{01}} (m'_1)^2 ds = \frac{36}{3} (41,78^2 + 4 \cdot 35,37^2 + 2 \cdot 17,66^2 + 4 \cdot 7,32^2 + 2 \cdot 33,55^2 + 4 \cdot 54,22^2 + 2 \cdot 62,84^2 + 4 \cdot 54,37^2 + 26,01^2) = 5,040 \cdot 10^5.$$

Аналогично найдены численные значения остальных интегралов:

$$\int_0^{s_{01}} (m'_2)^2 ds = 10,388 \cdot 10^5;$$

$$\int_0^{s_{01}} (m'_1 m'_2) ds = 6,971 \cdot 10^5;$$

$$\int_0^{s_{01}} (m_0 m'_1) ds = 217,0;$$

$$\int_0^{s_1} (m_0 m'_2) ds = 10399,4;$$

$$\int_0^{s_{01}} (T'_1)^2 ds = 5,685 \cdot 10^5;$$

$$\int_0^{s_{01}} (T_2')^2 ds = 5,730 \cdot 10^5;$$

$$\int_0^{s_{01}} (T_1' T_2') ds = 4,787 \cdot 10^5.$$

Интегралы $\int_0^{s_{01}} (T_0 T_1') ds$ и $\int_0^{s_{01}} (T_0 T_2') ds$ получились близки-

ми нулю и от них отказались.

Условия минимума потенциальной энергии (12) в данном случае принимают вид:

$$\begin{aligned} & (5,040a_1 + 6,971a_2 + 0,002170) + \\ & + \frac{0,2(6) \cdot 6^2}{6} (5,685a_1 + 4,787a_2) = 0; \\ & (6,971a_1 + 10,388a_2 + 0,103994) + \\ & + \frac{0,2(6) \cdot 6^2}{6} (4,787a_1 + 5,730a_2) = 0; \end{aligned}$$

откуда определяются независимые параметры:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,02371; \\ a_2 &= -0,02305. \end{aligned}$$

При помощи (13'') и (14) находятся суммарные поперечные изгибающие моменты и продольные силы в полоске свода-оболочки шириной 1 м, представленные в таблицах 13 и 14.

Таблица 13

Суммарные поперечные изгибающие моменты m [кгм/м]

Сечение	m_0	0,02371 m'_1	-0,02305 m'_2	$\Sigma = m$
0	573	99	-203	469
1	526	84	-171	439
2	465	42	-86	421
3	390	-17	25	398
4	308	-80	123	351
5	222	-129	179	272
6	140	-149	177	168
7	68	-129	124	63
8	16	-62	45	-1

Суммарные продольные силы T [кг]

	Сечение	T_0	$0,02371 T'_1$	$-0,02305 T'_2$	$\Sigma = T$
в криволинейной части	0	44,0	57,4	-123,9	-22,5
	1	42,4	51,1	-103,5	-10,0
	2	37,6	33,2	-49,3	21,5
	3	29,8	6,3	20,4	56,5
	4	18,8	-25,4	82,3	75,7
	5	4,8	-57,1	115,3	63,0
	6	-12,2	-84,0	108,5	12,3
	7	-32,2	-101,9	64,0	-70,1
	8	-54,9	-108,2	-3,1	-166,2
в бортовом элементе	8	-128,2	-252,6	-7,3	-388,1
	9	-128,2	862,6	-532,9	201,5

3. Заключение

Из приведенного примера расчета вытекает, что с помощью предложенного расчетного метода можно весьма просто рассчитать своды-оболочки и в случае обратносимметричной нагрузки, пользуясь при этом соответствующими таблицами, представленными в [4], [5] и в конце настоящей статьи.

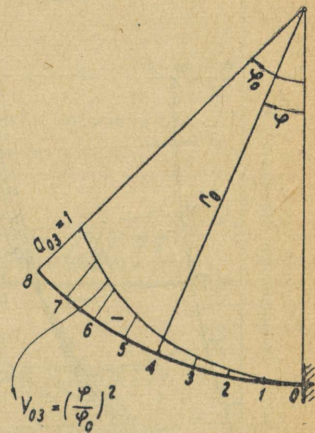
Выяснилось, что уменьшение поперечных изгибающих моментов по сравнению с изгибающими моментами, найденными при помощи формул сопротивления материалов, в общем меньше ожидаемого (около 10—20%). Однако продольные силы по сравнению с результатами сопротивления материалов имеют существенные различия. Следует отметить, что уменьшение поперечных изгибающих моментов зависит главным образом от толщины криволинейной части свода-оболочки и в некоторой мере также от поперечного распределения нагрузки.

Так, например, при расположении внешней нагрузки на оси симметрии поперечного сечения оказалось возможным уменьшить поперечные изгибающие моменты в случае $\delta = 6$ см на 19%, $\delta = 8$ см на 13% и $\delta = 10$ см на 10% (см. фиг. 7).

$$m_{03} = \frac{r_0^2}{\varphi_0^3} \left[2\varphi_0 \sin \varphi_0 - (\varphi_0^2 - 2) \cos \varphi_0 - \left(\frac{\varphi_0^3}{3} - \frac{\varphi^3}{3} + 2\varphi \right) \sin \varphi + \right. \\ \left. + (\varphi^2 - 2) \cos \varphi \right] = r_0^2 \frac{\bar{\psi}_{03}}{100}$$

$\bar{\psi}_{03}$

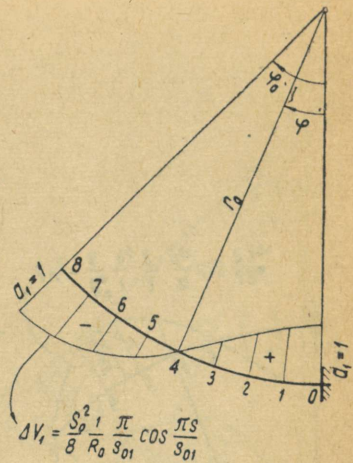
$\varphi_0 \backslash \varphi$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
20°	3,005	2,498	1,994	1,506	1,048	0,639	0,308	0,083	0
25°	4,660	3,868	3,083	2,322	1,609	0,979	0,469	0,126	0
30°	6,647	5,506	4,378	3,287	2,270	1,373	0,654	0,174	0
35°	8,948	7,395	5,862	4,384	3,013	1,813	0,858	0,227	0
40°	11,537	9,509	7,511	5,592	3,821	2,283	1,071	0,281	0
45°	14,389	11,824	9,301	6,888	4,675	2,770	1,286	0,333	0



$$m_{v1} = \frac{S_0^2 \pi}{8R_0 s_{01}} \frac{r_0^2}{\left(\frac{\pi}{\varphi_0}\right)^2 - 1} \left[\cos \varphi_0 + \cos \varphi \cos \frac{\pi}{\varphi_0} \varphi + \frac{\varphi_0}{\pi} \sin \varphi \sin \frac{\pi}{\varphi_0} \varphi \right] = \frac{S_0^2 \pi}{8R_0 s_{01}} \frac{r_0^2}{100} \psi_{v1}$$

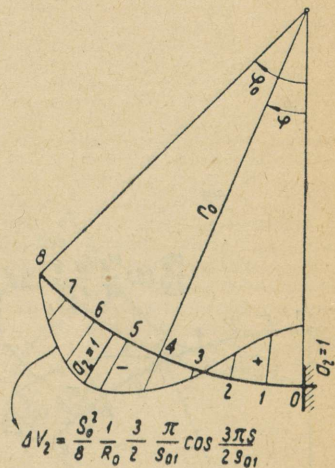
 ψ_{v1}

$\varphi_0 \backslash \varphi$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
20°	2,4246	2,3307	2,0637	1,6656	1,1987	0,7354	0,3463	0,0892	0
25°	3,7496	3,6029	3,1863	2,5665	1,8418	1,1257	0,5277	0,1352	0
30°	5,3315	5,1203	4,5213	3,6326	2,5976	1,5804	0,7367	0,1875	0
35°	7,1482	6,8608	6,0472	4,8435	3,4486	2,0864	0,9658	0,2438	0
40°	9,1743	8,7991	7,7387	6,1757	4,3743	2,6285	1,2064	0,3014	0
45°	11,3807	10,9061	9,5674	7,6024	5,3519	3,1899	1,4492	0,3575	0



$$m_{V2} = \frac{S_0^2}{8R_0} \frac{3\pi}{2s_{01}} \frac{r_0^2}{\left(\frac{3\pi}{2\varphi_0}\right)^2 - 1} \left[\frac{3\pi}{2\varphi_0} \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \frac{3\pi}{2\varphi_0} \varphi + \frac{2\varphi_0}{3\pi} \sin \varphi \sin \frac{3\pi}{2\varphi_0} \varphi - \right. \\ \left. = \left(\frac{3\pi}{2\varphi_0} - \frac{2\varphi_0}{3\pi} \right) \sin \varphi \right] = \frac{S_0^2}{8R_0} \frac{3\pi}{2s_{01}} \frac{r_0^2}{100} \psi_{V2}$$

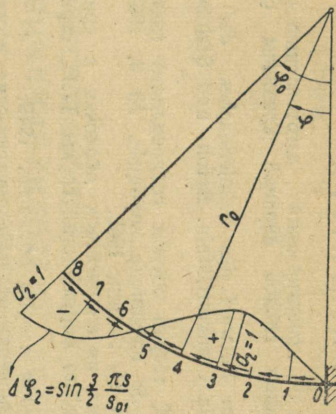
$\varphi_0 \backslash \varphi$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
20°	3,0992	2,6837	2,1155	1,4791	0,8820	0,4176	0,1339	0,0175	0
25°	4,8117	4,1626	3,2760	2,2850	1,3582	0,6405	0,2043	0,0265	0
30°	6,8750	5,9405	4,6657	3,2447	1,9209	0,9012	0,2857	0,0368	0
35°	9,2714	7,9998	6,2679	4,3434	2,5588	1,1931	0,3753	0,0478	0
40°	11,9805	10,3201	8,0630	5,5636	3,2588	1,5082	0,4700	0,0593	0
45°	14,9790	12,8783	10,0285	6,8859	4,0061	1,8377	0,5663	0,0704	0



$$m_{\zeta_2} = - \frac{r_0^2}{\left(\frac{3\pi}{2\varphi_0}\right)^2 - 1} \left[\sin(\varphi_0 - \varphi) + \frac{2\varphi_0}{3\pi} \cos \frac{3\pi}{2\varphi_0} \varphi \right] = - \frac{r_0^2}{100} \psi_{\zeta_2}$$

 ψ_{ζ_2}

$\varphi_0 \backslash \varphi$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
20°	0,2296	0,1999	0,1584	0,1114	0,0669	0,0319	0,0103	0,0014	0
25°	0,4455	0,3888	0,3086	0,2173	0,1305	0,0623	0,0202	0,0027	0
30°	0,7639	0,6683	0,5315	0,3747	0,2253	0,1076	0,0348	0,0046	0
35°	1,2018	1,0549	0,8407	0,5936	0,3573	0,1708	0,0553	0,0073	0
40°	1,7749	1,5636	1,2492	0,8835	0,5324	0,2547	0,0825	0,0109	0
45°	2,4965	2,2085	1,7696	1,2539	0,7567	0,3623	0,1175	0,0155	0



ЛИТЕРАТУРА

1. Временные указания по проектированию, изготовлению и возведению сборных железобетонных сводов двойной кривизны (РСН 11-59). Киев, 1960.
2. G. Kirchner. Zum Entwurf des Schalendaches der Flugzeughalle III auf dem Flughafen Frankfurt/Main. Beton- und Stahlbetonbau. Heft 4, 1960.
3. Мирча Соаре. К теории изгиба седловидного гиперболического параболоида. Revue de mécanique appliquée. № 3, 1962.
4. Н. Лаул. Raudbetoon II. Tallinn, 1962.
5. Х. Х. Лаул. Расчет цилиндрических оболочек с криволинейными частями, очерченными по окружности. Труды ТПИ, серия А, № 50, 1953.
6. В. З. Власов. Общая теория оболочек. 1949.
7. А. А. Цейтлин. Экспериментально-теоретические исследования железобетонных сводов двойной кривизны. «Вестник Академии строительства и архитектуры УССР» № 1, 1958, и др.
8. М. А. Лойтве. Экспериментальное исследование железобетонных сводов-оболочек двойной кривизны. См. настоящий сборник стр. 125.

В. А. Отсмаа

К РАСЧЕТУ НА ПОПЕРЕЧНУЮ СИЛУ ДЛИННЫХ КРУГОЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОБОЛОЧЕК

1. Общие замечания

Разрушение на поперечную силу длинной кругоцилиндрической железобетонной оболочки происходит по критическим трещинам¹ после образования критического блока. Условия прочности такой оболочки относительно поперечной силы даны в [3] в виде (см. фиг. 1):

$$M \leq 2F_a \sigma_T z + M_{Qa} - S_{bv} g, \quad (1)$$

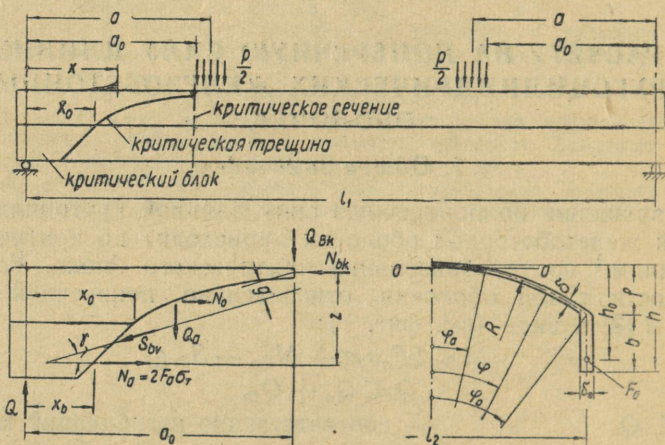
$$Q \leq Q_a + Q_B, \quad (2)$$

- где M , Q — соответственно изгибающий момент и поперечная сила оболочки как «большой балки» в критическом сечении;
- Q_a — сумма вертикальных составляющих предельных усилий поперечной арматуры, проходящей через критические трещины;
- $Q_B = Q_{Bk} + S_{bv} \sin \gamma$ — предельная поперечная сила, воспринимаемая бетоном (определяемая по [3]);
- M_{Qa} , $2F_a \sigma_T z$ — моменты предельных усилий соответственно поперечной и продольной арматуры относительно горизонтальной оси 0-0, проходящей в месте приложения результата нормальных усилий N_{bk} в критическом сечении критического блока;
- $S_{bv} g$ — момент относительно оси 0-0 общего усилия бетона в критической трещине бортовых элементов (определяемый по уравнениям [3]).

¹ Здесь и в дальнейшем применяются понятия, принятые в [1, 2, 3].

Уравнение (1) получают от предельного равновесия моментов критического блока относительно оси 0-0; уравнение (2) — от предельного равновесия вертикальных сил, приложенных к критическому блоку оболочки.

В настоящей статье рассматривается определение членов уравнений прочности Q_a и M_{Qa} для оболочек, нагруженных сосредоточенными в продольном направлении внешними нагрузками (см. фиг. 1).



Фиг. 1

2. Определение формы критической трещины

При вычислении Q_a и M_{Qa} прежде всего придется определить форму и расположение критической трещины. Экспериментальными исследованиями [1, 2] установлено, что форма критической трещины близка к траектории главных сжимающих напряжений, сконструированной на основе второй стадии напряженного состояния при предположении, что 1) при нагружении поперечные сечения оболочки остаются плоскими, 2) вертикальные трещины изгиба развиты до нулевой линии и 3) зависимость между напряжениями и деформациями является линейной.

Расположение критической трещины можно определить расстоянием ее от опорного сечения по совместной линии бортового элемента и криволинейной части. Зависимость этого расстояния x_0 от пролета среза a и полезной высоты h_0 дана для некоторых случаев в [1, 2].

Теоретическая критическая трещина распространяется ниже нулевой линии второго напряженного состояния под углом в 45° к образующей оболочки. Уравнение критической трещины для участка выше нулевой линии получают от зависимости

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{R}, \quad (3)$$

где ϑ — угол от гребня оболочки до критической трещины в сечении x ;

α — угол от образующей оболочки до траектории главных сжимающих напряжений второй стадии напряженного состояния;

R — радиус криволинейной части оболочки.

Исходя из вышеприведенных предположений, в точке с координатами x и ϑ

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2r}{\sigma} = \frac{2QR(\sin \vartheta - \vartheta \cos \varphi_N)}{M(\cos \vartheta - \cos \varphi_N)}, \quad (4)$$

где Q , M — соответственно поперечная сила и изгибающий момент оболочки как «большой балки» в сечении x ;

φ_N — угол от гребня оболочки до нулевой линии второй стадии напряженного состояния.

Выражая от (4) $\operatorname{tg} \alpha$, получают дифференциальное уравнение критической трещины для зоны выше нулевой линии

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{M(\cos \vartheta - \cos \varphi_N)}{2QR^2(\sin \vartheta - \vartheta \cos \varphi_N)} - \frac{1}{R} \sqrt{\frac{M^2(\cos \vartheta - \cos \varphi_N)^2}{4Q^2R^2(\sin \vartheta - \vartheta \cos \varphi_N)^2} + 1}. \quad (5)$$

3. Определение Q_a и M_{Qa}

В дальнейшем применяются следующие обозначения (см. Фиг. 2):

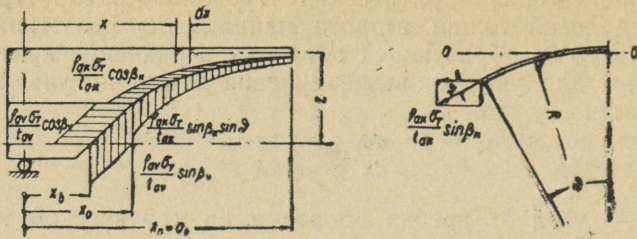
β_k, β_v — угол между поперечной арматурой и образующей оболочки;

f_{ak}, f_{av} — площадь сечения одного стержня поперечной арматуры;

t_{ak}, t_{av} — шаг поперечной арматуры по образующей оболочки;

$p_k = \frac{f_{ak} \sigma_T}{t_{ak}}$, $p_v = \frac{f_{av} \sigma_T}{t_{av}}$ — мощность поперечной арматуры;

σ_T — предел текучести арматуры.



Фиг. 2

Индекс « k » во всех обозначениях соответствует криволинейной части оболочки, индекс « v » — бортовым элементам оболочки.

Суммарные усилия поперечной арматуры, проходящей через критические трещины, и моменты этих усилий относительно оси 0—0 выражаются в следующем виде:

Сумма продольных составляющих предельных усилий поперечной арматуры, проходящей через критические трещины в криволинейной части

$$\begin{aligned}
 N_{ok} &= 2p_k \left(\int_{x_0}^{a_0} \cos \beta_k dx - \int_{\varphi_0}^{\varphi_a} \frac{R}{\operatorname{tg} \beta_k} d\vartheta \right) = \\
 &= 2p_k \cos \beta_k \left[a_0 - x_0 + \frac{R}{\operatorname{tg} \beta_k} (\varphi_0 - \varphi_a) \right] \quad (6)
 \end{aligned}$$

и в бортовых элементах

$$N_{ov} = 2p_v \cos \beta_v \left(x_0 - x_b + \frac{b_0}{\operatorname{tg} \beta_v} \right). \quad (7)$$

Сумма вертикальных составляющих предельных усилий поперечной арматуры, проходящей через критические трещины в криволинейной части

$$\begin{aligned}
 Q_{ak} &= 2p_k \left(\int_{x_0}^{a_0} \sin \beta_k \sin \vartheta dx - \int_{\varphi_0}^{\varphi_a} \frac{R}{\operatorname{tg} \beta_k} \sin \beta_k \sin \vartheta d\vartheta \right) = \\
 &= 2p_k \sin \beta_k \left[\int_{x_0}^{a_0} \sin \vartheta dx + \frac{R}{\operatorname{tg} \beta_k} (\cos \varphi_a - \cos \varphi_0) \right] \quad (8)
 \end{aligned}$$

и в бортовых элементах

$$Q_{av} = 2p_v \sin \beta_v \left(x_0 - x_b + \frac{b_0}{\operatorname{tg} \beta_v} \right). \quad (9)$$

Суммарная поперечная сила, воспринимаемая поперечной арматурой

$$Q_a = Q_{ak} + Q_{av}.$$

Момент усилий N_{ok} и Q_{ak} относительно оси 0—0

$$\begin{aligned} M_{Q_{ak}} = & 2p_k \sin \beta_k \left[\int_{x_0}^{a_0} (a_0 - x) \sin \vartheta dx - \frac{R}{\operatorname{tg} \beta_k} \int_{\varphi_0}^{\varphi_a} (a_0 - x) \sin \vartheta d\vartheta \right] + \\ & + 2p_k R \cos \beta_k \left\{ \frac{\sin \varphi_a}{\varphi_a} \left[a_0 - x_0 - \frac{R}{\operatorname{tg} \beta_k} (\varphi_a - \varphi_0) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{R}{\operatorname{tg} \beta_k} (\sin \varphi_a - \sin \varphi_0) - \int_{x_0}^{a_0} \cos \vartheta dx \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

Момент усилий N_{ov} и Q_{av} относительно той же оси

$$\begin{aligned} M_{Q_{av}} = & 2p_v \left(x_0 - x_b + \frac{b_0}{\operatorname{tg} \beta_v} \right) \left[R \cos \beta_v \left(\frac{\sin \varphi_a}{\varphi_a} - \cos \varphi_0 + \frac{b_0}{2R} \right) + \right. \\ & \left. + \sin \beta_v \left(a_0 - \frac{x_b}{2} - \frac{x_0}{2} \right) \right]. \quad (11) \end{aligned}$$

Суммарным моментом усилий поперечной арматуры относительно оси 0—0 является

$$M_{Q_a} = M_{Q_{ak}} + M_{Q_{av}}.$$

Обозначения a_0 , x_b , φ_a , φ_0 и b_0 см. на фиг. 1 и 2.

При определении $M_{Q_{ak}}$ и Q_{ak} целесообразно отказаться от составления уравнения критической трещины $\vartheta = f(x)$ и найти теоретическую форму критической трещины численным решением формулы (5) (например, методом Эйлера). Заменив найденную трещину n прямолинейными участками, начальные координаты которых x_i и ϑ_i (см. фиг. 3), формулы (8) и (10) принимают вид

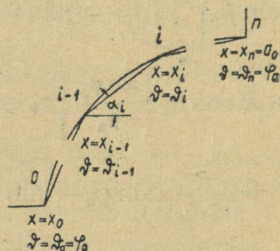
$$Q_{ak} = 2p_k R \sin \beta_k \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\operatorname{tg} a_i} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_k} \right) (\cos \vartheta_i - \cos \vartheta_{i-1}) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} M_{Q_{ak}} = & 2p_k R \sin \beta_k \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\operatorname{tg} a_i} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_k} \right) \left[\left(a_0 - x_{i-1} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{R \vartheta_{i-1}}{\operatorname{tg} a_i} \right) (\cos \vartheta_i - \cos \vartheta_{i-1}) + \frac{R}{\operatorname{tg} a_i} (\vartheta_i \cos \vartheta_i - \sin \vartheta_i - \right. \end{aligned}$$

$$- \vartheta_{i-1} \cos \vartheta_{i-1} + \sin \vartheta_{i-1}) \Big] + 2p_k R \cos \beta_k \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha_i}{\operatorname{tg} \beta_k} \right) \left[\frac{\sin \varphi_a}{\varphi_a} (x_i - x_{i-1}) + \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha_i} (\sin \vartheta_i - \sin \vartheta_{i-1}) \right], \quad (13)$$

где $\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{R(\vartheta_{i-1} - \vartheta_i)}{x_i - x_{i-1}}$.

Фиг. 3



Приведенные выше формулы значительно упрощаются, если вся поперечная арматура расположена перпендикулярно к образующей оболочке, т. е. если $\beta_k = \beta_v = 90^\circ$:

$$N_{ok} = N_{ov} = 0$$

$$Q_{ak} = 2p_k R \sum_{i=1}^n \frac{\cos \vartheta_i - \cos \vartheta_{i-1}}{\operatorname{tg} \alpha_i}. \quad (14)$$

$$Q_{av} = 2p_v (x_0 - x_b). \quad (15)$$

$$M_{Qak} = 2p_k R \sum_{i=1}^n \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_i} \left[\left(a_0 - x_{i-1} - \frac{R \vartheta_{i-1}}{\operatorname{tg} \alpha_i} \right) (\cos \vartheta_i - \cos \vartheta_{i-1}) + \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha_i} (\vartheta_i \cos \vartheta_i - \sin \vartheta_i - \vartheta_{i-1} \cos \vartheta_{i-1} + \sin \vartheta_{i-1}) \right]. \quad (16)$$

$$M_{Qav} = 2p_v (x_0 - x_b) \left(a_0 - \frac{x_b}{2} - \frac{x_0}{2} \right). \quad (17)$$

Формулы (6) ÷ (17) составлены при предположении, что угол между поперечной арматурой и образующей оболочки и мощность поперечной арматуры в критических трещинах являются постоянными соответственно в криволинейной части и в бортовых элементах. Если по длине критической трещины применяется поперечная арматура различных видов, тогда N_0 , Q_a и M_{Qa} определяются отдельно для каждого вида арматуры и полученные результаты суммируются.

откуда для данного примера

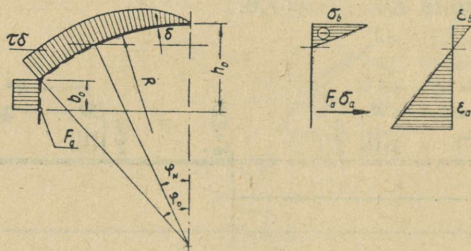
$$0,75 \cdot 31 (\operatorname{tg} \varphi_N - \varphi_N) - \frac{0,377 \cdot 7,6}{31} \left(\frac{12,2 - 31}{\cos \varphi_N} + 31 \right) = 0$$

или

$$23,25 (\operatorname{tg} \varphi_N - \varphi_N) + \frac{1,737}{\cos \varphi_N} - 2,865 = 0.$$

Решая последнее путем последовательных приближений, получаем

$$\varphi_N = 27^{\circ}6' = 0,4730.$$



Фиг. 5

в) Определение формы критической трещины

Для численного решения формулы (5) методом Эйлера выразим ее в виде

$$\Delta \vartheta = \frac{\Delta x}{R} \left[\frac{M}{Q} K - \sqrt{\left(\frac{M}{Q} K \right)^2 + 1} \right],$$

где

$$K = \frac{\cos \vartheta - \cos \varphi_N}{2R (\sin \vartheta - \vartheta \cos \varphi_N)}$$

и $\Delta \vartheta$ — прирост ϑ по длине Δx .

Для данной оболочки в пределах пролета среза $\frac{M}{Q} = x$. Так как по [2] у оболочки с поперечным армированием данного нагружения $x_0 = 1,17h_0$, то $x_0 = 1,17 \cdot 12,2 = 14,2$ см.

Отсюда

$$x_b = x_0 - b_0 \operatorname{tg} 45^{\circ} = 14,2 - 4,9 = 9,3 \text{ см}$$

и расстояние от места пересечения трещины и нулевой линии до опорного сечения

$$x_N = x_0 + (\varphi_0 - \varphi_N) R \operatorname{tg} 45^{\circ} = 14,2 + (0,6981 - 0,4730) 31 = 21,2 \text{ см.}$$

При интегрировании принимается $\Delta x = 2$ см (т. е. $\Delta x/R \approx$

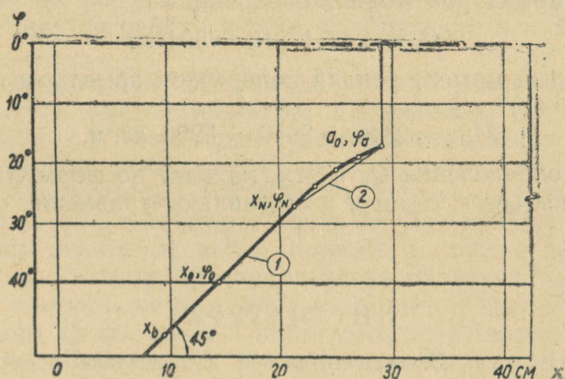
$\approx 1/15$). Вычисление $\Delta\vartheta$ производится в табулированном виде (см. таблица 1).

Таблица 1

Вычисление $\Delta\vartheta$

x	ϑ		$\sin \vartheta$	$\cos \vartheta$	K	$\Delta\vartheta$
см	°	рад.				рад.
1	2	3	4	5	6	7
21,2	27°6'	0,4730	0,4555	0,8902	0	-0,0581
23,0	23°46'	0,4149	0,4030	0,9152	0,01198	-0,0491
25,0	20°57'	0,3658	0,3575	0,9339	0,02213	-0,0380
27,0	18°47'	0,3278	0,3220	0,9467	0,03018	-0,0306
29,0	17°6'	0,2972	0,2940	0,9558		

Форма полученной критической трещины дана на фиг. 6 (линия 1).



Фиг. 6

г) Вычисление Q_a и M_{Qa}

Критическая трещина заменяется в криволинейной части двумя прямолинейными участками (см. фиг. 6, линия 2), имеющими точки перелома с координатами.

- $x_0 = 14,2$ см, $\vartheta_0 = \varphi_0 = 40^\circ$ (точка 0),
- $x_1 = x_N = 21,2$ см, $\vartheta_1 = \varphi_N = 27^\circ 6'$ (точка 1) и
- $x_2 = a_0 = 29,0$ см, $\vartheta_2 = \varphi_a = 17^\circ 6'$ (точка 2).

Наклоны соответствующих участков

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= 1 \text{ и} \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{31(0,4730 - 0,2972)}{29 - 21,2} = 0,6987. \end{aligned}$$

По формулам (14) и (15)

$$Q_{ak} = 2 \cdot 21,6 \cdot 31 \left(0,8902 - 0,7660 + \frac{0,9558 - 0,8902}{0,6987} \right) = 292 \text{ кг},$$

$$Q_{av} = 2 \cdot 21,6 (14,2 - 9,3) = 212 \text{ кг}.$$

По формулам (16) и (17)

$$\begin{aligned} M_{Qak} = 2 \cdot 21,6 \cdot 31 \left\{ (29 - 14,2 - 31 \cdot 0,6981) (0,8902 - 0,7660) + \right. \\ \left. + 31 (0,4730 \cdot 0,8902 - 0,4555 - 0,6981 \cdot 0,7660 + 0,6428) + \right. \\ \left. + \frac{1}{0,6987} \left[\left(29 - 21,2 - \frac{31 \cdot 0,4730}{0,6987} \right) (0,9558 - 0,8902) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{31}{0,6987} (0,2972 \cdot 0,9558 - 0,2940 - 0,4730 \cdot 0,8902 + 0,4555) \right] \right\} = \\ = 2340 \text{ кгсм}, \end{aligned}$$

$$M_{Qav} = 2 \cdot 21,6 (14,2 - 9,3) \left(29 - \frac{9,3}{2} - \frac{14,2}{2} \right) = 3650 \text{ кгсм}.$$

Общая предельная поперечная сила, воспринимаемая поперечной арматурой модели-оболочки.

$$Q_a = 292 + 212 = 504 \text{ кг}$$

и предельный момент усилий поперечной арматуры в условии прочности (1)

$$M_{Qa} = 2340 + 3650 = 5990 \text{ кгсм}.$$

После определения Q_a и M_{Qa} находят по формулам статьи [3] величины Q_B , z , S_{bv} и g и составляют уравнения прочности (1) и (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Отсмаа. Экспериментальное исследование предельного состояния по поперечной силе цилиндрических железобетонных оболочек без поперечного армирования. Экспериментальные исследования предельного состояния железобетонных цилиндрических оболочек, сборник статей. Труды ТПИ, серия А, № 202, Таллин, 1963.
2. В. А. Отсмаа. Экспериментальное исследование предельного состояния по поперечной силе цилиндрических железобетонных оболочек с поперечным армированием. Экспериментальные исследования предельного состояния железобетонных цилиндрических оболочек, сборник статей. Труды ТПИ, серия А, № 202, Таллин, 1963.
3. В. А. Отсмаа. О предельном состоянии по поперечной силе железобетонной цилиндрической оболочки. Экспериментальные исследования предельного состояния железобетонных цилиндрических оболочек, сборник статей. Труды ТПИ, серия А, № 202, Таллин, 1963.

УДК 621.031

Ю. А. Тярно

О ПРОЕКТИРОВАНИИ ОБОЛОЧЕК НАРВСКОЙ МЕБЕЛЬНОЙ ФАБРИКИ

Введение

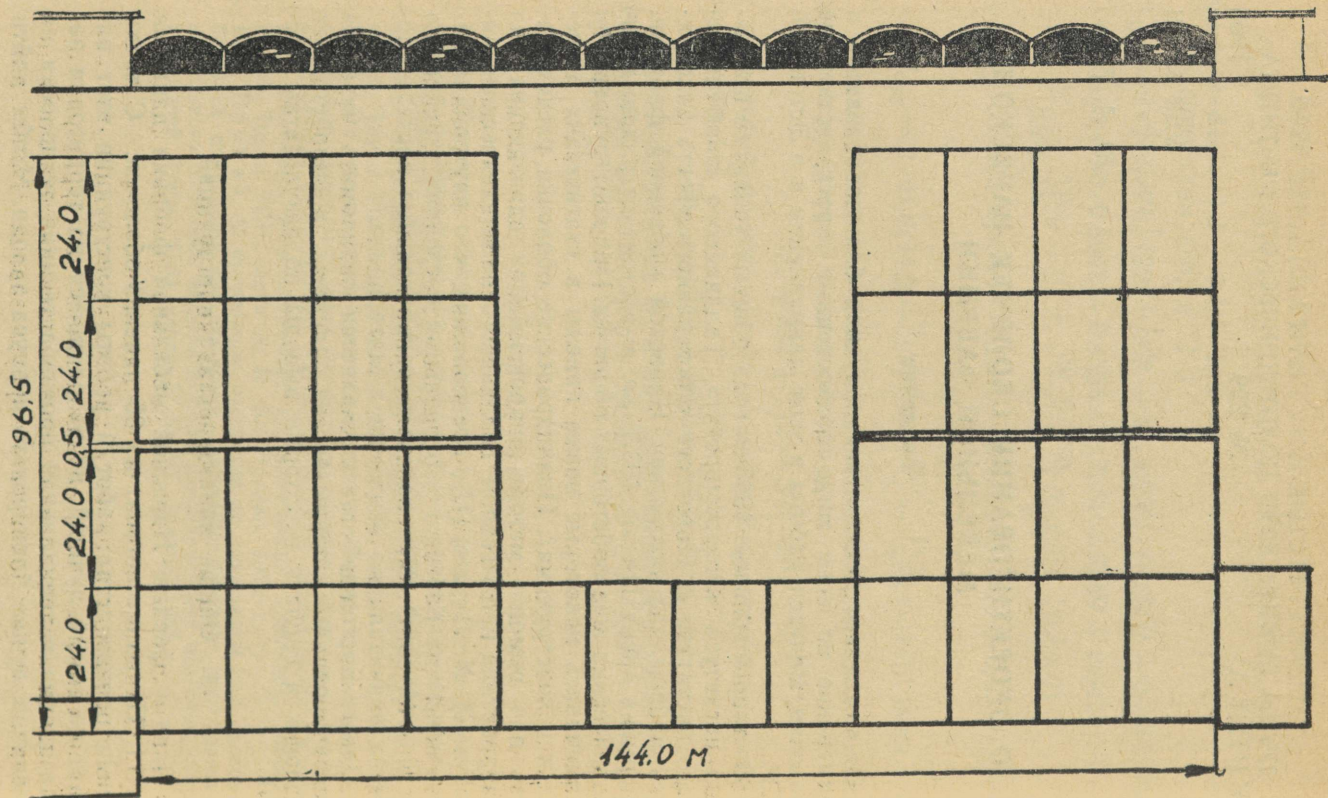
За последнее десятилетие получили большое развитие и применение во всем мире тонкостенные пространственные оболочки. Ведутся работы в этом направлении и в Эстонской ССР.

Во второй половине 1963-го года общими усилиями проектного института «Эстпромпроект», Таллинского политехнического института и Нарвского строительного треста закончились работы над покрытием Нарвской мебельной фабрики. Покрытие поверхностью 10370 кв. м состоит из длинных цилиндрических железобетонных оболочек. При конструировании применялись некоторые новые приемы в статических расчетах и в конструкциях. Цилиндрические оболочки рассчитывались при помощи метода аппроксимации сдвигающих сил (разработано профессором Таллинского политехнического института Х. Х. Лаулем [1]), предположив, что внутренняя панель покрытия работает в предельном состоянии (трещина в растянутой зоне). Как показали сравнительные расчеты, получена значительная экономия в материалах.

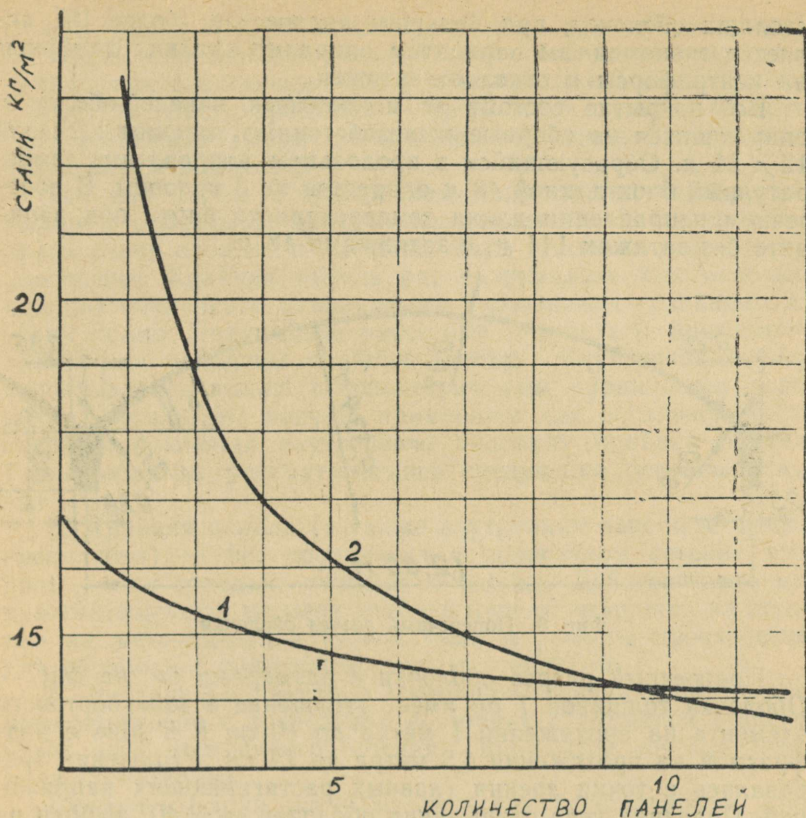
Целью настоящей статьи является ознакомить читателя конструированием покрытия из длинных железобетонных оболочек и сделать некоторые выводы по результатам расчета.

1. Общая характеристика конструкций

План и фасады Нарвской мебельной фабрики даны на фиг. 1. Покрытие состоит из 36 панелей-оболочек. С точки зрения производства работ и работы конструкции этот вариант не самый лучший, но находящиеся на территории завода здания и специальная производственная технология не позволили лучше блокировать корпуса завода. Чтобы найти



Фиг. 1. - План и фасады Нарвской мебельной фабрики

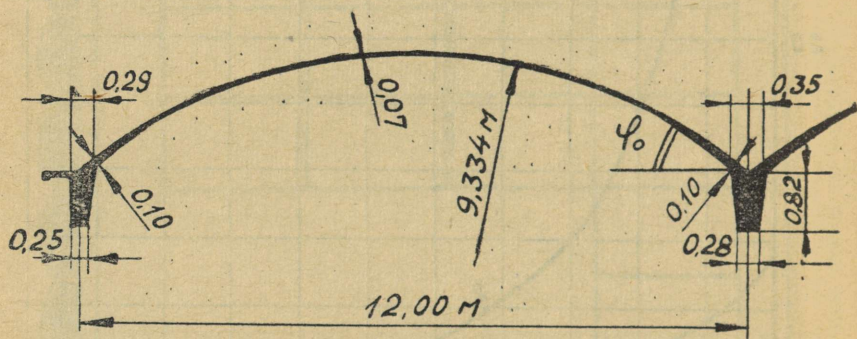


Фиг. 2. Графики для сравнения вариантов диафрагм: линия 1 — диафрагмы с затяжками, линия 2 — диафрагмы, опирающиеся на контрфорсы

для данного плана завода самое лучшее конструктивное решение в ходе проектирования было разработано несколько вариантов. Рассматривались оболочки с опертыми бортовыми элементами и без опирания бортовых элементов, неразрезные и одноволновые в продольном направлении, с диафрагмами-арками, имеющими затяжки и опертыми на контрфорсы. Как показали экономические расчеты и опыт производства работ, для настоящего объекта наиболее целесообразными в продольном направлении являются одноволновые оболочки (для крайнего пролета с опертыми бортовыми элементами). Графики на фиг. 2 дают ответ на вопрос, какие диафрагмы-арки следует применять. Диафрагмы с затяжками являются экономичными при малом количестве рядом

стоящих оболочек, при большом количестве (более 10) является экономичным вариантом опирание крайних диафрагм на контрафорсы и отказ от затяжек.

Всё покрытие состоит из монолитных панелей-оболочек, опирающихся на сборные железобетонные колонны с сеткой 12×24 м. Образующийся в продольном направлении температурный блок длиной 48 м опирается на 3 колонны. В поперечном направлении длина температурного блока при варианте без затяжек 144 м, с затяжками 48 м.



Фиг. 3. Поперечный разрез оболочки

Поперечный разрез оболочки с размерами см. на фиг. 3. Оболочка толщиной 7 см имеет утолщение в зоне бортового элемента на протяжении 1 метра до 10 см и в зоне с диафрагмой на протяжении 4,5 метра до 12 см. Утолщения требовались с точки зрения главных растягивающих напряжений. Половина угла открывания оболочки $\varphi_0 = 40^\circ$ выбран из условия экономичности и производства работ. Трапецевидный вид поперечного сечения бортового элемента придан для облегчения распалубки оболочки.

Производственный корпус имеет теплую крышу и внутренний водосток. В оболочках предусмотрены детали для подвешивания осветителей и отверстия для сантехнических и вентиляционных трубопроводов. Над взрывоопасными помещениями оболочки имеют отверстия для взрыва.

2. Расчетная методика

Наблюдаемые оболочки имеют отношение $L:l > 1$. Расчет их можно произвести методом аппроксимации сдвигающих сил проф. Х. Х. Лаула. Метод дан в трудах [1, 2 и 3] и основан на полубезмоментной теории оболочек; при этом предполагается, что приращение сдвигающих сил $\xi = \delta s : \delta x$ являет-

ся постоянной величиной вдоль оболочки при той же нагрузке. Таким образом центральной величиной расчета является приращение сдвигающих сил ζ и внутренние усилия, необходимые для конструирования — продольная сила T_1 , поперечный изгибающий момент M_2 и сдвигающие силы S могут быть найдены при помощи ζ .

Так как расчет в поперечном направлении неразрезных оболочек с разными граничными условиями на продольных краях очень сложен, в расчетах были применены некоторые упрощения. Крайняя панель рассматривалась как отдельно стоящая оболочка с одинаковыми граничными условиями на обоих краях. Полученные расчетные результаты применимы только для половины крайней панели. Внутренние панели рассчитывались также с симметричными граничными условиями; результаты расчета применимы для остальной части покрытия, включая внутреннюю половину крайней панели. Таким образом рассматривались следующие основные случаи.

1. Крайняя панель (а также внутренняя панель во время распалубки) — без проявления в поперечном сечении трещин — как отдельно стоящая оболочка. Действительно наружный бортовой элемент крайней панели опирается на стену или на металлический каркас окна и расчеты произведены для оболочки с опертым бортовым элементом.

2. Внутренняя панель в состоянии эксплуатации — расчеты произвели в предельном состоянии с трещиной в растянутой зоне поперечного сечения. Поперечное сечение заменили стрингерами.

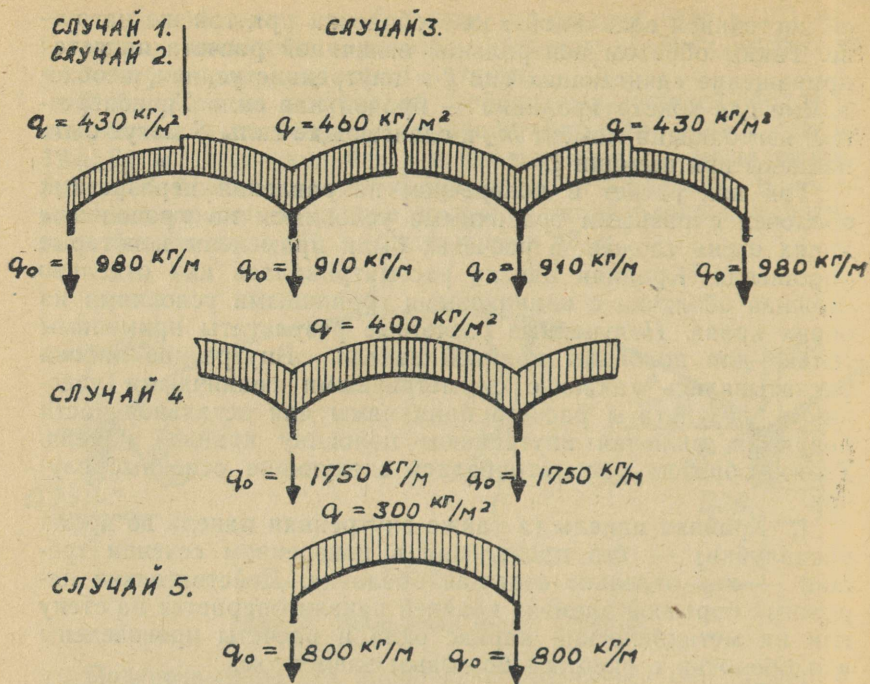
Диафрагмы-арки рассчитывались как бесшарнирные арки или рамы с затяжками; они загружались внецентренно приложенными сдвигающими силами.

Во всех расчетах применялись вспомогательные таблицы из трудов [1 и 3]. Все расчеты производились в табличной форме.

3. Нагрузки

Постоянные нагрузки — собственный вес оболочки, утепление и нагрузка от сантехнических и вентиляционных трубопроводов (расчетная нагрузка 325 кг/кв. м). Все нагрузки редуцировали по поверхности оболочки. Для проверки оболочки во время распалубки производились расчеты на нагрузки от собственного веса оболочки и от веса опалубки, учитывая сцепление с опалубкой — 300 кг/кв. м.

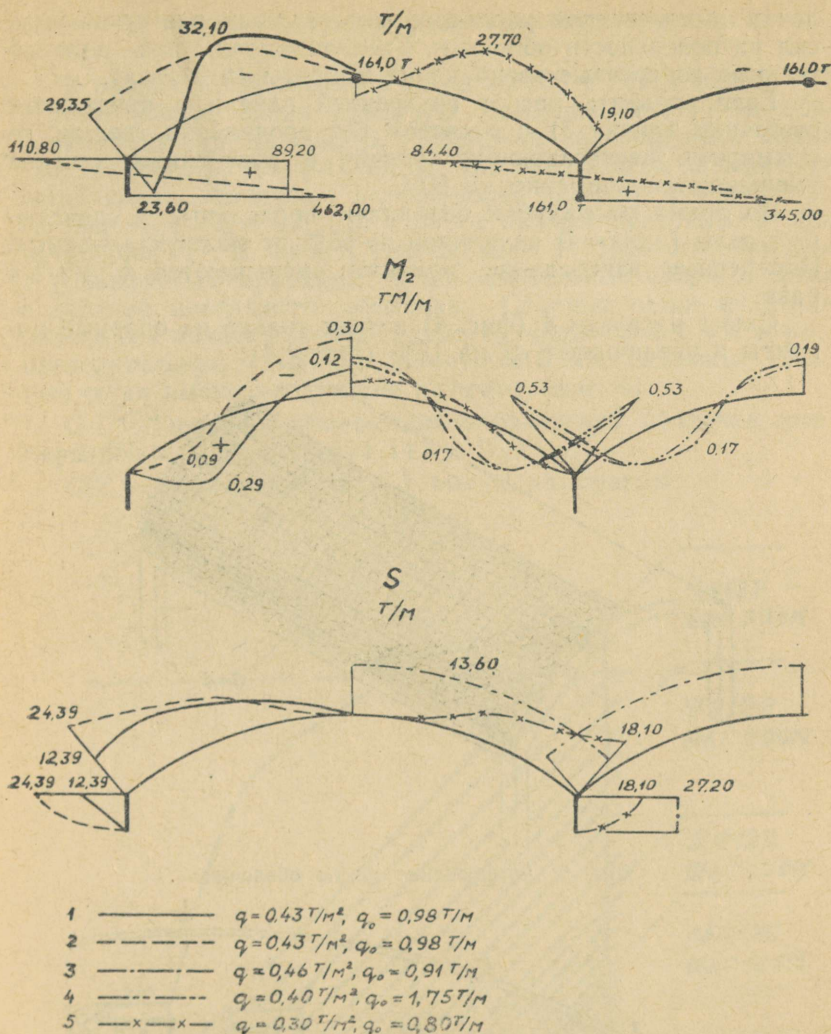
Временная нагрузка — нормативная снеговая нагрузка для Эстонской ССР 70 кг/кв. м. Согласно норм произведен



Фиг. 4. Расчетные нагрузки

расчет на три вида загрузки: 1) симметричная снеговая нагрузка, 2) снег на половине поперечной волны оболочки, 3) снег на четверти поперечной волны оболочки. По нормам при одновременном действии равномерно распределенной односторонней снеговой нагрузки, интенсивность которой не превышает одной четвертой от интенсивности полной симметричной равномерно распределенной нагрузки, односторонняя нагрузка для расчета может быть заменена симметричной той же интенсивности. Таким образом вся оболочка была нагружена снеговой нагрузкой с коэффициентом $c = 1,4$. Для крайней панели $c = 1,0$. По третьему виду нагрузки вся снеговая нагрузка приходилась на бортовой элемент. Все нагрузки см. на фиг. 4.

Ввиду пологости оболочек ветровая нагрузка не учитывалась.



Фиг. 5. Результаты расчета

4. Результаты расчета

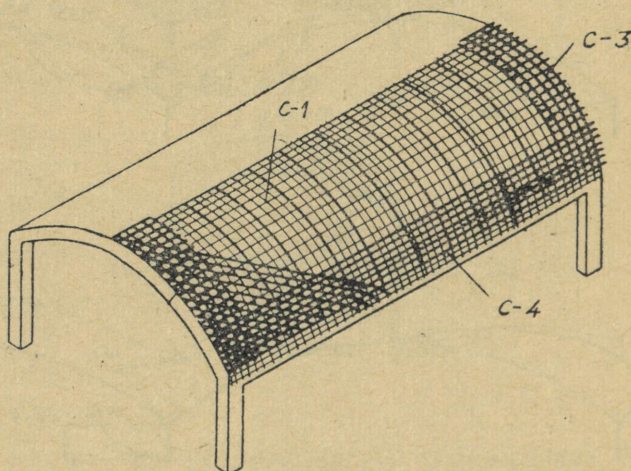
Результаты расчета показаны на фиг. 5. Если сравнить варианты с опертым бортовым элементом (линия 1) и обычным бортовым элементом (линия 2), видно, что стены принимают на себя 35% от общей нагрузки. Но в то же время возникают растягивающие усилия в криволинейной части обо-

лочки и изменяется распределение главных растягивающих сил на поверхности оболочки. Увеличиваются также положительные поперечные изгибающие моменты (в 3 раза).

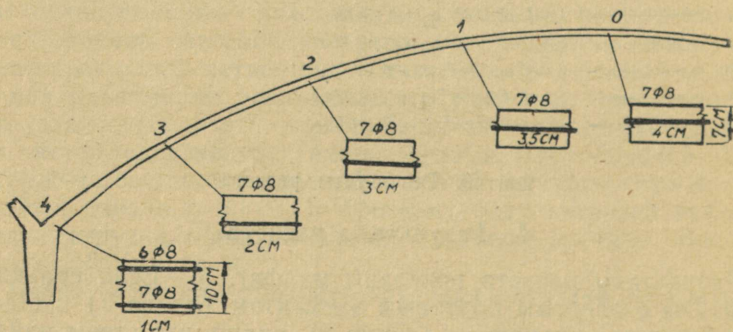
Если сравнить расчет внутренней панели в предельном состоянии (линия 3) с расчетом без проявления трещин, то суммарные растягивающие усилия в поперечном сечении уменьшаются примерно на 20%.

Во время распалубки возникают продольные и сдвигающие силы (линия 5) величиной до 65% от эксплуатационных. Поперечные изгибающие моменты уменьшаются в $1,5 \div 4$ раза.

Схема нагрузки 4 (фиг. 4) влияет только на опорные моменты и увеличивает их на 15% (линия 4).



Фиг. 6. Армирование плиты оболочки



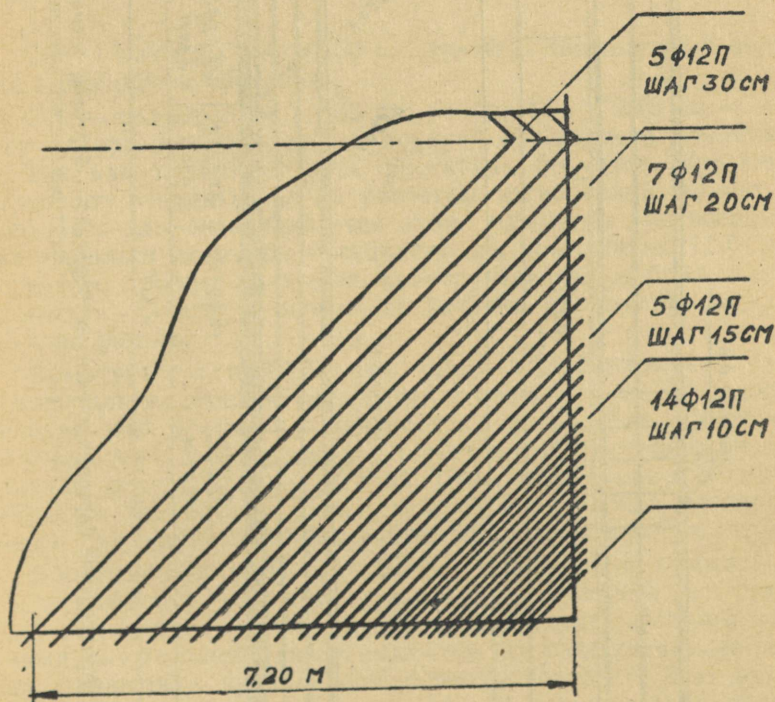
Фиг. 7. Расположение арматуры для восприятия поперечных изгибающих моментов

5. Конструирование и конструктивные детали

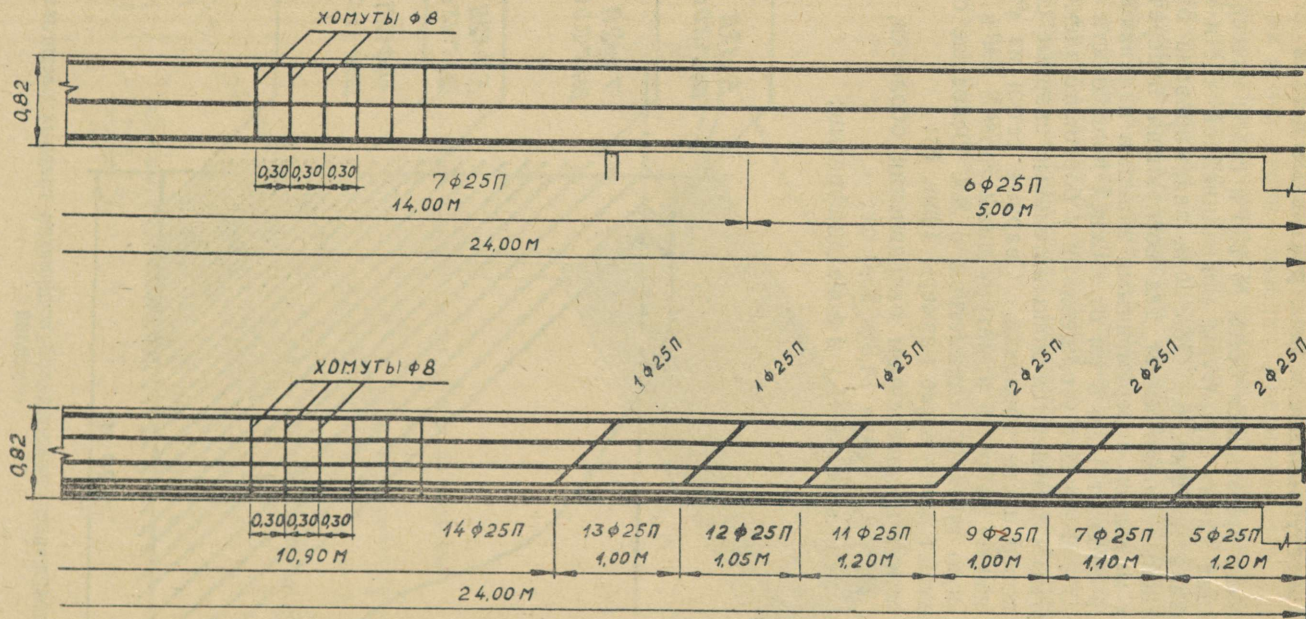
В оболочках применялся бетон М 200 и стали класса А-I и А-II. Общая схема арматуры криволинейной части оболочки показана на фиг. 6. Оболочка заармирована одной сварной сеткой, которая имеет для восприятия поперечных изгибающих моментов с переменными знаками изменяющийся защитный слой от 1 до 4 см от нижней поверхности оболочки (фиг. 7). В зонах с утолщениями у бортового элемента и у диафрагмы применяются дополнительные сварные сетки в верхней поверхности оболочки. Сварные сетки из стали класса А-I имеют рабочую арматуру диаметром 8 мм и распределительную арматуру диаметром 6 мм. Основные сварные сетки имеют следующие размеры (фиг. 6):

С-1 — лежит в поперечном направлении оболочки, размеры 650×212 см, ячейка $14,3 \times 25,0$ см;

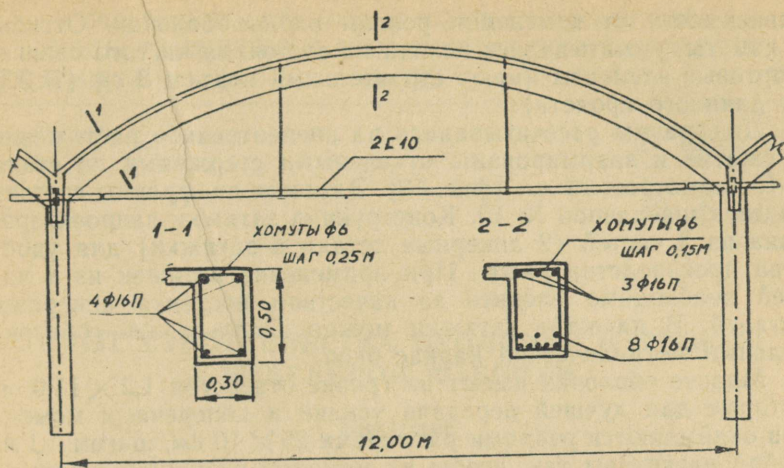
С-2 — заменяет сетку С-1 в зоне диафрагмы;



Фиг. 8. Расположение арматуры для восприятия главных растягивающих усилий



Фиг. 9. Армирование бортовых элементов. Верхний — бортовой элемент крайней панели, нижний — бортовой элемент внутренней панели



Фиг. 10. Диафрагма

С-3 — размеры 650×100 см, лежит у диафрагмы у верхней поверхности оболочки;

С-4 — размеры 650×155 см; ячейка $16,6 \times 20,0$ см — лежит у бортового элемента у верхней поверхности оболочки.

Так как крайняя панель рассчитана без учета кручения бортового элемента, то по расчетам изгибающий момент у бортового элемента равняется нулю. Арматура для восприятия опорных моментов поставлена на протяжении $1/10$ поперечного пролета только по конструктивным соображениям. Арматура опорных моментов во внутренних панелях поставлена по расчету.

Арматура главных растягивающих усилий рассчитана одинаково для крайней и внутренней панели, исходя из распределения этих усилий в отдельной оболочке. Арматура из стали А-II, диаметром 12 мм поставлена по интенсивности главных растягивающих усилий (фиг. 8) и заанкерована в бортовые элементы и диафрагмы. В направлении бетонирования применяли для анкеровки дополнительную арматуру.

Бортовые элементы (фиг. 9) заармированы по суммарным растягивающим усилиям отдельными стержнями из стали А-II диаметром 25 мм. Суммарными растягивающими усилиями для крайней панели являются все растягивающие усилия, включая и криволинейную часть оболочки. Всю арматуру внутренней панели разместили у нижнего края бортового элемента — в стрингер. Сечение арматуры выбрали в

зависимости от изменения усилий вдоль оболочки. Отгибы и хомуты рассчитывались исходя из состояния чистого сдвига. Бортовые элементы имеют строительный подъем 8 см (1:300 от длинного пролета).

Диафрагмы рассчитывались на внецентренное растяжение и сжатие и заармированы отдельными стержнями из стали А-II диаметром 16 мм (фиг. 10). Затяжки диафрагмы состоят из двух швеллеров № 10. Конструкция затяжки запроектирована из 3 частей (2 анкерные детали и затяжки) для удобства производства работ. При применении затяжек из 3 частей необходимо следить за качеством поставки анкерных деталей. В качестве затяжки можно использовать горизонтальный металлический каркас окон.

Многие оболочки имеют на гребне отверстия $1,2 \times 11,0$ м, которые для лучшей передачи усилий и поперечных моментов окаймляются ребрами размерами 25×10 см, шагом 1,1 м. Ребра рассчитаны так, чтобы их моменты инерции равнялись моментам инерции вырезанной части оболочки.

6. Техничко-экономические показатели

Оболочки имеют приведенную толщину — 12,4 см и расход стали на 1 квм пола — 13,5 кг.

7. Выводы

1. Расчет внутренней панели в предельном состоянии дает экономию примерно на 20%.
2. При расчете крайней панели с опиранием на стену примерно 35% от общей нагрузки воспринимается стеной.
3. Опирание диафрагм на контрфорсы и отказ от затяжек целесообразен при числе рядом стоящих панелей более 10.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Х. Лаул. Расчет цилиндрических оболочек с криволинейными частями, очерченными по окружности. Труды ТПИ, серия А, № 50, 1953.
2. Х. Х. Лаул. Цилиндрические железобетонные оболочки с трещинами в растянутой зоне. Труды ТПИ, серия А, № 45, 1953.
3. Н. Лаул. Raubbetoon II. Tallinn, 1962. а.
4. Инструкция по проектированию железобетонных тонкостенных пространственных покрытий и перекрытий. Москва, 1961.
5. Ü. Tägn. Narva Mööblivabriku koorikkate. Ajakiri «Tehnika ja Tootmine» nr. 5, 1961. а., Tallinn.

УДК 621.031.002.2

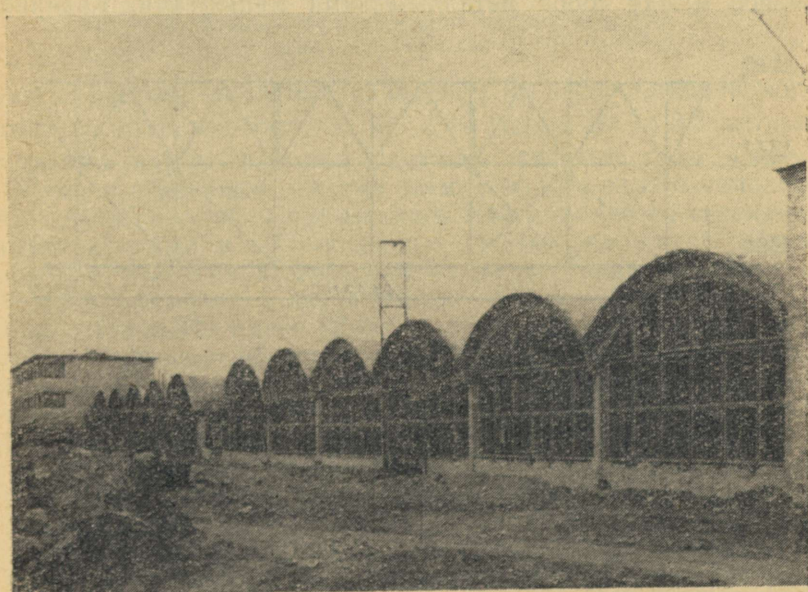
Ю. А. Тярно

ОПЫТ СТРОИТЕЛЬСТВА ОБОЛОЧЕК НАРВСКОЙ МЕБЕЛЬНОЙ ФАБРИКИ

Введение

В настоящей статье останавливаются на вопросах строительства монолитных длинных цилиндрических оболочек Нарвской мебельной фабрики (фиг. 1).

Описание оболочек дано в статье «О проектировании оболочек Нарвской мебельной фабрики» (см. стр. ...). Основные габариты конструкций: сетка колонн 12×24 метра, ра-



Фиг. 1. Нарвская Мебельная фабрика во время строительства

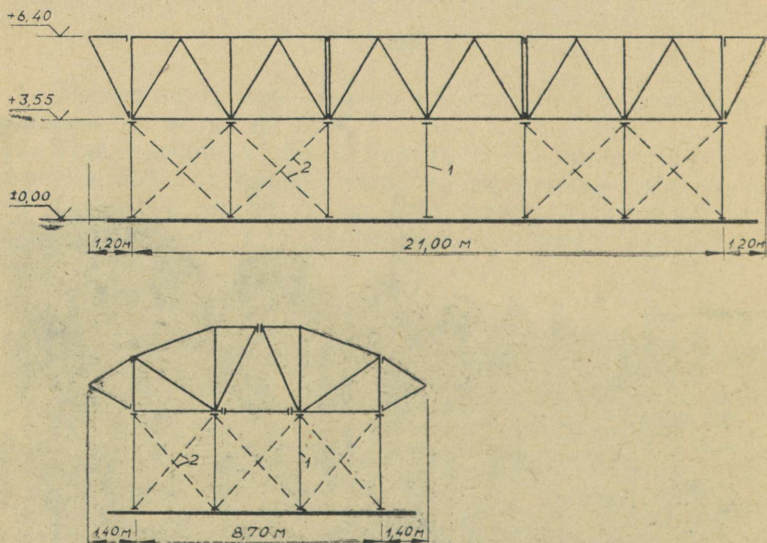
диус цилиндрической части оболочки $R = 9,334$ метра, половина угла открывания $\varphi_0 = 40^\circ$, минимальная толщина $\delta = 7$ см.

До бетонирования оболочек монтировали сборные железобетонные колонны и бетонировали полы зданий. После бетонирования и распалубки оболочек произвели кровельные и другие работы обычными методами.

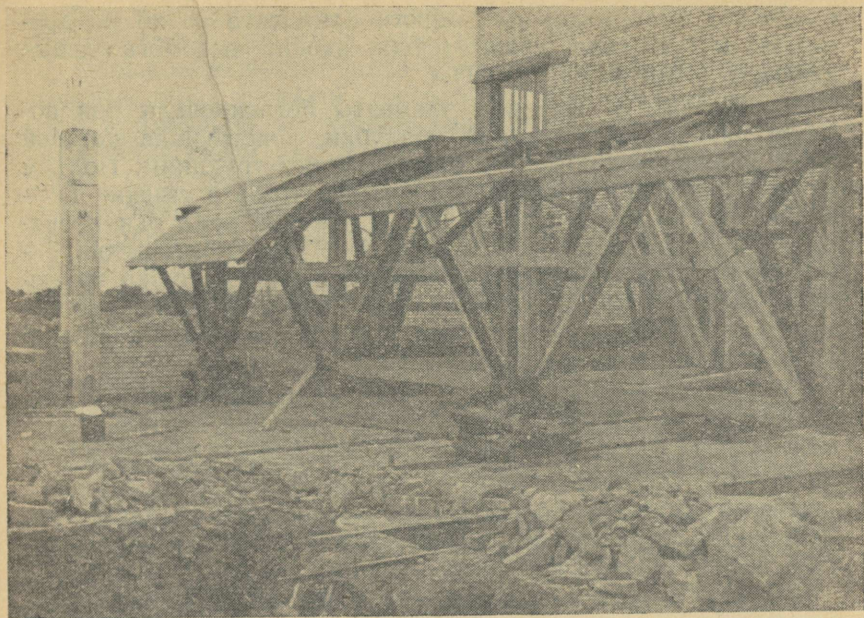
1. Об опалубке

Бетонирование плиты оболочек производилось при помощи 4 комплектов катучей опалубки.

Несущая конструкция катучей опалубки состояла из четырех продольных деревянных ферм длиной 21 метр, двух поперечных ферм длиной 8,7 метров и стальных связей между фермами (фиг. 2, фиг. 3). Для уменьшения в рабочем положении рабочего пролета ферм применялись под фермами вспомогательные стойки. В качестве вспомогательных стоек (28 шт.) применялись деревянные колонны со стальными шпонками для крепления к фермам. У нижнего торца имелись крестовидные анкера для крепления связей. Все продольные и поперечные фермы состояли из секций, которые соединялись между собой металлическими элементами. Крайние



Фиг. 2. Схема несущей конструкции катучей опалубки



Фиг. 3. Несущая конструкция катучей опалубки

щиты настила опалубки опирались на металлические консоли из уголкового стали $\perp 80 \times 10$ шагом 3,0 до 3,5 метров. Связями между фермами служили стальные тяжи (диам. 16 мм) и деревянные сжатые элементы. Для одного комплекта катучей опалубки применялись 80 шт. тяжей со специальными замками и 30 деревянных сжатых элементов. Щиты настила опалубки изготовляли из досок толщиной 25 мм в четырех размерах — 306×174 см — 36 шт., 306×109 см — 6 шт., 153×349 см — 12 шт. и 153×109 см — 4 шт. Все щиты покрывали кровельной сталью толщиной 0,5 мм. Максимальный вес щита — около 190 кг. Оставшиеся при монтаже швы между щитами покрывали сверху резиновой лентой или руберойдом.

Ниже даны сравнительные данные о весах различных частей одного комплекта катучей опалубки:

деревянные фермы	8260 кг	36%
связи	1260 „	6%
стальные консоли	860 „	4%
щиты и профилирующие ребра	11920 „	54%
	<hr/>	
	22300 кг	100%

Расход материалов для одного комплекта 30 кв. м, древесины и 6,22 тонн стали (сюда входят вспомогательные стойки и тяжи между ними).

Диафрагмы и бортовые элементы бетонировали при помощи разборно-переставной опалубки, конструкция которой была аналогична обычным балочным конструкциям. Подъем катучей опалубки произвели с четырех углов в течение 1,5—3 дней при участии 12 рабочих. Опускание опалубки произвели таким же методом в течение 1—2 дней при участии 7—8 рабочих. Для горизонтальной передвижки опалубки применили специальные вагонетки узкой колеи и электрические лебедки. Передвижку опалубки с одной позиции на другую (около 12 м) произвели в течение 30 минут.

У каждой панели проверили перед бетонированием геометрические размеры, расположение опалубки бортовых элементов и диафрагмы относительно катучей опалубки, отметки высоты, расположение и крепление связей.

После каждого опускания произвели осмотр опалубки, натяжение соединяющих болтов, тяжей и чистку поверхностей щитов настила солярным маслом.

По полученным опытам можно с уверенностью отметить, что применение деревянной несущей конструкции для катучей опалубки нецелесообразно. Недостаточная жесткость затрудняет подъем и опускание опалубки, влияет на качество работы и уменьшает число оборотов. Большая осадка поперечных ферм опалубки Нарвской мебельной фабрики вызвала так называемый «эффект свода» — щиты настила опалубки стали работать как свод, передающий горизонтальную реакцию на бортовые элементы и при опускании несущей конструкции щиты остались вверху. Для уменьшения «эффекта свода» необходимо предусмотреть радиус перехода между катучей опалубкой и бортовым элементом. Деревянная поддерживающая конструкция имеет и сравнительно большой вес. Комплект катучей опалубки Нарвской мебельной фабрики весит около 22,3 тонн, такая же опалубка из стальных ферм 15 тонн, опалубка со стальными фермами и фанерными щитами толщиной 16 мм около 11,5 тонн.

Наиболее трудоемкой работой оказалось устройство опалубки бортовых элементов и диафрагм. Применением разборно-переставной опалубки вместо катучей мы потеряем все преимущество катучей опалубки. Здесь есть два выхода:

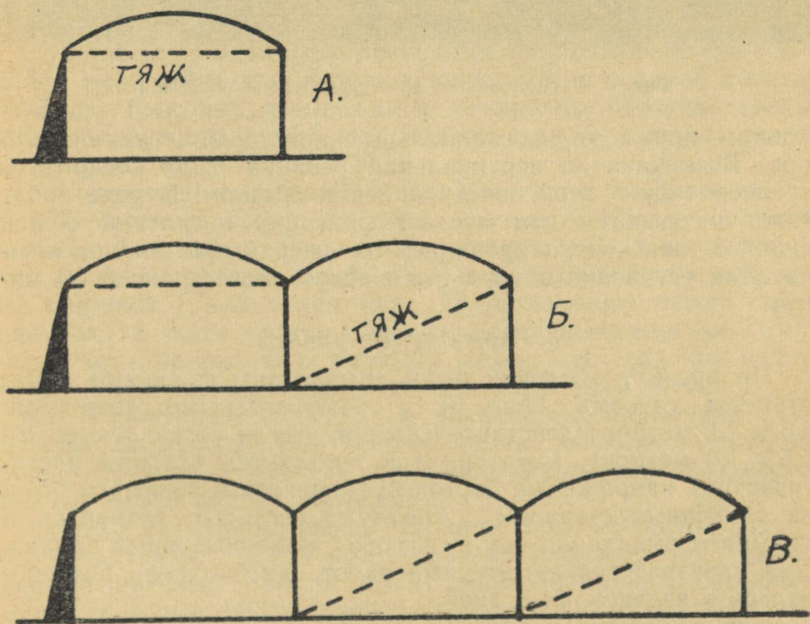
- 1) применение сборных бортовых элементов и диафрагм
- и 2) соединение опалубки бортовых элементов и диафрагм катучей опалубки. В последнем случае все опалубочные работы ограничиваются однократным монтажом катучей опа-

лубки, подъемом и опусканием ее. По расчетам такой комплект катучей опалубки весит около 19 тонн.

Большое внимание надо уделить применению вспомогательных стоек и связей под несущей конструкцией опалубки. При применении их необходимо ограничиваться минимальным количеством (8...12 шт) и отказаться от связей между ними. Продольная и поперечная устойчивость системы опалубки-стойки удобно обеспечить применением прикрепленными к ранее установленным сборным железобетонным колоннам полиспастов, которые также обеспечат возможность точного перемещения опалубки в горизонтальном направлении.

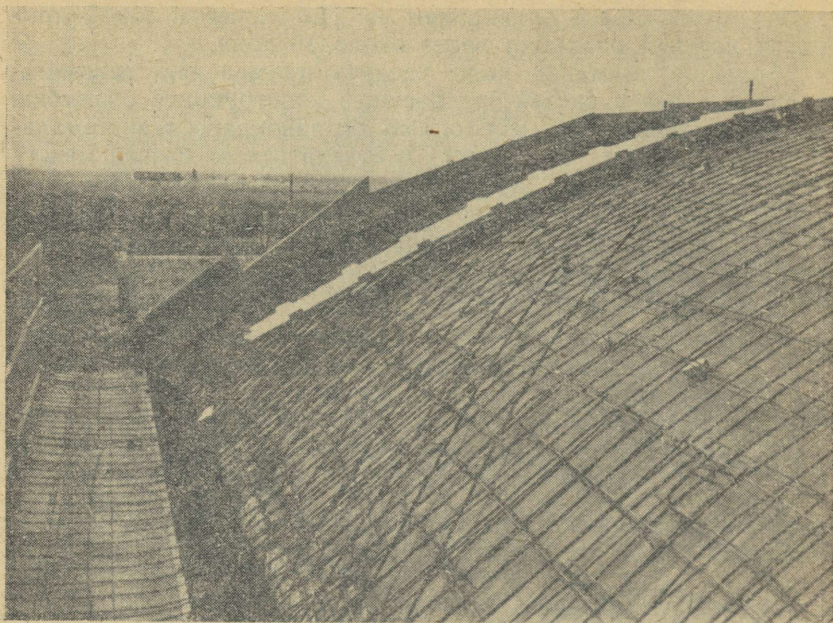
2. Временные тязи

Для восприятия горизонтальных реакций в диафрагмах в некоторых панелях применили временные тязи ($2 \varnothing 40$ мм), расположение которых см. на фиг. 4. Количество тязей (к одному комплекту катучей опалубки 4 шт) рассчитано так, чтобы освободить предыдущую панель от тязей после установления тязей следующей панели. Тязи прикреплены к ко-



Фиг. 4. Расположение временных тязей:

А — при бетонировании первой оболочки, Б — при бетонировании второй оболочки,
В — при бетонировании третьей оболочки



Фиг. 5. Расположение арматуры плиты оболочки

лоннам при помощи специальных конструкций из швеллеров. Возникающая вертикальная реакция была воспринята трением между этой конструкцией и бетоном. В ходе работ тяжести натягивали для лучшей фиксации креплений общей силой 5 тонн контролируемым натяжением при помощи ключа. Для установки одного тяжа потребовалось около 30 минут.

3. Арматурные работы

По проекту оболочки были армированы сварными арматурными сетками (фиг. 5) с максимальными размерами $6,5 \times 2,1$ метров (действительно применили сетки размерами $6,5 \times 1,0$ метров), арматура для восприятия главных растягивающих напряжений, бортовых элементов и диафрагм была из одиночных стержней. Арматуру бортовых элементов и диафрагм выполнили как в обычных железобетонных балках. Для производства арматурных работ одной панели потребовалось в среднем 4—5 дней.

При арматурных работах особое внимание обратили на защитный слой арматуры, на длину анкеровки и т. д. Защитный слой арматуры обеспечили в плите оболочки деревянными пробками. Для удобства контроля длины анкеровки, рас-

стояния между стержнями, расположение рабочей арматуры отметили красками на настил катучей опалубки. Большинство арматурных работ производили на стройплощадке из одиночных арматурных стержней, в зависимости от этого и качество работ было очень разным.

Для уменьшения объема арматурных работ на строительной площадке необходимо применять для восприятия главных растягивающих напряжений арматурные сетки, предназначенные для восприятия изгибающих моментов, увеличивая их мощность, а в бортовых элементах и диафрагмах применять сварные каркасы.

4. Бетонирование оболочек

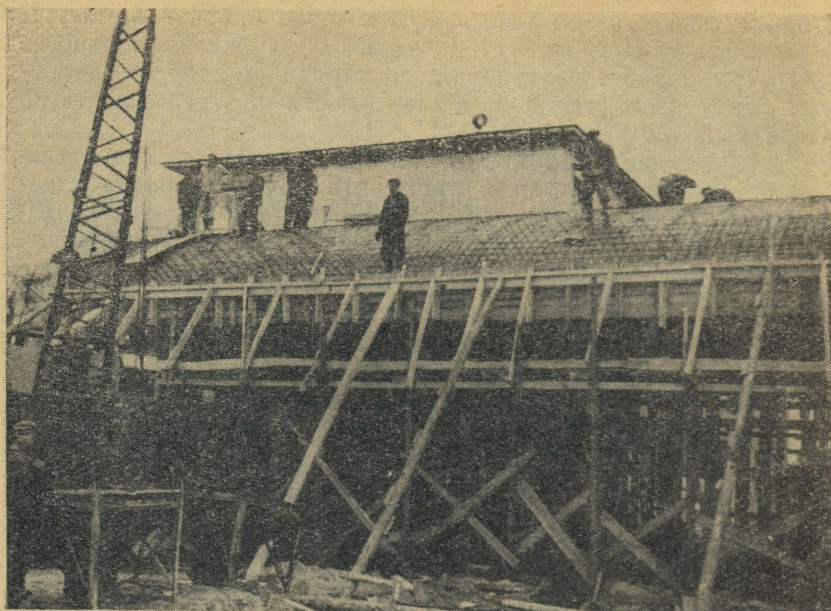
Бетонирование оболочек имеет некоторые отличия от бетонирования обычных железобетонных конструкций. Бетонирование тонкой плиты оболочки производилось под сравнительно большим углом (до 40°) к горизонтали и велось непрерывно на протяжении одной панели 12×24 м (без рабочих швов). В объекте Нарвской мебельной фабрики непрерывно бетонировуемый объем бетона был около $36,5-42$ куб. м (оболочка, 1—2 бортовые элементы, 2 диафрагмы).

По проекту было предусмотрено бетонирование плиты оболочки мелкозернистым бетоном марки 200, с осадкой конуса 3—5 см, бортовых элементов и диафрагмы бетоном марки 200, с осадкой конуса 10 см. Действительно применили только жесткий бетон марки 250.

Бетонирование панелей (фиг. 6) началось от точек А, Б, В и Г бетонированием бортового элемента. Когда бортовой элемент был забетонирован на протяжении 2—3 метров, началось бетонирование диафрагмы и плиты оболочки полосами шириной 1,5—2 метра (фиг. 7). Уплотнение бетона производили в части плиты оболочек поверхностными вибраторами, которые включали в работу только при движении снизу вверх. Вибрировали в зависимости от жесткости бетона 1...3 раза. В бортовых элементах и диафрагмах применили глубинные вибраторы. Полученные опыты позволяют утверждать, что бетонирование и уплотнение бетона на поверхности под углом 40° вполне возможно.

Маяки для фиксации толщины плиты оболочки должны быть такими, чтобы поверхностный вибратор при движении не двигал их с места. Очень удобно применять бетонные маяки, которые одновременно фиксируют защитный слой арматуры и толщину конструкций.

По выработанной технологии для бетонирования оболочек требуется следующий инвентарь.



Фиг. 6. Бетонирование оболочки

1. Кран-экскаватор — с длиной стрелы 23 метра (обслужит все точки оболочки).

2. Бункера с вибраторами объемом по 0,75 куб. метров — 2 шт (общий объем бункеров 1,5 куб. м равняется объему одного автосамосвала).

3. Эстакада для разгрузки самосвалов прямо в бункера.

4. Вибраторы для уплотнения бетона:

1 большой глубинный вибратор,

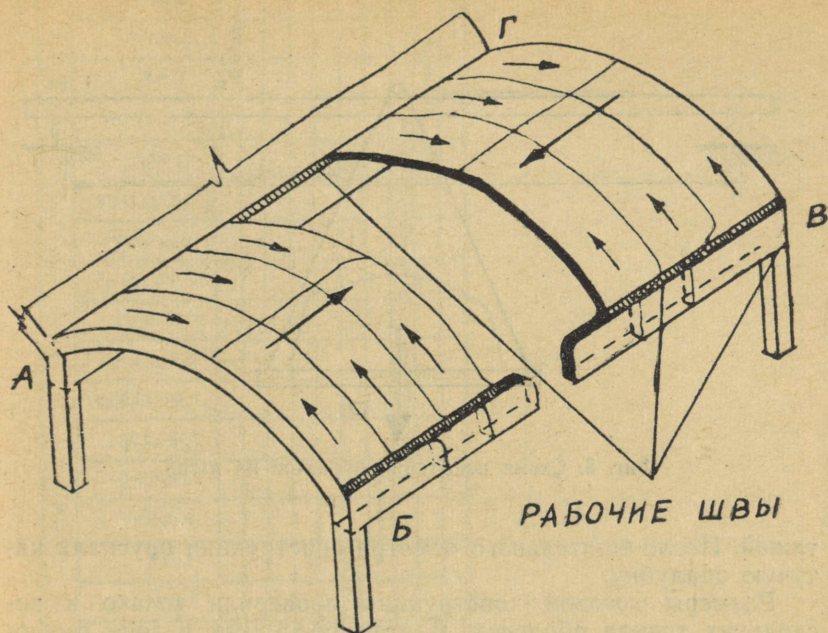
1 малый глубинный вибратор,

1 поверхностный вибратор размерами около 70×60 см.

Дополнительно требуются еще 1 глубинный и 1 поверхностный вибратор.

Бетонирование первой оболочки Нарвской мебельной фабрики было выполнено в течение 16 часов 18 рабочими, остальных оболочек в связи с совершенствованием технологии возведения в течение 8—9 часов 10—12 рабочими.

Для определения прочности бетона изготовляли образцы на сжатие размерами $10 \times 10 \times 10$ см 4 серии, в каждой по 3 образца и образцы для испытания на изгиб размерами $7 \times 15 \times 55$ см, 4 серии в каждой по 3 образца. Образцы держали в таких же условиях как и оболочки. Испытание первой



Фиг. 7. Схема порядка бетонирования панели 12×24 м (опалубка и арматура не показаны)

серии производилось в возрасте 7 дней, остальные серии в возрасте 14, 21 и 28 дней для получения данных на приrost прочности. Образцы на сжатие испытывали в лабораторных условиях, образцы на изгиб на стройплощадке по схеме на фиг. 8. Прочность образцов бетона первой оболочки была следующая:

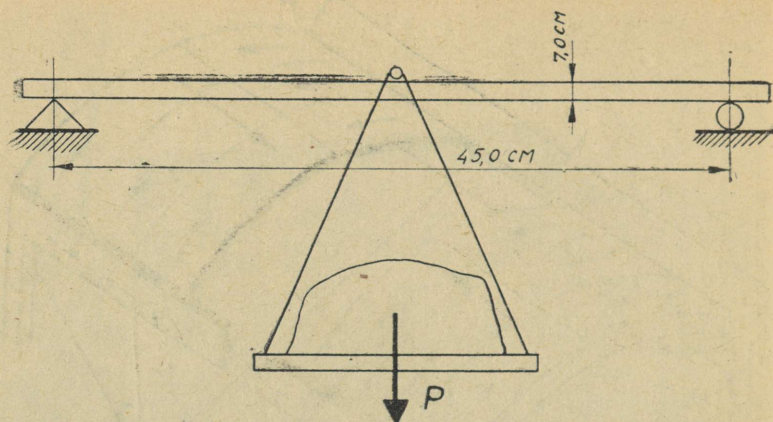
средняя прочность на сжатие в возрасте

7 дней 149 кг/кв. см,
28 дней 194 кг/кв. см;

средняя прочность на растяжение в возрасте

7 дней 23,4 кг/кв. см,
14 дней 24,0 кг/кв. см.

Распалубка была предусмотрена в возрасте 7 дней, когда бетон получил 60—70% от марковой прочности. В зависимости от условий твердения и качества бетона всегда не удавалось получить такую прочность. По этим и другим причинам распалубка производилась в возрасте 7...35 дней (средний срок распалубки 24 оболочек — 18 дней). Распалубка началась с бортового элемента, диафрагм и установкой на место



Фиг. 8. Схема испытания образцов на изгиб

тяжей. После тщательного осмотра конструкции опускали катушку опалубку.

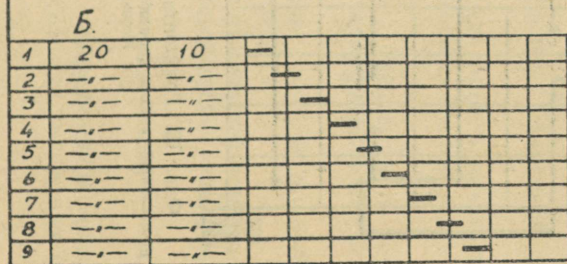
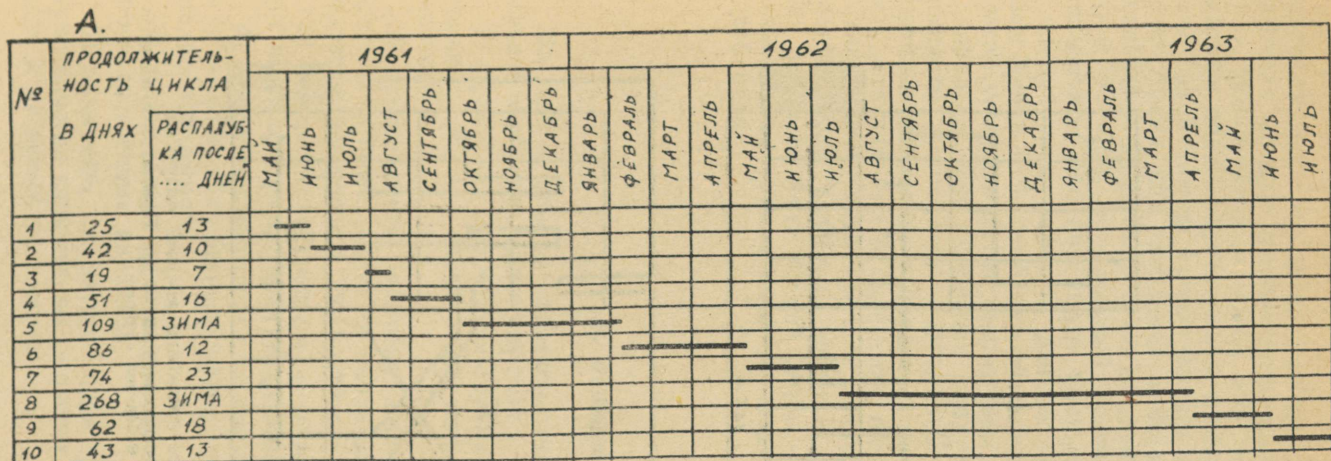
Размеры готовой конструкции проверили только в нескольких точках оболочек. В пяти оболочках в зоне гребня в 9 точках измеренная толщина была 10 см против предусмотренной 9,8 сантиметров.

Качество нижней поверхности плиты оболочки было очень высокое и не требовало дополнительной оштукатурки. В некоторых бортовых элементах наблюдалось невысокое качество защитного слоя арматуры, причиной которого являлось очень густое расположение арматуры в нижней части бортового элемента и недостаточное вибрирование бетона.

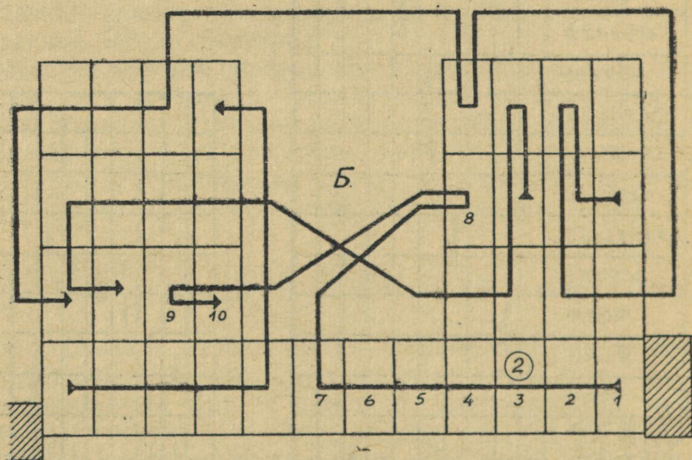
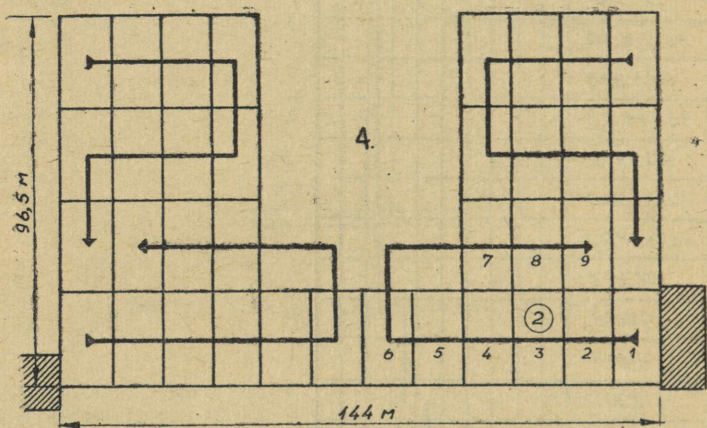
5. Технологические и экономические соображения

Как показало строительство оболочек Нарвской мебельной фабрики, выдержка производственного цикла не всегда соблюдалась. На фиг. 9 видно, что строительство оболочек велось неритмично. На этой фигуре дан также примерный график продолжительности цикла в 20 дней (один комплект катушек опалубки). При 20 дневном цикле две бригады с 4 комплектами катушек опалубки строили бы все покрытие в течение 6 месяцев.

Для строительства оболочек, похожих на оболочки Нарвской мебельной фабрики, оптимальным является цикл работ, при котором одна бригада в составе 10—12 рабочих обслуживает два комплекта катушек опалубки. Если в заводских



Фиг. 9. Графики продолжительности цикла строительства оболочек:
 А — для опалубки № 2 (см. фиг. 10), Б — примерный график при цикле 20 дней



Фиг. 10. Горизонтальное движение катушек опалубки:

А — правильный выбор порядка бетонирования, Б — при строительстве оболочек Нарвской мебельной фабрики

условиях является лимитирующим для цикла работ режим автоклав, то при производстве монолитных оболочек должно быть лимитирующим время для твердения бетона. Состав бригады надо выбрать такой, чтобы в течение твердения бетона одной панели производилась бы подготовка второй панели. Время для твердения в нормальных летних условиях колеблется в пределах 7 до 10 дней, в течение чего бетон получит 60—70% от марковой прочности. При строительстве монолитных оболочек надо уменьшить объемы арматурных и опалубочных работ. В данном объекте эти работы составили 35% и 45% от общего объема работ. Арматурные работы можно ускорить путем применения только арматурных сеток и каркасов. Для ускорения опалубочных работ необходимо заменить применение разборно-переставной опалубки для бортовых элементов и диафрагм на катучую, а также применить для подъема и опускания опалубки специальные подъемники, автоподъемники и т. д. Очень важно следить за целесообразным выбором порядка бетонирования оболочек. Как видно на фиг. 10, при необдуманном порядке бетонирования можно удлинить горизонтальную передвижку примерно в два раза.

6. Выводы

На основе опытов строительства оболочек Нарвской мебельной фабрики рекомендуется:

1) применять катучую опалубку в виде пространственных стальных ферм с фанерными или пластмассовыми щитами настила;

2) присоединять опалубки бортовых элементов и диафрагм к катучей опалубке оболочки или применять сборные бортовые элементы и диафрагмы;

3) осуществлять подъем и опускание катучей опалубки при помощи специальных подъемных средств;

4) применять оболочки с большим углом открывания ($\varphi_0 = 40^\circ - 45^\circ$). Их бетонирование односторонней опалубкой вполне возможно;

5) максимально применять сварных арматурных сеток и пространственных каркасов;

6) применять лимитирующим для определения цикла строительства монолитных оболочек время для твердения бетона, а не время подготовки.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Laul. Raudbetoon I. Tallinn, 1960. a.
2. H. Laul. Raudbetoon II. Tallinn, 1962. a.
3. Инструкция по проектированию железобетонных тонкостенных покрытий и перекрытий. Москва, 1961.
4. Ü. Tärgno. Narva Mööblivabriku koorikkate. Aajakiri «Tehnika ja Tootmine» nr. 5, 1961. a., Tallinn.

СОДЕРЖАНИЕ

1. И. И. Ааре. О влиянии изгибной жесткости пояса тонкостенной балки на работу стенки	3
2. И. И. Ааре. Расчет гибких пластин при работе на сдвиг с учетом жесткости контурных ребер на сжатие	19
3. Л. А. Алликас. Расчет предварительно напряженной балки-стенки	37
4. И. А. Кийсс. Расчет свободных многоярусных рам методом распределения моментов	55
5. В. Р. Кульбах. Температурные деформации тонких пластин при воздействии сосредоточенных источников тепла	61
6. В. Р. Кульбах. К вопросу висячих покрытий отрицательной кривизны, имеющих в плане форму эллипса	73
7. А. И. Лавров. Экспериментальное исследование параболических коноидальных оболочек	83
8. Х. Х. Лауль, А. И. Лавров. О расчете коноидальных железобетонных оболочек	95
9. А. И. Лантух-Пящeko. Экспериментальные данные о напряженном состоянии и несущей способности неразрезной балки-стенки	111
10. М. А. Лойтве. Экспериментальное исследование железобетонных сводов-оболочек	125
11. Х. Х. Лауль, М. А. Лойтве. Практический метод расчета пологих железобетонных сводов-оболочек отрицательной кривизны	137
12. В. А. Отсмаа. К расчету на поперечную силу длинных круглоцилиндрических железобетонных оболочек	163
13. Ю. А. Тярно. О проектировании оболочек Нарвской мебельной фабрики	173
14. Ю. А. Тярно. Опыт строительства оболочек Нарвской мебельной фабрики	185

Статьи поступили в редакцию 19/1 1965.

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ
И СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА III

Таллинский политехнический институт

Редактор Х. Лауль

Технический редактор Я. Мыттус

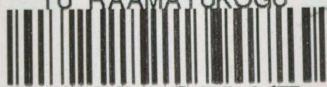
Корректор Л. Лоопер

Сдано в набор 30 I 1965. Подписано к печати 8 I 1966. Бумага $60 \times 90 \frac{1}{16}$. Печатных листов 12,5. Учетно-изд. листов 10,5. Тираж 500. МВ-02107. Заказ № 859.

Типография им. Х. Хейдеманна, Тарту, ул. Юликооли, 17/19 II

Цена 74 коп.,

TÜ RAAMATUKOGU



10300016029417

Цена 74 коп.

Цена 74 коп.

Per.A-1459

сер. А

№ 229

1965

Per.A-1459
-229

TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 229

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ
И
СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА

СБОРНИК СТАТЕЙ
III

ТАЛЛИН 1965