

Tartu Ülikool
Sotsiaalteaduste valdkond
Haridusteaduste instituut
Haridusteadus (reaalained) õppekava

Kersti Õunap
VEAD TEISE KOOLIASTME MATEMAATIKA ÜLESANNETE LAHENDAMISEL
Bakalaureusetöö

Juhendaja: Anu Palu

Tartu 2020

Vead teise kooliastme matemaatika ülesannete lahendamisel

Kokkuvõte

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärgiks oli teada saada õpilaste matemaatikateadmised erinevates matemaatikavaldkondades kolmanda kooliastme alguses ja välja selgitada enamesinevad vead ülesannete lahendamisel. Püüti analüüsida vigade tekke põhjuseid. Töö teoreetilises osas anti ülevaade õpilaste matemaatikateadmistest ja nende omandamisest ning kirjeldati õpilaste teadmisi tasemetööde ja eelnevate uuringute põhjal. Uurimistöös kasutati Haridus- ja Teadusministeeriumi projekti “Üldpädevused ja nende hindamine. 2011-2014. a” raames kogutud andmeid. Analüüsiti 780 õpilase matemaatikateadmisi. Uurimistöös jõuti järeldusele, et seitsmena klassi õpilaste matemaatikateadmised on kasinad. Paremini lahendatakse protseduuriliste teadmiste ülesandeid, halvemini probleemülesandeid. Palju ülesandeid jäetakse lahendamata, väärvastused on tingitud teksti mittemõistmisest, hooletusest või oskamatusest vastust teksti põhjal kontrollida. Õpilaste teadmiste parandamiseks tuleks rohkem panustada mõistelise arusaama tekkimisse ja valesid lahenduskäike tuleks õpilastega koos analüüsida, samuti peaks probleemilahendamiseõpetus olema põhjalikum.

Märksõnad: matemaatikaalased teadmised, tüüpvead ülesannete lahendamisel, protseduurilised teadmised, mõistelised teadmised, probleemide lahendamisoskus

Errors of mathematics problem solving in the basic school school stage II

Abstract

The aim of this thesis was to investigate the mathematical knowledge of students in the beginning of the third basic school stage to find out which are the most common mistakes in solving mathematical tasks. In this thesis, the causes of mistakes were addressed. In the theoretical part of this thesis an overview of students' mathematical competency and methods of acquirement of competency are described based on the results of Standard-determining test and previous studies. Thesis is based on the information collected in the framework of the project conducted by Estonian Ministry of Science and Education "Basic competences and their assessment 2011-2014". Overall, the mathematical knowledge of 780 students was analyzed. Analysis revealed that the mathematical knowledge of 7th grade students is poor. Tasks on procedural and factual level are more developed compared to problem solving. Many tasks are left unsolved mainly due to not understanding the task text, negligence, or inability to evaluate the answer based on the text of the task. In order to improve the knowledge, more attention should be paid to develop conceptual understanding. Teachers should discuss and analyze erroneous answers and task solving with students. Furthermore, in-depth teaching of problem solving is needed.

Keywords: mathematical knowledges, typical errors in solving mathematical exercises, procedural knowledges, conceptual knowledges, problem solving skills

Sisukord

Sissejuhatus	5
Teoreetiline ülevaade	5
<i>Matemaatikateadmised ja nende hindamine</i>	5
<i>Õpilaste matemaatikateadmised ja vead ülesannete lahendamisel eelnevatele uuringutele tuginedes</i>	6
<i>Uurimistöö eesmärk ja uurimisküsimused</i>	8
Metoodika.....	8
<i>Valim</i>	8
<i>Mõõtevahendid</i>	9
<i>Protseduur</i>	9
<i>Andmetöötlus</i>	9
Tulemused	10
<i>Matemaatikateadmised erinevatel tunnetuslikel tasemetel</i>	10
<i>Kõige tüüpilisemad vead halvasti lahendatud ülesannetes</i>	11
Arutelu.....	13
Tänu sõnad	18
Autorsuse kinnitus.....	18

Sissejuhatus

Matemaatika on õppeaine, milles ei ole kõik õpilased ühtmoodi edukad. Seda näitavad riigieksamite ja riiklike tasemetööde tulemused. Võrreldes teiste ainetega, saadakse matemaatikas kehvemaid tulemusi (Riigieksamite statistika, s.a., Tasemetööde statistika, s.a.). Matemaatika on hierarhiline aine, kus varem tekkinud lüngad annavad hiljem tunda. Oluline on baasteadmiste kindel omandamine, nende sisu mõistmine. Matemaatika kui hierarhilise aine õppimisel alustatakse lihtsamate teadmiste ja oskuste omandamisega ning liigutakse järjest keerulisemate oskuste õppimise poole. Kui õpilasel tekivad teadmistes lüngad, võivad need olla põhjuseks, miks tekivad hilisemas eas raskused matemaatika omandamisel.

Teine kooliaste on aeg, mil matemaatikaülesanded lähevad raskemaks ja jäävad elukaugemaks. Sel ajal tekivad õpilastel suuremad raskused matemaatikas. Kui õpilasel tekivad teises kooliastmes teadmistes lüngad, võivad tal tekkida raskused kolmandas kooliastmes. Tasemetööde analüüsid ei tooda selgelt välja, milliseid vigu õpilased teevad. Selleks, et ennetada matemaatikas tekkivaid probleeme või abistada nendest ülesaamisel, on oluline täpsemalt teada, missugused on õpilaste raskused ja millised on põhilised vead ülesannete lahendamisel. Vigadele keskendumine aitab näha õpetuse puudujääke (Woodward & Howard, 1994). Vigade analüüs võimaldab teada saada õpilaste kasutatud valed strateegiad, mille teadmine aitab õpetajal omakorda täiustada õpetamise meetodeid. Seni on sellelaadseid uuringuid Eestis tehtud rohkem esimeses kooliastmes (nt Palu, 2010; Palu & Kikas, 2010), õpetajate abistamiseks on aga oluline uurida ka teise ja kolmanda kooliastme õpilasi.

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärgiks on teada saada, millised on õpilaste matemaatikateadmised erinevates matemaatikavaldkondades kolmanda kooliastme alguses ning välja selgitada, millised on enamesinenud vead teise kooliastme matemaatika ülesannete lahendamisel.

Teoreetiline ülevaade

Matemaatikateadmised ja nende hindamine

Matemaatikateadmisi võib hinnata lähtuvalt aine sisust või tunnetuslikust valdkonnast. Põhikooli riikliku õppekava lisa 3 järgi peaks matemaatika õpitulemuste hindamisel olema aluseks tunnetuslikud protsessid ja nende hierarhiline ülesehitus (Põhikooli riiklik õppekava, 2011). Vastavalt sellele peaks toimuma õpilaste teadmiste ja oskuste kontrollimine sisuvaldkondade järgi, kuid kolmel tunnetuslikul tasemel: teadmine, rakendamine ning arutlemine. Matemaatikateadmiste hindamist samadel tasemetel on kasutatud ka

rahvusvahelises uuringus TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) (Mullis et al., 2005). Sarnast matemaatikateadmiste jagunemist, kuid teiste nimetustega, on kasutatud ka põhikooli matemaatikapädevuse määratlemiseks. Palu ja Kikase (2015) järgi koosneb matemaatikapädevus 1) protseduurilistest teadmistest ja oskustest, 2) mõistelistest teadmistest ja 3) probleemide lahendamisoskusest. Protseduurilised teadmised sisaldavad algoritmide või strateegiate tundmist, mis on vajalikud konkreetsete ülesannete lahendamiseks. Mõisteliste teadmiste alla kuulub arusaamine matemaatilistest faktidest ja protseduuridest ning nende rakendamisoskus. Probleemide lahendamisoskus tähendab sobivate lahendusstrateegiate leidmist ja nende rakendamist uudsetes olukordades.

Õpilaste matemaatikateadmised ja vead ülesannete lahendamisel eelnevatele uuringutele tuginedes

Eestis hinnatakse esimese ja teise kooliastme õpilaste matemaatikateadmisi tasemetöödega. Need on üles ehitatud lähtuvalt ainult ainevaldkonnast (Matemaatika tasemetööde materjalid, s.a.). Tasemetööde analüüsides esitatakse testide ja üksikülesannete lahendusprotsendid. Tuuakse välja paremini või halvemini lahendatud ülesanded, kuid puudub detailsem ülevaade tehtud vigadest.

Kuna käesolevas töös uuritakse õpilaste matemaatikateadmisi aastatel 2011–2013, siis vaadeldi samade aastate kuuenda klassi tasemetööde statistikat ja lühianalüüsi (Tasemetööde statistika, s.a.). Nende aastate tasemetööde tulemused on toodud tabelis 1.

Tabel 1. *Uuringu läbiviimise aastate tasemetööde statistika.*

	2011	2012	2013
Õpilaste arv valimis	3814	1395	4106
Keskmine tulemus	63,8%	63,8%	59%
Tasemetöö edukus (sooritus vähemalt 45%)	81,5%	83,2%	74,4%
Tasemetöö kvaliteet (sooritus vähemalt 70%)	48,0%	41,8%	37,3%
Maksimumpunktidele sooritanud õpilaste osakaal	0,4%	0,2%	0,9%

Vaadeldes üksikülesannete lahendatust, selgus, et hästi lahendati (üle 70%) statistika valdkonna ja geomeetria ülesandeid. Aritmeetikaülesannete hulgast võib sama suure lahendatusega ülesannete seast välja tuua murdude teisendamise ning arvude võrdlemise.

Tekstülesannete seast on paremini lahendatud lihtsamad ühetehtelised protsentülesanded. Kõige kehvemini lahendatud ülesandeks on protsentarvutusega tekstülesanne, mille lahendatus jääb 40% lähedale. Keerulisemaks osutus ka mõõtühikute teisendamine ning keskmise kiiruse ja ümardamise ülesanded.

„Statistika ja punktid näitavad kätte kohad, millele tähelepanu pöörata, mitte olukorra põhjuseid, seetõttu ei saa ainult arve kasutada hinnangute andmiseks...“ (Tibar, 2013).

Seetõttu on väärtuslikumad uuringud, mis analüüsivad vigu ja püüavad kirjeldada nende põhjusi. Eestis on tehtud mitmeid sellelaadseid uuringuid matemaatikateadmistest (Kalda 2018; Kerikmäe, 2012; Metsa, 2013; Vaabel, 2013; jt). Need uuringud näitavad, et õpilastel on piisavalt head fakti- ja protseduurilised teadmised, kuid vajaka jääb nende teadmiste rakendamisoskusest. Nii näiteks selgus Kati Kalda uuringust (2018), et õpilased teavad piisavalt hästi esimese kooliastme geomeetria mõisteid, kuid jäävad hätta geomeetria ülesannete lahendamise, mis nõuavad arusaama neist mõistetest. Õpilase puudulikud või valed fakti- ja protseduurilised teadmised pärsivad mõisteliste teadmiste rakendamist ülesannete lahendamisel (Rittle-Johnson, Shneider & Star, 2015). Olseni (2019) uuringust selgus, et teise kooliastme õpilased teavad geomeetria faktiteadmisi (teavad kujundi nime, omadusi), kuid ei oska rakendada neid teadmisi ülesannete lahendamisel.

Mitmed uuringud näitavad (nt Palu, 2010), et õpilastele valmistab enim raskusi tekstülesannete lahendamine. Põhilised raskused tekstülesande lahendamise juures on seotud ülesandest aru saamisega. Palju vigu võib tekkida just võtmesõnade (nt „vähem/rohkem kui“, „korda rohkem/vähem kui“) valesti mõistmisest (Palu & Kikas, 2010; Kalda, 2018). Tüüpiliseks veaks tekstülesannete lahendamisel algklassides on nn arvudega kombineerimine: õpilased sooritavad suvalisi tehteid tekstis antud arvudega, lootuses, et mingi tehe osutub õigeaks (Vojevodova, 2007). Täpsem analüüs näitas, et sellisel lahendamisel kasutavad õpilased ainult numbritega, mitte sõnadega, esitatud arve. Sellise vea teadvustamine näitab vajadust pöörata õpetuses suuremat tähelepanu meetoditele, mis aitavad näha arvudevahelisi seoseid. Raskused matemaatilise teksti mõistmisel võivad olla tingitud pealiskaudsest lugemisest. Suur osa pealiskaudsel lugemisel tehtud vigadest võib õpilasel tulla ka ärevusest tingitud kiirustamisest (Ryan & Williams, 2007). Paljud õpilaste vead on põhjustatud väärarusaamadest (Hansen, Doreen Drews, John Dudgeon, Lawton & Surtees, 2017).

Arvudevaheliste seoste tajumine osutub eriti keerukaks mitterutiinsete, õpilaste jaoks uudsete probleemülesannete puhul (Vaabel, 2013). Probleemülesannete lahendamine nõuab kõrgemaid teadmisi, seostamisi ja arutlemisoskust. Nende lahendamine ei tugine lihtsa arvutamisreegli äraõppimisel ja selle rakendamisel. Probleemülesannete hulka liigitatakse ka

suur osa protsentülesandeid, mis kuuluvad eespool toodud tasemetööde analüüsi põhjal kõige halvemini lahendatud ülesannete hulka (Lepmann, 2012).

Matemaatikaülesannete vigade uuringutes on vaadatud ka vigade muutumist või püsivust ajas. Kerikmäe (2012) uuring näitas, et algklassides tehtavad vead kanduvad edasi kolmandasse kooliastmesse. Esimeses ja teises klassis läbi viidud uuringust selgus, et korduvlahendamisel olnud probleemülesannete lahendamine ei paranenud (Metsa, 2013). Selgus, et osa enamlevinud väärilahendusi püsisid, kuid tuli juurde ka uut tüüpi väärilahendusi.

Eraldi on võetud vaatluse alla madala matemaatika- ja lugemistasemega õpilaste poolt tehtud vead tekstülesannete lahendamisel (Palu & Kikas, 2010). Uuring näitas, et madala võimekusega õpilaste tekstülesannete lahendamisoskus ei paranenud, kuid muutusid tehtud vead. Kui eelnevalt sooritati suvalisi tehteid ülesandes antud arvudega, siis aasta hiljem jäeti ülesanne lihtsalt lahendamata. See tähendab, et vanusega areneb õpilastel kriitiline mõtlemine, kuid konkreetsete ülesannete lahendamisoskus vajab spetsiaalset arendamist.

Uurimistöö eesmärk ja uurimisküsimused

Eestis on läbi viidud piisavalt uuringuid esimese kooliastme matemaatikateadmistest. Teise ja kolmanda kooliastme õpilaste matemaatikateadmistest annavad ülevaate riigieksami ja tasemetööde tulemused, kuid vähem on analüüsitud õpilastele raskusi valmistavate ülesannete lahendamise vigu. Õpilaste matemaatikateadmiste ja vigade analüüs aitaks näha õpetuse puudujääke, mille põhjal saaks anda õpetajatele soovitusi õppeprotsessi parandamiseks.

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärgiks on teada saada, millised on õpilaste matemaatikateadmised erinevates matemaatikavaldkondades kolmanda kooliastme alguses, ning selgitada välja, millised on enamesinevad vead ülesannete lahendamisel. Eesmärgi saavutamiseks püstitati järgmised uurimisküsimused:

1. Millised on õpilaste matemaatikateadmised 7. klassi alguses?
2. Milliseid ülesandeid lahendatakse kõige paremini ja milliseid kõige halvemini?
3. Millised on kõige tüüpilisemad vead halvasti lahendatud ülesannetes?

Metoodika

Valim

Uurimistöös kasutati Haridus- ja Teadusministeeriumi projekti “Üldpädevused ja nende hindamine. 2011–2014. a” raames kogutud andmeid, mille põhjal koostati kaks valimit: õpetajate ja õpilaste valim. Antud bakalaureusetöös kasutati vaid 2011. a õpilaste valimit.

Valimisse kuulus kokku 780 seitsmenda klassi õpilast 24 eesti õppekeelega koolist ja 6 vene õppekeelega koolist. Valimisse kuuluvate õpilaste keskmiseks vanuseks oli 13,5 aastat. Testi valiidsus oli tagatud projekti meeskonna poolt.

Mõõtevahendid

Matemaatika testi koostas Anu Palu. Test koosnes 16st ülesandest. Koos alaülesannetega tuli õpilastel lahendada 26 ülesannet. Testi koostamisel oli arvestatud, et ülesannetega saaks hinnata õpilaste matemaatikateadmisi kolmel tasemel: 1) protseduurilised teadmised ja oskused, 2) mõistelised teadmised ja 3) probleemide lahendamise oskus.

Protseduurilised teadmised ja oskused hõlmavad arvutamisalgoritmide, reeglite, valemite ja teisenduste seoste tundmist. Õpilased peavad ülesandeid lahendades oskama neid ladusalt ja täpselt kasutada. Selliseid ülesandeid oli testis 9. Näiteks arvutamine nimega arvudega (*Arvuta $70 \text{ min} - 60 \text{ s} = \dots$*), harilike murdude võrdlemine (*Leia antud arvudest suurim*), protsentides antud osa leidmine (*Leia 60% arvust 30*).

Õpilastel on mõisteline teadmine, kui nad oskavad arvutamisalgoritme ja valemite iseteadlikult valida ja rakendada. Nende teadmiste hindamiseks olid testis 10 ülesannet. Näiteks järgmine ülesanne: *Koridori pikkus on 8 m, laius on $\frac{1}{4}$ sellest. Arvuta koridori pindala.*

Kõrgemal tasemel mõistmist saab hinnata probleemülesannetega, mis on õpilase jaoks uudsed. Probleemülesannete lahendamiseks tuleb õpilasel oma teadmisi kombineerida. Antud testis oli selliseid ülesandeid 7. Näiteks järgmine ülesanne: *Pudelist ruumalaga $\frac{1}{2}$ liitrit on veega täidetud pool. Kui palju jäi pudelisse vett, kui sealt joodi ära $0,2 \text{ dm}^3$ vett?*

Lahendusi hinnati dihhotoomselt: vale vastus või vastamata ülesanne andis 0 punkti, õige vastus 1 punkti.

Testi reliaabluse kinnitamiseks arvutati Cronbach'i alfa, mille järgi on test usaldusväärne ($\alpha = 0,86$).

Protseduur

Andmed koguti projekti „Üldpädevused ja nende hindamine. 2011–2014. a” töörühma poolt. Uuringu läbiviijad edastasid testid valitud koolidesse. Testi viis läbi vastava klassi õpetaja. 7. klassi ülesanded kontrollis ja andmed sisestas käesoleva töö autor.

Andmetöötlus

Andmete töötlemiseks kasutati tabelarvutusprogrammi MS Excel ja statistikaprogrammi SPSS. Andmetöötlemiseks programmis SPSS kodeeriti vastused: õige vastus „1” ja vale vastus või vastamata jätmine „0”. Uurimistöös töödeldi õpilaste andmed kvantitatiivsete

andmeanalüüsimetoditega, kasutades kirjeldava statistika näitajaid (aritmeetiline keskmine, standardhälve). Keskmiste tulemuste võrdlemiseks tehti dispersioonanalüüs ANOVA.

Statistiliselt oluliseks loeti tulemused usaldusnivool $p < 0,05$.

Tulemused

Matemaatikateadmised erinevatel tunnetuslikel tasemetel

Esiteks taheti teada, millised on õpilaste teadmised erinevates matemaatika valdkondades 7. klassi alguses.

Selgitamaks seitsmenda klassi matemaatikateadmisi, tehti andmetest kirjeldavad analüüsid. Testi keskmine lahendus oli 0,50 (SD = 0,20, max 0,96 ja min 0,04). Paremini lahendati fakti- ja protseduurilisi teadmisi nõudvaid ülesandeid, halvemini probleemülesandeid (vt hiljem tabel 3 ja 4).

Tabel 2. Testi keskmised tulemused tunnetuslike tasemete järgi.

	M	SD
Kogu test	0,50	0,20
Protseduurilised teadmised	0,70	0,30
Mõistelised teadmised	0,33	0,31
Probleemide lahendamine	0,36	0,30

Keskmiste tulemuste võrdlus näitas, et õpilastevaheline erinevus on statistiliselt oluline (T-test, $p < 0,01$). Parim tulemus 1,00 oli kahel õpilasel. Halvim tulemus 0,00 oli ühel õpilasel.

Teiseks taheti välja selgitada kõige paremini ja kõige halvemini lahendatud ülesanded. Kõige paremini lahendatud ülesanneteks loeti ülesanded, mille lahendusprotsent oli suurem kui 80 (tabel 3). Selliseid ülesandeid oli viis.

Tabel 3. Viie kõige paremini lahendatud ülesande keskmine lahendus.

	M	SD
Ülesanne 1.2	0,93	0,256
Ülesanne 10	0,92	0,277
Ülesanne 1.3	0,86	0,348
Ülesanne 1.1	0,83	0,375
Ülesanne 8.1a	0,81	0,392

Kõigi nende ülesannete lahendamiseks piisas fakti- ja protseduurilistest teadmistest: arvutamise- ja teisendamisoskusest. Kõigi nende ülesannete lahendamiseks piisas kahekohaliste arvudega arvutamise oskusest.

Kõige halvemini lahendatud ülesanneteks loeti ülesanded, mille lahendusprotsent oli väiksem kui 25 (tabel 4). Neid ülesandeid oli neli.

Tabel 4. Nelja kõige halvemini lahendatud ülesande keskmine lahendatus.

	M	SD
Ülesanne 11.1	0,24	0,430
Ülesanne 12	0,24	0,430
Ülesanne 13	0,19	0,394
Ülesanne 11.2	0,17	0,380

Kõik need ülesanded olid probleemülesanded. Enim valmistas õpilastele raskusi ühe kuupmeetri suuruse kuubi serva määramine ja materjali kulu arvutamine pealt lahtise mahuti valmistamiseks.

Kõige tüüpilisemad vead halvasti lahendatud ülesannetes

Nagu eelnevalt öeldud, osutus kõige raskemaks 1 m³ mahuga kuubi serva ja selle kuubi pindala leidmine. Enim vigu tehtud ülesandes 11 oli öeldud, et kuubikujulisse veemahutisse mahub täpselt 1 m³ vett. Alaülesandes 11.1 küsiti, milline on selle veemahuti serv. Õige vastuse saamiseks pidi õpilane teadma, et kuubil on kõik servad võrdse pikkusega. Õigeks vastuseks loeti 1 meeter. Õige serva pikkuse leidis 24,6% õpilastest. Kokku anti ülesandele 167 erinevat valevastuse varianti (valeks vastuseks loeti ka puuduv vastus), millest enam esinenud on tabelis 5. Ülesandele ei olnud vastust kirjutanud 46,3% õpilastest.

Tabel 5. Kuubi serva leidmise ülesande enamlevinud väärvastused.

Vastus	Vea kirjeldus	Õpilaste arv	Õpilaste arv protsentides
Vastus puudub	Ülesande vastust ei olnud kirjutatud	361	46,3%
Sõnaline vastus (erinevad omadussõnad nagu kandiline, ruudukujuline jmt)	Küsimust ei olnud mõistetud	85	10,9%
Õige vastus, kuid ilma ühikuta	Õpilane ei olnud vastusele lisanud ühikut	26	3,3%

Markantse näitena võiks välja tuua sõnalise vastuse (nt terav, sirge, nurklik jne), kus 10,9% õpilastest oli saanud ülesandes küsitust sarnaselt valesti aru.

Ülesandes küsitud pealt lahtise mahuti materjalikulu leidmiseks pidi õpilane arvutama veemahuti pindala, arvestades, et pealt lahtisel veemahutil on 5 võrdse suurusega tahku (4 külgtahku ja üks põhitahk). Õigeks vastuseks loeti 5 m^2 , mille sai 17,6% õpilastest. Vastuse oli jätnud kirjutamata 56,0% õpilastest, mis loeti samuti valeks vastuseks. Õige arvulise vastuse, kuid vale ühikuga või ilma ühikuta, oli saanud 4,6% õpilastest. Kokku anti 62 erinevat väärvastust, millest enam esinenud on tabelis 6.

Tabel 6. *Kuubi pindala leidmise ülesande enamlevinud väärvastused.*

Vastus	Vea kirjeldus	Õpilaste arv	Õpilaste arv protsentides
Vastus puudub	Ülesande vastust ei olnud kirjutatud	437	56,0%
5	Õpilane oli saanud õige arvulise vastuse, kuid ei olnud lisanud ühikut	36	4,6%
1 m^3	Vastusesse kirjutati mahuti ruumala	23	3,0%
1 m^2	Õpilane oli leidnud ühe tahu pindala	24	3,1%
6 m^2	Õpilane oli leidnud terve kuubi pindala, arvestamata, et veemahuti on pealt lahtine	14	1,8%

Enamlevinud väärvastuste hulgast võiks välja tuua tabelis 6 teisena toodud vastusevariandi 5, kus õpilane oli ülesande küll õigesti lahendanud, kuid ei olnud lisanud ühikut. Sellise vea tegi 4,6% kõigist testi sooritanutest.

Teises halvasti lahendatud tekstülesandes oli öeldud, et kahes kastis on kokku 54 kilogrammi õunu ja teises kastis on õunu 12 kilogrammi võrra rohkem kui esimeses kastis. Küsimusele, mitu kilogrammi õunu on kummaski kastis, esitati 53 erinevat valet vastust. Ülesande jättis lahendamata 13,8 % õpilastest. Enamlevinud valed vastused olid *42 ja 12 kg* (13,1%) ning *39 ja 15 kg* (10,5%). Neist esimese puhul sooritati tehe tekstis olevate arvudega ($54 - 12 = 42 \text{ kg}$), pööramata tähelepanu arvudevahelistele seostele. Vastusevariandid 15 kg ja 39 kg puhul jaotati õunad kastidesse vastavalt arvutustehete ($54 : 2 - 12$ ja $(54 : 2) + 12$) abil, jättes tähelepanuta ülesande tingimuse, et teises kastis on 12 kg õunu rohkem. Leidus ka vastuseid, mille tekkimist on võimatu selgitada (nt *684 ja 137 kg*, *108 ja 66 kg* ning *120 ja 40 kg*). Tabelis 7 on toodud enamlevinud väärvastused.

Tabel 7. Õunte kahte kasti jaotamise ülesande enamlevinud väärvastused.

Vastus	Vea kirjeldus	Õpilaste arv	Õpilaste arv protsentides
Vea kirjeldus	Ülesande vastust ei olnud kirjutatud	108	13,8%
42 kg ja 12 kg	Vastuse leidmiseks tehti tehe $54 - 12 = 42$, arvates, et ühes kastis on 12 kg õunu	102	13,1%
15 kg ja 39 kg	Vastuse leidmiseks tehti tehted $(54 : 2) - 12 = 15$ ja $(54 : 2) + 12 = 39$	82	10,5%

Lisaks kuubi ülesandele lahendati veel väga halvasti aritmeetika tekstülesandeid. Need ülesanded nõudsid hoolikat lugemist, tekstist arusaamist ja arvudevaheliste seoste nägemist. Ühes ülesandes oli teada, et pooleliitrisest pudelist on veega täidetud pool. Küsiti, kui palju jäi pudelisse vett, kui sealt joodi ära $0,2 \text{ dm}^3$. Õigesti vastas 19,2% õpilastest. Vastust ei olnud kirjutatud 37,6% õpilastest. Kokku anti 102 valevastuse varianti. Enamlevinud väärvastused on toodud tabelis 8.

Tabel 8. Vee hulga leidmise ülesande enamlevinud väärvastused.

Vastus	Vea kirjeldus	Õpilaste arv	Õpilaste arv protsentides
Vastus puudub	Vastust ei olnud kirjutatud	293	37,6%
$0,3 \text{ dm}^3$	Ülesannet loeti pealiskaudselt: pudeli mahuks võeti pool liitrit, mitte veerand	145	18,6%
0,3 (muu ühik või ühikuta)	Sama viga, mis ülal kirjeldatud, kuid nüüd unustati ka ühik	27	3,5%
2	Viga ei ole võimalik määrata	17	2,2%

Erilist tähelepanu ülesande 13 vastuste hulgas võib pöörata vastusevariandile $0,3 \text{ dm}^3$. Sama vea alla kuulub ka teine pakutud vastusevariant 0,3, kus ühikut ei olnud märgitud. Seega, üht tüüpi viga oli teinud 22,1 % kogu õpilaste hulgast. Seda on rohkem, kui õiget vastust samale ülesandele.

Arutelu

Bakalaureusetöö eesmärgiks oli välja selgitada, millised on õpilaste matemaatikateadmised erinevates matemaatikavaldkondades kolmanda kooliastme alguses ning millised on kõige

sagedamini esinevad vead ülesannete lahendamisel. Eesmärgini jõudmiseks uuriti 7. klassi õpilaste matemaatikatesti lahendusi.

Esimese küsimusena vaadeldi, millised on õpilaste teadmised erinevates matemaatika valdkondades seitsmenda klassi alguses. Uuring näitab, et õpilaste matemaatikaalaste teadmiste ja oskuste rakendamine on ebapiisav. Test näitas, et õpilastel on teadmistesse juba lüngad tekkinud, pooltel õpilastest ei olnud kinnistunud esimese ja teise kooliastme matemaatikateadmised. Sama ilmnes Kerikmäe (2012) uuringust, et esimese ja teise kooliastme vead kanduvad kolmandasse kooliastmesse. Veatult oli lahendatud vaid kaks tööd, millest järeldeb, et kõrgel tasemel oskustega õpilasi napib. Samas PISA (Program for International Student Assessment) viimaste aastate lõikes on tiptasemel sooritajaid oluliselt rohkem ja ka keskmised tulemused on kõrged (PISA uuringu kokkuvõte, 2015; 2018). Kuna PISA teste sooritatakse hiljem kui III kooliastme alguses, siis on võimalik, et nende testide hea tulemus on saavutatud kolmanda kooliastme õpetajate tubli tööga, likvideerides teises kooliastmes tekkinud lünki. Teises kooliastmes omandatud teadmised omavad suurt rolli kogu põhikooli matemaatika teadmiste hulgas. Seepärast on just siin oluline mõistelist teadmiste kujundamine. Palu ja Kerikmäe (2012) uuringust on aga selgunud, et keskmisest madalamate tulemustega õpilaste õpetaja keskendub pigem konkreetsele tasandil õpetamisele ja rõhutab faktide ja protseduuride harjutamise vajalikkust. Samas Kalda (2018) peab oma uuringus protseduuriliste teadmiste omandamist tähtsaks, pidades seda aluseks kõrgema taseme teadmiste ja oskuste kujunemisel, kuid ta rõhutab hilisemates õpingutes selliste ülesannete lahendamise vajalikkust, mis arendaksid õpilast kõigis kolmes valdkonnas. Õpetajad peaksid püüdlema selle poole, et õpilaste jaotus saavutusastemete lõikes nihkuks kõrgemate tulemuste suunas.

Teise küsimusena taheti teada kõige paremini ja kõige halvemini lahendatud ülesandeid. Varasematest uuringutest on teada, et õpilastel on esimeses kooliastmes head protseduurilised ja faktiteadmised (Vaabel, 2013; Vojvodova, 2007). Käesolevast uuringust selgub, et teises kooliastmes on säilinud head protseduurilised ja faktiteadmised, selle valdkonna ülesanded olid lahendatud kõige paremini. Need on õpilaste jaoks tuttavamad, kuna neid võib olla tunnis rohkem lahendatud. Antud testis kõige paremini lahendatud ülesannetes pidi õpilane tegema lihtsamaid tehteid ühe- ja kahekohaliste arvudega, mis õige lahenduskäigu korral hoidsid ära ka arvutamisel tekkida võivad vead. Samas olid ka kõige halvemini lahendatud ülesannetes lihtsad arvud, sest õpilane pidi testi tehtud saama peast või kirjalikult arvutades. Järelikult polnud kehvemini lahendatud ülesannete probleemiks vilets arvutamisoskus. Kõige halvemini olid lahendatud probleemülesanded. Üldoskuste arendamine

probleemide lahendamises võis olla nõrk, sama märkis ka Pedosk oma uurimistöös (Pedosk, 2019). Tema uuringust selgus, et õpetajate teadmised probleemilahendusõpetusest on vähesed, küsitletud õpetajad pidasid probleemi lahendamise strateegiate omandamist võimalikuks ülesannete lahendamise kaudu, mitte käsitlemist eraldi õpetusena. Õpetajaid aitaks antud teemal täiendkoolitused, sest probleemülesannetele lahendamise oskusele tuleb rohkem panustada.

Kolmandat kooliastet võiks alustada eelnevas kooliastmes õpitud korrates ja kordamine peaks olema põhjalikum – sageli hõlmab aasta alguse kordamine faktiteadmiste (valemite meeldetuletamist ja lihtsamate arvutusülesannete lahendamist) kontrollimist, jättes tähelepanuta suurimat raskust valmistavad probleemülesanded. Probleemülesanded nõuavad õpetajalt suuremat panust, sh rohkem aega. Põhjus, miks probleemide lahendamise oskus nii nõrk on, võib otsida ajanappusest. Fakti- ja protseduuriliste teadmiste kinnistamisele panustatakse suur osa ajast, jättes varju mõisteliste teadmiste ja probleemide lahendamise õpetamise. Probleemülesannete lahendamise oskust ei saa arendada pidevalt korrates, vaid õpetus vajab teadlikku ja oskuslikku lähenemist. Kerikmäe (2012) uuringust tuli välja, et paljud õpetajad näevad probleemi lahendusena rohkem kordamist, mitte arusaamisega õpetamist, aga just see võiks eesmärgiks olla.

Matemaatika on raske õppeaine, kuna lünkade tekkimisel tekivad uued raskused ja edasiste teadmiste omandamine muutub järjest keerulisemaks. Et matemaatika ei oleks õpilastele nii raske, tuleks tekkinud lünki likvideerida ja tasandada. Selleks on vaja teada, milles raskused seisnevad ja kus lüngad on. Lünkadeni aitab jõuda vigade uurimine. Kolmanda uurimisküsimusena tahetigi välja selgitada tüüpvead õpilaste lahendustes.

Vigade uurimisest selgus, et väga palju ülesandeid jäetakse üldse lahendamata. Tegemist võib olla motivatsioonipuudusega – kui viiakse uurimise eesmärgil läbi test, ei tunne õpilane end kohustatuna lahendama. Õpilane töötab sageli hinde või muu preemia nimel. Nõrgematel õpilastel võib juba mõte matemaatikaülesannete lahendamisest hirmsana näida, ta võib sisemiselt end veenda, et ei oska, mis raskendab testi sooritamist. Kui õpilane ei ole oma matemaatikaoskustes kindel, võib ta karta vasatata valesti.

Üldiselt võib välja tuua, et esines palju erinevaid valesid vastuseid, millele on raske selgitust leida. Tegemist võis olla oskamatuses tuleneva vastuste leiutamiselega. Õpilased leiutavad vastuseid, lootes tööd esitades mitte häbisse jääda. Samuti võivad suvalised arvud vastustes tähendada teksti mittemõistmist või valesti mõistmist ja nii otsitakse teksti seest suvalisi arve, mida vastusekasti kirjutada. Paljud õpilaste vead võivad olla tekkinud väärarusaamadest (Hansen et al., 2017). Järelikult tuleb väärarusaamu vältida, selleks tuleb

õpetada arusaamisega. Testis olnud mõisted võisid olla õpilase jaoks rasked, kuna mõisteline arusaamine on ebapiisav. Õpilane on mõisted lihtsalt nõ pähe tuupinud, endale mõistelist arusaama tekitamata. Nii ei osatagi õpitud mõisteid ülesannete sees kasutada. Õpetajatel tuleks mõisteid hulgaliselt pigem vähem õpetada, aga põhjalikult ja arusaamisega. Teksti mittemõistmine viitab probleemi lahendamise ühe oskuse puudumisele, näidates vajalikkust probleemi lahendamise etappide teadlikule õpetamisele.

Esines ka tüüpvigu. Kõige kehvemini lahendatud kuubi serva pikkuse leidmise ülesande väärvastuste hulgas esinenud sõnalised vastused „terav, sirge, nurklik jne“ vihjavad ülesande mittematemaatilisele lahendusele. Kalda (2018) uuring näitas, et esimeses kooliastmes tunnevad õpilased geomeetriamõisteid hästi, kuid nende mõistete rakendamisega ülesannetes jäädakse hätta. Olseni (2019) uuring puudutas teise kooliastme õpilasi ja sealtki selgus, et mõistete rakendamine on õpilastele raske. Antud uuringust võib järeldada, et kuubi serva jm kuubiga seotud mõistete rakendamise oskus ülesandes on ebapiisav. Mõistelised teadmised pole kinnistunud, millest tuleneb unustamine. Siit võib järeldada, et lihtsale protseduurilisele teadmisele põhineva ülesande lahendamine kujunes raskeks, kuna õpilasele oli küsimuse sõnastus võõras. Õpilase jaoks võib teksti sisu jääda osaliselt arusaamatuks ja seetõttu saab ta lahendada ka osaliselt (Ryan ja Williams, 2007). Vea põhjusena võib oletada, et sageli tutvutakse kuubiga viienda klassi lõpus ja kooliaastalõpu tegevused võivad uute teemade õppimiselt tähelepanu eemale viia. Sage viga mitmes ülesandes oli ühiku kirjutamata jätmine, ehkki arvuline väärtus oli õige. Õpilasele on ühiku lisamine võõras, kui tunnis seda pidevalt ei korrutata. See on üks nendest teemadest, kus pidev kordamine aitaks teadmist kinnistada. Õpetajad peaksid ühiku lisamist pidevalt rõhutama, et sarnase vea tegemist vähendada.

Kuubi ülesande teises osas (pealt lahtise mahuti pindala leidmisel) eksiti samuti. Tüüpiline viga oli vale ühiku lisamine, justkui oleks küsitud ruumala. Vea põhjuseks võib olla teksti mittemõistmine. Õpilane võis mõelda, et materjali arvestamine kuubikujulise mahuti valmistamiseks nõuabki ruumala arvutamist, st mõistelist arusaama ei ole õpilasel tekkinud. Õige lahenduskäigu korral tulnuks õpilasel leida viie põhitahu pindalade summa. Tüüpveana saab välja tuua veel väärvastuse 1 m^2 , kus õpilane oli leidnud ühe tahu pindala. Viga võis tekkida õpilase teadmisesest algklassidest, et pindala on leitav valemiga $S = a \cdot b$ (ruudu puhul $S = a \cdot a$), mõtlemata sealjuures kuubi pinnalaotusele. Vigadest tuli välja veel vastus 6 m^2 , leiti terve kuubi pindala. See võib tähendada, et õpilane on selgeks saanud kuubi pindala arvutamise valemi, kuid ei oska ülesandest olulist infot välja lugeda. Põhjusena saab tuua õpetuse puudujäägi, kus valemite selgeks saamist peetakse olulisemaks kui sellest aru saamist.

Õunakastide ülesannete tüüpilised valed vastused olid tingitud teksti mitte mõistmisest. Mõlema vastusepaari puhul oli ülesande lahendamisel arvestatud ainult osa tekstist, et kokku on 54 kg õunu. Selliseid vigu aitaks ära hoida vastuste kontrollimine teksti järgi. Antud testi lahendatuse puhul võib lugeda teksti järgi kontrollimise oskust kasinaks. Teksti järgi kontrollimisele tuleks õpetuses erilist tähelepanu pöörata, et antud oskus juurduks. Nii annaks palju vigu ära hoida ja kontrolli põhjal väärvastuste väljaselgitamine aitaks nii mõnelgi õpilasel sarnaseid vigu hiljem vältida.

Vee hulga leidmise ülesande tüüpvastus $0,3 \text{ dm}^3$ või sama vastus ilma ühikuta tuleneb tähelepanematust lugemisest, kui arvestati, et pudelis on veerand liitri asemel pool liitrit vett. Edasine lahenduskäik lahutamistehte näol tehti antud vastusevariandi puhul õigesti. Vea tekkepõhjuseks võib oletada, et teksti sõnastus oli õpilastele võõras ja loeti pealiskaudselt. Ehkki eale vastavate tekstide mõistmine peaks olema eelnevates kooliastmetes saavutatud oskus (Kikas, 2010). Võib oletada, et mõisted „pool, veerand jne“ ei seostu õpilastel arvudega. Kui õpilane konkreetseid arve ülesandes ei näe, jätab ta vajalikud tehted tegemata. Lahendusena võib välja tuua vajaduse põhjalikuma probleemilahendamise õpetamise järele.

Kokkuvõtteks võib öelda, et seitsmenda klassi õpilaste eelmistes klassides omandatud matemaatikateadmised on kasinad. Paremini lahendatakse protseduurilisi teadmisi nõudvaid ülesandeid, kehvemini probleemülesandeid. Paljud ülesanded jäetakse lahendamata, vead tekivad teksti mitte mõistmisest või valesti mõistmisest, hooletusest ja kontrollimise oskuse puudumisest. Antud töö oli vajalik tüüpiliste vigade ja väärvastuste välja selgitamiseks ja nende põhjenduste otsimiseks. Matemaatikaõpetuses tuleks rohkem panustada mõistelise arusaama tekkimisse. Koos õpilastega tuleks vigu analüüsida. Ei piisa ainult õige lahenduskäigu näitamisest, vaid õpetajad peaksid koos õpilastega arutama tehtud valede lahenduste põhjuseid. Et näha päriselt õpetuse puudujääke, võiks tulevikus õpetamisviise analüüsida. Selleks tuleks suurema hulga õpetajate seas viia läbi just probleemilahendamise õpetuse uuringuid.

Uuringu piiranguna võib välja tuua teadmatuse, kas õpilased kirjutasid üksteise pealt maha või mitte, sest test oli ühes eksemplaris ja uurija ise ega testi koostaja ei olnud lahendamise juures. Vigade analüüsis toodi välja oletatavad vigade tekkepõhjused. Et näha tegelikke vigade põhjuseid, tuleks õpilaste väärvastuseid nt intervjuu vormis põhjalikumalt uurida.

Tänuõnad

Suur tänu läheb juhendajale kiirete vastuste ja heade nõuannete eest ning Eve Kikasele, kes võimaldas kasutada oma uuringu andmeid. Samuti tänab autor veel oma ema, Reet Õunapit, kes oli alati valmis lapsi hoidma ja aitas sellega kaasa lõputöö valmimisele. Suur tänu ka autori elukaaslasele, Rait Kivile, heade nõuannete ja osavõtlikkuse eest.

Autorsuse kinnitus

Kinnitan, et olen koostanud ise käesoleva lõputöö ning toonud korrektselt välja teiste autorite ja toetajate panuse. Töö on koostatud lähtudes Tartu Ülikooli haridusteaduste instituudi lõputöö nõuetest ning on kooskõlas heade akadeemiliste tavadega.

Kersti Õunap 7.07.2020

Kasutatud kirjandus

- Hansen, A.; Doreen Drews, D.; John Dudgeon, J.; Lawton, F.; & Surtees; L. (2017). *Children's errors in mathematics*. 4th edition. SAGE Publications
- Kalda, K. (2018). *Neljanda klassi õpilaste matemaatikateadmised erinevates valdkondades ja nende valdkondade vahelised seosed*. Publitseerimata magistritöö. Tartu Ülikool.
- Kerikmäe, I. (2012). *Teises kooliastmes saavutatud matemaatikapädevus ja õpetajate arvamused pädevuse parandamise võimalustest*. Publitseerimata magistritöö. Tartu Ülikool.
- Kikas, E. (2010). Tunnetusprotsessid ja nende arengulised iseärasused. E. Kikas (Toim), *Õppimine ja õpetamine esimeses ja teises kooliastmes* (lk 17–60). Tartu.
- Lepmann, L. (2012). Probleemülesannete lahendamise oskuse arendamine põhikoolis. Külastatud aadressil: <http://www.oppekava.ee/images/5/5d/Probleemoppest.pdf>
- Matemaatika. Põhikooli riiklik õppekava, lisa 3 (2011). Külastatud aadressil https://www.riigiteataja.ee/aktiivisa/1200/9201/1009/VV1_lisa3.pdf#
- Matemaatika tasemetööde materjalid, s.a. Külastatud aadressil <https://www.innove.ee/eksamid-ja-testid/tasemetood/tasemetoode-materjalid/>
- Metsa, K. (2013). *Matemaatikaalased teadmised ja nende areng I kooliastmes*. Publitseerimata magistritöö. Tartu Ülikool.
- Mullis, V. S. I., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., Arora, A., & Erberber, E. (2005). *TIMSS 2007 Assessment Framework*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
- Olsen, M. (2019). *Geomeetria mõistete omandamine II kooliastmes*. Publitseerimata magistritöö. Tartu Ülikool.
- Palu, A. (2010). Algklassiõpilaste matemaatikaalased teadmised, nende areng ja sellega seonduvad tegurid. Doktoritöö. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus.
- Palu, A.; Kikas, E. (2010). The types of the most widespread errors in solving arithmetic word problems and their persistence in time. In: A. Toomela (Ed.), *Systemic Person-Oriented Study of Child Development in Early Primary School* (155–172). Frankfurt am Main: Peter Lang Verlag.
- Palu, A., & Kikas, E. (2015). Matemaatikapädevus. E. Kikas, A. Toomela (Toim.), *Õppimine ja õpetamine kolmandas kooliastmes. Üldpädevused ja nende arendamine* (lk 242–254). Tallinn: Eesti Ülikoolide Kirjastus.

- Pedosk, Oskar (2019). *Kuuenda klassi õpilaste matemaatiliste probleemide lahendamisoskus ning õpetajate teadmised ja arvamused selle kujundamisest ühe kooli näitel*. Publitseerimata magistritöö. Tartu Ülikool
- Pisa uuringu kokkuvõte (2015, 2018). Külastatud aadressil <https://www.innove.ee/uuringud/pisa-uuring/>
- Põhikooli riiklik õppekava (2011). Riigi Teataja I 2010, 6, 22. Külastatud aadressil <https://www.riigiteataja.ee/akt/129082014020>
- Riigieksami statistika, s.a. Külastatud aadressil <https://www.innove.ee/eksamid-ja-testid/riigieksamid/statistika/>
- Ryan, J. & Williams, J. (2007). *Children's Mathematics 4-15: learning from errors and misconceptions*. Open University Press McGraw-Hill. England
- Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J.R. (2015). Not a One-Way Street: Bidirectional Relations Between Procedural and Conceptual Knowledge of Mathematics. *Educational Psychology Review*. 27(4), 587–597.
- Tasemetööde statistika, s.a. Külastatud aadressil <https://www.innove.ee/eksamid-ja-testid/tasemetood/tasemetoode-statistika/>
- Tibar, S. (2013). 2013. a 6. klassi matemaatika tasemetööst (lühikokkuvõte). Külastatud aadressil http://www.innove.ee/UserFiles/Tasemet%C3%B6%C3%B6d/2013/Matemaatika/2013_a_6_kl_matemaatika_tasemetoost.pdf
- Vaabel, M. (2013). *Neljanda klassi õpilaste matemaatikateadmised, tüüpilised vead ning poiste ja tüdrukute erinevused ülesannete lahendamisel*. Publitseerimata magistritöö. Tartu Ülikool
- Vojevodova, K. (2007). *Kolmanda klassi õpilaste matemaatika-alased teadmised rahvusvahelise projekti IPMA testi põhjal*. Publitseerimata magistritöö. Tartu Ülikool
- Woodward, J., & Howard, L. (1994). The misconceptions of youth: errors and their mathematical meaning. *Exceptional Children*, 61, 126-136.

Lihlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Kersti Õunap,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihlitsentsi) minu loodud teose

“Vead teise kooliastme matemaatika ülesannete lahendamisel“,

mille juhendaja on Anu Palu,

reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Kersti Õunap

07.07.2020