

ЛЕТНЯЯ ШКОЛА
по
ПРОБЛЕМАМ ТЕОРИИ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ
ЧАСТИЦ

Кяярику 1965

4

РАЗНОЕ

20365A

1 X
1A-10479

Институт физики и астрономии АН Эстонской ССР

Л Е Т Н Я Я Ш К О Л А

п о

П Р О Б Л Е М А М

Т Е О Р И И Э Л Е М Е Н Т А Р Н Ы Х Ч А С Т И Ц

К я я р и к у

А в г у с т 1965

IV часть

Р А З Н О Е

Т а р т у 1966

PROCEEDINGS OF THE 1965 SUMMER SCHOOL
ON ELEMENTARY PARTICLE PHYSICS

held at Kääriku, Estonian SSR
August 16-29, 1965

Volume 4
MISCELLANEOUS



Редакционная коллегия: П. Кард, М. Кыйв, Я. Лыхмус
(ответственный редактор), Л. Палги, Х. Ыйглане.

С о д е р ж а н и е

А.А.Боргардт, А.П.Ярошенко

Операторы проектирования в теории бозонов. 5

Семинарские доклады

А.А.Айнсаар

Разложение волновой функции Кеммера-Дэффина. 45

А.И.Болсун, И.С.Сацункевич

Фоторождение пар W -мезонов на ядре. 49

М.П.Коркина

Два следствия теории гравитации в евклидовом пространстве. 52

Л.Г.Мороз, В.Н.Третьяков

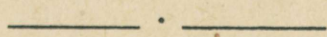
Комптон-эффект на нейтроне 59

Т.С.Романова, Ф.И.Федоров

Уравнения с высшими производными для электромагнитного поля. 67

Г.В.Шишкин

Некоторые следствия из теории обратного μ -е распада. 71



Contents

A.A. Borgardt, A.P. Yaroshenko,

Projection operators in theory of bosons 5

Seminar reports

A. Ainsaar,

A decomposition of the Kemmer-Duffin wave
function 45

A.I. Bolsun, I.S. Sacunkiewich,

W-meson pair production on nucleus 49

M.P. Korčina,

Two consequences of gravitation theory
in euclid spaces 52

L.G. Moroz, V.N. Tretjiakov,

Compton scattering on neutrons 59

T.S. Romanova, F.I. Fjodorov,

Equations with derivatives for electromagnetic
field 67

G.V. Shishkin,

Some consequences of theory of inverse
 μ -e decay 71

А.А.Боргардт, А.П.Ярошенко

О П Е Р А Т О Р Ы П Р О Е К Т И Р О В А Н И Я
В Т Е О Р И И Б О З О Н О В

С о д е р ж а н и е

Лекция I. <u>Алгебра Кеммера и операторы проектирования</u> ...	7
В в е д е н и е.	7
1. Алгебра Кеммера (приводимые представления)...	7
2. Операторы проектирования.	II
3. Примеры систем операторов проектирования. .	13
Лекция II. <u>Операторы проектирования в волновых полях</u> .	18
1. Поле в четырехмерном пространстве.	18
2. Трехмерные операторы проектирования в четырехмерных представлениях.	20
3. Операторы проектирования в гильбертовом пространстве.	24
4. Исключение неканонических переменных в волновом уравнении.	26
Лекция III. <u>Векторный мезон в центральном поле</u>	29
В в е д е н и е.	29
1. Волновое уравнение, интегралы движения. . .	30
2. Спин-угловые функции.	33
3. Разделение переменных в волновом уравнении.	37

АЛГЕБРА КЕММЕРА И ОПЕРАТОРЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

А. Боргардт

В в е д е н и е

Техника операторов проектирования в применении к задачам релятивистской квантовой механики электрона была развита в работах Ф.Заутера [1-3]. Существенным шагом вперед явилась работа Ф.Федорова [4], в которой дана общая теория операторов проектирования и установлена связь между минимальным полиномом матрицы и генерируемой этой матрицей системой операторов проектирования. Применению операторов проектирования в квантовой теории поля для вычисления матричных элементов посвящены работы Э.Белломо [5] (полуцелый спин) и А.Богуша [6] (целый спин). В данных лекциях рассматривается техника операторов проектирования в задачах релятивистской квантовой механики бозонов.

I. Алгебра Кеммера (приводимые представления).

Алгебра Кеммера определяется соотношениями коммутации [7,8] (матрицы β_μ -эрмитовы)

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho + \beta_\rho \beta_\nu \beta_\mu - \delta_{\mu\nu} \beta_\rho - \delta_{\rho\nu} \beta_\mu = 0. \quad (I)$$

В дальнейшем нас будут интересовать только трехмерные представления - $\beta_i (3 \times 3)$, $\beta_i (1 \times 1) \equiv 0$ (неприводимые), а также четырехмерные - $\beta_\mu (10 \times 10)$, $\beta_\mu (5 \times 5)$,

$\beta_\mu(1 \times 1) \equiv 0$. Матрицы трехмерного представления, помимо соотношений типа (I) удовлетворяют еще характерным для трехмерного пространства соотношениям группы вращений

$$[\beta_i, \beta_k] = i\beta_l, \quad (i, k, l \rightarrow 1, 2, 3 \text{ и т.д.}) \quad (2)$$

Для практического применения в теории элементарных частиц наиболее удобным полные приводимые представления, образующиеся диагональным зацеплением неприводимых. Применение алгебры приводимых представлений дает определенные преимущества, которые выяснятся несколько ниже.

Полное приводимое трехмерное представление алгебры Кеммера оперирует в линейном пространстве четырехрядных величин $\psi = (\vec{\psi}, \psi_0)$, где $\vec{\psi}$ - трехмерный вектор, а ψ_0 - скаляр или четвертая компонента четырехмерного вектора, состоящего из $\vec{\psi}$ и ψ_0 . Матрицы этого представления (применяемые в теории фотонов [9-II]) могут быть представлены в виде

$$\beta_i^{(\pm)} = \frac{1}{2} (\alpha_i \pm \bar{\alpha}_i), \quad (3)$$

где $\alpha_i, \bar{\alpha}_i$ образуют две коммутирующие подгруппы вращений в четырехмерном неприводимом представлении алгебры Дирака (α_i изоморфны ρ_i , а $\bar{\alpha}_i \rightarrow \sigma_i$). Элементы $\beta_i^{(\pm)}$ фиксируются соотношениями

$$\beta_i^{(+)\mu\nu} = i\delta_{\mu[k} \delta_{l]\nu}, \quad \beta_i^{(-)\mu\nu} = i\delta_{\mu[l} \delta_{k]\nu}. \quad (4)$$

Оба представления удовлетворяют условиям ортогональности

$$\beta_i^{(+)\mu\nu} + \beta_i^{(-)\mu\nu} - I = \beta_i^{(+)} \beta_i^{(-)} = 0, \quad (5)$$

а свойство антисимметричности $\beta_i^{(+)} \beta_i^{(-)}$ позволяет перемещать местами пары β - матриц, что невозможно в

неприводимых представлениях.

Группа обобщенных единиц содержит обычные матрицы r_i

$$r_i = \pm (2\beta_i^{(\pm)2} - I) = \alpha_i \bar{\alpha}_i, \quad \text{Spr } r_i \equiv 0, \quad (6)$$

и новую матрицу P , образуемую из всех r_i

$$P = \frac{1}{2}(I + M_1), \quad M_1 = \sum_{m=1}^3 r_m \quad (7)$$

и обладающую свойствами ($P^{-1} = P^+ = P$)

$$P^{-1} \beta_i^{(+)} P = \beta_i^{(+)}, \quad P^{-1} \beta_i^{(-)} P = \beta_i^{(-)*} \quad (8)$$

Матрица P будет в дальнейшем играть существенную роль в построении операторов векторного проектирования.

Четырехмерные представления также могут быть объединены в два полных приводимых ортогональных представления, удовлетворяющих соотношениям Кеммера и условиям ортогональности, включающим и условие антисимметричности

$$\beta_\mu^{(+)} \beta_\mu^{(-)} - I = \beta_\mu^{(+)} \beta_\mu^{(-)} = \beta_\mu^{(\pm)} \beta_\nu^{(\mp)} + \beta_\nu^{(\pm)} \beta_\mu^{(\mp)} = 0. \quad (9)$$

Для разложения этих матриц, действующих в пространстве биоктетов ψ (ундоры второго ранга [12]), по дираковскому базису, необходимы два 16-рядных коммутирующих представления $\gamma_\mu, \bar{\gamma}_\mu$

$$\beta_\mu^{(\pm)} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \pm \bar{\gamma}_\mu), \quad (10)$$

$$R_\mu = \pm (2\beta_\mu^{(\pm)2} - I) = \gamma_\mu \bar{\gamma}_\mu, \quad \text{Sp } R_\mu \equiv 0. \quad (11)$$

Представления $\gamma, \bar{\gamma}$ образуют две коммутирующие подгруппы с антикоммутативной алгеброй в составе восьмимерного неприводимого представления Дирака и входят в группу $G_{256}(\gamma, \bar{\gamma})$, которая полностью покрывает четырехмерную группу Кеммера. Использование разложений

вида (3) или (10) допускает выход за рамки алгебры Кем-
мера; введение параметра σ вместо ± 1

$$\beta_{\mu}(\sigma) = \frac{1}{2}(\gamma_{\mu} + \sigma \bar{\gamma}_{\mu}) \quad (12)$$

нарушает ортогональность и перемешивает представления $\beta_{\mu}(\sigma)$ и $\beta_{\mu}(-\sigma)$ в правилах коммутации

$$\begin{aligned} & \beta_{\mu}(\sigma)\beta_{\nu}(\sigma)\beta_{\rho}(\sigma) + \beta_{\rho}(\sigma)\beta_{\nu}(\sigma)\beta_{\mu}(\sigma) - \\ & - \frac{1}{2}(1+\sigma^2)(\delta_{\mu\nu}\beta_{\rho}(\sigma) + \delta_{\rho\nu}\beta_{\mu}(\sigma)) + \\ & + \frac{1}{2}(1-\sigma^2)\delta_{\mu\rho}\beta_{\nu}(-\sigma) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В этих представлениях R_{μ} теряют свойства обобщен-
ных единиц

$$R_{\mu}\beta_{\mu}(\sigma) = \sigma\beta_{\mu}\sigma^{-1}, \quad (14)$$

но у матриц $\beta_{\mu}(\sigma)$ при $\sigma^2 \neq 1$ появляются обратные
двух типов

$$\beta_{\mu}^{-1}(\sigma)\beta_{\mu}(\sigma) = I, \quad \beta_{\mu}^{-1}(\sigma) = 4(1-\sigma^2)^{-1}\beta_{\mu}(-\sigma), \quad (15)$$

$$R\beta_{\mu}^{-1}(\sigma)\beta_{\mu}(\sigma) = R_{\mu}. \quad (16)$$

$$R\beta_{\mu}^{-1}(\sigma) = -4\sigma(1-\sigma^2)^{-1}\beta_{\mu}(-\sigma^{-1}).$$

Релятивистская инвариантность волновых уравнений с $\beta_{\mu}(\sigma)$, описывающих бозоны с двумя массами [13], обеспечи-
вается соотношениями

$$[\beta_{\mu}(\sigma), S_{\nu\rho}(\sigma')] = i(\delta_{\mu\nu}\beta_{\rho}(\sigma\sigma'^2) - \delta_{\mu\rho}\beta_{\nu}(\sigma\sigma'^2)), \quad (17)$$

где

$$S_{\mu\nu}(\sigma) = -i[\beta_{\mu}(\sigma), \beta_{\nu}(\sigma)]. \quad (18)$$

Таким образом оператор преобразований поворота $S_{\mu\nu}(\sigma)$
при $\sigma^2 = 1$ является единственным для любых бозонов

$$S_{\mu\nu} = -i[\beta_{\mu}^{(+)}, \beta_{\nu}^{(+)}] = -i[\beta_{\mu}^{(-)}, \beta_{\nu}^{(-)}]. \quad (19)$$

Аналогами дираковских матриц C, B [14] в группе Кеммера являются обладающие аналогичными свойствами матрицы R_4 (соответствует C) и $R_4 R_5 = R_0$ (соответствует B). В заключение отметим, что в группе существует псевдоскалярный оператор, $\beta_5(\sigma)$,

$$\beta_5(\sigma) = \frac{1}{2}(\gamma_5 + \sigma \bar{\gamma}_5), \quad (20)$$

который ввиду соотношений

$$\gamma_5 \beta_{\mu}(\sigma) \gamma_5 = -\bar{\gamma}_5 \beta_{\mu}(\sigma) \bar{\gamma}_5 = -\beta_{\mu}(-\sigma) \quad (21)$$

обладает свойствами

$$-\beta_5(\sigma') \beta_{\mu}(\sigma) \beta_5(\sigma') = \frac{1}{4}(\sigma'^2 - 1) \beta_{\mu}(-\sigma) \quad (22)$$

в этом операторе в ортогональных представлениях полностью исчезает шестирядный ящик $(5 \times 5) + (1 \times 1)$.

2. Операторы проектирования

После изложения этих предварительных сведений можно перейти непосредственно к теории операторов проектирования. Замкнутые системы таких операторов могут быть построены во всех линейных пространствах, преобразующихся по некоторому заданному представлению группы Лоренца. Результатом действия проективного оператора на пространство Ψ всегда является выделение подпространства с определенными геометрическими свойствами.

Для самого общего определения дискретной системы операторов проектирования (мы будем рассматривать только такие системы) можно сформулировать следующие усло-

вия:

а) Условие полноты системы

$$\sum_{\kappa=1}^n \mathcal{P}_{\kappa} E = E, \quad (23)$$

где n - число операторов в системе ($n \leq N$, N - ранг представления), а E - обобщенная единица (как правило она может быть заменена обычной I , в худшем случае для этого надо ввести в систему еще один оператор проектирования).

б) Условие ортогональности

$$\mathcal{P}_i \mathcal{P}_{\kappa} E = Z, \quad i \neq \kappa, \quad (24)$$

где Z - обобщенный ноль (обычно просто $Z \equiv 0$).

Из (23) и (24) легко доказать унитарность \mathcal{P}_{κ}

$$\mathcal{P}_{\kappa}^2 E = \mathcal{P}_{\kappa} E \quad (25)$$

- повторное применение оператора проектирования не меняет результата.

Вид и свойства операторов проектирования, построенных на заданной эрмитовской матрице α , зависят от минимального полинома этой матрицы [4]. Далее следует различать два случая:

$$I) \quad \alpha^2 - I = 0,$$

операторы проектирования

$$\mathcal{P}_s(\alpha) = \frac{1}{2}(I + s\alpha), \quad s = \pm 1, \quad (26)$$

обладают свойствами

$$\mathcal{P}_s(\alpha) + \mathcal{P}_{-s}(\alpha) - I = \mathcal{P}_s(\alpha) \cdot \mathcal{P}_{-s}(\alpha) = 0 \quad (27)$$

и диагонализуют свою базисную матрицу α

$$\alpha \mathcal{P}_s(\alpha) = s \mathcal{P}_s(\alpha); \quad (28)$$

2) $\alpha^3 - \alpha = 0$ - матрица α - сингулярна, операторы проектирования имеют более сложную структуру

$$\mathcal{P}_s(\alpha) = \frac{1}{2} s \alpha (I + s \alpha). \quad (29)$$

Полная и ортогональная система образуется включением оператора

$$\mathcal{P}_0 = I - \alpha^2, \quad (30)$$

выделяющего пустые строки α , все три оператора диагонализуют матрицу α , имеющую собственные значения $\pm 1, 0$

$$\alpha \mathcal{P}_s(\alpha) = s \mathcal{P}_s(\alpha), \quad \alpha \mathcal{P}_0 = 0. \quad (31)$$

3. Примеры систем операторов проектирования

а) Трёхмерное представление

Расщепление на неприводимые ящики производится проекторами $\frac{1}{2}(I \pm P)$, так что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(I+P)\psi & \quad - \text{трехмерный вектор,} \\ \frac{1}{2}(I-P)\psi & \quad - \text{трехмерный скаляр;} \end{aligned}$$

выделение компонент вектора осуществляется операторами

$\frac{1}{2}(\bar{I} - r_i)$. Более общие операторы возникают вследствие ортогональности $\beta_i^{(+)}, \beta_i^{(-)}$ (\vec{c} - классический вектор)

$$\mathcal{P}_s(\vec{c}) = (\vec{\beta}(s), \vec{c})^2 / \vec{c}^2, \quad s = \pm 1, \quad (32)$$

они строятся на матрице $(\vec{\alpha}, \vec{c}^0)(\vec{\alpha}, \vec{c}^0)$ и могут быть приведены к каноническому виду (26)

$$\mathcal{P}_s(\vec{c}) = \frac{1}{2}(\bar{I} + s(\vec{\alpha}, \vec{c}^0)(\vec{\alpha}, \vec{c}^0)). \quad (33)$$

Геометрический смысл $\mathcal{P}_s(\vec{c})$ выясняется из того, что $\psi^T \mathcal{P}_s(\vec{c}) \cdot \mathcal{P}_{-s}(\vec{c}) \psi = 0$, при $\mathcal{P}_s(\vec{c}) \psi \neq 0$, следовательно $\mathcal{P}_s(\vec{c}) \psi \perp \mathcal{P}_{-s}(\vec{c}) \psi$, кроме этого $(\vec{\beta}^{(\pm)}, \vec{c}) \psi$ ортогонально \vec{c} . Таким образом операторы (32) расщепляют квадруплет ψ на части, поперечную ($s = +1$) и продольную ($s = -1$) заданному вектору \vec{c} . Правила коммутации операторов $\mathcal{P}_s(\vec{c})$ имеют вид

$$[\mathcal{P}_s(\vec{c}), \mathcal{P}_{s'}(\vec{c}')] = iss'(\vec{c}^0, \vec{c}'^0)(\vec{\beta}^{(\pm)}, \vec{c}^0 \times \vec{c}'^0); \quad (34)$$

операторы зеркального отражения относительно плоскости, заданной вектором нормали \vec{n}^0 , строятся из $\mathcal{P}_s(\vec{n}^0)$

$$\mathcal{P}_R(\vec{n}^0) = \mathcal{P}_+(\vec{n}^0) - \mathcal{P}_-(\vec{n}^0) \quad (35)$$

и коммутируют сходным образом

$$[\mathcal{P}_R(\vec{n}^0), \mathcal{P}_R(\vec{n}'^0)] = 2i(\vec{n}^0, \vec{n}'^0)(\vec{\beta}^{(\pm)}, \vec{n}^0 \times \vec{n}'^0). \quad (36)$$

Соотношение, диагонализующее $\mathcal{P}_R(\vec{n}^0)$ в пространстве $\vec{\beta}(s), \vec{n}^0$

$$\mathcal{P}_R(\vec{n}^0) \vec{\beta}(s), \vec{n}^0 = s \vec{\beta}(s), \vec{n}^0 \quad (37)$$

дает возможность находить решения волнового уравнения $\psi^{(s)}(\vec{x}, t)$, удовлетворяющее граничным условиям на плоскости

$$\vec{\beta}(s), \vec{n}^0 \psi^{(s)}(\vec{x}, t) \rightarrow 0, \quad \vec{x} \rightarrow \vec{x}_1 \perp \vec{n}^0 \quad (38)$$

(начало отсчета также помещаем на плоскость). Решение $\psi^{(s)}(\vec{x}, t)$ имеет вид

$$\psi^{(s)}(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}, t) - s \mathcal{P}_R(\vec{n}^0) \psi(\vec{x}_T - \vec{x}_n, t), \quad (39)$$

где $\psi(\vec{x}, t)$ - решение волнового уравнения для пространства (без граничного условия) [15].

б) Четырехмерные представления

Общие операторы проектирования также строятся на базе M_1

$$M_1 = \sum_{\mu=1}^4 R_{\mu}, \quad (40)$$

выделение неприводимых ящиков производится операторами

$$\mathcal{P}(10 \times 10) = (192)^{-1} (M_1^2 - 16)(M_1 + 2)(M_1 - 6), \quad (41)$$

$$\mathcal{P}(5 \times 5) = (128)^{-1} (M_1 + 4)(M_1 - 2)(M_1 - 6)M_1, \quad (42)$$

Разделение на октеты ведется операторами проектирования на основе матрицы реверса массы R_5 :

$$\mathcal{P}_{I, II} = \frac{1}{2} (I \pm R_5), \quad \{R_5, \beta_{\mu}(s)\} = 0. \quad (43)$$

Отдельные компоненты ψ выделяются скалярным оператором

$$\mathcal{P} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \prod_{\mu=1}^4 (I - R_{\mu}) \quad (44)$$

и остальными, которые могут быть образованы из него (по индексам справа не суммировать!)

$$\mathcal{P}_{\mu} = \gamma_{\mu} \mathcal{P} \gamma_{\mu}, \quad (45)$$

$$\mathcal{P}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}] \mathcal{P} \frac{1}{2} [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}], \quad (46)$$

и т.д.

Расщепление биоктета на части, четырехмерно поперечную и четырехмерно продольную заданному c -вектору c_{μ} осуществляется операторами проектирования

$$\mathcal{P}_s(c) = (\beta_{\lambda}(s) c_{\lambda})^2 / c_{\sigma}^2, \quad s = \pm 1. \quad (47)$$

Псевдоскалярные операторы γ_5 , $\bar{\gamma}_5$, а также оператор реверса массы $R_5 = \gamma_5 \bar{\gamma}_5$ образуют коммутативную подгруппу Лармора. Операторы $\mathcal{P}_s(c)$ остаются инвариантными относительно преобразования с R_5 и меняют индекс в случае преобразований с $\gamma_5, \bar{\gamma}_5$

$$\gamma_5 \mathcal{P}_s(c) \gamma_5 = \bar{\gamma}_5 \mathcal{P}_s(c) \bar{\gamma}_5 = R_5 \mathcal{P}_{-s}(c) R_5 = \mathcal{P}_{-s}(c) \quad (48)$$

- матрицы $\gamma_5, \bar{\gamma}_5$ преобразуют поперечную часть $\psi(s=+1)$ в продольную $\psi(s=-1)$ и обратно.

Л и т е р а т у р а

1. F.Sauter, Zeitschr. für Physik, 63, 803, 1930.
2. F.Sauter, Zeitschr. für Physik, 64, 295, 1930.
3. F.Sauter, Zeitschr. für Physik, 97, 777, 1935.
4. Ф.Федоров, ЖЭТФ, 35, 493, 1958.
5. E.Bellomo, Nuovo cimento, 21, 730, 1961.
6. А.Богун, Ковариантные методы в теории элементарных частиц, Минск, 1963, диссертация.
7. R.Duffin, Phys. Rev., 54, 1114, 1938.
8. N.Kemmer, Proc. of Royal Society (A), 173, 94, 1939.
9. T.Onmura, Progr. of Theor. Phys., 16, 684, 1956.
10. А.Боргардт, ЖЭТФ, 34, 1323, 1958.
11. М.Коркина, Квантованное взаимодействие электромагнитного и гравитационного полей, Днепропетровск, 1961, диссертация.
12. F.Belinfante, Physica, 6, 849, 1939.
13. А.Боргардт, ЖЭТФ, 45, 123, 1963.
14. R.Good, Review of Modern Physics, 27, 187, 1955.
15. H.Levine, J.Schwinger, The theory of e-m. waves, № 4, 1951.
16. А.Боргардт, ЖЭТФ, 30, 334, 1956.

ОПЕРАТОРЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ В ВОЛНОВЫХ ПОЛЯХ

А. Боргардт

I. Поле в четырехмерном пространстве

Волновые уравнения свободных полей представляют собой ограничения по массе, налагаемые на волновые поля данного типа (с данной волновой функцией). Уравнение Клейна гарантирует вещественность массы. Система уравнений второго порядка для бозонов с дополнительными условиями ($s = \pm 1$)

$$((\beta_\lambda(s)\partial_\lambda)^2 - m^2)\psi(x) = (\beta_\lambda(-s)\partial_\lambda)^2\psi(x) = 0, \quad (I)$$

также обеспечивает вещественность массы, а дополнительное условие уничтожает у волнового поля часть, продольную ($s = +1$) или поперечную ($s = -1$) 4-х вектору распространения κ_μ [1] (в κ -пространстве соотношения между операторами $m^{-2}(\beta_\lambda(\pm s)\partial_\lambda)^2$ представляют собой обычные условия, определяющие операторы проектирования).

В теории возмущений, при построении S -матрицы, необходимо специализировать начальные и конечные состояния, как состояния частиц или античастиц, т.е. вводить расщепление ψ по знаку массы.

Построение подобных операторов начнем с более простого случая алгебры Дирака. Эрмитовские и унитарные операторы Гордона с классическим вектором c_μ в качестве параметра

$$G_s(c, \gamma) = -s\gamma_\lambda c_\lambda / (c_\sigma^2)^{1/2}, \quad G_s(c, \bar{\gamma}) = -s\bar{\gamma}_\lambda c_\lambda / (c_\sigma^2)^{1/2} \quad (2)$$

генерируют систему операторов проектирования

$$\mathcal{P}^{s|c|}(c, \gamma) = -\frac{s}{2} (I + G_s(c, \gamma)), \quad (3)$$

$$\mathcal{P}^{s|c|}(c, \bar{\gamma}) = -\frac{s}{2} (I + G_s(c, \bar{\gamma})), \quad (4)$$

диагонализующих G_s

$$\gamma_\lambda c_\lambda \mathcal{P}^{s|c|}(c, \gamma) = -s|c| \mathcal{P}^{s|c|}(c, \gamma), \quad |c| = |c_\lambda^2|^{1/2} \quad (5)$$

$$\bar{\gamma}_\lambda c_\lambda \mathcal{P}^{s|c|}(c, \bar{\gamma}) = -s|c| \mathcal{P}^{s|c|}(c, \bar{\gamma}). \quad (6)$$

Кеммеровский оператор Гордона представляет собой поперечную или продольную часть $G_s(c, \gamma)$

$$G_s(c, \beta(s')) = G_s(c, \gamma) \mathcal{P}_{s'}(c) = G_s(c, \bar{\gamma}) \mathcal{P}_{s'}(c), \quad (7)$$

а соответствующие операторы проектирования, в пространстве которых диагонализуется $G_s(c, \beta(s'))$, строятся мультипликативно из (3) и (4)

$$\mathcal{P}^{s|c|}(c, \beta(s')) = \mathcal{P}^{s|c|}(c, \gamma) \mathcal{P}^{s|c|}(c, s' \bar{\gamma}), \quad (8)$$

так что

$$\beta_\lambda(s') c_\lambda \mathcal{P}^{s|c|}(c, \beta(s')) = -s|c| \mathcal{P}^{s|c|}(c, \beta(s')). \quad (9)$$

В случае, когда параметр c_μ представляет собой вектор распространения поля K_μ , а $|c| = |m|$ — операторы (3), (4) и (8) выделяют из волновой функции поля подпространства, соответствующие частицам или античастицам, в зависимости от S . Операторы (3) или (4) работают и в обычной теории Дирака. Система (3) или (4) с $s = \pm 1$, является полной, так как роль обобщенных единиц в пространстве $\mathcal{P}^{s|c|}(c, \gamma)$ играют сами

$$G_5(c, \gamma):$$

$$\mathcal{P}^{s/c}(c, \gamma) + \mathcal{P}^{-s/c}(c, \gamma) = G_5(c, \gamma), \quad (10)$$

в алгебре Кеммера операторы сингулярны и полная система образуется включением $\mathcal{P}_{-s'}(c)$

$$\mathcal{P}^{s/c}(c, \beta(s')) + \mathcal{P}^{-s/c}(c, \beta(s')) + \mathcal{P}_{-s'}(c) = I. \quad (11)$$

Отметим в заключение, что введение в $\beta_\mu(s)$ параметра σ (переход к неортогональным представлениям $\sigma^2 \neq 1$) вносит в правую часть соотношений типа (9) дополнительную зависимость от этого параметра

$$\beta_\lambda(\sigma) c_\lambda \mathcal{P}^{s/c}(c, \beta(\sigma')) = -\frac{1}{2} s/c (1 + \sigma\sigma') \mathcal{P}^{s/c}(c, \beta(\sigma')) \quad (12)$$

это достаточно ясно указывает на то, что поле с матрицами $\beta_\mu(\sigma)$ в волновом уравнении описывает бозонное поле с разными массами в продольном и поперечном состоянии [1, 2].

2. Трехмерные операторы проектирования в четырехмерных представлениях

Трехмерные операторы поперечного и продольного проектирования возникают на базисе двух ортогональных трехмерных субалгебр индуцируемых группой трехмерных вращений; матрицы этого базиса

$$\sigma_i^{(\pm)}(\beta) = \frac{1}{2} (\sigma_i(\gamma) \pm \sigma_i(\bar{\gamma})), \quad (13)$$

где

$$\sigma_i(\gamma) = -i\gamma_k \gamma_l, \quad \sigma_i(\bar{\gamma}) = -i\bar{\gamma}_k \bar{\gamma}_l. \quad (14)$$

Знаки \pm не имеют, как легко заметить, никакой связи с аналогичной параметризацией приводимых представлений $\beta_\mu^{(\pm)}$. Операторы проектирования (\vec{c}^0 - единичный трехмерный с-вектор)

$$(\vec{\sigma}^{(\pm)}(\beta), \vec{c}^0)^2 = \frac{1}{2}(I + 4(\vec{\sigma}^{(\pm)}(\beta), \vec{c}^0)(\vec{\sigma}^{(\pm)}(\beta), \vec{c}^0)) \quad (15)$$

выделяют из бикетета ψ части трехмерно-продольную (-) и трехмерно-поперечную (+) вектору \vec{c}^0 .

Матрица $\vec{\sigma}_i^{(+)}(\beta)$ является оператором спина бозонного поля и входит в выражение для оператора полного момента

$$\vec{M} = \vec{M}^{(c)} + \vec{\sigma}^{(+)}(\beta), \quad (16)$$

оператор $\vec{\sigma}^{(+)}(\beta), \vec{k}$ (\vec{k} - вектор распространения) - интеграл движения в свободном поле, интегралом движения является также оператор $\vec{\sigma}^{(-)}(\beta), \vec{k}$. Квадрат $\vec{\sigma}^{(+)}(\beta)$ представляет собой матрицу

$$(\vec{\sigma}^{(+)}(\beta))^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}R_0(R_4 - M_1), \quad (17)$$

хотя для $\vec{\sigma}(\gamma)$ и $\vec{\sigma}(\bar{\gamma})$ выполняются обычные соотношения теории Дирака

$$\vec{\sigma}^2(\gamma) = \vec{\sigma}^2(\bar{\gamma}) = \frac{3}{4}. \quad (18)$$

Выделение пустых строк в $(\vec{\sigma}^{(+)}(\beta))^2$ производится матрицей P_0

$$P_0 = \frac{1}{4}(3 + R_0(R_4 - M_1)) = I \times \frac{1}{2}(I + P) \quad (19)$$

(последнее равенство имеет место в представлении, где $R_5 = \tau_3 \times I$), обладающей свойствами

$$\mathcal{P}_4 \mathcal{P}_0 = \tilde{\mathcal{P}}_4 \mathcal{P}_0 = \mathcal{P} \mathcal{P}_0 = \tilde{\mathcal{P}} \mathcal{P}_0 = 0, \quad (20)$$

таким образом необходимое для спина 1 соотношение -

$$(\vec{\sigma}^{(+)}(\beta))^2 \mathcal{P}_0 = 2 \mathcal{P}_0 \quad (21)$$

- выполняется. Оператор \mathcal{P}_0 не ковариантен, но допускает ковариантное обобщение. В произвольной системе отсчета его функции выполняет оператор, зависящий от вектора распространения κ_μ

$$\mathcal{P}_S^{(1)}(\kappa) = I - M_1^2/8 + (M_1/4)(2\mathcal{P}_S(\kappa) - I), \quad (22)$$

его дополнением до I является оператор

$$\mathcal{P}_S^{(0)}(\kappa) = (M_1/4)(2\mathcal{P}_S(\kappa) - I) + M_1^2/8, \quad (23)$$

выделяющий бесспиновые компоненты биоктета ψ . В отличие от \mathcal{P}_0 и $I - \mathcal{P}_0$ эти операторы в общем случае не ортогональны.

Собственные значения оператора $\vec{\sigma}^{(+)}(\beta), \vec{c}^0$ выделяются операторами

$$\mathcal{P}^{s/\sigma}(\vec{c}^0, \beta) = \frac{s}{2} (\vec{\sigma}^{(+)}(\beta), \vec{c}^0) (I + s (\vec{\sigma}^{(+)}(\beta), \vec{c}^0)), \quad (24)$$

так как

$$\vec{\sigma}^{(+)}(\beta), \vec{c}^0 \mathcal{P}^{s/\sigma}(\vec{c}^0, \beta) = s \mathcal{P}^{s/\sigma}(\vec{c}^0, \beta). \quad (25)$$

Собственные функции этого оператора, соответствующие всем собственным значениям $\vec{\sigma}^{(+)}(\beta), \vec{c}^0$, и конечным и нулевым, могут быть записаны в виде

$$\Psi_{s,c} = \mathcal{P}^{s|\sigma|}(\vec{c}^0, \beta) \mathcal{P}_0 \Psi_0, \quad (26)$$

$$\Psi_c = (I - (\vec{\sigma}^{(+)}(\beta), \vec{c}^0)^2) \mathcal{P}_0 \Psi_0, \quad (27)$$

$$\Psi_0 = (I - \mathcal{P}_0) \Psi_0, \quad (28)$$

где Ψ_0 - любой надлежащим образом нормированный постоянный биктет. Эти функции появляются в двух важных задачах релятивистской квантовой механики бозонов: в задаче Кеплера, где сохраняется проекция спина на выделенное направление, и в задаче рассеяния, где посредством операторов $\mathcal{P}^{s|\sigma|}(\vec{k}^0, \beta)$ специализируется поляризация в начальном и конечном состоянии (\vec{k} - вектор распространения). При построении S - матрицы в задачах рассеяния необходимо определять начальное и конечное состояние, как по знаку массы, так и по поляризации. Рассеяние векторных частиц на бесспиновом силовом центре, например, будет описываться S - матрицей (κ - начальный импульс, t - полный, κ' - конечный)

$$\begin{aligned} S(\kappa', t, \kappa, \beta(s)) &= \mathcal{P}_s^{(1)}(\kappa') \mathcal{P}^{r|\kappa'}(\kappa', \gamma) \cdot \\ &\cdot \mathcal{P}^{r|\kappa'}(\kappa', s\bar{\gamma}) S(\kappa', t, \kappa, \gamma) S(\kappa', t, \kappa, s\gamma) \cdot \\ &\cdot \mathcal{P}^{r|\kappa}(\kappa, s\bar{\gamma}) \mathcal{P}^{r(\kappa)}(\kappa, \gamma) \mathcal{P}_s^{(1)}(\kappa), \end{aligned} \quad (29)$$

где внутренние операторы $S(\kappa', t, \kappa, \gamma)$ и $S(\kappa', t, \kappa, s\bar{\gamma})$ определяются обычным образом [3, 4]

$$S(\kappa', t, \kappa, \gamma) = \mathcal{P}^{r|t|}(t, \gamma) (c_1^r + i c_2^r \gamma_5 \gamma_\lambda n_\lambda), \quad (30)$$

$$S(\kappa', t, \kappa, s\bar{\gamma}) = \mathcal{P}^{r|t|}(t, s\bar{\gamma}) (\bar{c}_1^r + i \bar{c}_2^r \bar{\gamma}_5 \bar{\gamma}_\lambda n_\lambda), \quad (31)$$

четырёхмерный вектор Π_μ дается соотношением

$$\Pi_\mu = \epsilon_{\mu\lambda\rho\sigma} \kappa_\lambda \kappa'_\rho t_\sigma / (\kappa_\lambda^2 \kappa_\sigma'^2 t_\rho^2)^{1/2}, \quad (32)$$

а параметры $C_1, C_2; \bar{C}_1, \bar{C}_2$ - зависят от свойств рассеивателя. При наличии более определенных сведений о начальной поляризации вводятся еще операторы $\mathcal{P}^{\rho\lambda\sigma}(\kappa, \beta)$.

3. Операторы проектирования в гильбертовом пространстве.

Во всех случаях, когда параметром операторов проектирования является вектор распространения волнового поля κ_μ (или его трехмерная часть $\vec{\kappa}$), операторы проектирования выделяют определенные части гильбертова пространства. Для получения соответствующей интерпретации в X -пространстве необходимы преобразования Фурье. Если, например, мы имеем дело с $\psi_S(\kappa) = \mathcal{P}_S(\kappa)\psi(\kappa)$ в κ -пространстве, то в X -пространстве

$$\psi_S(x) = (2\pi)^{-4} \int (d\kappa) \mathcal{P}_S(\kappa) \psi(\kappa) e^{i\kappa_\lambda x_\lambda} \quad (33)$$

или

$$\psi_S(x) = \int (dx') \delta_S(x-x') \psi(x') \quad (34)$$

- мы приходим к новому семейству обобщенных функций, работающих в пространстве октетов

$$\delta_S(x) = (2\pi)^{-4} \int (d\kappa) \mathcal{P}_S(\kappa) e^{i\kappa_\lambda x_\lambda} \quad (35)$$

Индекс S имеет чисто проективный смысл, ибо

$$\delta_{S\dots S}(x) = \delta_S(x), \quad \delta_{S,-S}(x) = \delta_{-S,S}(x) = 0, \quad (36)$$

$$d_s(x) + d_{-s}(x) = d(x). \quad (37)$$

Функции $d_s(x)$ могут быть вычислены в явном виде и сведены к \bar{D} -функции Швингера

$$d_s(x) = -(\beta_\lambda(s) \partial_\lambda)^2 \bar{D}(x). \quad (38)$$

Аналогично, расщепление биоптета $\psi(\vec{x}, t)$ на части, поперечную и продольную вектору распространения \vec{k} , связано с функциями

$$d_s(\vec{x}) = -(\vec{\sigma}(s)(\beta), \nabla)^2 |\vec{x}|^{-1}. \quad (39)$$

Более сложные переходы в X -пространство для операторов типа $\mathcal{P}^{s/k}(\kappa, \beta(s'))$ и подобных им по структуре операторов спинового проектирования $\mathcal{P}^{s/\sigma}(\vec{k}^0, \beta)$. В более простом случае оператора $\mathcal{P}^{s/k}(\kappa, \gamma)$ мы получим в K -пространстве, что

$$\psi^{s/k}(\kappa) = \mathcal{P}^{s/k}(\kappa, \gamma) \psi(\kappa) = -\frac{s}{2} \psi(\kappa) + \frac{1}{2} \psi_1(\kappa), \quad (40)$$

где

$$\psi_1(\kappa) = (\gamma_\lambda \kappa_\lambda / (\kappa_\rho^2)^{1/2}) \psi(\kappa). \quad (41)$$

В X -пространстве для последнего слагаемого получаем соотношение

$$\psi_1(x) = \int (dx') S_1(x-x') \psi(x'), \quad (42)$$

где $S_1(x)$ - новая обобщенная функция, принадлежащая к классу функций

$$S_n(x, \gamma) = (-i \gamma_\lambda \partial_\lambda)^n G_n(x), \quad (43)$$

$$\text{где } G_n(x) = (2\pi)^{-4} \int (dk) (\kappa_\lambda^2)^{1/2} e^{i\kappa_\lambda x_\lambda} = (-\square^2)^{1/2} \bar{D}(x); \quad (44)$$

окончательное выражение для $\psi^{s/\kappa'}(x)$ имеет вид

$$\psi^{s/\kappa'}(x) = \frac{1}{2} \int (dx') (-s \delta(x-x') + (-i\gamma_\lambda \partial_\lambda)) (-\square^2)^{1/2} \bar{D}(x-x') \psi(x'). \quad (45)$$

Для представления более сложных операторов, например $\mathcal{P}^{s/\kappa'}(\kappa, \beta)$ необходимо изменить функции (43), теперь

$$S_n(x, \beta(s')) = (-i\beta_\lambda(s') \partial_\lambda)^n G_n(x) \quad (46)$$

и для кеммеровского поля часть ψ , $\psi^{s/\kappa'}(\kappa) = \mathcal{P}^{s/\kappa'}(\kappa, \beta) \psi(\kappa)$ может быть записана для x -пространства в виде

$$\psi_{s'}^{s/\kappa'}(x) = \int (dx') \frac{s}{2} (-i\beta_\lambda(s') \partial_\lambda) (-\square^2)^{1/2} - i\beta_\rho(s') \partial_\rho \bar{D}(x-x') \psi(x'). \quad (47)$$

Аналогично находятся части $\psi(\vec{x}, t)$, соответствующие различной поляризации (операторы $\mathcal{P}^{s/\sigma'}(\vec{\kappa}, \beta)$)

$$\psi^{s/\sigma'}(\vec{x}, t) = \int (d\vec{x}') \frac{s}{2} (-i\vec{\sigma}^{(+)}(\beta), \nabla) (-\nabla^2)^{1/2} - i\vec{\sigma}^{(+)}(\beta), \nabla \bar{D}(\vec{x}-\vec{x}') \psi(\vec{x}', t). \quad (48)$$

Этот метод позволяет производить поляризационный анализ любого волнового поля с целым спином.

4. Исключение неканонических переменных в волновом уравнении

Одним из наиболее фундаментальных дефектов обычной теории Кеммера следует считать сингулярность гамильтониана; для свободного поля он удовлетворяет соотношению

$$H_0^3 = \omega^2 H_0, \quad \omega^2 = m^2 + \vec{\kappa}^2. \quad (49)$$

Это обстоятельство связано с тем, что при получении гамильтоновских уравнений не исключены предварительно неканонические переменные. Объемная плотность действия в бозонном поле образуется оператором $R_5 \beta_4^{(+)}$ [5] (для определенности будем рассматривать представление $\beta_\mu^{(+)}$), так как любое действие есть произведение канонических координат и сопряженных им импульсов, то неканонические переменные поля соответствуют пустым строкам $\beta_4^{(+)}$. Для выделения этих строк необходим нуль-оператор $\beta_4^{(+)}$, которым является $I - \beta_4^{(+)^2} \equiv \frac{1}{2}(I - R_4)$, образующий вместе с $\frac{1}{2}(I + R_4)$ систему операторов проектирования. Применение этих операторов к уравнению Кеммера

$$(\beta_\lambda^{(+)} D_\lambda + m)\psi(x) = 0, \quad D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (50)$$

дает систему $(\psi_T = \frac{1}{2}(I + R_4)\psi, \psi_L = \frac{1}{2}(I - R_4)\psi)$

$$\left(\frac{1}{i}\partial_t - eA_0\right)\psi_T + m\beta_4^{(+)}\psi_T + \beta_4^{(+)}(\vec{\beta}^{(+)}; \vec{D})\psi_L = 0, \quad (51)$$

$$\vec{\beta}^{(+)}; \vec{D}\psi_T + m\psi_L = 0. \quad (52)$$

Исключение неканонической части ψ_L дает уравнение первого порядка по времени и второго порядка по координатам [6]

$$\left(\frac{1}{i}\partial_t + H\right)\psi_T(\vec{x}, t) = 0, \quad H = -m^{-1}\beta_4^{(+)}(\vec{\beta}^{(+)}; \vec{D})^2 + m\beta_4^{(+)} - eA_0, \quad (53)$$

в свободном поле, как легко убедиться, $H_0^2 = \omega^2$.

Использование уравнения (53) в задаче Кеплера для бозона, позволило впервые получить строгое решение этой проблемы. Можно отметить, что первые попытки в этом направлении, увенчавшиеся только частичным успехом, были

предприняты относительно давно [8,9] . Метод, примененный при решении этой задачи будет подробно рассмотрен в следующей лекции данного цикла.

Л и т е р а т у р а

1. А.Боргардт, ЖЭТФ, 45, 123, 1963.
2. А.Боргардт, Алгебраические методы в теории частиц целого спина, Днепропетровск, 1964, диссертация.
3. H.Stapp, Phys.Rev., 103, 425, 1956.
4. Я.Грановский, Разложение амплитуды рассеяния на парциальные волны, Тарту, 1964.
5. А.Боргардт, ЖЭТФ, 24, 284, 1953.
6. А.Боргардт, ЖЭТФ, 30, 334, 1956.
7. Д.Карпенко, А.Ярошенко, Векторный бозон в кулоновском поле, ЖЭТФ, 1965, в печати.
8. И.Тамм, Дан ССР, 29, 55I, 1940.
9. J.Gunn, Proc. of Royal Soc. (A), 193, 559, 1948.

ВЕКТОРНЫЙ МЕЗОН В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ^{x)}

А.П. Ярошенко

В в е д е н и е

Задача Кеплера для векторной частицы рассматривалась в работах ряда авторов [1-4]. Однако нельзя сказать, что эта проблема решена с такой же простотой и изяществом, как для спинорной частицы [5].

В частности, работа [3] посвящена исследованию задачи Кеплера для векторного мезона при помощи матричного формализма Тамма-Саката-Такетани [1]. Используя явное представление спиновых матриц, автор ищет решение в виде разложения по спин-угловым функциям. Для радиальных частей получается система четырех уравнений второго порядка, которая затем сводится к системе двух уравнений второго порядка. Асимптотика решений исследовалась в работе [4].

Открытие векторных резонансов вновь возбуждает интерес к исследованию этого вопроса. На наш взгляд значительно проще проводить решение задачи Кеплера в представлении Кеммера. Здесь имеется хорошо разработанная теория операторов проектирования [6], которая проясняет структуру волновой функции и позволяет провести разделение переменных.

^{x)} Лекция представляет результаты статьи "Векторный мезон в кулоновском поле". Д.Я.Карпенко, А.П.Ярошенко, ИЭФ (в печати).

I. Волновое уравнение, интегралы движения.

Используя две коммутирующие группы 16-рядных дираковских матриц γ_μ и $\bar{\gamma}_\mu$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} - 2\delta_{\mu\nu} = \{\bar{\gamma}_\mu, \bar{\gamma}_\nu\} - 2\delta_{\mu\nu} = [\gamma_\mu, \bar{\gamma}_\nu] = 0, (1)$$

можно построить две "ортогональные" группы кеммеровских матриц

$$\beta_\mu^{(\pm)} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \pm \bar{\gamma}_\mu)$$

со свойствами

$$\beta_\mu^{(\pm)} \beta_\nu^{(\pm)} \beta_\lambda^{(\pm)} + \beta_\lambda^{(\pm)} \beta_\nu^{(\pm)} \beta_\mu^{(\pm)} = \delta_{\mu\nu} \beta_\lambda^{(\pm)} + \delta_{\nu\lambda} \beta_\mu^{(\pm)}, (2)$$

$$\beta_\mu^{(+)} \beta_\nu^{(+)} + \beta_\nu^{(-)} \beta_\mu^{(-)} - \delta_{\mu\nu} = \beta_\mu^{(+)} \beta_\nu^{(-)} + \beta_\nu^{(+)} \beta_\mu^{(-)}. (2a)$$

Надо отметить, что (2) является следствием (2a). Матрицы β являются 16-рядными приводимыми представлениями Кеммера, которые распадаются на неприводимые 10-рядное, 5-рядное и тривиальное однорядное. Разбиение на эти неприводимые части производится операторами проектирования

$$\mathcal{P}(10 \times 10) = \frac{1}{192}(M^2 - 16)(M+2)(M-6), (3)$$

$$\mathcal{P}(5 \times 5) = -\frac{1}{128}(M+4)(M-2)(M-6)M,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(1 \times 1) &\equiv I - \mathcal{P}(5 \times 5) - \mathcal{P}(10 \times 10) = \\ &= \frac{1}{384}(M^2 - 4)(M-4)M, \end{aligned}$$

где

$$M = \sum_{\mu=1}^4 R_\mu, \quad R_\mu = \pm(2\beta_\mu^{(\pm)2} - 1), \quad R_\mu^2 = 1. \quad (6.c.)$$

Таким образом, уравнение Кеммера

$$(i\beta_\mu^{(+)} P_\mu + m)\Psi = 0 (4)$$

с $P_\mu = p_\mu - eA_\mu$, $p_\mu = -i\frac{\partial}{\partial x_\mu}$, A_μ - 4-потенциал внешнего электромагнитного поля, описывает взаимодействие псевдоскалярной - представление (5 x 5) - и векторной - представление (10 x 10) - частиц массы m (мы используем систему единиц $c = \hbar = 1$) с электромагнитным полем. Уравнение

$$(i\beta_\mu^{(-)} P_\mu + m) \Psi = 0 \quad (4a)$$

описывает скалярную и псевдоскалярную смесь. Мы в дальнейшем для определенности будем иметь дело с уравнением первого типа. Волновая функция Ψ содержит неканоническую часть $\Psi_L = \beta_4^{(+)} \Psi$, которая связана с канонической $\Psi_T = \beta_4^{(-)} \Psi$ соотношением

$$\Psi_L = (i/m)(\vec{\beta}^{(+)}, \vec{P}) \Psi_T.$$

Исключая Ψ_L из (4), получим уравнение гамильтоновского типа

$$i \frac{\partial \Psi_T}{\partial t} = H \Psi_T \quad (5)$$

где

$$H = m^{-1} \beta_4^{(+)} ((\vec{\beta}^{(+)}, \vec{P})^2 + m^2 + m e A_0 \beta_4^{(+)}). \quad (6)$$

Уравнение (5) можно привести к виду уравнения Тамма-Саката-Такетани.

а) Случай 0.

Выделяя из (5) оператором $\mathcal{P}(5 \times 5)$ пятирядное представление и используя соотношения

$$\mathcal{P}_T(5 \times 5) \beta_i^{(+)} \beta_k^{(+)} = \frac{1}{2} (1 + R_0) \delta_{ik} \mathcal{P}_T(5 \times 5), \quad (7)$$

где

$$\mathcal{P}_T(5 \times 5) = \beta_4^{(+)} \mathcal{P}(5 \times 5), \quad R_0 = R_1 R_2 R_3,$$

получим для стационарных состояний

$$\left(\frac{1}{2}(1+R_0)\vec{P}^2 + m^2 - m(E - eA_0)\beta_4^{(+)}\right)\Phi = 0 \quad (8)$$

с $\Phi = \mathcal{P}(5 \times 5) \Psi_T$.

Уравнение (8) легко приводится к уравнению Клейна-Гордона для функции $\Phi_1 = \frac{1}{2}(1+R_0)\Phi$

$$(\vec{p}^2 + m^2 - (E - eA_0)^2)\Phi_1 = 0. \quad (9)$$

Остальная часть $\Phi_2 = \frac{1}{2}(1-R_0)\Phi$ выражается через Φ_1 . Исследование решений уравнения (9) для кулоновского поля рассмотрено в (7).

б) Спин I.

Для векторной частицы, используя $\mathcal{P}(10 \times 10)$, получим

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_0 \Psi = m^{-1} \beta_4^{(+)} \left((\vec{\beta}^{(+)} \vec{P})^2 + m^2 + m e A_0 \beta_4^{(+)} \right) \mathcal{P}_0 \Psi. \quad (10)$$

Здесь

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0^2 = \mathcal{P}(10 \times 10) \beta_4^{(+)}{}^2 = \frac{1}{4} (3 - R_0 (R_1 + R_2 + R_3)) \beta_4^{(+)}{}^2. \quad (11)$$

Оператор \mathcal{P}_0 оставляет у 16-рядной волновой функции Ψ только канонические компоненты, связанные со спином I. Всего этих компонент 6 ($Sp \mathcal{P}_0 = 6$).

Для стационарных состояний в центральном поле $A_\mu(\vec{0}, iA_0(x))$ уравнение (10) приводится к виду

$$\left((\vec{\beta}^{(+)} \vec{P})^2 + m^2 - m(E - eA_0) \beta_4^{(+)} \right) \mathcal{P}_0 \Psi = 0. \quad (12)$$

Совместными интегралами движения будут

$$\vec{J}^2, J_z, \Lambda = K(K+1) \quad (13)$$

где $\vec{J} = (\vec{L} + \vec{S}) \mathcal{P}_0$ - полный момент векторной частицы,
 $K = ((\vec{L}, \vec{S}) + I) \mathcal{P}_0$,

$\vec{L} = [\vec{x}, \vec{P}]$ - орбитальный момент,

$\vec{S} = -i[\vec{\beta}^{(+)}, \vec{\beta}^{(+)}]$ - спиновый момент.

Волновую функцию $P_0\psi$ из (12) можно выбрать как собственную функцию интегралов движения (13) с собственными значениями $j(j+1)$, m и λ соответственно.

Чтобы найти собственные значения оператора K , используем тождество

$$K(K(K+1) - \vec{J}^2) \equiv 0. \quad (14)$$

Отсюда следует, что $K = j, -j-1, 0$. Последнее значение возможно при любом $j \neq 0$, что связано с соотношением треугольника для моментов. Таким образом $\lambda = j(j+1)$ или 0 (0 при произвольном $j \neq 0$).

2. Спин-угловые функции.

Рассмотрим подробнее свойства спин-угловых функций.

Спиновые функции определяются уравнениями

$$\vec{S}^2 \chi_{s\mu} = s(s+1) \chi_{s\mu}, \quad S_z \chi_{s\mu} = \mu \chi_{s\mu} \quad (15)$$

при данном s , $-s \leq \mu \leq s$.

В десятирядном представлении спиновые функции содержат трижды неприводимое представление группы вращений \mathcal{D}_1 и одно представление \mathcal{D}_0 . В функцию $P_0\psi$ входят только 2 представления \mathcal{D}_1 , которые разделяются операторами $\frac{1}{2}(1+R_0)$.

В дальнейшем нас будут интересовать лишь эти неприводимые представления

$$\chi_{1\mu}^{(\pm)} = \frac{1}{2}(1 \pm R_0) P_0 \chi_{1\mu}. \quad (16)$$

Спин-угловые функции имеют вид (для сокращения записи мы опускаем индексы m и 1)

$$\psi_{\ell j}^{(\pm)} \equiv \psi_{\ell 1 j m}^{(\pm)} = \sum_{\mu} (\ell 1 m - \mu \mu | j m) Y_{\ell m - \mu}(\theta, \varphi) \chi_{1 \mu}^{(\pm)}. \quad (17)$$

Столбцовые матрицы $\psi_{\ell j}^{(\pm)}$ имеют отличными от нуля только 3 компоненты в области, определяемой операторами $1/2(1+R_0)\mathcal{P}_0$ соответственно.

Из соотношения для моментов

$$\vec{J}^2 = (\vec{L}^2 + 2K)\mathcal{P}_0 \quad (18)$$

следует, что собственные значения $K = \frac{1}{2}(j(j+1) - \ell(\ell+1))$.
Теперь для λ получаем

$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } \ell = j \neq 0, \\ j(j+1) & \text{при } \ell = j \pm 1. \end{cases} \quad (19)$$

Таким образом при $\lambda = 0$ с фиксированными j и m есть только одна функция $\psi_{\ell j}^{(\pm)}$, в то время как для $\lambda = j(j+1)$ две - $\psi_{j+1 j}^{(\pm)}$ и $\psi_{j-1 j}^{(\pm)}$.

Рассмотрим свойства этих функций.

Из соотношений

$$K_{\pm}(\vec{\beta}^{(\pm)}, \vec{c})^2 \mathcal{P}_0 = (\vec{\beta}^{(\mp)}, \vec{c}) K_{\mp} \mathcal{P}_0, \quad (20)$$

$$K_{\pm} = K + \frac{1}{2}(1 \pm R_0) \mathcal{P}_0, \quad (21)$$

где вектор \vec{c} равен либо \vec{x} либо \vec{p} , получаем, что

$$[\Lambda, (\vec{\beta}^{(\pm)}, \vec{c})^2] = 0. \quad (22)$$

(Если еще воспользоваться соотношениями $K_{\pm} \beta_4^{(\pm)} = \beta_4^{(\pm)} K_{\mp}$ и $[K_{\pm}, f(x)] = 0$, то теперь легко убедиться, что $[\Lambda, H] = 0$).

Из соотношений

$$[\beta_x^{(\pm)2}, \vec{J}^2] = [\beta_x^{(\pm)2}, J_z] = 0,$$

$\beta_x^{(\pm)} = \frac{(\vec{\beta}^{(\pm)}, \vec{x})}{x}$ и (22) с $\vec{c} = \vec{x}$ видно, что наряду с $\psi_{ej}^{(\pm)}$ функции $\beta_x^{(\pm)2} \psi_{ej}^{(\pm)}$ и $\beta_x^{(\pm)2} \psi_{ej}^{(\pm)}$ также являются собственными функциями операторов \vec{J}^2, J_z и Λ с теми же числами j, m и λ .

а) Случай $\lambda = 0$

Поскольку при $\lambda = 0$ есть только одна функция $\psi_{jj}^{(\pm)}$, то

$$\begin{aligned} \beta_x^{(\pm)2} \psi_{jj}^{(+)} &= a^{\pm} \psi_{jj}^{(+)} \\ \beta_x^{(\pm)2} \psi_{jj}^{(-)} &= b^{\pm} \psi_{jj}^{(-)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь учитывая (20) и $(\beta_x^{(\pm)2})^2 = \beta_x^{(\pm)2}$ найдем, что

$$a^+ = b^-, \quad a^- = b^+ = 1. \quad (24)$$

Функции $\psi_{ej}^{(\pm)}$, как уже отмечалось, представляют собой трехмерные векторы. Геометрический смысл операторов $(\vec{\beta}^{(+)}, \vec{n}_0)^2$ и $(\vec{\beta}^{(-)}, \vec{n}_0)^2$ (\vec{n}_0 - единичный классический вектор) заключается в том, что они выделяют из ψ соответственно части, поперечные и продольные вектору \vec{n}_0 [6]. Таким образом, из уравнений (23) и (24) следует, что $\psi_{jj}^{(+)}$ содержит только вектор параллельный \vec{x} , а $\psi_{jj}^{(-)}$ - перпендикулярный к \vec{x} .

б) $\lambda = j(j+1)$

В этом случае можно положить

$$\begin{aligned} \beta_x^{(+2)} \psi_{j-1j}^{(+)} &= a \psi_{j-1j}^{(+)} + b \psi_{j+1j}^{(+)} \\ \beta_x^{(+2)} \psi_{j+1j}^{(+)} &= c \psi_{j-1j}^{(+)} + d \psi_{j+1j}^{(+)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Учитывая (20) и что $(\beta_x^{(\pm)2})^2 = \beta_x^{(\pm)2}$, получим

$$a = \frac{j}{2j+1}, \quad d = \frac{j+1}{2j+1}, \quad ad - bc = 0.$$

Последнее соотношение показывает, что функции $\beta_x^{(+)} \psi_{j-1}^{(+)}$ и $\beta_x^{(+)} \psi_{j+1}^{(+)}$ линейно независимы. Фазы у $\psi_{j-1}^{(+)}$ и $\psi_{j+1}^{(+)}$ можно выбрать так, чтобы

$$b = c = \frac{(j(j+1))^{1/2}}{2j+1}.$$

Таким образом получаем, что

$$\begin{aligned} \beta_x^{(+)} \psi_{j-1}^{(+)} &= (j/(j+1))^{1/2} \beta_x^{(+)} \psi_{j+1}^{(+)} = \\ &= (j/(2j+1)) \psi_{j-1}^{(+)} + (j(j+1)/(2j+1))^{1/2} \psi_{j+1}^{(+)} \quad (26) \\ \text{и} \quad \beta_x^{(-)} \psi_{j-1}^{(+)} &= -((j+1)/j)^{1/2} \beta_x^{(-)} \psi_{j+1}^{(+)} = \\ &= (j+1)/(2j+1) \psi_{j-1}^{(+)} - (j(j+1)/(2j+1))^{1/2} \psi_{j+1}^{(+)} \end{aligned}$$

Приведем аналогичные соотношения для $\psi_j^{(-)}$

$$\begin{aligned} \beta_x^{(+)} \psi_{j-1}^{(-)} &= \left(\frac{j+1}{j}\right)^{1/2} \beta_x^{(+)} \psi_{j+1}^{(-)} = \\ &= \frac{j+1}{2j+1} \psi_{j-1}^{(-)} + \left(\frac{j(j+1)}{2j+1}\right)^{1/2} \psi_{j+1}^{(-)}, \quad (27) \\ \beta_x^{(-)} \psi_{j-1}^{(-)} &= -\left(\frac{j}{j+1}\right)^{1/2} \beta_x^{(-)} \psi_{j+1}^{(-)} = \\ &= -\left(\frac{j(j+1)}{2j+1}\right)^{1/2} \psi_{j+1}^{(-)}. \end{aligned}$$

При $j=0$ функции ψ_{-10} нет, остается только одна функция ψ_{10} . В этом случае легко получить соотношения

$$\begin{aligned} \beta_x^{(\pm)2} \psi_{10}^{(\mp)} &= 0, \\ \beta_x^{(\pm)2} \psi_{10}^{(\pm)} &= \psi_{10}^{(\pm)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Функции $\psi_{10}^{(+)}$ и $\psi_{10}^{(-)}$ содержат только части, перпен-

дикулярные и продольные вектору \vec{x} соответственно.

3. Разделение переменных в волновом уравнении

а) Случай $\lambda = 0$

Здесь удобно ввести операторы

$$\mathcal{D}^{(\pm)} = (\vec{\beta}^{(\pm)}, \vec{x})(\vec{\beta}^{(\mp)}, \vec{p})(\vec{\beta}^{(\mp)}, \vec{x})(\vec{\beta}^{(\pm)}, \vec{p}). \quad (29)$$

Легко установить, что

$$\mathcal{P}_0 \mathcal{D}^{(\pm)} = \mathcal{D}^{(\pm)} \mathcal{P}_0 = \frac{1}{2} (1 \mp R_0) \mathcal{D}^{(\pm)} \mathcal{P}_0, \quad (30)$$

$$(\mathcal{D}^{(+)} + \mathcal{D}^{(-)}) \mathcal{P}_0 = (\vec{J}^2 - \Lambda) \mathcal{P}_0, \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}_0 (\vec{\beta}^{(+)}, \vec{p})^2 \mathcal{D}^{(+)} &= \mathcal{D}^{(+)} (\vec{\beta}^{(+)}, \vec{p})^2 \mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0 \mathcal{D}^{(+)} \vec{p}^2, \\ \mathcal{D}^{(-)} (\vec{\beta}^{(+)}, \vec{p})^2 &= (\vec{\beta}^{(+)}, \vec{p})^2 \mathcal{D}^{(-)} = 0, \quad \mathcal{D}^{(\pm)} \beta_4^{(\mp)} = \beta_4^{(\pm)} \mathcal{D}^{(\mp)}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Теперь, действуя на (12) оператором (31) и учитывая (29) - (32) и уравнение

$$\mathcal{P}_0 (\vec{J}^2 - \Lambda) \psi = \mathcal{P}_0 j(j+1) \psi, \quad (33)$$

получим

$$\left(\frac{1}{2} (1 - R_0) \vec{p}^2 + m^2 - m(E - eA_0) \beta_4^{(+)} \right) \mathcal{P}_0 \psi = 0. \quad (34)$$

Разделяя функцию $\mathcal{P}_0 \psi$ на $\psi_{1,2} = \frac{1}{2} (1 \pm R_0) \mathcal{P}_0 \psi$ получим систему

$$\left. \begin{aligned} (\vec{p}^2 + m^2) \psi_2 &= m(E - eA_0) \beta_4^{(+)} \psi_1, \\ m \psi_1 &= (E - eA_0) \beta_4^{(+)} \psi_2; \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Для ψ_2 получаем уравнение Клейна-Гордона

$$(\vec{p}^2 + m^2 - (E - eA_0)^2) \psi_2 = 0. \quad (36)$$

Полное решение для $\lambda=0$ имеет вид

$$\mathcal{P}_0 \psi = (1 + m^{-1}(E - eA_0)\beta_4^{(+)}) R_j(x) \psi_{jj}^{(-)}. \quad (37)$$

Здесь R_j - решение радиального уравнения Клейна Гордона с $\ell=j$.

Таким образом задача о поведении векторного мезона в состоянии с $\lambda=0$ (отсутствует спин-орбитальное взаимодействие) в центральном поле, сводится к задаче для скалярного мезона, но у которого нет S -состояния.

б) $\lambda = j(j+1)$.

В этом случае спинорбитальное взаимодействие очень сильное и состояния с параллельным сложением моментов перемешиваются.

Как указывалось ранее, функции $\beta_x^{(\pm)2} \psi_{j-1j}^{(\alpha)}$ и $\beta_x^{(\pm)2} \psi_{j+1j}^{(\alpha)}$ ($\alpha=\pm$) отличаются только численным множителем и можно надеяться на упрощение уравнения (12) разделением волновой функции операторами $\beta_x^{(\pm)2}$.

Это приводит к системе

$$\begin{aligned} ((i(\vec{x}, \vec{p}) + \frac{1}{2}(3+R_0))K_+ + mfx^2\beta_4^{(+)})\psi_1 - \\ - (j(j+1) + m^2x^2)\psi_2 = 0, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} ((\vec{x}, \vec{p})^2 - i(\vec{x}, \vec{p}) + 1 + R_0 + m^2x^2)\psi_1 + \\ + ((i(\vec{x}, \vec{p}) - \frac{1}{2}(1+R_0))K_- - mfx^2\beta_4^{(+)})\psi_2 = 0. \end{aligned}$$

с $\psi_1 = \beta_x^{(+2)} \mathcal{P}_0 \psi$, $\psi_2 = \beta_x^{(-2)} \mathcal{P}_0 \psi$, $f = E - eA_0$.

Исключая ψ_2 из этой системы приходим к уравнению

$$(\mathcal{D}_j + F_j R_0 + \varphi_{1j} \beta_4^{(+)} K_+) \psi_1 = 0, \quad (39)$$

где

$$\mathcal{D}_j = (\bar{x}, \bar{p})^2 - i(\bar{x}, \bar{p}) + 1 + j(j+1) + x^2(m^2 - f^2) - (2j(j+1)/(m^2 x^2 + j(j+1)))(i(\bar{x}, \bar{p}) + \frac{3}{2}), \quad (40)$$

$$F_j = m^2 x^2 / (m^2 x^2 + j(j+1)),$$

$$\varphi_{1j} = m^{-1} x \frac{df}{dx} - 2mf x^2 / (m^2 x^2 + j(j+1)).$$

Уравнение (35) посредством проекторов $\frac{1}{2}(1 \pm R_0)$ сводится снова к системе

$$(\mathcal{D}_j + F_j) \psi_1^{(+)} + \varphi_{1j} K \beta_4^{(+)} \psi_1^{(-)} = 0, \quad (41)$$

$$(\mathcal{D}_j - F_j) \psi_1^{(-)} + \varphi_{1j} (K+1) \beta_4^{(+)} \psi_1^{(+)} = 0.$$

Для состояния с $j=0$, учитывая (26) и (27) получим $\psi_1^{(-)} \equiv 0$, а для $\psi_1^{(+)}$ уравнение

$$(x^{-2} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \frac{\partial}{\partial x}) - 2x^{-2} + f^2 - m^2) \psi_1^{(+)} = 0.$$

Это уравнение Клейна-Гордона с $\ell=1$.

$$\psi_1^{(+)} = \phi(x) \psi_{10}^{(+)}.$$

При $j \neq 0$ системе (37) можно придать более симметричную форму, вводя новые функции

$$\phi_2 = (j(j+1))^{-1/2} K \beta_4^{(+)} \psi_1^{(-)}, \quad \phi_1 = \psi_1^{(+)} \quad (42)$$

$$(\mathcal{D}_j + F_j) \phi_1 + \varphi_j \phi_2 = 0,$$

$$(\mathcal{D}_j - F_j) \phi_2 + \varphi_j \phi_1 = 0,$$

где $\varphi_j = (j(j+1))^{1/2} \varphi_{1j}$.

(43)

Здесь разделяются угловая и радиальная части

$$\Phi_{1,2} = R_{1,2}(x) \left((2j+1)/j \right)^{1/2} \beta_x^{(+2)} \Psi_{j-1j},$$

а множитель $\left((2j+1)/j \right)^{1/2}$ введен для нормировки.

Уравнения для радиальных функций имеют вид

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_j + F_j) R_1 + \varphi_j R_2 &= 0, \\ (\mathcal{D}_j - F_j) R_2 + \varphi_j R_1 &= 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Определим вид радиальных функций вблизи начала координат. При $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} (G = x(R_2 - R_1), H = x(R_2 + R_1)) : \\ G \rightarrow x^{-1/4} \exp(\pm \alpha x^{-1/2}), H \rightarrow x^{-1/4} x^3 \exp(\pm \alpha x^{-1/2}), \\ H \rightarrow x^{-1/4} \exp(\pm i\alpha x^{-1/2}), G \rightarrow x^{-1/4} x^3 \exp(\pm i\alpha x^{-1/2}), \\ \alpha = 2(Ze^2/m)^{1/2} (j(j+1))^{1/4}. \end{aligned}$$

Функции G , H с $\exp(+\alpha x^{1/2})$ не подходят в виду сильной расходимости в нуле. Функции G , H с $\exp(\pm i\alpha x^{1/2})$ квадратично интегрируемы в нуле. Решение представляет собой линейную комбинацию трех частных решений. Требование ортогональности функций, принадлежащих различным значениям энергии убирает одну константу [4]. Возможно, что условие исчезновения волновой функции на бесконечности убирает последнюю константу.

Таким образом, число граничных условий, по сравнению с аналогичной задачей для спинорной частицы, увеличивается.

Л и т е р а т у р а

1. И.Тами, ДАН, 29, 551, 1940.
2. Н.Сорбей, J.Schwinger, Phys.Rev., 58, 953, 1940.
3. J.Gunn, Proc. Roy.Soc., A 193, 559, 1948.
4. К.Кейс, Phys.Rev., 80, 797, 1950.
5. F.Sauter, Zeitschrift für Physik, 97, 777, 1935.
6. А.Боргардт. Алгебраические методы в теории частиц
целого спина. Днепропетровск, 1964.
7. А.Давыдов. Квантовая механика.

С Е М И Н А Р С К И Е Д О К Л А Д Ы

В Минске в декабре 1964 года на совещании представителей советов молодых ученых Академий Наук Прибалтики Белорусской ССР было предложено провести летом 1965 года в Эстонии симпозиум "Физика микро- и макромира".

Скромное число участников позволяло провести этот симпозиум в виде семинаров при летней школе и тем самым объединить два полезных мероприятия.

РАЗЛОЖЕНИЕ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ КЕММЕРА-ДЭФФИНА

А.Айнсаар

Институт физики и астрономии АН ЭССР

Уравнение частицы со спином 0

$$(\square - m^2)\varphi = 0 \quad (1)$$

является дифференциальным уравнением второго порядка. Но мы можем написать его в виде уравнения первого порядка, определяя пятикомпонентную волновую функцию [1]

$$\Psi = \begin{pmatrix} \sqrt{m} \varphi \\ \frac{1}{\sqrt{m}} \partial_\mu \varphi \end{pmatrix} \quad (2)$$

Уравнение (1) вместе с определением (2) приобретает тогда вид аналогичный уравнению Дирака

$$(\beta_\mu \partial_\mu + m)\Psi = 0, \quad (3)$$

где β_μ 5-рядные матрицы компонентами

$$\beta_\mu^{ik} = -(\delta_{i0} \delta_{\mu k} + \delta_{k0} \delta_{\mu i}) \quad (4)$$

(отмечаем компоненты 0,1,2,3,4). Естественно, что здесь можно применить кроме (4) еще другие представления, связанные между собой унитарными преобразованиями, причем

неизменными остаются алгебраические свойства β -матриц. Последние можно выразить в двух формулах:

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho + \beta_\rho \beta_\nu \beta_\mu = \delta_{\mu\nu} \beta_\rho + \delta_{\rho\nu} \beta_\mu, \quad (5)$$

$$3\beta - \beta_\mu \beta_\mu + 1 = 0, \quad (6)$$

где

$$\beta = \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 \beta_4^2. \quad (7)$$

Возникает вопрос, как можно из любого представления волновой функции Кеммера-Дэффина образовать величины типа Клейна-Гордона.

Можно показать, что обратный переход от уравнения (3) к уравнению (1) производится [3]

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \beta \psi \rightarrow \varphi, \quad (8)$$

$$\sqrt{m} \beta_\mu (1-\beta) \rightarrow \partial_\mu \varphi.$$

Легко проверить, что в представлении (4) матрицы β и $\beta_\mu (1-\beta)$ проектируют из функции (2) соответствующие части.

В случае спина I пишем уравнения Клейна-Гордона

$$\left. \begin{aligned} \partial_\mu F_{\mu\nu} - m^2 U_\nu &= 0, \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Образует 10-компонентную волновую функцию

$$\Psi = \begin{pmatrix} m U_\mu \\ F_{\rho\sigma} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Теперь получаем уравнение Кеммера-Дэффина (3) с 10-рядными β -матрицами, алгебра которых определена соотноше-

ниями (5) и

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\nu \beta_\mu = 6. \quad (II)$$

Как видно, волновая функция Кеммера-Дэффина состоит-ся (в представлении (10) в явном виде) из векторного потенциала и тензора поля. Чтоб их снова отделить, используем матрицы

$$\eta_+ = 3 - \beta_\mu \beta_\mu, \quad (I2)$$

$$\eta_- = \beta_\mu \beta_\mu - 2,$$

причем

$$\eta_+ \begin{pmatrix} m U_\mu \\ F_{\rho\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{\rho\sigma} \end{pmatrix}, \quad \eta_- \begin{pmatrix} m U_\mu \\ F_{\rho\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m U_\mu \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (I3)$$

Отдельные компоненты можно проектировать при помощи матриц [2]

$$R_\mu = \begin{cases} -\beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 \beta_\mu \beta_4 = -\eta_- \beta_\mu \beta_4, \mu=1,2,3, \\ \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 (1-\beta_4^2) = \eta_- (1-\beta_4^2), \mu=4, \end{cases} \quad (I4)$$

а именно

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} R_\mu \Psi &\rightarrow U_\mu, \\ R_{\mu\nu} \Psi &\rightarrow F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (I5)$$

Теперь посмотрим спины 0 и 1 вместе. Легко показать, что единое свойство двух представлений (5) дает число базисных матриц β -алгебры 126. Это соответствует прямой сумме 10-рядного, 5-рядного и еще 1-рядного представлений. Значит мы имеем 16-рядные β -матрицы, часть

представлений которых можно, например, получить:

$$\beta_{\mu} = (\gamma_{\mu} \times 1) + (1 \times \gamma_{\mu}). \quad (16)$$

Вопрос стоит в том, как отделить здесь разные составные представления. Это легко сделать, имея ввиду, что [4]

$$P \equiv \frac{1}{2} \beta_{\mu} \beta_{\nu} \beta_{\nu} \beta_{\mu} = \begin{cases} 3 & \text{при 10-рядном предст.} \\ 2 & \text{при 5-рядном предст.} \\ 0 & \text{при 1-рядном предст.} \end{cases} \quad (17)$$

Соответствующие проекционные операторы:

$$\begin{aligned} \Pi_{(10)} &= \frac{1}{3} P(P-2), \\ \Pi_{(5)} &= \frac{1}{2} P(3-P), \\ \Pi_{(1)} &= \frac{1}{6} (2-P)(3-P). \end{aligned} \quad (18)$$

Поступила в оргкомитет
10 августа 1965 г.

Л и т е р а т у р а

1. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика, ФМ. Москва, 1959.
2. Х.Умедзава. Квантовая теория поля, ИЛ. Москва, 1958.
3. М.Кийв, Л.Палги. Труды ИФА № 24, 67, 1964.
4. А.Айнсаар. Труды ИФА (в печати), 1965.

ФОТОРОЖДЕНИЕ ПАР W -МЕЗОНОВ НА ЯДРЕ

А.И.Болсун, И.С.Сапункевич

Институт физики АН БССР

По-видимому, получение промежуточного векторного мезона (W -мезона) в нейтринных опытах будет довольно затруднительным делом [1]. В связи с этим разумно искать и другие пути обнаружения этой частицы. Принципиально, такую возможность представляет фоторождение пар W -мезонов на ядре [2]. Основным средством выделения продуктов распада W -мезонов в таком процессе по предложению Бладмена и Юнга [2] может служить поиск μ -пар под большими углами к направлению γ -кванта. Следует отметить, что механизм подобного углового распределения лептонов работает лишь вблизи порога рождения W -мезонов, где это угловое распределение изотропно в лабораторной системе координат. При больших энергиях γ -квантов (много выше порога рождения W -мезона) угловое распределение лептонов распада, как видно из дальнейшего, сильно вытянуто вперед.

В [3] показано, что в реакции $\gamma + \gamma' \rightarrow W^+ + W^-$ при большой энергии, мезоны рождаются преимущественно в состоянии линейной поляризации вдоль импульсов мезонов:

$$\sigma_{00}^{\delta} = \frac{5}{8} \phi, \quad \sigma_{++}^{\delta} = \frac{1}{8} \phi, \quad \sigma_{+-}^{\delta} = \frac{1}{12} \phi, \quad (1)$$

где индексы у сечений означают характер поляризации мезона (\pm - круговые поляризации, 0 - линейная поляризация вдоль импульса мезона), $\phi = r_0^2 \pi \frac{\kappa_0^2}{M^2}$, а κ_0, M -

энергия в с.п.м. и масса мезона, $r_0 = \alpha \frac{\hbar}{Mc}$.

Из (I) с помощью ковариантного метода Вейцекера-Вильямса [4,5,6], обобщенного на случай поляризованных частиц, можно получить сечение фоторождения пар W -мезонов на ядре:

$$\sigma_{rr'} = \frac{\alpha Z^2}{\pi} \int \sigma_{rr'}^{\gamma}(\omega^2) F(q^2) \left(1 - \frac{\omega^4}{4E^2 q^2}\right) \frac{d\omega^2 dq^2}{\omega^2 q^2}. \quad (2)$$

Здесь ω^2 - квадрат суммы 4-импульсов W -мезонов, E - энергия γ -кванта в лабораторной системе координат, q - импульс передачи, индексы r, r' принимают те же значения, что и в (I).

Используя (I) и (2), получаем сечение фоторождения пар мезонов на ядре при большой энергии γ -кванта

$$\sigma_{00} = \frac{5}{12} B, \quad \sigma_{++} = \frac{1}{12} B, \quad \sigma_{+-} = \frac{1}{18} B, \quad (3)$$

$$B = \alpha^3 Z^2 \frac{KE}{M^4} \left(1 - \frac{4}{3} \beta^2 K^2\right),$$

β^2 и K - характеризуют распределение заряда ядра и максимальный импульс передачи. Формула (3) показывает, что преимущественное рождение линейно поляризованных мезонов сохраняется и в процессе фоторождения пар на ядре. Но линейно поляризованные W -мезоны, распадаясь в полете, дают следующее распределение лептонов:

$$\frac{dw_0}{d\Omega} = \frac{G}{\pi^2 \sqrt{2}} \frac{\ell_0^4}{\kappa_0} (1 - (s, n)^2), \quad (4)$$

$$\ell_0 = \frac{M^2}{2\kappa_0(1 - \beta(n, s))}, \quad n = \frac{\ell}{|\ell|}, \quad s = \frac{\kappa}{|\kappa|}, \quad \beta = \frac{|\kappa|}{\kappa_0}, \quad (4a)$$

где G - константа взаимодействия Ферми, ℓ_0, κ_0, ℓ ,

κ - энергии и импульсом лептона и W -мезона, соответственно. Формулы (4) и (4а) сразу показывают, что при большой энергии W -мезонов лептоны вылетают преимущественно вперед. Поэтому вдали от порога рождения продукты распада W -мезонов невозможно отделить от продуктов прямого фоторождения пар лептонов.

Поступила в оргкомитет
2 июля 1965 г.

Л и т е р а т у р а

1. G. Bernardini, I. K. Bienlein, et. al., Phys. Lett., 13, 86, 1964.
2. Б.Понтекорво, IX Междунар. конф. по физике выс.энерг., М., 602, 1961.
3. S. A. Bludman, I. A. Young, Phys. Rev., 126, 303, 1962.
4. А.И.Болсун, Вестн АН БССР, сер. Физ.-мат. наук, вып. I, 98, 1965.
5. А.М.Бадалян, Я.А.Сморodinский, ЖЭТФ, 40, 1231, 1961.
6. А.М.Бадалян, ЖЭТФ, 43, 608, 1962.
7. В.Н.Грибов, В.А.Колкунов, Л.Б.Окунь, В.М.Шехтер, ЖЭТФ, 41, 1824, 1961.
8. H. Uberall, Phys. Rev., 133, В 444, 1964.

ДВА СЛЕДСТВИЯ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М.П.Коркина

Днепропетровский Государственный Университет

Три известных экспериментальных факта (отклонение световых лучей в поле тяжелой массы, смещение перигелия Меркурия и красное смещение), являющихся экспериментальным основанием общей теории относительности, объясняются также и различными линейными теориями гравитации, которые строятся в евклидовом пространстве. Между тем, уравнения Эйнштейна имеют достаточно сложную структуру, а уравнения линейной теории просты. Одни и те же следствия получаются только потому, что формулы, объясняющие эти факты, в теории Эйнштейна получаются из решения приближенных уравнений.

Если же рассматривать взаимодействие гравитационного поля с электромагнитным полем, с электронно-позитронным полем и т.д., то результаты общей теории относительности и результаты линейных теорий будут различными.

Линейная теория гравитации вообще не является последовательной, поскольку уравнения поля в этой теории имеют форму, которая требует сохранения только тензора энергии-импульса материи. Поэтому в источник уравнения необходимо добавить тензор энергии-импульса гравитационного поля и переформулировать лагранжиан гравитационного поля и, следовательно, тензор энергии-импульса. Эту процедуру можно продолжать до бесконечности. Новые величины содержат бесконечные разложения в ряд переменных поля [1,2].

При помощи таких соображений конструируется нелинейная теория гравитации в плоском пространстве [3].

Нелинейность учитывается введением в лагранжиан гравитационного поля члена взаимодействия [4]

$$-\frac{\alpha}{2} h_{\mu\nu} \tau_{\mu\nu},$$

- где $\alpha = \sqrt{\gamma}/c^2$ - гравитационная постоянная;
 γ - ньютоновская постоянная;
 $h_{\mu\nu}$ - потенциал гравитационного поля;
 $\tau_{\mu\nu}$ - симметричный тензор энергии-импульса гравитационного поля с учетом спиновой добавки.

В общей теории относительности взаимодействие гравитационного поля с другими полями рассматривалось в ряде работ [5,6,7,8,9]. Причем в этих работах применялся метод Гунта, в котором нелинейность гравитационного поля учитывается допущением, что для $g^{\mu\nu}\sqrt{-g}$ имеется простое разложение справедливое для всех порядков по α , тогда для g , $g^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ получаются бесконечные ряды, при помощи которых можно вычислить искомые взаимодействия с любой желаемой точностью по α .

Нелинейную теорию гравитации можно построить из лагранжиана самого общего вида [10]. Однако, чтобы результаты теории можно было сравнить с результатами общей теории относительности, в качестве исходного линейного лагранжиана берется выражение, которое получается из лагранжиана общей теории относительности.

$$L = -\frac{1}{\alpha^2} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} (\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}) \quad (I)$$

в линейном приближении.

- $\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}$ - символ Кристоффеля;
 $g^{\mu\nu}$ - метрический тензор.

$$L_0 = -\frac{1}{4}(\partial_\nu \varphi_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\lambda\mu}\partial_\nu \varphi_{\tau\tau})(\partial_\nu \varphi_{\lambda\mu} - 2\partial_\lambda \varphi_{\nu\mu}), \quad (2)$$

где

$$\varphi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}h_{\sigma\sigma}. \quad (3)$$

В (2) и в следующих формулах используются обозначения Гупта (3) для удобства сравнения.

Тогда для самодействия гравитационного поля получаем

$$\begin{aligned} L_g &= L_0 - \frac{\alpha}{2}(\varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\varphi_{\tau\tau})\tau_{\mu\nu}^0 = \\ &= L_0 - \frac{\alpha}{2}(\varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\varphi_{\tau\tau})(t_{\mu\nu}^{\text{кан}} - \partial_\rho S_{[\rho\mu]\nu}), \end{aligned} \quad (4)$$

где $t_{\mu\nu}^{\text{кан}}$ канонический тензор гравитационного поля;
 $\partial_\rho S_{[\rho\mu]\nu}$ - спиновая добавка к тензору.
 После преобразований

$$\begin{aligned} L_g &= L_0(\varphi_{\mu\nu}) - \frac{\alpha}{4}[\varphi_{\mu\nu}(\partial_\mu \varphi_{\alpha\beta} \partial_\nu \varphi_{\alpha\beta} - \\ &- 2\partial_\nu \varphi_{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi_{\mu\alpha} - \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi_{\sigma\sigma} \partial_\nu \varphi_{\lambda\lambda}) - \\ &- 2\partial_\rho \varphi_{\mu\nu} \partial_\rho \varphi_{\mu\beta} \varphi_{\beta\nu} + \varphi_{\beta\mu} \partial_\rho \varphi_{\sigma\sigma} \partial_\rho \varphi_{\mu\beta}]. \end{aligned} \quad (5)$$

Выражение (5) тождественно аналогичному лагранжиану, полученному методом Гупта на основании общей теории относительности.

(5) можно преобразовать к виду

$$L_g = L_0(\phi_{\mu\nu}) - \frac{\alpha}{2}(\phi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\phi_{\tau\tau})t_{\mu\nu}^{\text{кан}}, \quad (6)$$

где

$$\Phi_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} - \frac{\alpha}{2} \varphi_{\mu\tau} \varphi_{\tau\nu}. \quad (7)$$

Так как гравитационное поле нелинейно, роль его потенциала при взаимодействии с другими полями будет играть величина $\Phi_{\mu\nu}$ вместо $\varphi_{\mu\nu}$.

Взаимодействие гравитационного поля с электромагнитным полем и с электронно-позитронным полем рассматривается одинаковым образом.

В первом приближении лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$L_1 = -\frac{\alpha}{2} \left(\varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \varphi_{\tau\tau} \right) T_{\mu\nu}^0, \quad (8)$$

где $T_{\mu\nu}^0$ - тензор энергии-импульса свободного электромагнитного или электронно-позитронного поля.

Во втором приближении лагранжиан состоит из двух частей

$$L_2^{(1)} = -\frac{\alpha}{2} \left(\Phi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \Phi_{\tau\tau} \right) T_{\mu\nu}^0, \quad (9)$$

$$L_2^{(2)} = -\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \left(\varphi_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} \varphi_{\sigma\sigma} \delta_{\lambda\nu} \right) T_{\lambda\nu}^{(1)}, \quad (10)$$

(9) учитывает нелинейность потенциала гравитационного поля, (10) учитывает взаимодействие с добавкой к $T_{\mu\nu}^0$, которая получается обычным методом из L_1 и которую обозначаем $T_{\mu\nu}^{(1)}$.

Из (8), (9) и (10) после несложных вычислений получаем выражения для лагранжиана взаимодействия, совпадающие с аналогичными выражениями, полученными методом Гупта для электронно-позитронного поля в [8] и для электромагнитного поля в [4].

Для электромагнитного поля лагранжиан взаимодействия

$$\begin{aligned}
 L_{em} = & -\frac{1}{4} F_{\lambda\nu}^2 - \frac{\alpha}{2} (\varphi_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\lambda\nu} \varphi_{\tau\tau}) \cdot \\
 & (F_{\lambda\tau} F_{\nu\tau} - \frac{1}{4} \delta_{\lambda\nu} F_{\sigma\tau}^2) - \frac{\alpha^2}{4} \varphi_{\lambda\sigma} \varphi_{\tau\nu} F_{\sigma\nu} F_{\lambda\tau} + \\
 & + \frac{\alpha^2}{4} \varphi_{\tau\tau} \varphi_{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} F_{\sigma\tau} - \frac{\alpha^2}{16} \varphi_{\alpha\beta}^2 F_{\mu\nu}^2 - \\
 & - \frac{\alpha^2}{32} \varphi_{\sigma\sigma}^2 F_{\mu\nu}^2.
 \end{aligned} \quad (II)$$

Для электронно-позитронного поля см. [8] формула (I6).

Кроме того, оказывается в такой теории для частного случая статического сферически-симметричного гравитационного поля можно получить решение, совпадающее с решением Шварцшильда общей теории относительности.

Лагранжиан взаимодействия гравитационного поля с любым внешним полем, как сказано выше, в первом приближении по α нужно брать в виде

$$L_1 = -\frac{\alpha}{2} h_{\mu\nu} T_{\mu\nu}^0, \quad (I2)$$

для нашего случая $h_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} h$.

Если вычислить $T_{\mu\nu}^{(1)}$ из L_1 , написать

$$L_2 = -\frac{\alpha}{2} h_{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{(1)}, \quad (I3)$$

вычислить $T_{\mu\nu}^{(2)}$ из L_2 и т.д., и просуммировать полученные ряды, то получим

$$L = -\frac{\alpha}{2} \frac{h}{1-\alpha h} T_{\mu\nu}^0 \delta_{\mu\nu}. \quad (I4)$$

Из сравнения с (I2) следует, что роль потенциала гравитационного поля играет величина

$$h/(1-\alpha h).$$

Поэтому для гравитационного поля с учетом его нелиней-

ности постулируем лагранжиан

$$L^{NL} = -\frac{1}{2} \left[\nabla \frac{\hbar}{1-\alpha\hbar} \right]^2 \quad (I5)$$

вместо линейного

$$L^L = -\frac{1}{2} [\nabla\hbar]^2. \quad (I6)$$

Из (I5) получаем уравнение поля

$$\nabla^2\hbar + \frac{2\alpha(\nabla\hbar)^2}{1-\alpha\hbar} = 0, \quad (I7)$$

решение которого

$$\hbar = -\frac{2\frac{m}{r}}{1-2\alpha\frac{m}{r}} \quad (I8)$$

аналогично решению Шварцшильда [II] .

Таким образом: 1) нелинейная теория гравитации в евклидовом пространстве при рассмотрении взаимодействия гравитационного поля с другими полями дает те же результаты, что и общая теория относительности, во всяком случае во втором приближении по α . Причем для практических целей рассмотренный метод дает значительное упрощение вычислений;

2) в евклидовом пространстве можно получить точное нелинейное уравнение гравитационного поля, решение которого совпадает с решением Шварцшильда общей теории относительности.

Поступила в оргкомитет

29 сентября 1965 г.

Л и т е р а т у р а

1. L.Halpern. Ann. of Phys.(USA), 25, 387, 1963
 2. H.Weyl. Am. J. Math., 66, 591, 1944.
 3. А.А.Боргардт. ЖЭТФ, 34, 1932, 1958.
 4. М.П.Коркина. УФН 10, 497, 1965.
 5. S.Gupta. Proc. Ph. Soc., A65, 161, 1952.
 6. S.Gupta. Proc. Ph. Soc., A65, 608, 1952.
(Перевод в сборнике "Новейшие проблемы гравитации", ИИЛ, 1961).
 7. И.Пийр. Труды Института физики и астрономии Академии наук Эст. ССР № 5, 41, 1957.
 8. Ю.С.Владимиров, ЖЭТФ, 45, 252, 1963.
 9. Н.В.Мицкевич. ЖЭТФ, 34, 1956, 1958.
 10. J.Belinfante, J.Swihart. Ann. of Phys.(USA), 1, 166, 198, 1957.
- II. А.Эддингтон. Теория относительности, 1934.

КОМПТОН-ЭФФЕКТ НА НЕЙТРОНЕ

Л.Г.Мороз, В.Н.Третьяков

Институт физики АН БССР

В в е д е н и е

Эксперименты по нуклонному комптоновскому рассеянию служат, наряду с eN - и NN -рассеянием, независимым доказательством существования структуры нуклонов. Под действием излучения распределение электрического заряда и магнитного момента нуклона меняется, он приобретает дипольные электрический и магнитный моменты, на которых происходит дополнительное ("поляризационное") рассеяние. Связанные с этими моментами величины называются электрической и магнитной поляризуемостями нуклона.

I. В отличие от обычного определения поляризуемостей [1], вводятся динамические поляризуемости нуклона:

$$\alpha(\nu) = \frac{1}{\nu^2(\nu + \sqrt{1+\nu^2})} (D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5) \Big|_{\vartheta=0},$$

$$\beta(\nu) = \frac{1}{\nu^2(\nu + \sqrt{1+\nu^2})} (D_6 - D_2 - D_4) \Big|_{\vartheta=0},$$

(где D_i - интегральные части амплитуд комптон-эффекта на нуклоне [2], ν - энергия γ -кванта в с.п.и.).
В статическом пределе

$$\alpha(0) + \beta(0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\sigma_{\pi}(\nu') d\nu'}{\nu'^2},$$

что согласуется с определением поляризуемостей по Лапи-

дусу [I] .

2. Хотя динамические поляризуемости имеют прямой физический смысл лишь в области низких энергий, изучение их поведения при более высоких энергиях позволяет судить о вкладах поляризационного рассеяния в сечения, о границах применимости дипольной модели фоторождения при анализе комптоновского рассеяния и т.п.

3. Вычисление интегральных частей амплитуд комптон-эффекта проводилось в предположении одномезонной унитарности матрицы рассеяния и в рамках дипольной модели фоторождения π^- -мезонов "с усилением" (3-3) - состояния [3,4] . Мнимые части амплитуд фоторождения в этом приближении оказывается возможным выразить через наблюдаемые величины - коэффициенты углового распределения π^- -мезонов на протоне и отношение π^-/π^+ для дейтрона [5] . Экспериментальные данные взяты из работ [3,6] .

4. Расчеты динамических поляризуемостей нуклона в интервале энергий $\nu = 0,06 \div 0,5$ (60 - 750 Мэв) привели к результатам (см. рис. I). Экстраполяция к дает "статический" предел:

$$\alpha_n(0) = 1,15 \cdot 10^{-42} \text{ см}^3 ,$$

$$\alpha_p(0) = 0,95 \cdot 10^{-42} \text{ см}^3 ,$$

что хорошо согласуется как с теоретическими, так и экспериментальными оценками поляризуемостей в комптон-эффекте [7,9] .

Анализ рис. I позволяет сделать выводы:

- 1) $\alpha_n(0)$ превышает $\alpha_p(0)$ на 20 %;
- 2) $\beta_n(0) = \beta_p(0) > 0$;
- 3) нуклон имеет области "диа"- и "парамагнитности";
- 4) о поляризационном рассеянии на языке поляризуемостей-констант уверенно можно говорить до энергий $\nu \sim 0,18$ для β_n и $\nu \sim 0,3$ для α_n (210 и

380 Мэв, соответственно).

5. Дифференциальные сечения рассеяния подсчитывались по формуле, полученной в [4] для нуклонного комптон-эффекта (фотоны и нуклон неполяризованы) в интервале энергий $\nu = 0,06 \div 0,5$ через 0,04 и для $\cos \vartheta$ от -1,0 до +1,0 через 0,1. По этим данным по формуле Симпсона найдено полное сечение нейтронного комптон-эффекта.

В ы в о ы

1) дифференциальное сечение γn - и γp -рассеяния на любой угол (а значит и полное сечение) обнаруживает два максимума, при $\nu = 0,26$ и $\nu = 0,46$ (320 и 660 Мэв) (рис. 2,3);

2) рассеяние в заднюю полусферу все более преобладает над передним рассеянием с ростом энергии;

3) относительное различие между протоном и нейтроном (в комптон-эффекте) с ростом энергии уменьшается;

4) при 60 - 100 Мэв вклад поляризационного рассеяния в сечение по порядку величины равен поуэлловскому сечению. При более высоких энергиях он становится преобладающим (рис. 2).

6. Если рассматривать дейтрон как систему несвязанных нуклонов, то энергетическая зависимость сечения рассеяния на нем $d\sigma_{\alpha}^{\circ}/d\Omega$ (90° с.ц.и.) в согласии с нашими расчетами изобразится сплошной линией на рис.4 (данные по рассеянию на протоне взяты из [4]). Поведение $d\sigma_{\alpha}^{\circ}/d\Omega$ (90° с.ц.и.) качественно согласуется с рассчитанным в импульсном приближении [8] (пунктирная линия). О согласии с экспериментом [8] (заштрихованная область) при низких энергиях можно говорить лишь в самых общих чертах. При более высоких энергиях $d\sigma_{\alpha}^{\circ}/d\Omega$ меньше

экспериментального. Например, при энергии $K_L = 270$ Мэв эксперимент дает $29 \cdot 10^{-32} \text{ см}^2 < d\sigma_\alpha/d\Omega < 34 \cdot 10^{-32} \text{ см}^2 [9]$ в то время, как $d\sigma_\alpha^0/d\Omega \cong 13 \cdot 10^{-32} \text{ см}^2$.

Поступила в оргкомитет
2 июля 1965 г.

Л и т е р а т у р а

1. Л.М.Лапидус, ЖЭТФ, 43, 1358, 1962; А.М.Балдин, 18, ЗИО, 1960; В.А.Петрунькин, ЖЭТФ, 40, 1148, 1961.
2. В.К.Федянин, ДАН СССР, 140, 347, 1961.
3. K.Watson, F.Keek, A.Tollestrup, R.Walker, Phys.Rev., 101, 1159, 1956.
4. В.К.Федянин, ЖЭТФ, 44, 633, 1963.
5. Л.Г.Мороз, В.Н.Третьяков, ДАН БССР, 8, 575, 1964; Вести АН БССР, 2, 1965 (в печати)
6. H.Bingham, A.Klegg, Phys.Rev., 112, 2053, 1958; K.Berkelman, I.Waggoner, Phys.Rev., 117, 5, 1960; I.Pine, N.Bazin, Phys.Rev., 132, 2735, 1963.
7. P.Pajas, Čs. čas.fys., 14, 132, 1964.
8. Human L., Ely R., Frisch D., Wahlig H., Phys. Rev. Lett., 3, 93, 1959.
9. A.Tenore, A.Verganelakis, Nuovo Cim., 35, 261, 1965.

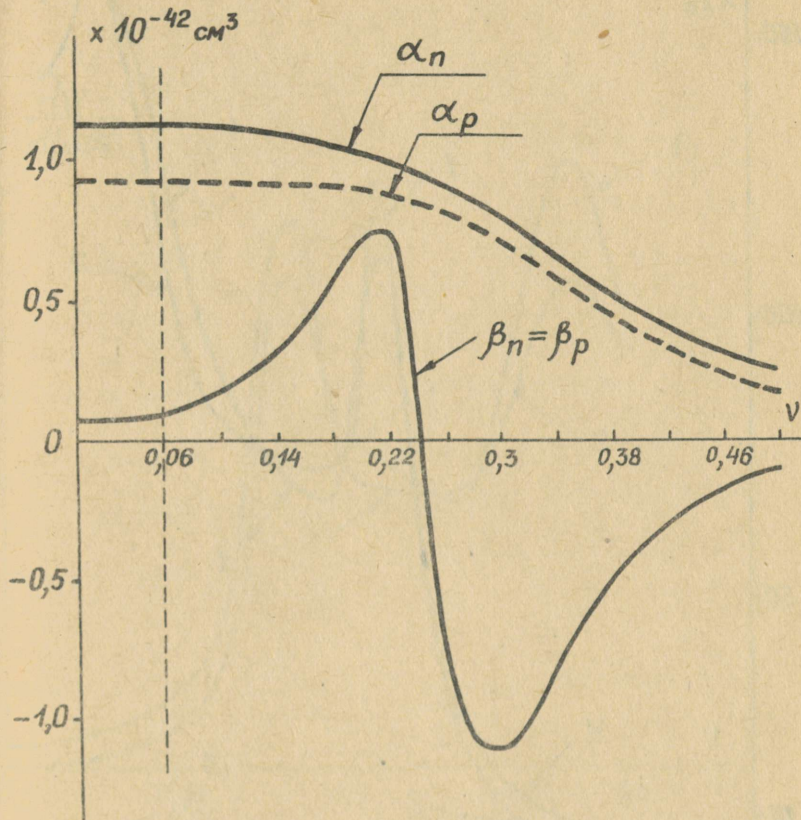


Рис. I. Электрические (α) и магнитные (β) поляризуемости нуклона (n - нейтрон, p - протон). В принятом приближении $\beta_n = \beta_p$. Для ясности графика погрешности поляризуемостей не нанесены. Кривые левее $V = 0,06$ - экстраполяция расчетных.

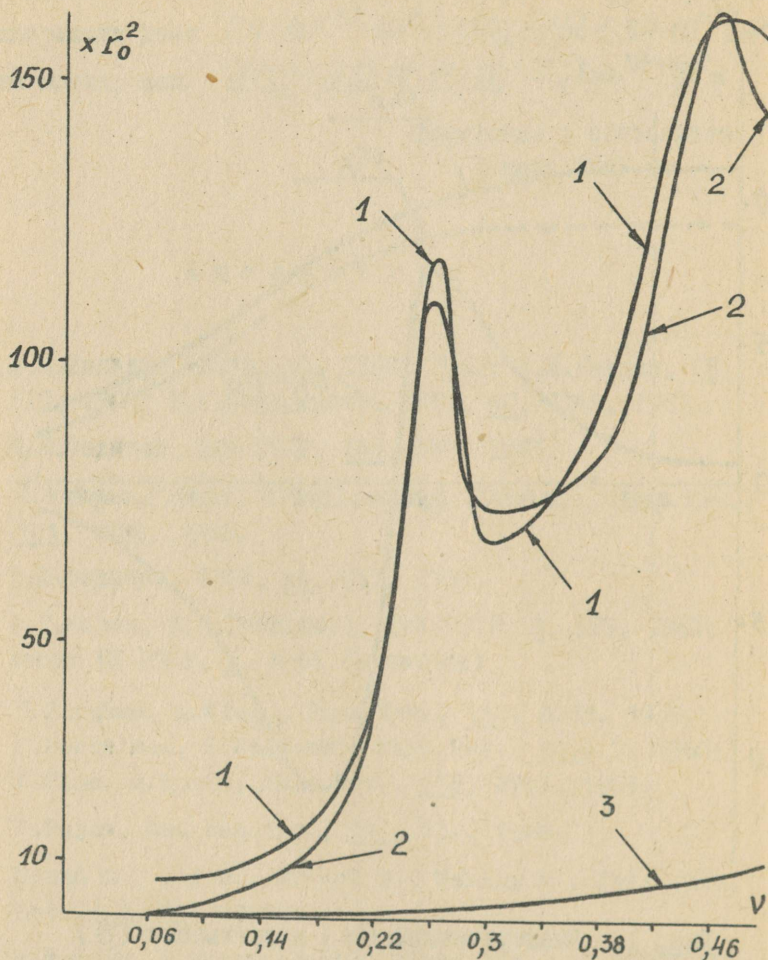


Рис. 2. Полные сечения рассеяния на нуклонах в единицах $r_0^2 = 2,34 \cdot 10^{-32} \text{ см}^2$. 1 - нейтрон, 2 - протон, 3 - точечный нейтрон (поуэловское рассеяние).

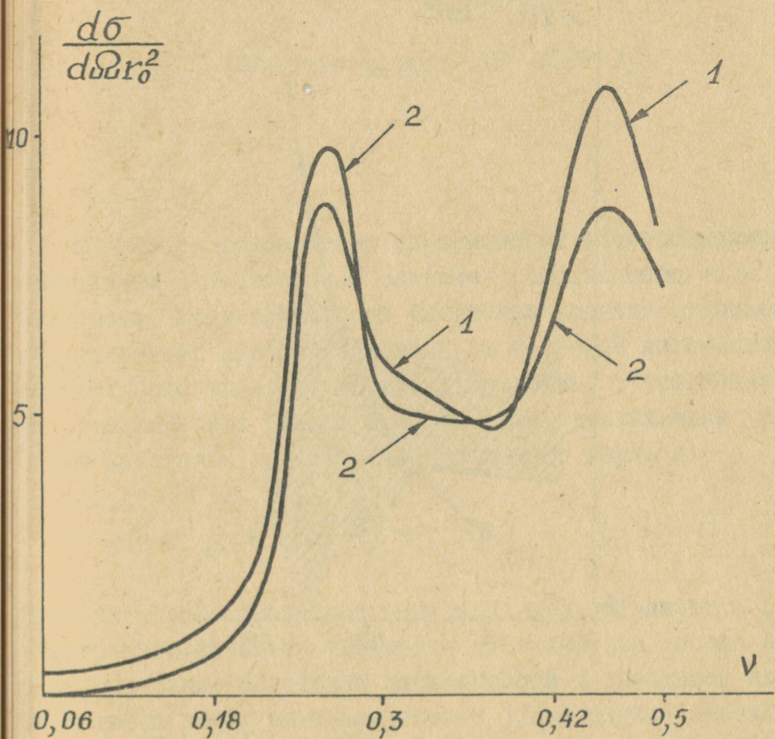


Рис. 3. Дифференциальное сечение комptonовского рассеяния на нейтроне (1) и протоне (2) на угол 90° в с.ц.и.

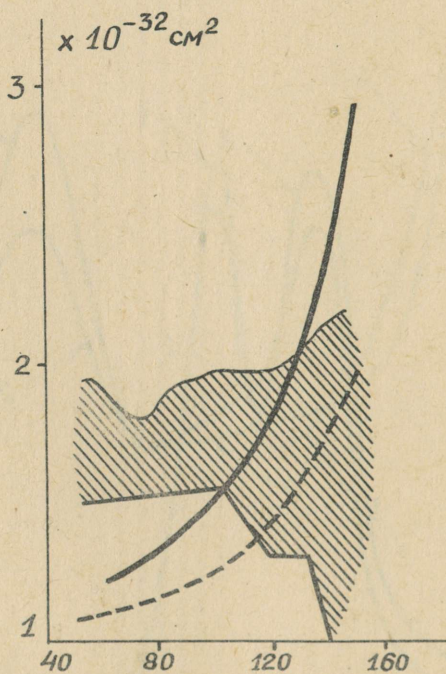


Рис. 4. Экспериментальное и теоретические дифференциальные сечения γd -рассеяния на 90° в с.ц.и.

УРАВНЕНИЯ С ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Т.С.Романова, Ф.И.Федоров

Институт физики АН БССР

В связи с трудностями классической электродинамики, связанными с бесконечной энергией собственного поля электрона, предпринимались различные попытки видоизменения уравнений Максвелла. Одной из наиболее интересных попыток было введение высших производных в уравнения поля, предложенное Беллом и Подольским, заменившими уравнения Максвелла уравнениями четвертого порядка:

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha c^2} \square\right) \square A_\mu = -4\pi j_\mu, \quad \partial_\mu A_\mu = 0. \quad (1)$$

Изучение этого уравнения показало, что устраняются не только вышеуказанные трудности классической теории электрона, но также некоторые расходимости в квантовой электродинамике ввиду эквивалентности [1] введения высших производных релятивистски-инвариантному методу регуляризации, предложенному Паули и Вилларсом. В то же время возникли новые трудности в физической интерпретации теории, связанные с тем, что при квантовании для получения положительно-определенной энергии необходимо вводить indefinite метрику в гильбертовом пространстве, что приводит к появлению в теории "отрицательных вероятностей". Таким образом, возникают проблемы исследования возможности физической интерпретации теории, использующей регуляризацию Паули-Вилларса и вводящей indefinite метрику в

гильбертовом пространстве состояний квантовой системы. Анализ этого вопроса был проведен Гейзенбергом на примерах модели Ли и модели нелинейной теории элементарных частиц [2,3]. Гейзенберг показал, что, например, при определенном выборе исходных постоянных в модели Ли полное гильбертово пространство состояний может быть разделено на две части: часть HI, содержащую физические состояния с положительной нормой и допускающую физическую интерпретацию, и часть HII, содержащую "нефизические" "призрачные" дипольные состояния. При этом матричные элементы переходов из HI в HII равны нулю, что позволяет получить унитарную S -матрицу с обычной вероятностной интерпретацией соотношения унитарности. Позднее Асколи и Минарди [4,5] выяснили общие условия, при выполнении которых теория с индефинитной метрикой в гильбертовом пространстве допускает физическую интерпретацию.

В настоящей работе, используя эти результаты Гейзенберга и Асколи-Минарди, рассматривается возможность регуляризации в электродинамике с помощью такого видоизменения уравнений Максвелла путем введения высших производных, при котором математическая структура функций Грина была бы эквивалентна математической структуре функций Грина в нелинейной теории элементарных частиц Гейзенберга [7], что позволяет на примере локальной и релятивистски-инвариантной теории детально рассмотреть математическую структуру и физическую интерпретацию способа использования индефинитной метрики в гильбертовом пространстве, предложенного Гейзенбергом в нелинейной теории элементарных частиц.

Простейшими уравнениями, удовлетворяющими эти требованиям, являются уравнения шестого порядка:

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \square\right)^2 \square A_\mu = -4\pi j_\mu, \quad \partial_\mu A_\mu = 0. \quad (2)$$

Уравнения (2) представляют интерес также в том отношении, что для свободного поля их решения в виде плоских волн $A = A^0 e^{ikx}$, соответствующих "тяжелым фотонам" ($\kappa^2 = -\alpha^2$) согласно [6] не будут давать вклада в энергию и импульс поля.

Причинная функция Грина уравнений (2) имеет вид:

$$G(x) = \frac{4\pi}{(2\pi)^4 i} \int d^4 k e^{ikx} \frac{\alpha e^4}{(\kappa^2 - i0)(\kappa^2 + \alpha^2 - i0)^2} \quad (3)$$

Следуя Гейзенбергу, рассмотрим выражение:

$$\frac{1}{i} \frac{\alpha^4}{(\kappa^2 - i0)(\kappa^2 + \alpha^2 - i0)^2} = \frac{1}{i} \left\{ \frac{1}{\kappa^2 - i0} - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\kappa^2 + 2\alpha^2}{\alpha} \left(\frac{1}{\kappa^2 + \alpha^2 - i0} - \frac{1}{\kappa^2 + \alpha^2 + \alpha - i0} \right) \right\} \quad (4)$$

Первый член, сингулярный в точке $\kappa^2 = 0$, соответствует обычной фотонной функции распространения, а член, сингулярный в точке $\kappa^2 = -\alpha^2$, может быть интерпретирован как вклад в функцию распространения дипольного "призрачного" состояния, образованного из двух состояний одинаковой массы, причем одно из них имеет положительно-определенную, другое - indefinite метрику.

Потенциал поля, создаваемого точечным статическим источником, как легко видеть из (2), имеет вид:

$$A_4 = \frac{ie}{r} \left[1 - e^{-\alpha r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2} \right) \right], \quad (5)$$

где e - заряд источника. Энергия такого поля конечна и равна

$$E = \frac{e^2 \alpha}{4}. \quad (6)$$

Кроме того, энергия и импульс поля образуют правильный 4-вектор ($\int T_{\mu\nu} dr = 0$), т.е. переход от уравнений

(1) к уравнениям (2) не отвергает возможности, что масса электрона имеет чисто полевое происхождение. Из теоремы Лауэ следует, что вклад энергии электромагнитного поля в массу покоя электрона должен быть равен выражению (6) (при медленных движениях электрона). Это подтверждается рассмотрением уравнения движения электрона с учетом силы самодействия. Трудности, возникающие в теории, основанной на уравнении (2), иллюстрируются на примере излучения гармонически колеблющегося электрона. Если использовать запаздывающую функцию Грина, то на больших расстояниях от электрона поле содержит компоненты, не убывающие с расстоянием. В силу этого обстоятельства надо наложить условие, запрещающее излучение такого поля. В классическом случае мы можем добиться этого, взяв для части функций Грина, обуславливающей появление нефизического поля, полусумму запаздывающих и опережающих потенциалов. Запрещение порождения нефизического поля приводит к тому, что вклад в излучаемую энергию дает только обычное электромагнитное поле.

Поступила в оргкомитет

2 июля 1965 г.

Л и т е р а т у р а

1. Д.Иваненко, Б.Григорьев, ЖЭТФ, 21, 563, 1951.
2. Heisenberg W. Nucl.Phys., 4, 532, 1957.
3. Heisenberg W. Zs. f. Phys., 144, 1, 1956.
4. Ascoli R., Minardi E. Nuovo Cim. 8, 951, 1958.
5. Ascoli R., Minardi E. Nucl.Phys. 9, 242, 1958.
6. Ф.И.Федоров. ДАН СССР, 79, 787, 1951.

НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРИИ ОБРАТНОГО μ - e -РАСПАДА

Г.В. ШИШКИН

Институт тепло- и массообмена АН БССР

В представленном докладе рассматриваются процессы обратного μ - e -распада, существование которых предсказывается общей схемой слабых взаимодействий:

$$(a) \tilde{\nu}_e + e^- \rightarrow \tilde{\nu}_\mu + \mu^-, \quad (b) \nu_e + e^+ \rightarrow \nu_\mu + \mu^+,$$

$$(б) \nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-, \quad (г) \tilde{\nu}_\mu + e^+ \rightarrow \tilde{\nu}_e + \mu^+.$$

Очевидно, что как и для процессов распада мюонов $\mu \rightarrow e + \nu + \nu'$, гамильтониан взаимодействия процессов обратного μ - e -распада можно записать двояким образом, конструируя его либо из нейтральных токов $(\nu_e \nu_\mu)$ и $(e\mu)$, либо из заряженных токов $(e\nu_e)$ и $(\mu\nu_\mu)$. В настоящее время вряд ли возможно отдать окончательное предпочтение какому-либо из упомянутых гамильтонианов, хотя имеется ряд веских соображений, запрещающих нейтральный ток $(\nu_e \nu_\mu)$.

Рассмотрение процессов обратного μ - e -распада здесь проводится для обоих видов гамильтониана при произвольном выборе констант слабого взаимодействия G_V и G_A (согласно общепринятой концепции, учитываются лишь векторная и аксиально-векторная связи). Естественно, что при $G_V = -G_A$, согласно известным тождествам Фирца, оба гамильтониана приводят к тождественным результатам.

Автором доклада получены выражения для дифференци-

альных сечений процессов обратного μ - e -распада и степеней продольной и поперечных поляризаций мюонов, образующихся в этих процессах при произвольных начальных условиях (произвольная поляризация мишени) для обоих видов гамильтониана.

Не выписывая полученных выражений, сообщим лишь некоторые выводы, вытекающие из них.

В выражение для вероятности процессов обратного μ - e распада и степеней продольной и поперечных поляризаций мюонов при произвольном выборе констант связи G_V и G_A имеются существенные различия в зависимости от используемого гамильтониана. Эти различия наиболее заметны при малых энергиях.

В общем случае произвольно поляризованной мишени вероятности процессов (а), (б) и (в), (г) различны. Если же поле электронов (позитронов)-мишеней не поляризовано, то вероятности всех процессов обратного μ - e -распада становятся одинаковыми. Остаются, однако, различия в зависимости от используемого гамильтониана. Таким образом, использование поляризованной мишени приводит к увеличению или уменьшению сечения того или иного процесса обратного μ - e -распада. В частности, например, вероятность процесса (б) при поляризации электронов по направлению импульса налетающего нейтрино, т.е. при антипараллельных спинах налетающего нейтрино и электрона, максимальна, тогда как при поляризации электронов против направления импульса налетающего нейтрино, т.е. соответственно при параллельных спинах, она минимальна (а при полной поляризации обращается в нуль). В процессе (г) вероятность максимальна, когда направление поляризации позитронов антипараллельно направлению импульса налетающего антинейтрино, т.е. опять же при антипараллельных спинах $\bar{\nu}_\mu$ и e^+ , и минимальна при поляризации мишени по направлению импульса антинейтрино, т.е. опять же при параллельных спинах $\bar{\nu}_\mu$ и e^+ и т.д.

Поляризационные свойства мюонов в процессах обратного

μ - e - распада в случае гамильтониана из заряженных токов оказываются не зависящими от констант связи слабого взаимодействия G_V и G_A . Вектор поляризации мюонов лежит при этом в плоскости импульсов налетающего нейтрино и рожденного мюона (в плоскости реакции), т.е. в пучке мюонов не возникает поляризация в направлении, перпендикулярном плоскости реакции. В случае гамильтониана из нейтральных токов поляризационные свойства мюонов сложным образом зависят от констант связи G_V и G_A , причем в пучке мюонов возникает поляризация во всех трех направлениях (вдоль импульса мюона P_x , в плоскости реакции перпендикулярно импульсу мюона P_y , перпендикулярно плоскости реакции P_z).

Отметим, что в случае гамильтониана из заряженных токов продольная поляризация мюонов вообще не зависит от поляризации мишени, тогда как на поперечную поляризацию мюонов существенное влияние оказывает поляризация мишени. Интересно, что компонента поляризации мишени в направлении, перпендикулярном плоскости реакции, вообще не влияет на поляризационные свойства мюонов при гамильтониане из заряженных токов. В случае гамильтониана из нейтральных токов поляризационные характеристики мюонов (P_x , P_y , P_z) существенным образом зависят от всех трех компонент поляризации мишени.

В ультрарелятивистском по мюону пределе в случае гамильтониана из заряженных токов степень продольной поляризации мюонов стремится к единице, независимо от начальных условий. Отрицательный мюон поляризован при этом против направления своего импульса (левая поляризация), а положительный мюон поляризован по направлению своего импульса (правая поляризация), что находится в соответствии с общей теорией поляризации фермионов. В случае гамильтониана из нейтральных токов даже в ультрарелятивистском пределе степень продольной поляризации мюонов не стремится к единице, не обращаются в нуль и поперечные компоненты поляризации мюонов.

В соответствие с экспериментальными данными по массам покоя электронного и мюонного нейтрино ($m_{\nu_e}^0 \leq 0,005m_e$, $m_{\nu_\mu}^0 \leq 3m_e$), автором сделана попытка учесть возможную массу покоя мюонного нейтрино. Возникающие при этом поправки к вышеописанным результатам носят, однако, чисто количественный характер, еи приводя к каким-либо новым качественным следствиям.

Таким образом, теоретический анализ процессов обратного μ - e -распада позволяет предположить, что экспериментальное изучение процессов обратного μ - e распада может дать важную информацию о природе слабого μ - e -взаимодействия. В частности, если $(V-A)$ - вариант слабого взаимодействия нарушается, то сравнение результатов для различных гамильтонианов позволяет сделать вывод о возможности из экспериментального изучения процессов обратного μ - e -распада установить, какой из гамильтонианов ближе описывает природу μ - e связи.

Поступила в оргкомитет
7 июня 1965 г.

Летняя школа по проблемам
теории элементарных частиц
1У часть

Редакционно-издательский совет
Академии наук Эстонской ССР
Таллин, ул. Сакала, 3

Ротапринт АН ЭССР

Заказ 111. МВ-00770. Тираж 500.

Печатных листов 4,75.

Учетно-издательских листов 2,20.

Цена 15 коп.

Цена 15 коп.

