М. Б. Кюрзенъ.

МЕТОДИКА НАЧАЛЬНОЙ АРИѲМЕТИКИ.

Руководство

для

учителей начальныхъ училищъ.

Рига.

ИЗДАНІЕ К. [illegible] ЗИХМАНА.

Адресъ издателя:
г. Рига, Крѣпостная улица № 30.

19[illegible]8.

М. Б. Кюрзенъ.

МЕТОДИКА НАЧАЛЬНОЙ АРИѲМЕТИКИ.

Руководство
для учителей начальныхъ училищъ.

Цѣна 60 коп.

РИГА.
ИЗДАНІЕ К. Г. ЗИХМАНА.
Адресъ издателя: г. Рига, Крѣпостная улица № 30.
1903.

Дозволено цензурою. — Рига, 30 мая 1903 г.

Печатано въ типографіи Мюллера въ Ригѣ (Гердерова площадь № 1).

Глава первая.

Введеніе.

§ 1. *Педагогика* есть наука о воспитаніи дѣтей. *Дидактика* есть часть педагогики, въ которой излагается ученіе о тѣхъ педагогическихъ требованіяхъ, которыми обусловливается правильность, успѣшность и цѣлесообразность обученія. *Методика* же учитъ о томъ, *какъ* общія дидактическія положенія примѣнить при обученіи какому-нибудь предмету.

Предметъ методики начальной ариѳметики.

§ 2. Методика начальной ариѳметики содержитъ ученіе о томъ, *какъ* учить ариѳметикѣ въ начальной народной школѣ, чтобы обученіе способствовало успѣшному усвоенію знаній и развивало душевныя способности учащихся. Сообразно этимъ цѣлямъ, въ руководствѣ по методикѣ начальной ариѳметики должны быть указаны педагогическіе *пріемы* и *средства*, ведущіе къ достиженію вышеозначенныхъ цѣлей, а также должно быть показано *примѣненіе* этихъ пріемовъ на практикѣ; кромѣ того въ методикѣ начальной ариѳметики долженъ быть *проработанъ* матеріалъ начальной ариѳметики, чтобы каждый учитель, придерживаясь извѣстнаго руководства методики, могъ бы успѣшно вести обученіе начальной ариѳметикѣ согласно требованіямъ методики и дидактики.

Цѣли обученія ариѳметикѣ въ начальной народной школѣ.

§ 3. Цѣли обученія ариѳметикѣ въ начальной народной школѣ слѣдующія: 1) научить дѣтей *сознательно считать* и производить четыре ариѳметическихъ дѣйствія надъ числами; 2) *развить* въ дѣтяхъ *навыкъ* прилагать эти дѣйствія къ рѣшенію задачъ общежитейскаго характера (матеріальная сторона обученія); 3) развивать *душевныя способности* дѣтей (формальная сторона обученія).

Для достиженія этихъ цѣлей служатъ различныя средства, напр. наглядныя пособія, дѣленіе курса начальной ариѳметики на концентры, форма обученія и др. О наглядныхъ пособіяхъ и раздѣленіи курса начальной ариѳметики на концентры будемъ говорить ниже; здѣсь скажемъ нѣсколько словъ о формѣ обученія.

Обученіе ариѳметикѣ въ начальной народной школѣ нужно вести по *эвристической* или *изобрѣтательной* формѣ обученія, сущность которой состоитъ въ томъ, что учащіеся сами, подъ руководствомъ учителя, вырабатываютъ (*изобрѣтаютъ*) знанія и приходятъ къ извѣстному выводу. Этой формой обученія возбуждается самодѣятельность и интересъ учащихся, — главные двигатели *активной* дѣятельности человѣка, — а потому она имѣетъ большое значеніе при обученіи вообще и при обученіи ариѳметикѣ въ частности.

Раздѣленіе курса начальной ариѳметики на концентры.

§ 4. Курсъ начальной ариѳметики раздѣляется на три концентра. Первый концентръ — счетъ и дѣйствія надъ числами перваго десятка. Въ этомъ концентрѣ система счисленія не служитъ къ упрощенію счета и производства дѣйствій. Второй концентръ — счисленіе и дѣйствія надъ числами первой сотни, гдѣ система счисленія даетъ возможность упрощать нѣкоторыя дѣйствія и приводить ихъ къ дѣйствіямъ надъ однозначными числами. Третій концентръ — счисленіе и дѣйствія надъ числами любой величины. Въ этомъ концентрѣ система счисленія имѣетъ полное примѣненіе къ упрощенію дѣйствій.

Такое расположеніе матеріала ариѳметики имѣетъ слѣдующія преимущества: 1) по прохожденіи каждаго концентра, учащіеся пріобрѣтаютъ *законченный* кругъ знаній; 2) при такомъ расположеніи матеріала удовлетворяются дидактическія требованія о *послѣдовательности, посильности, самодѣятельности* и др.; 3) такое расположеніе матеріала соотвѣтствуетъ *развитію* дѣтской души.

Наглядныя пособія, употребляемыя при обученіи ариѳметикѣ.

§ 5. При обученіи ариѳметикѣ употребляются слѣдующія наглядныя пособія: 1) шведскіе счеты, 2) торговые счеты, 3) ариѳметическій ящикъ, 4) спички, 5) числовыя фигуры, 6) образцы единицъ мѣръ и другія. О каждомъ изъ упомянутыхъ наглядныхъ пособій и скажемъ въ отдѣльности.

Шведскіе счеты. Шведскіе счеты состоятъ изъ прямоугольной рамки, укрѣпленной на ножкахъ. Въ рамкѣ продѣто около десяти горизонтальныхъ проволокъ, на которыхъ свободно могутъ двигаться по десяти деревянныхъ шариковъ. На верхней части рамки укрѣплено около семи вертикальныхъ проволокъ, на которыя можно надѣть по десяти шариковъ. Кромѣ шариковъ при счетахъ имѣются деревянные цилиндры и равныя части ихъ — для выясненія происхожденія и свойствъ дробей.

Шведскіе счеты полезны при выясненіи: 1) словесной и письменной нумераціи многозначныхъ чиселъ, такъ какъ шарикамъ, расположеннымъ на отдѣльныхъ проволокахъ, можно придавать *мѣстное* значеніе; 2) отдѣльныхъ дѣйствій — особенно сложенія и вычитанія — на всѣхъ ступеняхъ обученія.

Торговые счеты. За неимѣніемъ шведскихъ счетовъ, можно пользоваться торговыми счетами какъ нагляднымъ пособіемъ, хотя это не такъ удобно, потому что ученики, сидящіе далеко отъ доски, не могутъ ясно различать косточки этихъ счетовъ.

Ариѳметическій ящикъ. Ариѳметическій ящикъ заключаетъ въ себѣ кубики, прямоугольные бруски и доски. Если сложить десять кубиковъ въ одинъ рядъ, то образуется одинъ брусокъ — *десятокъ;* десять брусковъ, сложенныхъ вмѣстѣ, образуютъ одну доску — *сотню.* Кубики, бруски и доски могутъ служить при выясненіи словесной нумераціи чиселъ первой сотни, а отдѣльные кубики — и при разъясненіи дѣйствій.

Спички или солома. Такъ называется наглядное пособіе, состоящее изъ палочекъ одинаковой длины и толщины. Спички можно употреблять при прохожденіи нумераціи.

Числовыя фигуры. Числовыя фигуры служатъ пособіемъ при обученіи счету, какъ прямому, такъ и обратному; напр., ученикъ рисуетъ фигуру въ четыре кружка да еще одинъ кружокъ и считаетъ, сколько кружковъ получилось.

Образцы единицъ мѣръ. Для выясненія значенія и соотношенія мѣръ, учителю необходимо имѣть подъ руками образцы главныхъ единицъ мѣръ длины, вѣса и емкости, чтобы, въ случаѣ надобности, можно было произвести измѣреніе и взвѣшиваніе, равно и ознакомить учащихся съ единичнымъ отношеніемъ данныхъ мѣръ.

Кромѣ упомянутыхъ наглядныхъ пособій употребляются другія — болѣе простыя — и эти послѣднія иногда лучше первыхъ; напр., при ознакомленіи учащихся съ происхожденіемъ и свойствами дробей, можно пользоваться черточками, начерченными на классной доскѣ, листомъ бумаги, бечевкой; при разъясненіи отдѣльныхъ дѣйствій въ первомъ и во второмъ концентрахъ можно пользоваться перьями, карандашами, книгами и т. п.

Наконецъ, надо замѣтить, что, для удовлетворенія требованія наглядности, необходимо имѣть въ виду не только *внѣшнюю* наглядность, средствами которой служатъ различныя наглядныя пособія, но и *внутреннюю,* при чемъ главное вниманіе надо обращать на *законы мышленія* и *способъ образованія понятій.*

Какъ извѣстно, прежде всего въ дѣтской душѣ возникаютъ *ощущенія,* изъ которыхъ образуются *представленія* о предметахъ и явленіяхъ; изъ представленій же, посредствомъ *отвлеченія,* образуются понятія.

Изъ этого видно, что, для удовлетворенія внутренней наглядности, при обученіи нужно начинать съ ощущеній и представленій и **переходить** къ понятіямъ и выводамъ; напр., при обученіи ариѳметикѣ, если требуется ознакомить дѣтей съ случаями, когда употребляется сложеніе при рѣшеніи задачъ, учитель беретъ примѣры, обращаетъ вниманіе дѣтей на зависимость между данными числами и искомымъ и, при помощи вопросовъ, ведетъ ихъ къ выводу, который заключается въ слѣдующемъ: сложеніе употребляется при рѣшеніи задачъ въ такихъ случаяхъ, когда требуется: 1) узнать сумму нѣсколькихъ данныхъ чиселъ; 2) увеличить данное число на нѣсколько единицъ.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что неправильно, въ методическомъ отношеніи, сообщать дѣтямъ *готовые* выводы и понятія, напр., заставлять дѣтей прямо заучивать таблицу умноженія, термины и ихъ опредѣленія.

Глава вторая.

Первый концентръ.

Прямой и обратный послѣдовательный счетъ. — 10.

§ 6. Цѣль этого упражненія — научить дѣтей считать *сознательно,* т. е. такъ, чтобы дѣти знали порядокъ чиселъ и могли это знаніе примѣнить при счетѣ и выполненіи дѣйствій.

Надо замѣтить, что счетъ существенно отличается отъ присчитыванія и отсчитыванія по единицѣ, что часто смѣшиваютъ: при счетѣ каждый разъ *пересчитываютъ* всѣ предметы, а при присчитываніи по единицѣ, пользуясь усвоеннымъ порядкомъ чиселъ, дѣти сразу говорятъ результатъ. На практикѣ упражненія въ счетѣ, обыкновенно, опускаютъ, такъ какъ дѣти, при поступленіи въ школу, уже умѣютъ считать до десяти; тѣмъ не менѣе мы укажемъ и на упражненія въ счетѣ, потому что эти упражненія весьма полезны.

Упражненія въ счетѣ нужно вести на наглядныхъ пособіяхъ, напр., на шарикахъ, кубикахъ, спичкахъ, кружкахъ и т. п. Отложенъ, положимъ, одинъ кубикъ; учитель велитъ одному ученику отложить еще одинъ кубикъ и сосчитать, сколько кубиковъ получилось; ученикъ считаетъ: одинъ, два. Затѣмъ ученикъ откладываетъ еще одинъ кубикъ и считаетъ всѣ кубики: одинъ, два, три. Такъ продолжаютъ до десяти. Послѣ счета на наглядныхъ пособіяхъ слѣдуетъ отвлеченный счетъ: сначала по порядку, затѣмъ и вразбивку:

„Считай отъ четырехъ до семи! отъ шести до десяти!“ и т. д.

§ 7. Чтобы дѣти лучше усвоили порядокъ чиселъ, учитель упражняетъ ихъ въ обратномъ счетѣ. Ученикъ откладываетъ на счетахъ десять шариковъ.

„Отними одинъ шарикъ отъ десяти шариковъ! Сосчитай, сколько шариковъ осталось! Отними еще одинъ шарикъ! Сколько шариковъ теперь осталось?“

Такъ продолжаютъ до конца. Потомъ слѣдуетъ отвлеченный счетъ: десять, девять, восемь и т. д. Учитель велитъ всѣмъ или нѣсколькимъ ученикамъ считать *хоромъ*, чтобы они лучше усвоили числа и ихъ названія.

§ 8. На этой же ступени учитель ознакамливаетъ учениковъ съ числительными *порядковыми*. Съ этой цѣлью онъ, указывая на передняго ученика, говоритъ, что этотъ ученикъ *первый*. Ученики повторяютъ слово „первый“.

„*Который* будетъ этотъ ученикъ? (Учитель указываетъ на второго.) Покажи третьяго ученика!“

Въ такой послѣдовательности продолжаютъ до: десятый. Потомъ считаютъ проволоки счетовъ. Учитель указываетъ на первую сверху проволоку и спрашиваетъ:

„Которая проволока эта, считая сверху? Покажи вторую проволоку! третью! Считай по порядку дальше! Считай еще разъ! Покажи десятую проволоку! Которая *предыдущая?* Какъ она называется?“ и т. д.

Присчитываніе и отсчитываніе по единицѣ. — 10.

§ 9. Присчитываніе и отсчитываніе въ первомъ концентрѣ можно вести *вмѣстѣ,* потому что одно дѣйствіе разъясняетъ другое, и усвоеніе каждаго изъ нихъ не представляетъ большого труда для учащихся. Для обозначенія терминовъ: „сложить“ и „вычесть“ надо употреблять такія слова, которыя дѣтямъ лучше понятны; этому требованію удовлетворяютъ слова: „прибавить, присчитать“ и „отнять“.

Учитель откладываетъ на счетахъ одинъ шарикъ и спрашиваетъ учениковъ, сколько тамъ шариковъ. Потомъ онъ беретъ на той же проволокѣ еще одинъ шарикъ и спрашиваетъ, сколько тутъ шариковъ.

„Смотрите, что я дѣлаю! (Въ это время учитель къ одному шарику прибавляетъ одинъ шарикъ). Что я сдѣлалъ? Сколько шариковъ получилось? Какъ мы получили два шарика? У меня одна книга; я къ ней прибавляю еще одну книгу; сколько книгъ получается? Къ одному прибавить одинъ, сколько? — Отложи на счетахъ два шарика! Отложи на той же проволокѣ еще одинъ шарикъ! Прибавь къ двумъ шарикамъ одинъ шарикъ! Сколько шариковъ получилось? Какъ получились три шарика? Если къ двумъ прибавить одинъ, сколько получается? Сколько надо прибавить къ двумъ, чтобы получить три?“ и т. д. до: къ девяти прибавить одинъ, получается десять.

Послѣ упражненій въ присчитываніи на 1) наглядныхъ пособіяхъ слѣдуетъ присчитываніе 2) отвлеченно — по 3) порядку и 4) вразбивку.

„Къ пяти прибавить одинъ, сколько? Шесть да одинъ, сколько? Къ девяти присчитать одинъ, сколько получается?“

§ 10. За упражненіями въ присчитываніи слѣдуетъ отсчитываніе.

„Отложи на счетахъ два шарика. Смотрите, что я буду дѣлать! (Учитель отнимаетъ отъ двухъ шариковъ одинъ шарикъ.) Что я сдѣлалъ? Сколько шариковъ осталось? Сколько нужно отнять отъ двухъ, чтобы остался одинъ?

Сколько надо присчитать къ одному, чтобы получить два? — Отложи на счетахъ три шарика! Отними отъ трехъ шариковъ одинъ шарикъ! Сколько шариковъ осталось? Если имѣемъ два шарика и одинъ шарикъ, то какъ получить три шарика?“

Такъ продолжаютъ до десяти. Къ отвлеченному отсчитыванію можно присоединить присчитываніе; напр., къ двумъ прибавить одинъ, отъ полученнаго отнять одинъ; сколько?

§ 11. Послѣ всего этого можно предлагать простыя задачи на присчитываніе и отсчитываніе по единицѣ. слож. и вычитані

Рѣшеніе задачи, сравнительно съ рѣшеніемъ примѣра, представляетъ *двойную* работу, потому что для рѣшенія задачи надо: 1) выдѣлить *ариѳметическое содержаніе* ея, 2) *выполнить* то или другое дѣйствіе. Выдѣленіе числового содержанія задачи труднѣе, чѣмъ выполненіе дѣйствія, и требуетъ, сравнительно съ развитіемъ дѣтей, довольно серьезной умственной дѣятельности. Иногда оказывается, что дѣти могутъ дать вѣрный отвѣтъ на вопросъ задачи, но не въ состояніи объяснить, *какъ* они рѣшили задачу; при объясненіи же того же вопроса съ помощью нагляднаго пособія они хорошо поймутъ его. Слѣдовательно, объясненіе какого-нибудь вопроса ариѳметики на наглядномъ пособіи дѣтямъ легче понятно, чѣмъ рѣшеніе того же вопроса на примѣрахъ и задачахъ; на этомъ основаніи было бы неправильно — начинать разъясненіе какого-нибудь ариѳметическаго дѣйствія на задачахъ или вести его только на задачахъ.

Для примѣра возьмемъ слѣдующую задачу:

„Въ классѣ было три ученика, и *вошелъ* еще одинъ ученикъ. Сколько учениковъ стало въ классѣ?“

Учитель читаетъ задачу по предложеніямъ; ученики повторяютъ. Когда, такимъ образомъ, прочитана задача, то ученики повторяютъ всю задачу въ цѣломъ.

Для разъясненія содержанія и рѣшенія задачи учитель ставитъ вопросы:

„Сколько учениковъ было въ классѣ? Сколько учениковъ *прибавилось* къ тремъ? Сколько учениковъ стало? Какъ вы получили число 4? Слѣдовательно, какъ *рѣшить* задачу?“

Возьмемъ еще задачу:

„У мальчика было пять яблокъ. Онъ *съѣлъ* одно яблоко. Сколько яблокъ осталось у мальчика?“

Когда задача прочитана и повторена, учитель велитъ ученикамъ рѣшать ее. Если ученики даютъ вѣрный отвѣтъ, учитель спрашиваетъ, какъ рѣшить задачу. Въ случаѣ, если ученики затрудняются отвѣтить на предложенный вопросъ, учитель поступаетъ слѣдующимъ образомъ:

„Сколько яблокъ было у мальчика? Сколько яблокъ онъ съѣлъ? Всѣ ли яблоки остались? Если у насъ на столѣ будетъ пять яблокъ и мы *отнимемъ* одно, сколько яблокъ еще останется? Сколько яблокъ *отнялъ* мальчикъ отъ пяти? Сколько осталось? Какъ узнать, что четыре яблока? Какъ рѣшить задачу? (Чтобы рѣшить задачу, нужно отъ пяти яблокъ отнять одно яблоко, останется четыре яблока.)“

V. VI.

Присчитываніе и отсчитываніе группъ единицъ.

1) прис. **§ 12.** Эти упражненія надо начинать съ присчитыванія группы въ *двѣ* единицы., но три, четыре.

Учитель откладываетъ на одной проволокѣ счетовъ одинъ шарикъ и спрашиваетъ учениковъ, сколько тамъ шариковъ; затѣмъ онъ откладываетъ на той же проволокѣ два шарика, — отдѣльно отъ перваго шарика, и велитъ ученикамъ указать число этихъ шариковъ. Потомъ ведетъ такую бесѣду:

а. Наглядно.

„Къ одному шарику надо прибавить два шарика. (Это говоритъ учитель; ученики повторяютъ.) Прибавь къ одному шарику сначала одинъ шарикъ! Сколько получилось? Какъ получили эти два шарика? Сколько шариковъ еще надо прибавить? (Сколько шариковъ осталось отдѣльно?) *Придвинь* оставшійся шарикъ! Сколько шариковъ всего получилось? Сколько шариковъ прибавили къ одному? *Какъ прибавляли?* Такъ, сколько получается, если къ одному прибавить два? (Отвѣтъ повторяется нѣсколько разъ).“

Послѣ этого слѣдуетъ присчитываніе къ двумъ по два. На первой проволокѣ счетовъ отложено два раза по два шарика.

„Къ двумъ шарикамъ нужно прибавить два шарика. Какъ мы прибавляли къ одному два? Прибавляй къ двумъ два! Какъ прибавлялъ? Сколько получилось? Прибавь къ тремъ шарикамъ два шарика! Какъ прибавлялъ?“

Въ такой же послѣдовательности продолжаютъ до: къ восьми шарикамъ прибавить два шарика, получается десять шариковъ. Потомъ то же самое дѣлается б) отвлеченно — в) по порядку и г) вразбивку.

2) Отс. **§ 13.** Когда присчитываніе по два усвоено, учитель переходитъ къ *отсчитыванію* группы въ двѣ единицы. Съ этой цѣлью онъ беретъ на счетахъ три шарика и говоритъ ученикамъ, что отъ этихъ шариковъ надо отнять два шарика.

1. наглядно. отвлеченно. по порядку. вразбивку.

„Отними отъ трехъ шариковъ одинъ шарикъ! Сколько осталось? Сколько надо отнять отъ оставшихся? (Сколько всего надо было отнять? Сколько уже отняли? Какъ узнать, сколько еще нужно отнять?) Отними другой шарикъ! Сколько осталось? Сколько всего отняли? *Какъ отнимали?* Сколько нужно прибавить къ одному, чтобы получить три? Сколько надо отнять отъ трехъ, чтобы остался одинъ?“

Затѣмъ отнимаютъ по два отъ 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10.

§ 14. Послѣ отвлеченнаго присчитыванія и отсчитыванія, учитель задаетъ соотвѣтствующія задачи; напр.

„Въ одной кучкѣ три пера, а въ другой — два. Сколько всего перьевъ?“

Когда содержаніе задачи усвоено учениками, учитель обращается къ нимъ съ слѣдующими вопросами:

„Сколько перьевъ въ первой кучкѣ? Сколько — въ другой? Что нужно узнать? Сколько перьевъ станетъ въ первой кучкѣ, если туда изъ второй переложить *оба* пера? (Если ученики затрудняются, учитель спрашиваетъ ихъ, сколько перьевъ станетъ, если переложить одно перо, затѣмъ еще одно). Сколько перьевъ *прибавили* къ тремъ? Сколько получили? Какъ рѣшить задачу?“ Задачи.

Когда первая задача разобрана такъ подробно, то слѣдующія учитель предлагаетъ рѣшать *самостоятельно* и ставитъ наводящіе вопросы лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда ученики затрудняются.

§ 15. Упражненія въ присчитываніи 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, а также и въ отсчитываніи, ведутся подобно тому, какъ присчитываніе и отсчитываніе 2, при чемъ второе слагаемое и вычитаемое разлагаются на двѣ части, которыя прибавляются или отнимаются отдѣльно; напр., число три разлагается на 1 и 2, и сначала прибавляется или отнимается число 2 и потомъ 1; наконецъ, дѣлается выводъ, что, напр., къ одному прибавить три, получается четыре. Съ практической точки зрѣнія этотъ выводъ необходимъ при присчитываніи слѣдующаго числа, а съ теоретической — онъ нуженъ для *завершенія* процесса разсудочной дѣятельности.

VII. **§ 16.** Между задачами задаются примѣры на *бѣглое* вычисленіе. Цѣль этого упражненія — учить дѣтей считать *быстро (бѣгло)* и притомъ *вѣрно.* Такихъ примѣровъ два вида: одинъ видъ, когда учитель называетъ только два числа, обозначаетъ дѣйствіе, которое надо выполнить надъ ними, и *выжидаетъ* пока ученики произведутъ означенное дѣйствіе; другой видъ, когда учитель называетъ *нѣсколько чиселъ,* обозначаетъ ихъ дѣйствія и предоставляетъ ученикамъ рѣшать заданный примѣръ.

Первый видъ примѣровъ для начинающихъ учениковъ легче, но не слѣдуетъ упускать изъ виду и второй видъ, потому что такіе примѣры пріучаютъ дѣтей запоминать сразу нѣсколько чиселъ и, такимъ образомъ, развиваютъ память ихъ.

Примѣры на бѣглое вычисленіе надо задавать слѣдующимъ образомъ:

„Къ 2 прибавить 2, отъ полученнаго отнять 1; сколько?“

Когда ученики достаточно освоились съ рѣшеніемъ примѣровъ на бѣглое вычисленіе, можно читать *короче:*

„Къ 2 прибавить 2, отнять 1; сколько?“

VIII. **§ 17.** Къ присчитыванію и отсчитыванію группъ единицъ примыкаетъ сравненіе чиселъ въ *разностномъ* отношеніи и ознакомленіе дѣтей съ выраженіями: *„поровну, больше, меньше, увеличить и уменьшить на нѣсколько единицъ.“*

На первой проволокѣ счетовъ отложено 4 шарика.

Сравненіе

„Сколько шариковъ отложено на первой проволокѣ? Отложи на второй проволокѣ *столько же* шариковъ! Сколько шариковъ теперь на каждой проволокѣ? Теперь на *обѣихъ* проволокахъ шариковъ *поровну.* Повтори! по скольку шариковъ на каждой проволокѣ? *Когда* можно говорить, что шариковъ поровну? Если на одной проволокѣ три шарика, а на другой четыре, будетъ ли поровну? — Отложи на первой проволокѣ семь шариковъ! Отложи на второй проволокѣ столько же! Можно ли теперь говорить, что на обѣихъ проволокахъ шариковъ поровну? Почему можно? — У одного ученика 2 грифеля, а у другого столько же; сколько грифелей у другого ученика? Почему вы говорите, что 2 грифеля?

Откинь на первой и второй проволокахъ по 3 шарика! Что можно сказать о *числѣ* шариковъ, расположенныхъ на первой и второй проволокахъ? Придвинь къ первымъ тремъ шарикамъ одинъ шарикъ! Сколько получилось? На которой проволокѣ шариковъ *больше?* Что больше, 3 или 4?

Сколько надо отнять отъ 4, чтобы получить 3? Сколько надо отнять отъ 4, чтобы остался одинъ? Отними отъ 4 шариковъ три шарика! Сколько осталось? *На сколько* четыре шарика больше трехъ шариковъ? Какъ мы это узнали? Узнай, на сколько 3 шарика больше 2 шариковъ! Какъ ты это узналъ? Узнайте, на сколько 4 больше 1! 5 больше 3! Какъ это узнали? — У одного мальчика 4 груши, а у другого 7; у кого изъ нихъ больше и на сколько?“

Если ученики не даютъ вѣрнаго отвѣта, учитель спрашиваетъ ихъ, на сколько семь шариковъ больше четырехъ шариковъ и какъ это узнать, потомъ онъ спрашиваетъ, что требуется узнать въ задачѣ и какъ узнать. Послѣ ряда такихъ вопросовъ ученики поймутъ, какъ рѣшить задачу.

„Отложи на одной проволокѣ 3 шарика! Отложи на другой проволокѣ *на два шарика больше*! Сколько шариковъ будетъ на второй проволокѣ? — На одномъ столѣ 4 книги, а на другомъ *двумя* книгами больше; сколько книгъ на другомъ столѣ? Какъ узнали? *Почему* нужно къ 4 книгамъ прибавить 2 книги?“

Если ученики не могутъ рѣшить самостоятельно, учитель ставитъ наводящіе вопросы:

„Сколько книгъ на первомъ столѣ? Если на обоихъ столахъ книгъ поровну, то сколько ихъ будетъ и на второмъ? Но на сколько книгъ въ дѣйствительности больше на второмъ столѣ? Сколько книгъ станетъ на первомъ столѣ, если туда положить 2 книги? Сколько книгъ прибавили къ 4 книгамъ? Сколько получили? Почему нужно къ 4 книгамъ прибавить 2 книги?“

Подобнымъ образомъ учитель ознакамливаетъ учащихся съ выраженіями: „меньше, увеличить и уменьшить на нѣсколько единицъ,“ причемъ задаетъ задачи съ соотвѣтствующими выраженіями, какъ и такія задачи, въ которыя входятъ выраженія: *„дороже, дешевле, легче, тяжеле, короче, длиннѣе“* и т. д.

§ 18. Когда ученики безъ труда могутъ сложить и вычесть всякія два или больше чиселъ, когда результатъ не больше десяти, и когда они достаточно освоились съ рѣшеніемъ простыхъ задачъ, то можно имъ задавать *сложныя* задачи, т. е. такія, при рѣшеніи которыхъ надо выполнить болѣе одного ариѳметическаго дѣйствія (въ данномъ случаѣ выполнить сложеніе и вычитаніе).

При рѣшеніи сложной задачи, учитель долженъ указать ученикамъ на *порядокъ* рѣшенія простыхъ задачъ, на которыя разлагается сложная задача, или на *планъ рѣшенія* сложной задачи.

Разложеніе или анализъ и составленіе плана рѣшенія задачи — работа трудная, а потому ученики нуждаются въ помощи со стороны учителя, который долженъ ставить вопросы, ведущіе ихъ къ опредѣленной цѣли. Чтобы показать, какъ это дѣлается, возьмемъ слѣдующую сложную задачу:

„Тетрадь стоитъ 5 коп., а карандашъ на 2 коп. дешевле. Сколько стоитъ тетрадь и карандашъ *вмѣстѣ?*"

Когда содержаніе и данныя задачи усвоены учениками, учитель приступаетъ къ анализу ея. Съ этой цѣлью онъ предлагаетъ слѣдующіе вопросы:

„Сколько стоитъ тетрадь? Что сказано въ задачѣ о стоимости карандаша? Знаемъ ли мы, сколько стоитъ карандашъ? Что требуется узнать въ задачѣ? Стоимость какихъ вещей надо знать, чтобы отвѣтить на вопросъ задачи? Цѣну какой вещи уже знаемъ? Что еще надо узнать? Если узнаемъ стоимость карандаша, что тогда можно будетъ узнать? Итакъ, что узнать сначала? Что — потомъ? Сколько отдѣльныхъ вопросовъ при рѣшеніи этой задачи? — 2) Скажи оба вопроса! Совокупность этихъ вопросовъ составляетъ *планъ рѣшенія* данной задачи. (Это говоритъ учитель; ученики повторяютъ.) Скажи планъ рѣшенія данной задачи! — 3) Какъ узнать цѣну карандаша? Какъ рѣшить первый вопросъ? Какъ рѣшить второй вопросъ? — 4) Узнайте, сколько стоитъ карандашъ! Какъ узнали? Рѣшите второй вопросъ! Какъ рѣшили? Какъ отвѣтить на вопросъ задачи?"

Разсматривая вышеизложенное, видимъ, что при рѣшеніи сложной ариѳметической задачи различаются слѣдующіе моменты: 1) *анализъ* или *разсужденіе,* при помощи котораго сложная задача разлагается на рядъ простыхъ задачъ; 2) *синтезъ* или *планъ рѣшенія,* т. е. порядокъ простыхъ задачъ; 3) *опредѣленіе,* какимъ дѣйствіемъ рѣшается каждая простая задача; 4) *выполненіе дѣйствій.*

§ 19. *Самостоятельной работой* на этой ступени обученія служитъ письмо цифръ, рѣшеніе примѣровъ на сложеніе и вычитаніе въ предѣлѣ перваго десятка и запись рѣшенія задачъ.

Письму цифръ необходимо дѣтей учить съ первыхъ же уроковъ ариѳметики, причемъ сначала надо писать *римскія* цифры, такъ какъ ихъ начертаніе легче, а потомъ и *арабскія.* Начертаніе первыхъ десяти римскихъ цифръ, какъ извѣстно, слѣдующее:

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X.

Арабскія цифры, при обученіи дѣтей письму ихъ, нужно располагать въ *генетическомъ* порядкѣ:

1, 4, 0, 6, 9, 3, 5, 2, 7, 8.

Если же дѣти, при поступленіи въ школу уже умѣютъ писать цифры, то, для *повѣрки* ихъ знаній, учитель велитъ имъ написать одну за другою, всѣ цифры *въ порядкѣ однозначныхъ чиселъ,* и по усмотрѣнію упражнятъ дѣтей въ письмѣ каждой цифры отдѣльно для достиженія цѣлей калиграфическихъ.

Параллельно съ устными упражненіями въ прямомъ и обратномъ счетѣ нужно вести *письменныя* упражненія; для чего употребляются числовыя фигуры: ученикъ рисуетъ фигуру въ 3 кружка да еще 1 кружокъ, считаетъ, сколько кружковъ получилось, и сверху пишетъ цифру 4; такимъ образомъ ученикъ упражняется въ счетѣ и письмѣ цифръ.

При присчитываніи и отсчитываніи необходимо ознакомить учащихся со знаками: плюсъ (+) и минусъ (—) и съ записью примѣровъ на сложеніе и вычитаніе. Это можно дѣлать послѣ того, какъ дѣти научились прибавлять по 2 къ числамъ перваго десятка.

Учитель говоритъ ученикамъ, что онъ имъ покажетъ, какъ записать, напр., *къ 2 прибавить 2;* онъ велитъ ученикамъ произнести нѣсколько разъ: къ 2 прибавить 2, получается 4; а потомъ спрашиваетъ:

„Какое первое слово мы сказали? Какую первую цифру нужно будетъ писать? (Учитель пишетъ на доскѣ цифру 2.) Какое слѣдующее слово? (Прибавить.) Смотрите, какой знакъ я поставлю вмѣсто слова прибавить! (Учитель ставитъ прямой крестикъ.) Какой знакъ я поставилъ? Вмѣсто какого слова поставленъ этотъ знакъ? Сколько нужно прибавить къ 2? Какую цифру надо писать? (Учитель пишетъ цифру 2.) Прочти написанное! Какое слѣдующее слово? Вмѣсто этого слова я поставлю двѣ лежачія черточки. Вмѣсто какого слова поставлены лежачія черточки? Прочти, что мы написали! Сколько получается? Какую послѣднюю цифру нужно писать?“

Учитель вызываетъ учениковъ къ классной доскѣ, велитъ показывать написанныя цифры и знаки и читать; такъ дѣлается нѣсколько разъ. Затѣмъ пишутся другіе примѣры и читаются.

Подобнымъ же образомъ можно ознакомить учащихся со знакомъ вычитанія.

Когда задача рѣшена, то полезно записать ея рѣшеніе; при этомъ ученики лучше усваиваютъ рѣшеніе задачи, упражняются въ правильномъ употребленіи знаковъ дѣйствій и въ письмѣ цифръ. Рѣшеніе надо записывать въ *строчки* и каждое дѣйствіе нужно располагать въ отдѣльной строкѣ. Для примѣра возьмемъ разобранную нами сложную задачу. Запись рѣшенія этой задачи располагается слѣдующимъ образомъ:

$$5 - 2 = 3.$$
$$5 + 3 = 8.$$

Чтобы ученики *сознательнѣе* относились къ содержанію написаннаго, нужно при чтеніи выговаривать числа съ *наименованіями:* „отъ 5 коп. отнять 2 коп., получается 3 коп.; къ 5 коп. прибавить 3 коп., получается 8 коп.“

Умноженіе. IX Счетъ равными групп

§ 20. Умноженію даютъ слѣдующее *частное* опредѣленіе: „Умноженіе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго одно число берется слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ содержится въ другомъ.“

На основаніи этого опредѣленія, умножить 5 на 2 значитъ — 5 взять слагаемымъ 2 раза: къ 5 прибавить 5, получается 10.

Такъ какъ это опредѣленіе умноженія дѣтямъ понять легче, чѣмъ *общее,* то слѣдуетъ ознакомленіе ихъ съ означеннымъ дѣйствіемъ начинать съ сложенія и переходить къ умноженію, какъ сложенію равныхъ слагаемыхъ. Результатомъ упражненій въ умноженіи чиселъ должно быть отчетливое знаніе таблицы умноженія въ предѣлѣ перваго десятка и *умѣнье* примѣнить это знаніе при рѣшеніи задачъ общежитейскаго характера; и такъ, неправильно и нецѣлесообразно заставлять дѣтей заучивать таблицу умноженія *механически, безсознательно;* напротивъ, ознакомленіе дѣтей съ умноженіемъ и другими дѣйствіями должно быть *вполнѣ сознательное.*

§ 21. Учитель откладываетъ на одной проволокѣ счетовъ 2 шарика и спрашиваетъ учениковъ:

„Сколько тутъ шариковъ? Сколько разъ мы взяли по 2 шарика? (Отвѣтъ повторяется нѣсколько разъ.) Сколько шариковъ получилось? *Какъ* мы получили два шарика?

Итакъ, сколько получается, если 2 взять одинъ разъ? — Отложи еще 2 шарика! (Шарики располагаются *попарно.*) Сколько разъ теперь взято по 2 шарика? Сколько шариковъ всего получилось? Сколько получается, если 2 взять одинъ разъ? Сколько получается, если 2 взять 2 раза? Возьми 2 шарика три раза! Сколько получилось? Какъ получили 6 шариковъ? *По скольку* шариковъ мы брали каждый разъ? Отложи 4 раза по 2 шарика! Сколько получилось? 2 взять 4 раза, сколько? Откинь еще разъ по 2 шарика! Сколько шариковъ теперь получилось? Какъ получили 10 шариковъ?

Отъ упражненій на наглядныхъ пособіяхъ учитель переходитъ къ упражненіямъ на отвлеченныхъ числахъ — по порядку и вразбивку — до тѣхъ поръ, пока ученики усвоятъ всѣ произведенія числа 2 на однозначныя числа.

Чтобы ученики имѣли возможность примѣнить изученную таблицу умноженія на практикѣ, учитель имъ задаетъ простыя задачи, въ родѣ слѣдующей:

„Одинъ карандашъ стоитъ 2 коп. Сколько надо заплатить за 3 такихъ же карандаша? — Сколько стоитъ 1 карандашъ? Сколько карандашей куплено? Сколько стоитъ *каждый* изъ нихъ? Сколько копеекъ надо будетъ заплатить за первый карандашъ? Сколько — за второй? За третій? *Сколько разъ* по 2 коп. нужно взять? Сколько получится, если 2 коп. взять 3 раза? Итакъ, сколько стоятъ 3 карандаша? Какъ узнать?“

Рѣшеніе задачъ нужно чередовать съ рѣшеніемъ примѣровъ на бѣглое вычисленіе, въ которые, кромѣ сложенія и вычитанія, входитъ умноженіе 2 на однозначныя числа.

Таблицы умноженія другихъ чиселъ составляются подобно тому, какъ таблица умноженія числа 2.

§ 22. Когда ученики изучили таблицу умноженія на 2, то можно ихъ ознакомить со *знакомъ умноженія.* Съ этою цѣлью учитель беретъ примѣръ: 2 взять 4 раза, получается 8. Ученики повторяютъ примѣръ нѣсколько разъ; затѣмъ учитель приступаетъ къ объясненію записи. (Для *наглядности* полезно отложить на счетахъ 4 раза по 2 шарика — попарно.) Учитель велитъ одному ученику полученное записать на классной доскѣ; получается такая запись:

$$2 + 2 + 2 + 2 = 8.$$

„Сколько разъ мы написали цифру 2? Сколько получилось? Это можно записать короче. (Учитель пишетъ во второй строкѣ: $2 \times 4 = 8$.) Какую первую цифру я написалъ? Какой знакъ поставленъ послѣ этой цифры? (Косой крестикъ.) Какой знакъ въ первой строкѣ? Вмѣсто какого слова ставится прямой крестикъ? Косой крестикъ поставленъ вмѣсто слова *взять*. Повтори! Читай то, что я написалъ во второй строкѣ! Сколько цифръ въ первой строкѣ? Сколько — во второй? Въ которомъ случаѣ записано *короче?*"

Потомъ ученики списываютъ то же на аспидныхъ доскахъ, пишутъ и другіе примѣры и читаютъ.

§ 23. Чтобы показать ученикамъ, когда сложеніе можно замѣнить умноженіемъ и когда нельзя, учитель пишетъ на доскѣ примѣръ: $2 + 3 = 5$ и велитъ одному ученику прочесть написанное.

„Какой знакъ поставленъ вмѣсто слова прибавить? Если тутъ поставить косой крестикъ, сколько тогда получимъ? (Учитель пишетъ во второй строкѣ: $2 \times 3 = 6$.) Какое число получили въ первой строкѣ? Какое — во второй? Когда больше получили? Какое число измѣнилось? Отчего измѣнилось? *Можно ли* тутъ знакъ прибавить замѣнить знакомъ взять? — (Учитель пишетъ въ первой строкѣ вмѣсто 3 число 2.) Что я сдѣлалъ? Прочти полученное! Сколько разъ надо взять число 2? Какъ это записать со знакомъ взять? Запиши! — Къ 4 прибавить 6, сколько? Запиши! Можно ли это записать со знакомъ взять? Скажи еще такой примѣръ!"

§ 24. Къ умноженію примыкаетъ ознакомленіе учащихся съ тѣми мѣрами длины и вѣса, единичное отношеніе которыхъ не превышаетъ десяти; напр., съ *саженью, аршиномъ, футомъ;* съ *лотомъ* и *золотникомъ;* съ *недѣлею* и *днемъ;* съ *монетами* въ *1, 2, 3, 5 и 10 коп.*

Учителю нужно имѣть подъ руками образцы главныхъ единицъ мѣръ длины и вѣса, чтобы наглядно можно было ознакомить учащихся съ данными мѣрами; если же ихъ не имѣется, то, въ крайнемъ случаѣ, можно обойтись и безъ нихъ, но тогда надо ученикамъ показывать *приблизительную* длину и соотношеніе мѣръ длины на знакомыхъ ученикамъ предметахъ; напр., взять длину и ширину парты, каѳедры, длину карандаша и т. п.

Это дѣлается съ тою цѣлью, чтобы ученики видѣли, *какъ* и *гдѣ* примѣняются различныя мѣры длины при измѣренiи линiй, и составили ясное понятiе о длинѣ каждой мѣры какъ и объ отношенiи различныхъ мѣръ между собою.

Ознакомленiе учащихся съ саженью и аршиномъ можно вести такъ: Учитель спрашиваетъ учениковъ, не знаютъ ли они, чѣмъ можно измѣрить длину стола, каѳедры, комнаты. Если ученики не даютъ отвѣта или даютъ невѣрный отвѣтъ, учитель самъ называетъ тѣ мѣры, которыми измѣряются размѣры названныхъ предметовъ. Затѣмъ онъ беретъ сажень и спрашиваетъ дѣтей, какъ называется данная мѣра. (Если дѣти не знаютъ, учитель самъ говоритъ.) Послѣ этого производится измѣренiе длины и ширины классной комнаты, причемъ всѣ ученики считаютъ, сколько разъ сажень уложилась. Когда это сдѣлано, то измѣряется длина меньшихъ предметовъ, напр., длина парты, и дѣлается выводъ, что если предметъ меньше, то его длину неудобно измѣрять саженью и тогда употребляется меньшая мѣра, напр., аршинъ. Потомъ производится измѣренiе длины парты аршиномъ; наконецъ аршинъ откладывается по длинѣ сажени и считается, сколько разъ онъ уложился; ученики дѣлаютъ выводъ, что въ сажени три аршина или сажень содержитъ три аршина.

Въ связи съ этимъ находится раздробленiе саженей въ аршины; напр. 1 саж. 2 арш., сколько аршинъ? 2 саж. 1 арш., сколько аршинъ? Длина стола 1 саж. 2 арш., сколько всего аршинъ въ длинѣ стола?

§ 25. Въ задачи, задаваемыя ученикамъ на этой ступени обученiя, могутъ входить, кромѣ упомянутыхъ словъ, и слѣдующiя: *фунтъ, четверикъ, четверть, ведро, годъ, мѣсяцъ, часъ, верста.* Если значенiе этихъ словъ дѣтямъ непонятно, то достаточно короткаго объясненiя, чтобы оно стало понятно; напр. четверикъ — мѣра хлѣба; четверть — тоже мѣра хлѣба, но больше четверика и т. п.

Дѣленiе на равныя части.

X. **§ 26.** Дѣленiе на равныя части должно предшествовать дѣленiю по содержанiю, такъ какъ первое въ методическомъ отношенiи легче второго. Но ознакомленiе съ тѣмъ и другимъ смысломъ дѣленiя должно быть ведено совершенно отдѣльно; въ противномъ случаѣ дѣти смѣшиваютъ дѣленiе на равныя части съ дѣленiемъ по содержанiю.

Ознакомленіе съ дѣленіемъ на равныя части нужно начинать на наглядныхъ пособіяхъ и переходить къ дѣленію отвлеченныхъ чиселъ и къ рѣшенію соотвѣтствующихъ задачъ. Наглядными пособіями могутъ служить слѣдующія: листъ бумаги, бечевка, черта, классные счеты, ариѳметическій ящикъ и др.

§ 27. Учитель беретъ листъ бумаги и говоритъ ученикамъ, что данный листъ бумаги нужно раздѣлить на *двѣ равныя* части или *пополамъ*; ученики это повторяютъ. Затѣмъ учитель перегибаетъ листъ пополамъ и перерѣзываетъ.

„Что мы сдѣлали? Сколько частей получилось? Сравните эти части между собою! (Учитель накладываетъ одну часть на другую, такъ чтобы первая покрыла вторую.) Сравнивая, что видите? Такъ, на сколько *равныхъ* частей мы раздѣлили листъ бумаги? Раздѣли другой листъ бумаги на двѣ равныя части! Каждая часть называется *половиною.* Повтори! Сколько половинъ въ листѣ? Какъ получить половину листа бумаги? Я провелъ на классной доскѣ черту; какъ получить половину ея? Какъ получить половину веревки?“

Когда ученики ознакомились съ выраженіемъ *дѣлить на двѣ равныя части,* то можно перейти къ дѣленію четныхъ чиселъ перваго десятка на 2 равныя части или пополамъ; съ этой цѣлью учитель велитъ отложить на одной проволокѣ счетовъ 2 шарика; затѣмъ онъ *медленно отодвигаетъ одинъ шарикъ отъ другого.*

„На сколько частей мы раздвинули 2 шарика? Сколько получилось въ каждой части? Сравните эти части между собою! Что видите? Итакъ, какія части получились отъ дѣленія 2 *пополамъ?* 2 раздѣлить на 2 равныя части, сколько?“

Послѣ этого учитель откладываетъ 4 шарика и *одновременно* отодвигаетъ крайніе шарики; когда это повторено два раза, то 4 шарика раздѣлены на 2 равныя части.

„Сколько шариковъ отложено? На сколько частей мы раздѣлили 4 шарика? *Каковы* эти части между собою? Сколько получается, если 4 раздѣлить на 2 равныя части? Откинь на счетахъ 4 шарика и раздѣли ихъ пополамъ! Сколько получилось въ каждой части? Отложи 6 шариковъ! Раздѣли ихъ пополамъ! (Въ случаѣ затрудненія, учитель указываетъ, что надо поступать такъ же, какъ и при дѣленіи 4 пополамъ.) Сколько получается въ каждой части? Раздѣли 8 шариковъ пополамъ! Сколько получается въ каждой части? 8 раздѣлить пополамъ, сколько? Раздѣлите 6 пополамъ! Сколько получили? 10 раздѣлить на двѣ равныя части, сколько получается?"

Когда усвоено дѣленіе чиселъ перваго десятка на 2 равныя части, то можно задавать вопросы, связывающіе дѣленіе съ умноженіемъ; напр.

„Сколько получится, если 4 раздѣлить на 2 равныя части? *(Дѣленіе на равныя части.)* Какое число надо взять 2 раза, чтобы получить 4? *(Умноженіе.)* Какое число нужно взять 5 разъ, чтобы получить 10?" и т. д.

§ 28. Когда дѣленіе на 2 равныя части усвоено учениками, надо имъ задавать соотвѣтствующія задачи; напр.

„Два мальчика раздѣлили между собою поровну 4 пера. Сколько перьевъ получилъ каждый изъ нихъ?"

Можетъ случиться, что ученики дадутъ вѣрный отвѣтъ, но не сумѣютъ объяснить, какъ они рѣшили задачу; тогда учитель прибѣгаетъ къ наводящимъ вопросамъ.

„Сколько было перьевъ всего? *Какъ* раздѣлили мальчики эти перья? На сколько равныхъ частей мальчики раздѣлили четыре пера? Сколько получится, если 4 раздѣлить на 2 равныя части? Такъ, сколько перьевъ получилъ каждый мальчикъ? Какъ это узнать? (Отвѣтъ повторяется нѣсколько разъ.) Какъ рѣшить задачу? (Чтобы рѣшить задачу, нужно 4 пера раздѣлить на 2 равныя части, получается въ каждой части 2 пера.) Почему перья надо дѣлить на 2 *равныя* части? (Потому, что перья были раздѣлены *поровну* между двумя мальчиками.)"

§ 29. Къ устнымъ упражненіямъ примыкаютъ письменныя: запись рѣшенія примѣровъ и задачъ и ознакомленіе съ знакомъ дѣленія на равныя части: *черточкой.*

Ознакомить съ знакомъ дѣленія на равныя части можно такимъ же способомъ, какъ и съ знаками другихъ дѣйствій, а потому объ этомъ здѣсь говорить не будемъ.

Для предыдущей задачи получаемъ слѣдующую запись: $\frac{4}{2} = 2$. При чтеніи написаннаго рѣшенія, полезно употреблять наименованія: 4 пера раздѣлить на 2 равныя части, въ каждой части получается 2 пера.

Послѣ дѣленія на 2 равныя части, слѣдуетъ дѣленіе на 4 равныя части, потомъ на 8, 3, 6, 9, 5, 10 и 7 равныхъ частей. Дѣленіе на 4 сводится къ послѣдовательному дѣленію на 2 два раза; дѣленіе на 6 — къ дѣленію пополамъ и каждой половины — на три равныя части.

Дѣленіе по содержанію.

XI. **§ 30.** Ознакомленіе съ содержаніемъ одного числа въ другомъ представляетъ самую трудную работу въ первомъ концентрѣ — какъ для учителя, такъ и для учениковъ; поэтому самое ознакомленіе съ содержаніемъ надо вести весьма обдуманно, по заранѣе намѣченному плану. Результатомъ упражненій дѣтей въ содержаніи чиселъ должно быть ясное, отчетливое пониманіе, когда число дѣлить на равныя части, когда узнать содержаніе одного числа въ другомъ. Средствами для достиженія этой цѣли могутъ служить слѣдующія: 1) ознакомленіе съ содержаніемъ ведется совершенно *отдѣльно,* независимо отъ дѣленія на равныя части; 2) дѣлается различіе въ самомъ *процессѣ* ознакомленія дѣтей съ дѣленіемъ по содержанію и съ дѣленіемъ на равныя части; 3) въ томъ и другомъ случаѣ употребляется *особый знакъ* для обозначенія смысла дѣленія: при дѣленіи на равныя части — *черта* (—), при дѣленіи по содержанію — *двѣ точки* (:); 4) какъ въ томъ, такъ и другомъ случаѣ рѣшаются подходящія задачи, и выясняется, *какъ* рѣшать и *почему.*

§ 31. Прежде всего нужно ознакомить дѣтей съ выраженіемъ *содержится,* а потомъ и съ содержаніемъ 2; эту работу можно вести въ слѣдующей послѣдовательности: Учитель беретъ на счетахъ нѣсколько шариковъ, напр. 8, и спрашиваетъ учениковъ о числѣ ихъ; затѣмъ онъ отнимаетъ отъ 8 шариковъ по 2 шарика и обращается къ ученикамъ съ такими вопросами:

„Что я сдѣлалъ? (Вы отняли отъ 8 шариковъ 2 шарика.) Сколько разъ я отнялъ по 2 шарика? Сколько шариковъ осталось? Отними отъ 6 шариковъ 2 шарика! Сколько разъ теперь всего отняли? Сколько шариковъ еще осталось? Отнимай отъ оставшихся шариковъ по 2! Сколько разъ можно отнять? Сколько разъ всего можно отнять отъ 8 шариковъ по 2 шарика? — Отложи на счетахъ 10 шариковъ! Отнимай по 2 шарика отъ 10 шариковъ и считай вслухъ, сколько разъ отнялъ! Сколько разъ отъ 10 можно отнять по 2? Сколько разъ отъ 2 можно отнять по 2? Сколько разъ отъ 8 можно отнять по 2? (Отъ 8 можно отнять по 2 — четыре раза.) *Вмѣсто отнять четыре раза* говорятъ *содержится четыре раза.* (Это говоритъ учитель; ученики повторяютъ.) Какъ говорятъ вмѣсто отнять четыре раза? Сколько разъ въ 8 содержится 2? Сколько разъ въ 2 содержится 2? Какъ это узнать? Узнайте, сколько разъ въ 4 содержится 2! Какъ узнали? Сколько разъ въ 6 содержится 2? въ 8? 10?"

§ 32. Когда дѣти это усвоили, учитель переходитъ къ ознакомленію ихъ съ *знакомъ содержится* (:).

„Сколько разъ въ 6 содержится 2? Какъ узнать? (Чтобы узнать, нужно отъ 6 отнимать по 2, и считать, сколько разъ отняли.) Иди, запиши это на классной доскѣ! (Получается слѣдующая запись: $6 - 2 - 2 - 2 = 0$.) Прочти написанное! Это можно записать короче. Какую первую цифру нужно писать? Сколько разъ въ 6 содержится 2? Какое второе слово мы сказали? Смотрите, какой знакъ я поставлю вмѣсто слова „содержится"! Какой знакъ я поставилъ? (Двѣ точки.) Вмѣсто какого слова поставленъ этотъ знакъ? Что дальше надо писать? (Учитель пишетъ цифру 2.) Прочти написанное! Сколько получается? (Учитель ставитъ знакъ равенства и пишетъ цифру 3.) Читай все написанное! Напишите то же самое на аспидныхъ доскахъ! Прочти написанное! — Сколько разъ въ 8 содержится 2? Какъ это записать? Напишите!" и т. д.

§ 33. Послѣ этого задаются задачи на содержаніе 2. Примѣромъ такихъ задачъ можетъ служить слѣдующая:

„Фунтъ хлѣба стоитъ 2 коп. Сколько фунтовъ этого хлѣба можно купить на 6 коп.?"

Можетъ быть ученики дадутъ вѣрный отвѣтъ на вопросъ задачи, но не будутъ въ состояніи объяснить, *какъ* они нашли результатъ. Чтобы это разъяснить, надо употреблять наводящіе вопросы.

„Сколько стоитъ фунтъ хлѣба? На сколько копеекъ требуется купить хлѣба? Если купить 1 фунтъ хлѣба, то сколько копеекъ нужно будетъ заплатить? Сколько копеекъ еще останется? Какъ это узнать? Сколько копеекъ надо будетъ дать за *второй* фунтъ хлѣба? Сколько копеекъ еще останется? Какъ узнать? Сколько фунтовъ уже будетъ куплено? Сколько денегъ еще осталось? Сколько хлѣба можно купить на *оставшіяся* деньги? Останутся ли еще деньги? Итакъ, сколько фунтовъ хлѣба всего можно купить? *По скольку* копеекъ отнимали отъ 6 коп.? Сколько разъ можно было отнять? Какъ говорятъ вмѣсто отнять три раза? Сколько разъ въ 6 копейкахъ содержится 2 коп.? Сколько фунтовъ хлѣба можно будетъ купить? Какъ это *сразу* узнать? Слѣдовательно, какъ рѣшить задачу?"

Упражненія въ содержаніи чиселъ: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 надо вести такимъ же образомъ, какъ и упражненія въ содержаніи 2, т. е. сначала на наглядныхъ пособіяхъ, потомъ на задачахъ и примѣрахъ.

§ 34. Чтобы дѣти поняли различіе между дѣленіемъ на равныя части и дѣленіемъ по содержанію, надо задачу, рѣшаемую дѣленіемъ на равныя части, преобразовать такъ, чтобы надо было ее рѣшать дѣленіемъ по содержанію. Для примѣра возьмемъ слѣдующую задачу:

„Ученица купила на 9 коп. 3 одинаковыхъ карандаша. Сколько стоитъ каждый карандашъ?"

Для рѣшенія этой задачи, нужно 9 коп. раздѣлить на 3 равныя части, въ каждой части получается 3 коп.

Преобразуемъ задачу такъ, чтобы надо было ее рѣшать дѣленіемъ по содержанію; получаемъ слѣдующее:

„Ученица купила за 9 коп. нѣсколько одинаковыхъ карандашей, причемъ за каждый карандашъ она платила по 3 коп. Сколько карандашей она купила?"

Куплено столько карандашей, сколько разъ отъ 9 коп. можно отнять по 3 коп. или сколько разъ въ 9 коп. содержится 3 коп.

Когда одна задача такъ разобрана, то можно предлагать ученикамъ *преобразовать* данную задачу, чтобы вмѣсто дѣленія на равныя части было дѣленіе по содержанію, и наоборотъ; и *составить* задачу а. на дѣленіе на равныя части, б. на дѣленіе по содержанію.

Этихъ упражненій будетъ достаточно, чтобы ученики *ясно, сознательно* и *отчетливо* различали оба смысла дѣленія.

XII. **§ 35.** Къ дѣленію по содержанію примыкаетъ *кратное* сравненіе чиселъ; эта работа представляетъ тѣмъ меньшій трудъ, чѣмъ лучше ученики усвоили содержаніе одного числа въ другомъ и разностное сравненіе чиселъ.

Сравненіе чиселъ въ кратномъ отношеніи.

Сравненіе чиселъ въ кратномъ отношенім можно вести слѣдующимъ образомъ:

„Отложи на первой проволокѣ счетовъ 2 шарика! Отложи на второй проволокѣ столько же шариковъ! Поровну ли теперь тамъ шариковъ? Возьми на первой проволокѣ еще два раза по 2 шарика! На которой проволокѣ шариковъ *больше? На сколько* больше? Какъ это узнать? Итакъ, на сколько 6 больше 2? — Сколько разъ по 2 шарика на первой проволокѣ? Сколько разъ по 2 шарика на второй проволокѣ? Сколько разъ надо взять 2 шарика, чтобы получить 6 шариковъ? *Во сколько разъ* 6 больше 2? Сколько разъ надо взять 2, чтобы получить 8? Во сколько разъ 8 больше 2? Во сколько разъ 10 больше 2? Сколько разъ отъ 10 можно отнять по 2? Сколько разъ въ 10 содержится 2? Что показываетъ число 5 въ этомъ случаѣ? Слѣдовательно, *какъ узнать,* во сколько разъ 10 больше 2? Во сколько разъ 8 больше 2? Какъ узнать? Во сколько разъ 9 больше 3? Какъ это узнать? Узнайте, во сколько разъ 6 больше 3! Какъ узнали?“ и т. д.

Послѣ упражненій надъ отвлеченными числами, надо перейти къ задачамъ.

„У одного мальчика 8 перьевъ, а у другого — 2 пера. Во сколько разъ у перваго больше, чѣмъ у второго?“

Для рѣшенія этой задачи, нужно узнать, сколько разъ въ 8 перьяхъ содержится 2 пера; содержится 4 раза. Итакъ, у перваго мальчика перьевъ больше, чѣмъ у второго, въ 4 раза.

Надо предлагать и такія задачи, въ которыхъ требуется узнать, на сколько одно число больше другого; это дѣлается съ тою цѣлью, чтобы ученики пріучились *отличать* вопросы: „во сколько разъ“ и „на сколько“ и научились вѣрно отвѣтить на предложенные вопросы.

Рѣшая оба вида задачъ, ученики видятъ *разницу* въ рѣшеніи такого рода задачъ и въ результатахъ, полученныхъ отъ рѣшенія; а потому будутъ сознательно примѣнять выраженія: „на сколько“ н „во сколько разъ.“

§ 36. Когда пройдены всѣ четыре дѣйствія, нужно учащимся задавать сложныя задачи; но эти задачи должны быть *чисто ариѳметическія,* а не алгебраическаго характера, такъ какъ послѣднія, вслѣдствіе своей трудности, маленькимъ дѣтямъ непосильны. Рѣшеніе задачъ дѣти записываютъ въ *строчки,* а всѣ вычисленія производятъ *устно.* Кромѣ того дѣти пишутъ объясненіе рѣшенія задачи; эту работу они исполняютъ на урокѣ подъ руководствомъ учителя. Такая работа, кромѣ цѣлей чисто ариѳметическихъ, имѣетъ значеніе въ *образовательномъ* отношеніи, такъ какъ пріучаетъ дѣтей излагать свои мысли письменно. Для послѣдней изъ вышеупомянутыхъ задачъ дѣти пишутъ слѣдующее объясненіе:

„Чтобы рѣшить задачу, нужно узнать, сколько разъ въ 8 перьяхъ содержится 2 пера; содержится 5 разъ. Итакъ, у перваго мальчика перьевъ больше, чѣмъ у второго, въ 5 разъ.“

§ 37. Въ заключеніе скажемъ нѣсколько словъ о времени, потребномъ на прохожденіе перваго концентра.

Обыкновенно полагаютъ, что первый концентръ представляетъ работу легкую какъ для учителя, такъ и для учениковъ, а потому на немъ *долго* останавливаться нѣтъ надобности. Но это такъ только кажется. — Первый концентръ есть *основаніе* всего курса ариѳметики; поэтому необходимо, чтобы дѣти хорошо понимали и знали его матеріалъ. Только при соблюденіи этого условія, и дальнѣйшее обученіе будетъ успѣшное.

Практика показываетъ, что въ первомъ полугодіи достаточно пройти сложеніе и вычитаніе, а во второмъ — умноженіе, дѣленіе и изъ второго концентра — нумерацію.

Глава третья.

Второй концентръ

Нумерація или счисленіе.

§ 38. Прохожденіе нумераціи чиселъ первой сотни слѣдуетъ начать съ ознакомленія учащихся съ новыми счетными единицами: *десяткомъ* и *сотней.*

Когда дѣти уже умѣютъ считать десятками въ предѣлѣ первой сотни, нужно ихъ учить производить дѣйствія надъ полными десятками. Это упражненіе не представляетъ большого труда, такъ какъ оно сводится къ производству дѣйствій надъ однозначными числами;

напр. если надо сложить 2 десятка и 3 десятка, то въ результатѣ получается то же число, что и отъ сложенія 2 единицъ и 3 единицъ, только въ первомъ случаѣ — десятки, а во второмъ — единицы.

Послѣ упражненій надъ отвлеченными числами, задаются соотвѣтствующія задачи и примѣры на бѣглое вычисленіе.

За этой *подготовительной* ступенью слѣдуетъ *словесная* и *письменная нумерація* въ предѣлѣ ста и производство дѣйствій надъ числами первой сотни.

При ознакомленіи съ десяткомъ и сотнею весьма полезнымъ нагляднымъ пособіемъ служитъ *ариѳметическій ящикъ.*

§ 39. Ученики считаютъ отдѣльные кубики до десяти; затѣмъ учитель располагаетъ десять кубиковъ въ одинъ рядъ и говоритъ, что десять иначе называется *десятокъ.* Ученики это повторяютъ нѣсколько разъ и объясняютъ, что десятокъ содержитъ 10 кубиковъ. Потомъ учитель беретъ 1 *брусокъ* и ставитъ рядомъ съ десяткомъ кубиковъ; сравнивая, ученики видятъ, что десятокъ кубиковъ составляетъ одинъ брусокъ; а потому вмѣсто 10 кубиковъ можно взять 1 брусокъ. Послѣ этого учитель кладетъ первый брусокъ отдѣльно отъ другихъ и спрашиваетъ дѣтей, сколько тамъ десятковъ; затѣмъ учитель къ первому бруску прикладываетъ второй и спрашиваетъ дѣтей, сколько теперь десятковъ. Такъ продолжаютъ до: *десять десятковъ* или *сотня.* Потомъ считаютъ безъ помощи брусковъ: одинъ десятокъ, два десятка, три десятка и т. д. Затѣмъ ученики называютъ числа полныхъ десятковъ по порядку и попутно раздробляютъ ихъ въ единицы, говоря: *два десятка* или *двадцать, три десятка* или *тридцать* и т. д.

§ 40. Послѣ устныхъ упражненій нужно перейти къ письменнымъ: къ письму полныхъ десятковъ.

Дѣти умѣютъ написать число 10, но не знаютъ о *мѣстномъ* или *относительномъ* значеніи цифръ; учителю предстоитъ ознакомить дѣтей съ этимъ значеніемъ цифръ. Для этой цѣли учитель на классной доскѣ проводитъ горизонтальныя и вертикальныя прямыя, такъ чтобы образовались квадратныя клѣтки; затѣмъ онъ пишетъ въ этихъ клѣткахъ число 10, чтобы каждая цифра находилась въ отдѣльной клѣткѣ. Когда это сдѣлано, учитель обращается къ ученикамъ съ слѣдующими вопросами:

„Сколько цифръ мы написали? Какія цифры написаны? Какое число обозначено этими цифрами? Считай клѣтки по порядку, начиная справа! Въ *которой* клѣткѣ находится цифра 0? (Надъ первой клѣткой учитель ставитъ цифру 1.) Въ которой клѣткѣ находится цифра 1? (Надъ этой клѣткой ставится цифра 2.) Итакъ, какая цифра написана на *первомъ* мѣстѣ справа? Какая цифра на *второмъ* мѣстѣ? Сколько десятковъ обозначаетъ цифра 1? Если эту цифру написать отдѣльно, что тогда она будетъ обозначать? Какое число получимъ, если къ 1 справа припишемъ одинъ 0? Что теперь обозначаетъ цифра 1? На какомъ мѣстѣ находится цифра 1? Что она означаетъ на первомъ мѣстѣ? Что — на второмъ? Напиши 0 отдѣльно! Означаетъ ли онъ какое-нибудь число? Если писать безъ клѣтокъ, то какъ показать, что 1 находится на второмъ мѣстѣ? Итакъ, для чего служитъ 0? — Сколько десятковъ въ числѣ 20? Какъ мы написали 10? Какъ написать число 20? Напиши число 30! Почему нужно писать нуль? Напиши 40! 50!"

Въ такомъ же порядкѣ пишутся и всѣ остальные десятки. Затрудненіе представляетъ письмо числа 100.

„Сотня — сколько десятковъ? Напиши число 10! Какъ показать, что все это число означаетъ — десятки? (Надо справа приписать одинъ нуль.) Припиши нуль! Какое число написано? Какія цифры на первомъ и второмъ мѣстѣ? Какая-на *третьемъ* мѣстѣ? Что она означаетъ? Сколько сотенъ написано? *Какъ написать 100?*"

§ 41. Ознакомленіе учащихся съ дѣйствіями надъ полными десятками надо вести на примѣрахъ и задачахъ, и, въ случаѣ затрудненія, прибѣгать къ производству дѣйствій надъ однозначными числами. Впрочемъ, нѣтъ надобности долго останавливаться на этихъ упражненіяхъ: достаточно, если дѣти понимаютъ *значеніе* и *смыслъ* дѣйствій надъ полными десятками и умѣютъ ихъ производить. Послѣ того дѣтей надо знакомить съ словесной нумераціей двузначныхъ чиселъ, при чемъ нагляднымъ пособіемъ могутъ служить *шведскіе счеты.*

§ 42. При прохожденіи нумераціи, главное значеніе имѣетъ уясненіе дѣтямъ *десятичнаго состава* двузначныхъ чиселъ (изъ десятковъ и единицъ) и умѣнье ихъ (дѣтей) всякое двузначное число *быстро* и *безошибочно* разложить на его десятичныя группы. Въ свою очередь, это послѣднее необходимо при производствѣ дѣйствій надъ числами въ предѣлѣ первой сотни, такъ какъ *устные пріемы* производствъ дѣйствій основаны на десятичномъ составѣ чиселъ. Въ виду важности этой ступени обученія, учителю надо ее проходить въ высшей степени обдуманно и основательно, только тогда и прохожденіе дѣйствій будетъ успѣшное.

„Отложи на счетахъ десять шариковъ! Какъ иначе называется число десять? Итакъ, сколько десятковъ отложено? Откинь на второй проволокѣ 1 шарикъ! Сколько шариковъ *всего* отложено? (Если ученики не знаютъ, учитель называетъ число 11.) Сколько десятковъ и единицъ въ числѣ 11? (Отвѣтъ повторяется нѣсколькими учениками.) Назови такое число, въ которомъ 1 десятокъ и 1 единица! Откинь на второй проволокѣ еще 1 шарикъ! Сколько шариковъ всего получилось? Сколько десятковъ и единицъ въ этомъ числѣ? (Въ случаѣ затрудненія учитель указываетъ на отложенные шарики.) 12 — сколько десятковъ и единицъ? Сколько десятковъ и единицъ содержитъ число 12?"

Въ такой же послѣдовательности къ каждому предыдущему числу прибавляется по 1, причемъ полученное число разлагается на десятичныя группы; такъ продолжаютъ до 20; потомъ учитель задаетъ вопросы вразбивку, чтобы ученики разложили данное число безъ помощи нагляднаго пособія.

„19 — сколько десятковъ и единицъ? Скажите такое число, въ которомъ 1 десятокъ и 4 единицы! Сколько десятковъ и единицъ содержитъ число 15?" и т. д.

Когда, такимъ образомъ, изучены числа второго десятка, то можно идти дальше. Если оказывается, что дѣти умѣютъ разложить числа третьяго десятка на десятичныя группы, то учитель велитъ имъ считать отъ 20 до 30 и спрашиваетъ *попутно*, сколько десятковъ и единицъ въ данномъ числѣ; если дѣти не могутъ отвѣтить, то нужно прибѣгать къ наглядному пособію.

Подобнымъ образомъ учитель поступаетъ и дальше:

„Считай отъ 30 до 39! Сколько десятковъ и единицъ въ 38? Назови число, въ которомъ 3 десятка и 5 единицъ! Считай отъ 35 до 40! Сколько чиселъ ты назвалъ?"

Такъ продолжаютъ до 100.

§ 43. Потомъ слѣдуетъ *письменная нумерація* двузначныхъ чиселъ.

„Напиши число 10! Что написалъ на первомъ мѣстѣ справа? Что — на второмъ мѣстѣ? Сколько десятковъ въ этомъ числѣ? Какъ на письмѣ показать, что это — десятки? Есть ли въ этомъ числѣ *сверхъ* десяти и единицы? Вмѣсто чего написанъ 0? Число 11 — сколько десятковъ и единицъ? (Для наглядности учитель на счетахъ откладываетъ число 11 и говоритъ, что нужно написать на доскѣ число 11.) Какую цифру надо будетъ писать на второмъ мѣстѣ? Почему? Что означаетъ цифра, написанная на первомъ мѣстѣ справа? Сколько единицъ въ 11? Какую цифру надо писать на первомъ мѣстѣ справа? (Учитель пишетъ число 11.) Прочти написанное число! Какъ написать число 11? Сколько десятковъ и единицъ въ 12? Какую цифру надо будетъ писать на первомъ мѣстѣ? Почему? Напишите число 12! Напиши 13! Какъ написалъ? Пишите слѣдующія числа по порядку до 20! Прочти написанныя числа! Какъ написалъ число 19? 16? 13? Какъ написать 20? Почему 0 нужно писать? Какое число слѣдуетъ за 20? Сколько десятковъ и единицъ въ немъ? Какъ написать число 21? Напишите! Прочти написанное число! Какая цифра на второмъ мѣстѣ? Что она означаетъ? Почему на второмъ мѣстѣ надо писать 2? Назови по порядку числа отъ 21 до 30! Напишите эти числа! Прочти написанное! Какъ написать 25? Почему на первомъ мѣстѣ надо писать цифру 5?“

Такъ продолжаютъ до 100.

Результатомъ упражненій въ словесной и письменной нумераціи должно быть отчетливое знаніе порядка чиселъ въ предѣлѣ ста, умѣнье быстро и безошибочно разложить всякое двузначное число на его десятичныя группы и написать. Когда это достигнуто, то можно перейти къ изученію дѣйствій надъ числами первой сотни.

Сложеніе.

§ 44. О сложеніи и вычитаніи въ предѣлѣ перваго десятка мы сказали, что эти упражненія можно вести *вмѣстѣ,* такъ какъ одно дѣйствіе разъясняетъ другое и усвоеніе каждаго изъ нихъ не представляетъ большого труда для учащихся. Не то можно сказать о сложеніи и вычитаніи во второмъ концентрѣ: въ этомъ предѣлѣ какъ одно, такъ и другое дѣйствіе представляетъ нѣсколько отдѣльныхъ случаевъ, и усвоеніе каждаго случая требуетъ довольно много упражненій на наглядныхъ пособіяхъ, числовыхъ примѣрахъ и задачахъ; кромѣ того, что въ одномъ случаѣ дано, то въ другомъ отыскивается, вслѣдствіе чего дѣти не могутъ оріентироваться въ предлагаемой имъ работѣ, если ознакомленіе съ упомянутыми дѣйствіями вести вмѣстѣ. На этомъ основаніи, ознакомленіе учащихся съ сложеніемъ и вычитаніемъ чиселъ первой сотни надо вести совершенно отдѣльно; но когда пройдены оба дѣйствія, нужно задавать вопросы, связывающіе упомянутыя дѣйствія между собою; напр.

„Сколько получится, если къ 25 прибавить 42? Къ какому числу надо прибавить 42, чтобы получить 67? Отъ какого числа надо отнять 25, чтобы осталось 42?“ и т. д.

§ 45. Во второмъ концентрѣ сложеніе представляетъ слѣдующіе случаи:

1) Къ *числу десятковъ* прибавить *однозначное* или *двузначное* число и наоборотъ; напр. 20 + 6, 6 + 20; 30 + 47, 47 + 30.

2) Къ *двузначному* числу прибавить однозначное или двузначное число и наоборотъ, когда *сумма единицъ* слагаемыхъ *меньше десяти;* напр. 42 + 6, 6 + 42; 23 + 42.

3) Къ *двузначному* числу прибавить однозначное или двузначное число и наоборотъ, когда *сумма единицъ* слагаемыхъ *равна десяти;* напр. 43 + 7, 7 + 43; 43 + 27.

4) Къ однозначному и двузначному числу прибавить однозначное число и наоборотъ, когда *сумма единицъ* слагаемыхъ *больше* десяти; напр. 8 + 7; 25 + 8; 8 + 25.

5) Къ *двузначному* числу прибавить *двузначное,* когда сумма единицъ слагаемыхъ *больше* десяти; напр. 35 + 48.

§ 46. Хотя первые случаи сложенія въ методическомъ отношеніи кажутся легкими, тѣмъ не менѣе необходимо объясненіе ихъ начинать на наглядныхъ пособіяхъ: на кубикахъ или счетахъ, причемъ достаточно разобрать одинъ или два примѣра, и дѣти поймутъ данный случай сложенія.

1) Учитель откладываетъ на счетахъ 30 шариковъ, по десяти на каждой проволокѣ, и спрашиваетъ дѣтей, сколько шариковъ отложено. На серединѣ четвертой проволоки онъ велитъ откинуть 6 шариковъ и затѣмъ говоритъ, что къ 30 шарикамъ надо прибавить 6 шариковъ.

„Прибавь къ 30 шарикамъ 6 шариковъ! Сколько получилось? Какъ мы получили 36 шариковъ? 36 — сколько десятковъ и единицъ? Отложи 50 шариковъ! Откинь еще 7 шариковъ! Прибавь къ 50 шарикамъ 7 шариковъ! Сколько получилось? Къ 50 прибавить 3, сколько? 40 да 8, сколько?"

Послѣ того учащіеся рѣшаютъ числовые примѣры, относящіеся къ первому случаю сложенія, и записываютъ результаты. Учитель задаетъ и соотвѣтствующія задачи; дѣти рѣшаютъ и объясняютъ ихъ рѣшеніе.

2) „Откинь на счетахъ 23 шарика! Сколько десятковъ и единицъ въ этомъ числѣ? Отложи на третьей проволокѣ еще 4 шарика! Придвинь къ 23 шарикамъ 4 шарика! Сколько получилось? Къ 23 прибавить 4, сколько? Прибавьте 6 къ 23! Сколько получили? 24 да 5, сколько? 54 да 3, сколько? — Отложи на первой проволокѣ 4 шарика! На слѣдующихъ проволокахъ откинь 23 шарика! Къ 4 шарикамъ нужно прибавить 23 шарика. Смотрите, что я дѣлаю! (Учитель къ 4 шарикамъ прибавляетъ 20 шариковъ — сразу.) Что я сдѣлалъ? Сколько шариковъ получилось? Какъ мы получили 24 шарика? (Отвѣтъ повторяется нѣсколько разъ.) Сколько всего надо было прибавить къ 4? Сколько уже прибавили? Сколько еще надо прибавить? (Сколько шариковъ осталось отдѣльно?) Къ чему прибавить оставшіеся 3 шарика? Прибавь къ 24 шарикамъ 3 шарика!" Сколько получилось? Сколько десятковъ и единицъ въ числѣ 27? Сколько мы прибавили къ 4? Какъ прибавляли?" и т. д.

Учитель откладываетъ на счетахъ другое число шариковъ, напр. 5 и 43, и предлагаетъ дѣтямъ прибавить къ 5 шарикамъ 43 шар. Если дѣти затрудняются, учитель самъ прибавляетъ къ 5 шарикамъ 40 шариковъ и къ полученному — 3 шарика. Послѣ того вызванный ученикъ повторяетъ то же самое на счетахъ, потомъ и отвлеченно. Когда разобрано нѣсколько примѣровъ, то дѣлается выводъ, что сначала нужно прибавить десятки, а къ полученному — прибавить единицы. Точно такъ же къ двузначному числу прибавляется двузначное; напр. 23 + 32; къ 23 сперва прибавить 30, получается 53; къ этому прибавить 2, получается 55.

3) Дѣти уже умѣютъ *дополнить* числа перваго десятка до десяти; напр. они знаютъ, что если къ 4 прибавить 6, то получается 10,

и умѣютъ отвѣтить на обратный вопросъ: сколько надо прибавить къ 4, чтобы получить 10? Слѣдуетъ ихъ научить къ двузначному числу прибавить однозначное или двузначное число и наоборотъ, когда сумма единицъ слагаемыхъ равна десяти; другими словами, надо научить дѣтей дополнить данное число до какого-нибудь числа десятковъ въ предѣлѣ первой сотни. Этотъ случай имѣетъ тѣмъ большее значеніе, что въ слѣдующихъ случаяхъ сложеніе сводится къ дополненію даннаго числа до какого-нибудь числа десятковъ и къ прибавленію къ полученной суммѣ оставшихся единицъ; напр. если требуется къ 8 прибавить 7, то сначала къ 8 прибавляемъ 2 и къ полученному числу — 5.

Въ виду изложенныхъ соображеній, третій случай сложенія дѣти должны особенно хорошо усвоить.

„Откинь на счетахъ 23 шарика! Сколько десятковъ и единицъ въ этомъ числѣ? Сколько шариковъ осталось на третьей проволокѣ — отдѣльно? (На каждой проволокѣ расположено по 10 шариковъ; если въ этомъ случаѣ наглядным пособіемъ служатъ кубики ариѳметическаго ящика, то ихъ надо располагать слѣдующимъ образомъ: въ 2 рядахъ по десяти кубиковъ и въ третьемъ — 3 кубика; кромѣ того въ третьемъ ряду должно быть 7 кубиковъ, но дальше отъ 3 кубиковъ, чѣмъ 3 кубика отъ двухъ десятковъ; это такъ дѣлается для того, чтобы дѣти могли бы ясно различать числа: 23 и 7.) Прибавь къ 23 шарикамъ 7 шариковъ! Сколько *полныхъ десятковъ* получилось? Какъ мы получили число 30? Сколько надо прибавить къ 23, чтобы получить 30? — Отложи 51 шарикъ! Сколько нужно прибавить къ нимъ, чтобы получить 60? Прибавь! Сколько полныхъ десятковъ получилось? Мы *дополнили* число 51 до 6 полныхъ десятковъ. Что мы сдѣлали? Какъ мы 51 дополнили до 6 полныхъ десятковъ? Дополните 16 до 20! Какъ это сдѣлали? Сколько надо прибавить къ 35, чтобы получить 40? Какъ 42 дополнить до 50? — Откинь на счетахъ 6 шариковъ! Откинь еще число 24! Какое первое число? Какое второе? Къ 6 шарикамъ надо прибавить 24 шарика. Прибавь къ 6 шарикамъ 20 шариковъ! Сколько получилось? Сколько надо прибавить къ полученному? Прибавь! Сколько всего получилось? Какъ мы прибавляли къ 6 шарикамъ 24 шарика? Къ 4 прибавьте 16! Сколько получили? Какъ прибавляли? Къ 8 прибавить 32, сколько? Сколько нужно прибавить къ 7, чтобы получить 40?"

Подобнымъ образомъ объясняется прибавленіе къ двузначному числу двузначнаго, когда сумма единицъ слагаемыхъ равна десяти.

4) Учитель откладываетъ на одной проволокѣ 8 шариковъ, а на другой — 7.

„Сколько шариковъ отложено на первой проволокѣ? Сколько — на второй? Къ 8 шарикамъ надо прибавить 7 шар. Сколько нужно прибавить къ 8, чтобы получить 10? (Учитель прибавляетъ къ 8 шарикамъ 2 шарика.) Что я сдѣлалъ? Сколько получилось? Сколько шариковъ всего надо было прибавить? Сколько уже прибавили? Всѣ ли 7 шариковъ еще надо будетъ прибавить? Сколько нужно прибавить къ 10? Прибавь къ 10 шарикамъ 5 шариковъ! Сколько всего получилось? Какъ получили 15 шариковъ? Какъ къ 8 прибавить 7? Отложи на счетахъ 6 шариковъ! Отложи еще 9 шариковъ! Какъ 6 дополнить до 10? Прибавь къ 6 шарикамъ 4 шарика! Сколько получается? Сколько нужно прибавить къ полученному? Прибавь 5 шариковъ! Какъ мы къ 6 прибавляли 9? 8 да 7, сколько? Какъ узнать? 6 да 9, сколько? Какъ прибавить? Прибавьте 4 къ 8! Какъ прибавляли? 7 да 5, сколько? Какъ прибавить? Сколько получится, если къ 6 прибавить 8? Какъ вы прибавляли?"

Чтобы дѣтямъ уяснить, какое удобство представляетъ дополненіе перваго слагаемаго до полныхъ десятковъ, учитель прибѣгаетъ къ наглядному пособію:

„Отложи на первой проволокѣ счетовъ 8 шариковъ, а на второй — 7! Какъ прибавить къ 8 шарикамъ 7 шариковъ? Если сначала прибавить 3, сколько тогда получимъ? Сколько нужно прибавить къ 11? Какое число къ 8 легче и удобнѣе прибавить, 2 или 3? Прибавьте 6 къ 9! Сколько получили? Какъ прибавляли? Почему къ 9 сперва прибавляли 1, а не другое число?"

Когда къ двузначному числу требуется прибавить однозначное, то первое слагаемое сперва надо дополнить до полныхъ десятковъ и къ полученному прибавить оставшіяся единицы. Если же нужно рѣшать обратный вопросъ, т. е. къ однозначному числу прибавить двузначное, то сначала надо прибавить десятки его, а потомъ, къ полученной суммѣ, единицы; напр. пусть требуется къ 6 прибавить

28; для этого къ 6 прибавляемъ 20 и къ 26 — восемь; послѣднее дѣти умѣютъ уже сразу сдѣлать.

5) Если учащіеся хорошо понимаютъ и усвоили предыдущіе случаи сложенія, то усвоеніе послѣдняго случая, какъ общаго, не представитъ никакихъ затрудненій, такъ какъ сложеніе въ этомъ случаѣ сводится къ послѣдовательному прибавленію десятичныхъ группъ второго слагаемаго къ первому слагаемому, а это дѣтямъ извѣстно изъ предыдущихъ случаевъ.

Для того, чтобы къ 35 прибавить 48, надо предварительно второе слагаемое, т. е. 48, разложить на его десятичныя группы и затѣмъ послѣдовательно прибавить къ первому слагаемому.

Когда дѣти умѣютъ производить сложеніе чиселъ первой сотни, слѣдуетъ ихъ ознакомить съ *главнымъ свойствомъ суммы,* заключающемся въ томъ, что величина ея не зависитъ отъ того порядка, въ которомъ соединяемъ единицы слагаемыхъ, а зависитъ лишь отъ *величины* слагаемыхъ, или, короче говоря, сумма не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ.

Съ содержаніемъ этой истины дѣти знакомились уже въ первомъ концентрѣ — при рѣшеніи примѣровъ и задачъ; напр. когда надо было сложить 2 и 7, то дѣти, обыкновенно, къ 7 прибавляли 2, а не наоборотъ; это они дѣлали какъ бы инстинктивно, подразумѣвая, что къ 7 прибавить 2 легче, чѣмъ наоборотъ.

Во второмъ концентрѣ, пользуясь усвоенными знаніями дѣтей, учитель сообщаетъ имъ, что числа можно складывать въ какомъ угодно порядкѣ, такъ какъ результатъ получается одинъ и тотъ же (если сложеніе произведено вѣрно).

При рѣшеніи задачъ часто приходится примѣнять главное свойство суммы. Для примѣра возьмемъ слѣдующую задачу:

„У одного мальчика 14 перьевъ, у другого — 4 пера, а у третьяго — 15. Сколько перьевъ у всѣхъ мальчиковъ вмѣстѣ?“

Для рѣшенія этой задачи нужно сложить числа: 14, 4, 15; но такъ какъ второе слагаемое меньше третьяго, то ихъ переставляемъ и сначала складываемъ 14 и 15, а потомъ къ полученному прибавляемъ 4.

§ 47. О *пріемѣ сложенія* надо замѣтить слѣдующее: мы держались *нормальнаго пріема устнаго сложенія,* но не только не безполезно, но и желательно ознакомить дѣтей и съ другими пріемами, напр. съ *сокращенными* пріемами производства сложенія.

Если къ какому нибудь числу надо прибавить 19, то вмѣсто этого можно прибавить 20 и отъ полученнаго отнять 1. Письменно это изображается такъ: 25 + 19 = 25 + 20 − 1 = 44; а когда дѣти уже усвоили данный пріемъ сложенія, то можно записывать короче, а все вычисленіе, какъ и прежде, производить устно; получается такая запись: 25 + 19 = 44.

То же самое можно сказать о прибавленіи 29, 39 и т. д.: вмѣсто этихъ чиселъ прибавляется ближайшее число десятковъ и отъ полученной суммы отнимается единица.

Сложеніе можно упростить и въ томъ случаѣ, если число единицъ втораго слагаемаго — 8; напр. когда приходится прибавлять 18, 28, 38 и т. д.

Что касается *общаго* пріема сложенія, то надо замѣтить, что нѣкоторые рекомендуютъ и при устномъ сложеніи держаться *письменнаго пріема* сложенія, т. е. сперва сложить единицы слагаемыхъ, а потомъ — десятки; наконецъ, полученныя отдѣльныя суммы сложить, тогда получимъ полную сумму; напр. пусть требуется сложить 25 да 37; сперва складываемъ 5 да 7, получаемъ 12; потомъ — 20 да 30, получаемъ 50; 12 да 50 — 62. — Практика показываетъ, что удобнѣе сперва складывать десятки, потомъ единицы и, наконецъ, — полученныя неполныя суммы. Тогда имѣемъ слѣдующее: 20 да 30 — 50; 5 да 7 — 12; 50 да 12 — 62. — Придерживаясь же нормальнаго пріема устнаго сложенія, сперва къ 25 прибавляемъ 30 и къ полученному — 7. Хотя въ первомъ случаѣ надо произвести 3 сложенія (30 + 20, 5 + 7; 50 + 12), а во второмъ — только 2 (25 + 30, 55 + 7), тѣмъ не менѣе первый пріемъ, по скорости производства дѣйствія, не уступаетъ второму; а потому, при сложеніи чиселъ первой сотни, надо примѣнять *оба пріема.*

§ 48. Результатомъ упражненій дѣтей въ сложеніи должно быть: 1) умѣнье къ каждому двузначному числу прибавить двузначное, когда сумма слагаемыхъ не превышаетъ ста; 2) умѣнье примѣнить это знаніе при рѣшеніи соотвѣтствующихъ задачъ.

Для достиженія означенныхъ цѣлей, упражненія въ сложеніи въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ надо вести на наглядныхъ пособіяхъ, примѣрахъ и задачахъ. Какъ примѣры, такъ и задачи рѣшаются устно, а записываются только данныя и результатъ дѣйствія.

Наконецъ дѣтей надо ознакомить съ *элементами* сложенія, т. е. съ терминами: *„слагаемыя“* и *„сумма“.* Съ этой цѣлью учитель сообщаетъ дѣтямъ, что вмѣсто „прибавить“ говорятъ „сложить“; напр. *сложить 7 и 8.* Когда ученики сложили числа 7 и 8, учитель говоритъ имъ, что вмѣсто „сложили“ говорятъ „выполнили дѣйствіе сложеніе“; дѣти это повторяютъ. Затѣмъ учитель говоритъ, что числа при сложеніи имѣютъ различныя названія: тѣ данныя числа, которыя надо сложить, называются *слагаемыми,* а полученное число — *суммой.*

Вычитаніе.

§ 49. При вычитаніи во второмъ концентрѣ бываютъ слѣдующіе случаи:

1) Вычесть изъ двузначнаго числа нѣсколько десятковъ или нѣсколько единицъ, число которыхъ: 1) *равно,* 2) *меньше* числа десятковъ и единицъ уменьшаемаго; напр. 45 — 40, 45 — 5; 45 — 30, 45 — 3.

3) 2) Изъ двузначнаго числа вычесть двузначное, когда *число единицъ вычитаемаго меньше* числа единицъ уменьшаемаго; напр. 47 — 24.

4) 3) Изъ *полныхъ десятковъ* вычесть *однозначное* и *двузначное* число, когда больше числа единицъ уменьшаемого; напр. 40 — 5, 40 — 25.

6) 4) Изъ двузначнаго числа вычесть однозначное, которое *больше* числа единицъ уменьшаемаго; напр. 14 — 9, 43 — 7.

7 5) Изъ двузначнаго числа вычесть двузначное, когда число единицъ вычитаемаго больше числа единицъ уменьшаемаго; напр. 46 — 28.

§ 50. 1) „Откинь на счетахъ 25 шариковъ! Сколько десятковъ и единицъ въ этомъ числѣ? Отними отъ 25 шариковъ 5 шариковъ! Сколько осталось? Сколько надо отнять отъ 25, чтобы осталось 20? Отнимите отъ 38 восемь! Сколько получили? Итакъ, если отъ 38 отнять 8, сколько остается? Отъ 15 отнимите 5! Сколько осталось? Отъ 59 отнять 9, сколько? — Сколько десятковъ и единицъ содержитъ число 25? Отнимите 20 отъ 25! Сколько получили? Отъ 45 отнимите 40! Сколько осталось? Отложи на счетахъ 35 шариковъ! Сколько десятковъ въ этомъ числѣ? Что я дѣлаю? (Учитель отнимаетъ 20 шариковъ.) Сколько шариковъ осталось? Какъ мы получили 15 шариковъ? Откинь 45 шариковъ! Отними отъ 45 шариковъ 30 шариковъ! Сколько осталось? Отъ 45 отнять 30, сколько? 35 безъ 20, сколько? 46 безъ 30, сколько? Отъ 97 отнять 60, сколько получается?

Откинь 15 шариковъ! Сколько десятковъ и единицъ содержитъ это число? Я отниму отъ 15 шариковъ 3 шарика; сколько осталось? Отъ сколькихъ единицъ отняли 3 единицы? Отложи 26 шариковъ! Отними 4 шарика! Отъ 45 отнять 4, сколько? 98 безъ 6, сколько? 78 безъ 5, сколько? Сколько надо отнять отъ 35, чтобы получить 30? Сколько нужно прибавить къ 42, чтобы получить 48?“ и т. д.

2) Учитель откладываетъ на счетахъ 38 шариковъ и располагаетъ ихъ у края счетовъ; потомъ на серединѣ четвертой и пятой проволокъ онъ откладываетъ 15 шариковъ и говоритъ ученикамъ, что отъ 38 шариковъ надо отнять 15 шариковъ.

„Сколько десятковъ и единицъ въ 38? Сколько десятковъ во второмъ числѣ? Отними отъ 38 шариковъ 10 шариковъ! Сколько осталось? Сколько еще надо будетъ отнять? Почему только 5 шариковъ? Отъ чего нужно отнять 5 шариковъ? Если отъ 28 отнять 5, сколько останется? Сколько всего отняли отъ 38? Какъ отнимали? — Отложи на счетахъ 48 шариковъ! Отъ 48 надо отнять 15. Какъ мы отняли 15 отъ 38? Отними отъ 48 шариковъ 10 шариковъ? Сколько осталось? Сколько нужно отнять отъ *остатка*? Отними! Сколько всего осталось? Какъ мы отъ 48 отнимали 15? Отнимите 15 отъ 98! Сколько получили? Какъ отнимали? Отнимите 16 отъ 48! Сколько получили? 75 безъ 24, сколько? 69 безъ 14, сколько?“ и т. д.

3) „Отъ 10 отнять 2, сколько получается? Отъ 10 отнять 4, сколько? — Откинь 20 шариковъ! Сколько тутъ полныхъ десятковъ? Отъ 20 шариковъ надо отнять 4 шарика. Что я дѣлаю? (Учитель отъ *второго* десятка отнимаетъ 4 шар.) Отъ *котораго* десятка я отнялъ 4 шарика? Сколько шариковъ осталось! Итакъ, сколько остается, если отъ 20 отнять 4? Отложи 40 шариковъ! Отъ 40 шариковъ надо отнять 7 шариковъ. Отъ котораго десятка надо будетъ отнимать? (Который десятокъ *послѣднiй?*) Отними! Сколько осталось? Отнимите 6 отъ 30! Сколько получилось? Отнимите 8 отъ 90! Сколько осталось? 80 безъ 9, сколько?“ и т. д.

„Отложи 30 шариковъ! Отъ 30 шариковъ надо отнять 16 шариковъ. Сколько десятковъ и единицъ въ 16? Если отъ 30 шариковъ отнимемъ 10 шариковъ, сколько останется? Сколько надо будетъ отнять отъ оставшихся? Отними! Сколько всего осталось? Сколько всего отняли отъ 30? Какъ отнимали? Отнимите 12 отъ 30! Сколько осталось? Какъ отнимали? Какъ отъ 50 отнять 16? отъ 70 — 25? Отнимите 18 отъ 90? Сколько осталось? Какъ отнимали? 30 безъ 14, сколько? Сколько надо прибавить къ 15, чтобы получить 30? Сколько надо отнять отъ 70, чтобы осталось 13?“

4) „Отложи 11 шариковъ! (На первой проволокѣ — 10, а на второй — 1 шарикъ.) Сколько единицъ въ этомъ числѣ *сверхъ* десяти? Отъ 11 шариковъ намъ надо отнять 6 шариковъ. Сколько надо отнять отъ 11 шариковъ, *чтобы осталось 10 шариковъ?* Сколько шариковъ я отнялъ отъ 11 шариковъ? (Учитель отодвигаетъ въ сторону шарикъ, расположенный на второй проволокѣ.) Сколько *полныхъ* десятковъ осталось? Какъ мы получили одинъ полный десятокъ? Сколько шариковъ всего надо было отнять отъ 11? Всѣ ли шарики отняли? Сколько шариковъ уже отняли? Сколько еще надо отнять? Отъ чего нужно отнять оставшіеся шарики? Отними отъ 10 шариковъ 5 шариковъ! Сколько осталось? Какъ мы отнимали 6 шариковъ отъ 11 шариковъ? — Отложи 11 шариковъ! Отъ 11 шариковъ нужно отнять 8 шариковъ. Если сначала отнять 1 шарикъ, сколько тогда еще надо будетъ отнять отъ полученнаго? Отнимай такъ! Сколько осталось? *Какъ* мы отнимали? *Когда сдѣлали остановку?* Если сначала отнять 2, то сколько еще надо будетъ отнять? Что легче отнять отъ 11, 2 или 1? Почему сначала отнимаемъ 2, а не 1? — Отнимите 4 отъ 11? Сколько осталось? Какъ отнимали? 11 безъ 9, сколько? Какъ это узнать? Отъ 12 отнять 4, сколько получается? Какъ отнимали? Почему сначала нужно отнять 2? Сколько придется отнять отъ 10? — 16 безъ 9, сколько? Отъ 18 отнять 9, сколько получается? 16 безъ 7, сколько? — Отложи 24 шарика! Сколько тутъ десятковъ и единицъ? Отъ 24 шариковъ надо отнять 9 шариковъ. Сколько единицъ сверхъ 2 десятковъ находится въ 24? Сколько

сперва надо будетъ отнять? Сколько потомъ? Отнимай такъ! Сколько осталось? Какъ отнимали? Отнимите 8 отъ 25! Сколько получили? 34 безъ 8, сколько? 71 безъ 9, сколько? Сколько надо отнять отъ 17, чтобы осталось 9? Сколько нужно прибавить къ 8, чтобы получить 13?“

5) „Отложи 42 шарика! Отъ 42 шариковъ надо отнять 24 шарика. Сколько десятковъ и единицъ въ числѣ 24? Если мы отнимемъ 20 шариковъ, то сколько еще надо будетъ отнять? Отними 20 шариковъ! Сколько осталось? Сколько надо отнять отъ 22 шариковъ? Почему только 4 шарика? Отнимите! Сколько всего осталось? Какъ отнимали? — Отнимите 18 отъ 45! Сколько осталось? Какъ отнимали? 96 безъ 78, сколько? Отъ 65 отнять 18, сколько остается? Какъ узнали? Сколько надо отнять отъ 48, чтобы осталось 17? Сколько нужно прибавить къ 17, чтобы получить 92?“

§ 51. Послѣ разбора каждаго отдѣльнаго случая на наглядномъ пособіи и вычитанія отвлеченныхъ чиселъ, слѣдуетъ задавать соотвѣтствующія задачи; когда задача рѣшена, то можно записать ея рѣшеніе въ строчки, по тому же образцу, какъ въ первомъ концентрѣ, причемъ полезно писать числа съ наименованіями. По прохожденіи всѣхъ случаевъ вычитанія, надо задавать сложныя задачи, въ которыя входитъ сложеніе и вычитаніе. Рѣшенію сложной задачи предшествуетъ ея *анализъ* и *синтезъ*, а за рѣшеніемъ слѣдуетъ *объясненіе.*

При объясненіи задачи надо учить дѣтей отвѣчать на вопросъ *„почему?“* т. е. выяснять причинную зависимость между данными и искомымъ задачи.

Для примѣра возьмемъ слѣдующую сложную задачу:

„Лавочникъ продалъ 12 аршинъ сѣраго сукна и 21 аршинъ синяго, а чернаго на 4 аршина меньше, чѣмъ первыхъ двухъ сортовъ вмѣстѣ. Сколько аршинъ сукна всего продалъ лавочникъ?“

Анализъ.

Въ данной задачѣ надо узнать количество всего сукна. Для рѣшенія этого вопроса, надо знать *количество каждаго сорта* сукна; но мы знаемъ только количество перваго и второго сортовъ, а не знаемъ количества третьяго сорта. Поэтому, прежде чѣмъ отвѣчать на вопросъ задачи, надо узнать *количество третьяго сорта* сукна; для чего надо узнать *количество первыхъ двухъ сортовъ вмѣстѣ.* (До этихъ выводовъ дѣти доходятъ при помощи вопросовъ учителя.)

Планъ рѣшенія (синтезъ).

1. Сколько аршинъ сѣраго и синяго сукна вмѣстѣ продано?
2. Сколько аршинъ чернаго сукна продано?
3. Сколько аршинъ сукна всего продано?

Рѣшеніе.

1) 12 арш. + 21 арш. = 33 арш.
2) 33 арш. — 4 арш. = 29 арш.
3) 12 арш. + 21 арш. + 29 арш. = 62 арш.

Объясненіе.

Сѣраго сукна продано 12 арш., а синяго — 21 арш.; вмѣстѣ 33 арш.; чтобы это узнать, нужно къ 12 арш. прибавить 21 арш., получается 33 арш. Чернаго сукна было на 4 арш. меньше, чѣмъ первыхъ двухъ сортовъ вмѣстѣ, т. е. меньше 33 арш. на 4 арш. Для рѣшенія этого вопроса надо число 33 арш. уменьшить на 4 арш., для чего отъ 33 арш. слѣдуетъ отнять 4 арш., получается 29 арш. Слѣдовательно, сукна третьяго сорта было 29 арш. Зная, сколько аршинъ сукна было каждаго сорта, можемъ узнать количество всего проданнаго сукна; для этого нужно сложить 12 арш., 21 арш. и 29 арш.; получается 62 арш. Итакъ, всего сукна было 62 аршина.

При вычитаніи, какъ и при сложеніи, надобно учащихся ознакомить съ *сокращенными пріемами* выполненія дѣйствія, примѣненіе которыхъ удобно въ тѣхъ случаяхъ, когда вычитаемое мало отличается отъ какого-нибудь числа десятковъ; примѣромъ могутъ служить числа: 19, 29, 39 и т. д. Если отъ 45 надо отнять 29, то вмѣсто этого отнимаемъ 30 и къ полученному остатку прибавляемъ 1; письменно это изображается слѣдующимъ образомъ: $45 - 29 = (45 - 30) + 1 = 16$.

Элементы вычитанія

§ 52. Наконецъ дѣтямъ надо сообщить названія *элементовъ* вычитанія.

То число, отъ котораго отнимается другое, называется *уменьшаемымъ* (это число *уменьшается*); число, которое отнимается, наз. *вычитаемымъ* (его *вычитаютъ* или отнимаютъ); а полученное число наз. *остаткомъ* (*остается* при вычитаніи) или *разностью* (показываетъ, *на сколько единицъ* одно число больше или меньше другого).

Умноженіе.

§ 53. При умноженіи во второмъ концентрѣ могутъ быть слѣдующіе случаи:

1) Умножить однозначное число на однозначное (составить таблицу умноженія).(7×8).
2) Умножить двузначное число на однозначное; напр. 14 . 5.
3) Умножить однозначное число на двузначное; напр. 5 . 14.

При выполненіи умноженія во второмъ и третьемъ случаяхъ, необходимо, чтобы учащіеся хорошо знали первый случай, т. е. таблицу умноженія; но послѣднее достигается отнюдь не механическимъ заучиваніемъ, *а послѣдовательнымъ составленіемъ ея самими же учащимися.* Для достиженія означенной цѣли главнымъ средствомъ служитъ *наглядное выясненіе* происхожденія произведеній однозначныхъ чиселъ.

Сначала составляется таблица умноженія на 2, а потомъ и на другія числа — по порядку. Наглядными пособіями служатъ шведскіе счеты и ариѳметическій ящикъ.

§ 54. Дѣти уже знаютъ произведенія числа 2 на однозначныя числа въ тѣхъ случаяхъ, когда результатъ не больше 10; это нужно повторить и затѣмъ перейти къ составленію произведеній на другія однозначныя числа.

„Отложи на счетахъ 2 шарика! Сколько разъ взято по 2 шарика? Сколько получается, если 2 взять одинъ разъ? Возьмите 2 два раза! Сколько получили? 2 взять 3 раза, сколько? 2 взять 4 раза, сколько получается? Сколько получится, если 2 взять 5 разъ? — Откинь на счетахъ 5 разъ по 2 шарика! (Шарики располагаются попарно.) Отложи на слѣдующей проволокѣ 2 шарика! Сосчитайте, сколько разъ по 2 шарика теперь всего отложено? (Ученикъ, показывая пары шариковъ, считаетъ: одинъ, два, три и т. д.) Итакъ, сколько разъ по 2 шарика теперь взяли?

Сколько получилось? Какъ мы получили 12 шариковъ? (2 шарика взяли 6 разъ, получили 12 шариковъ.) Итакъ, сколько получается, если 2 взять 6 разъ? Возьми еще разъ по 2 шарика! Сколько разъ теперь по 2 шарика взято? Сколько шариковъ получилось? (Въ случаѣ затрудненія учитель отодвигаетъ седьмую пару шариковъ и спрашиваетъ: „Сколько разъ теперь взято по 2 шарика? Сколько получилось? Сколько шариковъ я прибавляю къ 12 шарикамъ? Сколько получается, если къ 12 шарикамъ прибавить 2 шарика? Какъ получили 14 шариковъ?) Итакъ, сколько получается, если 2 взять 7 разъ? Возьмите 2 шарика 8 разъ! Сколько шариковъ получилось? Отложи 9 разъ по 2 шарика! Сколько получилось? Какъ получили 18 шариковъ?"

Къ этому же можно присоединить умноженіе на 10, что усваивается легко. Послѣ того учитель выспрашиваетъ таблицу умноженія на 2 по порядку — безъ помощи нагляднаго пособія, а потомъ и вразбивку.

„2 взять 4 раза, сколько? 2 ***повторить*** 9 разъ, сколько получается? Сколько получите, если 2 возьмете 6 разъ? Сколько разъ надо взять 2, чтобы получить 16? Какое число надо взять 7 разъ, чтобы получить 14?" и т. д.

Когда дѣти усвоили таблицу умноженія на 2, нужно имъ задавать соотвѣтствующія простыя задачи, въ родѣ слѣдующей:

„Учитель далъ перья 8 ученикамъ, каждому по 2 пера. Сколько перьевъ онъ раздалъ всего?"

Когда содержаніе задачи усвоено учениками, учитель предлагаетъ имъ рѣшать задачу, а затѣмъ спрашиваетъ ихъ, сколько получилось и какъ они рѣшили задачу. Потомъ учитель предлагаетъ дѣтямъ рядъ вопросовъ съ цѣлью — выяснить, ***какъ*** рѣшается задача и ***почему.***

„Сколькимъ ученикамъ розданы перья? Сколько перьевъ дано каждому изъ нихъ? Если я дамъ 2 ученикамъ по 2 пера, то сколько разъ будетъ взято по 2 пера? Если перья дать восьми ученикамъ, то сколько разъ будетъ взято по 2 пера? Почему 8 разъ? (Потому, что надо дать 8 ученикамъ.) Сколько получится, если 2 пера взять 8 разъ? Итакъ, сколько перьевъ всего роздано? Какъ это узнать? Какъ рѣшить задачу?"

Послѣ того можно записать рѣшеніе задачи; получаемъ: 2 пер. $\times$ 8 = 16 пер.

Самостоятельной работой можетъ служить запись таблицы умноженія на 2, рѣшеніе примѣровъ, въ которые входитъ сложеніе, вычитаніе, умноженіе на 2, и запись рѣшенія задачъ, кромѣ того ученики могутъ писать отвѣтъ на вопросъ: „какъ рѣшить задачу?" словами; напр. для предыдущей задачи пишется слѣдующій отвѣтъ: чтобы рѣшить задачу, надо 2 пера взять 8 разъ, получается 16 перьевъ. — Само собою понятно, что учитель при этомъ долженъ указать, какіе знаки препинанія ставить и гдѣ ихъ ставить.

§ 55. Таблицы умноженія на другія числа составляются подобнымъ же образомъ: дѣти, подъ руководстомъ учителя, *набираютъ* тройки, четверки, пятерки и т. д., считаютъ сколько разъ набрали и дѣлаютъ выводы, напр. если 3 взять 4 раза, получается 12. При этомъ иногда полезно прибѣгать и къ другимъ пріемамъ; напр. набирать шарики *группами* въ нѣсколько троекъ, четверокъ и т. д. Пояснимъ это примѣромъ: при составленіи таблицы умноженія на 4, шарики можно набирать группами въ 2 четверки; тогда получимъ слѣдующее: 4 . 2 = 8; 4 . 4 = 16; 4 . 8 = 32 и. т. д. Но этотъ пріемъ умѣстенъ только тогда, когда дѣти усвоили общій пріемъ: составленіе таблицы умноженія по порядку.

§ 56. Къ умноженію однозначныхъ чиселъ примыкаетъ повтореніе тѣхъ мѣръ, съ которыми дѣти были ознакомлены въ первомъ концентрѣ, и ознакомленіе съ новыми мѣрами, единичное отношеніе которыхъ не больше десяти.

Учитель спрашиваетъ дѣтей, какія мѣры длины и вѣса они знаютъ, и затѣмъ задаетъ соотвѣтствующія упражненія для повторенія этихъ мѣръ.

Вновь дѣти ознакамливаются съ слѣдующими мѣрами: *четверть — четверикъ — гарнецъ; ведро — штофъ.*

Ознакомленіе съ этими мѣрами должно быть, по возможности, наглядное, чтобы дѣти составили ясное понятіе о величинѣ каждой мѣры.

Если учителю нѣтъ подъ руками образцовъ другихъ мѣръ, то достаточно имѣть четверикъ или гарнецъ, тогда дѣти составятъ понятіе и о величинѣ четверти.

§ 57. При прохожденіи таблицы умноженія, дѣтей надо ознакомить съ содержаніемъ истины, что *произведеніе двухъ чиселъ не измѣняется отъ перестановки сомножителей,* — безъ словеснаго усвоенія этой истины. Эту работу надо вести на наглядномъ пособіи и слѣдующимъ образомъ:

Учитель спрашиваетъ учащихся, сколько получается, если 3 взять 4 раза; затѣмъ онъ откладываетъ на серединѣ первой проволоки счетовъ 3 шарика — раздѣльно, и спрашиваетъ дѣтей, сколько шариковъ отложено и сколько разъ всего взять по 3 шарика, чтобы получить 12 шариковъ. Послѣ этого откладывается еще 3 раза по 3 шарика, каждая группа на отдѣльной проволокѣ, при томъ такъ, чтобы образовалось 3 вертикальныхъ столбца шариковъ, въ каждомъ по 4 шарика. Когда это сдѣлано, учитель задаетъ дѣтямъ слѣдующіе вопросы:

„Сколько шариковъ находится на каждой проволокѣ? Сколько разъ взято по 3 шарика? Какъ мы получили 12 шариковъ? Какъ это записать? (Ученикъ говоритъ, учитель пишетъ на классной доскѣ: $3 \times 4 =$.) Сколько *столбцовъ* шариковъ всего получилось? (Учитель показываетъ столбцы.) Сколько шариковъ въ *каждомъ* столбцѣ? Сколько шариковъ всего? Какъ это узнать? Какъ записать? (4×3; учитель пишетъ на доскѣ послѣ знака равенства: 4×3; получается на доскѣ такая запись: $3 \times 4 = 4 \times 3$.) Какое число мы въ первый разъ взяли 4 раза? Какое число во второй разъ взяли 3 раза? Сколько получилось въ томъ и другомъ случаѣ? Какія числа *переставили?* (Учитель указываетъ на сомножителей.) Какіе результаты получились? — Возьмите число 7 восемь разъ? Сколько получили? Напиши числа на доскѣ! Переставьте теперь числа! Сколько получили? Напиши числа! Слѣдовательно, какіе результаты получаются, если числа переставить?“

Хотя произведеніе не измѣняется отъ перестановки сомножителей, тѣмъ не менѣе, при рѣшеніи задачъ, необходимо строго различать множимое отъ множителя, такъ какъ произведеніе всегда однородно съ множимымъ, а множитель число отвлеченное; такъ, напр., если 1 карандашъ стоитъ 3 коп., то 9 карандашей — въ 9 разъ дороже, т. е. стоятъ 27 коп.; для рѣшенія надо *3 коп. взять 9 разъ,* получается 27 коп. Чтобы пріучить дѣтей различать множимое отъ множителя, полезно выговаривать множимое и произведеніе съ наименованіями; тогда ученикъ не скажетъ: 9 карандашей взять 3 раза, получается 27 копеекъ.

§ 58. Если дѣти хорошо усвоили таблицу умноженія, то имъ не трудно будетъ понять умноженіе двузначнаго числа на однозначное и наоборотъ.

Прежде чѣмъ приступить къ выясненію умноженія двузначнаго числа на однозначное, надо повторить умноженіе полныхъ десятковъ на однозначныя числа, когда результаты не больше ста. Когда это сдѣлано, то можно перейти къ умноженію двузначнаго числа на однозначное.

Учитель откладываетъ на счетахъ 12 шариковъ — на первой проволокѣ 10, а на второй 2. Когда дѣти указали десятичный составъ числа 12, учитель говоритъ, что 12 шариковъ надо *взять 4 раза;* затѣмъ онъ беретъ по 10 шариковъ 4 раза, откладывая ихъ на слѣдующихъ четырехъ проволокахъ.

„Сколько шариковъ мы отложили на каждой проволокѣ? Сколько разъ по 10 шариковъ взяли? Сколько получилось? Какъ получили 40 шариковъ? Всѣ ли 12 шариковъ мы взяли 4 раза? Сколько шариковъ еще взять 4 раза? Отложи на седьмой проволокѣ 4 раза по 2 шарика! Сколько шариковъ получилось на седьмой проволокѣ? Сколько получилось всего? Какъ это узнать? Сколько шариковъ надо было взять 4 раза? Сколько получили? *Какъ мы 12 взяли 4 раза?* (Сперва 10 взяли 4 раза, получили 40; потомъ 2 взяли 4 раза, получили 8; 40 да 8 — 48.) *Итакъ,* сколько получается, если 12 взять 4 раза?"

Учитель отодвигаетъ въ сторону 8 шариковъ и четвертый десятокъ.

„Сколько разъ по 10 шариковъ теперь отложено? Сколько получилось? Какъ получили 30 шариковъ? Отложи на шестой проволокѣ 3 раза по 2 шарика! Сколько шариковъ теперь на шестой проволокѣ? Сколько шариковъ всего отложено? Сколько разъ взято по 12 шариковъ? Какъ взяли 12 шариковъ 3 раза? Возьмите число 12 два раза! Сколько получили? Какъ взяли? 12 повторить 1 разъ, сколько получается? Какъ мы взяли 12 три раза? четыре раза? Возьмите 12 шесть разъ! Сколько получили? Какъ взяли? Сколько десятковъ сперва взяли 6 разъ? Потомъ что взяли 6 разъ? — Сколько десятковъ и единицъ содержитъ число 23? Это число намъ надо взять 3 раза. Возьмите десятки даннаго числа 3 раза! Сколько получили? Сколько единицъ еще надо взять 3 раза? Возьмите! Какъ узнать полный результатъ? Узнайте! Сколько получили? Какъ 23 взять 3 раза? Возьмите 24 три раза? Сколько получили? Какъ 25 взять 4 раза? 34 два раза? 47 два

Число, которое должны повторять слагаемымъ, наз. Множимымъ. Число, которое показываетъ, сколько разъ надо множимое повторить слагаемымъ наз. Множителемъ.

раза? Сколько получите, если 31 возьмете 3 раза? Если 45 взять 2 раза, сколько получается?“

Когда приходится умножать однозначное число на двузначное, то сначала нужно умножить его на десятки, а потомъ на единицы множителя, и полученныя отдѣльныя произведенія сложить; напр. для того, чтобы 5 умножить на 14, сначала умножаемъ 5 на 10, получаемъ 50, а потомъ 5 — на 4, получаемъ 20; наконецъ складываемъ 50 и 20, получаемъ 70.

Для выясненія пріема умноженія, учитель прибѣгаетъ къ наглядному пособію: онъ откладываетъ на счетахъ по 5 шариковъ 10 разъ и спрашиваетъ дѣтей, сколько шариковъ отложено и какъ получено это число шариковъ; потомъ онъ откладываетъ еще 4 раза по 5 шариковъ и велитъ узнать, сколько шариковъ отложено во второй разъ; наконецъ, обращается вниманіе дѣтей на то, сколько шариковъ всего отложено и какъ получены эти шарики. Въ этомъ выводѣ и будетъ говориться, какъ 5 взять 14 разъ. Послѣ такого подробнаго объясненія, дѣти поймутъ, какъ умножить однозначное число на двузначное.

§ 59. Въ этомъ же предѣлѣ дѣтей надо ознакомить съ мѣрами: *аршинъ — вершокъ, пудъ — фунтъ — лотъ, бочка — ведро, годъ — мѣсяцъ — недѣля — сутки — часъ — минута — секунда.*

Дѣти уже знаютъ соотношеніе сажени и аршина; поэтому не трудно будетъ ихъ ознакомить съ вершкомъ.

Учитель предлагаетъ ученикамъ измѣрить длину классной комнаты аршиномъ; когда это исполнено и объясненъ способъ измѣренія, учитель предлагаетъ измѣрить длину такого предмета, который короче аршина, напр. длину карандаша; дѣти приходятъ къ заключенію, что въ подобныхъ случаяхъ аршиномъ измѣрять неудобно, вслѣдствіе чего употребляется другая, меньшая, мѣра, напр. вершокъ.

Учитель беретъ аршинъ и держитъ въ его горизонтальномъ направленіи, чтобы всѣ учащіеся могли бы ясно видѣть; затѣмъ онъ дѣлитъ аршинъ пополамъ (по серединѣ карандашомъ проводитъ черту) и спрашиваетъ дѣтей, что было сдѣлано, сколько частей получилось и какъ называется каждая часть. Потомъ каждая полученная часть дѣлится пополамъ, и это дѣлается до тѣхъ поръ, пока не получится 16 равныхъ частей (*послѣдовательное* дѣленіе на 2 надо повторить 4 раза); каждая такая часть называется *вершкомъ.* Изъ способа полученія вершка, дѣти видятъ, что аршинъ

Число полученное послѣ умноженія, наз. произведеніемъ
Множимое и множитель вмѣстѣ наз. сомножителями.

содержитъ 16 вершковъ и что, поэтому, аршинъ больше вершка въ 16 разъ. Послѣ ознакомленія дѣтей съ величиной вершка, надо приступить къ измѣренію размѣровъ тѣлъ вершкомъ, напр. измѣрить длину карандаша, ручки и т. п. Тутъ же дѣлается выводъ, какое удобство представляетъ измѣреніе размѣровъ маленькихъ предметовъ вершкомъ: *можно составить болѣе ясное понятіе о величинѣ размѣровъ даннаго предмета.*

Затѣмъ надо задавать примѣры на раздробленіе аршинъ въ вершки; напр. 2 аршина, сколько вершковъ?

„Сколько вершковъ содержитъ 1 аршинъ? Сколько разъ *по 16 вершковъ* въ 2 аршинахъ? Сколько получается, если 16 вершковъ взять 2 раза? Итакъ, сколько вершковъ въ двухъ аршинахъ? Какъ узнать? — Сколько вершковъ содержатъ 3 аршина? Какъ узнать? Почему 16 вершковъ взять 3 раза? 3 аршина 4 вершка — сколько вершковъ? Какъ узнали?“

§ 60. При ознакомленіи учащихся съ пудомъ, фунтомъ и лотомъ, было бы желательно имѣть соотвѣтствующія гири и вѣсы, чтобы учащіеся сами посредствомъ своего *мускульнаго чувства* и *осязанія, непосредственно* составили бы ясное понятіе о единицахъ мѣръ вѣса и о причинѣ употребленія различныхъ единицъ или мѣръ.

Годомъ называется время, въ теченіе котораго земля дѣлаетъ полный оборотъ вокругъ солнца. Словесное усвоеніе дѣтьми этого опредѣленія еще преждевременно, но содержаніе его необходимо выяснить.

Учитель обращаетъ вниманіе дѣтей на ежедневный восходъ и заходъ солнца и, въ зависимости отъ этого, на день и ночь или *сутки.* Послѣ того онъ указываетъ учащимся, что на самомъ дѣлѣ движется не солнце, а земля, хотя мы этого не замѣчаемъ, — и что земля движется вокругъ солнца, но для этого нужно гораздо большее время, чѣмъ сутки; это время называется годомъ. Потомъ дѣти знакомятся съ подраздѣленіемъ года на мѣсяцы и недѣли и числомъ дней каждаго мѣсяца, равно и съ дѣленіемъ недѣли на сутки. При ознакомленіи съ сутками, надо дѣтямъ указать на начало (полночь) и конецъ ихъ, раздѣленіе на часы, часа на минуты и минуты на секунды, причемъ полезно выяснять выраженія въ родѣ слѣдующихъ: *Сколько часовъ* прошло отъ начала сутокъ до 9 часовъ утра? до 11 часовъ дня? *Который теперь часъ*, если отъ начала сутокъ прошло 7 часовъ? *Сколько показываютъ* часы, если отъ начала сутокъ прошло 14 часовъ? 15 часовъ? 17 часовъ? 18 часовъ 30 минутъ?

Элементы умнож. Умноженіе такое ариѳм. дѣйствіе, посредствомъ котораго одно данное число повторяется слагаемымъ столько разъ, сколько въ другомъ ~~данномъ~~ числѣ находится ~~въ~~ единицъ.

§ 61. Въ заключеніе надо сказать нѣсколько словъ о рѣшеніи сложныхъ задачъ на этой ступени обученія.

Упражненіями въ умноженіи на наглядныхъ пособіяхъ, отвлеченныхъ числахъ и въ рѣшеніи простыхъ задачъ дѣти подготовлены къ рѣшенію сложныхъ задачъ, къ составленію плана рѣшенія и объясненія ихъ. Поэтому, на сложныхъ задачахъ и примѣрахъ дѣти повторяютъ пройденное, а, при записываніи плана рѣшенія и объясненія, упражняются въ письменномъ изложеніи мыслей, что имѣетъ большое значеніе при обученіи вообще и при обученіи ариѳметикѣ въ частности.

Дѣленіе.

§ 62. При дѣленіи во второмъ концентрѣ бываютъ слѣдующіе случаи:

1) Раздѣлить однозначное число на однозначное; напр. 8 : 4.
2) Раздѣлить двузначное число на однозначное; напр. 48 : 2.
3) Раздѣлить двузначное число на двузначное; напр. 48 : 24.

Первый случай дѣленія дѣтямъ извѣстенъ изъ перваго концентра; остается имъ уяснить второй и третій случаи.

Надо замѣтить, что и въ этомъ предѣлѣ необходимо строго различать дѣленіе на равныя части и дѣленіе по содержанію, вслѣдствіе чего ознакомленіе съ каждымъ смысломъ дѣленія нужно вести совершенно отдѣльно, а при рѣшеніи задачъ подробно выяснять, почему дѣлить число на равныя части или по содержанію.

Такъ какъ дѣти уже знакомы съ терминами: „дѣлить на равныя части“ и „содержится“ и умѣютъ раздѣлить числа въ томъ случаѣ, когда дѣлимое и дѣлитель суть однозначныя, то слѣдуетъ вкратцѣ повторить первый случай дѣленія и перейти ко второму: къ дѣленію двузначнаго числа на однозначное, начиная съ дѣленія на 2 равныя части или пополамъ.

При дѣленіи чиселъ первой сотни на 2, надо соблюдать слѣдующую послѣдовательность: дѣлить

1) четное число десятковъ;
2) нечетное число десятковъ;
3) двузначное число, десятки и единицы котораго порознь дѣлятся на 2 безъ остатка;
4) двузначное число, сумма десятковъ и единицъ котораго дѣлится безъ остатка на 2;
5) нечетное двузначное число.

 Дѣленіемъ наз. дѣйствіе, посредствомъ котораго по данному произведенію двухъ сомножителей и одному изъ этихъ сомножителей отыскивается другой.

Первые два случая уже извѣстны дѣтямъ изъ дѣйствій надъ полными десятками въ предѣлѣ первой сотни; только нужно ихъ повторить, причемъ слѣдуетъ обращать вниманіе дѣтей на то, почему, напр., 70, при дѣленіи на 2, разлагаемъ на 60 и 10, а не на другія группы; почему 90 разлагаемъ на 80 и 10 и т. д.

Чтобы дѣтямъ стало ясно, какое удобство представляетъ разложеніе 70 на 60 и 10, при дѣленіи на 2 равныя части, нужно данное число разложить на 40 и 30 и предложить дѣтямъ раздѣлить полученныя числа на двѣ равныя части; раздѣливъ 40 пополамъ, дѣти получаютъ 20, раздѣливъ 30 пополамъ, получаютъ 15 или 1 десятокъ и 5 единицъ; всего 3 десятки и 5 единицъ или 35. Такимъ образомъ, при первомъ дѣленіи, получаемъ *только часть* полныхъ десятковъ частнаго, а при второмъ дѣленіи получаемъ оставшуюся часть полныхъ десятковъ и единицы частнаго; кромѣ того, при второмъ дѣленіи, надо число 30 разложить на 20 и 10 и каждое число раздѣлить пополамъ. Слѣдовательно, въ данномъ случаѣ надобно произвести *всего 2 разложенія* и дѣленіе *трехъ* чиселъ пополамъ, тогда какъ при разложеніи 70 на 60 и 10, когда при дѣленіи *сразу получаемъ всѣ полные* десятки частнаго, приходится произвести только *одно* разложеніе и дѣленіе *двухъ* чиселъ пополамъ. На этомъ основаніи, при дѣленіи 70 на 2 равныя части, данное число надо разложить на 60 и 10; число 90, при дѣленіи его на 2 равныя части, нужно раложить на 80 и 10 и т. п.

§ 63. Когда это дѣтьми усвоено, можно перейти къ дѣленію двузначныхъ чиселъ пополамъ.

„Отложи на счетахъ 24 шарика! Сколько десятковъ и единицъ въ этомъ числѣ? Раздѣли два десятка пополамъ! (Ученикъ беретъ десятки и сразу отодвигаетъ одинъ отъ другого.) Сколько получилось въ каждой части? Всѣ ли 24 шарика мы уже раздѣлили на 2 равныя части? Сколько шариковъ еще надо раздѣлить? Раздѣли 4 шарика на 2 равныя части! Сколько получилось въ каждой части? Сколько шариковъ получили отъ *перваго* дѣленія? Сколько — отъ *второго?* Сколько шариковъ *всего* получено? Какъ это узнать? Какъ мы 24 шарика раздѣлили на 2 равныя части? — Раздѣлите 26 на 2 равныя части? Сколько получилось въ каждой части? Какъ вы получили каждую часть? Раздѣлите 28 на 2 равныя части или пополамъ! Сколько получили? Какъ раздѣлили? 48 раздѣлить по-

Дѣлимымъ наз. данное произведеніе дѣленія; данный сомножитель — дѣлителемъ, а искомый сомножитель — частнымъ.

поламъ, сколько? Сколько получится, если 64 раздѣлить пополамъ? Раздѣлите 86 на 2 равныя части! Сколько получили? Какъ раздѣлили?"

При дѣленіи чиселъ *второго* десятка пополамъ, надо ссылаться на выученную таблицу умноженія; напр. 14 раздѣлить пополамъ, получается 7, такъ какъ 7 надо взять 2 раза, чтобы получить 14.

„Сколько десятковъ и единицъ содержитъ число 34? Сколько шариковъ у меня здѣсь отложено? (Учитель откладываетъ 34 шарика.) 34 шарика нужно раздѣлить на 2 равныя части. Если 40 раздѣлить на 2 равныя части, сколько полныхъ десятковъ получимъ въ каждой части? Получимъ ли отъ дѣленія 34 единицъ 2 полныхъ десятка? Какое число надо раздѣлить на 2 равныя части, чтобы получить 1 полный десятокъ? На сколько *группъ* я разложилъ 34 шарика? (Учитель разлагаетъ 34 на 20 и 14.) Сколько шариковъ въ первой группѣ? Если 20 шариковъ раздѣлить пополамъ, сколько получается? Раздѣлите 14 пополамъ! Сколько получили? Сколько всего получилось въ каждой части? Какъ мы раздѣлили 34 на 2 равныя части? Сколько полныхъ десятковъ получилось въ каждой части! Какъ получить *сразу всѣ полные десятки?* Если сначала 10 раздѣлить на 2 равныя части, получимъ ли тогда полные десятки сразу? Итакъ, *отчего* сначала дѣлимъ 20, а не 10? Какъ вы 38 раздѣлите на 2 равныя части? Сколько получается, если 38 раздѣлить пополамъ? Раздѣлите 32 пополамъ! Какъ получили число 16? Какъ раздѣлить 50 на 2 равныя части? Раздѣлите 52 пополамъ! Сколько получили? Какъ нашли число 26? Раздѣлите 76 пополамъ! Какъ раздѣлили?" и т. д.

„Сколько получается, если 12 раздѣлить на 2 равныя части? Если 13 надо раздѣлить на 2 равныя части, то сколько единицъ останется нераздѣленными? Раздѣлите 17 пополамъ! Сколько получили въ каждой части? Сколько единицъ *осталось?* Какъ это узнать? 47 раздѣлить на 2 равныя части, сколько? Какой *остатокъ?* Какъ его *узнать?"*

Послѣ того задаются соотвѣтствующія задачи, чтобы при рѣшеніи ихъ можно было примѣнить дѣленіе двузначныхъ чиселъ пополамъ.

При дѣленін на 2 въ смыслѣ содержанія надо держаться того же порядка, какъ и при дѣленіи на равныя части, и, въ случаѣ затрудненія, прибѣгать къ нагляднымъ пособіямъ.

§ 64. Когда дѣленіе на 2 усвоено, нужно перейти къ дѣленію на другія однозначныя числа *по порядку,* за исключеніемъ тѣхъ случаевъ, когда, при дѣленіи на равныя части, удобно примѣнить *послѣдовательное* дѣленіе; напр., для того, чтобы раздѣлить на 9 равныхъ частей, можно дѣлить 2 раза послѣдовательно на 3 равныя части. Поэтому дѣленіе на 9 равныхъ частей удобно разсматривать въ связи съ дѣленіемъ на 3 равныя части; впрочемъ, нѣтъ надобности каждый разъ примѣнять послѣдовательное дѣленіе: частное находится скорѣе *по таблицѣ умноженія;* напр., если требуется 63 раздѣлить на 9 равныхъ частей, то дѣти берутъ такое число, *которое* (при дѣленіи на равныя части) или *на которое* (при дѣленіи по содержанію) надо умножить 9, чтобы получить 63. То же самое бываетъ и въ тѣхъ случаяхъ, когда частное двузначное число: тогда дѣлимое разлагается на два слагаемыхъ, причемъ отъ дѣленія перваго изъ нихъ получаются полные десятки частнаго, а отъ дѣленія второго — единицы. Пояснимъ сказанное примѣромъ: пусть требуется 91 раздѣлить на 7 равныхъ частей; для этого дѣлимое разлагаемъ на 70 и 21 (надо обратить вниманіе дѣтей на то, почему сначала дѣлимъ 70, а не другое число), а эти числа раздѣлить дѣти умѣютъ изъ предыдущихъ примѣровъ.

При дѣленіи на однозначное число, примѣры слѣдуетъ располагать *по степени трудности производства дѣйствія,* какъ и при дѣленіи на 2; такъ, сначала нужно дѣлить числа десятковъ, когда и въ частномъ получаются полные десятки (80 : 8, 40 : 4); затѣмъ числа десятковъ, дѣлящихся безъ остатка на данное однозначное число, когда въ частномъ получается двузначное число (60 : 4, 70 : 5, 90 : 6); наконецъ, дѣлить двузначныя числа, когда 1) десятки и единицы порознь дѣлятся на данное число, 2) только сумма десятковъ и единицъ двузначнаго числа дѣлится безъ остатка на данное число (55 : 5, 77 : 7; 68 : 4, 96 : 8); 3) дѣленіе съ остаткомъ (17 : 2, 25 : 4).

§ 65. Третій случай дѣленія, какъ самый трудный, требуетъ хорошей подготовки учителя къ *веденію* урока и внимательнаго отношенія учащихся къ *ходу* урока; только при соблюденіи этихъ условій учащіеся усвоятъ данный матеріалъ *сознательно.*

Дѣленіе полныхъ десятковъ на 10 уже пройдено; но такъ какъ оно, отчасти, подготовляетъ дѣтей къ уразумѣнію дѣленія на двузначное число, то его надо вкратцѣ повторить, послѣ чего можно перейти къ дѣленію на 12 равныхъ частей, пользуясь слѣдующимъ свойствомъ произведенія:

Чтобы раздѣлить какое-нибудь число на произведеніе, надо его раздѣлить на перваго сомножителя, полученное частное раздѣлить на второго и т. д.

Такъ какъ 12 есть произведеніе 4 и 3, то отсюда слѣдуетъ, что вмѣсто того, чтобы раздѣлить какое-нибудь число на 12, можно его раздѣлить на 4 и полученное частное на 3. Этимъ свойствомъ произведенія можно пользоваться при дѣленіи на равныя части, а при объясненіи содержанія двузначнаго числа въ двузначномъ, нужно прибѣгать къ *вычитанію;* напр., пусть требуется узнать, сколько разъ въ 48 содержится 12; для этого отъ 48 отнимаемъ по 12 и считаемъ, сколько разъ отняли. Отнявъ одинъ разъ, получаемъ 36; отнявъ другой разъ — 24. Мы уже отняли 2 раза по 12, т. е. всего 24, и еще осталось 24; изъ этого заключаемъ, что отъ оставшагося числа еще можно будетъ отнять 2 раза по 12; всего же отъ 48 можно отнять 4 раза по 12, т. е. въ 48 содержится 12 четыре раза.

§ 66. Для выясненія дѣленія на 12 равныхъ частей, нагляднымъ пособіемъ служатъ шведскіе счеты.

Учитель откладываетъ на первой проволокѣ счетовъ 12 шариковъ и располагаетъ ихъ по серединѣ проволоки, послѣ того онъ раздѣляетъ 12 шариковъ на 4 равныя группы.

„Сколько шариковъ я отложилъ? На сколько частей раздѣлены 12 шариковъ? Сколько шариковъ получилось въ каждой части? Сравнивайте полученныя части между собою! Что видите? Итакъ, на сколько равныхъ частей мы раздѣлили 12 шариковъ? Сколько получается, если 12 раздѣлить на 4 равныя части? Смотрите, что я дальше буду дѣлать! (Учитель беретъ въ каждой группѣ крайніе шарики и одновременно отодвигаетъ отъ средняго, — при томъ на такое разстояніе, чтобы и послѣ этого можно было ясно различать первыя группы шариковъ.) Что я сдѣлалъ съ каждой полученной частью? Сосчитайте, сколько частей получилось всего? Сколько шариковъ находится въ каждой части? Какъ мы раздѣлили 12 шариковъ на 12 равныхъ частей? Слѣдовательно, сколько получается, если 12 раздѣлить на 12 равныхъ частей?“

Затѣмъ учитель откладываетъ и на второй проволокѣ 12 шариковъ, спрашиваетъ, сколько шариковъ всего отложено, и говоритъ, что 24 шарика нужно раздѣлить на 12 равныхъ частей. Послѣ того учитель раздѣляетъ 24 шарика на 4 равныя части и предлагаетъ ученикамъ раздѣлить каждую полученную часть на 3 равныя части. Наконецъ, дѣлается выводъ, какъ 24 раздѣлить на 12 равныхъ частей. Потомъ надо разобрать нѣсколько примѣровъ на отвлеченныхъ числахъ, и дѣленіе на 12 равныхъ частей будетъ усвоено.

Когда дѣти, такимъ образомъ, ознакомлены съ дѣленіемъ на 12 равныхъ частей, можно имъ указать на другой способъ нахожденія частнаго, а именно на способъ *угадыванія* или *подыскиванія;* напр.. для того, чтобы найти частное отъ дѣленія 96 на 12, подыскиваемъ такое число, которое надо умножить на 12, чтобы получить 96; съ этой цѣлью *пробуемъ,* не будетъ ли это число 6, 7 или 8. Умноживъ 12 на 6, получаемъ 72, что меньше 96 на 24, а потому частное будетъ двумя единицами больше (отъ дѣленія 24 на 12, получается 2), т. е. 8.

§ 67. Дѣленіе на другія двузначныя числа объясняется подобнымъ же образомъ, причемъ чаще нужно пользоваться пріемомъ угадыванія, чѣмъ другими, потому что этимъ способомъ частное находится скорѣе.

Въ задачи, задаваемыя на этой ступени обученія, можетъ входить *превращеніе именованныхъ чиселъ;* напр., 48 дюймовъ, сколько футовъ? 96 вершковъ, сколько аршинъ? и т. д.

Элементы дѣленія

Здѣсь же надо дѣтей ознакомить съ элементами дѣленія; опредѣленія ихъ, при дѣленіи на равныя части, слѣдующія: *дѣлимымъ* называется то число, которое надо дѣлить на равныя части; *дѣлителемъ* — то число, которое показываетъ, на сколько равныхъ частей надо раздѣлить первое число; *частное* есть то число, которое показываетъ величину каждой части. При дѣленіи же по содержанію опредѣленія слѣдующія: дѣлимое есть число, *въ которомъ* надо узнать содержаніе другого, меньшаго; дѣлитель есть число, *содержаніе котораго* надо узнать въ большемъ; а частное — число, показывающее, *сколько разъ* меньшее число содержится въ большемъ.

Когда пройдено дѣленіе, слѣдуетъ повторить все пройденное на примѣрахъ и сложныхъ задачахъ, а также рѣшать задачи *алгебраическаго* характера, къ разсмотрѣнію которыхъ и перейдемъ.

Задачи на числа первой сотни.

§ 68. Кромѣ задачъ *чисто ариѳметическихъ,* рѣшеніе которыхъ не представляетъ большого труда и для учениковъ со средними способностями, надо задавать задачи алгебраическаго характера, называемыя такъ оттого, что онѣ легко рѣшаются пріемами *алгебры.*

Что касается послѣдняго рода задачъ, то надо сказать, что ихъ рѣшеніе *ариѳметическими пріемами* имѣетъ большое *образовательное* значеніе; въ виду чего и въ начальной народной школѣ необходимо удѣлить время рѣшенію такого рода задачъ, начиная съ средняго отдѣленія, съ цѣлью — ознакомить учащихся съ болѣе пригодными типами такихъ задачъ, чрезъ рѣшеніе образцовъ, при дѣятельномъ участіи учителя.

Болѣе пригодные типы такихъ задачъ слѣдующіе:

1) На дѣленіе числа на 2 или болѣе неравныхъ частей, изъ которыхъ каждая больше или меньше одной изъ нихъ *на данное число.*

2) На дѣленіе числа на 2 или нѣсколько неравныхъ частей, изъ которыхъ каждая больше или меньше той или другой изъ частей *въ нѣсколько разъ.*

3) На *смѣшеніе второго рода,* т. е. когда по данному количеству смѣси (или сплава), цѣнѣ единицы смѣси (или цѣнѣ всей смѣси) и цѣнѣ единицы каждаго сорта требуется опредѣлить количество каждаго сорта.

4) *На движеніе,* — опредѣленіе мѣста и времени встрѣчи двухъ тѣлъ, движущихся другъ другу навстрѣчу и по одному направленію.

§ 69. При рѣшеніи упомянутыхъ задачъ, учитель наводящими вопросами доводитъ дѣтей до пониманія пріемовъ рѣшенія и плана рѣшенія данной задачи, и только въ исключительныхъ случаяхъ прямо указываетъ на пріемы рѣшенія.

Считая рѣшеніе задачъ алгебраическаго характера работой трудной какъ для учителя, такъ и для учениковъ, изложимъ ходъ этой работы, выбирая по одной задачѣ на каждый изъ вышеозначенныхъ родовъ.

1) Въ двухъ классахъ вмѣстѣ 45 учениковъ; въ одномъ больше, чѣмъ въ другомъ, на 15 учениковъ. Сколько учениковъ въ каждомъ классѣ?

„Сколько учениковъ въ обоихъ классахъ вмѣстѣ? Въ которомъ классѣ учениковъ больше? На сколько больше? Если изъ перваго класса удалить 15 учениковъ, *какъ* тогда будетъ учениковъ въ обоихъ классахъ? Сколько учениковъ тогда станетъ въ обоихъ классахъ вмѣстѣ? Какъ это узнать? А сколько тогда будетъ въ *каждомъ* классѣ? Какъ узнать? Но, въ самомъ дѣлѣ, на сколько учениковъ въ первомъ классѣ больше, чѣмъ во второмъ? Узнайте, сколько учениковъ было въ первомъ классѣ! Какъ узнали?“

2) У двухъ мальчиковъ вмѣстѣ 30 яблокъ; у перваго вдвое больше, чѣмъ у второго. Сколько яблокъ у каждаго мальчика?

„Сколько яблокъ вмѣстѣ у обоихъ мальчиковъ? Во сколько разъ у перваго мальчика больше, чѣмъ у второго? Если число яблокъ перваго мальчика раздѣлить на 2 равныя части, то сколько *такихъ же* частей будетъ у второго? Сколько частей у нихъ будетъ вмѣстѣ? Какъ узнать число всѣхъ частей? Сколько яблокъ въ 3 частяхъ? Сколько въ одной? Какъ узнать? Итакъ, сколько яблокъ у второго мальчика? Во сколько разъ у перваго мальчика больше, чѣмъ у второго? Сколько яблокъ было у перваго мальчика? Какъ узнали?“

3) За 30 бутылокъ краснаго и бѣлаго вина заплачено 78 руб.; бутылка краснаго вина стоитъ 3 руб., а бутылка бѣлаго — 2 руб. Сколько было бутылокъ каждаго сорта вина?

„Сколько сортовъ вина было? Сколько бутылокъ вина всего было? Сколько стоитъ бутылка краснаго вина? Если *все* вино красное, то сколько оно будетъ стоить? Какъ это узнать? А, *въ дѣйствительности,* сколько стоитъ все вино? Отчего мы получили число, большее 78? Узнайте, на сколько рублей надо будетъ стоимость вина *понизить?* Какъ узнали? Если одну бутылку краснаго вина *замѣнить* бутылкой бѣлаго вина, то на сколько рублей стоимость вина понизится? Какъ это узнать? А на сколько рублей всего надо стоимость понизить? Сколько бутылокъ бѣлаго вина надо взять? Какъ рѣшить этотъ вопросъ? Какъ узнать, сколько бутылокъ было краснаго вина? Узнайте!“

Эту же задачу можно рѣшать предположеніемъ, что все вино бѣлое.

4) Между двумя городами 90 верстъ; 2 путешественника выѣхали изъ этихъ городовъ навстрѣчу другъ другу. Первый проѣзжаетъ въ часъ 4 версты, а второй — 6 верстъ. Черезъ сколько времени они встрѣтятся?

„Какое разстояніе надо проѣхать обоимъ путешественникамъ вмѣстѣ? Сколько верстъ проѣзжаетъ въ часъ первый путешественникъ? На сколько верстъ онъ ***приближается*** ко второму въ часъ? Сколько верстъ проѣзжаетъ второй путешественникъ въ часъ? На сколько верстъ приближается второй путешественникъ къ первому въ часъ? Какъ узнать, сколько верстъ проѣзжаютъ ***вмѣстѣ*** оба путешественника въ часъ? Узнайте! Сколько получили? Итакъ, сколько верстъ они проѣзжаютъ вмѣстѣ въ часъ? Сколько верстъ всего надо проѣхать? Сколько часовъ для этого потребуется? Какъ узнать?"

Планъ рѣшенія каждой задачи.

А 1) Сколько учениковъ будетъ въ обоихъ классахъ вмѣстѣ, если въ первомъ классѣ ихъ столько же, сколько во второмъ?
2) Сколько учениковъ было во второмъ классѣ?
3) Сколько учениковъ было въ первомъ классѣ?

Б. 1) Сколько разъ число яблокъ второго мальчика содержится во всемъ числѣ яблокъ?
2) Сколько яблокъ было у второго мальчика?
3) Сколько яблокъ было у перваго мальчика?

В. 1) Сколько стоитъ вино, если все оно красное?
2) На сколько рублей эта стоимость больше дѣйствительной?
3) На сколько бутылка бѣлаго вина дешевле бутылки краснаго вина?
4) Сколько бутылокъ было бѣлаго вина?
5) Сколько бутылокъ было краснаго вина?

Г. 1) Сколько верстъ проѣзжаютъ вмѣстѣ оба путешественника въ часъ?
2) Черезъ сколько часовъ они встрѣтятся?

Рѣшеніе.

А. 1) 45 уч. — 15 уч. = 30 уч.;

2) $\frac{30 \text{ уч.}}{2} = 15$ уч.;

3) 15 уч. + 15 уч.. = 30 уч.

Б. 1) Число ябл. I мальчика — 2 ч.
+
„ „ II „ 1 ч.

3 ч.

2) $\frac{30 \text{ ябл.}}{3} = 10$ ябл.;

3) 10 ябл. × 2 = 20 ябл.

В. 1) 3 руб. × 30 = 90 руб.
2) 90 руб. — 78 = 12 руб.
3) 3 руб. — 2 руб. = 1 руб.
4) 12 руб. : 1 руб. = 12 (бут.).
5) 30 бут. — 12 бут. = 18 бут.

Г. 1) 4 версты + 6 вер. = 10 верстъ;
2) 90 вер. : 10 вер. = 9 (часовъ).

§ 70. Главное мѣсто среди задачъ чисто ариѳметическихъ, задаваемыхъ во второмъ концентрѣ, принадлежитъ задачамъ на *вычисленіе стоимости,* на *простое тройное правило* и *смѣшеніе перваго рода.*

Опредѣлить стоимость нѣсколькихъ одинаковыхъ предметовъ, зная стоимость одного, легко; поэтому мы на этихъ задачахъ не остановимся, а перейдемъ къ задачамъ на простое тройное правило.

Простымъ тройнымъ правиломъ называется способъ — рѣшать такія задачи, въ которыхъ къ тремъ даннымъ числамъ отыскивается четвертое, имъ пропорціональное.

Пропорціональность бываетъ двоякая: прямая и обратная. Признакъ прямой пропорціональности слѣдующій: съ увеличеніемъ одной величины въ нѣсколько разъ, другая величина увеличивается во столько же разъ, или съ уменьшеніемъ одной величины въ нѣсколько разъ, другая уменьшается во столько же разъ.*)

*) Это выраженіе надо понимать такъ: съ увеличеніемъ *значенія* одной величины, увеличивается *соотвѣтствующее* значеніе другой величины и т. д.

Признакъ обратной пропорціональности: съ увеличеніемъ одной величины въ нѣсколько разъ, другая величина *уменьшается* во столько же разъ, или съ уменьшеніемъ одной величины въ нѣсколько разъ, другая величина увеличивается во столько же разъ.

Съ содержаніемъ изложеннаго дѣти знакомятся путемъ *практическимъ*, — изъ рѣшенія соотвѣтствующихъ задачъ.

Самый простой и естественный способъ рѣшенія задачъ на простое тройное правило есть *способъ приведенія къ единицѣ*, состоящій въ томъ, что къ единицѣ приводится значеніе той величины, въ которой нѣтъ неизвѣстнаго.

Возьмемъ слѣдующую задачу:

„3 аршина сукна стоятъ 6 рублей; сколько стоятъ 4 аршина того же сукна?“

Полезно пріучать дѣтей записывать такія задачи въ сокращенномъ видѣ, обозначая неизвѣстное число буквою x или вопросительнымъ знакомъ; для данной задачи получаемъ слѣдующую запись рѣшенія:

$$\begin{array}{l} 3 \text{ арш.} — 6 \text{ руб.} \\ 4 \ \ „ \ \ — x \\ \hline 3 \text{ арш.} — 6 \text{ руб.} \\ 1 \text{ арш.} — \dfrac{6 \text{ руб.}}{3} = 2 \text{ руб.} \\ 4 \ \ „ \ \ — 2 \text{ руб.} \times 4 = 8 \text{ руб.} \end{array}$$

Если 3 арш. сукна стоятъ 6 руб., то 1 арш. того же сукна — въ 3 раза дешевле; нужно 6 рублей раздѣлить на 3 равныя части, получается въ каждой части 2 руб.; а 4 арш. дороже, чѣмъ 1 арш., въ 4 раза; чтобы узнать стоимость 4 арш. сукна, надо 2 руб. умножить на 4, получается 8 рублей. Итакъ, 4 арш. того же сукна стоятъ 8 рублей.

Бываютъ такія задачи на простое тройное правило, при рѣшеніи которыхъ способомъ приведенія къ единицѣ, значеніе второй величины, соотвѣтствующее единичному значенію первой, выражается числомъ дробнымъ, а значеніе второй величины, соотвѣтствующее значенію нѣсколькихъ единицъ первой, выражается числомъ цѣлымъ; въ такихъ случаяхъ при рѣшеніи необходимо взять такое значеніе первой величины, чтобы соотвѣтствующее значеніе второй величины выражалось числомъ цѣлымъ, и чтобы взятое значеніе первой величины содержалось цѣлое число разъ во всемъ значеніи первой величины.

Для примѣра возьмемъ слѣдующую задачу:

„18 перьевъ стоятъ 12 коп.; сколько стоятъ 24 такихъ же пера?“

При рѣшеніи этой задачи, сперва надо узнать стоимость 3 или 6 перьевъ; 18 перьевъ стоятъ 12 коп., а 3 пера — въ 6 разъ дешевле; чтобы это узнать, надо узнать, сколько разъ въ 18 перьевъ содержится 3 пера; содержится 6 разъ. Зная это, можемъ узнать стоимость 3 перьевъ; для чего нужно 12 коп. раздѣлить на 6 равныхъ частей, получается 2 коп. Если 3 пера стоятъ 2 коп., то 24 пера — въ 8 разъ дороже, такъ какъ въ 24 перьяхъ содержится 3 пера 8 разъ, — т. е. стоятъ 16 коп.; для рѣшенія послѣдняго вопроса, нужно 2 коп. умножить на 8, получается 16 коп.

§ 71. Къ смѣшенію перваго рода относятся такія задачи, въ которыхъ даны количества смѣшиваемыхъ веществъ, цѣна или достоинство единицы каждаго сорта, а надо найти цѣну единицы смѣси (или сплава).

Задача:

„Смѣшали 5 фунтовъ чаю по 4 руб. фунтъ съ 5 фунтами чаю другого сорта по 2 руб. фунтъ. Сколько стоитъ фунтъ смѣси?“

Планъ рѣшенія и рѣшеніе.

1. Сколько стоитъ чай перваго сорта?
2. Сколько стоитъ чай второго сорта?
3. Сколько стоитъ смѣсь?
4. Сколько было смѣси?
5. Сколько стоитъ фунтъ смѣси?

$$\begin{array}{lcccl} & & 4) & & 3) \\ 1)\ 4\ \text{руб.} & \times & 5 & = & 20\ \text{руб;} \\ & & + & & + \\ 2)\ 2\ \text{руб.} & \times & 5 & = & 10\ \text{руб.;} \\ \hline & & 10\ \text{фун.} & \text{стоятъ} & 30\ \text{руб.} \end{array}$$

$$5)\ \frac{30\ \text{руб.}}{10} = 3\ \text{руб.}$$

Ознакомленіе съ простѣйшими дробями.

§ 72. Упражненія въ ознакомленіи учащихся съ простѣйшими дробями и ихъ свойствами мы располагаемъ въ слѣдующей послѣдовательности:

1) Происхожденіе дробей;
2) члены дроби: числитель и знаменатель;
3) сравненіе величины дробей;
4) нахожденіе одной или нѣсколькихъ частей какого-нибудь числа;
5) дробь правильная и неправильная, исключеніе цѣлаго числа изъ неправильной дроби, смѣшанное число;
6) простѣйшіе случаи сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія дробей;
7) нахожденіе числа, когда извѣстна одна или нѣсколько его частей.

§ 73. Какъ извѣстно, дроби происходятъ отъ дѣленія и измѣренія; въ первомъ случаѣ дробь есть одна или нѣсколько равныхъ частей единицы или частное отъ дѣленія ея числителя на знаменателя; а во второмъ — число, показывающее, сколько разъ и какая именно доля единицы уложилась въ измѣряемой величинѣ.

Происхожденіе дробей отъ дѣленія дѣтямъ легче понятно, чѣмъ происхожденіе ихъ отъ измѣренія; поэтому слѣдуетъ начинать съ дѣленія.

Наглядными пособіями могутъ служить слѣдующія: ***листъ бумаги, бечевка, черта, единицы мѣръ длины, дробная часть шведскихъ счетовъ*** и др.

Учитель беретъ листъ бумаги и дѣлитъ его ***пополамъ:***

„На сколько частей я раздѣляю листъ бумаги? Сравнивайте полученныя части между собою! (Учитель накладываетъ одну часть на другую; дѣти видятъ, что обѣ части равны между собою.) Каковы они? Какъ называется каждая изъ нихъ? Сколько половинъ въ листѣ? Какъ получить половину листа? Какъ получить половину черты? аршина? сажени? Сколько вершковъ въ половинѣ аршина? Какъ узнать? — Раздѣли каждую половину листа пополамъ! Сколько частей всего получилось? Какія эти части между собою? Какъ называется каждая изъ нихъ? Сосчитай ***четверти!*** (Ученикъ считаетъ: одна четверть, двѣ четверти, три четверти, четыре четверти.) Сколько четвертей въ единицѣ? Сколько четвертей содержитъ половина? Во сколько разъ половина больше четверти? Какъ получить четверть, если знаемъ половину? Какъ получить четвертую часть единицы? Какъ узнать четверть фута? — Я раздѣляю четверть пополамъ; сколько частей получилось? Сколько частей получится, если каждую четверть раздѣлить пополамъ? Сколько такихъ частей въ единицѣ? Каждая такая часть называется ***восьмою.*** Повтори! Какъ получить восьмую часть листа бумаги? Сколько восьмыхъ въ листѣ? въ половинѣ листа? въ четверти? Какъ получить четверть листа бумаги? Какъ получить три четверти листа бумаги, если онъ раздѣленъ на четыре равныя части? Какъ получить двѣ четверти листа бумаги? Во сколько разъ четверть больше восьмой? Какъ получить одну восьмую? три восьмыхъ? — Сколько равныхъ частей единицы содержитъ число три четверти? двѣ четверти? одна четверть? Сколько равныхъ частей единицы въ одной восьмой? въ трехъ восьмыхъ? въ шести восьмыхъ? Числа: ***одна восьмая, три восьмыхъ и др. называются дробями.*** Повтори! Какія дроби мы назвали? Какъ получить дробь одну четверть? три восьмыхъ? три четверти? Сколько равныхъ частей единицы содержатъ дроби: одна четверть и одна восьмая? Сколько равныхъ частей единицы содержитъ дробь три четверти? пять восьмыхъ? шесть восьмыхъ? Какъ сказать вообще о числѣ частей послѣднихъ трехъ дробей? Нѣсколько.) Сколько частей единицы содержатъ первыя дроби: одна четверть и одна восьмая? Сколько вторыя? Итакъ, вообще, сколько равныхъ частей единицы содержатъ дроби? Слѣдовательно, что называется дробью?"

Такимъ же образомъ дѣти ознакомливаются съ дробями: $^1/_3$, $^1/_6$, $^1/_9$; $^1/_5$, $^1/_{10}$; $^1/_7$.

„Какъ получить половину листа бумаги? Сколько половинъ въ единицѣ? Одна половина — сколько тутъ словъ? Какое первое? Какое второе? (Учитель пишетъ дробь: $^1/_2$.) Сколько цифръ написано? Гдѣ находится цифра 1? Гдѣ — цифра 2? Тутъ написана дробь $^1/_2$. Какъ написать дробь $^1/_2$? Сколько чиселъ всего нужно писать? Что показываетъ число 2? Это число называется ***знаменателемъ*** дроби. Какъ называется число 2? Что показываетъ знаменатель дроби? Какое число служитъ знаменателемъ дроби $1/4$? Что показываетъ это число? Назови дробь и укажи ея знаменателя! — Какое число написано надъ чертой у дроби $1/2$? Что показываетъ это число? Число 1 здѣсь называется ***числителемъ*** дроби. Повтори! Что показываетъ числитель дроби? Итакъ, что называется числителемъ? Назови дробь и укажи ея числителя! — Сколько ***членовъ*** у дроби? Какъ называются эти члены? Какой членъ пишется надъ чертою? Гдѣ пишется знаменатель? Что показываетъ каждый изъ членовъ? Какъ написать дробь $1/4$? Напиши ее! Какъ написать $1/10$? $1/16$?" и т. д.

§ 74. При сравненіи величины простѣйшихъ дробей, удобно пользоваться дробной частью шведскихъ счетовъ и чертой, проведенной на классной доскѣ.

Дробная часть шведскихъ счетовъ содержитъ одну ***цѣлую единицу — цилиндръ*** и равныя части этой единицы: половины, трети, четвертыя, пятыя и т. д.

Когда надо сравнивать дроби: $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, учитель откладываетъ эти дроби на счетахъ одну противъ другой и ведетъ слѣдующую бесѣду:

„Какъ получить половину единицы? Сколько половинъ въ единицѣ? Какъ получить дробь $1/3$? Какихъ долей въ единицѣ больше, половинъ или третей? Сравнивайте дроби: $1/2$ и $1/3$! (Учитель указываетъ на эти дроби.) Что видите? (Учитель пишетъ на классной доскѣ рядомъ дроби: $1/2$ и $1/3$.) Сравнивайте дроби: $1/3$ и $1/4$! Которая изъ этихъ дробей больше? Напиши дробь $1/4$ рядомъ съ $1/3$! Сравнивайте числителей написанныхъ дробей! Что находите? Каковы знаменатели у этихъ дробей? Которая изъ дробей больше? $1/4$ и $1/6$ — которая изъ этихъ дробей больше? Напиши дроби: $1/4$ и $1/6$ на классной доскѣ! Сравнивайте ихъ членовъ! Что находите? Итакъ, если у двухъ или нѣсколькихъ дробей числители одинаковы, то которая изъ нихъ больше?"

Учитель переходитъ къ тому случаю, когда у дробей ***числители разные,*** а знаменатели одинаковые.

„Отложи на счетахъ дроби: $1/4$ и $3/4$! Сколько долей въ первой дроби. Сколько — во второй? Въ которой дроби долей больше? Которая дробь больше? Которая меньше? Почему? $^{1}/_{8}$ и $^{3}/_{8}$ — которая изъ этихъ дробей больше и почему?

Потомъ всѣ упомянутыя дроби надо написать на классной доскѣ и сравнивать ихъ члены; ученики приходятъ къ выводу, что если у дробей знаменатели одинаковы, а числители разные, то та дробь больше, у которой числитель больше.

§ 75. „Какъ получить $^{1}/_{4}$ листа бумаги? $^{3}/_{8}$ черты? $^{1}/_{10}$ аршина? Какъ получить $^{1}/_{2}$ единицы? Какъ получить половину 10 единицъ? Узнайте половину 10! Узнайте половину 20! Какъ узнали? Какъ получить половину 40? четверть 40? Десятая часть 50, сколько? Узнайте седьмую часть 70! Сколько получили? Какъ узнали? — Сколько дюймовъ содержитъ футъ? $^{1}/_{4}$ фута? Во сколько разъ $^{3}/_{4}$ больше $^{1}/_{4}$? Сколько дюймовъ въ $^{3}/_{4}$ фута? Какъ узнать? — У мальчика было 40 коп.; онъ истратилъ $^{3}/_{4}$ своихъ денегъ. Сколько денегъ онъ истратилъ? Какую часть 40 коп. истратилъ мальчикъ? Какую часть 40 коп. нужно узнать? Какъ узнать $^{1}/_{4}$ сорока коп.? Какъ получить $^{3}/_{4}$, если знаемъ $^{1}/_{4}$? Узнайте! Итакъ, сколько копеекъ истратилъ мальчикъ?“

Сравненіе правильн. дробей.

§ 76. Какъ получить дробь $^{3}/_{4}$? Сколько четвертей содержитъ 1? Сравнивайте дробь $^{3}/_{4}$ съ 1! Что видите? Назови дробь, которая меньше 1! ***Такія дроби называются правильными.*** Повтори! Какія неправильныя дроби мы назвали? Какія онѣ по сравненію съ единицей? Итакъ, какія дроби называются правильными? (Учитель пишетъ на доскѣ названныя дроби.) Сравнивайте члены написанныхъ дробей! Сравнивайте члены дроби $^{3}/_{4}$ между собою! Который членъ меньше? Какой членъ у всѣхъ дробей меньше? Какой ***внѣшній*** признакъ правильной дроби?

Сколько четвертей содержитъ единица? Сколько шестыхъ долей въ единицѣ? Напиши дроби: $^{4}/_{4}$ и $^{6}/_{6}$! Чему равна каждая изъ написанныхъ дробей? (Учитель ставитъ знакъ равенства на надлежащемъ мѣстѣ и пишетъ 1; получается такая запись: $\frac{4}{4} = 1$; $\frac{6}{6} = 1$.)“

Затѣмъ учитель проводитъ на доскѣ черту и предлагаетъ одному ученику раздѣлить ее на 4 равныя части; потомъ онъ соединяетъ отдѣльными дугами всѣ четыре части, три части и двѣ части и велитъ ученику показывать отдѣльныя дроби и читать.

Когда это сдѣлано, учитель отмѣчаетъ границы ***черты-единицы*** болѣе крупными поперечными линіями, продолжаетъ черту и на продолженіи откладываетъ $^1/_4$ единицы. Спросивъ дѣтей, сколько четвертей теперь всего получилось, онъ пишетъ на доскѣ дробь $^5/_4$; потомъ откладывается еще нѣсколько разъ по одной четверти, причемъ каждый разъ дѣти говорятъ, сколько четвертей получилось, и записываютъ полученныя дроби.

„Сравнивайте съ единицей дроби: $^4/_4$ и $^6/_6$! Что видно изъ сравненія? Назовите другія дроби, которыя равны единицѣ? Какія изъ написанныхъ дробей ***больше*** единицы? На сколько дробь $^5/_4$ больше единицы? (Учитель показываетъ на чертежѣ и пишетъ $^5/_4 = 1^1/_4$; потомъ онъ говоритъ ученикамъ, какъ прочесть.) Сколько цѣлыхъ единицъ въ дроби $^6/_4$? Сколько четвертей сверхъ единицы? Напиши, чему равняется дробь $^6/_4$? — Назовите такія дроби, которыя меньше единицы! Какъ называются такія дроби? Скажите дроби, равныя единицѣ? Напиши эти дроби на классной доскѣ! Назовите нѣсколько дробей, которыя больше единицы! Напиши эти дроби тоже! Прочитай написанныя дроби! Что можно сказать ***о величинѣ этихъ дробей по сравненію съ единицей?*** Такія дроби называются ***неправильными.*** Повтори! Какъ называются написанныя дроби? Каковы онѣ по величинѣ? Итакъ, какія дроби называются неправильными? Скажите такія неправильныя дроби, которыя больше единицы! Скажите такія, которыя равны единицѣ! — Сравнивайте между собою члены дроби $^4/_4$! Сравнивайте члены дроби $^5/_4$. Что видите? Сравнивайте члены остальныхъ неправильныхъ дробей между собою! Что находите? Слѣдовательно, ***каковы члены неправильныхъ дробей?*** Какой ***внѣшній*** признакъ неправильныхъ дробей? — Чему равняется дробь $^5/_4$? $^6/_4$? Напиши число $1^1/_4$! Изъ какихъ частей состоитъ это число? Изъ какихъ частей состоитъ число $1^2/_4$. Такія числа называются ***смѣшанными.*** Повтори! Какія смѣшанныя числа написаны? Изъ чего состоитъ каждое смѣшанное число? Итакъ, что называется смѣшаннымъ числомъ? Изъ какой дроби получилось смѣшанное число $1^1/_4$? $1^2/_4$? — $^9/_4$ — какова эта дробь по величинѣ Сколько единицъ въ числителѣ данной дроби? Сколько — въ знаменателѣ? Сколько разъ въ 9 содержится 4?

Объясненіе неправильн. дроби

Сколько цѣлыхъ единицъ въ данной дроби? Какъ это узнать? Сколько долей единицы остается? Чему равняется дробь $^9/_4$? Напиши это на классной доскѣ! Какое смѣшанное число получилось! Какъ получилось это число? *Мы исключили цѣлое число* изъ неправильной дроби. Что мы сдѣлали? Какъ мы это сдѣлали? Исключите цѣлое число изъ дроби $^6/_5$! Какъ ты это сдѣлалъ? Скажи неправильную дробь и исключи изъ нея цѣлое число! — Можно ли исключить цѣлое число изъ правильной дроби? Отчего нельзя? Итакъ, изъ какихъ дробей можно исключить цѣлое число? *Какъ исключить* цѣлое число изъ неправильной дроби?

§ 77. На этой же ступени обученія дѣтей надо ознакомить съ тѣми случаями сложенія и вычитанія дробей и смѣшанныхъ чиселъ, когда у дробей *знаменатели одинаковы;* кромѣ того, надо ознакомить съ умноженіемъ дроби и смѣшаннаго числа на цѣлое число и съ дѣленіемъ дроби и смѣшаннаго числа на цѣлое, когда числитель дроби дѣлится *безъ остатка* на цѣлое число.

Отложи на счетахъ дроби: $\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{4}$! Прибавь къ первой дроби вторую! Сколько получилось? (Учитель записываетъ это на доскѣ; получается слѣдующая запись: $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{1+2}{4}=\frac{3}{4}$.) Сложите дроби $\frac{5}{6}+\frac{1}{6}$! Сколько получилось? Напиши числа на классной доскѣ? Какой членъ дробей не измѣнился отъ сложенія? *Какіе члены складывали?* Сколько получилось въ первомъ случаѣ? Сколько — во второмъ? Назови двѣ такія же дроби и узнай ихъ сумму! — Напиши на доскѣ числа: $4\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{2}$! Если сложить дроби этихъ чиселъ, сколько тогда получимъ? Сколько получимъ отъ сложенія цѣлыхъ чиселъ? Сколько всего? Какъ это узнать?"

Запись:

$$\begin{array}{r} 4\frac{1}{2} \\ +\ 1\frac{1}{2} \\ \overset{\frown}{1} \\ \hline 6. \end{array}$$

Такимъ же образомъ объясняется вычитаніе дробей.

„Отложи на счетахъ дробь $\frac{1}{8}$! Сколько разъ тутъ взято по $\frac{1}{8}$! Возьми всего 4 раза по $\frac{1}{8}$! Сколько получилось?

(Доли единицы располагаются раздѣльно.) Какъ сложить отложенныя дроби? Напиши числа на доскѣ! Сколько разъ мы взяли числителя дроби? Сколько получили? Мы дробь $\frac{1}{8}$ умножили на 4."

Потомъ учитель записываетъ то же самое короче: $\frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

При умноженіи смѣшаннаго числа на цѣлое, сначала умножаемъ цѣлое число на множителя, а потомъ дробь, и полученныя отдѣльныя произведенія складываемъ.

„Откинь на счетахъ дробь $\frac{4}{7}$! Эту дробь намъ надо раздѣлить на 2 равныя части. (Учитель беретъ въ каждую руку по 2 седьмыхъ и сразу раздвигаетъ въ стороны.) Что я сдѣлалъ? Сколько получилось въ каждой части? Какой членъ дроби не измѣнился? Что произошло съ числителемъ? Отложи дробь $\frac{6}{8}$! Раздѣли ее на двѣ равныя части! Сколько получилось? Напиши числа на доскѣ! Какъ мы $\frac{4}{7}$ раздѣлили пополамъ? Какъ другую дробь раздѣлили на двѣ равныя части? Какъ дробь раздѣлить на 2 равныя части? Раздѣлите дробь $\frac{4}{7}$ на 4 равныя части! Сколько получили? Какой членъ дѣлили? Раздѣлите $\frac{6}{7}$ на шесть равныхъ частей! Какъ раздѣлили? Слѣдовательно, какъ дробь раздѣлить на цѣлое число? — $4\frac{2}{3}$ листа бумаги нужно раздѣлить поровну между двумя учениками; сколько получитъ каждый ученикъ? Повтори задачу! Сколько было бумаги? На сколько равныхъ частей требуется раздѣлить эту бумагу? Почему на *двѣ* равныя части? Если 4 листа раздѣлить пополамъ, сколько тогда получимъ? Сколько получится отъ дѣленія $\frac{2}{3}$ листа на двѣ равныя части? Сколько всего каждый ученикъ получитъ?"

Послѣ объясненія каждаго дѣйствія, задаются соотвѣтствующія задачи.

§ 78. Какъ получить дробь $\frac{4}{5}$? $\frac{1}{6}$? $\frac{3}{4}$? Какъ найти $\frac{3}{4}$ единицы? Какъ найти $\frac{3}{4}$ отъ 12? Если знаемъ $\frac{3}{4}$ числа 12, то какъ найти $\frac{1}{4}$ его? Сколько четвертей содержитъ все искомое число? Если одна четверть его — 3, то какъ получить все число? Узнайте все число! — $\frac{3}{4}$ моихъ денегъ составляютъ 9 рублей; сколько у меня денегъ? Сколько рублей въ $\frac{3}{4}$ моихъ денегъ? Какъ узнать $\frac{1}{4}$ моихъ денегъ, если знаемъ $\frac{3}{4}$ ихъ? Узнайте! Сколько получили? Во сколько разъ всѣ деньги больше, чѣмъ $\frac{1}{4}$

ихъ? Какъ узнать всѣ деньги? Узнайте! — Я задумалъ число; $\frac{1}{2}$ его — 24. Какое это число? — $\frac{1}{3}$ задуманнаго числа — 18. Найдите все задуманное число!“

Изложенныхъ упражненій будетъ достаточно, чтобы ознакомить дѣтей съ простѣйшими дробями и ихъ свойствами. Въ третьемъ концентрѣ знанія дѣтей надо дополнить и *привести въ систему.*

Глава четвертая.

Третій концентръ.

Нумерація чиселъ любой величины.

Элементы нумерацiи

§ 79. *Нумераціей* или *счисленіемъ* называется часть ариѳметики, занимающаяся выговариваніемъ и изображеніемъ чиселъ. Нумерація бываетъ *словесная* и *письменная.* Словесная нумерація есть способъ — изъ небольшого числа словъ, которые легко запомнить, составить названія всѣхъ чиселъ. Письменная же нумерація есть способъ — изображать всѣ числа посредствомъ немногихъ знаковъ.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что, при прохожденіи нумераціи, учителю предстоитъ ознакомить учащихся: 1) съ *названіями* чиселъ и съ составленіемъ ихъ изъ *немногихъ* словъ; 2) съ *системой* счисленія; 3) съ *изображеніемъ* чиселъ посредствомъ немногихъ знаковъ.

Педагогическая практика показываетъ, что, при ознакомленіи учащихся съ нумераціей многозначныхъ чиселъ, полезно выдѣлить особую ступень, заключающую нумерацію чиселъ въ предѣлѣ первой тысячи.

При прохожденіи нумераціи, наглядными пособіями могутъ служить шведскіе счеты, торговые счеты и спички или солома.

§ 80. Учитель велитъ одному ученику считать отъ единицы до десяти по порядку. Потомъ спрашиваетъ:

„Какъ называется число десять иначе? Сколько единицъ содержитъ десятокъ? Какіе предметы считаютъ десятками? Считай полными десятками до ста! Сколько десятковъ содержитъ *сотня?* Сколько единицъ содержитъ сотня? Во сколько разъ сотня больше единицы? Какой **счетной единицей** мы пользовались при счетѣ въ первый разъ? Какою — во второй разъ? Считай полными сотнями! (Ученикъ считаетъ: одна сотня, двѣ сотни и т. д.)."

Такъ продолжаютъ до: десять сотенъ или **тысяча**. Потомъ учитель сообщаетъ дѣтямъ обыкновенныя названія: двѣ сотни или двѣсти, три сотни или триста и т. д. Когда это усвоено, можно перейти къ **письму** полныхъ сотенъ.

„Какъ написать число 100? Напиши это число? Сколько сотенъ въ немъ? На какомъ мѣстѣ пишутся сотни? Если цифру 1 написать отдѣльно, то какое число она будетъ обозначать? Что будетъ обозначено той же цифрой, если къ ней справа приписать одинъ нуль? Что будетъ тогда, если приписать два нуля? Напиши цифру 2? Что она означаетъ? Припиши къ ней справа два нуля! Что теперь означаетъ цифра 2? Какое число сотенъ написано? Какъ написать 200? 100? 300? 400? Напиши 300 и 400! Какъ написалъ? Напишите всѣ сотни по порядку до 900! — Во сколько разъ тысяча больше сотни? На какомъ мѣстѣ пишутся сотни? Тысячи пишутся на **четвертомъ** мѣстѣ справа. Гдѣ пишутся тысячи? Какъ написать одну тысячу? Напиши! Сколько нулей написано? Почему?"

§ 81. При прохожденіи нумераціи многозначныхъ чиселъ, по шарикамъ, расположеннымъ на различныхъ проволокахъ, удобно придавать **мѣстное** значеніе; такъ, напр., можно поставить условіемъ, что шарики, расположенные на первой проволокѣ, означаютъ **простыя единицы,** на второй — **десятки,** на третьей — **сотни** и т. д. Когда это условіе сообщено ученикамъ, учитель откладываетъ на третьей проволокѣ счетовъ 1 шарикъ и спрашиваетъ дѣтей, сколько сотенъ отложено. Потомъ учитель къ одной сотнѣ прибавляетъ 1 десятокъ и спрашиваетъ дѣтей, какое число получилось и сколько десятковъ и сотенъ оно содержитъ. Такимъ же образомъ ученики къ каждому предыдущему числу прибавляютъ по одному десятку, называютъ его и разлагаютъ на десятичныя группы (сотни и десятки). Когда получено число 200, то дальше можно считать безъ нагляднаго пособія, такъ какъ дѣти уже привыкли къ подобному счету; потомъ учитель велитъ на счетахъ отложить 1 сотню и 1 простую единицу, спрашиваетъ дѣтей, сколько сотенъ и единицъ отложено и какое число получилось.

Въ такомъ порядкѣ дѣти считаютъ до 110. Дальше учитель задаетъ учащимся слѣдующіе вопросы:

„Отложи на каждой изъ первыхъ трехъ проволокъ по одному шарику! Прочитай отложенное число! Сколько сотенъ, десятковъ и единицъ въ этомъ числѣ? Сколько простыхъ единицъ въ данномъ числѣ? Простыя единицы составляютъ ***первый разрядъ*** числа. Повтори! Сколько единицъ перваго разряда въ числѣ? Какъ называются единицы перваго разряда? Сколько десятковъ въ отложенномъ числѣ? Десятки составляютъ ***второй разрядъ*** числа? Какъ называются единицы второго разряда? Сколько единицъ второго разряда находится въ данномъ числѣ? Сколько единицъ ***третьяго*** разряда находится вь 111? Отложи на первой проволокѣ еще одинъ шарикъ! Какое число получилось? Сколько въ немъ единицъ третьяго разряда? Сколько — второго? третьяго? Назовите такое число, въ которомъ 1 сотня, 1 десятокъ и 2 простыя единицы! Какое число слѣдуетъ за 112? Считай по порядку отъ 113 до 120! Сколько единицъ каждаго разряда содержитъ число 119? Назовите число, въ которомъ 1 сотня, 1 десятокъ и 8 единицъ. Скажите такое число, въ которомъ 4 единицы перваго разряда, 1 единица второго и 1 единица третьяго разряда! — Считай отъ 120 до 130! 125 – сколько въ этомъ числѣ сотенъ? десятковъ? простыхъ единицъ? Считай отъ 145 до 150! отъ 171 до 177! Укажи разряды числа 174! 195! 198!

Какъ написать число 100! Почему на первомъ и второмъ мѣстахъ надо писать нули? Если въ данномъ числѣ будутъ 2 простыя единицы, то какую цифру надо писать на первомъ мѣстѣ? Отложи на счетахъ число 112! Сколько единицъ каждаго разряда въ этомъ числѣ? Какую цифру нужно писать на третьемъ мѣстѣ? Почему? Какую на второмъ? На первомъ? Напишите это число! Прочитай написанное! Прибавьте къ этому числу единицу! Какое число получилось? Какъ написать число 113? Почему на первомъ мѣстѣ писать цифру 3? Назовите пю порядку числа отъ 113 до 120! Напишите ихъ! Какъ написали число 115? 120? 117? — Отложи на счетахъ число 104! Какого разряда въ этомъ числѣ нѣтъ? Что надо будетъ писать на второмъ мѣстѣ? Почему? Напишите 104! Какое число слѣдуетъ за 104? Какъ написать 105? Напишите числа по порядку отъ 105 до 110! Напишите число, въ которомъ 1 сотня и 2 десятка! Прочитай написанное число! Напишите числа отъ 140—150!" и т. д.

Здѣсь же полезно сообщить учащимся о раздѣленіи чиселъ по числу цифръ, необходимыхъ для ихъ обозначенія. Если для обозначенія числа необходима только одна цифра, то число называется ***однозначнымъ;*** если двѣ, — ***двузначнымъ;*** если больше двухъ, — то ***многозначнымъ.***

§ 82. „Какой первый разрядъ? Какой второй? третій? Тысячи составляютъ ***четвертый*** разрядъ. Какъ называется четвертый разрядъ? Скажи первые четыре разряда по порядку! — Что обозначали шарики на третьей проволокѣ? На четвертой проволокѣ шарики будутъ обозначать — тысячи. Повтори! Отложи на счетахъ 1 тысячу! ***Считай*** тысячами! (Ученикъ считаетъ: одна тысяча, двѣ тысячи и т. д.) Десять тысячъ называются ***десяткомъ тысячъ.*** Сколько тысячъ содержитъ 1 десятокъ тысячъ. Во сколько разъ десятокъ тысячъ больше тысячи? Сколько сотенъ содержитъ десятокъ тысячъ? Десятокъ тысячъ составляетъ единицу ***пятаго*** разряда. Повтори! Какъ называется единица пятаго разряда? Какъ называется единица четвертаго разряда? Для отличія отъ десятковъ тысячъ, единицы четвертаго разряда называютъ ***единицами тысячъ.*** Какъ называютъ единицы четвертаго разряда? Во сколько разъ десятокъ тысячъ больше единицы тысячъ? Сколько сотенъ содержитъ единица тысячъ? Десятокъ тысячъ? Назовите число, въ которомъ 1 десятокъ тысячъ да еще 1 единица тысячъ! Скажите такое число, въ которомъ 1 единица пятаго разряда и 2 единицы четвертаго разряда! — Назови по порядку первые пять разрядовъ! Отложи на счетахъ 1 десятокъ тысячъ! Считай десятками тысячъ по порядку! Десять десятковъ, — сколько сотенъ? Какъ можно назвать десять десятковъ тысячъ? (***Сотней тысячъ.***) Что называется сотней тысячъ? Сколько десятковъ тысячъ содержитъ одна сотня тысячъ? Сколько единицъ тысячъ содержитъ одна сотня тысячъ? Сотня тысячъ есть единица ***шестого*** разряда. Какъ называется единица шестого разряда? единица пятаго разряда? Во сколько разъ сотня тысячъ больше десятка тысячъ? единицы тысячъ? — Считай сотнями тысячъ! (Ученикъ считаетъ до: десять сотенъ тысячъ.) Десять сотенъ, — сколько тысячъ? Десять сотенъ тысячъ иначе называются ***милліономъ.*** Повтори! Сколько сотенъ тысячъ содержитъ милліонъ? Какой разрядъ составитъ милліонъ? Слѣдовательно, какъ называется единица ***седьмого*** разряда? Назови первые семь разрядовъ по порядку! Какъ называется единица четвертаго разряда? шестого? пятаго? третьяго? седьмого? второго? перваго? Скажите число, въ которомъ 1 единица пятаго разряда! Назовите число, въ которомъ 4 единицы шестого разряда! 8 единицъ третьяго разряда! 6 — седьмого разряда!" и т. д.

Послѣ подобныхъ упражненій, слѣдуетъ сообщить учащимся, что, напр., десятокъ, по отношенію къ простымъ единицамъ, составляетъ ***высшій*** разрядъ и, наоборотъ, по отношенію къ сотнямъ — ***низшій*** разрядъ и т. п. Знаніе о высшихъ и низшихъ разрядахъ будетъ необходимо при производствѣ дѣйствій надъ многозначными числами.

Потомъ учитель сообщаетъ ученикамъ, что шарики, расположенные на пятой проволокѣ, будутъ обозначать десятки тысячъ, на шестой — сотни тысячъ, на седьмой — единицы милліоновъ. Когда это сдѣлано, учитель приступаетъ къ слѣдующей бесѣдѣ:

„Отложи на счетахъ 7 единицъ тысячъ! Отложи еще 6 десятковъ тысячъ! Сколько единицъ тысячъ въ 6 десяткахъ тысячъ? Сколько всего единицъ тысячъ отложено? Прочти отложенное число? Откинь еще 3 десятка тысячъ! Прочти полученное число! Отложи 1 сотню тысячъ! Сколько единицъ тысячъ она содержитъ? Сколько единицъ тысячъ уже было? Сколько ихъ теперь всего? Итакъ, какое число отложено? Откинь еще 3 сотни тысячъ! Прочти полученное число! Отложи 1 милліонъ! Сколько милліоновъ и тысячъ содержитъ отложенное число? Отложи еще 6 милліоновъ! Прочти полученное число!

Назови первые три разряда! Назови слѣдующіе три разряда! Первые три разряда составляютъ ***первый классъ.*** Назови разряды перваго класса! Первый классъ иначе называется ***классомъ единицъ.*** Повтори! Единицы какихъ разрядовъ содержитъ первый классъ? Какой второй разрядъ перваго класса? третій? первый? Назови слѣдующіе три разряда! Эти разряды составляютъ ***второй классъ*** или классъ ***тысячъ.*** Скажи, какіе разряды содержитъ второй классъ? Почему онъ называется классомъ тысячъ? Скажите второй разрядъ второго класса! Скажите первый разрядъ того же класса! Назовите число, въ которомъ 3 единицы второго разряда перваго класса! 4 единицы третьяго разряда второго класса! Въ которомъ классѣ находится седьмой разрядъ? Это ***классъ милліоновъ.*** Почему онъ такъ называется? Какіе разряды содержитъ третій классъ? Назови всѣ три класса по порядку! Скажи число, въ которомъ 8 единицъ перваго разряда третьяго класса! 9 единицъ перваго разряда второго класса!"

§ 83. „На какомъ мѣстѣ пишутся сотни? десятки? простыя единицы? Единицы тысячъ пишутся на четвертомъ мѣстѣ. Гдѣ пишутся единицы тысячъ? десятки тысячъ? сотни тысячъ? Какъ написать 1000? 2000? Почему 3 нуля надо писать? Какъ написать одинъ десятокъ тысячъ? 70,000? Напишите эти числа! (Учитель сообщаетъ дѣтямъ, что, при письмѣ чиселъ, отдѣльные классы отдѣляются запятою.) На какомъ мѣстѣ пишутся сотни тысячъ? Какъ написать 100,000? 400,000? Отложи на счетахъ 1 единицу перваго разряда третьяго класса! Прочти отложенное число! На какомъ мѣстѣ пишутся милліоны? Какихъ разрядовъ въ данномъ числѣ нѣтъ? Что нужно писать вмѣсто отсутствующихъ разрядовъ? Сколько нулей всего надо будетъ писать? Слѣдовательно, какъ написать милліонъ? Напишите! Напишите 4,000,000! — Отложи на счетахъ число 1054! Укажи, сколько единицъ каждаго разряда содержитъ данное число? Какъ написать это число? Напишите! Напишите число 1096! 2504!" и т. д.

Въ такой же послѣдовательности ведется работа и дальше; причемъ, въ случаѣ затрудненія, учитель велитъ число отложить на счетахъ, указать число единицъ его разрядовъ и написать. Ученики пишутъ числа подъ диктовку учителя, указываютъ разряды числа, а также и то, сколько единицъ каждаго класса содержитъ данное число. — Когда дѣти научились выговаривать и обозначать числа до милліона, можно имъ сообщить названія высшихъ разрядовъ и классовъ: десятокъ милліоновъ, сотня милліоновъ и т. д.

§ 84. Къ упражненіямъ въ нумераціи примыкаетъ опредѣленіе числа всѣхъ единицъ какого-нибудь разряда или числа всѣхъ единицъ одного класса.

„Сколько десятковъ содержитъ число 40? Сколько десятковъ въ 65? 98? Сколько десятковъ содержитъ 100? 120? Какъ написать число 120? Напиши его! Что означаетъ цифра 1? 2? Вмѣсто какого разряда поставленъ нуль? Сколько всѣхъ десятковъ въ данномъ числѣ? Если цифру 0 отдѣлить, то какое число останется? Что это число показываетъ? 140 — сколько тамъ всего десятковъ? Если 0 отдѣлить, какое число останется? Что оно показываетъ? Отдѣли въ каждомъ написанномъ числѣ нуль запятою! Что показываютъ числа 14 и 12? Напиши число 125! Отдѣли запятою цифру единицъ! Что показываетъ оставшееся число? Сколько цифръ справа отдѣляли въ каждомъ изъ данныхъ чиселъ? Что показывали оставшіяся цифры? Напиши 1245! Какъ узнать, сколько въ немъ всего десятковъ? Узнай! Напиши число 145,642! Узнайте, сколько въ немъ всего десятковъ? Какъ узнали? Назови число и скажи, сколько въ немъ всего десятковъ! — Сколько сотенъ содержитъ число 400? 500? 1000? Напиши число 1000! Отдѣли въ немъ справа два нуля! Что показываетъ число 10? Напиши число 17,000! Какъ узнать, сколько въ этомъ числѣ всего сотенъ? Назови число и скажи, сколько въ немъ всего сотенъ! — Какъ узнать, сколько всего десятковъ въ данномъ числѣ? Какъ узнать, сколько всѣхъ сотенъ въ числѣ? Что мы узнаемъ, если въ числѣ отдѣлимъ три цифры справа? Напиши число 18,642? Узнайте, сколько въ немъ всѣхъ тысячъ! Какъ узнали? Какъ узнать, сколько десятковъ тысячъ всего въ числѣ? Сколько — сотенъ тысячъ? Сколько — милліоновъ?“

Сложеніе.

§ 85. Сложеніе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго изъ двухъ или нѣсколькихъ данныхъ чиселъ составляется новое число, содержащее столько единицъ, сколько ихъ заключается во всѣхъ данныхъ числахъ вмѣстѣ.

На основанiи этого опредѣленiя сложить 6, 7 и 8 значитъ — узнать новое число, которое содержитъ столько единицъ, сколько ихъ въ 6, 7 и 8 вмѣстѣ.

Элементы сложенiя дѣти уже знаютъ; остается ихъ ознакомить: 1) съ ***опредѣленiемъ*** дѣйствiя сложенiя, 2) съ ***механизмомъ*** сложенiя, 3) съ ***случаями,*** когда сложенiе употребляется при рѣшенiи задачъ.

§ 86. „Прибавьте 18 къ 25! Сколько получилось? Какъ прибавляли? Какiя числа мы сложили? Какъ называются числа, которыя складываютъ? Какъ называется то число, которое получается отъ сложенiя? Назови слагаемыя! Назови сумму! Напиши слагаемыя и сумму! Какъ написалъ? Здѣсь мы выполнили дѣйствiе сложенiя. Какое дѣйствiе мы выполнили? Какъ называются числа, данныя для сложенiя? Какъ называется число, получаемое отъ сложенiя? Сложите 25 и 38! Какъ складывали? Какое дѣйствiе выполнили? — Отложи на первой проволокѣ счетовъ 4 шарика и 3 шарика! (Каждая группа шариковъ располагается отдѣльно.) Сколько чиселъ отложено? Какiя эти числа? Сколько единицъ въ каждомъ изъ нихъ? Сколько единицъ въ обоихъ числахъ вмѣстѣ? Какъ это узнать? Какое ***новое*** число получили? Сколько единицъ содержитъ это новое число? А сколько единицъ содержится въ данныхъ числахъ вмѣстѣ? ***Всегда*** ли отъ сложенiя получимъ число 7? Когда и въ суммѣ будетъ больше единицъ? Если въ слагаемыхъ вмѣстѣ 25 единицъ, то сколько единицъ будетъ въ суммѣ? Вообще говоря, сколько единицъ содержитъ сумма? Какимъ дѣйствiемъ это можно узнать? Итакъ, что можно узнать посредствомъ сложенiя? — Отложи на второй проволокѣ счетовъ 5 шариковъ! Сколько чиселъ теперь всего отложено? Назови эти числа по порядку? Узнайте сумму данныхъ чиселъ! Напиши слагаемыя и сумму! Сколько единицъ содержитъ новое число? А сколько единицъ содержится во всѣхъ данныхъ числахъ вмѣстѣ? Какимъ дѣйствiемъ это узнали? Вообще, если слагаемыхъ нѣсколько, то сколько единицъ и тогда содержитъ сумма? Итакъ, ***изъ чего составляется новое число при сложенiи и сколько единицъ оно содержитъ?*** Слѣдовательно, что называется сложенiемъ?“

§ 87. При сложеніи во второмъ концентрѣ дѣйствіе производится ***устно,*** а записываются только данныя и результаты, полученные отъ сложенія. Въ третьемъ концентрѣ записываются не только данныя и результаты, но и самое дѣйствіе производится ***письменно,*** причемъ записываются всѣ промежуточные результаты и цифры служатъ не только для обозначенія чиселъ, но и ***средствомъ,*** которое облегчаетъ полученіе всѣхъ результатовъ.

§ 88. Уясненіе ***механизма*** сложенія можно вести слѣдующимъ образомъ:

„Узнайте сумму 35 и 42! Какъ узнали? Сложите 95 и 44! Сколько получили? Напиши слагаемыя и сумму! Сколько десятковъ и единицъ въ числѣ 44? Что мы сперва прибавили къ 95? Что прибавили къ полученному? Какъ прибавить къ какому-нибудь числу двузначное число? — Отложи на счетахъ число 124! (Шарикамъ надо придавать мѣстное значеніе.) Сколько единицъ каждаго разряда содержитъ это число? Отложи на тѣхъ же проволокахъ число 113! Укажи разряды этого числа! Какой высшій разрядъ во второмъ числѣ? Прибавь къ первому числу одну сотню! Сколько получилось? Что надо прибавить къ полученному? Прибавь! Сколько всего получили? Какъ къ 124 прибавили 113? Сколько отдѣльныхъ сложеній выполнили? Сложите 125 и 119! Сколько получили? Какъ складывали? Когда сложеніе произвести легче, если числа маленькія или большія? Если слагаемыя большія, то ихъ записываютъ. (Это говоритъ учитель.) Я напишу два слагаемыхъ: 2453 и 1235, и надо будетъ узнать ихъ сумму. (Учитель записываетъ слагаемыя въ строку: 2453 + 1235 =) Какой высшій разрядъ во второмъ слагаемомъ? Если къ первому слагаемому прибавить 1000, сколько получится? (Результаты учитель записываетъ на классной доскѣ.) Что надо прибавить къ полученному? Какъ прибавить 235? Прибавьте 200! Сколько получили? Сколько нужно прибавить къ полученной суммѣ? Прибавьте! Наконецъ, сколько прибавить? Сколько получится, если прибавить? Какая ***полная сумма?*** Сколько отдѣльныхъ сложеній вы выполнили? Сколько ***неполныхъ*** суммъ получили? Назови неполныя суммы по порядку! Назови полную сумму! Какъ получили первую неполную сумму? Какъ — вторую? третью? Какъ получить полную сумму?“

На доскѣ получается слѣдующая запись:

$$\frac{2453 + 1235 =}{\frac{3453}{\frac{3653}{\frac{3683}{3688.}}}}$$

„Сколько единицъ тысячъ въ каждомъ слагаемомъ? Сколько единицъ тысячъ въ полной суммѣ? Какъ *сразу* получить число единицъ тысячъ полной суммы? (За знакомъ равенства учитель ставитъ цифру 3, а также и остальныя, по мѣрѣ ихъ полученія.) Сколько сотенъ въ суммѣ? А сколько ихъ въ каждомъ слагаемомъ? Какъ получить число сотенъ полной суммы? Какъ узнать, сколько десятковъ содержитъ полная сумма? Какъ получить чисто простыхъ единицъ полной суммы? Съ *какихъ* разрядовъ мы начали сложеніе? Какую полную сумму получили? — Напиши слагаемыя: 14,532 и 12,364! Какой высшій разрядъ въ каждомъ слагаемомъ? Начинай сложеніе съ высшихъ разрядовъ и записывай результаты! (Ученикъ объясняетъ вслухъ.) Какая полная сумма получилась? — Какой низшій разрядъ въ каждомъ слагаемомъ? Сколько простыхъ единицъ въ обоихъ слагаемыхъ вмѣстѣ? Какъ это узнать? Начинай сложеніе съ низшихъ разрядовъ? (Сумма пишется подъ чертою.) Какая сумма получилась? Какая сумма получилась, когда сложеніе начали съ высшихъ разрядовъ? Слѣдовательно, какъ можно начинать сложеніе?“

§ 89. Послѣ того учитель сообщаетъ ученикамъ, что, *для удобства,* слагаемыя подписываютъ одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы одного разряда находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ, и потомъ складываютъ. Когда это сдѣлано, надо взять для сложенія такія числа, когда сумма единицъ одного разряда *больше девяти;* это дѣлается съ тою цѣлью, чтобы показать ученикамъ, что въ такихъ случаяхъ сложеніе удобнѣе начинать *справа,* чѣмъ слѣва. Для примѣра возьмемъ числа: 479 и 538. Когда числа написаны одно подъ другимъ, учитель велитъ ученикамъ начинать сложеніе съ высшихъ разрядовъ; тогда получается такая запись:

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 479 \\ 538 \end{array} \\
\hline
\cancel{9}\cancel{0}7 \\
101 \\
\hline
1017.
\end{array}
$$

Складывая, ученикъ говоритъ:

„4 сотни да 5 сотенъ — вмѣстѣ 9 сотенъ; 9 сотенъ надо писать подъ чертою подъ сотнями; 7 десятковъ да 3 десятка — вмѣстѣ 10 десятковъ или 1 сотня; вмѣсто десятковъ писать 0, а 1 сотню прибавить къ сотнямъ; получается 10 сотенъ или 1 тысяча, которую надо писать влѣво отъ сотенъ, а на мѣсто сотенъ писать 0“ и. т. д.

Потомъ учитель предлагаетъ дѣйствіе начинать справа, т. е. съ низшихъ разрядовъ; тогда получается слѣдующая запись:

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 479 \\ 538 \end{array} \\
{\scriptstyle 1\,\overset{\frown}{1}\,} \\
\hline
1017.
\end{array}
$$

Производя сложеніе, ученикъ говоритъ:

„9 единицъ да 8 единицъ — вмѣстѣ 17 единицъ или 1 десятокъ и 7 единицъ; 7 единицъ пишемъ подъ чертою подъ простыми единицами, а 1 десятокъ пишемъ надъ чертою подъ десятками“ и т. д.

„Съ какихъ разрядовъ мы начали сложеніе въ первомъ случаѣ? Съ какихъ — во второмъ? Какая сумма получилась въ каждомъ случаѣ? Въ которомъ случаѣ получили ***скорѣе*** результатъ? Итакъ, съ какихъ разрядовъ ***удобнѣе*** начинать сложеніе? Когда все равно, съ какихъ разрядовъ ни начинать? Отчего тогда все равно?“

Мы видѣли, что сложеніе можно начинать и съ высшихъ и съ низшихъ разрядовъ, такъ какъ сумма получается одна и та же; точно также можно слагаемыя складывать въ другомъ порядкѣ, и сумма отъ этого не измѣнится. На этомъ свойствѣ суммы основана повѣрка сложенія: нужно числа *переслонить вновь,* измѣнивши только порядокъ ихъ, и если получится прежняя сумма, то дѣйствіе, вѣроятно, произведено вѣрно.

§ 90. При рѣшеніи задачъ, сложеніе употребляется въ слѣдующихъ случаяхъ:

1) когда требуется найти число, равное суммѣ данныхъ;
2) когда одно число надо увеличить на столько единицъ, сколько ихъ содержится въ другомъ.

Задача:

„Въ трехъ ящикахъ находится чай: въ первомъ — 124 фун., во второмъ — 342 фун., въ третьемъ — 459 фун. Сколько фунтовъ чаю находится во всѣхъ ящикахъ вмѣстѣ?"

Всего будетъ столько фунтовъ чаю, сколько ихъ содержится во всѣхъ трехъ ящикахъ вмѣстѣ; слѣдоватльно, искомое число фунтовъ чаю содержитъ столько единицъ, сколько ихъ заключается во всѣхъ данныхъ числахъ вмѣстѣ, т. е. въ 124, 342 и 459 вмѣстѣ? Итакъ, надо узнать сумму чиселъ: 124, 342 и 459; а это можно сдѣлать посредствомъ сложенія; сложивъ, получаемъ 925 фунтовъ; это число показываетъ, сколько фунтовъ чаю было во всѣхъ трехъ ящикахъ вмѣстѣ.

Задача:

„Въ одномъ классѣ было 25 учениковъ, а въ другомъ на 14 учениковъ больше. Сколько учениковъ въ другомъ классѣ?"

Такъ какъ во второмъ классѣ учениковъ больше, чѣмъ въ первомъ, на 14, то отсюда заключаемъ, что тамъ сверхъ 25 учениковъ есть 14 учениковъ, т. е. всего 39, что можно узнать посредствомъ сложенія 25 и 14.

Вычитаніе.

§ 91. Ознакомленіе учащихся съ опредѣленіемъ вычитанія можно вести слѣдующимъ образомъ:

„Отъ 43 отнимите 25! Сколько получили? Какъ отнимали? Какъ здѣсь называется число 43? Какъ называется число 25? Какъ называется полученное число? Какое число называется уменьшаемымъ? Отчего оно такъ называется? Какое — вычитаемымъ? разностью? Что показываетъ разность? Если даны два числа, то какъ найти ихъ разность? Найдите разность 46 и 32! Какъ нашли? ***Вычтите*** 45 изъ 83! Сколько получили? Напиши числа! Назови по порядку уменьшаемое, вычитаемое и разность! ***Мы выполнили дѣйствіе вычитаніе.*** Повтори! Надъ какими числами мы выполнили вычитаніе? Какое число получили отъ вычитанія? Какія числа были даны? Которое изъ нихъ больше? Какъ называется большее число? Сколько единицъ отняли отъ большаго числа? Всегда ли отъ большаго числа надо будетъ отнять 45 единицъ? Если меньшее число содержитъ 24 единицы, то сколько надо будетъ отнять отъ большаго? Вообще, сколько единицъ надо отнять отъ большаго числа при вычитаніи? Посредствомъ какого дѣйствія это можно сдѣлать? Итакъ, какое дѣйствіе называется вычитаніемъ?"

§ 92. „Какъ изъ 90 вычесть 42? Вообще, какъ изъ какого-нибудь числа вычесть двузначное число? Отнимите 95 отъ 140! Сколько получили? Какъ вычитали? Отложи на счетахъ число 495! (Въ этомъ случаѣ шарикамъ необходимо придавать мѣстное значеніе.) Скажи, сколько единицъ каждаго разряда содержитъ данное число? Отъ 495 надо отнять 124. Какое уменьшаемое? Какое вычитаемое? Напиши числа на доскѣ! Если отъ 495 отнять 100, то сколько надо будетъ отнять отъ полученнаго? Отними 100 отъ 495! Сколько осталось? Сколько надо отнять отъ 395? Какъ отнять? Отними 24! Сколько осталось? Сколько отдѣльныхъ вычитаній мы всего произвели? Какое число получили отъ перваго вычитанія? Отъ второго? третьяго?"

Потомъ надо брать бóльшія числа и предложить ученикамъ вычесть изъ одного числа другое; ученики приходятъ къ заключенію, что въ такихъ случаяхъ, при устномъ производствѣ дѣйствія, встрѣчается затрудненіе, такъ какъ приходится сразу запоминать нѣсколько большихъ чиселъ, вслѣдствіе чего работа облегчается записываніемъ промежуточныхъ результатовъ.

Возьмемъ слѣдующій примѣръ: 45,789 — 23,425. При вычитаніи данныхъ чиселъ, учитель на классной доскѣ дѣлаетъ такую запись:

$$\begin{array}{c} 45{,}789 - 23{,}425 = \\ \hline 25{,}789 \\ \hline 22{,}789 \\ \hline 22{,}389 \\ \hline 22{,}369 \\ \hline 22{,}364. \end{array}$$

„Какой высшій разрядъ въ уменьшаемомъ и вычитаемомъ? Сколько десятковъ тысячъ въ каждомъ изъ этихъ чиселъ? Сколько десятковъ тысячъ въ **окончательной** разности? Какъ получить сразу десятки тысячъ окончательной разности? (Ученики говорятъ результаты, а учитель пишетъ ихъ за знакомъ равенства.) Какъ получить сразу единицы тысячъ разности?"

Такъ продолжаютъ до конца; потомъ учитель ведетъ бесѣду дальше:

„Съ какихъ разрядовъ мы начали вычитаніе? Какую разность получили? Начинайте вычитаніе съ низшихъ разрядовъ! (Учитель записываетъ разность подъ чертою.) Какая разность получилась въ первомъ случаѣ? Какая — во второмъ случаѣ? Итакъ, съ какихъ разрядовъ можно начинать вычитаніе?"

Послѣ того учитель сообщаетъ ученикамъ, что, при вычитаніи, обыкновенно, вычитаемое подписываютъ подъ уменьшаемымъ, чтобы единицы одного разряда находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ, съ лѣвой стороны ихъ ставятъ знакъ минусъ, подъ вычитаемымъ проводятъ горизонтальную черту и потомъ вычитаютъ.

Производя дѣйствіе, ученикъ говоритъ: начинаемъ вычитаніе съ высшихъ разрядовъ; сперва вычесть десятки тысячъ; изъ 4 вычесть 2, получается 2; 2 десятка тысячъ пишемъ подъ чертою подъ десятками тысячъ и т. д.

Затѣмъ берутся такія числа, когда число единицъ какого-нибудь разряда вычитаемаго больше числа единицъ того же разряда уменьшаемаго. Если вычитаніе такихъ чиселъ начинать съ высшихъ разрядовъ, то полученныя цифры разности надо зачеркивать и замѣнять новыми; а если дѣйствіе начинать съ низшихъ разрядовъ, то сразу получаемъ окончательныя цифры разности; отсюда видно, что удобнѣе начинать вычитаніе съ низшихъ разрядовъ, чѣмъ съ высшихъ.

Примѣромъ такихъ чиселъ могутъ служить слѣдующія: 4324 — 2495.

Начиная вычитаніе съ высшихъ разрядовъ, получаемъ слѣдующую запись:

$$\begin{array}{r} 4324 \\ -2495 \\ \hline \cancel{2}\cancel{9}\cancel{3}9 \\ 182 \\ \hline 1829. \end{array}$$

При производствѣ же вычитанія съ низшихъ разрядовъ, получаемъ такую запись:

$$\begin{array}{r} 4.3.2.4 \\ -2\ 4\ 9\ 5 \\ \hline 1\ 8\ 2\ 9. \end{array}$$

Во второмъ случаѣ дѣти ведутъ объясненіе такъ: начинаемъ вычитаніе ***съ низшихъ разрядовъ,*** т. е. съ простыхъ единицъ; изъ 4 вычесть 5; но нельзя вычесть; поэтому надо взять 1 десятокъ и дробить въ единицы. Если отъ 2 десятковъ взять 1 десятокъ, останется еще 1 десятокъ; въ знакъ того, что 1 десятокъ взятъ, у цифры 2 ставимъ точку; 10 единицъ да 4 единицы — вмѣстѣ 14 единицъ; изъ 14 единицъ вычесть 5 единицъ, остается 9 единицъ; 9 единицъ пишемъ подъ чертою подъ простыми единицами и т. д.

Когда же дѣти научились производить дѣйствіе, объясненіе можно вести короче: начинаемъ вычитаніе съ низшихъ разрядовъ; 5 изъ 14 — получается 9; 9 изъ 11 — 2; 4 изъ 12, остается 8 и т. д.

§ 93. ***Уменьшаемое равно вычитаемому плюсъ разность;*** на этомъ свойствѣ элементовъ вычитанія основана повѣрка дѣйствія.

Съ повѣркою вычитанія учащихся можно ознакомить слѣдующимъ образомъ:

„Отложи на счетахъ 10 шариковъ! Отними отъ 10 шариковъ 4 шарика! Сколько получилось? Какое уменьшаемое? вычитаемое? разность? Напиши числа на классной доскѣ! Смотрите, что я дѣлаю! (Учитель къ 6 шарикамъ придвигаетъ 4 шарика.) Какія числа я сложилъ? Какое число получилось? ***Чѣмъ*** служатъ числа: 4 и 6 въ данномъ случаѣ? Чѣмъ служитъ число 10? Итакъ, что мы получили, когда сложили вычитаемое и разность? Отнимите 13 отъ 49! Сколько получили? Сложите вычитаемое и разность! Что получили? Какъ получить уменьшаемое, если знаемъ вычитаемое и разность? Итакъ, ***чему равно уменьшаемое?*** Если вычитаніе будетъ произведено невѣрно, будетъ ли тогда уменьшаемое равно вычитаемому плюсъ разность? Какъ должно быть тогда, если вычитаніе сдѣлано вѣрно? Слѣдовательно, какъ ***провѣрить*** вычитаніе?"

§ 94. При рѣшеніи задачъ, вычитаніе употребляется въ слѣдующихъ случаяхъ: 1) когда надо найти ***разность*** двухъ чиселъ или найти, на сколько единицъ (чѣмъ) одно число больше или меньше другого; 2) когда одно число приходится ***уменьшить*** на нѣсколько единицъ; 3) когда по данной ***суммѣ*** двухъ слагаемыхъ и ***одному*** изъ этихъ слагаемыхъ надо найти другое слагаемое.

Задача 1-ая:

„Одинъ торговецъ продалъ 1450 фунтовъ чаю, а другой 1245 фунтовъ. На сколько фунтовъ первый торговецъ продалъ больше чаю, чѣмъ второй?"

Для рѣшенія данной задачи, надо изъ 1450 вычесть 1245; полученное число покажетъ, на сколько фунтовъ у перваго торговца было больше, чѣмъ у второго.

Задача 2-ая:

„Купецъ продалъ товаръ за 3450 рублей и получилъ 135 рублей прибыли. Сколько онъ самъ заплатилъ за товаръ?"

Изъ данныхъ задачи видно, что стоимость товара меньше 3450 руб. на 135 руб.; слѣдовательно, нужно найти число, меньшее 3450 на 135; для чего изъ 3450 надо вычесть 135.

Задача 3-ья:

„Кусокъ сукна содержитъ 139 аршинъ. Отъ него отрѣзали 95 аршинъ. Сколько аршинъ еще осталось?"

Отрѣзанная и оставшаяся части вмѣстѣ составляютъ 139 аршинъ. Такъ какъ отрѣзано 95 аршинъ, то оставшуюся часть узнаемъ, отнявъ 95 аршинъ отъ 139 аршинъ.

Умноженіе.

§ 95. При умноженіи цѣлыхъ чиселъ бываютъ слѣдующіе случаи:

1) умноженіе однозначныхъ чиселъ;
2) умноженіе многозначнаго числа на однозначное;
3) умноженіе на число, обозначаемое единицей съ однимъ или нѣсколькими нулями (умножить на одну единицу высшаго разряда);
4) умноженіе на число, обозначаемое значащей цифрой съ однимъ или нѣсколькими нулями (умножить на нѣсколько единицъ высшаго разряда);
5) умноженіе многозначныхъ чиселъ;
6) умноженіе чиселъ, цифровое обозначеніе которыхъ оканчивается нулями (нѣсколько единицъ высшаго разряда умножить на нѣсколько же единицъ высшаго разряда).

Первый случай умноженія дѣтямъ извѣстенъ изъ второго концентра; но такъ какъ умноженіе многозначныхъ чиселъ сводится къ ряду умноженій однозначныхъ чиселъ, то необходимо повторить таблицу умноженія и главное свойство произведенія, а затѣмъ можно перейти къ ознакомленію учащихся съ умноженіемъ многозначнаго числа на однозначное; но прежде нужно ознакомить учащихся съ опредѣленіемъ дѣйствія.

§ 96. „Сколько получится, если 7 умножить 9? Напиши числа! Какъ написалъ? Какъ здѣсь называется число 7? число 9? Какое число получается? Какъ оно называется? Умножьте 12 на 6! Сколько получили? Какое произведеніе въ этомъ случаѣ? Какъ умножить 12 на 6? Напиши числа! ***Надъ этими числами произведено дѣйствіе умноженіе.*** Повтори! Какое дѣйствіе произведено надъ данными числами? Какъ называются числа, данныя для умноженія? Какъ называется число, которое получается отъ умноженія? — 7 взять 3 раза, сколько получается? Отложи на счетахъ 3 раза по 7 шариковъ! Сколько разъ ***слагаемымъ*** надо взять число 7? Напиши на классной доскѣ число 7 слагаемымъ 3 раза! Какъ короче записать то же самое? Какимъ дѣйствіемъ замѣнено сложеніе? ***Каковы*** были слагаемыя между собою? Если же слагаемыя будутъ ***неравны,*** можно ли тогда сложеніе замѣнить умноженіемъ? Итакъ, когда сложеніе можно

замѣнить умноженіемъ и когда — нельзя? — Сколько чиселъ было дано для умноженія? Сколько разъ слагаемымъ взяли число 7? Сколько единицъ заключается въ другомъ числѣ? Если во второмъ числѣ 9 единицъ всего, то сколько разъ слагаемымъ надо будетъ взять первое число? Вообще говоря, сколько разъ слагаемымъ нужно взять первое число? Слѣдовательно, какъ составляется третье число изъ двухъ данныхъ при умноженіи? Какимъ дѣйствіемъ это можно сдѣлать? Итакъ, что называется умноженіемъ?“

§ 97. „Умножьте 14 на 6! Сколько получили? Какъ умножали? 140 — сколько сотенъ и десятковъ въ этомъ числѣ? Отложи на счетахъ 140! Если 1 сотню взять 6 разъ, сколько получится? Умножьте 40 на 6! Сколько получили? Сколько получили отъ перваго умноженія? Сколько — отъ второго? Какъ узнать, сколько всего получится? Узнайте! Итакъ, сколько получается, если 140 взять 6 разъ? Какъ мы 140 взяли 6 разъ? Повтори! Умножьте 150 на 6! Сколько получили? Какъ умножали? Укажите разряды числа 144! Какъ мы 140 умножили на 6? Какъ 144 умножить на то же число? Умножьте! Сколько получили? Напиши числа на классной доскѣ! Сколько ***отдѣльныхъ*** умноженій мы произвели? Какое первое ***отдѣльное произведеніе?*** Какое второе? третье? Какъ получить ***полное*** произведеніе?“

Отдѣльныя произведенія учитель записываетъ на классной доскѣ; получается такая запись:

$$\begin{array}{r} 144 \times 6 = \\ \hline 600 \\ +240 \\ 24 \\ \hline 864 \end{array}$$

„Съ какихъ разрядовъ мы начали умноженіе? Какое полное произведеніе получили? Сколько простыхъ единицъ во множимомъ? Если 4 единицы умножить на 6, сколько получится? Сколько десятковъ въ 24 единицахъ? Получимъ ли простыя единицы отъ умноженія слѣдующихъ (высшихъ) разрядовъ на 6? Итакъ, какая ***окончательная*** цифра простыхъ единицъ произведенія? (Учитель пишетъ цифру 4 подъ цифрою простыхъ единицъ множимаго.) Умножьте 4 десятка на 6! Сколько получили? Сколько десятковъ мы получили отъ умноженія простыхъ единицъ на 6? Сколько десятковъ будетъ всего? Сколько сотенъ и десятковъ въ 26 десяткахъ? Какая окончательная цифра десятковъ произведенія? Гдѣ нужно писать цифру 6? Какъ получить цифру сотенъ произведенія? Узнайте ее? Запиши полученную цифру сотенъ! Какое полное произведеніе получилось?"

Запись:

$$\frac{144 \times 6 =}{864.}$$

„Какія числа мы умножали въ томъ и другомъ случаѣ? Какое полное произведеніе получили? Съ какихъ разрядовъ начали умноженіе въ первомъ случаѣ? Съ какихъ — во второмъ? Когда запись короче? Итакъ, съ какихъ разрядовъ умноженіе удобнѣе начинать? — Умножай 144 на 6, начиная съ низшихъ разрядовъ, и объясняй умноженіе! (Ученикъ говоритъ: начинаемъ умноженіе съ низшихъ разрядовъ; 4 на 6, — 24 или 2 десятка и 4 единицы; 4 единицы пишемъ подъ чертою подъ единицами, а 2 десятка *запоминаемъ.* Дальше умножаемъ десятки; 4 на 6, — 24, да еще 2 — 26 десятковъ или 2 сотни и 6 десятковъ; 6 десятковъ пишемъ подъ чертою подъ десятками, а 2 сотни запоминаемъ и т. д.)"

Послѣ того учитель сообщаетъ ученикамъ, что однозначнаго множителя, обыкновенно, пишутъ подъ единицами множимаго, съ лѣвой стороны сомножителей ставятъ знакъ умноженія. Тогда получается слѣдующая запись:

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 6 \\ \hline 864. \end{array}$$

§ 98. Чтобы умножить на одну единицу высшаго разряда, надо къ множимому съ правой стороны приписать столько нулей, сколько ихъ находится во множителѣ; такъ, напр., если 55 надо умножить на 10, то къ 55 справа приписываемъ одинъ нуль, отчего значенiе каждой цифры увеличивается въ 10 разъ, а потому и все число увеличивается въ 10 разъ, т. е. оно умножено на 10.

„Если 1 умножить на 10, сколько получится? Умножьте 4 на 10! Сколько получили? (Примѣры учитель записываетъ на доскѣ по *группамъ;* въ первой группѣ получается слѣдующее: 1 . 10 =; 4 . 10 = 40.) 1 взять 100 разъ, сколько получается? 6 взять 100 разъ, сколько? Умножьте 1 на 1000! 8 умножить на 1000, сколько получается? — Читай написанные примѣры! Какiя числа написаны въ **первой** группѣ? Сколько единицъ въ первомъ множимомъ? Сколько десятковъ получилось въ произведенiи? Сколько единицъ во второмъ множимомъ всего? Сколько десятковъ получилось отъ умноженiя его на 10? Если во множимомъ всего 6 единицъ, то сколько десятковъ будетъ отъ умноженiя его на 10? Вообще, сколько десятковъ получается въ произведенiи отъ умноженiя какого-нибудь числа на 10? — Если цифру 1 написать отдѣльно, что она будетъ означать? Какъ воспользоваться единицей, чтобы написать десять? Во сколько разъ тогда увеличивается значенiе 1? Во сколько разъ увеличивается значенiе 1 отъ умноженiя ея на 10? Сколько получается отъ умноженiя 4 на 10? Если написана цифра 4, то какъ легко написать 40? Итакъ, во сколько разъ значенiе числа увеличивается отъ умноженiя его на 10? Во сколько разъ число увеличивается отъ приписыванiя справа одного нуля? Напиши число 25! Припиши къ нему справа одинъ нуль! **На сколько умножили** число 25? Какъ умножили? Какъ 142 умножить на 10? Вообще, какъ умножить какое-нибудь число на 10?

Читай **вторую** группу примѣровъ! Сколько сотенъ получается отъ умноженiя 1 на 100? Сколько сотенъ получается, если 6 умножить на 100? Сколько единицъ было въ первомъ множимомъ? Сколько — во второмъ? Сколько сотенъ получилось въ произведенiи въ каждомъ случаѣ? Если во множимомъ 24 единицы всего, то сколько сотенъ получится въ произведенiи отъ умноженiя на 100? Вообще говоря, сколько сотенъ получается въ произведенiи отъ умноженiя какого-нибудь числа на 100? — Какъ написать число 600? Если написана цифра 6, то какъ ею воспользоваться, чтобы написать 600? Какая перемѣна произойдетъ въ величинѣ числа, если къ нему справа приписать 2 нуля? Напиши число 27! Припиши къ нему справа 2 нуля! Во сколько разъ число увеличилось? На сколько оно умножено? Какъ умножить какое-нибудь число на 100?

Читай третью группу примѣровъ! Какой первый примѣръ? На сколько умножено число 1? Какъ умножить 1 на 1000? Какъ умножить число 8 на 1000? Вообще, какъ умножить какое-нибудь число на 1000? — Какъ умножить число на 10,000? на 100,000?

Какая первая цифра въ числахъ: 10, 100, 1000 и т. д. Какія остальныя цифры? Какъ умножили на 100? 1000? Если во множителѣ 4 нуля, то сколько ихъ нужно приписать справа множимаго? Какъ тогда, если 6 нулей? Слѣдовательно, какъ умножить на число, обозначаемое единицей съ однимъ или нѣсколькими нулями?“

§ 99. Числа, обозначаемыя значащей цифрой съ однимъ или нѣсколькими нулями, представляютъ произведеніе двухъ сомножителей, изъ которыхъ первый есть число, обозначаемое этой значащей цифрой, а второй — число, представляющее одну единицу высшаго разряда; напр. число 400 есть произведеніе 4 и 100, 6000 есть произведеніе 6 и 1000.

Чтобы умножить какое-нибудь число на произведеніе другихъ чиселъ, нужно его умножить на перваго сомножителя, полученное произведеніе — на второго и т. д. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что, для нахожденія произведенія 85 и 6,000, надо 85 умножить на 6 и полученное умножить на 1000. Итакъ, умноженіе на нѣсколько (не больше 9) единицъ высшаго разряда сводится къ умноженію даннаго числа на однозначное число и полученнаго числа — на одну единицу высшаго разряда, что дѣтямъ уже извѣстно изъ предыдущихъ случаевъ.

§ 100. Ознакомленіе учащихся съ этимъ случаемъ умноженія можно вести слѣдующимъ образомъ:

„Умножьте 2 на 20! Сколько получили? 3 взять 30 разъ, сколько? 4 повторить 50 разъ, сколько получается? — Отложи на счетахъ два раза по 2 шарика! Сколько шариковъ получилось? (Пары шариковъ располагаются раздѣльно; потомъ учитель откладываетъ всего десять группъ въ 4 шарика, располагая по примѣру первой группы.) Сколько разъ по 4 шарика взято? Сколько всего получилось? Сколько разъ по 2 шарика находится въ каждой группѣ? Сосчитайте, сколько разъ по 2 шарика всего взято! Итакъ, если 2 взять 20 разъ, сколько получается? Сколько разъ сначала мы взяли 2 шарика? Сколько разъ взяли полученное число? Сколько получили всего? *Какъ 2 взять 20 разъ?* — Напиши числа на классной доскѣ! Прочти написанное! Какъ умножить 2 на 20? — Отложи на первой проволокѣ 3 раза по 3 шарика! Сколько получилось? Сколько получится, если 9 умножить на 10? Сколько разъ по 3 шарика находится на первой проволокѣ? Отложи такихъ группъ всего 10! Сколько всего получилось? Слѣдовательно, сколько получается, если 3 взять 30 разъ? Какъ мы 3 умножили на 30? Напиши числа на доскѣ! Читай написанные примѣры! Какое число въ первомъ случаѣ множителемъ? Какое — во второмъ? Какая вторая цифра въ каждомъ изъ этихъ чиселъ? Какая первая? Какъ называются такія цифры, какъ 2 и 3? (*Значащими;* это дѣтямъ уже извѣстно.) При умноженіи на 20 и 30, на какія числа сперва умножали? На сколько умножили полученное произведеніе? Когда число умножено на 2, то какъ его легко умножить на 10? Напиши 25! Какъ это число умножить на 20? Напиши множителемъ число 20! Умножьте 25 на 20! Сколько получили? Напиши произведеніе! Какъ умножить 3 на 30? 45 на 30? 96 на 20? Вообще, какъ умножить на 60? 90? 40?

На какое число надо умножить 2, чтобы получить 20? (Учитель пишетъ на доскѣ: 20 = 2 . 10.) На какое число надо умножить 6, чтобы получить 60? Какъ мы данное число умножили на 20? Какъ умножить какое-нибудь число на произведеніе 2 и 10? Какъ умножить на произведеніе 6 и 10? 9 и 10?

Умножьте 5 на 200! Сколько получили? Напиши числа! На какое число надо умножить 2, чтобы получить 200? (Учитель пишетъ: 200 = 2 . 100.) Итакъ, на произведеніе какихъ чиселъ надо умножить 5? Умножьте 5 на 2! Сколько получилось? На сколько надо умножить полученное? Какъ легко умножить на 100? Сколько разъ слагаемымъ всего взяли число 5? Какъ взяли 5 слагаемымъ 200 разъ? Напиши число 45 множимымъ, а 200 — множителемъ! Какъ умножить 45 на 200? Узнайте произведенiе! Напиши произведенiе! — На сколько надо умножить 3, чтобы получить 300? Какъ умножить какое-нибудь число на 300? на 400? 700? — На сколько надо умножить 2, чтобы получить 2,000? (Запись: 2,000 = 2 . 1000.) Умножьте 4 на 2,000! Сколько получили? Если 4 умножить на 2, то на сколько надо будетъ умножить полученное произведенiе? Какъ умножить на 1000? Итакъ, сколько нулей нужно приписать къ первому произведенiю? Какъ умножить 65 на 2,000? Какъ умножить какое-нибудь число на 4,000? 7,000? 9,000?

Назови по порядку всѣхъ множителей въ написанныхъ примѣрахъ! Вообще говоря, какая первая цифра въ каждомъ множителѣ? Какiя остальныя? На какую цифру мы сначала умножали?*) Если во множителѣ было 2 нуля, то сколько ихъ приписали къ полученному произведенiю справа? Если во множителѣ 3 нуля, какъ тогда? Вообще, сколько нулей приписывали къ полученному произведенiю справа? Слѣдовательно, какъ умножить на число, обозначаемое значащей цифрой съ однимъ или нѣсколькими нулями?"

Если отъ умноженiя множимаго на значащую цифру множителя получается многозначное число, то полезно записывать множителя подъ множимымъ, притомъ такъ, чтобы значащая цифра множителя находилась подъ простыми единицами множимаго. Получается такая запись:

$$\begin{array}{r} 432 \\ \times\, 2{,}000 \\ \hline 864{,}000 \end{array}$$

§ 101. Всякое многозначное число можно представить въ видѣ суммы его *десятичныхъ группъ;* напр. 7542 = 7,000 + + 500 + 40 + 2.

Чтобы умножить какое-нибудь число на сумму другихъ чиселъ, надо его умножить отдѣльно на каждое слагаемое и полученныя отдѣльныя произведенiя сложить. Слѣдовательно, при

*) Ради краткости можно допустить такое выраженiе; учитель объясняетъ настоящiй смыслъ его.

умноженіи на многозначное число, надо множимое умножить на каждую десятичную группу множителя и полученныя отдѣльныя произведенія сложить.

§ 102. Уясненіе *механизма* умноженія можно вести такимъ образомъ:

„Умножьте 2 на 12! Сколько получили? Какъ умножали? 15 умножить на 12, сколько? Какъ умножить 15 на 12? Напиши числа! Назови множимое, множителя и произведеніе! Узнайте произведеніе 42 и 12! Какъ узнали? Напиши множимымъ число 132, а множителемъ 12! Какъ умножить 132 на 12? Если 132 умножить на 10, то сколько получится? На сколько еще надо умножить 132? Какъ получить полное произведеніе? Узнайте! Сколько получили? Какъ умножить 132 на 17?“

Учитель пишетъ въ строку: 132 × 17 = , а подъ числами проводитъ горизонтальную черту. Потомъ онъ велитъ ученикамъ умножать данное число на 17, а самъ записываетъ отдѣльныя произведенія подъ чертою въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$\begin{array}{r} 132 \times 17 = \\ \hline 1320 \\ +\ 700 \\ 210 \\ \overset{\frown}{1}\ \ 14 \\ \hline 2244. \end{array}$$

„Сколько отдѣльныхъ умноженій мы произвели? Назови отдѣльныя произведенія по порядку! Какъ мы получили первое отдѣльное произведеніе? второе? третье? четвертое? Какъ получили полное произведеніе? На какой разрядъ множителя мы сначала умножили? Какое произведеніе получили? Умножайте сначала на низшій разрядъ множителя! Сколько получили? На какой разрядъ еще надо умножить? Сколько тогда получится, если умножить 132 на 10? Какъ получить полное произведеніе?“

Учитель говоритъ ученикамъ, что числа, данныя для умноженія, можно записывать иначе, а именно: сначала написать множимое, а подъ нимъ писать множителя, такъ чтобы единицы находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ. Въ такомъ случаѣ подъ множителемъ проводится горизонтальная черта, а слѣва сомножителей ставится знакъ умноженія. Когда это сдѣлано и числа записаны въ надлежащемъ порядкѣ, учитель предлагаетъ ученикамъ умноженіе начинать съ низшихъ разрядовъ. Производя дѣйствіе, ученикъ говоритъ: начинаемъ умноженіе съ низшихъ разрядовъ, т. е. съ простыхъ единицъ; 2 умножить на 7, получается 14 или 1 десятокъ и 4 единицы; 4 единицы пишемъ подъ чертою подъ столбцомъ единицъ, а 1 десятокъ запоминаемъ. 3 десятка умножить на 7, получается 21 десятокъ, да еще 1 десятокъ — вмѣстѣ 22 десятка или 2 сотни и 2 десятка; 2 десятка пишемъ подъ чертою подъ столбцомъ десятковъ, а 2 сотни запоминаемъ. Такъ продолжаютъ до конца.

Запись:

$$\begin{array}{r} 132 \\ \times 17 \\ \hline 924 \\ + \; 132 \; \\ \hline 2244. \end{array}$$

Когда получено полное произведеніе, учитель обращаетъ вниманіе учащихся на то, какъ записывается второе отдѣльное произведеніе: первая цифра его пишется подъ той цифрой множителя, на которую умножали, и, въ такомъ случаѣ, нуля писать не надо, такъ какъ мѣстное значеніе цифръ указывается первымъ отдѣльнымъ произведеніемъ. Тутъ же дѣлается выводъ, что умноженіе удобнѣе начинать съ низшихъ разрядовъ, чѣмъ съ высшихъ, такъ какъ тогда запись производится короче.

§ 103. Въ послѣднемъ случаѣ, т. е. когда цифровое обозначеніе какъ множимаго, такъ и множителя оканчивается нулями, надо числа умножать, не обращая вниманія на нули, а къ полученному произведенію справа приписать столько нулей, сколько ихъ было въ обозначеніи множимаго и множителя вмѣстѣ; напр., при умноженіи 4,500 на 3,200, нужно узнать произведеніе 45 и 32 и къ полученному произведенію справа приписать четыре нуля, т. е. умножить на 10,000.

При рѣшеніи задачъ, бываютъ такіе случаи, когда, по смыслу задачи, требуется умножить меньшее число на большее; напр. если фунтъ чаю стоитъ 3 руб., то 432 фунт. — въ 432 раза дороже (а не въ три раза дороже), вслѣдствіе чего ***множимымъ должно быть число 3 руб.,*** а множителемъ — 432. Но если такъ умножать, то получается три отдѣльныхъ произведенія и — четвертое — полное; а если переставить сомножителей и тогда умножить, то сразу получаемъ полное произведеніе. Отсюда видно, какое удобство представляетъ перестановка производителей въ подобныхъ случаяхъ.

Но прежде, чѣмъ переставлять производителей, дѣтямъ должно быть обстоятельно выяснено, ***какъ слѣдуетъ умножать по смыслу задачи*** и почему переставляемъ числа.

Объясняя рѣшеніе вышеупомянутой задачи, ученики говорятъ: фунтъ чаю стоитъ 3 руб., а 432 фун. — въ 432 раза дороже; надо 3 руб. умножить на 432, но такъ какъ множитель больше множимаго, то умножаемъ наоборотъ, т. е. 432 на 3, но при этомъ должны помнить, что въ произведеніи должны получиться рубли.

Посредствомъ цифръ изложенное можно записать такъ:

$$3 \text{ руб.} \times 432 = ?$$

$$\begin{array}{r} 432 \\ \times 3 \\ \hline 1296 \text{ руб.} \end{array}$$

Когда учащіеся ознакомлены со всѣми случаями умноженія, полезно ихъ ознакомить со ***степенью*** числа, такъ какъ это будетъ необходимо при дополненіи знаній учащихся о ***дѣлителяхъ***, ***простыхъ дробяхъ, квадратныхъ*** и ***кубическихъ мѣрахъ.***

Степенью называется произведеніе равныхъ производителей; такъ, напр., 4 . 4 есть вторая степень или квадратъ 4, 4. 4 . 4 есть третья степень или кубъ 4 и т. д. Чтобы показать, что данное число требуется возвысить въ квадратъ, съ правой стороны его ставятъ маленькую цифру 2, называемую показателемъ степени и показывающую, что данное число нужно взять сомножителемъ 2 раза.

Когда это сообщено учащимся, нужно ихъ учить возвышать числа въ квадратъ и кубъ, а квадраты чиселъ первыхъ двухъ десятковъ и способы ихъ нахожденія устными пріемами — запомнить.

§ 104. Повѣрка умноженія основана на главномъ свойствѣ произведенія; это свойство заключается въ томъ, что произведеніе не измѣняется отъ *перестановки* сомножителей. Когда ученики ознакомлены съ механизмомъ умноженія, слѣдуетъ ихъ ознакомить съ повѣркою дѣйствія.

§ 105. Наконецъ, перейдемъ къ разсмотрѣнію случаевъ, когда умноженіе употребляется при рѣшеніи задачъ; съ этими случаями ученики знакомятся чрезъ рѣшеніе образцовъ такихъ задачъ, причемъ, по рѣшеніи каждой задачи, дѣлается выводъ, что было дано въ задачѣ, что требовалось найти и какъ нашли, — съ цѣлью обобщить знанія дѣтей.

Умноженіе употребляется при рѣшеніи задачъ въ слѣдующихъ случаяхъ:

1) когда требуется найти число, большее даннаго въ нѣсколько разъ (увеличить число въ нѣсколько разъ);
2) когда надо узнать цѣну нѣсколькихъ одинаковыхъ предметовъ, зная цѣну одного или нѣсколькихъ изъ нихъ.

Задача 1-ая.

„Одинъ торговецъ продалъ сахару на 175 руб.; а другой — въ 6 разъ больше. На какую сумму продалъ сахару другой торговецъ?“

Такъ какъ второй торговецъ выручилъ денегъ въ 6 разъ больше, то его деньги, полученныя за сахаръ, будутъ содержать 6 разъ по 175 руб., т. е. будутъ равны 1,050 руб., что можно узнать умноженіемъ 175 руб. на 6.

Задача 2-ая:

„Одна книга стоитъ 75 коп.; сколько стоятъ 12 такихъ же книгъ?“

Въ задачѣ сказано, что одна книга стоитъ 75 коп.; и надо узнать стоимость 12 такихъ книгъ; для чего нужно будетъ число 75 коп. увеличить въ 12 разъ, а это можно посредствомъ умноженія 75 коп. на 12; умноживъ, получаемъ 9 руб. Итакъ, 12 такихъ книгъ стоятъ 9 рублей.

Дѣленіе.

§ 106. Опредѣленія дѣленія:

1) дѣленіе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго по данному произведенію двухъ сомножителей и одному изъ этихъ сомножителей отыскивается другой сомножитель;

2) дѣленіе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго одно число дѣлится на столько равныхъ частей, сколько единицъ находится въ другомъ;

3) дѣленіе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго изъ двухъ данныхъ чиселъ составляется третье, показывающее, сколько разъ одно число содержится въ другомъ.

Послѣднія два опредѣленія, какъ **частныя,** дѣтямъ легче понятны, чѣмъ первое, т. е. **общее;** а потому ознакомленіе съ дѣленіемъ нужно начинать съ частныхъ опредѣленій, и, когда учащіеся знаютъ механизмъ дѣйствія, то можно ихъ ознакомить съ общимъ опредѣленіемъ дѣленія.

§ 107. При дѣленіи многозначныхъ чиселъ бываютъ слѣдующіе случаи:

1) дѣленіе многозначнаго числа на однозначное;
2) дѣленіе на одну единицу высшаго разряда (дѣленіе на число, обозначаемое единицей съ однимъ или нѣсколькими нулями; опредѣленіе числа всѣхъ единицъ какого-нибудь разряда; дѣленіе на единицу съ нулями);
3) дѣленіе многозначныхъ чиселъ;
4) дѣленіе чиселъ, не имѣющихъ низшихъ разрядовъ (когда цифровое обозначеніе дѣлимаго и дѣлителя оканчивается нулями).

§ 108. „Раздѣлите 40 пополамъ! Сколько получили? Узнайте половину 56! Какъ велика половина 56? Найдите треть 96! Какъ нашли? 96 раздѣлить на 4 равныя части, сколько? Напиши числа! ($\frac{96}{4} = 24.$) Назови дѣлимое, дѣлителя и частное! Какое число называется дѣлимымъ? дѣлителемъ? частнымъ? Найдите частное 42 и 3! Какъ нашли? Напиши числа! ***Тутъ выполнено дѣйствіе дѣленіе.*** Надъ какими числами выполнено дѣйствіе дѣленіе? Какъ называются числа при дѣленіи? — Читай написанныя числа! Какое число служитъ дѣлителемъ въ первомъ случаѣ? На сколько равныхъ частей раздѣлили число 96? На сколько равныхъ частей раздѣлили первое число во второмъ примѣрѣ? Если въ дѣлителѣ 8 единицъ, то на сколько равныхъ частей надо будетъ раздѣлить первое число? Вообще, на сколько равныхъ частей дѣлится первое число? Какимъ дѣйствіемъ это можно сдѣлать? Итакъ, какое дѣйствіе называется дѣленіемъ?“

Такимъ же образомъ можно вывести опредѣленіе дѣленія въ смыслѣ содержанія. Когда учащіеся ознакомлены съ частными опредѣленіями дѣленія, нужно имъ сообщить, что дѣленіе какъ въ томъ, такъ и другомъ случаѣ обозначается однимъ знакомъ: за дѣлимымъ проводится вертикальная черта, за которою пишется дѣлитель; подъ дѣлителемъ проводится горизонтальная черта, а подъ нею пишется частное; когда это сдѣлано, то можно перейти къ дѣленію многозначнаго числа на однозначное.

§ 109. „Раздѣлите 84 на 7 равныхъ частей! Сколько получили? Какъ раздѣлили? Напиши числа! Какъ написалъ? Напиши 224 дѣлимымъ и 2 — дѣлителемъ! На сколько равныхъ частей надо раздѣлить 224? Какой высшій разрядъ въ дѣлимомъ? Если 2 сотни раздѣлить пополамъ, сколько получится въ каждой части? (Учитель пишетъ въ частномъ число 100.) Какое число еще надо раздѣлить на 2 равныя части? Какъ раздѣлить? Раздѣлите 20 пополамъ! Какое ***второе отдѣльное частное?*** Какъ его нашли? Какое первое отдѣльное частное? (Отдѣльныя частныя учитель записываетъ и соединяетъ знакомъ плюсъ.) Какъ получить третье отдѣльное частное? Найдите его! Сколько получили? Сколько отдѣльныхъ дѣленій мы произвели?"

Запись:

$$\begin{array}{r|l} 224 & 2 \\ \cline{2-2} & 100 + 10 + 2 = 112. \end{array}$$

„Раздѣлите 468 на 2 равныя части! Сколько получили? Напиши числа! Объясняй дѣленіе и записывай отдѣльныя частныя!"

Потомъ учитель велитъ написать дѣлимое и дѣлителя другой разъ и произвести дѣленіе; когда получена цифра сотенъ частнаго, учитель спрашиваетъ дѣтей, съ какой стороны сотенъ надо будетъ писать цифру десятковъ и гдѣ писать цифру простыхъ единицъ, а послѣ того онъ записываетъ полученныя цифры на соотвѣтствующихъ мѣстахъ. Наконецъ, дѣлается выводъ, что каждую слѣдующую цифру частнаго надо писать справа предыдущей.

Затѣмъ берутся и такіе примѣры, когда каждая цифра дѣлимаго, въ отдѣльности взятая, не дѣлится безъ остатка на цифру дѣлителя; тогда единицы высшихъ разрядовъ приходится раздроблять въ слѣдующій низшій разрядъ и дѣлить полученныя числа. Примѣромъ такихъ чиселъ могутъ служить слѣдующія: 19376 | 2.

Объясняя производство дѣленія, ученикъ говоритъ:

„Начинаемъ дѣленіе съ высшихъ разрядовъ, т. е. съ десятковъ тысячъ; 1 десятокъ тысячъ раздѣлить на 2 равныя части, въ частномъ не получится ***полныхъ десятковъ тысячъ;*** поэтому 1 десятокъ тысячъ дробимъ въ единицы тысячъ; 1 десятокъ тысячъ содержитъ 10 единицъ тысячъ; 10 да 9 — вмѣстѣ 19 единицъ тысячъ; 19 единицъ тысячъ раздѣлить на 2 равныя части, въ каждой части получается 9 единицъ тысячъ; чтобы найти остатокъ, нужно 9 умножить на 2 и полученное вычесть изъ 19, остается 1 единица тысячъ.“ Такъ продолжаютъ до конца.

При дѣленіи же по содержанію, объясненіе ведется слѣдующимъ образомъ:

Дѣленіе начинаемъ съ высшихъ разрядовъ, т. е. съ десятковъ тысячъ. Въ 1 десяткѣ тысячъ 2 не содержится ***десятокъ тысячъ разъ;*** а потому 1 десятокъ тысячъ дробимъ въ единицы тысячъ и т. д.

При дѣленіи многозначнаго числа на однозначное, записываются только данныя числа и полное частное, а всѣ промежуточныя вычисленія производятся устно; такъ что получается такая запись:

$$\begin{array}{r|l} 19376 & 2 \\ \hline & 9688. \end{array}$$

§ 110. „Раздѣлите 40 на 10! Сколько получили? Узнайте частное отъ дѣленія 90 на 10! Напиши число 96 дѣлимымъ, а 10 дѣлителемъ! Какое частное получается? Какой остатокъ? Какъ найти остатокъ, если знаемъ дѣлителя и частное? Какая цифра получается въ остаткѣ? Какая была цифра единицъ въ дѣлимомъ? Напиши числа: 124 и 10! Раздѣлите 124 на 10! Какое частное? Какой остатокъ? Если въ дѣлимомъ 8 простыхъ единицъ, то какъ великъ будетъ остатокъ? Вообще, сколько единицъ получается въ остаткѣ отъ дѣленія на 10? —

Какой остатокъ получился отъ дѣленія 124 на 10? Какое частное? Отдѣли запятою въ числѣ 124 послѣднюю цифру! Что показываетъ отдѣленная цифра? Что — оставшіяся цифры? Слѣдовательно, какъ сразу найти частное отъ дѣленія 124 на 10? Напиши число 1245! Какой остатокъ получится, если это число раздѣлить на 10? Какъ это сразу узнать? Какое частное? Напиши число 2345! Узнай частное и остатокъ отъ дѣленія его на 10! Какъ нашелъ? Вообще, какъ найти частное и остатокъ отъ дѣленія числа на 10? — Сколько десятковъ въ числѣ 124 всего? Какъ это узнать? Сколько получится въ частномъ, если 124 раздѣлить на 10? Что показываетъ число 12? Итакъ, если число раздѣлить на 10, что тогда покажетъ частное?

Какъ узнать, сколько въ данномъ числѣ всего сотенъ? Напиши число 45,613! Узнай, сколько въ немъ всего сотенъ! Какъ узналъ? Содержится ли 100 въ десяткахъ и единицахъ числа цѣлое число разъ? Какой остатокъ отъ дѣленія 45,613 на 100? Какое частное? Слѣдовательно, какъ раздѣлить 45,613 на 100? Вообще, какъ раздѣлить данное число на 100? — Какъ узнать совокупность всѣхъ единицъ тысячъ даннаго числа? Какъ раздѣлить данное число на 1000? На 10,000? 100,000? — Какими цифрами обозначены были дѣлители во всѣхъ этихъ примѣрахъ? Если въ дѣлителѣ два нуля, сколько тогда отдѣлили цифръ справа дѣлимаго? Какъ было тогда, если въ дѣлителѣ четыре нуля? Вообще, сколько цифръ отдѣляли справа дѣлимаго? Что показываютъ отдѣленныя и оставшіяся цифры? Слѣдовательно, какъ раздѣлить данное число на число, обозначаемое единицей съ однимъ или нѣсколькими нулями?"

§ 111. Дѣленіе многозначныхъ чиселъ слѣдуетъ начинать съ такихъ примѣровъ, когда въ частномъ получается однозначное число, такъ какъ дѣленіе въ общемъ случаѣ сводится къ ряду такихъ дѣленій.

„Сколько получится, если 96 раздѣлить на 12? Напиши числа! Какъ въ этомъ случаѣ найти частное? *(Угадываніемъ, подыскиваніемъ, испытаніемъ.)* Какъ убѣдиться, что цифра 8 вѣрна? Раздѣлите 100 на 25! Какое частное? Какъ его нашли? Раздѣлите 125 на 25!

Какъ убѣдиться въ вѣрности цифры 5? Напиши 200 дѣлимымъ, а 25 — дѣлителемъ! Какимъ способомъ найти частное? Найдите! Напиши число 456 дѣлимымъ! Если это число надо раздѣлить на 59, будетъ ли частное больше 10? Какъ убѣдиться, что не будетъ? Какъ найти, какое однозначное число частное?“

Учитель сообщаетъ ученикамъ, что частное можно найти скорѣе, если взять высшій разрядъ дѣлителя, число всѣхъ единицъ того же разряда дѣлимаго и второе число раздѣлить на первое; въ данномъ случаѣ 45 раздѣлить на 5; но такъ какъ дѣлитель весьма близокъ къ 60, то вмѣсто 5 надо взять 6; раздѣливъ 45 на 6, получаемъ въ частномъ 7; эту цифру и надо *испытать*. Умноживъ 59 на 7, получаемъ 413; зная это, можемъ опредѣлить остатокъ, для чего изъ 456 вычесть 413, получается 43; такъ какъ остатокъ меньше дѣлителя, то частное вѣрно.

На доскѣ получается такая запись:

$$\begin{array}{r|l} 456 & 59 \\ \cline{2-2} -413 & 7 \\ \cline{1-1} 43. & \end{array}$$

§ 112. Когда при дѣленіи многозначныхъ чиселъ получается многозначное частное, то въ дѣлимомъ съ лѣвой стороны надо отдѣлить такое число, отъ дѣленія котораго на дѣлителя получается однозначное частное; къ получаемымъ остаткамъ нужно сносить послѣдовательно всѣ оставшіяся цифры дѣлимаго, а полученныя цифры частнаго писать справа предыдущей; если же въ частномъ какого-нибудь разряда нѣтъ, то вмѣсто него нужно писать нуль.

До уразумѣнія изложеннаго правила дѣтей можно довести слѣдующимъ образомъ:

Пусть дано число 245,642, которое надо раздѣлить на 342 равныя части. Когда дѣлимое и дѣлитель написаны надлежащимъ образомъ, разсуждаемъ такъ:

Начинаемъ дѣленіе съ высшихъ разрядовъ, т. е. съ сотенъ тысячъ; 2 сотни тысячъ раздѣлить на 342 равныя части, въ частномъ не получится полныхъ сотенъ тысячъ; дробимъ сотни тысячъ въ слѣдующій низшій разрядъ, т. е. въ десятки тысячъ; 1 сотня тысячъ содержитъ 10 десятковъ тысячъ, а 2 сотни тысячъ —

въ 2 раза больше, т. е. 20 десятковъ тысячъ, да еще 4 десятка тысячъ вмѣстѣ 24 десятка тысячъ; если это число раздѣлить на 342 равныя части, то въ частномъ не будетъ полныхъ десятковъ тысячъ; раздробивъ 24 десятка тысячъ въ единицы тысячъ, получаемъ 240 единицъ тысячъ; къ этому числу прибавить 5 единицъ тысячъ, получается 245 единицъ тысячъ; отъ дѣленія 245 единицъ тысячъ на 342 равныя части, не получимъ полныхъ единицъ тысячъ, а потому 245 единицъ тысячъ дробимъ въ сотни; 1 единица тысячъ содержитъ 10 сотенъ, а 245 единицъ тысячъ — въ 245 разъ больше, т. е. 2450 сотенъ; къ полученному числу прибавить 6 сотенъ, получается всего 2456 сотенъ; такъ какъ число 2456 больше дѣлителя, то отсюда заключаемъ, что въ частномъ будутъ сотни; остается только опредѣлить цифру сотенъ, что можно сдѣлать на основаніи предыдущихъ примѣровъ, — когда въ частномъ получилось однозначное число; для этого беремъ высшій разрядъ дѣлителя, т. е. 3 сотни, и число всѣхъ единицъ того же разряда дѣлимаго, т. е. 24 сотни, и раздѣляемъ второе число на первое, т. е. 24 на 3, получаемъ частное 8; но цифра 8 **сильна,** такъ какъ отъ умноженія 3 сотенъ на 8, получаемъ 24 сотни, т. е. столько, сколько ихъ всего въ дѣлимомъ; а отъ умноженія 4 десятковъ на 8 (вѣрнѣе: 8 на 4 десятка), получается болѣе 3 сотенъ, всего же будетъ въ произведеніи больше 27 сотенъ (число 2456 разсматриваемъ здѣсь какъ совокупность простыхъ единицъ); поэтому цифру частнаго надо понизить на 1, т. е. вмѣсто 8 взять 7. Итакъ, отъ дѣленія 2456 сотенъ на 342 равныя части, получается въ каждой части 7 сотенъ; чтобы найти остатокъ, нужно 7 сотенъ умножить на 342 и полученное число отнять отъ 2456 сотенъ; получается 62 сотни.

Изъ предыдущаго видимъ, что первое отдѣльное дѣлимое 2456. Это число мы можемъ сразу узнать, если въ полномъ дѣлимомъ слѣва отдѣлить четыре цифры; раздѣливъ 2456 на 342, получимъ первую цифру частнаго. Такъ какъ въ дѣлимомъ еще остались двѣ цифры, то отдѣльныхъ дѣлимыхъ еще будетъ два, слѣдовательно, и отдѣльныхъ частныхъ еще будетъ два; всего же въ частномъ — 3 цифры. Подобнымъ разсужденіемъ можно легко опредѣлить число цифръ частнаго въ любомъ случаѣ.

Когда учащіеся усвоили объясненіе механизма дѣленія, надо, при производствѣ дѣйствія, выражаться сокращенно:

Число 245,642 раздѣлить на 342; первое отдѣльное дѣлимое 2456, частное 7: чтобы найти остатокъ, нужно 342 умножить на 7 (при дѣленіи по содержанію) или 7 на 342 (при дѣленіи на равныя части; ученики должны знать, какъ требуется умножать по смыслу дѣленія; а умножаютъ большее число на меньшее, если надо найти произведеніе дѣлителя на найденную цифру частнаго) и полученное число вычесть изъ 2456; получается 62; къ этому остатку нужно *снести* слѣдующую цифру дѣлимаго, т. е. 4, и полученное число раздѣлить на 342; вторая цифра частнаго 1; она пишется справа первой, т. е. 7; отнявъ 342 отъ 624, получаемъ второй остатокъ 282; ко второму остатку нужно снести послѣднюю цифру дѣлимаго, т. е. 2, и полученное число раздѣлить на 342; сдѣлавъ такъ, получаемъ въ частномъ 8, а въ остаткѣ 86. Посредствомъ цифръ и знаковъ изложенное изображается слѣдующимъ образомъ:

2 4.5,6 4 2 | 3 4 2
−2 3 9 4 | 7 1 8.
6.2 4
−3 4 2
2 8.2.2
−2 7 3 6
8 6.

§ 113. Когда цифровое обозначеніе дѣлимаго и дѣлителя оканчивается нулями, то дѣленіе можно *упростить,* зачеркнувъ какъ въ одномъ, такъ и другомъ числѣ по равному числу нулей, отчего частное не измѣнится, — а если остатокъ получается, то къ нему съ правой стороны надо приписать столько нулей, сколько ихъ было зачеркнуто въ дѣлимомъ. Пусть требуется раздѣлить 246,000 на 34,000; зачеркнувъ по три нуля въ дѣлимомъ и дѣлителѣ, получаемъ числа 246 и 34, частное которыхъ 7, а остатокъ 8. Но намъ надо было раздѣлить не 246 простыхъ единицъ, а 246 единицъ тысячъ, а потому въ остаткѣ тоже получатся единицы тысячъ; чтобы показать, что цифра 8 означаетъ единицы тысячъ, нужно къ ней справа приписать три нуля; получается 8000.

Запись:

2 4.6,~~0 0 0~~ | 3 4,~~0 0 0~~
−2 3 8 | 7
8 0 0 0.

§ 114. По извѣстному свойству элементовъ дѣленія, имѣемъ, что дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное (или наоборотъ), плюсъ остатокъ. Этимъ свойствомъ элементовъ пользуются при повѣркѣ дѣйствія дѣленія: умножаютъ дѣлителя на частное (или наоборотъ) и къ полученному произведенію прибавляютъ остатокъ, если онъ есть; въ результатѣ должно получиться дѣлимое.

Съ повѣркою дѣленія учащихся можно ознакомить слѣдующимъ образомъ:

„Раздѣлите 24 на 6 равныхъ частей! Сколько получили? Напиши числа на доскѣ! (Подъ дѣлимымъ проводится горизонтальная черта.) Назови дѣлимое, дѣлителя и частное по порядку! Сколько получилось въ каждой части? А сколько всего частей? Если одна часть 4, то какъ узнать 6 такихъ частей? (Учитель пишетъ на доскѣ: 24 = 4 . 6.) Итакъ, произведенію какихъ чиселъ равняется дѣлимое 24? Что представляютъ собою числа: 4 и 6 въ данномъ случаѣ? (Учитель указываетъ на написанныя числа.) Раздѣлите 30 на 3 равныя части! Сколько получили въ каждой части? Какъ найти совокупность всѣхъ частей, если знаемъ одну часть? Чему равно дѣлимое 30? Если знаемъ дѣлителя и частное, какъ найти дѣлимое? — Раздѣлите 42 на 5 равныхъ частей! Какое частное и остатокъ? Какъ найти остатокъ? Получимъ ли отъ умноженія 8 на 5 полное дѣлимое? Отчего нѣтъ? Какъ получить полное дѣлимое? [Запись: 42 = (8 . 5) + 2.] Чему было равно дѣлимое въ первыхъ двухъ случаяхъ? Чему — въ послѣднемъ случаѣ? Раздѣлите 54 на 5! Какое частное получили? Какой остатокъ? Какъ найти остатокъ? Чему равно дѣлимое? Если частное будетъ невѣрно, получимъ ли тогда отъ умноженія и сложенія дѣлимое? Какъ будетъ тогда, если дѣленіе произведено вѣрно? Слѣдовательно, *какъ провѣрить дѣленіе?*“

§ 115. Когда учащіеся ознакомлены съ частными опредѣленіями, механизмомъ и повѣркою дѣленія, можно имъ объяснить общее опредѣленіе дѣйствія въ связи съ вопросомъ, когда при дѣленіи отыскивается *множимое (дѣленіе на равныя части)* и когда *множитель (дѣленіе по содержанію).* Съ этой цѣлью учитель задаетъ задачу, для рѣшенія которой надо число раздѣлить на равныя части; напр. такую:

„5 одинаковыхъ карандашей стоятъ 20 коп.; сколько стоитъ одинъ такой же карандашъ?“

5 карандашей стоятъ 20 коп, а одинъ такой карандашъ — въ 5 разъ дешевле; чтобы узнать его стоимость, надо 20 коп. раздѣлить на 5 равныхъ частей, получается 4 коп. въ каждой части.

Одинъ карандашъ стоитъ 4 коп., а 5 такихъ же карандашей — въ 5 разъ дороже; 4 коп. взять 5 разъ, получается 20 коп. Итакъ, число 20 въ этомъ случаѣ равняется 4, умноженнымъ на 5.

Запись:

$$\frac{20}{5} = \mathbf{4};$$

$$20 = \mathbf{4} \,.\, 5.$$

„Что было дано въ задачѣ? (Стоимость и число *всѣхъ* карандашей.) Что нужно было найти? Какъ нашли стоимость одного карандаша? Какое число получили отъ дѣленія? Что это число показываетъ? Если одинъ карандашъ стоитъ 4 коп., то какъ узнать стоимость 5 такихъ же карандашей? Итакъ, чему равно въ этомъ случаѣ дѣлимое 20? *Чѣмъ* служитъ число 4 при умноженіи? (Учитель подчеркиваетъ число **4** двумя чертами какъ въ первомъ, такъ и во второмъ равенствѣ) Чѣмъ служитъ число 5? число 20? Итакъ, *что отыскивается при дѣленіи на равныя части?*“

Потомъ учитель велитъ ученикамъ преобразовать данную задачу такъ, чтобы числа были прежнія, но чтобы задачу надо было рѣшать дѣленіемъ по содержанію. Получается слѣдующая задача:

„Сколько карандашей можно купить на 20 коп., если каждый изъ нихъ стоитъ 5 коп.?“

Запись рѣшенія и повѣрки его:

$$20 : 5 = \mathbf{4}$$

$$20 = 5 \,.\, \mathbf{4}.$$

„Что дано въ этой задачѣ? Что надо найти? Какъ найти? Сколько получается? Если 1 карандашъ стоитъ 5 коп., то какъ узнать цѣну 4 такихъ карандашей? Чему равно число 20, какъ дѣлимое? Чѣмъ служитъ число 4 при умноженіи? Какое произведеніе и множимое были даны въ задачѣ? Какимъ дѣйствіемъ мы нашли множителя? Въ какомъ смыслѣ было дѣленіе? Итакъ, *что отыскивается при дѣленіи по содержанію?*

Какъ называются множимое и множитель вмѣстѣ? (Сомножителями, производителями.) Сколько сомножителей было дано въ каждой изъ данныхъ задачъ? Кромѣ того, что еще было дано въ задачѣ? Какъ мы нашли второго сомножителя? Слѣдовательно, если дано произведеніе двухъ сомножителей и одинъ сомножитель, то какъ найти другого сомножителя? Итакъ, что можно найти посредствомъ дѣленія? Какое дѣйствіе называется дѣленіемъ?"

§ 116. Дѣленіе употребляется въ такихъ случаяхъ, когда требуется: 1) узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ; 2) узнать, во сколько разъ одно число больше или меньше другого; 3) одно число раздѣлить на столько равныхъ частей, сколько единицъ содержится въ другомъ; 4) число уменьшить въ нѣсколько разъ.

Приведемъ по одной задачѣ на каждый изъ упомянутыхъ случаевъ:

1) „Сколько фунтовъ сахару можно купить на 1 руб. 87 коп., если фунтъ его стоитъ 17 коп.?
2) Въ двухъ ящикахъ находится чай; въ одномъ 48 фунтовъ, въ другомъ 12 фунтовъ. Во сколько разъ въ первомъ ящикѣ больше, чѣмъ въ другомъ?
3) На 20 рублей куплено 5 аршинъ сукна одного сорта. Сколько стоитъ аршинъ этого сукна?
4) Локомотивъ прошелъ въ часъ 48 верстъ, а пѣшеходъ — въ 12 разъ меньше. Сколько верстъ въ часъ проходитъ пѣшеходъ?"

Первыя двѣ задачи рѣшаются дѣленіемъ по содержанію, а вторыя двѣ — дѣленіемъ на равныя части.

Дѣйствія надъ составными именованными числами.

§ 117. Прежде чѣмъ перейти къ изученію дѣйствій надъ составными числами, надо повторить о мѣрахъ, уже извѣстныхъ учащимся, и дополнить знанія ихъ, чтобы получились полныя таблицы мѣръ и чтобы учащіеся составили ясное понятіе о необходимости употребленія различныхъ единицъ мѣръ для измѣренія одной и той же величины.

§ 118. Именованное число называется ***простымъ,*** если оно состоитъ изъ единицъ одного названія; напр. 4 аршина.

Составнымъ называется такое именованное число, которое состоитъ изъ единицъ разныхъ названій; напр. 4 аршина 15 вершковъ.

При производствѣ дѣйствій надъ составными именованными числами, иногда требуется всѣ высшія мѣры обращать въ низшія или наоборотъ: мѣры одного названія выразить въ мѣрахъ разныхъ названій, другими словами, надо умѣть ***раздроблять*** и ***превращать*** именованныя числа. Съ ***преобразованіемъ*** именованныхъ чиселъ и ознакомимся.

§ 119. ***Раздробленіе*** есть такое преобразованіе именованныхъ чиселъ, посредствомъ котораго мѣры высшихъ названій обращаются въ мѣры низшихъ названій. Когда же требуется мѣры низшихъ названій выразить въ мѣрахъ высшихъ названій, то это достигается ***превращеніемъ.***

Пусть требуется 4 пуда 12 фунтовъ 16 лотовъ раздробить въ лоты; для этого разсуждаемъ такъ:

> 1 пудъ содержитъ 40 фунтовъ, а 4 пуда — въ 4 раза больше; 40 фунтовъ умножить на 4, получается 160 фунтовъ; 160 фунтовъ да 12 фунтовъ — вмѣстѣ 172 фунта; фунты дробить въ лоты; 1 фунтъ содержитъ 32 лота, а 172 фунта — въ 172 раза больше; надо было 32 лота умножить на 172, но такъ какъ множитель больше множимаго, то умножаемъ наоборотъ, т. е. 172 на 12, получается 5504 лота; къ этому числу прибавить 16 лотовъ, получается 5520 лотовъ.

Вычисленіе располагается слѣдующимъ образомъ:

4 пуд. 12 фун. 16 лот. = ?

40 фун.
×4
160 фун.
+12 „
172 фун.

32 лот. × 172 = ?

172
×32
+ 344
516
5504 лот.
+16 „
5520 лот.

§ 120. 12,632 вершка превратить въ высшія мѣры.

Сначала вершки превращаемъ въ слѣдующія высшія мѣры, т. е. въ аршины. Аршинъ содержитъ 16 вершковъ, а въ 12,632 вершкахъ будетъ столько аршинъ, сколько разъ въ 12,632 верш. содержится 16 вершковъ; содержится 789 разъ и въ остаткѣ получается 8 вершковъ. Итакъ, 12,632 вершка составляютъ 789 аршинъ и 8 вершковъ; 1 сажень содержитъ 3 аршина, а въ 789 аршинахъ столько саженей, сколько разъ въ 789 аршинахъ содержится 3 аршина; содержится 263 раза. Итакъ, 789 аршинъ составляютъ 263 сажени. Получаемъ, что 12,632 вершка составляютъ 263 сажени 8 вершковъ.

При превращеніи именованныхъ чиселъ, дѣлимое и дѣлитель суть именованныя числа, а потому частное должно быть отвлеченное число; на этомъ основаніи говоримъ, что если въ дѣлимомъ и дѣлителѣ писать наименованія, то въ частномъ его нельзя писать.

На практикѣ оказывается, что удобнѣе, если въ дѣлимомъ и дѣлителѣ не писать наименованій, а писать ихъ въ частномъ и остаткѣ, а при объясненіи хода превращенія наименованія употреблять на надлежащемъ мѣстѣ; такимъ образомъ, все вычисленіе будетъ имѣть такой видъ:

12,632 верш. = ?

$$
\begin{array}{r|l}
12{,}632 & 16 \\ \cline{2-2}
-112 & 789 \text{ арш.} \\ \cline{1-1}
143 & \\
-128 & \\ \cline{1-1}
152 & \\
-144 & \\ \cline{1-1}
8 \text{ верш.} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
789 & 3 \\ \cline{2-2}
 & 263 \text{ саж.}
\end{array}
$$

12,632 верш. = 263 саж. 8 верш.

§ 121. Сложеніе составныхъ именованныхъ чиселъ удобнѣе начинать съ низшихъ мѣръ, чѣмъ съ высшихъ, такъ какъ *попутно* надо преобразовывать полученные результаты.

Вычисленіе располагается слѣдующимъ образомъ:

		327	саж.	6	фут.	3	дюйм.
+		349	„	5	„	10	„
		1 1		1			
		~~677~~	саж.	~~12~~	фут.	~~13~~	дюйм.
	1 верста	177		5		1	
	1 верста	177	саж.	5	фут.	1	дюймъ.

§ 122. ***Вычитаніе.*** Изъ 182 пудовъ 36 фунтовъ 24 лотовъ 1 золотника вычесть 146 пудовъ 28 фунтовъ 28 лотовъ 2 золотника.

Запись:					5.5		4	
	18.2	пуд.	3.6.	фун.	~~24~~.	лот.	~~1~~	зол.
	−146	„	28	„	28	„	2	„
	36	пуд.	7	фун.	27	лот.	2	зол.

§ 123. ***Умноженіе.*** При умноженіи составныхъ именованныхъ чиселъ, какъ и вообще, множитель всегда отвлеченное число.

Умноженіе составныхъ именованныхъ чиселъ можно начинать и съ высшихъ и съ низшихъ мѣръ, такъ какъ преобразованіе результатовъ производится только послѣ умноженія.

Пусть требуется 2 пуда 16 фунтовъ 17 лотовъ 2 золотника умножить на 7; дѣйствіе располагаемъ слѣдующимъ образомъ:

	2	пуд.	16		фун.	17		лот.	2	зол.
						×			7	
	14	пуд.	112		фун.	119		лот.	~~14~~	зол.
	+2	„	+3		„	+4		„	2	„
	~~16~~	пуд.	1.1 5	4 0		1.2.3	3 2			
1 берк.	6	„	−80	2 пуд.		−96	3 фунта.			
			35		фун.	27		лот.		
1 берк.	6	пуд.	35		фун.	27		лот.	2	зол.

§ 124. ***Дѣленіе.*** При дѣленіи составныхъ именованныхъ чиселъ бываютъ два случая: 1) раздѣлить составное именованное число на число отвлеченное (дѣленіе на равныя части); 2) раздѣлить составное именованное число на другое именованное, однородное съ первымъ (дѣленіе по содержанію).

Въ первомъ случаѣ дѣленіе надо начинать съ высшихъ мѣръ и постепенно переходить къ низшимъ, а во второмъ — какъ дѣлимое, такъ и дѣлителя нужно выразить въ мѣрахъ одного названія, и полученныя числа раздѣлить; частное будетъ отвлеченное число и покажетъ, во сколько разъ дѣлимое больше дѣлителя.

Запись:

1) 26 пуд. 19 фун. 16 лот. | 8
−24 „ +80 „ +96 „ | 3 пуд. 12 фун. 14 лот.
2 пуд. 99 фун. 112 лот.
−96 „ −112 „
3 фун. 0.

2) 33 чт. 4 чк. 7 гарн. : 3 чт. 5 чк. 7 гарн. = ?

8 чк. × 33 = ?
33
×8
264 чк.
+4
268 чк.

8 гарн. × 268 = ?
268
×8
2144 гарн.
+7 „
2151 гарн.

8 чк. × 3 = 24 чк.;
24 чк. + 5 чк. = 29 чк.

8 гарн. × 29 = ?
29
×8
232 гарн.
+7 „
239 гарн.

2151 гарн. | 239 гарн.
−2151 „ | 9.
0.

Задачи на числа любой величины.

§ 125. Задачи на числа любой величины, по условіямъ и вопросу, въ общемъ, имѣютъ сходство съ задачами на числа первой сотни, и различіе между ними лишь въ величинѣ входящихъ въ нихъ данныхъ чиселъ; а потому и пріемы рѣшенія ихъ тѣ же, что и во второмъ концентрѣ.

Во второмъ концентрѣ рѣшеніе задачъ записывается въ строчки, причемъ всѣ вычисленія производятся *устно*, а записываются только окончательные результаты; въ третьемъ же концентрѣ и вычисленія, по большей части, производятся ***письменно (столбцами)*** и только въ нѣкоторыхъ случаяхъ, когда дѣйствіе надо произвести надъ небольшими числами или возможно примѣненіе сокращенныхъ пріемовъ, — рѣшеніе записывается въ строчки.

Что касается записи чиселъ при производствѣ дѣйствій надъ ними, то это ясно изъ предыдущихъ статей.

Для обозначенія числа и порядка простыхъ задачъ, на которыя, при рѣшеніи, распадается данная сложная задача, можно употреблять цифры: 1), 2), 3) и т. д.

Когда задача рѣшена, учащіеся пишутъ планъ рѣшенія и объясненіе ея. Если самостоятельное рѣшеніе и объясненіе сложной задачи учащимся непосильно, то учитель долженъ предлагать вопросы, выясняющіе содержаніе и ходъ рѣшенія данной задачи; если же задача посильна среднему ученику, тогда она предлагается учащимся для самостоятельнаго рѣшенія.

Кромѣ упомянутыхъ родовъ задачъ (смот. § 68) въ третьемъ концентрѣ нужно рѣшать задачи на ***сложное тройное правило, правило процентовъ*** и ***пропорціональное дѣленіе*** или правило ***товарищества,*** когда результаты рѣшеній выражаются въ цѣлыхъ числахъ. Объ этихъ задачахъ и будемъ говорить ниже.

§ 126. Задача на сложное тройное правило:

„На содержаніе 45 человѣкъ въ 32 дня истрачено 432 руб. Сколько человѣкъ можно содержать на 1622 руб. 40 коп. въ теченіе 52 дней?“

(Правдинъ и Мюльманъ.)

Запишемъ задачу въ сокращенномъ видѣ, обозначивъ неизвѣстное число буквою х; получимъ слѣдующее:

432	руб.		—	32 дн.	—	45	чел.
1622	„	40 коп.	—	52 „	—	х	„

Потомъ разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ:

На содержаніе 45 человѣкъ въ теченіе 32 дней издержано 432 руб.; а на содержаніе ихъ въ 1 день потребуется денегъ въ 32 раза меньше; ***пропорціональность прямая,*** потому что съ уменьшеніемъ одной величины въ нѣсколько разъ, другая уменьшается во столько же разъ; 432 руб. раздѣлить на 32 равныя части, въ каждой части получается 13 руб. 50 коп. Если на содержаніе 45 человѣкъ въ 1 день требуется 13 руб. 50 коп., то на содержаніе 1 человѣка въ день нужно будетъ израсходовать въ 45 разъ меньше (пропорціональность прямая); 13 руб. 50 коп. раздѣлить на 45 равныхъ частей, въ каждой части получается 30 коп. Итакъ, на содержаніе 1 человѣка въ 1 день требуется 30 коп. Зная это, мы можемъ узнать, сколько денегъ потребуется на содержаніе 1 человѣка въ 52 дня; для этого нужно 30 коп. умножить на 52, получается 15 руб. 60 коп. Зная, сколько денегъ истрачено на содержаніе всѣхъ человѣкъ въ извѣстное время и сколько денегъ требуется на содержаніе одного человѣка въ то же время, можемъ узнать число всѣхъ человѣкъ, для чего надо узнать, сколько разъ въ 1622 руб. 40 коп. содержится 15 руб. 60 коп.; содержится 104 раза. Слѣдовательно, на 1622 руб. 40 коп. въ 52 дня можно содержать 104 человѣка.

Запись рѣшенія:

432 руб.	—	32 дн.	—	45 чел.
1622 „ 40 коп.	—	52 „	—	x „

1) 432 руб. : 32 = 13 руб. 50 коп.

```
 432 руб. | 32
-32       |------------------
 ---      | 13 руб. 50 коп.
 112
 -96
 ---
 1600 коп.
-160
 ---
   0
```

2) 13 руб. 50 коп. : 45 = 30 коп.

```
 13 руб. 50 коп. | 45
-13  „   5  „    |---------
 ---------       | 30 коп.
         0
```

3) 30 коп. × 52 = 1560 коп. = 15 руб. 60 коп.

4) 1622 руб. 40 коп. : 15 руб. 60 коп. =

```
= 16224̶0̶ | 156̶0̶
 -156      |-------------------
  ---      | 104 (человѣка).
   624
  -624
   ---
     0
```

§ 127. При рѣшеніи задачъ на правило процентовъ, учащихся надо ознакомить съ понятіями: *процентъ, процентныя деньги, капиталъ, кредиторъ, должникъ (дебиторъ).*

Слово „процентъ“ (въ переводѣ: за сто, со ста) употребляется для обозначенія одной или нѣсколькихъ сотыхъ долей какой-нибудь величины; такимъ образомъ, 1% какого-нибудь числа есть 1 сотая часть этого числа; 5% — $^5/_{100}$ ч., 50% — $^1/_2$ числа и т. д.

Чаще всего слово „процентъ“ употребляется въ коммерческихъ вопросахъ.

Сумма денегъ, которая отдается въ ***оборотъ,*** называется ***капиталомъ;*** а прибыль получаемая съ капитала, называется ***процентными деньгами. Должникомъ*** называется лицо, которое занимаетъ у другого деньги; а то лицо, у котораго должникъ занимаетъ деньги, называется ***кредиторомъ.***

Если говорятъ, что капиталъ принесъ 5% прибыли, то это значитъ, что съ каждыхъ 100 руб. капитала получается 5 руб. прибыли; число, показывающее, сколько рублей прибыли или убытку получается съ каждыхъ 100 руб. капитала, называется ***процентною таксою;*** въ данномъ случаѣ процентная такса 5%.

Задачи:

1. „Съ капитала 600 руб. получено въ годъ 24 руб. доходу. Опредѣлить эту доходность въ процентахъ.“

Съ 600 руб. получено прибыли 24 руб.; а съ 100 руб. — въ 6 разъ меньше (такъ какъ 100 руб. меньше 600 руб. въ 6 разъ), т. е. 4 руб.; чтобы это узнать, нужно 24 руб. раздѣлить на 6 равныхъ частей. Итакъ, капиталъ приноситъ 4% прибыли.

2. „Аршинъ бархату стоитъ 8 руб., а проданъ съ прибылью въ 25%. Почемъ продавали аршинъ бархату?“

1% какого-нибудь числа составляетъ $^1/_{100}$ часть этого числа, а 25% — $^{25}/_{100}$ ч. или $^1/_4$ числа. Слѣдовательно, прибыль составляетъ $^1/_4$ восьми руб.; чтобы ее узнать, нужно 8 рублей раздѣлить на 4 равныя части, въ каждой части получается 2 руб. Зная, сколько стоитъ аршинъ бархату и сколько получено прибыли при продажѣ, можемъ узнать, за сколько проданъ аршинъ бархату; для этого надо сложить 8 руб. и 2 руб., получается 10 руб.

3. „Нѣкто купилъ мебели на 560 руб.; при уплатѣ наличными деньгами дѣлаютъ скидку въ 6%. Сколько надо заплатить за мебель?“ (Правдинъ и Мюльманъ.)

На 100 руб. сдѣлана уступка въ 6%, — это значитъ, что покупатель на каждые 100 руб. уплачиваетъ меньше на 6 руб. (вмѣсто 100 руб. — 94 руб.); въ такомъ случаѣ на 500 руб.

онъ уплачиваетъ меньше на 30 руб., что можно узнать умноженіемъ 6 руб. на 5. Остается узнать, сколько скидки получается на 60 руб. и сколько всего. На 100 руб. уступаютъ 6 руб. или 600 коп.; на 1 руб. — въ 100 разъ меньше, т. е. 6 коп.; а на 60 руб. — въ 60 разъ больше, т. е. 3 руб. 60 коп. Чтобы узнать всю уступку, надо сложить 30 руб. и 3 руб. 60 коп., получается 33 руб. 60 коп. Изъ 560 руб. вычесть 33 руб. 60 коп., получается 526 руб. 40 коп. Итакъ, за мебель заплачено 526 руб. 40 коп.

Запись рѣшенія:

100 руб. — 6 руб.
560 „ — x „

$$6 \text{ руб.} \times 5 = 30 \text{ руб.}; \quad \frac{600 \text{ коп.}}{100} = 6 \text{ коп.};$$

$$6 \text{ коп.} \times 60 = 3 \text{ руб. } 60 \text{ коп.};$$

$$30 \text{ руб.} + 3 \text{ руб. } 60 \text{ коп.} = 33 \text{ руб. } 60 \text{ коп.}$$

5 6.0. руб. 0.0
— 3 3 „ 6 0 коп
5 2 6 руб. 4 0 коп.

§ 128. ***Правиломъ пропорціональнаго дѣленія*** называется способъ — рѣшать такія задачи, въ которыхъ одно данное число надо раздѣлить пропорціонально другимъ даннымъ числамъ. Если требуется найти два или нѣсколько чиселъ по ихъ суммѣ и частному, то примѣняется правило пропорціональнаго дѣленія. Иногда прибыль надо раздѣлить между нѣсколькими лицами, участвовавшими въ общемъ торговомъ предпріятіи, при томъ такъ, чтобы тотъ изъ участниковъ получилъ больше, у кого большій капиталъ (прямо пропорціонально капиталамъ); такія задачи тоже рѣшаются пропорціональнымъ дѣленіемъ.

Для примѣра возьмемъ такую задачу, гдѣ общую прибыль надо раздѣлить прямо пропорціонально продолжительности работы.

„Трое маляровъ получили вмѣстѣ за общую работу 156 руб.; первый работалъ 60 часовъ, второй — 48 час., третій — 48 час. Сколько получилъ каждый изъ нихъ за работу?“

Первый маляръ работалъ 60 часовъ, второй — 48 час., третій тоже — 48 часовъ; вмѣстѣ они работали 156 часовъ

(48 + 48 + 60 = 156) и за это время получили 156 руб.; чтобы узнать, сколько они получали за 1 часъ работы, надо 156 руб. раздѣлить на 156 равныхъ частей, получается въ каждой части 1 руб. Такъ какъ первый маляръ работалъ 60 часовъ, то онъ получилъ 60 руб. (1 р. × 60 = 60 руб.); второй получилъ 48 руб., третій тоже 48 руб.

§ 129. Разберемъ еще нѣсколько болѣе трудныхъ задачъ на „всѣ дѣйствія", требующихъ особыхъ пріемовъ рѣшенія.

„Купецъ купилъ на фабрикѣ 175 аршинъ матеріи по 7 руб. за каждые 5 аршинъ. Сколько прибыли получилъ онъ на все сукно, продавъ каждые 7 аршинъ по 12 руб.?"

Для рѣшенія этой задачи надо *уравнить* количество купленной и проданной матеріи. — Каждые 5 аршинъ матеріи стоятъ 7 руб., а каждые 7 арш. ея проданы за 12 руб. Если количество матеріи въ первомъ случаѣ увеличить въ 7 разъ, то получимъ 35 арш., и тогда стоимость будетъ не 7 руб., а въ 7 разъ больше (такъ какъ количество матеріи увеличилось въ 7 разъ), т. е. 49 руб. Сдѣлаемъ такъ, чтобы и количество проданной матеріи было то же, т. е. 35 арш.; для этого 7 арш. умножимъ на 5; тогда и сумма денегъ, получаемая при продажѣ матеріи, будетъ въ 5 разъ больше прежней: не будетъ 12 руб., а 60 руб. Теперь мы уравнили количество купленной и проданной матеріи и получили, что 35 арш. матеріи стоятъ 49 руб., а проданы за 60 руб., т. е. на 11 руб. дороже, чѣмъ куплены. Слѣдовательно, на 35 арш. матеріи получено 11 руб. прибыли, а на 175 арш. получено прибыли въ 5 больше (175 : 35 = 5); 11 руб. умножить на 5 руб., получается 55 рублей.

Рѣшеніе:

5 арш. стоятъ 7 руб.
7 арш. прод. за 12 руб.

---

35 арш. стоятъ 49 руб.
35 арш. прод. за 60 руб.

На 35 арш. получено 11 руб. прибыли.

175 арш. : 35 арш. = 5.

11 руб. × 5 = 55 руб.

§ 130. „Переднее колесо экипажа на разстояніи 4800 футовъ сдѣлало 400 оборотовъ. Сколько разъ обернулось при этомъ заднее колесо, окружность котораго на 4 фута больше, чѣмъ окружность передняго?“

Окружность колеса есть кривая линія; если вокругъ окружности обвести ниткой, потомъ нитку выпрямить и измѣрить, то найдемъ длину окружности колеса. — Въ задачѣ сказано, что переднее колесо сдѣлало 400 оборотовъ на разстояніи 4800 футовъ; если оно сдѣлаетъ 1 оборотъ, то пройдетъ въ 400 разъ меньшее разстояніе; 4800 футовъ раздѣлить на 400 равныхъ частей, въ каждой части получается 12 футовъ. Слѣдовательно, если переднее колесо обернется 1 разъ, то оно пройдетъ 12 футовъ; изъ этого заключаемъ, что его окружность 12 футовъ. А окружность задняго колеса на 4 фута больше, т. е. 16 футовъ. Если заднее колесо обернется 1 разъ, то оно пройдетъ 16 футовъ; но всего надо пройти 4800 футовъ; на этомъ разстояніи оно сдѣлаетъ столько оборотовъ, сколько разъ въ 4800 футахъ содержится 16 футовъ; содержится 300 разъ Итакъ, заднее колесо на томъ же разстояніи сдѣлаетъ 300 оборотовъ.

Рѣшеніе:

1) $\frac{4800 \text{ фут.}}{400} = 12$ фут.;

2) 12 фут. + 4 фут. = 16 фут.

3) 4800 фут. : 16 фут. = 300 (оборотовъ).

§ 131. „Три брата имѣли вмѣстѣ 600 руб.; когда старшій изъ нихъ далъ среднему 45 руб., а младшему 55 руб., то у всѣхъ братьевъ стало поровну. Сколько денегъ было у каждаго изъ братьевъ?“

(Правдинъ и Мюльманъ.)

У всѣхъ братьевъ вмѣстѣ было 600 руб., и когда старшій далъ среднему 45 руб., а младшему — 55 руб, то у нихъ стало поровну; зная это, можемъ узнать, сколько денегъ стало у каждаго изъ нихъ; для этого 600 руб. надо раздѣлить на 3 равныя части, получается въ каждой части 200 руб. Изъ данныхъ задачи заключаемъ, что у старшаго брата осталось 200 руб, когда онъ среднему далъ 45 руб., а младшему 55 руб., т. е. когда его деньги уменьшились на 100 руб. (45 + 55 = 100). Слѣдовательно, первоначально у него было больше 200 руб. на 100 руб.;

чтобы узнать, сколько денегъ было у старшаго брата, надо сложить 200 руб. и 100 руб., получается 300 руб. У средняго брата стало 200 руб., когда къ его деньгамъ прибавили 45 руб., слѣдовательно, у него было на 45 руб. меньше 200 руб., т. е. 155 руб. Посредствомъ такого же разсужденія узнаемъ, что у младшаго брата было 145 руб.

Рѣшеніе:

1) $\frac{600 \text{ руб.}}{3} = 200$ руб.;

2) 45 руб. + 55 руб. = 100 руб.;

3) 200 руб. + 100 руб. = 300 руб.;

4) 200 руб. — 45 руб. = 155 руб.;

5) 200 руб. — 55 руб. = 145 руб.;

§ 132. „Пароходъ по теченію рѣки проходитъ разстояніе между двумя городами въ 5 часовъ; а обратный путь проходитъ въ 7 часовъ, дѣлая въ часъ на 4 версты меньше, чѣмъ по теченію рѣки. Найти разстояніе между городами.“ (Правдинъ и Мюльманъ.)

По теченію рѣки пароходъ въ часъ дѣлаетъ на 4 версты больше, чѣмъ на обратномъ пути. Если-бы онъ, идя вверхъ по рѣкѣ, употребилъ только 5 часовъ, то осталось бы непройденнымъ разстояніе въ 20 верстъ; чтобы это узнать, надо 4 версты умножить на 5, получается 20 верстъ. Чтобы пройти все разстояніе, то на обратномъ пути пароходу надо было времени на 2 часа больше (7 — 5 = 2), и въ эти два часа онъ прошелъ 20 верстъ; слѣдовательно, въ часъ проходилъ 10 верстъ. Теперь мы нашли, что на обратномъ пути пароходъ въ часъ проходилъ 10 верстъ; зная, сколько часовъ пароходъ шелъ и сколько верстъ онъ проходилъ въ часъ, можемъ узнать разстояніе между городами. Для этого 10 верстъ умножить на 7, получается 70 верстъ.

Рѣшеніе:

1) 4 версты × 5 = 20 верстъ;

2) 7 час. — 5 час. = 2 час.;

3) $\frac{20 \text{ верстъ}}{2} = 10$ верстъ;

4) 10 верстъ × 7 = 70 верстъ.

§ 133. „9 аршинъ бархату и 15 аршинъ сукна стоятъ 82 руб. 80 коп. Сколько стоитъ отдѣльно аршинъ бархату и аршинъ сукна, если бархатъ въ 6 разъ дороже сукна?“ (Правдинъ и Мюльманъ.)

Для рѣшенія этой задачи, весь бархатъ замѣняемъ сукномъ. Такъ какъ бархатъ дороже сукна въ 6 разъ, то вмѣсто 1 аршина бархату можно купить 6 аршинъ сукна, а вмѣсто 9 аршинъ бархату — въ 9 разъ больше, т. е. 54 арш. сукна. Всего же будетъ куплено 69 аршинъ сукна, что можно узнать сложеніемъ 54 арш. и 15 арш.; это количество сукна стоитъ 82 рубля 80 коп., а 1 аршинъ — въ 69 разъ дешевле; чтобы узнать цѣну 1 аршина сукна, нужно 82 руб. 80 коп. раздѣлить на 69 равныхъ частей, получается въ каждой части 1 руб. 20 коп. Аршинъ сукна стоитъ 1 руб. 20 коп., а аршинъ бархату — въ 6 разъ дороже, т. е. стоитъ 7 руб. 20 коп.

Рѣшеніе:

1) 6 арш. $\times$ 9 = 54 арш.;

2) 54 арш. + 15 арш. = 69 арш.;

3)
```
 82 р. 80 коп. | 69
−69            |----------------
               | 1 руб. 20 коп.
 138
−138
   0
```

4) 1 руб. 20 коп. $\times$ 6 = 7 руб. 20 коп.

Задачи на вычисленіе времени.

§ 134. Задачи на вычисленіе времени рѣшаются сложеніемъ и вычитаніемъ. Сложеніемъ рѣшаются такія задачи на вычисленіе времени, въ которыхъ дано время предшествовавшаго событія и промежутокъ времени между нимъ и другимъ, позднѣйшимъ, событіемъ, а требуется опредѣлить время позднѣйшаго событія. Задачи на вычисленіе времени, рѣшаемыя вычитаніемъ, бываютъ двухъ родовъ: 1) когда дано время двухъ событій и надо опредѣлить промежутокъ времени между ними; 2) когда дано время позднѣйшаго событія и промежутокъ времени между нимъ и предшествовавшимъ событіемъ, а требуется опредѣлить время предшествовавшаго событія.

§ 135. Чтобы учащихся подготовить къ рѣшенію задачъ на вычисленіе времени, надо съ ними повторить о пройденныхъ мѣрахъ времени и составить полную таблицу этихъ мѣръ, причемъ нужно объяснить разницу между ***простымъ*** и ***високоснымъ*** годомъ, а также причину, почему къ каждому четвертому году прибавляютъ по одному дню. Потомъ можно съ учащимися вести слѣдующую бесѣду:

„Что называется ***годомъ? сутками?*** Сколько сутокъ содержитъ високосный годъ? Сколько — простой? Отчего къ каждому четвертому году прибавляютъ по одному дню? ***Когда*** начинается годъ? Который теперь, по числу, годъ? Отъ какого важнаго событія мы ведемъ лѣтосчисленіе? (Если ученики не знаютъ, учитель сообщаетъ.) Сколько полныхъ лѣтъ прошло отъ Рождества Христова до настоящаго времени? — Сколько мѣсяцевъ въ году? Назови по порядку всѣ мѣсяцы! Сколько дней содержитъ каждый мѣсяцъ? — Когда начинается ***недѣля?*** Сколько сутокъ она содержитъ? Сколько недѣль въ году? Сколько недѣль содержитъ мѣсяцъ — круглымъ числомъ? Сколько полныхъ сутокъ прошло отъ начала недѣли до среды? до пятницы? субботы? Отъ начала недѣли прошло пятеро полныхъ сутокъ, какой день наступилъ? — ***Когда*** начинаются сутки? Какъ называются часы до полудня? Какъ называются часы послѣ полудня? Сколько часовъ прошло отъ начала сутокъ до 3 часовъ ночи? до 9 часовъ утра? до 5 часовъ пополудни? 10 часовъ вечера? ***Который часъ*** наступилъ, если отъ начала сутокъ прошло 11 часовъ? 14 часовъ? 16 часовъ? Сколько минутъ содержитъ часъ? $^1/_4$ часа? Какъ это узнать? Сколько минутъ содержатъ $^3/_4$ часа? Какъ узнали? Узнайте, сколько минутъ содержитъ $^1/_2$ часа! ***Сколько времени*** прошло отъ начала сутокъ до $6^1/_2$ часа утра? до $3^1/_4$ часа пополудни? до половины девятаго вечера? ***Сколько показываютъ часы,*** если отъ начала сутокъ прошло $12^1/_2$ часа? $14^1/_4$ часа? — Какъ получить половину года? (Какъ получить половину аршина? сажени?) Какъ получить четверть года? Сколько четвертей содержитъ годъ? Какіе мѣсяцы въ первой четверти года? Какіе — во второй? въ третьей? въ четвертой? Узнайте, сколько дней содержитъ первая четверть простого года? Сколько получили? Какъ узнали?

Сколько дней содержитъ первая четверть високоснаго года? Какъ узнать? Сколько — вторая? третья? четвертая? Сколько дней въ первомъ полугодіи простого года? Какъ узнать? Сколько дней въ томъ же полугодіи високоснаго года? Сколько дней содержитъ второе полугодіе? Какъ узнать? — Сколько полныхъ мѣсяцевъ и сутокъ прошло отъ начала года до 13 марта? Какъ вы это узнали? Сколько полныхъ мѣсяцевъ и сутокъ прошло отъ начала простого года до 6 іюля? до 9 сентября? до 11 ноября? Сколько дней прошло отъ начала високоснаго года до 9 мая? до 13 августа? 15 октября? Отъ начала простого года прошло 45 полныхъ дней; какой мѣсяцъ и которое число его наступили? ***Какой мѣсяцъ и которое число его наступили,*** если отъ начала високоснаго года прошло 100 дней? 200 дней? 300 дней? (Дѣти вычисляютъ такъ: первая четверть високоснаго года содержитъ 91 день; слѣдовательно, во второй четверти прошло уже 9 дней (100 — 91 = 9) и наступилъ 10-ый день четвертаго мѣсяца, т. е. 10 число апрѣля.) — Сколько полныхъ лѣтъ, мѣсяцевъ и дней прошло отъ Рождества Христова до 4 марта 1889 года? до 13 сентября 1899 года? ***Какой годъ, мѣсяцъ и число*** этого мѣсяца наступили, если отъ Рождества Христова прошло 1780 лѣтъ 2 мѣсяца 14 дней? 1895 лѣтъ 7 мѣсяцевъ 19 дней?“

§ 136. Послѣ такой бесѣды учащимся можно предлагать болѣе трудные вопросы, напр.:

„Сколько времени прошло отъ 2 часовъ 40 минутъ пополуночи до 6 часовъ 35 минутъ вечера тѣхъ же сутокъ?“

При устномъ рѣшеніи, разсуждаемъ такъ:

„Отъ 2 часовъ ночи до полудня прошло 10 часовъ; чтобы это узнать, нужно отъ 12 часовъ отнять 2 часа, получается 10 часовъ; но отъ 2 часовъ 40 минутъ ночи до полудня прошло на 40 минутъ меньше, т. е. 9 часовъ 20 минутъ. Пополудни прошло 6 часовъ 35 минутъ, а до полудня 9 часовъ 20 минутъ; чтобы узнать, сколько всего, нужно сложить 6 часовъ 35 минутъ и 9 часовъ 20 минутъ; сначала къ 6 часамъ и 35 минутамъ прибавляемъ 9 часовъ, получаемъ 15 часовъ 35 минутъ; къ этому прибавляемъ 20 минутъ, получаемъ 15 часовъ 55 минутъ.“

При письменномъ рѣшеніи, начало и конецъ промежутка времени надо отнести къ началу сутокъ (такъ можно дѣлать и при устномъ рѣшеніи); въ данномъ случаѣ имѣемъ слѣдующее: отъ начала сутокъ до 6 часовъ 35 минутъ вечера прошло 18 часовъ 35 минутъ; чтобы это узнать, надо сложить 12 часовъ и 6 часовъ 35 минутъ, получается 18 часовъ 35 минутъ. Затѣмъ отъ 18 часовъ 35 минутъ надо отнять 2 часа 40 минутъ, получается 15 часовъ 55 минутъ.

Запись:

		95	
18.	час.	~~35~~	мин.
— 2	„	40	„
15	час.	55	мин.

„Нѣкто провелъ въ путешествіи 2 года 3 мѣсяца 14 дней и возвратился домой 16 августа 1895 года. Когда онъ отправился въ путешествіе?“

Для рѣшенія данной задачи, надо ***календарное*** обозначеніе второго числа преобразовать въ ***точно-ариѳметическое,*** т. е. выразить его въ единицахъ мѣръ времени.

Отъ Рождества Христова до возвращенія неизвѣстнаго лица изъ путешествія, т. е. до 16 августа 1895 года, прошло 1894 года 7 мѣсяцевъ 15 дней; а отправленіе въ путешествіе было раньше на 2 года 3 мѣсяца 14 дней. Чтобы узнать, сколько времени прошло отъ Рождества Христова до отправленія въ путешествіе, нужно изъ 1894 лѣтъ 7 мѣсяцевъ 15 дней вычесть 2 года 3 мѣсяца 14 дней, получается 1892 года 4 мѣсяца 1 день.

Такъ какъ требуется отвѣтить на вопросъ: „когда?“ то полученное ариѳметическое обозначеніе числа надо преобразовать въ календарное; для чего разсуждаемъ такъ:

„Отъ Рождества Христова прошло 1892 года, слѣдовательно, наступилъ 1893 годъ; въ немъ уже прошло 4 мѣсяца, наступилъ пятый мѣсяцъ, т. е. май, въ которомъ прошелъ 1 день и наступилъ второй день. Итакъ, отправленіе въ путешествіе было 1893 года 2 мая.“

Запись рѣшенія:

1894	год.	7	мѣс.	15	дн.
— 2	„	3	„	14	„
1892	года	4	мѣс.	1	день.

Отправленіе въ путеш. 1893 года 2 мая.

„Нѣкто, родившійся 25 августа 1712 года, жилъ 52 года 7 мѣсяцевъ 10 дней. Когда онъ умеръ?“

Отъ Рождества Христова до дня рожденія неизвѣстнаго лица прошло 1711 лѣтъ 7 мѣсяцевъ 24 дня; а умерло это лицо позже на 52 года 7 мѣсяцевъ 10 дней; чтобы узнать, сколько времени прошло отъ Рождества Христова до дня смерти неизвѣстнаго лица, надо сложить 1711 лѣтъ 7 мѣсяцевъ 24 дня и 52 года 7 мѣсяцевъ 10 дней; получается 1764 года 3 мѣсяца 3 дня. Преобразовавъ это число въ календарное обозначеніе, получаемъ, что неизвѣстное лицо умерло 1765 года 4 апрѣля.

Рѣшеніе:

1711 лѣтъ	7 мѣс.	24 дн.
+ 52 года	7 „	10 „
1	1	
1764 года	~~15~~ мѣс.	~~34~~ дня.
	3	3

День смерти: 1765 года 4 апрѣля.

Квадратныя мѣры.

§ 137. Мѣры, служащія для измѣренія поверхности тѣлъ, называются ***квадратными.*** ***Квадратомъ*** называется такой четыреугольникъ (параллелограммъ), у котораго всѣ стороны равны и углы прямые. ***Прямоугольникомъ*** называется такой четыреугольникъ (параллелограммъ), у котораго противоположныя стороны равны и углы прямые.

За единицу при измѣреніи поверхностей тѣлъ принимается квадратъ, сторона котораго равняется какой-нибудь ***линейной единицѣ,*** напр. линейному аршину, футу и т. д.

Если сторона квадрата равна 1 линейному футу, то такой квадратъ называется ***квадратнымъ футомъ;*** если же сторона квадрата равна линейной сажени, то квадратъ называется ***квадратною саженью*** и т. д.

§ 138. Учащихся надо ознакомить съ измѣреніемъ площади такихъ фигуръ, которыя имѣютъ форму квадрата и прямоугольника, а для того, прежде всего, имъ надо дать понятіе о квадратѣ и прямоугольникѣ.

Учитель проводитъ на доскѣ три линіи: ***прямую, ломаную*** и ***кривую*** и обозначаетъ ихъ послѣдовательно цифрами: 1), 2), 3).

„Сколько линій проведено на доскѣ? Которая изъ нихъ ***проще*** другихъ? Какъ называется такая линія? (Въ случаѣ, если ученики не знаютъ, учитель имъ сообщаетъ.) Какую линію представляетъ собою каждая часть второй линіи? Итакъ, изъ какихъ линій состоитъ вторая линія? Такая линія называется ***ломаною.*** Повтори! Какая линія называется ломаною? Можно ли третью линію назвать ломаною? Отчего нельзя? Есть ли въ ней какая-нибудь часть прямой? Третья линія называется ***кривою.*** Слѣдовательно, какая линія называется кривою? — Какъ называется первая линія, проведенная на доскѣ? Какъ называется вторая? третья? Итакъ, какія линіи проведены на доскѣ? — Возьми книгу и покажи на ней прямую линію! Покажи ломаную линію! Есть ли на книгѣ и кривая линія? Какія линіи мы теперь знаемъ?“

Затѣмъ учитель проводитъ на доскѣ нѣсколько прямыхъ: въ первой группѣ ***вертикальныя*** или ***стоячія,*** во второй — ***горизонтальныя*** или ***лежачія,*** въ третьей — ***наклонныя,*** и ведетъ бесѣду, подобную предыдущей, чтобы ознакомить учащихся съ раздѣленіемъ прямыхъ линій ***по направленію.***

§ 139. Послѣ этого слѣдуетъ ознакомленіе учащихся съ углами: ***прямымъ, острымъ*** и ***тупымъ.***

Учитель строитъ на доскѣ прямой уголъ (проводитъ одну вертикальную, а другую горизонтальную прямую, такъ чтобы онѣ пересѣклись), обозначаетъ его буквами и ведетъ такую бесѣду:

„Сколько прямыхъ линій проведено на доскѣ? Какъ называется первая прямая? (Учитель показываетъ вертикальную прямую.) Какъ — вторая? Въ какой точкѣ онѣ пересѣкаются?“

Потомъ учитель на доскѣ проводитъ еще такія же прямыя линіи, но такъ, чтобы онѣ ***не пересѣклись;*** затѣмъ спрашиваетъ учащихся:

„Сколько прямыхъ здѣсь проведено? Каковы эти прямыя? Какая разница между первыми прямыми и этими? (Имѣютъ ли вторыя прямыя тоже общую точку?) ***Если прямыя линіи пересѣкаются, то образуется уголъ.*** Повтори! ***Какъ*** образуется уголъ? Почему во второмъ случаѣ не образовался уголъ? Сколькими прямыми составленъ уголъ? Назови эти прямыя буквами? Эти прямыя называются ***сторонами*** угла. Сколько сторонъ у угла? Гдѣ встрѣчаются стороны даннаго угла? Эта точка называется ***вершиною*** угла. Повтори! Что встрѣчается въ вершинѣ угла? Итакъ, что называется вершиною угла? — Какими прямыми линіями составленъ данный уголъ? Такой уголъ называется ***прямымъ.*** Слѣдовательно, какой уголъ называется прямымъ? Начертите прямой уголъ каждый на своей доскѣ!"

Послѣ этого учитель строитъ на доскѣ острый и тупой углы, такъ чтобы обѣ ихъ стороны были наклонныя линіи.

„Сколько угловъ начерчено на доскѣ? Какъ называется первый уголъ? Можно ли будетъ второй и третій углы называть прямыми? Отчего нельзя? Каковы стороны у второго и третьяго угловъ? Сравнивайте второй уголъ съ прямымъ! Что находите? Такой уголъ называется ***острымъ.*** Какой уголъ называется острымъ? Начертите на своихъ доскахъ острый уголъ! — Каковы стороны у третьяго угла? Каковъ онъ по величинѣ, сравнительно съ прямымъ угломъ? Третій уголъ называется ***тупымъ.*** Итакъ, какой уголъ называется тупымъ? Какіе углы мы теперь знаемъ? Какой изъ нихъ больше всѣхъ? Какой меньше всѣхъ? Слѣдовательно, каковы бываютъ углы ***по величинѣ?***

Начертите на своихъ доскахъ прямой уголъ! Продолжите его стороны! Измѣнилась ли величина угла? Смотрите всѣ на классную доску! Если я одну сторону прямого угла ***отклоню*** отъ другой, что тогда будетъ съ величиной угла? А если одну сторону ***наклонить*** къ другой, что тогда произойдетъ съ величиной угла? Итакъ, когда уголъ ***увеличивается*** и когда ***уменьшается?"***

Затѣмъ учитель чертитъ на доскѣ прямые углы, составленные прямыми линіями разныхъ направленій и, такимъ образомъ, дополняетъ знанія учащихся о прямомъ углѣ.

§ 140. Учитель проводитъ на доскѣ горизонтальную прямую и къ ней ***возставляетъ*** два перпендикуляра; потомъ онъ спрашиваетъ учащихся, сколько угловъ образовалось и каковы эти углы. Когда это сдѣлано, учитель проводитъ на доскѣ прямую, ***параллельную*** горизонтальной прямой, на такомъ разстояніи отъ послѣдней, чтобы вторая горизонтальная прямая пересѣкла оба перпендикуляра.

„Сколько угловъ теперь образовалось? Каковы они? Сколько угловъ всего? Каковы всѣ эти углы по величинѣ? — Сосчитайте, сколько прямыхъ линій проведено! (Учитель ставитъ буквы.) Сколькими прямыми линіями ограничена полученная **фигура?** Слѣдовательно, сколько сторонъ у данной фигуры? Сравнивайте противоположныя стороны между собою! Что находите? Сколько угловъ у полученной фигуры? Какъ можно назвать эту фигуру по числу угловъ? Каковы углы четыреугольника по величинѣ? Какъ можно назвать даннаго четыреугольника оттого, что его углы прямые? (Если ученики не могутъ дать вѣрнаго отвѣта, учитель называетъ **терминъ.**) Каковы **противоположныя** стороны прямоугольника? Вообще, какія части прямоугольника равны между собою? Итакъ, **какой четыреугольникъ называется прямоугольникомъ?** Начертите на своихъ доскахъ прямоугольникъ! Обозначьте его буквами? Какой видъ (форму) имѣетъ полъ комнаты? Какой видъ имѣетъ стѣна комнаты? окно? дверь? — Сколько угловъ у прямоугольника? Сколько **вершинъ** всего у этихъ угловъ? Сколько сторонъ выходитъ изъ одной вершины? Равны ли эти стороны? Которая сторона больше и которая меньше? Бóльшая сторона называется **длиной,** а меньшая — **шириной.** Повтори! Что называется длиной прямоугольника? Что — шириной? Назови длину и ширину начерченнаго прямоугольника буквами! Длина и ширина называются **размѣрами** прямоугольника.! Какъ называются длина и ширина прямоугольника вмѣстѣ? Итакъ, сколько размѣровъ у прямоугольника? Какіе эти размѣры? Который изъ размѣровъ больше? Какъ называется больщій размѣръ? Какъ — меньшій? Покажи длину и ширину стола! классной комнаты! двери!“

§ 141. Послѣ того учитель переходитъ къ ознакомленію учащихся съ **квадратомъ.** Для этого нужно начертить на доскѣ прямоугольникъ, всѣ стороны котораго равны между собою.

„Какая фигура начерчена? **Отчего** эту фигуру можно назвать прямоугольникомъ? Сравнивайте стороны даннаго прямоугольника между собою! Что находите? Итакъ, каковы стороны и углы этого прямоугольника? Такой прямоугольникъ (четыреугольникъ) называется ***квадратомъ.*** Повтори! Что называется квадратомъ? Покажи размѣры квадрата! Сравнивайте ихъ между собою! Что видите? Слѣдовательно, каковы размѣры квадрата? Можно ли будетъ всякій прямоугольникъ назвать квадратомъ? Отчего нельзя? Сравнивайте квадратъ и прямоугольникъ между собою! Какое ***сходство*** между ними? Какое ***различіе?***"

Потомъ учитель сообщаетъ учащимся, что, если сторона квадрата равна 1 линейному футу, то квадратъ называется квадратнымъ футомъ и т. д. и что такіе квадраты употребляются для измѣренія поверхностей тѣлъ, отчего и называются единицами измѣренія площадей или поверхностей.

§ 142. Объясненіе площади прямоугольника можно вести слѣдующимъ образомъ:

„Начерти прямоугольникъ на классной доскѣ! Обозначь его буквами! Назови длину и ширину даннаго прямоугольника буквами! Положимъ, что длина этого прямоугольника 6 дюймовъ, а ширина — 4 дюйма. (Учитель записываетъ числа на доскѣ.) Какой длины каждый размѣръ прямоугольника? Раздѣли ширину на 4 равныя части! (Ученикъ раздѣляетъ обѣ прямыя на четыре равныя части; сперва пополамъ и потомъ каждую половину опять пополамъ.) Сколько частей получилось? Какой длины каждая изъ нихъ? ***Точки дѣленія*** соедини прямыми линіями! На сколько ***полосъ*** раздѣлился весь прямоугольникъ? Форму какой фигуры имѣетъ каждая полоса? — Сколько дюймовъ содержится въ длинѣ прямоугольника? Если длину раздѣлить на 6 равныхъ частей, то сколько дюймовъ длиною будетъ каждая часть? Раздѣли длину прямоугольника на 6 равныхъ частей! (Какъ верхнюю, такъ и нижнюю прямыя надо раздѣлить на 6 равныхъ частей.) Какъ велика длина каждой части? Соедини точки дѣленія прямыми линіями! На сколько частей раздѣлилась каждая полоса? Сколко угловъ въ каждой полученной части? Какъ, поэтому, можно назвать каждую полученную часть? Сравнивайте углы и стороны полученныхъ четыреугольниковъ! Что находите? Какъ называются такіе четыреугольники? Итакъ, на сколько квадратовъ раздѣлилась каждая полоса? Какой длины сторона каждаго квадрата? Какъ называются такіе квадраты? Слѣдовательно, сколько квадратныхъ дюймовъ въ каждой полосѣ? Сколько всего полосъ? Если въ одной полосѣ 6 квадратныхъ дюймовъ, то сколько ихъ будетъ въ 4 полосахъ? Какъ это узнать? Запиши числа на доскѣ! Прочти написанное! (Запись: 6 кв. дюйм. $\times$ 4 = 24 кв. дюйм.) Если длина прямоугольника 8 дюймовъ, а ширина 4 дюйма, то сколько квадратныхъ дюймовъ будетъ въ одной полосѣ? Сколько всего полосъ? Сколько квадратныхъ дюймовъ во всемъ прямоугольникѣ? Какъ узнать? Слѣдовательно, какъ велика *площадь* даннаго прямоугольника? Какъ мы узнали площадь даннаго прямоугольника? Какъ узнали площадь перваго прямоугольника? Длина прямоугольника 10 дюймовъ, а ширина 6 дюймовъ; какъ найти площадь прямоугольника? Найдите! Сколько получили? Запиши числа! Прочитай написанное! *Почему* 10 квадратныхъ дюймовъ умножить на 6? Какое число здѣсь служитъ множимымъ? Что показываетъ это число? Вообще, что показываетъ множимое при опредѣленіи площади прямоугольника? На какое число умножили въ данномъ случаѣ 10 квадратныхъ дюймовъ? Что показываетъ число 6? Вообще говоря, что показываетъ множитель при опредѣленіи площади прямоугольника? Итакъ, какія числа умножали во всѣхъ этихъ случаяхъ? Слѣдовательно, какъ найти площадь прямоугольника?“

Послѣ того учитель сообщаетъ ученикамъ, что то же самое выражаютъ короче: *чтобы узнать площадь прямоугольника, надо его длину умножить на ширину.* Это выраженіе надо понимать въ слѣдующемъ смыслѣ: чтобы узнать площадь прямоугольника, надо число квадратныхъ единицъ, содержащихся въ одной полосѣ прямоугольника, умножить на число линейныхъ единицъ, содержащихся въ ширинѣ прямоугольника; полученное число покажетъ, сколько квадратныхъ единицъ содержитъ площадь даннаго прямоугольника.

§ 143. Бываютъ такіе случаи, когда по данной площади и одному размѣру прямоугольника требуется найти другой размѣръ его; для этого число квадратныхъ единицъ площади надо раздѣлить на число линейныхъ единицъ извѣстнаго размѣра; напр. если площадь прямоугольника 24 квадратныхъ дюйма, а длина 6 дюймовъ, то ширина 4 дюйма; чтобы это узнать надо 24 раздѣлить на 6, получается 4.

Чтобы довести учащихся до уразумѣнія изложеннаго, учитель велитъ одному ученику начертить на доскѣ прямоугольникъ, длина котораго, положимъ, 6 дюймовъ, а ширина 4 дюйма, потомъ раздѣлить его на квадратные дюймы вышесказаннымъ способомъ; затѣмъ ведется такая бесѣда:

„Какъ найти площадь даннаго прямоугольника? Если длина прямоугольника 6 дюймовъ, то сколько квадратныхъ дюймовъ будетъ въ одной полосѣ? Сколько квадратныхъ дюймовъ находится во всемъ прямоугольникѣ? Какъ найти число всѣхъ полосъ? (Надо узнать, сколько разъ въ 24 квадратныхъ дюймахъ содержится 6 квадратныхъ дюймовъ; если ученики не могутъ дать вѣрнаго отвѣта, то учитель спрашиваетъ, сколько въ одной полосѣ кв. дюймовъ, сколько въ двухъ и т. д. и сколько разъ отъ 24 кв. дюймовъ можно отнять по 6 кв. дюймовъ.) Если въ прямоугольникѣ 4 полосы и ширина каждой изъ нихъ 1 дюймъ, то какъ велика ширина всего прямоугольника? Какъ сразу получить число 4? Какъ узнать ширину даннаго прямоугольника? — Площадь прямоугольника 24 кв. дюйма, а ширина его 4 дюйма; надо узнать длину прямоугольника? Какъ велика ширина прямоугольника? Сколько въ этомъ прямоугольникѣ будетъ полосъ? Сколько квадратныхъ дыймовъ находится въ 4 полосахъ? Сколько въ каждой? Какъ это узнать? Если въ одной полосѣ 6 кв. дюймовъ, то какъ велика длина этого прямоугольника? Слѣдовательно, какъ сразу найти длину даннаго прямоугольника? — Что показываетъ число 24 въ данномъ примѣрѣ? Что показываетъ число 6? Что было дано въ задачѣ? Что надо было найти? Какъ нашли? Слѣдовательно, какъ найти ширину прямоугольника, если знаемъ площадь и длину его? Какъ найти длину прямоугольника, если знаемъ ширину и площадь его? Какъ найти неизвѣстный размѣръ прямоугольника, если знаемъ площадь и одинъ размѣръ его?“

§ 144. Такъ какъ размѣры квадрата равны между собою, то для опредѣленія его площади, надо сторону квадрата возвысить во вторую степень или квадратъ; напр. если сторона квадрата 1 сажень или 3 аршина, то площадь его 9 кв. аршинъ, чтобы это узнать, нужно 3 кв. аршина (въ одной полосѣ находятся 3 кв. аршина) умножить на 3, получается 9 кв. аршинъ. Итакъ, кв. сажень содержитъ 9 кв. аршинъ. — Если сторона квадрата 1 аршинъ или 16 вершковъ, то площадь его 256 кв. вершковъ; чтобы это узнать, надо 16 кв. вершковъ умножить на 16, получается 256 кв. вершковъ. Подобнымъ же разсужденіемъ можемъ составить ***полную таблицу квадратныхъ мѣръ***:

1 кв. миля	содержитъ	7 кв. верстъ $\times$ 7 = 49 кв. верс.
1 кв. верста	„	500 кв. саж. $\times$ 500 = 250,000 кв. саж.
1 кв. сажень	„	3 кв. арш. $\times$ 3 = 9 кв. арш.
1 кв. аршинъ	„	16 кв. верш. $\times$ 16 = 256 кв. верш.
1 кв. сажень	„	7 кв. фут. $\times$ 7 = 49 кв. фут.
1 кв. футъ	„	12 кв. дюйм. $\times$ 12 = 144 кв. дюйм.
1 кв. дюймъ	„	10 кв. линій $\times$ 10 = 100 кв. лин.

§ 145. Для измѣренія полей употребляется неквадратная мѣра, имѣющая форму прямоугольника, длина котораго 60 (80) саженей, а ширина 40 (30) саженей, и называемая ***десятиной.*** Площадь десятины 2400 кв. саженей, что можно узнать умноженіемъ 80 квадратныхъ саженей на 30, или же 60 квадратныхъ саженей на 40.

Раздробленіе и превращеніе, а также дѣйствія надъ числами, выраженными въ квадратныхъ мѣрахъ, производятся подобно тому, какъ и дѣйствія надъ прочими именованными числами; а потому на этомъ больше не остановимся, а перейдемъ къ разбору задачи на квадратныя мѣры.

§ 146. Для примѣра возьмемъ слѣдующую задачу:

„У садовника было подъ земляникой 36 одинаковыхъ грядъ; длина каждой гряды 4 саж. 2 арш., а ширина 2 арш. Съ каждой квадратной сажени гряды онъ собралъ 4 фунта земляники и фунтъ ея продалъ по 30 коп. Сколько денегъ онъ получилъ за всю землянику?“

(Евтушевскій.)

Анализъ. Каждая гряда имѣетъ форму прямоугольника; такъ какъ мы знаемъ размѣры одной гряды, то можемъ узнать ея площадь. Когда узнали площадь одной гряды, то можемъ узнать площадь всѣхъ грядъ, такъ какъ въ задачѣ дано число всѣхъ грядъ и сказано, что всѣ онѣ одинаковы. Зная площадь всѣхъ грядъ и вѣсъ земляники, собранной съ одной квадратной сажени гряды, можемъ узнать вѣсъ всей собранной земляники. Когда же узнали вѣсъ всей земляники, то легко узнать, за сколько вся она продана, такъ какъ знаемъ, за сколько проданъ фунтъ земляники.

Планъ рѣшенія.

1) Узнать площадь одной гряды.
2) Узнать площадь всѣхъ грядъ.
3) Узнать вѣсъ всей собранной земляники.
4) Узнать, за сколько продана вся земляника.

Рѣшеніе.

1) 4 саж. 2 арш. = 14 арш.

14 кв. арш. × 2 = 28 кв. арш.

2)
```
   28 кв. арш.
  ×36
 -----------
  168
 +84
 -----------
 1008 кв. арш.

1008 | 9
     |-----------
     | 112 кв. саж.
```

3) 4 фун. × 112 = 448 фун.

4) 30 коп. × 448 = ?

```
   448
   ×30
 -----------
 13440 коп. = 134 р. 40 к.
```

Кубическія мѣры.

§ 147. Мѣры, служащія для измѣренія объемовъ тѣлъ, называются ***кубическими.*** Кубъ есть тѣло, ограниченное со всѣхъ сторонъ шестью равными квадратами. Стороны куба называются его ***гранями.*** Граней у куба шесть: правая, лѣвая, передняя, задняя, верхняя и нижняя. Всѣ грани куба равны между собою. Каждая грань куба встрѣчается со всѣми остальными, ***исключая одной.*** Прямая линія, въ которой встрѣчаются двѣ грани куба, называется ***ребромъ*** куба. Реберъ у куба 12 и всѣ они равны между собою. Три грани куба сходятся въ общей точкѣ, называемой ***вершиною*** куба; вершинъ у куба 8. Изъ каждой вершины выходятъ три ребра, которыя называются ***размѣрами*** куба. Слѣдовательно, всѣ размѣры куба, т. е. длина, ширина и высота, ***равны*** между собою.

За единицу при измѣреніи объемовъ тѣлъ принимается кубъ, ребро котораго равно какой-нибудь ***линейной единицѣ,*** напр. сажени, аршину, футу и т. д.

Кубъ, ребро котораго равно линейной сажени, называется *кубической саженью;* если же ребро куба равно линейному футу, то онъ называется *кубическимъ футомъ* и т. д.

§ 148. *Призмою* называется многогранникъ, ограниченный съ двухъ сторонъ *параллельными* плоскостями, а съ прочихъ — плоскостями, пересѣкающимися по прямымъ линіямъ, *параллельнымъ между собою.* Призма называется *прямою,* если боковое ребро ея перпендикулярно къ основанію; въ противномъ случаѣ она *наклонная.* Прямая призма, основаніе которой прямоугольникъ, называется *прямоугольною,*

Учащихся надо ознакомить съ кубомъ, прямоугольною призмою и съ опредѣленіемъ объема этихъ тѣлъ.

Наглядными пособіями могутъ служить слѣдующія: кубъ, сдѣланный изъ картона или дерева, кубики, бруски и доски ариѳметическаго ящика.

§ 149. Учитель беретъ кубъ и ставитъ его такъ, чтобы всѣ учащіеся могли его хорошо видѣть; потомъ онъ ведетъ такую бесѣду:

„Какія фигуры вы знаете? Сколько размѣровъ у квадрата? у прямоугольника? Какую форму имѣетъ сторона книги? Какую форму имѣетъ передняя сторона доски? Сколько размѣровъ имѣетъ сторона книги и доски? Покажи длину и ширину книги! Покажи тѣ же размѣры доски! Какой *третій* размѣръ у доски? (Учитель показываетъ его.) Покажи его! Какой третій размѣръ книги? Покажи его! Слѣдовательно, какъ называется третій размѣръ книги и доски? Книга и доска называются *тѣлами.* Повтори! Какія тѣла мы разсматривали? Сколько размѣровъ имѣетъ тѣло? Сколько размѣровъ имѣетъ фигура? *Чѣмъ* отличается тѣло отъ фигуры? — Сколько размѣровъ имѣетъ предметъ, поставленный передъ вами? Покажи эти размѣры! Какъ мы назвали доску и книгу? Какъ можно будетъ назвать этотъ предметъ? (Учитель указываетъ на кубъ.) Почему? Это тѣло называется *кубомъ.* Какое тѣло поставлено передъ вами? Сколько размѣровъ имѣетъ кубъ? Какъ называются эти размѣры? — Сколькими сторонами ограниченъ кубъ? Какую форму имѣетъ каждая сторона? Сравнивайте стороны куба между собою! Что находите? Итакъ, сколькими равными квадратами ограниченъ кубъ? Слѣдовательно, *какое тѣло называется кубомъ?*

Сколько сторонъ у куба? Стороны куба называются *гранями* его. Повтори! Что называется гранями куба? Сколько граней у куба? Каковы онѣ между собою? По какую сторону отъ васъ находится эта грань? (Учитель показываетъ правую грань.) Какъ ее, поэтому, можно назвать! Какъ называются остальныя грани куба? (Учитель показываетъ грани, а ученики ихъ называютъ.) — По *какой* линіи пересѣкается верхняя грань съ правой? Покажи эту прямую линію! По какой линіи пересѣкается верхняя грань съ лѣвой? Вообще, по какой линіи пересѣкаются двѣ *сосѣднія* грани куба? Эти прямыя называются *ребрами* куба. Повтори! Что называется ребрами куба? Сосчитайте, сколько реберъ у куба! Сравнивайте ихъ между собою! Что находите? — Сколько размѣровъ у куба? Покажи размѣры куба! *Каковы эти размѣры?* — Покажи мѣсто, гдѣ кончается ребро куба! Сколько такихъ *точекъ* у куба? Эти точки называются *вершинами* куба. Сколько вершинъ у куба? Сколько граней сходятся въ одной вершинѣ? Итакъ, какая точка называется вершиною куба? — Если ребро куба одна сажень, то такой кубъ называется *кубической саженью.* Какой кубъ называется кубической саженью? Какъ будетъ называться кубъ, ребро котораго 1 дюймъ? Что называется кубическимъ футомъ? Кубическимъ аршиномъ?"

§ 150. Съ *прямоугольной призмой* учащихся можно ознакомить слѣдующимъ образомъ:

„Какъ называются стороны куба? Какую форму имѣетъ грань куба? Сколько угловъ у квадрата? Каковы они? Сколько угловъ у прямоугольника? Каковы эти углы? (Учитель ставитъ передъ учениками, рядомъ съ кубомъ, *прямоугольную призму* — брусокъ ариѳметическаго ящика или картонный ящикъ, имѣющій форму прямоугольной призмы.) Будетъ ли это тѣло кубъ? Отчего нѣтъ? Сколько граней у второго тѣла? Равны ли всѣ грани? Сравнивайте противоположныя грани между собою! Что находите? Какую форму имѣетъ каждая грань? Такое тѣло называется *прямоугольною призмою.* Повтори! Какое тѣло называется прямоугольною призмою? Чѣмъ отличается прямоугольная призма отъ куба? — Сколько реберъ у прямоугольной призмы? Сколько размѣровъ у нея? Покажи всѣ размѣры прямоугольной призмы!“

§ 151. Объясненіе объема прямоугольной призмы нужно вести по слѣдующему плану: 1) ширина и высота призмы *одна и та же* линейная единица, а длина *нѣсколько* тѣхъ же линейныхъ единицъ; 2) ширина и длина *нѣсколько* линейныхъ единицъ, а высота *одна та же* линейная единица; 3) всѣ размѣры призмы выражены въ *нѣсколькихъ линейныхъ единицахъ.*

Въ первомъ случаѣ надо пользоваться кубикомъ и однимъ брускомъ ариѳметическаго ящика, длина котораго 10 дюймовъ, а ширина и высота — 1 дюймъ; во второмъ случаѣ нужно сложить три такихъ же бруска рядомъ, тогда образуется прямоугольная призма, длина которой прежняя, т. е. 10 дюймовъ, ширина 3 дюйма, а высота 1 дюймъ; въ третьемъ случаѣ надо сложить 2 раза по три бруска и потомъ наложить 1 *слой* на другой; тогда образуется прямоугольная призма, длина которой — 10 дюймовъ, ширина 3 дюйма, а вышина 2 дюйма.

Учитель беретъ одинъ кубикъ и брусокъ ариѳметическаго ящика, показываетъ послѣдовательно тотъ и другой ученикамъ и ведетъ такую бесѣду:

„Какое тѣло называется кубомъ? Какъ можно назвать это тѣло? (Учитель показываетъ кубикъ.) Почему его можно назвать кубомъ? Если ребро даннаго куба равно 1 дюйму, то какъ можно назвать его? Какъ называется это тѣло? Сколько размѣровъ у прямоугольной призмы? Какія названія имѣютъ размѣры ея? Покажи размѣры данной прямоугольной призмы! Я буду откладывать на прямоугольной призмѣ по кубическому дюйму, а вы считайте, сколько разъ я отложилъ! Сколько разъ я отложилъ? Слѣдовательно, какъ велика длина данной прямоугольной призмы? Сколько линейныхъ дюймовъ въ ея ширинѣ и высотѣ? Если длину данной прямоугольной призмы раздѣлить на 10 равныхъ частей, то сколько дюймовъ получится въ каждой части? Сколько отдѣльныхъ кубиковъ получится, если прямоугольную призму разсѣчь поперекъ черезъ точки дѣленія? Чему будетъ равно ребро каждаго полученнаго кубика? Какъ, поэтому, можно будетъ назвать каждый кубикъ? Итакъ, сколько кубическихъ дюймовъ во всей призмѣ? Сколько линейныхъ дюймовъ было въ длинѣ призмы? Если длина призмы 8 дюймовъ, то сколько кубическихъ дюймовъ въ ней всего будетъ? *Какъ великъ объемъ такой призмы?* Какъ великъ объемъ данной призмы? Если длина призмы содержитъ 10 футовъ, то какъ великъ объемъ ея? Если въ длинѣ призмы 20 какихъ-нибудь линейныхъ единицъ, то сколько кубическихъ единицъ содержитъ объемъ ея? Вообще говоря, сколько кубическихъ единицъ содержитъ объемъ данной прямоугольной призмы, *если высота и ширина одна линейная единица?*

Какъ великъ объемъ этой прямоугольной призмы? (Учитель показываетъ одинъ брусокъ; затѣмъ онъ беретъ другой брусокъ.) Какъ называется это тѣло? Сравнивайте первую призму со второю! (Учитель прикладываетъ одинъ брусокъ къ другому.) Что находите? Если сложить оба бруска рядомъ, то какое тѣло получится? Какъ велики будутъ размѣры полученной призмы? На сколько *рядовъ* мы раздѣлили всю призму? (Учитель отодвигаетъ одинъ брусокъ отъ другого на небольшое разстояніе.) Сколько куб. дюймовъ находится въ одномъ ряду? Сколько — въ другомъ? Сколько куб. дюймовъ *всего?* Какъ это узнать? Сколько куб. дюймовъ въ трехъ такихъ рядахъ? Сколько — въ четырехъ? Какъ узнать? Если длина призмы 20 дюймовъ, то сколько куб. дюймовъ будетъ въ одномъ ряду? Сколько такихъ рядовъ будетъ, если ширина призмы 10 дюймовъ? Сколько куб. дюймовъ всего? Какъ узнать? Почему надо 20 куб. дюймовъ умножить на 10? Слѣдовательно, какъ великъ объемъ такой призмы?"

Учитель беретъ два раза по три бруска, складываетъ ихъ рядомъ въ двѣ отдѣльныя группы, потомъ спрашиваетъ:

„Какъ велики размѣры у первой призмы? Какъ велики — у второй? Какъ узнать объемъ первой призмы? Какъ узнать объемъ второй призмы? — (Учитель накладываетъ первую призму на вторую.) Что я сдѣлалъ? Какое тѣло получилось? Какъ велика высота полученной призмы? Какъ велики остальные размѣры ея? На сколько *слоевъ* раздѣлена вся призма? (Учитель приподнимаетъ верхній слой.) Сколько куб. дюймовъ находится въ нижнемъ слоѣ? Сколько — въ верхнемъ? Сколько куб. дюймовъ всего? Какъ это узнать? — Сколько куб. дюймовъ находится въ одномъ ряду? Сколько всего рядовъ? Если въ одномъ ряду 10 куб. дюймовъ, то сколько ихъ въ трехъ такихъ рядахъ? Какъ узнать? Сколько куб. дюймовъ находится въ одномъ слоѣ? Сколько въ двухъ такихъ слояхъ? Какъ узнать? Какъ мы получили число 60 куб. дюймовъ? Почему 10 куб. дюймовъ умножили на 3? На сколько умножили полученное число? Почему? Напиши числа! (10 куб. дюйм. $\times 3 \times 2 = 60$ куб. дюйм.) Прочти написанныя числа! — Если длина призмы 10 дюймовъ, ширина 5 дюйм., а высота 2 дюйма, то какъ найти объемъ такой призмы? Найдите! Сколько получили? Напиши числа! Прочти написанное! Какое первое число? Что оно показываетъ? Вообще, сколько куб единицъ будетъ содержаться въ одномъ ряду призмы? Что показываетъ второе число? третье? Слѣдовательно, какъ узнать объемъ данной прямоугольной призмы вообще?“

Потомъ учитель указываетъ ученикамъ, что то же выражаютъ короче: чтобы узнать объемъ прямоугольной призмы, надо *умножить ея длину на ширину и полученное на высоту.*

§ 152. Послѣ того надо перейти къ опредѣленію объема *(вмѣстимости, емкости)* такихъ тѣлъ, которыя имѣютъ форму прямоугольной призмы; напр. опредѣлить вмѣстимость комнаты (если не обращать вниманія на окна, двери и неровности потолка), объемъ стѣны, емкость ящика и т. п.

Чтобы узнать вмѣстимость комнаты, нужно прежде всего измѣрить ея длину, ширину и высоту одной и той же линейной единицей, потомъ полученныя числа перемножить; произведеніе ихъ и покажетъ, сколько кубическихъ единицъ содержитъ вмѣстимость комнаты.

Изложенное правило объясняется слѣдующимъ образомъ:

Положимъ, что длина комнаты 15 аршинъ, ширина 10 аршинъ, вышина 4 аршина, и надо найти вмѣстимость такой комнаты. Для этого разсуждаемъ такъ: если длина комнаты 15 арш., то вдоль нея на полу можно будетъ уложить 15 куб. арш., тогда образуется одинъ рядъ куб. аршинъ, шириною и вышиною въ 1 аршинъ; но такъ какъ ширина комнаты всего 10 арш., то на полу можно будетъ уложить всего 10 такихъ рядовъ; слѣдовательно, въ одномъ слоѣ будетъ 150 куб. арш., что можно узнать умноженіемъ 15 куб. арш. на 10. Такъ какъ высота комнаты 4 арш., то слоевъ всего 4; въ каждомъ изъ нихъ находится 150 куб.

арш., а во всѣхъ — въ четыре раза больше; чтобы это узнать, надо 150 куб. арш. умножить на 4, получается 600 куб. арш. Итакъ, вмѣстимость комнаты 600 куб. арш.

§ 153. Чтобы найти единичное отношеніе двухъ кубическихъ мѣръ, надо единичное отношеніе *соотвѣтствующихъ линейныхъ мѣръ возвысить въ третью степень или кубъ;* напр. для нахожденія единичнаго отношенія куб. фута къ куб. дюйму, возвышаемъ число 12 въ кубъ, получаемъ 1728; это число показываетъ, сколько куб. дюймовъ содержитъ куб. футъ. Такимъ способомъ можно составить *полную таблицу кубическихъ мѣръ.*

Учащихся необходимо ознакомить съ опредѣленіемъ объема куба, съ таблицей кубическихъ мѣръ и *способомъ* ея составленія.

Для ознакомленія учащихся съ опредѣленіемъ объема куба, учитель ведетъ такую бесѣду:

„Что называется кубическою саженью? Сколькимъ аршинамъ равняется ребро такого куба? Если высоту такого куба раздѣлить на 3 равныя части, то сколько аршинъ получится въ каждой части? (Учитель черезъ точки дѣленія вышины куба проводитъ плоскости, параллельныя основанію куба; правильнѣе говоря, *границы этихъ плоскостей.)* На сколько слоевъ раздѣлился весь данный кубъ? Каковы эти слои между собою? Я раздѣляю ширину куба на 3 равныя части. Какой длины каждая полученная часть? (Провести плоскости.) На сколько частей раздѣлился каждый слой? Если длину куба раздѣлить на 3 равныя части, то сколько аршинъ получимъ въ каждой части? (Изъ точекъ дѣленія провести плоскости, параллельныя боковымъ.) На сколько частей раздѣлился каждый рядъ? Какую форму имѣетъ каждое полученное тѣло? Чему равно ребро каждаго полученнаго тѣла? Какъ называется такой кубъ? Итакъ, сколько кубическихъ аршинъ въ одномъ ряду? Сколько ихъ въ одномъ слоѣ? Какъ это узнать? Сколько куб. аршинъ во всѣхъ слояхъ? Какъ узнали? Какъ мы получили число 27 куб. аршинъ? Какой длины было ребро даннаго куба? Какое число взяли сомножителемъ 3 раза? Сколько получили? Итакъ, сколько куб. аршинъ содержитъ куб. сажень? — Если ребро куба 4 аршина, то сколько куб. аршинъ будетъ въ одномъ ряду? Сколько всего рядовъ? Сколько куб. аршинъ въ одномъ слоѣ? Какъ это узнать? Сколько слоевъ всего? Сколько куб. аршинъ будетъ содержать весь кубъ? Какъ узнать? Напиши числа! Прочти написанное! Въ какую степень мы возвысили число 4? Что показывало это число? Если ребро куба 7 футовъ, то какъ найти его объемъ? Найдите! Въ какую степень возвысили число 7? Вообще, какъ найти объемъ куба, если знаемъ ребро его?"

Потомъ надо давать упражненія, состоящія въ возвышеніи чиселъ перваго десятка (а также и второго) въ кубъ или третью степень; напр.

$$1^3 = 1 . 1 . 1 = 1.$$
$$2^3 = 2 . 2 . 2 = 8.$$
$$3^3 = 3 . 3 . 3 = 27.$$
$$4^3 = 4 . 4 . 4 = 64.$$
$$5^3 = 5 . 5 . 5 = 125 \text{ и т. д.}$$

§ 154. „Какъ узнать объемъ куба, ребро котораго 1 сажень или 3 аршина? Итакъ, сколько куб. аршинъ содержитъ куб. сажень? Сколько вершковъ въ одномъ аршинѣ? Если ребро куба 16 вершковъ, то какъ узнать объемъ такого куба? Узнайте! Слѣдовательно, сколько куб. вершковъ содержитъ куб. арш.? — Какая наибольшая линейная мѣра? Сколько верстъ содержитъ миля? Для чего служатъ мѣры: миля и верста? Объемъ небесныхъ свѣтилъ выражается въ куб. миляхъ и верстахъ. Повтори! Почему для измѣренія объема ихъ употребляютъ куб. милю и версту? Какъ узнать, сколько куб. верстъ содержитъ куб. миля? Узнайте!"

Такъ продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока не составлена полная таблица кубическихъ мѣръ.

1 куб. миля содержитъ		7 куб. верс. $\times$ 7 $\times$ 7 $=$ 343 куб. верс.
1 куб. верста	„	500 куб. саж. $\times$ 500 $\times$ 500 $=$ 125,000,000 куб. с.
1 куб. сажень	„	3 куб. арш. $\times$ 3 $\times$ 3 $=$ 27 куб. арш.
1 куб. аршинъ	„	16 куб. верш. $\times$ 16 $\times$ 16 $=$ 4096 куб. вершк.
1 куб. сажень	„	7 куб. фут. $\times$ 7 $\times$ 7 $=$ 343 куб. фут.
1 куб. футъ	„	12 куб. дюйм. $\times$ 12 $\times$ 12 $=$ 1728 куб. дюйм.
1 куб. дюймъ	„	10 куб. лин. $\times$ 10 $\times$ 10 $=$ 1000 куб. лин.

§ 155. Когда по *данному объему* и *двумъ извѣстнымъ размѣрамъ* прямоугольной призмы требуется найти третій размѣръ ея, то нужно объемъ раздѣлить на произведеніе извѣстныхъ размѣровъ. Это правило учащимся можно выяснить слѣдующимъ образомъ:

„Вмѣстимость ящика 3000 куб. дюймовъ; найти его глубину, если длина 20 дюймовъ, а ширина 15 дюймовъ?“

Если длина ящика 20 дюймовъ, то вдоль нея можно будетъ уложить 20 куб. дюймовъ въ одинъ рядъ; такихъ рядовъ всего будетъ 15, такъ какъ ширина ящика 15 дюйм.; слѣдовательно, въ одномъ слоѣ будетъ содержаться всего 300 куб. дюйм., что можно узнать умноженіемъ 20 куб. дюймовъ на 15. Во всемъ же ящикѣ находится 3000 куб. дюйм., а въ одномъ слоѣ — 300 куб. дюйм.; отсюда заключаемъ, что слоевъ будетъ столько, сколько разъ въ 3000 куб. дюйм. содержится 300 куб. дюйм.; содержится 10 разъ. Итакъ, глубина ящика 10 дюймовъ.

Подобнымъ разсужденіемъ можно найти третій размѣръ призмы въ любомъ случаѣ.

§ 156. Дѣйствія надъ числами, выраженными въ куб. мѣрахъ, производятся такъ же, какъ, вообще, надъ именованными числами.

Для примѣра разберемъ одну задачу на *кубическія мѣры:*

„Въ ящикъ, дно котораго занимаетъ 3 кв. фут. 68 кв. дюйм., налита вода до нѣкоторой высоты; въ воду опустили кусокъ желѣза, и она поднялась на 3 дюйма выше, чѣмъ прежде. Опредѣлить объемъ куска желѣза.“

(Правдинъ и Мюльманъ.)

Предполагается, что ящикъ имѣетъ форму прямоугольной призмы. — Чтобы узнать вмѣстимость такого ящика, надобно его длину умножить на ширину и полученное на глубину (или: площадь основанія на глубину). Въ задачѣ дана площадь основанія ящика и высота, на которую поднялась вода, когда въ нее опустили кусокъ желѣза. Изъ данныхъ задачи заключаемъ, что вмѣстимость той части ящика, которую наполнила поднявшаяся вода, равняется объему куска желѣза. А чтобы узнать вмѣстимость этой части ящика, нужно площадь основанія его умножить на глубину поднявшейся воды; для этого площадь основанія выражаемъ въ кв. дюймахъ; получаемъ 500 кв. дюймовъ. На каждый кв. дюймъ основанія можно поставить 1 куб. дюймъ, а всего на основаніе ящика можно будетъ поставить 500 куб. дюйм. Тогда образуется слой куб. дюймовъ, толщина котораго 1 дюймъ; но такъ какъ вода поднялась на 2 дюйма, то въ этой части ящика можно будетъ уложить 2 такихъ слоя, изъ которыхъ въ каждомъ

500 куб. дюймовъ; слѣдовательно, въ двухъ слояхъ находится 1000 куб. дюймовъ. Итакъ, объемъ куска желѣза 1000 куб. дюймовъ.

Запись рѣшенія:

3 кв. фут. 68 кв. дюйм. = ?

144 кв. дюйм.
× 3
432 кв. дюйм.
\+ 68 „ „
500 кв. дюйм.

500 куб. дюйм. × 2 = 1000 куб. дюйм.

Дѣйствія надъ простыми дробями.

§ 157. Во второмъ концентрѣ учащіеся были ознакомлены съ простѣйшими дробями и ихъ свойствами; въ третьемъ концентрѣ, если время позволяетъ, нужно знанія ихъ о простыхъ дробяхъ дополнить и привести въ систему.

Относящіяся сюда упражненія мы располагаемъ въ слѣдующемъ порядкѣ:

1) сокращеніе дробей;
2) приведеніе дробей къ одному знаменателю;
3) сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе простыхъ дробей.

Сокращеніе дробей.

§ 158. Сократить дробь — значитъ представить ее въ *простѣйшемъ* видѣ, не измѣняя ея величины. Сокращеніе дробей основано на томъ, что если числителя и знаменателя дроби раздѣлить на одно и то же число, то *величина ея не измѣнится,* а измѣнится только внѣшній видъ. Чтобы сократить дробь, надо дѣлить ея числителя и знаменателя постепенно на ихъ *общихъ дѣлителей* до тѣхъ поръ, пока въ частномъ не получатся числа взаимно-простыя.

§ 159. При ознакомленіи учащихся съ сокращеніемъ дробей, полезно держаться слѣдующаго плана: ознакомить учащихся: 1) съ *дѣлителемъ* и *кратнымъ;* 2) съ *признаками дѣлимости* на болѣе простыя числа; 3) съ *сокращеніемъ* дробей.

„Раздѣлите 8 на 2! Сколько получили? Раздѣлите 8 на 3! Какое частное получается? Какой остатокъ! Какъ найти остатокъ? Раздѣлите 8 на 4! Дѣлится ли 8 на 6 *безъ остатка?* Раздѣлите 8 на 8! Какое частное получается? На какія числа 8 *дѣлится* безъ остатка? (Учитель записываетъ на доскѣ всѣхъ дѣлителей 8 въ строку: 1, 2, 4, 8.) Назови всѣхъ *дѣлителей* 8 по порядку! Будетъ ли 3 дѣлителемъ 8? Отчего нѣтъ? — На какія числа 10 дѣлится безъ остатка? Напиши всѣхъ дѣлителей 10 по порядку! Назови всѣхъ дѣлителей 20? Итакъ, *когда* одно число называется дѣлителемъ другого?

На какія числа 5 дѣлится безъ остатка? Какое слѣдующее число дѣлится безъ остатка на 5? (Учитель пишетъ на доскѣ кратныя 5 : 5, 10...) Называй по порядку числа, дѣлящіяся безъ остатка на 5! Эти числа называются *кратными* 5. Повтори! Называй числа, кратныя 5! На какое число всѣ они дѣлятся безъ остатка? Итакъ, какія числа называются кратными 5? — Назови нѣсколько чиселъ, которыя дѣлятся безъ остатка на 2! Какое самое меньшее изъ этихъ чиселъ? Называй по порядку числа, кратныя двухъ, начиная съ меньшаго! (Учитель записываетъ числа.) Какое число называется кратнымъ двухъ? Какое число будетъ называться кратнымъ 3? 4? 8? Вообще, когда одно число называется кратнымъ другого?"

§ 160. *Признаками дѣлимости* называются такіе способы, по которымъ можно узнать, дѣлится ли одно число на другое безъ остатка, не производя самаго дѣленія.

Признакъ дѣлимости на 2 заключается въ слѣдующемъ: на 2 дѣлятся безъ остатка тѣ числа, *цифровое обозначеніе которыхъ оканчивается четною цифрою или нулемъ.*

Для объясненія этого признака дѣлимости, разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ: число 10 дѣлится безъ остатка на 2, и въ частномъ получается 5; а потому всякое число десятковъ дѣлится безъ остатка на 2. Всякое многозначное число можно представить въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ первое — совокупность всѣхъ его десятковъ, а второе — простыя единицы числа; для примѣра возьмемъ число 24,935; это число равно суммѣ слагаемыхъ: 24,930 и 5. Первое изъ этихъ слагаемыхъ дѣлится безъ остатка на 2, такъ какъ оно представляетъ сумму всѣхъ десятковъ даннаго числа, а второе не дѣлится; а потому и вся сумма, т. е. данное число, не раздѣлится безъ остатка на 2. Если возьмемъ другіе примѣры, то придемъ къ тому же заключенію, т. е. что дѣлимость числа на 2 безъ остатка зависитъ только отъ цифры простыхъ единицъ его. Но изъ однозначныхъ чиселъ только 2, 4, 6 и 8 дѣлятся безъ остатка на 2, а остальныя не дѣлятся. Поэтому, если послѣдняя цифра числа обозначаетъ число, дѣлящееся безъ остатка на 2, то и все число раздѣлится на 2 безъ остатка; если же въ данномъ числѣ простыхъ единицъ вовсе нѣтъ, т. е. если цифровое обозначеніе числа оканчивается однимъ или нѣсколькими нулями, то оно представляетъ сумму десятковъ, а потому дѣлится безъ остатка на 2.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что на 2 безъ остатка дѣлятся такія числа, цифровое обозначеніе которыхъ оканчивается значащей цифрой, обозначающей четное число, или же однимъ или нѣсколькими нулями; это, обыкновенно, выражаютъ короче: на 2 дѣлятся безъ остатка тѣ числа, которыя оканчиваются четной цифрой или нулемъ.

Подобнымъ образомъ выводятся признаки дѣлимости на остальныя болѣе простыя числа.

Достаточно, если учащіеся усвоятъ самые признаки дѣлимости и *сущность* ихъ объясненія; въ подробности вдаваться не слѣдуетъ.

§ 161. Пусть требуется сократить дробь $\frac{16}{18}$; для этого разсуждаемъ такъ: по признакамъ дѣлимости видимъ, что оба члена данной дроби дѣлятся безъ остатка на 2; поэтому данную дробь сокращаемъ на 2; раздѣливъ 16 на 2, получаемъ 8, раздѣливъ 18 на 2, получаемъ 9; слѣдовательно, отъ сокращенія на 2, получается дробь $\frac{8}{9}$. Эту дробь больше нельзя сократить на 2, такъ какъ ея знаменатель не дѣлится безъ остатка на 2; смотримъ, нельзя ли ее сократить на 3, 5 или другія числа. Оказывается, что эта дробь *несократима.*

При объясненіи хода сокращенія, дроби записываются слѣдующимъ образомъ: $\overset{\underset{\smile}{10}}{\frac{80}{140}} = \overset{\underset{\smile}{2}}{\frac{8}{14}} = \frac{4}{7}$.

Приведеніе дробей къ одному знаменателю.

§ 162. Привести дроби къ одному знаменателю значитъ выразить ихъ въ одинаковыхъ доляхъ единицы. Приведеніе дробей къ одному знаменателю основано на томъ, что если числителя и знаменателя дроби умножить на одно и то же число, то величина дроби отъ этого не измѣнится, а измѣнится только внѣшній видъ ея.

При приведеніи дробей къ одному знаменателю, удобно разсматривать слѣдующіе случаи:

1) Если всѣ знаменатели дробей не имѣютъ общихъ дѣлителей (иначе говоря, суть числа взаимно-простыя), то должно оба члена каждой дроби помножить на произведеніе знаменателей прочихъ дробей.

2) Если знаменатели дробей имѣютъ общихъ дѣлителей, то должно найти ихъ наименьшее кратное: оно и будетъ общимъ наименьшимъ знаменателемъ всѣхъ дробей; число это должно дѣлить на каждаго знаменателя и полученнымъ частнымъ помножить числителя соотвѣтствующей дроби.

3) Если одинъ знаменатель дѣлится безъ остатка на всѣхъ прочихъ, то должно его раздѣлить на каждаго знаменателя и полученнымъ частнымъ помножить числителя соотвѣтствующей дроби.

§ 163. Чтобы учащіеся умѣли приводить дроби къ одному знаменателю, надо ихъ сначала ознакомить съ *общимъ* дѣлителемъ, *наименьшимъ* кратнымъ и способомъ его нахожденія.

Общимъ дѣлителемъ нѣсколькихъ чиселъ называется число, на которое всѣ данныя числа дѣлятся безъ остатка. *Наименьшимъ кратнымъ* нѣсколькихъ чиселъ называется самое меньшее изъ всѣхъ чиселъ, которыя дѣлятся на всѣ данныя числа безъ остатка. Чтобы найти наименьшее кратное нѣсколькихъ чиселъ, должно разложить данныя числа на первоначальныхъ производителей, потомъ взять производителей одного числа и къ нимъ приписать тѣхъ производителей, которыхъ въ этомъ числѣ не достаетъ противъ другихъ чиселъ; наконецъ, всѣхъ этихъ производителей перемножить; произведеніе ихъ и будетъ наименьшимъ кратнымъ данныхъ чиселъ.

§ 164. „Назовите дѣлителей 10 по порядку! На какія числа дѣлится число 30 безъ остатка? Назови всѣхъ дѣлителей 30 по порядку! (Учитель записываетъ дѣлителей каждаго числа отдѣльно.) На какія числа дѣлится безъ остатка число 2? 5? 3? (Учитель записываетъ эти числа отдѣльно.) Такія числа называются *первоначальными*. Повтори! На какія числа дѣлятся безъ остатка всѣ первоначальныя числа? Итакъ, какія числа называются первоначальными? — На какія числа дѣлится безъ остатка число 4? 6? 8? (Учитель записываетъ эти числа отдѣльно.) Какая разница между первоначальными числами и этими? Такія числа называются составными. Какія числа называются *составными?* — Назовите по порядку первоначальныя числа перваго десятка! Назовите составныя числа второго десятка!

Назовите по порядку всѣхъ дѣлителей 10! Скажите, на какія числа 20 дѣлится безъ остатка! (Учитель записываетъ дѣлителей одного и другого числа, потомъ онъ сообщаетъ учащимся, что 1 не включается въ число общихъ сомножителей, такъ какъ всѣ числа дѣлятся на нее безъ остатка и отъ умноженія на единицу величина числа не измѣняется.) Назовите тѣхъ дѣлителей, которые входятъ въ составъ какъ 10, такъ и 20! Итакъ, какіе *общіе* дѣлители 10 и 20? (Учитель выписываетъ ихъ отдѣльно.) Который изъ нихъ *больше* другихъ? Число 10 здѣсь называется *общимъ наибольшимъ дѣлителемъ* 10 и 20. Повтори! Почему число 10 такъ называется? — Назовите общихъ дѣлителей 6 и 8 по порядку! Какой изъ нихъ больше другихъ? Какъ онъ, поэтому, называется? Слѣдовательно, какой изъ общихъ дѣлителей называется наибольшимъ?

На какія числа дѣлится безъ остатка число 7? Какъ, поэтому, называется число 7? Какъ называется число 11? Какой общій наибольшій дѣлитель 7 и 11? Какое число служитъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ 6 и 7? 8 и 9? Такія числа называются *взаимно-простыми* или *первыми* между собою. Какія взаимно-простыя числа мы назвали? Назовите еще нѣсколько взаимно-простыхъ чиселъ! Какое число служитъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ этихъ чиселъ? Итакъ, какія числа называются взаимно-простыми или первыми между собою?"

§ 165. „Какое число называется четнымъ? Назови четныя числа перваго десятка! Какія изъ этихъ чиселъ суть кратныя 4? (Числа: 4, 8 записываются отдѣльно.) На какія числа дѣлится безъ остатка 4? *Общимъ* кратнымъ какихъ чиселъ здѣсь служитъ число 4? Почему оно общее кратное 2 и 4? На какія числа 8 дѣлится безъ остатка? Какъ можно будетъ назвать число 8 по отношенію къ 2 и 4? Почему? Называй слѣдующія общія кратныя двухъ и четырехъ по порядку! (Учитель записываетъ эти числа въ строку; получается такая запись: 4, 8, 12, 16...) Назови написанныя общія кратныя 2 и 4! На какія числа каждое изъ нихъ дѣлится безъ остатка? Итакъ, что называется общимъ кратнымъ 2 и 4? — Назовите общія кратныя 2 и 5! 3 и 4! Вообще, что называется общимъ кратнымъ нѣсколькихъ чиселъ? — Назовите нѣсколько общихъ кратныхъ 3 и 5! Называйте ихъ по порядку, начиная съ *меньшаго!* Напиши эти числа! Какое число есть *наименьшее кратное* 3 и 5? Какое число служитъ наименьшимъ кратнымъ 2 и 4? 5 и 4? Итакъ, какое число называется наименьшимъ кратнымъ нѣсколькихъ данныхъ чиселъ?"

§ 166. „Какое число называется первоначальнымъ? Какое — составнымъ? Какое *по составу* число 18? Почему? Раздѣлите 18 на 2! Сколько получили въ частномъ? Итакъ, произведенію какихъ чиселъ равно число 18? (Учитель пишетъ число 18, ставитъ знакъ равенства и за нимъ пишетъ число 2.) На какія числа 9 дѣлится безъ остатка? Если 9 раздѣлить на 3, сколько получится? (Учитель записываетъ производителей по мѣрѣ ихъ полученія.) Раздѣлите 3 на 3! Сколько получается въ частномъ? Сколько разъ сомножителемъ надо писать число 3? Произведенію сколькихъ сомножителей равно число 18? Какіе эти сомножители? Если числа: 2, 3 и 3 перемножить, сколько тогда получимъ? Какъ называются числа 2, 3, 3 *по составу?* Итакъ, на какихъ сомножителей мы *разложили* число 18? *Какъ* разложили? Разложите 8 на первоначальныхъ производителей? Какія числа получили? Какъ разложили? Какъ число 30 разложить на первоначальныхъ производителей? Напиши первоначальныя числа, произведенію которыхъ равно число 30! ($30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.) Если производителя 2 *исключить,* будетъ ли произведеніе остальныхъ чиселъ равно 30? — Произведенію какихъ первоначальныхъ производителей равно число 20? Какихъ первоначальныхъ производителей содержитъ дѣлитель 20 — число 10? Итакъ, какое число содержитъ больше производителей, дѣлитель или его кратное? — Какое число служитъ наименьшимъ кратнымъ 8 и 12? Разложите 8 на первоначальныхъ производителей! Напиши числа! Какъ разложить число 12 на первоначальныхъ производителей? Разложите! Напиши числа! Сколько разъ сомножителемъ входитъ число 2 въ составъ 8? (Учитель пишетъ сомножителей перваго числа другой разъ.) Какого сомножителя въ первомъ числѣ не достаетъ сравнительно со вторымъ? Если въ искомомъ числѣ не будетъ сомножителя 3, раздѣлится ли оно безъ остатка на 12? Итакъ, какого сомножителя надо приписать къ сомножителямъ перваго числа? Припиши! Прочти полученныя числа! Перемножьте ихъ! Сколько получили? Слѣдовательно, какое число служитъ наименьшимъ кратнымъ 8 и 12? — Какія числа были даны? На какихъ производителей мы ихъ разложили? Что мы потомъ дѣлали? Какъ получили число 24? Итакъ, какимъ путемъ можно найти наименьшее кратное 8 и 12?"

На доскѣ получается слѣдующая запись:

$$\left.\begin{array}{l} 8 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2. \\ 12 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3. \end{array}\right\} \text{Наим. крат.} = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 = 24.$$

„Какъ найти наименьшее кратное 40 и 50? Найдите! (Ученики это производятъ письменно.) Какое число получили? Какъ его нашли? Вообще, *какъ найти наименьшее кратное двухъ или нѣсколькихъ чиселъ?* — Найдите наименьшее кратное 3 и 7! Какъ нашли? Найдите наименьшее кратное 8 и 9! Каковы между собою числа 3 и 7? 8 и 9? Слѣдовательно, какъ найти наименьшее кратное *взаимно-простыхъ чиселъ?*"

§ 167. Прежде чѣмъ перейти къ приведенію дробей къ одному знаменателю, надо повторить о *сравненіи* величины дробей и *увеличеніи* и *уменьшеніи* ихъ въ нѣсколько разъ, — чтобы учащимся была ясно понятна *цѣль* и *причина* приведенія дробей къ одному знаменателю.

Во второмъ концентрѣ учащіеся уже усвоили, что изъ нѣсколькихъ дробей съ *одинаковыми знаменателями* та больше, у которой числитель больше; а изъ нѣсколькихъ дробей съ *одинаковыми числителями* та больше, у которой знаменатель меньше. Остается это повторить и перейти къ тому случаю, когда у дробей *различные* члены. Примѣромъ могутъ служить дроби $^1/_3$ и $^2/_5$. Учитель велитъ написать данныя дроби на доскѣ, спрашиваетъ, каковы у нихъ члены, и можно ли сразу сказать, которая больше, которая меньше; потомъ дроби откладываются на счетахъ и ведется слѣдующая бесѣда:

„Какъ получить дробь $^1/_3$? Какъ получить — $^2/_5$? Какъ получить дробь $^5/_{15}$? (Учитель откладываетъ противъ $\frac{1}{3}$ дробь $\frac{5}{15}$.) Какую дробь я отложилъ? Сравнивайте дроби $\frac{1}{3}$ и $\frac{5}{15}$! Что видите? Итакъ, сколько пятнадцатыхъ долей содержитъ $\frac{1}{3}$? (Учитель пишетъ на доскѣ дробь $\frac{1}{3}$, за ней ставитъ знакъ равенства и пишетъ дробь $\frac{5}{15}$.) Сравнивайте члены написанныхъ дробей! Во сколько разъ члены второй дроби больше членовъ первой дроби? Измѣнилась ли величина первой дроби отъ увеличенія ея членовъ въ одинаковое число разъ? (Учитель записываетъ въ новой строкѣ тѣ же дроби слѣдующимъ образомъ: $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{5}{15}$.) Сколько пятнадцатыхъ долей содержитъ $\frac{1}{3}$? А сколько тѣхъ же долей въ $\frac{2}{5}$? (Откладывается дробь $\frac{6}{15}$.) Сравнивайте дроби $\frac{2}{5}$ и $\frac{6}{15}$! Что находите? Во сколько разъ члены второй дроби больше членовъ первой дроби? (Запись: $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$.) Итакъ, какой дроби равняется $\frac{2}{5}$? $\frac{1}{3}$? Въ какихъ доляхъ теперь выражена каждая изъ данныхъ дробей? Каковы знаменатели полученныхъ дробей? Что вы знаете о величинѣ такихъ дробей, у которыхъ знаменатели одинаковы? Каковы были знаменатели у данныхъ дробей? Какое измѣненіе мы сдѣлали въ знаменателяхъ данныхъ дробей? Мы теперь привели данныя дроби *къ одному знаменателю?* Повтори! Что мы сдѣлали? На сколько мы умножили оба члена первой дроби? Какъ мы ее выразили въ пятнадцатыхъ доляхъ? Какъ вторую дробь выразить въ тѣхъ же доляхъ? — Имѣютъ ли числа 5 и 3 общаго наибольшаго дѣлителя — кромѣ единицы? Какъ называются такія числа? Итакъ, каковы знаменатели данныхъ дробей? Можно ли будетъ обѣ данныя дроби выразить въ десятыхъ доляхъ? Отчего нѣтъ? На какое число надо умножить оба члена первой дроби, чтобы она выразилась въ пятнадцатыхъ доляхъ? На какое число надо умножить оба члена второй дроби? Какой былъ знаменатель у второй дроби? На какое число умножили оба члена первой дроби? Итакъ, на какой членъ второй дроби умножили оба члена первой дроби? На какой членъ первой дроби умножили оба члена второй дроби? — Какое число служитъ знаменателемъ дроби $\frac{1}{6}$? $\frac{2}{7}$? (Дроби записываются.) Какъ называются такія числа, какъ 6 и 7? Какъ найти наименьшее кратное взаимно-простыхъ чиселъ? Какое число служитъ наименьшимъ кратнымъ чиселъ: 6 и 7? Какъ его найти? Можетъ ли быть общимъ знаменателемъ данныхъ дробей число, меньшее 42? Итакъ, въ какихъ доляхъ можно выразить дроби: $\frac{1}{6}$ и $\frac{2}{7}$? На какое число надо помножить оба члена первой дроби, чтобы получить сорокъ вторыя доли? (Учитель записываетъ: $\frac{1}{6} = \frac{1 \,.\, 7}{6 \,.\, 7} = \frac{7}{42}$.) На какое число надо помножить оба члена второй дроби, чтобы ее выразить въ тѣхъ же доляхъ, какъ и первую? На какой членъ второй дроби умножили оба члена первой дроби? Какъ вторую дробь выразили въ сорокъ вторыхъ доляхъ? Каковы были знаменатели данныхъ дробей? Какъ мы привели къ одному знаменателю дроби: $\frac{1}{6}$ и $\frac{2}{7}$? Какъ привели къ одному знаменателю дроби: $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{3}$? Какъ привести къ одному знаменателю дроби: $\frac{1}{5}$ и $\frac{5}{8}$? Какъ поступать тогда, если будетъ дано нѣсколько дробей съ взаимно-простыми знаменателями? Вообще, какъ привести къ одному знаменателю дроби, знаменатели которыхъ взаимно-простыя числа?“

Послѣ того учитель задаетъ примѣры, чтобы учащіеся упражнялись въ приведеніи дробей къ общему знаменателю по первому случаю.

§ 168. Если знаменатели данныхъ дробей имѣютъ общихъ дѣлителей, то и тогда можно ихъ приводить къ общему знаменателю по правилу перваго случая, но полученный такимъ способомъ общій знаменатель *не будетъ наименьшій;* а потому въ такихъ случаяхъ *находятъ наименьшее кратное* знаменателей; это число и будетъ общимъ знаменателемъ данныхъ дробей.

Пусть требуется привести къ одному знаменателю дроби: $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{3}{20}$; для этого найдемъ наименьшее кратное знаменателей, т. е. чиселъ: 4, 18, 20. Разложивъ знаменателей на первоначальныхъ производителей, получаемъ, что 4 равняется 2 . 2, 18 равняется 2 . 3 . 3, 20 равняется 2 . 2 . 5. Возьмемъ производителей перваго числа, т. е. 2 . 2; сравнивая ихъ съ производителями второго числа, видимъ, что въ первомъ числѣ противъ второго не достаетъ производителей: 3 . 3; а потому къ производителямъ перваго числа надо приписать 3 . 3; а изъ третьяго числа надо приписать производителя 5, такъ какъ его въ первомъ числѣ нѣтъ. Сдѣлавъ такъ, получаемъ рядъ чиселъ: 2 . 2 . 3 . 3 . 5. Если эти числа перемножить, то получимъ число 180, которое и есть наименьшее кратное знаменателей или общій наименьшій знаменатель данныхъ дробей. — Если въ первой изъ данныхъ дробей знаменателемъ написать число 180, то ея числителя надо будетъ умножить на 45 (180 : 4), въ противномъ случаѣ измѣнится величина дроби. Если въ двухъ остальныхъ дробяхъ знаменателемъ написать число 180, то числителя второй дроби надо будетъ умножить на 10, а третьей — на 9; тогда получимъ дроби: $\frac{45}{180}$, $\frac{50}{180}$, $\frac{27}{180}$.

Посредствомъ цифръ и знаковъ изложенное изображается такъ:

$$\frac{1}{4},\ \frac{5}{18},\ \frac{3}{20}.$$

$$\left.\begin{aligned} 4 &= 2 . 2. \\ 18 &= 2 . 3 . 3. \\ 20 &= 2 . 2 . 5. \end{aligned}\right\} \text{Наим. кратн.} = 2 . 2 . 3 . 3 . 5 = 180.$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 . 45}{180} = \frac{45}{180}.$$

$$\frac{5}{18} = \frac{5 . 10}{180} = \frac{50}{180}.$$

$$\frac{3}{20} = \frac{3 . 9}{180} = \frac{27}{180}.$$

§ 169. Если знаменатель одной дроби дѣлится безъ остатка на знаменателей прочихъ дробей, то онъ и будетъ общимъ знаменателемъ всѣхъ данныхъ дробей. — Пусть даны дроби: $\frac{7}{20}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$ и надо ихъ привести къ одному знаменателю; каждая изъ данныхъ дробей можетъ быть выражена въ двадцатыхъ доляхъ, такъ какъ 20 дѣлится безъ остатка на знаменателей прочихъ дробей, т. е. на 4 и 5; поэтому пишемъ слѣдующее:

$$\frac{7}{20},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{5}.$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 . 5}{20} = \frac{5}{20}.$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 . 4}{20} = \frac{8}{20}.$$

Сложеніе дробей.

§ 170. При сложеніи дробныхъ чиселъ, можно разсматривать слѣдующіе случаи:

1) сложеніе *одноименныхъ* дробей;
2) сложеніе *разноименныхъ* дробей;
3) сложеніе *смѣшанныхъ чиселъ.*

„Сложите дроби: $\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{4}$! Сколько получили? Какой членъ дробей не измѣнился? Какіе члены складывали? (Учитель записываетъ: $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{1+2}{4}=\frac{3}{4}$.) Каковы были знаменатели данныхъ дробей? Такія дроби называются *одноименными.* Повтори! Какія одноименныя дроби написаны на доскѣ? Назови еще нѣсколько одноименныхъ дробей! Итакъ, какія дроби называются одноименными? Какъ сложить одноименныя дроби?“

§ 171. При сложеніи *разноименныхъ* дробей, ихъ надо привести къ общему знаменателю, потомъ сложить числителей, а подъ суммою подписать общаго знаменателя. Пусть требуется сложить дроби: $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{14}$; вычисленіе располагаемъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r|l} & 84 \\ \hline \frac{3}{4} & 21 . 3 = 63 \\ +\ \frac{5}{6} & 14 . 5 = 70 \\ \frac{7}{14} & 6 . 7 = 42 \\ \hline & \frac{175}{84} = 2\frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{12}{\cancel{84}}} = 2\frac{1}{12}. \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4 = 2 . 2. \\ 6 = 2 . 3. \\ 14 = 2 . 7. \end{array}\right\} 2 . 2 . 3 . 7 = 84.$$

При сложеніи *смѣшанныхъ чиселъ,* сначала надо сложить дроби, а потомъ цѣлыя числа; вычисленіе располагается такъ:

$$\begin{array}{r|l} & 30 \\ \hline +\ 2\frac{4}{5} & 6 . 4 = 24 \\ 3\frac{5}{6} & 5 . 5 = 25 \\ \overset{\frown}{1} & \\ \hline 6\frac{19}{30}. & \frac{49}{30} = 1\frac{19}{30}. \end{array}$$

Вычитаніе дробей.

§ 172. При вычитаніи дробей, бываютъ *такіе же* случаи, какъ и при сложеніи ихъ. Если требуется вычесть одноименныя дроби, то надо вычесть числителей, а подъ разностью подписать того же знаменателя. При вычитаніи разноименныхъ дробей, сначала ихъ нужно привести къ одному знаменателю, потомъ вычесть числителей, а подъ разностью подписать общаго знаменателя. Когда же для вычитанія даны смѣшанныя числа, то сперва должно вычесть дроби (такъ какъ иногда *уменьшаемая* дробь меньше *вычитаемой),* а потомъ цѣлыя числа. Числа записываются подобно тому, какъ и при сложеніи.

Примѣры:

1)
$$\begin{array}{r|l} & 24 \\ \hline \frac{5}{6} & 4 \,.\, 5 = 20 \\ -\frac{3}{4} & 6 \,.\, 3 = 18 \\ \hline & \frac{2}{24} = \frac{1}{12}. \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r|l} & 20 \\ \hline 5\frac{3}{4} & 5 \,.\, 3 = 15 \\ -3\frac{1}{5} & 4 \;=\; 4 \\ \hline 2\frac{11}{20} & \frac{11}{20}. \end{array}$$

Умноженіе дробей.

§ 173. При умноженіи простыхъ дробей бываютъ слѣдующіе случаи:

1) умножить дробь на цѣлое число;
2) умножить цѣлое число на дробь;
3) умножить дробь на дробь;
4) умножить смѣшанныя числа.

Первый случай умноженія дробей учащимся извѣстенъ изъ второго концентра; нужно повторить его, чтобы вывести правило умноженія дроби на цѣлое число.

Съ этой цѣлью учитель откладываетъ на счетахъ, положимъ, дробь $\frac{3}{8}$ два раза, спрашиваетъ, сколько разъ взято по $\frac{3}{8}$ и сколько получается; потомъ онъ записываетъ дроби на доскѣ — сначала посредствомъ знака сложенія, а потомъ посредствомъ знака умноженія; получается слѣдующая запись:

$$\frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3+3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}; \; \frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{3 \,.\, 2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

„Какъ сложить одноименныя дроби? Какъ сложить дроби: $\frac{3}{8}$ и $\frac{3}{8}$? Сколько разъ слагаемымъ надо взять числителя дроби? Какія числа написаны надъ чертою? (Учитель указываетъ на ариѳметическое выраженіе: $\frac{3 \,.\, 2}{8}$.) Что означаетъ число 3? Что — число 2? На какое число раздѣлено произведеніе числителя дроби и цѣлаго числа? Итакъ, какъ умножить дробь $\frac{3}{8}$ на 2? — Умножьте $\frac{4}{9}$ на 4! Сколько получили? Какъ умножали? Напиши числа по первому примѣру! Что написано надъ чертою? Что — подъ чертою? Какъ умножить $\frac{4}{9}$ на 4? Вообще, какъ умножить дробь на цѣлое число?“

§ 174. При объясненіи второго и третьяго случаевъ умноженія дробей, дѣйствію надо дать новое, *общее,* опредѣленіе, такъ какъ прежнее опредѣленіе примѣнимо только въ тѣхъ случаяхъ, *когда множитель* цѣлое число. Общее опредѣленіе умноженія слѣдующее:

Умноженіе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго изъ множимаго составляется новое число точно такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы.

На основаніи этого опредѣленія, умножить 8 на $\frac{6}{7}$ — значитъ: изъ 8 составить новое число точно такъ, какъ $\frac{6}{7}$ составлена изъ 1. Изъ всѣхъ возможныхъ способовъ составленія множителя изъ единицы въ опредѣленіи разумѣется одинъ: *повтореніе слагаемымъ или цѣлой единицы или опредѣленной доли ея.* — Множитель $\frac{6}{7}$ составленъ изъ единицы слѣдующимъ образомъ: единица раздѣлена на 7 равныхъ частей и такихъ частей взято 6; поэтому, чтобы изъ 8 составить новое число такимъ же способомъ, надо 8 раздѣлить на 7 равныхъ частей и такихъ частей взять 6, т. е. одну седьмую 8 взять слагаемымъ 6 разъ или умножить на 6.

§ 175. Ознакомленіе съ *общимъ опредѣленіемъ* умноженія можно вести въ слѣдующей послѣдовательности:

„Умножьте 6 на 5! Сколько получили? Какъ называются числа, данныя для умноженія? Какъ называется число, которое получается отъ умноженія? Напиши числа! Сколько разъ по единицѣ содержитъ множитель? Сколько разъ надо взять единицу, чтобы получить 5? Слѣдовательно, какъ *составленъ* множитель изъ единицы? Какъ получили новое число? Какъ изъ множимаго составили новое число? — Умножьте 9 на 7! Сколько получили? Напиши числа! Назови множимое, множителя и произведеніе! Какъ составленъ множитель изъ единицы? Какъ мы составили новое число? Если во множителѣ 10 единицъ, то какъ изъ множимаго составить новое число? Какое *сходство* въ составленіи множителя изъ единицы и новаго числа изъ множимаго? Посредствомъ какого дѣйствія можно изъ множимаго составить новое число такимъ способомъ? Итакъ, какое дѣйствіе называется умноженіемъ?"

§ 176. „Что значитъ 5 умножить на 3? Какъ составленъ множитель 3 изъ единицы? Какъ составлена изъ единицы дробь $\frac{3}{4}$? Что значитъ 5 умножить на $\frac{3}{4}$? (Учитель пишетъ на доскѣ: $5 \cdot \frac{3}{4} =$.) Назови множимое и множителя! Какъ составленъ множитель $\frac{3}{4}$ изъ единицы? Какъ изъ множимаго составить новое число? Если 5 раздѣлить на 4, сколько получимъ? (Учитель пишетъ послѣ знака равенства: $\frac{5}{4}$.) Сколько такихъ частей надо взять? Какъ увеличить $\frac{5}{4}$ въ 3 раза? (Запись: $\frac{5 \cdot 3}{4} =$.) Какія числа написаны надъ чертою? Что означаетъ число 5? число 3? На какое число раздѣлено произведеніе цѣлаго числа и числителя дроби? Какъ умножить число 5 на $\frac{3}{4}$? — Что значитъ 10 умножить на $\frac{4}{7}$? Какъ въ этомъ случаѣ составить новое число изъ множимаго? Напиши множимое и множителя! Напиши произведеніе? Какія числа написаны надъ чертою? Что они означаютъ? Какое число написано подъ чертою? Что оно означаетъ? Какъ мы умножили 5 на $\frac{3}{4}$? Какъ умножили 10 на $\frac{4}{7}$? Какъ умножить 6 на $\frac{3}{5}$? 11 на $\frac{4}{9}$? Какое число, вообще говоря, было множимымъ во всѣхъ этихъ примѣрахъ? Какое — множителемъ? Какъ умножить цѣлое число на дробь?"

§ 177. Чтобы умножить дробь на дробь, должно числителя умножить на числителя и знаменателя на знаменателя, и первое произведеніе раздѣлить на второе. Это правило выводится изъ примѣровъ такимъ же способомъ, какъ и правило второго случая.

Если при дробяхъ даны цѣлыя числа, то, при письменномъ вычисленіи, удобнѣе смѣшанныя числа обратить въ неправильныя дроби и затѣмъ поступать по правиламъ предыдущихъ случаевъ. При устномъ же вычисленіи удобнѣе (если только одинъ сомножитель смѣшанное число) умножать цѣлое число и дробь отдѣльно и полученныя отдѣльныя произведенія сложить.

Надо замѣтить, что при умноженіи дробей, до производства дѣйствія, если возможно, надо сократить числа; напр. пусть требуется умножить $\frac{4}{25}$ на $\frac{75}{144}$. По правилу умноженія, надо умножить 4 на 75 и это произведеніе раздѣлить на произведеніе 25 и 144; сдѣлавъ такъ, получаемъ слѣдующую формулу: $\frac{4 \cdot 75}{25 \cdot 144}$; эта формула есть дробь, числителемъ которой служитъ: 4 . 75, а знаменателемъ: 25 . 144; мы знаемъ, что если числителя и знаменателя дроби раздѣлить на одно и то же число, то величина ея отъ этого не измѣнится; здѣсь какъ числителя, такъ и знаменателя можно раздѣлить на 4; раздѣливъ 4 на 4, получаемъ 1; раздѣливъ 144 на 4, получаемъ 36; 75 и 25 имѣютъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ число 25; раздѣливъ каждое изъ нихъ на 25, получаемъ 3 и 1. Послѣ такихъ измѣненій, вся формула приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{4}} \cdot \overset{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{75}}}{\underset{1}{\cancel{25}} \cdot \underset{\underset{12}{\cancel{36}}}{\cancel{144}}} = \frac{1}{12}.$$

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что сокращать можно числителя первой дроби съ знаменателемъ второй дроби и знаменателя первой дроби съ числителемъ второй или *накрестъ;* при производствѣ умноженія надъ данными дробями, все вычисленіе принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{25}}} \cdot \frac{\overset{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{75}}}{\underset{\underset{12}{\cancel{36}}}{\cancel{144}}} = \frac{1}{12}.$$

§ 178. Когда учащіеся ознакомлены со всѣми случаями умноженія дробей, слѣдуетъ имъ сообщить о томъ, *какія задачи рѣшаются умноженіемъ на дробь.*

При умноженіи 5 на $\frac{3}{4}$ (смотр. § 176), цѣлое число, т. е. 5, раздѣлили на 4 и этимъ узнали четвертую часть 5; а когда полученное умножили на 3, то узнали $\frac{3}{4}$ пяти. То же самое можно сказать о всѣхъ случаяхъ умноженія на дробь. Отсюда можно сдѣлать слѣдующій выводъ: *всѣ тѣ задачи, въ которыхъ требуется узнать одну или нѣсколько частей какого-нибудь числа, рѣшаются умноженіемъ на дробь.*

Учащимся это можно уяснить слѣдующимъ образомъ:

„Какъ умножить 5 на $\frac{3}{4}$? Умножьте! Сколько получили? Напиши числа! Какую часть 5 узнали, когда 5 раздѣлили на 4? Во сколько разъ 3 части больше 1 такой части? Какъ узнать $\frac{3}{4}$ отъ 5, если знаемъ $\frac{1}{4}$? Узнайте! Сколько получили? Итакъ, какимъ дѣйствіемъ можно узнать $\frac{3}{4}$ пяти? — Узнайте половину 6? Сколько получили? Какъ узнали? Сколько получится, если 6 умножить на $\frac{1}{2}$?

Какимъ дѣйствіемъ на дробь можно узнать половину 6? — Узнайте $\frac{3}{6}$ отъ 6! Какъ узнали? Какъ узнать $\frac{3}{4}$ отъ 8? $\frac{5}{6}$ отъ 12? — Аршинъ сукна стоитъ 3 руб.; сколько стоятъ $\frac{2}{3}$ аршина этого сукна? Сколько стоитъ цѣлый аршинъ этого сукна? Какую часть 3 руб. надо будетъ заплатить за $\frac{2}{3}$ аршина? Какъ узнать $\frac{2}{3}$ отъ 3 рублей? Узнайте! — Какъ узнать $\frac{4}{5}$ отъ 50? Узнайте! — Какъ узнать *одну* пятую 10? Какъ узнать *нѣсколько* пятыхъ 10? Вообще, какъ узнать *одну или нѣсколько частей какого-нибудь числа?*"

Потомъ рѣшаются соотвѣтствующіе примѣры и задачи какъ устно, такъ и письменно.

Дѣленіе дробей.

§ 179. При дѣленіи простыхъ дробей, бываютъ такіе же случаи, какъ и при умноженіи.

Чтобы раздѣлить дробь на цѣлое число, должно или числителя раздѣлить или знаменателя помножить на цѣлое число. Пусть дано $\frac{4}{5}$ раздѣлить на 7; это значитъ данную дробь уменьшить въ 7 разъ; а чтобы уменьшить дробь въ нѣсколько разъ, надо или ея числителя раздѣлить или знаменателя помножить на данное число. Такъ какъ здѣсь числитель не дѣлится на цѣлое число безъ остатка, то знаменателя умножаемъ на данное цѣлое число, т. е. на 7; получаемъ слѣдующее: $\frac{4}{5 \cdot 7}$; разсматривая написанное, видимъ, что подъ чертою находится произведеніе знаменателя дроби на цѣлое число, а надъ чертою числитель дроби; итакъ, числителя дроби надо раздѣлить на произведеніе знаменателя и цѣлаго числа. (Когда числитель дроби дѣлится безъ остатка на цѣлое число, то его должно раздѣлить, а знаменателя оставить безъ перемѣны.) Если возьмемъ другіе примѣры, то можно будетъ повторить то же самое разсужденіе; а потому говоримъ вообще: чтобы умножить дробь на цѣлое число, надо или числителя раздѣлить или знаменателя помножить на цѣлое число.

§ 180. Во второмъ случаѣ правило выводится слѣдующимъ образомъ:

„Какъ называются числа, данныя при дѣленіи? Какъ называется число, получаемое отъ дѣленія? Если знаемъ дѣлителя и частное, какъ найти дѣлимое? Итакъ, чему равно дѣлимое? Если надо 4 раздѣлить на $\frac{2}{3}$, то какое тамъ дѣлимое и дѣлитель? (Учитель записываетъ числа.) Знаемъ ли мы частное? Частное обозначимъ буквою x. Прочитай написанное! Произведенію какихъ чиселъ равно дѣлимое 4? (Учитель пишетъ: $4 = \frac{2}{3} \cdot x = \frac{2}{3}x$.) Что получимъ, если $\frac{2}{3}$ умножимъ на x? (Если ученики не знаютъ, учитель самъ говоритъ.) Итакъ, какому числу равняются $\frac{2}{3}$ x? Если знаемъ $\frac{2}{3}$ x, то какъ найти $\frac{1}{3}$ его? (Числа записываются.) Сколько третей содержитъ цѣлый x? Во сколько разъ цѣлый x больше $\frac{1}{3}$ его? На сколько надо будетъ умножить предыдущее, чтобы получить цѣлый x? Какія числа написаны надъ чертою? Что означаетъ каждое изъ нихъ? На какое число надо раздѣлить произведеніе цѣлаго числа и знаменателя дроби? Слѣдовательно, какъ раздѣлить 4 на $\frac{2}{3}$? — Раздѣлите 4 на $\frac{1}{3}$? Какъ раздѣлили? Раздѣлите 5 на $\frac{2}{3}$! Какъ раздѣлить цѣлое число на дробь?“

Выводъ правила записывается такъ:

$$4 : \frac{2}{3} = x;\ 4 = \frac{2}{3} \cdot x = \frac{2}{3}x.$$

$$\frac{2}{3}\,x = 4;$$

$$\frac{1}{3}\,x = \frac{4}{2};$$

$$x = \frac{4 \cdot 3}{2} =$$

§ 181. Правило дѣленія дроби на дробь выводится точно такъ же, какъ и правило въ предыдущемъ случаѣ.

Если при дробяхъ будутъ даны цѣлыя числа, то смѣшанныя числа надо обратить въ неправильныя дроби и поступать по правиламъ предыдущихъ случаевъ.

При дѣленіи дробей, до вычисленія, если возможно, надо сократить; сокращать можно цѣлое съ числителемъ дроби и числителей между собою, а знаменателей между собою.

Когда учащіеся ознакомлены съ правилами дѣленія дробей, надо имъ сообщить, какія задачи рѣшаются дѣленіемъ на дробь. Пусть дана задача:

„$\frac{3}{4}$ аршина сукна стоятъ 2 руб.; сколько стоитъ цѣлый аршинъ этого сукна?“

Если $\frac{3}{4}$ арш. сукна стоятъ 2 руб., то $\frac{1}{4}$ его — въ 3 раза дешевле; нужно 2 руб. раздѣлить на 3 равныя части, получается $\frac{2}{3}$ руб.; а цѣлый аршинъ — въ 4 раза дороже, чѣмъ $\frac{1}{4}$ его;

предыдущее надо умножить на 4; по вычисленіи формулы, получается $2\frac{2}{3}$ руб. То же число получимъ, если 2 руб. раздѣлимъ на дробь $\frac{3}{4}$; отсюда заключаемъ, что *всѣ тѣ задачи, въ которыхъ надо найти число, когда извѣстна одна или нѣсколько частей его, рѣшаются дѣленіемъ на дробь.*

§ 182. Въ заключеніе приведемъ нѣсколько задачъ, рѣшеніе которыхъ требуетъ производства дѣйствій надъ простыми дробями.

„Въ бассейнъ проведены три трубы; черезъ первую онъ наполняется въ 12 часовъ, черезъ вторую въ 4 часа, а черезъ третью во столько времени, во сколько онъ наполнился бы черезъ обѣ первыя трубы вмѣстѣ. Во сколько времени наполнится бассейнъ, если открыть всѣ три трубы?“

(Малининъ и Буренинъ.)

Если вмѣстимость бассейна принять за единицу, то черезъ первую трубу въ одинъ часъ наполнится $\frac{1}{12}$ часть его, т. е. бассейна; чтобы это узнать, надо единицу раздѣлить на 12 равныхъ частей, получается $\frac{1}{12}$ ч. Такимъ же дѣйствіемъ узнаемъ, что черезъ вторую трубу въ часъ наполняется $\frac{1}{4}$ ч. бассейна. Зная, что черезъ первую трубу въ часъ наполняется $\frac{1}{12}$ ч., а черезъ вторую $\frac{1}{4}$ ч. бассейна, можемъ узнать, какая часть бассейна наполнится черезъ обѣ первыя трубы или черезъ одну третью трубу въ часъ; для чего надо сложить дроби: $\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{4}$, получается $\frac{4}{12}$ или $\frac{1}{3}$. Теперь мы знаемъ, какая часть бассейна наполняется черезъ каждую трубу въ часъ, а потому можемъ узнать, какая часть всего бассейна наполнится въ часъ черезъ всѣ три трубы; чтобы это узнать, надо сложить дроби: $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$; получается $\frac{2}{3}$; Итакъ, черезъ всѣ три трубы въ часъ можетъ наполнится $\frac{2}{3}$ бассейна. Весь же бассейнъ наполнится во столько часовъ, сколько разъ въ 1 содержится дробь $\frac{2}{3}$; содержится $1\frac{1}{2}$ раза. Слѣдовательно, весь бассейнъ наполнится въ $1\frac{1}{2}$ часа, если открыть всѣ три трубы.

Планъ рѣшенія.

1) Какая часть бассейна наполняется черезъ первую трубу въ часъ?
2) Какая часть бассейна наполняется черезъ вторую трубу въ часъ?
3) Какая часть бассейна наполняется черезъ третью трубу въ часъ?

4) Какая часть бассейна наполняется черезъ всѣ три трубы въ часъ?

5) Во сколько времени наполнится бассейнъ, если открыть всѣ три трубы?

Рѣшеніе.

1) $1 : 12 = {}^1/_{12}$ ч. бас.

2) $1 : 4 = {}^1/_4$ ч. бас.

3) $+\begin{array}{c|l} & 12 \\ \hline \frac{1}{12} & 1 \\ \frac{1}{4} & +3 \\ \hline & \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{array}$ ч. бас.

4) $+\begin{array}{c|l} & 12 \\ \hline \frac{1}{12} & 1 \\ \frac{1}{4} & +3 \\ \frac{1}{3} & 4 \\ \hline & \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{array}$ ч. бас.

5) $1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ (час.)

§ 183. „Разносчикъ купилъ $^7/_8$ пуда малины по $\frac{9}{50}$ руб. за фунтъ и 1 пуд. 5 фунт. клубники; весь товаръ онъ продалъ за $14\frac{19}{25}$ руб. и получилъ при этомъ по $9\frac{1}{3}$ коп. прибыли на каждый, затраченный имъ, рубль; почемъ за фунтъ покупалъ онъ клубнику?“ (Малининъ и Буренинъ.)

Планъ рѣшенія.

1) Сколько денегъ получаетъ разносчикъ при продажѣ товара вмѣсто рубля?
2) Сколько стоитъ весь товаръ?
3) Сколько стоитъ вся малина?
4) Сколько стоитъ вся клубника?
5) Сколько стоитъ фунтъ клубники?

Рѣшеніе.

1) 100 коп. $+ \; 9^1/_3$ коп. $= 109^1/_3$ коп.

2) $14\frac{19}{25}$ руб. : $109^1/_3$ коп. = 14 руб. 76 коп. : $\frac{328}{3}$ коп. =

$= \underset{\underset{9}{\cancel{369}}}{\cancel{1476}} : \frac{\overset{\overset{2}{\cancel{82}}}{\cancel{328}}}{3} = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$ руб.

3) $\overset{5}{\cancel{40}}$ фунт. $\times \frac{7}{\underset{1}{\cancel{8}}} = 35$ фунт.; $\frac{9}{\underset{10}{\cancel{50}}}$ руб. $\times \overset{7}{\cancel{35}} = \frac{63}{10} = 6\frac{3}{10}$ руб.

1 пудъ 5 фунт. = 45 фун.

4) 13 руб. 50 коп.
$-$ 6 „ 30 „
7 руб. 20 коп.

5) 7 руб. 20 коп. : 45 = 7.20 : 45 = **16 коп.**

$$\begin{array}{r|l} 7.20 & 45 \\ -45 & \\ \hline 270 & \\ -270 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

§ 184. „Отецъ хотѣлъ подарить денегъ своимъ дѣтямъ; если бы онъ далъ каждому по $1\frac{3}{4}$ руб., то у него осталось бы $1\frac{3}{4}$ руб.; а если бы онъ сталъ давать по $2\frac{1}{2}$ руб., то у него не достало бы двухъ рублей. Сколько было дѣтей и сколько было денегъ у отца?“ (Малининъ и Буренинъ.)

Если каждому изъ дѣтей давать по $1\frac{3}{4}$ руб., то останется всего $1\frac{3}{4}$ руб.; если же давать по $2\frac{1}{2}$ руб., то не достанетъ 2 руб. Изъ этого видимъ, что во второй разъ каждому дитяти давали больше на $\frac{3}{4}$ руб. ($2\frac{1}{2}$ руб. — $1\frac{3}{4}$ руб. = $\frac{3}{4}$ руб.) и, вслѣдствіе этого, потребовалось денегъ больше — всего на $3\frac{3}{4}$ руб. (2 руб. + + $1\frac{3}{4}$ руб. = $3\frac{3}{4}$ руб.); теперь знаемъ, что каждому изъ дѣтей во второй разъ давали на $\frac{3}{4}$ руб. больше, а для всѣхъ потребовалось больше на $3\frac{3}{4}$ руб. Зная эти числа и зависимость между ними, можемъ узнать, сколько было дѣтей. Для этого должно узнать, сколько разъ въ $3\frac{3}{4}$ руб. содержится $\frac{3}{4}$ руб.; содержится 5 разъ; итакъ, всего было 5 дѣтей. — Каждому изъ нихъ во второй разъ давали по $2\frac{1}{2}$ руб., а всѣмъ вмѣстѣ — въ 5 разъ больше, т. е. $12\frac{1}{2}$ руб. Но такъ какъ во второй разъ не достало двухъ рублей, то, значитъ, у отца, въ самомъ дѣлѣ, было на 2 рубля меньше $12\frac{1}{2}$ руб., т. е. $10\frac{1}{2}$ руб.

Планъ рѣшенія.

1) На сколько каждому изъ дѣтей во второй разъ дано денегъ больше, чѣмъ въ первый разъ?
2) На сколько во второй разъ понадобилось денегъ больше, чѣмъ въ первый разъ?
3) Сколько было дѣтей;
4) Сколько денегъ потребовалось бы для всѣхъ дѣтей во второй разъ?
5) Сколько денегъ было у отца?

Рѣшеніе.

1) $\begin{array}{r} 2.\frac{1}{2} \text{ руб.} \\ -1\frac{3}{4} \text{ „} \\ \hline \frac{3}{4} \text{ руб.} \end{array}$ 2) $1\frac{3}{4}$ руб. $+$ 2 руб. $= 3\frac{3}{4}$ руб.

3) $3\frac{3}{4}$ руб. : $\frac{3}{4}$ руб. $= \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} : \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} = 5$ (дѣт.)

4) $2\frac{1}{2}$ руб. $\times 5 = \frac{5}{2}$ руб. $\times 5 = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$ руб.

5) $12\frac{1}{2}$ руб. — 2 руб. $=$ **$10\frac{1}{2}$ руб.**

§ 185. Опредѣлить x, если

$$„1\tfrac{3}{5} : \left[\frac{(4/9\ x - 3^1/_2)\ .\ 5/8}{1^7/_8} + 3\tfrac{1}{3}\right] = \tfrac{2}{5}.“$$

(Малининъ и Буренинъ.)

Въ этомъ примѣрѣ извѣстно дѣлимое ($1^3/_5$) и частное ($^2/_5$), а неизвѣстенъ дѣлитель; чтобы опредѣлить дѣлителя, надо дѣлимое раздѣлить на частное, т. е. $1^3/_5$ или $^8/_5$ на $^2/_5$, получается 4; итакъ, то, что находится въ квадратныхъ скобкахъ, равняется 4. Въ свою очередь, дѣлителя можно представить въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ первое неизвѣстно, а второе — $3^1/_3$; сумма же ихъ 4. Зная сумму двухъ слагаемыхъ и одно слагаемое, можемъ опредѣлить другое слагаемое; для чего изъ суммы, т. е. 4, вычесть извѣстное слагаемое — $3^1/_3$; получается $^2/_3$. Итакъ, первое слагаемое, т. е. $\frac{(4/9\ x - 3^1/_2)\ .\ 5/18}{1^7/_8}$, равно $^2/_3$. Это слагаемое состоитъ изъ двухъ частей: первая часть надъ чертою — это дѣлимое; вторая — подъ чертою — это дѣлитель; намъ извѣстенъ дѣлитель и частное, а потому можемъ опредѣлить дѣлимое; для этого умножаемъ $1^7/_8$ или $^{15}/_8$ на $^2/_3$, получаемъ $^5/_4$ или $1^1/_4$. Слѣдовательно, то, что расположено надъ чертою, равно $1^1/_4$; но это выраженіе есть произведеніе двухъ сомножителей, изъ которыхъ первый неизвѣстенъ, а второй — $^5/_{18}$; произведеніе ихъ $^5/_4$. Зная произведеніе двухъ сомножителей и одного сомножителя, можемъ опредѣлить неизвѣстнаго сомножителя; для этого произведеніе нужно раздѣлить на извѣстнаго сомножителя, т. е. $^5/_4$ раздѣлить на $^5/_{18}$, получается $^9/_2$ или $4^1/_2$. Теперь узнали, что первый сомножитель, т. е. разность чиселъ, заключенныхъ въ простыхъ скобкахъ, равняется $4^1/_2$; кромѣ того мы знаемъ, что вычитаемое равно $3^1/_2$; слѣдовательно, можемъ узнать, чему равно уменьшаемое, т. е. $^4/_9$ x; чтобы это узнать, надо сложить числа: $3^1/_2$ и $4^1/_2$, получается 8; итакъ, $^4/_9$ x равняются 8; чтобы найти весь x, надо 8 раздѣлить на $^4/_9$, такъ какъ здѣсь требуется найти число по данной его части, а такія задачи рѣшаются дѣленіемъ на дробь; раздѣливъ, получаемъ 18. Итакъ, x равняется 18.

Запись рѣшенія:

$$1^3/_5 : {}^2/_5 = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} : \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} = 4;\ 4 - 3^1/_3 = {}^2/_3.$$

$$\frac{({}^4/_9\,x - 3^1/_2)\,.\,{}^5/_{18}}{1^7/_8} = {}^2/_3;\ ({}^4/_9\,x - 3^1/_2)\,.\,{}^5/_{18} = 1^7/_8\,.\,{}^2/_3 =$$

$$= \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{4}{\cancel{8}}}\,.\,\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{5}{4} = 1\tfrac{1}{4};\ {}^4/_9\,x - 3^1/_2 = \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} : \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{9}{\cancel{18}}} = \frac{9}{2} = 4\tfrac{1}{2};$$

$$^4/_9\,x = 3^1/_2 + 4^1/_2 = 8;\quad x = \overset{2}{\cancel{8}} : \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{9} = \mathbf{18}.$$

§ 186. „Курьерскій поѣздъ, идущій со скоростью $333^1/_3$ саж. въ минуту, проходитъ разстояніе между станціями А и В на 3 часа $46^1/_2$ мин. скорѣе, чѣмъ почтовый; а пассажирскій поѣздъ, дѣлающій по $^1/_2$ версты въ минуту, употребляетъ на прохожденіе того же разстоянія на $1\frac{31}{120}$ час. больше, чѣмъ почтовый. Сколько верстъ отъ А до В?“

(Малининъ и Буренинъ.)

Изъ данныхъ задачи видимъ, что курьерскій поѣздъ идетъ скорѣе почтоваго и пассажирскаго. — Въ задачѣ сказано, что курьерскій поѣздъ проходитъ все разстояніе на 3 час. $46^1/_2$ мин., скорѣе, чѣмъ почтовый, а почтовый на $1^{31}/_{120}$ час. скорѣе, чѣмъ пассажирскій. Зная это, можемъ опредѣлить, на сколько времени курьерскій поѣздъ употребляетъ на прохожденіе того же разстоянія меньше, чѣмъ пассажирскій; для этого надо сложить 3 час. $46^1/_2$ мин. и $1^{31}/_{120}$ час. или 1 часъ $15^1/_2$ мин., получается 5 час. 2 мин. или 302 мин.

Курьерскій поѣздъ въ минуту проходитъ $333^1/_3$ саж. или $^2/_3$ версты, а пассажирскій — $^1/_2$ версты въ минуту; зная это, можемъ узнать, во сколько времени каждый поѣздъ проходитъ 1 версту. Курьерскій поѣздъ проходитъ $^2/_3$ версты въ 1 мин., а на прохожденіе цѣлой версты потребуется столько минутъ, сколько разъ въ 1 содержится $^2/_3$; содержится $^3/_2$ или $1^1/_2$ раза; итакъ, курьерскій поѣздъ 1 версту проходитъ въ $1^1/_2$ мин. Подобнымъ же образомъ найдемъ, что пассажирскій поѣздъ 1 версту проходитъ въ 2 мин. Сравнивая полученныя числа между собою, видимъ, что пассажирскій поѣздъ на версту употребляетъ больше, чѣмъ курьерскій, на $1/2$ мин. (2 мин. — $1 1/2$ мин. = $1/2$ мин.); а на всемъ разстояніи онъ употребилъ больше на 302 мин. Изъ этого заключаемъ, что все разстояніе будетъ содержать столько верстъ, сколько разъ въ 302 мин. содержится $1/2$ мин.; содержится 604 раза. Слѣдовательно, все разстояніе 604 версты.

§ 187. „Паркъ имѣетъ видъ круга; чтобы обойти его по опушкѣ, проходя по 33 саж. въ минуту, надо употребить времени на 40 мин. больше, чѣмъ для того, чтобы пройти черезъ паркъ по его діаметру. Опредѣлить длину окружности парка?“ (Малининъ и Буренинъ.)

Всякая окружность больше своего діаметра въ $3 1/7$ раза. Слѣдовательно, и окружность парка больше его діаметра во столько же разъ. — Черезъ паркъ по его діаметру можно пройти скорѣе, чѣмъ по опушкѣ, на 40 мин., проходя въ минуту 33 сажени; зная это, можемъ опредѣлить, на сколько окружность парка длиннѣе діаметра; для того 33 саж. умножимъ на 40, получается 1320 саж. Если длину діаметра принять за единицу, то окружность будетъ содержать такихъ частей $3 1/7$. Чтобы опредѣлить, сколько разъ діаметръ содержится въ разности между окружностью и діаметромъ, надо изъ $3 1/7$ вычесть 1, получается $2 1/7$. Итакъ, $2 1/7$ діаметра составляютъ 1320 саж., а 1 діаметръ — въ $2 1/7$ раза меньше; 1320 саж. раздѣлить на $15/7$, получается 616 саж. Теперь мы можемъ опредѣлить окружность парка, такъ какъ знаемъ уже діаметръ его; чтобы это сдѣлать, нужно 616 саж. умножить на $3 1/7$ или $22/7$, получается 1936 саж. или 3 версты 436 саж.

Рѣшеніе.

1) 33 саж.
$\times$ 40 „
1320 саж.

2) $3 1/7 - 1 = 2 1/7$.

3) 1320 саж. : $2 1/7 = \overset{88}{\cancel{1320}} : \overset{1}{\cancel{15}}/7 = 616$ саж.

4) 616 саж. $\times\ 3 1/7 = \overset{88}{\cancel{616}} \cdot 22/\underset{1}{\cancel{7}} = 1936$ саж. = **3 версты 436 саж.**

Оглавленіе.

Глава первая.

Глава вторая.

Первый концентръ.

Прямой и обратный послѣдовательный счетъ.

Присчитываніе и отсчитываніе по единицѣ.

Присчитываніе и отсчитываніе группъ единицъ.

Умноженіе.

Дѣленіе на равныя части.

Дѣленіе по содержанію.

Глава третья.

Второй концентръ.

Нумерація или счисленіе.

Сложеніе.

Вычитаніе.

Умноженіе.

Дѣленіе.

Задачи на числа первой сотни.

Ознакомленіе съ простѣйшими дробями.

Глава четвертая.

Третій концентръ.

Нумерація чиселъ любой величины.

Сложеніе.

Вычитаніе.

Умноженіе.

Кубическія мѣры.

Дѣйствія надъ простыми дробями.

Сокращеніе дробей.

Приведеніе дробей къ одному знаменателю.

Сложеніе дробей.

Вычитаніе дробей.

Умноженіе дробей.

Дѣленіе дробей.

КАТАЛОГЪ

учебныхъ изданій и другихъ книгъ

книгопродавца-издателя К. Г. ЗИХМАНА

въ г. **Ригѣ**, Крѣпостная ул. № 30.

	Цѣна безъ перепл. Коп.
Андерсенъ, Э., Систематическая грамматика французскаго языка.	
I., этимологія	40
II., синтаксисъ, 2-ое изд.	30
„ Начальный курсъ французскаго языка	—
Вертеръ и Тихомировъ, Начальный курсъ рисованія. Пособіе для самостоятельныхъ занятій дѣтей въ школѣ и дома въ трехъ выпускахъ:	
„ Выпускъ I. 3-ье изд.	15
„ „ II. 2-ое изд. и выпускъ III по	20
Витоль, I., Родные звуки. Классное пособіе при обученіи пѣнію для низшихъ и среднихъ учебн. зав. (80 двухъ- и трехъ-голосн. пѣсенъ). 2-ое изд.	20
„ Пѣвецъ. Сборникъ 100 трехъ-голосн. пѣсенъ. Съ приложеніемъ: Элементарныя понятія о музыкѣ	30
Воскресенскій, Краткая отечественная исторія въ очеркахъ и біографіяхъ. Съ картинами. 7-ое изд.	30
„ Исповѣдь Песталоцци. Автобіографія	50
Галлеръ, К., Нѣмецкія и русскія коммерческія письма для самостоятельныхъ занятій, какъ и для употребленія въ училищахъ. 3-ье изд. Въ переплетѣ	100
Григорьевъ, Л., Русское слово. Руководство для обученія русскому языку въ тѣхъ школахъ, въ которыхъ дѣти при поступленіи не умѣютъ говорить по-русски:	
„ Выпускъ I-ый, букварь. 10-ое изд.	20
„ и **Б. Оленинъ,** выпускъ II-ой, книга для чтенія. 7-е изд.	30
„ „ „ „ III-ій, книга для чтенія. 6-е изд.	40
„ „ „ „ IV-ый, сборникъ статей образцовыхъ писателей. Съ портретами	—
Дависъ, И., Руководство къ преподаванію русскаго языка въ инородческихъ училищахъ	50
„ Родной міръ. Книга для обученія русскому языку въ инородческихъ училищахъ. Часть I-ая. Азбука и первая послѣ азбуки книга для чтенія. 2-ое изд.	20
„ Часть II-ая, книга для чтенія. 2-ое изд.	30
„ Русскія прописи. 2-ое изд.	6
„ Элементарный курсъ практической русской грамматики для инородческ. училищъ	30
„ Систематическій курсъ устныхъ и письменныхъ диктантовъ. 2-ое изд.	20
Краузе, В., Снѣгурочка. Повѣсть для юношества	20
Кузнецовъ, Н., Краткій курсъ географіи Россіи. Подъ редакц. директора народн. училищъ А. Вильева. Съ картами и многими рисунками	25
Кушнировъ, Н., Русскія прописи для начальныхъ народныхъ училищъ	5
Кюрзенъ, М., Методика начальн. ариѳметики	50
Москвинъ, К., Толкователь словъ къ учебнику „Русское слово" Григорьева и Оленина, ко II выпуску, 2-ое изд., въ папкѣ	20
къ III „ 2-ое „ „	30

Цѣна безъ перепл.
Коп.

Мостовскій, А., Краткіе очерки исторіи Россіи. 4-ое изд. Въ папкѣ.......... 16

" Краткій курсъ естественной исторіи. Съ изображеніями животныхъ и растеній на 10 таблицахъ. 3-ье изд. Въ папкѣ 80

Мюльманъ, Р., Сборникъ ариѳметическихъ задачъ и примѣровъ для начальныхъ народныхъ училищъ.
Часть I-ая. Счетъ до 100. Дѣйствія до 20. 2-ое изд............ 10
" II ая. Первая сотня. Первая тысяча. Простѣйшія дроби. 2-ое изд. 15
" III-ья. Числа любой величины. Простѣйшія дроби. Устныя и письменныя вычисленія..................... 15

Образцы и формы векселей, обязательствъ, договоровъ, завѣщаній и разныхъ судопроизводственныхъ бумагъ, съ изложеніемъ относящихся до нихъ законовъ. Съ приложеніемъ справочныхъ свѣдѣній о гербовомъ сборѣ, судебныхъ, наслѣдственныхъ и крѣпостныхъ пошлинахъ, вознаграждении присяжныхъ повѣренныхъ, судебныхъ приставовъ и др. 80

Разсказы изъ жизни индѣйцевь для дѣтей средн. возраста: I. Кинжалъ малайца или охотникъ на тигровъ. II. Месть невольника. III. Покагонтасъ, индѣйская принцесса. IV. Понтіакъ предводитель Оттавъ.............по 10

Ступель, А., и Е. Гловъ, Краткій курсъ географіи России со свѣдѣніями изъ математической, физической и всеобщей географіи. Съ приложеніемъ раскраш. картъ Европейской России и многими рисунками. 10-ое изд. . 30

Фильрозе, Г., Заиканіе, лепетаніе, шепелявость и ихъ лѣченіе 30

Фишманъ, Л., Сборникъ примѣровъ и задачъ для обученія начальн. ариѳметикѣ. Четыре дѣйствія надъ числами первой сотни. 5-ое изд. Въ папкѣ 15

" Краткое руководство ариѳметики и сборникъ ариѳметическ. задачъ для начальнаго преподаванія. Подъ редакціей окружн. инсп. учил. В. Попова

" Часть I, 7-ое изд., и II-ая, 5-ое изд., по 20 коп., III, 2-ое изд., IV и V по .. 25

Эрлихъ, Рав., Дръ., Еврейскія прописи, вып. I и II...... ....по 5

Яичковъ, Д., Школьный хоръ. Классн. пособіе при обученіи пѣнію, приспособленное для низшихъ и среднихъ учебныхъ заведеній. 5-ое изд........ 30

" Дѣтскій хоръ. Классное пособіе при обученіи пѣнію въ народныхъ школахъ и младшихъ классахъ средн. учебныхъ заведеній. 2-ое изд. ... 15

Balin, A., Dr. Martina Lutera masais katkismis mahjàm un skolàm. Ar bibeles pantineem un daudf peelikumeem, eeseeta 15

" Abeze skolàm un mahjàm. Ar bildem, eeseeta.................. .. 15

Bilschu grahmatas:
Bilschu abezite 10 kap. Js swehru walsts 15 kap. Behrnu draugi 15 kap. — wisas trihs grahmatas ar pilnu abezi. Bilschu abeze 15 kap. Maseem laudim 15 k. Behrnu laime 15 kap. Behrnu preeks...................... 35

Dawis, J., Skolas draugs, I. dala: Abeze un pirmà pehz abezes lasama grahmata, 3. isd., eeseeta.. 26

" II. dala: Lasama grahmata (sagatawoschanâ).

" Wadonis pee mahzischanas abezê, eeseeta.......................... 36

" Daikrakstiba, 10 kap., eeseeta 15

Drawneek, J., Wahzu-latweeschu wahrdniza (sagatawoschanâ).

" Wahzu tulks. Mahzibas grahmata paschmahzischanai tahdeem, kas grib eemahzitees wahzu walodu bes skolotaja peepalihdsibas. Pehz Tusena-Langenscheidta un zitàm jaunakàm metodem sastahdita. Glihti eeseeta.......... 120

Григорьевъ, Русско-латышскій словарь къ учебнику Григорьева „Русское слово“. Вып. I 10 к., вып. II 20 к. и вып. III.......................... 30

Яичковъ, Школьный хоръ. Съ приложеніемъ: Garigas un laizigas dseesmas no J. Wihtola. 4. isd................................... 50

Jende, A., mahzit., Mahju mahziba lihds skolas laikam. Saturs: Abeze un lasami gabali, bibeles stahsti, katkismis un dseesmas. 2. isd., eeseeta............ 40

Judin, R., preest., Behrnu draugs. Pirmà mahzibas grahmata pareistizigeem latweeschu behrneeem. (Satura latweeschu abezi, pirmo tizibas mahzibu, kreewu abezi un pirmo rehkinaschanas mahzibu.) Ar bildem, eeseeta.................. 30

Kalnin, J., Latweeschu walodas mahziba. 3. isd., eeseeta.................. 25

Zena. Kap.

Kaudsit, M., u. A. Sterste, Sehta un skola. Lasama grahmata mahjâ un skolâ:
„ I. dala, 8. isd., eeseeta ... 38
„ II. „ 6. isd. ... 38
„ III. „ 4. isd. ... 35

Laimin, A., Jauns wadons pareisrakstibâ, eeseeta ... 20

Latweeschu dseesmas, kas Kursemes un Semgales basnizâs Widsemes dalâ teek dseedatas. Kehnsbergâ 1587. gadâ drukatas. Latweeschu grahmatneezibas eesahkumam preeksch 300 gadeem par peeminu no jauna isdewuschi profesors A. Bezzenbergers un mahzitajs A. Bielensteins ... 50

Mahzibas wehstules par kreewu walodu pehz Tusena-Langenscheidta metodes. Latweescheem isdotas no Drawina-Drawneeka. 3. isd. Glihtôs aiskargu wahkôs .. 350

Masais Dr. Martina Lutera katkismis. Ar peelikumeem: Luhgschanas. Basnizas gada swehtdeenas un swehtku deenas. Par swehtdeenas deewkalposchanâm. Bibele jeb swehtee raksti. Reisesrehkins. Pehz jaunâ pahrlabotâ bibeles isdewuma pahrstrahdats. 2. isdewums ... 5

Neaismirsti manis! 24 sihmejumi is muhsu Pestitaja dsihwes no prof. H. Hofmana. Glihtôs aiskargu wahkôs 2 rbl., seltitôs audekla wahkôs ... 250

Pantenijs, T., Pagahtnes walgôs. Romans is muhsu semes senlaikeem, tulkots no Aronu Matisa ... 80

Paukschens, P., Eewadijums swehtôs rakstôs. Bibeles lasitajeem preeksch weeglakas rakstu saprafschanas, eeseeta ... 60

Plutte, W., Bibeles stahsti. Ar daudz bildem un Palestinas karti. 5. isd., eeseeta ... 40
„ Stahsti is kristigas basnizas wehstures. Ar daudz bildem. 2. isd., eeseeta .. 30
„ Leeli basnizas stahsti (sagatawoschanâ).
„ Deewa walstibas wehsture. Ar bildem un 5 kartim. Glihti eeseeta ... 80
„ un **A. Balinsch.** Sehkla. Lasama grahmata tautas un elementarskolâm. Ar daudz bildem, 1. dala (sagatawoschanâ).

Rudsit, J., Ihsa kristigas draudses wehsture pagasta skolâm, eeseeta ... 10

Silin, P., Dr. Martina Lutera masais katkismis. Ar 600 jautajumeem un atbildem, isskaidroschanam un peesihmem, sw. rakstu pantineem un dseesmu rahditaju, eeseeta ... 40

Sterste, A., Wadonis latweeschu walodas mahzibâ, eeseeta ... 25
„ Latweeschu walodas mahziba. Sistematisks kurss:
I. dala: etimologija, eeseeta ... 40
II. „ sintakse, „ ... 40
„ Kupleju krahjums, I. dala. Musika no Schanzbergu Petera ... 60

Wihstuk, J., Garigs wadons skolas behrneem. Martina Lutera masais katkismis lihds ar dascha deem derigeem peelikumeem, eeseeta ... 15

Wilibald, Kas usware? Originalstahsts ... 60

Витоль, Родные звуки. Съ приложеніемъ: Garigas un laizigas dseesmas, eeseeta.. 40
„ Пѣвецъ. Съ приложеніемъ: Garigas un laizigas dseesmas ... 50

Вольперъ, Русско-латышскій словарь къ учебнику Вольпера „Русская рѣчь". Вып. I 10 коп., вып. II 20 коп., вып. III ... 20

Zilweks. Wina meesas sastahwa notehlojums aplukojamâ weidâ. Peezas leelas krahsotas isklahstamas bildes ar isskaidrojumeem no Dr. Leepina, eeseeta ... 150

Zuck, O., Dr. Martina Lutera masais katkismis skolas behrneem. Pehz jaunâ pahrlabotâ bibeles tulkojuma isdots no W. Plutte. 3. isd., eeseeta ... 20
„ Dr. Martina Lutera masais katkismis, isdots no mahzitaja Aunina. 3. isd., eeseeta 16

Grigorowa, Kristaps Kolumbus ... 10

Hoffmans, Abrams Linkolns ... 20

Dorogobuschinows, Iwans Susanins, kas winsch usupurejis dsihwibu preeksch Zara .. 10

Kreewu waronu darbi. Donawas pahreeschana 1877. gadâ ... 8

Nemirowitsch-Dantschenko, Peemirsta raktuwe ... 10

Sisojewa, Dschemsa Garfilda dsihwe.. 35

Mohrfeldt, A., Piibli lood. Piltidega ja Palestiina kaardiga. 2 trük. ... 40

Okas, M., Eesti keele Aabits ja lugemise raamat. Raamatus on peale 300 pildi ... 26

Hofmann, H., Ära unusta mind. 24 pilti meie Õnnistegija elust ... 200

Est. A-17892
i 207021867

Andenken aus der Vergangenheit. Lieder eines f... von Kügelgen). 40 Kop., eleg. Leinenba...
Arbusow, L., Grundriß der Geschichte ... Est- un... und 1 farb. Karte. 2. Aufl. Eleg. Lei...
Bestuschew-Rjumin, Geschichte Rußlands. Deutsch ... (Fortsetzung nicht erschienen) ... 150
" Quellen u. Litteratur zur russ. Geschichte. Deutsch v. Dr. Th. Schiemann .. 80
Boettcher, J., Worauf ist bei dem Bau und der Einrichtung von Schulhäusern zu achten? 25
Bunge, T. von, Aus dem baltischen Rechtsleben der Neuzeit ... 50
Claus, C., Die Irvingianer ... 20
Dorn, E., Ein Schwedenkind. Ein baltischer Roman aus der Zeit Herzog Jakobs von Kurland. Eleg. Leinenband ... 150
Eckardt, J., Livland im XVIII. Jahrhundert. Bd. I. Bis zum Jahre 1766 ... 250
Ehrlich, Dr., Hebräische und jüdisch-deutsche Lehre vorl...gen. Heft 1 ... à 5
Frese, R., Geschichte des Altertums. I. Teil. Griechische Geschichte ... 45
" " II " Römische Geschichte ... 45
Freytag-Loringhoven, A., Am Strande. ... Localplauderei ... 20
" Ernstes und Heiteres. Novellen ... 75
Gesetz über d. Gouvernements- und Kreisl...schaftsinstitution v. J. 1876 ... 50
Göbel, A., Heiteres aus dem Baltenlande. Eleg. Leinenband ... 100
Григорьевъ, Русско-нѣмецкій слов... къ учебнику „Русское слово". Къ вып. I 10 коп., II 20 коп., III ... 30
...ller, K., Oberlehrer. Russische und deutsche Handelsbriefe. In Halbleinenband mit Goldtitel. 3. Aufl. ... 100
H...ling, A., Dr. med. Die erste Hilfe für das erkrankte Kind ... 40
Hoffmann, W., Dr. Martin Luthers kleiner Katechismus. Mit Bibelsprüchen, Gebeten, Erklärung der Feste des Kirchenjahres ... biblischen Bücher u. ... 10
Hofmann, H., Prof. Vergiß mein nicht. 24 Bilder aus dem Leben unseres Heilandes in Meisterholzschnitten v. ... und Heuer u. Kirmse in Berlin. In eleg. Leinen... 50 ... in Kartonmappe ... 200
Ja...owsky, T., Deu... für den ... gen Schreib-, Lese- und Sprachunterricht 2. Aufl. ... 30
" Deutsches Lesebuch, ... I und II. 5. Aufl. ... à 60
Jünger, Ein, welchen sein Herr ... Lebensskizze d. weil. Oberpastors Hupfe am St. Nicolai zu Reval ... 25
Kallas, R., Die Methodik ... Preisschrift ... 80
Kannenberg, G., Ist das ... unterbringung rationell? ... 30
Karte der Ostseeprovi... in ... lithographischem Farbendruck ... 20
Kraus, Eber... Romantik un... Litterar. Kreuz- u. ... 30
Lütkens, J., Oberpastor. Biblische ... ngen auf alle Sonn- und Festtage des Kirchenjahres. Herausgeg... pastor W. Keller. Eleg. ... 80
Manna, Täglich... in der Wüste de... Gebetbuch. In ... Holzschnitt 40 Kop., einf. geb. ... 25
Michailow (A. Scheller). Am ein... Leben. St. Peters... Litter... Aus dem Russischen ... 85
Mühlmann, R., Deutsches Lesebuch für El... Vorbereitungsklassen. Mit vielen Illustrationen.
I. Teil. Dauerhaft gebunden, 2. Aufl. ... 40
II. " " " ... 60
Pauk, L., Praktisches Kochbuch. 1300 Rezepte ... eleg. Ganzlbd. ... 200
Plutte, W., Pastor, Biblische Geschichte für ... schulen und die unteren Klassen mittlerer Lehranstalten. Mit Illustr. nach H. Hofmann, J. Schnorr v. Carolsfeld, G. Doré und A. und einer farbigen Karte von Palästina. 2. Aufl. Dauerhaft gebunden ... 40
Psalmen, Vnde... geistliche Lieder ... Gesenge ... so in den Kirchen des Fürstenthums Curland und Semigallien in Liefland gesungen werden. Königsberg 1587. Neu herausgegeb. v. Professor Dr. A. ...zenberger u. Dr. A. Bielenstein 50
Ausgabe mit lettischem Titel zum gleichen Preise.