

G. RÄGO

MATEMAATIKA

ÕPIK

GÜMNAASIUMI V KLASSILE

TARTU EESTI KIRJASTUS

A-13829 III

G. RÄGO

MATEMAATIKA

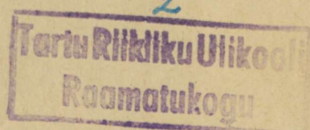
ÕPIK

GÜMNAASIUMI V KLASSILE

TARTU EESTI KIRJASTUS

MATEMAATIKA ÕPIKUD GÜMNAASIUMILE
PEATOIMETAJA: O. SILDE

- A. Vihman: Algebra õpik gümnaasiumi I klassile.
E. Etverk: Geomeetria õpik gümnaasiumi I klassile.
A. Vihman: Algebra õpik gümnaasiumi II klassile.
E. Etverk: Geomeetria õpik gümnaasiumi II klassile.
K. Maasik: Algebra õpik gümnaasiumi III klassile.
K. Ratassepp: Trigonomeetria õpik gümnaasiumi III klassile.
K. Ratassepp: Algebra ja trigonomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.
E. Etverk: Stereomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.
G. Rägo: Matemaatika õpik gümnaasiumi V klassile.
L. Ruumet: Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalaru III ja IV klassile.
L. Ruumet: Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalaru V klassile.
K. Ratassepp: Matemaatilised tabelid.



133624

Sisukord.

ANALÜÜTILINE GEOMEETRIA.

	lk.
Peatükk I. Punkt	5—20
§ 1. Sirgjoone punkti abstsiss	5
§ 2. Sirglõik	7
§ 3. Sirglõigu keskpunkti abstsiss	10
§ 4. Tasapinna punkti koordinaadid	11
§ 5. Sirglõigu keskpunkti koordinaadid	17
§ 6. Sirglõigu pikkus	19
Peatükk II. Sirgjoon	21—51
§ 7. Sirgjoone tõus	21
§ 8. Sirgjoone määramine tasapinnal	25
§ 9. Sirgjoone võrrand	26
§ 10. Algdinaadi ja tõusuga määratud sirgjoone võrrand	28
§ 11. Sirgjoone võrrandi koostamise ja kasutamise näiteid	30
§ 12. Lineaarse võrrandi geomeetriline vaste	35
§ 13. Kahe punktiga määratud sirgjoone võrrand	37
§ 14. Kahe sirgjoone rööpseisu ja ristseisu tunnused	42
§ 15. Kahe sirgjoone lõikepunkt	46
Peatükk III. Ringjoon	52—59
§ 16. Ringjoone võrrand	52
§ 17. Ringjoone lõikumine sirgjoonega	57
Peatükk IV. Ellips	60—72
§ 18. Ellipsi joonestamine	60
§ 19. Ellipsi võrrand	61
§ 20. Ellipsi uurimine tema võrrandi põhjal	67
§ 21. Ellips ringjoone normaalprojektsioonina	69

MATEMAATILINE ANALÜÜS.

Peatükk V. Suuruste olenevus	73—205
§ 22. Jäävad ja muutuvad suurused	73
§ 23. Funktsioon ja argument	75

§ 24.	Suuruste olenevuse väljendusvahendid	76
§ 25.	Võrdeline olenevus	84
§ 26.	Lineaarne olenevus	89
§ 27.	Pöördvõrdeline olenevus	99
§ 28.	Hüperbool	101
§ 29.	Ruutolenevus $y = ax^2$	105
§ 30.	Ruutparabool	108
§ 31.	Üldine ruutolenevus	111
§ 32.	Kuupolenevus $y = ax^3$	116
§ 33.	Kuup-parabool	119
§ 34.	Ruutvõrrandsüsteemide graafiline lahendamine	123

Peatükk VI. Funktsiooni muutumise uurimine 129—193

§ 35.	Suuruse lõpmatu kasvamine	129
§ 36.	Suuruse lõpmatu kahanemine	133
§ 37.	Funktsiooni piirväärtus	136
§ 38.	Lõpmatult kasvav ja lõpmatult kahanev geomeetriline rida	139
§ 39.	Funktsiooni piirväärtuse arvutamine	148
§ 40.	Funktsiooni pidevuse tunnus	153
§ 41.	Funktsiooni tuletis	158
§ 42.	Tuletise geomeetriline vaste	164
§ 43.	Tuletise leidmise teoreeme	167
§ 44.	Liikumise kiirus tuletisena	174
§ 45.	Funktsiooni kasvamine ja kahanemine	177
§ 46.	Funktsiooni ekstreemväärtused	181

Peatükk VII. Vea hindamine kaudse mõõtmise ülesandeis 194—205

§ 47.	Mõõtmisviga	194
§ 48.	Kaudse mõõtmise vea hindamine	197
§ 49.	Relatiivne viga	202

Peatükk VIII. Ülesandeid kordamiseks 206—244

§ 50.	Ülesandeid aritmeetikast	206
§ 51.	Ülesandeid avaldiste teisendamiseks	209
§ 52.	Ülesandeid võrrandite lahendamiseks	212
§ 53.	Ülesandeid ridadest	216
§ 54.	Ülesandeid planimeetriast ja stereomeetriast	219
§ 55.	Ülesandeid trigonomeetriast	224
§ 56.	Ülesandeid analüütilisest geomeetriast	228
§ 57.	Ülesandeid suuruste olenevusest	235
§ 58.	Ülesandeid funktsioonidest	238

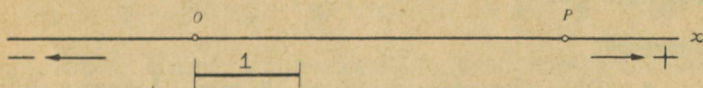
ANALÜÜTILINE GEOMEETRIA.

Peatükk I.

Punkt.

§ 1. Sirgjoone punkti abstsiss.

Olgu antud sirge x ja selle punkt O (joonis 1). Seame endile ülesandeks määrata sirge x teatava punkti P asukoht antud punkti O suhtes. Selle ülesande lahendamiseks nimetame ühe suundadest, milles võib liikuda sirgel x , positiivseks suunaks ja teise negatiivseks suunaks, märkides esimest neist märgiga $+$ ja teist märgiga $-$.



Joonis 1.

Valime nüüd pikkuste mõõtmiseks ühiku, näiteks 1 cm, mõõdame sirglõigu OP pikkuse ja võtame saadud arvu p märgiga $+$, kui punkt P asetseb punktist O positiivses suunas, ja märgiga $-$, kui ta asetseb punktist O negatiivses suunas. Nii saadud märgiga arvu nimetame punkti P abstsissiks. Punkti O nimetame seejuures abstsisside alguspunktiks ehk nullpunktiks, mõnikord ka lühidalt alguseks, ja sirget x — abstsissiteljeks ehk x -teljeks. Seega

sirgjoone punkti abstsiss on arv, mis näitab, kummal pool alguspunkti ja mitme ühiku kaugusel alguspunktist asetseb vaadeldav punkt.

Sellest punkti abstsissi definitsioonist nähtub, et abstsistelje igale punktile vastab üksainus abstsiss ja igale abstsissile vastab üksainus punkt; järelikult

punkti abstsiss määrab täielikult punkti asukoha teljel.

Seepärast ülesannet „leia telje punkt X “ võime ikka mõista ülesandena „leia punkti X abstsiss x “. Ütlust „punkti X abstsiss on x “ kirjutatakse lühidalt kujul

$$X \equiv (x).$$

Kaks punkti, mis asetsevad teljel võrdseil kaugusil nullpunktist, üks ühel pool, teine teisel pool seda, on nullpunkti suhtes sümmeetrilised punktid. Nende punktide abstsissid on võrdsete absoluutväärtustega, kuid vastupidiste märkidega. Kui punkt omab abstsissi a , siis temaga alguspunkti suhtes sümmeetriline punkt omab abstsissi $-a$.

Ülesanded.

1. Olgu kujutamisühikuks 5 mm. Joonesta mingi sirge, vali algus ja märgi sirgel punktid algarvuliste abstsissidega vahemikus -17 -st $+17$ -ni.

2. Olgu kujutamisühikuks valitud 1 cm. Joonesta mingi sirge, vali algus ja märgi sirgel punktid, mille abstsissid on

$$+3, \quad +6\frac{1}{2}, \quad +5, \quad -2,8, \quad -0,2, \quad -3,9, \quad +4\frac{2}{3}.$$

3. Olgu kujutamisühikuks valitud 1 cm. Konstrueeri täisnurksed kolmnurgad hüpoteenusidega

$$\sqrt{5} \quad \sqrt{17} \quad \sqrt{29}.$$

Joonesta mingi sirge, vali algus ja märgi sirgel punktid, mille abstsissid on $+\sqrt{5}$, $+\sqrt{17}$ ja $-\sqrt{29}$.

4. Arvu 195 soovitakse kujutada punktina teljel. Kasutada oleva teljeosa pikkus on 100 mm. Kui pikk tuleb valida kujutamiseühik?

5. Arvu $\sin 60^\circ$ soovitakse kujutada punktina teljel. Kasutada oleva teljeosa pikkus on 180 mm. Kui pikk tuleb valida kujutamiseühik?

6. Olgu kujutamiseühikuks 50 mm. Silm eraldab veel hästi kaht kriipsu 0,2-millimeetrilise vahega. Kui peenelt saab teljelt lugeda punkti abstsissi?

7. Olgu kujutamiseühik 200 mm. Mitme kümnendkohaga tuleb võtta arv $\tan 72^\circ$ tema kujutamisel punktina abstsissiteljel?

8. Olgu kujutamiseühikuks valitud 100 mm. Võta mingi sirge, vali algus ja märgi sirgel punktid, mille abstsissid on arvude

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

logaritmid. Mitme kümnendkohaga need logaritmid tuleb võtta?

§ 2. Sirglõik.

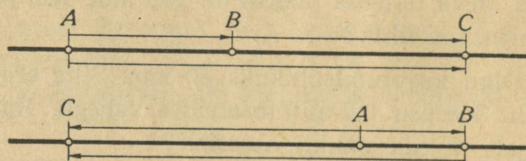
Sirglõik on määratud oma kahe otspunktiga; üht neist nimetame lõigu algus-, teist lõigu lõpp-punktiks. Lõiku, mille alguspunkt on A ja lõpp-punkt on B , tähistame sümboliga AB . Teljel asetsevat sirglõiku P_1P_2 loeme suunaga sirglõiguks, nimelt positiivseks, kui suund punktist P_1 punkti P_2 poole on positiivne, ja negatiivseks, kui suund punktist P_1 punkti P_2 poole on negatiivne. Õeldust järgneb, et

$$P_2P_1 = -P_1P_2;$$

see tähendab, et

sirglõigu alguspunkti ja lõpp-punkti vahetamisel muutub suunaga sirglõigu märk vastupidiseks.

Suunaga sirglõikude liitmine toimub järgmise kokku-



Joonis 2.

leppe alusel: kui A , B ja C on kolm teljel asetsevat punkti (joonis 2), siis on ikka kehtiv võrdus

$$AB + BC = AC.$$

Olgu O abstsisside alguspunkt ja P_1 ning P_2 teljel asetsevad punktid. Rakendades lõikude liitmise eeskirja punktidega O , P_1 ja P_2 määratud lõikude kohta, näeme, et

$$OP_1 + P_1P_2 = OP_2.$$

Olgu $P_1 \equiv (x_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2)$; siis $OP_1 = x_1$, $OP_2 = x_2$ ja järelikult

$$x_1 + P_1P_2 = x_2$$

ehk

$$P_1P_2 = x_2 - x_1;$$

see tähendab, et

teljel võetud lõik on võrdne tema lõpp- ja alguspunkti abstsisside vahega.

Kui $x_2 > x_1$, siis on lõik P_1P_2 positiivne ja ka $x_2 - x_1$ on positiivne; kui $x_2 < x_1$, on lõik P_1P_2 negatiivne ja ka $x_2 - x_1$ on negatiivne. Sellest näeme, et suunaga sirglõik avaldub arvuna, mille märk määrab lõigu suuna ja absoluutväärus lõigu pikkuse.

Lõigu P_1P_2 pikkus on punktide P_1 ja P_2 vaheline kaugus. Tähistame selle pikkuse sümboliga $|P_1P_2|$. Siis

$$|P_1P_2| = |x_2 - x_1|.$$

Ülesanded.

9. Sirgel on võetud punktid P_1 ja P_2 . Määra punkti P_1 kaugus punktist P_2 , kui punkti P_1 abstsiss on

+3 -7 +4 -6 +8 -10

ja punkti P_2 abstsiss on vastavalt

+8 +2 -3 -6 -5 -14.

(Kaugust P_1P_2 mõistame suunata suurusena.)

10. Sirgel on võetud punktid P_1 ja P_2 . Vaadeldes lõiku P_1P_2 suunatud suurusena, avalda ta arvuliselt, kui punkti P_1 abstsiss on

+4 -6 +5 -7 +9 -11

ja punkti P_2 abstsiss on vastavalt

+9 +1 -4 -8 +9 -15.

11. Sirgel on võetud punkt A , mille abstsiss on 6. Leia punkti B abstsiss, kui lõik AB on +2, +7, +10, -4, -6, -8, -11.

12. Kuidas muutub punkti abstsiss, kui endise mõõduühiku asemele valitakse uus, mis on endisest k korda suurem?

13. Kuidas muutub kahe punkti vaheline kaugus, kui endise mõõduühiku asemele valitakse uus, mis on endisest k korda väiksem?

14. Kuidas muutub punkti abstsiss, kui telje positiivne suund muudetakse vastupidiseks?

15. Kuidas muutub kahe punkti P_1 ja P_2 vaheline kaugus ja kuidas muutub lõik P_1P_2 , kui telje positiivne suund muudetakse vastupidiseks?

§ 3. Sirglõigu keskpunkti abstsiss.

Olgu antud teljel asetsev lõik oma otspunktidega $P_1 \equiv (x_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2)$. Leiame selle lõigu keskpunkti abstsissi.

Olgu lõigu P_1P_2 keskpunkt $P \equiv (x)$. Siis

$$P_1P = PP_2$$

ehk, teisiti,

$$x - x_1 = x_2 - x,$$

millest

$$2x = x_1 + x_2,$$

ehk

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

see tähendab, et

sirglõigu keskpunkti abstsiss võrdub otspunktide abstsisside aritmeetilise keskmisega.

Ülesanded.

16. Sirgel on võetud punktid P_1 ja P_2 . Leia lõigu P_1P_2 keskpunkti abstsiss, kui punkti P_1 abstsiss on

$$0 \quad +2 \quad +3 \quad +5 \quad -3 \quad -1$$

ja punkti P_2 abstsiss on vastavalt

$$+8 \quad +12 \quad -1 \quad -7 \quad +6 \quad -9.$$

17. Sirgel on võetud kaks lõiku P_1P_2 ja Q_1Q_2 . Nende lõikude keskpunktid on vastavalt P ja Q . Määra lõigu PQ pikkus, teades, et

$$P_1 \equiv (-6) \quad P_2 \equiv (+10) \quad Q_1 \equiv (+8) \quad Q_2 \equiv (-14).$$

18. Kuidas muutub lõigu keskpunkti abstsiss, kui mõõduühikut k korda suurendada ja x -telje positiivne suund muuta vastupidiseks?

19. Olgu antud punkt $P \equiv (+9,6)$. Lõigul OP asetsev punkt A jaotab lõigu OP nii, et $OA : AP = 2 : 1$. Missugune on punkti A abstsiss?

20. Lõigul AB asetsev punkt C jaotab lõigu AB kahte ossa nii, et $AC : CB = 2 : 3$. Missugune on punkti C abstsiss, kui $A \equiv (-2)$ ja $B \equiv (+3)$?

21. Lõigu AB pikendil asetseb punkt C nii, et $AC : BC = 12 : 5$. Missugune on punkti C abstsiss, kui $A \equiv (-18)$ ja $B \equiv (-4)$?

22. Olgu antud punkt $P_1 \equiv (+7,5)$. Punkt P_2 on sümmeetriline punktiga P_1 alguse suhtes. Missugune on punkti P_2 abstsiss? Kui pikk on lõik P_1P_2 ?

23. Olgu antud punkt $Q_1 \equiv (-23)$. Punkt Q_2 on sümmeetriline punktiga Q_1 alguse suhtes. Missugune on punkti Q_2 abstsiss? Kui suur on suhe $Q_1O : OQ_2$?

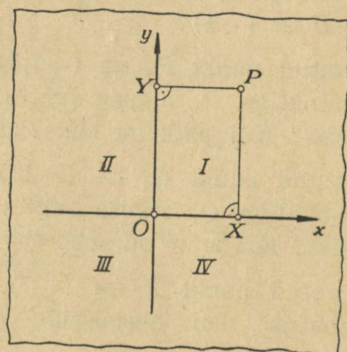
24. Olgu antud punkt $P \equiv (-7)$. Missugune on sama punkti abstsiss, kui abstsisside algus paigutada punkti (-4) ?

25. Kui teljel võtta alguseks punkt O , siis on punkti P abstsissiks (-3) ; kui aga alguseks võtta punkt O_1 , siis on punkti P abstsissiks $(+5)$. Missugune on punkti O_1 abstsiss alguse O suhtes?

§ 4. Tasapinna punkti koordinaadid.

Olgu antud tasapind ja sellel kaks ristuvat sirget x ja y (joonis 3). Seame endile ülesandeks määrata antud tasapinna teatava punkti P asukoha antud sirgete x ja y suhtes. Selleks võtame sirgete x ja y lõikepunkti O nullpunktiks nii ühel kui teisel sirgel, märgime kummalgi sirgel noolega positiivse suuna, nimetame saadud teljed

vastavalt x - ja y -teljeks ja valime pikkuste mõõtmiseks ühiku, näiteks 1 cm. Projektime nüüd punkti P kummalgi teljele; olgu punkt X punkti P projektsioon x -teljele ja punkt Y punkti P projektsioon y -teljele. Mõõdame lõigud OX ja OY ja võtame mõõtmissaadused lõikude OX ja OY suunale vastava märgiga. Nii saadud arvu x nimetame punkti P abstsissiks ja arvu y — punkti P



Joonis 3.

ordinaadiks. Sellele vastavalt nimetame x -telge abstsisssteljeks ja y -telge ordinaatteljeks. Mõlemaid arve x ja y koos nimetame punkti P koordinaatideks. Abstsiss- ja ordinaattelg moodustavad koos koordinaatide teljestiku.

Abstsiss- ja ordinaattelg jaotavad tasapinna neljaks veerandiks; neid nimetame joonisel 3 näidatud järjekorras esimeseks, teiseks, kolmandaks ja neljandaks veerandiks. Arvestades telgede suundi saame järgmise tabeli punkti koordinaatide märkide jaoks:

Veerand, milles punkt asetseb	Abstsissi märk	Ordinaadi märk
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

Joonisest 3 näeme, et

$$YP = OX \quad \text{ja} \quad XP = OY$$

ehk

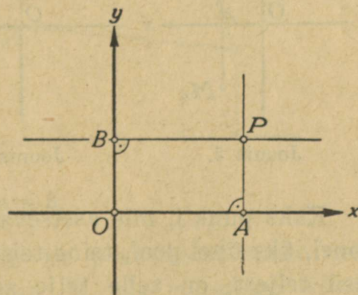
$$YP = x \quad \text{ja} \quad XP = y;$$

seega punkti koordinaadid näitavad punkti kaugusi koordinaatide telgedest. Nimelt

tasapinna punkti abstsiss on arv, mis näitab, kummal pool ordinaattelge ja mitme ühiku kaugusel ordinaatteljest punkt asetseb;

tasapinna punkti ordinaat on arv, mis näitab, kummal pool abstsissitelge ja mitme ühiku kaugusel abstsissiteljest punkt asetseb.

Punkti koordinaatide ülalkirjeldatud määramisviisist nähtub, et igale tasapinnal võetud punktile vastab üksainus paar koordinaate. On selge, et ümberpöörduvalt ka igale etteantud koordinaatide paarile vastab üksainus punkt tasapinnal. Tõepoolest, olgu punkti abstsiss a ja ordinaat b . Arvude a ja b järgi ehitame abstsiss- ja ordinaatteljel lõigud OA ja OB (joonis 4); tõmmates punktidest A ja B ristsir-



Joonis 4.

ged lõikudele OA ja OB näeme, et need ristsirged lõikuvad punktis P , millel on antud abstsiss a ja ordinaat b . Kii-remini kui praegu kirjeldatud võttega leiame punkti P , kui abstsissi a järgi ehitame lõigu OA , punktis A tõmbame ristjoone x -teljele ja sellel ristjoonel ordinaadi b järgi märgime lõigu $AP = b$. Lõike OA ja AP nimetame vastavalt punkti P abstsiss- ja ordinaatlõiguks. Nii näeme, et

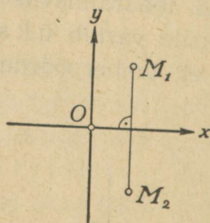
punkti koordinaadipaar määrab täielikult punkti asukoha tasapinnal.

Seepärast ülesannet „leia tasapinna punkt P “ võime ikka mõista ülesandena „leia punkti P koordinaadid“.

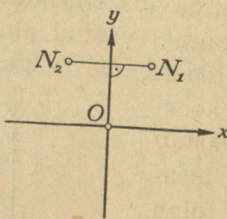
Ütlust „punkti P abstsiss on x ja ordinaat on y “ või „punkti P koordinaadid on x ja y “ kirjutatakse lühidalt kujul

$$P \equiv (x|y).$$

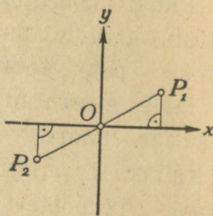
Kirjutis $M \equiv (-7|0)$ ütleb seega, et punkt M asetseb x -telje negatiivsel poolel ja nimelt 7 ühiku kaugusel alguspunktist.



Joonis 5.



Joonis 6.



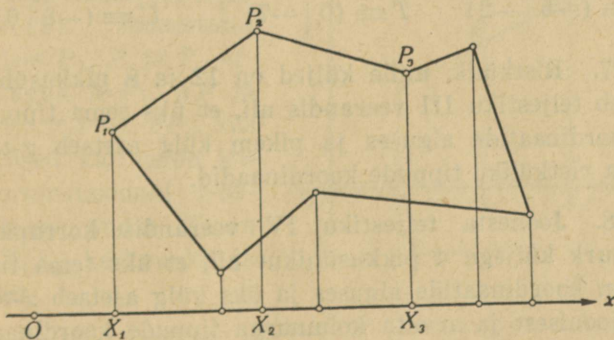
Joonis 7.

Kaks punkti, mis asetsevad x -telje ühel ja samal ristjoonel, üks ühel pool, teine teisel pool telge ja võrdseil kaugusel teljest, on selle telje suhtes sümmeetrilised punktid. Neil punktidel on üks ja sama abstsiss ja

võrdsete absoluutväärtustega, kuid vastupidiste märkidega ordinaadid. Näiteks on punktid $M_1 \equiv (a|b)$ ja $M_2 \equiv (a|-b)$ x -telje suhtes sümmeetrilised punktid (joonis 5). Samuti on $N_1 \equiv (a|b)$ ja $N_2 \equiv (-a|b)$ y -telje suhtes sümmeetrilised punktid (joonis 6).

Kaks punkti P_1 ja P_2 , mis asetsevad nullpunktiga ühel ja samal sirgel nii, et kaugused OP_1 ja OP_2 on võrdsed, on sümmeetrilised koordinaatide alguspunkti suhtes. Nagu näeme joonisest 7, on nende punktide samanimelised koordinaadid võrdsete absoluutväärtustega, kuid vastupidiste märkidega. Näiteks punktid $P_1 \equiv (-3|8)$ ja $P_2 \equiv (3|-8)$ on sümmeetrilised koordinaatide alguspunkti suhtes.

Märkus. Punkti koordinaatide mõiste kuulub tähtsamate matemaatika mõistete hulka. Nagu hiljemini näeme, võimaldub selle mõiste kaudu avaldada geomeetrilisi küsimusi algebra keeles ja seega saavutada nende lahendamist algebra meetoditega.



Joonis 8.

Koordinaatide mõiste on ka praktiliselt suure tähtsusega: enamik kaardistamise ja plaanistamise võtteid tugineb koordinaatide mõistele. Kui on näiteks plaanistada

maatükk $P_1 P_2 P_3 \dots$ (joonis 8), siis võtame mingi sihi x -teljeks ja projektime vastavate optiliste riistade abil punktid P_1, P_2, P_3, \dots x -teljele; saades niiviisi punktid X_1, X_2, X_3, \dots , möödame lõigud

$$OX_1, OX_2, OX_3 \dots$$

ja

$$X_1P_1, X_2P_2, X_3P_3 \dots$$

Varustades saadud arvud vajalikkude märkidega, saame punktide P_1, P_2, P_3, \dots koordinaadid, mille järgi nende märkimine plaanile kohaselt valitud määrdus ei tee enam raskusi.

Ülesanded.

26. Joonesta koordinaatide teljestik ja kujuta selles järgmised punktid:

$$\begin{array}{lll} P \equiv (+2 \mid +3) & Q \equiv (+4 \mid -5) & R \equiv (-4 \mid +3) \\ S \equiv (-5 \mid -2) & T \equiv (0 \mid -7) & U \equiv (-3 \mid 0). \end{array}$$

27. Ristkülik, mille küljed on 12 ja 8 pikkusühikut, asetseb teljestiku III veerandis nii, et üks tema tippudest on koordinaatide alguses ja pikem külge asetseb x -teljel. Määra ristküliku tippude koordinaadid.

28. Joonesta teljestiku IV veerandis korrapärase kolmnurk küljega 4 pikkusühikut nii, et üks tema tippudest on koordinaatide alguses ja üks külge asetseb x -teljel. Leia joonisest ja arvuta kolmnurga tippude koordinaadid.

29. Romb, mille külge on a ja teravnurk 30° , asetseb I veerandis nii, et üks tema tippudest on koordinaatide alguses ja üks tema külge asetseb x -teljel. Arvuta rombi tippude koordinaadid.

30. Punkt P_2 on x -telje suhtes sümmeetriline punktiga $P_1 \equiv (-5 | 3)$. Missugused on punkti P_2 koordinaadid? Kui pikk on lõik P_1P_2 ? Kui suur on kolmnurga OP_1P_2 pindala?

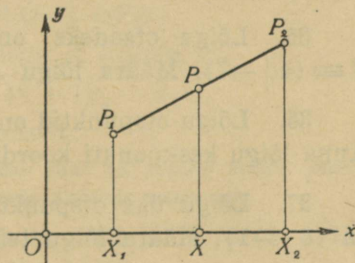
31. Koordinaatide algus asetseb ristküliku diagonaalide lõikepunktis ja x -telg on rööbiti ristküliku pikema küljega. Ristküliku ühe tipu koordinaadid on 3 ja -7 . Määra teiste tippude koordinaadid.

32. Punkti P koordinaadid on a ja b . Kuidas avalduvad sama punkti koordinaadid, kui mõõduühikut vähendame n korda?

§ 5. Sirglõigu keskpunkti koordinaadid.

Olgu antud tasapinnal sirglõik, mille otspunktid on $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2 | y_2)$. Leiame selle lõigu keskpunkti koordinaadid.

Märgime lõigu keskpunkti sümboliga $P \equiv (x | y)$ (joonis 9). Joonestame punktide P_1 , P ja P_2 ordinaatlõigud X_1P_1 , XP ja X_2P_2 . Et $P_1P = PP_2$, siis on võrdsed ka nende lõikude projektsioonid x -teljele; seega punkt X on lõigu X_1X_2 keskpunkt ja järelikult



Joonis 9.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Analoogiliselt leiame, et

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Saadud valemeid võime sõnastada järgmiselt:

sirglõigu keskpunkti koordinaadid on lõigu otspunktide samanimelistel koordinaatide aritmeetilised keskmised.

Näide. Lõigu otspunktid on $P_1 \equiv (-14 | 9)$ ja $P_2 \equiv (6 | -5)$. Selle lõigu keskpunkti P koordinaadid on vastavalt

$$x = \frac{-14 + 6}{2} = -4 \quad \text{ja} \quad y = \frac{9 + (-5)}{2} = 2,$$

seega

$$P \equiv (-4 | 2).$$

Ülesanded.

33. On antud punktid $S_1 \equiv (0 | 8)$ ja $S_2 \equiv (0 | -20)$. Leia lõigu S_1S_2 keskpunkti koordinaadid.

34. Lõik MN jaotub koordinaatide alguses pooleks. Punkti M koordinaadid on 3 ja -4 . Missugused on punkti N koordinaadid?

35. Lõigu otsadeks on punktid $A \equiv (-2 | 3)$ ja $B \equiv (4 | -7)$. Määra lõigu AB keskpunkti koordinaadid.

36. Lõigu otspunktid on $P_1 \equiv (a | 0)$ ja $P_2 \equiv (0 | b)$. Anna lõigu keskpunkti koordinaadid.

37. Lõigu üks otspunkt on $(4 | 2)$; lõigu keskpunkt on $(3 | -1)$. Määra lõigu teine otspunkt.

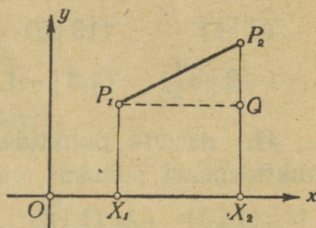
38. Kolmnurga tipud on $A \equiv (6 | 5)$, $B \equiv (-2 | 7)$ ja $C \equiv (4 | -3)$. Leia kolmnurga külgede keskpunktid.

39. Rööpküliliku kaks vastastippu on $A \equiv (1 | 3)$ ja $C \equiv (0 | 7)$ ning kolmas tipp on $B \equiv (3 | 5)$. Leia rööpküliliku diagonaalide lõikepunkt ja neljas tipp D .

§ 6. Sirglõigu pikkus.

Olgu antud kaks punkti $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2 | y_2)$. Leiame sirglõigu P_1P_2 pikkuse ehk, teisiti, punktide P_1 ja P_2 vahelise kauguse.

Selleks joonestame punktide P_1 ja P_2 ordinaatlõigud X_1P_1 ja X_2P_2 (joonis 10). Projektides punkti P_1 sirgele X_2P_2 saame punkti Q . Täisnurkse kolmnurga P_1QP_2 kaatet



Joonis 10.

$$P_1Q = X_1X_2 = x_2 - x_1;$$

sama kolmnurga kaatet

$$QP_2 = X_2P_2 - X_2Q = X_2P_2 - X_1P_1 = y_2 - y_1.$$

Pythagorase teoreemi põhjal on

$$P_1P_2^2 = P_1Q^2 + QP_2^2;$$

tähistades pikkuse P_1P_2 tähega d , leiame, et

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

mida võime sõnastada järgmiselt:

kahe punkti vahelise kauguse ruut on võrdne nende punktide samanimeliste koordinaatide vahede ruutude summaga.

Näide. Olgu $P_1 \equiv (-8 | -3)$ ja $P_2 \equiv (5 | -7)$. Leiame nende punktide vahelise kauguse.

Tuletatud valemi põhjal

$$\begin{aligned} P_1P_2^2 &= [5 - (-8)]^2 + [-7 - (-3)]^2 = \\ &= 13^2 + (-4)^2 = 13^2 + 4^2 = 185, \end{aligned}$$

seega

$$P_1P_2 = \sqrt{185}$$

ehk

$$P_1P_2 \approx 13,6.$$

Ülesanded.

40. Arvuta järgmiste punktide kaugused koordinaatide algusest:

$$\begin{array}{cccc} (3 | 4) & (12 | 5) & (-7 | 24) & (8 | -6) \\ (-2 | 3\frac{1}{2}) & (4,2 | -1,1) & (0 | -1\frac{1}{2}) & (2,1 | 0). \end{array}$$

41. Arvuta punktide vaheline kaugus iga järgneva punktidepaari puhul:

$$\begin{array}{cccc} 1. (1 | 3) & 2. (1 | 2) & 3. (-4 | -2) & 4. (m | n) \\ (2 | 7) & (-3 | -1) & (-2 | -4) & (0 | 0) \end{array}$$

42. Kolmnurga tipud on

$$A \equiv (4 | 1), \quad B \equiv (-2 | 4) \quad \text{ja} \quad C \equiv (1 | -2).$$

Arvuta kolmnurga külgede pikkused.

43. Nelinurga tippudeks on punktid $A \equiv (-6 | 10)$, $B \equiv (-7 | -4)$, $C \equiv (3 | -9)$ ja $D \equiv (10 | 4)$. Arvuta nelinurga külgede ja diagonaalide pikkused.

44. Kolmnurga tipud on $M \equiv (3 | 4)$, $N \equiv (-1 | 1)$ ja $P \equiv (0 | -3)$. Arvuta kolmnurga mediaanide pikkused.

45. Kolmnurga tipud on $A \equiv (-6 | -4)$, $B \equiv (2 | 8)$ ja $C \equiv (-10 | 0)$. Näita, et kolmnurk on võrdhaarne.

46. Kolmnurga tipud on $A \equiv (1 | 2)$, $B \equiv (3 | 4)$ ja $C \equiv (-1 | 4)$. Näita, et kolmnurk on täisnurkne.

47. Kolmnurga tipud on $(3,5 | 0)$, $(5,7 | 0)$ ja $(4 | 2,5)$. Arvuta kolmnurga pindala.

48. Kuidas muutub 2 punkti vaheline kaugus, kui kujutamisühik kummalgi teljel vähendatakse k korda?

Peatük II.

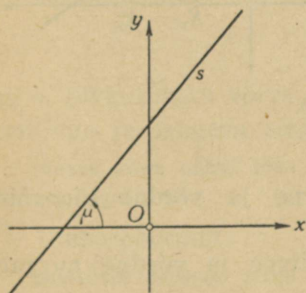
Sirgjoon.

§ 7. Sirgjoone tõus.

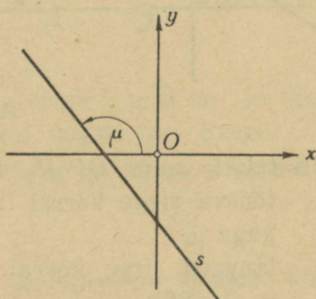
Olgu tasapinnal võetud koordinaatide teljestik ja mingi sirgjoon, mis lõikab x -telge.

Sirgjoone ja x -telje vahelist positiivset nurka, mis asetseb ülalpool x -telge ja mille üheks haaraks on x -telje positiivne suund, nimetatakse sirgjoone tõusunurgaks.

Sirgjoone tõusunurka tähistame tähega μ . Sirgjoone võimalikke asetumisi x -telje suhtes arvestades näeme, et nurk μ on kas teravnurk (joonis 11), täisnurk või nüri-



Joonis 11.



Joonis 12.

nurk (joonis 12). Teravnurkse tõusunurga korral sirge tõuseb tema punkti abstsissi kasvades; nürinurkse tõusunurga korral sirge langeb tema punkti abstsissi kasvades.

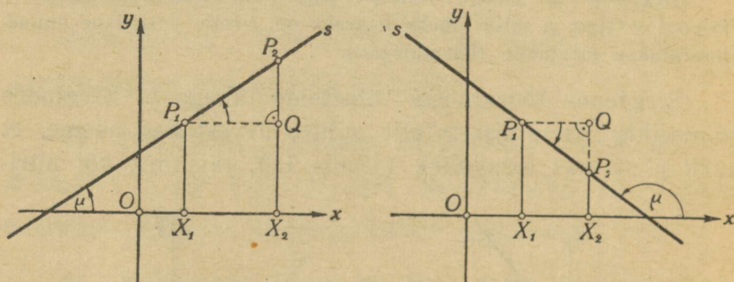
Kui sirgjoon ei lõika x -telge, s. t. kui ta on x -teljega paralleelne, siis on loomulik sirgjoone tõusunurga suurusks lugeda 0° .

Sirgjoone tõusunurga tangensit nimetatakse sirgjoone tõusuks.

Tähistame sirgjoone tõusu tähega m ; siis

$$m = \tan \mu.$$

Olgu punktid $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2 | y_2)$ sirge s kaks punkti nii, et punkt P_2 asetseb punktist P_1 paremal pool (joonis 13). Joonestame nende punktide ordinaatlõigud X_1P_1 ja X_2P_2 ning tõmbame punktist P_1 sirge P_1Q risti ordinaatlõiguga X_2P_2 .



Joonis 13.

Nii tekkiv nurk QP_1P_2 on tõusva sirge korral positiivne ja võrdne tõusunurgaga μ , langeva sirge korral negatiivne ja võrdne nurgaga $\mu - 180^\circ$.

Sellest järeldub, et

tõusva sirge korral $\tan \widehat{QP_1P_2} = \tan \mu$,

langeva sirge korral $\tan \widehat{QP_1P_2} = \tan (\mu - 180^\circ) = \tan \mu$.

Seega nii tõusva kui ka langeva sirge korral tõus

$$m = \tan \widehat{QP_1P_2}.$$

Kasutame seda võrdust sirge tõusu arvutamiseks. Et täisnurkses kolmnurgas QP_1P_2 kaadet

$$QP_2 = y_2 - y_1$$

ja kaadet

$$P_1Q = X_1X_2 = x_2 - x_1,$$

siis

$$\tan \widehat{QP_1P_2} = \frac{QP_2}{P_1Q} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ja seega sirge tõus

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Joonisest 13 näeme, et punkti liikumisel sirget s mööda lõigu P_1P_2 võrra punkt nihkub rõhtsihis lõigu $x_2 - x_1$ võrra, püstsihis aga lõigu $y_2 - y_1$ võrra. Seega punkti nihkumisele rõhtsihis ühe pikkusühiku võrra vastab nihkumine püstsihis

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ehk m pikkusühiku võrra. Tõusva sirge korral on see nihe positiivne ja langeva sirge korral negatiivne. Seega

tõusva sirge puhul tõus on positiivne ja langeva sirge puhul tõus on negatiivne.

Ümberpöördult:

positiivse tõusuga sirge tõuseb ja negatiivse tõusuga sirge langeb,

sest positiivse tõusu korral on tõusunurk teravnurk ja negatiivse tõusu korral — nürinurk.

Kui sirge tõusunurk μ on teada, siis saame tangensite tabeli abil leida tõusu m ; ümberpöördult, kui on teada tõus m , saame sama tabeli abil leida tõusunurga μ . Et nurga

joonestamine nurga tangensi järgi on tunduvalt hõlpsam ja täpsem kui nurga suuruse järgi kraadides ja minutites, siis antakse sirge puhul sageli mitte nurk μ , vaid tõus m .

Ülesanne 1. On joonestatud koordinaatide teljestik ja sirge. Määra selle sirge tõus.

Lahendus. Võtame sirgel mõne punkti P_1 ja sellest paremal pool mõne teise punkti P_2 , joonestame esimesest punktist sirge rööbiti x -teljega, teisest punktist sirge rööbiti y -teljega, mõõdame saadud täisnurkse kolmnurga püstkaateti ja rõhtkaateti (näiteks millimeetrites), võtame saaduse suunale vastava märgiga ja jagame esimese tulemuse teisega. Saadud jagatis on nõutud tõus.

Ülesanne 2. On antud koordinaatide teljestik. Joonesta sirge, mis läbib punkti $P \equiv (2 | 1)$ ja mille tõus on $-1,5$.

Lahendus. Märgime punkti $P \equiv (2 | 1)$. Sellest punktist tõmbame paremale mingi rõhtlõigu PQ , selle lõpust allapoole püstlõigu QR , mis on 1,5 korda rõhtlõigust pikem, ja ühendame punktid P ja R sirgega. See sirge ongi otsitav.

Ülesanded.

49. Määra sirge tõus, kui sirge tõusunurk on

$16^{\circ} 42'$	$21^{\circ} 48'$	$36^{\circ} 30'$	$56^{\circ} 54'$
$93^{\circ} 06'$	$105^{\circ} 18'$	$130^{\circ} 24'$	158°

Missugused neist sirgeist on positiivse ja missugused negatiivse tõusuga?

Missugused neist sirgeist tõusevad paremale ja missugused vasemale poole?

50. Kui suurt tõusu omavad koordinaatide telgede vaheliste nurkade poolitajad?

51. Kasvagu sirge tõusunurk 30-st kraadist alates kahekordseks. Mitme kordseks kasvab sel puhul sirge tõus?

52. Leia tabelist sirge tõus, kui tõusunurk on

10°	20°	30°	40°	50°.
-----	-----	-----	-----	------

Kas tõus kasvab võrdeliselt tõusunurgaga?

53. Kui suur tõusunurk vastab tõusule

1	2	3	4	5?
---	---	---	---	----

54. Kui suur on x -teljega rööbiku sirge tõus? — y -teljega rööbiku sirge tõus?

55. Tõusude skaalast pildi saamiseks joonest koordinaatide algusest sirged tõusudega

$-\infty, -10, -9, \dots, 0, +1, +2, \dots, +9, +10, +\infty$
ning märgi igal sirgel temale vastav tõus.

56. Kandku raudteel teetõusu tahvlike märgel 3 : 200. Kui suuri nurgi tõuseb raudtee?

57. Sirge läbib koordinaatide algust ja punkti $(-5 | 3)$. Kui suur on sirge tõus?

58. Sirge läbib punkte $(-4 | 3)$ ja $(2 | -1)$. Kui suur on sirge tõus?

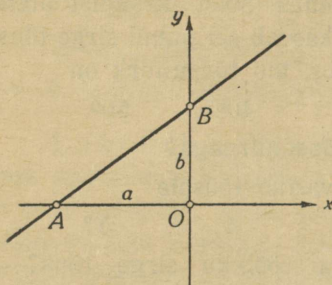
§ 8. Sirgjoone määramine tasapinnal.

Kui koordinaatide teljestik on antud, siis tasapinna iga punkt on määratud oma kahe koordinaadiga. Küsime, missuguste andmetega saab määrata sirget sellel tasapinnal?

Sirget saame joonestada kõigepealt kahe sirgel asetseva punkti järgi, seega

sirge on määratud temal asetseva kahe punkti koordinaatidega.

Kui sirge ei lähe läbi koordinaatide alguspunkti (joonis 14), siis lõikab ta x -teljel lõigu $OA = a$ ja y -teljel lõigu $OB = b$. Neid lõike nimetame vastavalt sirge algabstsissiks ja algordinaadiks. Et need lõigud määravad sirge kaks punkti $A \equiv (a | 0)$ ja $B \equiv (0 | b)$, need aga omakorda määravad sirge, siis näeme, et



Joonis 14.

sirge, mis ei läbi nullpunkti, on määratud oma algabstsissi ja algordinaadiga.

Eespool nägime, et sirget saab joonestada, kui teame üht tema punkti ja sirge tõusu; seega

sirge on määratud ühe oma punkti koordinaatide ja oma tõusuga.

Et antud punktiks võib olla näiteks ka punkt, millés sirge lõikab y -telge, siis

sirge on määratud oma algordinaadi ja tõusuga.

Märkus. Iga ülalpool-nimetatud andmetepaar ei sobi iga sirge määramiseks; kui näiteks sirge on rööbiti y -teljega, siis ta ei oma algordinaati ja seega pole võimalik teda määrata lõikude abil, mis sirge moodustab koordinaatide telgedel.

§ 9. Sirgjoone võrrand.

Olgu antud mõni sirge x - y -teljestiku tasapinnas. Igal selle sirge punktil on oma abstsiss x ja oma ordinaat y . Punkti liikudes sirget mööda muutuvad kas mõlemad koordinaadid või vähemalt üks neist. Viimane juhtum

esineb siis, kui tegemist on sirgega, mis on rööbiti ühe koordinaat-teljega: kui sirge on rööbiti y -teljega, siis on kõigil tema punktidel üks ja sama, seega muutu matu abstsiss; kui sirge on rööbiti x -teljega, siis on kõigil tema punktidel muutu matu ordinaat.

Olgu antud mõni sirge, mis ei ole rööbiti ei ühe ega teise teljega. Punkti liikudes sirget mööda punkti mõlemad koordinaadid muutuvad; koordinaadid ei muutu aga mitte teineteisest olenemata; vastupidi: kui üks sirge punkti koordinaatidest on ette antud, siis seega ka teine on juba ette määratud. Tõepoolest, olgu näiteks antud sirgjoone punkti abstsiss x . Märgime sellele vastava abstsisslõigu OX . Punktist X saab tõmmata vaid ühe ordinaatlõigu XP , mille lõpp-punkt on sirgel. Samuti näeksime, et sirgjoone punkti ordinaadi andmisega on ette määratud ka selle punkti abstsiss. Seega sirgjoone punkti koordinaadid on teineteisega seotud ehk

sirgjoone punkti koordinaadid olenevad teineteisest.

Meie lähemaks ülesandeks on avaldada sirgjoone punkti koordinaatide vaheline seos. Me esitame ta võrrandina, milles tundmatute asemel esinevad kaks muutujat, nimelt sirge mistahes punkti abstsiss ja ordinaat. Seda võrrandit nimetame sirgjoone võrrandiks.

Niisiis:

sirgjoone võrrandiks nimetame kahe muutujaga võrrandit, mida rahuldavad sirge iga punkti koordinaadid ja ainult need.

Võttes esitatud mõttekäigus sirgjoone asemele mistahes tasapinnalise joone, saame järgmise joone võrrandi definitsiooni:

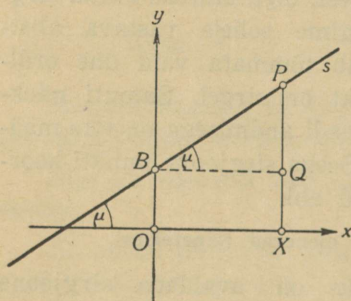
tasapinnalise joone võrrandiks nimetame kahe muutujaga võrrandit, mida rahuldavad selle joone iga punkti koordinaadid ja ainult need.

§ 10. Algdinaadi ja tõusuga määratud sirgjoone võrrand.

Olgu sirgjoon s antud oma algdinaadiga b ja tõusunurgaga μ (joonis 15). Leiame sirgjoone võrrandi.

Selleks arutame nõnda:

Olgu P üks sirge s punktidest; missugune nimelt, selle jätame ütle mata. Olgu punkti P koordinaadid tähistatud x ja y -ga. Joonestame punkti P ordinaatlõigu XP ja sellele punktist B ristjoone BQ . Täisnurksest kolmnurgast PBQ saame siis, et



Joonis 15.

$$QP = BQ \cdot \tan \mu$$

ehk ka

$$XP - XQ = BQ \cdot \tan \mu$$

ehk

$$XP - OB = OX \cdot \tan \mu$$

ehk

$$y - b = x \cdot \tan \mu,$$

seega

$$y = x \cdot \tan \mu + b.$$

See võrdus seob punkti P koordinaate suurustega, mille abil sirge s oli antud. Et P oli üks sirge s punktidest ja ei olnud öeldud, missugune punkt nimelt, siis leitud seos kehtib sirge s iga punkti koordinaatide kohta, järelikult see seos ongi antud sirge võrrand.

Kirjutades $\tan \mu$ asemel m , saame algdinaadi ja tõusuga määratud sirgjoone võrrandi kujul

$$y = mx + b.$$

Saadud võrrand on kehtiv ainult sirge s punktide koordinaatide kohta: kui võtaksime teljestikus punkti $(x | y)$, mis on väljaspool sirget s , siis

$$y \neq mx + b$$

ja nimelt on siis

$y > mx + b$, kui punkt $(x | y)$ on ülalpool sirget s ja

$y < mx + b$, kui punkt $(x | y)$ on allpool sirget s .

Kui sirgjoon läbib koordinaatide alguse, siis $b = 0$ ja

$$y = mx.$$

Niisiis:

läbi koordinaatide alguse mineva sirgjoone võrrand on $y = mx$.

Kui sirgjoon on rööbiti x -teljega, siis $m = 0$ ja võrrand $y = mx + b$ omandab kuju

$$y = b.$$

See on x -teljega paralleelse sirgjoone võrrand.

Algordinaadi ja tõusuga saab määrata iga sirget, mis ei ole rööbiti y -teljega; seega on iga niisuguse sirge võrrand avaldatav kujul

$$y = mx + b.$$

Et y -teljega rööbiku sirge iga punkti abstsissis võrdub selle sirge algabstsissiga a , siis on y -teljega rööbiku sirge võrrandiks võrdus

$$x = a.$$

Kui võrdustes $y = b$ ja $x = a$ asendada a ja b väärtusega 0, siis saame vastavalt x -telje ja y -telje võrrandid

$$y = 0 \quad \text{ja} \quad x = 0.$$

Kokkuvõttes võime öelda, et

kuidas ka asetseb sirge koordinaatide telgede suhtes, ikka omab tema võrrand kas kuju

$$x = a$$

või kuju

$$y = mx + b.$$

Et need mõlemad võrrandid on lineaarsed võrrandid, siis

sirgjoone algebraliseks vasteks on lineaarne võrrand.

Kui sirgjoone võrrandis esineb murrulisi kordajaid või murruline vaba liige, siis on ikka võimalik võrrandi teisendamise teel anda see võrrand täisarvuliste kordajatega. Näiteks võime võrrandit

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{4}$$

kirjutada kujul

$$20y = -12x + 5$$

ehk ka kujul

$$12x + 20y - 5 = 0.$$

§ 11. Sirgjoone võrrandi koostamise ja kasutamise näiteid.

Ülesanne 1. Koosta nende sirgjoonte võrrandid, mis poolitavad koordinaatide telgede vahelisi nurki.

Lahendus. Neid sirgeid on kaks; mõlemad nad läbivad koordinaatide alguse ja järelikult omavad nende võrrandid kuju $y = mx$. Ühel neist sirgetest on tõusunurk 45° ja teisel 135° . Nende sirgete tõusud on seega $\tan 45^\circ$ ehk $+1$ ja $\tan 135^\circ$ ehk -1 . Järelikult otsitavad võrrandid on vastavalt

$$y = x \quad \text{ja} \quad y = -x.$$

Ülesanne 2. Koosta sirgjoone võrrand, teades, et sirgjoone algordinaat on $-2\frac{1}{2}$ ja sirgjoone tõus on $\frac{3}{4}$.

Lahendus. Rakendades seost $y = mx + b$, leiame otsitava võrrandi kujul

$$y = \frac{3}{4}x - 2\frac{1}{2}$$

ehk

$$3x - 4y - 10 = 0.$$

Ülesanne 3. Sirgjoone võrrand on

$$y = 0,8x - 1,5.$$

Leia sirgjoonel punkt, mille abstsiss on 6.

Lahendus. Sirgjoone punktil abstsissiga x on ordinaat $0,8x - 1,5$; seega punktil abstsissiga 6 on ordinaat $0,8 \cdot 6 - 1,5$ ehk $4,8 - 1,5$ ehk 3,3. Järelikult otsitav punkt on $(6 | 3,3)$.

Ülesanne 4. Sirgjoone s võrrand on

$$3x - 4y - 10 = 0.$$

Kas punkt $P \equiv (2 | -1)$ asetseb sirgjoonel s ?

Lahendus. Asetades võrrandi vasakul poolel muutujate x ja y asemele väärtused 2 ja -1 , saame

$$3 \cdot 2 - 4(-1) - 10 = 6 + 4 - 10 = 0.$$

Seega punkti P koordinaadid rahuldavad sirgjoone s võrrandit; järelikult P on üks sirgjoone s punktidest ehk punkt P asetseb sirgjoonel s .

Ülesanne 5. Kuidas asetseb punkt $(5 | 1)$ sirgjoone suhtes, mille võrrand on $y = 2,4x - 9$?

Lahendus. Abstsissile 5 vastab sirgjoone punkti ordinaat $2,4 \cdot 5 - 9$ ehk 3; see on suurem, kui antud punkti ordinaat 1; seega antud punkt asetseb allpool antud sirgjoont.

Ülesanne 6. Koosta sirgjoone s võrrand, teades, et sirgjoon läbib punkti $P_0 \equiv (x_0 | y_0)$ ja sirgjoone tõus on m .

Lahendus. Sirgjoon tõusuga m on x -telje suhtes kaldu, seega lõikab ta y -telge. Märgime sirgjoone algordinaadi tähega b ; otsitav võrrand on siis

$$y = mx + b,$$

kus x ja y tähendavad sirgjoone s vabalt võetud punkti koordinaate ja liige b on esitsa veel tundmata. Selle b määrame järgmiselt: et sirgjoon s läbib punkti P_0 , siis koordinaadid x_0 ja y_0 peavad rahuldama sirgjoone võrrandit; seega

$$y_0 = mx_0 + b.$$

Siit saame

$$b = y_0 - mx_0,$$

järelikult

$$y = mx + y_0 - mx_0$$

ehk

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Saadud võrdus seob sirgjoone s mis läbib punkti koordinaate x ja y andmetega x_0 , y_0 ja m . Seega kehtib see võrdus sirgjoone s iga punkti koordinaatide kohta; järelikult on ta otsitud võrrand. Niisiis:

sirgel punktiga $(x_0|y_0)$ ja tõusuga m on võrrand

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Näide. Sirgjoonel, mis läbib punkti $(-1\frac{1}{2} | 2\frac{3}{4})$ ja omab tõusu $-\frac{1}{3}$, on võrrandiks

$$y - 2\frac{3}{4} = -\frac{1}{3}(x + 1\frac{1}{2})$$

ehk, korrutades 12-ga ja koondades,

$$4x + 12y = 27.$$

Ülesanded.

59. Kus asetsevad tasapinna punktid, millel on üks ja sama ordinaat -5 ?

60. Joonesta sirge, mis, olles paralleelne y -teljega, läbib punkti $(-3 | -2)$. Kirjuta selle sirge võrrand.

61. Kus asetsevad tasapinna punktid, mille abstsiss on võrdne ordinaadiga?

62. Kus asetsevad tasapinna punktid, mille abstsissi ja ordinaadi summa on 0 ?

63. Kirjuta sirgete võrrandid järgmisil andmeil:

1. sirge algordinaat on 2 ja tõus 3 ;
2. sirge algordinaat on -3 ja tõus 1 ;
3. sirge algordinaat on 4 ja tõus $-2,3$;
4. sirge algordinaat on -5 ja tõus -1 .

Joonesta need sirged.

64. Kirjuta sirgete võrrandid järgmisil andmeil:

1. sirge algordinaat on $+3$ ja tõusunurk on 30° ; $y = \tan 30^\circ x + 3$
2. sirge algordinaat on -5 ja tõusunurk on 45° ;
3. sirge algordinaat on 1 ja tõusunurk on 120° ;
4. sirge algordinaat on $-0,9$ ja tõusunurk on $148^\circ 30'$.

65. Määra järgmiste sirgete võrrandeist iga sirge jaoks algordinaat, tõus ja tõusunurk:

1. $3x - 4y + 10 = 0$

6. $x - \sqrt{3}y - 6 = 0$

2. $x + 2y + 5 = 0$

7. $\sqrt{2}x + y = 1$

3. $3y - 1 = 0$

8. $0,1x - 0,2y = 0,3$

4. $7x + 5y = 0$

9. $2x + \sqrt{5}y = 0$

5. $4x - 3 = 0$

10. $7x - 10 = 0$

66. Joonesta koordinaatide teljestikus vabalt mingi sirge ning leia joonisest sirge tõus ja algordinaat. Koosta selle sirge võrrand.

67. Joonist tegemata otsusta, kas punkt $(2 | 5)$ asetseb sirgel $y = 4x - 3$ või mitte.

68. Otsusta, kas sirge $y = 2x - 7$ läbib punkti $(1 | -5)$ või mitte.

69. Sirgel, mille võrrand on $y = -\frac{1}{2}x + 5$, on võetud punkt, mille abstsiss on 4. Kui suur on selle punkti ordinaat?

70. Sirgel, mille võrrand on $y = 2x + 9$, on võetud punkt, mille ordinaat on 13. Kui suur on selle punkti abstsiss?

71. Allpool on antud rida sirgete võrrandeid. Mis-sugused neist sirgeist läbivad koordinaatide alguse, mis-sugused mitte?

1. $y = 5x$

2. $x + y = 7$

$3x + 4y = 0$

$2x + 3y - 5 = 0$

$x - \frac{1}{2}y - 1 = 0$

$y - 4x + 10 = 0$

72. Leia, missuguses punktis sirge lõikab x -telge, kui sirge võrrand on:

1. $y = 3x - 6$

2. $2x + 7y = 10$

$y = 8x + 12$

$x + y = 36$

$y = -\frac{1}{2}x - 3$

$y + 4x = 100$

73. Leia, missuguses punktis sirge lõikab y -telge, kui sirge võrrand on:

1. $y = 4x + 12$

2. $3x + 5y = 15$

$y = 5x - 8$

$6x + 15y = 105$

$y = -2x + 7$

$x - 3y = 18$

74. Sirgjoone võrrand on $y = -0,6x + 3,8$. Missugused punktidest $A \equiv (3 | 2)$, $B \equiv (2 | 3)$ ja $C \equiv (-2 | 5)$ asetsevad sellel sirgel, missugused mitte?

75. Joonesta sirge, mis läbib punkti $(-4 | -3)$ ja mille tõus on $-\frac{3}{4}$. Koosta selle sirge võrrand.

76. Anna sirge võrrand, teades, et ta läbib punkti $(-4 | 3)$ ja tema tõusunurk on $163^\circ 18'$.

77. Missugune peab olema vabaliikme b väärtus, et sirge $y = -2x + b$ läbiks punkti $(5 | -4)$?

78. Missugune peab olema kordaja m väärtus, et punkt $(-3 | 5)$ asetseks sirgel $y = mx - 7$?

79. Teades, et rombi diagonaalid on võetud koordinaatide telgedeks nii, et pikem diagonaal on x -teljeks, ja teades, et rombi külge on a ja üks nurkadest on 40° , kirjuta kõigi 4 külje võrrandid.

80. Teades, et võrdhaarse trapetsi suurem alus ja sümmeetriatelg on võetud koordinaatide telgedeks, et trapetsi alused on 10 ja 6 cm ja alusnurk on 60° , koosta trapetsi kõigi külgede võrrandid.

§ 12. Lineaarse võrrandi geomeetiline vaste.

Ülalpool nägime, et sirgjoone võrrand esineb ikka kas kujul

$$x = a$$

või kujul

$$y = mx + b.$$

Teisendamise teel saame nii ühest kui teisest võrrandi, mille kujud on

$$Ax + By + C = 0.$$

Tõestame nüüd, et ka ümberpöörduvalt igasugune võrrand esindab sirgjoont, kui aga arvupaari x ja y tõlgendada tasapinna punkti koordinaatidena. Selleks näitame, et missugused ka on kordajate A , B ja vaba liikme C väärtused, ikka leidub niisugune sirge, mille punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$Ax + By + C = 0.$$

Arvudest A , B ja C võivad mõned olla nullid, kuid mitte kõik kolm korraga, sest siis muutub võrrand samasuks $0 = 0$. Lähtudes kordaja B suurusest võib eristada kaht juhtu, nimelt $B \neq 0$ ja $B = 0$.

Kui $B \neq 0$, siis lahendades antud võrrandi y suhtes leiame, et

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

ehk, kordajat ja vaba liiget teisiti tähistades,

$$y = mx + b.$$

See võrrand esindab sirgjoont arvude m ja b ja seega ka A ja C igasuguste väärtuste juures, sest missugused ka on m ja b väärtused selles võrrandis, ikka leidub niisugune sirge, mille tõus on m ja algordinaat on b ja mille võrrand on seega $y = mx + b$. Erijuhul, kui $A = 0$, esindab antud võrrand x -teljega rööbikut sirget, ja erijuhul, kui $C = 0$, esindab ta koordinaatide alguspunkti läbivat sirget. Seega, kui $B \neq 0$, siis võrrand $Ax + By + C = 0$ esindab ikka sirgjoont.

Kui $B = 0$, siis antud võrrand omandab kuju

$$Ax + C = 0,$$

kusjuures $A \neq 0$, sest vastasel korral järgneks, et ka $C = 0$. Et $A \neq 0$, siis saame võrrandi lahendada x -i suhtes:

$$x = -\frac{C}{A}.$$

ehk, lühemalt kirjutades,

$$x = a.$$

Kui $C \neq 0$, siis ka $a \neq 0$; sel juhul viimane võrrand ja ka võrrand $Ax + C = 0$ esindab y -teljega rööbikut sirget. Erijuhul, kui $C = 0$, saame võrrandist $Ax + C = 0$ y -telje võrrandi $x = 0$. Seega, kui $B = 0$, siis võrrand

$$Ax + By + C = 0$$

esindab ikka sirgjoont.

Kokkuvõttes:

võrrand $Ax + By + C = 0$ esindab sirgjoont kordajate A , B ja vaba liikme C igasuguste väärtuste puhul.

Sel põhjusel esimese astme võrrandit nimetatakse *lineaar*seks võrrandiks ¹.

§ 13. Kahe punktiga määratud sirgjoone võrrand.

Olgu sirgjoon s määratud oma kahe punktiga $P_1 \equiv (x_1|y_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2|y_2)$. Leiame sirgjoone võrrandi. Selleks arutame nõnda:

Olgu P üks sirge s punktidest; missugune nimelt, selle jätmä ütle mata. Olgu selle punkti koordinaadid tähistatud x ja y -ga. Avaldame lõikude P_1P ja P_1P_2 tõusud:

$$\text{lõigu } P_1P \text{ tõus on } \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

$$\text{lõigu } P_1P_2 \text{ tõus on } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Et mõlemad lõigud asetsevad ühel ja samal sirgel, siis mõlemad leitud tõusud peavad olema võrdsed; järelikult

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

See võrdus seob punkti P koordinaate andmetega x_1 , y_1 ,

¹ *Linea* tähendab ladina keeles joont, kitsamas mõttes sirget joont.

x_2 ja y_2 . Et P oli üks sirge s punktidest ja polnud öeldud, missugune nimelt, siis leitud seos kehtib sirge s iga punkti koordinaatide kohta; seepärast ta on sirge s võrrand. Niisiis:

sirgel punktidega $(x_1 | y_1)$ ja $(x_2 | y_2)$ on võrrand

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ülesanne 1. Koosta sirge võrrand, teades, et sirge läbib punkte $P_1 \equiv (-3 | 2)$ ja $P_2 \equiv (4 | -8)$.

Lahendus. Asendades võrrandis

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

koordinaadid x_1, x_2, y_1, y_2 nende antud väärtustega, saame

$$\frac{y - 2}{x - (-3)} = \frac{-8 - 2}{4 - (-3)}$$

ehk, lihtsustades,

$$10x + 7y + 16 = 0.$$

See ongi otsitud võrrandiks.

Eriti lihtsa kuju omandab sirgjoone võrrand, kui on teada sirgjoone algabstsiss a ja algordinaat b . Need andmed määravad sirge s kaks punkti $A \equiv (a | 0)$ ja $B \equiv (0 | b)$. Rakendades eespool-tuletatud võrrandit sellele juhule, saame

$$\frac{y - 0}{x - a} = \frac{b - 0}{0 - a}$$

ehk, peale teisendamist,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Kokkuvõttes:

sirgel algabstsissiga a ja algordinaadiga b on võrrand

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Ülesanne 2. Koosta sirge võrrand, teades, et tema algabstsiss on 4 ja algordinaat -5 .

Lahendus. Asendades võrrandis

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

a ja b nende väärtustega, saame

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-5} = 1$$

ehk

$$5x - 4y - 20 = 0,$$

millega otsitud võrrand on leitud.

Ülesanne 3. Joonesta sirgjoon, mis on antud oma võrrandiga $5x - 7y - 35 = 0$.

Lahendus. Et koordinaadid 0 ja 0 ei rahulda võrrandit, siis antud sirge ei läbi koordinaatide algust. Määrame lõigud a ja b , mis sirgjoon moodustab abstsiss- ja ordinaatteljel. Et sirge läbib punkti $A \equiv (a | 0)$ ja $B \equiv (0 | b)$, siis peab kumbki paar neid koordinaate rahuldama antud võrrandit; seega

$$5 \cdot a - 7 \cdot 0 - 35 = 0 \quad \text{ja} \quad 5 \cdot 0 - 7 \cdot b - 35 = 0$$

ehk

$$a = 7 \quad \text{ja} \quad b = -5.$$

Saadud lõikude järgi märgime telgedel punktid A ja B ; neid läbiv sirge on otsitav.

Teisiti jõuame eesmärgile, kui antud võrrandi teisendame järjest nii:

$$5x - 7y = 35,$$

$$\frac{5x}{35} - \frac{7y}{35} = 1,$$

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{-5} = 1.$$

Siit näeme, et sirge joonestamiseks vajalised lõigud telgedel on 7 ja -5 .

Ülesanded.

81. Joonesta sirge, mis läbib punktid $P_1 \equiv (-4 | 6)$ ja $P_2 \equiv (8 | 0)$. Koosta selle sirge võrrand.

82. Missugused peavad olema kordaja m ja vabaliige b , et sirge $y = mx + b$ läbiks punktid $(6 | 2)$ ja $(5 | 1)$?

83. Sirge $y = mx + b$ läbib punktid $(-4 | -2)$ ja $(3 | 0)$. Määra kordaja m ja vabaliige b .

84. Koosta järgmiste punktipaaridega määratud sirgete võrrandid:

1. $A \equiv (1 | 1)$ ja $B \equiv (3 | 4)$
2. $C \equiv (2 | -5)$ ja $D \equiv (-4 | -1)$
3. $E \equiv (0 | 0)$ ja $F \equiv (-6 | -4)$
4. $G \equiv (0 | -5)$ ja $H \equiv (7 | 0)$
5. $I \equiv (-1 | -3)$ ja $K \equiv (-5 | -4)$.

85. Kolmnurga tipud on

$$A \equiv (2 | 1), \quad B \equiv (-3 | -2) \text{ ja } C \equiv (3 | -2).$$

Koosta kolmnurga külgsirgete võrrandid.

86. Kirjuta kolmnurga külgsirgete võrrandid, kui kolmnurga tipud on $M \equiv (-4 | 4)$, $N \equiv (5 | -5)$ ja $P \equiv (-3 | 3)$.

87. Kirjuta nelinurga külgsirgete võrrandid, kui nelinurga tipud on $P \equiv (3 | 7)$, $Q \equiv (-1 | 3)$, $R \equiv (1 | -5)$ ja $S \equiv (5 | -1)$.

88. Koosta sirge võrrand, teades, et sirge läbib punktid $(p | q)$ ja $(q | p)$.

89. Otsusta, kas punkti $A \equiv (0 | -2)$ ja punkti $B \equiv (-2 | 0)$ läbib sirge läbib ka punkti $C \equiv (-6 | 4)$.

90. Otsusta, kas punktid $M \equiv (2 | 3)$, $N \equiv (3 | 1)$ ja $P \equiv (-2 | 4)$ asetsevad ühel ja samal sirgel.

91. Kirjuta sirgete võrrandid, kui:

1. sirge algabstsis on $-4\frac{1}{2}$ ja algordinaat on 6;
2. sirge algabstsis on -3 ja algordinaat on -1 ;
3. sirge lõikab x -telge punktis $(2 | 0)$ ja y -telge punktis $(0 | 3)$;
4. sirge lõikab x -telge punktis $(4 | 0)$ ja y -telge punktis $(0 | -1)$.

92. On antud sirged oma võrranditega:

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| 1. $3x + 2y - 6 = 0$ | 3. $4x + 3y + 6 = 0$ |
| 2. $2x - 5y + 10 = 0$ | 4. $x - 2y - 8 = 0$ |

Joonesta need sirged nende telglõikude abil.

93. Kui suur on sirge tõus, kui:

1. algabstsis on 5 ja algordinaat on 10;
2. algabstsis on -4 ja algordinaat on 6;
3. algabstsis on 1,5 ja algordinaat on $-4,5$;
4. algabstsis on -3 ja algordinaat on $-\frac{1}{2}$.

Kirjuta nende sirgete võrrandid tõusu ja algordinaadi kaudu.

94. Sirge moodustab telgedel lõigud a ja b . Kirjuta sirge võrrand algordinaadi ja tõusu kaudu.

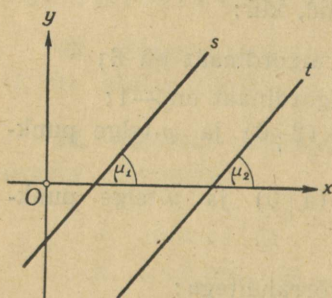
95. Näita, et kolm punkti

$$(a | b), \quad (b | a) \text{ ja } (-a | 2a + b)$$

asetsevad ühel ja samal sirgel.

§ 14. Kahe sirgjoone rööpseisu ja ristseisu tunnused.

Olgu antud kaks rööbikut sirgjoont s ja t . Nende lõikumisel x -teljega tekivad siis võrdsed tõusunurgad (joonis 16); seega



$$\mu_1 = \mu_2.$$

Siit järeldub, et

$$\tan \mu_1 = \tan \mu_2,$$

ehk

$$m_1 = m_2.$$

Seega:

rööbikute sirgete tõusud on võrdsed.

Joonis 16.

Ümberpöördult:

võrdsete tõusudega sirged on rööbikud.

Tõepoolest, kui

$$m_1 = m_2$$

ehk

$$\tan \mu_1 = \tan \mu_2,$$

siis

$$\mu_1 = \mu_2 \quad \text{või} \quad \mu_1 = \mu_2 + 180^\circ.$$

Et tõusunurk on ikka väiksem kui 180° , siis teine võimalus langeb ära ja jääb püsima vaid esimene. Et sirgjoonte s ja t lõikumisel x -teljega tekkinud vastavad nurgad μ_1 ja μ_2 on võrdsed, siis sirgjooned s ja t peavad olema rööbikud, mida oligi tarvis tõestada.

Näide. Sirged

$$2x - 3y = 8 \quad \text{ja} \quad 4x - 6y = 15$$

on rööbikud, sest antud võrrandite lahendamisel y suhtes leiame, et esimese sirge tõus on $\frac{2}{3}$, teise oma $\frac{4}{6}$ ehk ka $\frac{2}{3}$.

Olgu antud kaks ristuvat sirget s ja t (joonis 17). Ühiselt x -teljega nad moodustavad täisnurkse kolmnurga A_1PA_2 , mille teravnurgad on μ_1 ja $180^\circ - \mu_2$. Et täisnurkse kolmnurga ühe teravnurga tangens on teise teravnurga kootangens, siis

$$\tan \mu_1 = \cot (180^\circ - \mu_2)$$

ehk

$$\tan \mu_1 = -\cot \mu_2.$$

Nurga kootangens on võrdne sama nurga tangensi pöördväärtusega; seetõttu

$$\tan \mu_1 = -\frac{1}{\tan \mu_2}$$

ehk

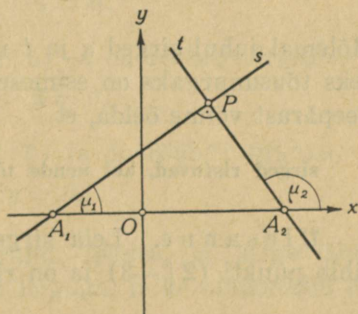
$$\tan \mu_1 \cdot \tan \mu_2 = -1$$

ehk

$$m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Sellest näeme, et

ristuvate sirgete tõusude korrutis on -1 .



Joonis 17.

Ümberpöörduvalt, seosest $m_1 \cdot m_2 = -1$ järgneb, et sirged s ja t ristuvad. Tõepoolest, kui

$$m_1 \cdot m_2 = -1,$$

siis

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{ehk} \quad \tan \mu_1 = -\frac{1}{\tan \mu_2};$$

siit

$$\tan \mu_1 = -\cot \mu_2$$

ehk

$$\tan \mu_1 = \cot (180^\circ - \mu_2)$$

ja seega nurk $180^\circ - \mu_2$ on nurga μ_1 täiendusnurk või ta erineb sellest täiendusnurgast 180° võrra. Järelikult

$$\mu_1 + (180^\circ - \mu_2) = 90^\circ \quad \text{või} \quad \begin{aligned} \mu_1 + (180^\circ - \mu_2) &= \\ &= 90^\circ + 180^\circ \end{aligned}$$

ehk

$$\mu_1 - \mu_2 = -90^\circ \quad \text{või} \quad \mu_1 - \mu_2 = 90^\circ$$

ehk

$$\mu_2 = \mu_1 + 90^\circ \quad \text{või} \quad \mu_1 = \mu_2 + 90^\circ.$$

Mõlemal juhul sirged s ja t ristuvad, kusjuures nürinurksiks tõusunurgaks on esimesel juhul μ_2 ja teisel juhul μ_1 . Seepärast võime öelda, et

sirged ristuvad, kui nende tõusude korrutis on -1 .

Ülesanne. Leia sirge võrrand, teades, et sirge läbib punkti $(2 | -3)$ ja on risti sirgega $4x - 3y + 6 = 0$.

Lahendus. Antud sirge tõus on $\frac{4}{3}$, seega otsitava sirge tõus on $-\frac{3}{4}$. Järelikult otsitav võrrand on

$$y - (-3) = -\frac{3}{4}(x - 2)$$

ehk, peale lihtsustamist,

$$3x + 4y + 6 = 0.$$

Ülesanded.

96. Antud on sirged:

$$3x + 2y - 3 = 0, \quad x + 6y = 1 \quad \text{ja} \quad 4y = 9 - 6x.$$

Missugused nende sirgete hulgas on rööpsirged?

97. Anna sirge võrrand, teades, et sirge läbib punkti $(-4 | 3)$ ja on rööbiti sirgega $y = -\frac{3}{5}x + 2$.

98. Anna sirge võrrand, teades, et sirge on rööbiti sirgega $y = 0,8x - 5$ ja läbib koordinaatide alguse.

99. Anna sirge võrrand, teades, et

1. sirge läbib punkti $(0 | 0)$ ja on rööbiti sirgega

$$3x - 4y + 1 = 0;$$

2. sirge läbib punkti $(2 | 5)$ ja on rööbiti sirgega

$$2x - 3y - 2 = 0;$$

3. sirge läbib punkti $(7 | 0)$ ja on rööbiti sirgega

$$5x + 2y = 0.$$

100. Koosta sirge võrrand, teades, et sirge läbib punkti $(-1 | 2)$ ja on rööbiti lõiguga, mille otspunktid on $A \equiv (2 | -1)$ ja $B \equiv (3 | 4)$.

101. Rööpküliku kahe külgsirge võrrandid on $x + y + 1 = 0$ ja $x - 4y - 4 = 0$. Koosta ülejäänud kahe külgsirge võrrandid, kui nad läbivad punkti $(1 | 3)$. Joonesta see rööpkülik.

102. Sirgele $y = 0,6x + 1,6$ on koordinaatide algusest joonestatud ristsirge. Leia ristsirge võrrand.

103. Punktist $(2 \mid -2)$ on sirgele $y = 2,5x - 9$ joonestatud ristsirge. Leia ristsirge võrrand.

104. Punktist $(0 \mid 5)$ on punkte $(2 \mid 1)$ ja $(4 \mid 0)$ ühendavale lõigule joonestatud ristsirge. Leia ristsirge võrrand.

105. Kolmnurga tipud on $(4 \mid 2)$, $(-3 \mid 5)$ ja $(0 \mid 0)$. Leia kolmnurga kõrgussirgete võrrandid.

106. Kolmnurga tipud on $(5 \mid 0)$, $(-2 \mid 3)$ ja $(0 \mid -2)$. Leia kolmnurga kõrgussirgete võrrandid.

107. On antud punkt $A_1 \equiv (3 \mid -1)$ ja punkt $A_2 \equiv (-2 \mid 1)$. Leia nende punktide sümmeetriatelje võrrand.

108. Punkt $P \equiv (a \mid b)$ on ühendatud algusega ja tekkinud lõigule tõmmatud punktist P ristsirge. Anna selle viimase võrrand.

109. Leia selle joone võrrand, mida mööda punkt peaks liikuma oma lähtekohast $(3 \mid 8)$, et lühimal teel jõuda joonele $y = \frac{1}{2}x - 1$.

110. Sirge moodustab telglõigud a ja b . Tema alordinaadi lõpus on tõmmatud sirgele ristsirge. Kui suurt pindala omab kolmnurk, mida piirab x -telg ühes kahe varemalt nimetatud sirgega?

§ 15. Kahe sirgjoone lõikepunkt.

Olgu antud kaks sirgjoont s_1 ja s_2 oma võrranditega

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{ja} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Kuidas arvutada nende sirgjoonte lõikepunkti P koordinaate?

Märgime need, esialgselt tundmatud koordinaadid tähtedega ξ ja η . Et punkt $P \equiv (\xi | \eta)$ asetseb sirgel s_1 , siis peab olema

$$A_1 \xi + B_1 \eta + C = 0;$$

et sama punkt asetseb ka sirgel s_2 , siis peab olema

$$A_2 \xi + B_2 \eta + C = 0.$$

Nii näeme, et otsitavad koordinaadid peavad rahuldama nii üht kui teist antud võrrandit. Järelikult need koordinaadid saadakse lahendades süsteemi, mis koosneb kahest antud võrrandist.

Kokkuvõttes:

et saada kahe sirgjoone lõikepunkti koordinaate, tuleb lahendada süsteem, mis koosneb antud sirgjoonte võrrandist.

N ä i d e.

Sirgjoonte

$$3x + 5y - 1 = 0$$

ja

$$y = 2x - 5$$

lõikepunkti koordinaadid saame lahendades antud võrrandist koosneva süsteemi. Asendusvõtet kasutades leiame

$$3x + 5(2x - 5) - 1 = 0,$$

millest

$$x = 2$$

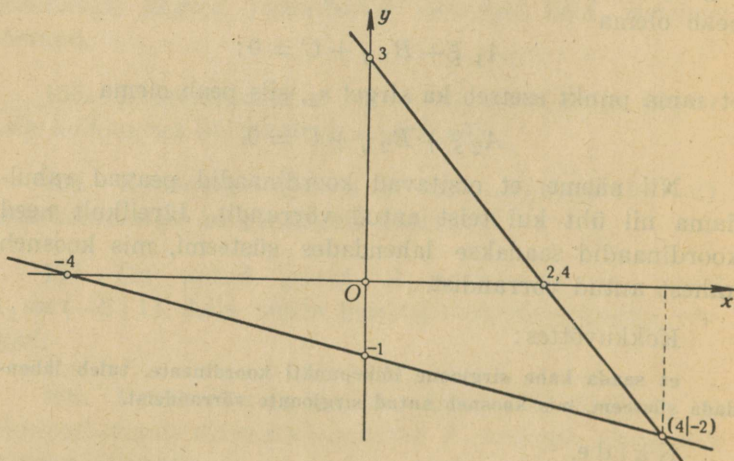
ja järelikult

$$y = 2 \cdot 2 - 5 = -1.$$

Niisiis lõikuvad antud sirged punktis $(2 | -1)$.

Asjaolu, et lineaarse võrrandi geomeetriliseks vasteks on sirgjoon, võime kasutada kahe tundmatuga lineaarvõr-

rand-süsteemi graafiliseks lahendamiseks. Selleks joonestame süsteemi võrranditega määratud sirgjooned ja leiame joonisest nende lõikepunkti abstsissi ja ordinaadi.



Joonis 18.

Et see lõikepunkt asetseb nii ühel kui ka teisel sirgel, siis rahuldavad tema koordinaadid mõlemaid süsteemi kuuluvaid võrrandeid ja järelikult need koordinaadid ongi võrrand-süsteemi lahendid.

Näide. Olgu antud lahendada võrrand-süsteem

$$\begin{cases} x + 4y + 4 = 0 \\ 5x + 4y - 12 = 0. \end{cases}$$

Joonestades algabstsissi ja algordinaadi järgi nii esimese kui ka teise sirgjoone (joonis 18), leiame nende lõikepunkti koordinaatidena

$$x = 4 \quad \text{ja} \quad y = -2.$$

Need ongi antud võrrand-süsteemi lahendid.

Ülesanded.

111. Leia järgmiste sirgetepaaride lõikepunktid:

$$1. \quad y = 2x - 2 \quad \text{ja} \quad y = \frac{3}{4}x + 1$$

$$2. \quad y = -3x + 10 \quad \text{ja} \quad y = \frac{1}{2}x + 3$$

$$3. \quad y = 2x - 5 \quad \text{ja} \quad x - 2y = 2$$

$$4. \quad 7x + 2y = 20 \quad \text{ja} \quad 4x - 5y = -7$$

$$5. \quad 5x - 4y - 1 = 0 \quad \text{ja} \quad 2x + 3y + 18 = 0.$$

112. Lahenda graafiliselt järgmised võrrandsüsteemid ja kontrolli tulemused, asetades nad tundmatute asemele:

$$1. \quad \begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 5x - 2y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} 4x + 7y - 5 = 0 \\ 2x - 5y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 5 \\ \frac{x}{8} + \frac{y}{3} = 7 \end{cases}$$

113. Lahenda järgmised võrrandsüsteemid arvutamise teel ja kontrolli tulemused graafiliselt:

$$1. \quad \begin{cases} 10x + 3y = 25 \\ 5x + 9y = -25 \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} 5x - 4y = 20 \\ 10x - 8y = 40 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} 9x + 6y = 18 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} 2x + 3y = -9 \\ 5x + 7y = -25 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} 4x + 3y = 26 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} 7x - y = 7 \\ 21x - 3y = 14 \end{cases}$$

Ülesandeid sirgete kohta.

114. Kolmnurga külgsirgete võrrandid on
 $x - 2y + 6 = 0$, $8x + y + 14 = 0$ ja $10x - 3y - 8 = 0$.
 Leia kolmnurga tipud.

115. Leia, kui suure nurga moodustavad teineteisega
 iga kaks järgmist sirget:

1. $y = x - 1$ ja $2x - y - 3 = 0$

2. $3x - 4y - 6 = 0$ ja $y = 0,5x + 1$

116. Kolmnurga külgsirged on $x - 2y + 6 = 0$,
 $8x + y + 14 = 0$ ja $10x - 3y - 8 = 0$. Leia kolmnurga
 nurgad.

117. Kolmnurga tipud on $P \equiv (2 | 3)$, $Q \equiv (-1 | 2)$
 ja $R \equiv (3 | -1)$. Leia kolmnurga nurgad.

118. Kui kaugel on sirgete $3x + 2y + 7 = 0$ ja
 $x - 5y - 8 = 0$ lõikepunkt koordinaatide algusest?

119. On antud sirged

$$3x + 2y + 7 = 0 \quad \text{ja} \quad x - 5y - 8 = 0.$$

Koosta nende lõikepunkti ja koordinaatide algust ühen-
 dava sirge võrrand.

120. Arvuta sirgete $3x + 7y = 18$ ja $7x - 5y = 10$
 lõikepunkti kaugus punktist $(5 | 3)$.

121. On antud sirged

$$3x + 7y = 18 \quad \text{ja} \quad 7x - 5y = 10.$$

Nende lõikepunkt ja punkt $(5 | 3)$ määravad kolmanda
 sirge. Anna selle sirge võrrand.

122. Kas sirged

$$2x + 3y = 11, \quad 2x - y = 2 \quad \text{ja} \quad 6x + 17y = 51$$

lõikuvad ühes punktis või moodustavad kolmnurga?

123. Näita, et sirged

$$ax + by = 1, \quad bx + ay = 1 \quad \text{ja} \quad x - y = 0$$

lõikuvad ühes punktis.

124. Kolmnurga tipud on:

$$A \equiv (6 \mid -4), \quad B \equiv (-4 \mid 5) \quad \text{ja} \quad C \equiv (-3 \mid -3).$$

Anna punktidest A ja B tõmmatud mediaansirgete võrrandid. Määra nende kahe mediaani lõikepunkt. Näita, et seda punkti läbib ka kolmas, tipust C tõmmatud mediaan.

125. Kolmnurga tipud on:

$$A \equiv (6 \mid 8), \quad B \equiv (-4 \mid 2) \quad \text{ja} \quad C \equiv (2 \mid -4).$$

Anna kolmnurga külgede keskristsirgete võrrandid. Näita, et 3 keskristsirget lõikuvad ühes punktis. Kui suur on kolmnurga ümber joonestatud ringjoone raadius?

126. Olgu antud sirge $y = 5 + \sqrt{3}x$. Kui kaugel on sirge koordinaatide algusest?

127. Arvuta kaugus koordinaatide alguse ja sirge $3x + 4y = 12$ vahel.

128. Kui kaugel koordinaatide algusest on punktidega $(3 \mid -1)$ ja $(1 \mid 5)$ määratud sirge?

129. Määra kaugus kahe paralleelse sirge vahel, mille võrrandid on $3x + 4y - 4 = 0$ ja $3x + 4y + 8 = 0$.

Peatükk III.

Ringjoon.

§ 16. Ringjoone võrrand.

Ringjoon on määratud, kui on antud tema keskpunkt ja raadius, sest nende andmete järgi saab ringjoont joonestada. Olgu punkt $C \equiv (a | b)$ ringjoone keskpunkt ja r ringjoone raadius. Leiame selle ringjoone võrrandi. Selleks võtame ringjoonel vabalt punkti $P \equiv (x | y)$ (joonis 19). Siis on CP üks ringi raadiustest, seega $CP = r$,

järelikult $CP^2 = r^2$. Avaldades viimase võrduse vasaku poole punktide C ja P koordinaatide abil, saame

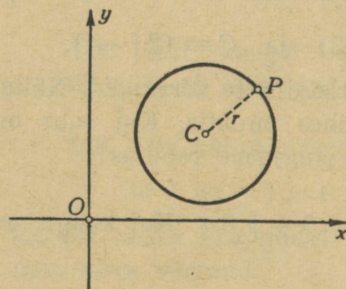
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

See võrdus seob punkti P koordinaate antud suurus-
tega a , b ja r . Et punkt P oli ringjoonel võetud vabalt, siis leitud seos kehtib ringjoone ig a punkti puhul;

järelikult see seos ongi ringjoone võrrand.

Erijuhul, kui ringjoone keskpunkt asetseb koordinaatide alguses, on $a = 0$ ja $b = 0$ ning ringjoone võrrand omab kuju

$$x^2 + y^2 = r^2.$$



Joonis 19.

Kokkuvõttes:

kui ringjoone keskpunkti koordinaadid on a ja b ning raadius on r , siis ringjoone võrrandiks on

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2;$$

kui ringjoone keskpunkt asetseb koordinaatide alguses ja ringjoone raadius on r , siis ringjoone võrrandiks on

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ümberpöördult, võrrand

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

esindab arvude a , b ja r igasugustel väärtustel ringjoont. Tõepoolest, võrrand ütleb, et punkt, mille koordinaadid x ja y rahuldavad antud võrrandit, asetseb kindlast punktist ($a | b$) kaugusel, mille ruut on jääv r^2 ; järelikult on kõnesolev kaugus ise jääv. Punktid aga, mis asetsevad jääval kaugusel kindlast punktist, moodustavad ringjoone.

Avades sulud, saame ringjoone võrrandi kirjutada kujul

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0.$$

Kui selles võrrandis peaks esinema murdarvulisi kordajaid (kaasa arvatud vaba liige), siis korrutame võrrandi kummagi poole kohaselt valitud teguriga k ja saame võrrandi täisarvuliste kordajatega:

$$kx^2 + ky^2 - 2kax - 2kby + k(a^2 + b^2 - r^2) = 0.$$

See võrrand on x ja y suhtes teise astme võrrand; ta on selles mõttes erikujuline, et temas puudub liige muutujate korrutisega ja muutujate ruutude kordajad on võrdsed. Näitame, et iga teise astme võrrand muutujatega x ja y , mille puhul on täidetud praegu-nimetatud tingimused, teiseneb võrrandiks

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

ja esindab seega ringjoont. Tõepoolest, olgu tegemist võrrandiga, mis rahuldab eespool-nimetatud tingimusi. Kirjutame ta kujul:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0.$$

Jagades võrrandi kummagi poole kordajaga A ja kirjutades liikmed teises järjekorras, saame

$$x^2 + \frac{B}{A}x + y^2 + \frac{C}{A}y + \frac{D}{A} = 0.$$

Täiendades esimese ja teise liikme summat, samuti kolmanda ja neljanda liikme summat täisruuduks, saame eelmisega samaväärse võrrandi

$$\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2}\right) + \left(y^2 + \frac{C}{A}y + \frac{C^2}{4A^2}\right) + \frac{D}{A} - \frac{B^2}{4A^2} - \frac{C^2}{4A^2} = 0$$

ehk

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2}.$$

Vasakul poolel seisab kahe ruudu summa; see on igal juhul positiivne; et võrrandil oleks lahendeid, peab ka paremal poolel seisev avaldis olema positiivne; vastasel korral pole võimalik võrrandit rahuldada ühegi x ja y väärtuste paariga. Kui paremal poolel seisev avaldis on positiivne, saame leitud võrrandi kirjutada kujul

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

kus

$$a = -\frac{B}{2A}, \quad b = -\frac{C}{2A} \quad \text{ja} \quad r^2 = \frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2};$$

võrrand $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ on aga ringjoone võrrand, millega eespool-püstitatud väide on tõestatud.

Kokkuvõttes:

teise astme võrrand muutujatega x ja y , milles puudub liige muutujate korrutisega ja milles muutujate ruutude kordajad on võrdsed, esindab kas ringjoont või temale ei vasta ühtki geomeetrilist kujundit.

N ä i d e. Võrrandit

$$2x^2 + 2y^2 + 5x - 8y + 10 = 0$$

saame peale kõigi liikmete jagamist 2-ga kirjutada kujul

$$(x^2 + \frac{5}{2}x) + (y^2 - 4y) + 5 = 0$$

ehk

$$(x^2 + 2 \cdot \frac{5}{4}x + \frac{25}{16}) + (y^2 - 2 \cdot 2y + 4) + (5 - \frac{25}{16} - 4) = 0$$

ehk

$$(x + \frac{5}{4})^2 + (y - 2)^2 = \frac{9}{16}.$$

See on niisuguse ringjoone võrrand, mille keskpunkti koordinaadid on $-\frac{5}{4}$ ja 2 ning raadius on $\frac{3}{4}$.

Ülesanded.

130. Koosta ringjoone võrrand, teades, et

1. ringi keskpunkt on koordinaatide alguses ja ringi raadius on 5;

2. ringi keskpunkt on koordinaatide alguses ja ringjoon läbib punkti $(-2 | 6)$;

3. ringi keskpunkt on $(-3 | 1)$ ja ringi raadius on 4;

4. ringi keskpunkt on $(-4 | -3)$ ja ring puudutab x -telge;

5. ringi keskpunkt on $(3 | 2)$ ja ringjoon läbib koordinaatide alguse;

6. ringi keskpunkt on $(5 | 2)$ ja ringjoon läbib punkti $(6 | -1)$;

7. ringi keskpunkt on II veerandis, ringi raadius on 3 ja ring puudutab kumbagi telge.

131. Joonesta järgmised ringjooned, määrates enne nende keskpunkti ja raadiuse:

1. $x^2 + y^2 = 16$
2. $x^2 + y^2 = 4x$
3. $x^2 + y^2 - 10y = 0$
4. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$
5. $x^2 + y^2 - 2x - 3y + \frac{1}{4} = 0$

132. Määra järgmiste ringjoonte keskpunkt ja raadius:

1. $4x^2 + 4y^2 + 12x - 4y + 5 = 0$
2. $3x^2 + 3y^2 - 14x - 48y = 0$
3. $5x^2 + 5y^2 - 6x + 8y = 12$
4. $49x^2 + 49y^2 - 14x + 28y + 5 = 0$
5. $2x^2 + 2y^2 - x + y = 6$

133. Missugust tingimust peavad rahuldama arvud a , b ja r ringjoone võrrandis $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, et

1. ringi keskpunkt asetseks x -teljel;
2. ring puudutaks y -telge;
3. ring puudutaks x -telge koordinaatide alguses;
4. ring puudutaks kumbagi telge;
5. ringjoon läbiks koordinaatide alguse?

134. Ringjoone keskpunkt asetseb x -teljel ja ringjoon läbib punkte $A \equiv (3 | 3)$ ja $B \equiv (5 | -1)$. Anna ringjoone võrrand.

135. Missugune punkt x -teljel asetseb võrdseil kaugusel punktidest $(-2 | 5)$ ja $(4 | 7)$?

136. Leia ringjoonel $x^2 + y^2 = 81$ asetseva punkti ordinaat, kui punkti abstsiss on 5, 6, -1 , -3 .

137. Leia ringjoone $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ punkti abstsiss, kui punkti ordinaat on 0, 3, -1 .

138. Leia ringjoone võrrand, teades, et ringjoone keskkoh on punktis $(6 | 7)$ ja ringjoon puudutab sirget $5x - 12y - 24 = 0$.

139. Kolmnurga tipud on:

$A \equiv (-1 | 5)$, $B \equiv (-2 | -2)$ ja $C \equiv (3,4 | -3,8)$.

Määra selle kolmnurga ümber joonestatud ringjoone keskpunkt ja raadius.

140. Kolmnurga tipud on:

$O \equiv (0 | 0)$, $A \equiv (a | 0)$ ja $B \equiv (0 | b)$.

Määra selle kolmnurga ümber joonestatud ringjoone keskpunkt ja raadius.

141. On antud punktid $A \equiv (3 | 4)$ ja $B \equiv (-1 | 2)$. Leia selle ringjoone võrrand, mille diameeter on AB .

§ 17. Ringjoone lõikumine sirgjoonega.

Olgu antud ringjoon ja sirgjoon. Seame endile ülesandeks leida nende joonte ühiste punktide koordinaate. Lihtsuse mõttes valime ringi keskpunkti koordinaatide alguseks; siis on ringjoone võrrandiks

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Olgu sirgjoon antud oma algordinaadi b ja tõusuga m ; siis on sirgjoone võrrandiks

$$y = mx + b.$$

Ringjoone ja sirgjoone ühised punktid asetsevad nii esimesel kui teisel joonel; seega nende punktide koordinaa-

did peavad rahuldama nii esimest kui ka teist võrrandit; järelikult otsitavad koordinaadid saadakse lahendades võrrand-süsteemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = mx + b. \end{cases}$$

Sellel süsteemil on kas kaks paari lahendeid või üks paar lahendeid või ei ühtki paari lahendeid. Esimesel juhul antud sirge lõikab ringjoont, teisel juhul sirge puudutab ringjoont ja kolmandal juhul sirge ja ringjoon ei oma ühiseid punkte.

Ü l e s a n n e. Kuidas asetseb sirgjoon

$$3x + 4y + 24 = 0$$

ringjoone

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$$

suhtes?

L a h e n d u s. Leiame mõlema joone ühised punktid. Nende punktide koordinaadid peavad rahuldama nii üht kui ka teist antud võrrandeist. Lahendades esimese võrrandi y suhtes, saame

$$y = -\frac{3}{4}x - 6.$$

Asetades leitud y avaldise teise võrrandisse näeme, et

$$x^2 + \left(-\frac{3}{4}x - 6\right)^2 - 6x + 4\left(-\frac{3}{4}x - 6\right) - 12 = 0.$$

Siit saame peale sulgude avamist ja koondamist, et

$$\frac{25}{16}x^2 = 0$$

ehk

$$x = 0$$

ja sellele vastavalt

$$y = -6.$$

Niisiis antud joontel on üks ühine punkt $(0 | -6)$; järelikult antud sirgjoon puudutab ringjoont.

Ülesanded.

142. Leia punktid, milles ringjoon $x^2 + y^2 = 225$ lõikub sirgetega

$$x = -7, \quad y = -3 \quad \text{ja} \quad 2x + y = 0.$$

143. Missugustes punktides ringjoon

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y = 3$$

lõikab koordinaatide telgi?

144. Leia ringjoone $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0$ ja sirge $5x - y - 2 = 0$ lõikepunktid.

145. Leia ringjoone $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$ ja sirge $2x - 3y = 6$ lõikepunktid.

146. Määra ringjoone $x^2 + y^2 = 37$ ja sirge $x + 3y = 3$ lõikumisel tekkiva kõõlu keskpunkt.

147. Kui pikk kõõl tekib ringjoone

$$x^2 + y^2 + 3x - 2y - 4 = 0$$

ja x -telje lõikumisel?

148. Leia, missugused järgmistest sirgetest puudutavad ringjoont $x^2 + y^2 = 36$, ja määra puutepunktid.

1. $x = 6$

2. $y = 7$

$$y = x + 8$$

$$y = x - 11$$

$$y = \frac{4}{3}x + 10$$

$$y - x = 6\sqrt{2}$$

149. Leia punkt, milles sirge $y = -\frac{4}{3}x + 8\frac{1}{3}$ puudutab ringjoont $x^2 + y^2 = 25$.

150. Näita, et sirge $3x + 4y = -32$ puudutab ringjoont $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$, ja leia puutepunkti koordinaadid.

Peatükk IV.

Ellips.

§ 18. Ellipsi joonestamine.

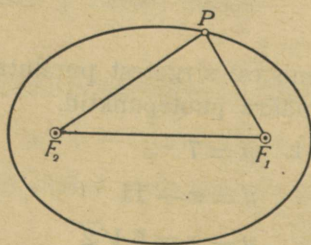
Ellipsiks nimetatakse niisugust tasapinnalist kõverjoont, mille punkti kaugused kahest kindlast punktist annavad jääva suurusega summa.

Neid kindlaid punkte nimetatakse ellipsi fookus-
teks. Olgu punktid F_1 ja F_2 ellipsi fookused ja P ellipsil
vabalt valitud punkt. Ellipsi definitsiooni järgi siis

$$F_1P + F_2P = \text{konst.}^1$$

Võrduse paremal poolel seisvat konstanti on viisiks tähis-
tada sümboliga $2a$, nii et

$$F_1P + F_2P = 2a.$$



Joonis 20.

Lihtsaim võtte ellipsi
joonestamiseks on järgmine:
torkame fookustesse F_1 ja
 F_2 nõelad (joonis 20), pane-
me nõelte ümber kinnise
niidi pikkusega $F_1F_2 + 2a$,
tõmbame pliiatsi teravikuga
niidi pingule ja joonestame
joone nii, nagu pingul olev
niit seda lubab. Nii saadud
joon on ellips, sest, märki-
des pliiatsi teraviku tähega P , leiame, et iga tema asendis

$$F_1F_2 + F_1P + F_2P = F_1F_2 + 2a$$

¹ Lühend *konst* tähendab konstanti ehk jäävat.

ehk

$$F_1P + F_2P = 2a.$$

Siit näeme, et punkt P rahuldab ellipsi punkti kohta seatud nõuet.

Sirglõike, mis ühendavad ellipsi punkti fookustega, nimetatakse ellipsi punkti raadiusvektoriteks.

Viimaseid tähistatakse sümbolitega r_1 ja r_2 . Ellipsi definitsiooni järgi on ikka

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Eespool-toodud ellipsi joonestamise võtte näitab, et

ellips on määratud, kui on teada ellipsi fookused ja raadiusvektorite summa.

Teine võtte ellipsi joonestamiseks on järgmine. Võtame lõigul A_1A_2 pikkusega $2a$ mingi punkti A ; joonestame raadiusega AA_1 fookusest F_1 ringjoone ja raadiusega AA_2 fookusest F_2 teise ringjoone. Lõikugu need ringjooned punktides P_1 ja P_2 . Siis

$$F_1P_1 + F_2P_1 = AA_1 + AA_2 = 2a$$

ja

$$F_1P_2 + F_2P_2 = AA_1 + AA_2 = 2a;$$

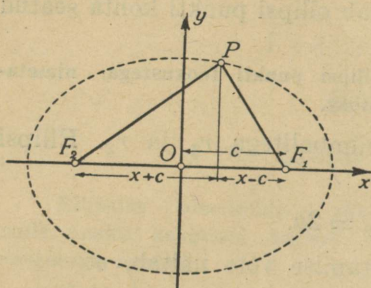
seega nii punkt P_1 kui ka punkt P_2 asetsevad ellipsil.

Muutes punkti A asendit lõigul A_1A_2 ja korrates eespool-toodud võtet, saame veel kaks ellipsi punkti; nõnda edasi minnes võime leida kuitahes palju ellipsi punkte. Neid punkte kõverjoonlaua abil ühendades saame ellipsi.

§ 19. Ellipsi võrrand.

Olgu antud ellipsi fookused F_1 ja F_2 ja raadiusvektorite summa $2a$. Nende andmetega on ellips määratud. Et punktid F_1 ja F_2 on antud, siis on teada ka nende vahe-

line kaugus F_1F_2 . Tähistame selle kauguse, nagu üldiselt viisiks, sümboliga $2c$. Valime sirgjoone F_1F_2 abstsissiteljeks ja lõigu F_1F_2 keskristsirge ordinaatteljeks



Joonis 21.

teljeks ja lõigu F_1F_2 keskristsirge ordinaatteljeks (joonis 21). Siis $F_1 \equiv (c | 0)$ ja $F_2 \equiv (-c | 0)$. Seame endile nüüd ülesandeks leida ellipsi võrrandit. Selle ülesande lahendamiseks arutame nõnda:

Olgu P mingi punkt ellipsil, missugune nimelt, selle jätame ütlemata. Siis

$$F_1P + F_2P = 2a$$

ehk

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Kui punkti P koordinaadid tähistame tähtedega x ja y , siis

$$r_1^2 = (x - c)^2 + (y - 0)^2$$

$$r_2^2 = (x + c)^2 + (y - 0)^2$$

ja seepärast

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a.$$

Et punkt P oli mingi punkt ellipsil, siis leitud seos x , y ja konstantide a ja c vahel on täidetud ellipsi i ga punkti puhul; järelikult leitud võrrand ongi ellipsi võrrand.

Anname sellele võrrandile ruutjuurtest vaba kuju. Selleks viime ühe ruutjuure paremale poolele; saame:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2};$$

astendame võrrandi kummagi poole 2-ga; saame:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2;$$

peale sulgude avamist ja koondamist leiame, et

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx;$$

astendame uuesti kummagi poole 2-ga ja koondame; saame:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Otsustame, missugune on vahe $a^2 - c^2$ märk. Kolmnurgast F_1PF_2 saame (joonis 21), et

$$F_1P + F_2P > F_1F_2$$

ehk $2a > 2c$, seega $a > c$, järelikult $a^2 > c^2$ ja lõpuks $a^2 - c^2 > 0$. Niisiis vahe $a^2 - c^2$ on igal juhul positiivne. Seepärast võime teda lühiduse mõttes kirjutada kujul b^2 , mille järel ellipsi võrrand omandab kuju

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

ehk

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Uurime, missugune on arvude a ja b geomeetriline tähendus. Selleks leiame ellipsi lõikepunktide koordinaatide telgedega. Lõikepunktis x -teljega on $y = 0$, seega $\frac{x^2}{a^2} = 1$, $x^2 = a^2$ ja $x = \pm a$. Samal viisil leiame, et lõikepunktis y -teljega on $y = \pm b$. Näeme, et ellips lõikab x -telge punktides (joonis 22)

$$A_1 \equiv (a | 0) \quad \text{ja} \quad A_2 \equiv (-a | 0)$$

ja y -telge punktides

$$B_1 \equiv (0 | b) \quad \text{ja} \quad B_2 \equiv (0 | -b).$$

Neid 4 punkti nimetatakse ellipsi lagipunktideks, sirglõike $A_1A_2 = 2a$ ja $B_1B_2 = 2b$ ellipsi telgedeks, nende lõikepunkti — ellipsi keskpunktiks.

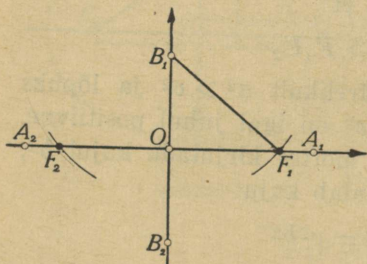
Et

$$a^2 - c^2 = b^2, \quad \text{siis} \quad a^2 = b^2 + c^2, \\ a^2 > b^2, \quad a > b \quad \text{ja} \quad 2a > 2b.$$

Seepärast lõiku A_1A_2 nimetatakse ellipsi suureks teljeks, lõiku B_1B_2 — ellipsi väikeseks teljeks. Vastavalt sellele a on ellipsi suur pooltelg ja b ellipsi väike pooltelg.

Kirjutades a , b ja c vahelise seose kujul

$$c^2 = a^2 - b^2,$$



Joonis 22.

näeme, et ellipsi pooltelgede andmisega on määratud ka fookuste vaheline kaugus, ehk, teisiti, punktid A_1 , A_2 , B_1 ja B_2 määravad ka F_1 ja F_2 . Tõepoolest, joonestades väikese telje otspunktist B_1 (või B_2) (joonis 22) ringjoone raadiusega a , näeme, et ta lõikab suurt telge just

punktides F_1 ja F_2 .

Fookuste vahelise kauguse suhet suurese teljesse nimetatakse ellipsi ekstsentrilisuseks ja tähistatakse tähega e . Definiitsiooni järgi $e = 2c : 2a$ ehk

$$e = \frac{c}{a}$$

ehk, teisiti,

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Et $a > c$, siis ekstsentrilisus $e < 1$.

Kokkuvõttes:

Pooltelgedega a ja b ellipsi võrrand on $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ellipsi fookused asetsevad suurel teljel kaugusel $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ellipsi keskpunktist.

Ellipsi ekstsentrilisus $e = \frac{c}{a}$ on väiksem kui 1.

Ülesanded.

151. Joonesta ellips, mille poolteljed on 6 ja 1,5.

152. Joonesta ellips $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

153. Vana-Rooma amfiteatrid ehitati enamasti ellipsikujulise põhiplaaniga. Nii on Kolosseumi põhiplaaniks ellips telgedega 188 m ja 156 m; selle keskel asetseb, omades esimesega ühiseid telgsirgeid, ellipsikujuline areen telgedega 86 m ja 54 m. Joonesta Kolosseumi põhiplaan mõõdus 1 : 2000.

154. Kirjuta ellipsi võrrand, kui ellipsi poolteljed on 10 ja 8.

155. Kui pikad on järgmiste ellipsite poolteljed:

1. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

4. $x^2 + 4y^2 = 1$

2. $8x^2 + 25y^2 = 200$

5. $16x^2 + 25y^2 = 1$

3. $x^2 + 4y^2 = 9$

6. $6x^2 + 10y^2 = 1$

156. Leia ellipsi $2x^2 + 3y^2 = 6$ ja sirge $y = 4x$ lõikepunktid.

157. Joonesta ellipsi $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ telgede otspunktid ja leia konstruktsiooni teel ellipsi fookused.

158. Ellipsi fookused asetsevad vastavalt punktides $F_1 \equiv (1 | 0)$ ja $F_2 \equiv (-1 | 0)$; ellipsi suur telg on 3. Kirjuta selle ellipsi võrrand.

159. Leia ellipsi võrrand, teades, et raadiusvektorite summa on 10 ja fookuste vaheline kaugus on 8.

160. Ellipsil $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ on võetud punkt, mille abstsiss on 2. Arvuta selle punkti kaugused fookustest.

161. Ellipsil $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ on võetud punkt, mille ordinaat on $\frac{1}{2}$. Arvuta sellesse punkti viivate raadiusvektorite pikkused.

162. Kui pikk on ellipsi $9x^2 + 16y^2 = 144$ kõõl, mis läbib fookuse ja on risti ellipsi suure teljega?

163. Kui pikad on raadiusvektorid, mis viivad ellipsi $x^2 + 3y^2 = 12$ ja sirge $x + 3y = 6$ lõikepunktidesse?

164. Ellipsi poolteljed on 5 cm ja 3 cm. Arvuta fookuste vaheline kaugus ja ekstsentrismus.

165. Ellipsi väike pooltelg on 5 ja fookuste kaugus algusest on 24. Arvuta ellipsi ekstsentrismus.

166. Ellipsi suur telg on 2 korda pikem väikesest teljest. Kui suur on ellipsi ekstsentrismus?

167. Ellipsi ekstsentrismus on $\frac{3}{5}$ ja väike pooltelg on 4 cm. Kui pikk on suur pooltelg?

168. Ellipsi suur telg on $2a$, ekstsentrismus e . Kui suur on lühima ja pikima raadiusvektorite suhe?

169. Maa liigub Päikese ümber ellipsis, mille ühes fookuses on Päike. Maa ja Päikese vaheline väikesim ja suurim kaugus suhtuvad ligikaudu nagu 29 : 30. Määra Maa orbiidi ekstsentrismus.

170. Kui pikk on ellipsis $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ kujundatud ruudu külge?

§ 20. Ellipsi uurimine tema võrrandi põhjal.

Lahendades ellipsi võrrandi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

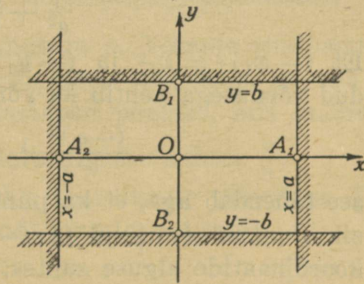
ordinaadi y suhtes, leiame, et

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Saadud avaldisel on mõte üksnes siis, kui juuritav pole negatiivne; see tähendab, et $a^2 - x^2 \geq 0$ ehk $x^2 \leq a^2$ ehk $|x| \leq a$ ehk, teisiti,

$$-a \leq x \leq +a.$$

Sellest näeme, et ükski ellipsi punkt ei asetse vasakul pool sirget $x = -a$ ega paremal pool sirget $x = +a$ (joonis 23). Analoogiliselt leiaksime ellipsi võrrandi lahendamisel abstsissi x suhtes, et



Joonis 23.

$$-b \leq y \leq +b;$$

siit järeldame, et ükski ellipsi punkt ei asetse ülalpool sirget $y = +b$ ega allpool sirget $y = -b$.

Kokkuvõttes:

kõik ellipsi punktid asetsevad ristkülikus, mille sümmeetriatelgedeks on ellipsi teljed.

Olgu x_1 mingi x -i väärtus $-a$ ja $+a$ vahel. Sellele x -i väärtusele vastavad kaks y -väärtust:

$$y_1' = + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_1^2} \quad \text{ja} \quad y_1'' = - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_1^2};$$

need erinevad üksnes märgi poolest: $y_1' = -y_1''$. See

tähendab, et sümmeetriliselt punktiga $(x_1 | y_1')$ esineb ellipsil ikka ka punkt $(x_1 | -y_1')$, teiste sõnadega, ellips on sümmeetriline oma suure telje suhtes.

Samal viisil näitame, et ellips on sümmeetriline oma väikese telje suhtes.

Olgu $(x_1 | y_1)$ üks ellipsi punktidest; siis koordinaadid x_1 ja y_1 rahuldavad ellipsi võrrandit; järelikut

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Et $(-x_1)^2 = x_1^2$ ja $(-y_1)^2 = y_1^2$, siis ühtaegu ülaltoodud võrdusega kehtib ka võrdus

$$\frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{(-y_1)^2}{b^2} = 1;$$

see tähendab aga, et ka punkt $(-x_1 | -y_1)$ asetseb ellipsil. Punktid $(x_1 | y_1)$ ja $(-x_1 | -y_1)$ on sümmeetrilised koordinaatide alguse suhtes. Seetõttu koordinaatide alguspunkti nimetatakse ellipsi keskpunktiks. Niisiis ellips on sümmeetriline oma keskpunkti suhtes.

Vaatleme lõpuks ellipsi kuju olenevuses ellipsi ekstsentrisusest. Ekstsentrisuse definitsiooni järgi

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a};$$

sellest leiame, et

$$c = ae$$

ja

$$b = a\sqrt{1 - e^2}.$$

Loeme suure telje jäävaks. Ekstsentrisuse kasvades nullist üheni näeme viimastest valemitest, et fookuse kaugus keskpunktist kasvab nullist suure pooltelje väärtuseni, väike pooltelg aga väheneb suurest poolteljest nullini. See tähendab: ellipsi ekstsentrisuse kasvades ellipsi fookuste

vahe järjest kasvab, väike telg aga järjest väheneb ja ellips muutub järjest lamedamaks. Ekstsentrilisuse e lähenedes 1-le läheneb c a -le ja b läheneb 0-le: ellips läheneb kujult sirgjoone lõigule. Ekstsentrilisuse e lähenedes 0-le läheneb ka c 0-le, fookused lähenevad järjest keskpunktile, b läheneb a -le, teiste sõnadega, ellips läheneb oma kujult ringjoonele.

§ 21. Ellips ringjoone normaalprojektsioonina.

Olgu antud ringjoon raadiusega a . Võtame ringjoone kaks ristuvat diameetrit koordinaatide telgedeks ja vaatame, missuguse kõvera moodustavad punktid, mis saame vähendades ringjoone punktide ordinaate suhtes $\frac{m}{n}$.

Tähistades ringjoone punkti koordinaate tähtedega X ja Y , saame ringjoone võrrandi kirjutada kujul

$$X^2 + Y^2 = a^2.$$

Ringjoone punkti $(X|Y)$ abstsissi endiseks jätmisel ja ordinaadi vähendamisel suhtes $\frac{m}{n}$ saame punkti abstsissiga $x = X$ ja ordinaadiga $y = \frac{m}{n} Y$. Et ümberpöörduvalt $X = x$ ja $Y = \frac{n}{m} y$, siis ringjoone võrrandi põhjal

$$x^2 + \left(\frac{n}{m} y\right)^2 = a^2$$

ehk

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{m}{n} a\right)^2} = 1.$$

See on niisuguse ellipsi võrrand, millel suur pooltelg on a ja väike pooltelg on $\frac{m}{n} a$.

Kokkuvõttes:

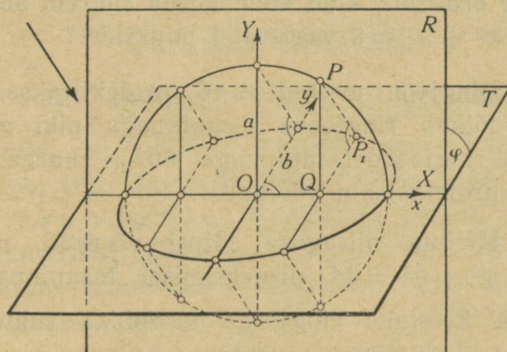
kui ringjoone punktide ordinaate vähendada mingis kindlas suhtes, siis asetsevad ordinaatide uued lõpp-punktid ellipsil.

Joonisest näeme, et kolmnurgas PP_1Q on nurk PP_1Q täisnurk, nurk $PQP_1 = \varphi$, järelikult

$$QP_1 = QP \cos \varphi$$

ehk

$$y = Y \cos \varphi.$$



Joonis 25

Et ringjoone võrrand on

$$X^2 + Y^2 = a^2$$

ja $X = x$, $Y = \frac{y}{\cos \varphi}$, siis ringjoone projektsiooni võrrand on

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2 \varphi} = a^2$$

ehk

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 \cos^2 \varphi} = 1.$$

See aga on niisuguse ellipsi võrrand, mille poolteljed on a ja $a \cos \varphi$. Näeme, et projektsioonitasapinnale risti langevad kiired heidavad kaldu seisva tasapinna ringist projektsioonitasapinnale ellipsikujulise varju.

Ülesanded.

171. Olgu antud ringjoon $x^2 + y^2 = r^2$. Missuguse joone täidavad ringjoone punktide ordinaatlõikude poolitamispunktid?

172. Missuguse joone täidavad punktid, millel on niisama suur ordinaat, kuid kolm korda suurem abstsiss kui ringjoone $x^2 + y^2 = 9$ vastavatel punktidel?

173. Ringjoon $x^2 + y^2 = 16$ projektitakse tasapinnale, mis lõikub ringjoone tasapinnaga piki x -telge ja moodustab ringjoone tasapinnaga 60° -se nurga. Kirjuta ringjoone projektsiooni võrrand.

174. Kirjuta niisuguse ellipsi võrrand, mis tekib ringjoone $x^2 + y^2 = 64$ projektimisel tasapinnale, mille kaldenurga koosinus ringjoone tasapinna suhtes on $\frac{1}{3}$. Kui suured on ellipsi poolteljed?

175. Maja lõunapoolsel küljel on seinast välja ehitatud poolringikujulise alusega rõdu. Keskpäeval näeme maja seinal rõdu poolellipsikujulist varju. Leia päikese kõrgusnurk üle horisondi, teades, et ellipsi püst- ja rõhtpoolteljed suhtuvad nagu 2 : 3.

176. Silindri raadius on 10 cm. Silinder on lõigatud tasapinnaga, mis moodustab silindri põhjaga nurga 45° . Võttes löikejoone kõrgeimat ja madalaimat punkti läbiva sirge x -teljeks ja sellega ristuva ning silindri telge lõikava sirge lõiketasapinnal y -teljeks, kirjuta löikejoone võrrand.

177. Kerast, mille läbimõõt on 30 cm, heidavad päikesekiired põrandale varju. Anna varju äärjoone võrrand, teades, et päikesekiired moodustavad põrandaga 30° -se nurga.

MATEMAATILINE ANALÜÜS.

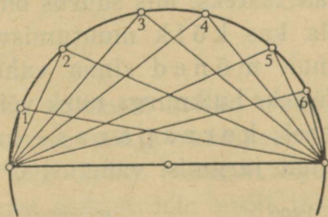
Peatükk V.

Suuruste olenevus.

§ 22. Jäävad ja muutuvad suurused.

Suurusi, mis esinevad mõne küsimuse matemaatilisel käsitlemisel, võib liigitada kahte liiki: ühed, millel on ainult üks numbriline väärtus, ja teised, mis võivad omada numbrilisi väärtusi enam kui ühe. Esimest liiki suurusi nimetatakse jäävaiks suuruseks, lühidalt jäävaiks ehk konstantideks; teist liiki suurusi nimetatakse muutuvaiks suuruseks, lühidalt muutujaiks.

Näide. Joonestame ringi sisse rea kolmnurki, millele üheks küljeks on diameeter (joonis 26). Nummerridame need kolmnurgad numbritega 1, 2, 3, ... Siis kolmnurga numbri muutudes kolmnurga üks külg on jääv, selle külje vastasnurk on jääv; teine külg, kolmas külg, kolmnurga übermõõt ja kolmnurga pindala on muutuvad; kolmnurga jääva külje lähisnurgad on muutuvad, nende nurkade summa aga on jääv.



Joonis 26.

Muutuv suurus võib omandada mitmesuguseid väärtusi. Kui ükski suuruse s väärtustest ei ole väiksem arvust

a ja ükski neist ei ole suurem arvust b , siis ütleme, et selle suuruse muutumine on altpoolt tõkestatud arvuga a ja ülaltpoolt arvuga b ; ka ütleme siis, et suuruse s muutumisvahemik ulatub arvust a arvuni b . Näiteks sin a muutumisvahemik ulatub arvust -1 arvuni 1 . Et sin a seejuures võib omandada ka väärtused -1 ja $+1$, siis kirjutame tema muutumisvahemiku järgmiselt:

$$-1 \leq \sin a \leq +1.$$

Kui suuruse s muutumine altpoolt pole tõkestatud, ülaltpoolt aga on tõkestatud arvuga a , siis ütleme, et suurus s muutub miinus lõpmatuses a -ni; kui suuruse s muutumine on altpoolt tõkestatud arvuga a , ülaltpoolt aga on tõkestamata, siis ütleme, et suurus s muutub a -st pluss lõpmatuseni; kui suuruse s muutumine pole tõkestatud ei alt- ega ülaltpoolt, siis ütleme, et ta muutub miinus lõpmatuses pluss lõpmatuseni. Sõna „lõpmatus“ asendatakse kirjas sümboliga ∞ . Nii ütleme; et nurga tangens muutub miinus lõpmatuses pluss lõpmatuseni ja kirjutame:

$$-\infty \leq \tan a \leq +\infty.$$

Väärtusteks, mis suurus oma muutumisel omandab, võivad olla kas kõik muutumisvahemikku kuuluvad arvud või ainult mõned sinna vahemikku kuuluvad eriarvud. Näiteks hulknurga nurk võib omada iga väärtust 0° ja 180° vahel; korrapärase hulknurga nurk võib omada aga ainult järgmisi väärtusi 0° ja 180° vahel:

$$\frac{1 \cdot 180^\circ}{3} \text{ ehk } 60^\circ, \quad \frac{2 \cdot 180^\circ}{4} \text{ ehk } 90^\circ, \quad \frac{3 \cdot 180^\circ}{5} \text{ ehk } 108^\circ, \dots$$

üldiselt

$$\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n},$$

kus n on kahest suurem täisarv.

§ 23. Funktsioon ja argument.

On olemas suurusi, mis on teineteisega niiviisi seotud, et ühe suuruse väärtuse etteandmisega on ka teise suuruse väärtus juba ette määratud. Näiteks arvu a etteandmisega on juba määratud tema logaritm; kõvera punkti abstsissi etteandmisega on juba määratud punkti ordinaat; ringi läbimõõdu etteandmisega on juba määratud ringi pindala. Teise suuruse määratud väärtuse leidmine toimub kord tema otsimise teel tabelist, kord mõõtmise, kord jälle arvutamise teel.

Kui ühe suuruse igale väärtusele vastab teise suuruse väärtus, siis öeldakse, et teine suurus on esimesest ehk, teisiti, teine suurus on esimese funktsioon.

Suurust, millest funktsioon on, nimetatakse argumendiks.

Näiteks sirgjoone tõus on sirgjoone tõusunurga funktsioon, ellipsi punkti raadiusvektor on punkti abstsissi funktsioon, kera ruumala on kera läbimõõdu funktsioon, veerõhk meres on sügavuse funktsioon, inimese keha pikkus on aja funktsioon.

Tõsiasi, et suurus y on suuruse x funktsioon, kirjutatakse lühidalt kujul

$$y = f(x).$$

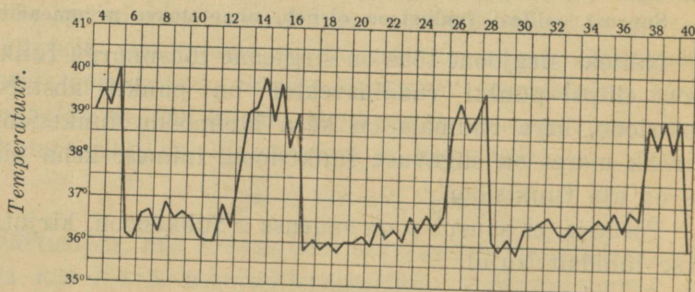
Muutuv suurus võib oleneda mitmest teisest suurus; näiteks silindri ruumala on põhja raadiusest ja silindri kõrgusest, ellipsi väike telg on suurest teljest ja ellipsi ekstsentrisusest, juhtmes elektrivoolu poolt tekitatud soojuse hulk on ajast, voolu tugevusest ja juhtme takistusest. Mitmest muutujast olenevate funktsioonide uurimine toimub ikka nii, et uuritakse funktsiooni olenevust esiteks ühest, siis teisest, siis kolmandast jne. argumendist. Seepärast edaspidi vaatleme ainult ühest muutujast olenevaid funktsioone ja viimaseistki vaid neid, mis

eriti sageli esinevad tegelikkuse poolt seatud ülesannete lahendamisel.

§ 24. Suuruste olenevuse väljendusvahendid.

On mitmeid vahendeid suuruste olenevuse väljendamiseks. Üheks niisuguseks vahendiks on tabel, mille ühte veergu (või ritta) on kirjutatud argumendi väärtused ja teise veergu (või ritta) on kirjutatud funktsiooni vastavad väärtused. Näiteina olgu nimetatud järgmised: siinuste tabel, mille ühes veerus leiame nurga väärtused, tei-

Haiguspäevad.



Korduva soetõve haige kehatemperatuuri graafik.

Joonis 27.

ses veerus vastavad siinuse väärtused; päikese tõusuaegade tabel, kus ühes veerus leiame kalendri päeva, kõrvalveerus päikese vastava tõusuaaja; tulumaksumäärade tabel, mille ühes veerus näeme maksualust tulu, kõrvalveerus vastavat tulumaksumäära.

Teiseks vahendiks suuruste olenevuse väljendamiseks on graafik. Joonisel 27 näeme kujutatuna korduva

soetõve haige inimese kehatemperatuuri olenevust ajast. Siin on iga mõõtmisaeg kujutatud ajateljel abstsissina ja temperatuur abstsissile vastava ordinaadina. Kergema ülevaate saamiseks temperatuuri muutumise käigust on iga kaks järjestikust ordinaadi lõppu ühendatud sirglõiguga. Haige kehatemperatuuri muutumise käik on mõne haiguse puhul (nagu tüüfus, sarlakid ja mitmed teised) niivõrra iseloomustav, et temperatuurikõvera osa esimestel haiguspäevadel kasutatakse abinõuna haiguse eritlemisel.

Kolmandaks vahendiks olenevuse väljendamiseks on valem. Ta annab kokkuvõtlikult eeskirja, kuidas arvutada funktsiooni väärtust, kui argumendi väärtus on antud. Olgu näiteks

$$y = 3x^2 - 8x.$$

Niipea kui x -i väärtus on teada, on selle valemiga määratud ka y ; seega y on x -i funktsioon:

$$y = f(x).$$

Sümbolit $f(x)$ võime vaadelda siin mitte ainult tõsiasja tähisena, et arv y oleneb arvust x , vaid funktsiooni avaldisena, teiste sõnadega, selle eeskirja lühendina, mille järgi toimub funktsiooni väärtuste arvutamine. Sama sümboliga tähistame ka kirjeldatud arvutamise tulemust. Nii tähistame sümboliga $f(5)$ seda funktsiooni väärtust, mis vastab argumendi väärtusele 5, ja sümboliga $f(a+1)$ seda funktsiooni väärtust, mis vastab argumendi väärtusele $a+1$. Antud näite puhul

$$f(x) = 3x^2 - 8x,$$

seega

$$f(5) = 3 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5 = 3 \cdot 25 - 40 = 35$$

ning edasi

$$\begin{aligned} f(a+1) &= 3(a+1)^2 - 8(a+1) = \\ &= 3a^2 + 6a + 3 - 8a - 8 = 3a^2 - 2a - 5. \end{aligned}$$

Kolmest käsitletud olenevuse väljendusvahendist on valem kõige võimsam: ta lubab kohe arvutada funktsiooni väärtuste tabeli; selle järgi saab siis joonestada funktsiooni graafiku.

Suuruste olenevuse graafilisel esitamisel pole iga kord võimalik kasutada argumenti ja funktsiooni kujutamiseks üht ja sama ühikut; nii argumenti kui ka funktsiooni kujutamiseühik tuleb valida omaette, arvestades joonise võimalikku suurust ühelt poolt ja argumenti ja funktsiooni muutumisvahemikkude suurust teiselt poolt. Selle selgituseks olgu järgmine ülesanne.

Ülesanne. Kujuta graafiliselt ringi pindala olenevus raadiusest, võttes viimase muutumisvahemik 0 meetrist 10 meetrini.

Lahendus. Väljendades valemiga ringi pindala S olenevuse raadiusest r , saame

$$S = \pi r^2.$$

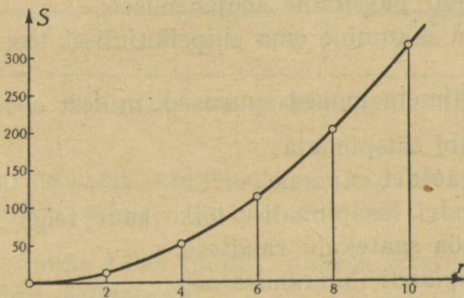
Andes argumentidele r tema muutumisvahemikus näiteks väärtused 0, 2, 4, 6, 8, 10 ja arvutades ning ümardades neile vastavad funktsiooni S väärtused, saame järgmise tabeli

r m-tes	0	2	4	6	8	10
S m ² -tes	0	12,6	50,7	113	201	314

Valime argumenti väärtuste kujutamisel ühikuks 10 mm ja funktsiooni väärtuste kujutamisel ühikuks 0,2 mm. Nende kujutamiseühikute puhul r -telje ühesentimeetrine lõik kujutab üht meetrit, S -telje ühesentimeetrine lõik kujutab 50 ruutmeetrit. Valitud kujutamiseühi-

kute korral argumenti muutumisvahemik esineb r -teljel lõiguna 10 sentimeetrit, funktsiooni muutumisvahemik S -teljel lõiguna pisut üle 6 sentimeetri. Arvestades pealkirjadeks 1 sentimeetri laiust riba, näeme, et kogu joonise suurus on ümmarguselt $7 \cdot 11$ ruutsentimeetrit.

Kujutades eespool-olevas tabelis seisvaid arvupaare punktidenä r - S -tasapinnas ja ühendades need punktid võimalikult lihtsa ja sileda joone abil, saame pildi ringi pind-



Joonis 28.

ala S muutumisest raadiuse r muutudes (joonis 28, kaks korda vähendatud suurus).

Kõnesolevas näites argument võib omandada iga väärtuse oma muutumisvahemikust. Juhul, kui argument omandab vaid rea eriväärtusi oma muutumisvahemikust, esineb funktsiooni graafik üksikute ordinaatide koguna; nende ordinaatide lõpp-punktide ühendamiseks joone abil pole alust.

Funktsiooni graafiku valmistamisel tuleb ikka hoolsalt kaaluda, kuidas muutub funktsiooni väärtus — kas järkjärgult või hüppeliselt. Vastavalt sellele saame funktsiooni graafikuna kas katkematu või katkeva joone.

Ülesanded.

178. Nimeta iga allpool-märgitud nähtuse puhul mõned sellega seotud suurused, mis muutuvad, ja mõned teised, mis jäävad muutumatuks:

1. auto ühtlane liikumine;
2. kivi vaba langemine;
3. õhu kokkusurumine õhkpistolis;
4. müüdi paisumine soojenemisel;
5. Maa liikumine oma ellipsikujulisel teel.

179. Nimeta mõned suurused, millest oleneb:

1. kuubi täispindala;
2. tetraedrri ruumala;
3. silindri tasapinnalise lõike suur telg;
4. kauba saatekulu raudteel;
5. fotoplaadi ilmutamise aeg.

180. Nimeta mõned suurused, millest oleneb:

1. pesu kuivamise aeg;
2. vasara löögi tugevus;
3. jääva raadiusega silindri täispindala;
4. jääva kõrgusega koonuse ruumala;
5. antud rahasumma eest saadava kauba hulk.

181. Nimeta mõned argumendid, mille funktsioon on:

1. ringi sektori ümbermõõt;
2. aritmeetilise rea liige;
3. kinnises klassis ühele õpilasele osanev hapniku hulk;
4. veerõhk mere sügavusse laskumisel;
5. voolutugevus juhtmes antud takistuse puhul.

182. Väljenda valemiga ühe kaateti olenevus teisest, kui hüpoteenus jääb muutumatuks.

Väljenda see olenevus tabeliga, kui hüpoteenus on 10 cm.

Kujuta sama olenevus graafiliselt.

183. Järgmine tabel annab korrapärase hulknurga külje pikkuse a olenevuses külgede arvust n , kui pikkusühikuks on hulknurga ümber joonestatud ringi raadius:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
a	1,73	1,41	1,18	1,00	0,87	0,77	0,68	0,62	0,52	0,42

Kujuta graafiliselt funktsiooni $a(n)$ muutumine. Anna funktsiooni $a(n)$ avaldis.

184. Järgmine tabel näitab inimese peaju keskmise kaalu kasvamist vanusega:

Vanus aastates	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Peaju kaal g-des	330	800	945	1050	1095	1148	1170	1180	1205	1220

Vanus aastates	10	11	12	13	14	15	16	17	18	20
Peaju kaal g-des	1235	1248	1253	1260	1275	1282	1295	1303	1312	1325

Kujuta graafiliselt inimese peaju kaalu kasvamine vanusega, tarbe korral andmeid tasandades. Missugused selle kasvamise iseärasused paistavad silma?

Kui suur on peaju kaal vanuste puhul 8 kuud, 1 aasta 4 kuud, 4 aastat 6 kuud?

185. Kujuta graafiliselt alljärgneva suuruse muutmine tema avaldises esineva tähe kasvades etteantud vahemikus. Avaldise väärtused arvuta küllalt tihedalt, näiteks võttes argumendi väärtused 0,5, tarbe korral isegi 0,2 või 0,1 tagant. Arvutused toimetata sobivalt valitud arvutusskeemis nii peenelt, kui seda nõuab graafiline töö.

$$1. \quad y = \frac{x+20}{x+2} \quad 0 \leq x \leq 20$$

$$2. \quad v = \frac{1}{1+u^2} \quad 0 \leq u \leq 5$$

$$3. \quad z = \frac{5x}{1+2x^2} \quad 0 \leq x \leq 10$$

$$4. \quad s = 6t - t^2 \quad 0 \leq t \leq 6$$

$$5. \quad q = 25 - 10p + p^2 \quad 0 \leq p \leq 10$$

$$6. \quad x = \frac{z+5}{z^2+2} \quad 0 \leq z \leq 8.$$

186. Sõnasta eeskiri, mille järgi leitakse x -i väärtusele vastav funktsiooni väärtus $f(x)$, kui

$$1. \quad f(x) = (x-3)(x-4) \quad 4. \quad f(x) = \frac{2x+5}{7x+3}$$

$$2. \quad f(x) = x^2 - 5x + 6 \quad 5. \quad f(x) = 3^{\frac{2}{x-2}}$$

$$3. \quad f(x) = \sqrt{1-4x^2} \quad 6. \quad f(x) = \log \sqrt[3]{1+x^2}$$

187. On antud:

Leia:

$$1. \quad f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad f(-1); f(1); f(5).$$

$$2. \quad g(x) = \frac{x+1}{2x-3} \quad g(0); g(-1); g(9).$$

$$3. \quad j(x) = \sqrt{x^2 - 3} \quad j(2); j(-3\frac{1}{2}); j(\sqrt{3}).$$

$$4. \quad h(x) = 5^{x-1} \quad h(0); h(2); h(1).$$

$$5. \quad l(x) = \log \sqrt[3]{x} \quad l(10); l(\sqrt{5}); l(0,001).$$

188. On antud:

Leia:

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| 1. $F(x) = 2x + 3$ | $F(1+h); F(\frac{h}{2})$. |
| 2. $G(x) = x^2 - 5x + 6$ | $G(2-h); G(3+h)$. |
| 3. $K(x) = x^3 - 2x + 1$ | $K(h); K(1+h)$. |
| 4. $L(x) = \log x$ | $L(10^h) + 1; L(2^h)$. |

189. Olgu:

Avalda:

- | | |
|-----------------------------|-------------------------|
| 1. $E(x) = x + 1$ | $\frac{E(x)-1}{E(x)+1}$ |
| 2. $F(x) = 1 - \frac{x}{2}$ | $[F(x)]^3$ |
| 3. $G(x) = \frac{1+x}{1-x}$ | $G(x) - 1$ |
| 4. $H(x) = \sqrt[3]{x^2}$ | $\log H(x)$ |
| 5. $I(x) = \log(x^2 + 1)$ | $10^{I(x)}$ |

190. Punkt P liigub tasapinnas nõnda, et tema kaugus y -teljest on 3 korda suurem tema kaugusest x -teljest. Avalda seos punkti P koordinaatide vahel. Missuguse joone joonestab punkt P ?

191. Missuguse funktsionaalse seose puhul koordinaatide x ja y vahel punkt $(x|y)$ asetseb võrdseil kaugusil punktidest $(-4|0)$ ja $(0|6)$?

192. On antud punktid $P_1 \equiv (3|-2)$ ja $P_2 \equiv (-1|6)$. Punkti P kaugused neist punktidest on PP_1 ja PP_2 . Punkt P liigub tasapinnas nõnda, et ikka kauguste PP_1 ja PP_2 ruutude vahe on 8. Väljenda võrrandiga punkti P ordinaadi olenevus abstsissist. Missuguse joone joonestab punkt P ?

193. Punkt P liigub tasapinnas nõnda, et punkti kaugus sirgest $y = -1$ jääb võrdseks tema kaugusega punktist $(0|1)$. Väljenda võrrandiga punkti ordinaadi olenevus tema abstsissist.

194. Vaatleme kõiki inimese käe poolt valmistatud ruute. Olgu ruudu külg tähistatud tähega a , übermõõt tähega u , pindala tähega S , diagonaal tähega d . Missugused suurustest

$$a \quad d \quad u \quad S \quad d : a \quad S : d^2$$

on selles ruutude kogus muutuvad, missugused on jäävad suurused?

Avalda muutuvad suurused külje a funktsioonina.

195. Avalda ringi sektori — ringi kaheksandiku — übermõõt raadiuse funktsioonina.

196. Olgu ellipsi suur telg 1 dm. Avalda ellipsi väiketelg, fookuste vaheline kaugus, ja ellipsi ordinaat fookuse kohal ekstsentrisuse funktsioonina.

197. Olgu $y = \frac{x}{|x|}$. Kujuta graafiliselt suuruse y muutumine x -i muutudes.

198. Olgu $y = x + |x|$. Kujuta graafiliselt suuruse y muutumine x -i muutudes.

199. Olgu $y = \frac{1}{2}|x| \cdot x$. Kujuta graafiliselt suuruse y muutumine x -i muutudes.

§ 25. Võrdeline olenevus.

Üks suurus oleneb teisest võrdeliselt, kui esimese ja teise suuruse vastavate väärtuste suhted on võrdsed.

Märgime ühe suuruse väärtused sümbolitega x_1, x_2, x_3, \dots , teise vastavad väärtused sümbolitega y_1, y_2, y_3, \dots . Kui y oleneb x -st võrdeliselt, siis peab olema

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots$$

Ühtaegu eelmiste võrretega on kehtivad ka võrded

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \dots$$

See tähendab aga, et kui y on võrdeline x -ga, siis ka x on võrdeline y -ga. Järelikult

kahe suuruse võrdelisus on nende suuruste vastastikune omadus.

Seepärast võime rääkida teineteisest võrdeliselt olenevatest suurustest.

Teineteisest võrdeliselt olenevad suurused on näiteks: ruudu külg ja ruudu übermõõt; kullakangi kaal ja tema väärtus; ühtlase kiiruse puhul sõidu aeg ja kaetud tee; koha sügavus meres ja seal valitsev veerõhk; hõõglambi põlemise aeg ja kulunud vooluhulk.

Võrrete rida

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots$$

ütleb, et võrdelise olenevuse korral funktsiooni ja argumendi vastavate väärtuste suhe on jääv. Seda jäävat suhet nimetame võrdeteguriks. Tähistame ta tähega a . Olgu x argumendi mingi väärtus ja tähendagu y sellele vastavat, argumendist võrdeliselt oleneva funktsiooni väärtust; siis öeldu järgi

$$\frac{y}{x} = a$$

ehk

$$y = ax.$$

See tähendab:

võrdelise olenevuse korral funktsiooni väärtus võrdub argumendi vastava väärtuse ja võrdeteguri korrutisega.

Anname argumendile väärtuse 1; siis $y = a$. Seega:

võrdelise olenevuse korral võrdetegur kujutab funktsiooni väärtust, mis vastab argumendi väärtusele 1.

Näide. Olgu õhu temperatuur mõõdetud ühtaegu Celsiuse ja Reaumuri järgi kraadides ja saadud esimese skaala järgi C^0 , teise järgi R^0 . Arvud C ja R on võrdelised:

$$C = \frac{5}{4} R.$$

Võrdeteguriks on kordaja $\frac{5}{4}$; ta näitab, et üks Reaumuri kraad on võrdne $\frac{5}{4}$ Celsiuse kraadiga.

Tõlgendame seost $y = ax$ võrrandina ja tuletame meelde, et sellele võrrandile vastab sirge, mis omab tõusu a ja läbib koordinaatide alguspunkti. Me näeme siis, et

võrdelise olenevuse graafiliseks vasteks on koordinaatide alguspunkti läbiv sirge; selle sirge tõus kujutab võrdetegurit.

Ümberpöördult, koordinaatide algust läbiva sirge iga punkti ordinaat on sama punkti abstsissi kordne, seega abstsissiga võrdeline. Järelikult:

iga alguspunkti läbiv sirge (peale telgede enestē) on teatava võrdelise olenevuse graafikuks.

Võrdeliselt olenevate suuruste iseloomustavaks omaduseks on järgmine:

kui kahest teineteisest võrdeliselt olenevast suurusest üks suurus kasvab mingi arv korda, siis teine suurus kasvab sama arv korda.

Tõestuseks anname x -le mingi eriväärtuse x_1 ; selle kasvamisel k -kordseks saab x eriväärtuse kx_1 ; arvutades vastavad y väärtused, näeme järgmist:

$$\text{kui } x = x_1, \quad \text{siis } y = ax_1;$$

$$\text{kui } x = kx_1, \quad \text{siis } y = akx_1$$

$$\text{ehk } y = k \cdot ax_1,$$

mis on endise väärtuse k -kordne.

Tõestatud omadust võib kasutada võrdelise olenevuse tunnusena:

kui ühe suuruse kasvades mingi arv korda teine suurus kasvab sama arv korda, siis need kaks suurust olenevad teineteisest võrdeliselt.

Tõepoolest, eeldusest järeldub, et suuruste vastavate väärtuste suhe on muutumatu, seega suurused on võrdelised.

Ülesanded.

200. Olgu antud ring ja temas võetud piirdenurk $\widehat{ABC} = \beta$ ning kaarele AC toetuv kesknurk ω . Kuidas olenevad teineteisest nurgad β ja ω ?

201. Avalda võrdkulgse kolmnurga kõrgus h selle kolmnurga külje a kaudu. Näita, et h on võrdeline a -ga. Kui suur on võrdetegur?

202. Suurendagu mikroskoop 1500 korda. Bakter paistab mikroskoobi all P mm pikana. Missugune on tema tõeline pikkus p ?

Kuidas olenevad teineteisest arvud p ja P ?

203. Olgu maatüki plaan joonestatud mõõdus 1 : 1000. Olgu kahe piirikivi vaheline kaugus plaanil k cm. Missugune kaugus K vastab sellele maapinnal?

Kuidas olenevad teineteisest arvud K ja k ?

204. Kolmnurga küljed on 48 cm, 32 cm ja 64 cm. Kui suur on selle kolmnurgaga sarnase kolmnurga ümbermõõt, kui ta väikesim külg on 48 cm?

205. Hulknurga ümbermõõt on 148 cm ja hulknurga suurim diagonaal on 15 cm. Kui suur on esimese hulknurgaga sarnase hulknurga ümbermõõt, kui ta suurim diagonaal on 120 cm?

206. Allpool on antud rida teineteisest olenevate suuruste paare. Otsusta, missuguste paaride puhul on tegemist võrdelise olenevusega, missuguste paaride puhul mitte-võrdelise olenevusega.

1. Poolringi ümbermõõt ja ringi läbimõõt.
2. Kullakangi kaal ja selle kangi väärtus.
3. Ruudu pindala ja ruudu ümbermõõt.
4. Kapital ja sellelt saadav aastaintress antud intressimäära puhul.
5. Raudteel sõitja vanus ja tema pileti hind Tartust Tallinna.
6. Kolmnurga pindala ja kolmnurga kõrgus antud aluse puhul.
7. Silindri ruumala ja silindri raadius antud kõrguse puhul.
8. Koonuse ruumala ja koonuse kõrgus antud põhja ümbermõõdu puhul.
9. Ühtlaselt liikuva keha kulgetud tee pikkus ja liikumise kestus.
10. Vabalt langeva keha kulgetud tee pikkus ja langemise kestus.

207. Olgu y ja x teineteisest võrdeliselt olenevad suurused ja vastaku suuruse x väärtusele 2,4 suuruse y väärtus 12. Missugune y väärtus vastab x -i väärtusele 3,4?

208. Olgu suurus y võrdeline suurusega x ja olgu $y = 4$, kui $x = 5$. Anna valem, mis avaldab suuruste x ja y vahelise seose. Kui suur on võrdetegur? Kui suur on y , kui $x = 2$? kui $x = \frac{1}{4}$? Kui suur on x , kui $y = 36$? kui $y = 1,25$?

§ 26. Lineaarne olenevus.

Avaldist $ax + b$, kus x on muutuv, a ja b on konstandid ja $a \neq 0$, nimetatakse suuruse x lineaarseks binoomiks. Selle binoomi väärtus on x -i funktsioon; seda funktsiooni nimetatakse lineaarfunktsiooniks. Niisiis:

suurus y on suuruse x lineaarfunktsioon, kui

$$y = ax + b,$$

kus a ja b on mingisugused konstandid.

Avaldades viimasest võrdusest x -i, saame

$$x = \frac{1}{a} y - \frac{b}{a}.$$

Leitud avaldis on suuruse y lineaarne binoom. Seega: kui y oleneb x -st lineaarselt, siis ka x oleneb y -st lineaarselt; teiste sõnadega, lineaarne olenevus kahe suuruse vahel on vastastikune; seepärast võime edaspidi rääkida teineteisest lineaarselt olenevatest suurustest.

Lineaarselt olenevad teineteisest näiteks: raudteerööpa pikkus ja temperatuur; hoiukassas hoiul seisev rahasumma ja hoiuaeg; õhupallis oleva gaasi ruumala ja temperatuur; ülespaisatud kivi kiirus ja liikumisaeg.

Selgitame lineaarfunktsiooni

$$f(x) = ax + b$$

avaldises esinevate kordajate tähenduse. Andes argumentidele väärtuse 0, saame

$$f(0) = b;$$

seega:

lineaarfunktsiooni avaldises esinev vaba liige kujutab funktsiooni algväärtust.

Et leida konstandi a tähendust, selleks anname argumendile mingi kaks teineteisele järgnevat ja ühe võrra erinevat väärtust, näiteks x_0 ja $x_0 + 1$. Siis

$$f(x_0) = ax_0 + b$$

ja

$$f(x_0 + 1) = a(x_0 + 1) + b.$$

Lahutades teise võrduse pooltest esimese võrduse vastavad pooled, leiame, et

$$f(x_0 + 1) - f(x_0) = a.$$

Tulemusest nähtub, et argumendi kordaja lineaarfunktsiooni avaldises näitab, mille võrra muutub funktsioon, kui argument kasvab ühe võrra, teiste sõnadega:

argumendi kordaja lineaarfunktsiooni avaldises kujutab funktsiooni muutumise kiirust.

Näited. 1. Olgu koonuse põhja raadius r ja koonuse moodustaja l . Siis koonuse täispindala S avaldub kujul

$$S = \pi r l + \pi r^2.$$

S oleneb l -st lineaarselt; pindala S algväärtus on πr^2 ja muutumise kiirus on πr .

2. Ellipsi punkti raadiusvektorite summa on võrdne ellipsi suure teljega; seda sümbolites kirjutades saame

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

millest

$$r_2 = -r_1 + 2a.$$

Me näeme, et ellipsi punkti raadiusvektorid olenevad teineteisest lineaarselt; raadiusvektori algväärtus on $2a$ ja muutumise kiirus on -1 .

Suuruse s mingit juurdekasvu on viisiks tähistada sümboliga Δs (loe: delta s). Sümbol Δ asendab siin sõna „juurdekasv“. Kirjutises Δs ei saa sümboleid Δ ja s eral-

dada; sümbol Δs kujutab üht tervikut just nii, nagu seda näeme sümbolite $\log a$, $\sin \varphi$ ja $\tan \mu$ puhul.

Küsimine, mille võrra muutub lineaarfunktsioon $y = ax + b$, kui argument kasvab lähteväärtusest x juurdekasvu Δx võrra?

Et argumendi lähteväärtus on x , siis funktsiooni lähteväärtus on $ax + b$;

et argumendi lõppväärtus on $x + \Delta x$, siis funktsiooni lõppväärtus on $a(x + \Delta x) + b$.

Seega argumendi kasvades Δx võrra funktsioon kasvab

$$a(x + \Delta x) + b - (ax + b) \quad \text{ehk} \quad a \cdot \Delta x$$

võrra; teiste sõnadega: argumendi juurdekasvule Δx vastab funktsiooni juurdekasv

$$\Delta y = a \cdot \Delta x.$$

Selles funktsiooni juurdekasvu valemis ei esine argumendi lähteväärtus; see tähendab, et missugusele argumendi väärtusele juurdekasv Δx ka lisandataks, ikka saab funktsioon ühe ja sellesama juurdekasvu ehk, teisiti,

lineaarse olenevuse puhul võrdsetele argumendi juurdekasvudele vastavad ikka võrdsed funktsiooni juurdekasvud.

Anname nüüd argumendile rea erisuurusega juurdekasvu Δx . Juurdekasvude valemist $\Delta y = a \cdot \Delta x$ näeme siis, et

lineaarfunktsiooni puhul argumendi ja funktsiooni juurdekasvud on võrdelised.

Tõestame selle teoreemi pöörde:

kui argumendi ja funktsiooni juurdekasvud on võrdelised, siis olenevus on lineaarne.

Tõepoolest, olgu x_0 üks argumendi eriväärtus ja y_0 sellele vastav funktsiooni väärtus; olgu x argumendi

mingi väärtus ja y sellele vastav funktsiooni väärtus. Argumendi ja funktsiooni juurdekasvud on vastavalt

$$x - x_0 \text{ ja } y - y_0.$$

Eelduse järgi nende juurdekasvude suhe on jääv; tähistades viimast tähega a , saame

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a.$$

Siit

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

ehk

$$y = ax + (y_0 - ax_0)$$

ehk, vaba liiget teisiti tähistades,

$$y = ax + b,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Viimati-tõestatud lause põhjal on hõlpus otsustada, kas mõne tabeliga antud olenevus on lineaarne või mitte. Olgu näiteks antud tabel:

x	-4	-2	1	6	13
y	13	9	3	-7	-21

Koostame selle põhjal juurdekasvude tabeli:

Δx	2	3	5	7
Δy	-4	-6	-10	-14
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	-2	-2	-2	-2

Et juurdekasvude suhe on kogu aeg -2 , seega jääv, siis antud tabel esindab lineaarset olenevust x ja y vahel.

Juurdekasvude valemist

$$\Delta y = a \cdot \Delta x$$

näeme, et positiivse Δx korral Δy märk ühtib kordaja a märgiga:

kui $a > 0$, siis ka $\Delta y > 0$,

kui $a < 0$, siis ka $\Delta y < 0$.

Esimesel juhul argumendi kasvades ka funktsioon kasvab, teisel juhul argumendi kasvades funktsioon kahaneb.

Vaatleme seost

$$y = ax + b$$

võrrandina. Selle graafiliseks vasteks on sirge, mille tõus on a ja algordinaat on b . Niisiis:

lineaarfunktsiooni graafikuks on sirge, mille tõus kujutab funktsiooni muutumise kiirust ja mille algordinaat kujutab lineaarfunktsiooni algväärtust.

Kasvava lineaarfunktsiooni graafikuks on tõusev sirge, kahaneva funktsiooni graafikuks langev sirge.

Sirge, mis kujutab lineaarfunktsiooni muutumist, on määratud kahe andmega. Järelikult ka lineaarfunktsioon on määratud kahe andmega; nendeks andmeteks võivad olla näiteks funktsiooni algväärtus ja muutumise kiirus, kaks funktsiooni ja argumendi vastavate väärtuste paari, või üks funktsiooni ja argumendi vastavate väärtuste paar ja funktsiooni muutumise kiirus.

Ülesanne. Kui suur y vastab x -i väärtusele -1 , kui y on argumendi x lineaarfunktsioon ja argumendi väärtustele 3 ja 7 vastavad funktsiooni väärtused 11 ja $24,6$?

Lahendus. Otsitav funktsioon y avaldub kujul

$$y = ax + b,$$

kus a ja b esiotsa on tundmata. Andmete põhjal saame, et

$$11 = a \cdot 3 + b$$

ja

$$24,6 = a \cdot 7 + b.$$

Lahendades selle süsteemi a ja b suhtes leiame, et

$$a = 3,4 \quad \text{ja} \quad b = 0,8.$$

Järelikult

$$y = 3,4x + 0,8$$

ja otsitav väärtus on

$$3,4 \cdot (-1) + 0,8$$

ehk $-2,6$.

Sama ülesannet oleks võimalik lahendada ka nii, et leiame läbi punktide $(3 | 11)$ ja $(7 | 24,6)$ mineva sirgjoone võrrandi ja määrame siis abstsissile -1 vastava ordinaadi.

Nii selles kui ka eelmises paragraafis oleme ikka eeldanud, et argumendi ja funktsiooni väärtuste kujutamiseks on kasutatud võrdseid ühikuid. Näitame, et

ka siis, kui abstsissi ja ordinaadi kujutamiseks kasutatakse erinevaid ühikuid, on lineaarse funktsiooni graafikuks sirge.

Tõepoolest, olgu tegemist funktsiooniga

$$y = ax + b.$$

Kujutame teda üks kord x - y -teljestikus, võttes kujutamiseühikuks nii ühel kui teisel teljel 1 mm. Saadud punktid $(x | y)$ asetsevad, nagu teame, sirgel.

Kujutame sama funktsiooni nüüd X - Y -teljestikus, võttes kujutamiseühikuks X -teljel u mm ja Y -teljel v mm. Siis arv x kujutatakse X - Y -teljestikus lõiguna $X = xu$ mm ja „ y „ „ „ „ „ „ „ $Y = yv$ mm.

Et viimastest võrdustest

$$x = \frac{X}{u} \quad \text{ja} \quad y = \frac{Y}{v}$$

ja eelduse järgi

$$y = ax + b,$$

siis

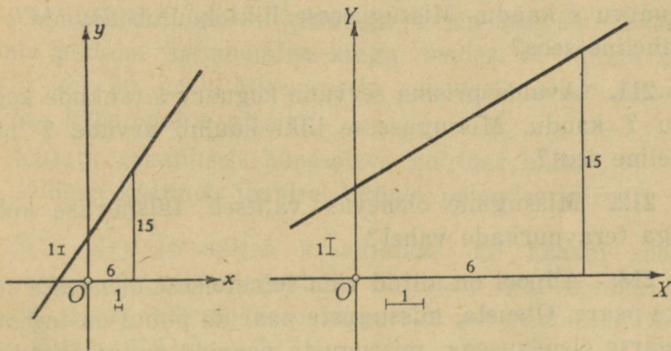
$$\frac{Y}{v} = a \frac{X}{u} + b$$

ehk

$$Y = a \frac{v}{u} X + bv$$

ehk, teiste tähtedega,

$$Y = AX + B.$$



Joonis 29.

Me näeme, et X - Y -tasapinnas kõnesoleva seose kujutiseks on ka sirgjoon; selle algordinaat $B = bv$ ja tõus $A = a \frac{v}{u}$. Näitena on joonisel 29 olenevus $y = 1,5x + 6$ kujutatud kord x - y -teljestikus, kus kujutamisuühikuks on valitud nii x -teljel kui ka y -teljel 1 mm, teine kord X - Y -teljestikus, kus kujutamisuühikuks on valitud X -teljel 5 mm ja Y -teljel 2 mm. Võttes kujutamisuühiku v küllalt väikese, saame suuregi vaba liikme b puhul küllalt väikese algordinaadi B . Valides kohaselt suhte $\frac{v}{u}$, saame suuregi a puhul joonisel küllalt väikese tõusuga sirge.

Ülesanded.

209. Poja sündimisajal oli isa 27 aastat, ema 23 aastat vana. Avalda

1. seos poja vanuse p ja isa vanuse i vahel;
2. seos poja vanuse p ja ema vanuse e vahel;
3. seos isa vanuse i ja ema vanuse e vahel.

Kujuta kolmel joonisel kolm antud seost.

210. Avalda püramiidi tippude koguarv t servade koguarvu s kaudu. Missugusesse liiki kuulub arvude s ja t vaheline seos?

211. Avalda prisma servade koguarv s tahkude koguarvu T kaudu. Missugusesse liiki kuulub arvude T ja s vaheline seos?

212. Missugune olenevus valitseb täisnurkse kolmnurga teravnurkade vahel?

213. Allpool on antud rida teineteisest olenevate suuruste paare. Otsusta, missuguste paaride puhul on tegemist lineaarse olenevusega, missuguste paaride puhul mittelineaarse olenevusega:

1. Aritmeetilise rea liige ja liikme kohanumber.
2. Geomeetrilise rea liige ja liikme kohanumber.
3. Kuubi serv ja kuubi pindala.
4. Kauba brutokaal ja kauba netokaal muutumatu taarakaalul puhul.
5. Kera übermõõt ja kera ruumala.
6. Varda pikkus ja varda temperatuur.
7. Jääva raadiusega silindri täispindala ja kõrgus.
8. Esimese n täisarvu summa ja arv n .
9. Ringjoone kaar ja kaarele toetuv kesknurk.
10. Ellipsi väike telg ja ekstsentrilisus antud suure telje puhul.

214. Olenegu suurus v lineaarselt suurusest u ning olgu $v = 3$, kui $u = 1$ ja $v = 5,4$, kui $u = 7$. Määra graafiliselt, kui suur on v , kui $u = 3$ ja kui $u = 6$. Kui suur on u , kui $v = 7,6$ ja kui $v = 8$?

215. Olenegu suurus s lineaarselt suurusest t ning olgu $s = 6,6$, kui $t = 2$, ja $s = 37,8$, kui $t = 10$. Määra graafiliselt, kui suur on s , kui $t = 4$ ja kui $t = 7,5$. Kui suure t puhul on $s = 22,2$ ja on $s = 30$?

216. Künäal põleb kiirusega 4 cm tunnis. Avalda künäla pikkuse kahanemine ajaga, teades, et künäla algpikkus on 30 cm. Missugusele seadusele allub künäla pikkuse kahanemine ajaga?

Kujuta graafiliselt kõnesoleva nähtuse käik.

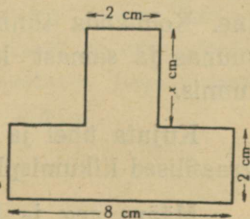
Millena kujuneb joonisel künäla põlemise kiirus?

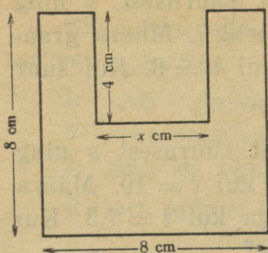
217. Kell 15 näitas kraadiklaas 3,5 kraadi sooja. Sest ajast langes temperatuur ühtlaselt iga tunniga 0,8 kraadi. Anna valem temperatuuri t arvutamiseks n -da tunni lõpuks ($15 \leq n \leq 24$).

Kujuta graafiliselt temperatuuri muutumine ajaga.

Missuguse valemi ja graafiku me saaksime, kui temperatuur poleks langenud, vaid oleks tõusnud ühtlaselt iga tunniga 0,8 kraadi?

218. Arvuta joonisel näidatud kujundi pindala S . Koosta mõnede x - S -väärtuspaaride tabel ja kujuta graafiliselt pindala S muutumine pikkuse x muutudes. Kuidas oleb pindala S pikkusest x ? Kui suur on S , kui $x = 3,6$? Missuguse x -i väärtuse puhul $S = 50$? Leia pindala S väikesim väärtus.





219. Arvuta joonisel näidatud kujundi pindala S . Koosta mõnede x - S -väärtuspaaride tabel ja kujuta graafiliselt pindala S muutumine pikkuse x muutudes. Milline on pindala S olenevus pikkusest x ? Kui suur on S , kui $x = 6,4$? Kui suure x -i väärtuse puhul on $S = 42$? Leia pindala S suurim ja väikesim väärtus.

220. Lauale asetatud keti üks osa ripub üle laua serva alla. Kuidas oleneb laual asetseva keti osa pikkus allarippuva osa pikkusest, kui kett libiseb üle laua serva alla?

221. Lahenda graafiliselt ja numbriliselt ülesanne: Tigu ronib päeval puud mööda viis jalga üles ja öösi kolm jalga alla. Mitmendal päeval ta jõuab puu latva, kui puu on 12 jalga kõrge?

222. Jalakäija sammub kiirusega 6 km tunnis Tartust Võru poole, puhkab 1 tunni järel 15 minutit, sammub edasi 2 tundi endise kiirusega, puhkab 30 minutit, sammub edasi 3 tundi sama kiirusega, puhkab 45 minutit jne. Kolmanda tunni lõpul alustab oma teekonda samas suunas ja samast lähtekohast suusataja, liikudes 9 km tunnis.

Kujuta ühel ja samal joonisel jalakäija ja suusataja graafilised liikumisplaanid.

Määra aeg ja koht, kus suusataja jõuab jalakäijale järele.

§ 27. Pöördvõrdeline olenevus.

Üks suurus on oleb teisest pöördvõrdeliselt, kui nende suuruste vastavate väärtuste korrutised on võrdsed.

Märgime ühe suuruse väärtused sümbolitega x_1, x_2, x_3, \dots ja teise suuruse vastavad väärtused sümbolitega y_1, y_2, y_3, \dots . Kui y on oleb x -st pöördvõrdeliselt, siis peab olema

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3 = \dots$$

Ühtaegu nende võrdustega kehtivad võrdsused

$$y_1 x_1 = y_2 x_2 = y_3 x_3 = \dots$$

See tähendab aga, et kui y on pöördvõrdeline x -ga, siis ka x on pöördvõrdeline y -ga. Järelikult

kahe suuruse pöördvõrdelisus on suuruste vastastikune omadus.

Seepärast on lubatav rääkida teineteisest pöördvõrdeliselt olenevatest suurustest.

Pöördvõrdeliselt olenevate suuruste näiteina olgu nimetatud järgmised: kahe linna vahelise tee sõitmiseks kuluv aeg ja sõidukiirus; antud gaasihulga ruumala ja gaasi tihedus; galvani elemendist saadava voolu tugevus ja ahela takistus.

Võrduste rida

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3 = \dots$$

ütleb, et pöördvõrdelise olenevuse korral funktsiooni ja argumendi vastavate väärtuste korrutis on jääv. Tähistame selle jääva korrutise tähega a . Olgu x argumendi mingi väärtus ja tähendagu y sellele vastavat funktsiooni väärtust; siis pöördvõrdelise olenevuse korral

$$xy = a$$

ehk

$$y = \frac{a}{x}.$$

Pöördvõrdeliselt olenevate suuruste seose iseloomustavamaks omaduseks on järgmine:

kui kahest teineteisest pöördvõrdeliselt olenevast suurusest üks suurus kasvab mingi arv korda, siis teine suurus kahaneb sama arv korda.

Tõestuseks anname x -le mingi eriväärtuse x_1 ; selle kasvamisel k -kordseks saab x eriväärtuse kx_1 ; arvutades vastavad y väärtused, näeme järgmist:

$$\text{kui } x = x_1, \quad \text{siis } y = \frac{a}{x_1};$$

$$\text{kui } x = kx_1, \quad \text{siis } y = \frac{a}{kx_1} = \frac{a}{x_1} : k,$$

mis on endisest väärtusest k korda väiksem. Tõestatud omadust võib kasutada pöördvõrdelise olenevuse tunnuseks:

kui ühe suuruse kasvades mingi arv korda teine suurus kahaneb sama arv korda, siis need kaks suurus olenevad teineteisest pöördvõrdeliselt.

Tõepoolest, eeldusest järeldub, et suuruste vastavate väärtuste korutus on muutumatu, seega suurused on pöördvõrdelised.

Ülesanded.

223. Kahe linna vaheline tee on s kilomeetrit pikk. Kasutatav mootorratas lubab muuta sõidukiirust v piirides $20 \frac{\text{km}}{\text{t}}$ kuni $80 \frac{\text{km}}{\text{t}}$. Missugustes piirides muutub seejuures sõidukestus t ?

Avalda sõidukestus t suuruste s ja v kaudu.

Kuidas oleneb sõidukestus t sõidukiirusest v muutumatuks jääva s puhul?

Kuidas oleneb sõidukestus t sõidetud tee pikkusest s muutumatuks jääva v puhul?

224. Krivikeerme tõus on h mm. Avalda p cm pikkuse kruvi keermete arv n .

Kuidas olenevad teineteisest arvud h ja n ?

225. Teatava töö kordasaatmiseks kulub N inimesetööpäeva. Sooritagu selle töö i inimest p päeva jooksul. Avalda arv p arvu i kaudu ja arv i arvu p kaudu. Kuidas oleneb arv p arvust i ? arv i arvust p ?

226. Leia, missugustes järgmistes suuruste paarides esinevad teineteisega pöördvõrdelised suurused:

1. Jääva pindalaga rööpküliku alus ja kõrgus.
2. Jääva alusega kolmnurga pindala ja kõrgus.
3. Vankriratta läbimõõt ja ratta tiirude arv antud pikkusega tee kulgemisel.
4. Gaasi ruumala ja gaasi rõhk jääva temperatuuri puhul.
5. Pliiatsi hind ja pliiatsite hulk, mille saab osta 1 rmk. eest.
6. Nurk ja selle kõrvunurk.

§ 28. Hüperbool.

Vaatleme, missugune on pöördvõrdelise olenevuse graafik. Selle olenevuse valemis

$$y = \frac{a}{x}$$

esinev konstant a võib olla kas positiivne või negatiivne. Kui a on positiivne, siis $-a$ on negatiivne. Funktsioone

$$y = \frac{a}{x} \quad \text{ja} \quad y = \frac{-a}{x}$$

võrreldes näeme, et võrdsete x -de korral y -d erinevad vaid märgilt. Järelikult kõnesolevate funktsioonide graa-

fikud on sümmeetrilised x -telje suhtes. Seepärast piisab funktsiooni

$$y = \frac{a}{x}$$

graafiku uurimisest positiivse a korral.

Funktsioone

$$y = \frac{a}{x} \quad \text{ja} \quad y = \frac{1}{x}$$

võrreldes näeme, et võrdsete x -de korral esimese funktsiooni väärtus on teise väärtuse a -kordne. Järelikult esimese funktsiooni graafiku ordinaadid saadakse korrutades teise funktsiooni graafiku ordinaate ühe ja sellesama teguriga. Seepärast piisab funktsiooni

$$y = \frac{1}{x}$$

graafiku uurimisest.

Määrame kohad, kus selle funktsiooni graafik lõikab telgi. Abstsisssteljel on $y = 0$. Funktsiooni avaldisest nähtub, et ei leidu x -i väärtust, mille puhul y on 0. Samuti ei leidu y väärtust, mille puhul x on 0. Järelikult

pöördvõrdelise olenevuse graafik ei lõika telgi.

Võrdusest $y = \frac{1}{x}$ nähtub, et abstsiss ja ordinaat peavad ikka olema ühe ja sama märgiga; see tähendab, et graafiku punkte võib leiduda teljestiku I ja III veerandis.

Rahuldagu väärtuspaar x_1 ja y_1 võrdust $y = \frac{1}{x}$. Siis rahuldab seda võrdust ka väärtuspaar $-x_1$ ja $-y_1$. Punktid $(x_1 | y_1)$ ja $(-x_1 | -y_1)$ on aga sümmeetrilised koordinaatide alguse suhtes; kui esimene punkt on I veerandis, siis teine on III veerandis. Järelikult

funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ graafiku osa teljestiku III veerandis on koordinaatide alguse suhtes sümmeetriline graafiku osaga I veerandis.

Nii näeme, et piisab funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ graafiku tundmisest I veerandis. Viimase joonestamiseks anname x -le väärtused

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4,$$

leiame vastavad y väärtused

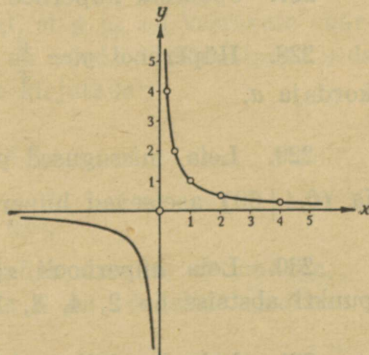
$$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4},$$

ja kujutame väärtuspaarid

$$\left(\frac{1}{4} \mid 4\right), \quad \left(\frac{1}{2} \mid 2\right), \quad (1 \mid 1), \quad \left(2 \mid \frac{1}{2}\right), \quad \left(4 \mid \frac{1}{4}\right)$$

graafiliselt punktidenä. Ühendades punktid pideva joone abil saame kõvera, mida näeme I veerandis joonisel 30. Ehitades saadud joonele sümmeetrilise koordinaatide alguse suhtes, saame kahest harust koosneva kõvera (joonis 30), mida nimetatakse hüperbooliks ehk, täpsemalt, võrdhaarseks hüperbooliks.

Vastandina kinnistele kõveratele, nagu ringjoon ja ellips, on hüperbool lahtine kõver, see tähendab, et liikudes hüperbooli mööda ikka ühes suunas me ei jõua kunagi lähtekohta tagasi. Vastandina pidevatele joontele, nagu sirgjoon ja ringjoon, on hüperbool katkev kõver, sest liikudes piki hüperbooli üht haru pole võimalik jõuda teisele. Joonisest 30 nähtub, et abstsissi kasvamisel hüperbooli ordinaat järjest väheneb; see tähendab, et hüperbooli haru järjest läheneb abstsissteljele, ilma et ta



Joonis 30.

kunagi omaks selle teljega ühiseid punkte. Näitame, et hüperbooli haru tuleb abstsisssteljele nii lähedale, kui iganes tahame, kui aga abstsiss on küllalt suur. Tõepoolest, hüperbooli punkti $(x | y)$ kaugus abstsisssteljest on y . Et see kaugus saaks väiksemaks näiteks arvust 0,000001, on vaid tarvis võtta $x > 1 : 0,000001$ ehk $x > 1000000$. Et ühtaegu võrdusega $y = \frac{1}{x}$ on kehtiv ka võrdus $x = \frac{1}{y}$, siis kõik, mis öeldud hüperbooli lähenemise kohta x -teljele, jääb kehtima ka hüperbooli lähenemise kohta y -teljele.

Sirget, millele kõver järjest ja tõkestamatult läheneb, nimetatakse kõvera asümptoodiks.

Seega:

hüperbooli $y = \frac{1}{x}$ asümptootideks on koordinaatide teljed.

Seesama kehtib ka hüperbooli $y = \frac{a}{x}$ kohta.

Ülesanded.

227. Joonesta hüperbool $y = \frac{3}{x}$.

228. Hüperbool $y = \frac{a}{x}$ läbib punkti $(2 | 8)$. Määra kordaja a .

229. Leia, missugused punktidest $(5 | 4,8)$, $(0,5 | 36)$ ja $(0,4 | 60)$ asetsevad hüperboolil $y = \frac{24}{x}$.

230. Leia hüperbooli $xy = 32$ punkti ordinaat, kui punkti abstsiss on 2, 4, 8, 10.

231. Leia, kus lõikuvad jooned $xy = 25$ ja $x - y = 3$.

232. Leia joonte $xy = 3$ ja $2x - y + 1 = 0$ lõikepunktide vaheline kaugus.

233. Näita, et sirge $x + 4y = 8$ puudutab hüperbooli $xy = 4$.

234. Ringis raadiusega 5 cm on võetud punkt P kaugusel 3 cm keskpunktist. Seda punkti läbib kõõl MN . Avalda kõõlu lõigu $MP = y$ olenevus lõigust $NP = x$, kui kõõl pöörleb ümber punkti P . Kujuta see olenevus graafiliselt.

235. Kujuta graafiliselt voolu tugevuse olenevus juhtme takistusest, kui vooluallika pinge on 4,5 V.

Leia saadud graafikust, kui suur on voolu tugevus, kui juhtme takistus on 2,8 Ω . Kui suure takistuse puhul on voolu tugevus 6,4 A?

236. Kui suure abstsissiga punktist alates saab ja jääb hüperbooli $y = \frac{20}{x}$ ordinaat väiksemaks kui 0,01? — väiksemaks kui 0,001?

§ 29. Ruutolenevus $y = ax^2$.

Olgu y niiviisi olenev x -st, et y ja x -i vastavate väärtuste puhul y ja x^2 suhted on võrdsed. Tähistades seda jäävat suhet tähega a , võime kirjutada:

$$\frac{y}{x^2} = a$$

ehk

$$y = ax^2.$$

Sel korral suurus y on võrdeline suuruse x ruuduga.

Nii näiteks ringi pindala S on võrdeline raadiuse r ruuduga, sest

$$S = \pi r^2;$$

kuubi täispindala T on võrdeline serva s ruuduga, sest

$$T = 6s^2.$$

Vaadeldav olenevus pole muutuvate suuruste vastastikune omadus, sest kui $y = ax^2$, siis on $x = \pm \sqrt{\frac{y}{a}}$ ja mitte $x = \text{konst} \cdot y^2$.

Käsiteldava olenevuse iseloomustavamaks omaduseks on järgmine:

argumendi x kasvamisel k korda ruutfunktsioon ax^2 kasvab k^2 korda.

Tõestuseks anname x -le mingi eriväärtuse x_1 ; selle kasvamisel k -kordseks saab x eriväärtuse kx_1 ; arvutades vastavad y väärtused, näeme järgmist:

$$\begin{array}{ll} \text{kui } x = x_1, & \text{siis } y = ax_1^2, \\ \text{kui } x = kx_1, & \text{siis } y = a(kx_1)^2, \\ & \text{ehk } y = k^2 \cdot ax_1^2, \end{array}$$

mis on endise y väärtuse k^2 -kordne.

Kui näiteks kuubi serv kasvab 1,4 korda, siis kuubi täispindala kasvab $1,4^2$ ehk 1,96 korda.

Ümberpöörduvalt:

kui argumendi kasvamisel k korda funktsioon kasvab k^2 korda, siis funktsioon on võrdeline argumendi ruuduga.

Tõestuseks arutame nii:

Olgu x_1 mõni kindel argumendi väärtus ja x mingi argumendi väärtus; tähistame jagatise $\frac{x}{x_1}$ tähega k nii, et $x = kx_1$. Sel puhul

$$f(x) = f(kx_1).$$

Eelduse järgi

$$f(kx_1) = k^2 \cdot f(x_1),$$

seega

$$f(x) = k^2 \cdot f(x_1)$$

ehk

$$f(x) = \left(\frac{x}{x_1}\right)^2 f(x_1)$$

ehk

$$f(x) = \frac{f(x_1)}{x_1^2} \cdot x^2.$$

Tähistades jääva teguri võrduse paremal poolel tähega a , saame

$$f(x) = ax^2,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Jäävat tegurit a võrduses $y = ax^2$ saab määrata, kui on teada üks paar vastavaid argumendi ja funktsiooni väärtusi, näiteks paar $x = 1,3$ ja $y = 0,7$. Siis

$$0,7 = a \cdot 1,3^2$$

ehk

$$0,7 = 1,69a,$$

millest

$$a = \frac{1,69}{0,7} = 2,414,$$

seega

$$y = 2,414a^2.$$

Ülesanded.

237. Võrk koosneb n rõhtsihis ja n püstsihis niidist. Avalda sõlmede arv s .

Kujuta arvu s muutumine arvu n muutudes vahemikus $n = 2$ kuni $n = 10$.

238. Klassis on n õpilast. Nad lepivad kokku omavahel oma päevapilte vahetada, nii et igaühel oleks enese ja kõigi oma klassikaaslaste pildid. Mitu pildi-äratõmmet peab päevapiltnik valmistama?

Kujuta äratõmmete hulga p muutumine õpilaste arvu n muutudes 19-st 38-ni.

239. Avalda ruudukujulise plaadi mass tema paksuse h , serva s ja aine tiheduse t kaudu.

Mis toimub plaadi massiga tiheduse t kasvamisel 2, 3, 4, ... kordseks? paksuse h kasvamisel 2, 3, 4, ... kordseks? serva s kasvamisel 2, 3, 4, ... kordseks?

240. Teemandi väärtust võib lugeda ligikaudu võrdeliseks tema kaalu ruuduga. Avalda seos teemandi kaalu k , tema väärtuse v ja tema kaaluühiku hinna h vahel. Selgita valemi mõtet arvuliste näidetega.

241. Perenaisel on kaks silindrikujulist biskviidivormi. Teise vormi läbimõõt on $1\frac{1}{2}$ korda väiksem esimese läbimõõdust, selle eest on teise vormi sügavus 2 korda suurem esimese sügavusest. Kuidas suhtuvad esimese ja teise vormi ruumalad?

242. Vedelik, mis täidab pudeli 10 cm kõrguseni, valatakse purki, mille läbimõõt on 2 korda suurem pudeli läbimõõdust. Missuguse kõrguseni täidab vedelik purgi?

§ 30. Ruutparabool.

Küsime, missugune on olenevuse $y = ax^2$ graafik? Et võrduses $y = ax^2$ on x^2 alati positiivne, siis positiivse a korral on kõik y väärtused positiivsed, negatiivse a korral negatiivsed. See tähendab, et

positiivse a korral funktsiooni $y = ax^2$ graafik asetseb ülalpool abstsissitelge, negatiivse a korral allpool abstsissitelge.

Kui võrrandit $y = ax^2$ rahuldab mingi väärtuspaar x_1 ja y_1 , siis rahuldab teda ka väärtuspaar $-x_1$ ja y_1 , sest $(-x_1)^2 = x_1^2$. Punktid $(x_1 | y_1)$ ja $(-x_1 | y_1)$ asetsevad sümmeetriliselt y -telje suhtes. Seega:

olenevuse $y = ax^2$ graafik on sümmeetriline y -telje suhtes.

Paneme tähele, et võrranditega

$$y = ax^2 \quad \text{ja} \quad y = -ax^2$$

määratud ordinaadid ühe ja sellesama x -i puhul erinevad vaid märgi poolest. Järelikult kõverad $y = ax^2$ ja $y = -ax^2$ on sümmeetrilised x -telje suhtes. See-ga piisab kõvera $y = ax^2$ uurimisest positiivse a korral.

Vaadeldes võrrandeid

$$y = x^2 \quad \text{ja} \quad y = ax^2$$

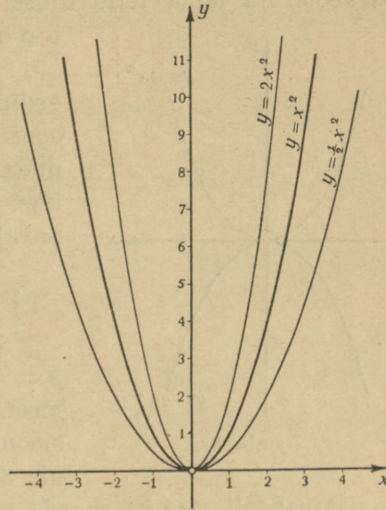
näeme, et teise kõvera ordinaadid saadakse esimese kõvera ordinaatidest kor-rutades neid ühe ja sama teguriga a . Seepärast joonestame kõigepealt olenevuse

$$y = x^2$$

graafiku. Selleks anname x -le väärtused näiteks 0-st 3-ni, iga 0,5 tagant, ja arvutame vastavad y väärtused; saame tabeli:

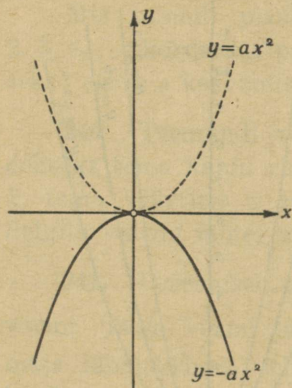
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Kujutame need väärtuspaarid punktidenä x - y -tasapin-nal, ehitame neile punktidele sümmeetrilised y -telje suhtes ja ühendame leitud punktid kõvera abil. Saadud kõverat nimetatakse ruutparabooliks ehk lühidalt para-booliks. See ongi olenevuse $y = x^2$ graafik. Tema süm-



Joonis 31.

meetriatelge nimetame lühidalt parabooli teljeks; parabooli ja tema telje ühist punkti nimetame parabooli lagipunktiks.



Joonis 32.

Korrutades saadud kõvera ordinaate a -ga, saame funktsiooni $y = ax^2$ graafikuna joone, mida nimetame samuti parabooliks. Joonisel 31 on kujutatud paraboolid

$$y = x^2 \quad y = 2x^2 \quad y = \frac{1}{2}x^2.$$

Joonestades paraboolile $y = ax^2$ x -telje suhtes sümmeetrilise kõvera, saame funktsiooni $y = -ax^2$ graafiku (joonis 32).

Parabooli $y = x^2$ sageda esinemise tõttu tasub vaeva valmistada papist šabloon parabooli kiireks joonestamiseks.

Ülesanded.

243. Määra kordaja a parabooli võrrandis $y = ax^2$, kui parabool läbib punkti $(2 | 12)$.

244. Kui lai on parabooli $y = \frac{1}{10}x^2$ šabloon kohal $(0 | \frac{1}{40})$?

245. Kui pika kõõlu moodustab sirge $x + 2y = 0$ paraboolis $y = \frac{1}{4}x^2$?

246. Leia parabooli $y = 0,8x^2$ lõikepunktid sirgega $3,2x + y + 3,2 = 0$.

247. Näita, et sirge $2x - 2y - 1 = 0$ puudutab parabooli $y = \frac{1}{2}x^2$.

248. Näita, et parabooli $y = ax^2$ punkti kaugus punktist $(0 | \frac{a}{4})$ on niisama suur, kui selle punkti kaugus sirgest $x = -\frac{a}{4}$.

249. Leia, kus lõikuvad jooned $y = 0,25x^2$ ja $y = 2x + 21$.

250. Kus lõikuvad parabool $y = 3x^2$ ja sirge $3x + 5y = 1,2$?

251. Joonesta parabool $y = x^2$ ja sirge $y = 2x - 5$. Leia joonisest nende joonte lõikepunktide abstsissid.

252. Joonesta parabool $y = x^2$ ja sirge $y = 5x + 4$. Leia joonisest nende joonte lõikepunktide koordinaadid.

253. Lahenda järgmised võrrandid, kasutades parabooli $y = x^2$ graafikut:

$$1. \quad x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$2. \quad x^2 + x - 9 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x^2 + 3,5x = 0$$

§ 31. Üldine ruutolenevus.

Avaldišt

$$ax^2 + bx + c,$$

kus $a \neq 0$ ning a , b , ja c on mingid konstandid, nimetatakse suuruse x ruuttrinoomiks.

Kui suurus y avaldub suuruse x ruuttrinoomina, see tähendab, kui

$$y = ax^2 + bx + c,$$

siis ütleme, et suurus y on suuruse x ruutfunktsioon.

Avaldades x -i võrdusest $y = ax^2 + bx + c$ näeme, et x ei avaldu y ruuttrinoomina; järelikult ei ole kahe suuruse ruutolenevus suuruste vastastikune omadus.

Kui argumendi väärtus kasvab k korda, siis esimene liige ax^2 ruutfunktsiooni avaldises kasvab k^2 korda, teine k korda ja kolmas ei muutu üldse; seega funktsioon ei kasva k^2 -korda, nagu seda nägime funktsiooni $y = ax^2$ puhul.

Näitame, et

missugused ka on kordajad a , b ja c , ikka on ruutfunktsiooni graafikuks parabool.

Selleks teisendame võrdust $y = ax^2 + bx + c$ nii, et selle parem pool oleks täisruut. Seda teeme järgmiselt:

$$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

ehk

$$y = a(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}) + c - \frac{b^2}{4a}$$

ehk

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a})$$

ehk

$$y - (c - \frac{b^2}{4a}) = a(x + \frac{b}{2a})^2.$$

Võtame abiks uued muutujad X ja Y nii, et

$$X = x + \frac{b}{2a}$$

ja

$$Y = y - (c - \frac{b^2}{4a}).$$

Eespool-saadud võrdus võtab siis kuju

$$Y = aX^2.$$

Vaatleme kõrvuti x ja y -ga ka X ja Y -d koordinaatidena. Nagu näitab X -i avaldis, saadakse uus abstsiss X endisest, liites sellega arvu $\frac{b}{2a}$; teiste sõnadega, lugedes abstsisse X mitte punktist O , vaid uuest algusest O_1 , mille abstsiss on $-\frac{b}{2a}$; uus ordinaat Y saadakse endisest, lahutades sellest arvu $c - \frac{b^2}{4a}$; teiste sõnadega, lugedes ordi-

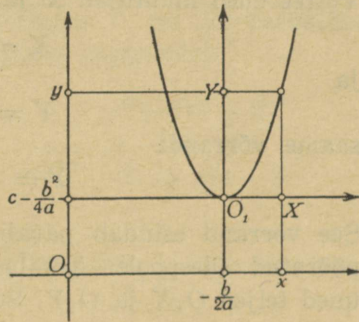
naate Y mitte punktist O , vaid uuest algusest O_1 , mille ordinaat on $c - \frac{b^2}{4a}$. Valime nüüd uue koordinaatide teljestiku (joonis 33), mille algus on punktis

$$O_1 \equiv \left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a} \right),$$

ja mille teljed O_1X ja O_1Y on vastavalt rööbiti telgedega Ox ja Oy . Uuritava kõvera võrrand avaldub uutes koordinaatides kujul

$$Y = aX^2;$$

see võrrand aga kujutab parabooli, mille teljeks on sirge $X = 0$ ehk, teisiti, $x = -\frac{b}{2a}$ ja mille lagipunkt on uues alguses O_1 , ehk, teisiti, mille lagipunkt on



Joonis 33.

$$O_1 \equiv \left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a} \right).$$

Kokkuvõttes:

ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafikuks on parabool,

mille lagipunkti koordinaadid on $-\frac{b}{2a}$ ja $c - \frac{b^2}{4a}$.

Ülesanne. Valmista funktsiooni

$$y = -0,5x^2 + 4x - 2$$

graafik.

Lahendus. Teisendades funktsiooni avaldist ülal-
seletatud viisil, saame:

$$y = -0,5(x^2 - 8x) - 2$$

ehk

$$y = -0,5(x^2 - 8x + 16) - 2 + 8$$

ehk

$$y = -0,5(x - 4)^2 + 6$$

ehk

$$y - 6 = -0,5(x - 4)^2.$$

Võttes uued muutujad X ja Y nii, et

$$X = x - 4$$

ja

$$Y = y - 6,$$

saame võrrandi

$$Y = -0,5X^2.$$

See võrrand esindab parabooli, mis on oma kumerusega pööratud ülespoole. Tõmbame läbi punkti $O_1 \equiv (4 | 6)$ uued teljed O_1X ja O_1Y . Seades parabooli šablooniga kumerusega ülespoole, paigutame tema telje Y -teljele ja lagi-punkti uue alguse O_1 kohale ning joonestame esiteks parabooli $Y = -X^2$. Kui selle parabooli ordinaadid poolitame ja leitud punktid ühendame kõvera joone abil, saame nõutava graafiku.

Ülesanded.

254. Määra kordajad a ja b parabooli võrrandis $y = ax^2 + bx + 4$, kui parabool läbib punktid $(1 | 2)$ ja $(3 | 16)$.

255. Määra kordajad a , b ja c parabooli võrrandis $y = ax^2 + bx + c$, kui parabool läbib punktid $(0 | 0)$, $(4 | 24)$ ja $(-6 | -24)$.

256. Määra parabool, mis läbib kolme punkti:

$$A \equiv (-3 | 0) \quad B \equiv (-1,5 | -13,5) \quad O \equiv (0 | 0).$$

257. Valides kujutamishikuks 1 cm ja kasutades parabooli $y = x^2$ šabloon, joonesta paraboolid:

1. $y = x^2$

$y = x^2 + 3$

$y = x^2 - 2$

2. $y = -x^2$

$y = -x^2 + 1$

$y = -x^2 - 4$

258. Valides kujutamishikuks 1 cm ja kasutades parabooli $y = x^2$ šabloon, joonesta paraboolid:

1. $y = (x - 2)^2$

$y = (x + 1)^2$

$y = -(x - 3)^2$

2. $y = (x + 2)^2 + 2$

$y = (x - 1)^2 - 3$

$y = -(x + 2)^2 - 5$

259. Leia joonist tegemata järgmiste paraboolide lagi-punktid ja sümmeetriateljed:

1. $y = x^2 - 1$

$y = -x^2 + 7$

$y = (x + 5)^2$

$y = -(x + 3)^2 + 4$

2. $y = (x + 1)^2 - 2$

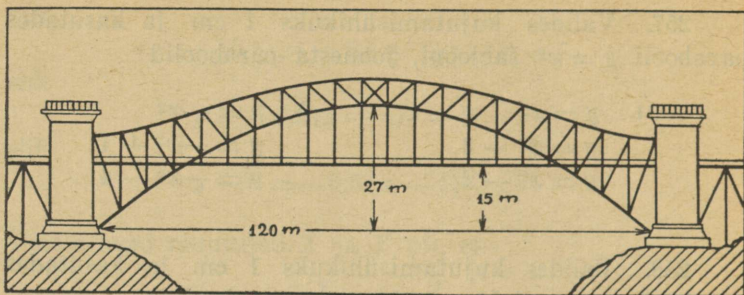
$y = x^2 - 2x + 6$

$y = x^2 - 6x + 3$

$y = -x^2 - 4x - 1$

260. Punkt P liigub mööda lõiku AB , mille pikkus on a . Avalda suurus $y = AP^2 + PB^2$ suuruse $x = AP$ funktsioonina ja leia selle funktsiooni graafikust, mis-suguse x -i väärtuse puhul omab suurus y väikesimat väärtust.

261. Lõik AC koosneb osadest $AB = a$ ja $BC = 3a$. Punkt P liigub mööda lõiku AC punktist A punkti B ja sealt punkti C . Missugusele lõigu AP pikkusele vastab suuruse $AP^2 + BP^2 + CP^2$ väikesim väärtus?



262. Ülalseisev joonis kujutab kahte jõekallast ühendavat raudsilda. Silda kannab paraboolne kaar. Kaare tugipunktide kaugus teineteisest on 120 m, kaare lagipunkt on 27 m kõrgemal tugipunktidest. Sõidutee asetseb 15 m kõrgemal tugipunktidest. Koosta parabooli võrrand, võttes koordinaatide alguseks parabooli lagipunkti ja ordinaat-teljeks parabooli telje. Leia, kui pikk on kaarevaheline osa sõiduteest.

§ 32. Kuupolenevus $y = ax^3$.

Olenegu y niiviisi x -st, et y ja x -i vastavate väärtuste puhul y ja x^3 suhted on võrdsed; siis

$$\frac{y}{x^3} = a,$$

kus kordaja a on jääv. Viimast võrdust teisiti kirjutades näeme, et

$$y = ax^3,$$

teiste sõnadega,

suurus y on võrdeline suuruse x kuubiga.

Näiteks kera ruumala V on võrdeline raadiuse r kuubiga, sest

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Kuupolenevus ei ole muutuvate suuruste vastastikune omadus, sest kui $y = ax^3$, siis on $x = \sqrt[3]{\frac{y}{a}}$, mitte aga $x = \text{konst} \cdot y^3$.

Käsiteldavat funktsiooni iseloomustav omadus on see, et

argumendi x kasvamisel k korda kuupfunktsioon ax^3 kasvab k^3 korda.

Ümberpöörduvalt:

kui argumendi k -kordsel kasvamisel funktsioon kasvab k^3 korda, siis funktsioon on võrdeline argumendi kuubiga.

Nii ühe kui teise omaduse tõestamine toimub skeemi järgi, mida kasutasime ruutfunktsiooni $y = ax^2$ vastavate omaduste tõestamisel.

Jäävat tegurit a võrduses $y = ax^3$ saab määrata, kui on teada üks paar argumendi ja funktsiooni vastavaid väärtusi. Olgu, näiteks, $y = 12$, kui $x = 2$. Siis

$$12 = a \cdot 2^3$$

ehk

$$12 = a \cdot 8,$$

millest

$$a = 1,5,$$

seega

$$y = 1,5x^3.$$

Ülesanded.

263. Telliskivi-virnas, milles kivid laotud vahedeta, loeti N kivi pikkuse sihis, niisama palju laiuse sihis ja niisama palju kõrguse sihis. Avalda telliskivide koguarv A virnas. Kuidas oleneb arv A arvust N ?

264. Kuubi serv on t cm pikk, kus t on täisarv. Kuubi tahud on kaetud ruutsentimeetrise võrguga nii, et võrgu jooned on rööbiti kuubi servadega. Iga kahe vastastahu võrgu sõlmed on ühendatud tahkudel risti seisvate niitidega. Mitu sõlmpunkti on tekkinud ruumilises võres? Kuidas oleneb leitud arv arvust t ?

265. Täida järgmise tabeli tühjad lahtrid arvutades vajalikud väärtused lihtsaimal viisil:

Kera läbimõõt	5,3	2 · 5,3	3 · 5,3	0,1 · 5,3	0,4 · 5,3
Kera ruumala	78,0				

266. Kerakujuline rahetera kasvab langedes auru veeldumisel ja jäätumisel läbimõõdult 0 millimeetrist 20 millimeetrisse. Teades, et jää erikaal on 0,92, kujuta rahetera kaalu kasvamise käik tera läbimõõdu kasvades.

267. Seebimulli läbimõõt kasvab 0 sentimeetrist 8 sentimeetrisse. Kujuta mulli ruumala kasvamine samas vahemikus, võttes andmed 0,5 cm tagant.

Leia joonisest seebimulli ruumala läbimõõdudel
2,7 3,9 4,8 5,3 6,6 sentimeetrit.

268. Kera, mille raadius on 6 cm, kaalub 7,2 kg. Kui palju kaalub samast ainest kera, mille raadius on 8 cm?

269. Köögis tarvitataval veetrumlil on tüvikoonuse kuju. Kui tähistada tema sügavust h ja põhja ja kaane raadiusi vastavalt R ja r , siis võib tema ruumala määrata valemi järgi

$$V = \frac{1}{3} \pi (R^2 + Rr + r^2) h.$$

Näita, et trumli mõõtmete kahanemisel k -kordselt kahaneb trumli ruumala k^3 -kordselt.

270. Kahe silindrikujulise keedisepurgi läbimõõdud on d ja D ja sügavused vastavalt h ja H . Kuidas suhtuvad nende purkide ruumalad?

Vasta küsimusele ruumalasad arvutamata.

271. Lual seisab kaks sarnast heinakuhja. Nende ümbermõõdud on laiemal kohal vastavalt C m ja c m. Ära vedamisel selgus, et esimeses kuhjas on H tsentnerit heinu. Arvuta teise kuhja heinte hulk.

272. Lual seisab kaks teineteisega sarnast kohvikannu. Nende põhjade läbimõõdud suhtuvad nagu $1 : 1,442$. Mitu korda on teine kann ruumalalt suurem kui esimene?

273. Lahtisel tulel seisab kaks poolkerakujulist pesukatelt, läbimõõtudega d ja D . Kuidas suhtuvad nende küttepinnad? Kuidas suhtuvad nendes olevad veehulgad, kui mõlemad on ääreni täis? Kuidas suhtuvad ajad, mis tarvilikud, et vesi neis keema läheks?

274. Õhupalli kandejõud on võrdeline tema ruumalaga. Avalda vesinikuga täidetud kerakujulise õhupalli kandejõud tema läbimõõdu funktsioonina, teades, et 2,8-meetrise läbimõõduga palli kandejõud on 138 kg.

275. Koonuse telglõike tipunurk on 90° . Kuidas oleneb koonuse ruumala koonuse kõrgusest? Kujuta see olenevus graafiliselt ja leia graafikust, kui suure kõrguse puhul on koonuse ruumala 30 ruumiühikut.

§ 33. Kuup-parabool.

Küsime, missugune on olenevuse $y = ax^3$ graafik. Et koordinaadid $(0 | 0)$ rahuldavad võrrandit $y = ax^3$, siis olenevuse $y = ax^3$ graafik läbib koordinaatide algust.

Paneme tähele, et võrranditega

$$y = ax^3 \quad \text{ja} \quad y = -ax^3$$

määratud ordinaadid ühe ja sellesama x -i puhul erinevad vaid märgi poolest. Järelikult kõverad $y = ax^3$ ja $y = -ax^3$ on sümmeetrilised x -telje suhtes. Seega piisab kõvera $y = ax^3$ uurimisest positiivse a korral. Sel korral on ordinaadil y sama märk, mis abstsissil x ; järelikult positiivse a korral olenevuse $y = ax^3$ kõik graafiku punktid on teljestiku I ja III veerandis.

Kui võrrandit $y = ax^3$ rahuldab mingi väärtuspaar x_1 ja y_1 , siis rahuldab seda ka väärtuspaar $-x_1$ ja $-y_1$. Tõepoolest, kui $y_1 = ax_1^3$, siis ka $-y_1 = a \cdot (-x_1)^3$. Punktid $(x_1 | y_1)$ ja $(-x_1 | -y_1)$ on aga sümmeetrilised koordinaatide alguse suhtes. Seega

olenevuse $y = ax^3$ graafik on sümmeetriline koordinaatide alguse suhtes.

Seetõttu saame teljestiku I veerandis asetseva graafiku osa järgi joonestada kohe ka tema osa III veerandis.

Vaadeldes võrrandeid

$$y = x^3 \quad \text{ja} \quad y = ax^3$$

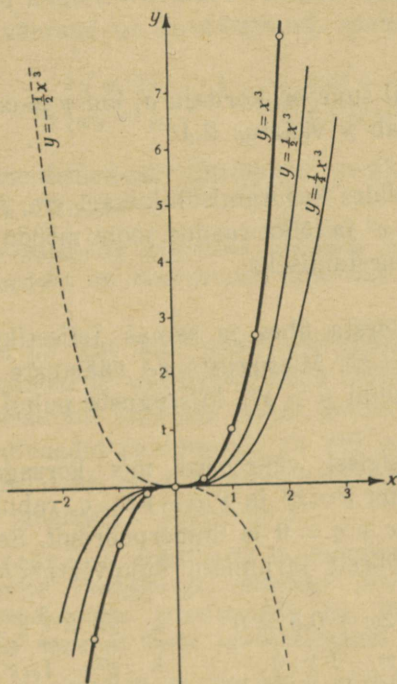
näeme, et teise kõvera ordinaadid saadakse esimese kõvera ordinaatidest, korrutades neid ühe ja sama teguriga a . Seepärast joonestame kõigepealt olenevuse

$$y = x^3$$

graafiku. Selleks anname x -le väärtused, näiteks 0-st 2-ni iga 0,5 tagant, ja arvutame vastavad y väärtused; saame tabeli:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	0	0,125	1	3,375	8

Kujutame need väärtuspaarid punktidenal x - y -tasapinnal, ehitame neile punktidele sümmeetrilised punktid



Joonis 34.

koordinaatide alguse suhtes ja ühendame kõik saadud punktid kõvera abil (joonis 34). Seda kõverat nimetatakse kuup-parabooliks. See ongi olenevuse $y = x^3$ graafikuks.

Korrutades saadud kõvera ordinaate a -ga, saame joone, mida nimetame samuti kuup-parabooliks. Joonisel 34 on kujutatud kuup-paraboolid

$$y = x^3 \quad y = \frac{1}{2}x^3 \quad y = \frac{1}{4}x^3.$$

Joonestades kõverale $y = ax^3$ x -telje suhtes sümmeetrilise, saame funktsiooni $y = -ax^3$ graafiku (joonis 34).

Ülesanded.

276. Kui suur on kordaja a , kui $y = ax^3$ ja x -i väärtusele 2 vastab y väärtus 2,4?

277. Valides kujutamiseühikuks 1 cm, joonesta papile parabool $y = x^3$ ja lõika saadud joont mööda šabloon kuupparabooli joonestamiseks.

278. Joonesta ühes ja samas teljestikus paraboolid $y = x^2$ ja $Y = x^3$. Missuguste x -i väärtuste puhul $y < Y$? Missuguste puhul $y > Y$? Missuguste puhul $y = Y$?

279. Abstsissi väärtused, mis korraga rahuldavad võrrandsüsteemi $y = x^3$ ja $y = -px - q$, rahuldavad ka võrrandit $x^3 + px + q = 0$ ja ümberpöörduvalt. Seda arvestades lahenda graafiliselt järgmised kuupvõrrandid:

$$1. \quad x^3 - 2x + 0,5 = 0$$

$$3. \quad x^3 + \frac{3}{4}x + 2 = 0$$

$$2. \quad x^3 + x - 1 = 0$$

$$4. \quad x^3 - 1,7x + 0,9 = 0$$

280. Leia joonestamise teel parabooli $y = x^3$ ja sirge $y = 5x - 4$ ühised punktid. Kontrolli tulemust, asetades leitud koordinaatide väärtused kõverate võrranditesse.

281. Argumendi x väärtustele 1 ja 2 vastavad lineaarse funktsiooni $f(x)$ väärtused 1 ja 3 ning kuupfunktsiooni $F(x)$ väärtused 0,1 ja 0,8. Leia joonestamise teel, missugusele x -i väärtusele vastavad võrdsed funktsioonide $f(x)$ ja $F(x)$ väärtused.

§ 34. Ruutvõrrand-süsteemide graafiline lahendamine.

Olgu antud kahest võrrandist koosnev süsteem, milles vähemalt üks võrrand on ruutvõrrand, näiteks

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ xy = 1 \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y = x^2 - 5x + 6. \end{cases}$$

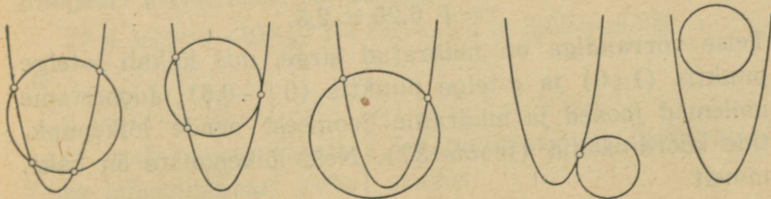
Niisugust võrrand-süsteemi nimetame ruutvõrrand-süsteemiks. Niisiis:

ruutvõrrand-süsteemiks nimetame niisugust võrrandsüsteemi, milles üks võrrandeist on ruutvõrrand, teine aga kas ruut- või linearvõrrand.

Kujutleme nii ühe kui teise võrrandiga määratud joone x - y -tasapinnal ja vaatleme joonte lõikepunkte. Need punktid asetsevad nii ühel kui teisel joonel, seega nende punktide koordinaadid rahuldavad nii üht kui teist antud võrrandeist. Järelikult need koordinaadid ongi antud võrrand-süsteemi lahendeiks. Seepärast:

ruutvõrrand-süsteemi graafiliseks lahendamiseks joonestame süsteemi kuuluvate võrranditega määratud jooned ja leiame nende joonte lõikepunktide koordinaadid. Iga niisugune koordinaatide paar ongi süsteemi üheks lahenditepaariks.

Õeldu põhjal on selge, et võrrand-süsteemil on nii mitu lahenditepaari, kui mitmes punktis lõikuvad süsteemi võrranditega määratud jooned. Kui näiteks üks võrrand kujutab ringjoont, teine parabooli, siis neil joontel on

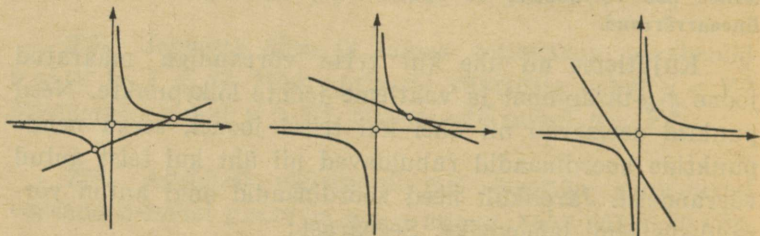


Joonis 35.

kas 4, 3, 2, 1 või 0 ühist punkti (joonis 35) ja sellele vastavalt võrrand-süsteemil on kas 4, 3, 2, 1 või 0 lahenditepaari. Kui näiteks üks võrrand kujutab hüperbooli, teine sirget, siis neil joontel on kas 2, 1 või 0 ühist punkti (joonis 36) ja sellele vastavalt võrrand-süsteemil on kas 2, 1 või 0 lahenditepaari.

Üldiselt:

kui ruutvõrrand-süsteemi kuuluvaist võrrandeist on mõlemad ruutvõrrandid, siis võrrand-süsteemil on ülimalt neli lahenditepaari; kui aga üks võrrandeist on lineaarvõrrand, siis lahenditepaare on ülimalt kaks.



Joonis 36.

Näide 1. Lahendame graafiliselt võrrand-süsteemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6,25 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

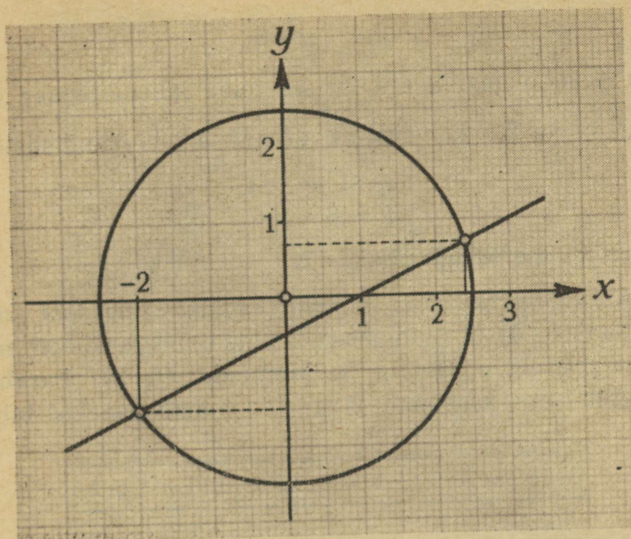
ja kontrollime leitud lahendeid.

Esimene antud võrrandeist esindab ringjoont, mille keskpunkt on koordinaatide alguses ja mille raadius

$$r = \sqrt{6,25} = 2,5.$$

Teise võrrandiga on määratud sirge, mis lõikab x -telge punktis $(1 | 0)$ ja y -telge punktis $(0 | -0,5)$. Joonestame mõlemad jooned ja määrame joonisest nende lõikepunktide koordinaadid (joonis 37). Neid lõikepunkte on kaks, nimelt

$$(-2 | -1,5) \quad \text{ja} \quad (2,4 | 0,7).$$



Joonis 37.

Esimene lõikepunkt annab võrrand-süsteemi lahenditepaari

$$x_1 = -2 \quad \text{ja} \quad y_1 = -1,5$$

ja teine lõikepunkt lahenditepaari

$$x_2 = 2,4 \quad \text{ja} \quad y_2 = 0,7.$$

Lahendite kontrollimiseks asendame antud võrrandite vasakutes pooltes x ja y leitud väärtustega. Esimese lahenditepaari asendamisel saame

$$x^2 + y^2 = (-2)^2 + (-1,5)^2 = 4 + 2,25 = 6,25$$

ja

$$x - 2y = -2 - 2 \cdot (-1,5) = -2 + 3 = 1,$$

nagu peab olema. Esimene lahenditepaar on seega õige. Teise lahenditepaari puhul saame

$$x^2 + y^2 = 2,4^2 + 0,7^2 = 5,76 + 0,49 = 6,25$$

ja

$$x + 2y = 2,4 - 2 \cdot 0,7 = 2,4 - 1,4 = 1,$$

nagu peab olema. Seega on ka teine lahenditepaar õige.

Näide 2. Lahendame graafiliselt võrrand-süsteemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 3 - x^2 \end{cases}$$

ja kontrollime leitud lahendeid.

Antud võrrandeist esimene esindab ringjoont keskpunktiga $(0 | 0)$ ja raadiusega 2 ning teine parabooli, mille sümmeetriatelg on y -telg ja lagipunkt $(0 | 3)$. Parabooli joonestamiseks koostame järgneva väärtuspaaride tabeli:

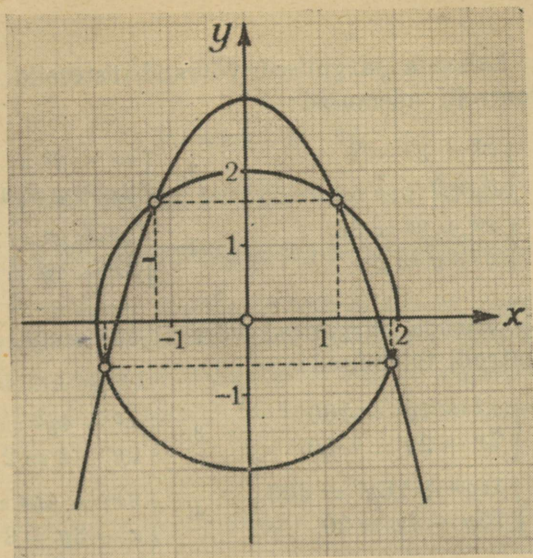
x	0	$\pm 0,5$	± 1	$\pm 1,5$	± 2
x^2	0	0,25	1	2,25	4
$y = 3 - x^2$	3	2,75	2	0,75	-1

Joonestades antud süsteemiga määratud kõverjooned, näeme, et neil on neli lõikepunkti (joonis 38), nimelt $(-1,9 | -0,6)$, $(-1,2 | 1,6)$, $(1,2 | 1,6)$ ja $(1,9 | -0,6)$. Vastavalt sellele on võrrand-süsteemil järgmised lahenditepaarid:

$$\begin{array}{lll} x_1 = -1,9 & \text{ja} & y_1 = -0,6; \\ x_2 = -1,2 & \text{ja} & y_2 = 1,6; \\ x_3 = 1,2 & \text{ja} & y_3 = 1,6; \\ x_4 = 1,9 & \text{ja} & y_4 = -0,6. \end{array}$$

Lahendite kontrollimisel näeme, et esimese ja viimase lahenditepaari puhul

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (\pm 1,9)^2 + (-0,6)^2 = 3,61 + 0,36 = \\ &= 3,97 \approx 4,0 \end{aligned}$$



Joonis 38.

ja

$$3 - x^2 = 3 - (\pm 1,9)^2 = 3 - 3,61 = -0,61 \approx \\ \approx -0,6 = y.$$

Teise ja kolmanda lahenditepaari puhul

$$x^2 + y^2 = (\pm 1,2)^2 + 1,6^2 = 1,44 + 2,56 = 4,00$$

ja

$$3 - x^2 = 3 - (\pm 1,2)^2 = 3 - 1,44 = 1,56 \approx 1,6 = y.$$

Leitud lahendid on seega ligikaudsed, kuid õige väikeste vigadega. Viimaste tekkimine on tingitud vältimatutest joonestamise ja mõõtmise ebatäpsustest.

Ülesanded.

282. Lahenda järgmised võrrand-süsteemid graafiliselt ja kontrolli tulemused:

$$1. \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$$

283. Lahenda järgmised võrrand-süsteemid graafiliselt ja kontrolli tulemused:

$$1. \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 100 \\ 7x + 2y = -50 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 100 \\ 2y - x = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 16x^2 + 25y^2 = 400 \\ 15y - 4x = 20 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 36 \\ x - 3y + 3 = 0 \end{cases}$$

284. Lahenda järgmised võrrand-süsteemid graafiliselt ja kontrolli tulemused, määrates süsteemide lahendid arvutamise teel:

$$1. \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 25 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^2 + y^2 = 45 \\ xy = 18 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \frac{1}{6}x^2 \end{cases}$$

285. Lahenda graafiliselt järgmised võrrand-süsteemid:

$$1. \begin{cases} 25x^2 + 36y^2 = 576 \\ y = x^2 - 10 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} xy = 12 \\ y = (x - 5)^2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 16 \\ xy = 1\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} xy = 4 \\ y = x^2 - 6x + 9 \end{cases}$$

Peatükk VI.

Funktsiooni muutumise uurimine.

§ 35. Suuruse lõpmatu kasvamine.

Kui funktsiooni avaldis on antud, siis on võimalik näidata argumendi väärtusi, mille puhul see funktsioon on määratud. Näiteks funktsioon $\sqrt{4-x^2}$ on määratud ainult neil argumendi väärtustel, mille puhul juurealune

$$4 - x^2 \geq 0$$

ehk

$$x^2 \leq 4$$

ehk

$$|x| \leq 2$$

ehk

$$-2 \leq x \leq 2.$$

Funktsiooni $\sqrt{4-x^2}$ puhul on argumendi muutumine tõkestatud nii alt- kui ka ülalpoolt. Niisugusel juhul öeldakse, et argumendi kõik väärtused on lõplikud.

Võtame teiseks näiteks funktsiooni $\log(x-5)$. Et negatiivsetel arvudel ja nullil pole logaritmi, igal positiivsel arvul aga on logaritm, siis uuritav funktsioon on määratud kõigil x -i väärtustel, mille puhul logaritmi märgi all seisev arv

$$x - 5 > 0$$

ehk

$$x > 5.$$

Siin on argumendi muutumine altpoolt tõkestatud arvuga 5, ülalpoolt aga argumendi muutumine pole tõkestatud:

x võib omandada kuitahes suuri positiivseid väärtusi. Seega funktsioon $\log(x-5)$ on määratud argumendi iga väärtuse puhul, mis kuulub vahemikku

$$5 < x < +\infty.$$

Kolmanda näitena vaatleme funktsiooni $\frac{1}{1+x^2}$. See funktsioon on määratud x -i iga väärtuse puhul; argumendi x muutumine pole siin tõkestatud ei alt- ega ülalt-poolt:

$$-\infty < x < +\infty.$$

Neljandaks näiteks olgu funktsioon $\frac{1}{x-2}$. See funktsioon on määratud x -i iga väärtuse puhul, välja arvatud väärtus 2; sel väärtusel nimetaja muutub nulliks ja sümbol $\frac{1}{x-2}$ kaotab mõtte. Seega kõnesoleva funktsiooni puhul argumendi muutumisvahemik koosneb kahest osast:

$$-\infty < x < 2 \quad \text{ja} \quad 2 < x < +\infty.$$

Kolmes viimases näites argumendi muutumine ei olnud tõkestatud kummaltki poolt. Niisugusel juhul ütleme, et argument võib kasvada lõpmatult. Seega:

argument kasvab lõpmatult, kui tema absoluutväärtus saab suuremaks igast kuitahes suurest etteantud positiivsest arvust.

Kui x jääb seejuures positiivseks, siis ütleme, et x läheneb pluss lõpmatusele, ja kirjutame

$$x \rightarrow +\infty;$$

kui x jääb negatiivseks, siis ütleme, et x läheneb miinus lõpmatusele, ja kirjutame

$$x \rightarrow -\infty.$$

Sümboleid $+\infty$ ja $-\infty$ ei tule mõista arvudena.

Vaatleme nüüd funktsiooni muutumist.

Kui funktsiooni muutumine on tõkestatud nii alt- kui ülalt-poolt, siis ütleme, et funktsioon oma muutumisel jääb lõplikuks; kui see muutumine ei ole tõkestatud

kas alt- või ülaltpoolt või nii alt- kui ka ülaltpoolt, siis ütleme, et funktsioon kasvab lõpmatult. Seega

funktsioon kasvab lõpmatult, kui tema absoluutväärtus saab suuremaks igast kuitahes suurest etteantud positiivsest arvust.

Lõpliku funktsiooni näiteks võib olla murd $\frac{1}{1+x^2}$. Tõepoolest, missuguse väärtuse ka anname argumendile x , ikka on $x^2 \geq 0$ ja seega $1+x^2 \geq 1$; järelikult kõnesolev funktsioon on alati positiivne ja väiksem kui 1 või võrdne sellega; sümbolites:

$$0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1.$$

Lõpmatult kasvava funktsiooni näiteks võib olla $\tan a$. Tõepoolest, missuguse arvu a ka ette anname, ikka leidub 90° ümbruses nurki, mille puhul

$$|\tan a| > a.$$

Kui a läheneb 90° -le suurenedes, siis $\tan a$ kasvab lõpmatult, jäädes positiivseks; kui a läheneb 90° -le vähenedes, siis $\tan a$ kasvab lõpmatult, jäädes negatiivseks. Sümbolites kirjutame neid tõsiasju nii:

kui suurenedes $a \rightarrow 90$, siis $\tan a \rightarrow +\infty$;

kui vähenedes $a \rightarrow 90$, siis $\tan a \rightarrow -\infty$.

Tõestame järgmise teoreemi:

ühest suurema absoluutväärtusega arvu aste kasvab lõpmatult, kui tema astendaja kasvab lõpmatult.

Olgu $|q| > 1$. Näitame siis, et

$$\text{kui } n \rightarrow \infty, \text{ siis } |q^n| \rightarrow \infty.$$

Selleks anname ette kindla positiivse arvu, ütleme, arvu b , ja näitame, et on olemas astendaja n niisuguseid väärtusi, mille puhul

$$|q^n| > b$$

ehk

$$|q|^n > b.$$

See võrratus on kindlasti kehtiv, kui on kehtiv logaritmi-
misel saadud võrratus

$$n \cdot \log |q| > \log b$$

ehk võrratus

$$n > \frac{\log b}{\log |q|},$$

sest $\log |q|$ on positiivne ja võrratuse kumbagi poolt sel-
lega jagades ei muutu võrratuse suund. Et n eelduse järgi
kasvab lõpmatult, siis leidub tema väärtuste hulgas kind-
lasti niisugune väärtus, mis ületab murru $\frac{\log b}{\log |q|}$; selle ja
kõigi suuremate väärtuste puhul ongi

$$|q^n| > b.$$

Eelmist arutlust on võimalik läbi viia ig a etteantud
arvu b puhul. Seega ei leidu arvu, mida $|q^n|$ ei ületaks
 n -i küllalt suureks kasvamisel. Järelikult,

$$\text{kui } n \rightarrow \infty, \text{ siis ka } |q^n| \rightarrow \infty,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Näide. Kui suure peab võtma astendaja n , et $1,1^n$
ületaks arvu 10^{10} ?

Et oleks

$$1,1^n > 10^{10},$$

selleks peab olema

$$n \cdot \log 1,1 > 10$$

ehk

$$n > \frac{10}{\log 1,1}$$

ehk

$$n > \frac{10}{0,0414}$$

ehk

$$n \geq 242.$$

§ 36. Suuruse lõpmatu kahanemine.

Kui suurus muutub nõnda, et tema absoluutväärtus saab ja siis ka jääb väiksemaks igast kuitahes väikesest etteantud positiivsest arvust, siis ütleme, et suurus kahaneb lõpmatult.

Selle asemel, et öelda „suurus kahaneb lõpmatult“, ütleme ka „suurus läheneb tõkestamatult nullile“ ja kirjutame niisuguse suuruse s puhul:

$$s \rightarrow 0.$$

Tõestame järgmise teoreemi:

murru suurus kahaneb lõpmatult, kui tema nimetaja lõpmatult kasvab.

Sümbolites:

$$\text{kui } |x| \rightarrow \infty, \text{ siis } \frac{a}{x} \rightarrow 0.$$

Tõestuseks anname ette kindla positiivse arvu, ütleme, arvu β , ja nõuame, et oleks

$$\left| \frac{a}{x} \right| < \beta.$$

See võrratus on kindlasti kehtiv, kui

$$|a| < \beta \cdot |x|$$

ehk, kui

$$\frac{|a|}{\beta} < |x|$$

ehk, teisiti, kui

$$|x| > \frac{|a|}{\beta}.$$

Et x eelduse järgi lõpmatult kasvab, siis leidub tema väärtuste hulgas kindlasti niisugune väärtus, mis ületab murru $\frac{|a|}{\beta}$; selle ja kõigi suuremate väärtuste puhul kehtib aga tõestatav võrratus

$$\left| \frac{a}{x} \right| < \beta.$$

Eelmist arutlust on võimalik läbi viia iga etteantud arvu β puhul, kui väike viimane ka on. Järelikult,

$$\text{kui } |x| \rightarrow \infty, \text{ siis } \frac{\alpha}{x} \rightarrow 0,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Tõestame edasi, et

arvust 1 väiksema absoluutväärtusega arvu aste kahaneb lõpmatult, kui tema astendaja lõpmatult kasvab,

Olgu $|q| < 1$. Näitame, et

$$\text{kui } n \rightarrow \infty, \text{ siis } q^n \rightarrow 0.$$

Selleks anname ette kindla positiivse arvu, ütleme, arvu β , ja nõuame, et oleks

$$|q^n| < \beta$$

ehk

$$|q|^n < \beta.$$

See võrratus on kindlasti kehtiv, kui on kehtiv logaritmimisel saadud võrratus

$$n \log |q| < \log \beta$$

ehk võrratus

$$n > \frac{\log \beta}{\log |q|}.$$

Viimases reas on võrratuse suund muutunud vastupidiseks eelmise võrratuse suunale, sest jagaja $\log |q|$ kui lihtmurru logaritm on negatiivne. Et n eelduse järgi lõpmatult kasvab, siis leidub tema väärtuste hulgas kindlasti niisugune väärtus, mis ületab murru $\frac{\log \beta}{\log |q|}$; selle ja kõigi suuremate väärtuste puhul kehtibki tõestatav võrratus

$$|q^n| < \beta.$$

Et eelmist arutlust on võimalik läbi viia iga etteantud arvu β puhul, kui väike viimane ka on, siis q^n kahaneb lõpmatult.

Ülesanded.

286. Missugusest n -i väärtusest alates saab ja jääb avaldise $7n^3$ väärtus suuremaks kui 7 000?

287. Missugusest n -i väärtusest alates saab ja jääb

1.	avaldise $n + 50$	väärtus suuremaks kui	1 000
2.	„ $2n + 17$	„ „ „	10 000
3.	„ $n^2 - 8$	„ „ „	4 200
4.	„ $3n^2 + 25$	„ „ „	17 500
5.	„ 2^n	„ „ „	1 000 000
6.	„ $5 \cdot 3^n$	„ „ „	9 000 000

288. Missugusest n -i väärtusest alates saab ja jääb avaldise $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ väärtus väiksemaks arvust 0,0002?

289. Missugusest n -i väärtusest alates saab ja jääb avaldise $\frac{3}{4^n}$ väärtus väiksemaks kui 0,0005?

290. Missugusest n -i väärtusest alates korrapärase n -nurga välisnurk saab ja jääb väiksemaks kui 1° ?

291. Mis toimub avaldise N^2 väärtusega argumenti N lõpmatul kasvamisel?

292. Mis toimub avaldise $N^3 - 10N^2$ väärtusega argumenti N lõpmatul kasvamisel?

293. Mis toimub avaldise $1 - 3u + 4u^2$ väärtusega argumenti u absoluutväärtuse lõpmatul kahanemisel?

§ 37. Funktsiooni piirväärtus.

Kui suurus s muutub nõnda, et tema ja jääva arvu a vahe lõp-
matult kahaneb, siis ütleme, et suurus s läheneb tõkestamatult
arvule a .

Sümbolites:

$$\text{kui } |s - a| \rightarrow 0, \text{ siis } s \rightarrow a.$$

Näide 1. Vaatleme, kuidas muutub funktsioon

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

argumendi lõpmatul kasvamisel.

On selge, et argumendi x lõpmatul kasvamisel ka
 $1+x$ lõpmatult kasvab, seega murd $\frac{1}{1+x}$ lõpmatult
kahaneb. Sümbolites:

$$\text{kui } x \rightarrow \infty, \text{ siis } \frac{1}{1+x} \rightarrow 0.$$

Sama tõsiasja puhul ütleme ka, et argumendi lõpmatul
kasvamisel funktsiooni $f(x)$ piirväärtus on 0, ja
kirjutame

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Sümbol \lim on ladinakeelse sõna *limes* lühend, mis
tähendab piiri. Kirjutis

$$\text{kui } x \rightarrow \infty, \text{ siis } f(x) \rightarrow 0$$

ja kirjutis

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

väljendavad üht ja sedasama mõtet ja erinevad vaid
vormilt.

Kokkuvõttes:

kui argumendi x lõpmatul kasvamisel funktsioon $f(x)$ tõkesta-
matult läheneb arvule b , siis nimetatakse viimast arvu funktsiooni
piirväärtuseks argumendi lõpmatul kasvamisel.

Näide 2. Vaatleme, kuidas muutub funktsioon

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

argumendi lõpmatul kahanemisel.

Eelduse järgi $x \rightarrow 0$; on selge, et sel juhul $1+x \rightarrow 1$ ja muid $\frac{1}{1+x} \rightarrow 1$. Sümbolites:

$$\text{kui } x \rightarrow 0, \text{ siis } \frac{1}{1+x} \rightarrow 1.$$

Eelmises reas avaldatud tõsiasi, et argumendi lõpmatul kahanemisel funktsiooni $f(x)$ piirväärtus on 1, kirjutatakse ka kujul

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

Kokkuvõttes:

kui argumendi x tõkestamatul lähenemisel arvule a funktsioon $f(x)$ tõkestamatult läheneb arvule b , siis nimetatakse viimast arvu funktsiooni piirväärtuseks argumendi tõkestamatul lähenemisel arvule a .

Selles definitsioonis kirjeldatud asjaolusid märgime sümbolites kujul:

$$\text{kui } x \rightarrow a, \text{ siis } f(x) \rightarrow b,$$

ehk

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Sedasama kirjutusviisi laiendatakse ka juhule, kus argument või funktsioon lõpmatult kasvab.

Lihtsa ehitusega funktsiooni puhul on tema piirväärtust otsekohe võimalik näha funktsiooni avaldisest, kui selles argumenti lasta muutuda etteantud viisil.

Et leida näiteks

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{2n+8}{7n-4},$$

paneme tähele, et kui

$$n \rightarrow 0,$$

siis

$$2n \rightarrow 0 \quad \text{ja} \quad 7n \rightarrow 0,$$

seega murru lugeja $2n + 8 \rightarrow 8$, tema nimetaja aga $7n - 4 \rightarrow -4$

ja murd

$$\frac{2n + 8}{7n - 4} \rightarrow \frac{8}{-4},$$

seega

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{2n + 8}{7n - 4} = -2.$$

Ülesanded.

294. Mis toimub järgmiste avaldiste väärtustega, kui $n \rightarrow \infty$?

1. $2n - 8$

2. $\frac{1}{2n}$

3. $(4 - n)^2$

$n^2 + 5$

$\frac{3}{n + 2}$

$\frac{n}{10000}$

$(n - 7)^2$

$20 - n^2$

$\frac{1}{n - 1000}$

295. Mis toimub järgmiste avaldiste väärtustega, kui $n \rightarrow 0$?

1. $2n - 8$

2. $\frac{1}{2n}$

3. $\frac{n}{n + 1}$

$n^2 + 5$

$\frac{2}{n + 5}$

$\frac{3n}{n - 2}$

$(n - 7)^2$

$\frac{3}{4n - 1}$

$\frac{5n - 3}{6n + 7}$

296. Mis toimub

avaldisega $n^2 - 4n + 1$, kui $n \rightarrow 5$;

avaldisega $\sqrt{n^2 + 7}$, kui $n \rightarrow 3$;

avaldisega $\frac{n}{n^3 + n + 1}$, kui $n \rightarrow 2$?

297. Mis toimub

avaldisega $\frac{1}{x-7}$, kui $x \rightarrow 7$;

avaldisega $\frac{x+2}{x-11}$, kui $x \rightarrow 11$;

avaldisega $\frac{x+1}{x^2-1}$, kui $x \rightarrow 1$?

§ 38. Lõpmatult kasvav ja lõpmatult kahanev geomeetriline rida.

Rida, mille liikmete arv lõpmatult kasvab, nimetatakse lõp-
matuks reaks.

Niisugused read on näiteks:
loomulikkude arvude rida

1, 2, 3, 4, 5, ...

ruutarvude rida

1, 4, 9, 16, 25, ...

ja algarvude rida

2, 3, 5, 7, 11, ...

Kui rea liikmete arvu tähistame tähega n , siis lõpmatu
rea korral $n \rightarrow \infty$.

Olgu tegemist geomeetrilise reaga

$a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}$,

milles on n liiget. Laseme selle rea liikmete arvu lõpmatult
kasvada ja küsime, kuidas seejuures muutub rea viimane
liige a_1q^{n-1} . Selle liikme absoluutväärtus on

$$|a_1q^{n-1}| = |a_1| \cdot |q^{n-1}| = |a_1| \cdot |q|^{n-1}.$$

Kui $|q| > 1$, siis n -i lõpmatul kasvamisel ka $n - 1$ kasvab lõpmatult ja ühe varemini-tõestatud teoreemi järgi $|q|^{n-1} \rightarrow \infty$. Kuid siis ka $|a_1| \cdot |q|^{n-1} \rightarrow \infty$ ja järelikult

$$|a_1 \cdot q^{n-1}| \rightarrow \infty.$$

Seega:

kui geomeetrilise rea teguri absoluutväärtus on suurem kui 1, siis liikmete arvu lõpmatul kasvamisel rea viimane liige kasvab lõpmatult.

Niisuguse omadusega geomeetrilist rida nimetatakse lõpmatult kasvavaks geomeetriliseks reaks.

Vaatleme nüüd juhtu, kui $|q| < 1$. Eespool tõestasime, et sel juhul astendaja lõpmatul kasvamisel aste $|q|^{n-1} \rightarrow 0$ ja seepärast ka $|a_1| \cdot |q|^{n-1} \rightarrow 0$ ja järelikult

$$|a_1 \cdot q^{n-1}| \rightarrow 0.$$

Seega:

kui geomeetrilise rea teguri absoluutväärtus on väiksem kui 1, siis liikmete arvu lõpmatul kasvamisel rea viimane liige kahaneb lõpmatult.

Niisuguse omadusega geomeetrilist rida nimetatakse lõpmatult kahanevaks geomeetriliseks reaks.

Lõpmatult kasvavaks geomeetriliseks reaks on näiteks rida

$$+3, -6, +12, -24, +48, -96, \dots$$

Seevastu rida

$$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

on lõpmatult kahanev geomeetriline rida.

Urime, kuidas muutub geomeetrilise rea summa, kui tema liikmete arv lõpmatult kasvab. Geomeetrilise rea

$$a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}$$

summa avaldub kujul

$$s_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1}$$

ehk, teisiti kirjutades,

$$s_n = \frac{a_1}{q - 1} \cdot q^n - \frac{a_1}{q - 1}.$$

Liikmete arvu n muutudes ei muutu murd $\frac{a_1}{q - 1}$, küll aga q^n . Et selgusele jõuda, mis toimub s_n -ga arvu n lõpmatul kasvamisel, selleks vaatleme eraldi 3 juhtu:

$$|q| > 1, \quad |q| = 1 \quad \text{ja} \quad |q| < 1.$$

Esimesel juhul n -i lõpmatul kasvamisel q^n kasvab lõpmatult, järelikut kasvab lõpmatult ka korrutis $\frac{a_1}{q - 1} \cdot q^n$ ja seepärast kasvab lõpmatult ka vahe

$$\frac{a_1}{q - 1} \cdot q^n - \frac{a_1}{q - 1}.$$

Seega, kui $|q| > 1$, siis

$$\text{ühes } n \rightarrow \infty \quad \text{ka} \quad s_n \rightarrow \infty.$$

Selle omadusega geomeetrist rida nimetatakse hajuvaks geomeetriliseks reaks. Järelikut

kui $|q| > 1$, siis geomeetiline rida hajub.

Teisel juhul, kui $q = 1$, summa valem kaotab mõtte, sest eeldusest järeldub, et nimetaja $q - 1 = 0$. Seepärast juhul $q = 1$ summa valemit rakendada ei saa. Küsimus on aga lahenduv ilma summa valemita. Tõepoolest, kui $q = 1$, siis geomeetrilise rea summa

$$s_n = \underbrace{a_1 + a_1 + \dots + a_1}_{n \text{ liidetavat}} = na_1.$$

Kui $n \rightarrow \infty$, siis ka $na_1 \rightarrow \infty$; see tähendab:

kui $q = 1$, siis geomeetiline rida hajub.

Juhul, kui $q = -1$, geomeetiline rida omab kuju

$$a_1, -a_1, a_1, -a_1, a_1 \dots$$

Tema liikmete summa s_n on vaheldumisi a_1 ja 0; seega s_n ei lähene mingi piirväärtusele n -i lõpmatul kasvamisel.

Kolmandal juhul, kui $|q| < 1$, teame eespool-tõestatu põhjal, et

$$\text{ühes } n \rightarrow \infty \quad q^n \rightarrow 0.$$

Seepärast valemis

$$s_n = \frac{a_1}{q-1} \cdot q^n - \frac{a_1}{q-1}$$

ka liige

$$\frac{a_1}{q-1} \cdot q^n \rightarrow 0$$

ja järelikut

$$s_n \rightarrow -\frac{a_1}{q-1}$$

ehk

$$s_n \rightarrow \frac{a_1}{1-q}.$$

Seega, kui $|q| < 1$, siis

$$\text{ühes } n \rightarrow \infty \quad s_n \rightarrow \frac{a_1}{1-q}$$

ehk

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-q}.$$

Eeldusel $|q| < 1$, on meil tegemist lõpmatult kahaneva geomeetrilise reaga. Järelikut:

kui kahaneva geomeetrilise rea liikmete arv lõpmatult kasvab, siis rea summa läheneb tõkestamatult väärtusele $\frac{a_1}{1-q}$.

Seda väärtust nimetatakse lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea summaks ja tähistatakse tähega s . Seega

$$s = \frac{a_1}{1-q}.$$

Et lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea puhul liikmete arvu lõpmatul kasvamisel rea summa läheneb lõpli-

kule väärtusele, siis nimetatakse säärast geomeetristilist rida koonduvaks geomeetristiliseks reaks.

$$\text{Näide 1. } 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

$$\begin{aligned} \text{Näide 2. } 4 - \frac{4}{5} + \frac{4}{25} - \dots &= 4 \left[1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \dots \right] = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{1}{5})} = 4 \cdot \frac{1}{\frac{6}{5}} = \frac{20}{6} = 3 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Näide 3. Perioodilist kümnendmurdu 3,5222... mõistame summamana

$$3 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{2}{10000} + \dots$$

Seega

$$\begin{aligned} 3,5222\dots &= 3 \frac{1}{2} + 2 \left[\frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots \right] = \\ &= 3 \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = 3 \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{90} = 3 \frac{47}{90}. \end{aligned}$$

Kui lõpmatult kahaneva geomeetristilise rea summa valemis

$$s = \frac{a_1}{1 - q}$$

esinevast kolmest suurusest kaks on teada, siis saame kolmanda arvutada.

Näide 4. Kui suur peab olema x , et

$$1 + x + x^2 + \dots = 10?$$

Võrduse vasakul poolel seisev avaldis on lõpmatu geomeetristilise rea summa; rea teguriks on x . Rida on lõp-

matult kahanev, sest muidu ei saaks tema summa olla lõplik. Seepärast

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

Võrrutades viimase kahe võrduse paremad pooled ja lahendades saadud võrrandi, leiame $x = \frac{9}{10}$.

Ülesanded.

298. Geomeetrilise rea 1. liige on 3 ja tegur 1,5. Mitmendast liikmest alates selle rea liige saab ja jääb suuremaks kui 10^6 ?

299. Geomeetrilise rea esimene liige on 17, rea tegur on 1,1. Mitmendast liikmest alates selle rea liige saab ja jääb suuremaks kui 1 000 000 000?

300. Geomeetrilise rea 1. liige on 32 ja tegur on $\frac{1}{2}$. Kui suur on selle rea 10. liige? Kui suur on selle rea 20. liige? Mitmendast liikmest alates selle rea liige saab ja jääb väikesemaks kui 10^{-6} ?

301. Geomeetrilise rea 1. liige on 81 ja tegur on $\frac{1}{3}$. Mitmendast liikmest alates selle rea liige saab ja jääb väikesemaks kui 0,00002?

302. Mitmendast liikmest alates saab ja jääb geomeetrilise rea liige väikesemaks arvust 0,0001, kui

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------|
| 1. $a_1 = 1$ ja $q = \frac{5}{6}$ | 3. $a_1 = 5$ ja $q = 0,04$ |
| 2. $a_1 = 2$ ja $q = \frac{3}{7}$ | 4. $a_1 = 0,9$ ja $q = 0,8$ |

303. Arvuta geomeetrilise rea $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots, n$ liikme summa piirväärtus rea liikmete arvu lõpmatul kasvamisel.

304. Leia lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea $4, 2, 1, \dots$ summa.

305. Leia lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea $12, 6, 3, \dots$ summa.

306. Määra summa $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots$

307. Määra summa $3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \dots$

308. Määra summa $1 + \sin a + \sin^2 a + \dots$

309. Määra järgmised summad:

1. $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots$ 4. $a + \frac{a}{x} + \frac{a}{x^2} + \dots$

2. $3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \dots$ 5. $x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \dots$

3. $5 + \frac{5}{7} + \frac{5}{49} + \dots$ 6. $u - \frac{u}{1-u} + \frac{u}{(1-u)^2} - \dots$

310. Määra summa $\sqrt{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots$

311. Määra summa $\sqrt{5} + \sqrt{2,5} + \sqrt{1,25} + \dots$

312. Missugusel tingimusel koondub lõpmatu geomeetriline rida $\frac{x}{4}, \frac{4}{x}, \dots$?

Kui suur on sel puhul rea summa?

313. Missuguste nurga a väärtuste puhul koondub lõpmatu geomeetriline rida $1 + \tan a + \tan^2 a + \dots$?

Määra selle rea summa.

314. Kui suured on summad

$$6 - 1,2 + 0,24 - \dots \\ -7 + 5,6 - 4,48 + \dots ?$$

315. Missugusel tingimusel koondub lõpmatu geometriline rida

$$\frac{x}{2} - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^3} - \dots ?$$

Kui suur on sel puhul rea summa?

316. Missugusel tingimusel koondub lõpmatu geometriline rida

$$a - b + \frac{b^2}{a} - \dots ?$$

Kui suur on sel puhul rea summa?

317. On antud ruut, mille diagonaal on d . Ehitatakse ruut, mille diagonaaliks on antud ruudu külge; ehitatakse kolmas ruut, mille diagonaaliks on teise ruudu külge jne. Arvuta kõikide eespool-nimetatud ruutude pindalade summa.

318. Võrdkülgse kolmnurga külge on a . Sellesse kolmnurka kujutatakse ring; kolmnurga ühte nurka kujutatakse ring, mis puudutab esimest ringi ja nurga haarasid; samasse nurka kujutatakse ring, mis puudutab teist ringi ja nurga haarasid, jne. lõpmatult. Arvuta, missuguse osa kolmnurga pindalast moodustab nende ringide pindalade summa.

319. Võrdhaarse kolmnurga aluse pikkus on a , haara pikkus on b . Kolmnurka joonestatakse ringid niiviisi, et esimene puudutab alust ja mõlemat haara, teine puudutab esimest ringi ja mõlemat haara, kolmas eelmist ringi ja mõlemat haara jne. lõpmatult. Leia kõigi sel viisil tekivate ringide ümbermõõtude summa.

320. Arenda murd $\frac{16}{33}$ kümnendmurruks. Kui suur on geomeetrilise rea esimene liige ja tegur, kui seda kümnendmurdu vaadelda geomeetrilise rea summana?

321. Arenda murd $\frac{1}{37}$ kümnendmurruks. Kui suur on tekkinud geomeetrilise rea esimene liige ja tegur?

322. Kirjuta järgmised lõpmatud kümnendmurrud harilikkude murdudena:

1. 0,444...	2. 0,121212...	3. 0,2111...
0,666...	0,252525...	0,4232323...
0,999...	0,030303...	0,25161616...

323. Lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea summa on 20 ja rea tegur on $\frac{3}{4}$. Leia rea esimene liige.

324. Lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea summa on $2\frac{1}{2}$ ja rea tegur on 0,2. Leia rea esimene liige.

325. Lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea summa on 6 ja esimene liige on 4. Kui suur on rea tegur?

326. Leia lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea tegur, kui rea esimene liige on 1 ja rea summa on 5.

327. Lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea summa on $\frac{4}{9}$ ja rea tegur on 0,1. Avalda rea üldliige tema koha-
numbri kaudu. Kirjuta rea summa lõpmatu kümnend-
murruna.

328. Lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea summa on $\frac{16}{99}$ ja rea tegur on 0,01. Avalda rea üldliige tema koha-
numbri kaudu. Kirjuta rea summa lõpmatu kümnend-
murruna.

329. Kujuta arv 6 lõpmatu geomeetrilise rea summana, võttes rea teguriks $\frac{1}{3}$.

330. Arenda avaldis $\frac{1}{1-a}$ geomeetriliseks reaks, mille tegur on a . Missuguste arvu a väärtuste puhul on antud avaldis selle rea summa piirväärtuseks?

§ 39. Funktsiooni piirväärtuse arvutamine.

Mõnede funktsioonide puhul on võimalik funktsiooni piirväärtust otsekohe näha.

Näide 1. Nõutagu piirväärtust

$$\lim_{n \rightarrow 8} \frac{2n+7}{3n-4}.$$

Argumendi n lähenedes 8-le, $2n \rightarrow 16$, $2n+7 \rightarrow 23$; $3n \rightarrow 24$, $3n-4 \rightarrow 20$, seega

$$\frac{2n+7}{3n-4} \rightarrow \frac{23}{20}$$

ehk

$$\lim_{n \rightarrow 8} \frac{2n+7}{3n-4} = \frac{23}{20}.$$

Sageli on funktsiooni piirväärtuse leidmiseks vaja teisendada funktsiooni avaldist. Järgnevad näited selgitavad selleks kasutatavaid võtteid.

Näide 2. Nõutagu piirväärtust

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+10}{7x^2}.$$

Argumendi lõpmatul kasvamisel kasvab lõpmatult ka $3x^2$, $3x^2+10$ ja $7x^2$. Murru lugeja ja nimetaja lõpma-

tul kasvamisel pole otsekohe näha, kuidas muutub nende jagatis. Seepärast teisendame uuritavat murdu. Lugeja kummagi liikme jagamisel nimetajaga saame:

$$\frac{3x^2 + 10}{7x^2} = \frac{3}{7} + \frac{10}{7x^2}.$$

Esimest liiget argumendi muutumine ei mõjusta. Teises liikmes murru $\frac{10}{7x^2}$ lugeja on jääv; kui $x \rightarrow \infty$ siis ka nimetaja $7x^2 \rightarrow \infty$; nimetaja lõpmatul kasvamisel murd järjest kahaneb lähenedes nullile. Seega

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10}{7x^2} = \frac{3}{7}.$$

Näide 3. Nõutagu piirväärtust

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 4x + 1}{2 - 1,5x^2}.$$

Argumendi lõpmatul kasvamisel lugeja läheneb pluss lõpmatusesele ja nimetaja läheneb miinus lõpmatusesele, seega pole otsekohe näha, kuidas seejuures muutub lugeja ja nimetaja jagatis. Seepärast teisendame uuritavat murdu. Jagades lugejat ja nimetajat avaldises esineva x -i kõrgema astmega, see on x^2 -ga, saame:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 4x + 1}{2 - 1,5x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^2} - 1,5} = \frac{6 + 0 + 0}{0 - 1,5} = -4.$$

Näide 4. Olgu

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 12}.$$

Määrame $f(3)$ ja $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

$$x \rightarrow 3$$

Asendades funktsiooni avaldises x -i tema antud väärtu-

sega, saame

$$f(3) = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 - 3}{3^2 + 3 - 12} = \frac{0}{0}.$$

Sümbolil $\frac{0}{0}$ ei ole ühest mõtet, seega $f(3)$ ei ole määratud. Argumendi lähenedes 3-le nii lugeja kui nimetaja lähenevad tõkestamatult nullile ja pole näha, kuidas muutub nende jagatis. Seepärast teisendame uuritavat murdu. Lahutades lugeja ja nimetaja tegureiks, saame:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 12} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x + 4)(x - 3)}.$$

Argumendi x lähenedes 3-le on x 3-st erinev; vahe $x - 3 \neq 0$; seepärast võime murdu taandada teguriga $x - 3$ ja otsida piirväärtust

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1}{x + 4}.$$

Argumendi x lähenedes 3-le, $x + 1$ läheneb 4-le, $x + 4$ läheneb 7-le ja murd $\frac{x + 1}{x + 4}$ läheneb väärtusele $\frac{4}{7}$. Seega

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{4}{7}.$$

Käsiteldud näide on õpetlik: temast näeme, et

$$f(a) \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

on kaks erinevat mõistet: $f(a)$ vastab küsimusele, kui suur on $f(x)$, kui x on a ; $\lim f(x)$ vastab küsimusele, millele läheneb $f(x)$, kui x läheneb a -le.

Ülesanded.

331. Määra järgmiste funktsioonide piirväärtused, kui $x \rightarrow \infty$:

1. $x + 4$	2. $5 - 2x$	3. $2 + \frac{1}{x}$
$3x$	$x^2 - 3x + 1$	$\frac{3x + 2}{x}$
x^2	$x^3 - 2x^2$	$x + \frac{1}{x}$

332. Määra järgmiste funktsioonide piirväärtused:

1. $\frac{2x}{3x}$, kui $x \rightarrow 0$	4. $\frac{x + 3}{12 + 4x}$, kui $x \rightarrow -3$
2. $\frac{x^2}{4x}$, kui $x \rightarrow 0$	5. $\frac{x^2 - x}{x - 1}$, kui $x \rightarrow 1$
3. $\frac{2x - 2}{x - 1}$, kui $x \rightarrow 1$	6. $\frac{x^3 + 5x^2}{x^2 + 5x}$, kui $x \rightarrow -5$

333. Määra järgmiste funktsioonide piirväärtused:

1. $\frac{x^2 - 4}{x + 2}$, kui $x \rightarrow -2$	3. $\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 15}$, kui $x \rightarrow -3$
2. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}$, kui $x \rightarrow 2$	4. $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x - 5}$, kui $x \rightarrow 1$.

334. Määra järgmiste funktsioonide piirväärtused, kui $x \rightarrow \infty$:

1. $\frac{3x}{2x}$	4. $\frac{4x + 3}{x + 1}$	7. $\frac{1 + x}{1 + x^2}$
2. $\frac{5x + 5}{x + 1}$	5. $\frac{8x - 8}{4x - 3}$	8. $\frac{x^2}{3 + x^2}$
3. $\frac{x - 2}{3x - 6}$	6. $\frac{x - 1}{6x + 7}$	9. $\frac{x^3 + 1}{4x^3 - 10}$

335. Määra funktsiooni $\frac{2x + 3}{x + 3}$ piirväärtused, kui $x \rightarrow 0$ ja kui $x \rightarrow \infty$.

336. Määra funktsiooni $\frac{7x^2-4}{5x^2-2}$ piirväärtused, kui $x \rightarrow 0$ ja kui $x \rightarrow \infty$.

337. Määra funktsiooni

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 6x - 4}{x^3 - 4x^2 + 5x - 3}$$

piirväärtused, kui $x \rightarrow 0$, kui $x \rightarrow 10$ ja kui $x \rightarrow \infty$.

338. Määra funktsiooni

$$\frac{(a+x)^2 - 4ax}{a^2 - x^2}$$

piirväärtus, kui $x \rightarrow a$.

339. Määra funktsiooni $\frac{a^2-x}{a-\sqrt{x}}$ piirväärtus, kui $x \rightarrow a$.

340. Millele läheneb funktsiooni $\frac{1-\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$ väärtus argumenti α lõpmatul kahanemisel?

341. Leia järgmiste funktsioonide piirväärtused:

- | | |
|--|--|
| 1. $\frac{\sin \varphi}{\tan \varphi}$, kui $\varphi \rightarrow 0^0$ | 3. $\frac{1 + \tan \varphi}{1 - \tan \varphi}$, kui $\varphi \rightarrow 90^0$ |
| 2. $\frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}$, kui $\varphi \rightarrow 0^0$ | 4. $\frac{\tan \varphi - \sin \varphi}{\tan \varphi + \sin \varphi}$, kui $\varphi \rightarrow 0^0$. |

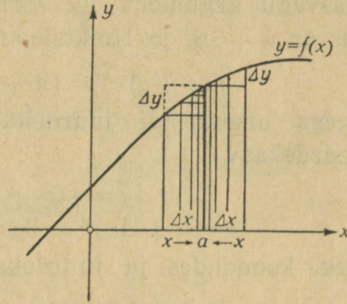
342. Leia funktsiooni $\frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(2x-\alpha)}$ piirväärtus, kui $x \rightarrow 90^0$.

343. On antud võrdhaarne kolmnurk ABC , mille alus $AC = a$. Kaugusel b alusest on joonestatud rööbiti alusega sirge, mis lõikab haarasid punktides D ja E . Määra lõigu AE piirväärtus, kui tipp B kõrgust mööda liikudes tõkestamatult kaugeneb.

§ 40. Funktsiooni pidevuse tunnus.

Funktsiooni pidevuse tunnuse leidmiseks vaatleme mõnd joont, mis joonestatakse pliitsi teraviku pideval liikumisel mööda paberit.

Olgu see joon funktsiooni $y = f(x)$ graafikuks (joonis 39). Olgu a üks argumendi väärtus ja $f(a)$ vastav funktsiooni väärtus. Vaatleme funktsiooni väärtusi, mis vastavad a -le lähenevatele argumendi väärtustele.



Joonis 39.

Joonisest näeme, et pideva kõvera puhul x -i lähenedes a -le $f(x)$ läheneb $f(a)$ -le ehk, sümbolites,

kui $x \rightarrow a$, siis $f(x) \rightarrow f(a)$.

Eelmises reas avaldatud mõtet saame kirjutada ka nii:

kui $x - a \rightarrow 0$, siis ka $f(x) - f(a) \rightarrow 0$.

Vahe $x - a$ kujutab argumendi juurdekasvu, mis on kas positiivne või negatiivne; vahe $f(x) - f(a)$ — eelmisele juurdekasvule vastavat funktsiooni juurdekasvu. Tähistades juurdekasvu sümboliga Δ , võime eelmist tulemust kirjutada kujul:

kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis ka $\Delta y \rightarrow 0$.

Kui see tingimus on täidetud argumendi iga väärtuse puhul, siis ütleme, et funktsioon on pidev. Seega

funktsioon on pidev, kui argumendi iga väärtuse puhul ühes argumendi juurdekasvu tõkestamatu lähenemisega nullile ka funktsiooni juurdekasv tõkestamatult läheneb nullile.

Näide 1. Tõestame, et funktsioon

$$f(x) = x^2 - 3x$$

on pidev.

Olgu a mingi kindel x -i väärtus; sellele argumendi väärtusele vastab funktsiooni väärtus

$$f(a) = a^2 - 3a.$$

Kasvagu argument Δx võrra. Siis argumendi uus väärtus on $a + \Delta x$ ja funktsiooni uus väärtus

$$f(a + \Delta x) = (a + \Delta x)^2 - 3(a + \Delta x).$$

Seega argumendi juurdekasvule Δx vastab funktsiooni juurdekasv

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(a + \Delta x) - f(a) = \\ &= (a + \Delta x)^2 - 3(a + \Delta x) - (a^2 - 3a) \end{aligned}$$

ehk, koondades ja juurdekasvu Δx sulgude taha võttes,

$$\Delta y = (2a - 3 + \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Laseme nüüd juurdekasvul Δx läheneda nullile. Siis esimene tegur läheneb arvule $2a - 3$, kogu korrutis aga läheneb nullile. Järelikult:

$$\text{kui } \Delta x \rightarrow 0, \text{ siis ka } \Delta y \rightarrow 0.$$

Et a oli x -i mingi väärtus, siis kehtib tulemus x -i iga väärtuse puhul; seega uuritav funktsioon on pidev.

Näide 2. Tõestame, et funktsioon

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

on pidev argumendi iga väärtuse puhul, mis on nullist erinev.

Antud funktsioon on määratud argumendi iga väärtuse puhul, välja arvatud väärtus 0. Olgu a mingi kindel x -i väärtus, mis erineb nullist. Sellele argumendi väärtusele vastab funktsiooni väärtus

$$f(a) = \frac{1}{a^2}.$$

Kasvagu argument Δx võrra. Siis argumendi uus väärtus on $a + \Delta x$, funktsiooni uus väärtus

$$f(a + \Delta x) = \frac{1}{(a + \Delta x)^2},$$

ja seega argumendi juurdekasvule Δx vastav funktsiooni juurdekasv

$$\Delta y = \frac{1}{(a + \Delta x)^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{a^2 - a^2 - 2a\Delta x - (\Delta x)^2}{(a + \Delta x)^2 a^2}$$

ehk

$$\Delta y = -\frac{2a\Delta x + (\Delta x)^2}{(a + \Delta x)^2 a^2} = -\frac{(2a + \Delta x)\Delta x}{(a + \Delta x)^2 a^2}.$$

Laseme nüüd juurdekasvul Δx läheneda nullile. Siis

$$(2a + \Delta x)\Delta x \rightarrow 0, \quad (a + \Delta x)^2 a^2 \rightarrow a^4 \quad \text{ja} \quad \Delta y \rightarrow 0.$$

Järelikult

$$\text{kui } \Delta x \rightarrow 0, \quad \text{siis ka } \Delta y \rightarrow 0.$$

Et a oli x -i mingi nullist erinev väärtus, siis kehtib tulemus x -i iga niisuguse väärtuse puhul; seega uuritav funktsioon on pidev argumendi iga väärtuse puhul, mis nullist erineb.

Argumendi väärtusel 0 funktsioonil $\frac{1}{x^2}$ puudub väärtus. Argumendi lähenedes nullile funktsioon kasvab lõpmatult:

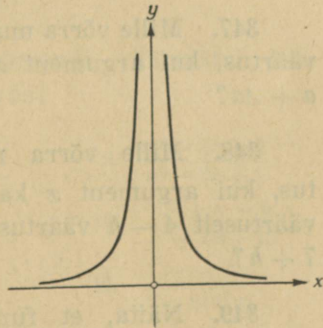
$$\text{kui kahanedes } x \rightarrow 0, \quad \text{siis } y \rightarrow +\infty,$$

$$\text{kui kasvades } x \rightarrow 0, \quad \text{siis ka } y \rightarrow +\infty.$$

Antud funktsiooni graafik (joonis 40) katkeb abstsissil väärtusel $x = 0$, kus kumbki graafiku haru lõpmatult tõuseb, lähenedes asümptootiliselt y -teljele.

Toodud näide selgitab funktsiooni pidevuseks vajalikku tingimust:

funktsiooni pidevuseks argumendi antud väärtusel on tarvis, et funktsioon sellel argumendi väärtusel oleks määratud.



Joonis 40.

Ülesanded.

344. Leia, missugustes piirkondades on määratud allpool antud funktsioonid. Kujuta iga leitud piirkond eri teljel.

1. $y = 4x - 7$

6. $y = \sqrt{(x-3)(x+5)}$

2. $y = (x+1)(x-3)$

7. $y = \sqrt[3]{2x-5}$

3. $y = \sqrt{3(x-2)}$

8. $y = \log(3-x)$

4. $y = \sqrt{16-x^2}$

9. $y = \log(1-x)^3$

5. $y = \sqrt{x^2-9}$

10. $y = \log \cos x^0.$

345. Kui suure kasvu saab funktsioon $y = 3x + 8$, kui argument x kasvab väärtuselt -3 väärtuseni 0 ? väärtuselt $1 - \varepsilon$ väärtuseni $1 + \varepsilon$? väärtuselt 5 väärtuseni $5 + \varepsilon$?

346. Kui suure kasvu saab funktsioon $y = x^3$, kui argument x kasvab väärtuselt 2 väärtuseni 3 ? väärtuselt 7 väärtuseni 10 ? väärtuselt $5 - a$ väärtuseni 5 ? väärtuselt 8 väärtuseni $8 + a$?

347. Mille võrra muutub funktsiooni $y = x^2 - 3x + 7$ väärtus, kui argument x kasvab väärtuselt a väärtuseni $a + \Delta a$?

348. Mille võrra muutub funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ väärtus, kui argument x kasvab väärtuselt 3 väärtuseni 5 ? väärtuselt $4 - h$ väärtuseni 4 ? väärtuselt 7 väärtuseni $7 + h$?

349. Näita, et funktsioon $y = x^2$ on pidev arvu x igal väärtusel.

350. Näita, et järgmised funktsioonid on pidevad arvu x igal väärtusel:

1. $x + 5$

2. x^3

$ax + b$

$x^3 + 3x$

$x^2 - x$

$2x^3 - 4x^2$

$ax^2 + bx + c$

$ax^3 + bx^2 + cx + d$

351. Tähendagu sümbol $t(x)$ arvu x täisarvulist osa. Näita, et funktsioon $t(x)$ on ainult ositi pidev. Missugustel x -i väärtustel toimub funktsiooni pidevuse katkemine? Mille võrra muutub nendes kohtades funktsiooni väärtus?

352. Tähendagu $t(x)$ arvu x täisarvulist osa. Näita, et järgmised funktsioonid on ainult ositi pidevad. Leia, missugustel argumenti väärtustel toimub nende pidevuse katkemine. Joonesta nende funktsioonide graafikud.

1. $x + t(x)$

3. $t(x^2)$

5. $t(\sqrt{x})$

2. $t\left(\frac{x}{3}\right)$

4. $t\left(\frac{12}{x}\right)$

6. $t(x) \cdot x$

353. Leia, missugustel argumenti väärtustel katkeb järgmiste funktsioonide pidevus:

1. $\frac{1}{x}$

5. $\frac{x-2}{x-3}$

9. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$

2. $\frac{4}{x-5}$

6. $\frac{x^2-4}{x^3-8}$

10. $\frac{x^2+x-6}{x^2+7x+12}$

3. $\frac{x}{x^2-9}$

7. $\frac{1}{\cos x}$

11. $\frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}$

4. $\frac{10}{x^2-5x+6}$

8. $\frac{2 \tan x}{1-\tan^2 x}$

12. $\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

§ 41. Funktsiooni tuletis.

Argumendi kasvamisel funktsiooni väärtus kas muutub või jääb muutumatuks; viimasel juhul on funktsioon võrdne konstandiga. Eeldame, et argumendi kasvades funktsiooni väärtus muutub. Funktsiooni muutumine võib olla kas kasvamine või kahanemine või kohati kasvamine, kohati kahanemine. See muutumine võib toimuda kord aeglasemalt, kord kiiremalt. Suurust, mis näitab, kui kiiresti funktsioon muutub, nimetame funktsiooni muutumise kiiruseks. Sellele mõistele jõudmiseks arutame järgmiselt:

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$ ja selle argumendi kindel väärtus x . Leiame sellele argumendi väärtusele vastava funktsiooni väärtuse $f(x)$. Laseme nüüd argumendi alates lähteväärtusest x kasvada Δx võrra ja leiame, kui suur funktsiooni väärtus vastab argumendi uuele väärtusele. Et argumendi uus väärtus on $x + \Delta x$, siis sellele vastav funktsiooni väärtus on $f(x + \Delta x)$. Seega argumendi kasvamisel väärtusest x väärtuseni $x + \Delta x$ muutub funktsioon väärtusest $f(x)$ väärtuseni $f(x + \Delta x)$. Küsime, kui palju funktsioon on muutunud argumendi kasvamisel Δx võrra. Vastuse saamiseks lahutame funktsiooni lõppväärtusest funktsiooni lähteväärtuse; tulemuseks on vahe

$$f(x + \Delta x) - f(x).$$

Saadud avaldis on funktsiooni juurdekasv Δy (ehk Δf). Seega argumendi juurdekasvule Δx vastab funktsiooni juurdekasv Δy , kusjuures

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Küsime nüüd, mille võrra muutub funktsioon keskmiselt, kui argument kasvaks 1 võrra. Et argumendi

kasvades Δx võrra funktsioon kasvab Δy võrra, siis argumendi kasvades 1 võrra funktsioon muutub keskmiselt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

võrra. Viimast avaldist nimetame funktsiooni muutumise keskmiseks kiiruseks vahemikus Δx . Seega

funktsiooni muutumise keskmiseks kiiruseks argumendi antud vahemikus on funktsiooni ja argumendi juurdekasvude jagatis.

Asendades Δy tema avaldisega $f(x + \Delta x) - f(x)$ saame funktsiooni muutumise keskmist kiirust kirjutada ka kujul

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Võtame nüüd avaldises $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ argumendi juurdekasvu Δx ikka väiksema ja väiksema. Siis jagatis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ näitab meile funktsiooni keskmist kasvamise kiirust ikka kitsamas ja kitsamas väärtuse x ümbruses. Juurdekasvu Δx tõkestamatul lähenemisel nullile suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ läheneb piirväärtusele

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Nagu näeme tema saamise käigust, kujutab see avaldis funktsiooni y muutumise keskmise kiiruse piirväärtust argumendi vahemiku Δx lõpmatul kahanemisel. Seda piirväärtust loeme funktsiooni muutumise kiiruseks argumendi antud väärtusel x . Niisiis:

funktsiooni muutumise kiiruseks argumendi antud väärtusel x nimetame piirväärtust, millele läheneb funktsiooni muutumise keskmine kiirus argumendi vahemikus Δx selle vahemiku lõpmatul kahanemisel.

Asendades Δy tema avaldisega $f(x + \Delta x) - f(x)$ saame funktsiooni kasvamise kiirust argumenti antud väärtusel x kirjutada kujul

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Näide. Leiame funktsiooni

$$y = x^2 + 5x$$

muutumise kiiruse argumenti väärtusel 3.

Selleks leiame esmalt, kui palju kasvab antud funktsioon, kui argument kasvab väärtuselt 3 väärtuseni $3 + \Delta x$. Et argumenti väärtusele

$$3 \quad \text{vastab funktsiooni väärtus } 3^2 + 5 \cdot 3$$

ja argumenti väärtusele

$$3 + \Delta x \quad \text{vastab funktsiooni väärtus}$$

$$(3 + \Delta x)^2 + 5 \cdot (3 + \Delta x),$$

siis funktsiooni juurdekasv

$$\Delta y = (3 + \Delta x)^2 + 5 \cdot (3 + \Delta x) - (3^2 + 5 \cdot 3)$$

ehk

$$\Delta y = 2 \cdot 3 \Delta x + (\Delta x)^2 + 5 \cdot \Delta x$$

ehk

$$\Delta y = 11 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Leiame nüüd funktsiooni muutumise keskmise kiiruse vahemikus Δx , s. o. jagatise $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Antud juhul

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

ehk

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 11 + \Delta x.$$

Edasi leiame funktsiooni muutumise kiiruse argumenti

väärtusel 3. Lastes selleks argumendi juurdekasvu Δx tõkestamatult läheneda nullile, näeme, et

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (11 + \Delta x) = 11.$$

Seega argumendi väärtusel 3 on uuritava funktsiooni muutumise kiirus 11.

Funktsiooni muutumise kiirust argumendi antud väärtusel nimetatakse funktsiooni tuletiseks argumendi sellel väärtusel.

Funktsiooni $y = f(x)$ tuletist tähistatakse sümboliga y' ehk $f'(x)$. Niisiis

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ehk

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Kokkuvõttes:

funktsiooni tuletiseks nimetatakse piirväärtust, millele läheneb funktsiooni ja argumendi juurdekasvude jagatis, kui argumendi juurdekasv tõkestamatult läheneb nullile.

Selle definitsiooni alusel toimub funktsiooni tuletise leidmine järgmiselt:

1. valime argumendi lähteväärtuse x ja arvutame sellele vastava funktsiooni väärtuse;
2. laseme argumendi kasvada Δx võrra ja arvutame argumendi väärtusele $x + \Delta x$ vastava funktsiooni väärtuse;
3. arvutame funktsiooni juurdekasvu Δy ;
4. arvutame funktsiooni ja argumendi juurdekasvude jagatise;
5. määrame selle jagatise piirväärtuse eeldusel, et Δx tõkestamatult läheneb nullile.

Kirjeldatud teed tuletise leidmiseks võime kasutada nii siis, kui argumendi lähteväärtuseks on numbriline väärtus, nagu näiteks $-2, 4, 7$, kui ka siis, kui selleks lähteväärtuseks on argumendi mingi väärtus x . Viimasel juhul me leiame funktsiooni tuletise üldavaldisel. Asendades selles x -i kindla eriväärtusega saame tuletise sellel argumendi väärtusel.

Näide. Leiame funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ tuletise.

Et argumendi väärtusel x funktsiooni väärtus on $\frac{1}{x}$ ja argumendi väärtusel $x + \Delta x$ funktsiooni väärtus on $\frac{1}{x + \Delta x}$, siis funktsiooni juurdekasv

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}$$

ehk

$$\Delta y = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)}$$

ehk

$$\Delta y = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

Edasi saame, et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)},$$

kui nüüd $\Delta x \rightarrow 0$, siis $x + \Delta x \rightarrow x$ ja seega

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x \cdot x}$$

ehk

$$y' = -\frac{1}{x^2}.$$

Asendades viimase võrduse paremal poolel x näiteks väärtusega 2 , leiame, et funktsioonil $\frac{1}{x}$ muutumise kiirus ehk tuletis argumendi väärtusel 2 on $-\frac{1}{4}$.

Ülesanded.

354. Määra järgmiste funktsioonide tuletised, kasutades tuletise leidmise eeskirja:

- | | | |
|-----------------------|--------------------|------------------------------|
| 1. $3x$ | 6. $5s^2$ | 11. $\frac{1}{2}p^2 + p + 1$ |
| 2. $x + 5$ | 7. $s^2 - 3s$ | 12. $(p + 1)^2$ |
| 3. $2x - 1$ | 8. $s^2 - 5s + 6$ | 13. $(1 - q)^2$ |
| 4. $3 - u$ | 9. $2t^3 - 1$ | 14. $5(p + 2)$ |
| 5. $1 - \frac{1}{2}u$ | 10. $t^3 + 5t - 7$ | 15. $7(q^2 - q)$ |

355. Leia järgmiste funktsioonide tuletised, kasutades tuletise leidmise eeskirja:

- | | | |
|--------------|----------------------|-----------------|
| 1. $9x$ | 5. $x^2 + 4x$ | 9. $mx + n$ |
| 2. $2x + 1$ | 6. $x^2 - 3x + 4$ | 10. $x^2 - a$ |
| 3. $3 - x$ | 7. $\frac{3}{t}$ | 11. $cx^2 + 1$ |
| 4. $x^2 + 5$ | 8. $\frac{1}{t + 2}$ | 12. $hx + kx^2$ |

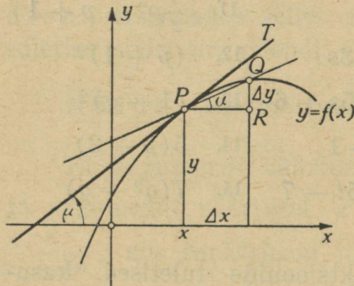
356. Määra järgmiste funktsioonide tuletised, kasutades tuletise leidmise eeskirja:

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|-----------------|
| 1. $x^2 + 2x + 1$ | 5. $(x - 1)^2$ | 9. $(x + a)^2$ |
| 2. $2x - 3x^2$ | 6. $t(2 - 3t)$ | 10. $x^2 - a^2$ |
| 3. $\frac{3x + 4}{x}$ | 7. $3 + \frac{4}{u}$ | 11. $x(x - a)$ |
| 4. $\frac{v^2 + 10}{v}$ | 8. $v^2 + \frac{10}{v}$ | 12. $x^3 - a^3$ |

357. Kui suur on funktsiooni $y = x^2 - 7x + 12$ tuletise väärtus argumendi väärtustel 1, 3 ja 5?

§ 42. Tuletise geometriline vaste.

Olgu tegemist funktsiooniga $y = f(x)$ ja olgu tema muutumine kujutatud graafiliselt joonisel 41. Valime argumenti mingi väärtuse, näiteks väärtuse x ; sellele



Joonis 41.

vastav funktsiooni väärtus olgu y . Määraku arvupaar x ja y punkti P ; seega siis $P \equiv (x | y)$. Anname argumentile x juurdekasvu Δx ; siis argumenti uueks väärtuseks on $x + \Delta x$; sellele vastav funktsiooni väärtus olgu $y + \Delta y$. Määraku arvupaar $x + \Delta x$ ja $y + \Delta y$ punkti Q nii, et $Q \equiv (x + \Delta x | y + \Delta y)$. Joonestame PR rööbiti x -teljega ja vaatleme kolmnurka PRQ ; selles on $PR = \Delta x$ ja $RQ = \Delta y$; järelikult juurdekasvude jagatis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{RQ}{PR}.$$

Joonestame funktsiooni graafiku lõikaja PQ ja märgime selle tõusunurga tähega α ; joonisest näeme siis, et

$$\tan \alpha = \frac{RQ}{PR}.$$

Seega

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha.$$

See tähendab aga, et

funktsiooni muutumise keskmine kiirus on võrdne funktsiooni graafiku lõikaja tõusuga.

Laseme nüüd argumenti juurdekasvu Δx tõkestamatult läheneda nullile. Seejuures juurdekasvude jagatis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ läheneb tuletisele y' . Vaatame, millele läheneb $\tan \alpha$.

Paneme tähele, et juurdekasvu Δx vähenedes järjest väheneb ka Δy ; ühes sellega punkt Q nihkub graafikut mööda järjest lähemale punktile P . Seejuures lõikaja PQ pöördub punkti P ümber, järjest lähenedes oma piirsirgele PT (joonis 41). Seda lõikaja PQ piirsirget PT nimetatakse graafiku puutujaks punktis P . Niisiis:

kõvera puutujaks punktis P nimetatakse piirsirget, millele läheb kõvera lõikaja PQ , kui teine lõikepunkt Q tõkestamatult läheb esimesele.

Olgu puutuja PT tõusunurk μ ; siis lõikaja PQ lähemisel puutujale PT nurk α läheneb nurgale μ ja $\tan \alpha$ läheneb arvule $\tan \mu$. Kokkuvõttes: kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow y'$ ja $\tan \alpha \rightarrow \tan \mu$. Järelikult

$$y' = \tan \mu.$$

Seda tulemust sõnastame nii:

funktsiooni tuletis argumenti antud väärtusel on võrdne funktsiooni graafiku puutuja tõusuga punktis, mille abstsiss on see argumenti väärtus.

Kõverjoone puutuja tõusu nimetatakse sageli ka kõverjoone tõusuks.

Näide. Leiame kõverjoone $y = x^2 + 2x$ tõusu punktis, mille abstsiss on -3 .

Selle funktsiooni tuletis argumenti mingil väärtusel on $2x + 2$. Argumenti väärtusel -3 omab see tuletis väärtust $2 \cdot (-3) + 2$ ehk -4 . Seega otsitav tõus on -4 .

Eespool-antud tuletise geomeetrilise tõlgenduse abil saame lahendada ülesande: on antud kõver oma võrrandiga $y = f(x)$ ja kõvera ühe punkti abstsiss x_0 ; leida selle sirge võrrand, mis kõverat puudutab antud abstsissiga punktis.

Kui kõvera punkti abstsiss on x_0 , siis punkti ordinaat $y_0 = f(x_0)$. Otsitav sirge läbib punkti $(x_0|y_0)$ ja omab tõusu, mis võrdub tuletise y' väärtusega argumendi väärtusel x_0 . Märgive selle tuletise väärtuse sümboliga y'_0 . Sirge, mis läbib punkti $(x_0|y_0)$ ja mille tõus on y'_0 , omab võrrandit

$$y - y_0 = y'_0 (x - x_0).$$

See ongi otsitav puutuja võrrand.

Näide. Leiame kõvera $y = 4x^2 - 7x$ puutuja võrrandi, teades, et puutepunkti abstsiss on 0,5.

Puutepunkti ordinaat on

$$4 \cdot 0,5^2 - 7 \cdot 0,5 = 1 - 3,5 = -2,5.$$

Funktsiooni y tuletise arvutamine annab, et

$$y' = 8x - 7.$$

Selle tuletise väärtus argumendi väärtusel $x_0 = 0,5$ on

$$y'_0 = 8 \cdot 0,5 - 7 = -3.$$

Järelikult otsitav puutuja võrrand on

$$y - (-2,5) = (-3) \cdot (x - 0,5)$$

ehk

$$y + 2,5 = -3x + 1,5$$

ehk

$$3x + y + 1 = 0.$$

Ülesanded.

358. Funktsiooni $y = x^2$ graafikul on võetud kaks punkti ja joonestatud neid punkte ühendav kõõl. Arvuta kõõlu tõus, kui nende punktide abstsissid on 1 ja 2, 3 ja 5, 10 ja 20.

359. Funktsiooni $y = x^2$ graafikul on võetud punkt abstsissiga 3 ja naaberpunkt abstsissiga $3 + \Delta x$. Määra neid punkte ühendava kõõlu tõus. Millele läheneb see tõus abstsissikasvu Δx tõkestamatul lähenemisel nullile?

360. Funktsiooni $y = x^3 - 4x + 1$ graafikul on võetud punkt abstsissiga 1 ja naaberpunkt abstsissiga $1 + \Delta x$. Arvuta neid punkte ühendava kõõlu tõus. Millele läheneb see tõus abstsissikasvu Δx tõkestamatul lähenemisel nullile? Kas leitud piirväärtus oleneb kasvu Δx märgist?

361. Kui suur on

kõvera $y = x^2 - 11$	tõus punktis abstsissiga -2 ;
„ $y = x - x^2$	„ „ „ 0 ;
„ $y = x^2 - 2x + 3$	„ „ „ $1,5$;
„ $y = \frac{2}{x}$	„ „ „ -2 ;
„ $y = \frac{1}{x-1}$	„ „ „ 3 ?

362. Missuguses punktis on kõvera $y = \frac{1}{x}$ tõus võrdne -1 -ga?

363. Missuguses punktis on kõveral $y = x^2 - 6x + 11$ rõhtne puutuja?

364. Leia järgmiste kõverate puutuja võrrandid, kui puutepunkti abstsiss on x_0 :

- $y = \frac{1}{2} x^2$ $x_0 = 4$;
- $y = x^2 - 3x + 5$ $x_0 = 0$;
- $y = \frac{3}{x}$ $x_0 = 3$.

§ 43. Tuletise leidmise teoreeme.

Funktsiooni tuletise leidmine ülal-antud eeskirja järgi on tülikas, kui funktsiooni avaldis on keerulise ehitusega. Seepärast tõestame mõned teoreemid, mis kerendavad tuletise leidmist.

1. Konstandi tuletis on 0.

Tõestus. Olgu $f(x) = a$ kus a on konstant. Siis väärtusele x vastab väärtus $f(x) = a$, väärtusele $x + \Delta x$ vastab väärtus $f(x + \Delta x) = a$, juurdekasvule Δx vastab juurdekasv $\Delta f = a - a = 0$ ja juurdekasvule 1 vastaks juurdekasv

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Seega ka

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$$

ehk

$$a' = 0.$$

2. Funktsioonide ax , ax^2 ja ax^3 tuletised on vastavalt a , $2ax$ ja $3ax^2$.

Et nende väidete tõestamine toimub ühe ja sama skeemi järgi, siis tõestame siin ainult ühe neist, näiteks viimase.

Tõestus. Olgu $f(x) = ax^3$. Siis väärtusele x vastab väärtus $f(x) = ax^3$, väärtusele $x + \Delta x$ vastab väärtus $f(x + \Delta x) = a(x + \Delta x)^3$ ja juurdekasvule Δx vastab juurdekasv

$$\Delta f = a(x + \Delta x)^3 - ax^3.$$

Koondades leiame, et

juurdekasvule Δx vastab juurdekasv

$$\Delta f = 3ax^2\Delta x + 3ax(\Delta x)^2 + a(\Delta x)^3$$

ja juurdekasvule 1 vastaks juurdekasv

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3ax^2 + 3ax\Delta x + a(\Delta x)^2.$$

Laseme nüüd Δx lõpmatult kahaneda. Kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis ka $3ax\Delta x \rightarrow 0$ ja $a(\Delta x)^2 \rightarrow 0$; seega

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 3ax^2$$

ehk

$$(ax^3)' = 3ax^2.$$

3. Funktsiooni $\frac{a}{x}$ tuletis on $-\frac{a}{x^2}$.

Tõestus toimub eespoolantud skeemi järgi.

4. Funktsioonide summa tuletis võrdub liidetavate tuletiste summaga.

Tõestus. Olgu $f(x) = g(x) + h(x)$. Siis väärtusele x vastab väärtus $f(x) = g(x) + h(x)$, väärtusele $x + \Delta x$ vastab väärtus $f(x + \Delta x) =$

$$= g(x + \Delta x) + h(x + \Delta x),$$

juurdekasvule Δx vastab juurdekasv

$$\Delta f = g(x + \Delta x) - g(x) + h(x + \Delta x) - h(x) = \Delta g + \Delta h,$$

ja juurdekasvule 1 vastaks juurdekasv

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta h}{\Delta x}.$$

Laseme nüüd Δx lõpmatult kahaneda. Seejuures kolm viimati-kirjutatud juurdekasvude jagatist lähenevad vastavalt väärtustele $f'(x)$, $g'(x)$ ja $h'(x)$. Seega:

kui $f(x) = g(x) + h(x)$, siis $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.

Samal viisil tõestaksime funktsioonide vahe tuletise teoreemi:

kui $f(x) = g(x) - h(x)$, siis $f'(x) = g'(x) - h'(x)$.

Rakendus i.

1. Leiame lineaarfunktsiooni $y = ax + b$ tuletise. Summa tuletise teoreemi põhjal saame

$$y' = (ax + b)' = (ax)' + b'.$$

Teades eelmisest, et $(ax)' = a$ ja $b' = 0$, leiame, et

$$y' = a.$$

2. Leiame ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ tuletise. Summa tuletise teoreemi järgi

$$y' = (ax^2 + bx + c)' = (ax^2)' + (bx)' + c'.$$

Teades eelmisest, et $(ax^2)' = 2ax$, $(bx)' = b$ ja $c' = 0$, leiame, et

$$y' = 2ax + b.$$

3. Leiame funktsiooni $y = (x + 2)(x - 5)$ tuletise. Et saaks rakendada eespool-tõestatud teoreeme, selleks kirjutame antud funktsiooni summana:

$$y = x^2 - 3x - 10.$$

Siis

$$y' = (x^2)' - (3x)' - 10'$$

ehk

$$y' = 2x - 3.$$

4. Leiame funktsiooni $y = 2 - 3x^2 - \frac{5}{x}$ tuletise. Eespool-tõestatud teoreemi põhjal

$$y' = 2' - (3x^2)' - \left(\frac{5}{x}\right)'$$

ehk

$$y' = 0 - 2 \cdot 3x - \left(-\frac{5}{x^2}\right),$$

seega

$$y' = -6x + \frac{5}{x^2}.$$

5. Leiame kõvera $y = x^3 - 4x^2 - 7x + 8$ puutuja võrrandi teades, et puutepunkti abstsiss $x_0 = -2$.

Puutepunkti ordinaadi arvutamine annab

$$\begin{aligned} y_0 &= (-2)^3 - 4 \cdot (-2)^2 - 7 \cdot (-2) + 8 = \\ &= -8 - 16 + 14 + 8 = -2; \end{aligned}$$

seega on puutepunkti koordinaadid -2 ja -2 .

Funktsiooni y tuletis

$$y' = (x^3)' - (4x^2)' - (7x)' + 8' = 3x^2 - 8x - 7.$$

Järelikult on puutuja tõus

$$y'_0 = 3 \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) - 7 = 12 + 16 - 7 = 21.$$

Seepärast otsitav puutuja võrrand on

$$y - (-2) = 21[x - (-2)]$$

ehk, peale koondamist,

$$21x - y + 40 = 0.$$

Ülesanded.

365. Kirjuta järgmiste polünoomide tuletised, tuginedes polünoomi tuletise valemile:

1. $3x - 4$

$$c - \frac{p}{q}x$$

$$x^2 - 7x + 8$$

$$ax^2 + 2bx + c$$

2. $1 - x - 3x^2$

$$\frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

$$x^3 - 5x^2 + x$$

$$4x^3 + x^2 - 3x + 2$$

366. Leia järgmiste polünoomide tuletised:

1. $2x - 7$

$$mx + n$$

$$b - \frac{b}{a}x$$

$$x^2 - 6x + 1$$

2. $1 + 4x - x^2$

$$ax^2 - bx + c$$

$$x^3 - 4x + 3$$

$$3 - 5x^2 - 7x^3$$

367. Leia järgmiste funktsioonide tuletised:

1. $x(x - 5)$

2. $(x - 2)(x - 1)$

3. $(x + 3)(x - 3)$

4. $x(x^2 - 2x + 3)$

5. $(x - 1) \cdot \frac{1}{x}$

6. $x(3 - \frac{2}{x})$

7. $x(x^2 + a^2)$

8. $x^2(\frac{3}{x} + x)$

368. Olgu $y(x) = x^3 - 6x^2 + 2$. Arvuta $y(0)$, $y(2)$, $y(4)$ ja $y'(0)$, $y'(2)$, $y'(4)$.

369. Olgu antud funktsioon $y = x^2 - 2x - 8$. Kui suur on selle funktsiooni tuletis argumendi eriväärtustel 0, 1, 2, 3, 4?

370. Kui suur on kõvera $y = x^2 - 5x + 8$ tõus punktides, milles $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$?

371. Kui suur on kõvera $y = x^3 - 4x$ tõus punktides, milles $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$?

372. Määra järgmiste kõverate tõusud punktides antud abstsissidega:

$$1. \quad y = \frac{a}{bx} \quad x = a$$

$$2. \quad y = a + \frac{b}{x} \quad x = b$$

$$3. \quad y = mx + \frac{n}{x} \quad x = \sqrt[n]{n}$$

373. Missuguses punktis on kõvera $y = x^2 + 3x - 2$ tõus 1, -1 , 3, -4 , 10?

374. Olgu antud kõver $y = x^2 + 4x - 5$. Missugustes tema punktides tõus on -2 , 0, 6?

375. Kõveral $y = x^2 - 6x$ leidub röötsihiline puutuja. Missugused on puutepunkti koordinaadid?

376. On antud kõver $y = 2x^3 - 3x^2 - 90x - 18$. Missuguses punktis on selle kõvera tõus 0? on kõvera tõus 1? on kõvera tõus -2 ?

377. On antud kõver $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 10x + 5$. Missuguses punktis on selle kõvera tõus 0?

378. Leia kõvera $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$ punktid, milles puutuja on rõhtsihiline.

379. Leia kõvera $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ punktid, milles puutuja on rõhtsihiline.

380. Kõverale $y = x^2 - 4x + 2$ on joonestatud puutuja punktis abstsissiga 1. Anna selle puutuja võrrand.

381. On antud kõver $y = 2x^2 + 3x + 7$. Leia selle kõvera puutuja võrrand, teades, et puutepunkti abstsiss on -1 .

382. Leia järgmiste kõverate puutujate võrrandid, kui puutepunkti abstsiss on x_0 :

- | | |
|------------------------|------------|
| 1. $y = 0,3x^2 - 4$ | $x_0 = 2$ |
| 2. $y = 0,1x^3$ | $x_0 = -3$ |
| 3. $y = x^2 - 2x + 3$ | $x_0 = 1$ |
| 4. $y = 2x^3 - 6x + 5$ | $x_0 = 0$ |

383. On antud kõver $y = -2x^2 + 8x - 9$. Missuguses punktis puudutab teda rõhtsihiline puutuja? Anna selle puutuja võrrand.

384. On antud kõver $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$ ja võetud punkt kõveral abstsissiga 2. Anna selles punktis tõmmatud puutuja võrrand.

385. Leia kõveral $y = 3x^3 - 4x^2$ punkt, milles tõmmatud puutuja moodustab x -teljega nurga 45° . Anna selle puutuja võrrand.

386. Parabolil $y = x^2$ on võetud 2 punkti abstsissidega vastavalt 1 ja 2 ja tõmmatud neid punkte ühendav kõõl. Kus puudutab parabooli selle kõõluga rööbik puutuja?

387. Anna järgmiste funktsioonide kasvamise kiirused:

$$1. y = ax + b$$

$$2. y = x^2 + px + q$$

$$3. y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$4. a^2x + bx^2$$

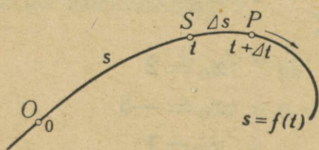
$$6. (a + x)(x - a)$$

$$5. \frac{x}{a} + b$$

$$7. \frac{x+a}{m}$$

§ 44. Liikumise kiirus tuletisena.

Liikugu punkt P (joonis 42) mingit joont mööda tasapinnal või ruumis. Märgime sellel joonel ühe koha eriti ära, näiteks punkti O . Seame kella nii, et punkti P läbimineku kohast O kell näitab 0. Asetsegu liikuv punkt t sekundit hiljem kohal S ja olgu kaare OS pikkus s cm.



Joonis 42.

Igale ajale t vastab siis punkti P kindel asukoht S , seega kindel kaar OS ja ka selle kaare pikkus s . Järelikult punkti P liikumisel on kulgetud tee kulgemisaja funktsioon: $s = f(t)$.

Seost $s = f(t)$, mis igale kulgemisajale määrab temale vastava kulgetud tee pikkuse, nimetatakse liikumise seaduseks.

See liikumise seadus on punkti P sõiduplaan, kirjutatud valemi kujul.

Et ajamomendile t vastab kulgetud tee pikkus s ja ajamomendile $t + \Delta t$ vastab kulgetud tee pikkus $s + \Delta s$, siis ajavahemikus Δt sekundit on punkt P kulgenud Δs sentimeetrit ehk, keskmiselt 1 sekundi jooksul

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

sentimeetrit.

Nagu näeme,

juurdekasvude Δs ja Δt jagatis kujutab liikumise keskmist kiirust ajavahemikus Δt .

Laseme nüüd ajavahemikul Δt järjest väheneda, nii et $\Delta t \rightarrow 0$. Piirväärtus

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

annab kiiruse, millega liikumine toimub momendil t .

Kokkuvõttes:

kiirus, millega toimub liikumine antud momendil, on kulgetud tee tuletis.

Tähistame liikumise kiiruse tähega v , Siis

$$v = s'(t).$$

N ä i d e. Toimugu liikumine seaduse järgi

$$s = 2 - 3t + \frac{1}{2} t^2.$$

Leiame kiiruse momendil t .

Kiiruse valem

$$v = s'(t)$$

annab

$$v = 2' - (3t)' + \left(\frac{1}{2} t^2\right)'$$

ehk

$$v = 0 - 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} t$$

ehk

$$v = -3 + t.$$

Näiteks momendil $t = 5$ toimub liikumine kiirusega $-3 + 5$ ehk 2.

Nagu s , nii on ka v aja funktsioon: $v = v(t)$.

Kiirust, millega muutub liikumise kiirus, nimetatakse kiirenduseks.

Tähistades kiirenduse tähega w saame öeldu järgi, et

$$w = v'(t);$$

see tähendab, et

kiirendus on kiiruse tuletis.

Eelmises näites oli $v = -3 + t$. Järelikult kiirendus

$$w = -3' + t'$$

ehk

$$w = 0 + 1 = 1.$$

Näeme, et liikumise seaduse puhul $s = 2 - 3t + \frac{1}{2}t^2$, liikumise kiirus $v = -3 + t$ ja liikumise kiirendus $w = 1$, seega konstantne.

Ülesanded.

388. Keha liigub seaduse järgi $s = 2t^2 - 2$, kus s on kulgetud tee pikkus meetrites ja t on liikumise kestus sekundites. Määra selle keha keskmine kiirus ajavahe- mikkudes $t = 2$ kuni $t = 3,5$ ja $t = 0$ kuni $t = 2$.

Kui suur on selle keha liikumise kiirus iga ülalantud ajavahemiku alguses ja lõpus?

389. Allpool on antud rida kiiruse avaldise aja funk- sioonina. Määra kiirendus.

1. $v = 8,3$

3. $v = 0,4t^2$

2. $v = 10 - 1,2t$

4. $v = -3 + 0,7t - t^2$

390. Liikugu punkt seaduse järgi $s = 2t^3 - 3$. Kui suur on liikumise kiirus ja kiirendus hetkel $t = 3$?

391. Liikugu punkt seaduse järgi $s = t^2 - 4t + 5$. Missugusel ajamomendil muutub liikumise suund?

392. Liikugu punkt seaduse järgi

$$s = \frac{1}{3} t^3 - 3t^2 + 11t - 29.$$

Missugusel ajamomendil kiirendus muudab suunda?

393. Mees, kelle kõrgus on 1,75 m, sammub sirges joones piki kõnniteed. Kõnnitee kohal, 6 m kõrgusel, ripub elektrilamp; selle kiired heidavad kõnniteele mehe varju. Anna varju harja liikumise seadus, teades, et mees liigub seaduse järgi $s = s(t)$. Siin tähendab t aega ja s selle ajani käidud tee pikkust lähtekohast arvates.

Näited. 1. $s = 6t - 0,01t^2$

2. $s = 28 - 5t$

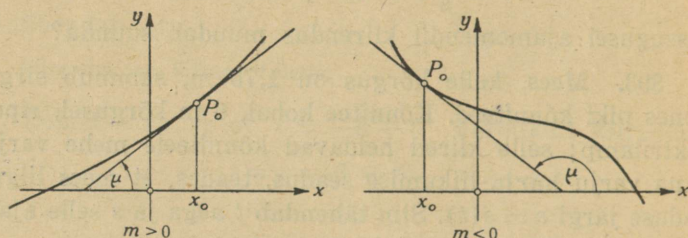
Määra varju harja liikumise kiirus ja kiirendus.

§ 45. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine.

Seame endile ülesandeks leida tunnused, mille järgi saab otsustada, kas argumenti läbiminekul antud väärtusest x_0 funktsioon $f(x)$ kasvab või kahaneb või vahetab oma muutumissuunda (enne kasvab, siis kahaneb või ümberpöörduvalt enne kahaneb, siis kasvab). Lühidalt öeldes, me tahame uurida funktsiooni käitumist argumenti läbiminekul väärtusest x_0 ehk, veel lühemas sõnastuses, me tahame uurida funktsiooni $f(x)$ käitumist argumenti väärtusel x_0 . Seejuures eeldame alati, et argument muutub kasvades.

Kasvaval funktsioonil on tõusev graafik, kahaneval funktsioonil on langev graafik (joonis 43). Võtame nii kasvava kui ka kahaneva funktsiooni graafikul punkti, näiteks punkti P_0 abstsissiga x_0 (joonis 43), ja jõesame selles punktis graafikule puutuja. Kasvava funktsiooni ja seega tõusva graafiku puhul on puutuja tõusunurk teravnurk: $\mu < 90^\circ$; kahaneva funktsiooni ja seega lan-

geva graafiku puhul on puutuja tõusunurk nürinurk: $\mu > 90^\circ$. Esimesel juhul on graafiku tõus $m > 0$, teisel



Joonis 43.

juhul on $m < 0$. Et graafiku tõus võrdub funktsiooni tuletisega, siis näeme järgmist:

kui väärtusel x_0 funktsioon kasvab, siis on tema tuletis y'_0 positiivne; kui väärtusel x_0 funktsioon kahaneb, siis on tema tuletis y'_0 negatiivne.

Ümberpöördult: kui y'_0 on positiivne, siis funktsiooni graafiku tõus on positiivne, punktis P_0 graafikule tõmmatud puutuja tõuseb, seega peab punktis P_0 ka graafik ise tõusma ja järelikult funktsioon y kasvama; kui y'_0 on negatiivne, siis funktsiooni graafiku tõus on negatiivne, punktis P_0 graafikule tõmmatud puutuja langeb, seega peab punktis P_0 ka graafik ise langema, järelikult peab funktsioon y kahanema. Nii jõuame funktsiooni kasvamise ja kahanemise tunnustele:

funktsioon kasvab argumenti antud väärtusel, kui tuletis sellel argumenti väärtusel on positiivne; funktsioon kahaneb argumenti antud väärtusel, kui tuletis sellel argumenti väärtusel on negatiivne.

Näide 1. Kas funktsioon

$$y = x^2 - 2x - 5$$

kasvab või kahaneb argumenti väärtustel -3 ja 4 ?

Antud funktsiooni tuletis

$$y' = 2x - 2 = 2(x - 1).$$

Kui $x = -3$, siis $x - 1 = -3 - 1 = -4$, seega $y' < 0$,
 „ $x = 4$, „ $x - 1 = 4 - 1 = 3$, seega $y' > 0$.

Järelikult argumendi väärtusel -3 funktsioon kahaneb, argumendi väärtusel 4 funktsioon kasvab.

Näide 2. Leiame vahemikud, milles funktsioon

$$y = x^3 - 4,5x^2 - 30x$$

kasvab ja milles ta kahaneb.

Antud funktsiooni tuletis on

$$y' = 3x^2 - 9x - 30.$$

Kirjutame selle kujul

$$y' = 3(x^2 - 3x - 10)$$

ehk, lahutades sulgudes seisva trinoomi tegureiks,

$$y' = 3(x + 2)(x - 5).$$

Vaatleme vahemikke

$$-\infty < x < -2, \quad -2 < x < 5, \quad 5 < x < +\infty.$$

Iga x -i puhul, mis kuulub esimesse vahemikku, on kumbki suluavaldisist negatiivne, seega nende korrutis positiivne ja $y' > 0$. Iga x -i puhul, mis kuulub teise vahemikku, on esimene suluavaldis positiivne, teine aga negatiivne, seega nende korrutis negatiivne ja $y' < 0$. Iga x -i puhul, mis kuulub kolmandasse vahemikku, on nii esimene kui ka teine suluavaldis positiivne, seega nende korrutis positiivne ja $y' > 0$.

Õeldust järeldame, et esimeses vahemikus funktsioon y kasvab, teises ta kahaneb ja kolmandas kasvab.

Vaatleme veel lähemalt funktsiooni muutumist argumenti x üleminekul väärtustest $x_1 = -2$ ja $x_2 = 5$.

Argumenti üleminekul väärtusest $x_1 = -2$ on tuleteisiteks positiivne, siis negatiivne; see tähendab, et funktsioon esiteks kasvab, siis kahaneb. Järelikult omab funktsioon argumenti väärtusel -2 oma suurimat väärtust, võrreldes naabruses olevatega.

Argumenti üleminekul väärtusest $x_2 = 5$ on tuleteisiteks negatiivne, siis positiivne; see tähendab, et funktsioon esiteks kahaneb, siis kasvab. Järelikult omab funktsioon argumenti väärtusel 5 oma väikesimat väärtust, võrreldes naabruses olevatega. Me ütleme: argumenti väärtusel $x = -2$ on funktsioonil y maksimum, argumenti väärtusel $x = 5$ on funktsioonil miinimum. Väärtuste -2 ja 5 asetamine x -i asemele y avaldisse annab y maksimumi ja y miinimumi:

$$y_{max} = (-2)^3 - 4,5 \cdot (-2)^2 - 30 \cdot (-2) = 34$$

ja

$$y_{min} = 5^3 - 4,5 \cdot 5^2 - 30 \cdot 5 = -137,5.$$

Ülesanded.

394. Olgu antud funktsioon $y = 3x^2$ ja tema argumenti väärtus $x = 5$. Leia, kas funktsioon sellel argumenti väärtusel kasvab või kahaneb.

395. Leia, kas funktsioon $y = (x - 3)^2$ kasvab või kahaneb argumenti väärtusel $x = 2$.

396. On antud argumenti 3 väärtust: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ ja $x_3 = 5$. Missugusel neist väärtustest funktsioon $y = 2x^2 - 4x - 5$ kasvab, missugusel kahaneb?

397. Anna iga järgmise funktsiooni jaoks argumendi vahemik, milles funktsioon kasvab ja milles ta kahaneb. Kujuta need vahemikud eri telgedel.

1. $y = 2x - 3$

5. $y = 1 + 2x - x^2$

2. $y = 1,7x + 3,5$

6. $y = x(x + 5)$

3. $y = x^2$

7. $y = x^3$

4. $y = 6x - x^2$

8. $y = x(x^2 - 12)$

398. Anna iga järgmise funktsiooni puhul argumendi vahemik, milles funktsioon kasvab ja milles ta kahaneb. Kujuta need vahemikud iga funktsiooni puhul eri teljel.

1. $y = -0,7x + 3$

5. $y = 13 - \frac{1}{4}x^2$

2. $y = \frac{x}{3} + 2$

6. $y = x(x - 5)$

3. $y = 10 - 11x$

7. $y = x^2 - 2x - 3$

4. $y = x^2 - 4$

8. $y = 12 + x - x^2$

§ 46. Funktsiooni ekstreemväärtused.

Kui funktsiooni $y = f(x)$ väärtus argumendi väärtusel x_0 on suurem kui kõik need väärtused, mis tema naabruses asetsevad, siis nimetatakse seda väärtust funktsiooni maksimumiks.

Sel puhul kirjutame

$$y_{max} = f(x_0).$$

Kui funktsiooni $y = f(x)$ väärtus argumendi väärtusel x_0 on väiksem kui kõik need väärtused, mis tema naabruses asetsevad, siis nimetatakse seda väärtust funktsiooni miinimumiks.

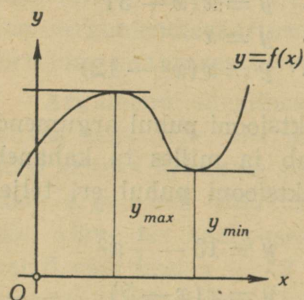
Sel puhul kirjutame

$$y_{min} = f(x_0).$$

Funktsiooni maksimumi ja miinimumi nimetatakse tema ekstreemväärtusteks.

Joonisel 44 näeme funktsiooni $y = f(x)$ üht maksimumi ja üht miinimumi.

Olgu funktsioonil $y = f(x)$ maksimum argumenti väärtusel x_0 . Valime selle viimase naabruses väärtused



Joonis 44.

$x_0 - h$ ja $x_0 + h$, kus $h > 0$; need erinevad väärtusest x_0 kuitahes vähe, kui aga h valime küllalt väikese. Väärtusel $x_0 - h$ on funktsiooni tuletis positiivne, väärtusel $x_0 + h$ on ta negatiivne. Kui tuletis y' muutub pidevalt, siis ta saab üleminna positiivsetelt väärtustelt (enne x_0) negatiivsetele väärtustele (pärast x_0) ainult saades ise nulliks (väärtusel x_0).

Seega: kui väärtusel x_0 funktsioon omab maksimumi, siis $f'(x) = 0$, kusjuures enne väärtust x_0 on $f'(x)$ positiivne, pärast väärtust x_0 aga $f'(x)$ on negatiivne.

Kokkuvõttes:

argumenti väärtusel, millel funktsioonil on maksimum, saab funktsiooni tuletis nulliks; argumenti üleminekul nimetatud väärtusest muudab funktsiooni tuletis oma märgi plussist miinuseks.

Ümberpöördult:

kui argumenti väärtusel x_0 on funktsiooni tuletis null ja üleminekul sellest väärtusest tuletis muudab oma märgi plussist miinuseks, siis on $f(x_0)$ funktsiooni maksimum.

Tõepoolest, eelduse järgi $f'(x_0 - h) > 0$, seevastu aga $f'(x_0 + h) < 0$; x_0 -st väiksematel argumenti väärtustel funktsioon kasvab, x_0 -st suurematel argumenti väärtustel funktsioon kahaneb. Seega $f(x_0)$ on suurem oma naabruses olevatest väärtustest ja on seega funktsiooni maksimum.

Ülaltõestatud teoreem annab meile funktsiooni maksimumi tunnuse:

$$f(x_0) = y_{max},$$

$$\text{kui } f'(x_0 - h) > 0, \quad f'(x_0) = 0 \quad \text{ja} \quad f'(x_0 + h) < 0.$$

Samal viisil tõestaksime funktsiooni miinimumi tunnuse:

$$f(x_0) = y_{min},$$

$$\text{kui } f'(x_0 - h) < 0, \quad f'(x_0) = 0 \quad \text{ja} \quad f'(x_0 + h) > 0.$$

Ülaltõestatud funktsiooni maksimumi- ja miinimumitunnustes on oluliseks osaks funktsiooni tuletise märgimuu t. Tingimusest, et tuletis oleks null, ei piisa selleks, et funktsioonil oleks ekstreemväärtus. Selle asjaolu selgitamiseks olgu järgmine näide.

Näide. Olgu antud funktsioon $y = x^3$. Selle funktsiooni tuletis $y' = 3x^2$. Näeme, et tuletis muutub nulliks argumenti väärtusel $x_0 = 0$. Kuid sellel väärtusel funktsioon y ei oma ei maksimumi ega miinimumi, nagu näeme kuup-parabooli joonisest (joonis 34). Uuritava funktsiooni tuletis saab küll nulliks väärtusel $x_0 = 0$, kuid sellest väärtusest üleminekul ta ei muuda oma märki. Tõesti, enne väärtust x_0 , kui $x = 0 - h$, on

$$y' = 3(0 - h)^2 = 3(-h)^2 = 3h^2 > 0;$$

pärast seda väärtust x_0 , kui $x = 0 + h$, on

$$y' = 3(0 + h)^2 = 3h^2 > 0;$$

seega on y' positiivne nii enne väärtust x_0 kui pärast seda väärtust: funktsioon $y = x^3$ kasvab argumenti iga väärtuse puhul. Tingimus, et $f'(x)$ oleks null, on tarvilik selleks, et funktsioon saaks ekstreemumiks; see tingimus ei ole aga veel piisav.

Kokkuvõttes saame järgmise juhise funktsiooni ekstreemväärtuste leidmiseks:

leiame argumendi väärtused, mille puhul $y' = 0$; uurime tuletise märgi muutumist argumendi üleminekul leitud väärtustest ja rakendame ekstreemväärtuste tunnuseid.

Ülesanne 1. On antud funktsioon

$$y = \frac{1}{6} (x^3 - 12x^2 + 36x - 7).$$

Leia tema maksimumid ja miinimumid.

Lahendus. Väärtusel x , millel y saab ekstreemumiks, peab y tuletis olema null. Sellepärast võtame tuletise:

$$y' = \frac{1}{6} (3x^2 - 24x + 36) = \frac{1}{2} (x^2 - 8x + 12);$$

võrrutame ta nulliga:

$$\frac{1}{2} (x^2 - 8x + 12) = 0$$

ja taandame:

$$x^2 - 8x + 12 = 0.$$

Saadud võrrandi lahendamisel saame kaks x -i väärtust:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 6.$$

Neil argumendi väärtustel funktsioon võib omada ekstreemväärtusi. Vaatame, kas on tegemist ekstreemväärtustega ja kui on, siis missugustega nimelt. Selleks uurime tuletise märgi muutumist argumendi üleminekul väärtustest 2 ja 6. Et seda võimalikult kergesti teha, lahutame tuletise teguriteks:

$$y' = \frac{1}{2} (x - 2)(x - 6),$$

ja koostame tabelid tuletise märkidest enne ja pärast väärtusi $x_1 = 2$, $x_2 = 6$. Seejuures paneme tähele, et me arvu h võime võtta kuitahes väikese; selle tagajärjel

summa, mille üheks liidetavaks on h , omandab ikka teise liidetava märgi.

x	$\frac{1}{2}(x-2)(x-6)$	märk	x	$\frac{1}{2}(x-2)(x-6)$	märk
$2-h$	$\frac{1}{2} \cdot (-h) \cdot (-h-4)$	+	$6-h$	$\frac{1}{2} \cdot (4-h) \cdot (-h)$	-
2	$\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (-4)$	0	6	$\frac{1}{2} \cdot (+4) \cdot 0$	0
$2+h$	$\frac{1}{2} \cdot (+h) \cdot (h-4)$	-	$6+h$	$\frac{1}{2} \cdot (4+h) \cdot (+h)$	+

Sellest näeme, et mõlemal korral tuletise märk muutub: esimesel korral plussist miinuseks, teisel — miinusest plussiks. Väärtusel $x_1 = 2$ saab antud funktsioon maksimumiks, väärtusel $x_2 = 6$ — miinumiks. Seega

$$y_{\max} = \frac{1}{6}(2^3 - 12 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 - 7) = 4\frac{1}{6}$$

ja

$$y_{\min} = \frac{1}{6}(6^3 - 12 \cdot 6^2 + 36 \cdot 6 - 7) = -1\frac{1}{6}.$$

Märkus. Funktsiooni maksimum ei ole tema väärtus, mis on suurem kõigist teistest tema väärtustest, vaid ainult nendest, mis asetsevad tema otseses naabruses: funktsioon y võib x -i küllaldaselt kasvamisel saada kuitahes suureks. Analoogiline märkus kehtib funktsiooni miinumumi kohta.

Tulemusi, milledele jõudsime, on võimalik avaldada veelgi lihtsamal kujul, abiks võttes funktsiooni teise tuletise mõistet. Selleks arutame nõnda:

Funktsiooni $y = f(x)$ maksimumiks saamise puhul argumenti väärtusel $x = x_0$ oli

$$f'(x_0 - h) > 0, \quad f'(x_0) = 0, \quad \text{ja} \quad f'(x_0 + h) < 0.$$

Seega funktsiooni $y = f(x)$ maksimumi puhul argumenti kasvades tuleb $f'(x)$ kahaneb; selle asjaolu tunnuseks aga on, et $[f'(x_0)]'$ ehk $f''(x_0) < 0$.

Funktsiooni $y = f(x)$ miinimumiks saamise puhul argumenti väärtusel $x = x_0$ oli

$$f'(x_0 - h) < 0, f'(x_0) = 0 \text{ ja } f'(x_0 + h) > 0.$$

Seega funktsiooni $y = f(x)$ miinimumi puhul argumenti kasvades tuleb $f'(x)$ kasvab; selle asjaolu tunnuseks on aga, et $[f'(x_0)]'$ ehk $f''(x_0) > 0$.

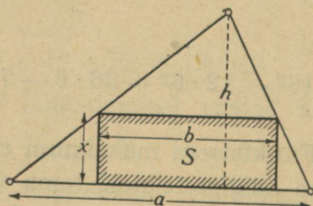
Õeldu põhjal võime funktsiooni ekstreemumi tunnuseid sõnastada ka nii:

$$f(x_0) = y_{\max},$$

kui $f'(x_0) = 0$ ja seejuures $f''(x_0) < 0$.

$$f(x_0) = y_{\min},$$

kui $f'(x_0) = 0$ ja seejuures $f''(x_0) > 0$.



Joonis 45.

Ülesanne 3. Kolmnurgakujulisele maatükile tahetakse ehitada võimalikult suure ristkülikukujulise alusega maja. Kuidas peab valima aluse mõõtmed?

Olgu antud kolmnurga kõige pikem külge a ja sellele vastav kõrgus h . Asetame maja aluse ühe külje kolmnurga küljele a (joonis 45). Tähistame otsitava ristküliku mõõtmed tähtedega b ja x ; siis tema pindala $S = bx$. Näib, nagu oleneks S kahest muutujast b ja x .

Tegelikult aga saame muutuja b avaldada x -i kaudu. Kolmnurkade sarnasusest järeldub, et

$$\frac{b}{h-x} = \frac{a}{h},$$

millest leiame, et

$$b = \frac{a}{h} (h-x).$$

Seepärast

$$S = \frac{a}{h} (h-x)x.$$

Leiame x -i väärtuse, mille puhul S on maksimum. Et $\frac{a}{h}$ on jääv tegur, siis S saab maksimumiks juhul, kui avaldis $(h-x)x$ saab maksimumiks; tähistame selle avaldise tähega u ja leiame x -i väärtuse, mille puhul u saab maksimumiks.

Et

$$u = (h-x)x = hx - x^2,$$

siis

$$u' = h - 2x$$

ja

$$u'' = -2.$$

Võrrutame esimese tuletise nulliga:

$$h - 2x = 0.$$

Lahendame saadud võrrandi:

$$x = \frac{h}{2}.$$

Et u teine tuletis on negatiivne iga x -i väärtuse puhul, siis on ta seda ka leitud x -i väärtuse puhul. Järelikult väärtusel $x = \frac{h}{2}$ saab u ja ühes temaga ka S maksimumiks.

Arvutame maja aluse pindala suurima väärtuse. Kui

$$x = \frac{h}{2},$$

siis

$$b = \frac{a}{h} \left(h - \frac{h}{2} \right) = \frac{a}{2}$$

ja

$$S = \frac{h}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{4} ah.$$

Antud kolmnurga pindala on $\frac{1}{2} ah$; seega: kõige suurem ristkülik, mida saab antud kolmnurka joonestada, omab pindala, mis võrdub kolmnurga poole pindalaga.

Ülesanne 3. Leia funktsiooni

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x - 11$$

maksimumid ja miinimumid.

Lahendus. Võtame funktsiooni tuletised:

$$y' = 3x^2 + 6x + 3$$

$$y'' = 6x + 6$$

ehk

$$y' = 3(x^2 + 2x + 1)$$

ehk ka

$$y' = 3(x + 1)^2$$

ja

$$y'' = 6(x + 1).$$

Võrrutame esimese tuletise nulliga:

$$3(x + 1)^2 = 0.$$

Lahendades saadud võrrandi, näeme, et tal on kaks võrdset lahendit:

$$x_1 = x_2 = -1.$$

Asetades selle väärtuse teise tuletise avaldisse, leiame, et

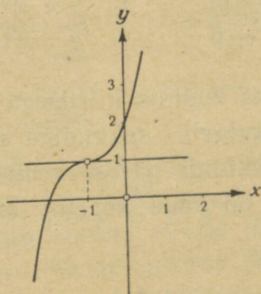
$$y'' = 6(-1 + 1) = 6 \cdot 0 = 0,$$

séega ei positiivne ega negatiivne.

Et küsimus ei lahene teise tuletise märgi abil, siis uurime esimese tuletise märgi muutumist argumenti üleminekul väärtusest $x = -1$. Selleks koostame järgmise tabeli:

x	$y' = 3(x + 1)^2$	märk
$-1 - h$	$3 \cdot (-h)^2$	+
-1	$3 \cdot 0^2$	0
$-1 + h$	$3 \cdot (+h)^2$	+

Tabelist näeme, et argumenti üleminekul väärtusest $x = -1$ tuletise märk ei muutu: antud funktsioonil ei ole seal maksimumi ega miinimumi. Antud funktsiooni graafikul on selles punktis x -teljega rööbik puutuja, mis lõikab graafikut puutepunktis (joonis 46).



Joonis 46.

Märkus. Ekstreemum-ülesannete lahendamist saab mõnikord tunduvalt lihtsustada pannes tähele, et x -i väärtused, millel funktsioonid

$$af(x) \quad \frac{a}{f(x)} \quad [f(x)]^n \quad \sqrt[n]{f(x)}$$

omavad ekstreemumit on samad, millel seda omab funktsioon $f(x)$.

Ülesanded.

399. Määra, missugustel argumentide väärtustel omavad järgmised funktsioonid ekstreemväärtusi ja kui suured on need ekstreemväärtused:

- | | |
|---------------------|-----------------------------|
| 1. $x^2 + 2x - 3$ | 5. $x^3 - 3x + 1$ |
| 2. $x^2 - 7x + 12$ | 6. $2x^3 - 12x^2 + 7$ |
| 3. $5 + 12x - x^2$ | 7. $x^3 - 12x^2 + 36x - 15$ |
| 4. $3x^2 - 24x + 5$ | 8. $x^3 - 9x^2 + 15x + 1$ |

400. Uuri, kas on järgmistel funktsioonidel ekstreemväärtusi:

- | | |
|-------------------------|---------------------------------|
| 1. $y = x^3 + 3x - 11$ | 3. $y = x^3 + x^2 + x + 1$ |
| 2. $y = x^3 + 2x^2 - 6$ | 4. $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 13$ |

401. Õhutühjas ruumis kiirusega v meetrit sekundis ülespaisatud keha kulgeb t sekundiga $s = vt - 4,9t^2$ meetrit. Leia, mitme sekundi pärast keha jõuab kõrgeimasse seisuga ja kui suur on selle kõrgus, kui $v = 196$ meetrit sekundis.

402. Leia arv, mis ületab oma ruudu suurima arvu võrra.

403. Lõik, mille pikkus on 12 cm, on jaotatud kahte ossa. Üks osa võetakse ristküliku aluseks ja teine kõrguseks. Avalda ristküliku pindala tema aluse funktsioonina ja leia, missuguse aluse puhul ristküliku pindalal on maksimaalne väärtus.

404. Missugune ristkülikuist, millel on üks ja sama ümbermõõt u , omab maksimaalset pindala?

405. Avalda muutumatu pindalaga ristküliku ümbermõõt tema aluse funktsioonina ja leia, missugusele aluse väärtusele vastab ümbermõõdu maksimaalne väärtus. Missugune peab olema ristküliku kuju, et ristkülikul antud pindala puhul oleks maksimaalne ümbermõõt?

406. Olgu ristküliku ümbermõõt 20 cm. Ehita ristkülik nõnda, et tema diagonaali pikkus oleks minimaalne.

407. Lõik, mille pikkus on l cm, on jaotatud kahte ossa. Kummalegi osale on ehitatud ruut. Vali lõigul l jaotuspunkt nii, et nimetatud ruutude pindalade summa oleks minimaalne.

408. Täisnurkse kolmnurga kaatetite summa on 10. Kuidas tuleb valida kaatetid, et kolmnurga hüpotenuus saaks minimaalne?

409. Kanakasvatatal on p jooksvat meetrit traatvõrku. Ta tahab valmistada ristkülikukujulise põhiplaaniga kanaaia, mis jaguneks n võrdseks, ühes reas seisvaks ristkülikuks. Kuidas tuleb valida aia mõõtmed, et aia pindala oleks maksimaalne?

410. Inglismaale saadetavate postipakkide mõõtmed on piiratud Inglise postimäärusega, mille järgi paki pikkuse ja vöö pikkuse summa ei tohi ületada 6 jalga. Missugused mõõtmed on ruudukujulise läbilõikega suurimal karbil, mida veel saab saata Inglismaale, eelmist määrust silmas pidades?

411. Missugused mõõtmed peavad olema silindrikujulisel liitermõõdul, kui tahame, et tema valmistamiseks kuluks minimaalne hulk plekki?
412. Soovitakse ehitada ülevalt kinnist silindrikujulist õlitanki mahutusega V liitrit. Kuidas tuleb valida selle anuma mõõtmed, et tema ehitamiseks kuluks minimaalne hulk materjali?
413. Missugune antud täispindalaga silindritest omab maksimaalset ruumala?
414. Missugune antud ruumalaga silindritest omab minimaalset täispindala?
415. Soovitakse ehitada silindrikujulist boilerit mahutusega 1000 liitrit. Külje materjal maksab 1 mark dm^2 , otste materjal 2 marka dm^2 . Missuguste mõõtmete puhul boileri materjalikulud on minimaalsed?
416. Võrdhaarse kolmnurga aluse ja kõrguse summa on konstant s . Kolmnurk pöörleb ümber oma kõrguse. Missuguse seose puhul aluse ja kõrguse vahel on tekkinud pöördkeha ruumala maksimaalne?
417. Koonuse kõrgus on 12 cm ja põhja raadius on 6 cm. Missugused on suurima ruumalaga silindri mõõtmed, mida saab kujundada koonusesse nii, et silindri põhi asetseks koonuse põhjal?
418. Koonuse kõrgus on 21 cm ja põhja raadius on 7 cm. Missugused on koonusesse kujundatud suurima täispindalaga silindri mõõtmed?
419. Kui suure osa kera ruumalast täidab kerasse kujundatud suurima ruumalaga silinder?
420. Kui suure osa kera ruumalast täidab kerasse kujundatud suurima ruumalaga koonus?

421. Kui suur peab olema kordaja a avaldises $x^2 + ax$, et avaldise suurim väärtus oleks 48? Kui suur peab olema kordaja a , et x -i väärtusel 7 avaldis omaks suurimat väärtust?

422. Võrdhaarse kolmnurga alus on 18 cm, kõrgus 15 cm. Kujuta kolmnurgasse ristkülik maksimaalse pindalaga nii, et üks ristküliku külgedest asetseks kolmnurga alusel.

Peatükk VII.

Vea hindamine kaudse mõõtmise ülesandeis.

§ 47. Mõõtmisviga.

Enamik andmeid, millega töötame, on saadud mõõtmise teel. Need andmed pole kunagi täpsed; nad on eranditult ligikaudsed. See on tingitud kõigepealt tõsiasiast, et mõõtmistulemust ikka mõjustavad paljud juhuslikud asjaolud, mis seisavad väljaspool meie kontrolli. Kui näiteks, mõõdame maapinnal kahe punkti vahelist kaugust mõõdulatiga, on võimatu latti asetada üks kord teise järel täpselt sirges joones ja seda kõigepealt juhuslikult esinevate maapinna konaruste tõttu. Juhuslikkude asjaolude hulka tuleb lugeda ka seda, et lati pikkus vähesel määral muutub, kui ta päikesepaistel soojeneb või jälle külm tuul ja õhuniiskus teda mõjustavad.

Teiseks põhjuseks, miks meie mõõtmistulemused on ikka vaid ligikaudsed, on asjaolu, et mõõdetavad suurused pole täpselt defineeritavad. Kui näiteks räägime jõe sügavusest ja mõistame selle all kaugust jõe põhjast veepinnani, siis pole ei jõe põhi ega jõe veepind midagi muutumatut ja kindlat: põhi muutub järjest vee voolamisel ja mineraal- ning orgaaniliste olluste sadestumisel, veepind aga kõigub vee juurdevoolu, vee aurumise, tuulerõhu ja muil põhjusil.

Kolmandaks põhjuseks, miks me mõõtmisel ei saa mõõdetavate suuruste täpseid väärtusi, on see, et meie

mõõduriistad on puudulikud, nagu meie silm, kõrv ja teisedki meeled. On, näiteks, võimatu kanda mõõdulindile jaotisi täpselt juba sellepärast, et jaotiste kriipsud on teatava jämedusega. Ja mõõtmisel me oleme sunnitud pikkusi kahe järjestikuse kriipsu vahel hindama silma järgi, s. o. umbkaudu.

Kõik, mis ülal öeldud pikkuste mõõtmise kohta, kandub asjakohaselt sõnastust muutes üle nurga, aja, temperatuuri ja iga teise suuruse mõõtmisele. Öeldu põhjal kujutavad kõik meie mõõtmistulemused mõõdetavaid suurusi vaid ligikaudu.

Vahet mõõdetava suuruse väärtuse ja tema jaoks leitud ligikaudse väärtuse vahel nimetame selle väärtuse veaks.

Mõõtmise saaduse viga me ei tunne ei tema suuruse ega märgi poolest. Küll aga on harilikult võimalik hinnata määra, milleni halvemal juhul võiks küündida mõõtmisvea suurus.

Arvu, mis näitab, milleni ülimalt võib küündida mõõtmisvea suurus, nimetame selle mõõtmisvea ülemmääraks.

Olgu mingi suuruse tõeline väärtus märgitud tähega x , selle suuruse mõõtmise saadus tähega a . Mõõtmisvea ülemmäära märgime siis sümboliga Δa . Et arv x ei või erineda arvust a rohkem kui Δa võrra, siis kindlasti

$$a - \Delta a \leq x \leq a + \Delta a,$$

s. t., et arv x peitub kindlasti vahemikus arvude $a - \Delta a$ ja $a + \Delta a$ vahel.

Väikesimat vahemikku, milles kindlasti asetseb mõõdetava suuruse tõeline väärtus, nimetame selle suuruse kõikumisvahemikuks.

Võrratustes

$$a - \Delta a \leq x \leq a + \Delta a$$

peituvat mõtet avaldame lühidalt ka kujul

$$x = a (\pm \Delta a)$$

ja loeme seda nii: x võrdub a -ga veega mitte üle Δa . Nii näiteks tähendab kirjutis

$$x = 17,4 (\pm 0,2),$$

et

$$17,2 \leq x \leq 17,6.$$

Kui mõõtmisvea ülemmäär ei ületa viimase kirjutatud kümnendkoha poolt ühikut, siis jäetakse tavakohaselt mõõtmisvea ülemmäär märkimata. Nii näiteks tähendab kirjutis

$$x = 53,8$$

õieti võrdust

$$x = 53,8 (\pm 0,05)$$

ehk, täielikumalt, võrratusi

$$53,75 \leq x \leq 53,85.$$

Ülesanded.

423. Kui suur on temperatuuri määramise vea ülemmäär, kui termomeetri skaalal 1 kraadile vastab 5 mm ja silm veel hästi eraldab kaht kriipsu 0,2 mm vahega?

424. Kui suur on kellaaja määramise vea ülemmäär, kui kellal puudub sekundiosuti ja kella numbrilaud kannab üheminutilisi jaotisi?

425. Kui suure vea ülemmääraga on võimalik lugeda pikkusi varbsirkliit, mis kannab millimeetri-jaotust ja on varustatud noonusega, millele on kantud 0,9 mm suurused jaotised?

426. Anna murru $\frac{23}{35}$ ligikaudsed väärtused küm-
nendmurdudena veaga mitte üle

$$0,5 \quad 0,05 \quad 0,005 \quad 0,0005.$$

427. Anna järgmiste mõõtmistulemuste kõikumis-
piirkonnad iga mõõtmistulemuse alam- ja ülemtõkke kaudu:

millimeetrites on . . .	$s = 84,6 (\pm 0,7)$
liitrites on	$V = 0,58 (\pm 0,02)$
sekundites on	$t = 12 (\pm 1,5)$
meetrites on	$r = 425$
ruutkilomeetrites on .	$P = 5,763$
kilogrammides on . . .	$W = 7943.$

§ 48. Kaudse mõõtmise vea hindamine.

Otsesteks mõõtmisteks nimetame mõõtmisi, kus mõõdetavat
suurust otse võrreldakse mõõduühikuga.

Niisuguseks otseseks mõõtmiseks on näiteks pikkuse
mõõtmine mõõdulatiga, mõõdulindiga ja mõõdusirkliga.
Otseseks mõõtmiseks võib lugeda ka nurga mõõtmist mal-
liga või teodoliidiga. Samuti võib lugeda otseseks mõõtmis-
seks keha kaalu määramist kaaludel. Rõhuv enamik suu-
rusi mõõdetakse aga mitte otseselt, vaid *k a u d s e l t*. Näi-
teks mõõdame toa põranda pindala kaudselt, mõõtes esi-
teks põranda pikkuse p ja laiuse l ja *a r v u t a d e s* siis
juba põranda pindala valemi järgi $S = p \cdot l$. Samuti leiame
kera ruumala, mõõtes otseselt tema läbimõõdu d ja *a r v u -*
t a d e s siis juba otsitava ruumala valemi järgi $V = \frac{1}{6} \pi d^3$.
Suuruste näiteina, mida eranditult mõõdame kaudselt,
olgu nimetatud: kiirus, soojuse hulk, valguse tugevus,
elektri takistus, töö.

Üldiselt:

kauseteks mõõtmisteks nimetame mõõtmisi, kus mõõdetav suurus arvutatakse otseselt mõõdetud suuruste väärtustest.

Iga kaudne mõõtmine tugineb ühtede või teiste suuruste otseste mõõtmiste saadustele. On arusaadav, et kui need saadused on ligikaudsed, siis ka kõik tulemused, mis neist saadakse arvutamise teel, on jällegi vaid ligikaudsed. Tekib põhilise tähtsusega küsimus: kui kõrgele võib halvemal juhul küündida nende arvutamistulemuste viga? Olgu näiteks mõõtmisel leitud, et kuubi külg on a , vea ülemmääraga Δa . Kuubi ruumala arvutamine annab a^3 , mis on vaid ruumala ligikaudne väärtus. Tekib küsimus, milleni võib küündida selle väärtuse viga $\Delta(a^3)$, teiste sõnadega, milleni võib küündida vahe kuubi ruumala tõelise väärtuse ja selle asemel leitud väärtuse a^3 vahel?

Üldkujul seame küsimuse nõnda:

on mõõdetud mingi suurus ja leitud tema väärtus x vea ülemmääraga Δx . Sellest x -i väärtusest lähtudes on arvutatud valemi järgi

$$y = f(x)$$

suurus y . Milleni võib küündida y viga ehk, teisiti, kui suur on Δy ?

Küsimusele vastuse saamiseks arutame nõnda:

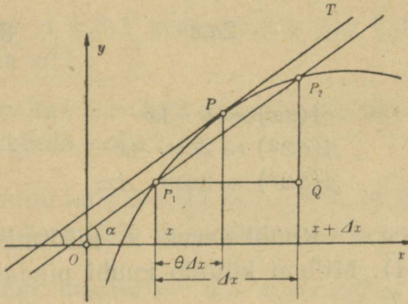
Kujutagu joonisel 47 kõver funktsiooni $y = f(x)$ käiku. Võtame kõveral 2 punkti P_1 ja P_2 abstsissidega x ja $x + \Delta x$ ning joonistame kõõlsirge P_1P_2 . Kui selle sirge tõusunurga tähistame α -ga, siis saame

$$QP_2 = P_1Q \cdot \tan \alpha$$

ehk

$$\Delta y = \Delta x \cdot \tan \alpha.$$

Tõmbame nüüd kaarele P_1P_2 puutuja rööbiti kõõluga P_1P_2 . Olgu puutuja puutepunktiks punkt P ; selle abstsiss asetseb arvude x ja $x + \Delta x$ vahel ja on seega Δx murdosa võrra



Joonis 47.

suurem kui x . Märgime selle murdosa tähega θ . Siis punkti P abstsiss on $x + \theta \Delta x$ ja kõõlu ning puutuja ühise tõusunurga a tangens avaldub kujul

$$\tan a = f'(x + \theta \Delta x).$$

Kui Δx on väike, nagu see headel mõõtmistel ikka on, siis $x + \theta \Delta x$ erineb ainult väga vähe x -st, $f'(x + \theta \Delta x) \approx f'(x)$ ja seega

$$\Delta y \approx \Delta x \cdot f'(x)$$

ehk

$$\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x.$$

Saadud valem kannab vea hindamise põhi-
valem i nime. Teda võime sõnastada nii:

funktsiooni viga on ligikaudu võrdne funktsiooni tuletise ja argumendi vea korrutisega.

Võttes funktsioonina $f(x)$ näiteks funktsioonid

$$ax$$

$$ax^2$$

$$ax^3$$

ja arvestades, et nende tuletised on

$$a$$

$$2ax$$

$$3ax^2,$$

leiame

$$\Delta(ax) \approx a \cdot \Delta x$$

$$\Delta(ax^2) \approx 2ax \cdot \Delta x$$

$$\Delta(ax^3) \approx 3ax^2 \cdot \Delta x.$$

Ülesanne. Kuubi serva x mõõtmisel on leitud $x = 9,6(\pm 0,04)$. Milleni küünib kuubi pindala arvutamise tulemuse viga?

Lahendus. Kuubi pindala

$$S = 6x^2,$$

seega

$$S' = 12x$$

ja järelikult

$$\Delta S \approx 12x \cdot \Delta x.$$

Asetades arvud, leiame

$$S = 6 \cdot 9,6^2 = 552,96$$

ja

$$\Delta S \approx 12 \cdot 9,6 \cdot 0,04 = 4,608$$

ehk, ümmardades vea ülespoole,

$$\Delta S \approx 5.$$

Sellest näeme, et S väärtuses juba ühelised pole usaldatavad, seega kümnendkohtadel 0,9 ja 0,06 ei ole enam mingit mõtet. Kuubi pindala tuleks järelikult anda kujul

$$S = 553(\pm 5).$$

Ülesanded.

428. Arv $\log 2 = 0,30$ veaga mitte üle 0,002. Kui täpselt saab arvutada $(\log 2)^2$?

429. Arv $\pi = 3,1$ veaga mitte üle 0,05. Kui täpselt saab arvutada π^3 ?

430. Arv $\tan a = 1,72$ veaga mitte üle 0,01. Kui täpselt saab arvutada $\cot a$?

431. Ruudu külg $a = 13,4(\pm 0,08)$. Milleni võib küündida ruudu übermõõdu ja ruudu pindala arvutamise viga?

432. Ringi diameeter $d = 5,8(\pm 0,1)$. Milleni võib küündida ringi arvutatud übermõõdu ja pindala viga?

433. Kui rööpa pikkus temperatuuril 0° on l_0 , temperatuuril t° vastavalt l ja rööpa paisumiskordaja on α siis $l = l_0(1 + \alpha t)$. Mille võrra mõjustab rööpa pikkust väike temperatuuri muut Δt° võrra?

434. Poolkera läbimõõt $d = 4,7(\pm 0,08)$. Milleni võib küündida poolkera übermõõdu, täispindala ja ruumala arvutamistulemuse viga?

435. Kuubi ruumala on $340(\pm 10)$ dm³. Arvuta kuubi serv andmetekohase täpsusega.

436. Kuubi serva pikkuse s mõõtmisel on tehtud viga σ . Mil määral mõjustab see viga kuubi täispindala arvutamise tulemust?

437. Kui täpselt peaks mõõtma võrdkülgse kolmnurga külge a , kui soovitakse arvutada tema pindala S veaga alla ΔS ?

Näide. $a = 15,6$; $\Delta S = 0,004$. Määra Δa .

438. Tahetakse valmistada ruutmeetri mudelit. Tingimuseks on, et viga ei ületaks 1 cm^2 . Missugune on mudeli serva lubatava vea ülemmäär? Kas on võimalik tingimusele vastavat mudelit valmistada papist?

439. Tahetakse valmistada kuubikujulist liitermõõtu. Valmistatud nõu ruumala viga ei tohi ületada $0,0005$ liitrit. Missugune viga on lubatav nõu seesmise serva puhul? Kas on võimalik valmistada nõuet rahuldavat liitermõõtu karest raudplekist?

§ 49. Relatiivne viga.

Nagu nägime eespool, ei piisa sellest, et anname mõõdetava suuruse ligikaudse väärtuse; tuleb ka näidata, kui suur on selle väärtuse vea ülemmäär; alles mõlemad andmed koos näitavad, missugune on mõõtmise tulemus ja kui usaldatav see on. Neist kahest arvust tuletatakse arv — **relatiivne viga**, mis iseloomustab mõõtmise täpsust. Selle arvu juurde jõuame järgmiselt:

Olgu meil tegemist näiteks kahe pikkuse mõõtmisega; olgu leitud esimese jaoks l_1 veaga mitte üle Δl_1 , teise jaoks l_2 veaga mitte üle Δl_2 . Missugune neist mõõtmisandustest on täpsem, missugune vähem täpne? Küsimusele vastamiseks leiame, kui suur viga tuleb kummalgi mõõtmisel ühe ühiku kohta. Esimesel juhul leiame $\frac{\Delta l_1}{l_1}$, teisel $\frac{\Delta l_2}{l_2}$. Selle järgi, missugune neist murdudest on väiksem, otsustame, missugune mõõtmistulemustest on täpsem.

Mõõtmistulemuse vea ja mõõtmistulemuse jagatist nimetatakse mõõtmistulemuse relatiivseks veaks.

Relatiivset viga on viisiks anda protsentides või promilides.

Näide. Olgu laua pikkus 126 cm veaga kuni 0,3 cm. Siis on mõõtmissaaduse relatiivne viga $0,3 : 126$ ehk $3 : 1260$ ehk $1 : 420$. See murd näitab, et meie mõõtmise puhul pikkuse 420 cm viga võib küündida 1 cm-ni. Avaldades suhte $1 : 420$ protsentides, leiame

$$\frac{1}{420} = \frac{100}{420} \% = \frac{10}{42} \% \approx \frac{1}{4} \%.$$

Valemeist

$$\Delta(ax^2) \approx 2ax \cdot \Delta x$$

ja

$$\Delta(ax^3) \approx 3ax^2 \cdot \Delta x$$

saame

$$\frac{\Delta(ax^2)}{ax^2} \approx 2 \frac{\Delta x}{x}$$

ja

$$\frac{\Delta(ax^3)}{ax^3} \approx 3 \frac{\Delta x}{x}.$$

Paremal poolel seisavad suuruse x relatiivse vea kordsed, vasakul poolel suuruse x ruut- ja kuupfunktsiooni relatiivsed vead. Me näeme, et

ruutfunktsiooni relatiivne viga on argumendi relatiivse vea kahekordne;

kuupfunktsiooni relatiivne viga on argumendi relatiivse vea kolmekordne.

Ülesanne. Kera diameetri mõõtmisel küünib relatiivne viga 2%-ni. Milleni küünib sellest diameetrist arvatud kera ruumala relatiivne viga?

Lahendus. Kera ruumala on diameetri kuupfunktsioon. Järelikult võib ruumala relatiivne viga küündida $3 \cdot 2\%$ -ni ehk 6%-ni.

Ülesanded.

440. Arved riigimarka

1,09	18,46	782,25	3627,16
------	-------	--------	---------

ümmardati vastavalt summadeni:

1,00	18,00	780,00	3600,00.
------	-------	--------	----------

Mitu protsenti arve lõppsuurusest moodustab kustutatud summa iga arve puhul? Missuguse arve puhul kustutati kõige suurem summa? Missuguse arve puhul kustutati suhteliselt kõige suurem summa?

441. Postpaki kaaluna leiti 4,270 kg veega mitte üle 5 g. Kui suur viga tuleb siin ülimalt 1 kg kohta? Kui suur on kaalumise relatiivse vea ülemmäär promillides?

442. Kahe tähise vahelise kauguse mõõtmine uue raudtee sihil andis 12,781 km veega kuni 18 meetrit. Kui suur viga tuleb ülimalt 1 km kohta? Kui suur on mõõtmise relatiivse vea ülemmäär promillides?

443. Määra järgmiste ligikaudsete arvude relatiivsete vigade ülemmäärad:

1.	2,4 ($\pm 0,03$)	3.	4
	12 ($\pm 0,4$)		15
	120 ($\pm 0,4$)		326
2.	0,36 ($\pm 0,05$)	4.	0,4
	0,181 ($\pm 0,007$)		0,15
	1810 (± 70)		3260

444. Allpool on antud rida arve ja nende relatiivsete vigade ülemmäärad. Leia iga arvu vea ülemmäär.

1.	136	3%	2.	0,24	1%
	124	0,2%		0,048	1,5%
	2560	5%		8,6	5%
	2700	15%		0,392	4%

445. Kuubi serva mõõtmisel tehtud viga ei ületa 1%. Mitme %-ni võib kүүндida servade kogupikkuse, kuubi pindala ja ruumala arvutamistulemuse viga?

446. Poolkera läbimõõt on teada veaga mitte üle 2%. Mitme %-ni võib kүүндida poolkera ümbermõõdu, täispindala ja ruumala arvutamise tulemuse viga?

447. Milleni tohib kүүндida kuubi serva mõõtmise relatiivne viga, kui kuubi ruumala relatiivne viga ei tohi ületada 3%?

448. Kui täpselt peab mõõtma võrdkülgse kolmnurga külje, kui kolmnurga pindala relatiivne viga ei tohi ületada 10 promilli?

Peatükk VIII.

Ülesandeid kordamiseks.

§ 50. Ülesandeid aritmeetikast.

449. Määra peast järgmiste tehete tulemused ja anna iga arvutusvõtte puhul selle põhjendus:

1. $785 + 4286 + 215$	2. $102 \cdot 98$
$3875 - 1999$	$158^2 - 58^2$
$99 \cdot 73$	$23\frac{7}{8} \cdot 5$
$72 \cdot 73$	$\frac{12}{13} \cdot 182$
82^2	$\sqrt{2\frac{14}{25}}$

450. Missugune arvudest $\frac{5}{23}$, $\frac{3}{14}$ ja $0,22$ on suurim ja missugune väikesim?

451. Järjesta murrud

$$\frac{3}{5} \quad \frac{7}{13} \quad \frac{8}{15} \quad \text{ja} \quad \frac{15}{28}$$

kasvava suuruse järgi.

452. Andmete ümberkirjutamisel on ära vahetatud jagatav ja jagaja ning jagatisena saadud $0,658$. Kui suur on õige jagatis?

453. Kalliskivi kaal on grammides $0,945$. Kui suur on kivi kaal karaatides, kui 1 karaat = 206 mg?

454. Vasktraadi pikkus 10^0 temperatuuris on 200 m. Mitme millimeetri võrra pikeneb see traat soojenemisel 30 kraadini, kui vase joonpaisumise koefitsient on $1,71 \cdot 10^{-5}$?

455. Maantee pikkus on 19,8 km ja laius 6,4 m. Mitu hektaari võtab enda alla maantee?

456. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad 6,5 - 5,2 \cdot 1,25 + 0,75 & 2. \quad 630 \frac{3}{35} : 4 \frac{2}{7} \\
 \frac{2}{3} + 1,7 - \frac{1}{6} & 3 \frac{5}{8} \cdot 16 - 13 : 5 \frac{4}{7} \\
 \frac{3}{4} \cdot 2,5 - \frac{5}{8} \cdot 1,2 & 36 : 1 \frac{2}{7} + 3 \frac{1}{2} \cdot 9 \\
 \frac{9}{3,6} - \frac{65}{1,5} + \frac{81}{1,08} & \frac{2,7 \cdot 4,2}{4,5 \cdot 3} + \frac{1,6 \cdot 1,35}{1,5 \cdot 4,5}
 \end{array}$$

457. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

$$\begin{array}{l}
 2\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2} \cdot 3 - 27 \\
 \left(\frac{4}{9} + 1\frac{5}{9}\right) \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{2} \\
 \left(2\frac{1}{4} - 1\frac{3}{8}\right) \cdot \left(5 - \frac{2}{3} \cdot 6\frac{3}{8}\right) \\
 \left(6 \cdot \frac{4}{9} - \frac{5}{12}\right) \cdot \left(\frac{2}{7} + 0,2\right) \\
 \left(4\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 0,9 - 0,3 : \frac{3}{7}\right) \cdot 3\frac{3}{4}
 \end{array}$$

458. Kirjuta järgmised suhted võimalikult väikeste täisarvude abil:

$$432:400 \quad \frac{1}{4} : \frac{2}{3} \quad 13\frac{1}{3} : 5\frac{5}{7} \quad 302\frac{1}{2} : 3\frac{7}{16}$$

459. Taanda murrud

385	399	1890
<u>1430</u>	<u>1365</u>	<u>3990</u>

460. Missugused järgmistest arvudest on algarvud: 191, 713, 1203, 1307?

461. Lahuta järgmised arvud algteguriteks: 174, 672, 826, 1430, 1896, 2184, 6930, 8800.

462. Määra järgmiste arvurühmade suurim ühistegur: 168 ja 576; 182 ja 1352; 560, 336, ja 616.

463. Määra järgmiste arvurühmade väikesim ühiskordne: 28, 36 ja 63; 10, 14, 21, 24 ja 30; 125, 400 ja 750; 2205 ja 2898.

464. Leia arvude 720, 945 ja 3969 suurim ühistegur ja väikesim ühiskordne.

465. Aednikul on lõigatud 45 ühevärvilist roosi, 60 ühevärvilist nelgiõit ja 105 spargliksa. Ülimalt mitu ühe ja sama koostisega lillekimpu saab aednik valmistada neist lilledest ja okstest?

466. Veduri eesmistate rataste läbimõõt on 54 cm, tagumiste rataste läbimõõt on 104 cm ja vagunirataste läbimõõt on 86 cm. Kui pika maa peab rong sõitma, et kõik kolm rataste liiki jõuaksid jälle samasse seisu üksteise suhtes nagu liikumise alguses?

467. Auruturbiin annab tagasi kasuliku töö näol 82% temasse soojuse näol juhitud energiast. Mitu kilogramme teeb tööd teeb turbiin, kui temasse on juhitud $3,35 \cdot 10^6$ kilokalorit soojust?

468. Äri ostab määrideõli hinnaga 72 penni kilogramm ja müüb seda hinnaga 72 penni liiter. Mitu protsenti teenib äri õli müügil, kui õli erikaal on 0,92?

469. Kaupmees ostis 75 kg seepi, makstes 44,25 marka. Kuivades kaotas seep 8% oma kaalust. Kui kallilt peab kaupmees müüma 200-grammise tüki seepi, et saada 25% kasu?

470. Kaubapakkuja saab peale 2,50-margase päeva-palga veel tasu $3\frac{1}{3}\%$ müüdüd kauba väärtusest. 36 päevaga teenis ta 326 marka. Mitme marga eest oli ta müü- nud kaupu?

471. Mitme protsendi võrra suureneb murd, kui nime- taja väheneb 25% võrra?

472. Mitme protsendi võrra väheneb 1 marga eest saadava kauba hulk, kui kauba hind tõuseb 20% võrra?

473. Kaupmees tegi ostjale hinnaalandust 12% kauba müügihinnast ja sai seejuures ikkagi kasu 5% omahin- nast. Mitu protsenti kauba ostuhinnast moodustas kauba müügihind?

474. Müües kaupa 72 penni kilogramm, saab kaup- mees 20% kasu. Mitu protsenti saab ta kasu, müües sama kaupa 75 penni kilogramm?

475. Üks arv on teisest 25% võrra väiksem. Mitme protsendi võrra on teine arv esimesest suurem?

476. Kogukonna liikmeist oli aasta alguses 53% naisi. Aasta jooksul suri 3% naistest ja 5% meestest. Mitu prot- senti kogukonna liikmeist suri aasta jooksul?

§ 51. Ülesandeid avaldiste teisendamiseks.

477. Näita otsese arendamise teel, et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] &= \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca). \end{aligned}$$

478. Näita otsese arendamise teel, et

$$\frac{1}{3}[(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3] = \\ = ab(b-a) + bc(c-b) + ca(a-c).$$

479. Olgu a ja b mingi kaks teineteisest erinevat positiivset arvu. Tõesta, et alati on

$$(a+b)^2 > 4ab.$$

480. Lahuta teguriteks järgmised polünoomid:

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| 1. $x - x^3$ | 6. $x^2 - 4x - 21$ |
| 2. $u^3 + 4u^2 + 4u$ | 7. $(a+3b)^2 - (b-3a)^2$ |
| 3. $z^2 + 11z + 28$ | 8. $m^2 - n^2 + 2n - 1$ |
| 4. $t^3 - t^2 - t + 1$ | 9. $(2a+2x)^3 - 2(a+x)$ |
| 5. $18x^3 - 2a^2x$ | 10. $3mn - 2m - 12 + 18n$ |

481. Leia iga järgneva avaldiste kolmiku suurim ühistegur ja väikesim ühiskordne:

- | | | |
|---------------------------|------------------|----------------|
| 1. $x^3 + x^2 + x + 1$ | $x^2 + 2x + 1$ | $x^2 + 1$ |
| 2. $x^3 - x^2 - x + 1$ | $5x^2 - 10x + 5$ | $3(x^2 - 1)$ |
| 3. $x^2 - 4x + 3$ | $2x^2 - 18$ | $x^2 + 3x - 4$ |
| 4. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ | $x^3 + x^2 - 2x$ | $x^2 + 2x$ |
| 5. $6x^3 + 6x$ | $10x^2 - 10$ | $4cx^3$ |

482. Missuguse suuruse võrra muutub polünoomi $1 - 5x - x^2$ väärtus arvu x muutumisel väärtuselt $a - h$ väärtusele $a + h$?

483. Põranda mõõtmed on ligikaudu 4,4 m ja 5,6 m. Kummagi mõõtme vea ülemmäär on a meetrit. Leia põranda pindala tõelise väärtuse tõkkes.

484. Telliskivi mõõtmed on sentimeetrites $25 \pm \alpha$, $12 \pm \beta$ ja $4 \pm \gamma$. Kui suur on telliskivi ruumala vea ülemmäär?

485. Näita, et avaldis

$$\frac{a+b}{ab} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) - \frac{b+c}{bc} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right)$$

ei olene arvust b .

486. Lihtsusta avaldised

$$1. \quad 1 \frac{9}{16} \left(-\frac{4m}{5n} \right)^2 \left(\frac{m}{n} \right)^4$$

$$2. \quad \frac{2}{3} \left(\frac{x}{a} \right)^2 : \left(\frac{3}{2} x^2 \right)^2$$

$$3. \quad \sqrt[3]{3c \sqrt{\frac{x}{9c^2}}}$$

$$4. \quad \frac{3}{4} \sqrt[3]{h^2 x} \cdot \frac{2}{3} h^2 \sqrt[3]{hx^2}$$

487. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$1. \quad \left(\frac{m^2-1}{m^2+1} \right)^2 + \left(\frac{2m}{m^2+1} \right)^2$$

$$2. \quad \frac{2am+m^2}{4a^2-m^2} : \left(\frac{2a}{2a-m} - 1 \right)$$

$$3. \quad \frac{3}{5x} - \frac{3}{x+y} \left(\frac{x+y}{5x} - x - y \right)$$

$$4. \quad \left(u - \frac{u-v}{1+uv} \right) : \left[1 + \frac{u(u-v)}{1+uv} \right]$$

$$5. \quad \left(a^2 q^2 - 2 + \frac{1}{a^2 q^2} \right) : 2 \left(aq - \frac{1}{aq} \right)$$

$$6. \quad \left(3 - \frac{9m-1}{m+3m^2} \right) \left(m+1 + \frac{4}{9m-3} \right)$$

$$7. \quad \left(\frac{5-3a}{4+2a} - 1 + a \right) : (a - a^2 - 2a^3)$$

$$8. \quad \left(2 - p + \frac{2p^2}{2+p} \right) : \frac{4a^2 + ap^2}{p^2x - 4x}$$

$$9. \quad \left(2 + \frac{2m^2}{2+m} - m \right) : \frac{4n^2 + n^2m^2}{m^2x - 4x}$$

$$10. \quad \frac{1}{(a+b)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{2}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

488. Näita, et avaldis $m^2 - n^2$ on avaldiste $m^2 + 2mn + n^2$ ja $m^2 - 2mn + n^2$ keskmine võrdeline.

489. Taanda murd

$$\frac{6q^2 + q - 12}{6q^2 + 11q + 3}.$$

490. Lihtsusta järgmised avaldised:

1. $\sqrt{125 + \frac{25a}{16}} \cdot \sqrt{100 - \frac{a}{4}}$

2. $\sqrt{3 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{2}}$

3. $(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} - \sqrt{x})(\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} + \sqrt{x})$

4. $(\sqrt{1-p} + \frac{1}{\sqrt{1+p}}) : (1 + \frac{1}{\sqrt{1-p^2}})$

5. $\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2}$

6. $\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{\frac{2a-2b}{a^3+a^2b}}$

§ 52. Ülesandeid võrrandite lahendamiseks.

491. Näita, et võrdust

$$(2x - 1)^2 - x = (1 - x)(1 - 4x)$$

rahuldab x -i iga väärtus.

492. Määra arv x võrdest $x : (2 + x) = \frac{3}{4} : \frac{5}{x}$.

493. Laeva kinnitamise vaia pool pikkust on maa sees, $\frac{4}{5}$ ülejäävast osast on vee sees ja 1 meetri pikkune lõpposa ulatub üle veepinna. Kui pikk on vai?

494. Missugusel hetkel kella 6 ja $6\frac{1}{2}$ vahel ajanäitaja osutid moodustavad teineteisega täisnurga?

495. Käia raadius väheneb käia kulumise tõttu, ilma et seejuures muutuks käia paksus. Käia raadiuse algsuurus on r_0 cm. Milleni väheneb käia raadius, kui pool käia on ära kulunud?

496. Ruudukujulise plekitüki nurkadest lõigatakse välja ruudud küljega 4 cm. Ülejäänud plekitüki osa murtakse kokku lahtiseks karbiks. Kui suur peab olema plekitükk, et karbi ruumala oleks 100 cm^3 ? Mitu protsenti plekist läheb kaduma karbi valmistamisel?

497. Isa ja poeg koos töötades niidavad oma talu heina 30 tunniga. Üksinda niites oleks pojalt kulunud selleks tööks 8 tundi enam kui isal. Mitme tunniga niidab kumbki kogu talu heina?

498. Elektrivoolu ahela pingeline on 220 volti. Kui suured on voolutugevus ja takistus, kui takistuse suurendamisel 11 oomi võrra voolutugevus langeb 1 ampri võrra?

499. Tilgakujuline keha langeb õhus peaaegu takistamatult. Kaevanduse šahti sügavuse määramiseks lastakse sinna langeda maapinnalt tilgakujuline tükk seatina. Kui sügav on šaht, kui tinatüki löök šahti põhja vastu tuleb kuuldavale 5,4 sekundit pärast tinatüki langetamist ja hääle levimiskiirus õhus on 340 meetrit sekundis?

500. Lahenda järgmised võrrandid tähe x suhtes:

$$1. \quad \frac{a}{x} - a = \frac{b}{2x} - \frac{1}{2} b$$

$$2. \quad x^2 + a(b + c) = (a + x)(b + x) - \frac{a^2c}{b}$$

$$3. \quad \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} = \frac{a-b}{x^2-ab}$$

$$4. \quad \frac{x}{p+q} + pqx = p + q + \frac{1}{pq}$$

501. Lahenda järgmised võrrandid tähe x suhtes:

$$1. \quad \frac{x}{h+x} + \frac{h+x}{x} = \frac{5}{2}$$

$$2. \quad \frac{1}{ax+b} + \frac{1}{ax-b} = \frac{2a}{a^2-b^2}$$

$$3. \quad \frac{x}{m-n} + \frac{m-n}{x} = \frac{m^2-1}{m}$$

$$4. \quad \frac{px+q}{px-q} - \frac{px-q}{px+q} = \frac{4pq}{p^2-q^2}$$

502. Näita, et võrrandi

$$ax^2 - ax + c = 0$$

lahendite summa on olenemata a väärtusest alati 1.

503. Koosta ruutvõrrand, mille lahenditeks on $2 + \sqrt{3}$ ja $2 - \sqrt{3}$.

504. Koosta ruutvõrrand, mille lahenditeks on võrrandi $x^2 - x - 2 = 0$ lahendite ruudud.

505. Määra kordaja q nõnda, et võrrandi

$$x^2 - 12x + q = 0$$

üks lahend oleks teise lahendi ruut.

506. Olgu teada, et võrrandi

$$x^2 - px + q = 0$$

lahenditeks on kaks järjestikust täisarvu. Näita, et sel korral

$$p^2 = 4q + 1.$$

507. Kui pikk peab olema kuubi serv, et kuubi pindala ja ruumala mõõtavad oleksid võrdsed?

508. Avalda ringi pindala läbimõõdu funktsioonina ja läbimõõd pindala funktsioonina.

509. Avalda kera ruumala kera läbimõõdu funktsioonina ja läbimõõt ruumala funktsioonina.

510. Lahenda järgmised võrrandid:

$$1. \sqrt{4x+5} \cdot \sqrt{7x+1} = 30$$

$$2. x - 2\sqrt{x+6} = 2$$

$$3. 10(8 - \sqrt{2x}) = x + 2$$

$$4. \sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x} = \frac{21}{\sqrt{2x+1}}$$

511. Lahenda iga järgmine valem nurksulgudes seisva tähe suhtes:

$$1. V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad [r] \quad 5. \frac{1}{u} = \frac{1}{v} + \frac{1}{w} \quad [v]$$

$$2. S = 2\pi r(r+h) \quad [h] \quad 6. y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad [x]$$

$$3. S = \pi(R^2 - r^2) \quad [R] \quad 7. t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad [l]$$

$$4. a = (k-h)^2 \quad [h] \quad 8. S = 2(ab + bc + ac) \quad [c]$$

512. Kui suur on vooluallika pinge ja sisetakistus, kui voolu tugevus on 20-oomise välistakistuse puhul 4 amprit ja 75-oomise välistakistuse puhul 2 amprit?

513. Rong vajab a minutit, et mööduda semaforist, ja b minutit, et läbida c meetri pikkune tunnel. Mitu kilomeetrit sõidab rong tunnis ja kui pikk on rong?

514. Õpilaste ekskursiooniks oli palgatud autobus 54 marga eest. Kaasa sõitis nelja õpilase võrra rohkem kui esialgu arvati. Seetõttu tuli igal õpilasel maksta 15 penni võrra vähem, kui ette arvestati. Mitu õpilast võttis ekskursioonist osa?

515. Kaks koormist tasakaalustuvad kangil, kui nende kaugused toest on 80 ja 70 cm. Kui kumbagi koormist suurendada 4 kg võrra, siis tasakaalustuvad nad, asetstes 160 ja 150 cm kaugusel toest. Kui suured on koormised?

516. Täisnurkse kolmnurga külgede pikkused moodustavad aritmeetilise rea. Kolmnurga pindala on 294 cm^2 . Kui pikad on kolmnurga küljed?

517. Kahe arvu suhe on $\frac{9}{4}$; nende arvude keskmine võrdeline on 600. Kui suured on arvud?

518. Kella osutite tippude vahe on kella 6 ajal 12,6 cm, kella 9 ajal aga 9,0 cm. Kui pikad on osutid?

519. Lahenda järgmised võrrandsüsteemid:

$$1. \begin{cases} x + y = 100 \\ xy = 2491 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 24 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x = 3y \\ 2x^2 - 3y^2 = 24 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} y^2 + x - 11 = 0 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x^2 - a^2y^2 = b \\ bx^2 + a^2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x^2 - 2xy = 0 \\ 7x + y = 30 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x + y = 3a + b \\ x^2 - y^2 = 4ab \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} xy = 2 \\ x(1 + y^2) = 6 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 5x^2 + 2y^2 = 22 \\ 3x^2 - 5y^2 = 7 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} xy = p \\ x : y = q \end{cases}$$

§ 53. Ülesandeid ridadest.

520. Aritmeetilises reas on $a_m = M$, $a_n = N$. Leia rea vahe.

521. Geomeetrilises reas on $a_m = M$, $a_n = N$. Leia rea tegur.

522. Kui suur on rea $\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \frac{n-3}{n}, \dots$ esimese n liikme summa?

523. Mitu liiget peab võtma reas 1, -3 , 5, -7 , 9, \dots , et saada summat 421?

524. Moodustagu arvud a , b , c ja d aritmeetilise rea. Näita, et siis $(a-d)^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2$.

525. Aritmeetilises reas on $a_3 + a_8 = 17$ ning $a_{13} + a_{20} = 83$. Leia rea esimene liige ja rea vahe.

526. Näita, et arvud a^2 , b^2 ja c^2 moodustavad aritmeetilise rea, kui arvud $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$ ja $\frac{1}{b+c}$ moodustavad aritmeetilise rea.

527. Arvud x , y ja z moodustavad aritmeetilise rea ning y , z ja x moodustavad geomeetrilise rea. Avalda y ja z arvu x -i funktsioonidena ning anna kummagi rea esimesed 5 liiget.

528. Geomeetrilise rea esimese kahe liikme summa on 28, järgmise kahe liikme summa on 252. Leia rea esimesed viis liiget.

529. Kumera hulknurga sisenurkade suurused moodustavad aritmeetilise rea, mille väikesim liige on 120° ja rea vahe on 5° . Mitu tippu on hulknurgal?

530. Nii aritmeetilise kui geomeetrilise rea esimene liige on 4, ridade teised liikmed on ka võrdsed ning aritmeetilise ja geomeetrilise rea kolmandate liikmete jagatis on $\frac{16}{25}$. Leia mõlema rea esimesed neli liiget.

531. Rea esimene liige on 20 ja iga järgnev liige on 5% võrra väiksem eelnevast. Millele läheneb rea summa liikmete arvu lõpmatul kasvamisel?

532. Millele läheneb rea

$$1 - x^2, \quad x - x^3, \quad x^2 - x^4, \dots$$

summa liikmete arvu lõpmatul kasvamisel, kui $|x| < 1$?

533. Kui suur on summa

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots?$$

534. Olgu teada, et lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea esimene liige on 1 ja rea summa asetseb tőkete 2 ja 3 vahel. Missuguste tőkete vahel asetseb rea tegur?

535. Teisenda harilikeks murdudeks perioodilised kümnendmurrud $0,65353\dots$, $0,359090\dots$ ja $4,00707\dots$

536. Lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea iga liige võrdub temale järgnevate liikmete summa 10-kordsega. Leia rea esimene liige ja tegur.

537. Arenda arv 1,2 lõpmatult kahanevaks geomeetriliseks reaks, mille tegur on võrdne esimese liikme ruuduga.

538. Lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea iga kahe järjestikuse liikme vahele paigutatakse uus liige nii, et tekib lõpmatult kahanev geomeetriline rida, mille summa on esialgse rea summa poolteisekordne. Kui suur on esialgse rea tegur?

§ 54. Ülesandeid planimeetriast ja stereomeetriast.

539. Punktid A ja B asetsevad ühel ja samal pool sirget MN . Kuidas leida sirgel MN punkt P nii, et $\widehat{APM} = \widehat{BPN}$? Vali sirgel MN veel mingi punkt Q ja näita, et alati $AP + PB < AQ + QB$.

540. Seespool kolmnurka ABC on võetud punkt O . Näita, et $\widehat{BOC} > \widehat{BAC}$.

541. Ringi kõõlud AB ja CD lõikuvad punktis P nii, et $AP = CP$. Näita, et $AB = CD$ ja et nelinurk $ACBD$ on võrdhaarne trapets.

542. Rööpküliku $ABCD$ külje AB keskpunkt E on ühendatud tipuga C . Lõik CE on pikendatud lõikumiseni külje AD pikendusega punktis F . Näita, et $AF = AD$.

543. Rööpküliku $ABCD$ diagonaalil AC on võetud punktid P ja Q nii, et $AP = CQ$. Näita, et nelinurk $BPDQ$ on rööpkülik.

544. Kolmnurga ABC nurga A poolitaja ja nurga B kõrvunurga poolitaja lõikuvad punktis D . Näita, et teravnurk D võrdub nurga C poolega.

545. Kolmnurga ABC kõrgused AD ja BE lõikuvad punktis O , ja $AO = BO$. Näita, et see kolmnurk on võrdhaarne ja et $OD = OE$.

546. Ringjoonele, mille keskpunkt on O , on joonestatud kaks paralleelset puutujat ja kolmas puutuja, mis lõikab neid kaht punktides A ja B . Näita, et nurk AOB on täisnurk.

547. Kui suur on korrapärase 12-nurga sisenurk?

548. Missuguse korrapärase hulknurga sisnurk on 162° ?
549. Mitu diagonaali on n -nurgal?
550. Missugusel hulknurgal on 44 diagonaali?
551. Mitu tippu on hulknurgal, millel on 170 diagonaali?
552. Tasapinnale on joonestatud hulk sirgeid, milles ei leidu paralleelseid sirgeid. Lõikepunktide loendamisel leiti neid 120. Mitu sirget on joonestatud?
553. Võrdkülgse kolmnurga ABC külge BC on pikendatud oma pikkuse võrra punktini D . Näita, et lõigule AD ehitatud ruudu pindala on kolm korda suurem kolmnurga ABC küljele ehitatud ruudu pindalast.
554. Kolmnurga ABC kõrgused BH ja CG lõikuvad punktis F . Näita, et $BF : CF = FG : FH$ ja et $AG : AH = AB : AC$.
555. Ringisse joonestatud kolmnurga ABC nurga A poolitaja lõikab külge BC punktis M ja ringjoont punktis N . Näita, et $AB : AN = AM : AC$.
556. Ringisse on joonestatud kolmnurk ABC . Lõik AH on kolmnurga kõrgus ja AK ringi läbimõõt. Näita, et $AB : AK = AH : AC$ ja et $BH : AH = KC : AC$.
557. Ringisse on joonestatud nelinurk $ABCD$. Nelinurga külgede AB ja CD pikendused lõikuvad punktis K . Näita, et $KA : KD = CA : BD$.
558. Kolmnurga ABC küljed on poolitatud punktidega P , Q , R . Mitu korda on kolmnurga ABC pindala suurem kolmnurga PQR pindalast?

559. Trapetsi $ABCD$ aluste AB ja CD suhe on m . Trapetsi diagonaalid lõikuvad punktis O . Kuidas suhtuvad kolmnurkade OAD ja OCD pindalad?

560. Täisnurkse trapetsi pikem haar ja pikem alus on võrdsed. Trapetsi kõrgus on 2 cm ja pindala 4 cm². Leia trapetsi pikem haar.

561. Täisnurkse trapetsi alus on 10 cm. Selle aluse juures olev nurk on 45°. Trapetsi pindala on 42 cm². Leia trapetsi kõrgus.

562. Tõesta, et kolmnurga mediaan jaotab kolmnurga kaheks pindvõrdseks kolmnurgaks.

563. Kolmnurga ABC külje BC mediaanil AD on võetud punkt E . Näita, et kolmnurgad ABE ja ACE on pindvõrdsed.

564. Kolmnurga ABC küljel BC on võetud punkt D . Lõigu AD keskpunkt on E . Näita, et kolmnurga BCE pindala on pool kolmnurga ABC pindalast.

565. Tõesta, et ringjoon, mille läbimõõduks on kolmnurga külg, läbib teistele külgedele joonestatud kõrguste aluspunktid.

566. Kolme ringi raadiused suhtuvad nagu 12 : 10 : 3. Kuidas suhtuvad nende ringide pindalad?

567. Mitme protsendi võrra suureneb ringi pindala, kui ringi raadius suureneb 2% võrra?

568. Mitme protsendi võrra peab vähendama kera raadiust, et kera ruumala väheneks 3% võrra?

569. Mitme protsendi võrra suureneb silindri külgpindala silindri raadiuse suurenemisel 6% võrra?

570. Täisnurkse kolmnurga teravnurga poolitaja jaotab kolmnurga pindala 9 cm^2 ja 15 cm^2 suurusteks osadeks. Leia kolmnurga küljed.

571. Täisnurkse kolmnurga kaatetite pikkused on 10 cm ja 24 cm . Leia lähemal kaatetil punkt, mis asetseb võrdseil kaugusel teisest kaatetist ja hüpotenuusist.

572. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud mediaan on 5 m , üks kaatet on 6 m . Leia hüpotenuusile joonestatud kõrgus.

573. Kahe risttahukakujulise raudplekist veeanuma mõõtmed on 3 m , 4 m ja 2 m ning 5 m , 4 m ja 1 m . Näita, et neist kahest anumast kulub vähem plekki selle valmistamiseks, mille ruumala on suurem.

574. Kahest kujult sarnasest toast on ühe ruumala 2 korda suurem teise omast. Mitme protsendi võrra on suurema toa tapeetimine kallim teise omast?

575. On antud kuup servaga a . Tasapindadega, milledest igaüks läbib kolme ühest tipust lähtuva serva keskpunktid, lõigatakse ära kõik kuubi tipud. Kui suur on tekkinud keha täispindala ja ruumala?

576. Korrapärase neljatahulise püramiidi kõrgus on h ja täispindala S . Määra põhjaserva pikkus. Kas ülesande lahendamine on võimalik igasuguste andmete puhul?

577. Ristkülik, mille pindala on $S \text{ cm}^2$, pöörleb üks kord ühe, teine kord teise külje ümber. Tekkinud kehade ruumaladest on üks k korda suurem kui teine. Määra ristküliku küljed.

578. 7 m traati läbimõõduga $2,6 \text{ mm}$ kaalub $0,295 \text{ kg}$. Leia traadi aine erikaal.

579. Kui suured on hektoliitri-suuruse silindri mõõtmised, kui silindri telglõikeks on ruut?

580. On antud võrdsete kõrgustega ja võrdsete põhja pindaladega silinder ja korrapärase neljatahuline prisma. Leia, kumma keha külgpindala on suurem. Kuidas suhtuvad nende kehade pindalad?

581. On antud võrdsete kõrgustega ja võrdsete põhja übermõõtudega silinder ja korrapärase neljatahuline prisma. Leia, kumma keha ruumala on suurem. Kuidas suhtuvad nende kehade ruumalad?

582. Mitu protsenti rauda läheb vähemalt kaotsi ruudukujulise ristlõikega raudlati treimisel silindrikujuliseks?

583. Kui suur on poolkerakujulise katla läbimõõt, kui katla ruumala on 100 (± 2) liitrit? Anna vastus andmetekohase täpsusega.

584. Ristkülikukujulist plekitükki saab painutada silindri külgpinnaks kahel viisil: nii, et silindri külgpinna moodustajaks on ristküliku pikem külg, ja nii, et selleks on ristküliku lühem külg. Kummal viisil painutatud pinnatükk ühes kaane ja põhjaga piirab suuremat ruumala?

585. Mitu korda n ühesuguse kera kogupindala on suurem kui selle kera pindala, mille ruumala võrdub eelmise n kera ruumalade summaga?

586. Mitu protsenti kuubi ruumalast täidab kuubisse kujutatud kera?

587. Mitu protsenti kera ruumalast täidab kerasse kujutatud kuup?

588. Mitu protsenti kuubi pindalast moodustab kuubiga ruumvõrdse kera pindala?

589. Mitu protsenti kera ruumalast moodustab keraga pindvõrdse kuubi ruumala?

590. Silindrikujuline metallitükk, mille kõrgus ja põhja läbimõõt on võrdsed, valatakse keraks. Mitme protsendi võrra väheneb metallitüki pindala?

§ 55. Ülesandeid trigonomeetriast.

591. Lihtsusta järgmised avaldised:

<p>1. $\tan a \cdot \cos a$ $\tan a : \sin a$ $\cos^2 a \cdot (1 + \tan^2 a)$ $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$</p>	<p>2. $\sqrt{1 - \sin a \cdot \cos a \cdot \cot a}$ $\sin a \cdot \sqrt{1 + \cot^2 a}$ $\sin a \cdot \cos a \cdot (\tan a + \cot a)$ $\frac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\cot^2 \alpha}$</p>
--	---

592. Leia teravnurgad, mille funktsioonid rahuldavad järgmisi võrrandeid:

<p>1. $\tan a = 3 \sin a$ 2. $\cos \beta = \sin^2 \beta$ 3. $\tan \gamma + \cot \gamma = \frac{10}{\cos \gamma}$</p>	<p>4. $\sin^2 \varphi + 4 \cos^2 \varphi = 2$ 5. $\tan \psi - \cot \psi = 3$ 6. $\tan \omega + 2 \cot \omega = \frac{2}{\sin \omega}$</p>
---	--

593. Leia vahemikus 0° kuni 360° nurgad, mille funktsioonid rahuldavad järgmisi võrrandeid:

<p>1. $\sin^2 a = 0,2 \sin a$ 2. $\tan \beta : \cot \beta = 4$ 3. $3 \sin \gamma = 2 : \sin \gamma$</p>	<p>4. $3 \sin^2 \varphi - 4 \cos^2 \varphi = 1$ 5. $\sin^2 \psi + \cos \psi = 0$ 6. $\tan \omega - \cot \omega = 1 \frac{1}{2}$</p>
--	--

594. Kolmnurgas ABC on teada kõrgus h_a ning nurkad β ja γ . Leia nurk α , küljed a , b ja c ning pindala S .

Näide. $h_a = 148,2$ m, $\beta = 68^\circ 26'$, $\gamma = 75^\circ 08'$.
 Leia eespool-nimetatud suurused.

595. Ringi raadius on 25 cm. Ühest ringjoone punktist on joonestatud kaks kõõlu, mille pikkused on 28 ja 42 cm. Missuguse nurga need kõõlud moodustavad teineteisega? Mitu vastust on ülesandel?

596. Punktist O on joonestatud lõigud $OA = 5$ cm, $OB = 10$ cm ja $OC = 15$ cm nii, et $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = 60^\circ$. Kui suur on nurk ABC ?

597. On antud ringjoon raadiusega r . Väljaspool ringjoont asetsevast punktist on ringjoonele joonestatud kaks puutujat. Puutujate vaheline nurk on α . Anna valem puutujatest ja nende vahelisest kaarest piiratud kujundi pindala arvutamiseks.

598. Torn otsas, mille kõrgus on 50,2 m, asetseb 2,8 meetri kõrgune rist. Kui suures nurgas on rist näha maapinnalt 63,7 m kaugusel tornist?

599. Kõõl jaotab ringi ümbermõõdu kahte ossa, mis suhtuvad nagu 3 : 7. Kuidas suhtuvad kõõlule kui alusele toetuvate segmentide pindalad?

600. Jõe sirgjoonelise osa laiuse määramiseks võetakse jõe kaldal kaks punkti A ja B ; olgu nende vaheline kaugus k . Punktidest A ja B viseeritakse mingi kolmas punkt C jõe teisel kaldal ja mõõdetakse nurgad $CAB = \alpha$ ja $CBA = \beta$. Anna valem jõe laiuse arvutamiseks.

Näide. $k = 340$ m, $\alpha = 46^\circ 24'$, $\beta = 78^\circ 18'$. Arvuta jõe laius.

601. Mäeharjal asetseb torn, mille kõrgus on 53 m. Orust vaadates on torni tipu kõrgusnurk $22^{\circ} 38'$ ja torni aluse kõrgusnurk $13^{\circ} 58'$. Kui palju asetseb mäehari kõrgemal vaatluskohast?

602. Vaatetorn asetseb k m kaugusel jõest. Tornitipu kõrgus üle veepinna on h m. Vaadates torni tipust on jõe laius näha nurgas ω . Kui lai on jõgi?

603. Nelinurgas $ABCD$ on antud külged $AB = a$ ja nurgad $BAD = \alpha$, $ABD = \beta$, $BCD = \gamma$ ja $BDC = \delta$. Avalda külge BC .

Arvuta külge BC , kui $a = 4$ km, $\alpha = 59^{\circ} 32'$, $\beta = 73^{\circ} 14'$, $\gamma = 52^{\circ} 48'$ ja $\delta = 84^{\circ} 48'$.

604. Kahe ligipääsematu punkti C ja D vahelise kauguse leidmiseks mõõdeti baas $AB = c$ ja nurgad $CAB = \alpha$, $DAB = \beta$, $CBA = \gamma$ ja $DBA = \delta$. Näita, kuidas neist andmeist leida kaugus CD .

605. Leia ringi sektorisse sissejoonestatud ringi raadius teades, et sektori raadius on r ja sektori nurk on α .

606. Peegli ees asetsevate punktide A ja B kaugus teineteisest on 45 cm. Punkti A kaugus peeglist on 12 cm ja punkti B kaugus peeglist on 20 cm. Missuguse nurga moodustab peegli punktist A lähtuv kiir, mis peale peegeldumist läbib punkti B ?

607. Risttahuka mõõtmed on 12 cm, 8 cm ja 6 cm. Leia nurgad, mis risttahuka diagonaal moodustab tahkudega, ja nurgad, mis diagonaalid moodustavad üksteisega.

608. Maakaardi järgi on teatava metsatüki suurus 1 ha, kui eeldada, et maapind on tasane ja rõhtne. Kui palju on tegelikult metsa rohkem, kui maapind on kallak, moodustades rõhtsa tasapinnaga 10° -se nurga?

609. Puukuuri, mille vundamendi mõõtmed on 8 m ja 3 m, tahetakse katta katusega, mille kaldenurk rõhttasapinna suhtes on 40° . Kui suur tuleb katuse pindala ilma räastata?

610. Maja sissekäigu kohale on ehitatud rõhtne ristkülikukujuline vihmavarjend, mille laius on 1,4 m ja mille kõrgus üle maapinna on 2,5 m. Tuul puhub otse vastu ust ja vihmapiisad langevad kaldu, moodustades püstsüunaga nurga 16° . Kui laia maariba maja esisel varjend kaitseb vihma eest?

611. Korrapärase kolmetahulise püramiidi põhiserv on 5 m ja kõrgus 7 m. Leia püramiidi ruumala ning külgtahkude ja külgservade kaldenurgad põhja suhtes.

612. Korrapärase kolmetahulise püramiidi külgpindala on 2 korda suurem põhja pindalast. Missuguse nurga moodustab külgtahk põhjaga?

613. Koonuse külgpindala on S ; koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk on α . Kui suur on koonuse ruumala?

614. Koonuse ruumala on $1,47 \text{ m}^3$. Koonuse telglõike tipunurk on $53^\circ 08'$. Leia koonuse põhja pindala.

615. Koonusesse kujutatud kera pindala on võrdne koonuse põhja pindalaga. Kui suur on koonuse telglõike tipunurk?

616. Koonuse telglõike tipunurk on α ; koonuse ümber joonestatud kera raadius on R . Avalda koonuse ruumala.

617. Kerasse, mille ruumala on 1 dm^3 , on kujutatud koonus. Koonuse telglõike tipunurk on $46^\circ 27'$. Leia koonuse külgpindala ja ruumala.

618. Koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk on α ; koonus on ruumvõrdne keraga, mille raadius on r . Leia koonuse raadius.

619. Täisnurkne kolmnurk ABC , mille teravnurk $BAC = \alpha$ ja pindala on S , pöörleb ümber kaateti AC . Leia tekkinud pöördkeha külgpindala ja ruumala.

620. Kolmnurk ABC , mille külg $AC = 12$ cm, nurk $BAC = 29^\circ$ ja pindala on 45 cm², pöörleb ümber külje AB . Leia tekkinud pöördkeha ruumala.

621. Romb, mille üks nurk on α ja külg on a , pöörleb ümber ühe külje. Leia tekkiva pöördkeha ruumala.

§ 56. Ülesandeid analüütilisest geomeetriast.

622. Olgu antud punkt $P \equiv (a | b)$. Kuidas avalduvad punkti P koordinaadid, kui kujutamisühikut x -teljel vähendada m korda ja y -teljel suurendada n korda?

623. Anna nende kahe sirge võrrandid, mis läbivad punkti $(-4 | 2)$ ja on rööbiti vastavalt x -teljega ja y -teljega.

624. Leia punkte $A \equiv (1 | 3)$ ja $B \equiv (5 | 6)$ läbiva sirge tõusunurga siinus ja koosinus.

625. Lõigu üks otspunkt on $A \equiv (-1 | -1)$, teine $B \equiv (3 | 2)$. Lõiku pikendatakse alates punktist B 2 ühiku võrra punktini C . Määra punkti C koordinaadid.

626. Missugune punkt sirgel $y = 2x$ on võrdseil kaugusel punktidest $(1 | 3)$ ja $(3 | 1)$?

627. Kolmnurga üks tipp on $A \equiv (1 | 1)$, teine tipp $B \equiv (4 | -2)$. Kolmas tipp C liigub mööda sirget $3x + 5y = 25$. Missugusesse punkti peab tipp C jõudma, et kolmnurga küljed AC ja BC saaksid võrdseteks?

628. On antud punktid

$A \equiv (2 | 2)$, $B \equiv (3 | 6)$, $C \equiv (5 | -1)$ ja $D \equiv (4 | -5)$.

Näita, et kujund $ABCD$ on rööpkülik.

629. Avalda sirge algabstsiss sirge algordinaadi b ja tõusunurga μ abil.

630. Sirge lõikab telgedel positiivselt suunatud lõigud, läbib punkti $(4 | 2)$ ja koos telgedega moodustab kolmnurga, mille pindala on 16. Leia selle sirge võrrand.

631. Läbi punkti $(1 | 2)$ on tõmmatud sirge, mis tekitab telgedel lõigud ξ ja η . Avalda teine telglõik esimese funktsioonina.

632. Sirge ja temale koordinaatide algusest tõmmatud ristsirge lõikuvad punktis $N \equiv (a | b)$. Leia sirge võrrand.

633. On antud kolm punkti:

$A \equiv (-4 | 1)$, $B \equiv (0 | 5)$ ja $C \equiv (-2 | -1)$.

Näita, et punkt A asetseb ringjoonel, mis on kujutatud lõigul BC kui diameetril.

634. On antud punktid $O = (0 | 0)$ ja $D \equiv (a | b)$. Punkt P liigub tasapinnas nõnda, et suurus $OP^2 + DP^2$ jääb võrdseks summaga $a^2 + b^2$. Anna punkti P joonestatud kõvera võrrand. Otsusta saadud võrrandi järgi, mis-suguse joone joonestab punkt P .

635. Punkti $C \equiv (2 | 6)$ ümber on kujutatud ringjoon raadiusega 5. Missugune punkt sel ringjoonel on sirgele $3x + 4y = 101$ lähim?

636. Anna ringjoone võrrand, teades, et tema keskpunkt on $C \equiv (-3 | 4)$ ja ta puudutab sirget

$$3x + 8y - 6 = 0.$$

637. Kolmnurga ABC tipud A ja B asetsevad punktides $(-2 | 0)$ ja $(2 | 0)$. Tipp C liigub tasapinnal nii, et kolmnurga pindala on jäävalt 20 pindalaühikut. Missuguse joone joonestab tipp C ? Anna selle joone võrrand.

638. Kolmnurga ABC tipud A ja B asetsevad punktides $(-1 | 0)$ ja $(1 | 0)$. Tipp C liigub tasapinnal nii, et kolmnurga ümbermõõt on jäävalt 8 pikkusühikut. Missuguse joone joonestab tipp C ? Anna selle joone võrrand.

639. Maa orbiidi ekstsentrilisus on $\approx 0,02$. Näita, et soojusehulgad, mis Maa Päikeselt saab kohtades, kus Maa on Päikesest kõige kaugemal ja Päikesele kõige lähemal, suhtuvad ligikaudu nagu 12 : 13.

640. Kahe kolmnurga alused a ja b asetsevad vastavalt x - ja y -teljel. Kolmnurkadel on ühine tipp P . Punkt P liigub tasapinnas nõnda, et kolmnurkade pindalade summa s jääb muutumatuks. Anna selle joone võrrand, mille joonestab punkt P .

641. Silindrilise veeklaasi seesmine läbimõõt on 6 cm ja seesmine kõrgus 9 cm. Klaas on kallutatud nii, et klaasis oleva vee pind puudutab põhja ringjoont ja klaasi ülemist serva. Missugune kuju on veepinna piirjoonel? Joonesta see joon tõelises suuruses.

642. Lahenda graafiliselt järgmised võrrand-süsteemid:

$$1. \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ 4y - x^2 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ 4x^2 + 49y^2 = 196 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} xy = 12 \\ y = x^2 - 10 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} xy = 16 \\ x^2 = y - 2 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ 2xy - 1 = 0 \end{cases}$$

643. Kujutagu võrrandid

$$y = mx + n \quad \text{ja} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

üht ja sedasama sirget. Avalda m ja n arvude a ja b kaudu.

644. Määra sirgete

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

lõikepunkt.

645. On antud paraboolid $x^2 = 8y$ ja $x^2 = 4 - 6y$. Määra nende paraboolide lõikepunktid ja neis punktides paraboolidele joonestatud puutujate võrrandid. Kui suur on nende puutujate vaheline nurk kummaski lõikepunktis?

646. Ring $x^2 + y^2 = 16$ ja parabool $x^2 = 9y$ lõikuvad. Kui pikad on ringi kaared lõikepunktide vahel?

647. Missugust tingimust peavad täitma kordajad m , n ja p , et sirge $y = mx + n$ puudutaks parabooli $x^2 = 2py$?

648. Sirged

$$y = 2x + 1, \quad y = 2x + 3 \quad \text{ja} \quad y = 2x - 1$$

lõikuvad parabooliga $y = 4x^2$. Näita, et kolme tekkiva kõõlu keskpunktid asetsevad ühel ja samal sirgel.

649. Olgu $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2 | y_2)$. Missugust tingimust peavad rahuldama need kaks paari koordinaate, et lõik P_1P_2 paistaks koordinaatide algusest nurgas 90° ?

650. Kolmnurga tipud on $(4 | 6)$, $(-8 | -2)$ ja $(0 | 10)$. Näita, et kolmnurk on võrdhaarne. Leia aluse keskpunkt ja arvuta alusele joonestatud kõrguse pikkus.

651. Koosta selle sirge võrrand, mis läbib sirgete

$$3x - 4y + 1 = 0 \quad \text{ja} \quad 5x + y - 1 = 0$$

lõikepunkti ja lõikab koordinaatide telgedelt võrdsed positiivselt suunatud lõigud.

652. Sirge läbib punkti $(9 | 4)$ ja on rööbiti lõiguga, mille otspunktid on $(8 | 6)$ ja $(-10 | 0)$. Missuguses punktis sirge lõikab abstsissitelge?

653. Kolmnurga külgsirged on $4x + 3y = 48$, $x + 2y = 12$ ja $6x - 8y = -14$. Näita, et kolmnurk on täisnurkne. Kui suur on hüpotenuusi tõusunurk?

654. Ristküliku ühe külje otspunktid asetsevad sirge $2x - y - 6 = 0$ lõikepunktides koordinaatide telgedega. Leia teiste külgsirgete võrrandid ja tippude koordinaadid, kui on teada, et kolmanda tipu abstsiss on 0.

655. Ringjoone $x^2 + 12x + y^2 - 8x + 36 = 0$ püstlõhimõõdu väiksema ordinaadiga otspunkt võetakse uue ringjoone keskpunktiks. See ringjoon läbib antud ringjoone keskpunkti. Leia uue ringjoone võrrand.

656. Kui kaugel on ellipsi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ punkt $(3 | 3,2)$ kummastki fookusest?

657. Ringjoon $x^2 + y^2 = 144$ projektitakse paralleelsete kiirtega tasapinnale, mis ringjoone tasapinnaga moodustab 45° -se nurga ja on risti kiirtega. Kirjuta ringjoone projektsiooni võrrand. Näita, et see projektsioon on ellips ja arvuta viimase ekstsentrisus.

658. Leia, kus lõikub sirge $4x + 5y = 560$ ellipsiga, mille sümmeetriateljed on x - ja y -telg, mille ekstsentrisus on $0,6$ ja pooltelgede vahe on 20 .

659. Termomeetri kontrollimisel selgus, et ta jää sulamisel näitab 1° ja vee keemisel 96° . Toas näitab termomeeter 20° . Kui kõrge on tõeliselt toa temperatuur?

660. Korrapärase viisnurga keskpunkt asetseb koordinaatide alguses ja üks tipp asetseb punktis $(1 | 0)$. Leia viisnurga teiste tippude koordinaadid, kasutades nurga-funktsioonide tabeleid.

661. On antud punktid $A \equiv (-3 | -1)$ ja $B \equiv (0 | 1)$. Lõik AB pikendatakse punktini C nii, et $BC = 3AB$. Määra punkti C koordinaadid.

662. Rööpküliliku kolm tippu on $A \equiv (-10 | 7)$, $B \equiv (5 | -13)$ ja $C \equiv (14 | 17)$. Määra rööpküliliku neljas tipp D , teades, et see asetseb tipu B vastas.

663. Leia kolmnurga tipud, teades, et tema külgede keskpunktid on $(3 | -2)$, $(1 | 6)$ ja $(-4 | 2)$.

664. On antud ring keskpunktiga $C \equiv (-4 | 2)$ ja raadiusega 5 . Kui pikk on ringi kõõl, mille keskpunkt on $M \equiv (-2 | 1)$?

665. Näita, et kolmnurk tippudega $A \equiv (0 | 0)$, $B \equiv (3 | 1)$ ja $C \equiv (1 | 7)$ on täisnurkne.

666. On antud kaks punkti $A \equiv (-3 | 1)$ ja $B \equiv (3 | -7)$. Leia ordinaatteljel niisugune punkt P , millest lõik AB paistab täisnurgas.

667. Missuguse nurga peab valguskiir moodustama x -teljega, et ta, tulles punktist $A \equiv (5 | 2)$, peale peegeldumist x -teljel läbiks punkti $B \equiv (-1 | 4)$?

668. Valguskiir on suunatud mööda sirget $y = \frac{2}{3}x - 4$. Anna sirge võrrand, mida mööda kiir peegeldub abstsissiteljelt.

669. Näita, et punktid $A \equiv (-2 | -2)$, $B \equiv (3 | 1)$, $C \equiv (7 | 7)$ ja $D \equiv (3 | 1)$ on trapetsi tippudeks. Leia trapetsi kesksirge võrrand.

670. Kolmnurga tipud on $A \equiv (2 | -2)$, $B \equiv (8 | 10)$ ja $C \equiv (-3 | 5)$. Leia sirge, mis läbib tipu C

1. rööbiti küljega AB ;
2. risti küljega AB .

671. Aine osake liigub tungi mõjul mööda ringjoont, mille võrrand on $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 25$. Hetkel, mil osake on jõudnud punkti $(2 | 1)$, lakkab tung mõjumast. Anna joone võrrand, mida mööda toimub edaspidine tungivaba liikumine.

672. Kolmnurgal ABC on muutumatu alus AC pikkusega 24 cm. Tipp B liigub kolmnurga tasapinnas nii, et kolmnurga ümbermõõt on jäävalt 50 cm. Missuguse joone joonestab punkt B ?

673. Ellips, mille fookused on $(\sqrt{3} | 0)$ ja $(-\sqrt{3} | 0)$, läbib punkti $(2 | 1)$. Anna ellipsi võrrand.

674. Maakera meridiaanil on ellipsi kuju, mille telgede suhe on 299 : 300. Kui suur on selle ellipsi ekstsentrilisus?

675. Kolmnurga kaks tippu on $A = (0 | 0)$ ja $B = (a | 0)$. Kolmas tipp P liigub tasapinnas APB nõnda, et külje AB lähisnurkade tangensite summa jääb konstantseks. Näita, et tipp P joonestab parabooli, mis läbib tipud A ja B .

676. Määra suhe, milles sirge $y = 3x + 9$ jaotab punktide $A \equiv (0 | 48)$ ja $B \equiv (36 | 0)$ vahelise lõigu.

§ 57. Ülesandeid suuruste olenevusest.

677. Inimese silmatera läbimõõt võib muutuda 2 millimeetrist 9 millimeetrit. Mitu korda ületab võrkkeele langev suurim valgushulk samades välistingimustes võrkkeele langeva väikesima valgushulga?

678. Masina mudeli kõrgus on 40 cm. Masin tahtakse valmistada mudeli sarnane, kõrgusega 2,4 m. Mitu korda tuleb masin mudelist raskem, kui mõlema vastavad osad on tehtud samast materjalist?

679. Liikuvale kehale avaldab õhk takistust, mis on võrdeline liikumise kiiruse ruuduga (õhu suhtes). Vaikse ilmaga ületab jalgrattur, kelle kiirus on $12 \frac{\text{km}}{\text{t}}$ õhutakistust, mille suurus on 360 g. Kui suur õhutakistus tuleb ületada jalgratturil, kui ta vaikse ilmaga sõidab kiirusega $16 \frac{\text{km}}{\text{t}}$? Kui suure õhutakistuse peab jalgrattur ületama, kui ta sõidab maapinna suhtes kiirusega $12 \frac{\text{km}}{\text{t}}$ vastu tuult, mille kiirus on $5 \frac{\text{m}}{\text{sek}}$?

680. Veevarustuse magistraalitorus tehtud mõõtmised näitasid 372 m kaugusel rõhupaagist rõhku 2,4 atmosfääri ja 1476 m kaugusel rõhku 1,8 atmosfääri. Oletades, et rõhk muutub kaugusega ühtlaselt, anna rõhu muutumist valitsev seadus.

681. Üle ploki O on pandud nöör, mille pikkus on l cm. Nööri otstel ripuvad koormised B ja C . Ühe koormise tõustes langeb teine. Olgu $OC = x$ cm, ja koormiste B ja C kõrgusvahe y cm. Avalda arv y arvu x funktsioonina. Missugusse liiki kuulub x - y -olenevus?

682. Kuidas oleneb hulknurga sisenurkade summa hulknurga külgede arvust? Kujuta see olenevus graafiliselt.

683. Kuidas oleneb korrapärase hulknurga küljele vastav kesknurk hulknurga külgede arvust? Kujuta see olenevus graafiliselt.

684. Avalda kera ruumala V kera pindala S funktsioonina. Kasutades saadud seost, määra kera ruumala, kui kera pindala on 1 m^2 .

685. Avalda kuubi pindala S kuubi ruumala V funktsioonina. Kasutades saadud seost, määra kuubi pindala, kui kuubi ruumala on 600 cm^3 ja kui kuubi ruumala on 50 l .

686. Püramiidi piirab neli võrdkülgset kolmnurka, mille külje pikkus on a . Avalda funktsionaalne seos püramiidi ruumala V ja püramiidi täispindala S vahel.

687. Kuidas oleneb suurus z suurusest x , kui z on võrdeline suurusega y ja y oleneb suurusest x lineaarselt?

688. Kuubi pindala on 42 cm^2 ja ruumala $18,5 \text{ cm}^3$. Kui suured on 3 korda pikema servaga kuubi pindala ja ruumala?

689. Kuidas suhtuvad ühe ja sama täispindalaga kuubi, suurima ruumalaga silindri ja kera ruumalad?

690. Kera, mille raadius on 3 cm, kaalub 800 g. Kui palju kaalub samast ainest õõnes kera, mille välimine raadius on 6 cm ja sisemine raadius 5 cm?

691. Elusolendite lineaarmõõtmete k -kordsel kasvamisel suureneb nende ruumala ja ühes sellega ka nende kaal k^3 korda. Samal ajal suurenevad aga nende lihaste ristlõigete pindalad ja ühes sellega lihaste jõuavaldised k^2 korda. Mis järgneb siit looma hüppe suuruse kohta (kirp, konn, koer, elevant)?

692. Kuubi serv kasvab 2-, 3-, 4-, ... n -kordseks. Kuidas muutub sel puhul kuubi servade kogupikkus? kuubi täispindala? kuubi ruumala?

693. Kera läbimõõt kasvab 2-, 3-, 4-, ... n -kordseks. Kuidas muutub sel puhul kera übermõõt? kera pindala? kera ruumala?

694. Silindri läbimõõt ja kõrgus kasvavad 2-, 3-, 4-, ... n -kordseks. Kuidas muutub sel puhul silindri übermõõt? silindri külgpindala? silindri täispindala? silindri ruumala?

695. Kuubikujuline karp, mille serv seestpoolt mõõtes on 10 cm, on täidetud kuulidega, mille läbimõõt 2 cm, igas kihis ühepalju kuule.

Mitu kuuli mahub karpi?

Missuguse ruumala võtavad kuulid endi alla?

Kui suur on kuulidest vaba olev karbi osa? Mitu protsenti ta moodustab kogu karbi ruumalast?

Kuidas muutuks see protsendimäär kuulide läbimõõdu 2-, 3-, 4-, ... n -kordsel vähenemisel?

696. Täida lüngad tabelis:

Kera läbi- mõõt	Kera pind- ala	Kera ruum- ala
1,7	9,10	2,57
2 · 1,7		
3 · 1,7		
5 · 1,7		

§ 58. Ülesandeid funktsioonidest.

697. Olgu $f(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$. Arvuta funktsiooni $f(n)$ väärtused vahemikus $1 \leq n \leq 10$.

698. On antud kaks lõiku: üks otspunktidega $A \equiv (0 | 0)$ ja $B \equiv (6 | 0)$ ning teine otspunktidega $C \equiv (0 | 2)$ ja $D \equiv (0 | 4)$. Punkt P liigub x - y -tasapinnas nii, et kolmnurkade APB ja CPD pindalad on võrdsed. Avalda punkti P ordinaat abstsissi funktsioonina.

699. Olgu $y = \frac{x+1}{2x-3}$. Avalda x muutuja y funktsioonina.

700. Anna funktsiooni

$$y = 10^{2 \log x} - 10^{\frac{1}{2} \log x}$$

avaldisele võimalikult lihtne kuju.

701. Leia summa:

$$\sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \dots$$

argument x -i funktsioonina.

702. Leia summa:

$$\tan^2 x + \sin^2 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \dots$$

argument x -i funktsioonina.

703. Lahenda võrrand:

$$\log x + \log \sqrt{x} + \log \sqrt[4]{x} + \log \sqrt[8]{x} + \dots = 2.$$

704. Leia, missugusel argumendi väärtusel järgmised funktsioonid pole määratud:

$$k(x) = \frac{x+6}{\log(x-7)} \quad h(x) = \frac{\sin 2x}{\cos(x+2a)}.$$

705. Olgu $l(x)$ arvu x lähim täisarv ja $y = l(x) \cdot x$. Kujuta funktsiooni y muutumine graafiliselt. Missugustel argumendi väärtustel funktsioon y pole määratud?

706. Millele läheneb avaldise

$$\frac{n^2 - 1}{3n^2 + n - 2}$$

väärtus arvu n lõpmatul kasvamisel?

707. Millele läheneb avaldis

$$\frac{1 - \sqrt{1-x}}{x}$$

argumendi nullile lähenemisel?

Näpunäide: Vabasta lugeja juurest.

708. Millele läheneb murd

$$\frac{\sqrt{n^2+n}}{n+1}$$

argumendi n lõpmatul kasvamisel?

709. Millele läheneb avaldis

$$x - \sqrt{x^2 - 1}$$

argumendi lõpmatul kasvamisel?

Näpunäide: Kirjuta antud avaldis murruna ja vabasta lugeja juurest.

710. Missugusel argumenti väärtusel katkeb funktsioon

$$y = \frac{\sin 2x}{\cos (x + 16^\circ)} ?$$

711. Ristküliku-kujulise plaadi mõõtmed on x ja $2x$. Mille võrra kasvab plaadi pindala, kui x kasvab väärtuselt a väärtuseni $a + h$?

712. Määra järgmiste funktsioonide tuletised:

1. $y = 2\pi x$

6. $y = \frac{x^3}{6} - x^2$

2. $y = \frac{x}{2} + \sqrt{2}$

7. $y = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$

3. $y = 4\pi x^2$

8. $y = \frac{x^2}{a} + \frac{x}{b} + \frac{1}{c}$

4. $y = \frac{x^2}{a} + b$

9. $y = (a - x)^2 + (b + x)^2$

5. $y = -\frac{x^3}{a}$

10. $y = (a - x)(x - b)$.

713. Leia kõvera $y = x - x^2$ tõus punktides, kus kõver lõikab x -telge.

714. Missuguse nurga moodustavad x -teljega kõvera $y = \frac{1}{10}(9x - x^3)$ puutujad, mis tõmmatud selle kõvera ja x -telje lõikepunktides?

715. Kui suure nurga moodustavad kaks puutujat, mis on tõmmatud kõverale $y = x^3 - 3x$ selle kõvera ja sirge $y = x$ neis lõikepunktides, mille abstsiss on nullist erinev?

716. Määra kõvera $y = 5 - 6x - 6x^2$ kõrgeim punkt.

717. Jaota arv N nii kahte ossa, et nende osade kuupe summa oleks minimaalne.

718. Olgu $P_1 \equiv (2 | 5)$ ja $P_2 \equiv (3 | 5)$. Leia sirgel $y = 3x + 5$ niisugune punkt P , et summa $\overline{PP_1}^2 + \overline{PP_2}^2$ oleks miinimum.

719. Missugune on funktsiooni $y = 3x - x^3$ suurim väärtus positiivsete x -väärtuste puhul?

720. Mille võrra muutub funktsiooni $y = x(ax - x^2)$ miinimum-väärtus, kui kordaja a kasvab Δa võrra?

721. Leia funktsiooni $y = 4x + \frac{1}{x}$ miinimumväärtus.

722. Lahuta arv 100 kaheks teguriks nii, et tegurite summa oleks minimaalne.

723. Kui suur on pindalalt maksimaalne ristkülik, mida saab piirata 64 tuletikuga?

724. On antud täisnurkne kolmnurk kaatetitega a ja b . Kolmnurgasse kujutatakse ristkülik, mille üks tipp asetseb täisnurga tipus, vastastipp aga hüpotenuusil. Missugusel kohal peab selle tipu hüpotenuusil valima, et ristküliku pindala saaks maksimaalne?

725. Missugusel argumenti väärtusel funktsioon

$$y = 3x^2 - 12x + 28$$

kasvab 3 korda aeglasemalt kui argument?

726. On antud parabool $x^2 = a^2 - 4ay$. Leia see tema puutuja, mis ühiselt koordinaatide telgedega moodustab minimaalse pindalaga kolmnurga.

727. Punkt P liigub sirgel punktist A punkti B ja sealt punkti C . Millal omab summa $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ väikesimat väärtust, kui $\overline{AB} = a$ ja $\overline{BC} = 3a$?

728. Aken koosneb ristkülikust ja sellele asetatud poolringist, mille läbimõõt on võrdne akna laiussega; akna übermõõt on p . Kuidas tuleb valida akna laius ja kõrgus, et aknast läbilastav valgusehulk oleks maksimaalne?

729. Leia suurima pindalaga ristkülik, mille üks külge asetseb sirgel $y = 18$ ja selle külge vastas olevad tipud asetsevad parabolil $y = x^2$.

730. Silindri telglõike übermõõt on u . Kuidas tuleb valida silindri mõõtmed, et silindri ruumala saaks maksimaalne?

731. Kuidas peab jaotama arvu a kaheks liidetavaks x ja y , et korrutis $F = x^2y$ saaks minimaalse väärtuse?

732. Koonuse põhja raadius on R , kõrgus H . Missugused on maksimaalse ruumalaga silindri mõõtmed, mida saab kujundada koonusesse nii, et silindri põhi asetseks koonuse põhjal?

733. Antud ruutu, mille külge on a , on joonestatud teine ruut nii, et selle tipud asetsevad esimese ruudu külgedel. Vali teise ruudu tippude asend nii, et selle ruudu pindala oleks minimaalne.

734. Mündi kulumine tarvitamisel on seda väiksem, mida väiksem on mündi täispindala. Missuguses seoses peaksid olema teineteisega mündi läbimõõt D ja paksus H , et mündi kulumine tema tarvitamisel oleks minimaalne?

735. Joonesta antud ringisse võrdhaarne kolmnurk, mis pööreldes oma sümmeetriatelje über moodustaks suurima ruumalaga koonuse.

736. Joonesta paraboolisse $y = ax^2$ võimalikult suure pindalaga võrdhaarne kolmnurk, mille tipp asetseb punktis $(0 \mid \frac{a}{2})$ ja mille alus lõikab y -telge tipu ja koordinaatide alguse vahel.

737. Jaota lõik a kahte ossa nii, et neile osadele ehitatud poolringide pindalade summa oleks minimaalne.

738. Määra põhja raadius ja kõrgus suurima ruumalaga koonusel, mille moodustaja on l cm.

739. Missugusel koonusel põhja raadiuse ja kõrguse summaga s cm on maksimaalne ruumala?

740. Kujuta antud poolkerasse suurima ruumalaga silinder.

741. On antud poolkera raadiusega R . Kujuta sellesse poolkerasse maksimaalse ruumalaga koonus, mille tipp on kera keskpunktis.

742. Ristkülikukujulise ristlõikega tala kandejõud on võrdeline ristlõike kõrguse ruudu ja laiuse korrutisega.

Ümmargusest palgist, mille läbimõõt on d cm, tahtakse tahuda ristkülikukujulise ristlõikega tala, mille kandejõud oleks võimalikult suur. Kuidas tuleb valida tala ristlõike mõõtmed?

743. Määra funktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ kordajad a , b ja c , teades, et x -i väärtusele 2 vastab y miinimumväärtus -10 .

744. Kuidas on funktsiooni $y = x^2 + ax + b$ miinimumväärtus seotud võrrandi $x^2 + ax + b = 0$ diskriminantiga? Kuidas on see väärtus seotud parabooli $y = x^2 + ax + b$ asendiga? Tõlgenda graafiku abil, miks puuduvad ruutvõrrandil reaalsed lahendid, kui võrrandi diskriminant on negatiivne.

745. Võrdkülgse kolmnurga kõrguse h arvutamiseks kolmnurga külje a järgi annab

Gerbert (a. 1000 ümber) valemi $h = \frac{6}{7}a$,

Heron (a. 50 ümber) „ $h = \frac{13}{15}a$.

Töökodades tarvitatakse sageli valemit $h = \frac{7}{8}a$.

Missugune neist kolmest valemist on kõige täpsem?

A

13829

133624

Hind Rmk. 2.80

A
13 829
133624

G. RÄGO — MATEMAATIKA ÕPIK GÜMN. V KL.

G. RÄGO

MATEMAATIKA

ÕPIK

GÜMNAASIUMI V KLASSILE

Hind Rmk. 2.80

TARTU EESTI KIRJASTUS