Planimeetria

K. N. Rashevski järele

K. R. Veski

Keskkooli kursus

K/Ü „Loodus", Tartus
1923

Sisu.

Lhk.

Sissejuhatus.

Põhimõisted ja definitsioonid (määrangud) . . . . . 3—6

I peatükk.

Sirgjoonest . . . . . 7—8
Nurgad . . . . . 8—16

II peatükk.

Hulknurk ja ring . . . . . 16—20
Nurkade ja kaarte mõõtüksused . . . . . 20—21

III peatükk.

Lause võrdhaarse kolmnurga tipunurga poolitajast . . . . . 21—22
Kolmnurga kolm ühtivuse juhust . . . . . 22—24
Konstruktsiooni-ülesannete põhitüübid . . . . . 24—28
Kolmnurga külgede ja nurkade olenevus üksteisest . . . . . 28—34
Täisnurksete kolmnurkade ühtivus . . . . . 34—36
Rist- ja kaldjoonte omadused . . . . . 36—40
Harjutused 40

IV peatükk.

Rööpsirged . . . . . 41—51

V peatükk.

Rööpkülikud ja trapetsid . . . . . 51—57
Kolmnurga neli tähelepanemis-väärt punkti . . . . . 57—60

VI peatükk.

Konstruktsiooni-ülesanded . . . . . 60—68
Harjutused . . . . . 68—70

VII peatükk.

Ringjoon . . . . . 70—71
Sirge ja ringjoone suhteline asend . . . . . 71—73
Kaarte ja kõõlude olenevus teineteisest . . . . . 73—75
Kõõlude ja kõõlude ning ringi keskpunkti vaheliste kauguste olenevus teineteisest . . . . . 75—76
Kõõluga risti tõmmatud läbimõõdu omadused . . . . . 76—78
Kahe ringjoone suhteline asend . . . . . 78—82
Geomeetriliste kohtade metood . . . . . 82—84
Rööbik siirmine . . . . . 84—85
Pöördumine ümber punkti . . . . . 85—86
Harjutused . . . . . 86—88

VIII peatükk.

Suhe ja ühine mõõt . . . . . 88—92

IX peatükk.

Nurkade mõõtmine ringis . . . . . 92—103

X peatükk.

Sisse- ja ümberjoonestatud hulknurgad . . . . . 103—107
Harjutused . . . . . 107—108

XI peatükk.

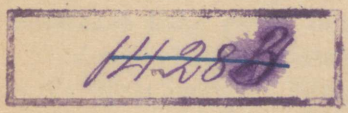
õVrdelised lõigud . . . . . 109—118

Planimeetria

K. N. Rashevski järele

K. R. Veski

Keskkooli kursus.



K/Ü „Loodus", Tartus
1923

2

Bibliotheca
Universitatis
Tartuensis
(Dorpatensis)
56107

K/Ü „Looduse“ keeleline korrektor M. Bekker.

A. 6009 I

K. Mattiesen'i trükk, Tartus.

Sissejuhatus.

Põhimõisted ja definitsioonid (määrangud).

1. **Igast küljest piiratud ruumiosa nimetatakse geomeetriliseks kehaks.** Olgu näiteks meie silmade ees pliiats; võtame pliiatsi ära ja kujutame enestele ette selle ruumiosa, kus seisis pliiats; see ruumiosa ongi geomeetriline keha. **Geomeetrilisel kehal on kolm mõõdet ehk dimensiooni: pikkus, laius ja kõrgus.**

Keha piiri, s. o. seda, millega keha eraldub teda ümbritsevast ruumist, **nimetatakse pinnaks.** Geomeetrilist pinda võib kehast eraldi vaadelda; temal ei ole paksust, vaid tal on ainult kaks mõõdet: pikkus ja laius.

Pinna piiri nimetatakse jooneks. Geomeetrilist joont võib vaadelda pinnast eraldi; temal on ainult üks mõõde: pikkus. Joont võib veel järgmiselt defineerida: **jooneks nimetatakse kahe pinna lõikekohta.**

Joone piiri nimetatakse punktiks. Geomeetrilisel punktil ei ole ühtki mõõdet. Punkti võib veel järgmiselt defineerida: **punktiks nimetatakse kahe joone lõikekohta.**

Kirjutatud jooned ja punktid ei ole mitte geomeetrilised jooned ja punktid, vaid ainult nende **kujutised.** Kirjutatud jooned ja punktid on füüsilised kehad, milledel on pikkus, laius ja kõrgus. Vaadeldes nimetatud jooni ja punkte mikroskoobi abil, näeme tõesti hulga grafiiti või tindipulbrit.

Geomeetrilisi kehi, pindu ja jooni nimetatakse geomeetrilisteks suurusteks. Punkt ei ole geomeetriline suurus, sest et temal puudub **jagatavuse omadus,** mis on iga suuruse peatunnus.

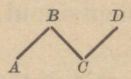
1a. Joont ei või vaadelda kui punktide rida, sest et geomeetrilised punktid, milledel puudub pikkus, laius ja kõrgus, ei või joont moodustada; kuid joont võib vaadelda kui liikuva punkti **jälge.**

Samuti võib joone liikumisel moodustuda pind ja pinna liikumisel moodustuda keha.

2. Lihtsam kõigist joontest on **sirgjoon.** Mida nimetatakse sirgjooneks, seda ei saa defineerida, sest et sirgjoone mõiste on iseenesestki selge algmõiste.

Mitmest sirgjoone osast moodustatud joont nimetatakse **murdjooneks** (1. joon.), kui sirgjoone osad pole asetatud ühes ja samas sihis.

Sirgjoontest ja murdjoontest erinevaid jooni nimetatakse **kõverjoonteks** ehk **kõverateks** (2. joon.).



1. joon.



2. joon.

3. Tasapinnaks nimetatakse niisugust pinda, millel on see omadus, et kui sirgjoonel on selle pinnaga kaks ühist punkti, siis sirgjoon asub sellel tasapinnal kõigi oma punktidega.

Loetakse iseenesest mõistetavaks, et tasapind laieneb igale küljele lõpmatult, s. o. tasapinnal ei ole kuskil algust ega lõppu. Tasapinnale tõmmatud sirgjoon jagab tasapinna kahte ossa; oletatakse, et üht tasapinna-osa võib teise tasapinna-osa peale asetada, pöörates teda sirgjoone kui telje ümber.

Kõiki teisi pindu, mis pole tasapinnad ega ole ka tasapinna-osadest moodustatud, nimetatakse **kõverpindadeks.**

4. Punktide, joonte, pindade ja kehade kogu, kui ka iga nimetatud elementi üksikult nimetatakse geomeetriliseks jooniseks.

Kui üht joonist võib teise joonise peale asetada nõnda, et nende vastavad osad katavad teineteist täiesti, siis nimetatakse neid jooniseid ühtivateks.

5. Geomeetria on teadus, mis õpetab jooniste omadusi. Ta jaguneb kahte ossa: **planimeetriaks ja stereomeetriaks.**

Planimeetria õpetab **tasajooniste** omadusi, s. o. niisuguste jooniste omadusi, millede kõik osad asuvad ühel tasapinnal.

Stereomeetria õpetab niisuguste jooniste omadusi, millede kõik osad ei asu ühel tasapinnal.

6. Aksioomiks nimetatakse iseenesest selget tõde, mida tõestada võimatu. Toome mõned näited:

I. **Kaks suurust, milledest kumbki lahus võetult võrdub ühe ja sama kolmanda suurusega, on isekeskis võrdsed.**

II. **Kui võrdseid suurusi suurendada või vähendada ühe ja sama suuruse võrra, siis saadakse võrdsed suurused.**

III. **Kui võrratuid (isesuurusi) suurusi suurendada või vähendada ühe ja sama suuruse võrra, siis saadakse võrratud (isesuurused) suurused.**

IV. **Geomeetrilist joonist võib, joonist ennast muutmata, ruumi ühest osast teise viia** [1]).

7. Lauseks ehk teoreemiks nimetatakse tõde, mis selgeks saab pärast tõestamist. Näitena võtame aritmeetilise tõe: „kui arvu ristsumma jagub 9-ga, siis jagub ka arv ise 9-ga".

Igal lausel on kaks osa: **tingimus** ja **väide.** Kui ühe lause tingimus on teise lause väiteks ja vastupidi, siis nimetatakse kaht niisugust lauset **pöördlauseteks;** näiteks:

a) **(Otsekohene) lause: Kui arvu ristsumma jagub 9-ga, siis jagub ka arv ise 9-ga.**

b) **Pöördlause: Kui arv jagub 9-ga, siis jagub ka selle arvu ristsumma 9-ga.**

Kaht lauset nimetatakse **vastaslauseteks,** kui ühe lause tingimus ja väide eitab teise lause tingimust ja väidet; näited:

c) **(Otsekohese) lause (a) vastaslause: Kui arvu ristsumma *ei* jagu 9-ga, siis *ei* jagu ka arv ise 9-ga.**

---

1) Kolm esimest aksioomi on maksvad igasuguste suuruste kohta, sellepärast nimetatakse neid **üldisteks;** neljas on **geomeetriline** aksioom. Temast saame aru, kui füüsilisi kehi vaatleme. Üldse, geomeetrilised aksioomid on **katselised tõed.**

d) **Pöördlause (b) vastaslause: Kui arv *ei* jagu 9-ga, siis *ei* jagu ka selle arvu ristsumma 9-ga.**

Kui (otsekohene) lause on õige, siis ei tähenda see veel seda, et ka pöörd- ja vastaslause õiged oleksid; on aga (otsekohene) lause ja veel üks keskmistest lausetest (b või c) õiged, siis on ka kaks ülejäänud lauset õiged.

Peale lausete on olemas veel **abilaused.**

8. **Märkus.** Geomeetria aluseks on geomeetriliste mõistete **definitsioonid** ja **aksioomid.** Neist tuletatakse korrapäraste arutluste kaudu laused; neist lausetest teised laused jne. Nõnda moodustub süstemaatiline geomeetriakursus [1]).

---

1) Greekakeelne sõna geomeetria (*γεωμετρία*) tähendab maamõõtmist ja näitab, et geomeetria, nagu teisedki teadused, on alguse saanud inimkonna püüdmisest oma tarvidusi täita. Vanad egiptlased harisid paljud aastasajad enne Kristust Niiluse kallastel maad. Niilus voolas iga aasta üle kallaste ja täitis ümberkaudsed maad mudaga, tehes seeläbi maa viljakandvaks, kuid hävitades ka piirisid, mis ühe omaniku maad teisest eraldasid. Et maal tema suure viljaanni poolest oli suur väärtus, siis on arusaadav, kuidas iga omanik püüdis täpsalt oma maa-ala suurust määrata, et piiride kadumisel uute piiride ajamist võimaldada. Siit sai aluse maamõõtmine, mis hiljem geomeetriaks kujunes. Egiptusest viidi geomeetria Greekamaale, kus ta teadusliku ilme omandas. Esimese süstemaatilise elementaarse geomeetria kirjutas Eukleides 280 aastat enne Kristust; ta kannab pealkirja: „Põhialgmed" (*Στοιχεῖα* — Stoicheia). Ekslik oleks arvata, et „Põhialgmed" oleksid ainult Eukleidese vaimusünnitus. Juba enne Eukleidest kirjutasid mitmed greeklased, nagu Hippokrates Kiose saarelt ja teised geomeetria elementidest. Eukleidese kommentaator, kuulus mõtteteadlane Proklos, kes elas V aastasaja keskel pärast Kristust, räägib, et „Eukleides kogus kokku geomeetria elemendid, seadis korda materjali, mille algatajaks oli Eudoxos, täiendas Thetese algmeid ja tõestas korralikult selle, mis enne teda oli nõrgalt tõestatud". Peale Eukleidese töö ei olnud tol ajal ühtki sarnast tööd kirjutatud. Greeklastelt omandasid araablased Eukleidese „Põhialgmed" VIII aastasajal, kuna aga viimaste kaudu „Põhialgmed" XV aastasajal, renessansi ajajärgul, tuttavaks said, nõnda et 1482. a. trükiti Veneetsias „Põhialgmete" esimene ladinakeelne väljaanne. Selle raamatu järele õppisid kõik XIX aastasaja geomeetriateadlased. Ka praegusel ajal tarvitatavad geomeetria õpperaamatud ei ole midagi muud kui ainult „Põhialgmete" teisendid, kuna aga „Põhialgmed" ise ka käesoleval ajal selge ja täpsa tõestuse eeskujuks on.

I peatükk.

Sirgjoonest.

9. Aksioomid: a) Sirgjoont võib mõlemale poole lõpmatuseni pikendada.

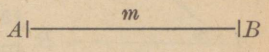
b) Kahe punkti vahel võib ainult ühe sirgjoone tõmmata. Sellest järgneb:

Sirgjoone asendi määravad kaks punkti kindlaks.

Kaks ühes punktis lõikuvat sirgjoont ei saa teises punktis lõikuda, sest et vastasel korral võiks läbi kahe punkti kas isesugust sirgjoont tõmmata, mis aksioomi b põhjal võimatu on; samal põhjusel:

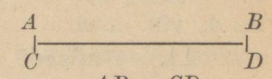
Sirgjooned katavad teineteist, kui neil on kaks ühist punkti.

10. Sirgjooned on **lõplikud** ja **lõputa.** Lõplikku sirgjoont nimetatakse **joonlõiguks** ehk **lõiguks.** Lõiku märgitakse kas kahe suure tähega, milledest kumbki asub lõigu otstes, või ühe väikese tähega, mis joonlõigu keskel asub; nõnda võib lugeda: lõik AB või lõik m (3. joon.).

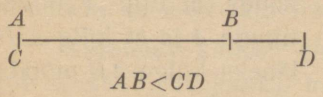


3. joon.

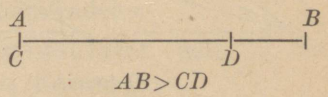
11. Lõikude võrdlemine. Et kaht lõiku võrrelda, seks tarvis asetada üks lõik teise peale nii, et lõikude ühed otsapunktid ühtiksid; kui seejuures ühtivad ka lõikude teised otsapunktid, siis nimetatakse neid lõikusid **võrdseteks** (4. joon); ei ühti aga teised otsapunktid mitte, siis loetakse **vähemaks** see lõik, mis moodustab ainult teise lõigu osa (5. ja 6. joon.).



4. joon.

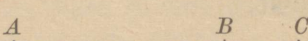


5. joonis.



6. joonis.

12. Kui kaks lõiku AB ja BC (7. joon.) on asetatud teineteise otsa ühes ja samas sihis, siis nimetatakse lõiku AC lõikude AB ja BC **summaks.** Lõiku BC (7. joon.) nimetatakse lõikude AC ja AB **vaheks.** Lõiku AD, mille moodustavad kolm isekeskis võrdset lõiku AB, BC ja CD, nimetatakse lõigu AB **korrutiseks** arvuga 3, kuna aga AB moodustab lõigu AD **jagatise** arvuga 3. Nõnda võib joonlõikudega arvutada 4 aritmeetilist tehet.



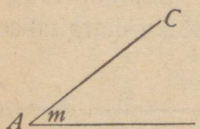
7. joonis.



8. joonis.

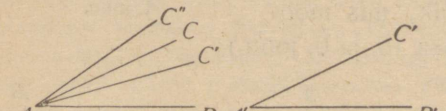
Nurgad.

13. Definitsioon. Nurgaks nimetatakse joonist, mille moodustavad kaks ühest ja samast punktist välja minevat sirget (9. joon.); seda punkti nimetatakse nurga **tipuks,** nurka moodustavaid sirgeid aga — nurga **külgedeks.** Nurka tähendatakse kas kolme tähe abil, kusjuures keskmine täht kirjutatakse nurga tipu juurde, või ühe tähe abil, mis tipu juurde kirjutatakse, või ühe väikese tähe või numbri abil, mis nurga sisse kirjutatakse. Nõnda võime sirgete AC ja AB abil moodustatud nurka (9. joon.) kirjutada: $\sphericalangle CAB$[1]), või $\sphericalangle A$, või $\sphericalangle m$.



9. joonis.

14. Nurkade võrdlemine. Et võrrelda kaht nurka $\sphericalangle CAB$ ja $\sphericalangle C'A'B'$ (10. joon.), seks tarvis üks neist nurkadest, näiteks $\sphericalangle C'A'B'$, asetada $\sphericalangle CAB$ peale nõnda, et tipp A' ühtiks tipuga A ja et külg $A'B'$ läheks külge AB mööda;



10. joonis.

1) Nurga märkimiseks tarvitame märki $\sphericalangle$.

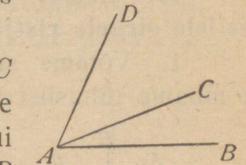
kui peale selle ka külg $A'C'$ läheb mööda külge AC, siis nimetatakse $\sphericalangle C'A'B'$ ja $\sphericalangle CAB$ **võrdseteks;**

läheb aga külg $A'C'$ $\sphericalangle CAB$ **sisemist valdkonda** mööda, siis on $\sphericalangle C'A'B'$ **väiksem** kui $\sphericalangle CAB$, sest et ta ainult **osa** sellest moodustab;

läheks aga külg $A'C'$ $\sphericalangle CAB$ **välimist valdkonda** mööda, siis on $\sphericalangle C'A'B'$ **suurem** kui $\sphericalangle CAB$.

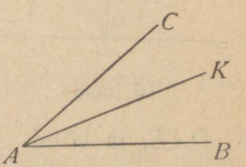
Nurkade võrdlemisest selgub, et **nurga suurus ei olene tema külgede pikkusest.**

15. Definitsioon. Kui kahel nurgal $\sphericalangle CAB$ **ja** $\sphericalangle DAC$ (11. joon.) **on ühine tipp** A, **ühine külg** AC **ja kui need nurgad asuvad teine teisel pool ühist külge, siis nimetatakse neid nurki lähisnurkadeks.**



11. joonis.

$\sphericalangle DAB$ nimetatakse $\sphericalangle CAB$ ja $\sphericalangle DAC$ **summaks** (11. joon.); $\sphericalangle CAB$ nimetatakse $\sphericalangle DAB$ ja $\sphericalangle DAC$ **vaheks** (11. joon.). Kui kaks lähisnurka $\sphericalangle CAK$ ja $\sphericalangle KAB$ (12. joon.) on isekeskis võrdsed, siis on $\sphericalangle CAB$, s. o. kahekordne $\sphericalangle KAB$, nurga $\sphericalangle KAB$ **korrutis** arvuga 2, aga $\sphericalangle KAB$ on $\sphericalangle CAB$ **jagatis** arvuga 2. Samuti moodustab nurk, mis võrdub 3, 4, ... võrdse nurga summaga, antud nurga korrutise arvudega 3, 4, ... Nõnda võib nurkadega arvutada 4 aritmeetilist tehet.



12. joonis.

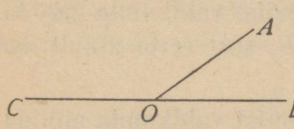
Sirget AK, **mis poolitab** $\sphericalangle CAB$, **nimetatakse nurgapoolitajaks.**

16. Definitsioonid. Kui kahe lähisnurga välimised küljed OB **ja** OC (13. joon.) **asuvad ühel sirgjoonel, siis nimetatakse neid lähisnurki kõrvunurkadeks.**

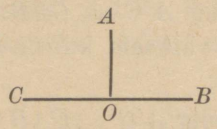
Kumbagi kahest võrdsest kõrvunurgast, näit. $\sphericalangle AOC$ või $\sphericalangle AOB$ (14. joon.), **nimetatakse täisnurgaks.**

Sirget AO (15. joon.), **mis moodustab teise sirgega** OB

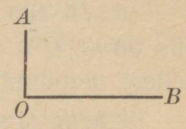
täisnurga, nimetatakse OB **ristjooneks** [1]); sirget, mis pole teise sirgega risti, nimetatakse **kaldjooneks.**



13. joonis.



14. joonis.



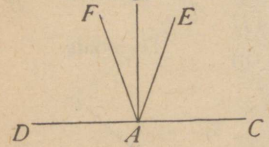
15. joonis.

Ristjoont **„üles tõmbama"** tähendab tõmmata ristjoon läbi antud sirge peal antud punkti.

Ristjoont **„alla tõmbama"** tähendab tõmmata antud sirgele ristjoon läbi punkti, mis asub väljaspool antud sirget.

17. Lause. Läbi sirge peal antud punkti võib alati sellele sirgele ristjoone tõmmata ja ainult ühe.

1. Võtame sirgel DC (16. joon.) juhuslise punkti A ja tõmbame juhuslist sihti mööda sirge AE; saame kaks kõrvunurka $\sphericalangle DAE$ ja $\sphericalangle CAE$; oletame, et $\sphericalangle DAE$ on suurem kui $\sphericalangle CAE$.



16. joonis.

Asetame $\sphericalangle CAE$ nõnda $\sphericalangle DAE$ peale, et nende tipud ühtiksid ja et külg AC läheks külge AD mööda; siis läheb külg AE $\sphericalangle DAE$ sisemist valdkonda mööda, sest et $\sphericalangle CAE < \sphericalangle DAE$, ja võtab AF sihi; nõnda siis

$$\sphericalangle DAF = \sphericalangle CAE. \quad (1)$$

Oletame nüüd, et $\sphericalangle EAF$ on sirgega AB pooleks jagatud, s. o. et

$$\sphericalangle FAB = \sphericalangle EAB. \quad (2)$$

Liites võrdused (1) ja (2) ositi, saame:

$$\sphericalangle DAF + \sphericalangle FAB = \sphericalangle CAE + \sphericalangle EAB,$$

või

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle CAB,$$

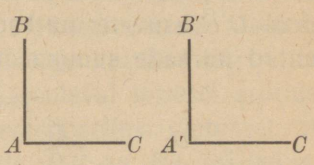
1) Kui sirged AO ja OB vastamisi risti on, siis märgitakse seda nii: $AO \perp OB$.

s. o. AB moodustab DC-ga kaks võrdset kõrvunurka, millest järgnebki, et $AB \perp DC$. Nõnda võib läbi sirge peal antud punkti sellele sirgele alati ristjoone tõmmata.

2. Mingi teine sirge AE ei või olla DC-ga risti, sest et ta ei või moodustada temaga kaht võrdset kõrvunurka; tõepoolest $\sphericalangle CAE < \sphericalangle CAB$, sest et ta moodustab ainult tema osa; et $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAB$, siis on ka $\sphericalangle CAE$, olles väiksem kui $\sphericalangle CAB$, väiksem kui $\sphericalangle DAB$; kuid $\sphericalangle DAB < \sphericalangle DAE$, sest et ta on ainult tema osa; seepärast on $\sphericalangle CAE$, olles väiksem kui $\sphericalangle DAB$, kaugeltki vähem kui $\sphericalangle DAE$. Nõnda ei või sirgele DC peale AB teist ristjoont läbi sirge DC peal antud punkti A tõmmata.

18. Lause. Kõik täisnurgad on isekeskis võrdsed.

Asetame täisnurga $\sphericalangle B'A'C'$ (17. joon.) täisnurga $\sphericalangle BAC$ peale nõnda, et tipp A' ühtiks tipuga A ja et külg $A'C'$ läheks mööda külge AC; siis peab külg $A'B'$ minema mööda külge AB, sest et vastasel korral võiks läbi sirge peal antud punkti A sirgele AC tõmmata kaks ristjoont, mis on võimatu. Nõnda ühtivad $\sphericalangle B'A'C'$ ja $\sphericalangle BAC$; järjelikult on nad võrdsed, mis oligi tarvis tõestada.



17. joonis.

19. Definitsioonid. Täisnurgast väiksemat nurka nimetatakse **teravnurgaks,** täisnurgast suuremat nurka nimetatakse **nürinurgaks.** Näiteks on $\sphericalangle EAC$ (16. joon.) teravnurk, aga $\sphericalangle EAD$ — nürinurk.

Kaht nurka nimetatakse **täiendusnurkadeks,** kui nende summa on täisnurk.

Täisnurka märgitakse tähega d (prantsusekeelse sõna **‚droit** — **õige'** esimene täht).

20. Lause. Kõrvunurkade summa on kaks täisnurka.

Antagu kaks kõrvunurka: $\sphericalangle EAD$ ja $\sphericalangle EAC$ (16. joon.). Tõmbame läbi punkti A sirgele DC ristjoone AB; saame:

$$\sphericalangle EAC = \sphericalangle BAC - \sphericalangle BAE$$
$$\sphericalangle EAD = \sphericalangle BAD + \sphericalangle BAE.$$

Liites ositi need kaks võrdust[1]), saame:

$$\sphericalangle EAC + \sphericalangle EAD = \sphericalangle BAC + \sphericalangle BAD = d + d + 2d,$$

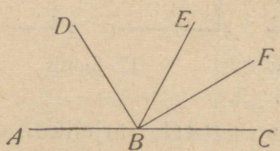
mis oligi tarvis tõestada.

21. I järeldus. Ühel pool sirgjoont ühise tipu ümber asetatud nurkade $\sphericalangle ABD$, $\sphericalangle DBE$, $\sphericalangle EBF$ ja $\sphericalangle FBC$ summa on kaks täisnurka, sest et (18. joon.):

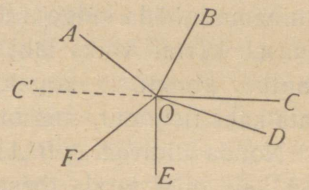
$$\underbrace{\sphericalangle ABD + \sphericalangle DBE} + \underbrace{\sphericalangle EBF + \sphericalangle FBC} = \sphericalangle ABE + \sphericalangle EBC = 2d.$$

22. II järeldus. Ühise tipu ümber asetatud nurkade $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ jne. summa on neli täisnurka.

Pikendades näiteks sirget OC (19. joon.), leiame tõesti, et ühel pool $C'C$ asuvate nurkade summa on $2d$ ja ka teisel pool $C'C$ asuvate nurkade summa on $2d$; järjelikult, kõigi antud nurkade summa on $4d$.

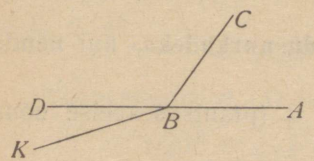


18. joonis.



19. joonis.

23. Pöördlause. Kui kahe lähisnurga $\sphericalangle DBC$ ja $\sphericalangle CBA$ summa on kaks täisnurka, siis on need lähisnurgad kõrvunurgad (20. joon.).



20. joonis.

Tingimus:

$$\sphericalangle DBC + \sphericalangle CBA = 2d. \quad (1)$$

Väide: need nurgad on kõrvunurgad, s. o. DB ja BA moodustavad ühe sirge.

1) Seda teeme aksioomi põhjal: kui võrdseid suurusi suurendada võrdsete suuruste võrra, siis saab võrdsed suurused.

Tõestamiseks oletame, et DB ei ole BA pikendus; et aga BA pikenduse moodustab mingi sirge, siis võtame selleks pikenduseks sirge KB. Siis on lähisnurgad $\sphericalangle KBC$ ja $\sphericalangle CBA$, millede välimised küljed moodustavad **oletuse järele** ühe sirge, kõrvunurgad; järjelikult (nr. 20) on nende summa kaks täisnurka, s. o.:

$$\sphericalangle KBC + \sphericalangle CBA = 2d. \quad (2)$$

Võrreldes saadud võrdust (2) tingimuses antud võrdusega (1) märkame, et nende võrduste paremad pooled on võrdsed; tähendab, ka pahemad pooled on võrdsed:

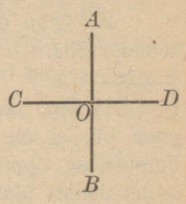
$$\sphericalangle DBC + \sphericalangle CBA = \sphericalangle KBC + \sphericalangle CBA. \quad (3)$$

Vähendades võrduse (3) kumbagi osa ühe ja sama $\sphericalangle CBA$ võrra, saame:

$$\sphericalangle DBC = \sphericalangle KBC. \quad (4)$$

Joonisest on näha, et $\sphericalangle DBC$ on $\sphericalangle KBC$ osa; osa ei või võrduda tervega; järjelikult on võrdus (4) **mõttetus** ehk **absurd.** Mõttetus tekib kahel viisil: kas ebaõige arutluse tagajärjel või ebaõige oletuse tagajärjel. Et käesoleval juhusel arutlus oli õige, siis tekkis mõttetus nähtavasti sellest oletusest, et DB ei ole BA pikendus. Järjelikult DB on BA pikendus, mis oligi tarvis tõestada.

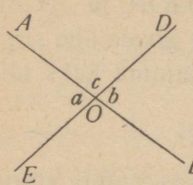
Märkus. Seda viisi, mille abil tõestasime eelmise lause, nimetatakse **vastuoletusliseks tõestamiseks** või **tõestamiseks mõttetuse kaudu** (reductio ad absurdum). See tõestamisviis seisab selles, et tõestamise algul **oletatakse ümberpöördult sellele, mis tarvis tõestada.** Sellest oletusest moodustub aksioomide ja eelmiste lausete põhjal **tuletus.** Kui tuletus moodustub mõttetu, siis heidetakse tehtud oletus kõrvale. Kirjeldatava tõestusviisi, mille abil tõestatakse suurem osa pöördlauseid, võttis tarvitusele Eukleides.



21. joonis.

24. Järeldus. Kui läbi sirgel CD asuva punkti O tõmmata sellele sirgele kummalegi poole ristjoon, siis moodustavad need kaks

ristjoont ühe sirge AB, sest et lähisnurkade $\sphericalangle AOD$ ja $\sphericalangle DOB$ summa on $2d$ ($\sphericalangle DOB = d$ ja $\sphericalangle AOD = d$).



22. joonis.

25. Definitsioon. Kaht nurka $\sphericalangle AOE$ ja $\sphericalangle DOB$ nimetatakse tippnurkadeks, kui ühe nurga küljed on teise nurga külgede pikendused (22. joon.).

26. Lause. Tippnurgad on isekeskis võrdsed [1]). Olgu tarvis tõestada, et $\sphericalangle a = \sphericalangle b$ (22. joon.).

$\sphericalangle a + \sphericalangle c = 2d$, kui kõrvunurkade summa;
$\sphericalangle b + \sphericalangle c = 2d$, „ „ „

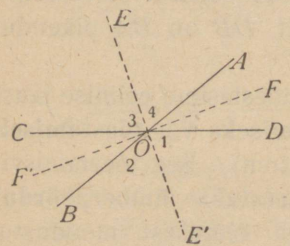
Kaks suurust, milledest kumbki võrdub ühe ja sama kolmanda suurusega ($2d$), on isekeskis võrdsed; järjelikult:

$$\sphericalangle a + \sphericalangle c = \sphericalangle b + \sphericalangle c;$$

vähendades kummagi võrduse osa nurga c võrra, saame:

$\sphericalangle a = \sphericalangle b$, mis oligi tarvis tõestada.

27. Lause. Kahe kõrvunurga $\sphericalangle AOD$ ja $\sphericalangle AOC$ nurgapoolitajad OF ja OE (23. joon.) **on vastamisi risti, tippnurkade nurgapoolitajad moodustavad ühe sirge.**



23. joonis.

1. $\sphericalangle AOD + \sphericalangle AOC = 2d$, kui kõrvunurkade summa;

$$\frac{\sphericalangle AOD}{2} + \frac{\sphericalangle AOC}{2} = \frac{2d}{2}, \text{ või}$$

$\sphericalangle AOF + \sphericalangle AOE = d$;

$\sphericalangle AOF$ ja $\sphericalangle AOE$ summa aga moodustab $\sphericalangle EOF$, järjelikult $\sphericalangle EOF = d$, mis seda tähendab, et $OF \perp OE$, mis oligi tarvis tõestada.

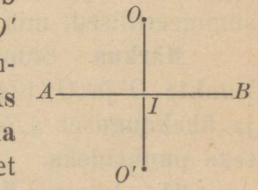
2. Olgu $OE \sphericalangle AOC$ nurgapoolitaja ja OE' nurgapoolitaja OE pikendus; siis:

---

1) Seda lauset loetakse Thales'e omaks, kuid kas ka tõestus samasugune oli, ei ole teada. Föniiklane Thales (639.—548. a. enne Kr.) sõitis Egiptusesse õppima, asus pärast Väike-Aasiasse Mileetose linna elama ja asutas Joonia filosoofia-kooli, kus said hariduse Greeka mõttetargad; sellest ajast peale algas ka geomeetriliste teadmiste arendamine.

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$, kui tippnurgad;
$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$ samal põhjusel; kuid
$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$, sest et OE on $\sphericalangle AOC$ nurgapoolitaja, järjelikult
$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, s. o. OE' on $\sphericalangle BOD$ nurgapoolitaja; nõnda on tippnurga nurgapoolitaja teise tippnurga nurgapoolitaja pikendus, mis oligi tarvis tõestada.

28. Sümmeetrilised joonised. Murrame 24. joonise tasapinna sirget AB mööda nõnda, et tema ülemine osa ühtiks alumise osaga; kui seejuures punkt O ühtib punktiga O', siis nimetatakse punkte O ja O' **sümmeetrilisteks** punktideks sirge AB suhtes, kuna aga sirget AB **sümmeetriateljeks** nimetatakse. Üldse, **teljeline sümmeetria on jooniste omadus, mis selles seisab,** et joonise tasapinda võib telge mööda murda nii, et **üks joonise osa teise osa täiesti katab.** Näiteks on venekeelne Я ja ladinakeelne R telje AB suhtes sümmeetrilised, sest et nad täiesti ühtivad kui joonist murda AB mööda.



24. joonis.



Selge on, et sümmeetrilised planimeetrilised joonised on võrdsed, sest et nad ühtivad, kui joonist murda telge mööda.

29. Lause. Kui punktid O ja O' on AB suhtes sümmeetrilised, siis on sirge AB risti sirgega OO' ja läheb läbi tema keskpunkti (24. joon.).

Olgu punkt I sirgete AB ja OO' lõikepunkt. Murrame joonise mööda sirget AB nõnda, et joonise ülemine ja alumine osa ühtiksid; punkti I asend siis ei muutu; punkt O ühtib vastava sümmeetrilise punktiga O'; OI ühtib $O'I$; $\sphericalangle OIB$ ühtib $\sphericalangle O'IB$; järjelikult on need nurgad võrdsed; kuid $\sphericalangle OIB$ ja $\sphericalangle O'IB$ on kõrvunurgad, võrdsed kõrvunurgad on aga täisnurgad, seepärast on $AB \perp OO'$, mis oligi tarvis tõestada [1]). Et lõik OI ühtis lõiguga $O'I$, siis $OI = O'I$, mis oligi tarvis tõestada [1]).

1) Seda tõestamisviisi nimetatakse **sümmeetrilliseks.**

30. Pöördlause. Kui sirge AB on risti sirgega OO' ja läheb läbi tema keskpunkti, siis on punktid O ja O' sirge AB suhtes sümmeetrilised (24. joon.).

Tingimuse järele $OI = O'I$ ja $AB \perp OO'$. Et $\sphericalangle OIB = \sphericalangle O'IB$ kui täisnurgad, siis joonise murdmise puhul AB mööda läheb OI mööda $O'I$, nende lõikude võrdsuse pärast aga ühtivad punktid O ja O'. Järjelikult on punktid O ja O' sümmeetrilised, mis oligi tarvis tõestada.

Märkus. Sümmeetrilisi punkte võib ka nii defineerida: **Punkte O ja O'** (24. joon.), **mis asuvad AB ristjoone peal ja ühekaugusel AB-st, nimetatakse AB suhtes sümmeetrilisteks punktideks.**

31. Lause. Läbi väljaspool sirget AB asuva punkti O võib sellele sirgele tõmmata ristjoone ja ainult ühe (24. joon.).

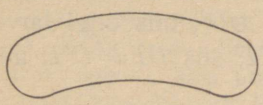
Eelmisest järgneb, et enne, kui läbi punkti O sirgele AB ristjoont tõmmata, on tarvis leida punkti O jaoks vastav sümmeetriline punkt O'. Ühendades sümmeetrilised punktid sirge OO' abil, leiame, et $OO' \perp AB$ (nr. 29).

Et iga kord võib antud punktile O vastava sümmeetrilise punkti leida ja ainult ühe ja et alati võib läbi kahe punkti sirge tõmmata ja ainult ühe, siis võime läbi punkti O, mis väljaspool sirgjoont asub, alati AB-le ristjoone tõmmata ja ainult ühe.

II peatükk.

Hulknurk ja ring.

32. Definitsioonid. Joont, mille alguse- ja lõpupunktid ühtivad, nimetatakse kinniseks jooneks (25. joon.).



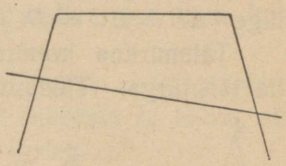
25. joon.

Joont, mis iga sirgega lõikub mitte rohkemas kui kahes punktis, nimetatakse kumeraks (26. ja 27. joon.).

Kinnisest murdjoonest piiratud

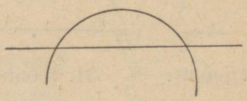
tasapinna osa nimetatakse hulknurgaks (polügooniks); näiteks hulknurk *ABCDEF* (28. joon.). Lõikusid *AB*, *BC*, *CD* jne. nimetatakse hulknurga **külgedeks.** Hulknurga nurkade tippe nimetatakse hulknurga **tippudeks.**

Hulknurga külgede summat nimetatakse **ümbermõõduks** ehk **perimeetriks.**



26. joonis.

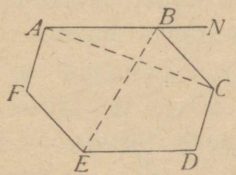
Kaht mitte kõrvuti seisvat hulknurga tippu ühendavat sirget, näit. *AC* (28. joon.), nimetatakse **nurkjooneks** (diagonaaliks).



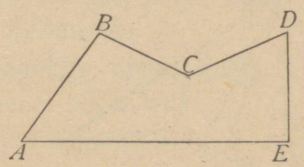
27. joonis.

Nurka, mille moodustavad kaks järjestikku võetud hulknurga külge, näit. $\sphericalangle ABC$, nimetatakse hulknurga **sisenurgaks.**

Nurka, mille moodustab hulknurga üks külg ja teise külje pikendus, näit. $\sphericalangle NBC$, nimetatakse hulknurga **välisnurgaks.**



28. joonis.



29. joonis.

Hulknurka nimetatakse **kumeraks** (28. joon.), kui ta on moodustatud k u m e r a s t murdjoonest; vastasel korral nimetatakse hulknurka **nõgusaks** (29. joon.)[1]).

Külgede arvu järele jagunevad hulknurgad **kolmnurkadeks, nelinurkadeks, viisnurkadeks** jne.

33. Kolmnurkade seas nõuavad iseäralist tähelepanu:

1) Et järgnevas kursuses tuleb tegemist teha ainult kumerate hulknurkadega, siis mõistame meie edaspidi „hulknurga" all ainult kumerat hulknurka.

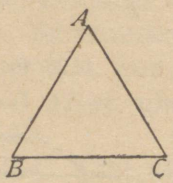
Võrdhaarne kolmnurk (30. joon.), millel on kaks võrdset külge ($AB = AC$).

Võrdkülgne kolmnurk (31. joon.), millel on kolm võrdset külge ($AB = AC = BC$).

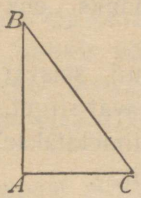
Täisnurkne kolmnurk (32. joon.), mis sisaldab eneses ühe täisnurga. Täisnurga **vastaskülge** BC nimetatakse **kaldküljeks** (hüpotenuusiks), aga täisnurga **lähiskülgi** AB ja AC nimetatakse **ristkülgedeks** (kaatetiteks).



30. joonis.



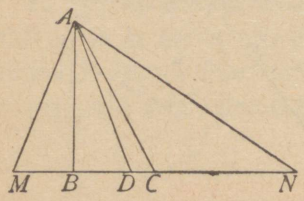
31. joonis.



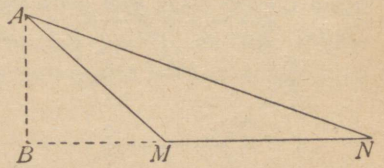
32. joonis.

Kolmnurga üht külge nimetatakse harilikult **aluseks**, kuna aga aluse vastasnurga tippu nimetatakse kolmnurga **tipuks**.

Kolmnurga **kõrguseks** nimetatakse kolmnurga tipust



33. joonis.



34. joonis.

kolmnurga alusele (33. joon.) või aluse pikendusele (34. joon.) tõmmatavat ristjoont.

Kolmnurga **küljepoolitajaks** (mediaaniks) nimetatakse sirget AC (33. joon.), mis ühendab kolmnurga tipu vastaskülje keskpunktiga.

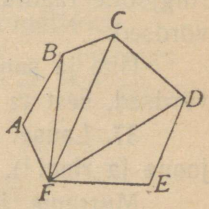
Kolmnurga **nurgapoolitajaks** (bissektoriks) nimetatakse sirget AD (33. joon.), mis poolitab kolmnurga nurga.

Igal kolmnurgal on 3 kõrgust, 3 küljepoolitajat ja 3 nurgapoolitajat.

Kirjas märgitakse sõna „kolmnurk“ sümboliliselt märgiga $\triangle$.

34. Lause. Hulknurga igast tipust võib tõmmata nii mitu nurkjoont, kui mitu külge on hulknurgal ilma kolme küljeta.

Hulknurga mingist tipust F (35. joon.) ei või nurkjooni tõmmata ainult kolme tippu: temasse enesesse ja kahte naabruses olevasse tippu A ja E, aga igasse ülejäänud tippu on see tõmbamine võimalik. Järjelikult, kui meil on n-külgne hulknurk (tal on siis ka n tippu), siis võib igast tipust tõmmata $n-3$ nurkjoont[1]).

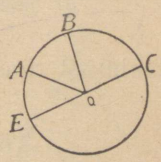


35. joonis.

35. Lause. Hulknurga mingist tipust tômmatud nurkjooned jagavad hulknurga nii mitmeks kolmnurgaks, kui mitu külge on sel hulknurgal ilma kahe küljeta.

Hulknurga igale küljele (35. joon.) vastab üks kolmnurk peale nende kahe külje FA ja FE, mis on tipu F lähisküljed; järjelikult jagub n-nurkne hulknurk ühest tipust tõmmatud nurkjoonte kaudu $n-2$ kolmnurgaks.

36. Definitsioonid. Ringjooneks nimetatakse niisugust ühel tasapinnal asuvat kôverjoont, mille kôik punktid asuvad ühekaugusel keskpunktist (36. joon.). Kesup. mõiste põle veel definitud!



36. joonis.

Ringjoonest piiratud tasapinna-osa nimetatakse **ringiks.**

Sirget OA, mis ühendab keskpunkti ringjoone mingi punktiga, nimetatakse **raadiuseks.**

Sirget EC, mis kulgeb keskpunkti ja ühendab seejuures ringjoone kaks vastaspunkti, nimetatakse **läbimõõduks** (diameetriks.

1) Üldse võib aga hulknurgas tõmmata $n(n-3)$ nurkjoont, kuid seejuures on iga nurkjoon kaks korda tõmmatud, seepärast on **isesuguste** nurkjoonte hulk hulknurgas $\frac{n(n-3)}{2}$.

Punkte E ja C nimetatakse **diametraal-vastaspunktideks.** Ringjoone osa AB nimetatakse **kaareks.** Sümboliliselt märgitakse kaart märgiga $\smile$.

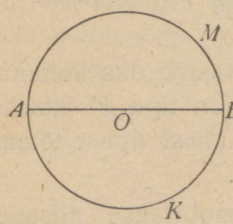
Ringjoont ja ringi tähistatakse kas ühe tähega O (36. joon.), mis keskpunkti juures asub, või kahe tähega OA, mis üht tema raadiust tähistavad.

Ringjoone definitsioonist järgneb, et kõik ühe ja sama ringjoone raadiused OA, OB, OC, . . . (36. joon.) on isekeskis võrdsed.

Ühe ja sama raadiuse ringid ja ringjooned on isekeskis võrdsed, sest et nad keskpunktide ühtimisel ühtivad.

37. Lause. Iga läbimõõt AB (37. joon.) poolitab ringjoone ja ringi [1]).

Murrame joonise läbimõõdu AB mööda; siis ühtivad kaarte $\smile AMB$ ja $\smile AKB$ vastavad punktid, sest et nad asuvad keskpunktist ühekaugusel. Samuti on võrdsed ka ringi osad, mis nende kaartega ja läbimõõduga AB on piiratud.



37. joonis.

Märkus: Et pärast joonise murdmist AB mööda $\smile AMB$ ühtib $\smile AKB$-ga, siis on need kaared **sümmeetrilised** AB suhtes; järjelikult on iga läbimõõt ringjoone ja ringi sümmeetriatelg.

Nurkade ja kaarte mõõtüksused.

38. Nurkade mõõtüksusena tarvitatakse $\frac{1}{90}$ täisnurga osa, mida nimetatakse **nurga kraadiks.**

Kaarte mõõtüksusena tarvitatakse $\frac{1}{360}$ ringjoone osa, mida nimetatakse **kaare kraadiks** [2]).

1) See lause olevat Thales'e oma.

2) Juba vanal ajal jagati ringjoon 360 ossa; see jagamine on õnnestunud, sest et arvul $360 = 2.2.2.3.3.5$ on palju jagajaid, ühtekokku nimelt 22 jagajat.

Kerge on tähele panna, et kaare kraad on $\frac{1}{90}$ veerandringjoone osa.

Need mõõtüksused erinevad teineteisest oluliselt: nurga kraad on **jääv** suurus, kuna aga kaare kraad on **muutuv** suurus, mis oleneb ringjoone raadiusest.

Niihästi nurga kraad kui ka kaare kraad jagatakse 60 võrdsesse ossa, mida nimetatakse **minutiteks**; iga minut jagub veel 60 võrdsesse ossa, mida nimetatakse **sekunditeks**.

Kraadi tähendatakse märgiga ^{0}, minutit — märgiga $'$, sekundit — märgiga $''$; nõnda loetakse $18^0\ 15'\ 16''$ järgmiselt: 18 kraadi, 15 minutit, 16 sekundit.

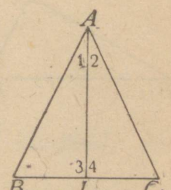
III peatükk.

39. Lause. Võrdhaarse kolmnurga tipunurga poolitaja on ühtlasi ka sama kolmnurga aluse poolitaja ja kõrgus (38. joon.).

T.[1]: $AB = AC$. $\quad$ *V.*[2]: $BJ = JC$

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ $\quad$ $AJ \perp BC$.

Murrame joonise sirget AJ mööda; siis läheb AB mööda AC-d, sest et $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$; et $AB = AC$, siis ühtib punkt B punktiga C, kuna aga BJ ühtib CJ-ga, sest et kahe punkti vahel võib ainult ühe sirge tõmmata. Siit järgneb, et $BJ = JC$, s. o. AJ on aluse BC poolitaja.



38. joonis.

Joonise murdmisel AJ mööda ühtisid nurgad $\sphericalangle AJB$ ja $\sphericalangle AJC$; järjelikult on nad võrdsed; need nurgad on aga kõrvunurgad, ja võrdsed kõrvunurgad on täisnurgad. Seepärast on AJ risti BC-ga, s. o. AJ on kolmnurga ABC kõrgus.

40. 1. järeldus. Joonise murdmisel (38. joon.) ühtisid

1) Tingimus.
2) Väide.

$\measuredangle B$ ja $\measuredangle C$, millest järgneb, et **vôrdhaarse kolmnurga aluse lähisnurgad on võrdsed.**

2. järeldus. Iga vôrdkülgne kolmnurk on ka vôrdnurkne kolmnurk.

Kolmnurkade kolm ühtivuse juhust.

41. Lause. 1. juhus. Kaks kolmnurka on ühtivad, kui ühe kolmnurga kaks külge ja nende vahelnurk on teise kolmnurga kahe külje ja nende vahelnurgaga vastavalt võrdsed (39. joon.).

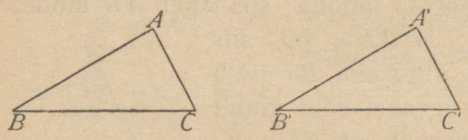
$$T.: BC = B'C' \quad V.: \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'^{1}).$$
$$BA = B'A'$$
$$\measuredangle B = \measuredangle B'.$$

Asetame kolmnurga $A'B'C'$ kolmnurga ABC peale nõnda, et võrdsed küljed $B'C'$ ja BC ühtiksid;

et $\measuredangle B' = \measuredangle B$, siis läheb külg $B'A'$ külge BA mööda;

et $B'A' = BA$, siis ühtib punkt A' punktiga A;

küljed $A'C'$ ja AC, millede otsapunktid ühtisid, ühtivad, sest et läbi kahe punkti võib ainult ühe sirge tõmmata. Kolmnurgad $A'B'C'$ ja ABC, millede vastavad osad olid võrdsed, on ühtivad.



39. joonis.

42. Lause. 2. juhus. Kaks kolmnurka on ühtivad, kui ühe kolmnurga üks külg ja tema kaks lähisnurka on teise kolmnurga ühe külje ja tema kahe lähisnurgaga vastavalt vôrdsed (39. joon.).

$$T.: \measuredangle B = \measuredangle B' \quad V.: \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$
$$\measuredangle C = \measuredangle C'$$
$$BC = B'C'.$$

1) $\cong$ on ühtivuse märk.

Asetame kolmnurga $A'B'C'$ kolmnurga ABC peale nõnda, et võrdsed küljed $B'C'$ ja BC ühtiksid; siis

külg $B'A'$ läheb külge BA mööda, sest et $\measuredangle B' = \measuredangle B$;

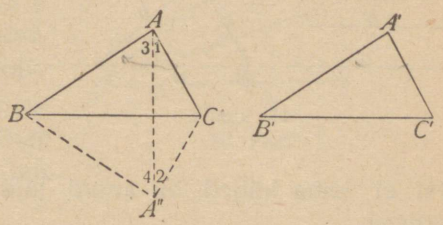
külg $C'A'$ läheb külge CA mööda, sest et $\measuredangle C' = \measuredangle C$;

punkt A', olles ühel ja samal ajal sirgete $B'A'$ ja $C'A'$ peal, kusjuures viimased ühtisid vastavalt sirgetega BA ja CA, asub ühel ja samal ajal ka sirgete BA ja CA peal, s. o. asub nende lõikepunktis. Kolmnurkade $A'B'C'$ ja ABC vastavad osad on võrdsed; järjelikult on need kolmnurgad ühtivad.

43. Lause. 3. juhus. Kaks kolmnurka on ühtivad, kui ühe kolmnurga kolm külge on teise kolmnurga kolme küljega vastavalt vôrdsed (40. joon.)[1].

$$T.: \quad AB = A'B' \qquad V.: \quad \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$
$$BC = B'C'$$
$$AC = A'C'.$$

Asetame $\triangle A'B'C'$ teise $\triangle ABC$ juurde nõnda, et ühtiksid nende võrdsed küljed, näiteks $B'C'$ ja BC. Siis omandab $\triangle A'B'C'$ kolmnurga $A''BC$ asendi. Tõmmates sirge AA'' saame kaks võrdhaarset kolmnurka: $\triangle ABA''$ ja $\triangle ACA''$, milledel on ühine alus AA''. Et võrdhaarse kolmnurga aluse lähisnurgad on võrdsed, siis



40. joonis.

$$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$$
$$\measuredangle 3 = \measuredangle 4,$$

kust järgneb, et

$$\measuredangle 1 + \measuredangle 3 = \measuredangle 2 + \measuredangle 4, \text{ s. o. } \measuredangle A = \measuredangle A'' = \measuredangle A'.$$

1) Kui ühe kolmnurga kolm nurka on teise kolmnurga kolme nurgaga vastavalt võrdsed, siis ei tähenda see veel, et ka kolmnurgad ühtivad oleksid, sest et võib ette kujutada lugemata hulga mitteühtivaid kolmnurki, millede nurgad on vastavalt võrdsed.

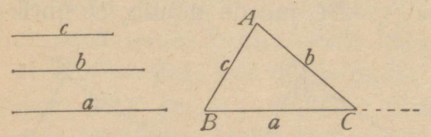
Kolmnurgad ABC ja $A'B'C'$ kui niisugused, millede kaks külge $AB = A'B'$ ja $AC = A'C'$ ja nende külgede vahelnurgad ($\sphericalangle A = \sphericalangle A'$) on vastavalt võrdsed, on ühtivad, mis oligi tarvis tõestada.

44. Märkus. Nagu nägime, on kolmnurkade ühtivuseks tingimata tarvis, et ühe kolmnurga kolm osa, millede seas vähemalt üks külg oleks, teise kolmnurga kolme osaga vastavalt võrduksid. Ühtivates kolmnurkades on kõik vastavad osad võrdsed, sest et nad ühtivad kolmnurkade teineteise peale asetamisel.

Konstruktsiooni-ülesannete põhitüübid [1]).

45. 1. ülesanne. Konstrueerida kolmnurk kolmest küljest: *a, b* ja *c* (41. joon.).

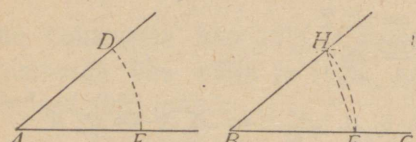
Juhuslisele sirgele asetame lõigu BC, mis võrdub a-ga. Tema otsapunktidest B ja C joonestame, b- ja c raadiusteks võttes, kaared. Nende kaarte lõikepunkti A ühendame punktidega B ja C. Kolmnurk ABC on otsitav, sest et tema küljed on antud lõikudega a, b ja c vastavalt võrdsed.



41. joonis.

2. ülesanne. Sirgjoonel *BC* antud punkti *B* juurde konstrueerida nurk, mis on võrdne antud nurgaga *DAE* (42. joon.).

Konstruktsioon. Punktist A joonestame juhuslise raadiusega kaare, mis lõikub antud nurga külgedega punktides D ja E. Sama raadiusega joonestame ka punktist B kaare, mis lõi-



42. joonis.

1) Konstruktsiooni-ülesandeid lahendatakse ainult kahe instrumendi — joonelaua ja sirkli abil.

kub antud sirgega BC mingis punktis F. Punktist F joonestame kaare raadiusega, mis võrdub kaugusega DE. Kahe kaare lõikepunkti H ühendame punktiga B. Saadud nurk HBF võrdub antud nurgaga DAE.

Tõestamine:

1. $BH = AD$
2. $BF = AE$ } kui võrdsed raadiused.
3. $HF = DE$, järjelikult (nr. 43)

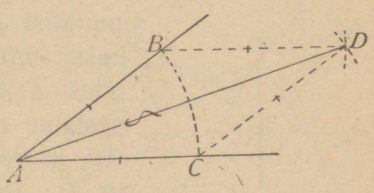
$$\triangle HBF = \triangle DAE;$$

et aga ühtivates kolmnurkades on vastavad elemendid võrdsed, siis

$$\sphericalangle HBF = \sphericalangle DAE,$$ mis oligi tarvis tõestada.

3. ülesanne. Antud nurk pooleks jagada (43. joon.).

Konstruktsioon. Antud nurga BAC tipust A joonestame juhuslise raadiusega kaare BC. Punktidest B ja C joonestame võrdsete raadiustega kaared nii, et nad lõikuksid mingis punktis D. Ühendades punktid D ja A sirge abil, saame $\sphericalangle BAC$ poolitaja.



43. joonis.

Tõestamine:

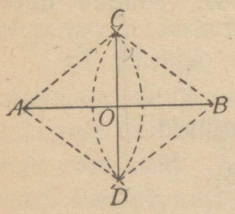
1. $AB = AC$, kui ühe ja sama kaare raadiused;
2. $BD = DC$, kui võrdsed raadiused;
3. $AD = AD$; järjelikult:

$\triangle ABD \cong \triangle ADC$ (nr. 43); nende kolmnurkade ühtivusest järgneb, et $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$, mis oligi tarvis tõestada.

4. ülesanne. Antud lõik jagada pooleks ja läbi tema keskpunkti temale ristjoon tõmmata.

Konstruktsioon. Antud lõigu AB otsapunktidest A ja B (44. joon.) joonestame kaks ringjoont nõnda, et nad lõikuksid. Lõikepunktid C ja D ühendame sirge abil, mis jagabki lõigu AB pooleks ja on temaga risti.

Tõestamine. Ühendame punktid C ja D punktidega A ja B. Vaatleme kolmnurki ACD ja BCD. Nendes on



44. joonis.

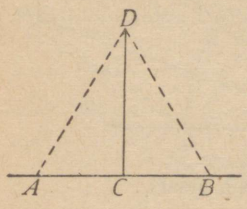
1. $AC = CB$
2. $AD = DB$ } kui võrdsed raadiused;
3. $CD = CD$, järjelikult

$$\triangle ACD \cong \triangle BCD, \text{ kust}$$
$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD,$$

s. o. CO on ACB poolitaja. Et $AC = CB$, siis $\triangle ACB$ on võrdhaarne ja tema nurgapoolitaja CO on ühtlasi ka küljepoolitajaks ja kõrguseks, s. o. $AO = OB$ ja $CO \perp AB$, mis oligi tarvis tõestada.

5. ülesanne. Sirgele *AB* läbi tema peal antud punkti *C* ristjoon tõmmata.

Konstruktsioon. Antud punktist C (45. joon.) kui keskpunktist joonestame ringjoone, mis lõikaks antud sirget mingisugustes punktides A ja B. Punktidest A ja B joonestame raadiusega, mis pikem on kui AC, kaared, mis lõikuksid mingis punktis D. Punkti D ühendame punktiga C. Sirge CD ongi otsitav ristjoon.



45. joonis.

Tõestamine. Ühendame punkti D punktidega A ja B ja vaatleme saadud kolmnurki ACD ja BCD. Nendes on

1. $AC = CB$
2. $AD = BD$ } konstruktsiooni järele;
3. $CD = CD$, järjelikult (nr. 43)

$$\triangle ACD \cong \triangle BCD;$$

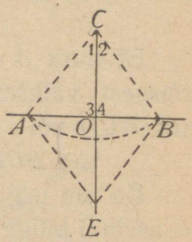
nende kolmnurkade ühtivusest järgnebki nurkade võrdsus:

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD;$$

nende kõrvunurkade võrdusest aga järgneb, et $CD \perp AB$, mis oligi tarvis tõestada.

6. ülesanne. Väljaspool sirget antud punktist lasta sellele sirgele ristjoon.

Konstruktsioon. Antud punktist C (46. joon.) kui keskpunktist joonestame niisuguse kaare, mis lõikaks antud sirgjoont mingisuguses kahes punktis A ja B. Punktidest A ja B tõmbame ühe ja sama juhuslise raadiusega niisugused kaared, mis lõikuksid mingis punktis E. Ühendame punktid E ja C. Sirge CE ongi otsitav.



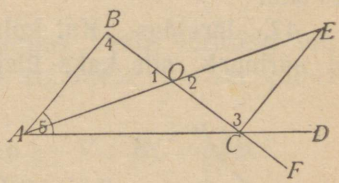
46. joonis.

Tõestamine. Ühendame punktid C ja E punktidega A ja B. Siis on kolmnurkades ACE ja BCE

1. $AC = CB$
2. $AE = BE$
} konstruktsiooni järele;
3. $CE = CE$, järelikult (nr. 43):

$$\triangle ACE \cong \triangle BCE, \text{ kust}$$
$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2,$$

s. o. CO on $\sphericalangle ACB$ poolitaja. Võrdhaarse kolmnurga ACB tipunurga poolitaja CO on ühtlasi ka sama kolmnurga kõrgus, s. o. $CO \perp AB$.



47. joonis.

46. Lause. Kolmnurga välisnurk on suurem igast sama kolmnurga sisenurgast, mis tema kõrvunurk ei ole.

T.: $\sphericalangle BCD$ on $\triangle ABC$ **välisnurk** (47. joon.).

V.: 1. $\sphericalangle BCD > \sphericalangle 4$;
2. $\sphericalangle BCD > \sphericalangle 5$.

Tõestamine. Jagame külje BC punktis O pooleks. Läbi punktide A ja O tõmbame sirge. Sama sirge pikenduse peal võtame $OE = AO$. Punkti E ühendame punktiga C. Kolmnurkades AOB ja COE on:

1. $BO = OC$
2. $AO = OE$
} konstruktsiooni järele;
3. $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ kui tippnurgad;

järjelikult (kaks kolmnurka on ühtivad kui ühe kolmnurga kaks

külge ja nende vaheline nurk on teise kolmnurga kahe külje ja nende vahelise nurgaga vastavalt võrdsed):

$$\triangle AOB \cong \triangle COE;$$

ühtivates kolmnurkades on aga vastavad[1]) nurgad isekeskis võrdsed; sellest järgneb, et

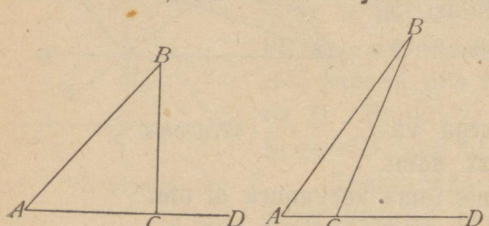
$$\measuredangle 3 = \measuredangle 4.$$

Et nurk 3 moodustab ainult nurga BCD osa, siis on ta viimasest väiksem; seepärast on ka nurk 4 väiksem kui nurk BCD või

$\measuredangle BCD > \measuredangle 4$, mis oligi tarvis tõestada.

Ka on $\measuredangle BCD > \measuredangle 5$; selle tõestamiseks pikendame AC asemel külge BC. Tegutsedes endist viisi, võime tõestada, et $\measuredangle ACF > \measuredangle 5$; et aga $\measuredangle ACF = \measuredangle BCD$ kui tippnurgad, siis ka nurk BCD on suurem kui nurk 5, mis oligi tarvis tõestada.

47. Järeldus. Kui kolmnurga üks sisenurk on täisnurk või nürinurk, siis kaks ülejäänud sisenurka on teravnurgad.



48. joonis.

Tõepoolest, kui kolmnurga ABC mingi nurk BCA (48. joon.) on täis- või nürinurk, siis on tema kõrvunurk BCD täis- või teravnurk; järjelikult on nurgad A ja B, kui välisnurgast BCD väiksemad nurgad, teravnurgad.

Kolmnurga külgede ja nurkade olenevus üksteisest.

48. Lause. Igas kolmnurgas vastu võrdseid külgi asetsevad võrdsed nurgad (nr. 40.).

1) Vastavateks nimetatakse ühtivates kolmnurkades neid nurki, mis asuvad vastu võrdseid külgi.

49. Lause. Igas kolmnurgas vastu suuremat külge asetseb suurem nurk.

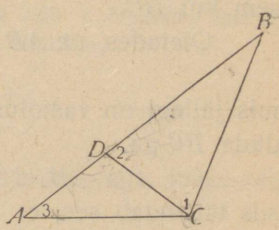
T.: $AB > BC$ (49. joon.). *V.:* $\measuredangle ACB > \measuredangle A$.

Tõestamine. Suuremale küljele AB asetame $BD = BC$. Kolmnurk DBC on võrdhaarne. $\measuredangle ACB > \measuredangle 1$, sest et nurk 1 moodustab nurga ACB osa. $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ kui võrdhaarse kolmnurga DBC aluse lähisnurgad, järjelikult

$\measuredangle ACB > \measuredangle 2$; kuid

$\measuredangle 2 > \measuredangle 3$ ($\measuredangle 2$ on kolmnurga välisnurk, $\measuredangle 3$ aga sisenurk); seda enam on siis

$\measuredangle ACB > \measuredangle 3$, mis oligi tarvis tõestada.



49. joonis.

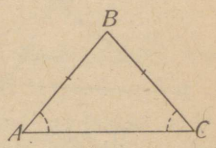
50. Pöördlause. Igas kolmnurgas vastu võrdseid nurki asetsevad võrdsed küljed, s. o. kolmnurk on sel juhusel võrdhaarne.

T.: $\measuredangle A = \measuredangle C$ (50. joon.). *V.:* $BC = AB$.

Tõestamine. Oletame, et $BC \neq AB$. Siis võib olla kaks juhust:

1. $BC > AB$;
2. $BC < AB$.

1. Kui $BC > AB$, siis (nr. 49) $\measuredangle A > \measuredangle C$, mis on vastolus tingimusega; järjelikult ei või BC olla suurem kui AB.



50. joonis.

2. Kui $BC < AB$, siis $\measuredangle A < \measuredangle C$, mis jälle on vastolus tingimusega; järjelikult ei või BC olla väiksem kui AB.

Kui aga BC ei ole ei suurem ega väiksem kui AB, siis peab

$BC = AB$, mis oligi tarvis tõestada.

Järeldus. Võrdnurkne kolmnurk on ühtlasi ka võrdkülgne kolmnurk.

51. Pöördlause. Iga kolmnurga suurema nurga vastu asetseb suurem külg.

$T.: \measuredangle C > \measuredangle A.$ $V.: AB > BC.$

Tõestamine. Oletame, et $AB < BC$; siis nr. 49 põhjal

$$\measuredangle C < \measuredangle A,$$

mis on vastolus tingimusega; järjelikult AB ei või olla väiksem kui BC.

Oletades, et $AB = BC$, saame nr. 48 põhjal, et

$$\measuredangle C = \measuredangle A,$$

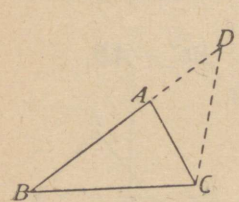
mis jällegi on vastolus tingimusega; järjelikult AB ei või võrduda BC-ga.

Kui aga AB ei ole väiksem kui BC ega võrdu BC-ga, siis tähendab see, et

$AB > BC$, mis oligi tarvis tõestada.

52. Lause. Iga kolmnurga üks külg on vähem kui kahe teise külje summa.

See lause on tõestamata selge, sest et lõik BC on kõige lühem kaugus kahe punkti B ja C vahel. Nõnda siis $BC < BA + AC$. Kuid seda lauset võib ka tõestada.



51. joonis.

Olgu kolmnurgas ABC külg BC kõige suurem; tõestame, et $BC < BA + AC$.

Külje BA pikendusele asetame $AD = AC$ ja ühendame sirge abil punktid D ja C. Et $\triangle ADC$ on võrdhaarne, siis $\measuredangle D = \measuredangle ACD$; kuid nurk ACD, olles nurga BCD osa, on viimasest nurgast väiksem; seepärast ka $\measuredangle D < \measuredangle BCD$; väiksema nurga vastu asetseb väiksem külg, järjelikult

$BC < BD$

või $BC < BA + AD$

või $BC < BA + AC$, mis oligi tarvis tõestada.

Järeldus. Iga kolmnurga üks külg on suurem kui kahe teise külje vahe.

Meie tõestasime juba, et

$$BA + AC > BC;$$

lahutades võrratuse kummastki osast AC, saame III aksioomi põhjal:

$BA > BC - AC$, mis oligi tarvis tõestada.

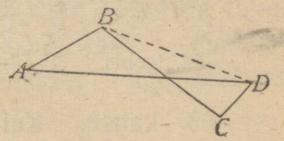
Märkus. Eelmisest lausest ja tema järeldusest järgneb, et mitte igast kolmest lõigust ei või kolmnurka konstrueerida. Kolmnurga konstrueerimiseks on tingimata tarvis, et **iga lõik** oleks lühem kui kahe teise lõigu summa, või et **mingisugune lõik** oleks lühem kui kahe teise lõigu summa ja pikem kui kahe teise lõigu vahe. Järjelikult võib 1. ülesande (nr. 45) konstrueerimise võimaluse tingimused järgmiselt kirjutada:

$$\left.\begin{aligned} a &< c + b \\ b &< c + a \\ c &< a + b \end{aligned}\right\} \text{ või } \begin{cases} a < b + c \\ a > b - c. \end{cases}$$

53. Lause. Sirglõik on lühem igast murdjoonest, mille otsapunktid sirglõigu otsapunktidega ühtivad.

Kui murdjoonel on kaks külge, siis võib seda lauset eelmise lause põhjal tõestada. Olgu murdjoonel kolm külge. Ühendades punktid B ja D, saame (52. joon.);

$$AD < AB + BD$$
$$BD < BC + CD$$



52. joonis.

Liites need võrratused ositi, saame:

$AD + BD < AB + BD + BC + CD.$

Lahutades uue võrratuse kummastki osast BD, saame:

$AD < AB + BC + CD$, mis oligi tarvis tõestada.

Samasuguse arutluse abil võime tõestada selle lause juhustel, kui murdjoonel on 4, 5 või rohkem külgi.

54. Lause. Kumer murdjoon $ABCD$ (53. joon.) on lühem igast teda ümberhaaravast murdjoonest $AMND$, kui neil murdjoontel on ühised otsapunktid.

$$V.: AB + BC + CD < AM + MN + ND.$$

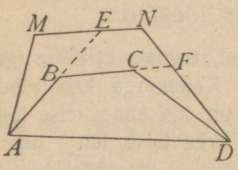
Tõestamine. Pikendame külgi AB ja BC, kuni nad lõikuvad ümberhaarava murdjoonega punktides E ja F. Eelmise lause põhjal võime kirjutada võrratused:

$$AB + BE < AM + ME,$$
$$BC + CF < BE + EN + NF,$$
$$CD < CF + FD.$$

Liites esiteks saadud võrratused ositi ja lahutades saadud võrratuse kummastki osast ühed ja samad lõigud BE ja CF, saame:

$$AB + BC + CD < AM + ME + EN + NF + FD;$$

arvesse võttes, et $ME + EN = MN$ ja $NF + FD = ND$, saame:
$AB + BC + CD < AM + MN + ND$, mis oligi tarvis tõestada.

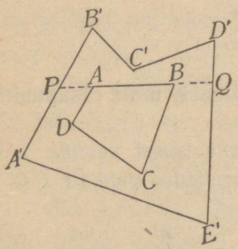


53. joonis.

55. Lause. Kumera hulknurga perimeeter on lühem niisuguse kinnise kôverjoone perimeetrist, mis kumerat hulknurka igast küljest piirab (54. joon.).

Pikendame külge AB kahes sihis, kuni ta lõikub ümberhaarava murdjoonega punktides P ja Q. Siis võime nr. 53. ja 54. põhjal kirjutada:

$$PA + AB + BQ < PB' + B'C' + CD' + D'Q,$$
$$AD + DC + CB < PA + PA' + A'E' + E'Q + BQ.$$



54. joonis.

Liites need võrratused ositi ja lahutades saadud võrratuse kummastki osast PA ja PQ, saame:

$$AB + AD + DC + CB < \underbrace{PB' + PA'}_{} + \\ + B'C' + C'D' + \underbrace{D'Q + QE'}_{} + A'E';$$

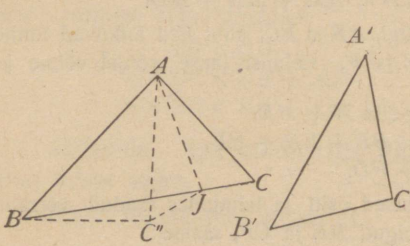
silmas pidades, et $PB' + PA' = A'B'$ ja $D'Q + QE' = E'D'$, leiame:

$$AB + AD + DC + CB < A'B' + B'C' + C'D' + \\ + E'D' + A'E',$$ mis oligi tarvis tõestada.

56. Lause. Kui ühe kolmnurga kaks külge on teise kolmnurga kahe küljega vastavalt võrdsed, kuid nende külgede vahelised nurgad ei ole võrdsed, siis vastu vähemat nurka asetseb väiksem külg (55. joon.).

$$T.: A'B' = AB \quad V.: B'C' < BC.$$
$$A'C' = AC$$
$$\sphericalangle A' < \sphericalangle A$$

Tõestamine. Asetame kolmnurga $A'B'C'$ kolmnurga ABC peale nõnda, et võrdsed küljed $A'B'$ ja AB ühtiksid.



55. joonis.

Et tingimuse järele on $\sphericalangle A' < \sphericalangle A$, siis külg $A'C'$ läheb nurga BAC sisemist valdkonda mööda ja kolmnurk $A'B'C'$ võtab kolmnurga ABC'' asendi.

Tõmbame $\sphericalangle CAC''$ poolitaja AI, mis lõikab külge BC punktis I; punkti I ühendame punktiga C''. Et kolmnurkades AIC ja AIC'' on:

külg AI ühine;

külg $AC=AC''$ tingimuse järele, sest et $AC''=A'C'$;

$\sphericalangle IAC=\sphericalangle IAC''$ konstruktsiooni järele (AI on nurgapoolitaja), siis $\triangle AIC\cong AIC''$; järjelikult

$$IC''=IC.$$

Kolmnurga üks külg on vähem kui kahe teise külje summa (nr. 52); sellest järgneb:

$$BC''<BI+IC'';$$

asetades BC'' asemele temaga võrdse $B'C'$ ja IC'' asemele temaga võrdse IC, saame:

$$B'C'<BI+IC,$$

või $B'C'<BC$, mis oligi tarvis tõestada.

57. Pöördlause. Kui ühe kolmnurga kaks külge on teise kolmnurga kahe küljega vastavalt võrdsed, kuid kolmandad küljed ei ole võrdsed, siis vastu väiksemat külge asetseb väiksem nurk.

T.: $A'B'=AB$ (55. joon.). $A'C'=AC$ $B'C'<BC$. *V.*: $\sphericalangle A'<\sphericalangle A$.

Tõestamine. Selle lause, nagu suurema osa pöördlauseid üldse, tõestame vastuoletusliselt. Oletame, et

$$\sphericalangle A'>\sphericalangle A;$$

siis saame eelmise lause põhjal:

$$B'C'>BC,$$

mis pole võimalik, sest et oletuse järele on $B'C'<BC$. Tuletuse mõttetus näitab, et meie oletus ei olnud õige.

Oletame nüüd, et

$$\sphericalangle A'=\sphericalangle A;$$

siis on kolmnurkadel ABC ja $A'B'C'$ kahe vastavalt võrdse külje vahel veel võrdsed nurgad; järjelikult on need kolmnurgad ühtivad, millest järgneb, et

$$B'C' = BC,$$

mis jällegi pole võimalik, sest et tingimuses seisab:

$$B'C' < BC.$$

Järjelikult ka teine oletus pole õige, sest arutluse lõpul saime mõttetuse. Ei või aga $\measuredangle A'$ olla ei suurem kui nurk A, ega või temaga ka võrduda, siis jääb järele ainuke võimalus, et $\measuredangle A' < \measuredangle A$, mis oligi tarvis tõestada.

Täisnurksete kolmnurkade ühtivus.

58. Lause. 1. juhus. Kaks täisnurkset kolmnurka on ühtivad, kui ühe täisnurkse kolmnurga kaatetid võrduvad vastavalt teise kolmnurga kaatetitega.

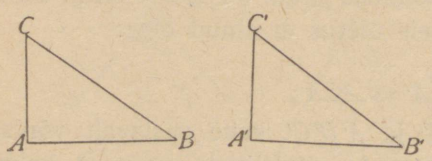
Kaatetite vahelised nurgad on võrdsed kui täisnurgad; järjelikult on kolmnurgad ühtivad kolmnurkade ühtivuse 1. juhuse järele (nr. 41).

59. Lause. 2. juhus. Kaks täisnurkset kolmnurka on ühtivad, kui ühe täisnurkse kolmnurga kaatet ja teravnurk on teise kolmnurga kaateti ja teravnurgaga vastavalt võrdsed.

Et kaateti teine lähisnurk on täisnurk, mis võrdub teises kolmnurgas asuva täisnurgaga, siis on kolmnurgad ühtivad kolmnurkade ühtivuse 2. juhuse järele (nr. 42).

60. Lause. 3. juhus. Kaks täisnurkset kolmnurka on ühtivad, kui ühe kolmnurga hüpotenuus ja teravnurk on teise kolmnurga hüpotenuusi ja teravnurgaga vastavalt võrdsed (56. joon.).

T.: $BC = B'C'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$. *V.:* $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.



56. joonis.

Tõestamine. Asetame kolmnurga $A'B'C'$ kolmnurga ABC peale nõnda, et võrdsed hüpotenuusid $B'C'$ ja BC ühtiksid. Nurkade B ja B' võrdsuse tagajärjel

läheb kaatet $B'A'$ mööda kaatetit BA, kuna aga kaatet $C'A'$, mis on risti $B'A'$-ga, ühtib kaatetiga CA, mis on risti BA-ga, sest et ühest punktist võib sirgjoonele lasta ainult ühe ristjoone. Nõnda on ΔABC ja $\Delta A'B'C'$ ühtivad.

61. Järeldus. Ühtivate kolmnurkade vastavad kõrgused on võrdsed (57. joon.).

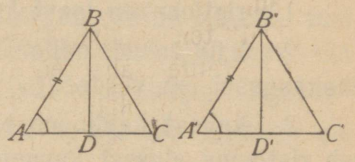
$T.: \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'.$ $V.: BD = B'D'.$

Tõestamine. $\left.\begin{matrix} AB = A'B' \\ \measuredangle A = \measuredangle A' \end{matrix}\right\}$ sest et $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$;

järjelikult $\Delta ABD \cong \Delta A'B'D'$, sest neil on hüpotenuusid ja ühed vastavad teravnurgad võrdsed; sellest järgneb, et

$$BD = B'D',$$

mis oligi tarvis tõestada.

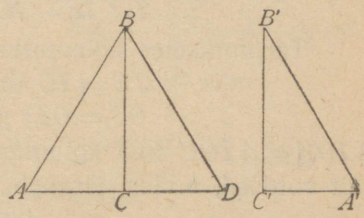


57. joonis.

62. Lause. 4. juhus. Kaks täisnurkset kolmnurka on ühtivad, kui ühe kolmnurga hüpotenuus ja üks kaatet on teise kolmnurga hüpotenuusi ja kaatetiga vastavalt võrdsed.

$T.: AB = A'B'$ (58. joon.). $V.: \Delta ABC = \Delta A'B'C'.$
$BC = B'C'.$

Tõestamine. Asetame kolmnurga $A'B'C'$ kolmnurga ABC juurde nõnda, et võrdsed kaatetid BC ja $B'C'$ ühtiksid. Et lähisnurkade $\measuredangle ACB$ ja $\measuredangle DCB$ summa on 2d, siis on need nurgad kõrvunurgad (nr. 23); seepärast moodustavad küljed AC ja CD sirgjoone; järjelikult on saadud joonis $ABDC$ võrdhaarne kolmnurk, sest et



58. joonis.

$$AB = A'B' = BD;$$

et aga võrdhaarse kolmnurga aluse lähisnurgad on võrdsed, siis

$$\measuredangle A = \measuredangle D = \measuredangle A'.$$

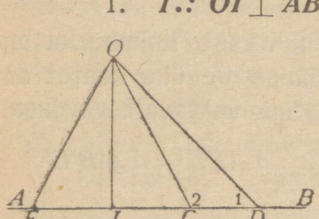
Kolmnurgad ABC ja $A'B'C'$, millede hüpotenuusid ($AB = A'B'$) ja ühed teravnurgad ($\measuredangle A = \measuredangle A'$) on vastavalt võrdsed, on ühtivad, mis oligi tarvis tõestada.

Rist- ja kaldjoonte omadused.

63. Lause. Kui väljaspool sirget võetud punktist tõmmata sellele sirgele ristjoon ja mitu isesugust kaldjoont, siis:

1. **ristjoon on igast kaldjoonest lühem;**
2. **kaldjooned, mille alused asetsevad ristjoone alusest ühekaugusel, on võrdsed;**
3. **kahest kaldjoonest on see suurem, mille alus asetseb ristjoone alusest kaugemal.**

1. ***T.: OI*** $\perp$ ***AB*** (59. joon.) ***V.: OI*** $<$ ***OE.***



59. joonis.

Täisnurkses kolmnurgas OEI külg OI asetseb vastu teravnurka OEI, külg OE asetseb vastu täisnurka OIE; teravnurk on täisnurgast väiksem, järjelikult (nr. 51)

$$OI < OE,$$

mis oligi tarvis tõestada.

2. ***T.: IE*** $=$ ***IC.*** ***V.: OE*** $=$ ***OC.***

Täisnurksetes kolmnurkades IOE ja IOC

$IE = IC$ tingimuse järele;

$OI = OI$; järjelikult

$\Delta IOE \cong \Delta IOC$ kui kolmnurgad, millede kaatetid on vastavalt võrdsed, millest järgneb, et

$$OE = OC,$$

mis oligi tarvis tõestada.

T.: ID $>$ ***IC*** ***V.: OD*** $>$ ***OC.***

Nurk 2 kui ΔOIC välisnurk on suurem kui temaga mitte kõrvuti asetsev sise-täisnurk OIC; järjelikult on $\measuredangle 2$ nürinurk. Seepärast (nr. 47) on $\measuredangle 1$ teravnurk. Et nürinurk on suurem kui teravnurk, siis

$\measuredangle 2 > \measuredangle 1$, millest järgneb, et
$OD > OC$, mis oligi tarvis tõestada.

Kui kaldjoon OE, mille alus asetseb ristjoone aluse ligemal, asub teisel pool ristjoont, siis võttes $IC = IE$ ja ühendades punktid O ja C, saame (2), et $OC = OE$; tõestuse järele on aga $OD > OC$; järjelikult ka $OD > OE$.

Pöördlause. Kui väljaspool sirget võetud punktist tõmmata sellele sirgele ristjoon ja mitu isesugust kaldjoont, siis:

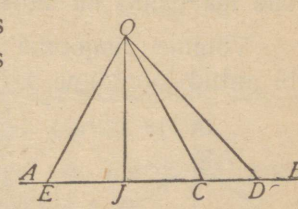
1. **ristjoon on punkti kõige väiksem kaugus sirgest;**
2. **võrdsete kaldjoonte alused asetsevad ristjoone alusest ühekaugusel;**
3. **suurema kaldjoone alus asetseb ristjoone alusest kaugemal kui väiksema kaldjoone alus.**

1. ***T.: OI* on punkti *O* kõige väiksem kaugus sirgest *AB*.**
***V.: OI* ⊥ *AB*.**

Kui lõik OI (60. joon.) ei oleks AB-le ristjooneks, siis tõmmates $OE \perp AB$, leiaksime (nr. 63; 1) et

$$OE < OI,$$

mis oleks tingimusega vastolus.



60. joon.

2. ***T.: OC* = *OE*** (60. joon.)
***V.: IC* = *IE*.**

Täisnurksetes kolmnurkades OIC ja OIE

$OC = OE$ tingimuse järele,
$OI = OI$, järjelikult

$\Delta OIC \cong \Delta OIE$; sellest järgneb, et
$IC = IE$, mis oligi tarvis tõestada.

3. *T.:* $OD > OE$. *V.:* $ID > IE$.

Oletame, et

$$ID < IE,$$

siis (nr. 63, 3)

$$OD < OE,$$

mis oleks tingimusega vastolus.

Oletades nüüd, et

$$ID = IE,$$

siis (nr. 63, 2)

$$OD = OE,$$

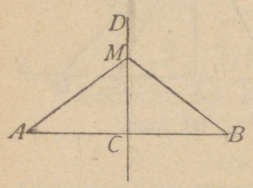
mis jälle oleks tingimusega vastolus; järjelikult ID ei võrdu IE-ga. Kui aga ID ei ole vähem kui IE ega võrdu viimasega, siis on $ID > IE$, mis oligi tarvis tõestada.

65. Märkus. Antud punktist sirgele tõmmatud ristjoont nimetatakse selle punkti kauguseks sirgest.

Tähendab, et see ristjoon on kõige lühem tee, mida mööda võib punktist sirgeni jõuda.

66. Lause. Lõigu keskpunktist läbi tõmmatud ristjoone iga punkt on selle lõigu otsapunktidest ühekaugusel.

Võtame ristjoonel DC (61. joon.), mis on tõmmatud läbi antud joonlõigu AB keskpunkti C, juhuslise punkti M ja ühendame ta punktidega A ja B. Siis on kaldjooned MA ja MB võrdsed, sest et nende alused asetsevad ühekaugusel ristjoone alusest. Sedasama võime iga sel ristjoonel asetseva punkti kohta tõestada; järjelikult on iga punkt, mis asub sel ristjoonel, ühekaugusel lõigu otsapunktidest A ja B.



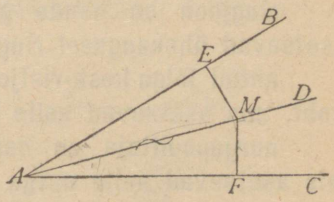
61. joonis.

Pöördlause. Iga punkt, mis on ühekaugusel antud lõigu otsapunktidest, asetseb läbi selle lõigu keskpunkti tõmmatud ristjoonel.

Olgu punkt M (61. joon.) ühekaugusel punktidest A ja B, s. o. olgu $MA = MB$; tõmmates $MC \perp AB$ leiame, et võrdsed kaldjooned asetsevad ühekaugusel ristjoone alusest, s. o. $AC = CB$. Järjelikult asetseb punkt M lõigu AB keskpunktist läbi tõmmatud ristjoonel, mis oligi tarvis tõestada.

68. Lause. Nurgapoolitaja iga punkt asetseb selle nurga külgedest ühekaugusel.

Võtame nurga BAC nurgapoolitajal AD mingisuguse punkti M ja tõmbame temast nurga kummalegi küljele ristjoone, nimelt ME ja MF.



62. joonis.

Täisnurksetes kolmnurkades MAE ja MAF

$\measuredangle MAE = \measuredangle MAF$ tingimuse järele;
$AM = AM$, järjelikult
$\Delta AME \cong \Delta AMF$,

sest et ühe kolmnurga hüpotenuus ja teravnurk on teise kolmnurga hüpotenuusi ja teravnurgaga vastavalt võrdsed; siit järgneb, et

$$ME = MF,$$

s. o. punkt M asetseb nurga külgedest ühekaugusel; samuti võime tõestada nurgapoolitaja iga teise punkti kohta.

69. Pöördlause. Iga punkt, mis on nurga külgedest ühekaugusel, asetseb selle nurga poolitaja peal.

T.: $ME = MF$ (62. joonis.).

Väide: $\measuredangle MAE = \measuredangle MAF$.

Tõestamine. Täisnurksetes kolmnurkades AME ja AMF

$ME = MF$ tingimuse järele;
$AM = AM$, järjelikult

$$\Delta AME \cong \Delta MAF,$$

sest et hüpotenuusid ja ühed kaatetid on vastavalt võrdsed; siit saame:

$$\sphericalangle MAE = \sphericalangle MAF.$$

70. Definitsioon. Joont (või pinda), mille kõigil punktidel on üks ja sama ainult nende päralt olev omadus, nimetatakse nende punktide geomeetriliseks kohaks.

Selle definitsiooni põhjal võib ütelda:

ringjoon on nende punktide geomeetriline koht, mis asetsevad ühekaugusel ringjoone keskpunktist;

antud lõigu kesk-ristjoon on nende punktide geomeetriline koht, mis asetsevad selle lõigu otsapunktidest ühekaugusel;

nurgapoolitaja on nende punktide geomeetriline koht, mis asetsevad selle nurga külgedest ühekaugusel.

Harjutused.

Tõestada laused.

1. Kolmnurga küljepoolitaja on väiksem nende kahe külje poolsummast, mis moodustavad nurga, mille tipust on küljepoolitaja tõmmatud. Juhatus: pikendada küljepoolitajat tema enese pikkuselt.

2. Iga võrdhaarse kolmnurga aluse lähisnurkade tippudest tõmmatud kõrgused on võrdsed.

3. Punkt, mis ei asetse antud lõigu kesk-ristjoonel, ei ole ühekaugusel lõigu otsapunktidest.

4. Punkt, mis ei asetse nurgapoolitajal, ei ole ühekaugusel nurga külgedest.

Konstruktsiooni-ülesanded.

5. Konstrueerida $\triangle$, kui on antud kaks külge ja nende külgede vahelnurk.

6. Konstrueerida $\triangle$, kui on antud üks külg ja tema kaks lähisnurka.

7. Konstrueerida võrdhaarne $\triangle$, kui on antud alus ja üks haar.

8. Konstrueerida võrdhaarne $\triangle$, kui on antud alus ja aluse lähisnurk.

9. Konstrueerida täisnurkne $\triangle$, kui on antud kaks kaatetit.

10. Konstrueerida täisnurkne $\triangle$, kui on antud kaatet ja hüpotenuus.

11. Konstrueerida võrdhaarne $\triangle$, kui on antud kõrgus ja haar.

12. Konstrueerida võrdhaarne $\triangle$, kui on antud kõrgus ja tipunurk.

13. Konstrueerida täisnurkne $\triangle$, kui on antud hüpotenuus ja teravnurk.

IV peatükk.

Rööpsirged.

71. Definitsioon. Kui kaks sirget

1) **asuvad ühel tasapinnal ja**

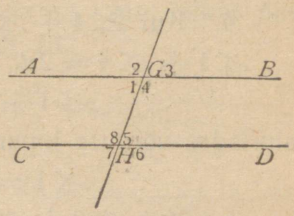
2) **ei lõiku, kui palju neid ka kahele poole ei pikendataks, siis nimetatakse neid sirgeid rööbikuteks.**

Kui kaht sirget AB ja CD lõikab kolmas GH (63. joon.), siis moodustuvad järgmised nurgad:

vastavad nurgad: $\measuredangle 3$ ja $\measuredangle 5$; $\measuredangle 4$ ja $\measuredangle 6$; $\measuredangle 2$ ja $\measuredangle 8$; $\measuredangle 1$ ja $\measuredangle 7$;

sisemised põiknurgad: $\measuredangle 1$ ja $\measuredangle 5$; $\measuredangle 4$ ja $\measuredangle 8$;

välimised põiknurgad: $\measuredangle 2$ ja $\measuredangle 6$; $\measuredangle 3$ ja $\measuredangle 7$;



63. joonis.

sisemised rindnurgad: $\measuredangle 4$ ja $\measuredangle 5$; $\measuredangle 1$ ja $\measuredangle 8$;

välimised rindnurgad: $\measuredangle 3$ ja $\measuredangle 6$; $\measuredangle 2$ ja $\measuredangle 7$.

72. Laused. Kaks sirget, mida lõikab kolmas sirge, on rööbikud, kui

1) **sisemised põiknurgad on võrdsed;**

või 2) **välimised põiknurgad on võrdsed;**

või 3) **vastavad nurgad on võrdsed;**

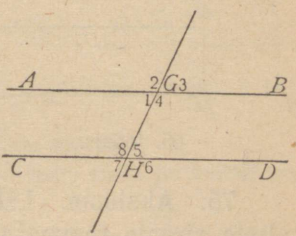
või 4) **sisemiste rindnurkade summa on** $2d$;

või 5) **välimiste rindnurkade summa on** $2d$.

1. $\measuredangle 1 = \measuredangle 5$ (64. joon).

V.: $AB \parallel CD$ [1]).

T.: Kui AB ja CD ei oleks rööbikud, s. o. kui nad lõikuksid mingis punktis, siis saaksime kolmnurga, milles kas $\measuredangle 1$ või $\measuredangle 5$ oleks sisemiseks, aga teine välimiseks nurgaks; et tingimuse järele



64. joonis.

1) $AB \parallel CD$ tähendab: AB ja CD on rööbikud.

$\measuredangle 1 = \measuredangle 5$, siis jõuaksime valel alusel püsivale otsusele, nagu oleksid sise- ja välisnurgad võrdsed (nr. 46).

2. Kui $\measuredangle 3 = \measuredangle 7$, siis pannes sellesse võrdusesse $\measuredangle 3$ asemele temaga võrdse tippnurga $\measuredangle 1$ ja $\measuredangle 7$ asemele $\measuredangle 5$, saame

$$\measuredangle 1 = \measuredangle 5, \text{ millest järgneb, et } AB \parallel CD.$$

3. Kui $\measuredangle 3 = \measuredangle 5$, siis pannes $\measuredangle 3$ asemele $\measuredangle 1$, saame

$$\measuredangle 1 = \measuredangle 5; \text{ järjelikult } AB \parallel CD.$$

4. Kui $\measuredangle 4 + \measuredangle 5 = 2d$, siis teades, et

$\measuredangle 1 + \measuredangle 4 = 2d$, kui kõrvunurkade summa, saame:

$$\measuredangle 1 + \measuredangle 4 = \measuredangle 4 + \measuredangle 5;$$

lahutades võrduse kummastki osast ühe ja sama $\measuredangle 4$, leiame:

$$\measuredangle 1 = \measuredangle 5, \text{ s. o. } AB \parallel CD.$$

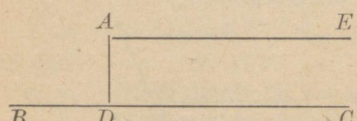
5. Kui $\measuredangle 2 + \measuredangle 7 = 2d$, siis pannes $\measuredangle 2$ asemele temaga võrdse $\measuredangle 4$ ja $\measuredangle 7$ asemele temaga võrdse $\measuredangle 5$, leiame, et

$$\measuredangle 4 + \measuredangle 5 = 2d,$$

millest, nagu tõestatud (4), järgneb, et $AB \parallel CD$.

73. Järeldus. Kui kaks sirget on risti ühe ja sama kolmanda sirgega (ühel ja samal tasapinnal), siis on nad isekeskis rööbikud, sest et sel juhusel on kahe sisemise rindnurga summa $2d$.

74. Lause. Läbi väljaspool sirget asuva punkti võib sellele sirgele rööpjoone tõmmata.



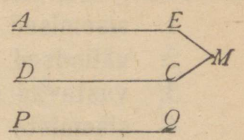
65. joonis.

Antud punktist A (65. joon.) laseme sirgele BC ristjoone AD. Läbi punkti A tõmbame sirgele AD ristjoone AE. Sirged AE ja BC, olles mõlemad risti AD-ga, on isekeskis rööbiti.

75. Aksioom. Läbi väljaspool sirget asuva punkti võib sellele sirgele tõmmata ainult ühe rööpjoone [1]).

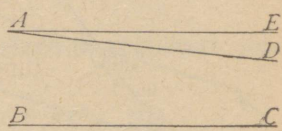
1) Seda aksioomi (vähe muudetud kujul) nimetatakse Eukleidese üheteistkümnendaks aksioomiks ehk **Eukleidese postulaadiks.** Selle aksioomi

I järeldus. Kui kumbki kahest sirgest *AE* ja *DC* (66. joon.) **on rööbiti kolmanda sirgjoonega *PQ*, siis on nad ka isekeskis rööbiti,** sest kui nad ei oleks rööbiti, vaid lõikuksid mingis punktis *M*, siis oleks läbi punkti *M* tõmmatud kaks sirget, millest kumbki oleks rööbiti *PQ*-ga, mis oleks vastolus aksioomiga (nr. 75.).



66. joonis.

II järeldus. Sirgjoon *AD* (67. joon.), **mis lõikab üht kahest rööpsirgest *AE*, lõikab ka teist *BC*,** sest kui *AD* ei lõikaks *BC*, siis oleks ta temaga rööbiti, ja järjelikult oleks läbi ühe punkti *A* tõmmatud kaks sirget *AE* ja *AD*, kusjuures nad mõlemad oleksid *BC*-ga rööbiti, mis on vastolus aksioomiga.



67. joonis.

---

tõe silmanähtava selguse suhtes oli vasturääkimisi juba vanal ajal, samuti aga ka hiljemini. On tehtud väga palju katseid selle aksioomi tõestamiseks, kuid ükski neist katsetest ei ole seniajani õnnestunud. Lobatševski (1793.—1856. a.), kes oma geomeetriasse jättis Eukleidese kõik teised aksioomid, võttis toodud aksioomi asemele järgmise oletuse: **Läbi väljaspool sirget *ML* asuva punkti *A* tasapinnal võib tõmmata lugemata hulga sirgeid, mis ei lõiku antud sirgega *ML*.** Kõik need mittelõikuvad sirged asetsevad mingis nurgas *BAC* (ja tema tippnurgas), mida nimetatakse **rööpsuse** (parallelismi) **nurgaks.** Selle nurga küljed *AB* ja *AC* ka ei lõiku *ML*-ga.



Selle oletuse tagajärjel erineb Lobatševski geomeetria, rööpsirgete teooriast alates, Eukleidese geomeetriast täiesti. Näiteks olgu mõned laused Lobatševski geomeetriast:

Kolmnurga sisenurkade summa on vähem kui $2d$.

Püstkülikuid ei ole olemas (kui nelinurga kolm nurka on täisnurgad, siis neljas nurk on teravnurk).

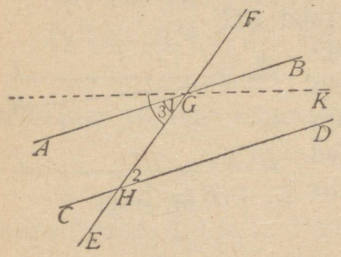
Sarnaseid jooniseid ei ole olemas jne.

Lobatševski geomeetrias ei ole vasturääkivaid tõdesid, puuduvad ka tõed, mis Eukleidese teiste aksioomidega vastolus oleksid. See näitab, et võimatu on Eukleidese seda postulaati eraldada tema teistest aksioomidest.

76. Pöördlause. Kui kaks rööpsirget on lõigatud kolmanda sirgega, siis on:

1. **sisemised põiknurgad võrdsed;**
2. **välimised põiknurgad võrdsed;**
3. **vastavad nurgad võrdsed;**
4. **sisemiste rindnurkade summa 2 *d*;**
5. **välimiste rindnurkade summa 2 *d*.**

T.: ***AB*** ∥ ***CD*** (68. joon.). *V.:* $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$.

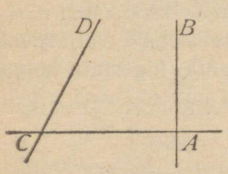


68. joonis.

Kui $\measuredangle 1$ ei võrduks $\measuredangle 2$, siis, tõmmates sirge *GK* nõnda, et $\measuredangle 3 = \measuredangle 2$, leiame, et *GK* ∥ *CD*, s. o. et *CD*-le on läbi ühe punkti *G* tõmmatud kaks rööpsirget *AB* ja *GK*, mis on vastolus aksioomiga (nr. 75). Järjelikult $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$.

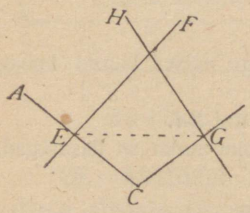
Samuti tõestatakse teised juhused.

77. I järeldus. Kui sisemiste rindnurkade summa ei ole 2 *d*, siis lõikuvad sirged, kui neid pikendada[1]), sest et kui sirged ei lõikuks, siis oleksid nad rööbikud ja siis oleks sisemiste rindnurkade summa 2*d*.



69. joonis.

78. II järeldus. Ristjoon *AB* (69. joon.) ja kaldjoon *CD*, mis on tõmmatud ühele ja samale sirgele *CA*, lõikuvad, kui neid pikendatakse, sest et kahe sisemise rindnurga $\measuredangle BAC$ ja $\measuredangle DCA$ summa ei ole 2 *d*.



70. joonis.

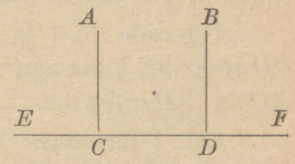
79. III järeldus. Kaks sirget *EF* ja *GH* (70. joon.), mis on risti kahe lõikuva sirgega, lõikuvad.

Tõmmates sirge *EG*, leiame, et kumbki sisenurk *FEG* ja *HGE* on vähem kui täisnurk; järjelikult on nende kahe nurga summa vähem kui 2*d*; seepärast peavad sirged *EF* ja *GH* lõikuma (nr. 77).

1) See ongi Eukleidese geomeetria XI aksioom (Eukleidese postulaat).

80. IV järeldus. Kui sirge *EF* (71. joon.) on risti ühega kahest rööpsirgest *BD*, siis on ta ka teisega *AC* risti.

Tõestamine. Sirge *EF*, mis lõikab üht rööpsirget *BD*, lõikab ka teist *AC* (nr. 75; II). Et $AC \parallel BD$, siis $\measuredangle BDC = \measuredangle ACE$ kui vastavad nurgad; tingimuse järele on aga $\measuredangle BDC$ täisnurk, järjelikult on ka $\measuredangle ACE$ täisnurk, s. o. $AC \perp EF$, mis oligi tarvis tõestada.



71. joonis.

81. Lause. Rööpsirgete vahel asetsevad rööbikute lõigud on võrdsed.

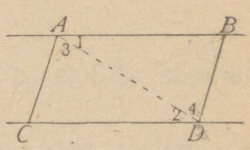
T.: $AC \parallel BD$ (72. joon.) $AB \parallel CD$.

V.: $AC = BD$ $AB = CD$

Tõestamine: Tõmbame sirge *AD*. Kolmnurkades *ABD* ja *ACD*

$$AD = AD;$$

$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ kui sisemised põiknurgad rööpsirgete *AB* ja *CD* suhtes;



72. joonis.

$\measuredangle 3 = \measuredangle 4$ kui sisemised põiknurgad rööpsirgete *AC* ja *BD* suhtes; järjelikult

$$\Delta ABD \cong \Delta ACD.$$

Nende kolmnurkade ühtivusest järgneb vastavate külgede võrdsus:

$AC = BD$,

$AB = CD$, mis oligi tarvis tõestada.

82. Pöördlause. Võrdsete lõikude *AB* ja *CD* otsapunkte ühendavad võrdsed lõigud *AC* ja *BD* on rööbikud (73. joon.).

Tõestamine. Kolmnurkades *ABD* ja *ACD*

$AD = AD$;

$AC = BD$ tingimuse järele;

$AB = CD$ tingimuse järele; järjelikult
$\triangle ABD \cong \triangle ACD$, millest järgneb, et
$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ ja $\measuredangle 3 = \measuredangle 4$
kui ühtivate kolmnurkade vastavad nurgad.

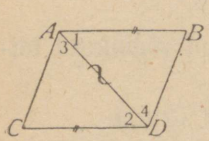
Nurkade $\measuredangle 1$ ja $\measuredangle 2$ võrdsusest oleneb külgede AB ja CD rööpsus, kuna aga nurkade $\measuredangle 3$ ja $\measuredangle 4$ võrdsusest oleneb AC ja BD rööpsus.

83. I järeldus. Kui $AB \# CD$, siis $AC \# BD$[1] (73. joon.).

Tõestamine. Kolmnurkades ABD ja ACD

$AD = AD$;
$AB = CD$ tingimuse järele;
$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$,

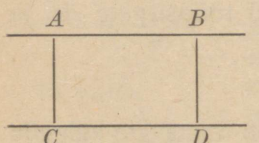
sest et AB ja CD on rööbikud; järjelikult
$\triangle ABD \cong \triangle ACD$.



73. joonis.

Nende kolmnurkade ühtivusest järgneb, et
$AC = BD$, mis oligi tarvis tõestada;
$\measuredangle 3 = \measuredangle 4$;
nurkade $\measuredangle 3$ ja $\measuredangle 4$ võrdsusest järgneb, et
$AC \parallel BD$, mis oligi tarvis tõestada.

84. II järeldus. Kaks rööpsirget asetsevad igas kohas teineteisest ühekaugusel.



74. joonis.

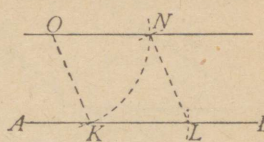
Olgu AB ja CD (74. joon.) antud rööpsirged, AC ja BD nende rööpsirgete ristjooned. AC ja BD on isekeskis rööbiti, sest et nad on risti ühe ja sama sirgega. Rööpsirgete vahel asetsevad rööbikute lõigud on aga isekeskis võrdsed; järjelikult $AC = BD$, mis oligi tarvis tõestada.

85. Ülesanne. Antud sirgele AB läbi antud punkti O rööpsirge tõmmata.

Konstruktsioon. Tõmbame punktist O (75. joon.) kaare KN niisuguse raadiusega, et kaar lõikaks antud sirget AB

1) Märk # tähendab võrdsust ja rööpsust.

mingis punktis K. Punktist K teeme sama raadiusega sirgel AB märgi, mille tähistame L-ga. Punktist L tõmbame sama raadiusega kaare, mis lõikub kaarega KN punktis N. Ühendades punktid N ja O, saamegi otsitava rööpsirge ON.



75. joonis.

Tõestamine. Et kõik kaared tõmmati ühe ja sama raadiusega, siis $OK = KL = LN = ON$. Järjelikult on võrdsed lõigud ON ja KL, mis ühendavad võrdsete lõikude OK ja NL otsapunkte, rööbikud (nr. 82), mis oligi tarvis tõestada.

86. Lause. Rööbikute külgedega nurgad on võrdsed, kui nad mõlemad on kas teravad või nürid, ja nende summa on $2d$, kui üks neist on terav, teine aga nüri.

1. *T.*: $EF \parallel BC$ (76. joon.). $ED \parallel BA$. *V.*: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$.

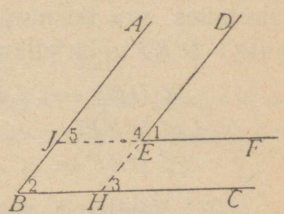
Pikendades külgi EF ja ED, kuni nad lõikuvad nurga ABC külgedega, saame:

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ kui vastavad nurgad;

$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ kui vastavad nurgad; järjelikult

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$,

mis oligi tarvis tõestada.



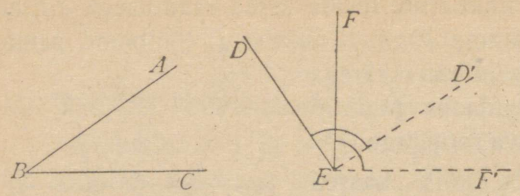
76. joonis.

2. *T.*: $ED \parallel AB$, $EI \parallel BC$. *V.*: $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4 = 2d$.

$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 4 = 2d$ kui kõrvunurkade summa; kuid $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ tõestuse järele. Pannes esimesse võrdusesse $\sphericalangle 1$ asemele $\sphericalangle 2$, saame

$\sphericalangle 2 + \sphericalangle 4 = 2d$, mis oligi tarvis tõestada.

87. Lause. Risti külgedega nurgad on võrdsed, kui nad mõlemad on kas teravad või nürid, ja nende summa on $2d$, kui üks neist on terav, teine aga nüri.



77. joonis.

1. Vaatleme teravnurki ABC ja DEF (77. joon.), millede küljed on vastavalt risti.

***T.*: $AB \perp DE$**
$BC \perp EF$

***V.*: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$.**

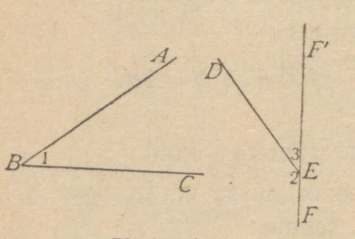
Punktist E tõmbame $ED' \parallel AB$ ja $EF' \parallel BC$. Siis $\sphericalangle D'EF' = \sphericalangle ABC$ kui rööbikute külgedega nurgad; $\sphericalangle DED'$ on täisnurk, sest et DE, olles risti AB-ga, on risti ka ED'-ga, mis on AB-ga rööbiti; $\sphericalangle FEF'$ on ka täisnurk, sest et EF, olles risti BC-ga, on risti ka EF'-ga, sest et viimane on BC-ga rööbiti.

Lahutades täisnurgast DED' nurga FED', saame nurga DEF;

lahutades aga täisnurgast FEF' sama nurga FED', saame nurga $D'EF'$; järjelikult

$\sphericalangle DEF = \sphericalangle D'EF'$; kuid
$\sphericalangle D'EF' = \sphericalangle ABC$, millest järgneb, et
$\sphericalangle DEF = \sphericalangle ABC$, mis oligi tarvis tõestada.

2. Vaatleme nüüd teravnurka ABC ja nürinurka DEF (78. joon.), millede küljed on vastavalt risti.



78. joonis.

***T.*: $AB \perp DE$**
$BC \perp EF$.

***V.*: $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 2d$.**

Pikendades EF, leiame, et

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ kui risti külgedega teravnurgad;

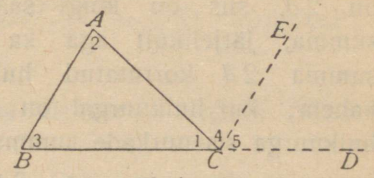
$\sphericalangle 3 + \sphericalangle 2 = 2d$ kui kõrvunurkade summa;

pannes sellesse võrdusesse $\sphericalangle 3$ asemele $\sphericalangle 1$, saamegi

$$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 2d.$$

88. Lause. Kolmnurga sisenurkade summa on $2d$.

Pikendame kolmnurga ABC külge (79. joon.) BC CD sihis ja läbi punkti C tõmbame $CE \parallel AB$. Siis



79. joonis.

$\measuredangle 2 = \measuredangle 4$ kui sisemised põiknurgad, mis on moodustatud rööpsirgete AB ja EC lõikumisel AC-ga;

$\measuredangle 3 = \measuredangle 5$ kui vastavad nurgad;

$\measuredangle 1 + \measuredangle 4 + \measuredangle 5 = 2d$ kui ühel pool sirgjoont EBD ühe ja sama tipu C ümber asetsevate nurkade summa; pannes viimasesse võrdusesse $\measuredangle 4$ asemele $\measuredangle 2$ ja $\measuredangle 5$ asemele $\measuredangle 3$, saame:

$\measuredangle 1 + \measuredangle 2 + \measuredangle 3 = 2d$, mis oligi tarvis tõestada.

89. Järeldused. I. Kolmnurga välisnurk võrdub sama kolmnurga kahe välisnurgaga mitte kõrvuti asetseva sisenurga summaga; näiteks (79. joon.):

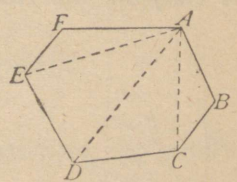
$$\measuredangle ACD = \measuredangle 4 + \measuredangle 5 = \measuredangle 2 + \measuredangle 3.$$

II. Kui ühe kolmnurga kaks nurka on võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga, siis on võrdsed ka nende kolmnurkade kolmandad nurgad.

III. Täisnurkse kolmnurga teravnurkade summa on d.

90. Lause. Hulknurga[1]) sisenurkade summa võrdub kahe täisnurgaga, mis on korrutatud hulknurga külgede arvu ja arvu kahe vahega.

Tõmmates hulknurga $ABCDEF$ mingist tipust A (80. joon.) kõik võimalikud nurkjooned, jagame hulknurga nii mitmeks kolmnurgaks, kui mitu külge on sel hulknurgal ilma kaheta; nagu näha, ei ole hulknurga sisenur-



80. joonis.

1) Hulknurga all mõistame, nagu juba öeldud, ainult k u m e r a t hulknurka.

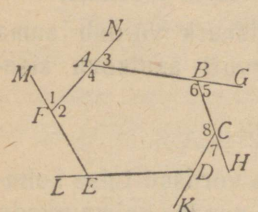
kade summa muud midagi kui kõigi saadud kolmnurkade sisenurkade summa. Et iga kolmnurga sisenurkade summa on $2d$, siis on kõigi saadud kolmnurkade sisenurkade summa, järjelikult aga ka antud hulknurga sisenurkade summa $2d$ korrutatud hulknurga külgede arvuga ilma kaheta; kui hulknurgal on näiteks n külge, siis on selle hulknurga sisenurkade summa s:

$$s = 2d(n-2)$$

Sellest valemist on näha, et muutmata arvu külgede korral on hulknurga sisenurkade summa jääv suurus.

91. Lause. Hulknurga välisnurkade summa on jääv suurus, mis võrdub $4d$.

V.: $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 5 + \sphericalangle 7 + \ldots = 4d$ (81. joon.).

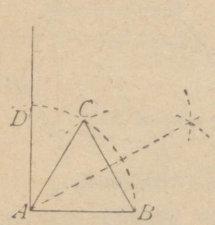


81. joonis.

Hulknurga iga tipu juures asetseva välis- ja sisenurga summa (näit. $\sphericalangle 1$ ja $\sphericalangle 2$ summa) on $2d$; kui hulknurgal on n külge (järjelikult ka n tippu), siis võrdub välis- ja sisenurkade summa kõigi n tipu juures $2dn$; kui sest summast lahutada sisenurkade summa, s. o. avaldus $2d(n-2)$, siis saame välisnurkade summa s'; nõnda siis

$$s' = 2dn - 2d(n-2) = 2dn - 2dn + 4d = 4d.$$

92. Ülesanne. Tõmmata sirgele AB tema otsapunktist A ristjoon, kui AB ei ole võimalik pikendada.



82. joonis.

Konstruktsioon. Tõmmates punktidest A ja B (82. joon.) raadiusega AB kaared ja ühendades nende kaarte lõikepunkti C punktidega A ja B, saame võrdkülgse kolmnurga ACB. Nurgaga CAB liidame tema pahemalt poolt $\sphericalangle DAC$, mis võrdub $\sphericalangle CAB$ poolega. Saadud nurk DAB on täisnurk.

Tõestamine. Et kolmnurga sisenurkade summa on $2d$ ja et võrdkülgses kolmnurgas on kõik nurgad võrdsed, siis:

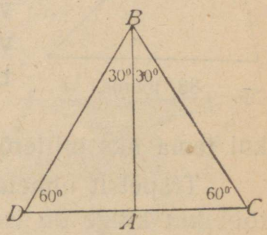
$\sphericalangle CAB = \frac{2}{3}d$; $\sphericalangle DAC = \frac{\sphericalangle CAB}{2} = \frac{1}{3}d$; järjelikult

$\sphericalangle DAB = d$.

Samal viisil lahendatakse ülesanne: **jagada täisnurk kolmeks võrdseks osaks** *).

93. Lause. Kui täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on 30°, siis moodustab selle teravnurga vastaskaatet hüpotenuusist poole.

Olgu kolmnurgas ABC (83. joon.) $\sphericalangle ABC = 30^0$. Kaatetil BA asetseva punkti B juurde konstrueerime nurga $DBA = \sphericalangle ABC$ ja pikendame selle nurga külge BD, kuni ta lõikub CA pikendusega punktis D. Siis:



83. joonis.

$\sphericalangle DBC = 60^0$;
$\sphericalangle BCA = 60^0$;
$\sphericalangle BDA = 60^0$;

järjelikult on $\Delta\, DBC$ võrdkülgne ja $DC = BC$; seepärast

$$AC = \frac{DC}{2} = \frac{BC}{2},$$

mis oligi tarvis tõestada.

V peatükk.

Rööpkülikud ja trapetsid.

94. Definitsioonid.

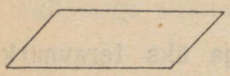
Nelinurka (84. joon.), mille vastasküljed on rööbikud, nimetatakse rööpkülikuks.

*) Mis puutub aga iga juhusliku nurga kolmeks võrdseks osaks jagamisse, siis on tõestatud, et seda joonlaua ja sirkli abil üldse ei saa teha.

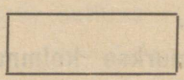
Rööpkülikut (85. joon.), **mille kõik nurgad on täisnurgad, nimetatakse püstkülikuks.**

Rööpkülikut (86. joon.), **mille kõik küljed on võrdsed nimetatakse kaldruuduks.**

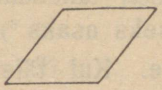
Püstkülikut (87. joon.), **mille kõik küljed on võrdsed, nimetatakse ruuduks.**



84. joonis.



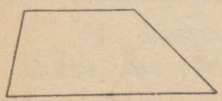
85. joonis.



86. joonis.



87. joonis.



88. joonis.

Nelinurka (88. joon.), **mille kaks vastaskülge on rööbikud, aga kaks teist vastaskülge ei ole rööbikud, nimetatakse trapetsiks.**

Trapetsit nimetatakse **täisnurkseks**, kui tema üks mitterööbik külg on risti kahe rööbiku küljega.

Trapetsit nimetatakse **võrdhaarseks**, kui tema kaks mitterööbikut külge on isekeskis võrdsed.

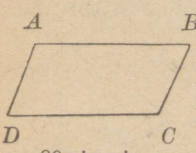
Trapetsi rööbikuid külgi nimetatakse tema **alusteks**.

95. Lause. Iga rööpküliku

1. **vastasküljed on võrdsed** kui rööbikute lõigud rööbikute vahel (nr. 81);

2. **vastasnurgad on võrdsed** kui rööbikute külgedega nurgad (nr. 86);

3. **ühe külje lähisnurkade summa on** $2d$. Tõepoolest, näit. $\measuredangle A + \measuredangle D = 2d$ (89. joon.) kui sisemiste rindnurkade summa ($AB \parallel DC$; AD — lõikaja).



89. joonis.

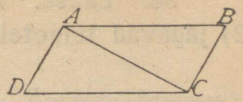
Ülemaltoodust selgub, et **küllaldane on teada rööpküliku üks nurk, et teada tema kõik nurgad.**

4. **Nurkjoon jagab rööpküliku kaheks võrdseks kolmnurgaks.** Tõmmates rööpkülikus $ABCD$ (90. joon.) nurkjoone AC, saame:

$AB = DC$
$AD = BC$ } kui rööpküliku vastasküljed;
$AC = AC$, järjelikult

$$\triangle ABC = \triangle ADC,$$

mis oligi tarvis tõestada.



90. joonis.

96. Lause. Rööpküliku nurkjooned jaguvad lõikepunktis pooleks.

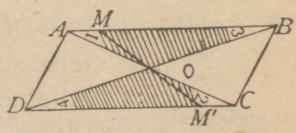
T.: **ABCD on rööpkülik** (91. joon.). *V.*: $AO = OC$
$DO = OB$.

Tõestamine. Kolmnurkades AOB ja DOC:

$AB = DC$ kui rööpküliku vastasküljed;
$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$
$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$ } kui sisemised põiknurgad;

järjelikult $\triangle AOB \cong \triangle DOC$ ühe võrdse külje ja tema kahe võrdse lähisnurga järele; nende kolmnurkade ühtivusest järgneb, et

$AO = OC$[1]) ja
$DO = OB$, mis oligi tarvis tõestada.



91. joonis.

97. Märkus. Rööpküliku nurkjoonte lõikepunkti nimetatakse tema **keskpunktiks.**

Tõmmates läbi rööpküliku keskpunkti juhusliku sirge MM' (91. joon.), võime kolmnurkade AOM ja COM' ühtivusest tõestada, et $OM = OM'$. Niisuguseid

kaht punkti M ja M', mis asetsevad punktiga O ühel ja samal sirgel ja ühekaugusel punktist O, nimetatakse punkti O suhtes sümmeetrilisteks punktideks, kuna punkti O sel juhusel nimetatakse sümmeetria keskpunktiks.

Kaht joonist nimetatakse punkti suhtes **sümmeetrilisteks,** kui nende kõik punktid on selle punkti suhtes paari kaupa sümmeetrilised.

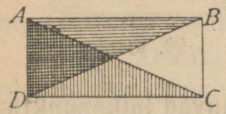
Punkti O nimetatakse **joonise sümmeetria keskpunktiks,** kui selle joonise punktid on punkti O suhtes paari kaupa sümmeetrilised.

Nagu näha, on rööpküliku keskpunkt ühtlasi ka sama rööpküliku sümmeetria keskpunktiks.

---

1) $AO = OC$ kui v a s t a v a d, s. o. ühtivates kolmnurkades vastu võrdseid nurki asetsevad küljed.

98. Lause. Püstküliku nurkjooned on 1) võrdsed ja 2) jagavad teineteise pooleks (92. joon.).



92. joonis.

1. Vaatleme püstkülikus $ABCD$ asetsevaid täisnurkseid kolmnurki BAD ja CDA, milledest leiame, et

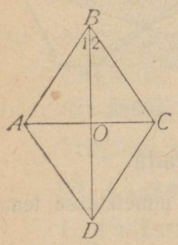
$AD = AD$ ja $AB = DC$, kust saame:

$\Delta BAD \cong \Delta CDA$; järjelikult

$AC = BD$, mis oligi tarvis tõestada.

2. Püstküliku nurkjooned jagavad teineteise pooleks, sest et püstkülik on rööpküliku erijuhus.

99. Lause. Kaldruudu nurkjooned: 1) jagavad teineteise pooleks; 2) on isekeskis risti ja 3) jagavad kaldruudu nurgad pooleks (93. joon.).



93. joonis.

Kaldruudu nurkjooned jagavad teineteise pooleks, sest et kaldruut on rööpküliku erijuhus. Siit järgneb, et BO on võrdhaarse ($AB = BC$ kui kaldruudu küljed) ΔABC aluse poolitaja. Et võrdhaarse kolmnurga alusepoolitaja on ühtlasi ka sama kolmnurga kõrguseks ja tipunurga poolitajaks, siis

$BD \perp AC$ ja $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$,

mis oligi tarvis tõestada.

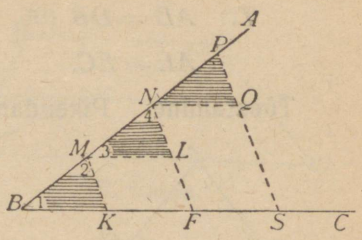
Märkus. Kergesti on tähelepandav, et kaldruudu kumbki nurkjoon on tema sümmeetriatelg. (Selle tõestuseks on küllalt, kui joonise murrame nurkjoont mööda.)

100. Lause. Ruudu nurkjooned: 1) jagavad teineteise pooleks; 2) on isekeskis risti; 3) on isekeskis võrdsed ja 4) jagavad ruudu nurgad pooleks, sest et ruut on ühtlasi ka rööpkülik, kaldruut ja püstkülik.

101. Lause. Kui nurga ühel küljel mõõta mingisugused võrdsed lõigud ja läbi mõõtmisel saadud punktide tõmmata nurga teise küljega lõikuvad rööpsirged, siis saadakse ka teisel küljel isekeskis võrdsed lõigud.

T.: $BM = MN = NP$ (94. joon.) *V.:* $BK = KF = FS$.
$MK \parallel NF \parallel PS$.

Tõestamine. Tõmbame $ML \parallel BC$ ja $NQ \parallel BC$. Vaatleme kolmnurki BMK ja MNL: $BM = MN$ tingimuse järele; $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ kui vastavad nurgad ($BK \parallel ML$); $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$ kui vastavad nurgad ($MK \parallel NF$); järjelikult



94. joonis.

$$\Delta BMK \cong \Delta MNL.$$

Nende kolmnurkade ühtivusest leiame:

$$BK = ML,$$

kuid $ML = KF$ kui rööbikud lõigud rööbikute vahel; järjelikult

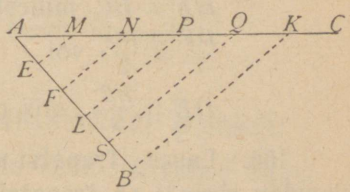
$$BK = KF.$$

Kolmnurkade MNL ja NPQ ühtivust samuti tõestades, saame

$$ML = NQ \text{ või } KF = FS.$$

102. Ülesanne. Antud lõik jagada mistahes hulgaks võrdseteks osadeks.

Olgu tarvis antud lõik AB (95. joon.) jagada 5 võrdseks osaks. Seks tõmbame sirgele AB läbi punkti A juhuslisi nurgi sirge AC, mõõdame tema peal 5 mistahes võrdset lõiku ja ühendame viimase lõigu otspunkti K punktiga B; punktidest M, N, P ja Q tõmbame KB-le rööbikud sirged; eelmise lause põhjal on nurga teisel küljel asetsevad lõigud AE, EF, FL, LS ja SB isekeskis võrdsed. AB on 5 võrdseks osaks jagatud.



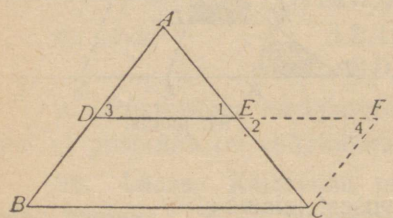
95. joonis.

103. Lause. Kolmnurga kahe külje keskpunkte ühendav sirge on rööbiti kolmanda küljega ja võrdub tema poolega.

T.: $AD = DB$ (96. joon.). *V.*: 1. $DE \parallel BC$

$AE = EC$. 2. $DE = \frac{BC}{2}$.

Tõestamine. Pikendame sirge DE ja mõõdame tema pikendusel $EF = DE$. Siis kolmnurkades AED ja FEC:



96. joonis.

$AE = EC$ tingimuse järele;
$DE = EF$ konstruktsiooni järele;
$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ kui tippnurgad;
järjelikult

$\triangle AED \cong \triangle FEC$, millest leiame, et

$AD = FC$ ja $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$;

sisemiste põiknurkade $\sphericalangle 3$ ja $\sphericalangle 4$ võrdsuse tagajärjel peab olema $AD \parallel FC$; nõnda on siis

$AD \# FC$; tingimuse järele teame, et
$AD = DB$; järjelikult on
$DB \# FC$, millest järgneb, et
$DF \# BC$, millest aga omakord järgneb, et
$\frac{DF}{2} \# \frac{BC}{2}$, või
$DE \# \frac{BC}{2}$, mis oligi tarvis tõestada.

104. Lause. Trapetsi mitteröobikute külgede keskpunkte ühendav sirge[1] **on trapetsi alustega rööbiti ja võrdub nende poolsummaga** (97. joon.).

T.: $BM = MA$ *V.*: *I.* $MN \parallel BC$

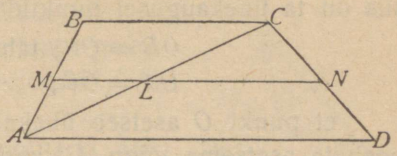
$CN = ND$. *2* $MN = \frac{BC + AD}{2}$.

1) Seda sirget nimetatakse trapetsi kesksirgeks.

Tõestamine. 1. Tõmbame nurkjoone AC ja ühendame ta keskpunkti L punktidega M ja N. Siis

$ML \parallel BC$ kui kolmnurga BAC kahe külje keskpunkte ühendav sirge;

$LN \parallel AD \parallel BC$ kui kolmnurga ACD kahe külje keskpunkte ühendav sirge;



97. joonis.

sirged ML ja LN, milledest kumbki on rööbiti ühe ja sama sirgega BC, peavad moodustama sirge, aga mitte murdjoone, sest vastasel korral oleks läbi punkti L tõmmatud kaks isesugust sirget ja nad mõlemad oleksid BC-ga rööbiti, mis oleks vastolus aksioomiga (nr. 75). Nõnda on

$MN \parallel BC$, mille tagajärjel ka

$MN \parallel AD$, mis oligi tarvis tõestada.

2. Arvesse võttes, et ML on $\triangle BAC$ kesksirge ja LN — kolmnurga ACD kesksirge, saame:

$$ML = \frac{BC}{2} \text{ ja } LN = \frac{AD}{2};$$

liites need kaks võrdust ositi, leiame:

$$ML + LN = \frac{BC + AD}{2}, \text{ või}$$

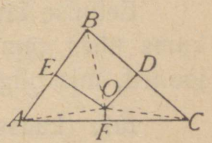
$$MN = \frac{BC + AD}{2}, \text{ mis oligi tarvis tõestada.}$$

Kolmnurga neli tähelepanemis-väärt punkti.

105. Lause. Kolmnurga külgede kesk-ristjooned lõikuvad ühes punktis.

Kolmnurga külgede AB ja BC kesk-ristjooned EO ja DO (98. joon.) lõikuvad tingimata mingis punktis O (nr. 79).

Et punkt O asetseb lõigu AB kesk-ristjoone EO peal, siis on ta ühekaugusel punktidest A ja B (nr. 66), s. o.



98. joonis.

$$OB = OA;$$

et punkt O asetseb lõigu BC kesk-ristjoone DO peal, siis on ta ühekaugusel punktidest B ja C, s. o.

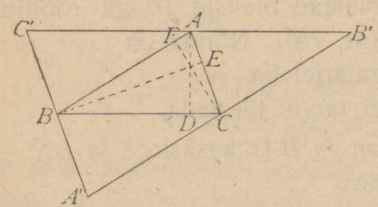
$OB = OC$; tähendab, et ka
$OA = OC$;

et punkt O asetseb ühekaugusel punktidest A ja C, siis peab ta asetsema lõigu AC kesk-ristjoonel OF (nr. 67).

Nõnda lõikuvad kõik kolm kesk-ristjoont ühes punktis.

106. Lause. Kolmnurga kolm kõrgust lõikuvad ühes punktis.

Olgu AD, BE ja CF kolmnurga ABC kõrgused (99. joon.).



99. joonis.

Tõestame, et nad lõikuvad ühes punktis. Seks tõmbame läbi punkti A sirge $C'B'$ rööbiti BC-ga, läbi punkti B sirge $C'A'$ rööbiti AC-ga ja läbi punkti C sirge $A'B'$ rööbiti BA-ga; saame uue kolmnurga $A'B'C'$. Vaatleme nüüd kaht rööpkülikut $C'ACB$ ja $AB'CB$:

$C'A = BC$ kui rööpküliku $C'ACB$ vastasküljed;
$AB' = BC$ kui rööpküliku $AB'CB$ vastasküljed;

järjelikult $C'A = AB'$, s. o. punkt A asetseb lõigu $C'B'$ keskpunktis;

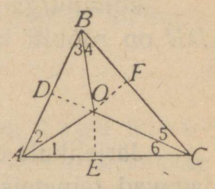
AD, olles risti BC-ga, on risti ka BC rööpsirgega $C'B'$; nõnda: kolmnurga ABC kõrgus AD on samal ajal ka kolmnurga $A'B'C'$ külje $C'B'$ kesk-ristjoon.

Samuti võib tõestada, et CF on $A'B'$ kesk-ristjoon ja BE — $A'C'$ kesk-ristjoon.

Eelmise lause põhjal peavad sirged AD, CF ja BE lõikuma ühes punktis kui kolmnurga $A'B'C'$ külgede kesk-ristjooned, mis oligi tarvis tõestada.

107. Lause. Kolmnurga kõik nurgapoolitajad lõikuvad ühes punktis.

Kolmnurgas ABC (100. joon.) tõmbame kaks nurgapoolitajat: AO ja BO; nad lõikuvad mingis punktis O (nr. 77), mille ühendame tipuga C. Tõestame, et OC on nurgapoolitaja. Seks tõmbame punktist O kolmnurga külgedele ristjooned OE, OD ja OF.



100. joonis.

Punkt O asetseb $\sphericalangle A$ poolitajal AO; järjelikult on ta selle nurga külgedest ühekaugusel (nr. 68), s. o.

$$OE = OD;$$

punkt O asetseb $\sphericalangle B$ poolitajal BO; järjelikult on ta selle nurga külgedest ühekaugusel (nr. 68), s. o.

$$OF = OD;$$

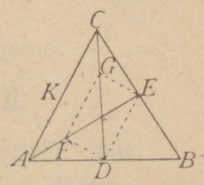
lõigud OE ja OF on iseeskis võrdsed, sest kumbki neist võrdub ühe ja sama kolmanda lõiguga OD:

$$OE = OF;$$

punkt O, asetsedes nurga C külgedest AC ja BC ühekaugusel, peab (nr. 69) asetsema $\sphericalangle C$ poolitajal, s. o. OC on nurgapoolitaja; nõnda siis lõikuvad kõik kolmnurga nurgapoolitajad ühes ja samas punktis.

108. Lause. Kolmnurga kõik küljepoolitajad lõikuvad ühes punktis, mis asub igast küljest $^1/_3$ vastava küljepoolitaja kaugusel.

Tõestame esiteks, et kolmnurga ABC kahe küljepoolitaja AE ja CD lõikepunkt O (101. joon.) asub kummastki küljest $^1/_3$ vastava küljepoolitaja kaugusel. Olgu punktid F ja G lõikude AO ja CO keskpunktid.



101. joonis [1]).

$$T.: \quad CE = EB \qquad V.: \quad OE = \tfrac{1}{3} AE$$
$$AD = DB \qquad\qquad OD = \tfrac{1}{3} CD.$$
$$CG = GO$$
$$AF = FO.$$

1) Joonisel puudub sirgete AE ja CD lõikepunkt O.

Tõestamine. Kolmnurga AOC kahe külje keskpunkte ühendav sirge GF on AC-ga rööbiti ja võrdub tema poolega; kolmnurga ABC kahe külje keskpunkte ühendav sirge DE on rööbiti ka AC-ga ja võrdub tema poolega; järjelikult

$$FG \parallel DE, \text{ kust}$$
$$GE \parallel FD.$$

Järjelikult on joonis $FGED$ rööpkülik, mille nurkjooned jagavad teineteise pooleks; seepärast

$OE = OF = AF$, s. o. $OE = \frac{1}{3} AE$
$OD = OG = CG$, s. o. $OD = \frac{1}{3} CD$ } mis oligi tarvis tõestada.

Nõnda lõikab küljepoolitaja AE küljepoolitajat CD punktis, mis asub AB-st $\frac{1}{3}$ CD kaugusel. Samasuguse arutluse abil võib tõestada, et ka kolmas küljepoolitaja BK lõikab CD punktis, mis asub AB-st $\frac{1}{3}$ CD kaugusel, s. o. punktis O. Järjelikult lõikuvad kõik kolm küljepoolitajat ühes punktis, mis oligi tarvis tõestada.

Märkus. Mehaanikas tõestatakse, et kolmnurga küljepoolitajate lõikepunkt on kolmnurga r a s k u s e k e s k p u n k t.

VI peatükk.

Konstruktsiooni-ülesanded.

109. Geomeetria konstruktsiooni-ülesande täielik lahendus jaguneb nelja ossa: **analüüs, konstruktsioon, süntees ja harutus.**

1. **Analüüs** on lahendusviisi otsimine.
2. **Konstruktsioon** on otsitava joonise konstrueerimine leitud lahendusviisi järele.
3. **Süntees** on tõestus, et konstrueeritud joonis vastab ülesande kõigile nõuetele.

4. **Harutuse** ülesanne on näidata:

1. missugustel tingimustel on ülesanne võimalik?

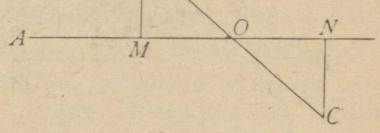
2. kuidas muutub ülesande lahendus ülesande andmete muutmise korral?

3. mitu lahendust on ülesandel?

Lahendusviisi otsimise otstarbel oletatakse, nagu ülesanne oleks juba lahendatud[1]), ja konstrueeritakse käega joonis, mis umbkaudu vastab tehtud seangule (oletusele). Pärast seda, käsitades tuntud geomeetrilisi lauseid, mõnikord aga huupi, tõmmatakse mitmesugused sirged, joonistatakse ringid, konstrueeritakse nurgad jne. Siis püütakse leida olenevust otsitava joonise antud ja otsitavate elementide vahel. On see olenevus leitud, siis on ka lahendusviis leitud. Kui ülesanne on õige lihtne, siis ei tarvitata harilikult analüüsi ja harutust, nagu seda tegime nr. 45 ülesannete lahendusel.

1. ülesanne. Läbi punkti A (102. joon.) tõmmata sirge, mis asuks punktide B ja C vahel ja oleks neist punktidest ühekaugusel.

Analüüs. (Lahendusviisi otsimine.) Olgu AN otsitav sirge; siis on ristjooned BM ja CN võrdsed. Et otsitava sirge üks punkt A on teada, siis tarvis ainult veel teine punkt leida ja otsitava sirgjoone siht olekski määratud. Püüame ühendada punktid B ja C ja leida punkti O asendi. Vaatleme täisnurkseid kolmnurki OBM ja OCN. Nendes kolmnurkades



102. joonis.

$BM = CN$ oletuse järele;

$\sphericalangle OBM = \sphericalangle OCN$ kui sisemised põiknurgad, sest et $BM \parallel NC$; järjelikult

1) Seda metoodi (lahendusviisi) nimetatakse analüütiliseks. Teadust rikastas selle metoodi võrra greeka filosoof Platon (430.—347. a. enne Kr.), kellele geomeetria võlgneb ka geomeetriliste kohtade ja koonuslõigete teooria. Platoni koolis pöördi iseäralist tähelepanu geomeetria põhimõistete ja definitsioonide peale; need olid põhjalikult selgitatud, just sofistide pärast, kes mõistsid segamini ajada ka kõige selgemad mõisted, kui need polnud täpsalt formuleeritud. Samas koolis edendati stereomeetrilist teadust.

$\triangle OBM \cong \triangle OCN$, kust

$OB = OC$, s. o. punkt O on lõigu BC keskpunkt.

Konstruktsioon. Ühendame antud punktid B ja C sirge abil. Lõigu BC keskpunkti O ühendame antud punktiga A. Sirge AO on otsitav.

Süntees (tõestamine). Tõmbame ristjooned BM ja CN. Täisnurksetes kolmnurkades BOM ja CON

$OB = OC$ konstruktsiooni järele;

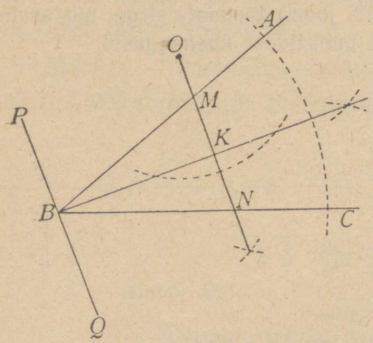
$\sphericalangle BOM = \sphericalangle CON$ kui tippnurgad; järjelikult

$\triangle BOM \cong \triangle CON$, sest neil on hüpotenuusid ja ühed teravnurgad vastavalt võrdsed. Kolmnurkade ühtivusest järgneb, et

$BM = CN$, s. o. et sirge AN asub ühekaugusel punktidest B ja C.

Harutus. Et lõigul BC on ainult üks keskpunkt ja et läbi punktide A ja O võib tõmmata ainult ühe sirge, siis on ülesandel ainult üks lahendus.

Kui punkt A asuks kuskil BC peal, kuid mitte punktis O, siis ühtiks otsitav sirge BC-ga. Asuks aga punkt A punktis O, siis vastaks ülesande tingimusele iga sirge, mis punkti O kulgeb; seega muutuks ülesanne määramatuks.



103. joonis.

Ülesanne on alati võimalik.

2. ülesanne. Läbi punkti O tõmmata sirge, mis moodustaks antud nurga ABC külgedega võrdsed nurgad (103. joon.).

Analüüs. Olgu ON otsitav sirge, s. o.

$\sphericalangle BMN = \sphericalangle BNM$.

Et kolmnurgas vastu võrdseid nurki asetsevad võrdsed küljed, siis $BN = BM$; $\triangle BMN$ on võrdhaarne; järjelikult, kui tõmmata selle kolmnurga kõrgus BK, siis on see kõrgus ühtlasi ka nurgapoolitajaks; nõnda on siis otsitav sirge MN risti nurga ABC poolitajaga.

Konstruktsioon. Tõmbame antud nurga ABC poolitaja ja laseme punktist O temale ristjoone; see ristjoon ongi otsitav sirge.

Süntees. Täisnurksetes kolmnurkades BKM ja BKN:

$\sphericalangle KBM = \sphericalangle KBN$ konstruktsiooni järele (sest BK on nurgapoolitaja);

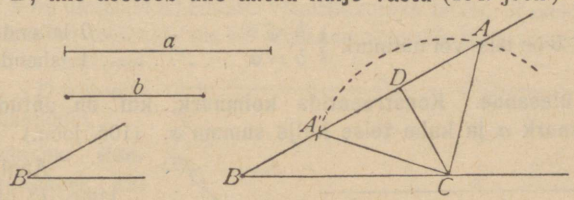
$BK = BK$; järjelikult

$\triangle KBM \cong \triangle KBN$, sest et neil on ühine kaatet ja ühed teravnurgad on võrdsed. Siit järgneb, et

$\sphericalangle BMK = \sphericalangle BNK$, mis oligi tarvis tõestada.

Harutus. Ülesandel on ainult üks lahendus, sest et nurgal on ainult üks poolitaja ja antud punktist võib sirgele lasta ainult ühe ristjoone. Et ülesanne oleks võimalik, seks on tarvis, et antud punkt O ja $\sphericalangle ABC$ asetseksid ühel pool sirget PQ, mis on nurgapoolitajaga BK risti.

3. Ülesanne. Konstrueerida kolmnurk kahest küljest a ja b ja nurgast B, mis asetseb ühe antud külje vastu (104. joon.).



104. joonis.

Analüüsi pole tarvis, sest et lahendusviis on selge.

Konstruktsioon. Konstrueerime esmalt nurga ABC, mis võrduks antud $\sphericalangle B$. Tema ühele küljele asetame lõigu BC, mis on võrdne antud lõiguga a; punktis C tõmbame raadiusega b kaare, mis lõikaks nurga teist külge punktis A; ühendades punkti A punktiga C, saamegi otsitava kolmnurga ABC.

Süntees. $\triangle ABC$ on otsitav, sest et ta vastab ülesande kõigile tingimustele: konstruktsiooni järele $BC = a$, $AC = b$ ja $\sphericalangle ABC = \sphericalangle B$.

Harutus. Ülesanne on võimalik, kui kaar lõikab või puutub nurga teist külge AB. Tõmbame punktist C sirgele AB ristjoone CD. Oletame esiteks, et

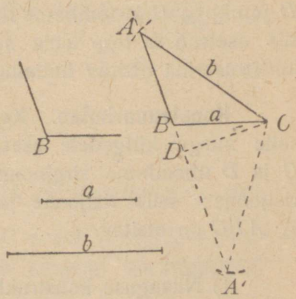
I $\sphericalangle B$ **on teravnurk** (104. joon.).

1. Kui $b < CD$, siis kaar ei lõika ega puutu sirget BC ja ülesanne on võimatu;

2. kui $b = CD$, siis puutub kaar sirget AB punktis D ja ülesandel on üks lahendus: ΔDBC;

3. kui $b > CD$, kuid $b < a$, siis lõikab kaar sirget AB kahes punktis A ja A' ja ülesandel on kaks lahendust: ΔABC ja $\Delta A'BC$;

4. Kui $b \geqslant a$, siis lõikab kaar sirget AB ühes punktis ja ülesandel on üks lahendus.



105. jooonis.

II $\sphericalangle B$ **on nürinurk** (105. joon.).

Sel juhusel lõikab kaar külge AB ainult juhusel, kui $b > a$, ja siiski ainult ühes punktis A; ülesandel on siis üks lahendus: ΔABC.

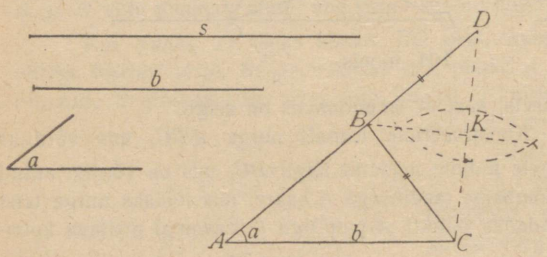
Sama lugu on, kui $\sphericalangle B$ on täisnurk.

Selle ülesande harutuse resümeerime järgnevaks tabeliks:

I $\sphericalangle B$ on teravnurk . . . $\begin{cases} b < CD \ldots\ldots 0 \text{ lahendust;} \\ b = CD \ldots\ldots 1 \text{ lahendus;} \\ a > b > CD \ldots 2 \text{ lahendust;} \\ b \geqslant a \ldots\ldots\ldots 1 \text{ lahendus;} \end{cases}$

II $\sphericalangle B$ on täis- või nürinurk $\begin{cases} b \leqslant a \ldots\ldots\ldots 0 \text{ lahendust;} \\ b > a \ldots\ldots\ldots 1 \text{ lahendus.} \end{cases}$

4. ülesanne. Konstrueerida kolmnurk, kui on antud külg b, tema lähisnurk α ja kahe teise külje summa s. (106. joon.).



106. joonis.

Analüüs. Oletame, et ülesanne on lahendatud, s. o. et on konstrueeritud kolmnurk, milles $AC = b$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle \alpha$ ja $AB + BC = s$.

Et $\sphericalangle BAC$, mis peab võrduma nurgaga α, ja külge AC, mis võrdne oleks b-ga, on kerge konstrueerida, siis jääb raskemaks küsimuseks ainult tipu B leidmine.

Külje AB pikendusele asetame lõigu $BD = BC$[1]), ühendame punkti D punktiga C ja tõmbame ristjoone BK. Et kolmnurk CBD on võrdhaarne, siis asetseb ta tipp tema aluse CD kesk-ristjoonel. Nõnda on siis kerge konstrueerida otsitav kolmnurk ABC, kui on konstrueeritud $\triangle ADC$.

Konstrueerimine. Konstrueerime nurga, mis võrdub nurgaga α; selle nurga külgedele asetame lõigud: $AC = b$ ja $AD = s$. Punktid C ja D ühendame sirgjoone abil. Lõigu CD keskpunktist K tõmbame ristjoone; selle ristjoone ja AD lõikepunkti B ühendame punktiga C. $\triangle ABC$ on otsitav.

---

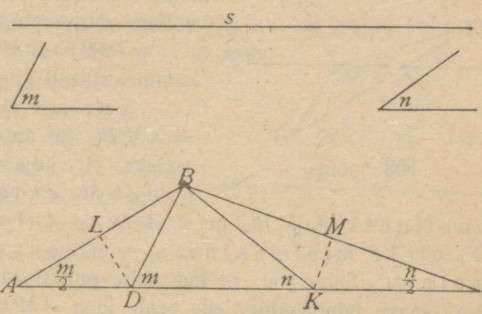
1) Niisuguse konstruktsiooni tagajärjel s i r g e s t u b murdjoon ABC sirgjooneks ABD; seepärast nimetataksegi seda lahendusviisi s i r g e s t u s v i i s i k s.

Süntees. $AC = b$ ja $\sphericalangle BAC = \sphericalangle a$ konstruktsiooni järele. Et $CK = KD$, siis $BC = BD$ kui kaldjooned, mis asuvad ühekaugusel ristjoone BK alusest K; järjelikult

$$AB + BC = AB + BD = AD = s.$$

Tähendab, et konstrueeritud $\triangle ABC$ vastab ülesande kõigile tingimustele ja on seega otsitav.

Harutus. Et kolmnurga kahe külje summa on suurem kui kolmas külg, siis on selle ülesande lahenduse võimalikkuseks tarvis, et oleks $s > b$; kui see tingimus on täidetud, siis on ülesanne võimalik ja tal on ainult üks lahendus, sest et ristjoonel BK ja sirgel AD võib olla ainult üks lõikepunkt.



107. joonis.

5. ülesanne. Konstrueerida kolmnurk, kui on antud ümbermõõt s ja kaks nurka: $\sphericalangle m$ ja $\sphericalangle n$ (107. joon.).

Analüüs. Olgu $\triangle DBK$ otsitav, kus $\sphericalangle BDK = \sphericalangle m$, $\sphericalangle BKD = \sphericalangle n$ ja $DB + BK + DK = s$. Pikendame külge DK kahes sihis ja asetame ta pikenduste peale $KC = BK$ ja $AD = BD$. Punktid C ja A ühendame punktiga B. Et kolmnurga välisnurk võrdub kahe sisenurga summaga, milledest kumbki ei ole tema kõrvunurk, siis

$$\sphericalangle BKD = \sphericalangle KBC + \sphericalangle KCB, \text{ kuid}$$

$\sphericalangle KBC = \sphericalangle KCB$, sest et võrdhaarse ($KC = BK$) kolmnurga aluse lähisnurgad on võrdsed; järjelikult

$$\sphericalangle BKD = 2\sphericalangle KCB, \text{ või}$$

$$\sphericalangle KCB \frac{\sphericalangle BKD}{2} = \frac{\sphericalangle n}{2};$$

samuti võib tõestada, et $\sphericalangle DAB = \frac{\sphericalangle m}{2}$. Nõnda on kolmnurgas ABC teada nurgad: $\sphericalangle A$ ja $\sphericalangle C$ ja külg $AC = AD + DK + KC = BD + DK + BK = s$. Teades kolmnurga ABC, võib kergesti konstrueerida otsitava $\triangle DBK$.

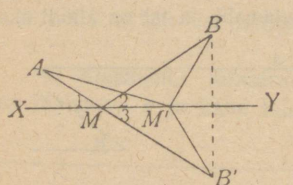
Konstruktsioon. Konstrueerime $\triangle ABC$ kahe nurga $\frac{\sphericalangle m}{2}$ ja $\frac{\sphericalangle n}{2}$

ja külje s järele; tõmbame külgede AB ja BC keskpunktidest ristjooned LD ja MK; ühendame punktid D ja K punktiga B. $\triangle DBK$ on otsitav.

Süntees jääb õpilaste teha.

Harutus. Et kolmnurga sisenurkade summa on $2d$, siis on ülesande võimalikkuseks tarvis, et $\sphericalangle m + \sphericalangle n < 2d$; sel juhusel on ülesanne oma ühe lahendusega alati võimalik.

6. ülesanne. Sirgel XY (108. joon.) leida niisugune punkt, mille kauguste summa kahest antud punktist A ja B oleks minimaalne (punktid A ja B asetsevad ühel pool sirget XY).



108. joonis.

Kui ühe antud punkti B asemel võtame tema sümmeetrilise punkti B' ja sirgel XY võtame mingi punkti M', siis

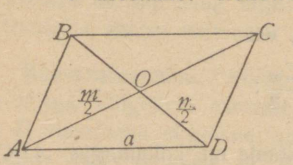
$BM' = B'M'$, sest et BM' ja $B'M'$ on sümmeetrilised lõigud.

Seepärast $AM' + BM' = AM' + B'M' = AM'B'$, ja antud ülesanne muutub ülesandeks: „Leida sirgel XY niisugune punkt M', et tema kauguste summa punktidest A ja B', mis asuvad teine teisel pool sirget XY, oleks minimaalne, s. o. et kaugus $AM'B'$ oleks minimaalne". Selge on, et kui kahe punkti A ja B' kaugus teineteisest peab olema minimaalne, siis peab joon $AM'B'$ sirge olema, s. o. punkt M' peab asetsema punktis M.

Nõnda siis on tarvis punkti M leidmiseks punkt A ühendada sirge abil punktiga B', mis on antud punkti B sümmeetriline punkt [1]).

Märkus. Niisugust ülesande lahendusviisi, kus ühe antud punkti (või üldse joonise) asemel võetakse tema sümmeetriline punkt (joonis), nimetatakse sümmeetriliseks viisiks. Seda viisi nimetatakse mõnikord ka sirgestuseviisiks, sest et siin murdjoon sirgestatakse.

7. ülesanne. Konstrueerida rööpkülik küljest a ja kahest nurkjoonest m ja n (109. joon.).



109. joonis.

Analüüs. Olgu konstrueeritud rööpkülik $ABCD$, milles $AD = a$, $AC = m$ ja $BD = n$. Et rööpküliku nurkjooned jagavad teineteise pooleks, siis $AO = \frac{m}{2}$, $OD = \frac{n}{2}$ ja järjelikult on kolmnurgas AOD teada kõik kolm külge.

---

1) Et $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ ($\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ ja $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 2$), siis on selleks, et minna punktist A sirgeni XY ja sealt kuni punktini B kõige lühemat teed mööda, tarvis, et sirged AM ja BM moodustaksid XY-ga võrdsed nurgad.

Konstruktsioon. Konstrueerides $\triangle AOD$ kolmest küljest: a, $\frac{m}{2}$ ja $\frac{n}{2}$, on juba kerge konstrueerida rööpkülik $ABCD$.

Süntees jääb õpilaste teha.

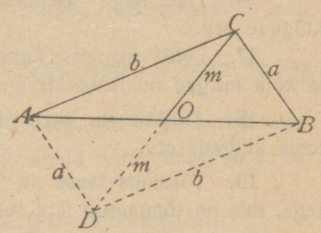
Harutus. Ülesande võimalikkus oleneb kolmnurga AOD konstrueerimise võimalusest, s. o. sellest, kas on täidetud tingimused:

$$\frac{m}{2}+\frac{n}{2}>a;\quad \frac{m}{2}-\frac{n}{2}<a,\ \text{või}:\ m+n>2a;\quad m-n<2a.$$

Kui need tingimused on täidetud, siis on ülesanne oma ühe lahendusega alati võimalik.

8. Ülesanne. Konstrueerida kolmnurk, kui on antud kaks külge a ja b ja kolmanda külje poolitaja m (110. joon.)

Analüüs. Olgu konstrueeritud $\triangle ACB$, milles $AC=b$, $CB=a$, $CO=m$ ja $AO=OB$ (sest et CO on külje AB poolitaja). Asetame CO pikendusele lõigu $OD=m$ ja ühendame punkti D punktidega A ja B. Joonis $ACBD$ on rööpkülik. Nõnda on tarvis selle ülesande lahenduseks esmalt konstrueerida rööpkülik $ACBD$ kahest küljest a ja b ja nurkjoonest $2m$.



110. joonis.

Konstruktsioon. Konstrueerides $\triangle ACD$ kolmest küljest: a, b ja $2m$, on kerge konstrueerida $\triangle ACB$.

Süntees jääb õpilaste teha.

Harutus. Otsitava $\triangle ACB$ konstruktsioon on võimalik ainult siis, kui on võimalik $\triangle ACD$ konstruktsioon, s. o. kui $b+a>2m$ ja $b-a<2m$.

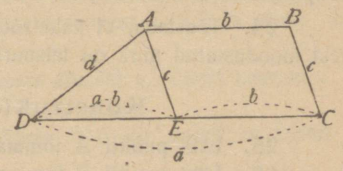
Ülesandel on üks lahendus.

9. Ülesanne. Konstrueerida trapets tema neljast küljest: a, b, c ja d.

Analüüs. Olgu $ABCD$ (111. joon.) otsitav trapets. Tõmbame $AE \parallel BC$. Siis on kolmnurgas ADE kõik kolm külge teada: d, c ja $a-b$.

Konstruktsioon. Konstrueerides $\triangle ADE$ kolmest küljest: d, c ja $a-b$, on kerge konstrueerida otsitav trapets.

Süntees ei sünnita raskust.



111. joonis.

Harutus. Ülesande konstrueerimise võimaluseks on tarvis, et kolme mistahes antud lõigu summa oleks suurem kui neljas lõik (sest et sirge on kõige lühem kaugus kahe punkti vahel), s. o. et

$$a+b+c>d$$
$$a+b+d>c$$
$$a+c+d>b$$
$$c+d+b>a$$

Üldse on ülesandel kolm lahendust.

Harjutused.

Ülesanded ja laused.

14. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on $\frac{4}{7}d$. Leida selle kolmnurga aluse lähisnurgad.

15. Leida seitseteistkümmendnurga sisenurkade summa.

16. Hulknurga sisenurkade summa on $40d$. Leida selle hulknurga külgede arv.

17. Leida niisuguse kaksteistnurga sisenurga suurus, mille kõik küljed ja kõik nurgad on isekeskis võrdsed [1]).

18. Hulknurga ühest tipust võib tõmmata 54 nurkjoont. Leida tema külgede arv.

19. Tõestada lause nr. 90, jagades hulknurga kolmnurkadeks sirgetega, mis on tõmmatud läbi selles hulknurgas asuva mingi punkti.

20. Tõestada, et sariktrapetsi vastasnurkade summa on $2d$.

21. Tõestada, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi poolitaja on pool hüpotenuusist. (Juhatus: pikendada mediaan ta enda pikkuselt.)

22. Tõestada, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi poolitaja ja hüpotenuusile lastud sama kolmnurga kõrgus moodustavad nurga, mis võrdub selle kolmnurga teravnurkade vahega.

23. Tõestada, et iga niisuguse sirgjoone lõik, mis on tõmmatud rööpküliku sees läbi nurkjoonte lõikepunkti, jagub selles lõikepunktis pooleks.

24. Tõestada, et kahe rööpsirge sisemiste rindnurkade nurgapoolitajatest moodustatud nurk on täisnurk.

Konstruktsiooni-ülesanded.

25. Läbi punkti A tõmmata sirge, mis lõikab sirget CD antud nurgi.

26. Läbi punkti O tõmmata sirge nõnda, et ta kahe rööpsirge AB ja CD vahel asuv lõik võrduks antud pikkusega a.

27. Läbi nurgas ABC asuva punkti O tõmmata sirgjoon nõnda, et ta nurga külgede vahel asetsev lõik jaguks punktis O pooleks.

28. Jagada täisnurk kolme võrdsesse ossa.

---

1) Seesugust hulknurka nimetatakse korrapäraseks.

29. Kolmnurgas tõmmata alusega rööbik sirge nõnda, et ta võrduks kolmnurga kõrvalkülgede lõikude summaga, kusjuures lõigud on kolmnurga alusest arvatud.

30. Konstrueerida △, kui on antud külg *a*, tema lähisnurk *m* ja kahe teise külje vahe *d*.

31. Konstrueerida △ perimeetrist *p*, kõrgusest *h* ja aluse lähisnurgast *m*.

32. Konstrueerida täisnurkne △ perimeetrist *p* ja ühest kaatetist *b*.

33. Konstrueerida hulknurk, mis võrduks antud hulknurgaga. (Juhatus: nurkjoontega jagada hulknurk kolmnurkadeks.)

34. Konstrueerida rööpkülik, kui on antud kõrgus *h* ja kaks mitterööbikut külge: *a* ja *b*.

35. Konstrueerida rööpkülik kõrgusest *h*, alusest *b* ja ühest nurgast *m*.

36. Konstrueerida rööpkülik kahest mittevõrdsest küljest *a* ja *b* ja nurkjoonest *c*.

37. Konstrueerida rööpkülik kahest nurkjoonest *p* ja *q* ja nende vahelnurgast *m*.

38. Konstrueerida rööpkülik alusest *b*, kõrgusest *h* ja nurkjoonest *a*.

39. Konstrueerida püstkülik, kui on antud nurkjooned *m* ja *m* ja nende vahelnurk *a*.

40. Konstrueerida kaldruut küljest *a* ja nurkjoonest *b*.

41. Konstrueerida kaldruut kõrgusest *h* ja nurkjoonest *d*.

42. Konstrueerida kaldruut, kui on antud nurk *m* ja nurkjoon *d*, mis on tõmmatud antud nurga tipust.

43. Konstrueerida ruut nurkjoonest *d*.

44. Konstrueerida trapets, kui on antud kaks alust *a* ja *b* ja suurema aluse lähisnurgad *m* ja *n*.

45. Konstrueerida trapets, kui on antud alus *b*, tema lähisnurk *m* ja kaks mitterööbikut külge *a* ja *c*.

46. Konstrueerida võrdhaarne trapets alustest *a* ja *b* ja ühest ülejäänud küljest *c*.

47. Konstrueerida võrdhaarne trapets alusest *a*, ühest haarast *c* ja kõrgusest *h*.

48. Konstrueerida võrdhaarne trapets, kui on antud nurkjoon *d*, kõrgus *h* ja üks mitterööbik külg *c*.

49. Konstrueerida võrdhaarne trapets, kui on antud kaks alust *a* ja *b* ja kõrgus *h*.

50. Konstrueerida võrdhaarne trapets, kui on antud nurkjoon *d* ja nurkjoonest ning suuremast alusest moodustatud nurk *m* ja kui on teada, et vähem alus võrdub haaraga.

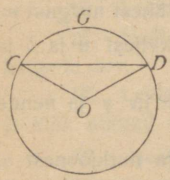
51. Konstrueerida kolmnurk alusest b ja kahest nurkjoonest m ja n, mis on tõmmatud selle aluse otsapunktidest.

52. Konstrueerida nelinurk, kui on teada tema neli külge: a, b, c ja d ja $\sphericalangle m$, mille moodustavad kaks vastaskülge.

VII peatükk.

Ringjoon.

110. Sirget CD (112. joon.), mis ühendab ringjoone kaks mingit punkti, nimetatakse **kõõluks.** Nõnda on läbimõõt (diameeter) niisugune kõõl, mis kulgeb keskpunkti. Kõõlust CD öeldakse, et tema **seob** kaart CGD või **vastab** kaarele CGD.



112. joonis.

Ringi osa CGD, mis asub kaare CGD ja kõõlu CD vahel, nimetatakse **ringilõiguks** (segment).

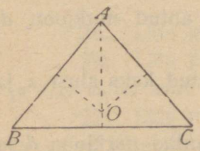
Ringi osa $OCGD$, mis on piiratud kaarega CGD ja kaare otsapunktidesse tõmmatud kahe raadiusega OC ja OD, nimetatakse ringi **sektoriks.**

111. Lause. Läbimõõt on kõige suurem kõõl.

Tõestamine. Iga kõõl CD (112. joon.) on vähem kui kaks raadiust: $OC + OD$ (nr. 52), s. o. vähem kui läbimõõt.

112. Läbi kolme mitte ühel sirgel asetseva punkti võib tõmmata ringjoone ja ainult ühe, ehk teiste sõnadega: kolm mitte ühel sirgel asuvat punkti määravad ringjoone.

Olgu antud kolm punkti A, B ja C (113. joon.), mis ei asetse ühel sirgel. On tõestatud (nr. 105), et lõikude AB, BC ja CA kesk-ristjooned lõikuvad ühes punktis O, mis asetseb punktidest A, B ja C ühekaugusel. Seepärast läheb punktist O raadiusega OA joonestatud ringjoon läbi kolme antud punkti.



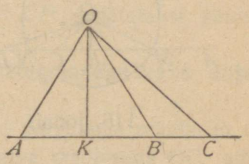
113. joonis.

Punktidest A, B ja C läbiminev ring-

joon on ainus sellesarnane, sest et tema keskpunkt peab tingimata asetsema kolme keskristjoone lõikepunktis, mida ainult üks on.

113. Lause. Sirgel ja ringjoonel ei või olla rohkem kui kaks ühist punkti (114. joon.).

Olgu sirgel ja ringjoonel kolm ühist punkti: A, B ja C. Tõmbame $OK \perp AC$. Siis on kaldjooned OA, OB ja OC isekeskis võrdsed, kui ühe ringi raadiused. Kuid võrdsed kaldjooned asetsevad ristjoone OK alusest ühekaugusel; järjelikult $KB = KC$, mis ei ole võimalik, sest et KB on ainult KC osa.



114. joonis.

Sirge ja ringjoone suhteline asend.

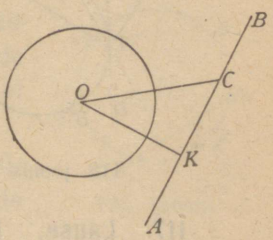
114. Lause. 1. Kui ringjoone keskpunkti kaugus sirgest on suurem kui raadius, siis ei ole sirgel ja ringjoonel ühtegi ühist punkti;

2. kui see kaugus on vähem kui raadius, siis on sirgel ja ringjoonel kaks ühist punkti;

3. kui see kaugus võrdub raadiusega, siis on sirgel ja ringjoonel üks ühine punkt.

1. Kui ringjoone O keskpunkti kaugus sirgest AB (115. joon.), s. o. ristjoon OK on suurem kui raadius, siis on iga kaldjoon OC veelgi suurem kui raadius; järjelikult asetsevad punktid K ja C, nagu kõik teisedki sirgel AB asetsevad punktid, väljaspool ringjoont, mis oligi tarvis tõestada.

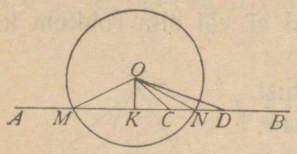
2. Kui ristjoon OK (116. joon.) on raadiusest vähem, siis asetseb punkt K ringjoone sees; et sirget AB võib lõpmata pikendada, siis võib sellel sirgel alati leida mingi punkti D, mille asukoht on väljaspool ringjoont. Nõnda asub punkt K ringjoone sees, punkt D aga väljaspool ringjoont; nagu näha, peab sirgel AB, punktide K ja D vahel veel asetsema mingi punkt N, mille asukoht on ringjoonel. Samasuguse arutluse abil tõestame, et punktide K ja A vahel peab olema punkt M, mis asetseb ringjoonel.



115. joonis.

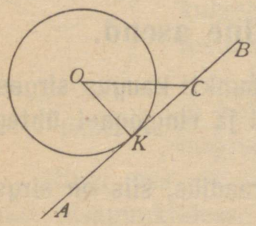
Nõnda lõikab AB ringjoont kahes punktis: M ja N ja ainult kahes punktis, sest et tal ringjoonega rohkem ühiseid punkte ei või olla (nr. 113).

Sirget AB (116. joon.), millel on ringjoonega kaks ühist punkti, nimetatakse **lõikajaks.**



116. joonis.

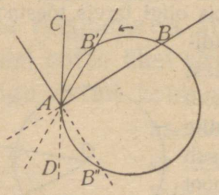
3. Kui keskpunkti kaugus OK sirgest AB võrdub raadiusega (117. joon.), siis on K sirge ja ringjoone ainuke ühine punkt, sest et sirge AB iga teine punkt C asetseb väljaspool ringjoont (kaldjoon OC on ristjoonest OK, s. o. raadiusest suurem, järjelikult peab tema otsapunkt C asetsema väljaspool ringjoont). **Sirget** AB (117. joon), **millel on ringjoonega ainult üks ühine punkt, nimetatakse puutujaks.** Punkti K nimetatakse **puutepunktiks.**



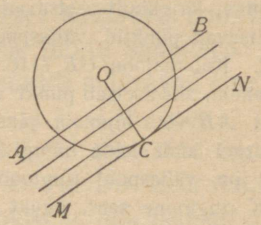
117. joonis.

115. Järeldus. Sirge AB, **mis on risti raadiusega tema otsapunktis** K, **on puutuja** (117. joon.), sest et sel juhusel asub sirge AB ringjoone keskpunktist raadiuse kaugusel.

116. Lause. Puutepunkti tõmmatud raadius on puutujaga risti, sest et see raadius on punkti O ja sirge AB kõige väiksem kaugus (117. joon.).



118. joonis.



119. joonis.

117. Lause. Läbi ringjoonel asuva punkti võib ringjoonele alati tõmmata puutuja ja ainult ühe, sest et punk-

tist K (117. joon.) võib raadiusele tõmmata ristjoone ja ainult ühe.

118. Puutuja üldine definitsioon. Tõmbame lõikaja AB (118. joon.). Hakkame punkti B lähendama punktile A. Siis pöördub lõikaja AB ümber punkti A noolega näidatud sihis ja kui punkt B ühtib punktiga A, siis võtab sirge AB sirge CD asendi, kusjuures sirget CD nimetatakse puutujaks. Nõnda siis

puutuja on niisugune lõikaja, millel on ringjoonega kaks ühtelangenud ühist punkti.

Kui hakataks lõikajat AB (119. joon.) ümber paigutama nõnda, et ta ringi keskpunktist kaugenedes jääks alati risti püsiva raadiusega OC, siis, muutudes puutujaks MN, jääb ta risti raadiusega OC tema otsapunktis. Kirjeldatud puutujakssaamise käiku vaadeldes on võimalik tähele panna mitut tõde.

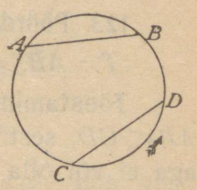
Kaarte ja kõõlude olenevus teineteisest.

119. Definitsioonid. Sama raadiusega joonestatud kaari (nagu kõiki teisi jooniseid) nimetatakse **võrdseteks,** kui nad teineteise peale asetamisel ühtivad. Üks kaar on teisest vähem, kui ta ainult osa teisest moodustab. Sama raadiusega joonestatud kaari võib liita, lahutada, korrutada ja jagada, nagu sirglõike või nurki.

120. Lause. Võrdsetele kaartele vastavad võrdsed kõõlud (120. joon.).

$$T.: \smile CD = \smile AB. \qquad V.: CD = AB.$$

Tõestamine. Nihutame $\smile CD$ mööda ringjoont, kuni tema otsapunktid D ja C ühtivad temaga võrdse kaare AB otsapunktidega A ja B. Siis ühtivad ka kõõlud CD ja AB, sest et nende otsapunktid ühtisid. Sellest järgneb, et $CD = AB$.



120. joonis.

121. Lause. Kui kaared on poolringist vähemad, siis vastab suuremale kaarele suurem sidejoon.

$T.: \smile AH > \smile LK$ (121. joon.). $V.: AH > LK.$

Tõestamine. Asetame suuremale kaarele AH kaare AB, mis võrdub antud vähema kaarega LK, ja seome ta kõõluga AB; siis $AB = LK$, sest et võrdseid kaari seovad võrdsed kõõlud. Kolmnurkades AOH ja AOB:

$AO = AO$;

$OH = OB$ kui sama ringi raadiused; kuid

$\measuredangle AOH > \measuredangle AOB$, sest et $\measuredangle AOB$ moodustab ainult $\measuredangle AOH$ osa; järjelikult (nr. 56),

$AH > AB$; tõestuse järele (nr. 120)

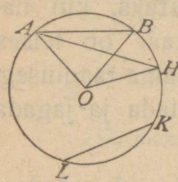
$AB = LK$, järjelikult

$AH > LK$, mis oligi tarvis tõestada.

122. Pöördlause. Võrdsetele kõõludele vastavad võrdsed kaared (120. joon.).

T.: $CD = AB$. ***V.:*** $\smile CD = \smile AB$.

Tõestamine. 1. Oletame, et $\smile CD > \smile AB$; et suuremat kaart seob suurem kõõl, siis $CD > AB$; see aga on vastolus tingimusega; järjelikult $\smile CD$ ei või olla suurem kui $\smile AB$.



121. joonis.

2. Oletame, et $\smile CD < \smile AB$; siis ka $CD < AB$, mis jälle on tingimusega vastolus; järjelikult ei või $\smile CD$ ka vähem olla kui $\smile AB$.

3. Kui $\smile CD$ ei või olla ei suurem ega vähem kui $\smile AB$, siis peab $\smile CD$ võrduma kaarega AB, mis oligi tarvis tõestada.

123. Pöördlause. Suuremale kõõlule vastab suurem kaar.

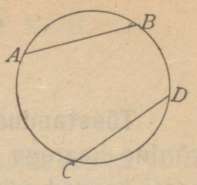
T.: $AB > CD$ (122. joon.). ***V.:*** $\smile AB > \smile CD$.

Tõestamine. 1. Oletame, et $\smile AB < \smile CD$; siis ka $AB < CD$, sest et vähemat kaart seob vähem kõõl. Kõõl AB aga ei või olla vähem kui kõõl CD, sest et tingimuse järele on $AB > CD$; järjelikult ka ei või $\smile AB$ vähem olla kui $\smile CD$.

2. Oletame nüüd, et $\smile AB = \smile CD$; siis ka $AB = CD$, sest et võrdseid kaari seovad võrdsed kõõlud; kuid see jälle

on vastolus tingimusega; järjelikult ei või $\smile AB$ võrduda kaarega CD.

3. Kui $\smile AB$ ei või olla vähem kui $\smile CD$ ega või temaga ka võrduda, siis peab $\smile AB$ olema suurem kui $\smile CD$, mis oligi tarvis tõestada.



122. joonis.

Kõõlude ja kõõlude ning ringi keskpunkti vaheliste kauguste olenevus teineteisest.

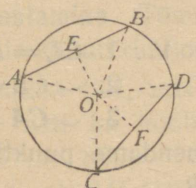
124. Lause. Võrdsed kõõlud asetsevad keskpunktist ühekaugusel (123. joon.).

$T.: AB = CD \quad V.: OE = OF.$
$OE \perp AB$
$OF \perp CD.$

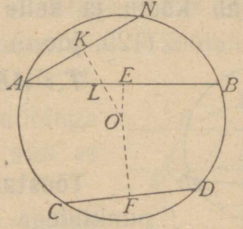
Tõestamine. Ühendades punktid A, B, C ja D punktiga O, saame kolmnurgad AOB ja COD; nendes kolmnurkades

1. $AB = CD$ tingimuse järele;
2. $AO = OC$ kui sama ringi raadiused;
3. $OB = OD$ kui sama ringi raadiused;

järjelikult $\measuredangle AOB \cong \measuredangle COD$; kuid ühtivates kolmnurkades on



123. joonis.



124. joonis.

vastavad kõrgused võrdsed; seepärast $OE = OF$, mis oligi tarvis tõestada.

125. Lause. Suurem kõõl asetseb keskpunktile ligemal (124. joon.).

$T.: AB > CD \quad V.: OE < OF.$
$OE \perp AB$
$OF \perp CD.$

Tõestamine. Asetame kaarele AB kaare AN, mis on võrdne kaarega CD, ja seome ta kõõluga AN. Et võrdseid kaari seovad võrdsed kõõlud, siis $AN = CD$; võrdsed kõõlud asuvad keskpunktist ühekaugusel, seepärast $OK = OF$.

Et OE on risti AB-ga, siis on iga teine sirge OL kaldjoon, seega on $OE < OL$; kui aga $OE < OL$, siis seda enam on $OE < OK$; tõestuse järele on $OK = OF$; nõnda siis $OE < OF$, mis oligi tarvis tõestada.

126. Pöördlaused. 1. Keskpunktist ühekaugusel asetsevad kõõlud on võrdsed.

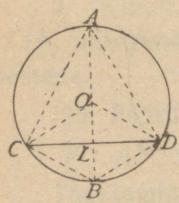
2. Kahest kõõlust on suurem see, mis asetseb keskpunktile ligemal.

Neid lauseid on kerge vastuoletusliselt tõestada.

Märkus. Laused nr. 120—126 on õiged mitte ainult ühe ringi suhtes, vaid ka ühtivate ringide suhtes.

Kõõluga risti tõmmatud läbimõõdu omadused.

127. Lause. Kõõluga risti tõmmatud läbimõõt (või raadius) jagab kõõlu ja selle kõõluga seotava kaare pooleks (125. joon.).



125. joonis.

$T.: AB \perp CD. \quad V.: 1.\ CL = LD$
$2.\ \smile CB = \smile BD.$
$3.\ \smile CA = \smile AD.$

Tõestamine. Ühendame punktid C ja D punktidega A, O ja B.

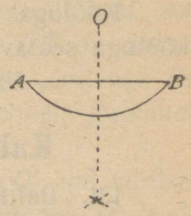
1. Täisnurksetes kolmnurkades LOC ja LOD:

$OL = OL$;
$OC = OD$ kui sama ringi raadiused; järjelikult
$\Delta LOC \cong \Delta LOD$; siit järgneb, et
$CL = LD$, mis oligi tarvis tõestada.

2. Täisnurksetes kolmnurkades LCB ja LDB:
$CL = LD$ tõestuse järele;
$LB = LB$; järjelikult
$\Delta LCB \cong \Delta LDB$; siit järgneb, et
$CB = BD$; kuid võrdsetele kõõludele vastavad ka võrdsed kaared; järjelikult
$\smile CB = \smile BD$, mis oligi tarvis tõestada.

3. Täisnurksetes kolmnurkades ALC ja ALD:
$CL = LD$ tõestuse järele;
$AL = AL$; järjelikult
$\Delta ALC \cong \Delta ALD$; siit järgneb, et
$AC = AD$, kuid see tähendab, et
$\smile AC = \smile AD$, mis oligi tarvis tõestada.

128. Ülesanne. Antud kaar AB (126. joon.) pooleks jagada.



126. joonis.

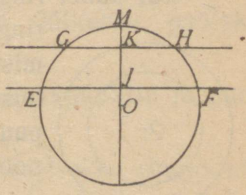
Tõmmates kõõlu AB, laseme temale keskpunktist O ristjoone ja pikendame teda, kuni ta lõikub antud kaarega. Siis jagab see ristjoon kaare pooleks (nr. 127).

129. Lause. Kahe rööbiku kõõlu vahele suletud kaared on võrdsed (127. joon.).

$T.: GH \parallel EF.$ $V.: \smile EG = \smile FH.$

Tõestamine. Tõmbame keskpunktist O kõõlule GH ristjoone, mis lõikub ringjoonega punktis M.

Raadius OM, mis on risti kõõluga GH, on risti ka kõõluga EF, sest et $GH \parallel EF$ (nr. 80).



127. joonis.

Kõõluga GH risti tõmmatud raadius OM jagab selle kõõluga seotava $\smile GMH$ pooleks (nr. 127); järjelikult

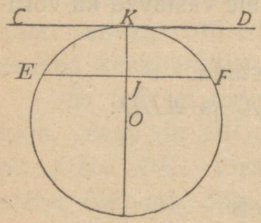
$\smile GM = \smile MN$ (1).

Kõõluga EF risti tõmmatud raadius OM jagab $\smile EMF$ pooleks; järjelikult

$\smile EM = \smile MF$ (2).

Lahutades võrdusest (2) võrduse (1), saame:
$\smile EM - \smile GM = \smile MF - \smile MN$, või
$\smile EG = \smile FH$, mis oligi tarvis tõestada.

130. Lause. Kõõluga rööbik puutuja jagab puutepunktis selle kõõluga seotava kaare pooleks (128. joon.).



128. joonis.

T.: $CD \parallel EF$. *V.*: $\smile EK = \smile KF$.

Tõestamine. Ühendame puutepunkti K keskpunktiga O.

Puutepunkti tõmmatud raadius OK on risti puutujaga CD (nr. 116).

CD-ga risti tõmmatud raadius OK on risti ka CD-ga rööbiku EF-ga (nr. 80).

Kõõluga EF risti tõmmatud raadius OK jagab selle kõõluga seotava kaare EKF pooleks, s. o.

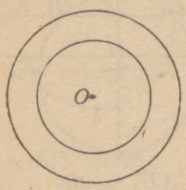
$\smile EK = \smile KF$, mis oligi tarvis tõestada.

Kahe ringjoone suhteline asend.

131. Definitsioonid. Kahel ringjoonel ei või olla rohkem kui kaks ühist punkti, sest et vastasel korral nad ühtiksid (nr. 112);

kui kahel ringjoonel on kaks ühist punkti, siis öeldakse, et nad **lõikuvad**;

kui kahel ringjoonel on ainult üks ühine punkt, siis need ringid **puutuvad**; puutumist nimetatakse **sisemiseks puutumiseks**, kui üks ringjoon asetseb teise ringjoone sees (135. joon.), ja **välimiseks puutumiseks**, kui üks ringjoon asetseb väljaspool teist ringjoont (133. joon.).

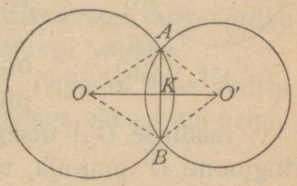


129. joonis.

Kui ringjoontel on ühine keskpunkt, siis nimetatakse neid ringjooni **ühiskeskesteks** ehk **kontsentrilisteks** (129. joon.); puudub aga ringjoontel ühine keskpunkt, siis nimetatakse neid ringjooni **lahkkeskesteks** ehk **ekstsentrilisteks** (joon. 132 ja 136);

kahe ringjoone keskpunkti ühendavat sirget nimetatakse **kesksirgeks.**

132. Lause. Kui kahel ringjoonel on ühine punkt ühel pool kesksirget, siis on neil ühine punkt ka teisel pool kesksirget, s. o. ringjooned lõikuvad (130. joon.).



130. joonis.

Tõestamine. Olgu ringjoontel O ja O' ühine punkt A. Laseme sest punktist kesksirgele OO' ristjoone ja võtame ta pikendusel lõigu $KB = AK$. Ühendame punktid A ja B punktidega O ja O' ja tõestame, et punkt B asetseb mõlemal ringjoonel.

Täisnurksed kolmnurgad AOK ja BOK on ühtivad, sest et kaatetid AK ja KB on võrdsed ja kaatet OK on ühine; seepärast $OB = OA =$ ringjoone O raadiusega; kui aga OB on raadius, siis asub tema otsapunkt ringjoonel, järjelikult asub punkt B ringjoonel O.

Täisnurksed kolmnurgad AKO' ja BKO' on võrdsed samal põhjusel; järjelikult $O'B = O'A =$ ringjoone O' raadiusega; seepärast asub punkt B ringjoonel O'.

Nõnda on tõestatud, et punkt B asetseb mõlemal ringjoonel, s. o. ringjooned lõikuvad.

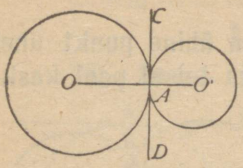
Järeldus. Kahe lõikuva ringjoone ühine kõõl AB on kesksirgega risti ja jagub kesksirgega lõikudes pooleks (130. joon.).

133. Lause. Puutuvate ringjoonte keskpunktid ja puutepunkt asetsevad ühel sirgjoonel.

Tõestamine. Kui puutepunkt ei asetseks ringjoonte kesksirgel, siis (nr. 132) oleks neil ringjoontel veel teine ühine punkt, s. o. siis lõikuksid need ringjooned, mis on vastolus tingimusega.

134. Lause. Puutuvatel ringjoontel on ühine puutesirge, mis kulgeb puutepunkti (131. joon.).

Olgu ringjooned O ja O' puutuvad; olgu sirge CD ringjoone O puutuja. Tarvis tõestada, et CD on ka ringjoone O' puutuja.

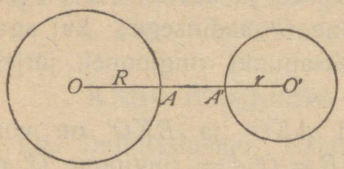


131. joonis.

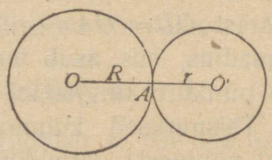
Tõestamine. Puutuja CD on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega OA (nr. 116); sirge CD, olles risti raadiusega OA, on risti ka raadiusega $O'A$ ($O'A$ on OA pikendus);

raadiuse $O'A$ otsapunktist läbi tõmmatud ristjoon CD on ringjoone O' puutuja, mis oligi tarvis tõestada.

135. Märkus. Kaks ringjoont võivad olla teineteise suhtes viies järgnevas asendis: nad võivad **lõikuda** (134. joon.); võivad teineteist **puutuda välimiselt** (133. joon.); võivad teineteist **puutuda sisemiselt** (135. joon.); võivad olla **ilma ühise**

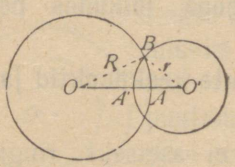


132. joonis.

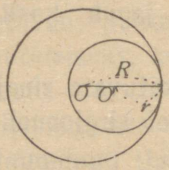


133. joonis.

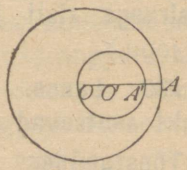
punktita, kusjuures 1) üks ringjoon asetseb teise sees (136. joon.), või 2) ringjooned asetsevad teineteisest väljaspool (132. joon.).



134. joonis.



135. joonis.



136. joonis.

136. Laused. 1. Kui ringjooned asetsevad teineteisest väljaspool, siis on nende keskpunktide kaugus suurem kui nende raadiuste summa.

2. Kui kaks ringjoont puutuvad välimiselt, siis võrdub nende keskpunktide kaugus nende raadiuste summaga.

3. Kui kaks ringjoont lõikuvad, siis on nende keskpunktide kaugus vähem kui raadiuste summa ja suurem kui raadiuste vahe.

4. Kui kaks ringjoont puutuvad sisemiselt, siis võrdub nende keskpunktide kaugus nende raadiuste vahega.

5. Kui üks ringjoon asetseb teise ringjoone sees (mitte puutudes), siis on nende keskpunktide kaugus vähem kui nende raadiuste vahe.

1. Võime kirjutada (132. joon.): $OO' = OA + AA' + A'O'$, või $OO' > OA + A'O'$, või $OO' > R + r$, mis oligi tarvis tõestada.

2. Et puutepunkt asetseb kesksirgel, siis (133. joon.):

$$OO' = OA + AO' \text{ või } OO' = R + r.$$

3. Kui ringjooned O ja O' lõikuvad (134. joon.), siis ühendades nende ühe lõikepunkti B keskpunktidega O ja O', saame $\triangle BOO'$, milles (nr. 52):

$$OO' < OB + O'B, \text{ või } OO' < R + r.$$
$$OO' > OB - O'B, \text{ või } OO' > R - r.$$

4. Sisemisel puutumisel (135. joon.) asetseb puutepunkt kesksirge pikendusel; seepärast:

$OA = OO' + O'A$, kust $OO' = OA - O'A = R - r$.

5. Asetsegu ringjoon O' ringjoone O sees mitte puutudes (136. joon.); joonisest leiame:

$$OA = OO' + O'A' + A'A, \text{ kust}$$
$$OO' = OA - O'A' - A'A, \text{ millest}$$
$$OO' < OA - O'A', \text{ või}$$
$$OO' < R - r.$$

137. Pöördlaused. 1. Kui $OO' > R + r$, siis asetsevad ringjooned teineteisest väljaspool, mitte puutudes.

2. Kui $OO' = R + r$, siis puutuvad ringjooned välimiselt.

3. Kui $R - r < OO' < R + r$, siis lõikuvad ringjooned.

4. Kui $OO' = R - r$, siis puutuvad ringjooned sisemiselt.

5. Kui $OO' < R - r$, siis asetseb üks ringjoon teise ringjoone sees, mitte puutudes.

Kõik need viis pöördlauset on vastuoletusliselt kergesti tõestatavad. Tõestame näiteks 3. juhuse.

T.: $R - r < OO' < R + r$. *V.*: **Ringjooned** O **ja** O' **lõikuvad.**

Kui ringjoned puutuksid, siis:

$$OO' = R + r, \text{ või } OO' = R - r,$$

mis on vastolus tingimusega. Järjelikult ei või antud ringjooned teineteist puutuda ei välimiselt ega sisemiselt.

Kui üks ringjoon asetseks väljaspool teist või teise ringjoone sees, mitte puutudes, siis oleks:

$$OO' > R + r, \text{ või } OO' < R - r,$$

mis jälle on vastolus tingimusega. Järjelikult ei ole ka see oletus õige.

Kui aga kaks ringjoont ei või teineteist puutuda ei sisemiselt ega välimiselt ja üks ringjoon ei või asetseda teise ringjoone sees ega väljaspool teist ringjoont, siis võivad need ringjooned ainult lõikuda.

Märkus. Ülemaltoodust järgneb, et nr. 137 ettetoodud tingimused ei ole ainult kahe kera suhtelise asendi tarvilised tingimused, vaid nad on küllaldased ehk piisavad tingimused. Tõepoolest, kui näiteks kaks ringjoont puutuvad teineteist välimiselt (nr. 136; 2), siis on tingimata tarvilik, et $OO' = R + r$ ja vastupidi, tingimusest: $OO' = R + r$ on küllalt (nr. 137; 2), et ringjooned puutuksid teineteist välimiselt.

Geomeetriliste kohtade metood.

138. Sagedasti tuleb geomeetrilisi ülesandeid lahendades leida mingisugune punkt (või punktid). Iga punkti võib vaadelda kui kahe sirge lõikekohta, kui sirge ja ringjoone lõikekohta või kui kahe ringjoone lõikekohta. Seepärast võib punkti leidmiseks leida need jooned (geomeetrilised kohad), millede lõikekohana esineb punkt. See ongi geomeetriliste kohtade metood.

139. Ülesanne. Leida punkt, mis asetseb sirgest MN **kaugusel** a **ja sirgest** PQ **kaugusel** b (137. joon.).

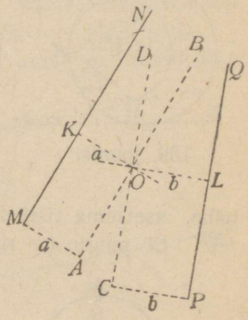
Et otsitav punkt peab asetsema a kaugusel sirgest MN, siis asub ta mingil sirgel AB, mis on rööbiti sirgega MN ja asub viimasest a kaugusel.

Et otsitav punkt peab asetsema b kaugusel sirgest PQ, siis asub ta mingil sirgel CD, mis on rööbiti sirgega PQ ja asub viimasest b kaugusel.

Tähendab, otsitav punkt peab asetsema sirgel AB ja sirgel CD, s. o. ta peab asetsema nende sirgete lõikepunktis O.

Sirge AB konstrueerimiseks tõmbame sirgele MN punktist M ristjoone $MA = a$ ja läbi punkti A tõmbame sirge, mis oleks sirgega MN rööbiti. Samuti konstrueerime sirge CD.

Kui sirged MN ja PQ on mitterööbikud, siis on ülesanne alati võimalik.

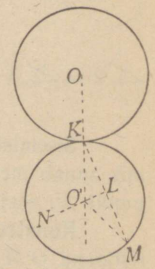


137. joonis.

140. Ülesanne. Läbi antud punkti M joonestada ringjoon, mis puutuks antud ringjoont O tema peal antud punktis K (138. joon.).

Analüüs. Puutugu ringjoon O' ringjoont O punktis K ja olgu ta seejuures joonestatud läbi punkti M. Ühendame punktid M ja K; keskpunktist O' tõmbame kõõlule MK ristjoone $O'L$; see ristjoon kulgeb kõõlu MK keskpunkti. Nõnda asetseb otsitava ringjoone O' keskpunkt: 1) kõõlu MK keskpunktist tõmmatud ristjoonel LN ja 2) OK pikendusel, sest et puutuvate ringjoonte keskpunktid ja puutepunkt asetsevad ühel sirgjoonel.

Konstrueerimine. Ühendame punktid M ja K; lõigu MK keskpunktist tõmbame ristjoone LN. Ühendame punktid O ja K ja pikendame sirget OK, kuni ta lõikub ristjoonega LN punktis O'. Punktist O' raadiusega $O'M$ joonestame ringjoone, mis ongi otsitav.



138. joonis.

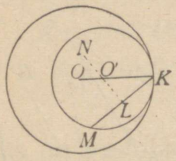
Süntees. Et $O'M = O'K$ kui ristjoone alusest ühekaugusel asetsevad kaldjooned, siis läheb punktist O' raadiusega $O'M$ joonestatud ringjoon läbi punkti K; ka puutub see ringjoon punktis K ringjoont O, sest et keskpunktide kaugus OO', mis võrdub $O'K + KO$, on raadiuste summa (nr. 137; 2).

Harutus. Ülesande võimaldamiseks, s. o. punkti O' leidmise võimaldamiseks on tarvis ja küllalt, et sirged OK ja LN lõikuksid, s. o. et punkt M (140. joon.) ei asetseks ringjoone O punktist K läbi tõmmatud puutujal, sest et sel juhusel sirged OK ja LN on rööbikud ja nad ei lõiku.

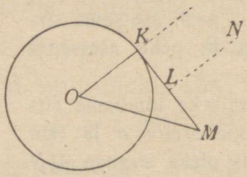
Kui punkt M (139. joon.) on antud ringjoone O sees, siis on võimalik sisemine puutumine.

Ülesandel on üks lahendus, sest et kaks sirget võivad lõikuda ainult ühes punktis.

141. Ülesanne. Joonestada ringjoon, mis puutuks antud ringjoont O ja antud sirget AB antud punktis M.

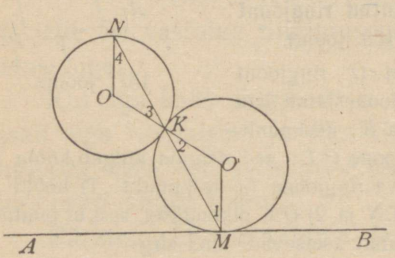


139. joonis.



140. joonis.

Analüüs. Olgu ülesanne lahendatud ja olgu O' (141. joon.) otsitav ringjoon. Tõmbame puutepunkti raadiuse $O'M$ ja kesksirge OO'. Otsitava ringjoone keskpunkt peab, nagu näha, asetsema ristjoonel $O'M$, mida on kerge konstrueerida, ja sirgjoonel OO'. Et puutuvate ringjoonte keskpuntid ja puutepunkt asetsevad ühel sirgel, siis on tarvis sirge OO' määramiseks määrata punkti K asend. Seks otstarbeks ühendame punktid K ja M ja pikendame KM, kuni ta lõikub ringjoonega O punktis N, mille ühendame punktiga O. Et $O'K = O'M$ kui raadiused, siis on $\triangle KO'M$ võrdhaarne ja $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$; samal põhjusel $\triangle KON$ on ka võrdhaarne ja $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 3$;



141. joonis.

$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ kui tippnurgad; järjelikult

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4.$$

Sisemiste põiknurkade $\sphericalangle 1$ ja $\sphericalangle 4$ võrdsusest järgneb, et $ON \parallel O'M$, mis annab meile võimaluse leida punkti N; teades viimase on kerge leida punkt K, seejärele aga ka otsitav punkt O'.

Konstrueerimine. Tõmbame antud sirgele AB antud punktist M ristjoone $O'M$; antud keskpunktist O tõmbame raadiuse $ON \parallel O'M$; ühendame punkti N punktiga M; saame sirge MN ja ringjoone O lõikepunkti K. Ühendades punktid K ja O ja pikendades OK, kuni see lõikub ristjoonega MO', saame otsitava ringjoone keskpunkti.

Süntees ja harutus jääb õpilaste teha.

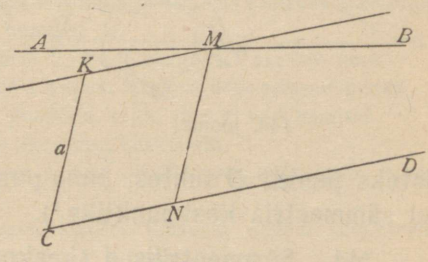
Rööbik siirmine.

142. Kui joonis lükkub tasapinda mööda nii, et kõik tema punktid nihkuvad edasi rööpsirgeil ja võrdsete kauguste võrra, siis nimetatakse niisugust liikumist **rööbikuks siirmiseks.**

Rööbiku siirmise metoodi tarvitatakse sel juhusel, kui joonise osad on üksteisest liiga laiali paisatud, nõnda et raske on tähele panna andmete ja tundmatute olenevust üksteisest. Säherdusel juhusel siiratakse otsitava joonise mingi osa (või terve joonis) sellega rööbiti niisugusele kaugusele, mil saadakse joonis, mida on võimalik konstrueerida.

1. ülesanne. Kahe antud sirge AB ja CD vahele tõmmata lõik MN, mis oleks võrdne ja rööbiti antud lõiguga $CK = a$ (142. joon.).

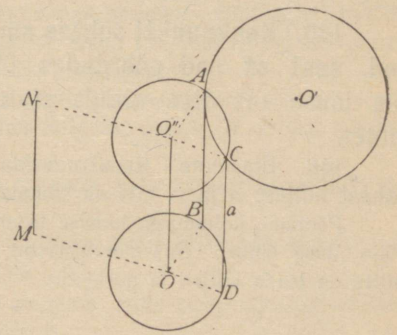
Siirame antud sirge CD, rööbiti tema endise asendiga, antud lõigu CK sihis a kaugusele viimasest; siis võtab sirge CD sirge KM asendi ja lõikab teist antud sirget punktis M; tõmmates läbi punkti M sirgega CK rööbiku sirge, saame lõigu MN, mis on võrdne ja rööbiti antud lõiguga a.



142. joonis.

2. ülesanne. Tõmmata lõik, mis on võrdne ja rööbiti antud lõiguga $MN = a$, nõnda, et tema otsapunktid asetseksid kahel antud ringjoonel O ja O' (143. joon.).

Siirame ringjoone O rööbiti antud sirgjoonega MN lõigu $OO'' = a$ võrra. Lõikugu ringjoon O'' ringjoonega O' punktides A ja C. Tõmbame läbi punktide A ja C, rööbiti lõiguga OO'', sirged AB ja CD, kuni nad lõikuvad ringjoonega O. Siis on kerge tõestada, et lõigud AB ja CD on võrdsed ja rööbikud antud lõiguga $MN = a$.

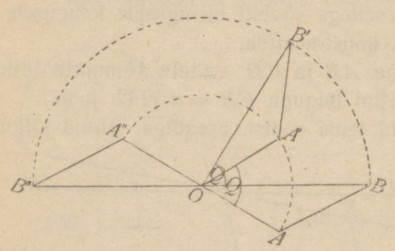


143. joonis.

Pöördumine ümber punkti.

143. Pöördumiseks ümber punkti nimetatakse niisugust joonise siirmist, kus joonise iga punkt, asetsedes joonisega ühel tasapinnal, pöördub mingi püsiva punkti, niinimetatud **pöörde-keskpunkti** ümber mingi nurga võrra, mida nimetatakse **pöördumise amplituudiks**. Nõnda näiteks pöördes lõigu AB (144. joon.) pöörde-keskpunkti O ümber nurga q võrra, saame lõigu $A'B'$.

Pöörame lõigu AB poolringi võrra ($2d$ võrra) ümber pöörde-keskpunkti O. Siis võtab AB lõigu $A''B''$ asendi; OA'' võrdub OA-ga ja on viimase pikendus; samuti OB'' võrdub OB-ga ja on viimase pikendus. Sel pöördumise erijuhusel, kui pöördumise amplituud on $2d$, nimetatakse lõikusid $A''B''$ ja AB, punkte A'' ja A ja punkte B'' ja B **sümmeetrilisteks punkti O suhtes**, kuna punkti O nimetatakse sel juhusel **sümmeetria keskpunktiks** [1]).



144. joonis.

144. Sümmeetrilised (keskpunkti suhtes) sirged $A''B''$ ja AB (144. joon.) **on rööbikud**, sest et $\measuredangle B''A''O = \measuredangle OAB$ ($\triangle B''A''O \cong \triangle AOB$).

145. Keskpunkti suhtes sümmeetrilised joonised on võrdsed, sest et nad pöördudes ühtivad. Olgu tähendatud, et see lause on õige ainult planimeetrias; ruumis ei ole tal mõtet.

146. Ülesanne. Konstrueerida kolmnurk küljepoolitajast m ja kahest küljest a ja b, mis on tõmmatud ühest ja samast tipust.

Pöörame kolmnurga joonise tasapinnal poolringi ($2d$) võrra küljepoolitaja aluse ümber. Siis moodustavad kaks kolmnurga asendit rööpküliku, milles on teada küljed ja nurkjoon.

Harjutused.

Tõestada laused.

53. Kõõlu keskpunktist tõmmatud ristjoon kulgeb ringjoone keskpunkti (vastuoletusline tõestusviis).

54. Puutujale läbi puutepunkti tõmmatud ristjoon kulgeb ringjoone keskpunkti.

55. Ringjoone keskpunktist puutujale tõmmatud ristjoon kulgeb puutepunkti.

---

1) V. nr. 97.

56. Kõik antud ringjoone kõõlud, milledel on antud pikkus, puutuvad mingit teist ringjoont.

Konstruktsiooni-ülesanded.

57. Leida sirgel AB punkt, mis asetseb ühekaugusel kahest antud punktist C ja D.

58. Antud nurga BAC küljel AB leida punkt, mis asetseks ühekaugusel tipust A ja nurga sees antud punktist M.

59. Leida kolmnurga kolmest tipust ühekaugusel asetsev punkt.

60. Leida kolmnurga kolmest küljest ühekaugusel asetsev punkt.

61. Leida niisuguse nurga poolitaja, mille tipp ei asu joonisel.

62. Leida antud kaare või ringjoone keskpunkt.

63. Läbi ringi sees asetseva punkti A tõmmata kõõl, mis jaguks punktis A pooleks.

64. Läbi ringjoonel asetseva punkti tõmmata sellele ringjoonele puutuja.

65. Punktist A kui keskpunktist joonestada ringjoon, mis jagaks antud ringjoone O pooleks.

66. Antud ringjoonele tõmmata puutuja, mis oleks antud sirgega rööbiti.

67. Konstrueerida ringjoon, kui on teada kaks selle ringjoone punkti A ja B ja puutuja AM, mis kulgeb üht antud punkti.

68. Konstrueerida ringjoon, mis puutuks kolme isekeskis lõikuvat sirget.

69. Konstrueerida ringjoon, mis kulgeks punkti M ja mis puutuks sirget AB antud punktis L.

70. Raadiusega R joonestada ringjoon, mille keskpunkt asetseks sirgel AB ja mis puutuks sirget PQ.

71. Raadiusega r joonestada ringjoon, mille keskpunkt asetseks antud ringjoonel O ja mis puutuks sirget MN.

72. Raadiusega R joonestada ringjoon, mille keskpunkt asetseks sirgel PQ ja mis puutuks antud ringjoont O.

73. Joonestada raadiusega r ringjoon, mis puutuks antud ringjoont punktis L.

74. Leida niisuguste ringjoonte (raadius r) keskpunktide geomeetriline koht, mis puutuvad antud ringjoont (raadius R).

75. Leida niisuguste punktide geomeetriline koht, milledest näeme antud ringjoont antud nurgi.

76. Ringjoonest väljaspool asetsevast punktist tõmmata sellele ringjoonele lõikaja, mille sisemine osa võrduks antud lõiguga a.

77. Antud sirgel leida niisugune punkt, et sellest punktist antud ringjoonele tõmmatud puutujad võrduksid antud lõiguga a.

78. Kahele antud ringjoonele tõmmata lõikaja nõnda, et tema sisemised osad võrduksid kahe antud lõiguga a ja b.

79. Joonestada antud raadiusega R ringjoon, mis lõikaks antud nurga külgedest kõõlud, mis võrduksid antud pikkusega a.

80. Konstrueerida antud lõiguga MN võrdne ja rööbik lõik nõnda, et tema otsapunktid asetseksid antud sirgel AB ja antud ringjoonel O.

81. Kahele antud ringjoonele tõmmata ühine lõikaja, rööbiti antud sirgega MN nõnda, et saadud kõõlude summa või vahe võrduks antud pikkusega a.

82. Antud lõik AB jagada kolme võrdsesse ossa, tarvitades seejuures kolmnurga küljepoolitajate lauset (nr. 108).

83. Läbi antud punkti A tõmmata sirge nõnda, et tema lõik, mis asetseb kahe antud ühiskeskese ringjoone vahel, võrduks antud pikkusega a (ümber punkti pöördumise viis).

84. Konstrueerida antud kolmnurgaga sarnane kolmnurk nõnda, et tema üks tipp asetseks antud punktis A, aga kaks teist tippu asetseksid antud ringjoontel O ja O' (ümber punkti pöördumise viis).

85. Konstrueerida kolmnurk, mis oleks sarnane antud kolmnurgaga, nõnda, et tema tipud asetseksid antud kolmel rööpsirgel (ümber punkti pöördumise viis).

86. Konstrueerida kolmnurk, kui on teada tema tipunurk, kõrvalkülgede vahe ja sissejoonestatud ringi raadius (ümber punkti pöördumise viis).

VIII peatükk.

Suhe ja ühine mõõt.

147. Definitsioonid. Kahe homogeense suuruse[1]) suhteks nimetatakse arvu, mis näitab, mitu korda on üks suurus teisest suurem või missuguse osa ta temast moodustab.

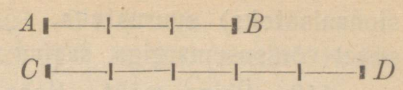
Kui näiteks jagada lõik CD (145. joon.) viide võrdsesse ossa, leiame, et CD viiendik mahub lõiku AB kolm korda, siis

$$AB = \tfrac{3}{5}\, CD.$$

Arv $\frac{3}{5}$, mis näitab, et AB moodustab $\frac{3}{5}$ osa CD-st, on AB

1) Siin ja edaspidi tuleb sõna suuruse all mõista ka teatavat suuruse väärtust.

ja CD suhe. Märkides selle suhte sümboliga $\frac{AB}{CD}$, saame:



145. joonis.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}.$$

Kui aga viiendik osa CD ei mahu AB-sse täisarv kordi, mahub näiteks rohkem kui 3 korda, kuid vähem kui 4 korda, nõnda et

$$\frac{3}{5} CD < AB < \frac{4}{5} CD,$$

siis nimetatakse arvusid $\frac{3}{5}$ ja $\frac{4}{5}$ suhte $\frac{AB}{CD}$ **ligikaudseteks väärtusteks täpsalt $\frac{1}{5}$-ni**, sest oletades, et $AB = \frac{3}{5} CD$ või $AB = \frac{4}{5} CD$, eksime meie **vähem** kui $\frac{1}{5} CD$. Seejuures nimetatakse arvu $\frac{3}{5}$ ligikaudseks suhteks **puudusega** ja arvu $\frac{4}{5}$ — ligikaudseks suhteks **liiaga.**[1])

Suurust mõõta tähendab leida selle suuruse suhe teise homogeensesse suurusesse, mis on võetud üksuseks.

Kui üteldakse: „pikkus on 3 meetrit", siis tähendab see, et antud suuruse suhe 1 meetrisse on 3. Kui võrduses

$$AB = \frac{3}{5} CD$$

oletame, et $CD = 1$ meeter, siis $AB = \frac{3}{5}$ meetrit; nõnda väljendab suhe $\frac{3}{5}$ lõigu AB suurust, kui lõik CD on võetud üksuseks.

Kui kahel suurusel on see omadus, et ühe suuruse kahe väärtuse suhe võrdub teise suuruse kahe vastava väärtuse suhtega, siis nimetatakse neid suurusi võrdelisteks (proport-

---

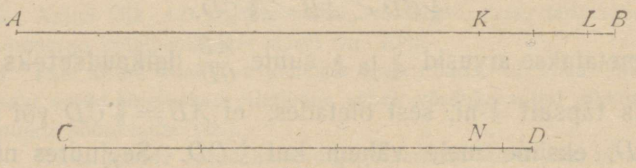
1) Nagu näha, on tarvis lõik CD seks, et leida lõikude AB ja CD suhe täpsalt $\frac{1}{n}$-ni (puudusega), jagada n võrdsesse ossa ja üks neist osadest asetada AB peale nii mitu korda kui võimalik; kui selgub, et $\frac{1}{n} CD$ mahub AB-sse m korda, siis on lõikude AB ja CD ligikaudne suhe täppis $\frac{1}{n}$-ni (puudusega):

$$\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}.$$

sionaalseteks) suurusteks, sest et võrrutades need kaks suhet võrdsusemärgiga, saame võrde (proportsiooni).

148. Ühine mõõt. Kahe homogeense suuruse ühiseks mõõduks nimetatakse niisugust suurust, mis mahub kumbagi suurusesse täisarv kordi.

Olgu tarvis leida lõikude AB ja CD (146. joon.) ühine mõõt; toimetame seda leidmist nii, nagu seda tehakse arit-



146. joonis.

meetikas kahe arvu kõige suurema ühise jagaja leidmisel järgse jagamise abil.

Suuremale lõigule AB asetame vähema lõigu CD nii mitu korda kui võimalik. Mahtugu CD lõiku AB üks kord ja jäägu üle lõik KB, nõnda et

$$AB = AK + KB = CD + KB. \quad (1).$$

Nüüd asetame lõigu KB lõigule CD; mahtugu ta CD-sse kolm korda ja saagu jääk ND, nõnda et

$$CD = CN + ND = 3\,KB + ND. \quad (2).$$

Teise jäägi ND asetame esimesele jäägile KB; mahtugu ta KB-sse kaks korda ja saagu jääk LB; nõnda saame:

$$KB = KL + LB = 2\,ND + LB. \quad (3).$$

Asetugu lõppeks kolmas jääk LB eelmisele jäägile ND täpsalt[1]) kaks korda, nõnda et

$$ND = 2\,LB. \quad (4).$$

Pannes ND asemele (3) võrdusesse tema avalduse (4) võrdusest, saame:

---

1) Kui ei oleks nii juhtunud, siis oleks pidanud seniselt edasi toimima, kuni viimane jääk oleks mahtunud tema eelmisesse jääki täisarv kordi.

$$KB = 4\,LB + LB = 5\,LB. \quad (5).$$

Võttes nüüd võrduses (2) KB ja ND asemel nende avaldused, võime kirjutada:

$$CD = 15\,LB + 2\,LB = 17\,LB. \quad (6).$$

Asetades lõppeks võrduses (1) CD ja KB asemele nende jaoks saadud avaldused, saame:

$$AB = 17\,LB + 5\,LB = 22\,LB. \quad (7).$$

Nõnda leidsime, et lõik LB mahub lõiku AB 22 korda ja lõiku CD — 17 korda, s. o. täisarv kordi kumbagi lõiku; järjelikult on LB lõikude AB ja CD ühine mõõt.

Leides kahe lõigu ühise mõõdu, on kerge leida nende lõikude suhe. Ja tõesti, $AB = 22\,LB$, $CD = 17\,LB$; järjelikult

$$\frac{AB}{CD} = \frac{22\,LB}{17\,LB} = \frac{22}{17}.$$

Neid suurusi, milledel on ühine mõõt, nimetatakse ühismõõtseteks suurusteks, aga suurusi, milledel puudub ühine mõõt, ühismõõdutuiks suurusteks. Et on olemas ühismõõdutud suurused, seda näitab meile lause nr. 150.

149. Ühismõõdutute suuruste suhet ei saa täpsalt avaldada ei täisarvuga ega murdarvuga[1]), vaid ainult **ligikaudu.** Ühismõõdutute suuruste suhteid nimetatakse võrdseteks kahe teise ühismõõdutu suuruse suhtega, kui n igasuguse väärtuse korral esimese suhte väärtus täpsalt $\frac{1}{n}$-ni (puudusega) võrdub teise suhte väärtusega täpsalt $\frac{1}{n}$-ni (puudusega).

Ühismõõdutute suuruste suhet nimetatakse **irratsionaalseks arvuks.**

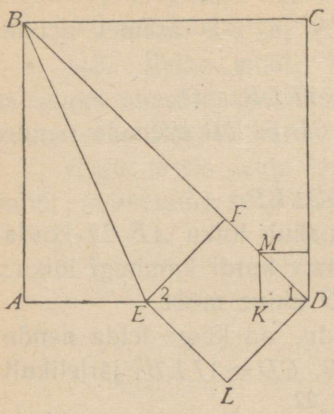
150. Lause. Ruudu nurkjoon ja külg on ühismõõdutud suurused (147. joon.).

Asetame nurkjoonele BD lõigu BF, mis on võrdne ruudu küljega AD. Nurkjoone lõik FD tarvis asetada küljele AD. Seks otstarbeks tõm-

---

1) Kerge on tõestada, et kui näiteks lõikude AB ja CD suhe avaldub äis- või murdarvuna, siis on need lõigud ühismõõtsed. Olgu $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{8}$ siit saame: $AB = \frac{5}{8}\,CD$; tähistades $\frac{1}{8}\,CD$ lõigu a abil, saame: $AB = 5a$ ja $CD = 8a$, s. o. lõikudel AB ja CD on ühine mõõt a.

bame $FE \perp BD$. Et täisnurkses ΔFED on $\sphericalangle 1$ pool täisnurka, siis $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$; seepärast on ΔEFD võrdhaarne; järjelikult $FD = FE$; täisnurksetest kolmnurkadest ABE ja FBE (nr. 62) aga teame, et $AE = FE$; järjelikult $AE = FD$.



147. joonis.

Asetame nüüd lõigule AD lõigu $AE = FD$ ja $EK = FD$, leiame, et nurkjoone jääk FD mahub ruudu küljesse kaks korda mingi jäägiga KD.

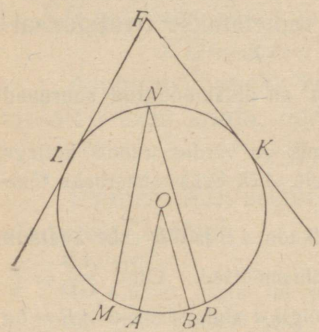
Täiendame ΔEFD ruuduks $EFDL$ ja tõmbame $KM \perp AD$. Ühise mõõdu otsimiseks oleks tarvis asetada uus jääk KD eelmisse jääki FD, kuid eeltehtut tähele pannes võime juba ette teada, et ruudu $EFDL$ nurkjoone ED lõik KD mahub küljesse FD kaks korda mingi uue jäägiga.

Nõnda siis, kui kaua meie ka ei jätkaks oma korduvat konstruktsiooni, mahub iga jääk eelmisesse jääki kaks korda mingi uue jäägiga, ja järjelikult ei leia meie i i a l g i ruudu nurkjoone ja külje ühist mõõtu; tähendab, need lõigud on ühismõõdutud.

IX peatükk.

Nurkade mõõtmine ringis.

151. Definitsioonid. Nurka AOB (148. joon.), mille tipp on ringi keskpunktis, nimetatakse **kesknurgaks** ehk **sentrinurgaks.**



148. joonis.

Kahest kõõlust moodustatud nurka MNP, mille tipp asetseb ringjoonel, nimetatakse **piirdenurgaks.**

Kahest puutujast moodustatud nurka LFK nimetatakse **ümberjoonestatud** nurgaks.

Kaart MNP nimetatakse **nurka *MNP* mahutavaks kaareks.**

Kaare MP kohta öeldakse, et $\measuredangle MNP$ **toetub** sellele kaarele.

152. Lause. Ühes ringis või võrdsetes ringides:

1. (poolringjoonest vähematele) võrdsetele kaartele vastavad võrdsed kesknurgad;

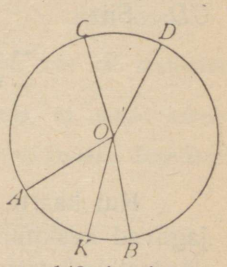
2. (poolringjoonest vähematele) mittevõrdsetele kaartele vastavad mittevõrdsed kesknurgad, kusjuures suuremale kaarele vastab ka suurem kesknurk (149. joon.).

1. $T.: \smile CD = \smile AK.$ $V.: \measuredangle COD = \measuredangle AOK.$

Pöörame sektori COD ümber keskpunkti, kuni kaar CD ühtib temaga võrdse kaarega AK. Siis ühtib raadius OC raadiusega OK, OD ühtib OA-ga ja $\measuredangle COD$ ühtib nurgaga AOK; järjelikult on need nurgad võrdsed, mis oligi tarvis tõestada.

2. $T.: \smile CD < \smile AB$ (149. joon.). $V.: \measuredangle COD < \measuredangle AOB.$

Pöörame sektori COD ümber keskpunkti, kuni raadius OD ühtib raadiusega OA. Et $\smile CD < \smile AB$, siis langeb punkt C punktide A ja B vahele mingisugusesse punkti K; $\measuredangle COD$ võtab $\measuredangle AOK$ asendi; kuid $\measuredangle AOK < \measuredangle AOB$, sest et ta temast ainult osa moodustab.



149. joonis.

Selle lause tõestasime ühe ringi suhtes, kuid ta jääb õigeks ka mitme võrdse ringi suhtes, sest et kõik niisugused ringid ühtivad.

153. Pöördlaused. Ühes ringis või võrdseis ringides:

1. võrdsetele kesknurkadele vastavad võrdsed kaared;

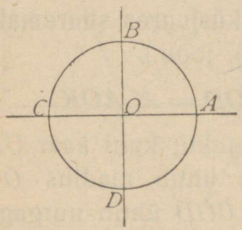
2. suuremale kesknurgale vastab ka suurem kaar.

Neid lauseid on kerge vastuoletusliselt tõestada.

154. Märkus. Et kaks vastastikku risti tõmmatud läbimõõtu (150. joon.) moodustavad 4 võrdset kesknurka, siis on neile nurkadele vastavad kaaredki võrdsed; järjelikult jagavad

need läbimõõdud ringjoone 4 võrdsesse ossa. **Veerandringjoont nimetatakse kvadrandiks.**

Kui täisnurkne kesknurk AOB jagada 90 võrdsesse ossa, siis jagub ka kvadrant $\smile AB$ 90 võrdsesse ossa, sest et võrdsetele kesknurkadele vastavad võrdsed kaared; järjelikult, **igale nurgakraadile vastab kaarekraad.** Samasuguse arutluse järele leiame, et nurgaminutile vastab kaareminut ja nurgasekundile — kaaresekund.



150. joonis.

155. Lause. Kesknurgad suhtuvad nõnda, kui nende vastavad kaared või **kesknurk on oma kaarega võrdeline** (151. joon.).

1. Oletame esiteks, et $\smile AB$ ja $\smile CD$ on ühismõõtsed ja et nende ühine mõõt, $\smile AK$, mahub 5 korda kaaresse AB ja 4 korda kaaresse CD. Siis

$$\smile AB = 5 \cdot \smile AK,$$
$$\smile CD = 4 \cdot \smile AK;$$ sellest järgneb:

$$\frac{\smile AB}{\smile CD} = \frac{5 \cdot \smile AK}{4 \cdot \smile AK} = \frac{5}{4} \quad (1).$$

Kui kaarte jagamispunktid ühendada keskpunktiga, siis jaguvad kesknurgad AOB ja COD võrdseteks osadeks, sest et võrdsetele kaartele vastavad võrdsed kesknurgad; kesknurkade ühiseks mõõduks on $\sphericalangle AOK$, mis mahub 5 korda nurka AOB ja 4 korda nurka COD; järjelikult

$$\sphericalangle AOB = 5 \cdot \sphericalangle AOK,$$

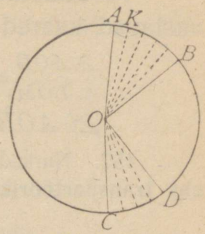
$\sphericalangle COD = 4 \cdot \sphericalangle AOK$, millest järgneb:

$$\frac{\sphericalangle AOB}{\sphericalangle COD} = \frac{5 \cdot \sphericalangle AOK}{4 \cdot \sphericalangle AOK} = \frac{5}{4} \quad (2).$$

Võrreldes võrdusi, (1) ja (2), märkame, et nende paremad osad on võrdsed, järjelikult võrduste pahemadki osad on võrdsed

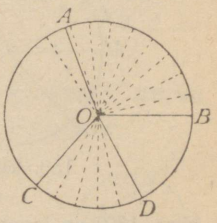
$\frac{\sphericalangle AOB}{\sphericalangle COD} = \frac{\smile AB}{\smile CD}$, mis oligi tarvis tõestada.

2. Olgu kaared: $\smile AB$ ja $\smile CD$ (152. joon.) ühismõõdutud, s. o. puudugu neil ühine mõõt. Leiame nende kaarte ligikaudse suhte näiteks täpsalt $\frac{1}{5}$-ni. Seks otstarbeks jagame $\smile CD$ viieks võrdseks osaks ja oletame, et üks seesugune osa mahub kaarde AB rohkem kui 8 korda, kuid vähem kui 9 korda; siis on $\frac{\smile AB}{\smile CD}$ ligikaudne suhe täpsalt $\frac{1}{5}$-ni (puudusega) $\frac{8}{5}$.



151. joonis.

Kui kaarte jagamispunktid ühendada keskpunktiga O, siis $\sphericalangle COD$ jagub 5 võrdseks osaks, sest et võrdsetele kaartele vastavad võrdsed kesknurgad. Et $\frac{1}{5} \smile CD$ mahtus kaarde AB rohkem kui 8 korda, kuid vähem kui 9 korda, siis on $\frac{\sphericalangle AOB}{\sphericalangle COD}$ ligikaudne suhe täpsalt $\frac{1}{5}$-ni (puudusega) $\frac{8}{5}$.



152. joonis.

Nõnda on suhete $\frac{\sphericalangle AOB}{\sphericalangle COD}$ ja $\frac{\smile AB}{\smile CD}$ väärtused, mis on arvutatud täpsalt $\frac{1}{5}$-ni, isekeskis võrdsed; samuti võib tõestada, et nende suhete väärtused täpsalt $\frac{1}{n}$-ni on võrdsed n igasuguse väärtuse korral. Järjelikult (nr. 149):

$$\frac{\sphericalangle AOB}{\sphericalangle COD} = \frac{\smile AB}{\smile CD},$$ mis oligi tarvis tõestada.

Märkus: Tõestatud lause on õige ka kahe võrdse ringi suhtes, sest et säärased ringid ühtivad.

156. Lause. Kesknurk mõõtub oma kaarega[1]. Olgu $\sphericalangle LOM$ (153. joon.) nurgakraad; kaar LM on siis kaarekraad; mahutagu $\smile AB$ enesesse m kaarekraadi; tõestame, et sellele kaarele vastav $\sphericalangle AOB$ sisaldab eneses m nurgakraadi.

1) Et nurk ja kaar on mittehomogeensed suurused, siis ei või nurka kaarega mõõta; lause on ainult lühenduse mõttes nõnda formuleeritud; peaks aga ütlema: **kesknurgas on nii mitu nurga-mõõtüksust, kui mitu kaare-mõõtüksust on vastavas kaares.**

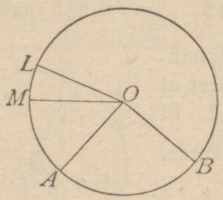
T.: $\smile AB = m \cdot \smile LM$. *V.*: $\measuredangle AOB = m \cdot \measuredangle LOM$.

Tõestamine. Et kesknurgad suhtuvad nõnda kui nende vastavad kaared (nr. 155), siis on

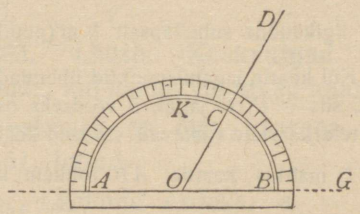
$$\frac{\measuredangle AOB}{\measuredangle LOM} = \frac{\smile AB}{\smile LM} = \frac{m \cdot \smile LM}{\smile LM} = m, \text{ kust}$$

$\measuredangle AOB = m \cdot \measuredangle LOM$, mis oligi tarvis tõestada.

157. Nurkade mõõtmiseks tarvitatavat abiriista nimetatakse **malliks** ehk **transportööriks** (154. joon.). Temal on poolringi kuju, kusjuures ta



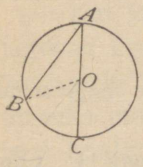
153. joonis.



154. joonis.

kaar 180^0 on jagatud. Et mõõta nurka DOG, seks asetatakse mall sellele nurgale nõnda, et poolringi keskpunkt ühtiks mõõdetava nurga tipuga, aga raadius OB — nurga küljega OG. Kaare CB kraadide arv näitab nurga DOG suurust.

158. Lause. Piirdenurk mõõtub tema külgede vahel asetseva poolkaarega.



155. joonis.

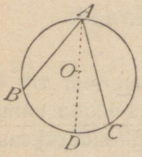
Vaatleme kolme juhust.

Esimene juhus. Piirdenurga BAC (155. joon.) üks külg kulgeb keskpunkti.

Ühendame punktid B ja O. Et $AO = OB$ kui raadiused, siis on $\triangle AOB$ võrdhaarne; järjelikult $\measuredangle A = \measuredangle B$; $\measuredangle BOC$ on kolmnurga AOB välisnurk, seepärast

$\measuredangle BOC = \measuredangle A + \measuredangle B$ (nr. 89; 1), või
$\measuredangle BOC = \measuredangle A + \measuredangle A = 2 \cdot \measuredangle A$, kust

$$\measuredangle A = \frac{\measuredangle BOC}{2}.$$



156. joonis.

Nõnda võrdub piirdenurk A samale kaarele toetuva kesknurga BOC poolega; et kesknurk

BOC mõõtub oma kaarega BC, siis järjelikult mõõtub $\measuredangle A$ sama kaare poolega, mis oligi tarvis tõestada.

Teine juhus. Keskpunkt O asetseb $\measuredangle BAC$ sees (156. joon.). Tõmbame poolitaja AD. Siis

$$\measuredangle BAC = \measuredangle BAD + \measuredangle CAD;$$

kuid nagu teada (esimene juhus):

$\measuredangle BAD$ mõõtub $\frac{\smile BD}{2}$ ja

$\measuredangle CAD$ mõõtub $\frac{\smile DC}{2}$; järjelikult

$\measuredangle BAC$ mõõtub $\frac{\smile BD}{2} + \frac{\smile DC}{2} = \frac{\smile BD + \smile DC}{2} = \frac{\smile BC}{2}$,

mis oligi tarvis tõestada.

Kolmas juhus. Keskpunkt O asetseb väljaspool nurka BAC (157. joon.). Tõmmates poolitaja, võib kirjutada:

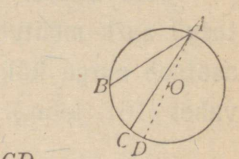
$\measuredangle BAC = \measuredangle BAD - \measuredangle CAD$, kuid

$\measuredangle BAD$ mõõtub $\frac{\smile BD}{2}$ ja

$\measuredangle CAD$ mõõtub $\frac{\smile CD}{2}$; järjelikult

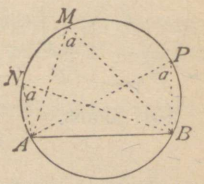
$\measuredangle BAC$ mõõtub $\frac{\smile BD}{2} - \frac{\smile CD}{2} = \frac{\smile BD - \smile CD}{2} =$

$= \frac{\smile BC}{2}$, mis oligi tarvis tõestada.



157. joonis.

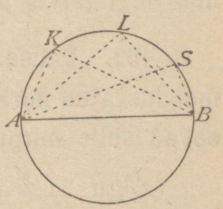
159. I järeldus. Ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad on isekeskis võrdsed (158. joon.), sest et nad mõõtuvad ühe ja sama poolkaarega $\frac{\smile AB}{2}$.



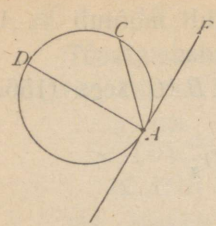
158. joonis.

160. II järeldus. Läbimõõdule toetuv piirdenurk on täisnurk, sest et ta mõõtub poolringjoone poolega (kvadrandiga) ja võrdub järjelikult 90° (159. joon.).

161. Lause. Puutujast ja kõõlust moodustatud nurk mõõtub poolega sellest kaarest, mis asetseb tema külgede vahel (160. joon.).



159. joonis.



160. joonis.

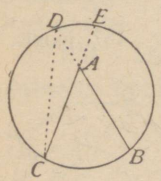
Olgu antud $\measuredangle FAC$ teravnurk. Tõmbame läbi puutepunkti A läbimõõdu AD. Siis $\measuredangle FAC = \measuredangle FAD - \measuredangle DAC$; et $\measuredangle FAD$ on täisnurk, siis mõõtub ta veerandringjoonega, s. o. kaarega

$$\frac{\smile ACD}{2};$$

$\measuredangle DAC$ kui piirdenurk mõõtub $\frac{\smile CD}{2}$; järjelikult: $\measuredangle FAC = \measuredangle FAD - \measuredangle DAC$ mõõtub $\frac{\smile ACD}{2} - \frac{\smile CD}{2} = \frac{\smile AC}{2}$, mis oligi tarvis tõestada.

See lause on kergesti tõestatav ka nürinurga suhtes.

162. Lause. Kahest ringi sees lõikuvast kõõlust moodustatud nurk mõõtub nende kaarte poolsummaga, milledest üks asetseb nurga külgede vahel ja teine nurga külgede pikenduse vahel (161. joon.).



161. joonis.

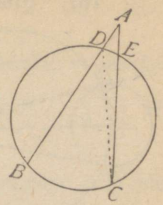
Olgu $\measuredangle CAB$ antud nurk, mille külgede pikendused lõikavad ringjoont punktides D ja E. Ühendame punktid C ja D.

$\measuredangle CAB = \measuredangle D + \measuredangle C$ kui $\measuredangle CDA$ välisnurk; $\measuredangle D$ mõõtub $\frac{\smile CB}{2}$ kui piirdenurk; $\measuredangle C$ mõõtub $\frac{\smile DE}{2}$ kui piirdenurk; järjelikult: $\measuredangle CAB = \measuredangle D + \measuredangle C$ mõõtub $\frac{\smile CB}{2} + \frac{\smile DE}{2} = \frac{\smile CB + \smile DE}{2}$, mis oligi tarvis tõestada.

163. Lause. Kahest väljaspool ringi lõikuvast lõikajast moodustatud nurk mõõtub nende kaarte poolvahega, mis asetsevad selle nurga külgede vahel (162. joon.).

Olgu $\measuredangle BAC$ — antud nurk. Ühendame punktid D ja C. Et $\measuredangle BDC$ on $\triangle DAC$ välisnurk, siis

$\sphericalangle BDC = \sphericalangle A + \sphericalangle C$, kust
$\sphericalangle A = \sphericalangle BDC - \sphericalangle C$; kuid
$\sphericalangle BDC$ mõõtub $\frac{\smile BC}{2}$ kui piirdenurk;
$\sphericalangle C$ mõõtub $\frac{\smile DE}{2}$ kui piirdenurk; järjelikult
$\sphericalangle A = \sphericalangle BDC - \sphericalangle C$ mõõtub $\frac{\smile BC}{2} - \frac{\smile DE}{2} = \frac{\smile BC - \smile DE}{2}$, mis oligi tarvis tõestada.

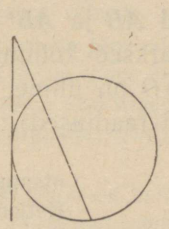


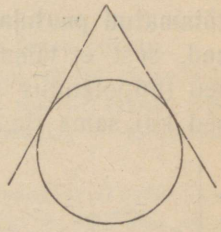
162. joonis.

164. Laused. 1. Väljaspool ringi lõikuvaist lõikajast ja puutujast moodustatud nurk mõõtub nende kaarte poolvahega, mis asetsevad selle nurga külgede vahel (163. joon.).

2. Ümberjoonestatud nurk mõõtub selle nurga külgede vahel asetsevate kaarte poolvahega (164. joon.).

1. ja 2. lause tõestatakse just samuti, kui lause nr. 163 [1]).


163. joonis.


164. joonis.

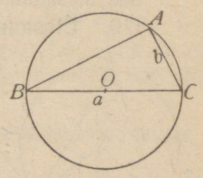
165. Eelmistest lausetest järgneb:

1. Kaar AMB (158. joon.), mis sisaldab eneses $\sphericalangle a$ ja mida seob kõõl AB, on nende punktide geomeetriline koht, milledest on antud lõik AB näha antud nurgi a.

2. Ringjoon on nende täisnurksete kolmnurkade tippude geomeetriline koht, millede hüpotenuusiks on poolitaja (159. joon.).

166. Ülesanne. Konstrueerida täisnurkne kolmnurk hüpotenuusist a ja kaatetist b (165. joon.).

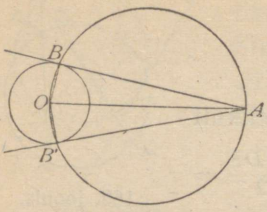
Lõigule $BC = a$ kui läbimõõdule joonestame ringjoone. Punktist C teeme ringjoonele raadiusega b märgi A. Punkti A ühendame punktiga B. $\triangle BAC$ on otsitav, sest et poolitajale toetuv piirdenurk on täisnurk.



165. joonis.

1) Ühesugune tõestus on tingitud sellest, et p u u t u j a ei ole muud midagi kui lõikaja, millel on ringjoonega kaks ü h t i n u d ühist punkti.

167. Ülesanne. Antud punktist A tõmmata puutuja ringjoonele O (166. joon.).



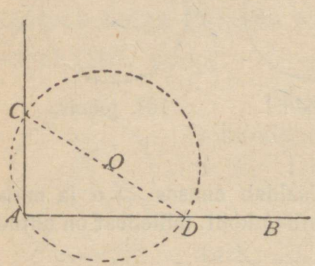
166. joonis.

Ühendame punktid A ja O. Lõigule AO kui läbimõõdule joonestame ringjoone. Selle ja antud ringjoone lõikepunkti B ühendame punktiga A. Sirge AB on otsitav puutuja, sest et ta on risti raadiusega OB tema otsapunktis. (Nurk OBA on täisnurk kui läbimõõdule AO toetuv piirdenurk.)

Et ringjooned lõikuvad kahes punktis, siis on olemas veel teine puutuja AB'.

Ülesande võimaluseks on tarvis ja küllaldane, et $AO \geqslant OB$; kui $AO > OB$, siis on kaks lahendust; kui $AO = OB$, siis — üks lahendus.

168. Lause. Ringjoonele ühest ja samast punktist tõmmatud puutujad AB ja AB' (166. joon.) on isekeskis võrdsed, sest et täisnurksed kolmnurgad AOB ja AOB' on võrdsed (hüpotenuus AO on ühine, kaatetid OB ja OB' aga võrdsed kui sama ringi raadiused).



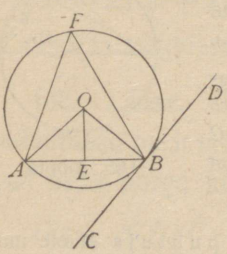
167. joonis.

169. Ülesanne. Sirgele AB tema otsapunktist (ilma sirget pikendamata) ristjoon tõmmata (167. joon.).

Võtame väljaspool sirget AB juhusliku punkti O ja joonestame sellest punktist raadiusega OA ringjoone. Läbi sirge AB ja selle ringjoone lõikepunkti D tõmbame läbimõõdu CD; ühendame punkti C punktiga A. Sirge AC on otsitav ristjoon, sest et läbimõõdule toetuv piirdenurk on täisnurk.

See ülesanne on lahendatud teisel viisil nr. 92.

170. Ülesanne. Antud lõigule AB joonestada kaar, mis enesesse mahutaks antud $\measuredangle m$ (168. joon.).



168. joonis.

Analüüs. Olgu $\smile AFB$ joonestatud nii, et $\measuredangle AFB$ võrdub antud nurgaga m. Otsitava kaare keskpunkt peab asetsema:

1. lõigu AB kesk-ristjoonel EO, sest kaare keskpunkt asetseb ühekaugusel punktidest A ja B;

2. puutujale CD puutepunktist B tõmmatud ristjoonel BO;

järjelikult asetseb kaare keskpunkt sirgete EO ja BO lõikepunktis.

Puutuja CD asendi määramisel tuleb ainult silmas pidada, et nurgad: $\sphericalangle AFB$ ja $\sphericalangle ABC$ mõõtuvad ühe ja sama kaarega nimelt $\frac{\smile AB}{2}$; järjelikult $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AFB = \sphericalangle m$.

Konstruktsioon. Antud lõigu AB keskpunktist tõmbame ristjoone; sirgel AB konstrueerime punkti B juurde $\sphericalangle ABC = \sphericalangle m$; selle nurga küljele BC tõmbame punktist B ristjoone. Nende ristjoonte lõikepunktist O joonestame raadiusega OB kaare AFB, mis ongi otsitav.

Süntees. $\sphericalangle AFB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle m$, mis oligi tarvis tõestada.

Harutus. Ülesandel on kaks lahendust, sest et nurga $ABC = \sphericalangle m$ võib konstrueerida ka teisele poole lõiku AB.

Kui $\sphericalangle m \geqslant 180^0$, siis on ülesanne võimatu.

171. Ülesanne. Kahele ringjoonele tõmmata ühine puutuja.

Kaks ringjoont, mis puutuvad üht ja sama sirget, võivad asetseda kas mõlemad ühel pool sirget või teine teisel pool sirget; esimesel juhusel nimetatakse ühist puutujat **väliseks puutujaks**, teisel juhusel — **sisemiseks puutujaks.**

1. **Konstruktsioon.** Suurema ringjoone keskpunktist O (169. joon.) joonestame raadiusega $OB = R - r$ ringjoone; punktist O' tõmbame sellele ringjoonele puutuja; puutepunkti B ühendame keskpunktiga O ja pikendame raadiust OB, kuni ta lõikub suurema ringjoonega punktis A. Tõmmates punktist A sirge, rööbiti sirgega BO', saame otsitava puutuja AA'.

Süntees. Puutepunkti B tõmmatud raadius OA on risti puutujaga BO', järjelikult on ta risti ka AA', sest et $BO' \parallel AA'$. Tõmbame punktist O' sirge $O'A'$ risti AA'-ga. Sirged $O'A'$ ja OA on rööbikud, sest et nad on risti ühe ja sama sirgega; järjelikult $O'A' = BA$, kui rööbikute lõigud rööbikute vahel; järgneb, et

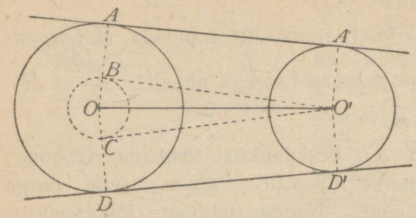
$$O'A' = BA = OA - OB = R - (R - r) = R - R + r = r,$$ s. o. punkt A' asetseb ringjoonel O'. Nõnda on siis sirge AA', mis on risti raadiustega OA ja $O'A'$ nende otsapunktides, ringjoonte O ja O' ühine puutuja.

Harutus. Ülesande võimaluseks on tarvis ja küllaldane, et punkt O' ei asetseks abiringi OB sees, s. o. et

$$OO' \geqslant OB \text{ või } OO' \geqslant R - r.$$

Sel tingimusel antud ringjooned kas 1) asetsevad teineteisest väljaspool, või 2) puutuvad välimiselt, või 3) lõikuvad, või 4) puutuvad sisemiselt. Kolmel esimesel juhusel on ülesandel kaks lahendust, sest et punktist O' võib ringjoonele OB tõmmata kaks puutujat; neljandal juhusel on

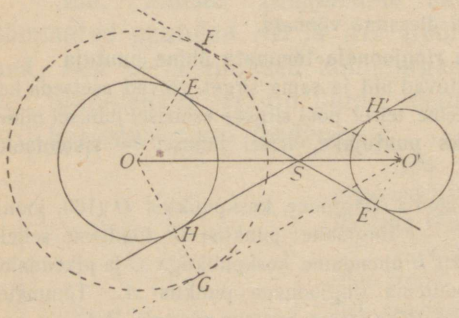
ülesandel üks lahendus, sest et puutujad, mis on tõmmatud punktist O' ringjoonele OB, ühtivad.



169. joonis.

2. Tarvis on tõmmata ringidele O ja O' (170. joon.), millede raadiused on R ja r, sisemine puutuja.

Konstruktsioon. Keskpunktist O joonestame raadiusega $OF = R + r$ ringjoone ja tõmbame temale teise ringjoone keskpunktist O' puutuja $O'F$. Puutepunkti F tõmbame raadiuse OF. Läbi selle raadiuse ja ringjoone lõikepunkti E tõmbame sirge EE', mis on rööbiti FO'-ga. See sirge ongi otsitav puutuja.



170. joonis.

Süntees jääb õpilaste teha.

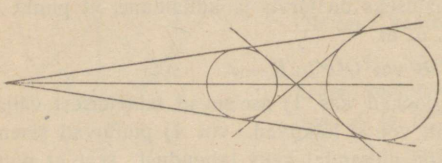
Harutus. Ülesande võimaluseks on tarvis ja küllaldane, et punkt O' ei asetseks abiringi OF sees, s. o. et

$$OO' \geqslant OF \text{ või } OO' \geqslant R + r.$$

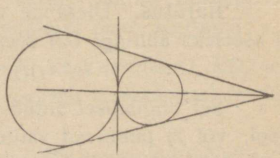
Sel tingimusel ringjooned O ja O' kas 1) asetsevad teineteisest väljaspool või 2) puutuvad välimiselt. Esimesel juhusel on ülesandel kaks lahendust (EE' ja HH'), teisel juhusel — üks lahendus.

Öeldut kokku võttes saame järgmise tuletuse:

1. Kui $OO' > R + r$ (171. joon.), siis on ülesandel 4 lahendust;
2. Kui $OO' = R + r$ (172. joon.), „ „ „ 3 „
3. Kui $R - r < OO' < R + r$ (173. joon.), siis on ülesandel 2 lahendust;
4. Kui $OO' = R - r$ (174. joon.), siis on ülesandel 1 lahendus;
5. Kui $OO' < R - r$ (175. joon.), „ „ „ 0 lahendust.

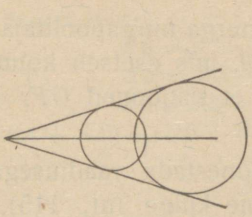


171. joonis.

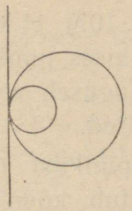


172. joonis.

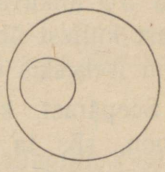
Märkus. Kui kaks ringjoont on võrdsed, siis ei saa eelmist välimiste puutujate konstrueerimisviisi tarvitada, kuid kerge on näha, et sel juhusel



173. joonis.



174. joonis.



175. joonis.

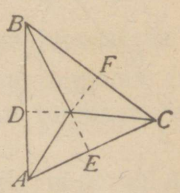
on välimised puutujad ringide keskjoonega rööbiti; järjelikult on nende puutujate konstrueerimine õige kerge.

X peatükk.

Sisse- ja ümberjoonestatud hulknurgad.

172. Definitsioonid. Hulknurka, mille kõik tipud asetsevad ringjoonel, nimetatakse selle ringjoone **sissejoonestatud hulknurgaks**, kuna aga ringjoont sel juhusel **ümberjoonestatud ringjooneks** nimetatakse.

Hulknurka, mille kõik küljed on ringjoone puutujad, nimetatakse selle ringjoone **ümberjoonestatud hulknurgaks**, kuna aga ringjoont **sissejoonestatud ringjooneks** nimetatakse.



176. joonis [1]).

173. Lause. Iga kolmnurga ümber võib ringjoone joonestada ja ainult ühe.

Kolmnurga tipud moodustavad kolm mitte ühel sirgel asuvat punkti; läbi seesuguste punktide aga on võimalik, nagu nr. 112 tõestatud, ringjoont joonestada ja ainult üht ringjoont.

1) Sel joonisel on sirgete AF, BE ja CD ühine lõikepunkt O eksikombel tähistamata jäänud.

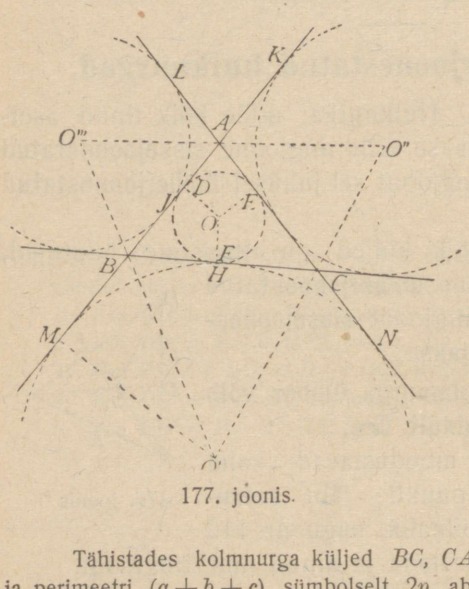
174. Lause. Igasse kolmnurka võib ringjoone joonestada ja ainult ühe (176. joon.).

On tõestatud (nr. 107), et kolmnurga nurgapoolitajad BO, CO ja AO lõikuvad ühises punktis O, mis asetseb kolmnurga kolmest küljest ühekaugusel, nõnda et ristjooned OF, OE ja OD on isekeskis võrdsed.

Seepärast, kui punktist O joonestada raadiusega OD ringjoon, siis ta puutub kõiki kolme külge (nr. 115), s. o. joonestatav ringjoon on sissejoonestatud ringjoon. Neid ringjooni võib kolmnurgas ABC ainult üks olla, sest et keskpunkt peab tingimata asetsema kolme nurgapoolitaja lõikepunktis (nr. 69), neid lõikepunkte on aga üks.

175. Ülesanne. Joonestada ringjoon, mis puutuks kolme antud sirget (177. joon.).

Konstrueerime kolmnurka ABC sissejoonestatud ringjoone O ja pikendame kolmnurga ABC välisnurkade MBC ja BCN nurgapoolitajaid BO' ja CO'; viimaste lõikepunktist O' tõmbame külje AB pikendusele ristjoone $O'M$ ja lõiku $O'M$ raadiuseks võttes joonestame samast punktist ringjoone O'; see ringjoon puutub kolmnurga ABC üht külge BC ja kahe külje pikendust MB ja NC; seesugust ringjoont nimetatakse **väljajoonestatud ringjooneks**. Samuti võib valmistada veel kaks väljajoonestatud ringjoont O'' ja O'''. Nõnda on olemas üldse neli ringjoont O, O', O'' ja O''', mis puutuvad kolme antud sirget.



177. joonis.

Tähistades kolmnurga küljed BC, CA ja AB tähtede a, b ja c abil ja perimeetri $(a+b+c)$ sümbolselt $2p$ abil, määrame tipu A kauguse puutepunktidest M, J, D, K. Meeles pidades, et väljaspool ringjoont antud punktist sellele ringjoonele tõmmatud puutujad on isekeskis võrdsed, saame:

$2p = AB + BH + HC + CA = AB + BM + CN + CA = AM + AN = 2AM$, kust

$$AM = p.$$

Samuti saame:

$BK = p$ ja $CL = p$; sellest järgneb, et

$AK = BK - AB = p - c$;

$AI = AL = CL - CA = p - b$; lõppeks

$2p = (EA + AD) + (DB + BF) + (FC + CE) = 2AD + 2ABF + 2FC =$

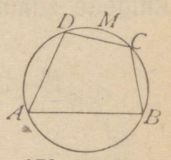
$= 2AD + 2a$, kust

$AD = p - a$.

176. Lause. Iga sissejoonestatud nelinurga vastasnurkade summa on $2d$ (178. joon.).

***T.:* $ABCD$ on sissejoonestatud hulknurk. *V.:* $\measuredangle C + \measuredangle A = 2d$.**

Tõestamine. Et piirdenurk mõõtub tema külgede vahel asetseva poolkaarega, siis



178. joonis.

$\measuredangle C$ mõõtub $\frac{\smile DAB}{2}$;

$\measuredangle A$ mõõtub $\frac{\smile DCB}{2}$; järjelikult

$\measuredangle C + \measuredangle A$ mõõtub $\frac{\smile DAB}{2} + \frac{\smile DCB}{2} = \frac{\smile DAB + \smile DCB}{2} =$

$= 180^0 = 2d$.

177. Pöördlause. Kui nelinurga vastasnurkade summa on $2d$, siis võib selle nelinurga ümber ringjoone joonestada (178. joon.).

***T.:* $\measuredangle C + \measuredangle A = 2d$.**

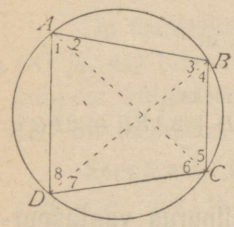
***V.:* Nelinurga $ABCD$ ümber võib ringjoone joonestada.**

Läbi kolme punkti D, C ja B joonestame ringjoone (see on alati võimalik). Tõestame, et see ringjoon tingimata kulgeb punkti A.

Kui ringjoon ei kulgeks punkti A, siis nurk $\measuredangle A$ ei mõõtuks $\smile DCB$ poolega; $\measuredangle C + \measuredangle A$ summa ei mõõtuks kaarte DCB ja DAB poolsummaga ja järjelikult ei võrduks $2d$-ga, mis oleks vastolus tingimusega.

178. Järeldused. 1. Rööpkülikutest võib ainult püstküliku ja ruudu ümber ringjoone joonestada.

2. Trapetsitest võib ainult võrdhaarse trapetsi ümber ringjoone joonestada.

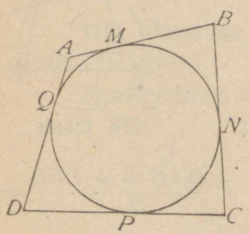


179. joonis.

179. Märkus. Igas sissejoonestatud nelinurgas $ABCD$ (179. joon.):

1. $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 2d$;
2. $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 2d$;
3. $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 4$ kui ühele kaarele toetuvad nurgad;
4. $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 8$ samal põhjusel;
5. $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 7$ „ „
6. $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 6$ „ „

180. Lause. Igas ümber sissejoonestatud nelinurgas on vastaskülgede summad võrdsed (180. joon.).



180. joonis.

Et väljaspool ringjoont asetsevast punktist sellele ringjoonele tõmmatud puutujad on võrdsed(nr. 168), siis

$$AM = AQ,$$
$$MB = BN,$$
$$DP = DQ,$$
$$PC = CN.$$

Liites need võrdused ositi, saame:

$\underline{AM + MB} + \underline{DP + PC} = AQ + BN + DQ + CN$; kuid

$AM + MB = AB,$
$DP + PC = DC,$
$AQ + DQ = AD,$
$BN + CN = BC$; järjelikult
$AB + DC = AD + BC$, mis oligi tarvis tõestada.

181. Pöördlause. Kui nelinurgas on vastaskülgede summad võrdsed, siis võib temasse ringjoone joonestada (181. joon.).

Olgu nelinurgas $DABC$

$$AB + DC = AD + BC.$$

Tõmbame ringjoone O, mis puutuks kolme sirget: AD, AB ja BC (nr. 175). Tõestame, et sama ringjoon puutub ka neljandat sirget DC.

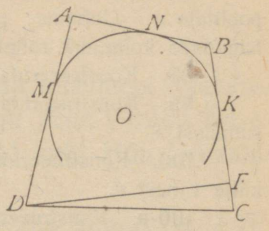
Oletame, et ringjoonele punktist D tõmmatud puutuja ei ole mitte DC, vaid mingi teine sirge DF. Siis saab ümberjoonestatud nelinurk $DABF$, milles eelmise lause järele:

$AB + DF = AD + BF$; tingimuse järele aga
$AB + DC = AD + BC$;

lahutades ositi teisest võrdusest esimese võrduse, saame:

$$DC - DF = BC - BF = FC,$$

s. o. kolmnurga DCF kahe külje vahe võrdub sama kolmnurga kolmanda küljega, mis ei ole võimalik; järjelikult ei või külg DC puutuda sirgjoont O, mis oligi tarvis tõestada.



181. joonis.

182. Järeldus. Rööpkülikutest võib ainult kaldruutu ja ruutu joonestada ringjoone.

Harjutused.

Laused:

87. Kui läbi kahe ringjoone puutepunkti tõmmata kaks lõikajat, siis on nende lõikajate otsapunkte ühendavad kõõlud rööbikud.

88. Kui kolmnurga ümber joonestada ringjoon ja selle ringjoone juhuslisest punktist lasta kolmnurga külgedele ristjooned, siis asetsevad nende alused ühel sirgel.

89. Kui kahe lõikuva ringjoone ühest lõikepunktist tõmmata mõlema ringjoone läbimõõdud, siis kulgeb nende läbimõõtude otsapunkte ühendav sirge teist lõikepunkti ja on ringjoonte kesksirgega rööbiti.

90. Kui mingi kolmnurga alusepoolitaja võrdub poolalusega, siis on aluse vastasnurk täisnurk.

Konstruktsiooni-ülesanded:

91. Antud sirgel leida punkt, millest antud lõik AB on näha antud nurgi m.

92. Leida niisuguste kolmnurkade tippude geomeetriline koht, milledel on üks ja sama alus AB ja tipunurgaks antud nurk m.

93. Leida nende kõõlude keskpunktide geomeetriline koht, mida moodustavad antud punktist tõmmatud ringjoone-lõikajad.

94. Konstrueerida $\triangle$ alusest b, tipunurgast m ja kõrgusest h.

95. Konstrueerida $\triangle$, kui on antud alus b, tipunurk a ja alusepoolitaja m.

96. Konstrueerida △ alusest b, tipunurgast m ja ühest ülejäänud nurgast tõmmatud kõrgusest h.

97. Konstrueerida △, kui on antud tipunurk a, kõrgus h ja alusepoolitaja m. (Juhatus: pikendada alusepoolitaja tema enese pikkuselt ja täiendada kolmnurk rööpkülikuks.)

98. Konstrueerida rööpkülik nurgast m ja nurkjoontest a ja b.

99. Konstrueerida △ alusest b, tipunurgast m ja kahe teise külje summast s.

100. Konstrueerida kolmnurk alusest b, tipunurgast m ja kahe teise külje vahest d.

100-a. Konstrueerida kolmnurk kõrgusest h, küljepoolitajast m ja nurgapoolitajast b, mis on tõmmatud ühest ja samast tipust.

101. Antud kaldruutu konstrueerida sissejoonestatud ring.

102. Konstrueerida kaldruut küljest a ja sissejoonestatud ringi raadiusest r.

103. Antud ringjoone ümber joonestada võrdhaarne täisnurkne kolmnurk.

Arvutus-ülesanded.

104. Piirdenurk toetub kaarele, mis moodustab $\frac{1}{10}$ tervest ringjoonest. Leida see nurk.

105. Missuguse osa ringjoonest moodustab kaar $46^0\,40'$?

106. Kolmnurga kaks nurka on $43^0\,15'\,25''$ ja $27^0\,35'\,18''$. Leida kolmas nurk.

107. Täisnurkse kolmnurga teravnurgad suhtuvad nõnda kui 17 : 33. Leida need nurgad.

108. Võrdhaarse kolmnurga aluse juures asetsev välisnurk $=112^0\,10'\,20''$. Leida kolmnurga sisenurgad.

109. Rööpküliku üks nurk on teisest nurgast 23^0 võrra suurem. Leida rööpküliku nurgad.

110. Kaldruudu külg moodustab nurkjoonega nurga $16^0\,15'$. Leida kaldruudu nurgad.

111. Kumera hulknurga sisenurkade summa on $54000'$. Mitu külge on sel hulknurgal?

112. Piirdenurga külgede vahele suletud kaar $= \frac{1}{n}$ täis-ringjoonest. Leida nurk.

113. Sissejoonestatud nelinurga tipud jagavad ringjoone võrdeliselt arvudega: 7 : 15 : 20 : 30. Leida nurgad.

114. Kõõlust ja puutujast moodustatud nurk on $13^0\,27'\,45''$. Leida selle kõõluga seotavad kaared.

115. Leida puutujast ja kõõlust moodustatud nurk, kui kõõl jagab ringjoone kahte ossa võrdeliselt arvudega 2 : 3.

XI peatükk.

Võrdelised lõigud.

183. Definitsioon. Kui on kaks rida niisuguse omadusega lõikusid, et ühe rea kahe mingi lõigu suhe võrdub teise rea kahe vastava lõigu suhtega, siis neid kaht rida lõikusid nimetatakse võrdelisteks lõikudeks.

Nõnda siis, kui AB ja CD on ühe rea lõigud ja $A'B'$ ja $C'D'$ vastavad teise rea lõigud, siis võimaldub võrre

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \quad (1).$$

184. Märkus. Kui tähistuste AB, CD, $A'B'$ ja $C'D'$ all mõtleme mitte lõikusid endid, vaid neid lõikusid ühe ja sama üksusega mõõtvaid arve, siis on võrdel (1) kõik need võrde omadused, mis on tuletatud algebras, s. o.

$$AB \cdot C'D' = CD \cdot A'B'; \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}; \quad \frac{AB \pm CD}{CD} = \frac{A'B' \pm C'D'}{C'D'} \text{ jne.}$$

Kui aga tähistuste AB, CD jne. all mõtelda lõikusid endid, siis ei ole paljudel toodud võrdustest mõtet. Oletame näiteks, et $AB = 7$ meetrit, $CD = 5$ meetrit, $A'B' = 14$ sentimeetrit ja $C'D' = 10$ sentimeetrit, nõnda et võrre omandab kuju:

$$\frac{7 \text{ meetrit}}{5 \text{ meetrisse}} = \frac{14 \text{ sentimeetrit}}{10 \text{ sentimeetrisse}};$$

nüüd puudub võrdusel

$$7 \text{ meetrit} \cdot 10 \text{ sentimeetrit} = 5 \text{ meetrit} \cdot 14 \text{ sentimeetrit}$$

mõte; tõepoolest, 10 sentimeetrit ei saa korrutada 7 meetriga, sest et korrutaja peab olema nimeta arv.

Samuti ei või nr. 155 avaldatud võrdes

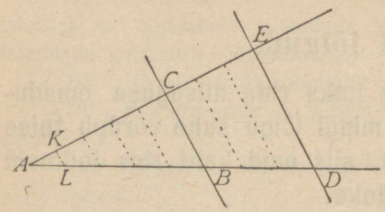
$$\frac{\sphericalangle AOB}{\sphericalangle COD} = \frac{\smile AB}{\smile CD}$$

keskmisi liikmeid ümber asetada, s. o. avaldada järgneval kujul

$$\frac{\sphericalangle AOB}{\smile AB} = \frac{\sphericalangle COD}{\smile CD},$$

sest et nurka ja kaart ei saa võrrelda kui mitte-homogeenseid suurusi.

185. Lause. Nurga külgi lõikavad rööpsirged jagavad nurga küljed võrdelisteks osadeks (182. joon.).



182. joonis.

T.: CB ∥ ED. V.: $\frac{CE}{AC} = \frac{BD}{AB}$.

1. Oletame, et lõigud CE ja AC on ühismõõtsed ja et nende ühine mõõt AK mahub CE-sse 3 korda ja AC-sse 5 korda.

Siis

$CE = 3 . AK$;

$AC = 5 . AK$, millest järgneb:

$\frac{CE}{AC} = \frac{3 . AK}{5 . AK} = \frac{3}{5}$.

Kui läbi jagamispunktide tõmmata sirged, mis oleksid rööbiti ED-ga, siis jagub (nr. 101) BD 3 ja AB — 5 võrdsesse ossa, kusjuures nende ühiseks mõõduks on lõik AL; järjelikult

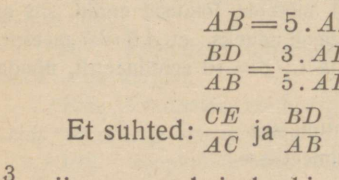
$BD = 3 . AL$,

$AB = 5 . AL$, kust järgneb, et

$\frac{BD}{AB} = \frac{3 . AL}{5 . AL} = \frac{3}{5}$.

Et suhted: $\frac{CE}{AC}$ ja $\frac{BD}{AB}$ võrduvad ühe ja sama arvuga $\frac{3}{5}$, siis on nad isekeskis võrdsed; järjelikult $\frac{CE}{AC} = \frac{BD}{AB}$, mis oligi tarvis tõestada.

2. Olgu lõigud CE ja AC (183. joon.) ühismõõdutud, s. o. puudugu neil ühine mõõt. Leiame nende lõikude suhte näiteks täpsalt $\frac{1}{5}$-ni. Seks jagame lõigu AC 5 võrdseks osaks; mahtugu $\frac{1}{5} AC$ CE-sse rohkem kui 2 korda, kuid vähem kui 3 korda; siis on ligikaudne suhe $\frac{CE}{AC}$ täpsalt $\frac{1}{5}$-ni (puudusega) $\frac{2}{5}$.



183. joonis.

Kui läbi jagamispunktide tõmmata sirged, mis oleksid rööbiti ED-ga, siis AB jagub 5 võrdseks osaks,

kuna aga lõigus BD saab neid osasid rohkem kui 2, kuid vähem kui 3; järjelikult ligikaudne suhe $\frac{BD}{AB}$ täpsalt $\frac{1}{5}$-ni (puudusega) on $\frac{2}{5}$.

Nõnda siis on suhete $\frac{CE}{AC}$ ja $\frac{BD}{AB}$ $\frac{1}{5}$-ni täpsalt arvutatud väärtused isekeskis võrdsed; samuti võib tõestada, et nende suhete $\frac{1}{n}$-ni täpsalt arvutatud väärtused on võrdsed n igasuguse väärtuse puhul. Järjelikult (nr. 149)

$\frac{CE}{AC} = \frac{BD}{AB}$ [1], mis oligi tarvis tõestada.

186. Lause. Kui nurga külgi lõikab rida rööpsirgeid, siis (183. joon.)

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \text{ ja } \frac{AE}{CE} = \frac{AD}{BD},$$

s. o. kahe mistahese ülemise lõigu suhe võrdub kahe vastava alumise lõigu suhtega.

Seda lauset tõestatakse nr. 185 näidatud viisil.

187. Pöördlause. Sirged, mis jagavad nurga küljed võrdelisteks osadeks, on isekeskis rööbiti (184. joon.).

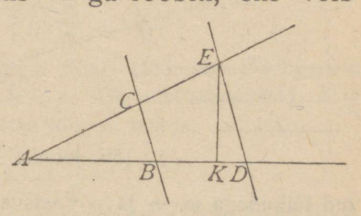
$$T.: \frac{CE}{AC} = \frac{BD}{AB}. \quad V.: ED \parallel CB.$$

Tõestamine. Kui ED ei oleks CB-ga rööbiti, siis võib tõmmata $EK \parallel CB$.

Siis lõikavad rööpsirged EK ja CB nurga küljed võrdelisteks osadeks, ja me võime kirjutada:

$$\frac{CE}{AC} = \frac{BK}{AB};$$

võrreldes saadud võrret antud võrdega ja tähele pannes, et nende pahemad osad on võrdsed, leiame:



184. joonis.

$\frac{BD}{AB} = \frac{BK}{AB}$; siit järgneb, et

$BD = BK$, mida ei või olla, sest et osa ei

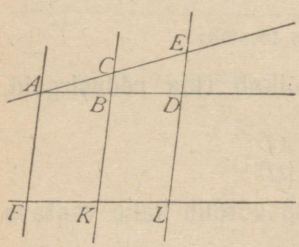
1) Nähtavasti on lause õige ka juhusel, kui sirged CB ja ED, ikka lõikudes nurga külgedega, muudavad enestevahelist kaugust ja kallakust nurga külgede suhtes, kui need sirged aga on isekeskis rööbiti.

või võrduda tervega. Järjelikult ei või oletada, et ED ei ole CB-ga rööbiti.

Samuti võib tõestada nr. 186 lause pöördlause.

188. Lause. Kahe sirge lõigud, mis on suletud kolme rööpsirge vahele, on võrdelised. [1])

T.: $AF \parallel CK \parallel EL$ (185. joon.). *V.*: $\frac{AC}{CE} = \frac{FK}{KL}$.



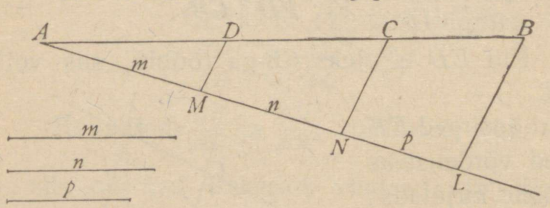
185. joonis.

Tõestamine. Läbi punkti A tõmbame $AD \parallel FL$. Siis lõikavad rööpsirged CK ja EL nr. 185 põhjal nurga EAD küljed võrdelisteks osadeks; järjelikult:

$$\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BD};$$

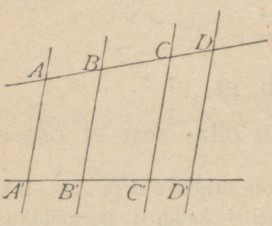
kuid $AB = FK$ ja $BD = KL$ kui rööbikute lõigud rööbikute vahel, seepärast $\frac{AC}{CE} = \frac{FK}{KL}$, mis oligi tarvis tõestada.

189. Ülesanne. Lõik AB jagada osadeks võrdeliselt antud lõikudega m, n ja p (186. joon.).



186. joonis.

Tõmbame AB-le juhuslike nurgi lõiksirge AL ja asetame sellele lõiksirgele järgselt lõigud AM, MN ja NL, mis on antud lõikudega m, n ja p vastavalt võrdsed. Ühendame punktid L ja B;



187. joonis.

1) Laused nr. 185, 186 ja 187 on järgneva üldise lause järeldused:

Kui AD ja $A'D'$ (187. joon.) **on kaks missugust sirget tahes, aga AA', BB', CC' ja DD' on rööpsirged, siis on sirge AD kahe mistahtese lõigu suhe võrdne sirge $A'D'$ kahe vastava lõigu suhtega, s. o.** $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.

Seda lauset tõestatakse nr. 185 näidatud viisil.

läbi punktide M ja N tõmbame sirged MD ja NC, mis oleksid rööbit LB-ga. Siis

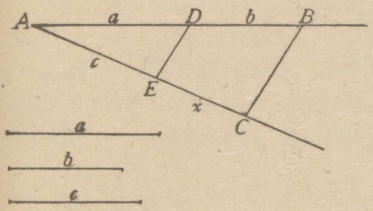
$$AD : DC : CB = AM : MN : NL = m : n : p.$$

Märkus: Kui m, n ja p tähendavad mingisuguseid arvusid, näit.: 2, 3 ja 5, siis tarvis sirgele AL asetada osad, mis võrduvad 2, 3 ja 5 juhusliku pikkuseüksusega.

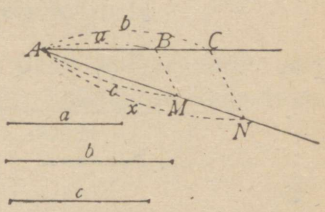
190. Ülesanne. Kolmele antud lõigule a, b ja c konstrueerida neljas võrdeline, s. o. konstrueerida lõik, mis rahuldaks võrde:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Esimene lahendusviis. Juhusliku nurga BAC (188. joon.) külgedele asetame $AD = a$, $DB = b$ ja $AE = c$; ühendades punktid D ja E, tõm-



188. joonis.



189. joonis.

bame $BC \parallel DE$; siis on EC otsitav lõik x, sest et

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}, \text{ või } \frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Teine lahendusviis. Juhusliku nurga NAC (189. joon.) külgedele asetame lõigud: $AB = a$, $AC = b$ ja $AM = c$. Ühendades punktid B ja M, tõmbame $CN \parallel BM$. Siis on AN otsitav lõik x, sest et

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN}, \text{ või } \frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

191. Harmooniline jagamine. Antud lõik AB jagada sisemiselt ja välimiselt võrdeliselt antud lõikudega $m : n$, s. o. leida sirgel AB ja tema pikendusel niisugused 2 punkti, millede kaugused antud punktidest A ja B suhtuksid nõnda kui $m : n$.

Tõmbame AB-le (190. joon.) juhuslike nurgi sirge AF; asetame temale $AC = m$, $CD = n$ ja $CF = n$.

Ühendades punktid B ja F ja tõmmates $CX \parallel FB$, saame punkti X, mis jagab lõigu AB s i s e m i s e l t võrdeliselt $m : n$, sest et

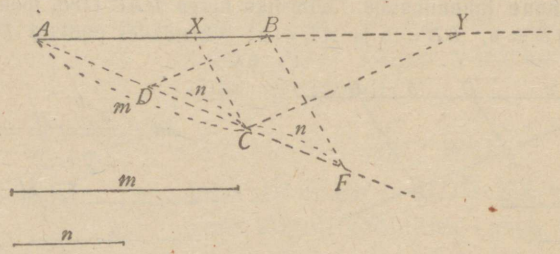
$$\frac{XA}{XB} = \frac{AC}{CF} = \frac{m}{n} \quad (1).$$

Ühendades punktid D ja B ja tõmmates $CY \parallel DB$, saame teise punkti Y, mis jagab lõigu AB v ä l i m i s e l t võrdeliselt $m:n$. Tõepoolest

$$\frac{YA}{YB} = \frac{CA}{CD} = \frac{m}{n} \quad (2).$$

Rohkem kui kaks punkti, mis rahuldaksid ülesande tingimust, ei või olla, sest kui muuta punkti X asendit, siis muutub ka suhe $\frac{XA}{XB}$; sama võib ütelda ka suhtest $\frac{YA}{YB}$.

Kui $m = n$, siis on olemas ainult üks punkt, mis rahuldab ülesande tingimust ja mis asetseb lõigu AB keskpunktis.



190. joonis.

Märkus. Punkte X ja Y (190. joon.), mis jagavad lõigu AB sisemiselt ja välimiselt ü h e s j a s a m a s s u h t e s, nimetatakse punktide A ja B suhtes **kaasharmoonilisteks** punktideks, ja nagu on võrretest (1) ja (2) näha, peavad nad rahuldama võrde

$$\frac{XA}{XB} = \frac{YA}{YB} \quad (3).$$

Lõiku AB nimetatakse $m:n$ suhtes **harmooniliselt jagatuks** punktide X ja Y abil. Võrdes (3) asetame keskmised liikmed ümber, saame

$$\frac{XA}{YA} = \frac{XB}{YB},$$ kust on näha, et

kui punktid X ja Y jagavad lõigu AB harmooniliselt, siis ka vastupidi: punktid A ja B jagavad harmooniliselt lõigu XY.

192. Lause. Kolmnurga sisenurga poolitaja jagab vastaskülje osadeks, mis on kahe teise küljega võrdelised (191. joon.)

$$T.: \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2. \qquad V.: \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}.$$

Tõestamine. Tõmbame sirge $CF \parallel DB$, kuni ta lõikub AB pikendusega punktis F. Siis jagavad nurga külgi lõika-

vad rööpsirged DB ja CF need nurga küljed võrdelisteks osadeks; seepärast

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BF}.$$

Kerge on tõestada, et $\triangle BFC$ on võrdhaarne; ja tõepoolest:

$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 2$ kui sisemised põiknurgad;

$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 1$ kui vastavad nurgad;

tingimuse järele aga $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$; järjelikult $\sphericalangle 3 = 4$, seepärast $BF = BC$.

Asetades eelmises võrdes lõigu BF asemele temaga võrdse lõigu BC, saame:

$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, mis oligi tarvis tõestada.

193. Pöördlause. Kolmnurga tippu kulgev sirge, mis jagab vastaskülje võrdelisteks osadeks kolmnurga kahe teise küljega, on tipunurga poolitaja (191. joon.).

T.: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$. *V.:* $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$.

Tõestamine. Tõmbame $CF \parallel DB$. Siis

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BF};$$

võrreldes seda võrret antud võrdega ja pannes tähele, et nende pahemad osad on võrdsed, saame:

$\frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BF}$, kust

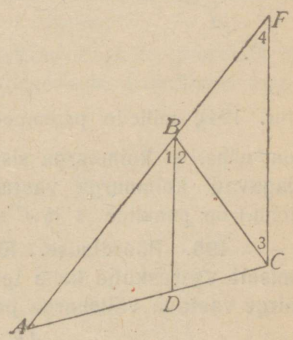
$BC = BF$; järjelikult

$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 3$, kuid

$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 1$ kui vastavad nurgad;

$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 2$ kui sisemised põiknurgad; järjelikult

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, mis oligi tarvis tõestada.



191. joonis.

194. Lause. Kolmnurga välisnurga poolitaja lõikab selle nurga vastaskülje pikendust niisuguses punktis, mille kaugused selle külje otsapunktidest on kolmnurga kahe teise küljega võrdelised (192. joon.).

T.: $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$. *V.:* $\frac{AF}{CF} = \frac{AB}{BC}$.

Tõestamine. Läbi punkti C tõmbame $LC \parallel BF$. Siis (nr. 186):

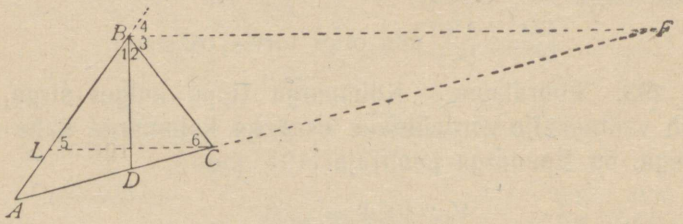
$$\frac{AF}{CF} = \frac{AB}{LB} \quad (1).$$

Kolmnurk LBC on võrdhaarne, sest et nurgad: $\measuredangle 5$ ja $\measuredangle 6$, olles vastavalt võrdsed võrdsete nurkadega: $\measuredangle 4$ ja $\measuredangle 3$, on võrdsed; järjelikult $LB = BC$. Pannes võrdesse (1) LB asemele BC, saame

$$\frac{AF}{CF} = \frac{AB}{BC},$$

mis oligi tarvis tõestada.

Märkus. Vaadeldes võrdeid: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ (nr. 193) ja $\frac{AF}{CF} = \frac{AB}{BC}$



192. joonis.

(nr. 194), millede parempoolsed osad on võrdsed, saame $\frac{AD}{DC} = \frac{AF}{CF}$, kust on näha, et **kolmnurga sisenurga poolitaja ja lähis-välisnurga poolitaja jagavad kolmnurga vastaskülje harmooniliselt.** Punktid D ja F (192. joon.) on punktide A ja C suhtes **kaasharmoonilised.**

195. Pöördlause. Kui kolmnurga tippu kulgev sirge jagab välimiselt vastaskülje kahe teise küljega võrdelisteks osadeks, siis on see sirge vastava välisnurga poolitaja (192. joon.).

$$T.: \frac{AF}{CF} = \frac{AB}{BC}. \quad V.: \measuredangle 3 = \measuredangle 4.$$

Tõestamine. Tõmmates $CL \parallel FB$, saame:

$$\frac{AF}{CF} = \frac{AB}{LB}.$$

Võrreldes seda võrret antud võrdega, leiame:

$\frac{AB}{BC} = \frac{AB}{LB}$, kust

$BC = LB$, tähendab, et

$\measuredangle 6 = \measuredangle 5$, kuid

$\sphericalangle 6 = \sphericalangle 3$ ja $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 4$; järjelikult
$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$, mis oligi tarvis tõestada.

196. Ülesanne. Leida niisuguste punktide geomeetriline koht, millede kaugused kahest antud punktist A ja B on võrdelised $m : n$.

Analüüs. Asetsegu punkt M (193. joon.) otsitaval geomeetrilisel kohal, s. o.

$$\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}.$$

Tõmbame sisenurga AMB ja välisnurga BML poolitajad, mis lõikuvad sirgega AB ja tema pikendusega punktides C ja D. Tõestuse järele (nr. 194)

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}.$$

Sellest järgneb, et punktid C ja D asetsevad otsitaval geomeetrilisel kohal.

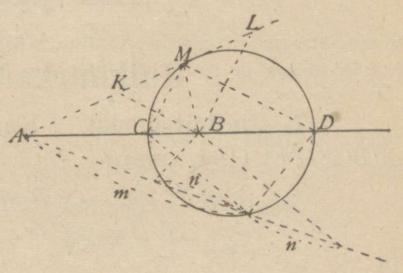
Sirged MC ja MD kui kõrvunurkade poolitajad on isekeskis risti (nr. 27), järjelikult on $\sphericalangle CMD$ täisnurk ja punkt M peab (nr. 165; 2) asetsema lõigule CD kui läbimõõdule joonestatud ringjoonel.

Konstruktsioon. Jagame lõigu AB punktides C ja D sisemiselt ja välimiselt võrdeliselt $m : n$. Lõigule CD kui läbimõõdule joonestame ringjoone. See ringjoon ongi otsitav geomeetriline koht.

Süntees. Võttes joonestatud ringjoonel juhusliku punkti M, ühendame selle punkti punktidega A, B, C ja D; läbi punkti B tõmbame $KB \parallel MD$ ja $BL \parallel CM$.

Rööpsirged CM ja BL lõikavad $\sphericalangle BAL$ külgedest võrdelised osad; järjelikult

$$\frac{CA}{CB} = \frac{MA}{ML} \quad (1).$$



193. joonis.

Samuti on meil sirgete KB ja MD rööpsuse põhjal

$$\frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MK}.$$

Konstruktsiooni järele aga

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{m}{n};$$ järjelikult

$$\frac{MA}{ML} = \frac{MA}{MK}, \text{ kust}$$
$$ML = MK.$$

$\measuredangle CMD$ kui läbimõõdule toetuv piirdenurk on täisnurk; ka $\measuredangle KBL$, mille küljed on $\measuredangle CMD$ külgedega vastavalt rööbiti, on täisnurk; seepärast, kui punktist M raadiusega ML joonestada ringjoon, siis kulgeb see ringjoon täisnurga tippu B (nr. 165; 2) ja punkti K, sest et tõestuse järele $ML = MK$; järjelikult $ML = MB$. Asetades võrdes (1) ML asemele MB, saame:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{MA}{MB}, \text{ kuid konstruktsiooni järele}$$
$$\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}; \text{ järjelikult}$$
$$\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}, \text{ mis oligi tarvis tõestada.}$$

Harutus. Ülesanne on alati võimalik ja tal on üks lahendus. Kui $m = n$, siis muutub otsitav geomeetriline koht sirgeks, mis on lõigu AB kesk-ristjoon.

XII peatükk.

Hulknurkade sarnasus.

197. Definitsioonid. Kui hulknurkades $ABCDE$ ja $A'B'C'D'E'$ (194. joon.)

$$\measuredangle A = \measuredangle A'; \quad \measuredangle B = \measuredangle B'; \quad \measuredangle C = \measuredangle C';$$
$$\measuredangle D = \measuredangle D'; \quad \measuredangle E = \measuredangle E'$$

ja

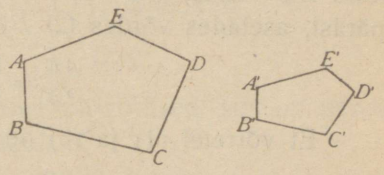
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'},$$

siis nimetatakse niisuguseid hulknurki **sarnasteks hulknurkadeks.** Sarnaste hulknurkade külgi AB ja $A'B'$ kui ka külgi BC ja $B'C'$, CD ja $C'D'$ jne. nimetatakse **vastavateks külgedeks.** Nõnda siis

kaht ühesuguse külgedearvuga hulknurka nimetatakse sarnasteks, kui

1. **nende nurgad on vastavalt võrdsed ja**
2. **nende vastavad küljed on võrdelised.**

Sarnaste hulknurkade võrdsete nurkade tippe nimetatakse **vastavateks tippudeks**; vastavaid tippe ühendavaid nurkjooni nimetatakse **vastavateks nurkjoonteks.** Kahe mistahtese vastava külje suhet nimetatakse hulknurkade **sarnasuse suhteks.** Sarnasuse märk on: $\sim$.



194. joonis.

Kerge on tähele panna, et sarnastes kolmnurkades asetsevad vastavad küljed vastu võrdseid nurki.

Märkus: Nähtavasti on kaks võrdset kolmnurka sarnased, sest et neil on ühesugune külgedearv, võrdsed nurgad ja võrdelised küljed. Tõepoolest, võrdsetes kolmnurkades ABC ja $A'B'C'$

$$\frac{AB}{A'B'} = 1\,;\ \frac{BC}{B'C'} = 1\,;\ \frac{AC}{A'C'} = 1\,;\ \text{järjelikult}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}\ ^{1)}.$$

Kaks kolmnurka, milledest kumbki eraldi võetuna on sarnane ühe ja sama kolmanda kolmnurgaga, on isekeskis sarnased, sest et nende nurgad on võrdsed ja küljed — võrdelised.

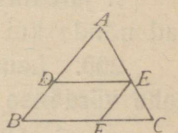
198. Lause. Sirge *DE* (195. joon.), mis on rööbiti kolmnurga *BAC* ühe küljega *BC*, eraldab sest kolmnurgast uue kolmnurga *DAE*, mis on antud kolmnurgaga sarnane.

T.: $DE \parallel BC$. ***V.:*** $\triangle DAE \sim \triangle BAC$.

Kolmnurkade BAC ja DAE nurgad on võrdsed, sest et $\sphericalangle A$ on ühine, aga nurgad ADE ja AED on võrdsed nurkadega ABC ja ACB kui vastavad nurgad.

Et sirged DE ja BC on rööbikud, siis (nr. 186)

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad (1).$$



195. joonis.

1) Kolmnurkade ühtivus on sarnasuse erijuhus, kus sarnasuse suhe on 1.

Läbi punkti E tõmbame $EF \parallel AB$. Siis (nr. 186)

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BF} \quad (2);$$

kuid $BF = DE$, kui rööbikute lõigud rööbikute vahel; seepärast, asetades võrdes (2) BF asemele DE, saame

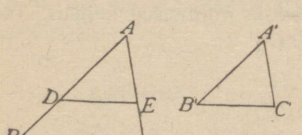
$$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \quad (3);$$

Et võrretel (1) ja (3) on ühine suhe $\frac{AC}{AE}$, siis

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}.$$

Nõnda on kolmnurgad BAC ja DAE sarnased, sest et nende nurgad on vastavalt võrdsed ja küljed — võrdelised.

199. Lause. Kui ühe kolmnurga kaks nurka on teise kolmnurga kahe nurgaga vastavalt võrdsed, siis on need kolmnurgad sarnased (196. joon.).



196. joonis.

T.: $\measuredangle A = \measuredangle A'$; $\measuredangle B = \measuredangle B'$.
V.: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Tõestamine. Küljele AB asetame lõigu $AD = A'B'$ ja tõmbame läbi punkti D sirge DE rööbiti BC-ga. Siis on $\triangle ADE$ sarnane kolmnurgaga ABC (nr. 198) ja ühtiv kolmnurgaga $A'B'C'$ ($AD = A'B'$ konstruktsiooni järele, $\measuredangle A = \measuredangle A'$ tingimuse järele ja $\measuredangle ADE = \measuredangle B'$, sest et kumbki neist võrdub ühe ja sama nurgaga B); järjelikult $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

I järeldus. Kui täisnurksetel kolmnurkadel on ühed teravnurgad võrdsed, siis on need kolmnurgad sarnased.

II järeldus. Sarnaste kolmnurkade vastavad küljed suhtuvad nõnda kui vastavad kõrgused.

200. Lause. Kaks kolmnurka on sarnased, kui nende kahe võrdelise külje vahelnurgad on võrdsed (196. joon.).

T.: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ (1). $\measuredangle A = \measuredangle A'$. *V.*: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Tõestamine. Küljele AB asetame $AD = A'B'$ ja tõmbame[1]) $DE \parallel BC$. Siis

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE};$$

kuid konstruktsiooni järele $AD = A'B'$; järjelikult

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AE} \quad (2);$$

et võrrete (1) ja (2) pahemad osad on võrdsed, siis on nende paremadki osad võrdsed; järjelikult

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AC}{AE}, \text{ kust}$$
$$A'C' = AE.$$

Et $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ tingimuse järele, $AD = A'B'$ konstruktsiooni järele ja $AE = A'C'$ tõestamise järele, siis $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$; kuid $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (nr. 198); järjelikult ka $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

201. Lause. Kaks kolmnurka on sarnased, kui nende kolm külge on võrdelised (196. joon.).

$T.: \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ (1). $V.: \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Tõestamine. Asetame küljele AB lõigu $AD = A'B'$ ja tõmbame $DE \parallel BC$. Et $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, siis on nende küljed võrdelised, seepärast

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \quad (2);$$

asetades liitsuhtes (2) lõigu AD asemele lõigu $A'B'$, saame:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \quad (3);$$

liitsuhteid (1) ja (3) võrreldes leiame

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AC}{A'C'} \text{ ja } \frac{BC}{DE} = \frac{BC}{B'C'}, \text{ kust}$$
$$AE = A'C' \text{ ja } DE = B'C'.$$

Kolmnurgad ADE ja $A'B'C'$, millede kolm külge on vastavalt võrdsed ($AD = A'B'$ konstruktsiooni järele, $AE = A'C'$

1) Pöörame tähelepanu seepeale, et nr. 199—201, 203 tõestamise võte on üks ja sama.

ja $DE = B'C'$ tõestamise järele), on ühtivad; järjelikult on $\triangle ABC$, mis sarnane kolmnurgaga ADE, sarnane ka kolmnurgaga $A'B'C'$, sest et $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

202. Lause. Kaks kolmnukra, mille küljed on vastamisi rööbikud või risti, on sarnased.

Kahe mistahtese kolmnurga ABC ja $A'B'C'$ nurkade vahel võib olla ainult kolm järgmist seost (vahekorda):

$$\begin{array}{lll} \sphericalangle A \neq \sphericalangle A' & \sphericalangle A \neq \sphericalangle A' & \sphericalangle A = \sphericalangle A' \text{ [1]} \\ \sphericalangle B \neq \sphericalangle B' \ (1), \text{ või} & \sphericalangle B \neq \sphericalangle B' \ (2), \text{ või} & \sphericalangle B = \sphericalangle B' \ (3) \\ \sphericalangle C \neq \sphericalangle C' & \sphericalangle C = \sphericalangle C' & \sphericalangle C = C'. \end{array}$$

Kui kolmnurga küljed on vastamisi rööbikud või risti, siis on nende nurgad kas võrdsed või nende summa on $2d$ (nr. 86 ja 87), s. o.

$$\begin{array}{l} \sphericalangle A = \sphericalangle A', \text{ või } \sphericalangle A + \sphericalangle A' = 2d, \\ \sphericalangle B = \sphericalangle B', \text{ või } \sphericalangle B + \sphericalangle B' = 2d, \\ \sphericalangle C = \sphericalangle C', \text{ või } \sphericalangle C + \sphericalangle C' = 2d. \end{array}$$

Ülemaltoodust on näha, et kahe rööbiku või risti külgedega kolmnurga nurkade vahel ei või olla (1) ja (2) seost, sest et esimesel juhusel peaks kahe kolmnurga kõigi sisenurkade summa võrduma $6d$-ga, teisel juhusel peab see summa aga suurem olema kui $4d$, selle vastu on aga kahe kolmnurga kõigi sisenurkade summa $4d$ (nr. 88); ei ole aga (1) ja (2) seosel maksvust, siis peab (3) seos maksev olema, sel juhusel on aga kolmnurgad sarnased (nr. 199).

203. Lause. Täisnurksed kolmnurgad on sarnased, kui ühe kolmnurga hüpotenuus ja kaatet on võrdelised teise kolmnurga hüpotenuusi ja kaatetiga (197. joon.).

$$T.: \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \ (1). \quad V.: \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Tõestamine. Asetame küljele AB lõigu $DB = A'B'$ ja

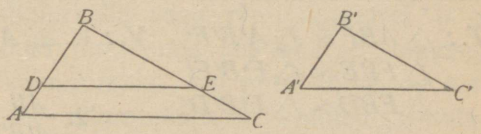
1) Neljandat seost: $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$; $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, aga $\sphericalangle C \neq \sphericalangle C$, ei või olla (nr. 89; 2).

tõmbame $DE \parallel AC$. Siis saame $\triangle DBE$, mis on sarnane kolmnurgaga ABC; järjelikult

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DE};$$

asetades sellesse võrdesse DB asemele temaga võrdse lõigu $A'B'$, saame:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{DE} \quad (2);$$



197. joonis.

võrreldes võrdeid (1) ja (2), märkame, et nende pahempoolsed osad on võrdsed, järjelikult

$$\frac{AC}{DE} = \frac{AC}{A'C'}, \text{ kust}$$

$$DE = A'C'.$$

Kolmnurgad DBE ja $A'B'C'$ on ühtivad, sest et neil on võrdsed hüpotenuusid ($DE = A'C'$ tõestamise järele) ja võrdsed kaatetid ($DB = A'B'$ konstruktsiooni järele); $\triangle ABC$, mis on sarnane kolmnurgaga DBE, on sarnane ka kolmnurgaga $A'B'C'$, mis oligi tarvis tõestada.

204. Märkus. Kõigest ülemaltoodust järgneb, et **nurkade võrdsus kolmnurkades eeldab külgede võrdelisust ja ümberpöördult**[1]). Peab tähendama, et teistel hulknurkadel seda omadust ei ole; näiteks on ruudu ja täis-nelinurga nurgad võrdsed, kuid vastavad küljed ei ole võrdelised; samuti on ruudu ja kaldruudu küljed võrdelised, kuid nurgad ei ole võrdsed.

205. Järgnev tabel võimaldab kolmnurkade ühtivuse- ja sarnasusejuhuste võrdlemise.

Kaks kolmnurka on	
ühtivad,	sarnased,
kui neil on	
1. kaks võrdset nurka ja võrdne nende nurkade lähiskülg;	1. kaks võrdset nurka;
2. võrdne nurk, mis asetseb kahe võrdse külje vahel;	2. võrdne nurk, mis asetseb kahe võrdelise külje vahel;
3. kolm võrdset külge.	3. kolm võrdelist külge.

1) Seda leidust peetakse Thales'e (639—548 e. Kr.) omaks.

Ülemaltoodud tabelist on näha, et kolmnurkade sarnasuseks on küllalt k a h e s t tingimusest, kuna aga kolmnurkade ühtivus vajab k o l m e tingimust.

206. Lause. Kaks hulknurka on sarnased, kui nad on moodustatud ühest ja samast arvust ühtlaselt asetatud sarnastest kolmnurkadest (198. joon.).

T.: $\triangle ABF \sim \triangle A'B'F'$
$\triangle FBE \sim \triangle F'B'E'$
$\triangle EBD \sim \triangle E'B'D'$
. . . . . .

V.: 1. $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$; $\sphericalangle F = \sphericalangle F'$; $\sphericalangle E = \sphericalangle E'$ . . .

2. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AF}{A'F'} = \frac{FE}{F'E'} = \ldots$

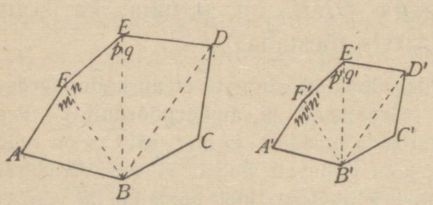
Tõestamine. Kolmnurkade ABF ja $A'B'F'$ sarnasusest järgneb (nr. 197):

$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ (mis oligi tarvis tõestada), $\sphericalangle m = \sphericalangle m'$,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AF}{A'F'} = \frac{FB}{F'B'} \quad (1).$$

Kolmnurkade FBE ja $F'B'E'$ sarnasusest järgneb:

$\sphericalangle n = \sphericalangle n'$, $\sphericalangle p = \sphericalangle p'$, $\frac{FB}{F'B'} = \frac{FE}{F'E'} = \frac{BE}{B'E'}$ (2) jne.



198. joonis.

Liites ositi võrdudused: $\sphericalangle m = \sphericalangle m'$ ja $\sphericalangle n = \sphericalangle n'$, saame:

$$\sphericalangle m + \sphericalangle n = \sphericalangle m' + \sphericalangle n'$$

või

$$\sphericalangle F = \sphericalangle F'.$$

Samuti võib tõestada nurkade $\sphericalangle E$ ja $\sphericalangle E'$, $\sphericalangle D$ ja $\sphericalangle D'$ jne. võrdsust, mis oligi tarvis tõestada.

Võrreldes liitsuhteid (1), (2) jne., saame:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AF}{A'F'} = \left(\frac{FB}{F'B'}\right) = \frac{FE}{F'E'} = \left(\frac{BE}{B'E'}\right) = \ldots$$

või

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AF}{A'F'} = \frac{FE}{F'E'} = \ldots,$$

mis oligi tarvis tõestada.

Nõnda on antud hulknurgad sarnased, sest et nende nurgad on vastavalt võrdsed ja küljed — võrdelised.

207. Pöördlause. Sarnaseid hulknurki võib lahutada üheks ja samaks arvuks ühtlaselt asetatud sarnasteks kolmnurkadeks (198. joon.).

Antud sarnaste hulknurkade vastavatest tippudest B ja B' tõmbame kõik võimalikud nurkjooned, mis jagavad kummagi hulknurga nii mitmeks kolmnurgaks, kui mitu külge on neil ilma kaheta; järjelikult on kolmnurkade arv mõlemas hulknurgas üks ja sama.

T.: 1. $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$; $\sphericalangle F = \sphericalangle F'$; $\sphericalangle E = \sphericalangle E'$ jne.

2. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AF}{A'F'} = \frac{FE}{F'E'} = \ldots$

V.: $\triangle ABF \sim \triangle A'B'F'$

$\triangle FBE \sim \triangle F'B'E'$

$\triangle EBD \sim \triangle E'B'D'$

. . . . . .

1. Et tingimuse järele $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ ja $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AF}{A'F'}$, siis $\triangle ABF \sim \triangle A'B'F'$ kui kolmnurgad, millede kahe võrdelise külje vahel asetsevad võrdsed nurgad, mis oligi tarvis tõestada.

2. Et $\sphericalangle n = \sphericalangle F - \sphericalangle m$ ja $n' = \sphericalangle F' - \sphericalangle m'$ ja et $\sphericalangle F = \sphericalangle F'$ tingimuse järele, kuna aga $\sphericalangle m = \sphericalangle m'$ seepärast, et $\triangle ABF \sim \triangle A'B'F'$, siis $\sphericalangle n = \sphericalangle n'$. Peale selle

$$\frac{AF}{A'F'} = \frac{FE}{F'E'} \text{ tingimuse järele ja}$$

$$\frac{AF}{A'F'} = \frac{FB}{F'B'} \ (\triangle ABF \sim \triangle A'B'F');$$

nende võrrete pahempoolsed suhted on võrdsed, järjelikult on võrdsed ka nende võrrete parempoolsed suhted:

$$\frac{FE}{F'E'} = \frac{FB}{F'B'}.$$

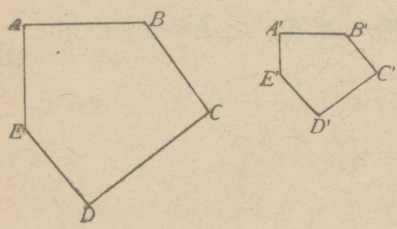
Nõnda on kolmnurgad FBE ja $F'B'E'$ sarnased ($\sphericalangle n = \sphericalangle n'$; $\frac{FE}{F'E'} = \frac{FB}{F'B'}$), mis oligi tarvis tõestada.

Samuti võib tõestada, et kolmnurgad EBD ja $E'B'D'$ jne. on sarnased.

208. Märkus. Kahest viimasest lausest järgneb, et kahe hulknurga sarnasuse tarviliseks ja küllaldaseks tingimuseks on võimalus antud hulknurki lahutada üheks ja samaks arvuks ühtlaselt asetatud sarnasteks kolmnurkadeks.

209. Lause. Sarnaste hulknurkade ümbermõõdud suhtuvad nõnda kui vastavad küljed (199. joon.).

T.: $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$. *V.*: $\frac{AB+BC+CD+\ldots}{A'B'+B'C'+C'D'+\ldots} = \frac{AB}{A'B'}$.



199. joonis.

Tõestamine. Et hulknurgad on sarnased, siis on nende küljed võrdelised, järjelikult:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots;$$

viimasest avaldusest saame algebras tõestatud võrdsete murdude (võrdsete suhete) omaduse põhjal:

$$\frac{AB+BC+CD+\ldots}{A'B'+B'C'+C'D'+\ldots} = \frac{AB}{A'B'},$$ mis oligi tarvis tõestada.

XIII peatükk.

Kolmnurga ja nelinurga elementide arvulised seosed (vahekorrad); võrdelised lõigud ringis.

210. Lause. Kui täisnurkse kolmnurga täisnurga tipust lasta hüpotenuusile ristjoon, siis on iga kaatet hüpotenuusi ja sama hüpotenuusi lähislõigu keskmine võrdeline [1]) **või**

1) Võrret, mille keskmised liikmed on ühesugused, näit.:

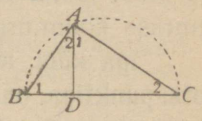
$$a : c = c : b,$$

nimetatakse pidevaks võrdeks. Selle võrde kumbagi keskmist liiget c

kaateti ruut võrdub hüpotenuusi ja sama hüpotenuusi lähislõigu korrutisega[1]) (200. joon.).

$$V.: \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}; \quad \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}.$$

Tõestamine. Täisnurksetes kolmnurkades ABC ja ABD on number 2-ga tähistatud nurgad võrdsed, sest et nende küljed on risti; järjelikult on need kolmnurgad sarnased.



200. joonis.

Kolmnurgas ABC $\begin{cases} BC \text{ asetseb vastu täisnurka } A; \\ AB \text{ asetseb vastu } \measuredangle 2; \end{cases}$

Kolmnurgas ABD $\begin{cases} AB \text{ asetseb vastu täisnurka } BDA; \\ BD \text{ asetseb vastu } \measuredangle 2; \end{cases}$

järjelikult on kolmnurga ABC külg BC ja kolmnurga ABD külg AB vastavad küljed, sest et nad asetsevad vastu võrdseid (täis-) nurki;

samuti on $\triangle ABC$ külg AB ja $\triangle ABD$ külg BD vastavad küljed, sest et nad asetsevad vastu number 2-ga tähistatud võrdseid nurki.

Et sarnaste kolmnurkade vastavad küljed on võrdelised, siis

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD} \text{ (1), mis oligi tarvis tõestada.}$$

Samuti leiame kolmnurkade ABC ja ACD sarnasusest, et

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC} \text{ (2), mis oligi tarvis tõestada.}$$

---

nimetataksee a ja b keskmiseks võrdeliseks; lahendades selle võrde c suhtes, saame:

$$c^2 = ab$$

$$c = \sqrt{ab};$$

nõnda ei ole suuruste a ja b keskmine võrdeline miski muu kui ruutjuur nende suuruste korrutisest.

1) Õigem oleks olnud öelda: „kaatetit mõõtva arvu ruut võrdub hüpotenuusi ja sama hüpotenuusi lähislõiku mõõtvate arvude korrutisega“, kusjuures mõõtmisel muidugi ühist mõõtu tarvitati.

Et võrde äärmiste liikmete korrutis võrdub keskmiste liikmete korrutisega, siis saame võrretest (1) ja (2):

$$\left.\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= BC \,.\, BD \\ \overline{AC}^2 &= BC \,.\, DC \end{aligned}\right\}^{1)}, \text{ mis oligi tarvis tõestada.}$$

211. Järeldus. Kui ühendada pool-ringjoone mingi punkt A (200. joon.) läbimõõdu BC otsapunktidega, siis saame täisnurkse kolmnurga (nr. 160); seepärast eelmise lause põhjal: **iga kõõl, mis ühendab ringjoone mingi punkti läbimõõdu otsapunktiga, on terve läbimõõdu ja sama läbimõõdu lähislõigu keskmine võrdeline.**

212. Pythagorase lause. Hüpotenuusi ruut võrdub kaatetite ruutude summaga[2]**).**

Nr. 210 saime:

$$\overline{AB}^2 = BC \,.\, BD$$
$$\overline{AC}^2 = BC \,.\, DC.$$

Liites need võrdused ositi, leiame:

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC(BD + DC) = BC \,.\, BC = \overline{BC}^2$, mis oligi tarvis tõestada.

213. Märkus. Pythagorase lause võimaldab leida täisnurkse kolmnurga ühe külje, kui on teada ta kaks külge. Kui näiteks on kaatetid b ja c ja hüpotenuus a, siis saame nimetatud lause põhjal:

---

1) Neil võrdustel on ainult siis mõte, kui sümbolid AB, BC jne. tähendavad mitte lõikusid endid, vaid arvusid, mis mõõdavad neid lõikusid ühise mõõduga; eelmistel võrretel on aga mõte ka sel juhusel, kui sümbolid AB, BC jne. tähendavad lõikusid endid.

2) Õigem oleks olnud öelda: „selle arvu ruut, mis mõõdab hüpotenuusi mingi mõõduga, võrdub nende arvude ruutude summaga, mis mõõdavad kaateteid sama mõõduga."

See lause olevat Pythagorase leidus (elas VI aastasajal enne Kr.). Egiptusemaal rännates sai ta nähtavasti sealsetelt preestritelt teada nõndanimetatud Egiptuse kolmnurgast, mille küljed on 3, 4 ja 5. Nende arvude seos

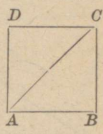
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

võis viia Pythagorase üldise lause leidmisele.

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ või } a = \sqrt{b^2 + c^2};$$
$$b^2 = a^2 - c^2 \text{ või } b = \sqrt{a^2 - c^2};$$
$$c^2 = a^2 - b^2 \text{ või } c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Kui a, b ja c all mõista mitte arvusid, vaid lõikusid, siis, konstrueerides kahest antud lõigust täisnurkse kolmnurga (nr. 166), leiamegi kolmanda külje.

214. Pythagorase lause võimaldab leida ruudu diagonaali ja külje suhte. Tõmmates ruudu $ABCD$ (201. joon.) nurkjoone AC, saame võrdhaarse täisnurkse kolmnurga ABC, millest leiame:



201. joonis.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 = 2\,\overline{AB}^2,$$

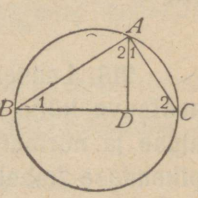
kust

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = 2 \text{ ja } \frac{AC}{AB} = \sqrt{2}.$$

Et ei ole olemas ei täis- ega murdarvu, mille ruut võrduks 2-ga, siis tähendab see, et see suhe on ühismõõdutu (irratsionaalne); sellest järgneb, et ruudu nurkjoon ja külg on ühismõõduta suurused, mis on juba eespool (nr. 150) puhtgeomeetriliselt tõestatud.

215. Lause. Täisnurga tipust hüpotenuusile lastud ristjoon on hüpotenuusi lõikude keskmine võrdeline (202. joon.).

Kolmnurgad ABD ja ACD on sarnased, sest et nende ühe ja sama numbriga tähistatud nurgad on võrdsed kui risti külgedega nurgad. Kolmnurga ABD küljed BD ja AD, mis asetsevad vastavalt nurkade $\measuredangle 2$ ja $\measuredangle 1$ vastas, on kolmnurga ACD nurkade $\measuredangle 2$ ja $\measuredangle 1$ vastas asetsevate külgede AD ja DC vastavad küljed; järjelikult



202. joon.

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC},$$ mis oligi tarvis tõestada,

või

$$\overline{AD}^2 = BD \cdot DC.$$

216. Järeldus. Ühendades ringjoone mingi punkti A (202. joon.) läbimõõdu BC otsapunktidega, saame täisnurkse (nr. 160) kolmnurga ABC, mille hüpotenuusiks on läbimõõt; seepärast eelmise lause põhjal:

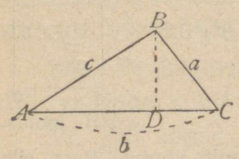
ringjoone mingist punktist läbimõõdule lastud ristjoon on läbimõõdu lõikude keskmine võrdeline.

217. Lause. Igas kolmnurgas võrdub teravnurga vastu asetseva külje ruut kahe teise külje ruutude summaga, ilma aluse ja teravnurga tipu ja kõrguse vahel asetseva sama aluse lõigu kahekordse korrutiseta (203. joon.).

$$V.: a^2 = c^2 + b^2 - 2b \,.\, AD.$$

Tõestamine. Täisnurksest $\triangle DBC$ teame:

$$a^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 \quad (1);$$



203. joonis.

samuti teame täisnurksest $\triangle ABD$:

$$\overline{BD}^2 = c^2 - \overline{AD}^2 \quad (2);$$

joonisest selgub, et

$DC = AC - AD = b - AD$; järjelikult

$\overline{DC}^2 = (b - AD)^2 = b^2 - 2b \,.\, AD + \overline{AD}^2$ (3).

Asetades võrdusesse (1) $\overline{BD}^2$ asemele tema avalduse võrdusest (2) ja $\overline{DC}^2$ asemele tema avalduse võrdusest (3), saame:

$$a^2 = c^2 - \overline{AD}^2 + b^2 - 2b \,.\, AD + \overline{AD}^2$$

või

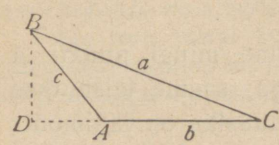
$$a^2 = c^2 + b^2 - 2b \,.\, AD,$$ mis oligi tarvis tõestada.

218. Lause. Igas kolmnurgas võrdub nürinurga vastas asetseva külje ruut kahe teise külje ruutude summaga pluss aluse ja nürinurga tipu ja kõrguse vahel asetseva sama aluse pikenduse kahekordne korrutis (204. joon.).

$$V.: a^2 = c^2 + b^2 + 2b \,.\, AD.$$

Tõestamine: Kolmnurgast DBC teame:

$$a^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 \quad (1);$$



204. joonis.

samuti teame kolmnurgast DBA:

$$\overline{BD}^2 = c^2 - \overline{AD}^2 \quad (2);$$

joonisest aga selgub, et

$DC = AC + AD = b + AD$; järjelikult

$\overline{DC}^2 = (b + AD)^2 = b^2 + 2b \,.\, AD + \overline{AD}^2$ (3);

asetades võrdusesse (1) $\overline{BD}^2$ ja $\overline{DC}^2$ asemele nende avaldused võrdustest (2) ja (3), saame:

$$a^2 = c^2 - \overline{AD}^2 + b^2 + 2b \,.\, AD + \overline{AD}^2$$

või

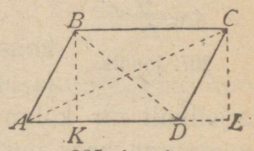
$a^2 = c^2 + b^2 + 2b \,.\, AD$, mis oligi tarvis tõestada.

219. Lause. Iga rööpküliku nurkjoonte ruutude summa võrdub tema nelja külje ruutude summaga (205. joon.).

$$V.: \quad \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2.$$

Tõestamine. Tõmbame ristjooned BK ja CL. Täisnurksed kolmnurgad ABK ja DCL on ühtivad (võrdsed hüpotenuusid ja võrdsed teravnurgad); järjelikult

$$AK = DL.$$



205. joonis.

Kolmnurgast ABD teame (nr. 217):

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2AD \,.\, AK \quad (1);$$

kolmnurgast ACD teame

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 + 2AD \,.\, DL \quad (2).$$

Liites võrdused (1) ja (2) ositi, asetades võrdusesse (1) $\overline{AD}^2$ asemele temaga võrdse suuruse $\overline{BC}^2$ ja arvesse võttes, et liikmed: $-2AD \,.\, AK$ ja $+2AD \,.\, DL$ hävivad vastastikku, sest et tõestuse järele $AK = DL$, saame:

$\overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$, mis oligi tarvis tõestada.

220. Ülesanne. Leida kolmnurga küljepoolitaja tema kolme külje *a*, *b* ja *c* järele (206. joon.).

Pikendame küljepoolitajat OB lõigu $OD = OB$ võrra ja ühendame punkti D punktidega A ja C. Kerge on tõestada, et saadud joonis $ABCD$ on rööpkülik. Tarvitades siin lauset nr. 219, saame:

$$\overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$$

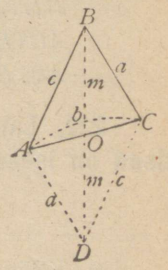
või tähistades OB m abil:

$$4m^2 + b^2 = c^2 + a^2 + c^2 + a^2 = 2a^2 + 2c^2, \text{ või}$$

$$4m^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2, \text{ kust}$$

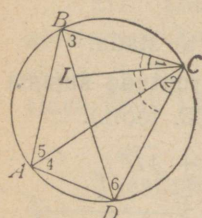
$$m^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} \text{ või}$$

$$m = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}.$$



206. joonis.

221. Ptolemäos'e lause. Iga sissejoonestatud nelinurga nurkjoonte korrutis võrdub vastaskülgede korrutiste summaga[1]) (207. joon.).



207. joonis.

V.: $BD \cdot AC = AD \cdot BC + AB \cdot CD$.

Tõestamine. Nurkjoon AC moodustab nelinurga külgedega kaks nurka: $\sphericalangle BCA$ ja $\sphericalangle DCA$; suuremale nurgale BCA asetame nurga $BCL = \sphericalangle ACD$.

Kolmnurkades BCL ja ACD: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ konstruktsiooni järele, $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$ kui ühele ja samale kaarele CD toetuvad piirdenurgad; järjelikult on kolmnurgad BCL ja ACD sarnased, sest ühe kolmnurga kaks nurka on teise kolmnurga kahe nurgaga vastavalt võrdsed; tähendab, et

$$\frac{BL}{BC} = \frac{AD}{AC} \text{ või } BL \cdot AC = AD \cdot BC \quad (1).$$

Kolmnurkades BCA ja LCD on nurgad BCA ja LCD võrdsed, sest et nad on moodustatud üldnurgast LCA ja võrdsetest nurkadest $\sphericalangle 1$ ja $\sphericalangle 2$; $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6$ kui ühele ja samale kaarele BC toetuvad piirdenurgad; järjelikult on $\Delta BCA \sim \Delta LCD$, millest järgneb, et

$$\frac{LD}{CD} = \frac{AB}{AC} \text{ või } LD \cdot AC = AB \cdot CD \quad (2).$$

Liites võrdused (1) ja (2) ositi, saame:

$BL \cdot AC + LD \cdot AC = AD \cdot BC + AB \cdot CD$ või
$AC(BL + LD) = AD \cdot BC + AB \cdot CD$ või
$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$, mis oligi tarvis tõestada.

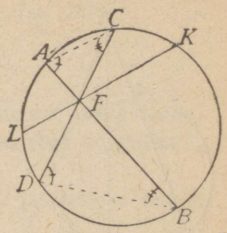
222. Lause. Ringi sees lõikuvate kõõlude lõikude korrutised on isekeskis võrdsed (208. joon.).

V.: $AF \cdot FB = DF \cdot FC$.

---

1) Kõige varemini leidus see lause Ptolemäose teoses: „Almagest". (Claudius Ptolemäos elas aastasajal pärast Kr. sünd.).

Võtame kaks juhuslist kõõlu AB ja DC. Ühendame punktid A ja C ja B ja D. Kolmnurgad AFC ja DFB on sarnased ($\sphericalangle A = \sphericalangle D$ kui ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad; $\sphericalangle C = \sphericalangle B$ samal põhjusel); järjelikult



208. joonis.

$$\frac{AF}{FC} = \frac{DF}{FB} \text{ või}$$

$$AF \cdot FB = DF \cdot FC,$$ mis oligi tarvis tõestada.

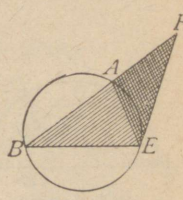
Järeldus. Kui läbi punkti F tõmmata mingi teine kõõl LK, siis võime endiselt tõestada, et

$$LF \cdot FK = DF \cdot FC.$$

Sest on näha, et **läbi antud punkti tõmmatud kõõlu lõikude korrutis on jääv** ehk **konstantne suurus**, s. o. see korrutis ei muutu, ehk küll kõõl ise ja tema lõigud muutuvad kõõlu asendist olenevalt.

223. Lause. Kui läbi väljaspool ringi asetseva ühe ja sama punkti tõmmata puutuja ja lõikaja, siis on puutuja terve lõikaja ja tema välisosa keskmine võrdeline (209. joon.).

Ühendame punktid A ja B punktiga E ja vaatleme kaht kolmnurka BFE ja AFE. $\sphericalangle F$ on neil ühine, $\sphericalangle B = \sphericalangle AEF$, sest et nad mõõtuvad ühe ja sama kaare AE poolega, järjelikult on kolmnurgad BFE ja AFE sarnased, sest et nende kaks nurka on vastavalt võrdsed; kolmnurkade sarnasusest järgneb nende külgede võrdelisus:



209. joonis.

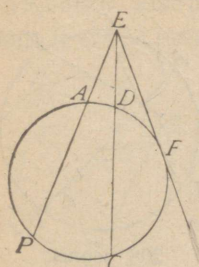
$$\frac{FB}{FE} = \frac{FE}{FA},$$ mis oligi tarvis tõestada,

või

$$FB \cdot FA = \overline{FE}^2$$

Järeldus. Lõikaja ja tema välisosa korrutis võrdub puutuja ruuduga.

224. Lause. **Kui väljaspool ringi antud punktist tõmmata temale lõikajad, siis on lõikajate ja nende välisosade korrutised isekeskis võrdsed** (210. joon.).



210. joonis.

V.: $EP \cdot EA = EC \cdot ED$.

Tõmbame puutuja EF. Siis (nr. 223)

$$EP \cdot EA = \overline{EF}^2$$

$$EC \cdot ED = \overline{EF}^2, \text{ kust}$$

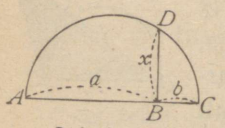
$EP \cdot EA = EC \cdot ED$, mis oligi tarvis tõestada.

Märkus. Nr. 223. ja 224. sisu kokkuvõttena võib öelda, **et lõikaja ja tema välisosa korrutis on jääv** ehk **konstantne suurus, mis võrdub puutuja ruuduga.**

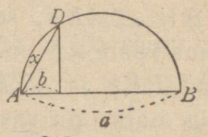
225. Ülesanne. Konstrueerida lõikude a ja b keskmine võrdeline.

Esimene lahendusviis. Juhuslikule sirgele (211. joon.) asetame lõigud $AB = a$ ja $BC = b$; AC-le kui läbimõõdule joonistame pool-ringjoone; punktist B tõmbame ristjoone ja pikendame teda, kuni ta lõikub ringjoonega; lõik $BD = x$ ongi otsitav, sest et (nr. 216):

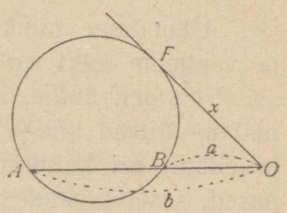
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \text{ või } x^2 = ab \text{ või } x = \sqrt{ab}.$$



211. joonis.



212. joonis.



213. joonis.

Teine lahendusviis. Juhuslikule sirgele (212. joon.) asetame lõigud $AB = a$ ja $AC = b$. AB-le kui läbimõõdule konstrueerime pool-ringjoone; punktist C tõmbame ristjoone ja pikendame teda, kuni ta lõikub ringjoonega punktis D; punkti D ühendame punktiga A; kõõl $AD = x$ ongi otsitav lõik, sest et

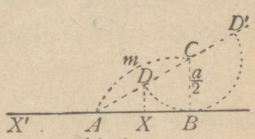
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \text{ või } x = \sqrt{ab}.$$

Kolmas lahendusviis. Lõigule $OA = b$ (213. joon.) asetame $OB = a$. Läbi punktide A ja B joonestame mingi ringjoone, millele punktist O tõmbame puutuja OF; see puutuja ongi otsitav lõik, sest et (nr. 223):

$$\frac{OA}{OF} = \frac{OF}{OB} \text{ või } \frac{b}{OF} = \frac{OF}{a}.$$

226. Ülesanne. Antud lõik $AB = a$ jagada kaheks osaks nõnda, et suurem osa oleks terve lõigu ja vähema osa keskmine võrdeline [1]) (214. joon.).

Lõigule AB tõmbame punktist B ristjoone BC ja asetame sellele ristjoonele $BC = \frac{a}{2}$. Punktist C joonestame raadiusega $\frac{a}{2}$ ringjoone ja tõmbame läbi punktide A ja C sirge AD'. Punktist A joonestame raadiusega AD kaare, mis lõikab AB punktis X. Punkt X jagabki lõigu AB nõutavalt kaheks osaks. Tõepoolest võib nr. 223 põhjal kirjutada:



214 joon

$$\frac{AD'}{AB} = \frac{AB}{AD} \text{ või } \frac{AD'-AB}{AB} = \frac{AB-AD}{AD};$$

silmas pidades, et $AB = DD' = a$, $AD'-AB = AD'-DD' = AD = AX$ $AB-AD = AB-AX = XB$, saame:

$$\frac{AX}{AB} = \frac{XB}{AX} \text{ või } \frac{AB}{AX} = \frac{AX}{XB}, \text{ mis oligi tarvis tõestada.}$$

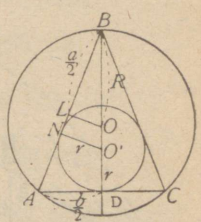
226a. Ülesanne. On antud võrdhaarne kolmnurk, mille küljed on a, a ja b. Leida ümberjoonestatud ringi raadius R ja sissejoonestatud ringi raadius r (214a. joon.).

1. Nr. 127 põhjal $LB = \frac{AB}{2}$. Täisnurksest $\triangle ABD$ leiame:

$$BD = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}.$$

Kolmnurgad ABD ja LBO on sarnased, sest nad on täisnurksed ja neil on ühine teravnurk ABD; seepärast

$$\frac{AB}{BD} = \frac{OB}{LB} \text{ või } \frac{a}{\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-b^2}} = \frac{R}{\frac{a}{2}}, \text{ kust}$$



214a. joonis.

1) Eukleides nimetas seda jagamiseks äärmises ja keskmises suhtes; seda jagamist nimetatakse veel kuldlõikeliseks ehk jumalikuks jagamiseks.

$$R = \frac{2a^2}{2\sqrt{4a^2 - b^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

2. Kolmnurkade ABD ja NBO' sarnasusest ($\sphericalangle ABD = \sphericalangle NBO'$ ja $\sphericalangle O'NB = \sphericalangle ADB$) järgneb:

$$\frac{O'N}{O'B} = \frac{AD}{AB} \text{ või } \frac{r}{BD - r} = \frac{\frac{1}{2}b}{a}, \text{ millest}$$

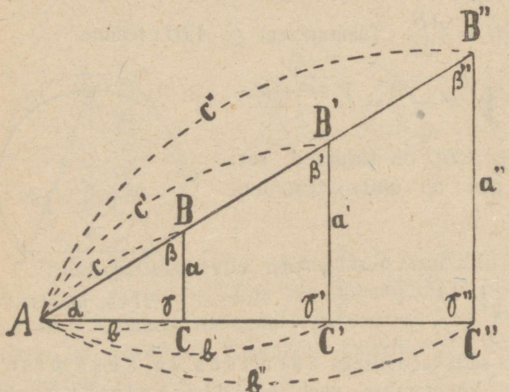
$$ar = \frac{BD \cdot b}{2} - \frac{br}{2}; \; 2ar + br = b \cdot BD; \; r\,(2a + b) = b \cdot BD;$$

$$r = \frac{b \cdot BD}{2a + b} = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2(2a + b)}.$$

XIII-a peatükk.

Trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid. Täisnurksete ja võrdhaarsete kolmnurkade lahendamine.

226-b. Trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid. Kolmnurgad ABC, $A'B'C'$ ja $A''B''C''$ (214b. joon.) on täisnurksed; ($\gamma = \gamma' = \gamma'' = d$) ja neil on ühine teravnurk α. Tähendab, need kolmnurgad on sarnased (nr. 199) ja nende vastavad küljed on võrdelised; järjelikult:



214b. joonis.

1. $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{a''}{c''}$;

2. $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{b''}{c''}$;

3. $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}$; 5. $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}=\frac{c''}{a''}$;

4. $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}=\frac{b''}{a''}$; 6. $\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}=\frac{c''}{b''}$;

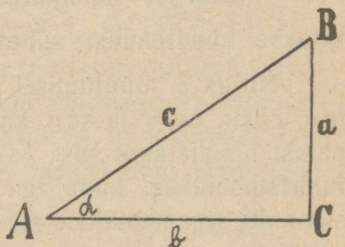
Teravnurk määrab täisnurksete kolmnurkade vastavate külgede suhete suuruse.

Ümberpöördult:

Täisnurksete kolmnurkade vastavate külgede suhted määravad teravnurga suuruse. Joonisest (214b. joon.) on teada suhted:

1. $\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}=\frac{a''}{c''}$; $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}=\frac{b''}{c''}$ jne. Samast joonisest näeme, et kolmnurkades ABC, $AB'C'$ ja $AB''C''$ on vastavad nurgad võrdsed; näiteks on α kõigi kolmnurkade ühine teravnurk.

Seni mõõtsime nurki tuntud nurga-mõõtüksuste: kraadide, minutite ja sekundite abil; täisnurkse kolmnurga külgede suhted võimaldavad, nagu näha, samuti nurkade mõõtmist.



214c. joonis.

Täisnurkse kolmnurga ABC teravnurga α leidmiseks võime tarvitada järgmistest suhetest mingisugust üht suhet:

$\frac{a}{c}$, mida nimetatakse nurga α **siinuseks (sn α)**;

$\frac{b}{c}$, „ „ „ „ **koosinuseks (cs α)**;

$\frac{a}{b}$, „ „ „ „ **tangensiks (tg α)**;

$\frac{b}{a}$, „ „ „ „ **kootangensiks (ctg α)**;

$\frac{c}{a}$, „ „ „ „ **koosekansiks (csc α)**;

$\frac{c}{b}$, „ „ „ „ **seekansiks (sc α)**.

Täisnurkse kolmnurga (214c. joon.) **teravnurga** (α) **siinu-**

seks nimetatakse selle nurga vastaskaateti suhet hüpotenuusisse $\left(\frac{a}{c}\right)$.

Täisnurkse kolmnurga teravnurga (α) koosinuseks nimetatakse selle nurga lähiskaateti suhet hüpotenuusisse $\left(\frac{b}{c}\right)$.

Täisnurkse kolmnurga teravnurga (α) tangensiks nimetatakse selle nurga vastaskaateti suhet lähiskaatetisse $\left(\frac{a}{b}\right)$.

Täisnurkse kolmnurga teravnurga (α) kootangensiks nimetatakse selle nurga lähiskaateti suhet vastaskaatetisse $\left(\frac{b}{a}\right)$.

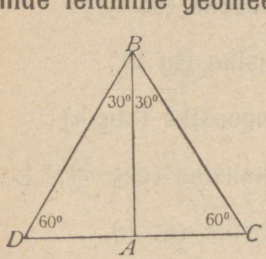
Täisnurkse kolmnurga teravnurga (α) koosekansiks nimetatakse hüpotenuusi suhet selle nurga vastaskaatetisse $\left(\frac{c}{a}\right)$.

Täisnurkse kolmnurga teravnurga (α) seekansiks nimetatakse hüpotenuusi suhet selle nurga lähiskaatetisse $\left(\frac{c}{b}\right)$.

Nurga α muutumisel (214c joon.) muutuvad $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\csc\alpha$ ja $\sec\alpha$ kui kolmnurga külgede suhted; seepärast nimetatakse $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ jne. nurga α **trigonomeetrilisteks funktsioonideks,** kuna aga nurka α nimetatakse nende funktsioonide **argumendiks.**

Ülesanne. Otsusele jõuda, missugused funktsioonid muutuvad nurga α suurenemisel vähenedes ja missugused funktsioonid muutuvad suurenedes?

226c. Mõne üksiku nurga trigonomeetriliste funktsioonide leidmine geomeetria abil.



214d. joonis.

Olgu $AB \perp DC$ (214d. joon.). Nr. 93. põestasime, et $AC = \frac{BC}{2}$ või $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$; järjelikult:

$$\sin 30^0 = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}.$$

Tähistame võrdkülgse kolmnurga küljed a-ga, s. o. olgu $BD = BC = CD = a$.

Pythagorase lause järele

$$\overline{BA}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4};\ BA = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

$$\text{cs } 30^0 = \frac{BA}{BC} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$\text{tg } 30^0 = \frac{AC}{BA} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3};$$

$$\text{ctg } 30^0 = \frac{BA}{AC} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}.$$

Samuti võime sama joonist silmas pidades leida, et
$\text{sn } 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\text{cs } 60^0 = \frac{1}{2}$; $\text{tg } 60^0 = \sqrt{3}$; $\text{ctg } 60^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Ülesanne. Leida 45°-lise nurga trigonomeetrilised funktsioonid. (Juhatus: joonistada täisnurkne võrdhaarne kolmnurk.)

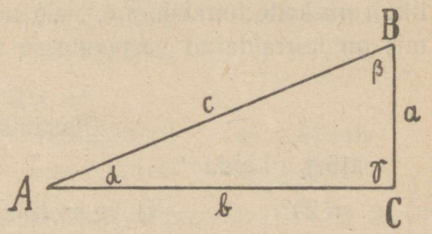
Üldiselt arvutatakse trigonomeetrilised funktsioonid kõrgema matemaatika abil ja kogutakse vastavatesse tabelitesse.

226d. Täiendusnurgaks nimetatakse nurka, mis liidetult teise nurgaga annab täisnurga; nõnda on täisnurkse kolmnurga kumbki teravnurk teise teravnurga täiendusnurk.

Nr. 226b definitsioone silmas pidades võib kirjutada (214e. joon.):

$\text{sn } \alpha = \frac{a}{c} = \text{cs } \beta = \text{cs } (90^0 - \alpha)$;
antud nurga siinus võrdub täiendusnurga koosinusega.

$\text{cs } \alpha = \frac{b}{c} = \text{sn } \beta = \text{sn } (90^0 - \alpha)$;
antud nurga koosinus võrdub täiendusnurga siinusega.



214e. joonis.

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b} = \text{ctg } \beta = \text{ctg } (90^0 - \alpha);$$

antud nurga tangens võrdub täiendusnurga kootangensiga.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(90^0 - \alpha);$$

antud nurga kootangens võrdub täiendusnurga tangensiga.

Ülesanded:

115a. Täisnurkse kolmnurga teravnurk $\alpha = 45^0$; konstrueerida kolmnurk, mõõta külgede pikkused millimeetriga ja leida nende suhted.

115b. Leida samuti graafiliselt $\sin 30^0$, $\cos 30^0$, $\operatorname{tg} 60^0$, $\operatorname{ctg} 60^0$.

115c. Täisnurkses kolmnurgas ABC hüpotenuus $AB = 5$ sm, kaatet $AC = 4$ sm ja kaatet $BC = 3$ sm. Leida (ligikaudselt) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

115d. Joonistada nurk, mille $\operatorname{tg} = 1{,}5$, mille $\cos = \frac{1}{2}$, mille $\sin = \frac{1}{4}$, mille $\operatorname{ctg} = 2$.

115e. Millimeetri-ruutpaberit tarvitades leida graafiliselt $\sin 10^0$, $\sin 25^0$, $\sin 40^0$, $\sin 65^0$, $\cos 15^0$, $\cos 35^0$, $\cos 50^0$, $\cos 85^0$.

115f. $\sin 50 = 0{,}77$; $\sin 25^0 = 0{,}42$. Kui suur on $\cos 40^0$? $\cos 65^0$?

$\cos 78^0 = 0{,}21$; $\cos 44^0 = 0{,}72$. Kui suur on $\sin 12^0$? $\sin 46^0$? $\operatorname{tg} 45^0 = 1$; $\operatorname{ctg} 30^0 = \sqrt{3}$. Kui suur on $\operatorname{ctg} 45^0$? $\operatorname{tg} 60^0$?

226e. Trigonomeetrilistes arvutamistes ei tarvitata harilikult nurkade funktsioone, vaid nende funktsioonide logaritme, mis on korraldatud vastavatesse tabelitesse.

Ülesanded.

115g. Leida:

a) lg $\sin 24^0$.
b) „ „ 45^0.
c) „ „ $32^0 46'$.
d) „ „ $63^0 35'$.
e) „ „ $45^0 30'$.
f) lg $\sin 13^0 12'$
g) „ „ $18^0 19' 24''$.
h) „ „ $12^0 25' 30''$.
i) „ „ $37^0 48' 17''$.
j) „ „ $50^0 20' 18''$.
k) lg $\sin 69^0 44' 56''$.
l) „ „ $80^0 17' 40''$.
m) „ „ $83^0 25' 14''$.
n) „ „ $32^0 40' 17''$.
o) „ „ $8^0 9' 11''$.

115h. Leida:

a) lg tg 35°. d) lg tg 57°31′40″. g) lg tg 25°17′42″.
b) „ „ 43°12′. e) „ „ 42°34′50″. h) „ „ 64°34′12″.
c) „ „ 28°35′. f) „ „ 38°40′12″. i) „ „ 71°1′34″.

115i. Leida:

a) lg cs 10°26′. d) lg cs 28°18′16″. g) lg cs 58°4′25″.
b) „ „ 68°17′. e) „ „ 8°20′36″. h) „ „ 16°48″.
c) „ „ 54°50′. f) „ „ 77°34′30″. i) „ „ 54°16″.

115j. Leida:

a) lg ctg 45°9′. d) lg ctg 51°4′14″. g) 36°7′15″.
b) „ „ 68°49′. e) „ „ 70°48′29″. h) 45°40″.
c) „ „ 39°48′12″. f) „ „ 45°18′24″. i) 32°54″.

115k. Leida α, kui lg sn α on:

a) 9,62865. d) 9,62933. g) 9,90799. j) 9,75480.
b) 9,87438. e) 9,70945. h) 9,87977. k) 9,91428.
c) 9,97996. f) 9,81267. i) 9,27732. l) 9,86487.

115l. Leida α, kui lg tg α on:

a) 9,74345. d) 0,00619. g) 0,96512. j) 9,77372.
b) 0,74345. e) 0,58661. h) 8,96512. k) 0,3.
c) 0,32571. f) 9,58661. i) 1,04360. l) 9,86.

115m. Leida α, kui lg cs α on:

a) 9,62865. d) 9,89193. g) 9,84920. j) 9,50654.
b) 9,95427. e) 9,95641. h) 9,33303. k) 9,86487.
c) 9,91746. f) 9,75865. i) 9,90844. l) 9,82700.

115n. Leida α, kui lg ctg α on:

a) 0,87475 c) 9,96328 e) 9,74241 g) 9,67448
b) 9,87475 d) 0,96328 f) 9,16105 h) 9,65051

115o. Leida nurk α järgmistest avaldustest.

a) $\text{sn}\,\alpha = \frac{15}{38}$; $\text{cs}\,\alpha = \frac{17}{35}$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{7}$; $\text{ctg}\,\alpha = \frac{13}{12}$.

b) $\text{sn}\,\alpha = \frac{38\,\text{cs}\,62^{0}8'44''}{19{,}6}$; $\text{cs}\,\alpha = \frac{\text{sn}\,75^{0}30'24''}{7{,}4\,\text{tg}\,36^{0}8'}$.

c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}24\operatorname{tg}53^0 6'14''}{2{,}008}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{27\operatorname{sn}48^0 35'26''}{\operatorname{cs}23^0 15'16''}$.

d) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}047^2\sqrt{\operatorname{sn}^3 10^0 15'\,.\,\operatorname{tg}4^0 17'}}{0{,}01376^3\,.\,\operatorname{tg}^3 68^0 45'}$.

115p. Leida x:

a) $x = 36\operatorname{sn}48^0 8'15''$; $x = 9{,}6\operatorname{cs}28^0 30'16''$.

b) $x = 24{,}5\operatorname{sn}26^0 8'19''\operatorname{cs}63^0 20'30''$; $x = \frac{4{,}32}{\operatorname{sn}26^0}$.

c) $x = \frac{6{,}32\operatorname{tg}32^0 17'}{\operatorname{cs}20^0 48''}$; $x = \frac{83{,}5\operatorname{sn}42^0 27'30''}{\operatorname{sn}73^0 6'28''}$.

d) $x = \frac{25{,}4\operatorname{tg}73^0 20'50''}{\operatorname{ctg}28^0 16'}$; $x = \frac{30{,}9\operatorname{sn}20^0 30'40''\operatorname{cs}62^0 8'}{\operatorname{tg}75^0 24'}$.

226f. Täisnurkse kolmnurga elementide olenevus üksteisest. 214c. joonist silmas pidades võime trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonide põhjal (nr. 226b) kirjutada:

1. $\operatorname{sn}\alpha = \frac{a}{c}$, kust $\boldsymbol{a = c\,.\operatorname{sn}\alpha}$ või $\boldsymbol{a = c\,.\operatorname{cs}\beta}$, sest et $\operatorname{sn}\alpha = \operatorname{cs}\beta$;

samuti:

$\operatorname{sn}\beta = \frac{b}{c}$, kust $\boldsymbol{b = c\,.\operatorname{sn}\beta}$ või $\boldsymbol{b = c\,.\operatorname{cs}\alpha}$, sest et $\operatorname{sn}\beta = \operatorname{cs}\alpha$;

kaatet võrdub:

a) hüpotenuusi ja oma vastasnurga siinuse korrutisega või b) hüpotenuusi ja oma lähisnurga koosinuse korrutisega.

2. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, kust $\boldsymbol{a = b\,.\operatorname{tg}\alpha}$ või $\boldsymbol{a = b\,.\operatorname{ctg}\beta}$, sest et $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$;

samuti:

$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$, kust $\boldsymbol{b = a\,.\operatorname{tg}\beta}$ või $\boldsymbol{b = a\,.\operatorname{ctg}\alpha}$, sest et $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha$.

Kaatet võrdub:

c) teise kaateti ja oma vastasnurga tangensi korrutisega või **d) teise kaateti ja oma lähisnurga kootangensi korrutisega.**

3. Kui $\operatorname{sn}\alpha = \frac{a}{c}$, siis $\boldsymbol{c = \frac{a}{\operatorname{sn}\alpha}}$ või $\boldsymbol{c = \frac{a}{\operatorname{cs}\beta}}$, sest et $\operatorname{sn}\alpha = \operatorname{cs}\beta$;

samuti:

kui $\text{sn}\,\beta = \frac{b}{c}$, siis $c = \frac{b}{\text{sn}\,\beta}$ või $c = \frac{b}{\text{cs}\,\alpha}$, sest et $\text{sn}\,\beta = \text{cs}\,\alpha$;

hüpotenuus võrdub:

a) **kaateti ja sama kaateti vastasnurga siinuse suhtega** või

b) **kaateti ja sama kaateti lähisnurga koosinuse suhtega.**

226g. Täisnurksete kolmnurkade lahendamine.

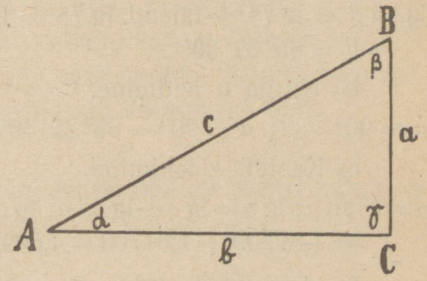
Eelmisest geomeetriakursusest on teada, et täisnurkne kolmnurk on määratud, kui on antud:

1) mõlemad kaatetid a ja b (215f. joon.);

2) hüpotenuus ja kaatet c ja a või c ja b;

3) kaatet ja teravnurk a ja α, või a ja β, või b ja β, või b ja α;

4) hüpotenuus ja teravnurk c ja α või c ja β.



214f. joonis.

Vaatame, kuidas võime samade andmete abil lahendada täisnurkseid kolmnurki, tarvitades seejuures eelmises paragrahvis tuletatud valemeid.

1. **Lahendada täisnurkne kolmnurk, kui on antud kaatet $a = 34{,}2$ ja kaatet $b = 45{,}5$** (214f. joon.).

a) Nurga α leidmine.

$\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$; $\lg \text{tg}\,\alpha = \lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b = \lg a +$ täiend. $\lg b$;

$\lg \text{tg}\,\alpha = \lg 34{,}2 +$ täiend. $\lg 45{,}5 = 1{,}53403 + \bar{2}{,}34199 = \bar{1}{,}87602$

$\alpha = 36^0 55' 51''$.

b) Nurga β leidmine.

$\beta = 90^0 - \alpha$; $\beta = 90^0 - 36^0\,55'\,51'' = 53^0\,4'\,9''$.

c) Hüpotenuusi c leidmine.

$c = \frac{a}{\text{sn}\,\alpha}$; $\lg c = \lg a - \lg \text{sn}\,\alpha = \lg a +$ täiend. $\lg \text{sn}\,\alpha$;

lg c = lg 34,2 + täiend. lg sn 36° 55′ 51″ = 1,53403 + 0,22124 = = **1,75527**; **c = 56,921.**

Märkus: Hüpotenuusi c oleks võinud ka geomeetrilise valemi järele leida, nimelt (nr. 213):

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2. Lahendada täisnurkne kolmnurk, kui on antud hüpotenuus $c = 78$ ja kaatet $b = 71$ (215 f. joon.).

a) Nurga β leidmine.

$\text{sn}\,\beta = \frac{b}{c}$; lg sn β = lg b − lg c = lg b + täiend. lg c;

lg sn β = lg 71 + täiend. lg 78 = 1,85126 + $\bar{2}$,10791 = $\bar{1}$,95917; **β = 65° 32′ 30″.**

b) Nurga α leidmine.

$\alpha = 90^0 - \beta$; $\alpha = 90^0 - 65^0\,32'\,30'' = \mathbf{24^0\,27'\,30''}$.

c) Kaateti a leidmine.

$a = c \cdot \text{sn}\,\alpha$; lg a = lg c + lg sn α; **lg a** = lg 78 + lg sn 24° 27′ 30″ = = 1,89209 + $\bar{1}$,61703 = **1,50912**; **a = 32,294.**

3. Lahendada täisnurkne kolmnurk, kui on antud kaatet $a = 237{,}64$ ja $\alpha = 58^0\ 20'\ 35''$.

a) Nurga β leidmine.

$\beta = 90^0 - \alpha$; $\beta = 90^0 - 58^0\,20'\,35'' = \mathbf{31^0\,39'\,25''}$.

b) Hüpotenuusi c leidmine.

$c = \frac{a}{\text{sn}\,\alpha}$; lg c = lg a − lg sn α = lg a + täiend. lg. sn α;

lg c = lg 237,64 + täiend. lg sn 58° 20′ 35″ = 2,37592 + + 0,06996 = **2,44588**; **c = 279,175.**

c) Kaateti b leidmine.

$b = a \cdot \text{ctg}\,\alpha$; lg b = lg a + lg ctg α; **lg b** = lg 237,64 + lg ctg 58° 20′ 35″ = 2,37592 + $\bar{1}$,78999 = **2,16591**; **b = 146,524.**

4. Lahendada täisnurkne kolmnurk, kui on antud hüpotenuus $c = 8{,}96$ ja $\beta = 57^0\,42'\,36''$.

a) **Nurga α leidmine.**

$\alpha = 90^0 - \beta$; $\alpha = 90^0 - 57^0\,42'\,36'' = \mathbf{32^0\,17'\,24''}$.

b) Kaateti b leidmine.

$b = c \cdot \operatorname{sn} \beta$; $\lg b = \lg c + \lg \operatorname{sn} \beta$; $\lg b = \lg 8{,}96 +$
$+ \lg \operatorname{sn} 57^0 42' 36'' = 0{,}95231 + \bar{1}{,}92704 = 0{,}87935$; $b = 7{,}5744$.

c) Kaateti a leidmine.

$a = c \cdot \operatorname{cs} \beta$; $\lg a = \lg c + \lg \operatorname{cs} \beta$; $\lg a = \lg 8{,}96 +$
$+ \lg \operatorname{cs} 57^0 42' 36'' = 0{,}95231 + \bar{1}{,}72771 = 0{,}68002$; $a = 4{,}7866$.

226h. Võrdhaarsete kolmnurkade lahendamine.

Et lahendada võrdhaarne kolmnurk ABC (214g. joon.), seks tõmbame kõrguse h, mille tagajärjel jaguneb antud võrdhaarne kolmnurk kaheks täisnurkseks kolmnurgaks. Lahendades ühe neist täisnurksetest kolmnurkadest, leiame kergesti ka antud võrdhaarse kolmnurga elemendid. Nõnda lahendatakse võrdhaarne kolmnurk täisnurkse kolmnurga abil.

Olgu näiteks ülesanne:

Lahendada võrdhaarne kolmnurk, kui on antud kõrgus h ja alus b.

Joonisel (214g. joon.) asuvast pahempoolsest täisnurksest kolmnurgast teame:

$h = \frac{b}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$, millest järgneb:

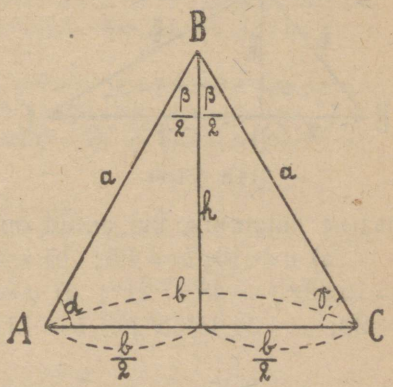
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{b};$$

$h = a \cdot \operatorname{sn} \alpha$, millest järgneb:

$$a = \frac{h}{\operatorname{sn} \alpha};$$

$\frac{\beta}{2} = 90^0 - \alpha$, millest järgneb:

$$\beta = 180^0 - 2\alpha.$$



214g. joonis.

Ülesanded:

115q. Lahendada täisnurkne kolmnurk, kui on antud:

a) Kaatetid: 1) $a = 28{,}12$; $b = 10{,}6$; 2) $a = 8$; $b = 6$; 3) $a = 1{,}2$; $b = 2{,}35$; 4) $a = 0{,}84$; $b = 1{,}82$.

b) Kaatet ja hüpotenuus: 1) $b = 24$; $c = 25$; 2) $a = 38{,}1$; $c = 83{,}5$; 3) $a = 0{,}14$; $c = 3{,}4$; 4) $b = 56{,}48$; $c = 124{,}5$.

c) Kaatet ja teravnurk: 1) $a = 11{,}8$; $\beta = 43^0 28' 46''$; 2) $b = 52{,}4$; $\beta = 57^0 28' 16''$; 3) $a = 53{,}7$; $\beta = 21^0 25' 25''$; 4) $b = 20$; $\alpha = 32^0 48' 20''$.

d) Hüpotenuus ja teravnurk: 1) $c = 230$; $\alpha = 42^0 20'$; 2) $c = 56{,}28$; $\beta = 62^0 8' 12''$; 3) $c = 42{,}6$; $\alpha = 78^0 20' 15''$; 4) $c = 0{,}645$; $\beta = 60^0 27' 39''$.

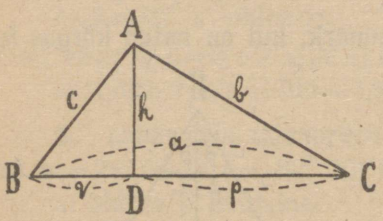
e) Hüpotenuus $c = 5$ ja kaatetite summa $a + b = 7$.

f) Hüpotenuus $c = 26$ ja kaatetite vahe $a - b = 14$.

g) Kaatetite summa $a + b = 29{,}1$ ja kaatetite vahe $a - b = 7{,}5$.

h) Hüpotenuusi ja kaateti summa $c + b = 5$ ja hüpotenuusi ja sama kaateti vahe $c - b = 0{,}2$.

i) Kaatet $a = 40$, kõrgus $h = 35$ (214h. joon.).



214h. joonis.

j) Kaatet $b = 15$ ja selle kaateti lähisosa hüpotenuusil $p = 12$.

k) Kõrgus $h = 24{,}5$ ja $p = 15$.

l) Hüpotenuus $c = 50$ ja kõrgus $h = 17$.

115r. Lahendada võrdhaarne kolmnurk, kui antud on (214g. joon.):

a) $a = 10$; $b = 4{,}5$; b) $b = 22{,}7$; $\beta = 42^0 40' 14''$; c) $a = 15{,}68$; $\gamma = 48^0 37' 21''$; d) $a = 1426$; $\alpha = 59^0 24' 28''$; e) $h = 20$; $\alpha = 34^0 15' 33''$; f) $b = 71$; $h = 120{,}5$.

XIV peatükk.

Homoteetia.

(Sarnane jooniste järjestus.)

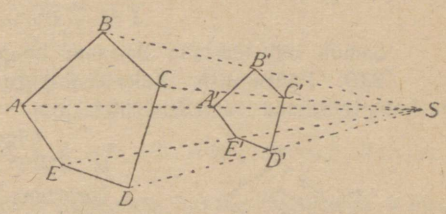
227. Definitsioonid. Kui asetada sirgetele SA, SB, SC,..., mis ühendavad teatava punkti S antud joonise $ABCDE$ (215. joon.) kõigi punktidega

A, B, C,..., või asetada samade sirgete pikendustele (216. joon.) lõigud SA', SB', SC',..., mis on võrdelised lõikudega SA, SB, SC,..., s. o. moodustavad liitsuhte

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'} = \ldots = k,$$

siis nimetatakse tähtedega A', B', C',... tähistatud joonist ja antud joonist $ABCDE$ punkti S suhtes homoteetilisteks (sarnaselt järjestatud) joonisteks; punkti S nimetatakse homoteetia keskpunktiks, kuna aga suurust k nimetatakse homoteetia ehk sarnasuse suhteks.

Homoteetia on otsene, kui punktid A', B', C',... on võetud sirgetel SA, SB, SC,... (215. joon.), ja pöördhomoteetia, kui punktid A', B', C',... on võetud nimetatud sirgete pikendustel (216. joon.); punktid A ja A' jne. on homoteetilised ehk vastavad punktid; vastavaid punkte ühendavaid sirgeid nimetatakse vastavaiks sirgeiks; lõikusid, mis ühendavad vastavad punktid keskpunktiga, nimetatakse sarnasuse kiirteks.

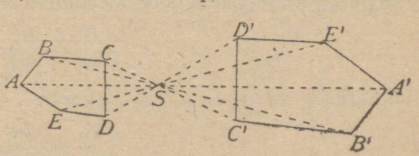


215. joonis.

Märkused. I. Ilmne on, et kui pöörata pöördhomoteetilise joonise keskpunkti S ümber 180^0 võrra, siis saab homoteetiline otsene joonis.

II. Keskpunktiline (tsentraalne) sümmeetria on pöördhomoteetia erijuhus, kusjuures homoteetia suhe on 1.

228. Lause. Kaks homoteetilist hulknurka on sarnased (215. joon.).



216. joon.

$T.$: $\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'} = \ldots = k.$

V.: 1. $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$; $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$; $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$; . . .

2. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots$

Tõestamine. 1. Et tingimuse järele $\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'}$, s. o. sirged AB ja $A'B'$ lõikavad nurga ASB külgedel võrdelised lõigud, siis on (nr. 187) $AB \parallel A'B'$. Samuti võib tõestada, et $BC \parallel B'C'$; $CD \parallel C'D'$ jne.; järjelikult on nurgad: $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, . . . nurkadega: $\sphericalangle A'$, $\sphericalangle B'$, $\sphericalangle C'$, . . vastavalt võrdsed kui rööbikute külgedega nurgad, mis oligi tarvis tõestada

2. Et tõestuse järele $AB \parallel A'B'$, siis on $\triangle ASB \sim \triangle A'SB'$; järjelikult

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{SB}{SB'}\ ^{1)}\ (1);$$

lõikude BC ja $B'C'$ rööpsuse tagajärjel on $\triangle BSC \sim \triangle B'SC'$; järjelikult

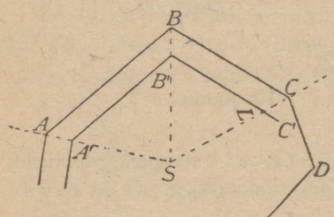
$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{SB}{SB'}\ (2);$$

et võrrete (1) ja (2) paremad osad on võrdsed, siis

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'},$$ mis oligi tarvis tõestada.

Samuti võib tõestada ülejäänud külgede võrdelisust.

229. Pöördlause. Kaks rööbikute külgedega sarnast hulknurka on homoteetilised (sarnaselt järjestatud).



217. joon.

Olgu sarnaste hulknurkade $ABC..$ ja $A'B'C'...$ (217. joon.) küljed rööbiti. Tõestame, et sirged AA', BB', CC' jne. lõikuvad ühes punktis S. Tõmbame sirged AA' ning BB' ja ühendame nende lõikepunkti S punktiga C. Olgu punkt L sirgete SC ja $B'C'$ lõikepunkt. Siis on

$\triangle ASB \sim \triangle A'SB'$; järjelikult $\frac{AB}{A'B'} = \frac{SB}{SB'}$;

$\triangle BSC \sim \triangle B'SL$; järjelikult $\frac{BC}{B'L} = \frac{SB}{SB'}$;

et nende võrrete parempoolsed suhted on võrdsed, siis

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'L}\ (1);$$

hulknurkade sarnasusest aga järgneb:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}\ (2);$$

võrrete (1) ja (2) pahempoolsed suhted on võrdsed; järjelikult

$$\frac{BC}{B'L} = \frac{BC}{B'C'},$$ millest järgneb, et

$$B'L = B'C',$$

s. o. punkt L ühtib punktiga C' ja sirge SC kulgeb punkti C'. Samuti

*) Siit on näha, et sarnasuse suhe $\frac{AB}{A'B'}$ võrdub homoteetia suhtega $\frac{SB}{SB'} = k$; seepärast nimetataksegi suurust k sarnasuse ehk homoteetia suhteks.

võib tõestada, et sirge SD kulgeb punkti D', sirge SE kulgeb punkti E' jne. Nõnda siis **sirged, mis ühendavad kahe rööbikute külgedega sarnase hulknurga vastavad tipud, lõikuvad ühes punktis S, mis ongi sarnasuse keskpunkt,** sest et

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'} = \dots$$

230. Märkus. Kui hulknurkade $ABCDE$ ja $A'B'C'D'E'$ (215. joon.) sarnasuse ehk homoteetia suhe võrdub suurusega k, s. o. kui

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{SA}{SA'} = k,$$

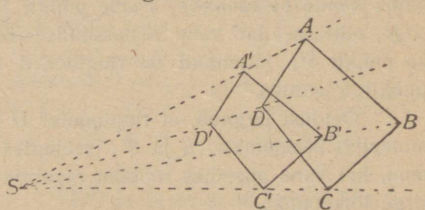
siis öeldakse, et hulknurk $ABCDE$ võrdub hulknurgaga $A'B'C'D'E'$, mis on korrutatud suurusuga k sarnasuse keskpunkti suhtes.

Et $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \dots = k$, kust $AB = k \cdot A'B'$; $BC = k \cdot B'C'$ jne., siis **korrutada hulknurk arvuga k tähendab, hoides hulknurga küljed rööbiti nende endise asendiga, igaüks neist külgedest korrutada suurusega k.**

Kerge on tõestada, et korrutades hulknurka suurusega k, kõik selle hulknurga lineaar-osad korrutuvad sama suurusega k.

231. Ülesanne. Korrutada nelinurk $ABCD$ (218. joon.) **suurusega k sarnasuse keskpunkti S suhtes.**

Olgu $k = \frac{4}{5}$. Jagame sirged SA, SB jne. 5 võrdseks osaks ja märgime punktid A', B'..., nõnda et



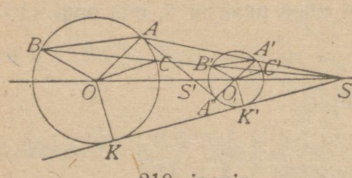
218. joon.

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \dots = \frac{4}{5}.$$

Nelinurk $A'B'C'D'$ on otsitav, sest et ta küljed on antud nelinurga $ABCD$ külgedega rööbiti (nr. 187) ja igaüks neist, näit. $A'B' = \frac{4}{5}AB$, seepärast et $\frac{A'B'}{AB} = \frac{SA'}{SA} = \frac{4}{5}$.

Kui suurus $k = \frac{m}{n}$, kus m ja n on kaks antud lõiku, siis tarvis sirgel SA leida punkt A' nõnda, et $\frac{SA'}{SA} = \frac{m}{n}$, s. o. leida lõik SA' kui lõikude SA, m ja n neljas võrdeline (nr. 190).

232. Lause. **Iga kaht ringjoont võib vaadelda kui homoteetilisi ja pöördhomoteetilisi jooniseid teineteise suhtes** (219. joon.).



219. joonis.

Ringides O ja O' tõmbame paariti rööbikud raadiused OA ja $O'A'$, OB ja $O'B'$, mis ühele poole on sihitud. Kohtagu AA' sirget OO' punktis S. Siis $\triangle AOB \sim \triangle A'O'B'$ ($\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'O'B'$ ja $\frac{OA}{O'A'} = \frac{OB}{O'B'}$). Et nende sarnaste kolmnurkade küljed on rööbikud, siis on nad homoteetilised (nr. 229) S suhtes, järjelikult kulgeb ka sirge BB' punkti S. Samuti võib tõestada, et iga sirge CC', mis ühendab kahe ühele poole sihitud rööbiku raadiuse otsapunkte, kulgeb punkti S. Et ühine puutuja KK' samuti ühendab rööbikute raadiuste OK ja $O'K'$ otsapunkte, siis kulgeb ka tema punkti S. Nõnda siis

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \cdots \frac{SO'}{SO} = \frac{O'A'}{OA}.$$

Sellest on näha, et ringjooned O ja O' on homoteetilised sarnasuse keskpunkti S suhtes.

Tõmbame nüüd vastassihilised raadiused, näit. OA ja $O'A''$; ühendame nende otsapunktid, saame punkti S'. Kerge on tõestada, et iga teine sirge, mis ühendab kahe vastassihilise rööbiku raadiuse otsapunkte, kulgeb ka punkti S'; järjelikult on ringjooned O ja O' pöördhomoteetilised keskpunkti S' suhtes.

Öeldust järgneb, et ringjoontel O ja O' on kaks sarnasuse (ehk homoteetia) keskpunkti: S ja S'; seejuures ei ole sarnasuse keskpunkt miski muu, kui kahe mistahes rööbiku raadiuse otsapunkte ühendava sirge ja keksirge lõikepunkt.

Märkides ringjoonte O ja O' raadiused vastavalt R ja r abil, saame: $\frac{SO'}{SO} = \frac{O'A'}{OA} = \frac{r}{R}$ ja $\frac{S'O'}{S'O} = \frac{O'A''}{OA} = \frac{r}{R}$, kust $\frac{SO'}{SO} = \frac{S'O'}{S'O}$, s. o. punktid S ja S' jagavad keskpunktide kauguse OO' sisemiselt ja välimiselt ühes ja samas suhtes $\left(\frac{r}{R}\right)$, järjelikult on nad kaasharmoonilised punktid.

233. Märkus. Kui ringjoontes O ja O' (219. joon.)

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'A'}{OA} = \frac{r}{R} = k,$$

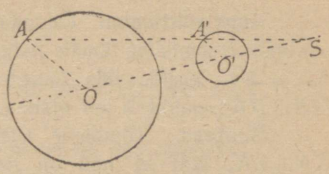
siis öeldakse, et **ringjoon O' võrdub ringjoonega O, kui teda korrutada suurusega k sarnasuse keskpunkti S suhtes.** Ka ringjoone O raadius korrutub sel juhusel suurusega k, sest et võrdusest $\frac{r}{R} = k$ järgneb: $r = k.R$; sama võib tõestada ringjoone O teiste lineaarelementide suhtes.

234. Ülesanne. Korrutada ringjoon O arvuga $\frac{1}{3}$ sarnasuse keskpunkti S suhtes.

Juhuslisel lõikajal AS (220. joon.) määrame punkti A' nõnda, et

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{1}{3}.$$

Punktist A' tõmbame $A'O' \parallel AO$. Siis on O' otsitava ringjoone keskpunkt, aga $A'O'$ sama ringjoone raadius.



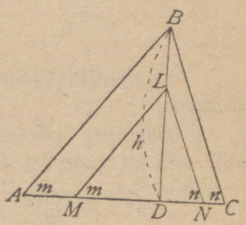
220. joonis.

Sarnasuse metood.

235. Konstruktsiooni-ülesannete lahendamisel sagedasti tarvitatav sarnasuse metood seisab selles, et, kasutades ülesande mõnesuguseid andmeid, konstrueeritakse esialgu joonis, mis on sarnane otsitava joonisega, kuna pärast seda asutakse otsitava joonise konstrueerimisele.

236. Ülesanne. Konstrueerida kolmnurk aluse kahest lähisnurgast: $\measuredangle m$ ja $\measuredangle n$ ja kõrgusest h (221. joon).

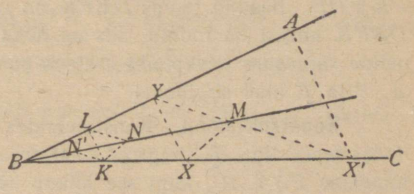
Konstrueerime $\triangle MLN$, mis oleks sarnane otsitava kolmnurgaga, s. o. kolmnurga, mille kaks nurka võrduksid antud nurkadega: $\measuredangle m$ ja $\measuredangle n$. Pikendame kõrgust DL ja asetame temale $BD = h$; punktist B tõmbame $BA \parallel LM$ ja $BC \parallel LN$; $\triangle ABC$ on otsitav, sest et $BD = h$, $\measuredangle A = \measuredangle m$ ja $\measuredangle C = \measuredangle n$.



221. joonis.

237. Ülesanne. Antud on $\measuredangle ABC$ ja tema sees punkt M. Leida küljel BC punkt X, mis asetseks ühekaugusel küljest AB ja punktist M (222. joon.).

Analüüs. Olgu punkt X leitud, nõnda et ristjoon $XY = XM$. Ülesande lahendamine piirdub kolmnurga XYM konstrueerimisega. Võttes sirgel AB juhuslise punkti L ja tõmmates $KL \parallel XY$, $LN \parallel YM$, ja $KN \parallel XM$, saame $\triangle KLN \sim \triangle XYM$. Punkt B on nende sarnasuse keskpunkt, sest et ta asetseb kolmnurkade LKN ja XYM vastavaid tippe ühendavate sirgete AB ja CB lõikepunktis; seepärast asetsevad punktid M, N ja B ühel sirgel;



222. joonis.

peale selle: $KL \perp AB$, sest et $KL \parallel XY$, ja $KL = KN$, sest et kolmnurkade KLN ja XYM sarnasusest järgneb: $\frac{KL}{KN} = \frac{XY}{XM} = 1$, kust $KL = KN$.

Konstruktsioon. Ühendame punktid B ja M. Külje AB juhuslikust punktist L tõmbame temale ristjoone LK. Punktist K joonestame raadiusega $KN = KL$ kaare, mis lõikab BM punktis N; punktist M tõmbame $MX \parallel NK$; punkt X on otsitav.

Süntees. Tõmbame leitud punktist X AB-le ristjoone XY; siis $XY \parallel LK$, sest et nad on risti ühe ja sama sirgega. Selle tagajärjel: $\triangle BXY \sim \triangle BKL$; seepärast

$$\frac{XY}{KL} = \frac{BX}{BK} \quad (1).$$

Kolmnurkade BXM ja BKN sarnasusest teame:

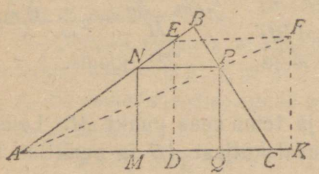
$$\frac{XM}{KN} = \frac{BX}{BK} \quad (2).$$

Võrreldes võrdeid (1) ja (2), saame:

$$\frac{XY}{KL} = \frac{XM}{KN}.$$

Et konstruktsiooni järele $KL = KN$, siis $XY = XM$, mis oligi tarvis tõestada.

Harutus. Ülesanne on alati võimalik ja tal on kaks lahendust X ja X', sest et punktist K raadiusega KL joonestatud kaar lõikab sirget BM kahes punktis N ja N'.



223. joonis.

233. Ülesanne. Antud kolmnurka ABC joonestada ruut (223. joon.).

Analüüs. Olgu kolmnurka ABC joonestatud ruut $MNPQ$. Nagu näha, piirdub ülesande lahendus punkti P otsimisega. Konstrueerime joonise, mis oleks otsitava joonisega sarnane.

Seks otstarbeks tõmbame sirge AB juhuslikust punktist E sirge $EF \parallel AC$ ja $ED \parallel PQ$; sirgele EF asetame $EF = ED$; punktist F tõmbame $FK \parallel DE$. Saadud joonis $DEFK$ on ruut. Et sarnaste jooniste $MNPQ$ ja $DEFK$ küljed on rööbiti, siis on need joonised homoteetilised (nr. 229) ja nende sarnasuse keskpunkt asetseb punktis A; järjelikult asetsevad punktid A, P ja F ühel sirgjoonel.

Konstruktsioon. Konstrueerides juhusliku ruudu $DEFK$ ja ühendades tema tipu F tipuga A, saame otsitava ruudu tipu P. Punktist P tõmbame $PN \parallel AC$, kuni see lõikub küljega AB; punktidest N ja P tõmbame AC-le ristjooned.

Süntees. Joonised $ANPQ$ ja $AEFK$ on sarnased, sest et nad on moodustatud sarnastest kolmnurkadest (nr. 208); seepärast on nende küljed võrdelised:

$$\frac{NP}{PQ} = \frac{EF}{FK} = 1;$$

järjelikult $NP = PQ$; tähendab, joonis $MNPQ$ on ruut, mis oligi tarvis tõestada.

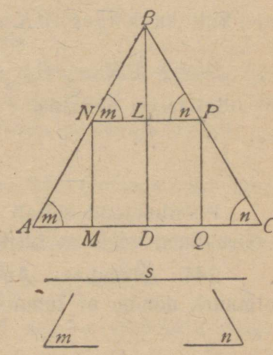
Harutus. Ülesanne on alati võimalik ja tal on üks lahendus.

239. Ülesanne. Konstrueerida kolmnurk, kui on teada kaks aluse lähisnurka: $\measuredangle m$ ja $\measuredangle n$ ja aluse ning kõrguse summa: $b + h = s$ (224. joon.).

Esimene lahendusviis. Olgu NBP otsitav kolmnurk, milles $\measuredangle BNP = \measuredangle m$, $\measuredangle BPN = \measuredangle n$ ja $NP + BL = s$. Konstrueerime kolmnurga ABC, mis on sarnane otsitava kolmnurgaga NBP, nõnda et ta kõrgus $BD = s$. Tõmmates $NM \parallel BD$ ja $PQ \parallel BD$, saame joonise $MNPQ$, mis on ruut. Ja tõesti,

$NP + BL = s$,
$LD + BL = BD = s$; kust
$NP + BL = LD + BL$, millest
$NP = LD = PQ$.

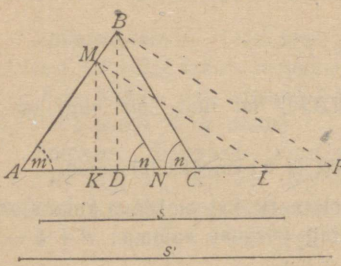
Tähendab, joonis $MNPQ$ on kolmnurga ABC sisse joonestatud ruut. Nõnda on tarvis ülesande lahendamiseks konstrueerida $\triangle ABC$ kahest nurgast: $\measuredangle m$ ja $\measuredangle n$ ja kõrgusest s (nr. 236) ja pärast seda konstrueerida temasse ruut (nr. 238) $MNPQ$; kolmnurk NPB on otsitav.



224. joonis.

Teine lahendusviis. Konstrueerime mingi $\triangle ABC$ (225. joon.), mille kaks nurka võrduksid vastavalt antud nurkadega: $\measuredangle m$ ja $\measuredangle n$; siis on saadud kolmnurk sarnane otsitavaga. Mõõdame tema aluse AC ja kõrguse BD summa; võrdugu see summa lõiguga s'. Et kolmnurgast ABC saada otsitava kolmnurga, seks on tarvis ta korrutada (nr. 230) suhtega $\frac{s}{s'}$; siis korrutub alus AC suhtega $\frac{s}{s'}$, kõrgus BD korrutub sama suhtega $\frac{s}{s'}$, järjelikult ka summa $AC + BD = s'$ korrutub sama suurusega ja võrdub $s' \cdot \frac{s}{s'} = s$.

Et seda korrutamist teostada, seks mõõdame $AF = s'$ ja $AL = s$, ühendame B ja F, tõmbame $LM \parallel FB$ ja $MN \parallel BC$; $\triangle AMN$ on otsitav. Ja tõesti, aluse lähisnurgad võrduvad antud nurkadega; peale selle teame sirgete MN ja BC, ML ja BF rööpsuse tagajärjel:



225. joonis.

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AL}{AF} = \frac{s}{s'},$$ kust

$$AN = AC \cdot \frac{s}{s'},$$

s. o. AC korrutus $\frac{s}{s'}$-ga, tähendab, terve $\triangle ABC$ korrutus sama suurusega $\frac{s}{s'}$, sest et tema küljed jäid rööbikuks; järjelikult ka kõrgus $MK = BD \cdot \frac{s}{s'}$; seepärast võib kirjutada:

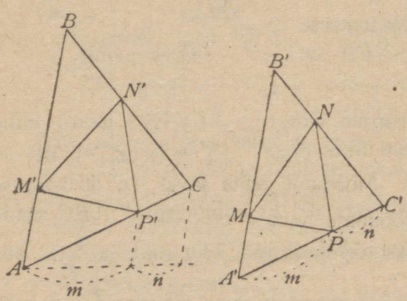
$$AN + MK = AC \cdot \frac{s}{s'} + BD \cdot \frac{s}{s'} = (AC + BD) \cdot \frac{s}{s'} = s' \cdot \frac{s}{s'} = s,$$

mis oligi tarvis tõestada.

Pöördmetood.

Pöördmetood seisab selles, et ülesanne nii-ütelda pöördakse ümber, s. o. andmed võetakse otsitavatena, aga otsitavad — andmetena.

241. Ülesanne. Antud kolmnurga ABC sisse joonestada teine kolmnurk nõnda, et tema küljed oleksid rööbiti antud kolmnurga MNP külgedega (226. joon.).



226. joonis.

Selle asemel, et kolmnurga ABC sisse konstrueerida otsitav kolmnurk, konstrueerime ΔMNP ümber kolmnurga, mille küljed oleksid rööbiti ΔABC külgedega. Seks maksab ainult läbi tippude M, N ja P tõmmata $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$ ja $A'C' \parallel AB$. Nüüd jagame ΔABC mingi külje, näit. AC, kahte ossa võrdeliselt tema vastava külje $A'C'$ lõikudega, s. o. võrdeliselt $m : n$. Läbi saadud punkti P' tõmbame $P'N' \parallel PN$ ja $P'M' \parallel PM$. Ühendades punktid M' ja N', saame otsitava kolmnurga $M'N'P'$. Ja tõesti:

$\triangle P'N'C \sim \triangle PNC'$; järjelikult $\frac{P'N'}{PN} = \frac{P'C}{PC'}$ (1);

$\triangle AM'P' \sim \triangle A'MP$; järjelikult $\frac{M'P'}{MP} = \frac{AP'}{A'P}$ (2);

kuid konstruktsiooni järele:

$$\frac{AP'}{P'C} = \frac{A'P}{PC'} \text{ või } \frac{AP'}{A'P} = \frac{P'C}{PC'};$$

et võrretes (1) ja (2) on parempoolsed osad võrdsed, siis:

$$\frac{P'N'}{PN} = \frac{M'P'}{MP};$$

kolmnurgad $M'N'P$ ja MNP on sarnased, sest neil kummalgi on võrdeliste külgede vahel võrdne nurk; edasi on juba kerge tõestada (vastuoletusliselt), et $M'N' \parallel MN$.

Harjutused.

Tõestada laused.

116. Sirge, mis kulgeb trapetsi aluste keskpunkte, kulgeb mitterööbikute külgede lõikepunkti ja nurkjoonte lõikepunkti.

117. Kolmnurga aluse poolitaja on alusega rööbikute lõikude geomeetriline koht.

118. Lause kolmnurga küljepoolitajaist (nr. 108) tõestada kolmnurkade sarnasuse abil.

119. Kolmnurga kõrgused h_1, h_2, h_3 on vastuvõrdelised vastavate külgedega a_1, a_2, a_3, s. o. $a_1 : a_2 : a_3 = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3} = h_2 : h_1 : \frac{h_1 h_2}{h_3}$.

120. Kaks rööpkülikut on sarnased, kui neil on võrdeliste külgede vahel võrdne nurk.

121. Kaks püstkülikut, millede küljed on võrdelised, on sarnased.

122. Kaks kaldruutu on sarnased, kui neil on võrdne nurk.

Konstruktsiooni-ülesanded.

123. Jagada lõik AB osadeks võrdeliselt lõikudega n, m, p ja q.

124. Leida niisuguste punktide geomeetriline koht, millede kaugused antud nurga külgedest suhtuksid nõnda kui $n : m$ [1]).

125. Leida kolmnurgas niisugune punkt, et temast külgedele tõmmatud ristjooned suhtuksid nõnda kui $m : n : p$.

126. Läbi nurgas ABC antud punkti O tõmmata sirge nõnda, et punkt O jagaks ta võrdeliselt $m : n$.

---

1) Siin tuleb m ja n all mõista mitte arvusid, vaid lõikusid.

127. Konstrueerida Δ, kui on teada tipunurk A, kõrgus h ja kõrvalkülgede suhe $m : n$.

128. Konstrueerida Δ, kui on teada tipunurk A, alus a ja kahe teise külje suhe $m : n$.

129. Konstrueerida Δ, kui on teada nurk A, selle nurga lähiskülgede suhe $m : n$ ja sissejoonestatud ringi raadius r.

130. Konstrueerida Δ tipunurgast A ja selle nurga poolitajast s, kui on teada, et kõrgus jagab aluse võrdeliselt $m : n$.

131. Konstrueerida ΔABC sisse rööpkülik, mille üks nurk on $\measuredangle m$.

132. Kolmnurga ABC sisse konstrueerida püstkülik, mille küljed on võrdelised $m : n$.

133. Antud segmendi sisse konstrueerida ruut.

134. Antud sektori sisse konstrueerida ruut (2 juhust).

135. Joonestada ringjoon, mis puutuks kaht lõikuvat sirget AB ja CD ja kulgeks antud punkti M.

136. Joonestada ringjoon, mis puutuks $\measuredangle ABC$ külgi ja kulgeks selle nurga poolitajal asetsevat punkti M.

137. Joonestada ringjoon, mis puutuks $\measuredangle ABC$ külgi ja seda ringjoont O, mis ise ka puutub sama nurga külgi.

138. Konstrueerida Δ, kui on teada kaks nurka: $\measuredangle m$ ja $\measuredangle n$ ja kõrguse ning aluse korrutis, mis võrdub antud sirge k ruuduga (korrutamisviis).

139. Konstrueerida Δ, kui on teada kaks nurka m ja n ja aluse ja kõrguse ruutude vahe, mis võrdub antud sirge k ruuduga.

140. Konstrueerida Δ kolmest kõrgusest h_1, h_2, h_3. (Juhatus: esmalt konstrueerida Δ, mis oleks sarnane otsitava kolmnurgaga, külgedest h_2, h_1, $\frac{h_1 h_2}{h_3}$, v. ülesanne nr. 119).

141. Leida niisuguste punktide geomeetriline koht, milledest tõmmatud kahe antud ringjoone puutujad on võrdsed. (Seda geomeetrilist kohta, mis moodustab enesest keskjoonele tõmmatud ristjoone, nimetatakse ringide r a d i k a a l t e l j e k s.)

142. Antud ΔABC sisse joonestada kolmnurk, mis võrdub antud kolmnurgaga MNP (pöördmetood).

143. Ruudu sisse, mille külg on a, joonestada ruut, mille külg on b (pöördmetood).

144. Antud sektori sisse joonestada antud kolmnurgaga võrdne kolmnurk (pöördmetood).

145. Antud ΔABC sisse joonestada antud kolmnurgaga MNP sarnane kolmnurk nõnda, et üks tema tippudest asetseks alusel antud punktis (pöördmetood).

146. Konstrueerida Δ, mis oleks sarnane antud kolmnurgaga MNP, nõnda, et ta kaks tippu asetseksid kahel antud ühiskeskesel ringjoonel (pöördmetood).

147. Konstrueerida Δ, mis oleks sarnane antud kolmnurgaga MNP, nõnda, et ta tipud asetseksid kolmel antud ühiskeskesel ringjoonel (pöördmetood).

148. Antud poolringi sisse joonestada nelinurk, mis oleks sarnane antud nelinurgaga, nõnda, et ta kaks tippu asetseksid läbimõõdul (pöördmetood).

Arvutus-ülesanded.

149. Niisuguse teravnurkse kolmnurga sisse, mille alus on a ja kõrgus h, joonestada ruut, mille üks külg asetseb kolmnurga alusel. Leida ruudu külg.

150. Kolmnurga küljed on a, b ja c. Antud kolmnurgaga sarnase kolmnurga ümbermõõt on 2 p. Leida viimase küljed.

151. Leida niisuguse täisnurkse kolmnurga kaatet, mille hüpotenuus ja teine kaatet on vastavalt 21 sm ja 20 sm.

152. Võrdhaarse kolmnurga kõrvalkülg on a, kõrgus aga h. Leida alus.

153. Leida täisnurkse kolmnurga täisnurga tipust hüpotenuusile lastud ristjoone pikkus, kui selle täisnurkse kolmnurga küljed on 3 m, 4 m ja 5 m.

154. Täisnurga tipust hüpotenuusile lastud ristjoon on p, aga üks hüpotenuusi lõik on m. Leida hüpotenuus.

155. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 2 p, kõrgus aga h. Leida küljed.

156. Kõõl asetseb raadiusega r joonestatud ringi keskpunktist kaugusel m. Leida selle kõõlu pikkus.

157. Täisnurkse kolmnurga kaatet on a ja ta moodustab hüpotenuusiga 60^0-lise nurga. Leida hüpotenuus.

158. Kolmnurga kaks külge on vastavalt a ja b; nende vahelnurk on 60^0. Leida kolmas külg.

159. Kolmnurga külg võrdub a-ga ja ta moodustab alusega 30^0-lise nurga. Leida kolmnurga kõrgus.

160. Kolmnurga aluse suurem lähisnurk on 45^0. Kõrgus jagab aluse osadeks, mis on 5 sm ja 6 sm. Leida suurem kõrvalkülg.

161. Leida kaldruudu külg, kui selle kaldruudu nurkjooned on vastavalt $2m$ ja $2n$.

162. Rööpküliku nurkjooned suhtuvad nõnda kui 3 : 4. Küljed võrduvad vastavalt $10m$ ja $11m$. Leida nurkjooned.

163. Punkt asub raadiusega r joonestatud ringjoone keskpunktist kaugusel a. Leida sellest punktist ringjoonele tõmmatud puutuja pikkus.

164. Väljaspool ringi asetsevast punktist on läbi ringi keskpunkti tõmmatud lõikaja, mille välislõik võrdub m, ja puutuja, mis võrdub n. Leida ringi raadius.

165. Leida täisnurkse kolmnurga ümberjoonestatud ringi raadius, kui kolmnurga kaatetid on 16 sm ja 30 sm.

166. Leida võrdhaarse kolmnurga ümberjoonestatud ringi raadius, kui võrdhaarse kolmnurga küljed on vastavalt b, a ja a.

167. Leida kahe välimiselt puutuva ringi ühise välimise puutuja pikkus, kui nende ringide raadiused on R ja r.

XV peatükk.

Korrapärased hulknurgad.

242. **Definitsioonid. Hulknurka[1]), mille kõik küljed ja kõik nurgad on võrdsed, nimetatakse korrapäraseks hulknurgaks;** seesugused on näit. ruut, võrdkülgne kolmnurk jne.

Samuti, **kumerat murdjoont, mille kõik küljed ja kõik nurgad on võrdsed, nimetatakse korrapäraseks.**

Et hulknurga sisenurkade summa on $2d(n-2)$, siis võrdub korrapärase hulknurga iga nurk avaldusega $\frac{2d(n-2)}{n}$.

243. **Lause. Kui ringjoon jagada punktides A, B, C jne. juhuslikuks arvuks võrdseiks osadeks, siis**

1. järgseid jagamispunkte ühendavad kõõlud moodustavad korrapärase sissejoonestatud hulknurga;

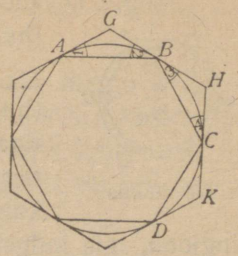
2. läbi jagamispunktide tõmmatud puutujad moodustavad korrapärase ümberjoonestatud hulknurga (227. joon.).

1. Sissejoonestatud hulknurga küljed AB, BC jne. on võrdsed kui võrdseid kaari siduvad kõõlud.

$\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$ jne. on võrdsed kui võrdsetele kaartele toetuvad piirdenurgad; järjelikult on hulknurk $ABCD\ldots$ korrapärane, mis oligi tarvis tõestada.

1) Kumerat.

2. Kolmnurkades AGB, BHC jne.: $AB = BC = CD = \ldots$ tõestamise järele; $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4 = \ldots$ kui nurgad, mis mõõtuvad võrdsete kaarte: $\smile AB$, $\smile BC$ jne. pooltega, järjelikult on võrdhaarsed kolmnurgad AGB, BHC jne. ühtivad, sest et neil on võrdsed ühed küljed ja nende külgede lähisnurgad. Sellest järgneb, et



227. joonis.

$\sphericalangle G = \sphericalangle H = \sphericalangle K = \ldots$

$AG = GB = BH = HC = CK \ldots$; järjelikult

$GH = HK = \ldots$ kui võrdsete lõikude summad.

Nõnda on hulknurk $AGHKD \ldots$, mille küljed ja nurgad on võrdsed, korrapärane, mis oligi tarvis tõestada.

Märkus. Eeltoodust on näha, et korrapäraste hulknurkade joonestamine ringi sisse ja ringi ümber piirdub ringjoone jagamisega teatavaks arvuks võrdseteks osadeks.

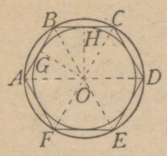
244. Pöördlause. Korrapärase hulknurga ümber ja korrapärase hulknurga sisse võib alati joonestada ringjoone ja ainult ühe.

1. **(Sümmeetria viis.)** Olgu $ABCDEF$ (228. joon.) korrapärane hulknurk. Läbi ta kolme tipu A, B, C joonestame ringjoone[1]) O ja tõestame, et see ringjoon kulgeb ka järgmist tippu D. Ühendame keskpunkti O punktidega A ning D ja tõmbame kõõlule BC ristjoone OH; siis $BH = HC$ (nr. 127). Pärast seda pöörame nelinurga $OHCD$ ümber OH nõnda, et ta langeks nelinurga $OHBA$ peale. Siis

HC läheb mööda HB, sest et nurgad OHC ja OHB on võrdsed kui täisnurgad;

punkt C ühtib punktiga B, sest et $HC = HB$;

1) Nagu teada, on seks tarvis (nr. 112) tõmmata külgede AB ja BC keskristjooned; nende ristjoonte lõikepunkt ongi otsitava ringjoone keskpunkt.



228. joonis.

külg CD läheb mööda BA, sest et $\measuredangle HCD = \measuredangle HBA$ (hulknurk on korrapärane);

külgede CD ja BA võrdsuse tagajärjel (hulknurk on korrapärane) ühtib punkt D punktiga A, OD võrdub OA-ga ja järjelikult punktist O raadiusega OA joonestatud ringjoon kulgeb punkti D. Samuti võib tõestada, et ringjoon, mis kulgeb tippe B, C ja D, kulgeb ka tippu E jne.

Et ümberjoonestatud ringjoone leitud keskpunkt on ühekaugusel hulknurga kõigist tippudest, siis asetseb ta kolmnurga kõigi külgede keskristjoontel (nr. 67). Sellest järgneb, et **korrapärase hulknurga külgede kesk-ristjooned lõikuvad ühes punktis, mis ongi ümberjoonestatud ringjoone ainus keskpunkt.**

2. Ülemalpool-öeldust järgneb, et korrapärase hulknurga külgi AB, BC, CD, . . . (228. joon.) võib alati vaadelda kui mingi ringjoone võrdseid kõõle; et võrdsed kõõlud asetsevad keskpunktist ühekaugusel (nr. 124), siis on keskpunktist hulknurga külgedele lastud ristjooned OG, OH, . . . isekeskis võrdsed; seepärast, kui joonestada punktist O raadiusega OG ringjoon, siis kulgeb see ringjoon kõiki punkte G, H jne.; seejuures puutub (nr. 115) see ringjoon hulknurga kõiki külgi; järjelikult on ta selle hulknurga suhtes sissejoonestatud ringjoon.

Et sissejoonestatud ringjoone keskpunkt on ühekaugusel hulknurga iga nurga külgedest, siis asetseb ta iga nurga poolitajal; järjelikult **sirge, mis ühendab keskpunkti korrapärase hulknurga mingi nurga tipuga, on selle nurga poolitaja.** Sellest järgneb, et **korrapärase hulknurga nurkade poolitajad lõikuvad ühes punktis O, mis ongi sissejoonestatud ringjoone ainus keskpunkt.**

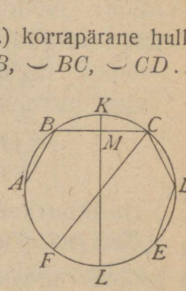
245. Definitsioonid. Korrapärase hulknurga sisse- ja ümberjoonestatud ringjoone ühist keskpunkti nimetatakse **hulknurga keskpunktiks;** nagu näha, ei ole see keskpunkt miski muu kui hulknurga külgede kesk-ristjoonte lõikepunkt või hulknurga nurgapoolitajate lõikepunkt.

Hulknurga sissejoonestatud ringi raadiust OH (228. joon.) nimetatakse hulknurga **apoteemiks.**

Nurka AOB, mille moodustavad kaks mingi külje otsapunktidesse tõmmatud raadiust, nimetatakse **kesknurgaks.** Hulknurgas on nii mitu kesknurka kui mitu külge. Et hulknurga kõigi kesknurkade summa on $4d$, siis on iga kesknurk

$$\frac{4d}{n}.$$

246. Märkus. 1. Olgu $ABCDE\ldots$ (229. joon.) korrapärane hulknurk. Joonestame ta ümber ringi. Siis on kaared: $\smile AB$, $\smile BC$, $\smile CD\ldots$ võrdsed, sest et neid seovad võrdsed kõõlud. Pöörame joonise läbimõõdu CF ümber. Et läbimõõt on ringjoone sümmeetriatelg, siis ühtivad poolringid $CDEF$ ja $CBAF$; $\smile CD$ ühtib temaga võrdse kaarega CB, järjelikult ühtib ka külg CD küljega CB; $\smile DE$ ühtib temaga võrdse kaarega BA, järjelikult ühtib ka külg DE küljega BA jne. Nõnda ühtivad hulknurga kaks osa, milledest üks asetseb ühel pool sirget CF, teine teisel pool sama sirget CF; järjelikult



229. joonis.

korrapärase hulknurga tippu kulgev läbimõõt on hulknurga sümmeetriatelg.

2. Pöörame nüüd joonise mööda külje BC keskpunkti kulgeva läbimõõdu KL, mis, nagu teada, on BC-ga risti ja mis jagab $\smile BC$ pooleks. Siis ühtib $\smile KC$ temaga võrdse kaarega KB; punkt C langeb punkti B ja MC ühtib MB-ga. Kaar CD ühtib kaarega BA jne. Sellest järgneb, et

korrapärase hulknurga külje keskpunkti kulgev läbimõõt on ka hulknurga sümmeetriatelg.

Eelmised arutlused ei olene sellest, kas on korrapärasel hulknurgal paaris- või paaritu-arv külgi. Kui külgi on paarisarv, siis on kerge otsusele jõuda, et läbimõõt, mis kulgeb hulknurga üht tippu, kulgeb ka selle tipu vastastippu; on aga paaritu arv külgi, siis kulgeb tippu kulgev läbimõõt selle tipu vastaskülje keskpunkti ja on vastasküljega risti. Mõlemal korral on tõmmatud läbimõõt hulknurga sümmeetriatelg. Kerge on tõestada, et igal hulknurgal on nii mitu sümmeetriatelge, kui mitu külge tal on.

3. Kui hulknurgal on paarisarv külgi, siis **hulknurga keskpunkt on hulknurga sümmeetria keskpunkt,** sest et selle hulknurga iga kaks ühel läbimõõdul asetsevat vastaspunkti on keskpunktist ühekaugusel, s. o. nad on sümmeetrilised punktid.

247. Lause. Samanimelised[1]) korrapärased hulknurgad on sarnased.

Olgu $ABCD\ldots$ ja $A'B'C'D'\ldots$ samanimelised korrapärased hulknurgad, millede külgede arv on n. Siis hulknurga $ABCD\ldots$ iga nurk, näit. $\measuredangle A = \frac{2d(n-2)}{n}$ ja hulknurga $A'B'C'D'\ldots$ iga nurk, näit. $\measuredangle A' = \frac{2d(n-2)}{n}$; järjelikult $\measuredangle A = \measuredangle A'$. Nõnda on hulknurkadel $ABCD\ldots$ ja $A'B'C'D'\ldots$ võrdsed nurgad. Et need hulknurgad on korrapärased, siis ka

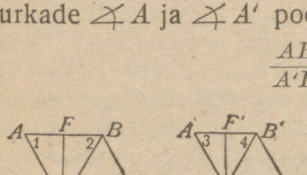
$$AB = BC = CD = \ldots$$
$$A'B' = B'C' = C'D' = \ldots, \text{ järjelikult}$$
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots,$$

s. o. hulknurkade küljed on võrdelised. Hulknurgad $ABCD\ldots$ ja $A'B'C'D'\ldots$ on sarnased, sest et nende nurgad on võrdsed ja küljed on võrdelised, mis oligi tarvis tõestada.

248. Lause. Korrapäraste samanimeliste hulknurkade ümbermõõdud suhtuvad nõnda kui sissejoonestatud ringide raadiused (apoteemid) või ümberjoonestatud ringide raadiused (230. joon.).

Olgu AB ja $A'B'$ korrapäraste samanimeliste hulknurkade küljed, O ja O' on nende keskpunktid; OA ja $O'A'$ on ümberjoonestatud ringide raadiused; OF ja $O'F'$ on sissejoonestatud ringide raadiused, s. o. apoteemid. Kolmnurgad AOB ja $A'O'B'$ on sarnased, sest et $\measuredangle 1 = \measuredangle 3$ kui võrdsete nurkade $\measuredangle A$ ja $\measuredangle A'$ pooled; samuti $\measuredangle 2 = \measuredangle 4$; järjelikult

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AO}{A'O'} = \frac{OF}{O'F'}.$$



230. joon.

Tõestamise järele on korrapärased samanimelised hulknurgad sarnased, järjelikult suhtuvad nende ümbermõõdud P ja P' nõnda kui küljed; seepärast

1) Ühesuguse külgedearvuga.

$$\frac{P}{P'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AO}{A'O'} = \frac{OF}{O'F'};$$

märkides OA ja $O'A'$ tähtedega R ja R' ja apoteemid OF ja $O'F'$ tähtedega a ja a', saame:

$$\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'} = \frac{a}{a'},$$

mis oligi tarvis tõestada.

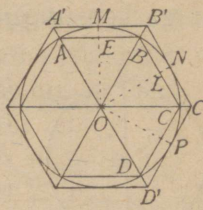
249. Järeldus. Kahe niisuguse korrapärase samanimelise hulknurga ümbermõõdud, milledest üks on ringi ümberjoonestatud hulknurk, teine aga ringi sissejoonestatud hulknurk, suhtuvad nõnda kui raadius apoteemisse, s. o.

$$\frac{P}{p} = \frac{R}{a}.$$

250. Ülesanne. Ringi sissejoonestatud korrapärase hulknurga külje järele leida korrapärase samanimelise ümberjoonestatud hulknurga külg (231. joon.).

Ülesandel on kaks osa: ümberjoonestatud hulknurga konstrueerimine ja tema külje arvutamine.

1. Olgu $ABCD\ldots$ korrapärane sissejoonestatud hulknurk, millel on n külge. Lastes keskpunktist külgedele ristjooned ja pikendades neid, kuni nad lõikuvad ringjoonega, saame punktid M, N, P, ..., mis jagavad ringjoone n võrdseks osaks. Tõmmates läbi nende punktide puutujad, saame (nr. 243; 2) korrapärase ümberjoonestatud n-nurga.



231. joonis.

Ümberjoonestatud hulknurga küljed on sissejoonestatud hulknurga külgedega rööbiti; näit. $A'B' \parallel AB$ kui ühele ja samale sirgele OM tõmmatud ristjooned.

Täisnurksete kolmnurkade BOE ja BOL võrdsusest ($OB = OB$; $OE = OL$) järgneb, et BO on nurga EOL poolitaja;

täisnurksete kolmnurkade $B'OM$ ja $B'ON$ võrdsusest ($OB' = OB'$; $OM = ON$) järgneb, et hulknurkade vasta-

vad tipud B' ja B, ning keskpunkt O asetsevad ühel sirgel.

2. Kolmnurkade $A'OB'$ ja AOB sarnasuse tagajärjel

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OM}{OE}$$

või märkides $A'B'$ b_n-ga, AB a_n-ga ja OM R-ga:

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{R}{OE} \text{ või } b_n = \frac{a_n R}{OE};$$

täisnurksest kolmnurgast AOE aga leiame:

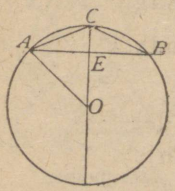
$$OE = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AE}^2} = \sqrt{R^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}};$$

järjelikult

$$b_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

251. Ülesanne. Kahendada korrapärase sissejoonestatud hulknurga külgede arv (232. joon.).

Ülesandel on kaks osa: kahendatud külgedearvuga hulknurga konstrueerimine ja tema külje arvutamine.



232. joonis.

1. Olgu AB korrapärase sissejoonestatud n-nurga külg ja punkt O ümberjoonestatud ringi keskpunkt. Tõmbame $OC \perp AB$. Kaar AB jagub punktis C pooleks; järjelikult (nr. 243; 1) on kõõl AC korrapärase sissejoonestatud $2n$-nurga külg.

2. Kolmnurgast AOC (nr. 217) teame:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OC}^2 - 2OC \cdot OE,$$

või märkides AC a_{2n}-ga, AB a_n-ga ja raadiuse R-ga, saame:

$$a_{2n}^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot OE;$$

täisnurksest kolmnurgast AOE järgneb:

$$OE = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AE}^2} = \sqrt{R^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}},$$

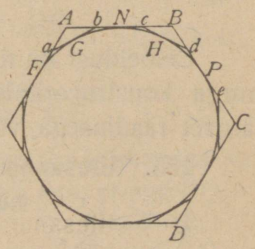
seepärast

$$a^2_{2n} = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}$$

Eelmisest konstruktsioonist on näha, et korrapärase sissejoonestatud hulknurga külgede arvu kahendamisega suureneb hulknurga ümbermõõt, sest et sirglõikude asemele tulevad sel juhusel murdjooned, näit. AB asemele tuleb ACB jne.

252. Ülesanne. Kahendada korrapärase ümberjoonestatud hulknurga külgede arv.

Olgu $ABCD\ldots$ (233. joon.) korrapärane ümberjoonestatud n-nurk. Jagades kaared FN, NP jne. pooleks, jagame ringjoone $2n$ võrdseks osaks; järjelikult tõmmates läbi jagamispunktide puutujad, saame (nr. 243; 2) korrapärase ümberjoonestatud hulknurga, millel on kahekordne külgede arv.



233. joonis.

Kerge on tähele panna, et külgede arvu kahendamisel väheneb ümberjoonestatud hulknurga ümbermõõt, sest et mõned hulknurkade elemendid, näit.: bc, de,... on üldised, mõned elemendid aga, nimelt murdjoonelised elemendid vahetuvad sirglõikudega, nagu murdjoon aAb vahetub sirglõiguga ab.

253. Ülesanne. Antud ringi sisse joonestada ruut ja arvutada ta külg (234. joon.).

1. Tõmbame ringis kaks vastastikku rist-läbimõõtu AC ja BD; siis jagub ringjoon 4 võrdseks osaks; järjelikult saame (nr. 243; 1) läbimõõtude otsapunkte ühendades korrapärase nelinurga, s. o. ruudu $ABCD$.

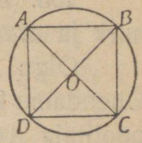
2. Täisnurksest $\triangle AOB$ on teada:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 = 2\,\overline{AO}^2,$$

või oletades, et $AB = a_4$, $AO = R$, saame:

$$a_4^2 = 2R^2, \text{ kust}$$

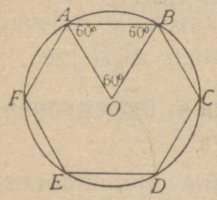
$$a_4 = R\sqrt{2}$$



234. joonis.

254. Ülesanne. Joonestada ringi sisse korrapärane kuusnurk ja arvutada ta külg (235. joon.).

Olgu $ABCDEF$ korrapärane sissejoonestatud hulknurk; siis $\sphericalangle AOB = \frac{360^0}{6} = 60^0$ ja järjelikult



235. joonis.

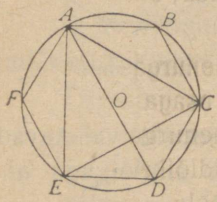
$\sphericalangle OAB + \sphericalangle OBA = 180^0 - 60^0 = 120^0$,

kuid $AO = OB$, tähendab, et $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA$; seepärast võrdub iga nurk 60^0-ga. Kolmnurk AOB on võrdnurkne, seega siis ka võrdkülgne. Järjelikult: **korrapärase sissejoonestatud kuusnurga külg võrdub raadiusega**, s. o.

$$a_6 = R.$$

Eelöeldust on näha, et korrapärase sissejoonestatud kuusnurga konstrueerimiseks on küllalt, kui konstrueerida kuus järgset raadiusega võrdset kõõlu.

255. Ülesanne. Joonestada ringi sisse korrapärane kolmnurk ja arvutada ta külg.



236. joonis.

Joonestades korrapärase sissejoonestatud kuusnurga $ABCDEF$ ja ühendades tema tipud, üht tippu vahele jättes, saame võrdkülgse, s. o. korrapärase kolmnurga ACE.

Tõmbame läbimõõdu AD; siis on täisnurksest $\triangle AED$ teada:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{ED}^2$$

või oletades, et $AE = a_3$, $AD = 2R$, $ED = a_6 = R$, saame:

$$a_3^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2, \text{ kust}$$

$$a_3 = R\sqrt{3}.$$

256. Ülesanne. Joonestada ringi sisse korrapärane kümmenurk ja arvutada ta külg (237. joon.).

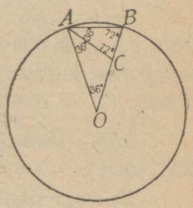
Olgu AB korrapärase sissejoonestatud kümmenurga külg. Ühendame keskpunkti O punktidega A ning B ja tõmbame $\sphericalangle A$ poolitaja AC.

$\sphericalangle AOB = \frac{360^0}{10} = 36^0$; $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^0 - 36^0 = 144^0$;

et $\measuredangle A = \measuredangle B$, siis $\measuredangle A = \measuredangle B = \frac{144^0}{2} = 72^0$; järjelikult $\measuredangle BAC = \frac{72^0}{2} = 36^0$; $\measuredangle OAC = 36^0$.

Silmas pidades, et kolmnurkadel ABC ja ACO on kaks võrdset nurka, saame:

$$AB = AC = OC.$$



237. joonis.

Et nurgapoolitaja jagab kolmnurga vastaskülje võrdeliselt kahe teise küljega (nr. 192), siis

$$\frac{OC}{CB} = \frac{AO}{AB};$$

pannes saadud võrdesse AO asemele OB ja AB asemele OC, saame:

$$\frac{OC}{CB} = \frac{OB}{OC} \text{ või } \frac{CB}{OC} = \frac{OC}{OB} \quad (1);$$

kerge on aru saada, et OC on äärmises ja keskmises suhtes (kuldlõikeliselt) jagatud raadiuse suurem[1]) osa; et aga $OC = AB$, siis tähendab, et:

korrapärase sissejoonestatud kümmenurga külg võrdub kuldlõikeliselt jagatud raadiuse suurema osaga.

Korrapärase sissejoonestatud kümmenurga konstrueerimiseks on siis tarvis raadius jagada kuldlõikeliselt (nr. 226) ja konstrueerida järgselt 10 võrdset kõõlu, millest igaüks võrdub raadiuse suurema lõiguga.

2. Tähistades kümmenurga külje a-ga ja ringi raadiuse R-ga, leiame, et $OC = AB = a$, $OB = R$, $CB = OB - OC = R - a$ ja võrde (1) võib ümber kirjutada järgmiselt:

$$\frac{R-a}{a} = \frac{a}{R}, \text{ kust}$$

$$a^2 = R^2 - Ra \text{ või } a^2 + Ra - R^2 = 0, \text{ millest}$$

$$a = -\frac{R}{2} + \sqrt{\frac{R^2}{4} + R^2} = -\frac{R}{2} + \sqrt{\frac{5R^2}{4}} = -\frac{R}{2} + \frac{R\sqrt{5}}{2};$$

1) Et kolmnurgas ACB $\measuredangle ABC > \measuredangle CAB$, siis $AC > CB$; kuid $AC = OC$, järjelikult $OC > CB$.

$$a_{10} = R\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

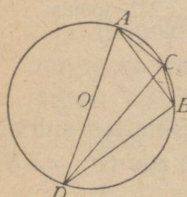
257. Märkus. Joonlaua ja sirkli abil võib ringi sisse joonestada igasuguse korrapärase hulknurga, mille külgede arv avaldub mingisuguses järgmises valemis:

$$2^n;\ 3.2^n;\ 5.2^n;\ 3.5.2^n.$$

Peale selle tõestas saksa matemaatik Karl Friedrich Gauss (suri 1855. a.), et joonlaua ja sirkli abil võib ringi sisse joonestada igasuguse korrapärase hulknurga, mille külgede arv on $2^n + 1$-kujuline a l g a r v; näit. 17-nurk ($17 = 2^4 + 1$), 257-nurk ($257 = 2^8 + 1$) jne.

258. Ülesanne. Joonestada ringi sisse korrapärane viisteistnurk (238. joon.).

Et ringi sisse joonestada korrapärane 15-nurk, seks on tarvis leida $\frac{1}{15}$ osa ringjoonest; viimase leidmiseks tarvis lahutada ringjoone $\frac{1}{6}$ osast tema $\frac{1}{10}$ osa, mis selge on järgmisest võrdusest:



238. joonis.

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5}{30} - \frac{3}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}.$$

Nõnda siis, kui $\smile AB$ on $\frac{1}{6}$ ringjoonest, $\smile AC = \frac{1}{10}$ sirgjoonest, siis on $\smile CB$ $\frac{1}{15}$ ringjoonest, kuna aga kõõl CB on korrapärase sissejoonestatud hulknurga külg.

Külje CB arvutamiseks võib nelinurga $ACBD$ suhtes tarvitada Ptolemäose lauset, kusjuures teame, et $AC = a_{10}$; $AD = 2R$; $AB = a_6 = R$; $CD = \sqrt{4R^2 - a_{10}^2}$; $BD = a_3$. Nõnda saame

$$a_{15} = \frac{1}{4}R\left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5} - 1)\right].$$

259. Ülesanne. Arvutada raadiusega R tõmmatud ringi ümber joonestatud võrdkülgse kolmnurga külg.

Oletades, et nr. 250 valemis on $a_n = a_3 = R\sqrt{3}$; $b_n = b_3$, saame:

$$b_3 = \frac{R^2\sqrt{3}}{\sqrt{R^2 - \frac{3R^2}{4}}} = \frac{R^2\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{R^2}{4}}} = \frac{2R^2\sqrt{3}}{R} = 2R\sqrt{3} = 2a_3.$$

260. Ülesanne. Arvutada raadiusega R tõmmatud ringi sisse joonestatud korrapärase kaheksanurga külg.

Oletades, et nr. 251 valemis on $a_{2n} = a_8$; $a_n = a_4 = R\sqrt{2}$, saame:

$$a_8^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{2R^2}{4}} = 2R^2 - R^2\sqrt{2} = R^2(2-\sqrt{2});$$

$$a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

261. Ülesanne. Arvutada raadiusega R tõmmatud ringi sisse joonestatud korrapärase kaksteistnurga külg.

Et $a_6 = R$, siis oletades, et nr. 251 valemis on $a_n = a_6 = R$, saame:

$$a_{12}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = 2R^2 - R^2\sqrt{3} = R^2(2-\sqrt{3}).$$

$$a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} = 0{,}517638\ R.$$

Harjutused.

Tõestada laused.

168. Iga võrdkülgne sissejoonestatud hulknurk on korrapärane.

169. Iga võrdnurkne ümberjoonestatud hulknurk on korrapärane.

Konstruktsiooni-ülesanded.

170. Antud küljele konstrueerida korrapärane 8-nurk.

171. Antud küljele konstrueerida korrapärane 10-nurk.

172. Antud ruudu sisse joonestada võrdkülgne kolmnurk nõnda, et tema üks tipp asetseks kas ruudu tipus või mingi külje keskpunktis.

Arvutusülesanded.

173. Missuguses korrapärases hulknurgas on iga sisenurk 135°-line?

174. Leida raadiusega R tõmmatud ringi sisse joonestatud korrapärase hulknurga apoteem, kui hulknurga külg on a.

175. Arvutada raadiusega R tõmmatud ringi ümber joonestatud korrapärase 8-nurga ja 12-nurga küljed.

176. Leida korrapärase sissejoonestatud viisnurga külg.

177. Leida raadiusega R tõmmatud ringi sisse joonestatud korrapärase kümmenurga apoteem.

178. Korrapärase kolmnurga külje a abil määrata sisse- ja ümberjoonestatud ringide raadiused.

179. Korrapärase kaksteistnurga külje a abil määrata sisse- ja ümberjoonestatud ringide raadiused.

XVI peatükk.

Pindalade mõõtmine.

262. Tasapinna osa ehk pindala mõiste oli tuttav enne kui geomeetria mõiste, sest et just pindalade mõõtmiseks loodi geomeetria. Pindala mõistet loeme algmõisteks[1]).

Pindala mõõtma tähendab leida selle pindala suhe teise pindalasse, mis võetakse mõõtüksuseks.

Pindala mõõduks võetakse niisuguse ruudu pindala, mille külg võrdub mingi pikkuse-mõõtüksusega.

Jooniseid, mis küll ei ühti, milledel on aga võrdsed pindalad, nimetatakse **võrdseteks.**

Püstküliku mingit üht külge nimetatakse tema **aluseks,** teist külge aga, mis on esimesega risti, sama püstküliku **kõrguseks.** Püstküliku alust ja kõrgust nimetatakse tema **mõõdeteks** ehk **dimensioonideks.**

Rööpküliku aluseks nimetatakse tema üht külge, aga kõrguseks — selle külje kaugust tema vastasküljest.

Trapetsi alusteks nimetatakse tema rööbikuid külgi, aga kõrguseks — aluste kaugust teineteisest.

263. Lause. Võrdsete alustega püstkülikute pindalad suhtuvad nõnda kui nende kõrgused (239. joon.).

Olgu AC ja $A'C'$ kaks püstkülikut.

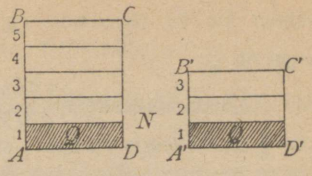
$$T.:\ AD = A'D'. \qquad V.:\ \frac{AC\ pa.^{2})}{A'C'\ pa.} = \frac{AB}{A'B'}.$$

1. Olgu kõrgused AB ja $A'B'$ ü h i s m õ õ t s e d ja mahtugu nende ühine mõõt q kõrgusesse AB 5 korda ja kõrgusesse $A'B'$ 3 korda, nõnda et

1) Pindala mõiste harutuse võivad soovijad leida raamatust Leçons de Géométrie par Hadamard, I, note D.

2) „pa.“ on lühendatud p i n d a l a.

$AB = 5q$,
$A'B' = 3q$, kust
$\frac{AB}{A'B'} = \frac{5q}{3q} = \frac{5}{3}$.



239. joonis.

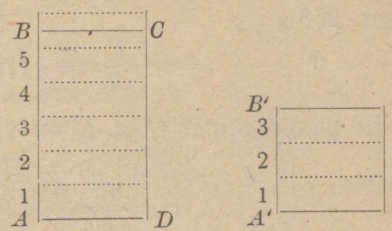
Kui läbi jagamispunktide tõmmata alusega rööbikud sirged, siis jaguvad pindalad AC ja $A'C'$ võrdseteks osadeks, sest et võrdsete alustega ja kõrgustega püstkülikud on ühtivad[1]); püstküliku AN pindala Q on nende ühine mõõt ja ta mahub pindalasse AC 5 korda ja pindalasse $A'C'$ 3 korda; järjelikult

$$AC\,pa. = 5 \cdot Q,$$
$$A'C'\,pa. = 3 \cdot Q, \text{ kust}$$
$$\frac{AC\,pa.}{A'C'\,pa.} = \frac{5Q}{3Q} = \frac{5}{3}.$$

Et suhted $\frac{AC\,pa.}{A'C'\,pa.}$ ja $\frac{AB}{A'B'}$ on võrdsed ühe ja sama arvuga $\frac{5}{3}$, siis on nad ka isekeskis võrdsed; järjelikult

$$\frac{AC\,pa.}{A'C'\,pa.} = \frac{AB}{A'B'}, \text{ mis oligi tarvis tõestada.}$$

2. **Kõrgused on ühismõõdutud** (240. joon.). Leiame kõrguste ja pindalade suhted täpsalt näiteks $\frac{1}{3}$-ni. Seks jagame kõrguse $A'B'$ 3 võrdseks osaks ja ühe osa asetame AB peale nii mitu korda kui võib. Mahtugu $\frac{1}{3}\,A'B'$ kõrgusesse AB rohkem kui 5 korda, kuid vähem kui 6 korda; ligikaudne suhe $\frac{AB}{A'B'}$ täpsalt $\frac{1}{3}$-ni (puudusega) on siis $\frac{5}{3}$.



240. joonis.

Kui läbi jagamispunktide tõmmata alustega rööbikud sirged, siis jagub pindala $A'C'$ 3 võrdseks osaks, kuna aga pindalas AC saab niisuguseid osasid rohkem kui 5, kuid

1) Teineteise peale asetamisel ühtivad nad.

vähem kui 6; järjelikult, ligikaudne suhe $\frac{ACpa.}{A'C'pa.}$ täpsalt $\frac{1}{3}$-ni (puudusega) on $\frac{5}{3}$.

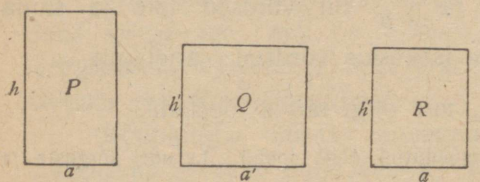
Nõnda on suhete $\frac{ACpa.}{A'C'pa.}$ ja $\frac{AB}{A'B'}$ väärtused, mis on arvutatud täpsalt $\frac{1}{3}$-ni, isekeskis võrdsed; samuti võib tõestada, et nende suhete väärtused, mis on arvutatud täpsalt $\frac{1}{n}$-ni, on isekeskis võrdsed n igasuguse väärtuse puhul. Järjelikult

$$\frac{ACpa.}{A'C'pa.} = \frac{AB}{A'B'},$$ mis oligi tarvis tõestada.

264. Järeldus. Et püstküliku aluseks võib võtta ükskõik missuguse tema külgedest, siis

võrdsete kõrgustega püstkülikute pindalad suhtuvad nõnda kui nende alused.

265. Lause. Kahe püstküliku pindalad suhtuvad nõnda kui aluste ja kõrguste korrutised (241. joon.).



241. joonis.

Olgu P ja Q kahe püstküliku pindalad, a ja a' — nende alused, h ja h' — kõrgused.

$$V.: \frac{P}{Q} = \frac{ah}{a'h'}.$$

Konstrueerime abi-püstküliku, mille pindala on R, alus — a, kõrgus h'. Et püstkülikutel P ja R on võrdsed alused, siis (nr. 263):

$$\frac{P}{R} = \frac{h}{h'} \quad (1).$$

Et püstkülikutel Q ja R on võrdsed kõrgused, siis (nr. 264):

$$\frac{R}{Q} = \frac{a}{a'} \quad (2).$$

Korrutades[1]) võrded (1) ja (2) liikmete kaupa, saame:

1) Et kahe homogeense suuruse suhe ei muuda oma väärtust, kui nende suuruste asemele panna arvud, mis neid suurusi mõõdavad ühe ja

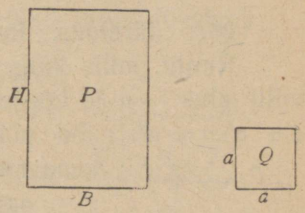
$\frac{P}{Q} = \frac{ah}{a'h'}$, mis oligi tarvis tõestada.

266. Lause. Püstküliku pindala võrdub aluse ja kõrguse korrutisega või õigemini:

arv, mis mõõdab püstküliku pindala mingisuguse ruut-mõõtüksusega, võrdub nende arvude korrutisega, mis mõõdavad püstküliku alust ja kõrgust vastava pikkuse-mõõtüksusega (242. joon.).

Olgu P antud püstküliku pindala, B ja H — tema alus ja kõrgus, Q — ruut-mõõtüksuse pindala, kuna a on vastav pikkuse-mõõtüksus. Siis (nr. 265):

$$\frac{P}{Q} = \frac{BH}{a.a} = \frac{B}{a} \cdot \frac{H}{a} \quad (1).$$



242. joonis.

Et $\frac{P}{Q}$ on pindala P mõõtarv, $\frac{B}{a}$ — aluse B mõõtarv, ja $\frac{H}{a}$ — kõrguse H mõõtarv, siis on lause tõestatud.

Oletades, et võrduses (1): $a = 1$ ja $Q = 1$, võime ta ümber kirjutada järgmisel kujul:

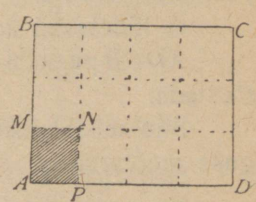
$$\frac{P}{1} = \frac{B}{1} \cdot \frac{H}{1},$$

mõeldes sümbolite P, B ja H all mitte suurusi endid, vaid nende vastavaid mõõtarvusid, saame:

$$P = B.H.$$

266a. Kui püstküliku alus ja kõrgus on ühismõõtsed, siis võib eelmise lause lihtsamini tõestada.

Mahtugu ühine mõõt püstküliku $ABCD$ (243. joon.) alusesse AD 4 korda ja kõrgusesse AB 3 korda. Tõmmates läbi jagamispunktide alusega ja kõrgusega rööbikud sirged, jagame



243. joonis.

---

sama mõõduga, siis võime võrdustes (1) ja (2) tähtede all mõista mitte suurusi endid, vaid nende suuruste mõõtarvusid; sel juhusel on meil õigus kirjutada:

$$\frac{P}{R} \cdot \frac{R}{Q} = \frac{PR}{RQ} = \frac{P}{Q}.$$

antud püstküliku ruutudeks. Nende ruutude rõhtsaid (horisontaalseid) ribasid on 3, kuna igas ribas on 4 ruutu; järjelikult sisaldab püstküliku pindala eneses

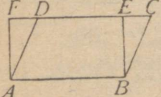
3 . 4 ruutu.

Kui ühine mõõt võtta pikkuse-mõõtüksusena, siis on ruut $AMNP$ pinna mõõtüksus, ja korrutis 3 . 4 mõõdab püstküliku pindala, mis oligi tarvis tõestada.

Kui 3 ja 4 asemel oleksid suurused a ja b, siis mõõtuks püstküliku pindala korrutisega

ab.

267. Järeldus. Ruudu pindala võrdub tema külje ruuduga. Ruutu, mille külg on a, võib vaadelda kui püstkülikut, mille alus $= a$ ja kõrgus $= a$. Järjelikult võrdub tema pindala $a \,.\, a = a^2$. Sel põhjusel nimetataksegi arvu teist astet tema r u u d u k s.



244. joonis.

268. Lause. Rööpküliku pindala võrdub aluse ja kõrguse korrutisega[1]) (244. joon.). Olgu $ADCB$ rööpkülik. Punktidest A ja B tõmbame küljele DC ristjooned. Siis on täisnurksed kolmnurgad AFD ja BEC võrdsed, sest et neil on $AF = BE$ ja $AD = BC$.

Liites trapetsiga $ADEB$ kolmnurga BEC, saame rööpküliku $ADCB$;

liites sama trapetsiga $ADEB$ kolmnurga AFD, saame püstküliku $AFEB$;

et liidetavad kolmnurgad on võrdsed, siis tähendab:

$ADCB$ pa. $= AFEB$ pa. $= AB \,.\, BE$, mis oligi tarvis tõestada.

Siin mõeldakse AB ja BE all rööpküliku aluse ja kõrguse mõõtarvusid.

Järeldus. Kaks rööpkülikut, millede alused ja kõrgused on võrdsed, on isekeskis võrdsed.

---

1) Lühenduse mõttes ütleme alati „pindala võrdub nende ja nende lõikude korrutisega“, mõistes selle all, et arv, mis mõõdab pindala ruut-mõõtüksusega, võrdub nende arvude korrutisega, mis mõõdavad neid lõikusid vastava pikkuse-mõõtüksusega.

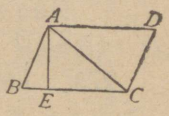
269. Lause. Kolmnurga pindala võrdub aluse ja kõrguse poolkorrutisega (245. joon.).

Olgu antud kolmnurk ABC. Läbi punkti A tõmbame sirge AD, mis on rööbiti BC-ga, ja läbi punkti C sirge CD, mis on rööbiti AB-ga. Saame rööpküliku $ADCB$, millel on kolmnurgaga ABC ühine alus ja ühine kõrgus ja mis jagub nurkjoonega AC kaheks võrdseks kolmnurgaks; järjelikult

$$ABC\,pa. = \frac{ADCB\,\text{pa.}}{2} = \frac{BC \cdot AE}{2},$$ mis oligi tarvis tõestada.

Järeldus. 1. Võrdsete alustega ja võrdsete kõrgustega kolmnurkade pindalad on võrdsed.

2. Täisnurkse kolmnurga pindala võrdub tema kaatetite poolkorrutisega.



245. joonis.

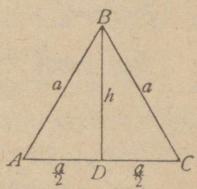
270. Ülesanne. Määrata võrdkülgse kolmnurga pindala S, kui kolmnurga külg on a (246. joon.).

Et võrdhaarse kolmnurga kõrgus kulgeb aluse keskpunkti, siis saame täisnurksest kolmnurgast DBC:

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Seepärast

$$S = \frac{AC \cdot h}{2} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



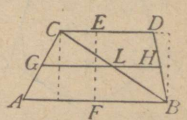
246. joonis.

Võrdhaarse kolmnurga pinnavalemit on kasulik meeles pidada, sest et teda sagedasti tarvis tuleb.

271. Hulknurga pindala. Et leida mingi hulknurga pindala, seks tarvis lahutada ta kolmnurkadeks, leida nende pindalad ja liita.

Järgnevad laused tõestatakse sel viisil.

272. Lause. Trapetsi pindala võrdub aluste poolsumma ja kõrguse korrutisega (247. joon.).



247. joonis.

Tõmmates trapetsis $ACDB$ nurkjoone CB, lahutame ta kaheks kolmnurgaks ACB ja CBD. Kui nende kolmnurkade alusteks võtta AB ja CD, siis on trapetsi kõrgus nende kolmnurkade ühine kõrgus. Järjelikult

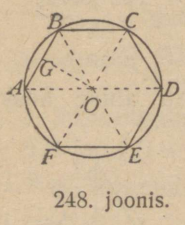
$$ACDB \text{ pa.} = ACB \text{ pa.} + CDB \text{ pa.} = \frac{AB \cdot EF}{2} + \frac{CD \cdot EF}{2} = \frac{(AB + CD) \cdot EF}{2}.$$

Järeldus. Trapetsi pindala võrdub trapetsi kesksirge ja kõrguse korrutisega.

Et (nr. 104)

$$\frac{AB + OD}{2} = GH, \text{ siis } ACDB \text{ pa.} = GH \cdot EF.$$

273. Lause. Korrapärase hulknurga pindala võrdub ümbermõõdu ja apoteemi poolkorrutisega (248. joon.).



248. joonis.

Ühendades korrapärase n-nurga $ABCDE\ldots$ tipud ümberjoonestatud ringi keskpunktiga, lahutame hulknurga n ühtivaks kolmnurgaks, nõnda et

$ABCDE\ldots$ pa. $= n.$ AOB pa., kuid

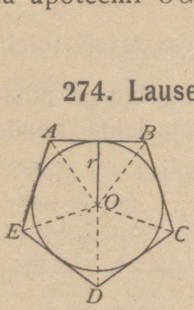
$$AOB \text{ pa.} = \frac{AB \cdot OG}{2}, \text{ järjelikult}$$

$$ABCDE\ldots \text{ pa.} = \frac{n \cdot AB \cdot OG}{2};$$

märkides $ABCDE\ldots$ pa. S-ga, ümbermõõdu $n.AB$ — 2 p-ga ja apoteemi OG — a-ga, saame:

$$S = \frac{2p \cdot a}{2} = p.a.$$

274. Lause. Ringi ümber joonestatud hulknurga pindala võrdub ümbermõõdu ja ringi raadiuse poolkorrutisega (249. joon.).



249. joon.

Ühendades hulknurga tipud keskpunktiga O, lahutame ta kolmnurkadeks, milledel on võrdsed kõrgused, mis võrduvad ringi raadiusega.

Siis

$$ABCDE \text{ pa.} = AOB \text{ pa.} + BOC \text{ pa.} + COD \text{ pa.} + \ldots,$$

kuid

$$AOB \text{ pa.} = \frac{AB.r}{2};\ BOC \text{ pa.} = \frac{BC.r}{2};\ COD \text{ pa.} = \frac{CD.r}{2};\ \ldots$$

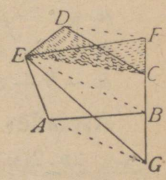
järjelikult $ABCDE$ pa. $= \frac{AB.r}{2} + \frac{BC.r}{2} + \frac{CD.r}{2} + \ldots =$

$$= \frac{r(AB + BC + CD + \ldots)}{2},$$

märkides ümbermõõdu $AB + BC + CD + \ldots$ $2p$-ga ja pindala S-ga, saame:

$$S = p.r.$$

275. Ülesanne. Muundada hulknurk *ABCDE* temaga võrdseks kolmnurgaks (250. joon.).



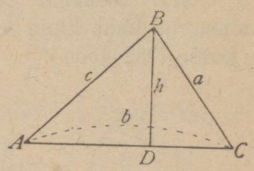
250. joonis.

Tõmbame nurkjoone EC. Läbi tipu D tõmbame $DF \parallel EC$, kuni ta lõikub BC pikendusega punktis F ja ühendame punktid E ja F.

Kolmnurgad DEC ja FEC, milledel on ühine alus EC ja millede tipud D ja F asetsevad alusega rööbiti tõmmatud sirgel, on võrdsed, sest et peale ühise aluse on nende kõrgused võrdsed. Seepärast, kui antud hulknurgast $AEDCB$ lahutame $\triangle DEC$ ja tema asemel liidame hulknurgaga endisega võrdse $\triangle FEC$, siis ei muutu pindala suurus; järjelikult on viisnurk $AEDCB$ nelinurgaga $AEFB$ võrdne.

Samuti võib nelinurga $AEFB$ muundada temaga võrdseks kolmnurgaks EFG.

276. Ülesanne. Määrata kolmnurga *ABC* pindala kolme külje *a*, *b* ja *c* kaudu[1]) (251. joon.).



251. joonis.

Kolmnurgast ABD teame:

$$h^2 = c^2 - \overline{AD}^2 \ (1);$$

kolmnurgast ABC aga:

1) Harilikult tähistatakse $\triangle ABC$ nurkade A, B ja C vastasküljed vastavalt a, b ja c-ga.

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2b \cdot AD, \text{ kust}$$

$$AD = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b} \quad (2).$$

Asetades võrdusesse (1) AD asemele tema avalduse võrdusest (2), saame:

$$h^2 = c^2 - \frac{(c^2 + b^2 - a^2)^2}{4b^2} = \frac{4b^2c^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2}{4b^2} =$$

$$= \frac{(2bc + c^2 + b^2 - a^2)(2bc - c^2 - b^2 + a^2)}{4b^2} = \frac{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}{4b^2} =$$

$$= \frac{(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)}{4b^2} \quad (3).$$

Märkides kolmnurga ümbermõõdu $2p$-ga, saame:

$a + b + c = 2p$;
$a + c - a = b + c + a - 2a = 2p - 2a = 2(p - a)$;
$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c)$;
$a - b + c = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b)$.

Asetades saadud avaldused võrdusesse (3), saame:

$$h^2 = \frac{2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-b)}{4b^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2},$$

kust

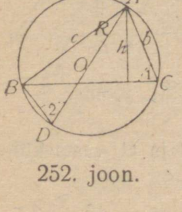
$$h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Märkides kolmnurga pindala S-ga, saame:

$$S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{b \cdot 2}{2b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ või}$$

$$\boldsymbol{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

277. Ülesanne. Määrata kolmnurga ümberjoonestatud ringi raadius kolmnurga kahe külje b ja c ja nende külgede vahel asetseva kõrguse h järele (252. joon.).



252. joon.

Tõmmates läbimõõdu AD samast tipust, kust on tõmmatud kõrgus h, ja ühendades punktid D ja B, saame $\triangle ABD$, mille nurk B on täisnurk kui läbimõõdule toetuv piirdenurk.

Täisnurksed kolmnurgad ABD ja AEC, milledel on ka võrdsed teravnurgad ($\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ kui ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad), on sarnased; järjelikult

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AC}{AE} \text{ või } \frac{2R}{C}=\frac{b}{h}, \text{ kust } R=\frac{bc}{2h}.$$

278. Ülesanne. Määrata kolmnurga ümberjoonestatud ringi raadius kolmnurga kolme külje *a*, *b* ja *c* järele.

Asetades nr. 277 valemisse kolmnurga kõrguse h avalduse kolme külje järele (nr. 276), saame:

$$R=\frac{bc}{2h}=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

279. Märkus. Kolmnurga pindala võrdub tema kolme külje korrutisega, mis on jagatud ümberjoonestatud ringi neljakordse raadiusega või kolmnurga kolme külje korrutis võrdub kolmnurga pindala ja ümberjoonestatud ringi raadiuse neljakordse korrutisega.

Märkides kolmnurga küljed ja pindala vastavalt a, b, c ja S-ga ja ümberjoonestatud ringi raadiuse R-ga, saame (nr. 278):

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{abc}{4S}, \text{ kust}$$

$$S=\frac{abc}{4R}, \text{ või } abc=4RS.$$

280. Ülesanne. Kolmnurga *ABC* kolme külje *a*, *b* ja *c* järele määrata sissejoonestatud ringi raadius (253. joon.).

Märgime sissejoonestatud ringi raadiuse r-ga. Ühendades kolm tippu A, B ja C keskpunktiga O, saame:

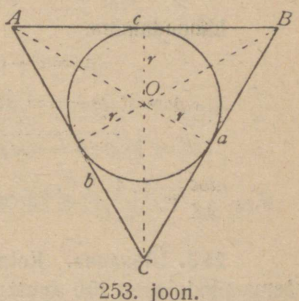
ABC pa. $=BOC$ pa. $+AOC$ pa. $+AOB$ pa.[1]);

kuid ABC pa. $=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

BOC pa. $=\frac{ar}{2}$; AOC pa. $=\frac{br}{2}$; AOB pa. $=\frac{cr}{2}$;

järjelikult $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$

$$=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}=\frac{r(a+b+c)}{2}.$$



253. joon.

Tarvitades eespool tarvitusele võetud sümboleid, s. o. oletades, et $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=S$ ja $\frac{a+b+c}{2}=p$, saame:

$$S=pr,$$

1) Siin käsitatud lahendusviisi, kus mingi joonise pindala võrrutatakse seda joonist moodustavate jooniste pindalade summaga, on kasulik meeles pidada, sest et seda lahendusviisi tarvitatakse sagedasti.

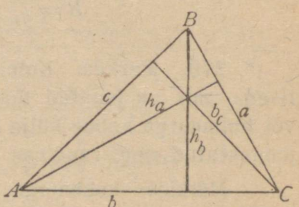
s. o. **kolmnurga pindala võrdub pool-ümbermõõdu ja sissejoonestatud ringi raadiuse korrutisega.** Eelmisest valemist saame:

$$r = \frac{S}{p}.$$

281. Ülesanne. Kolmnurga kolme külje a, b ja c järele määrata ta kõrgused (254. joon.).

Märgime külgedele a, b ja c vastavad kõrgused h_a, h_b ja h_c-ga ja kolmnurga pindala S-ga, saame:

$$\left.\begin{aligned} \frac{ah_a}{2} &= S \\ \frac{bh_b}{2} &= S \\ \frac{ch_c}{2} &= S \end{aligned}\right\}, \text{ kus } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



254. joonis.

Sellest järgneb:

$$h_a = \frac{2S}{a};\ h_b = \frac{2S}{b};\ h_c = \frac{2S}{c}.$$

282. Ülesanne. Kolmnurga küljed on: $a = 3m$, $b = 4m$, $c = 5m$. Leida S, R, r ja h_a.

Lahendamine.

$$2p = a + b + c = 3 + 4 + 5 = 12, \text{ kust}$$

$$p = 6;\ p - a = 3;\ p - b = 2;\ p - c = 1, \text{ mille põhjal}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{6.3.2.1} = 6\,(m^2).$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{3.4.5}{4.6} = 2{,}5\,(m);\ r = \frac{S}{p} = \frac{6}{6} = 1\,(m);\ h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2.6}{3} = 4(m).$$

283. Ülesanne. Kolmnurga küljed suhtuvad nõnda kui 3 : 4 : 5; tema pindala on 150 ruuttolli. Leida iga külje pikkus.

Lahendamine. Märkides kolmnurga küljed $3x$, $4x$ ja $5x$-ga. Siis $2p = 3x + 4x + 5x = 12x$; $p = 6x$; $p - a = 3x$; $p - b = 2x$; $p - c = x$.

Ülesande tingimuse põhjal saame võrde:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 150, \text{ või}$$

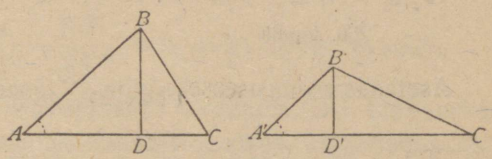
$$\sqrt{6x \cdot 3x \cdot 2x \cdot x} = 150, \text{ kust}$$

$$\sqrt{36x^4} = 150, \text{ või } 6x^2 = 150, \text{ või } x^2 = 25, \text{ millest}$$

$$x = 5 \text{ t.};\ 3x = 15 \text{ t.};\ 4x = 20 \text{ t.};\ 5x = 25 \text{ t.}$$

Pindalade võrdlemine.

284. Lause. Kahe niisuguse kolmnurga pindalad, milledel on võrdne nurk, suhtuvad nõnda kui nende külgede korrutised, millede vahel asetseb see nurk (255. joon.)



255. joonis.

T.: $\measuredangle A = \measuredangle A'$. V.: $\frac{ABC\text{ pa.}}{A'B'C'\text{ pa.}} = \frac{AC \cdot AB}{A'C' \cdot A'B'}$.

Tõestamine.

$ABC\text{ pa.} = \frac{AC \cdot BD}{2}$; $A'B'C'\text{ pa.} = \frac{A'C' \cdot B'D'}{2}$; järjelikult

$$\frac{ABC\text{ pa.}}{A'B'C'\text{ pa.}} = \frac{AC \cdot BD}{A'C' \cdot B'D'} = \frac{AC}{A'C'} \cdot \frac{BD}{B'D'} \quad (1),$$

kuid täisnurksed kolmnurgad ABD ja $A'B'D'$, milledel on $\measuredangle A = \measuredangle A'$, on sarnased; järjelikult

$$\frac{BD}{B'D'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Asetades võrdusesse (1) suhte $\frac{BD}{B'D'}$ asemele suhte $\frac{AB}{A'B'}$, saame:

$$\frac{ABC\text{ pa.}}{A'B'C'\text{ pa.}} = \frac{AC}{A'C'} \cdot \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC \cdot AB}{A'C' \cdot A'B'},$$

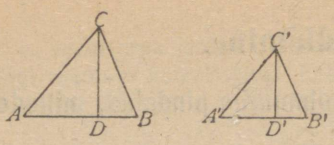
mis oligi tarvis tõestada.

285. Lause. Sarnaste kolmnurkade pindalad suhtuvad nõnda kui vastavate külgede ruudud (256. joon.).

T.: $\triangle ACB \sim \triangle A'B'C'$. V.: $\frac{ACB\text{ pa.}}{A'C'B'\text{ pa.}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$.

Tõestamine.

$$\frac{ACB\text{ pa.}}{A'C'B'\text{ pa.}} = \frac{AB \cdot CD}{A'B' \cdot C'D'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{CD}{C'D'} \quad (1).$$



256. joonis.

Et sarnaste kolmnurkade kõrgused suhtuvad nõnda kui vastavad küljed, siis

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Asetades võrdusesse (1) suhte $\frac{CD}{C'D'}$ asemele suhte $\frac{AB}{A'B'}$, saame:

$$\frac{ACB\text{ pa.}}{A'C'B'\text{ pa.}} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AB}{A'B'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2},$$

mis oligi tarvis tõestada.

286. Lause. Sarnaste hulknurkade pindalad suhtuvad nõnda kui vastavate külgede ruudud (257. joon.).

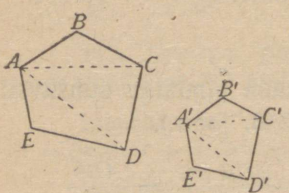
T.: $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$. **V.:** $\frac{ABCDE\text{ pa.}}{A'B'C'D'E'\text{ pa.}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$.

Tõestamine. Tõmmates vastavatest tippudest A ja A' nurkjooned hulknurga igasse tippu, jagame meie need hulknurgad ühesuguseks arvuks vastavalt sarnasteks kolmnurkadeks, seepärast:

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, kust $\frac{ABC\text{ pa.}}{A'B'C'\text{ pa.}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$ (1);

$\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$, kust $\frac{ACD\text{ pa.}}{A'C'D'\text{ pa.}} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2}$ (2);

$\triangle AED \sim \triangle A'E'D'$, kust $\frac{AED\text{ pa.}}{A'E'D'\text{ pa.}} = \frac{\overline{DE}^2}{\overline{D'E'}^2}$ (3).



257. joon.

Hulknurkade sarnasuse tagajärjel on:

$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'}$; seepärast ka

$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2} = \frac{\overline{DE}^2}{\overline{D'E'}^2}$;

nõnda on võrduste (1), (2) ja (3) parempoolsed osad isekeskis võrdsed, järjelikult

$$\frac{ABC\text{ pa.}}{A'B'C'\text{ pa.}} = \frac{ACD\text{ pa.}}{A'C'D'\text{ pa.}} = \frac{AED\text{ pa.}}{A'E'D'\text{ pa.}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}.$$

Tarvitades selle võrdsete murdude rea juures algebralist lauset (nr. 209), saame:

$$\frac{ABC\text{ pa.} + ACD\text{ pa.} + AED\text{ pa.}}{A'B'C'\text{ pa.} + A'C'D'\text{ pa.} + A'E'D'\text{ pa.}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2},\text{ või}$$

$$\frac{ABCDE\text{ pa.}}{A'B'C'D'E'\text{ pa.}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2},\text{ mis oligi tarvis tõestada.}$$

Järeldused. 1. Korrapäraste samanimeliste hulknurkade pindalad suhtuvad nõnda kui sisse- või ümberjoonestatud ringide raadiuste ruudud.

2. Kahe niisuguse korrapärase samanimelise hulknurga pindalad, milledest üks on ringi ümber joonestatud, teine aga ringi sisse joonestatud, suhtuvad nõnda kui raadiuse ruut suhtub apoteemi ruudusse.

287. Ülesanne. **Sarnaste hulknurkade ümbermõõdud võrduvad vastavalt P ja p-ga. Esimese pindala on Q. Määrata teise pindala.**

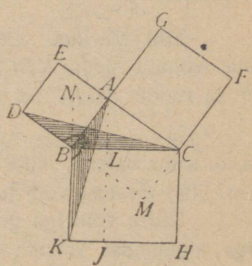
Märkides sarnaste hulknurkade vastavad küljed A ja a-ga ja teise hulknurga pindala x-ga, saame:

$$\frac{P}{p} = \frac{A}{a}\text{ (nr. 209);}$$

$$\frac{Q}{x} = \frac{A^2}{a^2}\text{ (nr. 286), kust}$$

$$\frac{Q}{x} = \frac{P^2}{p^2};\ x = \frac{Q \cdot p^2}{P^2}.$$

288. Pythagorase lause. **Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile konstrueeritud ruudu pindala võrdub kaatetitele konstrueeritud ruutude pindalade summaga**[1]) (258. joon.).



258. joonis.

T.: $\sphericalangle A$ **on täisnurk;**

***KBCH, BDEA* ja *AGFC* on ruudud.**

V.: ***KBCH*** pa. = ***BDEA*** pa. + ***AGFC*** pa.

Tõestamine. Täisnurga A tipust tõmbame hüpotenuusile BC ristjoone AL ja pikendame teda, kuni ta lõikub küljega

1) Eespool (nr. 212) on see lause tõestatud algebraliselt.

KH punktis J. Siis jagub ruut $KBCH$ kaheks püstkülikuks: $KBLJ$ ja $JLCH$. Tõestame, et püstkülik $KBLJ$ võrdub ruuduga $BDEA$, aga püstkülik $JLCH$ ruuduga $AGFC$. Ühendame punktid A ja K, D ja C. Et

$$ABK\text{ pa.} = \frac{KB \cdot AN}{2} = \frac{KB \cdot BL}{2}, \text{ aga}$$

$$KBLJ\text{ pa.} = KB \cdot BL, \text{ siis}$$

$$KBLJ\text{ pa.} = 2 \cdot ABK\text{ pa.} \quad (1).$$

Samuti

$$BDEA\text{ pa.} = 2 \cdot BDC\text{ pa.} \quad (2),$$

sest et ruudul $BDEA$ ja kolmnurgal BDC on üks ja sama alus BD ja võrdsed kõrgused ($AB = CM$).

Kolmnurgad ABK ja BDC on aga ühtivad ($\measuredangle ABK = \measuredangle DBC$), sest et kumbki neist on moodustatud ühisest nurgast ABC ja täisnurgast, ($KB = BC$ ja $BA = BD$); järjelikult on võrduste (1) ja (2) parempoolsed osad võrdsed, seepärast

$$KBLJ\text{ pa.} = BDEA\text{ pa.} \quad (3).$$

Samuti võib tõestada, et

$$JLCH\text{ pa.} = AGFC\text{ pa.} \quad (4).$$

Liites ositi võrdused (3) ja (4), saame:

$KBLJ$ pa. $+ JLCH$ pa. $= BDEA$ pa. $+ AGFC$ pa., või

$KBCH$ pa. $= BDEA$ pa. $+ AGFC$ pa., mis oligi tarvis tõestada.

289. Märkus. Olgu a, b ja c külgede BC, BA jä AC mõõtarvud; siis mõõtub ruudu $KBCH$ pa. suurusega a^2, ruudu $BDEA$ pa. suurusega b^2 ja ruudu $AGFC$ pa. suurusega c^2; järjelikult saame:

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

s. o. sama valemi, mille eespool (nr. 212) tuletasime. Ümberpöördult, lause (nr. 288) tõestust võib tuletada lause (nr. 212) tõestamisest.

Üldse võib iga geomeetrilist lauset avaldada algebraliselt, kuna aga iga algebralist valemit võib geomeetriliselt tõlgitseda[1]). Tõepoolest võib

1) Selle mõtte väljendas esimesena M. Chasles (Traité de Géométrie supérieure. Discours).

iga kahe arvu korrutist vaadelda kui püstküliku pindala mõõtarvu ja ümberpöördult. Nõnda võib lauset nr. 222, mis algebraliselt avaldus võrduses $AF \cdot FB = DF \cdot FC$, lugeda nii:

kui läbi ringjoone sees asetseva punkti tõmmata kõõlud, siis on püstkülikud, mis on konstrueeritud kummagi kõõlu lõikudest, võrdsed.

Algebraline valem

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

avaldab geomeetriliselt vaatekohalt mõtet:

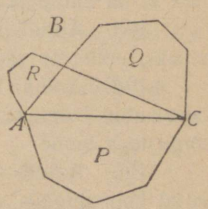
püstkülik, mille küljed on vastavalt võrdsed kahe lõigu a ja b summa ja vahega, võrdub niisuguste ruutude vahega, millede külgedeks on lõigud a ja b.

290. Ülesanne. **Konstrueerida ruut, mis võrduks kahe antud ruudu summaga.**

Konstrueerime täisnurkse kolmnurga, mille kaatetiteks oleksid antud ruutude küljed. Selle kolmnurga hüpotenuusile konstrueeritud ruut ongi võrdne kahe antud ruudu summaga.

291. **Pythagorase lause üldistamine. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile konstrueeritud hulknurk võrdub kaatetitele konstrueeritud temaga sarnaste hulknurkade summaga** (259. joon.).

Olgu ABC täisnurkne kolmnurk ($\measuredangle B$ on täisnurk), P, Q ja R kolme sarnase hulknurga pindalad.



259. joonis.

$$V.: P = Q + R.$$

Tõestamine. Sarnaste hulknurkade pindalad suhtuvad nõnda kui vastavate külgede ruudud; seepärast

$$\frac{Q}{P} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2} \quad \text{ja} \quad \frac{R}{P} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Liites need võrdused ositi ja pidades meeles, et $\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2$, leiame:

$$\frac{Q+R}{P} = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AC}^2} = 1, \text{ kust}$$

$Q + R = P$, mis oligi tarvis tõestada.

Harjutused.

Konstruktsiooni-ülesanded ja laused.

180. Tõestada geomeetriliselt, et kolmnurga pindala võrdub niisuguse püstküliku pindalaga, mille alus on sama, kuid kõrgus on kolmnurga poolkõrgus.

181. Jagada kolmnurk tippu kulgeva sirgega kaheks võrdseks kolmnurgaks.

182. Jagada △ pooleks sirgega, mis kulgeb tema küljel antud punkti.

183. Jagada △ tippu kulgevate sirgetega 5 võrdseks kolmnurgaks.

184. Jagada rööpkülik pooleks sirgega, mis kulgeb tema ühel küljel antud punkti.

185. Muundada rööpkülik temaga võrdseks kolmnurgaks.

186. Muundada trapets temaga võrdseks rööpkülikuks.

187. Muundada trapets temaga võrdseks kolmnurgaks.

188. Muundada rööpkülik temaga võrdseks rööpkülikuks, mille külg on antud.

189. Antud alusest b konstrueerida △, mis võrduks antud kolmnurgaga ABC.

190. Antud kõrgusest h konstrueerida △, mis võrduks antud kolmnurgaga ABC.

191. Konstrueerida ruut, mis võrduks kahe antud ruudu vahega.

192. Antud nelinurk muundada temaga võrdseks rööpkülikuks, mille nurk m on antud ja alus b on ühine.

193. Antud trapets muundada temaga võrdseks võrdhaarseks trapetsiks, millel on sama kõrgus.

194. Antud küljepoolitajast konstrueerida kolmnurk, mis võrduks kahe antud kolmnurga summaga ja mille kõrgus oleks antud kolmnurkade kõrgustega ühine.

195. Antud alusest b ja selle aluse vastasnurgast m konstrueerida antud kolmnurgaga võrdne kolmnurk.

196. Antud kolmnurk muundada püstkülikuks, mille nurkjoon m on antud.

197. Kolmnurga sees leida niisugune punkt, et sirged, mis ühendavad ta kolmnurga tippudega, jagaksid kolmnurga kolmeks võrdseks osaks.

198. Jagada kolmnurk läbi tema alusel antud punkti tõmmatud sirgetega kolmeks võrdseks osaks.

Arvutusülesanded.

199. Määrata niisuguse ruudu külg, mis on võrdne püstkülikuga, mille küljed on a ja b.

200. Kuidas suhtuvad korrapärase kolmnurga, ruudu ja korrapärase kuusnurga pindalad isekeskis, kui nende küljed on võrdsed?

201. Leida võrdhaarse täisnurkse kolmnurga pindala, mille hüpotenuus on a.

202. Leida võrdhaarse kolmnurga pindala aluse b ja haara a järele.

203. Leida niisuguse kolmnurga pindala, mille kaks külge on a ja b ja nende vahelnurk on 30^0.

204. Leida niisuguse kolmnurga pindala, mille kaks külge on a ja b ja nende vahelnurk on 45^0.

205. Leida niisuguse kaldruudu pindala, mille nurkjooned on $2m$ ja $2n$.

206. Leida niisuguse kaldruudu pindala, mille külg on a, aga teravnurk on 30^0.

207. Tõestada, et kolmnurga küljed a, b ja c on vastuvõrdelised tema kõrgustega: h_a, h_b ja h_c, s. o.: $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$. (Meeles pidada nr. 269)[1]).

208. Määrata trapetsi pindala, kui tema suurem rööbikkülg a moodustab ühe mitterööbiku küljega b nurga 45^0, aga teise mitterööbiku küljega nurga 60^0.

209. Kolmnurga külje a järele leida sarnase kolmnurga vastav külg, kui viimase pindala on n korda suurem kui antud kolmnurga pindala.

210. Hulknurga ümbermõõt on P, pindala Q. Leida niisuguse sarnase hulknurga pindala, mille ümbermõõt on q.

211. Kolmnurga kõrgus on H. Leida selle alusega rööbiti tõmmatud sirge kaugus, mis jagab kolmnurga kaheks võrdseks osaks.

212. Kaldruudu pindala $= Q$, nurkjoonte suhe on $m : n$. Leida kaldruudu külg.

213. Kolmnurk, mille alus $= a$, aga pindala $= Q$, on jagatud kolmeks võrdseks osaks sirgetega, mis on rööbiti alusega. Leida nende sirgete kaugus kolmnurga tipust.

XVII peatükk.

Piiri mõiste.

292. Konstantsed (jäävad) ja muutuvad suurused. Kui mingisuguse küsimuse käsitlusel on suurusel[2]) ikka üks ja

1) Eespool (119. ülesanne) tõestasime selle lause kolmnurkade sarnasuse abil.

2) Sõna s u u r u s e all mõistame ka selle suuruse m õ õ t a r v u.

sama teatav väärtus, siis nimetatakse seda suurust **konstantseks suuruseks**; kui aga suuruse väärtus vahetub, siis nimetatakse teda **muutuvaks suuruseks.** Nõnda näiteks on kolmnurga nurgad muutuvad suurused, kuna aga kolmnurga kõigi nurkade summa on konstantne suurus. Antud ringi läbimõõt on konstantne suurus, kõõl aga muutuv suurus. Külgede arvu kahendamisel on ringi sisse- või ümberjoonestatud hulknurga ümbermõõt muutuv suurus, kuna aga ringjoone pikkus on konstantne suurus.

293. Piir. Kui muutuv suurus ligeneb konstantsele suurusele nii, et nende vahe saab[1] **(ja edaspidisel muutuvusel ka jääb) vähemaks kui iga antud väike suurus, siis nimetatakse konstantset suurust muutuva suuruse piiriks.**

Muutugu näiteks muutuv suurus x nõnda, et tema järgseteks väärtusteks on arvud:

$$0{,}7;\ 0{,}77;\ 0{,}777;\ 0{,}7777 \text{ jne.}$$

Näitame, et selle arvu x piiriks on murdarv $\frac{7}{9}$. Tõepoolest:

$$\frac{7}{9} - \frac{7}{10} = \frac{70}{90} - \frac{63}{90} = \frac{7}{90}$$

$$\frac{7}{9} - \frac{77}{100} = \frac{700}{900} - \frac{693}{900} = \frac{7}{900}$$

$$\frac{7}{9} - \frac{777}{1000} = \frac{7000}{9000} - \frac{6993}{9000} = \frac{7}{9000} \text{ jne.}$$

Sellest on näha, et kui arv x muutub näidatud seaduse järele, siis ligeneb ta murrule $\frac{7}{9}$ ja vahe nende vahel võib saada väiksemaks igast arvust; järjelikult

$$x\text{-i piir} = \frac{7}{9}.$$

Märkus. Muutuva suuruse ligenemisest konstantsele suurusele ei ole veel küllalt seks, et me võiksime konstantset suurust nimetada piiriks. Tarvis on otsusele jõuda, et see ligenemine sünnib piiramata, s. o. et muutuva ja konstantse suuruse vahe võib saada vähemaks igast antud väikesest suu-

1) Absoluutse väärtuse poolest.

rusest. Näiteks ligeneb arv x ka murrule $\frac{8}{9}$, kuid murdu $\frac{8}{9}$ ei või nimetada x-i piiriks, sest et vahe nende vahel ei või saada vähemaks kui $\frac{1}{9}$.

294. **Lõpmata väike suurus. Kui muutuv suurus vähenedes**[1]) **saab (ja edaspidisel muutumisel ka jääb) vähemaks igast antud väikesest arvust, siis nimetatakse teda lõpmata väikeseks suuruseks.** Lõpmata väikese suuruse näiteks võib olla vahe

$$\frac{7}{9} - x,$$

kus x on ülemalnäidatud arv.

Piiri definitsioonist järgneb, et lõpmata väikese suuruse piir on null.

Selle asemel, et ütelda: lõpmata väike suurus ligeneb piirile 0, kõneldakse harilikult lihtsalt: **lõpmata väike suurus ligeneb nullile.**

295. **Märkus.** Eelmisest seletusest järgneb, et **muutuva suuruse ja konstantse suuruse vahe on lõpmata väike suurus;** järjelikult, kui märkida muutuv suurus x-ga, tema piir a-ga ja nende vahe, mis on lõpmata väike suurus, α-ga, siis väljendavad võrdused:

$$x \text{ piir} = a,$$
$$x - a = \alpha$$
$$x = a + \alpha$$

üht ja sama mõtet; seepärast, et tõestada, et konstantne suurus a on muutuva suuruse x-i piir, on tarvis tõestada, et nende vahe $x - a$ on lõpmata väike suurus või teiste sõnadega — ligeneb nullile.

Selle asemel, et kõnelda: „x ligeneb piirile a“ ütleme meie lihtsalt: „x ligeneb a-le“.

296. **Lause. Ühelgi muutuval suurusel ei või olla rohkem kui üks piir.**

1) Absoluutse väärtuse poolest.

Olgu muutuval suurusel x peale piiri a veel teine piir b, nõnda et

$$x\text{-}i\ \text{piir} = a \quad \text{või} \quad x - a = \alpha \ (1)$$
$$x\text{-}i\ \text{piir} = b \qquad x - b = \beta \ (2),$$

kus α ja β on lõpmata väikesed suurused. Lahutades võrdusest (1) võrduse (2), saame:

$$b - a = \alpha - \beta \ (3).$$

Märkides konstantse vahe $b - a$ tähega k ja lõpmata väikese vahe $\alpha - \beta$ tähega ε, võime võrduse (3) kirjutada järgmiselt:

$$k = \varepsilon \ (4).$$

Kuid lõpmata väike suurus ε võib saada väiksemaks igast antud väikesest, seepärast võib ta saada ka väiksemaks kui konstantne suurus k, järjelikult ei ole võrdus (4) võimalik; see näitab, et meie oletus, nagu oleks muutuval suurusel x peale piiri a veel teine piir b, ei ole õige.

297. Järeldus. Kui kaks muutuvat suurust jäävad kõigil oma muutuvustel võrdseteks, siis on ka nende piirid võrdsed, sest et need kaks muutuvat moodustavad enestest ühe ja sama muutuva, millel on ainult üks piir.

298. Toome siin järgnevad laused, mida tõestatakse piiride teoorias, tõestamata:

1. **summa piir võrdub piiride summaga;**
2. **vahe piir võrdub piiride vahega;**
3. **korrutise piir võrdub piiride korrutisega;**
4. **jagatise piir võrdub piiride jagatisega, kui jagaja piir ei võrdu nulliga;**
5. **astme piir võrdub piiri astmega;**
6. **juure piir võrdub piiri juurega.**

XVIII peatükk.

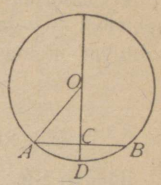
Ringjoone pikkuse ja ringi pindala arvutamine.

299. Lause. **Kui ringi sissejoonestatud korrapärase hulknurga külgede arvu lõpmata kahendada, siis ligeneb raadiuse ja apoteemi vahe nullile,** või teiste sõnadega, **raadius on apoteemi piir** (260. joon.).

Olgu AB korrapärase sissejoonestatud hulknurga külg

ja OD — temaga risti tõmmatud raadius. Tähistame apoteemi OC a-ga ja raadiuse R-ga. Kolmnurgast AOC teame:

$$AO - OC < AC;\ \text{kuid}$$
$$AO = OD;\ \text{seepärast}$$
$$OD - OC < AC;\ \text{või}$$
$$R - a < \frac{AB}{2}.$$



260. joonis.

Kui hulknurga külgede arvu lõpmata kahendada, siis külg AB ligeneb nullile[1]), seepärast ka vahe $R-a$, mis on vähem kui $\frac{AB}{2}$, ligeneb nullile; sellest järgneb, et

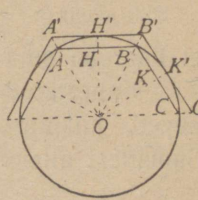
$$R = a \text{ piir.}$$

300. Lause. Ringjoone ümber- ja sissejoonestatud hulknurkade[2]) ümbermõõdud ligenevad ühele ja samale piirile, kui nende hulknurkade külgede arv kahendub lõpmata (261. joon.).

Olgu $ABC\ldots$ ringi sissejoonestatud hulknurk ja $A'B'C'\ldots$ sama ringi samanimeline ümberjoonestatud hulknurk.

1. Hakkame sisse- ja ümberjoonestatud hulknurkade külgede arvu lõpmata kahendama. Siis hakkab ümberjoonestatud hulknurga ümbermõõt vähenema (nr. 252), kuid kõigel oma muutuvuse ajal on see ümbermõõt suurem iga sissejoonestatud hulknurga ümbermõõdust (nr. 55); järjelikult ligeneb ta mingile piirile L.

Sissejoonestatud hulknurga ümbermõõt hakkab suurenema (nr. 251), olles kõigel oma muutuvuse ajal vähem kui mistahes ümberjoonestatud hulknurga ümbermõõt; järjelikult ka tema ligeneb mingile piirile L'.



261. joonis.

---

1) Tõepoolest, kui p on korrapärase sissejoonestatud hulknurga ümbermõõt, aga n — hulknurga külgede arv, siis võrdub hulknurga külg $\frac{p}{n}$-ga. Kui külgede arvu lõpmata kahendada, siis suureneb küll ümbermõõt p (nr. 251), kuid ta jääb kõigel oma muutuvuse ajal ikkagi väiksemaks kui ümberjoonestatud hulknurga ümbermõõt (nr. 55). Seepärast ligeneb nullile murd $\frac{p}{n}$, mille lugeja p on kõigel muutuvuse ajal vähem kui teatav määratud suurus, kuna aga nimetaja n kasvab lõpmata.

2) Nagu igal pool, nii mõtleme ka siin h u l k n u r g a all k u m e r a t hulknurka.

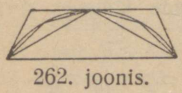
2. Tõestame, et need mõlemad piirid L ja L' on isekeskis võrdsed. Märgime ümberjoonestatud hulknurga ümbermõõdu P-ga, tema apoteemi (ringi raadiuse) — R-ga, sissejoonestatud hulknurga ümbermõõdu p-ga, tema apoteemi — a-ga. Et korrapäraste samanimeliste hulknurkade ümbermõõdud suhtuvad nõnda kui apoteemid (nr. 249), siis

$$\frac{P}{p} = \frac{R}{a}.$$

Et külgede arvu lõpmatul kahendamisel apoteem a ligeneb R-le, siis $\frac{R}{a}$ ligeneb 1-le; seepärast ka $\frac{P}{p}$ ligeneb 1-le; järjelikult ligenevad P ja p ühele ja samale piirile, s. o. P piir $= p$ piir, või $L = L'$, mis oligi tarvis tõestada [1].

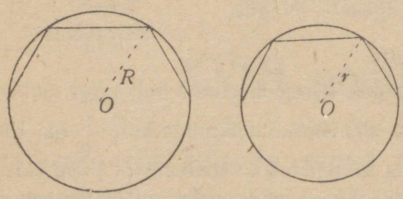
301. Ringjoone ja kaare pikkus. Niisuguste ringjoone sisse- ja ümberjoonestatud hulknurkade ümbermõõtude ühine piir, millede külgede arv lõpmatult kahendub, võetakse ringjoone pikkuseks.

Samuti **kaare pikkuseks võetakse see piir, millele ligeneb selle kaare sisse- või ümberjoonestatud kumera murdjoone pikkus, kui murdjoone otsapunktid ühtivad kaare otsapunktidega** (262. joon.).



262. joonis.

Selle piiri olemasolu tõestatakse samuti kui ringjoonegi suhtes. Kergesti märgatav on, et **kaar on oma kõõlust pikem**, sest et kaar on nende tema sissejoonestatud murdjoonte piir, millede pikkused suurenevad, kusjuures kõik need pikkused on kõõlust suuremad. Samadest ettekujutustest järgneb, et



263. joonis.

kaar on lühem igast teda ümberhaaravast murdjoonest, mille otsapunktid ühtivad kaare otsapunktidega.

Sellest järgneb, et ringjoone pikkus on suurem kui sissejoonestatud hulknurga üm-

1) Võib tõestada, et samale piirile ligeneb selle ringi iga sisse- ja ümberjoonestatud hulknurga ümbermõõt, kui hulknurga külgede arv suureneb lõpmata mistahes seaduse järele.

bermõõt ja vähem kui ümberjoonestatud hulknurga ümbermõõt.

302. Lause. Ringjooned suhtuvad nõnda kui nende raadiused (263. joon.).

Märgime kahe antud ringjoone pikkused C ja c-ga ja nende raadiused vastavalt R ja r-ga. Joonestame nende ringjoonte sisse korrapärased samanimelised hulknurgad, millede ümbermõõdud märgime vastavalt P ja p-ga. Siis (nr. 248):

$$\frac{P}{p} = \frac{R}{r}.$$

Et hulknurkade külgede arvu lõpmatul kahendamisel P ligeneb C-le ja p ligeneb c-le, siis

$$\frac{C}{c} = \frac{R}{r}, \text{ mis oligi tarvis tõestada.}$$

I. järeldus. Ringjoone ja tema läbimõõdu suhe on konstantne suurus.

Tõestuse järele

$$\frac{C}{c} = \frac{R}{r}, \text{ kust}$$

$$\frac{C}{c} = \frac{2R}{2r}, \text{ millest}$$

$$\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r},$$

s. o. mingi ringjoone C ja tema läbimõõdu $2R$ suhe võrdub iga ringjoone c ja vastava läbimõõdu $2r$ suhtega; see võib olla ainult siis, kui see suhe on konstantne suurus. Seda konstantset suurust märgitakse sümbolselt greekakeelse tähega π, nõnda et

$$\frac{C}{2R} = \pi.$$

2. järeldus. Eelmisest valemist saame:

$$C = 2\pi R,$$

s. o. **raadiusega R joonestatud ringjoone pikkus on $2\pi R$.** See valem võimaldab ka määrata R, kui ringjoone pikkus on teada:

$$R = \frac{C}{2\pi} = \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{\pi}.$$

303. Ülesanne. Leida n^0-lise kaare pikkus. Olgu l kaare pikkus, C — ringjoone pikkus ja R — raadius.

Ringjoone pikkus on $2\pi R$;

1^0-lise kaare pikkus on $\frac{2\pi R}{360}$;

n^0-lise kaare pikkus on $\frac{2\pi R \cdot n}{360}$, järjelikult

$$l = \frac{2\pi R \cdot n}{360} = \frac{\pi R n}{180}.$$

304. Võtame raadiusega R joonestatud ringjoone, konstrueerime tema sisse korrapärase kuusnurga; tema külg võrdub R-ga; kasutades kahendusvalemit (nr. 251), määrame sissejoonestatud korrapärase 12-nurga, 24-nurga jne. küljed; kasutades pärast seda valemit (nr. 250), määrame ümberjoonestatud korrapärase 6-nurga, 12-nurga, 24-nurga jne. küljed. Teada saades küljed, arvutame nende korrapäraste hulknurkade ümbermõõdud. Siis saame tabeli (lhk. 195), mis näitab, kuidas külgede arvu suurenemisel muutub sisse- ja ümberjoonestatud hulknurkade ümbermõõtude vahe, järjelikult ka ringjoone pikkuse ja mingi sisse- või ümberjoonestatud hulknurga perimeetri vahe.

Võttes mingi esitatud hulknurga ümbermõõdu ringjoone pikkusena, on kerge leida tehtud vea piiri. Nõnda näiteks võttes ringjoone pikkusena korrapärase sissejoonestatud 3072-nurga ümbermõõdu, s. o. oletades, et ta võrdub $6{,}283184R$, eksime meie vähem kui $0{,}00001R$, sest et ümber- ja sissejoonestatud hulknurkade ümbermõõtude vahe, mis võrdub murruga $0{,}000003R$, on vähem kui $0{,}00001R$.

305. π arvutamine. π ei ole võimalik täpsalt avaldada, sest on tõestatud[1]), et see suurus on ühismõõdutu ehk irratsionaalne, s. o. et ta ei või võrduda ei täis- ega murdarvuga.

---

1) π irratsionaalsuse tõestas esimesena Lambert 1761. a.

Ringjoone mõõtmine on ülesanne, mis suure tähelepanu osaliseks on saanud. Vanadel greeklastel oli ta tuntud ringi kvadratuuri nime all, sest et nad püüdsid seda ülesannet lahendada ringiga võrdse ruudu konstrueerimise abil. Esimesena tegi selle küsimusega tegemist geomeetria-

Hulknurga külgede arv.	Sissejoonestatud hulknurga ümbermõõt.	Ümberjoonestatud hulknurga ümbermõõt.	Ümbermõõtude vahe on vähem kui
6	$6\,R$	$6{,}928200\,R$	$1\,R$
12	$6{,}211657\,R$	$6{,}630776\,R$	$1\,R$
24	$6{,}265257\,R$	$6{,}319056\,R$	$1\,R$
48	$6{,}278700\,R$	$6{,}292176\,R$	$0{,}1\,R$
96	$6{,}282064\,R$	$6{,}285429\,R$	$0{,}01\,R$
192	$6{,}282905\,R$	$6{,}283746\,R$	$0{,}01\,R$
384	$6{,}283115\,R$	$6{,}283326\,R$	$0{,}001\,R$
768	$6{,}283168\,R$	$6{,}283220\,R$	$0{,}001\,R$
1536	$6{,}283181\,R$	$6{,}283194\,R$	$0{,}0001\,R$
3072	$6{,}283184\,R$	$6{,}283187\,R$	$0{,}00001\,R$

Et leida π ligikaudse suuruse, seks tarvis arvutada mingisuguse sisse- või ümberjoonestatud hulknurga ümbermõõt, kusjuures hulknurga külgede hulk peab küllaldaselt suur olema, võtta selle hulknurga ümbermõõt ringjoone pikkusena ja jagada $2R$-ga. Nõnda näit. võttes sissejoonestatud 96-nurga ümbermõõdu kahe kümnendkohaga, saame:

$$\pi = \frac{C}{2R} = \frac{P_{96}}{2R} = \frac{6{,}28R}{2R} = 3{,}14 \text{ (täppis 0,01-ni).}$$

Kui ringjoone pikkusena võtta 3072-nurga ümbermõõt, siis

$$\pi = \frac{C}{2R} = \frac{P_{3072}}{2R} = \frac{6{,}28318R}{2R} = 3{,}14159 \text{ (täppis 0,00001-ni).}$$

---

teadlane Anaxagoras (suri 430. a. e. Kr.). Olles Jumala salgamise eest vangi heidetud, kirjutas ta terve kirjatöö ringi kvadratuurist, missugune töö aga meie ajani ei ole ulatunud. Pärast Anaxagorast on selle ülesande lahendamiseks palju aega ja energiat kulutavaid katseid tehtud niihästi vanal ajal kui ka hiljemini, kuid tagajärgi ei olnud neil katsetel. Viimaks 1882. a. tõestas Lindemann, et see ülesanne ei ole sirkli ja joonlaua abil lahendatav. [Et see ülesanne ei ole lahendatav sirkli ja joonlaua abil, see ei olene nimelt just arvu π irratsionaalsusest. Näit. ruudu külg ja nurkjoon on ühismõõdutud ($d = a\sqrt{2}$), kuid ei ole mingi asi kergem, kui konstrueerida üks neist sirgetest, kui teine on teada.]

Seda viisi, mille abil arvutasime π eelmises paragrahvis, nimetatakse **perimeetrite viisiks**; selle viisi leidis Archimedes, kes ka esimesena leidis π ligikaudse väärtuse:

$$\pi = \frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}.$$

See arv erineb suurusest π vähem kui 0,002 võrra.

Hollandi XVI aastasaja geomeetriateadlane Adrian Mezius leidis

$$\pi = \frac{355}{113},$$

mis on täppis 0,000001-ni ja väga kerge meeles pidada, kui ta kirjutada: 113/355 [1]).

---

1) François Viëta arvutas π väärtuse kümne kümnendkohaga, tarvitades seejuures 393316-nurki:

$$\pi = 3{,}1415926535.$$

Seda π väärtust on kerge meeles pidada prantsusekeelse kaherealise salmi abil:

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages,
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

kus esinevate sõnade tähtede arvud annavad arvu π järgsed numbrid. Kasulik on meeles pidada ka suuruse $\frac{1}{\pi}$ väärtuse mõned numbrid:

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098,$$

sest et viimane suurus esineb arvutamistel sagedasti. Selle arvu võime meeles pidada järgmise lause abil: „3. p ä e v a l 1830. a. p ö ö r a t i ü m b e r 89. a.“. Peale koma kirjutakse esiteks 3, siis 1830 ja lõpuks ümberpöördud 89, s. o. 98 (1789. a. oli suur Prantsuse revolutsioon; 1830. a. oli juulikuu monarhia).

Ludolf Kölni linnast arvutas π 35 kümnendkohaga:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846643383279502 88.$$

See arv kirjutati Ludolfi soovil tema hauasambale ja teda nimetatakse L u d o l f i a r v u k s. Hiljema aja õpetlased arvutasid π väärtuse veel suurema arvu kümnendkohtadega, tarvitades seejuures kõrgemat matemaatikat; nõnda näit. arvutas Shanks (l. Shenks) π väärtuse 530 kümnendkohaga. Praktiliseks otstarbeks on küllalt, kui võtame π väärtuse 5 kümnendkohaga.

306. Ülesanne. Võrdsetele kesknurkadele (tsentrinurkadele) vastavad kahe mittevõrdse ringjoone kaared suhtuvad nõnda kui raadiused.

Olgu l ja l' niisuguste ringjoonte kaared, millede raadiused on R ja R'; asetsegu kaared l ja l' vastu võrdseid n^0-lisi kesknurki. Siis

$$l = \frac{2\pi R \cdot n}{360};$$

$$l' = \frac{2\pi R' \cdot n}{360}, \text{ kust}$$

$$\frac{l}{l'} = \frac{R}{R'}.$$

307. Ülesanne. Leida niisuguse ringjoone raadius (ligikaudu maakera raadius), mille pikkus on 40 000 km.

$$R = \frac{C}{2\pi} = \frac{40\,000}{2\pi} = 20\,000 \cdot \frac{1}{\pi} = 2 \cdot 3183{,}1 = 6366{,}2 \text{ (km)}.$$

308. Ülesanne. Määrata 1''-lise kaare pikkus.

$$l = \frac{2\pi R}{360 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{\pi R}{180 \cdot 60 \cdot 60}.$$

309. Ülesanne. Määrata radiaan, s. o. see kesknurk, mille kaare pikkus võrdub raadiusega.

Kui märkida otsitava nurga kraadide arv n-ga ja temale vastav kaar l-ga, siis saame:

$$l = \frac{2\pi R \cdot n}{360}, \text{ kuid tingimuse järele}$$

$$l = R, \text{ järjelikult}$$

$$R = \frac{2\pi R \cdot n}{360} \text{ või } 1 = \frac{2\pi n}{360}, \text{ kust}$$

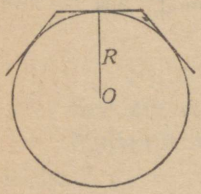
$$n = \frac{360^0}{2\pi} = 180^0 \cdot \frac{1}{\pi} = 180^0 \cdot 0{,}31830988 = 57^0 17' 44'',8.$$

Seda nurka nimetataksegi radiaaniks; temal on suur tähendus trigonomeetrias, sest et ta on nurga-mõõtüksus. See on ainuke nurga-mõõtüksus, mida tarvitatakse kõrgemas matemaatikas.

310. Ringi pindala. Ringi pindalana võetakse see piir, millele ligeneb korrapärase sisse- või ümberjoonestatud hulknurga pindala, kui hulknurga külgede arv lõpmata kahendub.

Selle piiri olemasolu tõestatakse viisil, mis on sarnane nr. 300 avaldatud viisiga.

311. Lause. Raadiusega R joonestatud ringi pindala võrdub πR^2 (264. joon.).



264. joonis.

Konstrueerime raadiusega R joonestatud ringi ümber korrapärase hulknurga. Märkides hulknurga ümbermõõdu P-ga, ringjoone pikkuse C-ga ja silmas pidades, et ümberjoonestatud hulknurga apoteem on R, leiame (nr. 273), et selle hulknurga pindala võrdub

$$\frac{P \cdot R}{2};$$

kui hulknurga külgede arv hakkab lõpmata kahenduma, siis hakkab ümbermõõt P ligenema ringjoone pikkusele C ja järjelikult hakkab hulknurga pindala $\frac{PR}{2}$ ligenema piirile $\frac{CR}{2}$. Et aga see piir võetaksegi ringi pindalana, siis võrdub ringi pindala

$$\frac{C \cdot R}{2} = \frac{2\pi R \cdot R}{2} = \pi R^2.$$

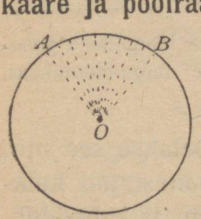
Järeldus. Ringide pindalad suhtuvad nõnda kui raadiuste või läbimõõtude ruudud.

Kui R ja R' on ringide raadiused, K ja K' — nende pindalad, siis

$$K = \pi R^2;\ K' = \pi R'^2, \text{ kust}$$

$$\frac{K}{K'} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{4R^2}{4R'^2} = \frac{(2R)^2}{(2R')^2}.$$

312. Lause. Sektori pindala võrdub tema sirgestatud [1] kaare ja poolraadiuse korrutisega (265. joon.).



265. joon.

Sisaldugu sektori AOB kaares AB n^0. Niisuguse sektori pindala, mille kaar on 1^0, on 360 korda vähem kui kera pindala, s. o. ta võrdub

$$\frac{\pi R^2}{360};$$

niisuguse sektori pindala, mille kaar sisaldab

1) Kaart sirgestama tähendab avaldada see kaar pikkusemõõtudes.

eneses n^0, on n korda suurem, s. o. ta võrdub

$$S = \frac{\pi R^2 . n}{360}.$$

Esitades pindala saadud avalduse kujul: $\frac{\pi Rn}{180} \cdot \frac{R}{2}$ ja pannes tähele (nr. 303), et $\frac{\pi Rn}{180} = l$, kus l on kaare AB pikkus, saame:

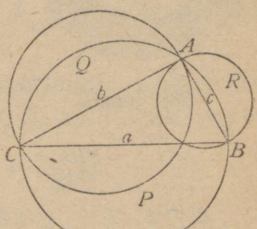
$$S = l . \frac{R}{2}.$$

313. Pythagorase lause üldistamine. Täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusile konstrueeritud ringi pindala P võrdub selle kolmnurga kaatetitele b ja c konstrueeritud ringide pindalade Q ja R summaga (266. joon.).

T.: $\measuredangle A = d$. V.: $P = Q + R$.

Et ringide pindalad suhtuvad nõnda kui läbimõõtude ruudud (nr. 311), siis

$$\frac{Q}{P} = \frac{b^2}{a^2} \text{ ja } \frac{R}{P} = \frac{c^2}{a^2}.$$



266. joon.

Liites need avaldused ositi ja teades, et $b^2 + c^2 = a^2$, saame

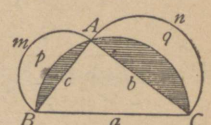
$$\frac{Q+R}{P} = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1, \text{ kust}$$

$$Q + R = P, \text{ mis oligi tarvis tõestada.}$$

314. Järeldus. Kui täisnurkse $\triangle ABC$ külgedele konstrueerida ühele ja samale poole asetatud poolringid, siis võrdub jooniste $BmApB$ ja $AnCqA$ pindalade summa kolmnurga pindalaga.

Kaatetitele konstrueeritud poolringide pindalade summa võrdub hüpotenuusile konstrueeritud poolringi pindalaga:

BmA pindala + AnC pindala = $BpAqC$ pindalaga; lahutame selle võrduse kummastki osast üldised osad BpA ja AqC, mis on joonisel joonekestega märgitud; siis saame:



267. joonis.

$BmApB$ pindala + $AnCqA$ pindala = ABC pindalaga, mis oligi tarvis tõestada.

Jooniseid $BmApB$ ja $AnCqA$ nimetatakse Hippokrates'e[1]) kuukesteks.

---

1) Hippokrates oli greeka geomeetriateadlane Hiose saarelt (elas V aastasajal e. Kr.).

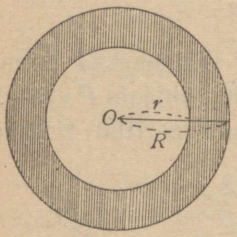
Kuukeseks nimetatakse üldse joonist, mille moodustavad kaks ühele ja samale poole asetatud kaart.

315. Ülesanne. Antud on ringi pindala $K = 20\ m^2$. Leida raadius.

Märkides otsitava raadiuse R-ga, saame $K = \pi R^2$, kust

$$R^2 = \frac{K}{\pi};\quad R = \sqrt{\frac{K}{\pi}} = \sqrt{K \cdot \frac{1}{\pi}} = \sqrt{20 \cdot 0{,}31831} = 2{,}52\ (\text{m}).$$

(täppis $\frac{1}{100}$-ni).



268. joonis.

316. Ülesanne. Kahe ühiskeskese ringi raadiused $= R$ ja r. Määrata ringrõnga pindala, s. o. antud ringide pindalade vahe (268. joon.).

Märgime otsitava pindala Q-ga, saame:

$$Q = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2) = \pi (R + r)(R - r).$$

317. Ülesanne. Sektori pindala $= 0{,}125$ m², aga tema nurk $= 45^0$. Leida raadius.

$$\frac{\pi R^2 \cdot n}{360} = 0{,}125,\ \text{või}\ \frac{\pi R^2 \cdot 45}{360} = 0{,}125,\ \text{kust}$$

$$\pi R^2 = 0{,}125 \cdot 8 = 1,\ \text{millest}$$

$$R = \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0{,}564\ (\text{m}).$$

318. Ülesanne. Sektori pindala võrdub selle ruudu pindalaga, mille külg võrdub sama ringi raadiusega.

$$\frac{\pi R^2 n}{360} = R^2,$$

$$\frac{\pi n}{360} = 1,$$

$$n = \frac{360^0}{\pi} = 114^0\,35'29'',6.$$

XIX peatükk.

Algebra rakendus geomeetrias.

319. Geomeetriliste konstruktsiooni-ülesannete lahendusviiside seas võtab tähtsa koha algebraline lahendusviis, mis

selles seisab, et märkides antud lõigud tähtedega a, b, c ja otsitava — tähega x, seatakse kokku ülesande tingimuse ja lausete varal võrrand, mis seob otsitava lõigu antud lõikudega. Lahendades võrrandi, saadakse valem, mida esiteks harutatakse, s. o. määratakse, missugustel tingimustel annab see valem võimalikud lahendused ja mitu võimalikku lahendust, kuna pärast seda konstrueeritakse see valem, s. o. leitakse konstruktsiooni[1]) abil lõik, mis rahuldab selle valemi.

Nõnda seisab algebraline konstruktsiooni-ülesannete lahendusviis neljast järgmisest osast koos:

1. võrrandi kokkuseadmine; 2. selle võrrandi lahendamine; 3. saadud valemi harutamine ja 4. selle valemi konstrueerimine.

320. Lihtsamate valemite konstrueerimine. Kõigis järgnevais valemeis mõeldakse tähtede a, b, c, ... all mitte arvusid, vaid lõikusid.

1. Valemite konstrueerimine:

$x = a + b$; $x = a - b$; $x = 2a$, $3a$ ...; $x = \frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, $\frac{2}{3}a$ ..., kus a ja b on antud lõigud, ei sünnita raskust.

2. Lõik x, mille määrab valem

$$x = \frac{ab}{c},$$

on lõikude a, b ja c neljas võrdeline, sest et sellest valemist järgneb

$$cx = ab, \text{ või } \frac{c}{a} = \frac{b}{x}.$$

Järjelikult võib x konstrueerida nr. 190 näidatud viisil.

2a. Konstrueerida valem:

$$x = \frac{abc}{de}.$$

Oletades, et $\frac{bc}{e} = k$, saame $x = \frac{ak}{d}$. Lõiku k võib konstrueerida kui b, c ja e neljandat võrdelist (v. 2). Konstruee-

1) Kõik konstruktsioonid moodustatakse ainult kahe instrumendi: sirkli ja joonlaua abil.

rides k, võib leida x kui lõikude a, k ja d neljas võrdeline. Samuti võib konstrueerida valemid: $x = \frac{abcm}{den}$; $x = \frac{abcml}{deng}$ jne.

3. Konstrueerida valem:

$$x = \sqrt{ab};$$

et selle valemi võib esitada järgmiselt:

$$x^2 = ab, \text{ või } \frac{a}{x} = \frac{x}{b},$$

siis võib lõigu x konstrueerida kui lõikude a ja b keskmise võrdelise (nr. 225).

3a. Konstrueerida valem:

$$x = a\sqrt{\tfrac{4}{5}}.$$

Viies a juuremärgi alla, saame:

$$x = \sqrt{\tfrac{4}{5}a^2}, \text{ või } x^2 = \tfrac{4a}{5}.a, \text{ või } \frac{a}{x} = \frac{x}{\frac{4}{5}a}.$$

Sellest on näha, et lõik x on lõikude a ja $\frac{4}{5}a$ keskmine võrdeline.

4. Konstrueerida valem:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Sellest valemist on näha, et lõik x on selle täisnurkse kolmnurga hüpotenuus, mille kaatetiteks on lõigud a ja b. Samuti kujutab valem

$$x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

täisnurkse kolmnurga kaatetit, kusjuures hüpotenuusiks on a, aga teiseks kaatetiks b.

4-a. Konstrueerida valem:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Oletades, et $a^2 + b^2 = k^2$ ja $c^2 + d^2 = m^2$, saame

$$x = \sqrt{k^2 + m^2}; \quad k = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad m = \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Konstrueerides lõigud k ja m, leiame kergesti x-i.

321. Ülesanne. Jagada antud lõik $AB = a$ äärmises ja keskmises suhtes, s. o. jagada see lõik kahte ossa nii, et suurem osa oleks terve lõigu ja tema vähema osa keskmine võrdeline [1]).

Ülesande võrrand. Oletame, et ülesanne on lahendatud ja punkt X (269. joon.) jagab lõigu AB välimises ja keskmises suhtes, kusjuures AX on lõigu suurem osa.

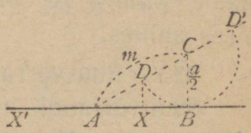
Märkides AX tähega x, saame:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}; \text{ kust}$$
$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Lahendades selle ruutvõrrandi, saame:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} \ (1); \quad x_2 = -\frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} \ (2).$$

Harutus. Et ülesande tingimuse põhjal lõik x peab olema positiivne ja vähem kui lõik a, siis teine lahendus (juur) kui negatiivne ei kõlba[2]); esimene lahendus (juur) aga rahuldab ülesande tingimusi, sest et ta on positiivne ja vähem kui a; ja tõesti:



269. joonis.

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 < \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 + 2a \cdot \frac{a}{2}, \text{ või}$$
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 < \left(\frac{a}{2} + a\right)^2, \text{ kust}$$
$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} < \frac{a}{2} + a, \text{ millest}$$

---

1) Selle ülesande lühike lahendus on avaldatud nr. 226.

2) Mõnikord defineeritakse lõigu jagamist äärmises ja keskmises suhtes laiemas mõttes: **jagada lõik AB äärmises ja keskmises suhtes tähendab, leida sirgel AB või ta pikendusel niisugune punkt, mille kaugus punktist A oleks sama punkti ja punkti B kauguse ning lõigu AB keskmine võrdeline.** Siis annab ka negatiivne lahendus ülesande küsimusele vastuse (punkt X') ja seda äärmises ja keskmises suhtes jagamist ennast nimetatakse kas s i s e m i s e k s või v ä l i m i s e k s, seejärele, kus asetseb otsitav punkt.

$$-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}<a \text{ või } x_1<a.$$

Nõnda on siis ülesanne alati võimalik ja tal on üks lahendus.

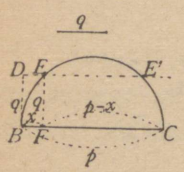
Konstruktsioon. Oletades, et valemis (1) $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}=m$, saame

$$x_1=-\frac{a}{2}+m=m-\frac{a}{2}.$$

Konstrueerime esiteks lõigu m, mis moodustab enesest täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusi AC, kuna kaatetid on: $AB=a$ ja $CB=\frac{a}{2}$. Kui punktist C raadiusega CB joonestame ringjoone, mis lõikab AC ja ta pikendust punktides D ja D', siis $AD=AC-DC=m-\frac{a}{2}$ moodustab lõigu x_1, mis on määratud valemis (1). Paigutame AB-le lõigu $AX=AD$, saame punkti X, mis jagab lõigu AB äärmises ja keskmises suhtes.

322. Ruutvõrrandi juurte konstrueerimine.

Ruutvõrrandi juuri võib konstrueerida võrrandit ennast lahendamata. Vaatleme nelja järgmist ruutvõrrandi tüüpi.



270. joon.

$$x^2-px+q^2=0 \quad (1),$$
$$x^2-px-q^2=0 \quad (2),$$
$$x^2+px+q^2=0 \quad (3),$$
$$x^2+px-q^2=0 \quad (4),$$

kus p ja q on antud lõigud. Võrranditele (3) ja (4) võib anda võrrandite (1) ja (2) kuju, kui oletada, et $x=-y$. Järjelikult on küllalt, kui konstrueerime ainult võrrandite (1) ja (2) juured.

1. Võrrandile (1) anname kuju:

$$x(p-x)=q^2, \text{ kust saame võrde:}$$
$$\frac{x}{q}=\frac{q}{p-x} \quad (5);$$

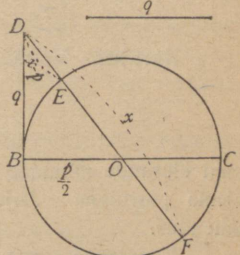
x ja $p-x$ võib võtta võrrandi (1) juurtena, sest et summa $x+(p-x)=p$ ja korrutis $x(p-x)=q^2$; võrdest (5) järgneb, et lõik q on lõikude x ja $p-x$ keskmine võrdeline.

Lõikude x ja $(p-x)$ konstrueerimiseks joonestame lõigule $BC=p$ (270. joon.) kui läbimõõdule pool-ringjoone; punktist B tõmbame sirgele BC ristjoone $BD=q$; läbi punkti D tõmbame $DE' \parallel BC$; punktist E laseme BC-le ristjoone. Siis on lõik $EF=q$ lõikude BF ja FC (nr. 216) keskmine võrdeline; järjelikult võrduvad BF ja FC lõikudega x ja $p-x$, s. o. nad on võrrandi (1) juured. Ülesandel on üks lahendus ja selle lahenduse võimaldamiseks on tarvis, et DE' lõikaks pool-ringjoont, s. o. et $q \leqslant \frac{p}{2}$. Algebrast on teada, et ainult sel tingimusel on võrrandil (1) r e a a l s e d j u u r e d.

2. Võrrandile (2) võib anda kuju

$$x^2 - px = q^2 \quad \text{või} \quad x(x-p) = q^2, \quad \text{kust}$$

$$\frac{x}{q} = \frac{q}{x-p}.$$



271. joonis.

Lõikude x ja $x-p$ konstrueerimiseks joonestame keskpunktist O (271. joon.) raadiusega $OB=\frac{p}{2}$ ringjoone; tõmbame puutuja $BD=q$ ja lõikaja DF, mis kulgeb keskpunkti. Et puutuja on terve lõikaja ja ta välisosa keskmine võrdeline, siis DF ja DE esitavad lõikusid x ja $x-p$, kusjuures x moodustab võrrandi (2) ühe juure, kuna aga lõik $x-p$ erineb võrrandi (2) teisest juurest ainult märgi poolest.

Ülesanne oma ühe lahendusega on alati võimalik.

323. Ülesanne. **Antud alusele b konstrueerida püstkülik, mis oleks võrdne antud kolmnurgaga ABC, mille alus on a ja kõrgus on h.**

Ülesande võrrand. Märkides otsitava püstküliku kõrguse x-ga, saame:

$$bx = \frac{ah}{2}, \quad \text{kust} \quad x = \frac{ah}{2b} \quad (1).$$

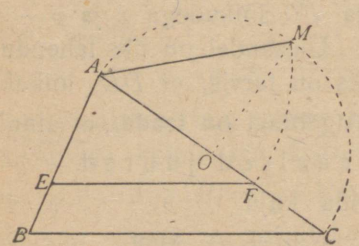
Harutus. Ilmne on, et ülesanne on alati võimalik ja tal on üks lahendus.

Konstruktsioon. Kujutades võrduse (1) järgmiselt:

$$\frac{2b}{h} = \frac{a}{x},$$

märkame, et otsitav lõik x on lõikude $2b$, h ja a neljas võrdeline, nõnda et ta konstrueerimine ei tekita raskust (nr. 190). Konstrueerides lõigu x, on kerge konstrueerida otsitav püstkülik.

324. Ülesanne. Antud kolmnurga ABC (272. joon.) pindala jagada pooleks sirgega, mis on rööbiti küljega BC.



272. joonis.

Ülesande võrrand. Olgu ülesanne lahendatud, s. o. jagagu EF kolmnurga ABC pindala pooleks. Märgime antud külje AC tähega a ja otsitava lõigu AF tähega x, saame (nr. 285): $\frac{AEF \text{ pa.}}{ABC \text{ pa.}} = \frac{x^2}{a^2}$, kuid ülesande tingimuse järele: $\frac{AEF \text{ pa.}}{ABC \text{ pa.}} = \frac{1}{2}$, järjelikult $\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{2}$ või $x^2 = \frac{a^2}{2}$ (1).

Harutus. Võrrandil (1) on valemi järele kaks juurt:

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2}{2}},$$

kuid ülesande rahuldab ainult positiivne juur, sest et otsitav lõik AF peab olema positiivne. Järjelikult on ülesanne alati võimalik ja tal on üks lahendus.

Konstrueerimine. Kirjutades võrrandi (1) pideva võrde kujul:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{\frac{1}{2}a},$$

märkame, et lõiku x võib konstrueerida kui lõikude a ja $\frac{a}{2}$ keskmist võrdelist. Seepärast joonestame lõigule $AC = a$ kui läbimõõdule poolringi; tõmbame raadiuse $OM \perp AC$. Kõõl AM, olles $AC = a$ ja $AO = \frac{a}{2}$ keskmine võrdeline, ongi otsitav lõik x. Võttes $AF = AM$ ja tõmmates $EF \parallel BC$, jagame $\triangle ABC$ pooleks.

325. Homogeensuse põhimõte. Vaadeldes geomeetrilisi valemeid, märkame, et nad on harilikult homogeensed[1]), kusjuures jooni

1) Nagu algebrast teada, nimetatakse homogeenseks niisugust hulkliiget, mille kõik liikmed on samamõõtelised; (täisarvulise) üksliikme mõõteks nimetatakse temas sisalduvate tähtede astmenäitajate summat.

avaldavad valemid on esimese mõõte homogeensed valemid, nagu näit.:

$$l = \frac{a+b}{2} \quad (1); \quad a = \sqrt{b^2 + c^2} \quad (2); \quad C = 2\pi R \text{ jne.},$$

mis avaldavad vastavalt trapetsi keskjoont, täisnurkse Δ hüpotenuusi ja ringjoone pikkust. Pindala avaldavad valemid on teise mõõte homogeensed valemid, nagu näit.:

$$\frac{ah}{2}; \quad \frac{(a+b)h}{2}; \quad \pi R^2,$$

mis avaldavad vastavalt kolmnurga, trapetsi ja ringi pindala. Samuti näeme pärast (stereomeetrias), et ruumala avaldavad valemid on kolmanda mõõte homogeensed valemid. Lõppeks on valemid, mis avaldavad nimeta arvusid joonte pikkuse kaudu, nullise mõõte homogeensed valemid, näit.:

$$\pi = \frac{C}{2R}.$$

See homogeensus oleneb sellest, et geomeetrilised võrrandid, milledest tuletatakse need valemid, saadakse kahe samanimelise geomeetrilise suuruse võrdlusest, näit. kahe joone, kahe pindala, kahe ruumala võrdlusest või jälle kahe nimeta arvu võrdlusest.

Kui mingisuguses homogeenses valemis võtta mingi lõik pikkuse-mõõtüksusena, näit. kui valemis

$$C = 2\pi R$$

oletame, et $R = 1$, siis saame juba mittehomogeense valemi

$$C = 2\pi.$$

Sel juhusel öeldakse, et valemi homogeensus rikundus. On arusaadav, et rikundunud homogeensust on kerge endisesse seisukorda viia, kirjutades mõeldava pikkuse-mõõtüksuse.

Harjutused.

Arvutusülesanded.

214. Ringi pindala on Q. Leida ringjoone pikkus.

215. Kahest kontsentrilisest ringist moodustatud ringrõnga pindala on Q. Välimise ringi raadius on R. Leida sisemise ringi raadius.

216. Ringrõnga pindala on M; ringide raadiuste vahe on d. Leida vähema ringi pindala.

217. Sektori pindala $= 628 m^2$, raadius $= 100 m$. Leida sektori nurk.

218. Niisuguse sektori pindala, mille nurk $= 45^0$, on $0{,}125\ m^2$. Leida ringi raadius.

219. Raadiusega R joonestatud ringi pindala on jagatud ühiskeskeste ringjoontega 3 võrdseks osaks. Leida nende ringjoonte raadiused.

220. Leida täisnurkse kolmnurga ümber joonestatud ringi pindala, kui kolmnurga pindala on m^2 ja ta kaatetite summa $= s$.

221. 6-meetrilise raadiusega joonestatud ringi pindala on jagatud kahe ühiskeskese ringjoonega 3 osaks, mis keskpunktist hakates suhtuvad isekeskis nõnda kui 1 : 2 : 3. Leida nende ringjoonte raadiused.

222. Leida niisuguse segmendi pindala, mis vastab sissejoonestatud ruudu külje pikkusele kõõlule, kui ringi raadius on R.

Konstruktsiooni-ülesanded.

223. Konstrueerida niisugune täisnurkne kolmnurk, mille üks kaatet on hüpotenuusist lõigu a võrra lühem, kuna ta teisest kaatetist on lõigu b võrra lühem (algebra rakendus geomeetrias).

224. Antud kolmnurka, mille alus on a ja kõrgus h, on joonestatud püstkülik, mille alus suhtub kõrgusesse nõnda kui $m : n$ (algebra rakendus geomeetrias).

225. Kahele antud ringile, millede raadiused on R ja r, aga keskpunktide kaugus on d, tõmmata üldine puutuja. (Juhatus: algebrat tarvitades, määrata selle puutuja ja kesksirge lõikepunkti kaugus ühest keskpunktist.)

226. Tõmmata sirge, mis jagaks antud kolmnurga ABC ümbermõõdu pooleks ja mis oleks rööbiti selle kolmnurga alusega (algebra rakendus geomeetrias).

XII peatükk.
Hulknurkade sarnasus . . . . . 118—126
XIII peatükk.
Kolmnurga ja nelinurga elementide arvulised seosed (vahekorrad); võrdelised lõigud ringis . . . . . 126—136
XIII-a peatükk.
Trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid. Täisnurksete ja võrdhaarsete kolmnurkade lahendamine . . . . . 136—146
XIV peatükk.
Homoteetia . . . . . 146—151
Sarnasuse metood . . . . . 151—154
Pöördmetood . . . . . 154—155
Harjutused . . . . . 155—158
XV peatükk.
Korrapärased hulknurgad . . . . . 158—169
Harjutused 169
XVI peatükk.
Pindalade mõõtmine . . . . . 170—180
Pindalade võrdlemine . . . . . 181—185
Harjutused . . . . . 186—187
XVII peatükk.
Piiri mõiste . . . . . 187—190
XVIII peatükk.
Ringjoone pikkus ja ringi pinna arvutamine . . . . . 190—200
XIX peatükk.
Algebra rakendus geomeetrias . . . . . 200—207
Harjutused . . . . . 207—208

K/Ü „LOODUS'E" kirjastusel ilmunud:

E. Laid „Eesti muinaslinnad" 150 m.
J. Prümmel „Eesti kuurordid" 240 m.
Haapsalu, Eesti kuurordid I 75 m.
Kuresaare, Eesti kuurordid II 80 m.
Pärnu, Eesti kuurordid III 65 m.
Põhja-Eesti rannik, Eesti kuurordid IV 70 m.
J. Rumma „Maateaduse õppevlis" 95 m.
J. Rumma „Üldine maateadus" 195 m.
A. P. Netshajev „Mere tegevus". Tõlkinud ja täiendanud J. Rumma. 60 m.
Prof. J. Pliper „Üldise zooloogia põhijooned" 140 m.
L. Mahlstein ja **H. Männik „Elus loodus"** algaste 145 m.
Audova-Univer „Bioloogia õpiraamat" keskk. van. kl. 100 m.
Schmeil „Inimene" Teinmani tõlge 60 m. 96 lhk.
К. Р. Вески и **Ю. Грюнталь „Арифметика"** II год обучения, перев. И. Верендель, цена 70 м.
K. R. Veski ja **J. Verendel „Stereomeetriliste ülesannete kogu"** 100 m.
H. Männik „Praktilised tööd botaanikas", (kaustik) 15 m.
H. Reichenbach „Zooloogia praktikum keskkoolidele" 130 m.

H. Reichenbach „Juhe zooloogilisteks vaatlusteks ja kogude korraldamiseks I“ (akvaarium) 55 m.
H. Riikoja-B. E. Raikov „Anatoomia ja füsioloogia algpraktikum“ 175 m.
Prof. Polovtsov „Taimede ehitus ja elu“ (teine konts.) 125 m.
G. Vilberg „Harjumaa“ (maateadusline lugemik) 215 m.
Prof. W. Oels „Katsed taimede elust“. Eesti keelde toimetanud G. Vilberg 160 m.
Prof. Wagner „Zooloogia“ (teine kontsentr) 145 m. I r.
„ „ „ „ 145 m. II r.
Rumma-Raikov „Loodusloo praktiliste tööde õppevils“. 140 m.
J. Kents „Eestimaa geograafia õpperaamat“ 155 m.
O. Schmeil „Väike looduslugu“. Tõlkinud J. Piiper 150 m.
„Tallinna juht“. Ülevaade Tallinna tähtsamatest kohtadest ja valitsuseasutustest 150 m.
Shaposhnikov ja **Valtsev „Algebraliste ülesannete kogu“** I jagu. Ümber töötanud ja täiend. K. Veski ja J. Grünthal. 140 m.
Prof. J. Sarv „Logaritmide tabelid“ 28 m.
K. Veski ja **J. Grünthali „Aritmeetika“ I õppeaasta** 65 m., **II õppeaasta** 65 m., **III õppeaasta** 90 m., **IV õppeaasta** 100 m., **V õppeaasta** 75 m., **VI õppeaasta** 135 m.
Prof. G. Rägo „Tasapinnalise analüütilise geomeetria põhijooned“ (keskkoolidele) 185 m.
Prof. G. Rägo „Matemaatilise analüüsi elemendid“ 200 m.
K. Loskit ja **A. Paris „Anorgaanilise kvalitatiivse analüüsi praktikum“** 90 m.
Edm. Spohr ja **G. Vilberg „Oistaimede määramise abivihik“** 25 m.
„Loodus“, I aastakäik: I, II, III, IV, V ja **VI** à 60 m.
Rashevski „Stereomeetria“. Tõlk. K. Veski ja J. Grünthal. 85 m.
G. Vilberg „Eesti taimestik koolidele“, Schmeil-Fitscheni järele Eesti taimestiku kohaselt ümber töötatud. 220 m.
Kogerman-Männik-Mahlstein „Looduseõpetus“ II tr. 130 m.
S. Sütt ja **D. Koppel „Maateaduse õpperaamat algkoolidele“,** IV õppeaasta 100 m., paremal paberil 110 m.
D. Koppel ja **S. Sütt „Maateaduse ülesannete kaustik“** I vihk 25 m., II vihk 25 m.
Arvo Yippö „Lastetoast koolipingile“, tõlkinud J. Teinman. 100 m.
J. Maramaa „Geomeetria“ 100 mk.
Raamatute tutvustaja nr. 1, 2, 3 ja 4.
K. Hintzer „Vabaharjutused“ 60 mk.
K. Hintzer „Kepiharjutused“ 55 m.
Prof. Lipschütz „Miks me sureme“, tõlkinud A. Klein, 90 m.
Dots. H. Bekker „Geoloogia õpperaamat“ 200 mk.
J. Jostoff „Itaalia kahekordse raamatupidamise õpetus“ 230 m.
Dr. Fritz Kahn „Linnutee“, tõlkinud M. Reika. 125 m.
A. Tõllassepp „Meie õhkkond“ 95 m.
G. Vilberg „Meie kevadetaimed I — mk.

Ladu Vana t. nr. 1, telef. 435. Ärijuhi telef. 243.

Hind 175 marka.