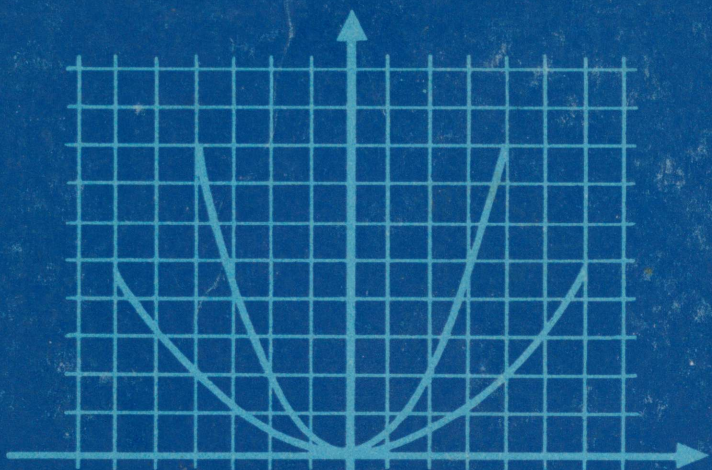
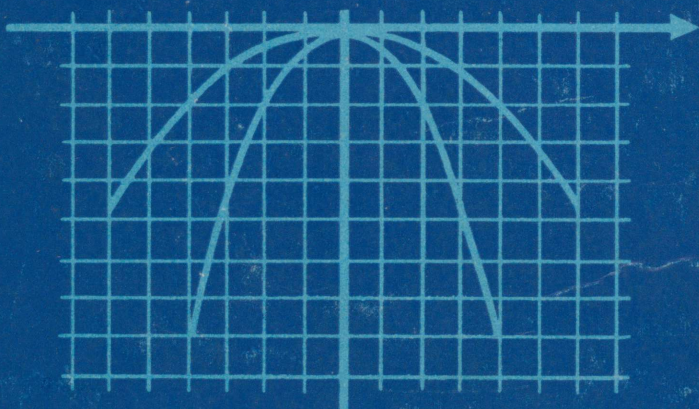


K. ARIVA E. ETVERK
A. TELGMAA A. UNDUK A. VIHMAN



Matemaatika



VIII KLASSILE

A-30770

K. ARIVA, E. ETVERK, A. TELGMAA
A. UNDUSK, A. VIHMAN

MATEMAATIKA

VIII KLASSILE

KATSEÕPIK

TOIMETANUD E. ETVERK

VRHIAKOGU

KIRJASTUS «VALGUS» TALLINN 1970

Kunstiliselt kujundanud *R. Tungla*

Kinnitatud katseõpikuna Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt

2

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

77137

ARHIIVKOGU

1. KORDAMISEKS JA TÄIENDAMISEKS

1.1. HULGAD

1. On antud hulk $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$. Missugused järgmistest lausetest on õiged?

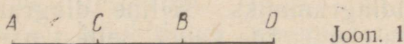
- 1) $0 \in A$ 2) $3 \in A$ 3) $5 \notin A$ 4) $8 \notin A$
5) $\{0; 2\} \subset A$ 6) $\{4\} \subset A$ 7) $\{5; 6\} \subset A$ 8) $\emptyset \notin A$

2. On antud hulgad $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ ja $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Leia nende hulkade ühend ja ühisosa.

3. Leia paaritute arvude hulga ja võrratuse $x \leq 7$ naturaalarvulistele lahenditele hulga ühisosa.

4. Leia joonise 1 järgi

$$AB \cap CD, AB \cup CD, AB \cap CB, AB \cup BD, AC \cap BD.$$



5. On antud kaks arvupaaride hulka M ja N . Leia $M \cap N$.

$$M = \{(0; 0), (1; 2), (0; 1), (2; 1), (3; 4)\}$$

$$N = \{(5; 6), (0; 0), (4; 5), (3; 2), (0; 1)\}$$

6. Otsusta, missugused järgmistest lausetest on õiged, missugused väärad, kui N tähistab naturaalarvude hulka, Z täisarvude hulka ja Q ratsionaalarvude hulka.

- 1) $4 \in N$ 2) $5 \in Z$ 3) $-3 \in N$ 4) $-3 \in Q$
5) $2 \notin Q$ 6) $-7 \notin Z$ 7) $0 \notin Z$ 8) $0,5 \notin Q$
9) $N \subset Z$ 10) $Z \not\subset Q$ 11) $N \cap Z = Z$ 12) $N \cup Z = Q$

7. On antud hulgad $A = \{1; 2; 3; 4\}$ ja $B = \{2; 4; 6; 8\}$. Kas järgmised laused on õiged?

- 1) $3 \in (A \cup B)$ 2) $4 \in (A \cap B)$ 3) $(A \cap B) \subset B$
 4) $A \subset (A \cup B)$ 5) $\{1; 4; 8\} \subset (A \cup B)$ 6) $(A \cap B)_A$

1.2. KAHE HULGA ELEMENTIDE VAHELINE VASTAVUS

Vaatleme harilike murdude hulka

$$M = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{7}, \frac{5}{8} \right\}.$$

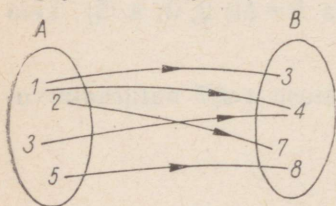
Kujutame diagrammina murdude lugejate hulga

$$A = \{1; 2; 3; 5\}$$

ja nimetajate hulga

$$B = \{3; 4; 7; 8\}$$

ning näitame noolega, missugune arv on nimetajaks ühe või teise lugeja puhul (joon. 2).



Joon. 2

Saadud joonist nimetame **nooldiagrammiks**. Selline diagramm näitab vastavust kahe hulga elementide vahel. Sellest näeme näiteks, et hulga A elemendile 2 vastab hulga B element 7 ja hulga A elemendile 1 vastavad hulga B kaks elementi, nimelt 3 ja 4.

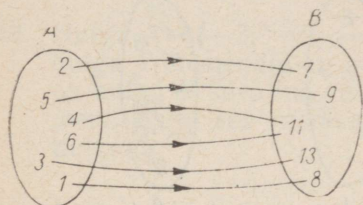
Vastavuse korraldamine kahe hulga elementide vahel on igapäevases elus sagedane nähtus. Kui klassijuhataja määrab igale õpilasele koha klassis, siis ta korraldab vastavuse klassi õpilaste ja klassiruumis leiduvate õpilaskohtade vahel. Kui kino- või teatrikassa müüb külastajale nummerdatud pileti, siis sellega korraldatakse vastavus külastajate ja kino- või teatrisaalis leiduvate kohtade vahel.

Vastavus kahe hulga elementide vahel võib olla mitmesugune. Kui ühe hulga igale elemendile vastab teise hulga üks ja ainult üks element, siis vastavust nimetatakse **üheseks**. Nooldiagrammis lähtub ühese vastavuse korral esimese hulga iga elemendi juurest üks ja ainult üks nool (joon. 3). Kui klassi õpilaste nimestiku iga

nime järel märkida näiteks selle õpilase mingi kontrolltöö hinne, siis saame ühese vastavuse klassi õpilaste hulga ja hinnete hulga $\{5, 4, 3, 2, 1\}$ elementide vahel.

Joonisel 2 kujutatud vastavus pole ühene, sest hulga A elemendile 1 vastab seal kaks hulga B elementi.

Kui ühe hulga igale elemendile vastab ainult üks teise hulga element ja teise hulga iga element on vastavaks ainult ühele esimese hulga elemendile, siis seda vastavust nimetatakse **üksüheseks**.



Joon. 3



Joon. 4

Nooldiagrammis läheb üksühese vastavuse korral esimese hulga iga elemendi juurest üks ja ainult üks nool teise hulga iga elemendi juurde (joon. 4). Kui hulgad on lõplikud, siis üksühese vastavuse korral on neis elemente ühepalju.

Üksüheses vastavuses on näiteks klassi õpilaste hulk ja klassi õpilaste nimestikust olevate nimede hulk, iga hulknurga tippude hulk ja tema nurkade hulk, aasta päevade hulk ja kalendri kuupäevade (näiteks 12.09.) hulk jne.

Vastavust kahe hulga elementide vahel saab esitada peale nooldiagrammi veel mitmel viisil. Väga sageli kasutatakse selleks tabelit, mille ühes reas (veerus) on ühe hulga elemendid ja nende all (kõrval) teises reas (veerus) on neile vastavad teise hulga elemendid. Nii kujutab järgmine tabel joonisel 2 esitatud vastavust:

A	1	1	3	2	5
B	3	4	4	7	8

Vastavust kahe hulga elementide vahel saab esitada veel üheainsa hulga abil, mille moodustavad **järjestatud paarid**, s. o. niisugused elementide paarid, mille esimeseks elemendiks on esimese hulga element ja teiseks elemendiks on esimesele elemendile vastav teise hulga element. Kui ülalantud tabeli esitame järjestatud paaride hulgana, siis saame järgmise hulga:

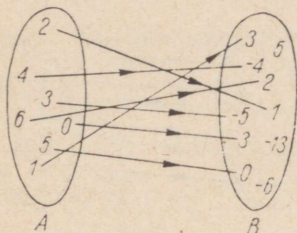
$$C = \{(1; 3), (1; 4), (3; 4), (2; 7), (5; 8)\}.$$

Niisugune järjestatud paaride hulk on samaväärne tabeliga kui ka nooldiagrammiga, sest sellest saab kergesti nii ühe kui ka teise.

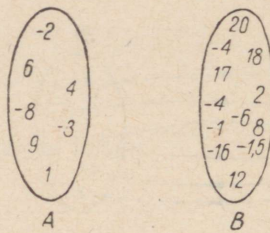
8. Tee kindlaks, kas vastavus hulkade A ja B elementide vahel joonisel 5 on üksühene.
9. Esita järjestatud paaride hulk

$$H = \{(+, s), (-, v), (\cdot, k), (:, j)\}$$

nooldiagrammina ja tabelina. Kas vaadeldav vastavus on ühene? üksühene?



Joon. 5



Joon. 6

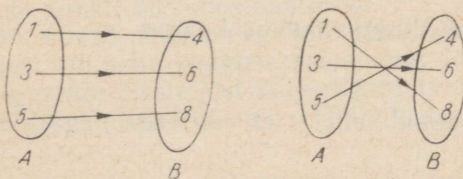
10. Esita järjestatud paaride hulgana ja nooldiagrammina järgmise tabelina antud vastavus:

A	0	1	2	3	4	5	6
B	2	2	4	4	4	6	6

Kas see vastavus on ühene? üksühene?

11. 1) Millal vastavus klassi õpilaste ja klassiruumis leiduvate kohtade vahel on üksühene?
 2) Õpilased ostsid kooli einelauast õunu 4 kop. tükk. Kas vastavus ostetud õunte arvu ja nende eest makstud rahasumma vahel on üksühene või mitte?
12. Hulga K elementideks on riigid: Soome, Itaalia, Jaapan, Rootsi, Kreeka, Norra, India, Taani, Kanada ja Kuuba. Hulga L elementideks on pealinnad: Oslo, Helsingi, Havanna, Rooma, Dehli, Madriid, Ottawa, Stokholm, Pariis ja Kopenhaagen. Korralda vastavus hulkade K ja L elementide vahel, lugedes igale riigile vastavaks tema pealinna. Kas see vastavus on ühene? üksühene?
13. Hulkade A ja B elementideks on arvud (joon. 6). Lugedes hulga A igale elemendile vastavaks hulga B selle elemendi, mis on saadud hulga A elemendi korrutamisel 2-ga, esita vastavus nooldiagrammina. Kas see vastavus hulkade A ja B elementide vahel on üksühene?

14. On antud hulk $A = \{3; 1; 6; 10; 7; 4; 11\}$. Hulga A elementidele vastavateks hulga B elementideks on nelja võrra suuremad arvud. Esita vastavus hulkade A ja B elementide vahel nool-diagrammina, tabelina ja järjestatud paaride hulganähtisena.
15. Hulga $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ elementidele vastavad hulga Y elemendid on arvatud valemi $y = 5x^2 + 1$ järgi, kus x on hulga X mistahes element ja y sellele vastav hulga Y element. Esita see vastavus tabelina ja järjestatud arvupaaride hulganähtisena.
16. Hulga $X = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ elementidele vastavad hulga Y elemendid on arvatud valemi $y = 4x - 3$ järgi, kus x on hulga X suvaline element ja y sellele vastav hulga Y element. Esita see vastavus tabelina ja järjestatud arvupaaride hulganähtisena.
17. Leia hulga Y elemendid, mis valemi $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ järgi vastavad hulga $X = \{0; 2; 4; 6\}$ elementidele. Tulemused esita tabelina.

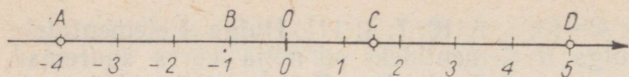


Joon. 7

18. Joonis 7 kujutab kaht võimalikku üksühest vastavust hulkade $\{1; 3; 5\}$ ja $\{4; 6; 8\}$ elementide vahel. Leia veel selliseid vastavusi. Kui palju neid üldse on?

1.3. SIRGJOONE PUNKTI KOORDINAAT

Teame et ratsionaalarve saab kujutada sirgjoone punktidenähtisena, kui sirgjoone üks punkt O võtta pikkuste mõõtmise alguspunktiks, valida pikkusühik ja määrata positiivne suund sellel sirgel (joon. 8). Niisuguste andmetega varustatud sirget nimetatakse teatavasti **arvteljeks**. Ratsionaalarvude ja arvtelje punktide vahel on olemas ühene vastavus; igale ratsionaalarvule vastab arvteljel üks kindel punkt, näiteks arvule -4 vastab joonisel 8 punkt A , arvule $1,5$ punkt C jne. Meie ei tea veel, kas see vastavus on üksühene, s. t. kas arvtelje iga punkt on mingi ratsionaalarvu kujutiseks või leidub arvteljel punkte, millele ei vasta ühtki ratsionaalarvu. Küll võime aga öelda, et mõõtmise täpsuse



Joon. 8

piirides saame arvtelje iga punkti puhul leida ratsionaalarvu, mida see punkt kujutab.

Kujutagu arvtelje punkt M arvu x . See arv määrab punkti M asukoha arvteljel, sest ta ütleb, kummal pool alguspunkti O ja mitme ühiku kaugusel sellest punkt M asetseb. Arvu, mis määrab punkti asukoha arvteljel, nimetatakse punkti **koordinaadiks**. Näiteks joonisel 8. punkti A koordinaadiks on arv -4 ja punkti D koordinaadiks arv 5 . Pikkuste mõõtmise alguspunkti nimetame nüüd **koordinaatide alguspunktiks**: tema koordinaat on arv 0 .

Lauset «Punkti M koordinaat on x » kirjutame lühidalt kujul $M(x)$.

Punktide koordinaatide abil on kerge arvutada nende punktide vahelisi kaugusi. Selleks tuleb arvutada nende koordinaatide vahe. Näiteks punktide $A(-4)$ ja $D(5)$ vaheline kaugus (joon. 8) ehk, teisiti, lõigu AD pikkus

$$AD = 5 - (-4) = 9.$$

Üldiselt, punktide $M(x_1)$ ja $N(x_2)$ vaheline kaugus

$$MN = |x_2 - x_1|.$$

Vahe absoluutväärtus on võetud selleks, et välistada negatiivsete kaugusarvude saamist.

19. Märki arvteljel punktid $K(0,5)$, $L(-2,5)$, $M(3,2)$ ja $N(4)$.
20. Arvteljel on antud punktid $A(-3)$, $B(2,5)$ ja $C(4,5)$. Arvuta lõikude AB , BC ja AC pikkused ning kontrolli tulemusi joonise abil.
21. Mida võib öelda punktide $P(115)$ ja $Q(-78)$ asukoha kohta arvteljel? Kui pikk on lõik PQ ?

1.4. TASAPINNA PUNKTI KOORDINAADID

Olgu tarvis toa seinale akna kõrvale paigaldada elektrikontakt (joon. 9). Kui kontakti asukoht pole täpsemalt määratud, siis võib teda paigaldada väga erinevaise kohtadesse, näiteks punkti A , B , C jne. Oletame, et kontakt tahetakse paigaldada $0,5$ m kaugusele aknast. See tähendab et kontakt peab asetsema sirgel s , mis on paralleelne akna äärega ja asetseb sellest $0,5$ m kaugusel. Kuid kontakti asukoht pole sellega veel täiesti määratud, sest ta võib paikneda sirgel s kõrgemal või madalamal. Nõuame veel, et kon-

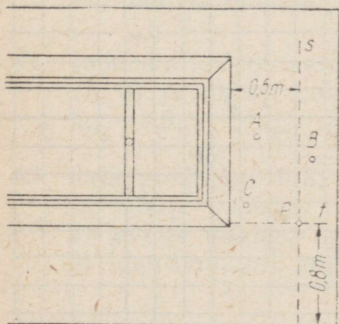
takt oleks pörandast 0,8 m kõrgusel, s. t. asetseks pörandaga paralleelsel sirgel t , mis on pörandast 0,8 m kaugusel. Et oleksid täidetud mõlemad tingimused, peab kontakt asetsema sirgete s ja t lõikepunktis, s. t. punktis $P = s \cap t$.

Seega on kontakti asukoha määramiseks seinal vaja teada kaht arvu, nimelt kontakti kaugust aknast ja kaugust pörandast.

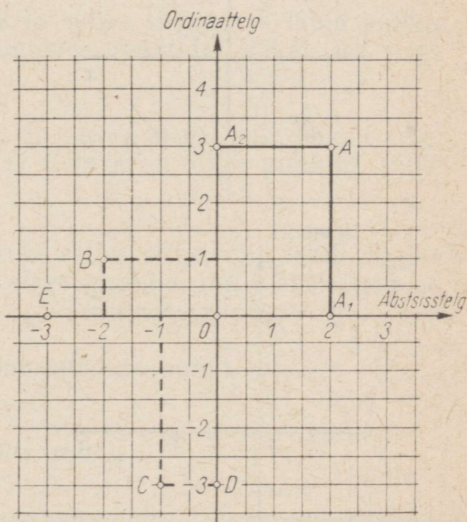
Punkti asukoht tasapinnal määratakse kahe teineteisega ristuva arvtelje suhtes. Telgede lõikepunkt O võetakse koordinaatide **alguspunktiks** mõlemal teljel ja telgi nimetatakse **koordinaattelgedeks** (joon. 10). Üht koordinaattelge nimetatakse **abstsisssteljeks**, teist **ordinaatteljeks**. Abstsissstelg võetakse tavaliselt horisontaalsena. Abstsiss- ja ordinaattelg koos moodustavad **koordinaatteljestiku**.

Olgu koordinaatteljestikus antud punkt A . Selle punkti asukoha määramiseks teljestiku suhtes tõmbame punktist A telgedele ristlõigud AA_1 ja AA_2 ning leiame nende ristlõikude aluspunktide A_1 ja A_2 koordinaadid. Abstsisssteljelt leitav punkti A_1 koordinaat on punkti A **esimene** koordinaat ehk punkti A **abstsiss**. Ordinaatteljelt leitav punkti A_2 koordinaat on punkti A **teine** koordinaat ehk punkti A **ordinaat**. Abstsissi ja ordinaati koos nimetatakse punkti A koordinaatideks.

Jooniselt 10 näeme, et punkti abstsiss on punkti kaugus ordinaatteljest või selle kauguse vastand arv ja punkti ordinaat on punkti kaugus abstsisssteljest või selle vastand arv. Nii on punkti A abstsiss 2 ja ordinaat 3, mida lühidalt märgitakse kujul $A(2; 3)$. Sul-



Joon. 9



Joon. 10

gudes on järjestatud arvupaar, s. t. esimene arv tähendab alati abstsissi, teine ordinaati.

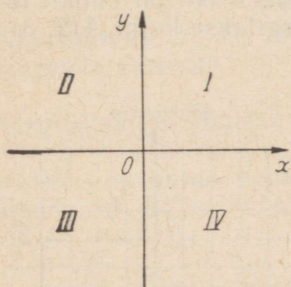
Samal joonisel 10 leiduva punkti B koordinaadid on -2 ja 1 , lähemalt $B(-2; 1)$. Sellel joonisel on märgitud veel punktid

$C(-1; -3)$, $D(0; -3)$, $E(-3; 0)$ ja $O(0; 0)$.

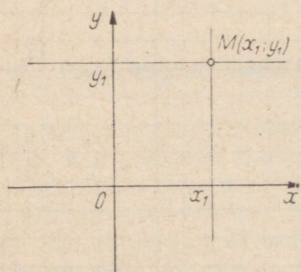
Punkti abstsissi tähistatakse üldkujul tähega x ja ordinaati tähega y . Lauset «Punkti P abstsiss on x ja ordinaat y » kirjutame kujul $P(x; y)$. Et sulgudes on järjestatud arvupaar, siis punktid $(x; y)$ ja $(y; x)$ on kaks erinevat punkti, kui $x \neq y$.

Vastavalt abstsissi ja ordinaadi tähistusele nimetatakse abstsissitelge ka x -teljeks ja ordinaattelge y -teljeks. Koordinaatteljed jaotavad tasapinna neljaks veerandiks, mis nummerdatakse joonisel 11 näidatud järjekorras. Punkti leidmiseks tema koordinaatide x_1 ja y_1 järgi joonestame abstsissitelje punktist x_1 ordinaatteljega paralleelse sirge ja ordinaattelje punktist y_1 abstsissiteljega paralleelse sirge (joon. 12). Nende kahe sirge lõikepunkt M ongi otsitav punkt, sest $M(x_1; y_1)$. Selliselt määratud punkte on ainult üks, sest kaks sirget lõikuvad ainult ühes punktis.

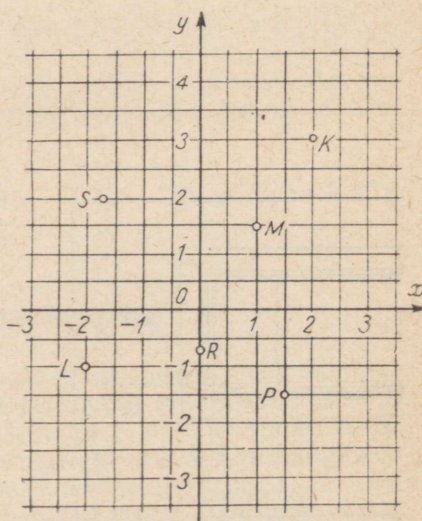
22. Määra jooniselt 13 punktide K , L , M , P , R ja S koordinaadid. Tulemused kirjuta lühidalt.



Joon. 11



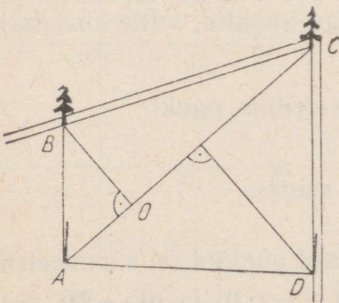
Joon. 12



Joon. 13

23. Joonesta koordinaatteljestik ja kujuta selles järgmised punktid:
- $A(1; 2)$, $B(1; -2)$, $C(-1; 1,5)$, $D(0; 3)$,
 $E(-2; 0)$, $F(-2,5; -3)$, $G(0,5; 2,4)$, $H(2,5; 0)$.
24. Tee kindlaks, missuguse märgiga on punkti abstsiss ja missuguse märgiga ordinaat, kui punkt asetseb tasapinna I veerandis, II veerandis, III veerandis, IV veerandis.
25. Joonist kasutamata otsusta, millises veerandis asetsevad järgmised punktid:
- $A(2,8; 3,1)$, $B(-1,7; 0,8)$, $C(3,5; -2,5)$,
 $D(-2,3; -5,8)$, $E(-54; -0,5)$, $F(-100; 100)$.
26. Leida, kus asetseb punkt $M(x; y)$ järgmistel juhtudel:
- 1) $x > 0, y > 0$ 2) $x < 0, y > 0$ 3) $x = 0, y < 0$
4) $x > 0, y < 0$ 5) $x > 0, y = 0$ 6) $x < 0, y < 0$
27. Missuguste andmetega määratakse kohad teatrisaalis (kinos)?
28. Missuguste andmetega määratakse punkti asukohta maakera pinnal, näiteks laeva asukoht merel?
29. Joonesta koordinaatteljestik ja selles sirge, mis läbib punkte $(-3; -1)$ ja $(2; 4)$. Missugustes punktides lõikab see sirge koordinaattelgi?
30. Joonesta koordinaatteljestik ja selles sirge, mis lõikab telgi punktides $(-1; 0)$ ja $(0; 1)$. Leia selle sirge punktid, mille ordinaadid on $-1; 4; 6$.
31. Joonesta koordinaatteljestik ja selles sirge, mis läbib punkte $(3; 0)$ ja $(0; 1)$. Leia selle sirge punktid, mille abstsissid on $6; -1,5; -3$.
32. Leia punktiga $A(3; 4)$ sümmeetriline punkt
- 1) x -telje suhtes;
2) y -telje suhtes;
3) koordinaatide alguspunkti suhtes.
33. Leia sirge, mille suhtes järgmised punktid on sümmeetrilised:
 $(4; 2)$ ja $(2; 4)$, $(3; 0)$ ja $(0; 3)$, $(-2; 0)$ ja $(0; -2)$.

34. On antud ruudu kolm tippu: $A(2; 5)$, $B(4; 5)$ ja $C(2; 3)$. Joonesta see ruut. Leia tippu D koordinaadid ja arvuta ruudu pindala.
35. Ristküliku $ABCD$ küljed on vastavalt paralleelseid koordinaattelgedega. Ristküliku kaks vastastippu on $A(2; 1)$ ja $C(7; 4)$. Joonesta see ristkülik ja leia teiste tippude koordinaadid ning diagonaalide lõikepunkti koordinaadid.
36. Korrapärase kuusnurga keskpunkt asetseb koordinaatide alguspunktis ja üks tipp punktis $(0; 4)$. Joonesta see kuusnurk ja leia jooniselt tema teiste tippude koordinaadid.
37. Joonesta kolmnurk, mille tippudeks on punktid $(1; 3)$, $(-3; -2)$ ja $(0; 4)$. Leia kolmnurga pindala, mõõtes arvutamiseks vajalike lõikude pikkused jooniselt.
38. Joonesta romb, mille diagonaalide lõikepunktiks on koordinaatide alguspunkt ja mille üks tipp on punktis $(0; 3)$, teine punktis $(-5; 0)$. Leia rombi pindala.
39. Trapetsi tippude koordinaadid on $(3; -2)$, $(-2; -2)$, $(2; 1)$ ja $(-1; 1)$. Arvuta trapetsi pindala.
40. Koordinaattelgi puudutava ringjoone keskpunkt on punktis $(-4; -4)$. Arvuta ringjoone pikkus ja ringi pindala.
41. Nelinurkse maatüki $ABCD$ plaanistamiseks ja pindala määramiseks võeti diagonaalsirge AC abstsissiteljeks ja sellega ristuv sirge läbi tippu B ordinaatteljeks (joon. 14). Maatüki tippude koordinaatide mõõtmisel (meetrites) saadi:
 $A(-198; 0)$, $B(0; 250)$, $C(602; 0)$, $D(202; -246)$.



Joon. 14

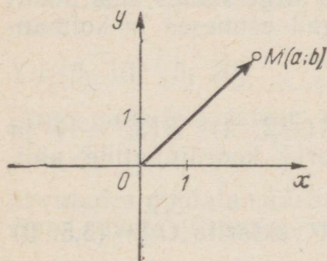
- 1) Valmista maatüki plaan, kujutades 100 m lõiguna 1 cm. Vajaduse korral ümarda mõõtmise tulemusi.
- 2) Arvuta maatüki pindala, vaadeldes seda kahe kolmnurga pindalade summana.

1.5. PUNKTI KOHAVEKTORI KOORDINAADID

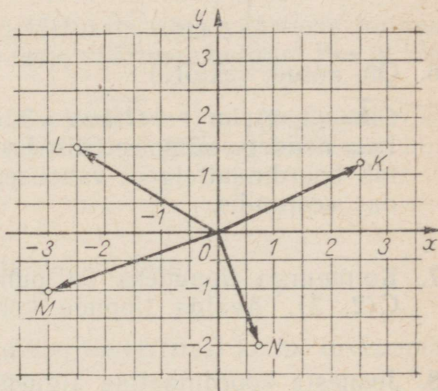
Vektorit \vec{OM} , mis läheb koordinaatide alguspunktist O tasapinna mingisse punkti $M(a; b)$, nimetatakse punkti M **kohavektoriks** (joon. 15). Punkti kohavektor näitab otsest teed alguspunktist antud punkti juurde, kuna koordinaadid viivad sinna üht murdjoont mööda. Et kohavektor \vec{OM} on antud niipea, kui on antud tema lõpp-punkt M , siis punkti M koordinaate nimetatakse ka tema kohavektori koordinaatideks. Lauset «Vektori \vec{OM} koordinaadid on a ja b » kirjutame lühidalt järgmiselt:

$$\vec{OM} = (a; b).$$

Seega võib järjestatud arvupaar $(a; b)$ tähendada punkti kui ka selle kohavektorit.



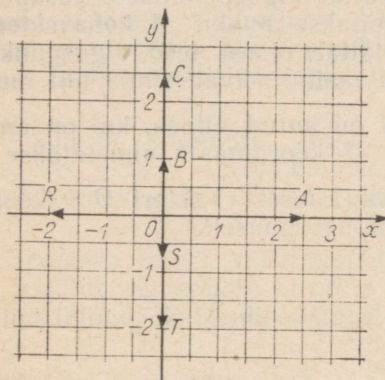
Joon. 15



Joon. 16

42. Leia jooniselt 16 vektorite \vec{OK} , \vec{OL} , \vec{OM} ja \vec{ON} koordinaadid.
43. Joonesta vektorid:
 $\vec{OA} = (2; 3)$, $\vec{OB} = (-3; 0)$, $\vec{OC} = (-1; -3)$,
 $\vec{OD} = (0; -4)$, $\vec{OE} = (3; -2)$, $\vec{OF} = (-4; 4)$.

44. Leia jooniselt 17 vektorite \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} , \vec{OR} , \vec{OS} ja \vec{OT} koordinaadid.
45. Leia vektoriga $(-3; 2)$ sümmeetriline vektor
- 1) x -telje suhtes;
 - 2) y -telje suhtes;
 - 3) koordinaatide alguspunkti suhtes.



Joon. 17

46. On antud vektorid:

$$\vec{OA} = (4; 2), \quad \vec{OB} = (-3; 1), \quad \vec{OC} = (-2; -4).$$

Leia nendega sümmeetrilised vektorid sirge suhtes, mis poolitab koordinaattelgede-vahelised nurgad esimeses ja kolmandas veerandis.

47. Kolmnurga tippudeks on punktid $A(-2; 4)$, $B(3; -1)$ ja $C(2; 3)$. Avalda tippude kohavektorid koordinaatide abil.
48. Joonesta koordinaatide alguspunktist vektorite $\vec{OA} = (3; 5; 0)$ ja $\vec{OB} = (0; 4; 5)$ summa ja vahe. Avalda saadud vektorid koordinaatide abil.
49. Joonesta kohavektor, mis on vektorite $\vec{OM} = (3; 2)$ ja $\vec{ON} = (-1; 3)$ summaks ning avalda see koordinaatides.
50. Leia kohavektori koordinaadid, kui selle vektori liitmisel vektoriga $\vec{OP} = (4; -2)$ saadakse vektor $\vec{OR} = (3; 4)$.

2. FUNKTSIONAALNE SÖLTUVUS

2.1. FUNKTSIOON JA ARGUMENT

Kahe hulga elementide vahelist vastavust võime täheldada ühenduses paljude nähtustega.

Näide 1. Kui kuubikujuline keedusoola kristall asetada keedusoola küllastunud lahusesse, siis vastava temperatuuri juures kristall hakkab kasvama, kusjuures tema esialgne kuju säilib. Seega kristalli serva pikkus ja ruumala muutuvad.

Tähistame kristalli muutuva serva pikkuse (millimeetrites) tähega x ja vaatleme muutuja x mingit väärtuste hulka, näiteks hulka $X = \{0,5; 1; 2; 3; 4\}$,

ning arvutame kuubi ruumala valemi $y = x^3$ põhjal muutuja x väärtustele vastavad muutuja y väärtused. Esitades selle vastavuse tabelina, saame:

x	0,5	1	2	3	4
y	0,125	1	8	27	64

Seega vastab muutuja x igale väärtusele tema väärtuste hulgast X ainult üks muutuja y väärtus tema väärtuste hulgast $Y = \{0,125; 1; 8; 27; 64\}$.

Näide 2. Leiame ringi pindala y väärtused, mis vastavad ringi raadiuse x väärtustele (millimeetrites) järgmisest väärtuste hulgast:

$$X = \{5; 10; 15; 20\}.$$

Ringi pindala y saame arvutada valemi järgi

$$y = \pi x^2.$$

Arvutades pindala väärtused (ruutmillimeetrites) kolme tüvenumbri-
riga, saame järgmise vastavuse:

x	5	10	15	20
y	78,5	314	707	1260

Ka siin vastab muutuja x igale väärtusele tema väärtuste hulgast X muutuja y üks kindel väärtus tema väärtuste hulgast Y .

Kui muutuja x igale väärtusele tema väärtuste hulgast X vastab mingi eeskirja järgi muutuja y üks kindel väärtus tema väärtuste hulgast Y , siis muutujat y üks kindel väärtus tema väärtuste hulgast Y , siis muutujat y nimetatakse muutuja x **funktsiooniks**. Seejuures muutujat x nimetatakse funktsiooni y **argumendiks**. Argumendi väärtuste hulka nimetatakse ka funktsiooni **määramis-**

piirkonnaks. Et y on funktsioon, siis Y on funktsiooni väärtuste hulk.

Närtes 2 oli funktsiooni määramispiirkonnaks hulk

$$X = \{5; 10; 15; 20\}$$

ja funktsiooni väärtuste hulgaks hulk

$$Y = \{78,5; 314; 707; 1260\}.$$

Niisiis,

üht muutujat nimetatakse teise funktsiooniks, kui teise muutuja igale väärtusele tema väärtuste hulgast vastab üks ja ainult üks esimese muutuja väärtus tema väärtuste hulgast.

Kui muutuja y on muutuja x funktsioon, siis seost nende muutujate vahel nimetatakse **funktsionaalseks sõltuvuseks**. Funktsiooni definitsioonist nähtub, et funktsionaalne sõltuvus muutujate x ja y vahel on ü h e n e v a s t a v u s

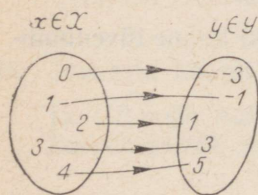
hulkade X ja Y elementide vahel. Seetõttu kõlbavad funktsionaalse sõltuvuse esitamiseks kõik samad vahendid, mida kasutasime kahe hulga elementide vahelise vastavuse esitamiseks: nooldiagramm, tabel, järjestatud paaride hulk. Näiteks joonisel 18 kujutatud nooldiagramm, tabel

x	0	1	2	3	4
y	-3	-1	1	3	5

ja järjestatud paaride hulk

$$F = \{(0; -3), (1; -1), (2; 1), (3; 3), (4; 5)\}$$

esitavad üht ja sama funktsiooni. Sõltumatult esitusviisist tuleb osata näha, et funktsionaalse sõltuvuse korral on ikka tegemist kahe hulgaga ja vastavuse eeskirjaga. Vastavuse eeskiri on nooldiagrammis antud nooltega, tabelis ja järjestatud paaride hulgas aga kõrvuti või üksteise alla kirjutatud vastavate väärtustega.

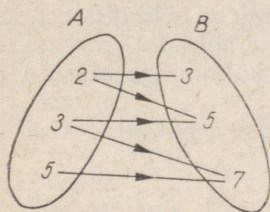


Joon. 18

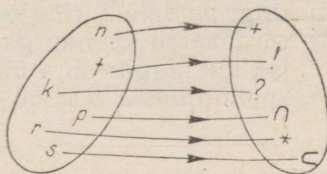
Vastavuse eeskiri antakse sageli võrdusena (näiteks $x + y = 3$ või $y = 3 - x$), mis võimaldab antud argumendi väärtuste põhjal arvutada funktsiooni väärtusi. Sel juhul on funktsiooni väärtuste hulga Y andmine üleliigne, küll peab aga olema antud argumendi väärtuste hulk X , sest ilma viimaseta pole funktsioon üldse määratud. Nii saame funktsiooni esitada ka ainult määramispiirkonna X ja

valemina antud vastavuse eeskirja kaudu. Näiteks on eespool kolmel viisil esitatud funktsioon antud ka siis, kui ütleme, et funktsiooni määramispiirkonnaks on hulk $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ ja vastavuse eeskirjaks $y=2x-3$. Lühidalt ütleme, et antud hulgal $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ on defineeritud funktsioon $y=2x-3$. Nii-sugust funktsiooni esitamiskiisi saame kasutada muidugi ainult siis, kui oskame vastavust argumendi ja funktsiooni väärtuste vahel väljendada võrdusena.

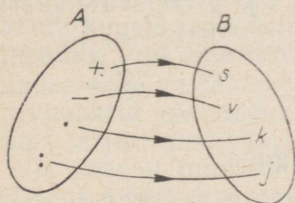
51. Missugused joonistel 19—22 kujutatud nooldiagrammidest esitavad funktsioone? Esita iga funktsioon ka tabelina.



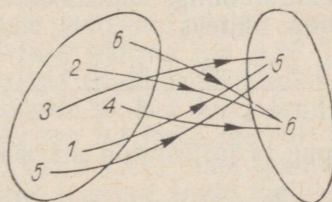
Joon. 19



Joon. 20



Joon. 21



Joon. 22

52. Missugused järgmistest tabelitest esitavad funktsioone?

$$1) \begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 4 \end{array}$$

$$2) \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}$$

$$3) \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

$$4) \begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 5 & 5 & 6 & 6 \end{array}$$

$$5) \begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{array}$$

Leia iga funktsiooni määramispiirkond ja väärtuste hulk.

53. Näita, et järgmine järjestatud paaride hulk esitab funktsiooni: $\{(0; 3), (2; 5), (4; 7), (6; 9), (8; 11)\}$.
 Leia selle funktsiooni määramispiirkond ja väärtuste hulk.
 Esita funktsioon tabelina. Missugune valem seob funktsiooni ja argumendi väärtusi?

54. Esita tabelina hulgal

$$X = \{-4; -2; 0; 2; 4; 6\}$$

defineeritud funktsioon $y = 2x + 3$.

55. Esita tabelina hulgal

$$X = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$$

defineeritud funktsioon $y = x^2 - 2x$.

56. Koosta valem, mille järgi saab arvutada

1) ruudu pindala S ruudu ümbermõõdu $ü$ põhjal;

2) ringi pindala S ringjoone pikkuse c põhjal;

3) võrdhaarse kolmnurga pindala S kolmnurga aluse a põhjal, kui kõrgus on 4 ühikut;

4) kuubi pindala S kuubi serva pikkuse a põhjal.

2.2. FUNKTSIOONI GRAAFIK

Olgu antud mingi funktsioon muutujate x ja y vastavate väärtuste tabelina, näiteks

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	-1	1	3	5	7

Esitame ta järjestatud arvupaaride hulhana:

$$F = \{(-2; -3), (-1; -1), (0; 1), (1; 3), (2; 5), (3; 7)\}.$$

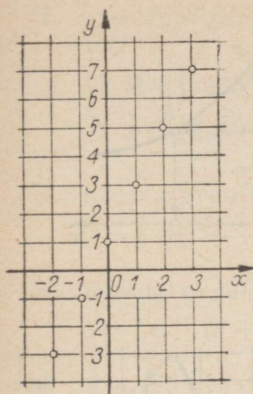
Lugedes igas paaris esimese arvu tasapinna punkti abstsissiks ja teise arvu sama punkti ordinaadiks, saame selle paaride hulga kujutada tasapinna teatavatest punktidest koosneva hulhana. See punktihulk on kujutatud joonisel 23. Saadud punktihulka teljestikus nimetatakse antud funktsionaalse sõltuvuse **graafikuks** ehk ka lihtsalt funktsiooni graafikuks. Antud näite puhul koosneb funktsiooni graafik kuuest üksteisest eraldatud punktist, sest argumenti väärtuste hulk koosnes ainult kuuest väärtusest.

Oletame nüüd, et argumenti väärtuste hulka kuuluvad kõik ratsionaalarvud, mis on -2 ja 3 vahel, need kaasa arvatud. Seda väärtuste hulka ei saa anda tema elementide loetlemise teel, küll saame teda anda aga järgmise võrdusena:

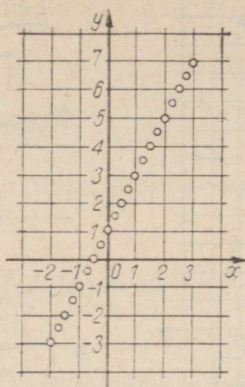
$$X = \{x \in \mathbb{Q} \mid -2 \leq x \leq 3\}.$$

See kirjutus ütleb nimelt, et X on hulk, mille elementideks on ratsionaalarvud x , mis rahuldavad tingimusi $-2 \leq x \leq 3$.

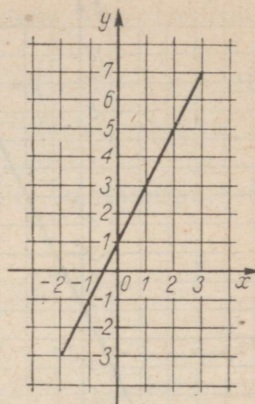
Olgu hulgal X defineeritud funktsioon $y = 2x + 1$. Selle graafiku



Joon. 23



Joon. 24



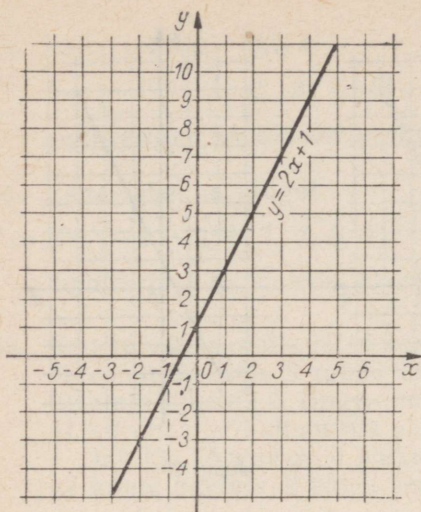
Joon. 25

saamiseks anname argumentidele x esmalt täisarvulised väärtused hulgast X ja arvutame neile vastavad funktsiooni väärtused. Saame eespool toodud tabeli, mille graafilisel kujutamisel saame joonise 23. Kuid see ei ole antud funktsiooni graafik, sest ta sisaldab ainult kuuele argumenti väärtusele vastavaid punkte. Anname argumentidele veel murdarvulisi väärtusi, näiteks iga 0,25 järel. Arvutades neile vastavad funktsiooni väärtused ja kujutades saadud arvupaarid punktidenä, saame joonise 24. Kui anda argumentidele ikka järjest uusi väärtusi, näiteks iga 0,1 järel, iga 0,01 järel jne., siis saadud punktid täidavad tihedalt ühe joonlõigu, antud näite puhul sirgjoone lõigu, mille loemegi antud funktsiooni graafikuks (joon. 25).

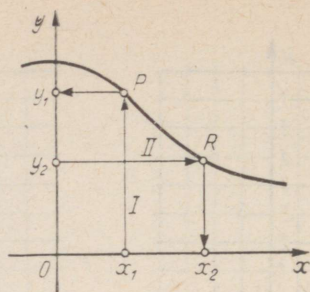
Funktsiooni määramispiirkonnaks võib olla ka kogu ratsionaalarvude hulk Q . Vaatleme näiteks funktsiooni $y=2x+1$, mille määramispiirkond $X=Q$. Tuginedes eelnevale vaatlusele võime juba ette öelda, et kui anname argumentidele x rea väärtusi ja leiame neile vastavad graafiku punktid, siis näeme, et need punktid asetsevad ühel ja samal sirgel (joon. 26). See sirge ongi antud funktsiooni graafikuks. Nii koosneb siis funktsiooni graafik üksikute punktidest või mingi joone osa kõigest punktidest või kogu joone punktidest sõltuvalt sellest, missugune on funktsiooni määramispiirkond.

Funktsiooni graafiku abil saab lahendada mitmesuguseid ülesandeid. Graafiku abil saab näiteks

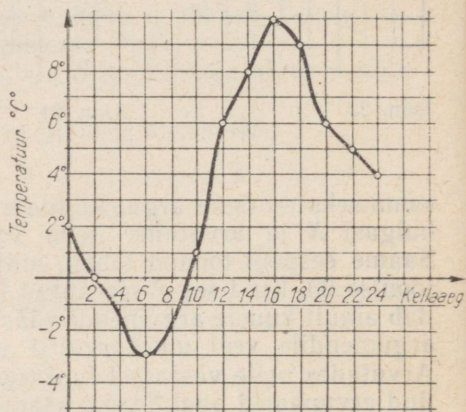
- 1) leida funktsiooni väärtuse, mis vastab argumenti antud väärtusele,
- 2) leida argumenti väärtuse, mille puhul funktsioonil on antud väärtus.



Joon. 26



Joon. 27



Joon. 28

Nende mõlema ülesande lahendamist selgitab joonis 27. Esimese ülesande lahendamisel tõmbame abstsissstelje punktist, mille abstsiss on võrdne argumenti antud väärtusega x_1 , ristsirge abstsisssteljele. Selle ristsirge ja funktsiooni graafiku lõikepunktist P tõmbame omakorda ristsirge ordinaatteljele. Viimati tõmmatud ristsirge ja ordinaattelje lõikepunkti ordinaat y_1 ongi otsitav funktsiooni väärtus. Teise ülesande lahenduskäik on eelmisele vastupidine, nagu selgub jooniselt.

Funktsiooni graafik annab ka üldise ülevaate funktsiooni muutumisest argumenti muutumisel. Vaadeldes näiteks joonist 28, mis kujutab õhutemperatuuri sõltuvust kellaajast ühe ööpäeva vältel, võime sellest näha järgmist.

- 1) Vaatluspäeva kõige madalam temperatuur -3° oli kell 6 ja kõige kõrgem temperatuur 10° kell 16.
- 2) Temperatuur langes kella 0-st kuni kella 6-ni ja hiljem kella 16-st kuni kella 24-ni; vahepeal temperatuur tõusis.
- 3) Kella 2-st 10-ni oli temperatuur alla nulli, ülejäänud osa ööpäevast üle nulli.
- 4) Üle 6° oli temperatuur kella 12 ja 20 vahel, jm.

57. Loe võrdusi ja kirjuta iga hulk tema elementide loetlemise teel.

1) $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 8\}$

2) $B = \{x \in \mathbb{Z} | -4 < x < 2\}$

3) $C = \{x \in \mathbb{N} | 5 < x < 9\}$

4) $D = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x \leq 3\}$

58. Kujuta graafiliselt funktsioon $y = 2x$, mille määramispiirkond $X = \{-2; -1; 0; 1\}$.

59. Kujuta graafiliselt funktsioon $y = 3 - 2x$, kui $x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.

60. Kujuta graafiliselt funktsioon $y = 1,5x - 2$, kui ta määramispiirkonnaks on $\{x \in \mathbb{Q} | 0 \leq x \leq 4\}$.

61. Kujuta graafiliselt funktsioon $y = -0,5x$, kui ta on defineeritud argumendi väärtustel $-4 \leq x \leq 4$.

62. Leia joonisel 29 kujutatud graafiku järgi

1) funktsiooni väärtused argumendi väärtustel

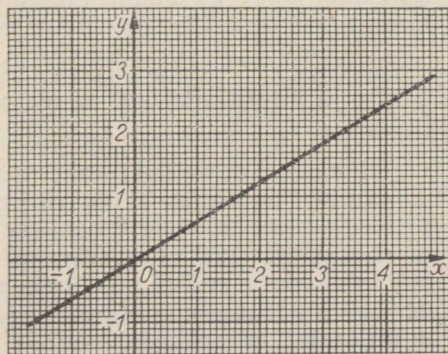
$x = -1; 0,5; 1,4; 3,2; 4;$

2) argumendi väärtused funktsiooni väärtustel

$y = -1; 1; 1,5; 1,9; 2,5.$

63. Võrdhaarse kolmnurga alus on 3 cm. Esita selle kolmnurga pindala S kõrguse h funktsioonina valemi, tabeli ja graafiku kujul, kui kõrgus h kasvab 1 cm-st 8 cm-ni.

64. Keha liigub ühtlaselt kiirusega 1,5 m sekundis. Väljenda valemiga teepikkus s aja t funktsioonina ja kujuta see funktsioon graafiliselt, kui t kasvab väärtusest 1 väärtuseni 10.



Joon. 29

2.3. FUNKTSIOON $y = ax$

Kui ruudu külje pikkus (sentimeetrites)

$$k = 0,5; 1; 2; 4; 10,$$

siis ruudu ümbermõõt (samades ühikutes)

$$\ddot{u} = 4 \cdot 0,5; 4 \cdot 1; 4 \cdot 2; 4 \cdot 4; 4 \cdot 10$$

ehk

$$\ddot{u} = 2; 4; 8; 16; 40.$$

Üldiselt: $\ddot{u} = 4k$.

Ruudu ümbermõõt \ddot{u} on küljepikkuse k funktsioon. Ümbermõõdu väärtused saadakse argumenti väärtuste korrutamisel ühe ja sama arvuga 4.

Niisamuti: ringjoone pikkus $c = \pi d$ on diameetri pikkuse d funktsioon. Ringjoone pikkuse väärtused saadakse argumenti väärtuste korrutamisel ühe ja sama arvuga π ; ühtlasel liikumisel läbitud tee pikkus $s = vt$ on tee läbimiseks kulunud aja t funktsioon. Tee pikkuse väärtused saadakse argumenti väärtuste korrutamisel ühe ja sama arvuga v (liikumise kiirus).

Kõigil saadud valemitel on üks ja sama kuju

$$y = ax,$$

kus kordaja a on jääv — vaadeldavat sõltuvust iseloomustav arv ($4, \pi, v$). Seda jäävat tegurit nimetatakse **võrdeteguriks** ja muutajat y **võrdeliseks** muutujaga x :

muutuja y on võrdeline muutujaga x , kui $y = ax$, kus a on jääv tegur.

Kui $y = ax$, siis $x = \frac{1}{a} \cdot y$. Kui a on jääv, siis ka $\frac{1}{a}$ on jääv, s. t. kui y on võrdeline x -ga, siis ka x on võrdeline y -ga, kusjuures võrdetegur on endise teguri pöördarv: muutujate võrdelisus on nende vastastikune omadus. Valemile $y = ax$ saame anda kuju $y : x = a$, kui $x \neq 0$. Ümberpöörduvalt, kui $y : x = a$, kus a on jääv, siis $y = ax$. Sellest järeldub, et

kaks muutujat on võrdelised siis ja ainult siis, kui nende vastavate väärtuste suhe on jääv.

Seda omadust kasutatakse sageli selleks, et näidata kahe muutuja võrdelisust. Näiteks, kui $y : x = 3x$, siis muutujad ei ole võrdelised, sest nende suhe pole jääv. Kui aga $y : x = 3k$, kus k on jääv (siis ka $3k$ on jääv), on muutujad võrdelised (võrdetegur on $3k$). Kui seos muutujate vahel on antud võrdusena, millel pole kuju $y = ax$ või kuju $y : x = a$, siis anname sellele võrdusele ühe neist kujudest. Kui siis a osutub jäävaks, on muutujad võrdelised.

N ä i d e. Selgitame, kas muutujad y ja x on võrduses

$$\frac{5}{8}y : rx = 5$$

võrdelised ja kui suur on võrdetegur, kui r on antud arv.

Vastuse saamiseks proovime võrdusele anda kuju $y = ax$, s. t. lahendada võrduse y suhtes:

$$\frac{5}{8}y : rx = 5 \Rightarrow \frac{5}{8}y = 5rx \Rightarrow y = 8rx.$$

Näeme, et muutuja y on võrdeline muutujaga x , kusjuures võrdetegur on $8r$.

65. Selgita, millistes võrdustes on muutujad võrdelised, kui neis tähed π ja g tähistavad antud arve, kõik teised tähed aga muutujaid. Leia ka võrdetegur.

1) $S = 8u$ 2) $c = \frac{1}{8}d$ 3) $e = \frac{f}{3}$ 4) $2y = x$

5) $\frac{u}{3} = v$ 6) $-k = \frac{3}{8}v$ 7) $s = gt^2$ 8) $4a - 5b = 0$

9) $3P : 5R = 2$ 10) $z = \frac{5}{6}x - 1$ 11) $S = \pi r^2$ 12) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

13) $\alpha + \beta = \pi$ 14) $2\alpha = 3\beta$ 15) $0,4k = \frac{n}{5}$ 16) $uv = 3$

66. Selgita, millistes võrdustes muutujad on võrdelised, kui neis tähed x , y , z , u ja v tähistavad muutujaid, kõik ülejäänud tähed aga antud arve. Leia ka võrdetegur.

1) $y = a^2x$ 2) $y = -akx$ 3) $y = \frac{a}{k}x$

4) $v = \frac{m+n}{2}x$ 5) $\frac{z}{y} = \frac{p+q}{m+n}$ 6) $ux = -k$

7) $2x + 3y = m - 1$ 8) $\frac{k^2-1}{9+m}y = \frac{k+1}{81-m^2}x$

67. Selgita, missugused antud tabelitest esitavad funktsiooni $y = ax$ ja leia vastav võrdetegur a .

1)

z		1		2		3		4		5		6
y		3		6		9		12		15		18

$$2) \frac{u \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6}{v \mid 3 \mid 5 \mid 7 \mid 9 \mid 11 \mid 13}$$

$$3) \frac{x \mid 1 \mid 1,5 \mid 2 \mid 2,5}{y \mid 0,6 \mid 0,9 \mid 1,2 \mid 1,5} \quad 4) \frac{x \mid -1,5 \mid -1 \mid -0,5 \mid 0 \mid 0,5}{z \mid 6 \mid 4 \mid 2 \mid 0 \mid -2}$$

$$5) \frac{t \mid 0 \mid 0,5 \mid 1 \mid 1,5 \mid 2 \mid 2,5}{s \mid -1 \mid -2 \mid -3 \mid -4 \mid -5 \mid -6}$$

$$6) \frac{r \mid -1,5 \mid -1 \mid -0,5 \mid 0 \mid 0,5}{p \mid -0,9 \mid -0,6 \mid -0,3 \mid 0 \mid 0,3}$$

68. Avalda valemi abil üks muutuja teise funktsioonina ja otsusta, kas muutujad on võrdelised või mitte.

- 1) Kuubi pindala S ja serva pikkus a .
- 2) Võrdhaarse kolmnurga alusnurk β ja tipunurk α .
- 3) Voolutugevus I ja takistus R jääva pinge U korral.
- 4) Riide meetrite arv x ja riide meetri hind h , kui riide koguhind on 150 rbl.
- 5) Püramiidi ruumala V ja kõrgus h , kui püramiidi põhja pindala on 15 cm².
- 6) Kõrvunurkade suurused α ja β .
- 7) Raudkuuli kaal P ja ruumala V . (Raua tihedus 7,8.)
- 8) Ööpäeva algusest möödunud ajavahemik x ja ööpäeva lõpuni ülejäänud ajavahemik y .
- 9) Antud ajavahemiku jooksul läbitud teepikkus s ja liikumise kiirus v .

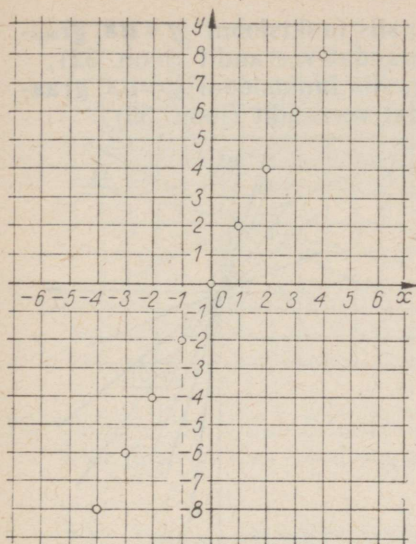
2.4. FUNKTSIOONI $y = ax$ GRAAFIK

N ä i d e. Kujutada graafiliselt funktsioon $y = 2x$, kus $x \in Q$, s. t. x on mistahes ratsionaalarv.

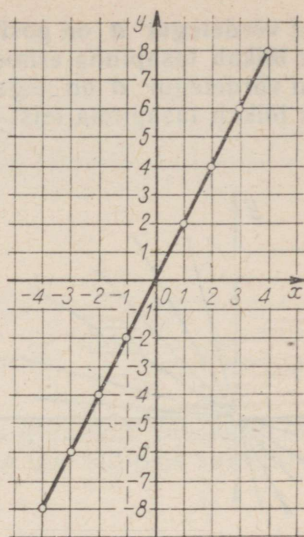
L a h e n d u s. Koostame x ja y vastavate väärtuste tabeli, andes argumendile x täisarvulised väärtused, näiteks vahemikust $-3 \leq x \leq 3$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-6	-4	-2	0	2	4	6

Leiame nüüd koordinaatteljestikus punktid, mille koordinaatideks on saadud tabeli x ja y vastavate väärtuste paarid (joon. 30). Joonlauaga proovides selgub, et kõik need punktid asetsevad ühel



Joon. 30



Joon. 31

ja samal sirgel. Andes argumendile veel mõned muud, tabelis mitteleiduvad väärtused ja arvutades neile vastavad funktsiooni y väärtused, näeme, et ka neile arvupaaridele vastavad punktid asetsevad varem saadud punktidega ühel sirgel. Joonestades selle sirge, saame funktsiooni $y=2x$ graafiku (joon. 31). Hiljem tõestame, et kõik punktid $(x; ax)$, kus a on antud arv, asetsevad tõepoolest ühel ja samal sirgel. Seega

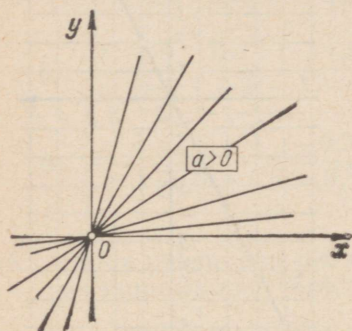
funktsiooni $y=ax$ graafik on sirgjoon.

Sirgjoont saab joonestada tema kahe punkti järgi. Funktsiooni $y=ax$ graafiku joonestamiseks on sobiv kasutada punkte, kus $x=0$ ja $x=1$, s. o. punkte $(0; 0)$ ja $(1; a)$. Kui ühik on väike, siis saadud punktid asetsevad teineteise lähedal, mistõttu joonis võib tulla ebatäpne. Sel juhul kasutame lisaks alguspunktile mõnd sellest kaugemal asetsevat punkti.

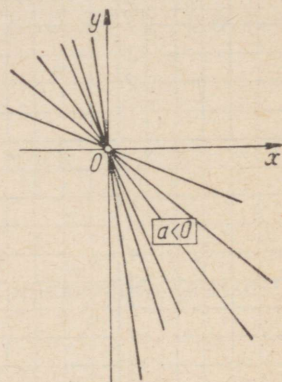
Uurime funktsiooni $y=ax$ graafiku asendit teljestiku suhtes sõltuvalt võrdeteguri a märgist.

Me teame, et uuritav sirge läbib peale punkti $(0; 0)$ veel punkti $(1; a)$. Kui $a > 0$, siis punkt $(1; a)$ asetseb tasapinna esimeses veerandis, ja kui $a < 0$, siis punkt $(1; a)$ asetseb tasapinna neljandas veerandis. Kui mingi sirge läbib koordinaatide alguspunkti ja esimese veerandi mingit punkti, siis ta lõikab kolmandat veerandit. Kui mingi sirge läbib koordinaatide alguspunkti ja neljanda veerandi mingit punkti, siis ta lõikab teist veerandit. Sellest järeldub:

kui võrdetegur a on positiivne arv, siis funktsiooni $y=ax$ graafik lõikab tasapinna esimest ja kolmandat veerandit (joon. 32); kui võrdetegur a on negatiivne arv, siis funktsiooni $y=ax$ graafik lõikab tasapinna teist ja neljandat veerandit (joon. 33).

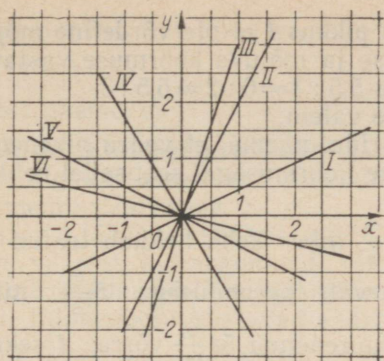


Joon. 32



Joon. 33

69. Valmista millimeetripaberil funktsiooni $y=1,5x$ graafik ja lahenda selle abil järgmised ülesanded:
- 1) leia y , kui $x=-1,6; -0,2; 1,4; 2,4; 2,8$,
 - 2) leia x , kui $y=-4,2; -3,9; -0,9; 1,2; 1,8$.
70. Joonesta ühes ja samas teljestikus funktsioonide $y=0,5x$ ja $y=-0,5x$ graafikud. Lahenda järgmised ülesanded:
- 1) leia mõlema graafiku abil y , kui $x=-2,6; 0,6; 1,2; 2,2$,
 - 2) leia mõlema graafiku abil x , kui $y=-1,3; 0,7; 0; 0,4; 1,2$.
71. Otsusta, missuguseid tasapinna veerandeid lõikab antud funktsiooni graafik.
- | | | |
|----------------------|-----------------------|------------|
| 1) $y=1,8x$ | 2) $y=-0,8x$ | 3) $y=-4x$ |
| 4) $y=-\frac{2}{5}x$ | 5) $y=5-\frac{1}{4}x$ | 6) $y=10x$ |
72. Joonesta kahe punkti järgi iga antud funktsiooni graafik.
- | | | |
|------------|---------------------|--------------|
| 1) $y=3x$ | 2) $y=-x$ | 3) $y=1,6x$ |
| 4) $u=-2v$ | 5) $u=1,2v$ | 6) $u=-v$ |
| 7) $s=t$ | 8) $s=\frac{2}{3}t$ | 9) $s=-2,4t$ |



Joon. 34

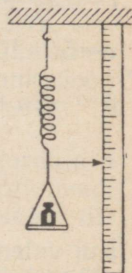
73. Joonisel 34 leidub 6 funktsiooni $y=ax$ graafikut. Määra graafiku järgi vastav võrdetegur a ja esita iga sõltuvus valemiga.

2.5. LINEARFUNKTSIOON

Näide 1. Elastsuse piires pikeneb terasvedru koormuse suurenemisel iga kilogrammi mõjul 0,5 cm. Avalda vedru pikkus l koormuse P funktsioonina valemi abil, kui vedru algpikkus on 5 cm.

Lahendus.

Koormuse 1 kg mõjul pikeneb vedru	0,5 cm
" 2 " " " "	$2 \cdot 0,5 = 1,0$ cm
" 3 " " " "	$3 \cdot 0,5 = 1,5$ cm
.....
" P " " " "	$P \cdot 0,5 = 0,5P$ cm



Joon. 35

Et vedru algpikkus oli 5 cm, siis vedru pikkus l avaldub valemiga $l=0,5P+5$.

Koostame muutujate P ja l vastavate väärtuste tabeli, andes muutujale P iga väärtuse hulgest $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Koormus P (kg)	1	2	3	4	5	6
Pikenemine $0,5P$ (cm)	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Vedru pikkus l (cm)	5,5	6	6,5	7	7,5	8

Saadud tabelist ilmneb, et vedru pikkus l ei ole võrdeline mõjuva koormusega P , sest vedru pikkuse ja mõjuva koormuse vastavate väärtuste suhe pole jääv. Näiteks $5,5 : 1 \neq 6 : 2 \neq 6,5 : 3$.

Sedasama ütleb ka vedru pikkuse valem.

Võrreldes tabeli teist ja esimest rida, näeme, et vedru pikenemine koormuse mõjul on küll võrdeline koormusega, sest sellel eeldusel me ju pikenemise arvutasimegi.

Näide 2. Kui algkiirusega $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ liikuv keha hakkab teatud aja-
hetkest liikuma ühtlaselt kiirenevalt kiirendusega $5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, siis t
sekundi pärast on keha kiirus suurenenud $5t \frac{\text{m}}{\text{s}}$ võrra, t sekundi
pärast on keha kiirus $(5t + 10) \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Tähistades saavutatud kiiruse
tähega v , saame valemi

$$v = 5t + 10.$$

Näide 3. Kui võrdhaarse kolmnurga alusnurk on α , siis alus-
nurkade summa on 2α ja tipunurk

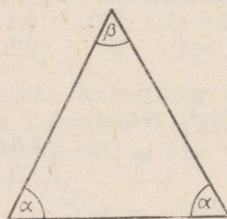
$$\beta = 180^\circ - 2\alpha.$$

Neis kolmes näites on kõik saadud valemid ühesuguse ehitusega:

$$l = 0,5P + 5,$$

$$v = 5t + 10,$$

$$\beta = -2\alpha + 180^\circ.$$



Joon. 36

Kui valemities esinevad muutujad tähistada tähtedega y ja x ning antud arvud tähtedega a ja b , siis nende valemite ühine kuju on $y = ax + b$.

Et avaldis $ax + b$ on x suhtes lineaarne (x on esimeses astmes), siis muutujat $y = ax + b$ nimetatakse muutuja x lineaarfunktsiooniks. Seega

muutuja y on muutuja x lineaarfunktsioon, kui $y = ax + b$, kus a ja b on antud arvud.

Tulles nüüd tagasi vaadeldud näidete juurde, võime öelda, et terasvedru pikkus on koormuse lineaarfunktsioon; ühtlaselt kiireneva liikumise kiirus on aja lineaarfunktsioon; võrdhaarse kolmnurga tipunurga suurus on alusnurga suuruse lineaarfunktsioon.

Selgitame lineaarfunktsiooni avaldises $ax + b$ esinevate arvude a ja b tähendust.

Kui argumendile x anda väärtus 0, siis funktsioon

$$y = a \cdot 0 + b = b.$$

Sellest näeme, et

vabaliige b lineaarfunktsiooni avaldises $ax + b$ on võrdne funktsiooni algväärtusega, s. o. funktsiooni selle väärtusega, mis vastab argumendi väärtusele 0.

Kordaja a tähenduse selgitamiseks vaatame, kuidas muutub funktsiooni väärtus, kui argumendi väärtus suureneb ühe võrra. Selleks anname argumendile mingi väärtuse x_1 ja veel teise väärtuse $x_1 + 1$. Funktsiooni vastavad väärtused olgu y_1 ja y_2 . Siis

$$y_1 = ax_1 + b, \quad y_2 = a(x_1 + 1) + b.$$

Lahutades alumise võrduse pooltest ülemise võrduse vastavad pooled, saame

$$y_2 - y_1 = a(x_1 + 1) - ax_1 = a.$$

Tulemus ütleb, et

kordaja a lineaarfunktsiooni avaldises $ax + b$ näitab, mille võrra muutub lineaarfunktsiooni väärtus, kui argumendi väärtus kasvab ühe võrra.

Sellest järeldub, et kui $a > 0$, siis argumendi kasvamisel lineaarfunktsioon kasvab, ja kui $a < 0$, siis argumendi kasvamisel lineaarfunktsioon kahaneb. Näiteks, kui argument kasvab ühe võrra, siis funktsioon $4x - 2$ kasvab 4 võrra; funktsioon $-3x + 5$ kahaneb 3 võrra; funktsioon $-1,5x - 2$ kahaneb 1,5 võrra; funktsioon $\frac{3}{4}x + 1$ kasvab $\frac{3}{4}$ võrra.

Lineaarfunktsioon $y = ax + b$ on määratud, kui on antud kordaja a ja vabaliige b . Kui a ja b pole antud, kuid on antud argumendi kahele väärtusele vastavad lineaarfunktsiooni väärtused, siis saame a ja b arvutada.

Näide 1. Lineaarfunktsioon on antud x ja y kahe vastavate väärtuste paariga:

x	0	1
y	4	7

Koostame funktsiooni avaldise $ax + b$.

Tabelist näeme otsekohe, et funktsiooni algväärtus $b = 4$. Samuti näeme, et kui argument kasvab ühe võrra (0-st 1-ni), siis funktsioon kasvab $7 - 4 = 3$ võrra, seega $a = 3$. Otsitav funktsioon on

$$y = 3x + 4.$$

Saadud avaldist kontrollime antud tabeli andmetega.

Näide 2. Lineaarfunktsiooni kohta on teada, et

$$\text{kui } x = 1, \text{ siis } y = 3,$$

$$\text{kui } x = 4, \text{ siis } y = 15.$$

Koostame funktsiooni avaldise $ax+b$.

Siin andmetest otseselt ei nähtu a ja b väärtus. Need leiame järgmiselt. Asendame avaldises $ax+b$ argumenti x esmalt väärtusega 1, siis väärtusega 4. Andmete põhjal peame avaldise väärtuseks saama algul 3, siis 15:

$$\left. \begin{array}{l} a \cdot 1 + b = 3 \\ a \cdot 4 + b = 15 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + b = 3 \\ 4a + b = 15 \end{array} \right.$$

Lahutades alumise võrduse pooltest ülemise võrduse vastavad pooled, saame

$$3a = 12, \text{ millest } a = 4.$$

Võrdusest $a+b=3$ saame nüüd:

$$b = 3 - a = 3 - 4 = -1.$$

Otsitav funktsioon on

$$y = 4x - 1.$$

Tulemust kontrollime jällegi antud x ja y väärtuspaaride abil.

74. Otsusta, missugused järgmistest valemitest väljendavad argumenti x lineaarfunktsiooni, kui neis a , b , c ja d on antud arvud.

1) $y = 3 - 4x$

2) $y = (2 + 3x)x$

3) $y = \frac{x}{3} - 3,5$

4) $y = a^2x + b + c$

5) $y = ax^2 + b$

6) $z = 1 - ax$

7) $z = ax + bx + c$

8) $z = \frac{x}{a+b} + \frac{c}{a-b}$

9) $z = \frac{a}{x} + b$

10) $z = (ax + b) + (cx - d)$

75. Leia 1) kui palju muutub iga järgmine funktsioon argumenti kasvamisel 1 võrra, 2) kui suur on funktsiooni algväärtus.

1) $y = 3,5x + 6$

2) $z = -2u + 4,2$

3) $y = -6x + 1,5$

4) $z = 2(4,5u - 1,5)$

5) $y = 3(1 - 2x)$

6) $z = \frac{5u - 6}{10}$

7) $y = \frac{9 - 16x}{12}$

8) $z = 4 - \frac{2u - 5}{3}$

9) $y = 8x - \frac{6 - x}{2}$

10) $z = \frac{5u - 8}{4} - (2u + 9)$

76. Kas funktsioon kasvab või kahaneb argumenti kasvamisel?

1) $y = -5x + 7$

2) $z = 1 - \frac{2-u}{3}$

3) $y = \frac{3-2x}{4}$

4) $z = u + \frac{1-3u}{2}$

5) $y = \frac{4x-3}{2} - \frac{2x+5}{3}$

6) $z = \frac{u-3}{3} - \frac{4u-5}{10}$

77. Lineaarfunktsioon on antud argumenti ja funktsiooni kahe vastavate väärtuste paariga. Leia funktsiooni avaldis.

1) $\{(0; 1), (1; 3)\}$

2) $\{(-1; 6), (0; 4)\}$

3) $\{(0; -2), (4; 14)\}$

4) $\{(-1; -3), (2; 9)\}$

5) $\{(-3; 7,5), (2; 5)\}$

6) $\{(-1,5; -1), (-0,5; -3)\}$

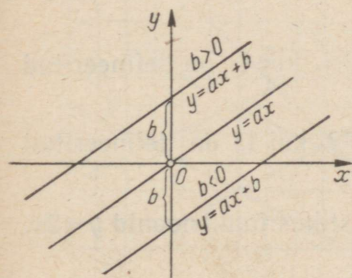
2.6. LINEAARFUNKTSIOONI GRAAFIK

Nagu iga funktsiooni graafiku, nii saaksime ka lineaarfunktsiooni graafiku valmistada sel teel, et anname argumentide rea väärtusi, arvutame neile vastavad funktsiooni väärtused ja kujutame saadud arvupaarid tasapinna punktidega koordinaatteljestikus. Enne selle üldise võtte rakendamist katsume selgitada, mis liiki joon on lineaarfunktsiooni graafik.

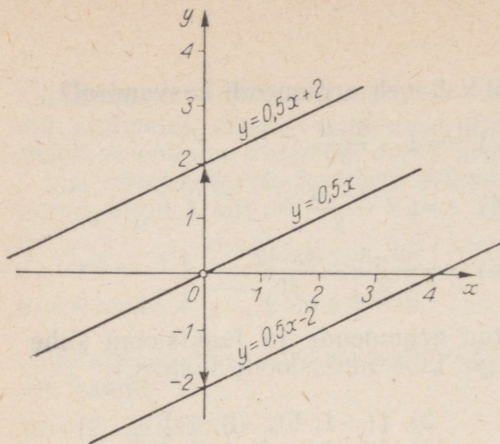
Kui lineaarfunktsiooni algväärtus $b=0$, siis $y=ax$, s. t. funktsioon $y=ax$ on lineaarfunktsiooni erijuht. Sel erijuhul on lineaarfunktsiooni graafikuks sirge, mis läbib koordinaatide alguspunkti ja punkti $(1; a)$. Funktsiooni $y=ax+b$ graafiku iga punkti ordinaat erineb funktsiooni $y=ax$ vastava punkti ordinaadist x iga väärtuse korral ühe ja sama arvu b võrra. Sellest selgub, et kui $b>0$, siis funktsiooni $y=ax+b$ graafik saadakse funktsiooni $y=ax$ graafikust lükkel b ühiku võrra ülespoole, ja kui $b<0$, siis allapoole (joon. 37).

Et lükkel saab sirgest samasihilise sirge, siis

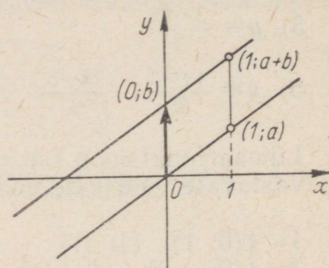
funktsiooni $y=ax+b$ graafik on funktsiooni $y=ax$ graafikuga paralleelne sirge.



Joon. 37



Joon. 38



Joon. 39

Näiteid. 1) Funktsiooni $y=1,5x+2$ graafik on sirge, mis saadakse funktsiooni $y=1,5x$ graafikust selle lükkel 2 ühiku võrra ülespoole ehk lükkel vektoriga $(0; 2)$. 2) Funktsiooni $y=1,5x-2$ graafik on sirge, mis saadakse funktsiooni $y=1,5x$ graafikust selle lükkel 2 ühiku võrra allapoole ehk lükkel vektoriga $(0; -2)$ (joon. 38).

Et funktsiooni $y=ax$ graafik läbib punkte $(0; 0)$ ja $(1; a)$, millest lükkel vektoriga $(0; b)$ saadakse punktid $(0; b)$ ja $(1; a+b)$, siis (joon. 39) funktsiooni $y=ax+b$ graafik on sirgjoon, mis läbib punkte $(0; b)$ ja $(1; a+b)$.

Näiteks funktsiooni $y=1,5x-2$ graafik on punkte $(0; -2)$ ja $(1; -0,5)$ läbiv sirge ja funktsiooni $y=-2x+3$ graafik on punkte $(0; 3)$ ja $(1; 1)$ läbiv sirge. Kuid funktsiooni graafiku joonestamiseks ei tarvitse kasutada just neid punkte: sirgjoon on määratud oma mistahes kahe punktiga. Seetõttu võime vabalt võtta kaks x väärtust, arvutada neile vastavad y väärtused ja joonestada graafiku nende andmete põhjal. Kontrolli mõttes on siiski kasulik leida veel kolmas punkt, mis peab samuti asetsema joonestataval sirgel.

78. Esita graafiliselt funktsioon $y=0,5x+2$, kui ta on defineeritud hulgal $\{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x \leq 4\}$.
79. Esita graafiliselt funktsioon $y=-x+1$, kui ta on defineeritud hulgal $\{x \in \mathbb{Q} \mid -2 \leq x \leq 3\}$.
80. Esita graafiliselt funktsioon $y=2x-3$, kui ta on defineeritud hulgal $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$.
81. Esita graafiliselt ühes ja samas teljestikus funktsioonid $y=2x$, $y=2x+1$ ja $y=2x-1$, kui $x \in \mathbb{Q}$.

82. Esita graafiliselt ühes ja samas teljestikus funktsioonid $y = -\frac{1}{4}x$, $y = -\frac{1}{4}x + 3,5$ ja $y = -\frac{1}{4}x - 3,5$, kui $x \in Q$. Kuidas asetsevad üksteise suhtes viimased kaks sirget?

83. Põhjenda väidet, et sirged, mis on funktsioonide $y = 2,5x + 15$ ja $y = 2,5x - 8$ graafikud, on paralleelsed.

84. Otsusta ilma arvutamise ja joonistamiseta, kas antud kahe funktsiooni graafikud on paralleelsed või lõikuvad sirged. Kui nad lõikuvad, siis leia lõikepunkt.

1) $y = -4x + 17$ ja $y = 4x + 17$

2) $y = 4,3x - 3$ ja $y = 4,3x - 6$

3) $y = -0,6x + 5$ ja $y = -\frac{3}{5}x + 2$

4) $y = 2x - 9$ ja $y = 4x - 9$

85. Joonesta kahe punkti abil järgmiste funktsioonide graafikud (määramispiirkonnaks on hulk Q).

1) $y = 3x - 1$

2) $y = -2x + 3$

3) $y = 0,4x + 2$

4) $y = -0,8x + 4$

5) $y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$

6) $y = 2x - 2$

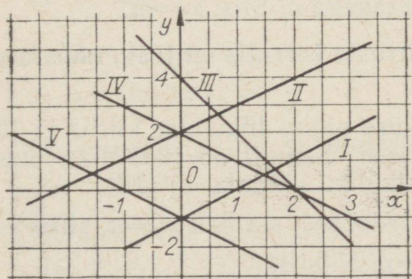
7) $y = -3x + 1$

8) $y = 0,5x - 3$

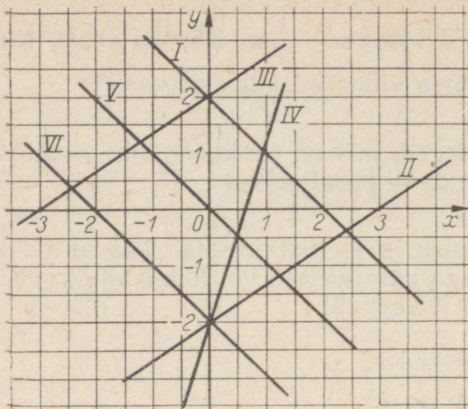
9) $y = -0,4x - 2$

10) $y = -\frac{2}{3}x + 3\frac{1}{3}$

86. Joonisel 40 on viie lineaarfunktsiooni graafikud. Leia iga funktsiooni puhul kordajad a ja b ning esita vastav funktsioon valemmina.



Joon. 40



Joon. 41

87. Joonisel 41 on antud kuue lineaarfunktsiooni graafikud. Otsusta, missuguste funktsioonide avaldistes on argumenti kordajad võrdsed ja missuguste avaldistes on vabaliikmed võrdsed.

2.7. FUNKTSIOON $y = \frac{a}{x}$

Eespool tutvusime muutujatega, mille vastavate väärtuste jagatis oli jääv. Vaatleme nüüd muutujaid, mille vastavate väärtuste korrutis on jääv.

N ä i d e 1. Kahe linna vahemaa on 200 km. Kui mingi sõiduk läbib selle keskmise kiirusega $v \frac{\text{km}}{\text{h}}$, siis sõiduks kulub $t=200:v$ tundi. Sellest järeldub, et $vt=200$.

N ä i d e 2. Olgu vaja joonestada ristkülik, mille pindala on 64 cm^2 . Kui selle aluseks võtta $a \text{ cm}$, siis kõrgus b peab olema $64:a \text{ cm}$. Siin siis $ab=64$.

Olgu x ja y muutujad, mille vastavate väärtuste korrutis on jääv. Tähistame selle jääva korrutise tähega a . Siis: $xy=a$.

Muutujaid, mille vastavate väärtuste korrutis on jääv, nimetatakse pöördvõrdelisteks.

Nagu nägime, on jääva teepikkuse puhul liikumise kiirus ja liikumiseks kuluv aeg pöördvõrdelised. Samuti on ristküliku alus ja kõrgus pöördvõrdelised, kui ristküliku pindala on jääv.

Kui muutujad x ja y on pöördvõrdelised, s. t. kui $xy=a$, siis $y=\frac{a}{x}$; ümberpöörduvalt: $y=\frac{a}{x} \Rightarrow xy=a$. Niisiis,

kahe muutuja x ja y pöördvõrdelisust saab avaldada nii kujul $xy = a$ kui ka kujul $y = \frac{a}{x}$, kus a on antud arv.

88. Otsusta, missugused järgmistest valemitest esitavad funktsiooni $y = a : x$, kui kõik tähed, välja arvatud π , q , k ja n , on muutujad. Kui funktsioon on kujuga $a : x$, siis määra a .

- 1) $y = \frac{k}{x}$ 2) $y = \frac{kn}{x}$ 3) $y = \frac{q}{nx}$
 4) $z = \frac{3+k}{x}$ 5) $z = \frac{(n+5)x}{k}$ 6) $z = n \cdot \frac{1}{x} + \pi$
 7) $u = 2 \cdot \frac{n}{v}$ 8) $u = \frac{q}{v} : 3$ 9) $u = \frac{v}{2\pi}$

Näide. Kui $y = \frac{n+1}{x} : \frac{n-1}{3}$, siis teisendame avaldist järgmiselt:

$$y = \frac{3(n+1)}{x(n-1)} = \frac{3(n+1)}{n-1} : x = a : x, \text{ kus } a = \frac{3(n+1)}{n-1};$$

et n on antud arv, siis a on jääv. Seega y on pöördvõrdeline x -ga.

89. Otsusta, missugused järgmistest võrdustest esitavad funktsiooni $y = ax$, missugused funktsiooni $y = ax + b$ ja missugused funktsiooni $y = a : x$, kui kõik tähed, välja arvatud a , b , k ja n , on muutujad.

Ülesande lahendamiseks lahenda antud võrdus ühe muutuja suhtes (kui ta sellisel kujul pole antud) ja püüa tulemusele anda üks kujudest $y = ax$, $y = a : x$ või $y = ax + b$, kus a ja b on antud arvud.

- 1) $y = \frac{12x+6}{3}$ 2) $y = (k+2)x$ 3) $z = (3+n) : x$
 4) $z = 3ky^2 + 1$ 5) $u = \frac{ka^2+5}{7} \cdot v$ 6) $u = \frac{abn}{v}$
 7) $2s+1=3t+2k$ 8) $(S+1) : t = 3k$
 9) $h = (25+q) : 2h$ 10) $ax+by=7x+2y$

Missugused antud valemitest ei väljenda ühtki sulle tuntud funktsiooni?

90. Kuidas jääva ruumalaga V risttahuka põhja pindala S sõltub risttahuka kõrgusest h ? Avalda see sõltuvus valemina, kui kõrguse $h = 12$ cm korral risttahuka põhja pindala $S = 16$ sm².

91. Kuidas jääva pindalaga S kolmnurga kõrgus h sõltub alusest a ? Avalda see sõltuvus valemina, kui aluse $a=8,5$ cm korral kolmnurga kõrgus $h=4,2$ cm.
92. On teada, et muutujad s ja t on pöördvõrdelised. Avalda see sõltuvus valemina, kui $t=4,5$ korral $s=6$.
93. On teada, et pöördvõrdelistel muutujatel u ja v on ainult positiivsed väärtused. Näita, et kui üks neist suureneb mingi arv korda, siis teine väheneb sama arv korda.
94. Läbi kanali ristlõike voolab igas sekundis 3 m^3 vett. Määra vee voolu kiirus v kanali punktides, kus voolu ristlõike pindala $S=6; 9; 12; 15 \text{ m}^2$. Avalda muutuja v muutuja S funktsioonina.
95. Tee kindlaks, missugused tabelid esitavad funktsiooni $y = a : x$, ja leia see funktsioon.

$$1) \frac{x \mid -0,5 \mid -0,3 \mid -0,1 \mid 0,1 \mid 0,3}{y \mid -3 \mid -5 \mid -15 \mid 15 \mid 5}$$

$$2) \frac{x \mid 0,2 \mid 0,4 \mid 0,6 \mid 0,8 \mid 1,0}{z \mid 1,2 \mid 0,6 \mid 0,4 \mid 0,3 \mid 0,24}$$

$$3) \frac{t \mid -3 \mid -1,5 \mid 1,5 \mid 3,0 \mid 4,5}{s \mid 6 \mid 12 \mid 12 \mid 6 \mid 4}$$

96. Tee kindlaks, kas mõni tabel esitab funktsiooni $y=ax$ või funktsiooni $y = \frac{a}{x}$. Kui esitab, siis leia arv a .

$$1) \frac{x \mid -3 \mid -2 \mid -1 \mid 1 \mid 2 \mid 3}{y \mid -2 \mid -3 \mid -6 \mid 6 \mid 3 \mid 2}$$

$$2) \frac{u \mid -2 \mid -1 \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3}{v \mid 11 \mid 5,5 \mid 0 \mid -5,5 \mid -11 \mid -16,5}$$

$$3) \frac{x \mid -4 \mid -3 \mid -2 \mid -1 \mid 0 \mid 1}{z \mid 10 \mid 7,5 \mid 5 \mid 2,5 \mid 0 \mid -2,5}$$

$$4) \frac{s \mid -1 \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4}{T \mid 0 \mid -3 \mid -6 \mid -9 \mid -12 \mid -15}$$

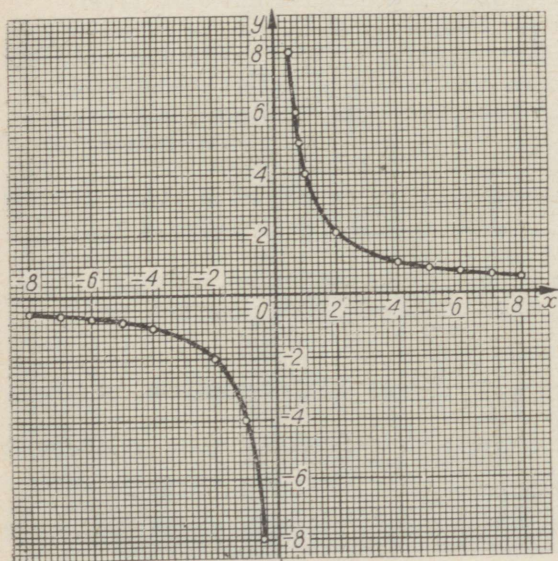
$$5) \frac{t \mid -3 \mid -2 \mid -1 \mid 0 \mid 1 \mid 2}{v \mid -10 \mid -8 \mid -6 \mid -4 \mid -2 \mid 0}$$

97. Väljenda muutujatevaheline seos valemina ja otsusta iga valemi puhul, kas ta esitab mõnd sulle tuntud funktsiooni.
- 1) Kuubi pindala S ja serva pikkus a .
 - 2) Ristküliku pindala S ja kõrgus b , kui alus on jääv.
 - 3) Trapetsi pindala S ja alus a , kui teine alus on 8 cm ja kõrgus 6 cm.
 - 4) Kesknurga suurus α ja samale kaarele toetuva piirdenurga suurus β .
 - 5) Anuma ja selles sisalduva vedeliku kogukaal P ja vedeliku ruumala V , kui vedeliku tihedus on d ja anuma kaal a .
 - 6) Kummipaela pikkus s ja teda pingutav koormus P .
 - 7) Käesoleva kuu eelolevate päevade arv y ja möödunud päevade arv x .
 - 8) Antud rahasumma S (rbl.) eest saadav maiustuste kaal k (kg) ja maiustuste kilogrammi hind h (rbl.).

2.8. FUNKTSIOONI $y = \frac{a}{x}$ GRAAFIK

Näide. Joonestame funktsiooni $y = 4 : x$ graafiku, kui $x \in \mathbb{Q}$ ja $x \neq 0$.

Ülesande lahendamiseks anname argumentidele x täisarvulised väärtused näiteks vahemikus (-8) -st 8 -ni, välja arvatud väärtus 0 , mis ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda. Et $x \neq 0$, siis graafikul puudub punkt, mille abstsiss on 0 . Teisiti ütleme seda nii,



Joon. 42

et graafik katkeb kohal $x=0$. Graafiku käigu selgitamiseks katkemiskoha ümbruses anname argumentidele veel väärtused $-0,5, -0,25, 0,25$ ja $0,5$. Ühendades saadud punktid sujuvalt kõverjoonega, saame joonisel 42 kujutatud graafiku.

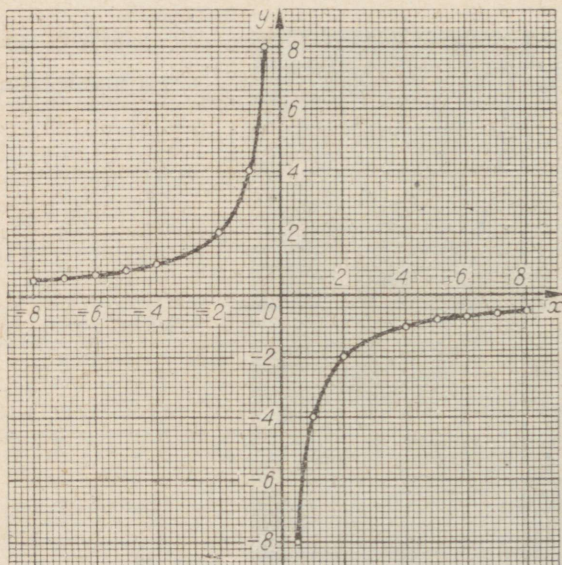
Saadud jooniselt näeme, et funktsiooni $y=4:x$ graafik koosneb kahest eraldi asetsevast harust, millest üks on esimeses (kui $x>0$) ja teine kolmandas veerandis (kui $x<0$).

Funktsiooni $y=a:x$ graafikut nimetatakse **hüperbooliks**.

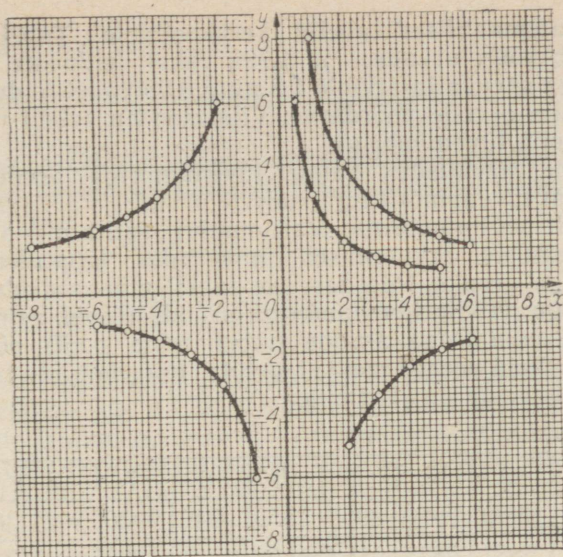
Hüperbool koosneb kahest eraldi asetsevast harust, mis on sümmeetrilised koordinaatide alguspunkti suhtes. Tõepoolest, kui mingi punkt $(x_1; y_1)$ asetseb hüperboolil $y=a:x$, s. t. $x_1y_1=a$, siis sellega alguspunkti suhtes sümmeetriline punkt $(-x_1; -y_1)$ asetseb samuti sellel hüperboolil, sest ka sel korral $(-x_1) \cdot (-y_1)=a$.

98. Kirjelda joonise 42 põhjal funktsiooni $y=4:x$ muutumist, kui argument x kasvab (-8) -st $(-0,5)$ -ni ja $0,5$ -st 8 -ni.

99. Valmista joonise 42 eeskujul funktsiooni $y=\frac{-4}{x}$ ehk $y=-\frac{4}{x}$ graafik (joon. 43). Mille poolest erineb saadud graafik funktsiooni $y=\frac{4}{x}$ graafikust? Kirjelda funktsiooni $y=-\frac{4}{x}$ muutumist argumenti kasvamisel (-8) -st $(-0,5)$ -ni ja $0,5$ -st 8 -ni. Missugustes veerandites asetsevad nüüd hüperbooli harud?



Joon. 43



Joon. 44

100. Joonesta ühes ja samas teljestikus funktsioonide $y = \frac{2}{x}$ ja $y = \frac{-2}{x}$ graafikud, andes argumendile x ainult positiivseid väärtusi. Peegelda seejärel kummagi hüperbooli haru koordinaatide alguspunktist. Mis saame funktsiooni $y = \frac{2}{x}$ graafikust, kui teda peegeldame x -teljest? y -teljest?
101. Joonisel 44 on antud viie funktsiooni $y = a : x$ graafikud. Iga funktsiooni määramispiirkonnaks on vahemik $m \leq x \leq n$. Leia graafiku järgi a , m ja n ning anna iga funktsioon valemi ja määramispiirkonna abil.
102. On teada, et funktsiooni $y = a : x$ graafik läbib punkti $(-2; 4)$. Leia funktsiooni avaldis.
103. Täisnurkse kolmnurga pindala on 3 cm^2 . Avalda üks kaatet teise funktsioonina ja joonesta selle funktsiooni graafik.

2.9. PÖÖRDARVUDE TABEL

Funktsiooni $y = a : x$ väärtuste arvutamisel mistahes a korral osutub otstarbekaks kasutada funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ väärtuste tabelit, mida tuntakse pöördarvude tabeli nime all (vt. V. Bradis.

Neljakohalised matemaatilised tabelid keskkoolidele. Tabel II). See tabel sisaldab kõigi arvude 1 ja 1,799 vahel leiduvate kuni nelja tüvenumbriga arvude ja arvude 1,8 ning 9,99 vahel leiduvate kolme tüvenumbriga arvude pöördarve. Viimased on tabeli mõlemas osas antud nelja tüvenumbriga.

Meie piirdume oma arvutustes kolme tüvenumbriga arvudega, kasutades neljandat tüvenumbrit ligikaudsete arvudega arvutamise eeskirjade kohaselt varunumbrina. Varunumbri säilitame ainult vahepealsete tulemuste arvutamisel, ümardades lõpptulemuse kolme tüvenumbriga arvuks. Pöördarvude tabeli viimased üheksa parempoolset veergu on viie tüvenumbriga arvude (tabeli esimene pool) või nelja tüvenumbriga arvude (tabeli teine pool) pöördarvude leidmiseks. Neid veerge meie ei kasuta. Pöördarvude tabeli algus ilma lisaveergudeta on järgmine:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,00	1,0000	9990	9980	9970	9960	9950	9940	9930	9921	9911
1,01	0,9901	9891	9881	9872	9862	9852	9843	9833	9823	9814
1,02	0,9804	9794	9785	9775	9766	9756	9747	9737	9728	9718
1,03	0,9709	9699	9690	9681	9671	9662	9653	9643	9634	9625

Leiame näiteks arvu 1,02 pöördarvu. Selleks otsime üles arvuga 1,02 märgitud rea ja 0-ga märgitud veeru ristumiskoha. Seal leiduv arv 0,9804 ongi otsitav pöördarv. Kui see arv on arvutuse lõpptulemus, siis ümardame ta arvuks 0,980. Samal viisil leiame:

$$\frac{1}{1,03} = 0,971; \quad \frac{1}{1,15} = 0,870.$$

Nii saab leida vahemikust 1 kuni 1,79 kõikide kolme tüvenumbriga arvude pöördarvud.

Olgu nüüd kolme tüvenumbriga arv vahemikust 1,79 kuni 10. Selle pöördarvu leidmiseks otsime üles arvu esimese kahe tüvenumbriga märgitud rea ja kolmanda tüvenumbriga märgitud veeru ristumiskoha. Sellel kohal olev arv on otsitava pöördarvu murdos, kuna täisosa on 0.

Leiame näiteks arvu 4,48 pöördarvu. Selleks otsime üles 4,4-ga märgitud rea ja 8-ga märgitud veeru ristumiskoha. Seal olev arv 2232 on otsitava pöördarvu murdos. Seega

$$\frac{1}{4,48} = 0,223.$$

Samal viisil leiame, et

$$\frac{1}{6,31} = 0,159; \quad \frac{1}{7,56} = 0,132; \quad \frac{1}{9,92} = 0,101.$$

Kui arv sisaldab rohkem kui kolm. tüvenumbrit, siis pöördarvu leidmiseks ümardame ta kolme tüvenumbriga arvuks ja leiame viimase pöördarvu.

Näiteks arvu 7,347 pöördarv

$$\frac{1}{7,347} = \frac{1}{7,35} = 0,136.$$

Arvust 1 väiksema arvu pöördarvu leidmiseks korrutame ta 10-ga või 100-ga jne. nii, et saame arvu, mis on 1 ja 10 vahel. Saadud arvule leiame pöördarvu ja tulemuse korrutame 10-ga või 100-ga jne., sest arvu korrutamisel 10-ga või 100-ga jne. pöördarv vähenes 10 või 100 jne. korda. Näiteks

$$\frac{1}{0,65} = \frac{1}{6,5} \cdot 10 = 0,154 \cdot 10 = 1,54;$$

$$\frac{1}{0,0234} = \frac{1}{2,34} \cdot 100 = 0,427 \cdot 100 = 42,7.$$

Arvust 10 suurema arvu pöördarvu leidmiseks jagame ta 10-ga või 100-ga jne. nii, et saame arvu, mis on 1 ja 10 vahel. Saadud arvule leiame tabelist pöördarvu ja tulemuse jagame 10-ga või 100-ga jne., sest arvu jagamisel 10-ga või 100-ga jne. pöördarv suurenes 10 või 100 jne. korda.

Näiteks

$$\frac{1}{12,7} = \frac{1}{1,27} : 10 = 0,787 : 10 = 0,0787;$$

$$\frac{1}{195} = \frac{1}{1,95} : 100 = 0,513 : 100 = 0,00513.$$

Kasutades pöördarvu, saame jagamise $a : b$ asendada korrutamisega $a \cdot \frac{1}{b}$. Näiteks

$$5 : 4,92 = 5 \cdot \frac{1}{4,92} = 5 \cdot 0,2033 = 1,0165 \approx 1,02.$$

Selle asjaolu põhjal saame pöördarvude tabeli abil arvutada funktsiooni $y = a : x$ väärtusi.

104. Leia järgmiste arvude pöördarvud:

- | | | | | | | | | |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1) | 1,04 | 1,07 | 1,23 | 3,72 | 6,49 | 7,77 | 8,94 | 9,39 |
| 2) | 1,05 | 1,09 | 1,79 | 8,35 | 8,88 | 9,00 | 9,55 | 9,99 |

105. Leia järgmiste arvude pöördarvud:

- | | | | | | | |
|----|-------|-------|--------|--------|-------|-------|
| 1) | 1,314 | 2,357 | 6,4957 | 1,3007 | 8,079 | 4,444 |
| 2) | 2,222 | 2,008 | 3,9867 | 5,6793 | 2,784 | 9,385 |

106. Leia järgmiste arvude pöördarvud:

- | | | | | | | |
|----|-------|--------|--------|---------|---------|--------|
| 1) | 0,223 | 0,0138 | 0,9008 | 0,00045 | 0,01111 | 0,0055 |
| 2) | 0,009 | 0,0007 | 0,0386 | 0,02384 | 0,57684 | 0,0963 |

107. Leia järgmiste arvude pöördarvud:

- | | | | | | | | |
|----|-----|------|-------|-------|------|-------|--------|
| 1) | 12 | 328 | 18,4 | 134,8 | 1969 | 25,89 | 3211,8 |
| 2) | 6,8 | 4,27 | 385,1 | 1697 | 3670 | 784,8 | 52700 |

108. Kasutades pöördarvude tabelit, arvuta järgmised jagatised:

- | | | | |
|----|-----------|------------|--------------|
| 1) | 15 : 3,97 | 7,8 : 2,37 | 9,1 : 0,836 |
| 2) | 8 : 4,79 | 35 : 0,472 | 0,03 : 0,756 |

3. KAHE MUUTUJAGA LINEAARSED VÖRRANDI-SÜSTEEMID

3.1. KAHE MUUTUJAGA LINEAARVÖRRAND

Vörrandid

$$2x+3=5, \quad 4x-5=2x+9, \quad \frac{2}{x} = \frac{3}{x-1}$$

on ühe muutujaga vörrandid. Muutujaks on neis x . Vörrandis võib olla ka rohkem kui üks muutuja.

Näiteid. 1) $x+y=5$ on kahe muutujaga vörrand.

2) $3z^2-x=3+z$ on kahe muutujaga vörrand.

3) $x+y=3+2z$ on kolme muutujaga vörrand.

Järgnevalt õpime lähemalt tundma kahe muutujaga lineaarvörrandeid, s. o. vörrandeid, milles pärast võimalikke lihtsustusi on ainult kolm liiget: liikmed, milles muutujad on esimeses astmes, ja muutujatest vaba liige.

Nende vörrandite üldkuju on

$$ax+by=c,$$

mida nimetatakse kahe muutujaga lineaarvörrandi normaalkujuks. Selles tähistavad tähed x ja y muutujaid, tähed a , b ja c aga antud arve. Viimastest a ja b on muutujate kordajad, c on vaba-

liige. Muutujate kordajaid ja vabaliiget nimetatakse ühiselt **võrrandi kordajateks**. Muutujaid võib tähistada ka teiste tähtedega, näiteks u ja v , s ja t jt. Normaalkujuline võrrand kirjutatakse ikka nii, et selles on muutujad tähestikulises järjekorras. Normaalkujulised kahe muutujaga lineaarvõrrandid on näiteks:

$$2x + 3y = 4; \text{ selles } a=2, b=3, c=4;$$

$$3u - 2v = -4,3; \text{ selles } a=3, b=-2, c=-4,3.$$

Kahe muutujaga võrrandil on samad põhiomadused, mis on ühe muutujaga võrrandilgi. Need põhiomadused võimaldavad teisendada mittenormaalkujulise võrrandi normaalkujuliseks.

Näide. Teisendame normaalkujuliseks võrrandi

$$\frac{3,8 - 4,7y}{3} - \frac{x - y}{6} = 0,3y.$$

Kaotame võrrandist harilikud murrud. Selleks korrutame võrrandi mõlemad pooled 6-ga. Saame:

$$\frac{3,8 - 4,7y}{3} - \frac{x - y}{6} = 0,3y \cdot 6,$$

$$7,6 - 9,4y - x + y = 1,8y.$$

Viime kõik muutujaid sisaldavad liikmed võrrandi vasakule poolele ja vabaliikmed paremale poolele ning koondame:

$$-9,4y - x + y - 1,8y = -7,6,$$

$$-x - 10,2y = -7,6.$$

Saadud võrrand ongi normaalkujuline. Kui aga soovitakse teisendada võrrandi kordajad täisarvudeks, nii et esimene neist oleks positiivne, siis tuleb võrrandi mõlemat poolt korrutada veel sobiva teguriga, antud juhul (-5) -ga. Nii saame

$$5x + 51y = 38.$$

109. Missugused on võrrandi põhiomadused?

110. Lahenda järgmised võrrandid.

$$1) 2x + 7 = 6x - 15$$

$$2) 3 - 4(2 - x) = 5(2x - 3)$$

$$3) \frac{2}{x} = \frac{3}{x-1}$$

$$4) 2 - \frac{5}{3x-2} = \frac{x}{3x-2}$$

111. Teisenda normaalkujuliseks järgmised võrrandid:

$$1) 2(x - y) = 8x - 4(3 + x)$$

$$2) 5x - (5 - 9y) + 8 = 2x - (5 + 6y) - 4$$

$$3) \frac{s-9}{3} - \frac{3s-4}{10} - \frac{t-s}{15} + 9$$

$$4) \frac{u-0,78}{2} + \frac{3v-0,4u}{5} = 1,2u$$

3.2. KAHE MUUTUJAGA LINEAARVÖRRANDI LAHEND

Kui võrrandi muutujate kohta midagi pole öeldud, siis nende väärtuste hulgaks on ratsionaalarvude hulk Q . Eeldame näiteks, et võrrandis

$$2x + 5y = 8$$

$x \in Q$ ja $y \in Q$. Kui võrrandis asendame muutujad nende mingi väärtuspaariga, siis saame õige või väära võrduse. Asendades muutujad näiteks väärtustega $x=2$ ja $y=1$, saame võrrandi vasaku poole väärtuseks

$$2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 9,$$

kuna parem pool on 8. Nii saime võrrandist väära võrduse $9=8$. Kui aga asendada muutujad väärtustega $x=-1$ ja $y=2$, saame võrrandi vasaku poole väärtuseks

$$2 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 = 8,$$

seega võrrand muutub õigeks võrduseks $8=8$.

Muutujate väärtused, millega neid asendame võrrandis, moodustavad järjestatud arvupaari, milles esimesel kohal olev arv on normaalkujulises võrrandis esikohal oleva muutuja väärtus, ja teisel kohal olev arv on võrrandis teisel kohal oleva muutuja väärtus. Näiteks, kui ülalantud võrrandis asendame muutujad paari $(2; 1)$ arvudega, siis $x=2$ ja $y=1$. Nagu nägime, ei rahuldanud see arvupaar võrrandit, sest asendamisel saime väära võrduse. Seevastu järjestatud arvupaar $(-1; 2)$ rahuldab võrrandit, sest asendamisel saime õige võrduse $8=8$.

Järjestatud arvupaari, mis rahuldab kahe muutujaga võrrandit, nimetatakse selle võrrandi lahendiks.

Kahe muutujaga lineaarvõrrandi lahendite leidmiseks avaldatakse üks muutuja teise funktsioonina. Kumb muutuja avaldada, see on lahendaja otsustada. Pärast ühe muutuja avaldamist teise funktsioonina anname argumendile suvaliselt väärtusi ja arvutame funktsiooni vastavad väärtused. Argumendi ja funktsiooni, s. t. võrrandi muutujate vastavate väärtuste paarid ongi antud võrrandi lahenditeks.

Näide. Leiame võrrandi

$$3x - 2y = 4$$

lahendid, kui $x \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Lahenduseks avaldame muutuja y muutuja x funktsioonina ja arvutame x antud väärtustele vastavad y väärtused:

$$y = \frac{3x-4}{2}; \text{ kui } x = -1, \text{ siis } y = \frac{3 \cdot (-1) - 4}{2} = -3,5;$$

$$\text{kui } x = 0, \text{ siis } y = \frac{3 \cdot 0 - 4}{2} = -2;$$

.

Arvutust võib korraldada ka järgmises tabelis.

x	-1	0	1	2	3	4
$3x$	-3	0	3	6	9	12
$3x-4$	-7	-4	-1	2	5	8
$y = \frac{3x-4}{2}$	-3,5	-2	-0,5	1	2,5	4

Tabeli esimeses reas on muutuja x väärtuste hulk X ja viimasel reas muutuja y väärtuste hulk Y . Nende kohakuti olevad väärtused moodustavad järjestatud arvupaaride hulga

$L = \{(-1; -3,5), (0; -2), (1; -0,5), (2; 1), (3; 2,5), (4; 4)\}$, mis on võrrandi $3x - 2y = 4$ lahendite hulgaks muutuja x antud väärtuste puhul (joon. 45). Sama lahendite hulga saaksime, kui oleks antud muutuja y väärtuste hulk

$Y = \{-3,5; -2; -0,5; 1; 2,5; 4\}$, sest võrrandiga $3x - 2y = 4$ määratud vastavus hulkade X ja Y elementide vahel on üksühene.

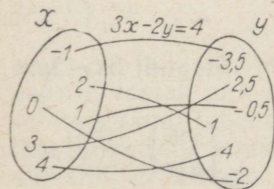
Võrrandi $3x - 2y = 4$ lahendite hulka, kui muutuja $x \in X$, kirjutatakse lühidalt kujul

$$L = \{(x; y) | x \in X \text{ ja } 3x - 2y = 4\}.$$

Sama lahendite hulga võime kirjutada ka kujul

$$L = \{(x; y) | y \in Y \text{ ja } 3x - 2y = 4\}.$$

Muutuja x väärtuste hulk ei pea olema piiratud antud kuue arvuga.



Joon. 45

Selleks hulgaks võib olla kogu ratsionaalarvude hulk Q . Et hulk Q on lõpmatu hulk, siis saame ka teisele muutujale lõpmatu hulga ratsionaalarvulisi väärtusi. Kõik muutujate vastavate väärtuste paarid aga on antud võrrandi lahenditeks. Seega võib kahe muutujaga lineaarvõrrandil olla lõpmatu hulk lahendeid. Kui muutujate väärtusteks võivad olla suvalised arvud ratsionaalarvude hulgast Q , siis seda hulka võrrandi lahendite hulga tähtsises tavaliselt ei näidata. Võrrandi $3x - 2y = 4$ lahendite hulka kirjutatakse siis nii:

$$L = \{(x; y) \mid 3x - 2y = 4\}.$$

See kirjutus tähendab seega kõiki neid ratsionaalarvude järjestatud paare, mille korral saame võrrandist $3x - 2y = 4$ õige lause. On ilmne, et varem vaadeldud lahendite hulk

$$\{(x; y) \mid x \in X \text{ ja } 3x - 2y = 4\} \subset \{(x; y) \mid 3x - 2y = 4\}, \text{ sest } X \subset Q.$$

Kui võrrand on koostatud mingi ülesande järgi, siis tema lahendite hulk on sageli lõplik.

N ä i d e. Kuidas on võimalik maksta 23 kop., kasutades ainult 2- ja 3-kopikalisi?

Lahenduseks oletame, et 2-kopikalisi on x ja 3-kopikalisi y . Siis saame võrrandi

$$2x + 3y = 23,$$

millest avaldame näiteks muutuja x :

$$x = \frac{23 - 3y}{2}.$$

Ülesande sisu järgi võivad muutujate väärtusteks olla ainult naturaalarvud. Proovimise teel leiame, et sobivateks arvupaarideks on

$$\begin{cases} x=10 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}.$$

Seega on antud summat võimalik makssta neljal erineval viisil. Saadud võrrandil on lõplik hulk lahendeid:

$$\{(x; y) \mid x \in N, y \in N \text{ ja } 2x + 3y = 23\} = \{(10; 1), (7; 3), (4; 5), (1; 7)\}.$$

112. Näita, et arvupaarid $(4; 0)$, $(-6; 4)$, $(-11; 6)$ ja $(0; 1\frac{3}{5})$ on võrrandi $2x + 5y = 8$ lahenditeks.

113. Missugused järgmistest arvupaaridest on võrrandi $3x - 2y = 5$ lahendid?

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=7 \\ y=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

114. Missugused arvupaarid hulgast:

$$\left\{ (1; 0), (2; -2), (0; 1), (1; 1), \left(\frac{1}{2}; 1 \right) \right\}$$

on võrrandi $x + \frac{1}{2}y = 1$ lahendiks?

115. Avalda võrrandist muutuja x .

$$1) 2x - 3y = 7 \quad 2) -3x + 3y = 11 \quad 3) \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = -\frac{1}{4}$$

116. Avalda võrrandist muutuja y .

$$1) 6x - 7y = 1 \quad 2) 3x + 2y = 4 \quad 3) -0,8x + 0,4y = 0,5$$

117. Leia iga võrrandi lahendite hulk, kui muutuja x väärtuste hulk on $\{0; -1; 1,5\}$.

$$1) 2x - y = 1 \quad 2) 4x - 3y = 11 \quad 3) x + 2y = \frac{3}{4}$$

118. Leia iga võrrandi lahendite hulk, kui muutuja y väärtuste hulk on $\left\{ -2; -1; 0; \frac{1}{2} \right\}$.

$$1) x - 3y = 8 \quad 2) 2x + 3y = 1 \quad 3) \frac{1}{2}x - y = \frac{3}{4}$$

119. Leia kummagi võrrandi viis suvalist lahendit.

$$1) 2x - 1,2y = 1 \quad 2) 4x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}$$

120. Kuidas on võimalik maksta 18 kop., kasutades ainult 2- ja 5-kopikalisi?

3.3. KAHE MUUTUJAGA LINEAARVÖRRANDI GRAAFIK

Kahe muutujaga lineaarvõrrandi

$$ax + by = c$$

lahendite hulk on teatav järjestatud arvupaaride hulk. Iga arvupaarile vastab aga koordinaatteljestikus üks punkt. Seega vastab selle võrrandi lahendite hulgale koordinaatteljestikus teatav punktide hulk. Seda punktide hulka nimetame **kahe muutujaga lineaarvõrrandi graafikuks**. Et selgitada, mis on kahe muutujaga lineaar-

võrrandi graafikuks, avaldame antud võrrandist ühe muutuja, näiteks y teise muutuja x funktsioonina:

$$ax + by = c \Rightarrow by = -ax + c \Rightarrow y = \frac{-ax + c}{b} \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Tulemusest nähtub, et võrrandi

$$ax + by = c$$

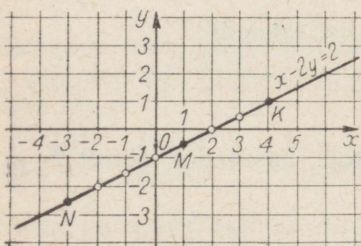
muutuja y on muutuja x lineaarfunktsioon, kus argumenti kordaja on $-\frac{a}{b}$ ja vabaliige $\frac{c}{b}$. Et lineaarfunktsiooni graafikuks on sirgjoon, siis ka

kahe muutujaga lineaarvõrrandi graafikuks on sirgjoon.

Sellel sirgel asetsevad kõik need punktid, mille koordinaadid rahuldavad antud võrrandit. Näiteks võrrandit $x - 2y = 2$ rahuldavad arvupaarid

$$(-2; -2), (-1; -1,5), (0; -2), (2; 0), (3; 0,5)$$

on koordinaatideks joonisel 46 ringikestega märgitud punktidele, mis asetsevad kõik ühel ja samal sirgel. Vastupidi, võttes sellel sirgel suvalise punkti, näiteks $M(1; -0,5)$, ja paigutades selle koordinaadid antud võrrandisse, näeme, et võrrand on rahuldatud: $1 - 2 \cdot (-0,5) = 2$. Kerge on kontrollida, et ka punktide K ja N koordinaadid rahuldavad antud võrrandit.



Joon. 46

Kahe muutujaga lineaarvõrrandi graafikut, nagu lineaarfunktsiooni graafikutki, on kõige lihtsam joonestada kahe punkti järgi. Sageli on otstarbekas nendeks punktideks võtta otsitava sirge ja koordinaattelgede lõikepunktid. Neid punkte on kerge leida, sest koordinaatteljel asetseva punkti üks koordinaat on 0. Juhul, kui sirge ja koordinaattelgede lõikepunktid on lähestikku või teineteisest väga kaugel, tuleb muidugi kasutada sirge joonestamiseks teisi punkte.

N ä i d e. Joonestame võrrandi $3x + 4y = 8$ graafiku.

Leiame esmalt punkti, kus sirge lõikab x -telge. Selle punkti ordinaat $y = 0$. Abstsissi leiame võrrandist

$$3x + 4 \cdot 0 = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

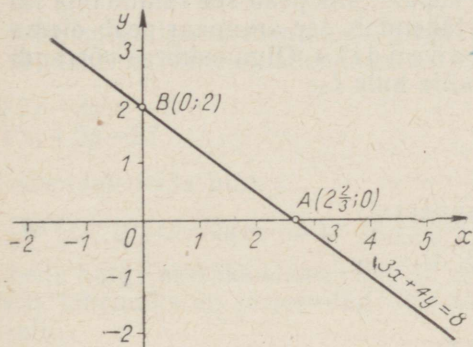
See punkt on $A(2\frac{2}{3}; 0)$.

Leiame nüüd punkti, kus sirge lõikab y -telge. Selle punkti abstsiss $x=0$. Ordinaadi leiame võrrandist

$$3 \cdot 0 + 4y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{4} = 2.$$

Otsitav punkt on $B(0; 2)$.

Punktide A ja B järgi joonestamegi sirge, mis on antud võrrandi graafikuks (joon. 47).



Joon. 47

121. Missugused järgmistest punktidest asetsevad võrrandi $2x - 3y = 5$ graafikul?

$$(0; 0) \quad (1; -1) \quad (4; 1) \quad (0,3; 2) \quad \left(0; -1\frac{2}{3}\right) \quad \left(-1; -2\frac{2}{3}\right)$$

122. Leia punktid, kus järgmiste võrrandite graafikud lõikavad koordinaattelgi.

$$1) 2x - 5y = 6 \quad 2) -3x + 2y = 8 \quad 3) 4x + 5y = 15$$

123. Joonesta millimeetripaberile võrrandi $x + y = 2$ graafik ja leia jooniselt antud võrrandi viis lahendit.

124. Esita ühes ja samas teljestikus võrrandite $x - 2y = 2$ ja $x + 2y = 4$ graafikud. Leia jooniselt nende võrrandite ühine lahend.

125. Kujuta graafiliselt iga järgmine hulk.

$$1) S = \{(x; y) | x - y = 3\} \quad 2) T = \{(x; y) | x + y = -1\}$$

3.4. KAHE MUUTUJAGA LINEARNE VÖRRANDISÜSTEEM

Näide. Leiame kaks arvu, mis täidavad järgmisi tingimusi: kui esimest arvu korrutada kahega ja tulemusest lahutada teine arv, siis saab 3; kui aga esimese arvuga liita kahekordne teine arv, siis saab 4.

Ülesande lahendamiseks tähistame esimese arvu tähega x ja teise tähega y . Ülesandes antud esimese tingimuse kohaselt saame siis võrrandi

$$2x - y = 3$$

ja teise tingimuse kohaselt võrrandi

$$x + 2y = 4.$$

Kui leidub ülesandes nõutud arvupaar, siis peab see rahuldama nii esimest kui ka teist võrrandit, tähendab, see arvupaar peab olema nende võrrandite ühiseks lahendiks. Olgu esimese võrrandi lahendite hulk L_1 ja teise lahendite hulk L_2 :

$$L_1 = \{(x; y) \mid 2x - y = 3\};$$

$$L_2 = \{(x; y) \mid x + 2y = 4\}.$$

Hulka L_1 kuuluvad näiteks arvupaarid

$$(0; -3), (1; -1), (2; 1) \text{ ja } (3; 3).$$

hulka L_2 aga arvupaarid

$$(0; 2), (1; 1,5), (2; 1) \text{ ja } (3; 0,5).$$

Võrrandite ühine lahend peab kuuluma hulka

$$L = L_1 \cap L_2,$$

sest hulkade ühisosa sisaldab hulkade kõiki ühiseid elemente. Seda hulkade ühisosa saame avaldada kujul

$$L = \{(x; y) \mid 2x - y = 3 \text{ ja } x + 2y = 4\},$$

kus sõna «ja» ütleb, et ühisosasse kuuluv arvupaar peab kuuluma nii esimese kui ka teise võrrandiga määratud arvupaaride hulka. Seda tingimust, et arvupaar peab rahuldama nii võrrandit $2x - y = 3$ kui ka võrrandit $x + 2y = 4$ kirjutatakse lühidalt kujul

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \quad (1)$$

ja nimetatakse **võrrandisüsteemiks**. Et selle süsteemi mõlemad võrrandid on lineaarsed, siis süsteemi nimetatakse **kahe muutujaga lineaarseks võrrandisüsteemiks**. Kooskõlas sellega nimetatakse hulga

$$L = \{(x; y) \mid 2x - y = 3 \text{ ja } x + 2y = 4\}$$

elemente võrrandisüsteemi (1) lahenditeks ja selle hulga leidmist võrrandisüsteemi lahendamiseks. Kerge on kontrollida, et süsteemi üheks lahendiks on arvupaar (2; 1). Hiljem selgub, et see on ka ainus lahend. Seega

$$\{(x; y) | 2x - y = 3 \text{ ja } x + 2y = 4\} = \{(2; 1)\}.$$

Üldkujul kirjutame kahe muutujaga lineaarse võrrandisüsteemi järgmiselt:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \quad (2)$$

Siin a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 ja c_2 on antud arvud, x ja y muutujad. Lahendada süsteem (2) tähendab siis leida hulk

$$L = \{(x; y) | a_1x + b_1y = c_1 \text{ ja } a_2x + b_2y = c_2\}.$$

Selle hulga iga element, s. o. iga järjestatud arvupaar on süsteemi (2) lahend. Näiteks lahendada süsteem

$$\begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 3x + 2y = 27 \end{cases} \quad (3)$$

tähendab leida hulk

$$L = \{(x; y) | 2x - 3y = -8 \text{ ja } 3x + 2y = 27\}.$$

Selle hulga ainsaks elemendiks on arvupaar (5; 6). Seega süsteemi (3) lahendiks on järjestatud arvupaar (5; 6) ehk, teisiti kirjutatult,

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 6. \end{cases}$$

Kuidas leida süsteemi lahendit, see selgub veidi hiljem.

126. On antud arvupaarid (4; 2), (1; 3), (0,2; 1), (3; -1), (1; 1). Kontrolli, kas nende seas leidub järgmiste võrrandisüsteemide lahendeid:

$$1) \begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ x - y = 4 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 10x - y = 1 \end{cases}$$

127. Selgita, missugused järgmistest lausetest on õiged:

- 1) $(3; 1) \in \{(x; y) | 2x + 4y = 10\}$
- 2) $(-1; 4) \in \{(x; y) | x + y = 3 \text{ ja } x - y = 2\}$
- 3) $(5; -5) \in \{(x; y) | x + y = 0 \text{ ja } x - y = 10\}$
- 4) $(-3; 2) \in \{(x; y) | x^2 + y = 11 \text{ ja } x^2 - y = 7\}$
- 5) $(3; -1) \in \{(x; y) | x + y^2 = 4 \text{ ja } x - y^2 = 3\}$

128. Leia hulk

$$A = \{(x; y) | 4x - 3y = -10 \text{ ja } x + y = 1\},$$

kui on teada, et $x \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}$. Mis on võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 4x - 3y = -10 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

lahendiks?

3.5. KAHE MUUTUJAGA LINEAARSE VÖRRANDISÜSTEEMI GRAAFILINE LAHENDAMINE

Vaadeldud võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

ühiks lahendiks on arvupaar $(2; 1)$, s. t.

$$(2; 1) \in L_1 \cap L_2,$$

kus

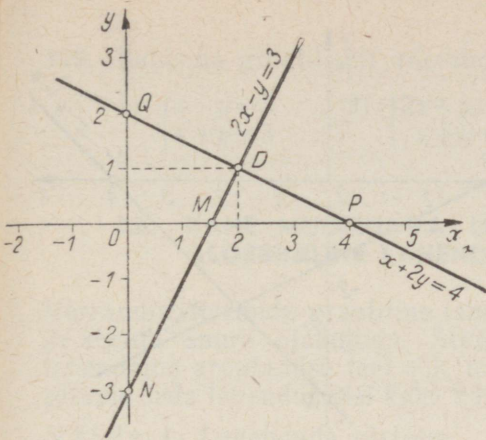
$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x; y) | 2x - y = 3\}, \\ L_2 &= \{(x; y) | x + 2y = 4\}. \end{aligned}$$

Selgitame, kuidas leida hulga $L_1 \cap L_2$ elemente ja kui palju neid on. Selleks joonestame ühes ja samas teljestikus antud süsteemi võrrandite graafikud, s. o. kaks sirget. Esimene sirge läbib punkte $M(1,5; 0)$ ja $N(0; -3)$, teine punkte $P(4; 0)$ ja $Q(0; 2)$. Nende punktidega on sirged üheselt määratud (joon. 48). Võrrandit $2x - y = 3$ rahuldavad kõik sirge MN punktide koordinaadid ja ainult need, võrrandit $x + 2y = 4$ kõik sirge PQ punktide koordinaadid ja ainult need. Võrrandite ühiseks lahendiks on siis nende sirgete ühise punkti D koordinaadid $x = 2$ ja $y = 1$. Et kahel lõikuval sirgel on ainult üks ühine punkt, siis on antud võrrandisüsteemil ainult üks lahend.

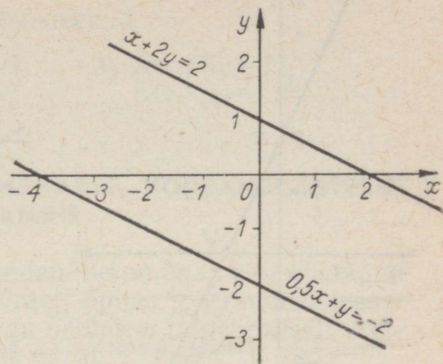
Võib juhtuda, et süsteemi võrrandite graafikuteks on kaks paralleelset sirget. Et sel juhul sirgetel ühist punkti pole, siis võrrandite lahendite hulkade ühisosa on tühi hulk ja võrrandisüsteemil ei ole lahendit. Süsteemi nimetatakse sel juhul **vastuoluliseks**.

Näiteks süsteem

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 0,5x + y = -2 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$$



Joon. 48



Joon. 49

on vastuoluline ja temal lahendit pole, nagu see selgub ka jooniselt 49. Siin võrrandite lahendite hulkade ühisosa

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset.$$

Süsteemi võrrandite graafikud võivad ka ühtida. Ühe sirge kõik punktid kuuluvad siis ka teisele sirgele. Sel korral on võrrandisüsteemil lõpmatu hulk lahendeid: ühe võrrandi iga lahend on ka teise võrrandi lahendiks. Selline võrrandisüsteem on näiteks süsteem

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x + 1,5y = 3. \end{cases}$$

Tõepoolest, esimese võrrandi graafikuks on sirge, mis lõikab koordinaattelgi punktides $M(1; 0)$ ja $N(0; 2)$, mida läbib ka teise võrrandiga määratud sirge. Täheleb, sirged ühtivad (joon. 50). Kui esimese võrrandi lahendite hulk on L_1 ja teise L_2 , siis antud juhul

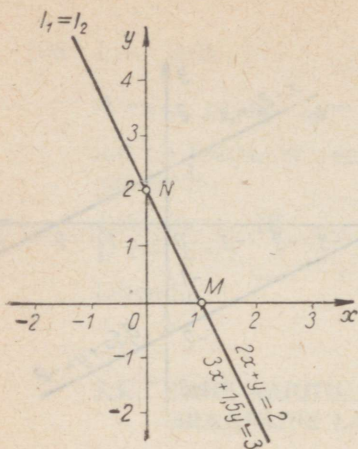
$$L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2.$$

Kokkuvõttes võime öelda, et

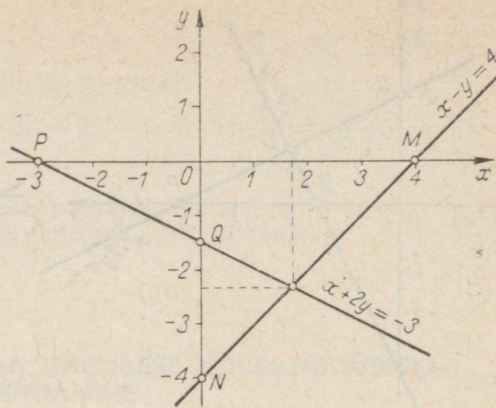
võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

on kas üksainus lahend, tal pole ühtegi lahendit või on tal lõpmatu hulk lahendeid vastavalt sellele, kas süsteemi võrrandite graafikud lõikuvad, on paralleelsed või ühtivad.



Joon. 50



Joon. 51

Võrrandisüsteemi lahendi leidmist jooniselt, mis kujutab süsteemi võrrandite graafikuid, nimetatakse süsteemi **graafiliseks lahendamiseks**. Kuidas toimub süsteemi graafiline lahendamine, see selgus juba eespool. Tuleb veel märkida, et graafiliselt leitud lahend on sageli ligikaudne, sest sirgete joonestamine ja punkti koordinaatide lugemine graafikult on seotud vigadega.

N ä i d e. Lahendada graafiliselt võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + 2y = -3. \end{cases}$$

L a h e n d u s. 1) Võrrandi $x - y = 4$ graafik lõikab koordinaattelgi punktides $M(4; 0)$ ja $N(0; -4)$.

2) Võrrandi $x + 2y = -3$ graafik lõikab koordinaattelgi punktides $P(-3; 0)$ ja $Q(0; -1,5)$.

3) Jooniselt 51 loeme, et $MN \cap PQ = (1,7; -2,3)$.

K o n t r o l l. Süsteemi lahendit tuleb alati kontrollida mõlema võrrandiga. Selleks tähistame esimese võrrandi vasaku poole tähega V_1 ja parema poole tähega P_1 , teise võrrandi pooled aga vastavalt tähtedega V_2 ja P_2 , arvutame nende poolte väärtused muutujate leitud väärtustel ja võrdleme tulemusi:

$$V_1 = 1,7 - (-2,3) = 1,7 + 2,3 = 4; \quad V_1 = P_1.$$

$$V_2 = 1,7 + 2 \cdot (-2,3) = 1,7 - 4,6 = -2,9; \quad V_2 \approx P_2.$$

Kontroll näitab, et teine võrrand pole täpselt rahuldatud. Graafiku täpsuse piires võime lugeda süsteemi lahendiks arvupaari

$$\begin{cases} x = 1,7 \\ y = -2,3. \end{cases}$$

129. Lahenda graafiliselt võrrandisüsteemid.

$$1) \begin{cases} x-y=5 \\ x+y=3 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x-y=2 \\ x+y=1 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 6x+5y=12 \\ 3x-3y=8 \end{cases}$$

3.6. KAHE MUUTUJAGA LINEAARSE VÖRRANDISÜSTEEMI ALGEBRALINE LAHENDAMINE

Võrrandisüsteemide graafiline lahendamine on enamasti ebatäpne ja seotud suure ajakuluga. Seepärast õpime võrrandisüsteeme lahendada arvutamise teel ehk, nagu öeldakse, algebraliselt. Selgitame seda lahendusviisi kahe näite varal.

Näide 1. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} 4x-2y=9 \\ 2x+2y=3. \end{cases}$$

Lahendamiseks tuletame antud süsteemist võrrandi, milles oleks ainult üks muutuja. Antud süsteemi võrrandites on muutuja y kordajad teineteise vastandruvud -2 ja 2 . See võimaldab muutujat y sellest süsteemist kõrvaldada ehk **elimineerida**. Selleks tuleb vaid võrrandite vastavad pooled liita:

$$\begin{array}{r} 4x-2y=9 \\ 2x+2y=3 \\ \hline 6x \quad =12 \Rightarrow x=2. \end{array}$$

Teades muutuja x väärtust, asendame süsteemi ühes võrrandis, näiteks teises, selle muutuja tema väärtusega 2 .

Saame:

$$2 \cdot 2 + 2y = 3,$$

mis on jällegi ühe muutujaga võrrand. Sellest leiame, et $y = -0,5$.

Muutuja y võiksime leida ka sel teel, et võrrandite vastavate poolte liitmise teel elimineerime süsteemist muutuja x . Selleks on aga enne vaja muuta x kordajad võrrandites teineteise vastandruvudeks. Seda saab teha, kui korrutame süsteemi teise võrrandi mõlemad pooli arvuga -2 . Kirjalikult vormistame töö nii:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 4x-2y=9 \\ 2x+2y=3 \end{cases} \cdot (-2) \Rightarrow \begin{cases} 4x-2y=9 \\ -4x-4y=-6 \end{cases} \\ \hline -6y=3 \Rightarrow y=-0,5. \end{array}$$

Kontrollime muutujate leitud väärtusi $x=2$ ja $y=-0,5$. Seejuures peame meeles, et kontrollida tuleb alati lähtesüsteemi mõlema võrrandi järgi. Saame:

$$V_1 = 4 \cdot 2 - 2 \cdot (-0,5) = 8 + 1 = 9; \quad V_1 = P_1.$$

$$V_2 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-0,5) = 4 - 1 = 3; \quad V_2 = P_2.$$

$$\text{Vastus. } \begin{cases} x=2 \\ y=-0,5. \end{cases}$$

Näide 2. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} 6x+7y=-8 \\ 8x+9y=-10. \end{cases}$$

Elimineerime süsteemist näiteks muutuja x . Selleks korrutame esimese võrrandi pooled arvuga -4 ja teise võrrandi pooled arvuga 3 .

Saame:

$$\begin{cases} 6x+7y=-8 \\ 8x+9y=-10 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (-4) \\ \cdot 3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} -24x-28y=32 \\ 24x+27y=-30 \end{cases}$$

$$-y=2 \Rightarrow y=-2.$$

Muutuja x väärtuse arvutamiseks asendame näiteks esimeses võrrandis muutuja y tema väärtusega -2 . Nii saame:

$$6x+7 \cdot (-2) = -8 \Rightarrow 6x-14 = -8 \Rightarrow 6x=6 \Rightarrow x=1.$$

Kontroll.

$$V_1 = 6 \cdot 1 + 7 \cdot (-2) = 6 - 14 = -8; \quad V_1 = P_1.$$

$$V_2 = 8 \cdot 1 + 9 \cdot (-2) = 8 - 18 = -10; \quad V_2 = P_2.$$

Vastus. Süsteemi lahend on $(1; -2)$.

Märgime, et iga ülesannet võrrandisüsteemi lahendamiseks saab sõnastada ka hulga leidmise ülesandena. Nii võiksime viimase näite sõnastada ka järgmiselt:

$$\text{leida hulk } A = \{(x; y) | 6x+7y = -8 \text{ ja } 8x+9y = -10\}.$$

Vastus võiks olla siis kujul: $A = \{(1; -2)\}$.

130. Lahenda algebraliselt järgmised võrrandisüsteemid:

$$1) \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-9 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x-2y=6 \\ 3x+2y=8 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3x+2y=9 \\ -3x-5y=-9 \end{cases}$$

131. Leia järgmised hulgad:

$$1) A = \{(x; y) | 7x-3y=15 \text{ ja } 5x+6y=27\}$$

$$2) B = \{(x; y) | 4x+3y=6 \text{ ja } 2x+y=4\}$$

$$3) C = \{(x; y) | x+2y=11 \text{ ja } 5x-3y=3\}$$

3.7. KAHE MUUTUJAGA LINEAARSE VÖRRANDISÜSTEEMI LAHENDIVALEMID

Tuletame valemid kahe muutujaga lineaarse võrrandisüsteemi lahendi arvutamiseks. Selleks lahendame üldkujulise süsteemi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \quad (1)$$

milles muutujate kordajad on nullist erinevad ja vabaliikmed mistahes antud arvud. Tuletame süsteemist võrrandi, milles pole teist muutujat y . Selleks korrutame esimese võrrandi pooled arvuga b_2 ja teise võrrandi pooled arvuga $-b_1$ ning liidame võrrandite vastavad pooled:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \begin{matrix} \cdot b_2 \\ \cdot (-b_1) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ -a_2b_1x - b_1b_2y = -c_2b_1 \end{cases}$$

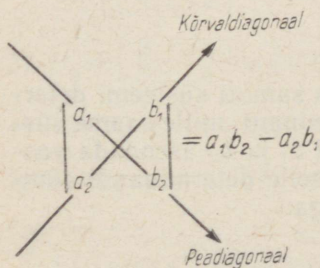
$$a_1b_2x - a_2b_1x = c_1b_2 - c_2b_1 \Rightarrow (a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1.$$

Saadud ühe muutujaga võrrandis on nii x kordaja kui ka vabaliige korrutiste vahe. Selliseid korrutiste vahesid on hakatud kirjutama püstkriipsude vahele tabelina järgmiselt:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Niisuguse tabelina kirjutatud korrutiste vahet nimetatakse **kahe-realisteks determinandiks**. Determinandi kirjutamisel tuleb nn. **peadiagonaalile** (mis läheb vasakult ülevalt paremale alla) kirjutada vahe esimese liikme tegurid ja **kõrvaldiagonaalile** (mis läheb vasakult alt paremale üles) vahe teise liikme tegurid (joon. 52). Niisiis,

determinant võrdub peadiagonaali elementide ja kõrvaldiagonaali elementide korrutiste vahega.



Joon. 52

$$\text{Näiteks: } 1) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = 14 - 15 = -1;$$

$$2) \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-2) - (-4) \cdot (-3) = -12 - 12 = -24.$$

Kirjutame nüüd võrrandisüsteemi lahendamisel saadud ühe muutu-
jaga võrrandi determinantide abil:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Neid determinante on kerge meeles pidada: x kordajaks on süs-
teemi (1) muutujate kordajatest koostatud determinant, kusjuures
nende kordajate paigutus determinantis on samasugune nagu
antud süsteemis. Seda determinantit nimetatakse **süsteemi deter-
minandiks** ja tähistatakse tähega D .

Niisiis,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Saadud võrrandi vabaliikmeks on determinant, mille saame süs-
teemi determinantist, kui selles x kordajad a_1 ja a_2 asendada vas-
tava võrrandi vabaliikmetega c_1 ja c_2 . Tähistame selle determinantid
sümboliga D_x . Kasutades determinantide tähiseid, saame x leid-
miseks tuletatud võrrandi kirjutada väga lühidalt:

$$D \cdot x = D_x.$$

Kui süsteemi determinant $D \neq 0$, siis muutuja x arvutamiseks
saame järgmise valemi:

$$x = \frac{D_x}{D}.$$

Tuletame valemi muutuja y arvutamiseks. Selleks elimineerime
süsteemist (1) muutuja x , korrutades esimese võrrandi pooled
arvuga $-a_2$, teise võrrandi pooled arvuga a_1 ja liites saadud võr-
randid. Tee need teisendused ja näita, et nii saame võrrandi

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) y = a_1 c_2 - a_2 c_1.$$

Kirjutame ka selle võrrandi determinantide abil:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Saadud võrrandis on muutuja y kordajaks samuti süsteemi deter-
minant D . Võrrandi vabaliikmeks on determinant, mille saame süs-
teemi determinantist, kui selles y kordajad b_1 ja b_2 asendada vas-
tavalt vabaliikmetega c_1 ja c_2 . Tähistame selle determinantid süm-
boliga D_y . Võrrand on siis järgmise kujuga:

$$D \cdot y = D_y.$$

Kui süsteemi determinant $D \neq 0$, siis muutuja y arvutamiseks saame valemi

$$y = \frac{D_y}{D}.$$

Kokkuvõttes saame võrrandisüsteemi lahendi arvutamiseks järgmise, nn. Crameri¹ reegli:

kui võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

determinant $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, siis süsteemi lahendiks on arvupaar

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ ja } y = \frac{D_y}{D}, \text{ kus } D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ ja } D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Kui süsteemi determinant $D = 0$, siis võrrandisüsteemil on lõpmatu hulk lahendeid või lahendid puuduvad. Neid juhtumeid meie ei vaatle.

Crameri reegli rakendamisel arvutame esmalt süsteemi determinandi D . Kui $D \neq 0$, siis arvutame determinandid D_x ja D_y ning nende põhjal x ja y . Võib muidugi arvutada valemi järgi ainult ühe muutuja väärtuse ja siis süsteemi ühest võrrandist teise muutuja väärtuse.

Näide 1. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 5x - 2y = 4. \end{cases}$$

$$1) D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 15 = -19 \neq 0.$$

$$2) D_x = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -26 - 12 = -38.$$

$$3) D_y = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 65 = -57.$$

$$4) x = D_x : D = (-38) : (-19) = 2.$$

$$5) y = D_y : D = (-57) : (-19) = 3.$$

¹ Cramer, Gabriel, šveitsi matemaatik, elas a. 1704—1752.

Kontroll. $V_1 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$; $V_1 = P_1$.
 $V_2 = 5 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 4$; $V_2 = P_2$.

Vastus. Süsteemi lahend on (2; 3).

Näide 2. Leidä hulk

$$L = \{(u; v) \mid -10u + 7v = 10 \text{ ja } 3u - 2v = -2,9\}.$$

$$1) D = \begin{vmatrix} -10 & 7 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 20 - 21 = -1 \neq 0.$$

$$2) D_u = \begin{vmatrix} 10 & 7 \\ -2,9 & -2 \end{vmatrix} = -20 + 20,3 = 0,3.$$

$$3) D_v = \begin{vmatrix} -10 & 10 \\ 3 & -2,9 \end{vmatrix} = 29 - 30 = -1.$$

$$4) u = 0,3 : (-1) = -0,3.$$

$$5) v = (-1) : (-1) = 1.$$

Kontrolli leitud lahendi õigsust!

Vastus. $\begin{cases} u = -0,3 \\ v = 1. \end{cases}$

Näide 3.

$$\begin{cases} \frac{1-y}{1-9x} = -1 \\ \frac{x}{2x-10} + \frac{4}{5-x} = \frac{y}{3x-15} \end{cases}$$

Enne determinantide kasutamist tuleb süsteemi võrrandeile anda normaalkuju.

Esimese võrrandi teisendamine:

$$\frac{1-y}{1-9x} = -1 \Rightarrow 1-y = -1+9x \Rightarrow 9x+y=2.$$

Teise võrrandi teisendamine:

$$\frac{x}{2(x-5)} - \frac{4}{x-5} = \frac{y}{3(x-5)} \mid \cdot 6(x-5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 24 = 2y \Rightarrow 3x - 2y = 24.$$

Saime normaalkujulise süsteemi

$$\begin{cases} 9x+y=2 \\ 3x-2y=24. \end{cases}$$

Lahendame selle:

$$1) D = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -18 - 3 = -21.$$

$$2) D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 24 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 24 = -28.$$

$$3) D_y = \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 24 \end{vmatrix} = 216 - 6 = 210.$$

$$4) x = (-28) : (-21) = 1\frac{1}{3}.$$

$$5) y = 210 : (-21) = -10.$$

Kontrolli saadud lahendi õigsust (lähtesüsteemi järgi)!

$$\text{Vastus. } \begin{cases} x = 1\frac{1}{3} \\ y = -10. \end{cases}$$

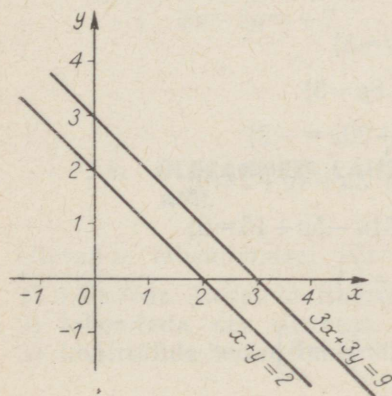
Näide 4. Lahenda süsteem

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 3x+3y=9. \end{cases}$$

$$1) D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0,$$

järelikult antud süsteemil ei ole ühest lahendit. Kui süsteemi teise võrrandi pooli jagada arvuga 3, siis saame süsteemi

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=3, \end{cases}$$



Joon. 53

mis on ilmselt vastuoluline (samade arvude summa ei saa olla kord 2, kord 3): süsteemil pole lahendit. Süsteemi võrrandite graafilisel kujutamisel saame paralleelsete sirgete paari (joon. 53).

132. Kirjuta determinandi tähise abil järgmised avaldised:

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{array}{l} 2 \cdot 3 - 4 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \end{array} & 2) \begin{array}{l} -4 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 \\ 6 \cdot (-2) - 9 \cdot 7 \end{array} & 3) \begin{array}{l} ab - cd \\ 2x + 3y \\ x^2 - y^2 \end{array} \end{array}$$

133. Arvuta järgmised determinandid:

$$\begin{array}{llll} 1) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & 2) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & 3) \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & 4) \begin{vmatrix} 0,7 & 1,2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ 5) \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{5} \end{vmatrix} & 6) \begin{vmatrix} m & 2n \\ m & n \end{vmatrix} & 7) \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & ab \end{vmatrix} & 8) \begin{vmatrix} -5 & x \\ -2 & x \end{vmatrix} \end{array}$$

134. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid:

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} & 2) \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases} & 3) \begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \\ 4) \begin{cases} 5x - y = -1 \\ x + 7y = 7 \end{cases} & 5) \begin{cases} 5x + y = 34 \\ 2x + 19y = -5 \end{cases} & 6) \begin{cases} x - y = 13 \\ 2x - 3y = -29 \end{cases} \\ 7) \begin{cases} -2x + 3y = 40 \\ 3x - 4y = -70 \end{cases} & 8) \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 2y = -13 \end{cases} & 9) \begin{cases} x - 100y = 101 \\ -3x + 2y = -601 \end{cases} \end{array}$$

135. Leia järgmised hulgad:

$$\begin{array}{l} 1) \{(x; y) | 5x - y = 0 \text{ ja } 10x + y = 3\} \\ 2) \{(x; y) | 3x + 4y = 2 \text{ ja } 15x - 8y = 3\} \\ 3) \{(x; y) | 3x - 5y = -3 \text{ ja } 9x + 20y = -2\} \\ 4) \{(u; v) | 15u + 23v + 10 = 0 \text{ ja } 3u + 4v + 2 = 0\} \\ 5) \{(u; v) | 25u - 4v + 1 = 0 \text{ ja } 31u - 5v + 16 = 0\} \\ 6) \{(x; z) | x + z = 8 \text{ ja } \frac{x}{6} + \frac{z}{3} = 2\} \\ 7) \{(x; z) | \frac{x}{2} - \frac{z}{3} = 1 \text{ ja } \frac{x}{4} + \frac{2z}{3} = 8\} \end{array}$$

136. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid:

$$1) \begin{cases} 5(3s+t) - 8(s-6t) = 200 \\ 20(2s-3t) - 13(s-t) = 520 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 1 - 0,3(y-2) = \frac{x+1}{5} \\ \frac{y-3}{4} = \frac{4x+9}{20} - 1,5 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x+3}{2} - \frac{y-2}{3} = 2 \\ \frac{x-1}{4} + \frac{y+1}{3} = 4 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} \frac{2x-y+3}{3} - \frac{x-2y+3}{4} = 4 \\ \frac{3x-4y+3}{4} + \frac{4x-2y-9}{3} = 4 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x+1 = \frac{3x-2y}{5} + \frac{5x-3y}{3} \\ \frac{2x-3y}{3} + \frac{4x-3y}{2} = y+1 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 7 + \frac{x-3y}{4} = 2x - \frac{y+5}{3} \\ \frac{10(x-y) - 4(1-x)}{3} = y \end{cases}$$

137. Leia järgmiste võrrandisüsteemide ligikaudsed lahendid kolme tüvenumbriga. Arvutamisel kasuta lükatit.

$$1) \begin{cases} x+2y=7 \\ 3x-5y=9 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 3,29s-1,12t=5,9 \\ 0,955s+2,07t=-4,5 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 0,37x-1,2y=0,3 \\ 12x+0,5y=0,125 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} \frac{x-0,78}{2} + \frac{3y-0,4x}{5} = 1,2x \\ \frac{3,8-4,7y}{3} - \frac{x-y}{6} = 0,3y \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 9x-2y=7 \\ 5x+9y=11 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \frac{x-y}{3} - \frac{3,2-x}{5} = \frac{4,7x}{15} \\ x=1,87y-1,11 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} -3x+y=1,2 \\ 2x-3y=-7 \end{cases}$$

3.8. ÜLESANNETE LAHENDAMINE VÖRRANDISÜSTEEMI ABIL

Ülesande lahendamisel võrrandisüsteemi abil tuleb

- 1) koostada ülesande tingimuste järgi võrrandisüsteem,
- 2) lahendada see süsteem,
- 3) kontrollida leitud lahendit ülesande teksti järgi

Võrrandisüsteemi koostamiseks ülesande tingimuste järgi pole võimalik anda üldist eeskirja. Eeskuju võrrandisüsteemi koostamiseks annavad järgmised näited.

Näide 1. Pärivoolu liikudes vajab jõelaev 46,8 km pikkuse vahemaa läbimiseks 3 tundi 36 minutit, sama vahemaa läbimiseks vastuvoolu kulub aga 5 tundi 12 minutit. Leida jõe voolu kiirus ja laeva kiirus seisvas vees.

Lahendus. Olgu jõe voolu kiirus $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja laeva kiirus seisvas vees $y \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Pärivoolu liikudes on siis laeva kiirus kalda suhtes $(x+y) \frac{\text{km}}{\text{h}}$, vastuvoolu aga $(y-x) \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kiirusega $(x+y) \frac{\text{km}}{\text{h}}$ liikus laev 3 tundi 36 minutit ehk $3 \frac{36}{60} = 3,6$ tundi. Selle aja jooksul läbis laev $3,6(x+y)$ km, sest tee pikkus on võrdne kiiruse ja aja korrutisega (eeldusel, et liikumine on ühtlane). Ülesande järgi on läbitud tee pikkus 46,8 km. Seega saame võrrandi

$$3,6(x+y) = 46,8.$$

Kiirusega $(y-x) \frac{\text{km}}{\text{h}}$ liikus laev 5 tundi 12 minutit ehk 5,2 tundi. Selle ajaga läbis ta $5,2(y-x)$ km, mis on samuti 46,8 km. Teine võrrand on seega

$$5,2(y-x) = 46,8.$$

Et mõlemas võrrandis on muutujatel x ja y samad väärtused, siis saame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} 3,6(x+y) = 46,8 \\ 5,2(y-x) = 46,8. \end{cases}$$

Süsteemi lihtsustamiseks on siin otstarbekas mitte avada sulgusid, vaid jagada esimese võrrandi pooled arvuga 3,6 ja teise pooled arvuga 5,2. Nii saame lihtsa süsteemi

$$\begin{cases} x+y=13 \\ -x+y=9, \end{cases}$$

millest

$$\begin{cases} x=2 \\ y=11. \end{cases}$$

Kontroll. Tekstülesande lahendit tuleb alati kontrollida ülesande teksti järgi, mitte võrrandisüsteemi järgi, sest viimane võib olla valesti koostatud. Kontrollimisel pole soovitatav kasutada

sama mõttekäiku, mis süsteemi koostamisel, vaid valida selleks mõni teine tee (kui see on võimalik). Antud ülesande korral võiks lahendit kontrollida järgmiselt. Kui jõe voolu kiirus on $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja laeva kiirus seisvas vees on $11 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, siis päri voolu liigub laev kiirusega $13 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja vastuvoolu kiirusega $9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Sel juhul kulub laeval 46,8 km läbimiseks päri voolu $46,8:13=3,6$ tundi ja vastuvoolu $46,8:9=5,2$ tundi. Mõlemad tulemused on ülesande andmetega kooskõlas.

V a s t u s. Jõe voolu kiirus on $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja laeva kiirus seisvas vees $11 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

N ä i d e 2. 2,5 m üht sorti riidet ja 3 m teist sorti riidet maksis enne hinnaalandust kokku 34 rbl. 80 kop. Pärast seda kui esimest sorti riide hinda alandati 10% ja teist 15%, maksis sama ost 30 rbl. 48 kop. Kui palju maksis kummagi sorti riide meetri hind enne hinnaalandust?

L a h e n d u s. Olgu esimest sorti riide meetri hind x rbl. ja teist sorti riide meetri hind y rbl. Siis 2,5 m esimest sorti riidet maksaks $2,5x$ rbl. ja 3 m teist sorti riidet $3y$ rbl. Et need riided maksid kokku 34,80 rbl., siis

$$2,5x + 3y = 34,8.$$

Et esimest sorti riide hinda alandati 10%, siis uus hind on 90% ehk 0,9 endisest. Seega tuleks nüüd 2,5 m esimest sorti riide eest maksta $0,9 \cdot 2,5x = 2,25x$ rbl. Et teist sorti riide hinda alandati 15%, siis uus hind on 85% ehk 0,85 endisest. Seega maksaks nüüd 3 m teist sorti riidet $0,85 \cdot 3y = 2,55y$ rbl. Et kokku maksaksid need riided nüüd 30,48 rbl., siis saame võrrandi

$$2,25x + 2,55y = 30,48.$$

Otsitavad x ja y peavad rahuldama nii üht kui teist saadud võrrandit, tähendab, nad on võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2,5x + 3y = 34,8 \\ 2,25x + 2,55y = 30,48 \end{cases}$$

lahendiks.

Süsteemi lihtsustamiseks kaotame võrranditest murrud ja taandame teist võrrandit 3-ga. Uus süsteem on:

$$\begin{cases} 25x + 30y = 348 \\ 75x + 85y = 1016. \end{cases}$$

Et muutuja x kordaja on ühes võrrandis 25 ja teises 75, siis on süsteemi kerge lahendada selle muutuja elimineerimise teel. Selleks korrutame esimese võrrandi pooli 3-ga, teise pooli (-1) -ga ja liidame võrrandite vastavad pooled:

$$\begin{array}{r} 75x + 90y = 1044 \\ -75x - 85y = -1016 \\ \hline 5y = 28 \Rightarrow y = 5,6. \end{array}$$

Muutuja x leiame esimesest võrrandist:

$$25x + 30 \cdot 5,6 = 348 \Rightarrow 25x + 168 = 348 \Rightarrow 25x = 180 \Rightarrow x = 7,2.$$

Niisiis,

$$\begin{cases} x = 7,2 \\ y = 5,6. \end{cases}$$

Kontrolli, et saadud lahend rahuldab ülesande tingimusi!

Vastus. Enne hinnaalandust maksis esimest sorti riide meeter 7 rbl. 20 kop. ja teist sorti riide meeter 5 rbl 20 kop.

Näide 3. Kahekohalise arvu ristsumma on 13. Kui selles arvus numbrid vahetada, siis saame arvu, mis on esialgsest 45 võrra suurem. Leia see arv.

Lahendus. Olgu otsitava arvu üheliste number x ja kümneliste number y . See arv on siis $10y + x$ ja tema ristsumma $x + y$. Et antud arvu ristsumma on 13, siis saame võrrandi $x + y = 13$. Pärast numbrite vahetamist saame arvu $10x + y$, mis on otsitavast arvust $10y + x$ suurem 45 võrra. Siit saame teise võrrandi:

$$10x + y - 45 = 10y + x,$$

mille normaalkuju on

$$9x - 9y = 45 \text{ ehk } x - y = 5.$$

Muutujate x ja y otsitavad väärtused peavad seega rahuldama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x - y = 5. \end{cases}$$

Süsteemi lahendamisel saame, et

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 4. \end{cases}$$

Otsitav arv on seega 49.

Kontrolli, et see arv rahuldab ülesande tingimusi!

138. Leia kaks arvu, mille summa on 24 ja vahe 6.

139. Leia kaks arvu, mis suhtuvad nagu 4:3 ja mille vahe on 12.

140. Leia rööpküliku külgede pikkused, kui rööpküliku ümbermõõt on 60 cm ja kahe lähiskülje pikkuste vahe on 2 cm.
141. Arvuta ristkülikukujulise maatüki pindala, kui maatüki ümbermõõt on 140 m ja pikkus on laiusest 22 m suurem.
142. Leia trapetsi alused, kui kesklõik on 4,3 cm ja üks alus on teisest 1,8 cm võrra pikem.
143. Kahe ringi läbimõõtude summa on 11,4 m ja vahe 3 m. Leia kummagi ringi ümbermõõt ja pindala.
144. Otsitava kahekohalise arvu ristsumma on 5. Kui selles arvus numbrid vahetada, siis saame arvu, mis on otsitavast arvust 9 võrra väiksem. Leia otsitav arv.
145. Otsitava kahekohalise arvu ristsumma on 9. Kui selles arvus numbrid vahetada, siis saame arvu, mis suhtub otsitavasse arvu nagu 5 : 6. Leia otsitav arv.
146. Kui murru lugejat vähendada ühe võrra, siis saame $\frac{1}{2}$. Kui aga murru lugejat suurendada kahe võrra ja nimetajat vähendada ühe võrra, siis saame $1\frac{2}{3}$. Leia see murd.
147. Kui murru lugejat suurendada ühe võrra ja nimetajat vähendada ühe võrra, siis saame 1. Kui murru lugejat vähendada ühe võrra ja nimetajat suurendada kolme võrra, siis saame $\frac{1}{4}$. Leia see murd.
148. Reisirong, mis koosneb vedurist ja 15 ühesugusest vagunist, kaalub 270,5 tonni. Vedur kaalub 13,3 tonni rohkem kui 4 vagunit. Kui palju kaalub vagun ja kui palju vedur?
149. NSV Liidus lasti Maa esimene kunstlik kaaslane üles 4. nov. 1957. a., Ameerika Ühendriikides aga 31. jaan 1958. a. Nende kaaslaste kaal oli kokku 97,6 kg. Kui Ameerikas väljalastud kaaslase kaal oleks olnud 6 korda suurem, siis oleks selle kaal ületanud Nõukogude Liidus väljalastud kaaslase kaalu ainult 400 grammi võrra. Leia kummagi kaaslase kaal.
150. 15. mail 1958. a. lasti NSV Liidus üles Maa kolmas kunstlik kaaslane, mille kaal (konteiner koos teadusliku aparatuuriga) oli 1327 kg. Kui teadusliku aparatuuri kaal oleks olnud 50% võrra suurem ja konteineri kaal 41 kg võrra suurem,

siis oleks kaaslaste kogukaal olnud 1652 kg. Leia teadusliku aparatuuri ja konteineri kaal.

151. Kui Tartu linna territooriumi suurendada 5 korda, siis jääks ta veel 26 km² võrra väiksemaks Tallinna linna territooriumist (1967. a. andmeil). Kui aga Tallinna territooriumi suurendada 22,8 km² võrra ja Tartu territooriumi suurendada 7 korda, siis oleksid nende linnade territooriumid võrdsed. Kui suur on kummagi linna territoorium?
152. 1965. a. saadi Eesti NSV-s igalt hektarilt keskmiselt 59,4% enam kartuleid kui 1950. a. Oleks 1965. a. saadud igalt hektarilt veel 41 tsentnerit rohkem kartuleid kui tegelikult saadi, siis oleks selle aasta kartulisaak hektarilt olnud kaks korda suurem 1950. a. hektarisaagist. Mitu tsentnerit kartuleid saadi keskmiselt igalt hektarilt 1950. a. ja mitu 1965. a.? (Vastus anna täpsusega 1 ts.)
153. Kaks teraviljakombaini koristavad koos töötades 3 tunniga vilja 11,4 hektarilt. Kui esimene kombain töötaks 4 tundi ja teine 5 tundi, siis koristataks saak 17,2 hektarilt. Mitu hektarit teravilja koristab kumbki kombain tunnis?
154. 2,5 meetrit esimest sorti riidet ja 3 meetrit teist sorti riidet maksab kokku 43 rbl. 30 kop., kuid 1,6 meetrit esimest sorti riidet ja 2,5 meetrit teist sorti riidet maksab kokku 32 rbl. 12 kop. Arvuta kummagi riide meetri hind.
155. Kool kavatses osta kaks fotoaparaati ja ühe suurendusaparaadi, mille eest oleks tulnud maksta kokku 132 rbl. Et fotoaparaadi hinda alandati 10% ja suurendusaparaadi hinda 12,5%, siis tuli kavatsetud ostu eest tegelikult maksta 118 rbl. Leia kummagi aparadi hind enne hinnaalandust.
156. Lennuk lendab 140 km pikkuse vahemaa pärituult 15 minutiga, vastutuult aga 21 minutiga. Arvuta tuule kiirus ja lennuki kiirus tuulevaikse ilmaga.
157. Jõelaev sõitis 100 km pärioolu ja 64 km vastuoolu, kulutas selleks kokku 9 tundi. Teisel korral sõitis see laev sama ajaga 80 km pärioolu ja niisama palju vastuoolu. Arvuta jõe voolu kiirus ja laeva kiirus seisvas vees.
158. On kaht sorti värvi: kilogramm esimest sorti värvi maksab 1,40 rbl. ja kilogramm teist sorti värvi 1,30 rbl. Mitu kilogrammi värvi peab maaler kummastki sordist võtma, et saada 10 kg segu, mille kilogrammi hind on 1,36 rbl.?

159. Mitu kilogrammi tuleb võtta puhast vaske ja mitu kilogrammi 45-protsendilise vasesisaldusega pronksi, et nende kokkusulatamisel saada 50 kg pronksi, milles on 50% vaske?
160. Isa ja tütre vanus on kokku 44 aastat. Nelja aasta eest oli isa tütrest 8 korda vanem. Arvuta isa ja tütre vanus.
161. Isa on 9 aasta pärast 3 korda ja 22 aasta pärast ainult 2 korda vanem kui poeg. Kui vanad on nad praegu?
162. Poisil on 2 korda rohkem õdesid kui vendi, igal õel on aga niisama palju vendi kui õdesid. Mitu last on perekonnas?
163. On teada, et kui $x=1$, siis funktsiooni $y=ax+b$ väärtus $y=3$, ja kui $x=-1$, siis $y=-1$. Leia a ja b .
164. Linearfunktsiooni graafik läbib punkte $(1; -1)$ ja $(-2; 5)$. Leia see funktsioon.
165. Muutuja u on muutuja v linearfunktsioon. Kui $v=-1$, siis $u=0$, ja kui $v=1$, siis $u=-4$. Leia seos muutujate u ja v vahel. Kujuta see seos graafiliselt.
166. Põleva künla pikkus l on põlemisaja t linearfunktsioon. Leia nende muutujate vaheline seos, kui on teada, et pärast pooletunnist põlemist oli künla pikkus 10 cm, pärast kahe-tunnist põlemist aga 4 cm. Kui pikk oli künal enne süütamist?
167. Kui kanistris on 3 liitrit bensiini, siis on brutokaal 3,6 kg. Kui kanistris on 8 liitrit bensiini, siis on brutokaal 7,1 kg. Avalda brutokaal B kanistris oleva bensiini ruumala V funktsioonina. Kui suur on taarakaal? Kui palju kaalub 1 liiter bensiini?
168. Leia võrrandi $ax+by=1$ kordajad a ja b , kui võrrandi üks lahend on $(1; -2)$ ja teine $(4; 1)$.
169. Leia m ja n , kui võrrandi $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ üks lahend on $(2; -1)$ ja teine $(6; 1)$.
170. Linearfunktsioonide $y=2kx+l$ ja $y=kx-21$ graafikud lõikuvad punktis $(-2; -10)$. Leia k ja l .

4. RUUTFUNKTSIOON JA RUUTVÖRRAND

4.1. FUNKTSIOON $y=x^2$

Olgu ruudu külje pikkus x pikkusühikut. Siis ruudu pindala $y = x^2$ vastavat pindalaühikut. Igale küljepikkuse x väärtusele vastab üks kindel pindala x^2 väärtus. Seega ruudu pindala y on küljepikkuse x funktsioon, mille määramispiirkonnaks on positiivsete arvude hulk. Selle funktsiooni väärtuste leidmiseks tuleb argumenti väärtus võtta ruutu.

171. Arvuta tabelis antud x väärtustele vastavad x^2 väärtused.

x	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
x^2													

Selgita tabeli andmete põhjal, mitu korda suureneb x^2 , kui arvu x suurendada 2 korda, 3 korda, 4 korda, 10 korda, 100 korda.

Mitu korda väheneb x^2 , kui arvu x vähendada 2 korda, 3 korda, 4 korda, 10 korda, 100 korda?

172. Leia arvutamise teel, mitu korda on

- 1) 20^2 suurem kui 2^2 ; 3) 300^2 „ „ 3^2 ;
2) 40^2 „ „ 4^2 ; 4) 600^2 „ „ 6^2 .

173. Leia, mitu korda on

- 1) $0,5^2$ väiksem kui 5^2 ; 3) $0,78^2$ „ „ 78^2 ;
2) $2,5^2$ „ „ 25^2 ; 4) $6,5^2$ „ „ 650^2 .

Eelmistest ülesannetest ilmneb, et

kui suurendame positiivset arvu 10, 100, ... korda, siis arvu ruut suureneb 100, 10 000, ... korda;

kui vähendame positiivset arvu 10, 100, ... korda, siis arvu ruut väheneb 100, 10 000, ... korda.

Üldiselt,

kui positiivset arvu suurendada $k > 0$ korda, siis arvu ruut suureneb k^2 korda.

Selle tõestamiseks anname argumendile x mingi väärtuse x_1 ; siis $y_1 = x_1^2$. Kui aga anname argumendile k korda suurema väärtuse kx_1 , siis funktsiooni väärtus $y_2 = (kx_1)^2$ ehk $y_2 = k^2x_1^2$. Et $x_1^2 = y_1$, siis $y_2 = k^2y_1$, mida oligi tarvis tõestada.

Funktsiooni $y = x^2$ nimetatakse **ruutfunktsiooniks**.

Ruutfunktsiooni määramispiirkonda võib kuuluda nii arv 0, kui ka negatiivsed arvud. Et arvu 0 ruut on 0 ja negatiivse arvu ruut on positiivne, siis

ruutfunktsiooni x^2 väärtuste hulgas ei leidu negatiivseid arve.

N ä i d e. Hulgal $X = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ defineeritud ruutfunktsiooni $y = x^2$ väärtuste hulk on $\{0; 1; 2; 4\}$.

174. Esita järjestatud arvupaaride hulkana hulk

$$M = \{(x; y) | x \in N, x < 5 \text{ ja } y = x^2\}.$$

175. Esita järjestatud arvupaaride hulkana ja nooldiagrammina hulk

$$P = \{(x; y) | x \in Z, |x| < 3 \text{ ja } y = x^2\}.$$

176. Esita nooldiagrammina funktsioon

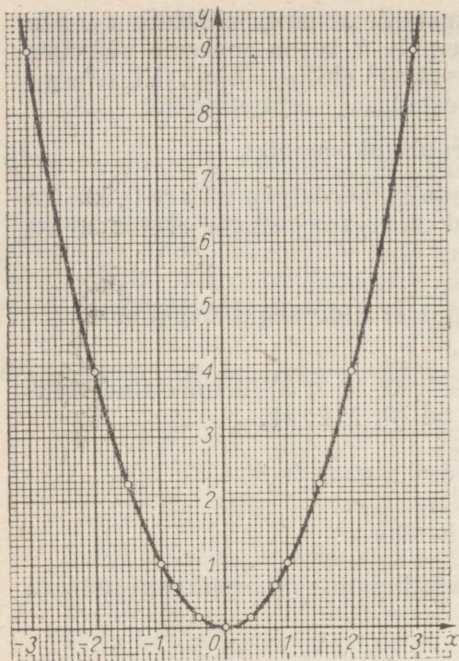
$$y = x^2, \text{ kui } x \in Z \text{ ja } -4 < x < 2.$$

4.2. FUNKTSIOONI $y = x^2$ GRAAFIK

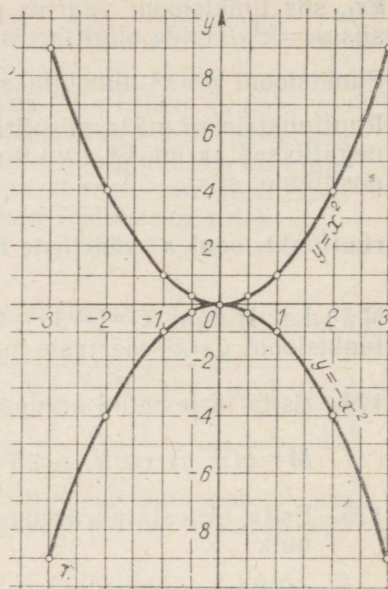
Konstrueerime funktsiooni $y = x^2$ graafiku, kui $x \in Q$. Selleks täidame eelnevalt järgmise tabeli:

x	-3	-2	-1,5	-1	-0,8	-0,4	0	0,4	0,8	1	1,5	2	3
x^2	9	4	2,25	1	0,64	0,16	0	0,16	0,64	1	2,25	4	9

Märkides nüüd koordinaatteljestikus punktid, mille koordinaatideks on tabelis esinevad x ja x^2 vastavate väärtuste paarid ning ühendades need punktid sujuvalt kõverjoonega, saame funktsiooni $y = x^2$ graafiku (joon. 54).



Joon. 54



Joon. 55

Funktsiooni $y = x^2$ graafikut nimetatakse **parabooliks**. Et abstsissidele x ja $-x$ vastavad ordinaadid on võrdsed, s. o. $x^2 = (-x)^2$, siis saadud graafik on sümmeetriline y -telje suhtes. See nähtub ka jooniselt 54.

Parabooli sümmeetriatelge nimetatakse **parabooli teljeks**.

Parabooli ja tema telje ühist punkti nimetatakse parabooli **tipuks** ehk **haripunktiks**.

Et funktsiooni $y = x^2$ graafikuks oleva parabooli teljeks on y -teljele ja haripunkt asetseb y -teljel, s. t. haripunkti abstsiss on 0. Kuid siis on ka haripunkti ordinaat 0. Seega funktsiooni $y = x^2$ graafiku haripunkt asetseb koordinaatide alguspunktis. See nähtub ka jooniselt 54. Joonisel 54 kujutatud parabooli kohta öeldakse, et ta **avaneb ülespoole**.

Peegeldame nüüd funktsiooni $y = x^2$ graafiku x -teljest. Selle graafiku punktidele (joon. 55) $(-3; 9)$, $(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(3; 9)$ vastavateks punktideks saame siis punktid $(-3; -9)$, $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; -1)$, $(3; -9)$.

Üldiselt, punktidele $(x; x^2)$ vastavaks punktiks saame punkti $(x; -x^2)$. Saadud punktihulk on funktsiooni $y = -x^2$ graafik. See

punktihulk on ka parabool, mille haripunkt asetseb koordinaatide alguspunktis ja teljeks on y -telg, kuid see parabool avaneb allapoole.

177. Leia funktsiooni $y=x^2$ graafiku abil järgmiste arvude ruudud:

- 1) 1,2 1,5 2,1 2,6 2,9
 2) 0,7 0,9 1,6 2,4 2,7

4.3. RUUTUDE TABEL

Funktsiooni $y=x^2$ väärtusi saab hõlpsasti leida ruutude tabelist (vt. V. Bradis. Neljakohalised matemaatilised tabelid keskkoolidele. Tabel III). Sellest saab leida kuni nelja tüvenumbriga arvu ruudu, milles on samuti neli tüvenumbrit.

Samuti nagu pöördarvude tabeli puhul, piirdume ka siin kolme tüvenumbriga arvudega. Neljandat tüvenumbrit kasutame ligikaudsete arvudega arvutamise eeskirjade kohaselt varunumbrina. Lõpptulemuse ümardame kolme tüvenumbriga arvuks. Seetõttu ruutude tabeli viimaseid parempoolseid üheksat veergu, mis on määratud nelja tüvenumbriga arvude ruutude leidmiseks, me ei kasuta.

Olgu kolme tüvenumbriga arv suurem kui 1,00 ja väiksem kui 10,0. Et leida ruutude tabelist selle arvu ruutu, leiame selle arvu kahe esimese tüvenumbriga märgitud rea ning kolmanda tüvenumbriga märgitud veeru ristumiskohal oleva arvu, mis ongi antud arvu ruut.

Toome väljavõtte selle tabeli algusest, jättes ära nimetatud lisa-veerud.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664

Näide. Arvu $1,12^2$ leiame rea 1,1 ja veeru 2 ristumiskohast: $1,12^2=1,254 \approx 1,25$.

Niisamuti leiame, et

$$1,05^2=1,103 \approx 1,10;$$

$$1,29^2=1,664 \approx 1,66.$$

Niiviisi saame leida kõigi 1,00 ja 10,0 vahel asetsevate kolme tüvenumbriga arvude ruudud.

Kui kolme tüvenumbriga arv on väiksem 1,00-st või suurem 10,0-st, siis toimime järgmiselt.

a) Kui arv on väiksem 1,00-st, siis suurendame arvu 10, 100 jne., korda nii, et saame arvu, mis kuulub vahemikku 1-st 10-ni, leiame suurendatud arvu ruudu ning vähendame seda vastavalt 100, 10 000 jne. korda.

Näiteid. 1) $0,342^2 = 3,42^2 : 100 = 11,7 : 100 = 0,117$;

2) $0,0248^2 = 2,48^2 : 10\,000 = 6,15 : 10\,000 = 0,000615$.

b) Kui arv on suurem 9,99-st, siis vähendame arvu 10 või 100 jne. korda nii, et saame arvu, mis kuulub vahemikku 1-st 10-ni, leiame vähendatud arvu ruudu ning suurendame seda vastavalt 100, 10 000, ... korda.

Kui antud arvus on rohkem kui neli tüvenumbrit, siis ümardame ta eelnevalt nelja tüvenumbriga arvuks.

Näiteid. 1) $21,9^2 = 100 \cdot 2,19^2 = 100 \cdot 4,80 = 480$;

2) $64,38^2 = 100 \cdot 6,44^2 = 100 \cdot 41,5 = 4150$.

178. Leida ruutude tabeli abil järgmiste arvude ruudud:

1) 0,41	0,794	0,5678	0,078867	83	52,74
2) 0,54	0,875	0,4876	0,023479	27	92,34
3) 0,72	0,328	0,7953	0,07265	29	76,32
4) 33,5	0,237	0,0925	0,00235	49	23,78

179. Leia jagatised, kasutades pöördarvude ja ruutude tabelit.

1) $\frac{1}{2,711^2}$	2) $\frac{10}{8,471^2}$	3) $\frac{2}{0,4478^2}$
4) $\frac{14}{26^2}$	5) $\frac{4}{0,025^2}$	6) $\frac{25}{27,347^2}$
7) $\frac{1}{0,121^2}$	8) $\frac{10}{5,4862^2}$	9) $\frac{100}{35,9^2}$
10) $\frac{1000}{72,12^2}$	11) $\frac{0,1}{0,25^2}$	12) $\frac{5}{0,6774^2}$

4.4. ARVU RUUDU LEIDMINE LÜKATI ABIL

Arvu ruudu leidmiseks kasutatakse lükati korpuse esiküljel asuvat skaalat A (ehk ruutude skaalat) koos põhiskaalaga D . Skaala A asemel võib kasutada ka lükati keele ülemisel serval asuvat skaalat B .

Skaaladel A ja B on kujutatud arvud 1-st 100-ni. Seejuures skaala esimesel poolel on arvud 1-st 10-ni ja teisel poolel arvud 10-st 100-ni. Kui lükati keel on algasendis, siis skaalade A ja B jaotuskriipsud on kohakuti. Seega on need skaalad ühesugused.

Arvu ruudu leidmiseks märgime skaalal D antud arvu (näiteks arvu 2) ja loeme skaalalt A arvu, mis jääb märkija niidi alla; see ongi antud arvu ruut (arv 4, s. o. 2^2). Märgides samal viisil skaalal D arvu 3, saame märkija niidi alt skaalal A arvu 9, s. o. 3^2 . Nii samuti leiame, et

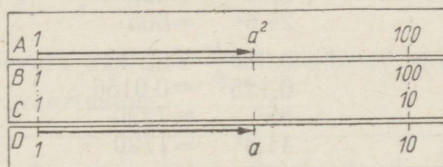
$$1,5^2 = 2,25$$

$$1,9^2 = 3,61$$

$$6,7^2 = 44,9.$$

Seega kujutavad skaalad A ja D ruutude tabelit:

niit märgib igas asendis skaalal D mingit arvu ja skaalal A selle arvu ruutu (joon. 56).



Joon. 56

180. Leia lükati abil järgmiste arvude ruudud:

- | | | | | | |
|----|------|------|------|------|-------|
| 1) | 2,24 | 2,83 | 4,47 | 5,48 | 6,32 |
| 2) | 7,07 | 7,75 | 8,37 | 8,94 | 9,49 |
| 3) | 2,55 | 8,06 | 1,22 | 3,87 | 4,24 |
| 4) | 3,32 | 3,46 | 2,68 | 1,87 | 5,92 |
| 5) | 2,12 | 6,71 | 2,34 | 7,42 | 1,414 |

Skaalad A ja B on tehtud kaks korda väiksemas mõõdus kui põhiskaalad C ja D . Seetõttu on jaotuskriipsude paigutused skaaladel A ja B ning C ja D erinevad. Alljärgnevas tabelis on toodud arvud, mis vastavad kõige lühematele kriipsuvahedele skaalal A ja B .

Vahemik	1—2	2—5	5—10	10—20	20—50	50—100
Arvud	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	1

Nii nagu lükati põhiskaalade C ja D kasutamisel, saadakse ka skaaladelt A ja B ainult arvude tüvenumbrid. Seega, kui niit satub näiteks jaotuskriipsule 3,35 või 33,5, siis vastavalt antud ülesandele võivad need tähendada arve: ... 0,0335; 0,335; 3,35; 33,5; 335; 3350; ...

Koma asukoht tulemuses määratakse ligikaudse hinnangu põhjal.

Näiteid. 1) Arvu $2,3^2$ tüvenumbrid on 5-2-9. Et $2^2=4$ ja $3^2=9$, siis on ilmne, et $2,3^2$ täisosa on ühekohaline, s. t. $2,3^2=5,29$.

2) Arvu $21,5^2$ tüvenumbrid on 4-6-2. Et $20^2=400$, siis $21,5^2=462$.

3) Arvu $0,545^2$ tüvenumbrid on 2-9-7. Et $0,5^2=0,25$, siis $0,545^2=0,297$.

181. Kontrolli lükati abil järgmiste võrduste õigsust:

- | | |
|---------------------|-----------------------|
| 1) $17,3^2 = 200$ | 2) $354^2 = 125\ 000$ |
| $4,35^2 = 18,9$ | $670^2 = 449\ 000$ |
| $0,325^2 = 0,106$ | $1,06^2 = 1,12$ |
| $0,038^2 = 0,00144$ | $0,0193^2 = 0,000372$ |
| 3) $2,5^2 = 6,25$ | 4) $7,48^2 = 56$ |
| $21,5^2 = 462$ | $3,1^2 = 9,61$ |
| $5,14^2 = 26,4$ | $5,53^2 = 30,6$ |
| $1,83^2 = 3,35$ | $24,6^2 = 605$ |
| 5) $\pi^2 = 9,87$ | 6) $0,369^2 = 0,136$ |
| $18^2 = 324$ | $0,125^2 = 0,0156$ |
| $138^2 = 19\ 000$ | $85^2 = 7230$ |
| $195^2 = 38\ 000$ | $41,5^2 = 1720$ |

182. Leia järgmised ruudud. Kontrolliks on sulgudes antud tulemuse tüvenumbrid.

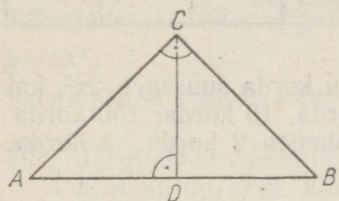
- | | |
|--------------------|---------------------|
| 1) $1,1^2$ (1-2-1) | 2) $0,7^2$ (4-9-0) |
| $0,4^2$ (1-6-0) | $0,75^2$ (5-6-3) |
| $1,06^2$ (1-1-2) | $8,55^2$ (7-3-1) |
| $87,1^2$ (7-5-9) | $23,7^2$ (5-6-2) |
| 3) $6,3^2$ (3-9-7) | 4) $0,46^2$ (6-6-3) |
| $89,4^2$ (9-5-1) | $3,62^2$ (1-3-1) |
| $8,3^2$ (9-1-9) | $42,5^2$ (1-8-1) |
| $1,7^2$ (2-8-9) | $0,532^2$ (2-8-3) |

183. Leia järgmiste arvude ruudud:

- | | | | | | | | |
|---------|------|------|-------|-----|------|-------|------|
| 1) 11,3 | 6,7 | 0,35 | 93,8 | 123 | 39,9 | 0,034 | 0,98 |
| 2) 9,8 | 39,2 | 0,48 | 0,329 | 325 | 79,8 | 0,041 | 3,07 |
| 3) 5,4 | 29,8 | 0,79 | 0,524 | 195 | 67,9 | 0,015 | 8,09 |

4.5. FUNKTSIOON $y=ax^2$

Ülesanne 1. Võrdhaarne täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuus AB on x cm. Kui suur on selle kolmnurga pindala y ?



Joon. 57

Lahendus. Et kolmnurk ABC on võrdhaarne ja täisnurkne, siis $AC=BC$ ja $\angle A=\angle B=45^\circ$ (joon. 57). Alusele AB tõmmatud kõrgus CD poolitab aluse ja tipunurga. Seega $AD=DB=\frac{x}{2}$ ja $\angle ACD=\angle BCD=45^\circ$. Järelikult $\angle A=\angle ACD$ ja $\angle B=\angle BCD$ ning kolmnurgad ACD ja BCD on võrdhaarsed. Seega $AD=DC$, s. t. $DC=\frac{x}{2}$, ja kolmnurga ABC pindala on $\frac{1}{2}AB \cdot DC = \frac{1}{2}x \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{4}x^2$.

Niisiis, $y=\frac{1}{4}x^2$.

184. Arvuta avaldise $\frac{1}{4}x^2$ väärtused, mis vastavad tabelis antud x väärtustele.

x	1	2	3	4	8	10	100
$\frac{1}{4}x^2$							

Selgita tabeli andmete põhjal, mitu korda suureneb $\frac{1}{4}x^2$, kui x suureneb 2 korda, 3 korda, 4 korda, 10 korda, 100 korda.

Mitu korda väheneb $\frac{1}{4}x^2$, kui x väheneb 2 korda, 3 korda, 4 korda, 10 korda, 100 korda?

Ülesanne 2. Ruudu diagonaal on $2x$ cm. Kui suur on selle ruudu pindala?

Lahendus. Diagonaal jaotab ruudu kaheks võrdseks täisnurkseks võrdhaarseks kolmnurgaks, mille alus on $2x$ cm ning alusele tõmmatud kõrgus x cm. Järelikult on kummagi kolmnurga pindala $\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x = x^2$ ja ruudu pindala seega $2x^2$ cm².

Niisiis, $y=2x^2$.

185. Arvuta avaldise $2x^2$ väärtused, mis vastavad tabelis antud x väärtustele.

x	1	2	3	4	8	10	100
$2x^2$							

Selgita tabeli andmete põhjal, mitu korda suureneb $2x^2$, kui x suureneb 2 korda, 3 korda, 4 korda, 10 korda, 100 korda. Mitu korda väheneb $2x^2$, kui x väheneb 2 korda, 3 korda, 4 korda, 10 korda, 100 korda?

186. Avalda kuubi täispindala S kuubi serva a kaudu. Mitu korda suureneb kuubi täispindala, kui kuubi serva pikkust suurendada 2, 3, 4, 8, 10, 100 korda?

Kõikides eelnevates ülesannetes esinevate sõltuvuste üldkuju on $y=ax^2$, kus a on antud arv, $a \neq 0$. Kui $a > 0$, siis funktsioon $ax^2 \geq 0$, sest argumenti x igasuguste väärtuste korral $x^2 \geq 0$, ja kui $a < 0$, siis $ax^2 \leq 0$.

Funktsioon $y=ax^2$ on ruutfunktsioon, sest argumenti x kõrgeim aste selles avaldises on teine aste.

Eelmistest ülesannetest selgus, et

kui argument kasvab k korda, siis funktsioon ax^2 kasvab k^2 korda (eeldusel $a > 0$ ja $x > 0$).

Tõestame selle üldkujul. Anname argumentile x mingi väärtuse $x_1 > 0$; siis funktsiooni väärtus on vastavalt $y_1 = ax_1^2$. Kui argument kasvab k korda, s. t. argument saab väärtuse kx_1 , siis funktsiooni väärtus

$$y_2 = a(kx_1)^2 = k^2 \cdot ax_1^2.$$

Et $ax_1^2 = y_1$, siis $y_2 = k^2 y_1$,

millest ilmnebki, et argumenti kasvades k korda kasvab funktsioon k^2 korda (eeldusel $y_1 > 0$, s. t. $a > 0$). Kui $a = 1$, siis $ax^2 = x^2$. Seega on funktsioon $y = x^2$ funktsiooni $y = ax^2$ erijuhtum.

Iga funktsioon, millele saame anda kuju $y = ax^2$, kus a on nullist erinev arv, on ruutfunktsioon.

N ä i d e. Kahe muutuja x ja y vaheline seos on antud valemiga $y = \frac{2k}{r}x^2 + \frac{xr n}{2} \cdot \frac{x}{2}$, kus k, r, n on antud arvud. Millist funktsiooni esitab see valem, kui argumentiks võtta x ?

$$\begin{aligned} \text{Lahendus. } y &= \frac{2k}{r}x^2 + \frac{rnn}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{2k}{r}x^2 + \frac{rn}{4} \cdot x^2 = \left(\frac{2k}{r} + \frac{rn}{4} \right) x^2 = \\ &= \frac{8k+r^2n}{4r} \cdot x^2. \end{aligned}$$

Tähistades avaldise $\frac{8k+r^2n}{4r}$ tähega a , saame

$$y = ax^2.$$

Seega esitab antud valem ruutfunktsiooni, mille argumendiks on x .

187. Järgmistes valemites tähistavad x, y, z, t muutujad ja b, c, d, k, n antud arve. Otsusta, millised neist valemeist esitavad ruutfunktsiooni, kui argumendiks võtta x . Vajaduse korral teisenda valemite.

1) $y = dx^2$

2) $y = (k-2)x^2$

3) $y = xn^2$

4) $y = \left(x - \frac{k^2}{x} \right) k$

5) $z = \left(x - \frac{x}{k} \right) x$

6) $z = 4k^2x^2 + 3x^2$

7) $t = 3xk^2 - 4nk^2$

8) $t = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{2k}{3x^2}}$

9) $z = (2kb - 4) : \frac{1}{knx^2}$

10) $t = \frac{x^2}{r} + \frac{r^2}{x}$

Seos $y = ax^2$ on määratud, kui on antud arv a . Kui a pole antud, kuid on antud x ja y üks vastavate väärtuste paar, siis saame a määrata.

Näide. Ruutfunktsiooni $y = ax^2$ väärtus argumendi väärtusel -1 on 4 . Leia kordaja a ning esita see funktsioon valemina.

Lahendus. Asetades x ja y antud väärtused valemisse $y = ax^2$, saame

$$4 = a(-1)^2,$$

millest $a = 4$. Seega, antud funktsiooni avaldis on $y = 4x^2$.

188. On antud argumendi x ühele väärtusele vastav ruutfunktsiooni $y = ax^2$ väärtus. Leia kordaja a ja esita funktsioon valemina.

1) $x = -2$ 2) $x = 3$ 3) $x = -0,5$ 4) $x = -6$ 5) $x = -6$
 $y = 12$ $y = 13,5$ $y = -0,5$ $y = -9$ $y = 54$

6) $x = 4$ 7) $x = -3$ 8) $x = -2$ 9) $x = -4$ 10) $x = 3$
 $y = 40$ $y = -6,3$ $y = 5,2$ $y = -3,2$ $y = 17,1$

4.6. FUNKTSIOONI $y=ax^2$ GRAAFIK

Joonestame ühes ja samas teljestikus funktsioonide $y=x^2$, $y=2x^2$ ja $y=\frac{1}{2}x^2$ graafikud vahemikus $-3 \leq x \leq 3$.

Et argumendi ühe ja sama väärtuse korral funktsiooni $y=2x^2$ väärtus on 2 korda suurem kui funktsiooni $y=x^2$ vastav väärtus, siis funktsiooni $y=2x^2$ graafiku saame, kui funktsiooni $y=x^2$ graafiku iga punkti ordinaadi võtame kahekordsena. Funktsiooni $y=\frac{1}{2}x^2$ graafiku saame aga funktsiooni $y=x^2$ graafikust, kui viimase iga punkti ordinaati kaks korda vähendame.

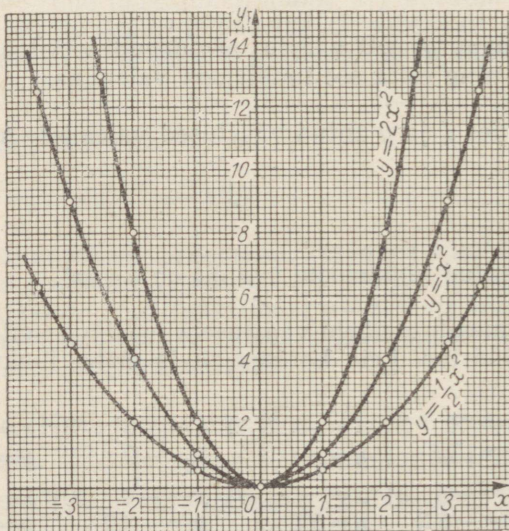
Joonisel 58 on toodud kõigi kolme funktsiooni graafikud.

Neid kõverjooni nimetatakse **paraboolideks**.

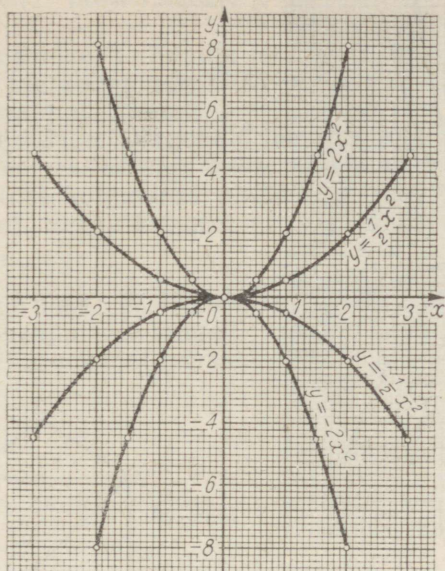
189. Mis on joonisel 58 kujutatud paraboolidel teljeks? Kus asub iga parabooli haripunkt?

Kuidas asetseb funktsiooni $y=ax^2$ graafik x -telje suhtes, kui $a > 0$? Mis on funktsiooni $y=ax^2$ vähimaks väärtuseks, kui $a > 0$?

190. Leia joonisel 58 toodud graafikute järgi iga seal kujutatud funktsiooni väärtus argumendi väärtustel $-2,5$; $1,2$; $2,8$. Mis-suguste x väärtuste korral $2x^2=7$? $x^2=8$? $\frac{1}{2}x^2=4,5$?



Joon. 58



Joon 59

191. Joonesta ühes ja samas teljestikus funktsioonide $y=2x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=-2x^2$ ja $y=-\frac{1}{2}x^2$ graafikud (joon. 59).

Kuidas asetsevad x -telje suhtes funktsioonide

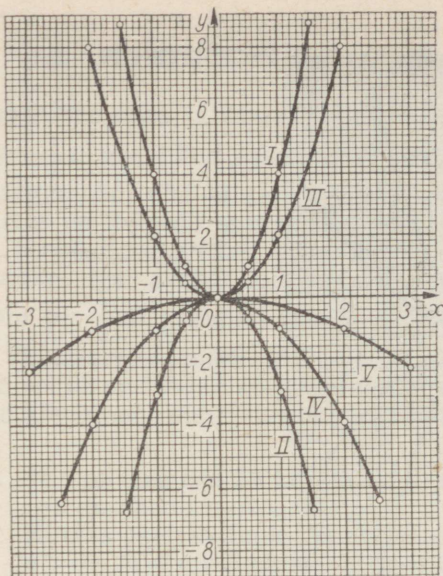
- 1) $y=2x^2$ ja $y=-2x^2$ graafikud?
- 2) $y=\frac{1}{2}x^2$ ja $y=-\frac{1}{2}x^2$ graafikud?

Et iga nullist erineva x väärtuse korral arvud ax^2 ja $-ax^2$ on märgilt erinevad, kuid absoluutväärtuselt võrdsed, siis punktid $(x; ax^2)$ ja $(x; -ax^2)$ on sümmeetrilised x -telje suhtes. Seega

funktsioonide $y=ax^2$ ja $y=-ax^2$ graafikud on sümmeetrilised x -telje suhtes.

Järelikult on ka funktsiooni $y=-ax^2$ graafikuks parabool, mille haripunkt asetseb koordinaatide alguspunktis. Selle parabooli saame, kui peegeldame funktsiooni $y=ax^2$ graafiku x -telje suhtes. Kui a on negatiivne, siis funktsiooni $y=ax^2$ graafikuks on parabool, mis avaneb allapoole.

192. Konstrueeri funktsioonide $y=-\frac{1}{4}x^2$ ja $y=-4x^2$ graafikud funktsioonide $y=\frac{1}{4}x^2$ ja $y=4x^2$ graafikute peegeldamise teel.



Joon. 60

193. Kasutades eespool koostatud funktsioonide $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 4x^2$ väärtuste tabelleid, konstrueeri ühes ja samas teljestikus nende funktsioonide graafikud. Leia iga graafiku järgi x , kui $y = 2$. Millise graafiku puhul on leitud abstsiss suurim? Missugune neist parabolidest on kohal $y = 2$ kõige laiem, missugune kõige kitsam? Kas kordaja a absoluutväärtuse kasvamisel parabol laieneb või kitseneb?

Eespool nägime, et funktsiooni $y = ax^2$ graafiku punktide ordinaadid saame funktsiooni $y = x^2$ graafiku punktide ordinaatidest, kui korrutame need ühe ja sama teguriga a . Seepärast nimetatakse funktsiooni $y = x^2$ graafikut **põhiparabooliks**. Põhiparabooli sageda esinemise tõttu on tema joonestamiseks otsustavalt valmis valmistada papist šabloon.

Igasuguse nullist erineva a korral on funktsiooni $y = ax^2$ graafikuks parabol, mille haripunkt asetseb koordinaatide alguspunktis. Kui $a > 0$, siis parabol avaneb ülespoole, kui $a < 0$, siis allapoole. Mida suurem on a absoluutväärtus, seda kitsam on parabol.

194. Joonisel 60 on antud viie ruutfunktsiooni $y = ax^2$ graafikud. Leia iga graafiku järgi vastav a väärtus ja esita iga funktsioon valemiga.

N ä p u n ä i d e. Kordaja a leidmiseks vali graafikul üks punkt ja aseta selle koordinaadid valemisse $y = ax^2$.

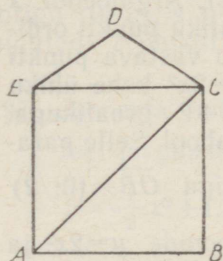
4.7. FUNKTSIOON $y = a^2x + c$

Ülesanne 1. Avalda joonisel 61 toodud kujundi $ABCDE$ pindala y , kui kolmnurga CDE pindala on $3,5 \text{ cm}^2$ ning ruudu $ABCE$ diagonaal on $2x \text{ cm}$.

Lahendus. Diagonaal jaotab ruudu $ABCE$ kaheks täisnurkseks võrdhaarseks kolmnurgaks, mille alus on $2x$. Nagu eespool nägime, on sellise kolmnurga pindala $x^2 \text{ cm}^2$ ja ruudu $ABCE$ pindala $2x^2 \text{ cm}^2$. Seega kujundi $ABCDE$ pindala ruutsentimeetrites

$$y = 2x^2 + 3,5.$$

Ülesanne 2. Helikopterilt, mis seisab paigal 50 m kõrgusel, lasti maapinnale langeda vimpel. Leia, missugusel kõrgusel y on vimpel x sekundi pärast.



Joon. 61

Lahendus. Vabalt langeva keha poolt t sekundi jooksul läbitud tee pikkus s arvutatakse valemi järgi $s = \frac{gt^2}{2} \cdot x$ sekundi pärast on seega vimpel läbinud $\frac{gx^2}{2}$ meetrit ning tema kõrgus maapinnast on meetrites

$$y = 50 - \frac{gx^2}{2}$$

ehk

$$y = -\frac{gx^2}{2} + 50.$$

Et $g = 10 \frac{m}{s^2}$, siis

$$y = -5x^2 + 50.$$

Ülesannetes 1 ja 2 esinevate sõltuvuste üldkuju on $y = ax^2 + c$, kus a ja c on antud arvud. Et avaldises $ax^2 + c$ argumendi x kõrgeim aste on teine aste, siis funktsioon $y = ax^2 + c$ on **ruutfunktsioon**.

Kui $c = 0$, siis $y = ax^2 + c = ax^2$. Seega $y = ax^2$ on funktsiooni $y = ax^2 + c$ erijuhtum.

4.8. FUNKTSIOONI $y=ax^2+c$ GRAAFIK

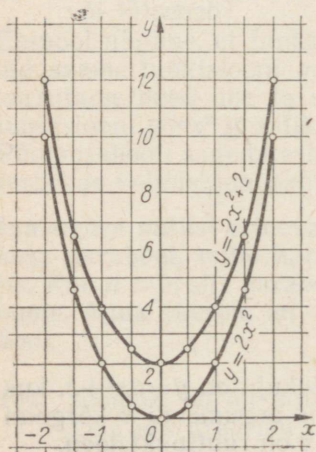
Joonestame ühes ja samas teljestikus funktsioonide $y=2x^2$ ja $y=2x^2+2$ graafikud vahemikus $-2 \leq x \leq 2$. Selleks koostame algul x ja y vastavate väärtuste tabeli:

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$2x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8
$2x^2+2$	10	6,5	4	2,5	2	2,5	4	6,5	10

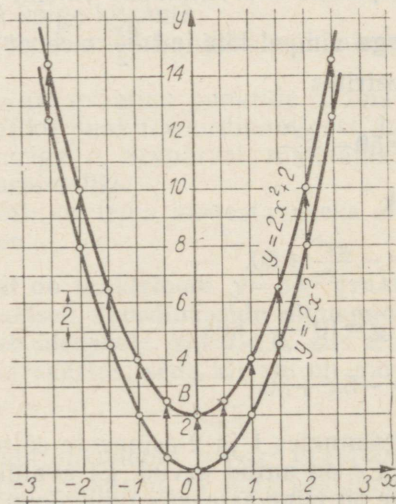
Kujutades koordinaatteljestikus punktid, mille koordinaatideks on x ja $2x^2$ ning x ja $2x^2+2$ vastavate väärtuste paarid, saame funktsioonide $y=2x^2$ ja $y=2x^2+2$ graafikud (joon. 62). Argumendi x iga väärtuse korral on funktsiooni $y=2x^2+2$ graafiku punkti ordinaat 2 võrra suurem funktsiooni $y=2x^2$ graafiku vastava punkti ordinaadist. Järelikult, kui nihutada parabool $y=2x^2$ kahe ühiku võrra ülespoole, siis ühtib ta funktsiooni $y=2x^2+2$ graafikuga. Seega on ka funktsiooni $y=2x^2+2$ graafikuks parabool. Selle parabooli saame parabooli $y=2x^2$ rööplükkel vektoriga $\vec{OB}=(0; 2)$ (joon. 63).

195. Joonesta ühes ja samas teljestikus funktsioonide $y=2x^2$ ja $y=2x^2-2$ graafikud.

Kuidas tuleb nihutada funktsiooni $y=2x^2$ graafikut, et see ühtiks funktsiooni $y=2x^2-2$ graafikuga?



Joon. 62



Joon. 63

196. Joonesta ühes ja samas teljestikus funktsioonide $y = -2x^2$, $y = -2x^2 + 2$, $y = -2x^2 - 2$ graafikud.

Kuidas tuleb nihutada parabooli $y = -2x^2$, et ta ühtiks

1) funktsiooni $y = -2x^2 + 2$ graafikuga?

2) funktsiooni $y = -2x^2 - 2$ graafikuga?

Kirjuta mõlema parabooli haripunkti koordinaadid.

Eelnevast ilmnes, et

funktsiooni $y = ax^2 + c$ graafikuks on parabool, mis on sümmeetriline ordinaattelje suhtes ja mille haripunkt on punktis $(0; c)$.

Selle parabooli saame funktsiooni $y = ax^2$ graafiku rööplükkel vektoriga $(0; c)$, s. t. kui $c > 0$, siis tuleb funktsiooni $y = ax^2$ graafik nihutada c ühikut ülespoole, ja kui $c < 0$, siis $|c|$ ühikut allapoole.

197. Joonesta funktsiooni $y = -\frac{1}{2}x^2$ graafik ja sellest rööplükke teel järgmiste funktsioonide graafikud:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 1, \quad y = \frac{1}{2}x^2 + 2, \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 1, \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 2.$$

198. Milliste funktsioonide graafikud saadakse funktsiooni $y = 1,5x^2$ graafiku rööplükkel vektoritega $\vec{OK} = (0; 3)$ ja $\vec{OL} = (0; -2,5)$? Joonesta need graafikud.

199. Funktsiooni $y = 2x^2$ graafik peegeldati x -teljest ja saadud peegeldusele rakendati lüket vektoriga $\vec{ON} = (0; -3)$. Millise funktsiooni graafik saadi?

200. Joonisel 64 leidub neli ühesuguse kujuga parabooli. Kirjelda, millisel teel saab graafikust I graafiku II, graafiku III, graafiku IV.

201. Joonist valmistamata kirjelda, kuidas funktsiooni $y = -1,5x^2$ graafikust saab järgmiste funktsioonide graafikud:

1) $y = -1,5x^2 - 2$

2) $y = 1,5x^2$

3) $y = -1,5x^2 + 2,5$

4) $y = 1,5x^2 + 2$

5) $y = 1,5x^2 - 1,5$

202. Kirjuta rööplükke vektorid, mis võimaldavad funktsiooni $y = -2x^2$ graafikust saada funktsioonide $y = -2x^2 - 5$; $y = -2x^2 - 2,4$; $y = -2x^2 + 2,5$ ja $y = -2x^2 - 4,1$ graafikud.

Olgu antud ruutfunktsiooni $y=ax^2+c$ graafik. Küsime, kuidas määrata arve a ja c ning seega leida funktsiooni avaldist.

Näide. Leiame joonisel 65 kujutatud ruutfunktsiooni graafiku järgi funktsiooni avaldise.

Lahendus. Graafiku järgi saab otsustada, et otsitava avaldise üldkuju on ax^2+c . Et graafiku haripunkti koordinaadid on 0 ja 2, siis $c=2$. Asetades graafiku mingi punkti, näiteks punkti (1; 4) koordinaadid valemisse $y=ax^2+2$, saame:

$$4=a \cdot 1+2, \text{ millest } a=2.$$

Seega on joonisel 65 kujutatud funktsiooni $y=2x^2+2$ graafik.

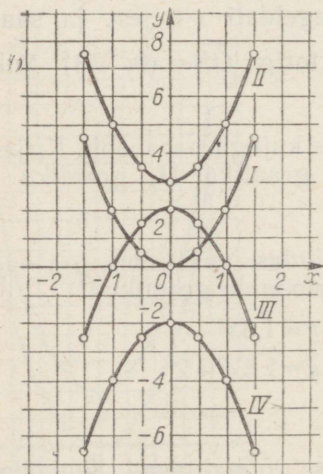
203. Joonisel 66 on antud viie ruutfunktsiooni graafikud. Leia igale graafikule vastava funktsiooni avaldis.

204. Leia funktsiooni $y=2x^2-1$ graafiku järgi x , kui

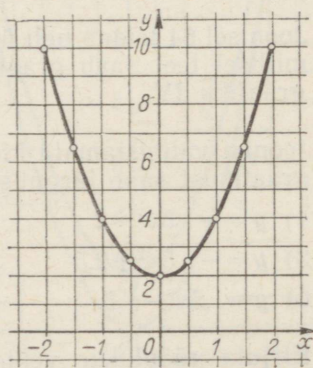
- 1) $y=1$; -1 ; $3,5$; 4 ,
- 2) $2x^2-1=-0,5$; 3 ; 5 ; 7 .

205. Autolaterna peegli läbilõige on kujult parabool (joon. 67). Leia funktsiooni valem, mille graafikuks on see parabool.

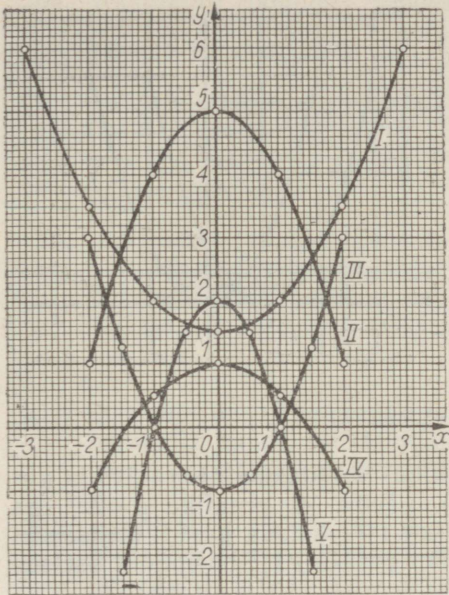
206. Paraboolikujulise kaarsilla (joon. 68) tugede A ja B vaheline kaugus on 32 m. Silla maksimaalne kõrgus on 6 m. Üksteisest 4 m kaugusele on paigutatud vertikaaltalad. Leia nende talade pikkused.



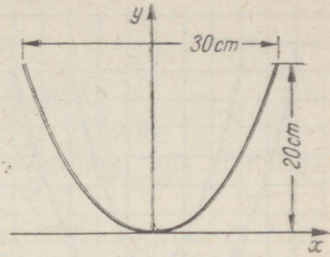
Joon. 64



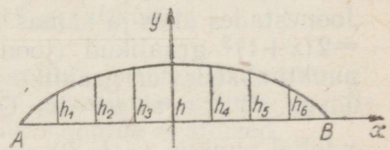
Joon. 65



Joon. 66



Joon. 67



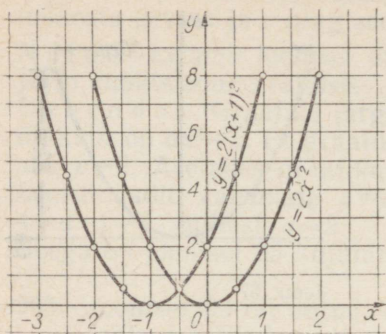
Joon. 68

4.9. FUNKTSIOON $y=a(x+m)^2$ JA SELLE GRAAFIK

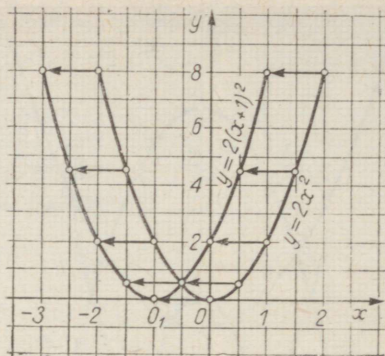
Asendame funktsiooni $y=2x^2$ avaldises argumendi x kaksliikmega $x+1$; saame valem $y=2(x+1)^2$. See valem esitab ilmselt ruutfunktsiooni, sest sulgude avamisel võime veenduda, et argumendi kõrgeim aste on teine aste. Arvutame järgnevalt avaldiste $2x^2$ ja $2(x+1)^2$ väärtused, andes argumentidele x täisarvulised väärtused (-3) -st 3 -ni.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
$2(x+1)^2$	8	2	0	2	8	18	32

Tabelist ilmneb, et funktsiooni $y=2(x+1)^2$ mingile väärtusele vastav argumendi väärtus on ühe võrra väiksem funktsiooni $y=2x^2$ samale väärtusele vastavast argumendi väärtusest. Kui näiteks tabeli teist rida nihutada ühe veeru võrra vasakule, siis kõikides veergudes mõlemate funktsioonide väärtused on vastavalt võrdsed.



Joon. 69



Joon. 70

Joonestades ühes ja samas teljestikus funktsioonide $y=2x^2$ ja $y=2(x+1)^2$ graafikud (joon. 69), näeme, et graafiku $y=2x^2$ iga punkti abstsiss on graafiku $y=2(x+1)^2$ vastava punkti abstsissist ühe võrra suurem. Graafiku $y=2(x+1)^2$ haripunkt asetseb x -teljel punktis $(-1; 0)$. Seega lüke, mille vektor $\vec{OO}_1 = (-1; 0)$ (joon. 70), teisendab parabooli $y=2x^2$ funktsiooni $y=2(x+1)^2$ graafikuks. Järelikult on funktsiooni $y=2(x+1)^2$ graafikuks sama-suguse kujuga parabool, nagu on $y=2x^2$ graafik.

207. Arvuta funktsiooni $y=2(x-1)^2$ väärtused ja võrdle neid funktsiooni $y=2x^2$ väärtustega. Joonesta nende funktsioonide graafikud. Selgita, kuidas on võimalik funktsiooni $y=2x^2$ graafikust saada funktsiooni $y=2(x-1)^2$ graafikut. Missuguses punktis asetseb funktsiooni $y=2(x-1)^2$ graafiku haripunkt?

208. Joonesta ühes ja samas teljestikus funktsioonide $y=0,5x^2$, $y=0,5(x+2)^2$ ja $y=0,5(x-2)^2$ graafikud ning selgita, kuidas kaht viimast graafikut on võimalik saada funktsiooni $y=0,5x^2$ graafikust.

Eelnevatest ülesannetest ilmneb, et

funktsiooni $y=a(x+m)^2$ graafikuks on parabool, mille tipp asetseb abstsissiteljel punktis $(-m; 0)$.

Sellel paraboolil on parabooliga $y=ax^2$ ühesugune kuju ja teda on võimalik viimasest saada rööplükkel vektoriga $\vec{OO}_1 = (-m; 0)$, s. t. kui $m > 0$, siis parabooli $y=a(x+m)^2$ saamiseks tuleb parabooli $y=ax^2$ nihutada x -telje sihis m ühikut vasakule, ja kui $m < 0$, siis m ühikut paremale.

209. Kasutades rööplüket, joonest funktsiooni $y = -\frac{1}{2}x^2$ graafiku põhjal funktsioonide $y = -\frac{1}{2}(x+1,5)^2$, $y = -\frac{1}{2}(x-1,5)^2$, $y = -\frac{1}{2}(x-0,5)^2$ ja $y = -\frac{1}{2}(x+0,5)^2$ graafikud.

210. Kirjuta rööplükke vektorid (koordinaatides), mis võimaldavad funktsiooni

1) $y = 5x^2$ graafikust saada funktsioonide $y = 5(x-5)^2$, $y = 5(x+5)^2$, $y = 5(x-2)^2$ ja $y = 5(x+2)^2$ graafikud;

2) $y = -3x^2$ graafikust saada funktsioonide $y = -3(x+3)^2$, $y = -3(x-3)^2$, $y = -3(x+4)^2$ ja $y = -3(x-4)^2$ graafikud.

211. Kirjelda teisendusi, millega funktsiooni $y = 2x^2$ graafikust on võimalik saada funktsioonide $y = -2(x+6)^2$, $y = -2(x-6)^2$, $y = -2(x+2,5)^2$ ja $y = -2(x-7)^2$ graafikud.

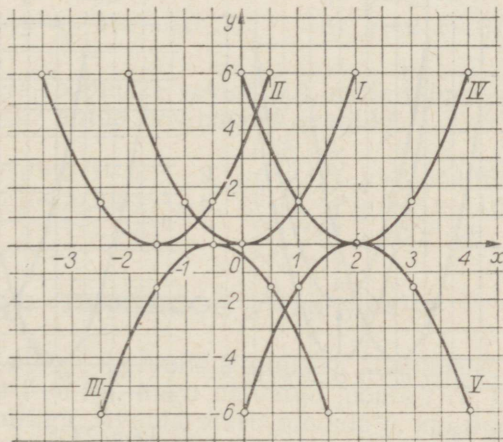
212. Joonisel 71 on viis ühe ja sama kujuga parabooli. Teades, et parabool I on funktsiooni $y = 1,5x^2$ graafikuks, kirjuta graafikutega II, III, IV ja V antud funktsioonide avaldised.

213. Tee funktsiooni $y = -4x^2$ graafiku rööplükke

1) vektoriga $\vec{OA} = (2; 0)$; 3) vektoriga $\vec{OC} = (-3,5; 0)$;

2) vektoriga $\vec{OB} = (-3; 0)$; 4) vektoriga $\vec{OD} = (0; 2)$.

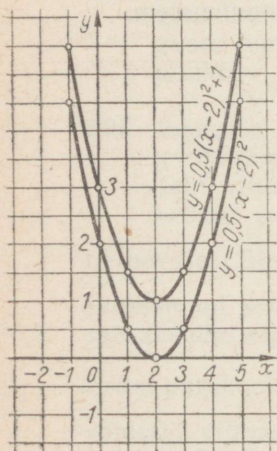
Iga lükkega saadud graafik esitab teatud ruutfunktsiooni. Kirjuta graafikute põhjal iga vastava funktsiooni valem.



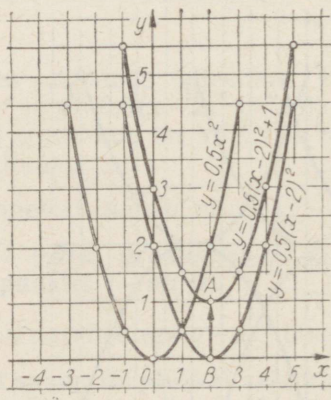
Joon. 71

4.10. FUNKTSIOONI $y=a(x+m)^2+n$ GRAAFIK

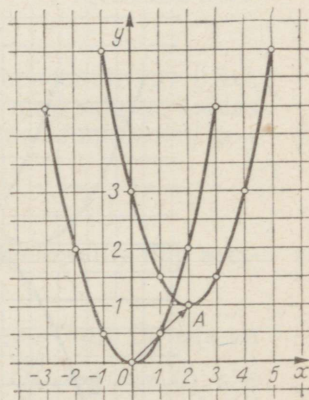
Joonestame ühes ja samas teljestikus funktsioonide $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$ ja $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$ graafikud (joon. 72). Funktsiooni $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$ graafiku iga punkti ordinaat on funktsiooni $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$ sama abstsissiga punkti ordinaadist ühe võrra suurem. Järelikult, kui nihutada parabooli $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$ ühe ühiku võrra ülespoole, siis ühtib see funktsiooni $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$ graafikuga. Seega on ka $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$ graafikuks samasuguse kujuga parabool. Selle parabooli saame, kui teeme parabooli $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$ rööplükke vektoriga $\vec{BA} = (0; 1)$ (joon. 73). Et parabooli $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$ saame paraboolist $y = \frac{1}{2}x^2$ rööplükkel vektoriga $\vec{OB} = (2; 0)$, siis saame ka parabooli $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$ paraboolist $y = \frac{1}{2}x^2$, kui teeme sellega esmalt lükke vektoriga $\vec{OB} = (2; 0)$ ja siis lükke vektoriga $\vec{BA} = (0; 1)$ (joon. 73). Need kaks järjestikust lüket saame asendada ühe lükkega. Viimase vektor on vektorite \vec{OB} ja \vec{BA} summa, s. o. vektor \vec{OA} . Järelikult, parabooli $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$ saame paraboolist $y = \frac{1}{2}x^2$ lükkega, mille vektor $\vec{OA} = (2; 1)$ (joon. 74).



Joon. 72



Joon. 73



Joon. 74

214. Kasutades lüket, joonesta funktsiooni $y=1,5x^2$ graafiku põhjal funktsioonide $y=1,5(x-3)^2+2$ ja $y=1,5(x+3)^2-2$ graafikud.

Millises punktis asetseb esimese parabooli haripunkt, millises teise haripunkt?

Elmistest ülesannetest selgub, et

funktsiooni $y=a(x+m)^2+n$ graafikuks on parabool, mis saadakse parabooli $y=ax^2$ rööplükkel vektoriga $\vec{OA}=(-m; n)$.

Selle parabooli haripunkt on punktis $A(-m; n)$.

215. Kasutades lüket, joonesta funktsiooni $y=-\frac{1}{2}x^2$ graafiku põhjal funktsioonide $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-2$, $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$, $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2-2$ graafikud.

216. Joonesta järgmiste funktsioonide graafikud:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1) $y=0,5(x+4)^2+3$ | 2) $y=0,5(x-4)^2+3$ |
| 3) $y=0,5(x-4)^2-3$ | 4) $y=0,5(x+4)^2-3$ |
| 5) $y=-0,5(x+4)^2+3$ | 6) $y=-0,5(x-4)^2+3$ |
| 7) $y=-0,5(x-4)^2-3$ | 8) $y=-0,5(x+4)^2-3$ |

217. Leia iga parabooli haripunkti koordinaadid.

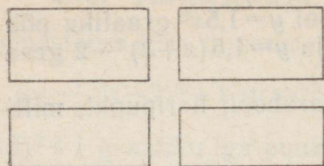
- | | |
|-------------------|--------------------|
| 1) $y=2(x+3)^2-4$ | 2) $y=-2(x-5)^2-4$ |
| 3) $y=5(x+4)^2+8$ | 4) $y=-4(x-5)^2+3$ |
| 5) $y=-3x^2+5$ | 6) $y=2x^2-3$ |
| 7) $y=-4(x-3)^2$ | 8) $y=2(x-6)^2$ |

218. Leia rööplükke vektor \vec{OA} , mille toimel saab paraboolist $y=-2x^2$ antud funktsiooni graafiku.

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1) $y=2(x-3)^2-9$ | 2) $y=2(x+6)^2+7$ |
| 3) $y=2(x+2)^2-6$ | 4) $y=2(x-4)^2+3$ |
| 5) $y=2(x-4)^2$ | 6) $y=2x^2-5$ |

4.11. FUNKTSIOON $y=ax^2+bx+c$

Ülesanne. Ristkülikukujulisele kooliõuele rajati kaks võrdse laiussega teed nii, nagu näidatud joonisel 75. Ülejäänud osa õuest kaeti muruga. Avalda muru pindala y , kui õue pikkus on 200 m, laius 150 m ja tee laius x meetrit.



Joon. 75

Lahendus. Lühema tee pindala on $150x^2$ ja pikema tee pindala $200x^2$. Teede ühiosa pindala on x^2 m². Seega

$$y = 200 \cdot 150 - 150x - 200x + x^2 \text{ ehk}$$

$$y = x^2 - 350x + 30\,000.$$

Saadud valem näitab, kuidas muru pindala y sõltub tee laiusest x . Igale x väärtusele vastab üks kindel y väärtus, mille saame arvutada valemi järgi. Seega y on x funktsioon, nimelt ruutfunktsioon, sest saadud avaldises on argumenti x kõrgeim aste teine aste. See on kõige üldisem ruutfunktsioon selles mõttes, et funktsiooni avaldises leidub peale **ruutliikme** (x^2) veel **lineaarliige** ($-350x$) ja **vabaliige** (30 000). Muid liikmeid ruutfunktsiooni avaldises olla ei saa.

Algebraalset summat, mis sisaldab muutuja ruuduga liiget, muutuja esimese astmega liiget ja muutujast vaba liiget, nimetatakse **teise astme kolmeliikmeks** ehk **ruutkolmeliikmeks**.

Ruutkolmeliikme üldkuju on $ax^2 + bx + c$.

Selles on ax^2 ruutliige ja a ruutliikme kordaja, bx lineaarliige ja b lineaarliikme kordaja, c on vabaliige. Valem $y = ax^2 + bx + c$ esitab üldist ruutfunktsiooni üldkuju. Kui selles valemis puuduvad lineaarliige ja vabaliige või üks nendest, siis saame ruutfunktsiooni erijuhud. Kui $b=0$ ja $c=0$, siis saame ruutfunktsiooni erijuhu $y = ax^2$. Kui seejuures $a=1$, siis $y = x^2$.

Kui $b=0$, siis saame ruutfunktsiooni erijuhu

$$y = ax^2 + c.$$

Seega varem vaatluse all olnud ruutfunktsioonid $y = x^2$, $y = ax^2$, $y = ax^2 + c$ on üldise ruutfunktsiooni erijuhud.

Üldise ruutfunktsiooni avaldiseks on ruutkolmeliige.

219. Leia ruutkolmeliikme ruutliige ja selle kordaja, lineaarliige ja selle kordaja, vabaliige. (Tähed k , l ja m tähistavad antud arve.)

1) $2x^2 - 3x + 5$

2) $x^2 + 4x - 1$

3) $-x^2 - x + 5$

4) $(2x - 1)(3x + 1)$

5) $(x + 3)(5 - x)$

6) $kx^2 - 31x + 5$

7) $21x^2 + (3 + m)x - 7k$

8) $\frac{2+m}{l}x^2 - \frac{3-5l}{m}x - 1$

9) $\frac{(m+1)x^2}{4} - 3x - 41x - 3k$

10) $-(41kmx)x + 5m - 4klx$

220. Näita, et järgmised avaldised on ruutkolmliikmed, ja leia iga kolmliikme puhul ruutliikme kordaja, lineaarliikme kordaja ja vabaliige.

$$1) 2(x-1)^2-4$$

$$2) 3(x+2)^2-1$$

$$3) -1,5(x+2)^2-3$$

$$4) -5(x-3)^2+6$$

$$5) -(x-5)^2+16$$

$$6) 2,5(x+4)^2-25$$

4.12. RUUTFUNKTSIOONI $y=ax^2+bx+c$ GRAAFIK

Varem nägime, et ruutfunktsiooni

$$y=a(x+m)^2+n \quad (1)$$

graafikuks on parabool, mille saame paraboolist $y=ax^2$ rööplükel

vektoriga $\vec{OA} = (-m; n)$ (vt. 4.10).

Tõestame nüüd, et igale ruutkolmliikmele

$$ax+by+c \quad (2)$$

saab anda kuju (1), mistõttu üldise ruutfunktsiooni graafiku leidmine taandub ruutfunktsiooni (1) graafiku leidmisele.

Ruutkolmliikmele (2) kuju (1) andmist nimetatakse ruutkolmliikmest täisruudu eraldamiseks. Kuidas ruutkolmliikmest eraldada täisruutu, see selgub järgmistest näidetest.

Näide 1. Eraldame täisruudu ruutkolmliikmest

$$2x^2+4x-1.$$

Selleks: 1) võtame esimeses kahes liikmes ruutliikme kordaja 2 sulgude ette, saame

$$2x^2+4x-1=2(x^2+2x)-1;$$

2) liidame sulgudesse jääva summaga niisuguse arvu, et sulgudes saaksime kahe arvu summa (või vahe) ruudu. Antud näite korral tuleb liita 1, sest $x^2+2x+1=(x+1)^2$. Selle liitmisega suurendasime aga ruutkolmliiget $2 \cdot 1=2$ võrra (sulgude ees on tegur 2), mille peame kogu avaldisest lahutama. Nii saame, et

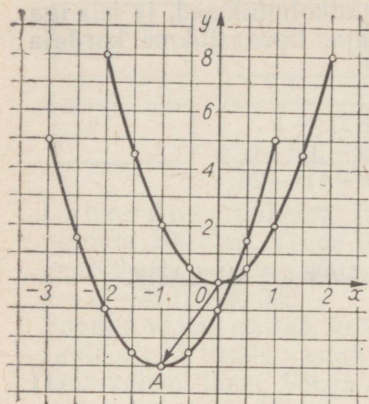
$$2x^2+4x-1=2(x^2+2x+1)-1-2;$$

3) kirjutame sulgudes oleva avaldisena ja koondame sarnased liikmed, saame

$$2x^2+4x-1=2(x+1)^2-3.$$

Sellega ongi kolmliikmele antud kuju (1) ehk teisiti, eraldatud täisruut.

Opitu põhjal teame, et funktsiooni $y=2(x+1)^2-3$ graafikuks on parabool, mille haripunkt on $(-1; -3)$. Selle parabooli saame



Joon. 76

paraboolist $y=2x^2$ rööplükel vektoriga $\overline{OA} = (-1; -3)$ (joon. 76).

Kontrolliks arvutame mõnele argumendi väärtusele vastavad funktsiooni $y=2x^2+4x-1$ väärtused, näiteks järgmise tabeli täitmise teel.

x	-3	-2	-1	0	1
$2x^2$	18	8	2	0	2
$4x$	-12	-8	-4	0	4
$2x^2+4x-1$	5	-1	-3	-1	5

Veendume, et lükel saadud parabool (joon. 76) läbib tõepoolest punkte $(-3; 5)$, $(-2; -1)$ jne., mille koordinaadid saime arvutamise teel.

Näide 2. Selgitame, mis on ruutfunktsiooni $y=-0,5x^2+2x+3$ graafikuks. Eraldame ruutkolmikmest täisruudu:

$$\begin{aligned}
 -0,5x^2+2x+3 &= -0,5(x^2-4x)+3= \\
 &= -0,5(x^2-4x+4)+3+2= \\
 &= -0,5(x-2)^2+5.
 \end{aligned}$$

Põhjenda, miks teisel sammul sulgudes liitsime 4 ja kogu avaldisega liitsime 2!

Avaldisest $y=-0,5(x-2)^2+5$ ilmneb, et funktsiooni $y=-0,5x^2+2x+3$ graafikuks on allapoole avanev parabool haripunktiga $(2; 5)$.

Ruutkolmikmest saab eraldada täisruudu ka üldkujul. Selleks teeme järgmised teisendused:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = \\
 &= a\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c - a \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.
 \end{aligned}$$

Kirjelda iga teisendust!

Tulemusest näeme, et ruutkolmliikme graafiku haripunkti koordinaadid on $-\frac{b}{2a}$ ja $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

Eelneva põhjal võime teha järgmise kokkuvõtte:

ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafikuks on parabool, mis avaneb ülespoole, kui $a > 0$, ja allapoole, kui $a < 0$. Selle parabooli haripunkt on punktis $A\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

Selle parabooli saame paraboolist $y = ax^2$ rööplükkel vektoriga $\vec{OA} = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

221. Joonesta funktsiooni $y = -0,5x^2 + 2x + 3$ graafik, andes argumentidele x täisarvulised väärtused vahemikust $-2 \leq x \leq 6$.

222. Eralda järgmiste ruutfunktsioonide avaldistes täisruut:

1) $y = 3x^2 - 12x + 3$

2) $y = -2x^2 + 6x - 5$

3) $y = 3x^2 + 3x + \frac{7}{3}$

4) $y = -3x^2 - 4x + 1$

223. On antud funktsioonid:

1) $y = 2x^2 + 6x - 1$,

2) $y = 2x^2 - 3x - 5$,

3) $y = 2x^2 - 6x - 5$,

4) $y = 2x^2 - 1,8x - 1,4$.

Leia iga funktsiooni puhul rööplükke vektor, mis teisendab funktsiooni $y = 2x^2$ graafiku antud funktsiooni graafikuks.

224. Anna ruutfunktsioonile kuju $y = a(x + m)^2 + n$.

1) $y = 3x^2 + 4x - 6$

2) $y = -6x^2 + 12x - 20$

3) $y = 4x^2 + 12x + 4$

4) $y = -8x^2 + 8x + 6$

225. Joonesta funktsioonide $y = x^2 - 3x - 4$ ja $y = -x^2 - 3x - 4$ graafikud.

226. Leida graafikult argumendi x väärtused, mille puhul $y=0$.

1) $y=x^2+4x+3$

3) $y=2x^2-8$

2) $y=2x^2-2x-1$

4) $y=x^2-3x+2$

4.13. ARVU RUUTJUUR

Leia joonise 54 abil niisugune negatiivne arv, mille ruut on 9. Leia niisugune positiivne arv, mille ruut on 9. Positiivset arvu, mille ruut on 9, nimetatakse arvu 9 ruutjuureks ja märgitakse sümboliga $\sqrt{9}$ (loe «ruutjuur üheksast»).

Seega $\sqrt{9}=3$. Niisamuti $\sqrt{64}=8$, sest $8^2=64$;

$\sqrt{0,01}=0,1$, sest $0,1^2=0,01$.

Antud positiivse arvu ruutjuureks nimetatakse niisugust positiivset arvu, mille ruut võrdub antud arvuga. Nulli ruutjuur võrdub nulliga.

Ruutjuurt negatiivsest arvust meile tuntud arvude hulgas pole olemas, sest nende hulgas pole niisugust arvu, mille ruut oleks negatiivne.

Ruutjuure definitsioonist jäeldub, et

kui $a \geq 0$, siis $\sqrt{a^2}=a$,

kui $a < 0$, siis $\sqrt{a^2}=-a$. Näiteks $\sqrt{(-5)^2}=-(-5)=5$.

Üldiselt

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Ruutjuure definitsioonist jäeldub ka, et näiteks $(\sqrt{7})^2=7$.

Üldiselt, kui $a \geq 0$, siis $(\sqrt{a})^2=a$.

Näiteks $(\sqrt{8})^2=8$; $(-\sqrt{11})^2=11$, kuid $-(\sqrt{11})^2=-11$.

Võrdusest $(\sqrt{a})^2=a$ (kui $a \geq 0$) jäeldub võrdus $a=(\sqrt{a})^2$, mis ütleb, et iga mittenegatiivse arvu saab kirjutada ruuduna, näiteks $37=(\sqrt{37})^2$.

227. Leia järgmised arvud:

1) $\sqrt{127^2}$ $\sqrt{(-98)^2}$ $\sqrt{187^2}$ $\sqrt{5736^2}$ $(\sqrt{5})^2$

2) $\sqrt{356^2}$ $-\sqrt{372^2}$ $\sqrt{(-123)^2}$ $\sqrt{9999^2}$ $\sqrt{(-3)^2}$

3) $(-\sqrt{3})^2$ $(-\sqrt{12})^2$ $-(\sqrt{2})^2$ $\sqrt{(-5)^2}$ $[\sqrt{(-2)^2}]^2$

228. Kirjuta ruutudena järgmised arvud:

2 7 11 20 34 76

229. Teisenda järgmised vahed korrutisteks:

$$1) \begin{array}{l} x^2 - 9 \\ x^2 - 7 \\ x^2 - b^2 \\ x^2 - a \end{array}$$

$$2) \begin{array}{l} x^2 - 16 \\ x^2 - 8 \\ x^2 - n^2 \\ x^2 - b \end{array}$$

Näiteid. 1) $x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$.

$$2) x^2 - c = x^2 - (\sqrt{c})^2 = (x + \sqrt{c})(x - \sqrt{c}).$$

230. Täida alljärgnev tabel, kui $a > 0$.

a	24		41	80		76	78
a^2	289	441	529		841	900	729

231. Leia proovimise teel järgmised ruutjuured:

$$1) \begin{array}{l} \sqrt{121} \\ \sqrt{144} \\ \sqrt{169} \end{array}$$

$$2) \begin{array}{l} \sqrt{196} \\ \sqrt{225} \\ \sqrt{256} \end{array}$$

$$3) \begin{array}{l} \sqrt{289} \\ \sqrt{324} \\ \sqrt{361} \end{array}$$

232. Leia proovimise teel järgmiste arvude ruutjuured:

1) 400	441	625	12,25	900	0,04
2) $\frac{4}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{49}{81}$
3) 0,09	0,16	1,44	82,81	0,1024	2,89

4.14. RUUTJUURE LIGIKAUDNE VÄÄRTUS

On naturaalarve, millel pole naturaalarvulist ruutjuurt. Näiteks $\sqrt{40}$ ei ole naturaalarv, sest $6^2 = 36 < 40$ ja $7^2 = 49 > 40$. Siit näeme, et

$$6 < \sqrt{40} < 7.$$

On kerge näidata, et kui naturaalarvul pole ruutjuurt naturaalarvude hulgas, siis pole tal ruutjuurt ka ratsionaalarvude hulgas.

Tõesti, kui leiduks niisugune taandumatu murd $\frac{m}{n}$, et $\sqrt{40} = \frac{m}{n}$, siis ruutjuure definitsiooni põhjal

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 40 = \frac{mm}{nn} = 40.$$

Et murd $\frac{m}{n}$ on taandumatu, siis ka murd $\frac{mm}{nn}$ on taandumatu (m ja n on ühisetgurita), mistõttu võrdus

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 40$$

on võimatu (taandumatu murd ei saa võrduda naturaalarvuga).

Niisiis, kui $a \in N$ ja $\sqrt{a} \notin N$, siis $\sqrt{a} \notin Q$,

kus N on naturaalarvude hulk ja Q ratsionaalarvude hulk. Sel korral, kui antud arvul pole ratsionaalarvulist ruutjuurt, piirdume selle ruutjuure ligikaudse väärtusega, arvutades selle täpsusega 1; 0,1; 0,01 jne., lühidalt, niisuguse täpsusega, nagu vaja.

Mis on \sqrt{a} , kus $a > 0$, ligikaudne väärtus täpsusega 1; 0,1; 0,01 jne., seda selgitab järgmine definitsioon:

kaht arvu, mis teineteisest erinevad 1; 0,1; 0,01; ... võrra ja millest esimese ruut on väiksem kui a ning teise ruut on suurem kui a , nimetatakse \sqrt{a} ligikaudseteks väärtusteks täpsusega 1; 0,1; 0,01; Esimene on \sqrt{a} ligikaudne väärtus puuduga, teine liiaga.

Arvutustel kasutame neist kahest ligikaudselt väärtusest seda, mille ruut erineb arvust a vähem.

Näide. $\sqrt{10}$ ligikaudsed väärtused täpsusega 1 on 3 ja 4. Et 3^2 erineb 10-st vähem kui 4^2 , siis kasutame $\sqrt{10}$ ligikaudse väärtusena täpsusega 1 arvu 3, seega $\sqrt{10} \approx 3$.

$\sqrt{10}$ ligikaudsed väärtused täpsusega 0,1 on 3,1 ja 3,2; $3,1^2 = 9,61 < 10$; $3,2^2 = 10,24 > 10$.

Et $10 - 9,61 = 0,39$ ja $10,24 - 10 = 0,24$, siis $\sqrt{10} \approx 3,2$.

$\sqrt{10}$ ligikaudsed väärtused täpsusega 0,01 on 3,16 ja 3,17. Et $3,16^2$ erineb 10-st vähem kui $3,17^2$, seetõttu $\sqrt{10} \approx 3,16$.

233. Leia proovimise teel järgmiste ruutjuurte ligikaudsed väärtused täpsusega 1:

1) $\sqrt{30}$	$\sqrt{60}$	$\sqrt{63}$	$\sqrt{75}$	$\sqrt{89}$	$\sqrt{96}$
2) $\sqrt{182}$	$\sqrt{224}$	$\sqrt{297}$	$\sqrt{473}$	$\sqrt{688}$	$\sqrt{962}$

Näide. Leida proovimise teel $\sqrt[3]{764}$ ligikaudne väärtus täpsusega 1.

$$\begin{aligned} \text{Lahendus. } 25^2 &= 625 \\ 26^2 &= 676 \\ 27^2 &= 729 \\ 28^2 &= 784 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 784 - 764 &= 20 \\ 764 - 729 &= 35 \\ \text{Vastus. } \sqrt[3]{764} &\approx 28. \end{aligned}$$

4.15. RUUTJUURE LIGIKAUDSE VÄÄRTUSE ARVUTAMINE HERONI VÕTTEGA

Antiikaja Kreeka matemaatik, geodeet ja insener *Heron* (elas tõenäoliselt I sajandi lõpul m. a. j.) avaldas ruutjuure ligikaudse väärtuse arvutamiseks järgmise järkjärgulise lähendamise võtte.

Olgu tarvis leida \sqrt{A} . Leiame esialgu hindamise järgi \sqrt{A} mingi lähisväärtuse a_1 :

$$a_1 \approx \sqrt{A}.$$

Selle ligikaudse võrduse mõlema poole ruudud on samuti ligikaudu võrdsed:

$$a_1^2 \approx A.$$

Jagades viimase ligikaudse võrduse pooled arvuga a_1 , saame

$$a_1 \approx \frac{A}{a_1}.$$

Et a_1 on \sqrt{A} lähisväärtus, siis on seda ka $\frac{A}{a_1}$. Seejuures nende lähisväärtuste korrutis on $A = \sqrt{A} \cdot \sqrt{A}$. Neist kahest \sqrt{A} ligikaudsest väärtusest üks on ligikaudne väärtus puuduga, teine liiaga, sest kui korrutises $a_1 \cdot \frac{A}{a_1}$ üks tegur on väiksem kui \sqrt{A} , siis teine on suurem kui \sqrt{A} . Sellest on ilmne, et \sqrt{A} väärtus asetseb arvude a_1 ja $\frac{A}{a_1}$ vahel. Seepärast leiame arvude a_1 ja $\frac{A}{a_1}$ aritmeetilise keskmise a_2 , mis on \sqrt{A} paremaks lähisväärtuseks kui a_1 ja $\frac{A}{a_1}$:

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{A}{a_1} \right).$$

See, mis eespool on öeldud lähisväärtuse a_1 kohta, kehtib ka lähisväärtuse a_2 kohta; seega arvust a_2 paremaks \sqrt{A} lähisväärtuseks a_3 on arvude a_2 ja $\frac{A}{a_2}$ aritmeetiline keskmine:

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{A}{a_2} \right),$$

Samal viisil jätkates saame

$$a_4 = \frac{1}{2} \left(a_3 + \frac{A}{a_3} \right).$$

.....

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{A}{a_n} \right).$$

Nii võime leida \sqrt{A} ligikaudse väärtuse kui tahes väikese veaga ehk teisiti öeldes, kui tahes suure täpsusega.

Näide 1. Arvutame $\sqrt{17}$ täpsusega 0,001.

Lahendus. $\sqrt{17} \approx 4$.

$$a_1 = 4;$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(4 + \frac{17}{4} \right) = \frac{1}{2} (4 + 4,25) \approx 4,12;$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(4,12 + \frac{17}{4,12} \right) = \frac{1}{2} (4,12 + 4,126) = 4,123.$$

Selgitamiseks, kas lähisväärtuse a_3 viimane number 3 on õige, arvutame järgmise lähisväärtuse a_4 :

$$a_4 = \frac{1}{2} \left(4,123 + \frac{17}{4,123} \right) = \frac{1}{2} (4,123 + 4,1232) = 4,1231.$$

Vastus. $\sqrt{17} = 4,123$.

Näide 2. Arvuta $\sqrt{674041}$ täpsusega 1.

Lahendus. $\sqrt{674041} \approx 800$.

$$a_1 = 800;$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(800 + \frac{674\,041}{800} \right) = \frac{1}{2} (800 + 842) = 821;$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(821 + \frac{674\,041}{821} \right) = \frac{1}{2} (821 + 821) = 821.$$

Vastus. $\sqrt{674041} = 821$.

Sellest näitest selgub, et Heroni järkjärgulise lähendamise võttega saame leida ka ruutjuure täpse väärtuse, kui see täpne väärtus kuulub ratsionaalarvude hulka.

234. Arvuta järgmiste ruutjuurte ligikaudsed väärtused täpsusega 0,1, kasutades järkjärgulise lähendamise võtet:

1) $\sqrt{8}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{14}$	$\sqrt{20}$
2) $\sqrt{6}$	$\sqrt{15}$	$\sqrt{19}$	$\sqrt{24}$	$\sqrt{26}$

235. Arvuta järgmiste ruutjuurte ligikaudsed väärtused täpsusega 0,01:

1) $\sqrt[3]{32}$ 2) $\sqrt[3]{59}$ 3) $\sqrt[3]{66}$ 4) $\sqrt[3]{74}$ 5) $\sqrt[3]{90}$

2) $\sqrt[3]{181}$ 3) $\sqrt[3]{200}$ 4) $\sqrt[3]{250}$ 5) $\sqrt[3]{442}$ 6) $\sqrt[3]{570}$

236. Arvuta järgmiste ruutjuurte ligikaudsed väärtused täpsusega 0,001:

1) $\sqrt[4]{2}$ 2) $\sqrt[4]{5}$ 3) $\sqrt[4]{6}$ 4) $\sqrt[4]{19}$

5) $\sqrt[4]{3}$ 6) $\sqrt[4]{7}$ 7) $\sqrt[4]{11}$ 8) $\sqrt[4]{22}$

237. Arvuta järgmiste ruutjuurte väärtused:

1) $\sqrt{6724}$ 2) $\sqrt{7396}$ 3) $\sqrt{831744}$

4) $\sqrt{8281}$ 5) $\sqrt{7569}$ 6) $\sqrt{241081}$

4.16. RUUTJUURTE OMADUSI

238. 1) Arvuta avaldised $\sqrt{4 \cdot 9}$ ja $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$ ja võrdle tulemusi.

2) Arvuta avaldised $\sqrt{5 \cdot 7,2}$ ja $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7,2}$. Ümarda viimase tulemus kolme tüvenumbriga arvuks ja võrdle seda eelmise tulemusega.

Tõestame, et kui a ja b on positiivsed arvud, siis $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.
Tõestuseks võrdleme avaldiste $\sqrt{a \cdot b}$ ja $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ruutusid:

$$(\sqrt{a \cdot b})^2 = a \cdot b.$$

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b.$$

Kui positiivsete arvude ruudud on võrdsed, siis on ka need arvud võrdsed.

Seega tõesti

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Korrutise ruutjuur võrdub tegurite ruutjuurte korrutisega.

239. Arvuta avaldise $\sqrt{\frac{7,2}{5}}$

väärtus, teostades esmalt jagamise ja leides siis ruutjuure saadud jagatisest. Seejärel arvuta avaldise $\frac{\sqrt{7,2}}{\sqrt{5}}$

väärtus kolme tüvenumbriga. Võrdle tulemusi. Tõestame, et kui a ja b on positiivsed arvud, siis

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Tõestuseks võrdleme avaldiste

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \text{ ja } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

ruutusid:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}, \quad \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$$

Seega tõesti

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Jagatise ruutjuur võrdub jagatava ruutjuure ja jagaja ruutjuure jagatisega.

240. Arvuta:

$$\sqrt{25 \cdot 64}; \quad \sqrt{100 \cdot 49}; \quad \sqrt{0,01 \cdot 0,25}; \quad \sqrt{16a^2}; \quad \sqrt{4a}$$

241. Arvuta:

$$\sqrt{\frac{36}{100}}; \quad \sqrt{\frac{49}{0,01}}; \quad \sqrt{\frac{a^2}{4}}; \quad \sqrt{\frac{m}{16}}$$

242. Arvutades ruutjuured proovimise teel, leia, mitu korda on

- | | |
|------------------|-------------------------|
| 1) $\sqrt{400}$ | suurem kui $\sqrt{4}$; |
| 2) $\sqrt{900}$ | " " $\sqrt{9}$; |
| 3) $\sqrt{2500}$ | " " $\sqrt{25}$; |

- 4) $\sqrt{640\,000}$ " " $\sqrt{64}$;
 5) $\sqrt{490\,000}$ " " $\sqrt{49}$.

Mis selgub siin?

243. Arvutades ruutjuured proovimise teel, leia, mitu korda on

- 1) $\sqrt{16}$ väiksem kui $\sqrt{1600}$;
 2) $\sqrt{9}$ " " $\sqrt{900}$;
 3) $\sqrt{0,04}$ " " $\sqrt{4}$;
 4) $\sqrt{0,09}$ " " $\sqrt{900}$;
 5) $\sqrt{1}$ " " $\sqrt{10\,000}$.

Viimase kahe ülesande lahendamisel näeme, et kui suurendame arvu 100, 10 000, ... korda, siis arvu ruutjuur suureneb vastavalt 10, 100, ... korda;

kui vähendame arvu 100, 10 000, ... korda, siis arvu ruutjuur väheneb 10, 100, ... korda.

Tõestame, et

kui suurendame arvu k^2 korda, siis arvu ruutjuur suureneb k korda.

Tõestus. Olgu antud positiivne arv a . Selle ruutjuur on \sqrt{a} . Suurendades antud arvu k^2 korda, saame uueks arvuks k^2a , ruutjuur sellest on $\sqrt{k^2a} = \sqrt{k^2} \cdot \sqrt{a} = k\sqrt{a}$.

Seda oligi tarvis tõestada.

4.17. RUUTJUURTE TABEL

Ruutjuurte või nende ligikaudsete väärtuste kiireks leidmiseks on koostatud ruutjuurte tabel (vt. V. Bradis. Neljakohalised matemaatilised tabelid keskkoolidele. Tabel IV). See tabel on samasuguse ehitusega nagu ruutude tabel. Toome selgituseks ruutjuurte tabeli alguse, jättes sellest välja 9 parempoolset veergu, mida me ei kasuta.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,005	1,010	1,015	1,020	1,025	1,030	1,034	1,039	1,044
1,1	1,049	1,054	1,058	1,063	1,068	1,072	1,077	1,082	1,086	1,091
1,2	1,095	1,100	1,105	1,109	1,114	1,118	1,122	1,127	1,131	1,136
1,3	1,140	1,145	1,149	1,153	1,158	1,162	1,166	1,170	1,175	1,179
1,4	1,183	1,187	1,192	1,196	1,200	1,204	1,208	1,212	1,217	1,221

Selles tabelis on antud kolmekohaliste tüvedega arvude 1,00 kuni 99,9 nelja tüvenumbriga ruutjuured. Meie piirdume oma arvutustes kolme tüvenumbriga arvudega, neljandat tüvenumbrit kasutame ligikaudsete arvudega arvutamise eeskirjade kohaselt varunumbri. Varunumbri säilitame ainult vahepealsete tulemuste arvutamisel, lõputulemuse ümardame kolme tüvenumbriga arvuks.

Ühe ja kahe tüvenumbriga arvu ruutjuur on teises veerus ja reas, milles on antud arvu tüvi.

Näide. $\sqrt{1,3} = 1,140 \approx 1,14$.

Kolme tüvenumbriga arvu ruutjuure leiame reast, milles on antud arvu esimesed kaks tüvenumbrit, ja veerust, mille pealdiseks on antud arvu kolmas tüvenumber.

Näide. $\sqrt{1,24} = 1,114 \approx 1,11$.

Kui juuritav arv ei kuulu vahemikku 1,00 kuni 99,9, siis raken-dame arvu ruutjuure viimasena kirjeldatud omadust (vt. 4. 16). Kui juuritav on 1,00-st väiksem, siis suurendame teda 100, 10 000, ... korda, nii et saame arvu, mis kuulub vahemikku 1,00 kuni 99,9, leiame siis suurendatud arvust ruutjuure ja vähendame leitud arvu vastavalt 10, 100, ... korda.

Näiteid.

$$1) \sqrt{0,0169} = \sqrt{1,69} : 10 = 1,300 : 10 = 0,1300 \approx 0,130.$$

$$2) \sqrt{0,00072} = \sqrt{7,2} : 100 = 2,683 : 100 = 0,02683 \approx 0,0268.$$

$$3) \sqrt{0,764} = \sqrt{76,4} : 10 = 8,74 : 10 = 0,8741 \approx 0,874.$$

Kui juuritav on 99,9-st suurem, siis vähendame teda 100, 10 000, ... korda, nii et saame arvu, mis kuulub vahemikku 1,00 kuni 99,9, leiame siis vähendatud arvust ruutjuure ja suurendame leitud arvu vastavalt 10, 100, ... korda.

Näiteid.

$$1) \sqrt{841} = 10 \cdot \sqrt{8,41} = 10 \cdot 2,900 = 29,0.$$

$$2) \sqrt{3546} = 10 \cdot \sqrt{35,46} = 10 \cdot 5,95 = 59,5.$$

$$3) \sqrt{64900} = 100 \cdot \sqrt{6,49} = 100 \cdot 2,548 = 255.$$

Juhul, kui juuritavas on rohkem kui kolm tüvenumbrit, ümardame ta kolme tüvenumbriga arvuks ja leiame ümardatud arvu ruutjuure.

$$\text{Näide. } \sqrt{785192} \approx \sqrt{785000} = 100 \cdot \sqrt{78,5} = 100 \cdot 8,860 = 886.$$

244. Leia tabelist järgmiste arvude ruutjuured:

$$1) \quad 1,96 \quad 2,56 \quad 3,24 \quad 4,41 \quad 5,29$$

$$2) \quad 1,69 \quad 1,21 \quad 5,76 \quad 7,84 \quad 6,76$$

245. Leia tabelist järgmiste arvude ruutjuured:

1) 12	15	19	37	44	65
2) 47	54	59	73	87	92

246. Leia tabelist järgmiste arvude ruutjuured:

1) 5,2	8,4	9,5	12,5	22,42
2) 36,8	42,5	56,7	84,2	95,57

247. Leia ruudu külje pikkus, kui ruudu pindala on

1) 5,4 cm ² ;	8,6 cm ² ;	9,8 cm ² ;	14,5 cm ² ;	16,8 cm ² ,
2) 20,5 cm ² ;	48,5 cm ² ;	59,6 cm ² ;	62,4 cm ² ;	84,8 cm ² .

248. Leia tabeli abil järgmiste arvude ruutjuured:

1) 0,441	2) 0,676	3) 0,256	4) 0,0042
0,841	0,324	0,289	0,016
0,0081	0,0121	0,0144	0,0007
0,0196	0,0049	0,0036	0,0006

249. Leia tabeli abil järgmiste arvude ruutjuured:

1) 62 540	2) 78 460	3) 123 400	4) 725 900
3 600	2 500	4 900	186 000
16 900	72 900	18 500	491 000
336 200	24 350	12 670	225 800
5) 73852	6) 62128	7) 50,4122	
42341	5609	38,2434	
12,467	4,8963	0,96125	
576,95	0,28591	487632	
0,58423	43,667	9,42812	

N ä i d e. Võrdkülgse kolmnurga pindala on 22,5 cm². Kui suur on selle kolmnurga külg?

L a h e n d u s. Kasutame võrdkülgse kolmnurga pindala valemit $S=0,433 a^2$:

$$0,433 a^2=22,5 \Rightarrow a^2=22,5 : 0,433 \approx 52,0 \Rightarrow a=\sqrt{52,0}=7,21.$$

V a s t u s. Kolmnurga külg on 7,21 cm.

250. Kolmnurga alus on 4,2 cm ja kõrgus on 6 cm. Kui pikk on selle kolmnurgaga pindvõrdse ruudu külg?

251. Rööpküliliku alus on 12 cm ja kõrgus on 5,8 cm. Kui pikk on selle rööpküliliku pindvõrdse ruudu külg?

252. Trapetsi alused on $a=8,4$ cm, $b=5,8$ cm ja kõrgus $h=6$ cm. Arvuta selle trapetsiga pindvõrdse ruudu übermõõt.
253. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga pindala on 120 cm². Kui pikk on selle kolmnurga kaatet?
254. Täida järgmine tabel, kui $a > 0$.

a		17		24		96	
a^2	1600		7056		9025		7744
\sqrt{a}		8		2			3

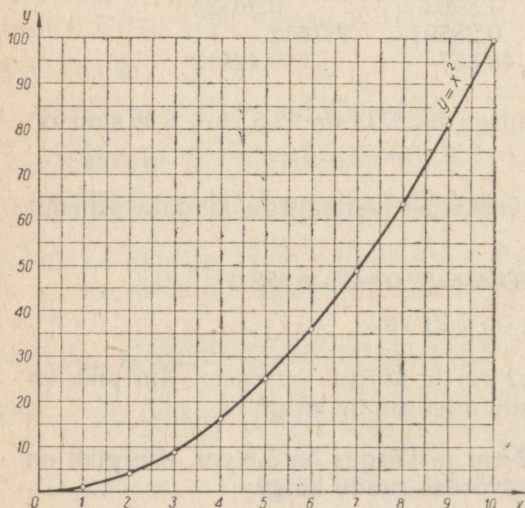
4.18. RUUTJUURE LEIDMINE GRAAFIKU ABIL

Ruutfunktsiooni $y=x^2$ graafik (joon. 77) võimaldab leida ka arvu ruutjuure ligikaudset väärtust. Kui graafiku punkti koordinaadid on $(x; y)$, siis

$$y=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y}.$$

Antud arvu y järgi leiame graafikul punkti, mille ordinaat on y . Selle punkti abstsiss x ongi \sqrt{y} .

Kui joonis 77 on valmistatud millimeetripaberile, siis saab selle joonise abil leida ruutjuure ligikaudse väärtuse täpsusega 0,05.



Joon. 77

255. Leia joonise 77 abil kahe tüvenumbriga arv, mille ruut on

1) 15; 20; 30; 35; 50, 2) 5; 13; 60; 70; 90.

256. Leia joonise 77 abil järgmised ruutjuured kahe tüvenumbri-
riga:

1) $\sqrt{20}$ $\sqrt{30}$ $\sqrt{45}$ $\sqrt{49}$ $\sqrt{62}$

2) $\sqrt{90}$ $\sqrt{85}$ $\sqrt{79}$ $\sqrt{68}$ $\sqrt{10}$

257. Ruudu pindala on

1) 18 cm²; 22 cm²; 50 cm²; 72 cm²; 92 cm²,

2) 98 cm²; 82 cm²; 60 cm²; 55 cm²; 32 cm².

Leia joonise 77 abil ruudu külje pikkus.

Joonise 77 abil saab leida ka 1-st väiksemate ja 100-st suuremate
arvude ruutjuurte ligikaudseid väärtusi.

Näiteid. 1) $\sqrt{0,35} = \sqrt{35} : 10 = 5,9 : 10 = 0,59$.

2) $\sqrt{0,065} = \sqrt{6,5} : 10 = 2,6 : 10 = 0,26$.

3) $\sqrt{5500} = 10 \cdot \sqrt{55} = 10 \cdot 7,4 = 74$.

258. Leia joonise 77 abil kahe tüvenumbriga järgmised ruut-
juured:

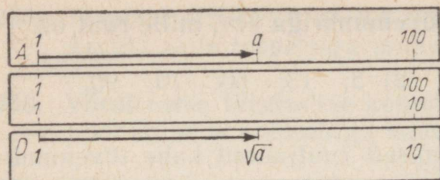
1) $\sqrt{5600}$ $\sqrt{7800}$ $\sqrt{8200}$ $\sqrt{9500}$

2) $\sqrt{4500}$ $\sqrt{4750}$ $\sqrt{7000}$ $\sqrt{7750}$

3) $\sqrt{0,85}$ $\sqrt{0,42}$ $\sqrt{0,0065}$ $\sqrt{0,0076}$

4.19. RUUTJUURE LEIDMINE LÜKATI ABIL

Arvu ruudu leidmisel nägime, et kui märgime skaalal D mingi
arvu, siis skaalal A on niidi all antud arvu ruut. Ümberpöördult,
kui märgime skaalal A mingi arvu a , siis skaalal D on niidi all
 \sqrt{a} (joon. 78). Näiteks märkides skaalal A arvu 4, on märkija niidi
all skaalal D arv $2 = \sqrt{4}$. Arv 9 skaalal A on kohakuti arvuga $3 = \sqrt{9}$
skaalal D jne.



Joon. 78

Leiame näiteks $\sqrt[3]{7,6}$. Skaala A vasakul poolel, kus on kujutatud arvud 1 kuni 10, märgime arvu 7,6. Niidi alt skaalalt D loeme otsitava ruutjuure tüvenumbrid 2—7—6. Seega $\sqrt[3]{7,6}=2,76$.

Arvutades $\sqrt[3]{27,5}$, märgime skaala A paremal poolel (seal on kujutatud arvud 10 kuni 100) arvu 27,5. Niidi alt skaalalt D loeme otsitava ruutjuure tüvenumbrid 5—2—4. Seega

$$\sqrt[3]{27,5}=5,24.$$

259. Kontrolli lükati abil järgmiste võrduste õigsust:

$$\sqrt[3]{2} = 1,41$$

$$\sqrt[3]{14,6}=3,82$$

$$\sqrt[3]{6,1}=2,47$$

$$\sqrt[3]{20}=4,47$$

$$\sqrt[3]{6}=2,45$$

$$\sqrt[3]{34}=5,83$$

$$\sqrt[3]{2,4}=1,84$$

$$\sqrt[3]{60}=7,75$$

$$\sqrt[3]{32}=5,66$$

260. Kontrolli, kas alljärgnevate ruutjuurte tüvenumbrid (sulgudes) on õiged. Leia need ruutjuured.

$$\sqrt[3]{5,5} \quad (2-3-4)$$

$$\sqrt[3]{6,9} \quad (2-6-2)$$

$$\sqrt[3]{76,2} \quad (8-7-3)$$

$$\sqrt[3]{44} \quad (6-6-3)$$

$$\sqrt[3]{10,8} \quad (3-2-9)$$

$$\sqrt[3]{1,48} \quad (1-2-2)$$

$$\sqrt[3]{2,65} \quad (1-6-3)$$

$$\sqrt[3]{39,5} \quad (6-2-8)$$

$$\sqrt[3]{5,22} \quad (2-2-9)$$

Kui arv, millest on vaja leida ruutjuurt, on 1-st väiksem või 100-st suurem, siis toimime samuti nagu ruutjuure leidmisel tabeli abil: suurendame (või vähendame) antud arvu 100, 10 000, ... korda nii, et saame arvu, mille täisosa on kas ühe- või kahekohaline, leiame sellest lükati abil ruutjuure ja vähendame (või suurendame) leitud arvu vastavalt 10, 100, ... korda.

Näiteid. 1) $\sqrt[3]{0,0795}=\sqrt[3]{7,95}:10=2,82:10=0,282$.

Märkides skaala A vasakul poolel arvu 7,95, leiame niidi alt skaalal D otsitava arvu tüvenumbrid 2—8—2.

2) $\sqrt[3]{0,0085}=\sqrt[3]{85}:100=9,22:100=0,0922$.

3) $\sqrt[3]{4550}=10 \cdot \sqrt[3]{45,5}=10 \cdot 6,75=67,5$.

Märkides skaala A paremal poolel arvu 45,5, leiame niidi alt skaalal D tüvenumbrid 6-7-5.

$$4) \sqrt[3]{176\,000} = 100 \cdot \sqrt[3]{17,6} = 100 \cdot 4,2 = 420.$$

$$5) \sqrt[3]{365} = 10 \cdot \sqrt[3]{3,65} = 10 \cdot 1,91 = 19,1.$$

$$6) \sqrt[3]{0,325} = \sqrt[3]{32,5} : 10 = 5,7 : 10 = 0,57.$$

Kui antud arv sisaldab rohkem kui kolm tüvenumbrit, siis ümar-dame ta kolme tüvenumbriga arvuks ja leiame sellest ruutjuure.

$$\text{Näiteks } \sqrt[3]{1723} \approx \sqrt[3]{1720} = 10 \cdot \sqrt[3]{17,2} = 10 \cdot 4,15 = 41,5.$$

261. Leia ruutjuur. Sulgudes on antud vastus.

$$\sqrt{200} \quad (14,1) \qquad \sqrt{2000} \quad (44,7)$$

$$\sqrt{230} \quad (15,2) \qquad \sqrt{5200} \quad (72,1)$$

$$\sqrt{870} \quad (29,5) \qquad \sqrt{137} \quad (11,7)$$

$$\sqrt{130} \quad (11,4) \qquad \sqrt{37564} \quad (194)$$

$$\sqrt{0,17} \quad (0,412) \qquad \sqrt{0,0789} \quad (0,281)$$

$$\sqrt{0,017} \quad (0,13) \qquad \sqrt{0,905} \quad (0,951)$$

$$\sqrt{0,0215} \quad (0,147) \qquad \sqrt{0,0028} \quad (0,0529)$$

$$\sqrt{0,042} \quad (0,205) \qquad \sqrt{0,5} \quad (0,707)$$

262. Ruudukujulise mänguplatsi pindala on 1840 m². Kui pikk on selle ruudu külg?

4.20. RUUTVÖRRAND $x^2 = b$

Ülesanne 1. Arvu ja ta vastandarvu korrutis on -9 . Leia see arv ja ta vastandaru.

Lahendus. Tähistame otsitava arvu tähega x . Vastandaru on siis $-x$ ja nende arvude korrutis $x \cdot (-x) = -x^2$. Saame võrrandi $-x^2 = -9$.

Selle teisendamisel saame:

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+3=0 \text{ või } x-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -3 \text{ või } x = 3.$$

Otsitav arv võib olla 3 või -3 .

Kui otsitav arv $x=3$, siis ta vastand arv $-x=-3$.

Kui otsitav arv $x=-3$, siis ta vastand arv $-x=-(-3)=3$.

Vastus. 3 ja -3 .

Selle ülesande lahendamiseks oli vaja lahendada võrrand $x^2-9=0$, s. t. leida muutuja x väärtused, mille korral võrdus $x^2-9=0$ on õige ehk mis rahuldavad võrrandit $x^2-9=0$. Seda muutuja väärtuste hulka kirjutame kujul $\{x|x^2-9=0\}$. Ülesande lahendamisel selgus, et see hulk koosneb arvudest -3 ja 3 :

$$\{x|x^2-9=0\} = \{-3; 3\}.$$

Kui soovime rõhutada, et võrrandi $x^2-9=0$ lahendeid otsitakse ratsionaalarvude hulgast, täisarvude hulgast või naturaalarvude hulgast, siis kirjutame vastavalt

$$\{x \in Q | x^2-9=0\}, \quad \{x \in Z | x^2-9=0\} \text{ või } \{x \in N | x^2-9=0\}.$$

Esimesel ja teisel juhul on lahendite hulgaks $\{-3; 3\}$, viimasel juhul $\{3\}$.

Võrrandis $x^2=9$ esineb muutuja teises astmes.

Võrrandit, milles muutuja kõrgeimaks astmeks on teine aste, nimetatakse teise astme võrrandiks ehk ruutvõrrandiks.

Eelnevast nägime, et ruutvõrrandi $x^2-9=0$ lahendamine taandus kahe lineaarvõrrandi lahendamisele, mis põhjustaski kahe lahendi olemasolu.

263. Lahenda ruutvõrrandid.

$$\begin{array}{ll} 1) x^2 - 12,25 = 0 & 3) x^2 = 0,09 \\ 2) x^2 - 6,25 = 0 & 4) x^2 - 0,0025 \end{array}$$

Ülesanne 2. Lahenda ruutvõrrand

$$x^2 = m, \text{ kus } m > 0.$$

Lahendus. Viime vabaliikme võrrandi vasakule poolele:

$$x^2 - m = 0.$$

Kirjutame arvu m ruudu kujul:

$$x^2 - (\sqrt{m})^2 = 0.$$

Lahutame võrrandi vasaku poole tegureiks:

$$(x + \sqrt{m})(x - \sqrt{m}) = 0.$$

Viimane võrrand on rahuldatud, kui vasaku poole esimene tegur on null või kui teine tegur on null. Seega kas

$$x + \sqrt{m} = 0 \text{ või } x - \sqrt{m} = 0.$$

Neist võrrandeist saame

$$x = -\sqrt{m} \text{ või } x = \sqrt{m}.$$

Tähistame saadud lahendid sümbolitega x_1 ja x_2 ning kirjutame lahendid ühe võrduse abil nõnda:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{m} \text{ ehk } \{x|x^2=m\} = \{-\sqrt{m}; \sqrt{m}\}.$$

N ä i d e. Võrrandi $x^2=0,578$ lahendid $x_{1,2} = \pm\sqrt{0,578}$.

Tabelist leiame, et $\sqrt{0,578}=0,760$.

V a s t u s. $\{x|x^2=0,578\} = \{-0,760; 0,760\}$.

264. Lahenda võrrandid.

$$1) \quad x^2 = 5,29$$

$$x^2 = 3,43$$

$$x^2 = 363$$

$$2) \quad x^2 = 0,64$$

$$x^2 = 0,0275$$

$$x^2 = 0,8464$$

4.21. RUUTVÖRRAND $ax^2=b$

Ü l e s a n n e 1. Pool otsitava arvu ruudust võrdub 7-ga. Kui suur on otsitav arv?

L a h e n d u s. Kui otsitava arvu tähistame tähega x , siis pool otsitava arvu ruudust on $\frac{1}{2}x^2$. Ülesande kohaselt võrdub see avaldis 7-ga. Saame ruutvõrrandi

$$\frac{1}{2}x^2=7.$$

Saadud ruutvõrrandi lahendamiseks võime kasutada graafikut joonisel 58. Graafikult näeme, et $\frac{1}{2}x^2$ on võrdne 7-ga siis, kui $x = -3,7$ või kui $x = 3,7$. Kontrollides neid lahendeid ruutude tabeli abil, näeme, et mõlemad leitud arvud ligikaudu rahuldavad ülesannet. Seega on otsitav arv ligikaudu kas $-3,7$ või $3,7$.

Võrrandi $\frac{1}{2}x^2=7$ võime lahendada ka arvutamise teel, kasutades ruutjuurte tabelit. Jagades selle võrrandi mõlemad pooled tundmatu ruudu kordajaga, s. o. arvuga $\frac{1}{2}$, saame $x^2=14$, millest $x = \pm\sqrt{14} = \pm 3,74$.

Seega

$$\{x|\frac{1}{2}x^2=7\} = \{-3,74; 3,74\}.$$

Tabelist saame lahendite ligikaudsed väärtused suurema täpsusega kui graafikult või lükatilt.

265. Leia graafiku (joon. 58) abil järgmiste ruutvõrrandite lahendid ja kontrolli neid arvutamise teel.

$$1) \frac{1}{2}x^2 = 1 \frac{1}{2} \quad 2) 0,5x^2 = 3,5 \quad 3) 0,5x^2 = 5.$$

Ülesanne 2. Kuubi täispindala on 27 dm². Kui pikk on kuubi serv?

Lahendus. Olgu kuubi serva pikkus x dm. Kuubi täispindala on siis $6x^2$ dm². Saame võrrandi

$$6x^2 = 27 \quad \text{ehk} \quad 2x^2 = 9.$$

Graafikult (joon. 58) leiame selle võrrandi lahendid:

$$x_1 = -2,1; \quad x_2 = 2,1.$$

Et otsitav kuubi serva pikkus on positiivne suurus, siis $x_1 = -2,1$ pole antud ülesande lahendiks.

Vastus. Kuubi serva pikkus on 2,1 dm.

Lahendades võrrandi $2x^2 = 9$ arvutamise teel, jagame esiteks ta mõlemad pooled 2-ga:

$$x^2 = 4,5.$$

Siit saame

$$x = \pm\sqrt{4,5} = \pm 2,12.$$

Üldiselt, kui a ja b on samamärgilised arvud, siis ruutvõrrandi $ax^2 = b$ lahendamisel saame:

$$x^2 = \frac{b}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Kui a ja b on erimärgilised, siis meile tuntud arvude hulgas võrrandil lahendit pole.

266. Lahenda graafiliselt (joon. 58) ruutvõrrandid ja kontrolli saadud lahendeid arvutamise teel.

$$1) 2x^2 = 9,5 \quad 2) 2x^2 = 5 \quad 3) 2x^2 = 4,3.$$

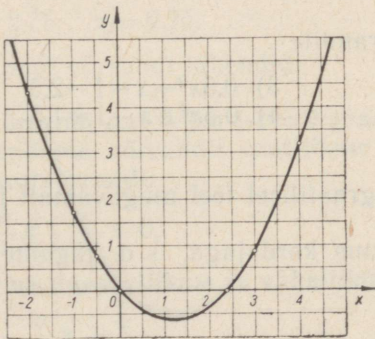
267. Lahenda ruutvõrrandid.

1) $3x^2 = 363$	2) $0,5x^2 = 40,5$	3) $5x^2 = 0,0716$
$5x^2 = 720$	$1,2x^2 = 172,8$	$6x^2 = 25,1$
$6x^2 = 294$	$0,07x^2 = 51,03$	$1,3x^2 = 2,873$
$2x^2 = 1568$	$1,02x^2 = 294,78$	$0,16x^2 = 0,261$
$4x^2 = 1444$	$0,17x^2 = 33,32$	$0,75x^2 = 0,111$

268. Kui pikk peab olema võrdhaarse täisnurkse kolmnurga kaatet, et kolmnurga pindala oleks 100 cm^2 ?
269. Kui pikk peab olema võrdkülgse kolmnurga külg, et kolmnurga pindala oleks 50 cm^2 ?
270. Ristküliku alus on 5 korda pikem kui kõrgus. Arvuta ristküliku mõõtmed, teades, et ristküliku pindala on 320 cm^2 .
271. Kolmnurga kõrgus on $\frac{1}{3}$ alusest. Kolmnurga pindala on 24 cm^2 . Kui pikk on kolmnurga alus?
272. Ristküliku küljed suhtuvad nagu 3 : 5. Ristküliku pindala on 240 cm^2 . Arvuta ristküliku küljed.
273. Rombi üks diagonaal on teisest 2 korda pikem. Rombi pindala on 18 cm^2 . Arvuta rombi diagonaalide pikkused.
274. Ruudukujulist õhukest kummitükki venitati nii, et üks külg pikenes tal 3 cm võrra ja teine külg lühenes 3 cm võrra. Venitatud kummitüki pindala oli 112 cm^2 . Kui pikk oli kummitüki serv enne venitamist?

4.22. RUUTVÖRRAND $ax^2 + bx = 0$

275. Joonisel 79 on funktsiooni $y = 0,5x^2 - 1,2x$ graafik. Leia sellelt jooniselt:
- missuguste x väärtuste korral funktsioon $y = 0,5x^2 - 1,2x$ on null ehk, teisiti, missugused on ruutvõrrandi $0,5x^2 - 1,2x = 0$ lahendid;
 - missugused on ruutvõrrandi $0,5x^2 - 1,2x = 2$ lahendid.



Joon. 79

Ruutvõrrandi

$$0,5x^2 - 1,2x = 0$$

lahendamiseks arvutamise teel võtame x sulgude ette, millega võrrandi vasak pool teisendub korrutiseks, ja kasutame siis korrutise nulliga võrdumise tingimust:

$$x(0,5x - 1,2) = 0,$$

$$x = 0 \text{ või } 0,5x - 1,2 = 0,$$

millest

$$x_1 = 0 \text{ või } x_2 = 2,4 \text{ ehk } \{x | 0,5x^2 - 1,2x = 0\} = \{0; 2,4\}.$$

276. Lahenda ruutvõrrand $ax^2 + bx = 0$.

277. Lahenda ruutvõrrandid.

$$1) \quad x(x+2) = 0$$

$$(x-4)(x+5) = 0$$

$$(x-3)(x-7) = 0$$

$$7x^2 - 8x = 0$$

$$5x^2 + 5x = 0$$

$$2) \quad x^2 - 13x = 0$$

$$6x^2 + 8x = 0$$

$$1,2x^2 - 3x = 0$$

$$ax^2 + 3bx = bx$$

$$ax(x-b) = 2cx$$

4.23. RUUTVÕRRAND $ax^2 + bx + c = 0$

Joonisel 80 on graafiliselt kujutatud funktsioon $y = 0,5x^2 + x - 1$. Sellelt jooniselt näeme, et avaldis $0,5x^2 + x - 1$ võrdub nulliga siis, kui $x = -2,75$ või $x = 0,75$.

Seega ruutvõrrandi

$$0,5x^2 + x - 1 = 0$$

lahendeiks on $-2,75$ ja $0,75$. Teisiti:

$$\{x | 0,5x^2 + x - 1 = 0\} = \{-2,75; 0,75\}.$$

278. Leia jooniselt 80 ruutvõrrandite

$$1) \quad 0,5x^2 + x - 1 = 6$$

$$2) \quad 0,5x^2 + x - 1 = 4$$

$$3) \quad 0,5x^2 + x - 1 = 2,5$$

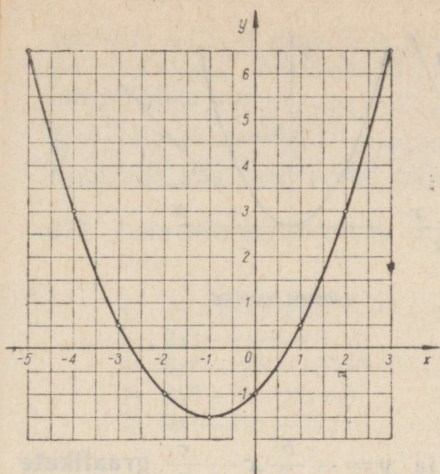
$$4) \quad 0,5x^2 + x - 1 = 1,5$$

lahendid.

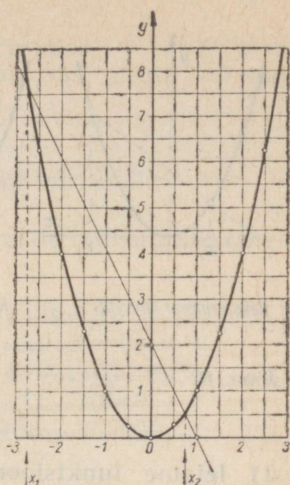
Võrrandit $0,5x^2 + x - 1 = 0$ saab graafilisel teel mugavamalt lahendada, kui toimime järgmiselt:

1) taandame võrrandit ruutliikme kordajaga, s.o. jagame kõik tema liikmed $0,5$ -ga; saame

$$x^2 + 2x - 2 = 0;$$



Joon. 80



Joon. 81

2) viime liikmed, mis ei sisalda muutuja ruutu, paremale poolele; saame

$$x_2 = 0,75.$$

Nüüd on antud võrrandi lahendamine taandunud x niisuguste väärtuste leidmisele, mille korral funktsioonide x^2 ja $-2x+2$ väärtused on võrdsed. Esimese funktsiooni graafikuks on põhiparabool, mille joonestamine on kerge (eriti veel siis, kui selleks on valmistatud šabloon); teine on lineaarfunktsioon, mille graafikuks on sirge. Joonestades mõlemad graafikud ühises teljestikus (joon. 81), leiame, missugustel x väärtustel funktsioonide väärtused on võrdsed, s. t. leiame nende graafikute lõikepunktide abstsissid.

Lõikepunktide abstsissid on

$$x_1 = -2,75; \quad x_2 = 0,75.$$

Need ongi võrrandi lahendid.

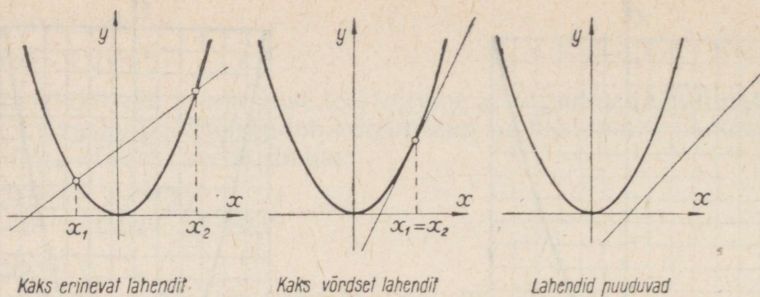
Ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ graafilisel lahendamisel:

1) taandame võrrandi ruutliikme kordajaga a , saades taandatud ruutvõrrandi:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

2) viime lineaarliikme ja vabaliikme võrrandi paremale poolele:

$$x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a},$$



Joon. 82

3) leiame funktsioonide $y = x^2$ ja $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ graafikute lõikepunktide abstsissid, mis ongi antud võrrandi lahendid (joon. 82).

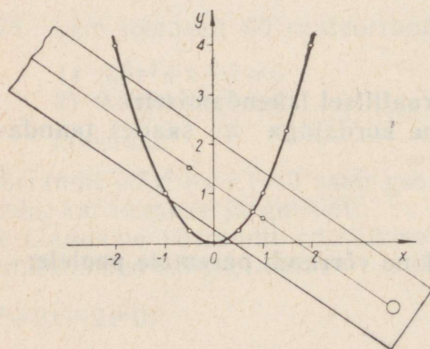
Kui sirge puudutab parabooli, siis on tegemist kokkulangenud lõikepunktidega. Sel korral

$$x_1 = x_2,$$

s. t. antud ruutvõrrandi lahendid on võrdsed.

Kui sirge ja parabool ei lõiku, siis antud ruutvõrrandil meile tuntud arvude hulgas lahendid puuduvad.

Ruutvõrrandi graafilisel lahendamisel põhiparabooli ja sirge abil ei ole tarvis iga võrrandi jaoks uut parabooli joonestada, vaid võib kasutada üht ja sama korralikult joonestatud parabooli. Sirge joonestamise asemel võib kasutada tselluloidist, pleksiklaasist või klaasist joonlauda, mille ühele küljele on tõmmatud peenike kriips. See kriips tuleb paigutada paraboolile iga võrrandi puhul nõnda, nagu sirge tuleks joonestada. Joonisel 83 on näidatud ruutvõrrandi



Joon. 83

$10x^2+7x-12=0$ graafiline lahendamine. Parabooli $y=x^2$ ja sirge $y=-0,7x+1,2$ lõikepunktide abstsissid, mis on antud võrrandi lahenditeks, on

$$x_1 = -1,5 \text{ ja } x_2 = 0,8.$$

Kontrolli, kas need arvud rahuldavad antud võrrandit.

279. Leia põhiparabooli ja sirge abil järgmiste võrrandite lahendid:

1) $x^2 - x - 3 = 0$

6) $x^2 + x - 4 = 0$

2) $2x^2 - x - 4 = 0$

7) $2x^2 + 3x - 6 = 0$

3) $6x^2 - 10x - 15 = 0$

8) $x^2 - 2x + 1 = 0$

4) $8x^2 - 7x - 28 = 0$

9) $5x^2 + 4x - 10 = 0$

5) $9x^2 + 10x - 27 = 0$

10) $8x^2 + 9x - 36 = 0$

4.24. TÄIELIK JA MITTETÄIELIK RUUTVÕRRAND

Seni oleme arvutamise teel õppinud lahendama ruutvõrrandeid kujul

$$x^2 = m, \quad ax^2 = b, \quad ax^2 + bx = 0.$$

Graafiku abil oskame lahendada neidsamu võrrandeid ja veel võrrandit kujul

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Viimasel võrrandil on kolm liiget: ruutliige (ax^2), lineaarliige (bx) ja vabaliige (c). Muid liikmeid ruutvõrrandis ei saagi esineda. Sellepärast võrrandit kujul

$$ax^2 + bx + c = 0$$

nimetatakse **täielikuks ruutvõrrandiks**.

Kui $b=0$, siis täielikust võrrandist saame võrrandi

$$ax^2 + c = 0;$$

kui aga $c=0$, siis saame

$$ax^2 + bx = 0.$$

Kaks viimast võrrandit on **mittetäielikud ruutvõrrandid**.

280. 1) Missuguse mittetäieliku võrrandi saad, kui $b=c=0$?

2) Missugused on võrrandi $ax^2=0$ lahendid?

Pärast sulgude avamist ja sarnaste liikmete koondamist saab iga ruutvõrrandi kirjutada kujul

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ kus } a > 0.$$

Kordaja a ei või olla null, sest siis poleks antud võrrand ruutvõrrand. Kui a peaks tulema negatiivne, siis pärast kõikide liikmete korrutamist arvuga -1 saame ruutliikme kordajaks positiivse arvu.

Ruutvõrrandit, milles esikohale on kirjutatud positiivse kordajaga ruutliige, teisel kohal lineaarliige, kolmandal kohal vabaliige ja paremal poolel null, nimetatakse **normaalkujuliseks ruutvõrrandiks**.

281. Teisenda võrrandid

$$1) x^2 = 3(x+2)(x-1), \quad 2) 2(2-x)(x+1) = 0,$$

$$3) 2(x-2)^2 = 7-5x$$

normaalkujuliseks ja leia nende lahendid graafilisel teel.

Normaalkujulise ruutvõrrandi

$$ax^2 + bx + c = 0$$

liikmete jagamisel ruutliikme kordajaga, a , s. o. võrrandi taandamisel a -ga, saame võrrandi

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

ehk, tähistades arvud $\frac{b}{a}$ ja $\frac{c}{a}$ vastavalt tähtedega p ja q ,

$$x^2 + px + q = 0,$$

mida nimetame **taandatud ruutvõrrandiks**.

Nagu näeme, taandatud ruutvõrrandi ruutliikme kordaja on 1. Ruutvõrrandit, milles ruutliikme kordaja ei ole 1, nimetame **taandamata ruutvõrrandiks**.

4.25. TAANDATUD RUUTVÕRRANDI LAHENDAMINE

Ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendamiseks eraldame võrrandi vasakust poolest täisruudu, s. t. anname võrrandile kuju $(x+b)^2 = m$, leiame siit $x+b$ ja lõpuks x .

N ä i d e.

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = -8 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = -8 + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 = 1 \Rightarrow x+3 = \pm 1 \Rightarrow x = -3 \pm 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -2; \quad x_2 = -4.$$

Niisiis:

$$\{x | x^2 + 6x + 8 = 0\} = \{-2; -4\}.$$

Kontroll. $(-2)^2 + 6 \cdot (-2) + 8 = 4 - 12 + 8 = 0$,
 $(-4)^2 + 6 \cdot (-4) + 8 = 16 - 24 + 8 = 0$.

282. Lahenda võrrandid.

1) $(x-2)^2 = 16$

2) $(x-1,4)^2 = 33,6$

$(x+5)^2 = 9$

$(x+0,2)^2 = 0,444$

$(x-9)^2 = 529$

$\left(x - \frac{6}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}$

$(x-0,3)^2 = 1,41$

$\left(x - 8\frac{1}{2}\right)^2 = 56\frac{1}{4}$

$(x-1,2)^2 = 1,44$

$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = 30\frac{1}{4}$

283. Kirjuta iga ruutvõrrandi vasak pool kaksliikme ruuduna ja leia seejärel võrrandi lahendid.

1) $x^2 + 14x + 49 = 25$

6) $x^2 + 8x + 16 = 169$

2) $x^2 - 12x + 36 = 144$

7) $x^2 - 18x + 81 = 225$

3) $x^2 - 100x + 2500 = 1$

8) $x^2 - 80x + 1600 = 4$

4) $x^2 - 0,8x + 0,16 = 0,04$

9) $x^2 + 1,4x + 0,49 = 0,81$

5) $x^2 - 5x + 6,25 = 12,25$

10) $x^2 + x + 0,25 = 2,25$

284. Liida antud ruutvõrrandi mõlema poolega niisugune arv, et võrrandi vasak pool oleks kaksliikme ruut ja lahenda siis saadud võrrand.

1) $x^2 - 4x = 21$

6) $x^2 - 4x = 45$

2) $x^2 + 6x = -5$

7) $x^2 + 10x = -9$

3) $x^2 - 2x = 1,25$

8) $x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{8}{9}$

4) $x^2 - 3x = 10$

9) $x^2 + 3x = 4$

5) $x^2 - 5x = 14$

10) $x^2 - 7x = 18$

285. Vii antud ruutvõrrandis vabaliige paremale poolele, seejärel liida võrrandi mõlema poolega niisugune arv, et vasak pool oleks täisruut, s. o. täienda vasak pool täisruuduks, ning lahenda saadud võrrand.

1) $x^2 - 4x - 12 = 0$

6) $x^2 - 4x - 60 = 0$

2) $x^2 + 6x + 5 = 0$

7) $x^2 + 8x + 15 = 0$

3) $x^2 - 2x - 3 = 0$

8) $x^2 + 4x - 5 = 0$

4) $x^2 - 10x - 11 = 0$

9) $x^2 + 3x - 18 = 0$

5) $x^2 - 7x + 10 = 0$

10) $x^2 - x - 12 = 0$

Taandatud ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendite leidmiseks saame tuletada valemi. Selleks

1) viime vabaliikme q vastupidise märgiga võrrandi paremale poolele:

$$x^2 + px = -q, \text{ ehk } x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x = -q;$$

2) täiendame võrrandi vasaku poole täisruuduks, liites mõlema poolega $\left(\frac{p}{2}\right)^2$:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q;$$

3) kirjutame võrrandi vasaku poole ruudu kujul:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q;$$

4) viimasest võrrandist saame kaks lineaarvõrrandit:

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q};$$

5) avaldades x , saame valemi

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Kirjutades lahendid eraldi välja, saame

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Taandatud ruutvõrrandi lahendivalemi võib sõnastada nii:

taandatud ruutvõrrandi lahendeiks on pool lineaarliikme kordaja vastand arvust \pm ruutjuur selle poole kordaja ruudu ja vabaliikme vahest.

N ä i d e. Lahendame võrrandi $x^2 - x - 20 = 0$.

L a h e n d u s.

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-20)}; \quad x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 20};$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}.$$

Seega

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4 \text{ ja } x_2 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5 \text{ ehk}$$

$$\{x \mid x^2 - x - 20 = 0\} = \{-4; 5\}.$$

$$\text{Kontroll. } (-4)^2 - (-4) - 20 = 16 + 4 - 20 = 0, \\ 5^2 - 5 - 20 = 25 - 25 = 0.$$

286. Lahenda võrrandid.

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$

2) $x^2 - 2x - 3 = 0$

3) $x^2 - x - 6 = 0$

4) $x^2 + 5x + 6 = 0$

5) $x^2 + 8x + 15 = 0$

6) $x^2 - 7x + 12 = 0$

7) $x^2 + 3x - 4 = 0$

8) $x^2 - 3x - 10 = 0$

9) $x^2 + 8x + 7 = 0$

10) $x^2 + 15x + 56 = 0$

Kui taandatud ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendite

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

arvutamisel ilmneb, et

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0,$$

siis sellel ruutvõrrandil meile tuntud arvude hulgas lahendid puuduvad.

Kui

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0,$$

siis $x_1 = -\frac{p}{2}$ ja $x_2 = -\frac{p}{2}$, mis ütleb, et lahendid on võrdsed.

Kui aga

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0,$$

siis on võrrandil kaks erinevat lahendit.

Juuritavat avaldist $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ taandatud ruutvõrrandi lahendi valemis nimetatakse taandatud ruutvõrrandi **diskriminandiks**.

287. Otsusta võrrandeid lahendamata, missugusel ruutvõrrandil meie poolt tuntuma õpitud arvude hulgas lahendid puuduvad, missugusel on lahendid võrdsed ja missugusel erinevad.

$$1) \begin{aligned} x^2 - 4x - 12 &= 0 \\ x^2 + 6x + 9 &= 0 \\ x^2 - 2x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$2) \begin{aligned} x^2 - 4x - 60 &= 0 \\ x^2 + 8x + 17 &= 0 \\ x^2 - 12x + 36 &= 0 \end{aligned}$$

288. Lahenda järgmised ruutvõrrandid, leides lahendid täpsusega 0,1.

$$\begin{aligned} 1) \quad x^2 - 6x + 4 &= 0 \\ 2) \quad x^2 + 8x + 13 &= 0 \\ 3) \quad x^2 - 5x + 3 &= 0 \\ 4) \quad x^2 - x - 50 &= 0 \\ 5) \quad x^2 + 7x - 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad x^2 + 5x + 4 &= 0 \\ 7) \quad x^2 - 9x - 1 &= 0 \\ 8) \quad x^2 + 2x + 0,7 &= 0 \\ 9) \quad x^2 + 0,8x - 1 &= 0 \\ 10) \quad x^2 + 5x + 5 &= 0 \end{aligned}$$

289. Lahenda järgmised ruutvõrrandid, arvutades lahendid kolme tüvenumbriga.

$$\begin{aligned} 1) \quad x^2 - 9x - 36 &= 0 \\ 2) \quad x^2 + 7x - 7 &= 0 \\ 3) \quad x^2 - x - 20 &= 0 \\ 4) \quad x^2 + 2x - 2 &= 0 \\ 5) \quad x^2 - 20x + 91 &= 0 \\ 6) \quad x^2 + 3x - 19 &= 0 \\ 7) \quad x^2 - 11x + 10 &= 0 \\ 8) \quad y^2 + 4y + 6 &= 0 \\ 9) \quad y^2 + 9y + 12 &= 0 \\ 10) \quad z^2 - 7z - 8 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11) \quad x^2 - 8x + 9 &= 0 \\ 12) \quad x^2 + 5x - 66 &= 0 \\ 13) \quad x^2 + 4x + 4 &= 0 \\ 14) \quad x^2 + 7x - 120 &= 0 \\ 15) \quad x^2 - 3x - 5\frac{2}{5} &= 0 \\ 16) \quad u^2 - 6u + 4 &= 0 \\ 17) \quad u^2 + 13u - 14 &= 0 \\ 18) \quad v^2 - v + 42 &= 0 \\ 19) \quad v^2 - 9v + 7 &= 0 \\ 20) \quad w^2 + 15w - 1 &= 0 \end{aligned}$$

290. Kahe järjestikuse täisarvu korrutis on 156. Mis arvud need on?

291. Kahe teineteisele järgneva täisarvu ruutude summa on 85. Mis arvud need on?

292. Kahe järjestikuse paarisarvu korrutis on 288. Mis arvud need on?

293. Jaota arv 19 kahte niisugusesse ossa, et nende osade ruutude summa oleks 181.

294. Jaota lõik, mille pikkus on 30 cm, kahte ossa nii, et suurema osa jagatis kogu lõiguga oleks sama mis väiksema osa jagatis suurema osaga.

295. Kahe arvu vahe on 6. Nende arvude ruutude summa on 260. Leia need arvud.

296. Kahe järjestikuse paarisarvu korrutis on 6888. Missugused arvud need on?

Taandamata ruutvõrrandi lahendamiseks taandame ta esmalt ruutliikme kordajaga ja lahendame siis saadud taandatud ruutvõrrandi juba valemi abil.

N ä i d e. Lahendame ruutvõrrandi

$$4x^2 + 7x - 2 = 0.$$

L a h e n d u s. Taandades antud võrrandit ruutliikme kordajaga 4, saame taandatud ruutvõrrandi

$$x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{1}{2} = 0.$$

Lahendades selle võrrandi valemi abil, saame

$$x = -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{49}{64} + \frac{1}{2}} = -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{81}{64}} = -\frac{7}{8} \pm \frac{9}{8};$$

$$x_1 = -\frac{7}{8} + \frac{9}{8} = \frac{1}{4} = 0,25;$$

$$x_2 = -\frac{7}{8} - \frac{9}{8} = -2.$$

Seega

$$\{x \mid 4x^2 + 7x - 2 = 0\} = \{-2; 0,25\}.$$

297. Lahenda taandamata ruutvõrrand taandatud ruutvõrrandi lahendivalemi abil.

1) $9x^2 - 54x + 32 = 0$

2) $5x^2 + 18x - 8 = 0$

3) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

4) $2x^2 + 7x - 4 = 0$

5) $3x^2 - 10x + 3 = 0$

6) $4x^2 + 17x + 4 = 0$

4.26. TAANDAMATA RUUTVÕRRANDI LAHENDIVALEM

Taandamata ruutvõrrandi

$$ax^2 + bx + c = 0$$

lahendivalemi saame tuletada mitmel viisil. Esitame kaks viisi.

1. Eraldame võrrandi vasakul poolel olevast ruutkolmliikmest täisruudu (vt. 4.12):

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0.$$

Saadud võrrandis viime vabaliikme paremale poolele ja lahendame siis selle võrrandi nii, nagu lahendasime võrrandi $ax^2 = b$ (vt. 4.21.):

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. Taandame antud võrrandit ruutliikme kordajaga a . Saame

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Nüüd rakendame taandatud ruutvõrrandi lahendivalemit

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}.$$

Teisendame lahendi teist liiget

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Seega

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ehk

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

See on ruutvõrrandi üldine lahendivalem. Selle võib sõnastada järgmiselt:

ruutvõrrandi lahend võrdub murruga, mille nimetajaks on ruutliikme kordaja kahekordne ja lugejaks on lineaarliikme kordaja vastand arv \pm ruutjuur vahest, mille saame, kui lineaarliikme kordaja ruudust lahutame ruutliikme kordaja ja vabaliikme neljakordse korrutise.

N ä i d e. Lahendame valemi abil võrrandi

$$5x^2 + 13x - 6 = 0.$$

L a h e n d u s.

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-6)}}{10}$$

ehk

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169+120}}{10} = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{10} = \frac{-13 \pm 17}{10}.$$

Seega

$$x_1 = \frac{-13-17}{10} = -3 \text{ ja } x_2 = \frac{-13+17}{10} = 0,4 \text{ ehk}$$

$$\{x \mid 5x^2 + 13x - 6\} = \{-3; 0,4\}.$$

Kontrollimine näitab, et leitud arvud on antud võrrandi lahendid.

298. Lahenda valemi abil võrrandid

1) $3x^2 - 2x - 8 = 0$

6) $13x^2 - 11x - 2 = 0$

2) $2x^2 + 9x + 10 = 0$

7) $9x^2 + 12x - 5 = 0$

3) $4x^2 + 7x - 2 = 0$

8) $4x^2 - 4x - 3 = 0$

4) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

9) $8 + 11x - 10x^2 = 0$

5) $3x^2 - 8x - 3 = 0$

10) $2 + 3x - 2x^2 = 0$

Kui ilmneb, et ruutvõrrandi

$$ax^2 + bx + c = 0$$

lahendamisel juuritav avaldis

$$b^2 - 4ac < 0,$$

siis võrrandil lahendid puuduvad, sest meile tuntud arvude hulgas ei leidu ruutjuurt negatiivsest arvust.

Kui aga

$$b^2 - 4ac = 0,$$

siis

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a}.$$

Seega

$$x_1 = -\frac{b}{2a} \text{ ja } x_2 = -\frac{b}{2a},$$

s. t. lahendid on võrdsed.

Juhul kui

$$b^2 - 4ac > 0,$$

on võrrandil kaks erinevat lahendit. Miks?

Juuritavat avaldist ruutvõrrandi lahendis nimetatakse võrrandi **diskriminandiks** ja seda tähistatakse tähega D .

Seega $D = b^2 - 4ac$ on taandamata ruutvõrrandi diskriminant.

Kokkuvõttes võime ruutvõrrandi lahendite kohta ütelda:

ruutvõrrandil on kaks erinevat lahendit, kui ta diskriminant on positiivne arv; lahendid on võrdsed, kui diskriminant võrdub nulliga; lahendid meile tuntud arvude hulgas puuduvad, kui diskriminant on negatiivne arv.

299. Otsusta võrrandit lahendamata, kas tal on lahendeid või mitte. Kui on, siis kas lahendid on erinevad või võrdsed.

$$1) 6x^2 + 7x - 3 = 0$$

$$2) 5x^2 - 4x + 7 = 0$$

$$3) x^2 + 8x + 18 = 0$$

$$4) x^2 - 12x + 35 = 0$$

$$5) 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$6) x^2 - 4x + 4 = 0$$

Ruutvõrrandi üldine lahendivalem on rakendatav ka kõigi erikujuliste ruutvõrrandite lahendamisel. Näiteks, kui $a=1$, siis võrrand osutub taandatud ruutvõrrandiks $x^2 + bx + c = 0$.

Üldise lahendivalemi järgi saame lahenditeks

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Rakendades aga taandatud ruutvõrrandi lahendivalemit, saame

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Teisendades lahendi teist liiget, saame

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Seega

$$x = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Näeme, et mõlemad lahendivaleimid annavad ühe ja sama tulemuse.

Näiteks võrrandi $x^2 - 2x - 35 = 0$ lahendamisel taandatud ruutvõrrandi lahendivalemi abil saame

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + 35} = 1 \pm \sqrt{36} = 1 \pm 6;$$

$$x_1 = 1 - 6 = -5; \quad x_2 = 1 + 6 = 7;$$

$$\{x | x^2 - 2x - 35 = 0\} = \{-5; 7\}.$$

Ruutvõrrandi üldine lahendivalem annab

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-35)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} = \frac{2 \pm 12}{2};$$

$$x_1 = \frac{2 - 12}{2} = -5; \quad x_2 = \frac{2 + 12}{2} = 7.$$

Nagu näeme, tulemused on samad.
 Kui antud taandatud ruutvõrrandis lineaarliikme kordaja p on paaritu arv, siis on seda võrrandit lihtsam lahendada taandamata ruutvõrrandi lahendivalemi abil, kuna sellega väldime arvutusi murdarvudega.

300. Lahenda võrrand kahel viisil.

1) $x^2 - 6x - 7 = 0$

3) $7x^2 + x = 0$

5) $2x^2 - 9 = 0$

2) $x^2 - 5x - 6 = 0$

4) $3x^2 - 2x = 0$

6) $4x^2 - 81 = 0$

301. Lahenda ruutvõrrandid.

1) $x^2 + 9x - 5 = 0$

$2y^2 + y - 7 = 0$

$3z^2 - 8z + 4 = 0$

$2u^2 + 3u - 1 = 0$

$3v^2 - 10v - 10 = 0$

3) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

$2u^2 + 5u + 2 = 0$

$s + 6 = 2s^2$

$6a^2 - 17a - 14 = 0$

$10p - 21 = 6p^2 - 13p$

5) $2x^2 - 7x + 5 = 0$

$x^2 + 23x - 10 = 0$

$6x^2 + 4x - 3 = 0$

$3x^2 + 18x - 8 = 0$

$4x^2 - 13x - 17 = 0$

2) $5a^2 - 11a + 3 = 0$

$3b^2 + 12b - 17 = 0$

$6c^2 - 13c - 15 = 0$

$d^2 - 14d + 4 = 0$

$e^2 - 16e + 11 = 0$

4) $4m^2 + 45m - 36 = 0$

$10n^2 + 21n - 10 = 0$

$9q^2 + 30q - 24 = 0$

$1,4z^2 + 5z = 2,4$

$w^2 - 1,6w + 0,3 = 0$

6) $7x^2 - 42x + 36 = 0$

$69x^2 - x - 55 = 0$

$9x^2 + 50x - 121 = 0$

$1,2x^2 + 8,3x - 23,6 = 0$

$3,4x^2 - 2,5x - 6 = 0$

302. Teisenda võrrand normaalkujuliseks ja lahenda see.

1) $x(x+2) = 35$

2) $x^2 = 3(2x-3)$

3) $2(x^2-9) = 5(x-4)$

4) $(x-1)^2 = x+1$

5) $(1+2x)(1-2x) = 3x$

6) $(x+7)^2 = 28x$

7) $4 = (x-5)^2$

8) $(x-5)(7-x) = 1$

9) $x^2 = 2(x+8)(x-6)$

10) $(2x-7)(x-3) = 4x$

11) $9x(x+1) = 2(6x+1)$

12) $(1+x)^2 = (1-2x)^2$

13) $(3x-2)(2x-1) = x$

14) $(3-x)^2 = (1+3x)(9-x)$

15) $(2x+3)^2 = (3x-2)(x+8)$

16) $(3x-1)(x-2) = (x+2)(x-1)$

17) $(4x-1)^2 = (4x+1)(8x-5)$

18) $(5x+7)^2 - (2x+1)^2 = 0$

19) $2(x-1)(2x+1) = (4x-1)(2x-3)$

20) $(8x+3)(4x+1) = 2(x+1)(4x+3)$

21) $ax^2 + (a-b)x = b$

22) $ax^2 + (a+1)x = -1$

4.27. MURDVÖRRANDITE LAHENDAMINE

Võrrandit, mis sisaldab muutujat murru nimetajas, nimetatakse **murdvõrrandiks**.

Näiteks võrrand

$$\frac{15x}{2(x-3)} - \frac{x}{2(x+3)} + \frac{9}{x^2-9} = 0$$

on murdvõrrand.

Selle võrrandi lahendiks ei saa olla arvud 3 ja -3 , sest sel korral esimesed kaks murdu kaotavad arvu tähenduse.

Lahendame selle võrrandi.

Võrrandis esinevate murdude ühine nimetaja on $2(x^2-9)$, seega vastavad laiendajad on $x+3$, $x-3$ ja 2.

Niisiis

$$\frac{x+3}{15x} - \frac{x-3}{2(x+3)} + \frac{2}{x^2-9} = 0;$$

$$15x(x+3) - x(x-3) + 18 = 0;$$

$$15x^2 + 45x - x^2 + 3x + 18 = 0;$$

$$14x^2 + 48x + 18 = 0;$$

$$7x^2 + 24x + 9 = 0;$$

$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 252}}{14} = \frac{-24 \pm \sqrt{324}}{14} = \frac{-24 \pm 18}{14};$$

$$x_1 = \frac{-24 - 18}{14} = -3; \quad x_2 = \frac{-24 + 18}{14} = -\frac{3}{7}.$$

Et -3 ei saa olla antud võrrandi lahendiks, siis on tarvis ainult seda kontrollida, kas $-\frac{3}{7}$ on lahend.

Kontroll. Asetades lahendi $-\frac{3}{7}$ algvõrrandi vasakusse poolde x asemele, saame:

$$\begin{aligned} & \frac{15 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)}{2 \cdot \left(-\frac{3}{7} - 3\right)} - \frac{-\frac{3}{7}}{2 \cdot \left(-\frac{3}{7} + 3\right)} + \frac{9}{\frac{9}{49} - 9} = -\frac{45}{7} + \frac{3}{7} + \frac{9}{\frac{9-441}{49}} = \\ & = \frac{45}{48} + \frac{3}{36} + \frac{9 \cdot 49}{-432} = \frac{15}{16} + \frac{1}{12} - \frac{49}{48} = \frac{45+4-49}{48} = 0. \end{aligned}$$

Näeme, et arv $-\frac{3}{7}$ on antud võrrandi lahend:

$$\left\{ x \mid \frac{15x}{2(x-3)} - \frac{x}{2(x+3)} + \frac{9}{x^2-9} \right\} = \left\{ -\frac{3}{7} \right\}.$$

Antud murdvõrrandi teisendamisel saadud ruutvõrrandil on küll kaks lahendit, kuid antud võrrandil on ainult üks lahend.

Et on murdvõrrandeid, mille teisendamisel saadud võrrandi kõik lahendid ei ole algvõrrandi lahenditeks, siis tuleb murdvõrrandi lahendeid alati kontrollida.

303. Lahenda võrrandid:

$$1) \frac{19x}{x+1} + \frac{11x}{x-1} = \frac{6}{x^2-1}$$

$$2) \frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x(1-x)} = \frac{x-2}{x(x+1)}$$

$$3) \frac{1}{12-5x} + \frac{1}{5x-12} = 1 - \frac{120}{(12-5x)^2}$$

$$4) 3(2x-3) - \frac{22}{x} = \left(x - \frac{3}{2} \right) \cdot 5$$

$$5) \frac{9-x}{2} + \frac{4}{x-2} = \frac{3(x-1)}{2}$$

$$6) 11x^2 + 7x - \frac{3}{7} = 4x(x+1) + 1$$

$$7) \frac{x-3}{x+4} + \frac{x-4}{2(x-1)} = \frac{1}{2}$$

$$8) \frac{3x+2}{2x-1} + \frac{7-x}{2x+1} = \frac{7x-1}{4x^2-1} + 5$$

$$9) \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 0$$

$$10) \frac{3}{5(x^2-1)} + \frac{1}{10(x+1)} = \frac{23}{238}$$

$$11) \frac{8}{3x-5} + \frac{9}{5x-8} = \frac{20}{7x-25}$$

$$12) \frac{2x+1}{7-x} + \frac{4x+1}{7+x} = \frac{45}{49-x^2} + 1$$

$$13) \frac{2(x+7)}{x+1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+11}{x^2-1} + 4$$

$$14) 7 + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$$

$$15) \frac{x}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x(x-1)^2}$$

$$16) \frac{4x^2-1}{4x+2} = \frac{9(2x+1)}{22} + \frac{8x^2-2}{2x+1}$$

$$17) \frac{x-2}{x^2+2x+1} + \frac{4x-8}{x+2x^2+x^3} = \frac{5x-10}{2x+2x^2}$$

$$18) \frac{3x^2+2}{x^2-1} + \frac{2(x-2)}{x+2} = \frac{5(x^2-x-1)}{x^2-1}$$

$$19) \frac{4x-1}{x+2} + 2 = \frac{4x+(4x+1)(2x-1)}{x^2+4x+4}$$

$$20) \frac{x^2+x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{2x^2+2x} = \frac{3(x^2+2x+1)}{2x^2-2x}$$

$$21) \frac{7x+14}{x^2-1} + \frac{8x+16}{x^2-2x+1} = \frac{74+19x-9x^2}{x^3-x^2-x+1}$$

$$22) \frac{x+1}{x^3+x^2+x+1} + \frac{2x}{x^3-x^2+x-1} = \frac{15}{x^4-1}$$

4.28. RUUTVÖRRANDI ABIL LAHENDUVAID ÜLESANDEID

Ülesanne 1. Ristkülikukujulise spordiväljaku pindala on 88 aari. Kui üht tema külge vähendada 2 m võrra, teist aga suurendada 10 m võrra, siis saame ruudukujulise väljaku. Kui suur on selle ruudu külg?

Lahendus. Olgu ruudu külje pikkus x meetrit. Siis ristküliku küljed on $x+2$ ja $x-10$ meetrit. Seega ristküliku pindala on ruutmeetrites

$$(x+2)(x-10) \quad \text{ehk} \quad x^2-8x-20.$$

Ülesande andmete järgi on see pindala 88 aari ehk 8800 ruutmeetrit.

Järelikult

$$x^2-8x-20=8800 \quad \text{ehk} \quad x^2-8x-8820=0.$$

Võrrandi lahendivalem annab:

$$x=4\pm\sqrt{8836} \quad \text{ehk} \quad x=4\pm 94;$$

seega

$$x_1=4-94=-90 \quad \text{ja} \quad x_2=4+94=98.$$

Et ruudu külg on positiivne suurus, siis x_1 meie ülesande lahendina arvesse ei tule. Ainsaks lahendiks jääb seega arv 98, mis tähendab, et otsitav ruudu külg on 98 m.

Kontroll. Väljaku küljed on meetrites $98+2=100$ ja $98-10=88$; seega väljaku pindala on $100 \cdot 88$ ehk 8800 ruutmeetrit ehk 88 aari, nagu peab olema.

Ülesanne 2. Linnade A ja B vaheline kaugus on 349 km. Linnast A lahkub sõiduk linna B suunas. Üks tund hiljem lahkub linnast B teine sõiduk linna A suunas. Teise sõiduki kiirus on 8 km võrra tunnis väiksem kui esimese kiirus. Sõidukid kohtuvad 216 km kaugusel linnast A . Kui suure kiirusega liigub kumbki sõiduk?

Lahendus. Olgu esimese sõiduki kiirus v kilomeetrit tunnis; siis on teise kiirus $v-8$ kilomeetrit tunnis. Kuni kohtumiseni tuli esimesel sõidukil katta 216 km, teisel $349-216$ ehk 133 km. Kohtumiseni sõiduks kulus esimesel $\frac{216}{v}$ tundi, teisel $\frac{133}{v-8}$ tundi.

Esimese sõiduaeg on teisest ühe tunni võrra pikem, seega

$$\frac{216}{v} - \frac{133}{v-8} = 1.$$

Selle võrrandi lahenditeks ei või olla 0 ja 8, sest võrrandi vasakul poolel puudub siis arvu tähendus.

Saadud võrrandi lahendamiseks vabaneme murdudest:

$$216(v-8) - 133v = v(v-8);$$

avame sulud:

$$216v - 1728 - 133v = v^2 - 8v;$$

viime liikmed vasakule poolele, koondame ja korrutame (-1) -ga:

$$v^2 - 91v + 1728 = 0.$$

Võrrandi diskriminant on

$$91^2 - 4 \cdot 1728 = 1369;$$

et see diskriminant on positiivne, siis on võrrandil 2 erinevat lahendit. Lahendivalem annab:

$$v = \frac{91 \pm \sqrt{1369}}{2} \text{ ehk } v = \frac{91 \pm 37}{2};$$

seega $v_1 = 64$ ja $v_2 = 27$.

Niisiis on esimese sõiduki kiirus kas 64 või 27 km tunnis ning teise sõiduki kiirus sellele vastavalt kas 56 või 19 km tunnis.

Kontrollime tulemusi ülesande teksti varal.

Esimese lahendipaari puhul esimene sõiduk tarvitab kohtumiseni aega $\frac{216}{64}$ ehk $3\frac{3}{8}$ tundi, teine seevastu $\frac{133}{56}$ ehk $2\frac{3}{8}$ tundi, aegade vahe on $3\frac{3}{8} - 2\frac{3}{8}$ ehk 1 tund, nagu peab olema.

Teise lahendipaari puhul esimene sõiduk tarvitab kohtumiseni aega $\frac{216}{27}$ ehk 8 tundi, teine seevastu $\frac{133}{19}$ ehk 7 tundi; aegade vahe on $8 - 7$ ehk 1 tund, nagu peab olema. Mõlemad lahendipaarid rahuldavad ülesande tingimusi.

304. Ruudukujulise plastikaaditüki ühes sihis venitamisel pikenes see 3 cm võrra ja kitsenes 1 cm võrra. Venitatud tüki pindala oli 60 cm^2 . Kui pikk oli plastikaaditüki serv enne venitamist?
305. Nõukogude skreeperite D-213 ja D-188 kaevamislaiused meetrites on vastavalt võrdsed ruutvõrrandi $400x^2 - 2400x + 3591 = 0$ lahenditega. Arvuta nende skreeperite kaevamislaiused.
306. Arvu ja tema ruudu summa on 30. Mis arv see on?
307. Arvu ruudu ja arvu enda vahe on 650. Leia see arv.
308. Kahe järjestikuse täisarvu ruutude summa on 545. Mis arvud need on?
309. Kahe järjestikuse paarisarvu ruutude summa on 100. Mis arvud need on?
310. Kahe arvu vahe on 7. Samade arvude korrutis on 368. Leia need arvud.
311. Kahest arvust üks on teisest 8 võrra suurem. Nende arvude korrutis on 425. Leia need arvud.
312. Kas on olemas kolm niisugust järjestikust täisarvu, et kahe väiksema ruutude summa võrdub suurema ruuduga?
313. Leia kolm niisugust järjestikust paarisarvu, et kahe väiksema ruutude summa oleks võrdne kolmanda ruuduga.
314. Leia 5 järjestikust naturaalarvu nõnda, et esimese kolme arvu ruutude summa võrdub järgneva kahe arvu ruutude summaga.

315. Leia 7 järjestikust naturaalarvu, millest esimese nelja arvu ruutude summa võrdub järgneva kolme arvu ruutude summaga.
316. Ristküliku pikkus ületab laiuse ühe meetri võrra. Ristküliku pindala on 56 ruutmeetrit. Leia ristküliku mõõtmed.
317. Ristküliku ümbermõõt on 68 cm ja pindala on 204 cm². Leia ristküliku pikkus ja laius.
318. Kui ruudu kaht vastaskülge suurendada 3 korda ja kumbagi ülejäänud külge vähendada 2 m võrra, siis saadud ristküliku pindala on ruudu pindalast 2 korda suurem. Kui pikk on ruudu külg?
319. Ristkülikukujulise mänguväljaku mõõtmed on 8 m ja 4 m. Mänguväljaku pindala tehakse kaks korda suuremaks, suurendades võrdsest nii pikkust kui ka laiust. Kui palju tuleb pikendada kumbagi külge?
320. Ruudukujulisest papitükist valmistatakse karp mahuga 8 cm³. Selleks lõigatakse nurkadest välja ruudud küljepikkusega 5 cm. Missuguse küljepikkusega on papitükk?
321. Ristkülikukujulisel papitükil, mille pikkus on 1,5 korda suurem laiusest, lõigatakse nurkadest ära ruudud küljega 3 cm. Murdes ülejääva osa sobivalt kokku, saadakse karp ruumalaga 216 cm³. Kui suured on papitüki mõõtmed?
322. Klubiruumi põrandat, millel on ristküliku kuju ja mille mõõtmed on 4,8 m ja 5,5 m, tahetakse katta vaibaga nõnda, et vaiba ümber jääks igast küljest ühelaiune riba põrandat vabaks, vaip aga kataks parajasti $\frac{1}{2}$ põrandat pindalast. Kui suur peab vaip olema?
323. Ristkülikukujulise aia mõõtmed on 160 m ja 240 m. Pikuti ja risti minevate teede alla (vt. joon. 75) tahetakse võtta 2% kogu aia maa-alast. Kui suur tuleb valida tee laius?
324. Raamatukappi võib mahutada 640 ühesuurust raamatut, igale riulile ühepalju raamatuid. Kui igale riulile panna 8 raamatut rohkem kui esialgu määratud, siis jääb 4 riulit tühjaks. Mitu riulit on raamatukapil?
325. Albumisse kavatseti kleepida 240 pilti, igale albumilehele ühepalju pilte. Kui aga lehele mahutada 2 pilti rohkem kui esialgu otsustatud, siis jääb 6 lehte tühjaks. Mitu lehte on albumis?

326. Kaks autobussi sõidavad ühest linnast teise, mille vahemaa on 72 km. Et esimene autobus sõidab tunnis 4 km rohkem kui teine, siis läbib ta nimetatud vahemaa 15 minuti võrra lühema ajaga. Kui suure kiirusega liiguvad autod?
327. Kahe aleviku vaheline kaugus on maantee kaudu 26 km, külatee kaudu 18 km. Autobuss ja hobusõiduk asuvad ühel ja samal ajal teele: esimene valib pikema, kuid parema tee, teine lühema, kuid halvema. Et autobus läbib tunnis 15 km võrra rohkem kui hobusõiduk, siis jõuab ta sihtkohta viimastest 55 minutit varem. Kui suure kiirusega liigub autobus?
328. Aiand vajab 378 õuna pakkimiseks kaste. Kui igasse kasti panna 9 õuna rohkem kui kavatsatud, siis vajatakse üks kast vähem. Mitu kasti on vaja?
329. Turist kavatses matkata 252 km. Et ta matkas iga päev 3 km rohkem kui kavatsatud, siis kestis matk kavatsust 2 päeva vähem. Mitu päeva kestis matk?
330. Raudteejaama veetorni paak täitub peapumba abil 2,5 tunni võrra kiiremini kui tagavarapumba abil. Kui töötavad mõlemad pumbad, siis täitub paak 3 tunni jooksul. Leida aeg, mis on tarvilik paagi täitmiseks peapumba abil.
331. Kahe erineva jõudlusega traktori koostöötamisel küntakse kolhoosi põld üles 8 päevaga. Esimene neist jõuaks selle põllu üles kända 12 päeva lühema ajaga kui teine, kui nad töötavad üksi. Kui palju aega kulub kummalgi selle maatüki üleskündmiseks?
332. Kaks töölisi lõpetavad töö koos töötades $6\frac{2}{3}$ tunniga. Mitme tunniga lõpetaks esimene tööline selle töö üksi töötades, kui selle töö tegemiseks kulub tal teisest 3 tundi vähem?
333. Ujula basseini täitmiseks kulub ühe toru kaudu 20 minutit vähem aega kui teise kaudu. Kui mõlemad torud avada üheaegselt, siis täitub basseini 24 minutiga. Mitme minutiga täituks basseini, kui avada ainult esimene toru?
334. Hoone ehitamisel oli tarvis kindlaks tähtajaks välja kaevata 8000 m³ mulda. Töö lõpetati 8 päeva enne tähtaega, sest mullatöölise brigaad ületas plaani iga päev 50 m³ võrra. Mitmeks päevaks olid mullatööd planeeritud?
335. Tee remontimisel oli töö kaks brigaadi. Kumbki brigaad parandas teed 10 km ulatuses, kusjuures teine brigaad töö-

tas üks päev vähem kui esimene. Mitu kilomeetrit teed parandas kumbki brigaad päevas, kui mõlemad brigaadid kokku parandasid päevas 4,5 km teed?

336. Paberitükist, mille mõõtmed on 24 cm ja 18 cm, lõigatakse igast neljast küljest ära võrdse laiussega ribad. Ülejäänud ristkülikukujuline paber on pindalalt just pool paberitüki algpindalast. Kui laiad on äralõigatud ribad?
337. Pilt, mille nähtava osa mõõtmed on 20 cm ja 16 cm, on raamis, mille esipindala on 352 cm^2 . Kui lai on pildi raam?
338. Mootorpaat sõitis jõel 28 km pärivoolu ning pöördus siis kohe tagasi, kulutades edasi-tagasi teekonnaks 7 tundi. Leia mootorpaadi kiirus seisvas vees, teades, et vee voolu kiirus jões on 3 km tunnis.
339. Kahe linna vaheline kaugus mööda jõge on 80 km. Aurikul kulub edasi-tagasi sõiduks 8 tundi 20 minutit. Arvuta auriku kiirus seisvas vees, kui jõe voolu kiirus on 4 km tunnis.
340. Õmblusvabrik pidi tähtajaks õmblema 810 ülikonda. Teine vabrik pidi samaks tähtajaks õmblema 900 ülikonda. Esimene täitis tellimuse 3 päeva, teine 6 päeva enne tähtaega. Mitu ülikonda õmmeldi kummaski vabrikus päevas, kui teises õmmeldi päevas 4 ülikonda rohkem kui esimeses?
341. Rong läbib 180 km pikkuse vahemaa $\frac{2}{3}$ tunni võrra lühema ajaga, kui ta kiirus oléks 9 km võrra tunnis suurem. Mitu tundi sõidab rong seda vahemaad?
342. Kui jalgrattur sõidaks tunnis 2 km rohkem, siis kuluks tal 72 km läbimiseks $\frac{1}{2}$ tundi vähem aega. Kui suure kiirusega sõitis jalgrattur?
343. Kui kuubi serva pikendada n cm võrra, siis ruumala suureneb $v \text{ cm}^3$ võrra.
Arvuta kuubi serva pikkus järgmistel andmetel:
1) $n=2$; $v=98$; 2) $n=1,4$; $v=46,424$.
344. Risttahuka põhja pikkus on laiuses 2 cm võrra suurem. Risttahuka kõrgus on 5 cm. Arvuta põhja mõõtmed, kui risttahukas kaalub 882 g ja ta on klaasist, mille erikaal on 2,8.

345. Leia korrapärase nelinurkse püstprisma põhiserva pikkus, kui täispindala on $S \text{ cm}^2$ ja prisma kõrgus on $h \text{ cm}$.
Arvuta, kui:
1) $S=170$; $h=10$; 2) $S=58,32$; $h=7,2$.
346. Õõnsa kuubi seina paksus on 1 cm ja ta kaalub $189,7 \text{ g}$. Leia välimise serva pikkus, kui kuup on tehtud ainest, mille erikaal on $0,7$.
347. Kaks hoiust, millest üks on 300 rbl. võrra suurem teisest, olid hoiul 2% -ga. Mõlemad hoiused tõid 120 rbl. intresse, sest väiksem hoius oli 1 aasta kauem hoiul. Mitu aastat oli hoiul suurem hoius?
348. Kahest metallist valmistatakse sulamit. Esimese metalli erikaal on teise omast $1,5$ võrra suurem. Kui esimest metalli võetakse 20 g ja teist 40 g , siis sulami erikaal tuleb $9,4$. Arvuta mõlema metalli erikaal.
349. Ristkülikukujulisele kooliõuele rajati 2 võrdse laiussega teed nii, nagu näidatud joonisel 75 .
Õue pikkus on 200 m ja laius 150 m .
Arvuta teede laius, kui muru alla jäänud pindala on $28\,959 \text{ m}^2$.

4.29. TAANDATUD RUUTVÖRRANDI LAHENDITE OMADUSED

350. Lahenda alljärgnevas tabelis antud võrrandid. Arvuta iga võrrandi puhul lahendite summa ja lahendite korrutis, ümardades ligikaudsed tulemused kolme tüvenumbrini, ning täida tabel.

$x^2 + px + q = 0$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	p	$x_1 x_2$	q
$x^2 - 8x + 15 = 0$						
$x^2 + 4x - 21 = 0$						
$x^2 + 10x + 24 = 0$						
$x^2 + 10x + 20 = 0$						
$x^2 - 10x + 18 = 0$						

Võrdle lahendite summat võrrandi lineaarliikme kordajaga p ja lahendite korrutist vabaliikmega q . Mida paned tähele?

Tõestame teoreemi:

taandatud ruutvõrrandi lahendite summa võrdub muutuja esimese astme kordaja vastandavuga ja lahendite korrutis võrdub vabaliikmega.

Tõestus. Taandatud ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendid on

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{ja} \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Leiame esiteks lahendite summa. Et liitmisel juured koonduvad, siis saame:

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \left(-\frac{p}{2}\right) = -p.$$

Leiame nüüd lahendite korrutise:

$$x_1 x_2 = \left[-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right] \cdot \left[-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right].$$

Rakendades summa ja vahe korrutise valemit, leiame:

$$x_1 x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q.$$

Niisiis

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{ja} \quad x_1 x_2 = q.$$

See ruutvõrrandi kordajate ja lahendite vaheline seos kannab **Viëta**¹ (vietaa) **teoreemi** nime.

351. Otsusta iga võrrandi puhul:
millega võrdub lahendite summa;
millega võrdub lahendite korrutis;
kas lahendid on positiivsed või negatiivsed või on üks lahend positiivne ja teine negatiivne;
kui üks lahend on positiivne ja teine negatiivne, siis kumb on suurema absoluutväärtusega.

1) $x^2 - 11x + 28 = 0$

2) $x^2 - 12x - 61 = 0$

3) $x^2 + 4x - 227 = 0$

4) $x^2 + 14x + 48 = 0$

5) $x^2 + 13x + 59 = 0$

6) $x^2 - 16x + 63 = 0$

7) $x^2 - 13x + 36 = 0$

8) $x^2 - 17x - 38 = 0$

9) $x^2 + 8x - 105 = 0$

10) $x^2 - 19x - 92 = 0$

352. 1) Missugused on taandamata ruutvõrrandi

$$ax^2 + bx + c = 0$$

lahendite ja kordajate vahelised seosed?

¹ Viëta, prantsuse matemaatik, elas a. 1540—1603.

- 2) Otsusta iga alljärgneva võrrandi puhul:
 millega võrdub lahendite summa;
 millega võrdub lahendite korrutis;
 missugused on lahendite märgid.

$$1) 2x^2 - x - 4 = 0$$

$$2) 8x^2 - 7x - 28 = 0$$

$$3) 3x^2 + 10x + 6 = 0$$

$$4) 2x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$5) 5x^2 + 7x - 17,5 = 0$$

$$6) 4x^2 - 3x - 12 = 0$$

4.30. RUUTVÕRRANDI KOOSTAMINE LAHENDITE JÄRGI

Ülesanne. Koosta ruutvõrrand, mille lahendid on x_1 ja x_2 .

Lahendus. Viëta teoreemi järgi

$$x_1 + x_2 = -p \Leftrightarrow p = -(x_1 + x_2),$$

$$x_1 x_2 = q \Leftrightarrow q = x_1 x_2.$$

Seega nõutud ruutvõrrand on

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0.$$

Näide 1. Koostame ruutvõrrandi, mille lahendid on 10 ja -8 .
 Lahendite summa on $10 + (-8) = 2$. Lahendite korrutis on
 $10 \cdot (-8) = -80$.

Seega $p = -2$ ja $q = -80$ ning otsitav ruutvõrrand on
 $x^2 - 2x - 80 = 0$.

Näide 2. Koostame ruutvõrrandi, mille lahendid on $-\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{6}$.
 Antud lahendite summa on

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{-3+1}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3};$$

$$\text{lahendite korrutis } \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{12}.$$

Järelikult $p = \frac{1}{3}$ ja $q = -\frac{1}{12}$ ning seega otsitav ruutvõrrand on

$$x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{12} = 0.$$

Korrutades saadud võrrandi kumbagi poole 12-ga, saame samade lahenditega taandamata ruutvõrrandi

$$12x^2 + 4x - 1 = 0.$$

353. Kirjuta ruutvõrrand, mille lahenditeks on:

- | | | |
|-------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) 3 ja 4 | 2) $\frac{1}{2}$ ja 0 | 3) -2,1 ja -0,1 |
| 4) -5 ja 10 | 5) $\frac{5}{8}$ ja $-\frac{2}{3}$ | 6) -0,3 ja 0,2 |
| 7) -2 ja -6 | 8) 2,3 ja -1,1 | 9) -0,8 ja 0,5 |
| 10) -9 ja 7 | 11) 4,5 ja -0,9 | 12) $\frac{5}{6}$ ja $-\frac{2}{3}$ |
| 13) 2 ja -2 | 14) 3 ja $-\frac{1}{3}$ | 15) 0,4 ja $-\frac{1}{5}$ |

354. Koosta ruutvõrrand, mille lahenditeks on:

- 1) $1+\sqrt{2}$ ja $1-\sqrt{2}$
- 2) $2+\sqrt{3}$ ja $2-\sqrt{3}$

355. Leia kaks niisugust arvu, mille

- 1) summa on 14 ja korrutis on 45;
- 2) „ „ -15 „ „ „ 56;
- 3) „ „ $4\frac{1}{2}$ „ „ „ 2;
- 4) „ „ $\frac{1}{3}$ „ „ „ $-\frac{5}{12}$;
- 5) „ „ 0,5 „ „ „ -0,14.

N ä i d e. Kahe arvu summa on $\frac{1}{3}$ ja nende korrutis $-\frac{5}{12}$. Missugused arvud need on?

L a h e n d u s. Otsitavad arvud on niisuguse taandatud ruutvõrrandi lahenditeks, milles lineaarliikme kordaja on $-\frac{1}{3}$ ja vabaliige $-\frac{5}{12}$; otsitavad arvud on seega lahendid ruutvõrrandile

$$x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{12} = 0 \text{ ehk } 12x^2 - 4x - 5 = 0.$$

Lahendades selle ruutvõrrandi, saame

$$x_1 = \frac{5}{6} \text{ ja } x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Otsitavad arvud on $\frac{5}{6}$ ja $-\frac{1}{2}$.

4.31. TEISE ASTME KOLMLIIKME LAHUTAMINE LINEAARSEIKS TEGUREIKS

356. Korruta lineaarsed kaksliikmed ja koonda tulemus.

$$1) (x+3)(x+9)$$

$$3) (3n+4)(n-7)$$

$$2) (m+5)(m-4)$$

$$4) (5y-2)(y-8)$$

Avaldisi, nagu $x^2+12x+27$; $3m^2+10m-8$ jne. nimetasime teise astme kolmliikmeteks ehk ruutkolmliikmeteks. Esimene neist on tähe x ruutkolmliige, teine tähe m ruutkolmliige.

Teise astme kolmliikme üldkuju on ax^2+bx+c , kus a , b ja c on antud arvud ja x on kolmliikme argument.

357. Mis on ruutkolmliikme graafiliseks kujutiseks? Kujuta graafiliselt ruutkolmliige x^2-x-2 .

Eelmises ülesandes nägime, et kahe lineaarse kaksliikme korrutamisel tekib ruutkolmliige. Küsime nüüd, kas ka iga ruutkolmliiget saab esitada kahe lineaarse kaksliikme korrutisena ehk, teisiti öeldes, kas iga antud ruutkolmliiget saab lahutada lineaarseiks tegureiks.

Lahendame küsimuse esmalt taandatud ruutkolmliikme

$$x^2+px+q$$

kohta. Oletame, et leidub kaks lineaarset kaksliiget $x-m$ ja $x-n$, mille korrutis võrdub antud ruutkolmliikmega, s. t.

$$(x-m)(x-n)=x^2+px+q.$$

Arvutades võrduse vasakul poolel seisva korrutise, saame

$$x^2-(m+n)x+mn=x^2+px+q.$$

Siit näeme, et otsitavate kaksliikmete $x-m$ ja $x-n$ vabaliikmed m ja n peavad olema niisugused arvud, mille korrutis võrdub antud ruutkolmliikme vabaliikmega ja summa võrdub antud ruutkolmliikme lineaarliikme kordaja vastand arvuga:

$$mn=q \text{ ja } m+n=-p.$$

Kuid niisuguste omadustega arve me juba tunneme: need on ruutvõrrandi

$$x^2+px+q=0$$

lahendid x_1 ja x_2 . Täheleb

taandatud ruutkolmliige x^2+px+q lahutub tegureiks kujul $(x-x_1)(x-x_2)$, kus x_1 ja x_2 on ruutvõrrandi $x^2+px+q=0$ lahendid.

Kui võrrandil $x^2+px+q=0$ lahendid puuduvad, siis see tähendab, et ei leidu kaht niisugust arvu m ja n , mille korrutis oleks q ja summa $-p$; järelikult sel korral antud ruutkolmliige ei ole esitav kahe lineaarse kaksliikme korrutisena.

N ä i d e 1. Lahutame tegureiks ruutkolmliikme x^2-7x+6 .

L a h e n d u s. Võrrandi $x^2-7x+6=0$ lahendamisel saame:

$$x=3,5\pm\sqrt{12,25-6}=3,5\pm\sqrt{6,25}=3,5\pm 2,5;$$

$$x_1=3,5+2,5=6;$$

$$x_2=3,5-2,5=1.$$

Seega

$$x^2-7x+6=(x-6)(x-1).$$

Tulemuse kontrollimiseks korrutame saadud tegurid:

$$(x-6)(x-1)=x^2-7x+6.$$

N ä i d e 2. Lahutame tegureiks ruutkolmliikme

$$u^2+4u+5.$$

L a h e n d u s. Võrrandi $u^2+4u+5=0$ lahendamisel saame:

$$u=-2\pm\sqrt{4-5}=-2\pm\sqrt{-1}.$$

Et negatiivsest arvust ei saa leida ruutjuurt, siis võrrandil lahendid puuduvad ja seega antud ruutkolmliiget ei saa lahutada lineaarseiks tegureiks.

358. Lahuta järgmised ruutkolmliikmed tegureiks:

1) x^2-x-30

6) $p^2+5p-66$

2) $y^2-3y-40$

7) $q^2-8q-20$

3) $z^2-10z-24$

8) r^2+8r-9

4) $u^2-5u-24$

9) n^2-n-72

5) $v^2-17v+70$

10) m^2-m-12

Ruutkolmliikme ax^2+bx+c lahutamiseks lineaarseiks tegureiks võtame esmalt arvu a sulgude ette:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

Sulgudes oleva taandatud ruutkolmliikme tegureiks lahutamiseks tuleks lahendada ruutvõrrand

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Sel võrrandil on aga samad lahendid, mis on võrrandil

$$ax^2+bx+c=0.$$

Leides selle võrrandi lahendid x_1 ja x_2 , saame antud ruutkolmliikme lahutada tegureiks järgmiselt:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Seega

ruutkolmliige ax^2+bx+c lahutub tegureiks $a(x-x_1)(x-x_2)$, kus x_1 ja x_2 on ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendid.

Kui võrrandil $ax^2+bx+c=0$ lahendid puuduvad, siis ruutkolmliiget ax^2+bx+c ei saa lahutada lineaarseiks tegureiks.

N ä i d e 1. Lahutame tegureiks ruutkolmliikme

$$5u^2+u-4.$$

L a h e n d u s. Võrrandi

$$5u^2+u-4=0$$

lahendamise annab:

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{10} = \frac{-1 \pm 9}{10};$$

seega

$$u_1 = \frac{-1+9}{10} = \frac{4}{5} \quad \text{jä} \quad u_2 = \frac{-1-9}{10} = -1.$$

Järelikult

$$5u^2+u-4 = 5\left(u - \frac{4}{5}\right)(u+1) \quad \text{ehk} \quad 5u^2+u-4 = (5u-4)(u+1).$$

359. Lahuta järgmised ruutkolmliikmed tegureiks:

1) $a^2-20a+36$

6) $k^2+k-132$

2) $c^2+14c+48$

7) $m^2+11m-42$

3) $2f^2-7f-4$

8) $12n^2+5n-3$

4) $3h^2+5h-2$

9) $4p^2-16p+15$

5) $5l^2-14l+8$

10) $6r^2+5r-1$

360. Taanda murrud.

1) $\frac{6x^2-6}{6x^2-5x-1}$

2) $\frac{a^2-49}{a^2-5a-14}$

3) $\frac{a^2+3a-4}{a^2-3a+2}$

4) $\frac{a^3-8}{a^2+a-6}$

361. Lihtsusta avaldisi.

$$1) \frac{3a^2+7a-6}{3a^2-7a-6} \cdot \frac{3a^2-11a+6}{3a^2+11a+6}$$

$$4) \frac{3a+1}{3a-1} : \frac{3a^2-11a-4}{3a^2+5a-2}$$

$$2) \frac{a^2-3a-28}{a^2-25} : \frac{a^2+3a-4}{a^2+2a-35}$$

$$5) \frac{3x-1}{3x^2+8x-3} \cdot \frac{3x^2-20x-7}{3x+1}$$

$$3) \frac{a^2-a-2}{a^2+6a-27} : \frac{3a-6}{2a-6}$$

$$6) \frac{2am+m^2}{4a^2-m^2} \cdot \left(\frac{2a}{2a-m} - 1 \right)$$

4.32. RUUTVÖRRANDISÜSTEEM

Ülesanne 1. Täisnurkse kolmnurga kaatetite summa on 17 cm ja hüpotenuus 13 cm. Leia kaatetite pikkused.

Lahendus. Olgu ühe kaateti pikkus x cm, teise pikkus y cm. Ülesande tingimuste ja Pythagorase teoreemi põhjal saame süsteemi

$$\begin{cases} x+y=17 \\ x^2+y^2=169, \end{cases}$$

milles üks võrrand on lineaarne, teine ruutvõrrand. Niisuguse süsteemi lahendamiseks avaldame lineaarvõrrandist ühe muutuja

$$y=17-x$$

ja asetame leitud avaldise ruutvõrrandisse selle muutuja asemele; saame ühe muutujaga ruutvõrrandi:

$$x^2+(17-x)^2=169,$$

$$x^2-17x+60=0,$$

millest

$$x_1=12; \quad x_2=5.$$

Arvestades võrdust $y=17-x$, saame $y_1=5$; $y_2=12$.

Süsteemi lahendid on seega järjestatud arvupaarid

(12; 5) ja (5; 12).

Otsitavad kaatetid on 12 cm ja 5 cm. Lahendatud süsteemil on küll kaks lahendit, kuid meie ülesandele saime ühe lahendi.

Ülesanne 2. Ristkülikukujulise aknaava ümbermõõt on 26 dm ja pindala 40 dm². Leia aknaava laius ja kõrgus.

Lahendus. Olgu akna laius x dm ja kõrgus y dm.

Ülesande tingimuste põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x+2y=26 \\ xy=40 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} x+y=13 \\ xy=40 \end{cases}$$

Avaldades esimesest võrrandist muutuja y , saame

$$y = 13 - x.$$

Asetades avaldise $13 - x$ teise võrrandisse y asemele, saame

$$x(13 - x) = 40 \quad \text{ehk} \quad x^2 - 13x + 40 = 0.$$

Siit

$$x_1 = 8, \quad x_2 = 5.$$

Arvestades leitud võrdust $y = 13 - x$, saame

$$y_1 = 5 \quad \text{ja} \quad y_2 = 8.$$

Süsteemil on kaks lahendit: (8; 5) ja (5; 8).

Akna mõõtmed on seega järgmised: laius 8 dm ja kõrgus 5 dm või laius 5 dm ja kõrgus 8 dm. Sellel ülesandel on kaks lahendit.

Kui kahe muutujaga võrrandisüsteemis üks võrrandeist on ruutvõrrand, teine aga kas ruutvõrrand või lineaarvõrrand, siis nime-tame süsteemi ruutvõrrandisüsteemiks.

Näiteks on süsteemid

$$\begin{cases} x^2 - 2xy = 32 \\ 3x + y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

ruutvõrrandisüsteemid.

Süsteemi nimetame ka siis ruutvõrrandisüsteemiks, kui tema võrrandis ei esine kummagi muutuja ruuduga liiget, küll aga liige muutujate korrutisega. Näiteks on süsteem

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 5 \end{cases}$$

ruutvõrrandisüsteem.

Ruutvõrrandisüsteemi, milles üks võrrandeist on lineaarne, saab alati nii lahendada, et lineaarsest võrrandist avaldame ühe muutuja ja paneme saadud avaldise ruutvõrrandisse selle muutuja asemele. Sel teel saame ühe muutujaga ruutvõrrandi. Kui saadud ruutvõrrandil on lahendid olemas, siis leiame need. Kui leitud muutuja väärtused (enne ühe, siis teise) paneme lineaarvõrrandisse selle muutuja asemele, saame vastavalt teise muutuja kaks väärtust.

Mõne ruutvõrrandisüsteemi lahendamisel saab rakendada **liitmisevõtet**.

N ä i d e 1. Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 37 \\ 6x - 2y = 18. \end{cases}$$

Näeme, et kui võrrandite pooled liidame, siis kaob muutuja y : saame

$$\begin{array}{r} x^2 + 2y = 37 \\ 6x - 2y = 18 \\ \hline x^2 + 6x = 55; \end{array}$$

siit $x^2 + 6x - 55 = 0$,

millest $x_1 = 5$ ja $x_2 = -11$.

Asendades x teises võrrandis esiteks väärtusega 5 ja pärast väärtusega -11 , saame:

$y_1 = 6$ ja $y_2 = -42$.

Meie süsteemi lahendid on $(5; 6)$ ja $(-11; -42)$.

362. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid:

- | | |
|--|---|
| 1) $\begin{cases} x^2 = y \\ x + y = 6 \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} y^2 + 7x = 11 \\ 7x - 3y = 11 \end{cases}$ |
| 3) $\begin{cases} x^2 + 2x = 7y + 50 \\ 6x = 7y + 5 \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} 5x^2 + 2y = 12 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$ |
| 5) $\begin{cases} x^2 = y + 26 \\ 2x = y + 2 \end{cases}$ | 6) $\begin{cases} 2x^2 + 13 = 21y \\ 2x - 1 = 3y \end{cases}$ |
| 7) $\begin{cases} 5y^2 = 8x \\ 5y - 2 = 5x \end{cases}$ | 8) $\begin{cases} x^2 = 4y \\ x + 3 = 2y \end{cases}$ |
| 9) $\begin{cases} 3x = 2y^2 \\ 2x = 4y + 9 \end{cases}$ | 10) $\begin{cases} y^2 = 14x + 79 \\ 5y = 7x + 4 \end{cases}$ |
| 11) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y = 5 \end{cases}$ | 12) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x - y = 3 \end{cases}$ |
| 13) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y - x = 1 \end{cases}$ | 14) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ y + x = 2 \end{cases}$ |
| 15) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x + y = 12 \end{cases}$ | 16) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 63 \\ x + y = 9 \end{cases}$ |
| 17) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 96 \\ x - y = 8 \end{cases}$ | 18) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - 4x + y = 176 \\ 2y - x = 2 \end{cases}$ |
| 19) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x - y = 4 \end{cases}$ | 20) $\begin{cases} 4x^2 - 3xy - 3y^2 + 4y = 136 \\ 2x + y = 26 \end{cases}$ |

Kahe muutujaga süsteemi, mille ühe võrrandiga on antud muutujate summa, teisega korrutis, saab lahendada taandatud ruutvõrrandi lahendite omaduste rakendamisega.

Näide 2. Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} x+y=18 \\ xy=56. \end{cases}$$

Lahendus. Koostame ruutvõrrandi tema lahendite summa ja korrutise põhjal:

$$z^2 - 18z + 56 = 0.$$

Selle ruutvõrrandi lahendamisel saame:

$$z_1 = 14 \text{ ja } z_2 = 4.$$

Kui $z_1 = x$, siis $z_2 = y$, kui aga $z_2 = x$, siis $z_1 = y$:

$$\begin{cases} x_1 = 14 \\ y_1 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 14. \end{cases}$$

363. Lahenda võrrandisüsteemid.

$$1) \begin{cases} x+y=15 \\ xy=36 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x+y=-5 \\ xy=6 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x+y=12 \\ xy=35 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x+y=9 \\ xy=-36 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x+xy+y=11 \\ xy=6 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x-xy+y=1 \\ 3xy=7 \end{cases} \frac{5}{6}$$

Näide 3. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{y+3}{(3x-y)(3y-x)} = 0,5 \\ \frac{x-y}{x+y} = 0,4. \end{cases}$$

Lahendus. Lihtsustame esimest võrrandit. Korrutame võrrandi kummagi poole avaldisega $2(3x-y)(3y-x)$, et vabaneda murrust; saame

$$2y+6 = (3x-y)(3y-x), \text{ millest } 3x^2+3y^2-10xy+2y = -6.$$

Lihtsustame nüüd teist võrrandit. Korrutame võrrandi pooled avaldisega $5(x+4)$; saame

$$5x-5y=2x+2y \quad \text{ehk} \quad 3x-7y=0.$$

Nüüd lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-10xy+2y = -6 \\ 3x-7y=0. \end{cases}$$

Rakendame asendusvõtet. Teisest võrrandist saame

$$3x=7y, \text{ millest } x = \frac{7y}{3}.$$

Asendades esimeses võrrandis x avaldisega $\frac{7y}{3}$, saame

$$3 \cdot \left(\frac{7y}{3}\right)^2 + 3y^2 - 10 \cdot \frac{7y}{3} \cdot y + 2y = -6;$$

$$3 \cdot \frac{49y^2}{9} + 3y^2 - \frac{70y^2}{3} + 2y = -6;$$

$$\frac{49y^2}{3} + 3y^2 - \frac{70y^2}{3} + 2y = -6;$$

$$49y^2 + 9y^2 - 70y^2 + 6y = -18;$$

$$-12y^2 + 6y = -18;$$

$$2y^2 - y - 3 = 0.$$

Siit

$$y_1 = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2} \text{ ja } y_2 = -1.$$

Seega

$$x_1 = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = 3 \frac{1}{2} \text{ ja } x_2 = \frac{7}{3} \cdot (-1) = -\frac{7}{3} = -2 \frac{1}{3}.$$

Kontroll. Esimese lahendi $(3 \frac{1}{2}; 1 \frac{1}{2})$ korral saame:

$$\begin{aligned} \frac{y+3}{(3x-y)(3y-x)} &= \frac{1 \frac{1}{2} + 3}{\left(3 \cdot 3 \frac{1}{2} - 1 \frac{1}{2}\right) \left(3 \cdot 1 \frac{1}{2} - 3 \frac{1}{2}\right)} = \\ &= \frac{4 \frac{1}{2}}{\left(10 \frac{1}{2} - 1 \frac{1}{2}\right) \left(4 \frac{1}{2} - 3 \frac{1}{2}\right)} = \frac{4 \frac{1}{2}}{9} = 0,5; \end{aligned}$$

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{3 \frac{1}{2} - 1 \frac{1}{2}}{3 \frac{1}{2} + 1 \frac{1}{2}} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Teine lahend $(-2 \frac{1}{3}; -1)$ annab

$$\begin{aligned} \frac{y+3}{(3x-y)(3y-x)} &= \frac{-1+3}{\left(-3 \cdot 2 \frac{1}{3} + 1\right) \left(-3 + 2 \frac{1}{3}\right)} = \frac{2}{(-7+1) \left(-\frac{2}{3}\right)} = \\ &= \frac{2}{-6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{2}{4} = 0,5; \end{aligned}$$

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{-2\frac{1}{3}+1}{-2\frac{1}{3}-1} = \frac{-1\frac{1}{3}}{-3\frac{1}{3}} = \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 10} = 0,4.$$

Vastus.

$$\begin{cases} x_1 = 3\frac{1}{2} \\ y_1 = 1\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2\frac{1}{3} \\ y_2 = -1. \end{cases}$$

364. Lahenda võrrandisüsteemid.

$$1) \begin{cases} xy = 32 \\ \frac{x}{y} = 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{1}{xy} = 5 \\ \frac{x}{y} = 20 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} xy = 32 \\ \frac{x+y}{x-y} = 3 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} xy = 30 \\ \frac{x+y}{x} = \frac{11}{5} \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x^2 + y^2 = 68 \\ \frac{11x-3y}{x-1} = -2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x^2 - y^2 = 48 \\ \frac{x-2y}{y+1} = 2\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} (x-2)(y-3) = 1 \\ \frac{x-2}{y-3} = 1 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \frac{(x+y+1)(x+y-1)}{xy+57} = 3 \\ \frac{1}{2x} - \frac{1}{2y} = -\frac{1}{xy} \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x-y = 2b \\ \frac{x}{a-b} = \frac{a+b}{y} \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \frac{x-y}{a+1} = a \\ x-y^2 = 0 \end{cases}$$

365. Täisnurkse kolmnurga übermõõt on 70 cm ja hüpotenuus 29 cm. Leia kaatetite pikkused.

366. Arvuta kaatetite pikkused täisnurkses kolmnurgas, mille hüpotenuus on 37 cm ja kaatetite summa on 47 cm.

367. Leia ristküliku küljed, kui ta übermõõt on 20,6 dm ja diagonaali pikkus on 7,3 dm.

368. Ristküliku übermõõt on 20 cm ja pindala 20,6 cm². Arvuta ristküliku külgede pikkused.

369. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 50 cm ja alusele tõmmatud kõrgus on haarast 2 cm võrra lühem. Arvuta kolmnurga küljed.
370. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 14,4 dm ja haar on alusele tõmmatud kõrgusest 2,5 dm võrra pikem. Leia kolmnurga külgede pikkused.
371. Arvuta rombi diagonaalide pikkused, teades, et nende vahe on 14 cm ja rombi külje pikkus on 17 cm.
372. Leia rombi diagonaalide pikkused, teades, et nende summa on 98 cm ja rombi külje pikkus on 35 cm.
373. Kaks töölist ehtasid koos töötades silohoidla valmis 12 tunniga. Mitu tundi oleks kulunud silohoidla ehitamiseks kummalgi töölisel üksi, kui üks neist oleks võinud selle töö teha 10 tundi lühema ajaga kui teine?
374. Ajakirjanduses tehti ettepanek Tallinna linna toidujäätmete ärakasutamiseks ehitada linna lähedale sigade nuumamiseks suurte sulgudega farm, kuhu mahuks 8000 nuumikut. Kui kavatsetud sulgude arvu suurendada 10 võrra, siis võiks igasse sulgu paigutada 40 nuumikut vähem. Mitu sulgu on kavatsetud ehitada selles farmis ja mitu nuumikut on mõeldud paigutada ühte sulgu?
375. Kui mehhaniseeritud suures seafarmis, milles on 8000 siga, ühe inimese talitada oleks 400 siga rohkem, siis talitajate arv väheneks 1 võrra. Mitu talitajat töötab farmis ja mitu siga on talitada igal töötajal?
- 376.* Rajoonidevahelises sotsialistlikus võistluses sai 1960. aastal esimese preemia Paide rajoon, teise preemia Märjamaa rajoon. Teravilja keskmine hektarisaak oli Paide rajoonis 1,8 tsentneri võrra suurem kui Märjamaa rajoonis. Arvuta need hektarisaagid, teades, et maa-ala, millelt Märjamaa rajoon sai saagi 1 ts, on 0,00825 ha võrra suurem kui maa-ala, millelt Paide rajoon sai 1 ts.
- 377.* Paide rajoonis valmistati 1960. aastal iga lehma kohta 0,7 tonni silo rohkem kui Märjamaa rajoonis. Kui silo anda lehmadele 100 päeva jooksul, siis peab Märjamaa rajoonis 1 tonnist silost jätkuma lehmale 1 päeva võrra pikemaks ajaks kui Paide rajoonis. Mitu tonni silo valmistati lehma kohta kummaski rajoonis? Tulemused anna täpsusega 0,1 tonni.

378. 100-kilomeetrise vahemaa sõitmisel kulutab 4,5-tonnise kandejõuga veoauto ZIL-151 bensiini 16 liitrit rohkem kui 2-tonnise kandejõuga auto GAZ-63. Mitu liitrit bensiini kulutab kumbki veoauto 100 kilomeetri sõitmiseks, kui auto GAZ-63 sõidab ühe liitri bensiiniga 1,16 km rohkem kui ZIL-151?
- 379.* Laeva lastimisel töötasid algul 2 tundi 4 ühesuguse võimsusega kraanat, seejärel liitusid neile veel 2 väiksema võimsusega kraanat. Kui kõik kraanad olid koos töötanud 3 tundi, oli laev lastitud. Kui kõik kraanad oleksid algusest peale koos töötanud, siis oleks lastimiseks kulunud 4,5 tundi. Mitu tundi oleks lastimiseks kulunud ühel suurema võimsusega kraanal ja mitu tundi ühel väiksema võimsusega kraanal?
380. Kaks jalakäijat hakkasid liikuma ühest ja samast punktist mööda risti asuvaid tänavaid. Ühe jalakäija liikumise kiirus moodustas 80% teise omast. 20 minuti pärast oli nende vaheline kaugus 2,5 km. Mitu minutit kulus kummalgi jalakäijal 1 km käimiseks?
381. Kaks keha hakkavad ühisest punktist ühtlase kiirusega liikuma mööda ristsirgeid. 10 sekundi pärast oli kehadevaheline kaugus 13 m. Ühe keha liikumise kiirus moodustas teise kiirusest 240%. Arvuta kummagi keha liikumise kiirus.
382. Kaks töötajat jõuavad antud töö lõpetada 16 tunniga. Kui esimene sooritaks üksinda $\frac{5}{6}$ sellest tööst ja seejärel teine teeks üksinda ülejäänud osa, siis valmiks kogu töö 28 tunniga. Mitu tundi kuluks kummalgi üksinda selle töö tegemiseks?
- 383.* Kahe kraani kaudu täitub vann 12 minutiga. Kui esmalt sooja vee kraani kaudu täita 20% vanni ruumalast ja seejärel ülejäänud osa täita külma vee kraani kaudu, siis saab vann täis 22 minutiga. Mitme minutiga saaks vann täis kummagi kraani kaudu üksikult?
- 384.* Segades kaks lahust, millest üks sisaldas 48 g ja teine 20 g kuiva joodkaaliumi, saadi 200 g uut lahust. Leia kummagi lahuse esialgne kontsentratsioon, teades, et esimese lahuse kontsentratsioon oli teise omast 15% võrra suurem.
- 385.* Tee linnast A linna B läheb algul ülesmäge ja pärast allamäge. Tee pikkus ülesmäge on 90 km, mis moodustab 45% kogu tee pikkusest. Autobussi liikumise kiirus allamäge on $25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ võrra suurem kui ülesmäge. Arvuta autobussi liiku-

mise kiirus ülesmäge ja allamäge, teades, et sõit linnast A linna B kestab 5 tundi.

386.* Kui 20 kg 75%-list puupiiritust segada lahjema puupiiritusega, milles on 60 kg vett, siis saadud segu kontsentratsioon tuleb 10% võrra suurem lahjema puupiirituse kontsentratsioonist. Leia segu kontsentratsioon.

387. Tsisternist, milles oli 4,8 tonni 60%-list happe lahust, võeti teatud hulk lahust ära ja pandi sama palju vett asemele. Seejärel võeti teist korda sama palju lahust ja pandi jälle vett asemele. Tulemuseks oli, et tsisterni jäi veel 2 tonni puhast hapet. Kui palju puhast hapet võeti ära kummalgi korral?

5. HULKNURKADE SARNASUS

5.1. VÕRDELISED LÕIGUD

Kaht lõiku saab võrrelda nende pikkuste suhte abil. Nimetame kahe lõigu a ja b pikkuste suhet lihtsalt nende **lõikude suhteks** ja tähistame seda suhet sümboliga $a:b$ või $\frac{a}{b}$. Kahe lõigu suhte arvutamiseks tuleb lõikude pikkused väljendada samades ühikutes, kui nad sellistena pole antud.

Näide. Lõikude $a=0,8$ m ja $b=12$ dm suhe

$$a:b=0,8\text{ m}:12\text{ dm}=8\text{ dm}:12\text{ dm}=\frac{2}{3}.$$

Kahe lõigu suhe k on ikka positiivne arv, sest lõikude pikkused on positiivsed arvud. Kui $k<1$, siis esimene lõik on teisest lühem; kui $k=1$, siis lõigud on võrdsed; kui $k>1$, siis esimene lõik on teisest pikem.

Vaatleme nüüd nelja niisugust lõiku a , b , c ja d , et lõikude a ja b suhe on võrdne lõikude c ja d suhtega:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}. \quad (1)$$

Sel juhul öeldakse, et lõigud a ja c on **võrdelised** lõikudega b ja d .

Võrdest (1) saab selle liikmete ümberpaigutamise teel tuletada uusi võrdeid, mis on antuga samaväärsed. Vaatleme kolme samaväärset võrret:

$$\left(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{a}{c}=\frac{d}{b}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\right).$$

Neist võrretest teine on saadud esimesest siseliikmete ümberpaigutamise teel, kolmas on saadud esimesest mõlema suhte liikmete ümberpaigutamise teel.

Nende võrrete samaväärsus ütleb, et

kui lõigud a ja c on võrdelised lõikudega b ja d , siis ka lõigud a ja b on võrdelised lõikudega c ja d ning lõigud b ja d on võrdelised lõikudega a ja c .

Olgu lõigud a ja c võrdelised lõikudega b ja d :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Kui teineteisele vastavate lõikude a ja b ning c ja d suhet tähistame endiselt tähega k , siis

$$\frac{a}{b} = k \text{ ja } \frac{c}{d} = k,$$

millest lõigud a ja c avalduvad nendega võrdeliste lõikude b ja d kaudu järgmiselt:

$$a = kb \text{ ja } c = kd.$$

Arvu k nimetame lõikude a ja c võrdeteguriks lõikude b ja d suhtes. Lõikude a ja c ning b ja d võrdelisust saame avaldada kahel samaväärsel kujul, kas võrde kujul või võrdeteguri abil kahe võrduse kujul:

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} a = kb \\ c = kd \end{cases}.$$

Mõne küsimuse käsitlemisel esineb rohkem kui kaks paari võrdelisi lõike. Üldiselt, kui on antud kaks lõikude hulka

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\},$$

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\},$$

mille elementidest saab moodustada võrdsete suhete rea

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots = \frac{y_n}{x_n} = k,$$

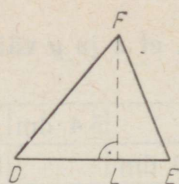
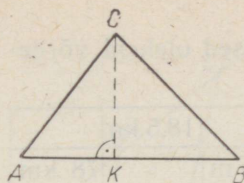
siis hulga Y elemendid on võrdelised hulga X elementidega. Võrdeteguri abil avaldub see võrdelisuus kujul

$$y_1 = kx_1, y_2 = kx_2, \dots, y_n = kx_n.$$

Kui hulga X suvalise elemendi tähistame tähega x ja sellele vastava hulga Y elemendi tähega y , siis vaadeldav võrdelisuus avaldub kujul

$$y : x = k \text{ ehk } y = kx.$$

Võrdeliste lõikude kohta käivate teoreemide tõestamisel vajame järgmist abiteoreemi:



Joon. 84

kui ühe kolmnurga kõrgus on võrdne teise kolmnurga kõrgusega, siis kolmnurkade pindalade suhe võrdub aluste suhtega.

Eeldus. $CK=FL$, kus CK on kolmnurga ABC kõrgus ja FL on kolmnurga DEF kõrgus (joon. 84).

Väide. $S_1 : S_2 = AB : DE$, kus S_1 on kolmnurga ABC pindala ja S_2 kolmnurga DEF pindala.

Tõestus. Avaldame kolmnurkade pindalad aluste ja kõrguste kaudu ning arvutame pindalade suhte:

$$S_1 = \frac{AB \cdot CK}{2}, \quad S_2 = \frac{DE \cdot FL}{2},$$

$$S_1 : S_2 = \frac{AB \cdot CK}{2} : \frac{DE \cdot FL}{2} = \frac{AB \cdot CK}{DE \cdot FL}.$$

Et $CK=FL$, siis tulemuse taandamisel saame:

$$S_1 : S_2 = AB : DE,$$

mida oligi vaja tõestada.

Teoreemi tõestuses esinevad lõikude korrutised tähendavad muidugi lõikude pikkuste korrutisi, kusjuures need pikkused on mõõdetud samades ühikutes.

Lõikude korrutist saame tõlgendada neile lõikudele ehitatud ristküliku pindalana, näiteks $AB \cdot CK$ tähendab niisuguse ristküliku pindala, mille alus ja kõrgus on vastavalt võrdsed lõikudega AB ja CK .

388. Ühe kolmnurga küljed on 12,4 cm, 8,6 cm ja 14,8 cm, teise küljed 31 cm, 37 cm ja 21,6 cm. Lugesed vastavateks külgedeks kolmnurkade kõige pikemad küljed, keskmise pikkusega küljed ja kõige lühemad küljed, selgita, kas nende kolmnurkade küljed on võrdelised.
389. Ühe kolmnurga küljed on 14 cm, 8 cm ja 12 cm, teise kolmnurga lühim külge on 10 cm. Leia teise kolmnurga ülejäänud küljed nii, et nende kolmnurkade küljed oleksid võrdelised.
390. Kahe nelinurga küljed on võrdelised ja väiksema nelinurga küljed on 3,6 cm, 5 cm, 7,5 cm ja 12,4 cm. Arvuta suurema nelinurga küljed, kui külgede võrdetegur on 2,5.

391. Täida järgmine tabel nii, et x ja y väärtused oleksid võrdelised.

x	4 cm	2,4 dm		5,4 dm		18,5 km
y	6 cm		9 dm		10,2 m	78 km

392. Kolmnurgas on joonestatud ühe külje mediaan. Leia tekkinud kolmnurkade pindalade suhe.
393. Läbi kolmnurga ühe tipu on joonestatud sirge, mis jaotab selle tipu vastaskülje lõikudeks suhtes 7 : 5. Arvuta tekkinud kolmnurkade pindalad, kui antud kolmnurga pindala on 102 cm^2 .

5.2. NURGA HAARADE LÕIKAMINE PARALLEELSETE SIRGETEGA

Antud lõikudega võrdelisi lõike on võimalik saada sellekohase konstruktsiooni teel. See konstruktsioon põhineb järgmisel teoreemil, mida nimetatakse **kiirteteoreemiks**:

kui nurga haarasid lõigata paralleelsete sirgetega, siis ühel haaral tekkinud lõigud on võrdelised teise haara vastavate lõikudega.

Tõestame kiirteteoreemi kahe lõikaja puhul.

Eeldu s. Nurga AOB haarad on lõigatud paralleelidega $AB \parallel CD$. Väide. $OA : OB = AC : BD = OC : OD$ (joon. 85).

Tõestus. Joonestame abisirged AD ja BC . Tekkinud kolmnurkad ABC ja ABD on ühise alusega AB ja võrdsete kõrgustega, sest aluse vastastipud C ja D asetsevad alusega paralleelsel sirgel CD . Seega need kolmnurkad on pindvõrdsed:

$$S_{ABC} = S_{ABD}.$$

Vaatleme edasi kolmnurki OAB ja ACB . Võttes neis aluseks vastavalt OA ja AC , on neil ühine kõrgus, mis väljub tipust B . Eespool tõestatud abiteoreemi järgi suhtuvad nende kolmnurkade pindalad S_{OAB} ja S_{ACB} nagu vastavad alused, s. t.

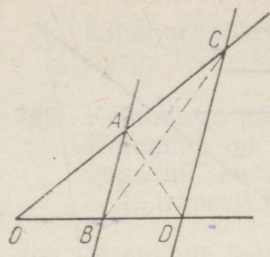
$$S_{OAB} : S_{ACB} = OA : AC. \quad (1)$$

Samal viisil leiame kolmnurkade OAB ja BAD pindalade suhte, sest ka neil on ühine kõrgus, mis väljub tipust A :

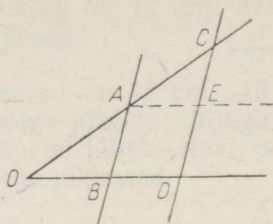
$$S_{OAB} : S_{BAD} = OB : BD. \quad (2)$$

Et tõestuse järgi $S_{ABC} = S_{ABD}$, siis võrrete (1) ja (2) vasakud pooled on võrdsed. Kuid siis on võrdsed ka nende paremad pooled:

$$OA : AC = OB : BD,$$



Joon. 85



Joon. 86

millest siseliikmete vahetamisel järeldub, et

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}. \quad (3)$$

Sellega on väitest kahe suhte võrdsus tõestatud. Näitame, et kolmas suhe on võrdne eelmistega. Selleks kasutame võrdetegurit.

Olgu $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD} = k$. Siis $OA = k \cdot OB$, $AC = k \cdot BD$.

Nende võrduste vastavate poolte liitmisel saame, et

$$OA + AC = k \cdot OB + k \cdot BD = k \cdot (OB + BD)$$

ehk (vt. joon. 85)

$$OC = k \cdot OD \Leftrightarrow \frac{OC}{OD} = k. \quad (4)$$

Ühendades tulemused (3) ja (4), saame:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD} = \frac{OC}{OD}, \text{ m.o.t.t.}$$

Järeldus. Kui nurga haarad on lõigatud paralleelsete sirgetega, siis lõikajate lõigud nurga sees on võrdelised nurga haara lõikudega nurga tipust kuni vastava lõikajani.

Eeldus. Nurga AOB haarad on lõigatud sirgetega $AB \parallel CD$ (joon. 86).

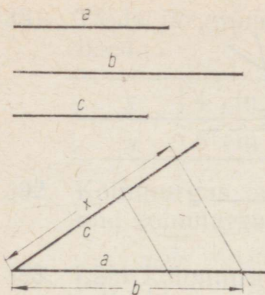
Väide. $AB : OA = CD : OC$.

Tõestus. Joonestame abisirge $AE \parallel OD$. Siis nurga OCD haarad on lõigatud paralleelsete sirgetega AE ja OD . Kiirteteoreemi järgi on haaradel tekkinud lõigud võrdelised:

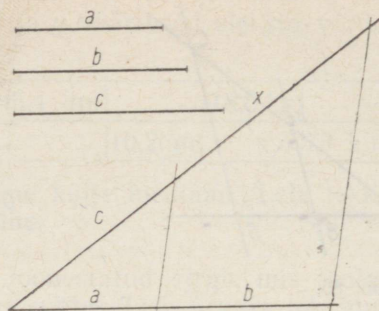
$$ED : OA = CD : OC. \quad (5)$$

Et $ABDE$ on rööpkülik, siis $ED = AB$. Asendades võrdes (5) lõigu ED temaga võrdse lõiguga AB , saame:

$$AB : OA = CD : OC, \text{ m. o. t. t.}$$



Joon. 87



Joon. 88

Kiirteteoreem võimaldab konstrueerida antud kolme lõigu a , b , ja c neljandat võrdelist, s. o. lõiku x , mis täidab tingimust

$$a : b = c : x.$$

Selleks kanname vabalt võetud nurga ühele haarale, alates nurga tipust, lõigud a ja b (joon. 87) ning teisele haarale lõigu c . Edasi joonestame läbi lõikude a ja c teiste otspunktide sirge ja sellele läbi lõigu b teise otspunkti paralleeli. Viimane lõikab nurga teist haara punktis, mille kaugus nurga tipust võrdub otsitava lõiguga x , sest kiirteteoreemi järgi $a : c = b : x$ ehk $a : b = c : x$.

Ülesannet saab lahendada ka nii, et kanname lõigud a ja b nurga ühele haarale järjestikku (joon. 88).

394. Leia nii arvutamise kui ka joonestamise teel neljas võrdeline lõikudele $a = 3,2$ cm, $b = 4,8$ cm ja $c = 4,2$ cm.

395. On antud kolm lõiku: a , b ja c . Konstrueeri lõigud:

$$1) x = \frac{ab}{c}, \quad 2) y = \frac{bc}{a}, \quad 3) z = \frac{ac}{b}.$$

N ä p u n ä i d e. Konstruksiooni leidmiseks koosta võrre. Kui näiteks $x = \frac{mn}{p}$, siis $px = mn$ ja $\frac{p}{m} = \frac{n}{x}$, tähendab, lõik x on lõikude p , m ja n neljas võrdeline.

396. Võrdhaarse trapetsi alused on 14 cm ja 9 cm, haarad on 7 cm. Kui palju tuleb haarasid pikendada, et nad lõikuksid?

397. Trapetsi alused on 6 cm ja 3,2 cm, haarad on 3 cm ja 2,5 cm. Kui palju tuleb üht, kui palju teist haara pikendada, et nad lõikuksid?

398. Kolmnurk, mille küljed on 8 cm, 12 cm ja 16 cm, on lõigatud kõige lühema küljega paralleelse sirgega nii, et tekkinud uue

kolmnurga kõige pikem külg on 12 cm. Arvuta uue kolmnurga teiste külgede pikkused.

399. Kolmnurga külgede pikkused on 12 cm, 18 cm ja 20 cm. Kolmnurk on lõigatud kõige pikema küljega paralleelse sirgega nii, et tekkinud trapetsi lühem haar on 4 cm. Arvuta selle trapetsi teiste külgede pikkused.
400. Rööpkülik, mille üks diagonaal on 15 cm, on lõigatud selle diagonaaliga paralleelse sirgega nii, et tekkinud trapetsi haarad on 8 cm ja 10 cm ning übermõõt on 42 cm. Arvuta rööpküliliku übermõõd.

5.3. KIIRTETEOREEMI PÖÖRDTEOREEM

Tõestame kiirteteoreemi pöördteoreemi:

kui kaks sirget lõikavad nurga haarasid nii, et ühel haaral tekkinud lõigud on võrdelised vastavate lõikudega nurga teisel haaral, siis need sirged on paralleelsed.

Eeldus. $OA : OB = OC : OD$ (joon. 89).

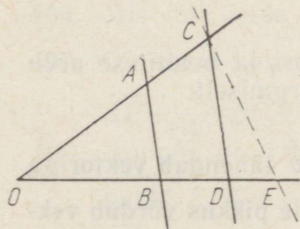
Väide. $AB \parallel CD$.

Tõestus. Oletame, et sirged AB ja CD ei ole paralleelsed. Võtame läbi punkti C sirgega AB paralleelse sirge CE , kus $E \in OB$ (joon. 89). Kiirteteoreemi põhjal siis

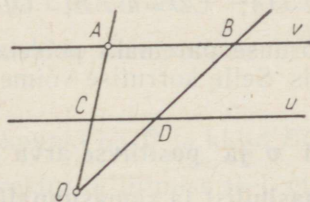
$OA : OB = OC : OE$.

Võrreldes saadud võrret eelduses antud võrdega, näeme, et neis kolm liiget on samad. Järelikult ka neljandad on samad: $OD = OE$. Kuid siis punktid D ja E ühtivad, samuti ka sirged CD ja CE . Et konstruktsiooni järgi $AB \parallel CE$, siis ka $AB \parallel CD$, m. o. t. t.

Kiirteteoreemi pöördteoreem võimaldab joonestada antud sirgele u paralleeli v läbi punkti A , mis ei asetse sirgel u (joon. 90). Selleks joonestame teisel pool sirget u võetud punktist O sirged OA ja



Joon. 89



Joon. 90

OD , kus $D \in u$, leiame punkti $C = OA \cap u$, mõõdame lõigud OA , OC ja OD ning arvutame lõigu OB pikkuse võrdest

$$OB : OA = OD : OC.$$

Saadud pikkusega lõigu kanname sirgele OD alates punktist O . Nii saame punkti B , mida läbib otsitav paralleel v .

401. Joonesta antud sirgele paralleelne sirge läbi antud punkti, kasutades lõikude mõõtmist.
402. Kolmnurga kaks külge on 6 cm ja 9 cm. Neist lühemat külge on 4 cm võrra pikendatud üle kolmanda külje otspunkti. Kui palju tuleks pikendada pikemat külge üle kolmanda külje otspunkti, et läbi pikenduste otspunktide minev sirge oleks paralleelne kolmnurga kolmanda küljega?
403. Joonisel on antud nelinurk, mille kolm järjestikust külge on pikkusega 12 ühikut, 8 ühikut ja 5 ühikut. Et otsustada, kas see nelinurk on trapets, pikendatakse külge, mille pikkus on 8 cm, kuni lõikumiseni nelinurga neljanda külje pikendusega. Kui pikk peaks olema esimesena nimetatud külje pikendus, et nelinurk oleks trapets?
404. Kolmnurka lõikav sirge jaotab ühe külje lõikudeks 4,2 cm ja 2,4 cm, teise külje lõikudeks 6,4 cm ja 3,6 cm, alates nende külgedele ühisest otspunktist. Kas lõikaja on paralleelne kolmnurga kolmanda küljega?

5.4. VEKTORI KORRUTAMINE ARVUGA

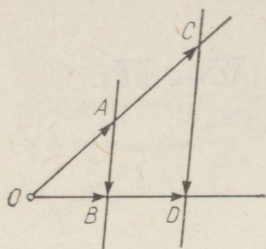
Olgu nurga O haarad endiselt lõigatud paralleelsete sirgetega AB ja CD ning olgu $OC = k \cdot OA$ (joon. 91). Kiirteteoreemi ja selle järelduse järgi siis $OD = k \cdot OB$ ja $CD = k \cdot AB$.

Vaatleme kõiki neis võrdustes esinevaid lõike suunaga lõikudena ehk vektoritena, kirjutades

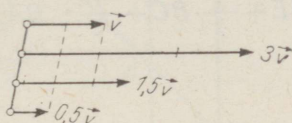
$$\vec{OC} = k \cdot \vec{OA}; \quad \vec{CD} = k \cdot \vec{AB}; \quad \vec{OD} = k \cdot \vec{OB}.$$

Iga võrduse paremaks pooleks on siin vektori ja positiivse arvu korrutis. Selle korrutise võime defineerida järgmiselt:

vektori \vec{v} ja positiivse arvu k korrutis $k \cdot \vec{v}$ tähendab vektoriga \vec{v} samasihilist ja samasuunalist vektorit, mille pikkus võrdub vektori \vec{v} pikkuse ja arvu k korrutisega.



Joon. 91



Joon. 92



Joon. 93

Näiteks $3 \cdot \vec{v}$ tähendab vektorit, mis on samasihiline vektoriga \vec{v} (s. t. nad asetsevad paralleelsetel sirgetel või ühel ja samal sirgel), on sellega samasuunaline, kuid tema pikkus on vektori \vec{v} pikkuse 3-kordne (joon. 92). Vektori korrutamiseks negatiivse arvuga korrutame ta esmalt selle arvu absoluutväärtusega ja võtame siis saadud vektori vastandvektori (joon. 93). Jooniselt 91 võime näha, et vektorite summa korrutamisel arvuga kehtib jaotuvuse seadus (nagu arvude summa korrutamisel arvuga):

$$k \cdot (\vec{OA} + \vec{AB}) = k \cdot \vec{OA} + k \cdot \vec{AB}.$$

Tõepoolest, joonise järgi selle võrduse vasak pool

$$k \cdot (\vec{OA} + \vec{AB}) = k \cdot \vec{OB} = \vec{OD}$$

ja parem pool

$$k \cdot \vec{OA} + k \cdot \vec{AB} = \vec{OC} + \vec{CD} = \vec{OD},$$

seega võrduse pooled on võrdsed.

405. Joonesta vabalt võetud vektori \vec{a} järgi vektorid $2 \cdot \vec{a}$, $-3 \cdot \vec{a}$ ja $-1,5 \cdot \vec{a}$.

406. Mis võib öelda vektoritest \vec{AB} ja \vec{CD} , kui $\vec{AB} = -4 \cdot \vec{CD}$?

407. On antud kolmnurk ABC . Leia vektorite summa

$$\vec{AB} + \frac{1}{2} \cdot \vec{BC} + \frac{1}{2} \cdot \vec{BA}.$$

408. Kolmnurga ABC külje AC keskpunkt on D ja külje BC keskpunkt E . Tee joonis ja näita vektorite liitmise teel, et $\vec{DE} = \frac{1}{2} \cdot \vec{AB}$. Mis sellest järeldub kolmnurga kesklõigu kohta?

409. Rööpküliku $ABCD$ diagonaalide lõikepunkt on E . Tee joonis ja leia järgmised vektorid:

$$\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BD}; \quad \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA}; \quad \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} - 2 \cdot \overrightarrow{BE}).$$

5.5. HOMOTEETSUSTEISENDUS

Olgu antud mingi punkt O ja arv $k \neq 0$. Võtame mingi punkti-
hulga $\{A, B, C\}$ ja leiame teise punkti-
hulga

$\{A', B', C'\}$ nii, et

$$\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OC'} = k \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Antud arv k võib seejuures olla kas positiivne (joon. 94) või negatiivne (joon. 95).

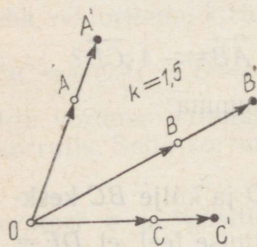
Õeldakse, et me oleme punkti-
hulga $\{A, B, C\}$ teisendanud hulgaks $\{A', B', C'\}$. On arusaadav, et antud punkti O ja arvu k korral ($k \neq 0$) saame leida igale punktile P , mis erineb punktist O , tema

teisendi P' : punktiks P' on vektori $k \cdot \overrightarrow{OP}$ lõpp-punkt. Punkti O teisendiks loeme selle punkti enda.

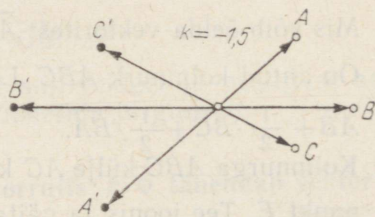
Kirjeldataud teisendust nimetatakse **homoteetsusteisenduseks** ehk lihtsalt **homoteetsuseks** ja punkti P' **homoteetseks** punktiga P . Punkt O on **homoteetsuskeskpunkt** ja arv k **homoteetsustegur**.

Osates leida punktiga homoteetset punkti, saame leida iga kujundiga homoteetset kujundit, sest iga kujund koosneb ju punktidest. Homoteetse kujundi kergemaks leidmiseks on kasulik tunda homoteetsusteisenduse järgmisi omadusi.

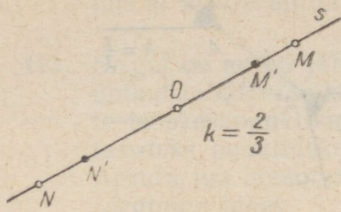
Sirgega homoteetseks kujundiks on selle sirgega samasihiline sirge.



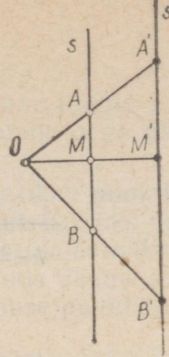
Joon. 94



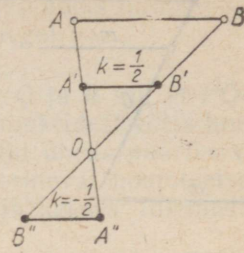
Joon. 95



Joon. 96



Joon. 97



Joon. 98

Tõestuseks eeldame, et on antud homoteetsuskeskpunkt O ja -tegur k . Võtame esmalt sirge s läbi punkti O (joon. 96). See sirge teisendub samaks sirgeks, sest kui võtta sirgel s punkt M , siis $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ asetseb ju täielikult samal sirgel, seega ka $M' \in s$.

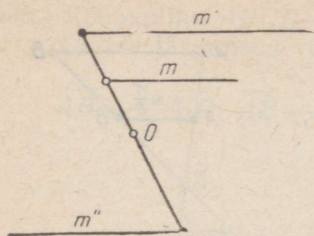
Võtame nüüd sirge s nii, et $O \notin s$ (joon. 97). Leiame selle mingi kahe punktiga A ja B homoteetsed punktid A' ja B' . Joonestame

sirge $s' = A'B'$. Et $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ ja $\overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB}$, siis kiirteteoreemi pöördteoreemi järgi $s' \parallel s$. See sirge s' ongi homoteetne sirgega s punkti O suhtes, sest kui võtame sirgel s mingi punkti M , joonestame kiire OM ja leiame punkti $M' = OM \cap s'$, siis nurga AOM haarad on lõigatud paralleelidega s ja s' ning kiirteteoreemi järgi $\overrightarrow{OM'} =$

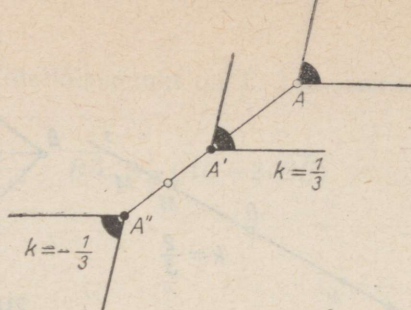
$= k \cdot \overrightarrow{OM}$, mis ütlebki, et M' on homoteetne M -ga. Seega, kui $O \in s$, siis $s' = s$, kui $O \notin s$, siis $s' \parallel s$. Sirge s' joonestamiseks juhul, kui $O \notin s$, leiame sirge s' ühe punkti ja joonestame sellest läbi sirgega s paralleelse sirge.

Et sirgega homoteetseks kujundiks on sirge, siis:

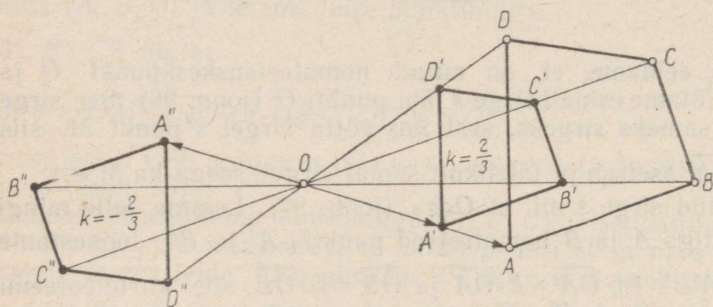
- 1) lõiguga homoteetseks kujundiks on antud lõiguga samasihiline lõik (AB ja $A'B'$ või AB ja $A''B''$ joonisel 98);
- 2) kiirega homoteetseks kujundiks on antud kiirega samasuunaline kiir või vastandsuunaline kiir (m ja m' või m ja m'' joonisel 99);
- 3) nurgaga homoteetseks kujundiks on antud nurgaga samasuunaliste haaradega nurk või vastandsuunaliste haaradega nurk ($\angle A$ ja $\angle A'$ või $\angle A$ ja $\angle A''$ joonisel 100);
- 4) hulknurgaga homoteetseks kujundiks on antud hulknurgaga samanimeline ja vastavalt samasihiliste külgedega hulknurk (hulknurk $ABCD$ ja $A'B'C'D'$ või $ABCD$ ja $A''B''C''D''$ joonisel 101).



Joon. 99



Joon. 100



Joon. 101

Et vastavalt samasuunaliste, samuti ka vastandsuunaliste haaradega nurgad on võrdsed, siis

nurga suurus homoteetsusteisendusel ei muutu.

Nii on joonisel 100 $\angle A = \angle A'$ ja $\angle A = \angle A''$.

410. On antud homoteetsuskeskpunkt O ja $-$ tegur k . Leia kolme vabalt võetud punktiga homoteetsed punktid. Lahenda ülesanne juhul, kui
- 1) $k=3$, 2) $k=-2$, 3) $k=-1,5$.
411. On antud homoteetsuskeskpunkt ja üks paar homoteetseid punkte. Leia homoteetsustegur.
412. On antud homoteetsuskeskpunkt ja üks paar homoteetseid punkte. Leia ainult joonestamise teel vabalt võetud punktile homoteetne punkt.
Lahenda ülesanne kahel juhul:
- 1) kui vabalt võetud punkt ei asetse antud punktidega ühel sirgel,
 - 2) kui vabalt võetud punkt asetseb antud punktidega ühel sirgel.
- Näpunäited. Juhul 1 võta abiks sirge, mis läbib üht antud punkti (mitte ükskõik kumba!) ja vabalt võetud punkti.

Juhul 2 taanda ülesanne juhule 1, võttes abiks mingi punkt, mis ei asetse antud punktidega ühel sirgel.

413. Sirgel on antud järjestikku punktid P , Q ja R nii, et $PQ=4$ ühikut ja $QR=3$ ühikut. Kui üks neist punktidest võtta homoteetsuskeskpunktiks ja ülejäänud punktid üheks paariks vastavateks punktideks, siis saame kuus erinevat homoteetsust. Arvuta iga homoteetsuse puhul tegur ja koosta tulemustest järgmine tabel.

Homoteetsuskeskpunkt	Homoteetsus	Tegur
P	$\vec{PR} = k \cdot \vec{PQ}$	$1 \frac{3}{4}$

414. On antud homoteetsuskeskpunkt ja lõik, mille pikendus ei läbi homoteetsuskeskpunkti. Joonesta antud lõiguga homoteetne lõik, kui viimase üks punkt on antud.
415. On antud homoteetsuskeskpunkt ja lõik, mille pikendus läbib homoteetsuskeskpunkti. Joonesta antud lõiguga homoteetne lõik, kui viimase üks otspunkt on antud.
416. On antud kolmnurk ja selle sees homoteetsuskeskpunkt. Joonesta homoteetne kolmnurk, kui tegur on 2,5.
417. Lahenda eelmine ülesanne tingimusel, et homoteetsustegur on $-2,5$.
418. Kuidas nimetatakse teisiti homoteetsust, mille tegur on -1 ? mille tegur on 1 ?
419. Joonesta vabalt võetud viisnurgaga homoteetne viisnurk, kui keskpunktiks on viisnurga üks tipp ja homoteetsustegur on $\frac{3}{4}$.
420. Lahenda eelmine ülesanne tingimusel, et homoteetsustegur on $-\frac{3}{4}$.
421. Kui punkt P on homoteetne punktiga Q punkti O suhtes, siis ka Q on homoteetne punktiga P sama punkti O suhtes. Mis võib öelda homoteetsustegurite kohta?

422. Milleks teisendub korrapärane hulknurk homoteetsusteisendusel?
423. Mis on ringjoonega homoteetseks kujundiks? Kuidas seda põhjendada?

5.6. HULKNURKADE SARNASUS

Vaatleme kaht homoteetset hulknurka, näiteks nelinurki $ABCD$ ja $A'B'C'D'$ joonisel 101. Neil nelinurkadel on peale nelinurkade üldiste omaduste veel mitmed eriomadused, mida igal nelinurga-paaril ei ole. Niisugused omadused on näiteks järgmised:

- 1) hulknurkade vastavaid tippe A ja A' , B ja B' jne. läbivad sirged lõikuvad ühes ja samas punktis (homoteetsuskeskpunktis);
- 2) hulknurkade vastavad küljed AB ja $A'B'$, BC ja $B'C'$ jne. on samasihilised;
- 3) hulknurkade vastavad nurgad A ja A' , B ja B' jne. on võrdsed (sest kaks homoteetset nurka on võrdsed);
- 4) hulknurkade vastavad küljed on võrdelised (võrdeteguriks on homoteetsustegur või selle absoluutväärtus).

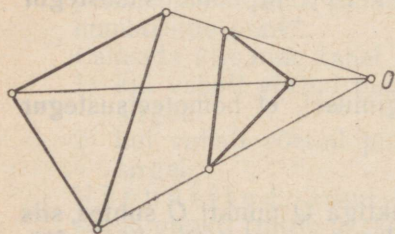
Viime nüüd ühe neist hulknurkadest mingi liikumisega (lükkega, peegeldusega, pöördega) teisele kohale. Sellel liikumisel omadused 1 ja 2 võivad kaduda, kuna omadused 3 ja 4 jäävad püsima, sest nurga suurus ja lõigu pikkus liikumisel ei muutu.

Hulknurki, millel on omadus 1, nimetatakse **perspektiivseteks**. Joonis 102 kujutab kaht punkti O suhtes perspektiivset kolmnurka, mis pole homoteetsed.

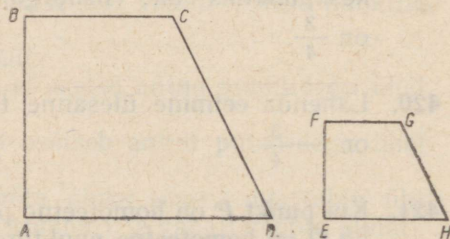
Hulknurki, millel on omadus 1 ja 2, nimetatakse, nagu teame, homoteetseteks.

Hulknurki, millel on omadused 3 ja 4, nimetatakse **sarnasteks**. Siit selgub järgmine definitsioon:

kaht hulknurka nimetatakse sarnasteks, kui ühe hulknurga nurgad on vastavalt võrdsed teise hulknurga nurkadega ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised.



Joon. 102



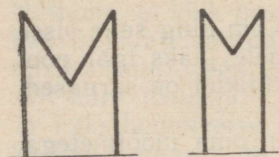
Joon. 103

Kaks mingi punkti suhtes homoteetset hulknurka on seega alati sarnased. Seetõttu nimetatakse homoteetsusteisendust ka **sarnasusteisenduseks**, homoteetsuskeskpunkti **sarnasuskeskpunktiks** ja homoteetsustegurit **sarnasusteguriks**.

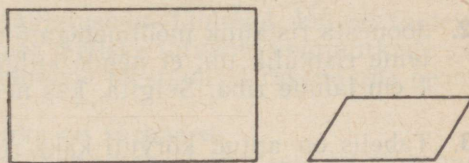
Kuid ka kaks mittehoteetset hulknurka võivad olla sarnased. Näiteks on joonisel 103 kujutatud nelinurgad $ABCD$ ja $EFGH$ sarnased, kuna

$$\angle A = \angle E, \angle B = \angle F, \angle C = \angle G, \angle D = \angle H \text{ ja} \\ AB : EF = BC : FG = CD : GH = AD : EH = 2.$$

Seevastu joonisel 104 kujutatud tähe M kujulised hulknurgad pole sarnased, sest nende vastavalt võrdsete nurkade lähisküljed pole võrdlised.



Joon. 104



Joon. 105

Kahe hulknurga $ABCD$ ja $EFGH$ sarnasust märgitakse kujul $ABCD \sim EFGH$.

Sarnaste hulknurkade nimetused tuleb seejuures kirjutada nii, et nende vastavate tippude tähised on mõlemas nimetuses ühel ja samal kohal. Märkides hulknurkade sarnasust nii, saame valemist $ABCD \sim EFGH$ välja lugeda järgmist:

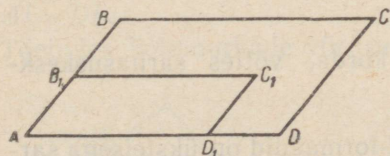
$$\angle A = \angle E, \angle B = \angle F, \angle C = \angle G, \angle D = \angle H$$

ja

$$AB : EF = BC : FG = CD : GH = AD : EH.$$

424. Selgita, kas joonisel 105 kujutatud ristkülik ja rööpkülik on sarnased. Kui ei, siis miks ei ole.

425. Selgita, kas joonisel 106 kujutatud rööpkülikud $ABCD$ ja $AB_1C_1D_1$ on sarnased või mitte. Miks?



Joon. 106

426. Põhjenda väidet, et kaks võrdset hulknurka on sarnased.

427. On antud, et $\triangle ABC \sim \triangle KLM$. Mis sellest järeldub kolmnurkade nurkade ja külgede kohta?

428. Põhjenda väidet, et kolmnurkade sarnasusel on
- 1) vahetuvuseomadus, s. t. kui $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, siis ka $\triangle DEF \sim \triangle ABC$;
 - 2) ühenduvuseomadus, s. t. kui $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ja $\triangle DEF \sim \triangle KLM$, siis ka $\triangle ABC \sim \triangle KLM$.
429. Filmilindi kaadri laius on ligikaudu 22 mm ja sellest saadud pildi laius 3,3 m. Mitu korda on pilti suurendatud?
430. Suurenda mingi viisnurk 2 korda.
431. Vähenda mingi kuusnurk 3 korda.
432. Joonesta ristkülik mõõtmetega 6 cm ja 4 cm ning selle sisse teine ristkülik nii, et nende külgede vahele jääks igal pool 1 cm laiune riba. Selgita, kas need ristkülikud on sarnased.
433. Tabelis on antud kõrvuti kaks ristkülikut oma mõõtmetega. Otsusta, kas nad on sarnased.

Harj. nr	I ristkülik	II ristkülik
1	5 m ja 9 m	45 m ja 25 m
2	0,6 m ja 0,8 m	0,18 m ja 0,32 m
3	18 cm ja 20 cm	60 cm ja 54 cm
4	8,1 cm ja 4,5 cm	15 cm ja 27 cm
5	$6\frac{2}{5}$ dm ja $4\frac{1}{3}$ dm	$5\frac{1}{3}$ dm ja $3\frac{1}{4}$ dm

434. Risttahuka mõõtmed on 2 cm, 4 cm ja 8 cm. Missuguste mõõtmetega tahud on sellel risttahukal sarnased?
435. Ristkülikut suurendati 2, 3, ..., k korda. Mitu korda suurenes ristküliku pindala?
436. Suurenda mingit viisnurka 3 korda, võttes sarnasuskeskpunktiks viisnurga ühe tipu.
437. Kirjutuspaberi lehtede standard-formaadid on üksteisega sarnased, kusjuures iga järgmine väiksem formaat saadakse eelmise formaadi poolitamise teel. Näita, et niisuguse formaadi mõõtmete suhe on võrdne ruudu külje ja diagonaali suhtega.

438. 1) Millal on kaks ruutu sarnased?
 2) Millal on kaks korrapärast kuusnurka sarnased?
 3) Millal on kaks rombi sarnased?

439. Näita, et kujundite võrdsus on sarnasuse erijuhtum.

5.7. KOLMNURKADE SARNASUSE TUNNUSED

Hulknurkade sarnasuse definitsiooni järgi

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$, kui

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ ja

$AB : DE = BC : EF = AC : DF$.

Näitame, et kõik need viis tingimust on täidetud, kui on täidetud kaks sobivalt valitud tingimust. Selleks tutvume kolmnurkade sarnasuse tunnustega. Nende tunnuste tõestamisel rakendame peamiselt kaht tõsiasja:

- 1) kaks homoteetset kolmnurka on sarnased;
- 2) kui kolmnurk on sarnane ühega kahest võrdsest kolmnurgast, siis ta on sarnane ka teiselega.

Kolmnurkade sarnasuse I tunnus:

kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks külge on võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ja nende külgede vahelised nurgad on võrdsed.

Eeldus. $\angle A = \angle D$; $AB : DE = AC : DF$ (joon. 107).

Väide. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

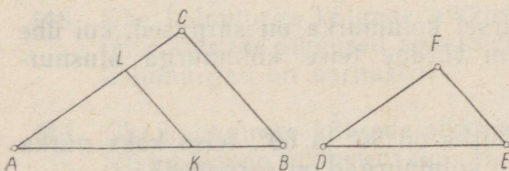
Tõestus. Märgime $\triangle ABC$ küljel AB lõigu $AK = DE$ ja joonestame punktist K sirge $KL \parallel BC$. Siis $\triangle ABC \sim \triangle AKL$, sest nad on homoteetsed (punkti A suhtes). Seetõttu

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AL}.$$

Saadud võrde esimesed kolm liiget on vastavalt võrdsed eelduses antud võrde esimese kolme liikmega. Sellest järeldub, et ka nende neljandat liikmed on võrdsed:

$$AL = DF.$$

Toetudes kolmnurkade võrdsuse tunnusele KNK saame nüüd, et



Joon. 107

$\triangle AKL = \triangle DEF$. Et $\triangle ABC$ oli esimesega neist sarnane, siis ta on sarnane ka teisega:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

440. Näita, et kaks täisnurkset kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaatedid on võrdelised teise kolmnurga kaateditega.
441. Näita, et kaks võrdhaarset kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga tipunurk on võrdne teise kolmnurga tipunurgaga.
442. Ühe kolmnurga üks nurk on 70° ja selle lähisküljed on 16 cm ja 35 cm, teise kolmnurga kahe nurga summa on 110° ja nende nurkade vastasküljed on 2,1 m ja 0,96 m. Kas need kolmnurgad on sarnased?
443. Ühe kolmnurga üks nurk on 60° ja selle lähisküljed on 10 cm ja 15 cm, teise kolmnurga kaks nurka on 55° ja 65° , nende vastasküljed 15 cm ja 20 cm. Kas need kolmnurgad on sarnased?

Kolmnurkade sarnasuse II tunnus:

kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga.

Eeldus. $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle E$ (joon. 108).

Väide. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Tõestus. Märgime $\triangle ABC$ küljel AB lõigu $AK = DE$ ja joonestame punktist K sirge $KL \parallel BC$. Nii saadud kolmnurk AKL on sarnane kolmnurgaga ABC , sest nad on homoteetsed. Ühtlasi tunnuse NKN järgi

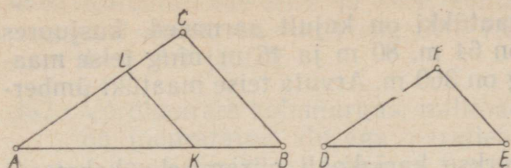
$$\triangle AKL = \triangle DEF,$$

sest $\angle A = \angle D$, $AK = DE$ ja $\angle K = \angle B = \angle E$ (miks?).

Et kolmnurk ABC oli sarnane kolmnurgaga AKL , siis on ta sarnane ka sellega võrdse kolmnurgaga DEF :

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

444. Näita, et kaks täisnurkset kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga üks teravnurk on võrdne teise kolmnurga teravnurgaga.
445. Näita, et kaks võrdhaarset kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga alusnurk on võrdne teise kolmnurga alusnurgaga.
446. Ühe kolmnurga kaks nurka on 50° ja 60° , teise kaks nurka aga 60° ja 70° . Kas need kolmnurgad on sarnased?



Joon. 108

447. Tõesta, et täisnurkse kolmnurga kõrgus jaotab antud kolmnurga kaheks kolmnurgaks, mis on sarnased antud kolmnurgaga.

Kolmnurkade sarnasuse III tunnust:

kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga küljed on võrdelised teise kolmnurga külgedega.

Eeldus. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (joon. 108).

Väide. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Tõestus. Märgime $\triangle ABC$ küljel AB lõigu $AK=DE$ ja joonestame selle lõpp-punktist K sirge $KL \parallel BC$. Siis kolmnurgad ABC ja AKL on homoteetsed, seega

$$\triangle ABC \sim \triangle AKL,$$

nii et

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AL} = \frac{BC}{KL}.$$

Saadud võrdsete suhete esimesed liikmed on samad eelduses antud suhete esimeste liikmetega ja esimeste suhete teised liikmed AK ja DE on võrdsed. Sellest saab järeldada (kuidas?), et ka ülejäänud suhete teised liikmed on vastavalt võrdsed:

$$AL=DF \text{ ja } KL=EF.$$

Kolmnurkade võrdsuse tunnuse KKK põhjal saame nüüd, et $\triangle AKL = \triangle DEF$. Et kolmnurk ABC on sarnane kolmnurgaga AKL , siis on ta sarnane ka sellega võrdse kolmnurgaga DEF :

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

448. Ühe kolmnurga külgede pikkused on 4 cm, 6 cm ja 8 cm, teise külgede pikkused aga 18 cm, 24 cm ja 12 cm. Kas need kolmnurgad on sarnased?

449. Ühe kolmnurga külgede pikkused on 0,3 m, 0,5 m ja 0,7 m, teise külgede pikkused aga 21 m, 15 m ja 10 m. Kas need kolmnurgad on sarnased?

450. Kaks kolmnurkset maatüki on kujult sarnased, kusjuures ühe maatüki küljed on 64 m, 80 m ja 46 m ning teise maatüki kõige pikem külg on 360 m. Arvuta teise maatüki ümbermõõt.
451. Kahe sarnase kolmnurkse karjakopli piiramiseks kahetraadise aiaga kulus kokku 600 m okastraati. Ühe kopli külgede pikkused olid 45 m, 60 m ja 75 m. Kui pikad olid teise kopli küljed?

Kolmnurkade sarnasuse IV tunnus:

kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks külge on võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ja nurk, mis ühes kolmnurgas asetseb nimetatud küljepaari suurema külje vastas, on võrdne vastava nurgaga teises kolmnurgas.

Eeldus. $AB : DE = AC : DF$; $AB > AC$; $\angle C = \angle F$ (joon. 108).

Väide. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Tõestus. Märkime $\triangle ABC$ küljel AB lõigu $AK = DE$ ja joonestame punktist K sirge $KL \parallel BC$. Siis $\triangle ABC \sim \triangle AKL$, sest nad on homoteetsed, ja

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AL}.$$

Saadud võrde esimesed kolm liiget on vastavalt võrdsed eelduses antud võrde esimese kolme liikmega. Sellest järeldub, et ka nende neljandad liikmed on võrdsed:

$$AL = DF.$$

Rakendades kolmnurkade võrdsuse tunnust KkN, saame nüüd, et $\triangle AKL = \triangle DEF$. Edasi järeldub kergesti (kuidas?), et $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

452. Põhjenda väidet, et kaks täisnurkset kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga üks kaatet ja hüpotenuus on võrdelised teise kolmnurga vastavate külgedega.
453. Põhjenda väidet, et kaks võrdhaarset kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga alus ja haar on võrdelised teise kolmnurga aluse ja haaraga.
454. Põhjenda väidet, et kolmnurga suurendamisel k korda tema kõrgus suureneb niisamuti k korda.
455. Kolmnurkade ABC ja DEF kohta on teada, et $\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle E$, $AB = 10$ cm, $DF = 7,5$ cm ja $BC + EF = 8,4$ cm. Leia BC ja EF .

456. Kolmnurkade ABC ja DEF kohta on teada, et $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle D$, $AC = 11,4$ cm, $EF = 7,6$ cm ja $AB - DE = 2,4$ cm. Leia AB ja DE .
457. Võrdhaarse kolmnurga, mille alus on 6 cm ja haar 10 cm, on joonestatud alusega paralleelne lõik, mille pikkus on 4 cm. Kui pikk on tekkinud trapetsi haar?
458. Võrdhaarse trapetsi alused on 3 dm ja 8 dm, haar on 4 dm. Kui palju tuleb trapetsi haarasid pikendada, et need lõikuk-
sid?
459. Kolmnurga ABC külg $AB = 6$ cm ja külg $AC = 9$ cm. Küljel AB on võetud punkt D nii, et $AD = 4,5$ cm, ja küljel AC punkt E nii, et $AE = 3$ cm. Punktid D ja E on ühendatud. Tõesta, et $\angle ADE = \angle ACB$.
460. Nurga haarad on lõigatud kolme paralleelse sirgega nii, et ühel haaral on tekkinud lõigud pikkusega 4,2 cm, 5,7 cm ja 7,2 cm. Teise haara vastavatest lõikudest iga järgnev on eelnevast 1 cm võrra pikem. Kui pikad on teise haara lõigud?
461. Nurga haarad on lõigatud kahe paralleelse sirgega nii, et ühel haaral on tekkinud lõigud 7,8 cm ja 12,4 cm ning teise haara vastavate lõikude vahe on 8,05 cm. Leia teise haara lõikude pikkused.
462. Kolmnurga lõikamisel sirgega, mis on ühe küljega paral-
leelne, tekkis trapets, mille alused on 5,2 cm ja 8,4 cm ning haarad on 3,6 cm ja 2,8 cm. Kui pikad on antud kolmnurga küljed?
463. Trapetsi alused on 15 cm ja 9 cm. Kui üht haara pikendada 6 cm võrra, siis ta lõikub teise haara pikendusega. Leia esi-
mese haara pikkus.
464. Trapetsi $ABCD$ alus $AB = 18$ cm, haar $AD = 12$ cm, diagonaal $BD = 15$ cm ja $\angle ADB = \angle BCD$. Leia BC ja CD .
465. Trapetsi alused on 16 cm ja 24 cm, haarad on 15 cm ja 11 cm. Kui palju tuleb pikendada üht ja kui palju teist haara, et need lõikuksid?
466. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu arvud 4, 7 ja 5. Sellega sarnase kolmnurga ümbermõõt on 3,2 m. Arvuta viimase kolmnurga külgede pikkused.
467. Kolmnurga küljed on 34 m, 62 m ja 78 m. Sellega sarnase kolmnurga ümbermõõt on 261 m. Arvuta viimase kolmnurga külgede pikkused.

5.8. SARNASTE HULKNUURKADE ÜMBERMÕÖTUDE SUHE JA PINDALADE SUHE

Tõestame, et

kahe sarnase hulknurga übermõõtude suhe võrdub vastavate külgede suhtega.

Olgu ühe hulknurga külgede pikkused a, b, \dots, e ja sellega sarnase hulknurga vastavate külgede pikkused a_1, b_1, \dots, e_1 (joon. 109).

Hulknurkade sarnasuse definitsiooni põhjal

$$a_1 = ka, b_1 = kb, \dots, e_1 = ke,$$

kus k on nende hulknurkade sarnasustegur. Olgu hulknurkade übermõõdud vastavalt u ja u_1 . Avaldades teise hulknurga übermõõdu u_1 , saame

$$u_1 = a_1 + b_1 + \dots + e_1 = ka + kb + \dots + ke$$

ehk, võttes liikmete ühise teguri k sulgude ette ja tähistades esimese hulknurga übermõõdu tähega u ,

$$u_1 = k(a + b + \dots + e) = ku.$$

Siit järeldubki, et $u_1 : u = k$, s. t. hulknurkade übermõõtude suhe võrdub vastavate külgede suhtega.

468. Kahe sarnase hulknurga üks paar vastavaid külgi on pikkusega 1,2 dm ja 1,5 dm. Arvuta teise hulknurga übermõõt, kui esimese hulknurga übermõõt on 7,8 dm.

469. Nelinurga küljed on 3,6 cm, 2,8 cm, 4,8 cm ja 3,2 cm. Leia sellega sarnase nelinurga küljed, kui viimase übermõõt on 21,6 cm.

470. Kahe hulknurga sarnasustegur on 1,25 ja nende übermõõtude vahe on 20,6 m. Arvuta kummagi hulknurga übermõõt.

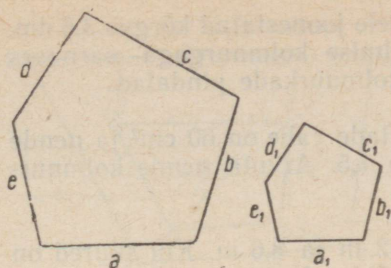
471. Kahe sarnase hulknurga übermõõtude summa on 7,8 m. Ühe hulknurga lühima külje pikkus on 1,2 dm ja teise hulknurga vastava külje pikkus 1,4 dm. Leia hulknurkade übermõõdud.

Tõestame, et

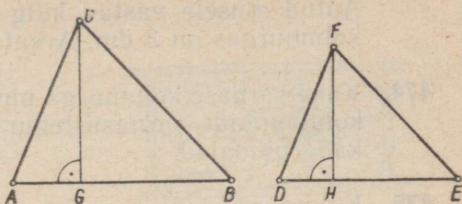
kahe sarnase kolmnurga pindalade suhe võrdub vastavate külgede suhte ruuduga.

Eeldus. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (joon. 110).

Väide. $S_1 : S_2 = (AB : DE)^2$, kus S_1 on kolmnurga ABC pindala ja S_2 kolmnurga DEF pindala.



Joon. 109



Joon. 110

Tõestus. Võtame kolmnurkades alusteks vastavad küljed AB ja DE , tõmbame neile kõrgused CG ja FH ning avaldame kolmnurkade pindalad:

$$S_1 = \frac{AB \cdot CG}{2} \text{ ja } S_2 = \frac{DE \cdot FH}{2}.$$

Seega

$$S_1 : S_2 = \frac{AB \cdot CG}{2} : \frac{DE \cdot FH}{2} = \frac{AB \cdot CG}{DE \cdot FH} = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{CG}{FH}.$$

Et II sarnasustunnuse järgi $\triangle ACG \sim \triangle DFH$, siis $\frac{CG}{FH} = \frac{AC}{DF}$.

Kuid antud kolmnurkade sarnasuse tõttu viimane suhe on võrdne nende kolmnurkade aluste suhtega.

Seega

$$\frac{CG}{FH} = \frac{AB}{DE},$$

mistõttu $S_1 : S_2 = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{AB}{DE}$ ehk $S_1 : S_2 = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2$.

Kui kolmnurkade ABC ja DEF vastavate külgede suhe on k , siis nende pindalade suhe

$$S_1 : S_2 = k^2 \text{ ehk } S_1 = k^2 S_2.$$

Seega,

kui kolmnurka suurendada k korda, siis tema pindala suureneb k^2 korda.

472. Kahe sarnase kolmnurga sarnasustegur on 2,5. Väiksema kolmnurga pindala on $18,4 \text{ dm}^2$. Arvuta suurema kolmnurga pindala.

473. Kolmnurga alus on 5 dm ja sellele joonestatud kõrgus 3,5 dm. Antud alusele vastav külge eelmise kolmnurgaga sarnases kolmnurgas on 3 dm. Arvuta kolmnurkade pindalad.
474. Kahe sarnase kolmnurga pindalade vahe on 60 cm^2 ja nende kolmnurkade sarnasustegur on 1,5. Arvuta nende kolmnurkade pindalad.
475. Kolmnurga küljed on 5,4 m, 7,2 m ja 8,6 m. Kui suured on selle kolmnurgaga sarnase 6,25 korda suurema pindalaga kolmnurga küljed?
476. Kahe sarnase kolmnurga pindalad suhtuvad nagu 9:25. Väiksema kolmnurga ümbermõõt on 0,48 km. Arvuta suurema kolmnurga ümbermõõt.

Üldistame nüüd eelmise teoreemi, tõestades, et

kui hulknurka suurendada k korda, siis tema pindala suureneb k^2 korda.

Eeldus. Hulknurk $A_1B_1C_1D_1$ on hulknurga $ABCD$ k -kordne suurenendus (joon. 111).

Väide. $S_1 = k^2S$, kus S_1 on hulknurga $A_1B_1C_1D_1$ pindala ja S on hulknurga $ABCD$ pindala.

Tõestus. Kasutame hulknurga $ABCD$ suurendamiseks tema sees asetsevat sarnasuskeskpunkti O (joon. 111). Siis kiired OA , OB , ..., OD jaotavad hulknurgad paarikaupa sarnasteks kolmnurkadeks, mille sarnasustegur on k . Tähistades esimese hulknurga jaotamisel saadud kolmnurkade pindalad tähtedega P , Q , ..., T ja teiste hulknurga jaotamisel saadud kolmnurkade pindalad vastavalt P_1 , Q_1 , ..., T_1 , saame eelmise teoreemi põhjal:

$$P_1 = k^2P, \quad Q_1 = k^2Q, \quad \dots, \quad T_1 = k^2T.$$

Avaldades suurendatud hulknurga pindala, saame

$$S_1 = P_1 + Q_1 + \dots + T_1 = k^2P + k^2Q + \dots + k^2T = k^2(P + Q + \dots + T).$$

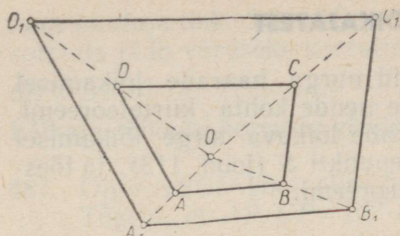
Et sulgudesse jäänud avaldis on hulknurga $ABCD$ pindala S , siis

$$S_1 = k^2S,$$

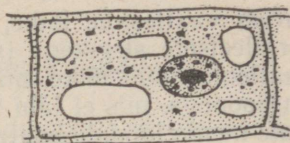
mida oligi tarvis tõestada.

Lugedes ilma tõestuseta õigeks, et iga kaht sarnast hulknurka saab paigutada niisugusesse asendisse, et üks on teise k -kordne suurenendus, saame tõestatud teoreemist järgmise järelduse:

kahe sarnase hulknurga pindalade suhe võrdub vastavate külgede suhte ruuduga.



Joon. 111



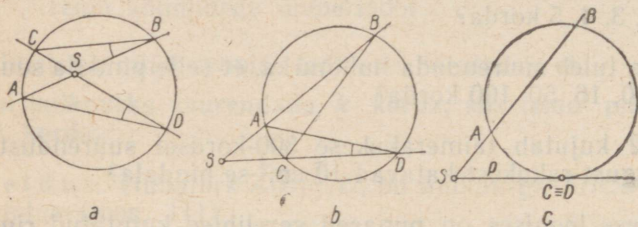
Joon. 112

477. Mitu korda suureneb hulknurga pindala, kui hulknurka suurendada 2, 3, 4, 5 korda?
478. Mitu korda tuleb suurendada hulknurka, et selle pindala suureneks 4, 10, 16, 50, 100 korda?
479. Joonis 112 kujutab taimerakukese 300-kordset suurendust. Mitu niisugust rakukest katavad 10 cm^2 -se pindala?
480. Veretilgakese joonises on punased verelible kujutatud ringikestena, mille läbimõõt on 4 mm. Leia punaste vereliblede läbimõõt, kui joonise suurendus on 500.
481. Kahe sarnase ristküliku pindalade suhe on 13,69. Väiksema ristküliku mõõtmed on 2,9 cm ja 5,5 cm. Arvuta suurema ristküliku mõõtmed.
482. Kahe sarnase hulknurga pindalad on 180 cm^2 ja 80 cm^2 . Arvuta suurema hulknurga übermõõt, kui väiksema hulknurga übermõõt on 48 cm.
483. Kahe ruudu pindalade vahe on 1 m^2 ja pindalade suhe on 2. Kui pikad on nende ruutude küljed?
484. Plaanil on kujutatud hulknurgakujuline maatükk mõõdus 1 : 1000. Mitu korda on maatüki tõeline pindala suurem selle maatüki plaani pindalast? Kui suur on see tõeline pindala, kui maatüki pindala plaanil on 158 cm^2 ?
485. Ühe risttahuka mõõtmed on 4 korda suuremad teise risttahuka vastavatest mõõtmetest. Mitu korda on esimese risttahuka pindala suurem teise risttahuka pindalast?
486. Kaks nisupõldu on sarnased nelinurgad, mille sarnasustegur on 2,5. Mitu korda saab ühelt põllult vilja rohkem kui teiselt (eeldades, et keskmine saak hektarilt on põldudel üks ja seesama)?

5.9. TEOREEM RINGJOONE LÕIKAJATEST

Varem vaatlesime lõike, mis tekkisid nurga haarade lõikamisel paralleelsete sirgetega ja tõestasime nende kohta kiirteteoreemi. Vaatleme nüüd lõike, mis tekivad kahe lõikuva sirge lõikamisel ringjoonega, mis ei läbi sirgete lõikepunkti S (joon. 113), ja tõestame nende lõikude kohta järgmise teoreemi:

ringjoone lõikajate lõigud lõikajate ühise punkti ja ringjoone vahel on pöördvõrdelised, s. t. ühe lõikaja lõikude korrutis on võrdne teise lõikaja lõikude korrutisega.



Joon. 113

Lõikajate ühine punkt S võib asetseda kas seespool ringjoont (joon. 113, *a*) või väljaspool seda (joon. 113, *b*). Tõestus on kehtiv mõlemal juhtumil.

Olgu ringjoone ja ühe lõikaja ühised punktid A ja B , ringjoone ja teise lõikaja ühised punktid aga C ja D . Tõestada tuleb, et

$$SA \cdot SB = SC \cdot SD.$$

Väite tõestamiseks ühendame punktid A ja D , samuti ka C ja B . Saame kaks sarnast kolmnurka:

$$\triangle SAD \sim \triangle SCB,$$

sest ühe kolmnurga nurgad S ja D on vastavalt võrdsed teise kolmnurga nurkadega S ja B (nurgad D ja B on võrdsed kui ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad). Et vaadeldavad kolmnurgad on sarnased, siis nende vastavate külgede suhted on võrdsed:

$$SA : SC = SD : SB.$$

Võrde põhiomaduse põhjal järeldub sellest, et

$$SA \cdot SB = SC \cdot SD.$$

Kui lõikajate ühine punkt asetseb väljaspool ringjoont ja üht lõikajat, näiteks SD pöörata lõikajate ühise punkti S ümber, kuni sellest lõikajast saab puutuja (joon. 113, *c*), siis lõikaja lõikudest

saab puutuja lõik $SC=SD=p$. Et sellel pööramisel lõikaja lõikude korrutis jääb võrdseks korrutisega $SA \cdot SB$, siis

$$SA \cdot SB = p^2.$$

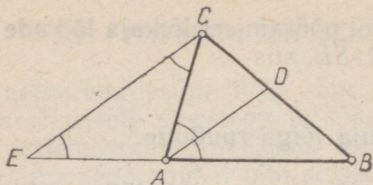
Lõikaja lõikude korrutis võrdub puutuja lõigu ruuduga.

487. Olgu $ABCD$ kõõlnelinurk ja P selle diagonaalide lõikepunkt. Tõesta, et $AP \cdot CP = BP \cdot DP$.
488. Kahest lõikuvast kõõlust ühe pikkus on 28 cm ja teine on kõõlude ühise punkti poolt jaotatud lõikudeks pikkusega 12 cm ja 15 cm. Kui pikkadeks lõikudeks on jaotunud esimene kõõl?
489. Kahest lõikuvast kõõlust ühe pikkus on 32 cm ja teine on kõõlude ühise punktiga jaotatud lõikudeks pikkusega 12 cm ja 16 cm. Kui pikkadeks lõikudeks on jaotunud esimene kõõl?
490. Diameeter lõikub kõõluga 8 cm kaugusel ringjoone keskpunktist ja jaotab kõõlu lõikudeks pikkusega 4 cm ja 9 cm. Kui pikk on ringjoone raadius?
491. Diameeter, mille pikkus on 12 m, jaotab kõõlu lõikudeks, mille pikkused on 2 m ja 8 m. Kui kaugel on kõõlu ja diameetri lõikepunkt ringjoone keskpunktist?
492. Väljaspool ringjoont olevast punktist on ringjoonele tõmmatud keskpunkti läbiv lõikaja ja puutuja. Ringjoone raadius on 2,5 cm ja puutuja lõik 6 cm. Arvuta lõikaja lõikude pikkused.
493. Väljaspool ringjoont olevast punktist, mille kaugus ringjoone lähimast punktist on 6 cm, on tõmmatud ringjoone lõikaja, mille lõigud on 9 cm ja 16 cm. Kui pikk on ringjoone raadius?
494. Kui ringi diameetrit pikendada 4 cm võrra, siis selle pikenduse otspunktist joonestatud puutuja lõik osutub võrdseks diameetriga. Kui pikk on diameeter?

5.10. TEOREEM KOLMNURGA SISENURGA POOLITAJAST

Kolmnurga sisenurga poolitaja lõikab nurga vastaskülge.
Tõestame, et

kolmnurga sisenurga poolitaja jaotab nurga vastaskülje lõikudeks, mis on võrdelised nurga lähiskülgedega.



Joon. 114

Eeldus. AD on kolmnurga ABC nurga A poolitaja (joon. 114).

Väide. $BD : BA = CD : CA$.

Tõestus. Joonestame läbi punkti C nurgapoolitajale AD paralleeli ja leiame punkti E , kus see paralleel lõikab külje BA pikendust. Nüüd on nurga B haarad lõigatud kahe paralleeliga AD ja EC . Kiirteteoreemi põhjal on haaradel tekkinud võrdelised lõigud

$$BD : BA = CD : EA.$$

Saadud võrre erineb väites esinevast ainult ühe liikme poolest. Tuleb näidata, et need liikmed EA ja CA on võrdsed.

Selleks paneme tähele, et

$$\angle E = \angle BAD$$

kui kaasnurgad paralleelide EC ja AD lõikaja EA juures;

$$\angle ACE = \angle CAD$$

kui põiknurgad samade paralleelide lõikaja AC juures. Saadud võrduste paremad pooled on võrdsed kui nurga A poolitamisel saadud nurgad. Seega on võrdsed ka nende võrduste vasakud pooled:

$$\angle E = \angle ACE.$$

Nende nurkade vastas on kolmnurgas EAC ka võrdsed küljed

$$CA = EA.$$

Sellelega on väide tõestatud.

Näide. Kolmnurga küljed on 8 ühikut, 12 ühikut ja 14 ühikut. Leiame lõigud, milleks suurima nurga poolitaja jaotab oma vastaskülje, s. o. külje, mille pikkus on 14 ühikut. Olgu külje üks osa x ühikut, teine osa on seega $14 - x$ ühikut.

Tõestatud teoreemi põhjal

$$\frac{x}{8} = \frac{14 - x}{12}.$$

Saadud võrrandi lahendamisel saame, et $x = 5,6$. Külje lõigud on seega 5,6 ühikut ja 8,4 ühikut.

495. Kolmnurga nurgapoolitaja jaotab vastaskülje lõikudeks, mille pikkused on 3 cm ja 5 cm. Kui pikad on kolmnurga teised küljed, kui üks neist on teisest 6 cm võrra pikem?

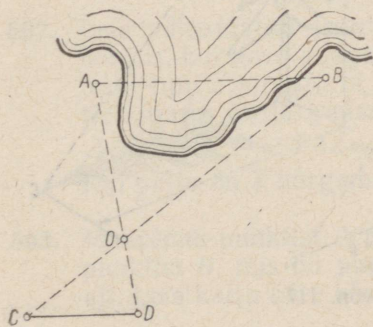
496. Võrdhaarse kolmnurga alusnurga poolitaja jaotab haara lõikudeks pikkusega 5 cm ja 4 cm. Arvuta kolmnurga ümbermõõt. (Ülesandel on kaks lahendit.)
497. Tõesta, et kolmnurga sisenurga poolitaja jaotab kolmnurga osadeks, mille pindalad suhtuvad nagu nurga lähisküljed.
498. Kolmnurga kaks külge on 6 cm ja 9 cm. Nende külgede vahelise nurga poolitaja jaotab nurga vastaskülje lõikudeks, millest üks on teisest 2 cm võrra pikem. Kui pikk on kolmnurga kolmas külge?
499. Kui kolmnurga külgede mõõtardvud on kolm järjestikust täisarvu, siis nurgapoolitaja jaotab keskmise pikkusega külje lõikudeks, mille pikkus on pool nurga lähiskülgede pikkusest. Tõesta see.

5.11. PIKKUSTE KAUDNE MÕÖTMINE SARNASTE KOLMNURKADE ABIL

Kolmnurkade sarnasuse üheks rakendusala on kauguste ja kõrguste kaudne mõõtmine.

Punktid, millevahelist kaugust mõõdetakse, võivad olla ligipääsetavad või üks neist on ligipääsmatu või koguni mõlemad on ligipääsmatud. Vaatleme iga nimetatud juhtumit eraldi.

1. Olgu A ja B kaks ligipääsetavat punkti, millevahelise kauguse otsene mõõtmine on võimatu (joon. 115). Need punktid võivad näiteks olla järve kaldal. Valime kaldast veidi eemal punkti O nii, et sellest saab mõõta kaugusi punktideni A ja B . Olles mõõtnud lõigud AO ja BO , pikendame neid üle punkti O nii, et AO pikendus $OD=AO : n$ ja BO pikendus $OC=BO : n$, kus n on üks ja seesama vabalt võetud täisarv. Mõõtes nüüd punktide C ja D vahelise kauguse ja korrutades tulemuse arvuga n , saamegi otsitava pikkuse



Joon. 115

AB. Tõepoolest, kolmnurkade sarnasuse I tunnuse järgi $\triangle AOB \sim \triangle DOC$ (põhjenda seda!), millest järeldub, et

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{OD}.$$

Et $AO : OD = n$, siis ka $AB : CD = n$, millest järeldubki, et $AB = n \cdot CD$.

2. Vaatleme kauguse mõõtmist kahe punkti vahel juhtumil, kui üks neist punktidest on ligipääsmatu (joon. 116). Tähistagu punkt A saarel olevat tuletorni, mille kaugust tahetakse mõõta merekaldal olevast punktist B .

Selleks märgime maapinnal lõigu AB ristsirge ning valime sellel punkti O ja punkti B_1 nii, et lõik OB_1 on täisarv n korda väiksem lõigust OB . Lõigaku punktist B_1 tõmmatud sirge BB_1 ristsirge sirget AO punktis A_1 . Mõõdame kauguse punktide A_1 ja B_1 vahel. Selle kauguse n -kordne ongi punktide A ja B vaheline kaugus.

Põhjenda seda väidet kolmnurkade sarnasuse abil!

Ka kõrguse mõõtmisel on sageli üks punkt ligipääsmatu. Vaatleme näitena puu kõrguse kaudset mõõtmist tema varju abil (joon. 117): kui puu kõrgus on x m, puu varju pikkus tasasel maapinnal v m, kepi pikkus a m ja kepi varju pikkus b m, siis sarnastest kolmnurkadest ABC ja $A_1B_1C_1$ saame, et

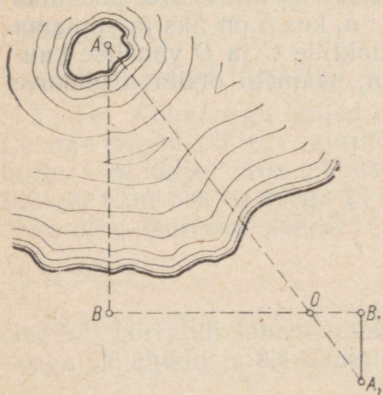
$$x : a = v : b,$$

millest

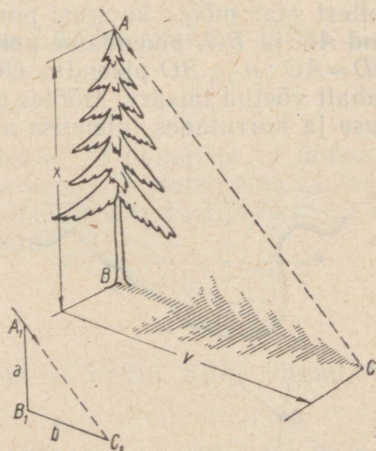
$$x = \frac{av}{b}.$$

Miks kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ on sarnased?

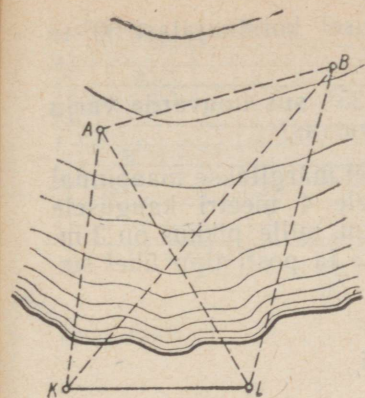
3. Sarnaste kolmnurkade abil on võimalik mõõta kaugusi ja kõrgusi ka sel juhtumil, kui mõlemad punktid on ligipääsmatud. Näi-



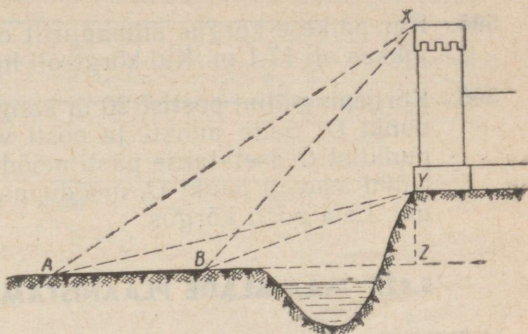
Joon. 116



Joon. 117



Joon. 118



Joon. 119

tena vaatleme kahe faeva vahelise kauguse mõõtmist mere kaldal oleva vaatleja poolt.

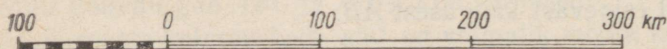
Olgu A ja B kaks ankrus seisvat laeva (joon. 118). Nendevahelise kauguse mõõtmiseks märgime mere kaldal kaks punkti K ja L , millevahelise kauguse mõõdame võimalikult täpselt. Lõiku KL nimetatakse **baasiks**. Baasi otspunktidest on näha punktid A ja B . Mõõdame baasi otspunktide juures olevad nurgad AKL , BKL , ALK ja BLK ning joonestame vähendatud moodsus nelinurga $ABLK$. Kui seejuures moodsuks on $1:n$, siis tõeline kaugus AB on n korda suurem joonisel esinevast kaugusest AB .

500. Telefoniposti varju pikkus on 4,9 m, samal ajal kui 1,7 m pikkuse kepi varju pikkus on 1,4 m. Kui kõrge on telefonipost?
501. Metallraha, mille läbimõõt on 2,5 cm ja mida hoitakse 50 cm kaugusel silmast, varjab parajasti õhupalli, mille läbimõõt on 16 m. Kui kaugel on õhupall vaatlejast?
502. Leia vähendatud joonise abil joonisel 119 kujutatud torni kõrgus, kui torni suunas mineva baasi AB pikkus on 60 m ja torni tippu X ning torni jalami Y kõrgusnurgad baasi otspunktide juures on järgmised:
 $\angle XAZ = 32^\circ$; $\angle YAZ = 10^\circ$; $\angle XBZ = 57^\circ$; $\angle YBZ = 23^\circ$.
 Kui palju on Y kõrgemal rõhtsirgest AB ?
503. Maapinna punktist A paistab kalju äär 45° -se nurga all, aga punktist B , mis on punktist A 50 m kalju pool, 60° -se nurga all. Leia kalju ääre kõrgus kalju jalamilt.

504. Vabrikukorsten paistab 100 m kaugusel korstnjalast 30°-se nurga all. Kui kõrge on korsten?
505. Kui päikese kõrgus silmapiirilt oli 35°, siis lipuvarda varju pikkus oli 17,1 m. Kui kõrge oli lipuvarras?
506. Kõrgepingeliini postist 20 m kaugusel märgitakse maapinnal punkt O . Selle punkti ja posti vahele 4 meetri kaugusele punktist O asetatakse püsti mõõdupuu, mille pikkus on 3 m. Nüüd asuvad punkt O , mõõdupuu ots ja posti tipp ühel sirgel. Leia posti kõrgus.

5.12. MAA-ALADE PLAANISTAMINE

Hulknurkade sarnasuse rakendusallaks on ka maa-alade plaanistamine. Suuremate maa-alade (näiteks maailmajao) kaardistamisel tuleb arvestada maapinna kui kerapinna kumerust, kuid väiksemaid maa-alasid võib suurema veata vaadelda kui tasapinnalisi kujundeid. Maa-ala plaanistada tähendab sel juhtumil maatükiga sarnase vähendatud kujundi joonestamist. Plaani sarnasustegurit kujutatava maatüki suhtes nimetatakse plaani (kaardi) **arv-mõõduks** ja kirjutatakse tavaliselt kujul $1 : n$ ehk $\frac{1}{n}$, kus n on täisarv, mis näitab, mitu korda pikkused plaani (kaardi) valmistamisel on vähendatud. Tavaliselt on plaani mõõt $1 : 10\,000$ või suurem sellest, kaardil aga $1 : 10\,000$ või väiksem sellest.



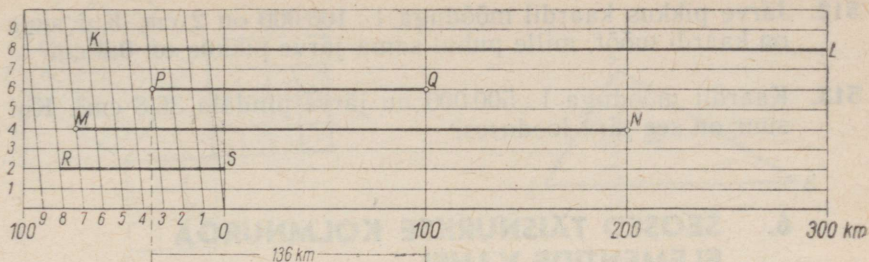
Joon. 120

Peale arv-mõõdu on plaan või kaart harilikult varustatud veel **joonmõõduga**. Joonis 120 kujutab joonmõõtu, mille vastav arv-mõõt on $1 : 5\,000\,000$. Kaardi joonmõõd näitab vastavust kaardilt võetud pikkuse ja vastava loodusliku pikkuse vahel. Kaardilt võetud pikkuse täpsemaks määramiseks joonmõõdu abil varustatakse see mõnikord **põikmõõtkavaga** (joon. 121). Viimane koosneb mitmest kõrvuti asetsevast ruudust, mis on läbi lõigatud üheksa võrdsele kaugusele asetseva paralleeliga. Peale selle on esimene ruut läbi lõigatud kümne kaldlõiguga, millest igaüks lõikab varem nimetatud paralleele 1, 2, ..., 9 punktides, millest iga järgnev on eelnevast 0,01 ruudu külje pikkusest vasakul. Seega näiteks kaldlõigu 3 ja paralleelide

1, 2, 3, ..., 9

lõikepunktid on ruudu paremast küljest kaugusel, mis moodustavad ruudu küljest vastavalt

0,31, 0,32, 0,33, ..., 0,39.



Joon. 121

Et antud joonmõõdu puhul ruudu külge kujutab pikkust 100 km, siis näiteks lõik PQ kujutab pikkust 136 km.

Paigutades kaardilt sirkli abil võetud lõigu põikmõõtkava sobivale paralleelile, saame leida mõõdetava pikkuse kolme tüvenumbri.

507. Määra pikkused, mida kujutavad lõigud KL , MN ja RS joonisel 121.

Tuntakse mitmeid plaanistamisvõtteid. Järgnevalt on toodud mõned näited neist mõõtmistest, mis võimaldavad plaani joonestamist.

1. Käies ümber plaanistatava maa-ala, mõõdetakse selle kui hulknurga küljed ja nurgad.
2. Asutakse plaanistatava maatüki sisse niisugusesse punkti, millest on näha maatüki kui hulknurga kõik tipud ja saab mõõta kaugust igasse tippu. On selline punkt leitud, siis mõõdetakse need kaugused ja maatüki tippudesse minevate sirgete vahelised nurgad.
3. Tähistatakse maatüki üks diagonaal ja ülejäänud tippudest sellele diagonaalile ehitatud ristlõigud ning mõõdetakse need ristlõigud ja diagonaali lõigud ristlõikude vahel (joon. 14).

508. Kaardil mõõduga $1 : 100\,000$ on järve pikkus 48 mm. Kui pikk on see järv looduses?

509. Kaardil mõõduga $1 : 1\,500\,000$ on kahe linna vahe 43 mm. Kui suur on nende linnade vahemaa looduses?

510. Kaarti, mille mõõt oli $1 : 100\,000$, suurendati 4 korda. Kui suur on uue kaardi mõõt?

511. Musta mere pikkus kaardil mõõduga $1 : 18\,000\,000$ on 6,7 cm. Kui pikk on sama meri kaardil mõõduga $1 : 3\,000\,000$?

512. Järve pikkus kaardil mõõduga 1 : 100 000 on 2 cm. Kui suur on kaardi mõõt, mille puhul sama järve pikkus on 0,8 cm?
513. Kaardil mõõduga 1 : 500 000 on järve pindala 36,8 cm². Kui suur on see järv looduses?

6. SEOSD TÄISNURKSE KOLMNURGA ELEMENTIDE VAHEL

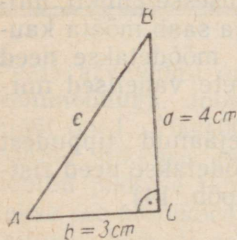
6.1. PYTHAGORASE TEOREEM

Olgu antud täisnurkse kolmnurga kaks külge, näiteks kaatetid $a = 4$ cm ja $b = 3$ cm. Joonestades nende andmete põhjal täisnurkse kolmnurga ja mõõtes jooniselt hüpotenuusi c , saame $c = 5$ cm (joon. 122). Niisamuti leiame jooniselt, et kolmnurga nurk $A = 53^\circ$ ja $B = 37^\circ$.

Täisnurkse kolmnurga tundmatuid elemente saab leida antud elementide põhjal ka arvutamise teel. Selleks on vaja tunda seoseid kolmnurga elementide vahel.

Täisnurkse kolmnurga kahe külje põhjal kolmanda külje arvutamist võimaldab Pythagorase¹ teoreem:

täisnurkse kolmnurga kaatetite ruutude summa võrdub hüpotenuusi ruuduga.



Joon. 122

Selles lauses «kaateti ruut» ja «hüpotenuusi ruut» tähendavad vastavalt «kaateti pikkuse ruut» ja «hüpotenuusi pikkuse ruut» aga ka «kaatetile ehitatud ruudu pindala» ja «hüpotenuusile ehitatud ruudu pindala».

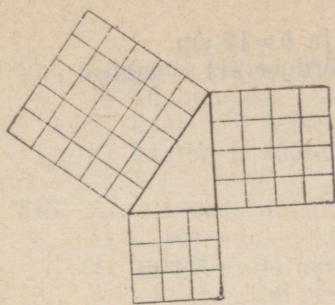
Kontrollime selle teoreemi õigsust esmalt eespool antud kolmnurga juures:

kaatetite ruutude summa: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$,

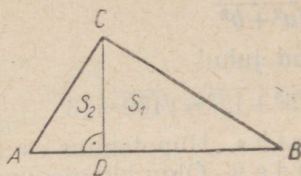
hüpotenuusi ruut: $5^2 = 25$,

seega väide on õige (joon. 123).

¹ Pythagoras, kreeka matemaatik, elas u. a. 580—500 e. m. a.



Joon. 123



Joon. 124

Tõestame, et see väide on alati õige. Selleks eeldame, et antud pikusühiku korral täisnurkse kolmnurga kaatetite mõõtarmud on a ja b ning hüpotenuusi mõõtarm on c . Kolmnurga külgedele ehitatud ruutude pindalad on siis a^2 , b^2 ja c^2 pindalaühikut. Tõestada tuleb, et

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Tõestuseks joonestame täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusile AB kõrguse $CD \perp AB$ (joon. 124). Saadud täisnurksed kolmnurgad ACD ja CBD on sarnased antud kolmnurgaga ABC , sest kummagi kolmnurga üks teravnurk on antud kolmnurga üheks teravnurgaks. Kolmnurkade sarnasuse tõttu suhtuvad nende pindalad nagu vastavate külgede ruudud. Võtame nendeks külgedeks kolmnurkade hüpotenuusid. Märgime kolmnurga ABC pindala tähega S , kolmnurga CBD pindala tähega S_1 ja kolmnurga ACD pindala tähega S_2 .

Seega saame:

$$\triangle CBD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_1}{S} = \frac{a^2}{c^2};$$

$$\triangle ACD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_2}{S} = \frac{b^2}{c^2}.$$

Liidame saadud võrduste vastavad pooled:

$$\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

Et $S_1 + S_2 = S$, siis viimase võrduse vasak pool on 1.

Kuid siis on 1 ka selle võrduse parem pool, s. t.

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (1)$$

Sellega on väide tõestatud.

Näide 1. Olgu antud kaatedid $a=5$ cm ja $b=12$ cm.
 Hüpotenuusi c arvutamiseks lahendame võrduse (1) c suhtes:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Antud juhul

$$c = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Vastus. Hüpotenuus $c=13$ cm.

Näide 2. Olgu hüpotenuus $c=7,3$ m ja kaatet $a=5,4$ m.

Avaldame võrdusest (1) kaateti b :

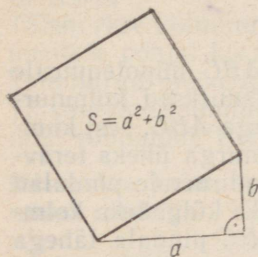
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Asendades c ja a antud väärtustega ning kasutades ruutude tabelit või lükatit, saame:

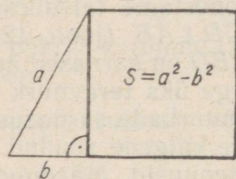
$$b = \sqrt{7,3^2 - 5,4^2} = \sqrt{53,3 - 29,2} = \sqrt{24,1}.$$

Ruutjuurte tabelist või lükatilt saame nüüd, et külje b pikkus meetrites on

$$b = 4,91 \approx 4,9.$$



Joon. 125



Joon. 126

Pythagorase teoreemi kasutatakse sageli ka konstruktsioonülesannete lahendamisel. Näiteks saame Pythagorase teoreemi põhjal ehitada ruudu, mille pindala võrdub kahe antud ruudu pindalade summaga või pindalade vahega. Nimetatud ülesannete lahendamiseks joonestame esimesel juhul täisnurkse kolmnurga, mille kaatetiteks on antud ruutude küljed a ja b (joon. 125), teisel juhul täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuusiks on suurema ruudu külge a ja üheks kaatetiks väiksema ruudu külge b (joon. 126). Joonestatud kolmnurga kolmandale küljele ehitatud ruut ongi siis otsitav.

Kui eelmiste konstruktsioonülesannete lahendamisel antud ruutude küljed on a ja b , siis lahendamisel saadud ruutude külgede pikkused on $\sqrt{a^2 + b^2}$ ja $\sqrt{a^2 - b^2}$, kus $a > b$. Seetõttu sõnastatakse need konstruktsioonülesanded ka järgmiselt:

- 1) joonestada lõik $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, kui a ja b on antud lõigud;
- 2) joonestada lõik $y = \sqrt{a^2 - b^2}$, kui a ja b on antud lõigud ja $a > b$.

514. Lahenda valem $a^2 + b^2 = c^2$
- 1) hüpoteenuusi c suhtes,
 - 2) kaateti a suhtes,
 - 3) kaateti b suhtes.
515. Arvuta peast täisnurkse kolmnurga
- 1) hüpoteenus c , kui $a=3$ ja $b=4$,
 - 2) kaatet a , kui $c=10$ ja $b=6$,
 - 3) kaatet b , kui $c=13$ ja $a=12$.
516. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a=2,8$ cm ja kaatet $b=4,5$ cm. Kui pikk on hüpoteenus c ?
517. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a=0,39$ m ja hüpoteenus $c=0,89$ m. Kui pikk on kaatet b ?
518. Võrdhaarse kolmnurga alus on 8,6 cm ja kõrgus 7,2 cm. Arvuta kolmnurga haara pikkus.
519. Võrdhaarse kolmnurga haar on 1 m ja alus 1,6 m. Leia kõrgus.
520. Võrdhaarse kolmnurga haar on 14 cm ja kõrgus 10 cm. Kui pikk on kolmnurga alus?
521. Võrdkülgse kolmnurga külg on 10 cm. Leia kõrgus.
522. Võrdkülgse kolmnurga kõrgus on 6 cm. Kui pikk on kolmnurga külg?
523. Avalda
- 1) võrdkülgse kolmnurga kõrgus h külje a kaudu;
 - 2) võrdkülgse kolmnurga külg a kõrguse h kaudu.
524. Arvuta võrdkülgse kolmnurga pindala, kui kolmnurga külje pikkus on 8 cm.
525. Avalda võrdkülgse kolmnurga pindala S külje a funktsioonina.
526. Võrdhaarse kolmnurga alus on 90 mm ja übermõõt on 196 mm. Arvuta kolmnurga pindala.
527. Võrdhaarse kolmnurga haar on 68 mm ja übermõõt 256 mm. Arvuta kolmnurga pindala.
528. Võrdhaarse kolmnurga haar on 8,4 cm ja alus on pool haarast. Arvuta kolmnurga pindala.

529. Võrdhaarse kolmnurga alus a on pool haarast. Avalda kolmnurga pindala S aluse a funktsioonina.
530. Ristkülikukujulise maatüki üks külg on 70 m ja diagonaal on 74 m. Mitu aari on maatüki pindala?
531. Jalgteel läbi pargi lõikab sellest ära täisnurkse kolmnurga kujulise tüki, mille kaks lühemat külge on 68 m ja 117 m. Kui palju on jalgteel lühem teest ümber pargi nurga?
532. Ruudu külje pikkus on 15 cm. Kui pikk on diagonaal?
533. Ruudu diagonaali pikkus on 2,4 m. Kui pikk on külg?
534. Ruudu diagonaali pikkus on 15 cm. Arvuta ruudu pindala.
535. Avalda ruudu diagonaal d külje a funktsioonina.
536. Avalda ruudu pindala S diagonaali d funktsioonina.
537. Ristküliku alus on 10 pikkusühikut. Avalda ristküliku diagonaal d ristküliku kõrguse x funktsioonina.
538. Võttes ühikuks lõigu pikkusega 1 cm, leia konstruktsiooni teel lõik pikkusega

$$x = \sqrt{5^2 + 4^2}, \quad y = \sqrt{4,7^2 + 6,5^2}, \quad z = \sqrt{3,5^2 + 6,8^2}.$$
539. Võttes ühikuks lõigu pikkusega 1 cm, leia konstruktsiooni teel lõik pikkusega

$$x = \sqrt{6^2 - 5^2}, \quad y = \sqrt{8,5^2 - 5,2^2}, \quad z = \sqrt{7,4^2 - 3,4^2}.$$
540. Joonisel on antud ristkülik mõõtmetega a ja b . Kuidas sellelt jooniselt saada ilma mõõtmiseta lõik pikkusega $\sqrt{a^2 + b^2}$?
541. Joonisel on antud võrdhaarne kolmnurk, mille haar on b ja alus on $2a$. Kuidas sellelt jooniselt saada ilma mõõtmiseta lõik pikkusega $\sqrt{b^2 - a^2}$?
542. Rombi üks diagonaal on $4x$ ühikut ja teine $6x$ ühikut. Avalda rombi külge a ja pindala S muutuja x kaudu.
543. Täisnurkse trapetsi alused on 24 m ja 14 m, kõrgus on 17 m. Arvuta trapetsi ümbermõõt.
544. Võrdhaarse trapetsi alused on 8 cm ja 5,2 cm, kõrgus 4,8 cm. Kui suur on trapetsi ümbermõõt?

545. Võrdhaarse trapetsi alused on 1,80 ja 1,30 m, haar 0,78 m. Arvuta trapetsi pindala.
546. Ringi raadius on 78 cm. Kui kaugel ringi keskpunktist asetseb kõõl, mille pikkus on 60 cm?
547. Kõõl, mille pikkus on 7 cm, asetseb ringi keskpunktist 8,4 cm kaugusel. Kui pikk on ringi raadius?
548. Korrapärase kuusnurga külg on 7,4 cm. Arvuta kuusnurga apoteem ja pindala.
549. Korrapärase kuusnurga apoteem on 4 cm. Arvuta kuusnurga külg ja pindala.

6.2. PYTHAGORASE TEOREEMI PÕÖRDTEOREEM

Pythagorase teoreem kehtib iga täisnurkse kolmnurga puhul. Seetõttu väljendab ta üht tarvilikku tingimust selleks, et kolmnurk oleks täisnurkne. Näitame, et see tingimus on ka piisav, s. t.

kui kolmnurga kahe lühema külje ruutude summa võrdub kolmanda külje ruuduga, siis kolmnurk on täisnurkne.

Eeldus. Kolmnurgas külgedega a , b ja c , kus $a < c$ ja $b < c$, on $a^2 + b^2 = c^2$.

Väide. Kolmnurk külgedega a , b ja c on täisnurkne.

Tõestus. Eelduse põhjal antud kolmnurga kolmas külg $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Võrdleme seda kolmnurka täisnurkse kolmnurgaga, mille kaatedid on a ja b . Pythagorase teoreemi põhjal viimase kolmnurga hüpotenuusi pikkus on $\sqrt{a^2 + b^2}$, tähendab, võrdub esimese kolmnurga kolmanda külje pikkusega. Kuid siis need kaks kolmnurka on võrdsed, sest ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega. Et teine neist kolmnurkadest on täisnurkne, siis on ka esimene täisnurkne, mida oligi vaja tõestada.

Niisiis, seos $a^2 + b^2 = c^2$ väljendab tarvilikku ja piisavat tingimust selleks, et kolmnurk külgedega a , b ja c oleks täisnurkne.

Näide 1. Kolmnurk külgedega 8, 15 ja 17 ühikut on täisnurkne, sest

$$8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$$

ja ka

$$17^2 = 289.$$

Näide 2. Kolmnurk külgedega 4, 5 ja 6 ühikut ei ole täisnurkne; sest

$$4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41, \text{ kuid } 6^2 \neq 41.$$

550. Kolmnurga kaks lühemat külge on 16 cm ja 30 cm. Kui pikk peab olema kolmas külge, et kolmnurk oleks täisnurkne?

551. Kolmnurga kaks pikemat külge on 56 m ja 65 m. Kui pikk peab olema kolmas külge, et kolmnurk oleks täisnurkne.

552. Leia kaks täisnurkset kolmnurka, mille üks külge on 8 cm ja teine külge 15 cm.

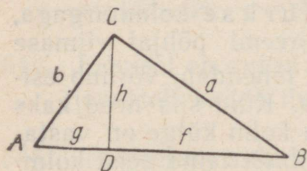
553. Kolmnurga külgede mõõtarvud on:

- | | |
|-------------------|--------------------|
| 1) 10, 26 ja 24; | 4) 8,9, 3,9 ja 8; |
| 2) 2, 2,1 ja 2,9; | 5) 110, 96 ja 146. |
| 3) 65, 35 ja 50; | |

Missugused neist kolmnurkadest on täisnurksed?

6.3. EUKLEIDESE TEOREEM

Täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusile $AB=c$ joonestatud kõrgus $CD=h$ jaotab hüpotenuusi kaheks lõiguks $BD=f$ ja $AD=g$ (joon. 127). Neid lõike nimetatakse kaatetite **projektsioonideks** hüpotenuusil: lõik f on kaateti a projektsioon ja lõik g on kaateti b projektsioon.



Joon. 127

Üldiselt, punkti projektsiooniks sirgel nimetatakse punktist sirgele tõmmatud ristlõigu aluspunkti ja lõigu projektsiooniks kujundit, mille moodustavad lõigu kõikide punktide projektsioonid sirgel. Nii on punkti C projektsiooniks hüpotenuusil punkt D (joon. 127), kuna punkti A projektsiooniks on see punkt ise.

Tõestame, et kaatetit, tema projektsiooni ja hüpotenuusi seob järgmine nn. Eukleidese¹ teoreem:

¹ Eukleides, kreeka matemaatik, elas u. a. 315—255 e. m. a., andis esimesena geomeetria süstemaatilise ülesehituse.

täisnurkse kolmnurga kaateti ruut võrdub selle kaateti projekt-
siooni ja hüpotenuusi korrutisega.

Tõestuseks kasutame seda tuntud tõsiasja, et kõrgus CD jaotab
täisnurkse kolmnurga ABC kaheks kolmnurgaks, mis on sarnased
antud kolmnurgaga:

$$\triangle CBD \sim \triangle ABC \text{ ja } \triangle ACD \sim \triangle ABC.$$

Et sarnaste kolmnurkade küljed on võrdelised, siis

$$\frac{CB}{AB} = \frac{BD}{BC} \text{ ja } \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}.$$

Märkides nende võrrete liikmeid üheainsa tähega ja rakendades
võrde põhiomadust, saame:

$$\frac{a}{c} = \frac{f}{a} \text{ ja } \frac{b}{c} = \frac{g}{b}.$$

ehk

$$a^2 = cf \text{ ja } b^2 = cg, \text{ m. o. t. t.}$$

Lahendame saadud seosed vastavalt kaatetite a ja b suhtes:

$$a = \sqrt{cf} \text{ ja } b = \sqrt{cg}.$$

Kummagi võrduse paremaks pooleks on ruutjuur kahe arvu korrutisest. Et ruutjuurt kahe arvu korrutisest nimetatakse nende arvude **geomeetriliseks keskmiseks**, siis saame sõnastada Eukleidese teoreemi ka nii:

täisnurkse kolmnurga kaatet on oma projektiooni ja hüpotenuusi geomeetriline keskmine.

Eukleidese teoreem seob kolme suurust: kaatetit, selle projekt-
siooni ja hüpotenuusi. Kui neist kaks on antud, siis kolmanda
saame arvutada.

Näiteid.

1. Kui $c=12$ ja $f=3$, siis valemi $a^2=cf$ järgi $a^2=12 \cdot 3=36$ ja $a = \sqrt{36}=6$.
2. Kui $b=8$ ja $c=12$, siis valemi $b^2=cg$ põhjal $g=b^2 : c=8^2 : 12 = 64 : 12 = 5 \frac{1}{3}$.
3. Kui $a=6$ ja $f=3$, siis valemi $a^2=cf$ põhjal $c=a^2 : f=6^2 : 3 = 36 : 3 = 12$.

554. Leia peast järgmiste arvude geomeetriline keskmine: 4 ja 9;
16 ja 4; 25 ja 16; 0,5 ja 8; 0,9 ja 0,4.

555. Leia ruutjuurte tabeli abil järgmiste arvude geomeetriline keskmine: 12 ja 25; 27 ja 38; 2,4 ja 8,5; 0,14 ja 0,3; 0,52 ja 1,2.
556. Täisnurkse kolmnurga kaatet $b=16$ m ja hüpotenuus $c=24$ m. Arvuta kaatetite projektsioonid.
557. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a=8$ cm ja hüpotenuus $c=15$ cm. Kui pikad on kaatetite projektsioonid?
558. Täisnurkse kolmnurga kaatetite projektsioonid on 4,8 dm ja 2,6 dm. Kui pikad on kaatetid?
559. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus $c=9,45$ m ja kaateti a projektsioon $f=4,2$ m. Kui pikk on kaatet a ?
560. Täisnurkse kolmnurga kaateti a projektsioon on 32 cm ja kaateti b projektsioon 40 cm. Kui pikad on kaatetid?
561. Arvuta täisnurkse kolmnurga kohta tabelis nõutud suurused.

Harj. nr.	Antud	Leida
1	$a=18; c=30$	$f; g; b$
2	$c=9,2; g=3,5$	$f; a; b$
3	$f=0,15; g=0,09$	$c; a; b$
4	$a=6,5; f=4,4$	$c; g; b$
5	$b=1,0; c=1,5$	$g; f; a$

562. Tõesta Eukleidese teoreemi põhjal Pythagorase teoreem. Näpunaide. Liida Eukleidese teoreemi väljendavate võrduste vastavad pooled.

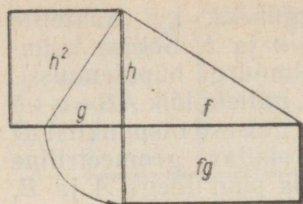
6.4. TEOREEM TÄISNURKSE KOLMNURGA KÕRGUSEST

Tõestame, et

täisnurkse kolmnurga kõrguse ruut on võrdne kaatetite projektsioonide korrutisega (joon. 128).

Tõestuseks avaldame kolmnurgast BCD Pythagorase teoreemi põhjal kõrguse ruudu (joon. 127):

$$h^2 = a^2 - f^2.$$



Joon. 128

Et Eukleidese teoreemi järgi $a^2 = cf$, siis, asendades ja võttes teguri f sulgude ette, saame:

$$h^2 = cf - f^2 = f(c - f).$$

Sulgudes olev tegur võrdub kaateti b projektsiooniga g .

Tähendab

$$h^2 = fg,$$

mis näitab, et väide on õige.

Teoreemi võib sõnastada ka nii: täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrgus on kaatetite projektsioonide geomeetriline keskmine.

563. Missuguseid suurusi ja missugustel andmetel saab arvutada selle valemi põhjal?

564. Arvuta täisnurkse kolmnurga kõrgus, kui kaatetite projektsioonid on järgmised:

- | | |
|--------------------|-----------------------------|
| 1) 4 m ja 9 m; | 2) 3 m ja $8\frac{1}{3}$ m; |
| 3) 12 cm ja 18 cm; | 4) 27 cm ja 48 cm. |

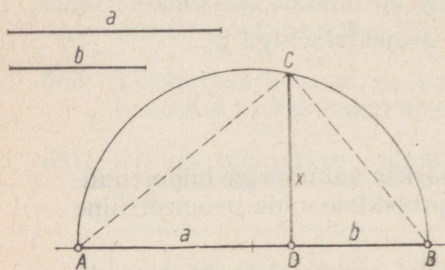
565. Täisnurkse kolmnurga kõrgus on 18 cm ja ühe kaateti projektsioon 13,5 cm. Kui pikk on hüpotenuus?

566. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 15 cm ja hüpotenuus 25 cm. Arvuta hüpotenuusile joonestatud kõrgus.

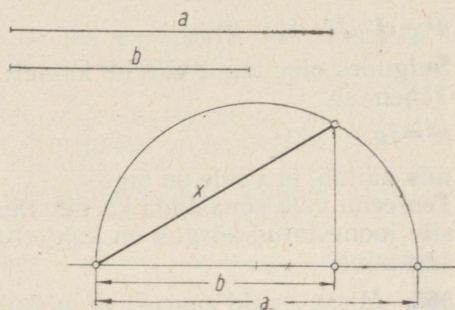
6.5. GEOMEETRISE KESKMISE KONSTRUKTSIOON

Nagu teada, nimetatakse ruutjuurt kahe arvu korrutisest nende arvude geomeetriliseks keskmiseks. Olgu need arvud antud graafiliselt (lõikudena a ja b) ja olgu nõutud leida nende geomeetriline keskmine samuti lõiguna. Ülesande lahendamiseks pole vaja neid lõike mõõta, otsitavat geomeetrilist keskmist arvutada ja tulemust lõiguna kujutada, sest lõikude geomeetrilist keskmist saab konstruktsiooni teel leida otsekohe lõiguna. Selleks paneme tähele, et kui a ja b on antud lõigud, siis $x = \sqrt{ab}$ on täisnurkse

kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrguseks, kui kaatetite projektsioonid on võrdsed antud lõikudega a ja b . Sellise kolmnurga saamiseks joonestame lõigu $a+b$ (kolmnurga hüpotenuusi), poolitame selle ja joonestame poolringjoone, millele lõik $AB=a+b$ on diameetrik (joon. 129). Lõikude a ja b ühisest otspunktist D ringjooneni tõmmatud lõik $DC \perp AB$ ongi otsitav geomeetriline keskmine. Tõepoolest, kui punkt C ühendada punktidega A ja B , siis Thalese teoreemi järgi saame täisnurkse kolmnurga ABC , kusjuures kaatetite projektsioonid on võrdsed antud lõikudega a ja b .

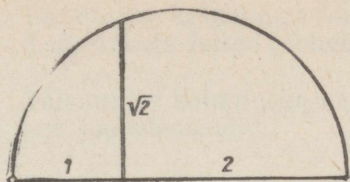


Joon. 129



Joon. 130

567. Leia kahe vabalt võetud lõigu geomeetriline keskmine.
568. Joonis 130 näitab lõikude a ja b geomeetrilise keskmise leidmist Eukleidese teoreemi alusel. Kirjelda konstruktsiooni ja põhjenda väidet, et $x = \sqrt{ab}$.
569. Võta kaks lõiku ja leia nende geomeetriline keskmine kahel viisil. Võrdle tulemusi.
570. Joonesta ristkülik. Konstrueeri selle ristkülikuga pindvõrdne ruut.
571. On antud võrdkülgne kolmnurk, mille külg on a . Konstrueeri kolmnurga kõrguse ja poole külje geomeetriline keskmine. Võrdle kolmnurga pindala saadud lõigule ehitatud ruudu pindalaga.
572. Leia konstruktsiooni teel järgmised ruutjuured:
 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{6}$; 4) $\sqrt{8}$.



Joon. 131

Näpunäide. \sqrt{a} konstrueerimiseks, kus a on antud arv, kirjuta juuritav korrutisena $1 \cdot a$ (või $2 \cdot \frac{a}{2}$ jne.), võta vabalt ühiklõik ja ehita lõikude 1 ja a (2 ja $\frac{2}{a}$) geomeetriline keskmine (joon. 131).

6.6. SEOSSED TÄISNURKSE KOLMNURGA JOONELEMENTIDE VAHEL

Täisnurkse kolmnurga joonelementideks nimetatakse kõiki selles kolmnurgas esinevaid lõike. Oleme vaadelnud kuut elementi: kolmnurga külgi a , b ja c , kaatete projektsioone f ja g ning kõrgust h . Nende elementide vahel kehtivad järgmised seosed:

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= c^2 \\
 a^2 &= cf; \quad b^2 = cg \\
 h^2 &= fg \\
 c &= f + g \\
 ab &= ch \\
 a^2 &= h^2 + f^2; \quad b^2 = h^2 + g^2
 \end{aligned}$$

Kui on antud täisnurkse kolmnurga kaks mingit joonelementi, siis kolmnurk on määratud ja ülejäänud elemente saab arvutada. Selleks tuleb lähtuda seosest, milles esinevad need kaks antud elementi ja ainult üks tundmatu element, arvutada sellest kolmas element, võtta siis mingi teine seos, milles esineb ainult üks tundmatu element, arvutada see, ja niiviisi jätkata tööd, kuni kõik elemendid on leitud.

Näide. Olgu antud, et $a=8$ cm ja $h=5$ cm. Arvutame ülejäänud elemendid b , c , f ja g .

- 1) Pythagorase teoreemi põhjal

$$f^2 = a^2 - h^2$$

ja seega

$$f = \sqrt{a^2 - h^2} = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39} = 6,24.$$

- 2) Eukleidese teoreemi järgi

$$a^2 = fc,$$

seega

$$c = a^2 : f = 64 : 6,24 = 0,160 \cdot 64 = 10,24.$$

- 3) Et $f + g = c$, siis

$$g = c - f = 10,24 - 6,24 = 4,0.$$

- 4) Pythagorase teoreemi järgi

$$b^2 = h^2 + g^2,$$

seega

$$b = \sqrt{h^2 + g^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41} = 6,4.$$

Vastus. $b = 6,4$ cm, $c = 10,2$ cm, $f = 6,2$ cm, $g = 4,0$ cm.

Mõnede andmete puhul ei leidu seost, milles esineks ainult üks tundmatu element. Niisugusel juhtumil tuleb vajalik seos tuletada kahest valemist.

Näide. Olgu antud, et kaatet $b = 8$ cm ja teise kaateti projektsioon $f = 12$ cm. Leiame hüpotenuusi.

Eukleidese teoreemi järgi

$$b^2 = cg.$$

Selles valemis on kaks tundmatut: c ja g . Avaldame g valemist $f + g = c$ ja asetame valemisse $b^2 = cg$:

$$b^2 = c(c - f).$$

Oleme saanud ühe tundmatuga võrrandi:

$$c^2 - fc - b^2 = 0 \Rightarrow c^2 - 12c - 64 = 0 \Rightarrow$$

$$c = 6 \pm \sqrt{36 + 64} = 6 \pm 10 \Rightarrow c = 16 \text{ (sest } c > 0).$$

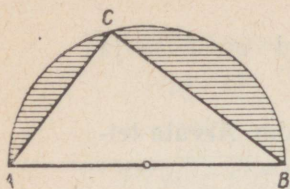
Vastus. Otsitav hüpotenuus on 16 cm.

573. Põhjenda väidet, et $ab = ch$.

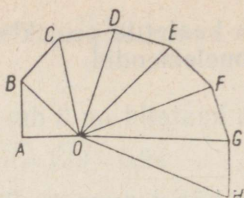
574. Täisnurkse kolmnurga kaatet $b = 15$ cm ja kõrgus $h = 12$ cm. Arvuta teised joonelemendid.

575. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus $c = 25$ cm ja kaateti projektsioon $f = 4$ cm. Arvuta teised joonelemendid.

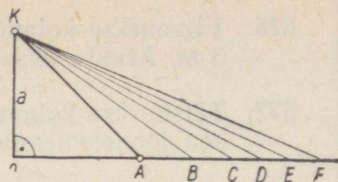
576. Täisnurkse kolmnurga kaatetite projektioonid on 2 m ja 3 m. Arvuta teised joonelemendid.
577. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 3 dm ja 4 dm. Arvuta teised joonelemendid.
578. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 20 m ja kõrgus 8 m. Arvuta teised joonelemendid.
579. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a=12$ dm ja kaateti b projektioon $g=9$ dm. Arvuta teised joonelemendid.
580. Täisnurkse kolmnurga pindala on $26,46$ m² ja üks kaatet on 6,3 m. Kui pikk on kolmnurga hüpotenuus?
581. Kolmnurga külgede pikkused on 5,3 cm, 9,0 cm ja 5,3 cm. Arvuta kolmnurga pindala.
582. Korrapärase nelinurga ümberringjoone raadius on 10 cm. Arvuta nelinurga külge, apoteem ja pindala.
583. Korrapärase kolmnurga ümberringjoone raadius on 12 cm. Arvuta kolmnurga külge, apoteem ja pindala.
584. Korrapärase kuusnurga ümberringjoone raadius on 8 cm. Arvuta kuusnurga külge, apoteem ja pindala.
585. Väljaspool ringjoont antud punktist on ringjoonele tõmmatud puutuja. Arvuta antud punkti kaugus puutepunktist, kui on teada, et ringjoone raadius on 5 cm ja antud punkt on ringjoone keskpunktist 1 cm võrra kaugemal kui puutepunktist.
586. Ringjoonele, mille raadius võrdub 3 cm, on tõmmatud puutuja punktist, mis asetseb 8 cm kaugusel ringjoone keskpunktist. Arvuta puutepunkti kaugus sirgest, mis ühendab antud punkti ringjoone keskpunktiga.
587. Joonesta kahe mittevõrdse lõigu aritmeetiline keskmine ja geomeetiline keskmine. Kumb neist on pikem?
588. Joonesta lõik pikkusega $\sqrt[7]{8}$ cm kolmel viisil: Pythagorase teoreemi, Eukleidese teoreemi ja täisnurkse kolmnurga kõrguse kohta käiva teoreemi põhjal.
589. Joonesta lõik pikkusega $\sqrt[7]{13}$ cm.



Joon. 132



Joon. 133



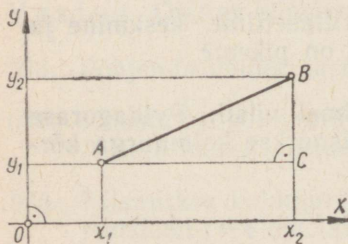
Joon. 134

590. Joonesta lõik pikkusega $\sqrt{20}$ cm.
591. Arvuta viirutatud osa pindala joonisel 132, kui kolmnurga ABC külj $AC=6$ cm ja $AB=10$ cm.
592. Joonis 133 on valmistatud nõnda, et $OA=AB=BC=CD=DE=EF=FG=GH=1$, ja nurgad $OAB, OBC, OCD, \dots, OGH$ on täisnurgad. Arvuta OB, OC, OD, OE, OF, OG ja OH .
593. Joonis 134 on valmistatud nõnda, et $OA=OK=a$ ja $OK \perp OA$ ning $OB=AK, OC=BK$ jne. Avalda lõigud OB, OC jne. lõigu a kaudu.

6.7. KAHE PUNKTI VAHELINE KAUGUS

Koordinaatteljestikus on antud lõik otspunktidega $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$ (joon. 135). Leiame selle lõigu pikkuse arvutamise teel. Selleks vaatleme esmalt lõigu projektsioone koordinaattelgedel. Punkti A projektsioon x -teljel on (joon. 135) punkt $(x_1; 0)$ ja punkti B projektsioon x -teljel punkt $(x_2; 0)$. Seega lõigu AB projektsioon x -teljel on lõik otspunktidega $(x_1; 0)$ ja $(x_2; 0)$. Selle projektsiooni pikkus on $|x_2 - x_1|$. Analoogiliselt saame, et AB projektsiooniks y -teljel on lõik otspunktidega $(0; y_1)$ ja $(0; y_2)$. Selle projektsiooni pikkus on $|y_2 - y_1|$ (joon. 135).

N ä i d e. Kui lõigu otspunktid on $A(3; -4)$ ja $B(-2; 2)$, siis lõigu projektsioon x -teljel on pikkusega



Joon. 135

$$|-2 - 3| = |-5| = 5$$

ja lõigu projektsioon y -teljel on pikkusega

$$|2 - (-4)| = |2 + 4| = 6.$$

Kui lõik on paralleelne x -teljega, näiteks lõik AC joonisel 135, siis tema projektsioon x -teljel on pikkuselt võrdne lõigu enda pikkusega ja projektsioon y -teljel on pikkuselt 0 (on punkt): $AC = |x_2 - x_1|$. Analoogiliselt, kui lõik on paralleelne y -teljega, näiteks lõik CB joonisel 135, siis tema projektsioon y -teljel on pikkuselt võrdne lõigu enda pikkusega ja projektsioon x -teljel on pikkuselt 0: $CB = |y_2 - y_1|$. Olgu lõik AB koordinaattelgedede suhtes kaldu (joon. 135). Joonestame täisnurkse kolmnurga ABC , milles täisnurga tipuks on punkt $C(x_2; y_1)$, hüpotenuusiks on lõik AB ja kaatedid AC ning CB on vastavalt paralleelsed x - ja y -teljega. Pythagorase teoreemi põhjal

$$AB^2 = AC^2 + CB^2.$$

Et $AC = |x_2 - x_1|$ ja $CB = |y_2 - y_1|$, siis

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad \text{ja} \quad AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Kahe punkti vaheline kaugus võrdub ruutjuurega nende punktide ühenimeliste koordinaatide vahede ruutude summast.

See valem annab õige tulemuse ka siis, kui lõik on paralleelne ühe või teise koordinaatteljega. Näiteks, kui lõik on paralleelne x -teljega, siis $y_2 = y_1$,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|,$$

nagu peab olema.

N ä i d e. Kui lõigu otspunktideks on $A(4; -3)$ ja $B(-1; 5)$, siis lõigu pikkus

$$AB = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (5 + 3)^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89} = 9,43.$$

594. Mis on punkti $(-7; 3)$ projektsiooniks x -teljel, mis y -teljel?

595. Lõigu otspunktid on $M(2; -4,8)$ ja $N(-5; 6)$. Kui pikad on lõigu MN projektsioonid telgedel?

596. Leia iga järgmise punkti kaugus koordinaatide alguspunktist:

1) $A(4; -3)$, 2) $B(-7; -24)$, 3) $C(3,5; 5)$.

597. Anna valem punkti $M(x; y)$ ja koordinaatide alguspunkti vahelise kauguse arvutamiseks.

598. Ringjoon, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis, läbib punkti $P(8; -15)$. Kui pikk on selle ringjoone raadius?
599. Kui pikk raadius on ringjoonel, mille keskpunkt on punktis $K(-5; 10)$ ja mis läbib punkti $L(0; -2)$?
600. Kolmnurga tippudeks on punktid $A(3; 0)$, $B(7; 3)$ ja $C(4; 8)$. Arvuta kolmnurga külgede pikkused. Kas see kolmnurk on täisnurkne?
601. Kolmnurga tippudeks on punktid $P(2; 3)$, $Q(4; 7)$ ja $R(13; 0)$. Arvuta kolmnurga külgede pikkused. Mis liiki kolmnurk see on?
602. Leia x -teljel punkt, mille kaugus punktist $(3; -8)$ on võrdne 15.
603. Leia punktidest $(-1; 2)$ ja $(5; 4)$ võrdsetel kaugustel asetsev punkt,
1) kui see punkt on x -teljel;
2) kui see punkt on y -teljel.
604. Näita arvutamise teel, et kolmnurk tippudega $(-4; 3)$, $(2; 7)$ ja $(-4; 16)$ on täisnurkne. Leia kolmnurga pindala.
605. Nelinurga tippudeks on punktid $(3; 2)$, $(8; 2)$, $(11; 6)$ ja $(6; 6)$. Arvuta külgede ja diagonaalide pikkused. Mis liiki nelinurk see on? Arvuta tema pindala.
606. Nelinurga tippudeks on punktid $(0; 0)$, $(4; 3)$, $(-2; 11)$ ja $(-6; 8)$. Arvuta külgede ja diagonaalide pikkused. Määra nelinurga liik ja arvuta tema pindala.
607. Lõigu üks otspunkt on $(5; 2)$ ja teine on y -teljel. Leia lõigu teine otspunkt, kui lõigu pikkus on 13 ühikut.
608. Kui kaugel on punkt $(5; -3)$ temaga alguspunkti suhtes sümmeetrilisest punktist?
609. Korrapärase kuusnurga keskpunkt on koordinaatide alguspunktis ja üks tipp on punktis $(-4; -3)$. Joonesta see kuusnurk. Arvuta tema ümbermõõt ja pindala.

6.8. VEKTORI KOORDINAADID

Vaatleme suunaga sirglõiku ehk vektorit, mille alguspunktiks on $A(x_1; y_1)$ ja lõpp-punktiks $B(x_2; y_2)$. Vektori \vec{AB} pikkust tähistatakse sümboliga $|\vec{AB}|$. Et vektori \vec{AB} pikkus on sama, mis lõigu AB pikkus (joon. 135), siis vektori pikkuse arvutamine tema ots-punktide koordinaatide põhjal toimub samuti, nagu lõigu pikkuse arvutamine:

$$|\vec{AB}| = AB; \quad |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Selles valemis esinevaid vektori lõpp- ja alguspunkti koordinaatide vahesid $x_2 - x_1$ ja $y_2 - y_1$ nimetatakse **vektori koordinaatideks**. Lauset «Vektori AB koordinaadid on $x_2 - x_1$ ja $y_2 - y_1$ » kirjutatakse kujul

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1).$$

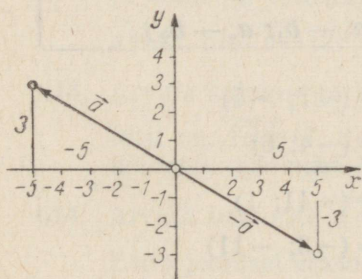
Näide. Kui vektori alguspunktiks on $A(2; -3)$ ja lõpp-punktiks on $B(6; -5)$, siis \vec{AB} koordinaadid on:

$$x_2 - x_1 = 6 - 2 = 4, \quad y_2 - y_1 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$$

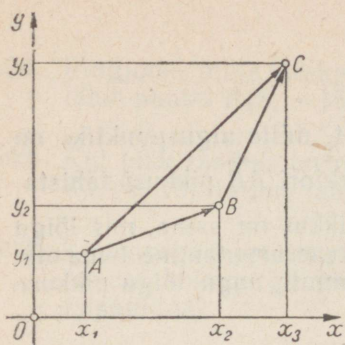
$$\text{ja } \vec{AB} = (4; -2).$$

Vektorit tähistame sageli üheainsa tähedega, näiteks \vec{a} , tema koordinaate siis a_1 ja a_2 , nii et $\vec{a} = (a_1; a_2)$. Seda kirjutust loeme: vektor \vec{a} on koordinaatidega a_1 ja a_2 . Eelnevast teame, et lõigu AB projektsioon x -teljel on pikkusega $|x_2 - x_1|$ ja y -teljel pikkusega $|y_2 - y_1|$.

Vektori joonestamine tema koordinaatide järgi toimub samuti, nagu punkti joonestamine tema koordinaatide järgi, kusjuures vektori alguspunkti võime teatavasti vabalt valida. Kõige lihtsam on võtta selleks koordinaatide alguspunkt. Nii on kujutatud joonisel 136 vektor $\vec{a} = (-5; 3)$ ja tema vastandvektor $-\vec{a} = (5; -3)$.



Joon. 136



Joon. 137

Mõnikord on vaja leida vektorite summa või vahe koordinaate.

Näitame, et vektorite \vec{AB} ja \vec{BC} summa \vec{AC} koordinaadid on võrdsed liidetavate vektorite vastavate koordinaatide summaga (joon. 137). Tõepoolest, kui vektorite otspunktideks on

$A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ ja $C(x_3; y_3)$,

siis

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1),$$

$$\vec{BC} = (x_3 - x_2; y_3 - y_2),$$

$$\vec{AC} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1),$$

sest vektori koordinaatideks on vektori lõpp-punkti ja alguspunkti koordinaatide vahed. Liites nüüd vektorite \vec{AB} ja \vec{BC} vastavad koordinaadid, näeme, et saame nende summa \vec{AC} koordinaadid:

$$(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) = x_2 - x_1 + x_3 - x_2 = x_3 - x_1;$$

$$(y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) = y_2 - y_1 + y_3 - y_2 = y_3 - y_1.$$

Niisamuti saame näidata, et vektorite vahe koordinaadid on võrdsed nende vektorite vastavate koordinaatide vahedega. Kirjutame need vektorite liitmise ja lahutamise eeskirjad lühemalt, tähistades vektoreid üheainsa tähega:

$\left. \begin{array}{l} \vec{a} = (a_1; a_2) \\ \vec{b} = (b_1; b_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2) \\ \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2) \end{array} \right.$

Näiteid. 1. $\vec{a} = (4; 6)$

$$\vec{b} = (3; -2)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (7; 4)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (1; 8)$$

2. $\vec{m} = (-7; -5)$

$$\vec{n} = (-4; 6)$$

$$\vec{m} + \vec{n} = (-11; 1)$$

$$\vec{m} - \vec{n} = (-3; -11)$$

3. On antud punktid $A(3; -2)$, $B(-5; 4)$, $C(2; 2)$ ja $D(6; 4)$.

Arvuta vektori $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{CD}$ pikkus ja kontrolli tulemust sellekohaselt jooniselt.

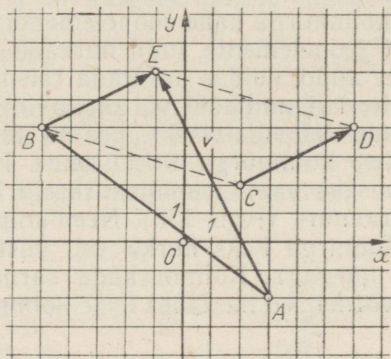
Lahendus. 1) $\vec{AB} = (-5-3; 4+2) = (-8; 6)$;

2) $\vec{CD} = (6-2; 4-2) = (4; 2)$;

3) $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{CD} = (-8+4; 6+2) = (-4; 8)$;

4) $|\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 8,9$.

Kontrolli jooniselt 138 lahenduse iga sammu.



Joon. 138

610. Arvuta vektori \vec{OA} pikkus, kui punkt O on koordinaatide alguspunkt ja A on

- 1) $(9; 12)$, 2) $(-4; 7,5)$, 3) $(-6; -4,8)$.

611. Leia vektori koordinaadid, kui vektori alguspunkt ja lõpppunkt on vastavalt

- 1) $(4; 5)$ ja $(-3; 7)$, 2) $(-8; 4)$ ja $(3; -3)$,
3) $(-3; 9)$ ja $(-6; 9)$, 4) $(4,8; -1,5)$ ja $(2,4; 1)$.

612. Esita joonisel järgmised vektorid, arvuta iga vektori pikkus ja kontrolli tulemust jooniselt:

$\vec{a} = (3; 5)$, $\vec{b} = (2; -4)$, $\vec{c} = (-5; 4)$.

613. Arvuta kolmnurga kolmanda külje pikkus, kui kaks külgevektorit on $\vec{AB} = (7; 0)$ ja $\vec{BC} = (-2; 6)$. Joonesta kolmnurk ja kontrolli tulemust jooniselt.

614. Arvuta vektorite $\vec{a} = (3; -2)$ ja $\vec{b} = (6; 3)$ summa ja vahe.

Esita joonisel vektorid \vec{a} , \vec{b} , $\vec{a} + \vec{b}$ ja $\vec{a} - \vec{b}$.

615. Joonesta rööpkülik, mille külgevektorid on $\vec{a} = (6; 2)$ ja $\vec{b} = (1; 4)$. Arvuta rööpküliku diagonaalide pikkused ja kontrolli tulemusi jooniselt.
616. Kolmnurga ühest tipust väljuvad külgevektorid on $(4; 2)$ ja $(2; 6)$. Põhjenda väidet, et see kolmnurk on võrdhaarne ja täisnurkne.

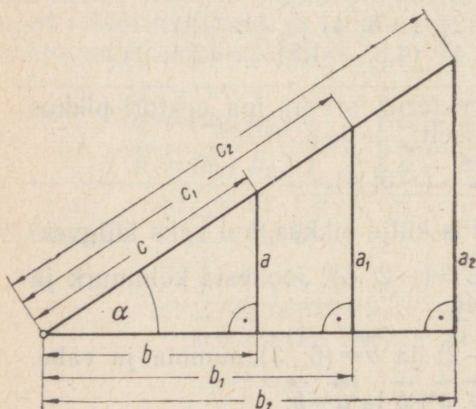
6.9. TERAVNURGA SIINUS, KOOSINUS JA TANGENS

Eespool nägime, et täisnurkse kolmnurga kahe joonelemendi järgi saab arvutada kolmnurga teisi joonelemente, kuid nurkade arutamist me ei vaadelnud. Küsime nüüd, kuidas arvutada täisnurkse kolmnurga tundmatuid elemente, kui andmete või otsitavate hulgas on ka nurki. Selle ülesande lahendamiseks peame teadma valemite, mis seovad täisnurkse kolmnurga nurki tema külgedega. Selliste valemite tuletamiseks vaatleme täisnurkseid kolmnurki, millel on üks ja sama teravnurk (joon. 139). Need kolmnurgad on sarnased, sest ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga. Kolmnurkade sarnasuse tõttu on iga kolmnurga küljed võrdelised mistahes teise kolmnurga külgedega, näiteks

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Kui see võrdsete suhete rida kirjutada kolme võrdena ja neis sise-liikmed ümber paigutada, siis saame järgmised võrdsed:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}; \quad \frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}; \quad \frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}.$$



Joon. 139

Samal viisil võime saada, et $a : b = a_2 : b_2$ jne. Siit näeme, et

kui täisnurksetel kolmnurkadel on üks ja sama teravnurk, siis ühe kolmnurga mistahes kahe külje suhe on võrdne teise kolmnurga vastavate külgede suhtega.

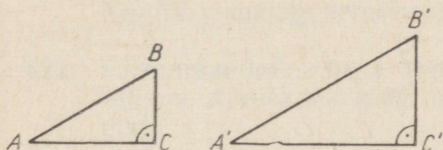
Seda tõsiasja ütleme lühemalt nii, et

täisnurkse kolmnurga teravnurga andmisega on kolmnurga külgede suhted määratud.

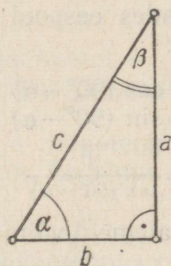
Ümberpöörduvalt, ka külgede iga suhte andmisega on kolmnurga teravnurgad määratud, sest kui kahel täisnurksel kolmnurgal ABC ja $A'B'C'$ on külgede mingid suhted võrdsed, näiteks (joon. 140)

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'},$$

siis kolmnurgad on IV sarnasustunnuse järgi sarnased, järelikult nende teravnurgad on vastavalt võrdsed. See tõttu saab teravnurga suuruse põhjal määrata kolmnurga külgede suhteid ja külgede suhete põhjal teravnurga suurust.



Joon. 140



Joon. 141

Täisnurkse kolmnurga külgede suhetele on antud erinimetused ja eritähistused. Tutvume neist kolmega:

teravnurga vastaskaateti ja hüpotenuusi suhet nimetatakse selle nurga siinuseks;

teravnurga lähiskaateti ja hüpotenuusi suhet nimetatakse selle nurga koosinuseks;

teravnurga vastaskaateti ja lähiskaateti suhet nimetatakse selle nurga tangensiks.

Teravnurga siinus, koosinus ja tangens on teravnurga funktsioonid, sest teravnurga igale väärtusele vastab üks kindel siinuse väärtus, samuti üks kindel koosinuse ja tangensi väärtus.

Olgu täisnurkse kolmnurga üks teravnurk α ja teine β . (joon. 141).

Nurga α siinust, koosinust ja tangensit tähistatakse vastavalt $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ja $\tan \alpha$.

Analoogiliselt on nurga β siinuse, koosinuse ja tangensi tähised $\sin \beta$, $\cos \beta$ ja $\tan \beta$.

Eespool antud definitsioonide põhjal saame:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b},$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a}.$$

Need on nurkade α ja β funktsioonide definitsioonid sümbolites. Võrreldes neid definitsioone, näeme, et

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}.$$

Et $\alpha + \beta = 90^\circ$, siis nurki α ja β nimetatakse teineteise **täiendusnurkadeks** (90° -ni). Avaldame ühe neist täiendusnurkadest, näiteks β , teise kaudu:

$$\beta = 90^\circ - \alpha.$$

Asendades eespool saadud valemities nurga β tema avaldisega, saame:

$$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha),$$

$$\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha),$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\tan (90^\circ - \alpha)}$$

Neid valemiteid võime sõnastada nii:

teravnurga siinus võrdub tema täiendusnurga koosinusega, teravnurga koosinus võrdub tema täiendusnurga siinusega, teravnurga tangens võrdub tema täiendusnurga tangensi pöördväärtusega.

$$\text{Näiteks } \sin 20^\circ = \cos (90^\circ - 20^\circ) = \cos 70^\circ,$$

$$\cos 20^\circ = \sin (90^\circ - 20^\circ) = \sin 70^\circ,$$

$$\tan 20^\circ = \frac{1}{\tan 70^\circ}.$$

Nimetus koosinus tähendabki täiendusnurga siinust, sest ta on tuletatud ladinakeelsest väljendist «sinus complementi», s.o. «täiendusnurga siinus», mida lühendatult kirjutati kujul co.sinus.

Mingi antud nurga, näiteks $\alpha = 35^\circ$, siinuse, koosinuse ja tangensi leidmiseks ei tunne me algul muud teed, kui joonestada mingi (mitte liiga väike) täisnurkne kolmnurk antud teravnurgaga, mõõta kolmnurga küljed ja arvutada vajalikud suhted. Nii tehes saaksime:

$$\sin 35^\circ = 0,57, \quad \cos 35^\circ = 0,82, \quad \tan 35^\circ = 0,70.$$

Kui need tulemused on õiged, siis võime öelda, et

$$\sin 55^\circ = 0,82, \quad \cos 55^\circ = 0,57, \quad \tan 55^\circ = 1 : 0,70 = 1,43.$$

617. Joonesta täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus $c=10$ cm ja teravnurk $\alpha=25^\circ$. Mõõda jooniselt kolmnurga kaated ja arvuta

1) $\sin 25^\circ$, 2) $\cos 25^\circ$, 3) $\tan 25^\circ$.

Leia veel

4) $\sin 65^\circ$, 5) $\cos 65^\circ$, 6) $\tan 65^\circ$.

618. Joonesta mingi täisnurkne kolmnurk, mille üks teravnurk on 40° , mõõda jooniselt tarvilikud lõigud ja arvuta $\sin 40^\circ$, $\sin 50^\circ$, $\cos 40^\circ$, $\cos 50^\circ$, $\tan 40^\circ$ ja $\tan 50^\circ$.

619. Missuguse nurga koosinus on niisama suur kui $\sin 15^\circ$, $\sin 49^\circ$?

620. Leia nurk, mille siinus on niisama suur kui $\cos 3^\circ$, $\cos 19^\circ$, $\cos 58^\circ$.

621. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a=5$ cm ja kaatet $b=12$ cm. Arvuta kummagi teravnurga siinus, koosinus ja tangens.

622. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a=4$ cm ja hüpotenuus $c=5$ cm. Arvuta kummagi teravnurga siinus, koosinus ja tangens.

623. Täisnurkse kolmnurga kaatet $b=6$ cm ja hüpotenuus $c=9$ cm. Arvuta kummagi teravnurga siinus, koosinus ja tangens.

624. Joonesta nurk, mille

1) siinus on 0,8, 2) koosinus on 0,25, 3) tangens on 3.

625. Joonesta nurk, mille

1) siinus on $\frac{2}{3}$, 2) koosinus on $\frac{5}{7}$, 3) tangens on 0,6.

626. Võrdhaarse kolmnurga alus on 8 ühikut ja haar 5 ühikut. Arvuta kolmnurga kõrgus, alusnurga siinus, koosinus ja tangens.

627. Toetudes teravnurga siinuse ja tangensi definitsioonile, näita, et võrratus $\sin \alpha < \tan \alpha$ on alati õige.

628. Toetudes teravnurga siinuse ja koosinuse definitsioonile, näita, et kui $\alpha < 45^\circ$, siis $\sin \alpha < \cos \alpha$.

6.10. NURKADE 30°, 45° JA 60° FUNKTSIOONIDE ARVUTAMINE

Nurga suuruse järgi tema funktsioonide arvutamine on üldiselt palju aega võttev ja küllaltki keerukas. Erandi moodustavad nurgad 30°, 45° ja 60°, mille funktsioonide arvutamine on õige lihtne. Nurga 45° funktsioonid arvutame täisnurksest kolmnurgast, mille kaated on võrdsed (joon. 142). Olgu kaatetite pikkus a mm. Siis hüpotenuusi pikkus samades ühikutes on

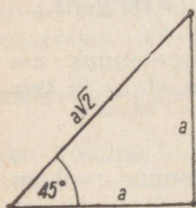
$$c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Nüüd saame, et

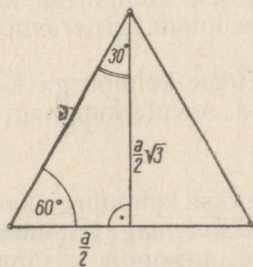
$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707,$$

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707, \quad \tan 45^\circ = 1.$$

Nurkade 30° ja 60° funktsioonide arvutamiseks kasutame võrdkülgset kolmnurka, jaotades selle kõrgusega kaheks täisnurkseks kolmnurgaks, mille teravnurgad ongi 30° ja 60° (joon. 143).



Joon. 142



Joon. 143

Avaldame esmalt võrdkülgse kolmnurga kõrguse h külje a kaudu:

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Nüüd saame:

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{a}{2}\sqrt{3} : a = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0,866,$$

$$\tan 30^\circ = \frac{a}{2} : \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577.$$

Nurga 60° funktsioonid saame selle täiendusnurga funktsioonide kaudu:

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0,866,$$

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\tan 60^\circ = 1 : \tan 30^\circ = \sqrt{3} \approx 1,73.$$

Koondame tulemused tabelisse:

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos \alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

629. Millega võrdub 30° -se nurga vastaskaatet? Kuidas sellest tuleneb $\sin 30^\circ$ väärtus?
630. Kas teravnurga siinus suureneb või väheneb teravnurga suurenemisel? Võrdle $\sin 30^\circ$ väärtust kaks korda suurema nurga siinuse väärtusega ja otsusta, kas nurga siinus on võrdeline nurga suurusega.
631. Kas teravnurga koosinus suureneb või väheneb teravnurga suurenemisel? Võrdle $\cos 30^\circ$ väärtust kaks korda suurema nurga koosinuse väärtusega ja otsusta, kas nurga koosinus on pöördvõrdeline nurga suurusega.
632. Kas teravnurga tangens suureneb või väheneb teravnurga suurenemisel? Mitu korda suureneb nurga tangens, kui nurk kasvab 30° -lt 60° -ni? Kas nurga tangens on võrdeline nurga suurusega?
633. Kumas vahemikus nurga siinus kasvab kiiremini, kas nurga kasvamisel 30° -st 45° -ni või 45° -st 60° -ni?
634. Võrdle suhteid $\tan 45^\circ : \tan 30^\circ$ ja $\tan 60^\circ : \tan 45^\circ$.

6.11. TERAVNURGA FUNKTSIOONIDE GRAAFIKUD

Parema ülevaate saamiseks teravnurga funktsioonide muutumisest nurga muutumisel joonestame nende funktsioonide graafikud. Seda saab teha sellekohasest joonisest saadud andmeil.

Nurga siinuse ja koosinuse graafiku saamiseks joonestame millimeetripaberile 90° -se kaare raadiusega 100 mm ja jaotame selle kaare kas malli abil või sirkliga proovides üheksaks võrdseks osaks (joon. 144). Saadud jaotuspunktide ühendamisel ringjoone keskpunktiga saame nurgad $10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, \dots, 80^\circ$. Joonestades kaare jaotuspunktide ristlõigud rõhtraadiusele, saame lõigud, mis kujutavad $\sin 10^\circ, \sin 20^\circ, \dots, \sin 80^\circ$ väärtusi, kui pikkusühikuks on ringjoone raadius.

Siinuse graafiku joonestamiseks võtame rõhtraadiuse pikenduse nurkade teljeks ja kujutame sellel nurgal $10^\circ, 20^\circ, \dots, 80^\circ$, võttes 10° kujutiseks lõigu, mille pikkus võrdub ligikaudu 10° -se kaare pikkusega (antud raadiuse korral ligikaudu 20 mm). Edasi kanname siinuse väärtusi kujutavad lõigud rööplükke abil vastavasse kohta üle (joon. 144). Nende lõikude otspunktide ühendamisel saame siinuse graafiku vahemikus 10° kuni 80° .

Vaadeldes 10° -st väiksemaid nurki, näeme, et nurga suuruse lähenemisel 0° -le läheneb tema siinus arvule 0. Analoogiliselt saame, et nurga suuruse lähenemisel 90° -le läheneb tema siinus arvule 1. Seepärast loetakse, et $\sin 0^\circ = 0$ ja $\sin 90^\circ = 1$.

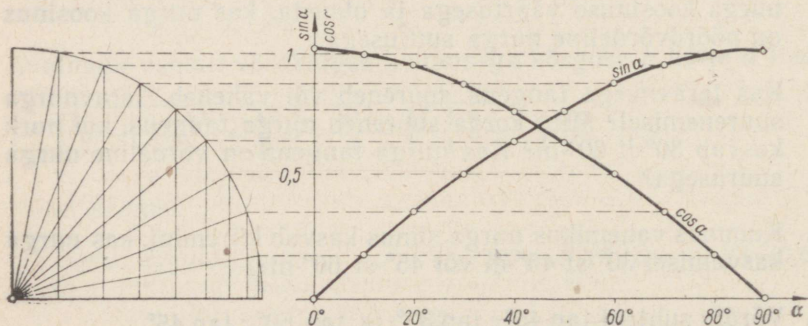
Täiendades oma joonist saadud kahe siinuse väärtusega ja pikendades vastavalt graafikut, saame siinuse graafiku vahemikus 0° kuni 90° (joon. 144).

Joonise täiendamiseks koosinuse graafikuga kasutame nurga ja tema täiendusnurga funktsioonide vahelist seost:

$\cos 0^\circ = \sin 90^\circ, \cos 10^\circ = \sin 80^\circ$ jne. (joon. 144).

Saadud graafikutest näeme, et

nurga kasvamisel 0° -st 90° -ni nurga siinus kasvab 0-st 1-ni ja koosinus kahaneb 1-st 0-ni.



Joon. 144

635. Valmista endale nurga siinuse ja koosinuse graafik ja täida selle põhjal järgmine tabel.

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin \alpha$										
$\cos \alpha$										

636. Vasta siinuse ja koosinuse graafiku abil järgmistele küsimustele:

- 1) Kui suur on siinus 5° , $\sin 55^\circ$, $\cos 28^\circ$, $\cos 65^\circ$?
- 2) Missuguse nurga siinus on 0,3, 0,57, 0,9?
- 3) Missuguse nurga koosinus on 0,95, 0,8, 0,24?
- 4) Missuguste nurkade puhul
 $\sin \alpha < \cos \alpha$, $\sin \alpha = \cos \alpha$, $\sin \alpha > \cos \alpha$?

637. Otsusta siinuse ja koosinuse graafiku põhjal, kas allpool antud vahe on positiivne, negatiivne või null.

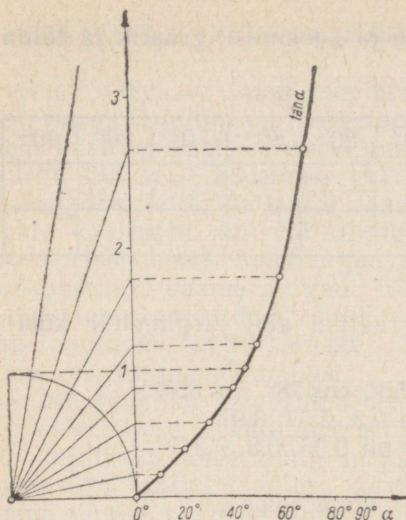
$$\begin{array}{ll} \cos 25^\circ - \sin 25^\circ & \cos 25^\circ - \sin 50^\circ \\ \sin 25^\circ - \cos 50^\circ & \sin 35^\circ - \cos 55^\circ \\ \sin 70^\circ - \cos 70^\circ & \cos 80^\circ - \sin 10^\circ \end{array}$$

638. Leia siinuse ja koosinuse graafiku abil, kui suur on täisnurkse kolmnurga nurk, mille

- 1) vastaskaatet on 8 cm ja hüpotenuus 16 cm;
- 2) vastaskaatet on 12 cm ja hüpotenuus 20 cm;
- 3) lähiskaatet on 7 dm ja hüpotenuus 10 dm;
- 4) lähiskaatet on 9 m ja hüpotenuus 15 m.

Näpunäide. Arvuta selle nurga siinus või koosinus ja leia graafikult siinuse või koosinuse väärtusele vastav nurk.

Teravnurga tangensi graafiku saamiseks joonestame millimeetripaberile 90° -se kaare raadiusega 50 mm ja jaotame selle endisel viisil üheksaks võrdseks osaks. Saadud jaotuspunktid ühendame ringjoone keskpunktiga ja pikendame neid ühenduslõike ringjoone puutujani, mis on tõmmatud rõhtraadiuse otspunktist (joon. 145). Nii tekib rida täisnurkseid kolmnurki, mille ringjoone raadius on ühiseks kaatetiks ja mille teravnurgad ringjoone keskpunkti juures on vastavalt 10° , 20° , ..., 80° . Kui ringjoone raadius võtta pikusühikuks, siis nende nurkade vastaskaatetid puutujal kujutavadki nimetatud nurkade tangenseid. Tangensi graafiku saamiseks võtame nurkade telje endisel viisil ja jätkame tööd nii, nagu siinuse graafiku joonestamisel. Nurga tangensi muutumist kujutav



Joon. 145

joon algab telgede alguspunktist, sest kui täisnurkse kolmnurga teravnurk läheneb 0° -le, siis vastaskaateti pikkus ja sellega ka nurga tangens läheneb nullile. Seetõttu

$$\tan 0^\circ = 0.$$

Kui nurk läheneb täisnurgale, siis nurga vastaskaatet ja sellega ka nurga tangens kasvab tõkestamatult. Seetõttu 90° -se nurga tangens puudub.

639. Kirjelda, kuidas kasvab nurga tangens, kui nurk kasvab 0° -st 90° -ni.

640. Leia nurga tangensi graafikult,

1) kui suur on $\tan 35^\circ$ ja $\tan 54^\circ$;

2) missuguse nurga tangens on 1; 2; 0,5;

3) kui palju kasvab nurga tangens nurga kasvamisel 20° -st 40° -ni ja 40° -st 60° -ni.

6.12. SEOSSED ÜHE JA SAMA NURGA FUNKTSIOONIDE VAHEL

Ühe ja sama teravnurga funktsioonid on omavahel teatud valemitega seotud, nii et teades mingi nurga ühe funktsiooni väärtust saab arvutada selle nurga ülejäänud funktsioonide väärtused.

Ühe ja sama teravnurga siinuse ja koosinuse vahelise seose leidmiseks lähtume Pythagorase teoreemist (joon. 141):

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Jagades selle võrduse mõlemad pooled arvuga c^2 ja teisendades uue võrduse liikmeid, saame:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Et esimene sulgudes olev jagatis $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ ja teine $\frac{b}{c} = \cos \alpha$, siis saame

$$\boxed{(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1.}$$

Ühe ja sama teravnurga siinuse ja koosinuse ruutude summa võrdub ühega.

Saadud lause väljendab Pythagorase teoreemi nurgafunktsioonide abil.

Avaldades saadud valemist ühe nurgafunktsiooni teise kaudu, saame valemid

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - (\cos \alpha)^2} \text{ ja } \cos \alpha = \sqrt{1 - (\sin \alpha)^2}.$$

Neid valemid kasutatakse nurga koosinuse järgi siinuse arvutamisel ja nurga siinuse järgi koosinuse arvutamisel.

N ä i d e. Kui $\sin \alpha = 0,28$, siis

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - 0,28^2} = \sqrt{1 - 0,0784} = \sqrt{0,9216} = 0,96.$$

Tuletame valem, mis seob kõik kolm nurgafunktsiooni. Täisnurksest kolmnurgast (joon. 141).

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}.$$

Jagame paremal seisva murru lugeja ja nimetaja c -ga:

$$\tan \alpha = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}.$$

Et $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ ja $\frac{b}{c} = \cos \alpha$, siis

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Teravnurga tangens võrdub sama nurga siinuse ja koosinuse jagatisega.

See valem võimaldab nurga siinuse ja koosinuse põhjal arvutada nurga tangensi.

Näide. Kui $\sin \alpha = 0,6$, siis
 $\cos \alpha = \sqrt{1 - 0,6^2} = \sqrt{0,64} = 0,8$.
 $\tan \alpha = 0,6 : 0,8 = 0,75$.

Saadud kaks põhivalemit

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

võimaldavad iga nurga funktsiooni põhjal arvutada ülejäänud funktsioonid. Et kergendada $\tan \alpha$ põhjal $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ arvutamist, tuletame veel ühe abivalemi. Selle saamiseks jagame esimese põhivalemi mõlemad pooled arvuga $(\cos \alpha)^2$. Saame:

$$\frac{(\sin \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2} + 1 = \frac{1}{(\cos \alpha)^2} \quad \text{ehk} \quad 1 + (\tan \alpha)^2 = \frac{1}{(\cos \alpha)^2}$$

Näide. Kui $\tan \alpha = 2$, siis

$$\frac{1}{(\cos \alpha)^2} = 1 + 2^2 = 5,$$

$$(\cos \alpha)^2 = \frac{1}{5} = 0,2,$$

$$\cos \alpha = \sqrt{0,2} = 0,447,$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - 0,2} = \sqrt{0,8} = 0,894.$$

641. Arvuta $\sin \alpha$, kui $\cos \alpha = \frac{3}{5}$; $0,3$; $\frac{9}{41}$; 1 .

642. Arvuta $\cos \alpha$, kui $\sin \alpha = 0,5$; $0,96$; $\frac{11}{61}$; 1 .

643. Arvuta $\tan \alpha$, kui $\cos \alpha = \frac{12}{37}$.

644. Arvuta $\tan \alpha$, kui $\sin \alpha = 0,8$.

645. Arvuta $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$, kui $\tan \alpha = 4$.

646. Arvuta $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$, kui $\tan \alpha = \frac{9}{40}$.

647. Arvuta $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$, kui $\tan \alpha = 0,3$.

648. Avalda $\cos \alpha$ ja $\tan \alpha$, kui $\sin \alpha = a$.

649. Avalda $\sin \alpha$ ja $\tan \alpha$, kui $\cos \alpha = a$.

650. Avalda $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$, kui $\tan \alpha = a$.

651. Täisnurkse kolmnurga ühe teravnurga siinus on $0,4$. Arvuta teise teravnurga siinus.

652. Täisnurkse kolmnurga ühe teravnurga tangens on 2,4. Arvuta teise teravnurga tangens.
653. On antud võrrand $4 \tan x = 3$. Kui suur on $\sin x$?
654. On antud võrrand $25(\sin x)^2 - 9 = 0$. Arvuta $\tan x$.
655. On antud võrrand $(\tan x)^2 + 3 \tan x - 4 = 0$. Leia nurga x siinus ja koosinus.

6.13. NURGAFUNKTSIOONIDE TABELID

Nurgafunktsioonide väärtuste leidmiseks on koostatud sellekohased tabelid. Tutvume koolides kasutatavas tabelitekogus leiduva siinuste ja tangensite tabeliga (vt. V. Bradis. Neljakohalised matemaatilised tabelid keskkoolidele. Tabel VIII, IX ja X).

Siinuste tabelis (tabel VIII) on antud nurkade $0^\circ 0'$, $0^\circ 6'$, $0^\circ 12'$, $0^\circ 18'$, $0^\circ 24'$, ..., $89^\circ 48'$, $89^\circ 54'$, $89^\circ 60' = 90^\circ$ siinused neljakohaliste murdosadega, s. o. siinused nurkadele iga kümnendiku kraadi ehk $6'$ järel. Tabeli kolm parempoolset lisaveergu pealdestega $1'$, $2'$, $3'$ võimaldavad leida siinuseid nurkadele iga $1'$ järel. Neid lisaveerge me ei kasuta.

Tabelist saadud neljakohalise siinuse väärtuse ümardame kolmekohaliseks, kui see arv jääb arvutuse lõpptulemuseks. Tabeli algus ja lõpp (lisaveergudeta) on järgmine.

Tabel VIII. SIINUSED

A	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'	
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0,0000	90°
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	89°
2°	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	88°
3°	0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	86°
.....												
88°	9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0,9998	1°
85°	9998	9999	9999	9999	9999	0000	0000	0000	0000	0000	1,0000	0°
90°	1,0000											
	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	A

KOOSINUSED

Et leida tabelist mistahes täisarv kraade ja kraadi kümnendikke sisaldava teravnurga siinust, leiame äärmisest vasakpoolsest veerust (pealdisega A) antud teravnurga kraadide arvu ja ülevalt esimesest reast vastava minutite arvu. Leitud rea ja veeru lõikekohas on otsitava siinuse väärtuse murdosa. Siinuse väärtuse täisososa on kogu tabeli ulatuses 0, välja arvatud nurgad alates nurgaga $89^{\circ}30'$, mille siinuste täisosaks tuleb 1. Nii leiame näiteks, et

$$\sin 3^{\circ}48' = 0,0663 \approx 0,066;$$

$$\sin 57^{\circ} = 0,8387 \approx 0,839;$$

$$\sin 89^{\circ}54' = 1,000.$$

Sama tabel võimaldab leida ka teravnurkade koosinusi. Viimaste leidmiseks võtame kraadide arvu paremalt viimasest veerust (enne lisaveerge) ja minutite arvu alt ning leiame vastava rea ja veeru lõikekohas oleva arvu. Näiteid:

$$\cos 88^{\circ}12' = 0,0314 \approx 0,031;$$

$$\cos 19^{\circ} = 0,9455 \approx 0,946;$$

$$\cos 0^{\circ}24' = 1,000.$$

Tangensi väärtuste leidmiseks on antud kaks tabelit, millest üks sisaldab nurkade 0° kuni $75^{\circ}60'$ (tabel IX), teine nurkade $76^{\circ}00'$ kuni $89^{\circ}59'$ tangenseid (tabel X). Mõlemas tabelis on tangensite väärtused antud neljakohaliste tüvedega.

Esimese tabeli ehitus ja kasutamine on üldiselt samasugune nagu siinuste tabeli ehitus ja kasutamine. Tangensite täisosad (mis alates nurgast 45° pole enam nullid) on antud kas veerus pealdisega 0° (nurkadel 45° kuni $59^{\circ}54'$) või otse murdosa ees (alates nurgast 60°). Näiteid:

$$\tan 7^{\circ} = 0,1228 \approx 0,123;$$

$$\tan 58^{\circ}54' = 1,6577 \approx 1,658;$$

$$\tan 74^{\circ}48' = 3,681 \approx 3,68.$$

Tabel X sisaldab tangensite väärtusi nurkadele iga minuti järel. Seejuures kraadide arvu ja kümnete minutite arvu võtame tabeli esimesest veerust (pealdisega A) ja minutite üheliste arvu ülevalt esimesest reast. Antud nurga tangensi leiame vastava rea ja veeru lõikekohast. Nii leiame näiteks, et

$$\tan 77^{\circ}40' = 4,574 \approx 4,57;$$

$$\tan 83^{\circ}06' = 8,264 \approx 8,26;$$

$$\tan 89^{\circ}39' = 163,7 \approx 164.$$

Tabelid IX ja X võimaldavad leida ka tangensite pöördeväärtuste ehk kootangensite väärtusi, kuid neid me ei kasuta. Kui antud nurga funktsiooni väärtust tabelis ei leidu, siis võtame sellele lähima tabelis leiduva nurga vastava funktsiooni väärtuse. Näiteks ei leidu tabelis nurga $20^{\circ}34'$ ühtki funktsiooni.

Sellele lähim nurk, mille funktsioonid tabelis leiduvad, on $20^{\circ}36'$. Seda kasutades saame:

$$\begin{aligned}\sin 20^{\circ}34' &\approx \sin 20^{\circ}36' \approx 0,352; \\ \cos 20^{\circ}34' &\approx \cos 20^{\circ}36' \approx 0,936; \\ \tan 20^{\circ}34' &\approx \tan 20^{\circ}36' \approx 0,376.\end{aligned}$$

Kui antud nurk erineb ühepalju kahest tabelis leiduvast nurgast, siis võime kasutada ükskõik kumba neist nurkadest.

Näiteks võime lugeda, et

$$\begin{aligned}\sin 48^{\circ}45' &\approx \sin 48^{\circ}42' \approx 0,751 \\ \text{või} \\ \sin 48^{\circ}45' &\approx \sin 48^{\circ}48' \approx 0,752.\end{aligned}$$

Neist teine väärtus on täpsem, nagu selgub, kui neid võrrelda tabelist saadavate $\sin 48^{\circ}42'$ ja $\sin 48^{\circ}48'$ väärtuste aritmeetilise keskmisega, mis on 0,75185.

Tabelid VIII, IX ja X võimaldavad leida ka antud siinuse, koosinuse või tangensi väärtuse järgi vastavat nurka. Näiteks leiame tabelist, et

$$\begin{aligned}\text{kui } \sin \alpha &= 0,9598, \text{ siis } \alpha = 73^{\circ}42'; \\ \text{,, } \cos \alpha &= 0,9598, \text{ ,, } \alpha = 16^{\circ}18'; \\ \text{,, } \tan \alpha &= 5,933, \text{ ,, } \alpha = 80^{\circ}26'.\end{aligned}$$

Kui antud nurgafunktsiooni väärtust tabelis ei leidu, siis leiame lähima tabelis antud väärtuse ja võtame sellele vastava nurga. Näiteks, kui $\sin \alpha = 0,541$, siis $\alpha = 32^{\circ}48'$, sest $\sin 32^{\circ}48' = 0,5417$ erineb arvust 0,541 vähem kui $\sin 32^{\circ}42' = 0,5402$.

Kui erinevus kahest tabeliväärtusest on ühesugune, siis võime kasutada ükskõik kumba neist.

656. Leia tabeli abil iga järgneva nurga kõik kolm funktsiooni:

- 1) $27^{\circ}; 38^{\circ}; 47^{\circ}; 62^{\circ}; 18^{\circ}36'; 59^{\circ}24'; 48^{\circ}30'$.
- 2) $17^{\circ}; 41^{\circ}54'; 51^{\circ}; 63^{\circ}12'; 79^{\circ}48'; 84^{\circ}30'; 46^{\circ}48'$.
- 3) $5^{\circ}04'; 24^{\circ}44'; 68^{\circ}28'; 70^{\circ}15'; 86^{\circ}33'; 88^{\circ}53'$.

657. Leia nurgafunktsioonide tabeli abil antud funktsiooni väärtusele vastav nurk ja selle teised funktsioonid.

- | | | |
|---------------------------|----------------------|------------------------|
| 1) $\sin \alpha = 0,309$ | $\cos \beta = 0,766$ | $\tan \gamma = 0,2364$ |
| 2) $\sin \alpha = 0,423$ | $\cos \beta = 0,956$ | $\tan \gamma = 1,889$ |
| 3) $\sin \alpha = 0,2181$ | $\cos \beta = 0,64$ | $\tan \gamma = 0,544$ |
| 4) $\sin \alpha = 0,9178$ | $\cos \beta = 0,347$ | $\tan \gamma = 6,51$ |

658. Leia nurgafunktsioonide tabeli abil nurga suurus, kui tema

- 1) siinus on $\frac{5}{8}$; 2) siinus on $\frac{27}{35}$; 3) koosinus on $\frac{3}{4}$; 4) koosinus on $\frac{36}{47}$; 5) tangens on $1\frac{2}{7}$; 6) tangens on $\frac{13}{15}$.

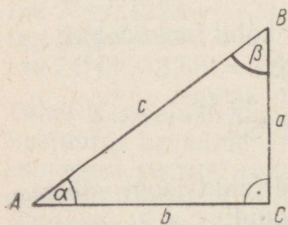
659. Leia täisnurkse kolmnurga nurga suurus, kui
- 1) nurga lähiskaatet on 24 cm ja vastaskaatet 18 cm;
 - 2) nurga lähiskaatet on 18 mm ja hüpotenuus 24 mm;
 - 3) nurga vastaskaatet on 0,67 m ja lähiskaatet 1,6 m;
 - 4) nurga vastaskaatet on 3,2 km ja hüpotenuus 5,2 km.
660. Leia täisnurkse kolmnurga teravnurgad, kui
- 1) kaatetid on 5,8 dm ja 8,5 dm;
 - 2) kaatetid on 0,82 m ja 1,45 m;
 - 3) üks kaatet on 12 m ja hüpotenuus 15,6 m;
 - 4) üks kaatet on 0,3 m ja hüpotenuus 0,75 m.

6.14. TÄISNURKSE KOLMNURGA LAHENDAMINE

Täisnurkse kolmnurga elementide all mõistame tema külgi ja nurki. Kui muutuvatest elementidest, s.o. külgedest a , b , c ja teravnurkadest α , β (joon. 146) mingid kaks elementi on antud (nende hulgas vähemalt üks külg), siis kolmnurk on määratud ja tema teisi elemente saab arvutada. Seega saavad antud elementi-deks olla

1. teravnurk ja hüpotenuus,
2. teravnurk ja kaatet,
3. kaks kaatetit,
4. kaatet ja hüpotenuus,

sest kui ühe täisnurkse kolmnurga nimetatud elementid on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega, siis kolmnurgad on võrdsed.



Joon. 146

Näide 1. Lahendame täisnurkse kolmnurga, kui on antud teravnurk ja hüpotenuus, näiteks kui $\alpha = 27^\circ$ ja $c = 8,4$ cm.

Lahendus.

$$1) \beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ.$$

$$2) \frac{a}{c} = \sin \alpha; \quad a = c \sin \alpha = 8,4 \cdot \sin 27^\circ = 8,4 \cdot 0,4540 \approx 3,8 \text{ (cm).}$$

$$3) \frac{b}{c} = \cos \alpha; \quad b = c \cos \alpha = 8,4 \cdot \cos 27^\circ = 8,4 \cdot 0,8910 \approx 7,5 \text{ (cm).}$$

Kontroll. Arvutame hüpotenuusi Pythagorase teoreemi põhjal ja võrdleme tulemust antud hüpotenuusiga:

$$c = \sqrt{3,8^2 + 7,5^2} = \sqrt{14,4 + 56,2} = \sqrt{70,6} = 8,4,$$

nagu oli antud.

Vastus. $a=3,8$ cm; $b=7,5$ cm; $\beta=63^\circ$.

661. Lahenda täisnurkne kolmnurk, kui on antud:

- 1) $\alpha=39^\circ$ ja $c=15$ cm; 3) $\beta=14^\circ 18'$ ja $c=6,5$ dm;
2) $\alpha=68^\circ 30'$ ja $c=0,58$ cm; 4) $\beta=53^\circ 06'$ ja $c=0,087$ km.

Näide 2. Lahendame täisnurkse kolmnurga, kui on antud teravnurk ja kaatet, näiteks kui $\alpha=61^\circ$ ja $a=8,7$ cm.

Lahendus.

1) $\beta=90^\circ-61^\circ=29^\circ$.

2) $\frac{b}{a} = \tan \beta$;

$$b = a \tan \beta = 8,7 \cdot \tan 29^\circ = 8,7 \cdot 0,5543 \approx 4,8 \text{ (cm)}.$$

3) $\sin \alpha = \frac{a}{c}$; $c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{8,7}{\sin 61^\circ} = \frac{8,7}{0,8746} = 8,7 \cdot 1,143 \approx 9,9 \text{ (cm)}.$
 $c \sin \alpha = a$;

Kontroll. Arvutame hüpotenuusi ka Pythagorase teoreemi põhjal ja võrdleme tulemusi:

$$c = \sqrt{8,7^2 + 4,8^2} = \sqrt{75,7 + 23,0} = \sqrt{98,7} = 9,93 \approx 9,9,$$

nii nagu varem saime.

Vastus. $b=4,8$ cm; $c=9,9$ cm; $\beta=29^\circ$.

662. Lahenda täisnurkne kolmnurk, kui on antud:

- 1) $\alpha=25$ ja $a=43$ mm; 3) $\beta=33^\circ 45'$ ja $b=180$ m;
2) $\alpha=71^\circ 15'$ ja $b=10,5$ cm; 4) $\beta=59^\circ 50'$ ja $a=6,04$ km.

Näide 3. Telefoniposti tugi toetub postile 5,4 m kõrgusel maapinnast. Toe ja posti vaheline kaugus maapinnal on 3,7 m. Leiame toe pikkuse ja nurgad, mis ta moodustab maapinna ja postiga.

Lahendus. Täisnurksest kolmnurgast on antud (joon. 146) kaatetid $a=5,4$ m ja $b=3,7$ m. Leida tuleb hüpotenuus c ja nurgad α ning β .

1) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5,4^2 + 3,7^2} = \sqrt{29,2 + 13,7} = \sqrt{42,9} = 6,55 \approx 6,6.$

2) $\tan \alpha = \frac{5,4}{3,7} = 1,459$; $\alpha = 55^\circ 30' \approx 56^\circ.$

3) $\beta = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ.$

Kontroll. Arvutame leitud β ja c järgi kaateti b :

$$b = c \sin \beta = 6,6 \cdot \sin 34^\circ = 6,6 \cdot 0,5592 \approx 3,7.$$

Vastus. Posti toe pikkus on 6,6 m ja see moodustab maapinnaga nurga 56° ning postiga nurga 34° .

663. Lahenda täisnurkne kolmnurk, kui on antud:

- 1) $a = 15$ cm ja $b = 36$ cm; 3) $a = 320$ m ja $b = 180$ m;
2) $a = 0,8$ dm ja $b = 4,5$ dm; 4) $a = 4,7$ km ja $b = 1,7$ km.

Näide 4. Vaheloleva takistuse tõttu saab tuletõrjeredeli paigutada mitte lähemale kui 2,8 m maja seinast. Redeli pikkus on 9,2 m. Kui kõrgele ulatub redel ja kui suure nurga moodustab ta kõrgeimas asendis maapinnaga ning maja seinaga?

Lahendus. Täisnurksest kolmnurgast on antud kaatet $b = 2,8$ m ja hüpotenuus $c = 9,2$ m (joon. 146), leida tuleb kaatet a ja nurgad α ja β .

$$1) a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{9,2^2 - 2,8^2} = \sqrt{84,6 - 7,84} = \sqrt{76,76} = 8,76 \approx 8,8.$$

$$2) \sin \beta = \frac{2,8}{9,2} = 2,8 \cdot 0,109 = 0,305; \quad \beta = 17^\circ 48' \approx 18^\circ.$$

$$3) \alpha = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ.$$

Kontroll. Arvutame kaateti a nurga α ja hüpotenuusi c järgi:
 $a = c \sin \alpha = 9,2 \cdot \sin 72^\circ = 9,2 \cdot 0,9511 = 8,75$.

Vastus. Redel ulatub 8,8 m kõrgusele ja ta moodustab siis maapinnaga nurga 72° ning maja seinaga nurga 18° .

664. Lahenda täisnurkne kolmnurk, kui on antud:

- 1) $a = 14$ cm ja $c = 24$ cm; 3) $b = 7,8$ m ja $c = 8,0$ m;
2) $a = 0,9$ m ja $c = 1,2$ m; 4) $b = 0,004$ km ja $c = 0,08$ km.

665. Arvuta täisnurkse kolmnurga teised küljed ja nurgad, kui on antud:

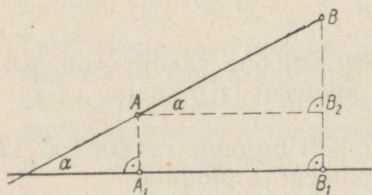
- 1) $a = 5,2$ cm ja $c = 7,5$ cm; 3) $b = 0,64$ m ja $\alpha = 51^\circ 30'$;
2) $a = 28$ m ja $b = 34$ m; 4) $\beta = 72^\circ$ ja $c = 0,286$ dm.

666. Arvuta täisnurkse kolmnurga teised küljed ja nurgad, kui on antud:

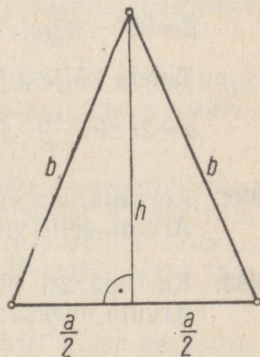
- 1) $c = 0,85$ m ja $\alpha = 38^\circ 06'$; 3) $\alpha = 57^\circ 20'$ ja $b = 0,64$ m;
2) $a = 0,70$ dm ja $b = 1,25$ dm; 4) $b = 0,65$ m ja $c = 0,95$ m.

6.15. NURGAFUNKTSIOONIDE RAKENDUSI

667. Tuletorni tipp, mille kõrgus on 19 m üle merepinna, paistab merel asetsevast paadist 7° kõrgusel. Kui kaugel on paat tuletornist?
668. Päikese kõrgus silmapiirilt on 32° . Kui kõrge on puu, mille varju pikkus rõhtsal maapinnal on sel momendil 22,4 m?
669. Kaldlõik AB moodustab sirgega nurga α (joon. 147). Avalda kaldlõigu AB projektsiooni A_1B_1 pikkus ja arvuta see, kui $AB=6,4$ m ja $\alpha=38^\circ$.
670. Sirge maantee tõuseb 70 meetri ulatuses ja moodustab rõhtsa maapinnaga nurga 16° . Mitu meetrit tõuseb maantee selles ulatuses?
671. Raadiosaatejaama mast paistab 180 m kauguselt 26° -se nurga all. Kui kõrge on see mast?
672. 2,5 m pikkuse teiba varju pikkus on 3,2 m. Kui kõrgel on päike silmapiirilt?
673. Ristküliku alus on 14,5 m, nurk aluse ja diagonaali vahel on 38° . Arvuta ristküliku pindala.
674. Rombi diagonaalide pikkused on 10,2 cm ja 6,8 cm. Kui suured on selle rombi nurgad?
675. Olgu võrdhaarse kolmnurga alus a , haar b ja kõrgus h . Avalda alusnurga β siinus, koosinus ja tangens. Avalda poole tipunurga $\frac{\alpha}{2}$ siinus, koosinus ja tangens (joon. 148).
676. Võrdhaarse kolmnurga haar $b=8,0$ cm ja alusnurk $\beta=53^\circ$. Arvuta tipunurk α , kõrgus h , alus a ja pindala S .

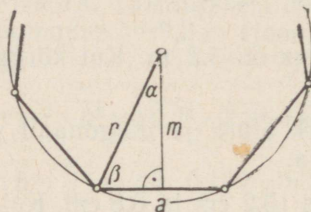


Joon. 147



Joon. 148

677. Arvuta võrdhaarse kolmnurga teised küljed ja nurgad, kui on antud:
- 1) alus $a=10$ cm ja haar $b=13$ cm;
 - 2) alus $a=24$ m ja tipunurk $\alpha=126^\circ$;
 - 3) haar $b=0,86$ m ja tipunurk $\alpha=46^\circ$;
 - 4) haar $b=16,4$ cm ja alusnurk $\beta=51^\circ$.
678. Kui suur kesknurk toetub 7 cm pikkusele kõõlule ringjoones, mille raadius $r=12$ cm?
679. Ringi kõõl, mille pikkus on 42 mm, toetub kaarele 70° . Kui pikk on ringi raadius?
680. Ringis raadiusega 11,2 cm on joonestatud kõõl, millele vastav kaar on 132° . Arvuta selle kõõlu pikkus.



Joon. 149

681. Olgu korrapärase n -nurga külg a , apoteem m ja ümberringjoone raadius r (joon. 149). Näita, et apoteemi ja raadiuse vaheline nurk

$$\alpha = \frac{180^\circ}{n}$$

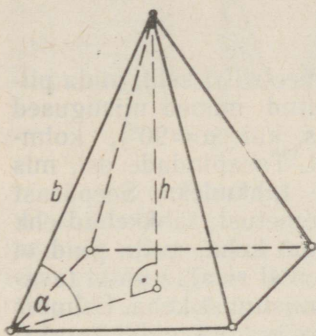
ja külje ning raadiuse vaheline nurk

$$\beta = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}.$$

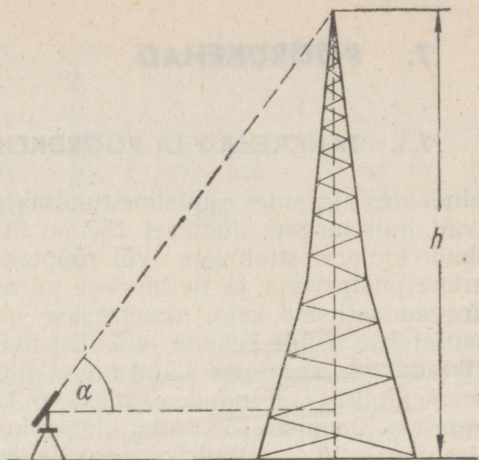
Tuleta külje a ja apoteemi m arvutamiseks valemid

$$a = 2r \sin \frac{180^\circ}{n} \quad \text{ja} \quad m = r \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

682. Korrapärase viisnurga ümberringjoone raadius on 6,4 cm. Arvuta selle viisnurga külg, apoteem ja pindala.
683. Korrapärase üheksanurga ümberringjoone raadius on 12 cm. Arvuta üheksanurga külg, apoteem ja pindala.
684. Korrapärase kaksteistnurga ümberringjoone raadius on 6,8 cm. Arvuta kaksteistnurga külg, apoteem ja pindala.



Joon. 150



Joon. 151

685. Korrapärase viisnurga külg on 1 m. Arvuta viisnurga apoteem ja pindala.
686. Korrapärase kümmenurga külg on 5,8 cm. Arvuta kümmenurga apoteem ja pindala.
687. Näita, et korrapärase n -nurga apoteem m avaldub külje a ja tippude arvu n kaudu järgmiselt:

$$m = \frac{a}{2} : \tan \frac{180^\circ}{n}.$$

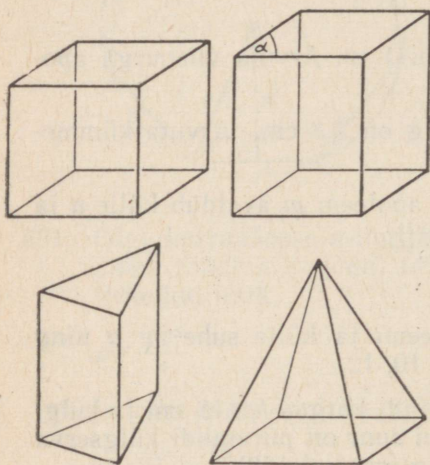
Avalda sellest valemist apoteemi ja külje suhe $m : a$ ning arvuta see, kui $n=3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$.

688. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus $h=18$ cm ja külgserv $b=25$ cm (joon. 150). Kui suur on püramiidi külgserva kaldenurk põhja suhtes (nurk α joonisel 150)?
689. Arvuta korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus h , kui külgserv $b=4,4$ dm ja külgserva kaldenurk põhja suhtes (nurk α joonisel 150) on 67° .
690. Televisioonimasti kõrguse määramiseks asetati nurgamõõtmise riist 68 m kaugusele masti aluse keskpunktist (joon. 151). Mõõtmisel saadi, et masti tippu kõrgusnurk $\alpha=63^\circ 50'$. Arvuta masti kõrgus, kui nurgamõõtmise riist oli masti aluse tasemest 1,8 m kõrgemal.
691. Arvuta nurgamõõtmise riista kaugus masti aluse keskpunktist (joon. 151), kui masti kõrgus $h=120$ m ja kõrgusnurk $\alpha=48^\circ 10'$.

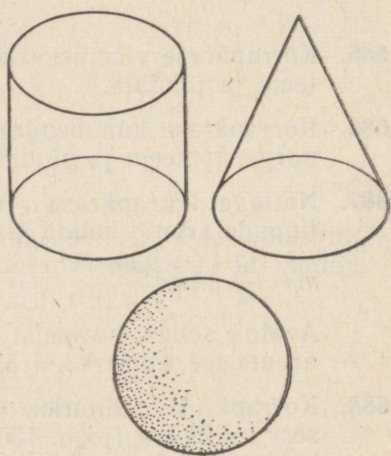
7. PÖÖRDEHAD

7.1. TAHKKEHAD JA PÖÖRDEHAD

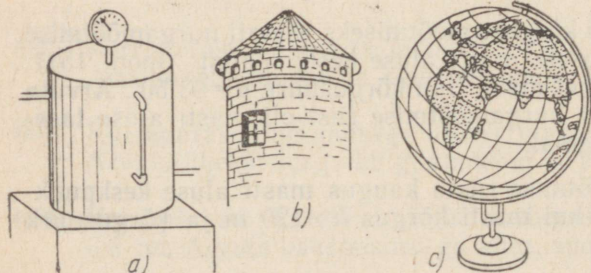
Eelnevates klassides õppisime tundma geomeetrilisi kehi, mida piiravad hulknurgad. Joonisel 152 on kujutatud mõned niisugused kehad: kuup, risttahukas (või rööptahukas, kui $\alpha \neq 90^\circ$), kolmnurkne püstprisma ja nelinurkne püramiid. Tasapindade osi, mis piiravad selliseid kehi, nimetatakse nende **tahkudeks**. Seepärast kasutatakse nende kehade jaoks ka ühist nimetust: **tahkkehad** ehk **hulktahukad**. Vaatleme nüüd mõnd lihtsamat keha, mille pind ei koosne ainult tasapindade osadest või koguni ei sisalda ühtki tasapinna osa. Joonisel 153 on kujutatud kolm niisugust keha. Esimest neist nimetatakse **silindriks**, teist **koonuseks** ja kolmandat **keraks**. Silindri kuju võib olla näiteks veepaagil (joon. 154, a). Koonuse



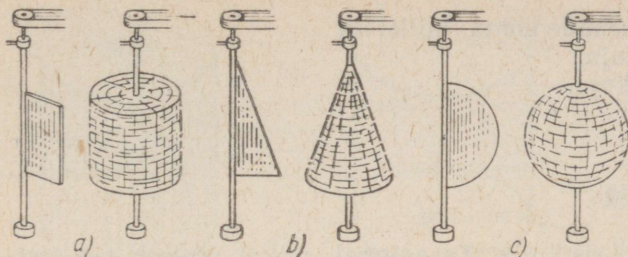
Joon. 152



Joon. 153



Joon. 154



Joon. 155

kuju on ümara torni katusel (joon. 154, b). Kerakujuline on näiteks gloobus (joon. 154, c). Silindri, koonuse ja kera kuju võime näha ka sel teel, kui paneme sobiva kujuga plaadid kiirelt pöörlema. Näiteks kui riskülikukujuline plaat pöörleb kiirelt ümber ühe külje, siis näeme silindrit (joon. 155, a). Kui täisnurkse kolmnurga kujuline plaat pöörleb kiirelt ümber ühe kaateti, siis näeme koonust (joon. 155, b). Kui poolringikujuline plaat pöörleb kiirelt ümber diameetri, siis näeme kera (joon. 155, c). Nende tähelepanekute põhjal nimetatakse silindrit, koonust ja kera **pöördkehadeks**.

Seame eesmärgiks 1) defineerida silinder, koonus ja kera, 2) õppida arvutama nende kehade pindala ja ruumala.

692. Lõpeta järgmised definitsioonid:

- 1) Kuup on risttahukas, mille ...
- 2) Risttahukas on püstprisma, mille ...
- 3) Püstprisma on hulktahukas, mille ...
- 4) Korrapärase püramiidi on hulktahukas, mille ...
- 5) Hulktahukas on keha, ...

693. Kasutades sobivaid tähistusi, kirjuta valemid tahkkeha ruumala arvutamiseks, kui see tahkkeha on

- | | |
|-----------------|---------------------------|
| 1) kuup, | 3) püstprisma, |
| 2) risttahukas, | 4) korrapärase püramiidi. |

694. Kuubi serv on a . Kirjuta valem kuubi pindala arvutamiseks.

695. Risttahuka lähisservad on a , b ja c . Kirjuta risttahuka pindala valem.

696. Milliste lõikude pikkusi peab teadma selleks, et arvutada

- 1) püstprisma ruumala, kui prisma põhjaks on isekülgne kolmnurk?
- 2) korrapärase viisnurkse püramiidi ruumala?
- 3) korrapärase viisnurkse püramiidi täispindala?

697. Too näiteid kehade kohta, millel on

- 1) silindri kuju,
- 2) koonuse kuju,
- 3) kera kuju.

7.2. SILINDER

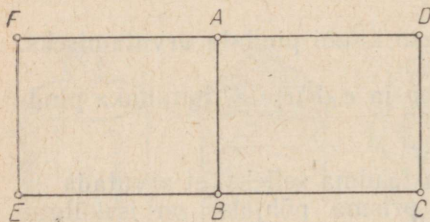
Olgu $ABCD$ mingi ristkülik. Tasapinnal, millel asetseb see ristkülik, saab joonestada ainult ühe ristküliku, mis on võrdne ristkülikuga $ABCD$ ja millel on sellega ühine külge AB . Joonisel 156 on selliseks ristkülikuks $ABEF$.

Ruumis leidub lõpmata palju ristkülikuid, mis on võrdsed antud ristkülikuga $ABCD$ ja mille üheks küljeks on lõik AB (joon. 157). Ristküliku $ABCD$ saab sobiva pöördega ümber külje AB viia ühtimisele iga ristkülikuga sellest ristkülikute hulgast. Seepärast ütleme, et kõik need ristkülikud on saadud ristkülikust $ABCD$ selle pöörlemisel ümber külje AB . Et seejuures need ristkülikud täidavad keha, mida nimetame silindriks (joon. 158), siis võime silindri defineerida järgmiselt:

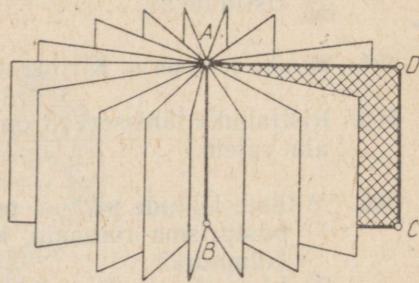
silindriks nimetatakse keha, mille moodustab ümber ühe oma külje pöörlev ristkülik.

Silinder on määratud, kui on antud ristkülik, mille pöörlemisel moodustub silinder, ja on näidatud, missugust selle ristküliku külge tuleb kasutada pöörlemisteljena.

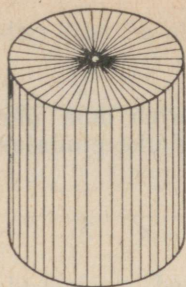
Külge, mille ümber pöörleb silindrit moodustav ristkülik, nimetatakse silindri **teljeks**. Teljeks nimetatava külje lähiskülge (ja samuti viimase pikkust) nimetatakse silindri **põhja raadiuseks**. Teljeks nimetatava külje vastaskülge nimetatakse silindri **moodustajaks**. Lõik AB on joonisel 159 kujutatud silindri telg. Selle silindri raadiuseks on lõik AD ja moodustajaks lõik CD . Silindri pind koosneb kolmest osast. Kaht ringi, mille moodustavad ristküliku paigalejääva külje lähisküljed, nimetatakse silindri **põhja-**



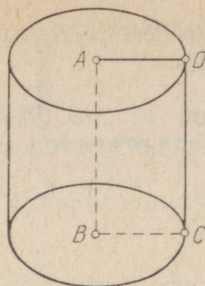
Joon. 156



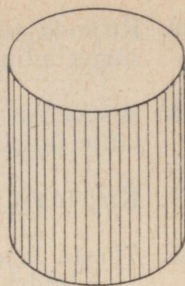
Joon. 157



Joon. 158



Joon. 159



Joon. 160

deks. Silindri pinna osa, mille moodustab pöörleva ristküliku paigale jääva külje vastaskülge, nimetatakse silindri **külgpinnaks** (joon. 160). Silindri külgpind ei ole tasapinna osa.

Tasapinnad, millel asetsevad silindri põhjad, on paralleelsed. Seejärel ütleme, et ka silindri põhjad on paralleelsed. Silindri telg on risti mõlema põhjaga.

Silindri põhjade vahelist ristlõiku (ja samuti selle lõigu pikkust) nimetatakse silindri **kõrguseks**. Silindri kõrgus mõõdab tema põhjade vahelist kaugust. Kõrguseks võib lugeda näiteks telje, samuti iga moodustaja.

Silindri ja tasapinna ühisosa nimetatakse silindri **lõikeks** selle tasapinnaga. Silindri lõiget tasapinnaga, mis läbib silindri telge, nimetatakse silindri **telglõikeks**, ja lõiget tasapinnaga, mis on risti silindri teljega, nimetatakse silindri **ristlõikeks**.

698. Kaht silindrit, mida saab ühtimisele viia, nimetatakse võrdseteks. Mitu omavahel mittevõrdset silindrit määrab

- 1) ristkülik, mis pole ruut?
- 2) ruut?

699. Ristküliku $ABCD$ diagonaal BD moodustab küljega $BC = 12$ cm nurga 30° . Arvuta selle ristkülikuga määratud silindri raadius ja kõrgus, kui teljeks on külge AB .

700. Ristkülik, mille pindala on 20 cm², pöörleb ümber ühe külje. Kui pikk on sel viisil saadud silindri moodustaja, kui silindri raadius on 4 cm?

701. Ristküliku diagonaalide vaheline nurk on 60° . Arvuta selle ristkülikuga määratud silindri raadius ja kõrgus, kui silindri teljeks on ristküliku lühem külge ja ristküliku diagonaal on 22 cm.

702. Kirjelda silindri telglõiget ja ristlõiget. Võrdle silindri ristlõiget silindri põhjaga.
703. Ristküliku pindala on 17 cm^2 . Ristkülik pöörleb oma ühe külje ümber. Kui suur on saadud silindri telglõike pindala?
704. Kirjelda silindri külgpinna ja põhja ühisosa.
705. Tõesta laused:
- 1) silindri iga kaks moodustajat on paralleelsed ja võrdsed;
 - 2) silindri põhjad on võrdsed;
 - 3) silindri iga kaks ristlõiget on võrdsed.

7.3. SILINDRI PINDALA

Silindri külgpinna pindala nimetatakse silindri **külgpindalaks** ja tähistatakse sümboliga S_k . Silindri kogu pinna pindala nimetatakse silindri **täispindalaks**. Täispindala tähiseks on S_t . Silindri külge- ja täispindala valemite tuletamiseks kasutame silindri pinna-laotust.

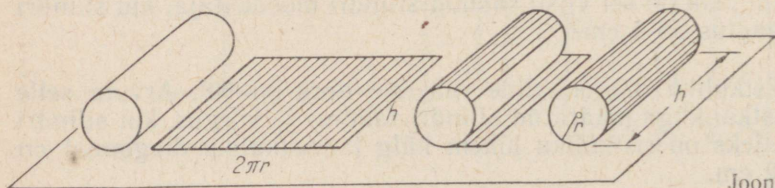
Silindri külgpindala võrdub põhja übermõõdu ja kõrguse korrutisega:

$$S_k = 2\pi r h,$$

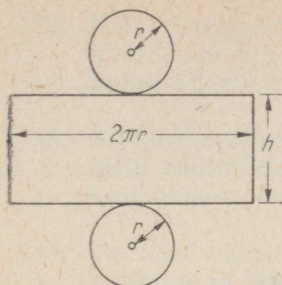
kus r tähistab silindri põhja raadiust ja h silindri kõrgust. Tõestus. Silindri külgpinnalaotus on ristkülik, mille alus on võrdne silindri põhja übermõõduga ja kõrgus on võrdne silindri kõrgusega (joon. 161). Et põhja übermõõt on $2\pi r$ ja silindri kõrgus h , siis külgpinnalaotuse pindala on $2\pi r h$, seega kehtib näidatud valem.

Silindri täispindala võrdub põhja übermõõdu ning kõrguse ja raadiuse summa korrutisega:

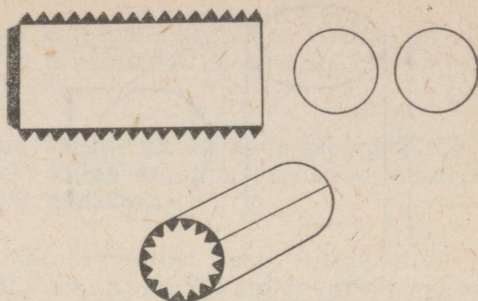
$$S_t = 2\pi r(h + r).$$



Joon. 161



Joon. 162



Joon. 163

Tõestus. Lisades silindri külgpinnalaotusele kaks silindri põhja, saame silindri pinnalaotuse (joon. 162). Silindri põhja pindala on $S_p = \pi r^2$. Et silindri täispindala on

$$S_t = S_k + 2S_p, \text{ siis}$$

$$S_t = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r (h + r).$$

706. Silindri põhja raadius on 2 cm ja kõrgus 5 cm. Joonesta silindri pinnalaotus.

707. Silindri põhja raadius on 3 cm ja kõrgus on 10 cm. Valmista kartongist selle silindri mudel. Selleks joonesta silindri külgpinnalaotus ühes kleepimiseks vajalike äärtega ja lõika saadud kujund kartongist välja. Seejärel kleebi külgpind kokku nii, nagu on näidatud joonisel 163, ja aseta kohale põhjad.

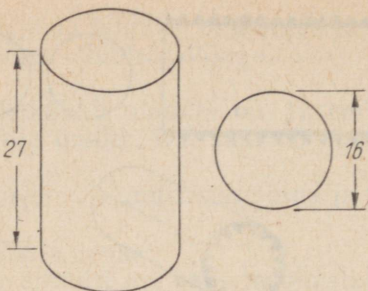
708. Arvuta ülesande 707 tingimuste järgi valmistatud silindri külgpindala, põhja pindala ja täispindala.

709. Täida tabel.

r	h	S_k	S_p	S_t
13,0	20,0			
2,5	1,2			
0,70	3,5			

710. Kui palju plekki kulub silindrikujulise raudahju külgpinna katmiseks, kui ahju kõrgus on 1,3 m ja läbimõõt 0,7 m?

711. Joonisel 164 on antud silindri eestvaade ja põhivaade. Arvuta silindri külgpindala.



Joon. 164

712. On tarvis valmistada plekist silindrikujuline nõu (ilma kaaneta). Nõu läbimõõt peab olema 24 cm ja kõrgus 35 cm. Kui palju plekki kulub selle nõu valmistamiseks, kui pleki kulu valtsimiseks mitte arvestada? Vastus anda täpsusega 5 cm^2 .
713. Silindrikujulise aurukatla läbimõõt on 1,2 m ja pikkus 4,4 m. Kui suur on auru rõhk kogu katla pinnale, kui auru rõhk on $8 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$?
714. Ristkülik, mille küljed on a ja b , pöörleb ümber külje a . Leia tekkinud silindri külge- ja täispindala.
715. Silindri kõrgus on k ja põhja läbimõõt d . Kirjuta valemid pindalade S_k ja S_t arvutamiseks.
716. Kirjuta valem silindri kõrguse arvutamiseks, kui on teada külgpindala S_k ja raadius r .
717. Avalda silindri külgpindala ja kõrguse kaudu
- 1) silindri põhja ümbermõõt,
 - 2) silindri põhja läbimõõt,
 - 3) silindri põhja raadius,
 - 4) silindri täispindala.
718. Silindri põhja läbimõõt on 1 dm; kõrgus on võrdne põhja ümbermõõduga. Arvuta S_k .
719. Silindri põhja raadius on 15 cm ja külgpindala võrdub põhjate pindalade summaga. Leia silindri kõrgus.
720. Silindri külgpindala on neli korda suurem põhja pindalast. Silindri põhja raadius on 7 cm. Arvuta silindri kõrgus.
721. Tarvis on krohvida silindrikujulise silotorni sisepind. Tornis seesmine läbimõõt on 3,60 m ja kõrgus 6,80 m. Arvuta täpsusega $0,1 \text{ m}^2$, mitu ruutmeetrit pinda tuleb krohvida, kui kogu pinnast tuleb välja jätta luukide kohad; mille kogupindala on $1,8 \text{ m}^2$.

722. Mitu ruutmeetrit plekki kulub vihmaveetoru valmistamiseks, kui toru pikkus on 10 m ja läbimõõt 12 cm ning valtsimiseks kulub 5% materjalist?
723. Silindrikujulise korstna kõrgus on 12 m ja läbimõõt 0,5 m. Mitu ruutmeetrit plekki kulub korstna valmistamiseks, kui valtsimiseks kulub 10% materjalist?
724. On vaja värvida 100 silindrikujulist posti. Iga posti kõrgus on 1,5 m ja läbimõõt 2,8 dm. Kui palju kulub värvimisel värnitsat, kui 1 m² jaoks on seda tarvis 0,25 kg?
725. Silindrikujuline korsten on valmistatud plekist, mille ruutmeeter kaalub 7 kg. Korstna kõrgus on 15 m ja diameeter 40 cm. Valtsimiseks kulub 8% materjalist. Arvuta korstna kaal täpsusega 0,1 kg.
726. Mitu tahvlit plekki mõõtmetega 142 cm×71 cm on vaja 20 silindrikujulise veepange valmistamiseks, kui pange läbimõõt on 30 cm ja kõrgus 40 cm? Pange külj ja põhi valmistatakse tervest plekitükist.
727. Silindri kõrgus $h=7$ cm ja põhja raadius $r=2$ cm. Arvuta silindri täispinnaga pindvõrdse ringi raadius.
728. Silindri telglõige on ruut, mille külj on 12 cm. Leia silindri täispindala.
729. Silindri kõrgus on 5 cm ja põhja raadius 6 cm. Kui pikk on telglõike diagonaal?
730. Silindri kõrgus on 10 cm ja põhja raadius 5 cm. Silindrit lõikab teljega paralleelne tasapind 4 cm kaugusel teljest. Arvuta lõike pindala.
731. Silindri kõrgus on 30 cm ja põhja raadius 25 cm. Silindri lõige teljega paralleelse tasapinnaga on ruut. Kui kaugel on lõiketaspind teljest?
732. Kui suur on silindri külgpindala ja telglõike pindala suhe?
733. Silindri põhja raadius on 5 cm ja kõrgus 13 cm. Silindrit lõikab teljega ristuv tasapind. Lõike pindala on külgpindala osade geomeetriline keskmine. Arvuta lõiketaspinna kaugus silindri põhjast.

7.4. SILINDRI RUUMALA

Silindri ruumala valemi koostamisel kasutame risttahuka ruumala valemit ja Cavalieri¹ printsiipi.

Cavalieri printsiibi kohaselt on kaks keha ruumvõrdsed, kui nad täidavad järgmist kolme tingimust:

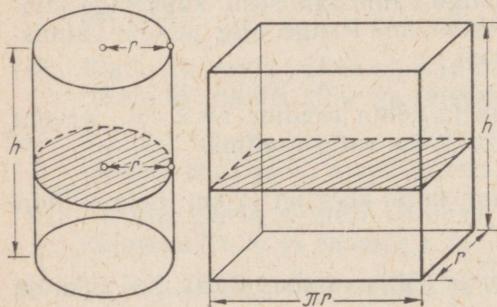
- 1) kehade kõrgused on võrdsed;
- 2) kehade põhjade pindalad on võrdsed;
- 3) kehade põhjadega paralleelsed lõiked, mis on nende põhjadest võrdsel kaugusel, on pindvõrdsed.

Cavalieri printsiibi alusel on kerge tõestada järgmist teoreemi silindri ruumala kohta.

Silindri ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega:

$$V = \pi r^2 h,$$

kus h on silindri kõrgus ja r silindri põhja raadius.



Joon. 165

Tõestus. Vaatleme koos silindriga risttahukat (joon. 165), mille põhiservade pikkusteks on r ja πr , kus r on silindri põhja raadius. Risttahuka kõrguseks võtame silindri kõrguse h . Sellise risttahuka põhi on pindvõrdne silindri põhjaga: mõlemal juhul $S_p = \pi r^2$. Risttahuka iga lõige tema põhjaga paralleelse tasapinnaga on põhjaga võrdne ja seepärast sellega ka pindvõrdne. Samuti on lugu silindri lõigetega, mis on paralleelsed tema põhjadega. Järelikult on risttahuka ja silindri kõik lõiked, mis on paralleelsed nende põhjadega, pindvõrdsed. Siis on pindvõrdsed ka lõiked, mis on nende põhjadest võrdsel kaugusel. Cavalieri printsiip lubab nüüd otsustada, et silinder, mille raadius on r ja kõrgus h , on ruumvõrdne risttahukaga, mille mõõtmed on r , πr ja h . Et selle risttahuka ruumala on $r \cdot \pi r \cdot h = \pi r^2 h$, siis ka silindri ruumala $V = \pi r^2 h$. Et πr^2 on silindri põhja pindala ja h silindri kõrgus, siis on teoreemi väide õige.

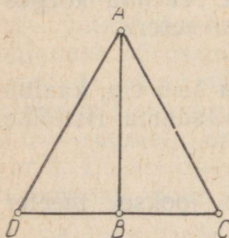
¹ Cavalieri, itaalia matemaatik, elas a. 1598—1647.

734. Arvuta ülesande 707 tingimuste järgi valmistatud silindri ruumala.
735. Mitu liitrit vett sisaldab silindrikujuline nõu, mille kõrgus on 9 dm ja seesmine läbimõõt 6 dm?
736. Leia ümara raudvarda kaal, teades, et varda läbimõõt on 20 mm, pikkus 1,75 m ja raua erikaal on 7,8. Vastus leia täpsusega 10 g.
737. Mitu tonni naftat mahutab silindrikujuline tsistern, mille diameeter on 9 m ja kõrgus 7 m? Nafta erikaaluks võta 0,85.
738. Silindrikujulise naftatsisterni diameeter on 12 m. Nafta pind tsisternis on 5 m kõrgusel. Kui palju kaalub tsisternis olev nafta?
739. Silindrikujulise kaevu läbimõõt on 12 dm. Mitu liitrit vett on selles kaevus, kui veepinna kaugus kaevu põhjast on 2,1 m?
740. Kui palju kaalub silindrikujuline kuiv männipalk (erikaal 0,52), mille pikkus on 4,5 m ja läbimõõt 22 cm?
741. Pumba silindri diameeter on 126 mm, kolvikäik on 203 mm. Kui palju vett annab pump ühe tunni jooksul, kui kolb teeb minutis 30 töökäiku? Vastus anna täpsusega 0,1 m³.
742. 25 m vasktraati kaalub 100,7 g. Arvuta traadi läbimõõt. Vase erikaal on 8,9.
743. Kera terastraati (erikaal 7,85), läbimõõduga 5 mm, kaalub 77 kg. Mitu meetrit on selles kera traati?
744. Tarvis on valmistada silindrikujuline anum, mille maht on 500 l. Kui kõrge peab see anum olema, kui diameeter on 76 cm? Vastus anna täpsusega 1 cm.
745. Silindrikujuline veenõu sisaldab 180 l vett. Veenõu kõrgus on 1 m. Kui suur on selle veenõu põhja diameeter?
746. Termomeetri elavhõbedasamm, pikkusega 15,6 cm, kaalub 5,2 g. Elavhõbeda erikaal on 13,6. Arvuta samba ristlõike pindala.
747. 40-millimeetrilise läbimõõduga kanepiköie jooksev meeter kaalub 1 kg. Arvuta erikaal.

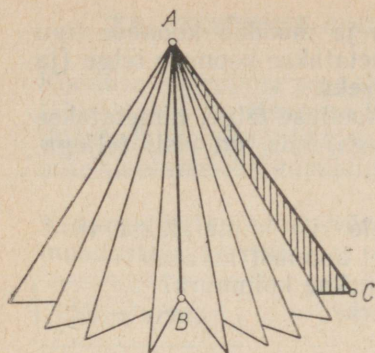
748. Silindrikujuline mõõteklaas on kuupsentimeetriliste jaotustega. Kahe järjestikuse jaotuse vaheline kaugus on 1,8 cm. Arvuta mõõteklaasi seesmine läbimõõt.
749. Silindrikujulise mõõteklaasi seesmine läbimõõt on 4 cm ja iga jaotus on 5 cm³. Kui suur on kahe järjestikuse jaotuse vaheline kaugus?
750. Malmtoru seinapaksus on 5 mm; selle toru seesmine diameeter on 75 mm. Malmi erikaal on 7,2. Arvuta 3 m pikkuse toru kaal täpsusega 0,1 kg.
751. 3 m pikkusest palgist, mille ristlõige on ruut küljepikkusega 18 cm, on tarvis valmistada kaks 1,3 m pikkust võimalikult suure läbimõõduga kaevuvõlli. Kui suur on seejuures puidu kadu kuupdetsimeetrites ja protsentides?
752. Ristkülikukujulist plekitükki, mille pikkus on 1,6 m ja laius 0,8 m, saab ümmarguseks toruks kokku keerata kahel viisil. Arvuta nende torude a) ruumalade suhe, b) külgpindalade suhe.
753. Arvuta täpsusega 0,5 m³ silindrikujulise silotorni maht, kui torni seesmine läbimõõt on 4,20 m ja seesmine kõrgus 7,21 m. Mitu tsentnerit silo mahutab see torn, kui 1 m³ silo kaalub 550 kg?
754. Silindrikujuline teeklaas, mille seesmine läbimõõt on 5,6 cm, on pooleni täidetud veega. Pärast seda, kui klaasi lasti kivi, mis kaalus 128 g, tõusis vee pind 2 cm võrra. Arvuta selle kivi erikaal.

7.5. KOONUS

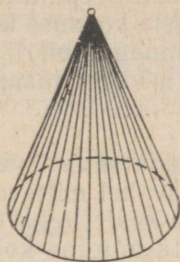
Olgu ABC mingi täisnurkne kolmnurk. Tasapinnal, millel asetseb see kolmnurk, saab joonestada ainult ühe täisnurkse kolmnurga, mis on võrdne kolmnurgaga ABC ja millel on sellega ühine kaatet AB ning ühine teravnurga tipp A . Joonisel 166 on selliseks kolmnurgaks ABD .



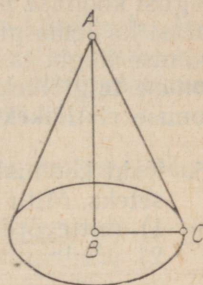
Joon. 166



Joon. 167



Joon. 168



Joon. 169

Ruumis leidub lõpmata palju täisnurkseid kolmnurki, mis on võrdsed antud kolmnurgaga ABC ja mille üheks kaatetiks on lõik AB ning ühe teravnurga tipuks punkt A (joon. 167). Kolmnurga ABC saab sobiva pöördega ümber kaateti AB viia ühtimisele iga kolmnurgaga sellest hulgast. Seepärast ütleme, et kõik need kolmnurgad on saadud kolmnurgast ABC selle pöörlemisel ümber kaateti AB . Et kõik need kolmnurgad täidavad ruumis keha, mida nimetatakse koonuseks, siis defineerime koonuse järgmiselt:

koonuseks nimetatakse keha, mille moodustab ümber ühe oma kaateti pöörlev täisnurkne kolmnurk.

Koonuse pind koosneb kahest osast. Ringi, mille moodustab oma kaateti ümber pöörleva täisnurkse kolmnurga teine kaatet, nimetatakse koonuse **põhjaks**. Koonuse pinna osa, mille moodustab pöörleva kolmnurga hüpotenuus, nimetatakse koonuse **külgpinnaks** (joon. 168). Koonuse külgpind ei ole tasapinna osa.

Pöörleva kolmnurga hüpotenuusi nimetatakse koonuse **moodustajaks**.

Koonus on määratud, kui on antud täisnurkne kolmnurk, mille pöörlemisel moodustub see koonus, ja on näidatud, kumba selle kaatetit tuleb kasutada pöörlemisteljena.

Kaatetit, mille ümber pöörleb koonust moodustav kolmnurk, nimetatakse koonuse **teljeks**. Koonuse põhja tekitavat kaatetit (ja ühtlasi ka tema pikkust) nimetatakse koonuse **põhja raadiuseks**. Kolmnurga tippu, mis asetseb koonuse põhja tekitava kaateti vastas, nimetatakse koonuse **tipuks**. Koonuse tipp on koonuse kõigi moodustajate ühisosa. Joonisel 169 kujutatud koonuse telg on AB , põhja raadius BC , tipp A ja moodustaja AC .

Koonuse telg on risti koonuse põhjaga ja möödab koonuse tipu kaugust koonuse põhjast. Seepärast nimetatakse koonuse telge (ja ühtlasi ka tema pikkust) koonuse **kõrguseks**.

Koonuse lõiget tasapinnaga, mis läbib koonuse telge, nimetatakse **koonuse telglõikeks**, ja lõiget tasapinnaga, mis on risti teljega, koonuse **ristlõikeks**.

755. Kaht koonust, mida saab ühtimisele viia, nimetatakse võrdseteks. Mitu omavahel mittevõrdset koonust määrab
- 1) mittevõrdsete kaatetitega täisnurkne kolmnurk?
 - 2) võrdhaarne täisnurkne kolmnurk?
756. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on 30° ja selle vastaskaatet 7 cm. Leia selle kolmnurga pöörlemisel moodustuvate koonuste
- 1) kõrgused,
 - 2) moodustajad,
 - 3) põhjade pindalad.
757. Täisnurkne kolmnurk, mille pindala on 30 cm^2 , pöörleb ümber ühe kaateti. Kui pikk on sel viisil saadud koonuse moodustaja, kui koonuse põhja raadius on 5 cm?
- 758 Kirjelda koonuse telglõiget ja ristlõiget.
759. Koonuse telglõike pindala on 3 dm^2 . Arvuta koonuse moodustaja pikkus, kui koonuse kõrgus on 2 dm.
760. Koonuse põhja raadius on 11 cm. Koonuse telglõikeks on täisnurkne kolmnurk. Leia telglõike pindala.
761. Koonuse põhja raadius on 8 dm. Koonust lõikab tasapind, mis on paralleelne koonuse põhjaga ja läbib kõrguse keskpunkti. Määra lõike pindala.
762. Koonuse kõrgus on 28,3 cm. Kui kaugel tipust tuleb koonust lõigata põhjaga paralleelse tasapinnaga, et lõike pindala oleks pool põhja pindalast?
763. Leia nurk koonuse kõrguse ja moodustaja vahel, kui koonuse põhja diameeter on võrdne moodustajaga.
764. Nurk koonuse kõrguse ja moodustaja vahel on 60° . Moodustaja pikkus on 4 dm. Arvuta
- 1) põhja pindala,
 - 2) telglõike pindala,
 - 3) telje keskpunkti läbiva ja teljega risti oleva lõike pindala.

7.6. KOONUSE PINDALA

Koonuse külginna pindala nimetatakse koonuse **külgpindalaks** ja tähistatakse S_k . Koonuse kogu pinna pindala nimetatakse koonuse **täispindalaks** ja tähistatakse S_t . Koonuse kül- ja täispindala valemite tuletamiseks kasutame koonuse pinnalaotust.

Koonuse külgpindala võrdub tema põhja poole ümbermõõdu ja moodustaja korrutisega:

$$S_k = \pi r m,$$

kus r on koonuse põhja raadius ja m moodustaja.

Tõestus. Koonuse külgpinnalaotus on ringi sektor, mille raadius võrdub koonuse moodustajaga m ja kaare pikkus võrdub koonuse põhja ümbermõõduga $2\pi r$ (joon. 170). Et sektori pindala võrdub tema kaare pikkuse ja raadiuse poole korrutisega, siis koonuse külgpindala

$$S_k = \frac{2\pi r \cdot m}{2}.$$

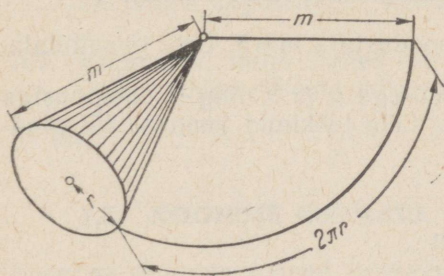
Siit saamegi näidatud valemi.

Koonuse täispindala võrdub põhja poole ümbermõõdu ja moodustaja ning põhja raadiuse summa korrutisega:

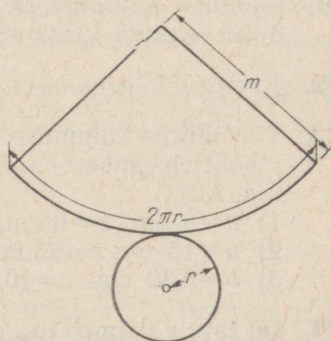
$$S_t = \pi r(m + r).$$

Tõestus. Lisades koonuse külginna laotusele koonuse põhja, saame koonuse pinnalaotuse (joon. 171). Koonuse põhja pindala on $S_p = \pi r^2$. Et koonuse täispindala on $S_t = S_k + S_p$, siis

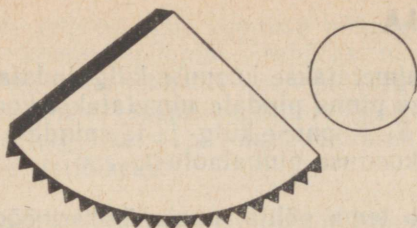
$$S_t = \pi r m + \pi r^2 = \pi r(m + r).$$



Joon. 170



Joon. 171



Joon. 172

765. Koonuse külgpinnalaotus on ringi sektor, mille raadius on 14 cm ja kaare pikkus 62,8 cm. Arvuta koonuse põhja raadius ja kõrgus.
766. Koonuse külgpinnalaotus on ringi sektor, mille raadius on 10 cm ja nurk 90° . Arvuta koonuse põhja raadius. Joonesta see külgpinnalaotus, varusta see kleepimiseks vajalike äärtega ning kleebi kokku koonuse külgpinna mudel (joon. 172). Mõõda saadud mudelil põhja raadius ja võrdle mõõtmise tulemust arvutustega. Joonesta veel koonuse põhi ja kleebi see tema kohale koonuse mudelil.
767. Koonuse põhja raadius on 12 cm ja koonuse moodustaja on 4 dm. Kui pikk on külgpinnalaotuse kaar ja kui suur on selle nurk?
768. Koonuse külgpinnalaotuse nurk on 120° . Koonuse moodustaja on 15 cm. Leia koonuse põhja diameeter.
769. Arvuta ülesande 766 tingimuste järgi valmistatud koonuse külgpindala ja täispindala.
770. Koonuse kõrgus on 4 dm ja põhja raadius 3 dm. Arvuta kül- ja täispindala täpsusega $0,1 \text{ dm}^2$.
771. Koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk, mille külg on 8 dm. Arvuta koonuse täispindala täpsusega $0,1 \text{ dm}^2$.
772. Koonuse kõrgus $h=3$ ja moodustaja $m=5$. Leia täispindala.
773. Täisnurkne kolmnurk kaatetitega a ja b ning hüpotenuusiga c pöörleb ümber kaateti a . Leia tekkinud koonuse täispindala, kui
- 1) $a=8 \text{ cm}$, $b=6 \text{ cm}$;
 - 2) $a=15 \text{ cm}$, $c=25 \text{ cm}$;
 - 3) $b=5,30 \text{ cm}$, $c=10,2 \text{ cm}$.
774. On tarvis valmistada plekist koonus, mille põhja läbimõõt on 18 cm ja moodustaja 15 cm. Kui palju plekki kulub, kui materjali kadu on 10%.

775. Koonusekujulise telgi kõrgus on 3,7 m ja põhja läbimõõt 4,4 m. Mitu ruutmeetrit riidet kulus telgi katmiseks?
776. Koonusekujulise katuse räästa pikkus on 18,5 m ja tipu kaugus räästast 7,4 m. Kui suur on selle katuse pindala?
777. Mitu ruutmeetrit plekki kulub torni koonusekujulise katuse katmiseks, kui katuse kõrgus on 2,9 m, torni läbimõõt on 7,2 m ja valtsimiseks kulub 7% materjalist?
778. Leia koonuse kõrgus, kui koonuse külgpindala on $0,42 \text{ dm}^2$ ja moodustaja 7 cm.
779. Koonuse kõrgus on 24 dm ja põhja raadius 7 dm. Arvuta külgpinnalaotuse nurk.
780. Koonuse külgpindala on 1 m^2 ja külgpinnalaotuse nurk 120° . Määra koonuse täispindala.
781. Koonuse täis- ja külgpindala suhe on 3 : 2. Leia suurim nurk tema moodustajate vahel.
782. Torni koonusekujulise katuse pindala on 250 m^2 ja põhja läbimõõt on 9 m. Leia katuse kõrgus.
783. Võrdhaarne kolmnurk pöörleb oma kõrguse ümber. Arvuta selle kolmnurga küljed, kui kolmnurga ümbermõõt on 30 cm ja tekkinud pöördkeha täispindala on $60\pi \text{ cm}^2$.
784. Poolring on keeratud koonuse külgpinnaks. Leia nurk koonuse moodustaja ja kõrguse vahel.
785. Ringi sektori raadius on 3 m ja nurk 120° . Sektor on kokku keeratud koonuse külgpinnaks. Määra koonuse põhja raadius.
786. Täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on 12 cm ja 5 cm, pöörleb ümber hüpotenuusi. Leida tekkinud pöördkeha pindala.
787. Kolmnurk, mille küljed on 7 cm, 9 cm ja 12 cm, pöörleb ümber kõige pikema külje. Leida tekkinud pöördkeha pindala.

7.7. KOONUSE RUUMALA

Koonuse ruumala valemi tuletamisel kasutame 1) eeskirja püramiidi ruumala määramiseks, 2) sarnaste kolmnurkade omadusi, 3) Cavalier' printsiipi. Tõestame, et

koonuse ruumala võrdub tema põhja pindala ja kõrguse ühe kolmandiku korrutisega:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

kus r on koonuse põhja raadius ja h koonuse kõrgus.

Tõestus. Vaatleme koos koonusega nelinurkset püramiidi, mille põhjaks on ristkülik külgede pikkustega r ja πr . Püramiidi kõrguseks võtame koonuse kõrguse h (joon. 173).

Vaadeldava koonuse ja püramiidi põhjad on pindvõrdsed: mõlemal juhul $S_p = \pi r^2$.

Asetsegu vaadeldav koonus ja püramiid ühel ning samal tasapinnal. Lõikame neid kehi tasapinnaga, mis on paralleelne põhjade tasapinnaga ja mille kaugus tippudest on k . Koonuse ja püramiidi lõiked selle tasapinnaga on kehade põhjadest võrdsel kaugusel $h-k$.

Koonuse lõige on ring; olgu selle raadius a . Püramiidi lõige on ristkülik; olgu selle küljed b ja c .

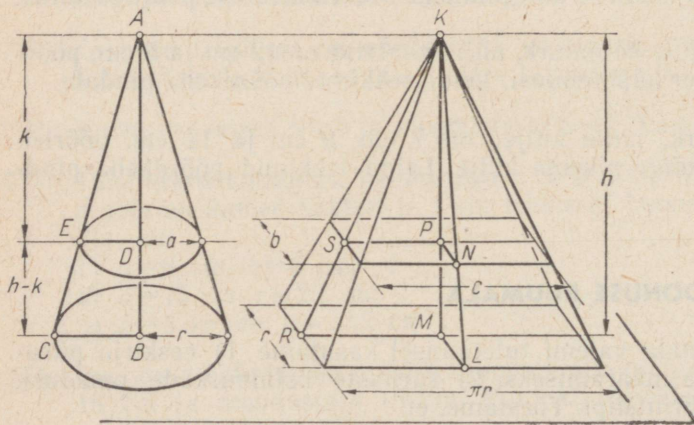
Näitame, et need lõiked on pindvõrdsed.

Koonuse puhul leiame sarnastest kolmnurkadest ABC ja ADE :

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{a}{r} = \frac{k}{h} \Rightarrow a = \frac{kr}{h}.$$

Seega koonuse lõike pindala $S_1 = \pi \frac{k^2 r^2}{h^2}$

Püramiidi puhul leiame sarnastest kolmnurkadest KLM ja KNP :



Joon. 173

$$\frac{NP}{LM} = \frac{KP}{KM} \Rightarrow \frac{\frac{b}{2}}{r} = \frac{k}{h} \Rightarrow \frac{b}{r} = \frac{k}{h} \Rightarrow b = \frac{kr}{h}.$$

Samuti saame sarnastest kolmnurkadest KMR ja KPS :

$$\frac{PS}{MR} = \frac{KP}{KM} \Rightarrow \frac{\frac{c}{2}}{\pi r} = \frac{k}{h} \Rightarrow \frac{c}{\pi r} = \frac{k}{h} \Rightarrow c = \frac{\pi kr}{h}.$$

Nüüd saame leida püramiidi lõike pindala:

$$S_2 = bc = \frac{\pi k^2 r^2}{h^2}.$$

Nagu siit selgub, on vaadeldavad lõiked tõepoolest pindvõrdsed:

$$S_1 = S_2.$$

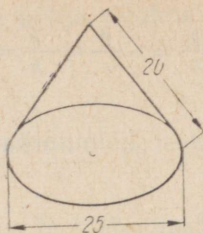
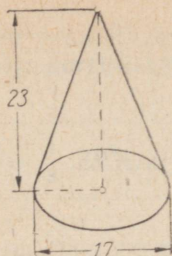
Lõigete kaugus k koonuse ja püramiidi tippudest (ja seega ka nende põhjadest) on valitud täiesti vabalt. Järelikult on kõik koonuse ja püramiidi põhjadest võrdsetel kaugustel asetsevad lõiked pindvõrdsed.

Cavalieri printsiibi põhjal võime nüüd otsustada, et koonus, mille raadius on r ja kõrgus h , on ruumvõrdne sellise nelinurkse püramiidiga, mille põhjaks on ristkülik külgedega r ja πr ning kõrgus on h .

Püramiidi ruumala võrdub tema põhja pindala ja kõrguse ühe kolmandiku korrutisega. Koonus on ruumvõrdne vaadeldava püramiidiga: tema põhi on pindvõrdne püramiidi põhjaga ja kõrgus võrdne püramiidi kõrgusega. Siit järeldame, et ka koonuse ruumala on võrdne tema põhja pindala ja kõrguse ühe kolmandiku korrutisega.

Et vaadeldav koonus on valitud vabalt, siis kehtib tulemus iga koonuse puhul.

788. Arvuta ülesande 766 tingimustel valmistatud koonuse ruumala.
789. Koonuse põhja raadius on 4,8 dm. Koonuse kõrgus on 1,15 m. Arvuta koonuse ruumala täpsusega 0,1 dm³.
790. Koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk, mille külge on 4 dm. Arvuta koonuse ruumala täpsusega 0,01 dm³.
791. Koonuse telglõike pindala on 5,1 dm². Koonuse kõrgus on 3 dm. Arvuta koonuse ruumala täpsusega 0,01 dm³.



Joon. 174

792. Arvuta joonisel 174 kujutatud koonuste ruumalad.
793. Täida lüngad järgnevas tabelis (d — koonuse põhja diameeter).

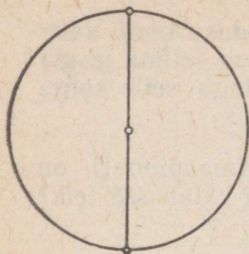
r	h	m	d	V
4	6			
	2,0		1,6	
3		5		
	12	13		
		2,5	4,0	

794. Koonusekujulise kiviõehunniku ümbermõõt on 5,4 m ja kõrgus 1,2 m. Kui palju kaalub kiviõesi selles hunnikus, kui 1 m³ sütt kaalub 1,3 t?
795. Kui palju kaalub vasest koonus vees, kui koonuse põhja diameeter on 4,0 cm ja kõrgus 5,0 cm? Vase erikaal on 8,8.
796. Koonusekujulise kartulikuhja ümbermõõt on 8,6 m ja kõrgus 1,2 m. Mitu tonni kartuleid on selles kuhjas, kui 1 hl kartuleid kaalub 72 kg?
797. Plekist on lõigatud sektor, mille raadius on 30 cm ja nurk 240°. See sektor on kokku keeratud koonuseks. Leia saadud koonuse ruumala täpsusega 0,01 dm³.
798. Vasetikist, mis kaalub 24 kg, on tarvis valada koonus, mille põhja raadius on 10 cm. Leia koonuse kõrgus täpsusega 1 mm. (Vt. ülesanne 795.)

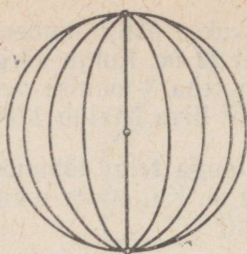
799. Koonusekujulise liivakuhja põhja übermööduks saadi samudega möötmise teel 22 m. Kuhja kõrgus on (silma järgi) 2 m. Mitu sõitu tuleb teha 3-tonnise veoautoga selle kuhja äravedamisel, kui 1 m³ liiva kaalub 1700 kg?
800. Ümmarguse terava tipuga telgi läbimööd (maapinnal) on 4,00 m ja kõrgus 5,00 m. Kui suure maatüki katab see telk? Kui suur on telgi maht?
801. Võrdkülgne kolmnurk, mille tipunurk on 120° ja haar 20 cm, pöörlleb ümber aluse. Leia tekkinud pöördkeha ruumala.
802. Täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on 12 cm ja 16 cm, pöörlleb ümber hüpotenuusi. Leia tekkinud pöördkeha ruumala.
803. Kolmnurk, mille küljed on 13, 14 ja 15 cm, pöörlleb keskmise pikkusega külje ümber. Arvuta tekkinud pöördkeha ruumala.
804. Täidetud koonusekujulisest anumast, mille kõrgus on 0,18 m ja põhja läbimööd 0,24 m, valatakse vedelik ümber silindrikujulisse anumasse, mille põhja läbimööd on 0,10 m. Kui kõrgel on vedeliku pind silindrikujulises anumast?
805. Koonuse telglõige on võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille pindala on 16 m². Arvuta koonuse ruumala.
806. Koonuse põhja pindala on 25π cm² ja täispindala 90π cm². Arvuta koonuse ruumala.
807. Koonuse kõrgus on 15 m ja ruumala 2000π m³. Arvuta koonuse täispindala.
808. Koonuse kõrgus on 12 cm ja külgpindala 65π cm². Arvuta koonuse ruumala.
809. Koonuse põhja pindala on 225π cm². Koonust lõikab tema teljega ristuv tasapind, mille kaugus koonuse tipust on 4 cm. Lõike pindala on 25π cm². Arvuta koonuse ruumala.
810. Koonuse põhja pindala on 64π cm². Koonust lõikab tema põhjaga paralleelne tasapind, mille kaugus põhjast on 10 cm. Lõike pindala on 9π cm². Arvuta koonuse ruumala.

7.8. KERA JA SFÄÄR

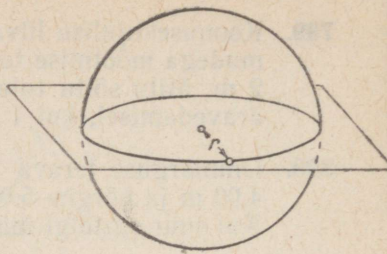
Ringi diameeter jaotab ringi kaheks poolringiks (joon. 175). Tasapinnal leidub ainult kaks poolringi, millele antud sirglõik on ühiseks diameetriks.



Joon. 175



Joon. 176



Joon. 177

Ruumis leidub lõpmata palju ühise diameetriga poolringe (joon. 176). Iga kaks poolringi sellest hulgast on võrdsed, sest neid saab ühtimisele viia sobiva pöörde abil ümber ühise diameetri. Ütleme, et selline poolringide hulk on saadud ühest poolringist selle pöörlemisel ümber oma diameetri. Ühise diameetriga poolringide hulk ruumis täidab ühe kera. Kasutame seda asjaolu kera defineerimisel.

Keraks nimetatakse keha, mis tekib poolringi pöörlemisel oma diameetri ümber. Kera pinda nimetatakse sfääriks.

Sfäär tekib poolringjoone pöörlemisel ümber oma diameetri. Sfääri tekitava poolringjoone keskpunkti nimetatakse sfääri ja samuti vastava kera **keskpunktiks**. Sfääri kõik punktid on võrdsetel kaugustel sfääri keskpunktist. Seepärast võib öelda, et sfäär on ruumi ühest antud punktist antud kaugusel asetsevate punktide hulk.

Antud punkt O ja antud kaugus r määravad ühe ja ainult ühe sfääri S , samuti ühe ja ainult ühe kera K . See sfäär S on ruumi kõigi selliste punktide hulk $\{X\}$, mille kaugus punktist O on r , lühidalt,

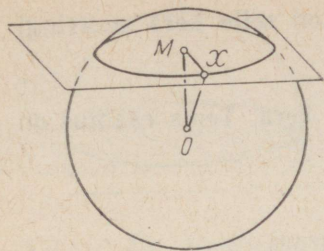
$$S = \{X | OX = r\}.$$

Samade andmetega O ja r määratud kera K on ruumi kõigi selliste punktide hulk $\{X\}$, mille kaugus punktist O on r või sellest väiksem, lühidalt,

$$K = \{X | OX \leq r\}.$$

Lõiku, mis ühendab sfääri mistahes punkti sfääri keskpunktiga (samuti selle lõigu pikkust), nimetatakse sfääri ja samuti vastava kera **raadiuseks**. Iga kaks võrdsete raadiustega sfääri (samuti kera) on võrdsed.

Lõiku, mis ühendab sfääri kaht punkti, nimetatakse sfääri **kõõluks**. Sfääri kõõlu, mis läbib tema keskpunkti (samuti selle kõõlu pikkust), nimetatakse sfääri ja ka vastava kera **diameetriks**.



Joon. 178



Joon. 179

Tõestame, et

sfääri lõige tasapinnaga on ringjoon.

Tõestus. Kui lõikav tasapind läbib sfääri keskpunkti, siis järeldub teoreemi väide sellest, et lõike iga punkt on ühel ja samal kaugusel sfääri keskpunktist (joon. 177).

Vaatleme lõiget tasapinnaga, mis ei läbi sfääri keskpunkti O (joon. 178). Olgu OM keskpunktist lõiketaspinnale tõmmatud ristlõik ja olgu $OM=k$. Võtame lõikel vabalt mingi punkti X ja ühendame selle lõikude abil punktidega O ja M . Olgu $XM=x$. Lõik OX on sfääri raadius r . Et $XM \perp OM$, siis on kolmnurk OMX täisnurkne ja Pythagorase teoreemi põhjal

$$x^2 + k^2 = r^2 \Rightarrow x = \sqrt{r^2 - k^2}.$$

Viimane võrdus näitab, et lõike kõigi punktide kaugused punktist M on võrdsed. Seega on lõige tõepoolest ringjoon keskpunktiga M ja raadiusega x .

Ühtlasi järeldub siit, et sfääri iga kaks tasapinnalist lõiget, mis on samal kaugusel sfääri keskpunktist, on võrdsed.

On selge, et kera lõige tasapinnaga on ring.

Erijuhul, kui $k=r$, on $x=0$ ja tasapinnal ning keral on ainult üks ühine punkt.

Kera lõiget tema keskpunkti läbiva tasapinnaga nimetatakse kera **suuringiks**. Sfääril vastab viimasele **suuringjoon**. Näiteks Maa ekvaator ja meridiaanid on tema suuringjooned (joon. 179). Suuring jaotab kera kaheks **poolkeraks**.

811. Nimeta kerakujulisi kehi.

812. Tõesta lause: kera iga kaks suuringi on võrdsed.

813. Kera raadius on 30 cm. Kui suur on kõige suurem kaugus kera kahe punkti vahel? Kus asetsevad kera punktid, mille vaheline kaugus on suurim?

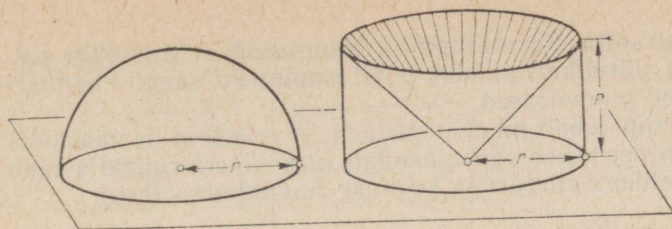
814. Kera diameeter on 14 cm. Kui suur on selle kera suuringi pindala?
815. Maa on oma kuju poolest ligikaudu kera. Tema raadius on 6370 km. Arvuta
- 1) ekvaatori diameeter,
 - 2) meridiaani diameeter,
 - 3) meridiaani kaar ekvaatorist pooluseni.
816. Kera raadius on 1 m. Kera on lõigatud tasapinnaga, mille kaugus kera keskpunktist on 6 dm. Arvuta lõike pindala.
817. Mitu kilomeetrit läbib Maa pöörlemise tõttu ühe tunni jooksul asula, mis asetseb põhjalaiusel 60° ? Selgita gloobuse või maakaardi abil, kas Eesti linnad liiguvad sellest kiiremini või aeglasemalt.
818. Sfääri raadius on 5 dm. A ja B on selle sfääri kaks punkti. Arvuta
- 1) lühim kaugus A ja B vahel mööda sfääri, kui nurk nendesse punktidesse tõmmatud raadiuste vahel on 60° ,
 - 2) kõõlu AB pikkus, kui vastav nurk on 120° .
819. Sfääri raadius on 1 m. A ja B on sfääri diameetri otspunktid. Kõõlu AC pikkus on 8 dm. Arvuta
- 1) kõõlu BC pikkus,
 - 2) punkti C kaugus diameetrist AB .
820. Tasapind lõikab temaga ristuvat kera diameetrit punktis M , mille kaugus kera pinnast on 8 cm. Punkt P asetseb sellel tasapinnal 11 cm kaugusel punktist M . Kas punkt P kuulub vaadeldavale kerale, kui kera raadius on 13 cm?

7.9. KERA RUUMALA

Kera ruumala valemi tuletamisel kasutame silindri ja koonuse ruumala valemeid ning Cavalieri printsiipi.

Kera ruumala võrdub $\frac{4}{3} \pi$ ja raadiuse kuubi korrutisega:

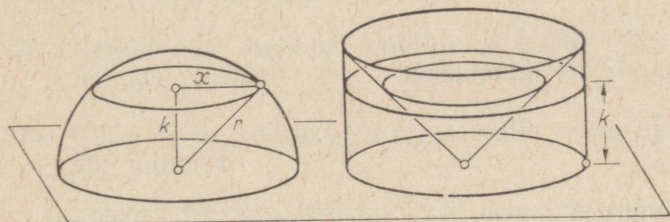
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$



Joon. 180

Tõestus. Vaatleme koos poolkeraga sellist silindrit, mille kõrguseks ja põhja raadiuseks on poolkera raadius r . Silindri ühe põhja asetame poolkera suuringi tasapinnale (joon. 180). Jätame sellest silindrist ära koonusekujulise osa. Arajätava koonuse põhjaks võtame silindri ülemise põhja ja tipuks silindri alumise põhja keskpunkti. Võrdleme jääkkehaga poolkeraga. Näitame, et nad on ruumvõrdsed.

Lõikame jääkkehaga ja poolkera tasapinnaga, mis on paralleelne poolkera suuringi tasapinnaga ja mille kaugus viimasest on k (joon. 181). Näitame, et tekkinud lõiked on pindvõrdsed.



Joon. 181

Poolkera lõige on ring, mille raadius x on leitav Pythagorase teoreemi abil:

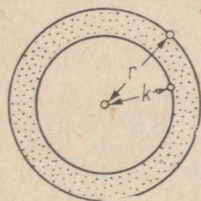
$$x^2 = r^2 - k^2.$$

Jääkkehaga lõige on rõngas (joon. 182), mille välimine raadius on r ja seesmine raadius k (joon. 183).

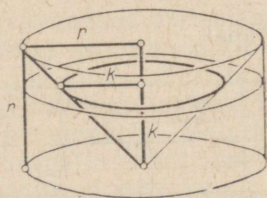
Niisiis on poolkera lõike pindala $S_1 = \pi x^2 = \pi(r^2 - k^2)$

ja jääkkehaga lõike pindala (kahe ringi pindalade vahe)

$S_2 = \pi r^2 - \pi k^2 = \pi(r^2 - k^2)$. Seega tõepoolest $S_1 = S_2$.



Joon. 182



Joon. 183

See tulemus ei sõltu lõiketapinna kaugusest k (muidugi eeldame, et $k \leq r$). Järelikult on kõik põhitapinnast samal kaugusel asetsevad lõiked pindvõrdsed.

Cavalieri printsiip lubab nüüd otsustada, et poolkera ja jääkkehade ruumalad on võrdsed. See aga tähendab, et poolkera ruumala saab arvutada vaadeldava silindri ja koonuse ruumalade vahena:

$$V_{\text{poolkera}} = V_{\text{silinder}} - V_{\text{koonus}} = \\ = \pi r^3 - \frac{1}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3.$$

Kera ruumala on poolkera ruumala kahekordne:

$$V_{\text{kera}} = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Kera ruumala arvutamist saab lihtsustada, kui panna tähele, et siin tuleb raadiuse kuubi alati korrutada ühe ja sellesama teguriga

$$\frac{4}{3} \pi \approx 4,19.$$

Seega kera ruumala on ligikaudselt:

$$V \approx 4,19 r^3.$$

Kui on vajalik suurem täpsus, siis tuleb tegur $\frac{4}{3} \pi$ väljendada täpsemalt.

Kasutades kera diameetrit saab kera ruumala valemi kirjutada ka nii:

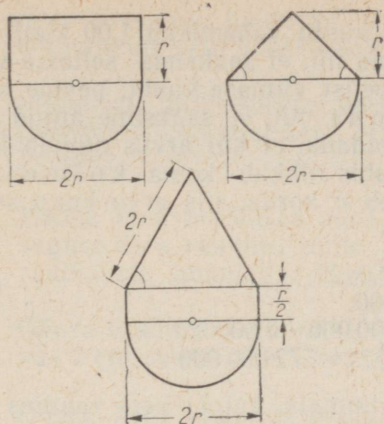
$$V = \frac{\pi}{6} d^3$$

ja et $\frac{\pi}{6} \approx 0,524$, siis $V \approx 0,524 d^3$.

821. Kera raadius on 1 dm. Arvuta kera ruumala.

822. Täida järgnev tabel.

r	5,0	12,1	6	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	3,5	$3\frac{1}{5}$
r^3							
V							



Joon. 184

823. Teades, et $r=8$ cm, määra kehade ruumalad, mille ristlõiked on kujutatud joonisel 184.
824. Kerakujulise ballooni raadius on 2,1 m. Kui suur on selle ballooni maht?
825. Kui suur on sellise kera mass, mille kohta on teada järgmised andmed:

Materjal	Tihedus	Diameeter
Puu	1,15	0,35 m
Liivakivi	2,33	1 dm
Elevandiluu	1,92	4 cm
Marmor	2,6	0,6 m

7.10. KUUPIDE TABEL

Kera ruumala arvutamisel on soovitatav kasutada arvude kuupide tabelit (vt. V. Bradis. Neljakohalised matemaatilised tabelid keskkoolidele. Tabel V). See tabel sisaldab kõigi neljakohaliste tüvedega arvude 1,000 kuni 2,159 kuupe ümardatult nelja tüvenumbriini ja kõigi kolmekohaliste tüvedega arvude 2,16 kuni 10,0 kuupesamuti ümardatult nelja tüvenumbriini. Meie kasutame oma arvutustes kuni kolme tüvenumbriiga arvude kolme tüvenumbriini ümardatud kuupe. Tabeli kasutamine ei erine varem tundmaõpitud tabelite kasutamisest. Nii leiame, et

$$1,18^3 = 1,643 \approx 1,64; \quad 3,24^3 = 34,01 \approx 34,0; \quad 9,06^3 = 743,7 \approx 744.$$

Kui arv, mille kuubi otsime, ei kuulu vahemikku 1,00 kuni 10,0, siis peame temas koma nihutama nii, et saaksime sellesse vahemikku kuuluma arvu. Leides tabelist viimase kuubi, peame selles koma nihutama vastassuunas nii, et saaksime antud arvu kuubi. Seejuures tuleb mees pidada, et kui arvus nihkub koma ühe koha võrra, siis arvu kuubis nihkub koma kolme koha võrra. Üldiselt, kui arv suureneb n korda, siis arvu kuup suureneb n^3 korda. Nii saame, näiteks:

$$0,35^3 = 3,5^3 : 1000 = 42,9 : 1000 = 0,0429;$$

$$35^3 = 1000 \cdot 3,5^3 = 1000 \cdot 42,9 = 42\,900;$$

$$0,083^3 = 8,3^3 : 1\,000\,000 = 572 : 1\,000\,000 = 0,000572;$$

$$830^3 = 1\,000\,000 \cdot 8,3^3 = 1\,000\,000 \cdot 572 = 572\,000\,000.$$

Leiame tabelit kasutades kera ruumala, kui 1) kera raadius $r = 2,7$ ja 2) kera diameeter $d = 6,3$.

$$1) V = 4,19 \cdot 2,7^3 = 4,19 \cdot 19,7 = 82,5 \approx 83;$$

$$2) V = 0,524 \cdot 6,3^3 = 0,524 \cdot 250 = 131 \approx 130.$$

826. Leia tabeli abil järgmiste arvude kuubid:

1) 7	1,8	3,4	1,27	2,17	5,96
2) 0,8	0,43	0,21	0,536	0,737	0,327
3) 35	12,8	46,9	28,4	12,6	83,5
4) 0,04	324	751	0,062	0,028	0,097

827. Kui palju kaaluvad kerad, mille kohta on teada järgmised andmed:

Materjal	Erikaal	Raadius
Teras	7,83	7 cm
Tina	11,4	8,2 mm
Malm	7,25	11 cm
Puu	0,62	2,1 dm

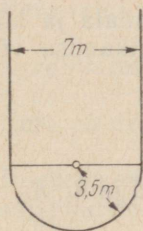
828. Kui palju kaalub korgist kera, mille läbimõõt on 1 m? Korgi erikaal on 0,24.

829. Kui palju kaaluvad 1000 teraskuuli, kui iga kuuli läbimõõt on 4 mm?

830. Mitu liitrit vett mahutab poolmeetrise läbimõõduga poolkerakujuline pada?

831. Mitu 10-millimeetrise läbimõõduga kera saab valada tina-tükist, mille kaal on 11 g?

832. Mitu protsenti materjali läheb kaotsi, kui kuubist treida võimalikult suur kera? Vastus anna täpsusega 0,1%.
833. Silindrist, mille kõrgus võrdub põhja diameetriga, on treitud võimalikult suur kera. Mitu protsenti materjalist on maha treitud?
834. Kolme kera raadiused on 3 cm, 4 cm ja 5 cm. Arvuta niisuguse kera raadius, mille ruumala võrdub antud kerade ruumalade summaga.
835. Oõnsa malmkera välimine diameeter on 2 dm ja seinapaksus 2 cm. Arvuta kera kaal täpsusega 0,01 kg.
836. Oõnsa kera välimine diameeter on 5 dm ja seinapaksus 4 cm. Arvuta kera seinaruumala.
837. Oõnsa kera seinaruumala on 876π cm³ ja seinapaksus 3 cm. Arvuta kera välis- ja sisepinna raadiused.
838. Arvuta Maa ruumala (vt. ülesanne 815).
839. Päikese raadius on 695 400 km. Mitmel Maa suurusel planeedil on kokku niisama suur ruumala kui Päikesel?
840. Metallisulamist kera diameeter on 40 cm. Selle kera kaal on 202,5 kg. Arvuta sulami erikaal.
841. Kuulitõukamisel kasutatav kuul kaalub 7,25 kg. Kui kuul koosneb terasest, siis on ta übermõõt 380 mm. Kui aga kuuli südamik on tinast, siis on kuuli übermõõt 349 mm ja kuuli katab terase kiht, mille paksus on 8 mm. Arvuta
 1) teraskuuli läbimõõt ja ruumala,
 2) teraskatte ja tinatäidise kaalud.
842. Joonisel 185 on kujutatud veepaagi ristlõige. Kui kõrge peab olema paagi silindriline osa selleks, et paagi ruumala oleks 150 m³?



Joon. 185

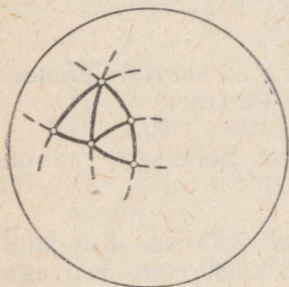
7.11. KERA PINDALA

Kera pinda (sfääri) ei saa laotada tasapinnale. Seepärast ei saa kera pindala valemi tuletamisel kasutada pinnalaotust. Selle valemi saamiseks väljendame esmalt kera ruumala ligikaudselt püramiidide ruumalade summana ja kasutame seejärel kera ruumala valemit. Tulemuseks saame, et

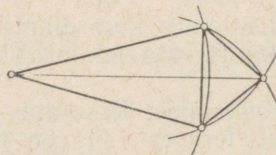
kera pindala võrdub kera suuringi neljakordse pindalaga:

$$S = 4 \pi r^2.$$

Tõestus. Valime sfääril mingi lõpliku arvu punkte nii, et lähetikuste punktide ühendamisel suuringjoonte kaartega jaguneb sfäär väikesteks kõverpinnalisteks kolmnurkadeks (joon. 186). Iga sellise kolmnurga kolm tippu määravad koos kera keskpunktiga kolmnurkse püramiidi (joon. 187).



Joon. 186



Joon. 187

Kui kõverpinnaliste kolmnurkade arv on n , siis oleme sel viisil moodustanud n kolmnurkset püramiidi. Kera ruumala on ligikaudselt võrdne nende püramiidide ruumalade summaga:

$$V_{\text{kera}} \approx V_{\text{püramiidid}}.$$

Et püramiidi ruumala on võrdne tema põhja pindala ja kõrguse ühe kolmandiku korrutisega, siis võime selle ligikaudse võrduse kirjutada nii:

$$V_{\text{kera}} \approx \frac{1}{3} (S_1 h_1 + S_2 h_2 + \dots + S_n h_n),$$

kus S_1, S_2, \dots, S_n on püramiidide põhjade pindalad ja h_1, h_2, \dots, h_n on nende kõrgused.

Saadud võrdus on seda täpsem, mida väiksemad on püramiidide põhjad. Seega tuleb suurema täpsuse saavutamiseks püramiidide arvu suurendada.

Püramiidide arvu kasvamisel lähenevad püramiidide kõrgused kera raadiusele. Seepärast võime küllalt suure arvu n korral oma ligikaudse võrduse kirjutada ka nii:

$$V_{\text{kera}} \approx \frac{1}{3} (S_1 r + S_2 r + \dots + S_n r) = \\ = \frac{1}{3} r (S_1 + S_2 + \dots + S_n).$$

On aga selge, et kui püramiidide arv on väga suur, siis nende põhjade pindalad saab lugeda ligikaudselt võrdseks vastavate kõverpinnaliste kolmnurkade pindaladega kera pinnal. Sel korral on aga kera pindala S ligikaudselt võrdne püramiidide põhjade pindalade summaga:

$$S \approx S_1 + S_2 + \dots + S_n.$$

Kui püramiidide arv kasvab piiramatult, siis viga, mis on tehtud ligikaudsetes võrdustes, muutub kuitahes väikeseks. Seepärast peab kehtima täpne võrdus

$$V_{\text{kera}} = \frac{1}{3} r S,$$

kus r on kera raadius ja S kera pindala. Et $V_{\text{kera}} = \frac{4}{3} \pi r^3$, siis kehtib võrdus

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} r S.$$

Avaldades siit pindala S , saame kera pindala arvutamiseks valemi:

$$S = 4\pi r^2.$$

Et πr^2 on kera suuringi pindala, siis on teoreem sellega tõestatud.

Saadud valemi võib kera diameetri kaudu kirjutada ka nii:

$$S = \pi d^2.$$

843. Kera raadius on 1 m. Kui suur on kera pindala?

844. Kera diameeter on 10 cm. Kui suur on kera pindala?

845. Kera suuringi pindala on 5 dm². Kui suur on kera pindala?

846. Poolkera raadius on 6 cm. Arvuta kera pindala ja poolkera täispindala.

847. Kera raadius on $3,57 \text{ cm}^2$. Arvuta kera pindala täpsusega $0,1 \text{ cm}^2$.
848. Arvuta Maa pindala (vt. ülesanne 815).
849. Kera übermõõt on $31,5 \text{ cm}$. Arvuta kera pindala.
850. Täida kera kohta järgmised tabelid:

1)

Raadius	1,3	6	0,9	5,20	64
Suuringi pindala					
Kera pindala					

2)

Diameeter	2,7	0,12	$2\frac{1}{4}$	16
Suuringi pindala				
Kera pindala				

851. Inimese kopsud koosnevad ligikaudselt 1,6 miljardist kopsu-mullist. Kopsumulli keskmine läbimõõt on $0,2 \text{ mm}$. Arvuta kopsumullide kogupindala.
852. Võrkpalli läbimõõt on 21 cm . Kui palju nahka kulub palli kesta valmistamiseks, kui õmblusteks arvestada 12% palli pindalast?
853. Euroopa pindala on ligikaudselt 10 miljonit km^2 . Mitu ruut-sentimeetrit on Euroopa pindala gloobusel, mille übermõõt on 157 cm ?
854. Mitu meetrit siidi kulub kerakujulise õhupalli valmistami-seks, kui palli läbimõõt peab olema 10 m , siidikanga laius on $0,90 \text{ m}$ ja materjali kadu $12,5\%$? Vastus leia täpsusega 1 m .

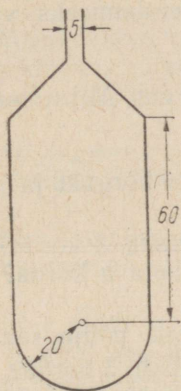
7.12. ÜLESANDEID PÖÖRDKEHADE KOHTA

855. Silindri külgpinnalaotus on ruut, mille külg on $0,5 \text{ m}$. Arvuta silindri täispindala.
856. Läbi kera, mille diameeter on 65 mm , tuleb puurida silindri-kujuline ava, mille teljeks on kera diameeter. Arvuta saadud

keha pindala ja ruumala, kui ava diameeter on 25 mm, lugedes ava ligikaudselt võrdseks silindriga, mille teljeks on kera diameeter.

857. Kera raadiust suurendatakse k korda. Kuidas muutuvad kera pindala ja ruumala, kui $k=3, 4, 5$?

858. Koonuse täispindala ja külgpindala suhe on $3:2$. Arvuta suurim nurk moodustajate vahel.



Joon. 188

859. Leia joonisel 188 kujutatud ballooni ruumala, kui ballooni koonusekujulise osa kõrgus on 20 cm ja kaela pikkus samuti 20 cm. Teised mõõtmed on antud joonisel (sentimeetrites).

860. Kahe kera pindalade suhe on $3:5$. Leia nende kerade ruumalade suhe.

861. Kahe kera ruumalade suhe on $2:3$. Leia nende kerade pindalade suhe.

862. Koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk ja silindri telglõige ruut. Leia

- 1) koonuse ja silindri ruumalade suhe, kui nende täispindalad on võrdsed,
- 2) koonuse ja silindri täispindalade suhe, kui nende ruumalad on võrdsed.

863. Tõesta lause: kui kolme kera raadiused suhtuvad nagu arvud 1, 2 ja 3, siis suurima kera ruumala on kolm korda suurem väiksemate kerade ruumalade summast.

864. Kuidas suhtuvad silindri, koonuse ja poolkera ruumalad, kui silindri ja koonuse põhjade raadiused ja kõrgused on võrdsed poolkera raadiusega?

865. Kera pindala ja ruumala mõõtardud on võrdsed. Leia kera raadius.
866. Leia õõnsa silindri seina ruumala, kui välispinna diameeter on 12 cm ja sisepinna diameeter 9 cm ning silindri kõrgus on 25 cm.
867. Tinakera, mille diameeter on 2 dm, valatakse ümber 20 korda väiksema diameetriga keradeks. Mitu kera saadakse? Kas kõik antud tingimused on ülesande lahendamiseks vajalikud?
868. On vaja valada tinakera läbimõõduga 5 cm. Mitu tinakera läbimõõduga 5 mm on selleks vaja võtta?
869. Kuidas muutub silindri ruumala, kui tema kõrgust ja põhja raadiust
- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| 1) suurendada 5 korda? | 2) vähendada 3 korda? |
| 3) suurendada m korda? | 4) vähendada n korda? |
870. Kuidas muutub koonuse ruumala, kui tema põhja raadiust
- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| 1) suurendada 10 korda? | 2) vähendada 5 korda? |
| 3) suurendada 200% võrra? | 4) vähendada 25% võrra? |
871. Kuidas muutub koonuse ruumala, kui tema kõrgust
- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| 1) suurendada 9 korda? | 2) vähendada 3 korda? |
| 3) suurendada 100% võrra? | 4) vähendada 75% võrra? |
872. Kuidas muutub koonuse ruumala, kui tema
- | |
|--|
| 1) kõrgust suurendada 4 korda ja põhja raadiust 2 korda? |
| 2) kõrgust suurendada 2 korda ja põhja raadiust vähendada 2 korda? |
| 3) kõrgust vähendada 9 korda ja põhja raadiust suurendada 3 korda? |
| 4) kõrgust suurendada m korda ja põhja raadiust n korda? |
| 5) kõrgust vähendada m korda ja põhja raadiust n korda? |
873. Kuidas muutub kera pindala, kui tema raadiust
- | |
|---------------------------|
| 1) vähendada 10 korda? |
| 2) suurendada 300% võrra? |
| 3) vähendada 50% võrra? |
874. Kuidas muutub kera ruumala, kui tema diameetrit
- | |
|---------------------------|
| 1) vähendada 3,5 korda? |
| 2) suurendada 200% võrra? |
| 3) vähendada 25% võrra? |

8. KORDAMISEKS

875. Kuidas arvutatakse ristküliku, ruudu, rööpküliku, kolmnurga, trapetsi, korrapärase hulknurga pindala?
876. Kuidas arvutatakse ringjoone pikkust, ringi pindala?
877. Kuidas arvutatakse risttahuka, püstprisma, korrapärase püramiidi ruumala?
878. Milline seos on ühtlaselt liikuva keha poolt läbitud tee pikkuse s ja selleks kulunud aja t vahel? Väljenda see seos valemiga, kui keha kiirus on v .
879. Missugune on kahekohalise naturaalarvu üldkuju, kui selle üheliste number on a ja kümneliste number b ?
880. Kahekohalise naturaalarvu üheliste number on n . Kümneliste number on sellest 3 võrra väiksem. Kirjuta see naturaalarv.
881. Leia lükati abil:
- 1) 32% arvudest 28; 56,7; 42,1; 3,02; 0,98;
 - 2) arv, kui 55% temast on 50; 32; 13,8; 109; 0,85;
 - 3) mitu protsenti on 3 8-st, 4 7-st; 1,2 3,9-st; 56,3 203-st; 0,89 1,02-st.
882. Lahenda võrrandi abil.
- 1) Kolme järjestikuse naturaalarvu summa on 72. Leia need arvud.
 - 2) Kahest kõrvunurgast on üks 4 korda suurem kui teine. Leia kummagi nurga suurus.
 - 3) Taara kaal on 15% kauba kaalust. Leia taara kaal, kui kauba brutokaal on 138 kg.
883. Leia võrrandi $3x - 7y = 3$ lahendid, kui muutuja x väärtuste hulk on $\left\{-1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{2}{3}\right\}$.
884. Millistes punktides lõikavad sirged $x - y = 3$ ja $2x - 3y = 4$ koordinaattelgi?
885. Leia võrrandi $3x + 2y = 12$ naturaalarvulised lahendid.
886. Lahenda graafiliselt võrrandisüsteemid.
- 1)
$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 8x + 7y = 37 \end{cases}$$
 - 2)
$$\begin{cases} 4x = y + 5 \\ 2y - 7 = 3x \end{cases}$$

887. Arvuta determinandid.

$$1) \begin{vmatrix} -3,7 & 1,2 \\ 3,1 & -1,7 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{7} \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 12,1 & -3 \\ 15,7 & 5 \end{vmatrix}$$

888. Lahenda võrrandisüsteemid.

$$1) \begin{cases} \frac{x+1}{y+2} = \frac{x+2,5}{y+8} \\ \frac{4x-3}{2y+1} = \frac{6x-4}{3y-1} \end{cases} \quad 2) \begin{cases} (5x-8)(4y-3) = (4x+7)(5y+2) + 56 \\ (3x-7)(2y+9) = (2x+7)(3y-39) \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4(0,1x+1) + 5 = 1,1y \\ \frac{11+0,3y-x}{x} - 5 = 4\left(\frac{1}{x} - 1\right) \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x : y = 3 : 4 \\ (x-1) : (y+2) = 1 : 2 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} y = 3x - 3,5 \\ x = 4,5 + 2y \end{cases} \quad 6) \begin{cases} \frac{2x-y}{3} + 3y = \frac{5x+2y+7}{2} - 3x - \frac{2}{3} \\ \frac{x+y}{4} - x = \frac{x}{3} - y + \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 3x - 6y + 3 = 0 \\ 27y + 12x - 22 = 0 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} \frac{4x-2y}{5} + \frac{8x-1}{2} = \frac{20x-2y}{3} + \frac{1}{10} \\ \frac{y+12x}{3} + \frac{x}{2} = \frac{19}{24} \end{cases}$$

889. Arvuta järgnevate võrrandisüsteemide ligikaudsed lahendid kolme tüvenumbriga:

$$1) \begin{cases} 9x + y = -27 \\ x + 0,9y = -5 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2,97x - y = 1 \\ x - 4,5y = 3 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 5,6x - 1,7y = -9 \\ 0,9x + 3y = 4 \end{cases}$$

890. Turist peab jõudma linnast A linna B ettenähtud ajal. Kui turist liiguks kiirusega $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, jõuaks ta sihtpunkti 2 tundi varem; liiguks turist aga kiirusega $25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, hilineks ta 1 tund 12 minutit. Arvuta linnadevaheline kaugus ja aeg, mille jooksul turist peab selle läbima.

891. Kahe arvu summa on 77. Leia need arvud, kui $\frac{2}{3}$ ühest arvust on $\frac{4}{5}$ teisest arvust.

892. Metroo ehitamisel kasutati põhjavee eemaldamiseks kaht pumpa. Kui üks pump töötab 2 tundi ja teine 3 tundi, siis pumbatakse välja 102 hektoliitrit vett. Kui aga esimene pump töötab 1 tund ja teine 2,5 tundi, siis pumbatakse välja 69 hektoliitrit vett. Mitu hektoliitrit vett pumpab kumbki pump ühes tunnis?

893. Kui ristküliku alust suurendada 4 m ja kõrgust vähendada 3 m, siis ristküliku pindala väheneb 20 m². Kui aga alust vähendada 2 m ja kõrgust suurendada 5 m, siis pindala suureneb 80 m². Arvuta ristküliku alus ja kõrgus täpsusega 0,1 m.

894. Üks ringjoon on teisest 3,45 m võrra lühem. Kui esimese ringjoone diameetrit suurendada 2 m võrra ja teise diameetrit vähendada 0,2 m võrra, siis on esimene ringjoon teisest 0,94 m võrra pikem. Arvuta kummagi ringjoone diameetrid täpsusega 0,01 m.

895. Joonesta teljestikus kolmnurk, mille tipud on $A(-7; -1)$, $B(8; 2)$ ja $C(2; 8)$. Konstrueeri selle kolmnurga mediaanid ja leia jooniselt kolmnurga raskuskeskme koordinaadid.

896. Joonesta teljestikus rööpkülik, mille kolm tippu on antud: $A(-4; -4)$; $B(11; 3)$; $C(8; 6)$. Leia jooniselt selle rööpküliku diagonaalide lõikepunkti koordinaadid.

897. Lahenda graafiliselt.

$$1) \begin{cases} x+2y=8 \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x-2y=4 \\ x+2y=8 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} xy=6 \\ x-2y=-4 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} xy=4 \\ x-y=3 \end{cases}$$

898. Lahenda graafiliselt.

$$1) 3x^2+10x+6=0 \quad 2) 2x^2+5x+2=0$$

$$3) 3x^2+2x-6=0 \quad 4) 4x^2-3x-12=0$$

899. Avalda x .

$$1) \frac{a+b}{a-b} : \frac{a^2-b^2}{ab} = x : \frac{(a-b)^2}{ab}$$

$$2) \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} : x = \frac{a-b}{a^2-2ab+b^2} : \frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$$

900. Liida murrud.

$$1) \frac{1}{a^2+3a+2} + \frac{2a}{a^2+4a+3} + \frac{1}{a^2+5a+6}$$

$$2) \frac{a+6}{a^2+4a-5} + \frac{a+5}{a^2-7a+6} - \frac{2(a+1)}{a^2-a-30}$$

901. Arvuta avaldise väärtus muutuja antud väärtuse korral.

$$1) \frac{a^2-2a+4}{a^2+2a+4} \cdot \frac{a^3-8}{a^3+8}, \text{ kui } a=98.$$

$$2) \frac{x^2-7x+12}{x+4} : \frac{x^2-9}{x^2-16}, \text{ kui } x=7.$$

902. Lahenda võrrand täpsusega 0,01.

$$1) \frac{x}{2x+4} - \frac{3}{x} + \frac{x+1,7}{x^2+2x} + \frac{2}{x+2} = 0$$

$$2) \frac{x+2}{2x} + \frac{7x}{2x-4} - \frac{4x^2-3,5x+3}{x^2-2x} = 0$$

903. Lihtsusta avaldis.

$$1) \frac{2n}{n^2-1} - \frac{n^3+3n^2+3n+1}{8n^2-8n} \cdot \left[1 - \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \right] + 1 : \frac{n+1}{n}$$

$$2) \frac{4a^2-1}{a^3-a^2-a+1} : \left(\frac{a}{a^2-2a+1} - \frac{1}{1-a} \cdot \frac{a}{a+1} - \frac{2}{a+1} \right)$$

904. Lahenda võrrandisüsteem.

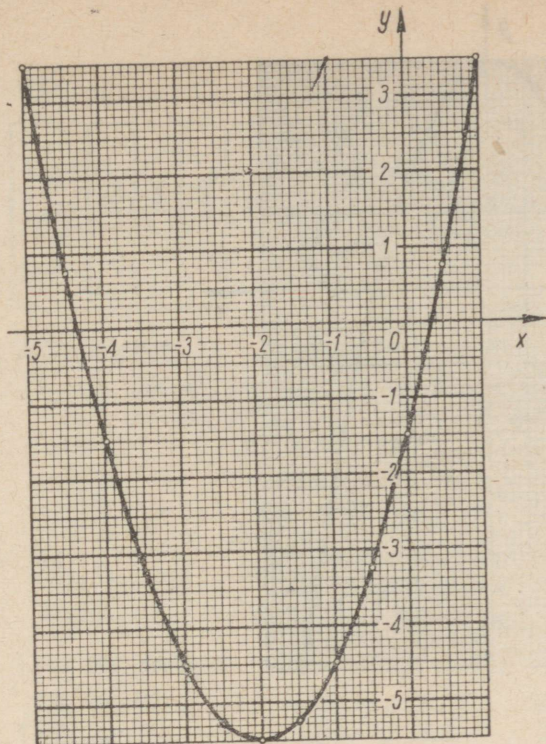
$$1) \begin{cases} \frac{y+3}{(3x-y)(3y-x)} = 0,5 \\ \frac{x-y}{x+y} = 0,4 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{x-3y-1}{6x-11y-3} = \frac{1}{2} \\ 3xy - (x^2+y^2) = 11 \end{cases}$$

905. Kaks rajooni olid 1960. aastal sotsialistlikus võistluses. Ühes neist oli kartulisaak hektarilt 1,07 korda suurem kui teises, kusjuures ühes rajoonis saadi hektarilt 8,8 tsentnerit kartuleid rohkem kui teises. Arvuta kartulisaagid hektarilt kumbki rajoonis.

906. Kaks hoiust, millest üks on 375 rbl. võrra suurem teisest, andsid $2\frac{1}{2}\%$ -ga ühepalju tulu, kumbki 125 rbl., sest väiksem hoius oli 3 aastat kauem hoiul. Mitu aastat oli kumbki hoius hoiukassas?

907. Kaks müürseppa, kellest teine alustab tööd $1\frac{1}{2}$ päeva hiljem kui esimene, jõuavad müüri valmis laduda 7 päevaga. Kui see töö oleks antud teha kummalegi eraldi, siis oleks selle müüri ehitamiseks vajanud esimene 3 päeva rohkem kui teine. Mitme päevaga oleks kumbki müürsepp ehitanud müüri valmis üksi töötades?
908. Linnast A väljusid kaks autot ühes ja samas suunas, üks kiirusega $50\frac{\text{km}}{\text{h}}$, teine kiirusega $40\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Pool tundi hiljem väljus samast linnast kolmas auto eelmistele järele, möödu-des esimesest poolteist tundi hiljem kui teisest. Leia kolmanda auto liikumise kiirus.
909. Kaks töolist koos töötades lõpetasid töö 12 tunniga. Kui esimene neist oleks alguses teinud pool sellest tööst ja seejärel teine ülejäänud osa, siis oleks kogu töö tegemiseks kulunud 25 tundi. Mitu tundi oleks kulunud kummalgi töölisel üksi selle töö tegemiseks?
910. Fotonegatiivide pesemiseks kasutatakse kahe kraaniga risttahukakujulist vanni. Vanni seesmised mõõtmed on 20 cm, 90 cm ja 25 cm. Et täis vanni tühjendada väljalaskekraani kaudu, mil sisselaskekraan on suletud, kulub 5 minutit vähem aega kui tühja vanni täitmiseks sisselaskekraani kaudu, mil väljalaskekraan on suletud. Kui aga mõlemad kraanid on avatud, tühjeneb täis vann 1 tunniga. Arvuta vee hulk, mis voolab läbi kummagi kraani 1 minutis.
911. Karusloomafarmis kasvatatakse hõberebaseid. Praegu on seal loomi nii palju, et kui igasse sulgu paigutada 2 looma rohkem, siis jääks 50 sulgu tühjaks. Kui aga igasse sulgu paigutada 1 loom vähem, siis tuleks viiskümmend sulgu puudu. Mitu hõberebast ja mitu sulgu on farmis?
912. Rong pidi sõiduplaanis ettenähtud ajaga läbima 840 km. Pooltel teel peatati rong $\frac{1}{2}$ tunniks. Et ettenähtud kellaajaks päralt jõuda, suurendati rongi kiirust 2 km võrra tunnis. Kui kaua oli rong teel?
913. Kui kuubi serva pikkust suurendada 5,6 cm võrra, siis kuubi ruumala suureneb 915 cm^3 võrra. Arvuta kuubi serva pikkus.
914. Vaskpleki tükil on ristküliku kuju, mille pikkus ületab laiuse 5 cm võrra. Pleki paksus on 2 mm ja kaal 264 g. Arvuta plekitüki mõõtmed, teades, et vase erikaal on 8,8.

915. Arvuta ruudukujulise põhjaga risttahuka põhja serva pikkus, teades, et risttahuka täispindala on 170 cm^2 ja kõrgus $7,2 \text{ cm}$.
916. Tinast valmistatud õõnsa kuubi seinapaksus on 2 cm ja kuubi kaal $1107,4 \text{ g}$. Leia kuubi välimise serva pikkus, teades, et tina erikaal on $11,3$.
917. Kahest metallist, mille erikaalud erinevad teineteisest 9 võrra, kavatakse valmistada sulam. Kui esimest metalli võtta 120 g ja teist 300 g , siis sulami erikaal tuleb $11,56$. Arvuta mõlema metalli erikaalud.
918. Joonesta millimeetripaberile funktsiooni
 $y=1,3x+0,8$
 graafik.
 1) Leia graafikult y väärtus, kui $x=4$; $-3,5$; $-2,5$.
 2) Leia x väärtus, kui $y=5$; $4,2$; $1,4$; $0,7$; -1 .
 3) Lahenda selle graafiku abil võrrandid:
 $1,3x+0,8=2,5$;
 $1,3x+0,8=-0,75$.
919. Joonesta millimeetripaberile funktsiooni
 $y=2,1x-1,4$
 graafik.
 1) Leia graafikult y väärtus, kui $x=-1,2$; -1 ; $0,7$; $2,6$; 3 ; $3,6$.
 2) Leia x väärtus, kui $y=-4$; $-0,5$; 1 ; $1,5$; $2,3$; 4 ; $4,5$.
 3) Lahenda graafiliselt võrrandid:
 a) $2,1x-1,4=-2,5$;
 b) $2,1x-1,4=3,8$.
920. Joonisel 187 on esitatud funktsiooni
 $y=x^2+4x-1,5$
 graafik. Kasutades seda graafikut, lahenda järgmised ülesanded.
 1) Leia y väärtus, kui $x=-5$; -4 ; $-3,5$; -2 ; -1 ; 0 ; 1 .
 2) Leia x väärtus, kui $y=3$; 2 ; $1,5$; -1 ; -3 ; $-4,8$.
 3) Lahenda võrrandid:
 a) $x^2+4x-1,5=2,5$;
 b) $x^2+4x-1,5=1$;
 c) $x^2+4x-1,5=-2$;
 d) $x^2+4x-1,5=0$.
921. Joonesta millimeetripaberile funktsiooni
 $y=x^2+0,3x-2,7$
 graafik. Graafiku punktide ordinaatide arvutamiseks kasuta alljärgnevat skeemi:



Joon. 189

x	-3	-2	-1,5	-1	-0,5	0	1	2	2,5
x^2									
$0,3x$									
$x^2+0,3x$									
$y=x^2+0,3x-2,7$									

Rakendada saadud graafikut järgmiste ülesannete lahendamiseks.

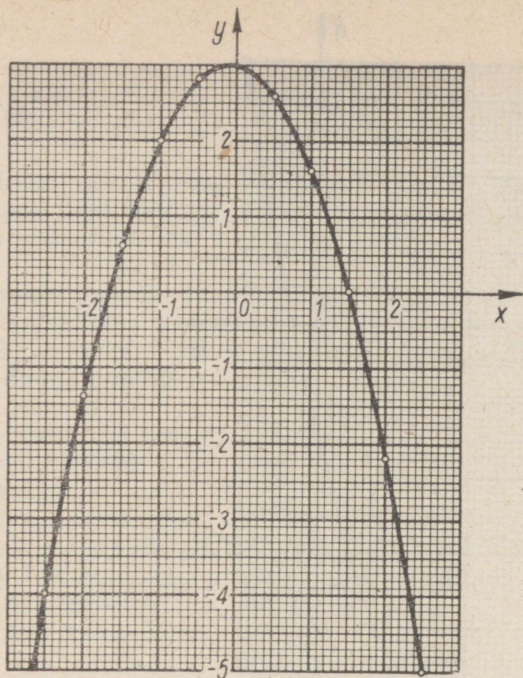
- 1) Leia y väärtus, kui $x = -2,5; -1,2; -0,8; 0,2; 2,1$.
- 2) Leia x väärtus, kui $y = 5; 4; 2; 1,5; -1,5; -1,8$.
- 3) Lahenda võrrandid:

a) $x^2+0,3x-2,7=1;$

b) $x^2+0,3x-2,7=-1;$

c) $x^2+0,3x-2,7=0;$

d) $x^2+0,3x-0,7=0.$



Joon. 190

922. Joonisel 190 on esitatud funktsiooni

$$y = -1,2x^2 - 0,2x + 3$$

graafik. Lahenda selle graafiku abil järgmised ülesanded.

- 1) Missuguste x väärtuste korral on y väärtused positiivsed? negatiivsed?
- 2) Leia y väärtus, kui $x = -2; -1; 0; 1; 2; 2,2$.
- 3) Lahenda võrrandid:

a) $-1,2x^2 - 0,2x + 3 = -2$	b) $-1,2x^2 - 0,2x + 3 = 2$
c) $-1,2x^2 - 0,2x + 3 = 1$	d) $-1,2x^2 - 0,2x + 3 = 0$

Kontrolli graafikult leitud lahendeid valemi järgi arvutatutega.

923. Näita, et $p\%$ arvust a on niisama palju kui $a\%$ arvust p .

924. Arvuta peast.

- | | | |
|--------------|--------------|--------------|
| 1) 50% 88-st | 2) 25% 80-st | 3) 75% 24-st |
| 44% 50-st | 72% 25-st | 48% 75-st |

925. Väljenda harilike murdudena.

$\frac{a}{b}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{10}{10}$	$\frac{15}{10}$	$\frac{20}{10}$	$\frac{25}{10}$	$\frac{30}{10}$	$\frac{33\frac{1}{3}}{10}$	$\frac{40}{10}$	$\frac{50}{10}$	$\frac{60}{10}$	$\frac{66\frac{2}{3}}{10}$	$\frac{70}{10}$	$\frac{75}{10}$	$\frac{80}{10}$
$\frac{a}{b}$														

926. Arvuta peast.

5% arvust 240	40% arvust 26
10% arvust 370	50% arvust 17,8
15% „ 32	60% „ 50
20% „ 55	$66\frac{2}{3}$ % „ 33
25% „ 16,8	70% „ 150
30% „ 42	75% „ 36
$33\frac{1}{3}$ % „ 63	80% „ 15
33,3% „ 72	90% „ 12

927. Leia arv, millest

2% on 26;	0,5% on 2,4;	52% on 1040;
15% „ 27;	3,6% „ 2,4;	5,5% „ 110;
4% „ 28;	1,5% „ 1,8;	38% „ 7600;
12% „ 3,6;	1,8% „ 7,2;	3,4% „ 680.

928. Meeter ülikonnariiet maksis varemalt 9,80 rbl. Nüüd müüakse seda riidet 9,25 rbl. meeter. Mitu protsenti on selle riide hind alanenud?

929. Kast kaubaga kaalub 55 kg (brutokaal), kusjuures tühja kasti kaal on 7 kg (taarakaal). Mitu protsenti moodustab netokaal (kauba kaal ilma kastita) brutokaalust?

930. Õunte kuivatamisel saadi 9 kg tooreist õuntest 1 kg kuivatatud õunu. Mitu protsenti kahanes õunte kaal kuivatamisel?

931. Meeter riidet müüdi väljamüügi puhul 20%-lise hinnaalandusega 9,60 rbl. eest. Arvuta selle riide hind enne hinnaalandust.

932. Kaup müüdi 15%-lise juurdehindlusega 8,45 rbl. eest. Leia kauba omahind.

933. Lahenda graafiliselt.

$$1) \begin{cases} y = x^2 \\ 2y - x = 2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} xy = 4 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} xy = 1 \\ y = x^2 - 2x - 8 \end{cases}$$

934. 1) NSV Liidu Ministrite Nõukogu otsusel tõsteti 1. jaanuarist 1961 rubla kullasisaldus puhta kulla 0,987412 grammini. Mitu rubla maksab selle järgi 1 kg puhast kulda?
2) Üks dollar maksab 90 kopikat. Kui palju puhast kulda sisaldab dollar?

935. Maa tehiskaaslase tiirlemisperiood oli 89,8 minutit ja orbiidi keskmine raadius 6650 km. Kui suure kiirusega liikus see tehiskaaslane oma orbiidil?

936. Mitu päeva kuluks linnul lennuks ümber maakera, s. o. 40 000 km, kui ta lendab 3 m sekundis?

937. Taanda peast murrud:

$$1) \frac{9m^2+6m+1}{3m+1} \quad 3) \frac{a^2+10ab+25b^2}{a+5b} \quad 5) \frac{2a+3b}{4a^2-9b^2} \quad 7) \frac{4a^2-9b^2}{2a+3b}$$

$$2) \frac{4x^2+4xy+y^2}{2x+y} \quad 4) \frac{a-4}{a^2-8a+16} \quad 6) \frac{x^2-16a^2}{x-4a} \quad 8) \frac{5x-1}{25x^2-1}$$

938. Taanda peast murrud:

$$1) \frac{16x^2-12xy+9y^2}{64x^3+27y^3} \quad 6) \frac{a^2+2ab+b^2}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

$$2) \frac{4a^2+6ab+9b^2}{8a^3-27b^3} \quad 7) \frac{(2a+3b)^2}{8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3}$$

$$3) \frac{9a^2-24ab+16b^2}{(3a-4b)^3} \quad 8) \frac{x^2-2xy+y^2}{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}$$

$$4) \frac{8x^3-27y^3}{2x-3y} \quad 9) \frac{x^3-8}{x^2-4}$$

$$5) \frac{a^3+64b^3}{a+4b} \quad 10) \frac{a^3-1}{a^2+a+1}$$

939. Taanda murrud:

$$1) \frac{a^2-5a+6}{a^2-3a+2} \quad 2) \frac{a^2+4a+4}{a^2-a-6} \quad 3) \frac{2a^2-5a-3}{2a^2-3a-2}$$

940. Arvuta peast avaldise väärtus muutuja antud väärtusel:

$$1) \frac{x^2-8x+16}{x-4}, \text{ kui } x=2; \quad 2) \frac{3a-1}{9a^2-6a+1}, \text{ kui } a = \frac{1}{2}.$$

941. Arvuta avaldise väärtus muutujate antud väärtustel:

1) $\frac{a^2-4}{ac+2c-a-2}$, kui $a=2$ ja $c=1$;

2) $\frac{5a^2-10ax}{a^3-2a^2x+ax-2x^2}$, kui $a=7$ ja $x=3$;

3) $\frac{6x^2-11x-10}{8x^2+6x-9} \cdot \frac{12x^2-x-6}{4x^2-4x-15}$, kui $x=-2$;

4) $\frac{6x^2+7x-20}{20x^2-7x-6} \cdot \frac{12x^2-25x+12}{10x^2+29x+10}$, kui $x=2$;

5) $\frac{x^2-2x-15}{x^2-16} : \frac{x^2-x-12}{x^2+9x+20}$, kui $x=5$;

6) $\frac{x^2-6x-7}{x^2-25} : \frac{x^2-12x+35}{x^2+4x-5}$, kui $x=10$.

942. Lahenda võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} x^2+y^2-8x-6y=25 \\ x+2y=15 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2y^2=9x \\ 3x-5y+9=0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2-10x+6y-66=0 \\ x-2y+9=0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-10x-6y+15=0 \\ 3x+4y=12 \end{cases}$

943. Rombi diagonaalide pikkused on 14 cm ja 48 cm. Arvuta rombi kõrgus.

944. Ühest ja samast punktist on ringjoonele tõmmatud kaks puutujat. Puutuja pikkus on 156 mm ja puutepunktidevaheline kaugus 120 mm. Arvuta ringi raadius.

945. Lihtsusta.

1) $\left(\frac{1}{1-a} - 1\right) : \left(a - \frac{1-2a^2}{1-a} + 1\right)$

2) $\left[\frac{a^2-2a+1}{a^3+2a^2+a} + \frac{1}{a+1} - \frac{a^2-a-2}{(a+1)^3}\right] \cdot \frac{a}{a-1} - \frac{2a}{a^2-1}$

3) $\left[\frac{1}{a+1} - \frac{a}{a^2-2a+1} + \frac{2a}{(a^2-1)(a-1)}\right] \cdot \frac{a^2-1}{a+2} - \frac{2}{a^2+2a}$

4) $\frac{(a+b)^2}{a-b} \cdot \frac{a(a-b)+b^2}{a^2-b^2} : \frac{a^3+b^3}{(a-b)^3}$

946. Lahuta hulkliige tegureiks.

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| 1) $a^8 + a^5 - a^4 - a$ | 6) $x^6 - x^4 + 27x^3 - 27x$ |
| 2) $x^6 - x^4 + 4x^2 - 4$ | 7) $a^5 - 4a^3 - 8a^2 + 32$ |
| 3) $16y^4 + 8y^3 - 2y - 1$ | 8) $n^4 - 2n^3 - 8n + 16$ |
| 4) $a^8 - a^6 - a^2 + 1$ | 9) $a^3 - 25a + a^6 - 25a^4$ |
| 5) $a^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1$ | 10) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ |

947. Arvuta.

- 1) $2 : \frac{3}{5} + \frac{3}{5} : 2 + 1 \frac{1}{2} : 6 + 6 : 1 \frac{1}{2}$
- 2) $6 \frac{1}{4} \cdot 8 - 3 \frac{2}{3} \cdot 5 \frac{1}{2} + 2 \frac{2}{5} \cdot 4 \frac{7}{12}$
- 3) $13 \frac{1}{2} : 1 \frac{1}{3} + 16 \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{5}{11} + 19 \frac{1}{4} : \frac{4}{25}$
- 4) $\left(\frac{5}{7} \cdot 2 \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} - 1 \right) : \left(1 - \frac{7}{8} \cdot 1 \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{14} \right)$
- 5) $\left[7 \frac{1}{2} - \left(8 \frac{5}{24} - 4 \frac{17}{18} \right) : \frac{47}{72} \right] \cdot \left(5 \frac{1}{4} - 2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)$
- 6) $6,6 : \left(5 + 3,2 : \frac{0,8 - \frac{2}{15}}{0,5} \right) - 7,15$
- 7) $\frac{3 \frac{4}{15}}{\left(4 \frac{1}{2} + 2 \cdot 2,75 \right) : 21 \frac{3}{7}} - 1,375$
- 8) $\left(7 \frac{14}{45} : 7 - \frac{39}{40} \right) \cdot 7,2 + 0,8 : (2 : 0,25 - 3,125 \cdot 2,4)$
- 9) $\left(\frac{13}{44} - \frac{2}{11} - \frac{5}{66} : 2 \frac{1}{5} \right) \cdot 1 \frac{1}{2} + 0,05 : (0,1 : 0,125 - 5,73 : 19,1)$
- 10) $\left[8,9 : 1,78 - 4,8 \cdot \left(1 \frac{1}{17} + \frac{5}{68} - \frac{7}{51} : 0,25 \right) \right] : 4,4$

948. Lahenda võrrandisüsteem.

$$1) \begin{cases} x - \frac{7,5x + 2y}{3y - x} = \frac{5x^2 + 4y^2 + 105}{5x - 6y^2 + 2xy - 15y} + \frac{2xy}{2y + 5} \\ \frac{1,4x + 0,4y}{x} - \frac{5y + 9}{3x} = -2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{11,4+10x}{12x^2-3y-6x+6xy} - \frac{1}{2x-1} = \frac{x-y}{y-4x^2+2x-2xy} \\ \frac{y}{7-4x} = 2 \end{cases}$$

949. Kahe erineva võimsusega traktori koostöötamisel künti kolhoosi künnimaa üles 8 päevaga. Kui üks traktoreist oleks pool künnimaad üksi üles kündnud ja teise poole mõlemad traktorid koos, siis oleks kulunud künniks 10 päeva. Mitu päeva kuluks kummalgi traktoril üksi selle künnimaa üleskünnimiseks?

950. Kolhoosi üks brigaad, töötades käsitsi, koristas oma kartulipõllu 16 tunniga. Teine brigaad, kes kasutas kartulivõtmismasinat, koristas 5 korda suurema põllu 12 tunniga. Arvuta, mitu hektarit oli kummagi brigaadi kartulipõld, teades, et teine brigaad koristas tunnis 0,85 ha võrra rohkem kui esimene brigaad.

951. Leia jooniselt 191 järgmiste ehitusmaterjalide erikaalud:

- | | | |
|--------------------|--------------|------------|
| 1) kuiv kuusk | 5) tsement | 8) betoon |
| 2) kuiv tamm | 6) kuiv liiv | 9) kips |
| 3) bituumen | 7) märg liiv | 10) marmor |
| 4) kustutatud lubi | | |

952. Kuivast kuusepuust servatud laua paksus on 5 cm, laius 20 cm ja pikkus 5,8 m. Arvuta selle laua ruumala ja leia jooniselt 191 laua kaal.

953. Risttahukakujulise marmorplaadi mõõtmed on 50 cm, 70 cm ja 4 cm. Arvuta plaadi ruumala ja leia jooniselt 191 plaadi kaal.

954. Autokoorem kuiva liiva kaalub 4 tonni. Leia jooniselt 191 selle liiva ruumala.

955. Leia jooniselt 191 kuue tonni kustutatud lubja ruumala.

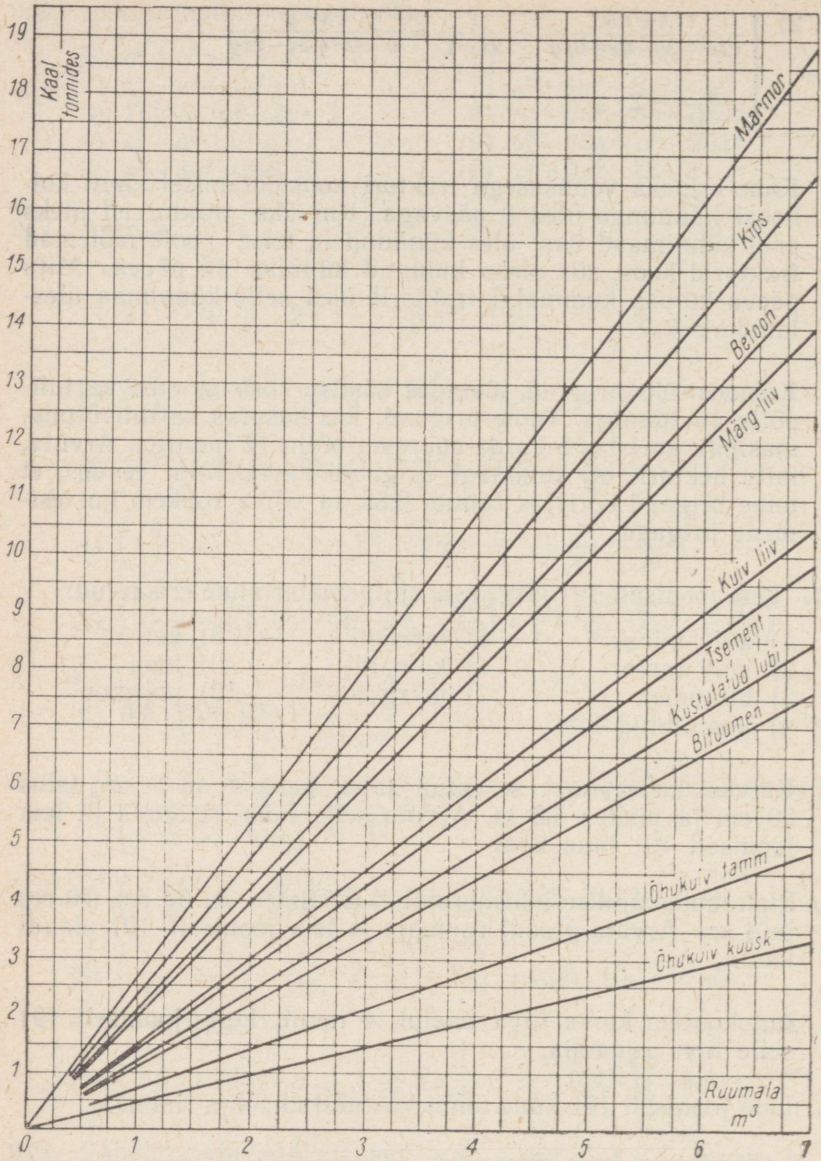
956. Lahenda x suhtes võrrandid.

$$1) \frac{x}{m-n} + \frac{x}{m+n} = \frac{2mn}{m^2-n^2}$$

$$3) \frac{n+x}{m} + \frac{m-x}{n} = 2$$

$$2) \frac{m^2-x}{n} = \frac{n^2-x}{m}$$

$$4) \frac{a+b}{a+2b} + \frac{x}{b} = 1 + \frac{b(b-x)}{a^2+2ab}$$



Joon. 191

$$5) \frac{a}{ax-b} = \frac{bx-a}{b}$$

$$6) abx^2 - b^2x = a^2x - ab, a \geq b$$

$$7) (a-1)x^2 - x = a, a \leq \frac{1}{2}$$

$$8) 2nx - \frac{a}{x} = 2nb - \frac{a}{b}, a \geq 0, n \geq 0$$

957. Lahenda x ja y suhtes võrrandisüsteemid.

$$1) \begin{cases} ax+y=a^2 \\ y=x+1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} ax+by=c \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} a^2x+y=a^3 \\ (a+1)x+1=y \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} nx+my=0 \\ x+y=m-n \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{x+y}{y} = a \\ 1 + \frac{xy}{a+1} = a^2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x-y = \frac{2a}{a^2-1} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{a}, a > 1 \end{cases}$$

958. Marmoritüki kaal on k tonni ja ruumala V m³. Avalda k ja V vaheline seos valemiga, kasutades joonist 191.

959. Kuiv tammepuulaud kaalub k kg ja ta ruumala on V dm³. Avalda k ja V vaheline seos valemiga, kasutades joonist 191.

960. 1) Leia arvutuslükati skaalade A ja B abil korrutised:

$$1,85 \cdot 3,38$$

$$23 \cdot 1,4$$

$$17,6 \cdot 4,3$$

$$2,70 \cdot 3,26$$

$$1,8 \cdot 2,2$$

$$36,1 \cdot 12,6$$

$$\pi \cdot 1,80$$

$$5,6 \cdot 2,5$$

$$466 \cdot 0,8$$

2) Leia arvutuslükati skaalade A ja B abil jagatised:

$$675 : 2,7$$

$$68 : 29$$

$$30,4 : 0,75$$

$$55 : \pi$$

$$104 : \pi$$

$$8,6 : 9,1$$

$$88,5 : 25,2$$

$$15 : 35$$

$$238 : 596$$

961. Lahenda arvutuslükati abil võrrandid:

$$x^2=5,4$$

$$x^2=385$$

$$x^2=6200$$

$$x^2=3,65$$

$$x^2=0,64$$

$$x^2=0,846$$

$$x^2=5,2$$

$$x^2=0,0275$$

962. Kiht pingpongipalle katab karbi ruudukujulise põhja. Pärast ühe pallirea väljavõtmist jääb karpi veel 20 palli. Mitu palli on reas?

963. Kanamunad asetsevad ruudukujulises sõrestikus. Pärast kahe munareala väljavõtmist jääb sõrestikku veel 48 muna. Mitu muna on reas?
964. Joonesta jõesängi ristlõige ja arvuta selle pindala järgmise tabeli andmeil.

Kaugus kaldast meetrites	0	1	2	3	4	5	6
Sügavus meetrites	0,4	1,2	2,3	2,9	2,1	0,7	0

965. Kevadise lumesulamise ajal tõusis järve veepind nädalaga 34,5 cm. Kui palju suurenes järve veehulk keskmiselt päevas, kui järve pindala on 18,45 km²?
966. Ristkülikukujulise platsi katmiseks liivaga veeti platsile koonusekujuline hunnik liiva. Selle koonuse kõrgus on 1,8 m ja põhja läbimõõt 4 m. Kui paksu liiva korraga saab sellest katta platsi, kui viimase mõõtmed on 24 m ja 15 m?
967. Joonesta pinnalaotus ja arvuta pindala silindril, mille kõrgus on 4,6 cm ja põhja läbimõõt 3,9 cm.
968. Kraavi ristlõige on võrdhaarne trapets, mille alused on 1 m ja 2,5 m. Trapetsi haara kaldenurk aluste suhtes on 60°. Kraav on pooleni täidetud veega, mis voolab kiirusega 0,3 m sekundis. Kui palju vett voolab ööpäeva vältel läbi selle kraavi?
969. Merel on ankrus paat. Paadisilla kohal on nurk sirge rannajoone ja paadi sihi vahel täisnurk, kuid 50 m rannajoont mööda edasi on see nurk 38°. Kui kaugel on paat rannast?
970. Kahe sarnase kolmnurga pindalade suhe on 3,24. Suurema kolmnurga küljed on 5,76 m, 4,50 m ja 8,28 m. Kui pikad on väiksema kolmnurga küljed?
971. Täisnurkse kolmnurga pindala on 2,7 m². Üks kaatet on 3,6 m. Arvuta kolmnurga hüpotenuusi pikkus.
972. Kuuse varju pikkus on 24 m. Arvuta kuuse kõrgus, kui 1,5 m pikkuse teiba vari on samal ajal 2,1 m.
973. Euroopa kaardil mõõduga 1 : 25 000 000 on Moskva kujutatud ruudukesena, mille külg on 1,5 mm. Kui suurt pindala kujutab see ruut?

974. Mitu tonni kartuleid on koonusekujulises kuhjas, mille kõrgus on 2,2 m ja põhja läbimõõt 5 m, kui 1 hl kartuleid kaalub 70 kg?
975. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on 6 cm ja ruumala 72,8 cm³. Arvuta püramiidi kõrgus.
976. Kuubi pindala on 73,5 cm². Arvuta kuubi ruumala.
977. Koonuse põhja pindala on 50,3 cm² ja kõrgus 5 cm. Tee joonis ja arvuta moodustaja kaldenurk põhja suhtes.
978. Kolmnurgakujulise heinamaa alus ja kõrgus on plaanil vastavalt 6,2 cm ja 5,5 cm. Mitu hektarit on heinamaa pindala, kui plaani mõõt on 1 : 2500?
979. Ristkülikukujulise maatüki pindala on 4,48 ha. Maatüki pikkus on 50% võrra suurem lausest. Leia maatüki mõõtmed.
980. Ristküliku alus on 5,4 m. Arvuta ristküliku pindala, kui alus moodustab 36% kõrgusest.
981. Sovhoosi noored traktoristid otsustasid tänavu välja vedada 13 000 tonni orgaanilisi väetisi. Kui kõrge risttahukakujulise virna moodustaks see väetiste kogus, kui virna põhjaks võtta ristkülik mõõtmetega 20 m ja 50 m ning 1 m³ väetise kaaluks arvata 0,5 tonni?
982. Rajooni noored mehhanisaatorid lubasid tänavu valmistada vähemalt 20 000 t silo. Kui see silo paigutada virna, mille ristlõige on võrdhaarne trapets alustega 10 m ja 2 m ning kõrgusega 4 m, siis kui pikk tuleb see virn? 1 m³ silo kaalub ligikaudu 600 kg.
983. Maja laius on 10 m. Kui pikad on maja katuse sarikad, kui nad ulatuvad 40 cm üle seina ja moodustavad laega nurga 45°?
984. Leia päikesekiirte kaldenurk maapinna suhtes, kui 1,8 m pikkuse teiba varju pikkus on 1,5 m.
985. Redel, mille pikkus on 2,5 m, on pandud seina najale nii, et redeli alumine ots on seinast 1,3 m kaugusel. Kui kõrgele ulatub redel ja kui suure nurga moodustab ta maapinnaga?
986. Mis on
1) antud punktist antud kaugusel asetsevate punktide hulgas tasapinnal? ruumis?

- 2) antud sirgest antud kaugusel asetsevate punktide hulgaks tasapinnal? ruumis?
 - 3) kahest antud punktist võrdsetel kaugustel asetsevate punktide hulgaks tasapinnal?
 - 4) antud nurga haaradest võrdsetel kaugustel asetsevate punktide hulgaks tasapinnal?
987. 1) On antud silindri kõrgus h ja põhja läbimõõt d . Avalda silindri külgpindala, täispindala ja ruumala.
- 2) On antud koonuse kõrgus h ja põhja läbimõõt d . Avalda koonuse külgpindala, täispindala ja ruumala.
 - 3) On antud läbimõõt d . Avalda kera pindala ja ruumala.
988. Joonesta mingi isekülgne kolmnurk ja leia selle kõrguste lõikepunkt, mediaanide lõikepunkt ja nurgapoolitajate lõikepunkt.
989. On antud mingi lõik. Jaota see mõõtmiseta osadeks, mis suhtuvad nagu 2 : 3. Kontrolli mõõtmise teel.
990. Ringi raadius on 18 cm. Kui suur pindala on selle ringi sektoril, mille nurk on 24° ?
991. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrgus $h = 3$ ja kaateti a projektsioon hüpotenuusil $f = 2$. Leida kolmnurga küljed ja nurgad.
992. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 5$ dm ja selle projektsioon hüpotenuusil $f = 3$ dm. Arvuta kolmnurga küljed ja nurgad.
993. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk $\alpha = 50^\circ 48'$ ja hüpotenuusile joonestatud kõrgus $h = 6$ cm. Kui pikad on kolmnurga küljed?
994. Ringjoonele, mille raadius $r = 18$ cm, on joonestatud punktist A kaks puutujat. Puutujatevaheline nurk on $74^\circ 30'$. Kui kaugel on punkt A ringjoone keskpunktist?
995. Mitu korda on võrdkülgse kolmnurga ümberringi pindala suurem sama kolmnurga siseringi pindalast?
996. Rööpküliku $ABCD$ külje CD punkt F on ühendatud vastaskülje AB otspunktidega. Leia kolmnurga ABF pindala, kui rööpküliku $ABCD$ pindala on m ruutühikut.
997. Trapetsi $ABCD$ haara BC keskpunkt E on ühendatud haara AD otspunktidega. Tõesta, et kolmnurga AED pindala on pool trapetsi pindalast.

998. 1) Tõesta, et kolmnurga mediaan jaotab kolmnurga kaheks pindvõrdseks kolmnurgaks.
 2) Tõesta, et kolmnurga kolm mediaani jaotavad kolmnurga kuueks pindvõrdseks osaks.
999. Täisnurkse kolmnurga pindala on 720 m^2 ja kaatetid suhtuvad nagu $9 : 40$. Leia hüpotenuus.
1000. Ehita ruut, mille pindala on võrdne kahe ruudu pindalade summaga, kui nende ruutude küljed on 12 cm ja 15 cm .
1001. Täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on 12 cm ja 5 cm , pöörleb ümber hüpotenuusi. Arvuta pöördkeha pindala ja ruumala.
1002. Võrdhaarne kolmnurk, mille haar on 10 cm ja alus on 16 cm , pöörleb ümber aluse. Arvuta pöördkeha pindala ja ruumala.
1003. Ringjoonel on võetud punkt P , mis asetseb läbimõõdu otspunktidest A ja B vastavalt 7 cm ja 24 cm kaugusel. Kui suur on kaugus AP , kui punkti P liikudes mööda ringjoont kaugus BP saab võrdseks 20 cm -ga?
1004. Leia veorihmaga ühendatud kahe pöörleva ratta läbimõõtude suhe, kui esimene ratas teeb minutis 1000 ja teine 375 pööret.
1005. Raudplaadist lõigatakse kaks rida ümmargusi seibe nii, et iga teises reas oleva lõikeringjoon puudutab kaht esimeses reas olevat ringjoont. Seibi raadiuseks on $8,5 \text{ mm}$. Kui kaugel teineteisest on mõlema seibirea keskkochti läbivad sirged?
1006. 1) Ümmargusest raudvardast tuleb freesida võimalikult suure ruudukujulise ristlõikega varras. Antud varda läbimõõt on $2,6 \text{ cm}$. Kui suur on uue varda ristlõike külg?
 2) Ruudukujulise ristlõikega raudvardast tuleb treida võimalikult suure ristlõikega ümmargune varras. Mitu protsenti materjalist läheb kaotsi?
1007. Ümmargusest raudvardast tuleb freesida varras, mille ristlõige on võimalikult suur korrapärane kuusnurk. Mitu protsenti materjali läheb kaotsi?
1008. Mansardkorruse viisnurkne aken on kujult pool korrapärast kaheksanurka. Leida akna pindala, kui akna raami alumise ääre pikkus on 2 m .

1009. Kaevukoogu pikem õlg on 3,25 m ja lühem õlg on 1,5 m. Kui palju vajub koogu lühema õla ots, kui pikema õla ots tõuseb 2,5 m?
1010. Pendli pikkus on 60 cm. Võnkumisel tasakaalu seisust äärmisesse seisu tõuseb pendli ots 12 cm võrra tasakaaluseisust kõrgemale. Kui kaugel on nüüd pendli ots vertikaalsirgest, mis läbib pendli kinnituspunkti? Kui suur on nurk pendli tasakaaluseisu ja äärmise seisu vahel?
1011. Kasutades joonist 191, lahenda järgmised ülesanded.
- 1) Kuiv liiv on koonusekujulises kuhjas, mille põhja läbimõõt on 4 m ja kõrgus on 1,5 m. Mitu tonni on selles kuhjas liiva?
 - 2) Kuivast kuusepuust silindri põhja läbimõõt on 12 cm ja kõrgus 15 cm. Kui palju kaalub see silinder?
 - 3) Kuivast tammepuust kera kaalub 2,5 kg. Leia kera ruumala.
 - 4) 2 tonni kustutatud lupja on silindrikujulises tunnisis 1,2 m kõrguselt. Leia tunni seesmine läbimõõt.
1012. Sirgel on antud järjestikku punktid X , P , Q ja Y , kusjuures $XP=QY$. Lõigule PQ on joonestatud rööpkülik $PQRS$ nii, et $\angle PQR=130^\circ$ ja $QR=QY$. Lõikude XS ja YR pikendused vastavalt üle punktide S ja R lõikuvad punktis Z . Kui suur on nurk SZR ?
1013. Ristküliku $ABCD$ küljele AD kui diameetrile on joonestatud poolringjoon, mis lõikab diagonaali DB punktis X . Arvuta lõikude BD ja BX pikkused, kui $AB=12$ cm ja $AD=9$ cm.
1014. Kõõlnelinurga $ABCD$ külge AB läbib ringi keskpunkti O ja $BC=CD$. Tõesta, et
- 1) $\angle BDC = \angle CAD$;
 - 2) $\angle BOD = 4 \cdot \angle CAD$;
 - 3) $\angle ABD = 90^\circ - 2 \cdot \angle DBC$.
1015. Defineeri a) silinder, b) koonus, c) kera, d) sfäär.
1016. Sõnasta printsiip, mida kasutatakse pöördkehade ruumalade valemite tuletamisel.
1017. Ühe silindri raadius on r ja kõrgus h , teise silindri omad on vastavalt R ja H . Leia nende silindrite täispindalade suhe, kui $R=h$ ja $H=r$.

1018. Ühe koonuse põhja raadius on r ja moodustaja m , teise koonuse omad on vastavalt R ja M . Leia nende koonuste täispindalade suhe, kui $R=m$ ja $M=r$.
1019. Silindri ja koonuse põhjade diameetrid võrduvad kera diameetriga d . Silinder, koonus ja kera on ruumvõrdsed. Leia silindri ja koonuse täispindalad.
1020. Võrdhaarne kolmnurk, mille haar on 5 dm ja alus 6 dm, pöörleb ümber aluse. Arvuta tekkinud pöördkeha täispindala ja ruumala.
1021. Võrdhaarne trapets, mille alused on 4 cm ja 14 cm ning haar on 13 cm, pöörleb ümber pikema aluse. Arvuta tekkinud pöördkeha täispindala ja ruumala.
1022. Ülesandes 1021 kirjeldatud trapets pöörleb ümber lühema aluse. Arvuta sel viisil tekkinud pöördkeha täispindala ja ruumala.
1023. Kolme kera diameetritest saab ehitada täisnurkse kolmnurga. Missugune seos on nende kerade pindalade vahel?
1024. Tinatükk, millel oli esialgu võrdkülgse telglõikega silindri kuju, valati ümber keraks. Kuidas muutus tinatüki pindala ja ruumala?

SISUKORD

1. KORDAMISEKS JA TÄIENDAMISEKS

1.1. Hulgad	3
1.2. Kahe hulga elementide vaheline vastavus	4
1.3. Sirgjoone punkti koordinaat	7
1.4. Tasapinna punkti koordinaadid	8
1.5. Punkti kohavektori koordinaadid	13

2. FUNKTSIONAALNE SÖLTUVUS

2.1. Funktsioon ja argument	15
2.2. Funktsiooni graafik	18
2.3. Funktsioon $y=ax$	22
2.4. Funktsiooni $y=ax$ graafik	24
2.5. Lineaarfunktsioon	27
2.6. Lineaarfunktsiooni graafik	31
2.7. Funktsioon $y=a : x$	34
2.8. Funktsiooni $y=a : x$ graafik	37
2.9. Pöördarvude tabel	39

3. KAHE MUUTUJAGA LINEAARSED VÖRRANDISÜSTEEMID

3.1. Kahe muutujaga lineaarvörrand	42
3.2. Kahe muutujaga lineaarvörrandi lahend	44
3.3. Kahe muutujaga lineaarvörrandi graafik	47
3.4. Kahe muutujaga lineaarne vörrandisüsteem	50
3.5. Kahe muutujaga lineaarse vörrandisüsteemi graafiline lahendamine	52
3.6. Kahe muutujaga lineaarse vörrandisüsteemi algebraline lahendamine	55
3.7. Kahe muutujaga lineaarse vörrandisüsteemi lahendivaleimid	57
3.8. Ülesannete lahendamine vörrandisüsteemi abil	64

4. RUUTFUNKTSIOON JA RUUTVÖRRAND

4.1. Funktsioon $y=x^2$	70
4.2. Funktsiooni $y=x^2$ graafik	71
4.3. Ruutude tabel	73
4.4. Arvu ruudu leidmine lükati abil	75
4.5. Funktsioon $y=ax^2$	77
4.6. Funktsiooni $y=ax^2$ graafik	80
4.7. Funktsioon $y=ax^2+c$	83
4.8. Funktsiooni $y=ax^2+c$ graafik	84

4.9.	Funktsioon $y=a(x+m)^2$ ja selle graafik	87
4.10.	Funktsiooni $y=a(x+m)^2+n$ graafik	90
4.11.	Funktsioon $y=ax^2+bx+c$	91
4.12.	Funktsiooni $y=ax^2+bx+c$ graafik	93
4.13.	Arvu ruutjuur	96
4.14.	Ruutjuure ligikaudne väärtus	97
4.15.	Ruutjuure ligikaudse väärtuse arvutamine Heroni vôttega	99
4.16.	Ruutjuurte omadusi	101
4.17.	Ruutjuurte tabel	103
4.18.	Ruutjuure leidmine graafiku abil	106
4.19.	Ruutjuure leidmine lükati abil	107
4.20.	Ruutvõrrand $x^2=b$	109
4.21.	Ruutvõrrand $ax^2=b$	111
4.22.	Ruutvõrrand $ax^2+bx=0$	113
4.23.	Ruutvõrrand $ax^2+bx+c=0$	114
4.24.	Täielik ja mittetäielik ruutvõrrand	117
4.25.	Taandatud ruutvõrrandi lahendamine	118
4.26.	Taandamata ruutvõrrandi lahendivalem	123
4.27.	Murdvõrrandite lahendamine	128
4.28.	Ruutvõrrandi abil lahenduvaid ülesandeid	130
4.29.	Taandatud ruutvõrrandi lahendite omadused	136
4.30.	Ruutvõrrandi koostamine lahendite järgi	138
4.31.	Teise astme kolmliikme lahutamine lineaarseiks tegureiks	140
4.32.	Ruutvõrrandisüsteem	143

5. HULKNURKADE SARNASUS

5.1.	Võrdelised lõigud	151
5.2.	Nurga haarade lõikamine paralleelsete sirgetega	154
5.3.	Kiirteteoreemi pöördteoreem	157
5.4.	Vektori korrutamise arvuga	158
5.5.	Homoteetsusteisendus	160
5.6.	Hulknurkade sarnasus	164
5.7.	Kolmnurkade sarnasuse tunnused	167
5.8.	Sarnaste hulknurkade ümbermõtude suhe ja pindalade suhe	172
5.9.	Teoreem ringjoone lõikajatest	176
5.10.	Teoreem kolmnurga sisenurga poolitajast	177
5.11.	Pikkuste kaudne mõõtmine sarnaste kolmnurkade abil	179
5.12.	Maa-alade plaanistamine	182

6. SEOSD TÄISNURKSE KOLMNURGA ELEMENTIDE VAHEL

6.1.	Pythagorase teoreem	184
6.2.	Pythagorase teoreemi pöördteoreem	189
6.3.	Eukleidese teoreem	190
6.4.	Teoreem täisnurkse kolmnurga kõrgusest	192
6.5.	Geomeetrilise keskmise konstruktsioon	193
6.6.	Seosed täisnurkse kolmnurga joonelementide vahel	195
6.7.	Kahe punkti vaheline kaugus	198
6.8.	Vektori koordinaadid	201
6.9.	Teravnurga siinus, koosinus ja tangens	204
6.10.	Nurkade 30° , 45° ja 60° funktsioonide arvutamine	208
6.11.	Teravnurga funktsioonide graafikud	210
6.12.	Seosed ühe ja sama nurga funktsioonide vahel	212
6.13.	Nurgafunktsioonide tabelid	215
6.14.	Täisnurkse kolmnurga lahendamine	218
6.15.	Nurgafunktsioonide rakendusi	221

7.	PÖÖRDKEHAD	
7.1.	Tahkkehjad ja pöördkehjad	224
7.2.	Silinder	226
7.3.	Silindri pindala	228
7.4.	Silindri ruumala	232
7.5.	Koonus	234
7.6.	Koonuse pindala	237
7.7.	Koonuse ruumala	239
7.8.	Kera ja sfäär	243
7.9.	Kera ruumala	246
7.10.	Kuupide tabel	249
7.11.	Kera pindala	252
7.12.	Ülesandeid pöördkehade kohta	254
8.	KORDAMISEKS	257

Карл Арива, Эльмар Этверк, Аксель Тельгмаа, Аугуст Ундуск, Арнольд Вихман. МАТЕМАТИКА ДЛЯ VIII КЛАССА. На эстонском языке. Художественное оформление Р. Тунгла. Издательство «Валгус», Таллин, Пярнуское шоссе, 10.

Toimetaja K. Kallaste. Kunstiline toimetaja H. Keigo. Tehniline toimetaja M. Tammes. Korrektorid S. Vettik ja T. Eriksoo. Laduda antud 19. IV 1970. Trükkida antud 3. VI 1970. Kohila paberivabriku trükipaber nr. 2, 60×90/16. Trükipoognaid 17,5. Arvestuspoognaid 14,67. Trükiarv 14 000. Tellimuse nr. 2321. Trükikoda «Kommunist», Tallinn, Pikk tn. 2. Hind 27 kop.

27 kop.

A
30770

77 137

TÜ RAAMATUKOGU

1 0300 00397381 7