TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Dots. Ü. Kaasik

Funktsionaalanalüüs

TARTU 1959

T A R T U   R I I K L I K   Ü L I K O O L

G e o m e e t r i a k a t e e d e r

==

D o t s. Ü. K a a s i k

F U N K T S I O N A A L A N A L Ü Ü S

Erikursus

matemaatika osakonna IV kursuse üliõpilastele

Tartu 1959

Vastutav toimetaja prof. G. Kangro.

TRÜ Rotaprint 1959. Tell. nr. 162. Tir. 300. MB 03756.

Hind ~~rbl. 3.70~~ 2- kr.

I peatükk

M E E T R I L I S E D   R U U M I D

§ 1. M e e t r i l i s e   r u u m i   m õ i s t e

Matemaatilise analüüsi üheks põhilisemaks mõisteks on piirväärtus ja sellele vastav tehe - üleminek piirile ehk piirprotsess. Selle tehte üldistamiseks mistahes elementidest koosneva jada juhule meenutame, et arvjada piirväärtuse definitsioon toetub oluliselt kahe reaalarvu (kompleksmuutuja funktsioonide teoorias vastavalt kompleksarvu) vahelise kauguse mõistele. Tõepoolest, geomeetrilist interpretatsiooni arvestades nimetatakse arvudevaheliseks kauguseks teatavasti nende vahe absoluutväärtust (moodulit), kuid jada $\{\xi_n\}$ piirväärtus ξ defineeritaksegi ju tingimusega, et iga etteantud (kuitahes väikese) $\varepsilon > 0$ korral oleks teatud n väärtusest alates $|\xi_n - \xi| < \varepsilon$. Ka piirväärtuse paljude tähtsamate omaduste tõestamisel ei kasutata tegelikult tehteid jada elementideks olevate arvudega, vaid ainult nende vahede absoluutväärtustega.

Seda arvestades näeme, et piirprotsessi mõiste üldistamiseks (mistahes hulga elementidest koosneva jada juhule) tuleks vaid sobival viisil üldistada kauguse mõiste. Hulka, milles selline üldistamine on teostatud, nimetamegi meetriliseks ruumiks. Täpsemalt:

Olgu R hulk, mis koosneb elementidest $x, y, z, \ldots$. Seda hulka nimet. <u>meetriliseks ruumiks</u>, kui igale tema elementide paarile x,y on ühesel viisil seatud vastavusse mittenegatiivne reaalarv $\rho(x,y)$ nii, et on täidetud tingimused:

1° $\rho(x,y) = 0$ siis ja ainult siis, kui $x = y$;

2° $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (sümmeetria aksioom);

3° $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geqslant \rho(x,z)$ (kolmnurga aksioom).

Arvu $\rho(x,y)$ nimet. elementide x ja y vaheliseks kauguseks ning toodud aksioome 1°- 3° meetrikaaksioomideks (eeskirja, mis seab elementidele x ja y vastavusse nendevahelise kauguse, nimet. meetrikafunktsiooniks). Meetrilise ruumi elemente nimet. sageli ka punktideks.

Ilmselt kujutab meetrilise ruumi R iga osahulk D endast samuti meetrilist ruumi.

Kauguse abil on lihtne defineerida ka piirprotsessi. Ruumi R punkti x nimet. selle ruumi elementide jada $\{x_n\}$ piirelemendiks, kui vastavalt igale reaalarvule $\varepsilon > 0$ leidub naturaalarv $N(\varepsilon)$ nii, et $n > N(\varepsilon)$ puhul

$$\rho(x_n,x) < \varepsilon.$$

Piirelementi omavat jada nimet. koonduvaks ja kirjutatakse $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ või $x_n \to x$.

Sellega me taandasime meetrilise ruumi elementide jada $\{x_n\}$ koondumise küsimuse tegelikult reaalarvude jada $\{\rho(x_n,x)\}$ koondumisele, sest viimase tingimuse võib ju kirjutada ka kujul

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n,x) = 0.$$

Ruumi R niisuguste punktide x hulka, mis (fikseeritud elemendi x_0 ja reaalarvu $\alpha > 0$ korral) rahuldavad tingimust $\rho(x_0,x) < \alpha$, nimet. lahtiseks sfääriks ja tähist. $S(x_0,\alpha)$. Elementi x_0 nimet. selle sfääri keskpunktiks ja reaalarvu α tema raadiuseks. Kinnine sfäär $\bar{S}(x_0,\alpha)$ defineeritakse analoogselt võrratusega $\rho(x_0,x) \leq \alpha$. Iga lahtist sfääri, mille keskpunktiks on x_0, nimet. punkti x_0 ümbruseks. Kui on tarvis rõhutada selle sfääri raadiust α, siis kõneldakse ka punkti α-ümbrusest. Märgime, et kui $x', x'' \in \bar{S}(x_0,\alpha)$, siis $\rho(x',x'') \leq 2\alpha$ (tõestada!).

Neid mõisteid kasutades võib piirelemendi ülalantud definitsiooni sõnastada ka nii: punkti x nimet. jada $\{x_n\}$ piirelemendiks, kui punkti x iga ümbrus sisaldab kõik jada elemendid, alates teatud kindlast elemendist, s.t. kui iga $\varepsilon > 0$ puhul leidub N nii, et $n > N$ korral $x_n \in S(x,\varepsilon)$.

Piirelemendi definitsioonist järelduvad järgmised lihtsad teoreemid.

T e o r e e m 1. Kui jada $\{x_n\}$ koondub elemendiks x, siis koondub ka iga tema osajada $\{x_{n_k}\}$ samaks piirelemendiks.

T õ e s t u s: kui iga $n > N$ puhul $\rho(x_n,x) < \varepsilon$, siis on ammugi iga $n_k > N$ korral $\rho(x_{n_k},x) < \varepsilon$.

T e o r e e m 2. Meetrilise ruumi jada $\{x_n\}$ ei saa koonduda kaheks erinevaks piirelemendiks.

T õ e s t u s. Oletame väitevastaselt, et $x_n \to x$ ja $x_n \to y$. Vastavalt suvalisele reaalarvule $\varepsilon > 0$ leiduvad siis naturaalarvud N_1 ja N_2 nii, et $n > N_1$ puhul

$\rho(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$ ja $n>N_2$ puhul $\rho(x_n,y)<\frac{\varepsilon}{2}$. Järelikult $n>N=\max(N_1,N_2)$ korral

$$\rho(x,y)\leq\rho(x,x_n)+\rho(x_n,y)<\varepsilon,$$

s.t. $\rho(x,y)$ on väiksem igast etteantud positiivsest arvust. See on võimalik vaid siis, kui $\rho(x,y)=0$ ja seega $x=y$.

Meetrilise ruumi R osahulka D nimet. tõkestatuks, kui ta sisaldub mingis sfääris, s.t. kui leidub selline punkt $x_0\in R$ ja arv $M>0$, et iga $x\in D$ puhul $\rho(x,x_0)\leq M$ ehk $x\in\bar{S}(x_0,M)$.

T e o r e e m 3. Iga koonduv jada on tõkestatud.

T õ e s t u s. Kuna $x_n\to x$, siis $\{\rho(x_n,x)\}$ kui koonduv arvjada on tõkestatud: $\rho(x_n,x)\leq M'$ iga n puhul. Siis aga mistahes $x_0\in R$ ja naturaalarvu n korral

$$\rho(x_n,x_0)\leq\rho(x_n,x)+\rho(x,x_0)\leq M'+\rho(x,x_0)=M.$$

Mistahes hulga metriseerimist (s.t. tema muutmist meetriliseks ruumiks) võib teostada näiteks sel teel, et defineerime meetrikafunktsiooni võrdustega

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & \text{kui } x=y\\ 1, & \text{kui } x\neq y.\end{cases}$$

Meetrikaaksioomide täidetust on siin lihtne kontrollida. Saadud meetrilises ruumis osutub jada koonduvaks siis ja ainult siis, kui tema elemendid teatud kohast alates on võrdsed. Seega iga hulk on vähemalt niisugusel triviaalsel viisil metriseeritav.

Tavaliselt nimetatakse aga hulka metriseeritavaks siis, kui temas saab kauguse defineerida nii, et sellega määratud koonduvus ühtub vaadeldavas hulgas varem ette antud koonduvusega. Niisuguses mõttes ei osutu iga hulk enam metriseeritavaks.

Järgnevas paragrahvis vaatleme rea näidete varal üksikute, kõige sagedamini rakendamist leidvate hulkade metriseerimise võimalusi. Sealjuures osutub mõnikord otstarbekohaseks defineerida ühe ja sama hulga korral kaugus (ning seega ka koonduvus) mitut moodi. Vastavalt saame ka mitu erinevat meetrilist ruumi, kuigi nende ruumide elemendid on samad.

§ 2. Näiteid meetrilistest ruumidest

Näide 1. Olgu R n-dimensionaalsete reaalsete koordinaatidega vektorite $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, $z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ hulk. Defineerides kauguse valemiga

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \eta_k)^2}$$

saame ruumi, mida nimet. n-dimensionaalseks eukleidiliseks ruumiks ja tähist. R_n (juhul $n = 1$ saame reaalarvude ruumi R_1). Esimese kahe meetrikaaksioomi täidetus on antud juhul ilmne, kolmas aga järeldub nn. Cauchy-Bunjakovski võrratusest

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2$$

(tõestada!). Tõepoolest, valides $\xi_k - \eta_k = \alpha_k$ ja $\eta_k - \zeta_k = \beta_k$ on $\xi_k - \zeta_k = \alpha_k + \beta_k$ ning

$$\rho^2(x,z) = \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k+\beta_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k + \sum_{k=1}^{n}\beta_k^2 \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2} + \sum_{k=1}^{n}\beta_k^2 = \Big(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2}\Big)^2 =$$
$$= (\rho(x,y) + \rho(y,z))^2.$$

Kui $x_k = (\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)})$, siis koondumine $x_k \to x$ tähendab, et $\lim_{k\to\infty}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i^{(k)}-\xi_i)^2} = 0$, mis on samaväärne nõudega, et iga i puhul $\lim_{k\to\infty}\xi_i^{(k)} = \xi_i$. Seega koondumine vaadeldavas ruumis tähendab koondumist kõikide koordinaatide järgi.

N ä i d e 2. Toome eelmises näites vaadeldud hulga puhul sisse teise meetrika, defineerides $\rho(x,y) = \max_k|\xi_k-\eta_k|$. Meetrikaaksioomide täidetus on nüüd täiesti ilmne. Saadud ruumi tähistatakse sümboliga m_n. Koondumine omab siin sama tähenduse nagu eelmises näites.

N ä i d e 3. Olgu $p \geqslant 1$ fikseeritud reaalarv. Defineerime eelmistes näidetes vaadeldud hulga puhul kauguse valemiga

$$\rho(x,y) = \Big(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Esimese kahe meetrikaaksioomi täidetus on siin ilmne, kuna aga kolmas järeldub vahetult nn. Minkowski võrratusest

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k+\beta_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{n}|\beta_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

(selle võrratuse tõestus vt. näit. [3] lk. 28). Saadud meetrilist ruumi tähist. sümboliga l_n^p. Koondumine omab temas eelmistega ühesuguse tähenduse. Ilmselt $l_n^2 = R_n$ ja $l_1^p = m_1 = R_1$.

N ä i d e 4. Koosnegu hulk R kõikidest tõkestatud jadadest $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots)$, s.o. jadadest, kus $\sup_k|\xi_k| < \infty$. Muudame selle hulga meetriliseks ruumiks, defineerides $\rho(x,y) = \sup_k|\xi_k-\eta_k|$ (meetrikaaksioomide täidetus on ilmne). Saadud ruumi tähist. sümboliga m. Koondumine tähendab selles ruumis ühtlast koondumist jada kõikide elementide järgi.

N ä i d e 5. Paljudes rakendustes omab olulist tähtsust ruumi m alamruum, mis koosneb kõikidest koonduvatest jadadest $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = \xi$. Seda ruumi (kus meetrika on defineeritud samuti nagu ruumis m) tähist. sümboliga c.

N ä i d e 6. Olgu $p \geqslant 1$ jälle fikseeritud reaalarv. Vaatleme kõikide niisuguste jadade $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots)$ hulka, mis rahuldavad tingimust

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty$$

(s.t. see rida on koonduv). Defineerime selles hulgas kauguse valemiga

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

mis on võimalik seetõttu, et $\sum |\xi_k|^p < \infty$ ja $\sum |\eta_k|^p < \infty$ korral alati ka $\sum |\xi_k - \eta_k|^p < \infty$ (tõestada!). Meetrikaaksioomide täidetuse kontrollimine toimub samuti nagu näites 3, lastes seal vaid $n \to \infty$. Saadud meetrilist ruumi tähist. sümboliga ℓ^p. Selle ruumide klassi tähtsaimaks erijuhuks on nn. Hilberti koordinaatruum ℓ^2 $(p = 2)$.

N ä i d e 7. Eelmises näites vaadeldud ruumide erijuhuks $(p = 1)$ on absoluutselt koonduvate jadade ruum ℓ. See ruum koosneb jadadest $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots)$, mis rahuldavad tingimust $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < \infty$, kusjuures kaugus on defineeritud valemiga

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|.$$

Meetrikaaksioomide kontrollimine ei tekita siin mingit raskust.

N ä i d e 8. Vaatleme kõikide antud lõigul $[a,b]$ pidevate funktsioonide $x(\xi)$, $y(\xi)$, ... hulka. Muudame selle meetriliseks ruumiks, defineerides

$$\rho(x,y) = \max_{\xi\in[a,b]} |x(\xi) - y(\xi)|.$$

Meetrikaaksioomide rahuldatus on jälle ilmne. Saadud meetrilist ruumi (pidevate funktsioonide ruum) tähist. sümboliga $C(a,b)$ või lihtsalt C, kui määramispiirkonda $[a,b]$ pole tarvis rõhutada. Matemaatilises analüüsis leiab see meetriline ruum kõige enam rakendusi. Koondumine $x_n \to x$ tähendab siin, et $n > N$ korral $\sup_\xi |x_n(\xi) - x(\xi)| < \varepsilon$, s. t. $|x_n(\xi) - x(\xi)| < \varepsilon$ iga $\xi \in [a,b]$ puhul. Seega koondumine ruumis C on funktsioonide jada ühtlane koondumine.

N ä i d e 9. Olgu $p \geq 1$ fikseeritud reaalarv. Vaatleme kõikide niisuguste (lõigul $[a,b]$ määratud) funktsioonide $x(\xi)$ hulka, mis rahuldavad tingimust

$$\int_a^b |x(\xi)|^p d\xi < \infty,$$

kus integraal on võetud Lebesgue'i mõttes. Kauguse selles hulgas defineerime valemiga

$$\rho(x,y) = \left\{\int_a^b |x(\xi) - y(\xi)|^p d\xi\right\}^{\frac{1}{p}}$$

(saab lihtsalt näidata, et vaadeldavasse hulka kuuluvate funktsioonide $x(\xi)$ ja $y(\xi)$ puhul see integraal alati eksisteerib ning on lõplik). Esimese meetrikaaksioomi täidetuseks tuleb samastada funktsioonid, mis erinevad ülimalt hulgal mõõduga null. Teise meetrikaaksioomi täidetus on ilmne, kuna aga kolmas järeldub nn. integraalsest Minkowski võrratusest (vt. [1] lk.347). Saadud meetrilist ruumi tähist. sümboliga L^p või $L^p[a,b]$ (juhul $p = 1$ lihtsalt L). Kõige enam rakendusi leiab jälle erijuht $p = 2$, s.t. Hilberti funktsioonruum L^2.

§ 3. Hulgad meetrilistes ruumides

Vaatleme meetrilise ruumi R mingit osahulka $D \subset R$ (ruumi R meetrika suhtes kujutab ka D endast ilmselt meetrilist ruumi). Hulga D täiendiks nimet. ruumi R nende punktide hulka, mis ei kuulu hulka D (tähist. $R \setminus D$).

Punkti $x \in R$ nimet. hulga D kuhjumispunktiks, kui iga tema ümbrus sisaldab vähemalt ühte x-st erinevat hulga D punkti. Hulga D kõikide kuhjumispunktide hulka nimet. hulga D tuletishulgaks ja tähist. D'. Punkti x nimet. hulga D puutepunktiks, kui iga tema ümbrus sisaldab vähemalt ühe hulga D punkti. Hulga D kõikide puutepunktide hulka nimet. hulga D sulundiks ja tähist. $\overline{D}$. Ilmselt on hulga D iga kuhjumispunkt ühtlasi ka puutepunkt ja seega $D' \subset \overline{D}$. Samuti on puutepunktideks kõik hulga D punktid, s.t. $D \subset \overline{D}$. Kuna aga sellega on kõik võimalused ammendatud, siis $\overline{D} = D' \cup D$.

Kui $D' \subset D$, siis hulka D nimet. kinniseks (hulk, mis sisaldab kõik oma kuhjumispunktid). Kui $D \subset D'$, siis hulka nimet. endas tihedaks, ning kui $D = D'$, siis perfektseks. Hulka nimet. lahtiseks, kui ta on mingi kinnise hulga täiend.

Hulka $D \subset R$ nimet. kõikjal tihedaks (ehk tihedaks ruumis R), kui $\bar{D} = R$. Hulka D nimet. ei kuskil tihedaks (ruumis R), kui ruumi R igas sfääris $S \subset R$ leidub punkt $x \in S$, mis ei kuulu hulga D sulundisse: $x \notin \bar{D}$ (ehk: igas sfääris $S \subset R$ leidub sfäär $S_1 \subset S$, mis ei sisalda hulga D punkte). Tiheduse seisukohalt jaotatakse kõik hulgad kahte kategooriasse. Hulka nimet. I kategooria hulgaks, kui ta on avaldatav ülimalt loenduva arvu ei kuskil tihedate hulkade summana. Kõik ülejäänud hulgad loetakse II kategooria hulkadeks.

Me ütleme, et ruum R on separaabel, kui temas leidub kõikjal tihe loenduv hulk, s.t. kui leidub loenduv hulk $D \subset R$ nii, et $\bar{D} = R$. Separaabluse mõiste on analüüsis oluline eeskätt aproksimeerimise seisukohalt. Nimelt kui ruum on separaabel, siis saab tema elemente kuitahes täpselt aproksimeerida selle loenduva hulga D elementidega. Tõepoolest, kuna $\bar{D} = D \cup D' = R$, siis ruumi R iga punkt on kas hulga D punkt või tema kuhjumispunkt. Seega iga $x \in R$ mistahes ümbrusesse tuleb vähemalt üks hulga D punkt, s.t. etteantud $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in D$ nii, et $\rho(x,y) < \varepsilon$.

Konkreetsete ruumide separaabluses veendumine toimub enamasti sel teel, et konstrueeritakse vajalik loenduv ning kõikjal tihe hulk. Näiteks ruumi R_n (samuti ka m_n ja ℓ_n^p) korral on selliseks hulgaks kõikide ratsionaalsete koordinaatidega vektorite hulk (tõestada!).

Tõestame ruumide ℓ^p $(p \geq 1)$ separaabluse. Kõikjal tihedaks loenduvaks hulgaks osutub siin punktide $(\xi_1', \dots, \xi_n', 0, 0, \dots)$ hulk, kus ξ_i' $(1 \leq i \leq n)$ on mistahes ratsionaalarvud ja n omandab väärtused $1, 2, 3, \dots$. Selle hulga loenduvus on ilmne: iga n puhul on tema elemendid määratud lõpliku arvu indeksitega, mis igaüks omandavad loenduva hulga väärtusi; andes indeksile n väärtused $1, 2, 3, \dots$ saame loenduva hulga loenduvaid hulki, millede summa teatavasti on loenduv (vt. [4] lk. 14-15). Lähtudes nüüd mingist elemendist $x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots) \in \ell^p$ ja arvust $\varepsilon > 0$ näitame, et leidub nimetatud loenduva hulga element $x_n' = (\xi_1', \dots, \xi_n', 0, 0, \dots)$ nii, et $\rho(x, x_n') < \varepsilon$. Selleks valime kõigepealt n nii suurena, et oleks

$$\rho(x, x_n) = \Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

kus $x_n = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$ (selline n valik on võimalik rea $\sum |\xi_i|^p$ koonduvuse tõttu). Edasi aproksimeerime iga reaalarvu ξ_i $(1 \leq i \leq n)$ ratsionaalarvuga ξ_i' nii, et oleks $|\xi_i - \xi_i'| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot n^{-\frac{1}{p}}$. Valides need ξ_i' elemendi x_n' koordinaatideks saame $\rho(x_n, x_n') = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \xi_i'|^p\Big) < \frac{\varepsilon}{2}$ ja seega $\rho(x, x_n') \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, x_n') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =$, m.o.t.t.

Konstrueeritud loenduv hulk ei osutu aga kõikjal tihedaks ruumis m. See järeldub näiteks asjaolust, et isegi punktide $x_n = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)$ jada ei lähene $n \to \infty$ korral ruumi m meetrika mõttes punktile $x = (1, \ldots, 1, 1, \ldots)$, sest $\rho(x_n, x) = 1$ iga n puhul. Näitame, et ruum m ei ole separaabel.

Vaatleme jadasid, mille elementideks on ühed ja nullid. Nende jadade hulk K on kontiinuumi võimsusega, sest seades jadale $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ ($\alpha_i = 0$ või 1) vastavusse kahendmurru $0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ saame kõik reaalarvud 0 ja $0,111\ldots = 1$ vahel. Hulga K iga kahe erineva jada vaheline kaugus on ilmselt 1. Kui nüüd oletada, et m on separaabel, siis peaks temas leiduma loenduv kõikjal tihe hulk D. Kujutame hulga D iga punkti ümber sfääri raadiusega $\frac{1}{2} - \varepsilon$, kus $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Kuna D on loenduv, siis peab vähemalt ühes niisuguses sfääris leiduma enam kui üks element hulgast K, mis pole aga võimalik, sest nende elementide vaheline kaugus 1 on suurem sfääri diameetrist $1 - 2\varepsilon$ ($\varepsilon < \frac{1}{2}$ on mistahes positiivne reaalarv). Saadud vastuolust järeldubki, et m ei ole separaabel. Olgu aga märgitud, et ruumi m alamruum c osutub siiski separaabliks.

Ruumide C ja L^p korral osutub kõikjal tihedaks loenduvaks hulgaks kõikide ratsionaalsete kordajatega polünoomide hulk (tõestus vt. [2] lk. 18-19). Seega ruumid C ja L^p on separaablid.

§ 4. Täielikud meetrilised ruumid

Matemaatilisest analüüsist on teada, millist suurt tähtsust omab piirprotsesside uurimisel nn. Cauchy kriteerium. Loomulikult on otstarbekohane kanda vastav terminoloogia üle ka meetrilistesse ruumidesse.

Meetrilise ruumi R punktide jada $\{x_n\}$ nimet. <u>fundamentaaljadaks</u>, kui mistahes $\varepsilon > 0$ puhul leidub naturaalarv $N(\varepsilon)$ nii, et $\rho(x_{n+i}, x_n) < \varepsilon$ iga $n > N$ ja suvalise naturaalarvu i korral. Näitame, et iga koonduv jada on fundamentaalne. Tõepoolest, kui $x_n \to x$, siis vastavalt reaalarvule $\varepsilon > 0$ leidub $N(\varepsilon)$ nii, et $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, kui $n > N$. Siis aga suvalise naturaalarvu i puhul $\rho(x_{n+i}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ ja seega $\rho(x_{n+i}, x_n) \leq \rho(x_{n+i}, x) + \rho(x_n, x) < \varepsilon$. Vastupidine väide ei tarvitse iga meetrilise ruumi korral paika pidada, s.t. mitte igakord ei oma fundamentaaljada piirelementi v a a d e l d a v a s r u u m i s R.

Meetrilist ruumi nimet. <u>täielikuks</u>, kui iga tema fundamentaaljada koondub selle ruumi elemendiks. Kõik ülalvaadeldud konkreetsed ruumid osutuvad täielikkudeks. Veendume selles mõnede puhul neist.

1) Ruumi R_n täielikkus järeldub matemaatilises analüüsis tõestatavast Cauchy kriteeriumi piisavusest.

2) Ruumi ℓ^p täielikkuse näitamiseks vaatleme suvalist fundamentaaljada $\{x_n\}$, kus $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots) \in \ell^p$.

Siis vastavalt valitud reaalarvule $\varepsilon > 0$ leidub N nii, et iga i korral

$$\rho^p(x_{n+i}, x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n+i)} - \xi_k^{(n)}|^p < \varepsilon^p,$$

kui $n > N$. Seega iga k puhul kehtib võrratus $|\xi_k^{(n+i)} - \xi_k^{(n)}| < \varepsilon$, mis ütleb, et reaalarvude jadad $(\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \ldots)$ on iga k puhul fundamentaalsed. Järelikult (ruumi R_1 täielikkuse tõttu) leiduvad reaalarvud ξ_k nii, et $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k$. Tähistame $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ ja näitame, et $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$ (s.t. $x_n \to x$) ning $x \in \ell^p$ (s.t. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty$). Võrratusest $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n+i)} - \xi_k^{(n)}|^p < \varepsilon^p$ järeldub, et iga m korral $\sum\limits_{k=1}^{m} |\xi_k^{(n+i)} - \xi_k^{(n)}|^p < \varepsilon^p$. Lastes siin $i \to \infty$ saame võrratuse $\sum\limits_{k=1}^{m} |\xi_k - \xi_k^{(n)}|^p \leq \varepsilon^p$, mis kehtib iga m puhul. Seega aga ka $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \xi_k^{(n)}|^p \leq \varepsilon^p$, s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0$. Kuna $x_n \in \ell^p$ tõttu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)}|^p < \infty$, siis Minkowski võrratusest järeldub

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(\xi_k - \xi_k^{(n)}) + \xi_k^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \xi_k^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Seega $x \in \ell^p$ ja ruumi ℓ^p täielikkus on näidatud.

3) Tõestame veel ruumi C täielikkuse. Olgu $\{x_n(\xi)\}$ suvaline fundamentaaljada. See tähendab, et vastavalt reaalarvule $\varepsilon > 0$ leidub $N(\varepsilon)$ nii, et $\max\limits_{a \leq \xi \leq b} |x_{n+i}(\xi) - x_n(\xi)| < \varepsilon$ iga naturaalarvu i ja $n > N$ korral. Järelikult jada $\{x_n(\xi)\}$ koondub lõigul $[a,b]$ ühtlaselt funktsiooniks $x(\xi)$, mis (kui pidevate funktsioonide ühtlaselt koonduva jada piirfunktsioon) on pidev lõigul $[a,b]$, s.t. $x \in C$. Sealjuures iga $t \in [a,b]$ puhul $|x(\xi) - x_n(\xi)| < \varepsilon$, kui

$n > N$. Seega $x_n \to x$ ruumi C meetrika mõttes ja ruum C on järelikult täielik.

Täielikkude ruumide omaduste kohta tõestame järgmised kaks teoreemi.

T e o r e e m 1. Kui täielikus meetrilises ruumis R on antud kinniste sfääride jada

$$\bar{S}(x_1,\alpha_1),\ \bar{S}(x_2,\alpha_2),\ \ldots\ ,\ \bar{S}(x_n,\alpha_n),\ \ldots\ ,$$

kus iga järgmine sfäär sisaldub eelmises ja sfääride raadiused α_n lähenevad nullile, siis leidub üks ja ainult üks punkt $x \in R$, mis sisaldub kõikides nendes sfäärides.

T õ e s t u s . Antud sfääride keskpunktide jada $\{x_n\}$ on fundamentaalne. Tõepoolest, kuna iga $i = 1,2, \ldots$ korral $\bar{S}(x_{n+i},\alpha_{n+i}) \subset \bar{S}(x_n,\alpha_n)$, siis ka $x_{n+i} \in \bar{S}(x_n,\alpha_n)$ ja seega $n > N$ korral $\rho(x_{n+i},x_n) \leq \alpha_n < \varepsilon$ (sest eelduse kohaselt $\alpha_n \to 0$). Ruumi R täielikkuse tõttu eksisteerib siis element $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in R$, kusjuures viimasest võrratusest järeldub ($i \to \infty$ puhul), et $\rho(x,x_n) \leq \alpha_n$, s.t. $x \in \bar{S}(x_n,\alpha_n)$ iga n korral. Jääb veel tõestada, et punkt x on ainus selline. Kui oletada, et leidub veel mingi punkt $y \in R$ nii, et iga n puhul $y \in \bar{S}(x_n,\alpha_n)$, siis $\rho(x,y) \leq \rho(x,x_n) + \rho(y,x_n) \leq 2\alpha_n$. Kuna see võrratus ei sõltu n suurusest, siis lastes $n \to \infty$ saame $\rho(x,y) = 0$, s.t. $x = y$, millega teoreem on tõestatud.

Olgu muide märgitud, et ruumi täielikkust võiks defineerida ka äsjatõestatud omaduse varal. Nimelt saab tõestada, et meetriline ruum on täielik siis, kui iga teoreemis 1 märgitud omadustega kinniste sfääride jada omab mittetühja ühisosa (tõestus vt. näit. [3] lk. 50).

T e o r e e m 2. Täielik meetriline ruum on II kategooria hulk.

T õ e s t u s. Oletame väitevastaselt, et täielik meetriline ruum R on I kategooria hulk, s.t. et ta on avaldatav ülimalt loenduva arvu ei kuskil tihedate hulkade D_n summana:

$$R = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

Teatavasti hulk D_n pole kuskil tihe, kui igas sfääris leidub sfäär, mis ei sisalda hulga D_n punkte. Lähtudes sfäärist $\bar{S}(x_0,1)$, kus $x_0 \in R$ on suvaline, leidub seega sfäär $\bar{S}(x_1,\alpha_1) \subset \bar{S}(x_0,1)$, mis ei sisalda hulga D_1 punkte. Üldsust kitsendamata võime eeldada, et $\alpha_1 < \frac{1}{2}$. Selles sfääris leidub aga omakorda sfäär $\bar{S}(x_2,\alpha_2) \subset \bar{S}(x_1,\alpha_1)$ (kus $\alpha_2 < \frac{1}{3}$), mis ei sisalda hulga D_2 punkte jne. Nii saame sfääride jada

$$\bar{S}(x_0,1),\ S(x_1,\alpha_1),\ \ldots,\ S(x_n,\alpha_n),\ \ldots,$$

kus iga järgmine sisaldub eelmises ja $\alpha_n < \frac{1}{n+1}$. Sealjuures sfäär $\bar{S}(x_n,\alpha_n)$ ei sisalda hulkade $D_1, D_2, \ldots, D_n$ punkte. Teoreemi 1 kohaselt leidub seega punkt $x \in R$, mis sisaldub kõikides nendes sfäärides. See punkt ei saa aga konstruktsiooni põhjal kuuluda ühtegi hulkadest D_n ja järelikult $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Saadud vastuolu tõestabki teoreemi.

Osutub, et ruumi täielikkuse eeldamine ei ole tegelikult eriti range nõue. Nimelt saab iga meetrilist ruumi vajalikkude elementide lisamise teel muuta täielikuks. Ruumi selline täielikustamine toimub sisuliselt täpselt samuti, nagu ratsionaalarvude hulga täielikustamine reaalarvude hulgaks.

§ 5. Meetrilise ruumi täielikustamine

Olgu antud kaks meetrilist ruumi R_o ja R', milledes kaugusi tähistame vastavalt $\rho_o(x_1,x_2)$ ja $\rho'(x_1',x_2')$. Kui ruumide R_o ja R' elementide vahel saab korraldada niisuguse üksühese vastavuse, et ühe ruumi mistahes kahe elemendi vaheline kaugus võrdub teise ruumi vastavate elementide vahelise kaugusega, siis ruume R_o ja R' nimet. <u>isomeetrilisteks</u>. Ainult meetrikaga seotud küsimuste vaatlemisel võib need ruumid ilmselt samastada.

Olgu nüüd antud meetriline ruum R_o, mille kohta eeldame, et ta pole täielik, s.t. et temas leidub vähemalt üks fundamentaaljada, mis ei oma ruumis R_o piirelementi. Tõestame, et sel juhul saab konstrueerida niisuguse täieliku meetrilise ruumi R, milles leidub kõikjal tihe alamhulk $R' \subset R$, $\overline{R'} = R$, mis on isomeetriline ruumiga R_o. Niisugust ruumi nimet. ruumi R_o <u>laienduseks</u>; seega me tõestame, et meetrilist ruumi saab laiendada täielikuks.

Kõigepealt veendume, et (ruumi R_o) kahe fundamentaaljada vastavate elementide vaheliste kauguste jada on alati koonduv. Olgu $\{x_n\}$ ja $\{y_n\}$ fundamentaaljadad. Näitame, et arvjada $\{\rho_0(x_n,y_n)\}$ on fundamentaalne. Kolmnurga aksioomist saame

$$\rho_0(x_n,y_n) \leq \rho_0(x_n,x_{n+i}) + \rho_0(x_{n+i},y_{n+i}) + \rho_0(y_{n+i},y_n),$$

kust

$$\rho_0(x_n,y_n) - \rho_0(x_{n+i},y_{n+i}) \leq \rho_0(x_n,x_{n+i}) + \rho_0(y_{n+i},y_n).$$

Vahetades siin n ja $n+i$ omavahel saame analoogselt

$$\rho_0(x_{n+i},y_{n+i}) - \rho_0(x_n,y_n) \leq \rho_0(x_{n+i},x_n) + \rho_0(y_n,y_{n+i})$$

ja seega

$$|\rho_0(x_{n+i},y_{n+i}) - \rho_0(x_n,y_n)| \leq \rho_0(x_{n+i},x_n) + \rho_0(y_{n+i},y_n).$$

Järelikult jada $\{\rho_0(x_n,y_n)\}$ on fundamentaalne ning ruumi R_1 täielikkuse tõttu koonduv.

Vaatleme nüüd ruumi R_0 kõikide fundamentaaljadade $\{x_n\},\{y_n\}, \ldots$ hulka. Kahte fundamentaaljada $\{x_n\}$ ja $\{y_n\}$ loeme sealjuures <u>ekvivalentseks</u> (võrdseks), kui $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_0(x_n,y_n) = 0$. Konstrueeritava ruumi R elementideks valime ruumi R_0 ekvivalentsete fundamentaaljadade klassid $\bar{x},\bar{y},\ldots$. Meetrika toome ruumi R sisse järgmiselt: olgu $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ kaks fundamentaaljadade klassi ning $\{x_n\}$ ja $\{y_n\}$ nende mingid esindajad, siis defineerime

$$\rho(\bar{x},\bar{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho_0(x_n,y_n).$$

Meil tuleb näidata, et nii defineeritud kaugus ei sõltu esindajate valikust ja rahuldab meetrikaaksioome.

Võtame klassidest $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ mingid teised esindajad

$\{x'_n\}$ ja $\{y'_n\}$ (s.t. $\lim \rho_0(x_n,x'_n) = \lim \rho_0(y_n,y'_n) = 0$).
Siis $|\rho_0(x_n,y_n) - \rho_0(x'_n,y'_n)| \leq \rho_0(x_n,x'_n) + \rho_0(y_n,y'_n) \to 0$ ning järelikult $\lim \rho_0(x_n,y_n) = \lim \rho_0(x'_n,y'_n)$.

Meetrikaaksioom 1° järeldub ekvivalentsuse definitsioonist ja 2° kauguse ρ_0 sümmeetrilisusest (põhjendada!). Tõestame kolmnurga aksioomi 3°. Olgu $\bar{x}$, $\bar{y}$ ja $\bar{z}$ ruumi R elemendid ning $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ja $\{z_n\}$ vastavalt nende mingid esindajad. Et ruumis R_0 kolmnurga aksioom on täidetud, siis iga n puhul

$$\rho_0(x_n,z_n) \leq \rho_0(x_n,y_n) + \rho_0(y_n,z_n).$$

Järelikult

$$\rho(\bar{x},\bar{z}) = \lim_{n\to\infty} \rho_0(x_n,z_n) \leq \lim_{n\to\infty} \rho_0(x_n,y_n) + \\ + \lim_{n\to\infty} \rho_0(y_n,z_n) = \rho(\bar{x},\bar{y}) + \rho(\bar{y},\bar{z}).$$

Tõestame nüüd, et ruumis R leidub ruumiga R_0 isomeetriline kõikjal tihe alamhulk R'. Selleks seame elemendile $x \in R_0$ vastavusse niisuguste fundamentaaljadade klassi, mis koonduvad elemendiks x. See klass pole tühi, sest üheks esindajaks on vähemalt konstantne jada $\{x\}$. Sellise vastavuse üksühesus on ilmne, isomeetria aga lihtsalt tõestatav: kui $x = \lim x_n$ ja $y = \lim y_n$, siis $\rho_0(x,y) = \lim \rho_0(x_n,y_n)$ vähemalt konstantsete jadade $\{x_n\} = \{x\}$ ja $\{y_n\} = \{y\}$ puhul.

Näitame, et ruumi R_0 elementideks koonduvate fundamentaaljadade klasside hulk R' on ruumis R kõikjal tihe. Olgu $\bar{x} \in R$ fundamentaaljadade klass, mille üheks esindajaks on $\{x_n\}$. Seega vastavalt etteantud reaalarvule $\varepsilon > 0$ leidub $N(\varepsilon)$ nii, et $\rho_0(x_{n+i}, x_n) < \varepsilon$, kui $n > N$. Tähistame sümboliga $\bar{x}_n$ elemendiks $x_n \in R_0$ koonduvate fundamentaaljadade klassi, mille üheks esindajaks on ilmselt konstantne jada $\{x_n, x_n, \dots, x_n, \dots\}$. Siis

$$\rho(\bar{x}_n, \bar{x}) = \lim_{i\to\infty} \rho_0(x_n, x_{n+i}) \leq \varepsilon,$$

s.t. leidub element $\bar{x}_n \in R'$, mis aproksimeerib elementi $\bar{x} \in R$ ja seega $\overline{R'} = R$.

Jääb veel tõestada, et ruum R on täielik. Olgu $\{\bar{x}^{(n)}\}$ ruumi R elementide fundamentaaljada. Kui see jada koosneb ainult alamruumi R' elementidest $\bar{x}^{(n)} = \bar{x}_n$, millede esindajateks on konstantsed jadad $\{x_n, x_n, \dots, x_n, \dots\}$, siis fundamentaalsus tähendab, et iga i puhul

$$\rho(\overline{x_{n+i}}, \bar{x}_n) = \lim_{k\to\infty} \rho_0(x_{n+i}, x_n) = \rho_0(x_{n+i}, x_n) < \varepsilon,$$

kui $n > N(\varepsilon)$. Sel juhul vaadeldav jada koondub elemendiks $\bar{x} \in R$, mille üheks esindajaks on jada $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, sest $n > N$ korral

$$\rho(\bar{x}, \bar{x}_n) = \lim_{i\to\infty} \rho_0(x_{n+i}, x_n) < \varepsilon.$$

Kui jada $\{\bar{x}^{(n)}\}$ sisaldab ka alamruumi R' mittekuuluvaid elemente $\bar{x}^{(n)}$, siis aproksimeerime viimased elementidega $\bar{x}_n \in R'$ nii, et

$$\rho(\bar{x}_n, \bar{x}^{(n)}) < \frac{1}{n}.$$

Nii saadud jada $\{\bar{x}_n\}$ on fundamentaalne. Tõepoolest,

$$\rho(\bar{x}_{n+i}, \bar{x}_n) \leq \rho(\bar{x}_{n+i}, \bar{x}^{(n+i)}) + \rho(\bar{x}^{(n+i)}, \bar{x}^{(n)}) + \rho(\bar{x}^{(n)}, \bar{x}_n) <$$

$$< \frac{1}{n+1} + \rho(\bar{x}^{(n+1)}, \bar{x}^{(n)}) + \frac{1}{n},$$

kus jada $\{\bar{x}^{(n)}\}$ fundamentaalsuse tõttu $\rho(\bar{x}^{(n+1)}, \bar{x}^{(n)}) < \frac{\varepsilon}{3}$ ja küllalt suure n puhul ka $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}$. Seega leidub ülaltõestatu põhjal element $\bar{x} \in R$ nii, et $\rho(\bar{x}_n, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$, kui $n > N_1(\varepsilon)$. Siis aga (valides n tarbekorral veelgi suuremana)

$$\rho(\bar{x}^{(n)}, \bar{x}) \leq \rho(\bar{x}^{(n)}, \bar{x}_n) + \rho(\bar{x}_n, \bar{x}) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

ja seega $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}^{(n)} = \bar{x}$, m.o.t.t.

Saaks veel näidata (tõestus vt. näit. [3] lk. 51), et ruum R on ruumiga R_0 kuni isomeetriani üheselt määratud, s.t. ei leidu teist ruumi R_0 täielikku laiendust, mis poleks ruumiga R isomeetriline.

§ 6. Hulga kompaktsuse tingimused

Hulka $D \subset R$ nimet. kompaktseks, kui selle hulga igast lõpmatust jadast saab eraldada koonduva osajada (teisiti: kui selle hulga iga lõpmatu osahulk omab vähemalt ühe kuhjumispunkti). Bolzano-Weierstrassi teoreemi kohaselt on arvsirge (s.t. ruumi R_1) iga tõkestatud lõpmatu punktihulk kompaktne.

Mistahes meetrilises ruumis on lihtne veenduda, et kompaktne hulk on alati tõkestatud (tõestada!), kuid üldiselt ei kehti vastupidine väide. Näiteks ruumis ℓ^2 on jada $\{x_n\}$, kus $x_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots)$, ilmselt tõkestatud, sest iga n puhul $\rho(0,x_n) = 1$. Kuid $n \neq m$ korral on $\rho(x_n,x_m) = \sqrt{2}$ ja seega ei saa see jada sisaldada ühtki fundamentaalset osajada.

Hulga kompaktsuse kindlakstegemine vahetult definitsiooni varal on sageli seotud väga suurte raskustega. Sellepärast anname lihtsama kriteeriumi hulga kompaktsuseks. Selleks toome kõigepealt sisse ühe abimõiste.

Olgu D mingi hulk meetrilises ruumis R ja $\varepsilon > 0$ fikseeritud arv. Hulka $E \subset R$ nimet hulga D <u>ε-võrguks</u>, kui iga $x \in D$ korral leidub vähemalt üks element $y \in E$ nii, et $\rho(x,y) \leq \varepsilon$. Erijuhul võib muidugi olla ka $D = R$. Näiteks kõikide täisarvude hulk on ruumi R_1 ε-võrk iga $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$ puhul.

H a u s d o r f f i   t e o r e e m. Meetrilise ruumi R hulga D kompaktsuseks on tarvilik ning ruumi R täielikkuse puhul ka piisav, et iga $\varepsilon > 0$ korral leiduks hulga D jaoks lõplik ε-võrk.

T a r v i l i k k u s. Olgu D kompaktne. Oletame väitevastaselt, et mingi $\varepsilon > 0$ puhul pole hulgal D lõplikku ε-võrku ning fikseerime vabalt punkti $x_1 \in D$. Siis leidub punkt $x_2 \in D$ nii, et $\rho(x_1,x_2) > \varepsilon$, sest vastasel juhul oleks x_1 hulga D ε-võrk. Edasi leidub punkt $x_3 \in D$ nii, et $\rho(x_1,x_3) > \varepsilon$ ning $\rho(x_2,x_3) > 0$ (muidu oleks $\{x_1,x_2\}$ hulga D ε-võrk) jne. Seda protsessi jatkates saame jada $\{x_n\} \subset D$, mille iga kahe elemendi vaheline kaugus on suurem kui ε. Siis aga ei saa sellest jadast eraldada fundamentaalset (seda enam koonduvat) osajada, mis on vastuolus hulga D kompaktsuse nõudega.

P i i s a v u s. Olgu ruum R täielik ja leidugu hulgal D iga $\varepsilon > 0$ puhul lõplik ε-võrk (sel juhul öeldakse ka, et hulk D on <u>täielikult tõkestatud</u>). Fikseerime vabalt mingi jada $\{x_n\} \subset D$ ning näitame, et temast saab eraldada koonduva osajada.

Valime positiivsete reaalarvude jada $\{\varepsilon_n\}$ nii, et $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ ja konstrueerime iga ε_n puhul lõpliku ε_n-võrgu $\{y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \ldots, y_{N_n}^{(n)}\}$. Kujutame punktide $y_k^{(1)}$ (k = 1,2, ..., N_1) ümber kinnised sfäärid raadiusega ε_1. Neid sfääre (mis katavad kogu hulga D) on lõplik arv ja seega peab vähemalt üks neist, olgu see sfäär $\overline{S}_1$, sisaldama lõpmatu osajada $\{x_n'\} \subset \{x_n\}$. Kujutame nüüd punktide $y_k^{(2)}$ (k = 1,2, ..., N_2) ümber sfäärid raadiusega ε_2. Et ka neid on lõplik arv, siis mingi sfäär $\overline{S}_2$ neist sisaldab lõpmatu osajada $\{x_n''\} \subset \{x_n'\}$ jne. Nii saame iga i puhul sfääri $\overline{S}_i = \overline{S}(y_{K_i}^{(i)}, \varepsilon_i)$, milles sisaldub lõpmatu osajada $\{x_n^{(i)}\} \subset \{x_n^{(i-1)}\} \subset \ldots \subset \{x_n\}$. Valime saadud osajadadest

$$
\begin{array}{c}
x_1', x_2', \ldots, x_n', \ldots \\
x_1'', x_2'', \ldots, x_n'', \ldots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}, \ldots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

välja n.ö. diagonaaljada $x_1', x_2'', x_3''', \ldots, x_n^{(n)}, \ldots$. Kui me osajadade valikul ei muutnud elementide järjekorda, siis $n \neq m$ puhul ilmselt $x_n^{(n)} \neq x_m^{(m)}$. Saadud jada on fundamentaalne, sest elemendist $x_n^{(n)}$ alates sisalduvad kõik tema elemendid sfääris $\overline{S}_n$ raadiusega ε_n, s.t. $\rho(x_{n+i}^{(n+i)}, x_n^{(n)}) \leq 2\varepsilon_n$. Ruumi R täielikkuse tõttu see jada koondub, millega teoreem ongi tõestatud.

Hausdorffi teoreemist järeldub, et täieliku meetrilise ruumi R hulga D kompaktsuseks on tarvilik ja piisav, et iga $\varepsilon > 0$ puhul leiduks hulgal D kompaktne ε-võrk. Tõepoolest, selle tingimuse tarvilikkus on ilmne, kuid piisavus järeldub lihtsalt: olgu E hulga D kompaktne $\frac{\varepsilon}{2}$-võrk; siis Hausdorffi teoreemi kohaselt leidub hulgal E lõplik $\frac{\varepsilon}{2}$-võrk, mis ühtlasi on aga hulga D lõplikuks ε-võrguks.

Ka Hausdorffi teoreemi rakendamine konkreetsetes meetrilistes ruumides tekitab sageli veel raskusi. Sellepärast kasutatakse mõnedes konkreetsetes ruumides oma kompaktsuse tunnuseid, mis kujutavad endast Hausdorffi teoreemi enam või vähem vahetuid järeldusi.

Kuna ruum C omab funktsioonide teoorias olulist kohta, siis toome siin tema osahulkade kompaktsuse tingimused. Enne tuleb ainult meenutada paari vajalikku mõistet.

Funktsioonide hulka $D = \{x(\xi)\} \subset C(a,b)$ nimet. ühtlaselt tõkestatuks, kui leidub selline konstant $M > 0$, et $|x(\xi)| \leq M$ iga $\xi \in [a,b]$ ja $x \in D$ puhul. Kui vastavalt igale reaalarvule $\varepsilon > 0$ leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et $|\xi' - \xi''| < \delta$ korral $|x(\xi') - x(\xi'')| < \varepsilon$ iga $x \in D$ puhul, siis hulga D funktsioone nimet. <u>võrdastmeliselt pidevateks</u> (öeldakse ka, et hulk D on võrdastmeliselt pidev).

A r z e l à t e o r e e m. Hulk $D \subset C$ on kompaktne siis ja ainult siis, kui ta on ühtlaselt tõkestatud ja võrdastmeliselt pidev (tõestus vt. näit. [1] lk. 66-68).

§ 7. T o p o l o o g i l i s e   r u u m i   m õ i s t e

Meetrilised ruumid kujutavad endast erijuhtu üldisematest abstraktsetest ruumidest - nn. topoloogilistest ruumidest.

D e f i n i t s i o o n 1. Hulka T nimet. <u>topoloogiliseks ruumiks</u>, kui temas on valitud välja teatud süsteem osahulki, mida nimet. <u>lahtisteks</u> ning mis rahuldavad tingimusi:

1° kogu ruum T ja tühi hulk on lahtised;

2° mistahes arvu lahtiste hulkade summa on lahtine hulk;

3° lõpliku arvu lahtiste hulkade ühisosa on lahtine hulk.

Punkti $x \in T$ <u>ümbruseks</u> nimet. iga lahtist hulka, mis sisaldab seda punkti. Osahulga $D \subset T$ <u>kuhjumispunkt</u>, <u>puutepunkt</u> ja <u>sulund</u> defineeritakse nüüd täpselt samuti nagu meetriliste ruumide puhul (vt. §3). Osahulka $D \subset T$ nimet. kinniseks, kui tema täiend on lahtine hulk.

Punkti $x \in T$ nimet. jada $\{x_n\} \subset T$ piirelemendiks, kui punkti x iga ümbrus sisaldab kõik jada $\{x_n\}$ elemendid, alates teatud kindlast elemendist. Piirelementi omavat jada nimet. koonduvaks. Vaatamata nende definitsioonide formaalsele ühtelangemisele vastavate definitsioonidega meetrilise ruumi puhul (vrdl. §1), ei ole jada piirelement mitte igas topoloogilises ruumis üheselt määratud. Nimelt võib mõnes topoloogilises ruumis leiduda jadasid, mis koonduvad mitmeks piirelemendiks (vastav näide vt. [1] lk. 17-18).

Jada piirelemendi ainsuse saavutamiseks tuuakse topoloogilises ruumis sageli sisse veel nn.

E r a l d u v u s e   a k s i o o m. Ruumi T igal kahel erineval punktil leiduvad ühisosata ümbrused.

Seda aksioomi rahuldavat topoloogilist ruumi nimet. separaatseks ehk Hausdorffi ruumiks. Lihtne on veenduda, et separaatses ruumis ei saa ükski jada omada kahte erinevat piirelementi (tõestada!).

Kui topoloogilises ruumis T saab defineerida meetrika nii, et selle meetrika mõttes lahtised hulgad on lahtised ka esialgse topoloogia mõttes ja vastupidi, siis nimet. ruumi T metriseeritavaks.

Topoloogilise ruumi ülaltoodud definitsioon ei kujuta endast muidugi mitte ainsat võimalikku. Toome veel kolm üldkasutatavat definitsiooni, mis on samaväärsed definitsiooniga 1.

D e f i n i t s i o o n 2. Hulka T nimet. topoloogiliseks ruumiks, kui temas on valitud välja teatud süsteem osahulki, mida nimet. kinnisteks ning mis rahuldavad tingimusi:

1° kogu ruum T ja tühi hulk on kinnised;

2° lõpliku arvu kinniste hulkade summa on kinnine hulk;

3° mistahes arvu kinniste hulkade ühisosa on kinnine hulk.

Hulka $D \subset T$ nimet. lahtiseks, kui tema täiend on kinnine hulk. Kõik ülejäänud mõisted defineeritakse samuti nagu ülal, kuigi võiks anda ka vahetud definitsioonid. Näiteks: hulga D sulundiks nimet. kõikide seda hulka sisaldavate kinniste hulkade ühisosa.

D e f i n i t s i o o n 3. Hulka T nimet. topoloogiliseks ruumiks, kui igale tema osahulgale $D \subset T$ on seatud vastavusse teatud kindel osahulk $\overline{D} \subset T$, mida nimet. hulga D sulundiks, nii, et

1° tühja hulga sulund on tühi hulk;

2° osahulkade summa sulund võrdub liidetavate sulundite summaga: $\overline{D_1 \cup D_2} = \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$;

3° sulundi sulund võrdub sulundi endaga: $\overline{\overline{D}} = \overline{D}$;

4° hulk sisaldub oma sulundis: $D \subset \overline{D}$.

Kinniseks nimet. nüüd hulka, mis võrdub oma sulundiga, kuna aga ülejäänud mõisted defineeritakse samuti nagu ülal.

D e f i n i t s i o o n 4. Hulka T nimet. topoloogiliseks ruumiks, kui temas on valitud välja teatud süsteem osahulki, mida nimet. ümbrusteks ning mis rahuldavad tingimusi:

1° igale punktile $x \in T$ saab seada vastavusse vähemalt ühe seda punkti sisaldava ümbruse, mida nimet. punkti x ümbruseks ja tähist. näiteks $U(x)$;

2° kui punktil x on olemas kaks ümbrust $U_1(x)$ ja $U_2(x)$, siis leidub vähemalt üks selle punkti ümbrus $U_3(x)$, mis sisaldub lähteümbruste ühisosas: $U_3(x) \subset U_1(x) \cap U_2(x)$;

3° kui $U(x)$ on punkti x ümbrus ja $y \in U(x)$, siis leidub selline punkti y ümbrus $U(y)$, mis sisaldub ümbruses $U(x)$: $U(y) \subset U(x)$.

Lahtiseks nimet. nüüd hulka, mis koos iga oma punktiga sisaldab ka selle punkti mingi ümbruse. Ülejäänud mõisted defineeritakse jälle endisel viisil.

II peatükk

LINEAARSED RUUMID

§ 1. Lineaal

Hulka X elementidega $x, y, z, \ldots$ nimet. rühmaks, kui selles hulgas on defineeritud eeskiri, mis seab igale järjestatud elementidepaarile x, y vastavusse sama hulga mingi kolmanda elemendi, mida nimet. elementide x ja y summaks ning tähist. $x + y$, kusjuures on täidetud tingimused:

1° iga $x, y, z \in X$ puhul $(x + y) + z = x + (y + z)$;

2° leidub element $\theta \in X$, mida nimet. nullelemendiks, nii, et iga $x \in X$ puhul $x + \theta = \theta + x = x$;

3° iga $x \in X$ puhul leidub element $-x \in X$, mida nimet. elemendi x vastandelemendiks, nii, et $x + (-x) = (-x) + x = \theta$.

Kui lisaks nendele on täidetud veel neljas tingimus:

4° iga $x, y \in X$ puhul $x + y = y + x$,

siis rühma X nimet. kommutatiivseks ehk Abeli rühmaks.

Aksioomidest lähtudes on lihtne veenduda nii nullelemendi kui ka iga elemendi vastandelemendi ainsuses (vt. näit. [1] lk. 82).

Mõnikord on rühmas defineeritud tehet otstarbekohane nimetada mitte liitmiseks vaid korrutamiseks ja tähistada $x.y$. Nullelemendi asemel kõneldakse siis ühikelemendist (tähist. e) ja vastandelemendi asemel pöördelemendist (tähist. x^{-1}). Rühma ennast nimet. sel juhul multiplikatiivseks rühmaks, kuna aga liitmiseks nimetatud tehtega rühmast kõneleme edaspidi kui aditiivsest rühmast.

Hulka X nimet. ringiks (ehk algebraliseks ringiks, võrdle III ptk. § 7), kui:

a) X on aditiivne Abeli rühm;

b) hulgas X on defineeritud veel teine tehe, mida nimet. korrutamiseks ja tähist. $x \cdot y$, kusjuures

1° $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,

2° $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Viimane tingimus (distributiivsus) on antud kahe võrdusega sellepärast, et korrutamise kommutatiivsust me ringis üldiselt ei nõua. Samuti ei nõua me ühikelemendi ja iga elemendi pöördelemendi olemasolu (kui need nõuded on lisatud, siis ringi nimet. korpuseks). Kui aga ühikelement e on olemas (sel korral kõneldakse ka ühikelemendiga ringist), siis võib mõne $x \in X$ puhul leiduda element $x_*^{-1} \in X$ (või element ${}_*x^{-1} \in X$) nii, et $x \cdot x_*^{-1} = e$ (või ${}_*x^{-1} \cdot x = e$). Niisugust elementi x_*^{-1} nimet. elemendi x parempoolseks pöördelemendiks (${}_*x^{-1}$ on vastavalt vasakpoolne pöördelement). Lihtne on näha, et kui eksisteerivad nii x_*^{-1} kui ka ${}_*x^{-1}$, siis $x_*^{-1} = {}_*x^{-1} = x^{-1}$.

Hulka X nimet. lineaaliks (ehk lineaarseks hulgaks), kui:

a) X on aditiivne Abeli rühm;

b) on defineeritud hulga X elementide kommutatiivne korrutamine reaalarvuliste skalaaridega (või üldse mingi ühikelemendiga ringi elementidega) nii, et

1° kui $x \in X$, siis $\lambda x \in X$ iga $\lambda \in R_1$ puhul,

2° $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,

3° $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

4° $1 \cdot x = x$.

Nendest aksioomidest järelduvad lihtsalt järgmised omadused: $(-1) \cdot x = -x$; $0 \cdot x = \theta$; kui $\lambda x = \theta$, siis $x \neq \theta$ korral $\lambda = 0$ ja $\lambda \neq 0$ korral $x = \theta$.

Kõik eelmises peatükis vaadeldud konkreetsed meetrilised ruumid on ühtlasi lineaalid. n-dimensionaalsete vektorite hulga (s.t. ruumide R_n, m_n ja l_n^p) puhul on see teada kõrgema algebra kursusest. Jadaruumide m, c, l^p ja l puhul defineerime

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n, \dots),$$
$$\lambda x = (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \dots, \lambda\xi_n, \dots).$$

Lineaali aksioomide täidetus on siin ilmne, ainult ruumi l^p puhul tuleb tõestada, et $x, y \in l^p$ korral $x + y \in l^p$ (tõestus järeldub Minkowski võrratusest). Funktsiooniruumide C ja L^p korral defineerime

$$(x + y)(\xi) = x(\xi) + y(\xi),$$
$$(\lambda x)(\xi) = \lambda \cdot x(\xi),$$

s.t. tehted funktsioonidega tähendavad tehteid nende funktsioonide vastavate väärtustega (kontrollida lineaali aksioomide täidetus!).

Lineaali elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nimet. <u>lineaarselt sõltumatudeks</u>, kui võrdusest $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \theta$ järeldub, et $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Lõpmatu hulga elemente nimet. lineaarselt sõltumatudeks, kui iga lõplik osa nendest on lineaarselt sõltumatud.

Olgu x ja y kaks erinevat punkti lineaalist X. Siis kõikide niisuguste punktide $z = X$ hulka, mis on avaldatavad valemiga

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y,$$

kus $0 \leq \lambda \leq 1$, nimet. punktide x ja y vaheliseks <u>sirglõiguks</u>. Kui me λ muutumist ei kitsenda, siis saame samast valemist punkte x ja y läbiva <u>sirge</u>.

Hulka $D \subset X$ nimet. <u>kumeraks</u>, kui ta koos iga kahe punktiga sisaldab ka neid punkte ühendava sirglõigu. Näiteks on kõikide polünoomide hulk kumer (ruumis C), sest $\lambda x(\xi) + (1 - \lambda)y(\xi)$ on polünoom, kui $x(\xi)$ ja $y(\xi)$ seda on.

Kui lineaali X osahulk L sisaldab nullelemendi ning koos elementidega x, y ka nende summa $x + y$ ja korrutise mistahes skalaariga λx (s.t. kui D on kinnine liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes), siis kujutab ka L endast lineaali (lineaali X <u>alamlineaali</u>). Ilmselt on lineaalide ühisosa samuti lineaal. Tõepoolest, kui $L = L_1 \cap L_2$ (L_1 ja L_2 on lineaalid), siis $x, y \in L$ tähendab, et $x, y \in L_1$ ja $x, y \in L_2$; seega aga $x + y, \lambda x \in L_1$ ja

$x + y, \lambda x \in L_2$, s.t. $x + y, \lambda x \in L$.

Olgu D lineaali X mingi osahulk. Kõikide seda hulka sisaldavate lineaalide ühisosa nimet. hulga D <u>lineaarseks katteks</u> ja tähist. L(D). Hulga D lineaarse katte praktiline konstrueerimine toimub sel teel, et moodustatakse selle hulga elementide kõik võimalikud lineaarsed kombinatsioonid $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$. Niisuguste lineaarsete kombinatsioonide hulk L (mis tekib skalaaride $\lambda_i \in R_1$, naturaalarvu n ja elementide $x_i \in D$ varieerimisel) ongi soovitud lineaarne kate, sest ilmselt on L lineaal, kuid teiselt poolt peab iga hulka D sisaldav lineaal sisaldama ka kõik sellised lineaarsed kombinatsioonid.

Näiteks hulga $\{1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^n, \ldots\}$ lineaarseks katteks (ruumis C) on kõikide reaalkordajatega polünoomide hulk P.

Kui hulga D elemendid on lineaarselt sõltumatud, siis nimet. hulka D lineaali L(D) <u>baasiks</u>. Võib aga tõestada, et kui D elemendid pole lineaarselt sõltumatud, siis saab alati eraldada osahulga $D' \subset D$ nii, et D' elemendid on lineaarselt sõltumatud, kusjuures $L(D') = L(D)$, s.t. hulkadel D ja D' on ühine lineaarne kate (tõestuse idee vt. näit. [5] lk. 33).

§ 2. Lineaarne normeeritud ruum

Lineaali X nimet. lineaarseks ruumiks, kui tema elementide teatud jadade $\{x_n\}$ puhul on defineeritud koondumine $x_n \to x$ nii, et

1° jada saab koonduda ainult üheks piirelemendiks;

2° koonduva jada iga lõpmatu osajada koondub samaks piirelemendiks;

3° kui $x_n \to x$, siis iga $\lambda \in R_1$ puhul $\lambda x_n \to \lambda x$;

4° kui $\lambda_n \to \lambda$ (ruumis R_1), siis iga $x \in X$ puhul $\lambda_n x \to \lambda x$;

5° kui $x_n \to x$ ja $y_n \to y$, siis $x_n + y_n \to x + y$.

Kui alamlineaal $L \subset X$ on kinnine (s.t. sisaldab kõikide oma jadade piirelemendid), siis nimet. teda lineaarse ruumi X lineaarseks alamruumiks. Kõikide hulka $D \subset X$ sisaldavate lineaarsete alamruumide ühisosa nimet. hulga D kinniseks lineaarseks katteks; ilmselt võrdub ta lineaarse katte L(D) sulundiga (tõestada, et lineaali sulund on lineaal!). Kui hulga D elemendid on lineaarselt sõltumatud, siis nimet. hulka D tema kinnise lineaarse katte põhihulgaks. Saaks jälle tõestada, et kui D elemendid pole lineaarselt sõltumatud, siis saab eraldada lineaarselt sõltumatude elementidega osahulga $D' \subset D$ nii, et $\overline{L(D')} = \overline{L(D)}$, s.t. nii, et nendel hulkadel on ühine kinnine lineaarne kate (ka selle väite tõestusel me käesolevas kursuses ei peatu).

Lineaali X nimet. <u>lineaarseks normeeritud ruumiks</u>, kui igale elemendile $x \in X$ on seatud vastavusse üheselt määratud mittenegatiivne reaalarv $\|x\|$, mida nimet. elemendi x <u>normiks</u>, kusjuures on täidetud tingimused:

1° $\|x\| = 0$ siis ja ainult siis, kui $x = \theta$;

2° iga $\lambda \in R_1$ ja $x \in X$ puhul $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

3° iga $x, y \in X$ puhul $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Kui lineaarses normeeritud ruumis defineerida kaugus võrdusega

$$\rho(x,y) = \|x - y\|,$$

siis osutub ta meetriliseks ruumiks, sest äsjatoodud aksioomidest järelduvad lihtsalt meetrikaaksioomid (tõestada!). Koondumine $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ omandab lineaarses normeeritud ruumis seega tähenduse

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0,$$

mida nimet. ka <u>koondumiseks normi järgi</u> ehk <u>tugevaks koondumiseks</u>. Ilmselt on niisuguse koondumise puhul rahuldatud lineaarse ruumi aksioomid (tõestada!).

Täielikku lineaarset normeeritud ruumi nimet. <u>Banachi ruumiks</u> ehk <u>B-tüüpi ruumiks</u>. Kõik eelmises peatükis vaadeldud konkreetsed meetrilised ruumid osutuvad Banachi ruumideks, kui defineerida

$$\|x\| = \rho(x,\theta).$$

Seega vektori $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ normiks ruumides R_n, m_n ja l_n^p on vastavalt arvud

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2},$$

$$\|x\| = \max_k |\xi_k|$$

ja

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Jada $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ norm ruumides m, l^p ja l (eeldades, et x kuulub vajalikku ruumi) on vastavalt

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|,$$

$$x = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ja

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|.$$

Funktsiooni $x(\xi)$ norm ruumides C ja L^p defineeritakse valemitega

$$\|x\| = \sup_{\xi \in [a,b]} |x(\xi)|$$

ja

$$\|x\| = \left\{\int_a^b |x(\xi)|^p d\xi\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Lineaarses normeeritud ruumis on sfäär $\bar{S}(x_0, \alpha)$ selliste punktide x hulk, mis rahuldavad võrratust $\|x - x_0\| \leq \alpha$. Sfäär on alati kumer. Tõepoolest, kui $x', x'' \in S(x_0, \alpha)$, s.t. $\|x' - x_0\| \leq \alpha$ ja $\|x'' - x_0\| \leq \alpha$, siis $0 \leq \lambda \leq 1$ puhul $\|\lambda x' + (1 - \lambda)x'' - x_0\| =$
$= \|\lambda(x' - x_0) + (1 - \lambda)(x'' - x_0)\| \leq \lambda\|x' - x_0\| +$
$+ (1 - \lambda)\|x'' - x_0\| \leq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha$, s.t.
$\lambda x' + (1 - \lambda)x'' \in \bar{S}(x_0, \alpha)$.

Näitame veel, et koondumisest $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ järeldub lineaarses normeeritud ruumis seos $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

Mistahes kahe elemendi $x, y \in X$ puhul

$$\|x\| = \|y + (x - y)\| \leq \|y\| + \|x - y\|,$$

millest

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Vahetades siin x ja y saame

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$$

ja seega

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|.$$

Siis aga $\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\|$ ning $\lim \|x_n - x\| = 0$ tõttu ka $\lim \big|\|x_n\| - \|x\|\big| = 0$, s.t. $\lim\|x_n\| = \|x\|$.

§ 3. Hilberti ruum

Lineaali H nimetame vektoriruumiks, kui igale tema järjestatud elementidepaarile x, y on seatud vastavusse reaalarv (x,y), mida nimet. elementide x ja y skalaarkorrutiseks, nii, et on täidetud tingimused:

1° $(x,y) = (y,x)$;

2° $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x,z) + \mu(y,z)$;

3° $(x,x) \geq 0$, kusjuures $(x,x) = 0$ siis ja ainult siis, kui $x = \theta$.

Kui skalaariga korrutamine on lineaalis H defineeritud nii, et λ võib omandada kompleksarvulisi väärtusi, siis defineeritakse ka skalaarkorrutis (x,y) kompleksarvuna, kusjuures aksioom 1^{o} tuleb asendada aksioomiga

1^{oo} $(x,y) = \overline{(y,x)}$.

Kui defineerida $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, siis vektoriruum osutub lineaarseks normeeritud ruumiks (tõestada!). Selle meetrika suhtes täielikku vektoriruumi nimet. Hilberti ruumiks (mõnikord lisatakse veel nõue, et H oleks separaabel).

Seni vaadeldud konkreetsetest ruumidest on R_n, ℓ^2 ja L^2 Hilberti ruumid. Ruumis R_n defineeritakse skalaarkorrutis tavalisel viisil:

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k .$$

Kui R_n vektorid võivad olla ka kompleksarvuliste koordinaatidega, siis tuleb see definitsioon muuta järgmiseks:

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \bar{\eta}_k .$$

Ruumides ℓ^2 ja L^2 defineeritakse skalaarkorrutis vastavalt valemitega

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k$$

ja

$$(x,y) = \int_a^b x(\xi) y(\xi) d\xi ,$$

ehk kompleksel juhul valemitega

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k$$

ja

$$(x,y) = \int_a^b x(\xi) \overline{y(\xi)} d\xi .$$

Kolmnurga aksioomiga ekvivalentseks osutub Hilberti ruumis nn. Bunjakovski võrratus

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

(tõestus vt. [1] lk. 124).

Elemente $x,y \in H$ nimet. ortogonaalseteks ja kirjutatakse $x \perp y$, kui $(x,y) = 0$. Elementi $x \in H$ nimet. ortogonaalseks lineaarse alamruumiga (või lineaaliga) $L \subset H$ ja kirjutatakse $x \perp L$, kui x on ortogonaalne iga elemendiga $y \in L$. Suurust

$$\rho(x,L) = \inf_{y \in L} \|x - y\|$$

nimet. elemendi $x \in H$ kauguseks alamruumist L. Tõestame, et alamruumis L leidub iga $x \in H$ puhul üheselt määratud element $y \in L$ nii, et $\|x - y\| = \rho(x,L)$. Sellist elementi y nimet. elemendi x projektsiooniks alamruumi L.

Kui $x \in L$, siis $\rho(x,L) = 0$ ja otsitavaks elemendiks on $y = x$. Seepärast võime eeldada, et $x \notin L$ ja $\rho(x,L) = \delta > 0$.

Alumise raja definitsiooni kohaselt leidub jada $\{y_n\} \subset L$ nii, et $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \delta$, s.t. $\delta \leq \|x - y_n\| < \delta + \varepsilon$, kui $n > N(\varepsilon)$. Siis $\frac{1}{2}(y_{n+1} + y_n) \in L$ tõttu

$$\|x - \tfrac{1}{2}(y_{n+1} + y_n)\| \geqslant \delta .$$

Teiselt poolt aga $n > N(\varepsilon)$ puhul

$$\|x - \tfrac{1}{2}(y_{n+1} + y_n)\| = \tfrac{1}{2}\|2x - y_{n+1} - y_n\| \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{1}{2}\|x - y_{n+1}\| + \tfrac{1}{2}\|x - y_n\| < \delta + \varepsilon$$

ja seega $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - \frac{1}{2}(y_{n+1} + y_n)\| = \delta$.

Siit järeldub, et jada $\{y_n\}$ on fundamentaalne. Tõepoolest, $n \to \infty$ korral

$$\|y_{n+1} - y_n\|^2 = ((y_{n+1} - x) + (x - y_n), (y_{n+1} - x) + (x - y_n)) =$$

$$= 2\|x - y_{n+1}\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4\|x - \tfrac{1}{2}(y_{n+1} + y_n)\|^2 \to 0.$$

Järelikult eksisteerib $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in L$, kusjuures $\|x - y\| \leqslant \|x - y_n\| + \|y_n - y\| \to \delta + 0$, s.t. $\|x - y\| = \delta$.

Tõestame nüüd, et element $z = x - y$ on ortogonaalne alamruumiga L. Kui oletada, et leidub $y' \in L$ nii, et $(z,y') = \alpha \neq 0$, siis tähistades $y + \frac{\alpha}{(y',y')} y' = y''$ saame

$$\|x - y''\|^2 = (z - \frac{\alpha}{(y',y')}y', z - \frac{\alpha}{(y',y')} y') =$$

$$= \|z\|^2 - \frac{2\alpha^2}{(y',y')} + \frac{\alpha^2(y',y')}{(y',y')^2} = \|z\|^2 - \frac{\alpha^2}{(y',y')} < \delta^2,$$

mis pole aga $y'' \in L$ tõttu võimalik. Seega $z \perp L$.

Meil on jäänud näidata, et elemendi x projektsioon $y \in L$ (ja seega ka $z = x - y$) on üheselt määratud. Tõepoolest, kui oleks $x = y + z$ ja $x = y^* + z^*$, kus $y, y^* \in L$ ja $z, z^* \perp L$, siis $y - y^* = z^* - z$ ja

$$\|y - y^*\|^2 = (y - y^*, z^* - z) = (y - y^*, z^*) - (y - y^*, z) = 0,$$

sest $y - y^* \in L$. Seega $y - y^* = z^* - z = \theta$, s.t. $y = y^*$ ning $z = z^*$.

Järelikult me oleme tõestanud, et kehtib järgmine

T e o r e e m 1. Mistahes alamruumi $L \subset H$ ja elemendi $x \in H$ puhul leiduvad üheselt määratud elemendid $y \in L$ ja $z \perp L$ nii, et

$$x = y + z.$$

Hilberti ruumi uurimisel leiab veel sageli kasutamist

T e o r e e m 2. Selleks, et lineaal L oleks ruumis H kõikjal tihe, on tarvilik ja piisav, et ruumis H ei leiduks elementi $x \neq \Theta$ nii, et $x \perp L$.

T a r v i l i k k u s. Olgu $\overline{L} = H$. Veendume kõigepealt, et kui $x \perp L$, siis ka $x \perp \overline{L}$. Tõepoolest, iga element $y \in \overline{L}$ on kujutatav mingi jada $\{y_n\} \subset L$ piirelemendina: $\|y - y_n\| \to 0$. Kuid iga n puhul $(x,y_n) = 0$ ja Bunjakovski võrratusest saame $|(x,y)| = |(x,y) - (x,y_n)| = |(x,y - y_n)| \leq \|x\| \cdot \|y - y_n\| \to 0$. Seega $(x,y) = 0$, s.t. $x \perp \overline{L}$ (ühtlasi me nägime muide, et skalaarkorrutis on pidev funktsioon). Kuna antud juhul $\overline{L} = H$, siis elemendi $x \perp L$ eksisteerimine tähendab, et x on ortogonaalne kogu ruumiga. Muuhulgas siis $x \perp x$, s.t. $(x,x) = 0$ ehk $x = \Theta$.

P i i s a v u s. Ärgu leidugu elementi $x \neq \Theta$ nii, et $x \perp L$. Oletame väitevastaselt, et $\overline{L} \neq H$ ja valime mingi elemendi $x \in H$ nii, et $x \notin \overline{L}$. Siis teoreemi 1 kohaselt $x = y + z$, kus $y \in \overline{L}$ ja $z \perp \overline{L}$. Muuhulgas siis ka $z \perp L$, kuid $x \notin \overline{L}$ tõttu $z \neq \Theta$. Saadud vastuolu tõestabki teoreemi.

§ 4. F - t ü ü p i r u u m

Täielikku meetrilist ruumi X nimet. <u>F-tüüpi ruumiks</u>, kui ta on lineaal ning meetrika rahuldab tingimusi

1° iga $x,y \in X$ puhul $\rho(x,y) = \rho(x - y,\theta)$;

2° kui $\lambda_n \to 0$, siis $\lambda_n x \to \theta$ iga $x \in X$ puhul;

3° kui $x_n \to \theta$, siis $\lambda x_n \to \theta$ iga $\lambda \in R_1$ puhul.

Vahetu kontrollimisega (vt. [2] lk. 52) võib lihtsalt veenduda, et F-tüüpi ruum on ühtlasi lineaarne ruum, s.t. et on täidetud ka lineaarse ruumi ülejäänud aksioomid. Seda arvestades kasutatakse toodud definitsiooni asemel sageli järgmist lihtsustatud sõnastust:

Lineaarset täielikku meetrilist ruumi nimet. F-tüüpi ruumiks, kui temas on täidetud tingimus

$$\rho(x,y) = \rho(x - y,\theta)$$

(näiline lihtsustus on saavutatud liigsete eelduste sissetoomise teel: nõutakse lineaarse ruumi kõikide aksioomide täidetust, kuigi piisaks ainult kahest).

Ilmselt osutub iga B-tüüpi ruum ühtlasi F-tüüpi ruumiks (tõestada!). Vastupidise olukorraga aga üldiselt tegemist ei ole, mida illustreerib kasvõi järgmine

N ä i d e. Vaatleme kõikide (reaalarvuliste) jadade $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots)$ hulka ja muudame ta meetriliseks ruumiks, defineerides

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} .$$

See rida on alati koonduv, sest iga k puhul

$$\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}<\frac{1}{2^k},$$

aga rida $\sum \frac{1}{2^k}$ koondub. Esimese kahe meetrikaaksioomi täidetus on ilmne, aga kolmnurga aksioom järeldub võrratusest

$$\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|}\leq\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}+\frac{|\beta|}{1+|\beta|}$$

(üksikasjalik tõestus vt. [1] lk. 25). Saadud ruumi tähist. tavaliselt sümboliga s. Kui tehted jadadega defineerida samuti nagu ruumide m ja ℓ^p puhul, siis on ilmne, et s on lineaal. Ruumi s täielikkuse tõestus vt. näit. [2] lk. 24 (täpsemalt, vajalik tõestus on sealt lihtsalt järeldatav).

Tõestame, et s on F-tüüpi ruum:

1° $$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|(\xi_k-\eta_k)-0|}{1+|(\xi_k-\eta_k)-0|}=(x-y,\theta);$$

2° kui $\lambda_n\to 0$, siis $\rho(\lambda_n x,\theta)=$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\lambda_n||\xi_k|}{1+|\lambda_n||\xi_k|}\to 0;$$

3° kui $x_n\to\theta$, s.t. $\xi_k^{(n)}\to 0$, siis

$$\rho(\lambda x_n,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\lambda||\xi_k^{(n)}|}{1+|\lambda||\xi_k^{(n)}|} \to 0.$$

Ruum s ei ole aga B-tüüpi ruum. Nimelt kui defineerida (vrdl. §2)

$$\|x\| = \rho(x,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k|}{1+|\xi_k|},$$

siis pole täidetud normi teine aksioom, sest üldiselt

$$\|\lambda x\| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\lambda||\xi_k|}{1+|\lambda||\xi_k|} \neq |\lambda|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k|}{1+|\xi_k|} = |\lambda|\|x\|.$$

Seega F-tüüpi ruum pole üldiselt normeeritav nii, et $\|x\| = \rho(x,\theta)$. Sellepärast tuuakse F-tüüpi ruumis normi mõiste asemel sisse kvaasinormi mõiste, mida tähist. ikka $\|x\|$ ja defineeritakse

$$\|x\| = \rho(x,\theta).$$

F-tüüpi ruumi esimest aksioomi arvestades on siis ikka täidetud tingimus $\|x - y\| = \rho(x,y)$. Kvaasinormi iseloomustavad järgmised omadused:

1° $\|x\| \geq 0$, kusjuures $\|x\| = 0$ siis ja ainult siis, kui $x = \theta$;

2° $\|-x\| = \|x\|$;

3° $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Esimene omadus on siin ilmne, teised aga lihtsalt tõestatavad:

$$\|-x\| = \rho(-x,\theta) = \rho(\theta,-x) = \rho(\theta-(-x),\theta) = \rho(x,\theta) = \|x\|;$$

$$\|x + y\| = \rho(x + y,\theta) \leq \rho(x + y,y) + \rho(y,\theta) = \|x\| + \|y\|.$$

Nendest omadustest järeldub vahetult, et

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|.$$

Tõepoolest, kuna $x = (x + y) + (-y)$, siis

$$\|x\| \leq \|x + y\| + \|-y\| = \|x + y\| + \|y\|.$$

Samuti järeldub siit kvaasinormi pidevus, s.t. et $x_n \to x$ korral $\|x_n\| \to \|x\|$ (tõestada!).

Vaatleme nüüd F-tüüpi ruumis X lõpmatut rida $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Kui eksisteerib $x = \lim_{n\to\infty} s_n$, kus $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, siis nimet. seda rida <u>koonduvaks</u> ja elementi x tema <u>summaks</u> ning kirjut. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x$.

Tõestame, et kui positiivne arvurida $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ on koonduv, siis koondub ka rida $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Ruumi X täielikkuse tõttu tuleb selleks tõestada jada $\{s_n\}$ fundamentaalsus. Kuid iga i puhul

$$\rho(s_{n+i},s_n) = \|s_{n+i} - s_n\| = \|\sum_{k=n+1}^{n+i} x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+i} \|x_k\| < \varepsilon,$$

kui $n > N(\varepsilon)$, sest arvurida $\sum \|x_k\|$ on ju eelduse kohaselt koonduv.

Niisugust F-tüüpi ruumi elementide rida, mille liikmete kvaasinormidest moodustatud rida on koonduv, nimet. <u>absoluutselt koonduvaks</u> reaks. Viimane tulemus ütleb, et iga absoluutselt koonduv rida on koonduv. Seega saab F-tüüpi ruumi elementidest moodustatud rea koonduvuse selgitamisel teatud määral kasutada (positiivsete) arvuridade koonduvustunnuseid. Ilmselt ei kehti aga vastupidine tulemus, s.t. mitte iga koonduv rida ei ole absoluutselt koonduv (tõestada!).

Leiame veel hinnangu F-tüüpi ruumi elementidest moodustatud rea summa kvaasinormi jaoks. Olgu $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, s.t.

$$\|x - s_n\| = \|x - \sum_{k=1}^{n} x_k\| < \varepsilon,$$

kui $n > N$. Siis aga kvaasinormi vastavat omadust arvestades

$$\|x\| - \|\sum_{k=1}^{n} x_k\| \leq \|x - \sum_{k=1}^{n} x_k\| < \varepsilon,$$

ehk

$$\|x\| < \|\sum_{k=1}^{n} x_k\| + \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| + \varepsilon.$$

Olgu rida $\sum x_k$ absoluutselt koonduv. Siis võime viimases võrratuses lasta $n \to \infty$, mis annab

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| + \varepsilon.$$

Et $\varepsilon > 0$ on kuitahes väike, siis saadud tulemus tähendab, et

$$\|x\| = \|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|.$$

Saadud võrratus kehtib muidugi ka siis, kui vaadeldav rida on <u>tingimisi koonduv</u>, s.t.koonduv, kuid mitte absoluutselt koonduv (sel juhul $\sum \|x_k\| = \infty$ ja võrratus triviaalne).

Meenutame veel, et saadud tulemused kehtivad muidugi ka Banachi ruumides.

§ 5. L i n e a a r s e   r u u m i   d i m e n s i o o n

Lineaarset ruumi nimet. n-dimensionaalseks, kui tema põhihulk koosneb n elemendist. Kui põhihulk on loenduv, siis ruumi nimet. loenduvadimensionaalseks (saab nimelt tõestada, et ruumi kõik põhihulgad on ühesuguse võimsusega - vt. näit. [5] lk. 131).

N ä i d e. Kõikide polünoomide hulk P on (Weierstrassi teoreemi kohaselt) ruumis C kõikjal tihe, s.t. $\overline{P} = C$. Hulga P baasiks on aga (vt. §1) hulk $\{1,\xi,\xi^2, \ldots ,\xi^n, \ldots\}$, mis ruumile C on seega põhihulgaks. Järelikult ruum C on loenduvadimensionaalne.

Osutub, et lineaarse ruumi dimensioon on lähedalt seotud selle ruumi separaablusega.

Olgu lineaarne ruum X separaabel, s.t. leidugu loenduv hulk $D \subset X$ nii, et $\overline{D} = X$. Kui D elemendid pole lineaarselt sõltumatud, siis eraldame osahulga $D' \subset D$, millel on sama kinnine lineaarne kate (s.t. X) ja mis seega on ruumi X põhihulk. Kuna D oli loenduv, siis saab ka D' olla ainult kas lõplik või loenduv (sel juhul öeldakse ka, et D' on ülimalt loenduv). Seega oleme tõestanud, et separaabel lineaarne ruum on ülimalt loenduvadimensionaalne.

Näitame nüüd ka vastupidi, et iga lõpliku- või loenduvadimensionaalne F-tüüpi ruum on separaabel.

1) Olgu X lõplikudimensionaalne F-tüüpi ruum, mille põhihulk on $D = \{x_1,x_2, \ldots ,x_n\}$. Hulga D lineaarse

katte

$$L(D) = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\}$$

sulund on siis kogu ruum: $\overline{L(D)} = X$.

Moodustame hulga

$$E = \{\sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k\},$$

kus ρ_k on ratsionaalarvud. Ilmselt on hulk E loenduv (põhjendada!). Näitame, et ta on ruumis X kõikjal tihe. Selleks piisab, kui näitame, et E on kõikjal tihe lineaalis $L(D)$, sest $\overline{L(D)} = X$ tõttu saab ju ruumi X iga punkti kuitahes hästi aproksimeerida $L(D)$ punktidega.

Olgu $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ mingi element lineaalist $L(D)$. Aproksimeerime reaalarvud λ_k ratsionaalarvudega ρ_k nii, et $\rho((\lambda_k - \rho_k)x_k, \theta) < \frac{\varepsilon}{n}$. Siis element $x' = \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \in E$ aproksimeerib elementi $x \in L(D)$ täpsusega ε:

$$\rho(x,x') = \rho(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k) = \rho(\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \rho_k)x_k, \theta) \leq$$

$$\leq \rho(\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \rho_k)x_k, \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \rho_k)x_k) +$$

$$+ \rho(\sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \rho_k)x_k, \sum_{k=1}^{n-2} (\lambda_k - \rho_k)x_k) + \ldots +$$

$$+ \rho(\sum_{k=1}^{2} (\lambda_k - \rho_k)x_k, (\lambda_1 - \rho_1)x_1) + \rho((\lambda_1 - \rho_1)x_1, \theta) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \rho((\lambda_k - \rho_k)x_k, \theta) < \varepsilon.$$

Seega E on lineaalis $L(D)$ ja seega ka tema sulundis X kõikjal tihe, s.t. ruum on separaabel.

2) Olgu ruumi X põhihulk $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ loenduv. Siis $L(D) = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$, kus

$$L_n = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\}.$$

Äsjatõestatu põhjal on loenduv hulk

$$E_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \right\}$$

iga n puhul lineaalis L_n kõikjal tihe. Moodustades hulga

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

on lihtne veenduda, et see on loenduv ja ruumis X kõikjal tihe (põhjendada!). Seega oleme tõestanud, et kehtib

T e o r e e m 1. F-tüüpi ruum on separaabel siis ja ainult siis, kui ta on ülimalt loenduvadimensionaalne.

Näitame järgnevalt, et hulga kompaktsuse ja tõkestatuse mõisted langevad ühte ainult lõplikudimensionaalsetes ruumides. Selleks tõestame kõigepealt

L e m m a. Kui L on lineaarse normeeritud ruumi X pärisalamruum (s.t. lineaarne alamruum, mis pole kogu X, kuid sisaldab nullist erinevaid elemente), siis leidub element $x' \in X$ nii, et $\|x'\| = 1$ ja $\|x' - y\| \geqslant 1 - \varepsilon$ iga $y \in L$ puhul, kus $\varepsilon > 0$ on mistahes etteantud arv (loomulikult võime eeldada, et $\varepsilon < 1$).

T õ e s t u s. Kui L on pärisalamruum, siis leidub element $x \in X$ nii, et

$$\delta = \rho(x,L) = \inf_{y \in L} \|x - y\| > 0.$$

Seega mistahes $y \in L$ puhul $\|x - y\| \geqslant d$. Teiselt poolt peab aga (alumise raja definitsiooni põhjal) leiduma element $y' \in L$ nii, et $\|x - y'\| \leqslant \frac{d}{1-\varepsilon}$.

Valides $x' = \frac{x - y'}{\|x - y'\|}$ on $\|x'\| = 1$ ja iga $y \in L$

korral

$$x' - y = \frac{x - y'}{\|x - y'\|} - y = \frac{x - (y' + \|x - y'\| y)}{\|x - y'\|} = \frac{x - y''}{\|x - y'\|},$$

kust $y'' = y' + \|x - y'\| y \in L$ tõttu aga

$$\|x' - y\| = \frac{\|x - y''\|}{\|x - y'\|} \leqslant \frac{d}{\frac{d}{1-\varepsilon}} = 1 - \varepsilon, \text{ m.o.t.t.}$$

T e o r e e m 2. Selleks, et lineaarne normeeritud ruum X oleks lõplikudimensionaalne, on tarvilik ja piisav, et ruumi X iga tõkestatud hulk oleks kompaktne.

P i i s a v u s. Olgu ruumi X iga tõkestatud hulk kompaktne. Valime vabalt elemendi $x_1 \in X$ nii, et $\|x_1\| = 1$ ning vaatleme lineaarset alamruumi $L_1 = \{\lambda x_1\}$. Kui $L_1 = X$, siis on piisavus tõestatud, vastasel juhul leidub aga lemma põhjal element $x_2 \in X$ nii, et $\|x_2\| = 1$ ja $\|x_2 - x_1\| \geqslant 1 - \varepsilon$. Vaatleme nüüd alamruumi $L_2 = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\}$ (lihtne on veenduda, et lõpliku baasiga lineaal on kinnine, s.t. kujutab endast alamruumi - tõestus vt. [2] lk. 60). Kui ka nüüd ei leia aset võrdus $L_2 = X$, siis eksisteerib element $x_3 \in X$ nii, et $\|x_3\| = 1$, $\|x_3 - x_1\| \geqslant 1 - \varepsilon$, $\|x_3 - x_2\| \geqslant 1 - \varepsilon$ jne. Kui selline protsess lõpeb lõpliku arvu sammude järel (s.t. kui mingi n puhul $L_n = X$), siis piisavus on tõestatud. Kui aga oletada, et protsess kestab lõpmatuseni, siis saame tulemuseks lõpmatu jada $\{x_n\}$, mis on tõkestatud ($\|x\| = 1$), kuid ei sisalda ühtki koonduvat osajada, sest iga n ja i puhul $\|x_{n+i} - x_n\| \geqslant 1 - \varepsilon$, s.t. jada ei saa sisaldada fundamentaalset osajada. See on aga vastuolus eeldatud kompaktsusega.

T a r v i l i k k u s. Olgu X n-dimensionaalne, põhihulgaga $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Siis iga $x \in X$ on esitatav kujul $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$. Vaatleme mingit tõkestatud jada $\{y_k\} \subset X$, kus $\|y_k\| \leq M$, $y_k = \lambda_1^{(k)} x_1 + \dots + \lambda_n^{(k)} x_n$ ja näitame, et leidub koonduv osajada $y_{k_j} \to y_0$. Selleks piisab, kui tõestame arvujadade $\{\lambda_i^{(k)}\}_k$ tõkestatuse iga i puhul, sest siis saab neist ju eraldada koonduvad osajadad $\lambda_i^{(k_j)} \to \lambda_i^{(0)}$ ning tarvitseb vaid valida $y_0 = \lambda_1^{(0)} x_1 + \dots + \lambda_n^{(0)} x_n$.

Jadade $\{\lambda_i^{(k)}\}$ tõkestatuses veendumiseks näitame summade jada $\{|\lambda_1^{(k)}| + \dots + |\lambda_n^{(k)}|\}$ tõkestatuse. Oletame väitevastaselt, et leidub indeksite osajada $\{k_m\}$ nii, et iga m puhul

$$|\lambda_1^{(k_m)}| + \dots + |\lambda_n^{(k_m)}| = \alpha_m \geq m,$$

ja vaatleme elemente $y'_{k_m} = \frac{1}{\alpha_m} y_{k_m}$. Siis $\lim\limits_{m\to\infty} y'_{k_m} = \theta$, sest $\|y'_{k_m}\| \leq \frac{M}{m}$.

Teiselt poolt aga $y'_{k_m} = \mu_1^{(k_m)} x_1 + \dots + \mu_n^{(k_m)} x_n$, kus $\mu_i^{(k_m)} = \lambda_i^{(k_m)} : \alpha_m$ ja $|\mu_1^{(k_m)}| + \dots + |\mu_n^{(k_m)}| = 1$. Seega jadad $\{\mu_i^{(k_m)}\}_m$ on iga i puhul tõkestatud, s.t. neist saab välja eraldada koonduvad osajadad $\{\mu_i^{(k_{m_j})}\}_j \to \mu_i^{(0)}$, kusjuures ilmselt $|\mu_1^{(0)}| + \dots + |\mu_n^{(0)}| = 1$. Tähistades $y'_0 = \mu_1^{(0)} x_1 + \dots + \mu_n^{(0)}$ on $\lim\limits_{j\to\infty} y'_{k_{m_j}} = y'_0$, sest

$$\|y'_0 - y'_{k_{m_j}}\| \leq |\mu_1^{(0)} - \mu_1^{(k_{m_j})}| \, \|x_1\| + \dots + |\mu_n^{(0)} - \mu_n^{(k_{m_j})}| \, \|x_n\| \to 0,$$

kui $j \to \infty$.

Kuna $\{y'_{\kappa_{m_j}}\} \subset \{y'_{\kappa_m}\}$ ja jada $\{y'_{\kappa_m}\}$ koondub nullelemendiks, siis $y'_0 = \theta$. See pole aga võimalik, sest elemendid $x_1, \dots, x_n$ on eelduse kohaselt lineaarselt sõltumatud, aga kordajad $\mu_i^{(0)}$ ei saa tingimuse $|\mu_1^{(0)}| + \dots + |\mu_n^{(0)}| = 1$ tõttu kõik nulliga võrduda. Saadud vastuolu tõestabki jadade $\{\lambda_i^{(\kappa)}\}_k$ tõkestatuse ja seega jada $\{y_k\}$ kompaktsuse.

§ 6. Lineaarsed pooljärjestatud ruumid

Reaalarvude hulga R_1 saab teatavasti täielikult järjestada, s.t. defineerida seose $x < y$ nii, et on täidetud tingimused:

1° iga arvu $x \in R_1$ puhul kehtib üks ja ainult üks kolmest seosest: kas $x > 0$ või $x = 0$ või $x < 0$;

2° kui $x > 0$ ja $y > 0$, siis $x + y > 0$;

3° kui $x > 0$ ja $\lambda > 0$, siis $\lambda x > 0$;

4° iga arvu $x \in R_1$ puhul leidub alati arv $y \in R_1$ nii, et $y > 0$ ja $y > x$.

Mistahes lineaali X puhul pole selline täielik järjestamine üldiselt läbiviidav, täpsemalt: enamasti ei saa seost $x < y$ nii defineerida, et oleks täidetud tingimus 1°. Sellepärast osutub vajalikuks vaadelda lineaalides ka selliseid järjestamisi, millede puhul tingimus 1° on nõrgendatud selles mõttes, et ei nõuta tema täidetust iga $x \in X$ korral (s.t. ei nõuta, et lineaali kõik elemendid oleksid võrreldavad nulliga). Kuna niisugune nõrgendatud järjestamine leiab rakendusi ka hulkades, mis pole lineaalid, siis anname vastavad mõisted kõigepealt mistahes hulga jaoks.

Hulka X nimet. <u>osaliselt järjestatuks</u>, kui tema elementide teatud paaride puhul on defineeritud suhe $x < y$ nii, et

1° kui $x < y$, siis ei saa olla $x = y$ ega $x > y$;

2° kui $x > y$ ja $y > z$, siis $x > z$.

Osaliselt järjestatud hulka X nimet. <u>struktuuriks</u>, kui iga kahe elemendi $x, y \in X$ puhul leiduvad elemendid $z, t \in X$ nii, et $x \leq z$, $y \leq z$, $t \leq x$ ja $t \leq y$.

Lineaali X nimet. <u>pooljärjestatud lineaaliks</u> ehk <u>K-lineaaliks</u>, kui tema teatud elementide puhul on defineeritud seos $x > \theta$ nii, et:

1° kui $x > \theta$, siis ei saa olla $x = \theta$ ega $x < \theta$;

2° kui $x > \theta$ ja $y > \theta$, siis $x + y > \theta$;

3° iga $x \in X$ puhul leidub element $y > \theta$ nii, et $y \geqslant x$ (s.t. $y - x \geqslant \theta$);

4° kui $x > \theta$ ja $\lambda > 0$, siis $\lambda x > \theta$;

5° iga kahe elemendi $x, y \in X$ puhul leidub element $z \in X$ nii, et $x \leq z$ ja $y \leq z$, kusjuures iga elemendi $t \in X$ korral, mis rahuldab tingimusi $x \leq t$, $y \leq t$, kehtib seos $z \leq t$.

K-lineaali osahulka $D \subset X$ nimet. <u>ülalt tõkestatuks</u>, kui leidub selline element $y \in X$, et $x \leq y$ iga $x \in D$ korral (analoogselt defineeritakse alt tõkestatud hulk); niisuguse omadusega elementi y nimet. hulga D <u>ülemiseks tõkkeks</u>. Kui hulga D ülemiste tõkete hulgas leidub vähim, s.t. niisugune element $z \in X$, et iga $x \in D$ puhul $x \leq z$ ja iga ülemise tõkke y puhul $z \leq y$, siis nimet. seda vähimat ülemist tõket z hulga D <u>ülemiseks rajaks</u> ja tähist. $\sup D$ (analoogselt defineeritakse hulga alumine raja $\inf D$). K-lineaali aksioomi 5° võib seega sõnastada järgmiselt: iga kaheelemendiline (ja järelikult üldse iga lõplik) hulk omab ülemise raja.

K-lineaali nimet. <u>lineaarseks pooljärjestatud ruumiks</u> ehk <u>K-ruumiks</u>, kui aksioom 5° on täidetud rangemal kujul:

$5^{\circ\circ}$ iga ülalt tõkestatud hulk $D \subset X$ omab ülemise raja $\sup D$.

Koondumine defineeritakse K-ruumis järgmiselt. Jada $\{x_n\} \subset X$ <u>suurimaks</u> ja <u>vähimaks kuhjumispunktiks</u> nimet. vastavalt elemente

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \inf_n [\sup(x_n, x_{n+1}, \ldots)]$$

ja

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \sup_n [\inf(x_n, x_{n+1}, \ldots)] .$$

Kui $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = x$, siis jada nimet. <u>(o)-koonduvaks</u>, suurima ning vähima kuhjumispunkti ühist väärtust x selle jada <u>(o)-piirelemendiks</u> ja kirjut.

$$(o)\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Kõrvuti selle põhilise koonduvusega on K-ruumis otstarbekohane vaadelda veel teist koonduvust, mis defineeritakse järgmiselt. Jada $\{x_n\}$ nimet. <u>(t)-koonduvaks</u> ((t)-piirelemendiks x), kui igast tema osajadast $\{x_{n_k}\}$ saab eraldada osajada $\{x_{n_{k_i}}\}$ nii, et $(o)\text{-}\lim_{i\to\infty} x_{n_{k_i}} = x$. Sel juhul kirjutatakse

$$(t)\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Kui K-ruumi topoloogia (näiteks kinnised hulgad) defineerida (o)-koondumise abil, siis (t)-koondumine osutub saadava topoloogilise ruumi koondumiseks. Kuna pole raske tõestada, et (o)-koonduva jada iga osajada (o)-koondub samaks piirelemendiks, siis jada (o)-koonduvusest järeldub alati tema (t)-koonduvus. Seega (t)-koonduvus on üldisem mõiste kui (o)-koonduvus.

N ä i d e 1. Vaatleme kõikide mõõtuval hulgal $E \subset R_1$ mõõtuvate ja peagu kõikjal tõkestatud funktsioonide $x(\xi)$ hulka S. Sealjuures võrdseteks loeme funktsioone, mis erinevad ülimalt hulgal mõõduga null. Ilmselt on S lineaal. Osalise järjestuse toome lineaalis S sisse järgmiselt: elementi $x \in S$ loeme positiivseks ($x > \theta$), kui peagu kõikjal hulgal E $x(\xi) \geqslant 0$, kusjuures mes $E[x(\xi) > 0] > 0$ (s.t. $x(\xi)$ on positiivse mõõduga hulgal positiivne). Osutub, et sellise definitsiooni puhul on K-ruumi aksioomid täidetud. Suhteliselt lihtne kontrollimine näitab, et (o)-koondumine tähendab nüüd koondumist peagu kõikjal ja (t)-koondumine koondumist mõõdu järgi (vrdl. [4] lk. 87).

Rakendustes on kõige olulisemateks osutunud sellised K-ruumid, mis on ühtlasi Banachi ruumideks. K-ruumi X nimet. KB-ruumiks, kui

1° X on Banachi ruum;

2° iga $x \in X$ puhul $\|x\| = \|\sup(x,\theta) - \inf(x,\theta)\|$;

3° kui $x \geqslant \theta$ ja $y \geqslant \theta$, siis $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.

KB-ruumis langeb (t)-koondumine ühte koondumisega normi järgi.

N ä i d e 2. Absoluutselt koonduvate jadade $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ ruum ℓ osutub KB-ruumiks, kui järjestus defineerida sel teel, et elementi x loeme positiivseks ($x > \theta$) siis, kui iga k puhul $\xi_k \geqslant 0$ ja vähemalt ühe k korral $\xi_k > 0$.

§ 7. Lineaarsed topoloogilised ruumid

Lineaali X nimet. lineaarseks topoloogiliseks ruumiks, kui temas on defineeritud topoloogia nii, et elementide liitmine ja korrutamine skalaariga osutuvad pidevateks teheteks (kui defineeritud topoloogia on separaatne, siis X on ühtlasi ka lineaarne ruum).

Lineaali puhul defineeritakse topoloogia tavaliselt ümbruste abil (vt. I ptk., §7, definitsioon 4). Nimelt osutub, et topoloogia on lineaalis määratav üheainsa punkti (näit. nullpunkti) ümbruste, koguni nn. ümbruste baasi etteandmisega. Punkti x ümbruste süsteemi $\{U\}$ nimet. selle punkti <u>ümbruste baasiks</u>, kui punkti x iga ümbrus V sisaldab vähemalt ühe ümbruse U vaadeldavast süsteemist $\{U\}$.

Kui on antud nullpunkti Θ ümbruste (ehk lihtsalt: nulliümbruste) baas $\{U\}$, siis mistahes punkti $x_0 \in X$ ümbruste baasiks on hulkade $\{x + x_0\}_{x \in U}$ hulk. Viimast hulka tähistatakse muide tavaliselt sümboliga $\{U + x_0\}$. Analoogselt, sümboliga αD tähistatakse hulka $\{\alpha x\}$, kus $x \in D$ (näiteks $-D$ on hulga D elementide vastandelementide hulk). Hulka D nimet. <u>sümmeetriliseks</u>, kui $D = -D$. Hulka $D \subset X$ nimet. <u>köitvaks</u>, kui iga nullist erineva $x \in X$ puhul leidub $\alpha > 0$ nii, et $\lambda x \in D$, kui $|\lambda| \leq \alpha$.

Lineaarset topoloogilist ruumi nimet. <u>lokaalselt kumeraks ruumiks</u>, kui temas leidub niisugune nulliümbruste baas, mis koosneb sümmeetrilistest ja kumeratest hulkadest. Lineaal X osutub separaatseks lokaalselt kumeraks ruumiks, kui temas on välja eraldatud kumerate, sümmeetriliste ja köitvate hulkade süsteem $\{U\}$, mis rahuldab tingimusi:

1° kui $U_\xi \in \{U\}$, siis iga $\alpha > 0$ puhul $\alpha U_\xi \in \{U\}$;

2° kui $U_\xi \in \{U\}$ ja $U_\eta \in \{U\}$, siis $U_\xi \cap U_\eta \in \{U\}$;

3° süsteemi $\{U\}$ hulkade ühisosaks on nullpunkt:

$\bigcap\limits_{\xi} U_{\xi} = \Theta$. Vajalike omadustega topoloogia saamiseks tarvitseb vaid süsteem $\{U\}$ võtta ruumi nulliümbruste baasiks.

Sellise nulliümbruste süsteemi etteandmise võib asendada nn. poolnormide süsteemi etteandmisega. Kui lineaali X igale punktile x on seatud vastavusse üheselt määratud mittenegatiivne reaalarv $\|x\|$ nii, et

1° iga $\lambda \in R_1$ puhul $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

2° $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

siis öeldakse, et lineaalis X on defineeritud poolnorm.

Nulliümbruste baasi $\{U\}$ iga hulk U_{ξ} määrab lokaalselt kumeras ruumis ühe poolnormi $\|x\|_{\xi}$, mille võib defineerida näiteks järgmiselt. Kuna U_{ξ} on eelduse kohaselt köitev, siis iga fikseeritud $x \in X$ korral leidub $\alpha > 0$ nii, et $0 < \frac{1}{\lambda} \leq \alpha$ puhul $\frac{1}{\lambda} x \in U_{\xi}$ ehk $x \in \lambda U_{\xi}$. Seda tingimust rahuldavate arvude λ hulk omab ilmselt alumise raja ja seega võime defineerida

$$\|x\|_{\xi} = \inf_{x \in \lambda U_{\xi}} \lambda,$$

sest poolnormi aksioomide täidetus on vahetult kontrollitav. Niisaadud poolnormi iseloomustab asjaolu, et $x \in U_{\xi}$ puhul $\|x\|_{\xi} \leq 1$, aga $\|x\|_{\xi} < 1$ korral $x \in U_{\xi}$.

Kui lineaalis X on antud teatud poolnormide süsteem $\{\|x\|_{\xi}\}$, siis lugedes nulliümbrusteks hulgad $U_{\xi} = \{\|x\|_{\xi} < 1\}$, αU_{ξ} ja nende ühisosad, osutub X lokaalselt kumeraks topoloogiliseks ruumiks. See topoloogia on separaatne, kui iga $x \neq \Theta$ puhul leidub ξ nii, et $\|x\|_\xi \neq 0$.

Kui topoloogiat määrav poolnormide hulk on lõplik, siis saame tegelikult Banachi ruumi. Kui see poolnormide hulk on aga loenduv, siis saadavat ruumi nimet. B_0-ruumiks.

N ä i d e. Vaatleme lõigul $[a,b]$ mistahes järku tuletisi omavate funktsioonide $x(\xi)$ hulka. See osutub B_0-ruumiks, kui defineerida poolnormide jada järgmiselt:

$$\|x\|_k = \max\{|x(a)|, |x'(a)|, \ldots, |x^{(k-1)}(a)|, \max_\xi |x^{(k)}(\xi)|\}.$$

Poolnormi aksioomide täidetuse kontrollimine ei valmista siin raskusi.

III peatükk

LINEAARSED OPERAATORID JA FUNKTSIONAALID

§ 1. Lineaarse operaatori mõiste ja põhiomadused

Olgu antud kaks (üldiselt erinevat laadi elementidega) hulka D ja D'. Kui hulga D igale elemendile x on mingil ühesel viisil seatud vastavusse element $y \in D'$, siis ütleme, et hulgal D on defineeritud operaator (nimet. ka kujutuseks või teisenduseks) ning kirjutame näiteks $y = T(x)$. Hulka D nimet. operaatori T määramispiirkonnaks, elementi $y = T(x)$ elemendi x kujutiseks (operaatoriga T), aga elementi x elemendi y originaaliks. Olgu $D_1 \subset D$; siis hulka $\{T(x)\}$, kus $x \in D_1$, nimet. hulga D_1 kujutiseks ja tähist. $T(D_1)$. Täiesti elementaarselt saab tõestada, et $T(D_1 \cup D_2) = T(D_1) \cup T(D_2)$, s.t. hulkade summa kujutis võrdub nende hulkade kujutiste summaga.

Edaspidi eeldame ikka, et hulgad D ja D' kuuluvad mingitesse F-tüüpi ruumidesse X ja Y. Kui $D = X$, s.t. kui operaator T on määratud kogu ruumis X, siis ruumi X kujutist $T(X)$ nimet. sageli operaatori T kujutiseks. Kui vastupidist pole rõhutatud, siis loeme edaspidi ikka $D = X$ (D' asemel võime aga üldsust kitsendamata alati vaadelda kogu ruumi Y). Kui hulga D' (ruumi Y) iga element y omab vähemalt ühe originaali $x \in X$, siis ütleme, et operaator T kujutab ruumi X hulgaks D' (ruumiks Y), vastasel juhul aga ütleme, et T kujutab ruumi X hulka D' (ruumi Y).

Kui $Y = R_1$ (ühedimensionaalne eukleidiline ruum), siis operaatorit nimet. funktsionaaliks. Erinevalt mistahes operaatoritest kasutame funktsionaalide tähistamiseks edaspidi väikesi ladina tähti, näit. $y = f(x)$.

Operaatorit T nimet. pidevaks punktis x_0, kui iga jada $\{x_n\} \to x_0$ puhul $\{T(x_n)\} \to T(x_0)$. Operaatorit nimet. pidevaks, kui ta on pidev kogu oma määramispiirkonnas. Kasutades sulundi mõistet võib operaatori pidevust defineerida ka näiteks järgmiselt: operaatorit T nimet. punktis x_0 pidevaks, kui iga $D \subset X$ puhul sellest, et $x_0 \in \overline{D}$ järeldub, et $T(x_0) \in \overline{T(D)}$.

Operaatorit T nimet. aditiivseks, kui iga $x', x'' \in X$ puhul

$$T(x' + x'') = T(x') + T(x'').$$

Kuna $\theta + \theta = \theta$, siis aditiivse operaatori T puhul $T(\theta) = T(\theta + \theta) = T(\theta) + T(\theta)$, kust $T(\theta) = \theta'$, s.t. aditiivne operaator kujutab (ruumi X) nullelemendi (ruumi Y) nullelemendiks. Analoogselt $x + (-x) = \theta$ tõttu $T(x) + T(-x) = T(x + (-x)) = T(\theta) = \theta'$ ning seega $T(-x) = - T(x)$, s.t. aditiivne operaator teisendab vastandelemendid vastandelementideks (võib ka ütelda, et aditiivne operaator on paaritu).

Operaatorit T nimet. <u>homogeenseks</u>, kui iga $x \in X$ ja reaalarvu λ puhul

$$T(\lambda x) = \lambda T(x).$$

Aditiivset ja homogeenset operaatorit nimet. <u>lineaarseks</u>. Lineaarse operaatori puhul kasut. lihtsustatud tähistusviisi Tx (edaspidi tähist. lineaarseid operaatoreid tähestiku esimeste tähtedega: Ax, Bx, Cx, ...).

N ä i t e i d. 1) Juhul $X = Y = R_1$, s.t. kui operaator osutub tavaliseks funktsiooniks, on lineaarseks operaatoriks funktsioon $y = ax$.

2) Kui X ja Y on n-dimensionaalsete vektorite ruumid, siis on lineaarseks operaatoriks $y = Ax$ lineaarteisendus $\eta_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\xi_k$ $(i = 1,2, \ldots ,n)$, kus $y = (\eta_1, \ldots ,\eta_n)$ ja $x = (\xi_1, \ldots ,\xi_n)$.

3) Kui ruumide X ja Y elementideks on lõigul $[a,b]$ määratud funktsioonid, siis võrdus

$$y(\xi) = \int_a^b K(\xi,\tau)x(\tau)d\tau,$$

kus $K(\xi,\tau)$ on sobivalt etteantud funktsioon, määrab lineaarse operaatori $y(\xi) = Ax(\xi)$, mida nimet. <u>Fredholmi operaatoriks</u>.

4) Kui X koosneb diferentseeruvatest funktsioonidest, siis on defineeritav nn. <u>diferentseerimisoperaator</u> $y(\xi) = \frac{d}{d\xi}x(\xi)$, mis on ilmselt samuti lineaarne.

5) Lineaarne on ka nn. <u>nulloperaator</u> $\mathcal{O}$, mis teisen-

dab iga elemendi nullelemendiks: $\sigma x = \Theta$.

Lineaarse operaatori definitsioonis pole nõutud pidevust, kuid need mõisted pole ka täiesti sõltumatud, nagu järeldub järgmisest kahest teoreemist (meenutame, et järgnevas me eeldame alati, et ruumid X ja Y on vähemalt tüüpi F).

T e o r e e m 1. Kui aditiivne operaator on pidev ühes punktis, siis on ta pidev kogu oma määramispiirkonnas.

T õ e s t u s. Olgu aditiivne operaator A pidev punktis x_o, s.t. iga jada $x_m \to x_o$ puhul $Ax_m \to Ax_o$. Valime suvaliselt mingi elemendi $x \in X$ ja jada $x_n \to x$. Moodustame jada $\{x_n - x + x_o\}$, mis ilmselt koondub elemendiks x_o. Siis aga $A(x_n - x + x_o) = Ax_n - Ax + Ax_o \to$ $\to Ax_o$, kust $Ax_n \to Ax$, m.o.t.t.

T e o r e e m 2. Aditiivne ja pidev operaator on homogeenne.

T õ e s t a m e võrduse $A(\lambda x) = \lambda Ax$ kehtivuse iga reaalarvulise λ puhul järkjärgult:

a) kui $\lambda = n$ on naturaalarv, siis $A(nx) =$ $= A(x + \ldots + x) = Ax + \ldots + Ax = nAx$;

b) kui $\lambda = -n$, siis $A(-nx) = A(-x - \ldots -x) =$ $= A(-x) + \ldots + A(-x) = nA(-x) = -nAx$;

c) kui $\lambda = \frac{1}{n}$, siis $Ax = A(n \frac{x}{n}) = nA(\frac{x}{n})$, kust $A(\frac{1}{n} x) = \frac{1}{n} Ax$;

d) $\lambda = \frac{n}{m}$ puhul nüüd $A(\frac{n}{m} x) = nA(\frac{1}{m} x) = \frac{n}{m} Ax$;

e) kui λ on mistahes reaalarv, siis leidub ratsionaalarvude jada $\{\rho_n\}$ nii, et $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n = \lambda$. Siis aga $A(\lambda x) = A(\lim \rho_n x) = \lim A(\rho_n x) = \lim \rho_n Ax = \lambda Ax$.

Kuna operaatori pidevust läks meil tarvis alles viimasel sammul, siis oleme ühtlasi tõestanud, et aditiivne operaator on ratsionaalselt homogeenne, s.t. võrdus $A(\lambda x) = \lambda Ax$ kehtib iga ratsionaalarvulise λ korral.

Kasutades hiljem (vt. §6) tõestatavat lemmat ("kui pideva lineaarse operaatori kujutis on II kategooria hulk, siis vastavalt igale $\varepsilon > 0$ leidub niisugune $\eta > 0$, et sfääri $\|x\| < \varepsilon$ kujutis sisaldab sfääri $\|y\| < \eta$") saab tõestada veel järgmise teoreemi.

T e o r e e m 3. Pideva lineaarse operaatori kujutis on kas I kategooria hulk või kogu ruum.

T õ e s t u s. Olgu $A(X) = D'$ II kategooria hulk. Valides mingi ε leidub lemma põhjal siis η nii, et $S(\theta', \eta) \subset A\{S(\theta, \varepsilon)\} \subset D'$. Olgu nüüd $y \in Y$ mistahes element. Kuna ruum Y on vähemalt tüüpi F, siis $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y}{n} = \theta'$ ning seega $n > N(\eta)$ puhul $\|\frac{y}{n}\| < \eta$, s.t. $\frac{y}{n} \in S(\theta', \eta)$. Järelikult leidub element $x \in S(\theta, \varepsilon) \subset X$ nii, et $Ax = \frac{y}{n}$. Siis aga $A(nx) = y$, s.t. y kuulub operaatori A kujutisse. Seega juhul, kui D' on II kategooria hulk, ühtub ta kogu ruumiga: $D' = Y$.

Et pideva lineaarse operaatori kujutis võib aga olla ka I kategooria hulk, see järeldub nulloperaatori konkreetsest näitest. Nulloperaatori Θ kujutis koosneb ainult ühest elemendist (ruumi Y nullelement) ning on seega ilmselt I kategooria hulk.

Sellega on teoreem tõestatud.

§ 2. L i n e a a r s e o p e r a a t o r i n o r m

Operaatorit $y = T(x)$ nimet. <u>tõkestatuks</u>, kui leidub selline konstant M, et iga $x \in X$ puhul

$$\|T(x)\| \leq M \cdot \|x\|.$$

T e o r e e m 1. Aditiivne operaator on pidev siis ja ainult siis, kui ta on tõkestatud.

T a r v i l i k k u s. Oletame väitevastaselt, et pidev aditiivne (ja seega ka lineaarne) operaator A ei ole tõkestatud. Siis võib vastavalt igale naturaalarvule n leida elemendi x_n nii, et $\|Ax_n\| > n\|x_n\|$. Kuna ilmselt $\|x_n\| \neq 0$ (s.t. $x_n \neq \Theta$), siis võime moodustada elemendid $x_n' = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. Võrdustest $\|x_n'\| = \frac{1}{n}$ järeldub kohe, et $\lim_{n\to\infty} x_n' = \Theta$. Operaatori A pidevuse tõttu siis ka $\lim_{n\to\infty} Ax_n' = \Theta$. Seega peaks olema $\lim_{n\to\infty} \|Ax_n'\| = 0$, kuid

$$\|Ax_n'\| = \left\|\frac{1}{n\|x_n\|} Ax_n\right\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|Ax_n\| > \frac{1}{n\|x_n\|} n\|x_n\| = 1.$$

Saadud vastuolust järeldubki operaatori A tõkestatus.

P i i s a v u s. Olgu aditiivne operaator A tõkestatud: $\|Ax\| \leq M\|x\|$ iga $x \in X$ puhul. Fikseerides mingi $x \in X$ valime mingi jada $\{x_n\}$ nii, et $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Siis

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\| < \varepsilon ,$$

kui $n > N(\varepsilon)$, millega teoreem on tõestatud.

Teoreem 1 annab praktilise tunnuse lineaarse operaatori pidevuse kindlakstegemiseks. Selgitame seda paari näitega.

N ä i d e 1. Kui Fredholmi operaatoris

$$y(\xi) = \int_a^b K(\xi,\tau)x(\tau)d\tau = Ax(\tau)$$

funktsioon $K(\xi,\tau)$ on mõlema argumendi järgi pidev, siis võime valida $X = Y = C(a,b)$. Pidev funktsioon on aga teatavasti tõkestatud:

$$\max_{\xi,\tau\in[a,b]} |K(\xi,\tau)| = M.$$

Seega

$$\|Ax\| = \|y\| = \max_{\xi\in[a,b]} |y(\xi)| \leq M \cdot (b - a)\|x\|,$$

s.t. Fredholmi operaator on tõkestatud ning järelikult pidev.

N ä i d e 2. Veendume, et diferentseerimisoperaator $Ax = \frac{d}{d\xi} x(\xi)$ pole pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulgal $C^{(1)} \subset C(a,b)$ tõkestatud. Selleks vaatleme funktsioonide $x_n(\xi) = \cos n \frac{b - \xi}{b - a}\pi \in C^{(1)}$ jada. Ilmselt $\|x_n\| = \max_{\xi\in[a,b]} |x_n(\xi)| = 1$. Kuid

$$Ax_n = \frac{d}{d\xi}\left[\cos n \frac{b - \xi}{b - a}\pi\right] = \frac{n\pi}{b - a} \sin n \frac{b - \xi}{b - a}\pi$$

ja seega $\|Ax_n\| = \frac{n\pi}{b-a} = \frac{n\pi}{b-a}\|x_n\| \to \infty$. Järelikult ei saa leiduda konstanti $M > 0$ nii, et iga $x \in C^{(1)}$ puhul oleks $\|Ax\| \leq M\|x\|$, s.t. diferentseerimisoperaator pole vaadeldaval hulgal pidev.

Kui operaator A on tõkestatud, siis arv M võrratuses $\|Ax\| \leq M\|x\|$ pole muidugi üheselt määratud. Et aga kõik need arvud on positiivsed, siis peab eksisteerima $\inf\{M\}$, mida nimet. operaatori A <u>normiks</u> ja tähist. $\|A\|$. Vahetult definitsiooni abil on operaatori normi sageli väga tülikas arvutada. Sellepärast kasutatakse praktikas enamasti teist teed, mille annab

T e o r e e m 2. Pideva lineaarse operaatori A normi võib arvutada valemist

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|.$$

T õ e s t u s. Kuna definitsiooni kohaselt

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|,$$

siis $\|x\| \leq 1$ puhul $\|Ax\| \leq \|A\|$ ja seega ka

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \leq \|A\|.$$

Vastassuunalise võrratuse näitamiseks arvestame, et ülemise raja definitsiooni kohaselt peab vastavalt igale reaalarvule $\varepsilon > 0$ leiduma element $x' \in X$ nii, et

$$\|Ax'\| > (\|A\| - \varepsilon)\|x'\|.$$

Siinjuures peab muidugi olema $x' \neq \Theta$. Seega võime võtta vaatlusele elemendi $x_0 = \frac{x'}{\|x'\|}$. Ilmselt $\|x_0\| = 1$ ja seega

$$\| Ax_0 \| = \frac{1}{\| x' \|} \| Ax' \| > \| A \| - \varepsilon .$$

Lastes siin $\varepsilon \to 0$ saame $\| Ax_0 \| \geqslant \| A \|$ ja järelikult

$$\sup_{\| x \| \leq 1} \| Ax \| \geqslant \| A \| .$$

Sellega aga on teoreem tõestatud.

Toodud tõestusest järeldub muide ($\| x_0 \| = 1$ tõttu), et operaatori normi võib arvutada ka valemist

$$\| A \| = \sup_{\| x \| = 1} \| Ax \| ,$$

mis mõnikord on lihtsamini rakendatav kui teoreemis 2 antud valem.

§ 3. N ä i t e i d o p e r a a t o r i n o r m i a r v u t a m i s e s t

N ä i d e 1. Vaatleme n-dimensionaalsete vektorite ruumi lineaarteisendust $\eta_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \xi_k$ $(i = 1,2, \ldots ,n)$, valides $X = Y = m_n$. Kui $\| x \| = \max_k |\xi_k| = 1$, siis

$$\| Ax \| = \max_i |\eta_i| = \max_i \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \xi_k \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_i \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{ik}| \cdot \max |\xi_k| = \max_i \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{ik}| .$$

Seega leidub naturaalarv $j \leqslant n$ nii, et

$$\| Ax \| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{jk}| = \max_i \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{ik}| .$$

Seda arvestades võtame vaatlusele vektori $z = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$, kus

$$\zeta_k = \begin{cases} \operatorname{sign} \alpha_{jk}, & \text{kui } \alpha_{jk} \neq 0 \\ 1 & \text{, kui } \alpha_{jk} = 0. \end{cases}$$

Ilmselt $\|z\| = 1$, kuid

$$\|Az\| = \max_i |\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\zeta_k| \geq |\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\zeta_k| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{jk}|.$$

Saadud võrratust eelmisega võrreldes näeme, et

$$\|A\| = \max_i \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{ik}|.$$

N ä i d e 2. Vaatleme sama operaatorit juhul, kui $X = Y = R_n$. Kirjutist $y = Ax$ võime nüüd tõlgendada nii, et vektor y võrdub maatriksi $A = (\alpha_{ik})$ ja vektori x korrutisega. Vektoralgebra tähistusi kasutades saame siis:

$$\|Ax\|^2 = Ax \cdot Ax = (Ax)'Ax = x'A'Ax = x'Bx = x \cdot Bx,$$

kus $B = A'A$ on sümmeetriline maatriks, sest $B' = (A'A)' = A'A'' = A'A = B$. Anname ruutvormile $x \cdot Bx$ ortogonaalteisendusega kanoonilise kuju, saades

$$\|Ax\|^2 = \lambda_1\xi_1^{*2} + \lambda_2\xi_2^{*2} + \ldots + \lambda_n\xi_n^{*2},$$

kus $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ on maatriksi B omaväärtused. Kui $\|x\|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1$, siis ka $\xi_1^{*2} + \xi_2^{*2} + \ldots + \xi_n^{*2} = 1$ ja seega

$$\|Ax\|^2 \leq \lambda_1(\xi_1^{*2} + \xi_2^{*2} + \ldots + \xi_n^{*2}) = \lambda_1.$$

Sellega oleme tõestanud ($\|x\| = 1$ puhul) võrratuse

$$\|Ax\| \leq \sqrt{\lambda_1}\,.$$

Näitame, et ühiksfääril leidub element, mille puhul see võrratus asendub võrdusega. Tõepoolest, olgu x_1 omaväärtusele λ_1 vastav omavektor, s.t. $\|x_1\| = 1$, $Bx_1 = \lambda_1 x_1$. Siis

$$\|Ax_1\|^2 = x_1 \cdot Bx_1 = x_1 \cdot \lambda_1 x_1 = \lambda_1 \|x_1\|^2 = \lambda_1 .$$

Seega $\sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sqrt{\lambda_1}$ ja

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_1} ,$$

kus λ_1 on maatriksi $B = A'A$ suurim omaväärtus.

Olgu veel märgitud, et kui $A' = A$ (s.t. kui maatriks A on sümmeetriline), siis $\|A\| = |\mu_1|$, kus μ_1 on maatriksi A absoluutselt suurim omaväärtus.

Võrreldes tulemust eelmise näitega näeme, et operaatori norm sõltub oluliselt sellest, millistes ruumides me seda operaatorit vaatleme.

N ä i d e 3. Valides $X = m$ vaatleme jadade lineaarteisendust $\eta_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} \xi_k$ $(i = 1,2, \ldots)$. Selleks, et selle operaatori väärtused samuti kuuluksid ruumi m (s.t. et võiksime valida $Y = m$), osutub tarvilikuks ja piisavaks niisuguse konstandi M eksisteerimine, et iga i puhul $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_{ik}| \leq M$ (tõestada!). Eeldamegi, et see tingimus on täidetud.

Kui $\|x\| = \sup\limits_{k} |\xi_k| = 1$, siis

$$\|Ax\| = \sup_i \left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} \xi_k \right| \leq \sup_i \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{ik}| = N.$$

Ülemise raja definitsiooni arvestades peab seega vastavalt igale reaalarvule $\varepsilon > 0$ leiduma naturaalarv j

nii, et

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{jk}| > N - \varepsilon .$$

Võtame vaatlusele jada $z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots)$, kus

$$\zeta_k = \begin{cases} \operatorname{sign} \alpha_{jk}, & \text{kui } \alpha_{jk} \neq 0 \\ 1, & \text{kui } \alpha_{jk} = 0. \end{cases}$$

Ilmselt $\|z\| = 1$ ja

$$\|Az\| = \sup_i \left|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\zeta_k\right| \geq \left|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{jk}\zeta_k\right| = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{jk}| > N - \varepsilon .$$

Võrreldes seda ülalsaadud võrratusega $\|Ax\| \leq N$ näeme, et $\sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = N$, s.t.

$$\|A\| = \sup_i \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{ik}| .$$

N ä i d e 4. Vaatleme ruumis $X = C$ operaatorit

$$Ax = \int_a^b K(\xi,\tau)x(\tau)d\tau .$$

Selleks, et võiksime valida $Y = C$, eeldame funktsiooni $K(\xi,\tau)$ pidevust (ξ ja τ järgi). Kui nüüd $\|x\| = \max\limits_{\xi} |x(\xi)| = 1$, siis

$$\|Ax\| = \max_{\xi} \left|\int_a^b K(\xi,\tau)x(\tau)d\tau\right| \leq \max_{\xi} \int_a^b |K(\xi,\tau)|d\tau .$$

Kuna pidev funktsioon omandab oma maksimumi, siis leidub punkt $\xi_0 \in [a,b]$ nii, et

$$\max_{\xi} \int_a^b |K(\xi,\tau)|d\tau = \int_a^b |K(\xi_0,\tau)|d\tau .$$

Võtame vaatlusele funktsiooni

$$z(\tau) = \operatorname{sign} K(\xi_0,\tau),$$

mis on lõigul $[a,b]$ ilmselt mõõtuv ja tõkestatud ($|z(\tau)| \leq 1$), kuid pole üldiselt pidev. Luzini teoreemi (vt. [4] lk. 96) põhjal saab seda funktsiooni aga iga $\varepsilon_n > 0$

puhul aproksimeerida pideva funktsiooniga $x_n(\tau)$ nii, et $|x_n(\tau)| \leq 1$ ja $z(\tau) \neq x_n(\tau)$ vaid hulgal $E_n \subset [a,b]$, kus mes $E_n < \varepsilon_n$. Ilmselt siis hulgal E_n $|z(\tau) - x_n(\tau)| \leq 2$. Valides näiteks $\varepsilon_n = \frac{1}{2nM}$, kus $M = \max\limits_{\xi,\tau} |K(\xi,\tau)|$, saame iga $\xi \in [a,b]$ korral

$$|Az| = \left|\int_a^b K(\xi,\tau)z(\tau)d\tau\right| = \left|\int_{E_n} K(\xi,\tau)[z(\tau) - x_n(\tau)]d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_a^b K(\xi,\tau)x_n(\tau)d\tau\right| \leq M\cdot 2\cdot \varepsilon_n + \|A\|\cdot\|x_n\| = \frac{1}{n} + \|A\|\cdot\|x_n\| .$$

See võrratus kehtib ka $\xi = \xi_0$ puhul, s.t.

$$\int_a^b |K(\xi_0,\tau)|d\tau \leq \frac{1}{n} + \|A\|\cdot\|x_n\|.$$

Kuna $\|x_n\| \leq 1$, siis $n \to \infty$ korral saame siit

$$\int_a^b |K(\xi_0,\tau)|d\tau \leq \|A\|,$$

millega oleme tõestanud, et

$$\|A\| = \max_{\xi} \int_a^b |K(\xi,\tau)|d\tau.$$

§ 4. Pidevate lineaarsete operaatorite ruum

Vaatleme kõikide niisuguste lineaarsete operaatorite hulka, mis on määratud lineaarses ruumis X ning millede väärtused kuuluvad lineaarsesse ruumi Y. Seda hulka tähistatakse sümboliga $\{X \to Y\}$.

Kahte operaatorit $A, B \in \{X \to Y\}$ loeme <u>võrdseteks</u>, kui iga $x \in X$ puhul $Ax = Bx$. Operaatorite A ja B <u>summa</u> defineeritakse valemiga

$$(A + B)x = Ax + Bx$$

ja operaatori A korrutis skalaariga λ valemiga

$$(\lambda A)x = \lambda \cdot Ax,$$

kus $x \in X$ on mistahes element. Ilmselt lineaarsete operaatorite summa on lineaarne operaator: $(A + B)(x' + x'') = A(x' + x'') + B(x' + x'') = Ax' + Ax'' + Bx' + Bx'' = (A + B)x' + (A + B)x''$; $(A + B)(\lambda x) = A(\lambda x) + B(\lambda x) = \lambda Ax + \lambda Bx = \lambda(A + B)x$ (tõestada, et $A \in \{X \to Y\}$ puhul $\lambda A \in \{X \to Y\}$!). Nüüd võib vahetult kontrollida, et hulk $\{X \to Y\}$ osutub lineaaliks, kusjuures nullelemendiks on nulloperaator Θ, mis seab ruumi X igale elemendile vastavusse ruumi Y nullelemendi (tõestada!). Lineaali $\{X \to Y\}$ võib muuta lineaarseks ruumiks, kui defineerida koondumine temas näiteks järgmiselt: operaatorite jada $\{A_n\} \subset \{X \to Y\}$ nimet. kõikjal koonduvaks, kui leidub selline operaator $A \in \{X \to Y\}$, et iga $x \in X$ puhul $A_n x \to Ax$ (ruumi Y koondumise mõttes).

Lineaarse ruumi aksioomide täidetuses on lihtne veenduda (tõestada!).

Kui X ja Y on lineaarsed normeeritud ruumid (või F-tüüpi ruumid), siis ruumi $\{X \to Y\}$ eriti oluliseks alamruumiks osutub pidevate lineaarsete operaatorite hulk, mida tähist. sümboliga $(X \to Y)$. Ilmselt on $(X \to Y)$ lineaal, kuid ta osutub ka lineaarseks normeeritud ruumiks, kui operaatori norm defineerida nii, nagu me seda äsja tegime.

Tõepoolest, definitsiooni kohaselt $\|A\| \geqslant 0$, aga normi aksioome pole raske kontrollida:

1° kui $\|A\| = 0$, siis $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\| = 0$, s.t. iga $x \in X$ puhul $Ax = \theta'$, s.t. $A = \mathcal{O}$; kui $A = \mathcal{O}$, siis $\|Ax\| = 0 = 0 \cdot \|x\|$, s.t. $\|A\| = 0$;

2° $\|\lambda A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|(\lambda A)x\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda| \cdot \|A\|$;

3° $\|A + B\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|(A + B)x\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax + Bx\| \leqslant$

$\leqslant \sup\limits_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| + \sup\limits_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|$.

T e o r e e m. Kui Y on Banachi ruum, siis on seda ka $(X \to Y)$.

T õ e s t a d a tuleb siin ainult ruumi $(X \to Y)$ täielikkus, s.t. näidata, et kui on antud operaatorite fundamentaaljada $\{A_n\}$, ($\|A_{n+i} - A_n\| < \varepsilon$ iga $n > N(\varepsilon)$ ja i puhul), siis leidub operaator $A \in (X \to Y)$ nii, et $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$. Tõestuse viime läbi kolmes osas.

1) Piiroperaatori A konstrueerimine. Iga $x \in X$ ja naturaalarvu i puhul

$$\|A_{n+i}x - A_nx\| \leq \|A_{n+i} - A_n\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\|,$$

kui vaid $n > N(\varepsilon)$. Seega operaatorite väärtuste jada $\{A_nx\} \subset Y$ on iga $x \in X$ korral fundamentaalne ning koondub ruumi Y täielikkuse tõttu mingiks elemendiks $y \in Y$. Võrdus

$$\lim_{n\to\infty} A_nx = y$$

seab igale elemendile $x \in X$ vastavusse elemendi $y \in Y$, s.t. defineerib operaatori $y = Ax$.

2) Operaatori A pidevuse ja lineaarsuse näitamine. Aditiivsus järeldub vahetult definitsioonist:

$A(x'+x'') = \lim_{n\to\infty} A_n(x'+x'') = \lim_{n\to\infty} A_n x' + \lim_{n\to\infty} A_n x'' = Ax' + Ax''$.

Tõkestatuse (ja seega pidevuse) näitamiseks veendume kõigepealt, et jada $\{\|A_n\|\}$ on tõkestatud. Kuid

$$\big|\|A_{n+i}\| - \|A_n\|\big| \leq \|A_{n+i} - A_n\| < \varepsilon,$$

kui $n > N(\varepsilon)$; seega $\{\|A_n\|\}$ on fundamentaalne ja järelikult leidub konstant $M > 0$ nii, et $\|A_n\| \leq M$ iga n puhul. Siis aga

$$\|Ax\| = \|\lim_{n\to\infty} A_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq \lim_{n\to\infty} M\|x\| = M\|x\|.$$

Sellega oleme tõestanud, et $A \in (X \to Y)$.

3) Koondumise $\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$ näitamine. Kui $\|x\| \leq 1$, siis $n > N(\varepsilon)$ puhul $\|A_{n+i}x - A_n x\| \leq$ $\leq \|A_{n+i} - A_n\| < \varepsilon$ ja seega

$$\|Ax - A_n x\| = \lim_{i\to\infty} \|A_{n+i}x - A_n x\| \leq \varepsilon.$$

Järelikult $n > N(\varepsilon)$ korral

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|(A - A_n)x\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon,$$

s.t. jada $\{A_n\}$ koondub normi järgi operaatoriks A.

§ 5. Banach-Steinhausi teoreem

T e o r e e m. Selleks, et pidevate lineaarsete operaatorite jada $\{A_n\} \subset (X \to Y)$ koonduks kõikjal Banachi ruumis X (pidevaks lineaarseks operaatoriks), on tarvilik ja ruumi Y täielikkuse puhul piisav, et

a) jada $\{A_n\}$ koondub ruumi X mingil põhihulgal E;

b) operaatorite normide jada $\{\|A_n\|\}$ on tõkestatud.

T a r v i l i k k u s. Tingimuse a) tarvilikkus on ilmne. Tingimuse b) tarvilikkuse näitamiseks oletame väitevastaselt, et jada $\{A_n\}$ koondub kõikjal, kuid jada $\{\|A_n\|\}$ pole tõkestatud. Selleks tõestame kõigepealt, et siis pole ka jada $\{\|A_n x\|\}$ tõkestatud üheski kinnises sfääris $\bar{S}(a,\alpha) \subset X$. Oletame veel kord väitevastaselt, et leidub sfäär $\|x - a\| \leq \alpha$ nii, et $x \in \bar{S}(a,\alpha)$ korral $\|A_n x\| \leq M$ iga n puhul. Võtame vaatlusele elemendi $x' = \frac{\alpha}{\|x\|} x + a$, mis iga $x \in X$ puhul kuulub sfääri $\bar{S}$. Siis aga iga n korral

$$\|A_n x'\| = \left\|\frac{\alpha}{\|x\|} A_n x + A_n a\right\| \leq M,$$

kust

$$\left\|\frac{\alpha}{\|x\|} A_n x\right\| - \|A_n a\| \leq M$$

ehk

$$\frac{\alpha}{\|x\|} \|A_n x\| \leq M + \|A_n a\| \leq 2M.$$

Järelikult iga $x \in X$ ja $n = 1,2, \ldots$ korral

$$\|A_n x\| \leq \frac{2M}{\alpha} \|x\|,$$

s.t. $\|A_n\| \leq \frac{2M}{\alpha}$, mis on vastuolus oletusega, et $\{\|A_n\|\}$ pole tõkestatud. Seega jada $\{\|A_n x\|\}$ pole tehtud oletuse puhul üheski kinnises sfääris tõkestatud.

Fikseerime mingi sfääri $\overline{S}_0 \subset X$. Äsjatõestatu põhjal peab leiduma operaator A_{n_1} ja punkt $x_1 \in \overline{S}_0$ nii, et $\|A_{n_1} x_1\| > 1$. Operaatori A_{n_1} pidevuse tõttu kehtib viimane võrratus terves mingis sfääris $\overline{S}_1 \subset \overline{S}_0$. Nüüd peab aga jälle leiduma operaator A_{n_2} ning punkt $x_2 \in \overline{S}_1$ nii, et $\|A_{n_2} x_2\| > 2$, kusjuures see võrratus kehtib sfääris $\overline{S}_2 \subset \overline{S}_1$ jne. Seda protsessi jatkates saame sfääride jada

$$\overline{S}_1 \supset \overline{S}_2 \supset \ldots \supset \overline{S}_k \supset \ldots$$

nii, et $x \in \overline{S}_k(x_k, \alpha_k)$ korral $\|A_{n_k} x\| > k$. Üldsust kitsendamata võime siinjuures eeldada, et $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$. Siis aga (vt. I ptk. §4) leidub punkt $x_0 \in X$ nii, et $x_0 \in \overline{S}_k$ iga $k = 1,2,\ldots$ puhul, kusjuures $\|A_{n_k} x_0\| \geq k$. Seega jada $\{A_n\}$ ei saa punktis x_0 koonduda, mis on vastuolus teoreemi eeldustega. Järelikult peab jada $\{\|A_n\|\}$ olema tõkestatud.

P i i s a v u s. Moodustame põhihulga E lineaarse katte $L(E)$. Kui $x_0 \in L(E)$, siis avaldub ta kujul $x_0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k$, kus $x_k \in E$. Näitame kõigepealt, et jada $\{A_n\}$ koondub kõikjal lineaalis $L(E)$. Tõepoolest, kuna eelduse kohaselt $x_k \in E$ korral eksisteerib $\lim_{n\to\infty} A_n x_k = Ax_k$, siis $x_0 \in L(E)$ puhul

$$\lim_{n\to\infty} A_n x_0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k A_n x_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \lim A_n x_k =$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k Ax_k = Ax_o,$$

kusjuures viimast võrdust võib ühtlasi lugeda piiroperaatori A definitsiooniks lineaalis L.

Olgu nüüd $x \in X$ mistahes element. Siis leidub $\overline{L(E)} = X$ tõttu element $x_o \in L(E)$ nii, et $\|x - x_o\| < \frac{\varepsilon}{3M}$, kus $\varepsilon > 0$ on suvaliselt etteantud arv ja $M \geqslant \|A_n\|$. Seega $n > N(\varepsilon)$ ja iga i korral

$$\|A_{n+i}x - A_nx\| \leqslant \|A_{n+i}x - A_{n+i}x_o\| + \|A_{n+i}x_o - A_nx_o\| +$$

$$+\|A_nx_o - A_nx\| < \|A_{n+i}\| \cdot \|x - x_o\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|A_n\| \cdot \|x - x_o\| <$$

$$< M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon,$$

s.t. jada $\{A_nx\}$ on fundamentaalne ja ruumi Y täielikkuse tõttu eksisteerib piirelement $\lim\limits_{n\to\infty} A_nx = Ax$.

Niisaadud operaator A on ilmselt lineaarne (tõestada!) ning seega tuleb veel vaid tõestada, et ta on ka tõkestatud (ja seega pidev). Kuid $\|A_n\| \leqslant M$ tõttu iga $x \in X$ puhul $\|A_nx\| \leqslant M\|x\|$, millest $n \to \infty$ korral järeldubki, et $\|Ax\| \leqslant M\|x\|$. Sellega on teoreem tõestatud.

Esitatud tõestusest me nägime muuhulgas, et kui ruum Y on täielik, siis on ruum $(X \to Y)$ täielik ka kõikjal koondumise mõttes.

Banach-Steinhausi teoreemi rakendamise võimalusi illustreerib järgmine

N ä i d e. Vaatleme ruumis $C(a,b)$ funktsionaali

$$fx = \int_a^b x(\xi)d\xi.$$

Selle funktsionaali (määratud integraali) väärtuste ligikaudseks arvutamiseks kasutatakse praktikas nn. <u>kvadratuurivalemeid</u>, mis omavad kuju

$$fx \approx \sum_{k=0}^{n} c_k^n x(\xi_k^n) = f_n x$$

(näiteks trapetsvalemi puhul $\xi_k^n = a + \frac{k(b - a)}{n}$, $c_0^n = c_n^n = \frac{b - a}{2n}$, $c_1^n = \ldots = c_{n-1}^n = \frac{b - a}{n}$). Siinjuures kordajad c_k^n valitakse tavaliselt nii, et võrdus $fx = f_n x$ leiaks aset kõikide ülimalt n-astme polünoomide puhul, s.t. siis, kui $x(\xi) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \xi^i$.

Kerkib küsimus: millistel tingimustel saab määratud integraali väärtust iga $x \in C$ puhul vaadeldavat tüüpi kvadratuurivalemitega arvutada mistahes etteantud täpsusega? Sellele küsimusele vastamiseks tuleb selgitada, millal leiab koondumine $\lim_{n\to\infty} f_n x = fx$ aset kogu ruumis C.

Kordajate c_k^n valik garanteerib vajaliku koondumise põhihulgal $\{1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^n, \ldots\}$. Banach-Steinhausi teoreemi rakendamiseks tuleb nõuda veel normide $\|f_n\|$ tõkestatust. Kuid

$$\|f_n x\| = \left|\sum_{k=0}^{n} c_k^n x(\xi_k^n)\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |c_k^n|\,|x(\xi_k^n)| \leq \|x\| \cdot \sum_{k=0}^{n} |c_k^n|$$

ja seega $\|f_n\| \leq \sum_{k=0}^{n} |c_k^n|$. Järelikult on kvadratuurivalemite koondumiseks piisav, kui leidub arv $M > 0$ nii, et iga n puhul

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k^n| \leq M.$$

See tingimus on alati täidetud siis, kui $c_k^n \geqslant 0$. Tõepoolest, kuna $x(\xi) \equiv 1$ korral peab iga n puhul olema $f_n x = fx = b - a$, siis

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k^n| = \sum_{k=0}^{n} c_k^n = b - a.$$

§ 6. Lineaarsete operaatorite pööramine

Kui operaator A kujutab ruumi X üksüheselt hulgaks $G \subset Y$, siis saab iga elemendi $y \in G$ järgi määrata tema originaali $x \in X$ nii, et $Ax = y$. Operaatorit, mis seab elementidele $y \in G$ vastavusse nende originaalid, nimet. operaatori A <u>pöördoperaatoriks</u> ja tähist. $x = A^{-1}y$. Operaator A^{-1} kujutab seega hulga $G \subset Y$ ruumiks X, s.t.

$$A^{-1}\{A(X)\} = X$$

ja

$$A\{A^{-1}(G)\} = G.$$

Lihtne on veenduda, et lineaarse operaatori $A \in \{X \to Y\}$ pöördoperaator (kui see eksisteerib) on samuti lineaarne, s.t. $A^{-1} \in \{Y \to X\}$. Selleks, et näidata pöördoperaatori pidevust, tõestame kõigepealt .

L e m m a. Kui pideva lineaarse operaatori A kujutis on II kategooria hulk, siis leidub vastavalt igale $\varepsilon > 0$ niisugune $\eta > 0$, et (F-tüüpi ruumi X) sfääri

$\|x\|<\varepsilon$ kujutis $A(\|x\|<\varepsilon)$ sisaldaks (F-tüüpi ruumi Y) sfääri $\|y\|<\eta$.

T õ e s t u s e k s näitame kõigepealt, et vaadeldava sfääri kujutise sulund $\overline{A(\|x\|<\varepsilon)}$ sisaldab teatud sfääri $\|y\|<\eta$. Vastavalt etteantud arvule $\varepsilon>0$ moodustame iga n puhul hulga $D_n=\{nx'\}$, kus $x'\in S(\theta,\frac{\varepsilon}{2})$, s.t. $\|x'\|<\frac{\varepsilon}{2}$. Lühemalt võib seda laadi definitsiooni üles kirjutada ka sümboliga $D_n=\{nx':\|x'\|<\frac{\varepsilon}{2}\}$, mida me järgnevas mõnikord kasutamegi. Ilmselt $D_1=S(\theta,\frac{\varepsilon}{2})$.

Lihtne on veenduda, et $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$, sest ilmselt $X\supset \bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$, kuid teiselt poolt iga $x\in X$ korral $\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}=\theta$ ja seega leidub niisugune naturaalarv n_0, et $\|\frac{x}{n_0}\|<\frac{\varepsilon}{2}$, s.t. $x\in D_{n_0}$ ja järelikult $X\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$. Võttes nüüd vaatlusele hulkade D_n kujutised $A(D_n)=G_n$ oleme seega näidanud, et $A(X)=G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$.

Kuna G on eelduse kohaselt II kategooria hulk, siis peab seda olema ka vähemalt üks hulkadest G_n, olgu see hulk G_m. Seega leidub sfäär $S(y_0,\alpha)$, milles G_m on kõikjal tihe: $S(y_0,\alpha)\subset\overline{G_m}$.

Moodustame sfääri $S_1(\frac{y_0}{m},\frac{\alpha}{m})$ ja näitame, et $S_1\subset\overline{G_1}$. Tõepoolest, olgu $y\in S_1$, s.t. $\|y-\frac{y_0}{m}\|<\frac{\alpha}{m}$. Siis kvaasinormi omadust 3^0 arvestades

$$\|my-y_0\|\leq m\|y-\frac{y_0}{m}\|<\alpha$$

ja seega $my\in S(y_0,\alpha)\subset\overline{G_m}$. Järelikult leidub jada

$\{y_k\} \subset G_m$ nii, et $my = \lim_{k\to\infty} y_k$ ehk $y = \lim_{k\to\infty} \frac{y_k}{m}$. Kuna $y_k \in G_m = A(D_m)$, siis leidub $x_k \in D_m$ nii, et $y_k = Ax_k$. Kuid $x_k \in D_m$ tõttu $x_k = mx_k'$, kus $\|x_k'\| < \frac{\varepsilon}{2}$, ja seega $y_k = mAx_k'$ ning $y = \lim_{k\to\infty} Ax_k'$. Järelikult $y \in \overline{G_1}$ (s.t. $S_1 \subset \overline{G_1}$), sest $x_k' \in S(\theta,\frac{\varepsilon}{2}) = D_1$ tõttu $Ax_k' \subset A(D_1) = G_1$.

Võtame nüüd vaatlusele mingi sfääri $S_2(b,\eta)$ nii, et $b \in G_1$ ja $S_2 \subset S_1$. Kui $y' \in S_2$, siis $\|y' - b\| < \eta$. Seega hulk $\{y' - b : y' \in S_2\}$ kujutab endast sfääri $S(\theta',\eta)$. Kuna iga elemendi $y' \in S_2 \subset \overline{G_1}$ ümbruses leidub element $y'' \in G_1$, siis $y = y' - b$ ümbruses asub element $y'' - b$. Järelikult sfäär $\|y\| < \eta$ sisaldub hulga $G'' = \{y'' - b : y'' \in G_1\}$ sulundis: $\{\|y\| < \eta\} \subset \overline{G''}$.

Kuna $y'', b \in G_1$, siis leiduvad elemendid $x'', a \in D_1$ (s.t. $\|x''\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\|a\| < \frac{\varepsilon}{2}$) nii, et $y'' = Ax''$ ja $b = Aa$. Järelikult $y'' - b = A(x'' - a) = Ax$, kus $\|x\| = \|x'' - a\| \leq \|x''\| + \|a\| < \varepsilon$, s.t. $G'' \subset A(\|x\| < \varepsilon)$. Siis aga ka $\overline{G''} \subset \overline{A(\|x\| < \varepsilon)}$ ja seega

$$\{\|y\| < \eta\} \subset \overline{A(\|x\| < \varepsilon)},$$

s.t. leidub sfäär, mis sisaldub sfääri $\|x\| < \varepsilon$ kujutise sulundis.

Näitame nüüd, et etteantud $\varepsilon > 0$ puhul leidub $\eta > 0$ nii, et $\{\|y\| < \eta\} \subset A(\|x\| < \varepsilon)$. Moodustame selleks jada $\{\varepsilon_k\} = \{\frac{\varepsilon}{2^k}\}$ ning leiame vastavalt igale ε_k arvu $\eta_k > 0$ nii, et $\{\|y\| < \eta_k\} \subset \overline{A(\|x\| < \varepsilon_k)}$. Üldsust kitsendamata võime siinjuures eeldada, et $\eta_1 > \eta_2 > \ldots > \eta_k > \ldots \to 0$.

Lähtume mingist elemendist $y \in S(\theta', \eta_1)$. Siis $\{\|y\| < \eta_1\} \subset \overline{A(\|x\| < \varepsilon_1)}$ tõttu leidub y ümbruses element y_1 nii, et tema originaal x_1 kuulub sfääri $\|x\| < \varepsilon_1$, kusjuures $\|y - y_1\| < \eta_2$. Nüüd aga leidub elemendi $y - y_1$ ümbruses element y_2 nii, et tema originaal x_2 kuulub sfääri $\|x\| < \varepsilon_2$, kusjuures $\|(y - y_1) - y_2\| < \eta_3$ jne. Seda protsessi jatkates saame jada $\{y_n\}$ ja selle elementide originaalide jada $\{x_n\}$ (kus $y_n = Ax_n$) nii, et iga n puhul

$$\|y - (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)\| < \eta_{n+1} \quad \text{ja} \quad \|x_n\| < \varepsilon_n.$$

Siin esimene võrratus (koos tingimusega $\eta_n \to 0$) ütleb, et leiab aset koondumine $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} y_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$, kuna aga teist võrratust arvestades $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \varepsilon$. Seega rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ koondub (absoluutselt) mingiks elemendiks x, kusjuures $\|x\| = \|\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon$. Kuid operaatori A pidevust ja lineaarsust arvestades

$$Ax = A(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k) = \lim_{n\to\infty} A(\sum_{k=1}^{n} x_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} Ax_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k = y.$$

Seega lähtudes mistahes elemendist $y \in S(\theta', \eta_1)$ oleme konstrueerinud elemendi $x \in S(\theta, \varepsilon)$ nii, et $Ax = y$. Valides $\eta = \eta_1$ tähendab see aga, et $\{\|y\| < \eta\} \subset A(\|x\| < \varepsilon)$, millega lemma ongi tõestatud.

B a n a c h i t e o r e e m. Kui pidev lineaarne operaator A kujutab F-tüüpi ruumi X üksüheselt F-tüüpi ruumiks Y, siis eksisteerib pidev lineaarne pöördoperaator A^{-1}.

T õ e s t u s. Kuna A on lineaarne ning kujutamine üksühene, siis eksisteerib lineaarne pöördoperaator A^{-1}. Tema pidevuse näitamiseks piisab (vt. §1), kui näitame pidevuse nullpunktis $\Theta' \in Y$.

Vastavalt etteantud arvule $\varepsilon > 0$ leiame $\eta(\varepsilon) > 0$ nii, et sfääri $\|x\| < \varepsilon$ kujutis sisaldaks sfääri $\|y\| < \eta$. Valides nüüd mingi nullpunktiks koonduva jada $\{y_n\} \subset Y$ ($\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \Theta'$), leidub naturaalarv $N(\varepsilon)$ nii, et $n > N$ korral $\|y_n\| < \eta$. Siis aga niisuguste n väärtuste puhul

$$\|x_n\| = \|A^{-1}y_n\| < \varepsilon,$$

s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} A^{-1}y_n = \Theta$. Arvestades, et $A\Theta = \Theta'$ tõttu $A^{-1}\Theta' = \Theta$, oleme seega näidanudki operaatori A^{-1} pidevuse.

§ 7. N o r m e e r i t u d r i n g i m õ i s t e

Lineaali X nimet. <u>ringiks</u> (mõnikord ka algebraks), kui temas on defineeritud elementide korrutamise tehe, mis rahuldab tingimusi

1° $\lambda(x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y, \quad x \cdot (\lambda y) = \lambda(x \cdot y)$;

2° $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;

3° $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Kui ringis leidub <u>ühikelement</u> e (s.t. element, mis iga $x \in X$ puhul rahuldab tingimust $x \cdot e = e \cdot x = x$), siis kõneldakse ka ühikelemendiga ringist. Olgu muide märgitud, et ühikelemendi olemasolu eeldamine ei kujuta endast olulist kitsendust, sest ühikelemendita ringi võib alati vaadelda teatava ühikelemendiga ringi alamringina. Ühikelemendiga ringis on korrutamise tehe teatud elementide puhul pööratav. Elementi x_*^{-1} nimet. elemendi x parempoolseks pöördelemendiks, kui $x \cdot x_*^{-1} = e$; elementi $_*x^{-1}$ nimet. elemendi x vasakpoolseks pöördelemendiks, kui $_*x^{-1} \cdot x = e$. Kui element x omab nii parempoolse kui ka vasakpoolse pöördelemendi, siis nad ühtuvad (tõestada!) ning nende ühist väärtust nimet. elemendi x pöördelemendiks ja tähist. x^{-1}. Pöördelemendi olemasolu kindlakstegemisel osutub sageli otstarbekohaseks ideaali mõiste. Ringi X alamhulka I_* nimet. X parempoolseks ideaaliks, kui:

1^o $I_* \neq X$;

2^o iga $x, y \in I_*$ puhul $x + y \in I_*$;

3^o kui $x \in I_*$, siis iga $a \in X$ puhul $x \cdot a \in I_*$.

Analoogselt defineeritakse vasakpoolne ideaal $_*I$ (erinevus seisneb selles, et tingimuses 3^o tuleb nõuda, et $a \cdot x \in {}_*I$).

Ringi ükski parempoolne ega vasakpoolne ideaal ei saa sisaldada ühikelementi. Tõepoolest, kui oleks $e \in I_*$, siis iga $a \in X$ puhul $a = e \cdot a \in I_*$, s.t. $I_* = X$. Seda arvestades on lihtne tõestada, et ühikelemendiga ringi element x omab parempoolse (vasakpoolse) pöördelemendi siis ja ainult siis, kui ta ei sisaldu üheski parempoolses (vasakpoolses) ideaalis.

Ühikelemendiga ringi X nimet. <u>normeeritud ringiks</u>, kui

1° X on normeeritud ruum;

2° iga kahe elemendi $x, y \in X$ puhul $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\|$;

3° $\|e\| = 1$.

Normeeritud ringi nimet. <u>täielikuks</u> ehk <u>Banachi ringiks</u>, kui ta on täielik normeeritud ruum (s.t. Banachi ruum). Iga mittetäielikku normeeritud ringi saab tavalisel viisil laiendada täielikuks (vrdl. I ptk. §5).

Banachi ringis osutub pöördelemendi leidmise tehe pidevaks, kusjuures igal pöördelementi omaval elemendil leidub ümbrus, millesse kuuluvad elemendid omavad samuti pöördelemente. Kuna ühikelement alati omab pöördelemendi (ilmselt $e^{-1} = e$), siis tõestame selle väite kõigepealt ühikelemendi juhul.

T e o r e e m 1. Banachi ringi iga element x sfäärist $\|x - e\| < 1$ omab pöördelemendi x^{-1}, kusjuures $x \to e$ puhul $x^{-1} \to e$.

T õ e s t u s. Tähistame $x - e = y$. Siis $x \in S(e,1)$ puhul $\|y\| < 1$ ja seega rida $\sum_{k=0}^{\infty} \|y\|^k$ on koonduv. Kuid kuna normeeritud ringi aksioomi 2° kohaselt $\|y^k\| \leq \|y\|^k$, siis (tähistades $y^0 = e$) sellest järeldub, et rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k y^k = e - y + y^2 - y^3 + \dots$$

on absoluutselt koonduv mingiks elemendiks z. Seega

$z = e - y + y^2 - y^3 + \dots = e - y(e - y + y^2 - \dots) = e - yz$,

ehk $(e + y)\cdot z = e$. Analoogselt saame, et $z\cdot(e + y) = e$,

s.t. $z = (e + y)^{-1} = x^{-1}$. Kuna

$$\|x^{-1}\| = \|z\| = \Big\|\sum_{k=0}^{\infty} y^k\Big\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|y\|^k = \frac{1}{1 - \|y\|},$$

siis $\|y\| = \|x - e\| < \varepsilon$ korral

$$\|x^{-1} - e\| = \|-yz\| \leq \|y\|\cdot\|z\| \leq \frac{\|y\|}{1 - \|y\|} < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

millega teoreem on tõestatud.

Vahetuks järelduseks teoreemist 1 on

T e o r e e m 2. Kui element $x \in X$ omab pöördelemendi x^{-1} ja element $y \in X$ rahuldab tingimust $\|y\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$, siis summa $x + y$ omab samuti pöördelemendi, kusjuures

$$\|(x + y)^{-1} - x^{-1}\| < \frac{\|x^{-1}\|\|x^{-1}y\|}{1 - \|x^{-1}\|\|y\|}.$$

T õ e s t u s vt. [1] lk. 152.

Normeeritud ringi üheks olulisemaks näiteks on pidevate lineaarsete operaatorite ruum $(X \to X)$. Peatume lühidalt sellel juhul.

Operaatorite $A \in \{X \to Y\}$ ja $B \in \{Y \to Z\}$ <u>korrutis</u> $BA \in \{X \to Z\}$ defineeritakse nende superpositsioonina: iga $x \in X$ puhul $(BA)x = B(Ax)$. Ilmselt pole selline korrutamine üldiselt kommutatiivne, sest korrutis AB omab mõtet vaid juhul $Z \subset X$. Lihtne on aga veenduda korrutamise assotsiatiivsuses ja distributiivsuses ning selles, et lineaarsete operaatorite korrutis on lineaarne (tõestada!). Selleks, et ruumi $\{X \to Y\}$ operaatoreid saaks omavahel korrutada, peab olema kas $X = Y$ või vähemalt $Y \subset X$. Sealjuures pole raske näha, et ruum $\{X \to X\}$ kujutab endast ringi, milles ühikelemendiks on nn. <u>ühikoperaator</u> E, mis seab igale elemendile vastavusse selle elemendi enda: iga $x \in X$ puhul $Ex = x$ (tõestada, et E on lineaarne!).

Kui X on Banachi ruum, siis on lihtne näha, et $(X \to X)$ osutub Banachi ringiks. Tõepoolest, kuna

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|,$$

siis $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, kuid $\|E\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ex\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|x\| = 1.$

Ülaltõestatud teoreem 1 omandab pidevate lineaarsete operaatorite ruumi $(X \to X)$ puhul näiteks järgmise kuju:

B a n a c h i   t e o r e e m. Kui X on Banachi ruum ja operaator $A \in (X \to X)$ rahuldab tingimust $\|A\| < 1$, siis eksisteerib pöördoperaator $(E - A)^{-1} \in (X \to X)$, kusjuures

$$\|(E - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Operaatori $A \in \{X \to Y\}$ pöördoperaatori leidmine on tihedalt seotud võrrandi

$$Ax = y \tag{$*$}$$

(kus $y \in Y$ on antud ja $x \in X$ otsitav element) lahendamisega. Nimelt: kui eksisteerib vasakpoolne pöördoperaator A^{-1}, siis võrrand $(*)$ omab iga $y \in Y$ puhul ülimalt ühe lahendi(s.t. kui võrrand on lahenduv, siis lahend ainus); kui aga eksisteerib parempoolne pöördoperaator A_*^{-1}, siis võrrand (✳) omab iga $y \in Y$ puhul vähemalt ühe lahendi (s.t. võrrand on lahenduv). Tõepoolest, kui eksisteerib ${}_*A^{-1}$ ja võrrand (✳) omab lahendi x^*, siis rakendades võrdusele $Ax^* = y$ operaatorit ${}_*A^{-1}$ saame ${}_*A^{-1}A = E$ tõttu, et ${}_*A^{-1}Ax^* = x^* = {}_*A^{-1}y$, s.t. lahend avaldub kujul ${}_*A^{-1}y$. Kui aga eksisteerib A_*^{-1}, siis võrrandi (✳) üheks lahendiks on $A_*^{-1}y$, sest $AA_*^{-1} = E'$ (kus E' on ühikoperaator ruumis $(Y \to Y)$)tõttu

$$A(A_*^{-1}y) = E'y = y.$$

Pöördoperaatori A^{-1} olemasolu tähendab seega, et võrrand (✳) on iga vabaliikme y puhul üheselt lahenduv.

§8. L i n e a a r s e t e f u n k t s i o n a a l i d e j a t k a m i n e

Peatume järgnevalt lineaarsete operaatorite ühe olulise erijuhu - lineaarsete funktsionaalide uurimisel. Käesolevas paragrahvis näitame, et mingis lineaarses ruumis L määratud lineaarset funktsionaali saab alati teatud viisil jatkata avaramasse lineaarsesse ruumi $X > L$. Kõigepealt defineerime paar vajalikku mõistet.

Lineaarses ruumis X määratud funktsionaali $p(x)$ nimet. <u>pooladitiivseks</u>, kui iga $x,y \in X$ puhul

$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$. Funktsionaali $p(x)$ nimet. <u>positiivselt homogeenseks</u>, kui iga $x \in X$ ja $\lambda \geqslant 0$ puhul $p(\lambda x) = \lambda p(x)$. Lineaarse normeeritud ruumi X korral on pooladitiivseks ja positiivselt homogeenseks funktsionaaliks näiteks norm: $p(x) = \|x\|$.

T e o r e e m 1. Olgu lineaarses ruumis X antud pooladitiivne ja positiivselt homogeenne funktsionaal $p(x)$ ning lineaarses alamruumis $L \subset X$ lineaarne funktsionaal fx nii, et iga $x \in L$ korral $fx \leqslant p(x)$. Siis eksisteerib lineaarne funktsionaal Fx, mis on määratud kogu ruumis X, kusjuures

1^0 iga $x \in X$ puhul $Fx \leqslant p(x)$;

2^0 iga $x \in L$ puhul $Fx = fx$.

T õ e s t u s. Ilmselt on mõtet vaadelda vaid juhtu $L \neq X$, s.t. juhtu, mil leidub element $x_0 \in X$ nii, et $x_0 \notin L$. Mistahes elementide $x', x'' \in L$ puhul

$$fx' - fx'' = f(x' - x'') \leqslant p(x' - x'') \leqslant p(x' + x_0) + p(-x'' - x_0),$$

ehk

$$-p(-x'' - x_0) - fx'' \leqslant p(x' + x_0) - fx'.$$

Siis aga (elementide x' ja x'' suvalisuse ning sõltumatuse tõttu):

$$m = \sup_{x \in L} [-p(-x - x_0) - fx] \leqslant \inf_{x \in L} [p(x + x_0) - fx] = M.$$

Valides arvu μ nii, et $m \leqslant \mu \leqslant M$, saame iga $x \in L$ puhul

$$-p(-x - x_0) - fx \leq \mu \leq p(x + x_0) - fx. \qquad (*)$$

Vaatleme nüüd hulka $L_1 = \{x + \lambda x_0\}$, kus $x \in L$ ja λ on mistahes reaalarv. Ilmselt on L_1 lineaarne ruum (tõestada!), mille dimensioon on ühe võrra suurem kui ruumil L. Siinjuures iga element $y \in L_1$ avaldub üheselt kujul $y = x + \lambda x_0$, kus $x \in L$. Tõepoolest, kui oletada, et on veel $y = x' + \lambda' x_0$, siis $x + \lambda x_0 = x' + \lambda' x_0$, ehk $x_0 = \frac{x' - x}{\lambda - \lambda'} \in L$, mis on vastuolus elemendi x_0 valikuga.

Defineerime nüüd ruumis L_1 funktsionaali

$$F_1 y = fx + \lambda\mu,$$

kus $y = x + \lambda x_0$ ja μ on ülalnimetatud viisil fikseeritud. Ilmselt on F_1 lineaarne (tõestada!). Näitame, et iga $y \in L_1$ puhul $F_1 y \leq p(y)$.

Kui $\lambda = 0$, s.t. kui $y = x + \lambda x_0 \in L$, siis

$$F_1 y = fx \leq p(x).$$

Kui aga $\lambda \neq 0$, siis võttes võrratuses $(*)$ x asemele $\frac{1}{\lambda} x$ saame

$$-p(-\frac{x}{\lambda} - x_0) - \frac{1}{\lambda} fx \leq \mu \leq p(\frac{x}{\lambda} + x_0) - \frac{1}{\lambda} fx.$$

Juhul $\lambda > 0$ järeldub siit λ-ga korrutades, et

$$-p(-x - \lambda x_0) - fx \leq \lambda\mu \leq p(x + \lambda x_0) - fx,$$

ehk

$$F_1 y = \lambda\mu + fx \leq p(x + \lambda x_0) = p(y).$$

Juhul $\lambda < 0$ annab $(-\lambda)$-ga korrutamine sama tulemuse:

$$-p(x + \lambda x_0) + fx \leq -\lambda\mu \leq p(-x - \lambda x_0) + fx,$$

ehk

$$F_1 y = fx + \lambda\mu \leq p(x + \lambda x_0) = p(y).$$

Sellega oleme me nõutud omadustega funktsionaali konstrueerinud ruumis L_1, s.t. jatkanud funktsionaali ruumist L "ühe võrra suurema dimensiooniga" ruumi L_1. Selleks, et jõuda kogu ruumi X, tuleb nüüd kasutada täielikku induktsiooni, või, juhul kui X pole loenduvadimensionaalne, transfiniitset induktsiooni (vt. [4] lk. 323). Teoreem 1, mida nimet. ka Banach-Hahni teoreemiks, on tõestatud.

Esitatud tõestusest järeldub muide, et kui antud funktsionaal f oli pidev, siis on seda samuti funktsionaal F_1 ning järelikult ka lõpptulemusena saadav funktsionaal F. Ühtlasi on ilmne, et pidevate lineaarsete funktsionaalide vaatlemise korral ei tarvitse L olla lineaarne alamruum (s.t. kinnine lineaal), vaid võib olla ka lihtsalt lineaal.

Banach-Hahni teoreemi järeldustena tõestame veel mõned rakendustes olulised teoreemid.

T e o r e e m 2. Kui lineaarse normeeritud ruumi X alamruumis L on antud pidev lineaarne funktsionaal f, siis leidub pidev lineaarne funktsionaal F, mis on määratud kogu ruumis X ning mis rahuldab tingimusi

1° iga $x \in L$ puhul $Fx = fx$;

2° $\|F\|_X = \|f\|_L$, kus indeks normi juures tähistab ruumi, milles see norm on arvutatud.

T õ e s t u s. Defineerime funktsionaali

$$p(x) = \|f\|_L \cdot \|x\|,$$

mis ilmselt on pooladitiivne ja positiivselt homogeenne. Kui $x \in L$, siis

$$fx \leq |fx| \leq \|f\|_L \cdot \|x\| = p(x).$$

Seega on Banach-Hahni teoreemi eeldused täidetud ja järelikult eksisteerib ruumis X määratud pidev lineaarne funktsionaal Fx nii, et $Fx = fx$, kui $x \in L$ ja $Fx \leq p(x)$ iga $x \in X$ puhul. Võttes viimases võrratuses x asemele $-x$ saame $-Fx \leq p(-x)$. Seega $-p(-x) = -\|f\|_L \cdot \|x\| \leq Fx \leq \|f\|_L \cdot \|x\| = p(x)$, s.t. $|Fx| \leq \|f\|_L \cdot \|x\|$. Järelikult $\|F\|_X \leq \|f\|_L$, ning kuna ulatuslikumasse ruumi üle minnes funktsionaali norm ilmselt kahaneda ei saa, siis peab kehtima võrdus $\|F\|_X = \|f\|_L$.

T e o r e e m 3. Lineaarses normeeritud ruumis X leidub alati niisugune pidev lineaarne funktsionaal f, mis etteantud punkti $x_0 \in X$ $(x_0 \neq \theta)$ puhul rahuldab tingimusi

$$1^\circ \; \|f\| = 1 , \qquad 2^\circ \; fx_0 = \|x_0\|.$$

T õ e s t u s. Vaatleme ühedimensionaalset alamruumi $L = \{\lambda x_0\} \subset X$ ja defineerime seal funktsionaali g järgmiselt: kui $x = \lambda x_0 \in L$, siis $gx = \lambda \|x_0\|$. Ilmselt on g lineaarne (tõestada!) ja $gx_0 = \|x_0\|$. Tema normi saab vahetult arvutada:

$$\|g\|_L = \sup_{\substack{\|x\|\le 1 \\ x\in L}} |gx| = \sup_{\lambda} |\lambda|\|x_0\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|x\| = 1.$$

Jatkates selle funktsionaali teoreemi 2 kohaselt kogu ruumi X, saamegi nõutud omadustega funktsionaali f.

Äsjatõestatud teoreemist järeldub, et igas lineaarses normeeritud ruumis leidub pidev lineaarne funktsionaal, mis pole kõikjal null.

T e o r e e m 4. Kui mingi elemendi $x_0 \in X$ puhul $fx_0 = 0$ iga pideva lineaarse funktsionaali f korral, siis $x_0 = \Theta$.

T õ e s t u s e k s oletame väitevastaselt, et $x_0 \neq \Theta$. Siis leidub teoreemi 3 põhjal pidev lineaarne funktsionaal f nii, et $\|f\| = 1$ ja $fx_0 = \|x_0\| \neq 0$, mis on vastuolus teoreemi eeldustega.

T e o r e e m 5. Olgu lineaarses normeeritud ruumis X antud lineaal L ja punkt $x_0 \notin \overline{L}$. Siis leidub pidev lineaarne funktsionaal f nii, et

1° iga $x \in L$ puhul $fx = 0$;

2° $fx_0 = 1$

3° $\|f\| = \frac{1}{\delta}$, kus $\delta = \rho(x_0, L)$.

T õ e s t u s. Moodustame lineaali $L_1 = \{x + \lambda x_0\}$, kus $x \in L$, ning defineerime seal funktsionaali $gy = \lambda$ (kus $y = x + \lambda x_0$). Ilmselt on see funktsionaal lineaarne, kusjuures $gx_0 = 1$ ja $x \in L$ puhul $gx = 0$. Pole aga raske veenduda ka tema tõkestatuses:

$$|gy| = |\lambda| = \frac{|\lambda|\|y\|}{\|x_0 + \frac{x}{\lambda}\| |\lambda|} = \frac{\|y\|}{\rho(x_0, -\frac{x}{\lambda})} \leqslant \frac{\|y\|}{\rho(x_0, L)} = \frac{\|y\|}{\delta} .$$

Seega saime ühtlasi, et $\|g\| \leqslant \frac{1}{\delta}$. Vastassuunalise võrratuse saamiseks valime jada $\{x_n\} \subset L$ nii, et $\lim\limits_{n\to\infty} (x_o, x_n) = = \delta$. Siis $g(x_n - x_o) = -1$, kuid $|g(x_n - x_o)| \leqslant \leqslant \|g\| \|x_n - x_o\|$. Järelikult iga n puhul $\|g\| \geqslant \frac{1}{\|x_n - x_o\|}$, millest $n \to \infty$ korral saamegi $\|g\| \geqslant \frac{1}{\delta}$ ja seega $\|g\| = \frac{1}{\delta}$. Jatkates saadud funktsionaali g kogu ruumi X jõuamegi vajaliku funktsionaalini f.

T e o r e e m 6. Selleks, et element $x_o \in X$ oleks lineaali $L \subset X$ puutepunkt, on tarvilik ja piisav, et $fx_o = 0$ iga pideva lineaarse funktsionaali f puhul, mis lineaalis L võrdub nulliga.

T a r v i l i k k u s. Olgu $x_o \in \overline{L}$. Siis leidub jada $\{x_n\} \subset L$ nii, et $\lim x_n = x_o$. Seega $fx_o = \lim fx_n = 0$.

P i i s a v u s. Olgu teada, et $fx_o = 0$ iga niisuguse pideva lineaarse funktsionaali f puhul, mis lineaali L punktides on võrdne nulliga (s.t. $fx = 0$, kui $x \in L$). Oletame väitevastaselt, et $x_o \notin \overline{L}$. Siis leidub teoreemi 5 kohaselt pidev lineaarne funktsionaal f nii, et $x \in L$ puhul $fx = 0$ ja $fx_o = 1$. Saadud vastuolu tõestabki teoreemi.

Olgu veel märgitud, et viimases teoreemis võib lineaali L ning tema sulundi $\overline{L}$ asendada mistahes hulga D

ning selle kinnise lineaarse kattega $\overline{L(D)}$.

§ 9. Pidevate lineaarsete funktsionaalide üldkuju mõnedes ruumides

Eelmise paragrahvi teoreemide (eeskätt teoreemide 4 ja 6) rakendamisel on oluline teada, millisel kujul avaldub mistahes pidev lineaarne funktsionaal vaadeldavas ruumis. Osutub, et sellise üldkuju saab leida enamiku olulisemate ruumide puhul. Demonstreerime seda mõne näite varal.

N ä i d e 1. Vaatleme ruumi ℓ. Selles ruumis osutub põhihulgaks elementide $e_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots)$ hulk, kus

$$\xi_i^{(n)} = \begin{cases} 1, \text{ kui } n = i \\ 0, \text{ kui } n \neq i. \end{cases}$$

Tõepoolest, mistahes $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \ell$ puhul

$$\| x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \| = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i| \to 0,$$

kui $n \to \infty$ (sest $x \in \ell$ tõttu on rida $\sum |\xi_i|$ koonduv). Seega iga element $x \in \ell$ on avaldatav kujul

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i .$$

Olgu nüüd antud mingi pidev lineaarne funktsionaal $f \in (\ell \to R_1)$. Siis eelmist võrdust arvestades

$$fx = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \gamma_i ,$$

kus arvud $\gamma_i = fe_i$ iseloomustavad vaadeldavat funktsionaali (nad ei sõltu elemendist x). Selgitame nende arvude γ_i omadused.

Vaatleme elemente $x_n = (\xi_1', \xi_2', \dots) \in \ell$, kus

$$\xi_i' = \begin{cases} \operatorname{sign} \gamma_n, & \text{kui } i = n \\ 0 & \text{, kui } i \neq n. \end{cases}$$

Siis $\|x_n\| = 1$ ja $fx_n = |\gamma_n| \leq \|f\|$. Seega jada $\{\gamma_i\}$ peab olema tõkestatud. Teiselt poolt aga tõkestatud jada $\{\gamma_i\}$ ja mistahes $x \in \ell$ korral

$$|fx| = |\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \gamma_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| |\gamma_i| \leq \sup_i |\gamma_i| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| =$$

$$= \sup_i |\gamma_i| \cdot \|x\|$$

ja seega $\|f\| = \sup_i |\gamma_i|$. Järelikult oleme tõestanud, et iga pidev lineaarne funktsionaal $f \in (\ell \to R_1)$ omab kuju

$$fx = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \gamma_i,$$

kus jada $\{\gamma_i\}$ on tõkestatud (s.t. $\{\gamma_i\} \in m$).

N ä i d e 2. Ruumi c põhihulga saamiseks tuleb jadadele e_n lisada veel jada $e = (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_n^{(n)}, \dots) = (1, 1, \dots, 1, \dots)$. Tõepoolest, kui $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in c$ (s.t. eksisteerib $\xi = \lim_{i \to \infty} \xi_i$), siis

$$x_n = x - \xi e - \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi) e_i =$$

$$= (0, 0, \dots 0, \xi_{n+1} - \xi, \xi_{n+2} - \xi, \dots) \in c,$$

kusjuures $\|x_n\| = \sup_{i > n} |\xi_i - \xi| < \varepsilon$, kui $n > N(\varepsilon)$. Seega $\lim_{n \to \infty} x_n = \theta$ ja järelikult

$$x = \xi e + \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i - \xi) e_i.$$

Mistahes funktsionaali $f \in (c \to R_1)$ puhul saame nüüd

$$fx = \xi fe + \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i - \xi) fe_i = \xi\gamma + \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i - \xi)\gamma_i ,$$

kus arvud $\gamma = fe$ ja $\gamma_i = fe_i$ ei sõltu jälle elemendist x. Nende arvude iseloomu selgitamiseks vaatleme mistahes fikseeritud n puhul elementi $x_0 = (\xi_1'', \xi_2'', \dots)$, kus

$$\xi_i'' = \begin{cases} \operatorname{sign} \gamma_i, & \text{kui } i \leq n \\ 0, & \text{kui } i > n. \end{cases}$$

Siis $\lim\limits_{i\to\infty} \xi_i'' = \xi'' = 0$, $\|x_0\| = 1$ ja

$$fx_0 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \operatorname{sign} \gamma_i = \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| \leq \|f\| \|x_0\| = \|f\|.$$

Seega rida $\sum |\gamma_i|$ peab olema koonduv (s.t. $\{\gamma_i\} \in \ell$).

Näitame, et sellest tingimusest piisab funktsionaali f pidevuseks. Tähistades

$$\gamma_0 = \gamma - \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i$$

võime funktsionaali kirjutada kujul

$$fx = \xi\gamma_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\gamma_i = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i\gamma_i,$$

kus ξ asemele kirjutasime ühtluseks ξ_0. Ilmselt iga $x \in c$ puhul

$$|fx| = \left|\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i\gamma_i\right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\xi_i| |\gamma_i| \leq \sup_i |\xi_i| \sum_{i=0}^{\infty} |\gamma_i| = \|x\| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} |\gamma_i|$$

ja seega $\|f\| \leq \sum\limits_{i=0}^{\infty} |\gamma_i|$.

Funktsionaali normi leidmiseks tõestame veel vastassuunalise võrratuse. Selleks vaatleme elemente $x_n = (\xi_1', \xi_2', \dots) \in c$, kus

$$\xi_i' = \begin{cases} \operatorname{sign} \gamma_i, & \text{kui } i \leq n \\ \operatorname{sign} \gamma_0, & \text{kui } i > n. \end{cases}$$

Ilmselt $\lim\limits_{i\to\infty}\xi_i' = \xi' = \operatorname{sign}\gamma_o$, $\|x_n\| = 1$ ja

$$fx_n = \sum_{i=0}^{n}|\gamma_i| + \sum_{i=n+1}^{\infty}\gamma_i \operatorname{sign}\gamma_o \leqslant \|f\|\|x_n\| = \|f\|.$$

Kuna see võrratus kehtib iga n puhul, siis $n\to\infty$ korral saame

$$\sum_{i=0}^{\infty}|\gamma_i| \leqslant \|f\|,$$

s.t. $\|f\| = \sum\limits_{i=0}^{\infty}|\gamma_i|$. Seega ruumis c omab iga pidev lineaarne funktsionaal kuju

$$fx = \xi\gamma_o + \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\gamma_i,$$

kus $\{\gamma_i\}\in \ell$ ja $\|f\| = \sum\limits_{i=0}^{\infty}|\gamma_i|$.

Üksikasjalikke tõestusi läbi tegemata esitame vastavad tulemused veel mõnede olulisemate ruumide puhul.

R u u m i C korral avaldub iga pidev lineaarne funktsionaal Stieltjesi integraalina

$$fx = \int_a^b x(\xi)dg(\xi),$$

kus $g(\xi)$ on lõigul $[a,b]$ tõkestatud muuduga funktsioon. Sealjuures

$$\|f\| = \bigvee_a^b g,$$

kus sümbol $\bigvee\limits_a^b$ tähendab täismuutu (vt. [4] lk. 190).

H i l b e r t i r u u m i s H omab iga pidev lineaarne funktsionaal kuju $fx = (x,u)$, kus element $u\in H$ on funktsionaaliga f üheselt määratud. Sealjuures $\|f\| = \|u\|$.

R u u m i s L^p $(p > 1)$ avalduvad pidevad lineaarsed funktsionaalid kujul

$$fx = \int_a^b x(\xi)u(\xi)d\xi,$$

kus $u \in L^q$ ja q on leitud võrrandist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sealjuures $\|f\| = \|u\|_{L^q}$.

R u u m i s ℓ^p $(p > 1)$ avaldub iga pidev lineaarne funktsionaal kujul

$$fx = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \xi_i,$$

kus $\{\gamma_i\} \in \ell^q$, $\|f\| = [\sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i|^q]^{\frac{1}{q}}$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

§ 10. K a a s r u u m. N õ r k k o o n d u v u s

Ruumis X määratud pidevate lineaarsete funktsionaalide ruumi $(X \to R_1)$ nimet. ruumi X <u>kaasruumiks</u> ja tähist. X^*. Kui X on Banachi ruum, siis on seda ka X^* (vt. § 4). Eelmise paragrahvi tulemusi arvestades on lihtne selgitada mõne konkreetse ruumi kaasruumi struktuuri.

Näiteks ruumis ℓ omab iga pidev lineaarne funktsionaal f teatavasti kuju $fx = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \xi_i$, kus jada $g = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ on funktsionaaliga f üheselt määratud ja $g \in m$. Kuna aga ka vastupidi, iga jada $g \in m$ määrab pideva lineaarse funktsionaali f ruumis ℓ, siis on ruumide m ja ℓ^* vahel seega korraldatav üksühene vastavus. Ilmselt see vastavus on isomorfne (tõestada!) ning seose

$\|f\|_{\ell^*} = \|g\|_m$ tõttu ka isomeetriline. See aga tähendab, et kõigi lineaali tehetega ja normiga (s.t. üldse koondumisega) seotud küsimuste vaatlemisel võime need ruumid samastada. Seega võime kirjutada $\ell^* = m$.

Analoogselt $c^* = \ell$, $H^* = H$, $L^{p*} = L^q$ ja $\ell^{p*} = \ell^q$ (viimastes võrdustes $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Kui $X^* = X$ (ülalkirjeldatud isomeetria mõttes), siis ruumi X nimet. <u>enesekaasseks</u> ehk <u>enesekaasruumiks</u>. Enesekaasruumid on näiteks H, L^2 ja ℓ^2 (viimased on tegelikult erijuhud Hilberti ruumist H).

Lähtudes Banachi ruumist X võime me tema kaasruumile X^* kui Banachi ruumile jälle leida kaasruumi $X^{**} = (X^*)^*$, mida nimet. ka ruumi X <u>teiseks kaasruumiks</u>. Kui $X = X^{**}$, siis ruumi X nimet. <u>regulaarseks</u> (võrdus on siin jälle isomorfismi ja isomeetria mõttes). Muidugi pole iga lineaarne normeeritud ruum regulaarne (näiteks pole seda ruum c, sest $c^{**} = \ell^* = m$), kuid siiski kehtib

T e o r e e m 1. Iga lineaarne normeeritud ruum X on isomorfne ja isomeetriline oma teise kaasruumi X^{**} teatava alamruumiga, s.t. $X \subset X^{**}$.

T õ e s t u s. Kui funktsionaal $f \in X^*$ on fikseeritud, siis seab ta igale elemendile $x \in X$ vastavusse kindla arvu fx. Kui aga fikseerida element $x \in X$ ja muuta funktsionaali $f \in X^*$, siis vastab igale funktsionaalile

f kindel arv fx. Seega element $x \in X$ määrab ruumis X^* teatava funktsionaali $F_x f = fx$. Näitame, et $F_x \in X^{**}$. Tõepoolest, $F_x(f' + f'') = (f' + f'')x = f'x + f''x = F_x f' + F_x f''$ ja $|F_x f| = |fx| \leq \|f\| \cdot \|x\|$. Ühtlasi nägime, et $\|F_x\| \leq \|x\|$. Teiselt poolt aga (vt. §8, teoreem 3) leidub niisugune funktsionaal $f_o \in X^*$, et $\|f_o\| = 1$ ja etteantud elemendi $x \in X$ korral $f_o x = \|x\|$. Sellise funktsionaali puhul

$$|F_x f_o| = |f_o x| = \|x\| = \|x\| \cdot \|f_o\|$$

ja seega $\|F_x\| = \|x\|$.

Järelikult saab igale elemendile $x \in X$ seada vastavusse funktsionaali $F_x \in X^{**}$. Viimase võrduse tõttu on see vastavus isomeetriline, kuna aga isomorfsus on ilmne:

$$F_{x'+x''} f = f(x'+x'') = fx' + fx'' = F_{x'} f + F_{x''} f = (F_{x'} + F_{x''})f,$$

$$F_{\lambda x} f = f(\lambda x) = \lambda fx = \lambda F_x f.$$

Tuleb veel ainult näidata, et vastavus $x \to F_x$ on üksühene. Selleks näitame, et $x \to F_x$, $y \to F_y$ ja $x \neq y$ korral ka $F_x \neq F_y$. Oletame väitevastaselt, et $F_x = F_y$. Siis $fx = fy$, s.t. $f(x - y) = 0$ iga $f \in X^*$ puhul, millest (vt. §8, teoreem 4) $x = y$. Teoreem on tõestatud.

Olgu X mingi lineaarne normeeritud ruum ja $\{x_n\}$ jada temas. Kui leidub selline element $x_o \in X$, et $\lim\limits_{n\to\infty} fx_n = fx_o$ iga $f \in X^*$ puhul, siis öeldakse, et jada $\{x_n\}$ koondub nõrgalt elemendiks x_o ja kirjut. $x_n \dashrightarrow x_o$. Ilmselt ei saa jada nõrgalt koonduda enam kui üheks piirelemendiks. Tõepoolest, kui oleks $x_n \dashrightarrow x_0$ ja $x_n \dashrightarrow y_0$, s.t. iga $f \in X^*$ puhul

$$\lim fx_n = fx_0 \text{ ja } \lim fx_n = fy_0,$$

siis $f(x_0 - y_0) = 0$, millest $x_0 = y_0$. Samuti on lihtne näha, et nõrgalt koonduva jada $x_n \dashrightarrow x_0$ iga osajada $\{x_{n_k}\}$ koondub nõrgalt samaks elemendiks x_0 ning et elementide jada tugevast (s.t. normi järgi) koondumisest järeldub tema nõrk koondumine samaks piirelemendiks (tõestada!). Viimane väide pole aga pööratav (vastav näide vt. [1] lk. 201). Osutub, et nõrk ja tugev koonduvus langevad ühte vaid lõplikudimensionaalsetes ruumides (vt. näit. [1] lk. 202).

Kui jada $\{x_n\}$ koondub tugevalt elemendiks x, siis teatavasti $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$. Nõrgalt koonduva jada puhul see üldiselt nii ei ole, küll aga kehtib

T e o r e e m 2. Kui jada $\{x_n\}$ koondub nõrgalt elemendiks x, siis jada $\{\|x_n\|\}$ on tõkestatud, kusjuures $\|x\| \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.

T õ e s t u s. Vaatleme nõrgalt koonduva jada $\{x_n\} \subset X$ elemente kui elemente ruumist X^{**}. Siis nõrk koonduvus $x_n \dashrightarrow x$ tähendab, et funktsionaalide jada $\{x_n\} \subset X^{**}$ koondub kõikjal ruumis X^* funktsionaaliks x. Banach-Steinhausi teoreemi (vt. §5) põhjal on aga jada $\{\|x_n\|\}$ seega tõkestatud ja eksisteerib $\varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.

Võrratuse $\|x\| \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$ tõestamiseks oletame väitevastaselt, et $\|x\| > \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$. Siis leidub arv $\alpha > 0$ nii, et $\|x\| > \alpha > \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n\|$, kusjuures $n > N(\alpha)$ korral $\alpha > \|x_n\|$. Konstrueerime nüüd pideva lineaarse funktsionaali f nii, et $\|f\| = 1$ ja $fx = \|x\|$ (vt. §8 teoreem 3). Selle funktsionaali puhul on $fx_n \leq \|f\| \cdot \| x_n\| = \| x_n\| < \alpha < \|x\| = fx$ iga $n > N(\alpha)$ korral. Seega ei saa olla $\lim_{n\to\infty} fx_n = fx$, mis on aga vastuolus eeldusega $x_n \dashrightarrow x$.

T e o r e e m 3. Pidev lineaarne operaator kujutab iga nõrgalt koonduva jada nõrgalt koonduvaks jadaks. (Tõestada!).

§ 11. K a a s o p e r a a t o r

Lineaarsete operaatorite (eeskätt just vastavate operaatorvõrrandite) uurimisel osutub otstarbekohaseks vaadelda koos antud operaatoriga veel üht teist operaatorit, mis on antuga lähedalt seotud ja mida nimet. tema kaasoperaatoriks. Defineerime selle mõiste.

Olgu antud pidev lineaarne operaator $A \in (X \to Y)$. Fikseerides mingi pideva lineaarse funktsionaali $g \in Y^*$ vaatleme korrutist gA. See korrutis seab igale elemendile $x \in X$ vastavusse reaalarvu gAx ja kujutab endast seega pidevat lineaarset funktsionaali $gA = f \in X^*$ (tõestada funktsionaali f lineaarsus ja pidevus!). Lastes nüüd funktsionaalil g muutuda, defineerib võrdus $f = gA$

teatava operaatori, mis seab igale funktsionaalile $g \in Y^*$ vastavusse funktsionaali $f \in X^*$. Seda operaatorit nimet. operaatori A <u>kaasoperaatoriks</u> ja tähist. A^*:

$$A^*g = gA.$$

Näitame, et A^* on pidev lineaarne operaator, s.t. et $A^* \in (Y^* \to X^*)$. Tõepoolest, kuna

$$A^*(g + h) = (g + h)A = gA + hA = A^*g + A^*h,$$

siis A^* on aditiivne. Tõkestatus on samuti ilmne:

$$|A^*gx| = |gAx| \leqslant \|g\| \cdot \|Ax\| \leqslant \|g\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|.$$

Viimasest võrratusest näeme ühtlasi, et $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. Vastassuunalise võrratuse tõestamiseks fikseerime elemendi $x_0 \in X$ ning konstrueerime pideva lineaarse funktsionaali $g_0 \in Y^*$ nii, et $\|g_0\| = 1$ ja $g_0(Ax_0) = \|Ax_0\|$ (vt. §8, teoreem 3). Siis aga

$$\|Ax_0\| = g_0Ax_0 = (A^*g_0)x_0 \leqslant \|A^*g_0\|\|x_0\| \leqslant \|A^*\|\|x_0\|,$$

s.t. $\|A\| \leqslant \|A^*\|$, millega olemegi tõestanud, et

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Kaasoperaatorite kasutamist ja uurimist aitab sageli lihtsustada nende järgmiste omaduste tundmine.

1) $(A + B)^* = A^* + B^*$ (summa kaasoperaator võrdub liidetavate kaasoperaatorite summaga). Tõepoolest:

$$(A + B)^*g = g(A + B) = gA + gB = A^*g + B^*g = (A^* + B^*)g.$$

2) $(\lambda A)^* = \lambda A^*$ (tõestada!).

3) $(AB)^* = B^*A^*$, kus $B \in (X \to Y)$ ja $A \in (Y \to Z)$. Kuna antud juhul $g \in Z^*$ korral $gA = A^*g \in Y^*$, siis

$(AB)^*g = g(AB) = (gA)B = B^*(gA) = B^*(A^*g) = (B^*A^*)g.$

Eriti lihtsaks osutub seos operaatori ja tema kaasoperaatori vahel juhul $A \in (H \to H)$, s.t. kui $X = Y = H$ (Hilberti ruum). Teatavasti omab iga pidev lineaarne funktsionaal g Hilberti ruumis kuju $gx = (x,y)$, kus element $y \in H$ on funktsionaaliga g üheselt määratud. Seega

$$g(Ax) = (Ax,y).$$

Fikseeritud g korral on see skalaarkorrutis aga ka pidev lineaarne funktsionaal elemendist x:

$$(Ax,y) = fx,$$

s.t. leidub element $z \in H$ nii, et

$$(Ax,y) = (x,z).$$

Sellega ongi defineeritud operaator A^*, mis seab funktsionaalile g (mis on määratud elemendiga y) vastavusse funktsionaali f (mis on määratud elemendiga z): $f = A^*g$ ehk $z = A^*y$. Järelikult on operaator A oma kaasoperaatoriga A^* Hilberti ruumi puhul seotud võrdusega

$$(Ax,y) = (x,A^*y),$$

mis peab kehtima kõikide $x,y \in H$ korral. Hilberti ruumis muide defineeritaksegi kaasoperaator enamasti selle võrdusega (sõnastada vastav definitsioon!).

Operaatorit $A \subset (H \to H)$ nimet. enesekaasoperaatoriks, kui ta võrdub oma kaasoperaatoriga $A = A^*$. Hilberti ruumis iseloomustab enesekaasoperaatorit seega võrdus

$$(Ax,y) = (x,Ay),$$

mis kehtib kõikide $x,y \in H$ korral. Lihtne on veenduda, et enesekaasoperaatorid moodustavad ruumis $(H \to H)$ lineaarse alamruumi (tõestada!).

Kaasoperaatori analüütilise kuju praktilist leidmist illustreerime kahe lihtsa näitega.

N ä i d e 1. Olgu $X = Y = R_n$ ja operaator A määratud maatriksiga (a_{ik}), mida tähistame samuti tähega A (selline tähistamine on lubatav seetõttu, et operaatori A rakendamine vektorile x tähendab ju maatriksi A ja vektori x korrutamist). Kasutades nüüd vektoralgebra sümboolikat ja tulemusi saame

$$(Ax) \cdot y = (Ax)'y = x'A'y = x \cdot (A'y),$$

kus A' tähendab maatriksi A transponeeritud maatriksit. Seega kaasoperaator A^* on määratud transponeeritud maatriksiga $A' = (a_{ki})$.

Operaator A on enesekaasoperaator siis ja ainult siis, kui teda määrav maatriks on sümmeetriline.

N ä i d e 2. Kui $K(\xi,\eta)$ on ruudus $\xi \in [a,b]$, $\eta \in [a,b]$ pidev funktsioon, siis Fredholmi operaator

$$Ax = \int_a^b K(\xi,\eta)x(\eta)d\eta$$

kujutab ruumi L^2 iseendasse. Sel juhul

$$(Ax,y) = \int_a^b y(\xi)\int_a^b K(\xi,\eta)x(\eta)d\eta d\xi =$$

$$= \int_a^b x(\eta)\int_a^b K(\xi,\eta)y(\xi)d\xi d\eta =$$

$$= \int_a^b x(\xi)\int_a^b K(\eta,\xi)y(\eta)d\eta d\xi = (x,A^*y),$$

kus A^* on tuumaga $K(\eta,\xi)$ määratud Fredholmi operaator. Seega vaadeldaval juhul määrab kaasoperaatori tuum, mis on saadud lähteoperaatori tuumast argumentide vahetamise (transponeerimise) teel.

Fredholmi operaator on järelikult enesekaasne siis ja ainult siis, kui $K(\xi,\eta) = K(\eta,\xi)$, s.t. kui tuum on sümmeetriline funktsioon.

§ 12. Täielikult pidevad operaatorid

Iga pidev lineaarne operaator kujutab tõkestatud hulgad tõkestatud hulkadeks. Tõepoolest, kui hulk $D \subset X$ on tõkestatud, s.t. kui leidub $M > 0$ nii, et $x \in D$ puhul $\|x\| \leq M$, siis $A \in (X \to Y)$ korral $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \leq \|A\| \cdot M$ ja seega hulk $A(D)$ on tõkestatud.

Mõistel "tõkestatud" ei ole aga mistahes meetrilises ruumis sellist tähtsust nagu näiteks eukleidilises ruumis. Näiteks ei tarvitse tõkestatud jada sisaldada ühtki koonduvat osajada (sellise omadusega on muuhulgas kõik ortonormaalsed jadad lõpmatudimensionaalsetes Hilberti ruumides). Sellepärast võetaksegi lõpmatudimensionaalsetes ruumides vaatlusele rangem mõiste - hulga kompaktsus (vt. I ptk. §3 ja §6).

Pidev lineaarne operaator säilitab ka hulga kompaktsuse, s.t. kujutab iga kompaktse hulga kompaktseks hulgaks. Tõepoolest, olgu hulk $D \subset X$ kompaktne. Valime suvaliselt jada $y_n \in A(D)$. Siis leidub iga n puhul $x_n \in D$ nii, et $y_n = Ax_n$. Kuna D on eelduse kohaselt kompaktne, siis saame eraldada osajada $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ nii, et leiab aset koonduvus $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Operaatori A pidevuse tõttu aga seega eksisteerib

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} Ax_{n_k} = A(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = Ax,$$

s.t. leidub koonduv osajada $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$ ning hulk $A(D)$ on järelikult kompaktne.

Aditiivset operaatorit, mis kujutab iga tõkestatud hulga kompaktseks hulgaks, nimet. <u>täielikult pidevaks operaatoriks</u> (tõestada, et täielikult pidev operaator on pidev!).

Kui lineaarse operaatori väärtused kuuluvad lõplikudimensionaalsesse ruumi (või alamruumi), siis on see operaator ilmselt täielikult pidev (vt. II ptk. §4). Vastasel juhul aga pidev lineaarne operaator üldiselt täielikult pidev ei ole. Näiteks ei ole täielikult pidev lõpmatudimensionaalse ruumi ühikoperaator, sest ta kujutab iga sfääri iseendaks, kuid lõpmatudimensionaalses ruumis pole ju ükski sfäär kompaktne.

Täielikult pideva operaatori omaduste kohta tõestame järgmised teoreemid.

T e o r e e m 1. Täielikult pidev operaator kujutab iga nõrgalt koonduva jada tugevalt koonduvaks jadaks.

T õ e s t u s. Koondugu jada $\{x_n\}$ nõrgalt elemendiks x_0 ja olgu $y_n = Ax_n$, $y_0 = Ax_0$. Oletame väitevastaselt, et jada $\{y_n\}$ ei koondu tugevalt elemendiks y_0. Siis leidub arv $\varepsilon > 0$ ją osajada $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$ nii, et $\|y_{n_k} - y_0\| \geqslant \varepsilon$.

Et jada $\{x_n\}$ on nõrgalt koonduv, siis on ta tõkestatud. Järelikult on tõkestatud ka osajada $\{x_{n_k}\}$ ning tema kujutis $\{y_{n_k}\}$ peab olema kompaktne. Seega leidub osajada $\{y_{n_{k_i}}\}$ nii, et $y_{n_{k_i}} \longrightarrow y_0'$ ja seda enam $y_{n_{k_i}} \dashrightarrow y_0'$, s.t. $Ax_{n_{k_i}} \dashrightarrow y_0'$. Kuid A kui pidev lineaarne operaator säilitab nõrga koonduvuse. Seega $x_{n_{k_i}} \dashrightarrow x_0$ tõttu peab olema $Ax_{n_{k_i}} \dashrightarrow Ax_0 = y_0$, s.t. $y_0' = y_0$ ehk $y_{n_{k_i}} \dashrightarrow y_0$. See tulemus on aga vastuolus võrratusega $\|y_{n_k} - y_0\| \geqslant \varepsilon$, mis tõestabki teoreemi.

T e o r e e m 2. Kui täielikult pidevate operaatorite $A_n \in (X \to Y)$ jada koondub normi järgi operaatoriks A ja ruum Y on täielik, siis operaator A on täielikult pidev.

T õ e s t u s. Fikseerime mingi tõkestatud hulga $D \subset X$. Kuna $\|A_n - A\| \to 0$, siis (vt. §4) leiab koondumine $A_n x \to Ax$ aset ühtlaselt kogu hulgal D, s.t. vastavalt etteantud arvule $\varepsilon > 0$ saab leida naturaalarvu n nii, et iga $x \in D$ puhul $\|A_n x - Ax\| < \varepsilon$. Seega mistahes elemendi $y \in A(D)$ puhul leidub element $z \in A_n(D)$ nii, et $\|y - z\| < \varepsilon$. Järelikult hulk $A_n(D)$ moodustab ε-võrgu hulgas $A(D)$. Operaatori A_n täieliku pidevuse tõttu on hulk $A_n(D)$ kompaktne ja Hausdorffi teoreemi (vt. I ptk. §6) kohaselt seega ka $A(D)$. Teoreem on tõestatud.

T e o r e e m 3. Täielikult pidevate operaatorite hulk moodustab ruumis $(X \to Y)$ lineaarse alamruumi. (Tõestada!).

T e o r e e m 4. Täielikult pideva operaatori kaasoperaator on täielikult pidev (tõestus vt. näit. [1] lk. 218).

Illustreerime veel ühe näitega konkreetse operaatori täieliku pidevuse kindlakstegemist.

N ä i d e. Vaatleme ruumis ℓ^2 operaatorit A, mis on määratud võrdustega

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k \quad (i = 1,2,\dots).$$

Selleks, et operaatori väärtused kuuluksid samuti ruumi ℓ^2 (s.t. et oleks $A \in (\ell^2 \to \ell^2)$) osutub piisavaks tingimus

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}^2 < +\infty.$$

Sealjuures $\|A\| \leq \sqrt{\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}^2}$. Näitame, et A on täielikult pidev operaator. Selleks võtame vaatlusele operaatorid A_n $(n = 1,2,\dots)$, mis on määratud võrdustega

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)}\xi_k \quad (i = 1,2,\dots),$$

kus

$$a_{ik}^{(n)} = \begin{cases} a_{ik}, & \text{kui } i \leq n \\ 0, & \text{kui } i > n. \end{cases}$$

Kui $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots) = A_n x$, siis iga $x \in \ell^2$ puhul on $\eta_i = 0$, kui vaid $i > n$. Seega iga operaatori A_n väärtuste hulk on lõplikudimensionaalne ja operaatorid järelikult täielikult pidevad. Kuid kuna

$$\|A - A_n\| \leq \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2} ,$$

siis $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ ja teoreemi 2 kohaselt on operaator A seega täielikult pidev.

§ 13. Fredholmi teoreemid

Paljudes matemaatilistes distsipliinides esinevad võrrandid kujul

$$x - Ax = y,$$

kus A on täielikult pidev operaator Banachi ruumist X iseendasse, $y \in X$ antud ja $x \in X$ otsitav element. Fredholmi eeskujul nimet. selliseid võrrandeid teist liiki võrranditeks.

Nende võrrandite teooria integraalse operaatori A (s.t. teist liiki integraalvõrrandite) puhul töötas välja Fredholm. Tema tulemuste üldistuse operaatorvõrrandite juhule andsid F. Riesz ja Schauder. Esitame siin osa nende tulemustest (üksikasjalikumad tõestused vt. näit. [3] lk. 143 jj.).

Koos teist liiki võrrandi endaga osutub vajalikuks vaadelda veel vastavat homogeenset võrrandit

$$x - Ax = \theta,$$

kaasvõrrandit

$$g - A^*g = f$$

(kus $f \in X^*$ on antud ja $g \in X^*$ otsitav) ning homogeenset kaasvõrrandit

$$g - A^*g = \theta^*.$$

Nende võrrandite kohta kehtivad järgmised teoreemid.

T e o r e e m 1. Teist liiki võrrand on iga vabaliikme $y \in X$ puhul üheselt lahenduv siis ja ainult siis, kui vastav homogeenne võrrand omab ainult triviaalse lahendi (s.t. lahendi $x = \theta$).

T õ e s t a m e siin ainult tingimuse tarvilikkuse, s.t. et kui teist liiki võrrand on lahenduv iga vabaliikme puhul, siis homogeenne võrrand omab vaid triviaalse lahendi.

Kirjutame vaadeldava võrrandi kujul

$$Bx = y,$$

kus $B = E - A$ (E on ruumi X ühikoperaator) ja võtame vaatlusele hulgad $G_n \subset X$ $(n = 1,2,\dots)$, mis koosnevad elementidest x, mille puhul $B^n x = \theta$. Ilmselt on iga G_n lineaarne alamruum (tõestada!). Kui $B^{n-1}x = \theta$, siis $B^n x = B(B^{n-1}x) = \theta$ ja seega $G_{n-1} \subset G_n$.

Oletame väitevastaselt, et homogeenne võrrand $Bx = \theta$ omab mittetriviaalse lahendi x_1 $(Bx_1 = \theta,\ x_1 \neq \theta)$ ning moodustame elementide jada $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, kus x_2 on võrrandi $Bx = x_1$ lahend (eelduse kohaselt see eksisteerib), x_3 võrrandi $Bx = x_2$ lahend jne. Seega

$Bx_2 = x_1$, $Bx_3 = x_2$, ... , $Bx_n = x_{n-1}$, ... Kuna $B^{n-1} =$ $= B^{n-2}(Bx_n) = B^{n-2}x_{n-1} = \ldots = Bx_2 = x_1 \neq \theta$, siis $x_n \notin$ $\notin G_{n-1}$. Teiselt poolt aga $B^n x_n = Bx_1 = \theta$ ja seega $x_n \in G_n$. Järelikult G_{n-1} kujutab endast ruumi G_n pärisalamruumi.

Kasutades nüüd varem tõestatud lemmat (vt. II ptk.§4) näeme, et iga n korral leidub punkt $y_n \in G_n$ nii, et $\|y_n\| = 1$ ja $\|y_n - x\| \geq 1 - \varepsilon$ iga $x \in G_{n-1}$ puhul. Kuna niisaadud jada $\{y_n\}$ on tõkestatud, siis jada $\{Ay_n\}$ peab olema kompaktne. Kuid

$$Ay_{n+p} - Ay_n = y_{n+p} - (By_{n+p} + y_n - By_n),$$

kus $x = By_{n+p} + y_n - By_n \in G_{n+p-1}$ (sest $B^{n+p-1}x =$ $= B^{n+p}y_{n+p} + B^{n+p-1}y_n - B^{n+p}y_n = \theta$) ja seega $\|Ay_{n+p} - Ay_n\| =$ $= \|y_{n+p} - x\| \geq 1 - \varepsilon$. Järelikult ei saa jada $\{Ay_n\}$ sisaldada ühtki koonduvat osajada, mis on aga vastuolus tema kompaktsusega.

T e o r e e m 2. Homogeensel võrrandil $x - Ax = \theta$ saab olla vaid lõplik arv lineaarselt sõltumatuid lahendeid. Sama palju lineaarselt sõltumatuid lahendeid on ka homogeensel kaasvõrrandil.

T õ e s t a m e vaid esimese väite. Oletame väitevastaselt, et leidub lõpmatu jada lineaarselt sõltumatuid lahendeid:

$$x_k = Ax_k \quad (k = 1,2,\ldots)$$

ja moodustame hulgad $D_n = \left\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right\}$, mis kujutavad endast lineaarseid alamruume (tõestada!). Ilmselt $D_{n-1} \subset D_n$, kusjuures on tegemist pärisalamruumidega, sest näiteks $x_n \in D_n$, kuid $x_n \notin D_{n-1}$. Rakendades jälle äsjakasutatud lemmat näeme, et leidub element $y_n \in D_n$ nii, et $\|y_n\| = 1$ ja $\|y_n - y\| \geqslant 1 - \varepsilon$ iga $y \in D_{n-1}$ puhul. Hulk $\{y_n\}$ on tõkestatud ja seega peab $\{Ay_n\}$ olema kompaktne. Et aga $Ay_n = y_n$, siis peab ka $\{y_n\}$ järelikult kompaktne olema. See pole aga võrratuse $\|y_{n+p} - y_n\| \geqslant 1 - \varepsilon$ tõttu võimalik, millega väide on tõestatud.

T e o r e e m 3. Kui antud võrrand on lahenduv iga vabaliikme puhul, siis on seda ka kaasvõrrand ja vastupidi (tõestuseta).

T e o r e e m 4. Teist liiki võrrand $x - Ax = y$ on lahenduv siis ja ainult siis, kui $gy = 0$, kus g on võrrandi $g - A^*g = \Theta^*$ mistahes lahend.

T õ e s t a m e jällegi vaid tarvilikkuse. Olgu antud võrrand lahenduv, s.t. leidub element $x \in X$ nii, et $x - Ax = y$. Rakendades sellele võrdusele funktsionaali g, mis rahuldab võrrandit $g - A^*g = \Theta^*$, saame

$$gx - gAx = gy$$

$$gx - A^*gx = gy$$

$$(g - A^*g)x = gy$$

$$0 = gy, \text{ m.o.t.t.}$$

Märgime lõpuks veel, et toodud teoreemide kehtivuseks pole operaatori A täielik pidevus mitte tarvilik, vaid ainult piisav.

IV peatükk

MITTELINEAARSED OPERAATORID

§ 1. Harilik iteratsioonimeetod

Vaatleme võrrandit

$$x = P(x),$$

kus $y = P(x)$ on operaator (üldiselt mitte lineaarne) meetrilisest ruumist X iseendasse. Selle võrrandi lahendit x^* nimet. sageli ka operaatori P püsipunktiks (sest operaator P jätab selle punkti ruumis X paigale). Operaatori püsipunkti olemasolu tõestamiseks ja tema lähisväärtuste praktiliseks leidmiseks kasutatakse sageli nn. harilikku iteratsioonimeetodit. Meetod seisneb selles, et lähtudes mingist elemendist $x_0 \in X$ moodustatakse jada

$$x_n = P(x_{n-1}) \quad (n = 1,2,3,\dots)$$

ning tõestatakse, et $\lim x_n = x^*$. Sealjuures osutub, et viimast võrdust (iteratsioonimeetodi koonduvust) saab mõnikord tõestada ka aprioorselt, s.t. jada $\{x_n\}$ praktiliselt leidmata. Selline võimalus on eriti oluline muidugi siis, kui on tarvis tõestada ainult püsipunkti olemasolu (ilma teda praktiliselt leidmata). Annamegi järgnevalt ühe lihtsaima tunnuse püsipunkti olemasoluks ja iteratsioonimeetodi koondumiseks.

Öeldakse, et operaator P rahuldab hulgas $D \subset X$ Lipschitzi tingimust kordajaga q, kui iga $x', x'' \in D$

korral

$$\rho(P(x'),P(x'')) \leqslant q\rho(x',x'').$$

Kui see tingimus on rahuldatud kogu ruumis $(D = X)$ ja $q < 1$, siis operaatorit P nimet. <u>lähendamisoperaatoriks</u> (sest operaatori rakendamine vähendab punktide vahelisi kaugusi).

T e o r e e m. Täielikus meetrilises ruumis omab iga lähendamisoperaator ühe ja ainult ühe püsipunkti, milleks koondub hariliku iteratsioonimeetodiga arvutatud jada $\{x_n\}$ mistahes alglähendi $x_o \in X$ korral.

T õ e s t u s. Kõigepealt on lihtne veenduda, et jada $\{x_n\}$ on fundamentaalne. Tõepoolest, võrratust

$$\rho(x_{n+1},x_n) = \rho(P(x_n),P(x_{n-1})) \leqslant q\rho(x_n,x_{n-1})$$

korduvalt rakendades saame

$$\rho(x_{n+1},x_n) \leqslant q\rho(x_n,x_{n-1}) \leqslant q^2\rho(x_{n-1},x_{n-2}) \leqslant \ldots \leqslant$$

$$\leqslant q^n\rho(x_1,x_o) = q^n d,$$

kus $d = \rho(x_1,x_o)$ on alglähendiga x_o määratud konstant. Seega

$$\rho(x_{n+i},x_n) \leqslant \rho(x_{n+i},x_{n+i-1}) + \ldots + \rho(x_{n+1},x_n) \leqslant$$

$$\leqslant q^{n+i-1}d + \ldots + q^n d = dq^n \frac{1-q^i}{1-q} < \frac{dq^n}{1-q} \to 0,$$

kui $n \to \infty$ iga i puhul. Ruumi X täielikkuse tõttu eksisteerib järelikult piirelement $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$. Näitame, et alglähendist x_o sõltumatult on x^* operaatori P püsipunkt. Selleks arvutame kauguse

$$\rho(x^*,P(x^*)) \leqslant \rho(x^*,x_n) + \rho(x_n,P(x^*)) =$$

$$= \rho(x^*,x_n) + \rho(P(x_{n-1}),P(x^*)) \leqslant \rho(x^*,x_n) + q\rho(x_{n-1},x^*).$$

Kuna naturaalarv n on siin suvaline, siis küllalt suure n puhul saab meie võrratuse parem pool väiksemaks igast etteantud arvust. See aga tähendab, et $\rho(x^*,P(x^*)) = 0$ ehk $x^* = P(x^*)$.

Lõpuks tuleb veel veenduda püsipunkti ainsuses. Kui oletada, et leidub element $y^* \in X$ nii, et $y^* = P(y^*)$, siis

$$\rho(x^*,y^*) = \rho(P(x^*),P(y^*)) \leqslant q\rho(x^*,y^*),$$

millest

$$(1 - q)\rho(x^*,y^*) \leqslant 0,$$

ehk $\rho(x^*,y^*) = 0$ ja seega $x^* = y^*$. Teoreem on tõestatud.

Esitatud tõestusest võib lihtsalt saada veel valemi selle vea hindamiseks, mille me teeme, kui loeme elemendi x_n püsipunkti x^* lähendiks. Nimelt lastes võrratuses, millest järeldus jada $\{x_n\}$ fundamentaalsus, $i \to \infty$, saame

$$\rho(x^*,x_n) \leqslant \frac{dq^n}{1 - q}.$$

Toodud teoreem on muuhulgas rakendatav ka lineaarse võrrandi

$$x = Ax + y$$

puhul Banachi ruumis. Siis $P(x) = Ax + y$ ja

$$\rho(P(x'),P(x'')) = \|P(x') - P(x'')\| = \|Ax' - Ax''\| \leqslant$$

$$\leqslant \|A\|\|x' - x''\| = \|A\|\rho(x',x'').$$

Seega võib kordajaks q Lipschitzi tingimuses valida operaatori normi $\|A\|$ ning harilik iteratsioonimeetod on rakendatav juhul $\|A\| < 1$.

Operaatori püsipunkti olemasolu kindlakstegemiseks on esitatud teoreem kasutatav ainult siis, kui leidub niisugune täielik meetriline ruum, milles vaadeldaval operaatoril on parajasti üks püsipunkt (s.t. milles see operaator osutub lähendamisoperaatoriks). Praktikas pole aga sellise ruumi konstrueerimine sageli läbiviidav. Sellepärast on püütud leida nõrgemaid tingimusi, mis garanteeriksid operaatori püsipunkti olemasolu (või iteratsioonimeetodi koondumise). Selliseid tingimusi on saadud peamiselt topoloogia meetodite kasutamise tulemusel (Schauder, Tihhonov jt.), mistõttu me nende lähemal käsitlemisel käesolevas kursuses ei peatu.

§ 2. Arvulise argumendiga operaatorid

Vaatleme operaatorit $x(t)$ reaalarvude ruumist R_1 Banachi ruumi X. Selliste operaatorite juhule on lihtsalt üldistatavad matemaatilise analüüsi põhilised tehted: diferentseerimine ja integreerimine.

Operaatorit $x(t)$ nimet. punktis t <u>diferentseeruvaks</u>, kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}[x(t + \Delta t) - x(t)].$$

Seda piirväärtust nimet. sel juhul operaatori $x(t)$ <u>tuletiseks</u> (punktis t) ja tähist. $x'(t)$ või $\frac{d}{dt}x(t)$.

Lihtne on veenduda diferentseeruva operaatori pidevuses. Tõepoolest, kui kehtib võrdus

$$x'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}[x(t + \Delta t) - x(t)],$$

siis

$$x'(t) = \frac{1}{\Delta t}[x(t + \Delta t) - x(t)] + \alpha(t,\Delta t),$$

kus $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \alpha(t,\Delta t) = \theta$. Seega

$$\lim_{\Delta t\to 0} x(t + \Delta t) = \lim_{\Delta t\to 0}[x(t) + x'(t)\Delta t - \alpha(t,\Delta t)\Delta t] = x(t),$$

s.t. operaator $x(t)$ on punktis t pidev.

Täiesti tavalisel viisil tõestatakse diferentseerimise reeglid

$$[x(t) + y(t)]' = x'(t) + y'(t),$$

$$[\lambda x(t)]' = \lambda x'(t)$$

(sõnastada ja tõestada!). Korrutise diferentseerimise reegli saab tõestada muidugi vaid siis, kui on defineeritud ruumi X elementide x pidev, distributiivne ja skalaariga korrutamise suhtes kommutatiivne korrutamine vasakult (või paremalt) mingi teise Banachi ruumi Y elementidega y. Sel juhul (tõestada!)

$$[y(t)x(t)]' = y'(t)x(t) + y(t)x'(t)$$

ning analoogselt

$$[x(t)y(t)]' = x'(t)y(t) + x(t)y'(t).$$

Erijuhul, kui element $y \in Y$ on konstantne, omandab esimene valem kuju

$$[yx(t)]' = yx'(t).$$

N ä i d e. Olgu $A \in (X \rightarrow Y)$. Siis on "korrutamine" $Ax(t)$ nõutud omadustega ja

$$[Ax(t)]' = Ax'(t).$$

Kui aga operaator A sõltub parameetrist t ja element x on konstantne, siis

$$[A(t)x]' = A'(t)x.$$

Kõrgemat järku tuletiste, samuti aga ka mitme arvulise argumendiga operaatori osatuletiste definitsioonid ja põhilised omadused on matemaatilise analüüsi kursusest peagu muutusteta üldistatavad (vt. [1] lk. 279 jj.).

Arvulise argumendiga operaatorite juhule on üldistatav ka näit. Riemanni integraali mõiste. Olgu operaator $x(t)$ määratud lõigul $[a,b]$. Jaotame selle lõigu osalõikudeks punktidega $a = t_o < t_1 < \ldots < t_n = b$ ja moodustame summa

$$\sum_{k=1}^{n} x(\tau_k)(t_k - t_{k-1}),$$

kus $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ on suvaliselt valitud punktid. Kui see summa omab $\max_k(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0$ puhul (tugeva) piirväärtuse sõltumata alajaotustest ja punktide τ_k valikust, siis nimet. operaatorit $x(t)$ <u>integreeruvaks</u> ja seda piirväärtust (Riemanni) <u>integraaliks</u> operaatorist $x(t)$ (rajades a-st b-ni), mida tähist.

$$\int_a^b x(t)dt.$$

Suhteliselt lihtsalt saab veenduda, et operaatori $x(t)$ pidevus on piisav tema integreeruvuseks (tõestus vt. näit. [1] lk. 285 jj.).

Defineeritud integraalile on lihtne üldistada tavalise Riemanni integraali põhilisi omadusi (tõestada!):

1° $\int_a^b [x(t) + y(t)]\,dt = \int_a^b x(t)dt + \int_a^b y(t)dt;$

2° $\int_a^b \lambda x(t)dt = \lambda \int_a^b x(t)dt;$

3° kui on defineeritud ruumi X elementide pidev, distributiivne ja skalaariga korrutamise suhtes kommutatiivne korrutamine (vasakult) ruumi Y elementidega, siis konstantse $y \in Y$ korral

$$\int_a^b yx(t)dt = y\int_a^b x(t)dt;$$

4° $\left\| \int_a^b x(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|x(t)\|dt,$

kus võrratuse paremal poolel on tavaline Riemanni integraal.

5° Kui operaator $x(t)$ omab lõigul $[a,b]$ pideva tuletise, siis kehtib Newton-Leibnizi valem

$$\int_a^b x'(t)dt = x(b) - x(a).$$

T õ e s t u s e k s rakendame vaadeldavale integraalile mistahes pidevat lineaarset funktsionaali $f \in X^*$. Siis omaduse 3° (ja tuletise analoogse omaduse) kohaselt

$$f\left[\int_a^b x'(t)dt\right] = \int_a^b fx'(t)dt = \int_a^b [fx(t)]'dt.$$

Siin on aga $fx(t)$ tavaline reaalmuutuja (pidevalt diferentseeruv) funktsioon ja seega kehtib tema puhul Newton-Leibnizi valem:

$$\int_a^b [fx(t)]'dt = fx(b) - fx(a) = f[x(b) - x(a)].$$

Järelikult iga $f \in X^*$ korral

$$f\left[\int_a^b x'(t)dt\right] = f[x(b) - x(a)],$$

millest järeldubki (vt. III ptk. §8) tõestatav võrdus.

6° Kui operaator $x(t)$ ja reaalmuutuja funktsioon $g(t)$ on lõigul $[a,b]$ pidevalt diferentseeruvad, siis kehtib <u>ositi integreerimise valem</u>

$$\int_a^b g'(t)x(t)dt = g(t)x(t)\Big|_a^b - \int_a^b g(t)x'(t)dt.$$

Tõestus on täiesti analoogiline eelmisega (läbi viia!).

§ 3. Operaatori tugev ja nõrk diferentsiaal

Olgu nüüd $y = P(x)$ operaator mingist lineaarsest normeeritud ruumist X lineaarsesse normeeritud ruumi Y. Tuletise mõiste üldistamisel sellele juhule tuleb kasutada veidi teist teed kui arvulise argumendiga operaatori puhul, sest jagamine argumendi kasvuga pole igas ruumis teostatav. Sellepärast defineerimegi operaatori $P(x)$ diferentseeruvuse analoogselt mitme muutuja funktsioonide diferentseeruvusega matemaatilises analüüsis.

Operaatorit $P(x)$ nimet. kohal x <u>diferentseeruvaks</u>, kui leidub selline pidev lineaarne operaator $A_x \in (X \to Y)$, et

$$P(x+\Delta x) - P(x) = A_x \Delta x + \alpha(x,\Delta x),$$

kus $\lim\limits_{\|\Delta x\| \to 0} \frac{\alpha(x,\Delta x)}{\|\Delta x\|} = \theta'$. Elementi $A_x\Delta x \in Y$ nimet. operaatori $P(x)$ <u>tugevaks</u> (ehk Frechet') <u>diferentsiaaliks</u> kohal x kasvuga Δx ja tähist. $dP(x,\Delta x)$. Operaatorit A_x nimet. vastavalt operaatori $P(x)$ <u>tuletiseks</u> kohal x ja tähist. $P'(x)$. Seega

$$dP(x,\Delta x) = P'(x)\Delta x.$$

Ilmselt on operaatori pidevus tema diferentseeruvuseks tarvilik (põhjendada!).

Näitame, et operaatori tuletis on toodud definitsiooniga üheselt määratud. Selleks oletame, et leidub veel operaator $B_x \in (X \to Y)$ nii, et

$$P(x+\Delta x) - P(x) = B_x\Delta x + \beta(x,\Delta x),$$

kus $\lim\limits_{\|\Delta x\| \to 0} \frac{\beta(x,\Delta x)}{\|\Delta x\|} = \theta'$. Tähistades $A_x - B_x = C_x \in (X \to Y)$ saame siis $C_x\Delta x = \beta(x,\Delta x) - \alpha(x,\Delta x)$ ja seega

$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \frac{C_x\Delta x}{\|\Delta x\|} = \theta'.$$

Meie väite tõestamiseks tuleb näidata, et $\|C_x\| = 0$. Oletame väitevastaselt, et $\|C_x\| > 0$. Vastavalt etteantud arvule $\|C_x\| > \varepsilon > 0$ leidub siis element $x_o \in X$ nii, et $\|C_x x_o\| > (\|C_x\| - \varepsilon)\|x_o\|$. Moodustame elemendid $x_n = \frac{x_o}{n}$. Et $x_o = nx_n$, siis viimane võrratus omandab kuju

$$n\|C_x x_n\| > n(\|C_x\| - \varepsilon)\|x_n\|,$$

ehk

$$\frac{\|C_x x_n\|}{\|x_n\|} > \|C_x\| - \varepsilon > 0.$$

Sellest tulemusest nähtub, et $\lim_{n\to\infty} \frac{C_x x_n}{\|x_n\|} \neq \theta'$, kuigi $\lim_{n\to\infty} x_n = \theta$. Tekkinud vastuolu tõestabki, et $\|C_x\| = 0$ ja operaatori tuletis on seega üheselt määratud.

Erijuhul, kui $P(x) = Ax$ on lineaarne operaator, saame iga $x \in X$ puhul

$$A(x + \Delta x) - Ax = A\Delta x.$$

Seega $\alpha(x,\Delta x) = \theta'$ ja $A' = A$ igas punktis $x \in X$: pideva lineaarse operaatori tuletis on võrdne operaatori endaga (sõltumata vaadeldavast punktist).

Operaatori $P(x)$ diferentseeruvuse saab defineerida aga ka arvulise argumendiga operaatori diferentseerimise kaudu. Selleks fikseerime elemendid x ja Δx $(\in X)$. Siis $P(x + t\Delta x) = y(t)$ on arvulise argumendiga operaator (ruumi Y).

Operaatorit $P(x)$ nimet. kohal x <u>nõrgalt diferentseeruvaks</u>, kui eksisteerib tuletis

$$y'(0) = \frac{d}{dt} P(x + t\Delta x)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[P(x + t\Delta x) - P(x)\right].$$

Elementi $y'(0) \in Y$ nimet. sealjuures operaatori $P(x)$ <u>nõrgaks</u> (ehk Gateaux') <u>diferentsiaaliks</u> kohal x kasvuga Δx ja tähist. $DP(x,\Delta x)$. Operaatorit, mis seab elemendile

$\Delta x \in X$ vastavusse elemendi $DP(x,\Delta x) \in Y$, nimet. operaatori $P(x)$ nõrgaks tuletiseks ehk gradiendiks punktis x (tähist. P'_x). Ilmselt on gradient homogeenne operaator (põhjendada!).

T e o r e e m 1. Kui operaator omab tugeva diferentsiaali $dP(x,\Delta x)$, siis omab ta ka nõrga diferentsiaali, kusjuures $DP(x,\Delta x) = dP(x,\Delta x)$.

T õ e s t u s. Tugeva diferentsiaali olemasolu korral

$$P(x+\Delta x) - P(x) = dP(x,\Delta x) + \alpha(x,\Delta x),$$

kus $\lim\limits_{\Delta x \to \theta} \frac{\alpha(x,\Delta x)}{\|\Delta x\|} = \theta'$. Fikseerides kasvu Δx on $\lim\limits_{t\to 0} t\Delta x = \theta$ ja tugevalt diferentseeruvuse tingimuse võib kirjutada kujul

$$P(x+t\Delta x) - P(x) = dP(x,t\Delta x) + \alpha(x,t\Delta x) =$$
$$= t\,dP(x,\Delta x) + \alpha(x,t\Delta x),$$

kus $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\alpha(x,t\Delta x)}{t\|\Delta x\|} = \theta'$. Siis aga

$$\frac{1}{t}\left[P(x+t\Delta x) - P(x)\right] = dP(x,\Delta x) + \frac{\alpha(x,t\Delta x)}{t},$$

millest näemegi, et vajalik piirväärtus eksisteerib, kusjuures

$$DP(x,\Delta x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[P(x+t\Delta x) - P(x)\right] = dP(x,\Delta x).$$

Nõrgalt diferentseeruv operaator ei ole üldiselt tugevalt diferentseeruv, küll aga kehtib

T e o r e e m 2. Kui operaator P omab punkti x mingis ümbruses nõrga diferentsiaali, mis on pidev nii x

kui ka Δx suhtes, siis omab see operaator tugeva diferentsiaali, kusjuures $dP(x,\Delta x) = DP(x,\Delta x)$.

T õ e s t u s. Kõigepealt näitame, et tehtud eeldustel on operaatori nõrk tuletis pidev lineaarne operaator. Selleks tuleb veenduda vaid tema aditiivsuses, s.t. et

$$DP(x,\Delta x + \Delta x') = DP(x,\Delta x) + DP(x,\Delta x').$$

Kuna

$$DP(x + t\Delta x,\Delta x) = \frac{d}{dt'} P(x + t\Delta x + t'\Delta x)\Big|_{t'=0} =$$

$$= \frac{d}{d(t+t')} P(x + (t + t')\Delta x)\Big|_{t+t'=t} = \frac{d}{dt} P(x + t\Delta x),$$

siis (vt. 5° §2)

$$P(x + t\Delta x) - P(x) = \int_0^t \frac{d}{dt} P(x + \tau\Delta x)d\tau = \int_0^t DP(x + \tau\Delta x,\Delta x)d\tau =$$

$$= tDP(x,\Delta x) + \int_0^t [DP(x + \tau\Delta x,\Delta x) - DP(x,\Delta x)]\, d\tau.$$

Analoogselt

$$P(x + t(\Delta x + \Delta x')) - P(x + t\Delta x) = tDP(x,\Delta x') +$$

$$+ \int_0^t [DP(x + t\Delta x + \tau\Delta x',\Delta x') - DP(x,\Delta x')]\, d\tau$$

ja

$$P(x + t(\Delta x + \Delta x')) - P(x) = tDP(x,\Delta x + \Delta x') +$$

$$+ \int_0^t [DP(x + \tau(\Delta x + \Delta x'),\Delta x + \Delta x') - DP(x,\Delta x + \Delta x')]\, d\tau.$$

Kuna $DP(x,\Delta x)$ on eelduse kohaselt x järgi pidev, siis valides suvaliselt $\varepsilon > 0$ on kolme viimase integraali integrandide normid küllalt väikese $t > 0$ korral (siis $0 \leq \tau \leq t$) väiksemad kui $\frac{1}{3}\varepsilon$. Seega nende integraalide (järgnevas tähistame neid lühiduseks sümbolitega y_1, y_2 ja y_3) normid on väiksemad kui $\frac{\varepsilon}{3}t$.

Lahutades viimase võrduse kahe eelmise summast saame

$$0 = tDP(x,\Delta x) + tDP(x,\Delta x') - tDP(x,\Delta x+\Delta x') + $$
$$+ y_1 + y_2 - y_3.$$

Järelikult

$$\|DP(x,\Delta x) + DP(x,\Delta x') - DP(x,\Delta x + \Delta x')\| = \frac{1}{t}\|y_1 + y_2 - y_3\| < \varepsilon,$$

millega nõrga tuletise aditiivsus on tõestatud ja ühtlasi $P'_x \in (X \to Y)$. Tõestame nüüd, et $P'_x = P'(x)$, s.t. et

$$P(x + \Delta x) - P(x) = DP(x,\Delta x) + \alpha(x,\Delta x),$$

kus $\lim\limits_{\Delta x \to \theta} \frac{\alpha(x,\Delta x)}{\|\Delta x\|} = \theta'$. Tõepoolest,

$$P(x + \Delta x) - P(x) = DP(x,\Delta x) +$$
$$+ \int_0^1 [DP(x + t\Delta x,\Delta x) - DP(x,\Delta x)]\,dt,$$

kus

$$\|DP(x + t\Delta x,\Delta x) - DP(x,\Delta x)\| = \|P'_{x+t\Delta x}\Delta x - P'_x\Delta x\| =$$
$$= \|(P'_{x+t\Delta x} - P'_x)\Delta x\| \leq \|P'_{x+t\Delta x} - P'_x\|\|\Delta x\|$$

ja P'_x pidevuse tõttu x järgi

$$\lim_{\Delta x \to \theta} \|P'_{x+t\Delta x} - P'_x\| = 0.$$

Teoreem on tõestatud.

§ 4. Polülineaarsed operaatorid

Olgu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sõltumatult muutuvad elemendid ruumist X. Kui nende muutujate igale valikule on üheselviisil seatud vastavusse mingi element y ruumist Y, siis öeldakse, et on defineeritud <u>n argumendi operaator</u> ruumist X ruumi Y ja kirjutatakse näiteks $y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Järgnevas me vaatleme ainult juhtu, mil X ja Y on lineaarsed normeeritud ruumid. Sel juhul n argumendi operaatorit F nimet. <u>polülineaarseks</u> ehk täpsemalt <u>n-lineaarseks operaatoriks</u>, kui ta rahuldab tingimusi:

1° F on aditiivne iga argumendi suhtes, s.t. iga $i = 1, 2, \ldots, n$ puhul

$$F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i' + x_i'', x_{i+1}, \ldots, x_n) =$$
$$= F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n) +$$
$$+ F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i'', x_{i+1}, \ldots, x_n);$$

2° F on tõkestatud, s.t. leidub konstant $M > 0$ nii, et iga $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ puhul

$$\|F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| \leq M\|x_1\| \|x_2\| \ldots \|x_n\|.$$

Tingimustest 1° ja 2° järeldub n-lineaarse operaatori pidevus kõikide argumentide järgi. Tõepoolest, kui $x_i^{(k)} \to x_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, siis $\|x_i^{(k)} - x_i\| \to 0$ ja

$$\|F(x_1^{(k)},x_2^{(k)}, \dots ,x_n^{(k)}) - F(x_1,x_2, \dots ,x_n)\| =$$

$$= \|F(x_1^{(k)} - x_1, x_2^{(k)} - x_2, \dots .x_n^{(k)} - x_n)\| \leqslant$$

$$\leqslant M\|x_1^{(k)} - x_1\| \|x_2^{(k)} - x_2\| \dots \|x_n^{(k)} - x_n\| \to 0,$$

s.t.

$$F(x_1^{(k)},x_2^{(k)}, \dots ,x_n^{(k)}) \to F(x_1,x_2, \dots ,x_n).$$

Kui n-lineaarses operaatoris fikseerida mingid $n - 1$ argumenti $x_1 = x_1^0, \dots ,x_{i-1} = x_{i-1}^0, x_{i+1} = x_{i+1}^0, \dots ,$ $x_n = x_n^0$, siis saame tavalise operaatori vabaks jäänud argumendist x_i:

$$F(x_1^0, \dots ,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0, \dots ,x_n^0) = F_ix_i.$$

Ilmselt on F_i aditiivne ja tõkestatud (sest $\|F_ix_i\| \leqslant M\|x_1^0\| \dots \|x_{i-1}^0\| \|x_{i+1}^0\| \dots \|x_n^0\| \cdot \|x_i\|$) ning seega ka homogeenne:

$$F_i\lambda x_i = \lambda F_ix_i.$$

Siit aga järeldub vahetult, et n-lineaarne operaator on homogeenne iga oma argumendi suhtes:

$$F(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2, \dots ,\lambda_nx_n) = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_nF(x_1,x_2, \dots ,x_n).$$

Samuti nagu lineaarsete operaatorite puhul kasutame ka n-lineaarsete operaatorite jaoks edaspidi lihtsustatud kirjutusviisi, kirjutades $F(x_1,x_2, \dots x_n)$ asemel $Fx_1x_2\dots x_n$.

n-lineaarse operaatori <u>norm</u> $\|F\|$ defineeritakse võrdusega

$$\|F\| = \sup_{\|x_i\|=1} \|Fx_1x_2 \ldots x_n\|.$$

Ilmselt on niidefineeritud norm vähim arv, mis rahuldab võrratust

$$\|Fx_1x_2 \ldots x_n\| \leq \|F\|\|x_1\|\|x_2\| \ldots \|x_n\|$$

iga $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ puhul (tõestada!).

Defineerides n-lineaarsete operaatorite võrdsuse, liitmise ja skalaariga korrutamise tavalisel viisil, kujutab kõikide n-lineaarsete operaatorite (ruumist X ruumi Y) hulk endast lineaarset normeeritud ruumi. Kui n-lineaarses operaatoris fikseerida üks argumentidest, siis saame ilmselt (n - 1) -lineaarse operaatori jne. Sellepärast on n-lineaarsete operaatorite ruumi loomulik tähistada sümboliga

$$\underbrace{(X \to (X \to \ \ldots \ \to (X}_{n} \to Y) \ldots)).$$

Mõnikord kasutatakse siin ka lihtsustatud sümbolit

$$(X^n \to Y),$$

mille õigustamiseks tuleb aga selgitada sümboli X^n tähendus (sellel me käesolevas kursuses ei peatu).

Tähtsa alamruumi n-lineaarsete operaatorite ruumis moodustavad nn. <u>sümmeetrilised n-lineaarsed operaatorid,</u> mis rahuldavad tingimust:

3° $Fx_1x_2 \ldots x_n$ väärtus ei muutu argumentide mistahes permuteerimise korral.

Sageli tuleb n-lineaarsete operaatorite rakendamisel tegemist teha juhuga, mil kõik argumendid on võrdsed: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$. Sel juhul kirjutatakse $Fxx\ldots x$ asemel enamasti lühidalt Fx^n. Üldsust kitsendamata võib siin eeldada, et F on sümmeetriline. Tõepoolest, kui F ei ole sümmeetriline, siis defineerime uue n-lineaarse operaatori

$$Gx_1x_2\ldots x_n = \frac{1}{n!}\sum Fx_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n},$$

kus summeerimine toimub üle kõikide permutatsioonide indeksitest $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Ilmselt on G sümmeetriline, ning

$$Gxx\ldots x = Fxx\ldots x = Fx^n.$$

Ühe argumendi operaatorit Fx^n nimet. (n-ndaks) astmeks. Astet iseloomustavad järgmised omadused:

1) $F(\lambda x)^n = \lambda^n Fx^n$;

2) $\|Fx^n\| \leqslant \|F\|\|x\|^n$;

3) $F(\lambda x + \mu y)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\lambda^{n-i}\mu^i F\underbrace{x,\ldots,x}_{n-i},\underbrace{y,\ldots,y}_{i}$.

Neist esimesed kaks omadust on ilmsed, kolmas aga tõestatakse põhimõtteliselt samuti nagu vastav valem (Newtoni binoomvalem) algebras (tõestada!).

Kui on antud jada polülineaarseid operaatoreid $\{F_n\}$, kus indeks $n = 1,2,\ldots$ tähendab ühtlasi operaatori argumentide arvu, siis võib püstitada küsimuse (ruumi Y elementidest moodustatud) rea

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$$

koondumisest. Niisugust rida nimet. argumendi x suhtes <u>astmereaks</u>. Lihtne on näha, et koos elemendiga x sisaldab selle rea koonduvuspiirkond ka kõik elemendid kujul λx, kus $-1 < \lambda < 1$. Osutub aga, et astmerea koonduvuspiirkond ei ole üldiselt sfäär ega isegi mitte kumer hulk.

§ 5. Kõrgemat järku tuletised. Analüütilised operaatorid.

Definitsiooni kohaselt on operaatori $y = P(x)$ tuletis $P'(x)$ ruumi $(X \to Y)$ element. Sama sümbolit $P'(x)$ kasutame aga ka selle operaatori tähistamiseks, mis antud P puhul seab igale elemendile x (operaatori P diferentseeruvuse piirkonnast) vastavusse pideva lineaarse operaatori $P'(x) \in (X \to Y)$. See operaator (ruumist X ruumi $(X \to Y)$) pole enam üldiselt lineaarne ja võib püstitada küsimuse tema (Frechet') tuletise leidmisest. Operaator $P'(x)$ on kohal x diferentseeruv teatavasti siis, kui leidub selline pidev lineaarne operaator

$$P''(x) \in (X \to (X \to Y)),$$

et

$$P'(x + \Delta x) - P'(x) = P''(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x),$$

kus (element) $\alpha(x, \Delta x) \in (X \to Y)$ rahuldab tingimust

$$\lim_{\Delta x \to \theta} \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\|\Delta x\|} = 0.$$

Operaatorit $P''(x)$ nimet. operaatori P <u>teiseks tuletiseks</u> (ehk teist järku tuletiseks) kohal x. Seega operaatori teine tuletis on bilineaarne (2-lineaarne) operaator. Näitame, et ta on ka sümmeetriline, s.t. et

$$P''(x)\Delta x\Delta x' = P''(x)\, x'\Delta x.$$

Kuna tugev diferentsiaal on ühtlasi ka nõrgaks diferentsiaaliks, siis

$$P''(x)\Delta x\Delta x' = \frac{d}{dt} P'(x + t\Delta x)\Delta x'\Big|_{t=o}$$

ja

$$P''(x)\Delta x'\Delta x = \frac{d}{dt'} P'(x + t'\Delta x')\Delta x\Big|_{t'=o} .$$

Rakendades tuletise puhul veel kord sama valemit saame

$$P'(x + t\Delta x)\Delta x' = \frac{\partial}{\partial t'} P(x + t\Delta x + t'\Delta x')\Big|_{t'=o}$$

ja

$$P'(x + t'\Delta x')\Delta x = \frac{\partial}{\partial t} P(x + t\Delta x + t'\Delta x')\Big|_{t=o} .$$

Seega

$$P''(x)\Delta x\Delta x' = \frac{\partial^2}{\partial t'\partial t} P(x + t\Delta x + t'\Delta x')\Big|_{t=t'=o} ,$$

$$P''(x)\Delta x'\Delta x = \frac{\partial^2}{\partial t\partial t'} P(x + t\Delta x + t'\Delta x')\Big|_{t=t'=o}$$

ja teise tuletise pidevusest järeldubki vajalik sümmeetria.

Analoogiliselt defineeritakse ka kõrgemat järku tuletised ja näidatakse, et

$$P^{(n)}(x) \in \underbrace{(X \to (X \to \ldots \to (X}_{n} \to Y)\ldots))$$

on sümmeetriline n-lineaarne operaator. Sealjuures saadakse valem

$$P^{(n)}(x)\Delta x_1\Delta x_2\ldots\Delta x_n = \frac{\partial^n}{\partial t_1\partial t_2\ldots\partial t_n} P(x+\sum_{k=1}^{n} t_k\Delta x_k)\Big|_{t_1=\ldots=t_n=0},$$

mille parem pool kujutab endast operaatori $P(x)$ <u>nõrka n-järku diferentsiaali</u> kohal x kasvudega $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ (seda tähist. ka sümboliga $D^nP(x;\, x_1, \ldots, x_n)$). Viimase võrduse vasakul poolel oleva <u>tugeva n-järku diferentsiaaliga</u> on nõrk diferentsiaal võrdne jällegi vaid siis, kui ta eksisteerib punkti x mingis ümbruses ja on pidev kõikide oma argumentide suhtes (s.t. kui P on n korda tugevalt diferentseeruv).

Operaatorit $P(x)$ nimet. punktis x_o <u>analüütiliseks</u>, kui ta omab selles punktis igat järku tuletised ja on punkti x_o mingis ümbruses esitatav astmereana

$$P(x_o+\Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(x_o)\Delta x^n,$$

kus $P^{(0)}(x_o)\Delta x^o = P(x_o)$. Seda rida nimet. operaatori P <u>Taylori reaks</u> punktis x_o. Öeldakse, et operaator on analüütiline hulgas D, kui ta on analüütiline igas punktis $x_o \in D$. Saab tõestada, et operaator on hulgas D analüütiline siis ja ainult siis, kui ta omab selle hulga igas punktis kõiki järku tuletisi ning leiduvad konstandid α ja β nii, et iga $x \in D$ puhul

$$\|P^{(n)}(x)\| \leq n!\alpha\beta^n \quad (n=1,2,\ldots).$$

Praktikas on sageli tarvis asendada analüütilist operaatorit tema Taylori rea osasummaga. Sellise asendamise puhul peame aga oskama hinnata tehtavat viga. Tuletamegi järgnevalt avaldise analüütilise operaatori Taylori rea jääkliikme jaoks.

Kui P on punktis x_0 tugevalt diferentseeruv, siis teatavasti (vt. §3)

$$P'(x_0 + t\Delta x)\Delta x = \frac{d}{dt} P(x_0 + t\Delta x).$$

Analüütilise operaatori jaoks saame iga n puhul samuti valemi

$$P^{(n)}(x_0 + t\Delta x)\Delta x^n = \frac{d}{dt} P^{(n-1)}(x_0 + t\Delta x)\Delta x^{n-1}.$$

Newton-Leibnizi valemi (vt. 5^0 §2) kohaselt

$$\int_0^1 P'(x_0 + t\Delta x)\Delta x dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} P(x_0 + t\Delta x) dt = P(x_0 + \Delta x) - P(x_0),$$

ehk

$$P(x_0 + \Delta x) = P(x_0) + \int_0^1 P'(x_0 + t\Delta x)\Delta x dt.$$

Kasutades nüüd ositi integreerimise valemit (vt. 6^0 §2, kui seal võtta $g(t) = t - 1$) saame

$$\int_0^1 P'(x_0 + t\Delta x)\Delta x dt = (t - 1)P'(x_0 + t\Delta x)\Delta x \Big|_0^1 +$$

$$+ \int_0^1 (1 - t)\frac{d}{dt} P'(x_0 + t\Delta x)\Delta x dt =$$

$$P'(x_0)\Delta x + \int_0^1 (1 - t)P''(x_0 + t\Delta x)\Delta x^2 dt.$$

Saadud integraali integreerime jälle ositi (nüüd $g(t) = - \frac{1}{2}(1 - t)^2$):

$$\int_0^1 (1 - t)P''(x_0 + t\Delta x)\Delta x^2 dt = - \frac{1}{2}(1 - t)^2 P''(x_0 + t\Delta x)\Delta x^2 \Big|_0^1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - t)^2 \frac{d}{dt} P''(x_0 + t\Delta x)\Delta x^2 dt = \frac{1}{2} P''(x_0)\Delta x^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0 (1 - t)^2 P''(x_0 + t\Delta x)\Delta x^3 dt \quad \text{jne.}$$

Asendades kõik need tulemused esialgsesse võrdusesse saame valemi

$$P(x_0+\Delta x) = P(x_0) + P'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2} P''(x_0) x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!} P^{(n)}(x_0)\Delta x^n + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1 - t)^n P^{(n+1)}(x_0 + t\Delta x) x^{n+1} dt.$$

Siin integraal

$$R_{n+1}(x_0) = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1 - t)^n P^{(n+1)}(x_0 + t\Delta x)\Delta x^{n+1} dt$$

kujutabki vajalikku avaldist jääkliikme jaoks. Kui õnnestub leida hinnang

$$M_{n+1} \geq \max_t \| P^{(n+1)}(x_0 + t\Delta x)\|$$

(analüütilisuse puhul on see alati võimalik), siis jääkliikme normi hindamiseks saame valemi (vt. 4^o § 2)

$$\| R_{n+1}(x_0)\| \leq \frac{1}{n!} M_{n+1}\|\Delta x\|^{n+1}\int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1}\|\Delta x\|^{n+1}.$$

§ 6. Teoreem ilmutamata operaatorist

Vaatleme kahe argumendi pidevat operaatorit

$$F(x,y) = z \in Z,$$

kus $x \in X$ ja $y \in Y$. Elementide paari (x,y) võib siin vaadelda kui ruumide X ja Y otsesumma $X \dot{+} Y$ elementi. Kui viimases defineerida norm näiteks võrdusega

$$\|(x,y)\|_{X\dot{+}Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y ,$$

siis $X \dotplus Y$ osutub lineaarseks normeeritud ruumiks (tõestada!).

Kui fikseerida üks argumentidest, näiteks x, siis $F(x,y)$ osutub tavaliseks operaatoriks ruumist Y ruumi Z ning tarbekorral võime arvutada tema tuletise (kui see eksisteerib)

$$F'_y(x,y) \in (Y \to Z),$$

mida nimet. ka <u>osatuletiseks</u> argumendi y järgi.

Järgnevas eeldame, et $X = Z$ ja vaatleme võrrandit

$$F(x,y) = \Theta .$$

See võrrand annab (ilmutamata kujul) teatud seose elementide $x \in X$ ja $y \in Y$ vahel ning loomulikult kerkib küsimus: millal on see seos väljendatav tavalise operaatoriga, s.t. millal eksisteerib operaator $y = P(x)$ ruumist X ruumi Y nii, et $F(x,P(x)) = \Theta$ iga $x \in X$ korral? Vastuse sellele küsimusele annab

T e o r e e m 1. Olgu täidetud tingimused:

1^0 $F(x_0,y_0) = \Theta$;

2^0 punkti (x_0,y_0) ümbruses omab $F(x,y)$ pideva osatuletise $F'_y(x,y)$;

3^0 eksisteerib pöördoperaator $[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}$.

Siis leiduvad arvud $\delta > 0$ ja $\eta > 0$ ning pidev operaator $y = P(x)$, mis on määratud sfääris $\|x - x_0\| \leqslant \delta$, nii, et:

a) $P(x_0) = y_0$;

b) kui $\|x - x_0\| \leqslant \delta$, siis $F(x,P(x)) = \Theta$;

c) kui $\|x - x_0\| \leqslant \delta$, $\|y - y_0\| \leqslant \eta$ ja $F(x,y) = \Theta$, siis $y = P(x)$.

T õ e s t u s e k s kasutame harilikku iteratsioonimeetodit. Selleks tuleb ainult võrrand $F(x,y) = \Theta$ teisendada enne sobivale kujule.

Teatavasti (vt. III ptk. §7) normeeritud ringis pöördelementi omava elemendi lähedased elemendid omavad samuti pöördelementi. Seega kui (x,y) asub (x_0,y_0) ümbruses ($\|x - x_0\| \leqslant \delta_0$, $\|y - y_0\| \leqslant \eta_0$), siis eksisteerib $[F_y'(x,y)]^{-1}$.

Tähistame $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$, fikseerime h ja otsime võrrandi

$$F(x_0 + h, y_0 + k) = \Theta$$

lahendit kujul $k = K(h)$ (siis $y = P(x) = P(x_0 + h) = y_0 + K(h)$). Rakendades selle võrrandi mõlemal poolel operaatorit $-[F_y'(x_0 + h, y_0)]^{-1}$ ja liites elemendi k saame võrrandi

$$k - [F_y'(x_0 + h, y_0)]^{-1}F(x_0 + h,y_0 + k) = k,$$

ehk

$$\Phi(h,k) = k,$$

kus

$$\Phi(h,k) = k - [F_y'(k_0 + h,y_0)]^{-1}F(x_0 + h,y_0 + k) =$$

$$= -\left[F'_y(x_o + h, y_o)\right]^{-1} F(x_o + h, y_o + k) - F'_y(x_o + h, y_o)k .$$

Valides algl채hendi $k_o = \Theta'$ arvutame

$$k_1 = \Phi(h, \Theta'),\ k_2 = \Phi(h, k_1),\ \dots .$$

Teatavasti (vt. §1) see jada koondub v천rrandi lahendiks, kui on t채idetud Lipschitzi tingimus kordajaga $q < 1$. Kordaja q leidmiseks arvutame vahe

$$\Phi(h,k') - \Phi(h,k") =$$

$$= \left[F'_y(x,y_o)\right]^{-1} \left[F'_y(x,y_o)k' - F(x,y_o + k') -\right.$$

$$\left. - F'_y(x,y_o)k" + F(x,y_o + k")\right] = \left[F'_y(x,y_o)\right]^{-1} \cdot$$

$$\cdot \left[F'_y(x,y_o)(k' - k") - \int_0^1 F'_y(x,y_o + k" + t(k' - k"))(k' - k")dt\right] =$$

$$= \left[F'_y(x,y_o)\right]^{-1} \int_0^1 \left[F'_y(x,y_o) - F'_y(x,y_o + k" + t(k' - k"))\right](k' - k")dt .$$

Kuna F'_y on eelduse kohaselt pidev, siis

$$\varepsilon = \max_t \|F'_y(x,y_o) - F'_y(x,y_o + k" + t(k' - k"))\|$$

saab kuitahes v채ikeseks, kui vaid $\|k'\| \leqslant \eta \leqslant \eta_o$ ja $\|k"\| \leqslant \eta \leqslant \eta_o$ on k체llalt v채ikesed. Seega

$$\|\Phi(h,k') - \Phi(h,k")\| \leqslant M\varepsilon\|k' - k"\|,$$

kus $M = \|\left[F'_y(x,y_o)\right]^{-1}\|$ ja η sobiva valiku puhul $q = M\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$. Niisuguse kordajaga Lipschitzi tingimust rahuldab $\Phi(h,k)$ j채relikult kinnises sf채채ris $\|k\| \leqslant \eta$. Seda sf채채ri v천ime vaadelda omaette meetrilise ruumina (sama meetrikaga, mis ruumis Y), tuleb vaid n채idata, et Φ kujutab selle sf채채ri iseendasse. Olgu $\|k\| \leqslant \eta$. Siis

$$\|\Phi(h,k)\| \leq \|\Phi(h,k) - \Phi(h,\theta)\| + \|\Phi(h,\theta)\| \leq$$

$$\leq q\|k\| + \|[F'_y(x_0 + h,y_0)]^{-1}\| \|F(x_0 + h,y_0)\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|k\| + M\|F(x_0 + h,y_0)\|.$$

Et $\lim\limits_{h\to\theta} F(x_0 + h,y_0) = \theta$, siis valides $\|h\| \leq \delta$ küllalt väikesena on $M\|F(x_0 + h,y_0)\| \leq \frac{1}{2}\eta$ ja seega $\|\Phi(h,k)\| \leq \eta$. Järelikult iteratsioonimeetod on rakendatav ($q \leq \frac{1}{2}$) ja element $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = k = K(h)$ üheselt määratud. See tähendab, et leidub operaator $P(x) = y_0 + K(h)$, mis rahuldab tingimusi a), b) ja c). Tuleb veel ainult näidata selle operaatori pidevus punktis x_0, ehk operaatori $K(h)$ pidevus punktis $h = \theta$.

Iteratsioonimeetodi vaatlemisel (§1) me saime, et

$$\|k - k_n\| \leq \frac{dq^n}{1 - q},$$

kus $d = \|k_1 - k_0\| = \|k_1\|$. Võttes selles võrratuses $n = 1$ saame $q \leq \frac{1}{2}$ tõttu

$$\|k - k_1\| \leq \|k_1\|,$$

millest

$$\|k\| - \|k_1\| \leq \|k - k_1\| \leq \|k_1\|,$$

ehk

$$\|k\| \leq 2\|k_1\| = 2\|\Phi(h,\theta)\|.$$

Et aga $\lim\limits_{h\to\theta}\|\Phi(h,\theta)\| = 0$, siis järelikult

$$\lim_{h\to\theta}\|k\| = \lim_{h\to\theta}\|K(h)\| = 0.$$

T e o r e e m 2. Olgu lisaks teoreemi 1 eelduste-le täidetud veel tingimus:

4^0 $F(x,y)$ on kohal (x_0,y_0) diferentseeruv, s.t. leiduvad pidevad lineaarsed operaatorid $A \in (X \to X)$ ja $B \in (Y \to X)$ nii, et

$$F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0,y_0) = Ah + Bx + \alpha(h,k),$$

kus

$$\lim_{\|(h,k)\| \to 0} \frac{\alpha(h,k)}{\|(h,k)\|} = \theta.$$

Siis võrrandiga $F(x,y) = \theta$ määratud operaator $y = P(x)$ on kohal x_0 diferentseeruv.

T õ e s t u s. Võttes $k = \theta'$ saame

$$F(x_0 + h, y_0) - F(x_0,y_0) = Ah + \alpha(h,\theta'),$$

millest $A = F'_x(x_0,y_0)$. Analoogselt $B = F'_y(x_0,y_0)$. Arvestades veel, et tingimuse 1^0 kohaselt $F(x_0,y_0) = \theta$, omandab diferentseeruvuse tingimus kuju

$$F(x_0 + h, y_0 + k) = F'_x(x_0,y_0)h + F'_y(x_0,y_0)k + \alpha(h,k).$$

Rakendades selle võrduse mõlemal poolel operaatorit $[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}$ saame:

$$[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}F(x_0 + h, y_0 + k) = [F'_y(x_0,y_0)]^{-1}F'_x(x_0,y_0)h +$$
$$+ k + [F'_y(x_0,y_0)]^{-1}\alpha(h,k)$$

ehk (kui $k = K(h)$, s.t. $y_0 + k = P(x_0 + h)$)

$$k = -[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}F'_x(x_0,y_0)h - [F'_y(x_0,y_0)]^{-1}\alpha(h,k).$$

Kuna siin $k = P(x_0 + h) - P(x_0)$ ja

$$\lim_{h \to \theta} \frac{[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}\alpha(h,k)}{\|(h,k)\|} = \theta,$$

siis oleme seega tõestanud, et $P(x)$ on kohal $x = x_0$ diferentseeruv, kusjuures

$$P'(x_0) = -[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}F'_x(x_0,y_0).$$

KIRJANDUS

[1] Л. А. Люстерник и В. И. Соболев. Элементы функционального анализа. Москва-Ленинград, 1951.

[2] З. И. Халилов. Основы функционального анализа. Баку, 1949.

[3] А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин. Элементы теорий функций и функционального анализа I. Москва, 1954.

[4] И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. Москва-Ленинград, 1950.

[5] Б. З. Вулих. Введение в функциональный анализ. Москва 1958.

SISUKORD

IV peatükk. M i t t e l i n e a a r s e d o p e r a a t o r i d