K. SCHULTS

FÜÜSIKA

TALLINN
1966

66824

A-27418 II

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT

Füüsika kateeder

F Ü Ü S I K A

Loenguid kaugüliõpilastele

K. Schults

Tallinn 1966

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Кафедра физики

ШУЛЬТС Кальё Янович

Ф И З И К А

Лекции для заочников

На эстонском языке

F_2
Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
66824

Vastutav toimetaja G. Peets

Trükkimisele antud 7. XII 65. Paber 60x84, 1/16
Trükipg.6,0. Tingpg.5,58. Tiraaž 2000
MB-10567. TPI rotaprint, 1966. Tell. nr. 509
Hind 18 kop.

I. Gravitatsiooniiõud. Väljateooria elemente. Liikumine gravitatsiooniväljas

1. Kepleri seadused

Planeetide näivat liikumist tähtede keskel püüdsid seletada juba antiikaja inimesed. Antiikaja astronoomia-alased teadmised on kokkuvõetult esitatud Klaudios Ptolemaiose (II saj.) teoses "Almagest". Selles teoses esitas Ptolemaios maailmasüsteemi, kus taevakehad liiguvad ümber tsentri, milleks on Maa (geotsentriline maailmasüsteem). Et ka võimul olnud kirik paigutas maailma tsentrisse Maa koos inimesega, siis püsis Ptolemaiose süsteem ligi poolteist tuhat aastat. Alles 1640.a. ilmus trükist poolaka Mikolaj Kopernikku (1473 - 1543) õpetus Maa liikumisest, mille kohaselt Maa ning teised planeedid tiirlevad ümber Päikese (heliotsentriline süsteem). Koperniku õpetust pidas kirik reaktsiooniliseks, sest ta kummutas aastasadu kestnud printsipiaalse erinevuse "maise" ja "taevase" vahel. Koperniku teooria pooldajad tunnistati ketseriteks. Tuleriidal põletati itaallane Giordano Bruno (1548 - 1600). Galileo Galilei (1564 - 1642) sattus aga kõrges vanuses inkvisitsioonikohtu ette, kus ta pidi pärast piinamisi alla kirjutama Koperniku õpetusest loobumisele.

Koperniku õpetuse pooldajaks oli sakslane Johannes Kepler (1571 - 1630), kes, toetudes tolleaegse kuulsa astronoomi Tycho Brahe (1546 - 1601) vaatlusandmetele, püstitas taevakinemaatika seadused, mis said aluseks teoreetilisele astronoomiale.

Kepleri kolm seadust on järgmised:

1. Planeedid liiguvad mööda ellipseid, mille ühes fookuses asub Päike.

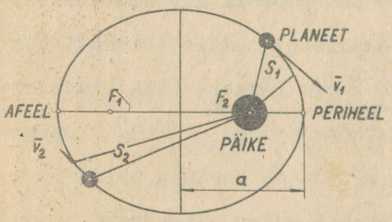
2. Planeetide raadiusvektorid katavad võrdsetes ajavahemikes võrdsed pindalad:

$$S_1 = S_2 \quad \text{kui} \quad t_1 = t_2.$$

3. Planeetide tiirlemisperioodide ruudud on võrdelised nende orbiitide pikemate pooltelgede kuupidega:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}. \qquad (1)$$

Planeetide liikumist Kepleri seaduste kohaselt selgitab joonis 1. Et planeedi orbiidiks on ellips, siis peab planeet orbiidil liikuma muutuva joonkiirusega. Kõige suurem on planeedi liikumiskiirus periheelis (punkt, kus planeedi kaugus Päikesest on minimaalne) ning kõige väiksem afeelis (punkt, kus planeedi kaugus Päikesest on maksimaalne).



Joon. 1

2. Gravitatsioonijõud. Gravitatsiooniseadus

Gravitatsiooniseaduse andis Isaac Newton (1643 - 1727). Newtoni arutluse kohaselt pidi planeetidele nende kõverjoonelisel liikumisel mõjuma Päikese tõmme. Samuti mõjub Maa külgetõmbejõud Kuule. Edasi väitis Newton, et külgetõmbejõud mõjub ka kõigile Maa pinnal paiknevatele kehadele, põh-

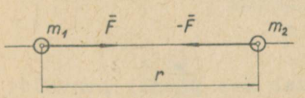
justades nende raskuse, ning tuli lõpuks järeldusele, et külgetõmbejõud peab mõjuma ükskõik milliste aineosakeste vahel. Newtoni gravitatsiooniseadus on järgmine:

Kaks masspunkti mõjuvad teineteisele jõuga, mis on võrdeline masspunktide massidega ning pöördvõrdeline nendevahelise kauguse ruuduga

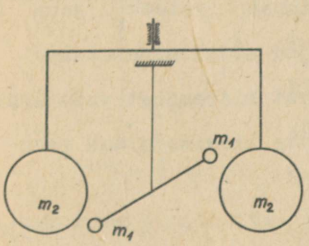
$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (2)$$

kus F on gravitatsioonijõud, γ - gravitatsioonikonstant, m_1, m_2 - masspunktide massid ja r - masspunktidevaheline kaugus.

Newtoni III seaduse kohaselt on masspunktidele rakendatud jõud vastassuunalised ning mõjuvad masspunkte ühendaval sirgel (joon. 2).



Joon. 2



Joon.3

Gravitatsioonikonstant määrati katseliselt. Esimesena määras 1798.a. täpse gravitatsioonikonstandi inglane Henry Cavendish (1731 - 1810). Tema poolt kasutatud keerdkaal koosnes elastsest niidist, millel rippus peenike varras. Varda otstesse olid kinnitatud 730-g massidega kerad (joon. 3). Lähendades keerdkaalule 158-g massidega kerad, suurenesid masside m_1 ja m_2 vahel gravitatsioonijõud, mis põhjustas varda pöördumise. Teades niidi elstseid omadusi ning mõõtes

keradevahelise kauguse, arvutas Cavendish gravitatsioonikonstandi. Hiljem on gravitatsioonikonstanti määranud täpsemate tehniliste vahenditega mitmed autorid, nagu Jolly, Richards, Heyl, Chrzanovski jt.

Sisuliselt on gravitatsioonikonstant võrdne jõuga, mis mõjub ühikuliste massidega kehade vahel, kui nad paiknevad teineteisest ühikulisel kaugusel. Gravitatsioonikonstandi väärtus sõltub valitud mõõtühikutest. Rahvusvahelises mõõtühikute süsteemis on gravitatsioonikonstant võrdne jõuga njuutonites, mis mõjub teineteisest ühe meetri kaugusel asetsevate ühekilogrammiste masspunktide vahel. Gravitatsioonikonstandi väärtuseks loetakse praegu

$$(6{,}673 \pm 0{,}003)\cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg\cdot s^2)}.$$

3. Raskuskiirenduse sõltuvus keha asendist Maa suhtes

Nagu eelmisest punktist selgus, peab Maa pinnal asuvale kehale mõjuma gravitatsioonijõud F. Keha kaalu ehk raskuse all mõistetakse jõudu, millega maapinnal seisev keha rõhub tugedele. Keha liikumist raskusjõu mõjul nimetatakse vabaks langemiseks ja sel puhul tekkivat kiirendust vaba langemise ehk raskuskiirenduseks. Kui mitte arvestada Maa pöörlemist, siis raskusjõud

$$P = mg = F = \gamma \frac{mM}{R^2}, \qquad (3)$$

kus M on Maa mass ja R keha kaugus Maa tsentrist. Raskuskiirendus merepinnal

$$g_0 = \gamma \frac{M}{R_M^2}, \qquad (4)$$

kus R_M on Maa raadius merepinnani.

Merepinnast kõrgusel h raskuskiirendus

$$g = \gamma \frac{M}{(R_M + h)^2} . \qquad (5)$$

Jagades võrrandi (5) võrrandiga (4):

$$\frac{g}{g_o} = \frac{R_M^2}{(R_M + h)^2} = \frac{1}{1 + \frac{2h}{R_M} + \frac{h^2}{R_M^2}} ,$$

saame, juhul kui $h \ll R_M$, et

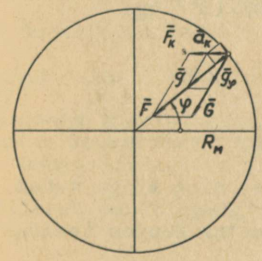
$$g \cong g_o \frac{1}{1 + \frac{2h}{R_M}} \cong g_o(1 - \frac{2h}{R_M}) . \qquad (6)$$

Kui arvestada ka Maa pöörlemist , siis tuleb gravitatsioonijõud jagada kaheks komponendiks: keha kaaluks P ja kesktõmbejõuks F_k (joon. 4). Jooniselt on näha, et geograafilisel laiusel φ keha kaal

$$\vec{P}_\varphi = \vec{F} - \vec{F}_k$$

ja vastavalt raskuskiirendus

$$\vec{g}_\varphi = \vec{g} - \vec{a}_k ,$$



Joon. 4

kus g on gravitatsioonijõust tingitud kiirendus ning a_k Maa pöörlemise kesktõmbekiirendus. Kiirenduse a_k võib lahutada kaheks komponendiks, millest $a_k \cdot \cos\varphi$ on g suunaline ja $a_k \cdot \sin\varphi$ temaga risti. Kuna a_k on g-ga võrreldes väga väike (ekvaatoril $a_k = \omega^2 R_M = (7{,}29 \cdot 10^{-5})^2 \, 6{,}37 \cdot 10^6 = 0{,}034$ m/s^2), siis g_φ suund erineb g suunast väga vähe ning tema väärtus

$$g_\varphi \cong g - a_k \cos\varphi = g - \omega^2 R_M \cos^2\varphi . \qquad (7)$$

Võttes arvesse ka võrrandit (6), saame:

$$g_{\varphi,h} \cong g_o(1 - \frac{2h}{R_M}) - \omega^2 R_M \cos^2\varphi . \qquad (8)$$

Maa üksikutele osadele mõjuv kaal ja kesktõmbejõud on Maad nii deformeerinud, et Maa pind on risti P suunaga. Selle tõttu on Maa pind umbes ellipsoidi kujuline.

Rahvusvahelise kokkuleppe alusel kasutatakse raskuskiirenduse arvutamiseks valemit, mis arvestab Maa ellipsoidaalset kuju:

$$g_{o\varphi}=978,049(1+0,0052834\sin^2\varphi - 0,0000059\sin^2 2\varphi) \text{ cm/s}^2. \qquad (9)$$

Raskuskiirendust 45-ndal laiuskraadil nimetatakse normaalkiirenduseks: $g_n = 9,80665$ m/s^2. Normaalkiirenduse kaudu defineeritakse tehnilise süsteemi jõu ühik.

Raskuskiirendust mõõdetakse pendlite ja gravimeetritega. Raskuskiirendust teades võib arvutada ka Maa massi:

$$M = \frac{g_n R_M^2}{\gamma} = \frac{9,81\cdot(6,37\cdot10^6)^2}{6,67\cdot10^{-11}} = 5,95\cdot10^{24} \text{ kg}.$$

Eelnevast selgus, et keha kaal

$$P_\varphi = mg_\varphi \qquad (10)$$

on muutuv suurus, sõltudes raskuskiirenduse väärtusest antud kohas. Kõige rohkem kaalub keha poolustel ning kõige vähem ekvaatoril. Seevastu on keha mass konstantne suurus (eeldusel, et keha liikumise kiirus on valguse kiirusega võrreldes väike) ning määrab kehas sisalduva aine hulga. Praktikas on soovitav keha kaalu ja erikaalu (e = ϱg) avaldada massi ja raskuskiirenduse kaudu, sest see näitab selgesti keha kaalu olemust.

4. Gravitatsiooniväli. Tsentraaljõud.

Gravitatsioonivälja tugevus

Füüsikalisi suurusi jaotatakse skalaarideks ning vektoriteks. Skalaarid on füüsikalised suurused, mida iseloomustab täielikult üks arvväärtus, näiteks temperatuur, mass, võnkesagedus jne. Vektoriaalse suuruse iseloomustamiseks on vaja anda tema arvväärtus, suund ning rakenduspunkt. Vektoriteks on kiirus, kiirendus, jõud jne.

Ruumi osa, mille kõiki punkte võib iseloomustada kas skalaariga või vektoriga, nimetatakse vastavalt skalaar- või vektorväljaks. Mõõtes temperatuuri ruumi mitmesugustes punktides, saame ettekujutuse temperatuuriväljast ning tema jaotusest.

Tuntumateks vektorväljadeks on gravitatsiooniväli ning elektromagnetiline väli.

Gravitatsiooniväli on üks mateeria vorme, mis laiub iga keha ümber. Gravitatsioonivälja iseloomustamiseks kasutatakse gravitatsioonivälja tugevuse mõistet.

Gravitatsioonivälja tugevust antud punktis mõõdetakse sellesse punkti paigutatud ühikulisele massile mõjuva jõuga

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m_o} , \qquad (11)$$

kus m_o on välja antud punkti paigutatud proovikeha mass.

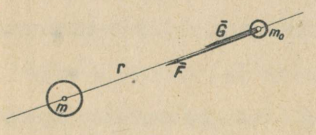
Selliselt defineeritud väljatugevus ei sõltu välja punkti paigutatud proovimassi suurusest ja on seega välja objektiivseks iseloomustajaks. Gravitatsioonivälja tugevuse avaldises (11) on parem pool Newtoni II seaduse kohaselt võrdne kiirendusega. Seega on gravitatsioonivälja tugevus ühtlasi ka keha vaba langemise kiirenduseks välja antud punktis.

Gravitatsioonivälja nimetatakse tsentraalseks kui kõikide tema punktide väljatugevuse vektorid on suunatud ühte punkti - välja tsentrisse. Tsentraalsümmeetrilise massijaotusega keha gravitatsiooniväli on tsentraalne, kusjuures välja tsentriks on keha masskese.

Tsentraalse gravitatsioonivälja tugevuse väärtuse arvutame gravitatsiooniseadusest (kehtib masspunktide kohta):

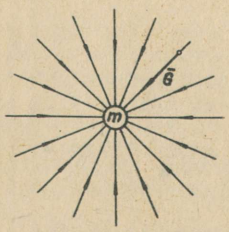
$$G = \frac{F}{m_o} = \gamma \frac{m}{r^2}, \qquad (12)$$

kus m on välja tekitav mass, m_o - proovikeha mass, mis asub välja tekitavast massist kaugusel r (joon. 5).

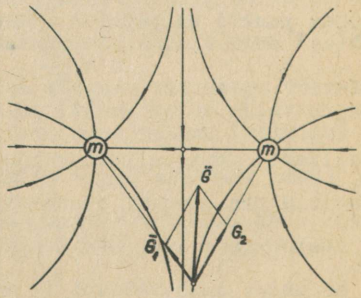


Joon. 5

Graafiliselt võib gravitatsioonivälja, nagu iga teist vektorvälja, kujutada väljajoonte (jõujoonte) abil. Väljajooned kujutatakse nii, et igas joone punktis on välja vektor (antud juhul gravitatsioonivälja tugevus) joone puutuja suunaline. Masspunkti välja graafiline pilt on toodud joonisel 6. Mitme masspunkti poolt



Joon. 6



Joon. 7

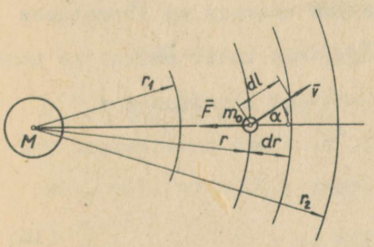
tekitatud väljatugevus on üksikute masspunktide väljade väljatugevuste vektoriaalne summa. Välja jõujooned on sel juhul kõverad (joon. 7).

5. Töö gravitatsiooniväljas. Gravitatsiooniväljа potentsiaal

Koosnegu vaadeldav süsteem paigalseisvast kehast (Maa) ning tema gravitatsiooniväljas liikuvast kehast (rakett). Raketi eemaldumisel Maast peab rakett tegema tööd gravitatsioonijõudude ületamiseks. Raketi lähenemisel, ümberpöördult, teeb gravitatsiooniväli tööd, mis muutub raketi kineetiliseks energiaks.

Arvutame, millist tööd tuleb teha raketi eemaldumisel Maast (joon. 8). Olgu raketi mass m_0 ja Maa mass M. Kaugusel r mõjub raketile jõud

$$F = \gamma \frac{Mm_0}{r^2} . \qquad (13)$$



Joon. 8

Raketi nihutamisel dl võrra tehakse elementaartöö

$$dA = - F \cdot dl \cdot \cos \alpha =$$

$$= - F \cdot dr = -\gamma \frac{Mm_0}{r^2} dr, \qquad (14)$$

kusjuures kokkuleppe kohaselt loeme kulutatud töö negatiivseks. Raketi nihutamisel kauguselt r_1 kaugusele r_2 tehtud töö

$$A = \int_{r_1}^{r_2} dA = - \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{Mm_0}{r^2} dr = - m_0 \left[- \frac{\gamma M}{r} \right]_{r_1}^{r_2} =$$

$$= - m_0 \left(\frac{\gamma M}{r_1} - \frac{\gamma M}{r_2} \right) = m_0 (U_1 - U_2). \qquad (15)$$

Nagu näha tulemusest, ei sõltu gravitatsiooniväljas tehtud töö keha poolt läbitud tee kujust, vaid on määratud keha alg- ja lõppasendiga. Niisuguse omadusega välja nimetatakse potentsiaalseks.

Maa ja raketi vahel valitsevate jõudude tõttu omab süsteem Maa - rakett sõltuvalt nende suhtelisest asendist potentsiaalset energiat. Kui rakett asub lõpmata kaugel, siis on Maa ja raketi vahel valitsev jõud null ning kokkuleppeliselt võime ka potentsiaalse energia lugeda nulliks. Raketi lähenemisel teeb Maa gravitatsiooniväli tööd, mille tõttu süsteemi potentsiaalne energia väheneb. Vastavalt meie kokkuleppele on siis potentsiaalne energia negatiivne. Sisuliselt tähendab see, et raketi eemaldamiseks Maast tuleb teha tööd.

Potentsiaalset välja iseloomustatakse potentsiaaliga. Vastavalt kokkuleppele, et potentsiaalne energia on lõpmatuses null, võib potentsiaali mõõta tööga, mis kulub ühikulise massiga keha viimiseks välja antud punktist lõpmatusesse.

Definitsiooni kohaselt ($m_o = 1$, $r_2 = \infty$) potentsiaal kaugusel r_1

$$U_1 = -\frac{\gamma M}{r_1}. \qquad (16)$$

Seega on töö gravitatsiooniväljas määratud nihutatava keha massi ning vaadeldavate punktide potentsiaalide vahe korrutisega.

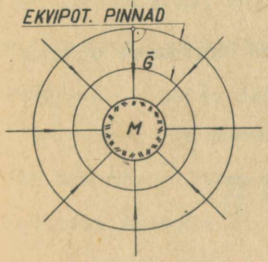
Keha potentsiaalset energiat mõõdame tööga, mis kulub keha viimiseks antud punktist lõpmatusesse:

$$W_p = m_o U_1 = -\gamma \frac{M m_o}{r_1}. \qquad (17)$$

Potentsiaali avaldisest (16) selgub, et sama potentsiaali-

ga punktid (r_1 = const) moodustavad sfääri pinna. Võrdse potentsiaaliga pinda mimetatakse ekvipotentsiaalpinnaks. Merepind on ekvipotentsiaalpind.

Elementaarnihkel mööda ekvipotentsiaalpinda peab töö olema null, sest dU = 0. Teiselt poolt $m_0 G \cdot dl \cdot \cos\alpha = 0$, juhul kui $\alpha = 90^\circ$. Seega on väljavektorid ekvipotentsiaalpindadega igas punktis risti, mille tõttu ka jõujooned on risti ekvipotentsiaalpindadega (joon. 9).



Joon. 9

Kuna me elame Maa pinnal, siis praktilistel kaalutlustel loetakse kokkuleppeliselt Maa pinna potentsiaal nulliks ning kehade potentsiaalset energiat arvutatakse Maa pinna suhtes. Kui keha asub Maa pinnast kõrgusel h, siis tema potentsiaalne energia Maa pinna suhtes

$$W_p = -\gamma\frac{Mm}{R_M + h} - \left(-\gamma\frac{Mm}{R_M}\right) = \gamma\frac{Mm}{R_M^2}\,\frac{h}{1 + \frac{h}{R_M}} = mg_0\,\frac{h}{1 + \frac{h}{R_M}}. \qquad (18)$$

Eeldusel, et $h \ll R_M$, saame:

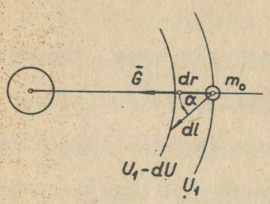
$$W_p = mg_0 h\left(1 - \frac{h}{R_M}\right) = mg_0 h. \qquad (19)$$

Potentsiaal on seotud väljatugevusega. Kui keha nihkumisel potentsiaal kahaneb, siis meie kokkuleppe kohaselt teevad välja jõud tööd potentsiaalse energia arvel. Nihkel tehtud töö $dA = F \cdot dl = m_0 G \cdot dl \cdot \cos\alpha$. Teiselt poolt on see töö avaldatav potentsiaali muutusega $dA = m_0(-dU)$. Seega

$$m_0 G \cdot dl \cdot \cos\alpha = -m_0 \cdot dU,$$

millest

$$G \cdot \cos\alpha = -\frac{dU}{dl} . \qquad (20)$$



Joon. 10

Jooniselt 10 näeme, et kui $\alpha = 0^o$, siis dl on risti ekvipotentsiaalpindadega ning konstantse potentsiaali muutuse dU korral minimaalne ja võrdne ekvipotentsiaalpindade vahelise kaugusega dr. Sel juhul tuletis $\frac{dU}{dr}$ on maksimaalne ja võime kirjutada:

$$G = -\frac{dU}{dr} . \qquad (21)$$

Potentsiaali tuletist tema maksimaalse muutumise suunas nimetatakse potentsiaali gradiendiks. Võib näidata, et potentsiaali gradient on vektor

$$\frac{dU}{dr} = \text{grad } U = \vec{i}\frac{dU}{dx} + \vec{j}\frac{dU}{dy} + \vec{k}\frac{dU}{dz} .$$

Võrrand (21) kirjutatakse siis kujul:

$$\vec{G} = -\text{ grad } U. \qquad (21a)$$

See võrrand kehtib kõikides potentsiaalsetes väljades ja näitab, et pikkusühiku kohta võetud potentsiaali muutus potentsiaali maksimaalse kahanemise suunas on võrdne väljatugevusega.

6. Kosmilised kiirused.

Kosmiliste lendude probleem

Rakettide saatmisel kosmilisse ruumi tuleb neile sõltuvalt eesmärgist anda teatud algkiirus.

Esimeseks kosmiliseks kiiruseks nimetatakse niisugust horisontaalsuunalist minimaalset kiirust, millega keha võiks liikuda ümber Maa ringorbiidil. Esimene kosmiline kiirus on

määratav tingimusest, et ringliikumise kesktõmbekiirendus on võrdne raskuskiirendusega

$$a_k = \frac{v_1^2}{R_M} = g_o \,, \qquad (22)$$

millest esimene kosmiline kiirus

$$v_1 = \sqrt{g_o R_M} = 7{,}9 \text{ km/s}. \qquad (23)$$

Tegelikult lendavad raketid mõnesaja kilomeetri kõrgusel, milleks on vaja suuremat kiirust. Orbiidile saatmisel peab raketile andma kineetilise energia, millest piisaks õhutakistuse ületamiseks, vajalikule kõrgusele tõusmisel Maa gravitatsiooniväljas tehtud tööks ja horisontaalkiiruse saavutamiseks.

Teiseks kosmiliseks kiiruseks on kiirus, mida tuleb kehale anda Maa mõjupiirkonnast väljumiseks. Selleks peab keha kineetiline energia olema võrdne tema potentsiaalse energiaga Maa pinnal:

$$\frac{mv^2}{2} = \gamma \frac{Mm}{R_M} \,, \qquad (24)$$

millest

$$v_2 = \sqrt{2 g_o R_M} = \sqrt{2}\, v_1 = 11{,}2 \text{ km/s}. \qquad (25)$$

Teise kosmilise kiiruse vähendamiseks võib kasutada Maa pöörlemist oma telje ümber. Kõige suurem joonkiirus on ekvaatoril asuvail kehadel (465 m/s). Selle kiiruse võrra võib raketi algkiirus ekvaatorilt startides väiksem olla. Rakett tuleb saata horisontaalselt ida suunas.

Algkiirus, mis on vajalik keha eemaldamiseks päikesesüsteemist nimetatakse kolmandaks kosmiliseks kiiruseks. Et maapinnal olev keha tiirleb koos Maaga ümber Päikese kiirusega $v_o = 29{,}8$ km/s, siis kolmas kosmiline kiirus on minimaalne,

kui saadame raketi Maa orbitaalliikumise suunas. Päikesesüsteemist väljumiseks stardiga Maa orbiidilt, ilma Maa külgetõmmet arvestamata, on vaja kiirust

$$v_1 = \sqrt{2g_P R_o} - v_o = \sqrt{2g_{oP}\frac{R_P^2}{R_o}} - v_o = 12{,}3 \text{ km/s}, \qquad (26)$$

kus R_o on orbiidi raadius, R_P - Päikese raadius, g_P - Päikese raskuskiirendus Maa orbiidil, g_{oP} - raskuskiirendus Päikese pinnal ning v_o - Maa liikumise kiirus orbiidil. Raketi kineetilisest energiast peab aga piisama ka Maa külgetõmbejõust vabanemiseks. Seega

$$\frac{mv_3^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}, \text{ millest } v_3 = 16{,}7 \text{ km/s}. \qquad (27)$$

Selliste suurte algkiiruste andmine rakettidele ja kosmoselaevadele on tõsiseks tehniliseks probleemiks. Kõige edukamalt on neid küsimusi lahendanud nõukogude teadlased. Traditsioonid ulatuvad aga juba kaugemasse minevikku. Kosmoselendude teoreetiliste aluste loojaks oli K.E.Tsiolkovski (1857 - 1935), kes pühendas kogu oma elu kosmilise ruumi valdutamise ideele. Tsiolkovski koostas mitmesuguseid projekte ja mudeleid rakettide kohta ning andis ka valemi raketi maksimaalse kiiruse v arvutamiseks:

$$v = u \ln \frac{m_o}{m}, \qquad (28)$$

kus u on gaaside väljavoolu kiirus, m_o - raketi algmass, ning m - raketi mass kiirusel v. Valem näitab, et raketi maksimaalne kiirus on võrdeline gaaside väljavoolu kiirusega düüsist. Kuna vajalikud kosmilised kiirused on ette määratud, siis sõltub väljavoolu kiirusest ka raketi kasuliku massi suhe algmassi. Näiteks teise kosmilise kiiruse saavu-

tamiseks gaaside väljavoolu kiiruse u = 2000 m/s korral on m_0/m = 270, u = 4000 m/s korral aga m_0/m = 16,4. Kaasaegsetes tahke kütusega töötavates rakettmootorites on gaaside väljavoolu kiirus $(2 \div 2{,}5)\cdot 10^3$ m/s ning vedelkütusega töötavates rakettmootorites $(3 \div 3{,}5)\cdot 10^3$ m/s. Sellised kiirused pole siiski küllaldased, sest raketi vajaliku kasuliku massi korral on algmass liialt suur, mis tekitab tehnilisi raskusi. Sellest probleemist on üle saadud mitmeastmeliste rakettide ehitamisega, kus eelmine aste kiirendab järgmisi kui kasulikku koormust. Kütuse lõppedes vabastatakse vastav aste raketist. Keemilisel kütusel töötavaid rakettmootoreid ei ole otstarbekohane kasutada kosmilistel lendudel väljaspool tugevaid gravitatsioonivälju. Siin pole oluline suure tõukejõu saavutamine, vaid mootori pidev töö. Energiaallikatena sellel etapil kasutatakse elektrokeemilisi energiaallikaid ja Päikese patareisid. Suuri perspektiive pakuvad nn. plasmamootorid, milledes düüsist väljuvat plasmajuga kiirendatakse elektrostaatilise või magnetvälja abil. Energiaallikaks võib olla aatomireaktor.

Kosmilistel lendudel kerkib kompleksselt esile terve rida probleeme, mille lahendamine nõuab teaduse tippsaavutuste rakendamist. Näiteks raketi trajektoorile juhtimine ning liikumise korrigeerimine, kosmonaudi bioloogiline kaitse, sidevahendid, raketi maandamine jne.

Kõiki neid probleeme on lahendatud edukalt Nõukogude Liidus ning saavutatud kosmose vallutamisel ajalukku jäävaid tulemusi. Tähtsamatest võiks nimetada:

04.10.57.a. - Maa esimene kunstlik kaaslane, mass 83,6 kg.

02.01.59.a. - Kuu rakett, mille viimase astme mass oli 1472 kg.

15.05.60.a. - esimene kosmoselaev, mass 4540 kg.

12.04.61.a. - esimene kosmoselaev inimesega kosmoses. Kosmonaudiks Juri Gagarin.

11.08.62.a. - kosmonautide Andrian Nikolajevi ja Pavel Popovitši grupilend.

12.10.64.a. - lend kolmekohalisel kosmoselaeval. Kosmonautideks Vladimir Komarov, Konstantin Feoktistov ja Boriss Jegorov.

II. Osakeste põrked

1. Üldmõisteid

Sõna "põrge" omab antud juhul laiemat tähendust tema igapäevase tähendusega võrreldes. Põrke all mõistetakse ükskõik millist kahe või enama keha kohtumist, mis kestab lühikest aega. Põrke termini alla mahub piljardikuulide kokkupõrge, aatomite ja aatomituumade põrge (Coulomb'i jõudude mõjul liiguvad osakesed seejuures hüperboolsetel trajektooridel), hüpe trammile, kuuli tungimine seina jne. Põrke kestus on väga lühike. Selle aja jooksul osakeste vahel mõjuv jõud kasvab mitme suurusjärgu võrra ning väheneb jälle nullini.

Põrkuvale kehale mõjuv jõud põhjustab tema liikumishulga muutuse, mis peab olema võrdne jõu impulsiga:

$$\vec{F}\cdot dt = d(m\vec{v}). \tag{29}$$

Integreerimisel saame:

$$\int_0^{\Delta t} \vec{F}\cdot dt = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \Delta(m\vec{v}), \tag{30}$$

kus Δt on põrke kestus, s.o. aeg mille vältel osakeste vahel mõjub märgatav jõud.

On otstarbekohane opereerida keskmise põrke jõuga $\vec{F}_k$, mis on defineeritud võrrandiga

$$\vec{F}_k\cdot\Delta t = \int_0^{\Delta t} \vec{F}\cdot dt. \tag{31}$$

Võrrand (30) saab siis kuju:

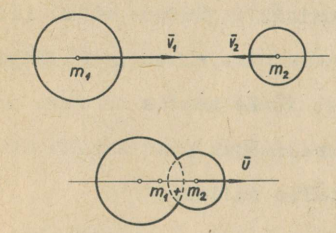
$$\vec{F}_k\cdot\Delta t = \Delta(m\vec{v}). \tag{30a}$$

Allpool vaatleme tsentraalset põrget. Tsentraalsel põrkel

liiguvad põrkuvad kehad mööda raskuskeskmeid läbivat sirget. Vaatleme kahte äärmist juhtu: absoluutselt plastilist ja absoluutselt elastset põrget.

2. Absoluutselt plastiline põrge

Absoluutselt plastilise põrke korral kehad deformeeruvad, ühinevad ning liiguvad koos edasi (joon. 11). Kui kehadele ei mõju välisjõude, siis võime kasutada liikumishulga jäävuse seadust:



Joon. 11

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u, \qquad (32)$$

millest kehade liikumise kiirus

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} . \qquad (33)$$

Plastilisel põrkel muutub osa kehade kineetilisest energiast põrkel tekkiva jäava deformatsiooni tõttu teisteks energialiikideks, peamiselt soojusenergiaks. Energia jäävuse seadust rakendades võime arvutada, milline osa kineetilisest energiast muutub teisteks energialiikideks.

$$Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} . \qquad (34)$$

Sageli, näiteks sepistamisel, on teine keha enne põrget paigal, $v_2 = 0$. Siis plastiliseks deformatsiooniks kuluv energia

$$Q = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} = W_{kl} \frac{m_2}{m_1 + m_2} , \qquad (35)$$

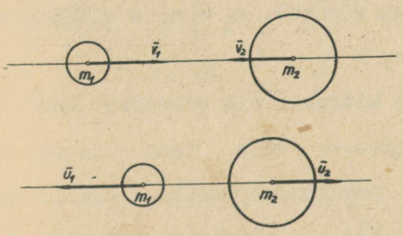
kus W_{kl} on liikuva keha (vasara) energia enne põrget. Sepistamise kasutegur

$$\eta = \frac{Q}{W_{kl}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} . \qquad (36)$$

Mida massiivsem on alasi, seda suurem on sepistamise kasutegur. Antud juhul pole arvestatud maapinna mõju, millele toetub alasi.

3. Absoluutselt elastne põrge

Absoluutselt elastsel põrkel säilib nii süsteemi liikumishulk kui ka kineetiline energia. See tähendab, et pärast põrget taastuvad täielikult põrke vältel deformeeritud kehade kujud. Ligikaudu vastab absoluutselt elastsele põrkele elevandiluust kuulide põrge.



Joon. 12

Tähistame põrkuvate kerade kiirused enne põrget v_1 ja v_2 ja pärast põrget u_1 ja u_2 (joon. 12). Eelduse kohaselt täidetakse liikumishulga ja kineetilise energia jäävuse seadused:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2 ,$$
$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} \qquad (37)$$

ehk

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2) ,$$
$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2) . \qquad (37a)$$

Jagades teise võrrandi esimesega ning arvestades, et $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, saame:

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2 , \qquad (38)$$

millest

$$u_2 = v_1 + u_1 - v_2 . \qquad (38a)$$

Asetades saadud tulemuse esimesse võrrandisse, leiame, et

esimese kera kiirus pärast põrget

$$u_1 = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \qquad (39)$$

ja analoogiliselt

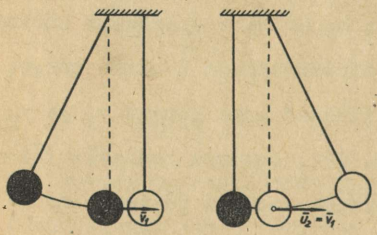
$$u_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}. \qquad (40)$$

Vaatleme kahte olulist erijuhtu:

1. Põrkuvate kehade massid on võrdsed, $m_1 = m_2 = m$. Siis

$$u_1 = v_2 \text{ ning } u_2 = v_1 .$$

Põrkuvad kehad vahetavad oma kiirused nii suuruselt kui ka suunalt. Viimase illustreerimiseks võib teha katse pendlitega, mille kuulid on küllalt elastsest materjalist (joon.13). Paigalseisva pendliga kokkupõrkamisel jääb langev pendel paigale, kusjuures paigalseisev hakkab liikuma langeva pendli kiirusega.



Joon. 13

2. Olgu $v_2 = 0$ ning $m_2 \ll m_1$ (põrge otse vastu seina), siis

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \cong - v_1 \quad \text{ja} \quad u_2 = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2} \cong 0.$$

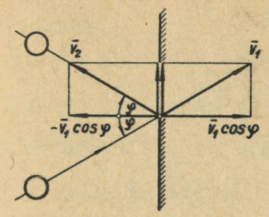
Seega põrkub esimene keha seinalt niisama suure, kuid vastassuunalise kiirusega. Keha liikumishulga muutus on:

$$mv - (- mv) = 2mv.$$

Kui põrge toimub seinaga mingi nurga all, siis võib kiiruse lahutada kaheks komponendiks: tangentsiaalseks ja normaalseks (joon. 14). Hõõrdumise puudumisel jääb kiiruse tangentsiaalkomponent põrkel muutumatuks. Normaalkomponent muutub

aga vastupidiseks, säilitades oma absoluutväärtuse. Selle tulemusena põrkuv keha nagu peegelduks seinalt. Liikumishulga muutus

$$\Delta(mv) = 2mv_1 \cos\varphi . \qquad (41)$$



Joon. 14

III. Vedelike ja gaaside mehaanika

1. Probleemi ulatus

Vaatamata sellele, et vedelike ja gaaside vahel valitseb suur erinevus, allub paljude vedelike ja gaasidega seotud probleemide lahendus samadele seadustele ning võrranditele. Neid probleeme uurivat teadusharu nimetatakse hüdroaeromehaanikaks. Hüdroaeromehaanikas antakse sõnale "vedelik" üldisem tähendus, koondades sellesse ka gaasi, kui ta valitud tingimustel käitub sarnaselt vedelikuga. Kiirusteni 70 m/s võib gaasi praktiliselt lugeda mittekokkusurutavaks vedelikuks. Näiteks muutub vee ruumala toatemperatuuril 200 atm rõhu rakendamisel kõigest 1%, võrreldes tema ruumalaga normaalrõhul. Õhu tihedus kiirusel 10 m/s on 0,1% suurem paigalseisva õhu tihedusest. Praktilistel arvutustel ning küsimuste põhimõttelisel lahendamisel ei ole sellistel muutustel erilist tähtsust.

Voolavat vedelikku või gaasi vaadeldakse mehaanikas esimeses lähenduses kui masspunktide kogu, kus masspunktid võivad vabalt liikuda nii, et kaugused nende vahel ei muutu. Seega ei muutu ka vedeliku ruumala. Samuti säilib liikumisel vedeliku masspunktide suunatud liikumise summaarne kineetiline energia, s.t. puudub sisehõõrdumine. Niisugust vedeliku mudelit nimetatakse mittekokkusurutavaks ideaalseks vedelikuks. Mudeli täiustamisel arvestatakse sisehõõrdejõude. Gaaside väga suurtel voolamiskiirustel (võrreldavad heli- ja üleheli-kiirusega) tuleb arvestada ka nende kokkusurutavust. Täiustatud mudelis erinevad niisiis gaasid vedelikest.

Vaatleme kõigepealt ideaalse mittekokkusurutava vedeliku liikumist. Hiljem vaatame, kuidas mõjutab seda liikumist sisehõõrdumine.

2. Rõhk liikumatus vedelikus

Liikumatusse vedelikku paigutatud kehale avaldab vedelik survet. Surve mõjub risti keha pinnaga, kuna tangentsiaalkomponent paneks vedeliku kiiremini liikuma.

Pinnaühikule mõjuvat normaaljõudu (survet) nimetatakse rõhuks:

$$p = \frac{F_n}{S} . \qquad (42)$$

Rõhku seisvas vedelikus nimetatakse hüdrostaatiliseks rõhuks. Pascali seadus ütleb, et hüdrostaatiline rõhk mõjub ühteviisi kõikides suundades.

Rõhu mõõtühikuks on jõu ühik pindala ühiku kohta. SI süsteemis

$$[p] = \frac{1N}{1m^2} = 1\,\frac{N}{m^2} .$$

Praktikas leiavad kasutamist veel järgmised rõhu mõõtühikud:

1 tehniline atmosfäär (at) = $9{,}80665 \cdot 10^4$ N/m^2,

1 füüsikaline atmosfäär (atm) = 760 mm Hg = 101325 N/m^2,

1 baar (bar) = 10^5 N/m^2,

1 millimeeter elavhõbedasammast (mm Hg = Torr) =

= 133,322 N/m^2,

1 millimeeter veesammast (mm H_2O) = 9,80665 N/m^2.

Gravitatsiooniväljas asuva vedeliku ülemised kihid avaldavad alumistele survet. Teatud sügavusel on rõhk määratud ühi-

kulisele pinnale toetuva vedelikusamba kaaluga. Kui vedelikusamba ristlõike pindala on S, vedeliku tihedus ϱ, samba kõrgus h ja kaal P, siis rõhk

$$p = \frac{P}{S} = \frac{\varrho g S h}{S} = \varrho g h. \qquad (43)$$

Vedeliku pinnal valitseva välisrõhu p_0 korral on rõhk vedelikus

$$p = \varrho g h + p_0. \qquad (43a)$$

Pascali seaduse kohaselt mõjub see rõhk kõikides suundades ühteviisi.

Vedelikus asuvale kehale mõjuvad rõhujõud $dF = p \cdot dS$, kus p on määratud seosega (43). Et keha ülemisele pinnale rakenduvad väiksemad rõhujõud kui alumisele pinnale, siis mõjub kehale üleslükkejõud, mille suurus on määratud Arhimedese seadusega: vedelikku või gaasi asetatud kehale mõjuv üleslükkejõud on võrdne keha poolt väljatõrjutud vedeliku või gaasi kaaluga:

$$Ü = \varrho g V, \qquad (44)$$

kus ϱ on vedeliku või gaasi tihedus ning V keha ruumala.

3. Vedeliku voolamise kirjeldamine ja vaatlemine. Pidevuse võrrand

1. Puhta, ühtlase vedeliku voolamist me ei näe. Voolamise nähtavaks tegemiseks segame vedelikesse peenikesi tahke aine kübemeid, mille tihedus võimalikult vähe erineb vedeliku tihedusest. Kübeme väikese massi tõttu mõjuvad talle väikesed inertsijõud, kuid suhteliselt suure kokkupuutepinna tõttu vedelikuga - suured hõõrdejõud. Seetõttu liigub niisugune kübe peaaegu samuti nagu vedeliku osakesed. Jälgides kübeme liikumist, jälgime me tegelikult vedeliku osakeste liikumist.

2. Vedeliku liikumise kirjeldamiseks loome välja mõiste. Vooluväli on ruum, millest vedelik läbi voolab. Selle ruumi igas punktis kujutame kiiruse, millega vedeliku osakesed punkti läbivad. Vooluväli on seega vektorväli ja teda võib kujutada väljajoonte abil, mida nimetatakse voolujoonteks. Voolujoone igas punktis on väljavektor (antud juhul kiirus) joone puutuja suunaline. Kiirus on aga teatavasti trajektoori puutuja suunaline. Seega on voolujoon vedeliku osakese trajektooriks. Voolujoonte nähtavaks tegemiseks võime peenikestest avadest lasta läbipaistvasse vedelikku värvilise vedeliku jugasid.

3. Kui vedeliku vooluväli ajaliselt ei muutu, siis nimetame voolamist statsionaarseks. Kui vedeliku voolamisel erinevate voolukiirustega kihid ei segune, nimetatakse voolamist laminaarseks.

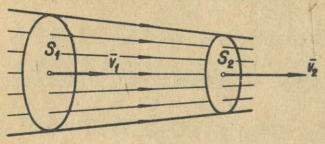
Suurtel voolukiirustel hakkavad kihid segunema - voolujooned katkevad, tekivad keerised. Sellist korrapäratute keeristega voolamist nimetatakse turbulentseks.

Voolujoontega piiratud vedeliku osa nimetatakse vooluto-ruks.

4. Kui mittekokkusurutav vedelik voolab pidevalt läbi muutuva ristlõikega toru, siis ajaühikus mingisse toru ossa voolanud vedeliku hulk on võrdne sealt väljavoolanud vedeliku hulgaga (joon. 15). Siit aga järeldub, et toru ükskõik millist ristlõiget läbib ajaühikus võrdne hulk vedelikku. Ajaühikus mingit ristlõiget läbinud vedeliku ruumala on võrdne ristlõike pindala ja voolukiiruse korrutisega antud rist-

lõikes. Ülaltoodu võime väljendada pidevuse võrrandina:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = S_3 v_3 = \text{const.} \qquad (45)$$

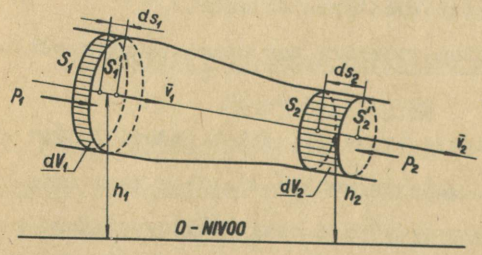


Joon. 15

Pidevuse võrrandist on näha, et voolukiirus on pöördvõrdeline toru ristlõike pindalaga. Väiksemas ristlõikes on voolukiirus suurem. Jooniselt 15 näeme, et voolujoonte tihedus on võrdeline voolukiirusega. See asjaolu võimaldab voolujoonte jaotuse järgi määrata voolukiirusi (näiteks kiiruste jaotust lennuki tiiva ümber jne.).

4. Bernoulli võrrand*

Bernoulli võrrandi tuletamiseks kasutame statsionaarselt voolava kindla vedeliku hulga kohta energia jäävuse seadust. Vaatleme näiteks vedeliku hulka, mis asub ristlõigete S_1 ja S_2 vahel (joon. 16). Aja dt vältel nihkub see vedelik ristlõigete S_1' ja S_2' vahele. Niisugusel nihkel muutub vedeliku potentsiaalne ja kineetiline energia. Energia jäävuse seaduse kohaselt peab



Joon. 16

* Daniel Bernoulli (1700 - 1782). Peterburi Teaduste Akadeemia liige, hüdrodünaamika ja gaaside kineetilise teooria rajaja.

see energia muutus olema võrdne välisjõudude tööga. Energia muutuse üleskirjutamisel peame silmas, et ristlõigete S_1' ja S_2 vahel asuvas vedelikus ei toimu mitte mingisuguseid muutusi ning ka tema kineetiline ja potentsiaalne energia on jäävad. Kõik see viib selleni, nagu oleks vedelik ristlõigete S_1S_1' vahelt kantud ristlõigete S_2S_2' vahele. Sel juhul mehaanilise energia muutus

$$dW = \frac{\varrho \cdot dV \cdot v_1^2}{2} + \varrho \cdot dV \cdot gh_1 - \left(\frac{\varrho \cdot dV \cdot v_2^2}{2} - \varrho \cdot dV \cdot gh_2\right), \qquad (46)$$

kus mittekokkusurutava vedeliku korral $dV = S_1 \cdot ds_1 = S_2 \cdot ds_2$; $\frac{\varrho \cdot dV \cdot v^2}{2}$ on kineetiline energia ja $\varrho \cdot dV \cdot gh$ potentsiaalne energia. See mehaanilise energia muutus peab olema võrdne rõhujõudude tööga

$$dA = p_2 S_2 \cdot ds_2 - p_1 S_1 \cdot ds_1 = (p_2 - p_1)dV. \qquad (47)$$

Võrdsustades avaldised (46) ja (47), grupeerides samade indeksitega liikmed ühele poole ja jagades kogu võrrandi dV-ga, saamegi Bernoulli võrrandi:

$$p_1 + \varrho g h_1 + \frac{\varrho v_1^2}{2} = p_2 + \varrho g h_2 + \frac{\varrho v_2^2}{2} = p_o = \text{const.} \qquad (48)$$

Võrrandi jagamisel ruumalaga dV saime energiate asemel energiate ruumtihedused, mis teiselt poolt on võrdsed rõhkudega.

Esimene liige on välisjõudude poolt tekitatud hüdrostaatiline rõhk. Teine liige on vedelikusamba raskusest tingitud hüdrostaatiline rõhk. Pascali seaduse kohaselt mõjuvad need rõhud kõikides suundades ühteviisi. Kolmas liige, nn. hüdrodünaamiline rõhk, mõjub ainult voolukiiruse suunas. Kuna ka kaks esimest rõhku mõjuvad voolukiiruse suunas, siis võib

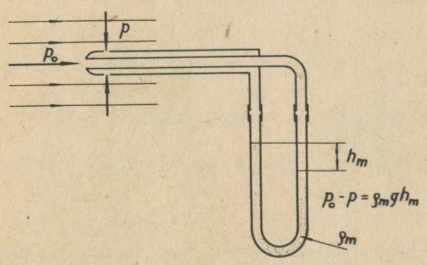
Bernoulli võrrandi sõnastada järgmiselt: voolu suunas mõjuvate rõhkude summa piki vootoru on konstantne.

Bernoulli võrrandist järeldub, et hüdrodünaamilise rõhu kasvades (kiiruse kasvades) peab antud ristlõikes hüdrostaatiline rõhk vähenema. Et hüdrostaatiline rõhk mõjub kõikides suundades ühteviisi, siis väheneb sel juhul vooluotoru seintele mõjuv rõhk. See asjaolu on määrava tähtsusega paljudes hüdrodünaamika nähtustes ja rakendustes.

Vaatleme konkreetselt mõningaid Bernoulli võrrandi rakendusi.

1. Vedeliku voolukiiruse mõõtmine.

Asjaolu, et hüdrostaatiline rõhk mõjub kõikides suundades ning hüdrodünaamiline rõhk ainult voolu suunas, lubab mõõta voolu kiirust nn. Pitot'-Prandtli toru abil. Mõõteriist koosneb kahest teineteise sisse paigutatud ja vedelikmanomeetriga ühendatud torust (joon. 17). Mõõteriist paigutatakse voolavasse keskkonda nii, et ühte toru avasse mõjub kogurõhk p_o, teise toru avad on külje peal ja nendesse mõjub ainult hüdrostaatiline rõhk p_s. Bernoulli võrrandi kohaselt on aga kogurõhu ja hüdrostaatilise rõhu vahe võrdne dünaamilise rõhuga:



Joon.17

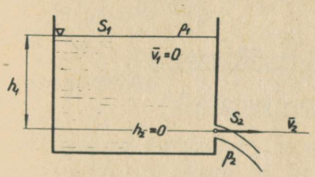
$$p_o - p_s = \frac{\rho v^2}{2},$$

millest voolukiirus

$$v = \sqrt{\frac{2(p_o - p_s)}{\varrho}} . \qquad (49)$$

2. Torricelli seadus.

Torricelli seadus määrab anuma avast väljavoolava vedeliku kiiruse (joon. 18). Kirjutame Bernoulli võrrandi anumast väljavoolava vedeliku ülemise ristlõike S_1 ja väljavoolu ristlõike S_2 kohta:



Joon. 18

$$\varrho g h_1 + p_1 + \frac{\varrho v_1^2}{2} = \varrho g h_2 + p_2 + \frac{\varrho v_2^2}{2} .$$

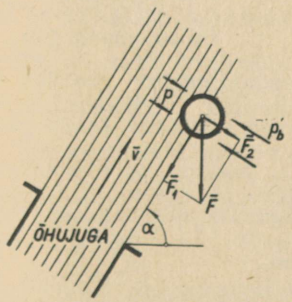
Õhurõhkude vahe $p_2 - p_1$ on vedelikusamba rõhuga $\varrho g h_1$ võrreldes väga väike. Kui $S_1 \gg S_2$, siis vedeliku pinna alanemise kiirus $v_1 \cong 0$ ja võrrand saab kuju:

$$\varrho g h_1 = \frac{\varrho v_2^2}{2} ,$$

millest vedeliku väljavoolu kiirus

$$v_2 = \sqrt{2gh_1} . \qquad (50)$$

3. Bernoulli võrrandi abil on seletatavad paljud esimesel pilgul paradoksaalsetena näivad nähtused, näiteks kerge palli hõljumine kaldu suunatud õhujoas (joon. 19). Kuna õhujoas valitseb suur dünaamiline rõhk, siis on staatiline rõhk joas väiksem juga ümbritsevast õhurõhust. Raskusjõu komponent F_2 tasakaalus-



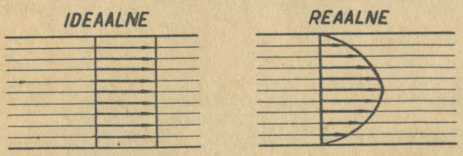
Joon. 19

tatakse staatiliste rõhkude vahest põhjustatud jõuga ja komponent F_1 dünaamilise rõhu poolt tekitatud jõuga.

Taolisel joa imeval toimel põhineb paljude seadmete töö, näiteks pulverisaatorid, veejoapumbad, injektorid jne. Samaga on seletatav laevade ohtlik "külgetõmme" teineteisest lähedalt möödumisel, majade katuste kerkimine tormi korral jne.

5. Vedelike ja gaaside sisehõõrdumine ning selle mõõtmise meetodeid

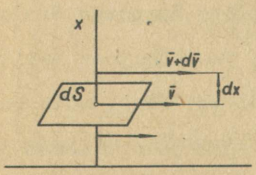
Reaalsetes vedelikes mõjuvad molekulide vahel molekulaarjõud, mis põhjustavad sisehõõrdumist. Vedeliku voolamisel torus kleepub toruga kokkupuutuv vedelikukiht toru seinale. Toru keskosale lähenedes suureneb voolukiirus ja saavutab maksimumi toru keskel. Joonisel 20 on näidatud vedeliku voolukiiruste jaotus ideaalses ja reaalses vedelikus.



Joon. 20

Laminaarsel voolamisel kehtib sisehõõrdejõu kohta Newtoni valem (joon. 21):

$$F = \eta \frac{dv}{dx} dS. \qquad (51)$$



Joon. 21

Valem annab jõu, mis mõjub kahe vedelikukihi eralduspinnal, kui kiiruse gradient selle pinna kohas on $\frac{dv}{dx}$. Tegurit η nimetatakse sisehõõrdeteguriks ehk dünaamiliseks viskoossuseks.

Viskoossus sõltub tunduvalt temperatuurist. Temperatuuri tõustes vedelike viskoossus väheneb

ja gaasidel suureneb. Allpool on toodud mõnede ainete viskoossused.

Aine	Temperatuur °C	Viskoossus (dünaamiline) $\frac{N \cdot s}{m}$
Õhk	20	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$
Vesi	20	$1{,}0 \cdot 10^{-4}$
Vesi	98	$0{,}3 \cdot 10^{-4}$
Glütseriin	20	0,85
Pigi	20	10^{7}

Sageli kasutatakse ka nn. kinemaatilist viskoossust

$$\nu = \frac{\eta}{\varrho}, \tag{52}$$

kus ϱ on voolava aine tihedus. Kinemaatilise viskoossuse mõõtühikuks on 1 $\frac{m^2}{s}$.

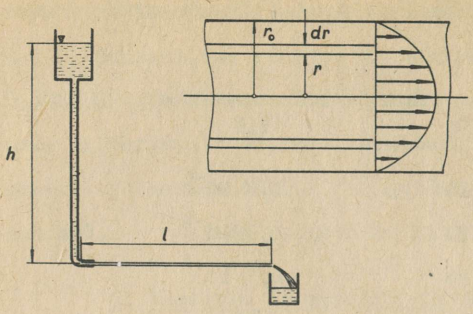
Gaaside kineetilises teoorias tuletatakse sisehõõrdumisteguri jaoks järgmine avaldis:

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{v} \varrho, \tag{53}$$

kus $\bar{\lambda}$ on gaasi molekulide keskmine vaba tee, $\bar{v}$ - keskmine aritmeetiline kiirus ning ϱ - gaasi tihedus.

See valem on kooskõlas katsetega. Ka vedelikkude jaoks on võimalik tuletada sisehõõrdeteguri valemit, kuid kooskõla on vaid kvalitatiivne. Vaatleme mõningaid vedelike sisehõõrdeteguri määramise meetodeid.

1. Poiseuille'i meetod põhineb vedeliku voolamisel peenes kapillaaris (joon. 22). Olgu kapillaari ava raadius r_0 ning pikkus l. Sümmeetria tõttu on vedeliku kiirus teljest võrdsetel kaugustel asuvates punktides sama. Eraldame mõtteliselt vedeliku silindri raadiusega r. Newtoni valemi (51) kohaselt



Joon. 22

mõjub silindri külgpinnale hõõrdejõud

$$dF = \eta 2\pi rl \frac{dv}{dr}.$$

Statsionaarsel voolamisel on hõõrdejõud tasakaalustatud rõhkude vahega silindri otstel

$$-2\eta rl \frac{dv}{dr} = \Delta p \pi r^2,$$

millest

$$dv = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r \cdot dr.$$

Miinusmärk tähendab, et raadiuse kasvades kiirus väheneb.

Integreerimine annab:

$$v = -\frac{\Delta p}{2\eta l} \frac{r^2}{2} + C. \qquad (54)$$

Integreerimiskonstandi määrame tingimusest, et $r = r_o$ korral on $v = 0$. See tähendab, et toru seinaga kokkupuutuv kiht on toru külge kleepunud. Seega

$$C = \frac{\Delta p}{2\eta l} \frac{r_o^2}{2}$$

ning kiirus

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l} (r_o^2 - r^2). \qquad (54a)$$

Viimane tulemus määrab kiiruse jaotuse kapillaari ristlõikes. Torust ajaühikus läbivoolanud vedeliku hulk

$$V = \int_0^{r_o} v 2\pi r \cdot dr = \frac{2\pi \cdot \Delta p}{4\eta l} \int_0^{r_o} r(r_o^2 - r^2) dr =$$

$$= \frac{2\pi \cdot \Delta p}{4\eta l} \left[\frac{r^2 r_o^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^{r_o} = \frac{\pi r_o^4 \cdot \Delta p}{8\eta l}.$$

Siit viskoossus

$$\eta = \frac{\pi r_o^4 \cdot \Delta p}{8Vl} . \qquad (55)$$

Viskoossuse määramiseks mõõdetakse rõhkude vahe kapillaari otste vahel ning ajaühikus kapillaarist läbivoolanud vedeliku ruumala.

2. Suure viskoossuse korral kasutatakse Stokesi meetodit. Stokes näitas, et vedelikus langevale kuulile mõjub hõõrdejõud

$$F = 6\pi\eta rv, \qquad (56)$$

kus r on kuuli raadius ning v ühtlaselt langeva kuuli kiirus. Ühtlasel langemisel on tasakaalus kõik kuulile mõjuvad jõud: raskusjõud $\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g$, üleslükkejõud $\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_1 g$ ning hõõrdejõud. Kui on teada vedeliku tihedus ϱ_1 ja kuuli tihedus ϱ, siis jõudude tasakaalu tingimusest

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_1 g + 6\pi\eta rv$$

võime leida viskoossuse

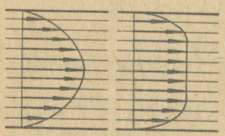
$$\eta = \frac{2}{9} \frac{\varrho - \varrho_1}{v} gr^2 . \qquad (57)$$

3. Tehnikas kasutatakse viskoossuse määramiseks ka Engleri viskosimeetrit. Engleri viskosimeeter kujutab endast väljavoolutoruga anumat, mille mõõtmed on standardiseeritud. Anumast lastakse 20°C juures välja voolata võrdsed ruumalad (200 cm^3) vedelikke. Engleri kraadid saadakse uuritava vedeliku väljavoolu aja t jagamisel vee väljavoolu ajaga t_o:

$$\eta = \frac{t}{t_o} (^oE). \qquad (58)$$

6. Laminaarne ja turbulentne voolamine

Väikestel voolukiirustel on voolamine laminaarne. Voolukiiruse kasvades väheneb laminaarse voolamise stabiilsus. Teatud kiirusest alates (kriitiline kiirus) tekivad vedelikus keerised ning intensiivne vedelikukihtide segunemine. Laminaarne voolamine muutub turbulentseks. Turbulentne voolamine pole enam statsionaarne, sest antud kohas muutub voolukiirus korrapäratult. Seega võib turbulentsel voolamisel rääkida ainult vedeliku voolamise keskmisest kiirusest. Turbulentsel voolamisel muutub voolukiirus järsult toru seinte läheduses, toru keskosas on kiiruste jaotus peaaegu ühtlane. Kiiruste jaotus laminaarsel ja turbulentsel voolamisel on näidatud joonisel 23. Turbulentsel voolamisel on keeriste tõttu takistus voolamisel väga suur. Seega on väga oluline, et voolamine oleks laminaarne.



Joon. 23

Inglise teadlane Reynolds näitas, et voolamist võib iseloomustada dimensioonita arvuga, mida tänapäeval nimetatakse Reynoldsi arvuks:

$$Re = \frac{\varrho v l}{\eta} = \frac{v l}{\nu}, \qquad (59)$$

kus v on voolu keskmine kiirus ja l voolu ristlõiget iseloomustav mõõde. Viimaseks on näiteks ümarristlõike korral diameeter ja ruutristlõike korral serva pikkus.

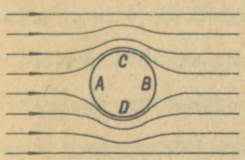
Reynoldsi arvul on suur tähtsus sarnasuse teoorias. Erinevate vedelike voolamine mitmesuguse läbimõõduga torudes on täiesti ühesugune kui nendel voolamistel Reynoldsi arvud on võrdsed.

Reynoldsi arvu, mille puhul laminaarne voolamine hakkab muutuma turbulentseks nimetatakse kriitiliseks Reynoldsi arvuks. Kriitiline Reynoldsi arv sõltub väga mitmesugustest teguritest: toru seinte siledusest, vedeliku torusse sisenemise moodusest, toru paindekohtade kõverusest, vibratsioonist jne. Siledates torudes voolamisel on kriitiline Reynoldsi arv $Re_k = 2300$.

7. Kehade liikumine vedelikes ja gaasides. Frontaaltakistus ja tõstejõud

Kehade liikumisel vedelikus või gaasis mõjub kehale resulteeriv jõud R, mida võib lahutada kaheks komponendiks - liikumissihiliseks ning liikumisega ristsihiliseks komponendiks (joon. 24). Esimest nimetatakse frontaaltakistuseks ning teist tõstejõuks. Seejuures pole oluline, kas liigub keskkond keha suhtes või keha keskkonna suhtes. Liikumissuuna suhtes sümmeetrilisele kehale (näiteks silindrile) mõjuvate jõudude summa on ideaalses vedelikus liikumisel null (joon. 25).

Joon. 24



Joon. 25

Jooniselt selgub, et külgedele C ja D mõjuvad rõhujõud on võrdsed ning vastassuunalised, sest voolujooned haaravad külgi sümmeetriliselt. Võrdsed ja vastassuunalised on ka külgedele A ja B mõjuvad rõhujõud. Küljele A mõjuv rõhujõud on tasakaalustatud küljelt B tõukuva vedeliku rõhujõuga.

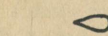
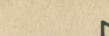
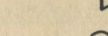
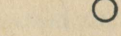
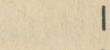
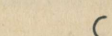
Teistsugune on olukord, kui liikumine toimub viskoosses vedelikus. Sel juhul kleepub väga õhuke vedelikukiht keha külge ning liigub koos kehaga. Keha külge kleepunud kiht kisub sisehõõrdumise tõttu endaga kaasa kaugemaid kihte, millede kiirus järk-järgult väheneb, muutudes küllalt kaugel kehast nulliks. Seega on keha ümbritsetud piirkihiga, milles toimub vedeliku kiiruse muutus. Piirkihis mõjuvad hõõrdejõud muudavad voolamise pilti. Hõõrdejõudude mõjul rebitakse osa piirkihist kehalt lahti, mille tulemusena keha taha tekivad keerised ning alarõhk profiili esipinna suhtes. Hõõrdejõud ja keeristest põhjustatud jõud moodustavad frontaalse takistuse. Frontaalse takistuse ületamiseks tehtud töö muutub soojuseks. Frontaalne takistus sõltub tunduvalt keha kujust ning keha asendist voolu suhtes. Seda võetakse arvesse takistusteguri c_x abil. c_x määratakse katseliselt hüdro- või aerodünaamilistes kanalites. Frontaalne takistus

$$X = c_x \frac{\varrho v^2}{2} S, \qquad (60)$$

kus ϱ on keskkonna tihedus, v - keha liikumise kiirus, S - keha suurima ristlõike pindala (lennuki kandepindade korral on S kandepindade pindala plaanis). $\frac{\varrho v^2}{2}$ on keha liikumise kiirusele vastav dünaamiline rõhk.

Frontaalset takistust võib tunduvalt vähendada, kui valida niisuguse kujuga keha, mis ei soodusta keeriste tekkimist. Keha, mille kuju ühtib enam-vähem teda ümbritsevate voolujoontega, nimetatakse voolujooneliseks kehaks. Voolujoonelise keha takistus on liikumisel minimaalne.

Allpool on võrreldud mõningate kehade takistust voolujoonelise keha takistusega. Liikumissuund on näidatud noolega.

Voolujooneline keha (tilk)		1.
Kinnise põhjaga koonus		7,5.
Kera		9.
Ruudukujuline plaat		25.
Õõnes poolkera		30.
Õõnes poolkera		7.

Tõstejõu põhjustab hüdrostaatiliste jõudude jaotus kehal. Kui keha profiili haaravad voolujooned läbivad profiili peal pikema tee, siis nõuab pidevuse tingimus seal suuremat voolukiirust. Bernoulli võrrandi kohaselt peab profiili peal valitsema suurema dünaamilise rõhu tõttu väiksem staatiline rõhk kui profiili all. Staatiliste rõhkude vahe põhjustabki tõstejõu

$$Y = c_y \frac{\varrho v^2}{2} S, \qquad (61)$$

kus c_y on profiili kuju ning keha asendit arvestav tõstetegur. c_y määratakse katseliselt. Lennukite kandepindade konstrueerimisel püütakse saavutada, et suhe c_x/c_y oleks võimalikult väike.

Aerodünaamika ning kogu lennuasjanduse arengus on suuri teeneid vene teadlasel Nikolai Jegorovitš Žukovskil (1847 - 1921), kes uuris kandepinna geomeetrilise kuju mõju aerodünaamilisele tõstetegurile ning konstrueeris sobivaima tiiva profiili (Žukovski profiili). Samuti lahendas ta propelleri tõmbejõu probleemi. Žukovski mõtteid arendas edasi akadeemik Sergei Aleksejevitš Tšaplõgin (1869 - 1942), kes andis teooriad tõstejõu arvutamiseks mittestatsionaarsel voolamisel, õhu kokkusurutavuse mõju ning kandepindade arvutamiseks.

IV. Mehaanilised võnkumised

1. Üldmõisteid

Võnkumisnähtustele on iseloomulik mingi füüsikalise protsessi ajaline korduvus. Iseloomulikeks võnkumisnähtusteks on kella pendli võnkumine, pilli keele võnkumine, kondensaatori pinge muutumine võnkekontuuris jne. Vastavalt sellele, millise füüsikalise suuruse võnkumisega on tegu, võib võnkumisi liigitada mehaanilisteks, elektromagnetilisteks jne. Antud peatükis vaatleme mehaanilisi võnkumisi.

Seejuures piirdume kõige lihtsama mudeli - masspunkti võnkumise vaatlemisega. Sellist mudelit nimetatakse sageli koondatud massiga süsteemiks. Niisugusel süsteemil on lihtsamal juhul ainult üks vabadusaste, s.o. sõltumatute koordinaatide arv, millega on määratud võnkuva masspunkti asukoht. Ühe vabadusastme korral toimub liikumine mööda sirget.

2. Harmooniline võnkumine

Lihtsaimaks võnkumiseks on harmooniline võnkumine. Punkti harmoonilist võnkumist on otstarbekohane kirjeldada ringliikumise abil: kui mingi punkt liigub ühtlaselt nurkkiirusega ω, siis selle punkti projektsioon sooritab ringjoone diameetril harmoonilist võnkumist (joon. 26).

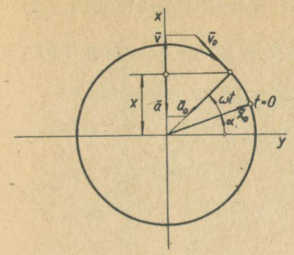
Joonisel 32 loeme pöördenurka y-teljest ning projekteerime liikuva punkti x-teljele. Ringjoonel liikuva punkti asukoha määrame pöörleva vektoriga $\vec{x}_0$. Nagu näha jooniselt, on ajamomendiks $t = 0$ vektor $\vec{x}_0$ pöördunud juba nurga φ võrra, mida nimetame algfaasiks. Aja t möödudes on vektor pöördunud

nurga

$$\alpha = \omega t + \varphi \qquad (62)$$

võrra. Tema projektsioon ringi diameetrile annab harmooniliselt võnkuva punkti hälbe

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi). \qquad (63)$$

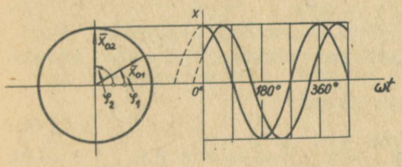


Joon. 26

Kui võtta punkti projektsioon y-teljele, siis oleks hälbe muutumine antud koosinusseadusega.

Seega on harmoonilisel võnkumisel punkti hälbe ajaline muutumine antud kas siinus- või koosinusfunktsiooniga.

Joonisel 27 on esitatud kahe harmoonilise võnkumise graafikud $x = f(t)$, millede algfaasid on $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$ ja $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. Antud juhul on võnkumiste algfaaside vahe $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$.



Joon.27

Harmoonilist võnkumist iseloomustatakse järgmiste suurustega:

1. Mingi võnkuva suuruse maksimaalset väärust nimetatakse amplituudiks. Et siinus- või koosinusfunktsiooni maksimaalne absoluutväärtus on 1, siis on hälbe amplituudiks maksimaalne hälve x_0.

2. Võnkeperiood T on aeg, mille jooksul tehakse üks täisvõnge. Võnkuv punkt on sooritanud täisvõnke, kui pöörlev vektor $\vec{x}_0$ on teinud ühe täispöörde.

3. Sagedus f on ajaühikus sooritatud täisvõngete arv. Sageduse mõõtühikut - 1 täisvõnge sekundis - nimetatakse hertsiks (Hz). Sageduse saame, kui jagame ajaühiku täisvõnke sooritamiseks kulutatud ajaga - perioodiga:

$$f = \frac{1}{T}. \tag{64}$$

4. Pöörleva vektori nurkkiirust

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{65}$$

nimetatakse võnkumiste käsitlemisel nurksageduseks (ka ringsageduseks).

5. Võnkuva punkti hälve, nagu selgus jooniselt 26,

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi). \tag{63}$$

6. Võnkuva punkti kiirus (leiame jooniselt 26 või arvutatame hälbe esimese tuletise aja järgi)

$$v = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos(\omega t + \varphi) = v_0 \cos(\omega t + \varphi). \tag{66}$$

Kiiruse amplituud

$$v_0 = x_0 \omega. \tag{66a}$$

7. Võnkuva punkti kiirendus (leiame jooniselt 26 või arvutame kiiruse esimese tuletise aja järgi)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -x_0 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) =$$

$$= -a_0 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x. \tag{67}$$

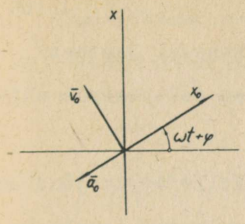
Kiirenduse amplituud

$$a_0 = x_0 \omega^2. \tag{67a}$$

Miinusmärk näitab, et kiirendus on hälbega vastasfaasis ning suunatud alati tasakaaluasendisse.

Kiiruse ja kiirenduse amplituudid on võrdsed pöörleva

vektori x_0 otspunkti joonkiiruse ning normaalkiirendusega.



Joon. 28

Samuti nagu hälvet, võib ka kiirust ja kiirendust kujutada pöörlevate vektorite $\vec{v}_0$ ja $\vec{a}_0$ abil (joon. 28). Seejuures peame silmas, et kiirus on hälbest faasilt $\frac{\pi}{2}$ võrra ees

$$v = v_0 \cos(\omega t + \varphi) =$$

$$= v_0 \sin(\omega t + \varphi + \tfrac{\pi}{2})$$

ning kiirendus hälbega vastasfaasis

$$a = a_0 \sin(\omega t + \varphi) = a_0 \sin(\omega t + \varphi + \pi).$$

Kogu vektorite süsteem pöörleb nurkkiirusega ω, kusjuures üksikute vektorite projektsioonid x-teljele annavad igal hetkel vastavalt hälbe, kiiruse ja kiirenduse hetkväärtused.

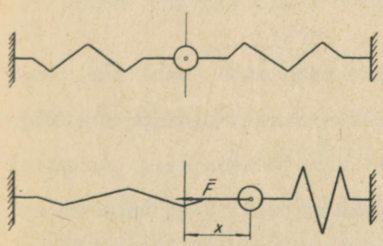
Kui võnkuva punkti mass on m, siis Newtoni II seaduse kohaselt

$$F = ma = -m\omega^2 x. \qquad (68)$$

Seega on harmoonilisel võnkumisel masspunktile mõjuv jõud võrdeline hälbega ning suunatud tasakaaluasendisse.

3. Omavõnkumised

Olgu meil masspunkt kinnitatud vedrude vahele (joon. 29).



Joon. 29

Oletame, et vedrude mass on tühiselt väike võnkuva punkti massiga võrreldes. Katsed näitavad, et vedru venitamisel või kokkusurumisel tekkiv elastsusjõud on võrdeline kaugusega tasakaaluasendini ning suunatud tasakaaluasen-

disse

$$F = - kx. \tag{69}$$

Suurust $k = \frac{F}{x}$ nimetatakse süsteemi jäikuseks. Süsteemi jäikus on võrdne jõuga, mille mõjul süsteem deformeerub ühikulise pikkuse võrra.

Kuna vedrude vahele kinnitatud masspunktile mõjuv jõud on võrdeline kaugusega tasakaaluasendini ja suunatud tasakaaluasendisse, siis peab ta tingimuse (68) põhjal hakkama võnkuma harmooniliselt. Tuues võrrandis $ma = - kx$ esinevad liikmed vasakule poole ja pidades silmas, et kiirendus on hälbe teine tuletis aja suhtes, saame harmooniliste võnkumiste diferentsiaalvõrrandi

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \tag{70}$$

Diferentsiaalvõrrandi lahendiks on mingi funktsioon $x = f(t)$, mis peab rahuldama diferentsiaalvõrrandit. See tähendab, et lahendi asetamisel võrrandisse muutub võrrand identseks argumendi t igal väärtusel. Võrrandite (68) ja (69) võrdlemisel pole raske näha, et antud juhul on diferentsiaalvõrrndi lahendiks avaldis (63)

$$x = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

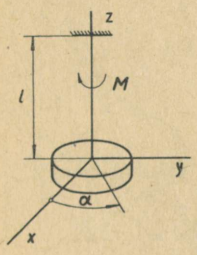
kusjuures

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{71}$$

Kui süsteemi tasakaalu korraks rikutakse (venitame vedru), misjärel süsteem hakkab võnkuma ainult sisejõudude mõjul (antud juhul elastsusjõud), siis nimetatakse neid võnkumisi omavõnkumisteks ehk vabadeks võnkumisteks. Nagu näha valemist (71), on omavõnkumiste nurksagedus ω_0 määratud süsteemi iseloomustavate suurustega k ja m. Amplituud x_0 ja algfaas

on määratud algtingimustega.

Keerdvõnkumiste korral on võnkumist põhjustavaks jõuks deformeeritavas kehas tekkiv elastne väändemoment (joon. 30).



Joon. 30

Pöörates võnkuvat keha nurga α võrra, tekib keha hoidvas elastses niidis väändemoment

$$M = - D\alpha, \tag{72}$$

kus D on keerdjäikus. Ühtlase ümarristlõikega niidi (varda) korral

$$D = \frac{\pi r^3 G}{2l} . \tag{73}$$

Siin on r niidi raadius, l - niidi pikkus, G - niidi materjali nihkemoodul.

Pöörleva liikumise põhiseaduse kohaselt

$$I_z \varepsilon = I_z \frac{d^2\alpha}{dt^2} = M = - D\alpha, \tag{74}$$

millest

$$I_z \frac{d^2\alpha}{dt^2} + D\alpha = 0 \tag{75}$$

on keerdvõnkumiste diferentsiaalvõrrand. Analoogiliselt eespool toodule on võrrandi lahendiks funktsioon.

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \tag{76}$$

kusjuures omavõnkumiste nurksagedus

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I_z}} \tag{77}$$

ning võnkeperiood

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{D}} . \tag{78}$$

Keerdvõnkumiste rakendustega kohtume mitmesugustes mõõteriistades, nagu galvanomeetrid, keerdkaalud jne.

4. Omavõnkumiste energia

Võnkuva masspunkti koguenergia võrdub igal ajahetkel kineetilise ja potentsiaalse energia summaga.

Kineetiline energia

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} x_o^2 \omega^2 \cos(\omega_o t + \varphi) =$$

$$= \frac{kx_o^2}{2} \cos^2(\omega_o t + \varphi). \qquad (79)$$

Potentsiaalne energia võrdub jõu F poolt tehtud tööga

$$W_p = A = \int_0^x F \cdot dx = \int_0^x kx \cdot dx = \frac{kx^2}{2} =$$

$$= \frac{kx_o^2}{2} \sin^2(\omega_o t + \varphi). \qquad (80)$$

Võnkumiste koguenergia

$$W = W_k + W_p = \frac{kx_o^2}{2} \cos^2(\omega_o t + \varphi) + \frac{kx_o^2}{2} \sin^2(\omega_o t + \varphi) =$$

$$= \frac{kx_o^2}{2} = \frac{mx_o^2 \omega_o^2}{2}. \qquad (81)$$

Järeldused:

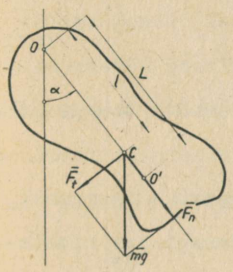
1. Harmooniliselt võnkuva süsteemi energia on võrdeline amplituudi ruuduga.

2. Sama amplituudi korral on energia võrdeline sageduse ruuduga.

3. Võnkumiste käigus toimub pidev energia ümberjaotus kineetilise ja potentsiaalse energia vahel nii, et nende summa jääb konstantseks. Maksimaalse hälbe korral on süsteemil ainult potentsiaalset energiat ($v = 0$) ning tasakaaluasendis ainult kineetilist ($x = 0$).

5. Füüsikaline ja matemaatiline pendel

Füüsikaliseks pendliks nimetatakse keha, mis võib raskusjõudude mõjul ümber horisontaalse telje pöörelda (joon. 31).



Joon. 31

Tasakaaluasendist nurga α võrra kallutatud pendli raskusjõu mg võime lahutada kaheks komponendiks. Normaalkomponendi F_n tasakaalustab pöörlemistelje reaktsioon. Tangentsiaalkomponent F_t püüab pendlit tasakaaluasendisse tagasi viia.

$$F_t = - mg \sin\alpha . \qquad (82)$$

Kui nurk α on väike, siis $\sin\alpha \cong \alpha$ ning

$$F_t \cong - mg\alpha .$$

Kirjutame pöörlemise põhivõrrandi:

$$M = I_o\varepsilon = I_o \frac{d^2\alpha}{dt^2} = F_t l = -mgl\alpha . \qquad (83)$$

I_o on pendli inertsimoment pöörlemistelje O suhtes ning l raskuskeskme kaugus pöörlemisteljest. Võrrand

$$I_o \frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgl\alpha = 0 \qquad (84)$$

on pendli võnkumise diferentsiaalvõrrand . Kuigi siin pole otseselt tegemist elastsete võnkumistega, on võnkumise protsessi kirjeldus täielikult analoogiline elastsete võnkumistega. Niisuguseid võnkumisi nimetatakse kvasielastseteks (nagu elastsed).

Võrrandi lahendiks on võnkenurga muutuse seadus

$$\alpha = \alpha_o \sin(\omega_o t + \varphi), \qquad (85)$$

kusjuures omavõnkumiste nurksagedus

$$\omega_o = \sqrt{\frac{mgl}{I_o}} \qquad (86)$$

ja võnkeperiood

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \qquad (87)$$

Suurust $L = \frac{I_o}{ml}$ nimetatakse füüsikalise pendli taandatud pikkuseks.

Süsteemi, kus kaalutu niidi otsa on kinnitatud masspunkt, mis raskusjõu mõjul võib võnkuda vertikaaltasapinnas, nimetatakse matemaatiliseks pendliks. Matemaatiline pendel on idealiseeritud süsteem. Tema praktiliseks lähenduseks on pika niidi otsa riputatud väike raske kera. Kuna masspunkti inertsimoment $I_o = ml^2$, kus l on masspunkti kaugus pöörlemisteljest ning ühtlasi pendli pikkus, siis matemaatilise pendli võnkeperiood

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (87a)$$

Siit järeldub, et kui füüsikalise pendli taandatud pikkus L on võrdne matemaatilise pendli pikkusega l, siis nende võnkeperioodid on võrdsed.

Kogu eespool toodu on kehtiv, nagu eeldusena märgiti, ainult väikeste hälvete korral. Suurte hälvete korral sõltub võnkeperiood ka hälbest.

Pendleid kasutatakse aja, raskuskiirenduse ja teisteks mõõtmisteks.

Raskuskiirenduse mõõtmisel kasutatakse pöördpendlit.

Steineri lause põhjal pendli inertsimoment

$$I_o = I_c + ml^2, \qquad (88)$$

kus I_c on pendli inertsimoment raskuskeset läbiva telje suhtes. Pendli taandatud pikkus

$$L = \frac{I_o}{ml} = \frac{I_c}{ml} + l. \qquad (89)$$

Seega pendli taandatud pikkus on alati suurem raskuskeskme kaugusest pöörlemisteljeni. Punkti O', mis asub pöörlemistelge ja raskuskeset läbival sirgel, pöörlemisteljest O kaugusel L, nimetatakse pendli võnketsentriks. Kinnitades pendli võnketsentris O' (joon. 32), saame tema taandatud pikkuseks

Joon. 32

$$L' = \frac{I_o'}{m(L-l)} = \frac{I_c + m(L-l)^2}{m(L-L)} =$$

$$= \frac{(I_c + ml^2) - mLl}{m(L-l)} + L =$$

$$= \frac{I_o - I_o}{m(L-l)} + L = L.$$

Füüsikalise pendli taandatud pikkus ei muutu, kui teda ümber pöörata ning toetada punktist O'. Pöördpendlil on võnketsentrite kohal prismad, millele toetudes võib pendel võnkuda. Pendli taandatud pikkuse saamiseks nihutatakse ühte prismat ja raskusi mööda pendli varrast, kuni on saavutatud võrdne võnkeperiood pendli mõlema asendi korral. Siis pendli taandatud pikkus on võrdne prismadevahelise kaugusega. Taandatud pikkuse ja võnkeperioodi mõõtmete alusel arvutatakse raskuskiirendus valemist (87).

6. Harmooniliste võnkumiste liitmine

Praktikas esineb sageli olukordi, kus keha võtab korraga osa mitmest võnkumisest. Liitliikumise iseloom oleneb sel juhul paljudest faktoritest, nagu liituvate võnkumiste si-

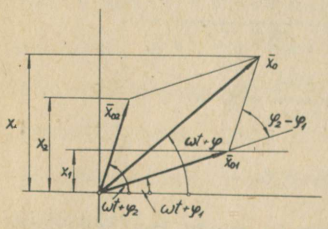
hist, faaside vahest, sageduste suhtest ning liidetavate võnkumiste amplituudidest. Vaatleme allpool mõningaid erijuhte.

A. Samasihiliste võnkumiste liitmine

1. Liidame kaks samasihilist võnkumist, millede nurksagedused on võrdsed ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) ja millede hälbed muutuvad järgmiste seaduste järgi:

$$x_1 = x_{o1} \sin(\omega t + \varphi_1),$$
$$x_2 = x_{o2} \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Kujutame toodud võnkumisi pöörlevate vektorite $\vec{x}_{o1}$ ja $\vec{x}_{o2}$ abil (joon. 33).



Joon. 33

Liitvõnkumise hälve on igal ajamomendil võrdne üksikvõnkumiste hälvete summaga:

$$x = x_1 + x_2 =$$
$$= x_{o1} \sin(\omega t + \varphi_1) +$$
$$= x_{o2} \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Vektorite liitmisest on teada, et resultandi projektsioon on võrdne komponentide projektsioonide summaga. Kuna hälbed ongi vektorite $\vec{x}_{o1}$ ja $\vec{x}_{o2}$ projektsioonideks, siis peab liitvõnkumise amplituud olema võrdne liidetavate võnkumiste amplituudide geomeetrilise summaga:

$$\vec{x}_o = \vec{x}_{o1} + \vec{x}_{o2}. \qquad (90)$$

Vektorite $\vec{x}_{o1}$ ja $\vec{x}_{o2}$ nurkkiiruste võrdsuse tõttu pöörleb ka vektor $\vec{x}_o$ nurkkiirusega ω. Seega liitvõnkumise hälve

$$x = x_o \sin(\omega t + \varphi). \qquad (91)$$

Amplituudi x_o ja algfaasi φ määrame jooniselt 33.

Koosinuslauset kasutades võime kirjutada:

$$x_o^2 = x_{o1}^2 + x_{o2}^2 - 2x_{o1}x_{o2}\cos[180^\circ - (\varphi_2 - \varphi_1)] =$$

$$= x_{o1}^2 + x_{o2}^2 + 2x_{o1}x_{o2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

millest liitvõnkumise amplituud

$$x_o = \sqrt{x_{o1}^2 + x_{o2}^2 + 2x_{o1}x_{o2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \qquad (92)$$

Algfaasi φ leidmiseks võtame ajamomendil $t = 0$ amplituudide projektsioonid horisontaal- ja vertikaalteljele:

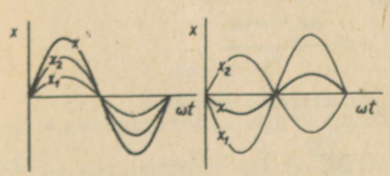
$$x_o \sin\varphi = x_{o1}\sin\varphi_1 + x_{o2}\sin\varphi_2,$$

$$x_o \cos\varphi = x_{o2}\cos\varphi_1 + x_{o2}\cos\varphi_2,$$

millest

$$\tan\varphi = \frac{x_{o1}\sin\varphi_1 + x_{o2}\sin\varphi_2}{x_{o1}\cos\varphi_1 + x_{o2}\cos\varphi_2}. \qquad (93)$$

Praktikas on olulised kaks erandlikku olukorda, kus võnkumiste faaside vahe $\varphi = 0^\circ$ ja $\varphi = \pi$. Esimesel juhul on liitvõnkumise amplituud võrdne liidetavate võnkumiste amplituudide summaga ($x_o = x_{o1} + x_{o2}$) ja teisel juhul vahega ($x_o = x_{o1} - x_{o2}$). Vastavate võnkumiste graafikud on toodud joonisel 34. Kui $x_{o1} = x_{o2}$ ja $\varphi = \pi$, siis liitvõnkumiste amplituud on null - võnkumised kustutavad teineteist.



Joon. 34

2. Liidetavate võnkumiste nurksagesused erinevad väga vähe: $\omega_1 \approx \omega_2$. Sel juhul aja kulgedes liidetavate võnkumiste faaside vahe pidevalt kasvab. Oletame, et liidetavate võnkumiste amplituudid on võrdsed ning alustame vaatlust momendist, mil võnkumiste

F2
TRÜ Raamatukogu

faasid on võrdsed. Ajamomendil t on siis liitvõnkumise hälve

$$x = x_o \sin \omega_1 t + x_o \sin \omega_2 t.$$

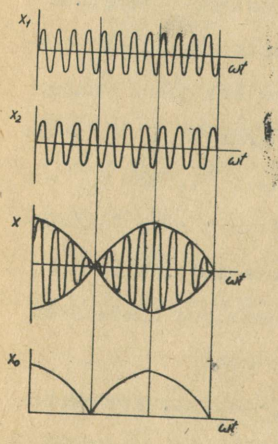
Siinuste summa valemit rakendades

$$x = 2x_o \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \quad (94)$$

Kuna $\omega_1 \cong \omega_2$, siis $\omega_1 - \omega_2$ on väga väike $\omega_2 + \omega_1$-ga võrreldes ning liitvõnkumist võib vaadelda kui ligikaudu harmoonilist võnkumist nurksagedusega $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \cong \omega_1 \cong \omega_2$, kusjuures amplituud

$$\left| 2x_o \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right|$$

aeglaselt perioodiliselt muutub. Niisugust võnkumist nimetatakse tuiklemiseks (joon. 35). Et amplituudil on ainult absoluutväärtus, siis koosinuse ühe perioodi jooksul on ta kaks korda maksimaalne (kui koosinuse väärtus on +1 ja -1) ning kaks korda minimaalne. Seega tuiklemise nurksagedus on kaks korda suurem koosinuse argumendi nurksagedusest:



Joon. 35

$$\omega_t = 2 \frac{\omega_1 - \omega_2}{2},$$

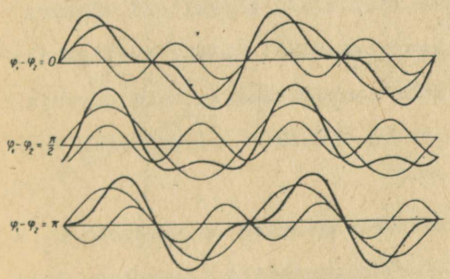
millest tuiklemise sagedus

$$f_t = \frac{\omega_t}{2\pi} = f_1 - f_2. \quad (95)$$

Tuiklemise sagedus võrdub liidetavate võnkumiste sageduste vahega. Näiteks, kui liituvad heliharkide võnkumised sagedustega 440 ja 439 Hz, siis kuuleme tuiklemist, mille sagedus on 440 - 439 = 1 Hz. Ühe sekundi jooksul muu-

tub hääle tugevus miinimumist miinimumini, olles vahepeal maksimaalse tugevusega. Tuiklemist kasutatakse muusikariistade häälestamisel.

3. Liidetavate võnkumiste nurksageduste suhe avaldub ratsionaalse arvuga: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$, kus n_1 ja n_2 on täisarvud. Sel juhul liitvõnkumiste graafik ei ole enam siinus- või koosinuskõver, küll on ta aga kindla perioodi tagant korduv kõver. Graafiku kuju oleneb liidetavate võnkumiste sageduste suhtest, amplituudide suhtest ning liidetavate võnkumiste algfaaside vahest. Joonisel 36 on näha, et graafiku kuju võib olla väga mitmekesine. Veelgi rohkem tekib võimalusi mitme harmoonilise võnkumise liitmisel. See asjaolu viis mõttele lähendada etteantud funktsioonid trigonomeetrilistele ridadele. Selles suunas on välja arenenud suure praktilise tähtsusega matemaatika haru - harmooniliste ehk Fourier' analüüs. Fourier' analüüsiga võime paljusid protsesse esitada kordsete sagedustega harmooniliste võnkumiste summana. Harmooniliste sagedused ning nende amplituudid lubavad otsustada füüsikaliste suuruste esinemise ning käitumise üle. Näiteks on oluline vahelduvvoolu generaatori elektromotoorse jõu kõvera (pole täiesti siinuseline) analüüs. Ekspluatatsiooni seisukohalt on tähtis, et



Joon. 36

kõrgemate harmooniliste amplituudid oleksid võimalikult väikesed. Harmooniliste analüüs on vajalik ka mitmesuguste akustiliste seadmete konstrueerimisel.

Kuna iga perioodiline võnkumine on esitatav harmooniliste võnkumiste summana, siis selles mõttes on harmooniline võnkumine elementaarne.

4. Liidetavate võnkumiste sageduste suhe on irratsionaalne arv. Sel juhul liitvõnkumise graafik peab kogu aeg muutuma ega kordu kunagi. Et igale ratsionaalsele arvule on lõpmata lähedal mingi irratsionaalne arv, siis on antud juhtu eelnevast sageli raske eraldada.

B. Ristisihiliste võnkumiste liitmine

Kõikide eespool vaadeldud võnkumiste korral oli võnkuva keha asukoht määratud ühe koordinaadiga. Kahest ristisihilisest võnkumisest osavõtva keha asukoha määramiseks on vaja teada kaks koordinaati. Seega on sellistel võnkumistel kaks vabadusastet.

1. Liidetavate võnkumiste nurksagedused on võrdsed: $\omega_1 = \omega_2$. Olgu võnkuva punkti tasakaaluasendiks koordinaatteljestiku alguspunkt, kusjuures punkt võtab samaaegselt osa kahest võnkumisest, milledest üks toimub piki x-telge

$$x = x_0 \sin\omega t \qquad (96a)$$

ja teine piki y-telge

$$y = y_0 \sin(\omega t + \varphi). \qquad (96b)$$

x_0 ja y_0 on võnkumiste amplituudid ning φ võnkumiste faaside vahe.

Võnkuva punkti trajektoori võrrandi leidmiseks elimineerime võrranditest (96) aja

$$\sin\omega t = \frac{x}{x_0}, \quad \cos\omega t = \sqrt{1 - (\frac{x}{x_0})^2},$$

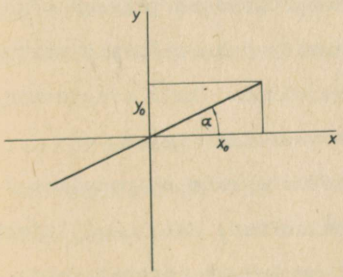
$$y = y_0(\sin\omega t \cos\varphi + \cos\omega t \sin\varphi)$$

ehk

$$y = y_0(\frac{x}{x_0}\cos\varphi + \sqrt{1 - (\frac{x}{x_0})^2}\sin\varphi). \qquad (97)$$

Saime ellipsi võrrandi, mille keskpunkt ühtib koordinaatide alguspunktiga. Ellipsi kuju ning asend sõltub liidetavate võnkumiste amplituudidest ning faasinihkest φ. Vaatleme mõningaid erijuhte.

a. Faasinihe $\varphi = 0$ ja $\varphi = \pi$. Kuna $\cos 0 = 1$ ja $\sin 0 = 0$, siis taandub avaldis (97) sirge võrrandiks (joon. 37):



Joon. 37

$$y = \frac{y_0}{x_0}x = kx. \qquad (98)$$

Sirge tõus $k = \tan\alpha = \frac{y_0}{x_0}$. Kui $x_0 = y_0$, siis tõusunurk on 45^0. Juhul kui faasinihe on π, liigub võnkuv punkt teises ja neljandas veerandis võrrandi

$$y = -\frac{y_0}{x_0}x$$

järgi.

b. Faasinihe $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Trajektoori võrrand taandub kujule

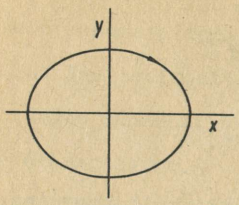
$$y = y_0\sqrt{1 - (\frac{x}{x_0})^2}$$

ehk

$$(\frac{y}{y_0})^2 + (\frac{x}{x_0})^2 = 1. \qquad (99)$$

See on ellips, mille pooltelgedeks on liidetavate võnkumiste amplituudid (joon. 38). Punkti liikumise suuna määrame

liikumisvõrrandite abil. Ajamomendil t=0



Joon. 38

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = y_o \end{matrix}\right\}$$ 1. asendi koordinaadid.

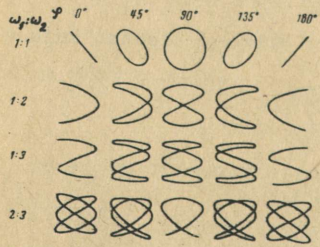
Veerand perioodi hiljem $t = \frac{\pi}{2}$ ja

$$\left.\begin{matrix} x = x_o \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$$ 2. asendi koordinaadid. Järelikult liigub punkt mööda ellipsit päripäeva. Faasinihke $\frac{3}{2}\pi$ korral liigub punkt mööda sama ellipsit vastupäeva. Amplituudide võrdsusel taandub ellips ringiks.

c. Teistel faasinihke väärtustel on punkti trajektooriks ellips, mille poolteljed asuvad koordinaattelgede suhtes kaldu.

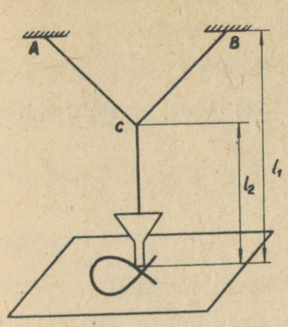
2. Liidetavate võnkumiste nurksagedused on peaaegu võrdsed: $\omega_1 \cong \omega_2$. Siin võnkumiste faaside vahe pidevalt muutub, mille tõttu muutub pidevalt ka trajektoori kuju ning saavutab järjest kõik eelmises punktis vaadeldud kujud.

3. Liidetavaste võnkumiste sageduste suhe on ratsionaalne arv: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$, kus n_1 ja n_2 on täisarvud. Sel juhul liigub punkt perioodiliselt mööda keerulise kujuga kõverat, mida nimetatakse Lissajous' kujundiks. Kõvera kuju sõltub faasinihkest, sageduste suhtest ja amplituudide suhtest (joon. 39). Trajektoori ja horisontaaltelje lõikumiste arv jagatud trajektoori ja vertikaaltelje lõikumiste arvuga on võrdne sageduste suhtega. Lissajous' kujundeid saab demonstreerida liitpendli-



Joon. 39

ga, mille kehaks on liivaga täidetud lehter (joon. 40). Kahes punktis A ja B kinnitatud pendel võib võnkuda kogu oma pikkusega l_1 vaid risti joonise tasapinnaga. Punkti C ümber võib ta võnkuda ka joonise tasapinnas, siis on pendli pikkuseks l_2. Kui pikkused l_1 ja l_2 on valitud nii, et võnkeperioodide suhe on võrdne täisarvude suhtega, siis liigub lehter mööda Lissajous' kujundit, mis **fikseeritakse** väljavoolava liiva jäljena. Lissajous' kujundite analüüs lubab kindlaks määrata liituvate sageduste kordsust ning faasinihet. Selle tõttu leiavad nad laialdast kasutamist mõõtmistehnikas.



Joon. 40

4. Liidetavate sageduste suhe on irratsionaalne arv. Sel juhul trajektoori kuju ei kordu. Pikema aja jooksul läbib võnkuv punkt kõik punktid ristkülikul, mille külgede pikkus on võrdne kahekordsete amplituudidega.

7. Sumbuvad võnkumised

Eespool (lk. 43) käsitlesime omavõnkumisi idealiseeritud mudelil. Masspunktile mõjus vaid elastsusjõud -kx, mille tõttu tekkisid sumbumatud võnkumised. Reaalne võnkumine aga sumbub hõõrdejõudude mõjul. Hõõrdejõud võivad olla mitmesuguse iseloomuga: näiteks sisehõõrdumine, hõõrdumine keskkonnas, kehadevaheline hõõrdumine jt. Paljudel juhtudel on hõõrdejõud võrdeline kiirusega. Näiteks on sisehõõrdejõud

ja keskkonna takistusjõud väikestel kiirustel võrdeline kiirusega:

$$F_h = - rv, \qquad (100)$$

kus r on takistustegur. Miinusmärk arvestab, et hõõrdejõud on kiirusega vastassuunaline.

Newtoni II seaduse kohaselt

$$ma = - kx - rv, \qquad (101)$$

millest sumbuvate võnkumiste diferentsiaalvõrrand

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0. \qquad (102)$$

Võrrandi üldlahend on:

$$x = x_0 e^{-\beta t} \sin(\omega_s + \varphi). \qquad (103)$$

Seega võib sumbuvat võnkumist vaadelda harmoonilise võnkumisena, mille amplituud $A = x_0 e^{-\beta t}$ väheneb ajaliselt eksponentsiaalselt.

Sumbumisteguri β ja sumbuvate võnkumiste nurksageduse ω_s võime avaldada diferentsiaalvõrrandi konstantide kaudu. Selleks asetame lahendi ning tema tuletised võrrandisse ja peame silmas, et võrrand muutub identseks.

Sumbuvate võnkumiste kiirus

$$v = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega_s e^{-\beta t} \cos(\omega_s t + \varphi) - \\ - \beta x_0 e^{-\beta t} \sin(\omega_s t + \varphi). \qquad (104)$$

Sumbuvate võnkumiste kiirendus

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = - x_0 \omega_s^2 e^{-\beta t} \sin(\omega_s t + \varphi) - \\ - \beta x_0 \omega_s e^{-\beta t} \cos(\omega_s + \varphi) - \beta x_0 \omega_s e^{-\beta t} \cos(\omega_s t + \varphi) + \\ + \beta^2 x_0 e^{-\beta t} \sin(\omega_s t + \varphi). \qquad (105)$$

Asetades need avaldised diferentsiaalvõrrandisse, näeme, et võrrandit võib taandada $x_0 e^{-\beta t}$ -ga (kuna see kordaja pole null). Liikmeid grupeerides saame:

$$[-m\omega_s^2 + m\beta^2 - r\beta + k]\sin(\omega_s t + \psi) +$$

$$+ [-2\beta\omega_s + r\omega_s]\cos(\omega_s t + \psi) = 0.$$

Kuna $\sin(\omega_s t + \psi)$ ja $\cos(\omega_s t + \psi)$ pole igal ajamomendil võrdsed nulliga, siis peavad sulgavaldised sin ja cos funktsioonide ees olema võrdsed nulliga.

$-2\beta\omega_s + r\omega_s = 0$ annab, et sumbumistegur

$$\beta = \frac{r}{2m}. \qquad (106)$$

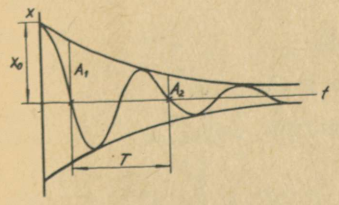
$-m\omega_s^2 + m\beta^2 - r\beta + k = 0$ annab sumbuvate võnkumiste nurksageduse

$$\omega_s = \sqrt{\frac{m\beta^2 - r\beta + k}{m}} = \sqrt{\frac{m\beta^2 - 2m\beta\cdot\beta + m\omega_0^2}{m}} =$$

$$= \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}. \qquad (107)$$

Sumbuvate võnkumiste nurksagedus ω_s on omavõnkumiste nurksagedusest ω_0 seda väiksem (periood suurem), mida suurem on sumbumistegur.

Algamplituud x_0 ja algfaas ψ on määratud algtingimustega. Sumbuvate võnkumiste graafik on toodud joonisel 41.



Joon. 41

Võnkumiste sumbumist iseloomustatakse logaritmilise dekremendiga. Logaritmiliseks dekremendiks nimetatakse kahe naaberamplituudi, millede ajaline vahe on üks täisperiood, suhte naturaallogaritmi.

Ajamomendil t on võnkumise amplituud $A_1 = x_0 e^{-\beta t}$, periood hiljem on ta $A_2 = x_0 e^{-\beta(t+T)}$.

Logaritmiline dekrement

$$\Delta = \ln \frac{A_1}{A_2} = \ln \frac{x_0 e^{-\beta t}}{x_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \qquad (108)$$

Teades logaritmilist dekrementi ja n-ndat amplituudi, võib alati arvutada mingi n ± k-nda amplituudi:

$$A_{n \pm k} = A_n e^{\mp \Delta k} \qquad (109)$$

Valemist (107) selgub, et sumbumisteguri kasvamisel sumbuvate võnkumiste nurksagedus väheneb. $\beta = \omega_0$ korral $\omega_s = 0$. Süsteemi niisugust olukorda nimetatakse kriitiliseks režiimiks. Kui sumbumistegur on suurem kriitilisest, siis liikumine on aperioodiline, s.t. punkt liigub võnkumatult tasakaaluasendisse. Praktikas väärib kriitiline režiim erilist tähelepanu, näiteks elektrimõõteriistade konstrueerimisel. $\beta < \beta_k$ korral sooritab mõõteriista osuti tasakaaluasendi ümber sumbuvaid võnkumisi, enne kui ta paigale jääb. $\beta > \beta_k$ korral liigub osuti tasakaaluasendisse küll aperioodiliselt, kuid väga aeglaselt. Kõige kiiremini jõuab osuti tasakaaluasendisse kriitilisel režiimil, mida peetakse konstrueerimisel silmas.

8. Sunnitud võnkumised

Oletame, et võnkuvale masspunktile peale elastsus- ja hõõrdejõu mõjub veel perioodiliselt muutuv jõud

$$F = F_0 \sin \omega t. \qquad (110)$$

Newtoni teise seaduse kohaselt

$$ma = -rv - kx + F_0 \sin\omega t$$

ehk

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin\omega t. \qquad (111)$$

Saime sunnitud võnkumiste diferentsiaalvõrrandi. Võrrandi üldlahendiks on

$$x = x_0 e^{-\beta t} \sin(\omega_s t + \psi) + x_0 \sin(\omega t + \varphi). \qquad (112)$$

Lahendi esimene liige on sumbuv omavõnkumine ning oluline ainult võnkumiste kujunemise järgus. Pärast omavõnkumiste sumbumist jääb järele vaid sundiva jõu nurksagedusega toimuv võnkumine:

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi). \qquad (113)$$

Võnkumiste kiirus

$$v = x_0\omega \cos(\omega t + \varphi). \qquad (114)$$

Võnkumiste kiirendus

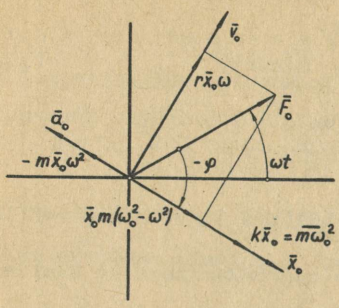
$$a = -x_0\omega^2 \sin(\omega t + \varphi). \qquad (115)$$

Asetades need hälbe, kiiruse ja kiirenduse avaldised diferentsiaalvõrrandisse, peame saama samasuse, mis kehtib igal ajahetkel.

$$\underbrace{-mx_0\omega^2\sin(\omega t + \varphi)}_{\text{inertsijõud}} + \underbrace{rx_0\omega\cos(\omega t + \varphi)}_{\text{hõõrdejõud}} + \underbrace{kx_0\sin(\omega t + \varphi)}_{\text{elastsusjõud}} = \underbrace{F_0 \sin\omega t}_{\text{sundiv jõud}} \qquad (116)$$

Nagu näha, muutuvad kõik liidetavad jõud harmooniliselt nii, et sundiva jõu hetkväärtus on alati võrdne inertsi-, hõõrde- ja elastsusjõu hetkväärtuste summaga. Seega võib jõudude kujutamisel samuti kasutada pöörlevaid vektoreid. Avaldisele (116) vastav vektordiagramm on esitatud joonisel

42. Võttes avaldises (116) $\omega t = 0$, saame:



Joon. 42

$$- mx_o\omega^2 \sin\varphi + rx_o\omega\cos\varphi + kx_o \sin\varphi = 0,$$

millest jõu ja hälbe vahelise faasinihke tangens

$$\tan\varphi = - \frac{r\omega}{m(\omega_o^2 - \omega^2)}. \qquad (117)$$

Võttes avaldises (116) $\omega t = \frac{\pi}{2}$, saame:

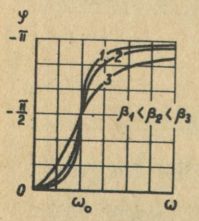
$$- m_o x_o \omega^2 \cos\varphi - rx_o\omega \sin\varphi + kx_o \cos\varphi = F_o.$$

Avaldist (117) kasutades arvutame siit hälbe amplituudi

$$x_o = \frac{F_o}{\sqrt{r^2\omega^2 + m^2(\omega_o^2 - \omega^2)^2}} = \frac{F_o}{Z}. \qquad (118)$$

Viimast avaldist on lihtsam üles kirjutada otseselt joonise 42 põhjal.

Võrranditest (117) ja (118) näeme, et nii faasinihe φ kui ka hälbe amplituud x_o on kahe parameetri (m ja k loeme konstantseteks) ω ja r funktsioonid. Faasinihke muutumise graafik on toodud joonisel 43.



Joon. 43

Olukorda, mille puhul hälbe amplituud on maksimaalne, nimetatakse resonantsiks ja sellele vastavat nurksagedust resonantsinurksageduseks. On selge, et x_o on antud F_o puhul maksimaalne, kui ruutjuure alune avaldis Z^2 on minimaalne.

$$\frac{dZ^2}{d\omega} = 2r^2\omega_r - 4m^2\omega_o^2\omega_r + 4m^2\omega_r^3 = 0$$

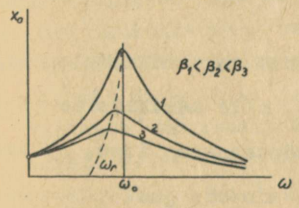
ehk

$$\omega_r^2 = \frac{4m^2\omega_o^2 - 2r^2}{4m} = \omega_o^2 - \frac{r^2}{2m^2},$$

millest resonantsinurksagedus

$$\omega_r = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{r^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}. \qquad (119)$$

Valemist on näha, et resonants tekib süsteemi omavõnkesagedusest väiksema sageduse korral. Erinevus on määratud sumbumisteguriga β. Valemi (118) alusel võib konstrueerida kõverad, mis näitavad hälbe amplituudi muutust sõltuvalt sundiva jõu sagedusest ω ning sumbumistegurist β. Neid nimetatakse resonantsikõverateks (joon. 44).



Joon. 44

Väga terava resonantsi korral $\beta \to 0$ ning $\omega_r \cong \omega_0$. Siis $\tan\varphi \cong -\infty$ ja $\varphi \cong -\frac{\pi}{2}$. Jooniselt 42 on näha, et sel juhul on välisjõud faasis süsteemi võnkumise kiirusega. Peale selle võib näidata, et kiiruse amplituud $v_0 = \omega x_0$ on maksimaalne, kui $\omega = \omega_0$. Kuna sundiva jõu võimsus on võrdeline kiirusega ($N = Fv$), siis antakse resonantsi korral võnkuvasse süsteemi maksimaalne energia.

Tehnikas tuleb arvestada nii resonantsi kahjulikku toimet kui ka osata teda kasulikult rakendada. Pöörlevate masinaosade (auruturbiinide ja elektrimasinate rootorid jne.) valmistamisel tekib, vaatamata balansseerimisele, masside ekstsentrilisus pöörlemistelje suhtes - rootori raskuskese ei asu pöörlemisteljel. Rootori pöörlemisel tekib ekstsentrilisuse tõttu perioodiliselt muutuv tsentrifugaaljõud, mis

rakendub laagrite kaudu kogu masina korpusele. Seega mõjub niisugune pöörlev rootor masina korpusele kui perioodiliselt muutuv jõud. Kui rootori pöörlemissagedus saab ligikaudu võrdseks korpuse omavõnkesagedusega, tekib resonants. Sellele vastavat pöörete arvu nimetatakse kriitiliseks pöörete arvuks.

Ajaloos on teada juhtumeid, kus resonantsi tagajärjel on varisenud sillad ning purunenud laevad. Kui ka resonants alati otseselt ei purusta, põhjustab ta seadmete enneaegset vananemist materjalide väsimuse tõttu. Seadmete projekteerimisel tuleb arvestada, et tööpöörete piirkond ei satuks kriitiliste pöörete lähedale.

Resonants on iseloomulik mitte ainult mehaanilistele, vaid ka elektromagnetilistele võnkumistele, mida kasutatakse laialdaselt mitmesugustes seadmetes ning mõõteaparaatides, näiteks sagedusmõõtjad, raadioaparaadid, televiisorid jne.

V. Akustika

1. Sissejuhatus

Akustika on füüsika osa, mis käsitleb häält ning tema seost teiste füüsikaliste nähtustega. Esimesed tähelepanekud akustika kohta ulatuvad kaugesse minevikku. Pütagoras (6 saj. e.m.a.) avastas muusikaliste intervallide ja muusikariista keele pikkuse vahelise seose. Aristoteles (4. saj. e.m.a.) mõistis, et hääle levikul tekivad keskkonnas hõrendused ja tihendused ning et kaja kujutab endast hääle peegeldust. Keskajal oli akustika nagu teistegi loodusteaduste areng kiriku reaktsiooni tõttu pidurdatud. Akustika areng jätkub 17. sajandil, mil G. Galilei ja M. Mersenne leiavad tooni kõrguse ja võnkesageduse vahelise seose. Edasine areng on seotud L. Euleri, W. Weberi, H. Helmholtzi ja teiste töödega, millede kokkuvõtteks on I. Rayleigh'i kaheköiteline teos "Hääle teooria" (1877). Edasi kulgeb akustika areng juba käsikäes teiste teaduste arenguga, olles peamiselt rakendusliku iseloomuga.

Kui akustika esialgu haaras ainult kõrvaga kuuldavaid häälenähtusi, siis tänapäeval on akustika levinud üle selle piiri ning käsitleb ka kõrvaga kuuldamatuid võnkumisi, nn. infrahelisid ja ultrahelisid. Akustika on arenenud paljude harudega teaduseks. Akustika jaotatakse kaheks osaks: 1) üldakustikaks ja 2) rakendusakustikaks. Üldakustikasse kuuluvad üldfüüsikalise iseloomuga akustilised nähtused. Näiteks akustiliste võnkumiste teooria, analoogia akustiliste ja elektriliste võnkumiste vahel, akustiliste lainete levik ühtlikus ja mitteühtlikus keskkonnas, akustiliste lainete difraktsioon, interferents ning neeldumine keskkonnas jne. Rakendusakustikasse kuuluvad elektroakustika, arhitektuuri- ja ehitusakustika, füsioloogiline akustika, muusikaline akustika, hüdroakustika jt.

Käesoleval juhul piirdutakse hääle mõningate üldomaduste ning rakendustega, järgimata eespool toodud liigitust.

2. Hääl. Häälelained. Häälespektrid

Hääl kujutab endast mingis keskkonnas levivat mehaanilist võnkumist, mille sagedus on selline, et temale reageerib inimese kõrv. Katsed näitavad, et me tajume mehaanilisi võnkumisi sagedusega ligikaudu 16 kuni 20000 Hz. Võnkumisi, mille sagedus on alla 16 Hz, nimetatakse infrahelideks, ja üle 20000 Hz - ultrahelideks.

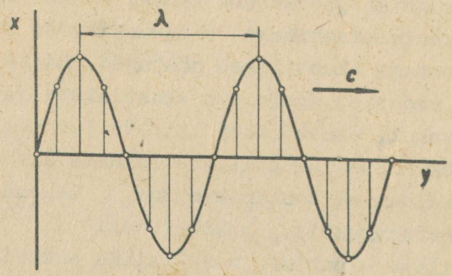
Mehaanikast on teada, et laine kujutab endast keskkonna osakeselt osakesele levivat võnkumist. Kui võnkeallikas koordinaatide alguspunktis sooritab harmoonilist võnkumist seaduse

$$x = x_0 \sin \omega t = x_0 \sin 2\pi ft \qquad (1)$$

järgi, siis tasapinnalise laine (joon. 45) võrrandiks, mis liigub piki y-telge, on

$$x = x_0 \sin 2\pi f(t - \frac{y}{c}). \qquad (2)$$

x_0 - hälbe amplituud, f - võnkesagedus, c - laine levimiskiirus. $\tau = \frac{y}{c}$ on aeg, mille võrra hakkavad keskkonna osakesed kaugusel y võnkuma hiljem, võrreldes koordinaatide alguspunktis oleva osakesega.



Joon. 45

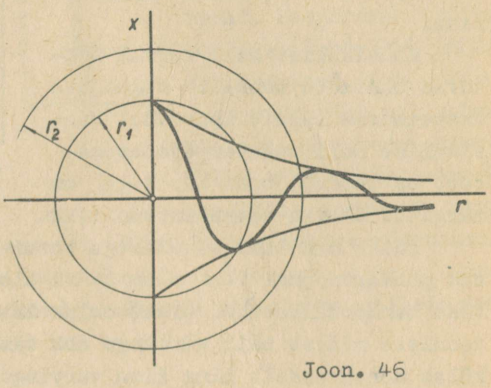
Tasapinnalise laine korral, kui mitte arvestada energiakadusid, võnkumiste amplituud ei muutu.

Kui lainealliKas on punktikujuline ja kiirgab energiat kõigis suundades ühteviisi, on leviva laine front sfääriline (joon. 46).

Sfäärilise laine korral kahaneb pindalaühikut ajaühikus läbiv energia I (intensiivsus) pöördvõrdeliselt raadiuse ruuduga:

$$I_1 4\pi r_1^2 = I_2 4\pi r_2^2,$$

$$I_2 = I_1 (\frac{r_1}{r_2})^2. \quad (3)$$



Joon. 46

Kuna võnkumise energia on võrdeline hälbe amplituudi ruuduga, kahaneb amplituud pöördvõrdeliselt raadiusega

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{x_{01}^2}{x_{02}^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Laine võrrand saab siis kuju

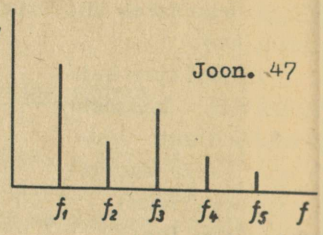
$$x = \frac{x_0}{r} \sin 2\pi f(t - \frac{r}{c}). \quad (4)$$

Energiakadude tõttu keskkonnas väheneb hälbe amplituud veelgi kiiremini.

Kõikides keskkondades (gaasid, vedelikud, tahked kehad) võivad häälelained levida pikilainetena, misjuures osakesed võnguvad oma tasakaaluasendi ümber piki laine levimise suunda. Pikilaine tekkimise eelduseks on keskkonna mahtelastsuse olemasolu. Ristilaines võnguvad osakesed risti laine levimise suunaga. Et ristilaine tekkimiseks on vaja nihkeelastsuse olemasolu, siis levivad ristilained ainult tahketes kehades.

Kuuldeorganite poolt tajutud hääle iseloom oleneb vastuvõetava laine spektrist. Kui häälelaine koosneb ühestain-

sast sinusoidaalsest võnkumisest, siis kõrv tajub häält toonina. Tooni kõrgus on määratud tema sagedusega. Üksikute toonide jaotust sageduse järgi nimetatakse hääle spektriks. Mitmest toonist koosnevat häält tajume helina.

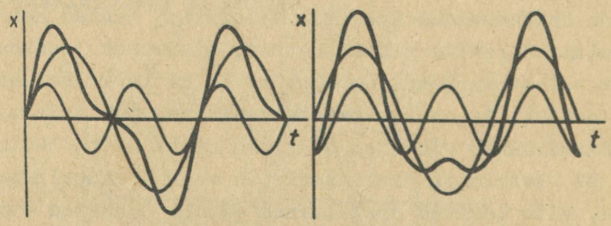


Joon. 47

Muusikalise heli korral suhtuvad üksikute toonide sagedused üksteisesse nagu täisarvud. Muusikalise heli spekter (joonspekter) on toodud joon. 47. I-ga on märgitud üksiku tooni intensiivsus.

Kõige madalama sagedusega tooni nimetatakse põhitooniks ehk põhiharmooniliseks ning teisi ülemtoonideks ehk kõrgemateks harmoonilisteks. Ülemtoonide intensiivsuste suhe põhitoonisse määrab heli värvingu ehk tämbri. Põhitoon üksikuna kõlab monotoonselt ning ilma värvinguta. Ülemtoonide erinevus mitmesugustel muusikariistadel sama põhitooni korral määrabki antud muusikariista tämbri. Heli, mis tekib kolme või enama võrdse intensiivsusega tooni samaaegsel kõlamisel, nimetatakse akordiks. Psühholoogiliselt on akordi kõrgus määratud temas sisalduva kõige kõrgema tooniga.

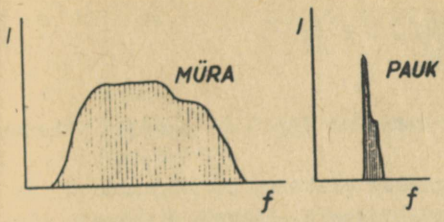
Kaks heli, mis koosnevad samadest toonidest, võivad teineteisest erineda võnkumiste graafiku kuju poolest. Viimane on tingitud toonidevahelisest faasinihkest (joon. 48). Kõrv siin siiski mingit vahet ei tee. Seega on heli tajumisel oluline heli moodustavate toonide kõrgus ning nende suhteline intensiivsus.



Joon. 48

Kui hääl koosneb väga paljudest erineva intensiivsusega toonidest, mis moodustavad pideva spektri (joon. 49), siis

tajume häält mürana. Pauk kujutab endast suure, kuid kiiresti kahaneva amplituudiga müra.



Joon. 49

Praktiliselt tabab meie kõrv samaaegselt mitmesuguseid helisid ja mürasid. Seepärast kõrva poolt vastuvõetav hääle-spekter moodustub pidevast spektrist, mille foonil esineb joonspekter. Pidev müra mõjub inimorganismile kurnavalt ning segab vajaliku hääle tajumist. Müra intensiivsuse vähendamine peab käima käsikäes tootmiskultuuri arenguga ning uute tehniliste seadmete loomisega. Paraku pööratakse sellele veel liiga vähe tähelepanu.

3. Hääle levimiskiirus

Et hääle levimine on mehaaniline protsess, siis on loomulik, et hääl levib mehaanilisele lainele omase kiirusega.

Tahkes kehas pikilaine levimiskiirus

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad (5)$$

ja ristlaine levimiskiirus

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,, \qquad (6)$$

kus G on nihkemoodul, E elastsusmoodul ning ρ keskkonna tihedus.

Pikilainete levimiskiirus vedelikes ja gaasides

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \qquad (7)$$

kus K on survemoodul (mahtelastsusmoodul). Survemoodul on

võrdne rõhu muutusega, mis on vajalik ühikulise suhtelise mahu muutuse tekitamiseks:

$$K = -\frac{dp}{\frac{dV}{V}} = -V\frac{dp}{dV}. \qquad (8)$$

Miinusmärk näitab, et rõhu kasvades ($dp > 0$) ruumala väheneb ($dV < 0$).

Häälelaine levimisel gaasis oletame, et hõrendused ja tihendused vahelduvad adiabaatiliselt. Võttes adiabaadi võrrandist $pV^{\varkappa} = \text{const}$. täisdiferentsiaali, saame, et

$$\varkappa pV^{\varkappa-1} \cdot dV + V^{\varkappa} \cdot dp = 0, \qquad (9)$$

millest

$$\varkappa p = -V\frac{dp}{dV} = K. \qquad (10)$$

Asetades saadud K väärtuse valemisse (7), saame, et hääle levimiskiirus gaasis

$$c = \sqrt{\frac{\varkappa p}{\rho}}. \qquad (7a)$$

Clapeyroni-Mendelejevi võrrandist $pV = \frac{m}{M}RT$ arvutame gaasi rõhu ja tiheduse jagatise

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p}{m/V} = \frac{RT}{M}. \qquad (11)$$

siis hääle levimiskiirus

$$c = \sqrt{\frac{\varkappa RT}{M}}. \qquad (7b)$$

Nagu näha, sõltub hääle levimiskiirus gaasi iseloomustavatest konstantidest ($\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ ja M) ning temperatuurist. Temperatuuri tõustes kasvab hääle levimiskiirus.

Õhu kohta (SI süsteemi ühikute kasutamisel)

$$c = \sqrt{\frac{1{,}4 \cdot 8300}{29}T} = 20\sqrt{T}\ \frac{m}{s}.$$

Valemist (11) on näha, et konstantsel temperatuuril on rõhu ja tiheduse jagatis konstant. Seega hääle levimiskii-

rus ei sõltu rõhust (7b). Teoreetilisel teel saadud kiiruste väärtused on heas kooskõlas praktilisel mõõtmisel saadutega. Allpool on toodud mõningad hääle levimiskiirused $\frac{m}{s}$.

Õhk	0° C	331,46.
Metaan	"	430.
Vesinik	"	1286.
Hapnik	"	314,84.
Neoon	"	436.
Vesi (destilleeritud)	"	1407.
Raud (pikilaine)	17-25° C	5930.
Kuld "	"	3240.
Polüstürool "	"	2350.

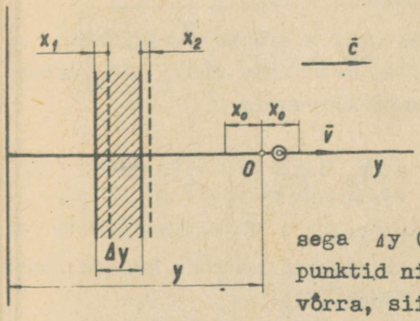
4. Hääle rõhk

Häälelaine levikuga kaasneb keskkonna deformatsioon. Vaatleme seda protsessi gaasis. Kiirust, millega keskkonna osakesed häälelaines võnguvad oma tasakaaluasendi ümber, nimetatakse akustiliseks kiiruseks. Harmoonilises häälelaines võngub iga osake sinusoidaalselt. Koos sellega muutub keskkonna vaadeldavas piirkonnas rõhk. Loomulikult sooritavad osakesed samal ajal ka nendele iseloomulikku soojusliikumist. Häälelaine poolt põhjustatud rõhu muutus liitub osakeste soojusliikumisest tingitud gaasi rõhule.

Arvutame häälelaine poolt tekitatud rõhu muutuse. Lähtume tasapinnalise laine võrrandist

$$x = x_0 \sin \omega \left(t - \frac{y}{c}\right), \quad (2)$$

kus x on osakeste hälve kohas y. Leiame deformatsiooni jaotuse keskkonnas piki y-telge leviva laine korral. Selleks eraldame kihi paksusega Δy (joon. 50). Kui kihi äärmised punktid nihkusid vastavalt x_1 ja x_2 võrra, siis kiht deformeerus piki telge



Joon. 50

$$\Delta X = X_2 - X_1 \text{ võrra.}$$

Suhteline deformatsioon on $\varepsilon = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ või lõpmata õhukese kihi korral (2)

$$\varepsilon = \frac{dx}{dy} = -\frac{\omega}{c} x_0 \cos\omega\left(t - \frac{y}{c}\right). \qquad (12)$$

Kui kihis olev gaasi mass lugeda konstantseks ($m = \rho V = \rho S \Delta y$), siis suhtelisele deformatsioonile piki y-telge vastab niisama suur gaasi ruumala ja tiheduse suhteline muutus

$$\eta = -\frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dx}{dy} = \frac{\omega}{c} x_0 \cos\omega\left(t - \frac{y}{c}\right). \qquad (13)$$

Osakeste akustiline kiirus

$$v = \frac{dx}{dt} = x_0\omega \cos\omega\left(t - \frac{y}{c}\right). \qquad (14)$$

Seoste (13) ja (14) võrdlusest on näha, et

$$\eta = \frac{v}{c}. \qquad (15)$$

Adiabaatse protsessi korral valemist (10) rõhu muutus

$$dp = -\varkappa p \frac{dV}{V} = \varkappa p \eta = \varkappa p \frac{v}{c} = \Delta p. \qquad (16)$$

Arvestades, et laine levimiskiirus $c = \sqrt{\frac{\varkappa p}{\rho}}$, saame, et akustiline rõhk

$$\Delta p = c\rho v. \qquad (17)$$

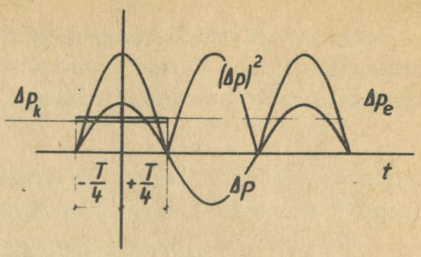
Δp kujutab endast ülerõhku (või alarõhku), mis tekib gaasis häälelaine levikul. Δp on hetkeline rõhk, mis vastab osakeste hetkelisele akustilisele kiirusele v (14),

$$\Delta p = c\rho x_0 \omega \cos\omega\left(t - \frac{y}{c}\right) = \Delta p_0 \cos\omega\left(t - \frac{y}{c}\right), \qquad (18)$$

kus $\Delta p_0 = c\rho x_0 \omega$ on ülerõhu amplituud.

Praktikas kasutatakse tihti akustilise rõhu keskväärtust Δp_k ja efektiivväärtust Δp_e (joon. 51).

Rõhu keskväärtuseks nimetatakse hetkeliste rõhkude aritmeetilist keskmist poolperioodi jooksul, mis on mõõdetud rõhu nullväärtuste vahel. Kuna rõhu ajaline muutus toimub keskkonna kõikides punktides ühteviisi, siis lihtsuse mõttes vaatleme rõhu väärtusi kohas y = 0.



Joon. 51

Rõhu keskväärtus

$$\Delta p_k = \frac{\Delta p_0}{T/2} \int_{-T/4}^{T/4} \cos \omega t \, dt = \frac{2 \Delta p_0}{T \omega} \left[\sin \omega t \right]_{-T/4}^{T/4} =$$

$$= \frac{2 \Delta p_0 T}{T \, 2\pi} 2 = \frac{2}{\pi} \Delta p_0 . \qquad (19)$$

Rõhu efektiivväärtuseks nimetatakse rõhkude hetkväärtuste ruutkeskmist ühe perioodi vältel.

$$\Delta p_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (\Delta p)^2 dt} = \sqrt{\frac{(\Delta p_0)^2}{T} \int_0^T \cos^2 \omega \, dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{(\Delta p_0)^2}{2 \, T} \int_0^T (1 + \cos 2\omega t) dt} = \sqrt{\frac{(\Delta p_0)^2}{2 \, T} T} = \frac{\Delta p_0}{\sqrt{2}} . \qquad (20)$$

Küllalt valju hääle korral on ülerõhu amplituud $\Delta p_0 \approx 10 \frac{N}{m^2}$. Siit häälelaines võnkuvate osakeste maksimaalne akustiline kiirus

$$v_0 = \frac{\Delta p_0}{c \rho} = \frac{10}{340 \cdot 12,1} = 0,024 \frac{m}{s} .$$

Seega isegi valju hääle korral on osakeste liikumise maksimaalne kiirus laine levimiskiirusega ja gaasiosakeste soojusliikumise keskmise kiirusega võrreldes tühiselt väike.

5. Hääle intensiivsus

Häälelaine kannab endaga kaasas gaasi elastse deformatsiooni potentsiaalset energiat ning osakeste liikumise kineetilist energiat. Hääle intensiivsuseks ehk tugevuseks I nimetatakse energiahulka, mida häälelaine kannab läbi ühikulise pinna ajaühiku jooksul. Vaadeldav pind asetseb risti laine levimise suunaga.

$$I = \frac{W}{St} . \qquad (20)$$

Arvutame pindadega S piiratud gaasi ruumala elemendi potentsiaalse energia. Elemendi pindadevaheline kaugus on Δy (joon. 6). Kui suhteline ruumala muutus survel on η , siis pinnale S mõjuv jõud (16) ja (10)

$$F = \Delta pS = \varkappa p \eta S = K \eta S. \qquad (21)$$

η muutumisel $d\eta$ võrra nihkub sein $dx = \Delta y \cdot d\eta$ võrra ($\eta = \varepsilon = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, millest $dx = \Delta y \cdot d\eta$) ning jõud teeb elementaartöö

$$dA = F \cdot \Delta y \cdot d\eta = K \cdot \Delta y \cdot S\eta \cdot d\eta. \qquad (22)$$

Töö, mis kulub vaadeldava ruumala $\Delta y \cdot S$ kokkusurumiseks kuni suhtelise deformatsioonini η , võrdub:

$$A = \int_0^{\eta} K \cdot \Delta y \cdot S\eta \cdot d\eta = K \frac{\eta^2}{2} S \cdot \Delta y. \qquad (23)$$

Tehtud töö on võrdne deformeeritud gaasi potentsiaalse energiaga. Potentsiaalse energia ruumtihedus

$$W_p = \frac{A}{\Delta y \cdot S} = K \frac{\eta^2}{2} . \qquad (24)$$

Kui Δy on küllalt väike, võib valitud ruumalas kõikide gaasiosakeste suunatud liikumise kiirused võrdseks lugeda. Kõikide ruumalas olevate osakeste kineetiline energia

$$W_k = n_o \frac{mv^2}{2} \Delta y \cdot S = \frac{\rho v^2}{2} \Delta y \cdot S, \qquad (25)$$

kus n_o on ruumalaühikus olev osakeste arv.

Kineetilise energia ruumtihedus

$$W_k = \frac{\rho v^2}{2} = \frac{\rho \eta^2 c^2}{2} = \frac{\rho \eta^2 \varkappa p}{2} = K \frac{\eta^2}{2} . \qquad (26)$$

Seega on kineetilise ja potentsiaalse energia ruumtihedused võrdsed. Energia ruumtihedus häälelaines

$$W = W_p + W_k = K \eta^2 = \varkappa p \eta^2 . \qquad (27)$$

Energia ruumtihedus sõltub vaadeldava piirkonna suhtelisest deformatsioonist η, mis on seotud ülerõhuga Δp. Valemi (16) kasutamisel

$$W = K \eta^2 = K \frac{\Delta p^2}{K^2} = \frac{\Delta p^2}{K} . \qquad (27a)$$

Antud ajamomendil muutub Δp ruumis perioodiliselt lainepikkuse ulatuses. Valemi (18) põhjal

$$\Delta p = \Delta p_o \cos \omega \left(t - \frac{y}{c}\right).$$

Ruumalaühiku keskmise energia arvutamiseks summeeritakse kihis paksusega λ olevate dy paksuste elementaarkihtide energiad $\frac{(\Delta p)^2}{K} S dy$ ning jagatakse tulemus kihi ruumalaga $S\lambda$.

Seega sisaldab ruumalaühik keskmiselt energiat

$$\bar{W} = \frac{1}{S\lambda}\int_0^{\lambda}\frac{(\Delta p)^2}{K}\,S\,dy = \frac{(\Delta p_0)^2}{\lambda K}\int_0^{\lambda}\left\{\cos^2\omega\left(t-\frac{y}{c}\right)\right\}dy =$$

$$= \frac{(\Delta p_0)^2}{2\lambda K}\int_0^{\lambda}\left\{1+\cos 2(\omega t-\frac{y}{c})\right\}dy = \frac{(\Delta p_0)^2}{2K} =$$

$$= \frac{(\Delta p_0)^2}{2\varkappa p} = \frac{(\Delta p_0)^2}{2c^2\rho}\,. \qquad (28)$$

Seda energiat kannab häälelaine läbi lainega risti asetatud pinna. Ajaühiku jooksul jõuab pinda läbida energia, mis asub pinnast mitte kaugemal kui c. Seega hääle intensiivsus

$$I = \bar{W}c = \frac{(\Delta p_0)^2}{2c^2\rho}\,c = \frac{(\Delta p_0)^2}{2c\rho} = \frac{(\Delta p_e)^2}{\rho c} = 2\pi^2\rho c x_0^2 f^2. \qquad (29)$$

Hääle intensiivsus on võrdeline keskkonna tihedusega, hääle levimiskiirusega ja osakeste võnkeamplituudi ning sageduse ruuduga.

6. Hääle valjus

Et meie kõrvas tekiks kuulmisaisting, peab kõrva membraanile langeval häälelainel olema teatud minimaalne intensiivsus. Minimaalset intensiivsust, mis veel põhjustab kuulmisaistingu, nimetatakse kuuldeläviks. Katsed näitavad, et keskmise tundlikkusega inimkõrva jaoks sagedusel 1000 Hz on kuuldeläviks $I_0 = 10^{-12}\ \frac{W}{m^2}$. Sellele vastab efektiivne rõhk $\Delta p_{e0} = 2 \cdot 10^{-5}\ \frac{N}{m^2}$.

Weberi-Fechneri seaduse kohaselt tajub meie kõrv häält võrdeliselt intensiivsuse logaritmiga. Katsed on näidanud, et see psühhofüüsikaline seadus pole täpselt täidetud. Kuna

kõrva poolt tajutava hääleenergia piirkond on väga lai, siis on ikkagi otstarbekohane hääle intensiivsuste nivood mõõta logaritmilise skaala abil. 0-nivooks valitakse kuuldelävi kokkuleppeliselt.

Hääle intensiivsuse nivoo

$$N = \log \frac{I}{I_0} \text{ belli,} \qquad (30)$$

kus I on mõõdetava hääle intensiivsus. Hääle intensiivsuse nivoo mõõtühikuks on bell (B). Praktikas kasutatakse kümme korda väiksemat ühikut detsibelli (dB).

$$N = 10 \log \frac{I}{I_0} \text{ detsibelli.} \qquad (30a)$$

1 detsibell on hääle sellise intensiivsuse nivoo, mille intensiivsuse ja nullnivoole vastava intensiivsuse jagatise kümnendlogaritm on $\frac{1}{10}$.

Arvestades, et intensiivsus on võrdeline häälelaine tekitatud ülerõhu ruuduga, võib nivood väljendada ka akustiliste rõhkude kaudu

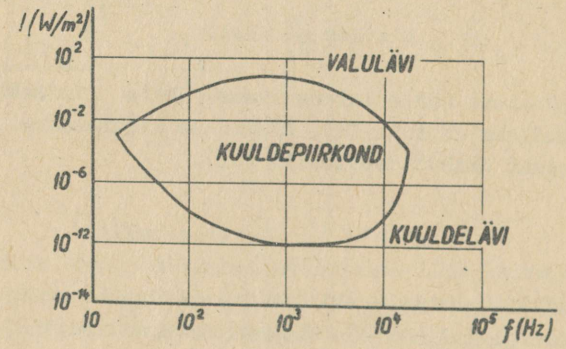
$$N = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log\left(\frac{\Delta p_e}{\Delta p_{eo}}\right)^2 = 20 \log \frac{\Delta p_e}{\Delta p_{eo}} \text{ dB.} \qquad (31)$$

Kõrv tajub häält sõltuvalt hääle intensiivsusest ja sagedusest. Sagedustele 1000 - 4000 Hz on kõrv kõige tundlikum. Sageduse muutudes muutub ka kuuldelävi. Väga suure intensiivsusega (1 - 10 W/m^2) häälelained tekitavad kõrvas valutunde ega ole tajutavad häälena. Vastavat intensiivsust nimetatakse valuläviks. Kõrva poolt tajutav intensiivsuste piirkond vastavalt sagedusele on esitatud joon. 52.

Subjektiivset aistingut, mida tekitab teatud tugevusega hääl, nimetatakse hääle valjuseks. Nagu eespool märgitud, on hääle valjus võrdeline intensiivsuse logaritmiga. Seega on toodud nivoode skaala otstarbekohane ka valjuse mõõtmiseks.

Et peale intensiivsuse sõltub valjus veel hääle sagedusest, siis võetakse kokkuleppeliselt aluseks 1000-hertsilise sagedusega hääl (etaloonhääl). Hääle valjus

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} \text{ fooni.} \qquad (32)$$



Joon. 52

Hääle valjuse ühikuks on foon. 1000-hertsilise sagedusega hääle valjus on 1 foon, kui tema intensiivsuse nivoo on 1 detsibell.

Definitsioonist järeldub, et 1000-hertsilise sageduse korral on hääle intensiivsuse nivoo detsibellides võrdne hääle valjusega foonides. Teiste sageduste korral on aga arvud erinevad, sest hääle valjuseks loetakse sama valjusega etaloonhääle valjus. Kui kõrv on mõõdetava hääle suhtes vähem tundlik, siis võrdsete valjuste korral foonides on mõõdetava hääle nivoo detsibellides suurem etaloonhääle nivoost. Kõrva logaritmilise taju tõttu võivad hääleallikate intensiivsused kõikuda väga suurtes piirides. Allpool on esitatud mõningate hääleallikate poolt tekitatud intensiivsused ning neile vastavad nivood.

Hääleallikas	Kaugus kõrvani m	Intensiivsus W/m^2	Hääle nivoo dB
Kuuldelävi		10^{-12}	0
Veetilga langemine	1	10^{-10}	20

Hääleallikas	Kaugus kõrvani m	Intensiivsus W/m^2	Hääle nivoo dB
Vaikne kõnelus	1	10^{-8}	40
Auto liikumine asfaldil	5 - 10	10^{-6}	60
Sümfooniaorkester (fortissimo)		10^{-4}	80
Surudhuhaamer	1	10^{-2}	100
Lennukimootor	5	1	120
Valulävi		10	130

7. Seisvad lained

Hääleallika võnkumisel on oluliseks nähtuseks seisvate lainete tekkimine. Seisvad lained tekivad kahe vastassuunas liikuva laine interfereerumisel. Oletame, et kaks tasapinnalist lainet, millel on samad parameetrid, liiguvad vastupidistes suundades (joon. 53). Olgu nad antud võrranditega

$$x_1 = x_0 \sin \omega (t - \tfrac{y}{c}),$$
$$x_2 = x_0 \sin \omega (t + \tfrac{y}{c}). \qquad (33)$$

Valime koordinaatide alguseks sellise punkti, kus liidetavate lainete faasid on nullid (t = 0, y = 0). Liitvõnkumise hälve kaugusel y:

$$x = x_1 + x_2 = x_0(\sin\omega t \cdot \cos\omega\tfrac{y}{c} - \cos\omega t \cdot \sin\omega\tfrac{y}{c} +$$
$$+ \sin\omega t \cdot \cos\omega\tfrac{y}{c} + \cos\omega t \cdot \sin\omega\tfrac{y}{c}) = 2x_0 \cos\omega\tfrac{y}{c} \sin\omega t =$$
$$= 2x_0 \cos 2\pi\tfrac{y}{\lambda} \sin\omega t = A \sin\omega t. \qquad (34)$$

Tulemusest on näha, et liitliikumise amplituud

$$A = 2 x_0 \cos 2\pi\tfrac{y}{\lambda} \qquad (35)$$

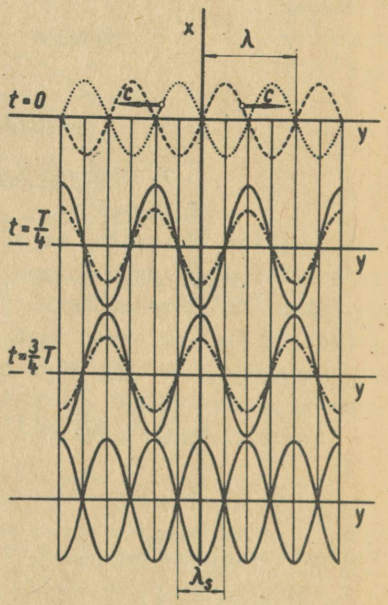
sõltub kaugusest y. Kohtades $y = n\frac{\lambda}{2}$, kus n on täisarv, toimub võnkumine kahekordse liituvate võnkumiste amplituudiga

$$A = 2\,x_0 \cos 2\pi \frac{n\lambda}{2\lambda} = 2x_0 \cos n\pi = (\pm 2x_0), \quad (36)$$

kohtades $y = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$, on võnkumise amplituud 0:

$$A = 2x_0 \cos 2\pi \frac{2n + 1}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = 2x_0 \cos \left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 0. \quad (37)$$

Kui kulgeva lainega kaasneb võnkeprotsessi ja energia kandumine laine levimise suunas, siis seisvas laines seda ei esine. Seisev laine tekib ju kahe kulgeva laine liitumise teel, mis kannavad võrdset energiat vastupidistes suundades. Summaarne energiavoog läbi mingi pinna on sel juhul null. Seisvas laines esinevad nullamplituudiga kohti nimetatakse sõlmpunktideks. Sõlmpunktidevaheline kaugus moodustab seisva laine lainepikkuse. Ta on poole väiksem kulgeva laine lainepikkusest



Joon. 53

$$\lambda_s = \frac{\lambda}{2}. \quad (38)$$

Kohti, kus võnkumine toimub kahekordse amplituudiga, nimetatakse paisudeks. Seisvas laines võnguvad kõik kahe sõlme vahel asuvad osakesed samas faasis, kuid erineva amplituudiga.

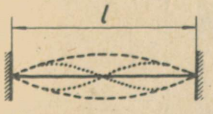
Sõltuvalt keha kujust, tema kinnitusest ning teda piiravast keskkonnast võivad kehas tekkida mitmesugused seisvad lained. Katse näitab, et laine peegeldumisel keha ja keskkonna eralduspiirilt tekib seal pais, kui keskkond on hõre-

dam, ja sõlm, kui keskkond on tihedam. Viimasel juhul toimub laine peegeldus poollaine kaotusega ehk faasinihkega 180°. Vastasel juhul ei saaks langeva ja peegelduva laine liitumise tulemuseks olla nulliga võrdne amplituud.

8. Hääleallikad

Hääleallikaks võib olla iga keha, mis oma kuju või ruumala perioodiliselt muudab. Hääleallika poolt tekitatud võnkumised kanduvad üle ümbritsevale keskkonnale, kus nad häälelainetena edasi levivad. Üldiselt võib suurema osa hääleallikaid jaotada võnkuvateks varrasteks, plaatideks ning võnkuvateks õhusammasteks. Näiteks on viledes, sireenides ja puhkpillides võnkuvaks kehaks õhk, keelpillides pingutatud keel, valjuhääldajates ja telefonis plaadid jne.

a. Vardad heliallikatena. Vardad võivad võnkuda nii risti kui ka pikuti. Pikivõnkumist võib tekitada, kui kampooliga määritud lapiga tõmmata piki keelt. Võnkumisel tekivad vardas seisvad lained. Kahest otsast kinnitatud vardasse (joon. 54) peavad kinnituskohtadesse tekkima sõlmed.



Joon. 54

Kuna sõlmede vahele mahub pool kulgeva laine lainepikkusest, siis võivad vardas tekkida sellised seisvad lained, et kogu varda pikkusesse l mahuks täisarv poollaine pikkusi

$$l = n \frac{\lambda}{2}, \qquad (39)$$

kus n on täisarv (1, 2, 3, ...).

Ristvõnkumiste sagedus on antud Mersenne valemiga

$$f = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{P}{S\rho}}, \qquad (40)$$

kus P on keelt pingutav jõud, S keele ristlõike pindala ja ρ keele materjali tihedus.

Pikivõnkumiste korral võnkesagedus

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad (41)$$

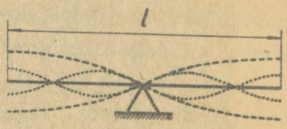
Põhitoonide sagedused oleksid vastavalt

$$f = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{P}{S\rho}} \quad \text{ja} \quad f = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Samaaegselt põhitoonidega tekivad vardas ka n-kordsed kõrgemad harmoonilised.

Kui varras on kinnitatud keskelt, siis tekivad otstesse paisud ning tervesse vardasse mahub paaritu arv poollaine pikkusi (joon. 55).

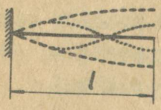
Kui varras on kinnitatud ühest otsast, tekib kinnituskohas sõlm ning vabas otsas pais. Varda pikkusesse mahub siis põhitooni tekitamiseks $\frac{\lambda}{4}$ lainepikkust (joon. 56). Ülemtoonide puhul mahub vardasse paaritu arv veerandlaine pikkusi.



Joon. 55

Võnkesagedus ristvõnkumise korral

$$f = \frac{n}{4l}\sqrt{\frac{P}{S\rho}} \qquad (42)$$



Joon. 56

ja pikivõnkumiste korral

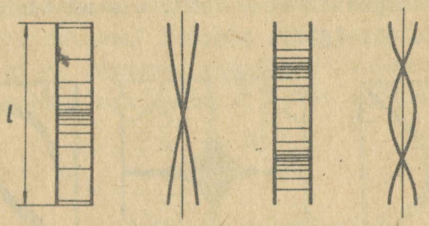
$$f = \frac{n}{4l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad (43)$$

kus n on paaritu arv (1, 3, 5, ...).

b. <u>Õhusammaste võnkumine</u>. Õhusammaste võnkumine torudes on analoogiline varraste võnkumisega. Õhus levivad muidugi ainult pikilained. Kahest otsast avatud torus tekib põhitooni puhul toru keskel sõlm ning otstes paisud. Kõrgemate harmooniliste korral suureneb sõlmede arv nii, et toru otstes on alati paisud (joon. 57). Üldiselt mahub samba kõrgusesse täisarv poollaine pikkusi, $l = n\frac{\lambda}{2}$, millest võnkesagedus

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{nc}{2l}\,, \qquad (44)$$

kus n on täisarv (1, 2, 3, ...).

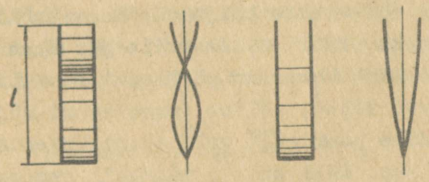


Joon. 57

Kui toru on ühest otsast suletud (joon. 58), siis mahub samba kõrgusesse paaritu arv veerandlaine pikkusi ning võnkesagedus

$$f = \frac{n\,c}{4l}\,, \qquad (45)$$

kus n on paaritu arv (1, 3, 5, ...).

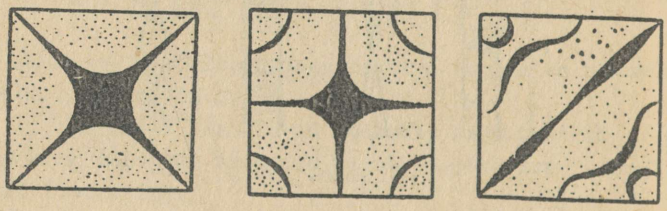


Joon. 58

Seisvate lainete tekkimine torudes on oluline mitmesuguste vilede ja muusikariistade ehitamisel.

c. <u>Plaadid heliallikatena</u>. Küllalt paljudel juhtudel võivad võnkeallikateks olla mitmesugused membraanid ja plaadid. Põhimõtteliselt ei erine siin seisvate lainete tekkimine nende tekkimisest varrastes. Sõlmpunktide asemel moodustuvad aga

siin ristsuunas levivate lainete liitumise tulemusel sõlmjooned. Neid sõlmjooni võib hästi demonstreerida õhukesel plaadil, millele on raputatud peenikest liiva. Poognatõmbega või kerge löögiga ergutame plaadi võnkuma. Sõltuvalt ergutuse tugevusest ja kohast ning plaadi kinnitusest moodustavad sõlmjooned mitmesuguseid kujundeid, mis on tuntud Chladni kujundite nimetuse all (joon. 59).



Joon. 59

Olulist osa hääleallikate võnkumisel etendab resonants. Mehaanikast on teada, et kui võnkuva süsteemi omavõnkesagedus on ligikaudu võrdne sundiva jõu sagedusega, siis tekivad süsteemis väga suure amplituudiga võnkumised – tekib resonants. Resonantsi kasutatakse paljudel juhtudel intensiivsema heli saamiseks. Seejuures tuleb silmas pidada, et ei resoneeri mitte ainult põhitoon, vaid ka kõrgemad sagedused. Heli tugevdamiseks ehitatakse paljudele muusikariistadele resonaatorid, näiteks viiulile, klaverile jt. Kuna resonantsinähtused on siin väga keerukad probleemi ruumilisuse ning toonide suure arvu tõttu, sõltub resonaatori mõju muusikariista kvaliteedile peamiselt valmistaja kogemustest, materjalide valikust jms. Küll on aga võimalik resonaatorit arvutada ühe kindla tooni jaoks, näiteks helihargi jaoks. Kui helihargi sagedus on 440 Hz (normaaltoon la), siis ühest otsast kinnise kastikujulise resonaatori pikkus peaks olema

$$l = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f} \qquad \frac{340}{4 \cdot 440} = 0{,}19 \text{ m}.$$

Samuti on resonantsi saavutamine väga oluline võnkuvates plaatides ja varrastes, mida kasutatakse tehnilistes häälegeneraatorites (ultraheligeneraatorid).

Katsed näitavad, et iga kindlate seintega ruum, millel on avaus, võib täita resonaatori ülesandeid. Õhuruum-resonaatoreid (kerakujulised pudelid) kasutas Helmholtz hääle analüüsiks. Ta ehitas terve rea resonaatoreid, millest igaüks resoneeris kindlale toonile. Resonaatorite abil võis ta kindlaks teha uuritava hääle sagedusspektri. Omal ajal oli Helmholtzi resonaatoreil hääle analüüsimisel küllalt tähtis osa. Tänapäeval on täpsemad tehnilised vahendid (ostsillograafid) Helmholtzi resonaatorid välja tõrjunud.

9. Häälelainete levik

Eriti tähtis on hääle levimine õhus. On ju hääl üheks oluliseks vahendiks ruumis orienteerumisel ja omavahelisel suhtlemisel.

Häälelainete levikul meid ümbritsevas keskkonnas esineb terve rida takistusi ning looduslikke nähtusi, mis muudavad häälelainete intensiivsust ning leviku suunda.

Kui hääl langeb teise keskkonna piirile, milles hääle levimiskiirus on erinev, siis tekib hääle peegeldumine. Peegeldumise tuntud nähtuseks on kaja, s.o. tõkkelt tagasipeegeldunud häälelaine. Et kaja oleks tajutav iseseisva häälena, peab hääle ja kaja vahe olema vähemalt 1/10 s. Hääle kiirusel 340 m/s peab peegeldava pinna kaugus olema

$$l = \frac{ct}{2} \approx \frac{340 \cdot \frac{1}{10}}{2} = 17 \text{ m}.$$

Kui peegeldav pind on lähemal, siis pole kaja eraldatav esialgsest häälest ning hääl venib pikaks, omandades nn. järelkaja.

Teiseks oluliseks momendiks on häälelainete sumbumine keskkonnas ning nende neeldumine mitmesugustes pindades.

Sumbumise kvantitatiivseks iseloomustamiseks kasutatakse sumbumistegurit. Häälealliikast kaugusel y on osakeste võnkumiste hälbe amplituud antud seosega

$$x_y = x_o e^{-\alpha y}, \qquad (46)$$

kus α on sumbumistegur.

Teooria annab sumbumisteguri jaoks avaldise

$$\alpha = 2630 \frac{f^2}{\rho^3} \eta \ , \qquad (47)$$

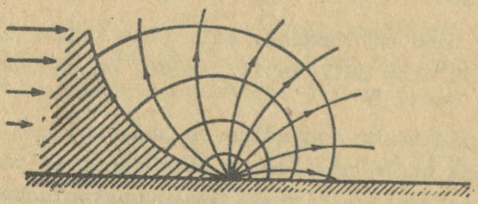
kus η on keskkonna viskoossus.

Õhu jaoks temperatuuril 20° C $\alpha = 0{,}87\, f^2 \cdot 10^{-11}$ 1/m. Kui arvestada veel soojusjuhtivuse mõju, siis $\alpha = 1{,}24\, f^2 \cdot 10^{-11} \frac{1}{m}$. Kaugus, mille puhul 1000-Hz sagedusega võnkumiste amplituud väheneks 10 korda ning intensiivsus 100 korda, oleks

$$y = \frac{\ln 10}{1{,}24 \cdot 10^{-5}} = 1{,}86 \cdot 10^{5}\,\text{m} = 186\ \text{km}.$$

Selline väike sumbumine ei vasta tegelikkusele, kuna esineb veel palju faktoreid, mis põhjustavad hääle sumbumist ja hajumist, näiteks õhu liikumine ja õhukihtide erinevad temperatuurid. Õhu liikumine on tavaliselt seotud keeristega (turbulentne voolamine), mis põhjustab tunduvat hääleenergia neeldumist ning hajumist.

Joon. 60 on näidatud, kuidas tuule suund muudab häälelaine leviku fronti. Kõrgemates atmosfäärikihtides on tuule kiirus tavalisest suurem kui maapinna lähedal. Tuule mõju avaldub selles, et hääle kiirus liitub geomeetriliselt tuule kiirusega, mis moonutab hääle leviku fronti. Vastu tuult te-



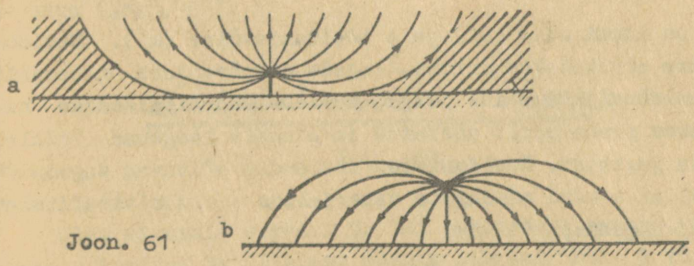
Joon. 60

kib vaikuse tsoon, allatuule võib aga häält kuulda õige kaugel. Tugeva tuulega levib hääl küll kaugemale, kuid samal

ajal kasvab ka tuulest põhjustatud müra nivoo, mis raskendab kuulmist.

Õhu temperatuur muutub keskmiselt iga 200 meetri kõrguse kohta ühe kraadi võrra. Küllalt sageli esineb aga järsemaid temperatuuri muutusi. Tihti maapinna lähedal kõrguse kasvades temperatuur algul tõuseb ja siis alles hakkab langema. Peale selle on temperatuurijaotus sõltuv ajast. Öösel on temperatuuri muutused õhukihist kihti tõusmisel väiksemad. Temperatuuri muutusega kaasneb hääle kiiruse muutus - c = $= 20\sqrt{T}\ \frac{m}{s}$. Hääle kiiruse muutus põhjustab omakorda häälelaine frondi paindumise.

Joon. 61 a on näidatud laine levik, kui õhu temperatuur kasvab, ja joon. 61 b, kui see kahaneb Maa pinnast kaugenemisel. Eriti kaugele kostab hääl, kui maapinna lähedal asub sooja õhu kiht, millelt hääl paindub Maa pinnale tagasi, peegeldub ning uuesti paindub Maa pinnale (joon. 62).



Joon. 61

Sellist nähtust võib täheldada vaikse öö korral jõel. Tasaselt veepinnalt peegeldub hääl väga väikeste neeldumiskadudega ning kostab seetõttu kaugele.

Joon. 62

Hääl kostab väga kaugele ka tuulevaikse ilmaga ja ühtlase temperatuurijaotuse korral, näiteks külmadel tuulevaiksetel talvepäevadel.

Hääle neeldumine ja kaja tekkimine on väga olulised ruumide akustikas, eriti mitmesuguste kontserdisaalide, raadiostuudiote ja loengusaalide projekteerimisel. Kinnistes ruumides peegelduvad ruumi piirdelt hääled mitmekordselt. Sõltuvalt ruumi piirdematerjalide neeldumistegurist, kustub hääl ruumis aegamööda. Niisugust nähtust nimetatakse reverberatsiooniks. Aega, mille jooksul kord tekitatud hääle intensiivsus väheneb miljon korda, nimetatakse reverberatsiooniajaks. Sõltuvalt ruumi otstarbest, loetakse ruum akustiliselt heaks, kui reverberatsiooniaeg kõigub 0,5 - 1,5 sekundi piirides. Kui reverberatsiooniaeg on optimaalsest pikem, siis kostab hääl kõmisevana ja eriti pika reverberatsiooniaja korral muutub kõne raskesti mõistetavaks. Optimaalsest lühemate reverberatsiooniaegade korral kustub hääl liiga järsku ning omandab kalgi kõla. Optimaalset reverberatsiooniaega arvutatakse seose abil

$$t = 0{,}16 \frac{V}{A}, \qquad (48)$$

kus V on ruumi maht (m^3) ja A neeldumisvõime (m^2). Neeldumisvõime arvutatakse seinte, lagede ja põrandate materjali neeldumiskoefitsientide järgi. Neeldumiskoefitsiendiks nimetatakse pinna poolt neelatud ja pinnale langenud hääleenergia jagatist. Neeldumiskoefitsiendid sõltuvad sagedusest. Allpool on toodud mõningate materjalide neeldumiskoefitsiendid (α) sagedusel 512 Hz.

Materjal	α
Krohvitud sein	0,033
Linoleum kõval alusel	0,030
Klaas	0,027
Betoon	0,015
Vilt	0,55
Eesriided	0,23

Kogu ruumi pindade neeldumisvõime

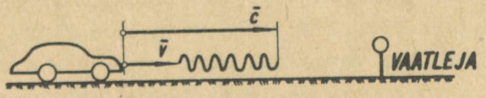
$$A = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots \alpha_i S_1 , \qquad (49)$$

kus S_i on neelav pind neeldumiskoefitsiendiga α_i.

Valides sobivalt seinte kattematerjale, võib ruumile anda sõltuvalt otstarbest head akustilised omadused.

10. Doppleri efekt

Doppleri efekt seisneb selles, et vastuvõetava hääle sagedus sõltub hääleallika ja vaatleja liikumise kiirusest. Eriti selgesti ilmneb Doppleri efekt teineteisest mööduvate rongide korral. Kui mööduv rong vilistab, siis lähenemisel kostab vile kõrgemana kui kaugenemisel. Oletame esmalt, et vaatleja on paigal ning tema poole liigub kiirusega v signaali andev auto (joon. 63).



Joon. 63

Olgu signaali sagedus f. Kui auto oleks paigal, siis kiirusega c levivas häälelaines mahuks pikkusühikule $\frac{f}{c}$ võnkumist. Kui auto liigub kiirusega v, siis surutakse häälelained kokku. Kui lainefront on jõudnud kaugusele c, siis on auto lähenenud frondile v võrra ning f võnkumist peavad mahtuma teepikkusele c - v. Seega mahub auto liikumisel vaatleja poole pikkusühikule $\frac{f}{c - v}$ võnkumist. Kõik need võnkumised levivad vaatlejast mööda kiirusega c, kusjuures ajaühikus võetakse vastu

$$f' = f \frac{c}{c - v} \qquad (50)$$

võnkumist. Auto kaugenemisel oleks kuuldav sagedus

$$f' = f \frac{c}{c + v} . \qquad (51)$$

Vaatleja liikumisel muutub hääle kiirus vaatleja suhtes ning seega ka vastuvõetud hääle sagedus. Üldjuhul oleks vaatleja poolt kuuldav sagedus avaldatav seosega

$$f' = f \frac{c \pm v}{c \pm v} , \qquad (52)$$

kus u on vaatleja liikumise kiirus. + märgitakse siis, kui vaatleja läheneb hääleallikale ja - , kui ta kaugeneb sellest. Valemist järeldub, et Doppleri efekt on erinev sõltuvalt sellest, kas liigub häälleallikas või vaatleja. Kui oletada, et esimesel juhul on vaatleja paigal ($v_1 = 0$) ja häälleallikas liigub vaatleja poole (v_1), teisel juhul on häälleallikas paigal ($v_2 = 0$) ja vaatleja liigub häälleallika poole (v_2) nii, et $v_1 = v_2$, siis

$$f_1' = \frac{c}{c - v} > f_2' = \frac{c + v}{c} .$$

Doppleri efekt lubab kindlaks määrata heliallikate liikumise kiiruse, kui on teada väljasaadetava heli sagedus.

11. Ultraheli

Häälelaineid, mille sagedus on üle 20 000 Hz ja mida inimese kõrv ei taju, nimetatakse ultrahelideks. Loomariigis on küllaldaselt isendeid, kes tajuvad ultrahelisid ning neid ka kasutavad. Näiteks kuulevad koerad ja kassid ultrahelisid sagedusega kuni 30 000 Hz. Nahkhiired kasutavad ultraheli orienteerumiseks ning delfiinid jahiobjekti närvisüsteemi paralüseerimiseks. Taolisi näiteid võiks tuua veel palju.

Tänapäeval on ultraheli hakatud väga laialdaselt rakendama tehnikas. Selleks vajatakse mitmesuguse sagedusega ultrahelisid, alates 20 000 Hz kuni 50 MHz. Ultrahelisid saadakse mehaaniliste või elektriliste ultraheli generaatorite abil.

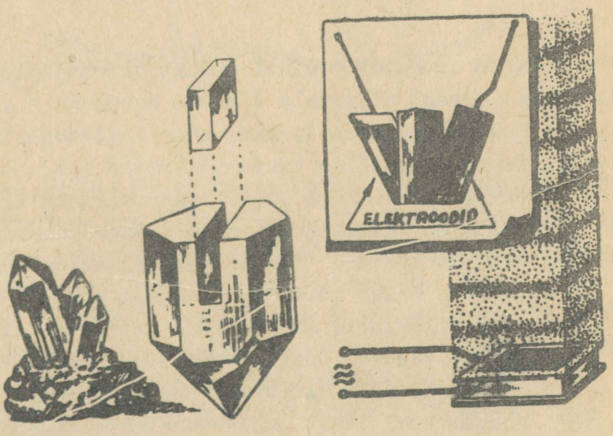
Mehaanilised generaatorid kujutavad endast lihtsalt vilesid, võnkuvaid keeli või sireene, milledesse juhitakse suruõhk. Mehaanilised generaatorid võivad töötada sagedusteni kuni 200 kHz.

Elektrilised generaatorid jagunevad elektrostriktiivseteks ja magnetostriktiivseteks. Esimesel juhul kasutatakse terve rea kristallide (nendest tähtsamad: kvarts, turmaliin, senjettsool) omadust elektriväljas kokku tõmbuda või paisuda vastavalt elektrivälja suunale. Nähtust nimetatakse elektrostriktsiooniks. Vahelduvas elektriväljas hakkab kristallist kindlates suundades väljalõigatud plaat võnkuma vastavalt välja sagedusele. Joon. 64 on näidatud kvartsplaadi väljalõike suunad. Et saada suuremaid amplituude, valitagu plaadi mõõtmed selliselt, et tekiks resonants. Kvartsplaadi omavõnkesagedus põhitoonile

$$f = \frac{2880}{d} \frac{\text{kHz}}{\text{mm}} , \qquad (53)$$

kus d on plaadi paksus millimeetrites.

Looduslikust kristallist suurepinnaliste generaatorite ehitamine on kulukas ning tülikas. Viimasel ajal leiab järjest enam kasutamist baariumtitanaat, millest valmistatakse vajalikke plaate keraamilisel teel.



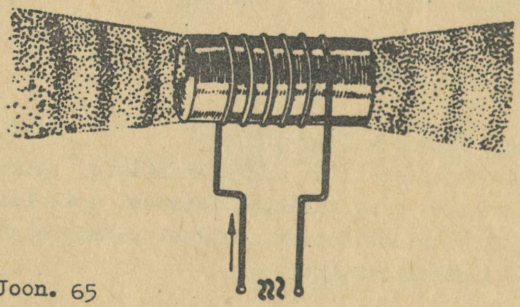
Joon. 64

Magnetostriktiivsetes generaatorites kasutatakse magnetostriktsiooninähtust. Magnetostriktsioon seisneb selles, et ferromagnetilisest materjalist kehad, nende hulgas eriti niklist, muudavad oma kuju muutuvasse magnetvälja sattumisel (joon. 65). Nikkelvarda omavõnkesagedus on arvutatav valemiga

$$f = \frac{237}{\ell} \ \frac{kHz}{cm}, \qquad (54)$$

kus ℓ on varda pikkus sentimeetrites.

Elektrilised ultraheli generaatorid vajavad toiteallikaks kõrgsagedusgeneraatoreid. Elektrilised generaatorid võivad olla ka samal ajal ultraheli võnkumiste vastuvõtjateks.



Joon. 65

Vastuvõetud ultraheli toimel hakkab kristallplaat võnkuma, kusjuures plaadi külgedele ilmuvad muutuvad elektrilaengud (piezoelektriline efekt), mida võib registreerida. Samuti kutsub ferromagnetilise varda võnkumine ultraheli toimel varrast ümbritsevas mähises esile indutseeritud elektromotoorse jõu, mida on võimalik registreerida. Võnkumiste registreerimiseks kasutatakse tavaliselt ostsillograafe.

Ultraheli leiab rakendust järgmiste omaduste tõttu:

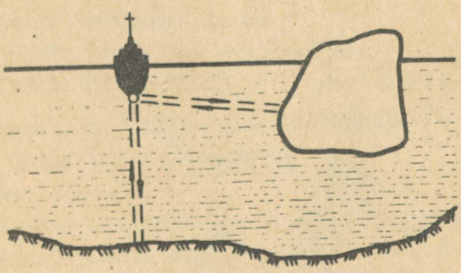
1. Olles lühikese lainepikkusega, levib ultraheli kiirena, alludes vähem difraktsioonile kui kuuldav hääl.

2. Energia, mida ultraheli endaga kaasas kannab, on tunduvalt suurem tavalisest hääleenergiast. Eespool selgus, et

hääle intensiivsus on võrdeline sageduse ruuduga. Järelikult sageduse tõstmisel 100 korda suureneb intensiivsus muude tingimuste samaks jäämisel 10 000 korda. Kui tavalise kõne korral on hääle intensiivsus 10^{-6} W/m^2, siis ultraheli korral tõuseb see mõnesaja kilovatini ruutmeetri kohta.

3. Ultraheli levikuga vedelikus kaasneb tugev kavitatsiooninähtus. Viimane seisneb selles, et kiiresti järgnevate hõrenduste ja tihenduste tõttu tekivad vedelikus mikroskoopilised mullikesed, mis täituvad auruga ja gaasiga. Nende mullikeste tekkimisega ja purunemisega kaasnevad väga suured kohalikud rõhud, ulatudes mõne tuhande atmosfäärini. Kui selline vedelik puutub kokku tahke kehaga, purustab ta tahke keha pinna.

Üheks esimeseks ultraheli rakenduseks olu ultraheli lokaator ehk kajalood (joon. 66). Generaatori saadetud signaali ja tõkkelt tagasi peegeldunud signaali leviku aeg lubab kindlaks määrata tõkke kauguse.

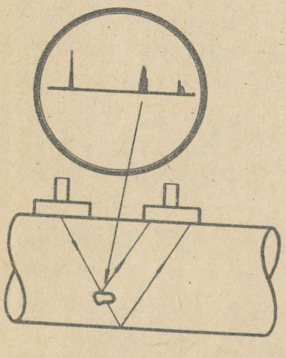


Joon. 66

Taolist kajaloodi kasutatakse merepõhja sügavuse mõõtmiseks, merepõhja kaardistamiseks, jäämägede kindlakstegemiseks, ta on abivahendiks allveelaevadele orienteerumisel ning lubab kindlaks määrata kalaparvede asukoha.

Sellist meetodit kasutatakse laialdaselt ka defektide avastamiseks masinadetailides (joon. 67) ning kvaliteedi kontrollimisel. Siin võib kasutada nii läbivalgustamist kui ka peegeldusmeetodit. Ultrahelidefektoskoopial on

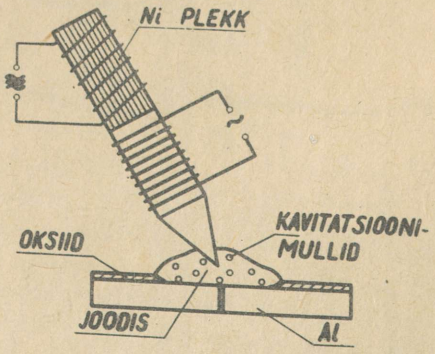
suur eelis röntgenoskoopia ja γ-defektoskoopia ees, võimaldades uurida mitme meetri paksusi metallikihte. Ultrahelidefektoskoopia väljaarendamisel on suuri teeneid Nõukogude teadlasel S.I. Sokolovil.



Joon. 67

Ultraheli poolt tekitatava kavitatsiooni peenendavat toimet kasutatakse ultraheli jootekolbides, puurimisel, mitmesuguste pastade ning emulsioonide valmistamisel, keemiliste protsesside kiirendamiseks, degaseerimiseks, peenestruktuuriliste metallisulamite saamiseks, pisidetailide (näiteks kellaosad)puhastamiseks, siidi pesemiseks jne. Joon 68 on esitatud ultraheli jootetõlviku töötamise skeem.

Kiiresti oksüdeeruvate materjalide, näiteks alumiiniumi jootmine on tavalisel viisil väga raske. Kui jootetõlviku ots sooritab ultraheli võnkumisi, tekib joodises kavitatsioon, mis purustab oksiidikihi ning võimaldab metallidel ühineda.



Joon. 68

Arstiteaduses kasutatakse ultraheli mitmesuguste viiruste ja bakterite hävitamiseks, samuti ka mitmesuguste närvihaigu'ste ravimiseks.

Kirjandust

I. Зисман Г.А. и Тодес О.М. Курс общей физики I, Физматгиз, I958.

2. Корякин Н.И., Быстров К.Н., Киреев П.С. Краткий справочник по физике, Изд. "Высшая школа", I962.

3. Путилов К.А. Курс физики I, Физматгиз, I962.

4. Савельев Н.В. Курс общей физики I, Физматгиз, I962.

5. J. Lang jt., Füüsika üldkursus I, RK "Teaduslik Kirjandus", 1947.

6. K. Schults, Mõõtühikud füüsikaliste suuruste mõõtmiseks, Kirj. "Valgus", 1965.

Sisukord

I. Gravitatsioonijõud. Väljateooria elemente. Liikumine gravitatsiooniväljas

1. Kepleri seadused 3
2. Gravitatsioonijõud. Gravitatsiooniseadus 4
3. Raskuskiirenduse sõltuvus keha asendist Maa suhtes 6
4. Gravitatsiooniväli. Tsentraaljõud. Gravitatsioonivälja tugevus 9
5. Töö gravitatsiooniväljas. Gravitatsioonivälja potentsiaal 11
6. Kosmilised kiirused. Kosmiliste lendude probleem 14

II. Osakeste põrked

1. Üldmõisteid 19
2. Absoluutselt mitteelastne põrge 20
3. Absoluutselt elastne põrge 21

III. Vedelike ja gaaside mehaanika

1. Probleemi ulatus 24
2. Rõhk liikumatus vedelikus 25
3. Vedeliku voolamise kirjeldamine ja vaatlemine. Pidevuse võrrand 26
4. Bernoulli võrrand 28
5. Vedelike ja gaaside sisehõõrdumine ning selle mõõtmise meetodeid 32
6. Laminaarne ja turbulentne voolamine 36
7. Kehade liikumine vedelikes ja gaasides. Frontaaltakistus ja tõstejõud 37

IV. Mehaanilised võnkumised

1. Üldmõisteid 40
2. Harmooniline võnkumine 40
3. Omavõnkumised 43
4. Omavõnkumiste energia 46
5. Füüsikaline ja matemaatiline pendel 47
6. Harmooniliste võnkumiste liitmine 49
7. Sumbuvad võnkumised 57
8. Sunnitud võnkumised 60

V. Akustika

1. Sissejuhatus 65
2. Hääl. Häälelained. Häälespektrid 66
3. Hääle levimiskiirus 69
4. Hääle rõhk 71
5. Hääle intensiivsus 74
6. Hääle valjus 76
7. Seisvad lained 79
8. Häälealliked 81
9. Häälelainete levik 85
10. Doppleri efekt 89
11. Ultraheli 90

Hind 18 kop.

A-27418

TARTU ÜLIKOOLI RAAMATUKOGU
1 0300 00068718 8