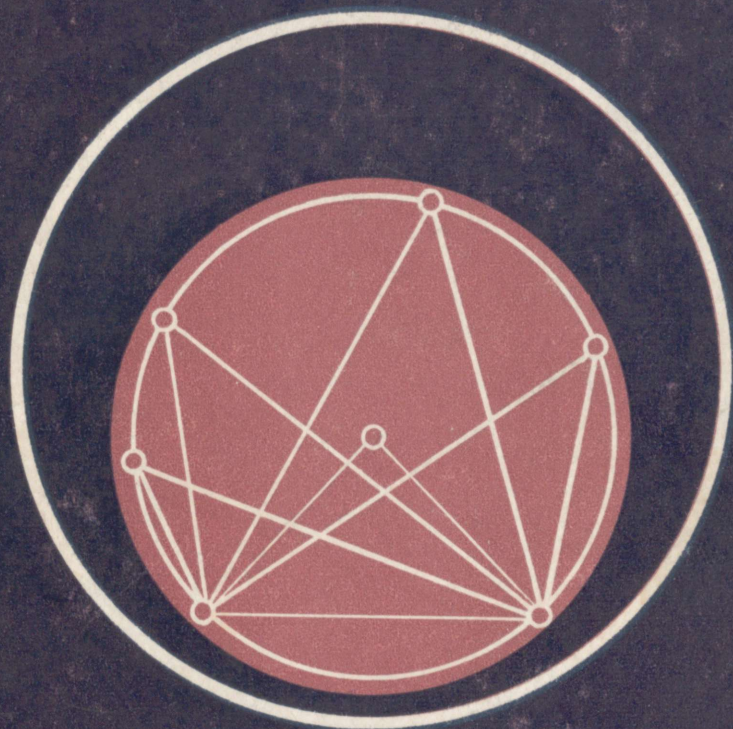


E.ETVERK A.TELGMAA
A.UNDUSK A.VIHMAN



MATEMAATIKA

VII KLASSILE

87206

A-33262

E. ETVERK A. TELGMAA A. UNDUSK A. VIHMAN

MATEMAATIKA

VII KLASSILE

KATSEÕPIK



«VALGUS» TALLINN 1973

Kaane kujundanud *R. Tungla*.

Katseõpikuks kinnitanud Eesti NSV Haridusministeerium.



1. KORDAMISEKS JA TÄIENDAMISEKS.

1.1. ARVUD JA AVALDISED.

1. Kirjuta naturaalarvuna

$$3 \cdot 10^5; \quad 6,4 \cdot 10^6; \quad 2^2 \cdot 10^4; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 10^3.$$

2. Kirjuta täisarvuna

$$20 : 4 - (-28 : 7) + 20 : (-2) - (-8) : (-4);$$

$$- \frac{(-1)^6}{(-1)^4}.$$

3. Kirjuta ratsionaalarvuna

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + 1; & \quad \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{12}\right); \\ -\frac{5}{6} - \left(-\frac{1}{4}\right) - 1; & \quad 1 - \left(-\frac{1}{3}\right) - 1 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4. Arvuta summa $a+b$.

$$\begin{cases} a=716 \\ b=284 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1\frac{5}{8} \\ b=2\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} a=7,5 \\ b=2,95 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-4\frac{1}{2} \\ b=3\frac{3}{4} \end{cases}$$

5. Arvuta vahe $m-n$.

$$\begin{cases} m=1701 \\ n=601 \end{cases} \quad \begin{cases} m=4,68 \\ n=3,9 \end{cases} \quad \begin{cases} m=6\frac{5}{18} \\ n=1\frac{11}{24} \end{cases} \quad \begin{cases} m=-13,4 \\ n=-28,6 \end{cases}$$

6. Kirjuta kordaja abil lühemalt.

1) $ab + ab + ab + ab$

2) $mx + mx + mx + mx + mx + mx$

7. Kirjuta astendaja abil lühemalt.

1) $aaaaa$

2) $mmmmmm$

8. Kirjuta lühemalt.

1) $aaann + aaann + aaann + aaann$

2) $a + a + a + aaa + aaa + aaa + aaa + aaa$

3) $xxxxy + xxxyy + xxyyy + xxyyy + xxyyy$

9. Kumb on suurem, kas

4^2 või 2^4 ; 2^3 või 3^2 ; 5^3 või 3^5 ; 3^4 või 4^3 ?

10. Arvuta

1) $4a$ ja a^4 , kui $a=3$;

2) b^3 ja $3b$, kui $b=5$;

3) $2m$ ja m^2 , kui $m=10$;

4) $3x$ ja x^3 , kui $x=1\frac{1}{2}$;

5) $4n$ ja n^4 , kui $n=-2$;

6) $5y$ ja y^5 , kui $y=-1$.

11. Arvuta

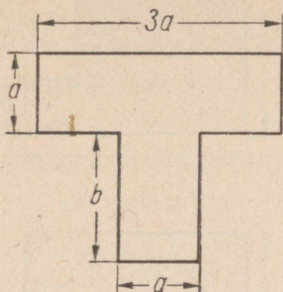
$\left(\frac{1}{3}\right)^2$; $\left(\frac{3}{4}\right)^2$; $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $(0,1)^3$; $(0,5)^2$.

12. Arvuta

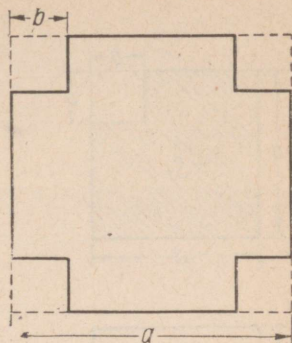
$2^4 \cdot 5^2$; $8^2 \cdot 5^3$; $2^3 \cdot 5 + 8^2$; $6 + 3 \cdot 2^5$.

13. Koosta valem joonisel 1 esitatud kujundi ümbermõõdu arvutamiseks.

14. Ruudukujulisest papitükist, mille külje pikkus on a cm, lõigati nurkadest välja ruudud küljepikkusega b cm (joon. 2) ja servi üles pöörates valmistati pealt lahtine karp. Avalda saadud karbi ruumala V .



JOON. 1



JOON. 2

15. Kirjuta algebraline avaldis, mida loetakse järgmiselt:

- 1) arvude a ja b summa ruut;
- 2) arvude m ja n ruutude summa;
- 3) arvude a ja b summa kuup;
- 4) arvude a ja b kuupide summa;
- 5) arvude x ja y vahe ruut;
- 6) arvude x ja y ruutude vahe;
- 7) arvude c ja d vahe kuup;
- 8) arvude u ja v kuupide vahe.

16. Avalda joonisel 3 esitatud kujundite pindalad S_1 ja S_2 . Arvuta S_1 ja S_2 , kui $a=3$ m ja $b=1$ m.

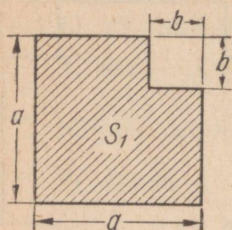
17. Avalda joonisel 4 esitatud kujundite pindalad S_1 ja S_2 . Arvuta S_1 ja S_2 , kui $a=1,2$ m ja $b=0,6$ m.

18. Põhjenda joonise 5 abil üksliikme ja hulkliikme korrutamise eeskirja:

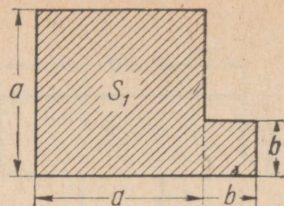
$$a(b+c+d) = ab+ac+ad.$$

19. Korruta

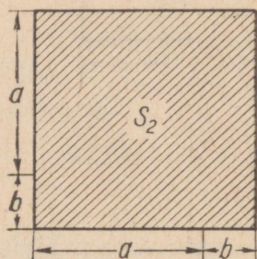
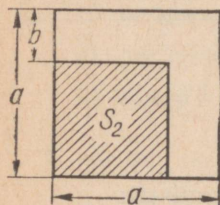
- 1) hulkliige $2a^3-5a+1$ üksliikmega $-3a^4$;
- 2) hulkliige $15x^2-7x-25$ üksliikmega $11x^2$.



JOON. 3



JOON. 4



20. Selgita joonise 6 põhjal hulkliikmete $a+b$ ja $m+n+k$ korrutamise eeskirja:

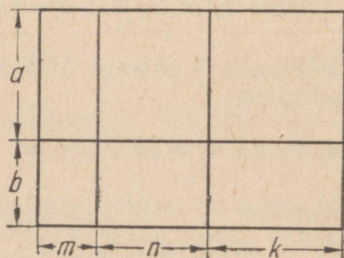
$$(a+b)(m+n+k) = am + an + ak + bm + bn + bk.$$

21. Korruta ja koonda tulemus.

- 1) $(2x^2 - x + 1)(x + 3)$
- 2) $(a^2 - 2a + 3)(3a^2 + a - 2)$
- 3) $(x^2 - x + 1)(x + 1)$
- 4) $(a^2 + 2a + 3)(3a^2 + a - 2)$



JOON. 5



JOON. 6

22. Sõnasta alljärgnevad valemid.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

23. Lihtsusta.

1) $(3+a)^2 + (a-3)^2 - 18$

2) $2n^2 + (5+n)(5-n) - (5-n)^2$

3) $(2+x)^3 + (2-x)^3 - 12x^2$

4) $(a-n)(a^2 + an + n^2) + (a-n)^3 + 3an^2$

5) $2(3a-b) + 3(4-2a) + 2b$

24. Lihtsusta.

1) $(4+b)^2 + (b-4)^2 - 32$

2) $(3+a)(3-a) - (3-a)^2 + 2a^2$

3) $(1+y)^3 + (1-y)^3 - 6y^2$

4) $(b-x)(b^2 + bx + x^2) - (b-x)^3 + 3bx^2$

5) $2(10-5x) + 5(2x-a) + 5a$

25. Arvuta avaldise väärtus, lihtsustades enne avaldist:

1) $(4+m)(4-m) + (4+m)^2 - 32$, kui $m=1,25$;

2) $(x+3)^2 - (x-3)^2$, kui $x=15$;

3) $(a+2)^3 - (a-2)^3 - 16$, kui $a=5$;

4) $(1+x)(1-x+x^2) - (1+x)^3 + 3x^2$, kui $x=-1,5$;

5) $(1-a)(1+a+a^2) - (1-a)^3 + 3a^2$, kui $a=-2,5$.

26. Lahenda võrrand.

1) $4(2x+3) + 6(x-2) = 42$

2) $(7+x)^2 + (8+x)(8-x) = 127$

- 3) $(x+1)^2 - x^2 = 2$
 4) $2x^2 - 2(x-3)^2 = 27$
 5) $(2+x)^3 - (2-x)^3 - 2x^3 = 12$

27. Ristküliku ja ruudu ümbermõõdud on võrdsed. Ristküliku pikkus on a meetrit ja laius on b meetrit. Leia ruudu külje pikkus.
28. Klassis on 22 tüdrukut ja 18 poissi. Mitu protsenti klassi õpilastest on tüdrukud? Mitme protsendi võrra on klassis tüdrukuid rohkem kui poisse? Mitme protsendi võrra on poisse vähem kui tüdrukuid?
29. Risttahukakujulise siloaugu sügavus on 1,9 m, pikkus 3,4 m ja laius 3,1 m. Silo täidab 85% augu ruumalast. Mitu kuupmeetrit silo on augus?
30. Kauba hinda alandati 10% võrra. Järgmisel aastal alandati selle kauba hinda veel 15% võrra. Leia kauba hind pärast teistkordset hinnaalandust, kui kauba alghind oli 220 rbl.
31. 14-grammise söetüki analüüsimisel selgus, et selles oli 10,4 g süsinikku, 1 g vesinikku, 0,84 g hapnikku, 0,56 g lämmastikku ja peale selle veel mitmesuguseid muid aineid. Mitu protsenti sisaldas söetükk iga nimetatud ainet?
32. Klassist puudus 4 õpilast ehk 12,5% klassi õpilaste üldarvust. Leia klassi õpilaste arv.
33. Nimeta x kõik täisarvulised väärtused, mis rahuldavad tingimusi:
 1) $-5 < x < 2$; 2) $-1007 < x < -1002$; 3) $|x| < 4$.
34. Arvuta summad.
 1) $|-17| + |-9| - |-3| + |0| - |+8|$
 2) $|23-32| - |19-7| + |-17-15|$
 3) $|0-23+19| - |28-19| + |19-27|$
 4) $3 \cdot |16-27| - 4 \cdot |16-27| + 5 \cdot |16-27|$
 5) $|74-58-39| - |-74+58+39|$
35. Leia muutujate a ja b kaks väärtuspaari, mille korral antud võrdus on õige.
 1) $|a-b| = |a| - |b|$
 2) $|a-b| = |a| + |b|$

$$3) |a-b| = |b|-|a|$$

$$4) |a-b| = |a+b|$$

$$5) |a-b| = |b-a|$$

36. Näita, et

$$1) (a-b)^2 = (b-a)^2;$$

$$2) (-a-b)^2 = (a+b)^2;$$

$$3) (a-b)^3 = -(b-a)^3;$$

$$4) (-a-b)^3 = -(a+b)^3.$$

37. Kasutades valemit $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, arvuta

$$1) 101 \cdot 99;$$

$$2) 21 \cdot 19;$$

$$3) 32 \cdot 28;$$

$$4) 108 \cdot 92.$$

38. Kasutades valemeid, kirjuta avaldis ilma sulgudeta.

$$1) (3x-4)^2$$

$$2) (5-2x^3)^2$$

$$3) (2a+3b^3)^2$$

$$4) (x^3+3y)^2$$

$$5) (x+3y)^3$$

$$6) (2a^3+3b)^3$$

$$7) (2x-5y^2)^3$$

$$8) (4a^2-3y)^3$$

$$9) (2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$$

$$10) (3x^2-2y^3)(9x^4+6x^2y^3+4y^6)$$

1.2. HULGAD.

39. Loetle elemente, millest koosneb

1) arvu 10 tegurite hulk;

2) kolmnurga ABC tippude hulk;

3) avaldises $\frac{3x-5}{6}$ esinevate tehete hulk;

4) nelinurga $KLMN$ külgede hulk;

5) sinu klassi tunniplaanis esinevate õppeainete hulk;

6) alla kümne aasta vanuste klassikaaslaste hulk.

40. Kuidas nimetatakse objekte, millest hulk koosneb?

Mis on naturaalarvude hulga elementideks? täisarvude hulga

elementideks? klassi õpilaste hulga elementideks?
Leia arvust 10 väiksemate algarvude hulga elemendid.

41. Sõnad *mets, tähestik, laevastik, perekond, küla* tähendavad teatud hulki. Mis on nende hulkade elementideks?
Leia veel hulki tähendavaid sõnu.

42. Kirjuta lühidalt sümbolite abil lause
Hulga A elementideks on arvud 1, 2, 3, 4 ja 5.

43. Nimeta hulki, mis on antud järgmiste võrdustega:

1) $N = \{0; 1; 2; 3; \dots\};$

2) $Z = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\};$

3) $N_1 = \{1; 2; 3; \dots\};$

4) $N_1^- = \{-1; -2; -3; \dots\};$

5) $T_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\};$

6) $K = \{12; 15; 18; \dots; 93; 96; 99\}.$

Missugused neist hulkadest on lõplikud, missugused lõpmatud?

44. Kirjuta üles iga alljärgnev hulk ja otsusta, kas see on lõplik või lõpmatu:

1) arvu 18 tegurite hulk T_{18} ;

2) naturaalarvude ruutude hulk R ;

3) naturaalarvude ruutude viimaste numbrite (üheliste) hulk S ;

4) paarisarvude üheliste numbrite hulk P ;

5) kahega lõppevate arvu 3 kordsete hulk K ;

6) arvu 13 kahekohaliste kordsete hulk L .

45. Kaks hulka A ja B loetakse võrdseiks, kui nad koosnevad samadest elementidest, näiteks $\{1; 3; 5\} = \{3; 5; 1\}$.
Missugused järgmistest hulkadest on võrdsed?

1) $A = \{2; 3; 5; 7\};$

2) $B = \{\text{maailmajaod}\};$

3) $C = \{2; 4; 6; 8\};$

4) $D = \{\text{Aafrika; Aasia; Ameerika; Antarktika; Austraalia; Euroopa}\};$

5) $E = \{\text{ühekohalised algarvud}\};$

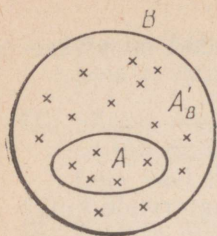
6) $F = \{\text{ühekohalised paarisarvud}\}.$

46. Kirjuta täisarvude hulga

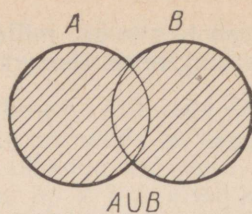
$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

elementide absoluutväärtuste hulk nende kasvamise järjekorras.

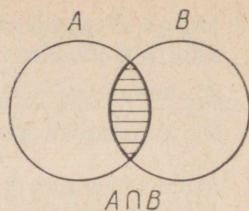
47. Hulga H elementideks on täisarvud, mille ruudud on väiksemad kui 20. Kirjuta see hulk tema elementide
- 1) kasvavas järjekorras,
 - 2) kahanevas järjekorras.
48. Mida tähendab kirjutus $5 \in N$, kui N on naturaalarvude hulk? Missugused kirjutustest
- $$-3 \in N, 0,4 \notin N, 17 \in N, \frac{78}{13} \notin N$$
- on õiged?
49. Olgu G algarvude hulk. Kirjuta sümbolite abil, missugused arvudest
- $$7, 9, 17, 27, 29, 37, 39$$
- on hulga G elementideks, missugused mitte.
50. Kirjuta arvu 24 tegurite hulk T_{24} . Märgi lühidalt, missugused arvudest 2, 3, 9, 12, 15, 24 on selle hulga elemendid, missugused mitte.
51. Leia arvu 2860 algtegurite hulk A . Missugused arvudest 3, 5, 7, 11, 13 kuuluvad hulka A , missugused mitte?
52. Kuidas nimetatakse hulka A hulga B suhtes, kui on teada, et hulga A iga element kuulub hulka B ? Kujuta seda asjaolu diagrammil ja märki lühikirjas.
53. Loe kirjutusi $A \subset B$ ja $A \not\subset C$. Too näiteid hulkadest, mille vahel kehtib seos \subset või $\not\subset$.
54. On antud hulgad $A = \{3; 6\}$, $B = \{6; 5; 3\}$, $C = \{1; 3; 6\}$ ja $D = \{3; 5; 6; 8\}$. Kirjuta iga kahe antud hulga kohta, kas nende vahel kehtib seos \subset või $\not\subset$.
55. Mida võib öelda hulkade A ja C kohta, kui $A \subset B$ ja $B \subset C$? Too näide selliste hulkade kohta.
56. Mida võib öelda hulkade A ja B kohta, kui $A \subset B$ ja ka $B \subset A$? Kirjuta see tulemus sümbolite abil.
57. Näita, et arvu 81 tegurite hulk (ilma tegurita 1) on võrdne sajast väiksemate arvu 3 astmete hulgaga.
58. Leia kuus sõna, mille tähtede hulk on võrdne hulgaga $\{r; a; e; k\}$.
59. On antud hulgad $A = \{1; 5; 7; 10\}$, $B = \{1; 3; 5; 7; 10; 12\}$, $C = \{5; 10; 7; 1\}$. Missugused seostest
- $$A \subset B, A \subset C, B \subset A, B \subset C, C \subset A, C \subset B$$
- on õiged, missugused mitte?



JOON. 7

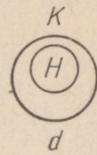
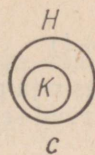
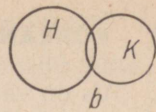
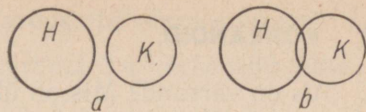


JOON. 8



JOON. 9

60. Kui $A \subset B$, siis hulga B elemendid, mis ei kuulu hulka A , moodustavad hulga A **täiendi** hulgani B . Seda täiendit tähistatakse kujul A'_B .
Leia hulk A'_B , kui $A = \{1; 3; 5\}$ ja $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
61. Koosta hulga $P = \{3; 6; 9\}$ täiendi hulgani $Q = \{3; 4; 5; 6; 7; 9\}$.
62. Mis on 7. klassi tütarlaste hulga täiendiks selle klassi õpilaste hulgani?
63. Kirjuta naturaalarvude hulga N täiend täisarvude hulgani Z .
64. Leia arvu 4 tegurite hulga täiend arvu 12 tegurite hulgani.
65. Mis on positiivsete paarisarvude hulga täiendiks naturaalarvude hulgani.
66. Missugused punktid diagrammil 7 kujutavad hulga A elemente, missugused hulga B elemente ja missugused hulga A'_B elemente? Mis on diagrammil kujutatud hulk A hulga B suhtes?
67. Missuguses seoses on võrdkülgsete kolmnurkade hulk K ja võrdhaarsete kolmnurkade hulk H . Esita see seos diagrammina.
68. Mida nimetatakse kahe antud hulga A ja B ühendiks $A \cup B$ (joon. 8)?
69. Moodusta hulkade A ja B ühend $A \cup B$, kui
- 1) $A = \{a; b; c; d\}$ ja $B = \{b; f; k; d\}$;
 - 2) $A = \{1; 5; 10; 15; 20\}$ ja $B = \{1; 10; 20\}$;
 - 3) $A = \{\text{paarisarvud}\}$ ja $B = \{\text{paaritud arvud}\}$;
 - 4) $A = \{3; 6; 9; 12; 15; \dots\}$ ja $B = \{5; 10; 15; \dots\}$;
 - 5) $A = \{\text{ristkülikud}\}$ ja $B = \{\text{ruudud}\}$;
 - 6) $A = \{\text{ruudud}\}$ ja $B = \{\text{rombid}\}$.
70. Mida nimetatakse kahe antud hulga A ja B ühisosaks $A \cap B$ (joon. 9)?



JOON. 10

71. Mis on hulk C hulkade A ja B suhtes järgmistel juhtudel:
- 1) element $x \in C$ siis ja ainult siis, kui $x \in A$ või $x \in B$;
 - 2) element $x \in C$ siis ja ainult siis, kui $x \in A$ ja $x \in B$.
72. 1) Leia jooniselt 8 hulga A täiend hulgani $A \cup B$ ja hulga B täiend hulgani $A \cup B$.
- 2) Leia jooniselt 9 hulga $A \cap B$ täiend hulgani B ja hulga $A \cap B$ täiend hulgani A .
73. Moodusta hulkade A ja B ühisosa $A \cap B$, kui
- 1) $A = \{a; b; d; e; f; g; h\}$ ja $B = \{c; d; e; h; k\}$;
 - 2) $A = \{3; 5; 7; 9; 11; 13; 15\}$ ja $B = \{\text{algarvud}\}$;
 - 3) $A = \{5\text{-ga jaguvad arvud}\}$ ja $B = \{\text{paarisarvud}\}$;
 - 4) $A = \{\text{võrdhaarsed kolmnurgad}\}$ ja $B = \{\text{täisnurksed kolmnurgad}\}$;
 - 5) $A = \{\text{rombid}\}$ ja $B = \{\text{ruudud}\}$;
 - 6) $A = \{\text{ristkülikud}\}$ ja $B = \{\text{rööpkülikud}\}$.
74. Joonisel 10 on diagrammina kujutatud kahe hulga H ja K seosed sõltuvalt nende ühisosast. Kirjelda neid seoseid joonisel näidatud juhtudel a, b, c ja d ning avalda need sümbolite abil. Mis on hulkade H ja K ühendiks igal antud juhul?
75. Hulga H_1 elementideks on naturaalarvud x , mis täidavad tingimust $x < 30$, ja hulga H_2 elementideks naturaalarvud x , mis täidavad tingimust $x > 25$. Leia hulga $H_1 \cap H_2$ elemendid. Mis on $H_1 \cup H_2$?
76. Hulga A elementideks on arvust 50 väiksemad arvu 6 kordsed ja hulga B elementideks arvust 50 väiksemad arvu 9 kordsed. Leia hulga $A \cap B$ ja $A \cup B$.
77. Olgu ristjoone punktide hulk R ja selle keskpunkti läbiva sirge punktide hulk S . Mis on $R \cap S$?
78. Joonesta ringjoon, mille keskpunkt on O , koos kahe diameetriga AB ja CD . Olgu diameetri AB punktide hulk M_1 , diameetri CD punktide hulk M_2 ja ringjoone punktide hulk M_3 . Selgita, mis on 1) $M_1 \cap M_2$, 2) $M_1 \cup M_3$, 3) $M_1 \cap M_3$, 4) $(M_1 \cup M_3) \cap M_2$, 5) $(M_1 \cup M_2) \cap M_3$.

1.3. VÖRRANDID.

79. Mis on võrrand? Mis on ühe muutujaga võrrandi lahend?

80. Arvuta võrrandi

$$x(x-1) + 2x = 2(x+1)$$

vasaku poole väärtus v ja parema poole väärtus p , kui $x \in \{-1; 0; 2\}$. Missugused arvud selles hulgas on antud võrrandi lahenditeks?

81. Missugune lause on õige, missugune väär?

1) $3 \in \{t \mid t-3=0\}$

2) $1 \in \{x \mid 2x=4\}$

3) $-5 \notin \{y \mid y-2=2y\}$

4) $3 \in \{x \mid x(x-1)=6\}$

5) $\{2; 1\} \subset \{z \mid z^3+2=2z+z\}$

6) $\{0; 1\} \not\subset \{x \mid x^2=2x\}$

82. Missuguseid võrrandeid nimetatakse samaväärseteks? Missugused kõrvuti olevad võrrandid on samaväärsed?

1) $x-3=5$ ja $2x=16$

2) $2u=10$ ja $t-5=0$

3) $2x-6=8$ ja $x+1=6$

4) $2s=12$ ja $t-6=1$

83. Missuguseid teisendusi võib teha võrrandiga, et uus võrrand oleks antuga samaväärne?

84. Lahenda võrrand.

1) $x+1-2(x-3)=7$

2) $4x-(x+6)=-6$

3) $9-(3x+1)-2x=13$

4) $4(u-7)-3(12-u)=461$

5) $5-(x+4)=-10-(4x-2)$

6) $3t-(t+1)-(t+2)=1$

7) $-5(x+3)+2(1-x)=19-3(2x+7)$

8) $1,2(z+3)-3(4z-5)=4,3-2(3z+1)$

9) $4x-(7x+8)=- (4-x)+10$

85. Leia kaks arvu, kui on teada, et nende arvude summa on 5 ja vahe on 7.

86. Kolme järjestikuse täisarvu summa on -30 . Mis arvud need on?

87. Missugune arv on oma vastand arvust 10 võrra suurem?
88. Missugune arv on oma vastand arvust 3,4 võrra väiksem?
89. Uks arv on teisest 6 võrra suurem. Kui väiksemat arvu korrutada 2-ga, siis saadakse suurema arvu vastand arv. Leia need arvud.
90. Leia arv, mille korrutamisel 5-ga saame selle arvu vastand arvust 4 võrra väiksema arvu.
91. Ma mõtlesin ühe arvu. Kui seda arvu vähendada 2 võrra ja saadud vahet suurendada 2 korda, siis saadakse mõeldud arvust 6 võrra suurem arv. Mis arvu ma mõtlesin?
92. Kahekohalise arvu ristsumma on 11. Leia see arv, kui on teada, et üheliste number on kümneliste numbrist 7 võrra suurem.
93. Leia hulk.
- 1) $\{x \mid 3x - 6 = x + 2\}$ 2) $\{t \mid 2(t - 1) = 2t\}$
 3) $\{t \mid 1,2t - 3,6 + 0,3t = 2,4\}$ 4) $\{x \mid 1,7x + 3,224 = 3,161 - 0,4x\}$
94. Lahenda võrrand.
- 1) $\frac{3k+1}{4} - 2 = \frac{1}{6} (3 - 2k)$ 2) $\frac{6u-3}{2} - \frac{u+2}{5} + 3,7 = 0$
95. Murru lugeja ja nimetaja summa on 7. Kui murru lugejat suurendada 5 võrra, siis on saadud murd võrdne 2-ga. Leia see murd.
96. Leia arv, mille jagamisel 2-ga saame selle arvu vastand arvust 5 võrra väiksema arvu.
97. Kolmnurga alus on kõrgusest 2 korda lühem. Leia kolmnurga pindala, kui on teada, et aluse ja kõrguse summa on 15,3 cm.
98. Leia kolmnurga küljed a , b ja c , kui on teada, et kolmnurga ümbermõõt on 44 cm, külg b on 3 korda pikem kui külg a ja külg c on 14 cm võrra pikem kui külg a .
99. Veoauto väljus hommikul kell 8.00 koormaga kolhoosist linna suunas. Olnud linnas 3 tundi, jõudis tühi auto kolhoosi tagasi samal päeval kell 14.30. Leia kolhoosi kaugus linnast, kui on teada, et koormaga sõitis auto keskmiselt 45 km tunnis ja tühjalt 60 km tunnis.
100. Jalakäija jõudis asulast A asulasse B 35 minutiga. Tagasiteel asulast B asulasse A läbis ta igas tunnis 0,6 km rohkem kui liikumisel asula B suunas ja jõudis seetõttu asulasse A 30 minutiga. Leia asulatevaheline kaugus.

1.4. MIS ON DEFINITSIOON.

Iga hulga elementidel on omadusi, mille põhjal saab neid üksteisest eristada. Niisugune omadus võimaldab antud hulgast eraldada ühe osahulga, mille elementideks on antud hulga need elemendid, millel on vaadeldav omadus. Seda omadust nimetatakse saadud osahulga elementide **tunnuseks**. Eraldatud osahulga elementidele antakse tavaliselt erinimetus, millega neid eristatakse hulga ülejäänud elementidest.

Näide. Arvust 0 suuremate naturaalarvude hulgas

$$N_1 = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$$

leidub arve, millel on kaks ja ainult kaks erinevat tegurit, kuid leidub ka arve, mille tegurite hulk on teistsugune (näiteks arvul 1 on ainult üks tegur ja arvul 6 on neli erinevat tegurit). Võttes nimetatud omaduse osahulga elementide tunnuseks, saame hulga N_1 ühe osahulga, mida tähistame tähega G (joon. 11):

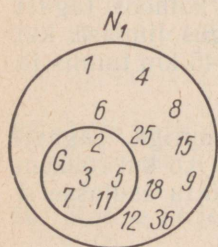
$$G = \{2; 3; 5; 7; \dots\}.$$

Saadud osahulga elemente nimetatakse teatavasti **algarvudeks**. Seega oleme naturaalarvude hulgast eraldanud algarvude hulga. Kui mingi tunnuse põhjal on moodustatud mingi uus hulk ja selle elementidele on antud erinimetus, siis on vaja öelda, mida mõistetakse selle uue nimetuse all. Toodud näite puhul tuleks näiteks öelda, et

algarvuks nimetatakse arvust 0 suuremat naturaalarvu, millel on kaks ja ainult kaks erinevat tegurit.

See lause annab täpse vastuse küsimusele, mis on algarv. Lühidalt nimetatakse seda lauset **algarvu definitsiooniks**. Niisamuti tuleb iga uue nimetuse korral anda definitsioon, mis annaks vastuse küsimusele, mida selle nimetuse all on mõeldud. Näiteks vastuse küsimusele, mis on täisnurkne kolmnurk, annab täisnurkse kolmnurga definitsioon:

täisnurkseks kolmnurgaks nimetatakse kolmnurka, mille üks nurk on täisnurk.



JOON. 11

Niisamuti vastuse küsimusele, mida nimetatakse naturaalarvude m ja n korrutiseks mn , annab definitsioon:

naturaalarvude m ja n korrutiseks mn nimetatakse summat, milles arv n esineb m korda liidetavana.

Definitsioonidega ei puutu me kokku esmakordselt, need on esinenud kõikide nooremate klasside matemaatikakursuses. Näiteks juba kolmandas klassis tutvusime risküliku definitsiooniga:

riskülikuks nimetatakse nelinurka, mille kõik nurgad on täisnurgad.

Pöörakem tähelepanu definitsiooni õigele sõnastusele. Definitsioon peab sisaldama

1) vaadeldava üldisema hulga elementide nimetust (viimases näites on selleks sõna *nelinurk*),

2) eraldatava osahulga elementide tunnust (viimases näites — *kõik nurgad on täisnurgad*),

3) osahulga elementide nimetust (viimases näites sõna *riskülik*),

4) sõna *nimetatakse* või seda asendavat sõna *on*.

Kui mõni neist nõudeist pole täidetud, siis definitsiooni ei saa lugeda õigeks. Näiteks lauset *Nelinurk on see, millel on neli nurka* ei saa lugeda õigeks definitsiooniks, sest selles puudub punktis 1) nõutud nimetus.

101. Sõnasta ülaltoodud neli definitsiooni nii, et neis esineks sõna *on*.

102. 1) Missugust naturaalarvu nimetatakse kordarvuks?

2) Missugust naturaalarvu nimetatakse paarisarvuks, missugust paarituks arvuks?

3) Mis on kahe arvu vähim ühiskordne? suurim ühistegur?

103. 1) Missugust nelinurka nimetatakse rööpkülikuks?

2) Missugust kolmnurka nimetatakse teravnurkseks, missugust nürinurkseks?

3) Missugust hulknurka nimetatakse korrapäraseks?

104. Sõnasta järgmiste objektide definitsioonid:

1) teravnurk, täisnurk, sirgnurk;

2) ringjoon, ring, kaarekraad;

3) lihtne murdjoon, kinnine murdjoon, kumer murdjoon.

1.5. MIS ON ALGMÕISTE.

Objekte, nagu arve, punkte, sirgeid ja tasandeid, mida matemaatikas uuritakse, pole tegelikkuses olemas, nagu on olemas näiteks puud, majad ja raudteed. Sirge raudtee meenutab küll paralleelsete sirgete paari ja viimasel on raudteega ühiseid omadusi, kuid nad erinevad põhiliselt selle poolest, et üks neist on tegelikkuses ole-

mas, kuna teine on olemas ainult meie kujutluses. Me ütleme, et matemaatikas esinevad objektid on mõeldavad objektid, meie kujutluses esinevad objektid ehk **mõisted**. Tahvlile kriidiga joonestatud nurk on tegelikkuses olemas, kuid ta erineb tunduvalt meie kujutluses olevast nurgast ehk nurga mõistest: esimese haaradel on teatud värvus, teise haaradel see puudub, esimese haaradel on teatud laius ja paksus, teise haaradel need puuduvad, esimese haarad on lõpliku pikkusega, teise haarad on lõpmata pikad jne.

Soovides toonitada matemaatikas vaadeldavate objektide kirjeldatud omapära, kõneleme nurga mõistest, täisarvu mõistest jne., eriti, kui on tegemist nende defineerimisega, s. o. neile definitsiooni andmisega.

Küsime, kas on võimalik defineerida kõiki meie poolt kasutatavaid mõisteid.

Kerge on näha, et see ei osutu võimalikuks. Esitame selle kohta ühe näite.

Eespool defineerisime täisnurkset kolmnurka, kasutades selleks mõisteid kolmnurk, nurk ja täisnurk (vt. lk. 16). Küsime nüüd, kuidas defineerida neid mõisteid. Kolmnurka (samuti ka nurka) võime defineerida kui teatud omadusega punktide hulka, kuid mis on punkt ja mis on hulk, selle defineerimiseks meil enam mõisteid ei ole. Et nende mõistete kasutamine on möödapääsematu, siis võtame nad tarvitusele defineerimata, tehes endale näidete varal selgeks, mida nad tähendavad.

Mõisteid, mida me ei defineeri, kuid siiski kasutame, nimetame **algmõisteteks**. Peale punkti ja hulga kasutame defineerimata mõistetena (algmõistetena) veel sirglõigu (või sirge), tasandi, ruumi jm. mõistet.

105. Anna kahe naturaalarvu korrutise definitsioon. Missuguseid mõisteid on kasutatud selles definitsioonis?

106. Anna kahe naturaalarvu vahe definitsioon. Missuguseid mõisteid on kasutatud selles definitsioonis?

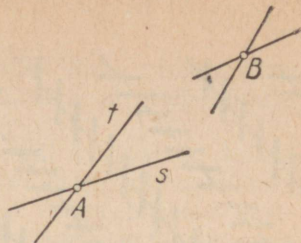
107. Anna naturaalarvu astme definitsioon. Missuguseid mõisteid on kasutatud selles definitsioonis?

1.6. AKSIOOM JA TEOREEM.

Matemaatika uurimisobjektide omadusi väljendatakse lausetes, mida nimetatakse **aksioomideks** ja **teoreemideks**.

Teoreem on lause, mille õigsust saab põhjendada arutluse teel, toetudes varem tundma õpitud tõdedele.

Näiteks juba viiendas klassis põhjendasime arutluse teel, et kolmnurga nurkade summa on 180° . See lause on siis teoreem. Niisamuti on teoreem kuuendas klassis tundma õpitud lause, mis ütleb, et



ringjoone võrdsetele kõõludele toetuvad võrdsed kesknurgad ja võrdsed kaared.

Kõikide lausete õigsust pole võimalik põhjendada arutluse teel, sest näiteks esimestena tundmaõpitavate lausete põhjendamiseks puuduvad varem õpitud tõed. Seega mõned laused tuleb lugeda õigeteks ilma põhjendamiseta arutluse teel. Need laused on aluseks teiste lausete põhjendamisel. Näiteks eelmise klassi kursuses loeti tasandi kohta õigeks järgmised kaks lauset, mida ei põhjendatud teiste lausete abil:

- 1) läbi kolme punkti, mis ei asetse ühel sirgel, saab asetada ühe ja ainult ühe tasandi;
- 2) sirge, mis läbib tasandi kaht punkti, asetseb tervenisti sellel tasandil.

Lauset, mis loetakse õigeks ilma põhjenduseta teiste, varem õigeks loetud lausete abil, nimetatakse aksiomiks.

Ülalantud kaks lauset tasandi kohta on siis aksiomid.

Enamik matemaatikas esinevatest lausetest on teoreemid. Aksiomide hulk koosneb õige piiratud arvust lausetest. Koolimatemaatikas tavaliselt ei sõnastata kõiki kasutatavaid aksiome, vaid ainult näiteid neist.

Sirge omadustest oleme kasutanud aksiomina lauset

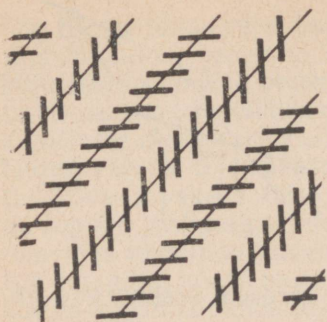
iga kaht punkti läbib üks ja ainult üks sirge.

Seevastu lause

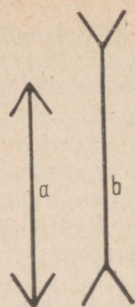
kaks sirget saavad lõikuda ainult ühes punktis

on teoreem, sest selle õigsust saab põhjendada eelmise aksiomi abil. Tõepoolest, kui kaks sirget s ja t , mis lõikuvad punktis A (joon. 12), lõikuksid veel mingis punktis B , siis punkte A ja B läbiks kaks sirget. Kuid seda antud aksiomi järgi ei saa olla. Seetõttu tuleb lugeda õigeks lause, et kaks sirget saavad lõikuda ainult ühes punktis.

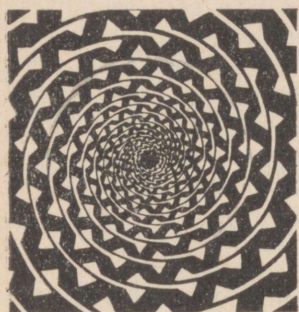
Teoreemi õigsuse põhjendamist arutluse teel, mis toetub varem õigeteks tunnustatud lausetele, nimetatakse **teoreemi tõestamiseks**. Niisugust teoreemi õigsuse põhjendamist arutluse teel on rakendatud juba viiendast klassist alates, kuid senini pole seda nimetatud teoreemi tõestamiseks. Ka on see olnud matemaatika õppimisel vähem tähtsal kohal. Alates seitsmendast klassist on matemaatikas tähtsamaks ülesandeks õppida teoreeme tõestama.



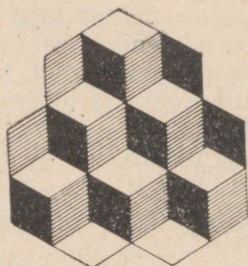
JOON. 13



JOON. 14



JOON. 15



JOON. 16

108. Tuleta meelde teoreemid, mis väljendavad kahe kolmnurga võrdsuse tunnuseid.
109. Tuleta meelde teoreemid, mis väljendavad võrdhaarse kolmnurga omadusi.
110. Tuleta meelde teoreem
- 1) ristküliku pindalast; 2) korrapärase hulknurga pindalast;
 - 3) 9-ga jaguvuse tunnusest; 4) 5-ga jaguvuse tunnusest.
111. 1) Kas joonisel 13 kaldu läbikriipsutatud sirged on paralleelsed või lõikuvad?
- 2) Kumb joonisel 14 kujutatud lõikudest a ja b on pikem?
- 3) Kas joonis 15 kujutab spiraale või ühise keskpunktiga ringjooni?
- 4) Mitu kuupi on kujutatud joonisel 16? Pööra joonis ümber ja vaata uuesti.

1.7. TEOREEMI KOOSTIS.

Iga teoreemi saab sõnastada nii, et üks osa temast algab sõnaga *kui* ja teine osa sõnaga *siis*.

Näiteks teoreemi *Võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed* saab sõnastada ka nii: *kui kolmnurk on võrdhaarne, siis tema alusnurgad on võrdsed*.

Seda osa teoreemist, mis järgneb sõnale *kui*, nimetatakse teoreemi **eelduseks**, ja seda osa teoreemist, mis järgneb sõnale *siis* — teoreemi **väiteks**.

Teoreemi eeldus ütleb, mis vaadeldava kujundi (või arvu) kohta on teada ehk mis tema kohta on antud, ja väide ütleb, mis eeldusest **tuleneb** ehk **järeldub** selle kujundi (või arvu) kohta. Näiteks ülalantud teoreemi eeldus ütleb, et vaadeldav kujund on võrdhaarne kolmnurk, ja väide ütleb, et sellise kolmnurga alusnurgad on võrdsed.

Nii näeme, et iga teoreemi saab vaadelda kahest lausest (eeldusest ja väitest) koosneva liitlausena, kus ühest lausest (eeldusest) järeldub teine (väide).

Kui tähistada teoreemi eeldus mingi tähega, näiteks tähega p , ja väide näiteks tähega q , siis teoreemi saab skemaatiliselt kirjutada kujul

kui p , siis q .

Seda liitlauset võib kirjutada veel lühemalt kujul

$p \Rightarrow q$,

kus märk \Rightarrow on **järeldamismärk**. Seda kirjutust loetakse kas kujul *kui p , siis q* või kujul *lausest p järeldub lause q .*

Järeldamismärki \Rightarrow kasutame ka võrrandi lahendamisel, märkides sellega tõsiasi, et iga võrrand, mille lahendamisel saame, järeldub eelmisest võrrandist. Võrrandi lahendus on järelduste ahel, mille esimeseks lüliks on antud võrrand ja viimaseks võrdus $x=a$, kus a on võrrandi lahend.

Võrrandi lahenduse vormistame lühema võrrandi korral näite 1 ja pikema võrrandi korral näite 2 eeskujul.

Näide 1.

$$3x - 2 = 16 \Rightarrow 3x = 16 + 2 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6.$$

Näide 2.

$$6x - 3(5x + 8) = 15 - 4(x - 9) \Rightarrow$$

$$6x - 15x - 24 = 15 - 4x + 36 \Rightarrow$$

$$6x - 15x + 4x = 15 + 36 + 24 \Rightarrow$$

$$-5x = 75 \Rightarrow$$

$$x = -15.$$

112. Leia iga antud teoreemi eeldus ja väide ning sõnasta teoreem nii, et selles esineksid sõnad *kui* ja *siis*:

- 1) võrdhaarse kolmnurga aluse mediaan on ühtlasi kolmnurga kõrguseks;
- 2) korrapärase kuusnurga külg on võrdne tema ümberringjoone raadiusega;
- 3) nulliga lõppev arv jagub 10-ga.

113. Sõnasta teoreem, mille eeldus ja väide on allpool kõrvuti antud.

- | | |
|--|--|
| 1) Arvu ristsumma jagub 9-ga. | Arv jagub 9-ga. |
| 2) Kolmnurga kaks külge on võrdsed. | Kolmnurga kaks nurka on võrdsed. |
| 3) Kolmnurk on täisnurkne. | Kolmnurga kahe teravnurga summa on täisnurk. |
| 4) Hulknurk on korrapärane. | Hulknurga pindala võrdub poole ümbermõõdu ja apoteemi korrutisega. |
| 5) Kahest naturaalarvust a ja b suurem arv jagub väiksemaga. | Suurem arv on arvude a ja b vähim ühiskordne. |
| 6) Jagatav ja jagaja on ühesuguste märkidega. | Jagatis on positiivne. |

114. Sõnasta teoreem, mille eeldus on antud.

- 1) Korrutise üks tegur võrdub nulliga.
- 2) Ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega.
- 3) Antud kaks muutujat on võrdelised.
- 4) Jagatav ja jagaja on erinevate märkidega.
- 5) Jagatav on 0 ja jagaja on nullist erinev arv.

115. Mida tähendab $p \Rightarrow q$, kui p tähendab lauset *Arvu ristsumma jagub 3-ga* ja q lauset *Arv jagub 3-ga*?

116. 1) Mis järeldub lõikude a ja b kohta, kui on teada, et lõik a ei ole suurem lõigust b ega võrdne lõiguga b ?

2) Mis järeldub lõikude a ja b kohta, kui on teada, et $a \neq b$?

117. Kuidas saab kolmnurki liigitada nende nurkade järgi? Mis järeldub kolmnurga kohta, kui on teada, et

1) kolmnurk ei ole teravnurkne ega nürinurkne?

2) kolmnurk ei ole nürinurkne?

3) kolmnurk ei ole täisnurkne?

118. Mida saab öelda arvu kohta,

1) mis ei ole negatiivne ega null?

2) mis ei ole positiivne?

3) mis ei ole positiivne ega negatiivne?

119. 1) Mida saab öelda kahe suuruse a ja b kohta, kui nad on võrdsed ühe ja sama kolmanda suurusega c ?

2) On antud kaks võrdset suurust a ja b . Kummagi suurusega on liidetud üks ja sama suurus c . Mis saab öelda saadud summade $a+c$ ja $b+c$ kohta?

3) On antud võrratus $a < b$. Selle kummastki poolest lahutatakse üks ja sama arv c . Mis saab öelda vahede $a-c$ ja $b-c$ kohta?

120. Tee järeldus antud eeldusest ja anna eeldus ning järeldus ühe lausena.
- 1) $a=b$ ja $b=c$
 - 2) $a<b$ ja $b<c$
 - 3) $a=b$ ja $b\neq 8$
 - 4) Antud murru lugeja on 3 korda väiksem kui nimetaja.
 - 5) Summa $a+b$ kumbki liidetav jagub 5-ga.
121. Otsusta, mida saab järeldada antud lausest.
- 1) Arv x ei ole negatiivne.
 - 2) Arv a ei ole suurem kui 12.
 - 3) VII klassis ei ole üle 30 ega alla 29 õpilase.
 - 4) Kumbki lõikudest a ja b ei ole teisest pikem.
 - 5) Arvu x absoluutväärtus on väiksem kui 1.
122. Tee järeldus igast järgnevast eelduspaarist.
- 1) $\begin{cases} a=b \\ b<c \end{cases}$
 - 2) $\begin{cases} a>b \\ b>c \end{cases}$
 - 3) $\begin{cases} \lambda=a+b \\ x=a+c \end{cases}$
 - 4) $\begin{cases} s=a+b \\ b=a \end{cases}$
- Vormista lahendus nii:
- $$\begin{cases} a<b \\ b=-5 \end{cases} \Rightarrow a<-5.$$
123. Otsusta, kas väide on õige või väär.
- 1) Kui $x=4$, siis $3x-10>4$.
 - 2) Iga võrdkülgne kolmnurk on võrdhaarne.
 - 3) Iga võrdhaarne kolmnurk on võrdkülgne.
 - 4) Iga võrdkülgne kolmnurk on võrdnurkne.
 - 5) Kui kumbki kahest liidetavast jagub 4-ga, siis summa jagub 8-ga.
 - 6) Kui arvu ristsumma jagub 9-ga, siis arv jagub 3-ga.
 - 7) Kui koolis on 370 õpilast, siis seal leidub vähemalt kaks õpilast, kelle sünnipäev on ühel ja samal päeval.
124. Otsusta, kas järeldus on õige või väär.
- 1) $m>n \Rightarrow n<m$
 - 2) $xy=0 \Rightarrow x=0$ või $y=0$
 - 3) $ab>0 \Rightarrow a>0$
 - 4) $(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow x=2$ või $x=-2$
 - 5) $a^2>0 \Rightarrow a>0$

125. Otsusta, missugused järgmistest lausetest on õiged, missugused väärad:

1) $5 < 5$; 2) $5 \leq 5$; 3) $5 \geq 5$; 4) $3 \leq 3$; 5) $3 \leq 4$.

126. Otsusta, kas järeldus on õige või väär.

1) $x = y \Rightarrow x \leq y$

2) $u < v \Rightarrow u \leq v$

3) $x \leq y$ ja $x \geq y \Rightarrow x = y$

4) $a \leq b \Rightarrow b > a$

5) $4x - 7 = 29 \Rightarrow x = 9$

6) $1 - 2x = 5 \Rightarrow x = 3$

7) $8x + 6 = 2x \Rightarrow 3x = -3$

8) $x + 2 = x - 2 \Rightarrow x = 0$

2. LIHTSAMAD RATSIONAALVAALDISED.

2.1. ÜKSLEIKME KANOONILINE KUJU.

Üksleikme jagamisel üksleikmega esineb kaks juhtu:

- 1) jagamise tulemus on üksleige,
- 2) jagamise tulemus ei ole üksleige.

Kui jagamise tulemus on üksleige, siis öeldakse, et jagatav üksleige a jagub jagajaga b , teisel juhul, et üksleige a ei jagu üksleikmega b .

Näiteks $\frac{30a^2b^3}{5ab^2} = 6ab$.

Siin üksleige $30a^2b^3$ jagub üksleikmega $5ab^2$, sest jagatis on üksleige.

Kuid $\frac{4a^2b}{2a^3b^2} = \frac{2}{ab}$; siin jagatis $\frac{2}{ab}$ ei ole üksleige, seepärast ütleme, et üksleige $4a^2b$ ei jagu üksleikmega $2a^3b^2$.

Jaguvuse korral öeldakse, et jagaja on jagatava **tegur**. Näiteks $5ab^2$ on üksleikme $30a^2b^3$ tegur ja $2ax^2$ on üksleikme $5a^2x^3$ tegur.

127. Missugune üksleikmete hulgest

$15ab^2$; $12ac$; $21a^2b$; $12ab$; $5ax^2$; ab

jagub üksleikmega $3ab$ ja missugune mitte?

Üksleige kirjutatakse niisugusel kujul, et esikohal on numbriline tegur ja selle järel muutujate astmete korrutis. Esikohal seisvat numbrilist tegurit nimetatakse üksleikme **kordajaks** ehk koefitsiendiks.

Näiteks üksliikmete

$$5bx^2, 1\frac{1}{2}x^2y, -\frac{3}{8}mn, 0,5ab, -x^2y \text{ ja } ab$$

kordajad on vastavalt

$$5, 1\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}, 0,5, -1 \text{ ja } 1.$$

Edaspidi käsitleme ainult täisarvuliste kordajatega üksliikmeid.

Kui üksliikme täisarvuline kordaja on kirjutatud ta algtegurite astmete korrutisena, siis ütleme, et üksliige on esitatud **kanoonilisel** kujul. Näiteks üksliikme $72a^2b^3$ kanooniline kuju on $2^3 \cdot 3^2 \cdot a^2b^3$.

128. Kirjuta üksliige kanoonilisel kujul.

- | | | |
|----------------|----------------------|-----------------|
| 1) $16a$ | 2) $75a^3$ | 3) $-8np^2$ |
| 4) $48b^2$ | 5) $18a^2b^2$ | 6) $-21t^2$ |
| 7) $45ab$ | 8) $a^2b \cdot ab^2$ | 9) $-720x^5y^6$ |
| 10) $1728a^2b$ | 11) $256x^2y$ | 12) $24x^2y^2$ |

2.2 ÜKSLEIKMETE SUURIM ÜHISTEGUR.

129. Leia järgmiste arvude suurim ühistegur.

- | | | |
|-------------|-------------|----------------|
| 1) 10 ja 15 | 2) 15 ja 35 | 3) 9, 18 ja 45 |
| 4) 21 ja 14 | 5) 39 ja 52 | 6) 7, 14 ja 21 |

130. Leia järgmiste arvude suurim ühistegur.

- | | |
|--------------------|---------------------|
| 1) 112 ja 176 | 2) 132 ja 364 |
| 3) 308 ja 392 | 4) 468 ja 624 |
| 5) 360 ja 450 | 6) 104, 525 ja 712 |
| 7) 121, 154 ja 165 | 8) 102, 136 ja 170 |
| 9) 144, 162 ja 198 | 10) 264, 360 ja 600 |

Vaatleme üksliikmete $6x^2$ ja $10x^3$ tegurite hulka.

Üksliikme $6x^2$ tegurite hulk on

$$T_1 = \{2; 3; x; 2x; 3x; 6; 6x; x^2; 2x^2; 3x^2; 6x^2\};$$

üksliikme $10x^3$ tegurite hulk on

$$T_2 = \{2; 5; x; 2x; 5x; 10; 10x; x^2; 2x^2; 5x^2; 10x^2; x^3; 2x^3; 5x^3; 10x^3\}.$$

Näeme, et hulka T_1 ja T_2 on ühiseid elemente, need on üksliikmete $6x^2$ ja $10x^3$ ühistegurid.

Antud üksliikmete $6x^2$ ja $10x^3$ ühistegurite hulk on seega

$$T_1 \cap T_2 = \{2; x; 2x; x^2; 2x^2\}.$$

Saadud ühistegurite hulgas on üks ühistegur, mis jagub selle hulga iga üksliikmehi, see on $2x^2$. Antud üksliikmete seda ühistegurit, mis jagub nende üksliikmete iga ühisteguriga, nimetatakse antud üksliikmete **suurimaks ühisteguriks**.

Täheldame, et antud üksliikmete suurima ühisteguri kordaja on antud üksliikmete kordajate suurim ühistegur ja muutuja suurimas ühisteguris on mõlemas antud üksliikmes esinev suurima astendajaga muutuja.

Vaatleme veel üksliikmete $10ab$, $15a^2b$, $35ab^2$ tegurite hulka, ühistegurite hulka ja suurimat ühistegurit.

$$T_1 = \{2; 5; 10; a; 2a; 5a; 10a; b; 2b; 5b; 10b; ab; 2ab; 5ab; 10ab\};$$

$$T_2 = \{3; 5; 15; a; 3a; 5a; 15a; 3a^2; 5a^2; 15a^2; b; 3b; 5b; 15b; ab; 3ab; 5ab; 15ab; a^2b; 3a^2b; 5a^2b; 15a^2b\};$$

$$T_3 = \{5; 7; 35; a; 5a; 7a; 35a; b; 5b; 7b; 35b; b^2; 5b^2; 7b^2; 35b^2; ab; 5ab; 7ab; 35ab; ab^2; 5ab^2; 7ab^2; 35ab^2\}.$$

$$T_1 \cap T_2 \cap T_3 = \{5; a; 5a; b; 5b; ab; 5ab\}.$$

Siin antud üksliikmete ühistegur $5ab$ jagub iga ülejäänud ühisteguriga, ta on antud üksliikmete suurim ühistegur; ta kordaja on antud üksliikmete kordajate suurim ühistegur ja kordaja järel on antud üksliikmetes esinevad suurima astendajaga ühised muutujad.

Üksliikmete suurimat ühistegurit märgitakse sümboliga S ja selle järel sulgudes üksliikmed, mille suurimat ühistegurit ta märgib. Näiteks

$$S(6x^2; 10x^3) = 2x^2 \text{ ja}$$

$$S(10ab; 15a^2b; 35ab^2) = 5ab.$$

Eelöeldu põhjal saame antud üksliikmete suurima ühisteguri leidmiseks eeskirja:

antud üksliikmete suurim ühistegur on suurima kordajaga ja muutujate suurimate astendajatega astmete korrutis, millega jagub iga antud üksliige.

Näide 1. $S(16x^3y^2; 24xy^2; 6x^2y^2) = 2xy^2$.

Näide 2. Leiame $S(308mn; 392mn^2)$.

308	2	392	2	$S(308; 392) = 2^2 \cdot 7 = 28;$ $S(308mn; 392mn^2) = 28mn.$
154	2	196	2	
77	7	98	2	
11	11	49	7	
308	= 2 ² · 7 · 11	392	= 2 ³ · 7 ²	

Kui antud üksliikmetel pole ühiseid tegureid peale arvu 1, siis öeldakse, et need üksliikmed on ühistegurita. Näiteks üksliikmed $2xy$ ja $3ab$ on ühistegurita. Seda asjaolu märgime kujul $S(2xy; 3ab) = 1$.

131. Leia üksliikmete $12ab$ ja $12ac$ kümme ühistegurit.

132. Kirjuta üksliikmete $42ax^2$ ja $35bx^2$ mõned ühistegurid.

133. Leia kahe üksliikme suurim ühistegur.

- | | | |
|------------------|----------------------|-----------------------------|
| 1) a ja $2a$ | 2) $6a$ ja 9 | 3) $14ax^2$ ja $21a^2x$ |
| 4) ab ja b | 5) $7ab$ ja $12ac$ | 6) $44cy^3$ ja $77c^2y^2$ |
| 7) $3x$ ja $6x$ | 8) a^4 ja a^2 | 9) $30m^2p^3$ ja $65mp^2$ |
| 10) x ja x^2 | 11) $14y^3$ ja $7y$ | 12) $22a^2b^3$ ja $121a^3b$ |
| 13) a ja b | 14) $18ab$ ja $12ac$ | 15) $42ab^2$ ja $35bc^2$ |

134. Leia

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1) $S(15ab^2; 21a^2b; 12ab)$; | 2) $S(12mn; 18n^2; 30mn^2)$; |
| 3) $S(16x^3y^2; 24xy^2; 40x^2y^2)$; | 4) $S(26p^3q^2; 65p^2q^3; 39p^2q^2)$. |

2.3. ALGEBRALINE MURD. RATSIONAALAVALDIS.

135. 75 cm^3 õli kaalub 60 gf . Kui palju kaalub 1 cm^3 seda õli?

136. Auto sõitis a tunniga m kilomeetrit. Mitu kilomeetrit sõitis auto keskmiselt tunnis? Arvuta auto kiirus, kui $m=200$ ja a väärtuste hulk on $\{4; 5; 6; 8\}$.

137. Paberi paksuse määramiseks võeti pakk paberit, milles oli n lehte. Paki paksus oli p millimeetrit. Kui paks oli paber? Arvuta paberi paksus, kui $n \in \{50; 80; 100\}$ ja $p=8$.

138. Laua mõõtmed on m meetrit ja n meetrit. Laua poleerimiseks kulus p grammi polituuri. Mida tähendab avaldis $\frac{p}{mn}$?

139. Ruudukujulise põranda värvimiseks kulus v kilogrammi värvi. Mida tähendab avaldis $\frac{v}{a^2}$, kui a on põranda pikkus meetrites?

Nimetame murru lugejat ja nimetajat murru liikmeteks. Murdu, mille nimetajas esineb muutujaid, nimetatakse **algebraalseks murruks**.

Algebraalises murrus $\frac{a}{b}$ muutujad a ja b võivad tähendada mis tahes arvusid või avaldisi, ainsaks erandiks on, et nimetaja b ei või olla null.

Algebraalisi murde ja täisavaldisi nimetatakse **ratsionaalavaldisteks**.

Ratsionaalavaldise definitsioonist järeldub, et algebraalne avaldis on ratsionaalne, kui tema väärtuse arvutamiseks tuleb avaldises esinevate arvudega ja muutujate antud väärtustega sooritada mis tahes tehted järgmiste tehete hulgast: liitmine, lahutamine, korrutamine ja jagamine.

Et naturaalarvulise astendajaga astendamine on korrutamise erijuhtum, siis kuulub eelmisse loendisse ka naturaalarvulise astendajaga astendamine.

Murdu $\frac{a}{b}$ võib vaadelda arvude a ja b jagatisena, seetõttu

$$\frac{a}{b} \cdot b = a.$$

Iga arvu võib kirjutada murruna, näiteks

$$x = \frac{x}{1}.$$

140. Kirjuta murruna:

$$5; 0; a; b; a^2; a^2b; 2a^3b.$$

141. Arvuta murru väärtus, kui temas esinevate muutujate väärtused on antud.

1) $\frac{3a}{5b}$; $a=15$; $b=9$.

2) $\frac{6ab}{7c}$; $a=14$; $b=7$; $c=12$.

3) $\frac{4a}{3bc}$; $a=6$; $b=-2$; $c=12$.

4) $\frac{ax^2}{5b}$; $a=10$; $x=-2$; $b=24$.

5) $\frac{a+b}{a-b}$; $a=2,6$; $b=2,4$.

6) $\frac{3a+2b}{2a-3b}$; $a=5$; $b=3$.

142. Millist väärtust ei või omada murru nimetajas esinev muutuja antud murrus?

1) $\frac{m}{n}$

2) $\frac{3}{n}$

3) $\frac{5}{1-x}$

4) $\frac{a}{x-2}$

5) $\frac{5}{2+a}$

6) $\frac{m}{x+3}$

143. Leia antud murru jaoks kaks niisugust muutuja x väärtust, mille korral murd on naturaalarv.

1) $\frac{18}{x+4}$ 2) $\frac{x-12}{10}$ 3) $\frac{20}{2x+5}$ 4) $\frac{4x}{x-1}$ 5) $\frac{x-2}{x}$

144. Missuguste muutuja x väärtuste korral on antud murd võrdne nulliga?

1) $\frac{3x}{x+1}$ 2) $\frac{x-2}{x}$ 3) $\frac{3x-9}{x+1}$ 4) $\frac{(x-1)(x-2)}{x^2-16}$

145. Kirjuta algebraline murd, mille nimetajas esineb muutuja x , kusjuures $x \notin \{-1; 1\}$.

146. Mis võib öelda murru $\frac{1}{x_2-1}$ kohta, kui $x \in \{-1; 1\}$?

147. Mis arvud on teineteise suhtes avaldiste vastavad väärtused?

1) a ja $\frac{1}{a}$ 2) $\frac{x}{y}$ ja $\frac{y}{x}$ 3) $\frac{1}{y}$ ja y
4) $\frac{1}{x}$ ja $-\frac{1}{x}$ 5) $\frac{a}{b}$ ja $-\frac{a}{b}$ 6) $\frac{b-2}{3}$ ja $\frac{2-b}{3}$

148. Kirjuta antud avaldise vastandavaldis.

1) n 2) $-2x$ 3) $\frac{1}{x}$
4) $-\frac{1}{5a}$ 5) $\frac{m}{n}$ 6) $-\frac{m}{n}$

149. Kirjuta antud avaldise pöördavaldis.

1) x 2) $\frac{1}{x}$ 3) $\frac{2}{a}$ 4) $\frac{x}{a^2}$ 5) $\frac{1}{2ab}$

2.4. MURRU PÕHIOMADUS.

Hariliku murru põhiomadus on, et murru väärtus jääb endiseks, kui murru lugejat ja nimetajat korrutada ühe ja sama nullist erineva arvuga. Näitame, et hariliku murru põhiomadus jääb kehtima ka algebralise murru korral. Selleks tõestame järgmise teoreemi:

murru väärtus jääb endiseks, kui tema lugejat ja nimetajat korrutada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

Tõestus. Olgu antud murd $\frac{a}{b}$, kus a ja b on üksliikmed ja $b \neq 0$, ning murru $\frac{a}{b}$ väärtus t , nii et

$$\frac{a}{b} = t.$$

Jagatav võrdub jagaja ja jagatise korrutisega, seega

$$a = bt.$$

Korrutades viimase võrduse mõlemad pooled nullist erineva arvuga m , saame

$$ma = mbt \text{ ehk } ma = (mb) \cdot t.$$

Jagades viimase võrduse mõlemad pooled arvuga mb , saame

$$t = \frac{ma}{mb}.$$

Et t tähistab murru $\frac{a}{b}$ väärtust, siis $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$, mida oli tarvis tõestada.

Järeldus. Kui $m \neq 0$, siis ka $\frac{1}{m} \neq 0$, seega võib tõestatud teoreemi põhjal kirjutada

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{m} \cdot a}{\frac{1}{m} \cdot b}.$$

Et pöördarvuga korrutamine on samaväärne arvuga jagamisega, siis võime viimase võrduse kirjutada kujul

$$\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m},$$

mis ütleb, et murru väärtus jääb endiseks, kui ta lugejat ja nimetajat jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

Murru väärtus ei muutu, kui tema lugejat ja nimetajat korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}}$$

2.5. MURRU TAANDAMINE.

Murru lugeja ja nimetaja jagamist nende ühisteguriga nimetatakse **murru taandamiseks**.

Näiteks

$$\frac{\overbrace{12ab}^{: 4ab}}{8ab^2} = \frac{3}{2b}; \quad \frac{\overbrace{4mx}^{: 4mx}}{8m^2x} = \frac{1}{2m}$$

150. Missugust murdu nimetatakse taandumatuks? Millega peab murdu taandama, et saada taandumatu murd?

151. Taanda murd.

- | | | | | |
|----------------------------|--------------------------------|----------------------------------|---|-----------------------|
| 1) $\frac{16}{40}$ | 2) $\frac{12}{64}$ | 3) $\frac{14}{35}$ | 4) $\frac{24}{66}$ | 5) $\frac{28}{72}$ |
| 6) $\frac{15}{18}$ | 7) $\frac{24}{78}$ | 8) $\frac{33}{88}$ | 9) $\frac{28}{32}$ | 10) $\frac{14}{49}$ |
| 11) $\frac{40}{88}$ | 12) $\frac{24}{54}$ | 13) $\frac{35}{63}$ | 14) $\frac{88}{121}$ | 15) $\frac{30}{84}$ |
| 16) $\frac{27}{63}$ | 17) $\frac{40}{96}$ | 18) $\frac{39}{91}$ | 19) $\frac{60}{84}$ | 20) $\frac{42}{72}$ |
| 21) $\frac{57}{243}$ | 22) $\frac{115}{320}$ | 23) $\frac{117}{130}$ | 24) $\frac{132}{143}$ | 25) $\frac{112}{176}$ |
| 26) $\frac{2 \cdot 6}{42}$ | 27) $\frac{-12}{6 \cdot 5}$ | 28) $\frac{72 \cdot 6}{-36}$ | 29) $\frac{3 \cdot 12}{18 \cdot 24}$ | |
| 30) $\frac{3}{2 \cdot 3}$ | 31) $\frac{-8 \cdot 5}{12}$ | 32) $\frac{22}{-33 \cdot 9}$ | 33) $\frac{-15 \cdot 20}{45 \cdot 30}$ | |
| 34) $\frac{4}{3 \cdot 8}$ | 35) $\frac{5 \cdot 16}{-32}$ | 36) $\frac{17 \cdot (-2)}{-51}$ | 37) $\frac{-3 \cdot 8 \cdot 36}{-2 \cdot 9 \cdot 48}$ | |
| 38) $\frac{6}{3 \cdot 10}$ | 39) $\frac{3 \cdot (-12)}{40}$ | 40) $\frac{-36}{-5 \cdot (-24)}$ | 41) $\frac{-4 \cdot (-7) \cdot 15}{3 \cdot 7 \cdot 50}$ | |
| 42) $\frac{3 \cdot 4}{9}$ | 43) $\frac{-36 \cdot 5}{-96}$ | 44) $\frac{-75 \cdot 3}{-50}$ | 45) $\frac{2 \cdot (-6) \cdot 32}{45 \cdot 5 \cdot (-6)}$ | |

152. Taanda murd.

- | | | | |
|-------------------|--------------------|------------------------|------------------------|
| 1) $\frac{6a}{4}$ | 2) $\frac{12}{6a}$ | 3) $\frac{ab^2}{abc}$ | 4) $\frac{a^2b}{abc}$ |
| 5) $\frac{6}{2a}$ | 6) $\frac{5a}{10}$ | 7) $\frac{9ax}{15a^2}$ | 8) $\frac{8a^2}{12ax}$ |

- | | | | |
|--------------------------------|--|---|-------------------------------------|
| 9) $\frac{8b}{4a}$ | 10) $\frac{9a}{3b}$ | 11) $\frac{15ax^2}{35bx^3}$ | 12) $\frac{9ax^3}{6bx^2}$ |
| 13) $\frac{3a}{5a}$ | 14) $\frac{5c}{7c}$ | 15) $\frac{12a^2b^2x}{18a^2b^2y}$ | 16) $\frac{18a^3b^3y}{24a^2b^3x}$ |
| 17) $\frac{b}{2b}$ | 18) $\frac{n}{3n}$ | 19) $\frac{20ab^2c^3}{48a^2b^3c^4}$ | 20) $\frac{36a^2b^3c^4}{30ab^2c^3}$ |
| 21) $\frac{15a^2}{35ab}$ | 22) $\frac{96m^2n^2}{72m^3n^3}$ | 23) $\frac{ab \cdot 5ab}{10ab^2 \cdot 4b^2}$ | |
| 24) $\frac{26ab^2}{65a^2b}$ | 25) $\frac{144mn^2p^3}{192m^2np}$ | 26) $\frac{21x^3 \cdot 6y^3}{7xy \cdot 18xy}$ | |
| 27) $\frac{48a^2bc}{78abc^2}$ | 28) $\frac{169m^4n^3}{195m^2np^2}$ | 29) $\frac{38mp^2 \cdot 4n^2p}{26mn \cdot 7np}$ | |
| 30) $\frac{33m^2nx}{48mnx}$ | 31) $\frac{57c^3u^4v^5}{190c^4u^3v^5}$ | 32) $\frac{32u^2 \cdot 49v^2}{56uv \cdot 28uv}$ | |
| 33) $\frac{74p^2q^4}{37npq^3}$ | 34) $\frac{105x^2z^2}{360x^3z}$ | 35) $\frac{18x^2 \cdot 32y}{32x^2 \cdot 45y^3}$ | |

153. Taanda murd.

- | | | | |
|--------------------------|------------------------------|------------------------------|--------------------------------|
| 1) $\frac{3^n}{3^{n+2}}$ | 2) $\frac{2^{n-1}}{2^{n+1}}$ | 3) $\frac{5^{2n+1}}{5^{2n}}$ | 4) $\frac{4^{3n-3}}{4^{3n-2}}$ |
|--------------------------|------------------------------|------------------------------|--------------------------------|

2.6. ÜKSLEIKMETE VÄHIM ÜHISKORDNE.

154. Leia peast arvude vähim ühiskordne.

- | | |
|--------------|-----------------|
| 1) 8 ja 12 | 2) 3, 5 ja 11 |
| 3) 12 ja 15 | 4) 4, 10 ja 16 |
| 5) 21 ja 14 | 6) 5, 12 ja 18 |
| 7) 33 ja 22 | 8) 9, 15 ja 25 |
| 9) 24 ja 100 | 10) 7, 10 ja 21 |

155. Arvuta arvude vähim ühiskordne.

- | | |
|----------------------|---------------------|
| 1) 12, 18, 96 ja 144 | 2) 240, 810 ja 6300 |
| 3) 14, 20, 28 ja 30 | 4) 42, 56 ja 98 |
| 5) 12, 28, 35 ja 40 | 6) 54, 72 ja 126 |

Üksliige $18a^2b^2x$ jagub üksliikmetega $6a^2b$, $3ab^2$ ja $9ab$:

$$18a^2b^2x : 6a^2b = 3bx,$$

$$18a^2b^2x : 3ab^2 = 6ax,$$

$$18a^2b^2x : 9ab = 2abx.$$

Üksliiget, mis jagub iga antud üksliikmega, nimetatakse antud üksliikmete **ühiskordseks**.

Ka üksliige $36a^2b^2x$ jagub üksliikmetega $6a^2b$, $3ab^2$ ja $9ab$, seega ka üksliige $36a^2b^2x$ on üksliikmete $6a^2b$, $3ab^2$ ja $9ab$ ühiskordne.

Antud üksliikmete niisugust ühiskordset, millega jagub antud üksliikmete iga ühiskordne, nimetatakse antud üksliikmete **vähimaks ühiskordseks**.

Vähimat ühiskordset tähistatakse tähega V , mille järele sulgudesse kirjutatakse need üksliikmed, mille vähima ühiskordsega on tegemist. Näiteks $V(4m^2n^3q; 6mnq^2)$ tähistab üksliikmete $4m^2n^3q$ ja $6mnq^2$ vähimat ühiskordset:

$$V(4m^2n^3q; 6mnq^2) = 12m^2n^3q^3.$$

Kui antud üksliikmetest üks jagub kõigi teiste üksliikmetega, siis on see üksliige antud üksliikmete vähim ühiskordne. Näiteks üksliikmete $18a^2b$, $54a^2b^2x$ ja $9ab^2$ vähim ühiskordne on $54a^2b^2x$, sest

$$54a^2b^2x : 18a^2b = 3bx,$$

$$54a^2b^2x : 9ab^2 = 6ax.$$

Seega

$$V(18a^2b; 54a^2b^2x; 9ab^2) = 54a^2b^2x.$$

Ühistegurita üksliikmete vähim ühiskordne on nende korrutis.

$$\text{Näiteks } V(3a^2; 5b) = 15a^2b.$$

Eelöeldu põhjal võib öelda, et

üksliikmete vähim ühiskordne võrdub antud üksliikmete kõigi erinevate tegurite suurimate astendajatega astmete korrutisega.

Seega, antud üksliikmete vähima ühiskordse leidmiseks tuleb

- 1) leida antud üksliikmete kordajate vähim ühiskordne ja
- 2) leitud kordaja järele kirjutada antud üksliikmeis esinevate muutujate suurimate astendajatega astmete korrutis.

N ä i d e. Leiame $V(45m^2n; 18mn^2)$.

$$45m^2n = 3^2 \cdot 5m^2n;$$

$$18mn^2 = 2 \cdot 3^2mn^2;$$

$$V(45m^2n; 18mn^2) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5m^2n^2 = 90m^2n^2.$$

156. Leia iga üksliikmete paari vähim ühiskordne.

- | | | | |
|----------------|------------------|------------------|---------------------|
| 1) a ; 7 | 2) $2y$; y | 3) a ; b | 4) ab ; ac |
| 5) $2a$; 8 | 6) $10x$; $5x$ | 7) $2a$; $2b$ | 8) ab ; $5ac$ |
| 9) $8a$; 2 | 10) $12b$; $4b$ | 11) $2a$; $5b$ | 12) $4ab$; $16ac$ |
| 13) $12x$; 16 | 14) $2a$; $3a$ | 15) $14a$; $3b$ | 16) $24ab$; $6a$ |
| 17) $51y$; 34 | 18) $6b$; $8b$ | 19) $15a$; $3b$ | 20) $36ab$; $48ac$ |

157. Leia iga üksliikmete paari vähim ühiskordne.

- | | | | |
|---------------------|---------------------|------------------------|----------------------|
| 1) abc ; bcd | 2) a^2 ; a | 3) a^2b ; a | 4) a^3 ; b^3 |
| 5) $8abc$; bcd | 6) a^2 ; $7a$ | 7) a^2b ; $2a$ | 8) a^3 ; ab^3 |
| 9) $9abc$; bc | 10) $3a$; $7a^2$ | 11) $3a^2b$; $6b$ | 12) a^3 ; a^2b^3 |
| 13) $8xyz$; $3xy$ | 14) $5a$; $15a^2$ | 15) $18a^2b$; $54a^2$ | 16) a^2b ; ab^2 |
| 17) $8xyz$; $32xz$ | 18) $28a^2$; $35a$ | 19) $45a^2b$; $18b^2$ | 20) ab^2 ; a^3b |

158. Leia iga üksliikmete paari vähim ühiskordne.

- | | | |
|---------------------|------------------------|-----------------------------|
| 1) $6x$; $3x$ | 2) $4np$; $2pz$ | 3) $12a^4$; $27a^6$ |
| 4) k^2 ; $7k$ | 5) $6a^2b$; $9b^2$ | 6) $18x^2y^4$; $12x^3y^5$ |
| 7) cv ; v | 8) $7t^2$; $3t^2$ | 9) $15a^2x^3$; $35a^3x$ |
| 10) x^2y ; xy^2 | 11) $12r$; $18rp$ | 12) $24x^2y^3$; $30xy^4$ |
| 13) zm^2 ; $3mn$ | 14) $7abc^2$; $14abc$ | 15) $16am^2n$; $15am^3n^2$ |

2.7. MURRU LAIENDAMINE.

Murru lugeja ja nimetaja korrutamist ühe ja sama arvuga nimetatakse **murru laiendamiseks**. Arvu, millega murru lugejat ja nimetajat korrutatakse, nimetatakse murru **laiendajaks**.

Laiendame, näiteks 3-ga murdu $\frac{a}{5}$.

$$\frac{a}{5} = \frac{3 \cdot a}{3 \cdot 5} = \frac{3a}{15}.$$

159. Laienda

- | | | | | | |
|---------------|---------------|------------|-----------------|------------|----------------|
| 1) 4-ga murdu | $\frac{1}{2}$ | 2-ga murdu | $\frac{a}{b}$ | 8-ga murdu | $\frac{a}{3}$ |
| 2) 5-ga „ | $\frac{1}{3}$ | 7-ga „ | $\frac{a}{2}$ | 3-ga „ | $\frac{x}{5}$ |
| 3) 6-ga „ | $\frac{1}{4}$ | 12-ga „ | $\frac{3}{x}$ | 4-ga „ | $\frac{2x}{7}$ |
| 4) 3-ga „ | $\frac{3}{4}$ | 10-ga „ | $\frac{2a}{3b}$ | 3-ga „ | $\frac{1}{2a}$ |
| 5) 8-ga „ | $\frac{7}{8}$ | 4-ga „ | $\frac{5x}{6y}$ | 4-ga „ | $\frac{5}{6a}$ |

160. Laienda

$$1) \quad b\text{-ga murdu } \frac{5}{9}; \quad 5\text{-ga murdu } \frac{3a}{4c};$$

$$2) \quad a\text{-ga } ,, \quad \frac{8}{14}; \quad 3n\text{-ga } ,, \quad \frac{12m}{17n};$$

$$3) \quad c\text{-ga } ,, \quad \frac{7}{13}; \quad 2n\text{-ga } ,, \quad \frac{12m}{17n};$$

$$4) \quad 3k\text{-ga } ,, \quad \frac{7}{12}; \quad 5x\text{-ga } ,, \quad \frac{24xy}{25z};$$

$$5) \quad 10x\text{-ga } ,, \quad \frac{2}{3}; \quad 3xy^2\text{-ga } ,, \quad \frac{24xy}{25z}.$$

Et laiendada murdu antud nimetajani, leiame esmalt laiendaja, mille saame, kui jagame uue nimetaja antud murru nimetajaga. Saadud jagatisega laiendame antud murdu.

Näiteid. 1) Laiendame murdu $\frac{2}{37}$ nimetajani 111.

$$111 : 37 = 3; \quad \frac{\frac{2}{37}}{3} = \frac{6}{111}$$

2) Laiendame murdu $\frac{2m}{13n}$ nimetajani $52m^2n$.

$$52m^2n : 13n = 4m^2; \quad \frac{\frac{2m}{13n}}{4m^2} = \frac{8m^3}{52m^2n}.$$

Kui võimalik, siis laiendaja leitakse peast.

161. Laienda murdu

$$1) \quad \frac{3a}{4b} \quad \text{nimetajani } 20b; \quad 2) \quad \frac{a}{b} \quad \text{nimetajani } bn^2;$$

$$3) \quad \frac{5m}{4n} \quad ,, \quad 24n; \quad 4) \quad \frac{3}{4} \quad ,, \quad 260;$$

$$5) \quad \frac{14x}{45y} \quad ,, \quad 180xy^2; \quad 6) \quad \frac{b}{x} \quad ,, \quad 2ax;$$

$$7) \quad \frac{a}{b} \quad ,, \quad 4a^2b^2; \quad 8) \quad \frac{a}{4b} \quad ,, \quad 12ab^2;$$

$$9) \quad \frac{12}{13} \quad ,, \quad 169; \quad 10) \quad \frac{3m^2n}{4xy} \quad ,, \quad 12m^2xy.$$

Teades, et murd $\frac{a}{b}$ tähendab arvu, mille korrutamisel nimetajaga b saadakse lugeja a , võime kirjutada

$$\left(-\frac{a}{b}\right) \cdot b = -\frac{a}{b} \cdot b = -a.$$

Avaldades viimasest võrdusest teguri $-\frac{a}{b}$, saame

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}.$$

Laiendades paremal seisvat murdu arvuga -1 , saame

$$-\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

Seega

$$\boxed{-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}}$$

Murru väärtus ei muutu, kui muuta märk vastupidiseks murru ees ja murru ühes liikmes.

Laiendades murdu $\frac{a}{b}$ arvuga -1 , saame

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}}$$

Murru väärtus ei muutu, kui muuta märk vastupidiseks murru mõlemas liikmes.

162. Kirjuta miinusmärgita murru ees:

$$-\frac{3}{4}; \quad -\frac{a}{2}; \quad -\frac{m}{n}; \quad -\frac{-3}{m}; \quad -\frac{a}{-2}.$$

163. Kirjuta murd miinusmärgita murru liikmete ees:

$$\frac{-2}{-5}; \quad \frac{-x}{2}; \quad \frac{a}{-b}; \quad \frac{5}{-n}; \quad \frac{n}{-3}.$$

2.8. MURDUDE TEISENDAMINE ÜHENIMELISTEKS.

164. 1) Milliseid murde nimetatakse isenimelisteks?
2) Milliseid murde nimetatakse ühenimelisteks?
3) Mis on antud murdude ühiseks nimetajaks, kui nimetajad on ühistegurita?
4) Mis on antud murdude ühiseks nimetajaks, kui üks nimetajaist jagub teistega?
5) Mis võetakse antud isenimeliste murdude ühiseks nimetajaks?

165. Teisenda murrud ühenimelisteks, võrdle neid suuruste pool-
lest. Võrdlemise tulemus kirjuta märkide $>$ ja $<$ abil.

- | | | |
|--|---|--|
| 1) $\frac{2}{3}$ ja $\frac{3}{5}$ | 2) $\frac{5}{7}$ ja $\frac{4}{21}$ | 3) $\frac{5}{26}$ ja $\frac{1}{51}$ |
| 4) $\frac{5}{7}$ ja $\frac{4}{15}$ | 5) $\frac{3}{5}$ ja $\frac{7}{15}$ | 6) $\frac{11}{63}$ ja $\frac{13}{126}$ |
| 7) $\frac{2}{7}$ ja $\frac{5}{8}$ | 8) $\frac{3}{5}$ ja $\frac{8}{45}$ | 9) $\frac{13}{54}$ ja $\frac{7}{81}$ |
| 10) $\frac{1}{2}$ ja $\frac{6}{11}$ | 11) $\frac{3}{55}$ ja $\frac{10}{11}$ | 12) $\frac{1}{81}$ ja $\frac{49}{135}$ |
| 13) $\frac{6}{11}$ ja $\frac{7}{12}$ | 14) $\frac{13}{144}$ ja $\frac{7}{12}$ | 15) $\frac{34}{35}$ ja $\frac{54}{55}$ |
| 16) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ ja $\frac{5}{7}$ | 17) $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{11}$ ja $\frac{1}{2}$ | |
| 18) $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$ ja $\frac{4}{15}$ | 19) $\frac{6}{11}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{8}{13}$ ja $\frac{9}{14}$ | |
| 20) $\frac{23}{24}$, $\frac{7}{8}$ ja $\frac{59}{60}$ | 21) $\frac{11}{50}$, $\frac{23}{125}$, $\frac{29}{150}$ ja $\frac{34}{225}$ | |

Murdude $\frac{a}{3b}$ ja $\frac{b}{4c}$ ühenimelisteks teisendamisel toimime järg-
miselt. Ühiseks nimetajaks on nimetajate vähim ühiskordne. Et
nimetajad $3b$ ja $4c$ on ühistegurita, siis nende vähim ühiskordne
on nende korrutis:

$$3b \cdot 4c = 12bc.$$

Nüüd laiendame antud murde nimetajani $12bc$.

Esimese murru laiendaja on

$$12bc : 3b = 4c;$$

teise murru laiendaja on

$$12bc : 4c = 3b.$$

$$\text{Saame: } \frac{\overset{4c}{a}}{3b} = \frac{4ac}{12bc};$$

$$\frac{\overset{3b}{b}}{4c} = \frac{3b^2}{12bc}.$$

Teisendame murrud

$$\frac{7c}{12abx}, \frac{13x}{20ab^2} \text{ ja } \frac{8b}{15a^2x^3}$$

ühenimelisteks.

Ühise nimetaja, s. o. antud nimetajate vähima ühiskordse leidmiseks kirjutame antud nimetajad kanoonilisel kujul:

$$12abx = 2^2 \cdot 3abx,$$

$$20ab^2 = 2^2 \cdot 5ab^2,$$

$$15a^2x^3 = 3 \cdot 5a^2x^3.$$

Ühine nimetaja on seega $2^2 \cdot 3 \cdot 5a^2b^2x^3 = 60a^2b^2x^3$.

Jagades leitud ühise nimetaja antud murdude nimetajatega, saame vastavad laiendajad:

$$60a^2b^2x^3 : 12abx = 5abx^2;$$

$$60a^2b^2x^3 : 20ab^2 = 3ax^3;$$

$$60a^2b^2x^3 : 15a^2x^3 = 4b^2.$$

Märkame, et laiendaja on selline üksliige, millega antud murru nimetajat korrutades same ühise nimetaja.

Laiendades antud murde nende laiendajatega, saamegi ühenimelised murrud:

$$\frac{\overbrace{5abx^2}^{5abx^2}}{12abx} = \frac{35abcx^2}{60a^2b^2x^3};$$

$$\frac{\overbrace{3ax^3}^{3ax^3}}{20ab^2} = \frac{39ax^4}{60a^2b^2x^3};$$

$$\frac{\overbrace{4b^2}^{4b^2}}{15a^2x^3} = \frac{32b^3}{60a^2b^2x^3}.$$

166. Teisenda murrud ühenimelisteks.

1) $\frac{a}{b}$

2) $\frac{a}{3b}$

3) $\frac{d}{a^2}$

4) $\frac{p}{a^2}$

$\frac{c}{d}$

$\frac{c}{4d}$

$\frac{3}{b}$

$\frac{q}{2ab}$

5) $\frac{3a^2}{x}$

6) $\frac{4}{a^2}$

7) $\frac{zm}{3a^3}$

8) $\frac{p}{4m^2n}$

$\frac{3b}{y}$

$\frac{3y}{2b^2}$

$\frac{n}{12a^2b}$

$\frac{3p^2}{2mn^3}$

$\frac{4c}{z}$

$\frac{5y}{4ab}$

$\frac{5n}{18ab^2}$

$\frac{5}{14m^3n^2}$

167. Teisenda ühenimelisteks.

1) $\frac{x}{a}$

2) $2b$

3) $\frac{2p}{3m^2}$

4) $\frac{5b}{24a^2c^3}$

a^2

$\frac{a}{3x^2}$

$\frac{5p^2}{6m^2n^2}$

$5d$

$\frac{y}{3a^3b}$

$\frac{3ab}{5xy}$

$3mn$

$\frac{7a}{36c^2}$

5) $\frac{5}{a}$

6) x

7) 2

8) $\frac{1}{x}$

$\frac{4}{a^2}$

$\frac{1}{2a}$

9

$\frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{a^3}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{4}{5x^2}$

$\frac{1}{x^3}$

2.9. MURDUDE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

Liita algebralised murrud $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$, tähendab kirjutada nende summa

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \quad (b \neq 0, d \neq 0)$$

murruna.

Näitame, et ühenimeliste algebraliste murdude liitmisel jääb kehtima ühenimeliste harilike murdude liitmise eeskiri.

Korrutame summa $\frac{a}{m} + \frac{b}{m}$ arvuga $m \neq 0$.

Saame

$$m \cdot \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} \right) = m \cdot \frac{a}{m} + m \cdot \frac{b}{m} = a + b.$$

Korrutame nüüd murru $\frac{a+b}{m}$ arvuga m , saame

$$m \cdot \frac{a+b}{m} = a + b.$$

Meil on nüüd

$$m \cdot \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} \right) = a + b,$$

$$m \cdot \frac{a+b}{m} = a + b,$$

millest järeldub, et

$$m \cdot \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} \right) = m \cdot \frac{a+b}{m},$$

siit omakorda järeldub, et

$$\boxed{\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}, m \neq 0}$$

Ühenimeliste murdude summa on murd, mille lugeja on antud murdude lugejate summa ja nimetaja on liidetavate nimetaja.

168. Liida murrud ja kui võimalik, taanda tulemus.

1) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$

2) $\frac{4}{a} + \frac{5}{a}$

3) $\frac{-p}{q} + \frac{2p}{q}$

4) $\frac{8}{15} + \frac{2}{15}$

5) $\frac{3a}{k} + \frac{a}{k}$

6) $\frac{r}{10s} + \frac{1}{10s}$

7) $\frac{2x}{3} + \frac{4x}{3}$

8) $\frac{5u^3}{b} + \frac{u^3}{b}$

9) $\frac{-3u}{-5v} + \frac{2u}{5v}$

10) $\frac{4R}{9} + \frac{R}{9}$

11) $\frac{7}{2h} + \frac{k}{2h}$

12) $\frac{92a^2}{35y} + \frac{8ab}{35y}$

13) $\frac{p^2}{4} + \frac{3p^2}{4}$

14) $\frac{4m^2}{3n} + \frac{1}{3n}$

15) $\frac{a}{a^2} + \frac{1}{a^2}$

Ratsionaalarvudega tehete õpetusest on teada, et arvu lahutamine on samaväärne vastandarvu liitmisega. See seadus kehtib ka algebraliste murdude korral. Seega

murru lahutamisel liidame vähendaja vastandavaldise.

Näiteks

$$\begin{aligned} \frac{a}{n} - \frac{b}{n} - \frac{c}{n} &= \frac{a}{n} + \left(-\frac{b}{n} \right) + \left(-\frac{c}{n} \right) = \frac{a}{n} + \frac{-b}{n} + \frac{-c}{n} = \\ &= \frac{a + (-b) + (-c)}{n} = \frac{a - b - c}{n}. \end{aligned}$$

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} - \frac{c}{n} = \frac{a-b-c}{n}, \quad n \neq 0$$

Et lahutamine on asendatav vastandaru liitmisega, seepärast nimetatakse nii liitmist kui ka lahutamist algebraliseks liitmiseks.

169. Liida murrud ja kui võimalik, siis taanda tulemus.

$$1) \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{7}{15}$$

$$2) \frac{3}{10} - \frac{8}{10} + \frac{1}{10}$$

$$3) \frac{5}{18} + \frac{11}{18} - \frac{7}{18}$$

$$4) \frac{3}{28} - \frac{9}{28} - \frac{1}{28}$$

$$5) \frac{4}{9} - \frac{5}{9} + \frac{4}{9}$$

$$6) \frac{11}{12} - \frac{1}{12} - \frac{7}{12}$$

$$7) \frac{7a}{10} - \frac{3a}{10}$$

$$8) \frac{15x}{16y} - \frac{7x}{16y}$$

$$9) \frac{5g}{16} + \frac{3g}{16}$$

$$10) \frac{a}{2} - \frac{a}{2}$$

$$11) \frac{2m}{3n} + \frac{m}{3n}$$

$$12) \frac{2ab}{5x} + \frac{3ab}{5x}$$

170. Arvuta.

$$1) \frac{a}{3b} + \frac{a}{3b} + \frac{a}{3b}$$

$$2) \frac{2a+5}{6} + \frac{3a+2}{6}$$

$$3) \frac{a^2}{3} + \frac{2b^2}{3} - \frac{4c^2}{3}$$

$$4) \frac{4m+8}{3} + \frac{2m-8}{3}$$

$$5) \frac{a}{x} + \frac{3a}{x} + \frac{5a}{x}$$

$$6) \frac{7n+12}{8} - \frac{3n+12}{8}$$

$$7) \frac{10x}{9a} - \frac{5x}{9a} + \frac{x}{9a}$$

$$8) \frac{14x-9}{10} - \frac{6x+2}{10}$$

$$9) \frac{9}{10a^2} - \frac{3}{10a^2} - \frac{1}{10a^2}$$

$$10) \frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{2}$$

Lihtsustame näitena järgmise summa.

$$\begin{aligned} \frac{24x-6y}{7} - \frac{10x-48y}{7} &= \frac{24x-6y-(10x-48y)}{7} = \frac{24x-6y-10x+48y}{7} = \\ &= \frac{14x+42y}{7} = 2x+6y. \end{aligned}$$

171. Lihtsusta.

$$1) \frac{m+n}{4p} - \frac{m-n}{4p}$$

$$2) \frac{3a}{b} + \frac{5a}{b} + \frac{7a}{b}$$

$$3) \frac{16x-3}{7} - \frac{2x-3}{7}$$

$$4) \frac{a+b}{a} - \frac{b}{a}$$

$$5) \frac{7m+8n}{3m} - \frac{m-4n}{3m}$$

$$6) \frac{a+b}{2a} + \frac{a+b}{2a}$$

$$7) \frac{20a-9}{6b} - \frac{8a-9}{6b}$$

$$8) \frac{a+b+c}{x} - \frac{a}{x}$$

$$9) \frac{7x+5}{2y} + \frac{7x-5}{2y}$$

$$10) \frac{2a+3b}{b} - \frac{2a-4b}{b}$$

$$11) \frac{4a+b}{8} + \frac{2a-b}{8}$$

$$12) \frac{5a+b}{4} - \frac{a+b}{4}$$

$$13) \frac{a+b}{10} + \frac{a-b}{10}$$

$$14) \frac{c+nd}{2} - \frac{c-nd}{2}$$

$$15) \frac{a+y}{3m} + \frac{2a-y}{3m}$$

$$16) \frac{6x-3z}{2R^2} - \frac{4x-3z}{2R^2}$$

$$17) \frac{5c-3u}{6n^2} + \frac{7c+3u}{6n^2}$$

$$18) \frac{58a^2-81}{27D^2} - \frac{58a^2}{27D^2}$$

$$19) \frac{2r-t}{s^2} + \frac{t-r}{s^2}$$

$$20) \frac{19N-23}{8h^3} - \frac{1+19N}{8h^3}$$

Isenimeliste murdude algebralisel liitmisel

- 1) leiame nende murdude ühise nimetaja, võttes selleks antud nimetajate vähima ühiskordse;
- 2) leiame igale antud murrule laiendaja, milleks jagame leitud ühiskordse iga nimetajaga;
- 3) laiendame iga antud murdu leitud laiendajaga;
- 4) arvutame saadud ühenimeliste murdude summa;
- 5) kui võimalik, siis koondame saadud murru lugejat;
- 6) kui võimalik, siis taandame saadud murdu.

Leiame näiteks summa

$$\frac{2a+b}{2ab} - \frac{a+b}{b^2} + \frac{a}{b^2}.$$

$$\frac{2a+b}{2ab} - \frac{a+b}{b^2} + \frac{a}{b^2} =$$

1) Ühiseks nimetajaks on $2ab^2$.

$$= \frac{\overbrace{2a+b}^b}{2ab} - \frac{\overbrace{a+b}^{2a}}{b^2} + \frac{\overbrace{a}^{2a}}{b^2} =$$

2) Laiendajad on:

$$2ab^2 : 2ab = b;$$

$$2ab^2 : b^2 = 2a.$$

$$= \frac{2ab+b^2}{2ab^2} - \frac{2a^2+2ab}{2ab^2} + \frac{2a^2}{2ab^2} =$$

3) Laiendame iga murdu leitud laiendajaga.

$$= \frac{2ab+b^2 - (2a^2+2ab) + 2a^2}{2ab^2} =$$

4) Liidame lugejad.

$$= \frac{2ab+b^2-2a^2-2ab+2a^2}{2ab^2} =$$

5) Koondame lugejad.

$$= \frac{b^2}{2ab^2} = \frac{1}{2a}.$$

6) Taandame.

Teine näide.

$$\frac{\overbrace{5m}^{2x}}{6a^2x} + \frac{\overbrace{7n}^{3ax}}{4ax} + \frac{\overbrace{1}^{a^2}}{12x^2} = \frac{10mx+21anx+a^2}{12a^2x^2}.$$

172. Arvuta.

1) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ 2) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 3) $\frac{1}{3x} + \frac{1}{3y}$ 4) $\frac{1}{m} - \frac{1}{n}$

5) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ 6) $\frac{1}{j} + \frac{1}{g}$ 7) $\frac{1}{5a} + \frac{1}{7b}$ 8) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

9) $\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ 10) $\frac{1}{a} + \frac{1}{x}$ 11) $\frac{1}{4m} + \frac{1}{5n}$ 12) $\frac{3}{a} - \frac{1}{2a}$

13) $\frac{1}{5} + \frac{1}{8}$ 14) $\frac{1}{b} + \frac{1}{y}$ 15) $\frac{1}{3} + \frac{1}{8u}$ 16) $\frac{5}{a} - \frac{2}{3a}$

17) $\frac{9}{25} - \frac{8}{45}$ 18) $\frac{y}{z} - \frac{z}{mx}$ 19) $\frac{1}{a} - \frac{2}{b}$

20) $\frac{1-2x}{6} + \frac{1+x}{3}$ 21) $\frac{2}{3x} + \frac{3}{2y}$ 22) $\frac{2}{b} - \frac{3}{ab}$

23) $\frac{2b}{15a} + \frac{b}{5a}$ 24) $\frac{4}{5a} - \frac{6}{7b}$ 25) $\frac{4}{a} - \frac{2+a}{3}$

26) $\frac{x}{3a} + \frac{1}{3a^2}$ 27) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ 28) $\frac{3a}{b} - \frac{8a+3b}{2b}$

173. Arvuta.

- | | | | |
|---|---|--|---------------------------------------|
| 1) $\frac{1}{4} + \frac{3}{8}$ | 2) $\frac{5}{6} + \frac{7}{12}$ | 3) $\frac{5}{4q} - \frac{3}{2q}$ | 4) $\frac{5u}{6a^2} - \frac{u}{3a}$ |
| 5) $\frac{8}{15} + \frac{2}{5}$ | 6) $\frac{a}{4} + \frac{a}{12}$ | 7) $\frac{1}{a} + \frac{2}{ab}$ | 8) $\frac{5}{a^2} - \frac{4}{a^2b^2}$ |
| 9) $\frac{5}{8} - \frac{1}{2}$ | 10) $\frac{c}{3} - \frac{c}{6}$ | 11) $\frac{2m}{ar} - \frac{n}{r}$ | 12) $\frac{7}{4x^3} + \frac{3}{x^2}$ |
| 13) $\frac{9}{10} - \frac{5}{4}$ | 14) $\frac{1}{p} + \frac{1}{3p}$ | 15) $\frac{b}{a^2} + \frac{c}{a}$ | 16) $\frac{2}{a^2} - \frac{3}{ab^2}$ |
| 17) $\frac{m}{x^2y} - \frac{n}{xy^2}$ | 18) $\frac{a+4}{2} + \frac{a+5}{3}$ | 19) $\frac{x-1}{6} + \frac{x+4}{21}$ | |
| 20) $\frac{3x}{4a^2b} + \frac{5y}{6ab^2}$ | 21) $\frac{x+7}{7} + \frac{x-21}{12}$ | 22) $\frac{p+2q}{3} - \frac{5p+16q}{24}$ | |
| 23) $\frac{5r}{6m^2} - \frac{7p}{6mn^2}$ | 24) $\frac{am+bn}{ab} + \frac{am+cn}{ac}$ | 25) $\frac{5a-7b}{14} - \frac{a-3b}{6}$ | |
| 26) $\frac{3ab}{10c^2d} + \frac{2c}{15d^2}$ | 27) $\frac{a^2-1}{2a} - \frac{a-1}{2}$ | 28) $\frac{m^2+n^2}{mn} + \frac{1-n}{m}$ | |

Kui liidetavate murdude nimetajaiks on vastandavaldised, siis võib ühiseks nimetajaks võtta ühe antud nimetajaist.

Näiteks, leiame summa

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{-m}.$$

Saame

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{-m} = \frac{a}{m} + \frac{-b}{m} = \frac{a-b}{m}$$

ehk

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{-m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

174. Arvuta.

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\frac{x}{3} - \frac{y}{-3}$ | 2) $\frac{4}{3a} + \frac{1}{-3a}$ |
| 3) $\frac{2}{a} - \frac{1}{-a}$ | 4) $\frac{n-2}{n} + \frac{n+2}{-n}$ |

Kui täisavaldise ja murru summa on tarvis avaldada murruna, siis kirjutame täisavaldise murruna ja edasi toimime murdude liitmise eeskirja järgi.

Näiteks avaldame murruna summa $2a + \frac{b^3}{5c^2}$.

Saame

$$2a + \frac{b^3}{5c^2} = \frac{2a}{1} + \frac{b^3}{5c^2} = \frac{10ac^2 + b^3}{5c^2}.$$

175. Arvuta.

1) $1 + \frac{a}{3}$

2) $a + \frac{b}{c}$

3) $m + \frac{2m+3n}{2}$

4) $5 + \frac{b}{5}$

5) $3 + \frac{a}{b}$

6) $4 + \frac{a+x}{4}$

7) $1 + \frac{2}{x}$

8) $ab - \frac{2}{d}$

9) $8 + \frac{a-x}{4}$

10) $4 + \frac{3}{x}$

11) $3a - \frac{a}{2}$

12) $2a + \frac{2a+3b}{2b}$

176. Arvuta.

1) $5 - \frac{a+x}{3}$

2) $1 - \frac{2}{x}$

3) $3m - \frac{4m+5n}{3}$

4) $7 - \frac{a-x}{6}$

5) $4 - \frac{3}{x}$

6) $3a - \frac{8a+3c}{2b}$

7) $1 - \frac{a}{3}$

8) $3 - \frac{2}{a}$

9) $a^2 - \frac{3b^3+a^3}{a}$

10) $5 - \frac{b}{5}$

11) $4 - \frac{2+a}{3}$

12) $3a + 2b - \frac{2a^2-b^2}{a}$

177. Mis tingimusel võrdub murd nulliga:

1) $\frac{m-n}{5}$;

2) $\frac{m+n}{8}$?

178. Mis tingimusel pole murrul mõtet:

1) $\frac{6}{a-b}$;

2) $\frac{15}{a+b}$?

179. Missugusel muutuja a väärtusel puudub võrrandil

$$ax=2$$

lahend?

180. Kas leidub selliseid b väärtusi, mille korral võrrandil

$$5x=b$$

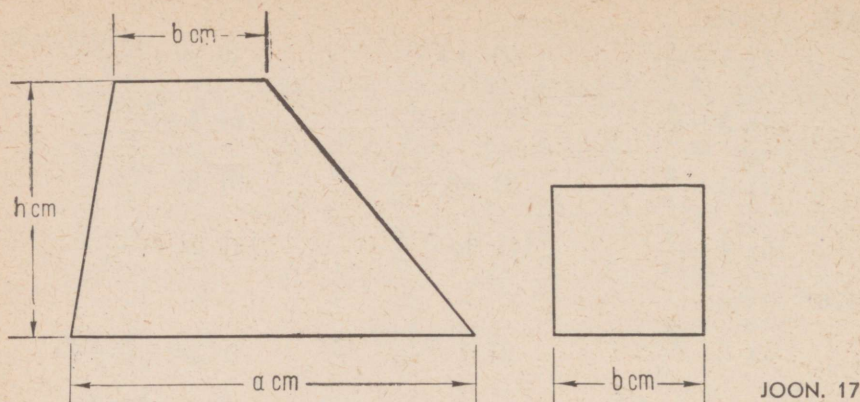
lahend puudub?

181. Ühe kolmnurga pindala on $\frac{3h}{2}$ cm², teise pindala $\frac{5h}{2}$ cm². Kui suur on nende kolmnurkade pindalade summa?

182. Arvuta joonisel 17 kujutatud kahe nelinurga pindalade vahe. Esimene nelinurk on trapets, teine ruut.

183. Prisma kummagi põhja pindala on $\frac{a^2}{6}$ cm² ja külgpindala $\frac{m^2}{3}$ cm². Kui suur on prisma täispindala?

184. Prisma põhja pindala on $\frac{a^2}{2}$ cm² ja külgpindala $\frac{am}{3}$ cm². Kui suur on prisma täispindala?



185. Kauba brutokaal on $\frac{a}{b}$ kgf ja netokaal $\frac{1}{3b}$ kgf. Kui palju kaalub taara?
186. Kooli ühe klassi õpilastest puudus esmaspäeval $\frac{m}{n}$ protsenti; teisipäeval puudus selles klassis $\frac{2m}{3n}$ protsenti õpilastest. Mitme protsendi võrra oli teisipäeval puudujaid vähem kui esmaspäeval?

2.10. MURDUDE KORRUTAMINE.

Näitame, et algebraliste murdude korrutamisel jääb kehtima hari-like murdude korrutamise eeskiri.

Korrutame avaldist $\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n}$, kus $m \neq 0$ ja $n \neq 0$, arvuga mn ; saame

$$\begin{aligned} mn \cdot \left(\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} \right) &= mn \cdot \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = m \cdot \frac{a}{m} \cdot n \cdot \frac{b}{n} = \\ &= \left(m \cdot \frac{a}{m} \right) \cdot \left(n \cdot \frac{b}{n} \right) = ab \end{aligned}$$

(rakendasime esmalt korrutamise ühenduvuse seadust, seejärel vahetuvuse seadust, siis jälle ühenduvuse seadust ja lõpuks jagatise jagajaga korrutamise eeskirja).

Nüüd korrutame murdu $\frac{ab}{mn}$ arvuga mn ; saame

$$mn \cdot \frac{ab}{mn} = ab.$$

Oleme saanud

$$mn \cdot \left(\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} \right) = ab,$$

$mn \cdot \frac{ab}{mn} = ab$. Siit järeldub, et

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn}, \quad m \neq 0, \quad n \neq 0.$$

Murdude korrutis on murd, mille lugeja on antud murdude lugejate korrutis ja nimetaja on antud murdude nimetajate korrutis.

187. Arvuta korrutis ja võimaluse korral taanda.

- | | | | |
|-------------------------------------|---|---|---|
| 1) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ | 2) $\frac{4}{12} \cdot \frac{24}{35}$ | 3) $1 \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{14}$ | 4) $\frac{11}{12} \cdot 4 \frac{4}{5}$ |
| 5) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$ | 6) $\frac{5}{9} \cdot \frac{27}{55}$ | 7) $3 \frac{4}{7} \cdot \frac{14}{15}$ | 8) $\frac{5}{16} \cdot 7 \frac{1}{9}$ |
| 9) $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6}$ | 10) $\frac{11}{13} \cdot \frac{65}{33}$ | 11) $2 \frac{1}{5} \cdot \frac{15}{22}$ | 12) $\frac{7}{10} \cdot 3 \frac{1}{3}$ |
| 13) $\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{8}$ | 14) $\frac{17}{15} \cdot \frac{25}{6}$ | 15) $7 \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15}$ | 16) $\frac{8}{13} \cdot 3 \frac{1}{4}$ |
| 17) $\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{9}$ | 18) $\frac{18}{35} \cdot \frac{77}{24}$ | 19) $9 \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7}$ | 20) $\frac{11}{17} \cdot 5 \frac{2}{3}$ |

188. Arvuta.

- | | | |
|---|--|---|
| 1) $2 \frac{1}{3} \cdot 3 \frac{1}{2}$ | 2) $1 \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{12}$ | 3) $-\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}$ |
| 4) $\frac{4}{7} \cdot \frac{a}{n^2}$ | 5) $4 \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{1}{3}$ | 6) $2 \frac{2}{3} \cdot 2 \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{7}$ |
| 7) $-\frac{6}{7} \cdot \left(-12 \frac{1}{4} \right)$ | 8) $\frac{4a}{b} \cdot \frac{3b}{8a}$ | 9) $7 \frac{3}{5} \cdot 1 \frac{6}{19}$ |
| 10) $3 \frac{3}{8} \cdot 1 \frac{1}{9} \cdot 5 \frac{1}{2}$ | 11) $\frac{-3}{5} \cdot \frac{5}{-6}$ | 12) $\frac{ab}{6} \cdot \frac{3a}{4b}$ |
| 13) $8 \frac{1}{4} \cdot 1 \frac{5}{11}$ | 14) $7 \frac{1}{2} \cdot 3 \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{25}$ | 15) $\frac{-4}{75} \cdot \frac{5}{6}$ |
| 16) $\frac{x^2 a^3}{7} \cdot \frac{14}{a^2 u}$ | 17) $10 \frac{4}{5} \cdot 4 \frac{4}{9}$ | 18) $5 \frac{4}{5} \cdot \frac{10}{29} \cdot 4 \frac{3}{4}$ |
| 19) $2 \frac{1}{3} \cdot \frac{-3}{7}$ | 20) $1 \frac{2}{5} \cdot \frac{a}{n^2}$ | |

21) $1 \frac{2}{5} \cdot \frac{a}{n^2} \cdot \frac{3}{7} a^2 n^2$

22) $1 \frac{3}{4} \cdot \frac{N^2}{u^2} \cdot \frac{8u}{15N^2}$

23) $2 \frac{1}{4} \cdot \frac{c^2}{x} \cdot \frac{11x^2}{3c^2}$

24) $\frac{5a}{16b^2} \cdot \left(-\frac{32ab^2c}{25}\right)$

25) $\frac{3a}{5b} \cdot \frac{10b}{21c} \cdot \frac{7c}{4a}$

26) $\left(-\frac{2a^2}{3b^2}\right) \cdot \left(-\frac{5a^2b^2}{8c}\right)$

27) $\frac{8a^2}{21b^2} \cdot \frac{14b}{15c} \cdot \frac{c}{4a^2}$

28) $\left(-\frac{N}{a}\right) \cdot \left(\frac{a^2}{5N^3}\right)$

Täisavaldise ja murru korrutamise eeskirja saame järgmise arutlusega:

$$k \cdot \frac{a}{b} = \frac{k}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{ka}{1 \cdot b} = \frac{ka}{b}$$

$k \cdot \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$

189. Arvuta korrutis ja kui võimalik, siis taanda.

1) $12 \cdot \frac{5}{9}$

2) $\frac{5}{9} \cdot 21$

3) $(-2) \cdot \frac{2}{3}$

4) $6 \cdot \frac{a}{3b}$

5) $\frac{3}{x} \cdot a$

6) $nx - \left(-\frac{a}{x}\right)$

7) $7m \cdot \frac{5}{14n^2}$

8) $\frac{c}{a^2} \cdot 2a$

9) $(-15m^3p) \cdot \frac{3x}{10m^2p}$

10) $20c \cdot \frac{4ab}{5c}$

11) $\frac{n}{ab} \cdot a$

12) $\frac{5a}{16b^2} \cdot (-32ab^2c)$

13) $9ax^2 \cdot \frac{h}{ax^2}$

14) $\frac{41}{g^2h} \cdot fgh$

15) $\left(-\frac{2a^2}{3b^2}\right) \cdot \left(-\frac{5a^2b^2}{8c}\right)$

Mõnda avaldist saab teisendada mitmel viisil. Näiteks avaldist $\left(3 + \frac{2}{x}\right) \cdot \left(3 - \frac{2}{x}\right)$ saab teisendada kahel viisil:

a) teostades enne sulgudes näidatud tehted ja siis korrutades;

b) korrutades kõigepealt sulgavaldised hulkliikmete korrutamise eeskirja järgi ja siis liites.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left(\overset{x}{3} + \frac{2}{x}\right) \cdot \left(\overset{x}{3} - \frac{2}{x}\right) = \frac{3x+2}{x} \cdot \frac{3x-2}{x} = \\ & = \frac{(3x+2)(3x-2)}{x \cdot x} = \frac{9x^2-4}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \left(3 + \frac{2}{x}\right) \cdot \left(3 - \frac{2}{x}\right) = 3^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = \overset{x^2}{9} - \frac{4}{x^2} = \frac{9x^2-4}{x^2}$$

190. Lahenda kahel viisil ja võrdle tulemusi.

$$1) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(2 + \frac{3}{a}\right)$$

$$2) \left(\frac{a}{3} + \frac{4}{b}\right) \cdot \frac{3b}{4a}$$

$$3) \left(2 + \frac{a}{3}\right) \left(3 - \frac{a}{2}\right)$$

$$4) \left(\frac{2x}{7y} - \frac{3y}{5x}\right) \left(-\frac{35x^2}{6y^2}\right)$$

$$5) \left(5 - \frac{3}{x}\right) \left(4 + \frac{2}{x}\right)$$

$$6) \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2}\right)$$

$$7) \left(7 - \frac{2}{a}\right) \left(7 - \frac{2}{a}\right)$$

$$8) \left(\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{5}\right)$$

$$9) \left(5 + \frac{a}{x}\right) \left(5 - \frac{a}{x}\right)$$

$$10) \left(\frac{2}{a} + \frac{b}{3}\right) \left(\frac{a}{2} + \frac{3}{b}\right)$$

191. Teosta tehted.

$$1) \frac{a+b}{6} \cdot 2(m-4)$$

$$2) \left(\frac{x}{4a} - \frac{y}{4}\right) \left(\frac{x}{5a} + \frac{y}{5}\right)$$

$$3) \frac{m+4}{6} \cdot 2(m-4)$$

$$4) \frac{a+b}{7} \cdot \frac{a-b}{14}$$

$$5) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) (a-b)$$

$$6) \frac{m+n}{5} \cdot \frac{m-n}{16}$$

$$7) \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \cdot (p+q)$$

$$8) \left(\frac{p}{6} - \frac{q}{2}\right) \left(\frac{p}{9} + \frac{q}{3}\right)$$

$$9) \frac{a+2}{3} \cdot \frac{a+3}{4}$$

$$10) \left(\frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{2}\right) \left(\frac{u^2}{8} + \frac{v^2}{4}\right)$$

2.11. MURRU ASTENDAMINE.

Et aste on võrdsete tegurite korrutus, siis

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}, \quad b \neq 0;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}.$$

Üldiselt,

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ tegurit}} = \frac{a^n}{b^n}, \quad n \in \mathbb{N}.}$$

Murru n -es aste ($n \in \mathbb{N}$) on murd, mille lugejaks on antud murru lugeja n -es aste ja nimetajaks antud murru nimetaja n -es aste.

192. Astenda.

- | | | |
|-----------------------------------|--|--|
| 1) $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ | 2) $\left(-\frac{5a^2}{6b^3}\right)^2$ | 3) $\left(\frac{a+2}{2}\right)^2$ |
| 4) $\left(\frac{b}{3}\right)^2$ | 5) $\left(\frac{3x^2}{10y^2}\right)^3$ | 6) $\left(\frac{x-5}{10}\right)^2$ |
| 7) $\left(\frac{2x}{9}\right)^2$ | 8) $\left(\frac{y^3}{6x^2}\right)^3$ | 9) $\left(\frac{x+1}{4}\right)^3$ |
| 10) $\left(-\frac{a}{2}\right)^2$ | 11) $\left(\frac{a^3}{3b^2}\right)^2$ | 12) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^3$ |
| 13) $\left(-\frac{a}{2}\right)^3$ | 14) $\left(\frac{3x^2}{4y^3}\right)^3$ | 15) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^3$ |

193. Teisenda.

- | | | | |
|--------------------------------------|---|--|--|
| 1) $\left(\frac{4a}{5}\right)^2$ | 2) $\left(\frac{3m}{4n}\right)^2$ | 3) $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2$ | 4) $\left(2 + \frac{a}{2}\right)^3$ |
| 5) $\left(-\frac{7b}{8}\right)^2$ | 6) $\left(-\frac{1}{2N}\right)^2$ | 7) $\left(\frac{a}{2} - 2\right)^2$ | 8) $\left(\frac{2}{3} - \frac{a}{2}\right)^3$ |
| 9) $\left(-\frac{8c}{15}\right)^3$ | 10) $\left(\frac{0,1ab}{7c^2}\right)^2$ | 11) $\left(\frac{a}{3} + \frac{3}{a}\right)^2$ | 12) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}n\right)^3$ |
| 13) $\left(\frac{9d}{10}\right)^3$ | 14) $\left(\frac{3a^2}{8mnp}\right)^2$ | 15) $\left(\frac{2}{3}a - \frac{3}{4}b\right)^2$ | 16) $\left(m + \frac{3}{4}\right)^3$ |
| 17) $\left(-\frac{11e}{15}\right)^2$ | 18) $\left(-\frac{1}{2m^2x}\right)^3$ | 19) $\left(\frac{a}{n} - 1\right)^3$ | 20) $\left(\frac{2}{5} - \frac{2n}{3}\right)^3$ |

2.12. MURDUDE JAGAMINE.

Võrrandi

$$\frac{m}{n} \cdot x = \frac{a}{b} \quad (n \neq 0, b \neq 0)$$

lahendamise viib murdude jagatise leidmisele, sest selle võrrandi

lahendiks on $x = \frac{a}{b} : \frac{m}{n}$.

Tõestame, et

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m}.$$

Selleks on tarvis näidata, et võrduse parema poole korrutamisel

jagajaga $\frac{m}{n}$ saame jagatava $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot n \cdot m}{b \cdot m \cdot n} = \frac{a}{b}.$$

Seega,

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m} = \frac{an}{bm}}$$

Murru jagamisel murruga korrutame esimese murru teise murru pöördavaldisega.

Täisavaldise jagamisel murruga ja murru jagamisel täisavaldisega esitame täisavaldise murruna ja jagame siis murruga jagamise eeskirja järgi:

$$a : \frac{m}{n} = \frac{a}{1} : \frac{m}{n} = \frac{a}{1} \cdot \frac{n}{m} = \frac{an}{m};$$

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a}{b} : \frac{m}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{m} = \frac{a}{bm}.$$

194. Arvuta.

- | | | | |
|--------------------------|------------------------|---------------------------|--------------------------|
| 1) $\frac{12}{35} : 6$ | 2) $\frac{3}{5} : 5$ | 3) $\frac{15}{16} : 10$ | 4) $28 : \frac{7}{10}$ |
| 5) $\frac{14}{15} : 7$ | 6) $\frac{6}{7} : 3$ | 7) $\frac{28}{33} : 35$ | 8) $16 : \frac{8}{13}$ |
| 9) $\frac{27}{48} : 9$ | 10) $\frac{3}{8} : 7$ | 11) $\frac{63}{50} : 14$ | 12) $20 : \frac{4}{5}$ |
| 13) $\frac{36}{55} : 12$ | 14) $\frac{7}{16} : 2$ | 15) $\frac{52}{105} : 12$ | 16) $64 : \frac{16}{17}$ |
| 17) $\frac{65}{72} : 13$ | 18) $\frac{5}{21} : 4$ | 19) $\frac{84}{95} : 60$ | 20) $80 : \frac{10}{11}$ |

195. Arvuta.

- | | | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|--|
| 1) $\frac{2}{3} : \frac{4}{7}$ | 2) $\frac{5}{24} : \frac{35}{12}$ | 3) $1 \frac{14}{15} : \frac{29}{45}$ | 4) $-2 \frac{3}{5} : 6 \frac{1}{2}$ |
| 5) $\frac{3}{5} : \frac{6}{11}$ | 6) $\frac{27}{55} : \frac{3}{22}$ | 7) $5 \frac{11}{14} : \frac{-18}{35}$ | 8) $4 \frac{3}{8} : \left(-2 \frac{5}{8}\right)$ |
| 9) $\frac{5}{16} : \frac{5}{7}$ | 10) $\frac{24}{65} : \frac{12}{91}$ | 11) $3 \frac{5}{12} : \frac{5}{-16}$ | 12) $5 \frac{4}{9} : \left(-4 \frac{2}{3}\right)$ |
| 13) $\frac{9}{14} : \frac{11}{35}$ | 14) $\frac{4}{9} : \frac{8}{27}$ | 15) $-9 \frac{3}{8} : \frac{-15}{24}$ | 16) $7 \frac{7}{8} : 5 \frac{1}{4}$ |
| 17) $\frac{7}{12} : \frac{31}{24}$ | 18) $\frac{1}{3} : \frac{7}{30}$ | 19) $-2 \frac{3}{5} : \frac{13}{-15}$ | 20) $-8 \frac{1}{4} : \left(-3 \frac{2}{3}\right)$ |

196. Arvuta.

1) $\frac{a}{5} : 5$

2) $2\frac{1}{4}a : 3$

3) $\frac{2a}{5} : a$

4) $\frac{2x}{5} : 4$

5) $6\frac{1}{2}b^2 : 2b$

6) $\frac{ab}{8} : b$

7) $-\frac{6m}{5} : 2$

8) $-3\frac{1}{3}xy : (-10)$

9) $3\frac{1}{5} : 8a$

10) $-\frac{3n}{8} : (-27)$

11) $4\frac{1}{6}x^2y : 50$

12) $\frac{12xy}{17} : 3x$

13) $\frac{8p}{9} : 16$

14) $1\frac{1}{2}m^3 : 15$

15) $\frac{42pq}{5} : 21p$

197. Arvuta.

1) $\frac{x}{5} : 2\frac{1}{3}$

2) $\frac{a^2}{3} : \frac{a}{b}$

3) $\frac{a^2}{b^2} : \frac{a}{b}$

4) $\frac{2a}{9} : 3\frac{1}{9}$

5) $\frac{x}{8} : \frac{x^2}{4}$

6) $\frac{a^2}{b^2} : \frac{b}{a}$

7) $\frac{a}{10} : 1\frac{2}{5}$

8) $\frac{3q^3}{4} : \frac{16q}{15}$

9) $\frac{a}{b} : \frac{1}{b}$

10) $\frac{1}{3}u : 6\frac{2}{3}$

11) $\frac{10p}{5} : \frac{27p^3}{35}$

12) $\frac{2x}{3y} : \frac{2y}{3x}$

13) $6\frac{2}{3}a^3 : 1\frac{2}{3}$

14) $\frac{m^2}{2} : \frac{m^2}{10}$

15) $\frac{x}{y} : \frac{x}{y^2}$

198. Arvuta.

1) $\frac{b^2}{a} : 3a$

2) $\left(-\frac{a^2}{b}\right) : 5n$

3) $\left(-\frac{2a^3}{n}\right) : a^2$

4) $\frac{-a}{b} : 7ac^2$

5) $\frac{16b}{a^2} : 4b^3$

6) $\frac{16b}{m^2} : (-4b^3)$

7) $\left(-\frac{15m^4}{8q}\right) : (-5m^2)$

8) $\frac{4ax}{b} : (-5ax^2)$

9) $\frac{2c^2}{5x} : (-14c^3x)$

10) $\frac{8c^2n}{3f} : (-4cf)$

11) $\frac{3m}{4p} : \frac{q}{2m}$

12) $\frac{3a^2b}{2c^2} : \frac{6ab}{2c^2}$

13) $\left(-\frac{ax}{c}\right) : \frac{2}{3x^2}$

14) $\left(-\frac{14xy}{9z^2}\right) : \frac{21x^2}{2c^2}$

15) $\frac{x^2}{y} : \left(-\frac{x^2}{y}\right)$

16) $\left(-\frac{15a^4b^3}{17m}\right) : \left(-\frac{12a^2b}{17m}\right)$

17) $\frac{1}{q^2} : \left(-\frac{n}{q^2}\right)$

18) $\frac{7u^5}{v^2} : 84 \frac{u^3}{v^2}$

19) $\frac{4fg}{h^2} : \frac{2fg}{h^3}$

20) $\frac{135a^4b^3}{c^4} : \frac{105a^2b^3}{c^3}$

Murdu, mille liikmetes esineb murde, nimetatakse mitmekordseks murruks.

Näide 1. Lihtsustame mitmekordset murdu

$$\frac{\frac{7}{25}}{\frac{14}{15}}$$

jagamise teel.

Lahendus.

$$\frac{\frac{7}{25}}{\frac{14}{15}} = \frac{7}{25} : \frac{14}{15} = \frac{7 \cdot 15}{25 \cdot 14} = \frac{3}{10}.$$

Näide 2. Lihtsustame mitmekordset murdu

$$\frac{a + \frac{bx}{c}}{\frac{1}{cx}}$$

laiendamise teel.

Lahendus. Laiendades antud murdu cx -ga, saame

$$\frac{a + \frac{bx}{c}}{\frac{1}{cx}} = \frac{acx + bx^2}{1} = acx + bx^2.$$

199. Lihtsusta murd.

1) $\frac{\frac{3}{4}}{9}$

2) $\frac{1}{\frac{1}{a}}$

3) $\frac{x - \frac{x}{3}}{2x}$

4) $\frac{a - \frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{a}}$

$$\begin{array}{llll}
 5) \frac{a}{b} & 6) \frac{a}{2} & 7) \frac{a + \frac{b}{c}}{c} & 8) \frac{2b + \frac{b}{a}}{b - \frac{a}{b}} \\
 9) \frac{\frac{3x}{8y^2}}{\frac{5x^2}{12y}} & 10) \frac{-b^2}{-\frac{a}{b}} & 11) \frac{a + \frac{b}{c}}{\frac{1}{c}} & 12) \frac{\frac{2a}{1+a}}{1 - \frac{1}{a}} \\
 13) \frac{8}{\frac{3}{5}} & 14) \frac{-\frac{b^2}{a}}{b} & 15) \frac{m + \frac{1}{4}}{m + \frac{1}{6}} & 16) \frac{m - \frac{b}{a}}{\frac{m}{a+b}} \\
 17) \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} & 18) \frac{16b}{\frac{a^2}{4b^3}} & 19) \frac{2 + \frac{1}{a}}{3 + \frac{1}{a}} & 20) \frac{x + \frac{y}{z}}{z + \frac{y}{x}}
 \end{array}$$

2.13. KORDAMISEKS.

200. Taanda murrud.

$$1) \frac{-12a^3b^4}{-36a^4b^4} \qquad 2) \frac{-72a^3b^4c^5}{-9a^3b^2c} \qquad 3) \frac{0,75a^5x^2}{0,25a^4x}$$

201. Arvuta korrutis

$$\frac{m}{n} \cdot \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s} \right)$$

kahel viisil ja võrdle tulemusi.

202. Kirjuta hulkliige

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

astmena.

2) Kirjuta hulkliige

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

astmena.

203. 1) Tõesta, et võrdus

$$(-a+b)(-a-b) = (a+b)(a-b)$$

on õige.

2) Tõesta, et võrdus

$$(-a-b)^2 = (a+b)^2$$

on õige.

204. Tõesta, et võrdus

$$(a-b)^2 = (b-a)^2$$

on õige.

205. Millise avaldise peab liitma avaldisega $(a-b)^2$, et tulemus oleks võrdne avaldisega $(a+b)^2$?

206. Millise avaldise peab lahutama arvude a ja b summa kuubist, et tulemus oleks võrdne a ja b kuupide summaga?

207. Avalda x .

$$1) \frac{x}{m} = \frac{5n}{2m}$$

$$2) \frac{ab}{cd} = \frac{a^2b^2}{x}$$

208. Teisenda murd

$$-\frac{-x^2-x+1}{2}$$

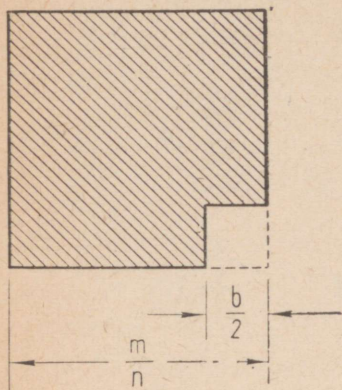
murruks, mille ees ei ole miinusmärki.

209. Teisenda murd $\frac{-a+b}{-x-y}$ niisuguseks murruks, mille lugeja ega nimetaja esimese liikme ees ei ole miinusmärki.

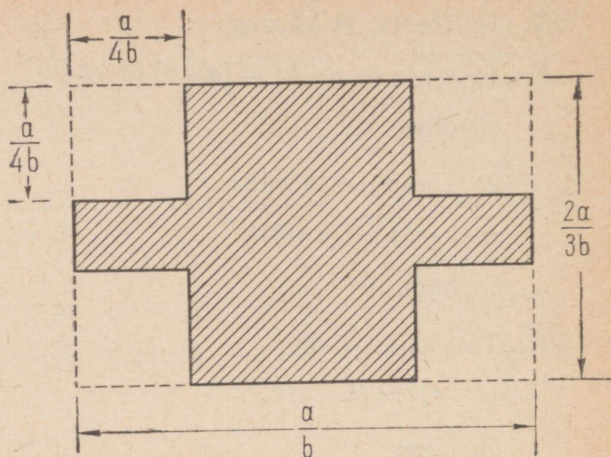
210. Ristküliku ühe külje pikkus on $\frac{a}{2}$ meetrit ja teise külje pikkus on $\frac{m}{a}$ meetrit. Kui suur on ristküliku pindala?

211. Toa pikkus on $\frac{a}{2}$ meetrit ja laius $\frac{b}{3}$ meetrit. Avalda toa põranda pindala.

212. Kolmnurga alus on $\frac{2a}{5}$ cm ja kõrgus $\frac{b}{2}$ cm. Leia pindala.



JOON. 18



JOON. 19

213. Kolmnurga küljed on $\frac{a}{2}$ cm, a cm ja $\frac{b-a}{14}$ cm. Leia kolmnurga übermõõt.
214. Rööpküliliku külgede pikkused on $\frac{a-b}{3}$ cm ja $\frac{2a-b}{3}$ cm. Leia rööpküliliku übermõõt.
215. Plekist ruudu külje pikkus on a mm. Soojenedes paisus ruudu külg 1 mm võrra. Leia pindala, mille võrra plekist ruudu pindala suurenes soojenedes.
216. Vasest kuubi serv, mille pikkus on b mm, paisus kuumendamisel 1 mm võrra. Leia, mille võrra suurenes kuubi ruumala.
217. Arvuta joonisel 18 antud kujundi pindala.
218. Arvuta joonisel 19 antud kujundi pindala.
219. Hulga A elementideks on arvud 1, 3, 7, 9, 11 ja 15, hulga B elementideks arvud 3, 4, 7, 9, 10, 12 ja 15. Leia hulgad $A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cap B)'_B$ ja $(A \cap B)'_A$.

3. ARVUTAMINE LIGIKAUDSETE ARVUDEGA. ARVUTUS- LUKATI.

3.1. TÄPSED JA LIGIKAUDED ARVUD.

Kui tahame näiteks teada, mitu korda esineb täht a antud peatüki 3 ja alapunkti 3.1 pealkirjas, siis loendame kõik a -tähed neis pealkirjades ja saame küsimusele täpse vastuse: 10 korda. Arv 10 on siin täpne arv, sest täht a esineb neis pealkirjades tõepoolest 10 korda.

Alati ei saa aga täpselt öelda, mitu elementi on antud hulgas, kuigi hulga elementide arv on lõplik. Eriti raske on hulga elemente loendada siis, kui elemente on palju või kui nad muudavad loendamise ajal oma asendit. Nii näiteks pole võimalik täpselt loendada inimesi mõnes rongkäigus või laulupeo ajal lauluväljakul. Kui öeldakse, et laulupeo lõppkontserdil oli 180 000 kuulajat, siis on see arv ikka vaid kuulajate ligikaudne arv.

Loendamisel võime saada nii täpseid kui ka ligikaudseid arve.

Sageli on arve vaja ümardada. Näiteks, kui koolis on 812 õpilast, siis kooli suuruse üldisel iseloomustamisel ümardatakse see arv sajalisteni ja öeldakse, et koolis on ligikaudu 800 õpilast.

Kõik ümardamisel saadud arvud on ligikaudsed.

Tihti tuleb kasutada arve, mis on saadud mõõtmise teel. Me mõõdame näiteks pikkust, raskust ehk kaalu, aega, temperatuuri jne. Kui näiteks kehalise kasvatuse tunnis mõõdeti õpilase hüppe pikkuseks 4,32 m, kas me võime siis öelda, et õpilane hüppas täpselt 4 m ja 32 cm kaugusele? Seda ei saa öelda väga mitmel põhjusel: ei ole võimalik täpselt märkida hüppaja langemiskohta hüppekasti, sest kastis oleva liiva pind pole kunagi täiesti sile; mõõdulint venib vähesel määral ja vajub oma raskuse mõjul looka; silma järgi pole võimalik mõõdulindi null-kriipsu seada täpselt kohakuti äratoukejoonega; ka kõige hoolikamalt valmistatud mõõdulindi kõik kriipsuvahed pole täpselt ühepikkused jne. Paljud siin nimetatud mõõtmise ebatäpsust põhjustavad tegurid esinevad igasugusel mõõtmisel.

Kõik mõõtmisel saadud arvud on ligikaudsed.

Ligikaudsed arvud tekivad ka arvutamisel. Olgu näiteks teada, et klassis on 21 õpilast, kellest neli õpib hindetele «4» või «5». Kui soovime väljendada lõpliku kümnendmurruna, mitu protsenti õpilastest õpib neljadele ja viitele, siis selgub arvutamisel, et

$$\frac{4}{21} = 0,190476 \dots = 19,0476 \dots \%$$

Olgugi, et ülesande lähteandmed on täpsed arvud, saab vastuse lõpliku kümnendmurruna anda vaid ligikaudselt, näiteks 19%.

Ülalööldust järeldub, et mitmesuguste ülesannete lahendamisel tuleb tegelda arvudega, millest enamus on ligikaudsed. Seepärast on oluline neid arve lähemalt tundma õppida.

220. Missugused arvud alljärgnevatel lausetel on ligikaudsed, missugused täpsed?

- 1) Eesti NSV-s on 15 maakonda ja 33 linna (1966. a.).
- 2) Peipsi järve territooriumist kuulub Eesti NSV-le 1545 km².
- 3) Jüril on 2 venda ja 1 õde.
- 4) Klassi nimekirjas on 29 õpilast.
- 5) Tallinnast Pärnu on 125 km.
- 6) Tallinna linna territoorium on 148,0 km² (1. jaan. 1966. a.).
- 7) Ukraina NSV territoorium on 603 700 km², elanike arv 47 136 000, nende hulgas 76,8% ukrainlasi ja 16,9% vene-lasi, vabariigis on 25 oblastit, 476 maakonda ja 385 linna, pealinnas Kiievis on 1 632 000 elanikku (15. jaan. 1970. a.).

221. Missugusele küsimusele saab vastata täpselt, missugusele ainult ligikaudse arvuga?

- 1) Mitu õpilast õpib 7. klassis?
- 2) Mitu keskkooli on meie rajoonis?
- 3) Mitu minutit kulub Annel kodust kooli tulekuks?
- 4) Mitu inimest elab meie rajoonis?
- 5) Kui pikk ja kui lai on klassiruumi põrand?
- 6) Mitu kilomeetrit on Tallinnast Leningradi?
- 7) Kui kaua sõidab autobuss Tartust Tallinna?
- 8) Mitme võrra on 10 suurem kui 7?
- 9) Missuguse arvuga võrdub korrutis 2,456 · 0,00392?
- 10) Kui suur on põtrade arv Eesti NSV metsades?

222. Vasakpoolses veerus on antud võrrandid, parempoolses lahendid (võrrandite esitamise järjekorras). Missugune lahend on täpne, missugune ligikaudne, s. t. on saadud täpselt lahendi ümardamisel?

- | | |
|---|----------|
| 1) $\frac{x}{3} - \frac{5}{6} = \frac{3x}{2} + 2$ | 1) 2,43 |
| 2) $2x + 3 = 16 - 6x$ | 2) 1,625 |
| 3) $3x(x + 5) - 3(x - 7) = 3x^2 + 2(2x + 12)$ | 3) 0,38 |
| 4) $\frac{t-2}{3} - \frac{1}{4} = 3(t+7)$ | 4) 8,219 |
| 5) $3u - 2(u + 3) = \frac{1}{5} - u$ | 5) 3,1 |

3.2. LIGIKAUDSE ARVU VIGA JA VEA ÜLEMMÄÄR.

Mis on ligikaudse arvu viga.

Täpse arvu ligikaudne väärtus ehk **lähend** erineb täpsest arvust. Täpse arvu ja tema lähendi vahe absoluutväärtust nimetatakse **lähendi veaks**. Näiteks, kui täpne arv $x=3,459$ ja tema lähend $a=3,5$, siis selle lähendi viga on

$$|x-a| = |3,459 - 3,5| = |-0,041| = 0,041.$$

Kui ligikaudne arv on nimega arv, siis on viga selle arvuga samanimeline arv. Näiteks, kui pikkuse 3,42 m lähendiks võtta 3,4 m, siis saame ka vea meetrites: $|3,42 \text{ m} - 3,4 \text{ m}| = 0,02 \text{ m}$. Täpse arvu viga on 0.

223. Leia lähendi viga.

Täpne arv	27	89	438	3,27 m	3,27 g	10,5 a	27 ha
Lähend	30	100	400	3 m	4 g	11 a	25 ha

224. Ümarda kümmeliteni ja leia saadud lähendi viga.

127 342 1562 28,7 8,56 11,02

225. Ümarda kümnendikeni ning leia saadud lähendi viga.

2,49 1,07 12,356 195,027 20,105 3,975

Vea ülemmäär ja arvu tõkked.

Ligikaudse arvu vea leidmiseks on tarvis teada nii täpset arvu kui ka selle lähendit. Enamikel juhtudel on aga teada ainult lähend, kuid täpset arvu ennast pole teada. Sel juhul pole võimalik leida ka lähendi viga. Nii näiteks ei saa öelda, kui suur on toa põranda pikkuse mõõtmisel saadud arvu 4,16 m viga, sest põranda täpset pikkust pole võimalik leida. Arvestades aga mõõtmistingimusi (mõõtmisvahendit, põranda ja äärelüüside siledust, mõõtja kogemusi jms.) on võimalik hinnata, kui palju põranda täpne pikkus võib ülimalt erineda oma lähendist. Teisiti öeldes, on võimalik otsustada, kui suur saab ülimalt olla saadud lähendi viga ehk kui suur on selle lähendi **vea ülemmäär**. Olgu mõõtmisvahendiks mõõdulint, millel on märgitud kriipsud iga 1 cm tagant. Oletame, et mõõtmist on hoolikalt kontrollitud (mõõdetud korduvalt ja erinevates kohtades, sest põrand ei pruugi olla kogu toa ulatuses

täpselt ühepikkune), mille tulemusel võib olla kindel, et viga ei saa olla suurem kui 2 cm ehk 0,02 m. Arv 0,02 m ongi siis põranda ligikaudse pikkuse 4,16 m vea ülemmäär. Ligikaudse arvu vea ülemmäär kirjutatakse arvu järele sulgudesse kahe märgiga — pluss ja miinus. Niisiis, kui põranda täpne pikkus on x meetrit, siis kirjutame, et

$$x = 4,16 (\pm 0,02) \quad (\text{loe: } 4,16 \text{ pluss-miinus } 0,02).$$

See tähendab, et põranda pikkus meetrites ei saa olla väiksem kui

$$4,16 - 0,02 = 4,14$$

ega suurem kui

$$4,16 + 0,02 = 4,18.$$

Arve 4,14 ja 4,18 nimetatakse vastavalt arvu x **alamtõkkeks** ja **ülemtõkkeks**. Arv x asetseb oma alamtõkke ja ülemtõkke vahel (äärmisel juhul võib olla ka ühega nendest võrdne). Lühidalt

$$4,14 \leq x \leq 4,18.$$

Üldiselt, kui arvu x lähend on a , mille vea ülemmäär on α , siis kirjutatakse, et

$$x = a (\pm \alpha).$$

Arvu x alamtõkke on lähendi ja vea ülemmäära vahe $a - \alpha$ ja ülemtõkke samade arvude summa $a + \alpha$. Seega

$$a - \alpha \leq x \leq a + \alpha.$$

Kui arvu x tõkked $a - \alpha$ ja $a + \alpha$ on teada, siis selle arvu lähendiks võetakse tavaliselt nende tõkete **poolsumma** ehk aritmeetiline keskmine. Samade tõkete **poolvahe** aga annab lähendi vea ülemmäära.

Näiteks, kui $32 \leq x \leq 36$, siis

$$x = \frac{36+32}{2} \left(\pm \frac{36-32}{2} \right) \text{ ehk } x = 34 (\pm 2).$$

Kui täpne arv x on teada, siis on selle arvu alam- kui ka ülemtõkkeks see arv ise, sest täpse arvu vea ülemmäär on 0.

Kui vea ülemmäära on vaja ümardada, siis ümardatakse seda ikka lii a g a. Vastasel juhul võime saada arvu x tõkked, millede

vahel tegelikult ei olegi seda arvu. Samal põhjusel tuleb alam-
tõke ümardada alati puuduga ja ülemtõke liiaga.

Vea ülemmäär ümardatakse tavaliselt nii, et tema kõige madalam järk oleks sama, mis lähendi kõige madalam järk. Kui näiteks saadakse, et $x=3,72(\pm 0,0345)$, siis tuleb selle asemel kirjutada $x=3,72(\pm 0,04)$. Kui aga lähend sisaldab madalamaid järke võrreldes vea ülemmäära madalaima järguga, siis tuleb lähendit sobivalt ümardada, liites tekkinud ümardamisvea antud vea ülemmääraga. Näiteks, kui on antud $19,6246(\pm 0,03)$, siis tuleb selle asemel kirjutada $19,62(\pm 0,0346)$ ja viimase asemel $19,62(\pm 0,04)$.

226. Leia arvu x tõkked.

- 1) $x=3,2(\pm 0,1)$ 2) $x=27(\pm 3)$ 3) $x=27,62(\pm 0,03)$
4) $x=180(\pm 4)$ 5) $x=0,273(\pm 0,011)$ 6) $x=39,03(\pm 0,05)$

227. Leia arvu x lähend ja vea ülemmäär.

- 1) $24 \leq x \leq 26$ 2) $105 \leq x \leq 109$ 3) $150 \leq x \leq 160$
4) $3,7 \leq x \leq 3,9$ 5) $0,27 \leq x \leq 0,31$ 6) $12,38 \leq x \leq 12,44$

228. Valgus levib tühjuses kiirusega $299\,792,9 (\pm 0,8)$ kilomeetrit sekundis. Leia valguse kiiruse tõkked.

229. Hinnates puu kõrgust, leiti, et see ei ole väiksem kui 12 m ega suurem kui 15 m. Kirjuta puu kõrgus tema vea ülemmäära kaudu.

230. Mõõtes põranda pikkust, leiti, et see ei ole väiksem kui 3,97 m ega suurem kui 4,01 m. Leia mõõtmise vea ülemmäär ja avalda selle kaudu põranda pikkus.

Ümardamisvea ülemmäär.

Ümardamisreeglitest tuleneb, et arvu ümardamisel tekkiva vea ülemmäär ehk ümardamisvea ülemmäär on ümardamisel kõrvaldatud kõrgeima järgu 5 ühikut.

Näiteks, kui on antud ümardatud arv 2,37, siis on ümardamisel kõrvaldatud kõrgeimaks järguks tuhandike järk. Ümardamisvea ei saa siin ületada 5 tuhandikku, s. o. $5 \cdot 0,001 = 0,005$, sest vastasel juhul ei saaks ümardatud arv olla 2,37. Ümardatud arvu 247 ümardamisvea ülemmäär on aga $5 \cdot 0,1 = 0,5$, sest ümardamisel kõrvaldatud kõrgeimaks järguks on kümnendike järk.

Ümardamisvea ülemmäär väljendatakse tavaliselt mitte ümardamisel kõrvaldatud kõrgeima järgu ühiku kaudu, vaid ümardatud

arvus säilinud madalaima (viimase) järgu ühiku kaudu. Nimelt, ümardamisvea ülemmäär on ümardatud arvu viimase järgu 0,5 ühikut.

Näiteks arvu ümardamisel tuhandikeni on ümardamisvea ülemmäär $0,5 \cdot 0,001 = 0,0005$; ümardamisel kümnendikeni — $0,5 \cdot 0,1 = 0,05$; ümardamisel kümnelisteni — $0,5 \cdot 10 = 5$ jne.

231. Leia ümardamisvea ülemmäär ja tõkked, mille vahel asetseb täpne arv. Täisarv loe ümardatuks selle järguni, kus esineb viimane nullist erinev number, lugedes vasakult paremale.

1) 20 602 12900 12000 3010 1560

2) 1,2 3,7 12,0 0,87 3,49 2,50

3) 0,027 1,01 5,100 132,1 1000,1 100,0

4) 210 21,0 21 10 10,0 10,00

5) 25 m 32 kg 16 s 30 min. 5 mm

6) 2,5 dm 0,32 m 5,0 m 10,0 mm 37 ha

7) 15 m² 15,0 m² 15,00 m² 15,0 mm² 15 dm

3.3. SUMMA JA VAHE VEA ÜLEMMÄÄR.

Selgitame kuidas avaldub ligikaudsete arvude summa ja vahe vea ülemmäär antud arvude vigade ülemmäärade kaudu.

Teoreem 1. Ligikaudsete arvude summa vea ülemmäär võrdub liidetavate vigade ülemmäärade summaga.

Tõestame selle teoreemi juhtumil, kui liidetavaid on kaks. Olgu antud kaks arvu $x = a(\pm\alpha)$ ja $y = b(\pm\beta)$. Seega tuleb siis näidata, et summa $a+b$ vea ülemmäär on $\alpha+\beta$.

Kirjutame antud arvud tõkete abil

$$a - \alpha \leq x \leq a + \alpha,$$

$$b - \beta \leq y \leq b + \beta$$

ja leiame summa $x+y$ tõkked. Siin peame silmas, et liidetavad x ja y on muutujad, mille väärtuste hulk on piiratud antud tõkete-ga. Muutuvate liidetavate summa on vähim, kui liidetavad on vähimad, ja suurim, kui liidetavad on suurimad. Seepärast võrdub summa alamtõke liidetavate alamtõkete summaga ja ülemtõke liidetavate ülemtõkete summaga. Nii saame, et

$$(a - \alpha) + (b - \beta) \leq x + y \leq (a + \alpha) + (b + \beta)$$

ehk

$$(a + b) - (\alpha + \beta) \leq x + y \leq (a + b) + (\alpha + \beta).$$

Viimastest võrratustest tulenebki, et

$$x+y=a+b[\pm(\alpha+\beta)],$$

mis ütleb, et summa $a+b$ vea ülemmäär on $\alpha+\beta$.

Näide. Kui $x=3,67(\pm 0,03)$ ja $y=11,5(\pm 0,2)$, siis

$$x+y=15,17(\pm 0,23), \text{ sest } 3,67+11,5=15,17 \text{ ja } 0,03+0,2=0,23.$$

Saab tõestada, et esitatud teoreem kehtib ka siis, kui liidetavaid on enam kui kaks.

Teoreem 2. Ligikaudsete arvude vahe vea ülemmäär võrdub vähendatava ja vähendaja vigade ülemmäärade summaga.

Tõestuseks oletame, et on antud kaks arvu $x=a(\pm\alpha)$ ja $y=b(\pm\beta)$.

Näitame, et vahe $a-b$ vea ülemmäär on $\alpha+\beta$.

Kirjutades arvud x ja y tükete abil, saame

$$a-\alpha \leq x \leq a+\alpha,$$

$$b-\beta \leq y \leq b+\beta.$$

Leiame vahe $x-y$ tüked. Kui vähendatav ja vähendaja on muutujad, siis on vahe suurim suurima vähendatava ja vähima vähendaja korral ning vahe on vähim vähima vähendatava ja suurima vähendaja korral. Seepärast on vahe alamtöke vähendatava alamtökke ja vähendaja ülemtökke vahe; vahe ülemtöke on aga vähendatava ülemtökke ja vähendaja alamtökke vahe. Nii saame, et

$$(a-\alpha) - (b+\beta) \leq x-y \leq (a+\alpha) - (b-\beta)$$

ehk

$$(a-b) - (\alpha+\beta) \leq x-y \leq (a-b) + (\alpha+\beta).$$

Siit saame, et

$$x-y=a-b[\pm(\alpha+\beta)],$$

mille tõttu vahe $a-b$ vea ülemmäär on $\alpha+\beta$.

Näide. Kui $x=39,32(\pm 0,04)$ ja $y=12,15(\pm 0,02)$, siis $x-y=27,17(\pm 0,06)$, sest $39,32-12,15=27,17$ ja $0,04+0,02=0,06$.

Toodud teoreemidest järeldub, et algebralise summa vea ülemmäär võrdub vigade ülemmäärade summaga.

232. Arvuta summa $x+y$ lähend ja selle vea ülemmäär.

1) $x=123(\pm 2)$

$y=27(\pm 3)$

3) $x=37,4(\pm 0,1)$

$y=11,25(\pm 0,01)$

5) $x=219,0(\pm 0,1)$

$y=39,25(\pm 0,04)$

2) $x=0,87(\pm 0,02)$

$y=5,61(\pm 0,05)$

4) $x=29,342(\pm 0,009)$

$y=123,47(\pm 0,06)$

6) $x=4567,002(\pm 0,001)$

$y=693,07(\pm 0,03)$

233. Arvuta vahe $x-y$ lähend ja selle vea ülemmäär.

1) $x=342(\pm 2)$

$y=215(\pm 3)$

3) $x=0,893(\pm 0,012)$

$y=0,132(\pm 0,01)$

5) $x=125,0(\pm 0,2)$

$y=45,7(\pm 0,3)$

2) $x=14,72(\pm 0,01)$

$y=13,07(\pm 0,03)$

4) $x=134,2(\pm 0,1)$

$y=4,37(\pm 0,03)$

6) $x=1893,47(\pm 0,12)$

$y=394,56(\pm 0,16)$

234. Arvuta avaldise $x+y-z$ väärtuse lähend ja selle vea ülemmäär.

1) $x=32,72(\pm 0,03)$

$y=19,3(\pm 0,6)$

$z=15,1(\pm 0,2)$

2) $x=0,87(\pm 0,03)$

$y=1,32(\pm 0,04)$

$z=3,47(\pm 0,02)$

235. Ristkülikukujulise põranda pikkus on $5,70(\pm 0,03)$ m ja laius on $3,65(\pm 0,02)$ m. Arvuta põranda übermõõt ja vea ülemmäär.

236. Nelinurkne aiamaa on ümbritsetud taraga. Jüri mõõtis tara kahe külje pikkused välisirkli abil ja sai $32(\pm 0,5)$ m ning $27(\pm 0,5)$ m. Tõnu ja Ants mõõtsid kahe teise külje pikkused mõõdulindi abil ja said $33,7(\pm 0,3)$ m ning $25,0(\pm 0,3)$ m. Arvuta nende andmete järgi tara pikkus ja vea ülemmäär.

3.4. LIGIKAUDSE ARVU RELATIIVSE VEA ÜLEMMAÄR.

Kui on antud mingi arvu kaks v o r d s e t, kuid erineva vea ülemmääraga lähendit, siis on see lähend täpsem, mille vea ülemmäär on väiksem. Nii näiteks on kahest lähendist $35(\pm 1)$ ja $35(\pm 2)$ esimene täpsem kui teine, sest $1 < 2$. Niisamuti on $2,7(\pm 0,2)$ täpsem kui $2,7(\pm 0,3)$, sest $0,2 < 0,3$.

Seni vaadeldud vea ülemmäär ei võimalda võrrelda igasuguste ligikaudsete arvude täpsust. Olgu näiteks antud kaks pikkust $10(\pm 0,5)$ m ja $100(\pm 0,5)$ m. Mõlema lähendi vea ülemmäär on üks ja sama, s. o. 0,5 m. Ometi tuleb aga öelda, et teine lähend on suhteliselt täpsem, sest esimesel mõõtmisel on iga ühiku (m) kohta tehtud viga (meetrites) $0,5 : 10 = 0,05$, teisel juhul aga $0,5 : 100 = 0,005$. Seega esimesel mõõtmisel võib iga meetri kohta eksida keskmiselt kuni 5 cm, teisel juhul aga ainult 0,5 cm. Esitatu näites kasutasime kahe lähendi võrdlemiseks vea ülemmäära ja lähendi jagatist, mida nimetatakse lähendi **relatiivse** ehk **suhtelise vea ülemmääraks**.

Lähendi relatiivse vea ülemmääraks nimetatakse lähendi vea ülemmäära ja lähendi jagatist.

Kui $x = a(\pm a)$, siis lähendi a relatiivse vea ülemmäär δ avaldub valemiga

$$\delta = \frac{a}{a}.$$

Et selgemalt eristada varem õpitud vea ülemmäära äsja defineeritud relatiivse vea ülemmäärast, nimetatakse esimest ka **absoluutse vea ülemmääraks**.

Kahest ligikaudsest arvust on see täpsem, mille relatiivse vea ülemmäär on väiksem, sest selles on iga ühiku kohta tulev viga väiksem. Täpse arvu relatiivse vea ülemmäär on 0, sest tema absoluutse vea ülemmäär on 0.

Relatiivse vea ülemmäär on nimeta arv (kui kahe samanimelise arvu või kahe nimeta arvu jagatis) ja ta avaldatakse tavaliselt protsentides. Nii nagu absoluutse vea ülemmäär, ümardatakse ka relatiivse vea ülemmäär ikka liiaga, tavaliselt mitte enam kui protsendi kümnendikeni.

N ä i d e. Olgu mingi pikkuse mõõtmisel leitud, et $x = 22(\pm 0,6)$ cm. Saadud pikkuse relatiivse vea ülemmäär

$$\delta = \frac{0,6 \text{ cm}}{22 \text{ cm}} = 0,0272 \dots \approx 2,8\%.$$

Protsentides antud relatiivse vea ülemmäära võib kirjutada ka ligikaudse arvu järele sulgudesse kahe märgiga — pluss ja miinus. Eelmise näite puhul võib seega kirjutada, et $x = 22(\pm 2,8\%)$ cm.

Relatiivse vea ülemmäära definitsioonist järeldub, et kui on teada mingi lähend a ja tema relatiivse vea ülemmäär δ , siis saab leida selle lähendi absoluutse vea ülemmäära α :

$$\alpha = \delta a.$$

N ä i d e. Kui on teada, et pliiatsi pikkus on $18,3(\pm 0,5\%)$ cm, siis absoluutse vea ülemmäära leidmiseks tuleb arvutada $0,5\%$ 18,3-st.

Et $0,5\% = 0,005$, siis saame sentimeetrites:

$$\alpha = 0,005 \cdot 18,3 = 0,0915 \approx 0,1.$$

Nüüd võime kirjutada, et pliiatsi pikkus $x = 18,3(\pm 0,1)$ cm. Igapäevases arvutustöös ettetulevate ligikaudsete arvude relatiivse vea ülemmäärad kõiguvad $0,5\%$ ja 5% vahel.

237. Arvuta relatiivse vea ülemmäär.

- | | | |
|---------------------------------|-------------------------|-----------------------|
| 1) $2,0(\pm 0,1)$ | 2) $25(\pm 2)$ | 3) $5(\pm 0,5)$ |
| 4) $0,89(\pm 0,02)$ m | 5) $125(\pm 1)$ cm | 6) $329,1(\pm 0,2)$ m |
| 7) $2,4(\pm 0,5)$ | 8) $0,8(\pm 0,1)$ | 9) $108(\pm 2)$ |
| 10) $392(\pm 2)$ m ² | 11) $0,09(\pm 0,01)$ kg | 12) $342(\pm 5)$ mm |
| 13) $25(\pm 1)$ | 14) $2,5(\pm 0,1)$ | 15) $0,25(\pm 0,01)$ |

238. Kumb kahest ligikaudsest arvust on suhteliselt täpsem?

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $125(\pm 4)$ ja $25(\pm 1)$ | 2) $0,25(\pm 0,01)$ ja $2,5(\pm 1)$ |
| 3) $4,2(\pm 0,1)$ ja $4,0(\pm 0,1)$ | 4) $253(\pm 2)$ ja $1253(\pm 5)$ |
| 5) $32(\pm 0,5)$ ja $327(\pm 2)$ | 6) $3,8(\pm 0,1)$ ja $4,67(\pm 0,02)$ |

239. Ese kaalub $0,155(\pm 0,002)$ kgf ja ta ruumala on $57(\pm 1)$ cm³. Kumb nendest andmetest on suhteliselt täpsem?

240. Leia summa $x + y$ lähend ja selle relatiivse vea ülemmäär.

- | | |
|---|---|
| 1) $x = 25(\pm 1)$
$y = 45(\pm 2)$ | 2) $x = 235(\pm 5)$
$y = 125(\pm 2)$ |
| 3) $x = 10,2(\pm 0,2)$
$y = 11,3(\pm 0,2)$ | 4) $x = 23,7(\pm 0,2)$
$y = 47(\pm 2)$ |
| 5) $x = 0,87(\pm 0,02)$
$y = 10,4(\pm 0,03)$ | 6) $x = 18,1(\pm 0,1)$
$y = 49(\pm 1)$ |

241. Leia vahe $x - y$ lähend ja selle relatiivse vea ülemmäär.

- | | |
|---|---|
| 1) $x = 46(\pm 2)$
$y = 26(\pm 1)$ | 2) $x = 89(\pm 4)$
$y = 19(\pm 1)$ |
| 3) $x = 18,9(\pm 0,2)$
$y = 11,6(\pm 0,1)$ | 4) $x = 2,832(\pm 0,011)$
$y = 0,679(\pm 0,009)$ |

242. Leia arvu absoluutse vea ülemmäär.

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| 1) $100(\pm 1\%)$ | 2) $50(\pm 2\%)$ |
| 3) $300(\pm 2\%)$ | 4) $450(\pm 2\%)$ |
| 5) $20,8(\pm 1\%)$ | 6) $42,5(\pm 1\%)$ |
| 7) $6793(\pm 0,01\%)$ | 8) $12,5(\pm 1,5\%)$ |

243. Keha raskus on 720 grammi relatiivse vea ülemmääraga 0,5%. Kui suur on absoluutse vea ülemmäär?

244. Ristküliku pikkus on $20(\pm 0,4)$ cm ja laius ligikaudu 10 cm. Kui suure absoluutse vea ülemmääraga peaks olema teada laius, et mõlema andme relatiivse vea ülemmäär oleks ühesugune?

245. Kahe linna vaheline kaugus on 125 km relatiivse vea ülemmääraga 0,8%. Leia tõkked, mille vahel on linnade vaheline tegelik kaugus.

3.5. LIGIKAUDSE ARVU KIRJUTAMISVIISE.

Eespool kirjutasime ligikaudseid arve absoluutse või relatiivse vea ülemmäärade abil. Allpool tutvume veel teistsuguste kirjutusviisidega, toetudes ligikaudse arvu õige numbriga mõistele.

Ligikaudse arvu õiged numbrid ja standardkujud.

Ligikaudse arvu numbrit nimetatakse **õigeks** ehk **täpseks numbriks**, kui arvu viga ei ületa sellele numbrile vastava järgu poolt ühikut. Vastasel juhul ei ole number õige. Selgitame näiteks, missugused numbrid on arvus $632,4(\pm 0,3)$ õiged, missugused mitte. Vaatleme esiteks kümnendike numbrit 4. Sellele numbrile vastava järgu (kümnendike) poolt ühikut on $0,5 \cdot 0,1 = 0,05$.

Et $0,3 > 0,05$, siis kümnendike number ei ole õige. Vaatleme ühelist numbrit 2, millele vastava järgu poolt ühikut on $0,5 \cdot 1 = 0,5$. Et $0,3 < 0,5$, siis on ühelist number õige. Muidugi on siis õiged ka selle arvu kõrgemate järkude numbrid — kümnendike number ja sajaliste number.

Ligikaudne arv kirjutatakse sageli nii, et tema kõik numbrid oleksid õiged. Arvu viga ei ületa niisugusel juhul selle arvu viimase (madalaima) järgu poolt ühikut. Seda vea ülemmäärat ligikaudse arvu järel kokkuleppeliselt ei märgita. Sel juhul öeldakse, et ligikaudne arv on kirjutatud **standardkujul**. Näiteks, kui ligikaudne arv on 125,37 on antud standardkujul, siis tuleb selle arvu vea ülemmääraks võtta pool sajandikku, s. o. $0,5 \cdot 0,01 = 0,005$. Samuti saame, et standardkujul antud arvu 12,0 vea ülemmäär on pool

kümnendikku, s. o. $0,5 \cdot 0,1 = 0,05$ ja arvu 3970 vea ülemmäär pool ühelist (0,5).

Nullidega lõppeva ligikaudse täisarvu kirjutamisel standardkujus muutub segavaks asjaolu, et võrdsed nullidega lõppevad ligikaudsed täisarvud võivad olla erinevate vea ülemmääradega. Nii näiteks võib ligikaudne arv 4600 tekkida mingi arvu (näit. 4600,3) ümardamisel ühelisteni. Sel juhul on vea ülemmääraks 0,5 ja arvus 4600 on kõik numbrid õiged. Sama arv 4600 võib tekkida mingi arvu (näit. 4597) ümardamisel kümmeliteni. Siis on arvu vea ülemmäär 5 ja viimane null arvus 4600 ei ole õige. Toodust ilmneb, et nullidega lõppeva ligikaudse täisarvu kirjutamisel on oluline teada, missugused nullid on õiged, missugused mitte. Selliste arvude trükkimisel kirjutatakse õigete numbrite hulka mittekuuluvad nullid väiksemas kirjas. Käsitsi kirjutamisel tõmbame aga sellistele nullidele kriipsu alla. Niisiis on näiteks arvus 29000 kolm õiget numbrit: kümnetuhandeliste number 2, tuhandeliste number 9 ja sajaliste number 0. Selle arvu vea ülemmäär on viimasele õigele numbrile vastava järgu (sajalised) pool ühikut, s. o. pool sajalist ehk 50. Arvus 830 on kõik numbrid õiged ja selle arvu vea ülemmäär on pool ühelist, s. o. 0,5.

Peame meeles, et mitmesugustes matemaatilistes tabelites (nendega tutvume edaspidi) antud arvud on ikka kirjutatud standardkujul.

Paljude arvuliste andmete esitamisel igapäevases elus (näiteks ajakirjanduses) ei tehta sageli vahet ligikaudse täisarvu lõpus õigete numbrite hulka kuuluvate ja mittekuuluvate nullide vahel. See pärast on niisuguste arvudega tegelemisel kasulik osata ise hinnata, missugused nullid on ligikaudse täisarvu lõpus õiged numbrid, missugused mitte. Nii näiteks tuleb enamikes kokkuvõtlikes andmetes (riikide ja linnade elanike arv, suurte territooriumide pindalad, ulukite arv metsas jms.) lugeda kõik lõpunullid mitteõigeteks numbriteks (nad asendavad ümardamisel kõrvaldatud numbreid). Mõnikord kirjutatakse suurte arvude esitamisel arvu nende järkude klass, milles pole õigeid numbreid, välja sõnades. Sel juhul loetakse õigeteks ainult need numbrid, mis kuuluvad arvu numbritega kirjutatud ossa. Nii on näiteks arvus 350 tuhat kolm õiget numbrit: 3, 5 ja 0.

Nullidega lõppeva ligikaudse täisarvu standardkujus kasutatakse ka arvu 10 astmeid. Arv esitatakse sel juhul kahe teguri korrutisena nii, et arvu kõik õiged numbrid (ja ainult need) võetakse esimesse tegurisse, teine tegur kirjutatakse aga arvu 10 astmena. Seda saab teha mitmel viisil. Tavaliselt eelistatakse sellist kirjutust, kus õigete numbritega kirjutatud teguri täisosa on nulli ja kümne vahel.

N ä i t e d. $35000 = 35 \cdot 10^3 = 3,5 \cdot 10^4$

$59000 = 590 \cdot 10^2 = 59,0 \cdot 10^3 = 5,90 \cdot 10^4$

$270 = 27 \cdot 10 = 2,7 \cdot 10^2$

Arvu 10 astme abil standardkujus kirjutatud arvu vea ülemmäär leidmiseks tuleb võtta esimese teguri vea ülemmäär ja korrutada see teise teguriga (arvu 10 astmega). Nii näiteks on arvu $3,9 \cdot 10^2$ vea ülemmäär $0,05 \cdot 10^2 = 5$, arvul $4,70 \cdot 10^4$ aga $0,005 \cdot 10^4 = 50$.

246. Leia standardkujul antud arvu vea ülemmäär.

1) 32	47	15,1	27,3	192,32
2) 0,372	0,012	13,00	13,0	13
3) 5	0,5	0,05	3,99	1,01
4) 130	450	30200	900	900
5) 0,47	0,470	4,7	470	4700
6) 1000	10,0	0,390	0,02	200
7) $2,3 \cdot 10^2$	$4,95 \cdot 10^3$	$5,0 \cdot 10^4$	$2,97 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^3$
8) $3,260 \cdot 10^3$	$1,2 \cdot 10^4$	$3,0 \cdot 10$	$1,20 \cdot 10^2$	$3,94 \cdot 10^3$
9) 3,2 m	0,3 km	4,72 dm	1,0 m	3,2 cm
10) 12 cm ²	3,0 m ²	0,8 ha	0,375 dm ²	1,2 m ³
11) 120 m	300 cm	420 ha	420 ha	500 cm

247. Kirjuta arvu 10 astme abil.

- 1) 3200 2) 56000 3) 47000 4) 3020000
 5) 870 miljonit 6) 300 tuhat 7) 470 miljardit.

248.* Ümarda arv nii, et temas oleks ainult õiged numbrid ja kirjuta siis see standardkujul.

- 1) $3,27(\pm 0,02)$ $0,393(\pm 0,001)$ $1,48(\pm 0,01)$ $3,02(\pm 0,01)$
 2) $4,376(\pm 0,003)$ $12,0(\pm 0,2)$ $16,00(\pm 0,01)$ $37,09(\pm 0,06)$
 3) $2761(\pm 3)$ $3299(\pm 3)$ $56723(\pm 16)$ $3400(\pm 3)$

Krölovi reegel.

Vastutusrikkama arvutustöö korraldamisel on ikka oluline täpselt teada, kui suured on kasutatavate ligikaudsete arvude vea ülemmäärad. Igapäevases praktilises arvutustöös tavaliselt nii rangeid nõudeid ei esitata. See tähendab, et ligikaudsete arvude kirjutamisel ei näidata sel juhul vea ülemmäär ja enamasti ei nõuta ka seda, et arv oleks kirjutatud ainult õigete numbritega (standardkujul). Ligikaudsete arvude kirjutamisel juhitudakse siis järgmisest reeglist:

ligikaudne arv kirjutatakse nii, et temas oleksid kõik numbrid õiged, välja arvatud viimane, mis võib õigest erineda.

Antud reeglit tuntakse Krõlovi reegli nime all.¹

Oletame näiteks, et toa põranda pikkust mõõdeti erinevatest kohtadest 3 korda ning saadi järgmised tulemused: 4,73 m, 4,72 m ja 4,75 m. Usaldusväärsema tulemuse saamiseks leiame nende mõõt-
arvude aritmeetilise keskmise.

$$\frac{4,73+4,72+4,75}{3}=4,7333 \dots$$

Tekib küsimus, missugused numbrid tuleb saadud keskmises säilitada. Võrreldes keskmist üksikute mõõtmistulemustega, näeme, et üheliste ja kümnendike numbrid (4 ja 7) on kõigis ühesugused. Need on kindlasti õiged numbrid ja lõppvastuses tuleb need säilitada. Sajandike järgu numbrites on juba erinevused. Seetõttu ei pruugi keskmise sajandike number õige olla, kuid kuigi oluline viga temas ei ole ka võimalik. Seepärast nimetame seda numbrit kahtlaseks numbriks. Kõik kahtlase numbriga kohast paremal olevad numbrid on mitteusaldatavad, mõttetus numbrid. (kui kahtleme sentimeetrite õigsuses, siis millimeetrite ja väiksemate ühikute säilitamine on mõttetu). Mõttetus numbrid kõrvaldame ümardamise teel ja anname Krõlovi reegli kohase vastuse 4,73. Selles arvus on kaks õiget numbrit, kuid viimane (sajandike number 3) on kahtlane.

Vaatame veel teist näidet. Oletame, et mingis linnas laekus rahvaloenduse tulemusel 47 329 sedelit. Kuidas ümardada seda arvu? Inimeste sündimise, suremise ja liikumise tagajärjel on selle arvu üheliste, kümnendiste ja ka sajaliste numbrid alalises muutumises, mistõttu need numbrid ei ole usaldatavad ja nende säilitamine on mõttetu. Tuhandeliste numbris arvatavasti ei saa olla olulisi muutusi (kui ei ole erilisi katastroofilisi sündmusi), kuid sellesse numbrisse tuleb siiski suhtuda teatava kahtlusega. Seepärast ümardame selle arvu Krõlovi reegli kohaselt tuhandeliteni ja ütleme, et linnas on 47 000 elanikku.

Märgime, et kui ligikaudse nullidega lõppeva täisarvu kahtlaseks numbriks on 0, siis kirjutatakse see tavalises kirjas nagu standardkuju korralgi. Kõik mitteusaldatavad nullid aga kirjutatakse väikese kirjaga (kriipsutatakse alla) või kasutatakse 10 astet. Näiteks, kui on teada, et arvus 46 721 on kolm õiget numbrit, siis kirjutatakse see arv Krõlovi reegli kohaselt kujul 46 700 või 4,670 · 10⁴.

Krõlovi reegli järgi kirjutatud arvu vea ülemmäär ei ole võimalik täpselt määrata, sest reegel ei ütle, kui palju võib kahtlane number õigest erineda. See ei tähenda muidugi seda, et arvu viimase

¹ A. N. Krõlov (1863—1945) — nõukogude laevaehitaja, matemaatik. Sotsialistliku töö kangelane.

numbri võib suvaliselt valida. Enamasti saadakse see number ümardamisel, võttes õigetele numbritele lisaks veel ühe numbrit. Krõlovi reegli järgi kirjutatud arvu vea suurust võib ainult ligikaudu hinnata — tavaliselt ei ületa see viga kahtlasele numbrile vastava järgu 1—2 ühikut. Igal juhul jääb ta väiksemaks kui nimetatud järgu 5 ühikut, sest vastasel juhul ei oleks kahtlasele numbrile eelnev number enam õige.

Edaspidi eeldame, et kui ligikaudse arvu vea suuruse kohta ei ole täpselt midagi öeldud, siis see arv on kirjutatud Krõlovi reegli kohaselt. Selle arvu viimasesse numbrisse või viimasesse tavalise kirjaga kirjutatud nulli (kui arv on nullidega lõppev täisarv) tuleb suhtuda teatud kahtlusega — selles numbris võib esineda viga 1—2 ühiku piires.

Näiteid. 1) Arvus 0,037 on kolm õiget numbrit (0, 0 ja 3), tuhandike number 7 on kahtlane. Arvu viga võib olla 0,001—0,002 piires.

2) Arvus 34 000 on kaks õiget numbrit (3 ja 4), sajaliste number 0 on kahtlane. Viga on 100—200 piires.

3) Arvus $4,20 \cdot 10^3$ on kaks õiget numbrit (4 ja 2). Esimese teguri sajandike number 0 on kahtlane. Viga võib olla $0,01 \cdot 10^3$ või $0,02 \cdot 10^3$, s. o. 10—20 piires.

249. Hinda Krõlovi reegli järgi kirjutatud arvu viga.

1) 32,3	56,78	0,435	12,0	0,709
2) 0,05	11,00	3,41	52	276
3) 4200	1600	70	3200	4000
4) $2,1 \cdot 10^2$	$3,0 \cdot 10^3$	$18,75 \cdot 10^3$	$4,02 \cdot 10^2$	$6,70 \cdot 10^4$

250. Ümarda arv Krõlovi reegli kohaselt, teades, et arvus on kolm õiget numbrit.

1) 237,49	16,872	47,003	0,34211	0,0476
2) 5672	46342	67396	580349	30007
3) 252032	346,03	109,98	0,0047	111,98

251. Ühe ja sama pikkuse korduval mõõtmisel saadi:

- 1) 132,57 m; 132,63 m; 132,60 m; 132,61 m.
- 2) 3,47 m; 3,45 m; 3,46 m; 3,45 m; 3,48 m.

Leia mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine ja ümarda see Krõlovi reegli kohaselt.

3.6. ARVU TÜVENUMBRID.

Koos õige numbrimõistega on ligikaudsete arvude õppimisel vaja tunda arvu tüvenumbri mõistet. Viimane defineeritakse eraldi kümnendmurru ja täisarvu kohta. Seejuures eeldame, et arv on kirjutatud Krõlovi reegli kohaselt või standardkujul.

Ligikaudse kümnendmurru tüvenumbriteks nimetatakse selle arvu kõiki numbreid, välja arvatud arvu alguses olevad nullid.

Ligikaudse täisarvu tüvenumbriteks nimetatakse selle arvu kõiki numbreid, välja arvatud kahtlasest numbrist paremale jäävad nullid.

Nendest definitsioonidest järeldub, et ligikaudse arvu tüvenumbrite hulka kuuluvad arvu kõik õiged numbrid (välja arvatud kümnendmurru alguses olevad nullid) ja veel üks õigetele numbritele järgnev kahtlane number. Kui arv on kirjutatud ainult õigete numbritega (standardkujul), siis kuuluvad ka tüvenumbrite hulka muidugi ainult õiged numbrid, välja arvatud kümnendmurru alguses olevad nullid.

Arvu tüvenumbreid loetakse vasakult paremale sellises järjekorras nagu nad esinevad antud arvus.

Näited.

1)	Arvu 562	tüvenumbrid on	5-6-2	(loe: viis-kuus-kaks)
2)	„ 0,037	„	„	3-7
3)	„ 0,506	„	„	5-0-6
4)	„ 2,370	„	„	2-3-7-0
5)	„ 270	„	„	2-7-0
6)	„ 102000	„	„	1-0-2-0
7)	„ 0,300	„	„	3-0-0
8)	„ $3,20 \cdot 10^4$	„	„	3-2-0
9)	„ 560 tuhat	„	„	5-6-0

Rõhutame, et kümnendmurru lõpus olevad nullid kuuluvad alati tüvenumbrite hulka, vastasel juhul neid ei kirjutata.

Täpse arvu tüvenumbriteks loetakse selle arvu kõik numbrid, välja arvatud nullid kümnendmurru alguses. Märgime, et täpse arvu tüvenumbrite arvu võib suvaliselt suurendada nullide juurdekirjutamise teel. Näiteks

$$0,273 = 0,2730 = 0,27300 = 0,273000 = \dots$$

$$507 = 507,0 = 507,00 = 507,000 = \dots$$

252. Mitu tüvenumbrit on antud ligikaudses arvus? Loe need numbrid.

1) 39	272	304	5603	0,875	0,0809
2) 3,02	1,11	4,404	22,0	5,600	0,20
3) 4000	3200	400,0	520	111 000	450
4) 3295	500,1	0,0003	920	920	9,200
5) $2,0 \cdot 10^3$	$4,27 \cdot 10^5$	$1,50 \cdot 10^2$	$8 \cdot 10^3$	$4,672 \cdot 10^4$	$1,0 \cdot 10$
6) 32 tuhat	1,27 miljonit	129,05 tuhat	670 tuhat		

253. Kirjuta viis arvu, mille tüvenumbrid on

- 1) 1-3-2; 2) 1-2-3; 3) 1-0-2-7; 4) 3-7-0.

254. Arvu z tüvenumbrid on 3-0-0-1. Kirjuta arv z , teades, et

- 1) $0,1 < z < 1$; 2) $1 < z < 10$; 3) $0,01 < z < 0,1$;
4) $100 < z < 1000$; 5) $0,001 < z < 0,01$; 6) $10 < z < 100$.

255. Ümarda arv nii, et temasse jääks kolm tüvenumbrit.

2375	52 399	27,392	0,8935	0,002756
15 670	239,7	302,5	400,1	0,02897

256. Ümarda kahe tüvenumbrini.

568	6732	42,7	111,5	0,232
39840	67,57	1,272	0,0376	142,1

257. Põhjenda, et kui standardkujul antud arvus on ainult üks tüvenumber 2, siis selle arvu relatiivse vea ülemmäär on 25%.

258. Põhjenda, et kui standardkujul kirjutatud kahe tüvenumbriga arvu esimene tüvenumber on 4, siis selle arvu relatiivse vea ülemmäär δ täidab tingimust

$$1\% < \delta \leq 1,25\%.$$

259. Põhjenda, et standardkujul kirjutatud ühe tüvenumbriga arvu relatiivse vea ülemmäär δ rahuldab tingimust

$$5\% < \delta \leq 50\%.$$

260. Põhjenda, et standardkujul kirjutatud kahe tüvenumbriga arvu relatiivse vea ülemmäär δ rahuldab tingimust

$$0,5\% < \delta \leq 5\%.$$

261. Põhjenda, et standardkujul kirjutatud kolme tüvenumbriga arvu relatiivse vea ülemmäär δ rahuldab tingimust

$$0,05\% < \delta \leq 0,5\%.$$

262.* Põhjenda näidete varal, et kõik standardkujul kirjutatud samade tüvenumbritega arvud on ühesuguse relatiivse vea ülemmääraga.

3.7. LIGIKAUDSETE ARVUDE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

Missugused numbrid tuleb vastuses säilitada.

Eespool (vt. 3.3.) õppisime, kuidas leida summa või vahe vea ülemmäära, kui lähteandmete vea ülemmäärad on antud. On aga teada, et paljude igapäevases arvutustöös ettetulevate arvude vea ülemmäärade kohta andmed puuduvad. Seepärast selgitame allpool, kuidas vea ülemmäärasid rangelt arvestamata saab siiski hinnata, missuguste numbrite säilitamisel ligikaudsete arvude summas või vahes on üldse mõte. Seejuures eeldame, et kõigis lähteandmetes on mõttetud numbrid kõrvaldatud, s. t. arvud on kirjutatud Krõlovi reegli kohaselt. Märgime aga, et sageli alluvad lähteandmed ka rangemale nõudele — nende kõik numbrid on õiged. Sellisteks on näiteks kõik matemaatilistest tabelitest võetud arvud.

Vaatleme näiteid.

Näide 1. Olgu vaja liita ligikaudsed arvud 23,7; 112,6; 9,72 ja 37,465. Kirjutame nende arvude samanimelised järgud kohakuti ja märgime iga arvu lõpus veel ühe numbrikohta väikese (allakriipsutatud) nulliga. Viimane asendab meile mitte teadaolevat numbrit vastavas täpsuses arvus. Jaotame kõigi liidetavate numbrid püstkriipsuga (hiljem võib seda teha ainult mõttes) kahte rühma nii, et vasakule poole püstkriipsu jääksid numbrid alates kõige mada-

23,7	0
112,6	0
9,7	20
+ 37,4	650
183,4	850

lamast järgust, mis on kõigis liidetavates teada (antud juhul alates kümnendikest). Liidame need arvud tavalises korras nagu täpsed arvud. Tõmmatud püstkriips jaotab ka summa numbrid kahte rühma. Püstkriipsust paremal olevate numbrite säilitamine summas on mõttetu, sest olenevalt väikeste nullide tähendusest võivad täpses

summas nende numbrite asemel olla hoopis teised numbrid. Vastuses tuleb need numbrid kõrvaldada ümardamise teel ja me saame 183,5.

Samale tulemusele võiks jõuda ka teistsuguse arutlusega. Oletades, et antud liidetavate vea ülemmäärad on vastavalt 0,05; 0,05; 0,005 ja 0,0005 (sel juhul oleksid liidetavate kõik numbrid õiged) saame summa vea ülemmääraks $0,05 + 0,05 + 0,005 + 0,0005 = 0,1055$. Viimane ütleb, et summa kümnendike numbri viga võib juba ületada ühe ühiku. Madalamate järkude numbrite säilitamisel ei ole seega mõtet, sest need ei ole usaldusväärsed.

N ä i d e 2. Leiame ligikaudsete arvude summa

$$3500 + 270 + 451.$$

Toimime eelmise näite eeskujul. Et väikeses kirjas kirjutatud

350	0	nullid asendavad täpse arvu mitte teadaolevaid
27	0,0	numbreid, siis ei ole püstkriipsust paremal olevate
+ 45	1,0	numbrite säilitamisel summas mõtet. Vastus tuleb
422	1,0	ümardada kümnelisteni: 4220.

N ä i d e 3. Leiame ligikaudsete arvude vahe

$$319,37 - 125,493.$$

319,37	0	Arutlus näitab, et ka siin on mõte säilitada ainult neid
- 125,49	30	vahe numbreid, mis on püstkriipsust vasakul. Vastu-
193,87	70	seks tuleb seega anda 193,88.

Selgitame nüüd vaadeldud näidete põhjal, missugune kõige madalam järk tuleks ligikaudsete arvude summas või vahes veel säilitada. Selleks kirjutame iga näite lähteandmed ja vastuse veel kord välja.

$$23,7 + 112,6 + 9,72 + 37,465 \approx 183,5,$$

$$3500 + 270 + 451 \approx 4220.$$

$$319,37 - 125,493 \approx 193,88.$$

Esimeses vastuses on madalaima järguna säilitatud kümnendikud; kõige madalamaks järguks, mis esineb kõigis antud liidetavates, on samuti kümnendike järk. Teise näite vastuses on säilitatud kümnelised; madalaim järk, mis on kõigis liidetavates antud, on samuti kümnelised. Kolmandas vastuses on säilinud sajandikud, s. o. madalaim järk, mis on antud nii vähendatavas kui ka vähendajas. Nendest näidetest tulenevalt sõnastame ligikaudsete arvude sum-

mas ja vahes säilitamisele kuuluvate järkude kohta järgmise eeskirja:

ligikaudsete arvude summa ja vahe madalaima järguna tuleb säilitada see madalaim järk, mis on antud igas lähteandmes (liitmise puhul igas liidetavas, lahutamise puhul nii vähendatavas kui vähendajas).

Saadud reegli järgi võime kohe öelda, et näiteks ligikaudsete arvude summas $23,72 + 408,658$ tuleb madalaima järguna säilitada sajandike järk, kuid ligikaudsete arvude vahes $3400 - 293$ — kümneliste järk.

Kui andmete hulgas on täpseid arve, siis vastuses säilitamisele kuuluvate numbrite määramisel neid arvesse ei võeta (täpsesse arvu võime mõelda kuitahes palju õigeid numbreid), vaid peetakse silmas ikka ainult ligikaudseid arve. Täpsed arvud on edaspidi trükitud jämedas kirjas (kui teisiti pole arusaadav). Nii näiteks tuleb summas

$$3,7 + 16,6748 + 0,82$$

kõige madalama järguna säilitada sajandikud, vahes

$$56,893 - 5,7$$

aga tuhandikud.

263. Tee ilma arvutamata kindlaks, missugused järgud tuleb säilitada summas või vahes.

1) $3,8 + 5,67$

2) $32 + 5,7 + 9,25$

3) $2500 + 322 + 70$

4) $0,047 + 27,9 + 42,00$

5) $6,75 - 2,8$

6) $0,295 + 0,2$

7) $1500 - 37,2$

8) $320,5 - 6,72$

9) $0,00285 + 5,234$

10) $19,32 - 11$

Kuidas tööd kergendada.

Selgitame nüüd, kuidas ligikaudsete arvude liitmisel ja lahutamisel tehtava töö mahtu võimalikult vähendada. Selleks vaatleme näiteid.

Näide 1.

$$\begin{array}{r|l} 2 & \\ \leftarrow & \\ 38,7 & | 827 \\ 9,6 & | \\ + 127,4 & | 96 \\ \hline 175,9 & | \end{array}$$

Selgituseks. Vastuse madalaima järguna tuleb säilitada kümnendikud. Seepärast ei ole kümnendikest madalamaid järke summasse üldse vaja kirjutada. Peast arvutamise teel aga leiame, mitu kümnendikku annab madalamate järkude summa.

Selle arvu liidame antud kümnendikega. Vaadeldava näite korral leiame, et 8 sajandikku ja 9 sajandikku annavad kokku 17 sajandikku. Selle arvu ümardame 20 sajandikuni ehk 2 kümnendikuks (kirjutatud noole kohale). Seega saame kümnendike summasse kokku $2+7+6+4=19$. Edasi toimub arvutamine juba tavalises korras. Vastus on 175,9. Paneme tähele, et sajandikest madalamaid järke ei ole üldse vaja arvestada, sest need ei mõjuta kümnendike arvu. Seepärast võib need juba enne liitmist ümardamise teel kõrvaldada. Sel juhul väheneb kirjutamistöö veelgi:

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 \leftarrow \\
 38,7 \mid 8 \\
 9,6 \mid \\
 + 127,5 \mid 0 \\
 \hline
 175,9 \mid
 \end{array}$$

Näide 2.

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 \leftarrow \\
 325,48 \mid 76 \\
 - 97,57 \mid \\
 \hline
 227,92 \mid
 \end{array}$$

Selgituseks. Vahe madalaima järguna tuleb säilitada sajandikud, millest madalamaid järke pole vahesse vaja kirjutada. Vähendajas on 7 tuhandikku, mille ümardame 10 tuhandikuks ehk 1 sajandikuks.

Viimase liidame peast vähendatava sajandikega (näidatud noolega), nii et vähendatava sajandike numbriks saame $8+1=9$. Edasi arvutame tavalises korras ja me saame vastuseks 227,92. Siingi näeme, et vähendatavas tuli võtta arvesse ainult üks number rohkem, võrreldes kõige madalama järguga, mis vahes tuleb säilitada. Seega võiks kümnetuhandike numbril juba enne arvutamist vähendatavast ümardamise teel kustutada. See arvutamise tulemust ei mõjuta.

Näide 3.

$$\begin{array}{r}
 75,6 \mid \\
 - 18,3 \mid 8 \\
 \hline
 67,2
 \end{array}$$

Selgituseks. Vahe madalaima järguna tuleb säilitada kümnendikud; nendest madalamaid järke ei ole vahes vaja kirjutada. Vähendajas on 8 sajandikku. Selle ümardame üheks kümnendikuks, mille liidame peast vähendaja kümnendikega. Selle tulemusel saame vähendajasse 4 kümnendikku. Vahe kümnendike number on seega $6-4=2$. Pärast vahe teiste numbrite leidmist saame vastuseks 67,2.

Toodud näidetest võime järeldada ühe arvutustööd lihtsustava reegli.

Ligikaudsete arvude liitmisel ja lahutamisel võib lähteandmeid eelnevalt ümardada nii, et viimane tüvenumber neis oleks ühe järgu võrra madalamal, võrreldes tulemusel säilitamisele kuuluva järguga.

Seda numbrit, mis lähteandmetes lisaks võetakse, võrreldes vastuses säilitava järguga, nimetatakse **varunumbriks**.

Arvutame veel näiteks järgmiste avaldiste väärtused:

1) $32000 + 6842 + 46727 + 620$

2) $0,0373 + 9,23 + 16,7 + 3,005$

3) $9,3261 - 0,07$

4) $9800 - 5677$

Ümardanud lähteandmed (kus võimalik) eelnevalt ühe varunumbriini, saame:

$\begin{array}{r l} \overset{1}{\leftarrow} & \\ \hline 1) & 320 \quad \quad 00 \\ & 68 \quad \quad 40 \\ & 467 \quad \quad 30 \\ + & 6 \quad \quad 20 \\ \hline & 862 \quad \quad 00 \end{array}$	$\begin{array}{r l} \overset{1}{\leftarrow} & \\ \hline 2) & 0,0 \quad \quad 4 \\ & 9,2 \quad \quad 3 \\ & 16,7 \quad \\ + & 3,0 \quad \quad 1 \\ \hline & 29,0 \quad \end{array}$	$\begin{array}{r l} \overset{1}{\leftarrow} & \\ \hline 3) & 9,32 \quad \quad 6 \\ & -0,07 \quad \\ \hline & 9,26 \quad \end{array}$	$\begin{array}{r l} 4) & 98 \quad \quad 00 \\ & -56 \quad \quad 80 \\ \hline & 41 \quad \quad 00 \end{array}$
--	--	--	---

264. Arvuta ligikaudsete arvudega.

1) $3,47 + 2,562$

2) $12,02 + 19,1$

3) $0,272 - 0,039$

4) $272 + 37,90$

5) $1568 - 470$

6) $2932,0 - 979$

7) $0,0379 + 2,78$

8) $3700 + 27300$

9) $2932,87 - 756$

10) $19,347 - 17,78$

265. Arvuta, ümardades lähteandmeid eelnevalt ühe varunumbriini.

1) $3,2 + 0,372 + 1,48$

2) $11,34 + 8,7562 + 8,01$

3) $38000 + 6382$

4) $15676 - 4800$

5) $32,7 - 4,037$

6) $670 + 14,932$

7) $0,9567 - 0,02$

8) $16,782 + 0,01 + 7,8 + 0,002$

266. Tee ülesandes 263 näidatud tehted.

267. Arvuta (jämedas kirjas on antud täpne arv).

1) $49 + 2,75 + 0,397$

2) $38,72 - 11,3$

3) $19,75 - 0,289$

4) $25,7 + 11,2 + 8,95$

5) $13,50 - 2,7$

6) $30 + 25 + 42,7$

268. Ristkülikukujulise põllutüki pikkus on umbes 200 m ja laius 170 m. Arvuta põllutüki ümbermõõt.

269. Arvuta, teisendades harilikud murrud eelnevalt kümnendmurdudeks kolme õige numbriga pärast koma.

1) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{5}{12}$

2) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + 3\frac{5}{7}$

3) $3\frac{5}{6} + 2\frac{2}{3}$

4) $13\frac{4}{7} - 3\frac{1}{14}$

Kontrolliks soorita tehted harilike murdudega ja teisenda siis tulemus kümnendmurruks.

270. Rein, Jüri ja Jaan mõõtsid nelinurgakujulise õueaia ümbermõõtu. Rein ja Jüri mõõtsid kahte külge mõõdulindiga ja said nende pikkusteks 30 m ja 37,6 m. Jaan mõõtis samal ajal ülejäänud kahte külge mõõtesirkliga ning sai nende pikkusteks 29 m ja 37 m. Oma mõõtmistulemuste põhjal kirjutas Rein vihikusse, et aia pikkus on 130 m, Jüri kirjutas 134 m ja Jaan oma mõõtmistulemuste põhjal 133,6 m. Kes kirjutas tulemuse kõige otstarbekamalt?

271. Kolhoosi metsalangil kasvas 7200 puud. Aasta jooksul saeti maha 880 puud. Mitu puud jäi metsalangile kasvama?

272. Lahenda ligikaudseid arve sisaldav võrrand.

1) $x - 3,7 = 19,392$

2) $34,5 + x = 0,87$

3) $250 - x = 42,8$

4) $169,72 - u = 32,4$

5) $t + 19,372 = 379,6$

6) $v - 1392 = 497,6$

273. Mõõtmise teel leiti, et korteri põranda pindala on 67,6 m², millest ahjude all on 3,82 m². Kui palju on vaba põranda-pinda?

274. Kauba brutokaal on 78,9 kgf, netokaal 76,39 kgf. Kui palju kaalub pakend?

275. Arvuta näite eeskujul.

1) $4,26 \cdot 10^3 + 1,03 \cdot 10^4$

2) $4,30 \cdot 10^2 + 1,00 \cdot 10^3$

3) $1,62 \cdot 10^4 - 1,03 \cdot 10^3$

4) $4,758 \cdot 10^3 - 2,72 \cdot 10^3$

5) $4,5 \cdot 10^5 + 6,73 \cdot 10^4$

6) $1,0 \cdot 10^5 - 3,25 \cdot 10^2$

Näide. $5,67 \cdot 10^4 + 4,200 \cdot 10^3 = 5670 + 4200 = 9870 = 9,87 \cdot 10^3$

267.* Arvuta summa

$$x = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6}$$

ligikaudne väärtus, asendades liidetavad nende kümnendlähenditega, milles on 3 õiget numbrit pärast koma. Arvutuse kontrolliks leia täpne summa ja siis selle kümnendlähend 3 õige numbriga pärast koma.

Uuri, kuidas oleks täpset summat kõige otstarbekam arvutada.

Näpunäide. Esita iga liidetav kahe sobivalt valitud arvu vahena.

3.8. LIGIKAUDSETE ARVUDE KORRUTAMINE JA JAGAMINE.

Missugused numbrid tuleb vastuses säilitada.

Selgitame, missuguseid numbreid on mõte säilitada kahe ligikaudse arvu korrutises või jagatises. Olgu näiteks vaja leida korrutis $452,4 \cdot 0,57$. Nii nagu liitmisel ja lahutamisel märgime ka siin kummagi teguri viimase numbril järel ühe koha väikese (allakriipsutatud) nulliga, mis asendab täpse arvu mitteteadaolevat numbrit. Korrutame need arvud tavalise korrutamise skeemi kohaselt, arvestades aga, et väikese nulli korrutamisel mistahes arvuga saame ikka väikese nulli (tundmata numbril). Nii selgub, et esimeses osakorrutises ei ole ühtegi teadaolevat numbrit. Numbrite arv selles osakorrutises võib olla aga ülimalt 6 (olenevalt

452,40 · 0,570	
	000000
3	16680
22	6200
25	7,86800
260	

väikese nulli tähendusest teise teguri lõpus). Antud arvude korrutiseks saame esialgu 257,868. Osutub aga, et püstkriipsust paremale jäävad korrutise numbrid pole usaldatavad. Seepärast pole ka nende säilitamisel mõtet. Kõrvaldame need numbrid ümardamise teel ja anname vastuseks kahe tüvenumbri arvu 260. Viimase kirjutame eelmise tulemuse alla.

Samasuguse arutlusega on arvatatud ka alljärgnevad korrutised.

$$\begin{array}{r|l}
 13,640 \cdot 0,6730 & \\
 \hline
 & 00000 \\
 3 & 0920 \\
 95 & 480 \\
 818 & 40 \\
 \hline
 9,16 & 97200 \\
 \hline
 9,17 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 0,060 \cdot 12,3 & \\
 \hline
 & 0000 \\
 7 & 380 \\
 \hline
 0,7 & 3800 \\
 \hline
 0,7 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 765,0 \cdot 42,0 & \\
 \hline
 & 00000 \\
 1 & 5300 \\
 30 & 600 \\
 \hline
 32 & 13000 \\
 \hline
 32000 &
 \end{array}$$

Vaatleme kahe näite varal ka ligikaudsete arvude jagamist. Leiame näiteks jagatise $47 : 137$. Kirjutame kummagi arvu lõppu veel väikese (allakriipsutatud) nulli, mis tähistab mitteteadaolevat kümnendike numbrit. Jagatise leiame tavalise jagamise skeemi kohaselt. Peame aga silmas, et vahepealsetele jääkidele juurdekirjutatavad nullid tuleb kirjutada ka väikese kirjaga (alla kriipsutada), sest jagatava ühelistest madalamate järkude numbrid pole teada. Jagamise skeemist nähtub, et püstkriipsust paremale

$$470 : 1370 \approx 0,34$$

$$\begin{array}{r|l}
 47 & 00 \\
 41 & 10 \\
 \hline
 5 & 900 \\
 5 & 480 \\
 \hline
 & 420
 \end{array}$$

jäävad numbrid ei ole usaldatavad. See tõttu ei ole ka viimase jäägi 420 numbrid usaldatavad ja edasine jagamine osutub mõttetuks. Vastus tuleb anda kahe tüve numbriga. Nüüd tuleb aga veel selgitada, kas vastuse viimane number 4 jääb muutmata või tuleb teda suurendada 1 võrra. Nagu teada, tuleb selleks võrrelda viimast jääki poole jagajaga. Kuigi viimase jäägi 420 numbrid on kahtlased, on siiski vähe

usutav, et ta võiks suuremaks saada kui pool jagajat, s. o. $0,5 \cdot 1370 = 685$. Seepärast jääb vastuseks 0,34.

Samasuguse arutlusega on leitud ka jagatis $65,42 : 26,7$.

$$6542,0 : 2670 = 2,45$$

$$\begin{array}{r|l}
 534 & 0 \\
 \hline
 120 & 20 \\
 106 & 80 \\
 \hline
 13 & 400 \\
 13 & 350 \\
 \hline
 & 50
 \end{array}$$

Teeme kokkuvõtte. Me saime, et

$$452,4 \cdot 0,57 \approx 260,$$

$$13,64 \cdot 0,673 \approx 9,17,$$

$$0,06 \cdot 12,3 \approx 0,7,$$

$$765 \cdot 42 \approx 32000,$$

$$47 : 137 \approx 0,34,$$

$$65,42 : 26,7 \approx 2,45.$$

Paneme tähele, et üheski vastuses ei ole rohkem tüvenumbreid, kui on vähima tüvenumbrite arvuga lähteandmes. Tõepoolest, esimese tehte vastuses 260 on kaks tüvenumbrit, vähima tüvenumbrite arvuga teguris 0,57 on samuti kaks tüvenumbrit. Teise tehte vastuses 9,17 on kolm tüvenumbrit, vähima tüvenumbrite arvuga teguris 0,673 on samuti kolm tüvenumbrit. Samasugune seaduspärasus valitseb ka teistes näidetes.

On võimalik tõestada, et suurel enamusel juhtudel ei ole ligikaudsete arvude korrutises ja jagatises mõtet säilitada rohkem tüvenumbreid, kui neid on vähima tüvenumbrite arvuga lähteandmes. Seepärast sõnastame järgmise reegli:

ligikaudsete arvude korrutises ja jagatises tuleb säilitada nii mitu tüvenumbrit, kui mitu neid on vähima tüvenumbrite arvuga lähteandmes.

Kui lähteandmetes on ühepalju tüvenumbreid, siis tuleb muidugi ka vastuses säilitada neid samapalju.

Saadud reegli kohaselt võime kohe öelda, et näiteks ligikaudsete arvude korrutises $3,7 \cdot 19,56$ tuleb säilitada kaks tüvenumbrit, kuid ligikaudsete arvude jagatises $327 : 0,307$ tuleb säilitada kolm tüvenumbrit.

Märkus. Üksikutel juhtudel võib osutada mõttekaks säilitada vastuses üks number rohkem, kui nõuab antud reegel. Samuti võib olla juhtumeid, kus vastuses tuleks säilitada üks number vähem, kui nõuab reegel. Selliseid olukordi aga esineb harva ja igapäevases arvutustöös ei ole vaja neid arvestada.

Kui andmete seas on täpseid arve, siis vastuses säilitatavate tüvenumbrite määramisel neid arvesse ei võeta (täpsesse arvu võib mõelda kuitahes palju tüvenumbreid). Nii näiteks tuleb korrutises $38,9 \cdot 0,27$ säilitada kaks tüvenumbrit, jagatises $12,35 : 32$ aga neli tüvenumbrit.

277. Tee ilma arvutamata kindlaks, mitu tüvenumbrit tuleb säilitada ligikaudsete arvude korrutises või jagatises.

1) $3,8 \cdot 5,27$

2) $0,23 \cdot 52,49$

3) $12,1 \cdot 0,37$

4) $42,7 : 15$

5) $327 : 3,2543$

6) $3,19 : 0,2756$

7) $0,067 : 4,37$

8) $19 \cdot 0,673$

9) $329 : 12$

Kuidas tööd kergendada.

Näide 1. Olgu vaja leida ligikaudsete arvude korrutis $32,4 \cdot 0,238$. Selgitame, kuidas seda teha, et kirjutamistööd võimalikult vähe oleks. Arvutame esiteks nagu täpsete arvudega. Et lõppvastuses

$$\begin{array}{r} 32,4 \cdot 0,238 \\ \hline 2592 \\ 972 \\ 648 \\ \hline 7,7112 \approx 7,71 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32,4 \cdot 0,238 \\ \hline 25 \quad | \quad 92 \\ 97 \quad | \quad 2 \\ 648 \quad | \\ \hline 7,71 \end{array}$$

tuleb säilitada ainult kolm tüvenumbrit, siis on esialgse korrutise 7,7112 kaks viimast numbrit kirjutatud tarbetult. Kuidas nende kirjutamist vältida, see selgub korrumatimes teises skeemis. Esiteks leiame osakorrutised nagu täpsete arvude korrumtamiselgi. Peast hindame, et korrutise esimene tüvenumber tuleb viimase osakorrutise esimese numbriga (6) alla. Et korrutises tuleb säilitada ainult kolm tüvenumbrit, siis loeme viimase osakorrutise esimesest numbrist alates kolm numbriga kohta paremale ja tõmbame püstkriipsu. Sellest kriipsust paremal olevate osakorrutiste numbreid ei ole vaja korrutisse kanda. Peast arvutades leiame, et püstkriipsust vahetult paremal olevate numbrite summa $9+2=11$ annab ühe kõrgema järgu ühiku. Viimane tuleb üle kanda vastuse viimasele tüvenumbrile vastavasse järku. Saame $5+7+$

$+8+1=21$. Seega on vastuse viimane tüvenumber 1. Edasi arvutame tavalises korras ja me saame vastuse tüvenumbriteks $7-7-1$. Koma asukoha määramiseks loeme esimese osakorrutise viimasest numbrist 4 kohta vasakule. Saame 7,71. Koma asukohta võib määrata ka vastuse ligikaudse hindamise teel, ümardades lähteandmed jämedalt ühe tüvenumbrini. Nii saame peast arvutades, et $30 \cdot 0,2=6$. Tulemus ütleb, et vastuse täisosad on kindlasti 1 ja 10 vahel. Nii saame samuti 7,71.

Võrreldes neid korrumtamise skeeme, näeme, et korrumtamise teise skeemi korral on välditud viie numbriga ja võrdusmärgi tarbetut kirjutamist. Seetõttu tuleb teist skeemi esimesele eelistada.

Näide 2.

$$0,548 \cdot 0,1873$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad | \quad 4984 \\ 7 \quad | \quad 492 \\ 93 \quad | \quad 65 \\ \hline 0,102 \end{array}$$

Selgituseks. Vastus tuleb anda kolme tüvenumbri- riga. Peast hindamine näitab, et vastuse esimene tüvenumber tuleb viimase osakorrutise esimesest numbriga (9) ühe koha võrra vasakule (madalamatest järkudest tuleb 9 juurde üks ühik üle kanda). Seepärast eraldame püstkriipsuga viimases osakorrutises kaks numbriga kohta. Paremal poolt püstkriipsu tuleb 1 ühik üle kanda vasakule ($4+4+6=14 \approx 10$). Vastuse tüvenumb-

rid on 1-0-2. Koma asukohta määramiseks loeme esimese osakorrutise viimasest numbrist 7 kohta vasakule. Vastus on 0,102.

Näide 3.

390 · 3,281

2	95290
9	843

1300

Selgituseks. Vastus tuleb anda kahe tüvenumbri- riga, millest esimene tuleb viimase osakorrutise esi- mesest numbrist (9) ühe koha võrra vasakule. Üle- kanne madalamatest järkudest korrutise viimasesse tüvenumbrisse on 2 ühikut ($9+8=17 \approx 20$). Vastuse tüvenumbrid on 1-3. Koma koha leidmiseks tuleb lugeda esimese osakorrutise parempoolsest numbrist 0 kolm kohta vasakule. Vas- tus peab seega olema 4-kohaline täisarv. Puuduvate numbrite kohale kirjutame väikesed (allakriipsutatud) nullid. Vastus on 1300.

Ligikaudsete arvude jagamisel leiame jagatises parajasti nii palju tüvenumbreid, kui palju on neid reegli järgi vaja säilitada; siis lõpetame arvutamise. Kas viimane leitud tüvenumber jääb lõpp- vastuses muutmata või tuleb teda 1 võrra suurendada, seda otsus- tame viimase jäägi järgi.

Näide 4.

3,285 : 6,92 \approx 0,475

328,5 : 692 = 0,474...

2768

5170

4844

3260

2768

492

Näide 5.

675 : 0,47 \approx 1400

67500 : 47 = 14...

47

205

188

17

Selgituseks. Et vastuses tuleb säilitada kaks tüvenumbrit, siis lõpetame jagamise pärast jagatise kahe tüvenumbri 1-4 leidmist. Viimane jääk 17 on väiksem kui pool jagajat. Seetõttu on leitud numbrid ka vastuse tüve- numbriteks. Nendele tuleb veel järele kirju- tada kaks väikest (allakriipsutatud) nulli, sest jagatava kümnelised ja ühelised jäid jagamisel arvesse võt- mata. Vastus on 1400.

Arvutustöö lihtsustamiseks ligikaudsete arvude korrutamisel ja jagamisel võib juhinduda veel järgmisest reeglist:

suurema tüvenumbrite arvuga lähteandmed võib enne arvutamist ümardada nii, et neisse jääks üks tüvenumber rohkem (varunumber) kui on vastuses vaja säilitada.

Näiteks ligikaudsete arvude 2,4 ja 1,753 korrutamisel võime teise teguri eelnevalt ümardada ühe varunumbrini (1,75) ja alles siis arvutada. Tulemus sellest ei muutu. Tõepoolest

$1,753 \cdot 2,4$	$1,75 \cdot 2,4$								
<table style="border-collapse: collapse; margin: 0 auto;"> <tr> <td style="text-align: center; padding: 0 5px;">7</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">012</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 0 5px;">35</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">06</td> </tr> </table>	7	012	35	06	<table style="border-collapse: collapse; margin: 0 auto;"> <tr> <td style="text-align: center; padding: 0 5px;">7</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">00</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 0 5px;">35</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">0</td> </tr> </table>	7	00	35	0
7	012								
35	06								
7	00								
35	0								
4,2	4,2								

278. Sulgudes on antud korrutise kolm tüvenumbrist. Määra ligikaudse hinnangu teel koma asukoht.

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| 1) $3,7 \cdot 5,6 = (207)$ | 2) $3,95 \cdot 16,8 = (664)$ |
| 3) $321 \cdot 1,47 = (472)$ | 4) $45,7 \cdot 0,891 = (407)$ |
| 5) $4,9 \cdot 3,8 = (186)$ | 6) $12,9 \cdot 11,2 = (144)$ |
| 7) $3,56 \cdot 0,37 = (132)$ | 8) $0,167 \cdot 0,935 = (156)$ |
| 9) $0,372 \cdot 0,92 = (342)$ | 10) $0,875 \cdot 0,48 = (420)$ |

279. Sulgudes on antud jagatise kolm tüvenumbrist. Määra ligikaudse hinnangu teel koma asukoht.

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $4,37 : 2,1 = (208)$ | 2) $9,31 : 3,95 = (236)$ |
| 3) $367 : 12,7 = (289)$ | 4) $67,5 : 19,8 = (341)$ |
| 5) $3,75 : 8,05 = (466)$ | 6) $2,45 : 7,53 = (325)$ |
| 7) $2,56 : 45,5 = (563)$ | 8) $5,62 : 0,51 = (110)$ |
| 9) $0,375 : 0,32 = (117)$ | 10) $0,875 : 2,31 = (379)$ |

280. Arvuta ligikaudsete arvudega.

- | | | |
|---------------------|----------------------|---------------------|
| 1) $5,6 \cdot 2,7$ | 2) $3,2 \cdot 4,56$ | 3) $0,89 \cdot 427$ |
| 4) $24 \cdot 32,1$ | 5) $19,7 \cdot 5,6$ | 6) $0,495 : 0,37$ |
| 7) $0,0325 : 12,89$ | 8) $2700 \cdot 0,98$ | 9) $159,5 : 2,47$ |
| 10) $29 \cdot 152$ | 11) $3279 : 142$ | 12) $0,056 : 0,475$ |

281. Ümarda eelnevalt suurema tüvenumbrite arvuga andmed ja arvuta.

- | | | |
|------------------------|----------------------|-------------------------|
| 1) $0,32 \cdot 49,68$ | 2) $11 \cdot 0,4567$ | 3) $0,87 \cdot 112,72$ |
| 4) $0,025 \cdot 12,79$ | 5) $0,91 \cdot 15,6$ | 6) $0,037 \cdot 0,9832$ |
| 7) $12,3 : 3,4746$ | 8) $4,3 : 0,8731$ | 9) $11,2 : 24,56$ |
| 10) $0,87 : 5,629$ | 11) $12,673 : 2,42$ | 12) $0,02795 : 1,25$ |

282. Arvuta peast.

- | | | |
|--------------|--------------|-----------------|
| 1) 0,30·6,00 | 2) 2,5·4,002 | 3) 0,50·400,42 |
| 4) 80·5,0 | 5) 5,01·7,0 | 6) 876·0,10 |
| 7) 20,02:10 | 8) 42:21 | 9) 63:0,100 |
| 10) 84:2,0 | 11) 126:63,0 | 12) 0,1003:0,10 |

283. Arvuta.

- | | | |
|--------------|---------------|---------------|
| 1) 3·12,7 | 2) 15:2,70 | 3) 6,72·11,35 |
| 4) 1,1:0,123 | 5) 0,037·9,12 | 6) 3756:471,0 |

284. Teosta ülesandes 277 näidatud tehted.

285. Võrdkulgse kolmnurga külje pikkuseks saadi mõotmisel 6,9 cm. Arvuta kolmnurga ümbermoot.

286. Arvuta ruudu ümbermoot, kui ruudu külje pikkus on ligikaudu 5,62 m.

287. Arvuta toa pöranda pindala, kui pöranda laiuseks saadi mõotmisel 4,87 m ja pikkuseks 3,78 m.

288. Ühe ruutmeetri pöranda värvimiseks kulub ligikaudu 0,18 kgf värvi. Palju värvi on vaja, kui värvitava pöranda pindala on 19,5 m²?

289. Abruka saare pindala on 10,6 km² ja Vilsandi saare pindala 8,9 km². Mitu korda on Abruka saare pindala suurem Vilsandi saare pindalast?

290. Pöllult, mille pindala on 85,7 ha, saadi 1432 tonni kartuleid. Mitu tonni kartuleid saadi keskmiselt igalt hektarilt?

291. Klassi ruumala on 242 m³. Klassis õpib 27 õpilast. Mitu kuupmeetrit õhku tuleb iga õpilase kohta?

292. 17 ühesugust kuullaagri kuuli kaaluvad 19,8 grammi. Kui palju kaalub üks kuul?

293. Kui palju nisu saadakse 15 ha suuruselt põllult, kui keskmine hektarisaak on 24,6 tsentnerit?

294. Kui palju kaalub 12,36 m pikkune tala, kui tala jooksva meetri (s. o. 1 m pikkuse talatüki) kaal on 47,6 kgf?

295. Joonesta vihikusse ristkülik, mōoda vajalikud pikkused ja arvuta pindala.

296. Joonesta vihikusse kolmnurk, mōoda vajalikud pikkused ja arvuta pindala.

297. Joonesta vihikusse trapets, mōoda vajalikud pikkused ja arvuta pindala.

298. Lahenda ligikaudseid arve sisaldav võrrand.

1) $3,2x = 4,97$

2) $0,372t = 12,4$

3) $47,8u = 98$

4) $0,525v = 12,37$

5) $\frac{x}{3,42} = 22,37$

6) $\frac{t}{0,26} = 897$

3.9. VARUNUMBRI KASUTAMINE MITME TEHTEGA ÜLESANDES.

Kui otsitava arvu leidmiseks on vaja teha mitu tehet, siis on ühe tehte tulemus lähteandmeks teisele tehtele; teise tehte tulemus võib olla omakorda lähteandmeks kolmandale tehtele jne., kuni jõuame viimase tehteni, mis annab otsitava arvu. Seega tuleb lõppvastuse saamiseks teha mitu vahepealset tehet. Tekib küsimus, missugused numbrid tuleks säilitada vahepealsete tehte tulemustes. Kui nende numbrite säilitamisel juhinduda vastavate tehte reeglitest, siis lisanduksid andmete ligikaudsusest tingitud vigadele veel vahepealsete tehte tulemuste ümardamisel tekkinud vead. Viimased võivad aga lõpptulemust oluliselt mõjutada. Et seda vältida, võetakse vahepealsete tehte tegemisel aluseks järgmine reegel:

vahepealsete tehte tulemuses tuleb säilitada üks number rohkem (varunumber) kui reegli kohaselt on vaja säilitada vastava tehte tulemuses.

Kirjalikul arvutamisel on varunumbrid kasulik ära märkida allakriipsutamise teel. Varunumbrid säilitatakse kuni lõpptulemuse saamiseni. Viimasest tuleb varunumbrid ja neist madalamad järjed (kui neid leidub) kustutada ümardamise teel.

Näide 1. Arvutame ligikaudsete andmetega avaldise

$$x = 9,448 : 8,4 + 2,52 \cdot 17 - 1,48$$

väärtuse.

Kõigepealt paneme tähele, et arvu 9,448 võib eelnevalt ümardada kolme tüvenumbriga arvuks 9,45. Edasisel arvutamisel saame:

1. tehe	2. tehe	3. tehe	4. tehe
$9,45 : 8,4 \approx 1,13$	$2,52 \cdot 17$	1,1	43,9
$94,5 : 84 = 1,12 \dots$	$\begin{array}{r} 176 \overline{) 4} \\ 252 \end{array}$	$+ 42,8$	$- 1,5$
$\begin{array}{r} 84 \\ \hline 105 \\ 84 \\ \hline 210 \\ 168 \\ \hline 42 \end{array}$	$\begin{array}{r} 42,8 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 43,9 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 42,4 \approx 42. \\ \hline \end{array}$

Selgituseks. Ligikaudsete arvude jagamise reegli kohaselt tuleks 1. tehte vastuses anda kaks tüvenumbrit, kolmas (sajandike number 3) on varunumber. Teise tehte vastus tuleks korrutamise reegli kohaselt anda samuti kahe tüvenumbriga, kolmas (kümnendike number 8) on varunumber. Enne 3. tehte sooritamist ümardame 1. tehte tulemuse kümnendikeni (varunumbrini). Liitmise reegli kohaselt tuleks 3. tehte tulemuses säilitada madalaima järguna ühelised, kümnendike number 9 on varunumber. Neljanda tehte tulemus on lõppvastus, mis varunumbri kustutamisel on ümardatud ühelisteni. Seega $x \approx 42$.

Näide 2. Mõõtmisel saadi risttahuka kohta järgmised andmed: pikkus 12,7 cm, laius 5,6 cm, kõrgus 7,0 cm. Arvutame nende andmete põhjal risttahuka täispindala ja ruumala.

- 1) Risttahuka põhja pindala ruutsentimeetrites:

$$\begin{array}{r} 12,7 \cdot 5,6 \\ \hline 76 \quad | \quad 2 \\ 635 \quad | \\ \hline 71,1 \end{array}$$

- 2) Risttahuka kahe põhja pindala ruutsentimeetrites:

$$2 \cdot 71,1 = 142,2 \approx 142.$$

- 3) Risttahuka põhja übermõõt sentimeetrites:

$$2 \cdot (5,6 + 12,7) = 2 \cdot 18,3 = 36,6.$$

- 4) Risttahuka külgpindala ruutsentimeetrites:

$$7,0 \cdot 36,6 = 256,2 \approx 256.$$

- 5) Risttahuka täispindala ruutsentimeetrites:

$$\underline{256} + \underline{142} = \underline{298} \approx 400 = 4,0 \cdot 10^2$$

- 6) Risttahuka ruumala kuupsentimeetrites:

$$7,0 \cdot \underline{71,1} = \underline{497,7} \approx 500 = 5,0 \cdot 10^2.$$

Vastus. Risttahuka täispindala on $4,0 \cdot 10^2 \text{ cm}^2$ ja ruumala on $5,0 \cdot 10^2 \text{ cm}^3$.

Märkus. Edaspidisel ülesannete lahendamisel loeme ligikaudseteks ainult need arvud, mille kohta on seda otseselt öeldud või mis ülesande sisu kohaselt ei saa olla täpsed (näiteks, kui on öeldud, et arvud on saadud mõõtmise teel). Kõik muud arvud loeme täpseteks arvudeks.

299. Arvuta ligikaudsete arvudega.

1) $3,42 - 1,7 + 38,92 - 19,7$

2) $19,037 + 39,29 - 12,195 - 1,0382$

3) $3156 + 39,2 - (2940 + 87)$

4) $2,35 \cdot 0,87 \cdot 19,6$

5) $0,0278 \cdot 341,5 \cdot 6,77$

6) $\frac{5,27 \cdot 1,21}{0,87}$

7) $\frac{0,895 \cdot 240 \cdot 5,00}{2,07 \cdot 0,89}$

8) $2,95 \cdot (3,82 + 13,9) - 4,72$

9) $3,7 \cdot (16,8 + 4,79) + 15,9 : (3,7 - 1,23)$

10) $4,5 : (19,5 - 17,56) + 0,251 \cdot (25,72 - 24,31)$

300. On vaja värvida kolme toa põrandad mõõtmetega ligikaudu 3,2 m ja 4,7 m, 5,6 m ja 4,3 m ning 2,9 m ja 3,2 m. Kui palju värvi kulub nende põrandate värvimiseks, kui 1 m² katmiseks arvestatakse umbes 0,17 kgf värvi.

301. Trapetsi alused on ligikaudu 43,7 m ja 38,9 m. Arvuta trapetsi kesklõik.

302. Mõõtmisel saadi, et risttahuka pikkus on 13,9 cm, laius 7,2 cm ja kõrgus 4,3 cm. Arvuta risttahuka ruumala.

303. Püstprisma põhjaks on täisnurkne kolmnurk. Mõõtmisel selgus, et selle kolmnurga kaatedid on 8,7 cm ja 12,0 cm ning prisma kõrgus 17,2 cm. Arvuta prisma ruumala.

304. Korterit üldpindala on ligikaudu 72,3 m². Vannitoa pindala on 5,26 m², köögi pindala 9,67 m² ja koridori pindala 7,3 m². Kui suur on ülejäänud ruumide pindala?

305. Üks kott kartuleid kaalub ligikaudu 56,7 kgf, teine kott aga 3,43 kgf vähem. Kui palju kaalub kaks kotti kartuleid kokku?

306. Anum koos veega kaalub 57,8 kgf. Kui sellest nõust kallata ära $\frac{3}{4}$ kogu veest, siis kaalub nõu koos järelejäänud veega 17,6 kgf. Kui palju kaalub tühi nõu?

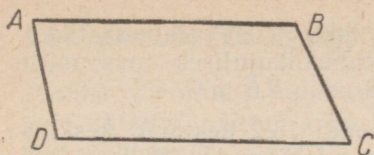
307. Arvuta avaldise $a + b + c$ väärtus, kui on teada, et

$$a \approx 129,37,$$

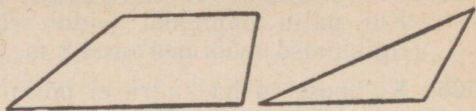
$$b - a \approx 18,2,$$

$$c \approx b - 67,032.$$

308. Arvuta avaldise $m(x+y-z)$ väärtus, kui
 $m \approx 0,892$,
 $z \approx 25600$,
 $y \approx z + 670$,
 $x - y \approx 567$.
309. Arvuta ligikaudsete arvudega.
- 1) $35,7 + 19,629 - 11,4731 + 28 - 11,32$
 - 2) $19,6 - 0,027 - 13,1 - (7,56 + 0,093)$
 - 3) $(56,37 - 72,991 + 12,0 - 45,02) \cdot 0,87$
 - 4) $(0,879 + 0,0232 - 0,407 - 0,035) : 3,75$
310. Terade niiskuse määramiseks võeti 50,0 grammi teri ja kuivatati need. Pärast kuivatamist kaalusid terad 41,5 grammi. Mitu protsenti niiskust aurust?
311. Kontrollimisel tehti kindlaks, et terad sisaldavad 16% niiskust. 1,8 tsentneri terade esmakordsel kuivatamisel vähenes terade kaal ligikaudu 18 kgf võrra. Mitu protsenti niiskust jäi veel teradesse pärast esmakordset kuivatamist?
312. Ühes nisupeas olevad terad kaaluvad ligikaudu 5 grammi. Milline on kahju, kui 35 ha nisu koristamisel variseb iga ruutmeetri kohta keskmiselt 1 nisupea?
313. Heinakuhja ruumala ligikaudseks määramiseks mõõdetakse kuhja põhja ümbermõõt c_1 ja kuhja kõige jämedama koha ümbermõõt c_2 ning leitakse nende aritmeetiline keskmine c . Siis visatakse nõör üle kuhja ja mõõdetakse nõõri pikkus p (üleviske pikkus). Kuhja ligikaudne ruumala V arvutatakse valemist
- $$V \approx \left(\frac{p}{25} - \frac{c}{83} \right) \cdot c^2.$$
- Arvuta kuhja ruumala ja kaal, kui $p \approx 12,5$ m, $c_1 \approx 13$ m, $c_2 \approx 15$ m ja kui 1 m³ heinu kaalub ligikaudu 55 kgf.
314. Puust tala mõõtmisel leiti, et selle pikkus on 5,9 m ja ristlõikeks on ristkülik mõõtmetega 150 mm ja 240 mm. Kui palju kaalub see tala, kui 1 dm³ puitu kaalub ligikaudu 0,52 kgf?
315. Kraavi ristlõige on võrdhaarse trapetsi kujuline. Kraavi laius põhjast on ligikaudu 0,8 m, veepinnalt mõõdetuna aga 1,4 m. Mitu kuupmeetrit vett on kraavis, kui kraavi pikkus on ligikaudu 145 m ja vee sügavus 0,75 m?



JOON. 20



JOON. 21

316. Mitu kuupmeetrit pinnast peab ekskavaator 2,2 m sügavuse ja 240 m pikkuse magistraalkraavi kaevamisel välja tõstma, kui kraavi laius põhjast on 1,3 m ja maapinnalt 3,2 m? (Kõik andmed on ligikaudsed.)
317. Raudteetammi muldkeha laius alt on 5,3 m, ülalt aga 3,0 m. Mitu kuupmeetrit mulda on 75 m pikkuses muldkehas, mille kõrgus on 1,2 m? (Kõik andmed on ligikaudsed.)
318. Leia avaldise

$$\frac{\left(3,25 - 1\frac{4}{7}\right) \cdot 3\frac{1}{3}}{4\frac{5}{6} - 2\frac{1}{4}}$$

ligikaudne väärtus, teisendades harilikud murrud kümnendmurdudeks kahe numbriga pärast koma. Vastus ümardada kümnendikeni.

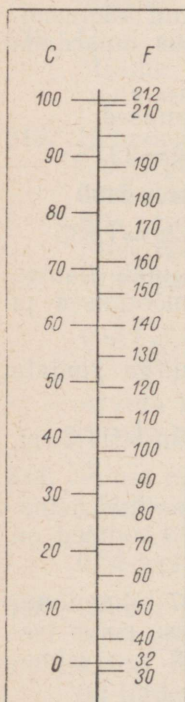
319. Lahendada võrrand, milles kõik arvud on ligikaudsed.
- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1) $3,7x + 4,52 = 19,6$ | 2) $0,85t - 0,92 = 32,75$ |
| 3) $10,892 - 3,3u = 4,59$ | 4) $1340 + 250x = 2490$ |
| 5) $0,0251x - 0,87 = 11,1$ | 6) $12,75 - 1,42y = 1,835$ |
320. Joonisel 20 antud nelinurk ABCD ($AB \parallel CD$) kujutab aiamaa plaani arvmõõduga 1:1000. Tee vajalikud mõõtmised ja arvuta aiamaa pindala.
321. Mitu protsenti on joonisel 21 kujutatud kolmnurga pindala trapetsi pindalast?
322. Risttahuka ligikaudsed mõõtmed on 3,9 cm, 8,7 cm ja 11,2 cm. Arvuta risttahuka täispindala.
323. Mehhanisaator kogus 165 hektarilt 677 tonni pressitud heina. Mitu tonni heina saadi keskmiselt hektarilt? (Andmed on ligikaudsed.)
324. Eesti NSV-s toodeti 1972. a. esimesel poolel 497 tuhat tonni tsementi, mis on 103% võrreldes 1971. a. esimese poole tsemendi toodanguga. Kui palju tsementi toodeti 1971. a. esimesel poolel?

325. Õhk sisaldab ligikaudu 20% hapnikku ja 80% lämmastikku. Kui palju hapnikku leidub risttahukakujulises toas, mille ligikaudsed mõõtmed on 4,2 m, 3,8 m ja 2,6 m?
326. Kolhoosi 44 ha suurusel põllul saadi 15,2 hektarilt keskmiseks nisusaagiks 22,5 ts hektarilt, ülejäänud põllult 26,7 ts hektarilt. Kui suur oli keskmine nisusaak kogu põllu igalt hektarilt? (Kõik andmed on ligikaudsed.)
327. Piimatööstus arvestab piima vastuvõtmisel rasvasisalduseks 3,50%. Kui majandist toodud piim on sellest erineva rasvasisaldusega, siis leitakse piimakogus 3,50%-lise rasvasisalduse järgi.
Mitu kilogrammi piima arvestatakse kolhoosile, kes saatis piimatööstusesse
1) 1270 kg 4,10%-lise rasvasisaldusega piima?
2) 2430 kg 3,80%-lise rasvasisaldusega piima?

3.10. SKAALA.

Skaalat näeme mitmesugustel mõõduriistadel: lauakaalul, kella numbrilaual, termomeetril jm.

Joonisel 22 on kujutatud termomeeter Celsiuse ja Fahrenheiti temperatuuriskaaladega.



328. 1) Mitmeks kraadiks on Celsiuse skaalal jaotatud jää sulamispunkti ja vee keemispunkti vahe?
2) Missugusel temperatuuril Celsiuse skaala järgi vesi jäätub? keeb?

Fahrenheiti skaalal on jää sulamispunkti ja vee keemispunkti vahe jaotatud 180-ks kraadiks. Jää sulamistemperatuur on Fahrenheiti skaalal 32° (lühemalt 32°F), vee keemistemperatuur aga 212°F. Joonis 22 võimaldab üht ja sama temperatuuri väljendada nii Celsiuse kui ka Fahrenheiti kraadides. Näiteks 20°C = 68°F, 50°F = 10°C.

329. Täida lüngad.

- | | |
|------------------|-------------------|
| 1) 60°C = ... °F | 5) 160°F = ... °C |
| 2) 10°C = ... °F | 6) 140°F = ... °C |
| 3) 40°C = ... °F | 7) 150°F = ... °C |
| 4) 80°C = ... °F | 8) 100°F = ... °C |

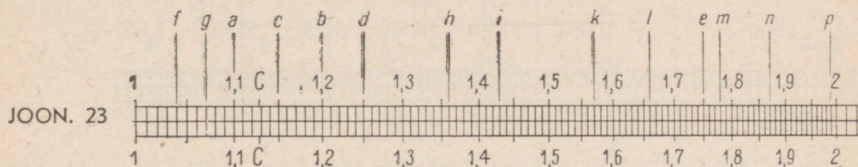
JOON. 22

3.11. ARVUDE LUGEMINE JA MÄRKIMINE SKAALAL.

Joonisel 23 on kujutatud arvud mitteühtlasel skaalal. Et see skaala pole ühtlane, nähtub kriipsuvahedest, mis skaala lõpu poole pidevalt vähenevad.

Skaala alguses ja lõpus olevate numbrite 1 ja 2 vahel on pisut väiksemate numbritega kirjutatud arvud 1,1; 1,2; ...; 1,9. Kui skaala alguskriips märgib arvu 1, siis sel korral märgib täht *a* arvu 1,1 ja täht *b* arvu 1,2

Vahemikud 1 kuni 1,1, 1,1 kuni 1,2, ..., 1,9 kuni 2 on igaüks omakorda jaotatud kümneks osaks, kuid jaotuskriipsude juurde ei ole nendele vastavaid arve kirjutatud. Eeldusel, et alguskriips vastab arvule 1, märgib *c* arvu 1,15, *d* arvu 1,25 ja *f* arvu 1,04.

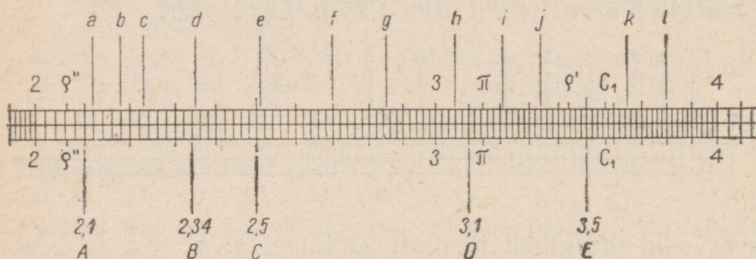


330. Mis arvusid märgivad joonisel 23 tähed *g*, *h*, *e*, *i*, *k*, *l*, *m*, *n*, *p*? Vastus kirjuta nii: $g=1,07$.
331. Näita pliiatsi terava otsaga joonisel 23 jaotuskriipsu, mis märgib arvu
1,02; 1,05; 1,12; 1,17; 1,35; 1,41; 1,56; 1,98.
332. Kui joonisel 23 skaala alguses ja lõpus olevad numbrid väljendavad vastavalt arve 10 ja 20, siis $a=11$ ja $f=10,4$.
Mis arve märgivad nüüd tähed *b*, *c*, *d*, *e*, *g*, *h*, *i*, *k*, *l*, *m*, *n*, *p*?
333. Kui joonisel 23 skaala algus- ja lõpunumbrid 1 ja 2 väljendavad vastavalt arve 100 ja 200, siis $a=110$, $h=136$ ja $f=104$.
Mis arve märgivad sel korral tähed *b*, *c*, *d*, *e*, *g*, *i*, *k*, *l*, *m*, *n*, *p*?
334. Kui joonisel 23 skaala algus- ja lõpunumbrid 1 ja 2 väljendavad vastavalt arve 1000 ja 2000, siis $a=1100$, $d=1250$ ja $f=1040$.
Mis arve märgivad nüüd tähed *b*, *c*, *e*, *g*, *h*, *i*, *k*, *l*, *m*, *n*, *p*?
335. Kui joonisel 23 skaala algus- ja lõpunumbrid 1 ja 2 väljendavad vastavalt arve 0,1 ja 0,2, siis
 $a=0,11$, $b=0,12$ ja $f=0,104$.
Mis arve märgivad sel korral tähed *c*, *d*, *e*, *g*, *h*, *i*, *k*, *l*, *m*, *n*, *p*?
336. Leia joonisel 23 kriips, mis märgib arvu
1) 10,2; 10,5; 11,2; 11,7; 13,5; 14,1; 15,6; 19,8;
2) 102; 105; 112; 117; 135; 141; 156; 198;

- 3) 1020; 1050; 1120; 1170; 1350; 1410; 1560; 1980;
 4) 0,102; 0,105; 0,112; 0,117; 0,135; 0,141; 0,156; 0,198.

Skaalal joonisel 24 on kujutatud arvud 2-st 4-ni. Sellel skaalal näed kolmesuguse pikkusega kriipse. Kõige pikemad neist on ainult kaks; need on joonisel märgitud tähega *C* ja *E*. Kriips *C* on arvude 2 ja 3 vahel ja märgib arvu 2,5. Kriips *E* märgib arvu 3,5.

Lõigud kriipsude 2 ja 2,5, 2,5 ja 3, 3 ja 3,5 ning 3,5 ja 4 vahel on pikkuselt järgmiste lühemate kriipsudega jaotatud 5-ks osaks. Seega need kriipsud märgivad vastavalt arve 2,1 (kriips *A*), 2,2, 2,3, ..., 3,1 (kriips *D*), 3,2, ..., 3,8 ja 3,9,



JOON. 24

337. Leia joonisel 24 kriips, mis märgib arvu

- 1) 2,1; 2,2; 2,3; 2,4; 2,6; 2,7; 2,8; 2,9;
- 2) 3,1; 3,2; 3,3; 3,4; 3,6; 3,7; 3,8; 3,9.

Lõigud kriipsude 2 ja 2,1, 2,1 ja 2,2, 2,2 ja 2,3, ..., 3,9 ja 4 vahel on kõige lühemate kriipsudega jaotatud 5 osaks. Seega märgivad kriipsud 2 ja 2,1 vahel vastavalt arve

2,02; 2,04; 2,06; 2,08.

Kriipsud arvude 2,3 ja 2,4 vahel märgivad vastavalt arve 2,32; 2,34 (kriips *B*); 2,36; 2,38.

Nagu näed, märgivad kõige lühemad kriipsud joonisel 24 paarinumbriga lõppevaid kolme tüvenumbriga arve 2 ja 4 vahel.

338. Loe 0,02 kaupa ja näita vastavaid kriipse joonisel 24:

- 1) 2-st 2,5-ni;
- 2) 2,52-st 3-ni;
- 3) 3,02-st 3,5-ni;
- 4) 3,52-st 4-ni.

Joonisel 24 oleval skaalal tuleb kolme tüvenumbriga paaritu numbriga lõppevad arvud 2 ja 4 vahelt võtta silma järgi kahe kõrvuti seisva kriipsu vahelise lõigu keskelt. Näiteks *c* märgib arvu 2,23 (on arvude 2,22 ja 2,24 vahel).

339. Mis arvusid märgivad tähed d, e, g, i, k joonisel 24?

340. Kui joonisel 24 skaala alguskriips märgib arvu 20 ja lõpu-
kriips arvu 40, siis

$$A=21; B=23,4; a=21,2; c=22,3.$$

Mis arve märgivad sel korral tähed $C, D, E, b, d, e, f, g, h, i, j, k, l$?

341. Leia jooniselt 24 arvud

1) 20,2; 20,3; 20,4; 20,5; 20,8; 20,9;

2) 25,2; 25,3; 25,4; 25,5; 25,8; 25,9;

3) 29,1; 29,2; 29,4; 29,5; 29,8; 29,9;

4) 37,2; 37,4; 37,3; 37,5; 37,8; 37,9;

5) 39,2; 39,3; 39,4; 39,5; 39,8; 39,9.

342. Kui joonisel 24 skaala alguskriips märgib arvu 200 ja lõpu-
kriips arvu 400, siis

$$A=210; B=234; a=212; c=223.$$

Mis arve märgivad sel korral tähed $C, D, E, b, d, e, f, g, h, i, j, k, l$?

343. Leia jooniselt 24 arvud

1) 202; 203; 204; 205; 208; 209;

2) 252; 253; 254; 255; 258; 259;

3) 291; 292; 294; 295; 298; 299;

4) 372; 373; 374; 375; 378; 379;

5) 392; 393; 394; 395; 398; 399.

344. Kui joonisel 24 skaala alguskriips märgib arvu 0,2 ja lõpu-
kriips arvu 0,4, siis

$$A=0,21; B=0,234; a=0,212; c=0,223.$$

Mis arve märgivad sel korral tähed $C, D, E, b, d, e, f, g, h, i, j, k, l$?

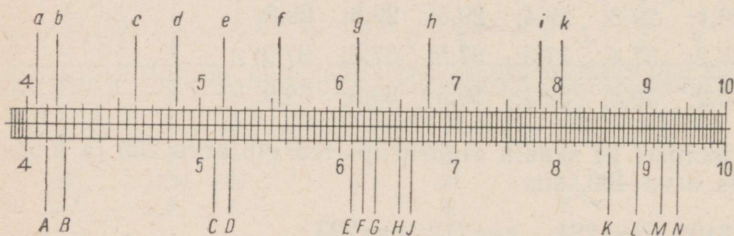
345. Leia jooniselt 24 arvud

1) 0,202; 0,204; 0,206; 0,208;

2) 0,201; 0,203; 0,205; 0,207;

- 3) 0,262; 0,264; 0,266; 0,268;
- 4) 0,261; 0,263; 0,265; 0,269;
- 5) 0,322; 0,324; 0,326; 0,328;
- 6) 0,381; 0,383; 0,385; 0,387.

346. Joonisel 25 kujutatud skaalal on arvud 4-st 10-ni. Lõigud arvude 4 ja 5, 5 ja 6, 6 ja 7, 7 ja 8, 8 ja 9 ning 9 ja 10 vahel on pikkuselt erinevate kriipsudega jaotatud osadeks. Pisut pikemad kriipsud jaotavad need lõigud 10-ks osaks. Seega vastab jaotuskriips *A* arvule 4,1 ja kriips *B* arvule 4,2. Kriips *C* märgib arvu 5,1, kriips *D* aga arvu 5,2. Mis arve märgivad tähed *E, F, G, H, J, K, L, M, N*?



JOON. 25

347. Leia jooniselt 25 kõik arvud 0,1-kaupa 6,7-st 8,5-ni; 4,3-st 5-ni; 5-st 6-ni.
348. Nagu jooniselt 25 näed, on iga lõik, mis väljendab kümnendikku (lõik 4 ja 4,1 vahel, 4,1 ja 4,2 vahel jne.), jaotatud veel kaheks osaks, nii et sel teel saadud lõigu osa väljendab poolt kümnendikku ehk 0,05. Seega märgib täht *a* arvu 4,05, *b* arvu 4,15 ja *i* arvu 7,85. Mis arve märgivad tähed *c, d, e, f, g, h, k*?
349. Loe ja näita jooniselt 25 kõik arvud 0,05-kaupa
 - 1) 4-st 4,95-ni;
 - 2) 5-st 5,95-ni;
 - 3) 6-st 6,95-ni;
 - 4) 7,05-st 7,95-ni;
 - 5) 8,05-st 8,95-ni;
 - 6) 9,05-st 9,95-ni.
350. Kui joonisel 25 skaala alguskriips märgib arvu 40 ja lõpukriips arvu 100, siis täht *A* märgib arvu 41, täht *B* arvu 42 ja täht *a* arvu 40,5.

Mis arvused märgivad sel korral tähed

- 1) *C, D, E, F, G, H, J, K*;
- 2) *L, M, N, b, c, d, e, f, g, h, i, k*?

Kui joonisel 25 skaala alguskriips märgib arvu 400 ja lõpukriips arvu 1000, siis *A* märgib arvu 410, *B* arvu 420 ja *a* arvu 405.

Mis arve märgivad nüüd tähed

- 1) *C, D, E, F, G, H, J, K, L, M, N*;
- 2) *b, c, d, e, f, g, h, i, k*?

351. Loe ja näita jooniselt 25 kõik arvud 5-kaupa

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1) 400-st 500-ni; | 4) 705-st 800-ni; |
| 2) 505-st 600-ni; | 5) 805-st 900-ni; |
| 3) 605-st 700-ni; | 6) 905-st 995-ni. |

352. Kui joonisel 25 skaala alguskriips märgib arvu 0,4 ja lõpukriips arvu 1, siis *A* märgib arvu 0,41, *B* arvu 0,42 ja *a* arvu 0,405.

Mis arve märgivad sel korral tähed *C, D, E, F, G, H, J, K, L, M, N, b, c, e, f, g, h, i, k*?

353. Loe ja näita jooniselt 25 kõik arvud 0,005-kaupa

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1) 0,405-st 0,495-ni; | 4) 0,705-st 0,795-ni; |
| 2) 0,505-st 0,595-ni; | 5) 0,805-st 0,895-ni; |
| 3) 0,605-st 0,695-ni; | 6) 0,905-st 0,995-ni. |

Pannes joonistel 23, 24 ja 25 kujutatud skaalad otsa-kuti kokku, saame joonisel 26 kujutatud skaala. Lõigates nüüd saadud joonise piki telge pooleks, saame kaks ühesugust skaalat, mida võib teineteise kõrval edasi-tagasi nihutada ja kasutada seetõttu arvutus-lükatina.

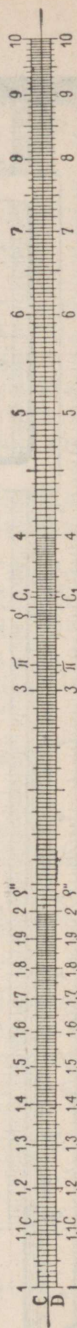
Nimetame üht neist *C*-, teist *D*-skaalaks.

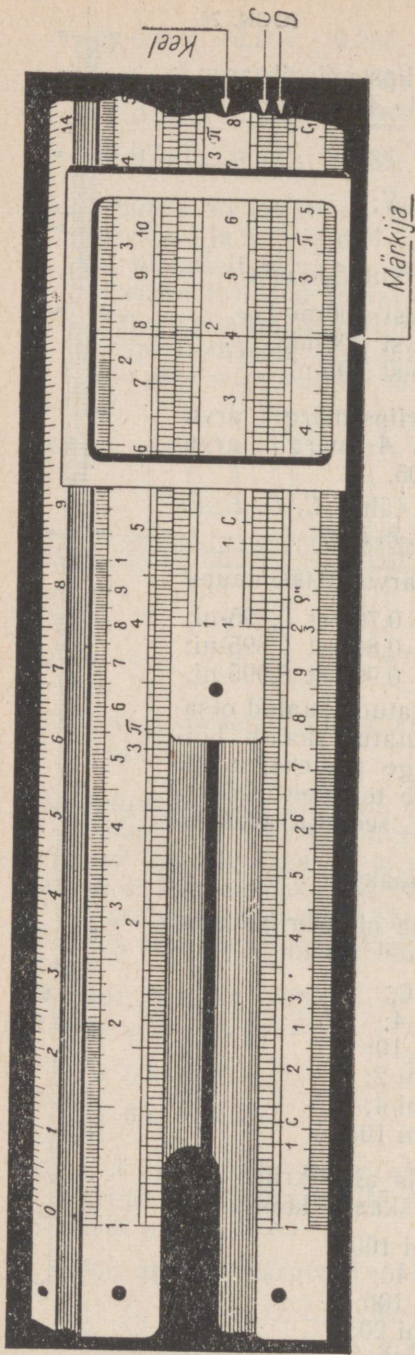
354. Tähendagu joonisel 26 skaala alguskriips arvu 1. Loe ja näita sellel skaalal kõik arvud.

- 1) 1-kaupa arvust 1 arvuni 10;
- 2) 0,1-kaupa arvust 1 arvuni 4;
- 3) 0,2-kaupa arvust 4 arvuni 10;
- 4) 0,01-kaupa arvust 1 arvuni 2;
- 5) 0,02-kaupa arvust 2 arvuni 4;
- 6) 0,05-kaupa arvust 4 arvuni 10.

355. Tähendagu joonisel 26 skaala alguskriips arvu 10. Loe ja näita sel eeldusel skaalal kõik arvud.

- 1) 10-kaupa arvust 10 arvuni 100;
- 2) 1-kaupa arvust 10 arvuni 40;
- 3) 1-kaupa arvust 40 arvuni 100;
- 4) 0,1-kaupa arvust 10 arvuni 20;





JOON. 27

- 5) 0,2-kaupa arvust 20 arvuni 40;
6) 0,5-kaupa arvust 40 arvuni 100.

356. Tähendagu joonisel 26 skaala alguskriips arvu 0,1. Loe ja näita sel tingimusel skaalal kõik arvud
- 1) 0,1-kaupa arvust 0,1 arvuni 1;
 - 2) 0,01-kaupa arvust 0,1 arvuni 0,4;
 - 3) 0,01-kaupa arvust 0,4 arvuni 1;
 - 4) 0,001-kaupa arvust 0,1 arvuni 0,2;
 - 5) 0,002-kaupa arvust 0,2 arvuni 0,4;
 - 6) 0,05-kaupa arvust 0,4 arvuni 1.

Et skaalasad C ja D oleks arvutamisel mugav teineteise suhtes nihutada, selleks on skaala C paigutatud arvutuslükati (joon. 27) **korpuses** edasi-tagasi nihutatava **keele** alumisele servale ja skaala D korpuse alumise poole ülemisele servale. Arvude märkimiseks neil skaaladel kasutame lükati **aknale** tehtud kriipsu, mida nime-tame **märkijaks**.

Arvutuslükatil on mitu skaalat. Meie õpime esialgu kasutama ainult skaalasad C ja D ; neid nimetatakse **lükati põhiskaaladeks**.

357. Kui joonisel 27 kujutatud lükati keelel asuva skaala C alguskriips märgib arvu 1, siis akna kriipsuga ehk märkijaga on seal märgitud arv 1,4. Mis arvu näitab märkija skaalal D ?
Kui joonisel 27 skaala C alguskriips märgib arvu 10, siis akna kriips märgib arvu 14. Mis arvu näitab märkija skaalal D ?

358. Märkigu skaala C alguskriips arvu 100. Mis arvu märgib siis akna kriips sellel skaalal?

359. Märkigu skaala C alguskriips (joon. 27) vastavalt arvu 0,1; 0,01; 1000. Mis arvu märgib sellele vastavalt märkija skaalal C ?

Eelmisest ülesandest näeme, et kui skaala C alguskriips märgib arvu

... 0,01; 0,1; 1; 10; 100 või 1000, ...

siis akna kriips joonisel 27 märgib vastavalt sellel skaalal arvu

... 0,014; 0,14; 1,4; 14; 140 või 1400, ...

Seega, skaala C (ja samuti skaala D) iga kriips märgib kõiki arve, millel on ühed ja samad tüvenumbrid.

Skaaladel C ja D saame üldiselt märkida ja lugeda kolme tüvenumbriga arve.

Arvu, mille tüvenumbrid on 1, 4 ja 0, kirjutame nii:

1-4-0.

Seda loeme: «üks, neli, null».

Kui soovime ära märkida, et kõne all olev arv on skaalal C , siis kirjutame nõnda:

C-1-4-0.

360. 1) Missuguste tüvenumbritega arv skaalal D (joon. 27) on kohakuti arvuga $C-1-4-0$.
 2) Missuguste tüvenumbritega arv skaalal C on kohakuti arvuga $D-2-7-0$ (joon. 27).
361. Märgi akna kriipsuga oma lükatil, mille keel on *n o r m a a l a s e n d i s* (s. o. skaalade C ja D alguskriipsud on kohakuti), arv, mille tüvenumbrid on
- 1) 1-1-0; 1-2-0; 1-3-0; 1-7-0; 1-8-0; 1-9-0;
 - 2) 1-0-5; 1-1-5; 1-2-5; 1-7-5; 1-8-5; 1-9-5;
 - 3) 1-0-1; 1-0-2; 1-0-3; 1-0-4; 1-7-1; 1-8-3;
 - 4) 2-0-0; 3-0-0; 4-0-0; 2-1-0; 2-2-0; 3-8-0;
 - 5) 2-0-2; 2-0-4; 2-0-6; 2-0-8; 3-0-2; 3-0-4;
 - 6) 2-0-1; 2-0-3; 2-0-7; 2-0-9; 2-1-1; 2-6-5;
 - 7) 3-0-0; 3-1-0; 3-2-0; 3-3-0; 3-8-0; 3-9-0;
 - 8) 3-0-2; 3-0-4; 3-0-6; 3-0-8; 3-5-2; 3-9-6;
 - 9) 2-3-1; 2-6-5; 2-9-7; 3-2-1; 3-7-1; 3-8-3;
 - 10) 4-1-0; 4-2-0; 4-5-0; 5-1-0; 6-3-0; 8-2-0;
 - 11) 4-0-5; 4-1-5; 5-2-5; 5-4-5; 7-1-5; 9-4-5;
 - 12) 6-0-5; 6-1-0; 6-1-5; 6-2-0; 6-2-5; 6-3-0.

Lükatil näed, et näiteks vahemik 4,0 kuni 4,1 on kaheks jaotatud. Jaotuskriips märgib arvu 4,05. Märgi see arv akna kriipsuga. Arve 4,01; 4,02; 4,03; 4,04 peame märkima silma järgi, jaotades vahemiku 4,0 kuni 4,05 silma järgi viieks osaks. Analoogiliselt tuleb toimida kogu vahemiku ulatuses 4-st 10-ni, sest kogu selles vahemikus on iga kahe kõrvutioleva kriipsu vahe viis sajandikku.

362. Märgi lükatil arvud:

- 1) 4,15; 4,16; 4,17; 4,18; 4,19; 4,20;
- 2) 4,51; 4,52; 4,53; 4,54; 4,55; 4,56;
- 3) 5,01; 5,02; 5,03; 5,04; 5,05; 5,06;
- 4) 5,07; 5,08; 5,09; 5,10; 5,11; 5,12.

363. Märgi lükatil arvud, mille tüvenumbrid on:

- 1) 5-2-1; 5-2-2; 5-2-3; 5-2-4; 5-2-5; 5-2-6;
- 2) 5-2-7; 5-2-8; 5-2-9; 5-3-0; 5-3-1; 5-3-2;
- 3) 7-5-0; 7-5-1; 7-5-2; 7-5-3; 7-5-4; 7-5-5;
- 4) 8-7-0; 8-7-1; 8-7-2; 8-7-3; 8-7-4; 8-7-5.

364. Märgi lükatil arvud:

- 1) 110; 120; 130; 170; 180; 190;
- 2) 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7;

- 3) 2,31; 2,65; 2,97; 3,21; 3,71; 3,83;
- 4) 60,5; 61,0; 61,5; 62,0; 62,5; 63,0;
- 5) 52,1; 52,2; 52,3; 52,4; 52,5; 52,6;
- 6) 750; 751; 752; 753; 754; 755.

Lükatil arvutades leitakse tulemuse tüvenumbrid, koma asukoht tuleb leida ise. Koma koha määramiseks kasutame tulemuse ligikaudse hindamise võtet jämedalt ümardatud arvudega. See toimub peast ja tehakse nii, et andmed ümardatakse ühe tüvenumbriga arvudeks ning sooritatakse tehe ümardatud arvudega. Selliselt saame tulemuse ligikaudse väärtuse ühe või kahe tüvenumbriga, mis aitab otsustada tulemuse suurust.

Olgu näiteks teada, et korrutise

$$3,71 \cdot 4,35$$

tüvenumbrid on 1-6-1. Millega võrdub korrutis?

Tehes ligikaudse hinnangu, saame

$$3,71 \cdot 4,35 \approx 4 \cdot 4 = 16.$$

Seega $3,71 \cdot 4,35 = 16,1$.

Teine näide. Jagatise

$$108 : 4,81$$

tüvenumbrid on 2-2-5. Millega võrdub jagatis? Saame

$$108 : 4,81 \approx 100 : 5 = 20.$$

Seega $108 : 4,81 = 22,5$.

365. 1) Korrutise $0,42 \cdot 92$ tüvenumbrid on 3-8-6. Millega võrdub korrutis?
 2) Jagatise $1,05 : 5,55$ tüvenumbrid on 1-8-9. Millega võrdub jagatis?

366. Kirjuta, millega võrdub korrutis, kui nurksulgudes on korrutise tüvenumbrid.

- | | | | |
|----------------|---------|----------------|---------|
| 1) 2,64 · 3,14 | [8-3-0] | 2) 1,07 · 44 | [4-7-1] |
| 3) 57,3 · 6,28 | [3-6-0] | 4) 8,05 · 1,2 | [9-6-5] |
| 5) 3,6 · 4,5 | [1-6-2] | 6) 2,55 · 3,1 | [7-9-0] |
| 7) 33,2 · 27 | [9-0-0] | 8) 4,05 · 1,06 | [4-3-0] |
| 9) 36,3 · 22 | [8-0-0] | 10) 2,5 · 3,06 | [7-6-5] |
| 11) 5,8 · 1,3 | [7-5-4] | 12) 5,4 · 6,3 | [3-4-0] |

- | | | | |
|--------------|---------|---------------|---------|
| 13) 1,1·7,7 | [8-4-7] | 14) 2,28·5,45 | [1-2-4] |
| 15) 2,72·3,4 | [9-2-5] | 16) 7,05·4,85 | [3-4-2] |

367. Leia jagatis, kui nurksulgudes on jagatise tüvenumbrid.

- | | | | |
|-----------------|---------|-----------------|---------|
| 1) 6 : 4,8 | [1-2-5] | 2) 3,4 : 7 | [4-8-5] |
| 3) 7,4 : 5,6 | [1-3-2] | 4) 6,2 : 8,4 | [7-4-0] |
| 5) 3,8 : 2,9 | [1-3-1] | 6) 5,2 : 7,8 | [6-6-5] |
| 7) 5,3 : 3,9 | [1-3-6] | 8) 1,6 : 9,2 | [1-7-4] |
| 9) 4,05 : 1,82 | [2-2-2] | 10) 3,34 : 4,35 | [7-6-8] |
| 11) 2,66 : 2,44 | [1-0-9] | 12) 3,74 : 7,15 | [5-2-3] |
| 13) 3,22 : 1,23 | [2-6-2] | 14) 5,75 : 6,05 | [9-5-0] |
| 15) 5,55 : 3,2 | [1-7-4] | 16) 1,11 : 8,15 | [1-3-6] |

3.12. LÜKATI PÕHISKAALADE OMADUS.

Joonisel 28 on kujutatud skaalad C ja D skemaatiliselt niisuguses asendis, et arv 1 skaalal C on kohakuti arvuga 2 skaalal D . Arvude 1 ja 2 suhe on $\frac{1}{2}$. Nagu jooniselt 28 näed, on kõikide kohakuti seisvate arvude suhted võrdsed $\frac{1}{2}$ -ga:

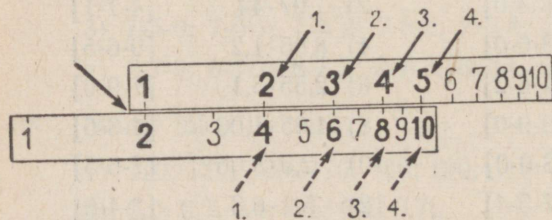
$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \dots$$

Seega on kohakuti seisvad arvud võrdelised, s.t. nende suhted on võrdsed.

Pane oma lükati keel nii, et skaalal C arv 3 oleks kohakuti skaala D arvuga 1. Näed, et kohakuti on veel arvud 4,5 ja 1,5, 6 ja 2, 7,5 ja 2,5 ning 9 ja 3. Ka need arvud on võrdelised, sest

$$\frac{4,5}{1,5} = \frac{6}{2} = \frac{7,5}{2,5} = \frac{9}{3} = 3.$$

Põhiskaalade igas asendis on kohakuti olevad arvud võrdelised.



JOON. 28

368. Olgu C -3 ja D -1 kohakuti. Vaata oma lükatil kohakuti olevaid arve ja täida tabel.

C	3	3,3	4,2		5,1		6,3			7,8	8,7	
D	1	1,1		1,6		1,9		2,4	2,5			3,1

369. Kontrolli lükati abil, kas järgmises tabelis olevad muutujad x ja y on võrdelised.

x	3,6	45	50	7,5	0,6	5,85	12	13,5	21	14,8	13,5	67,5
y	4,8	60	66,5	10	0,8	7,2	16	18	28	19,7	86	18,5

3.13. VÖRDE TUNDMATU LIIKME LEIDMINE.

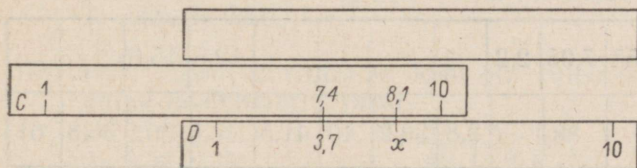
Võrde lahendamisel on meil tegemist kahe võrdse suhtega, kusjuures ühe suhte mõlemad liikmed on antud; teisest suhtest on antud üks liige, teine on otsitav.

Otsitava liikme leidmiseks seame skaaladel C ja D kohakuti selle suhte liikmed, mis on antud. Siis märgime märkijaga teise suhte antud liikme. Märkija alt selle kohal leiame otsitava liikme.

Näide 1. Leia x võrdest

$$\frac{7,4}{3,7} = \frac{8,1}{x}$$

Lahendus. Seame kohakuti C -7-4 ja D -3-7 (joon. 29). Nüüd märgime märkijaga skaalal C arvu 8,1. Skaalal D näeme märkija all otsitava arvu tüvenumbreid 4-0-5.



JOON. 29

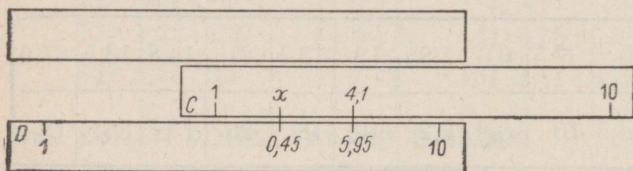
Koma koha määramiseks toimime nii: suhet $\frac{7,4}{3,7}$ hinnates leiame, et see on 2. Seega x on ligikaudu 4.

Vastus. $x=4,05$.

Näide 2. Lahendada võrre

$$\frac{41}{5,95} = \frac{x}{0,45}.$$

Lahendus. Seame kohakuti C-41 ja D-5,95 (joon. 30). Paneme märkija arvule D-0,45. Märkija alt skaalal C loeme otsitava arvu tüvenumbrid 3-1-0.



JOON. 30

Hinnates antud suhet, saame $\frac{41}{5,95} \approx \frac{40}{6} \approx 7$. Seega x peab olema arvust 0,45 seitse korda suurem, s. t. $7 \cdot 0,45 = 7 \cdot 0,5 = 3,5$.

Vastus. $x=3,10$.

370. Lahenda võrre.

$$1) \frac{8,2}{4,3} = \frac{9,25}{x}$$

$$2) \frac{27,8}{3,64} = \frac{x}{3,25}$$

Märkus. Skaaladel C ja D kohakuti seisvate arvude suhet võib vaadelda murruna, kusjuures suhte esimene liige on lugejaks, teine liige nimetajaks ja keele alumine serv murrujooneks.

371. Leia x .

$$1) \frac{5}{8,2} = \frac{15}{x}$$

$$2) \frac{20}{32,8} = \frac{25}{x}$$

$$3) \frac{14,5}{20,8} = \frac{x}{41,5}$$

$$4) \frac{29,6}{42,5} = \frac{x}{6,05}$$

372. Teades, et $4^\circ R = 5^\circ C$, täida alljärgnev tabel.

R	4	6	6,3	6,55	7,05	2,2					12,5	15,6			
C							2,8	30,2	40	41,5				36,8	61

373. Lahenda võrrand.

$$1) \frac{x}{3,26} = \frac{2,42}{0,56}$$

$$2) \frac{7,15}{x} = \frac{6,45}{14,2}$$

3.14. KORRUTAMINE.

Näide. Lahendame lükati abil võrde

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{x}.$$

Võrde põhiomaduse põhjal saame, et

$$x = 2 \cdot 3.$$

Seega annab selle võrde lahendamine korrutise 2·3. Niisamuti annab võrde

$$\frac{1}{1,82} = \frac{2,75}{x}$$

lahendamine korrutise 1,82·2,75. Leia see korrutis lükatil.

Kahe teguri korrutise leidmiseks lükati abil toimime nii:

- 1) märgime skaalal D ühe teguri;
- 2) seame selle teguriga kohakuti skaala C alguskriipsu, s. o. arvu 1 (või lõpukriipsu, s. o. arvu 10);
- 3) märgime skaalal C teise teguri;
- 4) leiame märkija alt skaalal D otsitava korrutise.

Joonistel 31 ja 32 on skemaatilisel näidatud korrutise $a \cdot b$ leidmine lükatil.

374. Leia lükatil korrutis.

$$1) 2,14 \cdot 17,3$$

$$2) 7,25 \cdot 8,45$$

375. Leia lükatil korrutis ja võrdle tulemust vastusega.

$$1) 8,30 \cdot 7,25$$

$$5) 1,74 \cdot 6,50$$

$$2) 9,80 \cdot 19,0$$

$$6) 1,29 \cdot 8,55$$

$$3) 4,25 \cdot 7,20$$

$$7) 5,05 \cdot 7,65$$

$$4) 6,05 \cdot 8,10$$

$$8) 4,75 \cdot 6,75$$

Vastused. 1) 60,2. 2) 186. 3) 30,6. 4) 49. 5) 11,3. 6) 11,0. 7) 38,6. 8) 32,0.

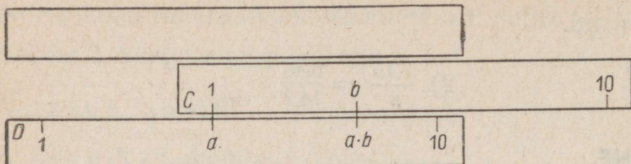
376. Leia lükatil korrutis ja kontrolli tulemust ülesande lõpus antud tüvenumbrite järgi.

$$1) 2,08 \cdot 5,55$$

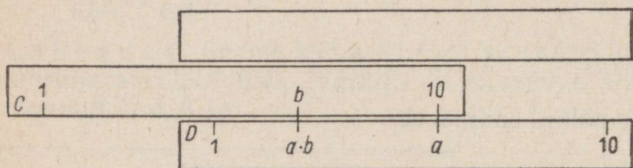
$$3) 6,05 \cdot 1,88$$

$$2) 3,38 \cdot 8,35$$

$$4) 12,2 \cdot 8,75$$



JOON. 31



JOON. 32

- 5) $8,30 \cdot 33,0$ 7) $86 \cdot 113$
 6) $0,56 \cdot 0,84$ 8) $34 \cdot 0,58$

Korrutiste tüvenumbrid: 1) 1-1-5. 2) 2-8-2. 3) 1-1-4. 4) 1-0-7.
 5) 2-7-4. 6) 4-7-0. 7) 9-7-2. 8) 1-9-7.

377. Leia lükatil korrutis.

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| 1) $52 \cdot 0,016$ | 2) $152 \cdot 0,42$ |
| 3) $0,63 \cdot 0,57$ | 4) $26 \cdot 4,6$ |
| 5) $31,6 \cdot 8,10$ | 6) $37,4 \cdot 0,64$ |
| 7) $0,21 \cdot 7,2$ | 8) $67 \cdot 17,2$ |
| 9) $4,2 \cdot 3,9$ | 10) $13,2 \cdot 5,60$ |
| 11) $5,6 \cdot 3,2$ | 12) $16,1 \cdot 1,10$ |
| 13) $4,75 \cdot 3,20$ | 14) $17,2 \cdot 0,495$ |
| 15) $6,7 \cdot 4,9$ | 16) $21,7 \cdot 0,875$ |

378. Leia korrutis.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1) $1,4 \cdot 2,7$ | 2) $3,2 \cdot 1,56$ |
| 3) $3,5 \cdot 3,6$ | 4) $7,81 \cdot 1,62$ |
| 5) $3,7 \cdot 1,5$ | 6) $32,4 \cdot 2,8$ |
| 7) $4,2 \cdot 5,6$ | 8) $1,87 \cdot 2,56$ |
| 9) $3,47 \cdot 5,66$ | 10) $3,2 \cdot 5,6$ |
| 11) $0,47 \cdot 56,6$ | 12) $7,8 \cdot 1,45$ |
| 13) $8,75 \cdot 0,69$ | 14) $6,42 \cdot 34,5$ |
| 15) $0,42 \cdot 0,97$ | 16) $4,8 \cdot 0,75$ |

379. Leia korrutis, teades, et tegurid on ligikaudsed arvud.

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| 1) $3,2 \cdot 4,1$ | 2) $4,70 \cdot 2,10$ |
| 3) $3,4 \cdot 1,5$ | 4) $0,3 \cdot 12,5$ |
| 5) $2,3 \cdot 4,7$ | 6) $0,30 \cdot 12,5$ |
| 7) $3,0 \cdot 1,5$ | 8) $0,300 \cdot 12,5$ |
| 9) $3,2 \cdot 4,73$ | 10) $4,7 \cdot 5,1$ |
| 11) $1,1 \cdot 10,6$ | 12) $0,22 \cdot 8,9$ |
| 13) $3,5 \cdot 4,10 =$ | 14) $13,8 \cdot 4,2$ |
| 15) $0,755 \cdot 81$ | 16) $0,86 \cdot 162$ |

380. Uks tellis kaalub 3,6 kg. Kui palju kaaluvad 12; 15; 17; 19; 21; 25; 37; 42; 56; 62 tellist?
381. Klassi pikkus on 7,8 m ja laius 6,2 m. Kui suur on klassi põranda pindala?
382. Traktor künnab 1 tunniga 0,22 ha kesa. Kui palju künnab see traktor 7,67 tunniga?
383. Meeter riiet maksab 2,75 rbl. Kui palju maksab 0,75; 3,25; 4,2; 5,6; 6,45 meetrit seda riiet?

3.15. PROTSENTIDE LEIDMINE.

Protsentide leidmine antud arvust toimub korrutamise teel. Näiteks 47,5% arvust 6,32 leitakse nii:

$$47,5\% \cdot 63,2 = 0,475 \cdot 63,2 = 30.$$

384. Leia lükatil 25% arvust 72.

385. Leia lükatil:

- | | |
|--------------|-----------------|
| 1) 72% 85-st | 2) 67% 95-st |
| 3) 35% 42-st | 4) 87,5% 129-st |
| 5) 25% 48-st | 6) 92% 335-st |
| 7) 12% 22-st | 8) 13,5% 47-st |

3.16. JAGAMINE.

N ä i d e. Jagatise 8 : 4 leidmiseks lükatil lahendame võrde

$$\frac{8}{4} = \frac{x}{1},$$

millest

$$x = \frac{8}{4}.$$

386. Leia võrde

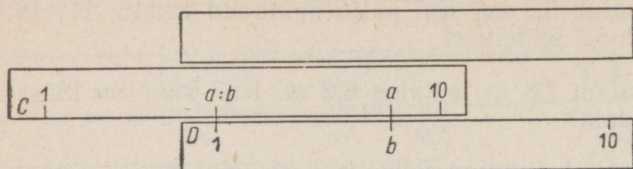
$$\frac{12}{4} = \frac{x}{1}$$

lahendamise teel jagatis $\frac{12}{4}$.

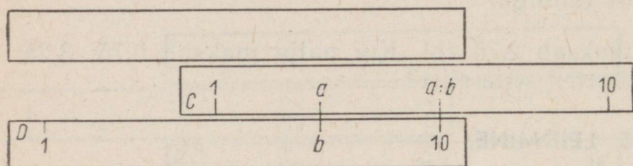
387. Leia jagatis 69,4 : 2,46. (Vastus. 28,2)

Kahe arvu jagatise leidmiseks lükatil toimime järgmiselt:

- 1) märgime jagaja skaalal D ;
- 2) seame jagajaga kohakuti jagatava skaalal C ;
- 3) leiame skaala D alguskriipsu, s. o. arvu 1 (või lõpukriipsu, s. o. arvu 10) kohalt skaalal C jagatise.



JOON. 33



JOON. 34

Joonisel 33 ja 34 on skemaatiliselt näidatud jagatise $a : b$ leidmine lükatil.

Jagatise $8 : 4$ arvutamist saab käsitada ka võrde

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{x}$$

lahendamisenä, sest sellegi võrde lahendamine annab

$$x = 8 : 4.$$

Jagatise $12 : 4$ saame võrde

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{x}$$

lahendamisel. Seda arvestades võib jagamine lükatil toimuda ka nii:

- 1) märgime jagatava skaalal D ;
- 2) seame jagatavaga kohakuti jagaja skaalal C ;
- 3) leiame skaala C alguskriipsu, s. o. arvu 1 (või lõpukriipsu, s. o. arvu 10) kohalt skaalal D jagatise (vt. joonised 35 ja 36).

388. Leia lükatil jagatis.

1) $9,35 : 2,32$

2) $44 : 7,8$

389. Arvuta lükatil jagatis ja võrdle tulemust vastusega.

1) $19,5 : 3,86$

5) $6,1 : 2,91$

2) $3,06 : 5,15$

6) $9,8 : 6,7$

3) $16,2 : 4,5$

7) $2,22 : 1,14$

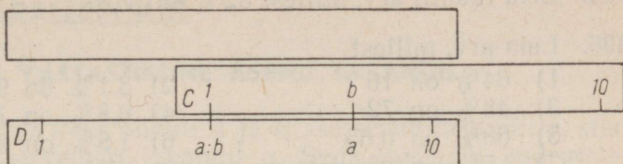
4) $4,4 : 2,1$

8) $5,45 : 4,15$

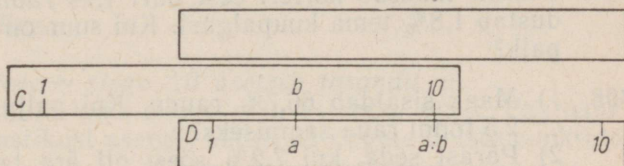
Vastused. 1) 5,05. 2) 0,595. 3) 3,6. 4) 2,1. 5) 2,1. 6) 1,46.

7) 1,86, 8) 1,31.

JOON. 35



JOON. 36



390. Arvuta lükatil ligikaudsete arvude jagatis.

- | | |
|----------------|-----------------|
| 1) 8,35 : 5,6 | 2) 7,05 : 2,46 |
| 3) 7,20 : 2,04 | 4) 8,15 : 4,05 |
| 5) 2,08 : 1,45 | 6) 2,88 : 2,36 |
| 7) 3,38 : 1,83 | 8) 6,05 : 1,05 |
| 9) 4,6 : 3,02 | 10) 2,22 : 4,25 |
| 11) 1,64 : 3,1 | 12) 7,05 : 9,9 |
| 13) 2,88 : 5,8 | 14) 3,82 : 4,35 |
| 15) 4,4 : 9,15 | 16) 4,15 : 6,65 |

391. Ristküliku pindala on $32,5 \text{ dm}^2$. Leia ristküliku alus, kui ristküliku kõrgus on $5,20 \text{ dm}$.
392. Kui kõrge peab olema $8,50 \text{ dm}^2$ suuruse põhjaga risttahukas, et selle ruumala oleks $56,5$; $13,3$; $45,2$; $56,8$; $62,4 \text{ dm}^3$?
393. Saadeti jalgrattaid kaalus $2,25$ tonni. Mitu jalgratast seal oli, kui üks jalgratas kaalub keskmiselt $0,018$ tonni?
394. Mitmelt hektarilt saadi 861 ts kartuleid, kui keskmine saak hektarilt oli 182 ts ?

3.17. ARVU LEIDMINE TEMA PROTSENTIDES ANTUD OSA JÄRGI.

Arvu leidmine tema protsentides antud osa järgi toimub jagamise teel. Olgu näiteks teada, et $34,5\%$ mingist arvust on $68,5$. Siis otsitav arv on

$$68,5 : 34,5\% = 68,5 : 0,345.$$

Lükatil leiame, et jagatise tüvenumbrid on 1-9-8. Et

$$68,5 : 0,345 \approx 70 : 0,3 \approx 200, \text{ siis } 68,5 : 0,345 = 198.$$

395. Leia lükatil arv, millest 32% on 17,5.
396. Leia arv, millest
- | | |
|----------------|-----------------|
| 1) 64% on 16 | 2) 3,1% on 93 |
| 3) 48% on 72 | 4) 6,8% on 13,6 |
| 5) 68% on 0,65 | 6) 1,8% on 90 |
| 7) 2,5% on 25 | 8) 8% on 2,4 |
397. Tööline maksab korteri eest üüri 1,44 rubla kuus. See moodustab 1,8% tema kuupalgast. Kui suur on selle töölise kuupalk?
398. 1) Maak sisaldab 66,7% rauda. Kui palju maaki on tarvis 2,5 tonni raua saamiseks?
2) Pärast seda, kui 7,2% söest oli ära tarvitatud, oli sütt veel järel 232 tonni. Mitu tonni sütt oli ära kulutatud?
399. Kui masina hinda alandati 5,2% võrra, siis selle hind vähenes 182 rubla võrra. Kui palju maksis masin enne hinnaalandust?

3.18. KAHE ARVU SUHE PROTSENTIDES.

Näide. Kolhoosil on 960 ha maad, sellest põllumaad 912 ha. Mitu protsenti kolhoosi maast on põldude all?

Lahendus. $912 : 960 = 0,955 = 95,5\%$.

400. Leia, mitu protsenti on 3,4 10,5-st.
401. Mitu protsenti on
- | | |
|-------------|----------------|
| 1) 2 6-st? | 2) 8 17,5-st? |
| 3) 5 20-st? | 4) 8,75 15-st? |
| 5) 9 45-st? | 6) 5,3 80-st? |
| 7) 6 25-st? | 8) 2,25 32-st? |
402. Kooliõpilased panid idanema 60 peediseemet, millest idanes 57. Mitu protsenti seemneist idanes?
403. 400-st rukkiterast idanes 392. Mitu protsenti rukkiteradest idanes?
404. Kauba brutokaal on 120 kgf, netokaal 98 kgf. Mitu protsenti moodustab taarakaal brutokaalust?
405. Klassis on 36 õpilast. Ühel päeval puudus klassist 4 õpilast. Mitu protsenti õpilastest puudus sel päeval klassist?
406. Noorte tehnikute ringi liikmete arv kasvas 98-lt 125-ni. Mitme protsendi võrra kasvas ringi liikmete arv?

4. SIRGETE PARALLEELSUS.

4.1. KAHE SIRGE VASTASTIKUNE ASEND TASANDIL.

Me teame, et kui sirge kaks punkti A ja B asetsevad tasandil α , siis sirge AB asetseb tervenisti tasandil α . Seda tõsiasja märgime kujul

$$\left. \begin{array}{l} A \in \alpha \\ B \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow AB \subset \alpha.$$

Viimast kirjutust loeme: *sirge AB asetseb tasandil α .*

Olgu tasandil α antud kaks sirget u ja v : $u \subset \alpha$, $v \subset \alpha$. Vaatleme nende sirgete vastastikust asendit sõltuvalt sirgete ühiste punktide arvust.

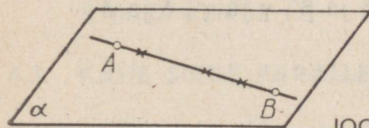
Kui sirgetel u ja v ei ole ühtki ühist punkti, siis need sirged on **paralleelsed**: $u \parallel v$. Paralleelsed sirged saame näiteks, kui mingile sirgele s joonestame kaks ristsirget u ja v :

$$\left. \begin{array}{l} u \perp s \\ v \perp s \end{array} \right\} \Rightarrow u \parallel v \text{ (joon. 38).}$$

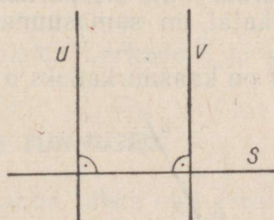
Kui sirgetel u ja v on üks ja ainult üks ühine punkt, siis ütleme, et sirged **lõikuvad** selles ühises punktis. Kaks lõikuvat sirget saame näiteks, kui mingil sirgel s võtame suvalise punkti L ja väljaspool sirget s teise punkti M ning paneme neist läbi sirge $t \equiv LM$ (joon. 39). Sirgete s ja t lõikumist punktis L märgime kujul $s \cap t = L$.

Kui sirgetel u ja v on kaks ühist punkti, siis neil on kõik punktid ühised ja sirged **ühtivad**: $u \equiv v$. Niisugused sirged saame näiteks, kui kahe punktiga A ja B määratud sirgel võtame neist punktidest erinevad punktid C ja D ning vaatleme sirgeid AB ja CD (joon. 40):

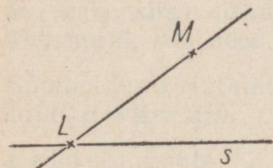
$$\left. \begin{array}{l} C \in AB \\ D \in AB \end{array} \right\} \Rightarrow AB \equiv CD.$$



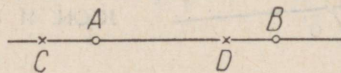
JOON. 37



JOON. 38



JOON. 39



JOON. 40

Viimasel juhul on tegemist ühe ja sama sirgega, mis on määratud kahel erineval viisil. Kokku võttes saame, et tasandi kaks erinevat sirget kas lõikuvad või on paralleelsed.

Märgime, et kahe geomeetrilise kujundi ühtimise tähistamiseks kasutame samasusmärki \equiv . Näiteks, kui AB ja CD on lõigud, siis samasus $AB \equiv CD$ tähendab, et neil lõikudel on ühised otspunktid, võrdus $AB = CD$ tähendab aga, et need lõigud on võrdsed, kuid nad ei tarvitse olla ühtivad.

407. Ruudu tippudeks on punktid A, B, C ja D . Mitu sirget on määratud nende punktidega? Määra iga kahe saadud sirge vastastikune asend.
408. Sirgete a, b ja c kohta on teada, et $a \equiv b(c)$. Määra sirgete a, b ja c kõik vastastikuse asendi võimalused ja esita need joonisel.
409. Millal punktid A ja $A' \equiv s(A)$ ei määra sirget?
410. On antud kaks paari sirge s suhtes sümmeetrilisi punkte: $A' \equiv s(A)$ ja $B' \equiv s(B)$. Uuri järgmiste sirgete vastastikuse asendi võimalusi: 1) AA' ja BB' ; 2) AB' ja BA' .

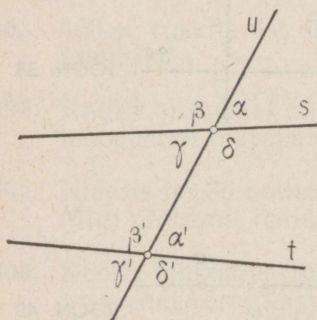
4.2. NURGAD, MIS TEKIVAD KAHE SIRGE LÕIKAMISEL SIRGEGA.

Lõikame kaht sirget s ja t mingi kolmanda sirgega u (joon. 41). Tähistame sirgete u ja s lõikumisel tekkinud nurgad tähtedega α, β, γ ja δ , sirgete u ja t lõikumisel tekkinud nurgad aga tähtedega α', β', γ' ja δ' , nagu on näidatud joonisel.

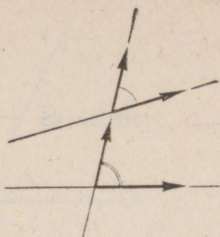
Vaatleme nurgapaare, mille ühe nurga tipuks on sirgete u ja s lõikepunkt, teise tipuks aga sirgete u ja t lõikepunkt. Mõnele sellisele paarile on antud erinimetus.

1) Kaht nurka, mille sisepiirkonnad on ühel pool lõikajat ja mille haarad lõikajal on samasuunalised, nimetatakse **kaasnurkadeks** (joon. 42).

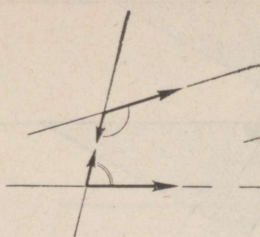
Joonisel 41 on kaasnurkadeks α ja α' , β ja β' , γ ja γ' , δ ja δ' .



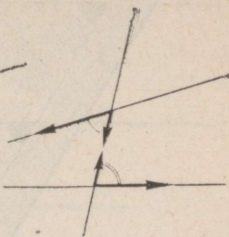
JOON. 41



JOON. 42



JOON. 43



JOON. 44

2) Kaht nurka, mille sisepiirkonnad on ühel pool lõikajat ja mille haarad lõikajal on vastandsuunalised, nimetatakse **lähisnurkadeks** (joon. 43).

Joonisel 41 on lähisnurkadeks γ ja β' , δ ja α' .

3) Kaht nurka, millest ühe sisepiirkond on ühel ja teise teisel pool lõikajat ja mille haarad lõikajal on vastandsuunalised, nimetatakse **põiknurkadeks** (joon. 44).

Joonisel 41 on põiknurkadeks γ ja α' , δ ja β' .

411. Kuidas nimetatakse nurki α ja γ , β' ja δ' , γ ja δ , α' ja γ' , γ' ja β' joonisel 41?

412. Arvuta joonisel 41 esinevad nurgad, mis on tekkinud kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega, kui 1) $\alpha = 54^\circ$ ja $\beta = \beta'$.
2) $\delta = 67^\circ$ ja $\gamma + \beta' = 145^\circ$.

413. Arvuta nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega, kui kahe kaasnurga summa on 153° ja üks neist on 70° .

414. Kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega on tekkinud üks paar võrdseid kaasnurki, näiteks $\alpha = \alpha'$ (joon. 41). Mis saab öelda siis teiste kaasnurkade kohta? põiknurkade kohta? lähisnurkade kohta?

415. Joonisel 41 $\gamma = \alpha'$. Mis saab öelda nurkade δ ja α' , α ja α' , β ja β' kohta?

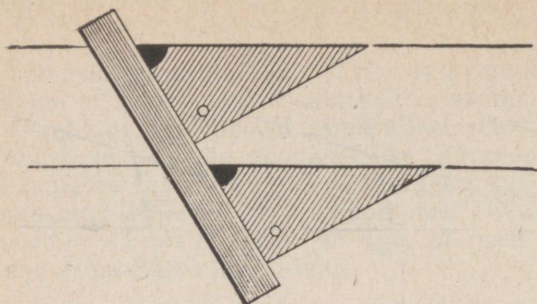
4.3. KAHE SIRGE PARALLEELSUSE TUNNUSED.

Paralleelseid sirgeid oleme joonestanud lükke abil (joon. 45). See joonestamisvõte põhineb järgmisel teoreemil:

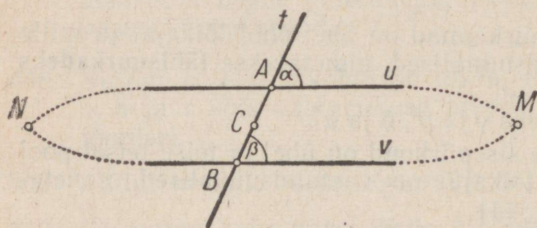
kui kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekib paar võrdseid kaasnurki, siis need kaks sirget on paralleelsed.

Sümbolites kirjutame sõnastatud teoreemi joonise 46 tähiste põhjal kujul $\alpha = \beta \Rightarrow u \parallel v$.

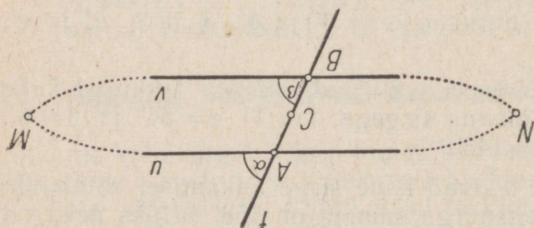
Eeldus. $\alpha = \beta$.



JOON. 45



JOON. 46



JOON. 47

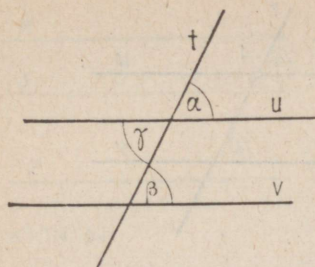
Väide. $u \parallel v$.

Tõestus. Pöörame joonise lõigu AB keskpunkti C ümber 180° võrra (joon. 47). Siis

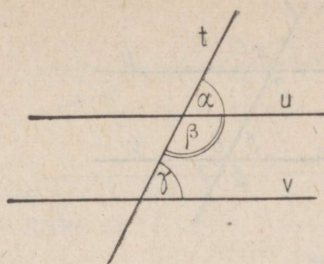
- 1) punktide A ja B asukohad vahetuvad, sest lõigud CA ja CB on võrdsed;
- 2) nurk α satub nurga β tippnurga endisesse asendisse ja nurk β nurga α tippnurga endisesse asendisse;
- 3) sirgete u ja v asendid vahetuvad.

Nii näeme, et kogu joonis ühtib oma endise asendiga. Kui sirged u ja v lõikuvad ühel pool sirget t (näiteks paremal punktis M), siis kirjeldatud pööramine näitab, et neil leiduks veel teine lõikepunkt teisel pool sirget t (punkt N). Et kaks sirget saavad lõikuda ainult ühes punktis, siis u ja v ei või lõikuda, s. t. $u \parallel v$.

Seda teoreemi nimetame kahe sirge paralleelsuse esimeseks tunnuseks. Sellest tunnusest järeldub, et nurklaua nihutamisel piki paigalseisvat joonlauda (joon. 45), s. o. lükke abil



JOON. 48



JOON. 49

saab sirgele joonestada tõepoolest paralleelse sirge. Nende sirgete lõikamisel sirgega (joonlaua serv) tekib paar võrdseid kaasnurki (nurklaua üks ja sama nurk kahes asendis).

Kasutades kahe sirge paralleelsuse esimest tunnust, saab kergesti tõestada teise tunnuse:

kui kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekib paar võrdseid põiknurki, siis need kaks sirget on paralleelsed.

Lühidalt kirjutame teoreemi kujul (joon. 48): $\gamma = \beta \Rightarrow u \parallel v$.

Eeldus. $\gamma = \beta$.

Väide. $u \parallel v$.

Tõestus. Et eelduse järgi $\gamma = \beta$ ja tippnurkadena $\gamma = \alpha$ (joon. 48), siis ka $\alpha = \beta$. Seega on sirgete u ja v lõikamisel sirgega t tekkinud paar võrdseid kaasnurki. Nüüd järeldub esimese tunnuse põhjal, et $u \parallel v$. Lühidalt:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma = \beta \text{ (eeldus)} \\ \alpha = \gamma \text{ (tippnurgad)} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow u \parallel v \text{ (I tunnuse põhjal).}$$

Analoogiliselt saame tõestada veel kahe sirge paralleelsuse kolmanda tunnuse:

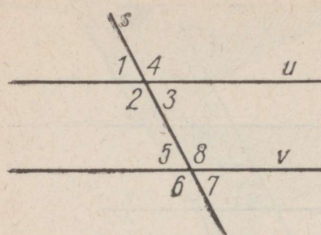
kui kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekib paar lähisnurki, mille summa on sirgnurk, siis need kaks sirget on paralleelsed.

Sümbolites (joon. 49):

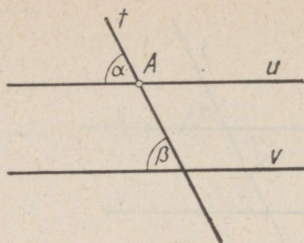
$$\beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow u \parallel v.$$

Tõestus (lühidalt).

$$\left. \begin{array}{l} \beta = \gamma = 180^\circ \text{ (eeldus)} \\ \beta + \alpha = 180^\circ \text{ (kõrvnurgad)} \end{array} \right\} \Rightarrow \beta + \alpha = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow u \parallel v.$$



JOON. 50



JOON. 51

416. Sirgete u ja v lõikamisel sirgega s on tekkinud nurgad, mis on tähistatud joonisel 50 näidatud viisil. Näita, et $u \parallel v$, kui on teada järgmist:

- 1) $\angle 1 = \angle 7$; 2) $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$; 3) $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$;
- 4) $\angle 2 = 108^\circ$ ja $\angle 4 - \angle 5 = 36^\circ$; 5) $\angle 7 = 54^\circ$ ja $\angle 8 - \angle 3 = 72^\circ$.

417. Joonis 51 näitab, kuidas antud sirgele v joonestada paralleelne sirge u läbi antud punkti A , mis ei asetse sirgel v , kasutades joonlauda ja sirkli. Abisirge t on joonestatud vabalt. Mis edasi teha? Millise tunnuse põhjal $u \parallel v$? Lahenda see ülesanne vihikus.

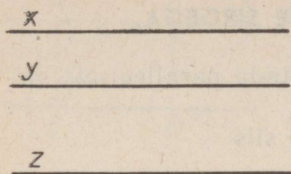
418. Joonesta sirkli ja joonlaua abil antud sirgega paralleelne sirge läbi väljaspool sirget antud punkti, rakendades sirgete paralleelsuse teist tunnust.

4.4. PARALLEELIDE AKSIOOM JA JÄRELDUSI SELLEST.

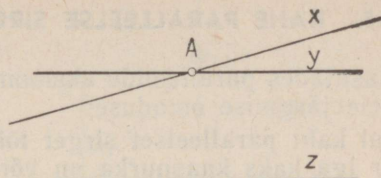
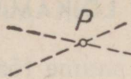
Läbi antud punkti (punkt A joonisel 51) saab antud sirgele (sirge v joonisel 51) joonestada paralleelse sirge mitmel viisil. Tekib küsimus, kas sõltuvalt joonestamisviisist saame erinevad sirged või ühe ja sama sirge, s. t. kas läbi antud punkti võiks minna peale sirge u veel mõni teine sirge, mis oleks paralleelne sirgega v . Proovides joonestada neid sirgeid, näib, et teist niisugust sirget ei saa olla, see tähendab,

läbi punkti väljaspool sirget ei lähe rohkem kui üks sirge, mis on paralleelne antud sirgega.

Seda lauset me tõestada ei oska. Me loeme ta õigeks tõestuseta ja kasutame aksiomina teiste lausete tõestamisel, nimetades seda lauset **paralleelide aksiomiks**. Sellest aksiomist järeldub, et peale ühe kõik sirged, mis läbivad punkti A joonisel 51, lõikuvad sirgega v .



JOON. 52



JOON. 53

Paralleelide aksioom esineb (üalalloodust mõnevõrra teisel kujul) juba kreeka matemaatiku Eukleidese teoses «Elemendid», mis on kirjutatud 3. saj. algul e. m. a. ja sisaldab enamiku sel ajal tuntud geomeetriast. Pärast Eukleidest püüti tema poolt kasutatud paralleelide aksioomi ligi 2000 aasta vältel tõestada, kuid need tõestamiskatsed ei õnnestunud. Nende katsete nurjumine viis XIX sajandi esimesel poolel vene matemaatiku N. Lobatševski, ungari matemaatiku J. Bolyai ja saksa matemaatiku C. F. Caussi üksteisest sõltumatult mõttele, et on võimalik niisugune geomeetria, milles paralleelide aksioom puudub või on asendatud üalalloodust hoopis erineva aksioomiga. See geomeetria erineb «harilikust» ehk «eukleidilisest» geomeetriast. Esimesena avaldas oma uurimusi «mitteeukleidilise» geomeetria alalt Kaasani ülikooli matemaatikaprofessor Nikolai Ivanovitš Lobatševski (elas 1793—1856).

Paralleelide aksioomil on palju järeldusi. Märgive siin kaks neist.

Kui kumbki kahest sirgest on paralleelne ühe ja sama sirgega, siis need kaks sirget on paralleelsed.

Eeldus. $x \parallel z$ ja $y \parallel z$ (joon. 52).

Väide. $x \parallel y$.

Tõestus. Kaks erinevat sirget x ja y kas lõikuvad või on paralleelsed. Kui nad lõikuksid mingis punktis P , siis seda punkti läbiks kaks sirgega z paralleelset sirget, nimelt x ja y . Kuid see on vastuolus paralleelide aksioomiga, tähendab, jääb üle, et $x \parallel y$.

Kui sirge lõikab üht kahest paralleelsest sirgest, siis lõikab ta ka teist.

Eeldus. $x \cap y = A$ ja $y \parallel z$ (joon. 53).

Väide. $x \cup z \neq \emptyset$.

Tõestus. Sirged x ja z on kaks erinevat sirget. Seega x ja z on kas paralleelsed või lõikuvad. Kui nad oleksid paralleelsed, siis läbi punkti A läheks kaks sirget, mis oleksid paralleelsed sirgega z , nimelt $x \parallel z$ ja $y \parallel z$. Kuid paralleelide aksioomi järgi pole see võimalik. Tähendab, jääb üle, et sirged x ja z lõikuvad.

4.5. KAHE PARALLEELSE SIRGE LÕIKAMINE SIRGEGA.

Kasutades paralleelide aksiomi, saame tõestada paralleelsete sirgete järgmise omaduse:

kui kaht paralleelset sirget lõigata sirgega, siis

- 1) iga kaks kaasnurka on võrdsed,
- 2) iga kaks põiknurka on võrdsed,
- 3) iga kahe lähisnurka summa on sirgnurk.

Tõestame teoreemi esmalt ainult ühe paari kaasnurkade kohta, näiteks nurkade α ja β kohta (joon. 54).

Eeldus. $u \parallel v$.

Väide. $\alpha = \beta$.

Tõestus. Nurkade α ja β kohta on õige üks ja ainult üks kahest väitest: kas $\alpha = \beta$ või $\alpha \neq \beta$. Oletame, et on õige teine väide, s. t. $\alpha \neq \beta$. Sel juhul joonestame läbi punkti A sirge u' nii, et nurga β kaasnurk $\alpha' = \beta$. Kuid kahe sirge paralleelsuse esimese tunnuse järgi, siis $u' \parallel v$. Et eelduse järgi ka $u \parallel v$, siis läbib punkti A kaks sirget u ja u' , mis on paralleelsed sirgega v . Kuid see on vastuolus paralleelide aksiomiga. See näitab, et meie oletus $\alpha \neq \beta$ on väär. Jääb üle, et väide $\alpha = \beta$ on õige.

Samal viisil saab teoreemi tõestada ka teiste nurgapaaride kohta (vt. ka üles. 414).

Nüüd saame tõestada järgmise teoreemi.

Kui sirge on risti ühega kahest paralleelsest sirgest, siis ta on risti ka teisega.

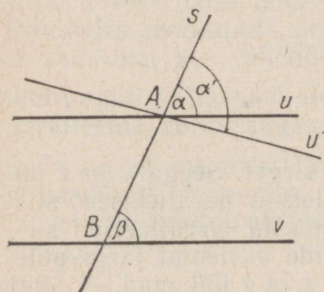
Eeldus. $s \perp u$ ja $u \parallel v$ (joon. 55).

Väide. $s \perp v$.

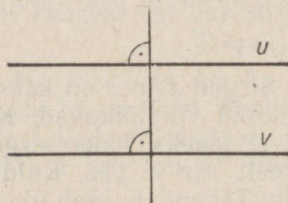
Tõestus. Et sirge s lõikab üht kahest paralleelsest sirgest u , siis ta lõikab ka teist, s. o. sirget v . Paralleelsete sirgete u ja v lõikamisel sirgega s tekivad võrdsed kaasnurgad. Joonisel 55 kaarega märgitud kaasnurkadest üks nurk on täisnurk, sest $s \perp u$. Seega on täisnurk ka teine neist kaasnurkadest, s. t. $s \perp v$.

Kasutades viimast teoreemi, saame näidata, et

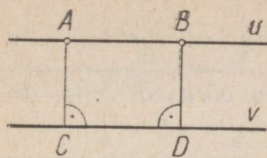
kahe paralleelse sirge vaheline kaugus on igal pool üks ja sama.



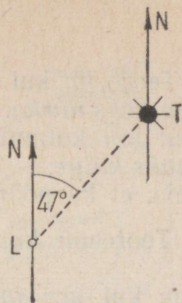
JOON. 54



JOON. 55



JOON. 56



JOON. 57

Eeldus. $u \parallel v$ (joon. 56).

Väide. Sirgete u ja v vaheline kaugus on igal pool üks ja sama.
Tõestus. Võtame ühel neist sirgetest, näiteks sirgel u punktid A ja B ning joonestame neist lõigud $AC \perp v$ ja $BD \perp v$. Eelmise teoreemi põhjal on tekkinud nelinurga $ABDC$ nurgad A ja B täisnurgad. Et ka nurgad C ja D on täisnurgad, siis on nelinurk $ABDC$ ristkülik. Kuid ristküliku vastasküljed on võrdsed: $AC = BD$, millest näeme, et sirgete u ja v vaheline kaugus on igal pool üks ja sama, sest punktid A ja B on sirgel u vabalt võetud.

419. Joonesta vabalt kaks paralleelset sirget ja leia nende vaheline kaugus.
420. Kaks paralleelset sirget on lõigatud kolmanda sirgega nii, et üks tekkinud kaheksast nurgast on 57° . Kui suured on teised nurgad?
421. Kaks laeva sõidavad paralleelsetel kurssidel, üks läänest itta, teine idast läände. Esimeselt laevalt paistab teine parajasti kirdesuunas. Mis suunas paistab sel momendil teiselt laevalt esimene?
422. Kaks lennukit lendavad paralleelsetel kurssidel, üks lõunast põhja, teine põhjast lõunasse. Esimeselt lennukilt paistab teatud momendil teine lennuk suunas, mis on põhjasuunast 35° ida pool (lühemalt suunas $N35^\circ E$). Mis suunas paistab sel momendil teiselt lennukilt esimene?
423. Laevalt L peiliti tuletorni T suunas $N47^\circ E$ (joon. 57). Mis suunas paistis sel momendil tuletornist laev? Kui suur on $\angle LTN$?
424. Kaks paralleelset sirget on lõigatud kahe sirgega nii, et tekkinud nelinurga kaks vastasnurka on 73° ja 127° . Kui suured on selle nelinurga ülejäänud nurgad?

4.6. TEOREEM JA PÖÖRDTEOREEM.

Olgu antud teoreem $p \Rightarrow q$. Kui selles teoreemis eeldus ja väide ümber vahetada, siis saame uue teoreemi, mida nimetatakse antud teoreemi **pöördteoreemiks**. See pöördteoreem on: $q \Rightarrow p$.

Näide 1. Teoreem: kui kolmnurgas *kaks külge on võrdsed*, siis *on võrdsed ka kaks nurka*.

Pöördteoreem: kui kolmnurgas *kaks nurka on võrdsed*, siis *on võrdsed ka kaks külge*.

Paneme tähele, et ka pöördteoreem on õige.

Näide 2. Teoreem: kui arvu *ristsumma jagub 9-ga*, siis *arv jagub 3-ga*.

Pöördteoreem: kui *arv jagub 3-ga*, siis *arvu ristsumma jagub 9-ga*. Paneme tähele, et pöördteoreem on väär: näiteks arv 15 jagub 3-ga, kuid tema ristsumma (6) ei jagu 9-ga. Seega pöördteoreemi õigsus (ehk kehtivus) ei järeldu otsese teoreemi õigsusest, seda tuleb eraldi tõestada.

Näide 3. Teoreemi kahe paralleelse sirge lõikamisest sirgega saab vaadelda koosnevana kolmest lihtsamast teoreemist, millel on üks ja sama eeldus, kuid erinevad väited. Kirjutame need kolm teoreemi üles joonisel 58 kasutatud sümbolite abil:

$$u \parallel v \Rightarrow \alpha = \beta, \quad (1)$$

$$u \parallel v \Rightarrow \gamma = \beta, \quad (2)$$

$$u \parallel v \Rightarrow \beta + \delta = 180^\circ. \quad (3)$$

Sõnasta need kolm teoreemi.

Vahetame nendes teoreemides eelduse ja väite:

$$\alpha = \beta \Rightarrow u \parallel v, \quad (I)$$

$$\gamma = \beta \Rightarrow u \parallel v, \quad (II)$$

$$\beta + \delta = 180^\circ \Rightarrow u \parallel v. \quad (III)$$

Sõnasta saadud teoreemid.

Viimased kolm teoreemi väljendavad kahe sirge paralleelsuse tunnuseid. Niisiis, kahe sirge paralleelsuse tunnused ja teoreemid kahe paralleelse sirge lõikamisest on teineteise pöördteoreemid.

425. Vaheta antud teoreemides eeldus ja väide ning otsusta, kas saadud lause on õige või väär.

1) Kui arv lõpeb 5-ga, siis ta jagub 5-ga.

2) Kui arvu ristsumma jagub 3-ga, siis see arv jagub 3-ga.

3) Kui arv on suurem kui 2, siis tema ruut on suurem kui 4.

4) Kui kumbki kahest liidetavast jagub 7-ga, siis ka nende summa jagub 7-ga.

5) $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$.

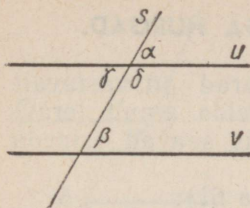
6) $a < b \Rightarrow a + 3 < b + 3$.

7) Kui kolmnurk on täisnurkne; siis ta pole nürinurkne.

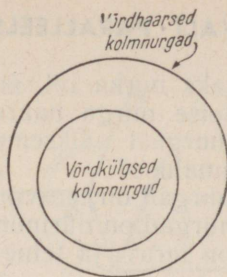
Kui antud (ehk otsene) teoreem on õige ja ka selle pöördteoreem on õige, s. t. kui $p \Rightarrow q$ ja ka $q \Rightarrow p$, siis öeldakse, et laused p ja q on **samaväärsed**. Näiteks laused *Kolmnurga kaks külge on võrdsed* ja *Kolmnurga kaks nurka on võrdsed* on samaväärsed, sest esimesest järeldub teine ja, ümberpöördult, teisest esimene.

Kahe lause p ja q samaväärsust märgitakse kujul

$p \Leftrightarrow q$.



JOON. 58



JOON. 59

Märki \Leftrightarrow loetakse *on samaväärne*. Näiteks *Arv jagub 9-ga* \Leftrightarrow *arvu ristsumma jagub 9-ga* tähendab, et lause *Arv jagub 9-ga* on samaväärne lausega *Arvu ristsumma jagub 9-ga*.

426. Uuri, kas järgnevate lausete p ja q vahel kehtib seos $p \Rightarrow q$ või $q \Rightarrow p$ või $p \Leftrightarrow q$.

Sõnasta kõik siit tulenevad õiged teoreemid.

- 1) Lause p : x ja y on naturaalarvud; lause q : $x+y$ on naturaalarv.
- 2) Lause p : x on naturaalarv; lause q : $x+7$ on naturaalarv.
- 3) Lause p : $x+y$ on paarisarv; lause q : x on paarisarv ja y on paarisarv.
- 4) Lause p : $x+y$ jagub 5-ga; lause q : x jagub 5-ga ja y jagub 5-ga.
- 5) Lause p : x ja y on ühistegurita arvud; lause q : $VUK(x, y) = xy$.
- 6) Lause p : $xy > 0$; lause q : $\frac{x}{y} > 0$.

427. Teoreemi *Kui kolmnurk on võrdkülgne, siis on ta võrdhaarne* saame sõnastada ka nii: *Iga võrdkülgne kolmnurk kuulub võrdhaarsete kolmnurkade hulka*. Sama mõtet saame väljendada veel lausega *Võrdkülgsete kolmnurkade hulk on võrdhaarsete kolmnurkade hulga osahulk* (joon. 59).

Sõnasta järgmised laused mõiste *hulk* ja *osahulk* abil. Tee hulkadevaheliste seoste kohta vastavad joonised.

- 1) Kui arv lõpeb 0-ga, siis ta jagub 5-ga.
- 2) Kui antud arv on täisarv, siis on ta ratsionaalarv.
- 3) Kui arv lõpeb kahega, siis on ta paarisarv.
- 4) Kui kolmnurgad on võrdsed, siis on ka nende pindalad võrdsed.
- 5) Kui kujund on rööpkülik, siis on ta nelinurk.
- 6) Kui kaks sirget ristuvad, siis nad ka lõikuvad.

4.7. VASTAVALT PARALLEELSETE HAARADEGA NURGAD.

Joonestame kaks nurka nii, et ühe nurga haarad on vastavalt paralleelsed teise nurga haaradega. Kui vaadelda ainult teravnurki ja sirgnurgast väiksemaid nürinurki, siis saavad esineda järgmised võimalused:

- 1) mõlemad nurgad on teravnurgad (joon. 60 ja 61);
 - 2) mõlemad nurgad on nürinurgad (joon. 62 ja 63);
 - 3) üks nurk on terav- ja teine on nürinurk (joon. 64).
- Tõestame, et

vastavalt paralleelsete haaradega nurgad on võrdsed, kui mõlemad nurgad on teravnurgad või mõlemad nurgad on nürinurgad, ja nende nurkade summa on sirgnurk, kui üks nurk on terav- ja teine nürinurk.

Eeldus. Nurkade A ja B haarad on vastavalt paralleelsed:

$$k \parallel m \text{ ja } l \parallel n \text{ (joon. 60–64).}$$

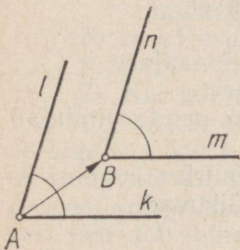
Väide. 1) $\angle A = \angle B$, kui A ja B on mõlemad teravnurgad või mõlemad nürinurgad (joon. 60–63).

2) $\angle A + \angle B = 180^\circ$, kui üks nurkadest on terav- ja teine nürinurk (joon. 64).

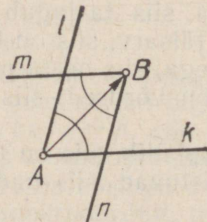
Tõestus. Viime lükke abil ühe nurga, näiteks nurga A asendisse, kus tema tipp A ühtib teise nurga tipuga B . Siis nende nurkade iga kaks paralleelset haara kas ühtivad (kui nad on samasuunalised, nagu k ja m joonisel 60) või moodustavad sirge (kui nad on vastandsuunalised, nagu k ja m joonisel 61). Lükke tulemusel nurgad A ja B ühtivad (joon. 60 ja 62) või moodustavad tippnurkade paari (joon. 61 ja 63) või kõrvunurkade paari (joon. 64). Esimesel ja teisel juhul $\angle A = \angle B$ ja kolmandal juhul $\angle A + \angle B = 180^\circ$.

428. Põhjenda rööpküliku vastasnurkade võrdsust äsjatõestatud teoreemi abil.

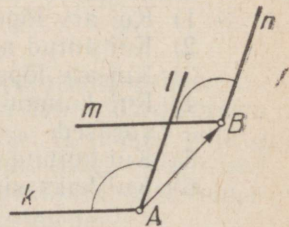
429. Joonesta kaks vastavalt paralleelsete haaradega terav- või nürinurka ja tõesta nende võrdsus, kasutades teoreemi kahe paralleelse sirge lõikamisest sirgega.



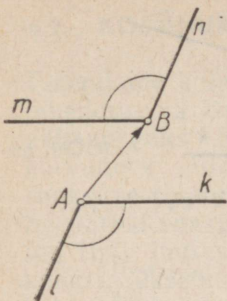
JOON. 60



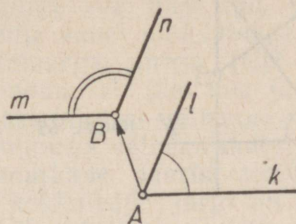
JOON. 61



JOON. 62



JOON. 63



JOON. 64

430. Joonesta kaks vastavalt paralleelsete haaradega nurka nii, et üks nurk on terav- ja teine nürinurk. Tõesta, et nende nurkade summa on sirgnurk, kasutades teoreemi kahe paralleelse sirge lõikamisest sirgega.
431. Kahest vastavalt paralleelsete haaradega nurgast üks on $\frac{4}{11}$ teisest. Kui suur on kumbki nurk?
432. Kahest vastavalt paralleelsete haaradega nurgast üks on teisest 76° võrra suurem. Kui suur on kumbki nurk?

4.8. VASTAVALT RISTUVATE HAARADEGA NURGAD.

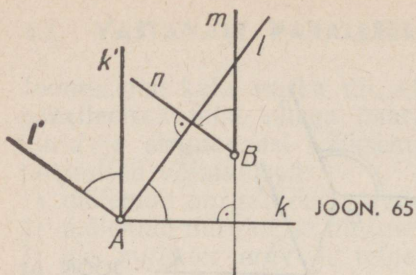
Joonestame kaks nurka nii, et ühe nurga haarad on vastavalt risti teise nurga haaradega. Vaatleme juhte, kus

- 1) mõlemad nurgad on teravnurgad (joon. 65),
- 2) mõlemad nurgad on nürinurgad (joon. 66),
- 3) üks nurk on terav- ja teine on nürinurk (joon. 67).

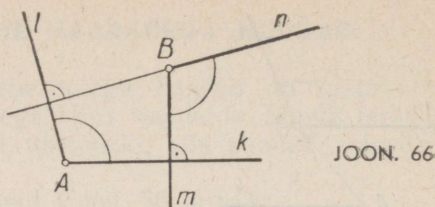
Kui pöörata üht neist nurkadest, näiteks nurka A tema tipu ümber täisnurga võrra (ükskõik kummas suunas), siis saame kaks vastavalt paralleelsete haaradega nurka (näiteks joonisel 65 saame $k' \parallel m$ ja $l' \parallel n$). Et nurga suurus pööramisel ei muutu, siis kehtib vastavalt ristuvate haaradega nurkade kohta igal vaadeldaval juhul sama teoreem, mille tõestasime vastavalt paralleelsete haaradega nurkade kohta. Seega:

vastavalt ristuvate haaradega nurgad on võrdsed, kui mõlemad nurgad on teravnurgad või mõlemad nurgad on nürinurgad, ja nende nurkade summa on sirgnurk, kui üks nurk on terav- ja teine nürinurk.

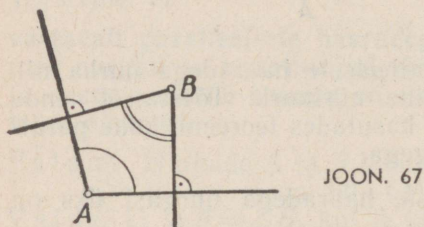
433. Täisnurkses kolmnurgas ABC on täisnurga tipust C joonestatud kõrgus CD . Näita, et nurgad ACD ja CBD on vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad. Mis sellest järeldub nende nurkade suuruse kohta?



JOON. 65



JOON. 66



JOON. 67

434. Võrdhaarses kolmnurgas ABC , mille alus on BC , on joonestatud kõrgused AD ja BE . Näita, et nurgad CAD ja EBC on vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad. Järelda siit, et võrdhaarse kolmnurga haarale joonestatud kõrguse ja kolmnurga aluse vaheline nurk on pool kolmnurga tipunurgast.
435. Joonesta mingi teravnurk, võta selle sees punkt ja tõmba sellest kaks kiirt, mis on vastavalt risti võetud nurga haaradega. Leia nende kiirte vahelise nurga suurus, kui võetud teravnurga suurus on α .
436. Teravnurkse kolmnurga ABC tippudest A ja B on joonestatud kolmnurga kõrgused, millevaheline teravnurk on 67° . Leia
 1) kolmnurga nurga C suurus;
 2) tipust A tõmmatud kõrguse ja külje AC vahelise nurga suurus.
437. Kahe vastavalt ristuvate haaradega nurga vahe on 34° . Kui suur on kumbki nurk?
438. Läbi nürinurga tipu on joonestatud nurga haaradega ristuvad sirged. Nende sirgete vaheline nurk on 42° . Kui suur on antud nürinurk?
439. Kahest vastavalt ristuvate haaradega nurgast on üks teisest kolm korda suurem. Kui suur on kumbki nurk?
440. Teravnurga β üks haar on risti nurga α ühe haaraga ja β teine haar on paralleelne nurga α teise haaraga. Avalda nurk β nurga α kaudu juhul, kui α on teravnurk, ja juhul, kui α on nürinurk.

4.9. KOLMNURGA NURKADE OMADUSI.

Pikendame kolmnurga mingit külge üle ühe tipu. Nurka selle pikenduse ja kolmnurga teise külje vahel nimetatakse kolmnurga välisnurgaks. See nurk on kolmnurga nurga (ehk sisenurga) kõrvunurk. Mõlema külje pikendamisel üle ühe ja sama tipu saaksime tippnurkade paarina kaks võrdset välisnurka (joon. 68). Seepärast edaspidi, kõneldes kolmnurga välisnurkadest, arvestame iga tipu juures leiduvast välisnurkade paarist ainult üht neist kahest, ükskõik kumba. Selle kokkuleppe järgi on kolmnurgal kolm välisnurka, iga tipu juures üks. Kolmnurga välisnurka tähistame sümbooliga α_1 või β_1 või γ_1 vastavalt sellele, missuguse sisenurga kõrvunurk ta on.

Tõestame, et

kolmnurga välisnurk võrdub temaga mitte kõrvuti asetsevate sisenurkade summaga.

Eeldus. $\angle ECB = \gamma_1$ on kolmnurga üks välisnurk, α ja β on temaga mitte kõrvuti asetsevad sisenurgad (joon. 69).

Väide. $\gamma_1 = \alpha + \beta$.

Tõestus. Joonestame läbi nurga γ_1 tipu C paralleeli CD vastasküljele AB . See sirge jaotab välisnurga kaheks nurgaks α' ja β' (joon. 69). Et paralleelsete sirgete AB ja CD lõikamisel sirgega AC tekivad võrdsed kaasnurgad ja võrdsed põiknurgad, siis $\alpha = \alpha'$ ja $\beta = \beta'$.

Nende võrduste vastavate poolte liitmisel saame, et

$\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ ehk $\alpha + \beta = \gamma_1$.

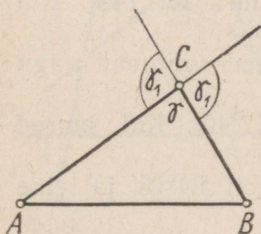
Samal viisil saame teoreemi tõestada ülejäänud välisnurkade kohta.

Kolmnurga välisnurga omadusest järeldub kergesti juba tuntud teoreem kolmnurga nurkade summa kohta. Tõestuseks on vaja võrduse $\alpha + \beta = \gamma_1$ mõlema poolega liita nurk γ . Et $\gamma_1 + \gamma = 180^\circ$, siis

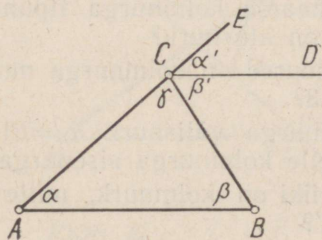
$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Teoreemist kolmnurga nurkade summa kohta järeldub, et

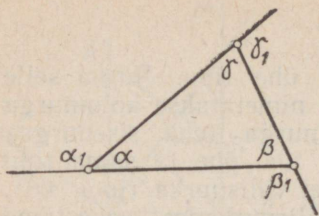
1) kolmnurga kahe nurga summa on väiksem kui 180° ;



JOON. 68



JOON. 69



JOON. 70

2) kolmnurgas ei saa olla rohkem kui üks täisnurk või üks nürinurk ja samuti ei saa kolmnurgas olla täisnurk ja nürinurk, sest vastasel juhul peaks sisenurkade summa olema suurem kui sirg-nurk.

Viimase teoreemina kolmnurga nurkade kohta tõestame, et kolmnurga välisnurkade summa on täispööre.

Eeldus. α_1 , β_1 ja γ_1 on kolmnurga välisnurgad (joon. 70).

Väide. $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ$.

Tõestus. Kolmnurga iga tipu juures oleva sisenurga ja välisnurga summa on 180° (joon. 70). Seega

$$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ, \quad \beta + \beta_1 = 180^\circ \quad \text{ja} \quad \gamma + \gamma_1 = 180^\circ.$$

Nende võrduste vastavate poolte liitmisel leiame, et

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 540^\circ.$$

Et esimese kolme liidetava summa on 180° , siis

$$180^\circ + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 540^\circ.$$

Lahutades selle võrduse mõlemast pooltest 180° , jääb

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ.$$

441. Kui suur on täisnurkse kolmnurga teravnurkade summa?
442. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on $37^\circ 48'$. Kui suur on teine teravnurk?
443. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on $72^\circ 54'$. Kui suured on alusnurgad?
444. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on tipunurgast 14° suurem. Arvutada nurkade suurused.
445. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on $52^\circ 10'$. Kui suured on selle kolmnurga välisnurgad?
446. Kui suur on võrdkülgse kolmnurga nurk?
447. Võrdhaarse kolmnurga tipunurga kõrvnurk on 148° . Kui suur on alusnurk?
448. Kui suured on kolmnurga nurgad, kui need suhtuvad nagu $1 : 2 : 3$?
449. Kolmnurga välisnurk $\alpha_1 = 81^\circ$ ja $\gamma_1 = 117^\circ 40'$. Kui suured on selle kolmnurga sisenurgad?
450. Mis liiki on kolmnurk, mille üks nurk on $34^\circ 15'$ ja teine $55^\circ 45'$?

451. Kolmnurga üks sisenurk on $38^{\circ}40'$ ja teine $56^{\circ}20'$. Kui suur on kolmanda tipu juures olev välisnurk?
452. Võrdhaarse kolmnurga aluse juures olev välisnurk on 132° . Kumb on pikem, kas selle kolmnurga alus või haar?
453. Täisnurkse kolmnurga teravnurk $\alpha=38^{\circ}$ on poolitatud. Kui suured on sellel poolitamisel tekkiva nürinurkse kolmnurga nurgad?
454. Tõesta, et täisnurkses kolmnurgas 30° -se teravnurga vastas-kaatet on pool hüpotenuusi.
455. Jaota sirkli ja joonlaua abil täisnurk kolmeks võrdseks nurgaks.

4.10. KUMERA HULKNUURGA NURKADE OMADUSI.

Teame, et kumera hulknurga iga külje pikendamisel saadakse sirge, millest hulknurga sisepiirkond asetseb ühel pool. Ümberpöörduvalt, kui see tingimus on täidetud, siis hulknurk on kumer, vastasel juhul mittekumer. Nii saame näidata, et viisnurk $ABCDE$ joonisel 71 on kumer, kuid nelinurk $KLMN$ joonisel 72 on mittekumer, sest nelinurga külje LM pikendamisel saadakse sirge, millest nelinurga sisepiirkond ei asetse ühel pool.

Edaspidi vaatleme ainult kumeraid hulknurki. Kumera hulknurga iga nurk (ehk sisenurk) on väiksem kui sirgnurk, kuna mittekumeral hulknurgal võib see olla sirgnurgast suurem, nagu nurk LMN joonisel 72.

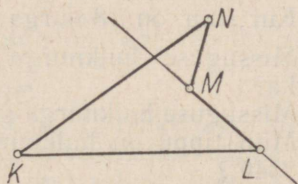
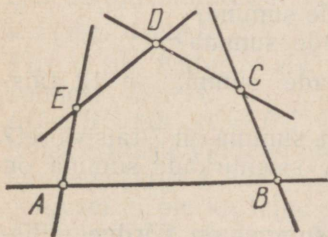
Hulknurga nurkade kohta tunneme juba teoreemi

hulknurga sisenurkade summa on $(n-2) 180^{\circ}$, kus n on hulknurga tippude arv.

Kui pikendame hulknurga mingit külge üle ühe tipu, siis saame selle hulknurga ühe välisnurga. Iga välisnurk on ühe sisenurga kõrvnurk (joon. 73).

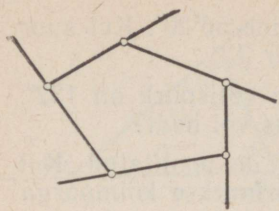
Tõestame, et

hulknurga välisnurkade summa on täispööre.

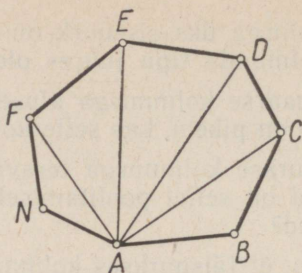


JOON. 71

JOON. 72



JOON. 73



JOON. 74

Tõestus. Olgu hulknurgal n tippu. Et iga tipu juures on üks sisenurk ja üks välisnurk, mille summa on 180° , siis n tipu juures olevate sise- ja välisnurkade summa on $n \cdot 180^\circ$. Lahutades sellest sisenurkade summa $(n-2) \cdot 180^\circ$, saame välisnurkade summaks $n \cdot 180^\circ - (n-2) \cdot 180^\circ = n \cdot 180^\circ - n \cdot 180^\circ + 360^\circ = 360^\circ$ ehk täispöörde.

Järeldus. Et korrapärase hulknurga sisenurgad on võrdsed, siis on võrdsed ka välisnurgad. Seega on korrapärase hulknurga iga välisnurk

$$\frac{360^\circ}{n}$$

ja iga sisenurk

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

Näide. Korrapärase 9-nurga välisnurk on

$$\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$$

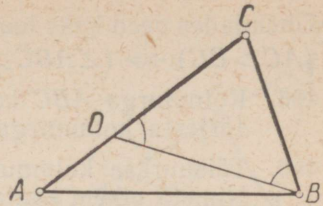
ja sisenurk

$$180^\circ - 40^\circ = 140^\circ.$$

456. Tõesta teoreem hulknurga sisenurkade summa kohta, jaotades hulknurga ühest tipust väljuvate diagonaalidega kolmnurkadeks (joon. 74).

457. 1) Kui suur on 12-nurga sisenurkade summa?
2) Kui suur on 18-nurga sisenurkade summa?
458. 1) Missuguse hulknurga sisenurkade summa on 12 täisnurka?
2) Missuguse hulknurga sisenurkade summa on 7 täispöört?
3) Mitu tippu on hulknurgal, mille sisenurkade summa on 2340° ?
459. Missuguse hulknurga sisenurkade summa on võrdne välisnurkade summaga?

JOON. 75



460. Kuidas muutub hulknurga sisenurkade summa, kui tema külgede arv suureneb 3 võrra?
461. Arvuta korrapärase 16-nurga sisenurk ja välisnurk.
462. Missuguse korrapärase hulknurga välisnurk on 15° ?
463. Missuguse korrapärase hulknurga sisenurk on 135° ?

4.11. KOLMNURGA SUUREM KÜLG JA SELLE VASTASNURK.

464. Joonesta mingi kolmnurk, mõõda selle kaks mittevõrdset külge ja nende vastas asetsevad nurgad. Missuguse külje vastas asetseb suurem nurk?

Tõestame, et

kolmnurgas asetseb suurema külje vastas suurem nurk.

Eeldus. Kolmnurgas ABC külg $AC > BC$ (joon. 75).

Väide. $\angle ABC > \angle CAB$.

Tõestus. Märgime küljel AC punkti D nii, et $DC = BC$, ja ühendame punktid D ning B . Siis kolmnurgas BCD nurgad CDB ja DBC on võrdsed kui võrdhaarse kolmnurga alusnurgad. Et $\angle CDB$ on kolmnurga ABD välisnurk, siis on ta suurem temaga mitte kõrvuti asetsevast sisenurgast A , sest välisnurk võrdub nurkade A ja ABD summaga.

Seega $\angle CDB > \angle CAB$. Et $\angle CDB = \angle DBC$, siis ka $\angle DBC > \angle CAB$. Kuid $\angle DBC$ on osa nurgast ABC , mistõttu ka $\angle ABC > \angle CAB$. Sellega on väide tõestatud.

Tõestame, et on õige ka eelmise teoreemi pöördteoreem,

kolmnurgas asetseb suurema nurga vastas suurem külg.

Eeldus. Kolmnurgas ABC (joon. 75) $\angle ABC > \angle CAB$.

Väide. $AC > BC$.

Tõestus. Külgede AC ja BC kohta on õige üks ja ainult üks kolmest väitest:

$AC < BC$ või $AC = BC$ või $AC > BC$.

Neist esimene väide ei ole õige, sest kui ta oleks õige, siis eelmise teoreemi järgi $\angle ABC < \angle CAB$, mis on vastuolus eeldusega. Samal põhjusel ei ole ka teine väide õige, sest sellest järelduks nurkade ABC ja CAB võrdsus. Nii jääb püsima ainult kolmas väide, s. t. $AC > BC$.

Ühendades need kaks teoreemi, saame (joon. 75):

$$(AC > BC) \Leftrightarrow (\angle ABC > \angle BAC).$$

465. Kolmnurga ABC kohta on teada, et $\angle A = 78^\circ$ ja $\angle B = 37^\circ$. Järjesta kolmnurga küljed nende pikkuse järgi.
466. Täisnurkse kolmnurga ABC teravnurgad on $\angle A$ ja $\angle B$. Nimeta pikem kaatet, kui $\angle A = 34^\circ$.
467. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on 45° . Mida saab öelda kaatetite kohta?
468. Missugune külg on täisnurkses kolmnurgas kõige pikem? Missugune külg on nürinurkses kolmnurgas kõige pikem?
469. Kolmnurga küljed on $AB = 7,8$ cm, $BC = 9,4$ cm ja $AC = 5,6$ cm. Järjesta kolmnurga nurgad nende suuruse järgi.
470. Võrdhaarse kolmnurga alus on $8,4$ dm ja übermõõt 23 dm. Kumb on suurem, kas alusnurk või tipunurk?
471. Kolmnurga KLM kohta on teada, et $\angle L > \angle M$ ja $LM > MK$. Missugune on kolmnurga suurim nurk?
472. Kolmnurga ABC külgede kohta on teada, et $BC > AC > AB$. Missugused nurgad on selles kolmnurgas teravnurgad? Mida saab öelda kolmanda nurga suuruse kohta?

4.12. KOLMNURGA KAHE KÜLJE SUMMA JA VAHE VÖRDLEMINE KOLMANDA KÜLJEGA.

473. Kas antud pikkusega kolmest lõigust saab konstrueerida kolmnurka?
- | | |
|-----------------------|-------------------------|
| 1) 5 cm, 4 cm ja 3 cm | 2) 2 cm, 3 cm ja 5 cm. |
| 3) 6 cm, 3 cm ja 2 cm | 4) 10 cm, 4 cm ja 5 cm. |

Tõestame juba viiendast klassist tuntud tõsiasja, et

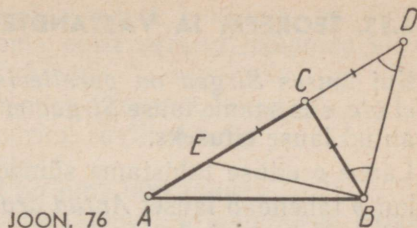
kolmnurga kahe külje summa on suurem ja vahe on väiksem kui kolmas külg.

Eeldus. Lõigud AB , AC ja BC on ühe kolmnurga küljed, kusjuures $AC > BC$ (joon. 76).

Väide. $AC + BC > AB$ ja $AC - BC < AB$.

Tõestus. Pikendame kolmnurga ABC külge AC lõigu $CD = BC$ võrra ja ühendame punktid B ning D . Tekkinud kolmnurgas ABD külg $AD = AC + BC$. Selles kolmnurgas $\angle ABD > \angle D$, sest $\angle ABD$ koosneb nurgaga D võrdsest nurgast CBD ja veel nurgast ABC . Et kolmnurgas on suurema nurga vastas suurem külg, siis nurga ABD vastaskülg AD on suurem nurga D vastasküljest AB ehk $AC + BC > AB$.

Lühendame nüüd kolmnurga ABC külge AC lõigu $CE = BC$ võrra ja ühendame punkti E punktiga B . Tekkinud kolmnurgas ABE on



JOON. 76

$\angle E$ nürinurk, sest tema kõrvunurk kui võrdhaarse kolmnurga EBC alusnurk on teravnurk. Seega kolmnurgas ABE on külg AB suurim külg:

$$AE < AB$$

ehk

$$AC - CE < AB$$

ehk

$$AC - BC < AB.$$

Seega on teoreem täielikult tõestatud.

474. Kas on olemas kolmnurk külgedega 1) 4 m, 8 m, 10 m; 2) 1,2 dm, 1 dm, 2,2 dm; 3) 7,9 cm, 4,3 cm, 3,1 cm?
475. Kolmnurga kahe lühema külje pikkused on 23 cm ja 18 cm. Missuguses vahemikus on kolmanda külje pikkus?
476. Kolmnurga kahe pikema külje pikkused on 7,8 dm ja 13,1 dm. Missuguses vahemikus on lühima külje pikkus?
477. Leia vahemik, millesse kuulub kolmnurga kolmanda külje pikkus, kui kahe külje pikkused on antud.
- | | |
|---------------------|---|
| 1) 5,7 cm ja 6,3 cm | 2) 18 dm ja 7 dm |
| 3) 3,5 m ja 8,4 m | 4) $8\frac{3}{4}$ m ja $6\frac{2}{3}$ m |
478. Kolmnurga külg $c=8,5$ cm ja külg $a=11,5$ cm. Missuguses vahemikus on külg b pikkus?
479. Kolmnurga kahe külje summa on 27,8 m ja übermõõt on 36,5 m. Kui pikk on kolmas külg?
480. Kolmnurga kahe külje summa on 28,6 m ja nende vahe on 5,8 m. Kui pikk on kumbki külg?
481. Kui suur peab olema lõikude AB ja BC summa, et punkt B oleks 1) sirgel AC , 2) väljaspool sirget AC ?

4.13. TEOREEM JA VASTANDTEOREEM

Kui lauses *Sirged on paralleelsed* asendame sõna *on* sõnadega *ei ole*, siis saame lause *Sirged ei ole paralleelsed*, mida nimetatakse antud lause eituseks.

Lause p eituse tähistame sümboliga \bar{p} (loeme: mitte $-p$). Näiteks kui p tähendab lauset *Antud arv on paarisarv*, siis \bar{p} tähendab lauset *Antud arv ei ole paarisarv*. Kui viimast lauset omakorda eitada, siis saame lause *Ei ole õige, et antud arv ei ole paarisarv*. Kuid lihtsamalt on see ju lause *Antud arv on paarisarv*. Seega kahekordne eitus annab lähtelause: $\bar{\bar{p}} = p$.

Vaatleme mingit lauset $\bar{p} \Rightarrow q$ ja tuletame sellest eelduse ja väite eitamise teel uue lause $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$.

Lähtume teoreemist *Kui arv lõpeb paarisnumbriga, siis ta jagub 2-ga*. Kui selles teoreemis eeldust ja väidet eitame, siis saame lause *Kui arv ei lõpe paarisnumbriga, siis ta ei jagu 2-ga*. Saadud lauset nimetatakse lähteteoreemi **vastandteoreemiks**. See vastandteoreem on õige nagu lähteteoreemigi.

Kuid iga teoreemi vastandteoreem pole õige. Näiteks teoreemist *Kui kumbki kahest liidetavast jagub 5-ga, siis ka nende summa jagub 5-ga* saame vastandteoreemi *Kui kumbki kahest liidetavast ei jagu 5-ga, siis ka summa ei jagu 5-ga*. Viimane aga pole õige, sest näiteks 7 ei jagu 5-ga ja ka 8 ei jagu 5-ga, kuid nende summa $7+8=15$ jagub 5-ga. Sellest näeme, et ka vastandteoreem vajab omaette uurimist ja tõestamist.

Vastandteoreemi saab tuletada mitte ainult antud teoreemist, vaid ka selle pöördteoreemist. Rakendades pöördteoreemi ja vastandteoreemi moodustamise võtet, saab igast teoreemist tuletada kolm uut teoreemi. Näiteks teoreemist *Kui kolmnurga kaks külge on võrdsed, siis on võrdsed ka nende vastasnurgad* saame tuletada järgmised teoreemid:

- 1) kui kolmnurga kaks nurka on võrdsed, siis on võrdsed ka nende vastasküljed (pöördteoreem);
- 2) kui kolmnurga kaks külge ei ole võrdsed, siis ei ole võrdsed ka nende vastasnurgad (vastandteoreem);
- 3) kui kolmnurga kaks nurka ei ole võrdsed, siis ei ole võrdsed ka nende vastasküljed (pöördteoreemi vastandteoreem ehk vastandteoreemi pöördteoreem).

482. Moodusta antud lause eitus.

- 1) Antud arv jagub 7-ga.
 - 2) Antud arv on algarv.
 - 3) Antud kolmnurk ei ole täisnurkne.
 - 4) Antud avaldis ei ole teguriteks lahutuv.
 - 5) Kaht punkti läbib ainult üks sirgjoon.
- Kirjelda, kuidas sa said nende lausete eitused.

483. Võta mingi arv või kujund, ütle selle kohta mingi lause ja

moodusta viimase eitus. Kumb nendest lausetest on õige, kumb väär? Kas lause ja tema eitus saavad mõlemad korraga olla õiged või mõlemad väärad?

484. Mis on \bar{p} ja mis $\bar{\bar{p}}$, kui p tähendab järgmist lauset:
- 1) Pärnu on Eesti NSV suurim suvituslinn?
 - 2) Soos on tänavu palju marju?
 - 3) Ei ole õige, et rändlinnud on juba lahkunud?
 - 4) Ei ole õige, et hüpotenuus on täisnurkse kolmnurga kõige pikem külg?
 - 5) $x > 5$?
 - 6) $x \leq -1$?
 - 7) $x \geq 2$?
485. Tuleta antud teoreemist eelduse ja väite ümbervahetamise teel uus lause ja otsusta, kas see on õige või väär.
- 1) Kui arv lõpeb 0-ga, siis ta jagub 5-ga.
 - 2) Kui arvu kaks viimast numbrit moodustavad 4-ga jaguva arvu, siis arv jagub 4-ga.
 - 3) Kui kuusnurk on korrapärane, siis tema külg võrdub ümberringjoone raadiusega.
 - 4) Kui $x \geq 3$, siis $x^2 \geq 9$.
 - 5) Kui kahe teravnurga haarad on vastavalt paralleelsed, siis need teravnurgad on võrdsed.
 - 6) Kui kaks sirget on risti ühe ja sama sirgega, siis nad on paralleelsed.
486. Tuleta antud teoreemist kolm uut lauset ja otsusta, missugused neist on õiged, missugused väärad.
- 1) Kui kaks arvu on ühesuguste märkidega, siis nende korrutis on positiivne.
 - 2) Kui arv lõpeb 4-ga, siis ta jagub 2-ga.
 - 3) Kui $x = -2$, siis $|x| = 2$.
 - 4) Kui $x \geq 1$, siis $x^2 \geq 1$.
- Missugused kaks lauset on üheaegselt õiged või väärad?

4.14. VASTUVÄITELINE TÕESTUS.

Paigutame antud teoreemi $p = q$ ja sellest eelduse ja väite vahetamise ning eelduse ja väite eitamise teel tulenevad kolm teoreemi järgmisesse skeemi, milles teineteise pöördteoreemid asetsevad kõrvuti ja teineteise vastandteoreemid kohakuti (teineteise all):

Teoreem $p \Rightarrow q$	Pöördteoreem $q \Rightarrow p$
Vastandteoreem $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$	Pöördteoreemi vastandteoreem $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$

Näitame, et kui teoreem $p \Rightarrow q$ on tõestatud, siis pöördteoreemi vastandteoreemi $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ pole vaja tõestada, sest see järeldub alati teoreemist $p \Rightarrow q$. Teeme seda ühe näite varal.

Olgu tõestatud teoreem

Kui arv lõpeb 0-ga, siis ta jagub 5-ga. (1)

Tõestame pöördteoreemi vastandteoreemi
Kui arv ei jagu 5-ga, siis ta ei lõpe 0-ga. (2)

Eeldus. Antud arv ei jagu 5-ga.

Väide. Antud arv ei lõpe 0-ga.

Tõestus. Iga arv kas lõpeb 0-ga või ei lõpe 0-ga, kolmandat võimalust ei ole. Oletame, et antud arvu korral on õige esimene neist kahest võimalusest, s. t. antud arv lõpeb 0-ga. Juba tõestatud teoreemi (1) järgi jagub sel juhul see arv 5-ga. Kuid see on vastuolus tõestatava teoreemi (2) eeldusega, et antud arv ei jagu 5-ga. Seega esimene neist kahest võimalusest ei leia aset. Jääb üle, et leiab aset teine võimalus, s. t. antud arv ei lõpe 0-ga.

Esitatud tõestuse saame lühidalt kokku võtta järgmiselt: väide *antud arv ei lõpe 0-ga* on õige, sest kui ta lõpeks 0-ga, siis teoreemi (1) järgi ta jaguks 5-ga, mis on vastuolus antud eeldusega.

Sama mõttekäigu eeskujul saaksime teoreemi (2) põhjal tõestada teoreemi (1). Seega teoreemidest (1) ja (2) on vaja tõestada ainult üht — ükskõik kumba, et mõlemaid lauseid (1) ja (2) saaks lugeda õigeteks. Lühidalt: teoreemid (1) ja (2) on samaväärsed. Seda tõsiasja märgime teatavasti kujul (1) \Leftrightarrow (2).

Teoreemi (2) tõestuse eeskujul saab tõestada, et iga teoreem ja selle pöördteoreemi vastandteoreem on samaväärsed. Niisamuti saab tõestada, et pöördteoreem ja vastandteoreem on samaväärsed. Seega on ülalantud skeemis diagonaalselt paiknevad teoreemid samaväärsed:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p}),$$

$$(\bar{p} \Rightarrow \bar{q}) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p).$$

Seda teoreemi samaväärsust kasutatakse teoreemide tõestamisel: otsese teoreemi asemel võib tõestada pöördteoreemi vastandteoreemi ja pöördteoreemi asemel vastandteoreemi, kui see osutub lihtsamaks. Mõlemal juhul algab tõestus järgmiselt: oletatakse, et on õige tõestatava teoreemi väite eitus ehk, teisiti, tehakse teoreemi väitele **vastuväide**.

Seetõttu nimetatakse seda tõestusviisi **vastuväiteliseks** tõestuseks. Iga vastuväitelise tõestuse korral lähtutakse teoreemi väite vastuväitest ja jõutakse järelduseni, mis on vastuolus teoreemi eeldusega või mõne varem õigeks loetud lausega. Sellest vastuolust nähtub, et vastuväide ei ole õige, vaid õige on väide.

487. Leia varem käsitletud tõestuste hulgast vastuväitelisi tõestusi.

5. FUNKTSIONAALNE SÕLTUVUS.

5.1. KAHE HULGA ELEMENTIDE VAHELINE VASTAVUS.

Vaatleme harilike murdude hulka $M = \left\{ \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{2}{7}; \frac{5}{8} \right\}$.
Olgu lugejate hulk $A = \{1; 2; 3; 5\}$ ja nimetajate hulk $B = \{3; 4; 7; 8\}$.

Näitame noolega, missugune arv on nimetajaks ühe või teise lugeja puhul (joon. 77). Saadud joonist nimetame **nooldiagrammiks**. Seejuures ütleme, et hulga A elemendile 1 vastavad hulga B elemendid 3 ja 4, hulga A elemendile 2 vastab hulga B element 7 jne.

Nooldiagramm näitab vastavust kahe hulga elementide vahel.

Vastavuse korraldamisega kahe hulga elementide vahel puutume sageli kokku igapäevases elus: uue elumaja valmimisel saab iga korter oma numbri, s. t. igale korterile seatakse vastavaks mingi naturaalarv; rahvatantsurühmas igale tantsijale vastab tema partner; kino- või teatrikassa, müües nummerdatud pileti, korraldab vastavuse külastajate ja kino- või teatrisaalis leiduvate kohtade vahel.

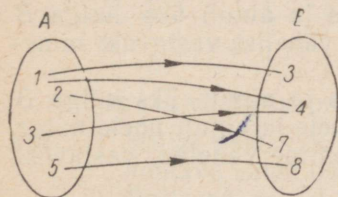
On antud kahekohaliste arvude hulk $M = \{12; 14; 17; 21; 42; 63\}$.
Seame nooldiagrammi abil igale arvule sellest hulgast vastavaks tema numbrite summa, s. t. 12-le seame vastavaks 3 (sest $1+2=3$), 14-le — 5 (sest $1+4=5$) jne. Saame joonise 78.

Kirjutame järgnevalt välja vastavuses olevate elementide paarid nii, et paari esimeseks elemendiks on hulga M element ning teiseks — hulga N element. Saame järjestatud paarid $(12; 3)$, $(14; 5)$, $(17; 8)$, $(21; 3)$, $(42; 6)$.

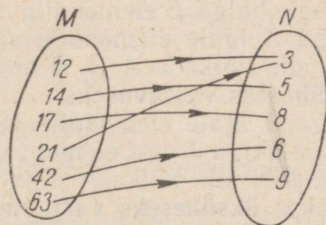
Järjestatud paaridega puutusite juba kokku 6. klassis, kui olid vaatluse all tasapinna punkti koordinaadid.

Eespool saadud järjestatud paaride hulk $C = \{(12; 3), (14; 5), (17; 8), (21; 3), (42; 6)\}$ esitab sama vastavust hulkade M ja N elementide vahel, mida esitas nooldiagramm joonisel 78.

488. Esita järjestatud paaride hulgana vastavus, mis on antud nooldiagrammina joonisel 79.



JOON. 77



JOON. 78

489. Esita nooldiagrammina hulkade A ja B elementide vaheline vastavus, mis on antud järjestatud paaride hulgana $F = \{(4; 1), (5; 3), (1; 8), (10; 4), (0; 11)\}$, kus igas paaris esimene element kuulub hulka A ja teine element hulka B .

Vastavust kahe hulga elementide vahel saame esitada ka tabelina, mille ühes reas (veerus) on ühe hulga elemendid ja nende all (kõrval) teises reas (veerus) on neile vastavad teise hulga elemendid. Nii esitab järgmine tabel joonisel 78 toodud vastavust:

M	12	14	17	21	42
N	3	5	8	3	6

490. Esita järjestatud paaride hulgana ja nooldiagrammina järgmise tabelina antud vastavus:

A	0	1	2	3	4	5	10
B	2	5	4	8	7	6	0

491. On antud hulk $M = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Igale arvule hulgast M seatakse vastavaks tema absoluutväärtus. Esita see vastavus järjestatud paaride hulgana, kus igas paaris esimeseks elemendiks on hulga M element.

Vastavuse korraldamisel kahe hulga elementide vahel on oluline hulkade nimetamise järjekord. Kui ütleme *Hulkade A ja B elementide vaheline vastavus*, siis mõistame hulka A esimese hulga, millest lähtuvad nooldiagrammi nooled. Tabelis aga on esimese hulga elemendid harilikult esimeses reas (veerus), järjestatud paaride hulgas on esimese hulga elemendid igas paaris esimesel kohal.

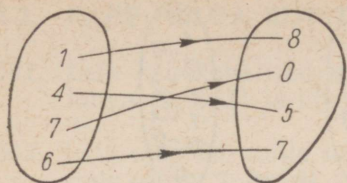
Vaatle vastavusi, mis on esitatud nooldiagrammidena joonistel 80—82.

Joonisel 80 hulga A igale elemendile vastab ainult üks hulga B element. Joonisel 81 aga vastab esimese hulga C mõnele elemendile (9 ja 6) enam kui üks element (9-le vastavad 1 ja -1 ; 6-le vastavad 1, 2 ja 4). Joonisel 82 hulga E igale elemendile vastab ainult üks hulga F element ning hulga F iga element on vastavaks ainult ühele hulga E elemendile.

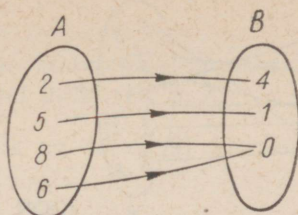
Kui hulga A igale elemendile vastab üks ja ainult üks hulga B element, siis hulkade A ja B elementide vahelist vastavust nimetatakse **üheseks vastavuseks**.

Kui hulga A igale elemendile vastab üks ja ainult üks hulga B element ja hulga B iga element vastab ühele ja ainult ühele hulga A elemendile, siis hulkade A ja B elementide vahelist vastavust nimetatakse **üksüheseks vastavuseks**.

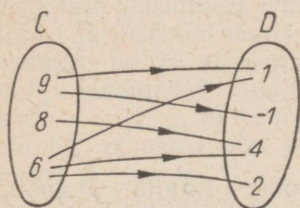
Seega joonisel 80 esitatud vastavus hulkade A ja B elementide vahel on ühene vastavus. Joonisel 82 esitatud vastavus on üks-



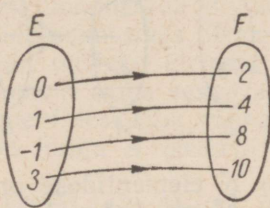
JOON. 79



JOON. 80



JOON. 81



JOON. 82

ühene. Joonisel 81 toodud vastavus ei ole ühene ega ka üksühene.

Ühese vastavuse korral nooldiagrammis esimese hulga iga elemendi juurest lähtub üks ja ainult üks nool; järjestatud paaride hulga puhul on ühese vastavuse tunnuseks see, et paaride esimesed elemendid on erinevad.

Üksühese vastavuse korral esimese hulga iga elemendi juurest nooldiagrammis lähtub üks ja ainult üks nool ning teise hulga iga element on ühendatud ühe ja ainult ühe noolega.

492. Tee kindlaks, kas vastavus hulkade A ja B elementide vahel joonisel 83 on üksühene.

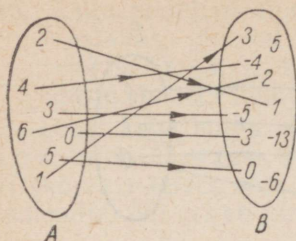
493. Esita järjestatud paaride hulgana ja nooldiagrammina järgmise tabelina antud vastavus:

A	0	1	2	3	4	5	6
B	2	2	4	4	4	6	6

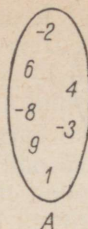
Kas see vastavus on ühene? üksühene?

494. 1) Millal vastavus klassi õpilaste ja klassiruumis leiduvate kohtade vahel on üksühene?

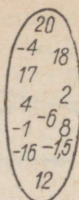
2) Õpilased ostsid kooli einelauast õunu 4 kop. tükk. Kas vastavus ostetud õunte arvu ja nende eest makstud rahasumma vahel on üksühene või mitte?



JOON. 83

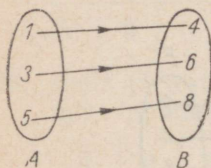


A



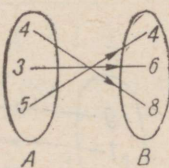
B

JOON. 84



A

B



A

B

JOON. 85

495. Hulga K elementideks on riigid: Soome, Itaalia, Jaapan, Rootsi, Norra, India, Taani, Kanada ja Kuuba. Hulga L elementideks on pealinnad Oslo, Helsingi, Havanna, Rooma, Dehli, Tokio, Ottawa, Stokholm ja Kopenhaagen. Korralda vastavus hulkade K ja L elementide vahel, lugedes igale riigile vastavaks tema pealinna. Kas see vastavus on ühene? üksühene?
496. Hulkade A ja B elementideks on arvud (joon. 84). Lugedes hulga A igale elemendile vastavaks hulga B selle elemendi, mis on saadud hulga A elemendi korrutamisel 2-ga, esita vastavus nooldiagrammina. Kas see vastavus hulkade A ja B elementide vahel on üksühene?
497. On antud hulk $A = \{3; 1; 6; 10; 7; 4; 11\}$. Hulga A elementidele vastavateks hulga B elementideks on nelja võrra suuremad arvud. Esita vastavus hulkade A ja B elementide vahel nooldiagrammina, tabelina ja järjestatud paaride hulgana.
498. Hulga $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ elementidele vastavad hulga Y elemendid on arvatud valemi $y = 5x + 1$ järgi, kus x on hulga X mistahes element ja y sellele vastav hulga Y element. Esita see vastavus tabelina ja järjestatud arvupaaride hulgana.
499. Hulga $X = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ elementidele vastavad hulga Y elemendid on arvatud valemi $y = -4x - 3$ järgi, kus x on hulga X suvaline element ja y sellele vastava hulga Y element. Esita see vastavus tabelina ja järjestatud arvupaaride hulgana.
500. Joonis 85 kujutab kaht võimalikku üksühendist vastavust hulkade $\{1; 3; 5\}$ ja $\{4; 6; 8\}$ elementide vahel. Leia veel selliseid vastavusi. Kui palju neid üldse on?

5.2. KAHE HULGA RISTKORRUTIS.

501. Leia kahekohalised arvud, mille kümneliste number kuulub hulka $\{2; 3; 5\}$ ja üheliste number hulka $\{1; 5; 7\}$.
502. Leia murrud, mille lugejate hulk on $\{3; 5; 9\}$ ja nimetajate hulk on $\{4; 7; 8; 13\}$.
503. Mitut liiki võileibu saab valmistada, kui on kasutada kaht sorti leiba ja kolme sorti võileibade katet (vorst, sink, pastet).

Eelmiste ülesannete lahendamisel tuli moodustada hulkade elementidest järjestatud paare nii, et paaride esimesteks elementideks on esimese hulga elemendid ja paaride teisteks elementideks teise hulga elemendid. Moodustame järgnevalt sama eeskirja järgi hulkade $A = \{1; 2; 3\}$ ja $B = \{4; 5\}$ elementidest kõik võimalikud paarid nii, et esimeseks elementiks on hulga A element ja teiseks hulga B element (joon. 86).

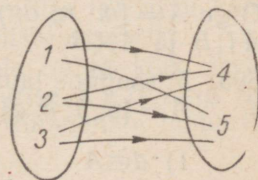
Saame järjestatud paarid $(1; 4)$, $(1; 5)$, $(2; 4)$, $(2; 5)$, $(3; 4)$, $(3; 5)$. Nende paaride hulka nimetatakse hulkade A ja B **ristkorrutiseks**. Seega hulk $\{(1; 4), (1; 5), (2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5)\}$ on hulkade A ja B ristkorrutis.

Hulkade A ja B ristkorrutiseks nimetame hulka, mille elementideks on kõik võimalikud elemendipaarid, kus igas paaris esimeseks elementiks on hulga A mistahes element ja teiseks elementiks hulga B mistahes element.

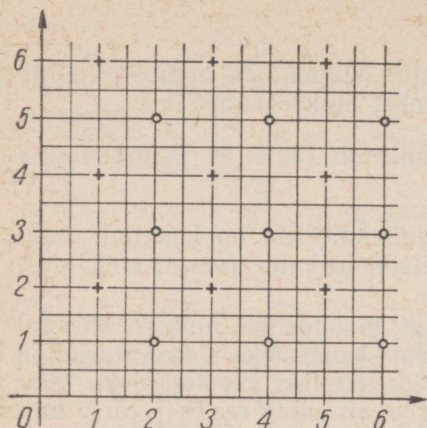
Järelikult saadakse ülesandes 501 otsitav kahekohaliste arvude hulk kümneliste numbrite hulga $\{2; 3; 5\}$ ja üheliste numbrite hulga $\{1; 5; 7\}$ ristkorrutisest, võttes iga paari esimese elemendi kümneliste numbriks ja teise elemendi üheliste numbriks; ülesandes 502 saadakse otsitavate murrude hulk lugejate hulga $\{3; 5; 9\}$ ja nimetajate hulga $\{4; 7; 8; 13\}$ ristkorrutisest; et leida, mitut liiki võileibu saab valmistada ülesandes 503 antud tingimuste järgi, tuleb leida kaheelemendilise leibade hulga ja kolmeelemendilise võileibade katete hulga ristkorrutis.

Kahe hulga A ja B ristkorrutist kirjutatakse kujul $A \times B$. Nende hulkade ristkorrutise definitsiooni võime nüüd kirjutada lühidalt nii:

$$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ ja } y \in B\}.$$



JOON. 86



JOON. 87

504. Antud on hulgad $X = \{2; 4; 6\}$ ja $Y = \{1; 3; 5\}$.

- 1) Moodusta nende hulkade ristkorrutis $X \times Y$.
- 2) Moodusta ristkorrutis $Y \times X$, s. t. igas elemendipaaris võta esimeseks elemendiks hulga Y element ja teiseks elemendiks hulga X element.
- 3) Vaadeldes mõlema saadud ristkorrutise iga järjestatud paari esimest elementi tasapinna punkti abstsissina ja teist elementi ordinaadina, kujuta koordinaatteljestikus need punktid. Seejuures märgi ristkorrutisele $X \times Y$ vastavad punktid nullikestega ja ristkorrutisele $Y \times X$ vastavad punktid ristikestena.

Tulemusena saad joonise 87.

Sellelt jooniselt ilmneb, et ristkorrutistele $X \times Y$ ja $Y \times X$ vastavad punktide hulgad ei ühti, s. t.

erinevate hulkade ristkorrutisel ei ole vahetuvuse omadust.

Seega üldiselt: $A \times B \neq B \times A$.

Kui üks hulkadest A või B on tühi hulk, siis nende hulkade ristkorrutis on tühi hulk, s. o.

$$A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset.$$

Kui korrutatavad hulgad on võrdsed, s. o. $A = B$, siis $A \times B = A \times A$, mida tähistatakse ka sümboliga A^2 . Seega $A \times A = A^2$.

Näide. Kui $A = \{1; 2; 3\}$, siis $A^2 = A \times A = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3)\}$.

Olgu $A = \{m; n; o; p\}$ ja $B = \{p; r; s; t\}$. Moodusta hulgad $A \cup B$, $A \cap B$ ja $A \times B$.

505. Missugune lause on õige, missugune väär, kui

$$A = \{a; b; c; d\} \text{ ja } B = \{d; e; f\}?$$

1) $d \in A$

2) $e \in A$

3) $f \notin B$

4) $d \notin B$

5) $A \cup B = \emptyset$

6) $A \cap B = d$

7) $(b; f) \in A \times B$

8) $(e; d) \in A \times B$

506. Rahvatantsuringi kuuluvate poiste hulk on $P = \{\text{Rein; Jaan; Toomas}\}$ ja tüdrukute hulk $T = \{\text{Ene; Reet; Piret}\}$. Moodusta kõik võimalikud tantsupaarid. Mitu elementi on hulgas $P \times T$?
507. On antud hulgad $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 4\}$ ja $C = \{3; 4; 5\}$. Leia hulgad $A \times B$, $B \times C$; $C \times B$ ja $A \times A$. Esita koordinaatteljestikus vastavad punktihulgad.
508. Näita, et juhul, kui $A = B$, siis $A \times B = B \times A$.
509. Mitu elementi on hulgas A , kui hulgas $A \times A$ on 64 elementi? Mitmes hulga $A \times A$ elemendis on paari moodustavad elemendid võrdsed?
510. Hulgas $K \times K$ on 9 elementi. Kaks nendest on järjestatud paarid $(2; 4)$ ja $(4; 8)$. Leia hulga $K \times K$ kõik elemendid.
511. Kahekohalise arvu kümneliste number kuulub hulka $K = \{3; 5; 7\}$ ja üheliste number hulka $U = \{1; 2; 4; 6\}$. Kui palju leidub selliseid arve?
512. Murru lugeja kuulub hulka $L = \{2; 3; 5; 11\}$ ja nimetaja hulka $N = \{2; 4; 5; 18\}$. Kui palju leidub selliseid murde? Mitu murdu nendest
- 1) on võrdsed 1-ga,
 - 2) on väiksemad kui 1,
 - 3) on suuremad kui 1?

5.3. RELATSIION

513. Kuuenda klassi õpilased, kes kuuluvad rahvatantsuringi, moodustavad hulga $K = \{\text{Enn, Jaan, Jüri, Andres}\}$ ja seitsmenda klassi õpilased, kes kuuluvad sellesse ringi, moodustavad hulga $S = \{\text{Aime, Anni, Piret, Ene}\}$.
- 1) Leia hulkade K ja S ristkorutus $K \times S$.
 - 2) Leia hulga $K \times S$ kõikide selliste paaride hulk, milles esimeseks elemendiks on poiss, kelle eesnimi algab tähega «J».
514. Kahekohalise arvu kümneliste number kuulub hulka $K = \{2; 3; 5\}$ ja üheliste number hulka $U = \{1; 4; 7\}$.
- 1) Leia see kahekohaliste arvude hulk.
 - 2) Leia saadud hulga selline osahulk, milles iga arvu kümneliste number on suurem tema üheliste numbrist.

L a h e n d u s. Otsitava kahekohaliste arvude hulga kõik arvud saame, kui leiame hulkade K ja U ristkorutise $K \times U$ ning iga saadud arvupaari esimese elemendi võtame kümneliste numbriks ja teise elemendi üheliste numbriks.

$$K \times U = \{(2; 1), (2; 4), (2; 7), (3; 1), (3; 4), (3; 7), (5; 1), (5; 4), (5; 7)\}.$$

Seega on otsitavad kahekohalised arvud: 21, 24, 27, 31, 34, 37, 51, 54, 57. Arvud, mille kümneliste number on suurem üheliste numbriks, on saadud arvude hulgas järgmised: 21, 31, 51, 54.

Hulgast $K \times U$ võime osahulki leida mitmeti. Näiteks võime leida $K \times U$ sellise osahulga, mille paarides teine element on esimesest suurem. Selleks on hulk $R_1 = \{(2; 7), (3; 4), (3; 7), (5; 7)\}$. Või võime leida näiteks $K \times U$ sellise osahulga, mille iga paari teine element on esimesest elemendist kahe võrra suurem. Selleks on hulk $R_2 = \{(2; 4), (5; 7)\}$.

Iga selline hulk $K \times U$ osahulk väljendab üht seost ehk relatsiooni hulkade K ja U elementide vahel.

Nii väljendab osahulk R_1 hulkade K ja U elementide vahelist seost: «Hulga U element on suurem hulga K elemendist.»

Osahulk R_2 väljendab seost: «Hulga U element on kahe võrra suurem hulga K elemendist.»

Üldiselt väljendab hulga $A \times B$ iga osahulk mingit seost hulkade A ja B elementide vahel.

Seepärast nimetatakse hulga $A \times B$ iga osahulka relatsiooniks.

Näide 1. On antud hulgad $X = \{\text{Kiiev; Tbilisi; Riia; Tallinn; Kišinjov}\}$ ja $Y = \{\text{Gruusia; Eesti; Ukraina; Moldaavia; Läti}\}$.

Hulga $X \times Y$ osahulk $\{(Kiiev; Ukraina), (Tbilisi; Gruusia), (Riia; Läti), (Tallinn; Eesti), (Kišinjov; Moldaavia)\}$ väljendab seost « x on y pealinn», kus $x \in X$ ja $y \in Y$.

Näide 2. On antud hulgad $A = \{2; 3; 8; 14\}$ ja $B = \{-2; 4; 6; 8; 28; 30\}$, kusjuures $x \in A$ ja $y \in B$.

Hulga $A \times B$ osahulgaks, mis väljendab relatsiooni $y = 2x$, on hulk $\{(2; 4), (3; 6), (14; 28)\}$.

Vastuse võime ka kirjutada kujul: $\{(x; y) \mid (x; y) \in A \times B \text{ ja } y = 2x\} = \{(2; 4), (3; 6), (14; 28)\}$.

515. On antud kirjanike hulk $K = \{\text{E. Vilde; O. Luts; E. Raud}\}$ ja raamatute hulk $R = \{\text{«Monument», «Külmale maale», «Kevade», «Jäine raamat», «Sipsik»}\}$. Esita järjestatud paaride hulganähtena hulk $K \times R$ osahulk, mis esitab seost « x on y autor», kus $x \in K$ ja $y \in R$.

516. Esita relatsioon $T = \{(x; y) \mid (x; y) \in A \times B \text{ ja } x < y\}$, kui $A = \{1; 2; 3; 4\}$ ja $B = \{1; 3; 5\}$ järjestatud paaride hulganähtena.

517. Esita järjestatud paaride hulganähtena relatsioon $C = \{(x; y) \mid (x; y) \in M \times N \text{ ja } x + y = 8\}$, kui $M = \{0; 1; 2; 4; 10\}$ ja $N = \{-2; -1; 4; 6; 7\}$.

518. On antud hulknurkade hulk $H = \{\text{ruut; kolmnurk; rööpkülik; trapets}\}$ ja valemite hulk $V = \{S_1 = \frac{ah}{2}; S_2 = \frac{a+b}{2} \cdot h; S_3 = ab\}$,

relatio (lad. k.) — suhe (seos).

$S_4 = ah$; $S_5 = a^2$ }. Esita järjestatud paaride hulgana hulga $H \times V$ osahulk, mis väljendab relatsiooni « y väljendab x pindala», kus $x \in H$ ja $y \in V$.
(Märkus. a ja b on hulknurga küljed, h on küljele a tõmmatud kõrgus).

5.4. FUNKTSIOON.

Kui on antud hulgad $A = \{a; b; c\}$ ja $B = \{1; 2; 3; 4\}$, siis nende ristkorrutis on $A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (a; 3), (a; 4), (b; 1), (b; 2), (b; 3), (b; 4), (c; 1), (c; 2), (c; 3), (c; 4)\}$.

Võrdleme hulga $A \times B$ kaht osahulka

$$C = \{(a; 1), (a; 2), (b; 3), (c; 4)\} \text{ ja}$$

$$D = \{(a; 1), (b; 1), (c; 3)\}.$$

Relatsioonis C vastab hulga A elemendile a enam kui üks hulga B element, nimelt elemendile a vastab hulga B kaks elementi 1 ja 2.

Samal ajal vastab relatsioonis D hulga A igale elemendile ainult üks hulga B element.

Teisiti: järjestatud paaride hulga C kõikide paaride esimesed elemendid pole erinevad, kuid hulga D kõikide järjestatud paaride esimesed elemendid on erinevad.

Tähistame relatsiooni D paaride esimeste elementide hulga tähega X ja nende paaride teiste elementide hulga tähega Y .

Seega $X = \{a; b; c\}$ ja $Y = \{1; 3\}$.

Kujutame hulkade X ja Y elementide vahelise vastavuse nooldiagrammina (joon. 88).

Nagu nähtub jooniselt, on see vastavus ühene, sest hulga X iga elemendi juurest lähtub üks ja ainult üks nool.

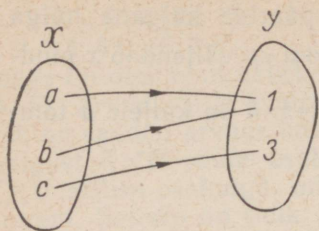
Niisugust relatsiooni nagu relatsioon D , nimetatakse **funktsiooniks**. Seega,

funktsioon on relatsioon, millesse kuuluvate paaride esimesed elemendid on erinevad.

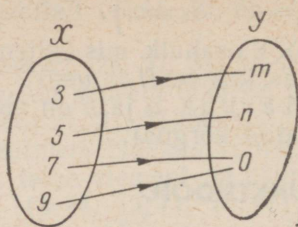
Muutujat x , mille väärtusteks on hulga X elemendid, s.t. relatsiooni D moodustavate paaride esimesed elemendid, nimetatakse selle funktsiooni **argumendiks**. Hulka X aga nimetatakse antud funktsiooni **määramispiirkonnaks** ning hulka Y **funktsiooni väärtuste hulgaks**.

Näide 1. Relatsioon $M = \{(1; 5), (4; 6), (8; 6)\}$ on funktsioon, sest antud järjestatud paaride esimesed elemendid on erinevad. Selle funktsiooni määramispiirkonnaks on hulk $\{1; 4; 8\}$ ja funktsiooni väärtuste hulgaks hulk $\{5; 6\}$.

Näide 2. Joonisel 89 nooldiagrammiga esitatud relatsioon on funktsioon, sest hulga X igale elemendile vastab üks ja ainult üks hulga Y element.

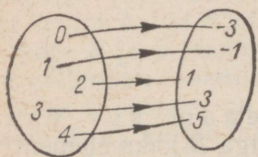


JOON. 88



JOON. 89

$x \in X$ $y \in Y$.



JOON. 90

Antud funktsiooni määramispiirkonnaks on hulk $X = \{3; 5; 7; 9\}$ ning väärtuste hulgaks $Y = \{m; n; 0\}$.

Funktsioon on esitatav nooldiagrammina, tabelina, järjestatud paaride hulganäitega, valemiga.

Näiteks nooldiagramm joonisel 90, tabel

x	0	1	2	3	4
y	3	-1	1	3	5

ja järjestatud paaride hulk $F = \{(0; -3), (1; -1), (2; 1), (3; 3), (4; 5)\}$ esitavad üht ja sama funktsiooni.

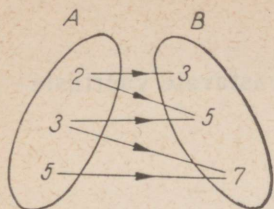
Sõltumatult esitusviisist on iga funktsiooni puhul ikka tegemist kahe hulga ja vastavuse eeskirjaga. Vastavuse eeskiri on nooldiagrammis antud nooltega, tabelis ja järjestatud paaride hulgas aga kõrvuti või üksteise alla kirjutatud vastavate väärtustega.

Vastavuse eeskiri antakse sageli võrdusena (näiteks $x + y = 3$ või $y = 3 - x$), mis võimaldab määramispiirkonna X igale elemendile x leida vastavat elementi y funktsiooni väärtuste hulgast Y . Sel juhul räägitakse, et funktsioon on esitatud v a l e m i n a.

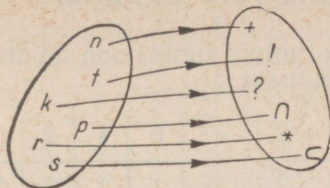
Näiteks eespool kolmel viisil esitatud funktsiooni saame anda määramispiirkonna $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ ja vastavuse eeskirja $y = 2x - 3$ abil. Tõepoolest, kui $x = 0$, siis $y = 2 \cdot 0 - 3 = -3$; kui $x = 1$, siis $y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$; kui $x = 2$, siis $y = 2 \cdot 2 - 3 = 1$ jne.

Kirjutades x ja y vastavad väärtused välja tabelina või järjestatud paaride hulganäitega, saamegi sama tabeli või järjestatud paaride hulga, mis eespool toodud näites.

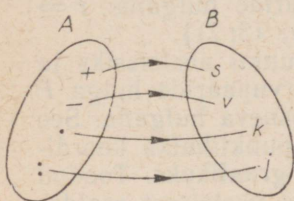
519. Missugused joonistel 91–94 nooldiagrammidega kujutatud relatsioonidest esitavad funktsiooni? Esita iga funktsioon tabelina.



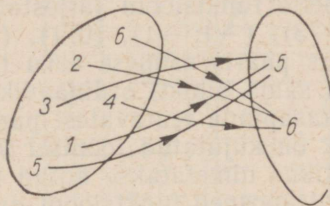
JOON. 91



JOON. 92



JOON. 93



JOON. 94

520. Missugused järgmistest tabelitest esitavad funktsioone?

$$1) \begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 4 \end{array}$$

$$2) \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}$$

$$3) \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

$$4) \begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 5 & 5 & 6 & 6 \end{array}$$

$$5) \begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{array}$$

Leida iga funktsiooni määramispiirkond ja väärtuste hulk.

521. Näita, et järjestatud paaride hulk $\{(0; 3), (2; 5), (4; 7), (6; 9), (8; 11)\}$ esitab funktsiooni.

Leia selle funktsiooni määramispiirkond ja väärtuste hulk. Esita see funktsioon tabelina.

522. Esita tabelina hulgal $X = \{-4; -2; 0; 2; 4; 6\}$ defineeritud funktsioon $y = 2x + 3$.

523. Esita tabelina ja järjestatud paaride hulvana hulgal $X = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ defineeritud funktsioon $y = x^2 - 2x$.

524. Koosta valem, mille järgi saab arvutada

- 1) ruudu pindala S ruudu ümbermõõdu $ü$ põhjal;
- 2) ringi pindala S ringjoone pikkuse C põhjal;
- 3) võrdhaarse kolmnurga pindala S kolmnurga aluse a põhjal, kui kõrgus on 4 ühikut;
- 4) kuubi pindala S kuubi serva pikkuse a põhjal.

5.5. FUNKTSIOONI GRAAFIK.

Olgu antud mingi funktsioon muutujate x ja y vastavate väärtuste tabelina, näiteks

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	-1	1	3	5	7

Esitame selle funktsiooni järjestatud arvupaaride huljana: $F = \{(-2; -3), (-1; -1), (0; 1), (1; 3), (2; 5), (3; 7)\}$.

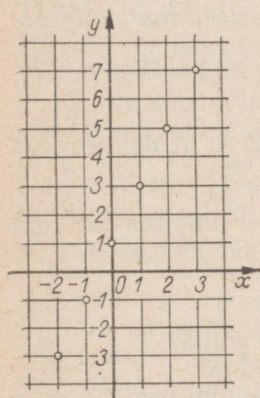
Võttes igas paaris esimese arvu tasapinna punkti abstsissiks ja teise arvu sama punkti ordinaadiks, saame arvupaaride hulga F kujutada tasapinna teatavatest punktidest koosneva huljana. See punktihulk on kujutatud joonisel 95. Saadud punktihulka koordinaatteljestikus nimetatakse antud funktsiooni **graafikuks**. Toodud näite puhul koosneb funktsiooni graafik kuuest üksteisest eraldatud punktist, sest funktsiooni määramispiirkond koosneb ainult kuuest elemendist.

Oletame nüüd, et argumenti väärtuste hulka kuuluvad kõik ratsionaalarvud, mis on -2 ja 3 vahel, need kaasa arvatud. Seda väärtuste hulka ei saa anda tema elementide loetlemise teel, küll saame teda anda aga järgmise võrdusena:

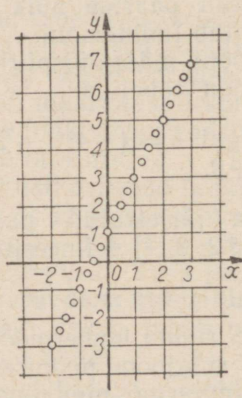
$$X = \{x | x \in Q \text{ ja } -2 \leq x \leq 3\}.$$

See kirjutus ütleb nimelt, et X on hulk, mille elementideks on ratsionaalarvud x , mis täidavad tingimusi $-2 \leq x \leq 3$.

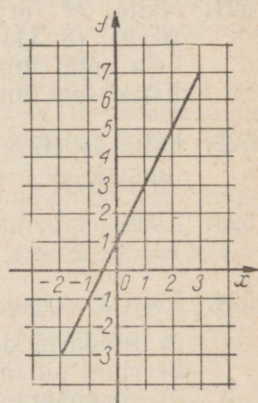
Olgu hulgal X defineeritud funktsioon $y = 2x + 1$. Selle funktsiooni graafiku saamiseks anname argumentidele x esmalt täisarvulised väärtused hulgast X ja arvutame neile vastavad funktsiooni väärtused. Saame eespool oleva tabeli, mille graafilisel kujutamisel



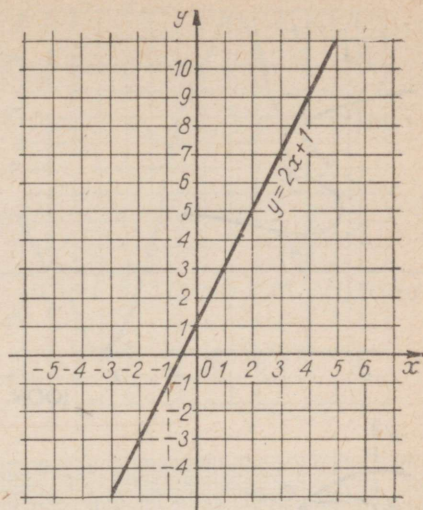
JOON. 95



JOON. 96



JOON. 97



JOON. 98

saame joonise 95. Kuid see pole antud funktsiooni graafik, sest ta sisaldab vaid kuuele argumendi väärtusele vastavaid punkte. Anname argumendile veel murdarvulisi väärtusi, näiteks iga 0,25 järel. Arvutades neile vastavad funktsiooni väärtused ja kujutades saadud arvupaarid punktidenä, saame joonise 96. Kui anda argumendile ikka järjest uusi väärtusi, näiteks iga 0,1 järel, iga 0,01 järel jne., siis saadud punktid täidavad tihedalt ühe sirgjoone lõigu, mille loemegi antud funktsiooni graafikuks (joon. 97).

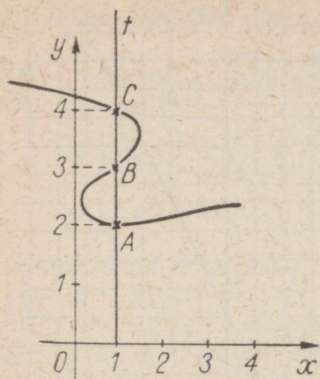
Funktsiooni määramispiirkonnaks võib olla ka kogu ratsionaalarvude hulk Q . Vaatleme näiteks funktsiooni $y = 2x + 1$, mille määramispiirkond $X = Q$. Tuginedes eelnevale, võime juba ette öelda, et kui anname argumendile x rea väärtusi ja leiame neile vastavad graafiku punktid, siis näeme, et need punktid asetsevad ühel sirgel (joon. 98). See sirge ongi antud funktsiooni graafikuks.

Seega koosneb funktsiooni graafik kas üksikutest punktidest, joone mingi osa kõigist punktidest või kogu joone punktidest sõltuvalt sellest, missugune on argumendi väärtuste hulk.

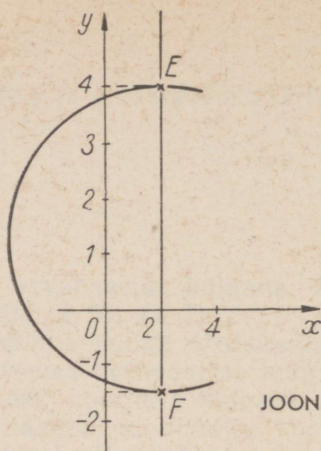
Siinjuures tuleb silmas pidada, et koordinaatteljestikus antud joon on funktsiooni graafikuks ainult siis, kui ükski ordinaatteljega paralleelne sirge ei lõika seda joont enam kui ühes punktis. Vastasel juhul ei oleks selle joonega esitatud relatsiooni paarid erinevate esimeste elementidega.

Näiteks joonisel 99 toodud joon ei esita funktsiooni, sest ordinaatteljega paralleelne sirge t lõikab vaadeldavat joont kolmes punktis $A(1; 2)$, $B(1; 3)$ ja $C(1; 4)$. Järjestatud paaride $(1; 2)$, $(1; 3)$ ja $(1; 4)$ esimesed elemendid pole erinevad.

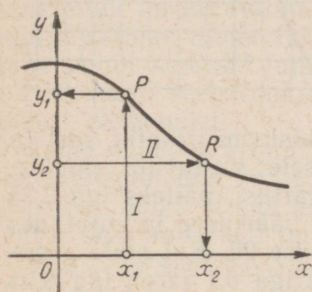
Joonisel 100 toodud joont lõikab ordinaatteljega paralleelne sirge u kahes punktis $E(2; 4)$ ja $F(2; -1,5)$. Ka see joon ei ole funktsiooni graafikuks.



JOON. 99



JOON. 100



JOON. 101

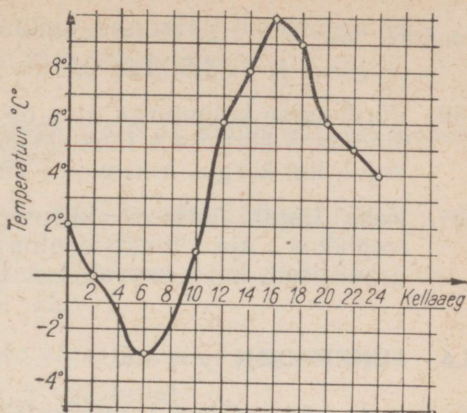
Funktsiooni graafiku abil saab lahendada mitmesuguseid ülesandeid, näiteks

- 1) leida funktsiooni väärtust, mis vastab argumenti antud väärtusele,
- 2) leida argumenti väärtust, mille puhul funktsioonil on antud väärtus.

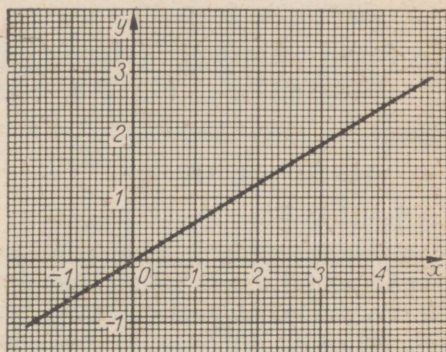
Nende mõlema ülesande lahendamist selgitab joonis 101. Esimese ülesande lahendamisel tõmbame abstsisselje punktist, mille abstsiss on võrdne argumenti antud väärtusega x_1 , ristsirge abstsisseljele. Selle ristsirge ja funktsiooni graafiku lõikepunktist P tõmbame omakorda ristsirge ordinaatteljele. Viimase ristsirge ja ordinaattelje lõikepunkti ordinaat y_1 ongi funktsiooni otsitav väärtus. Teise ülesande lahenduskäik on esimesele vastupidine.

Funktsiooni graafik annab ka üldise ülevaate funktsiooni muutumisest argumenti muutumisel. Vaadeldes näiteks joonist 102, mis kujutab õhutemperatuuri sõltuvust kellaajast ühe ööpäeva vältel, võime sellest näha järgmist:

- 1) vaatluspäeva kõige madalam temperatuur -3° oli kell 6 ja kõige kõrgem temperatuur 10° kell 16;



JOON. 102



JOON. 103

- 2) temperatuur langes kella 0-st kella 6-ni ja hiljem kella 16-st kella 24-ni; vahepeal temperatuur tõusis;
 - 3) kella 2-st peaaegu kella 10-ni oli temperatuur alla nulli, ülejäänud osa ööpäevast üle nulli;
 - 4) üle 6° oli temperatuur kella 12 ja 20 vahel, jne.
525. Kujuta graafiliselt funktsioon $y=2x$, mille määramispiirkond $X=\{-2; -1; 0; 1\}$.
 526. Kujuta graafiliselt funktsioon $y=3-2x$, kui $x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.
 527. Kujuta graafiliselt funktsioon $y=1,5x-2$, kui selle määramispiirkonnaks on $\{x|x \in \mathbb{R} \mid \text{ja } 0 \leq x \leq 4\}$.
 528. Kujuta graafiliselt funktsioon $y=-0,5x$, kui see on defineeritud argumendi väärtustel $-4 \leq x \leq 4$.
 529. Leia joonisel 103 kujutatud graafiku järgi
 - 1) funktsiooni väärtused argumendi väärtustel $x = -1; 0,5; 1,4; 3,2; 4$;

2) argumendi väärtused funktsiooni väärtustel

$$y = -1; 1; 1,5; 1,9; 2,5.$$

530. Võrdhaarse kolmnurga alus on 3 cm. Esita selle kolmnurga pindala S kõrguse h funktsioonina valemi, tabeli ja graafiku kujul, kui kõrgus h kasvab 1 cm-st 8 cm-ni.

531. Keha liigub ühtlaselt kiirusega 1,5 m sekundis. Väljenda teepikkus s aja t funktsioonina valemi kujul ja esita see siis graafiliselt, kui t kasvab 1-st 10-ni.

5.6. FUNKTSIOON $y = ax$.

Kui ruudu külje pikkus (sentimeetrites)

$$k = 0,5; 1; 2; 4; 10,$$

siis ruudu übermõõt (samades ühikutes)

$$\ddot{u} = 4 \cdot 0,5; 4 \cdot 1; 4 \cdot 2; 4 \cdot 4; 4 \cdot 10$$

ehk

$$\ddot{u} = 2; 4; 8; 16; 40.$$

Üldiselt: $\ddot{u} = 4k$.

Seega hulga $\{0,5; 1; 2; 4; 10\}$ igale elemendile vastab eeskirja $\ddot{u} = 4k$ põhjal üks ja ainult üks hulga $\{2; 4; 8; 16; 40\}$ element.

Niisiis võime öelda, et on antud funktsioon $\{(0,5; 2), (1; 4), (2; 8), (4; 16), (10; 40)\}$, mille määramispiirkonnaks on hulk $\{0,5; 1; 2; 4; 10\}$ ja väärtuste hulgaks $\{2; 4; 8; 16; 40\}$.

Kui ühtlase liikumise kiirus on 5 kilomeetrit tunnis ja s tähistab läbitud tee pikkust kilomeetrites ning t tundides, mis kulub s km läbimiseks, siis

$$s = 5t.$$

Olgu muutuja t väärtuste hulk $T = \{0; 0,7; 3; 5; 12; 20\}$, siis eeskirja $s = 5t$ põhjal aja t igale väärtusele hulgast T vastab üks ja ainult üks muutuja s väärtus hulgast $S = \{0; 3,5; 15; 25; 60; 100\}$.

Ka selle näite puhul võime öelda, et on antud funktsioon, nimelt: $\{(0; 0), (0,7; 3,5), (3; 15), (5; 25), (12; 60), (20; 100)\}$.

Mõlema näite puhul on valemitel üks ja sama kuju

$$y = ax,$$

kus a on jääv vaadeldavat seost iseloomustav arv. Seda jäävat tegurit nimetatakse **võrdeteguriks** ja muutjat y võrdeliseks muutujaga x :

muutuja y on võrdeline muutujaga x , kui $y = ax$, kus a on jääv tegur.

Kui $x \neq 0$, siis valemile $y = ax$ saame anda kuju $y : x = a$. Ümberpöörduvalt, kui $y : x = a$, kus a on jääv, siis $y = ax$.

Seega,

muutuja y on võrdeline muutujaga x siis ja ainult siis, kui nende vastavate väärtuste suhe on jääv.

Näide. On antud muutujate x ja y vastavate väärtuste tabel.

x	1	3	5	7	9
y	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5

Teha kindlaks, kas muutuja y on võrdeline muutujaga x .

Lahendus. Leiame suhte $y : x$ väärtused.

$$2,5 : 1 = 2,5; 7,5 : 3 = 2,5; 12,5 : 5 = 2,5; 17,5 : 7 = 2,5; 22,5 : 9 = 2,5.$$

Seega on muutuja y võrdeline muutujaga x . Võrdeteguriks on 2,5.

532. Selgita, missugused järgmistest tabelitest esitavad funktsiooni $y = ax$ ja leia vastav võrdetegur a .

1)

z	1	2	3	4	5	6
y	3	6	9	12	15	18

2)

u	1	2	3	4	5	6
v	3	5	7	9	11	13

3)

x	1	1,5	2	2,5
y	0,6	0,9	1,2	1,5

4)

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5
z	6	4	2	0	-2

5)

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5
s	-1	-2	-3	-4	-5	-6

6)

r	-1,5	-1	-0,5	0	0,5
p	-0,9	-0,6	-0,3	0	0,3

Kui võrdetegur a on positiivne, siis valemist $y = ax$ järeldub, et

1) muutuja x väärtuse suurenedes mingi arv korda, muutuja y väärtus suureneb sama arv korda;

2) muutuja x väärtuse vähenedes mingi arv korda muutuja y väärtus väheneb sama arv korda.

Näide 1. $y=4x$. Kui $x=2$, siis $y=8$. Kui $x=6$, siis $y=24$. Seega muutuja x väärtuse kasvades kolm korda kasvas ka muutuja y väärtus kolm korda.

Näide 2. $y=\frac{1}{2}x$. Kui $x=4$, siis $y=2$. Kui $x=2$, siis $y=1$. Muutuja x väärtuse vähenedes kaks korda, vähenes ka muutuja y väärtus kaks korda.

Laused 1) ja 2) pole aga õiged, kui võrdetegur a on negatiivne.

Näide 3. $y=-3x$. Kui $x=1$, siis $y=-3$. Kui $x=3$, siis $y=-9$. Seega muutuja x väärtuse kasvades kolm korda muutuja y väärtus hoopis vähenes (-3) -st (-9) -ni.

533. Avalda valemi abil üks muutuja teise kaudu ning otsusta, kas muutujad on võrdelised või mitte.

- 1) Kuubi pindala S ja serva pikkus a .
- 2) Võrdhaarse kolmnurga alusnurk β ja tipunurk α .
- 3) Riide meetrite arv x ja riide meetri hind h , kui riide koguhind on 150 rbl.
- 4) Risttahuka ruumala ja kõrgus, kui põhja pindala on 6 cm^2 .
- 5) Raudkuuli mass m ja ruumala V (raua tihedus $7,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$).

5.7. FUNKTSIOONI $y=ax$ GRAAFIK.

Näide. Kujutame graafiliselt funktsiooni $y=2x$, kus

$x \in Q$, s. t. x on mistahes ratsionaalarv.

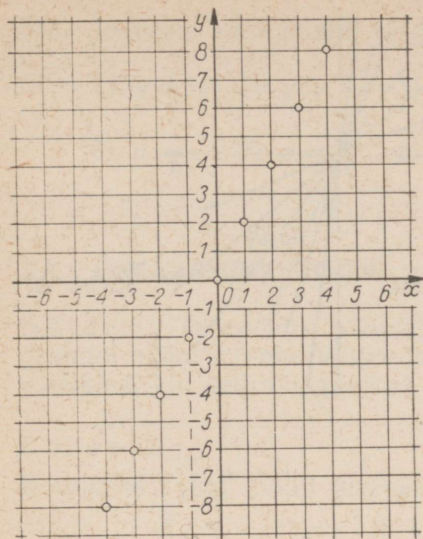
Lahendus. Koostame x ja y vastavate väärtuste tabeli, andes argumentidele x täisarvulised väärtused, näiteks vahemikust $-3 \leq x \leq 3$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-6	-4	-2	0	2	4	6

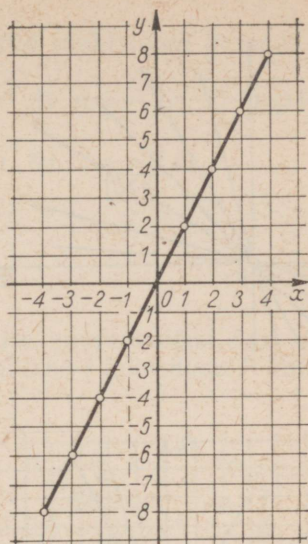
Leiame nüüd koordinaatteljestikus punktid, mille koordinaatideks on need x ja y vastavate väärtuste paarid (joon. 104). Joonlauaga proovides selgub, et kõik saadud punktid asetsevad ühel ja samal sirgel. Andes argumentidele veel mõned muud tabelis mitteleiduvad väärtused ja arvutades neile vastavad funktsiooni y väärtused, näeme, et ka nendele arvupaaridele vastavad punktid asetsevad varem saadud punktidega ühel sirgel. Joonestades selle sirge, saame funktsiooni $y=2x$ graafiku (joon. 105).

Hiljem tõestame, et kõik punktid $(x; ax)$, kus a on antud arv, asetsevad tõepoolest ühel ja samal sirgel. Seega,

funktsiooni $y=ax$ graafik on sirgjoon.



JOON. 104



JOON. 105

Sirgjoont saab joonestada tema kahe punkti järgi. Funktsiooni $y=ax$ graafiku joonestamiseks on sobiv kasutada punkte, kus $x=0$ ja $x=1$, s. o. punkte $(0; 0)$ ja $(1; a)$.

Kui ühik on väike, siis saadud punktid asetsevad teineteise lähedal, mistõttu joonis võib tulla ebatäpne. Sel juhul kasutame lisaks punktile $(0; 0)$ mõnda sellest kaugemal asetsevat punkti.

Uurime funktsiooni $y=ax$ graafiku asendit teljestiku suhtes, sõltuvalt võrdeteguri a märgist.

Me teame, et uuritav sirge läbib peale punkti $(0; 0)$ veel punkti $(1; a)$. Kui $a > 0$, siis punkt $(1; a)$ asetseb tasapinna esimeses veerandis, kui $a < 0$, siis punkt $(1; a)$ asetseb tasapinna neljandas veerandis.

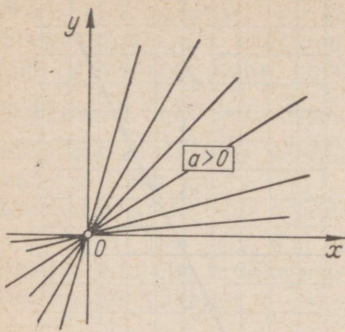
Kui mingi sirge läbib koordinaatide alguspunkti ja esimese veerandi mingit punkti, siis lõikab ta esimest ja kolmandat veerandit. Kui mingi sirge läbib koordinaatide alguspunkti ja neljanda veerandi mingit punkti, siis lõikab ta teist ja neljandat veerandit. Sellest järeldub:

kui võrdetegur a on positiivne arv, siis funktsiooni $y=ax$ graafik lõikab tasapinna esimest ja kolmandat veerandit (joon. 106);

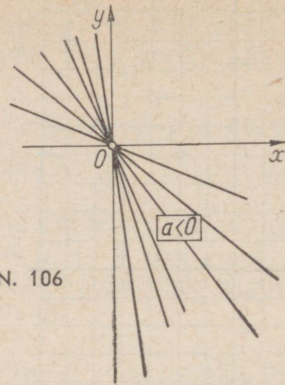
kui võrdetegur a on negatiivne arv, siis funktsiooni $y=ax$ graafik lõikab tasapinna teist ja neljandat veerandit (joon. 107).

534. Joonesta millimeetripaberile funktsiooni $y=1,5x$ graafik ja lahenda selle abil ülesanded:

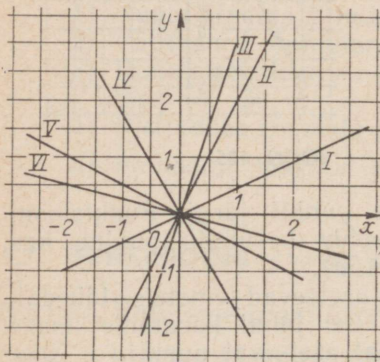
- 1) leia y , kui $x = -1,6; -0,2; 1,4; 2,4; 2,8$;
- 2) leia x , kui $y = -4,2; -3,9; -0,9; 1,2; 1,8$.



JOON. 106



JOON. 107



JOON. 108

535. Joonesta ühes ja samas teljestikus funktsioonide $y=0,5x$ ja $y=-0,5x$ graafikud. Lahenda ülesanded:

- 1) leia mõlema graafiku abil y , kui
 $x = -2,6; 0,6; 1,2; 2,2;$
- 2) leia mõlema graafiku abil x , kui
 $y = -1,3; 0,7; 0; 0,4; 1,2.$

536. Otsusta, missuguseid tasapinna veerandeid lõikab antud funktsiooni graafik.

- | | | |
|----------------------|----------------------|------------|
| 1) $y=1,8x$ | 2) $y=-0,8x$ | 3) $y=-4x$ |
| 4) $y=-\frac{2}{5}x$ | 5) $y=5\frac{1}{4}x$ | 6) $y=10x$ |

537. Joonisel 108 on 6 funktsiooni $y=ax$ graafikut. Määra graafiku järgi vastav võrdetegur a ja esita iga funktsioon valemina.

538. Joonesta kahe punkti järgi iga antud funktsiooni graafik.

1) $y=3x$ 2) $y=-x$ 3) $y=1,6x$ 4) $u=-2v$ 5) $u=1,2v$

6) $u=-v$ 7) $s=t$ 8) $s=\frac{2}{3}t$ 9) $s=-2,4t$

5.8. LINEAARFUNKTSIOON.

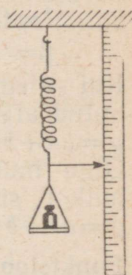
Näide 1. Terasvedru pikeneb koormuse suurenemisel iga kilogrammi mõjul 0,5 cm. Väljenda vedru pikkus l koormuse P kaudu valemina, kui vedru algpikkus on 5 cm.

Lahendus.

Koormuse 1 kgf mõjul pikeneb vedru	0,5 cm
" 2 " " " " "	$2 \cdot 0,5 = 1,0$ cm
" 3 " " " " "	$3 \cdot 0,5 = 1,5$ cm
" P " " " " "	$P \cdot 0,5 = 0,5P$ cm.

Et vedru algpikkus oli 5 cm, siis vedru pikkus l avaldub valemina

$$l = 0,5P + 5.$$



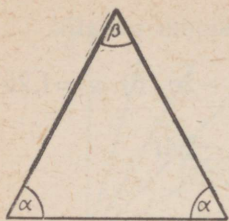
JOON. 109

Koostame muutujate P ja l vastavate väärtuste tabeli, andes muutujale P iga väärtuse hulgest $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Koormus P (kgf)	1	2	3	4	5	6
Pikenemine $0,5P$ (cm)	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Vedru pikkus l (cm)	5,5	6	6,5	7	7,5	8

Saadud tabelist ilmneb, et vedru pikkus l ei ole võrdeline koormusega P , sest vedru pikkuse ja koormuse vastavate väärtuste suhe ei ole jääv. Näiteks $5,5 : 1 \neq 6 : 2 \neq 6,5 : 3$. Sedasama ütleb ka vedru pikkuse valem.

Võrreldes tabeli teist ja esimest rida, näeme, et vedru pikenemine koormuse mõjul on küll võrdeline koormusega, sest sellel eeldusel me ju pikenemise arvutasimegi.



JOON. 110

Näide 2. Leiame võrdhaarse kolmnurga tipunurga β , kui alusnurk on α :

- 1) alusnurkade summa on 2α ;
- 2) tipunurk $\beta = 180^\circ - 2\alpha$.

Näidetes 1 ja 2 saadud valemid on ühesuguse ehitusega

$$l = 0,5P + 5,$$

$$\beta = -2\alpha + 180^\circ.$$

Kui valemities esinevad muutujad tähistada tähtedega y ja x ning antud arvud tähtedega a ja b , siis nende valemite ühine kuju on $y = ax + b$.

Olgu muutuja x väärtuste hulk X ning muutuja y väärtuste hulk Y , siis muutuja x igale väärtusele hulgast X vastab eeskirja $y = ax + b$ järgi üks ja ainult üks y väärtus hulgast Y .

Funktsiooni, mida saab esitada valemina $y = ax + b$, kus a ja b on antud arvud, nimetatakse lineaarfunktsiooniks.

Nimetus lineaarfunktsioon tuleneb sellest, et avaldis $ax + b$ on lineaarne x suhtes, s. t. x on ainult esimeses astmes.

Avaldist $ax + b$ nimetatakse ka lineaarfunktsiooni avaldiseks. Selgitame temas esinevate kordajate a ja b tähendust.

Kui argumendile x anda väärtus 0, siis $y = a \cdot 0 + b = b$. Sellest näeme, et

vabaliige b lineaarfunktsiooni avaldises $ax + b$ on võrdne funktsiooni selle väärtusega, mis vastab argumendi väärtusele 0.

Seda väärtust nimetatakse lineaarfunktsiooni **algväärtuseks**.

Näide. Olgu antud lineaarfunktsioon $y = 2x - 5$. Kui $x = 0$, siis $y = -5$. Selle funktsiooni algväärtus on -5 .

Kordaja a tähenduse selgitamiseks vaatame, kuidas muutub funktsiooni väärtus, kui argumendi väärtus suureneb ühe võrra. Selleks anname argumendile mingi väärtuse x_1 ja veel teise väärtuse $x_1 + 1$. Funktsiooni vastavad väärtused olgu y_1 ja y_2 . Siis

$$y_1 = ax_1 + b,$$

$$y_2 = a(x_1 + 1) + b.$$

Lahutades alumisest võrdusest liikmeti ülemise, saame

$$y_2 - y_1 = a(x_1 + 1) - ax_1 = a.$$

Tulemus ütleb, et

kordaja a lineaarfunktsiooni avaldises $ax+b$ näitab, mille võrra muutub lineaarfunktsiooni väärtus, kui argumenti väärtus kasvab ühe võrra.

Sellest järeldub, et kui $a > 0$, siis argumenti kasvamisel lineaarfunktsioon kasvab, ja kui $a < 0$, siis argumenti kasvamisel lineaarfunktsioon kahaneb.

Näiteks, kui argumenti väärtus kasvab ühe võrra, siis funktsiooni $4x-2$ väärtus kasvab 4 võrra;

funktsiooni $-3x+5$ väärtus kahaneb 3 võrra;

funktsiooni $-1,5x-2$ väärtus kahaneb 1,5 võrra;

funktsiooni $\frac{3}{4}x+1$ kasvab $\frac{3}{4}$ võrra.

539. Otsusta, missugused järgmistest valemitest väljendavad argumenti x lineaarfunktsiooni, kui neis a, b, c ja d on antud arvud.

1) $y = 3 - 4x$

2) $y = (2 + 3x)x$

3) $y = \frac{x}{3} - 3,5$

4) $y = a^2x + b + c$

5) $y = ax^2 + b$

6) $z = 1 - ax$

7) $z = ax + bx + c$

8) $y = \frac{a}{b} + cx$

540. Leia 1) kui palju muutub iga funktsiooni väärtus, kui argument kasvab 1 võrra, 2) kui suur on funktsiooni algväärtus.

1) $y = 3,5x + 6$

2) $z = -2u + 4,2$

3) $y = -6x + 1,5$

4) $z = 2(4,5u - 1,5)$

5) $y = 3(1 - 2x)$

6) $z = \frac{5u - 6}{10}$

541. Kas funktsioon kasvab või kahaneb argumenti kasvamisel?

1) $y = -5x + 7$

2) $z = 1 - \frac{1-3u}{3}$

3) $y = \frac{3-2x}{4}$

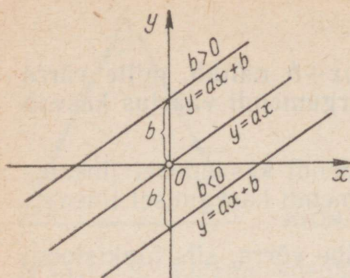
4) $z = u + \frac{1-3u}{2}$

5) $y = \frac{4x-3}{2} - \frac{2x+5}{3}$

6) $z = \frac{u-3}{3} - \frac{4u-5}{10}$

5.9. LINEAARFUNKTSIOONI GRAAFIK.

Nagu iga funktsiooni graafiku, nii saaksime ka lineaarfunktsiooni graafiku valmistada sel teel, et anname argumentide rea väärtusi, arvutame neile vastavad funktsiooni väärtused ja kujutame saadud arvupaarid tasapinna punktidega koordinaatteljestikus. Enne sellise üldise võtte rakendamist katsume selgitada, mis liiki joon on lineaarfunktsiooni graafik. Kui lineaarfunktsiooni algväärtus $b=0$, siis $y=ax$, s. t. funktsioon $y=ax$ on lineaarfunktsiooni eri-



JOON. 111

juht. Sel erijuhul on lineaarfunktsiooni graafikuks sirge, mis läbib koordinaatide alguspunkti ja punkti $(1; a)$. Funktsiooni $y = ax + b$ graafiku iga punkti ordinaat erineb funktsiooni $y = ax$ vastava punkti ordinaadist x iga väärtuse korral ühe ja sama arvu b võrra. Sellest selgub, et kui $b > 0$, siis funktsiooni $y = ax + b$ graafik saadakse funktsiooni $y = ax$ graafikust lükkel y -telje sihis b ühiku võrra ülespoole, ja kui $b < 0$, siis allapoole (joon. 111).

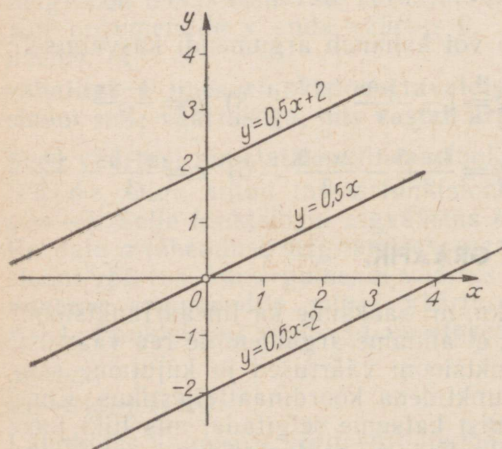
Et lükkel saab sirgest samasihilise sirge, siis

funktsiooni $y = ax + b$ graafik on funktsiooni $y = ax$ graafikuga paralleelne sirge.

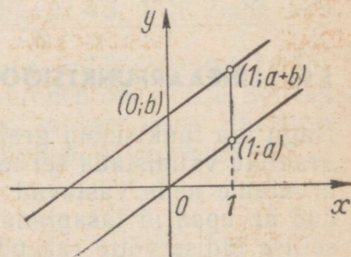
Näiteid. 1) Funktsiooni $y = 0,5x + 2$ graafik on sirge, mis saadakse funktsiooni $y = 0,5x$ graafikust selle lükkel y -telje sihis 2 ühiku võrra ülespoole.

2) Funktsiooni $y = 1,5x - 2$ graafik on sirge, mis saadakse funktsiooni $y = 1,5x$ graafikust selle lükkel y -telje sihis 2 ühiku võrra allapoole (joon. 112).

Et funktsiooni $y = ax$ graafik läbib punkte $(0; 0)$ ja $(1; a)$, millest lükkel y -telje sihis b ühiku võrra ülespoole (allapoole) saadakse punktid $(0; b)$ ja $(1; a + b)$, siis (joon. 113) funktsiooni $y = ax + b$



JOON. 112



JOON. 113

graafik on sirge, mis läbib punkte $(0; b)$ ja $(1; a+b)$. Näiteks funktsiooni $y=0,5x-2$ graafik on punkte $(0; -2)$ ja $(1; -1,5)$ läbiv sirge ja funktsiooni $y=-2x+3$ graafik punkte $(0; 3)$ ja $(1; 1)$ läbiv sirge. Kuid funktsiooni graafiku joonestamiseks ei tarvitse kasutada just neid punkte; sirgjoon on määratud oma mistahes kahe punktiga. Seetõttu võime vabalt võtta argumenti x kaks väärtust, arvutada neile vastavad funktsiooni y väärtused ja joonestada graafiku nende punktide põhjal. Kontrolli mõttes on siiski kasulik leida veel kolmas punkt, mis peab samuti asetsema joonestataval sirgel.

542. Esita graafiliselt funktsioon $y=0,5x+2$, mis on defineeritud hulgal $\{x|x \in Z \text{ ja } -4 \leq x \leq 4\}$.

543. Esita graafiliselt funktsioon $y=-x+1$, mis on defineeritud hulgal $\{x|x \in Q \text{ ja } -2 \leq x \leq 3\}$.

544. Esita graafiliselt funktsioon $y=2x-3$, mis on defineeritud hulgal $\{x|x \in N \text{ ja } x \leq 5\}$.

545. Esita graafiliselt ühes ja samas teljestikus funktsioonid $y=2x$, $y=2x+1$ ja $y=2x-1$, kui $x \in Q$.

546. Esita graafiliselt ühes ja samas teljestikus funktsioonid $y=-\frac{1}{4}x$, $y=-\frac{1}{4}x+3,5$ ja $y=\frac{1}{4}x+3,5$, kui $x \in Q$. Kuidas asetsevad üksteise suhtes viimased kaks sirget?

547. Põhjenda väidet, et sirged, mis on funktsioonide $y=2,5x+15$ ja $y=2,5x-8$ graafikud, on paralleelsed.

548. Otsusta ilma arvutamise ja joonistamiseta, kas antud kahe funktsiooni graafikud on paralleelsed või lõikuvad sirged. Kui nad lõikuvad, siis leia lõikepunkt.

1) $y=-4x+17$ ja $y=4x+17$

2) $y=4,3x-3$ ja $y=4,3x-6$

3) $y=-0,6x+5$ ja $y=-\frac{3}{5}x+2$

4) $y=2x-9$ ja $y=4x-9$

549. Joonesta kahe punkti abil lineaarfunktsioonide graafikud, kui $x \in Q$.

1) $y=3x-1$

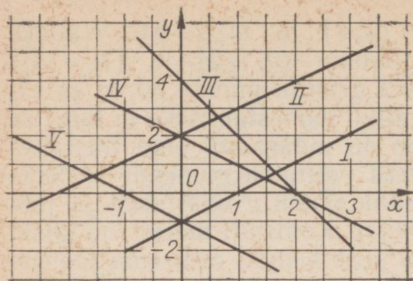
2) $y=-2x+3$

3) $y=0,4x+2$

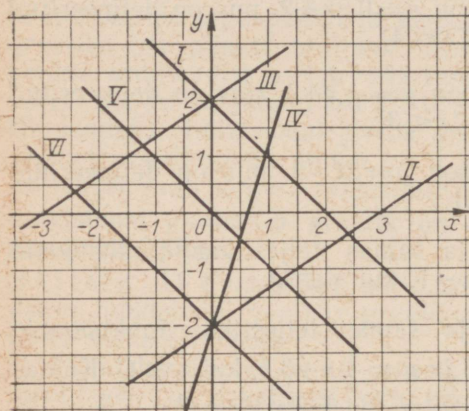
4) $y=-0,8x+4$

5) $y=-\frac{1}{3}x+2\frac{1}{3}$

6) $y=2x-2$



JOON. 114



JOON. 115

7) $y = -3x + 1$

8) $y = 0,5x - 3$

9) $y = -0,4x - 2$

10) $y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{1}{3}$

550. Joonisel 114 on viie lineaarfunktsiooni graafikud. Leia iga funktsiooni puhul kordajad a ja b ning esita vastav funktsioon valemina.

551. Joonisel 115 on antud kuue lineaarfunktsiooni graafikud. Otsusta, missuguste funktsioonide avaldistes on argumenti kordajad võrdsed ja missuguste avaldistes on vabaliikmed võrdsed.

5.10. FUNKTSIOON $y = \frac{a}{x}$.

Eespool (5.6) tutvusime muutujatega, mille vastavate väärtuste jagatis oli jääv. Vaatleme nüüd muutujaid, mille vastavate väärtuste korrutis on jääv.

Näide 1. Kahe linna vahemaa on 200 km. Kui auto läbib selle keskmise kiirusega $v \frac{\text{km}}{\text{h}}$, siis sõiduks kulub tal $t=200:v$ tundi. Sellest jäeldub, et $v \cdot t=200$.

Näide 2. Olgu vaja joonestada ristkülik, mille pindala on 64 cm^2 . Kui ristküliku aluseks võtta $a \text{ cm}$, siis kõrgus b peab olema $64:a \text{ cm}$. Siin $ab=64$.

Olgu x ja y muutujad, mille vastavate väärtuste korrutis on jääv. Tähistame selle jääva korrutise tähega a . Siis: $xy=a$.

Muutujaid, mille vastavate väärtuste korrutis on jääv, nimetatakse pöördvõrdelisteks.

Nagu nägime, on jääva teepikkuse puhul liikumise kiirus ja liikumiseks kuluv aeg pöördvõrdelised. Samuti on ristküliku alus ja kõrgus pöördvõrdelised, kui ristküliku pindala on jääv. Kui muutujad x ja y on pöördvõrdelised, s. t. kui $xy=a$, siis $y=\frac{a}{x}$; ümberpöördult, kui $y=\frac{a}{x}$, siis $xy=a$. Niisiis,

kahe muutuja x ja y pöördvõrdelisust saab avaldada nii kujul $xy=a$ kui ka kujul $y=\frac{a}{x}$, kus a on antud arv.

Näiteid. 1) Muutujate x ja y vaheline seos on antud valemiga $y=\frac{n}{3}:\frac{x}{4}$, kus n on antud arv. Kas see valem esitab funktsiooni $y=a:x$?

Lahendus. Teisendame antud valemit järgmiselt:

$$y = \frac{n}{3} : \frac{x}{4} = \frac{4n}{3x} = \frac{\frac{4}{3}n}{x}.$$

Et n on antud arv, siis avaldis $\frac{4}{3}n$ on jääv. Seega antud valem esitab funktsiooni $y=a:x$, kus $a=\frac{4}{3}n$.

2) On antud muutujate x ja y vastavate väärtuste tabel:

x	-2	3	5	8	12
y	-1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

Teha kindlaks, kas muutuja y on pöördvõrdeline muutujaga x .

L a h e n d u s. Leiame korrutise xy väärtused.

$$(-2)(-1)=2; 3 \cdot \frac{2}{3}=2; 5 \cdot \frac{2}{5}=2; 8 \cdot \frac{1}{4}=2; 12 \cdot \frac{1}{6}=2.$$

Seega on muutuja y pöördvõrdeline muutujaga x .

552. Otsusta, missugused järgmistest valemitest esitavad funktsiooni $y=a : x$, kui kõik tähed, välja arvatud k ja n , on muutujad. Kui funktsioon on kujuga $a : x$, siis määra a .

$$\begin{array}{lll} 1) y = \frac{k}{x} & 2) y = \frac{2n}{x} & 3) y = \frac{5}{3x} \\ 4) z = \frac{(n+5)x}{4} & 5) z = \frac{x}{3+k} & 6) z = n \cdot \frac{1}{x} + 2 \end{array}$$

553. Tee kindlaks, missugused tabelid esitavad funktsiooni $y = a : x$, ja leia see funktsioon.

$$1) \frac{x \mid -0,5 \mid -0,3 \mid -0,1 \mid 0,1 \mid 0,3}{y \mid -3 \mid -5 \mid -15 \mid 15 \mid 5}$$

$$2) \frac{x \mid 0,2 \mid 0,4 \mid 0,6 \mid 0,8 \mid 1,0}{z \mid 1,2 \mid 0,6 \mid 0,4 \mid 0,3 \mid 0,24}$$

$$3) \frac{t \mid -3 \mid -1,5 \mid 1,5 \mid 3,0 \mid 4,5}{s \mid 6 \mid 12 \mid 12 \mid 6 \mid 4}$$

554. Tee kindlaks, kas mõni tabel esitab funktsiooni $y=ax$ või funktsiooni $y=\frac{a}{x}$. Kui esitab, siis leia arv a .

$$1) \frac{x \mid -3 \mid -2 \mid -1 \mid 1 \mid 2 \mid 3}{y \mid -2 \mid -3 \mid -6 \mid 6 \mid 3 \mid 2}$$

$$2) \frac{u \mid -2 \mid -1 \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3}{v \mid 11 \mid 5,5 \mid 0 \mid -5,5 \mid -11 \mid -16,5}$$

$$3) \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline z & 10 & 7,5 & 5 & 2,5 & 0 & -2,5 \end{array}$$

$$4) \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} s & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline T & 0 & -3 & -6 & -9 & -12 & -15 \end{array}$$

Kui a on positiivne, siis valemist $y = \frac{a}{x}$ järeldub, et

1) muutuja x väärtuse suurenedes mingi arv korda, muutuja y väärtus väheneb sama arv korda;

2) muutuja x väärtuse vähenedes mingi arv korda, muutuja y väärtus suureneb sama arv korda.

Näide 1. $y = \frac{3}{x}$. Kui $x=1$, siis $y=3$. Kui $y=3$, siis $x=1$.

Seega muutuja x väärtuse suurenedes kolm korda, vähenes muutuja y väärtus kolm korda.

Näide 2. $y = \frac{3}{x}$. Kui $x=6$, siis $y = \frac{1}{2}$. Kui $x=3$, siis $y = \frac{1}{1}$.

Muutuja x väärtuse vähenedes kaks korda kasvas muutuja y väärtus kaks korda.

Lauseid 1) ja 2) pole aga kehtivad, kui a on negatiivne.

Näide 3. $y = \frac{-4}{x}$. Kui $x=1$, siis $y=-4$ ja kui $x=2$, siis $y=-2$.

Seega muutuja x väärtuse suurenedes kaks korda muutuja y väärtus ei vähenenud sama arv korda, vaid hoopis kasvas (-4) -st (-2) -ni.

555. Missuguses seoses on ühtlasel liikumisel antud teepikkuse S puhul liikumise kiirus v ja tee läbimiseks kulunud aeg t ? Väljenda see seos valemiga. Too arvulisi näiteid.

556. Risttahuka põhja pindala on S cm², kõrgus h cm ja ruumala 16 cm³.

Avalda muutuja S valemiga muutuja h kaudu. Kas muutuja S on pöördvõrdeline muutujaga h ?

557. Jäälga pindalaga S kolmnurga üks külg on a ja sellele küljele tõmmatud kõrgus h . Tee kindlaks: 1) kas muutuja h on pöördvõrdeline muutujaga a ; 2) kas muutuja a on pöördvõrdeline muutujaga h . Avalda muutujate h ja a vaheline seos valemiga, kui $S=12$ cm².

558. On teada, et muutujad s ja t on pöördvõrdelised. Avalda seos s ja t vahel valemiga, kui $t=4,5$ korral $s=6$.

559. Läbi kanali ristlõike voolab igas sekundis 3 m^3 vett. Määra vee voolu kiirus v kanali punktides, kus voolu ristlõike pindala $S=6; 9; 12; 15 \text{ m}^2$. Avalda muutuja v muutuja S kaudu valemiga.
560. Väljenda iga kahe muutuja vaheline seos valemiga ja otsusta iga valemi puhul, kas see esitab mõnda sulle juba tuntud funktsiooni.
- 1) Kuubi pindala S ja serva pikkus a .
 - 2) Ristküliku pindala S ja kõrgus b , kui alus on 5 cm .
 - 3) Trapetsi pindala S ja alus a , kui teine alus on 8 cm ja kõrgus 6 cm .
 - 4) Anuma ja selles oleva vedeliku kogukaal P ning vedeliku ruumala v , kui vedeliku tihedus on $0,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ja anuma kaal on 1 kgf .
 - 5) Käesoleva kuu eelolevate päevade arv y ja möödunud päevade arv x .
 - 6) 2 rbl . eest saadav maiustuste kaal $k \text{ kgf}$ ja maiustuste kilogrammi hind $h \text{ rbl}$.

5.11. FUNKTSIOONI $y = \frac{a}{x}$ GRAAFIK.

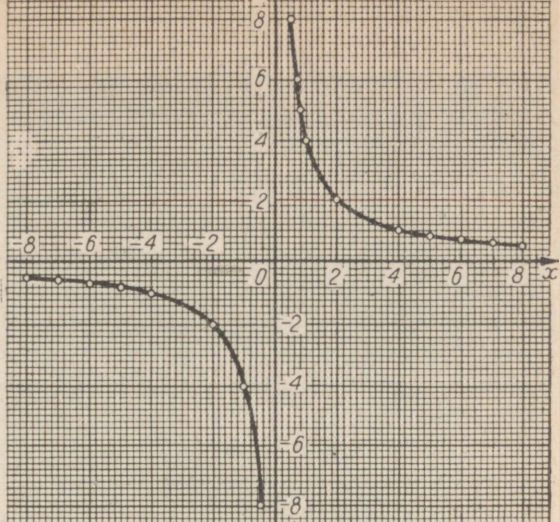
Näide. Joonestame funktsiooni $y=4 : x$ graafiku, kui $x \in Q$ ja $x \neq 0$.

Ülesande lahendamiseks anname argumentidele x täisarvulised väärtused näiteks vahemikus (-8) -st 8 -ni, välja arvatud väärtus 0 , mis ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda. Et $x \neq 0$, siis graafikul puudub punkt, mille abstsiss on 0 . Teisiti öeldes: graafik k a t k e b kohal $x=0$. Graafiku käigu selgitamiseks katkemiskoha ümbruses anname argumentidele väärtused $-0,5, -0,25, 0,25$ ja $0,5$. Ühendades saadud punktid sujuvalt kõverjoonega, saame joonisel 116 kujutatud graafiku. Saadud jooniselt näeme, et funktsiooni $y=4 : x$ graafik koosneb kahest eraldi asetsevast harust, millest üks on esimeses veerandis (kui $x > 0$) ja teine kolmandas veerandis (kui $x < 0$).

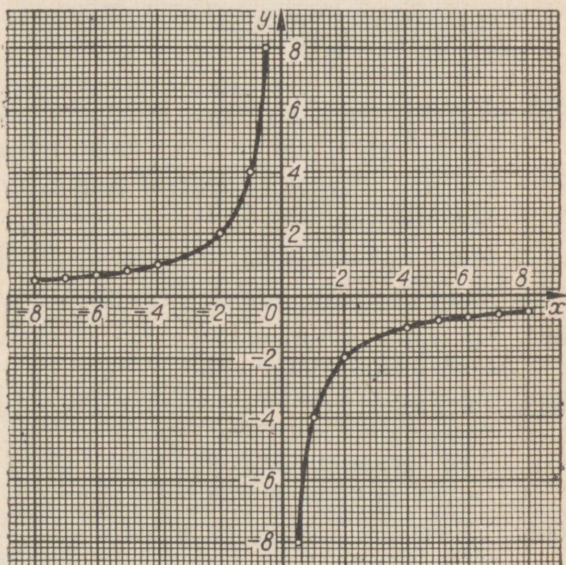
Funktsiooni $y=a : x$ graafikut nimetatakse **hüperbooliks**.

Hüperbool koosneb kahest eraldi asetsevast harust, mis on sümmeetrilised koordinaatide alguspunkti suhtes. Tõepoolest, kui mingi punkt $(x_1; y_1)$ asetseb hüperboolil $y=a : x$, s. t. $x_1 y_1 = a$, siis sellega alguspunkti suhtes sümmeetriline punkt $(-x_1; -y_1)$ asetseb samuti sellel hüperboolil, sest ka sel korral $(-x_1) \cdot (-y_1) = a$.

561. Kirjelda joonise 116 põhjal funktsiooni $x=4 : x$ muutumist, kui argument x kasvab (-8) -st $(-0,5)$ -ni ja $0,5$ -st 8 -ni.

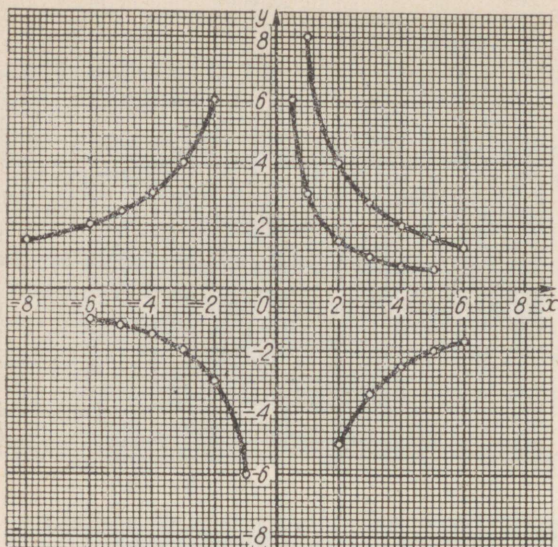


JOON. 116



JOON. 117

562. Valmista joonise 116 eeskujul funktsiooni $y = \frac{-4}{x}$ ehk $y = -\frac{4}{x}$ graafik (joon. 117). Mille poolest erineb saadud graafik funktsiooni $y = \frac{4}{x}$ graafikust? Kirjelda funktsiooni $y = -\frac{4}{x}$ muutumist argumenti kasvamisel (-8) -st $(-0,5)$ -ni ja $0,5$ -st 8 -ni. Missugustes veerandites asetsevad nüüd hüperbooli harud?



Joon. 118

563. Joonesta ühes ja samas teljestikus funktsioonide $y = \frac{2}{x}$ ja $y = \frac{-2}{x}$ graafikud, andes argumendile x ainult positiivseid väärtusi. Peegelda seejärel kummagi hüperbooli haru koordinaatide alguspunktist.
- Mis me saame funktsiooni $y = \frac{2}{x}$ graafikust, kui teda peegeldame x -teljest? y -teljest?
564. On teada, et funktsiooni $y = a : x$ graafik läbib punkti $(-2; 4)$. Leia funktsiooni avaldis.
565. Joonisel 118 on antud viie funktsiooni $y = a : x$ graafikud. Iga funktsiooni määramispiirkonnaks on vahemik $m \leq x \leq n$. Leia graafiku järgi a , m ja n ning esita iga funktsioon valemi ja määramispiirkonna abil.
566. Täisnurkse kolmnurga pindala on 3 cm^2 . Avalda üks kaatet teise funktsioonina ja joonesta selle funktsiooni graafik.

5.12. FUNKTSIOON $y = x^2$.

Olgu ruudu külje pikkus x pikkusühikut. Siis ruudu pindala on $y = x^2$ vastavat pindalaühikut. Igale küljepikkuse x väärtusele vastab üks kindel pindala x^2 väärtus. Et ruudu külje pikkuseks saab olla ainult positiivne arv, siis võime öelda, et ruudu pindala on positiivsete arvude hulgal defineeritud funktsioon $y = x^2$.

567. Arvuta tabelis antud x väärtustele vastavad x^2 väärtused.

x	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
x^2													

Selgita tabeli andmete põhjal, mitu korda suureneb x^2 , kui arvu x suurendada 2 korda, 3 korda, 4 korda, 10 korda, 100 korda.

Mitu korda väheneb x^2 , kui arvu x vähendada 2 korda, 3 korda, 4 korda, 10 korda, 100 korda?

568. Leia arvutamise teel, mitu korda on

- 1) $0,5^2$ väiksem kui 5^2 ; 2) 300^2 suurem kui 3^2 ;
 3) $2,5^2$ väiksem kui 25^2 ; 4) 600^2 suurem kui 6^2 .

569. Leia, mitu korda on

- 1) 45^2 suurem kui $4,5^2$; 2) $0,78^2$ väiksem kui 78^2 ;
 3) 25^2 suurem kui $0,25^2$; 4) $6,5^2$ väiksem kui 650^2 .

Ülesannete 567—569 lahendustest ilmneb, et

kui suurendame positiivset arvu 10, 100, ... korda, siis arvu ruut suureneb 100, 10 000, ... korda;

kui vähendame positiivset arvu 10, 100, ... korda, siis arvu ruut väheneb 100, 10 000, ... korda.

Üldiselt,

kui positiivset arvu suurendada $k > 0$ korda, siis arvu ruut suureneb k^2 korda.

Selle tõestamiseks anname argumendile x mingi väärtuse x_1 ; siis $y_1 = x_1^2$. Kui aga anname argumendile k korda suurema väärtuse kx_1 , siis funktsiooni väärtus $y_2 = (kx_1)^2$ ehk $y_2 = k^2x_1^2$. Et $x_1^2 = y_1$, siis $y_2 = k^2y_1$, mida oligi tarvis tõestada.

Avaldades ruudu pindala ruudu külje pikkuse kaudu, saime funktsiooni $y = x^2$, mille määramispiirkonnaks oli positiivsete arvude hulk. Et ruutu saab võtta mistahes ratsionaalarvu, siis võime funktsiooni $y = x^2$ määramispiirkonnaks lugeda ratsionaalarvude hulga iga osahulga või ka kogu ratsionaalarvude hulga Q .

Funktsiooni $y = x^2$ nimetatakse **ruutfunktsiooniks**. Et iga ratsionaalarvu ruut on positiivne arv või 0, siis ruutfunktsiooni $y = x^2$ väärtuste hulgas ei leidu negatiivseid arve.

N ä i d e. Hulgal $X = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ defineeritud ruutfunktsiooni $y = x^2$ väärtuste hulk on $\{0; 1; 2; 4\}$.

570. Esita järjestatud arvupaaride hulgana hulk

$$M = \{(x; y) \mid x \in N, x < 5 \text{ ja } y = x^2\}.$$

571. Esita järjestatud arvupaaride hulgana ja nooldiagrammina hulk

$$P = \{(x; y) \mid x \in Z, |x| < 3 \text{ ja } y = x^2\}.$$

372. Esita nooldiagrammina funktsioon $y = x^2$, kui $x \in Z$ ja $-4 < x < 2$.

5.13. FUNKTSIOONI $y = x^2$ GRAAFIK.

Konstrueerime funktsiooni $y = x^2$ graafiku, kui $x \in Q$. Selleks koostame muutujate x ja x^2 vastavate väärtuste tabeli.

x	-3	-2	-1,5	-1	-0,8	-0,4	0	0,4	0,8	1	1,5	2	3
x^2	9	4	2,25	1	0,64	0,16	0	0,16	0,64	1	2,25	4	9

Märkides nüüd koordinaatteljestikku punktid, mille koordinaatideks on tabelis antud muutujate vastavate väärtuste paarid, ning ühendades need punktid sujuvalt kõverjoonega, saame funktsiooni $y = x^2$ graafiku (joon. 119).

Funktsiooni $y = x^2$ graafikut nimetatakse **parabooliks**. Et $x^2 = (-x)^2$, siis abstsissi väärtustele x ja $-x$ vastavad ordinaadid on võrdsed. Geomeetriliselt tähendab see, et saadud graafik on sümmeetriline y -telje suhtes, nagu näeme ka jooniselt. Parabooli sümmeetriatelge nimetatakse **parabooli teljeks**.

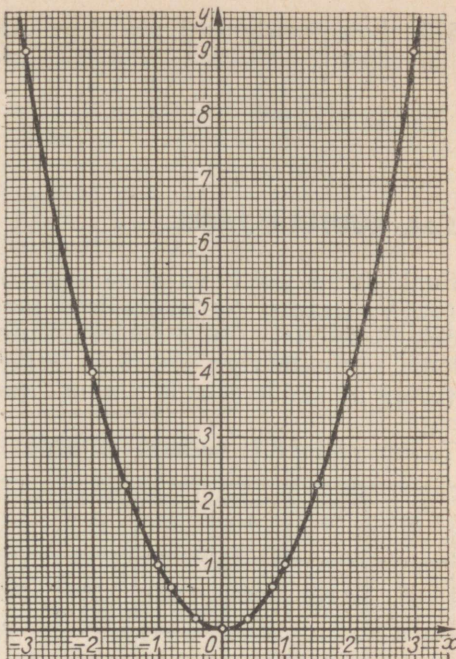
Parabooli ja tema telje ühist punkti nimetatakse parabooli **tipuks** ehk **haripunktiks**.

Et funktsiooni $y = x^2$ graafikuks oleva parabooli teljeks on y -telg, siis asetseb ta haripunkt y -teljel, s. t. haripunkti abstsiss on 0. Kuid siis on ka haripunkti ordinaat 0. Seega asetseb funktsiooni $y = x^2$ graafiku haripunkt koordinaatide alguspunktis. See nähtub ka jooniselt 119. Joonisel 119 kujutatud parabooli kohta öeldakse, et ta **avaneb ülespoole**.

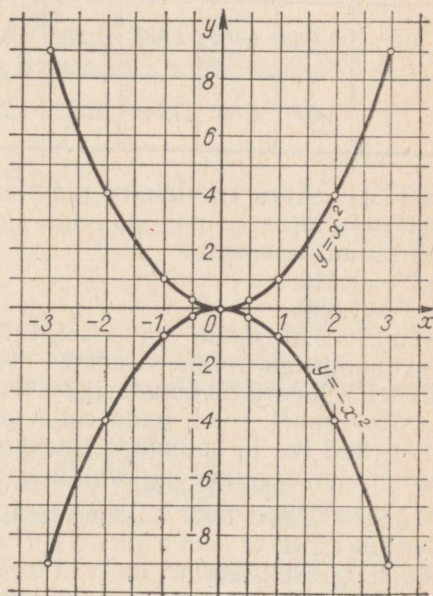
Peegeldame nüüd funktsiooni $y = x^2$ graafiku x -teljest. $y = x^2$ graafiku punktidele (joon. 120) $(-3; 9)$, $(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(3; 9)$ vastavateks punktideks saame siis punktid $(-3; -9)$, $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; -1)$, $(3; -9)$.

Üldiselt, punktile $(x; x^2)$ vastavaks punktiks saame punkti $(x; -x^2)$. Saadud punktihulk on funktsiooni $y = -x^2$ graafik. See punktihulk on ka parabool, mille haripunkt asetseb koordinaatide alguspunktis ja mille teljeks on y -telg, kuid nüüd **avaneb parabool alla poole**.

JOON. 119



JOON. 120



573. Leia funktsiooni $y=x^2$ graafiku abil järgmiste arvude ruudud:

1) 1,2; 1,5; 2,1; 2,6; 2,9;

2) 0,7; 0,9; 1,6; 2,4; 2,7.

5.14. RUUTUDE TABEL.

Funktsiooni $y=x^2$ väärtusi saab hõlpsasti leida ruutude tabelist (vt. V. Bradis, Neljakohalised matemaatilised tabelid keskkoolidele. Tabel III). Selle tabeli esimeses veerus (veerg N) on antud kahe tüvenumbriga arvud ja selle veeru kõrval olevas veerus (veerg 0) nende arvude ruudud. Ruudud on antud nelja tüvenumbri-ga.

Toome väljavõtte selle tabeli algusest.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932

Näide. Arvu $1,1^2$ leiame rea 1,1 ja veeru 0 ristumiskohast:

$$1,1^2=1,210.$$

Niisamuti leiame, et

$$1,2^2=1,440,$$

$$1,3^2=1,690.$$

Samal viisil saame leida kõigi 1,0 ja 10 vahel asetsevate kahe tüvenumbriga arvude ruudud.

Et leida kolme tüvenumbriga arvu ruutu, kui see arv asetseb 1,00 ja 10,0 vahel, tuleb leida selle arvu kahe esimese tüvenumbriga märgitud rea ja kolmanda tüvenumbriga märgitud veeru ristumiskohal olev arv, mis ongi antud arvu ruut.

Näide. Arvu $1,12^2$ leiame rea 1,1 ja veeru 2 ristumiskohast:

$$1,12^2=1,254.$$

Analoogiliselt leiame, et

$$1,06^2=1,124,$$

$$1,35^2=1,823.$$

Selliselts saame leida iga kolme tüvenumbriga täpse arvu ruudu, kui see arv asetseb 1 ja 10 vahel. Seejuures säilitame ruudus neli tüvenumbrit.

Kui aga on teada, et antud arv on ligikaudne, siis ümardame lõpptulemuse kahe või kolme tüvenumbriga arvuks, vastavalt sellele, mitu tüvenumbrit on astendatavas arvus. Vahepealsetes tehetes säilitame ühe varunumbri.

Näide. Leiame tabelist ligikaudse arvu 3,4 ruudu.

Saame

$$3,4^2 = 11,56.$$

Kui selle arvu ruudu leidmine on vahepealseks tehteks mingi ülesande lahendamisel, siis anname tulemuse kolme tüvenumbriga, s.o.

$$3,4^2 \approx 11,6.$$

Lõpptulemuse anname aga kahe tüvenumbriga

$$3,4^2 \approx 12.$$

Niisamuti leiame kolme tüvenumbriga ligikaudse arvu ruudu.

Näiteid. 1) $5,77^2 = 33,29 \approx 33,3$

$$2) 8,49^2 = 72,08 \approx 72,1$$

574. Leia ruutude tabeli abil täpsete arvude ruudud.

$$1) 5,2 \quad 9,4 \quad 3,1 \quad 7,9 \quad 2,8$$

$$2) 1,7 \quad 8,3 \quad 3,9 \quad 4,5 \quad 6,8$$

$$3) 5,64 \quad 3,78 \quad 5,36 \quad 1,08 \quad 7,82$$

$$4) 1,99 \quad 8,04 \quad 6,90 \quad 5,01 \quad 8,98$$

575. Leia ruutude tabeli abil ligikaudsete arvude ruudud.

$$1) 3,1 \quad 5,8 \quad 4,6 \quad 1,2 \quad 9,3$$

$$2) 7,6 \quad 4,1 \quad 4,5 \quad 3,2 \quad 6,4$$

$$3) 5,63 \quad 8,56 \quad 4,71 \quad 6,30 \quad 5,55$$

$$4) 1,78 \quad 2,64 \quad 3,26 \quad 9,17 \quad 8,91$$

Ruutude tabelit saab kasutada ka 1-st väiksemate ja 10-st suuremate arvude ruutude leidmiseks.

Selleks toimime järgmiselt:

a) kui arv on 1,00-st väiksem, siis suurendame arvu 10, 100 jne. korda nii, et saame arvu, mis kuulub vahemikku 1-st 10-ni, leiame suurendatud arvu ruudu ja vähendame seda vastavalt 100, 10 000 jne. korda;

Näiteid. 1) $0,34^2 = 3,4^2 : 100 = 11,56 : 100 = 0,1156$

$$2) 0,932^2 = 9,32^2 : 100 = 86,86 : 100 = 0,8686$$

$$3) 0,0237^2 = 2,37^2 : 10\,000 = 5,617 : 10\,000 = 0,0005617$$

b) kui arv on 9,99-st suurem, siis vähendame arvu 10 või 100 jne. korda nii, et saame arvu, mis kuulub vahemikku 1-st 10-ni, leiame vähendatud arvu ruudu ja suurendame seda vastavalt 100, 10 000, ... korda.

- Näiteid. 1) $48^2 = 4,8^2 \cdot 100 = 23,04 \cdot 100 = 2304$
 2) $21,9^2 = 2,19^2 \cdot 100 = 4,796 \cdot 100 = 479,6$
 3) $564^2 = 5,64^2 \cdot 10\,000 = 31,81 \cdot 10\,000 = 318\,100$

576. Leida ruutude tabeli abil arvude ruudud.

- | | | | | | |
|---------|-------|--------|---------|----|------|
| 1) 0,41 | 0,794 | 0,561 | 0,0788 | 83 | 52,7 |
| 2) 0,54 | 0,875 | 0,876 | 0,00234 | 27 | 92,3 |
| 3) 0,72 | 0,328 | 0,795 | 0,0726 | 29 | 76,1 |
| 4) 33,5 | 0,237 | 0,0925 | 0,00235 | 49 | 23,9 |

5.15. LINEAARNE INTERPOLATSIOON.

Seni leidsime kuni kolme tüvenumbriga arvude ruutusid. Sageli on aga vaja leida ka nelja tüvenumbriga arvude ruutusid.

Olgu näiteks tarvis leida täpse arvu 5,346 ruut. Ruutude tabelist ilmneb, et

$$5,34^2 = 28,52 \quad \text{ja} \quad 5,35^2 = 28,62.$$

Saadud arve vaatleme kui arvu 5,346 ruutusid vastavalt puuduga ja liiaga. Arvu 5,346 ruut asetseb arvude 28,52 ja 28,62 vahel, s. o. $28,52 < 5,346^2 < 28,62$.

Näeme, et arvu suurenedes $5,35 - 5,34 = 0,01$ võrra suurenes tema ruut $28,62 - 28,52 = 0,10$ võrra.

Teisiti: argumendi x väärtuse kasvades 0,01 võrra kasvas funktsiooni $y = x^2$ väärtus 0,10 võrra.

Leiame nüüd, mille võrra kasvab funktsiooni väärtus, kui argumendi väärtus kasvab

$$5,346 - 5,34 = 0,006 \text{ võrra.}$$

Kui oletame, et funktsiooni väärtus kasvab võrdeliselt argumendi väärtuse kasvuga, siis argumendi väärtuse kasvades 0,006 võrra kasvab funktsiooni väärtus

$$\frac{0,10}{0,01} \cdot 0,006 = 0,06 \text{ võrra.}$$

Saadud arvu 0,06 nimetatakse **paranduseks**, mis tuleb liita puuduga võetud arvu 5,346 ruudule, s. o. arvule 28,52.

$$\text{Saame } 5,346^2 = 28,52 + 0,06 = 28,58.$$

Kirjeldatud võtet funktsiooni vahepealsete väärtuste leidmiseks nimetatakse **lineaarseks interpolatsiooniks**¹.

See võte põhineb oletusel, et funktsiooni väärtuste muutumine on võrdeline argumendi väärtuste muutumisega.

Näiteid. 1) Leida arvu 2,539 ruut.

L a h e n d u s. Ruutude tabelist leiame:

$$2,53^2 = 6,401,$$

$$2,54^2 = 6,452.$$

¹ *interpolatio* (lad. k.) — vahelelücke

Näeme, et argumendi väärtuse muutudes $2,54 - 2,53 = 0,01$ võrra muutus funktsiooni väärtus $6,452 - 6,401 = 0,051$ võrra. Järelikult parandus, mis tuleb liita arvule 6,401, et saada 2,539², on

$$\frac{0,051}{0,01} \cdot 0,009 \approx 0,046.$$

Seega $2,539^2 = 6,401 + 0,046 = 6,447$

2) Leida arvu 1,275 ruut.

Lahendus. Ruutude tabelist leiame:

$$1,27^2 = 1,613,$$

$$1,28^2 = 1,638.$$

Parandus, mis tuleb liita arvule 1,613, et saada 1,275², on

$$\frac{1,638 - 1,613}{1,28 - 1,27} \cdot (1,275 - 1,27) = \frac{0,025}{0,01} \cdot 0,005 \approx 0,012.$$

Seega $1,275^2 = 1,613 + 0,012 = 1,625$

Ruutude tabelites (vt. tabel III) on toodud nn. parandusveerud (parempoolsed üheksa veergu). Parandusveergudes on antud neljandale tüvenumbrile vastavad parandused.

Et leida näiteks arvu 5,794 ruutu, leiame esiteks selle arvu kolmest esimesest tüvenumbrist koosneva arvu 5,79 ruudu:

$$5,79^2 = 33,52.$$

Seejärel leiame neljandale tüvenumbrile vastava paranduse rea 5,7 ja parandusveeru 4 ristumiskohast. Sellel kohal on arv 5. Et parandused on tabelis antud viimase koha ühikuis, siis tegelikult on parandus 0,05. Seega

$$5,794^2 = 33,52 + 0,05 = 33,57.$$

Parandus liidetakse tavaliselt peast puuduga võetud ruudu viimase koha ühikute arvule.

Muidugi võime toimida ka nii, et leiame näiteks 5,794 ruudu liiaga:

$$5,80^2 = 33,64$$

ja lahutame siis tulemusest kuuele viimase koha ühikule vastava paranduse, s. o. 7 viimase koha ühikut. Seega

$$5,794^2 = 33,64 - 0,07 = 33,57$$

Näiteid. 1) Leia 2,726².

$$2,72^2 = 7,398.$$

Kuuele viimase koha ühikule vastav parandus on 33 viimase koha ühikut. Seega $2,726^2 = 7,398 + 0,033 = 7,431$.

2) Leia 87,68².

$$87,6^2 = 7674.$$

Kaheksale viimase koha ühikule vastav parandus on 14 viimase koha ühikut. Seega $87,68^2 = 7688$.

577. Leia ruutude tabeli abil arvude ruudud.

1)	2,479	5,841	2,631	7,428	3,818
2)	4,072	9,444	2,008	5,791	3,333
3)	24,11	75,83	27,49	181,5	497,2
4)	0,3772	0,003778	0,7008	5230	7896

Kui arvus on rohkem kui neli tüvenumbrit, siis ümardame ta eelnevalt nelja tüvenumbriga arvuks ja võtame siis selle ruutu.

Näiteid. 1) $2,5783^2 = 2,578^2 = 6,646$

2) $64785^2 = 6,479 \cdot 10\,000 = 41,98 \cdot 10\,000 = 419800$

578. Leia ruutude tabeli abil järgmiste arvude ruudud:

1)	2,7894	67,559	435,87	5598,39
2)	0,30875	0,087948	0,77794	0,0078948

5.16. ARVU RUUDU LEIDMINE LÜKATIL.

Arvu ruudu leidmiseks lükatil kasutatakse korpuse esiküljel asuvat skaalat A (ehk ruutude skaalat) koos põhiskaalaga D . Skaala A asemel võib kasutada ka lükati keele ülemisel serval asuvat skaalat B .

Skaaladel A ja B on kujutatud arvud 1-st 100-ni. Seejuures on nende skaalade esimesel poolel arvud 1-st 10-ni ja teisel poolel arvud 10-st 100-ni. Kui lükati keel on algasendis, on skaalade A ja B jaotuskriipsud kohakuti. Seega on need skaalad ühesugused.

Arvu ruudu leidmiseks märgime skaalal D antud arvu (näiteks arvu 2) ja loeme skaalalt A arvu, mis jääb märkija alla; see ongi antud arvu ruut (arv 4, s. o. 2²). Märkides skaalal D arvu 3, saame märkija alt skaalal A arvu 9, s. o. 3². Nii leiame, et

$1,5^2 = 2,25$; $1,9^2 = 3,61$; $6,7^2 = 44,9$.

Seega,

märkija märgib igas asendis skaalal D mingit arvu ja skaalal A selle arvu ruutu (joon. 121).

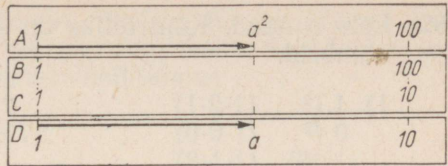
579. Leia lükatil järgmiste arvude ruudud:

1)	2,24	2,83	4,47	5,58	6,32
2)	7,07	7,75	8,37	8,94	9,49
3)	2,55	8,06	1,22	3,87	4,24

580. 1) 3,32 3,46 2,68 1,87 5,92

2) 2,12 6,71 2,34 7,42 1,414

Skaalad A ja B on tehtud kaks korda väiksemas mõõdus kui põhiskaalad C ja D . Seetõttu on jaotuskriipsude paigutused skaaladel



JOON. 121

A ja B ning C ja D erinevad. Alljärgnevas tabelis on toodud arvud, mis vastavad kõige lühematele kriipsuvahedele skaaladel A ja B.

Vahemik	1—2	2—5	5—10	10—20	20—50	50—100
Arvud	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	1

Nii nagu lükati põhiskaaladelt C ja D, saadakse ka skaaladelt A ja B ainult arvude tüvenumbrid. Seega, kui märkija satub näiteks jaotuskriipsule 3,35 või 33,5, siis vastavalt ülesandele võivad need tähendada arve:

... 0,0335; 0,335; 3,35; 33,5; 335; 3350; ...

Koma asukoht tulemusel määratakse ligikaudse hinnangu põhjal.

Näiteid. 1) Arvu $1,3^2$ tüvenumbrid on 1-6-9. Et $1^2=1$ ja $2^2=4$, siis on ilmne, et $1,3^2$ täisosa on ühekohaline, s. t. $1,3^2=1,69$.

2) Arvu $24,8$ tüvenumbrid on 6-1-5. Et $20^2=400$, siis $24,8^2=615$.

3) Arvu $0,545^2$ tüvenumbrid on 2-9-7. Et $0,5^2=0,25$, siis $0,545^2=0,297$.

581. Kontrolli lükatil järgmiste võrduste õigsust:

1) $17,3^2=200$

2) $354^2=125\ 000$

$4,35^2=18,9$

$670^2=449\ 000$

$0,325^2=0,106$

$1,06^2=1,12$

$0,038^2=0,00144$

$0,0193^2=0,000372$

3) $2,5^2=6,25$

4) $7,48^2=56$

$21,5^2=462$

$3,1^2=9,61$

$1,83^2=3,35$

$5,53^2=30,6$

$5,14^2=26,4$

$24,6^2=605$

5) $\pi^2=9,87$

6) $0,369^2=0,136$

$18^2=324$

$0,125^2=0,0156$

$138^2=19\ 000$

$85^2=7230$

$195^2=38\ 000$

$41,5^2=1720$

582. Leia ruudud. Kontrolliks on sulgudes antud tulemise tüvenumbrid.

- | | |
|--------------------|---------------------|
| 1) $1,1^2$ (1-2-1) | 2) $0,7^2$ (4-9-0) |
| $0,4^2$ (1-6-0) | $0,75^2$ (5-6-3) |
| $1,06^2$ (1-1-2) | $8,55^2$ (7-3-1) |
| $87,1^2$ (7-5-9) | $23,7^2$ (5-6-2) |
| 3) $6,3^2$ (3-9-7) | 4) $0,46^2$ (6-6-3) |
| $89,4^2$ (9-5-1) | $3,62^2$ (1-3-1) |
| $8,3^2$ (9-1-9) | $42,5^2$ (1-8-1) |
| $1,7^2$ (2-8-9) | $0,532^2$ (2-8-3) |

583. Leia järgmiste arvude ruudud:

- | | | | | | | | |
|---------|------|------|-------|-----|------|-------|------|
| 1) 11,3 | 6,7 | 0,35 | 93,8 | 123 | 39,9 | 0,034 | 0,98 |
| 2) 9,8 | 39,2 | 0,48 | 0,329 | 325 | 79,8 | 0,041 | 3,07 |
| 3) 5,4 | 29,8 | 0,79 | 0,524 | 195 | 67,9 | 0,015 | 8,09 |

5.17. PÖÖRDARVUDE TABEL.

Funktsiooni $y = a : x$ väärtuste arvutamisel mistahes a korral osutub otstarbekaks kasutada funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ väärtuste tabelit, mida tuntakse pöördarvude tabeli nime all (vt. V: Bradis, Neljakohalised matemaatilised tabelid keskkoolidele. Tabel II). Analoogiliselt ruutude tabelile on ka pöördarvude tabelis peale põhiveergude veel üheksa parandusveergu. Kasutades parandusveerge, saab pöördarvude tabeli abil leida kõigi 1 ja 1,7999 vahel asetsevate kuni viie tüvenumbriga arvude ja 1,8 ning 9,999 vahel asetsevate nelja tüvenumbriga arvude pöördarve. Viimased on tabeli mõlemas osas antud nelja tüvenumbriga.

Pöördarvude tabeli algus ilma parandusveergudeta on järgmine:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,00	1,0000	9990	9980	9970	9960	9950	9940	9930	9921	9911
1,01	0,9901	9891	9881	9872	9862	9852	9843	9833	9823	9814
1,02	0,9804	9794	9785	9775	9766	9756	9747	9737	9728	9718
1,03	0,9709	9699	9690	9681	9671	9662	9653	9643	9634	9625

Leiame näiteks arvu 1,02 pöördarvu. Selleks leiame arvuga 1,02 märgitud rea ja 0-ga märgitud veeru ristumiskoha. Seal leiduv arv 0,9804 ongi otsitav pöördarv. Samal viisil leiame:

$$\frac{1}{1,03} = 0,9709; \quad \frac{1}{1,14} = 0,8772.$$

Kui leiame täpse arvu pöördarvu, siis säilitame pöördarvus kõik neli tüvenumbrit. Kui antud arv on aga ligikaudne, siis säilitame tulemuses nii mitu tüvenumbrit, mitu neid on antud arvus. Kui pöördarvu leidmine on vahepealseks tehteks mingi ülesande lahenduskäigus, siis säilitame veel ühe varunumbri.

Leiame näiteks ligikaudsete arvude 1,2 ja 1,28 pöördarvud:

$$\frac{1}{1,2} = 0,8333 \approx 0,83; \quad \frac{1}{1,28} = 0,7812 \approx 0,781.$$

Eespool näidatud viisil saame leida vahemikust 1 kuni 1,79 kõikide kolme tüvenumbriga arvude pöördarvud.

Olgu nüüd kolme tüvenumbriga arv vahemikust 1,79 kuni 10. Selle pöördarvu leidmiseks otsime üles arvu esimese kahe tüvenumbriga märgitud rea ja kolmanda tüvenumbriga märgitud veeru ristumiskoha. Sellel kohal olev arv on otsitava pöördarvu murdosa, täisosa on 0.

Leiame näiteks arvu 4,48 pöördarvu. Selleks otsime üles 4,4-ga märgitud rea ja 8-ga märgitud veeru ristumiskoha. Seal olev arv 2232 on otsitava pöördarvu murdosa, täisosa on 0. Seega

$$\frac{1}{4,48} = 0,2232.$$

Samal viisil leiame, et

$$\frac{1}{6,31} = 0,1585; \quad \frac{1}{7,56} = 0,1323; \quad \frac{1}{9,92} = 0,1008.$$

Analoogiliselt saame leida ka arvude 1 ja 1,799 vahel asetseva nelja tüvenumbriga arvu pöördarvu. Näiteks arvu 1,235 pöördarvu murdosa leiame arvuga 1,23 märgitud rea ja arvuga 5 märgitud veeru ristumiskohast. Seega

$$\frac{1}{1,235} = 0,8097.$$

584. Leia pöördarvude tabeli abil järgmiste arvude pöördarvud:

- 1) 1,04 1,07 1,23 3,72 6,49 7,77 8,94 9,39
- 2) 1,05 1,09 1,79 8,35 8,88 9,00 9,55 9,99
- 3) 1,173 1,342 1,475 1,555 1,456 1,147 1,713 1667

Kui antud nelja tüvenumbriga arv asetseb 1,799 ja 10-ne vahel, siis tema pöördarvu leidmiseks peame kasutama ka juba parandusveerge. Nii nagu ruutude tabeli puhul, on ka pöördarvude tabelis parandused antud viimase koha ühikuis.

Näiteks arvu 5,237 pöördarvu leidmiseks leiame algul kolmest esimesest tüvenumbrist koosneva arvu 5,23 pöördarvu ja seejärel lahutame temast neljandale tüvenumbrile, s. o. 7-le vastava paranduse: $\frac{1}{5,23} = 0,1912$. Saadud arvust lahutame paranduse 0,003. Järelikult

$$\frac{1}{5,237} = 0,1912 - 0,003 = 0,1909.$$

Näiteid. 1) $\frac{1}{2,848} = 0,3511$ 2) $\frac{1}{8,549} = 0,1170$ 3) $\frac{1}{9,981} = 0,1002$.

Kui arvus on rohkem kui neli tüvenumbrit, siis ümardame ta nelja tüvenumbriga arvuks ja leiame viimase pöördarvu.

Näide. $\frac{1}{7,3475} = \frac{1}{7,348} = 0,1360$

Arvust 1 väiksema arvu pöördarvu leidmiseks korrutame ta 10-ga või 100-ga jne. nii, et saaksime 1 ja 10 vahel oleva arvu. Siis leiame saadud arvu pöördarvu ja korrutame tulemuse 10-ga või 100-ga jne., sest arvu korrutamisel 10-ga või 100-ga jne. väheneb tema pöördarv 10 või 100 jne. korda.

Näiteid. 1) $\frac{1}{0,65} = \frac{1}{6,5} \cdot 10 = 0,1538 \cdot 10 = 1,538$

$$2) \frac{1}{0,0234} = \frac{1}{2,34} \cdot 100 = 0,4274 \cdot 100 = 42,74$$

$$3) \frac{1}{0,3786} = \frac{1}{3,386} \cdot 10 = 0,2954 \cdot 10 = 2,954$$

Arvust 10 suurema arvu pöördarvu leidmiseks jagame ta 10-ga või 100-ga jne. nii, et saame arvu, mis on 1 ja 10 vahel. Siis leiame saadud arvu pöördarvu ja jagame tulemuse 10-ga või 100-ga jne., sest arvu jagamisel 10-ga või 100-ga jne. suureneb pöördarv 10 või 100 jne. korda.

Näiteid. 1) $\frac{1}{15} = \frac{1}{1,5} : 10 = 0,6667 : 10 = 0,06667$

$$2) \frac{1}{127} = \frac{1}{1,27} : 100 = 0,7874 : 100 = 0,007874$$

$$3) \frac{1}{2356} = \frac{1}{2,356} : 1000 = 0,4244 : 1000 = 0,0004244.$$

Kasutades pöördarvu, saame jagamise $a : b$ asendada korrutamisega $a \cdot \frac{1}{b}$.

Selle tõttu saame pöördarvude tabelit kasutada funktsiooni $y = a : x$ väärtuste arvutamiseks.

N ä i d e. $5 : 4,92 = 5 \cdot \frac{1}{4,92} = 5 \cdot 0,2033 = 1,0165 \approx 1,017$.

585. Leia järgmiste arvude pöördarvud:

1) 1,314 2,357 6,4957 1,3007 8,079 4,444

2) 2,222 2,008 3,9867 5,6793 2,784 9,385

586. Leia järgmiste arvude pöördarvud:

1) 0,223 0,0138 0,9008 0,01111 0,0055 0,00045

2) 0,009 0,0007 0,0386 0,02384 0,57684 0,0963

587. Leia järgmiste arvude pöördarvud:

1) 12 328 18,4 134,8 1969 25,89 3211,8

2) 6,8 4,27 385,1 1697 3670 784,8 52700

588. Kasutades pöördarvude tabelit, arvuta järgmised jagatised:

1) $15 : 3,97$ $7,8 : 2,37$ $9,1 : 0,836$

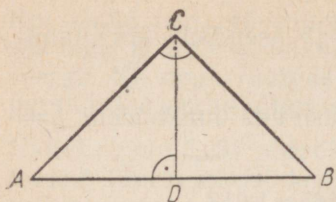
2) $8 : 4,79$ $35 : 0,472$ $0,03 : 0,756$

5.18. FUNKTSIOON $y = ax^2$.

Ü l e s a n n e 1. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuus AB on x cm. Kui suur on selle kolmnurga pindala y ?

L a h e n d u s. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusile AB tõmmatud kõrgus CD jaotab kolmnurga ABC kaheks võrdseks kolmnurgaks, sest kõrgus CD on kolmnurga ABC sümmeetriatelg. Kumbki saadud kolmnurk on võrdhaarne. Näiteks kolmnurk ACD sellepärast, et $\angle A = 45^\circ$ ja $\angle ACD = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$. Seega $CD = AD = \frac{x}{2}$. Nüüd saame, et kolmnurga ABC pindala on $\frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} x \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{4} x^2$.

Niisiis, $y = \frac{1}{4} x^2$.



JOON. 122

589. Arvuta avaldise $\frac{1}{4}x^2$ väärtused, mis vastavad tabelis antud x väärtustele.

x	1	2	3	4	8	10	1000
$\frac{1}{4}x^2$							

Selgita tabeli andmete põhjal, mitu korda suureneb $\frac{1}{4}x^2$, kui x suureneb 2 korda, 3 korda, 10 korda, 100 korda. Mitu korda väheneb $\frac{1}{4}x^2$, kui x väheneb 2 korda, 3 korda, 4 korda, 10 korda, 100 korda?

Ülesanne 2. Ruudu diagonaal on $2x$ cm. Kui suur on selle ruudu pindala y ?

Lahendus. Diagonaal jaotab ruudu kaheks võrdseks täisnurkseks võrdhaarseks kolmnurgaks, mille hüpotenuus on $2x$ cm ja hüpotenuusile tõmmatud kõrgus x cm. Järelikult on kummagi kolmnurga pindala $\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x = x^2$ ja ruudu pindala seega $2x^2$ cm². Niisiis, $y = 2x^2$.

590. Arvuta avaldise $2x^2$ väärtused, mis vastavad tabelis antud x väärtustele.

x	1	2	3	4	8	10	100
$2x^2$							

Selgita tabeli andmete põhjal, mitu korda suureneb $2x^2$, kui x suureneb 2 korda, 3 korda, 4 korda, 10 korda, 100 korda. Mitu korda väheneb $2x^2$, kui x väheneb 2 korda, 3 korda, 4 korda, 10 korda, 100 korda.

591. Avalda kuubi täispindala S kuubi serva a kaudu. Mitu korda suureneb kuubi täispindala, kui kuubi serva pikkust suurendada 2, 3, 4, 8, 10, 100 korda?

Näidisülesannetes ja ülesannetes 589—591 on muutujatevahelise seose üldkuju $y=ax^2$, kus a on antud arv, $a \neq 0$. Kui $a > 0$, siis $ax^2 \geq 0$, sest x iga väärtuse korral $x^2 \geq 0$. Kui $a < 0$, siis $ax^2 \leq 0$.

Avaldises ax^2 on muutuja x kõrgeim aste 2. Seetõttu nimetatakse funktsiooni $y=ax^2$ **ruutfunktsiooniks**.

Eelmistest ülesannetest selgus, et

kui argumendi väärtus kasvab k korda, siis funktsiooni $y=ax^2$ väärtus kasvab k^2 korda (eeldusel $a > 0$ ja $x > 0$).

Tõestame selle üldkujul. Anname argumendile x mingi väärtuse $x_1 > 0$; siis funktsiooni väärtus on vastavalt $y_1=ax_1^2$. Kui argument kasvab k korda, s. t. argument saab väärtuse kx_1 , siis funktsiooni väärtus

$$y_2=a(kx_1)^2=k^2 \cdot ax_1^2.$$

Et $ax_1^2=y_1$, siis $y_2=k^2y_1$, millest ilmnebki, et argumendi kasvades k korda kasvab funktsioon k^2 korda (eeldusel $y_1 > 0$, s. t. $a > 0$).

Kui $a=1$, siis $ax^2=x^2$. Seega on funktsioon $y=x^2$ funktsiooni $y=ax^2$ erijuhtum. Iga funktsioon, millele saame anda kuju $y=ax^2$, kus a on nullist erinev arv, on ruutfunktsioon.

Seos $y=ax^2$ on määratud, kui on antud arv a . Kui a pole antud, kuid on antud x ja y üks vastavate väärtuste paar, siis saame a määrata.

N ä i d e. Ruutfunktsiooni $y=ax^2$ väärtus argumendi väärtusel -1 on 4. Leia kordaja a ja esita see funktsioon valemiga.

L a h e n d u s. Asetades x ja y antud väärtused valemisse $y=ax^2$, saame $4=a(-1)^2$, millest $a=4$. Seega, antud funktsioon esitub valemiga $y=4x^2$.

592. On antud argumendi x ühele väärtusele vastav ruutfunktsiooni $y=ax^2$ väärtus. Leia kordaja a ja esita funktsioon valemiga.

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-------------------------|----------------------|
| 1) $x=-2$
$y=12$ | 2) $x=3$
$y=13,5$ | 3) $x=-0,5$
$y=-0,5$ | 4) $x=-6$
$y=-9$ |
| 5) $x=-6$
$y=54$ | 6) $x=4$
$y=40$ | 7) $x=-3$
$y=-6,3$ | 8) $x=-2$
$y=5,2$ |
| 9) $x=-4$
$y=-3,2$ | 10) $x=3$
$y=17,1$ | | |

5.19. FUNKTSIOONI $y=ax^2$ GRAAFIK.

Joonestame ühes ja samas teljestikus funktsioonide $y=x^2$, $y=2x^2$ ja $y=\frac{1}{2}x^2$ graafikud vahemikus $-3 \leq x \leq 3$.

Et argumendi ühe ja sama väärtuse korral funktsiooni $y=2x^2$ väärtus on 2 korda suurem kui funktsiooni $y=x^2$ vastav väärtus, siis funktsiooni $y=2x^2$ graafiku saame, kui funktsiooni $y=x^2$ graafiku iga punkti ordinaadi võtame kahekordselt. Funktsiooni $y=\frac{1}{2}x^2$ graafiku saame aga funktsiooni $y=x^2$ graafikust, kui viimase iga punkti ordinaati vähendame kaks korda.

Joonisel 123 on esitatud kõigi kolme funktsiooni graafikud.

Neid kõverjooni nimetatakse **paraboolideks**.

593. Mis on joonisel 123 kujutatud paraboolide teljeks? Kus asub iga parabooli haripunkt?

Kuidas asetseb funktsiooni $y=ax^2$ graafik x -telje suhtes, kui $a>0$? Mis on funktsiooni $y=ax^2$ vähimaks väärtuseks, kui $a>0$?

594. Leia joonisel 123 toodud graafikute järgi iga seal kujutatud funktsiooni väärtus argumendi väärtustel $-2,5$; $1,2$; $2,8$.

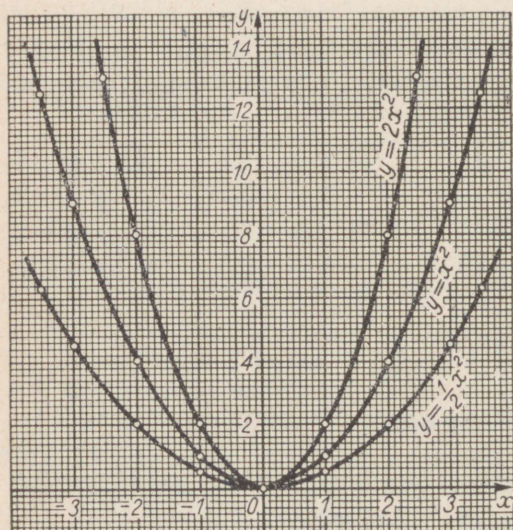
Missuguste x väärtuste korral $2x^2=7$? $x^2=8$? $\frac{1}{2}x^2=4,5$?

595. Joonesta ühes ja samas teljestikus funktsioonide $y=2x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$, $y=-2x^2$ ja $y=-\frac{1}{2}x^2$ graafikud (joon. 124).

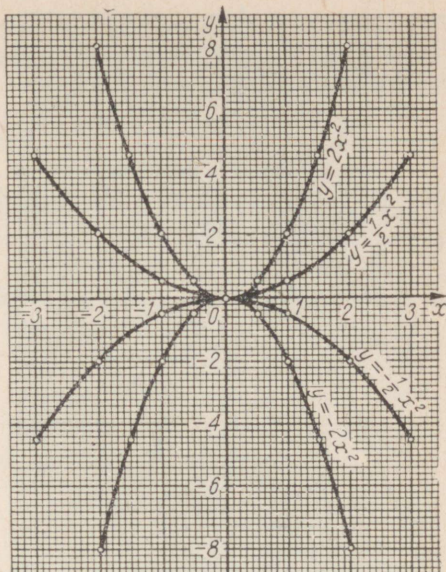
Kuidas asetsevad x -telje suhtes funktsioonide

1) $y=2x^2$ ja $y=-2x^2$ graafikud?

2) $y=\frac{1}{2}x^2$ ja $y=-\frac{1}{2}x^2$ graafikud?



JOON. 123



JOON. 124

Et iga nullist erineva x väärtuse korral arvud ax^2 ja $-ax^2$ on määrgilt erinevad, kuid absoluutväärtuselt võrdsed, siis punktid $(x; ax^2)$ ja $(x; -ax^2)$ on sümmeetrilised x -telje suhtes. Seega, funktsioonide $y=ax^2$ ja $y=-ax^2$ graafikud on sümmeetrilised x -telje suhtes.

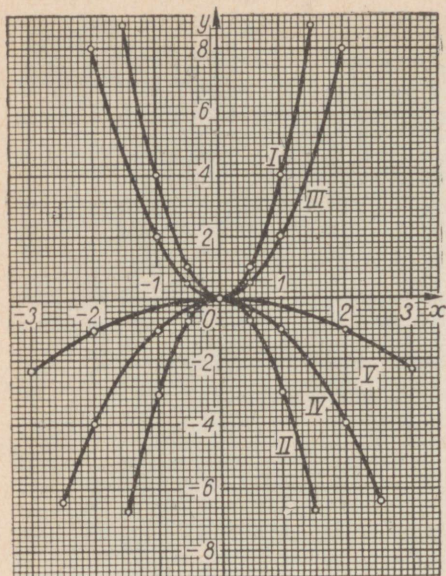
Järelikult on ka funktsiooni $y=-ax^2$ graafikuks parabool, mille haripunkt asetseb koordinaatide alguspunktis. Selle parabooli saame, kui peegeldame funktsiooni $y=ax^2$ graafiku x -telje suhtes.

Kui a on negatiivne, siis funktsiooni $y=ax^2$ graafikuks on parabool, mis avaneb allapoole.

596. Konstrueeri funktsioonide $y=-\frac{1}{4}x^2$ ja $y=-4x^2$ graafikud funktsioonide $y=\frac{1}{4}x^2$ ja $y=4x^2$ graafikute peegeldamise teel.

597. Kasutades eespool koostatud funktsioonide $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=x^2$, $y=2x^2$, $y=4x^2$ väärtuste tabelleid, konstrueeri ühes ja samas teljestikus nende funktsioonide graafikud. Leia iga graafiku järgi x , kui $y=2$. Millise graafiku puhul on leitud abstsiss suurim? Missugune neist paraboolidest on kohal $y=2$ kõige laiem, missugune kõige kitsam?

Kas kordaja a absoluutväärtuse kasvamisel parabool laieneb või kitseneb?



JOON. 125

Et funktsiooni $y=ax^2$ graafiku punktide ordinaadid saame funktsiooni $y=x^2$ graafiku punktide ordinaatidest, kui korrutame need ühe ja sama teguriga a , siis nimetatakse funktsiooni $y=x^2$ graafikut **põhiparabooliks**.

Põhiparabooli sageda esinemise tõttu on tema joonestamiseks otstarbekas valmistada papist šabloon.

Iga nullist erineva a korral on funktsiooni $y=ax^2$ graafikuks parabool, mille haripunkt asetseb koordinaatide alguspunktis. Kui $a > 0$, siis parabool avaneb ülespoole, kui $a < 0$, siis allapoole. Mida suurem on a absoluutväärtus, seda kitsam on parabool.

598. Joonisel 125 on antud viie ruutfunktsiooni $y=ax^2$ graafikud. Leia iga graafiku järgi vastav a väärtus ja esita iga funktsioon valemiga.

Näpunäide. Kordaja a leidmiseks vali graafikul üks punkt ja aseta selle koordinaadid valemisse $y=ax^2$.

5.20. ARVU RUUTJUUR.

Kasutades joonist 119, leia niisugune negatiivne arv, mille ruut on 9. Leia niisugune positiivne arv, mille ruut on 9. Positiivset arvu, mille ruut on 9, nimetatakse arvu **ruutjuureks** ja märgitakse sümboliga $\sqrt{9}$ (loe: *ruutjuur üheksast*). Seega $\sqrt{9}=3$. Niisamuti $\sqrt{64}=8$, sest $8^2=64$; $\sqrt{0,01}=0,1$, sest $0,1^2=0,01$.

Antud positiivse arvu ruutjuureks nimetatakse niisugust positiivset arvu, mille ruut võrdub antud arvuga. Nulli ruutjuur võrdub nulliga.

Ruutjuurt negatiivsest arvust meile tuntud arvude hulgas pole olemas, sest pole niisugust arvu, mille ruut oleks negatiivne. Ruutjuure definitsioonist järeldub, et

$$\text{kui } a \geq 0, \text{ siis } \sqrt{a^2} = a,$$

$$\text{kui } a < 0, \text{ siis } \sqrt{a^2} = -a. \text{ Näiteks } \sqrt{(-5)^2} = -(-5) = 5.$$

Üldiselt

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Ruutjuure definitsioonist järeldub, et näiteks $(\sqrt{5})^2 = 5$.

Üldiselt, kui $a \geq 0$, siis $(\sqrt{a})^2 = a$.

Näiteid. 1) $(\sqrt{6})^2 = 6$, 2) $(-\sqrt{5})^2 = 5$, 3) $-(\sqrt{5})^2 = -5$.

Võrdusest $(\sqrt{a})^2 = a$ (kui $a \geq 0$) järeldub, et mistahes mittenegatiivset arvu saame vaadelda ruuduna, s. t. $a = (\sqrt{a})^2$.

Näiteks $52 = (\sqrt{52})^2$, $0,7 = (\sqrt{0,7})^2$, $\frac{1}{3} = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$.

599. Leia

$$\begin{array}{l} 1) \sqrt{34^2} \quad \sqrt{(-6)^2} \quad \sqrt{0,8^2} \quad \sqrt{2348^2} \quad \sqrt{2^2} \\ 2) \sqrt{674^2} \quad -\sqrt{539^2} \quad \sqrt{(-536)^2} \quad \sqrt{9999^2} \quad \sqrt{(-7)^2} \\ 3) (-\sqrt{8})^2 \quad (-\sqrt{11})^2 \quad -(\sqrt{2})^2 \quad [\sqrt{(-3)^2}]^2 \quad [-(\sqrt{2})^2]^2 \end{array}$$

600. Esita antud arv ruuduna.

3 5 13 68 308 0,4 3,2

601. Täida tabel, kui $a > 0$.

a	12		23		39	44		
a^2		196		676			1600	841

602. Leia ruutjuur proovimise teel.

- 1) $\sqrt{144}$ 2) $\sqrt{324}$ 3) $\sqrt{361}$ 4) $\sqrt{0,49}$ 5) $\sqrt{196}$
6) $\sqrt{256}$ 7) $\sqrt{225}$ 8) $\sqrt{0,09}$ 9) $\sqrt{0,16}$ 10) $\sqrt{121}$
11) $\sqrt{289}$ 12) $\sqrt{12,25}$

603. Leia ruutjuur proovimise teel.

- 1) $\sqrt{0,16}$ 2) $\sqrt{2,89}$ 3) $\sqrt{82,81}$ 4) $\sqrt{90,25}$
5) $\sqrt{6,25}$ 6) $\sqrt{20,25}$ 7) $\sqrt{34,81}$ 8) $\sqrt{56,25}$

5.21. RUUTJUURE LÄHISVÄÄRTUS.

$\sqrt{21}$ ei ole naturaalarv, sest $4^2=16 < 21$, kuid $5^2=25 > 21$.

Ilmselt $4 < \sqrt{21} < 5$.

$\sqrt{110}$ ei ole naturaalarv, sest $10^2=100 < 110$, kuid $11^2=121 > 110$.

Ilmselt $10 < \sqrt{110} < 11$.

Seega on olemas naturaalarve, millel puudub naturaalarvuline ruutjuur.

Näitame, et kui naturaalarvul puudub ruutjuur naturaalarvude hulgas, siis puudub tal ruutjuur ka ratsionaalarvude hulgas. Tõepoolest, kui leiduks selline taandumatu murd $\frac{p}{q}$, et $\frac{p}{q} = \sqrt{a}$, kus

$a \in N$ (N — naturaalarvude hulk); siis vastavalt ruutjuure definitsioonile $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = a \Rightarrow \frac{p \cdot p}{q \cdot q} = a$.

Et murd $\frac{p}{q}$ on taandumatu, siis ka murd $\frac{p \cdot p}{q \cdot q}$ on taandumatu (p ja q on ühistegurita).

Järelikult võrdus $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = a$, kus $a \in N$, on võimatu (taandumatu murd ei võrdu naturaalarvuga).

Seega ($a \in N$ ja $\sqrt{a} \notin N$) $\Rightarrow \sqrt{a} \notin Q$, kus N on naturaalarvude hulk ja Q ratsionaalarvude hulk.

Juhtumil, kui antud arvul puudub ratsionaalarvuline ruutjuur, piirdume selle ruutjuure lähisväärtusega, arvutades selle täpsusega 1; 0,1; 0,01 jne., s. t. niisuguse täpsusega nagu vaja. Seejuures

positiivse arvu a ruutjuure \sqrt{a} lähisväärtuseks täpsusega 1; 0,1; 0,001; ... nimetame kaht arvu, mis teineteisest erinevad 1; 0,1; 0,01; ... võrra ja millest esimese ruut on väiksem kui a ning teise ruut suurem kui a . Esimene arv on a lähisväärtus puuduga, teine liiga.

Arvutustel kasutame neist lähisväärtustest seda, mille ruut erineb arvust a vähem.

Näide. $\sqrt{5}$ lähisväärtused täpsusega 1 on 2 ja 3. Et 2^2 erineb 5-st vähem kui 3^2 , siis $\sqrt{5}$ lähisväärtuseks täpsusega 1 võtame arvu 2. Seega $\sqrt{5} \approx 2$.

$\sqrt{5}$ lähisväärtused täpsusega 0,1 on 2,2 ja 2,3. Et $2,2^2 = 4,84$, mis erineb 5-st 0,16 võrra, ja $2,3^2 = 5,29$, mis erineb 5-st 0,29 võrra, siis $\sqrt{5} \approx 2,2$.

$\sqrt{5}$ lähisväärtused täpsusega 0,01 on 2,23 ja 2,24. Et $2,23^2 = 4,973$, mis erineb 5-st enam kui $2,24^2 = 5,018$, siis $\sqrt{5}$ lähisväärtuseks täpsusega 0,01 võtame 2,24.

604. Leia proovimise teel järgmiste ruutjuurte lähisväärtused täpsusega 1:

- | | | | | | |
|-----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|
| 1) $\sqrt{7}$ | $\sqrt{29}$ | $\sqrt{40}$ | $\sqrt{63}$ | $\sqrt{89}$ | $\sqrt{96}$ |
| 2) $\sqrt{180}$ | $\sqrt{224}$ | $\sqrt{473}$ | $\sqrt{688}$ | $\sqrt{962}$ | $\sqrt{1010}$ |

Näide. Leia proovimise teel $\sqrt{764}$ lähisväärtus täpsusega 1.

Lahendus. $25^2 = 625$ $784 - 764 = 20$
 $26^2 = 676$ $764 - 729 = 35$
 $27^2 = 729$ Vastus. $\sqrt{764} \approx 28$
 $28^2 = 784$

5.22. RUUTJUURE LÄHISVÄÄRTUSE ARVUTAMINE.

Ruutjuure lähisväärtuse arvutamiseks on mitmeid võtteid. Vaatleme neist üht, mille andis kreeka matemaatik Heron, kes elas tõenäoliselt I sajandi lõpul m. a. j.

Olgu tarvis leida \sqrt{A} . Ligikaudse hindamise teel leiame \sqrt{A} mingi lähisväärtuse a_1 :

$$a_1 \approx \sqrt{A}.$$

Saadud ligikaudse väärtuse mõlema poole ruudud on jällegi ligikaudu võrdsed:

$$a_1^2 \approx A,$$

mille mõlema poole jagamisel arvuga a_1 , saame

$$a_1 \approx \frac{A}{a_1}.$$

Et a_1 on \sqrt{A} lähisväärtus, siis on ka $\frac{A}{a_1}$ tema lähisväärtus. Nende lähisväärtuste korrutis

$$a_1 \cdot \frac{A}{a_1} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = A.$$

Neist kahest \sqrt{A} lähisväärtustest üks on lähisväärtus puuduga, teine liiaga, sest kui korrutise $a_1 \cdot \frac{A}{a_1}$ üks tegur on väiksem kui \sqrt{A} , siis teine on suurem kui \sqrt{A} . Vastasel juhul nende lähisväärtuste korrutis ei saa olla A .

Et \sqrt{A} täpne väärtus on arvude a_1 ja $\frac{A}{a_1}$ vahel, siis nende arvude aritmeetiline keskmine $a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{A}{a_1} \right)$ on \sqrt{A} paremaks lähisväärtuseks kui a_1 ja $\frac{A}{a_1}$.

Kõik, mis on eespool öeldud a_1 kohta, kehtib ka a_2 kohta.

Seega a_2 -st paremaks \sqrt{A} lähisväärtuseks on a_3 , mis on a_2 ja $\frac{A}{a_2}$ aritmeetiline keskmine:

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{A}{a_2} \right).$$

Nii jätkates saame:

$$a_4 = \frac{1}{2} \left(a_3 + \frac{A}{a_3} \right);$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{A}{a_n} \right).$$

Nii saame leida \sqrt{A} lähisväärtuse kuitahes suure täpsusega.

Näide 1. Arvutame $\sqrt{10}$ täpsusega 0,001.

Lahendus. $\sqrt{10} \approx 3$;

$$a_1 = 3;$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{10}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(3 + 3 \frac{1}{3} \right) = 3,16;$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(3,16 + \frac{10}{3,16} \right) = \frac{1}{2} (3,16 + 3,164) = 3,162.$$

Et selgitada, kas lähisväärtuse a_3 viimane number 2 on õige, arvutame järgmise lähisväärtuse a_4 :

$$a_4 = \frac{1}{2} \left(3,162 + \frac{10}{3,162} \right) = \frac{1}{2} (3,162 + 3,1622) = 3,1621.$$

Seega $\sqrt[3]{10} = 3,162$.

Näide 2. Arvutame $\sqrt[3]{674\,041}$ täpsusega 1.

Lahendus. $\sqrt[3]{674\,041} \approx 800$;

$$a_1 = 800;$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(800 + \frac{674\,041}{800} \right) = \frac{1}{2} (800 + 842) = 821;$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(821 + \frac{674\,041}{821} \right) = \frac{1}{2} (821 + 821) = 821.$$

Vastus. $\sqrt[3]{674\,041} = 821$.

Sellest näitest selgub, et Heroni võttega saame leida ka ruutjuure täpse väärtuse, kui see täpne väärtus kuulub ratsionaalarvude hulka.

605. Arvuta ruutjuurte lähisväärtused täpsusega 0,1, kasutades Heroni võtet.

1) $\sqrt{7}$ $\sqrt{11}$ $\sqrt{15}$ $\sqrt{21}$ $\sqrt{29}$

2) $\sqrt{8}$ $\sqrt{13}$ $\sqrt{19}$ $\sqrt{23}$ $\sqrt{26}$

606. Arvuta ruutjuurte ligikaudsed väärtused täpsusega 0,01.

1) $\sqrt{34}$ $\sqrt{47}$ $\sqrt{66}$ $\sqrt{76}$ $\sqrt{90}$

2) $\sqrt{137}$ $\sqrt{200}$ $\sqrt{240}$ $\sqrt{356}$ $\sqrt{570}$

607. Arvuta ruutjuurte lähisväärtused täpsusega 0,001.

1) $\sqrt{3}$ 2) $\sqrt{6}$ 3) $\sqrt{14}$ 4) $\sqrt{19}$

5) $\sqrt{2}$ 6) $\sqrt{7}$ 7) $\sqrt{12}$ 8) $\sqrt{27}$

608. Arvuta ruutjuurte väärtused.

1) $\sqrt{5467}$ 2) $\sqrt{7569}$ 3) $\sqrt{831\,744}$

4) $\sqrt{8836}$ 5) $\sqrt{7569}$ 6) $\sqrt{241\,081}$

5.23. RUUTJUURTE OMADUSI.

1) Arvuta avaldiste $\sqrt{4 \cdot 9}$ ja $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$ väärtused ning võrdle neid.

2) Arvuta avaldiste $\sqrt{5 \cdot 7,2}$ ja $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7,2}$ väärtused, ümardades

viimase tulemuse kolme tüvenumbriga arvuks. Võrdle tulemusi. Tõestame, et kui $a > 0$ ja $b > 0$, siis $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Tõestuseks võrdleme avaldiste $\sqrt{a \cdot b}$ ja $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ruutusid:

$$(\sqrt{a \cdot b})^2 = a \cdot b;$$

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b.$$

Kui positiivsete arvude ruudud on võrdsed, siis on võrdsed ka need arvud.

Seega

$$\boxed{\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.}$$

Korrutise ruutjuur võrdub tegurite ruutjuurte korrutisega.

Arvuta avaldise $\sqrt{\frac{7,2}{5}}$ väärtus, teostades esmalt jagamise ja leides seejärel ruutjuure saadud jagatisest. Arvuta nüüd avaldise $\frac{\sqrt{7,2}}{\sqrt{5}}$ väärtus kolme tüvenumbriga. Võrdle tulemusi.

Tõestame, et kui $a > 0$ ja $b > 0$, siis $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Tõestuseks võrdleme avaldiste $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ja $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ruutusid:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}; \quad \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Seega

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.}$$

Jagatise ruutjuur võrdub jagatava ruutjuure ja jagaja ruutjuure jagatisega.

609. Arvuta ruutjuur.

$$1) \sqrt{16 \cdot 81} \quad 2) \sqrt{49 \cdot 100} \quad 3) \sqrt{0,04 \cdot 0,36} \quad 4) \sqrt{36a^2b^2} \quad 5) \sqrt{9b^2}$$

610. Arvuta ruutjuur.

$$1) \sqrt{\frac{25}{121}} \quad 2) \sqrt{\frac{49}{0,01}} \quad 3) \sqrt{\frac{a^2}{16}} \quad 4) \sqrt{\frac{m}{9}} \quad 5) \sqrt{\frac{25a}{b^2}}$$

611. Arvutades ruutjuured proovimise teel, leia, mitu korda on

- 1) $\sqrt{400}$ suurem kui $\sqrt{4}$;
- 2) $\sqrt{900}$ „ „ $\sqrt{9}$;
- 3) $\sqrt{2500}$ „ „ $\sqrt{25}$;
- 4) $\sqrt{640\,000}$ „ „ $\sqrt{64}$;
- 5) $\sqrt{490\,000}$ „ „ $\sqrt{49}$;

Mis siit selgub?

612. Arvutades ruutjuured proovimise teel, leia, mitu korda on

- 1) $\sqrt{16}$ väiksem kui $\sqrt{1600}$;
- 2) $\sqrt{9}$ „ „ $\sqrt{900}$;
- 3) $\sqrt{0,04}$ „ „ $\sqrt{4}$;
- 4) $\sqrt{0,09}$ „ „ $\sqrt{900}$;
- 5) $\sqrt{1}$ „ „ $\sqrt{10\,000}$.

Ülesannete 611 ja 612 lahendamisel näeme, et kui suurendame arvu 100, 10 000, ... korda, siis arvu ruutjuur suureneb vastavalt 10, 100, ... korda;

kui vähendame arvu 100, 10 000, ... korda, siis arvu ruutjuur väheneb 10, 100, ... korda.

Tõestame, et

kui suurendame arvu k^2 korda, siis arvu ruutjuur suureneb k korda.

Tõestus. Olgu antud positiivne arv a . Selle ruutjuur on \sqrt{a} . Suurendades antud arvu k^2 korda, saame uueks arvuks k^2a , ruutjuur sellest on

$$\sqrt{k^2a} = \sqrt{k^2} \cdot \sqrt{a} = k\sqrt{a}.$$

Seda oligi tarvis tõestada.

5.24. RUUTJUURTE TABEL.

Ruutjuurte või nende lähisväärtuste kiireks leidmiseks on koostatud ruutjuurte tabel (vt. V. Bradis, Neljakohalised matemaatilised tabelid keskkoolidele. Tabel IV). See tabel on samasuguse ehitusega nagu ruutude tabel.

Leiame näiteks arvu 1,3 ruutjuure. Arvuga 1,3 märgitud rea ja nulliga märgitud veeru ristumiskohal on arv 1,140. Seega $\sqrt{1,3} = 1,140$.

Näiteid.

$$1) \sqrt{1,9} = 1,378 \quad 2) \sqrt{8,9} = 2,983 \quad 3) \sqrt{37} = 6,083$$

Kolme tüvenumbriga arvu ruutjuure leidmiseks leiame kahe esimese tüvenumbriga märgitud rea ja kolmanda tüvenumbriga märgitud veeru ristumiskohal oleva arvu.

Nii leiame $\sqrt{1,58}$ 1,5-ga märgitud rea ja 8-ga märgitud veeru ristumiskohast:

$$\sqrt{1,58} = 1,257.$$

Nelja tüvenumbriga arvu ruutjuure leidmiseks leiame algul kolmest esimesest tüvenumbrist koosneva arvu ruutjuure, millele liidame neljandale tüvenumbrile vastava paranduse.

Ka ruutjuurte tabelis on parandused antud viimase koha ühikuis. Leiame näiteks arvu 2,749 ruutjuure.

$\sqrt{2,74} = 1,655$. Saadud tulemusele liidame neljandale tüvenumbrile, s. o. 9-le vastava paranduse 0,003.

Seega $\sqrt{2,749} = 1,655 + 0,003 = 1,658$.

Näiteid. 1) $\sqrt{7,085} = 2,662$ 2) $\sqrt{8,946} = 2,991$.

Kui juuritav arv ei kuulu vahemikku 1,00 kuni 99,9, siis rakendame arvu ruutjuure omadust (vt. 5.23.). Nimelt, kui juuritav on 1,00-st väiksem, siis suurendame teda 100, 10 000, ... korda, nii et saame arvu, mis kuulub vahemikku 1,0 kuni 99,9, leiame siis suurendatud arvust ruutjuure ja vähendame leitud arvu vastavalt 10, 100, ... korda.

Näiteid.

$$1) \sqrt{0,0169} = \sqrt{1,69} : 10 = 1,300 : 10 = 0,1300$$

$$2) \sqrt{0,00072} = \sqrt{7,2} : 100 = 2,683 : 100 = 0,02683$$

$$3) \sqrt{0,764} = \sqrt{76,4} : 10 = 8,74 : 10 = 0,8741$$

Kui juuritav on 99,9-st suurem, siis vähendame teda 100, 10 000, ... korda, nii et saame arvu, mis kuulub vahemikku 1,00 kuni 99,9, leiame siis vähendatud arvust ruutjuure ja suurendame leitud arvu vastavalt 10, 100, ... korda.

Näiteid.

$$1) \sqrt{841} = 10 \cdot \sqrt{8,41} = 10 \cdot 2,900 = 29,00$$

$$2) \sqrt{3546} = 10 \cdot \sqrt{35,46} = 10 \cdot 5,955 = 59,55$$

$$3) \sqrt{64\,900} = 100 \cdot \sqrt{6,49} = 100 \cdot 2,548 = 25,48$$

Juhul, kui juuritavas on rohkem kui neli tüvenumbrit, ümardame juuritava nelja tüvenumbriga arvuks ja leiame ümardatud arvu ruutjuure.

Näide. $\sqrt{785\ 192} \approx \sqrt{785\ 200} = 100 \cdot \sqrt{78,52} = 100 \cdot 8,861 = 886,1$

613. Leia tabelist järgmiste arvude ruutjuured:

1) 1,96	2,56	3,24	4,41	5,29
2) 1,69	1,21	5,76	7,84	6,76

614. Leia tabelist arvude ruutjuured.

1) 15	17	19	31	44	65
2) 48	54	59	73	87	91

615. Leia tabelist arvude ruutjuured.

1) 4,1	5,7	9,5	12,5	22,35
2) 34,7	42,5	56,7	72,8	95,38

616. Leia ruudu külje pikkus, kui ruudu pindala on antud.

1) 3,8 cm ²	2) 8,6 cm ²	3) 7,4 cm ²	4) 14,5 cm ²
5) 24,3 cm ²	6) 48,5 cm ²	7) 59,2 cm ²	8) 83,7 cm ²

617. Leia tabelist arvude ruutjuured.

1) 0,256	0,576	0,289	0,0042
2) 0,441	0,324	0,625	0,016
3) 0,0049	0,0121	0,0144	0,0007
4) 0,0196	0,064	0,0036	0,00064

618. Leia tabelist arvude ruutjuured.

1) 62 540	78 460	123 400	725 900
2) 3 600	25 000	4 900	186 000
3) 16 900	72 900	18 500	491 000
4) 336 200	24 350	12 670	225 800
5) 73 852	6) 62 128	7) 50,4122	
42 341	5609	38,2434	
12,467	4,8963	0,96125	
576,95	0,28591	487 632	
0,58423	43,667	9,42812	

619. Kolmnurga alus on 4,2 cm ja kõrgus 6 cm. Kui pikk on selle kolmnurgaga pindvõrdse ruudu külge?

620. Rööpküliliku alus on 12 cm ja kõrgus 5,8 cm. Kui pikk on selle rööpkülilikuga pindvõrdse ruudu külge?

621. Trapetsi alused on $a=8,4$ cm, $b=5,8$ cm ja kõrgus $h=6$ cm. Arvuta selle trapetsiga pindvõrdse ruudu ümbermõõt.

622. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga pindala on 120 cm². Kui pikk on selle kolmnurga kaatet?

623. Täida järgmine tabel, kui $a > 0$.

a			17			24		96	
a^2	1600			7056			9025		7744
\sqrt{a}		8			2				3

5.25. RUUTJUURE LEIDMINE GRAAFIKULT.

Arvu ruutjuure lähisväärtust on võimalik leida ka graafiliselt, nimelt ruutfunktsiooni $y=x^2$ graafikult (joon. 126). Kui graafiku punkti koordinaadid on x ja y , siis $y=x^2$ ja $x=\sqrt{y}$.

Antud arvu y järgi leiame graafikul punkti, mille ordinaat on y . Selle punkti abstsiss ongi \sqrt{y} .

Kui funktsiooni $y=x^2$ graafik on tehtud millimeetripaberile, saame ruutjuure ligikaudse väärtuse leida täpsusega 0,05.

624. Leia jooniselt 126 kahe tüvenumbriga arv, mille ruut on

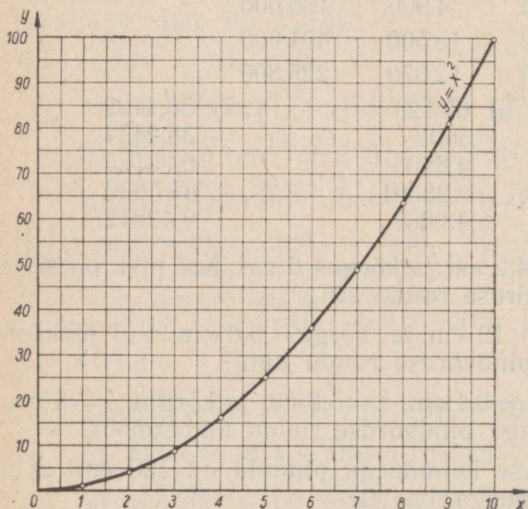
1) 14; 20; 30; 35; 50;

2) 5; 13; 55; 60; 80.

625. Leia jooniselt 126 ruutjuured kahe tüvenumbriga.

1) $\sqrt{10}$ $\sqrt{15}$ $\sqrt{40}$ $\sqrt{55}$ $\sqrt{75}$

2) $\sqrt{90}$ $\sqrt{85}$ $\sqrt{79}$ $\sqrt{61}$ $\sqrt{65}$



JOON. 126

626. Ruudu pindala on

1) 18 cm²; 22 cm²; 50 cm²; 72 cm²; 92 cm²;

2) 98 cm²; 82 cm²; 60 cm²; 55 cm²; 32 cm².

Leia jooniselt 126 ruudu külje pikkus.

Jooniselt 126 saab leida ka 1-st väiksemate ja 100-st suuremate arvude ruutjuurte lähisväärtusi.

Näiteid. 1) $\sqrt{0,35} = \sqrt{35} : 10 = 5,9 : 10 = 0,59$

2) $\sqrt{0,065} = \sqrt{6,5} : 10 = 2,6 : 10 = 0,26$

3) $\sqrt{5500} = 10 \cdot \sqrt{55} = 10 \cdot 7,4 = 74$.

627. Leia jooniselt 126 järgmised ruutjuured kahe tüvenumbriga:

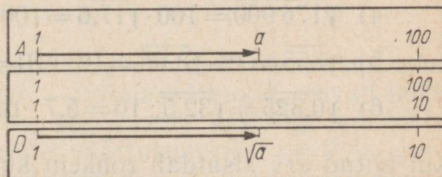
1) $\sqrt{5600}$ $\sqrt{7800}$ $\sqrt{8200}$ $\sqrt{9500}$

2) $\sqrt{4500}$ $\sqrt{4750}$ $\sqrt{7000}$ $\sqrt{7750}$

3) $\sqrt{0,85}$ $\sqrt{0,42}$ $\sqrt{0,0065}$ $\sqrt{0,0076}$

5.26. RUUTJUURE LEIDMINE LÜKATIL.

Arvu ruudu leidmisel nägime, et märkides skaalal D mingi arvu, on skaalal A märkija all antud arvu ruut. Umberpöörult, kui märgime skaalal A mingi arvu a , on skaalal D märkija all \sqrt{a} (joon. 127). Näiteks, märkides skaalal A arvu 4, on märkija all skaalal D arv $2 = \sqrt{4}$. Arv 9 skaalal A on kohakuti arvuga $3 = \sqrt{9}$ skaalal D jne.



JOON. 127

Leiame näiteks $\sqrt{7,6}$. Skaala A vasakul poolel, kus on kujutatud arvud 1 kuni 10, märgime arvu 7,6. Märkija alt skaalalt D loeme otsitava ruutjuure tüvenumbrid 2-7-6. Seega $\sqrt{7,6} = 2,76$. Leides $\sqrt{27,5}$, märgime skaala A paremal poolel (seal on kujutatud arvud 10 kuni 100) arvu 27,5. Märkija alt skaalalt D loeme otsitava ruutjuure tüvenumbrid 5-2-4. Seega $\sqrt{27,5} = 5,24$.

628. Kontrolli lükatil järgmiste võrduste õigsust:

$\sqrt{2} = 1,41$ $\sqrt{14,6} = 3,82$ $\sqrt{6,1} = 2,47$

$\sqrt{20} = 4,47$ $\sqrt{6} = 2,45$ $\sqrt{34} = 5,83$

$\sqrt{2,4} = 1,84$ $\sqrt{60} = 7,75$ $\sqrt{32} = 5,66$

629. Kontrolli, kas alljärgnevatte ruutjuurte tüvenumbrid (sulgudes) on õiged. Leia need ruutjuured.

$$\sqrt{5,5} \quad (2-3-4) \quad \sqrt{6,9} \quad (2-6-2) \quad \sqrt{76,2} \quad (8-7-3)$$

$$\sqrt{44} \quad (6-6-3) \quad \sqrt{10,8} \quad (3-2-9) \quad \sqrt{1,48} \quad (1-2-2)$$

$$\sqrt{2,65} \quad (1-6-3) \quad \sqrt{39,5} \quad (6-2-8) \quad \sqrt{5,22} \quad (2-2-9)$$

Kui arv, millest on vaja leida ruutjuurt, on 1-st väiksem või 100-st suurem, siis toimime samuti nagu ruutjuure leidimisel tabelist: suurendame (või vähendame) antud arvu 100, 10 000, ... korda, nii et saame arvu, mille täisosa on kas ühe- või kahekohaline, leiame sellest lükatil ruutjuure ja vähendame (või suurendame) leitud arvu vastavalt 10, 100, ... korda.

Näiteid. 1) $\sqrt{0,0795} = \sqrt{7,95} : 10 = 2,28 : 10 = 0,228$

Märkides skaala A vasakul poolel arvu 7,95, leiame märkija alt skaalal D otsitava arvu tüvenumbrid 2-8-2.

$$2) \sqrt{0,0085} = \sqrt{85} : 100 = 9,22 : 100 = 0,0922$$

$$3) \sqrt{4550} = 10 \cdot \sqrt{45,5} = 10 \cdot 6,75 = 67,5$$

Märkides skaala A paremal poolel arvu 45,5, leiame märkija alt skaalal D tüvenumbrid 6-7-5.

$$4) \sqrt{176\,000} = 100 \cdot \sqrt{17,6} = 100 \cdot 4,2 = 420$$

$$5) \sqrt{365} = 10 \cdot \sqrt{3,65} = 10 \cdot 1,91 = 19,1$$

$$6) \sqrt{0,325} = \sqrt{32,5} : 10 = 5,7 : 10 = 0,57$$

Kui antud arv sisaldab rohkem kui kolm tüvenumbrit, siis ümar-dame ta kolme tüvenumbriga arvuks ja leiame sellest ruutjuure.

Näiteks $\sqrt{1723} \approx \sqrt{1720} = 10 \cdot \sqrt{17,2} = 10 \cdot 4,15 = 41,5$.

630. Leia ruutjuur. Sulgudes on antud vastus.

$$\sqrt{200} \quad (14,1) \quad \sqrt{2000} \quad (44,7)$$

$$\sqrt{230} \quad (15,2) \quad \sqrt{5200} \quad (72,1)$$

$$\sqrt{870} \quad (29,5) \quad \sqrt{137} \quad (11,7)$$

$$\sqrt{130} \quad (11,4) \quad \sqrt{37\,564} \quad (194)$$

$$\sqrt{0,17} \quad (0,412) \quad \sqrt{0,0789} \quad (0,281)$$

$$\sqrt{0,017} \quad (0,13) \quad \sqrt{0,905} \quad (0,951)$$

$$\sqrt[3]{0,0215} \quad (0,147) \qquad \sqrt[3]{0,0028} \quad (0,0529)$$

$$\sqrt[3]{0,042} \quad (0,205) \qquad \sqrt[3]{0,5} \quad (0,707)$$

631. Ruudukujulise spordiplatsi pindala on 2130 m². Kui pikk on spordiplatsi külg?

6. KAHE MUUTUJAGA LINEAARVÖRRANDISÜSTEEM.

6.1. KAHE MUUTUJAGA LINEAARVÖRRAND.

Kahe muutujaga võrrand ja selle lahend.

Võrrandid

$$2x+3=5, \quad 4t-5=2t+9, \quad \frac{2}{u} = \frac{3}{u+1}$$

on ühe muutujaga võrrandid. Nendest esimeses on muutujaks x , teises t ja kolmandas u . Võrrandis võib olla ka enam kui üks muutuja.

Näiteid. $x+y=5$ — kahe muutujaga võrrand,
 $2z^2-x=5y$ — kolme muutujaga võrrand,
 $x+y+z=3u$ — nelja muutujaga võrrand.

Vaatleme lähemalt kahe muutujaga võrrandit ja selgitame, mis on selle lahendiks. Olgu näiteks antud võrrand

$$x^2+2y=10,$$

kus $x \in Q$ ja $y \in Q$. Kui võtame selles võrrandis kummagi muutuja asemel tema mingi väärtuse — viimased moodustavad kokku muutujate väärtuspaari —, siis saame kas õige või väär võrduse. Võttes näiteks muutujate väärtuspaariks $x=2$ ja $y=4$, saame võrrandi vasaku poole väärtuseks

$$2^2+2 \cdot 4=4+8=12.$$

Et võrrandi parem pool on 10, siis saime võrrandist väär võrduse $12=10$. Me ütleme, et väärtuspaar $x=2$ ja $y=4$ ei rahulda võrrandit. Kui aga asendada muutujad väärtustega $x=2$ ja $y=3$, siis on võrrandi vasaku poole väärtus

$$2^2+2 \cdot 3=4+6=10$$

ja me saame võrrandist õige võrduse $10=10$. Muutujate väärtuspaar $x=2$ ja $y=3$ rahuldab võrrandit.

Muutujate väärtuspaari, mis rahuldab kahe muutujaga võrrandit, nimetatakse selle võrrandi lahendiks.

Võrrandi muutujate väärtuspaar kirjutatakse sageli järjestatud arvupaarina, milles muutujate väärtused on kirjutatud sellises järjekorras, nagu vastavad muutujad esinevad tähestikus. Näiteks väärtuspaari $x=2$ ja $y=4$ võime kirjutada kujul $(2; 4)$, sest täht x on tähestikus enne kui täht y . Samal põhjusel võime väärtuspaari $x=2$ ja $y=3$ kirjutada kujul $(2; 3)$. Kui aga tahame kontrollida, kas arvupaar $(-1; 0,5)$ on võrrandi $2x=5+4t$ lahendiks, siis tuleb võtta $t=-1$ ja $x=0,5$. Arvutamisel saame, et vasaku poole väärtus: $v=2 \cdot 0,5=1$, parema poole väärtus: $p=5+4 \cdot (-1)=1$.

Seega $v=p$ ja arvupaar $(-1; 0,5)$ on antud võrrandi lahendiks. Võrrandi muutujate väärtuspaar kirjutatakse sageli ka loogelise sulu abil. Näiteks kui võrrandi muutujateks on x ja z , siis arvupaari $(2; -7)$ võib kirjutada ka kujul

$$\begin{cases} x=2 \\ z=-7. \end{cases}$$

632. Näita, et arvupaarid $(4; 0)$, $(-6; 4)$, $(-11; 6)$ ja $(0; 1\frac{3}{5})$ on võrrandi $2x+5y=8$ lahenditeks.

633. Missugused antud arvupaaridest on võrrandi $3x-5=2y$ lahendid?

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=7 \\ y=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

634. Missugused arvupaarid hulgast

$$\{(1; 2), (1; -1), (-2; 0,8), (2; 0), (0; 0), (3; -1,8)\}$$

on võrrandi $t^2+2tz=z$ lahendiks?

Kahe muutujaga lineaarvõrrandi normaalkuju.

Vaatleme kahe muutujaga võrrandit, milles pärast võimalikke lihtsustusi on ainult kolm liiget: liikmed, milles muutujad on esimeses astmes ja muutujatest vaba liige. Sellist võrrandit nimetatakse **kahe muutujaga lineaarvõrrandiks**. Selle võrrandi üldkuju on

$$ax+by=c,$$

mida nimetatakse **kahe muutujaga lineaarvõrrandi normaalkujuks**. Selles tähistavad tähed x ja y muutujaid, tähed a , b ja c aga antud arve. Viimastest a ja b on **muutujate kordajad**, c on **vaba**

liige. Muutujate kordajaid ja vabaliiget nimetatakse ühiselt **võrrandi kordajateks**. Muutujaid võib tähistada ka teiste tähtedega, näiteks u ja v , s ja t jt. Normaalkujuline võrrand kirjutatakse ikka nii, et selles on muutujad tähestikulises järjekorras. Normaalkujulised kahe muutujaga lineaarvõrrandid on näiteks:

$$2x + 3y = 4; \text{ selles } a = 2, b = 3, c = 4;$$

$$3u - 2v = -4,3; \text{ selles } a = 3, b = -2, c = -4,3.$$

Kahe muutujaga võrrandil on samad põhiomadused, mis on ühe muutujaga võrrandilgi. Need põhiomadused võimaldavad teisendada mittenormaalkujulise võrrandi normaalkujuliseks.

Näide. Teisendame normaalkujuliseks võrrandi

$$\frac{3,8 - 4,7y}{3} - \frac{x - y}{6} = 0,3y.$$

Kaotame võrrandist harilikud murrud. Selleks korrutame võrrandi mõlemad pooled 6-ga. Saame:

$$\frac{3,8 - 4,7y}{3} - \frac{x - y}{6} = 0,3y \mid \cdot 6 \Rightarrow 7,6 - 9,4y - x + y = 1,8y.$$

Viime kõik muutujaid sisaldavad liikmed võrrandi vasakule poolele ja vabaliikmed paremale poolele ning koondame:

$$-9,4y - x + y - 1,8y = -7,6 \Rightarrow -x - 10,2y = -7,6.$$

Saadud võrrand ongi normaalkujuline. Kui aga soovitakse teisendada võrrandi kordajad täisarvudeks, nii et esimene neist oleks positiivne, siis tuleb võrrandi mõlemat poolt korrutada veel sobiva teguriga, antud juhul (-5) -ga. Nii saame

$$5x + 51y = 38.$$

635. Teisenda võrrand normaalkujuliseks.

$$1) 2(x - y) = 8x - 4(3 + x)$$

$$2) 5x - (5 - 9y) + 8 = 2x - (5 + 6y) - 4$$

$$3) \frac{s - 9}{3} - \frac{3s - 4}{10} = \frac{t - s}{15} + 9$$

$$4) \frac{u - 0,78}{2} + \frac{3v - 0,4u}{5} = 1,2u$$

$$5) \frac{2u - 5}{3} - \frac{t + 2}{6} = 3u$$

Kahe muutujaga lineaarvõrrandi lahendihulk.

Kui kahe muutujaga lineaarvõrrandi

$$ax + by = c$$

muutujate väärtuste hulkade kohta pole seatud kitsendusi, siis loeme, et $x \in Q$ ja $y \in Q$. See tähendab, et antud võrrandi lahendiks sobiv arvupaar $(x; y)$ peab kuuluma hulka $Q \times Q$, lühidalt $(x; y) \in Q \times Q$. Sel juhul kirjutatakse võrrandi $ax + by = c$ lahendihulk üldkujul järgmiselt:

$$\{(x; y) \in Q \times Q \mid ax + by = c\}$$

Hulka tähistavates loogelistes sulgudes märgitud püstkriipsu ette on kirjutatud hulga elemendi üldtähis $(x; y)$ ja näidatud, mis-sugusesse hulka need elemendid kuuluvad (hulka $Q \times Q$). Püstkriipsu taha on aga kirjutatud tingimus, mida iga element peab täitma (rahuldama võrrandit $ax + by = c$).

Vaatame, kui palju võib olla kahe muutujaga lineaarvõrrandil lahendeid.

Näide. Olgu antud võrrand $3x - 2y = 4$. Selgitame, mitu arvupaari saab olla hulgas

$$\{(x; y) \in Q \times Q \mid 3x - 2y = 4\}.$$

Avaldame antud võrrandist ühe muutuja, näiteks y , teise muutuja kaudu. Siis saame, et

$$y = \frac{3x - 4}{2}.$$

Nüüd anname muutujale x suvalisi ratsionaalarvulisi väärtusi, näiteks $-1; 0; 1; 1,5; 2$ ja arvutame muutuja y vastavad väärtused. Nende muutujate vastavate väärtuste paarid kuuluvad siis antud võrrandi lahendihulka. Saame:

$$\text{kui } x = -1, \text{ siis } y = \frac{3 \cdot (-1) - 4}{2} = -3,5;$$

$$\text{kui } x = 0, \text{ siis } y = \frac{3 \cdot 0 - 4}{2} = -2$$

jne.

Arvutustööd võib korraldada ka tabelis.

x	-1	0	1	1,5	2
$3x$	-3	0	3	4,5	6
$3x - 4$	-7	-4	-1	0,5	2
$y = \frac{3x - 4}{2}$	-3,5	-2	-0,5	0,25	1

Nii näeme, et arvupaarid $(-1; -3,5)$, $(0; -2)$, $(1; -0,5)$, $(1,5; 0,25)$, $(2; 1)$ kuuluvad võrrandi $3x - 2y = 4$ lahendihulka.

Muidugi võime muutujale x anda peale vaadeldud viie väärtuse mistahes teisi väärtusi ratsionaalarvude hulgast Q . Et hulk Q on lõpmatu, siis saame ka teisele muutujale lõpmatu hulga väärtusi. Kõik nende muutujate vastavate väärtuste järjestatud paarid on aga võrrandi lahenditeks. Seega võib kahe muutujaga lineaarvõrrandil olla lõpmatu hulk lahendeid ja eespool leitud arvupaaride hulk on antud võrrandi lahendihulga üks osahulk.

Lühidalt

$$\{(-1; -3,5), (0; 2), (1; -0,5), (1,5; 0,25), (2; 1)\} \subset \{(x; y) \in Q \times Q \mid 3x - 2y = 4\}.$$

Kui võrrandis esinevate muutujate väärtuste hulkade kohta on esitatud kitsendusi, siis võib võrrandi lahendihulk olla ka lõplik.

Näide 2. Kuidas on võimalik maksta 23 kop., kasutades ainult 2- ja 3-kopikasi münste?

Ulesande lahendamiseks oletame, et 2-kopikalisi on x ja 3-kopikalisi y . Siis saame võrrandi

$$2x + 3y = 23,$$

millest avaldame näiteks muutuja x :

$$x = \frac{23 - 3y}{2}.$$

Ulesande sisu järgi võivad muutujate väärtusteks olla ainult naturaalarvud, s. o. $x \in N$ ja $y \in N$. Proovimise teel leiame, et sobivateks arvupaarideks on

$$\begin{cases} x=10 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}.$$

Seega on antud summat võimalik maksta neljal erineval viisil. Saadud võrrandil on lõplik hulk lahendeid.

Et antud juhul $(x; y) \in N \times N$, siis võime kirjutada, et

$$\{(x; y) \in N \times N \mid 2x + 3y = 23\} = \{(10; 1), (7; 3), (4; 5), (1; 7)\}.$$

Näide 3. Leiame hulga

$$\{(x; y) \in Q \times Y \mid x - 2y = 7\},$$

kus $Y = \{-5; -3; -1\}$.

Ulesande tingimuste kohaselt $x \in Q$ ja $y \in Y$. Et siin on antud muutuja y väärtused, siis avaldame muutuja x .

$$x = 7 + 2y.$$

Arvutades saame, et

$$\text{kui } y = -5, \text{ siis } x = -3,$$

kui $y = -3$, siis $x = 1$,

kui $y = -1$, siis $x = 5$.

Seega

$$\{(x; y) \in Q \times Y \mid x - 2y = 7\} = \{(-3; -5), (1; -3), (5; -1)\}.$$

M ä r k u s. Kui mõlema muutuja väärtuste hulgaks on kogu ratsionaalarvude hulk Q , siis võrrandi lahendihulga üldkujus jäetakse lühiduse mõttes hulk $Q \times Q$ märkimata. Kõigil muudel juhtudel tuleb aga näidata missugusesse hulka võrrandi lahend kuulub. Seega siis peame meeles, et kirjutused $\{(x; y) \mid ax + by = c\}$ ja $\{(x; y) \in Q \times Q \mid ax + by = c\}$ tähendavad ühte ja sama.

636. Avalda võrrandist muutuja x .

$$1) 2x - 3y = 7 \quad 2) -3x + 3y = 11 \quad 3) \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = -\frac{1}{4}$$

637. Avalda võrrandist muutuja y .

$$1) 6x - 7y = 1 \quad 2) 3x + 2y = 4 \quad 3) -0,8x + 0,4y = 0,5$$

638. Leia võrrandi lahendihulk, kui muutuja x väärtuste hulk on $\{0; -1; 1,5\}$ ja $y \in Q$.

$$1) 2x - y = 1 \quad 2) 4x - 3y = 11 \quad 3) x + 2y = \frac{3}{4}$$

639. Leia võrrandi lahendihulk, kui muutuja y väärtuste hulk on

$$\left\{-2; -1; 0; \frac{1}{2}\right\} \text{ ja } x \in Q.$$

$$1) x - 3y = 8 \quad 2) 2x + 3y = 1 \quad 3) \frac{1}{4}x - y = \frac{3}{4}$$

640. Leia hulk $\{(u; v) \in A \times Q \mid 2u - v = 7\}$,

$$\text{kui } A = \left\{-\frac{1}{2}; 0; -\frac{3}{4}; 5\right\}.$$

341. Leia hulk $\{(s; t) \in A \times B \mid 3s + 2t = 1\}$, kui $A = \{1; -1; 2; -3; 4\}$ ja $B = \{2; -5; 10; 1\}$.

642. Kuidas on võimalik maksta 18 kop., kasutades ainult 2- ja 5-kopikalisi?

643. Leia hulga viis suvalist elementi.

$$1) \{(x; y) \mid 2x - 1,2y = 1\} \quad 2) \left\{(x; z) \mid 4x - \frac{1}{2}z = \frac{1}{4}\right\}$$

6.2. KAHE MUUTUJAGA LINEARVÖRRANDI GRAAFIK.

Sirgjoone võrrand.

Kahe muutujaga lineaarvõrrandi

$$ax + by = c$$

lahendihulk on teatav järjestatud arvupaaride hulk. Iga arvupaar kujutab aga koordinaatteljestikus üht punkti. Seega vastab selle võrrandi lahendihulgale koordinaatteljestikus teatav punktihulk. Seda punktihulka nimetame **kahe muutujaga lineaarvõrrandi graafikuks**. Et selgitada, mis on kahe muutujaga lineaarvõrrandi graafikuks, avaldame ühe muutuja, näiteks y teise muutuja x kaudu. Kui $b \neq 0$, siis saame, et

$$ax + by = c \Rightarrow by = -ax + c \Rightarrow y = \frac{-ax + c}{b} \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Võrreldes tulemust lineaarfunktsiooni üldkujuga (lk. 198), võime öelda, et ka võrrandi

$$ax + by = c$$

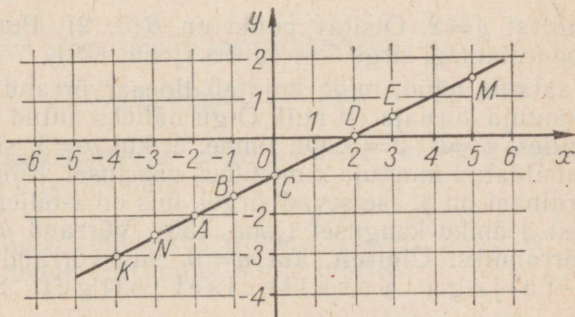
muutujate x ja y vahel valitseb lineaarne sõltuvus. Et lineaarfunktsiooni graafikuks on sirgjoon, siis ka

kahe muutujaga lineaarvõrrandi graafikuks on sirgjoon.

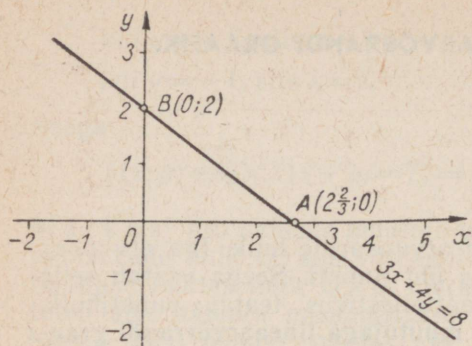
Sellel sirgel asetsevad kõik need punktid, mille koordinaadid rahuldavad antud võrrandit. Näiteks kujutades võrrandi $x - 2y = 2$ lahendid

$$(-2; -2), (-1; -1,5), (0; -1), (2; 0), (3; 0,5)$$

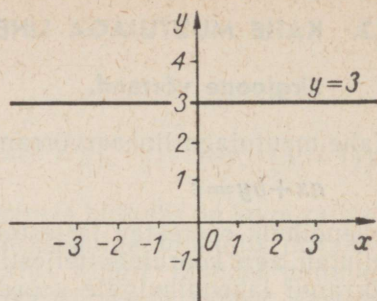
vastavalt punktidenä A, B, C, D ja E, näeme, et kõik need punktid asetsevad ühel ja samal sirgel (joon. 128). Vastupidi, võttes sellel sirgel suvalise punkti, näiteks $M(5; 1,5)$ ja paigutades selle punkti koordinaadid antud võrrandisse, näeme, et võrrand on rahuldatud: $5 - 2 \cdot 1,5 = 5 - 3 = 2$. Kerge on kontrollida, et ka punktide K ja N koordinaadid rahuldavad võrrandit.



JOON. 128



JOON. 129



JOON. 130

Et lineaarvõrrand $ax+by=c$ kujutab graafiliselt sirget, siis nimetatakse seda võrrandit **sirge** ehk **sirgjoone võrrandiks**. Viimase asjaolu tõttu öeldakse väljendi *sirge*, mille võrrand on $ax+by=c$ asemel lühemalt *sirge* $ax+by=c$. Seda sirget on lihtne joonestada kahe punkti järgi. Enamasti on otstarbekas nendeks punktideks võtta otsitava sirge ja koordinaattelgede lõikepunktid. Neid punkte on kerge leida, sest koordinaatteljel asetseva punkti üks koordinaat on 0. Juhul, kui sirge ja koordinaattelgede lõikepunktid on lähes- tikku või teineteisest väga kaugel, tuleb muidugi kasutada sirge joonestamiseks teisi punkte.

N ä i d e. Joonestame sirge $3x+4y=8$.

Leiame esmalt punkti, kus sirge lõikab x -telge. Selle punkti ordinaat $y=0$. Abstsissi leiame võrrandist

$$3x+4\cdot 0=8,$$

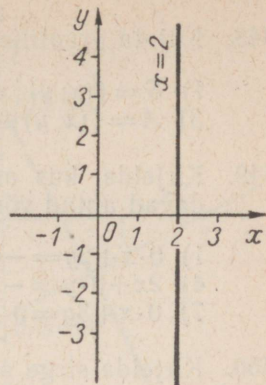
millest $x=2\frac{2}{3}$. Vajalik punkt on seega $A\left(2\frac{2}{3}; 0\right)$.

Leiame nüüd punkti, kus sirge lõikab y -telge. Selle punkti abstsiss on 0. Ordinaadi leiame võrrandist

$$3\cdot 0+4y=8,$$

millest $y=2$. Otsitav punkt on $B(0; 2)$. Punktide A ja B järgi joonestamegi sirge $3x+4y=8$ (joon. 129).

Vaatame nüüd, mida kujutab lineaarvõrrand $ax+by=c$, kui ühe muutuja kordaja on null. Olgu näiteks antud võrrand $0\cdot x+2y=6$, millest $y=6:2=3$. On ilmne, et kui $y=3$, siis on antud võrrand rahuldatud muutuja x mistahes väärtusel. Kõik need punktid, mille ordinaat on 3, asetsevad sirgel, mis on x -teljega paralleelne ja sellest 3 ühiku kaugusel (joon. 130). Võrrand $y=3$ ongi selle sirge võrrandiks. Üldiselt, kui $a=0$, siis võrrand $ax+by=c$ kujutab x -teljega paralleelset sirget. Selle sirge võrrand



JOON. 131

avaldu kujul $y = \frac{c}{b}$ ehk lühemalt $y = n$, kus $n = \frac{c}{b}$ on mingi arv. Kui $n > 0$, siis asetseb sirge ülalpool x -telge; kui $n < 0$, siis asetseb sirge allpool x -telge. Kui $n = 0$, siis sirge ühtib x -teljega. Seepärast öeldaksegi, et võrrand $y = 0$ on x -telje võrrand.

Vaatame veel näiteks võrrandit $3x + 0 \cdot y = 6$, milles muutuja y kordaja $b = 0$. Sellest võrrandist saame, et $x = 2$. Muutuja x sellel väärtusel on antud võrrand rahuldatud olenemata muutuja y väärtusest. Kõik need punktid, mille abstsiss on 2, asetsevad sirgel, mis on paralleelne y -teljega ja sellest 2 ühiku kaugusel (joon. 131). Võrrand $x = 2$ on selle sirge võrrand. Üldiselt võime öelda, et kui $b = 0$, siis võrrand $ax + by = c$ kujutab y -teljega paralleelset sirget. Selle sirge võrrand avaldub kujul $x = \frac{c}{a}$ ehk $x = k$, kus $k = \frac{c}{a}$ on mingi arv. Kui $k > 0$, siis sirge asetseb y -teljest paremal, kui $k < 0$, siis vasakul. Kui $k = 0$, siis sirge ühtib y -teljega. Seepärast nimetatakse võrrandit $x = 0$ ka y -telje võrrandiks.

644. Missugused punktidest $(0; 0)$, $(1; -1)$, $(0,3; 2)$, $(0; -1 \frac{2}{3})$, $(-1; -2 \frac{2}{3})$ asetsevad sirgel $2x - 3y = 5$?

645. Leia punktid, kus sirge lõikab koordinaattelgi.

1) $2x - 5y = 6$ 2) $-3x + 2y = 8$ 3) $4x + 5y = 15$

646. Joonesta millimeetripaberile sirge $x + y = 2$ ja leia jooniselt antud võrrandi viis lahendit.

647. Esita ühes ja samas teljestikus sired $x - 2y = 2$ ja $x + 2y = 4$. Leia jooniselt nende võrrandite ühine lahend.

648. Kujuta graafiliselt hulk.

$$1) S = \{(x; y) \mid x - y = 3\} \quad 2) T = \{(x; y) \mid x + y = -1\}$$

$$3) A = \{(x; y) \in N \times N \mid x + y = 5\}$$

649. Kirjelda, kus asetsevad punktid, mille koordinaadid rahuldavad antud võrrandit.

$$1) 0 \cdot x + 2y = -4$$

$$2) 0 \cdot x + 3y = 9$$

$$3) 0 \cdot x - 2y = 8$$

$$4) 2x + 0 \cdot y = -6$$

$$5) -3x + 0 \cdot y = 9$$

$$6) 6x + 0 \cdot y = 24$$

$$7) 0 \cdot x + 3y = 0$$

$$8) 5x + 0 \cdot y = 0$$

$$9) 0 \cdot x + y = 1$$

650. Kirjelda sirge asendit koordinaatteljestikus.

$$1) y = 2$$

$$2) y = -3$$

$$3) y = 0$$

$$4) x = -5$$

$$5) x = 4$$

$$6) x = 0$$

Sirge tõus ja algordinaat.

Avaldame sirge võrrandist $ax + by = c$ muutuja y . Kui $b \neq 0$, siis saame

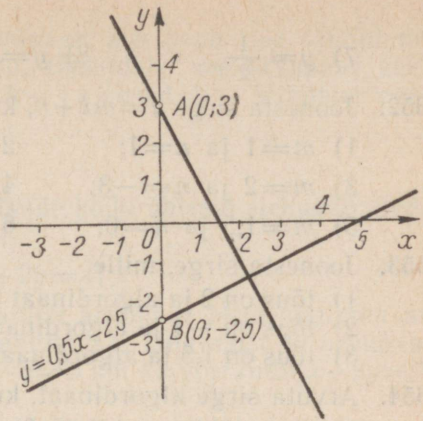
$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Tähistame viimases võrduses lineaarliikme kordaja $-\frac{a}{b}$ tähega m ja vabaliikme $\frac{c}{b}$ tähega n . Siis saame sirge võrrandile kuju

$$y = mx + n.$$

Tuletades meelde eespool õpitud lineaarfunktsiooni vabaliikme tähendust, võime öelda, et arv n on sirge $y = mx + n$ ja y -telje lõikepunkti ordinaat. Viimast nimetatakse selle sirge **algordinaadiks**. Nii näiteks on sirge $y = -2x + 3$ algordinaat 3, sirge $y = 0,5x - 2,5$ algordinaat on $-2,5$ (joon. 132).

Vastavalt lineaarfunktsiooni lineaarliikme kordaja tähendusele näitab arv m , kui palju muutub sirge $y = mx + n$ punkti ordinaat, kui selle punkti abstsiss suureneb ühe võrra. Arvu m nimetatakse sirge $y = mx + n$ **tõusuks**, viimastest on sirge siht koordinaatteljestikus. Vaadeldes näiteks sirgeid $y = 0,5x + 2$, $y = 2x + 2$, $y = -0,5x + 2$ ja $y = -3x + 2$ (joon. 133), näeme, et nad kõik läbivad üht ja sama punkti $A(0; 2)$ (on ühise algordinaadiga), kuid on erinevate sihtidega. Kui punkti abstsiss kasvab 1 võrra, siis sirge $y = 0,5x + 2$ punkti ordinaat kasvab 0,5 võrra, kuid sirge $y = -2x + 2$ punkti ordinaat kasvab 2 võrra. Mõlemad sirged on tõusvad (positiivse tõusuga), kuid teine sirge tõuseb kiiremini. Punkti abstsissi kasvamisel 1 võrra sirge $y = -0,5x + 2$

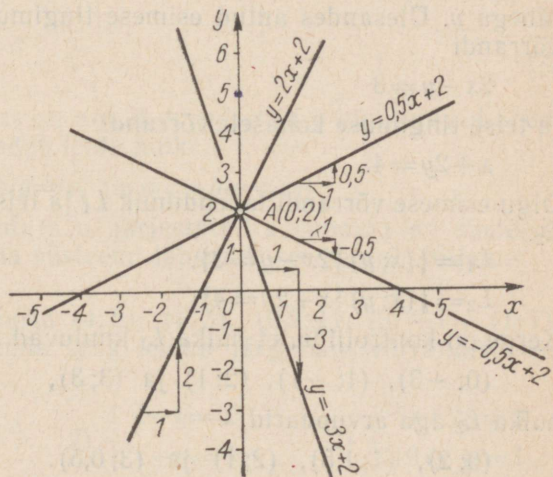


JOON. 132

punkti ordinaat väheneb 0,5 võrra ja sirge $y = -3x + 2$ punkti ordinaat väheneb 3 võrra. Mõlemad sirged on langevad sirged (negatiivse tõusuga), kuid teine neist langeb kiiremini. Kokkuvõttes, kui $m > 0$, siis sirge $y = mx + n$ on tõusev, kui $m < 0$, siis sirge on langev; kui $m = 0$ ja $n \neq 0$, siis sirge on paralleelne x -teljega.

651. Nimeta sirge tõus ja algordinaat. Kirjelda, kus sirge lõikab ordinaattelge ja kuidas muutub sirge punkti ordinaat, kui abstsiss kasvab ühe võrra.

- 1) $y = 2x + 5$ 2) $y = -3x + 7$ 3) $y = -0,8x - 1$
 4) $y = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3}$ 5) $y = -7x$ 6) $y = -3$



JOON. 133

7) $y = \frac{1}{2}$

8) $y = \frac{2x}{3}$

9) $y = -\frac{3x}{5} + \frac{1}{4}$

652. Joonesta sirge $y = mx + n$, kui

1) $m = 1$ ja $n = 1$;

2) $m = -0,5$ ja $n = 2$;

3) $m = 2$ ja $n = -3$;

4) $m = -1$ ja $n = -0,5$;

5) $m = 1,5$ ja $n = 0$;

6) $m = 0$ ja $n = 2$.

653. Joonesta sirge, mille

1) tõus on 2 ja algordinaat 3;

2) tõus on -1 ja algordinaat 1;

3) tõus on 1,5 ja algordinaat -2 .

654. Arvuta sirge algordinaat, kui

1) sirge läbib punkti (2; 3) ja tõus on -2 ;

2) sirge läbib punkti $(-1; 2)$ ja tõus on 1;

3) sirge läbib punkti $(-2; -5)$ ja tõus on 2.

655. Arvuta sirge tõus, kui

1) sirge läbib punkti $(-2; 1)$ ja algordinaat on 1,5;

2) sirge läbib punkti (3; 2) ja algordinaat on -4 ;

3) sirge läbib punkti $(-2; -3)$ ja algordinaat on 5.

6.3. KAHE MUUTUJAGA LINEAARVÖRRANDISÜSTEEM.

N ä i d e. Leiame kaks arvu, mis täidavad järgmisi tingimusi: kui esimest arvu korrutada kahega ja tulemusest lahutada teine arv, siis saame 3; kui aga esimese arvuga liita kahekordne teine arv, siis saame 4.

Ülesande lahendamiseks tähistame esimese arvu tähega x ja teise tähega y . Ülesandes antud esimese tingimuse kohaselt saame siis võrrandi

$$2x - y = 3$$

ja teise tingimuse kohaselt võrrandi

$$x + 2y = 4.$$

Olgu esimese võrrandi lahendihulk L_1 ja teise võrrandi lahendihulk L_2 :

$$L_1 = \{(x; y) \mid 2x - y = 3\},$$

$$L_2 = \{(x; y) \mid x + 2y = 4\}.$$

Kerge on kontrollida, et hulka L_1 kuuluvad näiteks arvupaarid

$$(0; -3), (1; -1), (2; 1) \text{ ja } (3; 3),$$

hulka L_2 aga arvupaarid

$$(0; 2), (1; 1,5), (2; 1) \text{ ja } (3; 0,5).$$

Kui leidub ülesandes nõutud arvupaar, siis peab see rahuldama nii esimest kui ka teist võrrandit, tähendab, see arvupaar peab olema nende võrrandite ühiseks lahendiks. Viimane peab aga kuuluma hulka

$$L = L_1 \cap L_2,$$

sest hulkade ühisosa sisaldab hulkade kõiki ühiseid elemente. Seda hulkade ühisosa kirjutatakse kujul

$$L = \{(x; y) \mid 2x - y = 3 \text{ ja } x + 2y = 4\},$$

kus sõna *ja* ütleb, et ühisossa kuuluv arvupaar peab kuuluma nii esimese kui ka teise võrrandi lahendihulka. Tingimust, et arvupaar peab rahuldama nii võrrandit $2x - y = 3$ kui ka võrrandit $x + 2y = 4$, kirjutatakse lühidalt kujul

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4, \end{cases} \quad (1)$$

mida nimetatakse **võrrandisüsteemiks**. Et siin on mõlemad võrrandid lineaarsed, siis süsteemi nimetatakse **kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteemiks**. Mõlema võrrandi ühiseid lahendeid, s. t. hulga

$$L = \{(x; y) \mid 2x - y = 3 \text{ ja } x + 2y = 4\}$$

elemente nimetatakse **võrrandisüsteemi (1) lahenditeks** ja selle hulga leidmist **võrrandisüsteemi lahendamiseks**. Eespool selgus, et vaadeldud süsteemi üheks lahendiks on arvupaar $(2; 1)$. Hiljem näeme, et see on ka ainus lahend. Seega

$$\{(x; y) \mid 2x - y = 3 \text{ ja } x + 2y = 4\} = \{(2; 1)\}.$$

Uldkujul kirjutatakse kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteem järgmiselt:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \quad (2)$$

Siin a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 ja c_2 on antud arvud, x ja y muutujad. Lahendada süsteem (2) tähendab leida hulk

$$L = \{(x; y) \mid a_1x + b_1y = c_1 \text{ ja } a_2x + b_2y = c_2\}.$$

Selle hulga iga element (s. o. järjestatud arvupaar) on süsteemi (2) lahend. Kuidas leida süsteemi lahendit, see selgub hiljem.

656. On antud arvupaarid $(4; 2)$, $(1; 3)$, $(0; 2; 1)$, $(3; -1)$, $(1; 1)$. Kontrolli, kas nende seas leidub järgmiste võrrandisüsteemide lahendeid:

$$1) \begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ x - y = 4 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 10x - y = 1 \end{cases}$$

657. Missugune lause on õige, missugune väär?

1) $(3; 1) \in \{(x; y) \mid 2x + 4y = 10\}$

2) $(-1; 4) \in \{(x; y) \mid x + y = 3 \text{ ja } x - y = 2\}$

3) $(5; -5) \in \{(x; y) \mid x + y = 0 \text{ ja } x - y = 10\}$

4) $(2; 1) \in \{(x; y) \mid x - y = 1 \text{ ja } 2x + y = 5\}$

5) $(-1; 2) \in \{(x; y) \mid x + y = 1 \text{ ja } 2x - y = 3\}$

6) $(2; 2) \in \{(u; v) \mid 3u + v = 4 \text{ ja } 2u - v = 1\}$

6.4. KAHE MUUTUJAGA LINEAARVÖRRANDISÜSTEEMI GRAAFILINE LAHENDAMINE.

Nagu nägime, on võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

ühiks lahendiks arvupaar $(2; 1)$, s. t.

$$(2; 1) \in L_1 \cap L_2,$$

kus $L_1 = \{(x; y) \mid 2x - y = 3\}$, $L_2 = \{(x; y) \mid x + 2y = 4\}$.

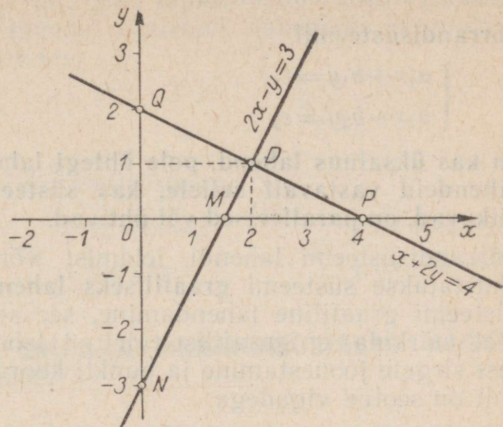
Selgitame, kuidas leida hulga $L_1 \cap L_2$ elemente ja kui palju neid on. Selleks joonestame ühes ja samas teljestikus antud süsteemi võrrandite graafikud, s. o. sirged $2x - y = 3$ ja $x + 2y = 4$. Esimene sirge läbib punkte $M(1,5; 0)$ ja $N(0; -3)$, teine punkte $P(4; 0)$ ja $Q(0; 2)$. Nende punktidega on sirged üheselt määratud (joon. 134). Võrrandit $2x - y = 3$ rahuldavad kõik sirge MN punktide koordinaadid ja ainult need, võrrandit $x + 2y = 4$ kõik sirge PQ punktide koordinaadid ja ainult need. Võrrandite ühiseks lahendiks on siis nende sirgete ühise punkti D koordinaadid $x = 2$ ja $y = 1$. Et kahel lõikuvall sirgel on ainult üks ühine punkt, siis on antud võrrandisüsteemil ainult üks lahend.

Võib juhtuda, et süsteemi võrrandite graafikuteks on kaks paralleelset sirget. Et sel juhul sirgetel ühist punkti pole, siis võrrandite lahendihulkade ühisosa on tühi hulk ja võrrandisüsteemil ei ole lahendit. Süsteemi nimetatakse sel juhul **vastuoluliseks**. Näiteks süsteem

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 0,5x + y = -2 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$$

on vastuoluline nagu see selgub ka jooniselt 135. Siin võrrandite lahendihulkade ühisosa

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset.$$



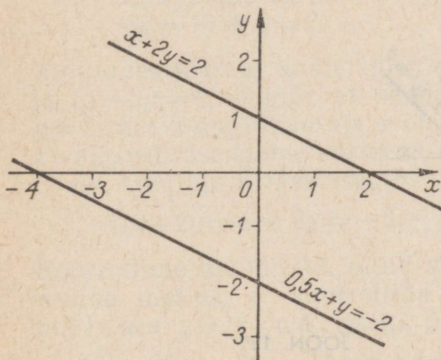
JOON. 134

Süsteemi võrrandite graafikud võivad ka ü h t i d a. Ühe sirge kõik punktid kuuluvad siis ka teisele sirgele. Sel korral on võrrandisüsteemil lõpmatu hulk lahendeid: ühe võrrandi iga lahend on ka teise võrrandi lahendiks. Selline võrrandisüsteem on näiteks

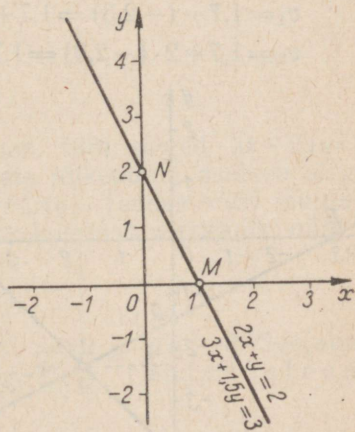
$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x + 1,5y = 3. \end{cases}$$

Tõepoolest, esimene sirge lõikab koordinaattelgi punktides $M(1; 0)$ ja $N(0; 2)$, mida läbib ka teine sirge. Täheleb, sirged ühtivad (joon. 136). Kui esimese võrrandi lahendihulk on L_1 ja teise L_2 , siis antud juhul

$$L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2.$$



JOON. 135



JOON. 136

Kokku võttes võime öelda, et

võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

on kas üksainus lahend, pole ühtegi lahendit või on lõpmatu hulk lahendeid vastavalt sellele, kas süsteemi võrrandite graafikud lõikuvad, on paralleelsed või ühtivad.

Võrrandisüsteemi lahendi leidmist võrrandite graafikute järgi nimetatakse süsteemi **graafiliseks lahendamiseks**. Kuidas toimub süsteemi graafiline lahendamine, see selgus juba eespool. Tuleb veel märkida, et graafiliselt leitud lahend on sageli ligikaudne, sest sirgete joonestamine ja punkti koordinaatide lugemine graafikult on seotud vigadega.

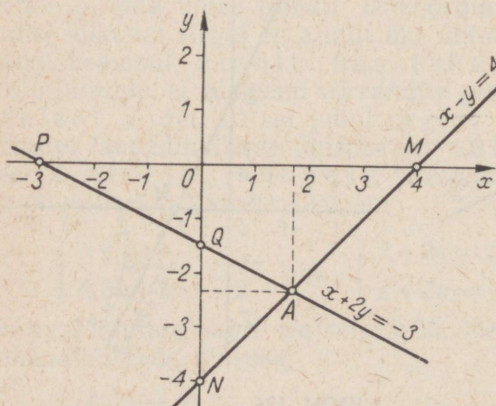
N ä i d e. Lahendame graafiliselt võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + 2y = -3. \end{cases}$$

Sirge $x - y = 4$ lõikab koordinaattelgi punktides $M(4; 0)$ ja $N(0; -4)$ ning sirge $x + 2y = -3$ punktides $P(-3; 0)$ ja $Q(0; -1,5)$. Jooniselt 137 loeme, et $MN \cap PQ = A(1,7; -2,3)$, s. t. graafiku järgi on süsteemi lahendiks arvupaar $(1,7; -2,3)$. Kontrollime seda lahendit, pidades meeles, et süsteemi lahendit tuleb alati kontrollida mõlema võrrandiga. Selleks tähistame esimese võrrandi vasaku poole tähega v_1 ja parema poole tähega p_1 , teise võrrandi pooled aga vastavalt tähtedega v_2 ja p_2 , arvutame nende poolte väärtused muutujate leitud väärtustel ja võrdleme tulemusi:

$$v_1 = 1,7 - (-2,3) = 1,7 + 2,3 = 4; \quad v_1 = p_1.$$

$$v_2 = 1,7 + 2 \cdot (-2,3) = 1,7 - 4,6 = -2,9; \quad v_2 \approx p_2.$$



JOON. 137

Kontroll näitab, et teine võrrand pole täpselt rahuldatud. Graafiku täpsuse piires võime lugeda süsteemi lahendiks arvupaari (1,7; -2,3) ehk teisiti kirjutades

$$\begin{cases} x=1,7 \\ y=-2,3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+6y=12 \\ x-y=4 \end{cases}$$

658. Lahenda graafiliselt võrrandisüsteem.

1) $\begin{cases} x-y=5 \\ x+y=3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x-y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x+5y=12 \\ 3x-3y=8 \end{cases}$

6.5. KAHE MUUTUJAGA LINEAARVÖRRANDISÜSTEEMI ALGEBRALINE LAHENDAMINE.

Liitmisvõte.

Võrrandisüsteemide graafiline lahendamine on enamasti ebatäpne ja seotud suure ajakuluga. Seepärast õpime võrrandisüsteeme lahendama arvutamise teel ehk, nagu öeldakse, **algebraliselt**.

Näide 1. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3x-2y=12 \\ 5x+2y=4. \end{cases}$$

Paneme tähele, et antud süsteemi võrrandites on muutuja y kordajad teineteise vastandarvud -2 ja 2 . See asjaolu võimaldab võrrandite vastavate poolte liitmise teel selle muutuja kõrvaldada ehk elimineerida. Saame:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-2y=12 \\ 5x+2y=4 \end{cases} \\ \hline 8x=16 \Rightarrow x=2. \end{array}$$

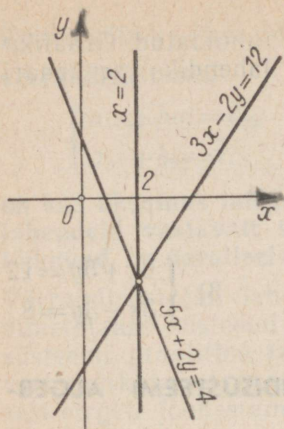
Kujutades ühel ja samal joonisel (joon. 138) sirged $3x-2y=12$ ja $5x+2y=4$, selgub, et nende sirgete lõikepunkt asetseb sirgel $x=2$. Arv 2 ongi muutuja x otsitav väärtus. Teades nüüd muutuja x väärtust, asendame süsteemi ükskõik kummas võrrandis, näiteks teises, muutuja x väärtusega 2. Saame:

$$5 \cdot 2 + 2y = 4 \Rightarrow 2y = -6 \Rightarrow y = -3.$$

Kontrollime muutujate leitud väärtusi $x=2$ ja $y=-3$. Seejuures peame meeles, et kontrollida tuleb alati lähtesüsteemi mõlema võrrandi järgi. Saame:

$$v_1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) = 6 + 6 = 12; \quad v_1 = p_1.$$

$$v_2 = 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 10 - 6 = 4; \quad v_2 = p_2.$$



JOON. 138

Vastus.

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-3. \end{cases}$$

Näide 2. Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} 6x+7y=-8 \\ 8x+9y=-10. \end{cases}$$

Elimineerime sellest süsteemist näiteks muutuja x . Selleks on aga vaja muuta x kordajad võrrandites teineteise vastandruvudeks. Seda saab teha, kui korrutame esimese võrrandi mõlemad pooled teguriga 4 ja teise võrrandi mõlemad pooled teguriga -3 (või vastavalt teguriga -4 ja 3). Nagu teada, ei muutu sellise teisen-duse tõttu kummagi võrrandi lahendihulk. Kirjalikult vormistame töö nii:

$$\begin{cases} 6x+7y=-8 & | \cdot 4 \\ 8x+9y=-10 & | \cdot (-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24x+28y=-32 \\ -24x-27y=30 \end{cases}$$

$$y=-2.$$

Muutuja x väärtuse arvutamiseks asendame näiteks esimeses võr-randis muutuja y väärtusega -2 . Nii saame:

$$6x+7 \cdot (-2) = -8 \Rightarrow 6x-14 = -8 \Rightarrow 6x=6 \Rightarrow x=1.$$

Kontroll. $v_1=6 \cdot 1+7 \cdot (-2)=6-14=-8$; $v_1=p_1$.

$$v_2=8 \cdot 1+9 \cdot (-2)=8-18=-10$$
; $v_2=p_2$.

Vastus. Süsteemi lahend on $(1; -2)$.

Et kirjeldatud lahendusviisi korral liidetakse süsteemi võr-randite vastavad pooled, siis kannab see lahendusviis **liitmisevõtte** nimetust.

Märgime, et iga ülesannet võrrandisüsteemi lahendamise kohta saab sõnastada ka hulga leidmise ülesandena. Nii võiksime viimase näite korral öelda ka, et leiame hulga

$$A = \{(x; y) \mid 6x + 7y = -8 \text{ ja } 8x + 9y = -10\}.$$

Vastus tuleks kirjutada siis kujul $A = \{(1; -2)\}$.

659. Lahenda võrrandisüsteem liitmisvõttega.

$$1) \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -9 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ -3x - 5y = -9 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + 5y = -9 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 4x + 5y = -7 \\ 2x + 7y = 1 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x + 7y = -2 \\ 8x - 5y = -16 \end{cases}$$

660. Leia hulk.

1) $A = \{(x; y) \mid 7x - 3y = 15 \text{ ja } 5x + 6y = 27\}$

2) $B = \{(x; y) \mid 4x + 3y = -2 \text{ ja } 2x + y = 0\}$

3) $C = \{(x; y) \mid x + 2y = 11 \text{ ja } 5x - 3y = 3\}$

Asendusvõte.

Näide 1. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 4x - 3y = 4. \end{cases}$$

Paneme tähele, et antud süsteemi esimeses võrrandis on muutuja y avaldatud muutuja x kaudu. See võimaldab muutujat y elimineerida sel teel, et asetame teise võrrandisse muutuja y asemele temaga võrdse avaldise $2x - 3$. Siis saame teisest võrrandist ühe muutujaga võrrandi

$$4x - 3(2x - 3) = 4,$$

mille lahendamisel saame, et $x = 2,5$. See arv ongi muutuja x otsitav väärtus. Muutuja y väärtuse leiame esimesest võrrandist, asendades seal muutuja x tema leitud väärtusega $2,5$. Siis saame, et

$$y = 2 \cdot 2,5 - 3 = 2.$$

Kontroll näitab, et arvupaar $(2,5; 2)$ rahuldab tõepoolest antud süsteemi.

Vastus.

$$\begin{cases} x=2,5 \\ y=2. \end{cases}$$

Et kirjeldatud lahendusviisi korral on süsteemi ühes võrrandis üks muutuja asendatud teise muutuja kaudu, siis öeldakse, et võrrandisüsteem on lahendatud **asendusvõttega**.

Näide 2. Lahendame asendusvõttega võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 4x-5y=-18 \\ 2x+3y=2. \end{cases}$$

Avaldame ühest võrrandist, näiteks teisest (seal on väiksemad kordajad), muutuja x muutuja y kaudu.

$$2x+3y=2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{2-3y}{2}.$$

Nüüd asendame esimeses võrrandis muutuja x temaga võrdse avaldisega $\frac{2-3y}{2}$. Siis saame ühe muutujaga võrrandi

$$4 \cdot \frac{2-3y}{2} - 5y = -18,$$

mille lahendamisel saame, et

$$2 \cdot (2-3y) - 5y = -18 \Rightarrow$$

$$4-6y-5y = -18 \Rightarrow$$

$$11y = 22 \Rightarrow$$

$$y = 2.$$

Muutuja x otsitava väärtuse leiame võrdusest

$$x = \frac{2-3y}{2}.$$

Saame

$$x = \frac{2-3 \cdot 2}{2} = -2.$$

Kontroll. $v_1 = 4 \cdot (-2) - 5 \cdot 2 = -18$; $v_1 = p_1$.

$$v_2 = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 = 2; \quad v_2 = p_2.$$

Vastus. $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2. \end{cases}$

661. Lahenda võrrandisüsteem asendusvõttega.

$$1) \begin{cases} x+3y=7 \\ x=4y-7 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y=3x+3 \\ 3x-4y=6 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3x-7=y \\ 5x-4y=-7 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 5x+6y=-61 \\ x-y=1 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x+y=1 \\ 2x-3y=-18 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 2x-y=-8 \\ 3x+4y=32 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 3x+2y=9 \\ 5x-4y=15 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} 3x+8y=4 \\ 6x-4y=3 \end{cases} \quad 9) \begin{cases} 3y+2x=2,5 \\ 3x-1,25=3y \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \frac{3x-y}{3} + x + y = \frac{x-y}{5} - 1 \\ \frac{2y+x}{2} - \frac{2(x-y)}{5} = y - x - 1 \end{cases}$$

Võrrandisüsteemi lahendivalemid.

Tuletame valemid kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteemi lahendi arvutamiseks. Selleks lahendame üldkujulise süsteemi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

milles muutujate kordajad on nullist erinevad ja vabaliikmed mistahes antud arvud. Tuletame süsteemist võrrandi, milles pole muutujat y . Selleks korrutame esimese võrrandi pooled arvuga b_2 ja teise võrrandi pooled arvuga $-b_1$ ning liidame võrrandite vastavad pooled:

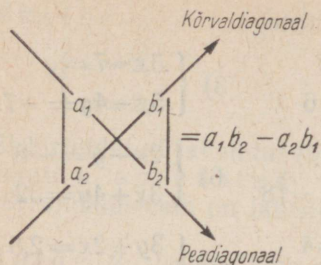
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \begin{matrix} \cdot b_2 \\ \cdot (-b_1) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ -a_2b_1x - b_1b_2y = -c_2b_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_1b_2x - a_2b_1x &= c_1b_2 - c_2b_1 \Rightarrow \\ (a_1b_2 - a_2b_1)x &= c_1b_2 - c_2b_1. \end{aligned}$$

Saadud ühe muutujaga võrrandis on nii x kordaja kui ka vabaliige korrutiste vahe. Selliseid korrutiste vahesisid on hakatud kirjutama püstkriipsude vahele tabelina järgmiselt:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Niisuguse tabelina kirjutatud korrutiste vahet nimetatakse **kahe-realiseks determinandiks** ja selles tabelis leiduvaid arve — determinandi **elementideks**. Determinandi kirjutamisel tuleb nn. **peadiagonaalile** (vasakult ülevalt paremale alla) kirjutada vahe



JOON. 139

esimese liikme tegurid ja **kõrvaldiagonaalile** (vasakult alt paremale üles) vahe teise liikme tegurid (joon. 139). Niisiis,

determinant võrdub peadiagonaali elementide ja kõrvaldiagonaali elementide korrutiste vahega.

Näiteid.

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = 14 - 15 = -1;$$

$$2) \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-2) - (-4) \cdot (-3) = -12 - 12 = -24.$$

Kirjutame nüüd võrrandisüsteemi lahendamisel saadud ühe muutujaga võrrandi

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$$

determinantide abil:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Neid determinante on kerge meeles pidada: x kordajaks on süsteemi (1) muutujate kordajatest koostatud determinant, kusjuures nende kordajate paigutus determinandis on samasugune nagu antud süsteemis. Seda determinantit nimetatakse **süsteemi determinandiks** ja tähistatakse tähega D .

Niisiis,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Saadud võrrandi vabaliikmeks on determinant, mille saame süsteemi determinandist, kui selles muutuja x kordajad a_1 ja a_2 asen-

dame vastavalt võrrandi vabaliikmetega c_1 ja c_2 . Tähistame selle determinandi sümboliga D_x , s. t.

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Kasutades determinantide tähiseid, saame muutuja x otsitava väärtuse leidmiseks tuletatud võrrandi kirjutada väga lühidalt:

$$D \cdot x = D_x.$$

Kui süsteemi determinant $D \neq 0$, siis muutuja x otsitava väärtuse arvutamiseks saame järgmise valemi:

$$x = \frac{D_x}{D}.$$

Tuletame valemi muutuja y otsitava väärtuse arvutamiseks. Selleks elimineerime süsteemist (1) muutuja x , korrutades esimese võrrandi pooled arvuga $-a_2$, teise võrrandi pooled arvuga a_1 ja liites saadud võrrandite vastavad pooled. Kui need teisendused teha (tee seda!), siis saame võrrandi

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) y = a_1 c_2 - c_2 c_1.$$

Kirjutame ka selle võrrandi determinantide abil:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Saadud võrrandis on muutuja y kordajaks samuti süsteemi determinant D . Võrrandi vabaliikmeks on determinant, mille saame süsteemi determinandist, kui selles y kordajad b_1 ja b_2 asendada vastavalt vabaliikmetega c_1 ja c_2 . Tähistame selle determinandi sümboliga D_y , s. t.

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Võrrand on siis järgmise kujuga:

$$D \cdot y = D_y.$$

Kui süsteemi determinant $D \neq 0$, siis muutuja y arvutamiseks saame valemi

$$y = \frac{D_y}{D}.$$

Kokkuvõttes saame võrrandisüsteemi lahendi arvutamiseks järgmise, nn. Crameri¹ reegli:

kui võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

determinant $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, siis süsteemi lahendiks on arvupaar

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ ja } y = \frac{D_y}{D},$$

kus $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ja $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Kui süsteemi determinant $D=0$, siis on võrrandisüsteemil lõpmatu hulk lahendeid või lahendid puuduvad. Neid juhtumeid meie ei vaatle.

Crameri reegli rakendamisel arvutame esmalt süsteemi determinandi D . Kui $D \neq 0$, siis arvutame determinandid D_x ja D_y ning nende põhjal x ja y . Võib muidugi arvutada valemi järgi ainult ühe muutuja väärtuse ja siis süsteemi ühest võrrandist teise muutuja väärtuse.

Näide 1. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 5x - 2y = 4. \end{cases}$$

1) $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 15 = -19 \neq 0;$

2) $D_x = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -26 - 12 = -38;$

3) $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 65 = -57;$

4) $x = D_x : D = (-38) : (-19) = 2;$

5) $y = D_y : D = (-57) : (-19) = 3.$

Kontroll. $v_1 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13; v_1 = p_1.$
 $v_2 = 5 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 4; v_2 = p_2.$

¹ Cramer, Gabriel, šveitsi matemaatik, elas a. 1704—1752.

Vastus. Süsteemi lahend on (2; 3).

Näide 2. Leiame hulga

$$L = \{(u; v) \mid -10u + 7v = 10 \text{ ja } 3u - 2v = -2,9\}.$$

$$1) D = \begin{vmatrix} -10 & 7 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 20 - 21 = -1 \neq 0;$$

$$2) D_u = \begin{vmatrix} 10 & 7 \\ -2,9 & -2 \end{vmatrix} = -20 + 20,3 = 0,3;$$

$$3) D_v = \begin{vmatrix} -10 & 10 \\ 3 & -2,9 \end{vmatrix} = 29 - 30 = -1;$$

$$4) u = 0,3 : (-1) = -0,3;$$

$$5) v = (-1) : (-1) = 1.$$

Kontrolli leitud lahendi õigsust!

Vastus. $L = \{(-0,3; 1)\}$.

Näide 3. Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{x+5y}{2} = \frac{y}{5} - 4 \frac{4}{5} \\ \frac{x-y}{2} = x+2. \end{cases}$$

Teisendame süsteemi võrrandid normaalkujulisteks.

Esimene võrrand:

$$\frac{\underline{2}}{5}x - \frac{\underline{5}}{2}(x+5y) = \frac{\underline{2}}{5}y - \frac{\underline{24}}{5} \quad | \cdot 10 \Rightarrow$$

$$2x - 5x - 25y = 2y - 48 \Rightarrow$$

$$-3x - 27y = -48 \quad | : (-3) \Rightarrow$$

$$x + 9y = 16.$$

Teine võrrand:

$$\frac{x-y}{2} = x+2 \quad | \cdot 2 \Rightarrow$$

$$x-y = 2x+4 \Rightarrow$$

$$x+y = -4.$$

Nii saime süsteemi

$$\begin{cases} x+9y=16 \\ x+y=-4. \end{cases}$$

Lahendame selle.

$$1) D = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 9 = -8 \neq 0;$$

$$2) D_x = \begin{vmatrix} 16 & 9 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 16 + 36 = 52;$$

$$3) D_y = \begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 16 = -20;$$

$$4) x = 52 : (-8) = 6,5.$$

$$5) y = (-20) : (-8) = 2,5.$$

Kontrolli leitud lahendi õigsust (lähtesüsteemi järgi)!

Vastus.

$$\begin{cases} x = -6,5 \\ y = 2,5 \end{cases}$$

Näide 4. Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 9. \end{cases}$$

$$1) D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0,$$

järelikult antud süsteemil ei ole ühest lahendit. Kui süsteemi teise võrrandi pooli jagada arvuga 3, siis saame süsteemi

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 3, \end{cases}$$

mis on ilmselt vastuoluline (samade arvude summa ei saa olla kord 2, kord 3): süsteemil pole lahendit. Süsteemi võrrandite graafilisel kujutamisel saame paralleelsete sirgete paari (joon. 140).

662. Kirjuta avaldis determinandi tähise abil.

$$1) 2 \cdot 3 - 4 \cdot 5$$

$$2) -4 \cdot 5 - 3 \cdot 1$$

$$3) ab + cd$$

$$4) 3 \cdot 4 - 3 \cdot 2$$

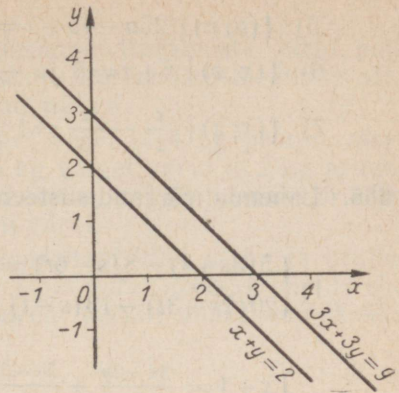
$$5) 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 1$$

$$6) 2x + 3y$$

$$7) 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3$$

$$8) 6 \cdot (-2) - 9 \cdot 7$$

$$9) x^2 - y^2$$



JOON. 140

663. Arvuta determinant.

$$\begin{array}{llll}
 1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & 2) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & 3) \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & 4) \begin{vmatrix} 0,7 & 1,2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
 5) \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{5} \end{vmatrix} & 6) \begin{vmatrix} m & 2n \\ m & n \end{vmatrix} & 7) \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & ab \end{vmatrix} & 8) \begin{vmatrix} -5 & x \\ -2 & x \end{vmatrix}
 \end{array}$$

664. Lahenda võrrandisüsteem.

$$\begin{array}{lll}
 1) \begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} & 2) \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases} & 3) \begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \\
 4) \begin{cases} 5x - y = -1 \\ x + 7y = 7 \end{cases} & 5) \begin{cases} 5x + y = 34 \\ 2x + 19y = -5 \end{cases} & 6) \begin{cases} x - y = 13 \\ 2x - 3y = -29 \end{cases} \\
 7) \begin{cases} -2x + 3y = 40 \\ 3x - 4y = -70 \end{cases} & 8) \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 2y = -13 \end{cases} & 9) \begin{cases} x - 100y = 101 \\ 2y - 3x = -601 \end{cases} \\
 10) \begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 4x - y = -54 \end{cases} & 11) \begin{cases} 3u - 5v = -6 \\ 6u + 15v = 8 \end{cases} & 12) \begin{cases} 3s + 2t = -75 \\ s + t = 10 \end{cases}
 \end{array}$$

665. Leia hulk

$$\begin{array}{l}
 1) \{(x; y) \mid 5x - y = 0 \text{ ja } 10x + y = 3\} \\
 2) \{(x; y) \mid 3x + 4y = 2 \text{ ja } 15x - 8y = 3\} \\
 3) \{(x; y) \mid 3x - 5y = -3 \text{ ja } 20y + 9x = -2\} \\
 4) \{(u; v) \mid 15u + 23v + 10 = 0 \text{ ja } 3u + 4v + 2 = 0\}
 \end{array}$$

$$5) \{(u; v) \mid 25u - 4v + 1 = 0 \text{ ja } 31u - 5v + 16 = 0\}$$

$$6) \{(x; z) \mid x + z = 8 \text{ ja } \frac{x}{6} + \frac{z}{3} = 2\}$$

$$7) \{(x; z) \mid \frac{x}{2} - \frac{z}{3} = 1 \text{ ja } \frac{x}{4} + \frac{2z}{3} = 8\}$$

666. Lahenda võrrandisüsteem.

$$1) \begin{cases} 5(3s+t) - 8(s-6t) = 200 \\ 20(2s-3t) - 13(s-t) = 520 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{x-1}{4} + \frac{y+1}{3} = 4 \\ \frac{x+3}{2} - \frac{y-2}{3} = 2 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x+1 = \frac{3x-2y}{5} + \frac{5x-3y}{3} \\ \frac{2x-3y}{3} + \frac{4x-3y}{2} = y+1 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 1 - 0,3(y-2) = \frac{x+1}{5} \\ \frac{y-3}{4} = \frac{4x+9}{20} - 1,5 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{2x-y+3}{3} - \frac{x-2y+3}{4} = 4 \\ \frac{3x-4y+3}{4} + \frac{4x-2y-9}{3} = 4 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 7 + \frac{x-3y}{4} = 2x - \frac{y+5}{3} \\ \frac{10(x-y) - 4(1-x)}{3} = y \end{cases}$$

667. Leia võrrandisüsteemi ligikaudne lahend kolme tüvenumbri-ga. Arvutamisel kasuta lükatit.

$$1) \begin{cases} x+2y=7 \\ 3x-5y=9 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 0,37x-1,2y=0,3 \\ 12x+0,5y=0,125 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 9x-2y=7 \\ 5x+9y=11 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} -3x+y=1,2 \\ 2x-3y=-7 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 3,29s-1,12t=5,9 \\ 0,955s+2,07t=-4,5 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 0,8x+11y=3 \\ 1,3x-0,7y=-2 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \frac{x-0,78}{2} + \frac{3y+0,4x}{5} = 1,2x \\ \frac{3,8-4,7y}{3} - \frac{x-y}{6} = 0,3y \end{cases} \quad 8) \begin{cases} \frac{x-y}{3} - \frac{3,2-x}{5} = \frac{4,7x}{15} \\ x = 1,87y - 1,11 \end{cases}$$

6.6. ÜLESANNETE LAHENDAMINE VÕRRANDSÜSTEEMI ABIL.

Ülesande lahendamisel võrrandisüsteemi abil tuleb

- 1) koostada ülesande tingimuste järgi võrrandisüsteem,
- 2) lahendada see süsteem,
- 3) kontrollida leitud lahendit ülesande teksti järgi.

Võrrandisüsteemi koostamiseks ülesande tingimuste järgi pole võimalik anda üldist eeskirja. Eeskjuju võrrandisüsteemi koostamiseks annavad allpool vaadeldavad näited.

Näide 1. On teada, et 3 kg valget värvi ja 4 kg pruuni värvi maksab kokku 8 rbl. 90 kop., kuid 5 kg valget värvi ja 2 kg pruuni värvi maksab kokku 9 rbl. 70 kop. Leiame, kui palju maksab 1 kg valget värvi ja kui palju 1 kg pruuni värvi.

Lahendus. Olgu valge värvi kilogrammi hind x rbl. ja pruuni värvi kilogrammi hind y rbl. 3 kg valget värvi maksab siis $3x$ rbl. ja 4 kg pruuni värvi $4y$ rbl. Et need värvid maksavad kokku 8,9 rbl., siis saame võrrandi

$$3x + 4y = 8,9.$$

Teiselt poolt aga teame, et 5 kg valget värvi maksab $5x$ rbl. ja 2 kg pruuni värvi $2y$ rbl., mis kokku maksavad 9,7 rbl. Seega saame veel teise võrrandi

$$5x + 2y = 9,7.$$

Et mõlemas võrrandis on muutujatel x ja y samad väärtused, siis saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3x + 4y = 8,9 \\ 5x + 2y = 9,7, \end{cases}$$

mille lahendamisel leiame, et

$$\begin{cases} x = 1,5 \\ y = 1,1. \end{cases}$$

Kontroll. 3 kg valget värvi maksab $3 \cdot 1,5 = 4,5$ rbl.

4 kg pruuni värvi maksab $4 \cdot 1,1 = 4,4$ rbl.

Kokku: 8,9 rbl.

5 kg valget värvi maksab $5 \cdot 1,5 = 7,5$ rbl.

2 kg pruuni värvi maksab $2 \cdot 1,1 = 2,2$ rbl.

Kokku: 9,7 rbl.

Vastus. 1 kg valget värvi maksab 1 rbl. 50 kop. ja 1 kg pruuni värvi 1 rbl. 10 kop.

Näide 2. Päri voolu liikudes vajab jõelaev 46,8 km pikkuse vahemaa läbimiseks 3 tundi 36 minutit, sama vahemaa läbimiseks vastuvoolu aga 5 tundi 12 minutit. Leiame jõe voolu kiiruse ja laeva kiiruse seisvas vees.

Lahendus. Olgu jõe voolu kiirus $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja laeva kiirus seisvas vees $y \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Päri voolu liikudes on siis laeva kiirus kalda suhtes $(x+y) \frac{\text{km}}{\text{h}}$, vastuvoolu aga $(y-x) \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kiirusega $(x+y) \frac{\text{km}}{\text{h}}$ liikus

laev 3 tundi 36 minutit ehk $3\frac{36}{60} = 3,6$ tundi. Selle ajaga läbis laev $3,6(x+y)$ km, sest tee pikkus on võrdne kiiruse ja aja korrutisega (eeldusel, et liikumine on ühtlane). Ülesande järgi on läbitud tee pikkus 46,8 km. Seega saame võrrandi

$$3,6(x+y) = 46,8.$$

Kiirusega $(y-x) \frac{\text{km}}{\text{h}}$ liikus laev 5 tundi 12 minutit ehk 5,2 tundi. Selle ajaga läbis ta $5,2(y-x)$ km, mis on samuti 46,8 km. Teine võrrand on seega

$$5,2(y-x) = 46,8.$$

Nii saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3,6(x+y) = 46,8 \\ 5,2(y-x) = 46,8. \end{cases}$$

Süsteemi lihtsustamiseks on siin otstarbekas mitte avada sulgusid, vaid jagada esimese võrrandi pooled arvuga 3,6 ja teise võrrandi pooled arvuga 5,2. Nii saame lihtsa süsteemi

$$\begin{cases} x+y=13 \\ -x+y=9, \end{cases}$$

millest

$$\begin{cases} x=2 \\ y=11. \end{cases}$$

Kontroll. Päri voolu liikudes on laeva kiirus kalda suhtes $13 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja vastuvoolu liikudes $9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. 3,6 tunniga läbitud tee pikkus päri voolu on kilomeetrites $3,6 \cdot 13 = 46,8$ ning 5,2 tunniga läbitud tee pikkus vastuvoolu on kilomeetrites $5,2 \cdot 9 = 46,8$.

Vastus. Jõe voolu kiirus on $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja laeva kiirus seisvas vees $11 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

668. Leia kaks arvu, mille summa on 24 ja vahe 6.

669. Leia kaks arvu, mis suhtuvad nagu 4:3 ja mille vahe on 12.

670. Kui üht arvu suurendada 2 korda ja teist vähendada 3 võrra, siis nende arvude summa on 26. Kui aga esimest arvu vähendada 3 võrra ja teist suurendada 2 korda, siis on nende arvude summa 31. Leia need arvud.

671. Kui üht arvu vähendada 4 võrra ja teist suurendada 3 korda, siis on nende arvude summa 36. Kui aga esimest arvu suu-

rendada 3 korda ja teist vähendada 2 võrra, siis on esimese ja teise arvu vahe 2. Leia need arvud.

672. Leia rööpküliliku külgede pikkused, kui rööpküliliku ümbermõõt on 60 cm ja kahe lähiskülje pikkuste vahe 2 cm.
673. Arvuta ristkülilikukujulise maatüki pindala, kui maatüki ümbermõõt on 140 m ja pikkus on laiupest 22 m suurem.
674. Leia trapetsi alused, kui kesklõik on 4,3 cm ja üks alus on teisest 1,8 cm võrra pikem.
675. Kahe ringi läbimõõtude summa on 11,4 m ja vahe 3 m. Leia kummagi ringi ümbermõõt ja pindala.
676. Otsitava kahekohalise arvu ristsumma on 5. Kui selles arvus numbrid vahetada, siis saame arvu, mis on otsitavast arvust 9• võrra väiksem. Leia otsitav arv.
677. Otsitava kahekohalise arvu ristsumma on 9. Kui selles arvus numbrid vahetada, siis saame arvu, mis suhtub otsitavasse arvu nagu 5:6. Leia otsitav arv.
678. Kui murru lugejat vähendada ühe võrra, siis saame $\frac{1}{2}$. Kui aga murru lugejat suurendada kahe võrra ja nimetajat vähendada ühe võrra, siis saame $1\frac{2}{3}$. Leia see murd.
679. Kui murru lugejat suurendada ühe võrra ja nimetajat vähendada ühe võrra, siis saame 1. Kui murru lugejat vähendada ühe võrra ja nimetajat suurendada kolme võrra, siis saame $\frac{1}{4}$. Leia see murd.
680. Reisirong, mis koosneb vedurist ja 15 ühesugusest vagunist, kaalub 270,5 tonni. Vedur kaalub 13,3 tonni rohkem kui 4 vagunit. Kui palju kaalub vagun ja kui palju vedur?
681. NSV Liidus lasti Maa esimene kunstlik kaaslane üles 4. nov. 1957. a., Ameerika Ühendriikides aga 31. jaan. 1958. a. Nende kaaslaste kaal oli kokku 97,6 kgf. Kui Ameerikas väljalastud kaaslase kaal oleks olnud 6 korda suurem, siis oleks selle kaal ületanud Nõukogude Liidus väljalastud kaaslase kaalu ainult 400 grammi võrra. Leia kummagi kaaslase kaal.
682. 15. mail 1958. a. lasti NSV Liidus üles Maa kolmas kunstlik kaaslane, mille kaal (konteiner koos teadusliku aparatuuriga) oli 1327 kgf. Kui teadusliku aparatuuri kaal oleks olnud 50% võrra suurem ja konteineri kaal 41 kgf võrra suurem, siis oleks kaaslase kogukaal olnud 1652 kgf. Leia teadusliku aparatuuri ja konteineri kaal.
683. Kaks teraviljakombaini koristavad koos töötades 3 tunniga vilja 11,4 hektarilt. Kui esimene kombain töötaks 4 tundi ja teine 5 tundi, siis koristatakse saak 17,2 hektarilt. Mitu hektarit teravilja koristab kumbki kombain tunnis?

684. 2,5 meetrit esimest sorti riidet ja 3 meetrit teist sorti riidet maksab kokku 43 rbl. 30 kop., aga 1,6 meetrit esimest sorti riidet ja 2,5 meetrit teist sorti riidet maksab kokku 32 rbl. 12 kop. Arvuta kummagi riide meetri hind.
685. On kaht sorti värvi. 1 kg esimest sorti värvi maksab 1,40 rbl. ja 1 kg teist sorti värvi 1,30 rbl. Mitu kilogrammi värvi peab maaler kummastki sordist võtma, et saada 10 kg segu, mille kilogrammi hind on 1,36 rbl.?
686. Kool kavatses osta kaks fotoaparaati ja ühe suurendusaparaadi, mille eest oleks tulnud maksta kokku 132 rbl. Et fotoaparaadi hinda alandati 10% ja suurendusaparaadi hinda 12,5%, siis tuli kavatsetud ostu eest tegelikult maksta 118 rbl. Leia kummagi aparaadi hind enne hinnaalandust.
687. 2,5 m üht sorti riidet ja 3 m teist sorti riidet maksis enne hinnaalandust kokku 34 rbl. 80 kop. Pärast seda, kui esimest sorti riide hinda alandati 10% ja teist 15%, maksis sama ost 30 rbl. 48 kop. Kui palju maksis kummagi sordi riide meetri hind enne hinnaalandust?
688. Mitu kilogrammi tuleb võtta puhast vaske ja mitu kilogrammi 45-protsendilise vasesisaldusega pronksi, et nende kokkusulatatamisel saada 50 kg pronksi, milles on 50% vaske?
689. Lennuk lendab 140 km pikkuse vahemaa pärituult 15 minutiga, vastutuult aga 21 minutiga. Arvuta tuule kiirus ja lennuki kiirus tuulevaikse ilmaga.
690. Jõelaev sõitis 100 km päri voolu ja 64 km vastu voolu, kulutades selleks kokku 9 tundi. Teisel korral sõitis see laev sama ajaga 80 km päri voolu ja niisama palju vastu voolu. Arvuta jõe voolu kiirus ja laeva kiirus seisvas vees.
691. Kui Tartu linna territooriumi suurendada 5 korda, siis jääks ta veel 26 km² võrra väiksemaks Tallinna linna territooriumist (1967. a. andmeil). Kui aga Tallinna territooriumi suurendada 22,8 km² võrra ja Tartu territooriumi suurendada 7 korda, siis oleksid nende linnade territooriumid võrdsed. Kui suur on kummagi linna territoorium?
692. 1965. a. saadi Eesti NSV-s igalt hektarilt keskmiselt 59,4% enam kartuleid kui 1950. a. Oleks 1965. a. saadud igalt hektarilt veel 41 tsentnerit rohkem kartuleid kui tegelikult saadi, siis oleks selle aasta kartulisaak hektarilt olnud kaks korda suurem 1950. a. hektarisaagist. Mitu tsentnerit kartuleid saadi keskmiselt igalt hektarilt 1950. a. ja mitu 1965. a.? (Vastus anna täpsusega 1 ts.)
693. Isa ja tütre vanus on kokku 44 aastat. Nelja aasta eest oli isa tütrest 8 korda vanem. Arvuta isa ja tütre vanus.
694. Isa on 9 aasta pärast 3 korda ja 22 aasta pärast ainult 2 korda vanem kui poeg. Kui vanad on nad praegu?

695. Poisil on 2 korda rohkem õdesid kui vendi, igal õel on aga niisama palju vendi kui õdesid. Mitu last on perekonnas?
696. On kaks kanistrit bensiini. Kui esimesest kanistrist valada ära 4 liitrit, siis on mõlemas kanistris ühepalju bensiini. Kui aga teisest valada ära 17 liitrit, siis jääb sinna 37 liitrit vähem kui algul mõlemas kanistris kokku. Mitu liitrit bensiini on kummaski kanistris?
697. Jüril ja Tõnul on kokku 12 rbl. Kui Tõnu annab oma rahast 5 rbl. ära, siis jääb talle 9 rbl. vähem kui on Jüril. Mitu rubla on kummalgi poisil?
698. Arvuta võrdhaarse kolmnurga küljed, kui haar on alusest 20 cm võrra pikem ja kolmnurga ümbermõõt on 80 cm.

N ä i d e 3. Sirge $y = mx + n$ läbib punkte $A(-2; -3)$ ja $B(3; 7)$. Leiame selle sirge võrrandi.

L a h e n d u s. Sirge võrrandi koostamiseks on vaja arvutada selle sirge tõus m ja algordinaat n . Et sirge läbib antud punkte, siis peavad nende punktide koordinaadid rahuldama selle sirge võrrandit. Nii saame muutujate m ja n suhte võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} -3 = -2m + n \\ 7 = 3m + n, \end{cases}$$

mille normaalkujuks on

$$\begin{cases} 2m - n = 3 \\ 3m + n = 7. \end{cases}$$

Selle süsteemi lahendiks on

$$\begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases}$$

ja otsitav võrrand on seega $y = 2x + 1$.

K o n t r o l l. Kontrolliks tuleb vaadata, kas antud punktide koordinaadid rahuldavad saadud võrrandit.

Punkt A : $-3 = 2 \cdot (-2) + 1$; $-3 = -3$.

Punkt B : $7 = 2 \cdot 3 + 1$; $7 = 7$.

V a s t u s. Sirge võrrand on $y = 2x + 1$.

699. Sirge $y = ax + b$ läbib punkte $M(-3; 4)$ ja $N(-2; -2)$. Leia selle sirge võrrand.
700. Sirge $y = kx + m$ läbib punkte $C(2; 1)$ ja $D(-4; -7)$. Leia selle sirge võrrand.

701. Arvuta sirge tõus ja algordinaat, kui sirge läbib punkte
- 1) $(-2; 3)$ ja $(-3; 2)$; 2) $(1; 1)$ ja $(3; 3)$;
 3) $(-5; -4)$ ja $(1; 1)$ 4) $(-4; 2)$ ja $(2; -4)$.
702. On teada, et kui $x=1$, siis funktsiooni $y=ax+b$ väärtus $y=3$, ja kui $x=-1$, siis $y=-1$. Leia a ja b .
703. Linearfunktsiooni graafik läbib punkte $(1; -1)$ ja $(-2; 5)$. Leia see funktsioon.
704. Muutuja u on muutuja v lineaarfunktsioon. Kui $v=-1$, siis $u=0$, ja kui $v=1$, siis $u=-4$. Leia seos muutujate u ja v vahel. Kujuta see seos graafiliselt.
705. Põleva kühnla pikkus d on põlemisaja t lineaarfunktsioon. Leia nende muutujate vaheline seos, kui on teada, et pärast pooletunnist põlemist oli kühnla pikkus 10 cm, pärast kahe-tunnist põlemist aga 4 cm. Kui pikk oli kühnal enne süütamist?
706. Kui kanistris on 3 liitrit bensiini, siis on brutokaal 3,6 kgf. Kui kanistris on 8 liitrit bensiini, siis on brutokaal 7,1 kgf. Avalda brutokaal B kanistris oleva bensiini ruumala V funktsioonina. Kui suur on taarakaal? Kui palju kaalub 1 liiter bensiini?
707. Leia võrrandi $ax+by=1$ kordajad a ja b , kui võrrandi üks lahend on $(1; -2)$ ja teine $(4; 1)$.
708. Leia m ja n , kui võrrandi $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ üks lahend on $(2; -1)$ ja teine $(6; 1)$.
709. Sirged $y=2kx+m$ ja $y=kx-2m$ lõikuvad punktis $(-2; -10)$. Leia k ja m .
710. On teada, et 20% arvust a on 10 võrra väiksem kui 30% arvust b ja et 30% arvust a on niisama suur kui 20% arvust b . Leia arvud a ja b .
711. Kaks õpikut maksavad kokku 90 kop. Pärast seda, kui ühe õpiku hinda alandati 20% ja teise hinda 10%, maksid nad kokku 76 kop. Kui palju maksid õpikud esialgu?
712. Asulatest, mille vahemaa on 28 km, väljusid samaaegselt teineteisele vastu kaks matkajat. 2 tundi pärast väljumist oli matkajatevaheline kaugus 10 kilomeetrit, 3 tunni pärast aga 1 kilomeeter. Mitu kilomeetrit läbib kumbki matkaja keskmiselt tunnis?
713. Asulatest, mille vahemaa on 78 km, väljusid samaaegselt teineteisele vastu jalgrattur ja mootorrattur ning kohtusid 1 tunni pärast. 10 minuti pärast kohtumist oli nendevaheline kaugus aga 13 km. Mitu kilomeetrit sõitsid jalgrattur ja mootorrattur keskmiselt tunnis?

714. Linnast A väljub veoauto, 1 tund hiljem aga sama teed mööda sõiduauto. Viimane jõuab 2 tunni ja 45 minuti pärast veoautole järele. 15 minutit pärast möödasõitu on aga sõiduauto veoautost 5 km võrra ees. Mitu kilomeetrit sõidab kumbki auto keskmiselt tunnis?
- 715.* Kahe arvu vahe on 3, samade arvude ruutude vahe aga 39. Leia need arvud.
- 716.* Kahe arvu summa on 23 ja samade arvude ruutude vahe samuti 23. Leia need arvud.
- 717.* Leia kordajate a ja b sellised väärtused, et hulkliige $ax^4 + 2bx^4 + x^4 - x^3 - ax^2 + 2bx^2 - x + 1$ ei sisaldaks muutuja x teise ja neljanda astme liikmeid.
- 718.* Leia hulkliikme $ax^2 + bx + 1$ kordajad a ja b , kui on teada, et korrutises $(ax^2 + bx + 1)(x^3 - 5x^2 - 2x + 1)$ puuduvad muutuja x kolmanda ja neljanda astme liikmed.

7. TSENTRAALSUMMEETRIA.

7.1. PEEGELDUS PUNKTIST.

Peegeldame mingi kujundi, näiteks kolmnurga ABC esmalt sirgest s ja siis saadud peegelduse $A'B'C'$ sirgest t , mis on risti sirgega s (joon. 141). Nii saame kolmnurga $A''B''C''$:

$$\triangle A'B'C' \equiv s(\triangle ABC) \text{ ja } \triangle A''B''C'' \equiv t(\triangle A'B'C').$$

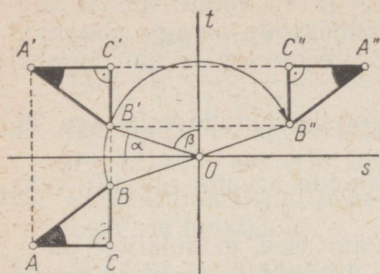
Uurime, kuidas asetseb sellise kahekordse peegelduse teel saadud $\triangle A''B''C''$ antud kolmnurga ABC suhtes. Selleks ühendame kolmnurga ühe tipu ja selle peegeldused, näiteks punktid B , B' ja B'' telgede lõikepunktiga O . Sümmeetria tõttu

$$\left. \begin{array}{l} OB = OB' \\ OB' = OB'' \end{array} \right\} \Rightarrow OB = OB''.$$

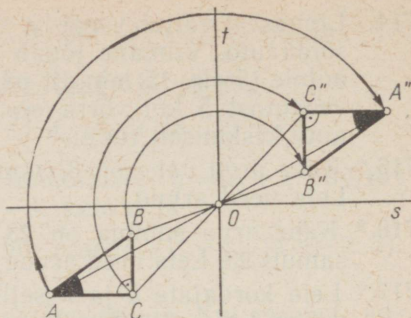
Et lõigud OB ja OB'' on võrdsed, siis on punkt B'' saadav punktist B lõigu OB pööramisega punkti O ümber nurga BOB'' võrra. Leiame selle nurga suuruse (joon. 141):

$$\angle BOB'' = \angle BOB' + \angle B'OB'' = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ.$$

Seega saab lõigust OB lõigu OB'' , kui esimest neist pöörata punkti O ümber sirgnurga võrra. Samal viisil saab lõigust OA lõigu OA'' , lõigust OC ja OC'' ja kolmnurgast ABC kolmnurga $A''B''C''$. Sellel pööramisel kujundab kolmnurga iga punkt, näiteks tipp B , poolringjoone, mille keskpunktiks on punkt O (joon. 142). Nii saame, et kaks järjestikust peegeldust kahest ristuvast teljest võib asendada kujundi pööramisega ümber telgede lõikepunkti sirgnurga võrra.



JOON. 141



JOON. 142

Kui ühendada antud kolmnurga mingi punkt, näiteks tipp B , teisendatud kolmnurga vastava punktiga B'' , siis saame lõigu, mis läbib punkti O ja poolitub selles punktis, sest $OB = OB''$. Niisamuti poolitub selles punktis iga lõik, mis ühendab antud kujundi ja teisendatud kujundi kaht vastavat punkti.

Teisendust, mille korral vastavaid punkte ühendavad lõigud läbivad üht ja sama punkti ja poolituvad selles punktis, nimetatakse peegelduseks sellest punktist ehk sümmeetriaks selle punkti suhtes. Sellise omadusega punkti nimetatakse nende kujundite sümmeetriakeskpunktiks.

Kokku võttes võime öelda, et

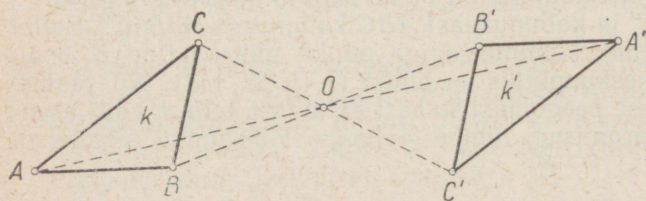
kujundi järjestikusel peegeldamisel kahest ristuvast sirgest saame kujundi peegelduse nende sirgete lõikepunktist.

Võime öelda ka, ümberpöörduvalt,

kujundi peegelduse saamiseks mingist punktist võib kujundi peegeldada kahest ristuvast sirgest, mis läbivad seda punkti.

Näiteks $\triangle ABC$ peegelduse saamiseks joonisel 141, kus peegelduskeskpunkt on O , on kolmnurk peegeldatud ristuvatest sirgetest s ja t , mis läbivad keskpunkti O .

Sümmeetria punkti suhtes ehk **tsentraalsümmeetria** on määratud, kui on antud sümmeetriakeskpunkt O , sest siis on võimalik leida iga punkti peegeldust (joon. 143): punkti A peegelduse A' leidmiseks pikendame lõiku AO teisele poole punkti O lõigu $OA' = OA$



JOON. 143

võrra. Samal viisil leiame iga punkti (välja arvatud punkt O) peegelduse. Punkti O peegelduseks loeme selle punkti enda. Lauset *Punkt A' on punkti A peegeldus punktist O* kirjutame lühidalt kujul

$$A' \equiv O(A).$$

Üldiselt tähendab kirjutus

$$k' \equiv O(k),$$

et kujund k' on kujundi k peegeldus punktist O .

719. Kasutades tõsiasja, et peegeldus punktist tekib kahel järjestikusel peegeldamisel sirgetest, lahenda järgmised küsimused:
- 1) mis on lõiguga, sirgega, nurgaga antud punkti suhtes sümmeetriliseks kujundiks?
 - 2) mida võib öelda kahe tsentraalsümmeetrilise lõigu pikkuse, nurga suuruse, kolmnurga kohta?
 - 3) mis võib öelda kahe tsentraalsümmeetrilise kolmnurga orientatsiooni kohta?
720. Märgi mingi lõik AB ja joonest lõik $A'B' \equiv O(AB)$, kui O on vabalt võetud punkt väljaspool sirget AB .
721. Lahenda eelmine ülesanne juhul, kui punkt O asetseb sirgel AB 1) väljaspool lõiku AB , 2) punktide A ja B vahel.
722. Joonesta kolmnurgaga ABC punkti O suhtes sümmeetriline kolmnurk, kui
- 1) punkt O on väljaspool kolmnurga ABC ;
 - 2) punkt O on kolmnurga ABC ühe külje pikendusel;
 - 3) punkt O on kolmnurga ABC ühel küljel;
 - 4) punkt O on kolmnurga ABC ühes tipus;
 - 5) punkt O on kolmnurga ABC sees.
723. On antud sirge s ja punkt $O \notin s$. Joonesta sirge $s' \equiv O(s)$. Lahenda ülesanne kahel viisil:
- 1) antud sirge mistahes kahe punkti abil;
 - 2) punktist O sirgele s tõmmatud ristlõigu abil.
724. On antud sirge s ja punkt $O \in s$. Märgi sirgel s mingi punkt A ja leia $A' \equiv O(A)$. Mis on sirgeks $s' \equiv O(s)$?
725. Missugused punktid ja missugused sirged on tsentraalsümmeetria korral iseendale vastavaks?
726. On antud kaks punkti P ja P' . Leia sirkli ja joonlaua abil nende sümmeetriakeskpunkt.
727. Missugustel suurtest trükitähedest leidub sümmeetriakeskpunkt? Joonesta need tähed ja märgi joonisel nende keskpunktid.

7.2. RIBA SÜMMEETRIAKESKPUNKT.

On antud riba, mida piiravad sirged s ja t , kus $s \parallel t$ (joon. 144). Tõestame, et

kaks paralleelset sirget on teineteisega sümmeetrilised nende poolt piiratud riba kesksirge iga punkti suhtes.

Eeldus. $s \parallel t$; u on riba kesksirge; $O \in u$ (joon. 144).

Väide. $t \equiv O(s)$.

Tõestus. Peegeldame sirge s esmalt riba kesksirgest u ja saadud peegelduse siis riba ristsirgest v , mis läbib punkti O :

$u(s) \equiv v$, sest u on sirgete s ja t sümmeetriatelg;

$v(t) \equiv t$, sest $v \perp t$.

Niisiis

$$v[u(s)] \equiv t.$$

Et järjestikune peegeldamine kahest ristuvast sirgest u ja v annab peegelduse nende sirgete lõikepunktist O , siis

$$t \equiv O(s),$$

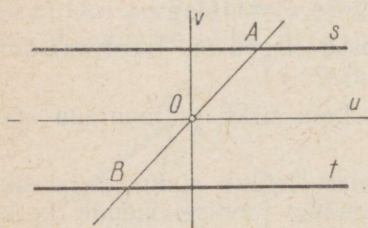
millega väide on tõestatud, sest O on kesksirge suvaline punkt.

Niisiis, riba iga lõikaja läbi kesksirge punkti O lõikab riba piiravaid sirgeid s ja t punktides A ja B , mis on punkti O suhtes sümmeetrilised, s. t. $AO = BO$.

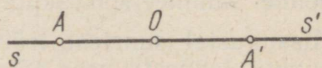
Veendume nüüd, et

sirge ja tema peegeldus punktist on paralleelsed, kui punkt ei asetse antud sirgel, ja ühtivad, kui punkt asetseb antud sirgel.

Kui sümmeetriakeskpunkt O ei asetse peegeldataval sirgel s (joon. 144), siis joonestame läbi punkti O kaks abisirget $u \parallel s$ ja $v \perp s$ ning leiame endisel viisil sirge s peegelduse t . Et $s \parallel u$, siis ka tema peegeldus sirgest u on paralleelne sirgega u , seega paralleelne ka sirgega s . Ühtlasi on sirge u endiselt sirgetega s ja t piiratud riba kesksirgeks.



JOON. 144



JOON. 145

Kui peegeldada sirge s punktist O (joon. 145), mis asetseb samal sirgel, siis sirge s iga punkti A peegeldus asetseb sirgel OA , s. o. samal sirgel s .

728. Sõnasta teoreem ja selgita seda joonise abil:

$$A \in s \Rightarrow O(A) \in O(s),$$

kus A ja O tähistavad punkte, s sirget.

729. Sõnasta teoreem ja selgita seda joonise abil:

$$\left. \begin{array}{l} s' \equiv O(s) \\ t' \equiv O(t) \end{array} \right\} \Rightarrow s' \cap t' \equiv O(s \cap t),$$

kus s ja t on kaks lõikuvat sirget ja O on punkt.

730. Märki kaks punkti A ja B . Leia

- 1) punkt $C \equiv B(A)$,
- 2) punkt $D \equiv A(B)$,
- 3) punkt O nii, et $C \equiv O(D)$.

731. Mis on riba sümmeetriatelgedeks?

732. Joonesta võrdkülgsele kolmnurgale tema keskpunkti suhtes sümmeetriline kolmnurk. Mitu sümmeetriatelge on tekkinud tähtkuusnurgal?

733. Joonesta mingi korrapärane kuusnurk. Kas sellel kuusnurgal on sümmeetriakeskpunkti? Mis on selleks punktiks?

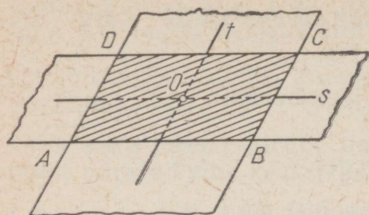
7.3. RÖÖPKÜLIKU SÜMMEETRIA.

Olgu nelinurk $ABCD$ rööpkülik, s. t. kahe lõikuva riba ühisosa (joon. 146). Et riba piiravad sirged on paralleelsed, siis ka **rööpküliku vastasküljed on paralleelsed**, sest nad on paralleelsete sirgete lõigud: $AB \parallel DC$ ja $AD \parallel BC$. Ümberpöörduvalt,

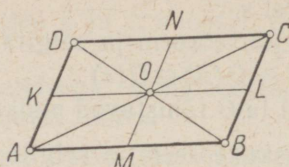
paralleelsete vastaskülgedega nelinurk on rööpkülik,

sest tema külgede pikendamisel üle nende otspunktide saadakse kaks paari paralleelseid sirgeid, mis piiravad kaht lõikuvat riba, mille ühisosaks on antud nelinurk. Nende ribade kesksirgete s ja t lõikepunkt O kui ribade ainus ühine sümmeetriakeskpunkt, on ka ribade ühisosa, s. o. rööpküliku sümmeetriakeskpunkt. Tõepoolest, sirge $AB \equiv O(CD)$ ja sirge $AD \equiv O(CB)$. Kuid siis on sirgete AB ja AD ühine punkt A sümmeetriline sirgete CD ja CB ühise punktiga C , s. t. $C \equiv O(A)$. Niisamuti $D \equiv O(B)$. Seega on ribade kesksirgele lõikepunkt O ka ribade ühisosa sümmeetriakeskpunkt.

Kui ühendame punkti O suhtes sümmeetrilised punktid A ja C ning B ja D , siis saame rööpküliku **diagonaalid**. Et kaht sümmeetrilist punkti ühendav lõik läbib sümmeetriakeskpunkti, siis **rööpküliku diagonaalid lõikuvad tema sümmeetriakeskpunktis**.



JOON. 146



JOON. 147

Joonestame läbi diagonaalide lõikepunkti O ribade kesksirgete lõigud KL ja MN rööpküliliku vastaskülgede vahel (joon. 147). Neid lõike nimetame rööpküliliku kesklõikudeks. Rööpküliliku sümmeetriakeskpunkt on siis kesklõikude ja diagonaalide ühine punkt. Iga sirge, mis läbib selle punkti, lõikab rööpküliliku külgi kahes punkti O suhtes sümmeetrilises punktis.

734. Kasutades rööpküliliku sümmeetriat ja tõsiasja, et kaks sümmeetrilist lõiku (või nurka) on võrdsed, tõesta rööpküliliku järgmised omadused:

- 1) rööpküliliku vastasküljed on võrdsed;
- 2) rööpküliliku vastasnurgad on võrdsed;
- 3) rööpküliliku diagonaalid poolitavad teineteist;
- 4) rööpküliliku diagonaal jaotab rööpküliliku kaheks võrdseks kolmnurgaks;
- 5) rööpküliliku kesklõik on kahe küljega paralleelne ja poolitab ülejäänud küljed.

735. Rööpkülilik leiab tehnikas sageli rakendamist. Joonised 148 kuni 151 kujutavad mõningaid esemeid, mille juures on kasutatud rööpkülilikut (kirjakaal, lauakaal, jalgratta lamp, hambarsti riistade laud).

Selgita, miks on sobiv viimase kahe eseme kinnitamisel kasutada rööpkülilikut, mitte aga kolmnurka. Miks nimetatakse kolmnurka jäigaks kujundiks, kuid rööpkülilikut mittejäigaks?

736. Millega võrdub rööpküliliku külje lähisnurkade summa?

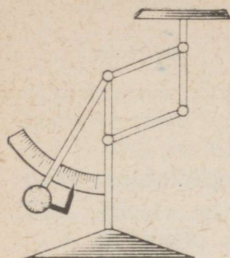
737. Rööpküliliku ümbermõõt on 18,6 dm. Üks külg on teisest 1,8 dm pikem. Kui pikad on küljed?

738. Rööpküliliku ümbermõõt on 5,5 m ja üks külg on $\frac{5}{6}$ teisest. Kui pikad on küljed?

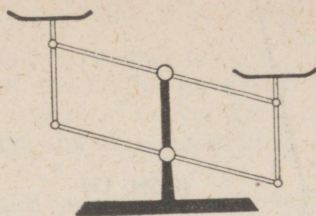
739. Rööpküliliku üks nurk on $57^{\circ}15'$. Kui suured on teised nurgad?

740. Rööpküliliku üks nurk on $52^{\circ}20'$ suurem kui teine. Leia nurkade suurused.

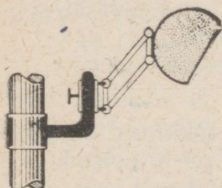
741. Võrdhaarse kolmnurga alusel vabalt võetud punktist on joonestatud sirged paralleelselt haaradega. Leia saadud rööpküliliku ümbermõõt, kui võrdhaarse kolmnurga haar on 12 cm.



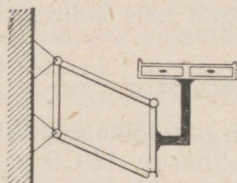
JOON. 148



JOON. 149



JOON. 150



JOON. 151

742. Tõesta, et rööpküliku vastasnurkade poolitajad on paralleelsed.
743. Tõesta, et rööpküliku külje lähisnurkade poolitajad on risti.
744. Rööpküliku teravnurga poolitaja, lõikudes rööpküliku küljega, jaotab selle lõikudeks 8 cm ja 3 cm. Leia rööpküliku ümbermõõt.
745. Tõesta, et kui rööpküliku pikema külje lähisnurkade poolitajad lõikuvad vastasküljel, siis lühem külg on pool pikemast.

7.4. RÖÖPKÜLIKU TUNNUSED.

Teame, et paralleelsete vastaskülgedega nelinurk on rööpkülik. Peale selle tunnuse on veel muid tunnuseid, mis võimaldavad otsustada, et antud nelinurk on rööpkülik. Üks neist on järgmine:

võrdsete vastaskülgedega nelinurk on rööpkülik.

Eeldus. $AB=DC$ ja $AD=BC$ (joon. 152).

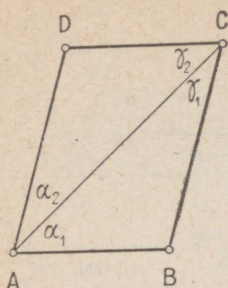
Väide. $ABCD$ on rööpkülik.

Tõestus. Joonestame nelinurga ühe diagonaali, näiteks diagonaali AC . Siis

$$\triangle ABC = \triangle CDA,$$

sest ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega. Kuid siis

$$\alpha_1 = \gamma_2 \text{ ja } \gamma_1 = \alpha_2$$



JOON. 152

kui vastavad nurgad neis kolmnurkades. Nende nurkade võrdsusest järeldub, et

$$AB \parallel DC \text{ ja } AD \parallel BC,$$

kuna nimetatud sirgete lõikamisel sirgega AC on tekkinud võrdsed põiknurgad. Et nelinurga $ABCD$ vastasküljed on paralleelsed, siis on ta rööpkülik.

Tõestatud teoreemi järgi on nelinurga vastaskülgede võrdsus **piisav tingimus** selleks, et nelinurk oleks rööpkülik, s. t. kui see tingimus on täidetud, siis nelinurk on rööpkülik.

Varem leidsime, et iga rööpküliku vastasküljed on võrdsed, s. t. vastaskülgede võrdsus on **tarvilik tingimus** selleks, et nelinurk oleks rööpkülik: kui see tingimus pole täidetud, siis nelinurk ei saa olla rööpkülik.

Neid kaht tõsiasja koos väljendab lause: vastaskülgede võrdsus on **tarvilik ja piisav tingimus** selleks, et antud nelinurk oleks rööpkülik.

Teine teoreem, mille põhjal saab otsustada, et antud nelinurk on rööpkülik, on järgmine:

nelinurk, mille üks paar vastaskülgi on võrdsed ja paralleelsed, on rööpkülik.

Eeldus. $AD = BC$ ja $AD \parallel BC$ (joon. 152).

Väide. $ABCD$ on rööpkülik.

Tõestus. Kolmnurkadel ADC ja ABC on peale ühis külje AC veel eelduse järgi

$$AD = BC.$$

Nende kolmnurkade nurgad

$$\alpha_2 = \gamma_1$$

kui põiknurgad paralleelsete sirgete AD ja BC lõikaja AC juures. Kolmnurkade võrdsuse tunnuse KNK järgi on siis

$$\triangle ADC = \triangle CBA.$$

Kolmnurkade võrdsusest järeldub, et

$$a_1 = \gamma_2,$$

sest nad on võrdsete kolmnurkade vastavad nurgad. Sirgete paralleelsuse teise tunnuse põhjal on siis nelinurga $ABCD$ vastasküljed AB ja DC paralleelsed. Et eelduse järgi nelinurgal $ABCD$ ka teine paar vastaskülgi on paralleelsed, siis on ta rööpkülik.

746. Tõesta, et nelinurk, mille diagonaalid poolitavad teineteist, on rööpkülik.

747. Suusapaar maksab 12,80 rbl. Kas suusapaari ostmiseks on tarvilik või piisav, et ostjal oleks raha 5 rbl., 8 rbl., 12 rbl., 15 rbl., 20 rbl.? Missuguse summa omamine on nende suuskade ostmiseks tarvilik ja piisav?

748. Järelda, et ühe paari vastaskülgede paralleelsus ja võrdsus on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et nelinurk oleks rööpkülik.

749. Kas tingimus, et nelinurgal leidub kaks võrdset vastasnurka, on tarvilik, piisav või tarvilik ja piisav selleks, et nelinurk oleks rööpkülik?

750. Kas tingimus, et nelinurga diagonaalid poolitavad teineteist, on tarvilik, piisav või tarvilik ja piisav selleks, et nelinurk oleks rööpkülik?

751. Kas tingimus, et arv lõpeb 8-ga, on tarvilik või piisav selleks, et arv jaguks kahega?

752. Kas tingimus, et arvu ristsumma jaguks 3-ga, on tarvilik, piisav või tarvilik ja piisav selleks, et arv jaguks 9-ga?

753. Joonesta alljärgnevate andmetega määratud rööpkülik. Millise tunnuse põhjal on saadud nelinurk rööpkülik? Tähed a ja b tähendavad rööpküliku kaht lähiskülge, α ja β külje a lähisnurki, e ja f diagonaale (kus f on nurga β vastas).

1) $a=3,9$ cm; $b=2,9$ cm; $e=5,8$ cm

2) $a=4,5$ cm; $\alpha=48^\circ$; $f=7,2$ cm

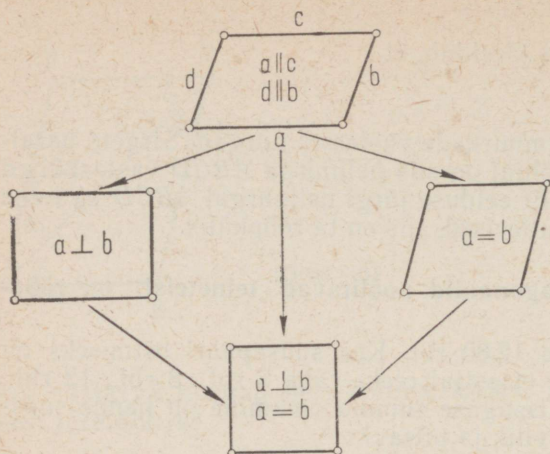
3) $a=5,5$ cm; $\beta=130^\circ$; $b=4,1$ cm

4) $a=5,7$ cm; $e=7,2$ cm; $f=5,2$ cm

7.5. RÖÖPKÜLIKU ERILIIGID.

Rööpküliku eriliikidena vaatleme rööpkülikuid, millel kas nurgad on võrdsed või küljed on võrdsed või nii nurgad on võrdsed kui ka küljed on võrdsed. Selliseid rööpkülikuid nimetatakse vastavalt ristkülikuteks, rombideks ja ruutudeks (joon. 153).

Ristkülik on rööpkülik, mille nurgad on võrdsed.



JOON. 153

Niisuguse rööpküliku saame, kui tema ühe nurga teeme täisnurgaks (joon. 153), sest rööpküliku omaduste tõttu on siis ka teised nurgad täisnurgad. Seega, ristkülik on täisnurkne rööpkülik.

Romb on rööpkülik, mille küljed on võrdsed.

Rombi saame, kui rööpküliku ühe tipu lähisküljed teeme võrdseiks, sest siis on rööpküliku vastaskülgede võrdsuse tõttu kõik küljed võrdsed (joon. 153). Seega, romb on võrdkülgne rööpkülik.

Ruut on rööpkülik, mille nurgad on võrdsed ja küljed on võrdsed (joon. 153).

754. 1) Kuidas defineerida ruutu ristküliku kaudu?
2) Kuidas defineerida ruutu rombi kaudu?

755. 1) Mis on kahe ristuva riba ühisosa?
2) Mis on kahe ühelaiuse riba ühisosa?
3) Mis on kahe ristuva ja ühelaiuse riba ühisosa?

7.6. RISTKÜLIKU, ROMBI JA RUUDU OMADUSED.

Rööpküliku igal eriliigil on muidugi kõik rööpküliku omadused, näiteks sümmeetria diagonaalide lõikepunkti suhtes. Kuid peale nende on igal eriliigil veel omad eriomadused. Kui kõneldakse ristküliku või rombi omadustest, siis mõeldakse tavaliselt neid eriomadusi. Vaatleme neid.

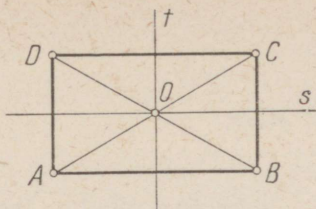
Kui rööpküliku nurgad on täisnurgad, siis kesksirged on tema sümmeetriatelgedeks (joon. 154). Et diagonaalid on sel juhul kesksirge suhtes teineteisega sümmeetrilised, siis

ristküliku diagonaalid on võrdsed:

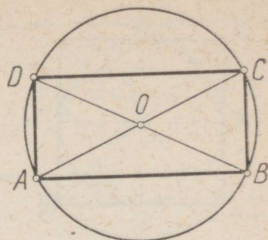
$$AC = BD.$$

Lisaks sellele on diagonaalide otspunktid (ristküliku tipud) nende lõikepunkti suhtes sümmeetrilised (joon. 154), mistõttu

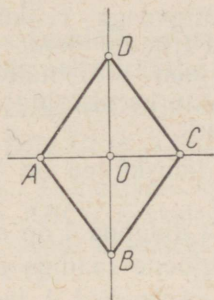
JOON. 154



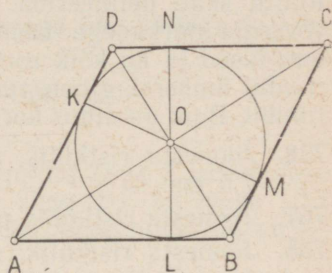
JOON. 155



JOON. 156



JOON. 157



ristküliku diagonaalide lõikepunkt on tema tippudest võrdsetel kaugustel:

$$AO = BO = CO = DO.$$

Ringjoon, mille keskpunktiks on ristküliku diagonaalide lõikepunkt ja raadiuseks pool diagonaali, läbib ristküliku iga tippu (joon. 155). Seda ringjoont nimetatakse ristküliku **ümberringjooneks**.

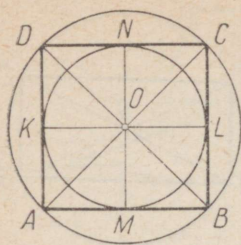
Meenutame rombi omadusi. Et rombi küljed on võrdsed, siis asetsevad tema iga kaks vastastippu ülejäänud kahest tipust võrdsetel kaugustel. Sellest järeldub, et vastastippe läbiv sirge on rombi sümmeetriateljeks (joon. 156). Et vastastippe on kaks paari, siis on rombil kaks sümmeetriatelge. Rombi sümmeetriast järelduvad tema järgmised eriomadused:

- 1) rombi diagonaalid on teineteisega risti;
- 2) rombi diagonaal poolitab rombi nurga;
- 3) rombi diagonaalide lõikepunkt on rombi külgedest võrdsetel kaugustel.

Näiteks joonisel 157

$$1) AC \perp BD, \quad 2) \angle BAO = \angle DAO, \quad 3) OL = OM = ON = OK.$$

Ringjoont, mille keskpunktiks on diagonaalide lõikepunkt ja mille raadius võrdub keskpunkti kaugusega rombi külgedest, nimetatakse rombi **siseringjooneks** (joon. 157).



JOON. 158

Ruutu saab defineerida kui võrdsete külgedega ristkülikut või võrdsete nurkadega rombi. Seetõttu on ruudul kõik ristküliku omadused ja ka kõik rombi omadused (joon. 158), näiteks leidub ruudul ümberringjoon, nagu ristkülikul, kui ka siseringjoon, nagu rombil. Ruut on ainus korrapärane nelinurk.

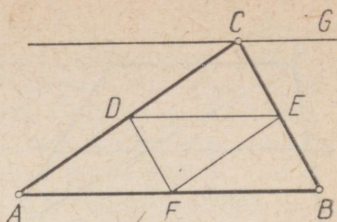
756. Joonesta ristkülik, mille ühe tipu lähisküljed on 4,8 cm ja 7,5 cm.
757. Joonesta ristkülik, mille üks külg ja diagonaal on antud.
758. Joonesta ristkülik, mille ümberringjoone raadius on 3,5 cm ja nurk diagonaalide vahel on 45° .
759. Tõesta, et võrdsete diagonaalidega rööpkülik on ristkülik.
760. Tõesta, et rombi lähiskülgedele tõmmatud kõrgused on võrdsed. Mis on nendeks kõrgusteks joonisel 157?
761. Tõesta, et rombi lühema diagonaali otspunktidest tõmmatud kõrgused lõikuvad pikemal diagonaalil.
762. Põhjenda väidet: ristuvate diagonaalidega rööpkülik on romb.
763. Põhjenda väidet, et ruudul on kõik ristküliku omadused ja ühtlasi ka kõik rombi omadused. Mis sellest järeldeb ruudu sümmeetria kohta? ruudu diagonaalide kohta?
764. Põhjenda väidet, et ruut on korrapärane nelinurk. Mis on ruudu keskpunktiks?
765. Joonesta sirkli ja joonlaua abil ruut, mille üheks küljeks jääb antud lõik.
766. Joonesta ruut, mille diagonaali pikkus on 6,4 cm.
767. Joonesta ruut, mille ümberringjoon on antud.

7.7. KOLMNURGA KESKLÕIK.

Joonestame mingi kolmnurga ABC ja ühendame selle kahe külje keskpunktid D ja E (joon. 159). Saadud lõiku DE nimetatakse kolmnurga kesklõiguks.

Kolmnurga kesklõiguks nimetatakse tema kahe külje keskpunkte ühendavat lõiku.

JOON. 159



Kolmnurgal on kolm kesklõiku.
Tõestame, et

kolmnurga kesklõik on paralleelne kolmnurga ühe küljega ja võrdub poolega sellest küljest.

Eeldus. $AD=DC$ ja $BE=EC$ (joon. 159).

Väide. $DE\parallel AB$ ja $DE=AB:2$.

Tõestus. Joonestame sirge $CG\parallel AB$. Punktid D ja E on eelduse tõttu riba $ABCG$ kesksirge kaks punkti, sirge DE on seega riba kesksirge. Kuid kesksirge on ju paralleelne riba piiravate sirgetega: $DE\parallel AB$.

Olgu punkt F kolmnurga külje AB keskpunkt. Siis FE on kolmnurga kesklõik ja tõestuse esimese osa põhjal $FE\parallel AD$. Kuid siis on nelinurk $ADEF$ rööpkülik, sest tema vastasküljed on paralleelsed. Sellest järeldub, et $DE=AF=AB:2$.

768. Kolmnurga küljed on 22 m, 28 m ja 34 m. Tema külgede keskpunktide ühendamisel saadakse uus kolmnurk. Kui pikad on selle küljed?

769. Kolmnurga külgede pikkused a , b ja c avalduvad kahe arvu x ja y kaudu järgmiselt:

$$a=4x-2y; \quad b=3x+y; \quad c=5x-3y.$$

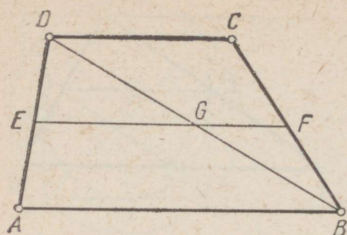
Avalda antud kolmnurga kesklõikudest moodustuva kolmnurga küljed x ja y kaudu. Leia kummagi kolmnurga ümbermõõt ja võrdle neid.

770. Kuidas suhtuvad pindalad kujunditel, milleks kesklõik jaotab kolmnurga?

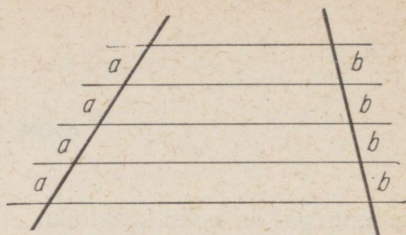
771. Kolmnurga pindala on $56,8 \text{ cm}^2$. Kui suur on kolmnurga kesklõikudest moodustatud kolmnurga pindala?

7.8. TRAPETSI KESKLÕIK.

Ühendame trapetsi $ABCD$ mitteparalleelsete külgede keskpunktid E ja F (joon. 160). Saadud lõiku EF nimetatakse **trapetsi kesklõiguks**.



JOON. 160



JOON. 161

Tõestame, et

trapetsi kesklõik on alustega paralleelne ja võrdub aluste poolsummagaga.

Tõestus. Punktid E ja F on sirgetega AB ja DC piiratud riba kesksirge kaks punkti. Järelikult on sirge EF riba kesksirge ja seega

$$EF \parallel AB \parallel DC.$$

Joonestame trapetsi diagonaali BD . See jaotab trapetsi kaheks kolmnurgaks ABD ja DBC , mille kesklõigud on vastavalt EG ja GF . Kolmnurga kesklõigu omaduse tõttu

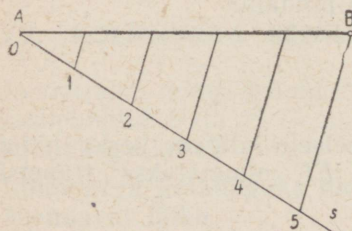
$$EF = EG + GF = \frac{AB}{2} + \frac{DC}{2} = \frac{AB + DC}{2}.$$

Sellega on teoreem tõestatud.

Kui trapetsi üks haar poolitada, saadud pooled uuesti poolitada jne., siis see haar jaotub võrdseteks lõikudeks. Tõmmates kõigist saadud jaotuspunktidest alustega paralleelsed sirged, jaotub trapetsi kesklõigu omaduste põhjal ka teine haar võrdseteks lõikudeks. Seda tõsiasi ja võime sõnastada järgmiselt (joon. 161):

kui paralleelsed sirged lõikavad kaht sirget nii, et ühel neist tekivad võrdsed lõigud, siis tekivad võrdsed lõigud ka teisel sirgel.

See paralleelsete sirgete omadus võimaldab antud lõiku kergesti jaotada võrdseteks osadeks. Olgu vaja lõik AB jaotada näiteks



JOON. 162

viieks võrdseks osaks (joon. 162). Ülesande lahendamiseks joonestame läbi lõigu AB otspunkti A mingi abisirge s , märgime sellel järjestikku, alates punktist A , viis võrdset lõiku ning ühendame viimase lõigu otspunkti punktiga B . Nüüd joonestame sellele ühendussirgele paralleelsed sirged abisirge s punktides 1, 2, 3 ja 4. Need paralleelid jaotavad lõigu AB viieks võrdseks osaks.

772. Jaota vabalt võetud lõik joonisel 162 näidatud viisil kolmeks võrdseks osaks.

773. Jaota vabalt võetud lõik joonisel 162 näidatud viisil kuueks võrdseks osaks.

774. Trapetsi alused on 7 dm ja 12 dm. Kui pikad on lõigud, milleks diagonaal tükeldab kesklõigu?

775. Trapetsi kesklõik on 12 m. Diagonaal tükeldab selle lõikudeks, millest üks on teisest 3 m pikem. Kui pikad on trapetsi alused?

776. Trapetsi alused on 8,7 cm ja 5,9 cm. Kui pikk on kesklõik?

777. Trapetsi üks alus on 16 cm ja kesklõik on 12 cm. Kui pikk on teine alus?

778. Trapetsi üks alus on 4,8 cm ja kesklõik on 6,4 cm. Kui pikk on teine alus?

7.9. KOLMNURGA MEDIAANIDE LÕIKUMINE.

779. Mida nimetatakse kolmnurga mediaaniks? Kas mediaan saab asetseda väljaspool kolmnurka?

780. Joonesta mingi kolmnurga kolm mediaani. Mida paned tähele nende kohta? Leia mõõtmise teel, kuidas suhtuvad need kaks lõiku, milledeks mediaanide lõikepunkt jaotab iga mediaani.

Tõestame, et

kolmnurga mediaanid lõikuvad kõik ühes punktis, mis jaotab iga mediaani suhtes 2 : 1, arvates kolmnurga vastavast tipust.

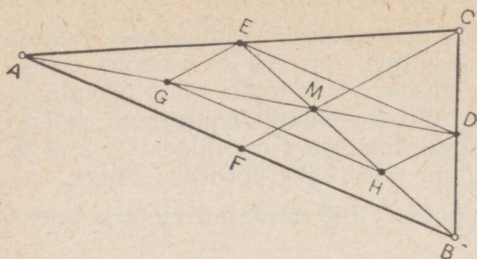
Eeldus. $AE=CE$; $AF=BF$; $BD=CD$ (joon. 163).

Väide. AD , BE ja CF lõikuvad kõik ühes ja samas punktis M ning seejuures $AM : MD = BM : ME = CM : MF = 2 : 1$.

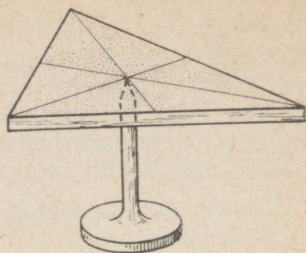
Tõestus. Tähistame mingi kahe mediaani (näiteks AD ja BE) lõikepunkti tähega M ja ühendame nende mediaanide otspunktid D ja E ning lõikude AM ja BM keskpunktid G ja H . Siis ED on kolmnurga ABC kesklõik ja GH on kolmnurga ABM kesklõik, tähendab:

$$ED \parallel AB \text{ ja } ED = \frac{1}{2} AB;$$

$$GH \parallel AB \text{ ja } GH = \frac{1}{2} AB.$$



JOON. 163



JOON. 164

Sellest järeldub, et

$$ED \parallel GH \text{ ja } ED = GH.$$

Kuid siis nelinurk $GHDE$ on rööpkülik, sest tema üks paar vastaskülgi on paralleelsed ja võrdsed. Et rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, siis

$$MD = MG \text{ ja } ME = MH.$$

Kuid lõik MG on pool lõigust AM ja lõik MH on pool lõigust BM , tähendab

$$AM : MD = 2 : 1 \text{ ja } BM : ME = 2 : 1.$$

Joonestame nüüd kolmanda mediaani CF . See peab tõestatu põhjal lõikama nii mediaani AD kui ka mediaani BE punktis, mis jaotab need suhtes $2 : 1$, arvates vastavast tipust, s. t. punktis M . See näitab, et kõik kolm mediaani lõikuvad ühes ja samas punktis.

781. Lõika papist välja mingi kolmnurk, määra tema mediaanide lõikepunkt ja näita katseliselt, et mediaanide lõikepunkt on kolmnurga raskuskese (joon. 164).
782. Missugusel kolmnurgal on üks mediaan ühtlasi kolmnurga kõrguseks ja nurga poolitajaks? Missugusel kolmnurgal on iga mediaan ühtlasi kolmnurga kõrguseks ja nurga poolitajaks?
783. Joonesta mingi täisnurkne kolmnurk ühes täisnurga tipust tõmmatud mediaaniga ja võrdle mediaani pikkust hüpoteenuusi pikkusega. Näita, et see mediaan võrdub poole hüpoteenusiga.
784. Teades, et täisnurga tipust tõmmatud mediaan võrdub poole hüpoteenusiga, leia, kui suur on nurk selle mediaani ja täisnurga poolitaja vahel, kui kolmnurga üks teravnurk on 59° .

7.10. LÜKKE VEKTOR.

Kujundi peegeldamine kahest ristuvast sirgest tõi meid uue mõis-
teni — tsentraalpeegelduseni (vt. 7.1.). Vaatleme nüüd kujundi
järjestikust peegeldamist kahest paralleelsest sirgest.

Olgu antud kaks paralleelset sirget s ja t ning peegeldatav kujund,
näiteks $\triangle ABC$ (joon. 165). Peegeldame kolmnurga esmalt sirgest
 s ja siis saadud peegelduse sirgest t :

$$\triangle A'B'C' \equiv s(\triangle ABC) \text{ ja } \triangle A''B''C'' \equiv t(\triangle A'B'C'),$$

lühemalt,

$$\triangle A''B''C'' \equiv t[s(\triangle ABC)].$$

Küsime, kuidas asetsevad üksteise suhtes mingi peegeldatav punkt
ja selle kaks järjestikust peegeldust, näiteks punktid A , A' ja A''
(joon. 165). Küsimusele vastamiseks paneme tähele, et läbi punkti
 A' oleme joonestanud kaks sirget AA' ja $A'A''$, millest $AA' \perp s$ ja
 $A'A'' \perp t$. Et paralleelsetel sirgetel s ja t on ühised ristsirged, siis
 $AA' \equiv A'A''$. Seega punktid A , A' ja A'' asetsevad samal sirgel.
Niisamuti asetsevad ühisel sirgel punktid B , B' ja B'' , C , C' ja C''
jne. Niiviisi saadud sirged on paralleelsed või ühtivad kui ühe ja
sama sirge ristsirged, näiteks $AA'' \parallel BB'' \parallel CC''$, kuid $CC'' \equiv DD''$
(joon. 165).

Uurime veel lõikude AA'' , BB'' , ... pikkust (joon. 165):

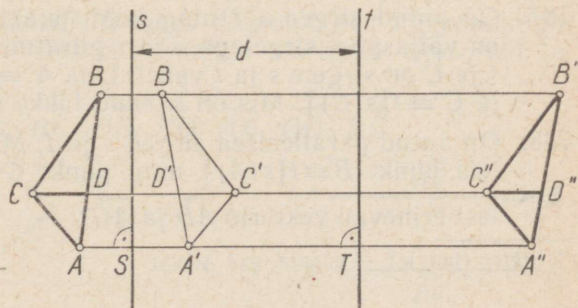
$$AA'' = AA' + A'A'' = 2 \cdot SA' + 2 \cdot A'T = 2(SA' + A'T) = 2 \cdot ST.$$

Et lõigu ST pikkus võrdub paralleelide s ja t vahelise kaugusega
 d , siis

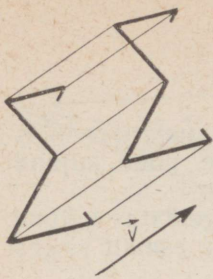
$$AA'' = 2d.$$

Samal viisil saame leida, et ka $BB'' = 2d$ ja $CC'' = 2d$. Kokku võt-
tes võime seega ütelda, et kujundi kahel järjestikusel peegeldami-
sel kahest paralleelsest sirgest nihkuvad kujundi kõik punktid
paralleelseid sirgeid mööda ühes ja samas suunas ühe ja sama
pikkusega lõigu võrra. Selle lõigu pikkus võrdub peegeldustelgede
vahelise kauguse kahekordsega.

Me teame juba, et niisugust liikumist nimetatakse **lükkeks**. Kujundi
järjestikusel peegeldamisel kahest paralleelsest sirgest saame
seega lükke.



JOON. 165



JOON. 166

Pöörame nüüd tähelepanu lükke andmis- ehk määramisviisile. Lükke on määratud, kui on teada üks neist samasihilistest (s. t. paralleelsetest või samal sirgel asetsevatest), samasuunalistest ja võrdsetest lõikudest, mis ühendavad antud kujundi punkti lükkel saadud punktiga (joon. 166). Varustame selle lõigu noolekesega, mis näitab punkti liikumise suunda. Nii saadud

suunaga lõiku nimetatakse vektoriks*.

Vektori otspunktidest üht nimetatakse tema **algus-** ehk **rakendus-** **punktiks** ja teist **lõpp-punktiks**. Viimast näitab noolekese teravik (joon. 166).

Vektorit tähistatakse kas üheainsa väikese tähega või kahe suure tähega, mille peal on nool, näiteks \vec{a} , \vec{v} , \vec{x} , \vec{AB} , \vec{QP} . Viimase märkimisviisi korral tähistab esimene täht vektori alguspunkti ja teine lõpp-punkti. Lükke on seega määratud, kui on teada **lükke vektor** \vec{v} , sest siis on võimalik leida antud kujundi igale punktile temale vastavat lükkel saadavat punkti (joon. 166). Lauset

kujund k' on kujundi k lükke vektoriga \vec{v}

kirjutame lühidalt kujul

$$k' \equiv \vec{v}(k).$$

785. On antud kaks lõikuvat, kuid mitte ristuvat sirget s ja t ning punkt A . Mida tähendab $t[s(A)]$, mida $s[t(A)]$? Leia need punktid.
786. On antud kaks ristuvat sirget s ja t ning punkt A . Mis võib ütelda punktide $t[s(A)]$ ja $s[t(A)]$ kohta?
787. On antud sirged $s \parallel t$ ning kolm punkti A , B ja C nii, et A on väljaspool sirgetega s ja t piiratud riba, B asetseb sirgel s ja C on sirgete s ja t vahel. Leia $A' \equiv t[s(A)]$, $B' \equiv t[s(B)]$ ja $C' \equiv t[s(C)]$. Mis on saadud lükke vektoriks?
788. On antud paralleelsed sirged s ja t . Märgi mingi punkt A ja leia punkt $B \equiv t[s(A)]$ ning punkt $C \equiv s[t(A)]$. Mille poolest erinevad vektorid \vec{AB} ja \vec{AC} ?

* vektor (lad. k.) — vedaja.

7.11. VEKTORITE VÖRDSUS.

Kaks vektorit \vec{a} ja \vec{b} loetakse võrdseks (sümbolites: $\vec{a}=\vec{b}$), kui neil on üks ja sama pikkus, siht ja suund (joon. 167). Võrdsed vektorid saavad erineda seega ainult rakenduspunkti poolest. Selleks punktiks võib olla tasapinna mistahes punkt.

Vektori \vec{a} pikkust märgitakse kujul $|\vec{a}|$ või lihtsalt a , vektori \vec{AB} pikkust vastavalt $|\vec{AB}|$ või AB .

Seega $\vec{a}=\vec{b}$, kui $a=b$ ja vektorid on sama sihi ning suunaga. Kaht võrdse pikkusega samasihilist, kuid vastandsuunalist vektorit nimetatakse **vastandvektoriteks**. Kaks vastandvektorit erinevad seega ainult suuna poolest, näiteks vektorid \vec{AB} ja \vec{BA} on vastandvektorid (joon. 168). Need vektorid ei ole võrdsed ($\vec{AB}\neq\vec{BA}$), kuigi nende pikkused on võrdsed.

Vektori \vec{a} vastandvektorit märgitakse kujul $-\vec{a}$, samuti \vec{AB} vastandvektorit kujul $-\vec{AB}$. Seega $\vec{BA}=-\vec{AB}$.

Sageli on vaja vektori \vec{AB} alguspunktiks võtta antud punkt C ehk, nagu öeldakse, rakendada vektorit \vec{AB} punktis C . Seda saab teha lükke abil, kus lükke vektoriks on \vec{AC} (joon. 169), aga ka punktide A ja B peegelduse teel lõigu BC keskpunktist O (joon. 170).

Mõlemal juhul $\vec{CD}=\vec{AB}$.

Paneme tähele, et joonisel 170 $\vec{CD}\neq O(\vec{AB})$, sest vektori AB alguspunkt peegeldub teise vektori lõpp-punktiks.

789. Vektorite alguspunktiks on ringi keskpunkt ja lõpp-punktiks ringjoone mingi punkt. Missugused neist vektoreist on samasihilised? Kas nende vektorite hulgas leidub võrdseid vektoreid? Kas leidub vastandvektoreid?

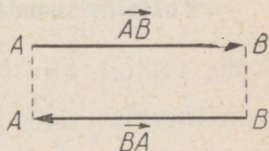
790. Joonesta rööpkülik $ABCD$ ühes diagonaalide lõikepunktiga O . Leia järgmiste vektorite hulgast võrdseid vektoreid ja vastandvektoreid:

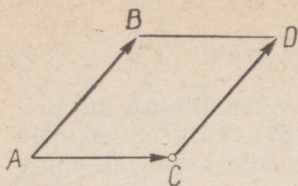
$$\vec{AD}, \vec{OC}, \vec{CB}, \vec{AO}, \vec{BC}, \vec{OB}, \vec{DO}, \vec{AB}, \vec{OD}, \vec{DC}.$$

JOON. 167

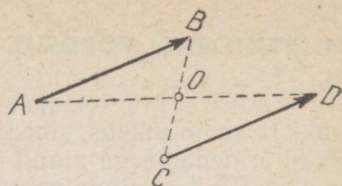


JOON. 168





JOON. 169



JOON. 170

791. Joonesta ruut $ABCD$ ühes diagonaalide lõikepunktiga O . Nimeta jooniselt võrdseid vektoreid ja vastandvektoreid.
792. Võrdhaarse kolmnurga ABC alusnurga B poolitaja lõikab vastaskülge punktis D . Rakenda kolmnurgale lüket, mille vektor $\vec{v} = \vec{BD}$.
793. Võrdkülgsele kolmnurgale on rakendatud lüket, mis viib kolmnurga keskpunkti K antud punkti K' . Joonesta kolmnurk tema uues asendis.
794. Vektor \vec{a} on peegeldatud sirgest s : $\vec{a}' \equiv s(\vec{a})$. Millal $\vec{a}' = \vec{a}$ ja millal $\vec{a}' \neq \vec{a}$? Millal $\vec{a}' = -\vec{a}$?
795. Vektor \vec{a} on peegeldatud punktist O . Mida võib öelda vektori $\vec{a}' \equiv O(\vec{a})$ kohta?
796. Vektoriga \vec{a} on tehtud lüke, mille vektor on \vec{v} . Mida võib öelda vektori $\vec{a}' \equiv \vec{v}(\vec{a})$ kohta?

7.12. TEHTED VEKTORITEGA.

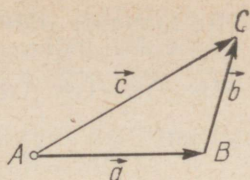
Matemaatikas tehakse tehteid peale arvude veel mitmete muude objektidega, näiteks algebraliste avaldistega. Laialdaselt kasutatakse ka tehteid vektoritega.

Vaatleme kolme tehet vektoritega: liitmist, lahutamist ja arvuga korrutamist.

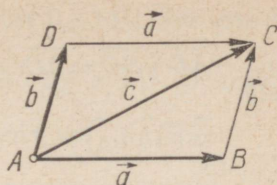
Vektorite summa.

Kahe vektori \vec{a} ja \vec{b} liitmiseks joonestame mingist punktist A esmalt vektori $\vec{AB} = \vec{a}$ ja siis selle lõpp-punktist B vektori $\vec{BC} = \vec{b}$.

JOON. 171



JOON. 172



Vektorit $\vec{AC} = \vec{c}$ nimetamegi vektorite \vec{a} ja \vec{b} summaks. (joon .171):

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

See on vektorite liitmise nn. **kolmnurgareegel**.

Sama vektori \vec{AC} võime saada veel teisiti, rakendades punktis A esmalt vektorit \vec{b} ja siis selle lõpp-punktis D vektorit \vec{a} (joon. 172), sest vektorite liitmisel täiendavad tekkivad kolmnurgad teineteist rööpkülilikuks, mille diagonaal on AC. Nii saame, et

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC} \text{ ehk } \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

s. t. vektorite summa ei sõltu liidetavate järjekorrast. Jooniselt 172 võib välja lugeda veel teise eeskirja vektorite liitmiseks: kui liidetavatel vektoritel on ühine alguspunkt (A), siis neile vektoritele ehitatud rööpküliliku diagonaalvektor, mille alguspunktiks on sama punkt, on antud vektorite summa, s. t. (joon. 172)

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC} \text{ ehk } \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}.$$

See nn. **rööpkülilikeegel** on rakendatav ainult siis, kui liidetavad vektorid pole samasihilised.

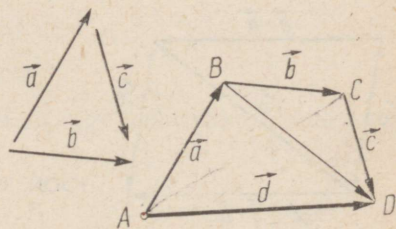
Vektorite liitmise kolmnurgareegel võimaldab liita ka rohkem kui kahte vektorit. Liidame kolm vektorit \vec{a} , \vec{b} ja \vec{c} (joon. 173):

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} \text{ ehk } \vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c},$$

mis tähendab, et enne on liidetud vektorid \vec{a} ja \vec{b} , siis tulemusega \vec{c} . Liidame nüüd enne vektorid \vec{b} ja \vec{c} , võttes alguspunktiks punkti B:

$$\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{b} + \vec{c}.$$

JOON. 173



Liites vektorid \vec{AB} ja \vec{BD} , saame endise tulemuse $\vec{AD} = \vec{d}$:

$$\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$$

ehk

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{d}.$$

Niisiis

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Seega kehtib vektorite liitmisel ka ühenduvusseadus.

Kui vektorite liitmisel saadud murdjoone $ABCD$ (joon. 173) lõpp-punkt D ühtib alguspunktiga A , siis vektorite summa on **nullvektor** $\vec{0}$, s. o. vektor, mille pikkus on 0.

Vektorite vahe.

Vektorite \vec{a} ja \vec{b} vaheks $\vec{a} - \vec{b}$ nimetatakse vektori \vec{a} ja vektori \vec{b} vastandvektori $-\vec{b}$ summat:

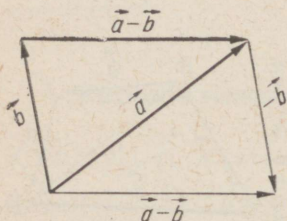
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Kui vektorite summa ehitamiseks kasutame esimest (kolmnurga-) reeglit, siis vektorite vahe saamiseks tuleb esimese vektori lõpp-punkt teha ühtivaks vektori $-\vec{b}$ alguspunktiga (joon. 174). Kui vektorid \vec{a} ja \vec{b} on kantud ühise alguspunkti juurde, siis vahe $\vec{a} - \vec{b}$ on vektor, mis viib vähendaja \vec{b} lõpp-punktist vähendatava \vec{a} lõpp-punkti (joon. 174). Sellest näeme, et kui vektoritele \vec{a} ja \vec{b} on ehitatud rööpkülik (joon. 172), siis vähendaja \vec{b} lõpp-punktist lähtuv diagonaalvektor on vektorite vahe. Rööpküliku ehitamisega saab seega korraka nii vektorite summa kui ka vahe.

797. Võta vabalt kaks vektorit ja leia nende summa ning vahe.

798. Millal kahe vektori summa on nullvektor?

799. On antud kolmnurk ABC . Näita, et vektorite \vec{AB} , \vec{BC} ja \vec{CA} summa on nullvektor.



JOON. 174

800. Rööpküliku $ABCD$ diagonaalide lõikepunkt on O . Tee joonis ja leia sellelt vektorid:
 $\vec{AO} + \vec{BO}$; $\vec{AO} - \vec{BO}$; $\vec{AC} - \vec{AD}$; $\vec{DC} + \vec{BD}$; $\vec{BC} + \vec{DA}$; $\vec{BC} - \vec{AC}$.
801. Kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt on M . Tõesta, et $AM + BM = MC$.
802. Selgita joonise abil, millal vektorite \vec{a} ja \vec{b} summa pikkus
 1) võrdub vektorite pikkuste summana;
 2) on väiksem vektorite pikkuste summast, kuid suurem nende vahest;
 3) võrdub vektorite pikkuste vahega.
803. Selgita joonise abil, millal vektorite \vec{a} ja \vec{b} summa pikkus
 1) on suurem nende vahe pikkusest;
 2) võrdub nende vahe pikkusega;
 3) on väiksem nende vahe pikkusest.
804. Millal vektorite \vec{a} ja \vec{b} summa $\vec{a} + \vec{b}$ poolitab vektorite vahelise nurga (joon. 172)?

Vektori korrutamine arvuga.

Vektori \vec{a} ja positiivse arvu k korrutiseks $k\vec{a}$ (ehk $\vec{a} \cdot k$) nimetatakse vektoriga \vec{a} samasihilist ja samasuunalist vektorit, mille pikkus on $k \cdot |\vec{a}|$.

Näiteks joonisel 175 on esitatud vektorid \vec{a} , $2\vec{a}$, $0,75\vec{a}$ ja $2,5\vec{a}$.

Vektori \vec{a} ja arvu 0 korrutiseks on nullvektor $\vec{0}$, s. o. vektor pikkusega 0.

Vektori \vec{a} ja negatiivse arvu k korrutiseks nimetatakse vektori $|k|\vec{a}$ vastandvektorit.

Näiteks joonisel 176 on esitatud vektorid:

$$\vec{a}; -1\vec{a} = -\vec{a}; 1,5\vec{a}; -1,5\vec{a}; 3\vec{a} \text{ ja } -3\vec{a}.$$

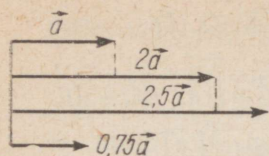
Kui vektori ja arvu korrutist $k\vec{a}$ korrutada veel mingi arvuga l , siis saame vektori, mille pikkus on vektori \vec{a} pikkusest lk korda pikem. Sellest saab järeldada, et

$$l(k\vec{a}) = (lk)\vec{a} = (kl)\vec{a}.$$

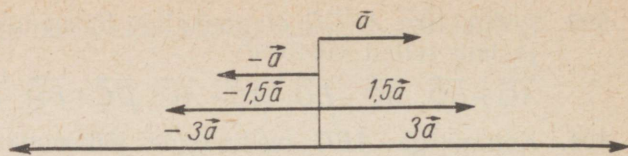
Näiteks $3 \cdot (-4\vec{a}) = 3 \cdot (-4)\vec{a} = -12\vec{a}$.

Seega loetakse vektori korrutamisel arvuga kehtivaks ühenduvusseadus. Kehtib ka jaotuvusseadus

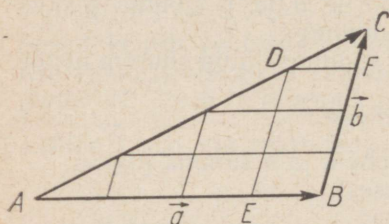
$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}.$$



JOON. 175



JOON. 176



JOON. 177



JOON. 178

Näitame seda juhul, kui k on mingi positiivne ratsionaalarv, näiteks $k = \frac{3}{4}$.

Olgu antud vektorid \vec{a} ja \vec{b} , mis ei ole samasihilised. Leiame nende summa (joon. 177):

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

Jaotame lõigu AC neljaks võrdseks osaks ja joonestame neist jaotuspunktidest paralleelid sirgetele AB ning BC . Siis jaotuvad ka lõigud AB ja BC neljaks võrdseks lõiguks. Kui $k = \frac{3}{4}$, siis

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{3}{4} \vec{AC} = \vec{AD}, \quad k\vec{a} = \frac{3}{4} \vec{a} = \vec{AE} \quad \text{ja} \quad k\vec{b} = \vec{BF} = \vec{ED}.$$

Seega $k\vec{a} + k\vec{b} = \vec{AE} + \vec{ED} = \vec{AD}$, s. t.

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}.$$

Samal viisil saab väidet tõestada, kui k on mistahes positiivne ratsionaalarv. Negatiivse k korral asenduvad vektorid \vec{AE} , \vec{ED} ja \vec{AD} nende vastandvektoritega, kusjuures endiselt $\vec{AE} + \vec{ED} = \vec{AD}$,

Kui vektorid \vec{a} ja \vec{b} on samasihilised (joon. 178), siis vaadeldav seos väljendab arvtelje suunaga lõikude omadust

$$k(\vec{AB} \pm \vec{BC}) = k \cdot \vec{AB} \pm k \cdot \vec{BC}.$$

Vektori ja arvu korrutamisel kehtib jaotuvusseadus ka arvulise teguri suhtes, s. t.

$$(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}.$$

Näiteks

$$(3+7)\vec{a}=3\vec{a}+7\vec{a}.$$

Eriti sageli tuleb seda seadust rakendada vastupidises suunas, näiteks

$$15\vec{a}-8\vec{a}=(15-8)\vec{a}=7\vec{a}.$$

Eelnevas selgus, et vektorite liitmisel, lahutamisel ja arvuga korrutamisel kehtivad samad seadused, mis kehtivad samu tehteid sisaldavate algebraliste avaldiste kohta. Seetõttu saame neid tehteid sisaldavaid vektoravaldisi lihtsustada samal viisil, nagu algebralisi avaldisi.

Näiteid. 1) $3\vec{a}-2\vec{b}-\vec{a}+\vec{b}=3\vec{a}-\vec{a}-(2\vec{b}-\vec{b})=2\vec{a}-\vec{b};$

$$2) 1,5(\vec{a}+\vec{b})-2(4\vec{a}+2\vec{b})=1,5\vec{a}+1,5\vec{b}-8\vec{a}-4\vec{b}== -6,5\vec{a}-2,5\vec{b}.$$

805. Võta vabalt vektor \vec{a} ja kujuta vektorid $1,5\vec{a}$, $4\vec{a}$, $\frac{1}{3}\vec{a}$, $-2\vec{a}$ ja $-2,5\vec{a}$.

806. Olgu $ABCD$ rööpkülik, mille diagonaalide lõikepunkt on O .

Avalda vektorite $\vec{AB}=\vec{a}$ ja $\vec{AD}=\vec{b}$ kaudu vektorid

1) \vec{AO} , 2) \vec{CO} , 3) \vec{BO} ; 4) \vec{DO} .

807. Olgu $ABCD$ romb. Tõesta, et $\vec{AC}+\vec{DB}=2\vec{AB}$.

808. Lihtsusta avaldist $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}$.

809. Kolmnurga ABC külje BC keskpunkt on K . Avalda vektorite $\vec{AB}=\vec{c}$ ja $\vec{AC}=\vec{b}$ kaudu järgmised vektorid:

1) \vec{CB} , 2) \vec{CK} , 3) \vec{AK} .

810. Kolmnurga ABC külje BC keskpunkt on K ja külje AC keskpunkt L . Avalda vektor \vec{LK} vektori $\vec{AB}=\vec{c}$ abil. Mis järeldub tulemusest kolmnurga kesklõigu LK kohta?

811. Trapetsi $ABCD$ haara AD keskpunkt on E ja haara BC keskpunkt F . Avalda vektor \vec{EF} vektorite $\vec{AB}=\vec{a}$ ja $\vec{DC}=\vec{b}$ abil. Mis järeldub tulemusest trapetsi kesklõigu kohta?

812. Lihtsusta antud vektoravaldist.

$$1) \vec{a}-3\vec{b}+2(3\vec{a}-4\vec{b}) \qquad 2) 1,5(4\vec{x}-3\vec{y})-0,5(6\vec{x}-5\vec{y})$$

$$3) 0,8(5\vec{a}-4\vec{b})-1,2(3\vec{a}-7\vec{b}) \qquad 4) \vec{x}-3(2\vec{x}-\vec{y})+2(4\vec{x}-3\vec{y})$$

813. Mis on ühist vektoritel

$3\vec{a}$ ja $-2\vec{a}$, $1,8\vec{a}$ ja $-1,8\vec{a}$, $4\vec{a}$ ja $6\vec{a}$
ja mille poolest nad erinevad?

8. RINGJOON. KORRAPÄRANE PÜRAMIID.

8.1. RINGJOON JA RING.

Ringjooneks keskpunktiga O ja raadiusega r nimetatakse tasandil punktist O kaugusel r asetsevate punktide hulka.

Selle definitsiooni järgi kuulub punkt X vaadeldava ringjoone punktide hulka siis ja ainult siis, kui $OX=r$ (joon. 179). Kui $OX<r$, siis öeldakse, et punkt X asetseb seespool vaadeldavat ringjoont, ja kui $OX>r$, siis öeldakse, et punkt X asetseb väljaspool seda ringjoont. Seega asetseb tasandi punkt X ringjoonel keskpunktiga O ja raadiusega r , seespool ringjoont või väljaspool ringjoont vastavalt sellele, kas (joon. 180) $OX=r$, $OX<r$ või $OX>r$.

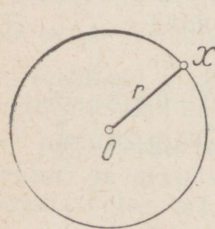
Ringjoont koos seespool ringjoont asetsevate punktidega nimetatakse **ringiks** keskpunktiga O ja raadiusega r . Seega kuulub tasandi punkt X vaadeldavale ringjoonele siis ja ainult siis, kui $OX\leq r$.

Kui punktid A ja B asetsevad antud ringjoonel, siis lõiku AB nimetatakse selle ringjoone ja ka vastava ringi **kõõluks** (joon. 181). Keskpunkti läbivat kõõlu nimetatakse ringi (ja ringjoone) **diameetriks** ehk **lähimõõduks**. Ringi lähimõõtu märgitakse tavaliselt tähega d (AC joonisel 181). On arusaadav, et $d=2r$.

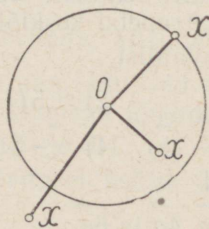
Ringjoon on määratud oma keskpunkti ja raadiusega. Ringjoon on määratud ka oma kolme punktiga A , B ja C , kui need punktid ei asetse ühel sirgel, sest läbi kolme mitte ühel sirgel asetseva punkti läheb üks ja ainult üks ringjoon (joon. 182). Selle ringjoone keskpunktiks on kolmnurga ABC külgede keskristsirgete lõikepunkt K ja raadiuseks punkti K kaugus kolmnurga ABC tippudest:

$$r=AK=BK=CK.$$

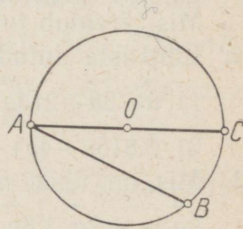
Nurka, mille tipp asetseb ringi keskpunktis, nimetatakse **kesknurgaks** ($\angle AOB$ joonisel 183). Kesknurga ja ringi ühisosa nimetatakse **ringi sektoriks**.



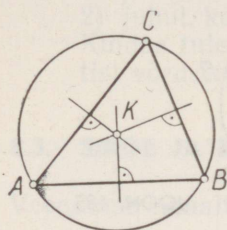
JOON. 179



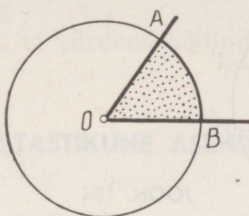
JOON. 180



JOON. 181



JOON. 182



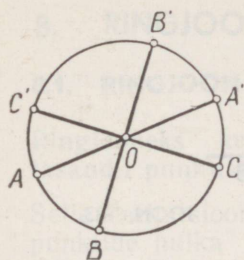
JOON. 183

814. Ringjoone raadius $r=7,5$ cm. Missugune on suurim kaugus selle ringjoone kahe punkti vahel?
815. Ringjoone läbimõõt $d=2,5$ cm. Missugune on ringjoone punkti suurim kaugus diameetrist?
816. Kui suured nurgad on kolmnurgal, mis tekib raadiusepikkuse kõõlu otspunktide ühendamisel ringjoone keskpunktiga?
817. Tasandil on antud ringjoon keskpunktiga O ja raadiusega 3 cm. Otsusta, kas tasandi punkt M asetseb seespool ringjoont, ringjoonel või väljaspool ringjoont, kui $OM=5$ cm; $OM=2,5$ cm; $OM=3$ cm.
818. Väljaspool ringjoont asetsevast punktist on ringjoone lähima punktini 5 cm ja kaugeima punktini 12 cm. Kui pikk on raadius?
819. Seespool ringjoont asetsevast punktist on ringjoone lähima punktini 3 cm ja kaugeima punktini 6 cm. Kui kaugel asetseb punkt ringjoone keskpunktist?
820. On antud ringjoon ja väljaspool seda punkt. Leia ringjoone punktid, mis asetsevad antud punktist niisama kaugel, nagu see punkt on ringjoone keskpunktist. Kas ülesandel on alati lahend?
821. Lahenda eelmise ülesanne juhul, kui antud punkt on seespool ringjoont.
822. Joonesta ringjoon läbi kolme punkti, mis ei asetse ühel sirgel.
823. Joonesta ringjoon, mis läbib kaht antud punkti ja mille keskpunkt asetseb antud sirgel. Millal on ülesandel üks lahend, millal lõpmata palju lahendeid ja millal lahend puudub?

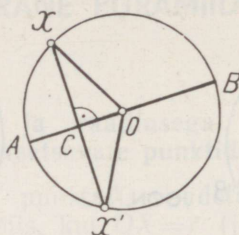
8.2. RINGJOONE SÜMMEETRIA.

Leiame ringjoone mingi punktiga A keskpunkti O suhtes sümmeetrilise punkti (joon. 184). Selleks joonestame punktist A ringjoone diameetri AA' . Et diameeter läbib keskpunkti O ja poolitub selles punktis, siis diameetri teine otspunkt A' ongi otsitav punkt:

$$A' \equiv O(A).$$



JOON. 184



JOON. 185

Niisamuti on iga diameetri, näiteks BB' ja CC' otspunktid punkti O suhtes sümmeetrilised. Seetõttu ütleme, et

ringjoon on oma keskpunkti suhtes sümmeetriline.

Olgu nüüd antud ringjoon ja selle mingi diameeter $AB = d$ (joon. 185). Leiame ringjoone punktiga X diameetri d suhtes sümmeetrilise punkti. Selleks joonestame kõõlu $XX' \perp AB$. Selle kõõlu teine otspunkt X' ongi otsitav punkt, sest punktid X ja X' on võrdhaarse kolmnurga XOX' aluse otspunktid ja diameetri d lõik OC on selle kolmnurga kõrguseks:

$$X' \equiv d(X).$$

Niisiis,

ringjoon on oma diameetri suhtes sümmeetriline.

Et iga kaks sümmeetrilist kujundit on võrdsed, siis joonisel 185 $XC \equiv X'C$, $\angle XO A = \angle X' O A$ ja $\widehat{AX} = \widehat{AX'}$ s. t.

diameeter poolitab tēmaga ristuva kõõlu, sellele vastava kesknurga ja kaare.

824. Joonesta ringjoon, märgi selle mingi kaar AB ja leia $O(\widehat{AB})$, kus O on ringjoone keskpunkt.
825. Joonesta ringjoon koos diameetriga d , märgi mingi kaar AB ja leia $d(\widehat{AB})$.
826. Joonesta ringjoon keskpunktiga O ja diameetriga d , märgi ringjoonel mingi punkt A ja leia järgmised punktid:
 1) $B \equiv d(A)$; 2) $C \equiv O(B)$; 3) $D \equiv d(C)$; 4) $E \equiv O(D)$.
 Kuidas asetseb punkt E punkti A suhtes?
827. Joonesta ringjoon ja selles kaks paralleelset kõõlu. Leia saadud kujundi sümmeetriatelg.
828. On antud ringjoon koos kahe võrdse kesknurgaga. Leia selle kujundi sümmeetriatelg. Kuidas tulemusest järeldub, et võrdsetele kesknurkadele vastavad võrdsed kõõlud ja võrdsed kaared?
829. Joonesta ringjoon ja selles kaks võrdset kõõlu. Leia saadud kujundi sümmeetriatelg

1) juhul, kui kõõlud lõikuvad,

2) juhul, kui kõõlud ei lõiku.

Kuidas tulemusest järeldub, et võrdsed kõõlud on keskpunk-
tist võrdsetel kaugustel?

8.3. SIRGE JA RINGJOONE VASTASTIKUNE ASEND.

Veendume esmalt, et

sirgjoonel ja ringjoonel saab olla ülimalt kaks ühist punkti.

Tõepoolest, kui sirgel s oleks mingi ringjoonega j kolm ühist punkti, siis läbi nende kolme punkti sirgel s läheks ringjoon. Kuid me teame, et läbi kolme punkti sirgel ei lähe ringjoont. Niisiis jääb üle, et sirge s ja ringjoone j ühisosa $s \cap j$ koosneb kas kahest punktist, ühest punktist või ühisosa on tühi hulk. Esimesel juhul nimetatakse sirget ringjoone **lõikajaks** (joon. 186), teisel juhul **puutujaks** (joon. 187), kolmandal juhul on sirge täielikult väljaspool ringjoont (joon. 188). Missuguse juhuga neist kolmest on tegemist, seda näitab ringjoone keskpunkti kaugus sirgest:

sirge kas lõikab ringjoont, puudutab seda või on täielikult väljaspool ringjoont vastavalt sellele, kas ringjoone keskpunkti kaugus sirgest on väiksem kui raadius (OK joonisel 186), võrdub raadiusega (OP joonisel 187) või on suurem kui raadius (OQ joonisel 188).

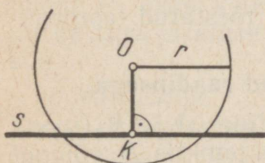
830. Mida nimetatakse ringjoone puutujaks, mida lõikajaks?

831. Mitu ühist punkti saab olla sirgel ja ringil?
Kas neid saab olla kolm? aga ainult kolm?

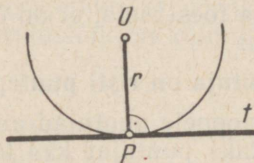
832. Olgu j mingi ringjoon, s selle lõikaja ja r ringjoonega j piiratud ring. Mis on siis $j \cap s$, $r \cap s$ ja $j \cap r$?

833. Joonesta vabalt võetud raadiusega r ringjoon ja kolm üksteisega paralleelset sirget nii, et nende kaugused ringi keskpunkti oleksid vastavalt $0,5r$, r ja $1,5r$. Milline võib olla äärmiste sirgete vaheline kaugus?

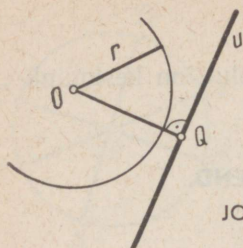
834. On antud ringjoon keskpunktiga O ja raadiusega r ning sirge s , mille kaugus punktist O on $2r$. Sirgele s rakendatakse lüket, mille vektor \vec{v} on risti sirge sihiga. Leia lükke vektori pikkus



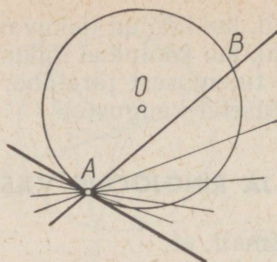
JOON. 186



JOON. 187



JOON. 188



JOON. 189

- 1) juhul, kui sirgest saab ringjoone puutuja,
 - 2) juhul, kui sirgest saab ringjoone lõikaja.
835. Mis saab lõikajast AB joonisel 189, kui seda lõikajat pöörata tema lõikepunkti A ümber seni, kuni teine lõikepunkt B ühtib punktiga A ?
836. Konstrueeri antud raadiusega ringjoon, mis läbib antud punkti ja mille keskpunkt asetseb antud sirgel. Millal on sel ülesandel üks lahend, millal kaks lahendit ja millal lahend puudub?
837. Joonesta antud keskpunktiga ringjoon, mis puudutab antud sirget.
838. Joonesta ringjoon, mis läbib antud punkti A ja puudutab antud sirget selle antud punktis B .

8.4. RINGJOONE PUUTUJA OMADUSI.

Tõestame, et

raadiusega ristuv sirge, mis läbib raadiuse otspunkti ringjoonel, on ringjoone puutuja.

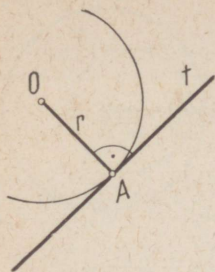
Läbige sirge t ringjoone raadiuse OA otspunkti ringjoonel, s. o. punkti A , ja olgu $t \perp OA$ (joon. 190). Siis OA pikkus on keskpunkti O kaugus sirgest t , sest eelduse järgi $OA \perp t$. Et see kaugus võrdub raadiusega, siis sirge t on ringjoone puutuja.

Viimane teoreem võimaldab konstrueerida ringjoonele puutujat, kui puutepunkt on antud: puutuja saamiseks joonestame läbi puutepunkti ristsirge raadiusele, mille otspunktiks on antud puutepunkt. Et selliseid sirgeid on ainult üks, siis ringjoone iga punkti läbib ainult üks puutuja.

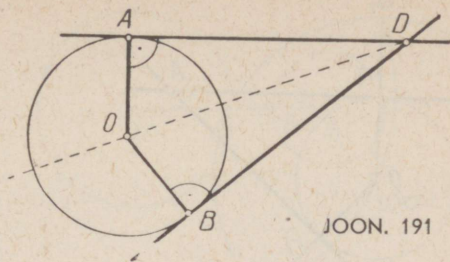
Märgime ilma tõestuseta, et on õige ka eespool tõestatud teoreemi pöördteoreem:

ringjoone puutuja on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega.

Ehitame ringjoonele puutujad antud puutepunktides A ja B (joon. 191). Need kaks puutujat kas lõikuvad mingis punktis D või on



JOON. 190



JOON. 191

paralleelsed. Eeldame, et nad lõikuvad, ja tõestame järgmise teoreemi:

puutujate lõikepunkt on puutepunktidest võrdsetel kaugustel.

Eeldus. A ja B on puutepunktid, D on puutujate lõikepunkt.

Väide. $AD=BD$.

Tõestus. Ühendame ringjoone keskpunkti O punktidega A , B ja D . Siis $OA \perp AD$ ja $OB \perp BD$, sest puutuja on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega. Et ühtlasi

$$OA=OB,$$

siis punkt O on nurga ADB poolitaja punkt ja sirge OD on kogu joonise sümmeetriatelg. Sümmeetria tõttu

$$AD=BD.$$

Vaatleme nüüd puutuja konstrueerimist ringjoonele juhul, kui puutepunkt pole antud.

Ülesanne. Konstrueerime ringjoonele puutuja läbi punkti A , mis asetseb väljaspool ringjoont.

Lahendus (joon. 192). Joonestame antud ringjoone keskpunkti O ümber uue ringjoone raadiusega, mis võrdub antud ringjoone diameetriga, ja antud punkti A ümber ringjoone, mis läbib keskpunkti O . Lõikugu need kaks ringjoont punktides B_1 ja B_2 . Joonestame sirglõigud B_1O ja B_2O ; lõigaku need antud ringjoont punktides P_1 ja P_2 . Nii sirge AP_1 kui ka sirge AP_2 on siis antud ringjoone puutujad läbi punkti A .

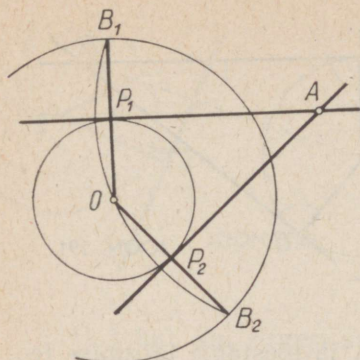
Põhjendus. Punkti A ühendamisel punktidega B_1 ja O tekkis võrdhaarne kolmnurk AB_1O , sest

$$AO=AB_1$$

kui ühe ja sama ringjoone raadiused. Konstruksiooni järgi on punkt P_1 selle kolmnurga aluse keskpunkt; et võrdhaarse kolmnurga tipu ja aluse keskpunkti ühenduslõik on kolmnurga kõrgus, siis

$$AP_1 \perp B_1O.$$

Seega sirge AP_1 on risti raadiusega P_1O , järelikult AP_1 on puutuja. Samuti saame näidata, et AP_2 on puutuja.



JOON. 192

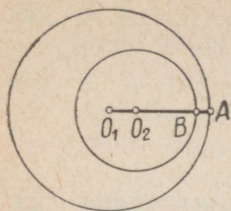
839. Joonesta puutuja, kui on antud ringjoone keskpunkt ja puutepunkt.
840. Joonesta ringjoonele, mille raadius on 3 cm, puutujad läbi punkti, mille kaugus ringjoone keskpunktist on 5 cm.
841. On antud ringjoone kaks lõikuvat puutujat ja puutepunkt ühel neist. Joonesta ringjoon.
842. Joonesta kaks ristuvat puutujat ringjoonele, mille raadius on 2,5 cm.
843. Ringjoone kaks paralleelset puutujat lõikuvad kolmanda puutujaga punktides A ja B . Tõesta, et $\triangle ABO$ on täisnurkne, kui punkt O on ringjoone keskpunkt.
844. Kuidas asetsevad teineteise suhtes ringjoone puutujad, kui puutepunktideks on ühe ja sama diameetri otspunktid?
845. Leia puutujatevahelise nurga suurus, kui puutepunktidesse tõmmatud raadiuste vaheline nurk on 112° .
846. Ühe ja sama kõõlu otspunktidest joonestatud puutujate vaheline nurk on 64° . Kui suur on puutuja ja kõõlu vaheline nurk.
847. Tõesta, et kui puutujate lõikepunkti kaugus ringi keskpunktist võrdub diameetriga, siis puutujatevahelise nurga suurus on 60° .

8.5. KAHE RINGJOONE VASTASTIKUNE ASEND.

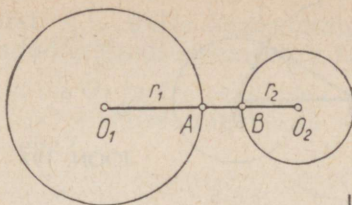
Kui kahel ringjoonel on kolm ühist punkti, siis need ringjooned ühtivad, sest läbi kolme punkti (mis ei ole ühel sirgel) läheb ainult üks ringjoon. Sellest järeldeb, et

kahel erineval ringjoonel saab olla ülimalt kaks ühist punkti.

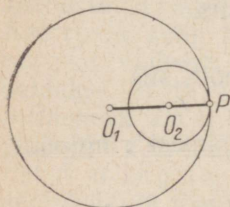
Vaatleme kahe ringjoone vastastikuseid asendeid sõltuvalt nende ühiste punktide arvust. Olgu ringjoonte raadiused r_1 ja r_2 , kusjuures $r_1 > r_2$. Tähistame ringjoonte keskpunktide O_1 ja O_2 vahelise kauguse tähega k , s. t. $k = O_1O_2$.



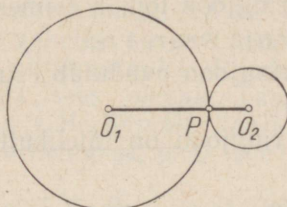
JOON. 193



JOON. 194



JOON. 195



JOON. 196

1. Kui ringjoontel pole ühtki ühist punkti, siis teine ringjoon on kas täielikult seespool esimest ringjoont (joon. 193) või täielikult väljaspool esimest ringjoont (joon. 194). Esimesel juhul (joon. 193)

$$O_1O_2 < O_1A - O_2B \text{ ehk } k < r_1 - r_2.$$

Teisel juhul (joon. 194)

$$O_1O_2 > O_1A + O_2B \text{ ehk } k > r_1 + r_2.$$

2. Kui ringjoontel on üks ühine punkt, siis teine ringjoon puudutab esimest kas seestpoolt (joon. 195) või väljastpoolt (joon. 196). Esimesel juhul (joon. 195)

$$O_1O_2 = O_1P - O_2P \text{ ehk } k = r_1 - r_2.$$

Teisel juhul (joon. 196)

$$O_1O_2 = O_1P + O_2P \text{ ehk } k = r_1 + r_2.$$

3. Kui ringjoontel on kaks ühist punkti, siis need jooned lõikuvad (joon. 197). Nende keskpunktid koos ühe lõikepunktiga moodustavad kolmnurga O_1O_2L , milles

$$O_1O_2 < O_1L + O_2L \text{ ja } O_1O_2 > O_1L - O_2L$$

ehk

$$k < r_1 + r_2 \text{ ja } k > r_1 - r_2$$

ehk

$$r_1 - r_2 < k < r_1 + r_2.$$

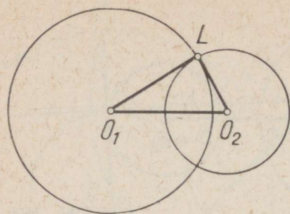
Kokku võttes võime seega öelda, et

1) kui teine ringjoon on täielikult seespool esimest ringjoont, siis

$$k < r_1 - r_2;$$

2) kui teine ringjoon puudutab esimest seestpoolt, siis

$$k = r_1 - r_2;$$



JOON. 197

- 3) kui teine ringjoon lõikab esimest ringjoont, siis
 $k > r_1 - r_2$ ja $k < r_1 + r_2$;
- 4) kui teine ringjoon puudutab esimest väljastpoolt, siis
 $k = r_1 + r_2$;
- 5) kui teine ringjoon on täielikult väljaspool esimest ringjoont, siis
 $k > r_1 + r_2$.

Saab tõestada, et nendel teoreemidel on olemas pöördteoreemid, s. t. ringide raadiuste ja nende keskpunktide vahelise kauguse põhjal saab otsustada, missuguses asendis on need ringjooned teineteise suhtes. Kui on teada näiteks, et

$$k = 17 \text{ cm}, r_1 = 20 \text{ cm ja } r_2 = 8 \text{ cm},$$

siis

$$r_1 - r_2 = 12 \text{ cm ja } r_1 + r_2 = 28 \text{ cm};$$

see tähendab, et

$$r_1 - r_2 < k < r_1 + r_2.$$

Tulemus ütleb, et ringjooned lõikuvad.

848. Määra kahe ringjoone vastastikune asend, kui nende
- 1) keskpunktide vaheline kaugus on 4 cm ja raadiused on 9 cm ning 5 cm;
 - 2) keskpunktide vaheline kaugus on 3 dm ja raadiused on 1,8 dm ning 1,4 dm;
 - 3) keskpunktide vaheline kaugus on 75 mm ja raadiused on 56 mm ning 37 mm.
849. Kaks võrdset ringjoont raadiusega r asetsevad nii, et ühe ringjoone keskpunkt on teisel ringjoonel. Kirjelda nelinurka, mille tippudeks on ringjoonte lõikepunktid ja keskpunktid.
850. Kolm võrdset ringi raadiusega r puudutavad üksteist väljastpoolt. Kui suured nurgad ja küljed on kolmnurgal, mille tippudeks on puutepunktid?
851. Antud on kaks paralleelset sirget ja nende lõikaja. Joonesta ringjoon, millele need kolm sirget on puutuajaks.
852. Võta vabalt kolm üksteisega lõikuvat sirget ja joonesta ringjooned, mis puudutavad igat võetud sirget.

853. Joonesta kaks **kontsentrilist**, s. o. ühise keskpunktiga ringjoont. Mida võib öelda saadud kujundi sümmeetria kohta?
854. Kahe ringjoone keskpunktid on O_1 ja O_2 , raadiused vastavalt r_1 ja r_2 . On teada, et $O_1O_2 < r_1$. Missugune peab olema r_2 , et üks ringjoon puudutaks teist?

8.6. PIIRDENURK.

Joonestame ringjoone ühest ja samast punktist K kaks kõõlu KL ja KM (joon. 198). Nende kõõlude vahelist nurka LKM , mis on sirg-nurgast väiksem, nimetatakse **piirdenurgaks**. Piirdenurga kohta öeldakse, et ta toetub nurga sees olevale kaarele, näiteks piirdenurk LKM toetub kaarele LM . Samale kaarele toetub ka kesknurk LOM . Kõõlu LM kohta öeldakse, et ta paistab punktist K nurgas LKM .

Joonisel 199 toetuvad piirdenurgad A , B , C ja D ühele ja samale kaarele ML , millele toetub ka kesknurk MOL .

Tõestame, et

piirdenurk võrdub poolega samale kaarele toetuvast kesknurgast.

Eeldus. $\angle ABC$ on piirdenurk ja $\angle AOC$ kesknurk, mis toetuvad ühele ja samale kaarele.

Väide. $\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \angle AOC$.

Tõestus. Vaatleme kolme võimalikku juhtu:

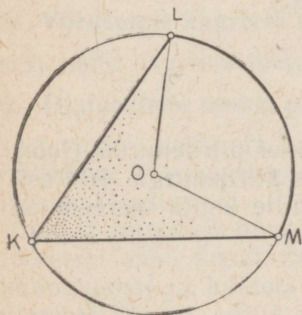
1) ringjoone keskpunkt asetseb piirdenurga ühel haaral (joon. 200);

2) ringjoone keskpunkt asetseb piirdenurga sees (joon. 201);

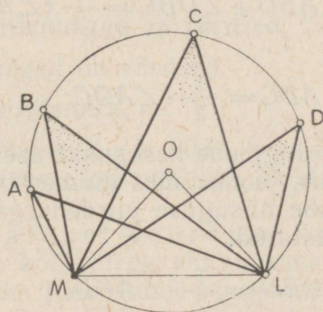
3) ringjoone keskpunkt asetseb väljaspool piirdenurka (joon. 202).

1. Kui ringjoone keskpunkt O asetseb piirdenurga haaral BC (joon. 200), siis kesknurk AOC on kolmnurga ABO välisnurk ja seetõttu

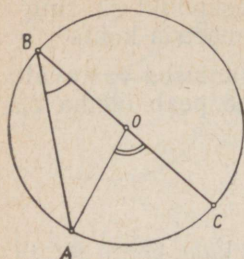
$$\angle AOC = \angle ABO + \angle OAB.$$



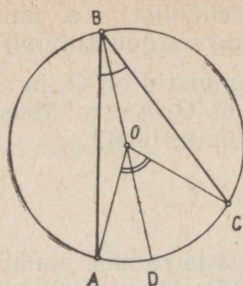
JOON. 198



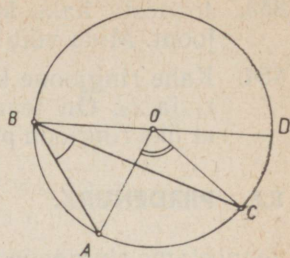
JOON. 199



JOON. 200



JOON. 201



JOON. 202

Et kolmnurk OAB on võrdhaarne (miks?), siis saadud võrduse paremal poolel on võrdsed liidetavad ja seega

$$\angle AOC = 2 \cdot \angle ABO,$$

millest järeldubki, et

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \angle AOC.$$

2. Kui ringjoone keskpunkt asetseb piirdeuruga sees (joon. 201), siis joonestame diameetri BD . See diameeter jaotab piirdeuruga ja kesknurga kaheks osaks, mille kummagi kohta on teoreem eelmises punktis tõestatud:

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \cdot \angle AOD;$$

$$\angle DBC = \frac{1}{2} \cdot \angle DOC.$$

Liites esimese võrduse pooltega vastavalt teise võrduse pooled ja tuues paremal ühise teguri $\frac{1}{2}$ sulgude ette, saame

$$\angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} (\angle AOD + \angle DOC)$$

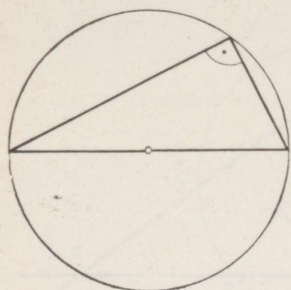
ehk

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \angle AOC.$$

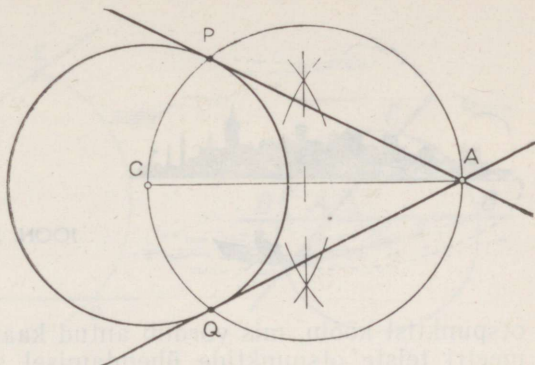
3. Kui ringjoone keskpunkt asetseb väljaspool piirdeurka (joon. 202), siis, joonestades diameetri BD , saame piirdeuruga ABC esitada kahe niisuguse piirdeuruga vahena, mille kohta teoreem on juba tõestatud:

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \cdot \angle AOD;$$

$$\angle CBD = \frac{1}{2} \cdot \angle COD.$$



JOON. 203



JOON. 204

Lahutades esimese võrduse pooltest teise võrduse vastavad pooled ja tuues paremal ühise teguri $\frac{1}{2}$ sulgude ette, saame

$$\angle ABD - \angle CBD = \frac{1}{2} (\angle AOD - \angle COD)$$

ehk

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \angle AOC.$$

Sellega on teoreem täielikult tõestatud.

Teoreemist piirdenurga kohta teeme järgmised järeldused.

1. Ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad on võrdsed,

sest igaüks neist võrdub poolega ühest ja samast kesknurgast.

Nende piirdenurkade tipud asetsevad kaarel (\overline{MCL} joonisel 199), mille igast punktist (A, B, C, \dots) paistab kaare otspunkte ühendav kõõl (ML) ühes ja samas nurgas.

2. Võrdsetele kaartele toetuvad piirdenurgad on võrdsed,

sest neile kaartele toetuvad kesknurgad on võrdsed.

3. Diameetritele toetuv piirdenurk on täisnurk,

sest vastav kesknurk on kaks täisnurka (joon. 203). See järeldus näitab, et ringjoone igast punktist (peale kahe punkti) paistab diameeter täisnurgas.

Viimast järeldust nimetatakse *Thalese** teoreemiks. Seda teoreemi saab kasutada täisnurkse kolmnurga ehitamiseks antud hüpotenuusi ja kaateti järgi. Selleks joonestame ringjoone, mille diameetriks on antud hüpotenuus, ja möödame diameetri ühest

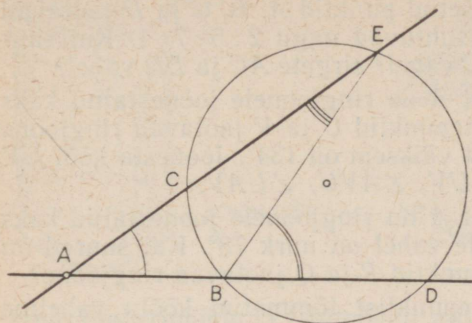
* *Thales*, kreeka filosoof ja matemaatik, elas VI saj. I poolel e. m. a.



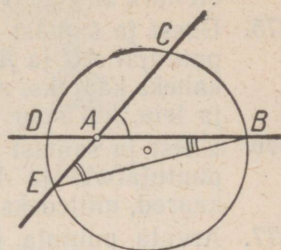
JOON. 205

otspunktist kõõlu, mis võrdub antud kaatetiga. Selle kõõlu ja diameetri teiste otspunktide ühendamisel saame nõutud täisnurkse kolmnurga. Thalese teoreem annab uue võimaluse ringjoone puutuja ehitamiseks punktist, mis asetseb väljaspool ringjoont. Selleks ühendame antud punkti A antud keskpunktiga O ja joonestame ringjoone, millele lõik AO on diameetrik (joon. 204). Siis leiame saadud ringjoone ja antud ringjoone ühised punktid P ja Q ning joonestame sirged AP ja AQ .

855. Teosta joonisel 204 esitatud konstruktsioon ja põhjenda, et AP ja AQ on puutujad.
856. Missugust joont mööda tuleb paadiga sõita lahel, kui soovime mingit rannalõiku kogu aeg näha täisnurgas (joon. 205)?
857. Kui suur piirdenurk toetub kaarele 40° , 75° , $118^\circ 20'$, $131^\circ 48'$?
858. Piirdenurk toetub kaarele, mis on 76° võrra väiksem ringjoone ülejäänud osast. Kui suur on piirdenurk?
859. Ümber kolmnurga ABC , milles $\angle A = 58^\circ 40'$ ja $\angle B = 72^\circ 30'$, on joonestatud ringjoon. Kui suured on kaared, milledeks kolmnurga tipud jaotavad selle ringjoone?
860. Ringjoonel asetsevad järjestikku punktid A , B , C ja D nii, et kaar AB on $\frac{1}{5}$ ringjoonest, kaar BC on $\frac{1}{6}$ ringjoonest ja kaar CD on $\frac{3}{10}$ ringjoonest. Kui suured on nelinurga $ABCD$ nurgad?
861. Kaks ringjoont lõikuvad punktides A ja B . Punktist A on joonestatud mõlema ringjoone diameetrid AC ja AD . Tõesta, et punktid B , C ja D asetsevad ühel ja samal sirgel.
N ä p u n ä i d e. Joonesta kõõl AB ja vaatle nurki ABC ja ABD .
862. Ringjoonel on märgitud järjestikku punktid A , B , C ja D nii, et kaared AB ja CD on võrdsed. Tõesta, et kõõlud AD ja BC on paralleelsed.
863. Ringjoonel on märgitud järjestikku punktid A , B , C ja D nii, et kaared AB ja CD on võrdsed. Tõesta, et kõõlud AC ja BD on võrdsed.



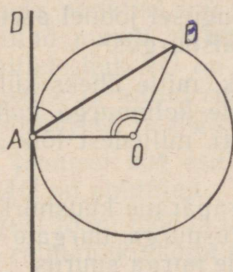
JOON. 206



JOON. 207

864. Antud on lõik $AB=4$ cm. Missugusel joonel asetsevad punktid, milledest lõik AB paistab täisnurgas?
865. Antud on võrdkülgne kolmnurk, mille üheks küljeks on lõik AB , ja sirge s , mis lõikab selle kolmnurga kaht ülejäänud külge. Leia sirgel s kaks punkti, milledest lõik AB on näha nurgas 60° .
866. Ringi sisse on joonestatud korrapärase kuusnurk. Missuguse osa ringjoonest moodustab kuusnurga nurgale (kui piirde-nurgale) vastav kaar? Leia selle nurga suurus.
867. Ringi sisse on joonestatud korrapärase viisnurk. Kui suur on selle viisnurga nurk?
868. Tõesta, et korrapärase hulknurga ühest ja samast tipust tõmatud diagonaalid jaotavad hulknurga nurga võrdseteks osadeks.
869. Väljaspool ringjoont asetsevast punktist A on joonestatud ringjoonele kaks lõikajat ACE ja ABD (joon. 206), mille vahel on kaared BC ja DE . Kaar BC on 54° ja kaar DE on 132° . Kui suur on $\angle AEB$, $\angle EBD$, $\angle BAC$?
870. Arvuta nurk ringjoone lõikajate vahel, kui nurga sees olevad kaared on 1) 78° ja 134° ; 2) 55° ja 172° ; 3) $165^\circ 17'$ ja $47^\circ 39'$.
871. Ringjoon on lõigatud kahe sirgega EC ja DB , mis lõikuvad seespool ringjoont punktis A (joon. 207). Lõikajatevahelise nurga BAC ja tema tippnurga EAD sees olevad kaared on 78° ja 25° . Kui suur on $\angle CEB$, $\angle EBD$, $\angle BAC$?
872. Arvuta nurk ringjoone kahe lõikuva kõõlu vahel, kui selle nurga ja tema tippnurga sees olevad kaared on 1) 51° ja 34° ; 2) 68° ja $27^\circ 20'$; 3) $115^\circ 14'$ ja $18^\circ 24'$.
873. Kaks kõõlu lõikuvad nii, et nad jaotavad ringjoone osadeks, mis suhtuvad järjestikku nagu $1:3:5:6$. Arvuta kõõludevaheline teravnurk.

874. Ringjoonel järjestikku võetud punktid A, B, C ja D jaotavad ringjoone kaarteks, mis suhtuvad nagu $2:5:7:1$. Kui suur on nurk sirgete AB ja DC vahel? sirgete AC ja BD vahel?
875. Ühest ja samast punktist A on ringjoonele joonestatud kaks puutujat AU ja AV . Puutepunktid U ja V jaotavad ringjoone kaheks kaareks, milledest väiksem on 134° . Joonesta kõõl UV ja leia, kui suur on $\angle AUV, \angle AVU, \angle UAV$.
876. Ühest ja samast punktist A on ringjoonele joonestatud kaks puutujat AP ja AQ , mille vahel on nurk 78° . Kui suured on kaared, milledeks puutepunktid P ja Q jaotavad ringjoone?
877. Arvuta puutuja ja puutepunktist tõmmatud kõõlu vaheline nurk BAD (joon. 208), kui kõõlule toetuv kesknurk $\angle AOB = 110^\circ$.



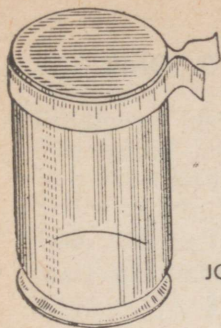
JOON. 208

878. Puutuja ja kõõlu vahelise nurga sees olev kaar moodustab 70% ringjoonest. Kui suur on see nurk?
879. Puutuja ja kõõlu vaheline nurk on $64^\circ 45'$. Kui suured on kaared, milledeks kõõl jaotab ringjoone?
880. Kui suur on korrapärase kõõlkolmnurga külje ja selle otspunktist tõmmatud puutuja vaheline nurk?
881. Kui suur on korrapärase kõõlkuusnurga külje ja selle otspunktist joonestatud puutuja vaheline nurk?

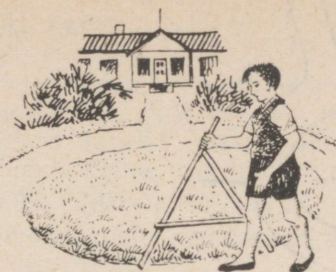
8.7. RINGJOONE PIKKUS.

Ringjoone pikkuse ehk ringi ümbermõõdu mõõtmisega puutume kokku, kui soovime mõõta näiteks ümmarguse palgi, ämbri põhja või vankri ratta ümbermõõtu. Sageli saab selleks kasutada painduvat mõõdulinti, nagu näidatud joonisel 209. Maapinnal leiduva ringjoone pikkuse mõõtmisel annab sageli piisava täpsuse ka mõõtesirke (joon. 210).

Küllalt hoolikalt tehtud mõõtmised näitavad, et erinevate ringide ümbermõõtude ja läbimõõtude suhted erinevad üksteisest õige vähe või ei erine üldse, olles kõik ligikaudu võrdsed arvuga 3,14. Saab tõestada, et ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhe ei muutu ringi läbimõõdu muutudes ehk, teisiti öeldes,



JOON. 209



JOON. 210

ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhe on jääv.

Selle suhte täpset väärtust tähistatakse kreeka tähega π (pii). Nüüd saame, et ringjoone pikkuse c ja läbimõõdu d ehk $2r$ suhe on $c : d = \pi$ ehk $c : 2r = \pi$.

Avaldades neist võrdustest jagatava c , saame ringi ümbermõõdu (ehk ringjoone pikkuse) valemid:

$$c = \pi d; \quad c = 2\pi r.$$

Ringi ümbermõõt võrdub arvu π ja läbimõõdu korrutisega ehk arvu 2π ja raadiuse korrutisega.

Arvu π täpne väärtus avaldub lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna. Sellest on arvutusmasina abil arvatatud enam kui 100 000 kümnendkohta.

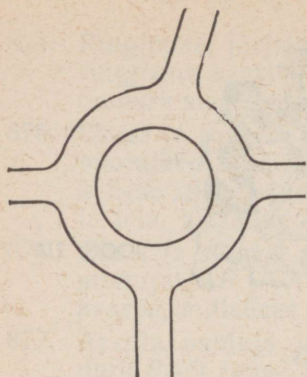
Arvu π esimesed 22 kohta on järgmised:
3,141 592 653 589 793 238 482.

Ringi ümbermõõdu arvutamisel saab kasutada neist muidugi ainult esimesi kohti. Arvu π ligikaudse väärtusena kasutatakse harilikult arvu 3,14, mõnikord ka arvu $3\frac{1}{7}$ ja suuremat täpsust nõudvate arvutuste puhul arvu 3,1416.

882. Ümmarguse vaagna ümbermõõdu mõõtmisel saadi tulemuseks 89,2 cm ja läbimõõdu mõõtmisel 28,4 cm. Arvuta π ligikaudne väärtus.

883. Mõõda mõne ümmarguse eseme ümbermõõt ja läbimõõt, arvuta nende suhe ja märgi mõõtmise tulemused järgmisesse tabelisse:

Eseme nimetus	Ümber- mõõt	Läbi- mõõt	Nende suhe



JOON. 211

Arvuta leitud suhete aritmeetiline keskmine ja võrdle seda arvuga π .

884. Arvuta peast ringi ümbermõõt, kui läbimõõt on 1 m; 10 dm; 0,1 km, kui raadius on 5 cm; 0,5 dm; 1 m.
885. Arvuta ringi ümbermõõt c , kui läbimõõt $d=16$ cm; 4,5 dm; 0,8 m; 15 m; 3,4 km.
886. Arvuta ringjoone pikkus c , kui raadius $r=7$ cm; 3,8 dm; 12 m; 2,5 km; 8 km.
887. Mitu äärekivi kulub ümmargusele lillepeenrale, mille läbimõõt on 3 m, kui kivi pikkus on 16 cm?
888. Mitu lilletaime kulub ümmarguse lillepeenra ääristamiseks, kui peenra läbimõõt on 1,5 m ja taimede vaheks jätta 20 cm?
889. Ümmarguse tunni läbimõõt on 65 cm. Kui pikk on tunni vits?
890. Arvuta Maa ekvaatori pikkus, kui ekvaatori raadius on 6378 km.
891. Kuu liigub ümber Maa peaaegu ringjooneliste teed mööda ja tema keskmine kaugus Maast on 380 000 km. Arvuta kuu täistiiru pikkus (eeldusel, et Maa seisab ruumis paigal).
892. Maa liigub ümber Päikese peaaegu ringjooneliste teed mööda, tehes aasta vältel ühe täistiiru. Arvuta Maa aastase tee pikkus, kui Maa kaugus Päikesest on 150 000 000 km (ja kui Päike seisaks ruumis paigal).
893. Ringtee keskringi ümbermõõt on 62,8 m. Leia ringi läbimõõt ja raadius (joon. 211).
894. Puu ümbermõõt on 132 cm. Arvuta puu läbimõõt.
895. Ratas tegi 19,2 m pikkusel vahemaal 8 pööret. Mitu pööret teeb see ratas 1 km pikkusel vahemaal? Kui suur on ratta raadius?

8.8. RINGI ÜBERMÕÖDU TABEL.

Ringjoone pikkuse kergemaks leidmiseks on koostatud tabelid. Uhe sellise leiad oma tabelitekoogu lk-lt 46—48 (vt. V. Bradis, Neljakohalised matemaatilised tabelid keskkoolidele, tabel VI). Selles on antud ringi läbimõõdu kolme tüvenumbriga väärtustele

1,00, 1,01, 1,02, ..., 9,99, 10,0

vastavad übermõõdu kolmekohaliste murdosadega väärtused 3,142, 3,173, 3,204, ..., 31,385, 31,416.

Ringi übermõõdu leidmine läbimõõdu järgi.

Vaatleme esmalt juhtumit, kus antud läbimõõt d on vahemikust $1 < d < 10$.

Kui antud läbimõõt on ülimalt kolme tüvenumbriga arv, nagu 2,76, siis vastava übermõõdu leidmiseks otsime tabelist üles kõigepealt selle rea, mis algab (esimeses veerus) antud läbimõõdu esimesest kahest numbrist koosneva arvuga 2,7, ja siis veeru, mille esimeses reas on antud läbimõõdu viimane number 6. Võetud rea ja veeru lõikekohal olev arv 8,671 ongi otsitav übermõõt.

Näiteid.

1) Kui ringi läbimõõt on 1,74 dm, siis übermõõt on 5,466 dm.

2) Kui ringi raadius on 3,54 m, siis übermõõt on 22,242 m.

3) Kui ringi raadius on 2,5 km, siis übermõõt on 15,708 km.

Niisugused übermõõdud saame täpsete läbimõõtude korral. Kui läbimõõt on ligikaudne arv, siis tabelist saadud übermõõt on vaja ümardada vastavalt andmete täpsusele. Toodud näidetes saaksime ligikaudsete andmete korral järgmised vastused:

1) 5,47 dm; 2) 22,2 m; 3) 16 km.

Kui antud läbimõõt on nelja tüvenumbriga arv, siis leiame lähimale kolme tüvenumbriga läbimõõdule vastava übermõõdu ja parandame seda läbimõõdu neljanda numbri 1, 2, 3, 4 ja 5 korral niisamuti nagu ruutude tabeli puhul. Kui antud läbimõõdu neljas number on 6, 7, 8 või 9, siis lähim kolme tüvenumbriga läbimõõt on antud läbimõõdust suurem ja selle parandus kui ka vastav übermõõdu parandus tuleb lahutada.

Näide. Kui $d=2,767$, siis tabelis leiduv

lähim läbimõõt on 2,77, vastav übermõõt on 8,702;

lähimõõdu parandus on $-0,003$, übermõõdu parandus on $-0,009$;

Antud läbimõõdule 2,767 vastav übermõõt on 8,693.

Näiteid.

1) Kui $d=4,035$, siis $c=12,661+0,016=12,677$.

2) Kui $d=7,648$, siis $c=24,033-0,006=24,027$.

3) Kui $d=9,466$, siis $c=29,751-0,013=29,738$.

Kui läbimõõt on rohkem kui nelja tüvenumbriga arv, siis ümardame ta nelja tüvenumbriga arvuks ja leiame sellele vastava übermõõdu.

N ä i d e.

$$d=6,6978 \approx 6,698; c=21,049-0,006=21,043.$$

Vaatleme edasi juhtumit, kus antud läbimõõt ei kuulu arvudega 1 ja 10 piiratud vahemikku. Sel juhul kasutame tõsiasja, et ringi übermõõt on võrdeline läbimõõduga, mistõttu läbimõõdu d suurenedes (vähenedes) mingi arv korda ka übermõõt $c=\pi d$ suureneb (väheneb) sama arv korda.

Kui antud läbimõõt on arvust 1 väiksem, siis suurendame läbimõõtu 10 või 100 jne. korda nii, et saame arvudega 1 ja 10 piiratud vahemikku kuuluva arvu, leiame sellele vastava übermõõdu ja vähendame siis tulemust nii mitu korda, kui mitu korda me esmalt läbimõõtu suurendasime.

N ä i t e i d.

- 1) Kui $d=0,378$, siis $10d=3,78$
tabeli järgi $10c=11,875$, seega $c=1,1875$.
- 2) Kui $d=0,087$, siis $100d=8,7$;
tabeli järgi $100c=27,332$, seega $c=0,27332$.
- 3) Kui $r=0,0006$, siis $d=0,0012$ ja $1000d=1,2$;
tabeli järgi $1000c=3,77$, seega $c=0,00377$.

Kui antud läbimõõt on suurem kui 10, siis vähendame läbimõõtu 10 või 100 jne. korda nii, et saame arvu, mis kuulub vahemikku 1 kuni 10, leiame sellele vastava übermõõdu ja suurendame tulemust nii mitu korda, kui mitu korda me esmalt läbimõõtu vähendasime.

N ä i t e i d.

- 1) Kui $d=65$, siis $0,1d=6,5$;
tabeli järgi $0,1c=20,42$, seega $c=204,2$.
- 2) Kui $d=2438$, siis $0,001d=2,438$;
tabeli järgi $0,001c=7,665-0,006=7,659$,
seega $c=7659$.
- 3) Kui $r=250$, siis $d=500$ ja $0,01d=5$;
tabeli järgi $0,01c=15,708$, seega $c=1570,8$.

896. Kasutades tabelit, leia ringjoone pikkus järgmistel ligikaudsetel andmetel:

- 1) läbimõõt on 1,5 cm; 9,2 cm; 2,36 m; 9,28 km; 3,07 m;
5,7 dm;
- 2) raadius on 1,63 cm; 4,7 km; 0,9 dm; 2,5 m; 0,86 dm; 0,56 m.

897. Kasutades tabelit, leia ringjoone pikkus järgmistel ligikaudsetel andmetel:

- 1) läbimõõt on 8 cm; 3,5 dm; 3,26 dm; 1,3 m; 2,45 m; 3,82 km;
- 2) raadius on 0,7 cm; 0,87 cm; 0,68 km; 4,15 m; 8,9 km.

898. Leia tabelit kasutades ringjoone pikkus järgmistel andmetel:
 1) läbimõõt on 1,874 m; 4,067 m; 6,205 dm; 8,786 km;
 2) raadius on 0,653 m; 4,28 m; 0,837 km; 4,77 km.
899. Leia tabelit kasutades ringjoone pikkus järgmistel andmetel:
 1) läbimõõt on 0,4 dm; 0,67 dm; 0,05 km; 0,012 km;
 2) läbimõõt on 45 cm; 70 cm; 120 m; 650 m;
 3) raadius on 0,074 km; 785 m; 0,413 m; 650 km.
900. Leia ringjoone pikkus, kui
 1) läbimõõt on 1,082 m; 0,2747 dm; 5,718 m; 6,223 m;
 0,3065 km;
 2) raadius on 0,1274 dm; 38,81 cm; 5296 m; 0,7652 km;
 69,88 km.

Ringi läbimõõdu leidmine übermõõdu järgi.

Ringi übermõõtude tabel sisaldab übermõõte vahemikust 3,142 kuni 31,416.

Kui antud übermõõt kuulub sellesse vahemikku ja sisaldub tabelis, siis vastava läbimõõdu esimesed kaks numbrit leiame selle rea algusest, milles paikneb antud übermõõt, ja kolmanda numbrit vastava veeru algusest.

Näiteid.

1) Kui übermõõt $c=5,875$ m, siis läbimõõt $d=1,87$ m.

2) Kui übermõõt $c=23,248$ m, siis läbimõõt $d=7,40$ m.

Kui nimetatud vahemikku kuuluvat übermõõtu tabelis ei leidu, siis leiame tabelist kaks järjestikust übermõõtu, mille vahele kuulub antud übermõõt, määrame, kumb neist on antud übermõõdule lähemal ja kui palju ta sellest erineb. Näiteks übermõõtu 17,8 tabelis ei leidu, kuid leiduvad übermõõdud 17,781 ja 17,813, mille vahele kuulub antud übermõõt:

$$17,781 < 17,8 < 17,813.$$

Seejuures 17,8 erineb esimesest übermõõdust 0,019 võrra ja teisest 0,013 võrra; seega erineb ta teisest übermõõdust vähem. Teisele übermõõdule 17,813 vastav läbimõõt on 5,67, mis on otsitavast läbimõõdust 0,004 võrra suurem, nagu näeme paranduste veerust. Lahenduse vormistame nii nagu alljärgnevas näites.

Näide.

Kui $c=17,8$, siis tabelis

lähim übermõõt on 17,813,	vastav läbimõõt on 5,67;
parandus on -0,013,	parandus on -0,004.
Antud übermõõdule 17,8	vastav läbimõõt on 5,666.

Kui tabelist võetud übermõõdu ja antud übermõõdu vahet paranduste veergudes ei leidu, siis arvestame lähima parandusega.

Näide.

Kui $c=12,072$, siis tabelis

lähim übermõõt on	12,064,	vastav läbimõõt on	3,84;
parandus on	+0,008,	parandus on	+0,003.
Antud übermõõdule	12,072	vastav läbimõõt on	3,843.

901. Leia antud übermõõdu järgi ringi läbimõõt.

- | | | | |
|--------------|-------------|-------------|--------------|
| 1) 27,96 cm | 2) 6 m | 3) 20,2 m | 4) 29,5 km |
| 5) 6,503 dm | 6) 18,41 m | 7) 29,06 m | 8) 20,2 km |
| 9) 10,282 dm | 10) 21,68 m | 11) 28,07 m | 12) 23,43 km |
| 13) 14,6 dm | 14) 17,3 m | 15) 24,5 m | 16) 30 km |
| 17) 10,1 cm | 18) 12 dm | 19) 28,7 m | 20) 5 km |

Kui antud übermõõt ei kuulu vahemikku, mida piiravad tabelis antud vähim ja suurim übermõõdu väärtus, siis kasutame jällegi tõsiasja, et ringi läbimõõt ja übermõõt on võrdelised.

Näiteid.

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| 1) Olgu ringi übermõõt | $c=0,202$ m. |
| Suurendame seda 100 korda: | $100c=20,2$ m. |
| Tabelist leiame, et | $100d=6,43$ m. |
| Seega | $d=0,0643$ m. |
| 2) Olgu ringi übermõõt | $c=2752$ km. |
| Vähendame seda 100 korda: | $0,01c=27,52$ km. |
| Tabelist leiame, et | $0,01d=8,76$ km. |
| Otsitav läbimõõt | $d=876$ km. |
| 3) Olgu ringi übermõõt | $c=1500$ m. |
| Vähendame seda 100 korda: | $0,01c=15$ m. |
| Tabelist leiame, et | $0,01d=4,77+0,005=4,775$ m. |
| Otsitav läbimõõt | $d=477,5$ m. |

902. Leia antud übermõõdu järgi ringi läbimõõt.

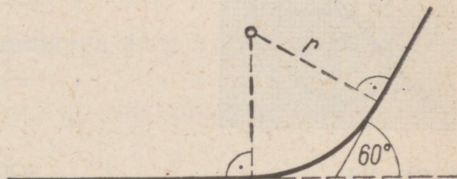
- | | | | |
|--------------|-------------|-------------|--------------|
| 1) 40 cm | 2) 53 dm | 3) 72 m | 4) 28 km |
| 5) 14,3 cm | 6) 0,28 dm | 7) 0,06 m | 8) 125 km |
| 9) 138 mm | 10) 75 cm | 11) 204 m | 12) 0,016 km |
| 13) 0,88 dm | 14) 212 dm | 15) 0,014 m | 16) 1920 m |
| 17) 0,075 km | 18) 0,018 m | 19) 3461 km | 20) 18,7 cm |

903. Mitu meetrit on ümmarguse tiigi läbimõõt, kui übermõõt on 245 sammude ja sammude pikkus on 0,7 m?
904. Mitu täispöört teeb veduriratas ühes tunnis, kui vedur sõidab tunnis 75 km ja ratta läbimõõt on 1,8 m?
905. Leia masinaratta äärel asuva punkti liikumise kiirus, kui ratta läbimõõt on 150 mm ja ratas teeb 400 täispöört minutis.
906. Joonesta alljärgnev tabel vihikusse ja täida see, kasutades ringi übermõötude tabelit. Kõik andmed tabelis on ligikaudsed.

r (cm)				2,36	1,65	3,65			
d (cm)	1,90	5,75	9,24						
c (cm)							25,8	17,0	5,97

907. Kui pikk on 75° -ne kaar ringjoonel, mille raadius on 6 cm? N ä p u n ä i d e. Arvuta esmalt ühekraadise kaare pikkus.
908. Ringjoone 36° -se kaare pikkus on 5 dm. Kui pikk on raadius?
909. Kui pikk on 100° -ne kaar ringjoonel, mille läbimõõt on 1 m?
910. Ringjoone raadius on 10 cm. Leia
 1) korrapärase kõõlviisnurga küljele vastava kaare pikkus.
 2) korrapärase kõõlkaheksanurga küljele vastava kaare pikkus.
911. Kaks sirget raudteed, mille sihtide vaheline nurk on 60° , on sujuvalt ühendatud ringjoone kaarega (joon. 212), mille pikkus on 125 m. Arvuta selle kaare raadius.
912. Ringi raadius on r cm. Kui palju ja mitme protsendi võrra on korrapärase kõõlkuusnurga küljele vastav kaar sellest küljest pikem?
913. Maa ekvaatori raadius on 6378 km. Arvuta meremiili pikkus, kui on teada, et see võrdub Maa ekvaatori $1'$ -se kaare pikkusega.

JOON. 212

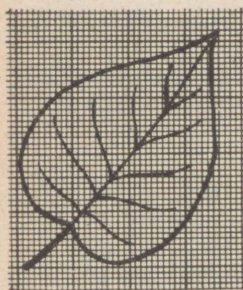


8.9. RINGI PINDALA.

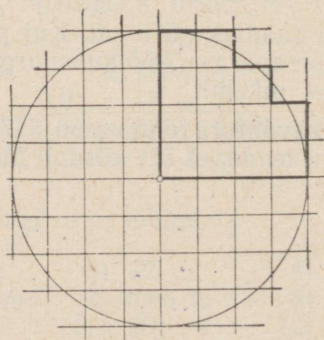
Mistahes kinnise kõverjoonega piiratud kujundi pindala ligikaudselt leidmiseks kasutame **ruutkatet**, s. t. katame selle kujundi millimeetervõrguga või läbipaistva millimeeterpaberiga ja loendame kõik ruudud, mis on seespool piirjoont (joon. 213). Seejuures pooliku ruudu loeme terve eest, kui üle poole temast näib olevat seespool piirjoont, ja jätame arvesse võtmata, kui üle poole temast näib olevat väljaspool piirjoont. Sama võtet saame kasutada ka ringi pindala ligikaudselt leidmiseks. Nii on joonisel 214 ring raadiusega 2 cm kaetud ruutude võrguga, kus ruudu külg on 0,5 cm. Sellise väga jämeda võrgu abil leiame, et veerandringi pindala on ligikaudu 13 ruutu, seega ringi pindala on 52 ruutu. Et iga ruudu pindala on $\frac{1}{4}$ cm², siis ringi pindala on ligikaudu 13 cm². Palju täpsema tulemuse saaksime, kui kasutaksime millimeetervõrku.

On arusaadav, et ringi pindala sõltub tema raadiusest: mida suurem on raadius, seda suurem on ka ringi pindala. Seose leidmiseks raadiuse ja pindala vahel kujutleme, et ring on jaotatud võrdseteks sektoriteks, näiteks 12-ks võrdseks sektoriks (joon. 215). Paigutame need sektorid üksteise kõrvale, nagu on näidatud joonisel 216. Tekkinud kujund meenutab rööpkülikut. Viimasest ta erineb selle poolest, et tema aluseks ei ole sirglõik, vaid ringjoone kaarekestest koosnev joon. See erinevus on seda väiksem, mida suurem on sektorite arv. Saadud «rööpküliku» alus võrdub ligikaudu poolega ringi ümbermõõdust ja kõrgus võrdub ringi raadiusega (joon. 216). Et rööpküliku pindala võrdub aluse ja kõrguse korrutisega, siis kirjeldatud võte lubab arvata, et (vähemalt ligikaudu)

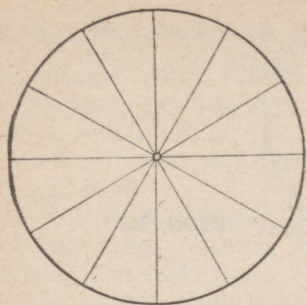
ringi pindala võrdub poole ümbermõõdu ja raadiuse korrutisega.



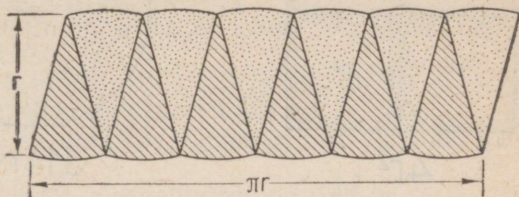
JOON. 213



JOON. 214



JOON. 215



JOON. 216

Saab tõestada, et see seos on täpne. Seega näiteks joonisel 214 kujutatud ringi pindala

$$S = \frac{2\pi \cdot 2}{2} \cdot 2 = 4 \cdot 3,14 = 12,56 \text{ cm}^2,$$

mis ei erine kuigi palju ruutkatte abil saadud tulemusest.

Tuletame ülalosaadud seosest ringi pindala valemi:

kui ringi raadius on r , siis ümbermõõt on $2\pi r$ ja pool ümbermõõtu on πr ; seega pindala

$$S = \pi r \cdot r \text{ ehk}$$

$$S = \pi r^2.$$

Ringi pindala võrdub arvu π ja raadiuse ruudu korrutisega.

N ä i d e. Kui ringi raadius $r = 8$ cm, siis pindala

$$S = \pi \cdot 8^2 = 3,14 \cdot 64 \approx 201 \text{ cm}^2.$$

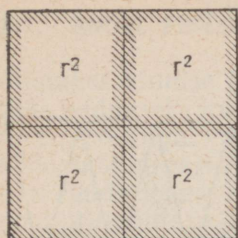
Asendame ringi pindala valemis raadiuse r tema avaldisega läbimõõdu kaudu: $r = \frac{d}{2}$. Saame:

$$S = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \text{ ehk}$$

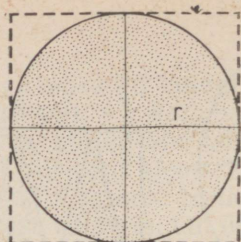
$$S = \frac{1}{4} \pi d^2$$

Ringi pindala võrdub ühe neljandikuga arvu π ja ringi läbimõõdu ruudu korrutisest.

N ä i d e. Kui ringi läbimõõt $d = 5$ m, siis pindala $S = \frac{1}{4} \pi \cdot 5^2 = \frac{1}{4} \cdot 3,14 \cdot 25 \approx 20 \text{ m}^2$.

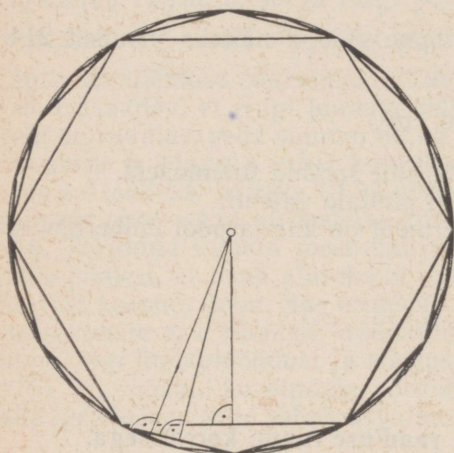


$$4r^2$$



$$3,14r^2$$

JOON. 217



JOON. 218

914. Arvuta ringi pindala, kui
 1) ringi raadius on 3 cm; 1,6 dm; 35 m; 0,6 km;
 2) ringi läbimõõt on 7 cm; 1 dm; 25 m; 7,2 km.
915. Mitu protsenti ruudu pindalast on ruudu siseringi pindala (joon. 217)?
916. Ringisse on joonestatud mingi korrapärase kõõlhulknurk (joon. 218). Millega võrdub iga sellise hulknurga pindala? Võrdle seda lauset ringi pindala ja ümbermõõdu seost väljendava lausega.
917. Arvuta ümmarguse piimanõu põhja pindala, kui nõu läbimõõt on 16 cm.
918. Arvuta ümmarguse palgi ristlõike pindala, kui palgi läbimõõt on 38 cm.

8.10. RINGI PINDALA TABEL.

Kasutame ringi pindala leidmiseks ringi pindala tabelit (vt. V. Bradise tabelitekogu tabel VII, lk. 49—51).

Selle tabeli ehitus ja kasutamine ei erine ringi übermõõtude tabeli ehitusest ja kasutamisest.

Näiteid.

1) Kui ringi läbimõõt 2,4 m, siis pindala on 4,524 m².

2) Kui ringi raadius on 3,76 dm, siis läbimõõt on 7,52 dm ja pindala on 44,41 dm².

3) Kui ringi pindala on 29,9 m², siis läbimõõt on 6,17 m.

919. Leia tabeli abil ringi pindala, kui läbimõõt on 1,8 cm; 2,7 cm; 3,74 dm; 5 dm; 6,38 m; 7,25 m; 8 km; 10 km.

920. Leia tabeli abil ringi pindala, kui ringi raadius on 1,2 cm; 3,8 cm; 4,72 dm; 0,71 dm; 0,95 m; 2 m; 1,5 km; 4,87 km.

921. Leia tabeli abil ringi raadius, kui ringi pindala on 11,7 cm²; 41,4 dm²; 7,069 m²; 11,1 m²; 18,25 km²; 69,84 km².

Selgitame, kuidas muutub ringi pindala, kui tema raadius suureneb mingi arv korda. Ringi pindala $S = \pi r^2$ on raadiuse ruutfunktsioon. Seetõttu (vt. (5.18):

kui ringi raadius suureneb n korda, siis pindala suureneb n^2 korda.

922. Kuidas muutub ringi pindala, kui tema raadius suureneb 3, 5, 7, 12, 20, 50 korda?

923. Kuidas muutub ringi pindala, kui tema raadius väheneb 2, 5, 8, 10, 25, 100 korda?

924. Kuidas muutub ringi raadius ja kuidas pindala, kui läbimõõt suureneb 2 korda, 5 korda, 10 korda?

925. Kuidas muutub ringi raadius ja kuidas pindala, kui läbimõõt väheneb 3 korda, 8 korda, 100 korda?

Teades, kuidas muutub ringi pindala tema raadiuse (läbimõõdu) muutudes, leiame tabeli abil ringi pindala ka neil juhtudel, kui läbimõõt on väiksem kui 1 või suurem kui 10.

Näide. Kui ringi raadius $r = 5,5$ m, siis läbimõõt $d = 11$ m, seega suurem tabelis leiduvatest läbimõõtudest. Tabelist leiame, et 10 korda väiksema läbimõõduga ringi pindala on 0,9503 m². Suurendades seda 100 korda, saame 95,03 m². Lühidalt:

kui $r = 5,5$ m, siis $d = 11$ m ja $S = 100 \cdot 0,9503 \text{ m}^2 = 95,03 \text{ m}^2$.

Niisamuti,

kui $r = 0,07$ m, siis $d = 0,14$ m ja $S = 1,539 \text{ m}^2 : 100 = 0,01539 \text{ m}^2$.

926. Leia ringi pindala järgmistel andmetel:

1) läbimõõt on 12 cm; 43 cm; 92 m; 25 km; 0,4 dm; 0,75 m;

2) raadius on 8 cm; 32 cm; 0,3 m; 15 m; 0,28 km; 0,39 km.

927. Leia ringi pindala järgmistel andmetel:

1) läbimõõt on 1,07 dm; 0,326 dm; 7,87 m; 246 m; 0,508 km;

2) raadius on 0,124 dm; 31,9 cm; 671 m; 1128 m; 7,87 km.

Tabelis antud ringi pindala väärtused on arvud vahemikust 0,7854 kuni 78,54. Kui antud ringi pindala väärtus on sellesse vahemikku kuuluv arv, mida ei ole tabelis, siis läbimõõdu leidmiseks kasutame paranduste veerge niisamuti, nagu ringi ümbermõõdu järgi läbimõõdu leidmisel.

N ä i d e. Kui ringi pindala $S=21,60$, siis tabelis

lähim pindala on	21,57,	vastav läbimõõt on	5,24;
parandus on	+0,03,	parandus on	+0,004;
Antud pindalale	21,60	vastav läbimõõt on	5,244.

Kui antud ringi pindala väärtus ei kuulu vahemikku 0,7854 kuni 78,54, siis läbimõõdu leidmiseks suurendame (või vähendame) seda väärtust 100 või 10 000 korda nii, et ta kuuluks sinna, leiame siis suurendatud (või vähendatud) pindala väärtusele vastava läbimõõdu ja vähendame (või suurendame) seda vastavalt 10 või 100 korda.

N ä i d e. Olgu antud ringi pindala $0,235 \text{ m}^2$. Suurendades seda 100 korda, saame $23,5 \text{ m}^2$. Sellele vastav läbimõõt on 5,47 m. Vähen-dades seda 10 korda, saame $0,547 \text{ m}$. Tähendab, kui ringi pindala on $0,235 \text{ m}^2$, siis läbimõõt on $0,547 \text{ m}$.

928. Leia tabeli abil ringi läbimõõd, kui tema pindala on

- 1) $2,4 \text{ dm}^2$; 13 dm^2 ; 53 cm^2 ; 248 cm^2 ; 4840 m^2 ; $0,8 \text{ m}^2$, $0,075 \text{ m}^2$; 100 m^2 ;
- 2) $4,7 \text{ dm}^2$; 16 dm^2 ; 855 m^2 ; 322 mm^2 ; 2100 m^2 ; $0,6 \text{ m}^2$; $0,024 \text{ km}^2$; 500 km^2 .

929. Spordiplats kujutab endast ristkülikut, mille otstes on pool-ringid. Selle ristküliku mõõtmed on 100 m ja 80 m. Spordi-platsi äärel on jooksurajad, mis moodustavad 8 m laiuse riba (joon. 219).

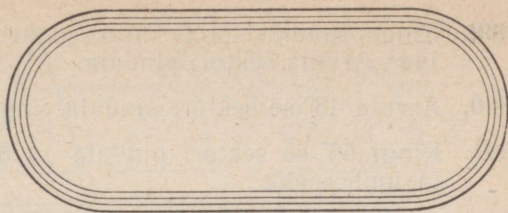
- 1) Kui suur on spordiplatsi kogupindala?
- 2) Kui suur on jooksuradade all olev pindala?
- 3) Kui suur on jooksuradade all oleva riba välimise ääre pikkus, kui suur on seesmise ääre pikkus ja kui suur on nende vahe?

930. Hobusekõietamise keti pikkus on 8,4 m. Kui suur pindala on maatükil, millelt hobune saab süüa rohtu?

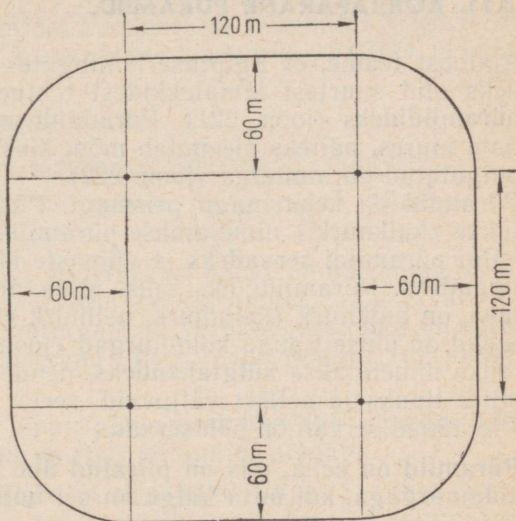
931. Ristkülikukujulise väljaku igasse nurka tahetakse rajada veerandringi-kujuline ja keskele ringikujuline iluaed. Esimesed neist on raadiusega 7 m ja viimane raadiusega 6 m. Aia alla minev pind tuleb katta mullaga nii, et igal ruutmeetril oleks seda $0,1 \text{ m}^3$. Mitu autokoormat kulub selleks mulda, kui igas koormas on seda 3 m^3 ?

932. Mitu protsenti moodustab korrapärase kõõlnelinurga pindala ringi pindalast?

JOON. 219



JOON. 220



N ä p u n ä i d e. Ringi raadius olgu r . Kõõlnelinurga pindala leidmiseks vaatle neid kaht kolmnurka, milledeks diagonaal jaotab selle nelinurga.

933. Mitu protsenti moodustab korrapärase kõõlkuusnurga pindala ringi pindalast?
934. Ummarguse tiigi ümbermõõt on 132 m. Kui suur on tiigi pindala?
935. Arvuta joonisel 220 kujutatud väljaku pindala (hektarites) ja ümbermõõt.
936. Ringi raadius on 10 cm. Ring on jaotatud kümneks võrdseks sektoriks. Arvuta iga sektori nurk, kaare pikkus ja pindala.
937. Ringi pindala on 240 mm^2 . Arvuta sektori pindala, kui sektor on $\frac{3}{8}$ ringist.
938. Ringi pindala on 320 mm^2 . Arvuta sektori pindala, kui sektori nurk on 18° .

939. Ringis raadiusega 25 cm on joonestatud sektor, mille nurk on 144° . Arvuta sektori pindala.
940. Arvuta 48° -se sektori pindala ringis, mille raadius on 0,5 m.
941. Ringi 56° -se sektori pindala on 84 cm^2 . Leia ringi pindala ja ümbermõõt.

8.11. KORRAPÄRANE PÜRAMIID.

Ajalooost teame, et Egiptuse kuningate — vaaraode matusepaikadeks olid suurtest kiviplokkidest tehtud ehitised, mida nimetati **püramiidideks** (joon. 221). Püramiide esineb ka kaasaegsete ehitiste juures, näiteks meenutab mõni kiosk prismat koos selle peale paigutatud püramiidiga (joon. 222).

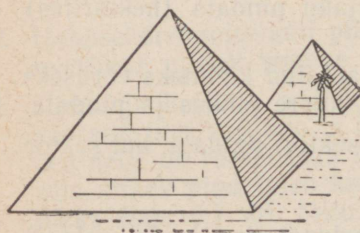
Püramiid on keha nagu prismagi. Püramiidi piiravaid tasanditükke (hulknurki) nimetatakse püramiidi **tahkudeks**, nende ühiseid külgi püramiidi **servadeks** ja viimaste ühiseid otspunkte püramiidi **tippudeks**. Püramiidi üks tahk, mida nimetatakse püramiidi **põhjaks**, on hulknurk (kolmnurk, nelinurk või viisnurk jne.), ja teised tahud on ühise tipuga kolmnurgad (joon. 223). Neid kolmnurkseid tahke nimetatakse **külgtahkudeks**, nende ühist tippu lihtsalt püramiidi tipuks ja sellest väljuvaid servi püramiidi **külgservadeks**. Ulejäänud servad on **põhiservad**.

Püramiid on keha, mis on piiratud ühe hulknurgaga ja nii mitme kolmnurgaga, kui mitu külge on sel hulknurgal.

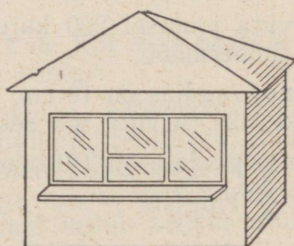
Püramiidi nimetatakse tema põhja järgi kolmnurkseks, nelinurkseks, viisnurkseks jne. Püramiidi nimetuse järgi saab määrata tema tahkude, servade ja tippude arvu, näiteks kuusnurksel püramiidil on 7 tahku, 14 serva ja 7 tippu (joon. 224).

Edaspidi vaatleme ainult selliseid püramiide, mille põhjaks on korrapärane hulknurk ja mille külgservad on võrdsed.

Püramiidi, mille põhjaks on korrapärane hulknurk ja mille külgservad on võrdsed, nimetatakse **korrapäraseks püramiidiks**.

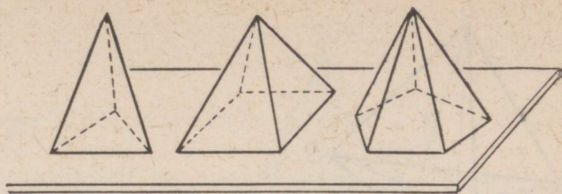


JOON. 221



JOON. 222

JOON. 223



Joonis 224 kujutab korrapärase kuusnurkset püramiidi $SABCDEF$. Selle püramiidi põhjaks on korrapärase kuusnurk $ABCDEF$ ja külgservad on võrdsed:

$$SA = SB = SC = SD = SE = SF.$$

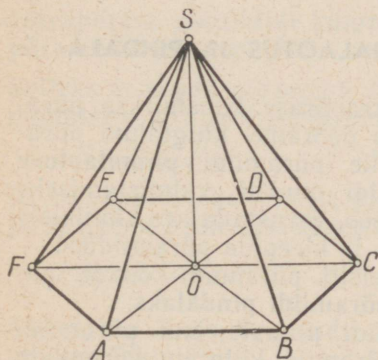
Korrapärasel püramiidil on järgmised tähtsamad omadused.

1. Korrapärase püramiidi külgtahud on võrdsed võrdhaarsed kolmnurgad.

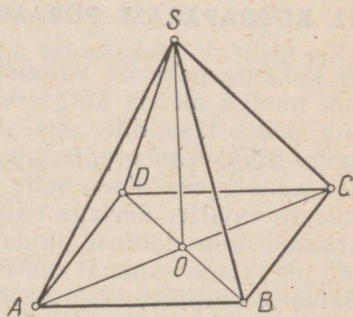
Tõepoolest (joon. 224), iga külgtahuks olev kolmnurk on võrdhaarne, sest tema kaheks küljeks on püramiidi külgservad, ja kõik need võrdhaarsed kolmnurgad on võrdsed, sest neil on võrdsed alused (püramiidi põhiservad) ja võrdsed haarad (püramiidi külgservad).

2. Korrapärase püramiidi tippu põhja keskpunktiga ühendav lõik on püramiidi kõrgus, s. t. ta on risti püramiidi põhjaga.

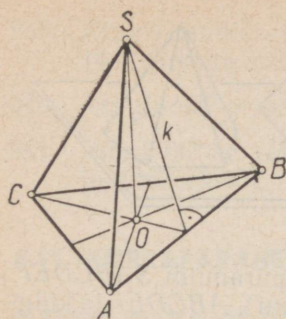
Vaatleme joonisel 224 kujutatud püramiidi tippu S põhja keskpunktiga O ühendavat lõiku SO . See lõik on võrdhaarse kolmnurga ASD tippu aluse AD keskpunktiga O ühendav lõik, seega $SO \perp AD$. Niisamuti $SO \perp BE$ ja $SO \perp CF$, üldiselt SO on risti iga sirgega, mis asetseb püramiidi põhja tasandil ja läbib punkti O . Seepärast ütlemegi, et sirge SO on risti püramiidi põhjaga.



JOON. 224



JOON. 225

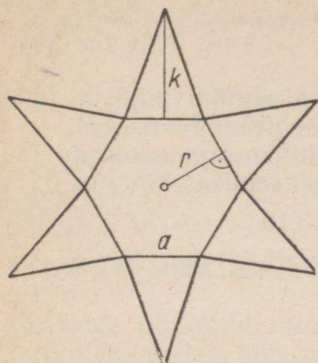


JOON. 226

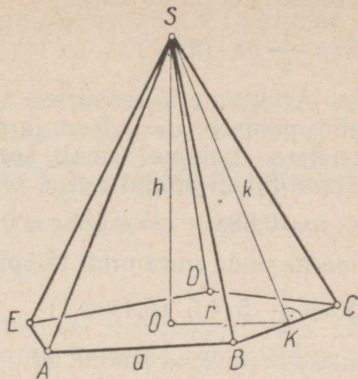
942. Kirjelda korrapärase nelinurkse püramiidi tahke (joon. 225). Mitmes suuruses on sel püramiidil servi? Avalda servade kogupikkus s , kui põhiserva pikkus (sentimeetrites) on a ja külgserva pikkus b . Arvuta s , kui $a=15,4$ ja $b=21,6$.
943. Kirjelda korrapärase kolmnurkse püramiidi tahke (joon. 226). Avalda selle püramiidi servade kogupikkus s , kui põhiserva pikkus on a ja külgserva pikkus on b .
944. Egiptuse suurima püramiidi põhiserv on 233 m. Kui suur on selle püramiidi põhja übermõõt?
945. Korrapärase viisnurkse püramiidi põhiserv on 14,8 cm ja servade kogupikkus on 166 cm. Kui pikk on külgserv?
946. Korrapärase kuusnurkse püramiidi külgserv on 3,5 cm võrra pikem kui põhiserv ja servade kogupikkus on 123 cm. Leia servade pikkused.
947. Mitu tahku ja tippu on püramiidil, millel on 18 serva?
948. Mitu serva ja tippu on püramiidil, millel on 8 tahku?
949. Mitu tahku ja serva on püramiidil, millel on t tippu?

8.12. KORRAPÄRASE PÜRAMIIDI PINNALAOTUS JA PINDALA

Kui lõikame paberist valmistatud korrapärase kuusnurkse püramiidi mudeli mööda külgservi lahti ja pöörame külgtahud püramiidi põhja tasandile, siis saame selle püramiidi **pinnalaotuse** (joon. 227). Ümberpöördult: püramiidi mudeli valmistamiseks tuleb esmalt joonestada selle pinnalaotus, varustada see kinnikleepimiseks vajalike äärtega välja lõigata ja kleepida püramiidiks. Püramiidi pinnalaotuse pindala ehk, teisiti, püramiidi kõikide tahude pindalade summat nimetatakse **püramiidi pindalaks**. Leiame korrapärase n -nurkse püramiidi pindala, kui püramiidi põhiserv on a , põhja apoteem on r ja püramiidi külgtahu kõrgus on k (joon. 227 ja 228).



JOON. 227



JOON. 228

Korrapärase püramiidi külgtahu kõrgust nimetatakse ka **püramiidi apoteemiks**.

Leiame esmalt püramiidi **külgpindala** S_k , s. o. külgtahkude pindalade summa:

ühe külgtahu pindala on $\frac{a \cdot k}{2}$;

n külgtahu pindala on $n \cdot \frac{a \cdot k}{2} = \frac{1}{2} na \cdot k$.

Seega

$$S_k = \frac{1}{2} na \cdot k.$$

Et na on püramiidi põhja übermõõt, siis

korrapärase püramiidi külgpindala võrdub põhja übermõõdu ja püramiidi apoteemi poole korrutisega.

Selleks et saada püramiidi pindala ehk täispindala S , tuleb külgpindalaga liita veel põhja pindala S_p :

$$S = S_k + S_p.$$

Et korrapärase hulknurga pindala võrdub hulknurga übermõõdu ja apoteemi poole korrutisega, siis

$$S_p = \frac{1}{2} na \cdot r.$$

Asendades S_k ja S_p nende avaldistega, saame korrapärase püramiidi pindala kujul

$$S = \frac{1}{2} na \cdot k + \frac{1}{2} na \cdot r,$$

mida võib kirjutada ka kujul

$$S = \frac{1}{2} na \cdot (k+r). \quad (*)$$

Näide. Arvutame korrapärase viisnurkse püramiidi pindala, kui püramiidi põhiserv $a=4,5$ cm ja püramiidi apoteem $k=6,4$ cm.

Lahendus. Leiame esmalt korrapärase hulknurga apoteemi ja külje suhte tabeli põhjal antud viisnurga apoteemi:

$$r: a=0,688 \Rightarrow r=0,688a=0,688 \cdot 4,5 \approx 3,10.$$

Rakendame nüüd püramiidi täispindala valemit (*):

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4,5 \cdot (6,4+3,1).$$

Arvutuse tulemusena saame, et

$$S \approx 110.$$

950. Joonesta korrapärase nelinurkse püramiidi pinnalaotus ja valmista püramiidi mudel, kui põhiserv $a=6$ cm ja külgserv $b=7$ cm. Arvuta saadud püramiidi pindala.

951. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a ja apoteem k . Avalda põhja pindala S_p , külgpindala S_k ja täispindala S .

952. Arvuta korrapärase nelinurkse püramiidi põhja pindala, külgpindala ja täispindala järgmise tabeli andmeil:

Põhiserv	4 cm	1,8 dm	6,2 dm	8 m
Apoteem	3,5 cm	2 dm	4,4 dm	6,5 m

953. Arvuta mingi püramiidi pindala, mõõtes selleks tarvilikud suurused mudelilt.

954. Kui palju kulub plekki korrapärase kuusnurkse püramiidi külgpinna mudeli valmistamiseks, kui mudeli põhiservaks võtta 6 cm ja apoteemiks 12 cm?

955. Pioneerid ehitasid telgi, mis oli kujult korrapärase nelinurkne püramiid põhiservaga 2,8 m ja apoteemiga 2,6 m. Kui suur on telgi külgpindala?

956. Korrapärase viisnurkse püramiidi põhiserv on 6 cm ja külgserv on 7 cm. Leia püramiidi külgpindala.

957. Leia korrapärase kolmnurkse püramiidi täispindala, kui põhiserv on 8 cm ja külgserv on 5 cm.

958. Paviljoni katus on korrapärase kaheksanurkse püramiidi külgpinna kujuline. Katuseräästa pikkus on igast küljest 2,5 m ja katuse kõrgeima punkti kaugus räästast on 3,2 m.

Kui kalliks läheb katuse katmine plekiga, kui katusepleki ruutmeeter maksab 1,20 rbl. ja ühe ruutmeetri katmine maksab 0,05 rbl.?

959. Kui palju pilpaid kulub maja katuse tegemiseks, kui see on nelinurkse püramiidi külgpinna kujuline, kusjuures räästa pikkus on igast küljest 12,5 m, katuse kõrgeima punkti kaugus räästast on 7,2 m ja 1 m² katmiseks kulub 120 pilbast?

8.13. PÜRAMIIDI RUUMALA.

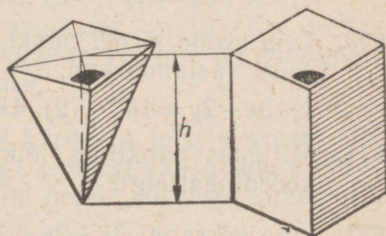
Määrame püramiidi ruumala katselisel teel, kasutades selleks kaht nõu, millest üks on püstprisma- ja teine püramiidikujuline, kusjuures nende nõude põhja pindalad on võrdsed ja kõrgused on võrdsed (joon. 229). Kasutades näiteks peent liiva, saame näidata, et prismakujuline nõu mahutab parajasti 3 püramiidikujulise nõu täit liiva. See katse näitab, et kui prisma ja püramiid on võrdsete põhja pindaladega ja võrdsete kõrgustega, siis püramiidi ruumala on $\frac{1}{3}$ prisma ruumalast. Saab tõestada, et katse tulemus on täpne. Et prisma ruumala võrdub põhja pindala S_p ja kõrguse h korrutisega, siis

püramiidi ruumala võrdub ühe kolmandikuga põhja pindala ja kõrguse korrutisest:

$$V = \frac{1}{3} S_p h.$$

960. Arvuta korrapärase nelinurkse püramiidi ruumala järgmise tabeli andmeil.

Põhiserv	8 cm	4,6 cm	18 dm	3 m
Kõrgus	15 cm	5,4 cm	4 dm	8 dm



JOON. 229

961. Kui palju kaalub tammepuust korrapärase kuusnurkne püramiid, mille põhiserv on 18 cm ja kõrgus 25 cm (1 cm^3 tammepuitu kaalub 0,8 gf)?
962. Kui palju kaalub korgist korrapärase nelinurkne püramiid, mille põhiserv on 8 dm ja kõrgus on 1,4 m, kui 1 cm^3 korki kaalub 0,2 gf?
963. Korrapärase nelinurkse püramiidi kujuline tükk elevandiluu kaalub 14 gf. Selle püramiidi põhiserv on 2,5 cm ja kõrgus 3,6 cm. Leia 1 cm^3 elevandiluu kaal.
964. Kui kõrge peab olema vasest püramiid, et ta kaaluks 217 gf, kui püramiidi põhja pindala on $18,5 \text{ cm}^2$?
965. Kuidas muutub püramiidi ruumala, kui tema põhja pindala ei muutu, kuid kõrgus suureneb 3 korda, 12 korda, 15 korda?
966. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on 6 cm. Anna valem ruumala arvutamiseks, kui püramiidi kõrgus on h . Kuidas sõltub ruumala kõrgusest?
967. Egiptuse suurima püramiidi (Cheopsi püramiidi) põhiserv on 233 m ja kõrgus oli esialgu 147 m (nüüd 137 m). Mitu tonni kivi on tarvitatud selle ehitamiseks, kui kambrid ja käigud moodustavad õige väikese osa ruumalast ja kui kivi tihedus on 2600 kg/m^3 ?

9. ÜLESANDEID KORDAMISEKS.

968. Leia hulk

$$\{(x; y) \mid x \in A \text{ ja } 3x - 7y = 3\},$$

$$\text{kui } A = \left\{-1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{2}{3}\right\}.$$

969. Leia antud sirgel punkt, mille abstsiss ja ordinaat on võrdsed.

$$1) 2x + 3y = 10 \quad 2) 3x - 2y = 1 \quad 3) 3x - 3y = 5$$

970. Leia antud sirgel punkt, mille abstsiss ja ordinaat on teineteise vastandruud.

$$1) 3x - 2y = 10 \quad 2) 4x + 5y = 7 \quad 3) 2x + 2y = 1$$

971. Millistes punktides lõikavad sirged $x - y = 3$ ja $2x - 3y = 4$ koordinaattelgi?

972. Leia võrrandi $3x + 2y = 12$ naturaalarvulised lahendid.

973. Lahenda graafiliselt võrrandisüsteem.

$$1) \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 8x + 7y = 37 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x = y + 5 \\ 2y - 7 = 3x \end{cases}$$

974. Arvuta determinant.

$$1) \begin{vmatrix} -3,7 & 1,2 \\ 3,1 & -1,7 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{7} \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 12,1 & -3 \\ 15,7 & 5 \end{vmatrix}$$

975. Lahenda võrrandisüsteem.

$$1) \begin{cases} y = 3x - 3,5 \\ x = 4,5 + 2y \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x - 6y + 3 = 0 \\ 27y + 12x - 22 = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y(x-2) = xy + x + 14 \\ x(x+3) = x^2 + y - 7 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} (5x-8)(4y-3) = (4x+7)(5y+2) \\ (3x-7)(2y+9) = (2x+7)(3y-39) \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{2x-y}{3} + 3y = \frac{5x+2y+7}{2} - 3x - \frac{2}{3} \\ \frac{x+y}{4} - x = \frac{x}{3} - y + \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \frac{4x-2y}{5} + \frac{8x-1}{2} = \frac{20x-2y}{5} + 1,1 \\ \frac{y+12x}{5} + \frac{x}{2} = \frac{1}{10} + 3x \end{cases}$$

976. Leia sirge tõus ja algordinaat, kui sirge läbib antud punkte.

1) (1; 1) ja (-2; 16)

2) (2; 9) ja (-1; -12)

3) (3; 1,75) ja (-6; -4,25)

4) $\left(\frac{1}{3}; -2\right)$ ja (2; -7)

977. Otsitava kahekohalise arvu ristsumma on 13. Kui selles arvus numbrid vahetada, siis saame arvu, mis on esialgsest 45 võrra suurem. Leia otsitav arv.

978. Kui esimest arvu suurendada 2 korda ja teist 4 võrra, siis nende liitmisel saame 16. Kui aga esimest vähendada 3 võrra ja teist suurendada 4 korda, siis nende liitmisel saame 10. Leia need arvud.

979. Liivil ja Marikal on kokku 24 rbl. Kui Liivi annab oma rahast 6 rbl. Marikale, siis jääb talle niisama palju raha, kui oli enne Marikal. Kui palju raha oli esialgu Liivil ja kui palju Marikal?
980. Mallel, Annel ja Tiiul on kokku 100 pähklit, kusjuures Annel on 10 pähklit vähem kui Mallel. Kui aga Anne annaks 10 pähklit Tiiule, siis jääks viimasele 15 pähklit rohkem kui on Mallel. Mitu pähklit on igal tüdrukul?
981. On 3 bensiinivaati A , B ja C . Vaadis C on 40 l rohkem bensiini kui vaadis B . Kui vaadist C valada 50 l vaati A , siis on viimases 2 korda rohkem bensiini, kui jäi vaati C . Kui aga valada vaadist B 70 l vaati A , siis on viimases 130 l võrra rohkem bensiini, kui jäi vaati B . Mitu liitrit bensiini on igas vaadis?
982. Kui õpilased panna koolipinki ühekaupa, siis jääks 8 õpilast ilma kohata. Kui aga panna õpilased istuma kahekaupa, siis jääks klassis olevatest pinkidest 6 pinki vabaks. Mitu õpilast ja mitu koolipinki on klassis?
983. Ringjoone pikkus on diameetrist 2 m võrra suurem. Arvuta ringjoone pikkus ja diameeter.
984. Ringi ümbermõõt on raadiusest 25 cm pikem. Arvuta ringi ümbermõõt ja läbimõõt.
985. Arvuta kordajad a ja b , kui sirge $ax+by=1$ läbib antud punkte.
- 1) $(3; 2)$ ja $(-5; -4)$ 2) $(-2; -1\frac{3}{4})$ ja $(-1; -1)$
 3) $(-1; 1)$ ja $(\frac{1}{2}; 0)$ 4) $(2; -1)$ ja $(-2,5; 0,8)$
986. Leia võrrandisüsteemi ligikaudne lahend kolme tüvenumbri-ga. Arvutamisel kasuta lükatit.
- 1) $\begin{cases} 9x+y=-27 \\ x+0,9y=-5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2,97x-y=1 \\ x-4,5y=3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5,6x-1,7y=-9 \\ 0,9x+3y=4 \end{cases}$
987. Kahel riulil on raamatuid. Kui esimeselt riulilt panna 8 raamatut teisele riulile, siis jääb esimesele 1,5 korda vähem raamatuid kui teisele. Kui teiselt riulilt panna 2 raamatut esimesele, siis on esimesel 2 korda rohkem raamatuid kui teisel. Mitu raamatut on kummalgi riulil?
988. Kahe arvu summa on 42. Leia need arvud, kui on teada, et ühe arvu suurendamisel 40% võrra ja teise vähendamisel 30% võrra nende arvude summa ei muutu.

989. Leia arvu x tükked.

- 1) $x=3,7(\pm 0,1)$ 2) $x=0,293(\pm 0,002)$ 3) $x=123(\pm 0,5)$
4) $x=0,21(\pm 0,03)$ 5) $x=450(\pm 10)$ 6) $x=4,27(\pm 0,03)$

990. Leia ligikaudse arvu relatiivse vea ülemmäär.

- 1) $384(\pm 1)$ 2) $12,5(\pm 0,1)$ 3) $10,3(\pm 0,05)$
4) $0,0032(\pm 0,0001)$ 5) $19,3(\pm 0,5)$ 6) $1397(\pm 3)$

991. Arvuta ligikaudsete arvudega.

- 1) $12,93 \cdot 0,873$ 2) $132,497 + 19,41$
3) $1397,25 - 497,9$ 4) $18,75 : 0,875$
5) $19,3 \cdot 11,2 + 4,97 : 0,89 - 39,4$ 6) $19,4 \cdot 0,27 \cdot (3,82 + 17,5)$

992. Korrapärase nelinurkse püramiidi mudeli mõõtmisel saadi, et püramiidi põhiserv on 18,5 cm ja kõrgus 28,7 cm. Arvuta püramiidi ruumala.

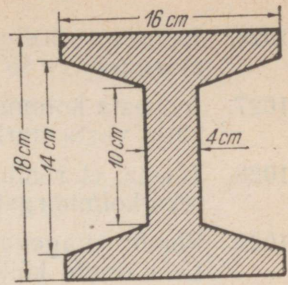
993. Korteris on 3 tuba ja köök. Reinondikulude arvutamiseks mõõdeti need ja saadi, et tubade mõõtmed on $4,65 \text{ m} \times 3,82 \text{ m}$, $5,60 \text{ m} \times 3,85 \text{ m}$ ja $3,57 \text{ m} \times 3,27 \text{ m}$ ning köögi mõõtmed $3,10 \text{ m} \times 3,55 \text{ m}$. Toa põrandat värvitakse värviga, mille kilogramm maksab 1 rbl. 50 kop., köögi põrandat aga värviga, mille kilogramm maksab 1 rbl. 20 kop. Maalri käsi- raamatust leiti, et 1 m^2 katmiseks kulub keskmiselt 180 grammi värvi. Kui palju maksab nimetatud ruumide värvimine?

994. Ajalehe andmeil koristas üks kombainer koristusperioodi algusest kuni 7. augustini 55 hektarilt 1054 ts teravilja, koristusperioodi algusest kuni 14. augustini aga 88 hektarilt 1623 ts. Teise kombaineri kohta on vastavad arvud 29 ha ja 831 ts ning 62 ha ja 1533 ts. Arvuta kummagi kombaineri kohta teravilja keskmine hektarisaak koristusperioodi algusest kuni 7. augustini, koristusperioodi algusest kuni 14. augustini ja ajavahemikul 7. augustist kuni 14. augustini.

995. Lahenda võrrandisüsteem, kui süsteemi kordajad on ligikaudsed arvud.

$$\begin{array}{l} 1) \begin{cases} 3,2u - 12,4v = 0,87 \\ 1,7u + 0,83v = 11,3 \end{cases} \\ 2) \begin{cases} 232x + 19,4y = 56,3 \\ 3,47x + 0,15y = 12,1 \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 0,83x - 0,037y = 1,03 \\ 2,89x + 1,03 + 1,03y = 0,392 \end{cases} \\ 4) \begin{cases} 12,7s + 0,93t = 10,37 \\ 3,9s - 11,2t = -3,81 \end{cases} \end{array}$$

996. Jalgratta ratta läbimõõt on ligikaudu 71 cm. Mitu pööret teeb ratas ühes tunnis, kui jalgrattur sõidab ligikaudu 18 km tunnis? Mitu pööret teeb ratas samadel andmetel ühes minutis?
997. Ruudukujulisest plekitükist, mille serva pikkus on ligikaudu 6,7 cm, lõigatakse välja võimalikult suure diameetriga ring. Mitu protsenti on selle ringi übermõõt ruudu übermõödust ning mitu protsenti on ringi pindala ruudu pindalast? Mitme protsendi võrra on ruudu pindala suurem ringi pindalast?
998. Ruudukujulisest plekitükist, mille serva pikkus on a , lõigatakse välja võimalikult suure diameetriga ring. Mitu protsenti on selle ringi pindala ruudu pindalast ja mitu protsenti on ringi übermõõt ruudu übermõödust?
999. Jalgratta vedaval ketirattal on 40 hammast ja veetaval ketirattal 16 hammast. Mitu korda peab jalgrattur suruma kummagi jalaga pedaalile, et läbida ilma vabajooksuta 1 km, kui jalgratta ratta läbimõõt on ligikaudu 71 cm?
Näpunäide. Arvuta hammasrataste hammaste arvude järgi, mitu pööret teeb jalgratta ratas, kui vedav ketiratas teeb ühe ringi.
1000. Sõiduauto ratta läbimõõt on ligikaudu 67 cm. Mitu pööret teeb ratas ühes minutis, kui kiirusemõõtja näitab 65 kilomeetrit tunnis?
1001. Majand sai viljakoristamisel ühelt põllult, mille pindala on 5,7 ha, 128 ts teri ja teiselt põllult, mille pindala on 6,4 ha, 164 ts teri. Kui suur oli keskmine hektarisaak mõlemalt põllult kokku?
1002. Missuguseid nurki nimetatakse kõrvnurkadeks?
1003. Missuguseid nurki nimetatakse tippnurkadeks?
1004. Missugused on kahe sirge paralleelsuse tunnused?
1005. Arvuta kumera kaheksanurga sisenurkade summa. Kui suur on sama kaheksanurga välisnurkade summa?
1006. Arvuta kõik nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega, kui kahe lähisnurga summa on 217° ja samade nurkade vahe on 39° .
1007. Sirgete s ja t lõikamisel sirgega u tekkis kaks lähisnurka, mille summa oli 234° . Kui suured on nurgad, mis tekivad sirgete s ja t lõikumisel?
1008. Arvuta korrapärase viisteistnurga välisnurk ja sisenurk.
1009. Mitu pööret minutis peab tegema veduriratas, mille läbimõõt on 1,75 m, et rongi kiirus oleks 60 km tunnis?
1010. Tõesta, et rombi pindala võrdub tema diagonaalide poole korrutisega.



JOON. 230

1011. Avalda täiusnurkse trapetsi pindala, kui tema alused on $x+2$ ja $3x-4$ ning lühem haar on $2x+1$.
1012. Arvuta joonisel 230 kujutatud raudtala ristlõike pindala.
1013. Sõnasta teoreemi *Kui kaht paralleelset sirget lõigata kolmanda sirgega, siis tekivad võrdsed põiknurgad* pöördteoreem, vastandteoreem ja pöördteoreemi vastandteoreem.
1014. Kirjuta teoreemi $A \Rightarrow B$ pöördteoreem, vastandteoreem ja pöördteoreemi vastandteoreem. Kui antud teoreem on õige, siis missugune teoreem on kindlasti ka õige?
1015. Kui hulk $M = \{3; 7; 9; 10; 13; 15\}$ ja $P = \{3; 6; 9; 12\}$, mis on siis $M \cap P$ ja mis on $M \cup P$?
1016. Mis on 3-ga jaguvate arvude hulga ja 5-ga jaguvate arvude hulga ühisosa?
1017. Mis on 3-ga jaguvate arvude hulga ja 9-ga jaguvate arvude hulga ühisosa, mis on nende ühend?
1018. Olgu P paarisarvude hulk, K kuuega jaguvate arvude hulk ja N naturaalarvude hulk. Kujuta nende hulkade seos diagrammina. Mis on P'_N ja K'_N ?
1019. Trapetsikujulise põllu rööbiti asetsevate külgede pikkused on 365 m ja 462 m, nende külgede kaugus teineteisest on 221 m. Sellel põllul kasvatati rukist, mille saak oli keskmiselt 31 ts hektarilt. Kui palju rukist saadi sellelt põllult?
1020. Millised on kolmnurga pikima külje tükked, kui sama kolmnurga kaks lühemat külge on 17,8 cm ja 24,6 cm?
1021. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on teisest 25% võrra suurem. Kui suured on need nurgad?
1022. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on 30% võrra suurem kui tipunurk. Kui suured on kolmnurga nurgad?
1023. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on 40% võrra suurem kui alusnurk. Kui suured on kolmnurga nurgad?
1024. Võrdhaarse trapetsi pikem alus on 4 dm, haar 1 dm ja nendevaheline nurk 60° . Leia lühem alus.
1025. Nimeta neli kolmnurkade võrdsuse tunnust.

1026. Joonesta võrdhaarne kolmnurk, mille haar on 4,5 cm ja alusnurk on 45° .
1027. Joonesta kolmnurk, millest on antud kaks külge ja suurema külje vastasnurk.
1028. Tõesta, et rombi diagonaalid jaotavad rombi neljaks võrdseks kolmnurgaks. Mis liiki need kolmnurgad on?
1029. Rombi diagonaal moodustab ühe küljega nurga $37^\circ 40'$. Leia rombi kõik nurgad.
1030. Tõesta, et rööpkülik, mille diagonaalid on teineteisega risti, on romb.
1031. Ehita kolmnurk, mille küljed on 4 cm, 6 cm ja 7 cm, ning leia punkt, mis asetseb võrdsetel kaugustel kõige pikema külje otspunktidest ja võrdsetel kaugustel kõige väiksema nurga haaradest.
1032. Ehita võrdhaarne trapets, mille pikem alus on 6 cm, kõrgus 2 cm ja haar 2,5 cm.
1033. Ehita romb, mille külg on 3,5 cm ja üks diagonaal on 2 cm.
1034. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi pikkus on 12 cm. Kui kaugel on mediaanide lõikepunkt täisnurga tipust?
1035. Leia vektorite summa $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE}$.
1036. On antud rööpkülik $ABCD$. Leia vektorite summa $\vec{AC} + \vec{BD}$.
1037. Lihtsusta vektoravaldist $3(2\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c}) - 2(1,5\vec{a} + 3\vec{b}) + 6(5\vec{a} - 0,5\vec{c})$.
1038. Lihtsusta vektoravaldist $1,5(\vec{x} - 3\vec{y}) - 2,5(2\vec{x} + \vec{y}) - 3(1,5\vec{x} - 4\vec{y})$.
1039. Arvsirgel on märgitud punktid $O(0)$, $A(2)$, $B(-5)$ ja $C(6)$. Avalda vektori \vec{OA} kaudu vektorid \vec{OC} , \vec{OB} , \vec{BC} ja \vec{AB} .
1040. Joonesta viisnurk, mis koosneb ruudust küljega x ja kahest võrdhaarsest täisnurksest kolmnurgast hüpotenuusiga x . Avalda viisnurga pindala S muutuja x funktsioonina.

Korrapärase hulknurga apoteemi ja külje suhe.

Külgede arv n	3	4	5	6	7	8	9	10	12
Apoteemi ja külje suhe $r : a$	0,289	0,5	0,688	0,866	1,04	1,21	1,37	1,54	1,87

SISUKORD.

1. Kordamiseks ja täiendamiseks.	3
1.1. Arvud ja avaldised. (A. Vihman)	3
1.2. Hulgad. (E. Etverk)	9
1.3. Võrrandid. (A. Telgmaa)	14
1.4. Mis on definitsioon. (E. Etverk)	16
1.5. Mis on algmõiste. (E. Etverk)	17
1.6. Aksiom ja teoreem. (E. Etverk)	18
1.7. Teoreemi koostis. (E. Etverk)	20
2. Lihtsamad ratsionaalavaldised. (A. Vihman)	24
2.1. Üksliikme kanooniline kuju.	24
2.2. Üksliikmete suurim ühistegur.	25
2.3. Algebraalne murd. Ratsionaalavaldis.	27
2.4. Murru põhiomadus.	29
2.5. Murru taandamine.	31
2.6. Üksliikmete vähim ühiskordne.	32
2.7. Murru laiendamine.	34
2.8. Murdude teisendamine ühenimelisteks.	36
2.9. Murdude liitmine ja lahutamine.	39
2.10. Murdude korrutamine.	46
2.11. Murru astendamine.	49
2.12. Murdude jagamine.	50
2.13. Kordamiseks.	54
3. Arvutamine ligikaudsete arvudega. Arvutus- lükati. (A. Telgmaa, A. Vihman)	57
3.1. Täpsed ja ligikaudsed arvud.	57
3.2. Ligikaudse arvu viga ja vea ülemmäär.	59
Mis on ligikaudse arvu viga.	59
Vea ülemmäär ja arvu tõkked.	59
Ümardamisvea ülemmäär.	61
3.3. Summa ja vahe vea ülemmäär.	62
3.4. Ligikaudse arvu relatiivse vea ülemmäär.	64
3.5. Ligikaudse arvu kirjutamisviise.	67
Ligikaudse arvu õiged numbrid ja standardkuju.	67
Krölovi reegel.	69

3.6.	Arvu tüvenumbrid.	72
3.7.	Ligikaudsete arvude liitmine ja lahutamine.	74
	Missugused numbrid tuleb vastuses säilitada.	74
	Kuidas tööd kergendada.	76
3.8.	Ligikaudsete arvude korrutamine ja jagamine.	80
	Missugused numbrid tuleb vastuses säilitada.	80
	Kuidas tööd kergendada.	83
3.9.	Varunumbri kasutamine mitme tehtega ülesandes.	87
3.10.	Skaala.	92
3.11.	Arvude lugemine ja märkimine skaalal.	93
3.12.	Lükati põhiskaalade omadus.	102
3.13.	Vörde tundmatu liikme leidmine.	103
3.14.	Korrutamine.	105
3.15.	Protsentide leidmine.	107
3.16.	Jagamine.	107
3.17.	Arvu leidmine tema protsentides antud osa järgi.	109
3.18.	Kahe arvu suhe protsentides.	110
4. Sirgete paralleelsus. (E. Etverk)		111
4.1.	Kahe sirge vastastikune asend tasandil.	111
4.2.	Nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikamisel sirgega.	112
4.3.	Kahe sirge paralleelsuse tunnused.	113
4.4.	Paralleelide aksioom ja järeldusi sellest.	116
4.5.	Kahe paralleelse sirge lõikamine sirgega.	118
4.6.	Teoreem ja pöördteoreem.	119
4.7.	Vastavalt paralleelsete haaradega nurgad.	122
4.8.	Vastavalt ristuvate haaradega nurgad.	123
4.9.	Kolmnurga nurkade omadusi.	125
4.10.	Kumera hulknurga nurkade omadusi.	127
4.11.	Kolmnurga suurem külj ja selle vastasnurk.	129
4.12.	Kolmnurga kahe külje summa ja vahe võrdlemine kolmanda küljega.	130
4.13.	Teoreem ja vastandteoreem.	132
4.14.	Vastuväiteline tõestus.	133
5. Funktsionaalne sõltuvus. (A. Undusk)		135
5.1.	Kahe hulga elementide vaheline vastavus.	135
5.2.	Kahe hulga ristkorutus.	139
5.3.	Relatsioon.	141
5.4.	Funktsioon.	143
5.5.	Funktsiooni graafik.	146
5.6.	Funktsioon $y=ax$.	150
5.7.	Funktsiooni $y=ax$ graafik.	152
5.8.	Lineaarfunktsioon.	155
5.9.	Lineaarfunktsiooni graafik.	157
5.10.	Funktsioon $y=\frac{a}{x}$.	160

5.11. Funktsiooni $y = \frac{a}{x}$ graafik.	164
5.12. Funktsioon $y = x^2$.	166
5.13. Funktsiooni $y = x^2$ graafik.	168
5.14. Ruutude tabel.	170
5.15. Lineaarne interpolatsioon.	172
5.16. Arvu ruudu leidmine lükati abil.	174
5.17. Pöördarvude tabel.	176
5.18. Funktsioon $y = ax^2$.	179
5.19. Funktsiooni $y = ax^2$ graafik.	181
5.20. Arvu ruutjuur.	184
5.21. Ruutjuure lähisväärtus.	186
5.22. Ruutjuure lähisväärtuse arvutamine.	187
5.23. Ruutjuure omadusi.	189
5.24. Ruutjuurte tabel.	191
5.25. Ruutjuure leidmine graafikult.	194
5.26. Ruutjuure leidmine lükatil.	195

6. Kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteem.

(A. Telgmaa)

	197
6.1. Kahe muutujaga lineaarvõrrand.	197
Kahe muutujaga võrrand ja selle lahend.	197
Kahe muutujaga lineaarvõrrandi normaalkuju.	198
Kahe muutujaga lineaarvõrrandi lahendihulk.	200
6.2. Kahe muutujaga lineaarvõrrandi graafik.	203
Sirgjoone võrrand.	203
Sirge tõus ja algordinaat.	206
6.3. Kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteem.	208
6.4. Kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteemi graafiline lahendamine.	210
6.5. Kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteemi algebraline lahendamine.	213
Liitmisvõte.	213
Asendusvõte.	215
Võrrandisüsteemi lahendivalemid.	217
6.6. Ülesannete lahendamine võrrandisüsteemi abil.	224

7. Tsentraalsümmeetria. (E. Etverk)

	231
7.1. Peegeldus punktist.	231
7.2. Riba sümmeetriakeskpunkt.	234
7.3. Rööpküliku sümmeetria.	235
7.4. Rööpküliku tunnused.	237
7.5. Rööpküliku eriliigid.	239
7.6. Ristküliku, rombi ja ruudu omadused.	240
7.7. Kolmnurga kesklõik.	242
7.8. Trapetsi kesklõik.	243

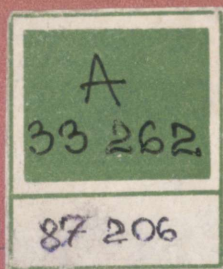
7.9. Kolmnurga mediaanide lõikumine.	245
7.10. Lükke vektor.	247
7.11. Vektorite võrdsus.	249
7.12. Tehted vektoritega.	250
Vektorite summa.	250
Vektorite vahe.	252
Vektori korrutamise arvuga.	253
8. Ringjoon, Korrapärane püramiid. (E. Etverk)	256
8.1. Ringjoon ja ring.	256
8.2. Ringjoone sümmeetria.	257
8.3. Sirge ja ringjoone vastastikune asend.	259
8.4. Ringjoone puutuja omadusi.	260
8.5. Kahe ringjoone vastastikune asend.	262
8.6. Piirdenurk.	265
8.7. Ringjoone pikkus.	270
8.8. Ringi ümbermõõdu tabel.	273
Ringi ümbermõõdu leidmine läbimõõdu järgi.	273
Ringi läbimõõdu leidmine ümbermõõdu järgi.	275
8.9. Ringi pindala.	278
8.10. Ringi pindala tabel.	281
8.11. Korrapärane püramiid.	284
8.12. Korrapärase püramiidi pinnalaotus ja pindala.	286
8.13. Püramiidi ruumala.	289
9. Ülesandeid kordamiseks. (A. Telgmaa, E. Etverk)	290

Эльмар Этверк, Аксель Тельгмаа, Аугуст Ундуск, Арнольд Вихман. Математика для VII класса. Пробный учебник. На эстонском языке. Обложка Р. Тунгла. Издательство «Вальгус». Таллин, Пярнуское шоссе, 10.

Toimetajad M. Kärner ja K. Kallaste. Kunstiline toimetaja H. Keigo. Tehniline toimetaja E. Sagrais. Korrektorid E. Kask ja M. Sepp.

Laduda antud 9. III 1973. Trükkida antud 4. V 1973. Kohila Paberivabriku trükipaber nr. 2, 60×90/16. Trükipoognaid 18,75. Arvestuspoognaid 15,47. Trükiarv 27 000. Tellimuse nr. 1450. Kirjastus «Valgus», Tallinn, Pärnu mnt. 10. Trükikoda «Kommunist», Tallinn, Pikk t. 2. Hind 28 kop.

28 kop.



TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00455327 9