Tartu Ülikool
Matemaatika-informaatikateaduskond
Matemaatika instituut

Inger-Helen Maadik

Integraali keskväärtusteoreemid: keskväärtust määravate punktide asümptootiline käitumine

Bakalaureusetöö

Juhendaja: *prof.* Toivo Leiger

Autor:
Juhendaja:
Instituudi juhataja:

Tartu 2013

Sisukord

Sissejuhatus **2**

1. Keskväärtust määrava punkti käitumine lihtsate keskväärtus-teoreemide puhul **6**

1.1 6

1.2 10

2. Keskväärtust määrava punkti käitumine kaalutud keskväärtus-teoreemide puhul **17**

2.3 17

2.4 21

3. Keskväärtust määrava punkti käitumine avaramatel tingimustel kaalutud keskväärtusteoreemi puhul **26**

3.1 26

3.2 34

Summary **38**

Kirjandus **40**

Sissejuhatus

Integraalidega seotud keskväärtusteoreemidest on kõige tuntum ja lihtsam järgmine teoreem.

Teoreem 0.1 (integraalarvutuse lihtne keskväärtusteoreem). *Kui* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *on pidev funktsioon, siis leidub* $c \in (a,b)$ *nii, et*

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b-a).$$

Integraalarvutuse lihtne keskväärtusteoreem 0.1 on vahetu järeldus järgmisest diferentsiaalarvutuse Lagrange'i keskväärtusteoreemist.

Teoreem 0.2 (Lagrange'i keskväärtusteoreem). *Olgu* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *pidev funktsioon, mis vahemikus* (a,b) *on diferentseeruv. Siis leidub selline* $c \in (a,b)$, *et*

$$F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}.$$

Tõepoolest, kui $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidev funktsioon, siis seosega

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

määratud funktsioon $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv ja $F'(x) = f(x)$ iga $x \in [a,b]$ korral. Kuna funktsioon F rahuldab Lagrange'i teoreemi 0.2 eeldusi, siis leidub selline $c \in (a,b)$, et

$$f(c) = F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt,$$

mis on teoreemi 0.1 väide.
Teoreem 0.1 on erijuht järgmisest üldisemast väitest.

Teoreem 0.3 (**integraalarvutuse (esimene) kaalutud keskväärtusteoreem**). *Kui funktsioon* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *on pidev ja* $g\colon [a,b] \to [0,\infty)$ *on Riemanni mõttes integreeruv funktsioon, siis leidub* $c \in [a,b]$ *nii, et*

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt.$$

Termini *kaalutud keskväärtusteoreem* põhjenduseks võrdleme keskväärtust $f(c)$ kaalutud keskmistega. Olgu $p_1,\dots,p_n \geq 0$ sellised, et $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k > 0$. Arvude $x_1,\dots,x_n$ kaalutud keskmisteks (kaalude $p_1,\dots,p_n$ suhtes) nimetatakse arvu

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}\sum_{k=1}^{n} p_k x_k.$$

Teoreemis 0.3 on kaaludeks funktsiooni g väärtused $g(x)$ ($x \in [a,b]$) ja arv

$$f(c) = \frac{1}{\int_a^b g(t)\,dt}\int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

on funktsiooni f kaalutud keskmine.

Teoreem 0.4 (**integraalarvutuse (teine) kaalutud keskväärtusteoreem**). *Kui* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *on monotoonne funktsioon ja* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *on Riemanni mõttes integreeruv lõigus* $[a,b]$, *siis leidub* $c \in [a,b]$ *nii, et*

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt + f(b)\int_c^b g(t)\,dt.$$

Punkti c igas eespool esitatud keskväärtusteoreemis nimetame edaspidi keskväärtust määravaks punktiks. See punkt ei ole üldjuhul ühegi teoreemi korral üheselt määratud. Käesoleva bakalaureusetöö eesmärgiks on kirjeldada nende punktide käitumist protsessis $b \to a$. Selleks sõnastame keskväärtusteoreemid suvalises lõigus $[a,x]$, kus $x \in (a,b]$, ja kirjutame eespool toodud seosed vastavalt kujul

$$f\bigl(c(x)\bigr) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt,$$

$$f\bigl(c(x)\bigr) = \frac{1}{\int_a^x g(t)\,dt}\int_a^x f(t)g(t)\,dt$$

ja

$$\int_a^x f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^{c(x)} g(t)\,dt + f(x)\int_{c(x)}^x g(t)\,dt$$

ning püüame leida piirväärtust

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}.$$

Seejuures piirväärtuse $\lim\limits_{x\to a}$ all me mõtleme parempoolset piirväärtust $\lim\limits_{x\to a+}$. Analoogiliselt tähendab järgnevas valemis $f'(a)$ parempoolset tuletist lõigu otspunktis a:

$$f'(a+) := \lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Edaspidiste tähistuste kohta märgime veel, et me kirjutame

$$\omega(x) = o(x-a) \quad (x\to a),$$

kui

$$\frac{1}{x-a}\omega(x) = o(1), \quad \text{s.t. } \lim_{x\to a}\frac{\omega(x)}{x-a} = 0.$$

Käesolev bakalaureusetöö koosneb kolmest peatükist. Esimeses peatükis vaatleme lihtsaid keskväärtusteoreeme. Lähtume B. Jacobsoni [1] poolt tõestatud teoreemist, mille kohaselt keskväärtust määrav punkt läheneb protsessis $x\to a$ asümptootiliselt lõigu $[a,x]$ keskpunktile, kui eksisteerib nullist erinev tuletis $f'(a)$. Esimeses alapunktis esitame selle teoreemi tõestuse ning tõestame tema üldisema versiooni, kasutades Taylori valemit. Seejuures on meil aluseks Zhang Baolini töö [6]. Teine alapunkt on pühendatud J. G. Nikonorovi [3] poolt tõstatatud probleemile. Nimelt osutub, et lihtsa keskväärtusteoreemi puhul leidub keskväärtust määravate punktide hulgas suurim ning Nikonorovi teoreem väidab, et see punkt $c(x)$ rahuldab tingimust

$$\limsup_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a} \geq \frac{1}{e}.$$

Teine peatükk keskendub kaalutud keskväärtusteoreemidele. Lähtume M. Polezzi [4] poolt tõestatud teoreemist, mis ütleb, et esimese kaalutud keskväärtusteoreemiga 0.3 määratud punkt $c(x)$ rahuldab tingimust

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a} = \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}},$$

kui funktsioon $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ on punktis a k korda diferentseeruv, kusjuures $f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0$ ja $f^{(k)}(a)\neq 0$, ning $g(a)\neq 0$. Esimeses alapunktis, mille aluseks oli T. Trifi töö [7], tõestame selle teoreemi üldisema juhu ning lisaks uurime, kuidas käitub punkt $c(x)$ teise kaalutud keskväärtusteoreemi 0.4 puhul. Teises alapunktis uurime integraalarvutuse Cauchy tüüpi keskväärtusteoreemiga määratud punkti $c(x)$ ning näitame, et diferentseeruvate funktsioonide f ja g korral

$$\lim_{x\to a} \frac{\int_a^{c(x)} g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} = \frac{1}{2}.$$

See tulemus põhineb P. R. Merceri artiklil [2].
Kolmandas peatükis uurime samuti kaalutud keskväärtusteoreemidega määratud punkti $c(x)$ käitumist, aga pisut avaramatel eeldustel. Aluseks on W. J. Schwindi, Jun Ji ja D. E. Koditscheki artikkel [5]. Esimeses alapunktis tõestame selles artiklis esitatud teoreemi ning teises alapunktis selgitame teoreemi konteksti konkreetse füüsikalise sisuga näite abil, mis samuti pärineb artiklist [5].
Käesolev bakalaureusetöö on referatiivne.

1. Keskväärtust määrava punkti käitumine lihtsate keskväärtusteoreemide puhul

1.1

Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Nagu me eespool kokku leppisime, nimetame edaspidi arvu $c(x) \in [a,x]$ teoreemi 0.1 valemist

$$f\big(c(x)\big) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt \quad (x \in [a,b]) \tag{1.1}$$

integraali $\int_a^x f(t)\,dt$ *keskväärtust määravaks punktiks*. Üldjuhul neid punkte leida ei õnnestu, küll aga mõnel lihtsamal erijuhul.

Näide 1.1. Kui funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on defineeritud seosega $f(x) := x$, siis valem (1.1) saab kuju

$$c(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x t\,dt = \frac{x^2-a^2}{2(x-a)} = \frac{x+a}{2}.$$

Antud funktsiooni f puhul on keskväärtust määravaks punktiks lõigu $[a,x]$ keskpunkt.

Osutub, et suure osa punktis a diferentseeruvate funktsioonide f korral läheneb integraali $\int_a^x f(t)\,dt$ keskväärtust määrav punkt protsessis $x \to a$ asümptootiliselt lõigu $[a,x]$ keskpunktile $\frac{a+x}{2}$. Nimelt kehtib järgmine B. Jacobsoni [1] poolt tõestatud teoreem.

Teoreem 1.1. *Olgu funktsioon f pidev lõigus $[a,b]$. Kui f on diferentseeruv punktis a, $f'(a) \neq 0$ ning $c(x) \in [a,x]$ on integraali $\int_a^x f(t)\,dt$ keskväärtust määrav punkt, siis*

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a} = \frac{1}{2}. \tag{1.2}$$

Tõestus. L'Hospitali reegli abil saame, et

$$\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)\,dt - xf(a)+af(a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{2(x-a)}=\frac{f'(a)}{2}.$$

Teisalt, kuna $\lim\limits_{x\to a} c(x)=a$, siis teoreemi 0.1 põhjal

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)\,dt - xf(a)+af(a)}{(x-a)^2}&=\lim_{x\to a}\frac{f\big(c(x)\big)(x-a)-f(a)(x-a)}{(x-a)^2}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f\big(c(x)\big)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f\big(c(x)\big)-f(a)}{c(x)-a}\cdot\frac{c(x)-a}{x-a}\\&=f'(a)\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}.\end{aligned}$$

Niisiis kehtib võrdus

$$f'(a)\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}=\frac{f'(a)}{2}$$

ning, kuna $f'(a)\neq 0$, siis

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}=\frac{1}{2}.$$

□

Märgime, et seose (1.2) kohaselt $\dfrac{c(x)-a}{x-a}=\dfrac{1}{2}+o(1)$ ehk

$$c(x)=\frac{1}{2}(x-a)+a+o(x-a)=\frac{a+x}{2}+o(x-a)$$

protsessis $x\to a$, mis tähendabki, et *integraali* $\int_a^x f(t)\,dt$ *keskväärtust määrav punkt* $c(x)$ *läheneb protsessis* $x\to a$ *asümptootiliselt lõigu* $[a,x]$ *keskpunktile.*

1997. aastal laiendas Zhang Baolin artiklis [6] Jacobsoni poolt tõestatud teoreemi Taylori valemi abil sellistele funktsioonidele, mis on punktis a kaks korda diferentseeruvad. Ta tõestas järgmise teoreemi.

Teoreem 1.2. *Kui* f *on pidev funktsioon lõigus* $[a,b]$ *ja kaks korda diferentseeruv punktis* a *nii, et* $f'(a)=0$, $f''(a)\neq 0$, *ning* $c(x)$ *on integraali* $\int_a^x f(t)\,dt$ *keskväärtust määrav punkt, siis*

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Zhang esitas oma töös tõestuseta üldisema väite, mille me järgnevalt tõestame. Alustame järgmise teoreemist 0.3 järelduva lihtsa lemmaga.

Lemma 1.1. *Kui p on mittenegatiivne täisarv ja $\omega\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on selline pidev funktsioon, et $\lim\limits_{t\to a} \omega(t) = 0$, siis*

$$\int_a^x \omega(t)(t-a)^p\,dt = o\big((x-a)^{p+1}\big) \quad (x \to a).$$

Tõestus. Teoreemi 0.3 kohaselt leidub iga $x \in (a,b)$ korral selline $c(x) \in [a,x]$, et

$$\int_a^x \omega(t)(t-a)^p\,dt = \omega\big(c(x)\big)\int_a^x (t-a)^p\,dt = \frac{\omega\big(c(x)\big)}{p+1}(x-a)^{p+1}.$$

Kuna $\lim\limits_{x\to a} \omega\big(c(x)\big) = 0$, siis

$$\lim_{x\to a} \frac{\int_a^x \omega(t)(t-a)^p\,dt}{(x-a)^{p+1}} = \frac{1}{p+1}\lim_{x\to a} \omega\big(c(x)\big) = 0.$$

□

Teoreem 1.3. *Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon, mis punktis a on k korda diferentseeruv. Kui $f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0$ ja $f^{(k)}(a) \neq 0$ ning $c(x)$ on integraali $\int_a^x f(t)\,dt$ keskväärtust määrav punkt, siis*

$$\lim_{x\to a} \frac{c(x)-a}{x-a} = \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}.$$

Tõestus. Lähtume funktsiooni f Taylori valemist punktis a jääkliikmega Peano kujul:

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(t-a)^2 + \ldots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(t-a)^k + R_{k+1}(a,t),$$

kus

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{k+1}(a,t)}{(t-a)^k} = 0.$$

Seega võime jääkliikme $R_{k+1}(a,t)$ esitada kujul $\varepsilon(t)(t-a)^k$, kus $\lim\limits_{t\to a} \varepsilon(t) = 0$. Kuna $f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0$, siis

$$f(t) = f(a) + f^{(k)}(a)\frac{(t-a)^k}{k!} + \varepsilon(t)(t-a)^k \quad (t \in [a,b]). \tag{1.3}$$

Integreerides funktsiooni f üle lõigu $[a, x]$, on tulemuseks seos

$$\int_a^x f(t)\,dt = f(a)(x-a) + f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} + \int_a^x \varepsilon(t)(t-a)^k\,dt. \tag{1.4}$$

Võttes seoses (1.3) $t = c(x)$, kus $c(x)$ on integraali $\int_a^x f(t)\,dt$ keskväärtust määrav punkt, saame valemi

$$f\big(c(x)\big) = f(a) + f^{(k)}(a)\frac{(c(x)-a)^k}{k!} + \varepsilon\big(c(x)\big)(c(x)-a)^k,$$

seejuures $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon\big(c(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Teoreemi 0.1 põhjal

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)\,dt = f\big(c(x)\big)(x-a) = f(a)(x-a) &+ f^{(k)}(a)\frac{(c(x)-a)^k}{k!}(x-a)\\ &+ \varepsilon\big(c(x)\big)(c(x)-a)^k(x-a).\end{aligned} \tag{1.5}$$

Seostest (1.4) ja (1.5) tuleneb, et

$$\begin{aligned}&f(a)(x-a) + f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} + \int_a^x \varepsilon(t)(t-a)^k\,dt\\ &\qquad = f(a)(x-a) + f^{(k)}(a)\frac{(c(x)-a)^k}{k!}(x-a) + \varepsilon\big(c(x)\big)(c(x)-a)^k(x-a)\end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned}&f^{(k)}(a)(x-a)^{k+1} + (k+1)!\int_a^x \varepsilon(t)(t-a)^k\,dt\\ &\qquad = (k+1)f^{(k)}(a)(c(x)-a)^k(x-a) + (k+1)!\,\varepsilon\big(c(x)\big)(c(x)-a)^k(x-a).\end{aligned}$$

Niisiis,

$$\begin{aligned}&f^{(k)}(a) + (k+1)!\,\frac{\int_a^x \varepsilon(t)(t-a)^k\,dt}{(x-a)^{k+1}}\\ &\qquad - (k+1)f^{(k)}(a)\,\frac{(c(x)-a)^k}{(x-a)^k} - (k+1)!\,\frac{\varepsilon\big(c(x)\big)(c(x)-a)^k}{(x-a)^k} = 0\end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned}&f^{(k)}(a)\left(1 - \frac{(k+1)(c(x)-a)^k}{(x-a)^k}\right)\\ &\qquad + (k+1)!\left(\frac{\int_a^x \varepsilon(t)(t-a)^k\,dt}{(x-a)^{k+1}} - \frac{\varepsilon\big(c(x)\big)(c(x)-a)^k}{(x-a)^k}\right) = 0.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Lemma 1.1 põhjal
$$\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x \varepsilon(t)(t-a)^k\,dt}{(x-a)^{k+1}}=0$$
ning kuna $\left|\dfrac{(c(x)-a)^k}{(x-a)^k}\right|<1$ ja $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon\big(c(x)\big)=0$, siis ka
$$\lim_{x\to a}\frac{\varepsilon\big(c(x)\big)(c(x)-a)^k}{(x-a)^k}=0.$$
Tänu eeldusele $f^{(k)}(a)\neq 0$ tuleneb seosest (1.6), et
$$\lim_{x\to a}\left(1-\frac{(k+1)(c(x)-a)^k}{(x-a)^k}\right)=0$$
ehk
$$\lim_{x\to a}\frac{(c(x)-a)^k}{(x-a)^k}=\frac{1}{k+1},$$
mis on samaväärne võrdusega
$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}.$$
Teoreem on tõestatud. $\square$

1.2

Olgu $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ ja $x\in(a,b]$. Teoreemi 0.1 kohaselt ei ole hulk
$$D:=\left\{z\in[a,x]\mid f(z)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(\tau)d\tau\right\}$$
tühi. Kuna hulk D on ülalt tõkestatud, siis leidub $w:=\sup D$. Näitame, et $w=\max D$. Vastavalt ülemise raja definitsioonile leidub hulgas D selline jada (z_n), et $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=w$. Kuna funktsioon f on pidev punktis w, siis $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=f(w)$, seega
$$f(w)=\lim_{n\to\infty} f(z_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(\tau)d\tau=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(\tau)d\tau.$$
Järelikult $w\in D$ ja w on hulga D suurim element.
Tähistame selle peatüki lõpuni sümboliga $c(x)$ seda suurimat keskväärtust määravat punkti, s.t
$$f(t)\neq\frac{1}{x-a}\int_a^x f(\tau)d\tau\quad (t\in(c(x),x]). \tag{1.7}$$

Teoreem 1.4. *Kui $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidev funktsioon, siis*

$$\limsup_{x\to a} \frac{c(x)-a}{x-a} \geq \frac{1}{e},$$

s.t

$$\lim_{l\to a} \sup_{x\in(a,l)} \frac{c(x)-a}{x-a} \geq \frac{1}{e}.$$

Tõestus. Kõigepealt veendume, et üldisust kitsendamata võime eeldada, et $[a,b] = [0,1]$. Oletame, et väide on tõestatud lõigus $[0,1]$ pidevate funktsioonide puhul, ning näitame, et siis kehtib ta ka suvalises lõigus $[a,b]$ pidevate funktsioonide korral. Selle jaoks tähistame

$$\tau := \frac{x-a}{b-a}, \quad \text{s.t } \; x = (b-a)\tau + a,$$

ja

$$\upsilon(\tau) := f(x) = f\big((b-a)\tau + a\big) \quad (\tau \in [0,1]).$$

Kuna $\upsilon = f \circ w$, kus $w(\tau) := (b-a)\tau + a$, ning f ja w on pidevad funktsioonid, siis υ on pidev lõigus $[0,1]$. Eelduse kohaselt leidub selline $\tilde{c}(\tau) \in (0,\tau)$, et

$$\upsilon\big(\tilde{c}(\tau)\big) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \upsilon(\xi)d\xi$$

ja

$$\limsup_{\tau\to 0} \frac{\tilde{c}(\tau)}{\tau} \geq \frac{1}{e}.$$

Olgu

$$c(x) := (b-a)\tilde{c}(\tau) + a.$$

Siis, tähistades $t := (b-a)\xi + a$, saame, et

$$\begin{aligned} f\big(c(x)\big) &= f\big((b-a)\tilde{c}(\tau)+a\big) = \upsilon\big(\tilde{c}(\tau)\big) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \upsilon(\xi)d\xi = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f\big((b-a)\xi + a\big)d\xi \\ &= \frac{b-a}{x-a}\int_a^x f(t)d\left(\frac{t-a}{b-a}\right) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)d(t-a) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)d(t) \end{aligned}$$

ja

$$\frac{1}{e} \leq \limsup_{\tau\to 0} \frac{\tilde{c}(\tau)}{\tau} = \limsup_{x\to a} \frac{(c(x)-a)(b-a)}{(b-a)(x-a)} = \limsup_{x\to a} \frac{c(x)-a}{x-a}.$$

Seega piisab, kui vaadelda juhtu, kus $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.
Teiseks võime üldisust kitsendamata eeldada, et $f(0) = 0$. Üldjuhul, kui $f(0) = C$,

moodustame uue funktsiooni $\hat{f}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ seosega $\hat{f}(x) := f(x) - C$ ning paneme tähele, et talle vastav funktsioon $\hat{c}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ langeb kokku funktsiooni f poolt määratud funktsiooniga $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$\hat{f}\big(\hat{c}(x)\big) = \frac{1}{x}\int_0^x (f(\tau) - C)d\tau = f\big(c(x)\big) - C = \hat{f}\big(c(x)\big).$$

Niisiis eeldame järgnevas, et $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ on pidev funktsioon omadusega $f(0) = 0$. Defineerime funktsiooni $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ nii, et

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x = 0, \\ \dfrac{1}{x}\int_0^x f(\tau)d\tau, & \text{kui } x \in (0,1]\,. \end{cases}$$

On selge, et igas punktis $x \in (0,1)$ on g diferentseeruv ning

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1}{x}\right)' \int_0^x f(\tau)d\tau + \left(\int_0^x f(\tau)d\tau\right)' \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}\int_0^x f(\tau)d\tau + \frac{f(x)}{x} \\ &= \frac{1}{x^2}\left(xf(x) - \int_0^x f(\tau)d\tau\right) \end{aligned}$$

ja siit saame, et

$$f(x) = g(x) + xg'(x)$$

ehk

$$g'(x) = \frac{f(x) - g(x)}{x}.$$

Viimase võrduse kohaselt on funktsioon g' vahemikus $(0,1)$ pidev.
Tähistame

$$E := \{x \in (0,1) \mid g'(x) = 0\}$$

ja paneme tähele, et

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(\tau)d\tau$$

iga $x \in E$ korral. Teiseks märgime, et väide kehtib, kui $\inf E = 0$. Siis leidub hulgas E selline jada (x_n), et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, ja kuna $f(x_n) = \frac{1}{x_n}\int_0^{x_n} f(\tau)d\tau$ ehk $c(x_n) = x_n$, siis

$$\limsup_{x\to 0} \frac{c(x)}{x} \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{c(x_n)}{x_n} = 1 > \frac{1}{e}.$$

Järgnev osa tõestusest käsitleb juhtu, kui $\inf E > 0$.
Olgu $\inf E > 0$. Siis leidub selline $\varepsilon \in (0,1)$, et $g'(x) \neq 0$ iga $x \in (0,\varepsilon)$ korral. Funktsioon g' on pidev, järelikult säilitab ta märki. Seega võime üldisust kitsendamata

eeldada, et $g'(x) > 0$ vahemikus $(0, \varepsilon)$.
Oletame vastuväiteliselt, et mingi $k > e$ korral

$$\limsup_{x \to 0} \frac{c(x)}{x} < \frac{1}{k}. \tag{1.8}$$

Meie eesmärgiks on jõuda vastuoluni, teeme seda järgnevate sammude kaupa.

A. Tõestame järgmise väite:
(*) *leidub selline* $\delta \in (0, \varepsilon]$*, et iga* $x \in (0, \delta)$ *korral*

$$\frac{g(kx) - g(x)}{xg'(x)} < 1.$$

Oletame vastuväiteliselt, et sellist arvu $\delta \in (0, \varepsilon]$ ei leidu. Siis saame moodustada jada (x_n) nii, et $x_n \in (0, \varepsilon)$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ ja

$$\frac{g(kx_n) - g(x_n)}{x_n g'(x_n)} \geq 1. \tag{1.9}$$

Kuna x_n ja $g'(x_n)$ on positiivsed, siis kehtib võrratus $g(x_n) < g(x_n) + x_n g'(x_n)$, seose (1.9) kohaselt $g(x_n) + x_n g'(x_n) \leq g(kx_n)$. Kuna g on pidev funktsioon, siis tema väärtuste hulk $\{g(x) \mid x \in (0, 1)\}$ on intervall. Järelikult leidub iga $n \in \mathbb{N}$ korral $y_n \in [x_n, kx_n]$ nii, et $g(y_n) = g(x_n) + x_n g'(x_n)$. Nüüd aga saame, et

$$f\big(c(y_n)\big) = g(y_n) = g(x_n) + x_n g'(x_n) = f(x_n).$$

Siit järeldub võrratus $c(y_n) \geq x_n$: kui oletada, et $c(y_n) < x_n \leq y_n$, siis tingimuse (1.7) kohaselt $f(x_n) \neq \dfrac{1}{y_n} \int_0^{y_n} f(\tau) d\tau = g(y_n) = f\big(c(y_n)\big)$. Võrratusest $c(y_n) \geq x_n$ tuleneb, et

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{c(y_n)}{y_n} \geq \frac{x_n}{kx_n} = \frac{1}{k},$$

mis on vastuolus seosega (1.8). Sellega on väide (*) tõestatud.

B. Moodustame funktsiooni $\varphi\colon (-1, 0) \to \mathbb{R}$ seosega $\varphi(\alpha) := (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ ning paneme tähele, et

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

ja

$$\lim_{\alpha \to -1} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{\alpha \to -1} \frac{1}{(1 + \alpha)^{\frac{1}{-\alpha}}} = \infty.$$

Kuna φ on pidev funktsioon, siis tema väärtuste piirkonnaks on vahemik (e, ∞), niisiis leidub võrduse (1.8) kohaselt selline $\alpha_0 \in (-1, 0)$, et

$$(1 + \alpha_0)^{\frac{1}{\alpha_0}} = k.$$

Defineerime funktsiooni $h\colon\ [0, g(\delta)] \to \mathbb{R}$ nii, et $h\big(g(x)\big) = x^{\alpha_0}$, teisisõnu

$$h(y) := \big(g^{-1}(y)\big)^{\alpha_0} \quad (y \in [0, g(\delta)]).$$

Funktsioonidel $g\colon\ [0, \delta] \to \mathbb{R}$ ja $x \mapsto x^{\alpha_0}$ on pidev tuletis, seetõttu on ka funktsioonil h pidev tuletis vahemikus $(0, g(\delta))$, seejuures

$$h'\big(g(x)\big)g'(x) = \alpha_0 x^{\alpha_0 - 1} < 0 \quad (x \in (0, \delta))$$

ehk

$$h'(y) < 0 \quad \big(y \in (0, g(\delta))\big).$$

Peame silmas, et iga $x \in (0, \delta)$ korral $g'(x) > 0$. Järelikult on funktsioon h vahemikus $\big(0, g(\delta)\big)$ rangelt kahanev.
Kuna

$$(kx)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0} = x^{\alpha_0}(k^{\alpha_0} - 1) = \alpha_0 x^{\alpha_0} = x\alpha_0 x^{\alpha_0 - 1}$$

ja

$$h\big(g(kx)\big) = (kx)^{\alpha_0},$$

siis seose (1.9) põhjal iga $x \in \big(0, \frac{\delta}{k}\big)$ korral

$$h\big(g(kx)\big) - h\big(g(x)\big) = (kx)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0} = xg'(x)h'\big(g(x)\big).$$

Siit tuleneb võrdus

$$h'\big(g(x)\big) = \frac{g(kx) - g(x)}{xg'(x)} \cdot \frac{h\big(g(kx)\big) - h\big(g(x)\big)}{g(kx) - g(x)}. \tag{1.10}$$

Lagrange'i keskväärtusteoreemi 0.2 kohaselt leidub suvalise $x \in \big(0, \frac{\delta}{k}\big)$ puhul selline $\psi(x) \in \big(g(x), g(kx)\big)$, et

$$h\big(g(kx)\big) - h\big(g(x)\big) = h'\big(\psi(x)\big)(g(kx) - g(x)).$$

Pidades silmas, et funktsiooni h tuletis on negatiivne ja $\dfrac{g(kx) - g(x)}{xg'(x)} < 1$, siis saame seosest (1.10), et iga $x \in \big(0, \frac{\delta}{k}\big)$ korral

$$h'\big(g(x)\big) = \frac{g(kx) - g(x)}{xg'(x)} \cdot h'\big(\psi(x)\big) > h'\big(\psi(x)\big). \tag{1.11}$$

C. Olgu

$$M := \min\left\{h'(y) \mid y \in \left[g\left(\frac{\delta}{k}\right), g(\delta)\right]\right\}.$$

Näitame, et $M = \min\limits_{y\in(0,g(\delta)]} h'(y)$.

Oletame vastuväiteliselt, et leidub selline $y_0 \in \big(0, g\left(\frac{\delta}{k}\right)\big)$, mille korral $h'(y_0) < M$. Tähistame $\gamma := M - h'(y_0) > 0$ ja näitame, et sellisel juhul iga $y \in (y_0, g(\delta)]$ korral $h'(y) > M - \gamma$. Moodustame jada $(y_n) \in \big(y_0, g(\frac{\delta}{k})\big]$ nii, et

$$\lim_{n\to\infty} y_n = g\left(\frac{\delta}{k}\right)$$

ja oletame, et $h'(y_n) \leq M - \gamma$. Kuna h' on pidev, siis

$$\lim_{n\to\infty} h'(y_n) = h'\left(g\left(\frac{\delta}{k}\right)\right) \geq M.$$

Pidades silmas, et h' on kahanev funktsioon, siis

$$M > h'(y_n) \geq h'(y_{n+1}) \geq h'\left(g\left(\frac{\delta}{k}\right)\right) \geq M,$$

aga $M \not> M$ ja järelikult oleme jõudnud vastuoluni. Seega kui $\gamma = M - h'(y_0) > 0$, kus $y_0 \in \big(0, g\left(\frac{\delta}{k}\right)\big)$, siis iga $y \in (y_0, g(\frac{\delta}{k})]$ korral $h'(y) > M - \gamma$.

Näitame, et iga $y \in \big(0, g(\delta)\big)$ korral $h'(y) \geq M$. Olgu $x_0 \in (0,1)$ selline, et $g(x_0) = y_0$. On ilmne, et $x_0 < \frac{\delta}{k}$. Seose (1.11) põhjal leidub $\psi(x_0) \in \big(g(x_0), g(kx_0)\big) \subset \big(y_0, g(\delta)\big)$, mis rahuldab tingimust $h'(y_0) = h'\big(g(x_0)\big) > h'\big(\psi(x_0)\big)$. See tähendab omakorda, et $h'\big(\psi(x_0)\big) < M - \gamma$, aga iga $y \in \big(y_0, g(\frac{\delta}{k})\big]$ korral $h'(y) > M - \gamma$. Järelikult jõudsime vastuoluni ja iga $y \in \big(0, g(\delta)\big)$ korral $h'(y) \geq M$.

D. Kasutades võrdusi $h'\big(g(x)\big)g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ ja $M = \min\limits_{y\in(0,g(\delta)]} h'(y)$, jõuame seoseni

$$\alpha x^{\alpha-1} = h'\big(g(x)\big)g'(x) \geq Mg'(x) \quad \big(x \in (0,\delta]\,\big).$$

Integreerides seose $\alpha x^{\alpha-1} \geq Mg'(x)$ mõlemaid pooli üle lõigu $[p,q] \subset (0,\delta]$ ja pidades silmas integraali monotoonsust, näeme, et

$$\alpha\int_p^q x^{\alpha-1}dx = \alpha(q^\alpha - p^\alpha) \geq Mg(q) - Mg(p)$$

ehk

$$q^\alpha - Mg(q) \geq p^\alpha - Mg(p). \tag{1.12}$$

Nüüd fikseerime q ja paneme tähele, et kuna $\lim_{p \to 0} g(p) = 0$ ja $\alpha < 0$, siis seosest (1.12) saame, et

$$q^\alpha - Mg(q) = \lim_{p \to 0} \big(q^\alpha - Mg(q)\big) \geq \lim_{p \to 0} \big(p^\alpha - Mg(p)\big) = \lim_{p \to 0} p^\alpha = \infty,$$

aga $q^\alpha - Mg(q) \in \mathbb{R}$. Seega oleme jõudnud vastuoluni ja teoreem on tõestatud. $\square$

Teoreemi 1.4 tõestas J. G. Nikonorov [3] 1993. aastal.

2. Keskväärtust määrava punkti käitumine kaalutud keskväärtusteoreemide puhul

Keskväärtust määrava punkti asümptootilist käitumist integraalarvutuse esimese kaalutud keskväärtusteoreemi 0.3 korral uuris esimesena M. Polezzi [4], kes tõestas järgmise teoreemi.

Teoreem 2.1. *Olgu f ja g lõigus $[a, b]$ pidevad funktsioonid. Eeldame, et f on punktis a k korda diferentseeruv ning $f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0$ ja $f^{(k)}(a) \neq 0$. Olgu g selline funktsioon, et $g(a) \neq 0$ ning ta ei muuda märki lõigus $[a, b]$. Siis seosega*

$$\int_a^x f(t)g(t)\,dt = f\bigl(c(x)\bigr)\int_a^x g(t)\,dt \quad (x \in [a, b]) \tag{2.13}$$

määratud punkt $c(x)$ rahuldab tingimust

$$\lim_{x\to a} \frac{c(x) - a}{x - a} = \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}.$$

2.3

Teoreem 2.1 on erijuht järgmisest üldisemast teoreemist, mille tõestas T. Trifi [7].

Teoreem 2.2. *Rahuldagu funktsioonid $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mingite $n \in \mathbb{N}$ ja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ puhul järgmisi tingimusi:*

(i) *f on lõigus $[a, b]$ pidev ja punktis a n korda diferentseeruv funktsioon ning $f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ ja $f^{(n)}(a) \neq 0$;*

(ii) *g on lõigus $[a, b]$ mittenegatiivne integreeruv funktsioon, kusjuures punktis a on ta k korda diferentseeruv ning $g'(a) = \ldots = g^{(k-1)}(a) = 0$ ja $g^{(k)}(a) \neq 0$.*

Siis
$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}=\sqrt[n]{\frac{k+1}{n+k+1}}.$$

Tõestus. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $f(a)=0$. Tõepoolest, vastupidisel juhul asendame funktsiooni f funktsiooniga $\hat{f}\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, mis on defineeritud võrdusega $\hat{f}(t):=f(t)-f(a)$, ning paneme tähele, et kui funktsioon $\hat{f}$ rahuldab tingimust (2.13), s.t
$$\int_a^x \hat{f}(t)g(t)\,dt=\hat{f}\big(c(x)\big)\int_a^x g(t)\,dt,$$
siis on tingimus (2.13) täidetud ka funktsiooni f jaoks:
$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)g(t)\,dt&=\int_a^x\big(\hat{f}(t)+f(a)\big)g(t)\,dt\\&=\big(\hat{f}\big(c(x)\big)+f(a)\big)\int_a^x g(t)\,dt=f\big(c(x)\big)\int_a^x g(t)\,dt.\end{aligned}$$
Nüüd eeldame, et funktsioonid f ja g rahuldavad tingimusi (i) ja (ii) ning $f(a)=0$. Taylori valemit kasutades võime kirjutada, et
$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n+\omega(t)(t-a)^n,\\g(t)&=\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k+\varepsilon(t)(t-a)^k,\end{aligned}\tag{2.14}$$
kus ω ja ε on lõigus $[a,b]$ pidevad funktsioonid ning $\lim\limits_{t\to a}\omega(t)=\lim\limits_{t\to a}\varepsilon(t)=0$. Seega
$$f(t)g(t)=\frac{f^{(n)}(a)g^{(k)}(a)}{n!k!}(t-a)^{n+k}+\gamma(t)(t-a)^{n+k},\tag{2.15}$$
kus
$$\gamma(t)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\varepsilon(t)+\frac{g^{(k)}(a)}{k!}\omega(t)+\varepsilon(t)\omega(t).$$
Siis γ on pidev lõigus $[a,b]$ ning $\lim\limits_{t\to a}\gamma(t)=0$. Seose (2.15) mõlemat poolt integreerides saame võrduse
$$\int_a^x f(t)g(t)\,dt=\frac{f^{(n)}(a)g^{(k)}(a)}{n!k!(n+k+1)}(x-a)^{n+k+1}+\int_a^x\gamma(t)(t-a)^{n+k}\,dt,$$
kusjuures lemma 1.1 kohaselt $\int_a^x\gamma(t)(t-a)^{n+k}\,dt=o\big((x-a)^{n+k+1}\big)$ protsessis $x\to a$. Seega
$$\int_a^x f(t)g(t)\,dt=\frac{f^{(n)}(a)g^{(k)}(a)}{n!k!(n+k+1)}(x-a)^{n+k+1}+o\big((x-a)^{n+k+1}\big)\quad(x\to a).\tag{2.16}$$

Analoogiliselt jõuame valemist (2.14) lähtudes seoseni

$$\int_a^x g(t)\,dt = \frac{g^{(k)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + o\big((x-a)^{k+1}\big) \quad (x \to a).$$

Kuna

$$f\big(c(x)\big) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(c(x)-a)^n + \omega\big(c(x)\big)(c(x)-a)^n$$

ja $0 \le c(x) - a \le x - a$, siis

$$f\big(c(x)\big)\int_a^x g(t)\,dt = \frac{f^{(n)}(a)g^{(k)}(a)}{n!(k+1)!}(x-a)^{k+1}(c(x)-a)^n + o\big((x-a)^{n+k+1}\big) \quad (x \to a).$$

Tänu seostele (2.13) ja (2.16) saame protsessis $x \to a$ seose

$$\frac{f^{(n)}(a)g^{(k)}(a)}{n!(k+1)!}(x-a)^{k+1}(c(x)-a)^n = \frac{f^{(n)}(a)g^{(k)}(a)}{n!k!(n+k+1)}(x-a)^{n+k+1} + o\big((x-a)^{n+k+1}\big),$$

mille mõlemaid pooli teguriga $\dfrac{n!(k+1)!}{f^n(a)g^k(a)(x-a)^{n+k+1}}$ korrutades on tulemuseks seos

$$\left(\frac{c(x)-a}{x-a}\right)^n = \frac{k+1}{n+k+1} + o(1) \quad (x \to a)$$

ehk

$$\lim_{x \to a} \frac{c(x)-a}{x-a} = \sqrt[n]{\frac{k+1}{n+k+1}}.$$

Sellega on teoreem tõestatud. □

Teise kaalutud keskväärtusteoreemi 0.4 puhul uurime integraali

$$\int_a^x f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^{c(x)} g(t)\,dt + f(x)\int_{c(x)}^x g(t)\,dt \quad \big(x \in [a,b]\big). \tag{2.17}$$

keskväärtust määravat punkti $c(x)$. Seda kirjeldab järgmine Trifi poolt tõestatud teoreem.

Teoreem 2.3. *Rahuldagu funktsioonid $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mingite $n \in \mathbb{N}$ ja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ puhul järgmisi tingimusi:*

(i) *f on monotoonne ja punktis a n korda diferentseeruv funktsioon ning $f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ ja $f^{(n)}(a) \neq 0$;*

(ii) *g on lõigus $[a,b]$ mittenegatiivne integreeruv funktsioon, kusjuures punktis a on ta k korda diferentseeruv ning $g'(a) = \ldots = g^{(k-1)}(a) = 0$ ja $g^{(k)}(a) \neq 0$.*

Siis

$$\lim_{x \to a} \frac{c(x) - a}{x - a} = \sqrt[k+1]{\frac{n}{n+k+1}}.$$

Tõestus. Kõigepealt paneme tähele, et võrduse (2.17) saame esitada kujul

$$\int_a^x \big(f(t) - f(a)\big) g(t)\,dt = \big(f(x) - f(a)\big) \int_{c(x)}^x g(t)\,dt,$$

seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et $f(a) = 0$, vastupidisel juhul asendame (nagu eelmise teoreemi tõestuses) funktsiooni f funktsiooniga $\hat{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, mis on defineeritud võrdusega $\hat{f}(t) := f(t) - f(a)$. Niisiis lähtume seosest

$$\int_a^x f(t) g(t)\,dt = f(x) \int_{c(x)}^x g(t)\,dt. \tag{2.18}$$

Nagu eelnevas tõestuses saame protsessis $x \to a$ funktsioonide f ja g Taylori ridade abil valemi

$$\int_a^x f(t) g(t)\,dt = \frac{f^{(n)}(a) g^{(k)}(a)}{n!k!(n+k+1)} (x-a)^{n+k+1} + o\big((x-a)^{n+k+1}\big). \tag{2.19}$$

Paneme tähele, et

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \omega(x)(x-a)^n$$

ja

$$\begin{aligned}
\int_{c(x)}^x g(t)\,dt &= \int_a^x g(t)\,dt - \int_a^{c(x)} g(t)\,dt \\
&= \frac{g^{(k)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + o\big((x-a)^{k+1}\big) - \frac{g^{(k)}(a)}{(k+1)!}(c(x)-a)^{k+1} \\
&\qquad + o\big((c(x)-a)^{k+1}\big) \\
&= \frac{g^{(k)}(a)}{(k+1)!}\left[(x-a)^{k+1} - (c(x)-a)^{k+1}\right] + o\big((x-a)^{k+1}\big)
\end{aligned}$$

protsessis $x \to a$, mistõttu

$$f(x) \int_{c(x)}^x g(t)\,dt = \frac{f^{(n)}(a) g^{(k)}(a)}{n!(k+1)!}(x-a)^n\left[(x-a)^{k+1} - (c(x)-a)^{k+1}\right] + o\big((x-a)^{n+k+1}\big).$$

Seostest (2.18) ja (2.19) saame seose

$$\begin{aligned}\frac{f^{(n)}(a)g^{(k)}(a)}{n!(k+1)!}&(x-a)^n\big[(x-a)^{k+1}-(c(x)-a)^{k+1}\big]\\&=\frac{f^{(n)}(a)g^{(k)}(a)}{n!k!(n+k+1)}(x-a)^{n+k+1}+o\big((x-a)^{n+k+1}\big)\quad(x\to a).\end{aligned}$$

Kuna $f^{(n)}(a)\neq 0$ ja $g^{(k)}(a)\neq 0$, võime võrduse mõlemaid pooli korrutada teguriga $\dfrac{n!(k+1)!}{f^{(n)}(a)g^{(k)}(a)(x-a)^{n+k+1}}$, nii jõuame seoseni

$$1-\left(\frac{c(x)-a}{x-a}\right)^{k+1}=\frac{k+1}{n+k+1}+o(1)$$

ehk

$$\left(\frac{c(x)-a}{x-a}\right)^{k+1}=\frac{n}{n+k+1}+o(1)\quad(x\to a),$$

niisiis

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}=\sqrt[k+1]{\frac{n}{n+k+1}}.$$

Teoreemi väide on tõestatud. □

2.4

Selles alapunktis võtame vaatluse alla sellise integraalarvutuse keskväärtusteoreemi, mis tuleneb vahetult diferentsiaalarvutuse Cauchy keskväärtusteoreemist.

Teoreem 2.4 (**Cauchy keskväärtusteoreem**). *Olgu $F\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ ja $G\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ pidevad funktsioonid, mis on vahemikus (a,b) diferentseeruvad, ning olgu $G'(x)\neq 0$ iga $x\in(a,b)$ korral. Siis leidub selline $c\in(a,b)$, et*

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(c)}{G'(c)}.$$

Esitame teoreemi 2.4 integraalse versiooni.

Teoreem 2.5 (**integraalarvutuse Cauchy tüüpi keskväärtusteoreem**). *Olgu f ja g lõigus $[a,b]$ pidevad funktsioonid ja olgu $g(x)\neq 0$ iga $x\in[a,b]$ korral. Siis leidub selline $c(x)\in(a,b)$, et*

$$g\big(c(x)\big)\int_a^x f(t)\,dt=f\big(c(x)\big)\int_a^x g(t)\,dt.$$

Tõestus. Tähistame

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \;\text{ ja }\; G(x) := \int_a^x g(t)\,dt \quad \big(x \in [a,b]\big).$$

Kuna f ja g on pidevad lõigus $[a,b]$, siis funktsioonid F ja G on diferentseeruvad lõigus $[a,b]$ ning nad rahuldavad Cauchy keskväärtusteoreemi 2.4 tingimusi. Seega leidub $c(x) \in (a,b)$ nii, et

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'\big(c(x)\big)}{G'\big(c(x)\big)}$$

ehk

$$\big(F(x) - F(a)\big)G'\big(c(x)\big) = F'\big(c(x)\big)\big(G(x) - G(a)\big). \tag{2.20}$$

Kuna $F'(x) = f(x)$ ja $G'(x) = g(x)$ ning

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt \;\text{ ja }\; G(x) - G(a) = \int_a^x g(t)\,dt,$$

siis saamegi seosest (2.20) võrduse

$$g\big(c(x)\big)\int_a^x f(t)\,dt = f\big(c(x)\big)\int_a^x g(t)\,dt.$$

□

Järgmisena esitame ja tõestame teoreemi, mis uurib keskväärtust määrava punkti käitumist Cauchy tüüpi keskväärtusteoreemide korral. Peatüki aluseks on P. R. Merceri artikkel [2].

Teoreem 2.6. *Olgu f ja g sellised lõigus $[a,b]$ diferentseeruvad funktsioonid, et $g(a) \neq 0$ ja $\big[f'(a)g(a) - f(a)g'(a)\big] \neq 0$. Kui $c(x) \in (a,x)$ rahuldab seost*

$$g\big(c(x)\big)\int_a^x f(t)\,dt = f\big(c(x)\big)\int_a^x g(t)\,dt,$$

siis

$$\lim_{x\to a}\frac{\int_a^{c(x)} g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} = \frac{1}{2}.$$

Tõestus. Eelduse kohaselt $g(a) \neq 0$ ja tänu g pidevusele on võimalik leida selline $\delta > 0$, et $g(x) \neq 0$ iga $x \in [a, a+\delta)$ korral. Seega võime üldisust kitsendamata eeldada, et $g(x) \neq 0$ iga $x \in [a,b]$ korral. Funktsiooni tuletise definitsiooni põhjal

$$f'(a) = \lim_{t\to a}\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \quad \text{ja} \quad g'(a) = \lim_{t\to a}\frac{g(t) - g(a)}{t - a},$$

seega

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \varepsilon(t)(t-a)$$

ja

$$g(t) = g(a) + g'(a)(t-a) + \omega(t)(t-a),$$

kus

$$\varepsilon(t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a} - f'(a) \text{ ja } \omega(t) = \frac{g(t)-g(a)}{t-a} - g'(a) \quad (t \in (a,b]).$$

Paneme tähele, et $\lim\limits_{t\to a}\varepsilon(t) = \lim\limits_{t\to a}\omega(t) = 0$ ning ε ja ω on pidevad funktsioonid poollõigus $(a,b]$. Kui defineerida

$$\varepsilon(t) := \begin{cases} \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} - f'(a), & \text{kui } t \neq a, \\ 0, & \text{kui } t = a, \end{cases}$$

ja

$$\omega(t) := \begin{cases} \dfrac{g(t)-g(a)}{t-a} - g'(a), & \text{kui } t \neq a, \\ 0, & \text{kui } t = a, \end{cases}$$

siis on funktsioonid ε ja ω pidevad lõigus $[a,b]$. Integreerides funktsiooni $f(t)$ rajades punktist a punktini x, saame, et

$$\int_a^x f(t)\,dt = f(a)(x-a) + \frac{f'(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x \varepsilon(t)(t-a)\,dt. \tag{2.21}$$

Kuna

$$g\big(c(x)\big) = g(a) + g'(a)(c(x)-a) + \omega\big(c(x)\big)(c(x)-a),$$

siis seosest (2.21) tuleneb, et

$$\begin{aligned} g\big(c(x)\big)\int_a^x f(t)\,dt &= g(a)f(a)(x-a) + g(a)\frac{f'(a)}{2}(x-a)^2 \\ &\quad + g'(a)f(a)(c(x)-a)(x-a) + \varphi(x), \end{aligned}$$

kus

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= g'(a)\frac{f'(a)}{2}(x-a)^2(c(x)-a) + g(a)\int_a^x \varepsilon(t)(t-a)\,dt \\ &\quad + g'(a)(c(x)-a)\int_a^x \varepsilon(t)(t-a)\,dt + f(a)(x-a)\omega\big(c(x)\big)(c(x)-a) \\ &\quad + \frac{f'(a)}{2}(x-a)^2\omega\big(c(x)\big)(c(x)-a) + \omega\big(c(x)\big)(c(x)-a)\int_a^x \varepsilon(t)(t-a)\,dt. \end{aligned}$$

Me teame, et ε ja ω on lõigus $[a,b]$ pidevad funktsioonid. Lisaks märgime, et kui $x \to a$, siis ka $c(x) \to a$, ja et $\left|\dfrac{c(x)-a}{x-a}\right| \leqslant 1$. Selle tõttu

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^2} &= \lim_{x\to a} g'(a)\frac{f'(a)}{2}(c(x)-a) + \lim_{x\to a} \frac{g(a)\int_a^x \varepsilon(t)(t-a)\,dt}{(x-a)^2} \\
&\quad + \lim_{x\to a} \frac{g'(a)(c(x)-a)\int_a^x \varepsilon(t)(t-a)\,dt}{(x-a)^2} + \lim_{x\to a} \frac{f(a)\omega\big(c(x)\big)(c(x)-a)}{x-a} \\
&\quad + \lim_{x\to a} \frac{f'(a)}{2}\omega\big(c(x)\big)(c(x)-a) + \lim_{x\to a} \frac{\omega\big(c(x)\big)(c(x)-a)\int_a^x \varepsilon(t)(t-a)\,dt}{(x-a)^2} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Järelikult võime kirjutada, et

$$
\begin{aligned}
g\big(c(x)\big)\int_a^x f(t)\,dt = g(a)f(a)(x-a) + g(a)\frac{f'(a)}{2}(x-a)^2 \\
+ g'(a)f(a)(c(x)-a)(x-a) + o(x-a)^2.
\end{aligned}
$$

Integreerides funktsiooni g üle lõigu $[a,x]$ ja korrutades saadud võrduse arvuga $f\big(c(x)\big)$, saame analoogilise arutelu põhjal seose

$$
\begin{aligned}
f\big(c(x)\big)\int_a^x g(t)\,dt = f(a)g(a)(x-a) + f(a)\frac{g'(a)}{2}(x-a)^2 \\
+ f'(a)g(a)(c(x)-a)(x-a) + o(x-a)^2.
\end{aligned}
$$

Kui teostame lahutamistehte

$$
g\big(c(x)\big)\int_a^x f(t)\,dt - f\big(c(x)\big)\int_a^x g(t)\,dt
$$

ning kasutame teoreemi 2.5, jõuame seoseni

$$
0 = \frac{(x-a)^2}{2}\big[f'(a)g(a) - f(a)g'(a)\big] + (c(x)-a)(x-a)\big[g'(a)f(a) - f'(a)g(a)\big] + o(x-a)^2.
$$

Korrutame võrduse mõlemat poolt teguriga $\dfrac{1}{(x-a)^2}$. Kuna eelduse põhjal $\big[f'(a)g(a) - f(a)g'(a)\big] \neq 0$, siis on tulemuseks

$$
\frac{1}{2} = \frac{c(x)-a}{x-a} + o(1) \quad (x \to a).
$$

Nüüd

$$\frac{\int_a^{c(x)} g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} = \frac{g(a)(c(x)-a) + \dfrac{g'(a)}{2}(c(x)-a)^2 + o(c(x)-a)^2}{g(a)(x-a) + \dfrac{g'(a)}{2}(x-a)^2 + o(x-a)^2}.$$

Jagame murru lugejat ja nimetajat teguriga $g(a)(x-a)$ ning samal ajal peame silmas, et $\left|\dfrac{c(x)-a}{x-a}\right| \leqslant 1$ ja kui $x \to a$, siis $c(x) \to a$. Nii saame, et

$$\begin{aligned}\frac{\int_a^{c(x)} g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} &= \frac{\dfrac{c(x)-a}{x-a} + \dfrac{g'(a)(c(x)-a)^2 + o(c(x)-a)^2}{2g(a)(x-a)}}{1 + \dfrac{g'(a)(x-a) + o(x-a)^2}{2g(a)}} \\ &= \frac{\dfrac{c(x)-a}{x-a} + o(1)}{1+o(1)} = \frac{1}{2} + o(1)\end{aligned}$$

protsessis $x \to a$. Järelikult oleme tõestanud teoreemi väite. $\square$

Märgime, et kui teoreemis 2.6 $f(a) \neq 0$, siis

$$\lim_{x \to a} \frac{\int_a^{c(x)} f(t)\,dt}{\int_a^x f(t)\,dt} = \frac{1}{2}.$$

3. Keskväärtust määrava punkti käitumine avaramatel tingimustel kaalutud keskväärtusteoreemi puhul

3.1

Selles peatükis esitame teoreemi, mis kirjeldab keskväärtust määrava punkti käitumist kaalutud keskväärtusteoreemide puhul, aga laiematel eeldustel, kui eespool tõestatud teoreemis 2.2. Järgnevas W. J. Schwindi, Jun Ji ja D. E. Koditscheki [5] poolt tõestatud teoreemis funktsioonile $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ esitatud tingimusi rahuldavad ka funktsioonid

$$f(x) = \sqrt{x-a} \ \text{ ja } \ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-a}}.$$

Schwindile, Junile ja Koditschekile kuulub ka teises alapunktis toodud füüsikalise sisuga näide, mis kirjeldab tõestatava teoreemi ühte võimalikku rakendust konkreetses füüsikalises situatsioonis.

Teoreem 3.1. *Olgu funktsioon f pidev poollõigus $(a,b]$ ja funktsioon g integreeruv vahemikus (a,b). Olgu $g(t) \geq 0$ iga $t \in (a,b)$ korral. Kui eksisteerivad nullist erinevad piirväärtused*

$$C_1 := \lim_{t\to a} \frac{f(t)-K}{(t-a)^r} \tag{3.22}$$

ja

$$C_2 := \lim_{t\to a} \frac{g(t)}{(t-a)^s} \tag{3.23}$$

mingite konstantide K, r ja s puhul, kus $r \neq 0$, $s > -1$ ja $r+s > -1$, siis kehtivad järgmised väited.

(a) *Iga $x \in (a,b]$ korral leidub selline $c(x) \in (a,x]$, et*

$$\int_a^x f(t)g(t)\,dt = f\big(c(x)\big) \int_a^x g(t)\,dt. \tag{3.24}$$

(b) *Kehtib võrdus*

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}=\sqrt[r]{\frac{s+1}{r+s+1}}. \tag{3.25}$$

Tõestus. Tähistame

$$\varepsilon_1(t):=\frac{f(t)-K}{(t-a)^r}-C_1 \quad \text{ja} \quad \varepsilon_2(t):=\frac{g(t)}{(t-a)^s}-C_2,$$

siis

$$f(t)=K+C_1(t-a)^r+\varepsilon_1(t)(t-a)^r \tag{3.26}$$

ja

$$g(t)=C_2(t-a)^s+\varepsilon_2(t)(t-a)^s. \tag{3.27}$$

Seega

$$\begin{aligned} f(t)g(t) &= (K+C_1(t-a)^r+\varepsilon_1(t)(t-a)^r)(C_2(t-a)^s+\varepsilon_2(t)(t-a)^s) \\ &= KC_2(t-a)^s+K\varepsilon_2(t)(t-a)^s+C_1C_2(t-a)^{r+s} \\ &\quad + C_1\varepsilon_2(t)(t-a)^{r+s}+C_2\varepsilon_1(t)(t-a)^{r+s}+\varepsilon_1(t)\varepsilon_2(t)(t-a)^{r+s}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Eelduste (3.22) ja (3.23) kohaselt

$$\lim_{t\to a}\varepsilon_1(t)=\lim_{t\to a}\varepsilon_2(t)=0. \tag{3.29}$$

(a) Vaatleme kõigepealt juhtu, kui $r>0$. Seosest (3.26) on lihtne näha, et $\lim\limits_{t\to a}f(t)=K$. Defineerime funktsiooni $F\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$ seosega

$$F(t):=\begin{cases} f(t), & \text{kui } t\in(a,b]\,, \\ K, & \text{kui } t=a, \end{cases}$$

ja funktsiooni $G\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$ seosega

$$G(t):=\begin{cases} g(t), & \text{kui } t\in(a,b), \\ L_1, & \text{kui } t=a, \\ L_2, & \text{kui } t=b, \end{cases}$$

kus L_1 ja L_2 on positiivsed arvud. Kuna funktsioon F on pidev lõigus $[a,b]$ ja funktsioon G on mittenegatiivne ja integreeruv lõigus $[a,b]$, siis teoreemi 0.3 põhjal leidub selline $c(x)\in(a,x)$, et

$$\int_a^x F(t)G(t)\,dt=F\big(c(x)\big)\int_a^x G(t)\,dt.$$

Seega

$$\int_a^x f(t)g(t)\,dt = \int_a^x F(t)G(t)\,dt = F\big(c(x)\big)\int_a^x G(t)\,dt = f\big(c(x)\big)\int_a^x g(t)\,dt.$$

Nüüd vaatleme juhtu, kui $r < 0$. Siis on $\int_a^x f(t)g(t)\,dt$ päratu integraal ja meil on vaja veenduda, et see integraal koondub. Selle jaoks näitame, et ta koondub absoluutselt, s.t integraal

$$\int_a^x |f(t)g(t)|\,dt$$

koondub. Lähtudes tingimusest (3.29) leiame sellise $\delta > 0$, et kui $a < t < a + \delta$, siis $|\varepsilon_1(t)| \le 1$ ja $|\varepsilon_2(t)| \le 1$. Kuna integraal $\int_\delta^x |f(t)g(t)|\,dt$ eksisteerib, siis seose

$$\int_a^x |f(t)g(t)|\,dt = \int_a^\delta |f(t)g(t)|\,dt + \int_\delta^x |f(t)g(t)|\,dt$$

kohaselt piisab veenduda, et päratu integraal $\int_a^\delta |f(t)g(t)|\,dt$ koondub. Seose (3.28) kohaselt

$$\begin{aligned}
\int_a^\delta |f(t)g(t)|\,dt = KC_2\int_a^\delta (t-a)^s\,dt + K\int_a^\delta |\varepsilon_2(t)|\,(t-a)^s\,dt + C_1C_2\int_a^\delta (t-a)^{r+s}\,dt\\
+ C_1\int_a^\delta |\varepsilon_2(t)|\,(t-a)^{r+s}\,dt + C_2\int_a^\delta |\varepsilon_1(t)|\,(t-a)^{r+s}\,dt\\
+ \int_a^\delta |\varepsilon_1(t)|\,|\varepsilon_2(t)|\,(t-a)^{r+s}\,dt\\
\le KC_2\int_a^\delta (t-a)^s\,dt + K\int_a^\delta (t-a)^s\,dt + C_1C_2\int_a^\delta (t-a)^{r+s}\,dt\\
+ C_1\int_a^\delta (t-a)^{r+s}\,dt + C_2\int_a^\delta (t-a)^{r+s}\,dt + \int_a^\delta (t-a)^{r+s}\,dt\\
= (KC_2 + K)\int_a^\delta (t-a)^s\,dt + (C_1C_2 + C_1 + C_2 + 1)\int_a^\delta (t-a)^{r+s}\,dt.
\end{aligned}$$

Vastavalt eeldustele $s > -1$ ja $r + s > -1$ päratud integraalid $\int_a^\delta (t-a)^s\,dt$ ja $\int_a^\delta (t-a)^{r+s}\,dt$ koonduvad. Võrdluslause põhjal on siis ka päratu integraal $\int_a^\delta |f(t)g(t)|\,dt$ koonduv.

Teoreemi väite (a) tõestuseks vaatleme eraldi juhte $C_1 > 0$ ja $C_1 < 0$. Paneme tähele, et kuna $g(x) \ge 0$, siis integraali monotoonsuse tõttu kehtib võrratus $0 \le \int_a^x g(t)\,dt$. Edaspidi eeldame, et $0 < \int_a^x g(t)\,dt$, sest kui $\int_a^x g(t)\,dt = 0$, siis $g(t) = 0$ iga $t \in [a, x)$ korral ja sellisel juhul väide (a) kehtib.

Esiteks olgu $C_1 > 0$. Siis $\lim_{t\to a} f(t) = \infty$ ja seega leidub $\delta \in (a,b)$ niimoodi, et iga $t \in (a, a+\delta)$ korral

$$f(t) > \frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt}. \tag{3.30}$$

Järelikult, kui leidub $c(x)$, mis rahuldab võrdust (3.24), siis see ei kuulu vahemikku $(a, a+\delta)$. Iga $h \in (a, a+\delta)$ korral on f pidev funktsioon lõigus $[h, x]$, millest järeldub, et funktsioonil f leidub miinimum selles lõigus. Poollõigus $(a, h]$ kehtib seos (3.30) ning seega

$$\min_{t\in(a,x]} f(t) = \min_{t\in[h,x]} f(t).$$

Näitame, et

$$\frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} \geq \min_{t\in(a,x]} f(t).$$

Oletame vastuväiteliselt, et

$$\frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} < \min_{t\in(a,x]} f(t)$$

ning tähistame

$$\delta := \min_{t\in(a,x]} f(t) - \frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} > 0$$

ja

$$U := \left(\frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} - \frac{\delta}{2}, \frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} + \frac{\delta}{2}\right).$$

Siis $f(t) \notin U$ ühegi $t \in (a, x]$ korral, kuna

$$\frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} + \frac{\delta}{2} < \delta + \frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} = \min_{t\in(a,x]} f(t).$$

Moodustame sellise jada (z_n), kus $z_n \in U$ ja $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. Lõigus $[z_n, x]$ on f pidev ja g integreeruv funktsioon, seega saame teoreemi 0.3 põhjal leida sellise $c_n(x) \in (z_n, x)$, et

$$\int_{z_n}^x f(t)g(t)\,dt = f\big(c_n(x)\big) \int_{z_n}^x g(t)\,dt.$$

Paneme tähele, et

$$\lim_{n\to\infty} f\big(c_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_{z_n}^x f(t)g(t)\,dt}{\int_{z_n}^x g(t)\,dt} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \int_{z_n}^x f(t)g(t)\,dt}{\lim\limits_{n\to\infty} \int_{z_n}^x g(t)\,dt} = \frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt}.$$

Seega leidub indeks $n_0 \in \mathbb{N}$ nii, et kui $n \geq n_0$, siis

$$\left| f\big(c_n(x)\big) - \frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} \right| < \frac{\delta}{2},$$

mis tähendab, et $f\big(c_n(x)\big) \in U$, aga see on vastuolus meie oletusega, et $f(t) \notin U$ ühegi $t \in (a,x]$ korral. Järelikult

$$\max_{t\in[h,x]} f(t) \geq f(h) > \frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} \geq \min_{t\in(a,x]} f(t) = \min_{t\in[h,x]} f(t).$$

Funktsioon f on pidev ja g integreeruv ka lõigus $[h,x]$, seega rakendades teoreemi 0.3, saame leida sellise $c(x) \in [h,x] \subset (a,x]$, et kehtib seos

$$\int_h^x f(t)g(t)\,dt = f\big(c(x)\big)\int_h^x g(t)\,dt.$$

Teiseks toimime analoogiliselt olukorras, kus $C_1 < 0$. Sellisel juhul $\lim\limits_{t\to a} f(t) = -\infty$ ja seega leidub $\delta \in (a,b)$ niimoodi, et iga $t \in (a, a+\delta)$ korral

$$f(t) < \frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt}. \tag{3.31}$$

Järelikult, kui leidub $c(x)$, mis rahuldab võrdust (3.24), siis see ei kuulu vahemikku $(a, a+\delta)$. Iga $h \in (a, a+\delta)$ korral on f pidev funktsioon lõigus $[h,x]$, millest järeldub, et funktsioonil f leidub maksimum selles lõigus. Poollõigus $(a,h]$ kehtib seos (3.31) ning seega

$$\max_{t\in(a,x]} f(t) = \max_{t\in[h,x]} f(t).$$

Näitame, et

$$\frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} \leq \max_{t\in(a,x]} f(t).$$

Oletame vastuväiteliselt, et

$$\frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} > \max_{t\in(a,x]} f(t)$$

ning tähistame

$$\delta := \frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} - \max_{t\in(a,x]} f(t) > 0$$

ja

$$U := \left(\frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} - \frac{\delta}{2}, \frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} + \frac{\delta}{2} \right).$$

Siis $f(t) \notin U$ ühegi $t \in (a,x]$ korral, kuna

$$\max_{t\in(a,x]} f(t) = \frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} - \delta < \frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} - \frac{\delta}{2}.$$

Moodustame sellise jada (z_n), kus $z_n \in U$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Lõigus $[z_n, x]$ on f pidev ja g integreeruv funktsioon, seega leidub teoreemi 0.3 põhjal $c_n(x) \in (z_n, x)$ nii, et

$$\int_{z_n}^x f(t)g(t)\,dt = f\big(c_n(x)\big)\int_{z_n}^x g(t)\,dt.$$

Paneme tähele, et

$$\lim_{n\to\infty} f\big(c_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_{z_n}^x f(t)g(t)\,dt}{\int_{z_n}^x g(t)\,dt} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\int_{z_n}^x f(t)g(t)\,dt}{\lim\limits_{n\to\infty}\int_{z_n}^x g(t)\,dt} = \frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt}.$$

Seega leidub indeks $n_0 \in \mathbb{N}$ nii, et kui $n \geq n_0$, siis

$$\left| f\big(c_n(x)\big) - \frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} \right| < \frac{\delta}{2},$$

mis tähendab, et $f\big(c_n(x)\big) \in U$, mis on vastuolus meie oletusega, et $f(t) \notin U$ ühegi $t \in (a,x]$ korral. Järelikult

$$\min_{t\in[h,x]} f(t) \leq f(h) < \frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} \leq \max_{t\in(a,x]} f(t) = \max_{t\in[h,x]} f(t).$$

Funktsioon f on pidev ja g integreeruv ka lõigus $[h,x]$, seega rakendades teoreemi 0.3, saame leida sellise $c(x) \in [h,x] \subset (a,x]$, et kehtib seos

$$\int_h^x f(t)g(t)\,dt = f\big(c(x)\big)\int_h^x g(t)\,dt.$$

Sellega on väide (a) tõestatud.

(b) Tänu seostele (3.26) ja (3.27) saame võrduse (3.24) vasaku poole esitada kujul

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)g(t)\,dt = {} & \frac{C_2K(x-a)^{s+1}}{s+1} + \frac{C_1C_2(x-a)^{r+s+1}}{r+s+1} \\ & + C_2\int_a^x \varepsilon_1(t)(t-a)^{r+s}\,dt + K\int_a^x \varepsilon_2(t)(t-a)^s\,dt \\ & + C_1\int_a^x \varepsilon_2(t)(t-a)^{r+s}\,dt + \int_a^x \varepsilon_1(t)\varepsilon_2(t)(t-a)^{r+s}\,dt.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Teiselt poolt, samamoodi tänu seostele (3.26) ja (3.27), on meil võimalik võrduse (3.24) parem pool esitada kujul

$$\begin{aligned} f\bigl(c(x)\bigr)\int_a^x g(t)\,dt &= \frac{C_2K(x-a)^{s+1}}{s+1} + \frac{C_1C_2(c(x)-a)^r(x-a)^{s+1}}{s+1} \\ &+ \frac{C_2\varepsilon_1\bigl(c(x)\bigr)(c(x)-a)^r(x-a)^{s+1}}{s+1} + K\int_a^x \varepsilon_2(t)(t-a)^s\,dt \\ &+ C_1(c(x)-a)^r\int_a^x \varepsilon_2(t)(t-a)^s\,dt + \varepsilon_1\bigl(c(x)\bigr)(c(x)-a)^r\int_a^x \varepsilon_2(t)(t-a)^s\,dt. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Kuna kehtib väide (a), siis saame seoste (3.32) ja (3.33) põhjal kirjutada, et

$$\begin{aligned} &\frac{C_1C_2(x-a)^{r+s+1}}{r+s+1} + C_2\int_a^x \varepsilon_1(t)(t-a)^{r+s}\,dt + C_1\int_a^x \varepsilon_2(t)(t-a)^{r+s}\,dt \\ &\qquad + \int_a^x \varepsilon_1(t)\varepsilon_2(t)(t-a)^{r+s}\,dt \\ &= \frac{C_2\varepsilon_1\bigl(c(x)\bigr)(c(x)-a)^r(x-a)^{s+1}}{s+1} + \frac{C_1C_2(c(x)-a)^r(x-a)^{s+1}}{s+1} \\ &\qquad + C_1(c(x)-a)^r\int_a^x \varepsilon_2(t)(t-a)^s\,dt \\ &\qquad + \varepsilon_1\bigl(c(x)\bigr)(c(x)-a)^r\int_a^x \varepsilon_2(t)(t-a)^s\,dt. \end{aligned}$$

Kui korrutame saadud võrduse mõlemaid pooli läbi teguriga $\dfrac{s+1}{C_1C_2(x-a)^{r+s+1}}$, siis saame võrduse

$$\begin{aligned} &\frac{s+1}{r+s+1} + \frac{(s+1)\int_a^x \varepsilon_1(t)(t-a)^{r+s}\,dt}{C_1(x-a)^{r+s+1}} + \frac{(s+1)\int_a^x \varepsilon_2(t)(t-a)^{r+s}\,dt}{C_2(x-a)^{r+s+1}} \\ &\qquad + \frac{(s+1)\int_a^x \varepsilon_1(t)\varepsilon_2(t)(t-a)^{r+s}\,dt}{C_1C_2(x-a)^{r+s+1}} \\ &= \frac{\varepsilon_1\bigl(c(x)\bigr)(c(x)-a)^r}{C_1(x-a)^r} + \frac{(c(x)-a)^r}{(x-a)^r} + \frac{(s+1)(c(x)-a)^r\int_a^x \varepsilon_2(t)(t-a)^s\,dt}{C_2(x-a)^{r+s+1}} \\ &\qquad + \frac{(s+1)\varepsilon_1\bigl(c(x)\bigr)(c(x)-a)^r\int_a^x \varepsilon_2(t)(t-a)^s\,dt}{C_1C_2(x-a)^{r+s+1}}. \end{aligned}$$

Viimasest seosest tuleneb, et

$$U(x)\frac{(c(x)-a)^r}{(x-a)^r} = V(x), \tag{3.34}$$

kus

$$U(x) = 1 + \frac{\varepsilon_1\big(c(x)\big)}{C_1} + \frac{(s+1)\int_a^x \varepsilon_2(t)(t-a)^s\,dt}{C_2(x-a)^{s+1}} + \frac{(s+1)\varepsilon_1\big(c(x)\big)\int_a^x \varepsilon_2(t)(t-a)^s\,dt}{C_1C_2(x-a)^{s+1}}$$

ja

$$\begin{aligned}V(x) = \frac{s+1}{r+s+1} &+ \frac{(s+1)\int_a^x \varepsilon_1(t)(t-a)^{r+s}\,dt}{C_1(x-a)^{r+s+1}} \\ &+ \frac{(s+1)\int_a^x \varepsilon_2(t)(t-a)^{r+s}\,dt}{C_2(x-a)^{r+s+1}} + \frac{(s+1)\int_a^x \varepsilon_1(t)\varepsilon_2(t)(t-a)^{r+s}\,dt}{C_1C_2(x-a)^{r+s+1}}.\end{aligned}$$

Kuna $|c(x)-a| \le |x-a|$ ja lemma 1.1 põhjal $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\int_a^x d(t)(t-a)^m\,dt}{(x-a)^{m+1}} = 0$, siis me saame, et

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} U(x) = 1 + \frac{1}{C_1}\lim_{x\to a}\varepsilon_1\big(c(x)\big) &+ \frac{s+1}{C_2}\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x \varepsilon_2(t)(t-a)^s\,dt}{(x-a)^{s+1}} \\ &+ \frac{s+1}{C_1C_2}\lim_{x\to a}\frac{\varepsilon_1\big(c(x)\big)\int_a^x \varepsilon_2(t)(t-a)^s\,dt}{(x-a)^{s+1}} = 1\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} V(x) &= \frac{s+1}{r+s+1} + \frac{s+1}{C_1}\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x \varepsilon_1(t)(t-a)^{r+s}\,dt}{(x-a)^{r+s+1}} \\ &\quad + \frac{s+1}{C_2}\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x \varepsilon_2(t)(t-a)^{r+s}\,dt}{(x-a)^{r+s+1}} + \frac{s+1}{C_1C_2}\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x \varepsilon_1(t)\varepsilon_2(t)(t-a)^{r+s}\,dt}{(x-a)^{r+s+1}} \\ &= \frac{s+1}{r+s+1} > 0.\end{aligned}$$

Seega seose (3.34) kohaselt

$$\lim_{x\to a} U(x)\frac{(c(x)-a)^r}{(x-a)^r} = \lim_{x\to a} V(x)$$

ehk

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a} = \sqrt[r]{\frac{s+1}{r+s+1}}.$$

Sellega on väide (b) tõestatud. □

Kui teoreemis 3.1 võtta $g(t) = 1$ iga $t \in (a,b)$ korral ja $s = 0$, siis saame leida sellise $r > -1$, $r \ne 0$, et

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a} = \sqrt[r]{\frac{1}{r+1}}.$$

Märgime, et võrdus on sarnane teoreemis 1.3 esitatud võrdusega, aga antud seoses $r \in (-1, \infty)\backslash 0$, samal ajal kui teoreemis $k \in \mathbb{N}$.
Paneme tähele, et teoreem 2.2 on erijuht teoreemist 3.1. Olgu meil täidetud teoreemi 2.2 tingimused. Siis, kasutades $n-1$ korda l'Hospitali reeglit, saame, et

$$\lim_{t\to a} \frac{f(t)-f(a)}{(t-a)^n} = \lim_{t\to a} \frac{f^{(n-1)}(t)}{n!(t-a)} = \lim_{t\to a} \frac{f^{(n-1)}(t)-f^{(n-1)}(a)}{n!(t-a)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \neq 0.$$

Järelikult on täidetud teoreemi 3.1 eeldused, kui $g(t) = 1$ iga $t \in (a, b)$ korral ja $s = 0$.

3.2

Selles alapunktis kirjeldame eelneva teoreemi sisu konkreetse füüsikalise näite abil. Kõigepealt märgime, et tänu seosele (3.25) võime kirjutada, et

$$\frac{c(x)-a}{x-a} \approx \sqrt[r]{\frac{s+1}{r+s+1}}$$

ehk

$$c(x) \approx a + (x-a)\sqrt[r]{\frac{s+1}{r+s+1}} =: \hat{c}(x).$$

Kasutame järgnevas näites täpse valemi (3.24) asemel ligikaudset seost

$$\int_a^x f(t)g(t)\,dt \approx f\big(\hat{c}(x)\big)\int_a^x g(t)\,dt. \tag{3.35}$$

Näide 3.2. Vaatame tsentraaljõududega seotud probleemi, kus mingi keha massiga m pannakse vedru abil liikuma vertikaalses suunas. Keha asetatakse vedrule ning surutakse alla, seejärel lastakse vedru vabaks. Arv $U(y)$ kirjeldab vedru potentsiaalset energiat, kui keha on maast kaugusel y. Kui eeldada, et energiakadusid ei ole, siis on süsteemi koguenergia E jääv. See tähendab, et kehale mõjuvad ainult konservatiivsed jõud: raskusjõud ja vedru elastsusjõud. Saame kirjutada järgmise valemi:

$$E = \frac{m\big(y'(T)\big)^2}{2} + mgy(T) + U\big(y(T)\big). \tag{3.36}$$

Murd $\frac{m(y'(T))^2}{2}$ kirjeldab kineetilist energiat ja $mgy(T)$ on gravitatsioonist tingitud potentsiaalne energia, s.t energia, mida on vaja massi tõstmiseks kõrgusele y. Kui diferentseerida seost (3.36) aja T järgi, pidades silmas, et E on konstant, jõuame seoseni

$$0 = \frac{2my'(T)y''(T)}{2} + mgy'(T) + U'\big(y(T)\big)y'(T),$$

mille põhjal saame välja kirjutada keha liikumist kirjeldava valemi:

$$y''(T) = -g - \frac{U'\big(y(T)\big)}{m}.$$

Siin $y''(T)$ on kogu kiirendus, g on vabalt langeva keha konstantne kiirendus ja murd $\frac{U'(y(T))}{m}$ kirjeldab kiirendust, mille põhjustab vedru deformatsioonienergia. Tähistame sümboliga y_b kohta, kus $y'(T) = 0$. Siis seose (3.36) kohaselt

$$E = mgy_b + U(y_b). \tag{3.37}$$

Avaldame valemist (3.36) $y'(T)$:

$$y'(T) = \sqrt{\frac{2E}{m} - 2gy(T) - \frac{2U\big(y(T)\big)}{m}}.$$

Kasutades muutujate eraldamist, saame seosest

$$\frac{d}{dT}\, y(T) = \sqrt{\frac{2E}{m} - 2gy(T) - \frac{2U\big(y(T)\big)}{m}}$$

võrduse

$$dT = \frac{d\big(y(T)\big)}{\sqrt{\frac{2E}{m} - 2gy(T) - \frac{2U(y(T))}{m}}}.$$

Integreerides mõlemaid pooli üle vastavate lõikude ning kasutades seost (3.37) saame, et

$$\begin{aligned}
T(y) &= \int_0^T dT = \int_{y_i}^{y} \frac{d\big(y(T)\big)}{\sqrt{\frac{2E}{m} - 2gy(T) - \frac{2U(y(T))}{m}}} \\
&= \int_{y_i}^{y} \frac{d\big(y(T)\big)}{\sqrt{2g}\sqrt{\frac{E}{mg} - y(T) - \frac{U(y(T))}{mg}}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y_i}^{y} \frac{d\big(y(T)\big)}{\sqrt{\frac{E}{mg} - y(T) - \frac{U(y(T))}{mg}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y_i}^{y} \frac{d\big(y(T)\big)}{\sqrt{\frac{mgy_b + U(y_b)}{mg} - y(T) - \frac{U(y(T))}{mg}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y_i}^{y} \frac{d\big(y(T)\big)}{\sqrt{(y_b - y(T)) + \frac{1}{mg}\big(U(y_b) - U(y(T))\big)}}.
\end{aligned}$$

Teostame muutujavahetuse $y(T) = \psi$ ja saame valemi

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y_i}^{y} \frac{d(\psi)}{\sqrt{(y_b - \psi) + \frac{1}{mg}\big(U(y_b) - U(\psi)\big)}}. \tag{3.38}$$

Siin $T(y)$ on aeg, mille jooksul keha massiga m on jõudnud kõrgusele y, ja integraal kirjeldab vahemaad, mille keha on läbinud ajaga $T(y)$ alguspunktist y_i lõpp-punkti y. Nüüd kasutades valemit (3.35) võime leida $T(y)$ ligikaudse väärtuse.
Üritame leida aega, mis kulub massil liikumiseks asendist y_b, kus vedru on võimalikult suure pinge all, mingisse teise asendisse y. Selle jaoks võtame seoses (3.38) $y_i = y_b$. Lisaks proovime seda probleemi lahendada võimalikult väikeste teadmistega vedru potentsiaali funktsiooni U kohta. Sellisel juhul on võimatu lahendada ülesannet seosega (3.38), aga tänu valemile (3.35) saame leida ligikaudse väärtuse.
Selleks, et rakendada teoreemi 3.1, esitame võrduse (3.38) integreeritava funktsiooni kahe funktsiooni f ja g korrutisena. Ülesande ligikaudne väärtus sõltub funktsioonide f ja g valikust.
Vaatame esmalt juhtu kui

$$g_1(y) = 1$$

ja

$$f_1(y) = \frac{1}{\sqrt{(y_b - y) + \frac{1}{mg}\big(U(y_b) - U(y)\big)}}.$$

Sellisel juhul $s_1 = 0$ ning võttes $K = 0$ ja eeldades, et piirväärtus

$$U'(y_b) := \lim_{y \to y_b} \frac{U(y) - U(y_b)}{y - y_b}$$

eksisteerib ja $U'(y_b) \neq -mg$, saame, et $r_1 = -\frac{1}{2}$. Paneme tähele, et kui $U'(y_b) = -mg$, siis $y_b''(T) = 0$, s.t kogu kiirendus asendis y_b on null. Antud juhul on y_b algpunkt ehk asend, kust keha liikuma hakkab, ja seal punktis on kiirendus null. Nüüd kasutame valemit (3.35) võrduse (3.38) ligikaudse lahendi leidmiseks. Me saame, et

$$T_1(y) = \frac{y - y_b}{\sqrt{2g}\sqrt{\big(y_b - \hat{c}_1(y)\big) + \frac{1}{mg}\big(U(y_b) - U(\hat{c}_1(y))\big)}},$$

kus $\hat{c}_1(y) = y_b + \frac{1}{4}(y - y_b)$.
Teiseks vaatame juhtu, kus

$$g_2(y) = \frac{1}{\sqrt{y - y_b}}$$

ja

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{-1 + \frac{1}{mg}\left(\frac{U(y_b) - U(y)}{y - y_b}\right)}}.$$

Siin $s_2 = -\frac{1}{2}$. Kui analoogiliselt eelmise juhuga eeldame, et piirväärtus $U'(y_b)$ eksisteerib ja $U'(y_b) \neq -mg$, siis saame võtta $K = \lim_{y \to y_b} f_2(y)$. Väärtuse r_2 määramiseks pole meil piisavalt palju informatsiooni funktsiooni $U(y)$ kohta. Kui rakendada l'Hospitali reeglit funktsioonile $U'(y_b)$ ja oletada, et piirväärtus

$$U''(y_b) = \lim_{y \to y_b} \frac{U'(y)(y - y_b) - \big(U(y) - U(y_b)\big)}{(y - y_b)^2} \neq 0 \tag{3.39}$$

eksisteerib, siis $r_2 = 1$. Kui aga $U''(y_b) = 0$, siis rakendame uuesti l'Hospitali reeglit ja me saame, et kui piirväärtus

$$U'''(y_b) = \lim_{y \to y_b} \frac{U''(y)(y - y_b)^2 - \big(U'(y)(y - y_b) - (U(y) - U(y_b))\big)}{(y - y_b)^3} \neq 0$$

eksisteerib, siis $r_2 = 2$. Eeldame, et kehtib seos (3.39). Kasutades valemit (3.35), saame teise ligikaudse vastuse võrdusele (3.38), milleks on

$$\begin{aligned} T_2(y) &= \frac{1}{\sqrt{2g}\sqrt{-1 + \frac{1}{mg}\left(\frac{U(y_b) - U(\hat{c}_2(y))}{\hat{c}_2(y) - y_b}\right)}} \int_{y_b}^{y} \frac{d\psi}{\sqrt{\psi - y_b}} \\ &= \frac{2\sqrt{y - y_b}}{\sqrt{2g}\sqrt{-1 + \frac{1}{mg}\left(\frac{U(y_b) - U(\hat{c}_2(y))}{\hat{c}_2(y) - y_b}\right)}}, \end{aligned}$$

kus $\hat{c}_2(y) = y_b + \frac{1}{3}(y - y_b)$.
Mõlemal juhul on omad miinused ja plussid. Teine lähenemine annab täpsema vastuse, aga see skeem nõuab rohkem teadmisi vedru potentsiaali kohta, et leida väärtust r. Esimene lähenemine ei ole nii täpne kui teine, aga esimesel juhul saab arvu r määrata minimaalsete teadmistega vedru potentsiaalist U, sest $g_1(y) = 1$. Seega lahenduskäigu valik sõltub andmetest ja tulemuse soovitud täpsusest.
Teoreemi 3.1 üheks võimalikuks rakenduseks on ligikaudse aja leidmine, mis kulub kehal massiga m liikumiseks vertikaalses suunas mingist algpunktist y_i lõpp-punkti y.

The Mean Value Theorems for Integrals: the Asymtotic Behaviour of Intermediate Points
Summary

The purpose of this thesis is to study the asymptotic behaviour of intermediate points in mean value theorems for integrals. The most simple mean value theorem states that if $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ is a continuous function then there exists a number $c \in (a,b)$ such that

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b-a).$$

In the case of the simpler mean value theorems for integrals the intermediate point $c(x)$ asymptotically approaches the midpoint of the interval $[a,x]$ and in addition

$$\limsup_{x\to a} \frac{c(x)-a}{x-a} \geq \frac{1}{e}.$$

The simplest weighted mean value theorem for integrals states that if $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ is a continuous function and $g\colon [a,b] \to [0,\infty)$ is an integrable function then there exsists a number $c \in [a,b]$ such that

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt.$$

In the case of the weighted mean value theorems for integrals the intermediate point asymptotically approaches the value $a + (x-a)\sqrt[k]{\frac{1}{k+1}}$, where $k \in \mathbb{N}$ is the number of times the function f differentiable at the point a. Also when f and g are differentiable then the intermediate point satisfies the equation

$$\lim_{x\to a} \frac{\int_a^{c(x)} g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} = \frac{1}{2}.$$

If the conditions set on the functions in the weighted mean value theorems for integrals are expanded to functions that aren't differentiable at the point a then the approximate value

$$c(x) \approx a + (x - a)\sqrt[r]{\frac{s+1}{r+s+1}},$$

where $r \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $s \in (-1, \infty)$ and $r + s > -1$, can be used to provide close approximiations to certain physics' problems.

Kirjandus

[1] **Jacobson, B.**, *On the mean value theorem for integrals*, Amer. Math. Monthly **89** (1982), nr. 5, 300–301.

[2] **Mercer, P. R.**, *The number c in Cauchy's average value theorem*, Int. J. Math. Educ. Sci. Techn. **35** (2004), 118–122.

[3] **Nikonorov, J. G.**, *On the integral mean value theorem*, Siberian Math. J. **34** (1993), nr. 6, 1135–1137.

[4] **Polezzi, M.**, *On the weighted mean value theorem for integrals*, Int. J. Math. Educ. Sci. Techn. **37** (2006), 868–870.

[5] **Schwind, W. J., Jun Ji, Koditschek, D. E.**, *A physically motivated further note on the mean value theorem for integrals*, Amer. Math. Monthly **106** (1999), nr. 6, 559–564.

[6] **Zhang Baolin**, *A note on the mean value theorem for integrals*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), 561–562.

[7] **Trif, T.** *Asymptotic behavior of intermediate points in certain mean value theorems. II*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. **55** (2010), nr. 3, 241–247.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina Inger-Helen Maadik (sünnikuupäev: 03.02.1991)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose "Integraali keskväärtusteoreemid: keskväärtust määravate punktide asümptootiline käitumine", mille juhendaja on Toivo Leiger,

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus/Tallinnas/Narvas/Pärnus/Viljandis, 03.06.2013