P. STRATILATOV

Trigonomeetria

ülesannete kogu

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

P. STRATILATOV

TRIGONOMEETRIA ÜLESANNETE KOGU

KESKKOOLI IX—XI KLASSILE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1958

Originaali tiitel:
П. В. Стратилатов.
Сборник задач по тригонометрии.
Для 9 и 10 классов средней школы.
Утверждён Министерством просвещения РСФСР.
Издание второе.
Учпедгиз 1957.

Tõlkinud A. Siirak.

Tõlge kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt.

2

Tartu Riikl. Ülikooli
Raamatukogu
43466

ARHIIVKOGU

I peatükk.

NURGAD JA KAARED; NENDE MÕÕTMINE.

§ 1. Teravnurga trigonomeetrilised funktsioonid.

1. 1) Ehitada teravnurk α, kui:

$$\sin\alpha=\frac{3}{5};\quad \cos\alpha=\frac{2}{3};\quad \tan\alpha=\frac{4}{7};\quad \cot\alpha=2.$$

2) Ehitada teravnurk α, kui:

$$\sin\alpha=\frac{5}{7};\quad \cos\alpha=\frac{4}{5};\quad \tan\alpha=3;\quad \cot\alpha=\frac{2}{7}.$$

2. Kumb teravnurkadest α ja β on suurem ja mispärast, kui on teada, et:

1) (peast) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ ja $\cos\beta=\frac{2}{5}$;

2) (peast) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ ja $\cos\beta=\frac{3}{7}$;

3) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ ja $\cos\beta=\frac{2}{3}$.

3. Kumb teravnurkadest α ja β on suurem ja mispärast, kui on teada, et:

1) (peast) $\sin\alpha=\frac{3}{7}$ ja $\sin\beta=\frac{4}{7}$;

2) (peast) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ ja $\sin\beta=\frac{3}{7}$;

3) $\sin\alpha=\frac{2}{5}$ ja $\sin\beta=\frac{3}{7}$.

4. Kumb teravnurkadest α ja β on suurem ja mispärast, kui on teada, et:

1) (peast) $\tan\alpha=2$ ja $\tan\beta=3$;

2) $\tan\alpha=\frac{3}{5}$ ja $\tan\beta=\frac{4}{7}$.

5. Kumb teravnurkadest α ja β on suurem ja mispärast, kui on teada, et:

1) (peast) $\cot\alpha=2$ ja $\cot\beta=3$;

2) $\cot\alpha=\frac{3}{7}$ ja $\cot\beta=\frac{1}{3}$.

6. Kasutades tabeleid, leida järgmiste nurkade trigonomeetriliste funktsioonide arvulised väärtused.

1)	2)	3)	4)
sin 15°	sin 38°24′	sin 11°20′	sin 46°8′
tan 20°	tan 45°	tan 53°41′	tan 85°28′
cos 65°	cos 32°18′	cos 61°10′	cos 11°40′
cot 65°	cot 37°36′	cot 19°39′	cot 9°40′

7. Kasutades tabeleid, leida trigonomeetriliste funktsioonide antud väärtuse järgi teravnurk α.

1) $\sin\alpha=0{,}3420$; $\tan\alpha=0{,}4452$; $\cos\alpha=0{,}8910$; $\cot\alpha=0{,}6946$;

2) $\sin\alpha=0{,}5948$; $\tan\alpha=0{,}42$; $\cos\alpha=0{,}4456$; $\cot\alpha=1{,}4948$;

3) $\sin\alpha=0{,}842$; $\tan\alpha=2{,}558$; $\cos\alpha=0{,}2341$; $\cot\alpha=0{,}4142$;

4) $\sin\alpha=0{,}9293$; $\tan\alpha=0{,}63$; $\cos\alpha=0{,}0135$; $\cot\alpha=3{,}115$.

8. Arvutada rombi pindala, kui rombi külg $a=7{,}5$ cm ja teravnurk $\alpha=22°12′$.

9. Rombi diagonaalid $d_1=28$ cm ja $d_2=49$ cm. Arvutada rombi nurgad.

10. Võrdhaarse kolmnurga alus $b=28{,}13$ m ja külg $a=17{,}53$ m. Leida alusnurk.

11. Võrdhaarse kolmnurga alus $b=31{,}26$ m ja kõrgus $h=20{,}75$ m. Leida kolmnurga tipunurk.

12. Trapetsi alused on a ja b, üks haar on c, selle haara ja aluse vaheline teravnurk on α. Leida trapetsi pindala.

13. Ringjoone raadius $R=4{,}175$ m. Arvutada niisuguse kõõlu pikkus, mis lõikab ringjoonest kaare $\alpha=37°42′$.

14. Ristküliku lähisküljed $a=75{,}2$ cm ja $b=63{,}6$ cm. Missugusteks osadeks jaotab ristküliku diagonaal ristküliku nurga?

15. Ristküliku lähisküljed $a=13{,}5$ cm ja $b=7{,}4$ cm. Leida ristküliku diagonaalide vaheline teravnurk.

16. Ringjoont raadiusega $R=35{,}8$ cm lõikab kõõl pikkusega 28,7 cm. Leida selle kõõlu poolt eraldatud väiksema kaare suurus kraadides ja minutites ning kõõlu kaugus ringjoone keskpunktist.

17. Kõõlu pikkus moodustab $\frac{3}{4}$ ringjoone diameetrist. Leida selle kõõlu poolt eraldatud väiksema kaare suurus kraadides ja minutites.

18. Kesknurk α toetub kõõlule a. Leida ringi raadius.

19. On antud ringjoon raadiusega $R=3{,}35$ cm. Keskpunktist kaugusel $a=8{,}32$ cm $(a>R)$ olevast punktist on ringjoonele tõmmatud kaks puutujat. Arvutada nende puutujate vahelise nurga suurus.

20. Kahe ringjoone keskpunkte ühendava sirglõigu pikkus $d=6{,}245$ m. Ringide raadiused $R=3{,}065$ m ja $r=1{,}007$ m. Leida nurgad, mille moodustavad nende ringide ühised sisemised ja välised puutujad keskpunkte läbiva sirgega.

21. Võrdhaarse kolmnurga külg on a ja tipunurk β. Leida selle kolmnurga sisse joonistatud ringjoone raadius ja ümber joonistatud ringjoone raadius.

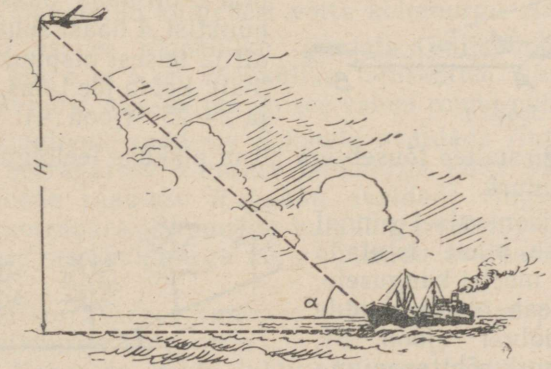
22. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on a, tema terav lähisnurk aga β. Leida selle kolmnurga ümber joonistatud ringjoone raadius.

23. Majakast, mille kõrgus merepinnast $H\approx150$ m, tuleb määrata möödasõitva laeva kaugus. Alangnurk $\alpha\approx9°$ (joon. 1). Leida otsitav kaugus.



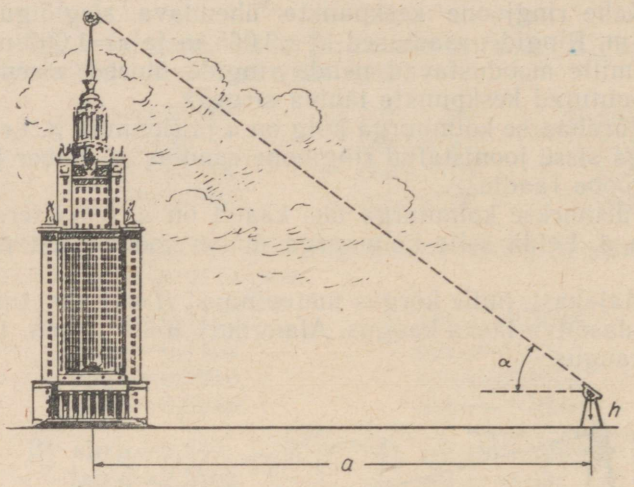
Joon. 1.

24. Lendur teatab raadio teel kalalaeva kaptenile, et ta asetseb kalaparve kohal, merepinnast kõrgusel $H\approx950$ m. Laevalt määratakse kõrgusnurk $\alpha\approx26°30'$ (joon. 2). Arvutada lennuki kõrguse ja kõrgusnurga abil laeva kaugus kalaparvest.



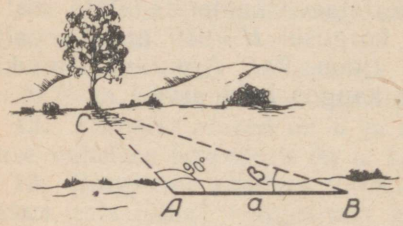
Joon. 2.

25. M. V. Lomonossovi nimelise Moskva Riikliku Ülikooli peahoone kõrguse määramiseks mõõdeti nurgamõõtja abil nurk α (joon. 3). Nurgamõõtja kaugus peahoone teljest on a ning kõrgus maapinnast h. Arvutada peahoone kõrgus ($\alpha \approx 53°$; $a \approx 180$ m; $h \approx 1{,}2$ m).



Joon. 3.

26. Tuletornist möödumisel mõõdab tüürimees nurga α, mille all paistab laevalt tuletorn. Arvutada laeva ja tuletorni vahelise lõigu pikkus kaardil. Tuletorni kõrgus on H, kaardi mõõt 1 : 100 000 ($\alpha \approx 2°52'$; $H \approx 150$ m).

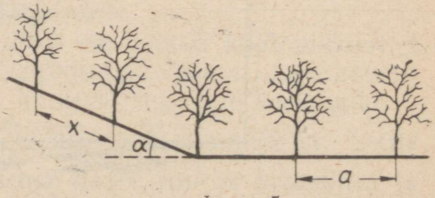


Joon. 4.

27. Jõe laiuse määramiseks võeti jõe ühel kaldal vahetult vee ääres baasiks lõik $AB = a$ nii, et teisel kaldal vee ääres kasvav puu C oli näha baasi ühest otspunktist A baasi suhtes täisnurga all ja teisest otspunktist B nurga β all. Leida jõe laius, kui $a \approx 45$ m ja $\beta \approx 25°$ (joon. 4).

28. Mägiraudtee tõuseb iga 30 m pikkuse teelõigu kohta $\frac{1}{2}$ m. Leida tõusunurk.

29. Horisontaalsel pinnal kavatsetakse puud istutada üksteisest a meetri kaugusele. Kui suur peab olema puude vahe mäenõlval (joon. 5), mille kaldenurk rõhttasapinna suhtes on α?



Joon. 5.

30. Keskpäeval, kui päikese kõrgus horisondist on α, on tehase korstna varju pikkus a. Arvutada korstna kõrgus, kui $\alpha \approx 28°$ ja $a \approx 76$ m.

31. Raudteetammi laius ülalt on a, alt aga b meetrit. Tammi nõlvad moodustavad rõhttasapinnaga nurga α. Arvutada tammi kõrgus, kui $a \approx 10{,}0$ m, $b \approx 24{,}0$ m ja $\alpha \approx 25°$.

32. Võrdhaarse trapetsi kujulise ristlõikega raudteetammi nõlva kaldenurgale φ on ehitamisel antud suurim võimalik väärtus. Trapetsi alumine alus on a, kõrgus h. Arvutada trapetsi ülemine alus, kui $a \approx 10{,}0$ m, $h \approx 3{,}0$ m ja $\varphi \approx 39°$.

33. Täisnurga tipust väljuvad üheaegselt kaks punkti, üks mööda täisnurga üht haara, teine mööda teist haara. Üks liigub kiirusega $a \frac{\text{m}}{\text{sek.}}$, teine aga kiirusega $b \frac{\text{m}}{\text{sek.}}$. Missuguse nurga φ all esimese punkti liikumise suuna suhtes paistab esimesest punktist teine?

34. Sirgel MN on võetud punkt A. Punktist A on tõmmatud sirglõik AB, mille pikkus on a ja mis moodustab sirgega MN teravnurga α. Leida lõigu AB projektsiooni pikkus lõigul MN. Kuidas muutub selle projektsiooni pikkus nurga α muutudes 0°-st 90°-ni?

35. Kaks jõudu $P \approx 4{,}3$ kG ja $Q \approx 5{,}6$ kG mõjuvad ühele ja samale kehale ning on teineteisega risti. Leida nende jõudude resultant ja nurk, mille resultant moodustab jõuga P.

36. Leida geograafilisele laiusele φ vastava paralleeli pikkus, kui Maa lugeda kerakujuliseks ja tema diameetri pikkuseks võtta 12 740 km. Arvutada Moskvat läbiva paralleeli pikkus ($\varphi \approx 56°$).

37. Vagonett kaaluga P asetseb kaldteel, mis moodustab rõhttasapinnaga nurga α. Kui suurt jõudu on vaja rakendada, et hoida vagonetti sellel teel paigal, kui $P \approx 0{,}7$ T ja $\alpha \approx 12°40'$.

38. Tõestada, et teravnurkse kolmnurga pindala on võrdne kolmnurga kahe külje ja nendevahelise nurga siinuse poole korrutisega.

Juhis. Üks antud külgedest võtta kolmnurga aluseks.

39. Tõestada, et rööpküliku pindala väljendub valemiga $S = ab \sin \alpha$, kus a ja b on rööpküliku lähisküljed ning α nendevaheline teravnurk. Missugune on see valem rombi puhul?

40. 1) Ringjoone raadiuse R kaudu avaldada ringjoone sisse joonistatud korrapärase n-nurkse hulknurga külje pikkus.

2) Ringjoone raadiuse R kaudu avaldada ringjoone ümber joonistatud korrapärase n-nurkse hulknurga külje pikkus.

3) Korrapärase hulknurga külje a_n kaudu avaldada hulknurga apoteem.

41. Leida korrapärase n-nurkse hulknurga kõige pikem diagonaal, kui hulknurga külg on a_n.

Juhis. Vaadelda kahte juhtu: 1) n on paarisarv; 2) n on paaritu arv.

§ 2. Nurgad ja kaared; nende mõõtmine.

42. Väljendada kraadides nurk, mille moodustab kella tunniosuti

1) 1 tunniga; 2) $2\frac{1}{2}$ tunniga; 3) 4 tunniga;
4) 3 tunniga; 5) 12 tunniga; 6) 24 tunniga.

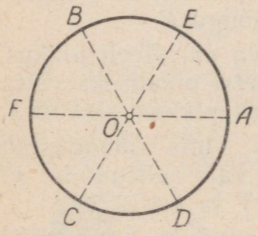
43. Väljendada kraadides nurk, mille moodustab minutiosuti ülesandes 42 esitatud ajavahemike jooksul.

44. Masina hooratas teeb 2 sekundiga 6 pööret. Väljendada kraadides nurk, mille võrra pöördub ratas 1 sekundiga; 10 sekundiga.

45. Hammasrattal on 72 hammast. Väljendada kraadides nurk, mille võrra pöördub ratas, kui ta pöördub 1 hamba võrra; 30 hamba võrra; 144 hamba võrra; 300 hamba võrra.

46. Dünamomeetri osuti kaldub kõrvale kahe jaotuse võrra, kui temale mõjub jõud 1 kG. Väljendada kraadides nurk, mille võrra kaldub osuti kõrvale, kui dünamomeetrile mõjub jõud 80 kG; 56 kG.

Juhis. Dünamomeetri numbrilaual on 180 jaotust, numbrilaual on poolringi kuju.



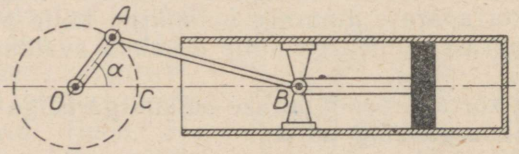
Joon. 6.

47. Sammumõõtja osuti teeb numbrilaual täisringi, kui on tehtud 1000 sammu. Väljendada kraadides nurk, mille võrra pöördub sammumõõtja osuti, kui on tehtud: 1 samm; 10 sammu; 150 sammu; 1250 sammu; 1500 sammu.

48. Ringjoon on jaotatud kuueks võrdseks osaks: $\smile AE = \smile BE = \smile BF = \smile FC = \smile CD = \smile DA$. Kirjutada nende nurkade üldavaldis, mille puhul lõpphaar on asendis: 1) OB; 2) OC (joon. 6) ning lähtehaaraks on OA.

49. Joonestada nurgad: 45°; (−30°); 225°; (−135°); (−90°); 450°; (−810°); 2070° nii, et nende lähtehaar oleks ühine. Milliste nurkade lõpphaarad ühtivad?

50. Aurumasina vänt pöördus nurga COA võrra (joon. 7). Samal ajal pöördus keps nurga CBA võrra. On teada, et $AB > OA$. Kumma nurga absoluutväärtus on suurem ja miks? Millised on nende nurkade märgid, kui nurkade lugemist alata raadiusest OC?



Joon. 7.

51. 1. Väljendada järgmised nurgad radiaanmõõdus:

30°; 45°; 60°; 120°; 135°; 150°; 75°; 108°; 210°; 225°; 240°; 300°; 315°; 330°; 1°; α; 76°30′; 7200°.

2. Väljendada järgmised nurgad radiaanmõõdus:

7°24′; 18°34′; 23°11′; 44°53′; 45°; 67°33′; 71°43′; 83°58′.

52. Väljendada radiaanides antud nurgad kraadimõõdus (ligikaudselt):

$$1{,}5;\quad 0{,}75;\quad \frac{2}{3}\pi;\quad \frac{3}{5}\pi;\quad 1\frac{1}{4}\pi.$$

53. Millises veerandis asetseb kesknurga α lõpphaar, kui α suurus on radiaanides:

1; 1,8; 3,14; 2,3; 4,01; 6; 23; 0,6981?

54. Määrata geograafilisel kaardil malli abil kindlaks järgmiste suundade asimuudid *:

1) Moskva—Leningrad; 2) Moskva—Gorki;
3) Moskva—Saraatov; 4) Moskva—Kiiev.

Leitud nurgad väljendada radiaanmõõdus.

55. Leida järgmiste teravnurkade täiendusnurkade väärtused radiaanmõõdus:

$$\frac{\pi}{4};\quad \frac{\pi}{12};\quad \frac{7\pi}{20};\quad 0{,}6;\quad 0{,}7321.$$

56. Leida radiaanides antud nurkade kõrvunurgad kraadimõõdus:

$$\frac{2}{5}\pi;\quad \frac{11\pi}{20};\quad \frac{7\pi}{9}.$$

57. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on $\frac{\pi}{9}$. Leida alusnurk.

58. Kolmnurga kaks nurka on radiaanmõõdus vastavalt $\frac{\pi}{2}$ ja $\frac{1}{3}\pi$. Väljendada selle kolmnurga kõik nurgad kraadimõõdus.

59. Kolmnurga nurgad suhtuvad nagu 3 : 4 : 5. Leida need nurgad radiaanmõõdus.

60. Kolmnurga kaks nurka on vastavalt 30° ja 45°. Väljendada selle kolmnurga kõik nurgad radiaanmõõdus.

61. Nelinurga nurgad suhtuvad nagu 4 : 7 : 11 : 14. Leida tabeli abil selle nelinurga nurgad radiaanmõõdus.

62. Leida piirdenurga suurus, kui kaar, millele ta toetub, on radiaanmõõdus $\frac{7\pi}{18}$.

---

* Asimuudiks nimetatakse nurka koha geograafilise meridiaani ja antud suuna vahel. Geodeesias loetakse asimuuti põhjapunktist kellaosuti liikumise suunas 0°-st 360°-ni.

63. Kaare pikkus on radiaanmõõdus $\frac{2\pi}{9}$. Millise nurga all paistab kaare punktidest vaadates sellele kaarele vastav kõõl?

64. Kõõlu otspunktist on tõmmatud ringjoonele puutuja. Väljendada puutuja ja kõõlu vaheline nurk radiaanmõõdus, kui kõõlu pikkus võrdub raadiuse pikkusega.

65. Ringi raadius on 5 cm. Arvutada 18°-se kaare pikkus.

66. Ringjoone raadius on 20 cm. Arvutada selle ringjoone kaare pikkus, mis sisaldab:

$$30°;\ 11°25';\ 40°20';\ 73°45'.$$

67. Ratas, mille raadius on 1,2 m, teeb minutis 300 pööret.

1) Leida tema nurkkiirus ω. (Nurkkiiruse dimensioon on $\frac{\text{radiaan}}{\text{sekundis}}$.)

2) Leida ratta keskpunktist 20 cm kaugusel asetseva punkti joonkiirus.

3) Leida ratta äärjoone punkti joonkiirus.

4) Tõestada, et keskpunktist kaugusel r asetseva punkti pöörlemise joonkiirus on $r\omega$.

68. Võlli nurkkiirus on 21 radiaani sekundis. Arvutada selle võlli pöörete arv minutis.

69. Arvutada maakera pöörlemise nurkkiirus järgmistes ühikutes:

$$\frac{\text{radiaan}}{\text{tunnis}};\ \frac{\text{radiaan}}{\text{minutis}};\ \frac{\text{radiaan}}{\text{sekundis}}.$$

70. Ratas pöörleb nurkkiirusega $\omega = \frac{\pi}{9}$ radiaani sekundis. Mitme sekundiga teeb ta täispöörde?

71. Arvutada kella tunniosuti pöörlemise nurkkiirus ja sekundiosuti pöörlemise nurkkiirus.

72. Kaks hammasratast on ühendatud teineteisega nii, et nad pöörlevad vastassuunas. Vedaval hammasrattal on 20 hammast, veetaval 30.

Kui suure nurga võrra pöördub veetav hammasratas, kui vedav ratas pöördub 8 hamba võrra? Kas veetava ratta pöördenurk muutub vedava ratta hammaste arvu suurendamisel?

73. Avaldada korrapärase kolmnurga, kuusnurga, viisnurga, kümnenurga ja nelinurga sisenurk radiaanmõõdus.

74. Ringi raadius on 10 cm. Leida niisuguse sektori ümbermõõt, mille kaar on 0,7 radiaani.

75. Konstrueerida nurk $(-\alpha)$, kui nurk α on:

$$10°;\ 180°;\ \frac{\pi}{2};\ (-30°);\ (-\frac{\pi}{2});\ (-\pi);\ 270°;\ (-\frac{3}{2}\pi);\ 1.$$

76. Nurga lõpphaar moodustab x-teljega nurga α. Leida üldvalem kõikide nende nurkade jaoks, mille lõpphaar on samas asendis. Rakendada leitud valemit järgmiste nurkade puhul:

$$\alpha = 30°;\ \alpha = -60°;\ \alpha = -\frac{\pi}{4};\ \alpha = \pi;\ \alpha = 1{,}2.$$

§ 3. Koordinaattasapind. Ühikring. Punktidevaheline kaugus.

77. Konstrueerida tasapinnal punktid nende koordinaatide järgi:

$M_1(3; 5)$; $M_2(-3; 8)$; $M_3(-4; -10)$; $M_4(7; -2)$.

78. Konstrueerida punktid $M_1(2; 4)$ ja $M_2(6; 10)$ ja arvutada lõigu M_1M_2 keskpunkti abstsiss ja ordinaat.

79. Arvutada järgmisi punkte ühendava lõigu keskpunkti koordinaadid:

1) $M_1(3; 8)$ ja $M_2(6; 11)$;
2) $M_1(-4; 2)$ ja $M_2(2; -3)$.

80. 1) Joonestada ühikringjoonele punkt, mis vastab kaarele α, kui

$$\alpha = \frac{\pi}{4}; \quad \alpha = 1{,}2; \quad \alpha = \pi.$$

2) Märkida ühikringjoonel kaar α, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

a) $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$;

c) $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; d) $-\frac{3}{2}\pi < \alpha < 0$.

3) Märkida ühikringjoonel kaar α, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

a) $|\alpha| \leqslant \frac{\pi}{6}$; b) $|\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2}$; c) $|\alpha| \leqslant \pi$.

81. Arvutada järgmiste punktide kaugus koordinaatide algusest:

$M(5; 7)$; $M(-7; -8)$; $M(-3; 5)$;
$M(X_1; Y_1)$, kus X_1 ja Y_1 on mistahes reaalarvud.

82. Arvutada järgmiste punktide vaheline kaugus täpsusega kuni 0,1, rakendades Pythagorase teoreemi ja õpikus antud valemit:

1) $M_1(2; 5)$ ja $M_2(3; 8)$. 3) $M_1(-7; -10)$ ja $M_2(0; 0)$.
2) $M_1(-3; 2)$ ja $M_2(-4; 6)$. 4) $M_1(-4; -7)$ ja $M_2(-5; -2)$.

83. 1) Konstrueerida punkt, mis on sümmeetriline punktiga $M(2; 5)$ koordinaatide alguse suhtes. Millised on selle punkti koordinaadid?

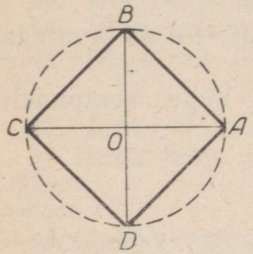
2) Seesama punkti $M(-2; -5)$ kohta.
3) Seesama punkti $M(4; -3)$ kohta.

84. 1) Leida selle punkti koordinaadid, mis on sümmeetriline punktiga $M_1(-3; 4)$ koordinaatide alguse suhtes. Kui kaugel asetseb otsitav punkt koordinaatide algusest?

2) Seesama punkti $M_1(6; -9)$ kohta.

3) Seesama punkti $M_1(X_1; Y_1)$ kohta, kus X_1 ja Y_1 on mistahes reaalarvud.

85. 1) Ühikringi joonestatud ruudu üks tipp asetseb punktis A (1; 0) (joon. 8). Leida ülejäänud tippude koordinaadid ja anda üldvalem nurkade jaoks, mille moodustavad ruudu küljed x-teljega.



Joon. 8.

2) Seesama korrapärase kolmnurga kohta.

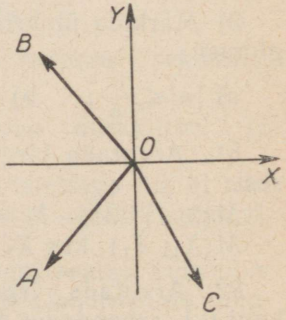
3) Seesama korrapärase kuusnurga kohta.

86. Punkt A liigub koordinaatide algusest ühtlaselt ja sirgjooneliselt x-telje suhtes nurga all $\alpha=48°$ kiirusega $v\approx5{,}0\ \frac{\text{cm}}{\text{sek.}}$. Leida punkti koordinaadid pärast $t=8$ sek. möödumist liikumise algusest.

87. Punkt M koordinaatidega $X\approx3{,}0$; $Y\approx5{,}0$ jõudis ühtlaselt sirgjooneliselt liikudes punkti M_1 koordinaatidega $X_1\approx5{,}0$ ja $Y_1\approx10{,}0$. Millise nurga all x-telje suhtes punkt liikus ja kui pika tee ta läbis?

88. Arvutada kolmnurga pindala, kui kolmnurga tippude koordinaadid on $M_1(-2; -3)$; $M_2(-3; 4)$; $M_3(3; 5)$.

89. 1) Joonisel 9 on antud vektor OA, mis kuulub koordinaatide süsteemi XOY. Joonestada vektori OA projektsioonid x- ja y-teljele ning mõõta malliga nurgad, mille moodustab vektor OA oma projektsioonidega.



Joon. 9.

2) Seesama vektori OB kohta.

3) Seesama vektori OC kohta.

90. 1) Vektori OA pikkus on 10 cm ja ta moodustab x-teljega nurga 38°. Leida selle vektori projektsioonide ligikaudsed pikkused koordinaattelgedel täpsusega 0,1.

2) Leida seesama vektori OB kohta, kui ta pikkus on 7,2 cm ja ta moodustab x-teljega nurga 76°.

91. 1) Vektor AB, mis on suunatud mööda abstsisstelge paremale, pöördus alguspunkti ümber nurga $\alpha=220°$ võrra kellaosuti liikumise vastassuunas. Joonestada vektori AB alg- ja lõppasend. Arvutada selle vektori projektsioonide ligikaudsed pikkused koordinaattelgedel täpsusega 0,1, kui $|AB|=1$.

2) Seesama vektori CD kohta, kui $\alpha=835°$ ja $|CD|=1$.

92. 1) A ja B on ringjoone punktid, kusjuures väiksem kaar AB on 90°. Mõlemad punktid alustavad liikumist üheaegselt ühes

ja samas suunas. Punkt A läbib igas minutis 30°-se kaare, punkt B aga 45°-se kaare. Mitme minuti pärast need punktid ühtivad?

2) Seesama juhul, kui A ja B on ringjoone ühe ja sama diameetri otspunktideks, kusjuures punkt A läbib minutis 45°-se kaare, punkt B aga 60°-se kaare.

93. Joonestada vektor ja arvutada selle pikkus täpsusega 0,1, kui:

1) vektori projektsioon x-teljel on (-3) ja y-teljel 5;

2) vektori projektsioon y-teljel on null ja x-teljel (-4).

94. 1) Ehitada nurgad $(\alpha \pm \beta)$, kui:

a) $\alpha = 30°$; $\beta = 120°$; b) $\alpha = -20°$; $\beta = 60$; c) $\alpha = 470°$; $\beta = 10°$.

2) Joonestada koordinaatteljestik ja määrata koordinaattasapinnal vabalt võetud punkti abstsiss ja ordinaat. Pöörata koordinaattelgi nurga α võrra, konstrueerida sellesama punkti abstsiss ja ordinaat uues koordinaatide süsteemis ning mõõta need.

Lahendada seesama ülesanne, kui

a) punkt asetseb I veerandis ja $\alpha = 30°$;
b) „ „ II „ ja $\alpha = 225°$;
c) „ „ III „ ja $\alpha = 120°$.

II peatükk.

TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID.

§ 4. Mistahes nurga trigonomeetrilised funktsioonid. Trigonomeetriliste funktsioonide märgid.

95. Konstrueerida raadiusvektor, mille pikkus on l ja mis moodustab x-teljega nurga α. Joonestada selle vektori projektsioonid x- ja y-telgedele ning määrata funktsioonide $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$ märgid. Lahendada ülesanne juhul, kui: 1) $l=3$ cm, $\alpha=140°$, 2) $l=2$ cm, $\alpha=230°$, 3) $l=2{,}5$ cm, $\alpha=325°$.

96. Määrata alljärgnevas tabelis esitatud trigonomeetriliste funktsioonide märgid näidatud veerandites lõppevate nurkade puhul.

Veerand / Funktsiooni nimetus	I	II	III	IV
Koosinus				
Siinus				
Tangens				
Kootangens				

Põhjendada vastust.

97. Määrata järgmiste trigonomeetriliste funktsioonide märgid:

(Peast.) 1) $\sin 110°$; $\cos 280°$; $\tan 250°$; $\cot 100°$; $\sin 200°$; $\tan 100°$;

2) $\sin\frac{3}{4}\pi$; $\tan 2$; $\cot\frac{4}{5}\pi$; $\cos\frac{2\pi}{3}$; $\sin 4$; $\cos(-1{,}5)$; $\tan(-0{,}3)$;

3) $\sin 100° \cdot \sin 95°$; $\cos 200° \cdot \cos 170°$;
$\tan 95° \cdot \tan 125°$; $\cot 310° \cdot \cot 240°$.

4) $\sin 150° \cdot \cos 150° \cdot \tan 150° \cdot \cot 150°$;
$\sin 250° \cdot \cos 250° \cdot \tan 250°$;
$\sin 300° \cdot \cos 300° \cdot \cot 300°$; $\sin 70° \cdot \cos 140° \cdot \tan 280°$.

98. Millistes veerandites on ühesugused märgid:
1) siinusel ja koosinusel? 2) tangensil ja kootangensil? 3) siinusel ja tangensil? 4) koosinusel ja kootangensil?

99. (Peast.) 1) Määrata järgmiste trigonomeetriliste funktsioonide märgid, kui $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right);\ \tan(\pi+\alpha);\ \cot\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right);$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);\ \sin(2\pi-\alpha);\ \cos(\pi-\alpha).$$

2) Millised märgid on avaldistel $\tan\alpha \cdot \cot\alpha$; $\sin^2\alpha$; $\cos^2\alpha$ argumendi α mistahes lubatavate väärtuste puhul?

100. Missuguses vahemiku $(0; 2\pi)$ osas on avaldis 1) $\sin x \cdot \cos x$ positiivne? 2) $\tan x \cdot \sin x$ negatiivne? 3) $\frac{\cos x}{\cot x}$ positiivne? 4) $\frac{\tan x}{\sin x}$ negatiivne? 5) $\tan x \cdot \cos x$ negatiivne? 6) $\cos x \cdot \cot x$ negatiivne?

101. Milline märk on avaldistel $\cos^2 x$ ja $(\sin^2 x+\cos^2 x)$ argumendi x mistahes väärtuste puhul?

102. Kui α, β ja γ on kolmnurga nurgad, siis:
1) milline märk on summal $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$?
2) millised nurkade α, β ja γ trigonomeetrilistest funktsioonidest võivad olla negatiivsed ning missugusel tingimusel?
3) määrata järgmiste avaldiste märgid:

a) $\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}$; b) $\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}$.

103. 1) Raadiusvektori pikkus on l ja ta moodustab x-teljega nurga α, kusjuures $\cos\alpha=m$. Leida selle raadiusvektori projektsioonid x- ja y-teljel.
2) Raadiusvektori pikkus on l ja ta moodustab x-teljega nurga α, kusjuures $\sin\alpha=n$. Leida selle raadiusvektori projektsioonid x- ja y-teljel.

104. (Peast.) Leida järgmiste avaldiste väärtused:
1) $5\sin 90°+2\cos 0°-2\sin 270°+10\cos 180°$;
2) $3\tan 0°+2\cos 90°+3\sin 270°-3\cos 180°$;
3) $4\sin\pi-2\cos\frac{3}{2}\pi+3\sin 2\pi-\tan\pi$;
4) $6-2\sin 2\pi-3\cos\pi+2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos 2\pi$;
5) $2\sin\frac{\pi}{4}+3\cos 2\pi-5\tan 2\pi$;
6) $4\tan 2\pi-2\sin\frac{\pi}{2}+3\cos\frac{3}{2}\pi-4\tan\pi$.

105. 1) Tõestada, et raadiuse $R=1$ puhul on ringjoone iga kõõlu pikkus võrdne sellele kõõlule vastava poole kesknurga kahekordse siinusega.

2) Koostame järgmise tabeli:

Kirjutame kolm esimest naturaalarvu	1	2	3
Leiame igaühest ruutjuure	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
Jagame saadud arvud kahega	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Milliste nurkade siinuste väärtused on kolmandas reas? Kuidas kasutada saadud arve cos 30°, cos 45° ja cos 60° leidmisel?

106. Teades nurkade $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$ ja $\frac{\pi}{3}$ trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi, arvutada trigonomeetriliste funktsioonide väärtused järgmiste argumentide puhul:

1) $\frac{2}{3}\pi$ (120°); $1\frac{1}{3}\pi$ (240°); $1\frac{2}{3}\pi$ (300°);

2) $\frac{3}{4}\pi$ (135°); $1\frac{1}{4}\pi$ (225°); $1\frac{3}{4}\pi$ (315°);

3) $\frac{5}{6}\pi$ (150°); $1\frac{1}{6}\pi$ (210°); $1\frac{5}{6}\pi$ (330°).

J u h i s. Joonestada ühikringis 4 vektorit, mis moodustavad x-teljega vastavalt nurgad 60°; 120°; 240° ja 300°. Teades sin 60° ja cos 60° väärtusi, arvutada ülejäänud nurkade siinuste ja koosinuste väärtused.

Koostada järgmine tabel:

	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Koosinus																
Siinus																
Tangens																
Kootangens																

107. Arvutada:

1) (peast) $\sin 0° + 2\cos 60° - 3\tan 45°$;

2) (peast) $2\sin 30° - \tan 45° + 2\cot 45° + \cos 90°$;

3) $3\sin\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6} + 3\tan\frac{\pi}{3} - 4\cot\frac{\pi}{2}$;

4) $3 - \sin^2\frac{\pi}{2} + 2\cos^2\frac{\pi}{3} - 3\tan^2\frac{\pi}{4}$;

5) $\frac{4 - 2\tan^2 45° + \cot^4 60°}{3\sin^3 90° - 4\cos^2 60° + 4\cot 45°}$;

6) $(2\sin\frac{\pi}{4})^2-(3\cot\frac{\pi}{6})^2+(2\cos\frac{\pi}{6})^4-(2\cot\frac{\pi}{4})^2$;

7) $3\sin^2\frac{\pi}{2}-(2\tan\frac{\pi}{4})^3-4\cos^2\frac{\pi}{6}+3\cot^3\frac{\pi}{2}$.

108. Lihtsustada avaldised:

1) (peast) $a\sin 0°+b\cos 90°+c\tan 0°-b\cot 90°$;

2) $a\tan\frac{\pi}{4}+2b\sin\frac{\pi}{4}-3a\tan 0-2a\cot\frac{\pi}{4}$;

3) $4a\sin^2\frac{\pi}{4}-3(a\tan\frac{\pi}{4})^2+(2a\cos\frac{\pi}{4})^2$;

4) (peast) $a^2\sin 90°+2ab\tan 45°+b^2\cos 0°$;

5) $4a^2\sin^4\frac{\pi}{4}-6ab\tan^2\frac{\pi}{6}+(b\cot\frac{\pi}{4})^2$;

6) $\dfrac{(a\sin\frac{\pi}{2})^2-(b\tan\frac{\pi}{4})^2}{2a^2\sin\frac{\pi}{6}-2ab\cos 0+(b\tan\frac{\pi}{4})^2}$;

7) $\dfrac{(2a\cos\frac{\pi}{3})^3-(b\cot\frac{\pi}{4})^3+(3ab\sin 0)^2}{(5a\cos\frac{\pi}{2})^3+2a\sin\frac{\pi}{6}-2b\cos^2\frac{\pi}{4}}$.

109. Leida järgmiste avaldiste väärtused:

1) (peast) $\sin\alpha+\cos\alpha$, kui α on 0°; 45°; 90°;

2) $\tan\alpha+\sin\alpha$, kui α on 0°; 30°; 60°;

3) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$, kui $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

4) $\sin^2\alpha+\tan\alpha-4\cos\alpha-2\cot 2\alpha$, kui $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

5) $2\sin(45+\alpha)+3\cos(180°-2\alpha)-4\cot(90°-\alpha)$, kui $\alpha=45°$;

6) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin(15°+\alpha)-\sin\alpha}$, kui $\alpha=30°$;

7) $\dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$, kui $\alpha=60°$, $\beta=30°$.

Trigonomeetrilised funktsioonid kui paaritud või paarisfunktsioonid.

110. Eraldada järgmiste funktsioonide hulgast paaris- ja paaritud funktsioonid: $\cos x$; $\cos^2 x$; $\cos^3 x$; $\sin x$; $\sin^2 x$; $\sin^3 x$; $\tan x$; $\tan^2 x$; $\tan^3 x$; $-\sin x$; $-\cos x$; $-\tan x$; $-\cot x$; $\dfrac{x}{\sin x}$; $\dfrac{\cos x}{x}$; $\dfrac{\tan x}{x}$; $\dfrac{\sin x+\tan x}{\cos x}$.

111. Leida järgmiste nurkade trigonomeetriliste funktsioonide väärtused:

1) (peast) (−30°); (−45°); (−60°); (−90°);

2) (peast) (−135°); (−210°); (−300°); (−180°).

(Kasutada ülesande 106 tabelit.)

112. Lihtsustada avaldised:

1) $a\sin(-30°)-2a\tan(-45°)+b\cos(-60°)-b\cot(-90°)$;

2) $\dfrac{\sin^3(-30°)-2\cot(-\frac{\pi}{6})-1}{2-\tan 45°+4\cos^2(-\frac{\pi}{3})}$;

3) $[2a\cos(-\frac{\pi}{3})]^3-4[a\cot(-\frac{\pi}{6})]^3+6\tan 0$;

4) $5\tan 0+2\sin(-\frac{\pi}{6})-3\cot(-\frac{\pi}{4})+4\cos(-\frac{\pi}{2})$.

113. Leida järgmiste avaldiste väärtused:

1) $4\cos(3\alpha-30°)+2\tan^2 2\alpha-2\sin(30°+\alpha)$, kui $\alpha=-30°$;

2) $\sin\beta+\cos\alpha+\tan\alpha+\cot\beta$, kui $\alpha=-\frac{\pi}{3}$ ja $\beta=-\frac{\pi}{4}$.

114. Leida järgmiste avaldiste väärtused:

1) $2\sin 120°\cdot\tan 300°$; 2) $6\cos(-240°)\cdot\cot 210°$;

3) $4\sin(-150°)\cdot\cos 300°\cdot\tan 240°$;

4) $8\sin(-\frac{\pi}{6})\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\tan(-\frac{3}{4}\pi)\cdot\cot(-\frac{5}{4}\pi)$.

(Kasutada ülesande 106 tabelit.)

115. Teades, et nurga x koosinus ja siinus on vastavalt võrdsed ühikringi liikuva raadiuse lõpp-punkti abstsissi ja ordinaadiga, kus x on nurk, mille moodustab liikuv raadius liikumatu raadiusega, joonestada funktsioonide $y=\sin x$ ning $y=\cos x$ graafikud, andes argumendile x-väärtusi vahemikust $[0;\ 2\pi]$.

116. 1) Näidata ühikringjoonel, milliste kaarte kohta kehtib iga järgmine võrratus:

a) $|\sin\alpha|\leqslant\frac{1}{2}$; b) $|\cos\alpha|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $|\tan\alpha|\leqslant 1$.

2) Määrata, millises ühikringi osas asetsevad nurga α alg- ja lõpphaar, kui

a) $\sin\alpha>\frac{1}{2}$; b) $\sin\alpha\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\sin\alpha\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$;

d) $\cos\alpha\geqslant 0{,}7341$; e) $\tan\alpha\leqslant 0{,}9237$; f) $\tan\alpha\geqslant 1{,}411$;

g) $\cos\alpha\leqslant 0{,}3419$; h) $\cos\alpha\leqslant 0{,}6534$.

117. 1) Milliste argumendi väärtuste puhul on kehtivad järgmised võrdused:

a) $3-\sin\alpha=2{,}5$; b) $2+\cos\alpha=4$; c) $\tan\alpha+5=75$;

d) $2+\cot\alpha=1{,}3$.

2) Leida järgmiste funktsioonide suurim ja väikseim väärtus:

a) $1+\sin\alpha$; b) $\cos\alpha-3$; c) $2\sin x+2$; d) $1-\cos x$.

§ 5. Trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste arvutamine ühe funktsiooni antud väärtuse järgi.

118. Teha kindlaks, kas järgmised võrdused on kehtivad argumendi α ühe ja sama väärtuse korral.

1) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; $\cos\alpha=\frac{2}{3}$;
2) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$; $\cos\alpha=\frac{12}{13}$;
3) $\sin\alpha=-0{,}8$; $\cos\alpha=0{,}6$;
4) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

119. (Peast.) Teha kindlaks, kas järgmised võrdused on kehtivad argumendi α ühe ja sama väärtuse korral.

1) $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$; $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ ja $\tan\alpha=-2\frac{2}{5}$;
2) $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$; $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ ja $\tan\alpha=\frac{3}{4}$;
3) $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$; $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ ja $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$;
4) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ ja $\tan\alpha=-\sqrt{3}$.

120. Leida teravnurga α koosinus, tangens ja kootangens, kui

1) (peast) $\sin\alpha=\frac{12}{13}$;
2) (peast) $\sin\alpha=0{,}6$;
3) $\sin\alpha\approx0{,}281$;
4) $\sin\alpha\approx0{,}5793$.

Juhis. Lahendada iga ülesanne kahel viisil: a) leida nurk α tabeli järgi; b) arvutada valemite järgi (§ 11 õpikus).

121. Leida nürinurga α siinus, tangens ja kootangens, kui

1) (peast) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$;
2) (peast) $\cos\alpha=-0{,}9$;
3) $\cos\alpha=-\frac{9}{41}$;
4) $\cos\alpha\approx-0{,}7538$.

122. Leida nurga α siinus, koosinus ja kootangens, kui

1) $\tan\alpha=1{,}124$ ja $0°<\alpha<90°$;
2) $\tan\alpha=-\sqrt{3}$ ja $90°<\alpha<180°$.

Lahendada kahel viisil: a) leida nurk α tabeli järgi; b) arvutada valemite järgi (§ 11 õpikus).

123. Leida $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$, kui

1) $\cot\alpha=0{,}5357$ ja $0°<\alpha<90°$;
2) $\cot\alpha=-2{,}412$ ja $270°<\alpha<360°$.

124. Leida argumendi α ülejäänud trigonomeetriliste funktsioonide väärtused, kui

1) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ ja $0°<\alpha<\frac{\pi}{2}$;
2) $\sin\alpha=-\frac{9}{41}$ ja $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$;

3) $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ ja $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

4) $\cos\alpha = -0{,}8$ ja $\frac{3}{2}\pi > \alpha > \pi$.

125. Leida argumendi α ülejäänud trigonomeetriliste funktsioonide väärtused, kui

1) $\tan\alpha = -1$ ja $90° < \alpha < 180°$;

2) $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ ja $180° < \alpha < 270°$;

3) $\cot\alpha = -\sqrt{3}$ ja $270° < \alpha < 360°$;

4) $\cot\alpha = 1$ ja $180° < \alpha < 270°$.

126. 1) Teades, et $\sin\alpha = \frac{a}{b}$, kusjuures $0 < a < b$ ja $0° < \alpha < 90°$, leida nurga α ülejäänud trigonomeetriliste funktsioonde väärtused.

2) Teades, et $\sin\alpha < 0$ ja $\tan\alpha = \frac{a^2}{b^2}$, leida nurga α ülejäänud trigonomeetriliste funktsioonide väärtused. Milliseid väärtusi võivad omada parameetrid a ja b?

3) Leida $\cos\alpha$, kui $\sin\alpha = 1 + a$ ja $0° < \alpha < 90°$. Milliseid väärtusi võib omada parameeter a?

127. 1) Leida avaldise $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ väärtus, kui $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ja $0° < \alpha < 90°$.

J u h i s. Lahendada kahel viisil: a) teades $\sin\alpha$ väärtust, leida $\tan\alpha$; b) lihtsustada antud avaldist, kasutades valemit $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

2) Leida avaldise $\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$ väärtus, kui $\tan\alpha = -2$ ja $90° < \alpha < 180°$.

J u h i s. Lahendada kahel viisil:

a) teades $\tan\alpha$ väärtust, leida $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ väärtused;

b) lihtsustada antud avaldist, jagades lugeja ja nimetaja $\cos\alpha$-ga. Kas antud juhul võib jagada $\cos\alpha$-ga ja miks?

128. 1) Leida avaldise $\cot\alpha - \cos\alpha$ väärtus, kui $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ ja $180° > \alpha > 90°$.

2) Leida avaldise $\cot\alpha + \tan\alpha$ väärtus, kui $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ja $270° > \alpha > 180°$.

Millisel kahel viisil on võimalik lahendada kumbagi ülesannet?

129. 1) Leida $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$ väärtused, kui

a) $\alpha = 0{,}3491$; b) $\alpha = 1{,}0949$; c) $\alpha = \frac{\pi}{5}$.

2) Leida järgmiste avaldiste väärtused:

a) $\tan\alpha - \sin\alpha$, kui $\alpha = 0{,}6231$;

b) $\sin\alpha + \cos\alpha$, kui $\alpha = \frac{\pi}{7}$;

c) $\tan\alpha - \cot\alpha$, kui $\alpha = 1{,}2377$.

§ 6. Trigonomeetriliste avaldiste teisendamine ja samasuste tõestamine.

130. Avaldada ühe trigonomeetrilise funktsiooni kaudu:

1) $1 - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ a) $\sin\alpha$ kaudu; b) $\cos\alpha$ kaudu.

Kumb teisendus annab tulemuseks vähima liikmete arvuga avaldise?

2) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$ a) $\sin\alpha$ kaudu; b) $\cos\alpha$ kaudu.

Kumb teisendus annab tulemuseks trigonomeetrilise funktsiooni suhtes ratsionaalse avaldise?

3) $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ a) $\sin\alpha$ kaudu; b) $\cos\alpha$ kaudu.

Kumb teisendus annab tulemuseks lihtsama avaldise?

4) $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$

a) Kaotage nimetajast irratsionaalsus, korrutades nimetajat ja lugejat avaldisega $(1+\sin\alpha)$.

b) Kaotage lugejast irratsionaalsus, korrutades lugejat ja nimetajat avaldisega $(1-\sin\alpha)$.

Kumb teisendus annab tulemuseks lihtsama avaldise?

5) Teisendada avaldis $\frac{1}{1+\cos\alpha} + \frac{1}{1-\cos\alpha}$ ühise nimetajaga murruks.

6) $\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \cdot \frac{1+\cot^2\alpha}{\cot^2\alpha}$.

Avaldage $\cot\alpha$ $\tan\alpha$ kaudu ja teostage nõutud tehted.

131. Lihtsustada avaldised:

1) $1 - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

Kontrollida sooritatud teisenduse õigsust, asendades α järgmiste väärtustega: $\alpha = 30°$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$; $\alpha = -225°$; $\alpha = 146°$ jt.

Kas argumendile α võib anda mistahes väärtusi?

2) $1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.

Kontrollida sooritatud teisenduse õigsust, kui $\alpha = 90°$; $\alpha = 180°$.

Kas argumendile α võib anda mistahes väärtusi?

3) $\cos\alpha \cdot \tan\alpha + \sin\alpha$;

α kuulub vahemikku $[0; 2\pi]$.

Millised väärtused ei ole antud avaldises α jaoks lubatavad? Miks?

4) $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$.

Millised väärtused ei ole α jaoks lubatavad? Miks?

Harjutuste 5—14 lahendamisel vastake küsimusele: millised väärtused ei ole α jaoks lubatavad?

5) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cot^2\alpha$;

6) $1-\sin\alpha\cdot\cot\alpha\cdot\cos\alpha$;

7) $(1+\cos\alpha)\cdot\tan^2\alpha\cdot(1-\cos\alpha)$;

8) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\tan\alpha\cdot\cot\alpha$;

9) (peast) $\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}$ 10) (peast) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$;

11) (peast) $\cos\alpha\cdot\tan\alpha$; 12) (peast) $\sin\alpha\cdot\cot\alpha$;

13) $\sqrt{1-\sin^2\alpha}$; 14) $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$.

132. Lihtsustada avaldised:

1) $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}$; 2) $\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\cdot\cot\beta$;

3) $\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\cdot\cot\beta\cdot\tan\alpha+1$;

4) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\cos^2\beta-\cos^2\alpha$;

5) $1+\tan^2\alpha-\tan^2\alpha\ (\cos^2\alpha+1)$;

Missugused väärtused ei ole α jaoks lubatavad?

6) $(1-\sin^2\alpha)\cdot\cot^2\alpha-1-\cot^2\alpha$; 7) $\frac{\sin^2\beta}{1+\cos\beta}$;

Millised väärtused ei ole β jaoks lubatavad?

8) $\frac{\cos^2\beta}{\sin\beta-1}$; 9) $\frac{2\cos^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

Kas α jaoks on väärtus 135° lubatav?

10) $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(1+\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}\right)$.

133. Lihtsustada avaldised:

1) $\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}$; 2) $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}-\cot^2\alpha\cdot\cot^2\beta$;

3) $\tan\alpha+\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$; 4) $\cot\alpha-\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$;

5) $\sqrt{\frac{2}{1+\sin\alpha}+\frac{2}{1-\sin\alpha}}$;

6) $\sqrt{\sin^2\alpha\ (1+\cot\alpha)+\cos^2\alpha\ (1+\tan\alpha)}$;

7) $\frac{\cos\alpha\cdot\tan\alpha}{\sin^2\alpha}-\cot\alpha\cdot\cos\alpha$; 8) $\sin^4\beta-\cos^4\beta+\cos^2\beta$;

9) $\sin^2\beta+\cos^4\beta-\sin^4\beta$; 10) $\cos^4\beta+\sin^2\beta\cdot\cos^2\beta+\sin^2\beta$.

134. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused võimalikult lihtsal teel:

1) $\frac{\cot\alpha+\tan\alpha}{\cot\alpha-\tan\alpha}$, kui $\tan\alpha=\frac{4}{5}$;

2) $\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}$, kui $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$;

3) $\frac{1+\tan\alpha}{1+\cot\alpha}$, kui $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ ja $270°<\alpha<360°$;

4) $\frac{\cos\alpha+\cot\alpha}{\cot\alpha}$, kui $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ ja $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

5) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, kui $\tan\alpha=\frac{5}{4}$;

6) $\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$, kui $\alpha=0{,}9643$;

7) $\frac{\cot\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$, kui $\alpha=\frac{5}{4}\pi$;

8) $(\sin\alpha+\tan\alpha)\cdot(\cos\alpha+\cot\alpha)$, kui $\alpha=\frac{7}{4}\pi$;

9) $\frac{\cot\beta-\cot\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta}$, kui $\begin{cases}\alpha=0{,}6184\\ \beta=\frac{\pi}{6}\end{cases}$;

10) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$, kui $\alpha=1$.

135. 1) On antud: $\sin\alpha+\cos\alpha=m$. Leida $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

2) On antud: $\tan\alpha+\cot\alpha=m$. Leida $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$ ruutude summa ning kuupide summa.

3) Näidata, et avaldise $\frac{\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\frac{\cot^2\alpha-1}{\cot\alpha}$ väärtus on jääv α mistahes lubatavate väärtuste korral.

4) Näidata, et avaldise $\frac{1}{1+\tan^2\alpha}+\frac{1}{1+\cot^2\alpha}$ väärtus on jääv α mistahes lubatavate väärtuste korral.

5) Teisendada avaldist $x=\sqrt{A^2+B^2}$, kui $A=a\cdot\sin\varphi$ ja $B=a\cdot\cos\varphi$.

6) Arvutada $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$, a) kui $\tan\alpha=\frac{5}{2}$; b) kui $\cot\alpha=\frac{3}{4}$.

136. Tõestada järgmised samasused:

1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$, lihtsustades võrduse vasakut poolt;

2) $2\sin\alpha\cos\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1$, lihtsustades võrduse paremat poolt;

3) $\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$,

kus $0°<\alpha<90°$. Lihtsustada võrduse mõlemat poolt eraldi.

137. Tõestada samasused:

1) $\cos^4\alpha+\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1$;

2) $(\tan\alpha+\cot\alpha)^2-(\tan\alpha-\cot\alpha)^2=4$;

3) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\frac{1}{\tan^2\alpha}$; 4) $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}+\tan\alpha\cdot\cot\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$;

5) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$;

6) $3(\sin^4\beta+\cos^4\beta)-2(\sin^6\beta+\cos^6\beta)=1$;

7) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=2\cot\alpha$; $0°<\alpha<90°$;

8) $\frac{\tan\alpha+\cot\beta}{\cot\alpha+\tan\beta}=\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$; 9) $\frac{1+\tan^4\alpha}{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}=\tan^2\alpha$;

10) $(1-\cot\alpha)^2+(1+\cot\alpha)^2=\frac{2}{\sin^2\alpha}$.

138. Tõestada samasused:

1) $\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=2\tan^2\alpha$; 2) $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{|\sin\alpha|}{1+\cos\alpha}$

3) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$; 4) $\frac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{1+\cot^2\alpha}{1-\cot^2\alpha}$;

5) $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$, kui $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\pi k$ ja $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$;

6) $\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$;

7) $(\sin\alpha+\tan\alpha)\cdot(\cos\alpha+\cot\alpha)=(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)$;

8) $\sin^3\alpha(1+\cot\alpha)+\cos^3\alpha(1+\tan\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$;

9) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

10) $1+\frac{2}{\tan\alpha+\cot\alpha}=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$;

11) $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$;

12) $\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\cdot\frac{1+\cot^2\alpha}{\cot^2\alpha}-\tan^2\alpha=0$;

13) $\cot^2\alpha-\cos^2\alpha=\cot^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$.

§ 7. Nurga konstrueerimine tema trigonomeetrilise funktsiooni antud väärtuse järgi.

139. Konstrueerida nurk x ja anda üldvalem kõigi nende nurkade jaoks, mille lõpphaar ühtib konstrueeritud nurga lõpphaaraga, kui

1) $\cos x=\frac{1}{2}$ ja $0<x<\frac{\pi}{2}$;

2) $\cos x=\frac{1}{2}$ ja $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$; 3) $\cos x=\frac{1}{2}$.

140. Konstrueerida ühikringis nurgad, mille koosinused on vastavalt:

1) $\frac{2}{3}$; 2) $-0{,}4$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $0{,}9$; 5) $-\frac{2}{3}$.

Mõõta malliga need nurgad. Millise täpsusega te mõõtsite? Anda üldvalemid kõigi nende nurkade (või kaarte) jaoks, mille koosinused on samad, mis eespool antud.

141. Leida argumendi α ligikaudsed väärtused (tabeli järgi) vahemikus $[0; \pi]$, kui

1) $\cos\alpha = 0{,}2947$; 2) $\cos\alpha = -0{,}7381$; 3) $\cos\alpha = 0{,}5342$;
4) $\cos\alpha = 0{,}75$; 5) $\cos\alpha = -0{,}6237$.

142. 1) Konstrueerida nurgad:

a) $\arccos\frac{2}{3}$; b) $\arccos(-0{,}75)$;

2) Leida järgmistest võrranditest x:

a) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$; b) $\arccos\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$;

3) (peast) millega on võrdne $\cos(\arccos 1)$?

4) (peast) millega on võrdne $\cos(\arccos\frac{1}{2})$?

143. 1) Konstrueerida nurk x ja anda valem kõigi nende nurkade jaoks, mille lõpphaar ühtib konstrueeritud nurga lõpphaaraga, kui

a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ja $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

b) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ja $\frac{\pi}{2} < x < \pi$; c) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Konstrueerida ühikringis nurgad, mille siinused on vastavalt:

a) 0,6; b) $-\frac{1}{4}$ c) 0,25; d) $-\frac{5}{7}$ e) $-\frac{1}{2}$.

Mõõta malliga need nurgad ja leida tabeli järgi nende ligikaudsed väärtused. Millise täpsusega te mõõtsite? Anda üldvalemid kõigi nende nurkade jaoks, mille siinused on samad, mis eespool antud.

144. Leida argumendi α ligikaudsed väärtused (tabeli järgi) vahemikus $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, kui

1) $\sin\alpha = 0{,}4175$; 2) $\sin\alpha = 0{,}34$; 3) $\sin\alpha = -0{,}5346$;
4) $\sin\alpha = -0{,}8341$; 5) $\sin\alpha = 0{,}691$.

145. 1) Konstrueerida nurgad:

a) $\arcsin 0{,}8$; b) $\arcsin(-\frac{2}{3})$ (kontrollida tabeli abil);

2) Leida järgmistest võrranditest x:

a) $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$; b) $\arcsin\frac{x}{3} = \alpha$;

3) (peast) millega on võrdne $\sin(\arcsin 1)$?

4) (peast) millega on võrdne $\sin(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})$?

146. 1) Konstrueerida ühikringis nurgad, mille tangensid on vastavalt:

a) 1,5; b) -1; c) 0,8; d) $2\frac{2}{3}$.

Mõõta malliga need nurgad. Millise täpsusega te mõõtsite? Anda üldvalemid kõigi nende nurkade jaoks, mille tangensid on samad, mis eespool antud.

2) Leida argumendi α ligikaudsed väärtused (tabeli järgi) vahemikus $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, kui

a) $\tan\alpha=2{,}647$; b) $\tan\alpha=0{,}2183$;
c) $\tan\alpha=-0{,}8$; d) $\tan\alpha=-1{,}4321$.

147. 1) Konstrueerida nurgad:

a) $\arctan\frac{1}{2}$; b) $\arctan(-1{,}5)$.

2) Leida järgmistest võrranditest x:

a) $\arctan x=\frac{\pi}{3}$; b) $\arctan\frac{1}{x}=a$.

148. 1) Konstrueerida ühikringis nurgad, mille kootangensid on vastavalt:

a) -2; b) 1,7; c) $\frac{3}{7}$.

Mõõta malliga need nurgad ja anda üldvalemid kõigi nende nurkade jaoks, mille kootangensid on samad, mis eespool antud.

2) Leida argumendi α ligikaudsed väärtused (tabeli järgi) vahemikus $(0; \pi)$, kui

a) $\cot\alpha=0{,}7238$; b) $\cot\alpha=-1{,}37$; c) $\cot\alpha=1{,}835$.

149. 1) Konstrueerida nurgad:

a) $\operatorname{arccot} 1{,}2$; b) $\operatorname{arccot}(-0{,}6)$.

2) Leida järgmistest võrranditest x:

a) $\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{6}$; b) $\operatorname{arccot}\frac{x}{a}=b$.

3) (Peast.) Millega on võrdne $\tan(\arctan 2)$?

4) (Peast.) Millega on võrdne $\sin(\arctan 1)$?

150. Lihtsustada:

1) $4\arccos 0-2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-3\arctan(-\sqrt{3})+\operatorname{arccot} 0-\pi$;

2) $2\arccos(-1)-4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+2\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\operatorname{arccot} 1$.

151. Lahendada järgmised trigonomeetrilised võrrandid:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$. Leida algul x kaks väärtust vahemikus $(0; 2\pi)$ ja anda siis üldvalem kõigi nende kaarte jaoks, mis rahuldavad antud võrrandit.

2) Seesama võrrandi $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ kohta.

3) Seesama võrrandi $\tan x = 1$ kohta.

4) Seesama võrrandi $\cot x = \sqrt{3}$ kohta.

5) Lahendada järgmised trigonomeetrilised võrrandid:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; d) $\cot x = -1$.

152. 1) Milliste argumendi x väärtuste puhul muutuvad järgmised funktsioonid nulliks:

a) $\cos x$; b) $\sin x$; c) $\tan x$; d) $\cot x$?

Anda üldvalemid kõigi nende väärtuste jaoks.

2) Milliste argumendi x väärtuste puhul omandavad järgmised funktsioonid suurima väärtuse:

a) $\cos x$; b) $\sin x$; c) $2 \sin x$; d) $\frac{1}{2} \cos x$?

Anda üldvalemid kõigi nende väärtuste jaoks.

3) Milliste argumendi x väärtuste puhul omandavad järgmised funktsioonid vähima väärtuse:

a) $\cos x$; b) $\sin x$; c) $(\sin x + 1)$; d) $(1 - \cos x)$?

Anda üldvalemid kõigi nende väärtuste jaoks.

4) Tõestada järgmiste võrduste õigsus:

a) $\sin(2\pi k + \alpha) = \sin \alpha$; b) $\cos(2\pi k + \alpha) = \cos \alpha$;

c) $\tan(\pi k + \alpha) = \tan \alpha$; d) $\cot(\pi k + \alpha) = \cot \alpha$;

k on mistahes arv.

Lahendada järgmised trigonomeetrilised võrrandid (ülesanded 153—158) nimetatud võtetega.

153. Lahendada algebraliste võrranditena:

1) $\sin^2 x - 3 = 2 \sin x$; 2) $\cos^2 x + \cos x = 1$;

3) $6 \sin^4 x = 1 - \sin^2 x$; 4) $\sin x = 1 - 2 \sin^2 x$.

154. Lahendada tegureiks lahutamise võttega:

1) $\sin^2 x - 2 \sin x = 0$; 2) $\tan^2 x = 2 \tan x$;

3) $\cot^2 x + 4 \cot x = 0$; 4) $\tan^3 x = \tan x$.

155. Lahendada järgmised võrrandid ühele funktsioonile taandamise võttega:

1) $2 \cos^2 x = 3 \sin x + 2$; 2) $2 \sin^2 x = 3 \cos x$;

3) $2 \tan x + 3 \cot x = 5$; 4) $\sin^2 x = 1 + \cos^2 x$.

156. Lahendada järgmised võrrandid ühele funktsioonile taandamise võttega (lahendamisel kasutada ruutude, ruutjuurte ja trigonomeetriliste funktsioonide tabeleid):

1) $\sin x - \cos x = 0{,}4721$;
2) $\sin x \cdot \tan x = \frac{3}{2}$;
3) $\cos x = 2 \tan x$;
4) $\sin^4 x - \cos^4 x = 0{,}5$;
5) $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1$.

157. Kasutada eespool esitatud võtete kombinatsioone:

1) $\cos x - 1 + 2 \sin x \cdot \tan x = 0$;
2) $1 + \sin x \cdot \cos x - \sin x - \cos x = 0$;
3) $\cos^2 x + \tan^2 x - \sin^2 x = 1$;
4) $2 \tan x \cdot \cos x + 1 = 2 \cos x + \tan x$;
5) $\tan x = 2 \sin x$.

158. Lahendada järgmised siinuse ja koosinuse suhtes homogeensed esimese ning teise astme võrrandid või nendeks taanduvad võrrandid:

1) $\sin x = \cos x$;
2) $\sin x = \frac{7}{8} \cos x$;
3) $3 \sin^2 x = \cos^2 x$;
4) $3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = 13 \sin x \cdot \cos x$;
5) $\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x = 3 \cos^2 x$;
6) $1 - 3 \cos^2 x = 2 \sin x \cdot \cos x$;
7) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0{,}5 - \sin x \cdot \cos x$;
8) $6 \sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 1$;
9) $3 \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + 5 \sin^2 x = 2$;
10) $5 \sin^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x = 2$;
11) $3 \sin x \cdot \cos x + 4 \cos^2 x = 0$.

III peatükk.

LIITMISVALEMID JA JÄRELDUSI NENDEST.

§ 8. Liitmisvalemid.

159. 1) Arvutada $\cos 75°$.

Juhis. $75° = 45° + 30°$.

2) Arvutada $\cos 105°$.

Juhis. $105° = 60° + 45°$.

160. $0° < \alpha < 90°$; $0° < \beta < 90°$; $\cos \alpha = 0{,}2534$; $\cos \beta = 0{,}6421$. Millises veerandis asetseb nurga $\alpha + \beta$ lõpphaar?

161. 1) Antud: $\cos \alpha = 0{,}6$ ja $\cos \beta = \frac{5}{13}$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ning $\frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$. Leida $\cos(\alpha + \beta)$ ja $\cos(\alpha - \beta)$.

2) Antud: $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ja $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$. Leida $\cos(\alpha + \frac{5\pi}{4})$.

162. 1) Arvutada: a) $\sin 105°$; b) $\sin 75°$.

2) Antud: $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ja $\cos \beta = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ning $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Leida: $\sin(\alpha + \beta)$; $\cos(\alpha + \beta)$; $\sin(\alpha - \beta)$; $\cos(\alpha - \beta)$.

3) Antud: $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ja $\sin \beta = \frac{12}{13}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ning $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Leida $\sin(\alpha \pm \beta)$ ja $\cos(\alpha \pm \beta)$.

4) Antud: $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ ja $\sin \beta = -0{,}6$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ning $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$. Leida $\sin(\alpha - \beta)$ ja $\cos(\alpha - \beta)$.

5) Antud: $\sin \alpha = 0{,}6$ ja $\cos \beta = -\frac{7}{25}$. Leida $\sin(\alpha - \beta)$ ja $\cos(\alpha + \beta)$.

163. 1) Kontrollida liitmisvalemite õigsust järgmiste nurkade puhul:

a) $\alpha = 30°$ ja $\beta = 60°$; b) $\alpha = 120°$ ja $\beta = 240°$.

2) Rakendades liitmisvalemeid, tõestada järgmiste võrduste õigsus (vt. II peatükk, ülesanne 152):

a) $\sin(2\pi k + \alpha) = \sin \alpha$; b) $\cos(2\pi k + \alpha) = \cos \alpha$.

164. 1) Leida $\sin(45°+\alpha)$, kui $\cos\alpha=-0{,}5$ ning $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

2) Leida $\cos(60°-\alpha)$, kui $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$ ning $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$.

165. Arvutada $\sin 15°$ ja $\cos 15°$, asendades $15°$ vahega $45°-30°$.

166. 1) Teravnurga siinus on $\frac{15}{17}$. Leida tema kõrvunurga koosinus.

2) Kolmnurga sisenurga koosinus on $\frac{9}{41}$. Leida selle nurga kõrvunurgaks oleva välisnurga siinus.

167. 1) Leida $\cos\beta$, kui $\cos\alpha=\frac{1}{7}$, $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$ ning α ja β on positiivsed teravnurgad.

2) Leida $\sin\alpha$, kui $\sin(45°-\alpha)=-\frac{2}{3}$ ja $\frac{\pi}{2}>\alpha>\frac{\pi}{4}$.

168. 1) Tõestada, et $\alpha+\beta=90°$, kui $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, $\sin\beta=\frac{15}{17}$ ja $0°<\alpha<90°$, $0°<\beta<90°$.

2) Tõestada, et $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, kui $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$ ja $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

169. Tõestada, et kui α ja β on positiivsed teravnurgad, siis $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$.

Tõestada kahel viisil: a) graafiliselt, ühikringi abil; b) analüütiliselt.

170. 1) Avaldada $\sin(\alpha+\beta+\gamma+\varphi)$ ja $\cos(\alpha+\beta+\gamma+\varphi)$ nurkade α, β, γ ja φ trigonomeetriliste funktsioonide kaudu.

2) Avaldada $\sin(\alpha-\beta-\gamma)$ nurkade α, β ja γ trigonomeetriliste funktsioonide kaudu.

171. Antud: $\sin\alpha=0{,}6$; $\sin\beta=\frac{12}{13}$; $\sin\gamma=\frac{7}{25}$, kus α, β ja γ on teravnurgad. Leida $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

172. Kahe nurga summa koosinus on 0,3 ja samade nurkade vahe koosinus on 0,8. Leida nende nurkade siinuste korrutis.

173. Antud: $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ja $0<\beta<\frac{\pi}{2}$; $\sin\alpha=0{,}6$ ning $\cos\beta=0{,}75$.

Leida algul tabeli järgi $\sin(\alpha+\beta)$ ja $\cos(\alpha-\beta)$ ligikaudsed väärtused, siis aga liitmisvalemite abil. Võrrelda saadud tulemusi.

174. Arvutada kõige lihtsamal viisil:

1) $\sin 10°\cdot\cos 20°+\cos 10°\cdot\sin 20°$;
2) $\sin 56°\cdot\cos 15°-\cos 56°\cdot\sin 15°$;
3) $\cos 17°\cdot\cos 13°-\sin 17°\cdot\sin 13°$;
4) $\cos 75°\cdot\cos 15°-\sin 75°\cdot\sin 15°$;
5) $\sin 7°\cdot\cos 37°-\cos 7°\cdot\sin 37°$;

6) $\sin 15° \cdot \sin 40° - \cos 40° \cdot \cos 15°$;
7) $\sin 22° + \sin 50° \cdot \cos 28° - \cos 50° \cdot \sin 28°$;
8) $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{5}$;
9) $\sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{3}$;
10) $\sin (10° + \alpha) \cdot \cos (20° - \alpha) + \cos (10° + \alpha) \cdot \sin (20° - \alpha)$;
11) $\cos (50° + \alpha) \cdot \cos (26° + \alpha) - \sin (50° + \alpha) \cdot \sin (26° + \alpha)$.

175. Lihtsustada avaldised:

1) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$;
2) $\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$;
3) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$;
4) $\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$;
5) $\frac{\sin(45°+\alpha)-\cos(45°+\alpha)}{\sin(45°+\alpha)+\cos(45°+\alpha)}$.

176. Lihtsustada avaldised:

1) $\frac{\sin 11° \cdot \cos 15° + \cos 11° \cdot \sin 15°}{\sin 18° \cdot \cos 12° + \cos 18° \cdot \sin 12°}$;
2) $\frac{\cos 65° \cdot \cos 40° + \sin 65° \cdot \sin 40°}{\sin 37° \cdot \cos 12° - \cos 37° \cdot \sin 12°}$;
3) (peast) $\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha \pm \cos 2\alpha \cdot \sin\alpha$;
4) (peast) $\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \pm \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha$;
5) (peast) $\sin(k\alpha) \cdot \cos\alpha + \cos(k\alpha) \cdot \sin\alpha$.

177. Tõestada samasused:

1) $\cos(\alpha+45°) - \cos(\alpha-45°) = -\sqrt{2}\sin\alpha$;
2) $\sin(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \cos\beta$;
3) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cdot\cos\beta}{2\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)} = \tan(\beta-\alpha)$;
4) $\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\cdot\sin\beta} = \tan(\alpha+\beta)$;
5) $\sin 15° + \tan 30° \cdot \cos 15° = \frac{\sqrt{6}}{3}$;
6) $\cos 40° + \tan\alpha \cdot \sin 40° = \frac{\cos(40°-\alpha)}{\cos\alpha}$;

178. Tõestada samasused:

1) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\tan\alpha-\tan\beta} = \cos\alpha\cdot\cos\beta$;
2) $\frac{\sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)+\sin(\frac{\pi}{6}-\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)+\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\frac{\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)}{2\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta} = \cot^2\alpha\cdot\cot^2\beta+1$;

4) (peast) $\cos(45°+\alpha)\cdot\cos(45°-\alpha)-\sin(45°+\alpha)-$
$-\sin(45°-\alpha)=0$;

5) $\cos\alpha+\cos(120°-\alpha)+\cos(120°+\alpha)=0$;

6) $\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)=\sin(30°+\alpha)$;

7) $\cos^2\alpha+\cos^2(60°+\alpha)+\cos^2(60°-\alpha)=\frac{3}{2}$;

8) $\sin^2\alpha+\sin^2(120°+\alpha)+\sin^2(120°-\alpha)=\frac{3}{2}$;

9) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\tan\alpha-\tan\beta$.

179. Arvutada kõige ratsionaalsemal viisil järgmiste avaldiste väärtused:

1) $\sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)-\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})$, kui $\alpha=0{,}6240$;

2) $\frac{\sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)-\cos(\frac{\pi}{3}+\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)+\cos(\frac{\pi}{3}+\alpha)}$, kui $\alpha=0{,}2711$;

3) $\frac{\cos(\beta-\alpha)}{\tan\alpha+\cot\beta}$, kui $\alpha=1{,}03$ ja $\beta=\frac{2\pi}{3}$;

4) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$, kui $\alpha=1{,}3113$;

5) $\frac{\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}$, kui $\alpha=0{,}7941$ ja $\beta=1{,}0472$.

180. Leida peast järgmiste avaldiste väärtused:

1) $\sin(\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})$;

2) $\sin[\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-\arcsin(-1)]$;

3) $\cos(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\frac{1}{2})$;

4) $\cos(\arcsin 1-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2})$.

181. Lahendada võrrandid:

1) $\sin(x+30°)+\cos(x-30°)=0$;

2) $\sin(x+\frac{\pi}{6})-\sin(x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$;

3) $2\sin x=\sin(45°-x)$; 4) $\sin(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4}+x)$;

5) $\sin(\alpha+x)-\cos x\cdot\sin\alpha=\cos\alpha$;

6) $\cos(\alpha+x)\cdot\cos(\alpha-x)+0{,}75=\cos^2\alpha$;

7) $\cos 2x\cdot\cos x=\sin 2x\cdot\sin x$; 8) $\sin 2x\cdot\cos x=\cos 2x\cdot\sin x$;

9) $\cos 2x\cdot\cos 3x=\cos 5x$; 10) $\cos 3x\cdot\cos 4x=\cos 7x$.

Summa ja vahe tangens.

182. 1) Arvutada $\tan 105°$.

2) Arvutada: a) $\tan 75°$; b) $\tan 15°$.

3) $0°<\alpha<90°$; $0°<\beta<90°$; $\tan\alpha=0{,}7537$; $\tan\beta=1{,}345$. Millises veerandis asetseb nurga $(\alpha+\beta)$ lõpphaar?

183. 1) Leida $\tan(45°+\alpha)$, kui $\tan\alpha=2$.

2) Leida $\tan(60°-\alpha)$, kui $\tan\alpha=\frac{1}{3}$.

184. 1) Leida $\tan(\alpha+\beta)$ ja $\tan(\alpha-\beta)$, kui $\tan\alpha=3$ ja $\tan\beta=\frac{1}{2}$.

2) Leida $\cot(\alpha+\beta)$ ja $\cot(\alpha-\beta)$, kui $\tan\alpha=-\frac{2}{3}$ ja $\tan\beta=\frac{1}{3}$.

185. 1) Leida $\tan(\alpha+\beta)$ ja $\cot(\alpha-\beta)$, kui $\tan\alpha=0{,}5$, $\sin\beta=0{,}6$ ning $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

2) Leida $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)$, kui $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$ ja $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$.

3) Leida $\tan\alpha$, kui $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=2$.

4) Leida $\tan\alpha$, kui $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=-2$.

5) Leida $\tan\beta$, kui $\tan(\alpha+\beta)=-1$ ja $\tan\alpha=3$.

186. 1) Tõestada, et kui $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ ja $\tan\beta=\frac{1}{3}$, kusjuures α ja β on teravnurgad, siis $\alpha+\beta=45°$.

2) Kahe teravnurga tangensid on vastavalt 2 ja 3. Tõestada, et nende nurkade summa on 135°.

3) Kahe teravnurga tangensid on vastavalt $\frac{4}{3}$ ja $\frac{1}{7}$. Tõestada, et nende nurkade vahe on 45°.

4) Kolme teravnurga tangensid on vastavalt $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ ja $\frac{1}{8}$. Tõestada, et nende nurkade summa on 45°.

187. Lihtsustada avaldised (peast):

1) $\frac{\tan 20°+\tan 5°}{1-\tan 20°\cdot\tan 5°}$;

2) $\frac{\tan 70°-\tan 35°}{\tan 70°\cdot\tan 35°+1}$;

3) $\frac{\tan 27°+\tan 18°}{\tan 27°\cdot\tan 18°-1}$;

4) $\frac{\tan 65°-\tan 35°}{1+\tan 65°\cdot\tan 35°}$;

5) $\frac{\tan 4\alpha+\tan 2\alpha}{1-\tan 4\alpha\cdot\tan 2\alpha}$;

6) $\frac{\tan 7\alpha-\tan 3\alpha}{\tan 7\alpha\cdot\tan 3\alpha+1}$;

7) $\frac{\tan 2\alpha-\tan\alpha}{1+\tan 2\alpha\cdot\tan\alpha}$;

8) $\frac{\tan 2\alpha+\tan 3\alpha}{1-\tan 2\alpha\cdot\tan 3\alpha}$.

Harjutuste 5—8 puhul näidata, millised väärtused ei ole argumendi α jaoks lubatavad.

9) $\frac{\tan 49^\circ - \tan 19^\circ}{1+\tan 49^\circ \cdot \tan 19^\circ}$; 10) $\frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1-\tan 20^\circ \cdot \tan 25^\circ}$.

188. Tõestada samasused:

1) $\tan\alpha \cdot \tan\beta + (\tan\alpha + \tan\beta) \cdot \cot(\alpha+\beta) = 1$;

2) $\frac{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}{1-\tan^2\alpha \cdot \tan^2\beta} = \tan(\alpha+\beta) \cdot \tan(\alpha-\beta)$;

3) $\tan(\alpha+\beta) - \tan\alpha - \tan\beta = \tan(\alpha+\beta) \cdot \tan\alpha \cdot \tan\beta$;

4) $\tan(45^\circ+\alpha) - \tan\alpha = 1 + \tan(45^\circ+\alpha) \cdot \tan\alpha$;

5) $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan(\alpha+\beta)} - \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan(\alpha-\beta)} = -2\tan\alpha \cdot \tan\beta$;

6) $\frac{1+\tan\alpha \cdot \tan\beta}{1-\tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$.

189. Kahe nurga tangensite summa on 2, nende nurkade summa tangens on aga 4. Leida kummagi nurga tangens.

190. Kahe nurga summa siinuse ja samade nurkade vahe siinuse suhe on $\frac{1}{2}$. Nende nurkade tangensite vahe on 2. Leida nende nurkade tangensite summa.

191. Lahendada võrrandid:

1) $\tan(x+\frac{\pi}{4}) + \tan(x-\frac{\pi}{4}) = 2\cot x$;

2) $\tan(x+\alpha) - \tan(x-\alpha) = m$.

§ 9. Taandamisvalemid.

192. Arvutada taandamisvalemite järgi:

1) $\sin 120^\circ$; $\cos 150^\circ$; $\tan 135^\circ$; $\cot 120^\circ$; $\sin(-135^\circ)$; $\cos(-120^\circ)$
2) $\sin 225^\circ$; $\cos 240^\circ$; $\tan 210^\circ$; $\sin(-240^\circ)$; $\cos(-210^\circ)$.
3) $\sin 300^\circ$; $\cos 315^\circ$; $\tan 330^\circ$; $\sin(-330^\circ)$; $\cos(-300^\circ)$.

193. Arvutada:

1) $\sin(-300^\circ) + \cos(-225^\circ) + \tan(-330^\circ) + \cot(-240^\circ)$;
2) $\sin^2 120^\circ + \cos^2 150^\circ + \tan^2 210^\circ - \cot^2 225^\circ$;
3) $\sin^2(-330^\circ) - \cos^2(-120^\circ) - \tan^2(-240^\circ) + \cot^2(-330^\circ)$;
4) $6\sin 120^\circ \cdot \tan 300^\circ \cdot \cot 225^\circ$.
5) $4\sin 330^\circ \cdot \cos(-240^\circ) \cdot \tan 120^\circ - 2\cos 150^\circ \cdot \tan(-315^\circ)$;
6) $\frac{\cos(-150^\circ)}{\cos 330^\circ} - \frac{\tan 150^\circ \cdot \sin 300^\circ}{\cos 360^\circ} + \cos(-240^\circ) \cdot \cot 120^\circ$.

194. Taandada järgmised trigonomeetrilised funktsioonid funktsioonideks, mille argumendid oleksid positiivsed ja väiksemad kui 45°:

1) $\sin 86^\circ$; $\cos 55^\circ$; $\tan 73^\circ 20'$; $\cot 45^\circ 45'$.
2) $\sin 175^\circ$; $\cos 103^\circ$; $\tan 159^\circ$; $\cot 188^\circ 20'$
3) $\sin 256^\circ 25'$; $\cos 220^\circ 13'$; $\tan 184^\circ$; $\cot 261^\circ$.

4) $\sin 311°$; $\cos 296°40'$; $\tan 351°6'$; $\cot 325°15'$.
5) $\sin 560°$; $\cos 846°$; $\tan 758°$; $\cot 1000°$.
6) $\sin(-310°)$; $\cos(-500°)$; $\tan(-405°)$; $\cot(-820°)$.

195. Taandada järgmised trigonomeetrilised funktsioonid funktsioonideks, mille argumendi väärtused asetsevad:

1) vahemikus $[0°; 45°]$:

$\sin 130°$; $\cos 820°$; $\tan 930°$; $\cot 470°$; $\sin(-500°)$;
$\cos(-415°)$; $\tan(-100°)$; $\cot(-840°)$;

2) vahemikus $(0; \frac{\pi}{4})$:

$\sin 0{,}7\pi$; $\cos 3{,}2\pi$; $\tan 4{,}8\pi$; $\cot 2{,}9\pi$.

196. Taandada järgmised trigonomeetrilised funktsioonid funktsioonideks, mille argumendi väärtused asetsevad:

1) vahemikus $[0; 45°]$:

$\sin 170°$; $\cos 350°$; $\tan 190°$; $\cot 340°$; $\sin(-340°)$;
$\cos(-760°)$; $\tan(-560°)$; $\cot(-690°)$;

2) vahemikus $[0; \frac{\pi}{4}]$:

$\sin(-2{,}1\pi)$; $\cos 3{,}4\pi$; $\tan 1{,}7\pi$; $\cot(-1{,}9\pi)$.

197. 1) Leida vahemikust $[0; 2\pi]$ need nurgad, mille koosinus on: $\frac{1}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Leida vahemikust $[0; 2\pi]$ need nurgad, mille siinus on: 1; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Leida vahemikust $(0; 2\pi)$ need nurgad, mille tangens on: -1; $\sqrt{3}$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

198. Leida nurk α, kui

1) $\sin\alpha = 0{,}8512$ ja $90° < \alpha < 180°$;
2) $\sin\alpha = -0{,}457$ ja $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$;
3) $\cos\alpha = -0{,}3415$ ja $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;
4) $\cos\alpha = 0{,}6710$ ja $270° < \alpha < 360°$;
5) $\tan\alpha = 1{,}2$ ja $180° < \alpha < 270°$;
6) $\tan\alpha = -0{,}3462$ ja $-\frac{3}{2}\pi < \alpha < -\pi$.

199. Arvutada:

1) $\arcsin(-0{,}253)$;
2) $\arcsin(-0{,}7824)$;
3) $\arccos(-0{,}5638)$;
4) $\arccos 0{,}4197$;
5) $\arctan(-2{,}341)$;
6) $\arctan 11{,}59$;
7) $\arctan 1{,}327$;
8) $\operatorname{arccot}(-0{,}3781)$.

200. Leida niisugused positiivsed ja negatiivsed nurgad, mille absoluutväärtus on väiksem kui 360° ning mille

1) siinus oleks võrdne $\sin 40°$;
2) koosinus oleks võrdne $\cos 43°$;
3) tangens oleks võrdne $\tan 15°$;
4) siinus oleks võrdne $\cos 20°$;
5) tangens oleks võrdne $\cot 32°$.

201. 1) Leida $\sin(270°+\alpha)$, kui $\sin\alpha=\frac{7}{25}$ ja $90°<\alpha<180°$.

2) Leida $\cos(180°-\alpha)$, kui $\sin\alpha=-0{,}8$ ja $180°<\alpha<270°$.

3) Leida $\tan(360°-\alpha)$, kui $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ ja $90°<\alpha<180°$.

202. 1) Avaldada 140°-se nurga trigonomeetrilised funktsioonid tema kõrvunurga funktsioonide kaudu.

2) Rööpküliku teravnurga siinus on $\frac{3}{5}$. Leida selle rööpküliku nürinurga koosinus.

3) Kolmnurga kahe nurga summa tangens on 2. Leida kolmnurga kolmanda nurga siinus.

4) Ringi sisse joonestatud nelinurga ühe nurga koosinus on $\frac{12}{13}$. Leida selle nurga vastasnurga siinus.

5) Tõestada, et rööpküliku pindala on võrdne tema kahe lähiskülje ja nendevahelise nurga siinuse korrutisega (vaadelda ka nürinurga juhtu).

203. Lihtsustada avaldised:

1) $\sin(180°-\alpha)+\cos(90°+\alpha)-\tan(360°-\alpha)+\cot(270°-\alpha)$;

2) $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)-\cos(\pi-\alpha)+\tan(\pi-\alpha)-\cot(\frac{3}{2}\pi+\alpha)$;

3) $\sin^2(180°-\alpha)+\sin^2(270°-\alpha)+\tan(90°+\alpha)\cdot\cot(360-\alpha)$;

4) $\frac{\cos^2(360°-\alpha)+\sin^2(270°-\alpha)}{\tan^2(90°+\alpha)\cdot\cot^2(270°+\alpha)}$; 5) $\frac{\sin(-\alpha)\cdot\tan(-\alpha)}{\cos(-\alpha)\cdot\cot(-\alpha)}$;

6) $2\sin 40°+\cos 130°-3\sin 160°-\cos(-110°)$;

7) $3\tan 200°-2\sin(-80°)+\cot 290°+\cos(-10°)$;

8) $\sin 160°\cdot\cos 110°+\sin 250°\cdot\cos 340°+\tan 110°\cdot\tan 340°$;

9) $\frac{\cos 304°\cdot\tan 416°-\tan 214°\cdot\tan(-56°)}{\cot 214°+\cos 326°\cdot\cot(-56°)}$;

10) $\frac{\sin 160°\cdot\cos 70°-\cos 200°\cdot\sin 70°-\cos 235°\cdot\sin 215°}{\tan 55°\cdot\cot 215°}$;

11) $\frac{\tan(270°-\alpha)\cdot\sin 130°\cdot\cos 320°\cdot\sin 270°}{\cot(180°-\alpha)\cdot\cos 50°\cdot\sin 220°\cdot\cos 360°}$;

12) $\sin(\alpha-90°)+\cos(\alpha-180°)-\tan(\alpha-270°)+\cot(360°-\alpha)$;

13) $\tan^2(\alpha-180°)\cdot\cot(\alpha-360°)+\sin^2(\alpha+180°)+$
$+\sin^2(270°-\alpha)$;

14) $\tan^2(\alpha-360°)\cdot\sin^2(\alpha-270°)+$
$+\cos^2(360°+\alpha)-2\sin(180°-\alpha)\cdot\sin(90°+\alpha)$;

15) $\frac{\sin^3(\alpha-270°)\cdot\cos(360°-\alpha)}{\tan^3(\alpha-90°)\cdot\cos^3(\alpha-270°)}$.

204. Tõestada samasused:

1) $\sin(45°+\alpha)=\cos(45°-\alpha)$; 2) $\cos(45°+\alpha)=\sin(45°-\alpha)$;

3) $\tan(45°+\alpha)=\cot(45°-\alpha)$; 4) $\sin(150°+\alpha)=\sin(30°-\alpha)$;

5) $\dfrac{\sin(360°-\alpha)\cdot\tan(90°+\alpha)\cdot\cot(270°-\alpha)}{\cos(360°+\alpha)\cdot\tan(180°+\alpha)}=1$;

6) $\dfrac{\cot(\alpha-\frac{\pi}{2})\,[\sin(\alpha-\frac{3}{2}\pi)-\sin(\pi+\alpha)]}{\tan(\pi+\alpha)\,[\cos(\alpha+2\pi)+\sin(\alpha-2\pi)]}=-1$;

7) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin(\frac{3}{2}\pi-\alpha)}-\dfrac{\tan(\frac{3}{2}\pi+\alpha)}{\cot(\pi-\alpha)}+\tan(\pi-\alpha)+1=0$;

8) $\dfrac{\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cdot\cos(\frac{3}{2}\pi-\alpha)\cdot\cos(-\alpha)}{\cot(\pi-\alpha)\cdot\sin(\frac{3}{2}\pi+\alpha)}=\sin\alpha$;

9) $\dfrac{\sin^2(-212°)\cdot\cos 302°+\cos^3(-148°)}{\sin(-82°)\cdot\cos(-8°)+\sin 368°\cdot\sin(-172°)-\sin 58°\cdot\sin 148°}=$
$=\cos 32°-\sin 32°$;

10) $\sin^2(30°+\alpha)+\sin^2(240°-\alpha)=1$;

11) $\dfrac{\cos^2(270°+\alpha)}{\tan^2(\alpha-360°)}+\dfrac{\cos^2(-\alpha)}{\tan^2(\alpha-270°)}=1$;

12) $\tan 10°\cdot\tan 20°\cdot\tan 30°\cdot\tan 40°\cdot\tan 50°\cdot\tan 60°\cdot\tan 70°\cdot\tan 80°=1$.

205. Tõestada, et kui α ja β on kõrvunurgad, siis

$$\sin(\tfrac{\alpha}{2}+x)=\cos(\tfrac{\beta}{2}-x).$$

206. Leida kõige lihtsamal viisil järgmiste avaldiste väärtused:

1) $8\sin(450-\alpha)+5\sin(\alpha-90°)$, kui $\alpha=2{,}4458$;

2) $\sin(\alpha-270°)\cdot\sin(\alpha-180°)$, kui $\alpha=3{,}4545$.

207. Leida järgmiste avaldiste väärtused (peast):

1) $\sin(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2})$; 2) $\cos(\pi+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2})$;

3) $\sin(\frac{3}{2}\pi+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2})$; 4) $\sin(\frac{3}{2}\pi-\arccos\frac{2}{5})$;

5) $\cot(2\pi-\arctan 1)$.

208. Lahendada võrrandid:

1) $\sin(\frac{3}{2}\pi-x)+2\cos(2\pi-x)=3$;

2) $\sin(x-90°)+\sin(x-180°)=0$;

3) $\tan(x+\pi)=\tan(\frac{\pi}{2}-x)$;

4) $\sin(x+90°)+\cot(360°-x)=0$;

5) $\sin x \approx 0{,}851$, kui $90° < x < 180°$;

6) $\tan x = -12{,}61$, kui $-\frac{\pi}{2} < x < 0°$.

§ 10. Argumendi kahekordistamise ja poolitamise valemid.

Argumendi kahekordistamise valemid.

209. 1) Arvutada $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ ja $\tan 2\alpha$, kui $\sin \alpha = 0{,}6$ ja $0° < \alpha < 90°$.

2) Arvutada $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ ja $\tan 2\alpha$, kui $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ ja $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

3) Leida $\sin 10°$ ja $\cos 10°$, kui $\sin 5° \approx 0{,}0872$.

4) Leida $\sin \frac{\pi}{7}$ ja $\cos \frac{\pi}{7}$, kui $\cos \frac{\pi}{14} \approx 0{,}9890$.

5) Leida $\cos \alpha$ ja $\tan \alpha$, kui $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$ ja $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

210. 1) Avaldada $\sin 2\alpha$ ja $\cos 2\alpha$: a) ainult $\sin \alpha$ kaudu; b) ainult $\cos \alpha$ kaudu.

2) Avaldada $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ $\sin \frac{\alpha}{2}$ ja $\cos \frac{\alpha}{2}$ kaudu.

211. 1) On antud: $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2n}{1+n^2}$ ja $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$. Leida $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ja $\tan \alpha$, kui $n > 0$.

2) On antud: $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ ja $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$. Leida $\sin 2\alpha$ ja $\tan 2\alpha$, kui $a > 0$ ning $b > 0$.

3) On antud: $\tan \alpha = \frac{1}{5}$ ja $\tan \beta = \frac{1}{3}$. Leida $\tan 2\alpha$ ja $\tan (2\alpha - \beta)$.

4) On antud: $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ ja $\tan \beta = \frac{1}{4}$. Leida $\tan (2\alpha + \beta)$.

212. Lahendada võrrandid:

1) $2 \cos 2x = 1$; 2) $\sqrt{2} \sin 2x = 1$;

3) $\cos (2x + 30°) = 0{,}8283$; 4) $\tan 2x = 19{,}41$.

213. 1) Leida $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ja $\tan \alpha$, kui $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$.

2) Leida $\sin 4x$, kui $\cot x = \frac{1}{3}$.

214. 1) Leida avaldise $\frac{\sin \alpha}{2 - 3 \cos \alpha}$ väärtus, kui $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

2) Leida avaldise $\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\tan \alpha + \sin \alpha}$ väärtus, kui $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{15}$.

215. 1) Tõestada, et $\sin 2\alpha < 2 \sin \alpha$, kui $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Kas on võimalik argumendi α niisugune väärtus, mille puhul $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha$?

2) Tõestada, et $\cos 2\alpha < 2\cos\alpha$, kui $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Kas on võimalik argumendi α niisugune väärtus, mille puhul $\cos 2\alpha = 2\cos\alpha$?

3) Tõestada, et $\tan 2\alpha > 2\tan\alpha$, kui $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Kas on võimalik argumendi α niisugune väärtus, mille puhul $\tan 2\alpha = 2\tan\alpha$?

216. 1) Avaldada $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$ ja $\tan 3\alpha$ vastavalt $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$ kaudu.

2) Leida $\sin 3\alpha$ ja $\cos 3\alpha$, kui $\sin\alpha = 0{,}6$.

217. 1) Antud võrdhaarses kolmnurgas on aluse lähisnurga siinus $\frac{5}{13}$. Leida tipunurga siinus ja koosinus.

2) Rombi diagonaali ja külje vahelise nurga siinus on 0,2. Leida rombi nurkade koosinused.

218. Leida järgmiste avaldiste väärtused võimalikult lihtsalt:

1) $2\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ$;
2) $2\sin 25^\circ \cdot \sin 65^\circ$;
3) $\sin 13^\circ \cdot \sin 77^\circ$;
4) $\cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ$;
5) $\sin^2 12^\circ - \cos^2 12^\circ$;
6) $\sin^2 26^\circ - \sin^2 64^\circ$;
7) $\frac{2\tan 40^\circ}{1-\tan^2 40^\circ}$;
8) $\frac{\tan 22^\circ 5'}{1-\tan^2 22^\circ 5'}$;
9) $2\sin 0{,}7034 \cdot \cos 0{,}7034$;
10) $\cos^2 0{,}6167 - \sin^2 0{,}6167$;
11) $\cos^2 1{,}3963 - \sin^2 1{,}3963$;
12) $1 - 2\sin^2 1{,}2789$.

219. Leida järgmiste avaldiste väärtused (peast):

1) $2\sin 22^\circ 30' \cdot \cos 22^\circ 30'$;
2) $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$;
3) $\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{8}$;
4) $\sin^2 22^\circ 30' - \cos^2 22^\circ 30'$;
5) $1 - 2\sin^2 15^\circ$;
6) $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$;
7) $\frac{\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$;
8) $\frac{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}{\tan\frac{\pi}{8}}$.

220. Lihtsustada avaldised (peast):

1) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha$;
2) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$;
3) $1 - 2\sin^2\alpha$;
4) $2\cos^2\alpha - 1$;
5) $\cos^2\alpha - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}$;
6) $1 - 8\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$;
7) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}$;
8) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$;
9) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}$;
10) $\frac{2\cot\frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}}$;
11) $\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$;
12) $\frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{\cos 2\alpha}$.

13) $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$;

14) $\cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha$.

221. Tõestada järgmiste võrduste õigsus:

1) $\frac{1-\tan^2 15^\circ}{1+\tan^2 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ = \frac{1}{4}$.

Juhis. Korrutada ja jagada võrduse 2) vasak pool avaldisega $\cos 18^\circ$.

3) $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$;

4) $\cos 10^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{2} \sin 20^\circ$;

5) $\sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ = \frac{1}{2} \cos 10^\circ$;

6) $2 \sin (45^\circ + \alpha) \cdot \sin (45^\circ - \alpha) = \cos 2\alpha$;

7) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = -\cos 2\alpha$;

8) $\frac{2 \cot \alpha}{1+\cot^2 \alpha} = \sin 2\alpha$; 9) $\frac{\cot \frac{\alpha}{2} - \tan \frac{\alpha}{2}}{\cot \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\alpha}{2}} = \cos \alpha$;

10) $\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{1+\tan \frac{\alpha}{2}} + \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{1-\tan \frac{\alpha}{2}} = \tan \alpha$;

11) $\frac{1}{1-\tan \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{1+\tan \frac{\alpha}{2}} = \tan \alpha$;

12) $\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$;

13) $\cos^2 (\alpha+\beta) + \cos^2 (\alpha-\beta) - \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta = 1$.

222. Arvutada kõige lihtsamal viisil:

1) $\frac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$, kui $\alpha = \frac{7}{6}\pi$;

2) $\frac{1-\cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha}$, kui $\alpha = 0{,}4320$;

3) $\sin \alpha \cdot \cos (\alpha+\beta) - \cos \alpha \cdot \sin (\alpha-\beta)$, kui $\alpha = \frac{5}{3}\pi$ ja $\beta = 1{,}2220$;

4) $4 \sin \alpha \cdot \sin (60^\circ - \alpha) \cdot \sin (60^\circ + \alpha)$, kui $\alpha = 1{,}4946$.

223. Arvutada (peast):

1) $\sin$ (2 arc $\sin$ 0,5); 2) $\sin$ (2 arc $\sin$ 1);

3) $\cos$ [2 arc $\cos$ (-1)]; 4) $\cos$ (2 arc $\cos$ 1);

5) $\tan$ (2 arc $\tan$ 1).

224. Trapetsi pikem alus on diameetriks tema ümber joonestatud ringjoonele, mille raadius on R. Trapetsi teravnurk on α. Leida trapetsi pindala.

225. Nurga 2α sisse on joonestatud ring raadiusega R. Sellele ringile on joonestatud puutuja nurgapoolitaja ja ringjoone lõikepunktist. Leida tekkinud kolmnurga ümbermõõt.

Argumendi poolitamise valemid.

226. 1) Leida $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ja $\tan\frac{\alpha}{2}$, kui $\cos\alpha=\frac{119}{169}$ ning $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

2) Leida $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ja $\tan\frac{\alpha}{2}$, kui $\cos\alpha=\frac{3}{4}$ ning $270°<\alpha<360°$.

3) Leida $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ja $\tan\frac{\alpha}{2}$, kui $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ ning $180°<\alpha<270°$.

227. Kasutades argumendi poolitamise valemeid, arvutada:
1) $\sin 15°$, $\cos 15°$ ja $\tan 15°$; 2) $\sin 7°30'$ ja $\cos 7°30'$;
3) $\tan 22°30'$.

228. Leida tabelist $\cos 50°$ ning seejärel arvutada $\sin 25°$, $\cos 25°$ ja $\tan 25°$, kasutades argumendi poolitamise valemeid. Saadud tulemusi võrrelda tabelis olevate väärtustega.

229. Antud võrdhaarses kolmnurgas on tipunurga koosinus $\frac{7}{25}$. Leida aluse lähisnurga siinus ja koosinus.

230. 1) Kesknurk toetub kaarele, mis on lühem kui veerand ringjoont. Selle kesknurga koosinus on $\frac{1}{9}$. Leida samale kaarele toetuva piirdenurga siinus, koosinus ja tangens.

2) Rombi pindala võib leida valemi järgi $S=\frac{1}{2}ab$, kus a ja b on tema diagonaalid. Kuid rombi pindala võib leida ka valemi järgi $S=c^2\sin\alpha$, kus c on rombi külg ja α on rombi nurk. Tuletada see valem esimesest valemist, kasutades täisnurkse kolmnurga teravnurga trigonomeetrilisi funktsioone.

231. Ringi väiksema segmendi kaar sisaldab $\alpha°$. Ringi raadius on R. Leida selle segmendi kõrgus ja pindala.

232. 1) Arvutada $\sin\frac{\alpha}{4}$, kui $450°<\alpha<540°$ ja $\sin\alpha=\frac{336}{625}$.

2) Arvutada $\cot\frac{\alpha}{4}$, kui $0°<\frac{\alpha}{4}<90°$ ja $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

233. Lihtsustada avaldised:

1) $\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{4}}{2}}$; 2) $\sqrt{\frac{1+\cos 4\alpha}{2}}$;

3) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha$; 4) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha$;

5) $\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{4}}{1+\cos\frac{\alpha}{4}}}$;

6) $\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}$;

7) $\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)+1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+1}}$;

8) $\sqrt{1+\cos 8\alpha}$.

234. Tõestada samasused:

1) $1+\sin\alpha=2\cos^2(45°-\frac{\alpha}{2})$; 2) $1-\sin\alpha=2\sin^2(45°-\frac{\alpha}{2})$;

3) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\tan\frac{\alpha}{2}$; 4) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\tan\frac{\alpha}{2}$;

5) $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)$; 6) $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\tan^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$;

7) $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\tan^2\frac{\alpha}{2}$; 8) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\tan\frac{\alpha}{2}$;

9) $\tan\frac{\alpha}{2}=\cot\frac{\alpha}{2}-2\cot\alpha$; 10) $\sin\alpha-\tan\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha\cdot\tan\frac{\alpha}{2}$;

11) $\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\cos\alpha}-\tan\alpha$;

12) $\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})+\tan\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})=\frac{2}{\cos\alpha}$.

235. Arvutada (peast):

1) $\sin(\frac{1}{2}\arcsin 1)$; 2) $\sin(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})$;

3) $\sin(\frac{1}{2}\arccos 1)$; 4) $\cos(\frac{1}{2}\arccos 0)$;

5) $\cos(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})$.

236. Lahendada võrrandid:

1) $\sin x\cdot\cos x=0{,}25$; 2) $\sin^2 x-\cos^2 x=0{,}5$;

3) $\sin 2x=\sin x$ 4) $a\sin x=b\cos\frac{x}{2}$;

5) $1+\sin^2 2x=4\sin^2 x$; 6) $\cos 2x=\cos x$;

7) $\cos 2x=2\sin^2 x$; 8) $\tan 2x=\tan x$;

9) $\tan 2x=3\tan x$; 10) $\sin 3x=2\sin x$

11) $\cos 3x=4\cos^2 x$; 12) $\cos 2x=\cos x-\sin x$.

237. Lahendada järgmised võrrandid, avaldades $\sin x$ ja $\cos x$ poolnurga tangensi kaudu:

1) $\sin x+\cos x=1\frac{1}{4}$; 2) $4\sin x+3\cos x=2$.

§ 11. Trigonomeetriliste funktsioonide korrutise teisendamine summaks ja summa teisendamine korrutiseks.

Trigonomeetriliste funktsioonide korrutise teisendamine summaks.

238. 1) Arvutada järgmiste avaldiste väärtused kahel viisil: a) korrutada vahetult tabelist leitud vastavad väärtused; b) teisendada eelnevalt korrutised summaks.

$\cos 23° \cdot \cos 17°$; $\sin 16° \cdot \sin 34°$;

$\sin 11° \cdot \cos 10°$; $\cos 0{,}253 \cdot \cos 0{,}345$;

$\cos 0{,}4581 \cdot \sin 0{,}8127$.

2) Leida järgmiste avaldiste väärtused tabeleid kasutamata:

$\cos 45° \cdot \cos 15°$; $\sin 105° \cdot \sin 75°$; $\sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{5\pi}{24}$.

239. Teisendada järgmised korrutised summaks:

1) $\cos 20° \cdot \cos 10°$;
2) $\cos 18° \cdot \cos 46°$;
3) $\cos \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{5}$;
4) $\sin 40° \cdot \sin 4°$;
5) $2 \sin 6° \cdot \sin 24°$;
6) $\sin \frac{\pi}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{8}$;
7) $\sin 12° \cdot \cos 42°$;
8) $2 \sin 8° \cdot \cos 4°$;
9) $\sin \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$;
10) $2 \cos \alpha \cdot \cos 3\alpha$;
11) $\sin 5\alpha \cdot \sin 3\alpha$;
12) $\sin 4\alpha \cdot \cos 2\alpha$;
13) $\cos (\alpha+\beta) \cdot \cos \alpha$;
14) $\sin 2\alpha \cdot \sin (\alpha+\beta)$;
15) $\sin (\alpha-\beta) \cdot \cos (\beta-\alpha)$;
16) $2 \sin 40° \cdot \cos 10° \cdot \cos 8°$;
17) $4 \cos 8° \cdot \cos 10° \cdot \cos 6°$;
18) $4 \cos \alpha \cdot \cos 3\alpha \cdot \cos 4\alpha$;
19) $2 \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha$;
20) $8 \cos(\alpha-\beta) \cdot \cos(\alpha-\gamma) \cdot \cos(\gamma-\beta)$.

240. Kasutades kordse argumendi valemeid, teisendada alljärgnevad avaldised esimese astme trigonomeetriliste funktsioonide summaks ja leida nende ligikaudsed väärtused, kui $\alpha = 10°20'$; $\alpha = 0{,}8741$; $\alpha = 80°41'$.

1) $\sin^2 \alpha$; $\sin^3 \alpha$; $\cos^4 \alpha$; $\sin^4 \alpha$
2) $\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$; $\cos^3 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$; $\sin^3 \alpha \cdot \cos^2$.

Trigonomeetriliste funktsioonide summa teisendamine korrutiseks.

241. Teisendada järgmised summad korrutiseks:

1) $\cos 50° + \cos 20°$;
2) $\cos 18° - \cos 10°$;
3) $\cos 4° - \cos 28°$;
4) $\sin 26° + \sin 14°$;
5) $\sin 73° - \sin 36°$;
6) $\sin 7° - \sin 19°$;
7) $\sin 46° + \cos 50°$;
8) $\cos 36° - \sin 16°$;
9) $\sin 1° + \cos 64°$;
10) $\sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{12}$;

11) $\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{18}$; 12) $\sin\frac{\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{12}$;

13) $\tan 12°+\tan 32°$; 14) $\tan\frac{5\pi}{24}-\tan\frac{7\pi}{24}$;

15) $\tan\frac{3}{5}\pi-\cot\frac{1}{5}\pi$.

242. Teisendada järgmised summad korrutiseks:

1) $\sin 4\alpha+\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha-\cos 6\alpha$;
3) $\tan\sigma+\tan 3\alpha$; 4) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$;
5) $\sin(40°+\alpha)-\sin(40°-\alpha)$; 6) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$.

243. Teisendada korrutiseks:

1) $\sin\alpha+\cos\alpha$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha$;
3) $\cos\beta-\sin\alpha$; 4) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;
5) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta$; 6) $\tan^2\alpha-\tan^2\beta$;
7) $\frac{\sin 75°+\sin 15°}{\sin 75°-\sin 15°}$; 8) $\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}$;
9) $\frac{\sin 7\alpha-\sin 5\alpha}{\sin 7\alpha+\sin 5\alpha}$; 10) $\frac{\cos 6\alpha-\cos 4\alpha}{\cos 6\alpha+\cos 4\alpha}$;
11) $\sin 10°+\sin 11°+\sin 15°+\sin 16°$;
12) $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 2\alpha+\sin 4\alpha$;
13) $\cos 31°+\cos 13°+\cos 8°+\cos 36°$;
14) $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha$.

Milline on piisav tingimus selleks, et nelja siinuse või koosinuse summat saaks teisendada korrutiseks? Koostada selle kohta kaks näidet.

244. Teisendada korrutiseks:

1) $1+\cos 2\alpha$; 2) $1-\cos\alpha$; 3) $1+\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)$;
4) $1+\cos 40°$; 5) $1-\cos 17°$; 6) $\cos 31°-1$;
7) $1+\sin 50°$; 8) $1+\sin\alpha$; 9) $1-\sin\alpha$;
10) $1-\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)$; 11) $1-\sin 3°8'$; 12) $\sin 26°-1$;
13) $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$; 14) $\frac{1-\cos 50°}{\cos 40°}$; 15) $\frac{1+\cos(\alpha-\beta)}{1-\cos(\alpha-\beta)}$;
16) $1\pm\tan\alpha$; 17) $1\pm\cot\beta$; 18) $\sin\alpha+\tan\alpha$.

245. Teisendada korrutiseks:

1) $1+\sin\alpha+\cos\alpha$; 2) $1-\cos\alpha+\sin\alpha$;
3) $1-2\cos\alpha+\cos 2\alpha$; 4) $1+\sin\alpha-\cos\alpha-\tan\alpha$;
5) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\tan\alpha$; 6) $1-\sin\alpha+\cos\alpha-\tan\alpha$;
7) $\frac{1-2\cos\alpha+\cos 2\alpha}{1+2\cos\alpha+\cos 2\alpha}$; 8) $\frac{1-2\sin\alpha-\cos 2\alpha}{1+2\sin\alpha-\cos 2\alpha}$;
9) $1-\sin\alpha-\cos\alpha$; 10) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$;
11) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)$;
12) $\sin(5\alpha+\beta)+\sin(3\alpha+\beta)+\sin 2\alpha$;
13) $\cos 12°-2\cos 24°+\cos 36°$;
14) $\sin 19°+\sin 25°+\sin 6°$; 15) $\tan\alpha+\tan 2\alpha-\tan 3\alpha$.

246. Kasutades tähtsamate nurkade trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi, teisendada korrutiseks järgmised summad:

1) $1+2\cos\alpha$; 2) $1-2\cos\alpha$; 3) $1+2\sin 2\beta$;

4) $\sqrt{2}+2\cos\alpha$; 5) $1+\sqrt{2}\cos\alpha$; 6) $\sqrt{2}\sin\alpha-1$;

7) $1-4\sin^2\alpha$; 8) $3-4\cos^2\alpha$; 9) $3-\tan^2\alpha$;

10) $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha$.

247. Tõestada järgmiste võrduste õigsus:

1) $\sin 10^\circ+\sin 50^\circ-\cos 20^\circ=0$;

2) $\sin 18^\circ+\cos 48^\circ-\cos 12^\circ=0$;

3) $\cos 35^\circ+\cos 85^\circ-\cos 25^\circ=\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ-\alpha)$;

4) $\dfrac{\cos 20^\circ-\cos 50^\circ}{\sin 11^\circ+\cos 31^\circ}=\dfrac{\sin 80^\circ-\sin 70^\circ}{\sin 29^\circ-\sin 19^\circ}$;

5) $\dfrac{\sin 14^\circ+\sin 28^\circ-\sin 42^\circ}{\sin 42^\circ+\sin 14^\circ-\sin 56^\circ}=\dfrac{1}{2\cos 14^\circ}$.

248. Tõestada samasused:

1) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$; 2) $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=-\cot\dfrac{\beta+\alpha}{2}$;

3) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$;

4) $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$;

5) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\tan 2\alpha$; 6) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\tan(45^\circ+\alpha)$;

7) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}=\tan\alpha\cdot\cot\beta$

8) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}=\cot\alpha\cdot\cot\beta$

9) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\tan^2(45^\circ-\alpha)$; 10) $\dfrac{1+\cot\alpha}{1-\cot\alpha}=\cot(\alpha-45^\circ)$;

11) $4\sin^2\alpha-3=4\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\cdot\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})$;

12) $4\cos^2\alpha-1=4\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)\cdot\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)$.

249. Tõestada samasused:

1) $\cos 10^\circ\cdot\cos 30^\circ\cdot\cos 50^\circ\cdot\cos 70^\circ=\frac{3}{16}$;

2) $8\cos 10^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ=\cot 10^\circ$;

3) $16\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 60^\circ\cdot\sin 80^\circ=3$.

250. Tõestada samasused:

1) $\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}=2\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})$, kui $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2}$, kui $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

3) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;

4) $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;

5) $(\sin 2\alpha+\sin 4\alpha)^2+(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)^2=4\cos^2\alpha$;

6) $\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{4})-\cos^2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4})$;

7) $\cos^2(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2})-\sin^2(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2})-\frac{1}{2}=-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2})$;

8) $\cos^2\beta+\cos^2\alpha-\sin^2(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)$;

9) $\frac{\sin\alpha-2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha-2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=\tan 2\alpha$;

10) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\tan 3\alpha$;

11) $\frac{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}=\tan\alpha$;

12) $\frac{\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)+\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})}{\cot(\alpha+\frac{\pi}{4})+\cot(\frac{\pi}{4}-\alpha)}=\sin 2\alpha$;

13) $\frac{\sin^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha-4+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\tan^4\frac{\alpha}{2}$;

14) $\sin\alpha+\cos\alpha-\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})+\cos(\alpha-\frac{\pi}{6})=\sqrt{6}\cos(\alpha-\frac{\pi}{12})$;

15) $\tan\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha-\sin\alpha=-2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\alpha\cdot\cos(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})$;

16) $\cos(\frac{3}{10}\pi-\alpha)-\cos(\frac{\pi}{10}-\alpha)-\cos(\frac{3\pi}{10}+\alpha)+\cos(\frac{\pi}{10}+\alpha)=$
$=\sin\alpha$;

17) $\frac{(\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2})^2+(\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2})^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\cot\frac{\alpha}{4}$;

18) $4\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\sin(60^\circ+\alpha)=\sin 3\alpha$.

251. Lahendada järgmised trigonomeetrilised võrrandid:

1) $\cos x\cdot\cos 3x=\cos 5x\cdot\cos 7x$;
2) $\cos 2x\cdot\cos 4x=\cos 5x\cdot\cos x$;
3) $\sin 2x\cdot\sin 6x=\sin 3x\cdot\sin 5x$;
4) $\sin x\cdot\sin 3x=\sin 5x\cdot\sin 7x$;
5) $\cos 2x\cdot\sin 4x=\cos x\cdot\sin 5x$;
6) $\cos 3x\cdot\sin 7x=\cos 2x\cdot\sin 8x$;

7) $\sin 6x - \sin 4x = 0$;
8) $\cos 4x + \cos x = 0$;
9) $\sin 5x = \sin x$;
10) $\cos 2x = \cos x$;
11) $\cos 3x = \sin x$;
12) $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$;
13) $\sin 3x = \sin 2x - \sin x$;
14) $\tan x + \tan 3x = 0$;
15) $\cot 2x - \cot 4x = 2$;
16) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$;
17) $\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$;
18) $\sin^3 x \cdot \cos x + \cos^3 x \cdot \sin x = \frac{1}{4}$;
19) $\tan(2x-1) \cdot \tan(3x+1) = 1$;
20) $\tan(x + \frac{\pi}{4}) + \tan(x - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{3}$.

252. Kahele teineteist väliselt puutuvale ringjoonele on tõmmatud kaks ühist välist puutujat, mis teineteisega moodustavad nurga α. Suurema ringjoone raadius on R. Leida väiksema ringjoone raadius.

253. On antud täisnurkne kolmnurk, mille sisse on joonestatud ringjoon raadiusega r. Kolmnurga üks teravnurk on α. Nurga α tipp on võetud uue ringjoone keskpunktiks, kusjuures selle ringjoone puutujaks on nurga α vastaskaatet. Leida selle uue ringjoone pikkus.

254. Võrdhaarse kolmnurga alus on b ja aluse lähisnurk on α. Leida kolmnurga ümbermõõt.

255. 1) Leida kolmnurga pindala, kui on antud selle kolmnurga kaks nurka α ja β ning kolmanda nurga tipust tõmmatud kõrgus h_c.

2) Tõestada, et mistahes kumera nelinurga pindala on võrdne tema diagonaalide ja nendevahelise nurga siinuse poole korrutisega.

256. Milline peab olema argumentide α ja β vaheline seos, et oleksid kehtivad võrdused:

1) $\sin \alpha = \sin \beta$?
2) $\cos \alpha = \cos \beta$?
3) $\tan \alpha = \tan \beta$?

IV peatükk.

TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE PÕHIOMADUSED. GRAAFIKUD.

§ 12. Trigonomeetriliste funktsioonide põhiomadused.

Määramispiirkond.

257. 1) Konstrueerida nurgad: a) arc cos $(-0{,}7)$; b) arc sin 0,2; c) arc tan 3,5; d) arc cot 0,4.

2) Konstrueerida ühikringis kesknurk x ja temale vastav kaar, kui

a) $\cos x = \frac{5}{12}$; b) $\sin x = -\frac{2}{5}$;

c) $\tan x = \frac{4}{7}$; d) $\cot x = -2{,}3$.

Iga juhtumi puhul anda x väärtuste üldavaldis, mis rahuldab antud tingimust.

258. Leida järgmised väärtused:

1) a) $\cos 2$; b) $\sin 50$; c) $\tan 0{,}5231$;

d) $\cos(\pi - 1)$; e) $\tan(\cot \frac{\pi}{4})$.

2) a) $x + \sin x$, kui $x = 0{,}5$; $x = 1{,}232$;

b) $\frac{\sin x}{x}$, kui $x = 0{,}12$; $x = \pi$;

c) $x \cos x$, kui $x = 0{,}3$; $x = \frac{\pi}{2}$; $x = 2{,}5$.

259. Leida järgmiste funktsioonide väärtused:

1) a) $y = 2 \cos x$; b) $y = \cos 2x$;

c) $y = \frac{1}{2} \sin x$; d) $y = \sin \frac{x}{2}$,

kui argumendi x väärtused on: 0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; π; 2π; $\frac{3}{4}\pi$; 0,2375; 1,249; 1,478. Milline on iga funktsiooni määramispiirkond? Milliste argumendi väärtuste puhul muutuvad need funktsioonid nulliks? Anda valem x kõigi nende väärtuste jaoks, mis muudavad funktsiooni nulliks.

2) a) $y=\sin(\sin x)$, kui $x=\frac{\pi}{2}$; $x=\pi$; $x=\frac{\pi}{6}$; $x=1{,}483$.

b) $y=\cos(\cos x)$, kui $x=\frac{\pi}{2}$; $x=2\pi$; $x=\frac{\pi}{3}$; $x=0{,}7632$.

c) $y=\sin(\cos x)$, kui $x=\pi$; $x=\frac{\pi}{4}$; $x=0{,}4529$.

Milline on iga antud funktsiooni määramispiirkond?
Leida argumendi x need väärtused, mille puhul funktsioonid muutuvad nulliks. Anda valem x kõigi niisuguste väärtuste jaoks ja näidata neid väärtusi arvteljel.

3) a) $y=\sin x^2$, kui $x=\pm\frac{1}{2}$; $x=1$; $x=\frac{\pi}{4}$; $x=\pm 5$;

b) $y=\tan 2x$; $y=\tan x^2$, kui $x=1$; $x=\frac{5\pi}{4}$; $x=\pm 2{,}5$.

Milliste argumendi x väärtuste puhul kaotavad funktsioonid $\tan 2x$ ja $\tan x^2$ oma mõtte?

260. Näidata ühikringjoonel vahemikud, kus antud funktsioonide väärtused on positiivsed (negatiivsed):

1) $\sin(x+\frac{\pi}{6})$; 2) $\cos(x-\frac{\pi}{3})$; 3) $\tan(x+\frac{\pi}{4})$;
4) $1-\sin x$; 5) $\cos x-1$; 6) $\cot 2x$;
7) $\sin 2x$; 8) $\cos 2x$.

261. Milliste argumendi x väärtuste puhul kaotavad alljärgnevad funktsioonid mõtte? Konstrueerida need väärtused arvteljel.

1. a) $\frac{1}{1+\cos x}$; b) $\frac{1}{\cos x}$; c) $\frac{1}{\cos 2x}$;
d) $\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}$; e) $\frac{1}{\cos(x+\frac{\pi}{3})}$; f) $\frac{1}{2+\cos x}$;
2. a) $\frac{1}{1-\sin x}$; b) $\frac{1}{\sin x}$; c) $\frac{1}{\sin 3x}$;
d) $\frac{1}{\sin\frac{x}{4}}$; e) $\frac{1}{\sin x+\cos x}$; f) $\frac{1}{\sin x-\cos x}$;
3. a) $\tan x$; b) $\frac{1}{\tan x}$; c) $\frac{1}{\tan x^2}$;
d) $\tan 2x$; e) $\tan 3x$; f) $\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}$;
g) $\frac{1}{\tan x-\sin x}$.

262. Tõestada antud võrduste õigsus ning leida nii võrduse paremal kui ka vasakul poolel olevate funktsioonide määramispiirkonnad:

1) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$; 2) $\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$;

3) $\tan\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$; 4) $\tan^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$;

5) $\frac{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{2\cos^2 x+\cos x-1}=2\cos x.$

263. Leida järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad:

1) $\sin 2x$; 2) $\cos 2x$; 3) $\cos\frac{x}{2}$; 4) $\sin\frac{x}{2}$;

5) $\tan 2x$; 6) $\tan\frac{x}{2}$; 7) $\cot 2x$; 8) $\cot\frac{x}{2}$.

264. Leida järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad:

1) a) $y=\frac{1}{\cos^2 x}$; b) $y=\frac{1}{\sin^2 x}$; c) $y=\frac{1}{\sin x^2}$;

d) $y=\sqrt{\sin x}$; e) $y=|\sin x|$; f) $y=\frac{1}{\sin x}$.

2) a) $y=\sqrt{1-\sin x}$; b) $y=\sqrt{\cos 2x}$;

c) $y=\frac{x}{\sin x}$; d) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$;

e) $y=\log\cos x$; f) $y=\sqrt{\log\sin x}$;

3) a) $y=\sin x\cdot\cos x$; b) $y=1-\cos x$;

c) $y=\frac{1}{1+\cos x}$; d) $y=\frac{1+\cos x}{1+\sin x}$.

4) a) $y=\sqrt{1-\tan x}$; b) $y=\log(1-\tan x)$;

c) $y=\sqrt{1-2\sin x}$; d) $y=2\cos x-\sqrt{3}$.

265. 1) Näidata ühikringjoonel vahemikud, milles kehtivad järgmised võrratused:

a) $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$; b) $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $|\sin x|\leqslant\frac{1}{2}$;

d) $\cos x\geqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$; f) $\tan x\leqslant 1$;

g) $\cot x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$; h) $\cos x>\frac{1}{2}$; i) $|\sin 2x|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$;

j) $|\tan x|\geqslant 1$.

2) Näidata ühikringjoonel vahemikud, milles kehtivad järgmised võrratussüsteemid:

a) $\begin{cases}\sin x>\frac{1}{2}\\ \cos x\geqslant\frac{1}{2}\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sin x\geqslant\frac{1}{2}\\ \cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

3) Näidata ühikringjoonel vahemikud, milles kehtivad järgmised võrratused:

a) $\sin x\cdot\cos x>0$; b) $\sin x\cdot\cos x<0$; c) $\sin x\cdot\tan x<0$.

Tõkestatus ja tõkestamatus.

266. 1) Milliste argumendi x väärtuste puhul on järgmiste funktsioonide väärtus null:

a) $\cos 2x$? b) $\sin 3x$? c) $\tan \frac{x}{2}$; d) $\cot (\pi+x)$?

Anda valem x kõigi niisuguste väärtuste jaoks.

2) Milliste argumendi x väärtuste puhul on järgmistel funktsioonidel suurim väärtus:

a) $\cos 3x$? b) $\sin \frac{x}{2}$? c) $2 \sin 2x$? d) $\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$?

Anda valem x kõigi niisuguste väärtuste jaoks.

3) Milliste argumendi x väärtuste puhul on järgmistel funktsioonidel vähim väärtus:

a) $\cos (2x+\frac{\pi}{2})$? b) $\sin (x+\frac{\pi}{4})$? c) $\sin (x+1)$? d) $(-\cos x)$?

Anda valem x kõigi niisuguste väärtuste jaoks.

267. Määrata kindlaks järgmiste funktsioonide väärtuste vahemik, kui x on mistahes reaalarv:

1) $1-\sin x$; 2) $\sin x \cdot \cos x$; 3) $\cos 2x$;
4) $\sin 2x$; 5) $2 \cos x$; 6) $\sin x+1$;
7) $\sin \frac{x}{2}$; 8) $\sin x+\cos x$.

268. 1) Leida järgmiste funktsioonide suurimad ja vähimad väärtused ning kujutada vastavad argumendi väärtused arvteljel:

a) $2+\cos 2x$; b) $1+2 \sin 2x$; c) $1-\sin \frac{x}{2}$;
d) $1+5 \sin^2 \frac{x}{2}$; e) $3 \cos^2 3x+5 \sin^2 3x$;
f) $1+\tan^2 2x$; g) $1+|\sin x|$; h) $\cos^3 x$;
i) $\frac{1}{2} \cos 2x$; j) $2 \cos \frac{x}{2}$; k) $\sqrt{\tan x}$;
1) $2 \cos^2 x+\sin^2 x$.

2) Kas on võimalikud järgmised võrdused?

a) $2^{\cos x}=5$; b) $2^{\tan x}=-1$.

3) Leida järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad:

a) $y=2^{\sin x}$; b) $y=2^{\cot x}$.

269. 1) Tõestada, et

a) $|5 \cos x| \leqslant 5$; b) $|3 \sin x| \leqslant 3$;
c) $|5 \cos x+2 \sin x|<7$; d) $|3 \sin 2x| \leqslant 3$.
e) $\left|4 \cos \frac{x}{2}\right| \leqslant 4$.

Milliste argumendi x väärtuste puhul muutuvad need võrratused võrdusteks?

Anda valem x kõigi niisuguste väärtuste jaoks ja kujutada need väärtused arvteljel.

2) Tõestada, et argumendi x kõigi väärtuste puhul on kehtivad järgmised võrratused:

a) $5\sin x+2\cos x+1<8$; b) $5\cos x+2\sin x-1<6$;

c) $|\cos x+3\sin x|<4$; d) $|3\cos x-2\sin x|<5$.

270. Kas järgmised funktsioonid on tõkestatud?

1) $y=2\cos^2 x-\cos x+3$; 2) $y=5\sin^2 x+2\sin x-3$;

3) $y=3\cos^2 x-3\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x$;

4) $y=2\sin^2 x+3\cos^2 x-4\sin x\cdot\cos x$.

271. Millised antud funktsioonidest on tõkestatud ja millised mitte?

1) a) $1+\cos x$; b) $1+\tan x$; c) $2\cos x-5$;

d) $2-\cot x$; e) $x+\sin x$; f) $x+\tan x$;

g) $|x\cos x|$; h) $\sin x+\tan x$.

2) a) $1+\sin 2x$; b) $1-\tan\frac{x}{2}$; c) $2\cos 3x+5$;

d) $2-\cot 3x$; e) $3x-\cos\frac{x}{2}$; f) $5x-\tan 2x$;

g) $x\cos(x+\frac{\pi}{3})$; h) $\cos 2x+\sin\frac{x}{2}$.

272. 1) Millised antud funktsioonidest on vahemikus $(0;\frac{\pi}{4})$ tõkestatud ja millised mitte?

a) $3-\sin 3x$; b) $\cos\frac{x}{2}-1$; c) $3\cos^2 x+1$;

d) $3x-\tan x$; e) $\sin(2x-\frac{\pi}{4})$; f) $\cos x+\cot x$.

2) a) Kas antud funktsioonid on tõkestatud?

$$\frac{1}{\tan x-1};\qquad \frac{1}{\tan x+1};\qquad \frac{1}{\tan^2 x+1}.$$

b) Milline on järgmiste funktsioonide suurim väärtus?

$$\frac{1}{\tan^2 x+1};\qquad \frac{1}{2\tan^2 2x+1};\qquad \frac{1}{\tan^2\frac{x}{2}+2}.$$

Paaris- ja paaritud funktsioonid.

273. Määrata, millised antud funktsioonidest on paarisfunktsioonid, millised paaritud ja millised pole ei paaris- ega paaritud funktsioonid:

1) a) $\sin 2x$; b) $\cos 2x$; c) $\tan\frac{x}{2}$;

d) $\sin^3 x$; e) $\sin x+\cos x$; f) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$;

g) $\frac{2\sin x}{1+\cos x}$; h) $1-\sin x$; i) $x^2+\sin^2 x$;

j) $\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$; k) $\frac{\cot x}{\tan 2x+\sin 2x}$; l) $\frac{x^2+\cos x}{x^2-\cos x}$;

m) $\sin x \cdot \cos x$; n) $|\sin x|$; o) $\frac{\sin x}{x}$;

p) $\sin \frac{x}{2}$; r) $\frac{1}{\cos x}$; s) $\frac{1}{\tan 2x}$.

2) a) $x \sin x$; b) $x \cos x$; c) $x^2 \tan x$;

d) $x^3 \cot x$; e) $|1+\cos x|$; f) $\sqrt{\sin x}$;

g) $\sqrt{\cos x}$; h) $3^{\sin x}$; i) $2^{\cos x}$;

j) $2^{\tan x}$; k) $\frac{\sin 3x}{\tan x}$ l) $\sin 3x \cdot \cos x$.

Vahemikud, milledes funktsioonid säilitavad märki.

274. Vahemikust $(-\pi; \pi)$ eraldada osad, milledes järgmised funktsioonid omavad positiivseid (negatiivseid) väärtusi:

1) $\cos x$; 2) $\sin x$; 3) $\tan x$;

4) $\cos 2x$; 5) $\sin \frac{x}{2}$; 6) $\tan 3x$.

275. Määrata vahemikud, milledes kehtivad järgmised võrratused:

1) a) $\cos x>0$; b) $\cos 2x>0$; c) $\cos \frac{x}{2}<0$;

d) $\cos 3x<0$; e) $\sin 2x<0$; f) $\sin (x+\frac{\pi}{3})>0$;

g) $\sin \frac{x}{2}>0$; h) $\sin (3x+1)>0$; i) $\tan x>0$;

j) $\tan 5x<0$; k) $\tan (2x+\frac{\pi}{4})>0$; l) $\tan \frac{x}{2}<0$.

2) a) $\cos (-2x)<0$; b) $\cos (-\frac{x}{2})>0$;

c) $\sin (-2x)>0$; d) $\sin (-3x)<0$;

e) $\tan (-2x)>0$; f) $\tan (-3x)<0$.

276. Lahendada järgmised võrratused:

1) $\cos x+2>0$; 2) $\cos^2 x+2 \cos x>0$;

3) $\cos^2 x-3 \cos x<0$; 4) $\sin x-4>0$;

5) $\sin 2x+2>0$; 6) $\sin \frac{x}{2}-3<0$;

7) $\sin^2 x+2 \sin x>0$.

Perioodilisus.

277. Määrata järgmiste funktsioonide väikseimad positiivsed perioodid:

1) a) $2 \sin x$; b) $\frac{\sin x}{2}$; c) $3 \cos x$;

d) $\frac{\cos x}{3}$; e) $2 \tan x+1$; f) $\frac{1}{3} \tan x$;

g) $2 \cot x-1$; h) $\tan x+\cot x$.

2) a) $\sin 2x$; b) $\sin \frac{x}{2}$; c) $\sin (x + \frac{\pi}{3})$;

d) $\sin (2x - \frac{\pi}{4})$; e) $\cos 4x$; f) $\cos \frac{x}{3}$;

g) $\cos (2x - \frac{\pi}{6})$; h) $2 \cos (x + \frac{\pi}{4})$;

i) $\sin^3 x$; j) $\cos^3 x$; k) $\frac{1}{\sin x}$.

3) a) $\tan 2x$; b) $\tan \frac{x}{3}$; c) $\tan (2x + \frac{\pi}{3})$;

d) $\frac{1}{2} \tan (3x - \frac{\pi}{4})$; e) $\cot \frac{x}{2}$; f) $\cot 4x$;

g) $\sin \frac{x}{2} + \tan x$; h) $\cos^2 x$; i) $\frac{1}{\cos x}$.

4) a) $\sin^2 x$; b) $\sin x \cdot \cos x$; c) $\sin (4\pi x + 2)$;

d) $\tan \frac{\pi x}{3}$; e) $|\sin x|$; f) $|\cos x|$;

g) $|\sin 2x|$; h) $|\tan 3x|$.

278. Määrata antud funktsioonide väikseimad positiivsed perioodid:

1) a) $\cos \frac{x}{2}$; b) $\cos 2x$; c) $\cos 3x$;

d) $\cos (x + \frac{\pi}{4})$; e) $\cos (2x + \frac{\pi}{3})$.

2) a) $\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$; b) $2 \sin 2x$; c) $\sin 3x$;

d) $\sin (2x + \frac{\pi}{3})$; e) $\sin (\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$.

3) a) $\tan \frac{x}{2}$; b) $\frac{1}{2} \tan 2x$; c) $\tan (\frac{x}{2} + 1)$;

d) $\tan (3x + \frac{\pi}{4})$; e) $3 \tan (2x - \frac{\pi}{4})$.

4) a) $2 |\cos x|$; b) $\frac{1}{2} |\sin x|$; c) $|\cos 2x|$;

d) $|\cos \frac{x}{2}|$; e) $|\tan 2x|$.

279. Millised antud funktsioonidest on perioodilised?

1) $2^{\cos x}$; 2) $3^{\sin x}$; 3) $\log \sin x$;

4) $x + \sin x$; 5) $\frac{1}{\tan x + 1}$.

280. Arvutada:

1) $\sin 1560°$; 2) $\cos 2730°$; 3) $\tan 1740°$;
4) $\cot 25$; 5) $\cos 12$.

281. Arvutada:

1) $\sin 2023° + 2 \cos 485° + \sin 2383° - \cos 125°$;

2) $\frac{2\sin 3281^\circ - \sin 1481^\circ}{2\tan 585^\circ}$; 3) $\frac{2\sin(-3827^\circ) - \sin 1215^\circ}{\cos(-1243^\circ)}$;

4) $\tan 190^\circ \cdot \tan 700^\circ \cdot \tan 400^\circ \cdot \tan 50^\circ \cdot \tan 250^\circ \cdot \tan 260^\circ$;

5) $\cos^2(\alpha+\beta) + \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta$, kui $\alpha = 378^\circ 30'$ ja $\beta = 275^\circ$.

282. Tõestada samasused:

1) $\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}) \cdot \cos(3\pi-\alpha) + \sin(\alpha+\frac{5}{2}\pi) \cdot \sin(3\pi+\alpha) = 0$;

2) $\frac{\cot(\frac{3}{2}\pi+\alpha) \cdot \cos(\alpha+3\pi)}{\cot(3\pi-\alpha) \cdot \cos(\frac{7}{2}\pi-\alpha)} = \tan\alpha$;

3) $\frac{\cot(5{,}5\pi-\alpha) + \tan(\beta-4\pi)}{\cot(\alpha-6\pi) - \tan(\beta-3{,}5\pi)} = \tan\alpha \cdot \tan\beta$;

4) $\frac{\cos^2(7\pi+\alpha)}{\tan(3\pi-\frac{\alpha}{2}) - \cot(\pi-\frac{\alpha}{2})} = \frac{1}{4}\sin 2\alpha$.

283. Lihtsustada avaldised:

1) $\sin^2(4\pi-\alpha) + \sin^2(4{,}5\pi+\alpha)$;
2) $\sin(5{,}5\pi+\alpha) - \cos^2(5\pi-\alpha) + 1$;
3) $\sin^2(5\pi+\alpha) + 2\sin(2{,}5\pi+\alpha) \cdot \cos(3{,}5\pi-\alpha) - 3\cos^2(4\pi-\alpha)$;
4) $1 + \cos(7\pi+\alpha) + \cos(2\alpha-4\pi)$.

284. Lahendada võrrandid:

1) $\cot^2(5{,}5\pi+x) = 2\tan(5\pi+x)$;
2) $\sin^2(7\pi+x) + 2\sin(4\pi+x) \cdot \cos(x-8\pi) = 3\cos^2(7\pi-x)$.

285. Vahelduvvoolu tugevust I mingil ajamomendil t arvutatakse valemi järgi $I = A\sin(\omega t)$, kus A on suurim voolutugevus amprites, t – aeg sekundites, ω – võnkesagedus.

Arvutada voolu tugevus ajamomendil $t = 0{,}375$ sekundit, kui $A = 200$ amprit ja $\omega = 100\pi$.

Monotoonsuse piirkonnad.

286. Määrata, kumb funktsioon on suurem ja panna nende vahele vastav võrratuse märk:

1) a) $\cos 20^\circ$ ja $\cos 22^\circ$; b) $\cos 103^\circ$ ja $\cos 110^\circ$; c) $\cos 201^\circ$ ja $\cos 210^\circ$; d) $\cos 310^\circ$ ja $\cos 320^\circ$.
2) a) $\sin 40^\circ$ ja $\sin 42^\circ$; b) $\sin 130^\circ$ ja $\sin 135^\circ$; c) $\sin 230^\circ$ ja $\sin 233^\circ$; d) $\sin 300^\circ$ ja $\sin 305^\circ$.
3) a) $\tan 50^\circ$ ja $\tan 53^\circ$; b) $\tan 140^\circ$ ja $\tan 142^\circ$; c) $\tan 260^\circ$ ja $\tan 261^\circ$; d) $\tan 340^\circ$ ja $\tan 344^\circ$.
4) a) $\cot 25^\circ$ ja $\cot 28^\circ$; b) $\cot 142^\circ$ ja $\cot 148^\circ$; c) $\cot 190^\circ$ ja $\cot 195^\circ$; d) $\cot 290^\circ$ ja $\cot 301^\circ$.

287. Tabeleid kasutamata määrata iga järgmise vahe märk:

1) a) $\cos 40^\circ - \cos 41^\circ$; b) $\sin 40^\circ - \sin 43^\circ$; c) $\tan 20^\circ - \tan 21^\circ$; d) $\cos 20^\circ - \cos 100^\circ$; e) $\sin 35^\circ - \sin 36^\circ$; f) $\tan 35^\circ - \tan 130^\circ$;

2) a) $\sin 20° - \cos 20°$; b) $\sin 50° - \cos 50°$; c) $\tan 40° - \cot 40°$; d) $\cot 50° - \tan 50°$.

288. 1) Kumb on suurem?

a) arc cos $(-0{,}6542)$ või arc cos 0,6542;
b) arc cos 0,4713 või arc cos 0,5172;
c) arc sin 0,3412 või arc sin 0,2975;
d) arc sin $(-0{,}82)$ või arc sin $(-0{,}62)$;
e) arc tan 2,345 või arc tan 3,461;
f) arc tan $(-1{,}743)$ või arc tan $(-1{,}852)$.

2) Kumb on suurem?

a) arc cos 0,3815 või arc sin 0,3815;
b) arc sin $(-0{,}7842)$ või arc cos $(-0{,}7842)$;
c) arc sin 0,4571 või arc cos 0,2531;
d) arc cot $(-0{,}3752)$ või arc cot $(-0{,}4681)$;
e) arc cot 2,83 või arc tan 3,71;
f) arc tan 1,935 või arc cot 2,147.

3) Kumb on suurem?

a) cos 1 või cos 1°;
b) $\sin \pi$ või sin 180°;
c) cos 3 või cos 5,3.

4) Milline märk on funktsioonil sin 2? sin 3? tan 1,347? tan 15,2?

289. Leida, kumb funktsioonidest on suurem ja panna nende vahele vastav võrratuse märk:

1) a) $\sin 0{,}6\pi$ ja $\sin 0{,}62\pi$;
b) cos 1,3 ja cos 1,4;
c) tan 7,2 ja tan 7,25;
d) $\cot 1{,}4\pi$ ja $\cot 1{,}5\pi$.

2) a) sin (-2) ja sin $(-2{,}1)$;
b) cos $(-5{,}1)$ ja cos (-5);
c) $\tan\left(-\frac{9}{25}\pi\right)$ ja $\tan\left(-\frac{11}{25}\pi\right)$;
d) cot $(-6{,}3)$ ja cot $(-6{,}2)$.

290. 1) Leida järgmiste funktsioonide monotoonsuse piirkonnad:

a) $\cos\frac{x}{2}$; b) $\sin 2x$; c) $y=\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$; d) $\cos 2x$; e) $\sin\frac{x}{2}$.

2) Millistes vahemikes on kehtivad järgmised võrratused?

a) $\cos x > \frac{1}{2}$; b) $|\cos x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $|\sin x| > \frac{1}{2}$;

e) $\cos 3x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; f) $|\cos 2x| < \frac{1}{2}$; g) $|\sin x| > \frac{1}{2}$; h) $\left|\tan\frac{x}{2}\right| < 1$.

3) Leida järgmiste funktsioonide monotoonsuse piirkonnad:

a) $\frac{1}{\sin x}$; b) $\frac{1}{\cos x}$; c) $|\cos x|$; d) $|\sin x|$; e) $|\tan x|$; f) $\sin 3x$;

g) $\tan \frac{x}{2}$; h) $\cos (x+\frac{\pi}{4})$; i) $\sin (2x+1)$.

4) Leida järgmiste funktsioonide monotoonsuse piirkonnad:

a) $2^{\sin x}$; b) $2^{\cos x}$; c) $\log \cos x$; d) $\log \tan x$; e) $\sin^2 x$;

f) $\cos^3 x$; g) $3^{\cos 2x}$; h) $2^{\cos \frac{x}{2}}$; i) $\log \sin 2x$; j) $\sqrt{\sin x}$.

291. Jaotada lõik $[0; 4\pi]$ niisugusteks vahemikeks, kus iga järgmine funktsioon oleks monotoonne:

1) $\cos x$; 2) $\sin x$; 3) $\tan x$; 4) $\sin 2x$; 5) $\cos 2x$; 6) $\tan 2x$;

7) $\sin \frac{x}{2}$; 8) $\cos \frac{x}{2}$; 9) $\cot \frac{x}{2}$.

Näidata iga funktsiooni puhul vahemikud, kus funktsioon säilitab märki.

§ 13. Trigonomeetriliste funktsioonide graafikud.

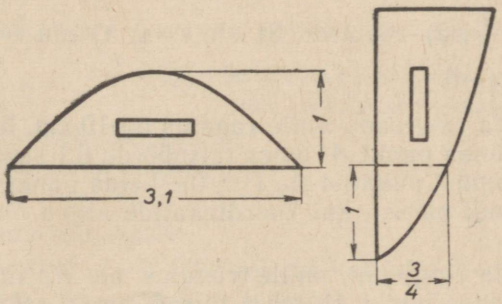
292. 1) Konstrueerida funktsiooni $y=\sin x$ graafik ja näidata, kuidas on graafiku konstrueerimisel kasutatud siinusfunktsiooni omadusi (määramispiirkond, monotoonsuse piirkonnad, perioodsus, märgi säilitavuse piirkonnad, siinusfunktsioon kui paaritu funktsioon).

2) Seesama funktsiooni $y=\cos x$ kohta.

3) Seesama funktsiooni $y=\tan x$ kohta.

4) Seesama funktsiooni $y=\cot x$ kohta.

Valmistage papist või vineerist lekaalid sinusoidi ja tangensoidi joonestamiseks (joon. 10.).



Joon. 10.

293. Joonestada järgmiste funktsioonide graafikud:

1) a) $y=2\sin x$; b) $y=\frac{1}{3}\sin x$; c) $y=\sin x+1$; d) $y=|\sin x|$;
e) $y=-\sin x$; f) $y=\sin (-x)$.

2) a) $y=3\cos x$; b) $y=\frac{1}{2}\cos x$; c) $y=1-\cos x$; d) $y=|\cos x|$;
e) $y=-\cos x$; f) $y=\cos(-x)$.

3) a) $y=3\tan x$; b) $y=\frac{1}{3}\cot x$; c) $y=\tan x-1$; d) $y=|\tan x|$;
e) $y=-\cot x$; f) $y=\tan(-x)$.

294. Konstrueerida järgmiste funktsioonide graafikud ja näidata nende funktsioonide monotoonsuse piirkonnad, märgi säilivuse piirkonnad, ning leida graafiku järgi väikseim positiivne periood:

1) a) $y=\sin 2x$; b) $y=\sin\frac{x}{2}$; c) $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$;
d) $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$; e) $y=\sin(2x+\pi)$; f) $y=\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{2})$;
g) $y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+1$; h) $y=2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})-1$.

2) a) $y=\cos 2x$; b) $y=\cos\frac{x}{3}$; c) $y=\cos(x+\frac{\pi}{4})$;
d) $y=\cos(2x+\frac{\pi}{2})$; e) $y=\frac{1}{2}\cos(2x-\frac{\pi}{3})$;
f) $y=2\cos(x-\frac{\pi}{4})+1$.

3) a) $y=\tan 2x$; b) $y=\cot\frac{x}{2}$; c) $y=\tan(x+\pi)$;
d) $y=\cot(2x-\frac{\pi}{4})$.

4) a) $y=\sin x+\cos x$; b) $y=\sin^2 x$; c) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$;
d) $y=\sin x+\sin 2x$.

295. Lahendada graafiliselt järgmised trigonomeetrilised võrrandid:

1) $\cos x=\frac{1}{4}$; 2) $\cos x=x$; 3) $\sin x=x$; 4) $\sin x=|x|$;
5) $\cos x+x=0$.

296. Mööda ringjoont, mille raadius on 10 cm, liigub ühtlaselt positiivses suunas punkt A, tehes täispöörde 0,1 sekundiga. Punkt A alustab liikumist punktist A_0 (10; 0). Leida punkti A koordinaadid 0,09 sekundi pärast, kui koordinaatide algus ühtib ringjoone keskpunktiga.

297. Mööda ringjoont, mille raadius on R, liigub ühtlaselt positiivses suunas punkt M, tehes täispöörde t sekundiga. Leida punkti M koordinaadid t sekundi pärast, kui ta alustab liikumist punktist M_0 (R; O) ja koordinaatide algus ühtib ringjoone keskpunktiga.

298. Konstrueerida ülesandes 273 (1 ja 2) antud funktsioonide graafikud.

299. 1) Kas funktsioonide $\sin x$ ja $\tan x$ graafikutel on sümmeetriateljed?

2) Milline punkt on funktsioonide $\sin x$ ja $\tan x$ graafikute sümmeetriakeskpunktiks?

3) Nimetada funktsioonide $\cos x$ ja $\cot x$ graafikute sümmeetria keskpunktid.

§ 14. Ülesandeid kordamiseks.

300. Lihtsustada avaldised:

1) $\cos(36^\circ+\alpha)\cdot\cos(54^\circ-\alpha)-\sin(36^\circ+\alpha)\cdot\sin(54^\circ-\alpha)$;

2) $\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)$;

3) $\dfrac{\sin 4\alpha}{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$;

4) $\sin^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\beta$;

5) $\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

6) $\dfrac{\cot\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$;

7) $\dfrac{0{,}125\cdot\sin 2\alpha-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{0{,}125\cdot\sin 2\alpha+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

8) $\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha+\varphi)-2\cos\alpha\cdot\cos\varphi\cdot\cos(\alpha+\varphi)$;

9) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}+\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}+\dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha}$;

10) $(1+\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot(1-\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot(1+\sin\alpha-\cos\alpha)\cdot(-1+\sin\alpha+\cos\alpha)$;

11) $\dfrac{\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}$;

12) $\cos^2(\alpha+\beta)-\cos^2(\alpha-\beta)$;

13) $1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta$;

14) $\tan\dfrac{\alpha}{2}-\cos\alpha-\sin\alpha$;

15) $\dfrac{\tan x+1}{\sin x-\cos x}$;

16) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)}$;

17) $\sin 3\alpha\cdot\sin^3\alpha+\cos 3\alpha\cdot\cos^3\alpha$;

18) $\dfrac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$;

301. Tõestada samasused:

1) $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1=0$;

2) $\dfrac{\sin(2a+b)}{\sin a}-2\cos(a+b)=\dfrac{\sin b}{\sin a}$;

3) $8\cos 10^\circ\cdot\cos 50^\circ\cdot\cos 70^\circ=\sqrt{3}$;

4) $1-\sin^2(a+b)-\sin^2(a-b)=\cos 2a\cdot\cos 2b$;

5) $\cos^2\alpha-\sin^2\beta+\cos^2(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha-\beta)$;

6) $2\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta+2\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta-1=\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta$;

7) $4 \sin \alpha \cdot \sin (60° - \alpha) \cdot \sin (60° + \alpha) = \sin 3\alpha$;

8) $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha) - \tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = 2 \tan 2\alpha$;

9) $\sin \alpha + \sin(\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \sin(\alpha + \frac{4\pi}{3}) = 0$;

10) $4 \sin \frac{\pi}{10} \cdot \sin \frac{13\pi}{10} = -1$; 11) $\frac{\sin^2 2\alpha - 4 \sin^2 \alpha}{\sin^2 2\alpha - 4 + 4 \sin^2 \alpha} = \tan^4 \alpha$;

12) $4 (\cos^3 20° + \cos^3 40° = 3 \sqrt{3} \cos 10°$;

13) $\cos 20° \cdot \cos 70° = \frac{1}{2} \sin 40°$;

14) $\sin 40° \cdot \sin 50° = \frac{1}{2} \cos 10°$; 15) $\sin^4 \frac{3}{8} \pi - \cos^4 \frac{3}{8} \pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

16) $\sin^2 \alpha + \sin^2 (120° + \alpha) + \sin^2 (120° - \alpha) = \frac{3}{2}$.

302. 1) Tõestada, et kui $\alpha = \frac{\pi}{3}$, siis kehtib võrdus:

$$\tan \alpha + \tan 2\alpha = \tan 3\alpha.$$

2) Tõestada, et kui $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin (\alpha + \beta)$, siis:

$$\tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}.$$

303. Milliste α ja β väärtuste korral on kehtivad võrdused:

1) $\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$; 2) $\sin \alpha = |\sin \alpha|$;

3) $|\cos \alpha| = \cos \alpha$.

304. Uurida funktsioone:

1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \tan x + \cot x$.

305. Kõõl a, mis on tõmmatud diameetri otspunktist, moodustab diameetriga nurga α. Kõõlu teisest otspunktist on tõmmatud ringjoonele puutuja kuni lõikumiseni diameetri pikendusega. Leida puutuja lõik puutepunkti ja lõikepunkti vahel.

306. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on α. Selle kolmnurga sisse on joonestatud ringjoon. Puutepunktide ühendamisel on saadud uus kolmnurk, mille ümbermõõt on P. Leida antud kolmnurga ümbermõõt.

307. Ringisektorisse, mille raadius on R ja kesknurk α, on joonestatud ring. Leida selle ringi raadius.

308. Kahe seesmiselt puutuva ringjoone keskpunktide vaheline kaugus on d. Suurema ringjoone keskpunktist väiksemale ringjoonele tõmmatud puutuja moodustab keskpunkte ühendava sirgega nurga α. Leida suurema ringjoone raadius.

309. Ringisse, raadiusega R on joonestatud trapets, mille diagonaal moodustab haaradega nurgad α ja 2α. Leida trapetsi pindala.

310. Leida korrapärase n-nurga väikseima diagonaali pikkus, kui selle n-nurga külg on a.

311. Ringjoonele, mille raadius on R, on tõmmatud ühest ja samast väljaspool ringjoont asetsevast punktist kaks puutujat, mis moodustavad teineteisega nurga φ. Leida puutujate lõikude ja ringjoone väiksema kaarega piiratud kujundi pindala.

312*. Antud nurga α sisse on joonestatud ringjoon raadiusega R. Leida sellise ringjoone raadius, mis puudutab väliselt antud ringjoont ja mille puutujateks on sellesama nurga haarad (vaadelda kahte juhtu).

313. Rombi teravnurk on α. Leida rombi pindala, kui rombi sisse joonestatud ringi pindala on K.

314. Ringi sisse on joonestatud korrapärane n-nurk, mille külg on a. Leida sellesama ringi sisse joonestatud korrapärase $2n$-nurga külg.

315*. Segmendi sisse on joonestatud ruut, mille kaks kaarel asetsevat tippu jaotavad kaare kolmeks võrdseks osaks. Leida segmendi kaar.

316. Kaks ringjoont lõikuvad, eraldades teineteisest kaared 2α ja 2β (2α on suurema ringjoone kaar). Leida nende ringjoonte ühiste väliste puutujate vaheline nurk.

317. Korrapärase n-nurga ümber ja sisse on joonestatud ringjoon. Leida ringjoonte poolt moodustatud rõnga pindala, kui selle n-nurga külg on a.

318. Võrdhaarse kolmnurga alusele tõmmatud kõrgus on h ning haarale tõmmatud kõrgus h_1. Leida kolmnurga alusnurk.

319. Võrdhaarse trapetsi aluse keskpunktist on tõmmatud ristlõik trapetsi haarale. Selle ristlõigu pikkus on h ja ta jaotab haara kaheks võrdseks osaks. Trapetsi nürinurk on α. Leida trapetsi pindala.

320. Väljaspool tasapinda asetsevast punktist A on tasapinnale konstrueeritud ristlõik pikkusega p. Ristlõigu aluspunkti O ümber on tasapinnal joonestatud ringjoon raadiusega r. Ringjoone mingi punkt M on ühendatud punktiga A. Leida nurk OA ja AM vahel ($p=4{,}5$; $r=8$).

321. Ruudu keskpunktist O on püstitatud ruudu tasapinnale ristlõik $OM=d$. Punktist M on tõmmatud ristlõik MC ruudu küljele $AB=a$. Leida lõigu MC ja tema projektsiooni vaheline nurk.

322. Kuubi serv $a=10$ cm. Leida nurk kuubi diagonaali ja tema tahu vahel. Kas see nurk muutub kuubi serva pikkuse muutmisel?

323. Nelinurkse püramiidi põhjaks on ruut küljepikkusega 8 cm. Püramiidi kõrgus lähtub põhja diagonaalide lõikepunktist ja on 7 cm pikk. Leida püramiidi külgserva ja põhja vaheline nurk.

324. Võrdkülgse kolmnurga ABC külg on a. Selle kolmnurga keskpunktist O on püstitatud ristsirge kolmnurga tasapinnale. Ristsirgel on võetud punkt M nii, et $MA=a$. Punktist M on tõm-

* Tärniga märgitud ülesandeid võib kasutada individuaalseks ja klassiväliseks tööks õpilastega.

matud ristlõik MD kolmnurga küljele AC. Leida nurk MD ja kolmnurga ABC tasapinna vahel.

325. Lõigu $AB=a$ otspunktide kaugused tasapinnast on m ja n. Määrata lõigu ja tasapinna vaheline nurk üldkujul ning leida selle väärtus, kui $a=13$ cm, $m=5$ cm ja $n=8$ cm. (Vaadelda kahte juhtu).

326. On antud kahetahuline nurk α. Ühel tahul asetsevast punktist, mille kaugus nurga servast on a, on tõmmatud ristsirge lõikumiseni teise tahuga. Arvutada ristlõigu pikkus ($a=6{,}06$; $\alpha=41°50'$).

327. Täisnurkne kolmnurk ABC on paigutatud nii, et tema hüpotenuus AB asetseb tasapinnal P, kuid kaatetid moodustavad selle tasapinnaga nurgad α ja β. Leida kolmnurga tasapinna ja tasapinna P vaheline nurk.

328. Täisnurkses kolmnurgas on antud hüpotenuus a ja teravnurk α. Leida täisnurga tipu kaugus tasapinnast, mis läbib kolmnurga hüpotenuusi ja moodustab kolmnurga tasapinnaga nurga φ.

329. Kolmnurga ABC üks külg (AB) asetseb tasapinnal P, ülejäänud kaks külge (CA ja CB) moodustavad aga tasapinnaga P nurgad α ja β, mille tangensid on vastavalt $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{4}$. Külgede CA ja CB projektsioonid tasapinnal P on teineteisega risti. Leida kolmnurga ABC kaldenurk tasapinna P suhtes.

330. Rööpküliku lähiskülgede suhe on 3 : 5. Rööpküliku väiksem külg asetseb tasapinnal P, tema vastaskülje kaugus tasapinnast on aga niisama suur kui rööpküliku pikemate külgede vaheline kaugus. Leida rööpküliku tasapinna ja tasapinna P vaheline nurk.

331. Kaldsirge ja tasapinna vaheline nurk on α. Läbi selle nurga tipu on tasapinnal tõmmatud sirge nii, et kaldsirge projektsiooni ja tõmmatud sirge vaheline nurk on β. Leida kaldsirge ja tasapinnal tõmmatud sirge vaheline nurk.

332*. Väljaspool tasapinda olev sirge lõikab tasapinnal olevat sirget nii, et nende sirgete vaheline nurk on α. Tasapinnal olev sirge moodustab teda lõikava sirge projektsiooniga nurga β. Leida kaldsirge ja tasapinna vaheline nurk ($\alpha=8°20'$; $\beta=5°40'$).

333. Tasapinnal on võetud kaks punkti nii, et nende vaheline kaugus on a. Nendest punktidest on tõmmatud teineteisega paralleelsed sirged nii, et nende kaldenurgad tasapinna suhtes on φ. Leida sirgete vaheline kaugus, kui on teada, et nende projektsioonide vaheline kaugus on b.

334. Sirglõik AB on paralleelne tasapinnaga. Lõigu otspunktidest on tõmmatud tasapinnale kaks kaldlõiku: $AC=c$ ja $BD=d$. Kaldlõik AC moodustab tasapinnaga nurga α. Leida kaldlõigu BD ja tasapinna vaheline nurk.

335. Risttahuka ühest tipust lähtuvate külgede otspunktidest on pandud läbi tasapind. Selle tasapinna kaldenurk risttahuka põhja suhtes on α. Põhja lähiskülgede pikkused on a ja b. Leida lõike pindala.

V peatükk.

KOLMNURKADE LAHENDAMINE.

§ 15. Trigonomeetriliste funktsioonide ja nende logaritmide tabelid.

336. 1) Leida:

a) $\sin 17°23'$; b) $\cos 28°31'$; c) $\cos \frac{\pi}{8}$;

d) $\cos (-1{,}2538)$; e) $\sin (-\frac{2\pi}{17})$; f) $\sin 2{,}1730$;

g) $\tan (-70°41')$; h) $\tan \frac{3\pi}{11}$; i) $\tan 3{,}017$;

j) $\cot \frac{2\pi}{9}$; k) $\cot 42°55'$; l) $\cot 0{,}2613$.

2) Leida:

a) $\arcsin (-0{,}1217)$; b) $\arcsin 0{,}5670$;

c) $\arccos \frac{\pi}{12}$; d) $\arccos (-0{,}7328)$;

e) $\arctan 10{,}35$; f) $\arctan (-12{,}31)$;

g) $\operatorname{arc\,cot} 2{,}175$; h) $\operatorname{arc\,cot} 0{,}6830$.

3) Leida α väikseim positiivne väärtus, kui:

a) $\sin \alpha = -0{,}7236$; b) $\cos \alpha = 0{,}3892$;

c) $\tan \alpha = 0{,}7524$; d) $\cot \alpha = -1{,}340$.

4) Leida kõige lihtsamal teel järgmiste avaldiste väärtused:

a) $\sin 42° \cdot \cos 12°$; b) $\cos 38° \cdot \cos 52°$;

c) $\sin 82° \cdot \sin 66°$; d) $\sin 27°40' \cdot \cos 70°48'$;

e) $\cos 48°14' \cdot \cos 82°16'$; f) $\sin 72°26' \cdot \sin 17°34'$;

g) $\sin 0{,}2347 \cdot \cos 1{,}2459$; h) $\sin 1{,}3841 \cdot \sin 2{,}1176$.

5) Sama, mis eelmises:

a) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$, kui $\alpha = 12°51'$; b) $\frac{\cos 3x}{\cos x}$, kui $x = 55°11'$;

c) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha \cdot \tan \alpha}$, kui $\alpha = 0{,}0124$; d) $1{,}763 \cos^2 18°16'$;

e) $2{,}537 \cos^2 65°38'$; f) $x + \sin x$, kui $x = 2{,}5$;

g) $x+\cos\frac{1}{x}$, kui $x=\pi$; h) $x+\cos x$, kui $x=1{,}295$;

i) $\cos^2\alpha(1+\cos\alpha)\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$, kui $\alpha=126°18'$.

337. Leida tabelite abil:

1) a) $\log\cos 21°37'$; b) $\log\cos 63°42'$;
c) $\log\cos 21°11'$; d) $\log\cos 47°12'$;
e) $\log\cos 53°15'$; f) $\log\cos 1°23'$;

2) a) $\log\sin 12°8'$; b) $\log\sin 50°22'$;
c) $\log\sin 44°53'$; d) $\log\sin 62°47'$;
e) $\log\sin 30°46'$; f) $\log\sin 88°34'$.

3) a) $\log\tan 27°41'$; b) $\log\tan 16°7'$;
c) $\log\tan 70°43'$; d) $\log\tan 12°15'$;
e) $\log\tan 84°19'$; f) $\log\tan 89°10'$.

4) a) $\log\cot 80°53'$; b) $\log\cot 20°26'$;
c) $\log\cot 77°21'$; d) $\log\cot 15°38'$;
e) $\log\cot 87°59'$; f) $\log\cot 15°40'$.

Leida positiivne teravnurk x, kui:

5) $\log\cos x$ on: $\bar{1}{,}4001$; $\bar{1}{,}4634$; $\bar{1}{,}6747$; $\bar{1}{,}9341$; $\bar{1}{,}2711$.

6) $\log\sin x$ on: $\bar{1}$, 8615; $\bar{2}{,}9301$; $\bar{1}{,}9497$; $\bar{1}{,}3494$; $\bar{1}{,}5080$.

7) $\log\tan x$ on: $\bar{2}{,}7865$; 0,0066; $\bar{1}{,}4608$; 0,0771; 0,0002.

8) $\log\cot x$ on: $\bar{1}{,}0368$; $\bar{1}{,}5018$; 0,3738; $\bar{1}{,}3387$; $\bar{1}{,}2435$.

338. Lahendada järgmised trigonomeetrilised võrrandid, leides nurga x väikseima väärtuse ning andes siis vastuse üldkujul:

1) $\sin x=0{,}681$; 2) $\sin x=\frac{5}{11}$; 3) $\sin x=-0{,}3721$;

4) $\tan x=\frac{17}{35}$; 5) $\tan x=1{,}45$; 6) $\tan x=-2{,}48$;

7) $\cos x=0{,}7621$; 8) $\cos x=-0{,}5688$; 9) $\cot x=3$;
10) $\cot x=-0{,}731$.

339. Leida nurga x väikseim väärtus, kasutades trigonomeetriliste funktsioonide ja nende logaritmide tabeleid:

1) $\tan x=\tan 40°+\tan 70°$; 2) $\cos x=1-\cot 66°12'$;
3) $\cos x=1+\tan 117°$; 4) $\tan x=\sin 44°+\cos 166°$.

340. Arvutada kõige lihtsamal teel järgmiste avaldiste väärtused:

1) $(a^2-b^2)\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\cos\beta}$, kui $a=7{,}386$; $b=5{,}214$; $\alpha=42°26'$; $\beta=68°34'$;

2) $a^2\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\sqrt[4]{-\tan 2\alpha}$, kui $a=0{,}0204$; $\alpha=67°34'$;

3) $x=\pi(\sin 30°53'+\sin 80°24')$; 4) $x=\frac{\sqrt[3]{0{,}0001}}{\cos 16°-\sin 49°}$;

5) $x=\sqrt{2}\cdot(1-\tan 61°30')$; 6) $x=(16\frac{76}{81})^2\cdot(1+\sin 11°7')$;

7) $x=\sqrt[4]{0{,}005}\cdot(1+2\sin 41°)$;

8) $x=(2{,}715)^3\cdot\sqrt{3-4\cos^2 72°5'}$.

§ 16. Täisnurksete kolmnurkade lahendamine.

341. Lahendada täisnurksed kolmnurgad nende antud elementide järgi. Lahendused teostada logaritmide tabelite ja arvutuslükati abil.

1) On antud hüpotenuus ja teravnurk:
a) $c\approx 9{,}35$; $A\approx 65°10'$; b) $c\approx 0{,}7979$; $A\approx 66°35'$.
c) $c\approx 3{,}643$; $A\approx 50°10'$.

2) On antud kaatet ja teravnurk:
a) $a\approx 6{,}37$; $A\approx 4°20'$. b) $b\approx 0{,}1738$; $A\approx 35°55'$.
c) $b\approx 0{,}2954$; $B\approx 25°37'$.

3) On antud hüpotenuus ja kaatet:
a) $c\approx 697$; $a\approx 528$. b) $c\approx 113$; $b\approx 15$.
c) $c\approx 1710$; $b\approx 823$.

4) On antud kaatetid:
a) $a\approx 261$; $b\approx 380$. b) $a\approx 0{,}0978$; $b\approx 0{,}1003$.
c) $a\approx 12{,}01$; $b\approx 6{,}92$.

342. Lahendada võrdhaarne kolmnurk tema antud elementide järgi.

Tähistusi: $a=c$ — haarad; b — alus; $A=C$ — aluse lähisnurgad; B — tipunurk; h_a — haarale a tõmmatud kõrgus; h_b — alusele tõmmatud kõrgus; S — kolmnurga pindala.

1) $a\approx 797{,}9$; $A\approx 66°35'$. 4) $A\approx 65°$ $h_a\approx 20$.
2) $a\approx 8{,}76$; $b\approx 13{,}96$. 5) $a\approx 627$; $B\approx 133°$.
3) $B\approx 73°14'$; $S\approx 4504$. 6) $b\approx 925{,}2$; $h_b\approx 721{,}4$.

§ 17. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine.

Tähistusi: a, b ja c — kolmnurga küljed; A, B ja C — nende külgede vastasnurgad; S — kolmnurga pindala; $2p$ — ümbermõõt; R — ümberjoonestatud ringjoone raadius; r — sissejoonestatud ringjoone raadius; h_a, l_a, ja m_a — küljele a vastav kõrgus, nurgapoolitaja ja mediaan.

343. Tõestada, et kaldnurkse kolmnurga nurkade trigonomeetrilised funktsioonid rahuldavad järgmisi seoseid;

1) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$.

J u h i s: Kasutada trigonomeetriliste funktsioonide summa korrutiseks teisendamise valemeid.

2) $4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \sin A + \sin B - \sin C$

J u h i s. Kasutada trigonomeetriliste funktsioonide korrutise summaks teisendamise valemeid.

3) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$

4) $4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} - 1 = \cos A + \cos B - \cos C$

5) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

6) $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$

7) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$

8) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$

9) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$

10) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$

11) Tõestada, et kui kehtib võrdus

$$\tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} + \tan \frac{\beta}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} = 1,$$

kus $\frac{\alpha}{2}$; $\frac{\beta}{2}$ ja $\frac{\gamma}{2}$ on teravnurgad, siis

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

12) Tõestada, et kui kehtib võrdus

$$\cot \alpha \cdot \cot \beta + \cot \alpha \cdot \cot \gamma + \cot \beta \cdot \cot \gamma = 1,$$

kus α, β ja γ on teravnurgad, siis

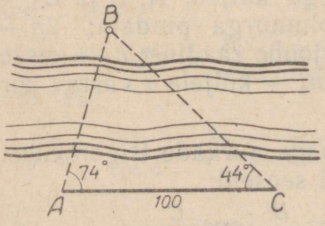
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Siinuslause.

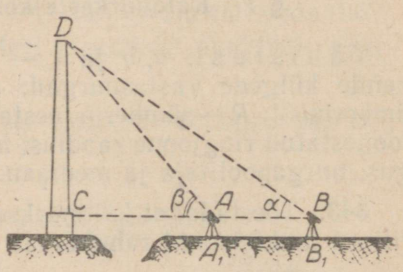
344. 1) Jõe vastaskallastel asetsevate punktide A ja B vahelise kauguse määramiseks võeti sellel kaldal, kus asetses punkt A, vabalt punkt C (joon. 11) ning mõõdeti järgmised suurused: baas $AC \approx 100$ m; $\angle CAB \approx 74°$; $\angle ACB \approx 44°$.

Leida nende andmete järgi otsitav kaugus.

Leida samal meetodil koolimaja hoovis mingi kahe eseme vaheline kaugus.



Joon. 11.

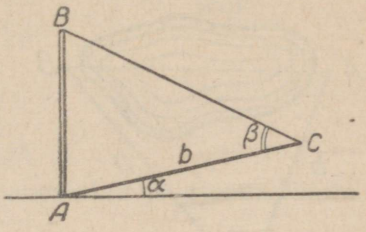


Joon. 12.

2) Ligipääsmatu vabrikukorstna kõrguse leidmiseks mõõdeti baas $A_1B_1 \approx 11{,}0$ m, mille pikendus läbib korstna jala (joon. 12), ning nurgad $CAD = \beta \approx 49°$, $CBD = \alpha \approx 35°$. Nurgamõõtja kõrgus maapinnast oli $h \approx 1{,}4$ m. Leida korstna kõrgus.

Leida sama meetodiga koolimaja kõrgus.

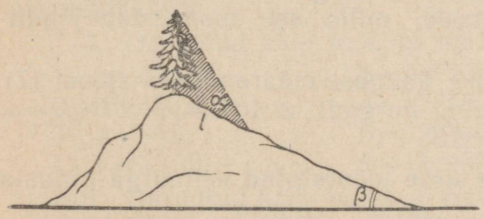
3) Vertikaalse eseme AB kõrguse leidmiseks võeti baasiks lõik AC (joon. 13), mis moodustab horisontaalsuunaga nurga α. Baasi otspunktist C on eseme tipp B näha baasi suhtes nurga β all. Leida eseme kõrgus.



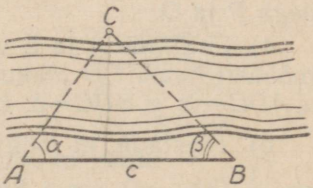
Joon. 13.

4) Mäenõlval, mis moodustab rõhttasapinnaga nurga β, kasvab puu, mille vari langeb mööda nõlva alla. Kui päikese kõrgus on α ($\alpha > \beta$), siis puu varju pikkus on l. Avaldada puu kõrgus (joon. 14).

5) Jõe laiuse määramiseks võeti jõe ühel kaldal vahetult vee ääres baas $AB = c$ meetrit ning mõõdeti nurgad $\angle CAB = \alpha$ ja $\angle ABC = \beta$, mille all paistab kummastki baasi otsast teisel kaldal vee läheduses kasvav puu C (joon. 15). Leida jõe laius puu C kohal, kui $c \approx 400$ m; $\alpha \approx 45°$ ja $\beta \approx 30°$.



Joon. 14.



Joon. 15.

6) Jõud $P \approx 23{,}0$ kG lahutati kaheks komponendiks, mille suunad moodustavad jõuga P nurgad $\alpha \approx 46°30'$ ja $\beta \approx 54°10'$. Leida komponentide suurused.

7) Kolmnurga ümber on joonestatud ringjoon. Leida kolmnurga ja ringi pindalade suhe.

J u h i s. Lugeda kolmnurga nurgad tuntud suurusteks.

8) Tõestada, et igas kolmnurgas 30°-se nurga vastas olev külg on võrdne selle kolmnurga ümber joonestatud ringjoone raadiusega.

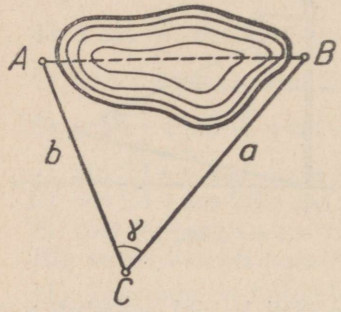
Koosinuslause.

345. 1) Punktid A ja B asetsevad nii, et nendevahelise kauguse otsene mõõtmine on takistatud (joon. 16). Selle kauguse kaudseks määramiseks võeti kolmas punkt C nii, et sellest on näha punktid

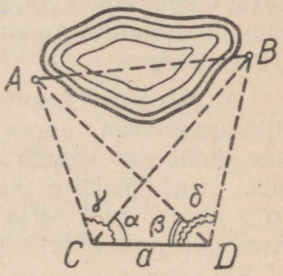
A ja B ning vahemaad AC ja BC on otseselt mõõdetavad. Seejärel mõõdeti kaugused $BC=a$ ja $AC=b$ ning nurk $ACB=\gamma$. Arvutada AB ($a\approx 100$ m; $b\approx 80$ m; $\gamma\approx 48°54'$).

Leida samal meetodil koolimaja hoovis mingi kahe eseme vaheline kaugus.

2) Rööpküliku lähisküljed on 4,0 cm ja 5,0 cm ning nendevaheline nurk on 52°. Leida rööpküliku diagonaalide pikkused.



Joon. 16.



Joon. 17.

3) Materiaalsele punktile mõjuvad jõud $P\approx 100$ kG ja $Q\approx 200$ kG, mis moodustavad omavahel nurga $\alpha\approx 50°$. Leida nende jõudude resultant ning nurgad, mille see moodustab jõududega P ja Q.

4) Punktide A ja B vahelise kauguse määramiseks (joon. 17) mõõdeti baasi CD pikkus a ning nurgad: $\angle ACD=\gamma$; $\angle BCD=\alpha$; $\angle ADC=\beta$; $\angle BDC=\delta$. Leida AB.

5) Tõestada, et ringjoone sisse joonestatud nelinurga pindala on $\frac{1}{2}(ab+cd)\cdot\sin\alpha$, kus a, b, c ja d on nelinurga küljed ning α on nurk külgede a ja b vahel.

6) Tõestada, et ringjoone sisse joonestatud nelinurga pindala on $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, kus p on pool ümbermõõtu ning a, b, c ja d on nelinurga küljed.

Juhis. Kasutada eelmist ülesannet. Leida koosinuslause abil $\cos\alpha$ ja asendada $\sin\alpha$ avaldisega $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$.

346. Arvutada arvutuslükati abil:

1) a) $3{,}5\sin 25°$ b) $8{,}3\sin 72°$; c) $1{,}2\sin 3°$.

2) a) $2{,}8\tan 68°30'$; b) $6{,}3\tan 29°$; c) $7{,}4\tan 2°30'$.

3) a) $\frac{5{,}4}{\sin 14°}$; b) $\frac{7{,}3}{\sin 43°}$; c) $\frac{9{,}1}{\sin 63°}$.

4) a) $\frac{12{,}3}{\tan 53°30'}$; b) $\frac{8{,}5}{\tan 67°}$; c) $\frac{5{,}7}{\tan 16°}$; d) $\frac{12{,}8}{\tan 28°30'}$;

5) a) $4{,}7 \cos 37°$; b) $7{,}2 \cot 57°$; c) $\frac{2{,}8}{\cos 71°}$; d) $\frac{6{,}7}{\cot 62°}$.

6) a) $\sin 22° \cdot \sin 73°$; b) $\sin 41° \cdot \tan 15°30'$;
c) $\cos 29° \cdot \sin 41°$; d) $\tan 32° \cdot \tan 53°$;
e) $\tan 62° \cdot \cos 25°$; f) $\cos 53° \cdot \cos 64°$;
g) $\sin 4° \cdot \sin 57°$; h) $\tan 12° \cdot \tan 4°30'$.

7) a) $\frac{\sin 73°}{\sin 31°}$; b) $\frac{\sin 8°}{\sin 4°30'}$; c) $\frac{\sin 16°}{\sin 8°}$.

8) Arvutada kolmnurga pindala, kui:
a) $a=40$, $b=50$ ja $\angle C=50°$;
b) $b=64$, $c=82$ ja $\angle A=65°$;
c) $a=32$, $b=53$ ja $\angle C=61°$;
d) $a=95$, $\angle B=35°$ ja $\angle C=42°$.

9) Arvutada kolmnurga ümber joonestatud ringjoone raadius, kui:
a) $a=28$ ja $\angle A=72°$; b) $b=74$ ja $\angle B=34°$.

10) Lahendada kaldnurksed kolmnurgad, kui:
a) $a=500$, $b=800$ ja $\angle A=24°$; b) $a=800$, $\angle A=55°$ ja $\angle B=47°$; c) $a=34$, $b=55$ ja $\angle C=31°$; d) $a=35$, $b=58$ ja $c=76$.

Lahendada järgmised kaldnurksed kolmnurgad antud põhielementide järgi. (Lahendamisel kasutada logaritmide tabeleid ja arvutuslükatit).

347. On antud külg ja kaks nurka:

1)	$a \approx 370{,}0$;	$B \approx 86°30'$;	$C \approx 50°50'$.
2)	$a \approx 450{,}0$;	$A \approx 87°50'$;	$B \approx 10°50'$.
3)	$a \approx 951$;	$B \approx 126°40'$;	$C \approx 13°20'$.
4)	$b \approx 13{,}02$;	$A \approx 11°46'$;	$B \approx 133°40'$.

348. On antud kaks külge ja nendevaheline nurk:

1)	$a \approx 510$;	$b \approx 317$;	$C \approx 76°10'$.
2)	$a \approx 225$;	$b \approx 800$;	$C \approx 36°40'$.
3)	$a \approx 2{,}296$;	$c \approx 1{,}687$;	$B \approx 29°52'$.
4)	$b \approx 28$;	$c \approx 42$;	$A \approx 124°$.

349. On antud kaks külge ja ühe külje vastasnurk:

1)	$a \approx 87$;	$b \approx 65$;	$A \approx 75°$.
2)	$b \approx 360$;	$c \approx 309$;	$C \approx 21°30'$.
3)	$a \approx 13{,}89$;	$c \approx 8{,}42$;	$A \approx 126°41'$.
4)	$a \approx 13{,}81$;	$c \approx 8{,}14$;	$C \approx 14°37'$.
5)	$b \approx 263{,}1$;	$c \approx 215{,}4$;	$B \approx 70°14'$.
6)	$a \approx 19{,}06$;	$b \approx 88{,}19$;	$A \approx 31°17'$.

350. On antud kolm külge:

1)	$a \approx 19$;	$b \approx 34$;	$c \approx 49$.
2)	$a \approx 0.099$;	$b \approx 0{,}101$;	$c \approx 0{,}158$.
3)	$a \approx 172{,}5$	$b \approx 113{,}4$;	$c \approx 120{,}5$.
4)	$a \approx 1{,}234$;	$b \approx 2{,}345$;	$c \approx 3{,}457$.

351. Lahendada kaldnurksed kolmnurgad antud elementide järgi:

1) $R \approx 7{,}92$; $A \approx 113°17'$; $B \approx 48°16'$.
2) $S \approx 501{,}9$; $A \approx 15°28'$; $B \approx 45°23'$.
3) $h_a \approx 5{,}37$; $B \approx 115°10'$; $C \approx 5°33'$.
4) $l_a \approx 0{,}758$; $B \approx 98°30'$; $C \approx 4°20'$.
5) $a+b \approx 488{,}8$; $A \approx 70°24'$; $B \approx 40°16'$.
6) $a-b \approx 23$; $A \approx 108°$; $B \approx 18°$.
7) $r \approx 5{,}0$; $A \approx 22°$; $B \approx 39°$.
8) $S \approx 2420$; $a \approx 42{,}5$; $B \approx 124°50'$.
9) $a \approx 32$; $b \approx 25$; $A \approx 2B$.
10) $S \approx 15$; $ab \approx 48$; $\sin A \approx \cos B$.
11) $a \approx 120{,}0$; $b \approx 29{,}0$; $h_c \approx 23{,}7$.
12) $h_a \approx 8$; $h_b \approx 12$; $h_c \approx 18$.

§ 18. Kolmnurkade lahendamise rakendusi.

352. 1) Arvutada kolmnurgakujulise maatüki pindala, kui plaanil, mille mõõt on 1 : 100 000, on selle maatüki kaks külge vastavalt 5,6 cm ja 7,5 cm ning nende külgede vaheline nurk on 48°.

2) Hulknurgakujulise maatüki plaanistamisel polaarsel meetodil (pooluseks on võetud hulknurga tipp A) saadi mõõtmisel järgmised andmed: külg $AB \approx 250$ m; diagonaalid $AC \approx 360$ m; $AD \approx 430$ m; $AE \approx 390$ m; külg $AF \approx 450$ m; nende suundade asimuudid on vastavalt: $\angle NAB \approx 25°$; $\angle NAC \approx 53°$; $\angle NAD \approx 81°$; $\angle NAE \approx 125°$ ja $\angle NAF \approx 140°$.

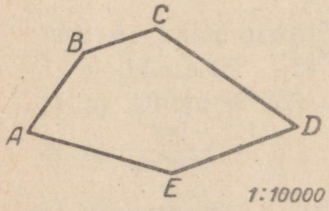
Leida maatüki $ABCDEF$ pindala.

3) Maatüki $ABCD$ plaanistamisel polaarsel meetodil (pooluseks on võetud maatüki sees olev punkt O) saadi mõõtmisel järgmised andmed:

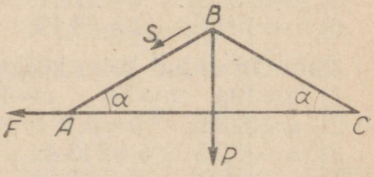
$OA \approx 28$ m; $OB \approx 31$ m; $OC \approx 24$ m; $OD \approx 37$ m; $\angle AOB \approx 36°$; $\angle BOC \approx 78°$; $\angle COD \approx 110°$ ja $\angle DOA \approx 136°$.

Joonestada maatüki $ABCD$ plaan ja arvutada tema pindala. Nurk NOA (suuna OA asimuut) on 280°.

4) Viisnurkse maatüki plaan, mille mõõt on 1 : 10 000, on esitatud joonisel 18. Arvutada selle maatüki pindala.



Joon. 18.



Joon. 19.

353. Jõud $P \approx 5{,}2$ kG tuleb lahutada kaheks komponendiks, mis mõjuvad teineteise suhtes täisnurga all. Üks komponent moodustab jõuga P nurga $\alpha \approx 46°$. Leida jõu P need komponendid.

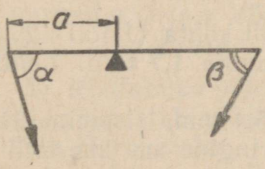
354. Sarikad BA ja BC (joon. 19) moodustavad talaga AC nurga α. Sarika tippu B on riputatud koormus P. Leida:
1) jõud S, millega sarikas surub oma pesale (asub punktis A);
2) jõud F, millega venitatakse tala AC.

355. Paadimees, sõites üle jõe, suunab paadi risti jõe vooluga ja aerutab niisuguse jõuga, millega ta seisvas vees liiguks kiirusega $\approx 0{,}3 \frac{\text{m}}{\text{sek.}}$. Missuguse nurga võrra kaldub paat oma suunast kõrvale voolu mõjul, kui voolu kiirus on $\approx 1 \frac{\text{m}}{\text{sek.}}$?

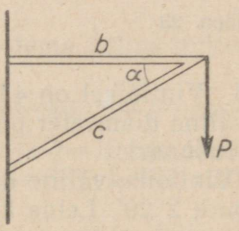
356. Rong sõidab kiirusega $\approx 12 \frac{\text{m}}{\text{sek.}}$. Vagunis olevale reisijale näib, et vihmatilk langeb püstsihi suhtes nurga all $\alpha \approx 30°$. Leida vihmatilkade langemise keskmine kiirus.

357. Vabalt langev keha langeb esimese sekundiga $\approx 4{,}9$ m, libisemisel mööda kaldpinda aga samas olukorras $\approx 1{,}8$ m. Leida kaldpinna kaldenurk rõhttasapinna suhtes (hõõrdumist mitte arvestada).

358. Sirge kangi õlale, mille pikkus on a, on rakendatud õla suhtes nurga α all mõjuv jõud P kG. Kangi teisele õlale on vastukaaluks rakendatud õla suhtes nurga β all mõjuv jõud Q kG. Kui pikk on kangi teine õlg, kui kang on tasakaalus (joon. 20)?



Joon. 20.



Joon. 21.

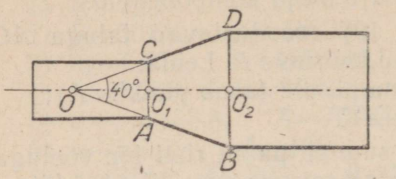
359. Sirge kangi otstele A ja B mõjuvad kaks jõudu P kG ja Q kG. Kangi AB pikkus on a. Punktis A mõjuv jõud P moodustab kangiga nurga α, jõud Q, mis mõjub punktis B, moodustab kangiga nurga β. Kui kaugel punktist A tuleb kangi toetada, et see oleks tasakaalus? (Kangi kaalu mitte arvestada.)

360. Kronsteinile (joon. 21) on riputatud raskus P kG. Leida jõud, mis venitab varrast b, ja jõud, mis surub varrast c, kui varraste vaheline nurk on α.

361. Arvutada töö ≈ 20 m pikkusel teel, kui ≈ 10 kG suurune jõud mõjub kehale liikumise suuna suhtes nurga all $\approx 40°$.

362. Toru, mille diameeter on $CA \approx 100$ mm, läheb koonusetaolise vahetüki abil üle toruks BD, mille ristlõike pindala on esime-

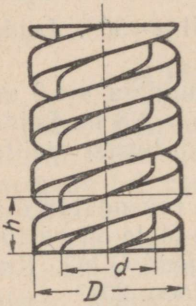
sest kaks korda suurem (joon. 22). Leida AB pikkus, kui on teada, et moodustajate AB ja CD suundade vaheline nurk on 40°.



Joon. 22.

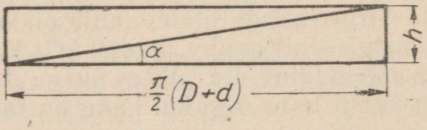
Lahendada ülesanded, mis käsitlevad kruvijoont. Ülesannetes esinev tähistus: h — kruvisamm; D — väline diameeter; d — sisemine diameeter, α — kruvijoone tõusunurk; $\frac{D+d}{2}$ — keskmine diameeter.

363. Koostada valem, mis võimaldab arvutada kruvijoone tõusunurka kruvi sammu ja selle silindri diameetri järgi, millel asetseb kruvijoon (joon. 23 ja 24).



Joon. 23.

364. Leida kruvijoone tõusunurk, kui kruvi samm on 6 mm, vintlõike väline diameeter on 50 mm ja sisemine 42 mm.



Joon. 24.

365. Vintlõikel on 4,5 ringi ühe tolli kohta (1 toll ≈ 25,4 mm), lõike väline diameeter on 2,0 tolli, sisemine 1,7 tolli. Leida vintlõike tõusunurk .

2) Vintlõike väline diameeter on 25,4 mm, sisemine 21,3 mm, tõusunurk 2°20′. Leida kruvisamm ja ringide arv ühe tolli kohta.

366. 12,5 mm diameetriga spiraalpuuril on spiraalne kanal sammuga 192 mm. Leida nurk, mille moodustab puuri kanal puuri teljega.

VI peatükk.

TRIGONOMEETRIA RAKENDAMIST NÕUDVAID ÜLESANDEID.

§ 19. Hulktahukad.

Rööptahukas ja prisma.

367. Risttahuka diagonaalid ja temaga ühest tipust väljuvate servade vahelised nurgad on α, β, ja γ. Tõestada, et $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ ja arvutada γ, kui $\alpha=31°10'$ ja $\beta=69°10'$ (teisendada eelnevalt $\cos^2\gamma$ avaldis korrutiseks).

368. Ruumipunktist väljuvad kolm üksteise suhtes risti asetsevat kiirt ja vektor, mis algab samast punktist. Tõestada, et juhul, kui nurgad vektori ja kiirte vahel on α, β ja γ, siis $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Kas see võrdus on õige ka siis, kui vektori suund ühtib ühe antud kiire suunaga?

369. Risttahuka diagonaal moodustab tema kolme mittevõrdse tahuga nurgad α, β ja γ. Tõestada:

1) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$; 2) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$.

370. 1) Risttahuka põhiserv $a=36$ cm ja $b=15$ cm. Risttahuka diagonaal moodustab põhitahuga nurga $\alpha=38°$. Leida risttahuka külgpindala ja ruumala.

2) Püströöptahuka põhjaks on romb, mille külje pikkus $a=58$ cm ja teravnurk $\alpha=63°$. Rööptahuka suurem diagonaal moodustab põhitahuga nurga $\beta=52°$. Leida rööptahuka ruumala.

371. Leida risttahuka ruumala, kui tema diagonaal moodustab põhitahuga nurga α, suurema külgtahuga aga nurga β. Risttahuka diagonaali pikkus on a. Uurida saadud valemit.*

372. Risttahuka põhja diagonaal on a, põhja diagonaalide vaheline nurk on α ning risttahuka suuremat põhiserva läbiva diagonaaltasapinna ja põhitahu vaheline nurk on β. Leida risttahuka ruumala. (Arvutada, kui $a=7{,}5$; $\alpha=43°$ ja $\beta=57°$)

* Selles ja kõigis järgnevates ülesannetes tuleb valemi uurimise all mõista ülesannete tingimustest lähtuvat uurimist — tuleb leida parameetrite kõik lubatavad väärtused, s. t. tuleb leida, millistel tingimustel esinevad sellised kujundid, millest on ülesandes juttu.

373. Rööptahuka iga serva pikkus on 1 cm. Rööptahuka ühe tipu juures on kõik tasanurgad teravad, igaüks 2α. Leida rööptahuka ruumala. Uurida saadud valemit.

374. Rööptahuka ühest tipust väljuvate servade pikkused on a, b ja c. Servade a ja b vaheline nurk on täisnurk, serv c moodustab aga servadega a ja b nurga α. Leida rööptahuka ruumala ja serva c ning põhitahu vaheline nurk.

375. Korrapärase nelinurkse prisma kõrgus on h. Põhitahu ühest tipust on tõmmatud diagonaalid kahele külgtahule. Nende diagonaalide vaheline nurk on α. Leida prisma külgpindala. Uurida saadud valemit.

376. Läbi korrapärase nelinurkse prisma alumise põhja diagonaali ja ülemise põhja tipu on pandud tasapind, mis lõikab prisma kahte külgtahku mööda sirgeid, millede vaheline nurk $\alpha = 58°$. Prisma põhiserv $a = 6{,}4$ cm. Leida prisma ruumala (arvutamisel kasutada logaritmide tabeleid ja arvutuslükatit; tulemusi võrrelda).

377. Korrapärase kolmnurkse prisma põhiserv on a. Ülemise põhja kaks tippu on ühendatud alumise põhja vastaskülgede keskpunktidega. Leida prisma ruumala, kui ühendussirgete vaheline nurk on α. Uurida saadud valemit.

378. 1) Püstprisma põhjaks on kolmnurk ABC, kusjuures $AB = b$, $BC = a$ ja $\angle ACB = \alpha$. Prisma kõrgus on võrdne kolmnurga ABC kõrgusega, mis on tõmmatud tipust C. Leida prisma ruumala.

2) Püstprisma põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille haar on a ja tipunurk α. Ülemise põhja tipust on tõmmatud võrdsete külgtahkude diagonaalid, millede vaheline nurk on β. Leida prisma külgpindala. Uurida saadud valemit.

(Arvutada, kui $a = 97{,}84$ cm, $\alpha = 63°28'$ ja $\beta = 39°36'$.)

379. Prisma põhjaks on kolmnurk ABC, kus $BC = a$ ja $AB = AC$. Serv $AA_1 = b$ ning on risti servaga BC. Kahetahuline nurk serva AA_1 juures on α. Leida prisma ruumala ja külgpindala.

380. Korrapärase viisnurkse prisma põhiserv on a, prisma kõrgus on $\frac{1}{4}$ põhja diagonaalist. Arvutada prisma täispindala.

381. Kolmnurkse prisma põhitahu iga serv on a. Ülemise põhja ühe tipu projektsioon asetseb alumise põhja keskpunktis. Külgserv moodustab põhitahuga nurga α. Leida prisma külgpindala. Uurida saadud valemit.

382. Korrapärase nelinurkse prisma diagonaal on d ning moodustab prisma külgtahuga nurga α. Leida prisma külgpindala. Uurida saadud valemit.

383. Arvutada nelinurkse püstprisma ruumala, kui selle püstprisma kõrgus on h, tema diagonaalid moodustavad põhitahuga nurgad α ja β ning diagonaalide lõikumisel tekkiv teravnurk on γ.

384. Tasapind, mis läbib kuubi põhiserva ja moodustab põhitahuga nurga α, jaotab kuubi kolmnurkseks ja nelinurkseks prismaks. Leida kummagi prisma ruumala, kui kuubi serv on a. Uurida saadud valemit.

385. Korrapärase kolmnurkse prisma kõrgus on h. Läbi alumise põhja serva ja ülemise põhja vastastipu on pandud tasapind. Leida tekkinud lõike pindala, kui tema ülemise tipu juures olev nurk on 2α. Uurida valemit.

386.* Korrapärases kolmnurkses prismas on läbi põhiserva pandud tasapind, mis moodustab põhitahuga nurga α. Prisma põhiserv on a. Leida saadud lõike pindala. Uurida saadud valemit.

387. 1) Nelinurkses püstprismas on põhja pindala m, diagonaallõigete pindalad aga p ja q ning diagonaallõigete vaheline kahetahuline nurk α. Leida prisma ruumala.

2) Kolmnurkse prisma kahe külgtahu pindalad on m ja n ning nendevaheline kahetahuline nurk on α. Leida prisma ruumala, kui külgserv on a.

388. 1) Püstprisma põhjaks on trapets. Läbi trapetsite vastasasetsevate aluste on pandud tasapind, mis moodustab põhitahuga nurga α. Lõike kumbki diagonaal on d ning nendevaheline nurk on β. Leida prisma ruumala.

2) Püstprisma kõrgus $h=20$ cm, kusjuures põhjaks on täisnurkne trapets teravnurgaga $\alpha=46°$. Trapets on joonistatud ringjoone ümber, mille raadius $r=6$ cm. Leida prisma ruumala.

389. Kolmnurkses prismas on külgservade vahelised kaugused vastavalt a, b ja c. Prisma kõrgus on H, mis moodustab külgservaga nurga α. Leida prisma ruumala ja külgpindala.

390. Prisma põhjaks on korrapärane kuusnurk küljega a. Prisma külgserv moodustab põhitahuga nurga α, kusjuures külgserva projektsioon põhitahul on võrdne põhja ümber joonistatud ringjoone raadiusega. Leida prisma ruumala.

391. Läbi korrapärase kolmnurkse prisma põhiserva on pandud tasapind, mis lõikab külgtahke mööda sirgeid, millede vaheline nurk on α. Leida selle tasapinna kaldenurk põhitahu suhtes.

392. Läbi korrapärase nelinurkse prisma alumise põhja diagonaali ja ülemise põhja tipu on pandud tasapind. See tasapind lõikab prisma lähistahke mööda sirgeid, mis moodustavad omavahel nurga α. Leida prisma ruumala, kui tema põhiserv on a.

393. Prisma põhjaks on kolmnurk, mille kaks nurka on α ja β ning ümberjoonistatud ringjoone raadius on R. Külgserv a moodustab põhitahuga nurga φ. Leida prisma ruumala.

394. Läbi korrapärase nelinurkse prisma põhja kahe lähisserva keskpunkti on pandud tasapind, mis lõikab kolme külgserva, ning moodustab prisma põhjaga nurga α. Prisma põhiserv on a. Leida tekkinud lõike pindala.

395. Läbi korrapärase nelinurkse prisma telje keskpunkti ja põhja kahe lähisserva keskpunkti on pandud tasapind. Teades, et põhiserv on a ja külgserv b, leida: 1) lõike pindala; 2) lõiketasapinna ja põhitahu vaheline nurk.

396. 1) Kui korrapärast nelinurkset prismat lõigata tasapinnaga nii, et lõikeks saadakse romb teravnurgaga α, siis lõikav tasapind osutub paralleelseks põhja diagonaaliga ning moodustab põhjaga niisuguse nurga φ, et $\cos\varphi=\tan\frac{\alpha}{2}$. Tõestada see.

2) Nelinurkse püstprisma põhjaks on romb teravnurgaga α. Kui prismat lõigata tasapinnaga, mis on paralleelne rombi suurema diagonaaliga, põhitahu suhtes niisuguse nurga φ all, et lõikeks tekiks ruut tippudega prisma külgservadel, siis $\cos\varphi=\tan\frac{\alpha}{2}$. Tõestada see.

Püramiid.

397. 1) Korrapärase püramiidi antud mudeli järgi arvutada külgserva kaldenurk põhitahu suhtes; külgtahu kaldenurk põhitahu suhtes; mõõta malliga tippude juures olevad tasanurgad.

2) Korrapärase nelinurkse püramiidi külgtahu tipunurk on α. Leida põhitahu ja külgtahu vaheline kahetahuline nurk.

3) Korrapärase nelinurkse püramiidi külgtahk moodustab põhitahuga nurga α. Leida kahetahuline nurk külgserva juures.

4) Korrapärases kolmnurkses püramiidis on põhitahu ja külgtahu vaheline kahetahuline nurk α. Leida külgserva kaldenurk põhitahu suhtes.

398.* 1) Korrapärases n-nurkses püramiidis on kahe külgtahu vaheline kahetahuline nurk 2α. Leida külgtahu ja põhitahu vaheline kahetahuline nurk.

2) Korrapärases n-nurkses püramiidis on kahe külgtahu vaheline kahetahuline nurk 2α. Leida külgserva kaldenurk põhitahu suhtes.

3) Korrapärases n-nurkses püramiidis on ühest tipust lähtuva külgserva ja põhiserva vaheline nurk α. Leida püramiidi külgtahu kaldenurk põhitahu suhtes.

399. Püramiidi põhjaks on võrdkülgne kolmnurk. Üks külgtahk on risti põhitahuga, teised kaks moodustavad aga põhitahuga nurga α. Leida külgservade kaldenurgad põhitahu suhtes.

400. Korrapärases n-nurkses püramiidis on kõrgus kaks korda väiksem püramiidi põhiservast. Leida põhitahu ja külgtahu vaheline kahetahuline nurk.

401. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on a, mis moodustab külgservaga nurga α. Leida külgserva ja püramiidi kõrgust läbiva lõike pindala. Miks peab nurk α olema suurem kui 30°?

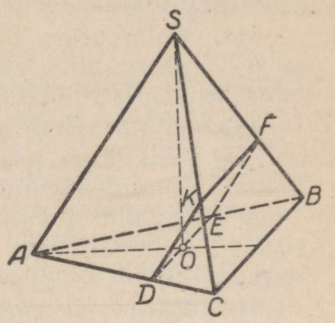
402. 1) Korrapärase nelinurkse püramiidi külgserv on b, ning moodustab põhitahuga nurga α. Läbi põhja diagonaali on pandud tasapind paralleelselt külgservaga. Leida lõike pindala.

2) Korrapärase kolmnurkse püramiidi $SABC$ (joon. 25) põhiserv on a ning kahetahuline nurk põhitahu ja külgtahu vahel on α. Leida lõike $DEFK$ pindala, kui lõige läbib põhitahu keskpunkti ja on paralleelne servadega AS ja CB.

403. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on a ning külgserv moodustab põhitahuga nurga α. Läbi põhitahu keskpunkti pandud tasapind, mis on paralleelne püramiidi kahe mittelõikuva servaga. Arvutada lõike pindala.

404. 1) Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a ning kahetahuline nurk põhitahu ja külgtahu vahel on 2α. Leida lõike pindala, mis jaotab selle kahetahulise nurga kaheks võrdseks osaks. Uurida saadud valemit.

2) Korrapärases nelinurkses püramiidis on kahetahuline nurk põhi- ja külgtahu vahel α. Läbi põhiserva on pandud tasapind, mis moodustab põhitahuga nurga β ($\beta<\alpha$). Püramiidi põhiserv on a. Leida lõike pindala.



Joon. 25.

405. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on h ja kahetahuline nurk põhitahu ning külgtahu vahel α. Leida lõike pindala, mis läbib kõrguse keskpunkti ja on paralleelne ühe külgtahuga.

406. 1) Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a ja külgserva ning põhitahu vaheline nurk on α. Läbi põhja ühe tipu on pandud tasapind risti vastasasetseva külgservaga. Leida lõike pindala. Uurida saadud valemit.

2) Korrapärase nelinurkse püramiidi külgtahu tipunurk on α ja põhiserv a. Läbi põhitahu diagonaali on pandud tasapind, mis on risti vastasoleva külgservaga. Leida lõike pindala. Uurida saadud valemit.

407. 1) Korrapärase kolmnurkse püramiidi külgserv on a, mis moodustab põhitahuga nurga α. Leida lõike pindala, mis läbib püramiidi tipu, on paralleelne ühe põhiservaga ning moodustab põhitahuga nurga β. (Vaadelda kahte juhtu.)

2) Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on h ning ta moodustab külgservaga nurga α. Läbi püramiidi põhitahu diagonaali on pandud tasapind, mis moodustab põhitahuga nurga φ. Leida lõike pindala.

408. 1) Läbi korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserva on pandud tasapind risti vastastahuga. Leida tekkiva lõike pindala, kui püramiidi põhiserv on a ja põhitahu ning külgtahu vaheline nurk on α.

2) Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on a ning külgtahu tipunurk α. Läbi püramiidi põhiserva on pandud tasa-

pind risti vastasasuva külgservaga. Leida tekkiva lõike pindala. Uurida valemit.

409. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a ning külgserva kaldenurk põhitahu suhtes on α. Püramiidi põhitahu keskpunktist on tõmmatud ristsirged kahele lähiskülgservale. Leida lõike pindala, mille määravad need ristsirged.

410. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on h ja külgtahu tipunurk 2α. Leida püramiidi külgpindala.

411. Kolmnurkse püramiidi külgtahkude tipunurgad on α, α ja β. Külgserv, mille pikkus on a ja mis võrdsete nurkade ühiseks haaraks, on risti põhitahuga. Leida püramiidi külgpindala.

412. 1) Püramiidi põhjaks on ruut küljega a. Kaks külgtahku on risti põhitahuga, teised moodustavad aga põhitahuga nurgad α. Leida püramiidi täispindala.

2) Püramiidi põhjaks on ristkülik. Kaks lähiskülgtahku on risti põhitahuga, teised moodustavad aga põhitahuga nurgad α ja β. Püramiidi kõrgus on h. Leida püramiidi külgpindala.

413. Püramiidi põhjaks on romb, mille külg on a ja teravnurk α. Kaks külgtahku, mille vahele jääb rombi teravnurk, on risti põhitahuga, ülejäänud kaks moodustavad aga põhitahuga nurga φ. Leida püramiidi külgpindala.

414. Leida korrapärase n-nurkse püramiidi ruumala, kui püramiidi külgserva pikkus on b ja see moodustab põhitahuga nurga β. Arvutada, kui $n=8$; $b=3{,}5$ m; $\beta=78°$.

415. Kolmnurkse püramiidi kaks külgtahku on võrdhaarsed täisnurksed kolmnurgad, mille hüpotenuusid on võrdsed b-ga, kusjuures nende tahkude vaheline nurk on α. Leida selle püramiidi ruumala.

416. Korrapärase kuusnurkse püramiidi põhiserva pikkus on $2a$ ja külgtahu tipunurk 2α. Leida selle püramiidi ruumala.

417.* Korrapärase n-nurkse püramiidi põhiserv on $2a$, kahetahuline nurk põhitahu ja külgtahu vahel on aga 2α. Leida püramiidi ruumala. Uurida saadud valemit.

418. 1) Püramiidi põhjaks on täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus on c ja teravnurk α. Külgtahk, mis läbib hüpotenuusi, on risti põhitahuga, teised kaks külgtahku moodustavad aga põhitahuga nurga β. Leida püramiidi ruumala.

2) Püramiidi põhjaks on täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus on c ja teravnurk α. Külgtahk, mis läbib nurga α lähiskaatetit, on risti põhitahuga, teised kaks moodustavad aga põhitahuga nurga α. Leida püramiidi ruumala.

419. Tõestada, et kui püramiidi kõrguse aluspunkt ühtib põhja ümber joonestatud ringjoone keskpunktiga (s. o. püramiidi tipp projekteerub põhitahu ümber joonestatud ringjoone keskpunkti), siis:

a) kõik püramiidi külgservad (l) on omavahel võrdsed;

b) nurgad (φ), mille moodustavad külgservad põhitahuga, on omavahel võrdsed;

c) kehtib võrdus: $H=l\cdot\sin\varphi=R\cdot\tan\varphi$; $R=l\cdot\cos\varphi$, kus H on püramiidi kõrgus ja R on põhja ümber joonestatud ringjoone raadius.

Millised teile tuntud nelinurgad võivad olla sel juhul püramiidi põhjaks?

Millisesse punkti projekteerub püramiidi tipp siis, kui püramiidi põhjaks on täisnurkne kolmnurk?

420. Püramiidi põhjaks on kolmnurk nurkadega α ja β. Selle kolmnurga ümber joonestatud ringjoone raadius on R. Kõik püramiidi külgservad moodustavad põhitahuga nurga φ. Leida püramiidi ruumala.

421. Püramiidi põhjaks on täisnurkne kolmnurk, mille üks teravnurk on α. Kõik külgservad on pikkusega b ning moodustavad põhitahuga nurga β. Leida püramiidi ruumala.

422. Püramiidi põhjaks on ristkülik. Püramiidi kõik külgservad on pikkusega m ning moodustavad ristküliku lähiskülgedega nurgad α ja β. Leida püramiidi ruumala. Uurida saadud valemit.

423. Püramiidi põhjaks on trapets, mille haarad ja lühem alus on a ning mille teravnurgad on α. Püramiidi kõik külgservad moodustavad põhitahuga nurga φ. Leida püramiidi ruumala.

424. Kolmnurkse püramiidi kõigi külgservade ja kahe põhiserva pikkus on a. Nurk põhitahu võrdsete külgede vahel on α. Leida püramiidi ruumala.

425. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille haar on a ja tipunurk α. Püramiidi kõik külgservad moodustavad põhitahuga nurga β. Läbi püramiidi kõrguse ja teravnurga α tipu on pandud tasapind. Leida lõike pindala.

426. Tõestada, et juhul, kui püramiidi kõrguse aluspunkt ühtib püramiidi põhja sisse joonestatud ringjoone keskpunktiga (s. o. püramiidi tipp projekteerub põhja sisse joonestatud ringjoone keskpunkti), siis:

a) püramiidi põhitahu ja külgtahkude vahelised kahetahulised nurgad on võrdsed;

b) püramiidi tipust külgtahkudele tõmmatud kõrgused (apoteemid) on võrdsed;

c) kehtib võrdus: $r=h\cdot\cos\varphi$; $H=r\cdot\tan\varphi=h\cdot\sin\varphi$, kus H on püramiidi kõrgus; h on külgtahu kõrgus (apoteem); r on põhitahu sisse joonestatud ringjoone raadius ja φ on põhitahu ning külgtahu vaheline kahetahuline nurk.

Millised teile tuntud nelinurgad võivad sel juhul olla püramiidi põhjaks?

J u h i s. Kui kolmnurkse püramiidi kõik külgtahud moodustavad põhitahuga võrdse nurga, siis püramiidi tipp projekteerub kas põhja sisse või ümber joonestatud ringjoone keskpunkti.

427.* Püramiidi põhjaks on täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on 6 cm ja 8 cm. Püramiidi kõik külgtahud moodustavad põhitahuga nurga 60°. Leida püramiidi külgpindala.

J u h i s. Lahendamisel vaadelda nelja võimalikku juhtu, vastavalt sellele, kas püramiidi tipp projekteerub põhja sisse ja ümber joonistatud ringjoone keskpunkti.

428. Kolmnurkse püramiidi põhiservad on 13 cm, 14 cm ja 15 cm. Püramiidi kõik külgtahud moodustavad põhitahuga nurga 45°. Leida püramiidi külgpindala.

429. Kolmnurkse püramiidi põhiservad on a, b, ja c. Püramiidi põhitahu ja külgtahkude vahelised nurgad on kõik α. Leida püramiidi külgpindala ja ruumala.

430. Püramiidi põhjaks on romb, mille külg on a ja teravnurk α. Püramiidi põhitahu ja külgtahkude vahelised kahetahulised nurgad on kõik φ. Leida püramiidi külgpindala ja ruumala.

431. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne trapets, mille alused on a ja b $(a>b)$. Kõik põhitahu ja külgtahkude vahelised kahetahulised nurgad on α. Leida püramiidi külgpindala.

432. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne trapets, mille diagonaal on l ning mis moodustab pikema algusega nurga α. Kõik külgtahud moodustavad põhitahuga nurga φ. Leida püramiidi külgpindala.

433. Kui mingi püramiidi kõik külgtahud moodustavad põhitahuga võrdse nurga α, siis

$$S=\frac{Q}{\cos\alpha} \text{ ja } S=Q\cdot\tan\alpha\cdot\cot\frac{\alpha}{2},$$

kus S on külgpindala ja Q põhja pindala. Tõestada see.

434. On antud tetraeeder. Leida:

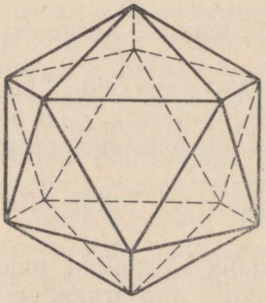
1) lähistahkude vaheline nurk;

2) külgserva kaldenurk vastastahu suhtes.

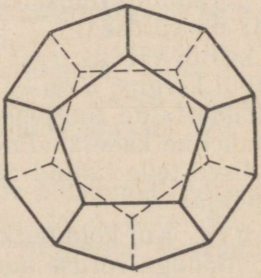
435. On antud oktaeeder. Leida tema lähistahkude vaheline nurk.

436.* 1) On antud ikosaeeder (joon. 26). Leida tema lähistahkude vaheline nurk.

2) On antud dodekaeeder (joon. 27). Leida tema lähistahkude vaheline nurk.



Joon. 26.



Joon. 27.

Tüvipüramiid.

437. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi alumise ja ülemise põhja servad on vastavalt a ja b $(a>b)$, kahetahuline nurk alumise põhitahu ja külgtahu vahel on α. Leida tüvipüramiidi ruumala ja külgpindala.

438. Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi alumise ja ülemise põhja servad on vastavalt a ja b $(a>b)$, kahetahuline nurk alumise põhitahu ja külgtahu vahel on α. Leida tüvipüramiidi täispindala ja ruumala.

439. Korrapärase n-nurkse tüvipüramiidi külgserv on c ja alumise ning ülemise põhja servad on vastavalt a ja b. Leida tüvipüramiidi kõrgus.

440. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi alumise ja ülemise põhja servad suhtuvad nagu $m:n$ $(m>n)$; külgserv moodustab alumise (suurema) nurga α. Läbi alumise põhja serva ja ülemise põhja vastasserva on pandud tasapind. Leida selle tasapinna kaldenurk suurema põhja suhtes.

441. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kõrgus on H ning külgserva ja suurema põhitahu ning püramiidi diagonaali ja suurema põhitahu vahelised nurgad on α ja β.

Leida tüvipüramiidi külgpindala.

442. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi alumise ja ülemise põhja servad on vastavalt a ja b $(a>b)$ ning külgtahu teravnurk on α. Leida ruumala. Uurida saadud valemit.

443. Antud korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi mudeli järgi leida:

1) külgserva ja põhitahu vaheline nurk;
2) külgtahu ja põhitahu vaheline nurk.

§ 20. Ümarkehad.

Silinder.

444. Võrdkülgse telglõikega silindri ülemise põhja piirdepunkt on ühendatud alumise põhja mingi piirdepunktiga. Nendesse punktidesse tõmmatud raadiuste (kiivsirged) vaheline nurk on 30°. Leida ühendussirge ja silindri telje vaheline nurk.

445. Võrdkülgse telglõikega silindri põhja raadius on R. Silindri ülemise põhja piirdepunkt on ühendatud alumise põhja mingi piirdepunktiga. Ühendussirge moodustab põhitasapinnaga nurga α. Leida ühendussirge kaugus silindri teljest. Uurida saadud valemit.

446. Silindrile on tõmmatud puutuja, mis moodustab silindri põhjaga nurga α. Leida alumise põhja keskpunkti kaugus sellest puutujast, kui põhja raadius on R ja põhja keskpunkti kaugus puutepunktist on d.

447. Silindri lõige, mis on paralleelne silindri kõrgusega H, kujutab endast ruutu, mis lõikab silindri põhja piirjoonest kaare α. Leida selle lõike kaugus silindri teljest.

448. Läbi silindri, mille kõrgus on h, on pandud tasapind paralleelselt silindri teljega. Selle tasapinna kaugus silindri teljest on d. Lõiketasapind eraldab põhja piirjoonest kaare α. Leida lõike pindala.

449. Silindri kõrgus on h. Silindri pinnalaotusel on moodustaja ja pinnalaotuse diagonaali vaheline nurk α. Leida selle silindri ruumala ja külgpindala.

Koonus.

450. Koonuse põhja raadius on R ning koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk on α. Läbi koonuse tipu on pandud tasapind, mis moodustab koonuse kõrgusega nurga φ. Leida saadud lõike pindala. Uurida tulemust.

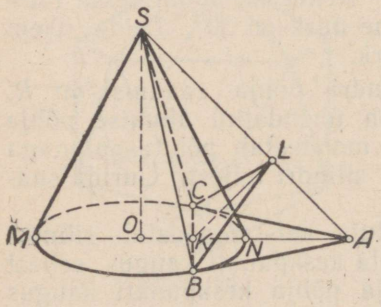
451. Koonus on paigutatud kahe paralleelse tasapinna vahele nii, et koonuse põhi asetseb ühel tasapinnal, tipp aga teisel tasapinnal. Koonuse telje ja moodustaja vaheline nurk on α. Läbi koonuse telje keskpunkti on pandud sirge, mis moodustab teljega nurga β ning lõikab koonuse külgpinda kahes punktis. Selle sirge lõik nende paralleeltasapindade vahel on a. Leida koonuse sisse jääva lõigu pikkus.

452. Koonuse külgpindala on kaks korda suurem põhja pindalast. Leida koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk.

453. Koonuse kahe moodustaja vaheline nurk on φ; läbi nende on pandud tasapind, mis moodustab koonuse põhjaga nurga α. Tekkiva lõike pindala on S. Leida koonuse kõrgus ($\varphi = 52°16'$; $\alpha = 33°10'$; $S = 618$ cm^2).

454. Koonuse kõrgus on H. Koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk on α. Läbi koonuse kõrguse on pandud tasapind risti kõrgusega nii, et koonuse pindala jaotub kaheks võrdseks osaks. Leida lõiketasapinna kaugus koonuse tipust.

455. Koonuse telglõike tipunurk on α. Leida koonuse külgpinnalaotuse kesknurk. Leida seesama võrdkülgse telglõikega koonuse puhul.



Joon. 28.

456. Läbi koonuse tipu on pandud tasapind, mis lõikab põhja piirjoonest kaare α ning moodustab seejuures koonuse põhjaga nurga β. Leida saadud lõike tipunurk.

457. Võrdkülgse telglõikega koonuse põhja tasapinnal on antud punkt (koonusest väljaspool), mille kaugus põhja piirjoonest on võrdne koonuse põhja raadiusega. Läbi selle punkti on pandud

koonuse kaks puutujatasapinda. Leida puutujatasapindade vaheline kahetahuline nurk (joon. 28).

458. Läbi koonuse tipu on pandud tasapind, mis jaotab koonuse külgpinna kaheks osaks nii, et nende külgpinnalaotuste kesknurgad on α ja β ($\alpha > \beta$). Leida lõike tipunurk.

459. Koonusekujulise liivahunniku nõlva kaldenurk $\varphi = 25°$. Leida liivahunniku ruumala, kui põhja äärjoone pikkus $c \approx 5{,}0$ m.

Tüvikoonus.

460. Läbi tüvikoonuse kahe moodustaja, mille vaheline nurk on β, on pandud tasapind, mis lõikab tüvikoonuse põhjasid mööda kõõle, mille pikkused on vastavalt m ja n ($m > n$). Kumbki kõõl toetub kaarele α. Leida tüvikoonuse külgpindala.

461. Tüvikoonuse põhjade raadiused on vastavalt R ja r. Läbi koonuse on pandud tasapind, mis moodustab põhjaga nurga β ja lõikab kummagi põhja piirjoonest kaare δ. Leida lõike pindala.

462. Tüvikoonuse kõrgus on h. Tüvikoonuse moodustaja ja alumise põhja vaheline nurk on α, kusjuures see moodustaja on risti sirglõiguga, mis ühendab tema ülemist otspunkti vastasasetseva moodustaja alumise otspunktiga. Leida külgpindala.

463. Tüvikoonuse alumise põhja pindala, ülemise põhja pindala ja külgpindala suhtuvad nagu $m : n : p$. Leida selle tüvikoonuse moodustaja ja alumise põhja vaheline nurk.

464. Tüvikoonuse põhjade pindalade suhe on 4, moodustaja pikkus on l ning see moodustab põhjaga nurga φ. Leida tüvikoonuse ruumala.

465. Tüvikoonuse telglõike diagonaalid on teineteisega risti, moodustaja pikkus on l ning moodustab suurema põhjaga nurga α. Leida tüvikoonuse pindala ja ruumala ($l = 12$; $\alpha = 70°$).

Kera ja tema osad.

466. Kera raadius on R. Läbi kera pinnal asetseva punkti on pandud kaks tasapinda, üks neist on kera puutujatasapinnaks, teine aga moodustab sellega nurga α. Leida lõike pindala.

467. On antud kera raadiusega R. Tasapind, mis läbib diameetri ja moodustab sellega nurga α, jaotab diameetri kaheks osaks, mis suhtuvad nii nagu 3 : 1. Missugusteks osadeks jaotab see tasapind kera pinna?

468. Kera segmendi kõrgus on h ja kaare pikkus telglõikel α. Leida segmendi kumera osa pindala.

469. On antud kera segment. Segmendi kõrguse keskpunktist on pandud läbi tasapind, mis on paralleelne segmendi põhjaga. Tekkiva lõike pindala on võrdne segmendi põhja pindalaga. Leida segmendi telglõike kaar.

470. Läbi kera sektori kõrguse keskpunkti on pandud tasapind risti selle kõrgusega. See tasapind jaotab sektori koonilise pinna kaheks võrdseks osaks. Leida sektori telglõike tipunurk.

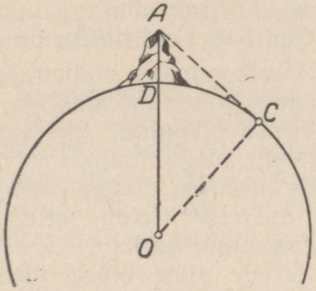
471. Kera pinnal on läbi antud punkti pandud kaks võrdset omavahel puutuvat ringjoont, mis määravad kaks tasapinda, mil-

lede vaheline nurk on α. Leida kera pinna see osa, mis asetseb nende tasapindade vahel, kui kera raadius on R.

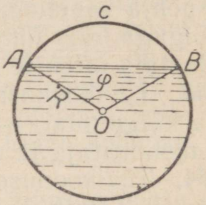
472. Kera pinnal on antud neli üksteisest võrdsel kaugusel asetsevat punkti. Leida nendest punktidest valitud mistahes kahte punkti tõmmatud raadiuste vaheline nurk.

473. 1) Maakera raadius on umbes 6370 km. Leida Vähja pöörjoone (või Kaljukitse pöörjoone) pikkus (geograafiline laius umbes 23°30′) ja põhja polaarjoone (või lõuna polaarjoone) pikkus (geograafiline laius umbes 66°30′).

2) Vaatleja, kes asetseb mäe tipus A (joon. 29), mõõdab vertikaalsuuna AD ja horisondile suunatud kiire AC vahelise nurga $DAC=\alpha$. Teades Maa raadiust r, arvutada nende andmete järgi mäe kõrgus AD.



Joon. 29.



Joon. 30.

474. Kerakujulise paagi sisemine raadius on R. See paak on teatud kõrguseni täidetud vedelikuga, mille erikaal on d. Kaar ACB (joon. 30) on $\varphi°$. Leida vedeliku kaal.

475. Gaasihoidla kujutab endast silindrilist anumat, mille ülemine osa on kaetud kera segmendiga. Silindri sisemine diameeter on 24 m ja sisemine kõrgus 6 m. Silindrit katva segmendi telglõike kaar on 74°. Leida gaasihoidla ruumala.

§ 21. Geomeetriliste kehade kombinatsioone.

Hulktahukate kombinatsioone.

476. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a, külgserva ja põhitahu vaheline nurk on aga α. Sellesse püramiidi on kujundatud kuup nii, et kuubi neli tippu asetsevad püramiidi apoteemidel. Leida kuubi serva pikkus.

477. Korrapärase nelinurkse püramiid põhiserv on a, põhi- ja külgtahu vaheline kahetahuline nurk on aga α. Sellesse püramiidi on kujundatud kuup nii, et kuubi ühe tahu tipud ühtivad püramiidi põhiservade keskpunktidega, vastastahk aga lõikab püramiidi külgtahke. Leida väljaspool püramiidi oleva kuubi osa ruumala.

478. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on a, põhitahu ja külgtahu vaheline kahetahuline nurk on aga α. See püramiid on lõigatud põhjaga paralleelse tasapinnaga nii, et tekkiva tüvipüramiidi külgpindala on võrdne lõike pindalaga. Leida lõiketasapinna kaugus püramiidi tipust.

479. Korrapärasesse kolmnurksesse püramiidi on kujundatud teine püramiid nii, et selle tipp asetseb esimese püramiidi põhja keskpunktis ja põhja tipud esimese püramiidi külgservadel. Esimese püramiidi põhiserva pikkus on a, külgserva ja põhitasapinna vaheline nurk aga α. Esimese püramiidi sisse kujundatud püramiidi külgservade ja põhitahu vaheline nurk on β. Leida sissekujundatud püramiidi ruumala.

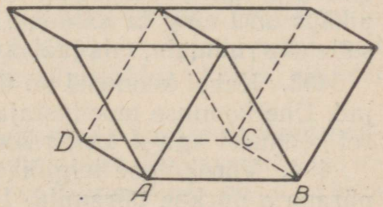
480. Kahel korrapärasel nelinurksel püramiidil on ühine alus. Püramiidid on paigutatud nii, et üks püramiid asetseb teise sees. Suurema püramiidi külgserva ja põhitahu vaheline nurk on α, väiksema püramiidi külgserva ja põhitahu vaheline nurk aga β. Püramiidide ühise põhja ümber joonestatud ringjoone raadius on R. Leida nende püramiidide külgpindade vahele jääva ruumiosa ruumala. Uurida saadud valemit.

481. Kahel korrapärasel kolmnurksel püramiidil on ühine kõrgus, kummagi püramiidi tipp asetseb teise püramiidi põhja keskpunktis. Ühe püramiidi külgserv, mille pikkus on l, moodustab kõrgusega nurga α, teise püramiidi külgserv moodustab aga kõrgusega nurga β. Leida nende püramiidide ühise osa ruumala.

482. On antud korrapärane nelinurkne tüvipüramiid, mille suurema (alumise) põhja serv on a ja külgserv on samuti a. Külgserva ning alumise põhja vaheline nurk on α. Tüvipüramiidi alumise põhja keskpunkt on uue püramiidi tipuks, kusjuures selle uue püramiidi põhi ühtib antud tüvipüramiidi ülemise põhjaga. Leida nende püramiidide ruumalade vahe.

483. Püramiidi põhjaks on ruut, mille külje pikkus on a. Püramiidi kaks külgtahku on põhjaga risti, kõige pikem külgserv moodustab aga põhjaga nurga β. Püramiidi sisse on kujundatud risttahukas nii, et selle risttahuka ülemise tahu tipud asetsevad püramiidi külgservadel, alumise tahu tipud aga püramiidi põhjal. Leida risttahuka ruumala, kui risttahuka diagonaali ja põhitahu vaheline nurk on α ($a=45{,}3$ cm; $\alpha=41°30'$; $\beta=43°54'$).

484. Kahe rööptahuka ühiseks alumiseks põhjaks on ruut, mille külje pikkus on a. Rööptahukate ülemised põhjad on teineteise pikendusteks (joon. 31). Kummagi rööptahuka kaks vastasasetsevat külgtahku moodustavad põhitahuga ühe ja sama nurga α, teised kaks külgtahku on aga põhitahuga risti. Leida nende rööptahukate ühise osa ruumala.



Joon. 31.

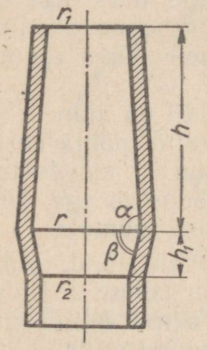
Silindrite, koonuste ja hulktahukate kombinatsioone.

485. Korrapärase kolmnurkse püramiidi külgserv on a ning moodustab põhitahuga nurga α. Sellesse püramiidi on kujundatud võrdkülgse telglõikega silinder nii, et silindri alumine põhi asetseb püramiidi põhitahul. Leida silindri kõrgus.

486. Koonusesse, mille moodustaja on l ja mis moodustab koonuse põhitahuga nurga α, on kujundatud kuup. Leida kuubi serv.

487. On antud koonuse põhja raadius R ja moodustaja ning põhja vaheline nurk α. Koonusesse on kujundatud võrdsete servadega kolmnurkne püstprisma nii, et selle püstprisma alumine põhi asetseb koonuse põhjal. Leida prisma servade pikkus.

488. Ring raadiusega $R=5{,}38$ m on ühiseks põhjaks kahele koonusele, mis asetsevad ühel ja samal pool ringi tasapinda. Ühe koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk $\alpha=74°36'$, teise koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk $\beta=60°12'$ $(\alpha>\beta)$. Leida nende koonuste külgpindade vahele jääva ruumiosa ruumala.



Joon. 32.

489. Joonisel 32 on esitatud kõrgahju läbilõige. Tema sisemus koosneb kahest tüvikoonusest. Ahju ülemise ja alumise ava raadiused on vastavalt r_1 ja r_2. Moodustajate kaldenurgad ühise põhja suhtes on vastavalt α ja β. Ahju ruumala on V. Leida ühise põhja raadius ja koonuste kõrgused.

490. Tüvikoonusesse on kujundatud koonus, mille põhi ühtib tüvikoonuse väiksema põhjaga ja mille kõrgus on võrdne tüvikoonuse kõrgusega ning moodustajad on vastavalt paralleelsed tüvikoonuse moodustajatega. Leida koonust külgpindade ja tüvikoonuse põhjaga piiratud ruumiosa ruumala, kui tüvikoonuse moodustaja on a ja tema moodustajate vaheline suurim nurk on α.

491. Koonuse moodustaja on l ning ta kaldenurk põhja suhtes on α. Leida selle koonuse sisse kujundatud võrdkülgse telglõikega silindri kõrgus, kui silindri alumine põhi asetseb koonuse põhjal.

492. Koonusesse on kujundatud silinder, mille telglõige diagonaalid on paralleelsed koonuse moodustajatega. Moodustaja pikkus on l ning ta kaldenurk põhja suhtes on α. Leida koonuse selle osa ruumala, mis jääb koonuse ja silindri külgpindade vahele.

493. Kahel koonusel on ühine kõrgus H ning paralleelsed põhjad. Ühe koonuse moodustaja ja põhitahu vaheline nurk on α, teisel koonusel aga β. Leida koonuste lõikejoone pikkus.

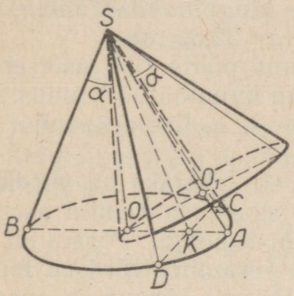
494. Võrdkülgse telglõikega koonusesse on kujundatud korrapärane n-nurkne püramiid. Leida püramiidi külgtahu ja põhitahu vaheline kahetahuline nurk.

495. Koonusesse on kujundatud korrapärane n-nurkne püramiid, mille külgtahu tipunurk on α. Leida koonuse külgpindala, kui koonuse põhja raadius on r.

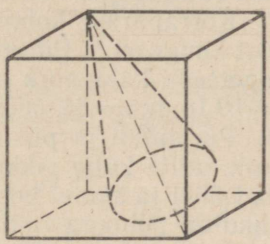
496.* Kahel koonusel on ühine tipp, kusjuures kummagi kõrgus asetseb teise külgpinnal (joon. 33). Leida koonuste lõikejoonte vaheline nurk, kui mõlemas koonuses moodustaja ja kõrguse vaheline nurk on α.

497. Koonuse ümber on kujundatud kolmnurkne püramiid. Koonuse külgpind on puutejoontega jaotatud kolme ossa võrdeliselt arvudega 5, 6 ja 7. Millises suhtes jaotavad samad jooned püramiidi külgpindala?

498. Kahel koonusel on ühine alus. Ühisel telglõikel on ühe koonuse moodustaja risti teise koonuse vastasmoodustajaga. Ühe koonuse ruumala on teise koonuse ruumalast kaks korda väiksem. Leida suurema koonuse moodustaja ja põhja vaheline kaldenurk.



Joon. 33.



Joon. 34.

499.* Kuupi, mille serv on a, on kujundatud koonus nii, et koonuse tipp ühtib kuubi ühe tipuga ja põhja piirjoon puudutab kuubi kolme tahku, mis lõikuvad eelpoolnimetatud tipu vastastipus (joon. 34). Koonuse moodustaja ja telje vaheline nurk on α. Leida koonuse põhja raadius.

500. Koonuse põhja raadius on r ja moodustaja kaldenurk põhja suhtes φ. Koonuse ümber on kujundatud püramiid, mille põhjaks on täisnurkne kolmnurk α. Leida püramiidi ruumala ja külgpindala.

501.* Korrapärase nelinurkse püramiidi külgserv on b ning ta moodustab põhjaga nurga α. Sellesse püramiidi on kujundatud võrdkülgse telglõikega silinder nii, et silindri üks moodustaja asetseb püramiidi põhja diagonaalil ja silindri põhjade piirjooned puudutavad kumbki püramiidi kahte lähistahku. Leida silindri põhja raadius.

502. Kahel koonusel on ühine kõrgus h ja kontsentrilised põhjad. Moodustajate ja telje vahel tekkivate nurkade vahe on β. Sisemise koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk on α. Leida koonuste külgpindade vahele jääva ruumiosa ruumala.

503. Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi ümber on kujundatud tüvikoonus. Tüvipüramiidi külgtahu teravnurk on α ja sellesse joonestatud ringjoone raadius r. Leida tüvikoonuse külgpindala.

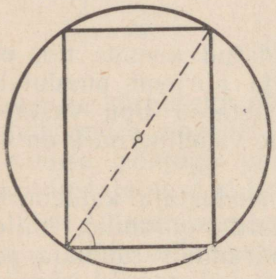
504. Koonuse külgpindala on m ning moodustaja ja põhja vaheline kaldenurk φ. Koonusesse on kujundatud kolmnurkne püramiid, mille põhjaks on täisnurkne kolmnurk teravnurgaga α. Leida püramiidi ruumala.

505. Silindrisse on kujundatud risttahukas, mille suurem põhiserv on a. Risttahuka diagonaali ja suurema külgtahu vaheline nurk on β ning diagonaali ja põhitahu vaheline nurk on α. Leida silindri külgpindala.

506. Ühisele põhjale on konstrueeritud kaks koonust nii, et üks neist asetseb teise sees, kusjuures koonuste tippude vaheline kaugus on a. Suurema koonuse telglõike tipunurk on α, väiksemal koonusel aga β. Leida nende koonuste külgpindade vahele jääva ruumiosa ruumala ($\alpha = 53°17'$; $\beta = 90°$; $a = 32{,}52$ m).

507. Korrapärase kolmnurkse prisma põhja tipp asetseb vastastahust kaugusel b. Püramiidi sisse on kujundatud koonus. Püramiidi apoteemi kaldenurk põhja suhtes on α. Leida koonuse pindala ($b = 10{,}16$ m; $\alpha = 61°16'$).

508. Püramiidi ja püstprisma ühiseks põhjaks on võrdkülgne kolmnurk, mille külje pikkus on a. Prisma ja püramiid asetsevad mõlemad ühel ja samal pool nende ühist põhja. Püramiidi kaks külgtahku on põhjaga risti, kusjuures püramiidi võrdsed külgservad moodustavad omavahel nurga α. Prisma kõrgus on püramiidi kõrgusest kaks korda väiksem. Leida prisma ruumala ($a = 3{,}52$ m; $\alpha = 41°20'$).



Joon. 35.

Kooniliste pindade töötlemisel treipingil on suur tähtsus koonilisuse mõistel. *Koonilisuseks nimetatakse koonuse põhja diameetri ja koonuse kõrguse suhet.*

Lahendada järgmised ülesanded:

509. Leida koonuse telglõike tipunurk, kui koonilisus on $\frac{1}{3}$.

510. Silindrilisest vasetükist tuleb teha koonusekujuline keha, mille moodustaja pikkus on 125 mm ja koonilisus 1 : 20. Leida valmistatava koonuse kaal (vase erikaal $d \approx 8{,}9$).

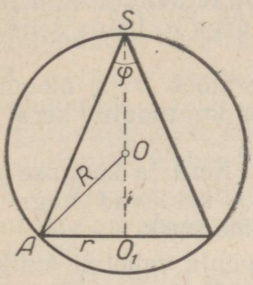
Geomeetriliste kehade kombinatsioone keraga.

511. Joonisel 35 on esitatud silindri ja selle ümber kujundatud kera telglõige. Kera raadius on R ning ristküliku diagonaal moodustab ristküliku alusega nurga α. Tõestada, et $H = 2R \sin \alpha$ ja $r = R \cos \alpha$, kus H on silindri kõrgus ja r silindri põhja raadius.

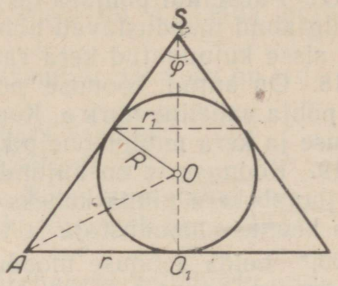
Vaadelda ka juhtumit, kus kera on kujundatud silindri sisse.

512. 1) Joonisel 36 on esitatud koonuse ja selle ümber kujundatud kera telglõige. Kera raadius on R ning koonuse telglõike tipunurk φ. Tõestada, et $AOO_1=\varphi$; $SO_1=H=2R\cos^2\frac{\varphi}{2}$;

$l=2R\cos\frac{\varphi}{2}$; $H(2R-H)=r^2$; $r=R\sin\varphi=l\sin\frac{\varphi}{2}=H\tan\frac{\varphi}{2}$.



Joon. 36.



Joon. 37.

2) Joonisel 37 on esitatud koonuse ja selle sisse kujundatud kera telglõige. Kera raadius on R ja koonuse telglõike tipunurk φ. Tõestada, et

$$\angle OAO_1=45^\circ-\frac{\varphi}{4};\quad SO_1=H=\frac{2R\cos^2\frac{\pi-\varphi}{4}}{\sin\frac{\varphi}{2}}=r\cot\frac{\varphi}{2};$$

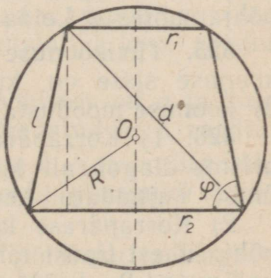
$r_1=R\cos\frac{\varphi}{2}$, kus r_1 on kera ja koonuse puuteringjoone raadius;

$$r=R\cot\frac{\pi-\varphi}{4};\quad l=r+R\cot\frac{\varphi}{2}.$$

513. Joonisel 38 on esitatud tüvikoonuse ja selle ümber kujundatud kera telglõige. Kera raadius on R, koonuse moodustaja l ning moodustaja kaldenurk alumise põhja suhtes φ. Tõestada, et

$d=2R\sin\varphi$; $H=l\sin\varphi$; $(r_2+r_1)^2=$
$=(\sin^2\varphi\ (4R^2-l^2)$; $r_2-r_1=l\cos\varphi$.

(l on moodustaja, H kõrgus, d telglõike diagonaal ning r_1 ja r_2 koonuse põhjade raadiused.)



Joon. 38.

514. 1) Tüvikoonusesse on kujundatud kera, mille raadius on R. Koonuse moodustaja kaldenurk alumise põhja suhtes on α. Leida tüvikoonuse põhjade raadiused ja moodustaja.

2) Kerasse raadiusega R on kujundatud korrapärane n-nurkne prisma. Prisma põhiserv on a. Leida prisma kõrgus, kui $n=3;\ 4;\ 6$.

515. Korrapärane n-nurkse püramiidi põhiserv on a ning põhitahu ja külgtahu vaheline kahetahuline nurk φ. Leida püramiidi sisse kujundatud kera raadius.

516. Korrapärase n-nurkse püramiidi ümber on kujundatud kera. Püramiidi põhiserv on a ning külgserva ja põhitahu vaheline nurk α. Leida kera raadius ($n=8$; $a=3{,}5$ m; $\alpha=58°$).

517. Püramiidi põhjaks on romb, mille teravnurk on α ja külg a. Külgtahud moodustavad põhitahuga nurga α. Leida selle püramiidi sisse kujundatud kera raadius.

518. On antud koonuse põhja ümbermõõt c ja moodustaja ning põhja vaheline nurk α. Koonusesse on kujundatud kera. Leida koonuse ja kera puutejoone pikkus.

519. Koonusesse on kujundatud kera. Kera ja koonuse puutejoon jaotab kera pinna kaheks osaks, mis suhtuvad nagu $m : n$. Leida koonuse moodustaja ja telje vaheline nurk.

520.* Leida koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk, kui on teada, et koonuse ruumala on m korda suurem koonusesse kujundatud kera ruumalast.

(Leida m väikseim väärtus; arvutada nurk, kui $m=2\frac{1}{4}$.)

521. Lõige, mis on risti koonuse kõrgusega, jaotab koonuse kaheks ruumvõrdseks osaks ning läbib koonuse ümber kujundatud kera keskpunkti. Leida koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk.

522.* Koonusesse on kujundatud kaks kera nii, et puudutavad teineteist ja koonust. Kerade raadiuste suhe on $m : n$ ($m>n$). Leida koonuse telglõike tipunurk.

523. Koonusesse on kujundatud neli võrdset kera nii, et igaüks neist puudutab kolme ülejäänut (ja muidugi ka koonust). Leida koonuse telglõike tipunurk.

524. Tüvikoonuse ümber on kujundatud kera. Tüvikoonuse põhjade raadiused on R ja r ning moodustaja kaldenurk alumise põhja suhtes α. Leida kera raadius ($R>r$).

525. Tüvikoonuse põhjade raadiused on r_1 ja r_2 ($r_1>r_2$). Tüvikoonuse sisse on kujundatud kera. Leida: 1) kera pindala; 2) koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk.

526. 1) Korrapärase nelinurkse prisma kõrgus on h ja prisma diagonaali kaldenurk külgtahu suhtes α. Leida prisma ümber kujundatud kera raadius.

2) Korrapärase kolmnurkse prisma põhiserv on a. Ülemise põhja ühest tipust lähtuva kahe külgtahu diagonaalid moodustavad nurga 2α. Leida prisma ümber kujundatud kera raadius.

527. Kera ümber on kujundatud nelinurkne püstprisma. Prisma põhjaks on romb teravnurgaga α. Leida prisma ruumala, kui kera ruumala on V.

528. Kerasse, mille raadius on R, on kujundatud püstprisma. Prisma põhjaks on täisnurkne kolmnurk teravnurgaga α. Prisma suurim külgtahk on ruut. Leida prisma ruumala.

529. Kera ümber on kujundatud prisma, mille põhjaks on täisnurkne kolmnurk teravnurgaga α. Selles kolmnurgas on täisnurga tipust hüpotenuusile tõmmatud ristlõik h. Leida prisma ruumala.

530. Korrapärase nelinurkse püramiidi külgserv b moodustab põhjaga nurga α. Leida püramiidi ümber kujundatud kera raadius.

531. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a. Põhitahu ja külgtahu vaheline kahetahuline nurk on α. Leida püramiidi sisse kujundatud kera raadius.

532. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a ja külgtahu tipunurk α. Leida:

1) püramiidi sisse kujundatud kera raadius;
2) püramiidi ümber kujundatud kera raadius.

533. Kerasse, mille raadius on R, on kujundatud korrapärane kolmnurkne püramiid, mille külgtahu tipunurk on α. Leida püramiidi kõrgus.

534. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille alusnurk on α ja alus a. Püramiidi kõik külgtahud moodustavad põhitahuga nurga β. Leida selle püramiidi sisse kujundatud kera raadius.

535. 1) Kera ümber on kujundatud nelinurkne püramiid. Püramiidi põhjaks on romb teravnurgaga α. Kõik püramiidi külgtahud moodustavad põhitahuga nurga β. Leida püramiidi pindala ja ruumala, kui kera raadius on R.

2) Kerasse, mille raadius on R, on kujundatud korrapärane nelinurkne püramiid, mille külgtahkude vaheline kahetahuline nurk on 2α. Leida püramiidi põhiserv.

536.* Korrapärase nelinurkse püramiidi sisse ja ümber kujundatud kerade keskpunktid ühtivad. Leida selle püramiidi põhitahu ja külgtahu vaheline kahetahuline nurk.

537. Püramiidi põhjaks on ristkülik, mille diagonaalide vaheline nurk on α. Püramiidi külgservad moodustavad põhjaga võrdsed nurgad φ. Selle püramiidi ümber kujundatud kera raadius on R. Leida püramiidi ruumala.

538.* Korrapärase n-nurkse püramiidi põhiserv on a ja külgtahu tipunurk α. Leida püramiidi sisse kujundatud kera raadius.

539. Kolmnurkse püramiidi põhiservad on a, b ja c ning külgservad moodustavad põhjaga nurga α. Leida püramiidi ümber kujundatud kera raadius.

540. Korrapärase kuusnurkse püramiidi põhitahu ja külgtahu vaheline kahetahuline nurk on α ning püramiidi sisse kujundatud kera raadius on R. Püramiidi on lõigatud tasapinnaga, mis on paralleelne püramiidi põhjaga ning puudutab püramiidi sisse kujundatud kera. Leida saadud tüvipüramiidi külgpindala.

541. Kera ümber on kujundatud korrapärane nelinurkne tüvipüramiid. Selle kaheksatahuka ruumala, mille tippudeks on tüvipüramiidi ja kera puutepunktid, on neli korda väiksem kera ruum-

alast. Leida tüvipüramiidi külgtahu ja põhitahu vaheline kahetahuline nurk.

542.* Korrapärase nelinurkse püramiidi külgtahu tipunurk on α. Püramiidi kõrgus h on ühtlasi kera diameetriks. Leida nende kehade lõikejoone pikkus.

543. Koonusesse on kujundatud kera. Kera puutujatasapind, mis on paralleelne koonuse põhjaga, jaotab koonuse kaheks ruumvõrdseks osaks. Leida koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk.

544.* Kera ümber on kujundatud tüvikoonus, mille moodustaja ja suurema põhja vaheline nurk on α. Leida kera ja tüvikoonuse külgpinna puutejoone pikkus, kui kera raadius on R.

545. Tüvikoonusesse on kujundatud kera, mille raadius on R. Kera keskpunktist paistab tüvikoonuse suurema põhja raadius nurga α all. Leida tüvikoonuse ruumala.

546. 1) Kerasse, mille raadius on R, on kujundatud koonus. Koonuse moodustaja ja kõrguse vaheline nurk on α. Leida koonuse ruumala.

2) Koonuse kõrgus on h ja moodustaja kaldenurk põhja suhtes φ. Leida koonuse sisse kujundatud kera pindala.

547. Koonusesse on kujundatud kera, mille raadius on R. Kera keskpunktist paistab koonuse moodustaja nurga α all. Leida koonuse ruumala. Uurida saadud valemit.

548. Poolkerasse, mille raadius on R, on kujundatud tüvikoonus nii, et tüvikoonuse suurem põhi ühtib poolkera põhjaga ja moodustaja ning suurema põhja vaheline nurk on α. Leida koonuse pindala.

549.* Kera puudutab koonuse külgpinda mööda koonuse põhja piirjoont, mis jaotab kera pinna kaheks osaks nii, et üks osa on teisest n korda suurem. Leida koonuse moodustaja kaldenurk põhja suhtes. (Koonuse tipp asetseb kera pinnal.)

550. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on H. Püramiidi ümber on kujundatud kera. Kera keskpunktist püramiidi külgtahule tõmmatud ristsirge moodustab kõrgusega nurga α. Leida kera ruumala.

§ 22. Pöördkehad.

551. Kolmnurk, mille külg $a=6{,}5$ m ja selle külje lähisnurgad $B=97°$ ja $C=13°$, pöörleb ümber antud külje. Arvutada tekkiva pöördkeha pindala ja ruumala.

552. Leida keha ruumala, mis tekib kolmnurga ABC pöörlemisel ümber sirge, mis läbib tipu A ja on paralleelne küljega BC, teades, et $BC=a=23{,}54$ m, külje AB projektsioon pöörlemisteljel $b'=7{,}33$ m ning nurk AB ja pöörlemistelje vahel $\alpha=18°36'$.

553. Võrdkülgne kolmnurk, mille külg on a, pöörleb ümber telje, mis asetseb väljaspool kolmnurka, läbib kolmnurga ühe tipu ning moodustab küljega nurga α. Leida pöördkeha pindala.

554. Võrdhaarne kolmnurk, mille haar on b ning tipunurk α, pöörleb ümber haara. Leida pöördkeha pindala ja ruumala.

555. Romb, mille külg on a ning teravnurk α, pöörleb ümber telje, mis läbib rombi teravnurga tipu ning on risti ühe küljega. Leida pöördkeha pindala ja ruumala.

556. Kolmnurgas on antud küljed b ja c ning nendevaheline nurk α. See kolmnurk pöörleb ümber telje, mis läbib nurga α tipu ning moodustab külgedega b ja c võrdse nurga. Leida pöördkeha ruumala.

557. Kolmnurgas on antud külg a ning selle külje lähisnurgad α ja $(90°+\alpha)$. See kolmnurk pöörleb ümber oma kõrguse. Leida pöördkeha ruumala.

558. Kaks kolmnurka — võrdhaarne, tipuga $\alpha=54°16'$, ja võrdkülgne — asetsevad ühel ja samal tasapinnal ning omavad ühise aluse $a=25{,}34$ cm. Need kolmnurgad pöörlevad ümber telje, mis läbib kolmnurkade ühe ühise tipu ja on paralleelne võrdhaarse kolmnurga kõrgusega. Leida pöördkeha ruumala ja pindala.

559. Ristkülik pöörleb ümber telje, mis läbib ühte tema tippu ning on risti diagonaaliga d. Diagonaal moodustab ristküliku küljega nurga α. Leida pöördkeha ruumala ja pindala ($d=34{,}06$ cm; $\alpha=56°14'$).

560. Täisnurkse kolmnurga ümbermõõt $2p=27{,}4$ cm ja üks teravnurk $\alpha=41°10'$. See kolmnurk pöörleb ümber hüpotenuusi. Leida pöördkeha ruumala.

561. On antud ringjoon raadiusega R. Ringjoone ümber on joonistatud täisnurkne trapets, mille teravnurk on α. Trapets pöörleb ümber oma väiksema haara. Leida pöördkeha pindala.

§ 23. Kordamisülesandeid.

562. 1) Tõestada, et murd $\frac{\cos\alpha+\cot\alpha}{\sin\alpha+\tan\alpha}$ on positiivne α mistahes lubatavate väärtuste korral.

2) Tõestada, et

$$(\cot 590°+\tan 230°)\left(\frac{\cos 670°}{\sin 490°}+\cos 770°\cdot\sin 670°\right)=\tan^2 40°.$$

563. 1) Tõestada, et

$$\sin\frac{3\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{5}=0.$$

2) Tõestada, et

$$\sin 1150°+\cos 1460°+\cos 1060°-\sin 650°-\cos 880°=5\sin 70°.$$

564. Tõestada, et

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha.$$

565. 1) Milliste a väärtuste puhul on võrrandil $\sin x = \frac{2a-3}{4-a}$ lahend?

2) Seesama võrrandi $\cos x = \frac{5a-2}{2-3a}$ kohta.

566. Teisendada summaks:
1) $4 \sin 2^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \cos 6^\circ$;
2) $8 \sin 11^\circ \cdot \sin 21^\circ \cdot \sin 31^\circ \cdot \cos 41^\circ$;
3) $8 \sin 5^\circ \cdot \sin 10^\circ \cdot \cos 5^\circ \cdot \cos 10^\circ$;
4) $4 \sin 12^\circ \cdot \cos 16^\circ \cdot \cos 20^\circ$.

567. Tõestada, et
1) $\sin 70^\circ - \cos 80^\circ = \sin 50^\circ$;
2) $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = \sin 80^\circ$;
3) $\tan 6^\circ - \sin 6^\circ = 2 \tan 6^\circ \cdot \sin^2 3^\circ$;
4) $2 \sin 25^\circ \cdot \cos 15^\circ - \sin 10^\circ = \cos 50^\circ$;
5) $\sin 10^\circ \cdot \sin 3^\circ + \sin 5^\circ \cdot \sin 2^\circ = \sin 5^\circ \cdot \sin 8^\circ$;
6) $\sqrt{1+2 \sin \alpha \cos \alpha} = |\sin \alpha + \cos \alpha|$;
7) $\frac{1}{\sqrt{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2}} = \frac{1}{2} |\sin 2\alpha|$.

568. Teisendada korrutiseks:
1) $1 - \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$; 2) $\sin 80^\circ + \sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 20^\circ$.

569. Lahendada järgmised võrrandid:
1) $8^{\tan x} = 4^{\tan \frac{x}{2}}$; 2) $3^{\log \tan x} + 3^{-\log \tan x} = 2$.

570. Elimineerida x järgmistest võrrandisüsteemidest:
1) $\begin{cases} a \cot x = m \\ b \sin 2x = n \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x - \cos x = m \\ \sin^2 x - \cos^2 x = n \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sin x + \cos x = a \\ \sin 2x = b \end{cases}$

571. Paigutada kasvavasse järjekorda:

$\sin 380^\circ$; $\sin \frac{\pi}{9}$; $\sin 0{,}3491$.

572. 1) Arvutada:
$\operatorname{arc} \tan 1{,}1 + \operatorname{arc} \sin 0{,}7 + \operatorname{arc} \cos 0{,}8$.
2) Arvutada ligikaudselt (tabeleid kasutamata) $\tan 89^\circ$, 427.

573. 1) Tõestada, et nurga α siinuse logaritm on võrdne selle nurga tangensi ja koosinuse logaritmide summaga $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$.

2) Tõestada, et korrapärase n-nurkse hulknurga sisenurga siinus on võrdne selle hulknurga kesknurga siinusega.

574. Lahendada võrrandid:
1) $\sin 2x = \tan x$; 2) $\sin x = \tan 2x$;
3) $\cos (x+10^\circ) \cdot \cos (x-50^\circ) = \frac{1}{2}$.

575. Tõestada samasused:

1) $\cos 25^\circ = \frac{\cos 40^\circ}{2\cos 65^\circ}$;

2) $\tan 30^\circ + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 60^\circ = \frac{4\cos 20^\circ}{\sin 60^\circ}$;

3) $\frac{\sin 26^\circ}{\sin 43^\circ \cdot \sin 17^\circ} + \frac{\sin 15^\circ}{\sin 17^\circ \cdot \sin 2^\circ} = \frac{\sin 41^\circ}{\sin 43^\circ \cdot \sin 2^\circ}$;

4) $\frac{\tan 2\alpha \cdot \tan \alpha}{\tan 2\alpha - \tan \alpha} = \sin 2\alpha$.

5) Kui A, B ja C moodustavad aritmeetilise progressiooni, siis $\sin A - \sin C = 2\sin(A-B) \cdot \cos B$.

576. Arvutada $\sin^3 x - \cos^3 x$, kui $\sin x - \cos x = m$.

577. Tõestada, et α mistahes väärtuste korral kehtivad järgmised võrratused:

1) $|\sin \alpha| + |\cos \alpha| \geqslant 1$; 2) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \leqslant \frac{1}{2}$;

3) $\sin \alpha + \cos \alpha \leqslant \sqrt{2}$.

578. Tõestada, et

1) $\cot \frac{\alpha}{2} \geqslant 1 + \cot \alpha$, kui $0 < \alpha < \pi$;

2) $(\tan \alpha + \cot \alpha)^2 \geqslant 4$.

Missugustel α väärtustel see seos ei kehti?

579.* Lahendada järgmised võrratused:

1) $\cos^2 x + 2\cos x > 0$; 2) $3\sin^2 x + 2\cos x + 4\cos^2 x > 0$;

3) $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x < 0$.

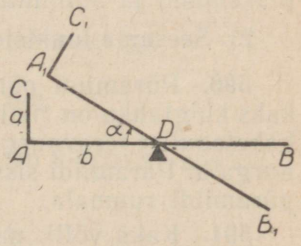
580.* 1) Tõestada, et teravnurga radiaanmõõt asetseb selle nurga siinuse ja tangensi vahel;

2) Tõestada, et teravnurga radiaanmõõt x rahuldab võrratuste süsteemi:

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1.$$

3) Tõestada, et $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, kus x on teravnurga radiaanmõõt.

581. Esimest liiki kangi AB otsa kinnitati temaga risti varras AC (joonis 39) pikkusega a cm. Kang pöördus nurga α võrra ja võttis asendi A_1B_1, kusjures $A_1D = AD = b$. Kui kõrgel AB-st asetseb nüüd varda AC ots C?



Joon. 39.

582. Kasutades ülesande 50 andmeid, lahendada järgmine ülesanne. Vända pikkus on r cm ja kepsu pikkus l cm. Punkt A, liikudes ühtlaselt ümber punkti O nurkkiirusega $\omega \frac{1}{\text{sek.}}$, jõuab oma liikumise lähtepunkti C. Leida nurk CBA t sekundit pärast liikumise algust.

583. Kahe väliselt puutuva ringjoone ühiste väliste puutujate puutepunktide vaheliste lõikude pikkused on a ning nad moodustavad ringide keskpunkte ühendava sirgega nurga α. Kummagi ringjoone puutepunktid ühendatakse kõõluga.

Leida nelinurga pindala, mis jääb puutujate ja kõõlude vahele.

584. Kahe paralleelse tasapinna vahel asetseb kaldlõik, mis moodustab tasapindadega nurga α, ja ristlõik, mille pikkus on $2a$. Leida nende lõikude keskpunktide vaheline kaugus, kui nende otspunktide vahelised kaugused kummalgi tasapinnal on b.

585.* 1) Rombi nürinurga tipust rombi külgedele tõmmatud ristlõikude aluspunktide vaheline kaugus on d. Nende ristsirgete vaheline nurk on α. Romb pöörleb ümber telje, mis läbib rombi teravnurga tipu ja on risti pikema diagonaaliga. Leida pöördkeha ruumala.

2) Mediaan, mille pikkus on a, jaotab täisnurkse kolmnurga teravnurga kaheks osaks nii, et suurem on α. Antud kolmnurk pöörleb ümber telje, mis läbib täisnurga tipu ja on paralleelne antud mediaaniga. Leida pöördkeha ruumala.

586. Kera ümber on kujundatud püströöptahukas, mille ruumala on m korda suurem kera ruumalast. Leida rööptahuka põhitahu nurgad.

587. Koonusesse kujundatud kera pindala on võrdne koonuse põhja pindalaga. Leida koonuse telglõike tipunurk.

588.* 1) On antud ringjoon raadiusega R. Kolmnurga tipp asetseb ringjoone keskpunktis, kusjuures kolmnurga alus on selle ringjoone kõõluks. Kui suur peab olema kolmnurga see nurk, mille tipp asetseb ringjoone keskpunktis, et kolmnurga pindala oleks maksimaalne?

2) Kõigist antud ringi sisse joonistatud võrdsetest nurkadest suurusega α leida selline nurk, mille haarade pikkuste summa on suurim.

589. 1) $y=\sin x-\cos x$. Leida: määramispiirkond, periood, maksimum ja miinimum. Konstrueerida selle funktsiooni graafik.

2) Seesama funktsiooni $y=\sin x \sin(\alpha+x)$ kohta, kus $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

590. Püramiidi põhjaks on täisnurkne kolmnurk. Püramiidi kaks külgtahku on risti põhitahuga ning moodustavad teineteisega kahetahulise teravnurga α, kolmas külgtahk moodustab põhitahuga nurga α. Püramiidi sisse on kujundatud kera raadiusega R. Leida püramiidi ruumala.

591. Kaks võlli, mis moodustavad teineteisega täisnurga, on ühendatud koonushammasratastega. Ühe hammasratta diameeter on 48 cm, teisel 32 cm. Leida hammaste kaldenurgad x ja y võllide telgede suhtes (joon. 40).

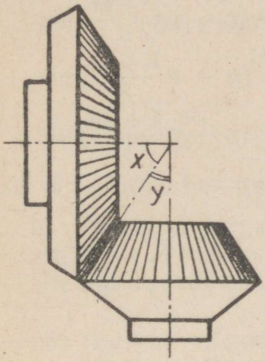
Juhis. Tulemuse õigsuse kontrollimiseks kasutada seost $x+y=90°$.

592. 1) Joonisel 41 on esitatud nuudi ristlõige vastavad mõõtmed. Leida nurk α.

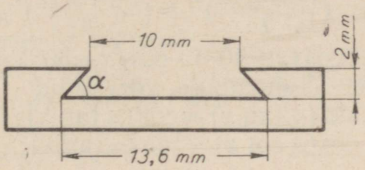
2) Joonisel 42 on kujutatud vintlõige ja antud ka vastavad mõõtmed. Leida sellise vindi lõikamiseks vajaliku tera teritusnurk α.

593. 1) Materiaalsele punktile mõjuvad jõud P ja Q. Leida nende jõudude vaheline nurk, kui on teada, et selle nurga suurendamisel kaks korda resultant ei muutu.

2) Nurkkangi BAC (joon. 43) õlgade $AB=p$ ja $AC=l$ otstes mõjuvad tasakaalu korral jõud R ja Q. Leida nurgad, mille

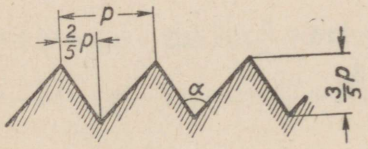


Joon. 40.

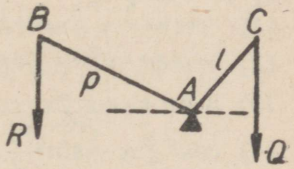


Joon. 41.

moodustavad kangi õlad horisontaaltasapinnaga, kui on teada, et õlg AC moodustab kaks korda suurema nurga kui õlg AB. (Kangi kaalu pole arvestatud).



Joon. 42.



Joon. 43.

594. Lahendada võrrandid:

1) $3\tan 2x+\cot 2x=3{,}5$;
2) $\sin^4 x+\cos^4 x=0{,}625$;
3) $2\cos^2 x-3\sin x\cdot\cos x+5\sin^2 x=3$;
4) $8\cos^2 x+25\sin x\cdot\cos x-69\sin^2 x+1=0$;
5) $6\sin^2 x+3\sin x\cdot\cos x-2\cos^2 x=3$;
6) $3\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x=2$;
7) $\sin x+\cos x=\cos 2x$;
8) $\sin 3x=4\sin x\cdot\cos 2x$;
9) $\tan^3 x+\tan^2 x-3\tan x=3$;
10) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$;
11) $\cos x+\cos 2x-\cos 3x=1$;
12) $\sin x+\sin 1=\sin(x+1)$;
13) $1-\tan x=\cos 2x$;
14) $\cos 15x=\sin 5x$;
15) $\tan\frac{3x}{2}+\cot\frac{5x}{2}=0$.

595. Lahendada võrrandid:

1) $\tan 3x = \sin 6x$; 2) $\sin 3x = \tan 6x$;
3) $\sin 3x \cdot \sin x = -1$; 4) $\sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 9x \cdot \cos 7x$;
5) $\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x$;
6) $\sin 6x \cdot \cos 2x = \sin 5x \cdot \cos 3x - \sin 2x$;
7) $4 \sin x + 3 \cos x = 2$;
8) $3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 3$; 9) $4 \sin x + 3 \cos x = 5$;
10) $5(\sin x + \cos x)^2 + 7 = 12(\sin x + \cos x)$;
11) $\sin 2x \cdot \tan x - \tan x - \sin 2x + 1 = 0$;
12) $\sqrt{2} \cos 13x = \cos 5x + \sin 5x$;
13) $\tan(2x+1) \cdot \cot(x+1) = 1$;
14) $\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} \sin^2 2x$;
15) $\cos(x+10°) \cdot \cos(x-50°) = 0{,}5$.

596.* Lahendada võrrandid:

1) $\sin(\pi \tan x) = \cos(\pi \tan x)$;
2) $\cot(\pi \cot x) = \tan(\pi \tan x)$;
3) $\frac{\sin x}{\sin 2x} = 0$; 4) $\tan x \cdot \cot 2x - \tan 2x \cdot \cot x = 0$;
5) $\sin^4 x + \cos^2 2x = 2$; 6) $\sin(7\pi - x) = \cos(4x + 9\pi)$;
7) $\sin(1+3x) + \cos 3x = 0$;
8) $\tan(x+20°) + \tan(70° - x) = 2$;
9) $4^{\sin x} = \sqrt[\cos x]{2}$; 10) $\sqrt{2} \cdot 2^{\cos x} = 1$;
11) $3^{\log \tan x} + 3^{\log \cot x} = 2$.
12) $8^{1 - \sin x + \sin^2 x - \sin^3 x + \dots} = 4$;
13) $8 \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = \sqrt{3}$;
14) $\cos^4 \frac{3}{2} x - \sin^4 \frac{3}{2} x = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
15) $4^{\cos(a+x)} = \sqrt[\cos x]{2^{\cos a}}$.

597. Mõnede matemaatikute ülesandeid.

1) Klaudios Ptolemaios (II saj. m. a. j.).

Tõestada samasus:

$$\frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}.$$

2) Ticho de Brache (1546—1601).

Tõestada, et $\tan A = \frac{a \sin B}{a \cos B - c}$, kui A, B, C on kolmnurga nurgad; a, b, c tema küljed ja $90° < A < 180°$.

3) Francois Viëta (1540—1603).

Tõestada samasus: $\sin(60° + \alpha) = \sin\alpha + \sin(60° - \alpha)$.

4) Leonhard Euler (1707—1783).

a) Tõestada matemaatilise induktsiooni meetodi abil järgmiste võrduste õigsus:

$$\sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi+\alpha\right)=\cos\alpha; \qquad \cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi+\alpha\right)=-\sin\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{4n+2}{2}\pi+\alpha\right)=-\sin\alpha; \qquad \cos\left(\frac{4n+2}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha; \qquad \cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{4n+4}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\alpha; \qquad \cos\left(\frac{4n+4}{2}\pi+\alpha\right)=\cos\alpha,$$

kus n on mistahes naturaalarv.

b) Tõestada järgmiste samasuste õigsus:

$\sin(2y+z)=2\cos y\cdot\sin(y+z)-\sin z;$
$\sin(3y+z)=2\cos y\cdot\sin(2y+z)-\sin(y+z);$
. . . . . .
$\cos(2y+z)=2\cos y\cdot\cos(z+y)-\cos z;$
$\cos(3y+z)=2\cos y\cdot\cos(2y+z)-\cos(y+z);$
. . . . . .

Juhis. Kaared z; $z+y$; $z+2y$; . . . moodustavad aritmeetilise progressiooni.

c) Tõestada järgmiste samasuste õigsus:

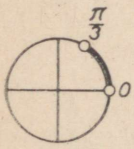
$$a^3\pm b^3=(a\pm b)\ (a^2\mp 2ab\cdot\cos\frac{\pi}{3}+b^2);$$

$$a^4+b^4=(a^2-2ab\cos\frac{\pi}{4}+b^2)\ (a^2-2ab\cdot\cos\frac{3}{4}\pi+b^2);$$

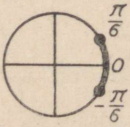
$$a^4-b^4=(a^2-2ab\cdot\cos\frac{2\pi}{4}+b^2)\ (a+b)\ (a-b).$$

VASTUSEID.

8. $a^2 \sin\alpha$; ≈ 21 cm². **9.** $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{d_1}{d_2}$; 59°28′. **10.** $\cos\alpha=\frac{b}{2a}$; 36°39′. **11.** $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{b}{2h}$; 73°58′. **13.** $2R\sin\frac{\alpha}{2}$ $\approx 2{,}698$. **14.** 40°13′. **15.** 57°27′. **16.** 47°16′; $R\cos\frac{\alpha}{2}$; 32,8 cm. **17.** 97°12′. **21.** $R=-\frac{a}{2\cos\frac{\beta}{2}}$; $r=\frac{a}{\cot\frac{\beta}{2}+\cot(45°-\frac{\beta}{4})}$. **23.** $H\cot\alpha$; ≈ 947 m. **24.** $H\cot\alpha$; $\approx 1{,}91$ km. **25.** $h+H\tan\alpha$; ≈ 240 m. **26.** $\approx 3{,}0$ cm. **27.** $a\tan\beta$; ≈ 21 m. **28.** $\approx 57'$. **29.** $\frac{a}{\cos\alpha}$. **30.** ≈ 40 m. **31.** $\approx 3{,}3$ m. **32.** $\approx 2{,}6$ m. **33.** $\tan\varphi=\frac{b}{a}$. **35.** $\approx 52°26'$; $\approx 7{,}1$ kG. **36.** $\approx 22\,380$ km. **37.** $P\sin\alpha$; $\approx 0{,}2$ m. **40.** 1) $2R\sin\frac{180°}{n}$; 2) $2R\tan\frac{180°}{n}$; 3) $\frac{a_n}{2}\cot\frac{180°}{n}$. **41.** 2) kui n on paaritu arv, siis $\frac{a_n}{2\sin\frac{90°}{n}}$; kui n on paarisarv, siis $\frac{a_n}{\sin\frac{180°}{n}}$. **44.** $\pm 1080°$; $\pm 10\,800°$. **48.** 1) $360°n+120°$; 120°; 480°; 840°;... **50.** $\angle AOC>0$; $\angle ABC<0$. **55.** $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5}{12}\pi$; $\frac{3}{20}\pi$; $\approx 0{,}9708$; $\approx 0{,}8387$. **56.** 108°; 81°; 40°. **67.** 1) $10\pi\frac{\text{rad.}}{\text{sek.}}$; 2) $2\pi\frac{\text{m}}{\text{sek.}}$; 3) $12\pi\frac{\text{m}}{\text{sek.}}$; 4) $v=r\omega\left|\frac{\text{m}}{\text{sek.}}\right|$. **71.** 1) $\frac{\pi}{21\,600}\frac{\text{rad.}}{\text{sek.}}$; 2) $\frac{\pi}{1800}\frac{\text{rad.}}{\text{sek.}}$. **72.** $\frac{8}{15}\pi$ radiaani.



Joon. 44.



Joon. 45.

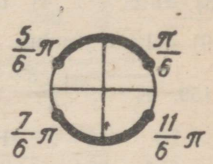
Ei olene vedava ratta hammaste arvust **74.** 27 cm. **79.** 1) (4,5; 9,5). **80.** 2a (joon. 44); 3a (joon. 45). **81.** $\approx 8{,}6$; $\approx 5{,}8$. **83.** 1) $(-2;-5)$. **86.** $\approx 26{,}8$ cm; $\approx 29{,}7$ cm. **87.** $\approx 5{,}4$ cm; $\approx 68°\,12'$. **88.** ≈ 22. **90.** 1) $\approx 7{,}9$ cm; $\approx 6{,}2$ cm. **91.** 1) $\approx -0{,}8$; $\approx -0{,}6$. **92.** 1) 6 min. 2) 12 min. **93.** 1) $\approx 5{,}8$. **100.** 1) $0<x<\frac{\pi}{2}$; $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$. 2) $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$ ja $x\neq\pi$; 3) $0<x<\pi$ ja $x\neq\frac{\pi}{2}$.

101. $\cos^2 x > 0$, kui $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$. **103.** 1) lm; $\pm l\sqrt{1-m^2}$. **109.** 1) 1; $\sqrt{2}$; 1; 2) 0; $\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$; $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$; 4) $a(1-\sqrt{2})$; 5) -2; 6) $\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$; 7) $\sqrt{3}$.

110. Paarisfunktsioonid: $\cos x$; $\cos^2 x$; $\cos^3 x$; $\sin^2 x$; $\tan^2 x$; $-\cos x$; $\frac{x}{\sin x}$; $\frac{\tan x}{x}$. **112.** 1) $\frac{3a+b}{2}$; 2) $\frac{-9+16\sqrt{3}}{16}$; 3) $a^3(1+12\sqrt{3})$; 4) 2. **114.** 1) -3; 2) $-3\sqrt{3}$; 3) $-\sqrt{3}$; 4) -3. **116.** 1) a) joon. 46; b) joon. 47; 2) a) $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5}{6}\pi$; b) $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{3}{4}\pi$; c) $-42°46' \leqslant \alpha \leqslant 42°46'$. **117.** 1) a) $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; b) pole võimalik; c) $\approx 89°11' + 180°n$; d) $\approx 125° + 180°n$; 2) a) 2; 0; b) -2; -4; c) 4; 0; d) 2; 0.



Joon. 46.



Joon. 47.

118. 1) ei; 2) ja; $0° < \alpha < 90°$; 3) ja $270° < \alpha < 360°$. **120.** 3) $\approx \pm 0{,}960$; $\approx \pm 0{,}293$; $\approx \pm 3{,}42$. **124.** 2) $\frac{40}{41}$; $-\frac{9}{40}$; $-4\frac{4}{9}$; 4) $-\frac{3}{5}$; $\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{3}$. **126.** 1) $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$; $\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}$; $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$; 2) $\frac{b^2}{a^2}$; $-\frac{b^2}{\sqrt{a^4+b^4}}$; $-\frac{a^2}{\sqrt{a^4+b^4}}$ ja $\begin{matrix} a \neq 0; \\ b \neq 0; \end{matrix}$ 3) $\cos\alpha = \sqrt{-a(a+2)}$; $0 \geqslant a \geqslant -1$.

128. 1) $-\frac{\sqrt{7}}{12}$; 2) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **129.** 1) a) 0,3420; 0,9397; 0,3640; 2,747; 2) a) 0,1351; b) 1,3350; c) 2,5450. **130.** 1) a) $2 - 2\sin^2\alpha$; b) $2\cos^2\alpha$; 2) a) $\frac{\sin^2\alpha}{1 \pm \sqrt{1-\sin^2\alpha}}$; b) $1 - \cos\alpha$; 3) a) $\frac{\pm 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1-\sin^2\alpha}$; b) $\pm\frac{2\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$; 4) a) $\frac{|\cos\alpha|}{1+\sin\alpha}$; b) $\frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$; **131.** 1) $2\cos^2\alpha$; $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1; 1,3744; mistahes; 2) $2\sin^2\alpha$; 2; 0; mistahes; 3) $2\sin\alpha$; $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$; $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$; 4) $-\cot^2\alpha$; $\alpha \neq \pi k$; 5) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; $\alpha \neq \pi k$; 13) $|\cos\alpha|$ **133.** $\frac{2}{|\cos\alpha|}$; 6) $|\sin\alpha + \cos\alpha|$; 9) $\cos^2\alpha$; 10) 1. **135.** 1) $\frac{m^2-1}{2}$; 2) m^2-2; m^3-3m; 3) 1; 4) 1; 5) $|a|$; 6) a) $\frac{10}{21}$; b) $1\frac{5}{7}$

139. 3) $2\pi n \pm \frac{\pi}{3}$. **142.** 2) a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $a \cdot \cos\frac{b}{c}$. **150.** 1) $\frac{4}{3}\pi$; 2) $\frac{13}{12}\pi$.

151. 1) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{\quad}\pi$; $2\pi n + \frac{\pi}{6}$; $2\pi n + \frac{5}{6}\pi$; ehk $\pi n + (-1)^n\frac{\pi}{6}$; $n = 0; \pm 1; \pm 2 \ldots$, 3) $\frac{\pi}{4}$; $\pi n + \frac{\pi}{4}$; **152.** 1) a) $\frac{\pi}{2}(2n+1)$; b) πn; c) πn; d) $\frac{\pi}{2}(2n+1)$; 2) a) $2\pi n$; b) $2\pi n + \frac{\pi}{2}$; 3) a) $\pi(2n+1)$; b) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. **153.** 1) $2\pi n - \frac{\pi}{2}$;

2) $360°n \pm 51°50'$; 3) $180°n \pm 35°16'$; 4) $2\pi n - \frac{\pi}{2}$; $\pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6}$. **154.** 1) πn;
2) πn; $180°n + 63°26'$; 3) $\frac{\pi}{2}(2n+1)$; $180°n + 165°58'$; 4) πn; $\pi n \pm \frac{\pi}{4}$. **155.** 1) πn;
2) $2\pi n \pm \frac{\pi}{3}$; 3) $\pi n + \frac{\pi}{4}$; $180°n + 56°19'$; 4) $\frac{\pi}{2} \cdot (2n+1)$. **156.** 1) $360°n + 64°30'$;
$360°n + 205°30'$; 2) $2\pi n \pm \frac{\pi}{3}$; 3) $180°n + (-1)^n 24°27'$; 4) $\pi n \pm \frac{\pi}{3}$;
5) $\pi n \pm \frac{\pi}{6}$. **157.** 1) $2\pi n$; 2) $2\pi n$; $2\pi n + \frac{\pi}{2}$. **158.** 1) $\pi n + \frac{\pi}{4}$; 2) $180°n + 41°11'$;
3) $\pi n \pm \frac{\pi}{6}$: 4) $180°n + 75°58'$; $180°n + 18°26'$; 5) $\pi n + \frac{\pi}{4}$; $\pi n - \arctan 3$;
9) Lahend puudub.

159. 1) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \approx 0{,}259$. **161.** 1) $\frac{63}{65}$: $-\frac{33}{65}$: 2) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$. **162.** 2) $-\frac{33}{65}$;
$-\frac{56}{65}$; $\frac{63}{65}$; $-\frac{16}{65}$. **164.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) \approx 0{,}259$; 2) $\frac{5-12\sqrt{3}}{26}$.
166. 1) $-\frac{8}{17}$; 2) $\frac{40}{41}$. **170.** 1) $\sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma - \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma -$
$-\cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma - \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma$. **172.** 0,25. **175.** 1) $\tan\alpha \cdot \cot\beta$; 3) 1;
5) $\tan\alpha$. **179.** 1) $\approx 0{,}8116$; 2) $\approx 0{,}4814$; 3) $\approx 0{,}446$; 4) $\approx 3{,}767$; 5) $\approx 4{,}037$.
181. 1) $\pi k - \frac{\pi}{4}$; 2) $2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$; 3) $\pi k + \arctan\frac{\sqrt{2}(4-\sqrt{2})}{14}$; 4) $\pi k + \frac{\pi}{4}$;
5) $2\pi k + \frac{\pi}{2}$; 6) $\pi k \pm \frac{\pi}{3}$; 7) $\frac{\pi}{6}(2k+1)$; 8) πk; 9) $\frac{\pi k}{3}$; $\frac{\pi k}{2}$; 10) $\frac{\pi k}{3}$; $\frac{\pi k}{4}$.
185. 1) 2; $-5{,}5$; 2) $-\frac{7}{17}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) -3; 5) 2. **189.** $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.
191. 1) $\pi k \pm \frac{\pi}{6}$; 2) $\pi k \pm \arctan\sqrt{\frac{m+\tan^2\alpha}{1+m\tan^2\alpha}}$. **199.** 1) $-14°39'$; 2) $-51°29'$;
3) $124°20'$; 4) $\approx 65°11'$; 5) $\approx -66°53'$; 6) $85°04'$; 7) $53°$; 8) $110°43'$.
200. 1) $40°$; $140°$; $-220°$; $-320°$; 2) $43°$; $317°$; $-43°$; $-317°$;
203. 5) $\tan^3\alpha$; 6) $\sin 40° - 2\sin 20°$; 7) $2\tan 20° + 3\cos 10°$; 8) 0;
9) $\frac{1+\sin 56°}{\tan 56° - \cos 56°}$; 10) $\sin^2 35°$. **206.** 1) $\approx -2{,}3028$; 2) $\approx -0{,}2930$.
208. 1) lahendust pole; 2) $\pi n - \frac{\pi}{4}$; 3) $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{2}(2n+1)$;
5) $360°n + 121°41'$; 6) $360°n - 85°28'$. **209.** 1) $\frac{24}{25}$; $\frac{7}{25}$; $3\frac{3}{7}$; 2) $\frac{120}{169}$; $-\frac{119}{169}$;
$-\frac{120}{119}$; 3) 0,1737; 0,9847. **211.** 1) $\frac{4n|1-n^2|}{(1+n^2)^2}$; $\frac{6n^2-n^4-1}{(1+n^2)^2}$;
212. 1) $\pi n \pm \frac{\pi}{6}$; 2) $90°n + (-1)^n 22°30'$; 3) $180°n \pm 17°2' - 15°$;
4) $90°n + 43°32'$. **213.** 2) $-0{,}96$. **214.** 1) 4; 2) $\frac{4}{225}$. **215.** 1) πn; 2) näiteks
$\alpha \approx 111°28'$; 3) πn. **216.** 1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;
$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$. **218.** 1) 0,6428; 9) 0,9866; 10) 0,3310;

11) $-0{,}9398$; 12) $-0{,}8344$. **222.** 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) 2,169; 3) $-0{,}4699$; 4) $-0{,}9739$.

226. 1) $\frac{5}{13}$; $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; $-\frac{\sqrt{14}}{4}$; $-\frac{\sqrt{7}}{7}$. **230.** 1) $\frac{2}{3}$; $\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

231. 1) $2R\sin^2\frac{\alpha}{4}$; $\frac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}-\frac{1}{2}R^2\sin\alpha$. **232.** 1) $\frac{4}{5}$. **233.** 1) $\left|\sin\frac{\alpha}{8}\right|$;

2) $|\cos 2\alpha|$; 3) 1; 4) 1; 5) $\left|\tan\frac{\alpha}{8}\right|$; 6) $|\cot\alpha|$; 7) $\left|\tan\frac{\alpha}{2}\right|$; 8) $\sqrt{2}|\cos 4\alpha|$.

237. 1) $2\pi k+2\arctan\frac{4\pm\sqrt{7}}{9}$; 2) $2\pi k+2\arctan\frac{4\pm\sqrt{21}}{5}$.

239. 1) $\frac{1}{2}(\cos 30^\circ+\cos 10^\circ)$; 3) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{10}+\cos\frac{\pi}{10}\right)$. **240.** 1) $\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$;

$\frac{3}{4}\sin\alpha-\frac{\sin 3\alpha}{4}$; $\frac{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{8}$; $\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{8}$;

2) $\frac{1}{8}(1-\cos 4\alpha)$; $\frac{1}{16}(2\cos\alpha-\cos 5\alpha-\cos 3\alpha)$; $\frac{1}{16}(2\sin\alpha-\sin 5\alpha+\sin 3\alpha)$.

243. 1) $\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha)$; 3) $2\sin\left(45^\circ+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$;

4) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$; 7) $\sqrt{3}$; **244.** 3) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 5) $2\sin^2 8^\circ30'$;

6) $-2\sin^2 15^\circ30'$; 7) $2\cos^2 20^\circ$; 12) $-2\sin^2 32^\circ$; 13) $\tan^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

245. 1) $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos(45^\circ-\alpha)$; 2) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos(45^\circ-\alpha)$;

3) $-4\cos\alpha\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$; 4) $2\sqrt{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos\alpha}$;

5) $2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}$; 6) $2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos\alpha}$;

7) $-\tan^2\frac{\alpha}{2}$; 8) $-\tan^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$; 11) $4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$;

15) $-\tan\alpha\cdot\tan 2\alpha\cdot\tan 3\alpha$. **246.** 1) $4\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$;

3) $4\sin(15^\circ+\beta)\cdot\cos(15^\circ-\beta)$; 7) $4\sin(30^\circ+\alpha)\cdot\sin(30^\circ-\alpha)$. **251.** 1) $\frac{\pi k}{8}$;

2) $\frac{\pi k}{3}$; 3) $\frac{\pi k}{3}$; 4) $\frac{\pi k}{8}$; 5) πk; $\frac{\pi}{6}(2k+1)$; 6) πk; $\frac{\pi}{10}(2k+1)$; 8) $\frac{\pi}{5}(2k+1)$;

$\frac{\pi}{3}(2k+1)$; 12) $\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $2\pi k\pm\frac{\pi}{3}$; 15) $\frac{\pi k}{4}-(-1)^k\cdot\frac{\pi}{24}$; 16) $\pi k\pm\frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi k}{3}$; 17) $\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $2\pi k\pm\frac{2\pi}{3}$; 18) $\frac{\pi k}{2}+(-1)^k\frac{\pi}{12}$; 19) $\frac{\pi}{10}(2k\pm1)$;

20) $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{6}$. **252.** $R\tan^2\frac{\pi-\alpha}{4}$. **254.** $b\tan\alpha\cdot\cot\frac{\alpha}{2}$ **256.** 1) $\alpha-\beta=2\pi k$;

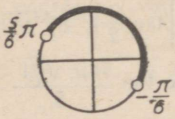
$\alpha+\beta=\pi(2k+1)$; 2) $\beta\pm\alpha=2\pi k$; 3) $\alpha-\beta=\pi k$. **258.** 1. a) $\approx-0{,}4160$;

b) $\approx-0{,}2588$; c) $\approx0{,}5766$; d) $\approx-0{,}5402$; e) $\approx1{,}5577$. 2. a) ≈1; $\approx2{,}175$;

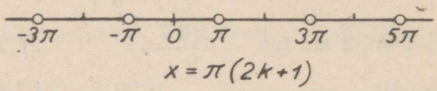
b) $\approx1{,}7$; 0; c) $\approx0{,}3$; 0; $\approx-2{,}0$. **259.** $x-$ mistahes arv; $y=0$ järgmistel

x väärtustel: 1. a) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; b) $\frac{\pi}{4}(2k+1)$; c) πk; d) $2\pi k$; 2. a) πk;

b) $\cos(\cos\alpha) \neq 0$; c) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 3. a) 0,2473; 0,8415; 0,5786; 0,4190; b) $y=\tan 2x$; $x \neq \frac{\pi}{4}(2k+1)$ ja $y=\tan x^2$, $x \neq \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}(2k+1)}$. **260.** Funktsioon on positiivne, kui: 1) Joon. 48. 4) $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} < x \leqslant 2\pi$; 5) ei;

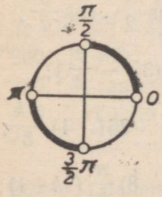


Joon. 48.



Joon. 49.

6) $0 < x < \frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{4}\pi$; $\pi < x < \frac{5}{4}\pi$; $\frac{3}{2}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$. **261.** 1) a) $\pi(2k+1)$; Joon. 49. b) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; c) $\frac{\pi}{4}(2k+1)$; d) $\pi(2k+1)$; e) $\pi k + \frac{\pi}{6}$; f) x — mistahes reaalarv. **262.** 1) $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$; 2) $x \neq (2k+1)\pi$; 3) $x \neq \pi k$; vasakul pool $x \neq \pi(2k+1)$; 5) vasakul pool $x \neq 2\pi k + \pi$ ja $x \neq 2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$. **263.** 1), 2), 3) ja 4) — mistahes reaalarv; 5) $x \neq \frac{\pi}{4}(2k+1)$; 6) $x \neq \pi(2k+1)$; 7) $x \neq \frac{\pi k}{2}$; 8) $x \neq 2\pi k$. **264.** 1. a) $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$; b) $x \neq \pi k$; c) $x \neq \sqrt{\pi k}$; d) $2\pi k \leqslant x \leqslant \pi(2k+1)$; e) x — mistahes reaalarv; f) $x \neq \pi k$; **265.** 1. a) $\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5}{6}$; b) $\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}\pi$; c) $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}$ ja $\frac{5}{6}\pi \leqslant x \leqslant \frac{7}{6}\pi$. 3. a) joon. 50. **266.** 1) a) $\frac{\pi}{4}(2k+1)$;



Joon. 50.

2) a) $\frac{2}{3}\pi k$; 3) a) $\pi k + \frac{\pi}{4}$. **267.** 1) $0 \leqslant 1 - \sin x \leqslant 2$; 2) $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}\sin 2x \leqslant \frac{1}{2}$; 8) $-\sqrt{2} \leqslant (\sin x + \cos x) \leqslant \sqrt{2}$. **268.** 1) a) 1 ja 3; c) 0 ja 2; d) 1 ja 6; e) 3 ja 5; f) 1, suurimat pole; g) 1 ja 2 **270.** Ja **271.** 1. tõkestamata funktsioonid: d, e, f, g, h. 2. tõkestatud funktsioonid: a, c, h. **273.** 1) paaritud funktsioonid: a, c, d, g, m, p, s; paarisfunktsioonid: b, f, i, j, k, l, n, o, r,

275. 1) a) $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; b) $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$; c) $(4k+1)\pi < x < (4k+3)\pi$; d) $\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}$; e) $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leqslant \pi k$ f) $2k\pi - \frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$; g) $4\pi k < x < 2\pi(2k+1)$. **276.** 1) x — mistahes reaalarv; 2) vt. **275.** 1.—a; 3) sama; 4) lahendust pole; 5) ja 6) x — mistahes reaalarv; 7) $2\pi k < x < \pi(2k+1)$. **277.** 1. a, b, c, d. 2π; e, f, k, l, π;

2. a) π; b) 4π; c) 2π; d) π; e) $\frac{\pi}{2}$; f) 6π; g) π; h) 2π; i, j, k) 2π; 3. a) $\frac{\pi}{2}$. b) 3π; c) $\frac{\pi}{2}$; d) $\frac{\pi}{3}$; e) 2π; f) $\frac{\pi}{4}$; g) 4π; h) π; i) 2π; **279.** 1) 2) 3) periood 2π; 5) periood π. **280.** 4) $\approx -6{,}83$; 5) $\approx 0{,}844$. **284.** 1) πk; $\pi k + \arctan 2$; 2) $\pi k + \frac{\pi}{4}$; $\pi k - \arctan 3$. **285.** $-200\ A$. **290.** 1) Kasvamispiirkonnad: a) $4\pi k - 2\pi \leqslant x \leqslant 4\pi k$; b) $\pi k - \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \pi k + \frac{\pi}{4}$; c) $-\frac{7}{2}\pi + 6\pi k \leqslant x \leqslant 6\pi k - \frac{\pi}{2}$; d) $\pi k - \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi k$; e) $4\pi k - \pi \leqslant x \leqslant 4\pi k + \pi$. 3) kahanemispiirkonnad; a) $2\pi k - \frac{\pi}{2} \leqslant x < 2\pi k$ ja $2\pi k < x \leqslant 2\pi k + \frac{\pi}{2}$; b) $2\pi k - \frac{\pi}{2} < x \leqslant 2\pi k$ ja $2\pi k + \pi \leqslant x < 2\pi k + \frac{3}{2}\pi$; c) $\pi k < x < \pi k + \frac{\pi}{2}$; d) $\pi k + \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi(k+1)$; e) $k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi$; f) $\frac{2}{3}\pi k + \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}\pi k + \frac{\pi}{2}$; g) kasvab vahemikes $(2\pi k - \pi;\ 2\pi k + \pi$; h) $2\pi k - \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant 2\pi k + \frac{3\pi}{4}$; i) $\pi k + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \leqslant \tau \leqslant \pi k + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$. **291.** 1. $\cos x$ kahaneb, kui $0 \leqslant x \leqslant \pi$ ja $2\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$; $\cos x$ kasvab, kui $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ ja $3\pi \leqslant x \leqslant 4\pi$. **296.** (8,090; −5,878). **297.** $R \cos \frac{2\pi t}{T}$ $R \sin \frac{2\pi t}{T}$. **300.** 1) 0; 2) $\cos \beta$; 3) $-2 \sin 2\alpha$; 4) $\sin^2 \beta$; 5) $\frac{1}{2}\sin \alpha$; 6) $\cot \alpha$; 7) $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$; 8) $\sin^2 \alpha$; 9) 0; 10) $\sin^2 2\alpha$; 11) $\frac{1}{2\cos \alpha}$; 12) $-\sin 2\alpha \cdot 2\beta$; 13) $-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$; 17) $\cos^3 2\alpha$; 18) 3. **305.** $x = \pm \frac{a \tan 2\alpha}{2\cos \alpha}$; +, kui kõõl lõikab kaart, suurem $\frac{1}{4}$ ümbermõõdust. **306.** $\frac{2p \cos^3 \frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha \cdot \cos(45° - \frac{\alpha}{4})}$.

307. $\frac{R \sin \frac{\alpha}{2}}{2\cos^2(45° - \frac{\alpha}{4})}$. **308.** $2d \cos^2(45° - \frac{\alpha}{2})$. **309.** $2R^2 \sin 3\alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

315. 270°. Juhis. Tähistada otsitav kaar $6x$-ga ja leida keskmine raadius.

316. $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta+\alpha}{2}}$. **317.** $\frac{\pi a^2}{4}$; **319.** $-2h^2 \sin 2\alpha$.

325. Lõik ei lõiku tasapinnaga, $\varphi \approx 13°21'$; lõikab tasapinda, $\varphi = 90°$. **326.** $\approx 5{,}42$. **327.** $\arcsin \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}$. **328.** $\frac{a}{2}\sin \varphi \cdot \sin 2\alpha$. **329.** $\arctan \sqrt{\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta}$; $\approx 22°37'$. **330.** $\approx 36°52'$. **331.** $\arccos(\cos \alpha \cdot \cos \beta)$. **332.** $\cos x = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$; $x = 6°12'$.

333. $\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$. **334.** $\arcsin \frac{c \sin \alpha}{d}$. **355.** $\frac{ab}{2 \cos a}$.

339. Funktsioonide tabeli järgi. 1) $\approx 74°25'$; 2) $\approx 56°1'$; 3) $\approx 164°22'$; 4) $164°36'$.

340. 1) ≈ 104; 2) $\approx 0{,}00109$; 3) $\approx 4{,}710$; 4) $0{,}2248$; 5) $\approx -1{,}191$; 6) 342; 7) $\approx 0{,}6151$; 8) 32,16.

341.

	a	b	c	A	B	S
1) a)	8,49	3,93	9,35	65°10′	24°50′	16,7
b)	0,7321	0,3172	0,7979	66°35′	23°25′	0,1161
c)	2,798	2,334	3,643	50°10′	39°50′	3,265
2) a)	6,37	84,07	84,29	4°20′	85°40′	268
b)	0,1259	0,1738	0,2146	35°55′	54°05′	0,01094
c)	0,6162	0,2954	0,6831	64°23′	25°37′	0,09101
3) a)	528	455	697	49°15′	40°45′	120100
b)	112	15	113	82°22′	7°38′	840
c)	1499	823	1710	61°14′	28°46′	616800
4) a)	261	380	461	34°29′	55°31′	49590
b)	0,0978	0,1001	0,1399	44°20′	45°40′	0,004895
c)	12,01	6,92	13,86	60°03′	29°57′	41,55

342.

	$a=c$	b	$A=C$	B	S	
1)	797,9	634,4	66°35′	46°50′	232200	
2)	8,76	13,96	37°10′	105°40′	36,9	
3)	97,0	115,7	53°23′	73°14′	4504	
4)	26	22	65°	50°	260	$h_a=20$
5)	627	1160	23°30′	133°	144000	
6)	856,7	925,2	57°19′	65°22′	333700	$h_b=721{,}4$

344. 1) $\approx 79m$; 2) $\approx 21{,}1m$; 3) $\frac{b \sin(\alpha+\beta)}{\cos \beta}$; 6) 19,0 kG ja 17,0 kG.

346. 1) a) 1,478; b) 7,86; 2) a) 7,12; b) 3,48; 3) a) 22,3; b) 10,65; 4) a) 9,09; b) 3,60; 5) a) 3,75; b) 4,68; 6) a) 0,358; b) 0,1815; 7) a) 1,85; b) 1,77; c) 1,978; 8) a) 765; b) 2380; c) 742; d) 1780; 9) a) 15,0; b) 66,2; 10) a) 1) $\angle B_1 \approx 40°36'$; $\angle C_1 \approx 115°24'$; $c_1 \approx 1100$; 2) $\angle B_2 \approx 139°24'$; $\angle C_2 \approx 16°36'$; $c_2 \approx 350$. b) $b \approx 720$; $\angle C \approx 78°$; $c \approx 817$; c) $\angle B \approx 114°55'$; $\angle A \approx 34°05'$; $c \approx 31$; d) $S \approx 971$; $\angle A \approx 26°$; $\angle B \approx 47°$; $\angle C \approx 107°$.

		a	b	c	A	B	C	S
347.	1	370,0	545,0	423,4	42°40′	86°30′	50°50′	78180
	2	450,0	84,6	445,1	87°50′	10°50′	81°20′	18820
	3	951	1187	341	40°	126°40′	13°20′	130200
	4	3,670	13,02	10,21	11°46′	133°40′	34°34′	13,56
348.	1	510	317	532	68°30′	35°20′	76°10′	78500
	2	225	800	640	12°14′	131°06′	36°40′	53750
	3	2,296	1,184	1,687	104°54′	29°52′	45°14′	0,9647
	4	62	28	42	124°	21°56′	34°04′	488
349.	1	87	65	77	75°	46°11′	58°49′	2420
	2	614			133°14′	25°16′	21°30′	40520
		55,4	360	309	3°46′	154°44′		3660
	3	13,89	7,10	8,42	126°41′	24°13′	29°06′	23,99
	4	13,81	20,72	8,14	25°21′	140°02′	14°37′	36,11
			6,01		154°39′	10°44′		10,47
	5	240,7	263,1	215,4	59°24′	70°14′	50°22′	24400
	6	19,06	88,19	—	31°17′	—	—	—
350.	1	19	34	49	16°26′	30°24′	133°10′	235,6
	2	0,099	0,101	0,158	37°22′	38°16′	104°22′	0,00484
	3	172,5	113,4	120,5	95°	40°54′	44°06′	6806
	4	1,234	2,345	3,457	10°46′	20°50′	148°24′	0,7582

351.

	a	b	c	A	B	C	S
1)	14,55	11,82	5,01	113°17′	48°16′	18°27′	27,24
2)	20,75	55,39	67,95	15°28′	45°23′	119°09′	501,9
3)	52,76	55,52	5,94	59°17′	115°10′	5°33′	141,7
4)	6,735	6,831	0,522	77°10′	98°30′	4°20′	1,738
5)	289,9	198,9	287,8	70°24′	40°16′	69°20′	26980
6)	34	11	29	108°	18°	54°	152,5
7)	17	29	40	22°	39°	119°	213,9
8)	42,5	166,7	138,8	12°05′	124°50′	43°04′	2420
9)	32	25	16	100°24′	50°12′	29°24′	196
10)	10,0	4,8	6,9	115°40′	25°39′	38°41′	**15**
11)	120,0	29,0	134,4	54°48′	11°23′	113°49′	1590
			100,8	125°12′		43°25′	1190
12)	34	23	15	127°13′	32°04′	20°43′	136

352. 1) $\approx$ 1560 *ha*; 2) $\approx$ 13,8 *ha*; 3) $\approx$ 1400 m^2. **353.** 3,6 kG, 3,7 kG.

354. $\frac{P}{2 \sin \alpha}$; $\frac{P}{2} \cot \alpha$. **355.** $\approx 73°$. **356.** 21 $\frac{m}{\text{sek.}}$ **357.** $\approx 21°30'$.

358. $\frac{P \cdot a \sin \alpha}{Q \cdot \sin \beta}$ m. **359.** $\frac{aQ \cdot \sin \beta}{P \cdot \sin \alpha + Q \cdot \sin \beta}$ cm. **360.** $\frac{P}{\sin \alpha}$(kG) $P \cot \alpha$ (kG).

361. $\approx$ 150 kGm. **362.** $\approx$ 61 mm. **363.** arc tan $\frac{h}{\pi d}$. **364.** $\approx 2°23'$.

365. 1) $\approx 2°11'$; 2) $\approx$ 8,7 sammu. **366.** $\approx 11°33'$. **367.** 2) $\approx 67°55'$.

370. 1) $\approx$ 3108 cm²; $\approx$16450 cm³. 2) $2a^3 \sin \alpha \cdot \tan \beta \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$; $\approx$379 400 cm³.

371. $a^3 \sin\alpha \cdot \sin\beta \sqrt{\cos\ (\alpha+\beta) \cdot \cos\ (\alpha-\beta)}$.

374. $abc\ \sqrt{-\cos 2\alpha}$. 375. $\dfrac{4h^2\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}$; $0<\alpha<90°$.

378. 1) $\dfrac{a^2b^2\sin^2\alpha}{2\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$;

2) $\dfrac{4a^2\cos^2(45-\dfrac{\alpha}{4})}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\sqrt{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$; 34500 cm².

382. $4d^2\sin\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$; $0<\alpha<45°$. 385. $\dfrac{h^2\sin 2\alpha}{8\sin(30°+\alpha)\cdot\sin(30°-\alpha)}$.

386. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$; lõige — kolmnurk; $\tan\alpha \leqslant \dfrac{2H}{a\sqrt{3}}$, kus H on prisma kõrgus.

387. 1) $\sqrt{\dfrac{1}{2}pq\,m\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{mn\sin\alpha}{2a}$. 388. 1) $\dfrac{1}{4}d^3\sin 2\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}$;

2) $\dfrac{4r^2h}{\sin\alpha}\cdot\cos^2(45°-\dfrac{\alpha}{2})$. 389. $\dfrac{H}{\cos\alpha}\sqrt{p(p-a)\ (p-b)\ (p-c)}$;

$p=\dfrac{1}{2}\ (a+b+c)$. 391. $\arccos\ (\sqrt{3}\tan\dfrac{\alpha}{2})$. 392. $\dfrac{a^3\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. 394. $\dfrac{7a^2}{8\cos\alpha}$.

395. $\dfrac{3a}{4}\sqrt{2b^2+a^2}$; $\arctan\ (\dfrac{b\sqrt{2}}{a})$. 397. 2) $\arccos(\tan\dfrac{\alpha}{2})$;

4) $\arctan\ (\dfrac{1}{2}\tan\alpha)$. 398. 1) $\sin x=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\dfrac{180°}{}}$;

2) $\cos x=\cot\dfrac{180°}{n}\cdot\cot\alpha$; 3) $\cos x=\cot\dfrac{180°}{n}\cdot\cot\alpha$. 399. $\arctan\ (\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\alpha)$;

$\arctan\ (\dfrac{1}{2}\tan\alpha)$. 400. $\dfrac{180°}{n}$. 401. $\dfrac{a^2}{4\cos\alpha}\sqrt{\sin\ (\alpha-30°)\cdot\sin\ (\alpha+30°)}$;

402. 1) $\dfrac{1}{2}b^2\cos\alpha$; 2) $\dfrac{a^2}{27}\sqrt{3\tan^2\alpha+12}$; 403. 2) $\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{27\cos\alpha}$.

404. 1) $\dfrac{a^2\sin 2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{2\sin 3\alpha\cdot\cos\ (30°+\alpha)\cdot\cos\ (30°-\alpha)}$; 2) $\dfrac{a^2\sin^2\alpha\cdot\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$.

405. $\dfrac{15h^2\cot\alpha}{16\sin\alpha}$. 406. 1) $-\dfrac{a^2\cos^2 2\alpha}{\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{a^2\sqrt{\cos\alpha}}{2}$.

407. 1) $\dfrac{a^2\sqrt{3}\sin\alpha\cdot\sin(\beta\pm\alpha)}{3\sin^2\beta}$; 2) $\dfrac{h^2\sin\alpha\cdot\tan\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)}$.

408. 1) $a^2\cdot\sin^2\alpha$; 2) $\dfrac{1}{2}a^2\sqrt{\sin(60°+\alpha)\cdot\sin(60°-\alpha)}$. 409. $\dfrac{a^2\sin\alpha}{2}$.

410. $2k^2\cdot\tan 2\alpha$. 411. $\dfrac{a^2\sin(\alpha+\dfrac{\beta}{2})\cdot\cos(\alpha-\dfrac{\beta}{2})}{\cos^2\alpha}$.

412. 1) $\frac{\sqrt{2}\,a^2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos(45^\circ+\frac{\alpha}{2})}$ 2) $\frac{2h^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\cdot\cos(45^\circ-\frac{\beta}{2})\cdot\cos(45^\circ-\frac{\alpha}{2})$.

413. $a^2\sin\alpha\cdot\cot(45^\circ-\frac{\varphi}{2})$. **414.** $\frac{n}{12}\,b^3\cdot\sin 2\beta\cdot\cos\beta\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}$; $\approx 1{,}71$ m³.

417. $\frac{na^3\cot^2\frac{180^\circ}{n}\cdot\cos\alpha}{3\sqrt{-\cos(\frac{180^\circ}{n}+\alpha)\cdot\cos(\frac{180^\circ}{n}-\alpha)}}$. **418.** 1) $\frac{\sqrt{2}\,c^3\sin^2 2\alpha\cdot\tan\beta}{48\sin(45^\circ+\alpha)}$;

2) $\frac{1}{6}\,c^3\sin^3\alpha\cdot\tan(45^\circ-\frac{\alpha}{2})$.

422. $\frac{4}{3}\,m^3\cos\alpha\cdot\cos\beta\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}$. **423.** $\frac{2}{3}a^3\tan\varphi\cdot\cos^3\frac{\alpha}{2}$.

424. $\frac{1}{3}\,a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin(60^\circ+\frac{\alpha}{2})\cdot\sin(60^\circ-\frac{\alpha}{2})}$.

427. 48 cm²; 96 cm²; 144 cm²; 288 cm². **428.** a) $84\sqrt{2}$ cm²; b) $220{,}5\sqrt{2}$ cm². c) $252\sqrt{2}$ cm²; d) $294\sqrt{2}$ cm².

431. $\frac{\sqrt{ab}\,(a+b)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **432.** $\frac{l^2\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$. **434.** 1) 70°32′; 2) 54°46′.

435. 109°28′. **436.** 1) 138°12′; 2) 116°34′. **437.** $\frac{a^2-b^2}{\cos\alpha}$; $\frac{a^3-b^3}{6}\tan\alpha$.

438. $\frac{a^3-b^3}{24}\tan\alpha$; $\frac{\sqrt{3}}{2\cos\alpha}(a^2\cdot\cos 2\frac{\alpha}{2}-b^2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2})$. **439.** $\frac{\sqrt{4c^2\sin^2\frac{180^\circ}{n}-(a-b)^2}}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$.

440. $\arctan(\frac{m-n}{m+n}\cdot\sqrt{2}\tan\alpha)$. **441.** $\frac{2H^2}{\tan\beta}\cdot\sqrt{2+\cot^2\alpha}$. **442.** $\frac{a^3-b^3}{6\cos 2\alpha}\cdot\sqrt{-\cos 2\alpha}$.

444. $\arctan(\sin 15^\circ)\approx 14^\circ 31'$. **445.** $\frac{R}{\sin\alpha}\cdot\sqrt{-\cos 2\alpha}$. **446.** $\sqrt{R^2\cdot\sin^2\alpha+d^2\cdot\cos^2\alpha}$.

448. $2dh\cdot\tan\frac{\alpha}{2}$. **449.** $\frac{h^3\tan^2\alpha}{4\pi}$; $\frac{h^2\tan\alpha}{2\pi}(2\pi+\tan\alpha)$.

450. $\frac{R^2\tan\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos^2\varphi}\cdot\sqrt{\cos(\varphi+\alpha)\cdot\cos(\varphi-\alpha)}$. **451.** $\frac{a\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta}{4\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha)}$.

452. 70°33′. **453.** $\sin\alpha\sqrt{S\cot\frac{\varphi}{2}}$; 19,4 cm. **454.** $H\cos\frac{\alpha}{2}$. **455.** $360^\circ\sin\frac{\alpha}{2}$; 180°.

456. $2\arctan(\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta)$. **457.** $\approx 82^\circ 49'$. **458.** $2\arcsin(\frac{\alpha^\circ+\beta^\circ}{360^\circ}\cdot\sin\frac{180^\circ\cdot\beta^\circ}{\alpha^\circ+\beta^\circ})$.

459. $\frac{c^3\cdot\tan\varphi}{24\pi^2}$; 0,25 (m³). **460.** $\frac{\pi(m^2-n^2)}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}$. **461.** $\frac{(R^2-r^2)\cdot\sin\delta}{2\cos\beta}$.

462. $\frac{\pi h^2}{\cos\alpha}$. **463.** $\arccos\frac{m-n}{p}$. **464.** $\frac{7}{6}\,\pi l^3\cdot\sin 2\varphi\cos\varphi$.

465. $\frac{\pi l^3\sin\alpha}{12}\cdot(1+2\sin^2\alpha)$; ≈ 1176; $2\pi l^2\cdot\sin(15^\circ+\frac{\alpha}{2})\cdot\cos(15^\circ-\frac{\alpha}{2})$; 651,3.

466. $\pi R^2 \cdot \sin^2 \alpha$. **467.** $\pi R^2(2+\sin\alpha)$. $\pi R^2(2-\sin\alpha)$

468. $\dfrac{\pi h^2}{\sin^2 \dfrac{\alpha}{4}}$. **469.** $218°54'$. **470.** $90°$. **471.** $4\pi R^2 \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2}$. **472.** $2 \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

473. 1) $\approx 36\,750$ km; $\approx 16\,060$ km; 2) $\dfrac{2r \cdot \sin^2 (45° - \dfrac{\alpha}{2})}{\sin\alpha}$.

474. $\dfrac{4}{3}\pi d R^3 \cdot \cos^4\dfrac{\varphi}{4}\,(3-2\cos^2\dfrac{\varphi}{4})$. **476.** $\dfrac{a \sin\alpha}{2\sin(45°+\alpha)}$. **478.** $\dfrac{\sqrt{6}a \cdot \tan\alpha}{12\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

479. $\dfrac{a^3 \sin^3\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos^2\beta}{12\sin^3(\alpha+\beta)}$. **480.** $\dfrac{2R^3 \cdot \sin(\alpha-\beta)}{3\cos\alpha \cdot \cos\beta}$. **481.** $\dfrac{\sqrt{3}\, l^3 \sin^2\alpha \sin^2\beta \cos^3\alpha}{4\sin^2(\alpha+\beta)}$.

482. $\dfrac{4}{3}a^3 \cdot \sin^2\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{-\cos 2\alpha}$. **483.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3 \cdot \sin^3\beta \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\sin^3(\alpha+\beta)}$; 16 450 cm^3.

484. $\dfrac{a^3}{4}\tan\alpha$. **485.** $\dfrac{\sqrt{2}a \cdot \sin 2\alpha}{4\sin(45°+\alpha)}$. **486.** $\dfrac{l\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{2}+\tan\alpha}$.

487. $\dfrac{\sqrt{3}R \cdot \sin\alpha}{2\sin(60°+\alpha)}$. **488.** $\dfrac{1}{3}\pi R^3 \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$; $\approx 307{,}3$ m^3.

489. $\begin{cases} h=(r-r_1)\tan\alpha;\ h_1=r-r_2)\tan\beta. \\ \sqrt[3]{\dfrac{\dfrac{3v}{\pi}+r_1^3 \cdot \tan\alpha + r_2^3 \cdot \tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}}. \end{cases}$ **490.** $\pi a^3 \sin a \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2}$.

491. $\dfrac{2l \cdot \sin\alpha}{2+\tan\alpha}$. **492.** $\dfrac{10}{81}\pi l^3 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha$. **493.** $\dfrac{2\pi H \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

494. $\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos\dfrac{180^0}{n}}$. **495.** $\dfrac{\pi r^2 \cdot \sin\dfrac{180^0}{n}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

496. $\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin\dfrac{3a}{2}}$.

497. $\cot 40° : \cot 30° : \cot 20°$. **498.** $\approx 54°44'$. **499.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\cot\alpha}$.

500. $\dfrac{r^2}{\cos\varphi}[1+\cot\dfrac{\alpha}{2}+\cot(45°-\dfrac{\alpha}{2})]$; $\dfrac{r^3}{3} \cdot \tan\varphi \cdot \tan(45°+\dfrac{\alpha}{2}) \cdot \cot\dfrac{\alpha}{2}$.

501. $\dfrac{b\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos(45^0+\dfrac{\alpha}{2})}$. **502.** $\dfrac{1}{3}\pi h^3 \cdot \dfrac{\sin(2\alpha-\beta)\cdot\sin\beta}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2(\alpha-\beta)}$. **503.** $\dfrac{8\sqrt{3\pi}\,r^2}{3\sin^2\alpha}$.

504. $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{m^3\cos^3\varphi}{\pi^3}} \cdot \tan\varphi \cdot \sin 2\alpha$. **505.** $\dfrac{\pi a^2 \cdot \sin 2\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}$.

506. $\dfrac{\pi a^3 \cdot \sin^2\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin^2\dfrac{\beta}{2}}{3\sin^2\dfrac{\beta-\alpha}{2}}$; 36 510 m^3. **507.** $\dfrac{4\pi b^2 \cdot \cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{9\sin\alpha \cdot \sin 2\alpha}$.

508. $\approx 9{,}47$ m^3. 509. $\approx 18°54'$. 510. $\approx 11{,}8$ g.

515. $\frac{a}{2} \cdot \cot \frac{180^0}{n} \cdot \tan \frac{\varphi}{2}$. 516. $\frac{a}{2 \sin \frac{180^0}{n} \cdot \sin 2\alpha}$; $\approx 5{,}09$ m.

517. $\frac{a}{2} \sin \alpha \cdot \tan \frac{\varphi}{2}$. 518. $2c \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. 519. $\arcsin \frac{n-m}{n+m}$.

520. $2 \arctan \sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2m}}}$; $78°26'$; $60°$.

521. $\sin x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $\approx 52°32'$. 522. $2 \arcsin \frac{m-n}{n+m}$. 523. $\approx 70°32'$.

524. $\frac{\sqrt{R^2+r^2+2Rr \cdot \cos 2\alpha}}{\sin 2\alpha}$. 528. $\frac{\sqrt{2}R^3 \cdot \sin 2\alpha}{2}$.

529. $\frac{\sqrt{2}\, h^3}{2 \sin 2\alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos (45^0 - \frac{\alpha}{2})}$. 530. $\frac{b}{2 \sin \alpha}$.

533. $\frac{4R\sqrt{3}}{3} \cdot \cos (30^0 + \frac{\alpha}{4}) \cdot \sin (30^0 - \frac{\alpha}{4})$. 536. $\approx 65°33'$.

537. $\frac{2}{3} R^3 \cdot \sin^3 2\varphi \cdot \tan \varphi \cdot \sin \alpha$. 538. $\frac{\alpha}{2} \cot \frac{180°}{n} \sqrt{\frac{\sin (\frac{180^0}{n} - \frac{\alpha}{2})}{\sin (\frac{180^0}{n} + \frac{\alpha}{2})}}$.

539. $\frac{abc}{4 \sin 2\alpha \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$. $p = \frac{a+b+c}{2}$.

540. $\frac{8\sqrt{3}R^2}{\sin^2 \alpha}$. 541. $\approx 62°22'$. 542. $\frac{\pi h \alpha^0 \sqrt{\cos \alpha}}{45^0 \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}$.

543. $83°24$. 544. $2\pi R \sin \alpha$. 545. $\frac{1}{3} \pi R^3 \tan \alpha \, (\cot^3 \frac{\alpha}{2} - \tan^3 \frac{\alpha}{2})$.

546. 1) $\frac{2}{3} \pi R^3 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 2\alpha$; 2) $4\pi h^2 \cot^2 \varphi \cdot \tan^2 \frac{\varphi}{2}$. 547. $-\frac{1}{3} \pi R^3 \tan^3 \alpha \cdot \tan 2\alpha$.

548. $\pi R^2 (1 + \cos^2 2\alpha + 2 \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha)$. 549. $2 \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$. 550. $\frac{\pi H}{6} (1 + 2 \cot^2 \alpha)^3$.

551. $\frac{\pi a^3}{3} \cdot \frac{\sin^2 B \cdot \sin^2 C}{\sin^2 (B+C)} : \pi a^2 \frac{\sin B \cdot \sin C \cdot \cos \frac{1}{2}(B-C)}{\sin (B+C) \cdot \cos \frac{1}{2}(B+C)}$; 552. $\frac{2}{3} \pi a b^2 \cdot \tan^2 \alpha$;

553. $2\pi a^2 \sqrt{3} \cdot \sin (30° + \alpha)$. 556. $\frac{\pi}{3} bc (b+c) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$. 557. $\frac{\pi a^3 \cdot \tan 2\alpha}{6 \cos 2\alpha}$.

558. $\frac{\pi a^3 \cdot \sin (30° + \frac{\alpha}{2})}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$; 47 080 cm^3; $\frac{4\pi a^2}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin (15° + \frac{\alpha}{4}) \cdot \cos 15° - \frac{\alpha}{4})$;

8459 cm^2. 559. $\frac{1}{2} \pi d^3 \sin 2\alpha$; 57 370 cm^3; $2\sqrt{2}\pi d^2 \cdot \cos (45° + \alpha)$; 10 110 cm^2.

561. $\frac{16\pi r^2}{\sin^2\alpha}\cdot\cos^2(45^\circ-\frac{\alpha}{2})$ **572.** 1) 129°2′; 2) 100.

574. 1) πk; $\pi k\pm\frac{\pi}{4}$; 2) πk; $2\pi k+\pi-\arccos 0{,}412$; 3) $180^\circ k\pm 30^\circ+20^\circ$.

576. $\frac{m\,(3-m^2)}{2}$. **581.** $a\cos\alpha+b\sin\alpha$. **583.** $a^2\cos\alpha$. **584.** $\sqrt{b^2-a^2\cot^2\alpha}$.

585. 1) $\frac{\pi d^3\cot^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin^3\pi}$; 2) $\frac{\pi a^3}{2}\sin^2 2\alpha$; **586.** $\arcsin\frac{6}{\pi m}$. **587.** $\approx 73^\circ 44'$.

588. 1) 90°; 2) nurga α poolitaja on ringi diameetriks.

591. $\approx 56^\circ\ 19'$; $\approx 33^\circ\ 41'$. **592.** 1) 48° 1′; 2) 78° 48′; **593.** 1) $\frac{2\pi}{2}$;

2) $\cos x=\frac{RP\pm\sqrt{R^2P^2+8Q^2l^2}}{4Ql}$. **594.** 1) $\frac{1}{2}\pi k+\frac{1}{2}\arctan\frac{2}{3}$; $\frac{\pi k}{2}+\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$;

2) $\pi k\pm\frac{\pi}{3}$; 3) $\pi k\pm\arctan\frac{3+\sqrt{17}}{2}$; 7) $\pi k-\frac{\pi}{4}$; $2\pi k-\frac{\pi}{2}$; $2\pi k$; 9) $\pi k-\frac{\pi}{4}$;

$\pi k\pm\frac{\pi}{3}$; 11) πk; $2\pi k\pm\frac{\pi}{3}$; 12) $2\pi k-1$; πk; 13) πk; $\pi k+\frac{\pi}{4}$; 14) $\frac{1}{5}(\pi k-\frac{\pi}{4})$;

$\frac{1}{10}(\pi k+\frac{\pi}{4})$; 15) $\pi k-\frac{\pi}{2}$; **595.** 1) $\frac{\pi k}{3}$; $\frac{\pi k}{3}\pm\frac{\pi}{12}$; 4) $\frac{\pi k}{8}$; $\frac{\pi k}{4}\pm\frac{\pi}{24}$; 5) $\frac{\pi k}{8}$.

596. 1) $\pi k+\arctan(k+\frac{1}{4})$; 9) $\pi k+\frac{\pi}{4}$; 12) $\pi k+(-1)^k\frac{\pi}{4}$;

15) $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$.

SISUKORD

I peatükk

Nurgad ja kaared; nende mõõtmine

§ 1. Teravnurga trigonomeetrilised funktsioonid 3
§ 2. Nurgad ja kaared; nende mõõtmine 8
§ 3. Koordinaattasapind. Ühikring. Punktide vaheline kaugus . . . 11

II peatükk

Trigonomeetrilised funktsioonid

§ 4. Mistahes nurga trigonomeetrilised funktsioonid. Trigonomeetriliste funktsioonide märgid 14
§ 5. Trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste arvutamine ühe funktsiooni antud väärtuse järgi 19
§ 6. Trigonomeetriliste avaldiste teisendamine ja samasuste tõestamine 21
§ 7. Nurga konstrueerimine tema trigonomeetrilise funktsiooni antud väärtuse järgi 24

III peatükk

Liitmisvalemid ja järeldusi nendest

§ 8. Liitmisvalemid 29
§ 9. Taandamisvalemid 34
§ 10. Argumendi kahekordistamise ja poolitamise valemid 38
§ 11. Trigonomeetriliste funktsioonide korrutise teisendamine summaks ja summa teisendamine korrutiseks 43

IV peatükk

Trigonomeetriliste funktsioonide põhiomadused. Graafikud.

§ 12. Trigonomeetriliste funktsioonide põhiomadused 48
§ 13. Trigonomeetriliste funktsioonide graafikud 57
§ 14. Ülesandeid kordamiseks 59

V peatükk

Kolmnurkade lahendamine

§ 15. Trigonomeetriliste funktsioonide ja nende logaritmide tabelid . . 63
§ 16. Täisnurksete kolmnurkade lahendamine 65
§ 17. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine 65
§ 18. Kolmnurkade lahendamise rakendusi 70

VI peatükk

Trigonomeetria rakendamist nõudvaid ülesandeid

§ 19. Hulktahukad 73
§ 20. Ümarkehad 81
§ 21. Geomeetriliste kehade kombinatsioone 84
§ 22. Pöördkehad 92
§ 23. Kordamisülesandeid 93
Vastuseid 100

П. В. Стратилатов
СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ
для 9 и 10 классов средней школы
На эстонском языке
Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja K. Kallaste
Tehniline toimetaja I. Vahtre
Korrektorid H. Kull ja H. Nassar

Ladumisele antud 17. IV 1958. Trükkimisele antud 3. VII 1958. Paber 60×92, 1/16. Trükipoognaid 7,25. Arvutuspoognaid 6,35. Trükiarv 8000. Tellimise nr. 1052. Trükikoda „Pioneer", Tartu, Kastani tn. 38.

Hind rbl. 1.35

6—6

Rbl. 1.35

A-22174

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00392547 8