

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Helena Varjas
Lineaarloogika multikategoorsest vaatepunktist
Matemaatika
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: PhD Ülo Reimaa
PhD Danel Ahman

TARTU 2026

LINEAARLOOGIKA MULTIKATEGOORSEST VAATEPUNKTIST

Bakalaureusetöö

Helena Varjas

Lühikokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös tutvustatakse multikategooria, vaba multikategooria ning esitatava multikategooria mõisteid. Veendutakse, et mittekommutatiivne lineaarloogika ilma loogiliste tehtemärkideta moodustab vaba multikategooria signatuuril. Lisaks näidatakse, et mittekommutatiivne lineaarloogika koos oma multiplikatiivse konjunktsiooni tehtemärgiga moodustab esitatava multikategooria.

CERCS teaduseriala: P110 Matemaatiline loogika, hulgateooria, kombinatoorika

Märksõnad: Lineaarloogika, vabad multikategooriad, esitatavad multikategooriad

LINEAR LOGIC FROM A MULTICATEGORICAL POINT OF VIEW

Bachelor thesis

Helena Varjas

Abstract

This bachelor's thesis introduces the concepts of multicategory, free multicategory and representable multicategory. We prove that noncommutative linear logic without any logical connectives forms the free multicategory on a signature. We also show that noncommutative linear logic with only multiplicative conjunction forms a representable multicategory.

CERCS research specialisation: P110 Mathematical logic, set theory, combinatorics

Key Words: Linear logic, free multicategories, representable multicategories

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Lineaarloogika	4
2 Tüübitud lineaarne termarvutus	7
3 Multikategooriad	16
3.1 Termid ja multikategooriad	19
3.2 Termid ja vaba multikategooria	22
4 $\otimes$-termid	27
5 Esitatavad multikategooriad	39
5.1 Näited	39
5.2 $\otimes$ -termid ja esitatavad multikategooriad	40
Kokkuvõte	47
Kasutatud allikad	48

Sissejuhatus

Lineaarloogika töötas välja Jean-Yves Girard varasemate loogikasüsteemide (klassikalise ja intuitsionistliku loogika) täiendusena ning avaldas tulemused töös [3] aastal 1987. Täiendused seisnevad näiteks klassikalise konjunktsiooni ning disjunktsiooni lahutamises nende multiplikatiivseteks ja aditiivseteks osadeks. Sellest tulenevalt räägitakse tihti loogika multiplikatiivsest või aditiivsest fragmendist. Samuti käsitleb lineaarloogika valemeid kui ressursi, mis teeb selle paljusid elulisi olukordi paremini kirjeldavaks. Tõestusi loogikas saab vaadelda morfismidena teatud kategoorias, kus loogika struktuur dikteerib kategooria struktuuri. Bakalaureusetöö eesmärk on veenduda, milline kategooria struktuur kirjeldab lineaarloogika multiplikatiivset fragmenti.

Töö alguses tutvustatakse põgusalt lineaarloogika tehtemärke ning tuletussüsteemi. Tuuakse välja ka mõned erinevused teistest loogikasüsteemidest, mis võivad olla lugejale tuttavamad, näiteks kursusest Matemaatiline maailmapilt või Diskreetne matemaatika I. Ülejäänud töö jaguneb sisuliselt kaheks.

Esimeses osas kirjeldatakse tüübitud lineaarset termarvutust, mis modelleerib teatud viisil lineaarloogikat. Seejärel tuuakse sisse multikategooria ning vaba multikategooria mõisted. Põhitulemusena näidatakse, et kirjeldatud termide süsteem moodustab vaba multikategooria. Teises osas lisatakse varasemale termarvutusele rohkem struktuuri, et modelleerida tehtemärke sisaldavat loogikat. Kirjeldatakse esitatava multikategooria mõistet ja tõestatakse, et kirjeldatud termide süsteem moodustab esitatava multikategooria.

Lugejalt eeldatakse, et ta on tuttav kategooriateooria põhimõistetega, nagu nt kategooria, funktor, loomulik teisendus. Kui pole öeldud teisiti, siis lähtutakse töös kategooriateooria mõistete osas konspektist [8].

1 Lineaarloogika

Lineaarloogikas on klassikalised konjunktsioon ning disjunktsioon lõõdud lahku nende multiplikatiivseks ja aditiivseks osaks. Näiteks väljendab A ja B multiplikatiivne konjunktsioon, et kehtivad mõlemad korraga. Nende lausete aditiivne konjunktsioon tähendab, et kehtib üks neist, kuid saame ise valida, kumb. Samuti eristab lineaarloogikat lausete ressursidena käsitlemine. Näiteks kehtib intuitsionistlikus ja klassikalises loogikas arutlus, kus lausete A ja $A \Rightarrow B$ tõesusest järeljub lause B tõesus. Sealjuures säilib A tõesus. Reaalses elus selline mõttekäik aga kehtida ei pruugi. Kui lause A tähistab väidet „mul on 5 eurot” ja B väidet „mul on šokolaad”, siis võib $A \Rightarrow B$ väljendada, et ostan 5 euro eest šokolaadi. See aga tähendab, et lause A on nii-öelda „ära” kulutatud. [11]

Samuti ei saa lineaarloogikas ressursse põhjendamatult kaotada. Kui meil on nüüd ka näiteks lause C , mis tähistab väidet „mul on pudel limonaadi”, siis ei järeljub lausetest $A, A \Rightarrow B, C$ lause B . Järelduvad aga hoopis laused B ja C , sest pudelit limonaadi me „ära” ei kasutanud.

Käesolevas töös keskendume mittekommutatiivsele lineaarloogikale. See tähendab, et lausearvutuse valemite järjendites on valemite järjekord oluline. Näiteks, kui kehtib, et lausetest A ja B järeljub C , siis ei pruugi lausetest B ja A järeljuda C . Samuti ei ole A ja B konjunktsioon sama, mis B ja A konjunktsioon. Kommutatiivset lineaarloogikat modelleeriva kategooria struktuur on keerukam kui mittekommutatiivsel juhul. Antud töös ei jõua me kahjuks sellele keerukamale struktuurile keskenduda.

Et bakalaureetöös käsitletakse ainult lineaarloogika multiplikatiivset konjunktsiooni ja multiplikatiivset tõesust, siis kirjeldame samuti vaid neid, lähtudes allikast [3]. Tutvustame tehtemärke:

- multiplikatiivne „ja”, tähistatud $\otimes$;
- multiplikatiivne „tõene”, tähistatud $\mathbb{1}$.

Lineaarloogika tõestused on üles ehitatud tõestuspuude abil. Anname esialgu mitteformaalse meeldetuletuse lausearvutuse sekventsiaalse esitusviisi jaoks. Seejärel kirjeldame konkreetselt vaadeldava lineaarloogika fragmendi reegleid.

Definitsioon 1.1 ([9, definitsioon 1.103]). *Lausearvutuse sekventsiks* nimetatakse sümboolite järjendeid kujul $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{G}$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), kus $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n, \mathcal{G}$ on lausearvutuse valemid, mis ei sisalda ekvivalentsitehet.

Valemite järjendit $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ nimetame sekventsii eesliikmeks ja valemit $\mathcal{G}$ nimetame tagaliikmeks. Sekventsii $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{G}$ võime mõista väitena, et valemitest $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ järeljub valem $\mathcal{G}$. Edaspidi tähendavad suured kreeka tähed suvaliste lausearvutuse valemite järjendeid.

Definitsioon 1.2. *Lausearvutuse tuletusreegliks* nimetame eeskirja saamaks sekventsistest $\Gamma_1 \vdash \mathcal{G}_1, \dots, \Gamma_n \vdash \mathcal{G}_n$ sekventsii $\Delta \vdash \mathcal{H}$ ja tähistame seda

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \mathcal{G}_1 \quad \dots \quad \Gamma_n \vdash \mathcal{G}_n}{\Delta \vdash \mathcal{H}}$$

Sekventse $\Gamma_1 \vdash \mathcal{G}_1, \dots, \Gamma_n \vdash \mathcal{G}_n$ nimetame reegli **eeldusteks** ja sekventsii $\Delta \vdash \mathcal{H}$ **järelduseks**. Kui tuletusreegli eelduste hulk on tühi, siis ütleme, et tegu on **aksioomiga**. Kui tahame reeglile anda nime, mille abil sellele hiljem viidata, siis kirjutame selle tuletusreeglist vahetult paremale.

Definitsioon 1.3. *Lausearvutuse sekventsii $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{G}$ tõestuspuuks* nimetame lõpliku arvu tuletusreeglite järjest rakendamist sedasi, et viimane järeldus on sekvents $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n \vdash \mathcal{G}$ ja iga haru algab aksioomist.

Anname tuletusreeglid lineaarloogika kahepoolse sekventsiaalse tuletussüsteemi jaoks vaid tehtega $\otimes$. [1, ptk 3.2] Hiljem saame tuua näite konkreetsest tõestuspuust, mis on konstrueeritud nende reeglite järgi.

$$\begin{array}{ccc} \frac{}{A \vdash A} \text{AX} & \frac{}{\vdash \perp} \text{1R} & \frac{\Gamma, \Delta \vdash B}{\Gamma, \perp, \Delta \vdash B} \text{1L} \\[2ex] \frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B} \otimes R & & \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, A \otimes B, \Delta \vdash C} \otimes L \end{array}$$

Kirjeldame lühidalt, kuidas iga neist reeglist võiks mõista:

- **AX** igast reeglist järeldub alati ta ise;
- **1R** alati järeldub tühjast valemite järjendist tõesus;

- $\mathbb{1}L$ kui valemite järjenditest Γ ning Δ järeldub valem B , siis valemite järjenditest $\Gamma, \mathbb{1}$ ning Δ järeldub valem B ;
- $\otimes R$ kui valemite järjendist Γ järeldub A ning järjendist Δ järeldub B , siis järjendist Γ, Δ järeldub A ja B multiplikatiivne konjunktsioon;
- $\otimes L$ kui valemite järjendist Γ, A, B, Δ järeldub valem C , siis valemite järjendist $\Gamma, A \otimes B, \Delta$ järeldub samuti valem C .

Näide 1.4. Olgu antud lausearvutuse laused A, B ja C . Saame lineaarloogika multiplikatiivsete reeglite abil konstrueerida tõestuspüü sekventsile $A, \mathbb{1}, B, \mathbb{1}, C \vdash (A \otimes B) \otimes C$

$$\begin{array}{c}
\frac{}{A \vdash A} \text{AX} \quad \frac{}{B \vdash B} \text{AX} \\
\hline
A, B \vdash A \otimes B \quad \otimes R \\
\hline
A, \mathbb{1}, B \vdash A \otimes B \quad \mathbb{1}L \quad \frac{}{C \vdash C} \text{AX} \\
\hline
A, \mathbb{1}, B, C \vdash (A \otimes B) \otimes C \quad \otimes R \\
\hline
A, \mathbb{1}, B, \mathbb{1}, C \vdash (A \otimes B) \otimes C \quad \mathbb{1}L
\end{array}$$

2 Tüübitud lineaarne termarvutus

Bakalaureusetöös uurime lineaarloogikat termarvutuse vaatepunktist. Sellise lähene-mise keskne idee kannab nime **Curry-Howardi vastavus** ning selle sisu tutvustame lugejale jooksvalt koos uute mõistete sisse toomisega.

Järgnevalt on meil vaja rääkida kõigi hulkade kogumist. Samas teame, et me ei saa seda nimetada hulgaks. Sellest probleemist üle saamiseks vaatleme lisaks hulkadele kogumeid, mida nimetame **klassideks**. Iga hulk on klass, kuid iga klass pole hulk. Kõigi hulkade kogum on klass. Sarnaselt tahame rääkida kõigi klasside kogumist. Selleks vaatleme kogumeid, mida nimetame **universumiteks**, mis on antud analoogiliselt. Kõigi klasside kogum on universum, kuid pole klass.

Edaspidi tähendab suvalise hulga X jaoks kirja pilt X^* hulka, kuhu kuuluvad parajas-ti hulga X elementide lõplikud järjendid. Järjendiks loeme siin ja edaspidi ka tühja järjendit ehk järjendit pikkusega 0, mida tähistame $()$. Kui on näiteks antud hulk $X = \{a, b, c\}$, siis kuuluksid hulka X^* järgmised elemendid:

$$(), (a), (a, a), (b, c), (a, b, c), (b, c, a), (a, c, b, c), \dots$$

Definitsioon 2.1 ([7, lk 64]). *Signatuur Σ on paar $\Sigma = (\Sigma, \mathcal{F})$, kus*

- Σ on klass;
- $\mathcal{F}$ on eeskiri, mis seab igale paarile $((A_1, \dots, A_n), B) \in \Sigma^* \times \Sigma$ vastavusse hulga $\mathcal{F}(A_1, \dots, A_n; B)$ sedasi, et kui $((A_1, \dots, A_n), B) \neq ((C_1, \dots, C_m), D)$, siis on hulgad $\mathcal{F}(A_1, \dots, A_n; B)$ ja $\mathcal{F}(C_1, \dots, C_m; D)$ lõikumatud.

Hulga Σ elemente nimetame **tüüpideks** ja hulga $\mathcal{F}(A_1, \dots, A_n; B)$ elemente **ope-raatoriteks** tüüpidest $A_1, \dots, A_n$ tüüpi B . Tüüpe tähistame suurte ladina tähtedega $A, B, C, \dots$ ning operaatoreid väikeste ladina tähtedega $f, g, h, \dots$. Edaspidi kirjutame $f \in \mathcal{F}(A_1, \dots, A_n; B)$ asemel ka $(f : A_1, \dots, A_n \rightarrow B) \in \Sigma$ ja ütleme, et f on n -aarne operaator (erandjuhtudel $n = 0$, $n = 1$ ja $n = 2$ ütleme vastavalt, et tegu on nullarse, unaarse ja binaarse operaatoriga). Nimetame arvu $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ operaatori f aarsuseks ja kirjutame $\text{ar}(f) = n$.

Kuigi kirja pilt võib seda soosida, siis ei peaks lugeja mõtlema operaatoritest kui funk-tsoonidest või tüüpidest kui hulkadest. Kirjeldame hoopis teist intuitsiooni signatuuri definitsiooni mõistmiseks loogika vaatepunktist.

Näide 2.2. Olgu meil antud mingi hulka lausearvutuse valemeid $\mathcal{L}$. Olgu antud ka hulka aksioome, mis võimaldavad mingist hulga $\mathcal{L}$ lõplikust arvust lausetest järeldada ühe hulga $\mathcal{L}$ lause. Sellega saame defineerida signatuuri $\mathbf{L} = (\mathcal{L}, \mathcal{A})$, kus $\mathcal{A}$ on funktsioon, mis igale $\mathcal{L}^* \times \mathcal{L}$ elemendile $((L_1, \dots, L_n); R)$ seab vastavusse hulga aksioomidest, mis võimaldavad lausetest $L_1, \dots, L_n$ järeldada lause R .

Näide 2.3. Olgu $\Sigma = \{\mathbf{Nat}\}$ ja $\mathcal{F}(\mathbf{Nat}, \mathbf{Nat}; \mathbf{Nat}) = \{+, \times\}$ ning muid operaatoreid ei ole.

Eeldame järgnevalt, et meil on fikseeritud mingi signatuur $\Sigma = (\Sigma, \mathcal{F})$.

Definitsioon 2.4 ([7, lk 66]). Fikseerime iga tüübi $A \in \Sigma$ jaoks mingi loenduva hulga X_A nii, et kui $A \neq B$, siis on hulgad X_A ja X_B lõikumatud. Hulka X_A nimetame A -tüüpi **muutujate hulgaks** ja selle elemente A tüüpi **muutujateks**.

Kirjutame edaspidi $x \in X_A$ asemel ka $x:A$ ja ütleme sellisel juhul, et muutuja x on A tüüpi. Hulka

$$X := \bigcup_{A \in \Sigma} X_A$$

nimetame **tüübitud muutujate hulgaks** üle signatuuri.

Definitsioon 2.5. *Termid* on parajasti sellised avaldised, mida saab koostada järjelmiste reeglite abil:

- kui $x \in X$, siis x on term;
- kui f on n -arne operaator ja $t_1, \dots, t_n$ on termid, siis $f(t_1, \dots, t_n)$ on term.

Näide 2.6. Olgu meil antud signatuur nagu näites 2.3. Fikseerime muutujate hulga $X_{\mathbf{Nat}} = \{n_1, n_2, \dots\}$. Termid on siis näiteks:

$$n_5, \quad +(n_1, n_8), \quad \times(n_2, +(n_1, n_1))$$

Definitsioon 2.7. *Kontekstiks* Γ üle signatuuri Σ nimetame järjendit paarikaupa erinevatest muutujatest koos nende tüüpidega (nt $\Gamma = x_1:A_1, \dots, x_n:A_n$).

Kui on antud kontekstid $\Gamma = x_1:A_1, \dots, x_n:A_n$ ja $\Delta = y_1:B_1, \dots, y_m:B_m$, siis tähistame $\Gamma, \Delta := x_1:A_1, \dots, x_n:A_n, y_1:B_1, \dots, y_m:B_m$. Kui kontekstide Γ ja Δ muutujate hulgad ei lõiku, siis on järjend Γ, Δ samuti kontekst.

Definitsioon 2.8. Olgu Γ kontekst, t term ja B tüüp. Siis nimetame kolmikut (Γ, t, B) **sekventsiks** üle signatuuri Σ .

Sekvents (Γ, t, B) tähistame edaspidi $\Gamma \vdash t : B$, kus sümbolid $\vdash$ ja $:$ eraldavad kolmiku komponente. Formaalselt eristame termarvutuslikke ja lausearvutuslikke sekventse teineteisest. Siiski võime tuletusreegli ja sevents tõeustuspüü mõiste defineerida samuti kui peatükis 1. Ütleme, et term t on kontekstis Γ **hästi tüübitud** ja tüüpi B , kui saame sekventsile $\Gamma \vdash t : B$ konstrueerida tõestuspüü, kasutades järgnevaid reegleid.

$$\frac{}{x:A \vdash x : A} \text{ID} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash t_1 : A_1 \quad \dots \quad \Gamma_n \vdash t_n : A_n}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash f(t_1, \dots, t_n) : B} f$$

kus termid $t_1 : A_1, \dots, t_n : A_n$ on hästi tüübitud kontekstides $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Siin ei viita reegel f ühele konkreetsele operaatorile, vaid analoogiline reegel eksisteerib meie süsteemis iga signatuuris leiduva operaatori f jaoks, kus $f : A_1, \dots, A_n \rightarrow B$.

Näide 2.9. Kui $x:A, y:B, z:C$ on muutujad ja $f : A, A, B \rightarrow B$, $g : C \rightarrow A$ on operaatorid, siis term $f(x, g(z), y)$ on hästi tüübitud kontekstis $x:A, z:C, y:B$, sest saame konstrueerida järgmise tõestuspüü:

$$\frac{\frac{}{x:A \vdash x : A} \text{ID} \quad \frac{\frac{}{z:C \vdash z : C} \text{ID}}{z:C \vdash g(z) : A} g \quad \frac{}{y:B \vdash y : B} \text{ID}}{x:A, z:C, y:B \vdash f(x, g(z), y) : B} f$$

Term $g(y)$ on hästi tüübitud kontekstis $y:C$, kuid mitte kontekstis $x:A, y:C$. Term $f(x, x)$ ei ole hästi tüübitud üheski kontekstis, sest hästi tüübitud termis ei saa muutujad korduda (vt lemma 2.19).

Kõigi termide hulka, mis on mingis kontekstis hästi tüübitud, tähistame $T(X)$ ja kutsume neid hästi tüübitud termideks üle signatuuri Σ . Kui edaspidi on antud term sekvents kujul, siis eeldame, et see term ongi vastavas kontekstis hästi tüübitud. Sisuliselt kui me anname mingi sekvents, siis tähitab see pigem väidet, et see konkreetne kolmik on tuletatav ülaltoodud reeglite abil. Termis esinevaid muutujaid nimetame **vabadeks muutujateks**. See terminoloogia omab rohkem tähendust pärast peatükki 4, kus kirjeldame ka seotud muutujaid.

Loogika vaatepunktist võib sekvents $x_1:A_1, \dots, x_n:A_n \vdash t : B$ lugeda kui väidet „Eel-

dusel, et meil on tõestatud laused $A_1, \dots, A_n$, saame neist konstrueerida tõestuse lausele B . Hästi tüübitud termi t kontekstis olevatest muutujatest $x_1, \dots, x_n$ võib mõelda kui tõestustest, mille olemasolu eeldame. Term tähistab mingit tõestust lausele B . Tõestus on konstrueeritud eeldustest (ehk muutujatest) ja teadaolevatest järeldumistest (ehk operaatoritest).

Näide 2.10. *Olgu meie signatuuris tüübid A ja B , operaator $f : A \rightarrow B$ ja muutuja $x:A$. Tähistagu A väidet „mul on 5 eurot”, B väidet „mul on šokolaad” ning f 5 euro eest šokolaadi ostmise tegevust. Siis saame konstrueerida hästi tüübitud termi $x:A \vdash f(x) : B$. Muutujast $x:A$ võib siin mõelda nt 5-eurosest rahatähest, mis tõestab, et väide A kehtib. Kulutades selle muutuja tegevuse f kaudu ära, saame tõestuse väitele B ehk nt šokolaaditahvli.*

Hästi tüübitud termid on defineeritud induktiivselt, kus muutujatest võib mõelda kui baasist ja operaatoritest kui sammust, mille abil hästi tüübitud termidest luua uus hästi tüübitud term. Samuti on hästi tüübitud termide tõestuspuid defineeritud induktiivselt. Baasjuht on siis aksioom ID ja reegel f on viis kuidas tõestuspuid suuremaks tõestuspuid kokku siduda. Seetõttu anname hästi tüübitud termidel või nende tõestuspuidel mõisteid ja tõestame väiteid üldiselt samuti (struktuuriliselt) induktiivselt.

Lause 2.11. *Iga hästi tüübitud termi t jaoks on üheselt määratud kontekst Γ ja tüüp B sedasi, et $\Gamma \vdash t : B$.*

Tõestus. Tõestame väite induktsiooniga termi t struktuuril.

BAAS. Kui $t = x$ on muutuja, siis on ta saadud aksioomi ID abil. Seega talle vastavas kontekstis ongi vaid üks muutuja x koos oma tüübiga B ja ka term t on tüüpi B .

JUHT $t = f(t_1, \dots, t_n)$. Olgu term kujul $t = f(t_1, \dots, t_n)$, kus $f : A_1, \dots, A_n \rightarrow B$. Induktsiooni eeldus on, et väide kehtib termide $t_1, \dots, t_n$ korral. Ainus võimalus on, et termi tõestuspuid viimane reegel on reegel f . Reegli eeldustes on termid $t_1, \dots, t_n$ oma üheselt määratud sekventsidega $\Gamma_1 \vdash t_1 : A_1, \dots, \Gamma_n \vdash t_n : A_n$. Kusjuures nende termide tüübid peavad olema $A_1, \dots, A_n$, et reegel f oleks rakendatav ja termil t leiduks tõestuspuid. Reegel f määrab üheselt termi t konteksti $\Gamma = \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ termidele $t_1, \dots, t_n$ vastavatest kontekstidest ja reeglile vastav operaator f määrab üheselt termi t tüüpi B . □

Lause 2.12 ([10, lemma 2.4.3]). *Iga hästi tüübitud termi t tõestuspuid on üheselt määratud.*

Tõestus. Kasutame tõestamiseks induktsiooni termi struktuuril.

BAAS. Olgu term t muutuja, siis saab talle vastav tõestupuid ilmselt kasutada vaid reeglit ID.

JUHT $t = f(t_1, \dots, t_n)$. Olgu nüüd $t = f(t_1, \dots, t_n)$, kus $f : A_1, \dots, A_n \rightarrow B$, ja eeldame, et väide kehtib $t_1, \dots, t_n$ korral. Iga muutuja kontekstist Γ esineb täpselt ühes termidest $t_1, \dots, t_n$ (vt lemmasid 2.18 ja 2.19). Sellest saame üheselt määrata Γ muutujate jaotuse kontekstidesse $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Et t tõestupuid viimane reegel on ilmselt f , siis on see jaotus ka sobivalt järjestatud (s.t $\Gamma = \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$) ning iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral on $\Gamma_i \vdash t_i : A_i$ hästi tüübitud. Eeldusest on lisaks $\Gamma_i \vdash t_i : A_i$ tõestupuid üheselt määratud. $\square$

Oleme näidanud, et term määrab üheselt talle vastava sekvents ja tõestupuid. Järelikult on need kolm esitusviisi tegelikult samaväärsed. Siiski on standardne esitada hästi tüübitud terme vastavate sekventside kujul.

Termidel defineerime **substitutsiooni** mõiste. Kui s, t on termid ja y on muutuja, siis intuiitselt tähendab substitutsioon $s[t/y]$, et igas kohas, kus termis s esineb muutuja y , asendame selle termiga t . Formaalselt konstrueerime selle termi induktiivselt reeglitega:

$$x[t/y] = \begin{cases} t, & \text{kui } x = y \\ x & \text{muidu} \end{cases}$$

$$f(t_1, \dots, t_n)[t/y] = f(t_1[t/y], \dots, t_n[t/y]),$$

kus x on muutuja ja $t_1, \dots, t_n$ on termid.

Näide 2.13. *Kui $x_1:A_1, x_2:A_2, y:C$ on muutujad ja $f : A_1, A_2 \rightarrow B$, $g : C \rightarrow A_1$, $h : C, A_1 \rightarrow A_2$ on operaatorid, siis*

- $f(x_1, x_2)[g(y)/x_1] = f(g(y), x_2);$
- $f(x_1, x_2)[h(y, x_1)/x_2] = f(x_1, h(y, x_1));$
- $f(x_1, x_2)[g(y)/x_1][h(y, x_1)/x_2] = f(g(y), x_2)[h(y, x_1)/x_2] = f(g(y), h(y, x_1)).$

Definitsioon 2.14. Ütleme, et muutuja x on termi t suhtes **värske**, kui ta ei esine termis t .

Defineerime hästi tüübitud termidel ekvivalentsiseose $\cong$.

Definitsioon 2.15. Hästi tüübitud termine $t_1 : A$ ja $t_2 : A$ jaoks kirjutame $t_1 \cong t_2 : A$, kui leidub lõplik arv termine t_1 ja t_2 suhtes värskeste muutujate substitutsioone, mis need termid võrdsustavad.

Seega võime termidesse asendada vaid muutujaid ja vaid selliseid muutujaid, mis ei esine juba kummaski termis. Kui $t_1 \cong t_2$, siis ütleme, term t_1 on termi t_2 **teisend**¹. Märgime ka, et kui $t_1 \cong t_2$, siis enamjaolt ei ole need termid hästi tüübitud samas kontekstis.

Näide 2.16. Olgu antud muutujad $x_1:A, x_2:A, x_3:A, x_4:A, y_1:C, y_2:C, y_3:C$ ning operaatorid $f, g : A, A, C \rightarrow B$, siis

- $x_1 \cong x_2 : A$, sest $x_1[x_3/x_1] = x_3 = x_2[x_3/x_2]$;
- $f(x_1, x_2, y_1) \cong f(x_1, x_3, y_2) : B$, sest $f(x_1, x_2, y_1)[x_4/x_2][y_3/y_1] = f(x_1, x_4, y_3) = f(x_1, x_3, y_2)[x_4/x_3][y_3/y_2]$;
- kui $f \neq g$, siis $f(a_1, a_2, c_1) \not\cong g(a_1, a_2, c_1) : B$.

Võib veenduda, et $\cong$ on tõepoolest ekvivalentsiseos. Kirjeldatud ekvivalentsiseose idee seisneb loogika vaatepunktist selles, et kui me mingis tõestuses (ehk termis) $t : B$ peame kasutama varasemat lause A tõestust, siis ei ole tõestuse $t : B$ konstruktsiooni vaatepunktist oluline, millisele konkreetsele A tõestusele me viitame.

Lemma 2.17. Kõikide termine $t \in T(X)$ ja muutujate $x \in X$ puhul $t[x/x] = t$.

Tõestus. Kasutame induktsiooni termi t struktuuril.

BAAS. Olgu t muutuja. Sel juhul saame vaadata kahte varianti. Kui $t = x$, siis $t[x/x] = x$, ning muul juhul $t[x/x] = t$.

JUHT $t = f(t_1, \dots, t_n)$. Olgu t kujul $f(t_1, \dots, t_n)$. Induktsiooni eeldus on, et väide kehtib $t_1, \dots, t_n$ korral. Siis $t[x/x] = f(t_1[x/x], \dots, t_n[x/x]) = f(t_1, \dots, t_n) = t$. $\square$

¹ingl *variant*

Lemma 2.18. *Kui konteksti Γ , termi $t \in T(X)$ ja tüübi B puhul $\Gamma \vdash t : B$, siis kontekstis Γ esinevad parajasti need muutujad, mis esinevad termis t vabalt.*

Tõestus. $(\Rightarrow)$ Olgu $x:A \in \Gamma$, kasutame induktsiooni termi t tõestuspuid struktuuril.

BAAS. Olgu viimane reegel t tõestuspuid ID. Järelikult on sekvents $\Gamma \vdash t : B$ tegelikult kujul $x:A \vdash x : A$, kus $t = x$ on muutuja ning väide kehtib. JUHT f . Olgu termi t tõestupuid viimane reegel f . Järelikult $t = f(t_1, \dots, t_n)$ ja me eeldame, et väide kehtib $t_1, \dots, t_n$ korral. Selles olukorras $\Gamma = \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, kus term t_i on hästi tüübitud kontekstis Γ_i iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral. Kuna $x:A \in \Gamma$, siis mingi $j \in \{1, \dots, n\}$ korral $x : A \in \Gamma_j$ ja seega see muutuja esineb termis t_1 vabalt ning ka termis t vabalt.

$(\Leftarrow)$ Olgu x muutuja, mis esineb termis t vabalt, kasutame induktsiooni termi t tõestuspuid struktuuril.

BAAS. Olgu t saadud ID reeglit kasutades. Siis on t ise muutuja ning $\Gamma = x : B$ ehk muutuja x tõepoolest esineb termi t kontekstis Γ .

JUHT f . Olgu nüüd termi t tõestupuid saadul reegli f abil, kus $(f : A_1, \dots, A_n \rightarrow B) \in \Sigma$ on mingi operaator. Järelikult $t = f(t_1, \dots, t_n)$ ning me eeldame, et väide kehtib $t_1, \dots, t_n$ korral. Selles olukorras $\Gamma = \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, kus term $t_i : A_i$ on hästi tüübitud kontekstis Γ_i iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral. Mingi $j \in \{1, \dots, n\}$ puhul esineb seega muutuja x termis t_j . Järelikult esineb ta vastavalt kontekstis Γ_j ja sellest kontekstis $\Gamma = \Gamma_1, \dots, \Gamma_j, \dots, \Gamma_n$. $\square$

Järgmine lemma teeb ilmsemaks defineeritud termarvutuse ja lineaarloogika lineaarsed aspektid. Viimases käsitleme eeldusi samuti ressursidena, mida saame kasutada järelduste tegemisel vaid korra.

Lemma 2.19. *Kui term t on mingis kontekstis hästi tüübitud, siis selles termis ei esine ükski vaba muutuja korduvalt.*

Tõestus. Kehtigu $\Gamma \vdash t : B$. Kasutame induktsiooni termi t tõestuspuid struktuuril.

BAAS. Kui t on saadud reegli ID abil, siis on ta ise muutuja ning väide kehtib.

JUHT f . Olgu nüüd vastav tõestupuid saadud reegli f abil. Järelikult $t = f(t_1, \dots, t_n)$ ja me eeldame, et väide kehtib $t_1, \dots, t_n$ korral. Selles olukorras $\Gamma = \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, kus term t_i on hästi tüübitud kontekstis Γ_i iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral. Oleme eeldanud, et termides t_i ei esine ükski vaba muutuja korduvalt. Samuti ei saa nende termide vabade

muutujate hulga lõikuda. Vastasel juhul lõikuksid ka nende kontekstide muutujate hulgad tänu lemmale 2.18 ning siis ei oleks Γ kontekst. $\square$

Järgmised kaks lemmat ja tõestusideed on pärit allikast [10]. Nendes lemmades eeldame vaikimisi, et erinevate termide muutujate hulgad on lõikumatud. Hilisemates konstruktsioonides, kus neid lemmasid rakendame, teeme sama eelduse. Ilma selleta ei pruugiks hästi tüübitud termide substitutsioon enam hästi tüübitud olla, nagu näha näitest 2.13.

Lemma 2.20. *Kui eksisteerivad termid $\Gamma \vdash t : A$ ja $\Delta, x:A, \Phi \vdash s : B$, siis leidub term $\Delta, \Gamma, \Phi \vdash s[t/x] : B$.*

Tõestus. Kasutame induktsiooni väite $\Delta, x:A, \Phi \vdash s : B$ tõestuspuu kujul.

BAAS. Olgu väide $\Delta, x:A, \Phi \vdash s : B$ saadud ID reeglit kasutades. Sel juhul kontekstid Δ, Φ on tühjad, $s = x$ ja $B = A$ ning väide $\Gamma \vdash t : A$ ongi ise sobiv, sest $x[t/x] = t$.

JUHT f . Olgu $\Delta, x:A, \Phi \vdash s : B$ tõestus kujul

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \hline \Gamma_1 \vdash s_1 : C_1 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \hline \Gamma_n \vdash s_n : C_n \end{array}}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash f(s_1, \dots, s_n) : B} f$$

kus $\vdots$ tähistab mingi tõestuspuu olemasolu. Siis leidub $j \in \{1, \dots, n\}$ sedasi, et $\Gamma_j = \Lambda_1, x:A, \Lambda_2$ ning kehtivad $\Delta = \Gamma_1, \dots, \Gamma_{j-1}, \Lambda_1$ ja $\Phi = \Lambda_2, \Gamma_{j+1}, \dots, \Gamma_n$. See tähendab, et konkreetsemalt on eespool toodud tõestuspuu kujul

$$\frac{\left(\frac{\vdots}{\Gamma_i \vdash s_i : C_i} \right)_{i=1}^{j-1} \quad \frac{\vdots}{\Lambda_1, x:A, \Lambda_2 \vdash s_j : C_j} \quad \left(\frac{\vdots}{\Gamma_i \vdash s_i : C_i} \right)_{i=j+1}^n}{\Delta, x:A, \Phi \vdash f(s_1, \dots, s_n) : B} f$$

Eeldame, et tõestatav väide kehtib $\Gamma_j \vdash s_j : C_j$ korral. Sellest eeldusest lähtuvalt leidub tõestuspuu sekventsile $\Lambda_1, \Gamma, \Lambda_2 \vdash s_j[t/x] : C_j$. Saame konstrueerida puu

$$\frac{\left(\frac{\vdots}{\Gamma'_i \vdash s_i : C_i} \right)_{i=1}^{j-1} \quad \frac{\vdots}{\Lambda_1, \Gamma, \Lambda_2 \vdash s_j[t/x] : C_j} \quad \left(\frac{\vdots}{\Gamma'_i \vdash s_i : C_i} \right)_{i=j+1}^n}{\Delta, \Gamma, \Phi \vdash f(s_1, \dots, s_{j-1}, s_j[t/x], s_{j+1}, \dots, s_n) : B} f$$

Kuna tänu lemmale 2.19 esineb muutuja x termis t kuni üks kord, siis $s[t/x] = f(s_1, \dots, s_n)[t/x] = f(s_1, \dots, s_{j-1}, s_j[t/x], s_{j+1}, \dots, s_n)$. $\square$

Järeldus 2.21. *Hästi tüübitud termidel on lubatud² reegel*

$$\frac{(\Gamma_i \vdash t_i : A_i)_{i=1}^n \quad x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash t : B}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash t[t_1/x_1] \dots [t_n/x_n] : B} C$$

Tõestus. Olgu lubatud reegel C ning leidugu tõestuspuid sekventsile $\Gamma \vdash s : B$. Me näitame, et siis leidub sellele sekventsile ka tõestuspuid, mis ei kasuta reeglit C. Nime-tame neid tõestuspuid edaspidi C-vabadeks. Teeme seda induksiooniga selle sekvents-i tõestuspuid struktuuril.

BAAS. Olgu sekvents saadud reegli ID abil. Siis kehtib $\Gamma = s:B$ ja tõestuspuid ongi C-vaba.

JUHT f . Olgu sekvents saadud reegli f abil, kus $(f : A_1, \dots, A_n \rightarrow B) \in \Sigma$ mingite tüüpide $A_1, \dots, A_n$ korral. Sel juhul $s = f(t_1, \dots, t_n)$ ja $\Gamma = \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Eeldame, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral leiduvad sekventsile $\Gamma_i \vdash t_i : A_i$ C-vabad tõestuspuid. Saame konstrueerida C-vaba tõestuspuid

$$\frac{\frac{\vdots}{\Gamma_1 \vdash t_1 : A_1} \quad \dots \quad \frac{\vdots}{\Gamma_n \vdash t_n : A_n}}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash f(t_1, \dots, t_n) \vdash B} f$$

JUHT C. Olgu sekvents saadud reegli C abil. Siis esitub kontekst $\Gamma = \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ ning term $s = t[t_1/x_1] \dots [t_n/x_n]$. Me eeldame, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral leidub C-vaba tõestuspuid sekventsile $\Gamma_i \vdash t_i : A_i$ ja et leidub C-vaba tõestuspuid sekventsile $x_1:A_1, \dots, x_n:A_n \vdash t : B$. Rakendame lemmat 2.20 n korda ja saame, et leidub C-vaba tõestuspuid sekventsile $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash s[t_1/x_1] \dots [t_n/x_n] : B$. $\square$

Eesti keeles võib reeglit C nimetada **lõikereegliks**. Meie viitame sellele edaspidi siiski kui reeglile C. Tähis C tuleb ingliskeelsest sõnast „cut”.

²Lubatud (ingl *admissible*) tähendab siin, et saame reegli C abil tõestada ainult väiteid, mida saaksime tõestada ka ilma selleta.

3 Multikategoriad

Üldjuhul lähtume kategooriateooria põhimõistete osas allikast [8], kuid teeme erisuse kategooria definitsioonis suuruse osas. Allikas [8] nimetatakse objektide kogumit klassiks ning juhul kui see klass on hulk, siis nimetatakse kategooriat väikeseks kategooriaks. See, et objektide kogum on klass, mitte hulk, on vajalik paljude tüüpiliste kategooriateoreetiliste näidete tarvis. Bakalaureusetöös soovime aga rääkida ka multikategoriate kategooriast (vt definitsiooni 3.8), seetõttu nõuame, et kategooria definitsioonis oleks objektide kogum universum ja objektidevahelised morfismide kogumid klassid. Kui objektide universum juhtub olema klass, siis ütleme, et tegu on **keskmise suurusega kategooriaga** ja kui universum juhtub olema hulk, siis ütleme, et tegu on **väikese kategooriaga**. Kategooriate suuruse järgi klassifitseerimise info on ülevaatlikult järgmises tabelis 1. Rea „Objektid” lahtrid ütleavad, mis kogumi moodustavad veeru päises nimetatud suurusega kategooria objektid. Rea „Morfismid” lahtrid ütleavad, mis kogumi moodustavad päises nimetatud suurusega kategooria iga kahe objektide vahelised morfismid.

Tabel 1: Kategooriate suurused

	Kategooria (ehk suur kategooria)	Keskmise suurusega kategooria	Väike kategooria
Objektid	universum	klass	hulk
Morfismid	klass	hulk	hulk

Definitsioon 3.1 ([5, definitsioon 2.1]). ***Multikategooria** $\mathcal{M}$ koosneb järgmistest andmetest:*

1. *klass $Ob(\mathcal{M})$, mille elemente nimetatakse multikategooria $\mathcal{M}$ **objektideks**;*
2. *hulk $\mathcal{M}(X_1, \dots, X_n; Y)$ kõigi objektide $X_1, \dots, X_n, Y$ jaoks (kus $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), mille elemente nimetatakse **morfismideks** objektidest $X_1, \dots, X_n$ objekti Y (erijuhul $n = 0$ tähistame seda hulka $\mathcal{M}(; Y)$);*
3. *morfism $id_X \in \mathcal{M}(X; X)$ iga objekti $X \in Ob(\mathcal{M})$ jaoks, mida nimetatakse objekti X **ühikmorfismiks**;*
4. *kujutus, mis morfismile $f \in \mathcal{M}(X_1, \dots, X_n; Y)$ ja morfismidele*

$$g_1 \in \mathcal{M}(X_{11}, \dots, X_{1m_1}; X_1), \dots, g_n \in \mathcal{M}(X_{n1}, \dots, X_{nm_n}; X_n)$$

seab vastavusse morfismi

$$f \circ (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{M}(X_{11}, \dots, X_{1m_1}, \dots, X_{n1}, \dots, X_{nm_n}; Y),$$

mida nimetatakse morfismide $g_1, \dots, g_n$ ja f **kompositsiooniks**,

mis peavad rahuldama järgmisi tingimusi:

1. mistahes morfismi $f \in \mathcal{M}(X_1, \dots, X_n; Y)$ korral kehtib

$$f \circ (id_{X_1}, \dots, id_{X_n}) = f = id_Y \circ (f);$$

2. mistahes morfismide

$$f \in \mathcal{M}(X_1, \dots, X_n; Y),$$

$$g_i \in \mathcal{M}(X_{i1}, \dots, X_{im_i}; X_i), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

$$h_{ij} \in \mathcal{M}(X_{ij1}, \dots, X_{ijp_{ij}}; X_{ij}), \quad i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m_i\}$$

korral kehtib

$$\begin{aligned} & (f \circ (g_1, \dots, g_n)) \circ (h_{11}, \dots, h_{nm_n}) \\ &= f \circ (g_1 \circ (h_{11}, \dots, h_{1m_1}), \dots, g_n \circ (h_{n1}, \dots, h_{nm_n})). \end{aligned}$$

Me nõuame, et multikateooria objektide kogum oleks klass. Jällegi on see vajalik paljude tüüpiliste näidete jaoks, sealhulgas ka järgmine, kus vaatleme objektidena kõiki vektorruume.

Näide 3.2. Fikseeritud korpuse K korral võime vaadelda multikateooriat FinVec_K , kus:

1. objektideks on lõplikumõõtmelised vektorruumid V üle korpuse K , kusjuures iga vektorruumiga käib vaikimisi kaasas üks fikseeritud baas $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$;
2. morfismideks $V_1, \dots, V_n \rightarrow W$ on multilineaarsed kujutused ehk sellised funktsioonid $f : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$, et võrdus

$$f(v_1, \dots, av_i + bv'_i, \dots, v_n) = af(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + bf(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n)$$

kehtiks iga $a, b \in K, v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$ ning $v'_i \in V_i$, kus $i \in \{1, \dots, n\}$, korral (kusjuures kui $n = 0$, siis loeme otsekorrutiseks $V_1 \times \dots \times V_n$ ühe-elementilist

hulka $\{*\}$ ning siis on morfismid $f : \{*\} \rightarrow W$ üksüheses vastavuses W elementidega);

3. iga vektorruumi V ühikmorfism on identsusteisendus $I_V : V \rightarrow V$;

4. komponeerimine on defineeritud loomulikul viisil

$$(g \circ (f_1, \dots, f_n))(v_{11}, \dots, v_{1m_1}, v_{21}, \dots, v_{2m_2}, \dots, v_{n1}, \dots, v_{nm_n}) = \\ g(f_1(v_{11}, \dots, v_{1m_1}), f_2(v_{21}, \dots, v_{2m_2}), \dots, f_n(v_{n1}, \dots, v_{nm_n})),$$

kus $f_i : V_{i1} \times \dots \times V_{im_i} \rightarrow W_i$ ning $v_{i1} \in V_{i1}, \dots, v_{im_i} \in V_{im_i}$ iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral ja $g : W_1 \times \dots \times W_n \rightarrow Q$.

Näide 3.3. Iga keskmise suurusega kategooriat $\mathcal{C}$ saame vaadelda multikategooriana, kus:

1. objektideks on kategooria $\mathcal{C}$ objektid;
2. morfismid on parajasti kategooria $\mathcal{C}$ morfismid (s.t kui $n \neq 1$, siis on morfismide hulk $\mathcal{C}(X_1, \dots, X_n; Y)$ tühi);
3. ühikmorfismid on samad, mis kategoorias $\mathcal{C}$;
4. morfismide kompositsioonid on samad, mis kategooras $\mathcal{C}$.

Näide 3.4 ([5, näide 2.2]). Olgu antud keskmise suurusega kategooria $\mathcal{C}$. Defineerime multikategooria $\mathcal{C}_\blacktriangleright$ järgmiselt:

1. objektideks on kategooria $\mathcal{C}$ objektid;
2. morfism $f \in \mathcal{C}_\blacktriangleright(X_1, \dots, X_n; Y)$ on morfismide jada $(f_1, \dots, f_n)$, kus $f_i \in \mathcal{C}(X_i; Y)$ iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral;
3. ühikmorfismid on samad, mis kategoorias $\mathcal{C}$;
4. morfismide $f := (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{C}_\blacktriangleright(X_1, \dots, X_n; Y)$ ja

$$g_1 := (g_{11}, \dots, g_{1m_1}) \in \mathcal{C}_\blacktriangleright(X_{11}, \dots, X_{1m_1}; X_1), \dots, \\ g_n := (g_{n1}, \dots, g_{nm_n}) \in \mathcal{C}_\blacktriangleright(X_{n1}, \dots, X_{nm_n}; X_n)$$

kompositsioon $f \circ (g_1, \dots, g_n)$ on jada $(f_1 \circ g_{11}, f_1 \circ g_{12}, \dots, f_n \circ g_{nm_n})$.

3.1 Termid ja multikategoriad

Definitsioon 3.5 ([10, lk 206]). *Multikategoria* $\mathcal{M}_\Sigma$ *signatuuril* $\Sigma = (\Sigma, \mathcal{F})$ on paar $\mathcal{M}_\Sigma = (\mathcal{M}, [-])$. Paari moodustavad multikategoria $\mathcal{M}$ ning eeskiri $[-]$, mis iga-
le tüübile $A \in \Sigma$ seab vastavusse objekti $[A] \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ ja operaatorile $(f : A_1, \dots, A_n \rightarrow B) \in \Sigma$ seab vastavusse morfismi $[f] : [A_1], \dots, [A_n] \rightarrow [B]$. Samaväärselt võib öelda, et eeskiri $[-]$ koosneb kujutustest $[-]_0 : \Sigma \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{M})$ ja

$$[-]_{A_1, \dots, A_n; B} : \mathcal{F}(A_1, \dots, A_n; B) \rightarrow \mathcal{M}([A_1], \dots, [A_n]; B)$$

kõigi paaride $((A_1, \dots, A_n), B) \in \Sigma^* \times \Sigma$ jaoks.

Teoreem 3.6. Hästi tüübitud termid üle signatuuri $\Sigma = (\Sigma, \mathcal{F})$ muutujates $X = (X_A)_{A \in \Sigma}$ moodustavad multikategoria $T(\Sigma)$ järgnevalt antud viisil:

1. $\text{Ob}(T(\Sigma)) = \Sigma$;
2. $T(\Sigma)(A_1, \dots, A_n; B)$ elemendid on selliste hästi tüübitud termide $t \in T_B(X)$ ekvivalentsiklassid $[t]_\cong$, mille jaoks leiduvad mingid muutujad $x_1, \dots, x_n$, et kehtiks $x_1:A_1, \dots, x_n:A_n \vdash t : B$;
3. iga objekti $A \in \Sigma$ jaoks on ühikmorfism $[x]_\cong$, kus x on muutuja tüüpi A ;
4. morfismi $[t]_\cong \in T(\Sigma)(A_1, \dots, A_n; B)$ ja morfismide

$$[s_1]_\cong \in T(\Sigma)(A_{11}, \dots, A_{1m_1}; A_1), \dots, [s_n]_\cong \in T(\Sigma)(A_{n1}, \dots, A_{nm_n}; A_n)$$

kompositsioon on morfism $[t[s'_1/x_1] \dots [s'_n/x_n]]_\cong$, kus $s'_1, \dots, s'_n$ on valitud sedasi, et

- $s'_1 \cong s_1, \dots, s'_n \cong s_n$;
- termide $t, s'_1, \dots, s'_n$ muutujate hulgad oleksid paarikaupa lõikumatud.

Kusjuures multikategoria $T(\Sigma)$ ja eeskiri, mis igale operaatorile $(f : A_1, \dots, A_n; B) \in \Sigma$ seab vastavusse morfismi $[f(x_1, \dots, x_n)]_\cong$, kus $x_1:A_1, \dots, x_n:A_n$ on mingid paarikaupa erinevad muutujad, on multikategoria signatuuril Σ .

Tõestus. Esiteks märgime ära, et kompositsiooniks sobivad ekvivalentsiklasside esindajad leiduvad tänu muutujate hulkade loenduvusele. Saadud term on hästi tüübitud

sobivas kontekstis tänu reeglile C:

$$\frac{\left(x_{i1}:A_{i1}, \dots, x_{im_i}:A_{im_i} \vdash s'_i : A_i \right)_{i=1}^n \quad x_1:A_1, \dots, x_n:A_n \vdash t : B}{x_{11}:A_{11}, \dots, x_{nm_n}:A_{nm_n} \vdash t[s'_1/x_1] \dots [s'_n/x_n] : B} \text{ C}$$

Näitame, et komponeerimine on hästi defineeritud. Olgu

$$\begin{aligned} x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n &\vdash t : B \\ x'_1 : A_1, \dots, x'_n : A_n &\vdash t' : B, \end{aligned}$$

kus $t \cong t'$. Olgu ka $s_1 \cong s'_1 : A_1, \dots, s_n \cong s'_n : A_n$ sedasi, et nii termide $s_1, \dots, s_n$ kui termide $s'_1, \dots, s'_n$ muutujate hulgad on paarikaupa lõikumatud. Tänu lemmale 2.18 esinevad termides $[t[s_1/x_1] \dots [s_n/x_n]] \cong$ ja $[t'[s'_1/x'_1] \dots [s'_n/x'_n]] \cong$ parajasti need muutujad, mis vastavalt termides $s_1, \dots, s_n$ ja $s'_1, \dots, s'_n$. Seega saame teha substitutsioonid, mis võrdustavad termid $s_1, \dots, s_n$ termidega $s'_1, \dots, s'_n$. Tõestuses kirjutame edaspidi $[t] \cong$ asemel t ning eeldame, et erinevate termide muutujate hulgad ongi lõikumatud. Samuti kasutame $[a_1/x_1] \dots [a_n/x_n]$ asemel tähistust $\overrightarrow{[a_i/x_i]_i}$, kui indeksite hulk on selge. Kontrollime, kas antud süsteem rahuldab multikategooria tingimusi. Olgu antud morfism $x_1:A_1, \dots, x_n:A_n \vdash t : B$. Siis kompositsioon $t \circ (id_{A_1}, \dots, id_{A_n})$ esitub

$$\frac{\left(\frac{}{x_i:A_i \vdash x_i : A_i} \text{ ID} \right)_{i=1}^n \quad \frac{\vdots}{x_1:A_1, \dots, x_n:A_n \vdash t : B}}{x_1:A_1, \dots, x_n:A_n \vdash t[\overrightarrow{x_i/x_i}]_i : B} \text{ C}$$

ning on võrdne morfismiga t tänu lemmale 2.17. Kompositsioon $id_B \circ (t)$ on kujul

$$\frac{\frac{\vdots}{x_1:A_1, \dots, x_n:A_n \vdash t : B} \quad \frac{}{y:B \vdash y : B} \text{ ID}}{x_1:A_1, \dots, x_n:A_n \vdash y[t/y] : B} \text{ C}$$

ning on samuti võrdne morfismiga t . Olgu nüüd lisaks antud morfismid

$$\begin{aligned} x_{i1}:A_{i1}, \dots, x_{im_i}:A_{im_i} &\vdash s_i : A_i & i \in \{1, \dots, n\} \\ x_{ij1}:A_{ij1}, \dots, x_{ijp_{ij}}:A_{ijp_{ij}} &\vdash v_{ij} : A_{ij} & i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m_i\} \end{aligned}$$

Siis kompositsioon $t \circ (s_1, \dots, s_n)$ esitub

$$\frac{\left(\frac{\vdots}{x_{i1}:A_{i1}, \dots, x_{im_i}:A_{im_i} \vdash s_i : A_i} \right)_{i=1}^n \quad \frac{\vdots}{x_1:A_1, \dots, x_n:A_n \vdash t : B}}{x_{11}:A_{11}, \dots, x_{nm_n}:A_{nm_n} \vdash t[s_i/x_i]_i : B} \text{ C}$$

tähistame seda tõestuspuud $\mathcal{T}$ -ga. Seega $(t \circ (s_1, \dots, s_n)) \circ (v_{11}, \dots, v_{nm_n})$ on kujul

$$\frac{\left(\left(\frac{\vdots}{x_{ij1}:A_{ij1}, \dots, x_{ijp_{ij}}:A_{ijp_{ij}} \vdash v_{ij} : A_{ij}} \right)_{j=1}^{m_i} \right)_{i=1}^n \quad \mathcal{T}}{x_{111}:A_{111}, \dots, x_{nm_n p_{nm_n}}:A_{nm_n p_{nm_n}} \vdash t[s_i/x_i]_i [v_{ij}/x_{ij}]_{i,j} : B} \text{ C}$$

Kompositsioonide $s_i \circ (v_{i1}, \dots, v_{im_i})$ tõestuspuu on iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\frac{\left(\frac{\vdots}{x_{ij1}:A_{ij1}, \dots, x_{ijp_{ij}}:A_{ijp_{ij}} \vdash v_{ij} : A_{ij}} \right)_{j=1}^{m_i} \quad \frac{\vdots}{(x_{ij}:A_{ij})_{j \in \{1, \dots, m_i\}} \vdash s_i : A_i}}{x_{i11}:A_{i11}, \dots, x_{im_i p_{im_i}}:A_{im_i p_{im_i}} \vdash s_i[v_{ij}/x_{ij}]_j : A_i} \text{ C}$$

mida edaspidi tähistame $\mathcal{T}_i$. Kompositsiooni

$$t \circ (s_1 \circ (v_{11}, \dots, v_{1m_1}), \dots, s_n \circ (v_{n1}, \dots, v_{nm_n}))$$

tõestuspuu esitub siis

$$\frac{\vdots \quad \left(\mathcal{T}_i \right)_{i=1}^n \quad \frac{\vdots}{x_1:A_1, \dots, x_n:A_n \vdash t : B}}{x_{111}:A_{111}, \dots, x_{nm_n p_{nm_n}}:A_{nm_n p_{nm_n}} \vdash t[s_i[v_{i1}/x_{i1}] \dots [v_{im_i}/x_{im_i}]/x_i]_i : B} \text{ C}$$

Sellises olukorras kehtib

$$\begin{aligned} & t[s_1/x_1] \dots [s_n/x_n][v_{11}/x_{11}] \dots [v_{nm_n}/x_{nm_n}] \\ &= t[s_1[v_{11}/x_{11}] \dots [v_{1m_1}/x_{1m_1}]/x_1] \dots [s_n[v_{n1}/x_{n1}] \dots [v_{nm_n}/x_{nm_n}]/x_n], \end{aligned}$$

sest iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral esinevad termis s_i parajasti muutujad $x_{i1}, \dots, x_{im_i}$. Samuti on $i \neq j$ korral s_i ja s_j muutujate hulgad lõikumatud. Seega on substituutsioonid soovitud viisil assotsiatiivsed.

Igale tüübile $A \in \Sigma$ seame vastavusse multikateooria objekti $A \in \text{Ob}(T(\Sigma))$. Igale operaatorile $(f : A_1, \dots, A_n \rightarrow B) \in \Sigma$ saame määrata morfismi $[f(x_1, \dots, x_n)]_{\cong}$, kus

$x_1:A_1, \dots, x_n:A_n$ on mingid paarikaupa erinevad muutujad. Siis tõepoolest

$$[f(x_1, \dots, x_n)]_{\cong} : A_1, \dots, A_n \rightarrow B$$

kategoorias $T(\Sigma)$. Seega on paar $T(\Sigma)$ koos kirjeldatud kujutusega multikategooria signatuuril Σ . $\square$

3.2 Termid ja vaba multikategooria

Definitsioon 3.7 ([7, definitsioon 1.6.1]). *Signatuuride kategooria, mida tähistame $\mathbf{Sig}$, defineeritakse järgmiselt:*

1. **$\mathbf{Sig}$** objektid on signatuurid;
2. morfism ψ objektist $\Sigma = (\Sigma, \mathcal{F})$ objekti $\Sigma' = (\Sigma', \mathcal{F}')$ koosneb funktsioonist $\psi_0 : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ ja iga hulga $\Sigma^* \times \Sigma$ elemendi $((A_1, \dots, A_n), B)$ jaoks funktsioonist $\psi_{A_1, \dots, A_n; B} : \mathcal{F}(A_1, \dots, A_n; B) \rightarrow \mathcal{F}'(\psi_0(A_1), \dots, \psi_0(A_n); \psi_0(B))$;
3. kui $\psi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ ja $\psi' : \Sigma' \rightarrow \Sigma''$, siis nende kompositsioon on $\psi' \psi : \Sigma \rightarrow \Sigma''$, kus $(\psi' \psi)_0 = \psi'_0 \circ \psi_0$ ja $(\psi' \psi)_{A_1, \dots, A_n; B} = \psi'_{\psi_0(A_1), \dots, \psi_0(A_n); \psi_0(B)} \circ \psi_{A_1, \dots, A_n; B}$;
4. ühikmorfism signatuuril $\Sigma = (\Sigma, \mathcal{F})$ koosneb identsusteisendusest I_Σ ja iga hulga $\Sigma^* \times \Sigma$ elemendi $((A_1, \dots, A_n), B)$ korral identsusteisendusest $I_{\mathcal{F}(A_1, \dots, A_n; B)}$.

Definitsioon 3.8. *Multikategooriate kategooria, mida tähistame $\mathbf{MCat}$, defineeritakse järgmiselt:*

1. **$\mathbf{MCat}$** objektid on multikategooriad;
2. morfism H multikategooriast $\mathcal{M}$ multikategooriasse $\mathcal{N}$ koosneb kujutusest $H_0 : \text{Ob}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{N})$ ja iga klassi $\text{Ob}(\mathcal{M})^* \times \text{Ob}(\mathcal{M})$ elemendi $((X_1, \dots, X_n), Y)$ korral kujutusest

$$H_{X_1, \dots, X_n; Y} : \mathcal{M}(X_1, \dots, X_n; Y) \rightarrow \mathcal{N}(H_0(X_1), \dots, H_0(X_n); H_0(Y)),$$

sedasi, et mistahes morfismi $f \in \mathcal{M}(X_1, \dots, X_n; Y)$ ja morfismide

$$g_1 \in \mathcal{M}(X_{11}, \dots, X_{1m_1}; X_1), \dots, g_n \in \mathcal{M}(X_{n1}, \dots, X_{nm_n}; X_n)$$

korral

$$H(f) \circ (H(g_1), \dots, H(g_n)) = H(f \circ (g_1, \dots, g_n))$$

ning mistahes objekti $X \in \mathcal{M}$ korral $H_{X;X}(1_X) = 1_{H_0(X)}$;

3. kompositsiooni defineerib kujutuste järjest rakendamine;
4. ühikmorfism koosneb identsusteisendustest.

Oleme näidanud, et saame igal signatuuril defineerida multikateooria. Sisuliselt on multikateooria lihtsalt signatuur koos lisastruktuuriga (komponeerimise ja ühikute-ga). See annab alust rääkida unustavast funktorist nende struktuuride kategooriate vahel. Unustav funktor $U : \mathbf{MCat} \rightarrow \mathbf{Sig}$ kujutab multikateooria signatuuriks, mille tüübid on kategooria objektid ja operaatorid on kategooria morfismid. Multikateo-oriate morfismidel käitub U identsusteisendusena.

Definitsioon 3.9 ([8, Definitsioon 6.1]). Olgu $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ kategooriad. **Adjunktsioon** kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$ on kolmik $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, kus $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ja $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ on funktorid ning $\varphi = (\varphi_{A,B})_{(A,B) \in \mathcal{A}_0 \times \mathcal{B}_0}$ on bijektiivsete kujutuste

$$\varphi_{A,B} : \mathcal{B}(F(A), B) \rightarrow \mathcal{A}(A, G(B))$$

süsteem, mis on loomulik A ja B suhtes. Kui $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ on adjunktsioon, siis ütleme, et F on G **vasakpoolne kaasfunktor** ja G on F **parempoolne kaasfunktor** ning kirjutame $F \dashv G$.

Definitsioon 3.10. Unustava funktori $U : \mathbf{MCat} \rightarrow \mathbf{Sig}$ vasakpoolse kaasfunktori kujutises olevaid multikateooriaid (isomorfismi täpsuseni) nimetame **vabadeks multikateooriateks** signatuuril Σ .

Kasutame järgnevalt kaasfunktoriteks olemise kontrollimiseks lihtsustavat teoreemi. Enne seda anname vajaliku definitsiooni.

Definitsioon 3.11 ([8, Definitsioon 6.2]). Olgu $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ funktor ja $A \in \mathcal{A}_0$. **Universaalne morfirm** objektist A funktorisse G on paar (u, B) , mis koosneb objektist $B \in \mathcal{B}_0$ ja kategooria $\mathcal{A}$ morfismist $u : A \rightarrow G(B)$, nii et iga paari (g, B') , kus $B' \in \mathcal{B}_0$ ja $g : A \rightarrow G(B')$, jaoks leidub selline üheselt määratud morfirm $f : B \rightarrow B'$ kategoorias $\mathcal{B}$, et $G(f)u = g$.

Teoreem 3.12 ([8, Teoreem 6.5]). *Adjunksiooni $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ määravad täielikult ära funktor $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, iga $A \in \mathcal{A}$ korral objekt $F_0(A) \in \mathcal{B}_0$ ning universaalne morfism $\eta_A : A \rightarrow G(F_0(A))$ objektist A funktooris G . Siis funktor F on objektidel antud kujutusega F_0 ja morfismidel $k : A \rightarrow A'$ defineeritud võrdusega $G(F(k))\eta_A = \eta_{A'}k$.*

Edaspidi mõtleme morfismi $\iota : \Sigma \rightarrow \mathcal{M}$ all signatuuride kategooria morfismi $\iota : \Sigma \rightarrow U(\mathcal{M})$. Selline terminoloogia on õigustatud, sest signatuuri $U(\mathcal{M})$ tüübid on kategooria $\mathcal{M}$ objektid ning operaatorid selle kategooria morfismid. On selge, et kui leidub morfism $\iota : \Sigma \rightarrow \mathcal{M}$, siis ongi paar $(\mathcal{M}, \iota)$ multikategooria signatuuril Σ . Teoreem 3.12 ütleb, et kui see morfism rahuldab vastavat universaalomadust, siis on $\mathcal{M}$ ka vaba multikategooria signatuuril Σ . Nüüd on meil vajalikud teadmised, et tõestada järgmine teoreem.

Teoreem 3.13. *Multikategooria $T(\Sigma)$ on vaba multikategooria signatuuril Σ .*

Tõestus. Olgu $U : \mathbf{MCat} \rightarrow \mathbf{Sig}$ unustav funktor ja $T : \mathbf{Sig}_0 \rightarrow \mathbf{MCat}_0$, $\Sigma \mapsto T(\Sigma)$.

Me defineerime signatuuride morfismi $\eta_\Sigma : \Sigma \rightarrow U(T(\Sigma))$ järgmiselt:

$$\begin{aligned} (\eta_\Sigma)_0(A) &= A; \\ (\eta_\Sigma)_{A_1, \dots, A_n; B}(f) &= [f(x_1, \dots, x_n)]_{\cong}, \end{aligned}$$

kus $A, A_1, \dots, A_n, B \in \Sigma$, $(f : A_1, \dots, A_n \rightarrow B) \in \Sigma$ ja $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$ on muutujad. Märkame, et teoreemi 3.6 tõestuses väitsime tõepoolest sarnasel arutlusel, et $T(\Sigma)$ on multikategooria signatuuril Σ . Nüüd veendume, et paar $(\eta_\Sigma, T(\Sigma))$ on ka universaalne morfism. Taas tähistame tõestuses morfisme $[t]_{\cong}$ lühemalt lihtsalt t . Olgu antud paar $(\psi, \mathcal{M})$ sedasi, et $\psi : \Sigma \rightarrow U(\mathcal{M})$. Me defineerime multikategooriate morfismi $H : T(\Sigma) \rightarrow \mathcal{M}$ järgmiselt:

- $H_0(A) = \psi_0(A)$;
- kui x on muutuja tüüpi A , siis $H_{A;A}(x) = 1_A$;
- kui $t = f(t_1, \dots, t_r)$ ja $f : C_1, \dots, C_r \rightarrow B \in \Sigma$, siis

$$H_{A_1, \dots, A_n; B}(t) = \psi_{C_1, \dots, C_r; B}(f) \circ (H(t_1), \dots, H(t_r)).$$

Näitame induktsiooniga, et H on korrektselt defineeritud. Selleks kontrollime, et kui $t_1 \cong t_2 : B$, siis $H(t_1) = H(t_2)$. Kui termid t_1, t_2 on muutujad, siis $H_{B;B}(t_1) =$

$1_B = H_{B;B}(t_2)$. Olgu siis $t_1 = f(s_1, \dots, s_r)$ ja $t_2 = f(v_1, \dots, v_r)$. Sellest, et $t_1 \cong t_2$ peab kehtima, et $s_i \cong v_i$ iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral ning me eeldame, et iga i korral $H(s_i) = H(v_i)$. Sel juhul $H(t_1) = H(f(s_1, \dots, s_r)) = \psi(f) \circ (H(s_1), \dots, H(s_n)) = \psi(f) \circ (H(v_1), \dots, H(v_n)) = H(f(v_1, \dots, v_n)) = H(t_2)$. Lisaks kehtib $U(H) \circ \eta_\Sigma = \psi$, sest

$$\begin{aligned} (U(H) \circ \eta_\Sigma)_0(A) &= (H \circ \eta_\Sigma)_0(A) = H_0((\eta_\Sigma)_0(A)) \\ &= H_0(A) = \psi_0(A); \\ (U(H) \circ \eta_\Sigma)_{A_1, \dots, A_n; B}(f) &= (H \circ \eta_\Sigma)_{A_1, \dots, A_n; B}(f) \\ &= H_{A_1, \dots, A_n; B}((\eta_\Sigma)_{A_1, \dots, A_n; B}(f)) \\ &= H_{A_1, \dots, A_n; B}(f(x_1, \dots, x_n)) \\ &= \psi_{A_1, \dots, A_n; B}(f) \circ (1_{A_1}, \dots, 1_{A_n}) \\ &= \psi_{A_1, \dots, A_n; B}(f). \end{aligned}$$

Näitame, et H on üheselt määratud. Oletame selleks, et leidub ka $H' : T(\Sigma) \rightarrow \mathcal{M}$ sedasi, et $U(H') \circ \eta_\Sigma = \psi$. Siis $H'_0(A) = (U(H') \circ \eta_\Sigma)_0(A) = \psi_0(A) = H_0(A)$ iga $A \in \Sigma$ korral. Induktsiooni abil näitame, et kõigi $A_1, \dots, A_n, B \in \Sigma$ korral $H'_{A_1, \dots, A_n; B}(t) = H_{A_1, \dots, A_n; B}(t)$.

BAAS. Kui $t = x:A$ on muutuja, siis

$$H'_{A;A}(x) = H'_{A;A}(1_A) = 1_{H'(A)} = 1_{H(A)} = H_{A;A}(x),$$

sest H ja H' on kategooria **MCat** morfismid.

JUHT $t = f(x_1, \dots, x_n)$. Kui $t = f(x_1, \dots, x_n) : B$, kus $f : A_1, \dots, A_n \rightarrow B$ ja $x_1:A_1, \dots, x_n:A_n$ on muutujad, siis

$$H'_{A_1, \dots, A_n; B}(f(x_1, \dots, x_n)) = U(H') \circ \eta_\Sigma(f) = \psi(f) = H_{A_1, \dots, A_n; B}(f(x_1, \dots, x_n)).$$

JUHT $t = f(t_1, \dots, t_r)$. Olgu $t = f(t_1, \dots, t_r)$, kus $t_1 : C_1, \dots, t_r : C_r$ on termid. Siis on iga $i \in \{1, \dots, r\}$ korral $t_i : \Gamma_i \rightarrow C_i$ sedasi, et $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r = A_1, \dots, A_n$. Eeldame, et

iga t_i korral $H'_{\Gamma_i;C_i}(t_i) = H_{\Gamma_i;C_i}(t_i)$, sellest

$$\begin{aligned}
H'_{A_1,\dots,A_n;B}(f(t_1,\dots,t_r)) &= H'_{A_1,\dots,A_n;B}(f(x_1,\dots,x_r) \circ (t_1,\dots,t_r)) \\
&= H'_{C_1,\dots,C_r;B}(f(x_1,\dots,x_r)) \circ (H'_{\Gamma_1;C_1}(t_1),\dots,H'_{\Gamma_r;C_r}(t_r)) \\
&= H_{C_1,\dots,C_r;B}(f(x_1,\dots,x_r)) \circ (H_{\Gamma_1;C_1}(t_1),\dots,H_{\Gamma_r;C_r}(t_r)) \\
&= H_{A_1,\dots,A_n;B}(f(x_1,\dots,x_r) \circ (t_1,\dots,t_r)) = H_{A_1,\dots,A_n;B}(f(t_1,\dots,t_r)),
\end{aligned}$$

sest H ja H' on multikategooriade morfismid ning seetõttu komponeerimist säilitavad.

Tänu teoreemile 3.12 on meil sellega määratud adjunksioon $T \dashv U$. $\square$

Sellest tõestusest järeldub otse järgmine väide.

Järeldus 3.14. *Leidub morfism $\eta_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow T(\Sigma)$ sedasi, et iga multikategooria $\mathcal{M}$ ja morfismi $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathcal{M}$ korral eksisteerib unikaalne multikategooriade morfism $F : T(\Sigma) \rightarrow \mathcal{M}$ nii, et $F \circ \eta_{\Sigma} = \varphi$.*

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma & \xrightarrow{\eta_{\Sigma}} & T(\Sigma) \\
& \searrow \varphi & \downarrow F \\
& & \mathcal{M}
\end{array}$$

Tuletame meelde, et intuitiivselt võib lugeja mõelda tüüpidest kui lausearvutuslikest lausetest. Iga hästi tüübitud term $x_1:A_1, \dots, x_n:A_n \vdash t : B$ modelleerib tõestust väitele B , kui eeldame, et on antud mingid tõestused väidetele $A_1, \dots, A_n$. Tihti nimetatakse lineaarloogikat ilma lausearvutuse teheteta multikategooriade **sisemiseks keeleks** (ingl *internal language*). Saame antud lausete ning aksioomide korral (ehk fikseeritud signatuuril) defineerida vaba multikategooria ning seega oma loogika süsteemis kasutada teadmisi, mis kehtivad kõigis multikategooriatel. Samuti saame vabas multikategoorias tõestada teoreeme, mis universaalmorfismi abil kehtivad kõigis multikategooriatel.

4 $\otimes$ -termid

Seni oli meie modelleeritud loogika struktuur üsna lihtne. Kui tahame vaadata loogikat ka näiteks koos tehtemärkidega, siis peame andma rohkem struktuuri nii termarvutuslikule esitusele kui neid modelleerivatele multikategoriatele. Selles peatükis lisame modelleeritavale sekventsarvutusele järgmised reeglid:

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\vdash \mathbb{1}} \text{1R} \qquad \frac{\Gamma, \Delta \vdash B}{\Gamma, \mathbb{1}, \Delta \vdash B} \text{1L} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B} \otimes\text{R} \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, A \otimes B, \Delta \vdash C} \otimes\text{L}
 \end{array}$$

Lugeja võib mõelda lausest $A \otimes B$ kui lausearvutuslikust A ja B konjunktsioonist. Sümbol $\mathbb{1}$ tähistab lausearvutuslikku tõesust.

Olgu jällegi antud signatuur $\Sigma = (\Sigma, \mathcal{F})$. Laiendame järgnevalt tüüpide mõistet, et rohkema struktuuriga loogikat modelleerida.

Definitsioon 4.1. *Konstrueerime $\otimes$ -tüüpide hulga $\Sigma^\otimes$:*

- kui A on tüüp, siis A on $\otimes$ -tüüp;
- kui $A_1, \dots, A_n$ on $\otimes$ -tüübid, siis $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ on $\otimes$ -tüüp ($n \in \mathbb{N}$);
- $\mathbb{1}$ on $\otimes$ -tüüp.

Definitsioon 4.2. *Fikseerime iga $\otimes$ -tüübi A jaoks loenduva hulga $X_A^\otimes$ sedasi, et kui $A \neq B$, siis on hulgad $X_A^\otimes$ ja $X_B^\otimes$ lõikumatud. Hulka $X_A^\otimes$ nimetame A -tüüpi $\otimes$ -muutujate hulgaks ja selle elemente $\otimes$ -muutujateks tüüpi A .*

Kui $x \in X_A^\otimes$, siis ütleme, et $\otimes$ -muutuja x on tüüpi A . Hulka

$$X^\otimes := \bigcup_{A \in \Sigma^\otimes} X_A^\otimes$$

nimetame **$\otimes$ -tüübitud muutujate hulgaks**. Konteksti defineerime samuti, kui eelnevalt, kuid lubame neis nüüd esineda $\otimes$ -muutujatel.

Definitsioon 4.3. *$\otimes$ -kontekstiks Γ üle signatuuri Σ nimetame järjendit paarikaupa erinevatest $\otimes$ -muutujatest koos nende tüüpidega.*

Definitsioon 4.4. Olgu Γ $\otimes$ -kontekst, t $\otimes$ -term ja B $\otimes$ -tüüp. Siis nimetame kolmikut $\Gamma \vdash t : B$ $\otimes$ -sekventsiks üle signatuuri Σ .

Praegu ei ole meil aga ühtegi reeglit, et konstrueerida terme, mis oleks tüüpi $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ või tüüpi $\mathbb{1}$. Seega soovime lisaks laiendada oma termide definitsiooni.

Definitsioon 4.5. Konstrueerime $\otimes$ -termid järgmiselt:

- kui $x \in X^\otimes$, siis x on $\otimes$ -term;
- kui f on n -aarne operaator ja $t_1, \dots, t_n$ on $\otimes$ -termid, siis $f(t_1, \dots, t_n)$ on $\otimes$ -term;
- kui $t_1, \dots, t_n$ on $\otimes$ -termid, siis $t_1 \otimes \dots \otimes t_n$ on $\otimes$ -term;
- kui t on $\otimes$ -term ja v on $\otimes$ -term, kus esinevad $\otimes$ -muutujad $x_1, \dots, x_n$ vabalt, siis on $\text{match}(t; x_1 \dots x_n.v)$ $\otimes$ -term;
- $\star$ on $\otimes$ -term;
- kui t ning s on $\otimes$ -termid ja Δ ning Φ on kontekstid, siis $\text{match}_{\Delta|\Phi}(t; s)$ on $\otimes$ -term.

Lisame kaks reeglit ka hästi tüübitud $\otimes$ -termide konstrueerimiseks. Ütleme, et $\otimes$ -term t $\otimes$ -tüüpi B on hästi tüübitud $\otimes$ -kontekstis Γ , kui saame järgnevate reeglite abil konstrueerida tõestuspuid $\otimes$ -sekventsile $\Gamma \vdash t : B$.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{x:A \vdash x : A} \text{ID} \qquad \frac{(\Gamma_i \vdash t_i : A_i)_{i=1}^n \quad f : A_1, \dots, A_n \rightarrow B \in \Sigma}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash f(t_1, \dots, t_n) : B} f \\
\\
\frac{\Gamma_1 \vdash t_1 : A_1 \quad \dots \quad \Gamma_n \vdash t_n : A_n}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash t_1 \otimes \dots \otimes t_n : A_1 \otimes \dots \otimes A_n} \otimes\text{I} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash t : A_1 \otimes \dots \otimes A_n \quad \Delta, x_1:A_1, \dots, x_n:A_n, \Phi \vdash s : B}{\Delta, \Gamma, \Phi \vdash \text{match}(t; x_1 \dots x_n.s) : B} \otimes\text{E} \\
\\
\frac{}{\vdash \star : \mathbb{1}} \mathbb{1}\text{I} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : \mathbb{1} \quad \Delta, \Phi \vdash s : B}{\Delta, \Gamma, \Phi \vdash \text{match}_{\Delta|\Phi}(t; s) : B} \mathbb{1}\text{E}
\end{array}$$

Iga $\otimes$ -tüüpi A jaoks on seega määratud hulk, mille elemendid on $\otimes$ -termid tüüpi A ja mida tähistame $T_A^\otimes(X^\otimes)$. Kõigi $\otimes$ -termide hulka, mis on mingis kontekstis hästi tüübitud, tähistame $T^\otimes(X^\otimes)$.

Kuna selles ja järgmises peatükis räägimegi vaid $\otimes$ -termidest, siis ei ole meil ilmutatult vaja teha vahet varasematel mõistritel ja selles peatükis defineeritud $\otimes$ -mõistritel. Seega edaspidi kui on juttu tüüpidest, siis mõtleme selle all $\otimes$ -tüüpe, termide all mõtleme $\otimes$ -terme jne. Samuti kui kirjutame $x:A$ või $t : A$, siis mõtleme vastavalt, et $\otimes$ -muutuja x on $\otimes$ -tüüpi A ja hästi tüübitud $\otimes$ -term t on $\otimes$ -tüüpi A .

Tuletusreeglitest tähendavad reeglid $\otimes I$ ja $\mathbb{1} I$ üldiselt vastavate sümbolite tõestusesse sisse toomist, kus I viitab ingliskeelsele sõnale „*introduction*”. Duaalselt tähendavad $\otimes E$ ja $\mathbb{1} E$ sümbolite ära kaotamist, kus E tuleb sõnast „*elimination*”. Lisatud reeglitest modelleerib $\otimes I$ lausete $A_1, \dots, A_n$ vastavate tõestuste $t_1, \dots, t_n$ nõ ühendamist. Sel viisil saadud term $t_1 \otimes \dots \otimes t_n$ on tõestus lausete $A_1, \dots, A_n$ konjunktsioonile. Reegel $\otimes E$ kirjeldab, kuidas lausete $A_1, \dots, A_n$ konjunktsiooni tõestust t rakendada tõestuses s , mis viitab nende lausete tõestustele eraldi. Reegel $\mathbb{1} I$ toob sisse kanoonilise tõestuse $\star$ lausearvutusliku tõesuse $\mathbb{1}$ jaoks. Reegli $\mathbb{1} E$ intuitsioon võiks olla see, et lausearvutusliku tõesuse $\mathbb{1}$ saame alati triviaalselt ära kasutada.

Näide 4.6. *Olgu meie signatuuris tüübid:*

$A = \text{„mul on 5 eurot”};$

$B = \text{„mul on šokolaad”};$

$C = \text{„mul on pudel limonaadi”};$

operaator $f : A \rightarrow B$ ja muutujad $x:A, y:C$. Operaator f tähistagu 5 euro eest šokolaadi ostmise tegevust. Saame konstrueerida hästi tüübitud termi $x:A, y:C \vdash f(x) \otimes y : B \otimes C$ ehk tõestuse, et meil on šokolaad ja pudel limonaadi. Jällegi võime mõelda muutujast x kui 5-eurosest rahatähest ja muutujast y kui limonaadi pudelist. Kui meil on ka teine muutuja $x':A$, siis saame konstrueerida hästi tüübitud termi $x':A, x:A, y:C \vdash x' \otimes f(x) \otimes y : A \otimes B \otimes C$ ehk tõestuse, et meil on 5-eurone, šokolaad ja pudel limonaadi.

Termis $\text{match}(t; x_1 \dots x_n.s)$ nimetame muutujaid $x_1, \dots, x_n$ **seotud muutujateks**. Termis seotud muutujad ei esine selle termi kontekstis, nad on seotud termi enda poolt. Paneme aga tähele, et need muutujad on vabad termis s .

Oleme eelnevalt faktoriseerinud terme ekvivalentsiseose $\cong$ järgi. See väljendab ideed,

et hästi tüübitud termi struktuuris ei ole vabade muutujate tähistused olulised. Sarnast mõtet tahame anda edasi ka seotud muutujate jaoks. Intuitiivselt võib seotud muutujatest mõelda kui selle termi mõttes lokaalselt defineeritud muutujatest. Paralleeliks toome näiteks kahe muutuja funktsiooni $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, mis kujutab $(x, y) \mapsto x - y$. On selge, et võime funktsiooni panna kirja ka kujul $(a, b) \mapsto a - b$ ning see väljendab sama funktsiooni, kuigi on süntaktiliselt erinev. Samas nt funktsioonid $(x, y) \mapsto x - y$ ja $(a, b) \mapsto b - a$ ei ole võrdsed, sest muutujate ümber nimetamine muudab siin arvutusskeemi tähendust.

Öeldakse, et termid t_1 ja t_2 on **α -ekvivalentsed** ja kirjutatakse $t_1 \cong_\alpha t_2$, kui nad on võrdsed seotud muutujate tähistuste süsteemse ümber nimetamise täpsuseni. [6, definitsioon 1.17] Selles töös me α -ekvivalentsusele formaalselt liialt tähelepanu ei pööra. Lugeja võib piirduda vaid intuitiivse arusaamaga, toetudes järgnevale näitele.

Näide 4.7. Olgu x, y, z, q muutujad ja t_1, t_2 termid, siis

- $match(t_1; xy.x \otimes y) \cong_\alpha match(t_1; yx.y \otimes x);$
- $match(t_2; xy.x \otimes y) \cong_\alpha match(t_2; zq.z \otimes q);$
- $match(t_2; xyz.x \otimes y \otimes z) \not\cong_\alpha match(t_2; xyz.y \otimes x \otimes z).$

Järgnevalt vaatame kõiki hästi tüübitud terme α -ekvivalentsi täpsuseni. Seega kui $t_1 \cong_\alpha t_2$, siis mõistame seda kui $t_1 = t_2$. Lisaks eeldame kõikjal järgnevates tõestustes, et kõigi vaadeldavate termide kõik seotud muutujad erinevad kõigist vaadeldavatest vabadest muutujast (sisuliselt valime sellised α -ekvivalentsiklasside esindajad, et eeldus kehtiks).³ See eeldus lubab meil vältida keerukamaid erijuhte hilisemates konstruktsioonides. Näiteks teoreemi 5.6 tõestuses morfismide kompositsiooni defineerituse küsimusi.

Laiendame nüüd ka varasemalt defineeritud substitutsiooni mõistet $\otimes$ -termidele, täien-

³Kirjanduses nimetatakse seda Barendregti konventsiooniks (ingl *Barendregt convention*).

dades selleks reegleid:

$$\begin{aligned}
x[t/y] &= \begin{cases} t, & \text{kui } x = y \\ x & \text{muidu} \end{cases} \\
f(t_1, \dots, t_n)[t/y] &= f(t_1[t/y], \dots, t_n[t/y]); \\
(t_1 \otimes \dots \otimes t_n)[t/y] &= (t_1[t/y]) \otimes \dots \otimes (t_n[t/y]); \\
\text{match}(v; x_1 \dots x_n.s)[t/y] &= \begin{cases} \text{match}(v[t/y]; x_1 \dots x_n.(s[t/y])), \\ \text{kui } y \notin \{x_1, \dots, x_n\} \\ \text{teistel juhtudel on substitutioon defineerimata} \end{cases} \\
\star[t/y] &= \star; \\
\text{match}_{\Delta|\Phi}(s; v)[t/y] &= \text{match}_{\Delta|\Phi}(s[t/y]; v[t/y]),
\end{aligned}$$

kus $x, x_1, \dots, x_n, y$ on muutujad ja $s, v, t_1, \dots, t_n, t$ on termid. Termil struktuuriga $\text{match}(v; x_1 \dots x_n.s)$ oleme substitutsiooni defineerinud vaid siis, kui asendatav muutuja on vaba või ei esine termis. Substitutsiooni mõiste sisse toomise peamine eesmärk antud töös on termide poolt moodustatava multikateooria komponeerimise defineerimine. Et komponeerimine realiseerub vabade muutujate kaudu ning oleme juba eeldanud, et need erinevad alati seotud muutujatest, siis on selline osaline definitsioon meie eesmärki silmas pidades õigustatud.

Näide 4.8. Olgu $x_1:A, x_2:A, y_1:B, y_2:B, z_1:C$ muutujad ja $f : A \rightarrow B, g : B, C \rightarrow A$ operaatorid.

- $(y_1 \otimes f(x_1))[x_2/x_1] = y_1 \otimes f(x_2)$
- $(\text{match}(f(x_1); y_1.g(y_1, z_1)))[x_2/x_1] = \text{match}(f(x_2); y_1.g(y_1, z_1))$

Ekvivalentsiseos $\cong$ on hästi tüübitud $\otimes$ -termidel defineeritud samuti nagu eelnevalt.

Definitsioon 4.9. Termide t_1 ja t_2 jaoks kirjutame $t_1 \cong t_2 : A$, kui leidub lõplik arv nende termide suhtes **värskete** vabade muutujate substitutsioone, mis need termid võrdsustavad.

Kuna seotud muutujate süsteemse ümbernimetamiseni loeme terme niikuinii võrdseteks, siis on vaja seost $\cong$ vaadelda vaid seoses vabade muutujatega.

Laiendame nüüd ka eelnevalt tõestatud lemmasid. Eeldame kõikjal, et kui on juttu substituutsioonist, siis on termid valitud sedasi, et substituutsioon on defineeritud. Tõestatud tulemusi rakendame samuti vaid sellistel juhtudel.

Lemma 4.10. *Kõikide $t \in T^\otimes(X)$ ja muutujate $x \in X$ puhul $t[x/x] = t$.*

Tõestus. Kasutame induktsiooni termi t struktuuril. Olukorrad $t = x$ (kus x on muutuja) ja $t = f(t_1, \dots, t_n)$ on tõestatud lemmaga 2.17.

JUHT $t = t_1 \otimes \dots \otimes t_n$. Olgu $t = t_1 \otimes \dots \otimes t_n$ ja eeldame, et väide kehtib $t_1, \dots, t_n$ korral. Siis $t[x/x] = (t_1[x/x] \otimes \dots \otimes t_n[x/x]) = (t_1 \otimes \dots \otimes t_n) = t$.

JUHT $t = \text{match}(v; x_1 \dots x_n.s)$. Olgu nüüd $t = \text{match}(v; x_1 \dots x_n.s)$. Eeldame, et väide kehtib termide v ja s korral. Siis $t[x/x] = \text{match}(v[x/x]; x_1 \dots x_n.s[x/x]) = \text{match}(v; x_1 \dots x_n.s) = t$, kus $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$.

JUHT $t = \star$. Kui $t = \star$, siis kehtib väide ilmselt.

JUHT $t = \text{match}_{\Delta|\Phi}(v; s)$. Olgu $t = \text{match}_{\Delta|\Phi}(v; s)$ ja me eeldame, et väide kehtib termide v ja s korral. Siis

$$t[x/x] = \text{match}_{\Delta|\Phi}(v[x/x]; s[x/x]) = \text{match}_{\Delta|\Phi}(v; s) = t.$$

□

Lemma 4.11. *Kui termi t korral $\Gamma \vdash t : B$, siis kontekstis Γ esinevad parajasti need muutujad, mis esinevad termis t vabalt.*

Tõestus. ($\Rightarrow$) Olgu $x:A \in \Gamma$. Kasutame induktsiooni termi t tõestuspüü struktuuril. Olukorrad $t = x$ (kus x on muutuja) ja $t = f(t_1, \dots, t_n)$ on tõestatud lemmaga 2.18.

JUHT $\otimes$ I. Olgu term t saadud $\otimes$ I reegli abil. Seega $t = t_1 \otimes \dots \otimes t_n$ ja me eeldame, et väide kehtib termide $t_1, \dots, t_n$ korral. Sel juhul $B = A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ ning $\Gamma = \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, kus iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $\Gamma_i \vdash t_i : A_i$. Seega leidub $j \in \{1, \dots, n\}$ sedasi, et $x:A \in \Gamma_j$ ning eeldusest järeldub siis, et muutuja x esineb termis t_j . Järelikult esineb muutuja x ka termis $t = t_1 \otimes \dots \otimes t_j \otimes \dots \otimes t_n$.

JUHT $\otimes$ E. Olgu nüüd t saadud reegli $\otimes$ E abil. Seega $t = \text{match}(v; x_1 \dots x_n.s)$ ning me eeldame, et väide kehtib termide v ja s korral. Selles olukorras kehtib $\Gamma = \Delta, \Psi, \Phi$ sedasi, et $\Psi \vdash v : A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ ning $\Delta, x_1:A_1, \dots, x_n:A_n, \Phi \vdash s : B$ mingite muutujate ja tüüpide $x_1:A_1, \dots, x_n:A_n$ korral. Kuna $x \in \Delta, \Psi, \Phi$, siis on kaks varianti. Kui $x \in \Psi$, siis induktsiooni eeldusest esineb x termis v vabalt ning ka termis

$\text{match}(v; x_1 \dots x_n.s)$ vabalt. Teisel juhul kehtib $x \in \Delta, \Phi$ ning sel juhul esineb induktsiooni eeldusest muutuja x termis s . Teame ka, et $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$, muidu oleks x järjendis $\Delta, x_1:A_1, \dots, x_n:A_n, \Phi$ korduvalt ning tegu poleks kontekstiga. Seega on x termis $\text{match}(v; x_1 \dots x_n.s)$ vaba.

JUHT 11I. Kui term t on saadud reegli 11I abil, siis ei esine kontekstis Γ muutujaid.

JUHT 11E. Olgu termi tõestuspuid viimane reegel 11E, seega on $\Gamma \vdash t : B$ kujul $\Delta, \Psi, \Phi \vdash \text{match}_{\Delta|\Phi}(v; s) : B$, kus $\Psi \vdash v : \mathbb{1}$ ja $\Delta, \Phi \vdash s : B$. Me eeldame, et väide kehtib termide v ja s jaoks. Jällegi vaatame kahte juhtu. Kui kehtib $x \in \Psi$, siis eeldusest esineb ta termis v , ja kui $x \in \Delta, \Phi$, siis esineb ta eeldustest termis s . Mõlemal juhul esineb x termis t .

($\Leftarrow$) Esinegu muutuja $x:A$ termis t vabalt. Kasutame induktsiooni termi t tõestuspuid struktuuril. Olukorrad $t = x$ (kus x on muutuja) ja $t = f(t_1, \dots, t_n)$ on tõestatud lemmaga 2.18.

JUHT $\otimes$ I. Olgu term t saadud reegli $\otimes$ I abil. Järelikult $t = t_1 \otimes \dots \otimes t_n$ ja eeldame, et väide kehtib termide $t_1, \dots, t_n$ korral. Siis $B = A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ ning iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $\Gamma_i \vdash t_i : A_i$. Sellest $\Gamma = \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Kuna $t = t_1 \otimes \dots \otimes t_n$, siis leidub $j \in \{1, \dots, n\}$ sedasi, et x esineb termis t_j ning induktsiooni eeldusest siis $x:A \in \Gamma_j$. Järelikult esineb muutuja $x:A \in \Gamma_j$ ja ka $x:A \in \Gamma$.

JUHT $\otimes$ E. Olgu nüüd term t saadud reegli $\otimes$ E abil. Seega $t = \text{match}(v; x_1 \dots x_n.s)$ ning me eeldame, et väide kehtib termide v ja s korral. Jällegi $\Gamma = \Delta, \Psi, \Phi$ sedasi, et $\Psi \vdash v : A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ ning $\Delta, x_1:A_1, \dots, x_n:A_n, \Phi \vdash s : B$ mingite muutujate $x_1:A_1, \dots, x_n:A_n$ korral. Kuna x esineb termis $t = \text{match}(v; x_1 \dots x_n.s)$ vabalt, siis on selge, et saame vaadata kahte varianti. Kui x esineb termis v , siis leidub see muutuja ka termis $t = \text{match}(v; x_1 \dots x_n.s)$ ning induktsiooni eeldusest $x:A \in \Psi$. Teisel juhul esineb muutuja x termis s , kuid $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$. Induktsiooni eeldusest $x:A \in \Delta, x_1:A_1, \dots, x_n:A_n, \Phi$ ning seega $x:A \in \Delta, \Phi$ ehk $x:A \in \Delta, \Psi, \Phi$.

JUHT 11I. Kui ter t on saadud reegli $\otimes$ I abil, siis $t = \star$ ja temas ei esine muutujaid.

JUHT 11E. Olgu termi tõestuspuid viimane reegel 11E, seega on $\Gamma \vdash t : B$ kujul $\Delta, \Psi, \Phi \vdash \text{match}_{\Delta|\Phi}(v; s) : B$, kus $\Psi \vdash v : \mathbb{1}$ ja $\Delta, \Phi \vdash s : B$. Me eeldame, et väide kehtib termide v ja s jaoks. Kuna muutuja x esineb termis t , siis saame vaadata kahte juhtu. Kui muutuja x esineb termis v , siis induktsioonist ka kontekstis Ψ , ning kui ta esineb termis s , siis kontekstist Δ, Φ . Mõlemal juhul esineb ta termi t kontekstis. $\square$

Lemma 4.12. *Kui term t on mingis kontekstis hästi tüübitud, siis selles termis ei esine ükski vaba muutuja korduvalt.*

Tõestus. Kehtigu $\Gamma \vdash t : B$ ning kasutame induktsiooni selle sekventsiga tõestuspuid struktuuril. Olukorrad $t = x$ (kus x on muutuja) ja $t = f(t_1, \dots, t_n)$ on tõestatud lemmaga 2.19.

JUHT $\otimes$ I. Olgu viimane reegel tõestuspuid $\otimes$ I. Sel juhul $t = t_1 \otimes \dots \otimes t_n$ ning me eeldame, et väide kehtib $t_1, \dots, t_n$ korral. Iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral on siis term t_i hästi tüübitud kontekstis Γ_i sedasi, et $\Gamma = \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Oleme eeldanud, et termides t_i ei esine ükski muutuja korduvalt. Samuti ei saa nende termide vabade muutujate hulgad lõikuda. Vastasel juhul lõikuksid tänu lemmale 4.11 ka vastavate kontekstide muutujate hulgad ning siis ei oleks Γ kontekst.

JUHT $\otimes$ E. Olgu nüüd sekvents tõestatud $\otimes$ E abil ehk $t = \text{match}(v; x_1 \dots x_n.s)$ ning me eeldame, et termides v ja s ei kordu vabad muutujad. Selles olukorras $\Gamma = \Delta, \Psi, \Phi$ sedasi, et $\Psi \vdash v : A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ ning $\Delta, x_1:A_1, \dots, x_n:A_n, \Phi \vdash s : B$ mingite muutujate $x_1:A_1, \dots, x_n:A_n$ jaoks. Peame näitama, et kui mingi muutuja $x:A$ esineb nii termis v kui termis s , siis ta pole termis t vaba ehk $x \in \{x_1, \dots, x_n\}$. Oletame vastuväiteliselt, et $x:A$ esineb termides v ja s , kuid $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$. Sel juhul $x:A \in \Psi$ ning $x:A \in \Delta, \Phi$, siis aga ei oleks Γ kontekst, mis on vastuolus eeldusega.

JUHT $\mathbb{1}$ I. Kui term t on saadud reegli $\mathbb{1}$ I abil, siis $t = \star$ ning väide kehtib ilmselt.

JUHT $\mathbb{1}$ E. Olgu termi tõestuspuid viimane reegel $\mathbb{1}$ E, seega on $\Gamma \vdash t : B$ kujul $\Delta, \Psi, \Phi \vdash \text{match}_{\Delta|\Phi}(v; s) : B$, kus $\Psi \vdash v : \mathbb{1}$ ja $\Delta, \Phi \vdash s : B$. Me eeldame, et väide kehtib termide v ja s jaoks. Lisaks ei saa nendes termides esinevate muutujate hulgad lõikuda. Vastasel juhul lõikuksid lemmast 4.11 ka vastavate kontekstide muutujate hulgad ning Γ ei oleks kontekst. $\square$

Lause 4.13. *Iga hästi tüübitud termi t jaoks on üheselt määratud kontekst Γ ja tüüp B sedasi, et $\Gamma \vdash t : B$.*

Tõestus. Olukorrad $t = x$ (kus x on muutuja) ja $t = f(t_1, \dots, t_n)$ on tõestatud lausega 2.11.

JUHT $t = t_1 \otimes \dots \otimes t_n$. Olgu term kujul $t = t_1 \otimes \dots \otimes t_n$ ja me eeldame, et väide kehtib termide $t_1, \dots, t_n$ korral. Termi tõestuspuid viimane reegel peab siis olema $\otimes$ I, mille eeldustes on termid $t_1, \dots, t_n$ oma üheselt määratud sekventsidega. Reegel $\otimes$ I

määrab üheselt termi t konteksti ja tüübi termidele $t_1, \dots, t_n$ vastavatest kontekstidest ja tüüpidest.

JUHT $t = \text{match}(v; x_1 \dots x_n.s)$. Olgu $t = \text{match}(v; x_1 \dots x_n.s)$ ja me eeldame, et väide kehtib termide v ja s korral. Ainus võimalus on, et termi t tõestuspuid viimane reegel on $\otimes E$, mille eeldustest on termid v ja s oma üheselt määratud sekventsidega. Kusjuures lemmast 4.11 teame, et termile s vastavas kontekstis esinevad muutujad $x_1, \dots, x_n$ ning selleks, et reegel $\otimes E$ ka rakendatav oleks, esinevad nad kõrvuti. Reegel $\otimes E$ määrab üheselt termi t konteksti termidele v ja s vastavast kontekstist ning termi t tüübi termile s vastavast tüübist.

JUHT $t = \star$. Kui term on kujul $t = \star$, siis kehtib väide ilmselt.

JUHT $t = \text{match}_{\Delta|\Phi}(v; s)$. Olgu term kujul $t = \text{match}_{\Delta|\Phi}(v; s)$ ja eeldame, et väide kehtib termide v ja s jaoks. Ilmselt on term saadud reegli $1E$ abil, mille eeldustes on termid v ja s koos oma üheselt määratud sekventsidega. Kusjuures selleks, et reegel ka rakendatav oleks, peab s olema hästi tüübitud kontekstis Δ, Φ . Term t määrab ise termi s konteksti sobiva jaotuse Δ, Φ ja sellest omaenda konteksti Δ, Ψ, Φ , kus v on hästi tüübitud kontekstis Ψ . Termi tüüp on määratud termi s poolt. $\square$

Lause 4.14 ([10, lemma 2.4.8]). *Iga hästi tüübitud termi t tõestuspuid on üheselt määratud.*

Tõestus. Lauset saab tõestada induktsiooniga termi struktuuril. Lausest 4.13 on termi t jaoks üheselt määratud sekvents $\Gamma \vdash t : B$. Igal sammul on termi t struktuuri poolt määratud tõestuspuid viimane reegel. Tuletusreegli eeldused on üheselt määratud reegli poolt ning me eeldame, et nende tõestuspuid on unikaalsed. Selleks, et t oleks ka hästi tüübitud ja reegel rakendatav, esinevad eeldustes sobivate kontekstide ja tüüpidega termid, mille määrab ära t sekvents. $\square$

Taas eeldame järgnevas kahes lemmas, et erinevate termide hulgas on omavahel lõikumatud. Ka hiljem neid tulemusi rakendades teeme samad eeldused.

Lemma 4.15. *Kui termid t ja s on hästi tüübitud vastavalt kontekstides $\Gamma \vdash t : A$ ja $\Delta, x:A, \Phi \vdash s : B$, siis $\Delta, \Gamma, \Phi \vdash s[t/x] : B$.*

Tõestus. Kasutame induktsiooni sekventsile $\Delta, x:A, \Phi \vdash s : B$ vastava tõestuspuid struktuuril. Olukorrad $t = x$ (kus x on muutuja) ja $t = f(t_1, \dots, t_n)$ on tõestatud lemmaga 2.20.

JUHT $\otimes$ I. Olgu term s saadud reegli $\otimes$ I abil. Seega on ülaltoodud sekvents täpsemalt kujul $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash s_1 \otimes \dots \otimes s_n : C_1 \otimes \dots \otimes C_n$ ning vastav tõestuspuid on kujul

$$\frac{\frac{\vdots}{\Gamma_1 \vdash s_1 : C_1} \quad \dots \quad \frac{\vdots}{\Gamma_n \vdash s_n : C_n}}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash s_1 \otimes \dots \otimes s_n : A_1 \otimes \dots \otimes A_n} \otimes I$$

Kuna $x:A \in \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, siis leidub $j \in \{1, \dots, n\}$ sedasi, et $\Gamma_j = \Lambda_1, x:A, \Lambda_2$. Sellest kehtivad $\Delta = \Gamma_1, \dots, \Gamma_{j-1}, \Lambda_1$ ja $\Phi = \Lambda_2, \Gamma_{j+1}, \dots, \Gamma_n$. See tähendab, et konkreetsemalt on eespool toodud tõestuspuid kujul

$$\frac{\left(\frac{\vdots}{\Gamma_i \vdash s_i : C_i} \right)_{i=1}^{j-1} \quad \frac{\vdots}{\Lambda_1, x:A, \Lambda_2 \vdash s_j : C_j} \quad \left(\frac{\vdots}{\Gamma_i \vdash s_i : C_i} \right)_{i=j+1}^n}{\Delta, x:A, \Phi \vdash s_1 \otimes \dots \otimes s_n : A_1 \otimes \dots \otimes A_n} \otimes I$$

Eeldame, et tõestatav väide kehtib $\Gamma_j \vdash s_j : C_j$ korral. Sellest eeldusest leidub tõestuspuid sekventsile $\Lambda_1, \Gamma, \Lambda_2 \vdash s_j[t/x] : C_j$. Saame konstrueerida puu

$$\frac{\left(\frac{\vdots}{\Gamma'_i \vdash s_i : C_i} \right)_{i=1}^{j-1} \quad \frac{\vdots}{\Lambda_1, \Gamma, \Lambda_2 \vdash s_j[t/x] : C_j} \quad \left(\frac{\vdots}{\Gamma'_i \vdash s_i : C_i} \right)_{i=j+1}^n}{\Delta, \Gamma, \Phi \vdash s_1 \otimes \dots \otimes s_{j-1} \otimes s_j[t/x] \otimes s_{j+1} \otimes \dots \otimes s_n : B} \otimes I$$

Kuna tänu lemmale 4.12 esineb muutuja x termis t kuni üks kord, siis kehtib

$$s[t/x] = (s_1 \otimes \dots \otimes s_n)[t/x] = s_1 \otimes \dots \otimes s_{j-1} \otimes s_j[t/x] \otimes s_{j+1} \otimes \dots \otimes s_n.$$

JUHT $\otimes$ E. Olgu nüüd termi s tõestuspuid viimane reegel $\otimes$ E. Seega on ülaltoodud sekvents täpsemalt kujul $\Lambda_1, \Psi, \Lambda_2 \vdash \text{match}(v; x_1 \dots x_n.u) : B$, kus $\Psi \vdash v : A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ ja $\Lambda_1, x_1:A_1, \dots, x_n:A_n, \Lambda_2 \vdash u : B$ mingite muutujate $x_1:A_1, \dots, x_n:A_n$ korral. Kuna $x:A \in \Lambda_1, \Psi, \Lambda_2$, siis saame vaadata kahte varianti. Olgu esimesel juhul $x:A \in \Psi$ ehk $\Psi \vdash v : A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ on täpsemalt $\Psi_1, x:A, \Psi_2 \vdash v : A_1 \otimes \dots \otimes A_n$. Kasutame nüüd termi v sekventsil induktsiooni eeldust, millest kehtib $\Psi_1 \Gamma, \Psi_2 \vdash v[t/x] : A_1 \otimes \dots \otimes A_n$. Saame sekventsile $\Psi_1, \Gamma, \Psi_2 \vdash v[t/x] : A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ ja $\Lambda_1, x_1:A_1, \dots, x_n:A_n, \Lambda_2 \vdash s : B$ rakendada reeglit $\otimes$ E ning kehtib $\Lambda_1, \Psi_1, \Gamma, \Psi_2, \Lambda_2 \vdash \text{match}(v[t/x]; x_1 \dots x_n.u) : B$. Tänu lemmale 4.12 ei esine muutuja x termis s korduvalt ning oleme ka eeldanud, et vabad ja seotud muutujad on erinevad, seega tõepoolest $s[t/x] = \text{match}(v[t/x]; x_1 \dots x_n.u)$. Tei-

sel juhul $x:A \in \Lambda_1, \Lambda_2$. Eeldame, et $x:A \in \Lambda_1$ (juhul $x:A \in \Lambda_2$ on tõestus analoogiline). Seega $\Lambda_1 = \Omega_1, x:A, \Omega_2$.

$$\frac{\frac{\vdots}{\Psi \vdash v : A_1 \otimes \dots \otimes A_n} \quad \frac{\vdots}{\Omega_1, x:A, \Omega_2, x_1:A_1, \dots, x_n:A_n, \Lambda_2 \vdash u : B}}{\Lambda_1, \Psi, \Lambda_2 \vdash \text{match}(v; x_1 \dots x_n.u) : B} \otimes E$$

Rakendame induktsiooni eeldust sekventsile $\Omega_1, x:A, \Omega_2, x_1:A_1, \dots, x_n:A_n, \Lambda_2 \vdash u : B$ ning saame, et $\Omega_1, \Gamma, \Omega_2, x_1:A_1, \dots, x_n:A_n, \Lambda_2 \vdash u[t/x] : B$. Rakendades nüüd eelnevale sekventsile ning $\Psi \vdash v : A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ reeglit $\otimes E$, saame $\Omega_1, \Gamma, \Omega_2, \Psi, \Lambda_2 \vdash \text{match}(v; x_1 \dots x_n.u[t/x]) : B$. Tänu lemmale 4.12 ei esine muutuja x termis s korduvalt. Lisaks erineb ta seotud muutujatest, siis kehtib $s[t/x] = \text{match}(v; x_1 \dots x_n.u[t/x])$.

JUHT 1I. Siis on termi s kontekst tühi ning väite eeldused ei kehti.

JUHT 1E. Olgu nüüd termile s vastava tõestuspüü viimane reegel 1E. Seega on täpselt sekvents $\Delta, x:A, \Psi \vdash s : B$ hoopis kujul $\Lambda_1, \Psi, \Lambda_2 \vdash \text{match}_{\Lambda_1|\Lambda_2}(v; u) : B$ ja vastav tõestuspüü

$$\frac{\frac{\vdots}{\Psi \vdash v : \mathbb{1}} \quad \frac{\vdots}{\Lambda_1, \Lambda_2 \vdash u : B}}{\Lambda_1, \Psi, \Lambda_2 \vdash \text{match}_{\Lambda_1|\Lambda_2}(v; u) : B} \otimes E$$

Saame jälle vaadata kahte juhtu ning tõestus on analoogiline $\otimes E$ juhule. $\square$

Järeldus 4.16. *Hästi tüübitud $\otimes$ -termidel on lubatud reegel*

$$\frac{(\Gamma_i \vdash t_i : A_i)_{i=1}^n \quad x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash t : B}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash t[t_1/x_1] \dots [t_n/x_n] : B} C$$

Tõestus. Olgu lubatud reegel C ning leidugu tõestuspüü sekventsile $\Gamma \vdash s : B$. Me näitame, et siis leidub sellele sekventsile ka C-vaba tõestuspüü. Teeme seda induktsiooniga selle sekvensi tõestuspüü struktuuril. Järelduse 2.21 tõestusest saame reeglite ID ja f juhud.

JUHT $\otimes I$. Olgu term saadud reegli $\otimes I$ abil. Sel juhul $s = s_1 \otimes \dots \otimes s_n$ mingite termide $s_1, \dots, s_n$ korral ja $\Gamma = \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Eeldame, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral leiduvad sekventsile $\Gamma_i \vdash s_i : A_i$ C-vabad tõestuspüü. Kusjuures siis $B = A_1 \otimes \dots \otimes A_n$. Saame konstrueerida C-vaba tõestuse

$$\frac{\frac{\vdots}{\Gamma_1 \vdash s_1 : A_1} \quad \dots \quad \frac{\vdots}{\Gamma_n \vdash s_n : A_n}}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash s_1 \otimes \dots \otimes s_n : A_1 \otimes \dots \otimes A_n} \otimes I$$

JUHT $\otimes E$. Olgu termi s tõestuspüü viimane reegel $\otimes E$. Siis $s = \text{match}(v; x_1 \dots x_n.u)$ mingite termide v, u ning muutujate $x_1, \dots, x_n$ korral. Eeldame, et sekventsile $\Psi \vdash v : A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ ja $\Delta, x_1:A_1, \dots, x_n:A_n, \Phi \vdash u : B$ leiduvad C-vabad tõestuspüü. Kusjuures siis $\Gamma = \Delta, \Psi, \Phi$. Saame konstrueerida C-vaba tõestuspüü

$$\frac{\frac{\vdots}{\Psi \vdash v : A_1 \otimes \dots \otimes A_n} \quad \frac{\vdots}{\Delta, x_1:A_1, \dots, x_n:A_n, \Phi \vdash u : B}}{\Delta, \Psi, \Phi \vdash \text{match}(v; x_1 \dots x_n.u) : B} \otimes E$$

JUHT $\mathbb{1}I$. Kui termi tõestuspüü viimane reegel on $\mathbb{1}I$, siis ongi tõestuspüü C-vaba.

JUHT $\mathbb{1}E$. Olgu termi s viimane reegel $\mathbb{1}E$. Siis $s = \text{match}_{\Delta|\Phi}(v; u)$ mingite termide v ja u korral. Eeldame, et sekventsile $\Psi \vdash v : \mathbb{1}$ ja $\Delta, \Phi \vdash u : B$ leiduvad C-vabad tõestuspüü. Kusjuures siis $\Gamma = \Delta, \Psi, \Phi$. Saame konstrueerida C-vaba tõestuspüü, rakendades neile sekventsile reeglit $\mathbb{1}E$. Kui termi tõestuspüü viimane reegel on C, siis on põhjendus analoogiline järelduse 2.21 vastava juhu argumendile. $\square$

Hästi tüübitud $\otimes$ -termidel defineerime nüüd uue ekvivalentsiseose. Olgu $\equiv$ vähim ekvivalentsiseos, mis rahuldab järgmisi tingimusi: [2]

$$\begin{aligned} & \text{kui } t_1 \cong t_2, \text{ siis } t_1 \equiv t_2; \\ & \text{match}(t_1 \otimes \dots \otimes t_n; x_1 \dots x_n.t) \equiv t[t_1/x_1] \dots [t_n/x_n]; & (\beta) \\ & \text{match}(v; x_1 \dots x_n.t[x_1 \otimes \dots \otimes x_n/y]) \equiv t[v/y]; & (\eta) \\ & \text{match}(\star; t) \equiv t; & (\beta_{\mathbb{1}}) \\ & \text{match}(v; t[\star/y]) \equiv t[v/y]; & (\eta_{\mathbb{1}}) \\ & \text{kui } s \equiv s', \text{ siis } t[s/x] \equiv t[s'/x]. \end{aligned}$$

Viimane võrdus tagab, et saame ekvivalentsi $\equiv$ viia kuitahes sügavale termi struktuuri. Selle võrduse abil kehtib näiteks $(\text{match}(\star; t)) \otimes t' \equiv t \otimes t'$.

Märkus 4.17. Selleks, et β -reegli abil saadud term $t[t_1/x_1] \dots [t_n/x_n]$ alati hästi tüübitud ja defineeritud oleks, eeldame, et termid $t_1, \dots, t_n$ ei sisalda (ei vabalt ega seotult) muutujaid $x_1, \dots, x_n$. Saame alati valida sellised termid $t_1, \dots, t_n$ ekvivalentsiklasside

esindajad, et soovitud eeldus kehtiks. Edaspidi teeme β -reeglit rakendades selle eelduse vaikimisi.

5 Esitatavad multikategooriad

Definitsioon 5.1 ([5, Definitsioon 8.3]). Ütleme, et multikategooria $\mathcal{M}$ on **esitatav**, kui iga $\mathcal{M}$ objektide järjendi $X_1, \dots, X_n$ korral eksisteerib morfism

$$\pi_{X_1, \dots, X_n} : X_1, \dots, X_n \rightarrow X_1 \otimes \dots \otimes X_n$$

objektidest $X_1, \dots, X_n$ objekti $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ sedasi, et kujutus

$$\begin{array}{c} \mathcal{M}(Z_1, \dots, Z_r, X_1 \otimes \dots \otimes X_n, Z_{r+1}, \dots, Z_m; Y) \\ \downarrow f \mapsto f \circ (id_{Z_1}, \dots, id_{Z_r}, \pi, id_{Z_{r+1}}, \dots, id_{Z_m}) \\ \mathcal{M}(Z_1, \dots, Z_r, X_1, \dots, X_n, Z_{r+1}, \dots, Z_m; Y) \end{array}$$

on bijektiivne.

5.1 Näited

Vaatleme näidet 3.2. Olgu antud lõplikumõõtmelised vektorruumid $V_1, \dots, V_n$ koos vastavate baasidega $e_{V_1} = \{e_{11}, \dots, e_{1m_1}\}, \dots, e_{V_n} = \{e_{n1}, \dots, e_{nm_n}\}$. Saame konstrueerida vektorruumi $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ baasiga $e_{V_1} \times \dots \times e_{V_n}$. Vektorruumi $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ nimetatakse ruumide $V_1, \dots, V_n$ tensorkorrutiseks. Tuletame meelde, et kui $n = 0$, siis loeme baaside otsekorrutiseks $e_{V_1} \times \dots \times e_{V_n}$ ühe-elementilist hulka $\{*\}$. Sellise baasiga vektorruum on isomorfne korpusega K , seega ongi $n = 0$ juhul tensorkorrutiseks K .

Näide 5.2 ([4, ptk 25]). Multikategooria FinVec_K on esitatav.

Vaatleme näidet 3.4. Leidugu kategoorias $\mathcal{C}$ algobjekt ning iga kahe objekti jaoks nende kokorrutis. Olgu antud objektid $X_1, \dots, X_n$. On teada, et kategoorias leiduvad binaarsed kokorrutised ja algobjekt parajasti siis, kui leiduvad kõik lõplikud kokorrutised. ([8, duaalselt lause 5.8]) Olgu seega antud objektide $X_1, \dots, X_n$ kokorrutis $(X_1 + \dots + X_n, \pi_{X_1}, \dots, \pi_{X_n})$. Objektiks $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ valime $X_1 + \dots + X_n$ ja morfismiks $\pi_{X_1, \dots, X_n}$ morfismi $(\pi_{X_1}, \dots, \pi_{X_n})$. Sel juhul leidub iga morfismi

$$(g_1, \dots, g_r, f_1, \dots, f_n, g_{r+1}, \dots, g_m) : Z_1, \dots, Z_r, X_1, \dots, X_n, Z_{r+1}, \dots, Z_m \rightarrow Y$$

jaoks unikaalne originaal $(g_1, \dots, g_r, \hat{f}, g_{r+1}, \dots, g_m)$ sedasi, et

$$\begin{aligned}
& (g_1, \dots, g_r, f_1, \dots, f_n, g_{r+1}, \dots, g_m) \\
&= (g_1, \dots, g_r, \hat{f}, g_{r+1}, \dots, g_m) \circ (id_{Z_1}, \dots, id_{Z_r}, (\pi_1, \dots, \pi_n), id_{Z_{r+1}}, \dots, id_{Z_m}) \\
&= (g_1, \dots, g_r, \hat{f} \circ (\pi_1, \dots, \pi_n), g_{r+1}, \dots, g_m) \\
&= (g_1, \dots, g_r, (\hat{f} \circ \pi_1, \dots, \hat{f} \circ \pi_n), g_{r+1}, \dots, g_m) \\
&= (g_1, \dots, g_r, \hat{f} \circ \pi_1, \dots, \hat{f} \circ \pi_n, g_{r+1}, \dots, g_m),
\end{aligned}$$

kus $\hat{f}$ unikaalsus tuleb kokorrutise universaalomadusest. Erijuhul $n = 0$ on objektiks $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ kategooria algobjekt.

Näide 5.3. Multikategooria $\mathcal{C}_\blacktriangleright$ on esitatav parajasti siis, kui kategoorias $\mathcal{C}$ leidub algobjekt ning iga kahe objekti jaoks nende kokorrutis.

5.2 $\otimes$ -termid ja esitatavad multikategooriad

Lemma 5.4. Olgu x, y, z sellised üksteisest erinevad muutujad ja t, s sellised termid, et muutuja y ei esine termis s . Kui termid $t[z/y][s/x], t[s/x], t[s/x][z/y]$ on hästi tüübitud, siis

$$t[z/y][s/x] \cong t[s/x] \cong t[s/x][z/y].$$

Tõestus. Loomulikult $t[z/y] \cong t$. Oleme juba näidanud, et substitutsioon on hästi defineeritud ekvivalentsiklassi esindajatel seose $\cong$ järgi (vt teoreemi 3.6 tõestuse algust). Sellest

$$t[z/y][s/x] \cong t[s/x].$$

Ekvivalentsiseose $\cong$ definitsioonist on ka

$$t[s/x] \cong t[s/x][z/y].$$

□

Lemma 5.5. Olgu x, y teineteisest erinevad muutujad ja t, s, v sellised termid, et x, y ei ole termis t seotud. Siis

$$t[s/x][v/y] \cong t[v/y][s[v/y]/x].$$

Tõestus. Lemma saab tõestada induktsiooniga termi t struktuuril. Baasjuhul, kus t on muutuja, saame vaadelda kolme juhtu: $t = x$, $t = y$ või $t \neq x$ või $t \neq y$. Muudel

juhtudel järeldub tõestus otse induktsiooni eeldusest.

Märkame, et kui lisaks muudele eeldustele muutuja y ei esine termis s , siis ütleb lemma, et substituutsiooni rakendamise järjekorda võib muuta. Seda seetõttu, et siis $s[v/y] = s$. $\square$

Teoreem 5.6. *Hästi tüübitud $\otimes$ -termid üle signatuuri $\Sigma = (\Sigma, \mathcal{F})$ muutujates $X^\otimes = (X_A^\otimes)_{A \in \Sigma^\otimes}$ moodustavad esitatava multikategoria $T^\otimes(\Sigma)$ järgnevalt antud viisil:*

1. $Ob(T^\otimes(\Sigma)) = \Sigma^\otimes$;
2. $T^\otimes(\Sigma)(A_1, \dots, A_n; B)$ elemendid on selliste hästi tüübitud termide $t \in T_B^\otimes(X)$ ekvivalentsiklassid $[t]_\equiv$, mille jaoks leiduvad mingid muutujad $x_1, \dots, x_n$, et kehtiks $x_1:A_1, \dots, x_n:A_n \vdash t : B$;
3. iga objekti $A \in \Sigma^\otimes$ jaoks on ühikmorfism $[x]_\equiv$, kus x on muutuja tüüpi A ;
4. morfismi $[t]_\equiv \in T^\otimes(\Sigma)(A_1, \dots, A_n; B)$ ja morfismide

$$[s_1]_\equiv \in T^\otimes(\Sigma)(A_{11}, \dots, A_{1m_1}; A_1), \dots, [s_n]_\equiv \in T^\otimes(\Sigma)(A_{n1}, \dots, A_{nm_n}; A_n)$$

kompositsioon on morfism $[t[s'_1/x_1] \dots [s'_n/x_n]]_\equiv$, kus $s'_1, \dots, s'_n$ on valitud sellised, et:

- $s'_1 \cong s_1, \dots, s'_n \cong s_n$;
- termide $t, s'_1, \dots, s'_n$ vabade muutujate hulgad ja seotud muutujate hulgad oleksid paarikaupa lõikumatud.

Tõestus. Eeldame järgnevalt, et termid on valitud komponeerimiseks sobivalt (ülaltoodud viisil). Oleme juba veendunud, et kompositsioon on hästi defineeritud ekvivalentsi $\cong$ suhtes. Veendume nüüd, et sama kehtib ka uue ekvivalentsi $\equiv$ suhtes. Teame seose $\equiv$ definitsioonist, et kui $s \equiv s'$, siis

$$t[s/x] \equiv t[s'/x]. \quad (1)$$

Seega piisab veel näidata, et kui on antud

$$\begin{array}{ll}
x_1:A_1, \dots, x_n:A_n \vdash t : B & x_1:A_1, \dots, x_n:A_n \vdash t' : B \\
y_{11} : A_{11}, \dots, y_{1m_1} : A_{1m_1} \vdash s_1 : A_1 & y_{11} : A_{11}, \dots, y_{1m_1} : A_{1m_1} \vdash s'_1 : A_1 \\
\vdots & \vdots \\
y_{n1} : A_{n1}, \dots, y_{nm_n} : A_{nm_n} \vdash s_n : A_n & y_{n1} : A_{n1}, \dots, y_{nm_n} : A_{nm_n} \vdash s'_n : A_n,
\end{array}$$

kus $t \equiv t'$, siis

$$t[s_i/x_i] \equiv t'[s_i/x_i], \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (2)$$

Sellest järeldubki täpselt nagu vaja, et kui $t \equiv t', s_1 \equiv s'_1, \dots, s_n \equiv s'_n$, siis $t \circ (s_1, \dots, s_n) \equiv t' \circ (s'_1, \dots, s'_n)$, sest

$$t \equiv t' \Rightarrow t[s_1/x_1] \equiv t'[s_1/x_1] \equiv t'[s'_1/x_1] \quad (2 \text{ ja } 1)$$

$$\Rightarrow t[s_1/x_1][s_2/x_2] \equiv t'[s'_1/x_1][s_2/x_2] \equiv t'[s'_1/x_1][s'_2/x_2] \quad (2 \text{ ja } 1)$$

$\vdots$

$$\Rightarrow t[s_1/x_1] \dots [s_{n-1}/x_{n-1}] \equiv t'[s'_1/x_1] \dots [s'_{n-1}/x_{n-1}] \quad (2 \text{ ja } 1)$$

$$\Rightarrow t[s_1/x_1] \dots [s_n/x_n] \equiv t'[s'_1/x_1] \dots [s'_n/x_n] \quad (2 \text{ ja } 1)$$

Veendume, et omadus 2 kehtib viimase viie võrduse korral, mille abil on seos $\equiv$ antud.

1. kui $t = \text{match}(t_1 \otimes \dots \otimes t_n; z_1 \dots z_n.q)$ ja $t' = q[t_1/z_1] \dots [t_n/z_n]$ ehk $t \equiv t'$ reegli β kaudu, siis

$$\begin{aligned}
t[s_i/x_i] &= \text{match}(t_1 \otimes \dots \otimes t_n; z_1 \dots z_n.q)[s_i/x_i] \\
&= \text{match}((t_1 \otimes \dots \otimes t_n)[s_i/x_i]; z_1 \dots z_n.q[s_i/x_i]) \\
&= \text{match}(t_1[s_i/x_i] \otimes \dots \otimes t_n[s_i/x_i]; z_1 \dots z_n.q[s_i/x_i]) \\
&\equiv q[s_i/x_i][t_1[s_i/x_i]/z_1] \dots [t_n[s_i/x_i]/z_n] \quad (\beta) \\
&= q[t_1/z_1] \dots [t_n/z_n][s_i/x_i] \quad (\text{lemma 5.5}) \\
&= t'[s_i/x_i]
\end{aligned}$$

2. kui $t = \text{match}(v; z_1 \dots z_n.q[z_1 \otimes \dots \otimes z_n/y])$ (kusjuures valime sellise esindaja t , et $y \neq x_i$ ja muutuja y ei esineks termis s_i) ja $t' = q[v/y]$ ehk $t \equiv t'$ reegli η

kaudu, siis

$$\begin{aligned}
t[s_i/x_i] &= \text{match}(v; z_1 \dots z_n.q[z_1 \otimes \dots \otimes z_n/y])[s_i/x_i] \\
&= \text{match}(v[s_i/x_i]; z_1 \dots z_n.q[z_1 \otimes \dots \otimes z_n/y][s_i/x_i]) \\
&= \text{match}(v[s_i/x_i]; z_1 \dots z_n.q[s_i/x_i][z_1 \otimes \dots \otimes z_n/y]) && (\text{lemma 5.5}) \\
&\equiv q[s_i/x_i][v[s_i/x_i]/y] && (\eta) \\
&= q[v/y][s_i/x_i] && (\text{lemma 5.5}) \\
&= t'[s_i/x_i]
\end{aligned}$$

3. kui $t = \text{match}(\star; t')$ ehk $t \equiv t'$ reegli β_1 kaudu, siis

$$\begin{aligned}
t[s_i/x_i] &= \text{match}(\star; t')[s_i/x_i] \\
&= \text{match}(\star[s_i/x_i]; t'[s_i/x_i]) \\
&= \text{match}(\star; t'[s_i/x_i]) \\
&\equiv t'[s_i/x_i] && (\beta_1)
\end{aligned}$$

4. kui $t = \text{match}(v; s[\star/y])$ (kusjuures valime sellise esindaja t , et $y \neq x_i$ ja muutuja y ei esineks termis s_i) ja $t' = s[v/y]$ ehk $t \equiv t'$ reegli η_1 kaudu, siis

$$\begin{aligned}
t[s_i/x_i] &= \text{match}(v; s[\star/y])[s_i/x_i] \\
&= \text{match}(v[s_i/x_i]; s[\star/y][s_i/x_i]) \\
&= \text{match}(v[s_i/x_i]; s[s_i/x_i][\star/y]) && (\text{lemma 5.5}) \\
&\equiv s[s_i/x_i][v[s_i/x_i]/y] && (\eta_1) \\
&= s[v/y][s_i/x_i] && (\text{lemma 5.5}) \\
&= t'[s_i/x_i]
\end{aligned}$$

5. kui $t = v[s/x]$ ja $t' = v[s'/x]$, kus $s \equiv s'$, siis

$$\begin{aligned}
t[s_i/x_i] &= v[s/x][s_i/x_i] \\
&= v[s_i/x_i][s/x] && (5.5) \\
&\equiv v[s_i/x_i][s'/x] \\
&= t'[s_i/x_i]
\end{aligned}$$

Järelikult on komponeerimine hästi defineeritud. Teoreemi 3.6 tõestusest saame nüüd,

et termid moodustavad kirjeldatud viisil multikategooria. Kuna komponeerimine ei sõltu ekvivalentsiklassi esindajast, siis edaspidi tähistame morfismi $[t]_{\equiv}$ lihtsalt t , kus klassi esindaja t on teoreemi sõnastuses antud viisil sobivalt valitud.

Tarvis on veel tõestada, et see multikategooria on esitatav. Tüüpide $A_1, \dots, A_n \in \Sigma^{\otimes}$ (kus $n \neq 0$) jaoks konstrueerime termi (ehk morfismi)

$$\pi_{A_1, \dots, A_n} : A_1, \dots, A_n \rightarrow A_1 \otimes \dots \otimes A_n$$

järgmiselt:

$$\frac{\frac{}{x_1:A_1 \vdash x_1 : A_1} \text{ ID} \quad \dots \quad \frac{}{x_n:A_n \vdash x_n : A_n} \text{ ID}}{x_1:A_1, \dots, x_n:A_n \vdash x_1 \otimes \dots \otimes x_n : A_1 \otimes \dots \otimes A_n} \otimes \text{I}$$

Tähistame lühemalt $\pi := \pi_{A_1, \dots, A_n}$. Näitame, et nüüd on kujutus

$$\begin{array}{c} T^{\otimes}(\Sigma)(C_1, \dots, C_r, A_1 \otimes \dots \otimes A_n, C_{r+1}, \dots, C_m; B) \\ \downarrow t \mapsto t \circ (id_{C_1}, \dots, id_{C_r}, \pi, id_{C_{r+1}}, \dots, id_{C_m}) \\ T^{\otimes}(\Sigma)(C_1, \dots, C_r, A_1, \dots, A_n, C_{r+1}, \dots, C_m; B) \end{array}$$

bijektiivne. See tähendab, et iga morfismi

$$t : C_1, \dots, C_r, A_1, \dots, A_n, C_{r+1}, \dots, C_m \rightarrow B$$

korral leidub üheselt määratud morfirm $\hat{t} : C_1, \dots, C_r, A_1 \otimes \dots \otimes A_n, C_{r+1}, \dots, C_m \rightarrow B$ sedasi, et $t = \hat{t} \circ (id_{C_1}, \dots, id_{C_r}, \pi, id_{C_{r+1}}, \dots, id_{C_m})$. Olgu siis antud morfirm

$$y_1:C_1, \dots, y_r:C_r, x_1:A_1, \dots, x_n:A_n, y_{r+1}:C_{r+1}, \dots, y_m:C_m \vdash t : B.$$

Parema loetavuse jaoks toome sisse tähistused

$$\Delta := y_1:C_1, \dots, y_r:C_r; \quad \Gamma := x_1:A_1, \dots, x_n:A_n; \quad \Phi := y_{r+1}:C_{r+1}, \dots, y_m:C_m.$$

Defineerime termi $\hat{t} = \text{match}(x; x_1 \dots x_n.t)$, mis on saadud järgnevalt:

$$\frac{\frac{}{x:A_1 \otimes \dots \otimes A_n \vdash x : A_1 \otimes \dots \otimes A_n} \text{ ID} \quad \frac{\vdots}{\Delta, \Gamma, \Phi \vdash t : B}}{\Delta, x:A_1 \otimes \dots \otimes A_n, \Phi \vdash \text{match}(x; x_1 \dots x_n.t) : B} \otimes \text{E}$$

Sellisel juhul tõepoolest

$$\begin{aligned}
& \hat{t} \circ (id_{C_1}, \dots, id_{C_r}, \pi, id_{C_{r+1}}, \dots, id_{C_m}) \\
&= \hat{t}[z_1/y_1] \dots [z_r/y_r][x_1 \otimes \dots \otimes x_n/x][z_{r+1}/y_{r+1}] \dots [z_m/y_m] \\
&= \hat{t}[x_1 \otimes \dots \otimes x_n/x] \quad (\text{lemma 5.4}) \\
&= \text{match}(x; x_1 \dots x_n.t)[x_1 \otimes \dots \otimes x_n/x] \\
&= \text{match}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n; x_1 \dots x_n.t) \\
&= t[x_1/x_1] \dots [x_n/x_n] \quad (\beta) \\
&= t.
\end{aligned}$$

Veendume, et selline $\hat{t}$ on unikaalne. Olgu siis antud morfism $q_1:C_1, \dots, q_n:C_r, y:A_1 \otimes \dots \otimes A_n, q_{r+1}:C_{r+1}, \dots, q_m:C_m \vdash e : B$ sedasi, et

$$e \circ (id_{C_1}, \dots, id_{C_r}, \pi, id_{C_{r+1}}, \dots, id_{C_m}) = t.$$

Sellest

$$\begin{aligned}
\hat{t} &= \text{match}(x; x_1 \dots x_n.t) \\
&= \text{match}(x; x_1 \dots x_n.e \circ (id_{C_1}, \dots, id_{C_r}, \pi, id_{C_{r+1}}, \dots, id_{C_m})) \\
&= \text{match}(x; x_1 \dots x_n.e[z_1/q_1], \dots, [z_r/q_r][x_1 \otimes \dots \otimes x_n/y][z_{r+1}/q_{r+1}] \dots [z_m/q_m]) \\
&= \text{match}(x; x_1 \dots x_n.e[x_1 \otimes \dots \otimes x_n/y]) \quad (\text{lemma 5.4}) \\
&= e[x/y] \quad (\eta) \\
&= e.
\end{aligned}$$

Erijuhul $n = 0$ defineerime morfismi $\pi_{()} := \star$, kus $\star : () \rightarrow \mathbb{1}$. Olgu antud morfism

$$y_1:C_1, \dots, y_r:C_r, y_{r+1}:C_{r+1}, \dots, y_m:C_m \vdash t : B.$$

Parema loetavuse eesmärgil tähistame

$$\Delta := y_1:C_1, \dots, y_r:C_r; \quad \Phi := y_{r+1}:C_{r+1}, \dots, y_m:C_m.$$

Konstrueerime antud termile originaali $\hat{t} = \text{match}_{\Delta, \Phi}(x; t)$ eespool kirjeldatud kujutuse suhtes järgnevalt:

$$\frac{\frac{}{x:\mathbb{1} \vdash x : \mathbb{1}} \text{ ID} \quad \frac{\vdots}{\Delta, \Phi \vdash t : B}}{\Delta, x:\mathbb{1}, \Phi \vdash \text{match}_{\Delta, \Phi}(x; t) : B} \text{ 1E}$$

Termi $\hat{t}$ unikaalsus ning originaaliks olemise tõestused tulevad analoogiliselt eespool oleva üldise juhuga. $\square$

Eelnev teoreem ütleb, et termarvutus, mis modelleerib mittekommutatiiivset lineaar-
loogikat vaid tehtemärgiga $\otimes$ ja tõesusega $\mathbb{1}$, moodustab esitatava multikategooria
signatuuril.

Kokkuvõte

Bakalaureusetöös kirjeldati lineaarloogika multiplikatiivset fragmenti. Tutvustati tehtemärkideta loogikale vastavat termarvutust ning selle mõningaid peamisi omadusi. Seejärel toodi sisse multikategooria ja vaba multikategooria mõisted. Veenduti, et termarvutus, seeläbi ka vaadeldav lineaarloogika fragment, moodustab need struktuurid. Teises osas lisati vaadeldavale loogikale multiplikatiivse konjunktsiooni tehtemärk $\otimes$ koos primitiivse tõesusega $\mathbb{1}$ ja laiendati selle interpreteerimiseks ka termarvutuse struktuuri. Toodi sisse esitatava multikategooria mõiste ning viimaks tõestati, et lineaarloogika koos tehtemärgi $\otimes$ ja tõesusega moodustab esitatava multikategooria.

Käesolevas töös jõuti kirjeldada lineaarloogikat kahjuks vaid ühe oma tehtemärgiga. Järgmise sammuna võiks näidata, et kirjeldatud termarvutus moodustab samuti vaba esitatava multikategooria. Edasi võiks sisse tuua ka multiplikatiivse disjunktsiooni märgi $\wp$ ja uurida, millise lisastruktuuriga multikategooria vastab mõlema tehtemärgiga $\otimes$ ja $\wp$ loogika fragmendile. Just see samm pakub autorile endale kõige rohkem huvi. Samuti jäi uurimata kogu lineaarloogika aditiivne fragment koos aditiivsete tehtemärkidega.

Autor tänab Emmat, kes on viimased kolm aastat helgeks teinud.

Kasutatud allikad

- [1] J. R. B. Cockett ja R. A. G. Seely. „Proof Theory of the Cut Rule“. Teoses: *Categories for the Working Philosopher*. Toim. Elaine Landry. Oxford University Press, 2017, lk. 223–261. DOI: <https://doi.org/10.1093/oso/9780198748991.003.0010>.
- [2] D. Elkins. URL: <https://www.hedonisticlearning.com/posts/internal-language-of-a-monoidal-category.html> (vaadatud 02.05.2026).
- [3] J.-Y. Girard. „Linear logic“. *Theoretical Computer Science* 50.1 (1987), lk. 1–101. DOI: [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(87\)90045-4](https://doi.org/10.1016/0304-3975(87)90045-4).
- [4] P. R. Halmos. *Finite-Dimensional Vector Spaces*. 2. väljaanne. Springer, 1974. ISBN: 0387900934.
- [5] C. Hermida. „Representable Multicategories“. *Advances in Mathematics* 151.2 (2000), lk. 164–225. DOI: <https://doi.org/10.1006/aima.1999.1877>.
- [6] J. R. Hindley ja J. P. Seldin. *Lambda-calculus and combinators: an introduction*. Cambridge University Press, 2008. ISBN: 9780521898850.
- [7] B. Jacobs. *Categorical logic and type theory*. Kõide 141. Elsevier, 1999. ISBN: 0444501703.
- [8] V. Laan. *Kategooriateooria loengukonspekt*. 2024. URL: https://courses.ms.ut.ee/MTMM.00.037/2024_spring/uploads/Main/Kategooriateooria%202024.05.22.pdf (vaadatud 10.01.2026).
- [9] V. Laan ja K. Ain. *Diskreetne matemaatika I loengukonspekt*. 2025.
- [10] M. Shulman. „Categorical logic from a categorical point of view“. DRAFT for AARMS Summer School 2016. 2016. URL: <https://mikesbulman.github.io/catlog/catlog.pdf> (vaadatud 10.01.2026).
- [11] T. Tamme, T. Tammet ja R. Prank. *Loogika: mõtlemisest tõestamiseni*. Tartu Ülikooli Kirjastus, 2002. ISBN: 9985562313.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Helena Varjas,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Lineaarloogika multikategoorsest vaatepunktist“, mille juhendajad on Ülo Reimaa ja Danel Ahman, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada Tartu Ülikooli digitaalarhiivi kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni;
2. annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni;
3. olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile;
4. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Helena Varjas

27.05.2026