Ueber die Bestimmten Integrale.

Inaugural-Dissertation,

welche mit Bewilligung

Einer Hochverordneten Philosophischen Facultät der Kaiserlichen Universität zu Dorpat

zur Erlangung

des

Grades eines Magisters der Philosophie

öffentlich vertheidigt werden wird

von

Candidaten

Wladimir Petrowsky.

Dorpat, 1839.

Gedruckt bei J. C. Schünmann,

Universitäts-Buchdrucker.

Der Druck ist gestattet, unter der Bedingung, dass an das Dorpatsche Censurkomité die gesetzlich bestimmte Anzahl von Exemplaren abgeliefert werde.

Dorpat, den 24. October 1839.

Dr. Eberhard David Friedländer,
geschäftsführender Decan der philosophischen Facultät.

Seiner Excellenz,

dem Herrn Curator des Dorpatischen Lehrbezirkes,

Generallieutenant und vieler hoher Orden Ritter

Gustav von Kraffström

widmet diese Schrift

zum Zeichen tiefer Ehrfurcht

der Verfasser.

Einleitung.

Die wichtigsten und schwierigsten Aufgaben der Geometrie und Mechanik, wie die Quadratur der krummen Linien und ihre Rectification, die Quadratur der krummen Flächen, die Berechnung des Inhaltes unregelmässiger Körper, die Gesetze der Bewegung eines freien Systems von Körpern und dergleichen mehre, waren den alten Mathematikern, so lange man sich der synthetischen Methode bediente, entweder ganz unzugänglich, oder wurden von ihnen theilweise mit der grössten Mühe aufgelöst. Archimedes, Cavalieri, Toricelli, Roberval, Pascal, Ferma u. a. m. konnten bei all ihrem Genie, das sie zu grossen Entdeckungen leitete, das nicht leisten, was Newton und Leibnitz durch die Erfindung der Differential- und Integralrechnung für jene Wissenschaften geleistet haben. Mit diesen Männern beginnt daher, wie eine neue Epoche so überhaupt eine neue Aera für alle Zweige der reinen und angewandten Mathematik. Der menschliche Geist dringt seit dieser Zeit mit Hülfe der subtilsten und abstractesten analytischen Betrachtungen tief in die Natur, und eine grosse Reihe von Naturerscheinungen, die man Jahrhunderte hindurch als Räthsel betrachtet hatte, stellten sich jetzt dem zersetzenden Verstande ins hellste Licht. Es entstanden neue Theorien, welche wieder zu neuen Entdeckungen den Weg bahnten; so dass dadurch die Infinitesimalrechnung gleichzeitig ein neues Moment zu ihrer weiteren Ausbildung und Vervollkommnung erhielt. Die ersten Schriftsteller, welche die Analysis auf die Geometrie und Mechanik anzuwenden versuchten, waren Wallis in seiner Arithmetica infinitorum, Mercator und Huygens. Zuletzt erschienen La Méthode des Fluxions von Maclaurin und eine Reihe verschiedener Schriften von Newton, Leibnitz und Bernoulli, welche die Wissenschaft mit den wichtigsten Entdeckungen bereicherten und zugleich die Basis bildeten, auf welcher das ebenso kolossale als glänzende Gebäude der neueren Mathematik aufgeführt werden sollte. Im XVIII Jahrhundert macht Euler allein eine Epoche in der Geschichte der Differential- und Integralrechnung aus, denn seine Arbeiten zeichnen sich besonders dadurch aus, dass er vor allen anderen die analytische Methode zu vervollkommnen suchte, indem er die Ansichten der reinen Geometrie immer mehr entfernte. Er stellte zuerst das Beispiel jener Deductionen auf, in welchen die Bedingungen des Problems erst mit Hülfe algebraischer Symbole ausgedrückt werden, und dann das Rechnen allein alle Schwierigkeiten zu entwickeln und besiegen hat, und zeigte hierbei einen so ausserordentlichen Scharfblick und einen ebenso tiefen als schöpferischen Geist, dass er eben dadurch seiner Wissenschaft eine ganz neue Gestalt gab. Auch behandelte er die Mechanik durch die Analysis, und indem er so den Umfang dieser Wissenschaft erweiterte, vervollkommnete er zugleich die Differential- und Integralrechnung. Ferner bearbeitete Euler [1]) mit besonderer Vorliebe die bestimmten Integrale, und wird daher mit Recht als Schöpfer dieses wichtigen Theils der höheren Analysis angesehen. Endlich ausser der Findung einer Menge sehr wichtiger Integrale dieser Art, gebührt ihm insbesondere die Ehre des Entdeckers einer ganzen Theorie der bestimmten Integrale,

---

1) Institutionum Calculi Integralis T. I. Cap. VII, VIII, IX und T. IV.

die später **Legendre** [1]) „**eulersche Integrale**“ benannte, dieselben dadurch noch mehr entwickelnd und erweiternd, dass er die Theorie der Elliptischen Functionen mit ihnen verband und zur Berechnung beider Arten der Integrale Tafeln mittheilte. Das classische Werk von Legendre und die raschen Fortschritte der angewandten Mathematik haben mit Recht die Aufmerksamkeit der neueren Mathematiker Frankreichs und Deutschlands auf diesen Gegenstand gelenkt. Unter den erstern zeichnet sich **Cauchy** [2]) aus durch seine zahlreichen Memoiren und Schriften über die bestimmten Integrale, die eine Menge sehr interessanter und für die verschiedenen physikalischen Theorien sehr wichtiger Untersuchungen enthalten. Er hat um die höhere Analysis besonders dadurch grosse Verdienste, dass er den Werth der bestimmten Integrale in dem Fall, wenn die zu integrirende Function zwischen den gegebenen Gränzen Unterbrechungen der Cantinuität erleidet oder unendlich wird, genauer untersuchte, und Alles auf die Integrale zwischen imaginären Gränzen anwendete; so dass man ihm eine vollständige und ganz allgemeine Theorie dieser Integrale verdankt. Weiter haben sich **Laplace** [3]), **Kramp** [4]) und **Poisson** [5]) theilweise mit diesem Gegenstande beschäftigt und es ist ihnen gelungen mittelst der bestimmten Integrale die allgemeinen Summenausdrücke (Fonctions génératrices) mehrerer Reihen zu finden und dadurch einige der Partialgleichungen zu integriren, welcher Methode be-

---

1) Exercices de Calcul Intégral par Legendre T. I. pag. 221—301. Paris 1811.

2) Exercices de Mathématiques an vielen Orten und Mémoire sur les Intégrales définies prises entre des limites imaginaires. Paris 1825.

3) Théorie analytique des Probabilités, pag. 13—36. Paris 1814.

4) Analyse de Réfractions astronomiques et terrestres. 1799. Chap III.

5) Mémoires de l'Académie des sciences. 1816.

sonders **Fourier** [1]) in seinen Untersuchungen über die Wärme, um die Bestimmung willkürlichen Constante zu vermeiden, sich bedient hat, indem er ihr zugleich eine tiefere Entwickelung und grössere Vollkommenheit gab. Auch können wir die wichtigen Entdeckungen nicht mit Schweigen übergehen, welche in der neusten Zeit **Jacobi** [2]) und **Abel** [3]) im Bereich der bestimmten Integrale durch Bearbeitung der Elliptischen Functionen gemacht haben; obwohl dieser intressante Gegenstand wegen seiner ausserordentlichen Ausdehnung in unserer Dissertation nicht aufgenommen werden konnte. Ferner hat unser vaterländischer Mathematiker **Ostrogradsky** mehrere schätzbare Memoiren der Petersburger Akademie der Wissenschaften über die bestimmten Integrale mitgetheilt, die grosses Aufsehen auch bei den bekanntesten französischen Mathematikern erregten. Endlich haben auch **Lejeune-Dirichlet** [4]) und **Grunert** [5]) einige Beweise vervollkommnet.

Indem wir hiemit zum Schlusse eilen, fügen wir noch ein Paar Worte über den Plan der Dissertation hinzu. Sie enthält zunächst **drei** Capitel; in deren **erstem** sie sich mit den Eigenschaften, die allen Integralen mit einer Veränderlichen zukommen, beschäftigt. Das **zweite** Capitel aber enthält nur einige von **Cauchy** [6]) in dem **Mémoire sur les intégrales définies, lu à l'Institut le 22 Août 1814** etc. vorgetragene Sätze. Das **dritte** endlich behandelt die verschiedenen Methoden, die zur Entwickelung der Werthe der bestimmten Integrale

---

1) Théorie de la Chaleur par Fourier. Paris 1822.

2) Fundamenta nova Theoriae functionum ellipticarum. 1829.

3) Précis d'une theorie des fonctions elliptiques, ein unvollendetes Werk.

4) Crelles Journal der reinen und angewandten Mathematik. B. IV.

5) Supplemente zu G. S. Klügels Wörterbuche der reinen Mathematik. B. I. p. 136—283.

6) Mémoires présentés par divers savans à l'Academie de scienes. Paris 1827. T. 1. p. 601 etc.

führen, und setzt ausser mehren merkwürdigen Integrale die Theorie der Eulerschen auseinander. Ich kann nicht leugnen, dass das Thema, welches ich zum Gegenstand meiner Arbeit gewählt habe, sehr umfassend ist, und vielleicht für den vorliegenden Zweck nicht ganz passend erscheint; weil jedes von den hier erwähnten Capiteln so wichtig und reich an Quellen ist, dass es bei gehöriger Musse und Bearbeitung einen schwer zu erschöpfenden Stoff zu einer vollständigen Dissertation darbieten könnte. Meine Absicht aber war in der kurzen Zeit die mir noch zu Gebote stand, wenigstens einen flüchtigen Ueberblick über die ganze Lehre der bestimmten Integrale zu geben, weshalb ich mich auch so viel als möglich an die allgemeinen Methoden und Theorien gehalten habe. In die Untersuchung des Werthes der einzelnen Integrale konnte ich mich natürlich nicht einlassen.

Erstes Capitel.

Über die allgemeinen Eigenschaften der bestimmten Integrale.

§ 1. Der Umstand, dass man nach der vollendeten Integration eines Differentials zu dem erhaltenen Ausdruck immer eine constante Grösse hinzufügen muss um ihm alle nöthige Allgemeinheit zu verschaffen, macht einen solchen Ausdruck zweifach unbestimmt. Er ist erstens insofern unbestimmt, als seine veränderliche Grösse alle möglichen Werthe annehmen kann, und zweitens, weil die hinzugefügte Constante, als völlig willkürlich betrachtet werden soll. In der angewandten, ja sogar in denjenigen Fällen der reinen Mathematik, wo es darauf ankömmt den numerischen Werth eines Integrals zu wissen, welchen es für einen jeden gegebenen Werth der Veränderlichen annimmt, wird die Allgemeinheit eines solchen Ausdrucks dadurch beschränkt, dass man der willkürlichen Constante einen bestimmten Werth beilegt, der etwa so gewählt ist, dass das Integral mit der Veränderlichen zugleich verschwindet oder ähnlichen Bedingungen entspricht.

Es sey uns aus den Bedingungen der Aufgabe, oder sonst auf irgend eine Weise bekannt, dass das Integral $y = \int X dx$, wo X irgend eine Function von x bedeutet, für $x = x_0$ den Werth η bekommt. Durch Integration des Differentialausdrucks Xdx ergiebt sich, indem wir mit $\varphi(x)$ die unmittelbar dadurch erhaltene Function bezeichnen wollen,

$$y = \int X dx = \varphi(x) + Const. \qquad (1)$$

also für $x = x_0$

$$\eta = \varphi(x_0) + Cons, \text{ woraus } Cons. = \eta - \varphi(x_0)$$

und

$$y = \varphi(x) + \eta - \varphi(x_0) = \eta + \varphi(x) - \varphi(x_0) \qquad (2)$$

Nehmen wir nun an, dass x der Reihe nach folgende Werthe erhält

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{n-2},\ x_{n-1},\ x_n$$

deren jeder seinen vorhergehenden um eine beliebig kleine Quantität i übertrifft, so dass

$$x_1 = x_0 + i_0,\quad x_2 = x_1 + i_1,\quad x_3 = x_2 + i_2,\ \ldots\ x_n = x_{n-1} + i_{n-1},$$

wo $i_0,\ i_1,\ i_2,\ \ldots\ i_{n-1}$ im Allgemeinen sehr kleine positiven Grössen sind. Die Elemente

$$x_1 - x_0,\quad x_2 - x_1,\quad x_3 - x_2,\ \ldots\ x_n - x_{n-1}$$

in welche der Unterschied $x_n - x_0$ dadurch zerlegt wird, haben alle einerlei Vorzeichen, und sind positiv, wenn $x_n > x_0$ ist. Bezeichnen wir den Werth, welchen das Integral $y = \int X dx$ für $x = x_1$ erhält mit η_1 so ergiebt sich aus den Gleichungen (1) und (2) nachdem wir darin $x = x_1$ setzen

$$\eta_1 = \varphi(x_1) + C\ ,\quad \eta_1 = \eta + \varphi(x_1) - \varphi(x_0) \tag{3}$$

Function $\varphi(x + i_0)$ nach dem Taylor'schen Lehrsatze entwickelt giebt, indem man $x = x_0$ setzt:

$$\varphi(x_0 + i_0) = \varphi(x_1) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)\frac{i_0}{1} + \varphi''(x_0)\frac{i_0^2}{1.2} + \varphi'''(x_0)\frac{i_0^3}{1.2.3} + \ldots$$

wo $\varphi',\ \varphi'',\ \varphi'''\ \ldots$ die derivirten Functionen von φ bedeuten. Vernachlässigt man die zweite und alle höheren Potenzen von i_0 wegen seiner Kleinheit, so hat man für η_1 folgenden Werth

$$\eta_1 = \eta + \varphi'(x_0) i_0. \tag{4}$$

Eben auf dieselbe Weise, wie man aus dem Werthe η des Integrals den Werth η_1 abgeleitet hat, kann man aus diesem wieder den Werth η_2 für $x = x_2$ ableiten, und so bis η_n fortfahren. Dadurch erhält man folgende Reihe von Werthen, welche das gegebene Integral $y = \int X dx$ annimmt, indem nach und nach $x = x_0,\ x = x_1,\ \ldots$ bis zuletzt $x = x_n$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\eta &= C + \varphi(x_0) \\
\eta_1 &= \eta + \varphi'(x_0) i_0 \\
\eta_2 &= \eta_1 + \varphi'(x_1) i_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta_n &= \eta_{n-1} + \varphi'(x_{n-1}) i_{n-1}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Da aber $i_0 = x_1 - x_0$, $i_1 = x_2 - x_1$, ... $i_{n-1} = x_n - x_{n-1}$, so ergiebt sich, indem wir den Werth von η_1 in η_2 und den dadurch erhaltenen Werth von η_2 wieder in η_3 substituiren und so weiter fortfahren:

$$\eta_1 = \eta + \varphi'(x_0)(x_1 - x_0)$$
$$\eta_2 = \eta_0 + \varphi'(x_0)(x_1 - x_0) + \varphi'(x_1)(x_2 - x_1)$$
$$\eta_3 = \eta + \varphi'(x_0)(x_1 - x_0) + \varphi'(x_1)(x_2 - x_1) + \varphi'(x_2)(x_3 - x_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta_n = \eta + \varphi'(x_0)(x_1 - x_0) + \varphi'(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots \varphi'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \quad (6)$$

Der letzte Ausdruck tritt dem Werthe des Integrals $y = \int X dx$ für $x = x_n$ desto näher, je kleiner die Elemente $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... $x_n - x_{n-1}$ sind.

§ 2. Um noch auf einem anderen Wege zu zeigen, dass die so eben für η_n gefundene Reihe bei Abnahme der Differenzen $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, etc. ... sich einer bestimmten Gränze nähert, wollen wir folgende von **Cauchy** zuerst angegebene Umformung dieser Reihe anführen. Betrachten wir genauer den Ausdruck

$$\eta_n - \eta = \varphi'(x_0)(x_1 - x_0) + \varphi'(x_1)(x_2 - x_1) + \varphi'(x_2)(x_3 - x_2) + \ldots \varphi'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \quad (7)$$

welchen wir der Kürze wegen mit S bezeichnen wollen, so ergiebt sich leicht, dass $\varphi'(x_0)$, $\varphi'(x_1)$, $\varphi'(x_2)$ ... $\varphi'(x_{n-1})$ alle einerlei Zeichen haben, wenn $\varphi(x)$ zwischen den Gränzen $x = x_0$ und $x = x_n$ beständig wächst oder abnimmt und ausserdem noch eine stätige Function ist, oder mit anderen Worten eine solche Function ist, welche sich unendlich wenig ändert, wenn ihre veränderliche Grösse x einen unendlich kleinen Zuwachs bekommt. Die Functionen

$$\varphi'(x_0), \quad \varphi'(x_1), \quad \varphi'(x_2), \quad \ldots \quad \varphi'(x_{n-1})$$

können wir noch so schreiben:

$$\frac{\varphi'(x_0)(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0}, \quad \frac{\varphi'(x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}, \quad \frac{\varphi'(x_2)(x_3 - x_2)}{x_3 - x_2}, \quad \ldots \quad \frac{\varphi'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

dadurch bekommen wir lauter positive oder lauter negative Brüche, deren Zähler und Nenner addirt und die Summe der ersteren mit der Summe der letzteren dividirt, uns einen Mittelbruch giebt, oder was dasselbe ist, einen mittleren Werth der Functionen $\varphi'(x_0)$, $\varphi'(x_1)$ ... $\varphi'(x_{n-1})$, welchen wir mit $\varphi'[x_0 + \theta(x_n - x_0)]$ bezeichnen wollen, wo θ eine positive zwischen 0 und 1 liegende Grösse bedeutet; so entsteht folgende Gleichung

$$\frac{\varphi'(x_0)(x_1-x_0)+\varphi'(x_1)(x_2-x_1)+\varphi'(x_2)(x_3-x_2)+\ldots+\varphi'(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})}{x_n-x_0}=$$
$$=\varphi'[x_0+\theta(x_n-x_0)],$$

die den Werth von S verwandelt in

$$S=\varphi'[x_0+\theta(x_n-x_0)](x_n-x_0). \tag{8}$$

Wenn wir aber in dem Ausdrucke

$$S=\varphi'(x_0)(x_1-x_0)+\varphi'(x_1)(x_2-x_1)+\varphi'(x_2)(x_3-x_2)+\ldots+\varphi'(x_{n-1})(x_n-x_{n-1}),$$

welcher, wie es aus dem Obigen erhellt, gleich $\varphi'[x_0+\theta(x_n-x_0)]\,(x_n-x_0)$ ist, statt $\varphi'(x_1)$, $\varphi'(x_2)$, $\varphi'(x_3)$, ... überall $\varphi'(x_0)$ substituiren, so verwandelt er sich in

$$(x_n-x_0)\,\varphi'(x_0), \tag{9}$$

so als ob der Unterschied x_n-x_0 gar nicht in Elemente zerlegt wäre; folglich können wir rückwärts schliessen, dass der Ausdruck in welchen $(x_k-x_{k-1})\,\varphi'(x_{k-1})$, bei Eintheilung in noch kleinere Elemente übergeht, die Form $\varphi'[x_{k-1}+\theta_{k-1}(x_k-x_{k-1})]\,(x_k-x_{k-1})$ annehmen kann, wo θ_{k-1} eine Grösse bedeutet, welche kleiner als 1 ist. Jetzt ist es leicht zu übersehen, dass der Ausdrnck (7) für S noch folgendermassen dargestellt werden kann, nehmlich

$$\begin{aligned}S=(x_1-x_0)\,\varphi'[x_0+\theta_0(x_1-x_0)]+(x_2-x_1)\,\varphi'[x_1+\theta_1(x_2-x_1)]+\ldots\\ \ldots+(x_n-x_{n-1})\,\varphi'[x_{n-1}+\theta_{n-1}(x_n-x_{n-1})],\end{aligned} \tag{10}$$

wo θ_0, θ_1, θ_2, θ_3 ... θ_{n-1}, zwischen 0 und 1 liegende Grössen sind.

Setzen wir in der letzten Gleichung

$$\varphi'[x_0+\theta_0(x_1-x_0)]=\varphi'(x_0)\pm\omega_0,\ \varphi'[x_1+\theta_1(x_2-x_1)]=\varphi'(x_1)\pm\omega_1,\ \ldots$$
$$\ldots\ \varphi'[x_{n-1}+\theta_{n-1}(x_n-x_{n-1})]=\varphi'(x_{n-1})\pm\omega_{n-1};$$

so verwandelt sie sich dadurch in

$$S=(x_1-x_0)[\varphi'(x_0)\pm\omega_0]+(x_2-x_1)[\varphi'(x_1)\pm\omega_1]+\ldots$$
$$\ldots+(x_n-x_{n-1})[\varphi'(x_{n-1})\pm\omega_{n-1}],$$

oder nach der Ausführung der Multiplication wird

$$\begin{aligned}S=(x_1-x_0)\,\varphi'(x_0)+(x_2-x_1)\,\varphi'(x_1)+(x_3-x_2)\,\varphi'(x_2)+\ldots+(x_n-x_{n-1})\,\varphi'(x_{n-1})\\ \pm(x_1-x_0)\,\omega_0\pm(x_2-x_1)\,\omega_1\pm(x_3-x_2)\,\omega_2\pm\ldots\pm(x_n-x_{n-1})\,\omega_{n-1}\end{aligned} \tag{11}$$

sein. Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem Ausdrucke (7) für S, so ergiebt sich, dass die Summe

$$\pm (x_1 - x_0)\,\omega_0 \pm (x_2 - x_1)\,\omega_1 \pm (x_3 - x_2)\,\omega_2 \pm \ldots \pm (x_n - x_{n-1})\,\omega_{n-1}$$

den Zuwachs ausdrückt, welchen S durch die Annahme, dass jedes der Elemente $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, . . . aus einer bestimmten Anzahl noch kleinerer Elemente bestehe, erhalten hat. Sind aber die numerischen Werthe der Elemente $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, . . . hinreichend klein, so werden auch die Quantitäten ω_0, ω_1, ω_2, . . . ω_{n-1} sehr wenig von Null abweichen; folglich wird auch die Summe

$$\pm (x_1 - x_0)\,\omega_0 \pm (x_2 - x_1)\,\omega_1 \pm (x_3 - x_2)\,\omega_2 \pm \ldots \pm (x_n - x_{n-1})\,\omega_{n-1},$$

welche gleich ist der Summe der Elemente $(x_n - x_0)$ multiplicirt mit einem mittleren Werth der Grössen $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_{n-1}$, welchen wir mit ω_μ bezeichnen wollen, oder $(x_n - x_0)\,\omega_\mu$, eine sehr kleine Zahl sein. Daraus können wir schliessen, dass, wenn einmal der Unterschied $(x_n - x_0)$ in hinreichend kleine Elemente zerlegt wurde und die Summe

$$S = (x_1 - x_0)\,\varphi'(x_0) + (x_2 - x_1)\,\varphi'(x_1) + (x_3 - x_2)\,\varphi'(x_2) + \ldots (x_n - x_{n-1})\,\varphi'(x_{n-1})$$

gefunden worden war, die Annahme noch kleinerer Elemente einen unmerklichen Einfluss auf den Werth von S hat, welcher Einfluss zuletzt ganz aufhört, wenn die Elemente unendlich klein geworden sind; so dass dann, man mag noch so kleine Elemente nehmen, S immer constant bleibt, und sich nur mit der Grösse von x_0 und x_n ändert. Die Gränze, welcher die Summe S auf solche Weise sich nähert, nennt man **bestimmtes Integral**, und die Werthe x_0 und x_n bezeichnet man mit dem Namen der **Gränzen zwischen welchen das bestimmte Integral genommen war.**

§ 3. Es ist ferner leicht zu übersehen, dass der Ausdruck

$$S = (x_1 - x_0)\,\varphi'(x_0) + (x_2 - x_1)\,\varphi'(x_1) + (x_3 - x_2)\,\varphi'(x_2) + \ldots (x_n - x_{n-1})\,\varphi'(x_{n-1})$$

noch folgendermassen dargestellt werden kann

$$S = \Sigma\,\varphi'(x)\,\Delta x, \tag{12}$$

aus welchem er abgeleitet wird, indem man nach und nach $\Delta x = x_1 - x_0$ und $x = x_0$, $\Delta x = x_2 - x_1$ und $x = x_1$, . . . und zuletzt $\Delta x = x_n - x_{n-1}$ und $x = x_{n-1}$ setzt, und die auf solche Weise erhaltenen Glieder

$$(x_1 - x_0)\,\varphi'(x_0),\ (x_2 - x_1)\,\varphi'(x_1),\ (x_3 - x_2)\,\varphi'(x_2),\ \ldots\ (x_n - x_{n-1})\,\varphi'(x_{n-1})$$

addirt, was durch das Summenzeichen Σ angedeutet wird. Die Gränze, welcher sich S

stets nähert, wenn die Elemente x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2, . . . immer kleiner und kleiner werden, bezeichnet man gewöhnlich so

$$Lim.\,\Sigma\,\varphi'(x)\,\Delta x = \int_{x_0}^{x_n} \varphi'(x)\,dx, \tag{13}$$

wo statt des griechischen Σ ein lateinisches $\int$ gebraucht wird, um zu zeigen, dass das letzte Summenzeichen sich auf die unendlich kleinen Elemente, welche hier mit dx bezeichnet sind, bezieht. Statt des angegebenen Zeichens bedient man sich auch, zur Bezeichnung der bestimmten Integrale, folgender

$$\int \varphi'(x)\,dx \begin{bmatrix} x_0 \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{oder} \quad \int \varphi'(x)\,dx \begin{bmatrix} x = x_0 \\ x = x_n \end{bmatrix}.$$

Die erste Bezeichnungsart aber, die **Fourier** zuerst gebraucht hat, ist die bequemste und fast von allen jetzt lebenden Mathematikern angenommen.

Stünde in der Formel (12) statt $\varphi'(x)$ eine constante Grösse, a z. B., so würde

$$S = \Sigma a\Delta x = a[(x_1-x_0) + (x_2-x_1) + \ldots + (x_n-x_{n-1})] = a(x_n-x_0).$$

Folglich

$$Lim.\,\Sigma a\Delta x = \int_{x_0}^{x_n} a\,dx = a(x_n-x_0).$$

Ist $a=1$, so bekommt man

$$\int_{x_0}^{x_n} dx = x_n - x_0;$$

oder wenn man $x=f(y)$, $dx=f'(y)\,dy$ setzt, so dass für $y=\eta_0$, $x=x_0$ und für $y=\eta_n$ $x=x_n$ ist, so ergiebt sich

$$\int_{\eta_0}^{\eta_n} f'(y)\,dy = f(\eta_n) - f(\eta_0).$$

Woraus erhellt, dass der Werth des Integrals $\int X dx = \varphi(x) + C$ zwischen den Gränzen x_0 und x_n gefunden wird, wenn man in der Function $\varphi(x)$ erst $x=x_0$ dann $x=x_n$ setzt und das erste Resultat von dem zweiten abzieht, wodurch man

$$\int_{x_0}^{x_n} X dx = \varphi(x_n) - \varphi(x_0) \tag{14}$$

bekommt, wo die Constante gänzlich verschwunden ist.

§ 4. Wir haben in § 2 gesehen, dass die Summe

$$S = (x_1 - x_0)\,\varphi'[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)\,\varphi'[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \dots$$
$$+ (x_n - x_{n-1})\,\varphi'[x_{n-1} + \theta_{n-1}(x_n - x_{n-1})]$$

sich desto mehr der Gränze $\int_{x_0}^{x_n} \varphi'(x)\,dx$ nähert, je kleiner die Elemente

$$x_1 - x_0,\; x_2 - x_1,\; x_3 - x_2,\; \dots\; x_n - x_{n-1}$$

sind. Setzt man in dieser Formel erst $\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = \dots \theta_{n-1} = 0$ und dann $\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = \dots \theta_{n-1} = 1$, so erhält man dadurch für S zwei verschiedene Ausdrücke, welche wir mit S_0 und S_1 bezeichnen wollen:

$$S_0 = (x_1 - x_0)\,\varphi'(x_0) + (x_2 - x_1)\,\varphi'(x_1) + (x_3 - x_2)\,\varphi'(x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1})\,\varphi'(x_{n-1})$$
$$S_1 = (x_1 - x_0)\,\varphi'(x_1) + (x_2 - x_1)\,\varphi'(x_2) + (x_3 - x_2)\,\varphi'(x_3) + \dots + (x_n - x_{n-1})\,\varphi'(x_n).$$

Der erste ist derselbe welchen wir im § 1. gefunden haben, der zweite unterscheidet sich von jenem dadurch, dass in ihm alle Functionen um einen Werth von x vorgerückt sind. Es ist aber klar dass beide das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{x_n} \varphi'(x)\,dx$ zur Gränze haben. Da nun von der anderen Seite das Integral

$$\int_{x_n}^{x_0} \varphi'(x)\,dx = Lim\,[(x_{n-1} - x_n)\,\varphi'(x_n) + (x_{n-2} - x_{n-1})\,\varphi'(x_{n-1}) + \dots + (x_0 - x_1)\,\varphi'(x_1)]$$

diese Summe aber $= - S_1$ ist, so ist dasselbe Integral $= - Lim\, S_1 = - Lim\, S_0$, folglich haben wir

$$\int_{x_n}^{x_0} \varphi'(x)\,dx = - \int_{x_0}^{x_n} \varphi'(x)\,dx. \tag{15}$$

Um die Berechnung der bestimmten Integrale zu vereinfachen, nimmt man gewöhnlich an, dass die Grössen x_0, x_1, x_2, ... x_n eine Arithmetische Reihe bilden, in welchem

Fall die Elemente $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, ..., die wir der Kürze wegen mit i_0, i_1, i_2, ... i_{n-1} bezeichnen wollen, alle gleich sind, und jedes von ihnen dem Bruche $\frac{x_n - x_0}{n}$ entspricht, dessen Werth wir im Allgemeinen mit i andeuten wollen; wodurch die Formeln für S_0 und S_1 folgende Gestalt bekommen:

$$\left.\begin{aligned} S_0 &= i[\varphi'(x_0) + \varphi'(x_0 + i) + \varphi'(x_0 + 2i) + \ldots + \varphi'(x_n - i)] \\ S_1 &= i[\varphi'(x_0 + i) + \varphi'(x_0 + 2i) + \varphi'(x_0 + 3i) + \ldots + \varphi'(x_n - i) + \varphi'(x_n)]. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Dehnt man diese Annahme auf den früher schon von uns gebrauchten Ausdruck für S, nämlich auf

$$S = (x_1 - x_0)\,\varphi'[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)\,\varphi'[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \ldots$$
$$\ldots + (x_n - x_{n-1})\,\varphi'[x_{n-1} + \theta_{n-1}(x_n - x_{n-1})],$$

aus, wo θ_0, θ_1, θ_2, ... unbestimmte Grössen bedeuten, die aber kleiner als 1 sind, so verwandelt sich derselbe in

$$S_\mu = i\Big\{\varphi'[x_0 + \theta_0 i] + \varphi'[(x_0 + i) + \theta_1 i] + \varphi'[(x_0 + 2i) + \theta_2 i] + \ldots$$
$$\ldots + \varphi'[(x_n - i) + \theta_{n-1} i]\Big\} \quad (17)$$

dessen Werth offenbar zwischen S_0 und S_1 liegt, wenn $\varphi'(x)$ zwischen den Gränzen $x = x_0$ und $x = x_n$ ununterbrochen wächst oder abnimmt, und dabei stätig bleibt. Folglich ist er ein Mittelwerth zwischen zwei Grössen S_0 und S_1 und das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\,dx$ ist die Gränze, welcher sich S_μ nähert, wenn in $\frac{x_n - x_0}{n} = i$ n grösser und grösser wird.

Nimmt man für den Werth des bestimmten Integrals $\int_{x_0}^{x_n} \varphi'(x)\,dx$ die halbe Summe von S_0 und S_1 an, so ergiebt sich

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi'(x)\,dx = Lim\, i\,[\tfrac{1}{2}\varphi'(x_0) + \varphi'(x_0 + i) + \varphi'(x_0 + 2i) + \ldots \varphi'(x_n - i) + \tfrac{1}{2}\varphi'(x_n)], \quad (18)$$

welche Grösse weniger als um den halben Unterschied zwischen S_0 und S_1

$$= \pm \frac{i}{2}[\varphi'(x_n) - \varphi'(x_0)]$$

von dem wahren Werthe des Integrals, $\mathit{Lim}\ S_\mu$, abweicht.

§ 5. Um Alles, was in früheren §§ gesagt wurde, durch ein Beispiel zu erleutern, wollen wir den genäherten Werth des Integrals

$$y = \int \frac{adx}{a^2+x^2},$$

welches Euler in I. B. Instit. Col. Integ. behandelt hat, zwischen den Gränzen $x=0$ und $x=n$ bestimmen. Bekanntlich

$$\int \frac{adx}{a^2+x^2} = Arc.\,tang\,\frac{x}{a} + Const.$$

Da aber für $x=0$ das Integral verschwindet, so ist die Constante gleich Null, also

$$y = Arc.\,tang\,\frac{x}{a} = \varphi(x),\ \frac{a}{a^2+x^2} = \varphi'(x).$$

Nehmen wir an, dass die Veränderliche x der Reihe nach folgende Werthe bekomme

$$o,\ i,\ 2i,\ 3i,\ 4i,\ \ldots\ (n-i),\ n,$$

wobei der Function $\varphi'(x)$ die Werthe

$$\frac{a}{a^2},\ \frac{a}{a^2+i^2},\ \frac{a}{a^2+4i^2},\ \ldots\ \frac{a}{a^2+(n-i)^2},\ \frac{a}{a^2+n^2}$$

entsprechen; so geben uns die Formeln (16), welche wir im voriger § entwickelt haben, für die genäherten Werthe des Integrals $\int_o^n \frac{adx}{a^2+x^2}$, folgende Ausdrücke:

$$ai\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2+i^2} + \frac{1}{a^2+4i^2} + \frac{1}{a^2+9i^2} + \ldots + \frac{1}{a^2+(n-2i)^2} + \frac{1}{a^2+(n-i)^2}\right)$$

und

$$ai\left(\frac{1}{a^2+i^2} + \frac{1}{a^2+4i^2} + \frac{1}{a^2+9i^2} + \ldots + \frac{i}{a^2+(n-i)^2} + \frac{1}{a^2+n^2}\right)$$

von denen der erste grösser, der zweite aber kleiner, als sein wahrer Werth ist. Das arithmetische Mittel aus beiden, giebt uns den mittleren zwischen zwei genäherten Werthen, welcher ist

$$Arc.\,tang\,\frac{n}{a}=ai\left(\frac{1}{2}\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2+i^2}+\frac{1}{a^2+4i^2}+\ldots+\frac{1}{a^2+(n-i)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(a^2+n^2)}\right),$$

und sich desto mehr der Wahrheit nähert je kleiner i ist. Ist aber a eine ziemlich grosse Zahl im Vergleich mit i, so sind je zwei auf einander folgende Glieder der Reihe

$$\frac{1}{2}\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2+i^2}+\frac{1}{a^2+4i^2}+\ldots+\frac{1}{a^2+(n-i)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(a^2+n^2)},$$

nicht sehr verschieden von einander, und man kann sogar zur Erleichterung der Berechnung $i=1$ setzen, wodurch

$$Arc.\,tang\,\frac{n}{a}=a\left(\frac{1}{2}\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{a^2+4}+\ldots+\frac{1}{a^2+(n-i)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(a^2+n^2)}\right).$$

Angenommen $a=1$ und $x=1$, so ergiebt sich aus der vorhergehenden Formel

$$Arc.\,tang.\,1=\frac{\pi}{4}=1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+1}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4};$$

also $\pi=3$. Für $a=2$ und $n=2$ erhält man

$$\frac{\pi}{4}=2\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{5}+\frac{1}{16}\right)=\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{8}=\frac{31}{40},$$

oder $\pi=3,1$. Ferner, für $a=3$ und $n=3$ hat man

$$\frac{\pi}{4}=3\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}+\frac{1}{36}\right),$$

woraus $\pi=3,1230$. Ist zuletzt $a=6$ und $n=6$, so bekommt man

$$\frac{\pi}{4}=6\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{36}+\frac{1}{36+1}+\frac{1}{36+4}+\frac{1}{36+9}+\frac{1}{36+16}+\frac{1}{36+25}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{36+36}\right)$$

$$\text{oder }\pi=24\left(\frac{1}{72}+\frac{1}{37}+\frac{1}{40}+\frac{1}{45}+\frac{1}{52}+\frac{1}{61}+\frac{1}{144}\right)$$

$$=24\cdot\frac{28628629632}{219029391360}=3,1368\ldots$$

Auf diese Weise berechnet man π, den halben Umfang des Kreises, dessen Radius 1 ist, desto genauer, je grösser a und n genommen werden, welche Grösse zugleich den Werth des bestimmten Integrals $\int_0^n\frac{adx}{a^2+x^2}$ ausdrückt.

§ 6. Will man den Werth des Integrals $y = \int X dx$ ganz genau berechnen, ohne die Anzahl der Elemente, in welche der Unterschied $x_n - x_0$ zerlegt wurde, zu vermehren, so muss man bei der Entwickelung der einzelnen Werthe η_1, η_2, η_3, ... η_n des integrals für $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2$, ... nach dem Taylor'schen Lehrsatze, wie es in § 1. geschehen ist auch die höheren Potenzen von i_0, i_1, i_2, ... berücksichtigen, Dadurch nehmen die dort entwickelten Formeln (5) folgende Gestalt an:

$$\eta_1 = \eta + \varphi'(x_0)\frac{i_0}{1} + \varphi''(x_0)\frac{i_0^2}{1.2} + \varphi'''(x_0)\frac{i_0^3}{1.2.3} + \dots$$

$$\eta_2 = \eta_1 + \varphi'(x_1)\frac{i_1}{1} + \varphi''(x_1)\frac{i_1^2}{1.2} + \varphi'''(x_1)\frac{i_1^3}{1.2.3} + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\eta_n = \eta_{n-1} + \varphi'(x_{n-1})\frac{i_{n-1}}{1} + \varphi''(x_{n-1})\frac{i_{n-1}^2}{1.2} + \varphi'''(x_{n-1})\frac{i_{n-1}^3}{1.2.3} + \dots$$

Addirt man diese Gleichungen zusammen, indem man zugleich voraussetzt, dass alle Elemente i_0, i_1, i_2, ... i_{n-1} gleich sind, deren gemeinschaftliche Grösse wir mit i bezeichnen wollen; so heben sich von beiden Seiten die gleichen Grössen auf, und es bleibt

$$\begin{aligned} \eta_n - \eta = S_0 = & [\varphi'(x_0) + \varphi'(x_1) + \varphi'(x_2) + \dots + \varphi'(x_{n-1})]\frac{i}{1} \\ & + [\varphi''(x_0) + \varphi''(x_1) + \varphi''(x_2) + \dots + \varphi''(x_{n-1})]\frac{i^2}{1.2} \\ & + [\varphi'''(x_0) + \varphi'''(x_1) + \varphi'''(x_2) + \dots + \varphi'''(x_{n-1})]\frac{i^3}{1.2.3} \\ & + \dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{19}$$

Erhält die Veränderliche x die Werthe, welche zwischen x_0 und x_n liegen in einer umgekehrten Ordnung, nehmlich x_n, x_{n-1}, ... x_1, x_0, so wird

$$x_{n-1} = x_n - i_{n-1}, \quad x_{n-2} = x_{n-1} - i_{n-2}, \quad \dots \quad x_1 = x_2 - i_1, \quad x_0 = x_1 - i_0,$$

wenn $x_n > x_0$ ist; und es ergiebt sich, indem man die frühere Bezeichnungsart beibehält, und die in § 1. angestellte Betrachtungen auf den jetzigen Fall anwendet, Folgendes

$$\eta_{n-1} = \eta_n - \varphi'(x_n)\frac{i_{n-1}}{1} + \varphi''(x_n)\frac{i_{n-1}^2}{1.2} - \varphi'''(x_n)\frac{i_{n-2}^3}{1.2.3} + \dots$$

$$\eta_{n-2} = \eta_{n-1} - \varphi'(x_{n-1})\frac{i_{n-2}}{1} + \varphi''(x_{n-1})\frac{i_{n-2}^2}{1.2} - \varphi'''(x_{n-1})\frac{i_{n-2}^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\eta_{n-3} = \eta_{n-2} - \varphi'(x_{n-2})\frac{i_{n-3}}{1} + \varphi''(x_{n-2})\frac{i_{n-3}^2}{1.2} - \varphi'''(x_{n-2})\frac{i_{n-3}^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta = \eta_1 - \varphi'(x_1)\frac{i_0}{1} + \varphi''(x_1)\frac{i_0}{1.2} - \varphi'''(x_1)\frac{i_0^1}{1.2.3} + \ldots$$

Durch Addition dieser Gleichungen bei der oben gemachten Voraussetzung dass $i_0 = i_1 = i_2 = \ldots = i_{n-1}$ erhält man

$$\begin{aligned}\eta_n - \eta = S_1 = & [\varphi'(x_1) + \varphi'(x_2) + \varphi'(x_3) + \ldots + \varphi'(x_n)]\frac{i}{1} \\ & - [\varphi''(x_1) + \varphi''(x_2) + \varphi''(x_3) + \ldots + \varphi''(x_n)]\frac{i^2}{1.2} \\ & + [\varphi'''(x_1) + \varphi'''(x_2) + \varphi'''(x_3) + \ldots + \varphi'''(x_n)]\frac{i^3}{1.2.3} \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \tag{20}$$

Für den Fall, dass keine von den Functionen $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$ ... zwischen den Gränzen $x = x_0$ und $x = x_n$ ihr Zeichen ändert, liegt der wahre Werth des Integrals zwischen den beiden Summen (19) und (20), aus welchen das arithmetische Mittel den richtigen genäherten Werth giebt, nämlich

$$\begin{aligned}\eta_n - \eta = S_\mu = & [\tfrac{1}{2}\varphi'(x_0) + \varphi'(x_1) + \varphi'(x_2) + \ldots + \varphi'(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2}\varphi'(x_n)]\frac{i}{1} \\ & + [\tfrac{1}{2}\varphi''(x_0) - \tfrac{1}{2}\varphi''(x_n)]\frac{i^2}{1.2} \\ & + [\tfrac{1}{2}\varphi'''(x_0) + \varphi'''(x_1) + \varphi'''(x_2) + \ldots + \varphi'''(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2}\varphi'''(x_n)]\frac{i^3}{1.2.3} \\ & + [\tfrac{1}{2}\varphi''''(x_0) - \tfrac{1}{2}\varphi''''(x_n)]\frac{i^4}{1.2.3.4} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \tag{21}$$

§ 7. Um die obige Formel auf ein Beispiel anwenden zu können, nehmen wir mit

Euler das Integral $y=\int\frac{dx}{x}$ und bestimmen sein Werth zwischen den Gränzen $x=1$ und $x=\xi$. Durch einfache Integration bekommt man

$$y=lx=\varphi(x),\text{ also }\int_1^\xi\frac{dx}{x}=l\xi,$$

weil für $x=1$, $lx=0$ ist. Es seyen die Werthe, welche x von 1 an bis ξ der Reihe nach erhält:

$$1,\quad 1+i,\quad 1+2i,\quad 1+3i,\quad \ldots\quad \xi-i,\quad \xi.$$

In unserem Fall sind die derivirten Functionen von $\varphi(x)$ folgende

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x},\quad \varphi''(x)=-\frac{1}{x^2},\quad \varphi'''(x)=\frac{2}{x^3},\quad \varphi''''(x)=-\frac{6}{x^4},\ \ldots$$

welche für einzelne Werthe von x werden:

$x=$	$1;$	$1+i;$	$1+2i;$	$1+3i;$		$\xi-i;$	ξ
$\varphi'(x)=$	$1;$	$\frac{1}{1+i};$	$\frac{1}{1+2i};$	$\frac{1}{1+3i};$		$\frac{1}{\xi-i};$	$\frac{1}{\xi}$
$\varphi''(x)=$	$-1;$	$\frac{-1}{(1+i)^2};$	$\frac{-1}{(1+2i)^2};$	$\frac{-1}{(1+3i)^2};$		$\frac{-1}{(\xi-i)^2};$	$\frac{-1}{\xi^2}$
$\varphi'''(x)=$	$2;$	$\frac{2}{(1+i)^3};$	$\frac{2}{(1+2i)^3};$	$\frac{2}{(1+3i)^3};$	$\ldots$	$\frac{2}{(\xi-i)^3};$	$\frac{2}{\xi^2}$
$\varphi''''(x)=$	$-6;$	$\frac{-6}{(1+i)^4};$	$\frac{-6}{(1+2i)^4};$	$\frac{-6}{(1+3i)^4};$	$\ldots$	$\frac{-6}{(\xi-i)^4};$	$\frac{-6}{\xi^4}$

Substituirt man diese Grössen in die Formel (21), so hat man

$$\int^\xi\frac{dx}{x}=l\xi=\frac{i}{1}\Big[\tfrac{1}{2}+\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1+2i}+\frac{1}{1+3i}+\ldots+\frac{1}{\xi-i}+\tfrac{1}{2}\frac{1}{\xi}\Big]-\frac{i^2}{4}\Big[1-\frac{1}{\xi^2}\Big]$$

$$+\frac{i^3}{3}\Big[\tfrac{1}{2}+\frac{1}{(1+i)^3}+\frac{1}{(1+2i)^3}+\frac{1}{(1+3i)^3}+\ldots+\frac{1}{(\xi-i)^3}+\tfrac{1}{2}\frac{1}{\xi^3}\Big]-\frac{i^4}{8}\Big[1-\frac{1}{\xi^4}\Big]$$

$$+\frac{i^5}{5}\Big[\tfrac{1}{2}+\frac{1}{(1+i)^5}+\frac{1}{(1+2i)^5}+\ldots+\frac{1}{(\xi-i)^5}+\tfrac{1}{2}\frac{1}{\xi^5}\Big]-\frac{i^6}{12}\Big[1-\frac{1}{\xi^6}\Big]$$

für den genäherten Werth des gegebenen Integrals. Wird $i = \frac{1}{m}$ gesetzt, wo m irgend eine positive ganze Zahl bedeutet, so verwandelt sich der letzte Ausdruck in

$$\int_1^{\xi} \frac{dx}{x} = l\xi = [\tfrac{1}{2}\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{\xi - m} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{\xi}] - \tfrac{1}{4}[\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^2\xi^2}]$$

$$+ \tfrac{1}{3}[\tfrac{1}{2}\frac{1}{m^3} + \frac{1}{(m+1)^3} + \frac{1}{(m+2)^3} + \dots + \frac{1}{(\xi-m)^3} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{\xi^3}] - \tfrac{1}{8}[\frac{1}{m^4} - \frac{1}{m^4\xi^4}]$$

$$+ \tfrac{1}{5}[\tfrac{1}{2}\frac{1}{m^5} + \frac{1}{(m+1)^5} + \frac{1}{(m+2)^5} + \dots + \frac{1}{(\xi-m)^5} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{\xi^5}] - \tfrac{1}{12}[\frac{1}{m^6} - \frac{1}{m^6\xi^6}]$$

§ 8. Wir haben bis jetzt den Fall betrachtet wo $\varphi'(x)$ zwischen den Gränzen $x = x_0$ und $x = x_n$ eine stätige und beständig wachsende positive Function war, so dass

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi'(x)dx = (x_1 - x_0)\,\varphi'(x_0) + (x_2 - x_1)\,\varphi'(x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})\,\varphi'(x_{n-1})$$

immer eine positive Grösse ist. Suchen wir nun den Werth des Integrals $\int_{x_0}^{x_n} \varphi'(x)\,dx$ zu finden, indem $\varphi'(x)$ zwar zwischen den Gränzen $x = x_0$ und $x = x_n$ stätig bleibt, aber wechselweise wächst und abnimmt. Es giebt also zwischen diesen Gränzen für $\varphi'(x)$ ein maximum und ein minimum, welches wir mit $\varphi'(x_m)$ und $\varphi'(x_k)$ bezeichnen, so dass wenn man in dem obigen Ausdruck für $\int_{x_0}^{x_n} \varphi'(x)dx$, statt

$$\varphi'(x_0), \quad \varphi'(x_1), \quad \varphi'(x_2) \quad \dots \quad \varphi'(x_{n-1})$$

erst überall $\varphi'(x_m)$ und dann $\varphi'(x_k)$ setzt,

$$(x_1 - x_0)\,\varphi'(x_m) + (x_2 - x_1)\,\varphi'(x_m) + (x_3 - x_2)\,\varphi'(x_m) + \dots$$

$$+ (x_n - x_{n-1})\,\varphi'(x_m) = (x_n - x_0)\,\varphi'(x_m) > \int_{x_0}^{x_n} \varphi'(x)dx$$

und

$$(x_1-x_0)\,\varphi'(x_k)+(x_2-x_1)\,\varphi'(x_k)+(x_3-x_2)\,\varphi'(x_k)+\dots$$

$$+(x_n-x_{n-1})\,\varphi'(x_k)=(x_n-x_0)\,\varphi'(x_k)<\int_{x_0}^{x_n}\varphi'(x)dx$$

wird. Folglich liegt das gesuchte Integral zwischen $(x_n-x_0)\,\varphi'(x_m)$ und $(x_n-x_0)\,\varphi'(x_k)$, und sein Werth kann dargestellt werden durch

$$\int_{x_0}^{x_n}\varphi'(x)dx=(x_n-x_0)\,\varphi'[x_0+\theta(x_n-x_0)],$$

wo θ eine positive Grösse bedeutet, die kleiner als 1 ist.

§ 9. Wir nehmen mit Cauchy an, dass $\varphi(x)$ eine Function ist, welche zwischen den Gränzen $x=x_0$ und $x=x_n$, wo $x_n>x_0$, positiv bleibt und fortwährend wächst oder abnimmt; und ferner dass R eine Fläche bedeutet, welche einerseits von der krummen Linie, deren Gleichung $y=\varphi(x)$ ist, und von der Axe x eines rechtwinklichten Coordinatensystems begränzt ist, und anderseits von den Ordinaten $y=\varphi(x_0)$ und $y=\varphi(x_n)$ eingeschlossen wird. Diese Fläche, welche x_n-x_0 zur Basis hat, ist grösser, als das Rechteck $(x_n-x_0)\,\varphi(x_0)$ und kleiner, als das Rechteck $(x_n-x_0)\,\varphi(x_n)$; sie gleicht also einem Rechteck, welches dieselbe Basis x_n-x_0 hat und auf einer mittleren Ordinate, die wir mit $\varphi[x_0+\theta(x_n-x_0)]$ bezeichnen wollen, construirt ist, so dass dann

$$R=(x_n-x_0)\,\varphi[x_0+\theta(x_n-x_0)],\tag{22}$$

wo θ eine zwischen 0 und 1 liegende Grösse bedeutet. Wird die Basis in unendlich kleine Elemente x_1-x_0, x_2-x_1, ... x_n-x_{n-1} zerlegt, so zerfällt die Fläche in eben so viel Elemente, r_0, r_1, r_2, r_3, ... r_{n-1}, die zu Folge der Gleichung (22) folgendermassen ausgedrückt werden können:

$$r_0=(x_1-x_0)\,\varphi[x_0+\theta_0(x_1-x_0)];\ r_1=(x_2-x_1)\,\varphi[x_1+\theta_1(x_2-x_1)];\ \dots$$
$$r_{n-1}=(x_n-x_{n-1})\,\varphi[x_{n-1}+\theta_{n-1}(x_n-x_{n-1})];$$

wo θ_0, θ_1, θ_2, ... θ_{n-1}, wie früher, die Grössen bedeuten, die zwischen 0 und 1 liegen. Da aber die Summe von allen diesen Elementen gleich R ist, so hat man

$$R = (x_1 - x_0)\,\varphi[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)\,\varphi[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \ldots$$
$$+ (x_n - x_{n-1})\,\varphi[x_{n-1} + \theta_{n-1}(x_n - x_{n-1})]. \qquad (23)$$

Sind in diesem Ausdruck die Elemente $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... $x_n - x_{n-1}$ unendlich klein, so erreicht sein Werth eine Gränze, welche wir oben mit $\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)dx$ bezeichnet haben. Daraus ergiebt sich, dass

$$R = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)dx. \qquad (24)$$

Setzt man in der Formel (23) $\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = \ldots \theta_{n-1} = 0$, so ist

$$(x_1 - x_0)\,\varphi(x_0) + (x_2 - x_1)\,\varphi(x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1})\,\varphi(x_{n-1}) < \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)dx, \qquad (25)$$

weil es, wie leicht zu übersehen ist, die Summe der innerhalb der krummen Linie liegenden Rechtecke darstellt. Wenn man dagegen in derselben Formel $\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = \ldots \theta_{n-1} = 1$ setzt, so wird

$$(x_1 - x_0)\,\varphi(x_1) + (x_2 - x_1)\,\varphi(x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1})\,\varphi(x_n) > \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)dx, \qquad (26)$$

weil die Summe der ausserhalb der krummen Linie liegenden Rechtecke grösser als R ist. Woraus folgt, dass der Werth von R zwischen diesen zwei Grössen liegt. Was sogleich erhellt, wenn man in allen drei Ausdrücken (23), (25), (26) die Elemente $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... $x_n - x_{n-1} = i$ annimmt, wodurch man wieder die in § 4. angegebenen Formeln (16) und (17) erhält. Daraus können wir schliessen, dass das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)dx$ den Inhalt der obenerwähnten Fläche R darstellt.

§ 10. Wir haben in § 3. für jede beliebige, zwischen den Gränzen x_0 und x_n stätige Function gefunden, dass

$$\int_{x_0}^{x_n}\varphi(x)dx = Lim.\,[(x_1-x_0)\,\varphi(x_0)+(x_2-x_1)\,\varphi(x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})\,\varphi(x_{n-1})],$$

woraus sogleich folgende allgemeinen Eigenschaften der bestimmten Integrale sich ergeben:

$$\int_{x_0}^{x_n}a\varphi(x)dx = Lim.\,a[(x_1-x_0)\,\varphi(x_0)+\ldots+(x_n-x_{n-1})\,\varphi(x_{n-1})] = a\int_{x_0}^{x_n}\varphi(x)dx \quad (27)$$

$$\int_{x_0}^{x_n}\varphi(x+a)dx = Lim.\,[(x_1-x_0)\,\varphi(x_0+a)+\ldots+(x_n-x_{n-1})\,\varphi(x_{n-1}+a)]$$

$$=\int_{x_0+a}^{x_n+a}\varphi(x)dx \quad (28)$$

$$\int_{x_0}^{x_n}\varphi(x-a)dx = \int_{x_0-a}^{x_n-a}\varphi(x)dx. \quad (29)$$

Uebrigens muss man bemerken, dass der letzte Ausdruck nicht immer gilt, so z. B. ist

$$\int_{x_0}^{x_n}\frac{dx}{x-a} = \int_{x_0-a}^{x_n-a}\frac{dx}{x} = l\left(\frac{x_n-a}{x_0-a}\right)$$

nur dann richtig, wenn $x_n - a$ und $x_0 - a$ einerlei Zeichen haben. Ausser der oben angeführten Methode, das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{x_n}\varphi(x)dx$ von anderen Integralen abhängig zu machen, giebt es noch andere. Wenn nämlich

$$\varphi(x) = \psi(x)+\chi(x)+\omega(x)+\ldots$$

so hat man zwischen den Gränzen $x = x_0$ und $x = x_n$

$$(x_1-x_0)\,\varphi(x_0)+(x_2-x_1)\,\varphi(x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})\,\varphi(x_{n-1}) =$$

$$=(x_1-x_0)\,\psi(x_0)+(x_2-x_1)\,\psi(x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})\,\psi(x_{n-1})$$

$$+(x_1-x_0)\,\chi(x_0)+(x_2-x_1)\,\chi(x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})\,\chi(x_{n-1})$$
$$+(x_1-x_0)\,\omega(x_0)+(x_2-x_1)\,\omega(x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})\,\omega(x_{n-1})$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Werden die Elemente x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2, ... unendlich klein genommen, so kann man statt jener Summen, die Gränzen, welchen sie sich nähern, nehmen, und es wird

$$\int_{x_0}^{x_n}\varphi(x)dx = \int_{x_0}^{x_n}\psi(x)dx + \int_{x_0}^{x_n}\chi(x)dx + \int_{x_0}^{x_n}\omega(x)dx + \ldots \tag{30}$$

Wenn wir daher mit u, v, w, ... die verschiedenen Functionen von x bezeichnen, so folgt aus dem Vorhergehenden, dass

$$\int_{x_0}^{x_n}(au+bv+cw+\ldots)\,dx = a\int_{x_0}^{x_n}udx + b\int_{x_0}^{x_n}vdx + c\int_{x_0}^{x_n}wdx +$$

ist; wo a, b, c, ... die constanten Grössen bedeuten.

§ 11. Man kann noch das Integral $\int_{x_0}^{x_n}\varphi(x)dx$ in eine bestimmte Anzahl anderer zerlegen, wenn man den Unterschied x_n-x_0 in eine beliebige aber endliche Anzahl der Elemente x_1-x_0, x_2-x_1, ... x_n-x_{n-1} theilt und die Summe bildet, welche wir in den früheren §§ mit S bezeichnet haben, nämlich:

$$S=(x_1-x_0)\,\varphi(x_0)+(x_2-x_1)\,\varphi(x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})\,\varphi(x_{n-1}). \tag{31}$$

Wird nun jedes von den Elementen x_1-x_0, x_2-x_1, ... x_n-x_{n-1} wieder in unendlich viele noch kleine Elemente zerlegt, und nach demselben Gesetze wie vorher die Summen s_0, s_1, s_2, ... s_{n-1} gebildet, so nähert sich die Summe S der Gränze $\int_{x_0}^{x_n}\varphi(x)dx$ und die einzelnen Glieder derselben s_0, s_1, s_2, ... s_{n-1} werden die bestimmten Integrale

$$\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x)dx \quad \int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)dx \quad \int_{x_2}^{x_3}\varphi(x)dx,\ \ldots\ \int_{x_{n-1}}^{x_n}\varphi(x)dx$$

zu ihren Gränzen haben. Man erhält also folgende Gleichung

$$\int_{x_0}^{x_n}\varphi(x)dx = \int_{x_0}^{x_1}\varphi(x)dx + \int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)dx + \int_{x_2}^{x_3}\varphi(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n}\varphi(x)dx \qquad (32)$$

So ist z, B. immer

$$\int_{-\xi}^{+\xi}\varphi(x)dx = \int_{-\xi}^{0}\varphi(x)dx + \int_{0}^{+\xi}\varphi(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{0}\varphi(x)dx + \int_{0}^{+\infty}\varphi(x)dx.$$

Diese Eigenschaft der bestimmten Integrale ist sehr wichtig, da sie uns darauf hinleitet, die Integration zwischen den gegebenen Gränzen auch auf solche Functionen ausdehnen zu können, welche zwischen diesen Gränzen für die gewissen Werthe der veränderlichen Grösse, eine Unterbrechung der Continuität (Solution de Continuité), erleiden. Finden nämlich zwischen den Gränzen $x = x_0$ und $x = x_n$ für die Werthe x_m, x_r, x_s, . . . Unterbrechungen der Continuität der Function $\varphi(x)$ statt, so wollen wir mit Cauchy unter dem zwischen den angegebenen Gränzen genommenen Integral von $\varphi(x)dx$ die Gränze verstehen, welcher sich die Grösse

$$\int_{x_0}^{x_m \mp \varepsilon}\varphi(x)dx + \int_{x_m \pm \varepsilon}^{x_r \mp \varepsilon}\varphi(x)dx + \int_{x_r \pm \varepsilon}^{x_s \mp \varepsilon}\varphi(x)dx + \ldots + \int_{x_u \pm \varepsilon}^{x_n}\varphi(x)dx$$

die oberen oder unteren Zeichen genommen, je nachdem x_0 kleiner oder grösser als x_n ist, nähert, wenn ε, das immer als positiv angenommen wird, sich der Null nähert, oder unendlich klein wird. Auf solche Weise haben die Mathematiker die Schwierigkeiten, welche die discontinuirlichen Functionen bei verschiedenen physisch-mathematischen Fragen ihnen darboten, aus dem Wege geräumt, und jene Functionen auf die continuirlichen zurückgeführt.

Zweites Capitel.

Über den Gebrauch der imaginären Grössen zur Umformung der bestimmten Integrale.

§ 12. Wenn $\varphi(x)$ eine beliebige, zwischen den Gränzen $x = x_0$ und $x = x_n$ stätige Function bedeutet, so ist nach § 3.

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)dx = (x_1 - x_0)\varphi(x_0) + (x_2 - x_1)\varphi(x_1) + (x_3 - x_2)\varphi(x_2) + \dots (x_n - x_{n-1})\varphi(x_{n-1}), \quad (1)$$

wo x_0 und x_n reele und rationale Grössen sind. Wird nun die Definition, welche in § 2. über das bestimmte Integral zwischen den reelen Gränzen ausgesprochen wurde, auch auf den Fall, wenn sie imaginären Grössen sind, wie z. B. $x = x_0 + y_0\sqrt{-1}$ und $x = x_n + y_n\sqrt{-1}$ angewendet; so hat man noch:

$$\begin{aligned}\int_{x_0 + y_0\sqrt{-1}}^{x_n + y_n\sqrt{-1}} \varphi(x)dx = {} & [x_1 - x_0 + (y_1 - y_0)\sqrt{-1}]\,\varphi(x_0 + y_0\sqrt{-1}) \\ & + [x_2 - x_1 + (y_2 - y_1)\sqrt{-1}]\,\varphi(x_1 + y_1\sqrt{-1}) \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots \\ & + [x_n - x_{n-1} + (y_n - y_{n-1})\sqrt{-1}]\,\varphi(x_{n-1} + y_{n-1}\sqrt{-1})\end{aligned} \quad (2)$$

Der zweite Theil dieser Gleichung wird desto genauer dem ersten entsprechen, je kleiner die Intervallen

$$x_1 - x_0, \quad x_2 - x_1, \quad x_3 - x_2, \quad \dots \quad x_{n-1} - x_{n-2}, \quad x_n - x_{n-1},$$
$$y_1 - y_0, \quad y_2 - y_1, \quad y_3 - y_2, \quad \dots \quad y_{n-1} - y_{n-2}, \quad y_n - y_{n-1},$$

sind; oder mit anderen Worten, je weniger in jeder der zwei Reihen

$$x_0,\quad x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad \ldots\quad x_{n-1},\quad x_n$$
$$y_0,\quad y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad \ldots\quad y_{n-1},\quad y_n$$

die unmittelbar nach einander folgenden Glieder sich unterschreiden; so dass man in diesem Fall annehmen kann, dass zwei Functionen $x=\chi(t)$ und $y=\psi(t)$ durch ununterbrochenes Wachsen ihres gemeinschaftlichen Argumentes t von $t=t_0$ an, bis $t=t_n$ diese zwei Reihen gebildet haben. - Es seyen die Werthe

$$t_0,\quad t_1,\quad t_2,\quad t_3,\quad \ldots\quad t_{n-1},\quad t_n,$$

welche t in beiden Functionen nach und nach annimmt; so ist

$$\left.\begin{array}{l} x_0=\chi(t_0),\quad x_1=\chi(t_1),\quad x_2=\chi(t_2)\quad \ldots\quad x_n=\chi(t_n);\\ y_0=\psi(t_0),\quad y_1=\psi(t_1),\quad y_2=\psi(t_2)\quad \ldots\quad y_n=\psi(t_n), \end{array}\right\}(3)$$

Man hat ferner, näherungsweise

$$\left.\begin{array}{l} x_1-x_0=(t_1-t_0)\chi'(t_0),\ x_2-x_1=(t_2-t_1)\chi'(t_1),\ \ldots\ x_n-x_{n-1}=(t_n-t_{n-1})\chi'(t_{n-1})\\ y_1-y_0=(t_1-t_0)\psi'(t_0),\ y_2-y_1=(t_2-t_1)\psi'(t_1),\ \ldots\ y_n-y_{n-1}=(t_n-t_{n-1})\psi'(t_{n-1}) \end{array}\right\}(4)$$

wo $\chi'(t_0)$ und $\psi'(t_0)$ die derivirten Functionen von $\chi(t_0)$ und $\psi(t_0)$ bedeuten. Bezeichnet man nun den Werth des Integrals (2) mit $M+N\sqrt{-1}$ und setzt darin statt $x_0,\ x_1,\ \ldots;$ $x_1-x_0,\ x_2-x_1,\ \ldots$ und $y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots;\ y_1-y_0,\ y_2-y_1,\ \ldots$ ihre Werthe aus (3) und (4); so erhält man

$$\begin{aligned} M+N\sqrt{-1} = {} & (t_1-t_0)\,[\chi'(t_0)+\sqrt{-1}\,\psi'(t_0)]\,\varphi[\chi(t_0)+\sqrt{-1}\,\psi(t_0)]\\ & +(t_2-t_1)\,[\chi'(t_1)+\sqrt{-1}\,\psi'(t_1)]\,\varphi[\chi(t_1)+\sqrt{-1}\,\psi(t_1)]\\ & +\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +(t_n-t_{n-1})[\chi'(t_{n-1})+\sqrt{-1}\,\psi'(t_{n-1})]\varphi[\chi(t_{n-1})+\sqrt{-1}\,\psi(t_{n-1})]. \quad (5) \end{aligned}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (1), so sieht man gleich ein, dass er im Allgemeinen dem bestimmten Integral

$$\int_{t_0}^{t_n}[\chi'(t)+\psi'(t)\sqrt{-1}]\,\varphi[\chi(t)+\sqrt{-1}\,\varphi(t)]dt$$

gleich ist, oder

$$M+\sqrt{-1}\,N=\int_{t_0}^{t_n}[\chi'(t)+\sqrt{-1}\,\psi'(t)]\,\varphi[\chi(t)+\sqrt{-1}\,\psi(t)]dt.$$

Wird aber der Kürze wegen $\chi'(t)=x'$, $\psi'(t)=y'$ gesetzt, so hat man zuletzt folgende Gleichung

$$M+\sqrt{-1}\,N=\int_{t_0}^{t_n}(x'+y'\sqrt{-1})\,\varphi(x+y\sqrt{-1})dt. \qquad (6)$$

Woraus erhellt, dass die bestimmten Integrale mit imaginären Gränzen immer auf die mit reelen zurückgeführt werden können.

§ 13. Wir wollen nun mit Cauchy zeigen, dass der Werth des Integrals (2), oder $M+\sqrt{-1}\,N$, wenn die Function $\varphi(x+y\sqrt{-1})$ continuirlich bleibt, solange x zwischen den Gränzen x_0 und x_n, und y zwischen y_0 und y_n begriffen sind, von der Form der beiden willkürlichen Functionen $x=\chi(t)$ und $y=\psi(t)$ unabhängig ist. Bezeichnen wir nämlich mit u und v zwei beliebige Functionen von t, die aber so beschaffen sind, dass sie für $t=t_0$ und $t=t_n$ verschwinden; und lassen wir $\chi(t)$ und $\psi(t)$ um die Quantitäten λu und λv wachsen, wo λ eine unendlich kleine positive Grösse bedeutet; so ist im Allgemeinen, wenn man in (6) statt x, $x+\lambda u$ und statt y, $y+\lambda v$ setzt und ebenso mit x' und y' verfährt:

$$M'+\sqrt{-1}\,N'=\int_{t_0}^{t_n}[x'+y'\sqrt{-1}+\lambda(u'+v'\sqrt{-1})]\,\varphi[x+y\sqrt{-1}+\lambda(u+v\sqrt{-1})]dt.$$

Entwickelt man Function $\varphi[x+y\sqrt{-1}+\lambda(u+v\sqrt{-1})]$ nach dem Taylor'schen Lehrsatze, indem man $\lambda(u+v\sqrt{-1})$ als Zuwachs, welchen das Argument erhalten hat, betrachtet, so ist

$$\varphi[x+y\sqrt{-1}+\lambda(u+\sqrt{-1}\,v)]=\varphi(x+y\sqrt{-1})+\frac{\lambda(u+v\sqrt{-1})}{1}\varphi'(x+y\sqrt{-1})$$
$$+\frac{\lambda^2(u+v\sqrt{-1})^2}{1.2}\varphi''(x+y\sqrt{-1})+\dots$$

wo φ', φ'', φ''', ... die erste, die zweite u. s. w. derivirten Functionen von φ bezeichnen. Woraus sich sogleich ergiebt:

$$M'+\sqrt{-1}\,N' = \int_{t_0}^{t_n}(x'+y'\sqrt{-1})\varphi(x+y\sqrt{-1})dt + \lambda\int_{t_0}^{t_n}(u'+v'\sqrt{-1})\varphi(x+y\sqrt{-1})dt$$

$$+\lambda\int_{t_0}^{t_n}(u+v\sqrt{-1})(x'+y'\sqrt{-1})\varphi'(x+y\sqrt{-1})dt + \lambda^2\int_{t_0}^{t_n}(u'+v'\sqrt{-1})\varphi'(x+y\sqrt{-1})dt + \ldots$$

Also

$$M'+\sqrt{-1}\,N'-(M+\sqrt{-1}\,N) = \lambda\int_{t_0}^{t_n}(u'+v'\sqrt{-1})\varphi(x+y\sqrt{-1})dt$$

$$+\lambda\int_{t_0}^{t_n}(u+v\sqrt{-1})(x'+y'\sqrt{-1})\varphi'(x+y\sqrt{-1})dt$$

ist, wenn man λ^2 und alle höheren Potenzen von λ wegen ihrer Kleinheit, als Null betrachtet. Ferner erhält man durch particulare Integration:

$$\int(u+v\sqrt{-1})(x'+y'\sqrt{-1})\varphi'(x+y\sqrt{-1})dt = (u+v\sqrt{-1})\varphi(x+y\sqrt{-1})$$

$$-\int(u'+v'\sqrt{-1})\varphi(x+y\sqrt{-1})dt;$$

folglich:

$$\int_{t_0}^{t_n}(u'+v'\sqrt{-1})\varphi(x+y\sqrt{-1})dt = -\int_{t_0}^{t_n}(u+v\sqrt{-1})(x'+y'\sqrt{-1})\varphi'(x+y\sqrt{-1})dt;$$

weil die Functionen u, v, für $t=t_0$ und $t=t_n$ verschwinden. Folglich

$$M'+\sqrt{-1}\,N'-(M+\sqrt{-1}\,N) = 0, \tag{7}$$

oder, mit anderen Worten, die kleine aber immer endliche Aenderung, welche die Functionen $\chi(t)$ und $\psi(t)$ erleiden, hat auf den Werth des Integrals (6) einen unendlich kleinen Einfluss, oder Null. In dem Fall aber, wo die Function $\varphi(x+y\sqrt{-1})$ für irgend einen Werth z. B. $t=\theta$ die Unterbrechungen der Continuität erleidet, so dass für $x=\chi(\theta)=a$ und $y=\psi(\theta)=b$, $\varphi(x+y\sqrt{-1})$ unendlich wird, hat Cauchy gezeigt, dass der Unterschied

$$M'+\sqrt{-1}\,N'-(M+\sqrt{-1}\,N)$$

im Allgemeinen gleich ist der Summe so vieler Intégrals singulières, wie er sie nennt, wie viel gleiche Wurzel von der Form $z = a + \sqrt{-1}\, b$ die Gleichung

$$\frac{1}{\varphi(z)} = 0$$

enthält.

§ 14. Ehe wir nun zu der Untersuchung der Werthe der bestimmten Integrale übergehen, entwickeln wir mit Cauchy einige der allgemeinen Formeln, welche dazu dienen, diese Integrale zu transformiren, und die Bestimmung ihres Werthes zu erleichtern. Wenn nämlich z eine Function von x und y bezeichnet und $\varphi(z)$ wieder eine beliebige Function von z bedeutet; so ist im Allgemeinen das Integral $\int \varphi(z) dz$ irgend eine Function von z. Das Differential von diesem Integral in Bezug auf x ist

$$\varphi(z)\frac{dz}{dx},$$

und in Bezug auf y

$$\varphi(z)\frac{dz}{dy}.$$

Differentiirt man wieder diese zwei Functionen, die erste in Bezug auf y und die zweite in Bezug auf x, so ergiebt sich:

$$\frac{d[\varphi(z)\frac{dz}{dx}]}{dy} = \varphi(z)\frac{d^2 z}{dx dy} + \varphi'(z)\frac{dz}{dx}.\frac{dz}{dy},$$

$$\frac{d[\varphi(z)\frac{dz}{dy}]}{dx} = \varphi(z)\frac{d^2 z}{dy dx} + \varphi'(z)\frac{dz}{dy}.\frac{dz}{dx}.$$

Woraus durch Vergleichung der beiden letzten Ausdrücke, folgt:

$$\frac{d[\varphi(z)\frac{dz}{dx}]}{dy} = \frac{d[\varphi(z)\frac{dz}{dy}]}{dx}. \quad (8)$$

Diese Gleichung ist für jedes beliebige z richtig. Wenn man daher $z = u \pm v\sqrt{-1}$ nimmt, so wird im Allgemeinen

$$\varphi(z) = U \pm V\sqrt{-1}$$

sein. Setzt man, ferner

$$U\frac{du}{dx}-V\frac{dv}{dx}=P,\quad U\frac{du}{dy}-V\frac{dv}{dy}=R,$$

$$U\frac{dv}{dx}+V\frac{du}{dx}=Q,\quad U\frac{dv}{dy}+V\frac{du}{dy}=S; \tag{9}$$

so ist nach (8)

$$\frac{dP}{dy}\pm\sqrt{-1}\,\frac{dQ}{dy}=\frac{dR}{dx}\pm\sqrt{-1}\,\frac{dS}{dx};$$

oder zuletz

$$\frac{dP}{dy}=\frac{dR}{dx}\ \text{und}\ \frac{dQ}{dy}=\frac{dS}{dx}. \tag{10}$$

Multiplicirt man diese zwei Gleichungen von beiden Seiten mit $dx\,dy$, so erhält man

$$\frac{dP}{dy}dy.dx=\frac{dR}{dx}dx.dy,\quad \frac{dQ}{dy}dy.dx=\frac{dS}{dx}dx.dy, \tag{11}$$

oder wenn man zwischen den Gränzen o und x und o und y integrirt, wird

$$\int_o^y\frac{dP}{dy}dy=P-p,\ \int_o^x\frac{dR}{dx}dx=R-r,$$

$$\int_o^y\frac{dQ}{dy}dy=Q-q,\ \int_o^x\frac{dS}{dx}dx=S-s,$$

wo p, q die Werthe von P, Q, und r, s die von R, S bezeichnen, wenn in den ersteren $y=o$ und in den letzteren $x=o$ gesetzt wird. Integrirt man von Neuem die vier letzten Gleichungen, so ergiebt sich, indem man auf die Gleichungen (11) Rücksicht nimmt:

$$\left.\begin{aligned}\int_o^x Pdx-\int_o^x pdx&=\int_o^y Rdy-\int_o^y rdy,\\ \int_o^x Qdx-\int_o^x qdx&=\int_o^y Sdy-\int_o^y sdy.\end{aligned}\right\}\ (12)$$

§ 15. Um dieses allgemeine Resultat auf einige speciellen Fälle anwenden zu können, nimmt **Cauchy** zuerst $u=x$, $v=y$. Woraus

$$z=x\pm y\sqrt{-1},\quad \varphi(x\pm y\sqrt{-1})=U\pm V\sqrt{-1},$$

$$\frac{du}{dx}=1,\quad \frac{dv}{dx}=0,\quad \frac{du}{dy}=0,\quad \frac{dv}{dy}=1,$$

$$\left.\begin{array}{ll} P=U, & R=-V, \\ Q=V, & S=U. \end{array}\right\}\quad (13)$$

Setzt man ferner $\varphi(x)=w$ und $\varphi(\pm y\sqrt{-1})=t\pm t'\sqrt{-1}$, wo t und t' die Werthe von U und V für $x=0$ und w den Werth von U für $y=0$ bezeichnen; so hat man nach (13)

$$\begin{array}{ll} p=w, & r=-t', \\ q=0, & s=t; \end{array}\quad (14)$$

und die Gleichungen (12) bekommen folgende Gestalt

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^x U\,dx - \int_0^x w\,dx = \int_0^y t'\,dy - \int_0^y V\,dy; \\ \int_0^x V\,dx = \int_0^y U\,dy - \int_0^y t\,dy. \end{array}\right\}\quad (15)$$

Angenommen, dass $\varphi(x)=e^{-x^2}$ ist, so ist $\varphi(y\sqrt{-1})=e^{y^2}$ und

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})=e^{-(x+y\sqrt{-1})^2}=e^{-x^2}\,.\,e^{y^2}\,Cos(2xy)-\sqrt{-1}\,e^{-x^2}\,.\,e^{y^2}\,Sin(2xy);$$

also

$$U=e^{-x^2}\,.\,e^{y^2}\,Cos(2xy),\quad V=-e^{-x^2}\,.\,e^{y^2}\,Sin(2xy),\quad w=e^{-x^2},$$

$$t=e^{y^2},\qquad t'=0.$$

Durch Substitution dieser Werthe in (15) ergeben sich zuletzt folgende Relationen:

$$e^{y^2}\,.\int_0^x e^{-x^2}\,.\,Cos(2xy)\,dx - e^{-x^2}\,.\int_0^y e^{y^2}\,.\,Sin(2xy)\,dy = \int_0^x e^{-x^2}\,.\,dx,$$

$$e^{-x^2}\,.\int_0^y e^{y^2}\,.\,Cos(2xy)\,dy + e^{y^2}\,.\int_0^x e^{-x^2}\,.\,Sin(2xy)\,dx = \int_0^y e^{y^2}\,.\,dy,$$

oder

$$e^{y^2}\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot Cos(2xy)dx = \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot dx,$$

$$e^{y^2}\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot Sin(2xy)dx = \int_0^{\infty} e^{y^2} \cdot dy, \quad (16)$$

weil die Glieder $e^{-x^2} \cdot \int_0^y e^{y^2} \cdot Sin(2xy)dy$, $e^{-x^2} \cdot \int_0^y e^{y^2} \cdot Cos(2xy)dy$ gleich Null sein werden, wenn man darin $x = \infty$ setzt. Auf diese Weise hat man die gegebenen Integrale von zwei anderen abhängig gemacht, deren Werthe zu finden im dritten Capitel gelehrt wird.

§ 16. Setzt man aber $u = x\ Cos\,y$ und $v = x\ Sin\,y$, so ist $z = x\,Cos\,y \pm x\,Sin\,y\sqrt{-1}$, und

$$\varphi(z) = \varphi(x\ Cos\,y \pm \sqrt{-1}\ x\ Sin\,y) = U \pm V\sqrt{-1}. \quad (17)$$

Woraus man

$$\frac{du}{dx} = Cos\,y,\quad \frac{dv}{dx} = Sin\,y,\quad \frac{du}{dy} = -x\ Sin\,y,\quad \frac{dv}{dy} = x\ Cos\,y,$$

$$P = U\ Cos\,y - V\ Sin\,y,\qquad R = -U\ x\ Sin\,y - V\ x\ Cos\,y,$$

$$Q = U\ Sin\,y + V\ Cos\,y,\qquad S = \ \ U\ x\ Cos\,y - V\ x\ Sin\,y,$$

erhält. Wird nun in (17) $y = o$ gesetzt, so ist $\varphi(x) = w$, wo w den Werth, welchen U für $y = o$ annimmt, bezeichnet, da der imaginäre Theil gänzlich verschwindet. Man hat ferner für $y = o$ und $x = o$

$$p = w,\qquad r = o,$$

$$q = o,\qquad s = o,$$

und die in § 14. entwickelten allgemeinen Formeln (12), für den vorliegenden Fall, verwandeln sich in

$$\left.\begin{aligned} \int_0^x (U\ Cos\,y - V\ Sin\,y)\,dx - \int_0^x w\,dx &= -x\int_0^y (U\ Sin\,y + V\ Cos\,y)\,dy, \\ \int_0^x (U\ Sin\,y + V\ Cos\,y)\,dx &= x\int_0^y (U\ Cos\,y - V\ Sin\,y)\,dy. \end{aligned}\right\} (18)$$

Sei $\varphi(x) = e^{-x}$, so ist

$$\varphi(x\,Cos\,y \pm \sqrt{-1}\,x\,Sin\,y) = e^{-(x\,Cos\,y \pm \sqrt{-1}\,x\,Sin\,y)} = e^{-x\,Cos\,y} \cdot e^{\mp \sqrt{-1}\,x\,Sin\,y},$$

$$U \pm V\sqrt{-1} = e^{-x\,Cos\,y} \cdot [Cos\,(x\,Sin\,y) \mp \sqrt{-1}\,Sin\,(x\,Sin\,y)],$$

oder, wenn man von beiden Seiten die letzte Gleichung mit $Cos\,y \pm \sqrt{-1}\,Sin\,y$ multipllcirt,

$$(U \pm V\sqrt{-1})(Cos\,y \pm \sqrt{-1}\,Sin\,y) = e^{-x\,Cos\,y} \cdot [Cos(y - x\,Sin\,y) \pm \sqrt{-1}\,Sin\,(y - x\,Sin\,y)].$$

Durch Vergleichung der reelen und imaginären Theile dieser Gleichung mit einander, ergiebt sich

$$U\,Cos\,y - V\,Sin\,y = e^{-x\,Cos\,y} \cdot Cos(y - x\,Sin\,y),\; U\,Sin\,y + V\,Cos\,y = e^{-x\,Cos\,y} \cdot Sin(y - x\,Sin\,y),$$

welche Werthe in (18) substituirt

$$\int_0^x e^{-x\,Cos\,y} \cdot Cos\,(y - x\,Sin\,y)\,dx - \int_0^x e^{-x} \cdot dx = -x \int_0^y e^{-x\,Cos\,y} \cdot Sin\,(y - x\,Sin\,y)\,dy$$

$$\int_0^x e^{-x\,Cos\,y} \cdot Sin\,(y - x\,Sin\,y)\,dx = x \int_0^y e^{-x\,Cos\,y} \cdot Cos\,(y - x\,Sin\,y)\,dy$$

geben. Da aber

$$\int_0^x e^{-x} \cdot dx = 1 - e^{-x},$$

$$\int e^{-x\,Cos\,y} \cdot Cos\,(y - x\,Sin\,y)\,dx = \int Cos\,y\,dx\,e^{-x\,Cos\,y} \cdot Cos\,(x\,Sin\,y)$$

$$+ \int Sin\,y\,dx\,e^{-x\,Cos\,y} \cdot Sin\,(x\,Sin\,y)$$

$$= -e^{-x\,Cos\,y} \cdot Cos\,(x\,Sin\,y) - \int Sin\,y\,dx\,e^{-x\,Cos\,y} \cdot Sin\,(x\,Sin\,y)$$

$$+ \int Sin\,y\,dx\,e^{-x\,Cos\,y} \cdot Sin\,(x\,Sin\,y)$$

$$\int_0^x e^{-x\,Cos\,y} \cdot Cos\,(y - x\,Sin\,y)\,dx = 1 - e^{-x\,Cos\,y} \cdot Cos\,(x\,Sin\,y),$$

$$\int_0^x e^{-x\,Cos\,y} \cdot Sin\,(y - x\,Sin\,y)\,dx = e^{-x\,Cos\,y} \cdot Sin\,(x\,Sin\,y),$$

so ist

$$\left.\begin{aligned}\int_0^y e^{-x\,Cos\,y} \cdot Sin\,(y - x\,Sin\,y)\,dy &= \frac{1}{x}\left[e^{-x\,Cos\,y} \cdot Cos\,(x\,Sin\,y) - e^{-x}\right]\\ \int_0^y e^{-x\,Cos\,y} \cdot Cos\,(y - x\,Sin\,y)\,dy &= \frac{1}{x}\,e^{-x\,Cos\,y} \cdot Sin\,(x\,Sin\,y).\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Vermittelst dieser Reductionsformeln, werden, wie man sieht, ohne Mühe, ziemlich complicirte Integrale gefunden, deren Entwickelung auf dem anderen Wege vielleicht manche Schwierigkeiten darbietet.

§ 17. Die in § 14. entwickelten Bedingungsgleichungen (10) hat Cauchy verschiedenen Transformationen unterworfen und dadurch ist ihm gelungen neue Reductionsformeln zu bilden, in der Art, wie die allgemeinen Formeln (12) gebildet wurden. Setzen wir nun, ihm folgend,

$$X = m\,Cos\,n, \tag{20}$$

wo X, m und n beliebige Functionen von x bezeichnen. Durch Substitution der Grösse $u \pm v\sqrt{-1}$, wo u und v irgend welche Functionen von x und y sind, in (20) statt x erhält man im Allgemeinen

$$X = U \pm V\sqrt{-1}$$
$$m = M \pm M'\sqrt{-1}$$
$$n = N \pm N'\sqrt{-1}.$$

Also wird die Gleichung (20) von der Form

$$U \pm V\sqrt{-1} = (M \pm M'\sqrt{-1})\,Cos\,(N \pm N'\sqrt{-1})$$

seyn, die durch Anwendung der Exponentialgrössen noch so dargestellt werden kann,

$$U \pm V\sqrt{-1} = (M \pm M'\sqrt{-1})\left[\mathit{Cos}\, N \frac{(e^{N'} + e^{-N'})}{2} \mp \mathit{Sin}\, N \frac{(e^{N'} - e^{-N'})}{2}\sqrt{-1}\right],$$

woraus man sogleich folgende Gleichungen erhält:

$$2\,U = (M\,\mathit{Cos}\,N + M'\,\mathit{Sin}\,N)\,e^{N'} + (M\,\mathit{Cos}\,N - M'\,\mathit{Sin}\,N)\,e^{-N'}$$

$$2\,V = (M'\,\mathit{Cos}\,N - M\,\mathit{Sin}\,N)\,e^{N'} + (M'\,\mathit{Cos}\,N + M\,\mathit{Sin}\,N)\,e^{-N'},$$

welche Werthe von U und V in (9) substituirt, uns geben

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{e^{N'}}{2}P_1 + \frac{e^{-N'}}{2}P_2, \quad R = \frac{e^{N'}}{2}R_1 + \frac{e^{-N'}}{2}R_2 \\ Q &= \frac{e^{N'}}{2}Q_1 + \frac{e^{-N'}}{2}Q_2, \quad S = \frac{e^{N'}}{2}S_1 + \frac{e^{-N'}}{2}S_2 \end{aligned}\right\}(21)$$

wo P_1, Q_1, R_1, S_1, durch die Gleichungen

$$P_1 = (M\,\mathit{Cos}\,N + M'\,\mathit{Sin}\,N)\frac{du}{dx} - (M'\,\mathit{Cos}\,N - M\,\mathit{Sin}\,N)\frac{dv}{dx}$$

$$Q_1 = (M\,\mathit{Cos}\,N + M'\,\mathit{Sin}\,N)\frac{dv}{dx} + (M'\,\mathit{Cos}\,N - M\,\mathit{Sin}\,N)\frac{du}{dx}$$

$$R_1 = (M\,\mathit{Cos}\,N + M'\,\mathit{Sin}\,N)\frac{du}{dy} - (M'\,\mathit{Cos}\,N - M\,\mathit{Sin}\,N)\frac{dv}{dy}$$

$$S_1 = (M\,\mathit{Cos}\,N + M'\,\mathit{Sin}\,N)\frac{dv}{dy} + (M'\,\mathit{Cos}\,N - M\,\mathit{Sin}\,N)\frac{du}{dy}$$

und P_2, Q_2, R_2, S_2 durch die Gleichungen

$$P_2 = (M\,\mathit{Cos}\,N - M'\,\mathit{Sin}\,N)\frac{du}{dx} - (M'\,\mathit{Cos}\,N + M\,\mathit{Sin}\,N)\frac{dv}{dx}$$

$$Q_2 = (M\,\mathit{Cos}\,N - M'\,\mathit{Sin}\,N)\frac{dv}{dx} + (M'\,\mathit{Cos}\,N + M\,\mathit{Sin}\,N)\frac{du}{dx}$$

$$R_2 = (M\,\mathit{Cos}\,N - M'\,\mathit{Sin}\,N)\frac{du}{dy} - (M'\,\mathit{Cos}\,N + M\,\mathit{Sin}\,N)\frac{dv}{dy}$$

$$S_2 = (M\,\mathit{Cos}\,N - M'\,\mathit{Sin}\,N)\frac{dv}{dy} + (M'\,\mathit{Cos}\,N + M\,\mathit{Sin}\,N)\frac{du}{dy}$$

bestimmt sind. Da aber die Bedingungsgleichungen (10) für alle Werthe von P, Q, R, S gelten, so ist in dem vorliegenden Fall

$$\frac{d(e^{N'} . P_1)}{dy} = \frac{d(e^{N'} . R_1)}{dx} \qquad \text{und} \qquad \frac{d(e^{-N'} . P_2)}{dy} = \frac{d(e^{-N'} . R_2)}{dx} \qquad (22)\ \text{u.}\ (23)$$

$$\frac{d(e^{N'} . Q_1)}{dy} = \frac{d(e^{N'} . S_1)}{dx} \qquad \qquad \frac{d(e^{-N'} . Q_2)}{dy} = \frac{d(e^{-N'} . S_2)}{dx}$$

weil nur diejenigen Grössen, welche in gleichnamigen Exponentialgrössen multiplicirt sind, einander aufheben können, so dass statt zwei früheren Bedingungsgleichungen, nun vier andere denselben ähnlich entstehen, welche wieder durch eine ähnliche Transformation auf acht neue reducirt werden können u. s. w. So sieht man ein, welch eine Menge bestimmter Integrale mittelst dieser Methode gefunden werden kann.

Multiplicirt man erst die Gleichungen (22) mit $dx\, dy$, und integrirt von o bis x und von o bis y in der Art, wie es in § 14. geschehen ist, so erhält man folgende Gleichungen, welche den Gleichungen (12) ganz analog sind:

$$\int_0^x e^{N'} . P_1 dx - \int_0^x e^{n'} . p_1 dx = \int_0^y e^{N'} . R_1 dy - \int_0^y e^{n'} . r_1 dy$$

$$\int_0^x e^{N'} . Q_1 dx - \int_0^x e^{n'} . q_1 dx = \int_0^y e^{N'} . S_1 dy - \int_0^y e^{n'} . s_1 dy, \qquad (24)$$

wo p_1, q_1; die Werthe von P_1, Q_1, und r_1, s_1, n', die von R_1, S_1, N', wenn in den ersteren $y = o$ und in den letzteren $x = o$ gesetzt wird, bezeichnen. Ebenso bekommt man aus den Gleichungen (23)

$$\int_0^x e^{-N'} . P_2 dx - \int_0^x e^{-n'} . p_2 dx = \int_0^y e^{-N'} . R_2 dy - \int_0^y e^{-n'} . r_2 dy$$

$$\int_0^x e^{-N'} . Q_2 dx - \int_0^x e^{-n'} . q_2 dx = \int_0^y e^{-N'} . S_2 dy - \int_0^y e^{-n'} . s_2 dy. \qquad (25)$$

Aus diesen vier Hauptreductionsformeln lassen sich viele andere herleiten, wenn man nämlich für u und v nach und nach verschiedene Functionen von x und y annimmt.

Drittes Capitel.

Entwickelung der Werthe der bestimmten Integrale.

§ 18. Es giebt vier Methoden, deren man sich gewöhnlich in der höheren Analysis bedient um zu dem Werthe der bestimmten Integrale zu gelangen. Die erste Methode besteht darin dass man das Integral, wo es möglich ist, unter irgend einer Form vollständig darstellt, oder wenigstens auf ein Integral reducirt, bei welchem dieses möglich ist. Eine zweite Methode beruht darauf, dass man aus der Eigenthümlichkeit der zu integrirenden Function, Gleichungen ableitet zwischen den Werthen, welche das gesuchte Integral für verschiedene Werthe der in ihm vorkommenden Grössen annimmt. Nach der dritten Methode leitet man aus dem schon bekannten Werthe eines bestimmten Integrals durch Differentiation in Bezug auf die Constanten, welche es enthält, andere Integrale ab. Die vierte Methode endlich benutzt die doppelte Integration um durch Umkehrung der Reihenfolge, in welcher solche ausgeführt wird, von einem Integral auf ein anderes zu gelangen. Man muss übrigens bemerken, dass es selten gelingt, wenn man ausschliesslich nach einer von diesen vier Methoden verfährt, zum Werthe eines Integrals zu gelangen, daher führen meistentheils, eine glückliche Verbindung von zwei Methoden, bei zweckmässiger Umformung durch Substitutionen des gegebenen Integrals, und andere in der höheren Analysis gebräuchliche Kunstgriffe, am sichersten zum Ziele.

Es sey uns das Integral $\int \frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$ gegeben, dessen Werth man zwischen den Gränzen $x=0$ und $x=1$ bestimmen will. Durch eine einfache Differentiation ergiebt sich

$$d[x^m\sqrt{1-x^2}] = mx^{m-1}dx\sqrt{1-x^2} - \frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

oder

$$d[x^m\sqrt{1-x^2}] = \frac{mx^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{(m+1)x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

wenn man $mx^{m-1}dx\sqrt{1-x^2}$ mit $\sqrt{1-x^2}$ multiplicirt und darauf dividirt. Integrirt man nun die letzte Gleichung, so wird

$$\int\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^m\sqrt{1-x^2}}{m+1} + \frac{m}{m+1}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

welches Integral zwischen den Gränzen $x=0$ und $x=1$ genommen, giebt

$$\int_0^1\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{m}{m+1}\int_0^1\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (1)$$

Setzt man in diesem Ausdruck statt m, $m-2$; so wird

$$\int_0^1\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m-2}{m-1}\int_0^1\frac{x^{m-3}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

oder, wenn man in (1) statt $\int_0^1\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$ seinen Werth substituirt,

$$\int_0^1\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m(m-2)}{(m+1)(m-1)}\int_0^1\frac{x^{m-3}dx}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (2)$$

Es ist leicht zu übersehen, dass man diesen Weg verfolgend zu zwei verschiedenen Integralen gelangt, von welchen das Integral $\int_0^1\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$ abhängig wird. Ist nämlich $m+1$ eine ungerade Zahl, z. B. $=2n+1$, so hat man

$$\int_0^1\frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 8.6.4.2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\ldots 9.7.5.3}\int_0^1\frac{x.dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (3)$$

für $m+1=2n$ einer geraden Zahl, wird

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 7.5.3.1}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 6.4.2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4}$$

Bekanntlich ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = Arc.\,Sin\, x; \quad \text{folglich} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2},$$

wo π den halben Umfang eines Kreises bedeutet, dessen Radius gleich 1 ist. Setzt man ferner $1-x^2 = z^2$, so ist $x\,dx = -z\,dz$. Also

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{z\,dz}{z} = -z = -\sqrt{1-x^2}, \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1.$$

Die Formeln (3) und (4), wenn wir darin die Ordnung der Factoren umkehren und statt $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ und $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ihre Werthe substituiren, nehmen folgende Gestalt an:

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6.8\ldots(2n-2)\,2n}{3.5.7.9\ldots(2n-1)(2n+1)} \tag{5}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-3)(2n-1)}{2.4.6.8\ldots(2n-2)\,2n}\,\frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

§ 19. Nachdem wir den Werth des Integrals $\int_0^1 \frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$ für jede beliebige positive m gefunden haben, sind wir nun im Stande das bestimmte Integral $\int_0^1 \frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^4}}$ zu einer Reihe zu entwickeln. Euler giebt diesem Integral folgende Form [1]).

1) Euleri Institutionum Calculi Integralis. T. I. Pag. 206.

$$\int_0^1 \frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 \frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \int_0^1 \frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}\left(1-\tfrac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots\right)$$

indem er aus $1-x^4=(1+x^2)(1-x^2)$ den Factor $(1+x^2)$ absonderte. Also nach dem binomischen Lehrsatze

$$\int_0^1 \frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 \frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} - \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{m+3}dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1.3}{2.4}\int_0^1 \frac{x^{m+5}dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\int_0^1 \frac{x^{m+7}dx}{\sqrt{1-x^2}} + \ldots$$

Setzt man $m+1$ einer geraden Zahl z. B. $2n$ gleich, so sind $m+3=2n+2$, $m+5=2n+4$, u. s. f. lauter gerade Zahlen, folglich sind alle in der obigen Reihe vorkommende Integrale nur specielle Fälle der Formel (6). Es wird also

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n-2)2n} - \tfrac{1}{2}\frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1.3.5.7\ldots(2n+3)}{2.4.6\ldots(2n+4)} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{3.5.7\ldots(2n+5)}{2.4.6\ldots(2n+6)} + \ldots\right\}$$

und

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{2.4.6.8\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)} - \tfrac{1}{2}\frac{2.4.6\ldots(2n+2)}{3.5.7\ldots(2n+3)} + \frac{1.3}{2.4}\frac{2.4.6\ldots(2n+4)}{3.5.7\ldots(2n+5)} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{2.4.6\ldots(2n+6)}{3.5.7\ldots(2n+7)} + \ldots$$

wenn $m+1=2n+1$ einer ungeraden Zahl gesetzt wird.

§ 20. Durch eine zweckmässige Anwendung der vorhergehenden Integrale, hat Euler die Werthe mehrer anderer Integrale bestimmt, und sehr viele merkwürdige Relationen zwischen denselben entdeckt, die wir später bei Gelegenheit anführen werden. Jetzt wollen wir noch durch ein Beispiel zeigen, wie die Entwickelung in Reihen uns manchmal zu dem wahren Werthe des Integrals führen kann. Aus der Lehre der Kreisfunctionen ist bekannt, dass $Cos\,\varphi = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2}$ und $Sin\,\varphi = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen und φ irgend einen Bogen des Kreises bezeichnen, sich zu Producten von unzähligen Factoren entwickeln lassen. Nämlich:

$$Sin\,\varphi = \varphi(1-\frac{\varphi^2}{\pi^2})(1-\frac{\varphi^2}{4\pi^2})(1-\frac{\varphi^2}{9\pi^2})(1-\frac{\varphi^2}{16\pi^2})\ldots$$

$$= \varphi(1-\frac{\varphi}{\pi})(1+\frac{\varphi}{\pi})(1-\frac{\varphi}{2\pi})(1+\frac{\varphi}{2\pi})(1-\frac{\varphi}{3\pi})(1+\frac{\varphi}{3\pi})\ldots$$

und

$$Cos\,\varphi = (1-\frac{4\varphi^2}{\pi^2})(1-\frac{4\varphi^2}{9\pi^2})(1-\frac{4\varphi^2}{25\pi^2})(1-\frac{4\varphi^2}{49\pi^2})\ldots$$

$$= (1-\frac{2\varphi}{\pi})(1+\frac{2\varphi}{\pi})(1-\frac{2\varphi}{3\pi})(1+\frac{2\varphi}{3\pi})(1-\frac{2\varphi}{5\pi})(1+\frac{2\varphi}{5\pi})\ldots$$

wo π den halben Umfang des Kreises, dessen Radius 1 ist, bedeutet.

Setzen wir nun in diesen Formeln $\varphi = \pi x$, so wird

$$Sin\,\pi x = \pi x(1-\frac{x}{1})(1+\frac{x}{1})(1-\frac{x}{2})(1+\frac{x}{2})(1-\frac{x}{3})(1+\frac{x}{3})\ldots$$

$$Cos\,\pi x = (1-\frac{2x}{1})(1+\frac{2x}{1})(1-\frac{2x}{3})(1+\frac{2x}{3})(1-\frac{2x}{5})(1+\frac{2x}{5})\ldots$$

oder

$$l\,Sin\,\pi x = l\pi x + l(1-\frac{x}{1}) + l(1+\frac{x}{1}) + l(1-\frac{x}{2}) + l(1+\frac{x}{2}) + l(1-\frac{x}{3}) + \ldots$$

$$l\,Cos\,\pi x = l(1-\frac{2x}{1}) + l(1+\frac{2x}{1}) + l(1-\frac{2x}{3}) + l(1+\frac{2x}{3}) + \ldots$$

wenn man den natürlichen Logarithmus von beiden Theilen dieser Gleichungen nimmt. Woraus durch blosse Differentiation sich ergiebt

$$\frac{\pi\,Cos\,\pi x}{Sin\,\pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \ldots$$

$$\frac{\pi\,Sin\,\pi x}{Cos\,\pi x} = \frac{2}{1-2x} - \frac{2}{1+2x} + \frac{2}{3-2x} - \frac{2}{3+2x} + \frac{2}{5-2x} - \ldots$$

Die zweite Gleichung kann noch durch Substitution darin $\frac{x}{2}$ statt x folgende Form annehmen;

$$\frac{\pi\,Sin\,\frac{1}{2}\pi x}{Cos\,\frac{1}{2}\pi x} = \frac{2}{1-x} - \frac{2}{1+x} + \frac{2}{3-x} - \frac{2}{3+x} + \frac{2}{5-x} + \ldots$$

Ferner, ist

$$\frac{\pi\,Cos\,\pi x}{Sin\,\pi x} + \frac{\pi\,Sin\,\frac{1}{2}\pi x}{Cos\,\frac{1}{2}\pi x} = \frac{\pi\,Cos\,\pi x}{Sin\,\pi x} + \frac{\pi(1-Cos\,\pi x)}{Sin\,\pi x} = \frac{\pi}{Sin\,\pi x},$$

also

$$\frac{\pi}{\mathrm{Sin}\,\pi x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \ldots \tag{7}$$

Nun können wir den Werth des bestimmten Integrals $\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$ zwischen den Gränzen $x = o$ und $x = \infty$ bestimmen. Durch eine einfache Division, bekommt man

$$\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = x^{m-1}dx - x^{m+n-1}dx + x^{m+2n-1}dx - \ldots$$

Integrirt man die beiden Theile der Gleichung, so wird

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \frac{x^m}{m} - \frac{x^{m+n}}{m+n} + \frac{x^{m+2n}}{m+2n} - \frac{x^{m+3n}}{m+3n} + \ldots \tag{8}$$

oder zwischen den Gränzen $x = o$ und $x = \infty$ genommen, giebt etwas Unbestimmtes, man muss also diesen Ausdruck erst gehörig umformen. Wenn man Zähler und Nenner des Bruches $\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$ mit x^n dividirt, so ist

$$\int_o^1 \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \int_o^1 \frac{x^{m-n-1}dx}{1+x^{-n}},$$

folglich um dieses Integral zu einer Reihe zu entwickeln, braucht man nur in der früheren Reihe überall statt m, $m-n$ und statt n, $-n$ zu substituiren, dadurch erhält man

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \frac{x^{m-n}}{m-n} - \frac{x^{m-2n}}{m-2n} + \frac{x^{m-3n}}{m-3n} - \ldots$$

Nun aber nach § 11.

$$\int_o^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \int_o^1 \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} + \int_1^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}.$$

Die obige Reihe ist $= o$ für $x = \infty$, wenn n positiv und $> m$. Also

$$\int_1^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = -\frac{1}{m-n} + \frac{1}{m-2n} - \frac{1}{m-3n} + \frac{1}{m-4n} - \ldots$$

und

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} - \frac{1}{m+3n} + \ldots$$

wie es aus der Formel (8) durch Substitution der Gränze sich ergiebt. Folglich

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m-n} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m-2n} + \frac{1}{m+2n} - \ldots$$

$$= \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \ldots$$

Setzt man in (7) $x = \frac{m}{n}$, so ist, nachdem man von beiden Seiten mit n dividirt hat;

$$\frac{\pi}{n \, Sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \ldots$$

woraus folgt:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \, Sin \frac{m\pi}{n}}. \qquad (9)$$

Wird $n = 1$ gesetzt, so erhält man für jedes $m < n$ oder < 1.

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{Sin \, m\pi}. \qquad (10)$$

Der Beweis dieses merkwürdigen Integrals, welchen wir hier mitgetheilt haben, ist aus Klügels mathematischem Wörterbuch [1]) entlehnt. Wegen seiner Einfachheit und ganz elementaren Methode haben wir ihn dem eulerschen Beweise vorgezogen, da es diesem gerade an jenen Eigenschaften gebricht. Jetzt wollen wir noch mit einigen Bemerkungen die Betrachtung des bestimmten Integrals $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$ schliessen. Durch Differentiation wurde oben gefunden

1) Supplemente zu G. S. Klügel's Wörterbuche. F. 1, p. 154.

$$\frac{\pi \operatorname{Cos} \pi x}{\operatorname{Sin} \pi x} = \frac{\pi}{\operatorname{tang} \pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \ldots$$

woraus folgt, wenn man $x = \frac{m}{x}$ setzt, und alle Glieder der Reihe mit n dividirt

$$\frac{\pi}{n \operatorname{tang} \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \ldots$$

Dieselbe Reihe wird erhalten wenn man die Function $\frac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1-x^n} dx$ nach den steigenden Potenzen von x entwickelt und die einzelnen Glieder zwischen den Gränzen $x = o$ und $x = 1$ integrirt, so dass dann

$$\int_o^1 \frac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1-x^n} dx = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \ldots$$

Verfährt man dagegen auf dieselbe Weise mit dem Integral $\int \frac{x^{m-1} + x^{n-m-1}}{1+x^n} dx$, so wird

$$\int_o^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-m-1}}{1+x^n} dx = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \ldots = \frac{\pi}{n \operatorname{Sin} \frac{m\pi}{n}};$$

woraus sich sogleich folgende merkwürdige Relation ergiebt:

$$\int_o^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-m-1}}{1+x^n} dx = \int_o^\infty \frac{x^{m-1} dx}{1+x^n}. \qquad (11)$$

Da aber

$$\int_o^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-m-1}}{1+x^n} dx = \int_o^1 \frac{x^{m-1} dx}{1+x^n} + \int_o^1 \frac{x^{n-m-1} dx}{1+x^n},$$

$$\int_o^\infty \frac{x^{m-1} dx}{1+x^n} = \int_o^1 \frac{x^{m-1} dx}{1+x^n} + \int_1^\infty \frac{x^{m-1} dx}{1+x^n};$$

so ist

$$\int_1^\infty \frac{x^{m-1} dx}{1+x^n} = \int_o^1 \frac{x^{n-m-1} dx}{1+x^n}. \qquad (12)$$

§ 21. Wir kommen nun zur Untersuchung einiger der merkwürdigsten Relationen, die aus den Gleichungen zwischen zweien oder mehreren bestimmten Integralen entstehen. Dazu wählen wir hauptsächlich die zwei Arten der Integrale, welche in der höheren Analysis unter dem Namen Euler'sche bekannt sind, und eine reiche Quelle zum Auffinden bestimmter Integrale darbieten. Vorher aber untersuchen wir den Werth des Quotienten $\dfrac{\int_0^1 Xx^{p-1}dx}{\int_0^1 Xx^{q-1}dx}$ zweier bestimmten Integrale, wo $X=(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}$ der Kürze wegen gesetzt ist.

Angenommen $y=x^p(1-x^n)^r$, wo p und r grösser als 0 sind, so hat man

$$dy=px^{p-1}dx(1-x^n)^{r-1}-(p+rn)x^{p+n-1}dx(1-x^n)^{r-1},$$

woraus durch Integration sich ergiebt

$$y=p\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{r-1}-(p+rn)\int x^{p+n-1}dx(1-x^n)^{r-1},$$

oder

$$\int_0^1 x^{p+n-1}dx(1-x^n)^{r-1}=\frac{p}{p+rn}\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{r-1},$$

weil für $x=1$ und $x=0$, $y=0$ ist. Setzt man $r=\frac{m}{n}$, so wird

$$\int_0^1 x^{p+n-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}=\frac{p}{p+m}\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}},$$

oder

$$\int_0^1 Xx^{p-1}dx=\frac{m+p}{p}\int_0^1 Xx^{p+n-1}dx. \qquad (13)$$

Wird in dieser Formel wieder statt p, $p+n$ gesetzt, so ist

$$\int_0^1 X x^{p+n-1} dx = \frac{m+n+p}{n+p} \int_0^1 X x^{p+2n-1} dx;$$

also

$$\int_0^1 X x^{p-1} dx = \frac{(m+p)(m+n+p)}{p(n+p)} \int_0^1 X x^{p+2n-1} dx. \tag{14}$$

Verfährt man auf dieselbe Weise weiter, so wird dadurch das gegebene Integral zu einer Reihe von Factoren entwickelt, welche in die Unendlichkeit fortgesetzt werden kann. Nämlich:

$$\int_0^1 X x^{p-1} dx = \frac{(m+p)(m+n+p)(m+2n+p)\ldots(m+in-n+p)}{p(p+n)(p+2n)(p+3n)\ldots(p+in-n)} \int_0^1 X x^{p+in-1} dx, \tag{15}$$

wo i eine unendlich grosse Zahl bedeutet. Eben so wird

$$\int_0^1 X x^{q-1} dx = \frac{(m+q)(m+n+q)(m+2n+q)\ldots(m+in-n+q)}{q(q+n)(q+2n)(q+3n)\ldots(q+in-n)} \int_0^1 X x^{q+in-1} dx \tag{16}$$

wo p, q, m und n positive Grössen sind.

Setzen wir nun

$$\int_0^1 X x^{p-1} dx = P \quad \text{und} \quad \int_0^1 X x^{q-1} dx = Q,$$

so dass dann

$$\frac{P}{Q} = \frac{(m+p)q}{p(m+q)} \cdot \frac{(m+n+p)(q+n)}{(p+n)(m+n+q)} \cdot \frac{(m+2n+p)(q+2n)}{(p+2n)(m+2n+q)} \tag{17}$$

ist, weil aus der Gleichung (13), für $p = \infty$, sich ergiebt

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{m-n}{n}} = \int_0^1 x^{p+n-1} dx (1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}$$

oder auch

$$\int_0^1 x^{p+n-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}} = \int_0^1 x^{p+2n-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}} = \int_0^1 x^{p+3n-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}},$$

wenn man statt p successive $p+n$, $p+2n$, $p+3n$ ... substituirt, so kann man im Allgemeinen

$$\int_0^1 x^{p+in-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}} = \int_0^1 x^{q+in-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}$$

setzen, wo p, q, m, n beliebige positive aber endliche Grössen bedeuten und i eine unendlich grosse Zahl ist. Nimmt man von beiden Theilen der Gleichung (17) den natürlichen Logarithmus, es wird

$$\begin{aligned} lP-lQ = {} & l(m+p)-lp+l(m+p+n)-l(p+n)+l(m+2n+p)-l(p+2n)+\ldots \\ & +lq-l(m+q)+l(q+n)-l(m+n+q)+l(q+2n)-l(m+2n+q)+\ldots \end{aligned}$$

welche Gleichung für alle positive Werthe von p, q, m, n gilt, und gelten muss, wenn auch eine oder mehrere von diesen Grössen als veränderlich betrachtet werden. Aendert sich z. B. p, indem q, m, n constant bleiben, so ändert sich auch P allein und Q bleibt constant. Das Differential von der obigen Gleichung in Bezug auf p, welches wir mit $\overset{p}{d}P$ bezeichnen wollen, wird

$$\frac{\overset{p}{d}P}{P} = \frac{1}{m+p} - \frac{1}{p} + \frac{1}{m+n+p} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{m+2n+p} - \frac{1}{2n+p} + \ldots$$

Um die Summe dieser unendlichen Reihe zu finden, setzt man

$$\varphi(z) = \frac{z^{m+p}}{m+p} - \frac{z^p}{p} + \frac{z^{m+n+p}}{m+n+p} - \frac{z^{n+p}}{n+p} + \frac{z^{m+2n+p}}{m+2n+p} - \ldots$$

so dass für $z=1$, $\varphi(1)=\frac{\overset{p}{d}P}{P}$. Differentiirt man $\varphi(z)$, in Bezug auf z, so hat man

$$\begin{aligned} \overset{z}{d}\varphi(z) &= z^{m+p-1}-z^{p-1}+z^{m+n+p-1}-z^{n+p-1}+z^{m+2n+p-1}-z^{2n+p-1}+\ldots \\ &= (z^{m+p-1}-z^{p-1})(1+z^n+z^{2n}+z^{3n}+\ldots)\ \ldots \end{aligned}$$

Es ist leicht zu übersehen dass der letzte Factor der Gränze $\frac{1}{1-z^n}$ sich nähert und

$$\overset{z}{d}\varphi(z) = (z^{m+p-1} - z^{p-1})\ \frac{1}{1-z^n}$$

wird desto richtiger je mehr man in dem oben erwähnten Factor Glieder nimmt. Integrirt man die letzte Gleichung, so wird

$$\varphi(z) = \int (z^{m+p-1} - z^{p-1}) . \frac{dz}{1-z^n} = \int \frac{z^{p-1}(z^m - 1)dz}{1-z^n},$$

wo die Function $\varphi(z)$ für $z = 1$, oder $\varphi(1)$ dem bestimmten Integral $\int_0^1 \frac{z^{p-1}(z^m-1)dz}{1-z^n}$ gleich ist, oder

$$\frac{\overset{p}{d}P}{P} = \int_0^1 \frac{z^{p-1}(z^m-1)dz}{1-z^n}. \tag{18}$$

Da aber in $P = \int_0^1 X x^{p-1} dx$ das Integralzeichen sich auf die veränderliche x bezieht, so können wir nach der bekannten Regel unter dem Integralzeichen in Bezug auf p differentiiren und es wird

$$\overset{p}{d}P = \int_0^1 X x^{p-1} lx\, dx.$$

Setzt man in der Formel (18) statt pdP und P ihre Werthe, so ist

$$\frac{\int_0^1 X x^{p-1} dx\, lx}{\int_0^1 X x^{p-1} dx} = \int_0^1 \frac{z^{p-1}(z^m-1)dz}{1-z^n},$$

oder im Allgemeinen, wenn man $z = x$ setzt und auf beiden Seiten mit $\int_0^1 X x^{p-1} dx$ multiplicirt

$$\int_0^1 X x^{p-1} dx\, lx = \int_0^1 X x^{p-1} dx \int_0^1 \frac{x^{p-1}(x^m-1)dx}{1-x^n}. \tag{19}$$

§ 22. Ehe wir nun zu der Untersuchung verschiedener bestimmter Integrale, welche aus dieser merkwürdigen Relation entstehen, übergehen, wollen wir ein Paar Werthe bestimmen, welche in besonderen Fällen die oben mit P und Q bezeichneten Integrale, annehmen.

Wird nämlich $p=n$, so verwandelt sich das Integral $\int_0^1 Xx^{p-1}dx$ in $\int_0^1 Xx^{n-1}dx$. Setzt man nun $x^n=y$, so ist

$$X = (1-y)^{\frac{m-n}{n}}, \quad x^{n-1}dx = \frac{1}{n}dy;$$

folglich

$$\int_0^1 Xx^{n-1}dx = \frac{1}{n}\cdot\int_0^1 dy\,(1-y)^{\frac{m-n}{n}}.$$

Setzt man ferner $1-y=z$, dadurch erhält man

$$\int_0^1 Xx^{n-1}dx = -\frac{1}{n}\cdot\int_1^0 z^{\frac{m-n}{n}}dz = \frac{1}{m}, \tag{20}$$

weil für $y=0$, $z=1$ und für $y=1$, $z=0$ ist. Wird dagegen $p=n-m$, so ist der Werth des Integrals $\int_0^1 Xx^{n-m-1}dx$ zu suchen. Sei $y=\frac{x}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}}$, woraus sich sogleich ergiebt, dass für $x=0$ auch $y=0$ ist und für $x=1$, $y=\infty$ wird; ferner

$$y^{n-m} = \frac{x^{n-m}}{(1-x^n)^{\frac{n-m}{n}}} = x^{n-m}(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}} = Xx^{n-m},$$

also

$$\int_0^1 Xx^{n-m-1}dx = \int_0^\infty y^{n-m}\frac{dx}{x}. \tag{21}$$

Da aber aus $y=\frac{x}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}}$ folgt $x^n=\frac{y^n}{1+y^n}$, oder wenn man den natürlichen Logarithmus nimmt $nlx=nly-l(1+y^n)$. Differential davon ist

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} - \frac{y^{n-1}dy}{1+y^n} = \frac{dy}{y(1+y^n)},$$

welchen Werth, wenn man in den obigen Integral substituirt, so wird

$$\int_0^1 X x^{n-m-1} dx = \int_0^\infty \frac{y^{n-m}dy}{y(1+y^n)} = \int_0^\infty \frac{y^{n-m-1}dy}{1+y^n} = \frac{\pi}{n\,Sin\,\frac{(n-m)\pi}{n}} = \frac{\pi}{n\,Sin\,\frac{m\pi}{n}} \qquad (22)$$

wie wir es in § 20. gefunden haben.

§ 23. Angenommen dass $m = 1$ und $n = 2$, so bekommt die Formel (19) folgende Gestalt

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx\,lx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1+x}, \qquad (23)$$

woraus sich sogleich ergiebt, für $p = 1$

$$\int_0^1 \frac{lx\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{1+x},$$

wo bekanntlich

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = Arc.\,Sin\,x + C, \quad \int \frac{dx}{1+x} = l(1+x) + C,$$

oder

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = l2;$$

folglich

$$\int_0^1 \frac{lx\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2}\,l2. \qquad (24)$$

Wird dagegen in dem Ausdruck (23) $p = 2$ gesetzt, so hat man

$$\int_0^1 \frac{x\,dx\,lx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \int_0^1 \frac{xdx}{1+x}.$$

Da aber $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = 1$, wie es aus dem § 18. erhellt, und

$$\int \frac{xdx}{1+x} = \int\left(dx - \frac{dx}{1+x}\right) = x - l(1+x), \text{ oder } \int_0^1 \frac{xdx}{1+x} = 1 - l2,$$

also

$$\int_0^1 \frac{x\,dx\,lx}{\sqrt{1-x^2}} = l2 - 1. \tag{25}$$

§ 24. Setzt man in dem Ausdruck (19) $m = 3$ und $n = 2$, so ergiebt sich daraus folgende Relation:

$$\int_0^1 x^{p-1}dx\,lx\sqrt{1-x^2} = \int_0^1 x^{p-1}dx\sqrt{1-x^2}\,.\int_0^1 \frac{x^{p-1}(x^3-1)dx}{1-x^2} \tag{26}$$

die noch vereinfacht werden kann, wenn man darauf Acht giebt, dass

$$\frac{x^{p-1}(x^3-1)dx}{1-x^2} = -\frac{x^3-1}{x-1}\,\frac{x^{p-1}dx}{1+x} = -\frac{(x^2+x+1)x^{p-1}dx}{1+x} = -\left(x^p + \frac{x^{p-1}}{1+x}\right)dx$$

ist, wovon das Integral zwischen den Gränzen $x = 0$ und $x = 1$ genommen, giebt

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx(x^3-1)}{1-x^2} = -\left(\frac{1}{p+1} + \int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1+x}\right).$$

Substituirt man diesen Werth in (26), so erhält man

$$\int_0^1 x^{p-1}dx\,lx\sqrt{1-x^2} = -\int_0^1 x^{p-1}dx\sqrt{1-x^2}\,.\left(\frac{1}{p+1} + \int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1+x}\right), \tag{27}$$

oder für $p = 1$

$$\int_0^1 dx\,lx\sqrt{1-x^2} = -\left(\tfrac{1}{2} + l2\right)\int_0^1 dx\sqrt{1-x^2}.$$

Ferner ist

$$\int dx\sqrt{1-x^2} = \int\frac{dx(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

und

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2},\quad \int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

also

$$\int_0^1 dx\, lx\sqrt{1-x^2} = -\frac{\pi}{4}\left(\tfrac{1}{2}+l2\right). \tag{28}$$

Auf diesem Wege findet Euler [1]) die Werthe noch vieler anderen bestimmten Integrale, indem er für p, m und n immer neue Grössen nimmt.

§ 25. Eine Menge trefflicher Memoiren, die Euler zu verschiedenen Zeiten der Petersburger Akademie der Wissenschaften über die bestimmten Integrale mitgetheilt hatte, haben den bekannten französischen Mathematiker Legendre veranlasst, mit diesem wichtigen Theil der höheren Analysis sich besonders zu beschäftigen. In seinem Werke Exercices de Calcul Intégral T. I., S. 221 etc. betrachtet er zwei Arten der Integrale, die er unter dem Namen die Euler'sche Integrale der ersten und der zweiten Art, unterscheidet. Zu der ersten Art gehören die in dem Ausdruck

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{q-n}}},$$

(wo n, p und q ganze positive Zahlen bezeichnen) enthaltenen bestimmten Integrale, und zu der zweiten Art, die in dem Ausdruck

$$\int_0^1 dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1},$$

(wo l immer den natürlichen Logarithmus bezeichnen soll, und a als positiv angenommen

1) Euleri Instit. Cal. Integralis. T. IV, p. 175 etc.

wird, sonst aber jede rationale Grösse bezeichnen kann), enthaltenen bestimmten Integrale. Legendre gebraucht im angeführten Werke der Kürze wegen eine besondere Bezeichnungsart, die wir hier beibehalten wollen. Es ist nämlich nach ihm

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right) \quad \text{und} \quad \int_0^1 dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1} = \Gamma(a),$$

wo $\Gamma(a)$ eine Function von a bezeichnet, und n als beständig, in allen Functionen $\left(\frac{p}{q}\right)$, welche für verschiedene Werthe p und q entstehen, betrachtet wird und darum in dem Zeichen der Function nicht vorkommt.

§ 26. Suchen wir nun, Legendre folgend, verschiedene Eigenschaften der beiden Arten Euler'scher Integrale zu entwickeln. Wird nämlich in dem Ausdruck $\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, $1-x^n = y^n$ gesetzt, so hat man

$$x^{p-1}dx = -(1-y^n)^{-\frac{n-p}{n}}.\, y^{n-1}dy, \quad \sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}} = y^{n-q}$$

und

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = -\int_1^0 \frac{y^{q-1}dy}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{n-p}}},$$

weil für $x=0$, $y=1$ und für $x=1$, $y=0$ ist; oder allgemein, wenn man statt y, x setzt und nach § 3. die Ordnung der Gränze umkehrt, so ergiebt sich

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int_0^1 \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}},$$

woraus man, zufolge der angenommenen Bezeichnungsart erhält, dass

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \tag{29}$$

ist. Setzt man dagegen $x^n = z$ und bezeichnet nach der Analogie $\int_0^1 x^{p-1}dx\,(1-x^n)^{q-1}$ mit

(p, q), wo p und q positive, sonst beliebige rationale Grössen sind, so wird in unserem Fall

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{1}{n}\int_0^1 z^{\frac{p}{n}-1} \cdot dz(1-z)^{\frac{q}{n}-1}$$

sein, oder was dasselbe ist

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{1}{n}\int_0^1 x^{\frac{p}{n}-1} dx(1-x)^{\frac{q}{n}-1},$$

also nach Legendre'schen Bezeichnung

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right), \tag{30}$$

wenn man nämlich $\int_0^1 x^{\frac{p}{n}-1} dx(1-x)^{\frac{q}{n}-1} = \left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right)$ setzt.

§ 27. Wenn wir weiter auf dieselbe Weise fortfahren und $y = x^k(1-x^n)^r$ setzen, wo k und r grösser als o sind, so wird $dy = k\,x^{k-1}dx(1-x^n)^{r-1} - (k+rn)\,x^{k+n-1}dx(1-x^n)^{r-1}$, woraus durch Integration sich ergiebt

$$y = k\int x^{k-1}dx(1-x^n)^{r-1} - (k+rn)\int x^{k+n-1}dx(1-x^n)^{r-1}$$

oder

$$\int_0^1 x^{k+n-1}dx\,(1-x^n)^{r-1} = \frac{k}{k+rn}\int_0^1 x^{k-1}dx\,(1-x^n)^{r-1},$$

weil für $x = 1$ und $x = o$, $y = o$ ist. Nimmt man $k+n = p$ und $r = \frac{q}{n}$, so folgt dass

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{p-n}{p+q-n}\int_0^1 \frac{x^{p-n-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}},$$

ist, oder nach der eingeführten Bezeichnung

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p-n}{p+q-n}\left(\frac{p-n}{q}\right). \tag{31}$$

Woraus folgt, wenn man statt p, $p+n$ setzt,

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+q}{p}\left(\frac{p+n}{q}\right).$$

Auf dieselbe Weise erhält man ferner

$$\left(\frac{p+n}{q}\right) = \frac{p+q+n}{p+n}\left(\frac{p+2n}{q}\right)$$

$$\left(\frac{p+2n}{q}\right) = \frac{p+q+2n}{p+2n}\left(\frac{p+3n}{q}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

bis zuletzt

$$\left(\frac{p+[k-1]n}{q}\right) = \frac{p+q+[k-1]n}{p+[k-1]n}\left(\frac{p+kn}{q}\right),$$

wo k irgend eine positive ganze Zahl bezeichnet. Es wird also

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+q}{p}\,\frac{p+q+n}{p+n}\,\frac{p+q+2n}{p+2n}\cdots\frac{p+q+[k-1]n}{p+[k-1]n}\left(\frac{p+kn}{q}\right)$$

sein, oder statt p, $p+r$ gesetzt,

$$\left(\frac{p+r}{q}\right) = \frac{p+q+r}{p+r}\,\frac{p+q+r+n}{p+r+n}\,\frac{p+q+r+2n}{p+r+2n}\cdots\frac{p+q+r+[k-1]n}{p+r+[k-1]n}\left(\frac{p+r+kn}{q}\right).$$

Der Quotient von diesen zwei Reihen Factoren ist

$$\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{p+r}{q}\right)} = Q_1, Q_2, Q_3 \ldots Q_{k-1}\frac{\left(\frac{p+kn}{q}\right)}{\left(\frac{p+r+kn}{q}\right)},$$

wo

$$Q_1 = \frac{(p+q)(p+r)}{p(p+q+r)}, \qquad Q_2 = \frac{(p+q+n)(p+r+n)}{(p+n)(p+q+r+n)},$$

$$Q_3 = \frac{(p+q+2n)(p+r+2n)}{(p+2n)(p+q+r+2n)}, \qquad Q_4 = \frac{(p+q+3n)(p+r+3n)}{(p+3n)(p+q+r+3n)},$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

ist. Betrachten wir nun was geschieht mit der Function $\left(\frac{p}{q}\right) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, wenn darin p immer grösser und grösser wird, indem q und n unverändert bleiben. Da das bestimmte Integral zwischen den Gränzen $x=0$ und $x=1$ genommen sein muss, so kann man es nach dem was wir schon früher gezeigt haben, als eine Summe betrachten, die aus unzählig vielen Gliedern besteht, welche gebildet werden wenn man in der Function $\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ alle Werthe, die zwischen 0 und 1 liegen, nach und nach substituirt. Ihre Summe wird also, bei der oben gemachten Voraussetzung, desto kleiner ausfallen, je grösser p ist. Man hat daher

$$\left(\frac{p+kn}{q}\right) > \left(\frac{p+r+kn}{q}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{p+n+kn}{q}\right) < \left(\frac{p+r+kn}{q}\right) < \left(\frac{p+kn}{q}\right);$$

wenn r positiv und kleiner als n ist. Woraus sogleich folgt, dass der Quotient

$$\frac{\left(\frac{p+kn}{q}\right)}{\left(\frac{p+r+kn}{q}\right)} > 1$$

ist. Ferner ergiebt sich aus der Formel (31), wenn man darin statt p, $p+n+kn$ setzt:

$$\left(\frac{p+kn}{q}\right) = \frac{p+q+kn}{p+kn}\left(\frac{p+n+kn}{q}\right)$$

oder auch

$$\left(\frac{p+kn}{q}\right):\left(\frac{p+r+kn}{q}\right) < \frac{p+q+kn}{p+kn}.$$

Dieser Quotient ist also zwischen 1 und $\frac{p+q+kn}{p+kn}$ enthalten. Will man daher dass er die Einheit nicht mehr als um $\frac{1}{m}$, wo m eine beliebig grosse positive Zahl bedeutet, übertreffe, so braucht man nur

$$\frac{p+kn+q}{p+kn} = 1+\frac{1}{m}$$

zu setzen, woraus folgt, dass $k = \frac{(q-1)m-p}{n}$ genommen sein muss. Für m unendlich wird

$$\left(\frac{p+kn}{q}\right):\left(\frac{p+r+kn}{q}\right) = 1.$$

Folglich

$$\frac{(\frac{p}{q})}{(\frac{p+r}{q})} = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot Q_4 \ldots$$

Setzt man in diesem Ausdruck überall statt q, r und umgekehrt, so erhält man wieder

$$\frac{(\frac{p}{r})}{(\frac{p+q}{r})} = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot Q_4 \ldots$$

bis in die Unendlichkeit, weil die Quotienten Q_1, Q_2, Q_3, ... durch diese Substitution sich nicht ändern, wie es aus ihren Werthen erhellt. Man hat daher folgende merkwürdige von Euler gefundene Relation,

$$(\frac{p}{q}).(\frac{p+q}{r}) = (\frac{p}{r})(\frac{p+r}{q}), \tag{32}$$

welche, wie Legendre bemerkt, eine Art von Gleichung zwischen endlichen Differenzen ist, und fast die ganze Theorie der Transcendenten $(\frac{p}{q})$ in sich einschliesst.

§ 28. Nachdem wir die Haupteigenschaften der Euler'schen Integrale der ersten Art auseinander gesetzt haben, wollen wir jetzt zu der Entwickelung der Function $(\frac{p}{q})$ übergehen. Dazu betrachten wir erst zwei besondere Fälle, nämlich: wenn p oder q gleich n ist, und dann wenn ihre Summe $p+q=n$ ist. Im ersten Fall, wo $q=n$ ist, hat man unmittelbar

$$(\frac{p}{n}) = \int_0^1 x^{p-1}dx = \frac{1}{p}. \tag{33}$$

Wird dagegen $p+q=n$, so ist $q=n-p$, und die Function $(\frac{p}{q}) = \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{-\frac{p}{n}}$.

Macht man darin $1-x^n = x^n y^n$, so bekommt die Transcendente $(\frac{p}{q})$, folgende rationale Form,

$$(\frac{p}{n-p}) = -\int_{\infty}^{o} \frac{y^{n-p-1}dy}{1+y^n} = \int_{o}^{\infty} \frac{y^{n-p-1}dy}{1+y^n},$$

weil für $x=o$, $y=\infty$ und für $x=1$, $y=o$ ist. Da aber in § 20. gezeigt wurde, dass

$$\int_{o}^{\infty} \frac{y^{n-p-1}dy}{1+y^n} = \frac{\pi}{n\,Sin\,\frac{(n-p)\pi}{n}} = \frac{\pi}{n\,Sin\,\frac{p\pi}{n}}$$

ist; es wird daher, wenn man $\frac{1}{n}\pi = \omega$ setzt,

$$(\frac{p}{n-p}) = \frac{\omega}{Sin\,p\omega} \tag{34}$$

sein. Mittelst der beiden letzten Formeln erhält man den genauen Werth von $(\frac{p}{q})$ in allen den Fällen, wo eine der beiden Grössen p, q oder ihre Summe $=n$ ist. Man hat hierbei nur noch zu merken, dass nach (29) und (33)

$$(\frac{n}{q}) = (\frac{q}{n}) = \frac{1}{q}$$

ist.

§ 29. Wir wollen jetzt einmal voraussetzen, dass der Werth von $(\frac{p}{q})$ auch in allen den Fällen bekannt sei, wo $p+q=n-1$, d. h. wo $q=a$ und $p=n-a-1$ ist; so ergeben sich neue merkwürdige Reductionsformeln, wobei wir der Kürze wegen

$$(\frac{n-a-1}{a}) = A_a \tag{36}$$

setzen wollen. Es ist also für die verschiedenen Werthe von a, welche der Bedingungsgleichung $p+q=n-1$ Genüge leisten

$$(\frac{n-2}{1}) = (\frac{1}{n-2}) = A_1 = A_{n-2}$$

$$(\frac{n-3}{2}) = (\frac{2}{n-3}) = A_2 = A_{n-3}$$

$$\left(\frac{n-4}{3}\right) = \left(\frac{3}{n-4}\right) = A_3 = A_{n-4}$$

u. s. f. u. s. f.

und allgemein

$$A_a = A_{n-a-1}.$$

Für $n=7$ z. B. hat man die Werthe folgender Transcendenten

$$(\tfrac{5}{1}) = (\tfrac{1}{5}) = A_1 = A_5$$
$$(\tfrac{4}{2}) = (\tfrac{2}{4}) = A_2 = A_4$$
$$(\tfrac{3}{3}) = (\tfrac{3}{3}) = A_3 = A_3,$$

deren Anzahl ist $\frac{n-1}{2} = \frac{7-1}{2} = 3$, für n ungerade. Wird aber $n=10$ einer geraden Zahl genommen, so sind die Transcendenten an der Zahl $\frac{n-2}{2} = \frac{10-2}{2} = 4$, nämlich:

$$(\tfrac{8}{1}) = (\tfrac{1}{8}) = A_1 = A_8$$
$$(\tfrac{7}{2}) = (\tfrac{2}{7}) = A_2 = A_7$$
$$(\tfrac{6}{3}) = (\tfrac{3}{6}) = A_3 = A_6$$
$$(\tfrac{5}{4}) = (\tfrac{4}{5}) = A_4 = A_5.$$

§ 30. Jetzt ist es leicht den Werth von $(\frac{p}{q})$ für die zwei folgenden Fälle zu bestimmen, nämlich für $p+q<n$ und $p+q>n$. Sei nun zunächst $p+q<n$. Aus der Formel (32) ergiebt sich, wenn man darin $p=n-a-1$, $q=a$ und $r=1$ setzt

$$\left(\frac{n-a-1}{a}\right).\left(\frac{n-1}{1}\right) = \left(\frac{n-a-1}{1}\right)\left(\frac{n-a}{a}\right);$$

da aber nach (34) und (36)

$$\left(\frac{n-a-1}{a}\right) = A_a,\ \left(\frac{n-a}{a}\right) = \frac{\omega}{Sin\, a\omega},\ \left(\frac{n-1}{1}\right) = \frac{\omega}{Sin\ \omega}$$

ist; so ergiebt sich durch Substitution dieser Grössen in die letzte Gleichung

$$\left(\frac{n-a-1}{1}\right) = \frac{A_a\ Sin\, a\omega}{Sin\ \omega}. \tag{37}$$

Aber nach dem Obigen $A_{n-a-1} = A_a$, und weil $\omega = \frac{1}{n}\pi$ ist:

$$Sin\,(n-a-1)\omega = Sin\,[\pi-(a+1)\omega] = Sin\,(a+1)\omega.$$

Wenn man also in (37) der Einfachheit wegen überall für a, $n-a-1$ setzt und danach statt $Sin\,(n-a-1)\omega$ seinen Werth substituirt, so erhält man

$$(\frac{a}{1}) = \frac{A_a\,Sin\,(a+1)\omega}{Sin\,\omega}. \tag{38}$$

Setzt man ferner in der Formel (32) $p=n-a-m$, $q=a$ und $r=1$, so wird

$$(\frac{n-a-m}{a})(\frac{n-m}{1}) = (\frac{n-a-m}{1})(\frac{n-a-m+1}{a}),$$

wo m eine positive ganze Zahl bedeutet, welche der Bedingung $n-m<n$ oder $m>o$ entsprechen muss. Nach (37) aber

$$(\frac{n-m}{1}) = \frac{A_{m-1}\,Sin(m-1)\omega}{Sin\,\omega},\ (\frac{n-a-m}{1}) = \frac{A_{a+m-1}\,Sin(a+m-1)\omega}{Sin\,\omega}$$

ist; wenn man daher diese Werthe in die obige Gleichung substituirt, so ist

$$(\frac{n-a-m}{a}) = \frac{A_{a+m-1}\,Sin(a+m-1)\omega}{A_{m-1}\,Sin(m-1)\omega}.(\frac{n-a-m+1}{a}).$$

Durch successive Anwendung dieser Relation ergiebt sich

$$(\frac{n-a-m}{a}) = \frac{A_{a+m-1}\,A_{a+m-2}\ldots A_{a+1}}{A_{m-1}\,A_{m-2}\ldots A_1}.\frac{Sin(a+m-1)\omega\ldots Sin(a+1)\omega}{Sin(m-1)\omega\ldots Sin\,2\omega\,Sin\,\omega}(\frac{n-a-1}{a}) \tag{39}$$

wo der letzte Factor $(\frac{n-a-1}{a})=A_a$ ist. Daraus ersieht man, dass die Transcendente $(\frac{p}{q})$, wenn $p+q<n$ immer vermittelst der Transcendenten A_a ausgedrückt werden kann, nach der allgemeinen Formel (39), welche Legendre gefunden hat.

§ 31. Für den Fall, wo $p+q>n$ ist, hat man nach (32), wenn darin $p=n-a+m$, $q=a$ und $r=1$ gesetzt wird

$$(\frac{n-a+m}{a})(\frac{n+m}{1}) = (\frac{n-a+m}{1})(\frac{n-a+m+1}{a}).$$

Nach (31) ist aber;

$$(\frac{n+m}{1}) = \frac{m}{m+1}(\frac{m}{1}),$$

bei der Voraussetzung, dass $p=n+m$ und $q=1$ ist. Ferner nach (37) und (38) ist

$$\left(\frac{n-a+m}{1}\right)=\frac{A_{a-m-1}\,Sin(a-m-1)\omega}{Sin\,\omega},\ \left(\frac{m}{1}\right)=\frac{A_m\,Sin(m+1)\omega}{Sin\,\omega}.$$

Also

$$\left(\frac{n-a+m+1}{a}\right)=\frac{m}{m+1}\cdot\frac{A_m\,Sin(m+1)\omega}{A_{a-m-1}\,Sin(a-m-1)\omega}\cdot\left(\frac{n-a+m}{a}\right).$$

Da nun nach (32), wenn man $p=n-a,\ q=a,\ r=1$ nimmt

$$\left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n}{1}\right)=\left(\frac{n-a}{1}\right)\left(\frac{n-a+1}{a}\right)$$

ist, und ferner nach (34), (35), (37)

$$\left(\frac{n-a}{a}\right)=\frac{\omega}{Sin\,a\omega},\quad \left(\frac{n}{1}\right)=1,\quad \left(\frac{n-a}{1}\right)=\frac{A_{a-1}\,Sin(a-1)\omega}{Sin\,\omega}$$

ist; so hat man

$$\left(\frac{n-a+1}{a}\right)=\frac{\omega\,Sin\,\omega}{A_{a-1}\,Sin\,a\omega\,Sin(a-1)\omega}.$$

Durch successive Anwendung der vorher gefundenen Relation,

$$\left(\frac{n-a+m+1}{a}\right)=\frac{m}{m+1}\cdot\frac{A_m\,Sin(m+1)\omega}{A_{a-m-1}\,Sin(a-m-1)\omega}\cdot\left(\frac{n-a+m}{a}\right)$$

ergiebt sich aber

$$\left(\frac{n-a+m+1}{a}\right)=\frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{2.3.4\ldots m(m+1)}\cdot\frac{A_1\,A_2\,A_3\,A_4\ldots A_{m-1}\,A_m}{A_{a-2}\,A_{a-3}\,A_{a-4}\ldots A_{a-m-2}\,A_{a-m-1}}$$

$$\times\frac{Sin\,2\omega\,Sin\,3\omega\,Sin\,4\omega\ldots Sin\,m\omega\,Sin(m+1)\omega}{Sin(a-2)\omega\,Sin(a-3)\omega\ldots Sin(a-m-2)\omega\,Sin(a-m-1)\omega}\cdot\left(\frac{n-a+1}{a}\right).$$

Diese zweite allgemeine auch von Legendre gefundene Formel, bekommt noch eine einfachere Form, wenn man darin statt m, $m-1$ und statt $\left(\frac{n-a+1}{a}\right)$ seinen Werth substituirt; es wird nämlich

$$\left(\frac{n-a+m}{a}\right)=\frac{1}{m}\cdot\frac{A_1\,A_2\,A_3\ldots A_{m-1}}{A_{a-2}\,A_{a-3}\ldots A_{a-m}}\cdot\frac{\omega\,Sin\,\omega\,Sin\,2\omega\ldots Sin\,m\omega}{Sin\,a\omega\,Sin(a-1)\ldots Sin(a-m)\omega}. \tag{40}$$

§ 32. Aus Allem nun was bis jetzt über die Euler'sche Integrale der ersten Art gesprochen wurde, erhellt, dass, nur zwei Fälle ausgenommen, nämlich für p oder q gleich n

und für $p+q=n$, wo der Werth der Transcendenten $(\frac{p}{q})$ sich unmittelbar ergiebt; in allen anderen Fällen er nur vermittelst einer bestimmten Anzahl anderer Transcendenten A_1, A_2, A_3, ..., die man als bekannt betrachtet, nach (39) und (40) ermittelt werden kann. Da man aber für den Werth der Transcendenten A_1, A_2, A_3, ... deren Anzahl von n abhängt und gleich $\frac{n-2}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist, keine allgemeine Ausdrücke hat; so folgt, dass ausser jener zwei Fällen, die Function $(\frac{p}{q})$ im Allgemeinen nur näherungsweise gefunden werden kann. Wir wollen daher die Formeln entwickeln, welche zur Berechnung des genäherten Werthes des bestimmten Integrals $(\frac{p}{q})$ dienen könnten.

Um zu dem genäherten Werthe der Function $(\frac{p}{q}) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ zu gelangen theilt Euler [1]) dieses Integral in zwei Theile, eins nimmt er von $x^n=0$ bis zu dem $x^n=\frac{1}{2}$, das andere von $x^n=\frac{1}{2}$ bis zu dem $x^n=1$, und entwickelt beide nach dem Newtonschen Lehrsatz. Man hat nämlich

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = (1-x^n)^{-\frac{n-q}{n}},$$

oder durch die Entwickelung zu einer Reihe

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = 1 + \frac{n-q}{n}x^n + \frac{n-q}{n}.\frac{2n-q}{2n}x^{2n} + \frac{n-q}{n}.\frac{2n-q}{2n}.\frac{3n-q}{3n}x^{3n} + \ldots$$

Multiplicirt man diesen ganzen Ausdruck mit $x^{p-1}dx$ und integrirt darauf; so wird

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{x^p}{p} + \frac{n-q}{n}.\frac{x^{n+p}}{n+p} + \frac{n-q}{n}.\frac{2n-q}{2n}.\frac{x^{2n+p}}{2n+p} + \frac{n-q}{n}.\frac{2n-q}{2n}.\frac{3n-q}{3n}.\frac{x^{3n+p}}{3n+p}.. \quad (41)$$

oder zwischen den Gränzen $x=0$ und $x=1$ genommen, giebt:

---

1) Euleri Instit. Calculi Integralis T. 4. p. 322.

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{p} + \frac{n-q}{n}.\frac{1}{n+p} + \frac{n-q}{n}.\frac{2n-q}{2n}.\frac{1}{2n+p} + \frac{n-q}{n}.\frac{2n-q}{2n}.\frac{3n-q}{3n}.\frac{1}{3n+p} + \ldots$$

welche Reihe, wie man leicht ersieht, sehr wenig convergirt. Um die Convergenz derselben zu erhöhen, nimmt Euler

$$\int_{x^n=0}^{x^n=\frac{1}{2}} \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = P \quad \text{und} \quad \int_{x^n=\frac{1}{2}}^{x^n=1} \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = Q$$

an; so ist nach § 10.

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right) = P+Q.$$

Ferner ergiebt sich aus (41), wenn man darin $x = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}$ nud $x^p = 2^{-\frac{p}{n}}$ setzt

$$P = 2^{-\frac{p}{n}}\left(\frac{1}{p} + \frac{n-q}{2n}.\frac{1}{n+p} + \frac{n-q}{2n}.\frac{2n-q}{4n}.\frac{1}{2n+p} + \frac{n-q}{2n}.\frac{2n-q}{4n}.\frac{3n-q}{6n}.\frac{1}{3n+p} + \ldots\right)$$

In § 26. wurde gezeigt, dass

$$\int_{x^n=\frac{1}{2}}^{x^n=1} \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = -\int_{y^n=\frac{1}{2}}^{y^n=0} \frac{y^{q-1}dy}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{n-p}}}$$

ist, wenn nämlich $1-x^n = y^n$ gesetzt wird, oder durch die Umkehrung der Gränzen ergiebt sich

$$Q = \int_{x^n=0}^{x^n=\frac{1}{2}} \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}.$$

Nach (41) erhält man sogleich, wenn man nur darin überall statt p, q und statt q, p setzt, folgenden Ausdruck:

$$Q = 2^{-\frac{q}{n}}\left(\frac{1}{q} + \frac{n-p}{2n}.\frac{1}{n+q} + \frac{n-p}{2n}.\frac{2n-p}{4n}.\frac{1}{2n+q} + \frac{n-p}{2n}.\frac{2n-p}{4n}.\frac{3n-p}{6n}.\frac{1}{3n+q} + \ldots\right)$$

Also

$$(\frac{p}{q}) = \left\{ \begin{array}{l} 2^{-\frac{p}{n}}(\frac{1}{p} + \frac{n-q}{2n}.\frac{1}{n+p} + \frac{n-q}{2n}.\frac{2n-q}{4n}.\frac{1}{2n+p} + \ldots) \\ + 2^{-\frac{q}{n}}(\frac{1}{q} + \frac{n-p}{2n}.\frac{1}{n+q} + \frac{n-p}{2n}.\frac{2n-p}{4n}.\frac{1}{2n+q} + \ldots) \end{array} \right\} \quad (42)$$

Ist $p = q = a$, so nimmt die obige Formel folgende einfachere Gestalt an:

$$(\frac{a}{a}) = 2^{1-\frac{a}{n}}(1 + \frac{n-a}{2n}.\frac{a}{n+a} + \frac{n-a}{2n}.\frac{2n-a}{4n}.\frac{a}{2n+a} + \frac{n-a}{2n}.\frac{2n-a}{4n}.\frac{3n-a}{6n}.\frac{a}{3n+a} + \ldots)$$

§ 33. Wir wollen jetzt zu den Euler'schen Integralen der **zweiten** Art übergehen, und daher betrachten wir das Integral

$$\int_0^1 x^{m-1} dx \, (l\frac{1}{x})^n.$$

Durch particuläre Integration erhält man

$$\int x^{m-1} dx \, (l\frac{1}{x})^n = \frac{x^m}{m}(l\frac{1}{x})^n + \frac{n}{m}\int x^{m-1} dx . (l\frac{1}{x})^{n-1}.$$

Folglich, wenn m und n positiv sind

$$\int_0^1 x^{m-1} dx \, (l\frac{1}{x})^n = \frac{n}{m}\int_0^1 x^{m-1} dx \, (l\frac{1}{x})^{n-1} \quad (43)$$

Ist nun n eine ganze Zahl; so erhält man durch mehrfache Anwendung dieser Relation

$$\int_0^1 x^{m-1} dx \, (l\frac{1}{x})^n = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{m^{n+1}} \quad (44)$$

Wird dagegen n eine gebrochene Zahl, so gelangt man mittelst der Form (43) zu dem Ausdruck $\int_0^1 x^{m-1} dx \, (l\frac{1}{x})^{a-1}$, wo a einen ächten Bruch bezeichnet, welcher Ausdruck nichts an seiner Allgemeinheit verliert, wenn man $m = 1$ setzt, weil durch die Annahme das $x^m = z$ ist, sich ergiebt

$$x^{m-1}dx = \frac{1}{m}dz, \qquad (l\frac{1}{x})^n = \frac{1}{m^n}(l\frac{1}{z})^n$$

und

$$\int_0^1 x^{m-1}dx\,(l\frac{1}{x})^{a-1} = \frac{1}{m^{n+1}}\int_0^1 dz\,(l\frac{1}{z})^{a-1}.$$

Woraus erhellt, dass die Entwickelung des obigen Integrals lediglich auf der Bestimmung des Euler'schen Integrals der zweiten Art beruht, womit wir uns sogleich beschäftigen wollen.

§ 34. Setzen wir nämlich

$$y = x\,(l\frac{1}{x})^a.$$

Durch blosse Differentiation erhält man

$$dy = dx\,(l\frac{1}{x})^a - a\,dx\,(l\frac{1}{x})^{a-1},$$

oder, wenn man zwischen den Gränzen $x = 0$ und $x = 1$ integrirt

$$0 = \int_0^1 dx\,(l\frac{1}{x})^a - a\int_0^1 dx\,(l\frac{1}{x})^{a-1}, \tag{45}$$

weil für $x = 0$ und $x = 1$, $y = 0$ ist, wenn a eine positive Grösse bedeutet. Wendet man hier die von Legendre eingeführte Bezeichnungsart für die Euler'sche Integrale der zweiten Art an, so entsteht folgende merkwürdige Relation:

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a). \tag{46}$$

Woraus sich sogleich ergiebt, dass

$$\Gamma(a) = \int_0^1 dx\,(l\frac{1}{x})^{a-1},$$

für $a = 1$, wird

$$\Gamma(1) = \int_0^1 dx = 1.$$

Durch successive Substitution der Werthe $1, 2, 3, 4, \ldots$ in der Formel (46) statt a erhält man

$$\Gamma(a) = 1.\,2.\,3.\,4.\,5.\ldots(a-2)(a-1), \tag{47}$$

wenn a eine positive ganze Zahl bezeichnet. Die Gleichung (46) ist merkwürdig in der Hinsicht, dass man mittelst derselben, die Function $\Gamma(k)$, wo k grösser als 1 ist auf die Function $\Gamma(x)$ reduciren kann, wo x schon ein ächter Bruch wird.

§ 35. Was aber am merkwürdigsten bei den Euler'schen Integralen der beiden Arten erscheint, ist die innige Verbindung, in welcher sie mit einander stehen, so dass die eine Art immer vermittelst der anderen Art der Integrale ausgedrückt werden kann, was wir nun zeigen wollen. Sei

$$y = x^p(1-x)^{q-1},$$

wo p und q positive ganze Zahlen sind; so ist

$$dy = px^{p-1}dx(1-x)^{q-1} - (q-1)x^p dx(1-x)^{q-2}$$

$$= px^{p-1}dx(1-x)^{q-1} + (q-1)x^{p-1}dx(1-x)^{q-1} - (q-1)x^{p-1}dx(1-x)^{q-1} - (q-1)x^p dx(1-x)^{q-2}$$

$$= (p+q-1)x^{p-1}dx(1-x)^{q-1} - (q-1)x^{p-1}dx(1-x)^{q-2}.$$

Integrirt man zwischen den Gränzen $x=0$ und $x=1$, so verschwindet y, weil q eine positive ganze Zahl ist, und es bleibt

$$(p+q-1)\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x)^{q-1} - (q-1)\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x)^{q-2} = 0,$$

oder

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x)^{q-1} = \frac{q-1}{p+q-1}\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x)^{q-2}.$$

Setzt man nun nach und nach in dieser Formel statt q, $q-1$, $q-2$, $q-3$, ... und bezeichnet $\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x)^{q-1}$ mit (p, q), so erhält man

$$(p, q) = \frac{(q-1)(q-2)(q-3)\ldots 3.2.1}{(p+q-1)(p+q-2)\ldots(p+1)}\int_0^1 x^{p-1}dx$$

wenn q eine ganze Zahl ist, oder auch

$$= \frac{(q-1)(q-2)(q-3)\ldots 3.2.1}{(p+q-1)(p+q-2)\ldots(p+1)}\cdot\frac{1}{p}. \tag{48}$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass

$$\int_0^1 x^{q-1}dx(1-x)^{p-1} = (q, p) = \frac{(p-1)(p-2)(p-3)\ldots 2.1}{(q+p-1)(q+p-2)\ldots(q+1)}\cdot\frac{1}{q},$$

wenn p eine ganze Zahl ist. Da aber

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x)^{q-1} = \int_0^1 x^{q-1}dx(1-x)^{p-1}$$

ist, wie man sich leicht davon überzeugen kann, wenn man in einem der beiden Theile dieser Gleichung $x = 1-z$ setzt und gehörige Substitutionen vornimmt. Also nach der Legendre'schen Bezeichnung wird

$$(p, q) = (q, p)$$

sein. Ferner haben wir gefunden, wenn p eine ganze Zahl ist

$$(p, q) = \frac{(p-1)(p-2)(p-3)\ldots 3.2.1}{(q+p-1)(q+p-2)\ldots(q+1)}\cdot\frac{1}{q},$$

und nach (46) und (47)

$$\Gamma(p+q) = (q+p-1)(q+p-2)\ldots(q+1)q\Gamma(q)$$
$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)(p-3)\ldots 4.3.2.1,$$

also

$$(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{49}$$

Man übersieht leicht dass der Ausdruck (49) überhaupt gilt, wenn eine der beiden Grössen p und q eine ganze Zahl ist. Nun ist aber nach dem binomischen Lehrsatze

$$x^{p-1}dx(1-x)^{q-1} = x^{p-1}dx - \frac{q-1}{1}x^p dx + \frac{(q-1)(q-2)}{1.2}x^{p+1}dx - .$$

Folglich, da p eine positive Grösse ist

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x)^{q-1} = \frac{1}{p} - \frac{q-1}{1}.\frac{1}{p+1} + \frac{(q-1)(q-2)}{1.2}.\frac{1}{p+2} - \ldots$$

eine Reihe, welche in's Unendliche fortläuft, wenn q keine ganze Zahl ist. In diese Reihe muss sich also nach (49)

$$\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

(wo wir uns unter den mit Γ bezeichneten Grössen ganz allgemein die entsprechenden Euler'schen Integrale der zweiten Art denken), entwickeln lassen, wenn z. B. p eine ganze Zahl ist. Denken wir uns aber nun die Entwickelung von $\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ für jedes p und q ganz allgemein ausgeführt; so ist klar, dass, so lange p und q ganz allgemeine Symbole bleiben, die Form der allgemeinen Reihe nicht von der Form der Reihe für einen besonderen Fall verschieden seyn kann. Man sieht also, dass auch für jedes passive p und q sich $\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ in die obige Reihe entwickeln lassen muss, und dass folglich die allgemeinen Entwickelungen von

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x)^{q-1} = (p,\ q) \quad \text{und} \quad \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

für jedes passive p und q zu denselben Reihen führen müssen, welches uns berechtigt für jedes positive p und q zu setzen:

$$(p,\ q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Aus der Formel (30), welche in § 26. bewiesen wurde, folgt daher

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\Gamma(\frac{p}{n})\,\Gamma(\frac{q}{n})}{n\Gamma(\frac{p+q}{n})}, \tag{50}$$

woraus erhellt, dass die Euler'schen Integrale der ersten Art immer durch die der zweiten Art ausgedrückt werden können.

§ 36. Sei $p+q=k$, so ist nach (50)

$$\left(\frac{k}{r}\right) = \frac{\Gamma(\frac{k}{n})\,\Gamma(\frac{r}{n})}{n\Gamma(\frac{k+r}{n})} = \frac{\Gamma(\frac{p+q}{n})\,\Gamma(\frac{r}{n})}{n\Gamma(\frac{p+q+r}{n})}.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit dem Ausdruck (50) für $(\frac{p}{q})$, so ergiebt sich

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right) = \frac{\Gamma(\frac{p}{n})\,\Gamma(\frac{q}{n})\,\Gamma(\frac{r}{n})}{n^2\Gamma(\frac{p+q+r}{n})}.$$

Da der zweite Theil dieser Gleichung sich nicht ändert, wenn man zwei von den Buchstaben p, q, r mit einander verwechselt; folglich

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right)$$

ist, wie wir es schon früher auf anderem Wege gefunden haben. Ferner nach (50), wenn $q=n-p$ gesetzt wird, ist

$$\left(\frac{p}{n-p}\right) = \frac{\omega}{Sin\,p\omega} = \frac{\Gamma(\frac{p}{n})\,\Gamma(\frac{n-p}{n})}{n\Gamma(1)} \tag{51}$$

oder

$$\frac{\pi}{Sin\,a\pi} = \Gamma(a)\,\Gamma(1-a), \tag{52}$$

wenn $\omega=\frac{\pi}{n}$ und $\frac{p}{n}=a$ ist. Für $a=\frac{1}{2}$ z. B. hat man $[\Gamma(a)]^2=\pi$; also

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}. \tag{53}$$

§ 37. Wir wollen uns jetzt mit der umgekehrten Aufgabe beschäftigen, d. h. die Euler'schen Integrale der zweiten Art durch Euler'schen Integrale der ersten Art ausdrücken. Wenn wir daher in (50) $p=1$ setzen und darauf für q nach und nach die Werthe 1. 2. 3. 4. ... bis $q=n-1$, nehmen; so entstehen folgende Gleichungen:

$$(\tfrac{1}{1}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{n})\,\Gamma(\frac{1}{n})}{n\Gamma(\frac{2}{n})}, \qquad (\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{n})\,\Gamma(\frac{2}{n})}{n\Gamma(\frac{3}{n})}, \qquad (\tfrac{1}{3}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{n})\,\Gamma(\frac{3}{n})}{n\Gamma(\frac{4}{n})},$$

. . . .

$$(\frac{1}{n-1}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{n})\,\Gamma(\frac{n-1}{n})}{n\Gamma(\frac{n}{n})}.$$

Multiplicirt man die ersten $(a-1)$ Gleichungen in einander; so erhält man

$$(\tfrac{1}{1})(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{3}) \ldots (\frac{1}{a-1}) = \frac{[\Gamma(\frac{1}{n})]^a}{n^{a-1}\Gamma(\frac{a}{n})},$$

woraus

$$\Gamma(\frac{a}{n}) = \frac{[\Gamma(\frac{1}{n})]^a}{n^{a-1}(\frac{1}{1})(\frac{1}{2})(\frac{1}{3})(\frac{1}{4}) \ldots (\frac{1}{a-1})}. \tag{54}$$

Bildet man das Product aus allen $n-1$ Gleichungen, so entsteht folgende Relation:

$$(\tfrac{1}{1})(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{3}) \ldots (\frac{1}{n-1}) = \frac{[\Gamma(\frac{1}{n})]^n}{n^{n-1}},$$

oder

$$\Gamma(\frac{1}{n}) = n\sqrt[n]{\frac{1}{n}(\tfrac{1}{1})(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{3}) \ldots (\frac{1}{n-1})},$$

welcher Werth von $\Gamma(\frac{1}{n})$ in (54) substituirt,

$$\Gamma(\frac{a}{n}) = \frac{[(\frac{1}{1})(\frac{1}{2})(\frac{1}{3}) \ldots (\frac{1}{n-1})]}{n^{\frac{n-a}{a}}\,[(\frac{1}{1})(\frac{1}{2})(\frac{1}{3}) \ldots (\frac{1}{a-1})]} \tag{55}$$

giebt. Also auf diese Weise ist die Function $\Gamma(\frac{a}{n})$, wo $n > a$ ist, völlig bestimmt.

§ 38. Die Theorie der Euler'schen Integrale der zweiten Art begreift in sich, als speciellen Fall, eine Gattung höchst merkwürdiger Integrale, mit welchen Kramp [1]) und Laplace [2]) sich viel beschäftigt haben. Sie sind unter der allgemeinen Form

$$\int_0^\infty e^{-t^m} . \, t^{2n} dt, \tag{56}$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen und m und n ganze positive Grössen bezeichnen, enthalten. Setzt man nämlich $t^{2n+1} = z$; so ist

$$t^{2n} dt = \frac{dz}{2n+1}, \; t^m = z^k,$$

wenn $k = \frac{m}{2n+1}$ gesetzt wird, und das gegebene Integral nimmt folgende Form an

$$\frac{1}{2n+1} \int_0^\infty e^{-z^k} . \, dz.$$

Es bleibt nun den Werth des Integrals

$$\int_0^\infty e^{-z^k} . \, dz, \tag{57}$$

zu suchen. Setzt man daher $e^{-z^k} = x$, so ergiebt sich

$$e^{z^k} = \frac{1}{x}, \;\; z = (l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{k}}, \;\; dz = -\frac{1}{k}(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{k}-1} \frac{dx}{x},$$

und wenn man diese Werthe in (57) substituirt,

$$\int_0^\infty e^{-z^k} . \, dz = -\frac{1}{k} \int_1^0 (l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{k}-1} dx,$$

welches Integral zwischen den Gränzen $x = 1$ und $x = o$ genommen sein muss, weil für $t = o$, $x = 1$ und für $t = \infty$, $x = o$ ist. Folglich

1) Analyse de Refractions astronomiques et terrestres; par Kramp, 1799. Chap. III. p. 64.

2) Théorie Analitique des Probabilités, par Laplace 1814, p. 96.

$$\int_0^\infty e^{-t^m} . t^{2n} dt = \frac{1}{m}\int_0^1 (l\frac{1}{x})^{\frac{2n+1}{m}-1} . dx = \frac{1}{m}\Gamma(\frac{2n+1}{m}), \tag{58}$$

wenn man statt k seinen Werth setzt und Legendre's Bezeichnung gebraucht. So z. B. für $n=o$ und $m=2$, hat man nach (53) [1])

$$\int_0^\infty e^{-t^2} . dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{59}$$

Betrachtet man noch hier t als negativ, so ändert nur dt sein Zeichen und es wird

$$\int_{-\infty}^0 e^{-t^2} . dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Bekanntlich aber ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} . dt = \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} . dt + \int_0^{+\infty} e^{-t^2} . dt;$$

also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} . dt = \sqrt{\pi}. \tag{60}$$

§ 39. Wenn in einem bestimmten Integrale unter dem Integralzeichen mehrere willkürliche Grössen vorkommen, so kann man sie, als veränderlich und das Integral selbst, als eine Function von eben so vielen Argumenten, die von einander unabhängig sind, betrachten. Darauf beruht die Methode, nach welcher man unter dem Integralzeichen differentiiren kann, und die wir sogleich entwickeln wollen. Sie ist eine reiche Quelle zum Auffinden des Werthes vieler in der höheren Analysis sehr wichtigen bestimmten Integrale. Nehmen

1) Man findet am Ende des erwähnten Werkes von Kramp, eine Berechnung dieses Integrals von 0,01 zu 0,01 angegeben, aus welcher man ersieht, dass $\int_0^\infty e^{-t^2} . dt$, dessen Werth $\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0,88622692$ zwischen den Gränzen $t=o$ und $t=\infty$ ist, für $t=3$ schon auf $0,00001957729$ reducirt wird.

wir an, dass $\varphi(x, y)$ eine zwischen den Gränzen $x=a$ und $x=A$ continuirliche Function sei, und dass mittelst der Integration in Bezug auf x, während y als constant betrachtet wurde, gefunden war:

$$\int_a^A \varphi(x, y)dx = \psi(y);$$

so ist, wenn sich jetzt y um h ändert,

$$\int_a^A \varphi(x, y+h)dx = \psi(y+h).$$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, und bezeichnet den Zuwachs, welchen das Integral erhalten hat, mit $\Delta\int_a^A \varphi(x, y)dx$, so ist

$$\Delta\int_a^A \varphi(x, y)dx = \psi(y+h)-\psi(y).$$

Ebenso bekommt man noch

$$\Delta\varphi(x, y)dx = \varphi(x, y+h)-\varphi(x, y),$$

oder wenn man mit dx multiplicirt und darauf zwischen den angegebenen Gränzen integrirt,

$$\int_a^A \Delta\varphi(x, y)dx = \int_a^A \varphi(x, y+h)dx - \int_a^A \varphi(x, y)dx.$$

Da aber

$$\int_a^A \varphi(x, y+h)dx = \psi(y+h), \int_a^A \varphi(x, y)dx = \psi(y)$$

ist, so ergiebt sich zuletzt

$$\int_a^A \Delta\varphi(x, y)dx = \Delta\int_a^A \varphi(x, y)dx.$$

Entwickelt man diese identischen Functionen nach dem Taylor'schen Lehrsatze, so erhält man

$$\int_a^A \Delta\varphi(x,\, y)dx = \frac{h}{1}\int_a^A \overset{y}{d}\varphi(x,\, y)dx + \frac{h^2}{1.2}\int_a^A \overset{y}{d^2}\varphi(x,\, y)dx + \frac{h^3}{1.2.3}\int_a^A \overset{y}{d^3}\varphi(x,y)dx + \ldots$$

$$\Delta\int_a^A \varphi(x,\, y)dx = \frac{h}{1}\overset{y}{d}\int_a^A \varphi(x,\, y)dx + \frac{h^2}{1.2}\overset{y}{d^2}\int_a^A \varphi(x,\, y)dx + \frac{h^3}{1.2.3}\overset{y}{d^3}\int_a^A \varphi(x,y)dx + \ldots$$

wo h ganz willkürlich ist, und die einzelnen Glieder, dieser identischen Reihen unabhängig von h respective gleich sein müssen, folglich:

$$\int_a^A \overset{y}{d^n}\varphi(x\,,\, y)dx \;=\; \overset{y}{d^n}\int_a^A \varphi(x\,,\, y)dx. \tag{61}$$

§ 40. Es bleibt uns noch übrig durch einige Beispiele zu zeigen, wie man mittelst der Differentiation des bestimmten Integrals in Bezug auf die willkürlichen Constanten, welche darin vorkommen zu dem Werthe desselben gelangen kann. Wir wählen zu dem Ende zuerst das Integral

$$Z = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \, Cos\, nx.$$

Differentiirt man es in Bezug auf n, so hat man

$$\frac{dZ}{dn} = -\int_0^\infty e^{-x^2} x dx \, Sin\, nx.$$

Durch particulare Integration ergiebt sich

$$\int e^{-x^2} x dx \, Sin\, nx = \tfrac{1}{2} e^{-x^2} Sin\, nx - \frac{n}{2}\int e^{-x^2} dx \, Cos\, nx,$$

oder

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x dx \, Sin\, nx = -\frac{n}{2}\int_0^\infty e^{-x^2} dx \, Cos\, nx,$$

weil das Glied ausser dem Integralzeichen, für beide Gränzen Null wird. Da aber

$$\int_o^\infty e^{-x^2} . dx\, Cos\, nx = Z, \quad -\int_o^\infty e^{-x^2} . xdx\, Sin\, nx = \frac{dZ}{dn}$$

ist; so entsteht folgende Differentialgleichung

$$\frac{dZ}{dn} - \frac{n}{2}Z = o.$$

Sondert man darin die veränderlichen Grössen Z und n von einander ab, und darauf integrirt, so hat man

$$Z = Ce^{-\frac{n^2}{4}} \quad \text{oder} \quad \int_o^\infty e^{-x^2} . dx\, Cos\, nx = Ce^{-\frac{n^2}{4}},$$

wo C die Constante bezeichnet, welche gefunden wird, wenn man in der letzten Gleichung $n = o$ setzt; woraus nach (59)

$$C = \int_o^\infty e^{-x^2} . dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

also

$$\int_o^\infty e^{-x^2} . dx\, Cos\, nx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\; e^{-\frac{n^2}{4}}. \tag{62}$$

Laplace [1]) beweiset dasselbe Integral mittelst der Euler'schen Integrale der zweiten Art auf folgende Weise. Wenn man statt $Cos\, nx$ seinen Werth

$$1 - \frac{n^2x^2}{2} + \frac{n^4x^4}{2.3.4} - \frac{n^6x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots$$

setzt; so erhält man

$$Z = \int_o^\infty e^{-x^2} . dx \left(1 - \frac{n^2x^2}{2} + \frac{n^4x^4}{2.3.4} - \frac{n^6x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots\right)$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe der Integrale $\int_o^\infty e^{-x^2} . x^{2n}dx$, ist nach (58) $= \frac{1}{2}\Gamma(\frac{2n+1}{2})$;

woraus folgt;

1) Memoires de la Classe des sciences mathématiques de l'Institut. 1809. p. 367.

$$Z = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}\left(1 - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{n^4}{16} - \frac{1}{2.3}\cdot\frac{n^6}{64} + \text{etc.}\right)$$

oder

$$Z = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2} e^{-\frac{n^2}{4}}.$$

Differentiirt man nun mehrere Male nach dem in § 39. bewiesenen Satze das bestimmte Integral (62) unter dem Integralzeichen und seinen Werth in Bezug auf n, so erhält man folgende Reihe der Integrale:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} . \, x dx \, Sin\, nx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{4} e^{-\frac{n^2}{4}} n$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} . \, x^2 dx \, Cos\, nx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{4} e^{-\frac{n^2}{4}} \left(1 - \frac{n^2}{2}\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} . \, x^3 dx \, Sin\, nx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{8} e^{-\frac{n^2}{4}} \left(3n - \frac{n^3}{2}\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} . \, x^4 dx \, Cos\, nx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{8} e^{-\frac{n^2}{4}} \left(3 - 3n^2 + \frac{n^4}{4}\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} . \, x^5 dx \, Sin\, nx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{8} e^{-\frac{n^2}{4}} \left(15 - 5n^3 + \frac{n^5}{4}\right)$$

woraus erhellt, dass man im Allgemeinen den Werth des Integrals

$$\int_0^\infty e^{-x^2} . \, (M\, Cos\, nx \pm Nx\, Sin\, nx) dx,$$

wo M und N zwei Functionen von x^2 bezeichnen, bestimmen kann.

§ 41. Wir wollen noch das merkwürdige Integral $\int_0^\pi \frac{d\varphi\, Cos\, \lambda\varphi}{\Delta^n}$, wo λ eine positive ganze Zahl bezeichnet und $\Delta = 1 - 2m\, Cos\, \varphi + m^2$ ist, entwickeln. Euler [1]) war der

1) Euleri Institutionum Calculi Integralis T. IV. p. 194.

erste, welcher es bewiesen hat und Legendre derjenige der seine Beweisart später vervollkommnete. Er nimmt nämlich folgende Gleichung an:

$$\frac{1-m\,Cos\,\varphi}{1-2\,m\,Cos\,\varphi+m^2} = A+Bm+Cm^2+Dm^3+Em^4+\ldots$$

woraus sich nach der Methode der unbestimmten Coefficienten ergiebt

$$A = 1 \qquad C = 2\,Cos^2\varphi - 1 = Cos\,2\varphi$$

$$B = 2\,Cos\,\varphi - Cos\,\varphi = Cos\,\varphi \qquad D = 4\,Cos^3\varphi - 3\,Cos\,\varphi = Cos\,3\varphi$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Folglich

$$\frac{1-m\,Cos\,\varphi}{1-2\,m\,Cos\,\varphi+m^2} = 1+m\,Cos\,\varphi+m^2\,Cos\,2\varphi+m^3\,Cos\,3\varphi+m^4\,Cos\,4\varphi+\ldots$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit 2, und zieht von beiden Seiten 1 ab, so hat man

$$\frac{1-m^2}{1-2\,m\,Cos\,\varphi+m^2} = 1+2\,m\,Cos\,\varphi+2\,m^2\,Cos\,2\varphi+2\,m^3\,Cos\,3\varphi+\ldots$$

also

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi\,Cos\,\lambda\varphi}{\Delta} = \int_0^\pi \frac{d\varphi\,Cos\,\lambda\varphi}{1-m^2}\left(1+2m\,Cos\,\varphi+2m^2\,Cos\,2\varphi+2m^3\,Cos\,3\varphi+\ldots\right)$$

Das allgemeine Glied der Reihe kann nur von der Form $\int_0^\pi \frac{d\varphi\,Cos\,\lambda\varphi}{1-m^2}\,2m^k\,Cos\,k\varphi$ sein. Aber

$$\frac{2m^k}{1-m^2}\int d\varphi\,Cos\,\lambda\varphi\,Cos\,k\varphi = \frac{m^k}{1-m^2}\left[\int d\varphi\,Cos\,(\lambda+k)\varphi+\int d\varphi\,Cos\,(\lambda-k)\varphi\right]$$

$$= \frac{m^k}{1-m^2}\left[\frac{Sin(\lambda+k)\varphi}{\lambda+k}+\frac{Sin(\lambda-k)\varphi}{\lambda-k}\right],$$

für $\varphi=0$ und $\varphi=\pi$ immer Null wird, wenn λ und k ganze von einander verschiedene Zahlen bedeuten, nur den Fall ausgenommen, wenn $k=\lambda$, wo dann

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi\,Cos\,\varphi}{\Delta} = \frac{m^\lambda}{1-m^2}\int_0^\pi d\varphi\,Cos\,\lambda\varphi\,2\,Cos\,\lambda\varphi = \frac{m^\lambda}{1-m^2}\int_0^\pi d\varphi\,(1+Cos\,2\lambda\varphi) = \frac{\pi m^\lambda}{1-m^2},$$

welchen Werth wir mit P_1 bezeichnen wollen, so dass

$$P_1 = \frac{\pi m^\lambda}{1-m^2} \dots \tag{63}$$

das einzige Glied ist, welches nach der Integration zwischen den angegebenen Gränzen zurückbleibt. Aus P_1 können wir nun mittelst der Differentiation P_2, P_3, P_4 ... P_n folgendermassen herleiten. Differentiirt man die Gleichung $P_n = \int_0^\pi \frac{d\varphi \, Cos \lambda\varphi}{\Delta^n}$ in Bezug auf m, so bekommt man

$$\frac{dP_n}{dm} = \int_0^\pi \frac{n d\varphi \, Cos \lambda\varphi}{\Delta^{n+1}} (2 \, Cos \varphi - 2m) = \int_0^\pi \frac{n d\varphi \, Cos \lambda\varphi}{\Delta^{n+1}} \left(\frac{1-m^2-\Delta}{m}\right),$$

oder

$$\frac{dP_n}{dm} = \frac{n}{m}(1-m^2)P_{n+1} - \frac{n}{m}P_n \,, \quad \text{woraus} \quad P_{n+1} = \frac{1}{1-m^2}(P_n + \frac{n}{m}.\frac{dP_n}{dm})$$

oder, wenn man zum einerlei Nenner reducirt und Zähler und Nenner mit m^{n-1} multiplicirt

$$P_{n+1} = \frac{1}{1-m^2}.\frac{nm^{n-1}P_n dm + m^n dP_n}{nm^{n-1}dm} = \frac{d(m^n P_n)}{(1-m^2)(dm^n)}.$$

Giebt man nun dem n in dieser Formel nach und nach die Werthe 1, 2, 3, 4, ... so ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$P_2 = \frac{\pi m^\lambda}{(1-m^2)^3} [(\lambda+1)-m^2(\lambda-1)]$$

$$P_3 = \frac{1}{1.2}.\frac{\pi m^\lambda}{(1-m^2)^5} [(\lambda+1)(\lambda+2)-2m^2(\lambda+2)(\lambda-2)+m^4(\lambda-2)(\lambda-1)]$$

$$P_4 = \frac{1}{1.2.3}.\frac{\pi m^\lambda}{(1-m^2)^7} [(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)-3m^2(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda-3)+3m^4(\lambda+3)(\lambda-3)(\lambda-2)$$
$$-m^6(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1)].$$

Legendre drückt das allgemeine Gesetz, nach welchem jedes beliebige P_n gebildet wird folgendermassen, aus

$$P_n = \frac{\pi m^\lambda}{(1-m^2)^{2n-1}}.\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)\dots(\lambda+n-1)}{1.2.3\dots(n-2)(n-1)} A_n,$$

wo A_n, wenn man mit $(n-1)^{:1}_c$, $(n-1)^{:2}_c$, $(n-1)^{:3}_c$, ... nach der Reihe die Binomialcoefficienten der $(n-1)$ten Potenz bezeichnet, folgenden Werth hat

$$A_n = 1 + \frac{n-1}{1} m^2 \frac{n-\lambda-1}{\lambda+1} + (n-1)^{:2}_c m^4 \frac{(n-\lambda-1)(n-\lambda-2)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}$$

$$+ (n-1)^{:3}_c m^6 \frac{(n-\lambda-1)(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)}{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)} + \ldots$$

Setzt man z. B. $\lambda = 0$, so hat man folgenden merkwürdigen Ausdruck:

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\Delta^n} = \frac{\pi}{(1-m^2)^{2n-1}} \left[1 + \left((n-1)^{:1}_c\right)^2 m^2 + \left((n-1)^{:2}_c\right)^2 m^4 + \left((n-1)^{:3}_c\right)^2 m^6 + \ldots \right]$$

§ 42. Ausser dieser drei allgemeinen Methoden, die wir hier dargelegt haben, und welcher sich besonders Euler znr Entwickelung des Werthes der bestimmten Integrale bedient hatte; giebt es noch eine vierte nämlich die Methode der doppelten Integration, welche darauf beruht, dass das Resultat der successiven Integrationen in Bezug auf zwei veränderliche Grössen im Allgemeinen von der Ordnung, in welcher diese Integrationen vorgenommen werden, unabhängig ist. Wir haben in § 39. gefunden, dass

$$\frac{d}{dy} \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A \frac{df(x, y)}{dy} dx$$

ist; woraus man sogleich erhält

$$d \int_a^A f(x, y) dx = dy \int_a^A \frac{df(x, y)}{dy} dx, \quad \int_a^A f(x, y) dx = \int dy \int_a^A \frac{df(x, y)}{dy} dx + Const.$$

Setzt man

$$\int f(x, y) dx = \varphi(x, y) + Y,$$

wo Y eine willkürliche Function von y bedeutet, so ist

$$\int_a^A f(x, y) dx = \varphi(A, y) - \varphi(a, y);$$

folglich

$$\int dy \int_a^A \frac{df(x, y)}{dy} dx = \varphi(A, y) - \varphi(a, y) + Const.$$

oder

$$\int_b^B dy \int_a^A \frac{df(x, y)}{dy} dx = \varphi(A, B) - \varphi(a, B) - \varphi(A, b) + \varphi(a, b). \tag{64}$$

Man hat ferner, wenn man

$$\frac{df(x, y)}{dy} = \psi(x, y) \tag{65}$$

annimt, und mit X eine willkürliche Function von x bezeichnet,

$$f(x, y) = \int \psi(x, y) dy + X$$

$$\int_b^B \psi(x, y) dy = f(x, B) - f(x, b).$$

Multiplicirt man nun diese Gleichung mit dx und integrirt darauf zwischen den Gränzen $x = A$ und $x = a$, so ergiebt sich dadurch

$$\int_a^A dx \int_b^B \psi(x, y) dy = \int_a^A f(x, B) dx - \int_a^A f(x, b) dx.$$

Da aber

$$\int f(x, y) dx = \varphi(x, y) + Y, \quad \int_a^A f(x, y) dx = \varphi(A, y) - \varphi(a, y)$$

ist; folglich

$$\int_a^A dx \int_b^B \psi(x, y) dy = \varphi(A, B) - \varphi(a, B) - (A, b) + \varphi(a, b). \tag{66}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem (64), und setzt in dem letzten statt $\frac{df(x, y)}{dy}$ seinen Werth aus (65), so erhält man das was zu beweisen war, nämlich

$$\int_a^A dx \int_b^B \psi(x,\, y)dy = \int_b^B dy \int_a^A \psi(x,\, y)dx \qquad (67)$$

§ 43. Um diesen Satz auf ein Beispiel anwenden zu können, wählen wir aus **Laplace** [1]) das doppelte Integral

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty ds\; e^{-s(1+x^n)},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen und n irgend eine positive rationale Zahl bezeichnen. Integrirt man es erst in Bezug auf s, wobei x als constant betrachtet wird, so ist

$$\int ds\; e^{-s(1+x^n)} = -\frac{1}{1+x^n}\, e^{-s(1+x^n)} + Cons.$$

$$\int_0^\infty ds\; e^{-s(1+x^n)} = \frac{1}{1+x^n},$$

woraus man erhält

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty ds\; e^{-s(1+x^n)} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}.$$

Das letzte Integral aber hat nach (9) für seinen Werth $\dfrac{\pi}{n\, Sin \frac{\pi}{n}}$, also

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty ds\; e^{-s(1+x^n)} = \frac{\pi}{n\, Sin \frac{\pi}{n}}. \qquad (68)$$

Man kehre nun die Ordnung der Integration um, so dass man erst x als veränderlich betrachtet, und setze $sx^n = t$, so ist

$$\int_0^\infty e^{-s(1+x^n)} dx = e^{-s}\, s^{-\frac{1}{n}} \int_0^\infty e^{-t^n} dt,$$

$$\int_0^\infty ds \int_0^\infty e^{-s(1+x^n)} dx = \int_0^\infty e^{-s}\, s^{-\frac{1}{n}} ds \int_0^\infty e^{-t^n} dt.$$

1) Théorie Analytique des Probabilités, par Laplace. 1814. p. 94.

Da in diesem Ausdruck die Veränderliche s jede beliebige Grösse darstellen kann, so ist man berechtigt $s = t^n$ zu setzen. Es wird daher

$$\int_0^\infty ds \int_0^\infty e^{-s(1+x^n)} dx = n \int_0^\infty e^{-t^n} t^{n-2} dt \int_0^\infty e^{-t^n} dt$$

sein. Aber nach (67)

$$\int_0^\infty ds \int_0^\infty e^{-s(1+x^n)} dx = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-s(1+x^n)} ds$$

ist; folglich

$$n \int_0^\infty e^{-t^n} t^{n-2} dt \int_0^\infty e^{-t^n} dt = \frac{\pi}{n \, Sin \frac{\pi}{n}}. \tag{69}$$

So hat man z. B. für $n = 2$,

$$2 \left(\int_0^\infty e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{2 \, Sin \frac{\pi}{2}}, \quad \text{oder} \quad \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \tfrac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}},$$

wie wir schon früher auf anderem Wege gefunden haben. Setzt man noch in (69) statt n, $\frac{n}{r-1}$; so ist

$$n^2 \int_0^\infty e^{-t^{\frac{n}{r-1}}} t^{\frac{n}{r-1}-2} dt \int_0^\infty e^{-t^{\frac{n}{r-1}}} dt = \frac{\pi(r-1)^2}{Sin\left(\frac{r-1}{n}\right)\pi}.$$

Substituirt man wieder in diesem Ausdruck überall statt t, t^{r-1}; so erhält man zuletzt folgende merkwürdige Relation:

$$n^2 \int_0^\infty e^{-t^n} t^{r-2} dt \int_0^\infty e^{-t} t^{n-r} dt = \frac{\pi}{Sin\left(\frac{r-1}{n}\right)\pi}.$$

§ 44. Wir müssen übrigens hier erwähnen, dass die Methode der doppelten Integration in einigen Fällen unzuverlässig ist, und uns zu falschen Resultaten verleitet. Cauchy nämlich hat gezeigt, dass die successiven in zwei verschiedenen Ordnungen vorgenommenen Integrationen zu zwei ungleichen Resultaten führen jedesmal, wenn die Function unterm Integralzeichen für zwei bestimmten Werthe der Veränderlichen, durch Unendlichkeit zu dem unbestimmten Ausdruck $\frac{o}{o}$ übergeht. Diese Eigenschaft erkannte er an dem doppelten Integral

$$\int_b^{b'}\int_a^{a'} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy,$$

wo, $\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, wenn man zugleich $x=o$ und $y=o$ setzt, $\frac{o}{o}$ wird, oder wenn man erst $x=o$ setzt, so hat man $\frac{1}{y^2}=+\infty$ für $y=o$, und $-\frac{1}{x^2}=-\infty$ für $x=o$, wenn man zuerst $y=o$ gesetzt hat. Um sich von der erwähnten Eigenschaft des obigen Integrals zu überzeugen, sei

$$u = Arc.\,tang\,\frac{y}{x},$$

so ist

$$\frac{du}{dx}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{du}{dy}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{d^2u}{dx\,dy}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=z.$$

Integrirt man nun erst in Bezug auf x, so hat man

$$\int z dx = \int\frac{d^2u}{dx\,dy}dx = \frac{du}{dy} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\int_a^{a'} z dx = \frac{a'}{a'^2+y^2}-\frac{a}{a^2+y^2}.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit dy und integrirt darauf, so wird

$$\int dy\int_a^{a'} z dx = \int\frac{a'dy}{a'^2+y^2}-\int\frac{a dy}{a^2+y^2}$$

$$= Arc.\,tang\,\frac{y}{a'} - Arc.\,tang\,\frac{y}{a}.$$

Folglich

$$\int_b^{b'} dy\int_a^{a'} z dx = Arc.\,tang\,\frac{b'}{a'} - Arc.\,tang\,\frac{b'}{a} - Arc.\,tang\,\frac{b}{a'} + Arc.\,tang\,\frac{b}{a}. \qquad (70)$$

Verfährt man auf dieselbe Weise nur in umgekehrter Ordnung, so ergiebt sich

$$\int\limits_{b}^{b'} zdy = \frac{b}{x^2+b^2} - \frac{b'^2}{x^2+b'^2},$$

$$\int dx \int\limits_{b}^{b'} zdy = \int \frac{bdx}{x^2+b^2} - \int \frac{b'^2dx}{x^2+b'^2}$$

$$Arc.\,tang\,\frac{x}{b} - Arc.\,tang\,\frac{x}{b'},$$

und zuletzt,

$$\int\limits_{a}^{a'} dx \int\limits_{b}^{b'} zdy = Arc.\,tang\,\frac{a'}{b} - Arc.\,tang\,\frac{a'}{b'} - Arc.\,tang\,\frac{a}{b} + Arc.\,tang\,\frac{a}{b'}. \qquad (71)$$

Die beiden Formeln (70) und (71) sind identisch so lange a, b, a', b', keinen bestimmten Werth erhalten. Setzt man aber $a = b = -\infty$ und $a' = b' = \infty$, so bekommen die erwähnten Ausdrücke folgenden ungleichen Werthe:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$$

$$-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\pi.$$

Thesen.

I. Die angewandte Mathematik hat vielfach beigetragen die Lehre von den bestimmten Integralen zu erweitern.

II. Es scheint viel richtiger, ein immerwährendes Vorhandensein von Kräften, als die Ursache der Bewegung, und das Nichtvorhandensein derselben, als Ursache der Ruhe der Materie, anzunehmen; als ihr die Trägheit zuzuschreiben.

III. Die Wahrscheinlichkeits-Rechnung kann die Philosophie des practischen Lebens genannt werden.

IV. Es giebt keine absolut unendlich grosse und unendlich kleine Grössen.

V. Die Methode der Gränzen ist jedenfalls der Methode der unendlich Kleinen vorzuziehen.

VI. Nur durch die Mathematik bekommen Physik und Astronomie eine strenge wissenschaftliche Form.

VII. Die physikalischen Versuche und astronomischen Beobachtungen lassen noch immer einen Zweifel übrig, und nur das kann als richtig in jenen Wissenschaften angesehen werden, was mathematisch bewiesen worden ist.

VIII. Alle Compensations-Apparate für die ausdehnende Wirkung der Wärme haben noch nicht den letzten Grad der Vollkommenheit erreicht, und lassen noch Manches in dieser Hinsicht zu wünschen übrig.