Handbuch

der

Differential- und Integral-Rechnung

und ihrer Anwendungen

auf

Geometrie und Mechanik.

Zunächst

zum Gebrauche in Vorlesungen

herausgegeben

von

Dr. Ferd. Minding.

Erster Theil,

enthaltend Differential- und Integralrechnung, nebst Anwendung auf die Geometrie.

Mit einer Figurentafel.

Berlin 1836,

bei F. Dümmler.

Handbuch

der

Differential- und Integral-Rechnung

und ihrer Anwendungen

auf

Geometrie.

Zunächst

zum Gebrauche in Vorlesungen

herausgegeben

von

Dr. Ferd. Minding.

Mit einer Figurentafel.

Berlin 1836,

bei F. Dümmler.

Vorrede.

Ich würde mich nicht leicht zur Herausgabe eines Handbuches der Differential- und Integral-Rechnung entschlossen haben, wenn nicht das längst gefühlte und ausgesprochene Bedürfniß meiner Zuhörer an der hiesigen allgemeinen Bauschule mich dazu veranlaßt, und die hohe vorgesetzte Behörde dieser Anstalt ein solches Unternehmen für zweckmäßig erachtet, daher auch zur Beförderung desselben Sich bewogen gefunden hätte. Nach einmal gefaßtem Entschlusse wünschte ich jedoch nicht, ein gar zu dürftig ausgestattetes Compendium zu liefern, sondern hatte die Absicht, dem Buche einen gewissen Grad von Vollständigkeit zu geben, welcher dasselbe nicht allein für meine Vorträge brauchbar machen, sondern ihm vielleicht auch noch andere Leser gewinnen sollte. Zwar läßt sich nicht annehmen, daß Anfänger in der Differential-Rechnung dieses Buch, ohne Hülfe eines Lehrers, sofort mit einiger Leichtigkeit zu lesen im Stande sein werden, da dasselbe vielmehr bestimmt ist, durch Vorträge seine Erläuterung zu erhalten; vielleicht aber könnten einige Lehrer sich desselben bei ihrem Unterrichte bedienen, oder es könnten auch Leser, die schon einige Uebung besitzen, daraus Nutzen ziehen.

Was den Inhalt betrifft, so habe ich, um die Differential-Rechnung nicht sofort, wie jetzt wieder häufiger geschieht, auf die Vorstellung des Unendlich-Kleinen zu gründen, den Differentialquotienten als den Werth eines gewissen Verhältnisses, dessen Glieder beide Null werden, erklärt, nachher aber auch, in §. 3., die Bedeutung dieses Werthes durch eine bestimmte Definition, die sich etwa der Newtonschen Fluxionentheorie am meisten annähert, festzustellen gesucht. Es würde der Darstellung bei einigen Gelegenheiten förderlich gewesen sein, neben dem von Herrn Crelle sehr passend gewählten Namen „Ableitung" noch einen anderen jener Definition mehr entsprechenden, zu besitzen; leider aber boten sich mir, bei Aufsuchung eines solchen, nur schwerfällige Zusammensetzungen dar. Da übrigens die aus der Vorstellung des Unendlich-Kleinen herstammende Bezeichnung und die gewöhnliche Rechnung mit Differentialen unter allen Umständen beibehalten und gerechtfertigt werden mußte, so ist an verschiedenen Stellen darauf aufmerksam gemacht werden, daß man immer nur mit Verhältnissen verschwindender Zunahmen, d. h. mit Ableitungen rechnet. In der Integral-Rechnung führt dieser Gang allerdings für den Anfänger möglicherweise den Anschein herbei, als ob das Integral $\int fx\,dx$ Null sein müsse; allein derselbe wird bei einigem Nachdenken leicht bemerken, daß, wenn dx als Null

angesehen wird, das Integral $\int fx\,dx$ ein Product von der Form $\infty . 0$, also $\frac{0}{0}$ ist, dessen Werth zu finden, eben die Aufgabe der Integral-Rechnung ist. In der Folge habe ich das Unendlich-Kleine, bei geometrischen Anwendungen, wo es sich, wie von selbst, als die einfachste und kürzeste Betrachtungsweise darbietet, sowohl in die Construction als in die Rechnung eingeführt. Es schien mir nicht erlaubt, meinen Lesern die Nachweisung eines so wichtigen Hülfsmittels vorzuenthalten, welches oft fast unmittelbar Resultate giebt, die man, nach anderen Methoden, nur mit Hülfe weitläufiger Zurüstungen hinterher zu beweisen vermag, ohne die Annahme des Unendlich-Kleinen aber vielleicht niemals gefunden haben würde.

Von Büchern, deren ich mich bediente, nenne ich besonders die Functionen-Lehre von Lagrange, von welcher ich die Uebersetzung mit Anmerkungen von Crelle benutzte; die leçons de calcul infinitésimal und den Calcul différentiel von Cauchy; die analyse infinitésimale von Fink (Paris 1834.), wovon ich aber den zweiten Theil, welcher die Integral-Rechnung enthalten soll, bis jetzt nicht gesehen habe; die disquisitiones circa superficies curvas von Gauß; verschiedene Abhandlungen in Crelles Journal; die Supplemente des Klügelschen Wörterbuches von Grunert; unter den Lehrbüchern besondes das von Lacroix, so wie die höhere Geometrie von Brandes. Man wird indessen auch verschiedene, diesem Buche eigenthümliche, Darstellungen bemerken können. Die Rücksicht auf die

Stetigkeit der Functionen ist mehr, als in den meisten Lehrbüchern geschieht, nach dem Vorgange von Cauchy, namentlich auch in der Integral-Rechnung bei der Bestimmung der Constanten, als unerläßlich hervorgehoben worden. In die Lehre von den ausgezeichneten Puncten ebener Curven habe ich etwas mehr Logik zu bringen gesucht, als ich in den mir bekannten Darstellungen derselben hatte wahrnehmen können; doch war für eine vollständige Untersuchung nicht Platz vorhanden. Da überhaupt bei ganz speciellen Gegenständen nicht lange verweilt werden durfte, so konnten z. B. die verschiedenen Transformationen, welche man zur Berechnung des Integral-Logarithmen aufgefunden hat, nicht mitgetheilt werden; doch sah ich mich im Stande, durch eine höchst einfache Messung des Fehlers, welcher bei der Berechnung der Constante aus der in §. 100. mit fu bezeichneten Reihe begangen wird, der Darstellung eine gewisse Abrundung zu geben. Von bestimmten Integralen wollte ich nur wenige aufnehmen, weil dieser Gegenstand schon einigermaaßen über die Grenzen meines Unternehmens hinaus zu liegen schien; indessen bewog mich die Einfachheit und Strenge einer Methode, welche mir Herr Professor Dirichlet vorschlug, dessen einsichtsvollem Rathe ich auch bei mehreren anderen Gelegenheiten gefolgt bin, zu dem Uebrigen noch die Haupteigenschaften der Function Γ hinzuzufügen. In der Lehre von der Integration der Differentialgleichungen, worüber Lacroix ausführlicher ist, habe ich mich auf einige der einfachsten Sätze und

auf Beispiele beschränkt, vor Allem aber nach Klarheit für den Anfänger gestrebt. Auch die Variations-Rechnung habe ich in aller Kürze möglichst klar darzustellen mich bemüht, und dabei ebenfalls auf eine gewisse Allgemeinheit verzichtet, welche für Anfänger nicht ersprießlich zu sein schien. Die Theorie der Curven des kürzesten Umringes, als Beispiel in die Variatios-Rechnung aufgenommen, gab zugleich Gelegenheit, die Sätze von Lancret über die Abwickelung krummer Linien von Flächen mitzutheilen, deren Herleitung hier auf denjenigen Grad der Einfachheit gebracht sein dürfte, dessen sie, mit Hülfe des Unendlich-Kleinen, fähig ist. Ich will jedoch bei Erwähnung dieser Einzelnheiten, denen noch andere beizufügen wären, nicht länger verweilen, sondern überlasse Kennern, die etwa vorhandenen Eigenthümlichkeiten des Buches zu bemerken und zu beurtheilen.

Gern hätte ich auf die Verbesserung des in sehr kurzer Zeit ausgearbeiteten Buches, nicht allein in Betreff der Sachen, sondern auch der Darstellung und des Ausdruckes, noch längere Zeit gewendet; aber die Rücksicht auf das Bedürfniß meiner Vorträge veranlaßte mich zu baldiger Herausgabe.

Obgleich ich dem mühsamen Geschäfte der Correctur viele Sorgfalt gewidmet habe, so ist doch leider noch eine große Anzahl von Fehlern stehen geblieben. Durch ein genaues Verzeichniß, welches ich meine Leser nicht zu übersehen, vielmehr schon vor dem Lesen zur Berichtigung zu benutzen dringend bitte, habe ich diesem Uebelstande, so viel als möglich, abzuhelfen gesucht. Die hinten angehängten Zusätze, die zur Erläuterung einiger Stellen dienen, in welchen ich, für meine Leser, nicht ausführlich genug gewesen zu sein glaubte, bitte ich gleichfalls nicht zu übersehen.

Der zweite die Mechanik betreffende Theil soll im Laufe des künftigen Jahres erscheinen.

Berlin im August 1836.

Der Verfasser.

Berichtigungen.

S. 5. Z. 13. v. u. statt $f(x+x)$ lies $f(x+\Delta x)$.

S. 10. Z. 2. v. u. statt $\frac{1}{\sqrt{x}}$ lies $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

S. 14. Z. 1. v. o. st. (Δx) im Nenner l. $(\Delta x)^2$. — Z. 11. v. o. st. dfx l. $ddfx$. — Z. 6. v. u. st. x^{n-1} l. x^{n-2}, u. st. x^{n-2} l. x^{n-3}. — Z. 4. v. u. st. x^{x-m} l. x^{n-m}.

S. 15. Z. 1. v. u. st. also ist fx l. also ist fx_1.

S. 16. Z. 5. v. u. st. Aleitungen l. Ableitungen.

S. 17. Z. 7. v. u. st. $n\frac{d^{n-1}Q}{dx^n}$ l. $n\frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}}$.

S. 19. Z. 1. v. o. st. demselben l. derselben.
Z. 7. v. u. st. wenn die l. wenn fx und die.

S. 21. Z. 6. v. o. st. d. l. d. h. — Z. 14. v. o. st. $\frac{x}{2}$ l. $\frac{x^2}{2}$.
Z. 5. v. u., am Ende, l. $n_m x^{n-m} k^m + R$.

S. 28. Z. 10. v. o. st. $a \log a \cdot dx$ l. $a^x \log a \cdot dx$.
Z. 1. u. 2. v. u. st. $+$ l. $-$ vor der 6ten, 10ten u. 7ten Potenz von x.

S. 29. Z. 4. v. o. st. $\frac{x^4}{1!}$ l. $\frac{x^4}{4!}$. — Z. 8. v. o. st. seine l. seien.
Z. 5. v. u. st. das l. daß.

S. 30. Z. 15. v. o. st. a_{0+3} l. a_{n+3}. — Z. 19. v. o. st. nähern l. nähert.

S. 31. Z. 4. v. u. st. $\sin x \sin y$ l. $\sin x \cos y$.

S. 34. Z. 19. v. o. st. $\cos(\pi+x) = -\sin x$ l. $\cos(\pi+x) = -\cos x$.

S. 49. Z. 2. v. u. st. zugelich l. zugleich.

S. 75. Z. 4. v. o. st. 49. l. 40. — Z. 6. v. u. st. seine l. seien.

S. 78. Z. 10. v. u. st. $y'-v_1$ l. $y'-v'$. — Z. 2. v. u. st. $\psi'(y+\Theta k)$ l. $\psi'(y+\Theta h)$.

S. 80. Z. 5. v. o. l. verschwinden.

S. 88. Z. 7. v. o. st. diejenigen l. diejenige. — Z. 9. v. u. st. $\frac{dv}{dy}$ l. $\frac{dy}{dx}$.

S. 90. Z. 2. v. u st. 39. l. 40.

S. 92. Z. 8. v. o., zweimal, st. $p-a$ l. $a-p$.

S. 101. Z. 5. v. o. st. $f^{m-1}(c)$ und $f^{m-1}(c)$ l. $f^{m+1}(c)$ und $f^{m-1}(c)$.

S. 108. Z. 14. v. o. st. die l. sie.

S. 121. Z. 11. v. o. st. näheren l. nähern.

S. 135. Z. 9. v. u. st. βp l. βq.

S. 147. Z. 10. v. o. st. Fig. 18. l. Fig. 18*.

S. 158. Z. 8. v. o. st. $\frac{\psi x_n - \psi x_1}{x_n - x_1}$ l. $\frac{\psi x_n - \psi x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$.

S. 161. Z. 3. v. o. st. x_x l. x_1.

S. 166. Z. 3. v. u. st. wird l. werde.

S. 173. Z. 4. v. u. im Nenner st. $n-1$ l. $n+1$.

S. 176. Z. 2. v. u. st. Functionen l. Function, u. st. $f(x,y)$ l. $f(x,u)$.

S. 183. Z. 12. v. o. streiche die Worte: für ein positives h.

S. 186. Z. 5. v. u. st. $-u$ l. $=u$.

S. 187. Z. 4. v. o. fehlt dx unter dem Integralzeichen.

S. 199. Z. 1. v. o. st. bellebigen l. beliebigen.

S. 221. Z. 4. v. u. st. $r^3 \cos\psi$ l. $-r^3 \cos\psi$, wobei zu bemerken ist, daß das Zeichen — weggelassen werden kann.

S. 222. Z. 9. u. 10. v. o. st. Pa=rallelepipedum l. Par=allelepipedum.

S. 223. Z. 1. v. o. st. LMG l. LMN.

S. 228. Z. 9. v. o. st. $x-\frac{n}{1}$ l. $x-\frac{1}{n}$.

S. 232. Z. 9. v. u. st. dem ächten Bruche l. den ächten Bruch.

S. 233. Z. 3. v. o. st. $Bx^2+B_1x+B_1$ l. $Bx^2+B_1x+B_2$.

S. 236. Z. 10. v. u. st. eben l. oben.

S. 242. Z. 6. v. u. streiche 5.

S. 247. Z. 12. v. u. st. $\frac{1}{2^2-a}$ (zum zweiten Male) l. $\frac{1}{3^2-a}$.

S. 259. Z. 10. v. u. streiche $=0$.

S. 270. Z. 10. v. o. l. oder aus $f(x,y,\varphi)=0$, $\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{df}{d\varphi}=0$.

S. 272. Z. 13. v. u. st. befinden l. finden.

S. 279. Z. 3. v. o. st. nach l. noch von. — Z. 9. v. u. st. Die l. die.

S. 283. Z. 7. v. u. st. AN l. $\frac{AN}{\lambda}$.

S. 284. Z. 13. v. u. st. erhalten l. enthalten. — Z. 8. v. u. st. 149. l. 143.

S. 286. Z. 3. v. o. st. 141. l. 144.

S. 296. Z. 3. v. o. st. daß l. das.

S. 309. Z. 13. u. 14. v. u. l. wieder die Summe der Gl.

S. 310. Z. 2. v. o. st. $\frac{df}{dy'}\cdot\frac{dy}{dc}$ l. $\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dc}$.

S. 311. Z. 11. v. u. st. $p\delta x+q\delta y_1$ l. $p\delta x_1+q\delta y_1$.

Aus zufälligen Gründen ist für „unendlich groß" zuerst das Zeichen ∞, nachher ∞ gebraucht worden.

Nachtrag zum Verzeichnisse der Berichtigungen.

S. 4. Z. 1. v. o. statt fk l. fx.

S. 91. Z. 11. v. u. st. die vorigen Annahmen l. die vorige Annahme.

S. 159. Z. 11. v. o. l. (x_n-x_0).

S. 200. Z. 8. v. u. neben $\arcsin\frac{x}{a}$ streiche $\frac{1}{2}$.

S. 203. Z. 8. v. o. st. s. l. ds. — Z. 14. v. o. l. $dx=\frac{-pz\,dz}{(z-1)^2}$ und nachher st. dz^2 l. dz.

S. 227. Z. 4. u. Z. 10. v. o. st. nten l. $(n-1)$ten.

S. 228. Z. 6. v. u. st. K_2+A_2 l. $K_2\ A_2$.

S. 278. Z. 11. v. u. st. sämmtlich l. nicht constant, also.

S. 284. Z. 3. v. u. vor „setzt" fehlt: von x.

S. 288. Z. 8. v. u. l. $qx-py=0$ und nachher $q=\frac{py}{x}$.

S. 306. Z. 9. v. u. st. $\frac{df}{dz}\delta y$ l. $\frac{df}{dz}\delta z$.

S. 309. Z. 11. v. o. st. $y+\frac{dy'}{dc}\delta c$ l. $y'+\frac{dy'}{dc}\delta c$.

Inhalt.

Differential-Rechnung.

Integral-Rechnung.

Differential = Rechnung.

Differential-Rechnung.

1. Obgleich der Zweck der Differential-Rechnung am klarsten aus ihr selbst und ihren zahlreichen und wichtigen Anwendungen erkannt wird; so läßt sich darüber doch vorläufig im Allgemeinen sagen, daß dieselbe bei mathematischen Betrachtungen immer nur dann eintreten kann, wenn einige der vorkommenden Größen als des Wachsens oder Abnehmens fähig, überhaupt als *veränderlich* gedacht werden, und es darauf ankommt, zu untersuchen, welchen Einfluß die Veränderung gewisser Größen auf die Werthe anderer, von jenen abhängiger Größen ausübt. In so fern der Werth einer veränderlichen Größe durch den Werth einer anderen veränderlichen Größe bestimmt wird, oder von diesem abhängt, nennt man jene eine *Function* von dieser. So sind z. B. x^n, $\log x$, $\sin x$ Functionen von x, d. h. sie ändern ihre Werthe, wenn x den seinigen ändert, und zwar jede nach einem ihr eigenthümlichen Gesetze. Diejenigen Größen aber, deren Werthe als unveränderlich angenommen werden, heißen *beständige Größen* oder *Constanten*.

Eine Function von x wird entweder durch einen anderen Buchstaben, z. B. y, oder auch durch $f(x)$, $\varphi(x)$ u. dgl. bezeichnet. Es ist einleuchtend, daß eine Größe auch von mehreren Veränderlichen z. B. x, z, t abhängen kann; eine solche wird durch $f(x,z,t)$ bezeichnet. Von den hier als bekannt vorauszusetzenden Arten der Functionen entsteht ein beträchtlicher Theil dadurch, daß die veränderlichen und die beständigen Größen durch die Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division mit einander verbunden, und daß die veränderlichen Größen, entweder einzeln, oder in Verbindung mit beständigen, zu Potenzen von unveränderlichen Exponenten erhoben werden. Vorausgesetzt daß die Anzahl der nöthigen Operationen dieser Art eine endliche ist, oder doch darauf zurückgeführt werden kann, so heißen diese Functionen algebraische, und, wenn nur ganze Potenzen vorhanden, rationale, wenn aber gebrochene Exponenten vorhanden, also Wurzeln angezeigt sind, die nicht auf rationale Functionen zurückkommen, irrationale Functionen. So sind z. B. $\frac{a+bx^2}{cx+bx^3}$, $\sqrt{a+x^3}$ algebraische Functionen, die erste rational, die zweite irrational. Außer diesen werden noch die logarithmischen, exponentiellen und trigonometrischen Functionen als vorläufig bekannt angenommen, von denen $\log x$, a^x, $\sin x$ und $\cos x$ die einfachsten Formen sind.

Im Allgemeinen bedeutet also $f(x)$, oder auch, ohne Klammern, fx eine Größe, die durch eine gewisse Reihe von Operationen aus x und aus beständigen Größen gebildet wird. Wenn die Bezeichnung dieser Operationen irgend eine Unbestimmtheit übrig läßt, wie z. B. $\sqrt{x}$ in Hinsicht des Zeichens $\pm$ zweideutig ist; so ist auch, für denselben Werth von x, die Function fx mehrerer Werthe fähig, oder das Zeichen fx stellt mehrere Functionen zugleich dar, welche, um alle Unklarheit zu beseitigen, nach Umständen von einander zu sondern sind. —

Functionen von einer veränderlichen Grösse.

2. Wenn die Größe x, von welcher eine Function fx untersucht werden soll, um k zunimmt, also in $x+k$ übergeht, so verwandelt fx sich in $f(x+k)$, ändert sich also um

$$f(x+k)-fx.$$

Diese (positive oder negative) Zunahme von fx wird offenbar Null, wenn $k=0$ wird, wie auch die Function fx übrigens beschaffen sei; so lange dieselbe aber stetig bleibt, hat sie die Eigenschaft, daß ihre Zunahme $f(x+k)-fx$ kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden kann, indem k mehr und mehr der Null genähert wird, ohne jedoch mit dieser zusammenzufallen. Ist dies bei irgend einem Werthe von x nicht der Fall, d. h. geschieht irgend einmal die Zunahme der Function sprungweise; so müssen, in der jetzt folgenden Untersuchung, solche besonderen Werthe als ausgeschlossen betrachtet werden. Z. B. die Function $\frac{1}{x}$ springt plötzlich von $-\infty$ in $+\infty$ über, indem x durch Null geht. Hier findet also eine Unterbrechung der Stetigkeit Statt, indem die Zunahme $\frac{1}{x+k}-\frac{1}{x}$ d. i. $\frac{-k}{x(x+k)}$ sich nicht mit k zugleich der Null nähert, wenn $x=0$ ist. Sie ist vielmehr, sobald $x=0$, allemal $=-\frac{k}{x\cdot k}=-\frac{1}{0}$, wie klein auch k sei.

Indem die Zunahmen k und $f(x+k)-fx$ beide zugleich kleiner als jede gegebene Größe genommen werden, hören sie zwar, jede einzeln, auf, einer Zahlenbestimmung fähig zu sein; dessen ungeachtet aber kann ihr Verhältniß, d. h. der Quotient

$$\frac{f(x+k)-fx}{k}$$

fortwährend, wie klein auch Zähler und Nenner desselben werden mögen, eine bestimmte Größe haben.

Es sei z. B. $fx=ax+b$, so wird $f(x+k)=a(x+k)+b$, daher $\frac{f(x+k)-fx}{k}=a$; d. h. die Zunahme von $fx=ax+b$ verhält sich zu der von x, wie groß oder wie klein dieselbe auch genommen wird, immer wie $a:1$. Man kann daher sagen, daß, während x gleichmäßig wächst, $ax+b$ ebenfalls gleichmäßig, und zwar immer a mal so stark wächst als x.

Es sei $fx=x^2$, so wird $f(x+k)=x^2+2xk+k^2$,

$\frac{f(x+k)-fx}{k}=2x+k$. Also verhält sich die Zunahme von x^2 zu der von x, d. i. $f(x+k)-fx:k$ immer wie $2x+k:1$. Indem man sich wieder x als gleichmäßig wachsend vorstellt, so wächst x^2 nicht mehr gleichmäßig, sondern das Verhältniß zwischen zwei zusammengehörigen Zunahmen von x^2 und x ist veränderlich, und man sieht zugleich, daß es dem Verhältnisse $2x:1$ beliebig nahe gebracht werden kann, weil man sich die Zunahme k so klein denken kann, als man will. Dieser Grenzwerth, welchem sich das Verhältniß beider Zunahmen desto mehr nähert, je kleiner k wird, d. i. das Verhältniß $2x:1$ zeigt an, daß x^2 desto stärker wächst, je größer x schon geworden ist, wenigstens so lange x positiv bleibt. Betrachtet man aber die Function x^2 in ihrem ganzen Umfange, indem man sich x von $-\infty$ bis $+\infty$ beständig gleichmäßig wachsend denkt, so wird das Verhältniß $2x:1$ negativ, so lange x negativ ist; d. h. während x von $-\infty$ bis 0 wächst, nimmt x^2 ununterbrochen von $+\infty$ bis 0 ab, aber desto schwächer, je näher x der Null kommt, bis bei $x=0$ das Verhältniß $2x:1$ sein Zeichen wechselt, und indem die Abnahme von x^2 in Zunahme übergeht, während x von 0 bis $+\infty$ gleichmäßig zu wachsen fortfährt, x^2 ebenfalls zunimmt, und zwar mit wachsender Stärke, weil das Verhältniß $2x:1$ positiv und in beständigem Zunehmen ist. —

3. Allgemein drückt der Quotient $\frac{f(x+k)-fx}{k}$ das Verhältniß der einander entsprechenden Zunahmen von fx und x aus. Es soll sofort an mehreren Beispielen, und nachher in größerer Allgemeinheit nachgewiesen werden, daß das Verhältniß $\frac{f(x+k)-fx}{k}$ sich einer **bestimmten, von k unabhängigen Grenze desto mehr nähert, je kleiner k genommen wird**. (In dem obigen Beispiele war $fx=x^2$, und die Grenze, der das Verhältniß der beiden Zunahmen sich näherte, $2x:1$).

Dieselbe giebt den Werth an, welchen der Quotient $\frac{f(x+k)-fx}{k}$ für $k=0$ erhält, indem sein Zähler und Nenner zugleich verschwinden. Dieser Werth von $\frac{f(x+k)-fx}{k}$ für $k=0$ drückt offenbar nicht mehr das Verhältniß zweier Zunahmen von fx und x aus, sondern er kann nur angesehen werden als **das Maaß der veränderlichen Stärke, mit welcher fx wächst, während x gleichmäßig wächst**. Er ist positiv, wenn fx und x beide zugleich wachsen, negativ, wenn fx abnimmt, indem x wächst. Man nennt ihn die **Ableitung** von fx, und bezeichnet ihn mit $f'(x)$, oder auch ohne Klammern $f'x$, so daß die Ableitung $f'x$ der Werth ist, welchen der Quotient $\frac{f(x+k)-fx}{k}$ für $k=0$ erhält. —

Da k und $f(x+k)-fx$, für ein beliebiges k, zwei einander entsprechende Zunahmen oder **Differenzen** von x und fx sind, so werden sie oft durch Vorsetzung des Buchstabens Δ bezeichnet, so daß $\Delta x=k$ die Zunahme oder Differenz von x, $\Delta fx=f(x+\Delta x)-fx=f(x+k)-fx$ die Differenz von fx andeutet. Nach dieser Bezeichnung muß das Verhältniß $\frac{f(x+k)-fx}{k}$ durch $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ ausgedrückt werden. Dies führt auf eine entsprechende Bezeichnung der Ableitung $f'x$, welche in vielen Fällen vorzuziehen ist. Nämlich die Ableitung $f'x$ ist der Werth, welchen das Verhältniß $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ erhält, wenn die Differenz Δx, und mit ihr zugleich die Differenz Δfx verschwindet. Eine im Verschwinden gedachte Differenz heißt ein **Differential**, und wird zur Unterscheidung von der Differenz Δ mit d bezeichnet. Demnach ist dx das Differential von x, dfx das Differential von fx. Ein Differential ist mithin, für sich allein betrachtet, keine Größe mehr, oder es ist, in Hinsicht auf seine Quantität, Null; es hat nur noch Bedeutung in seinem Verhältnisse zu einem anderen Differentiale. Das Verhältniß der beiden Differentiale dfx und dx oder der **Differentialquotient** $\frac{dfx}{dx}$ drückt also, nur vollständiger zugleich seinen Ursprung aus fx andeutend, dasselbe aus, was unter der Ableitung f'x zu verstehen ist, oder man hat

$$\frac{dfx}{dx} = f'x.$$

Statt dessen schreibt man auch oft $dfx = f'x \cdot dx$, weil diese Formel offenbar ebenfalls nur das Verhältniß der Differentiale dfx und dx ausspricht.

Wenn also $fx = ax + b$ ist, so wird $f'x = a$, oder $\frac{dfx}{dx} = \frac{d(ax+b)}{dx} = a$, oder auch $d(ax+b) = adx$. — Oder wenn $fx = x^2$, so wird $f'x = 2x$, oder $\frac{dfx}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} = 2x$, oder auch $dfx = d(x^2) = 2xdx$. —

Es sei, um noch andere Beispiele anzuführen, $fx = x^3$, so wird $f(x+k) - fx = 3x^2k + 3xk^2 + k^3$, also $\frac{f(x+k)-fx}{k} = 3x^2 + 3xk + k^2$; daher, für $k = 0$, $f'x = 3x^2$. Also ist $\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2$, oder $d(x^3) = 3x^2dx$.

Es sei $fx = \frac{1}{x}$, so wird $\frac{f(x+k)-fx}{k} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x(x+k)}$; also für $k = 0$, $\frac{f(x+k)-fx}{k} = -\frac{1}{x^2}$; demnach $\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, oder auch $d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}$.

Es sei $fx = \sqrt{x}$, so wird $f(x+k) = \sqrt{x+k}$. Man findet aber leicht, daß $\sqrt{x+k} - \sqrt{x} = \frac{k}{\sqrt{x+k} + \sqrt{x}}$ ist, also

$\frac{\sqrt{x+k} - \sqrt{x}}{k} = \frac{1}{\sqrt{x+k} + \sqrt{x}}$, d. i. für $k = 0$, $= \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Daher ist $\frac{d(\sqrt{x})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, oder $d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

4. **Anmerkung.** Der Begriff und die angegebene Bezeichnung eines Differentials sind von **Leibnitz** in die Mathematik eingeführt worden, der sich unter einem Differentiale, wie dx, dfx, eine Größe dachte, die, in beständiger Annäherung gegen Null begriffen, kleiner als jede gegebene Größe, d. h. **unendlich klein** wird.

Da nun das Verhältniß der beiden Zunahmen von fx und x sich dem Werthe f'x desto mehr nähert, je kleiner beide genommen werden, so soll, wenn x die unendlich kleine Zunahme dx erhält, die entsprechende unendlich kleine Zunahme von fx, d. i. dfx durch $f'x \cdot dx$ ausgedrückt werden. Vergleicht man aber den in §. 12. gegebenen allgemeinen Ausdruck der Zunahme $f(x+k) - fx$, so sieht man, daß $f'x \cdot k$ nur das erste Glied dieses Ausdruckes ist, und daß mithin $f'x \cdot k$, wie klein auch k sei, niemals genau die Zunahme von fx angiebt. Oder, um ein schon hier verständliches Beispiel zu geben, die Zunahme von x^2 ist nicht $2xk$, sondern $2xk + k^2$. Indem aber k als eine unendlich kleine Größe gedacht wird, so wird der Einfluß des zweiten Gliedes k^2 gegen das erste immer unbedeutender; man läßt daher k^2 als eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung, gegen das die erste Potenz von k enthaltende Glied $2xk$, ein unendlich Kleines der ersten Ordnung, hinweg, und drückt die Zunahme $d(x^2)$ blos durch $2xdx$ aus. Wegen dieses Weglassens gewisser Glieder, eignet sich diese Ansicht weniger für eine strenge Darstellung der Differentialrechnung, weshalb dieselbe in diesem Lehrbuche nicht zu Grunde gelegt worden ist. Indessen ist zu bemerken, daß sie, gehörig verstanden, immer richtige Resultate liefert, und besonders die Anwendung der Rechnung auf Geometrie und Mechanik sehr erleichtert; daher sie auch aus diesem

Lehrbuche nicht gänzlich ausgeschlossen, sondern vielmehr, jedoch erst später, nach vollständiger Begründung der Differentialrechnung, gebraucht werden soll. Für jetzt also bleibe der Leser bei den Bestimmungen der vorigen §. stehen.

5. Die Ableitung einer beständigen Größe a ist offenbar Null, weil ihr gar keine Zunahme beigelegt werden kann; also $\frac{da}{dx}=0$, wofür man auch schreibt $da=0$. — Wenn ferner die Ableitung von fx, d. i. f′x gegeben ist, und a einen constanten Factor bedeutet, so sieht man leicht, daß af′x die Ableitung von afx, oder daß $d(afx)=adfx=af'xdx$ ist.

Um aber nachzuweisen, daß der Quotient $\frac{f(x+k)-fx}{k}$, welcher zur Abkürzung, weil er eine Function von x und k ist, mit F(x,k) bezeichnet werden mag, für $k=0$ wirklich im Allgemeinen einen bestimmten Werth hat, oder daß es eine Ableitung von fx giebt, soll jetzt gezeigt werden, daß, wenn die beiden Functionen fx und φx Ableitungen haben, auch ihre Summe, Differenz, ihr Product und Quotient Ableitungen haben.

Für ein beliebiges k sei $\frac{f(x+k)-fx}{k}=F(x,k)=F$, und $\frac{\varphi(x+k)-\varphi x}{k}=\Phi(x,k)=\Phi$, so sind F und Φ zwei Functionen von x und k, von denen bekannt ist, daß sie, für $k=0$, in die bestimmten und gegebenen Functionen f′x und $\varphi'x$ übergehen.

a. Um die Ableitung der Summe oder Differenz $fx\pm\varphi x$ zu finden, hat man zuerst

$\frac{f(x+k)\pm\varphi(x+k)-(fx\pm\varphi x)}{k}=F\pm\Phi$; also, für $k=0$, $=f'x\pm\varphi'x$, d. h. die Ableitung der Summe oder Differenz zweier Functionen ist die Summe oder Differenz der Ableitungen dieser Functionen. Mithin ist $\frac{d(fx\pm\varphi x)}{dx}=\frac{dfx}{dx}\pm\frac{d\varphi x}{dx}=f'x\pm\varphi'x$; oder auch, wenn man statt der Ableitungen Differentiale schreibt:

$$d(fx\pm\varphi x)=dfx\pm d\varphi x=f'xdx\pm\varphi'xdx.$$

b. Die Ableitung des Productes $fx\cdot\varphi x$ ist der Werth des Quotienten

$$\frac{f(x+k)\cdot\varphi(x+k)-fx\cdot\varphi x}{k} \quad \text{für} \quad k=0.$$

Nach dem Obigen ist aber $f(x+k)=fx+kF$, $\varphi(x+k)=\varphi x+k\Phi$; setzt man diese Werthe in den vorstehenden Quotienten, so wird derselbe:

$$fx\cdot\Phi+\varphi x\cdot F+k\cdot F\cdot\Phi;$$

mithin, für $k=0$, indem F in f′x, Φ in $\varphi'x$ übergeht,

$$fx\varphi'x+\varphi xf'x=\frac{d(fx\cdot\varphi x)}{dx}.$$

Also: Die Ableitung des Productes zweier Functionen ist die Summe der beiden Producte, welche entstehen, wenn jede der Functionen in die Ableitung der anderen multiplicirt wird. Daher ist auch:

$$d(fx\cdot\varphi x)=fx\cdot d\varphi x+\varphi x\cdot dfx.$$

c. Die Ableitung des Quotienten $\frac{fx}{\varphi x}$ ist der Werth von $\frac{f(x+k)}{\varphi(x+k)}-\frac{fx}{\varphi x}$ für $k=0$. Schreibt man wieder für f(x+k), $\varphi(x+k)$ ihre obigen Werthe, so geht dieser Ausdruck, auf einerlei Nenner gebracht, über in:

$$\frac{\varphi x\cdot F-fx\cdot\Phi}{\varphi x\cdot\varphi(x+k)}.$$

daher, für $k=0$, in $\frac{\varphi x\cdot f'x-fx\cdot\varphi'x}{(\varphi x)^2}=\frac{d\left(\frac{fx}{\varphi x}\right)}{dx}.$

Mithin ist auch $d\left(\frac{fx}{\varphi x}\right)=\frac{\varphi x dfx - fx d\varphi x}{(\varphi x)^2}$.

Also: *Die Ableitung eines Quotienten wird gefunden, wenn man den Nenner mit der Ableitung des Zählers, den Zähler mit der Ableitung des Nenners multiplicirt, das letztere Product von dem ersteren abzieht, und den Unterschied durch das Quadrat des Nenners dividirt.*

6. Es sei ferner eine Function einer Function $\varphi(fx)$ gegeben; so läßt sich die Ableitung derselben folgendermaßen finden, wenn $\varphi' x$ und $f' x$ bekannt sind:

Man setze, wie früher, $f(x+k)=fx+kF$; und

$$Q=\frac{\varphi(fx+kF)-\varphi(fx)}{k}.$$

Nun sei $fx=y$, $kF=h$, so wird

$$Q=\frac{\varphi(y+h)-\varphi y}{h}\cdot F.$$

Offenbar aber wird, für $k=0$, zugleich $h=0$, mithin $\frac{\varphi(y+h)-\varphi y}{h}=\varphi' y$, und zugleich $F=f'x$; folglich $Q=\varphi' y\cdot f' x$, wo $y=fx$.

Also: Um die Ableitung von $\varphi(fx)$ zu finden, betrachte man zuerst $\varphi(fx)$ als eine Function von $y=fx$, und nehme die Ableitung von φy nach y; diese Ableitung $\varphi' y$ mit der Ableitung $f' x$ von fx multiplicirt, giebt $\varphi' y\cdot f' x$ als die gesuchte Ableitung von $\varphi(fx)=\varphi y$. Man hat also

$\frac{d\varphi y}{dx}=\frac{d\varphi y}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\varphi' y\cdot f' x$; oder $d(\varphi y)=\varphi' y\cdot dfx=\varphi' y\cdot f' x\cdot dx$.

Z. B. die Ableitung von x^3 war $3x^2$, und die von $\sqrt{x}$ war $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Nun sei $y=fx=x^3$, und $\varphi y=\sqrt{y}$, also $\varphi y=\varphi(fx)$ $=\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}$. Man hat $\varphi' y=\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$; und

$f' x=3x^2$, folglich $\frac{d\varphi(fx)}{dx}=\varphi' y\cdot f' x=\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\cdot 3x^2=\frac{3}{2}\sqrt{x}$;

folglich ist $d(\sqrt{x^3})=\frac{3}{2}\sqrt{x}\cdot dx$, oder $d\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{3}{2}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)dx$.

7. Vermittelst dieser Sätze soll zunächst die Ableitung oder das Differential von x^n bestimmt werden. — Zu dem Ende nehme man das Differential des Productes $fx\cdot\varphi x$ nach §. 5. b. Es war $d(fx\cdot\varphi x)=fx d\varphi x+\varphi x\cdot dfx$.

Dividirt man auf beiden Seiten mit $fx\cdot\varphi x$, so kommt $\frac{d(fx\cdot\varphi x)}{fx\cdot\varphi x}=\frac{dfx}{fx}+\frac{d\varphi x}{\varphi x}$. — Es sei nun φx selbst das Product zweier Functionen, deren Differentiale bekannt sind, und die mit v und w, so wie fx mit u, zur Abkürzung bezeichnet werden sollen; so folgt:

$$\frac{d(u\cdot v\cdot w)}{u\cdot v\cdot w}=\frac{du}{u}+\frac{d(v\cdot w)}{v\cdot w}=\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}+\frac{dw}{w}.$$

Die in vorstehender Formel enthaltene Regel für die Bildung des Differentials eines Productes gilt offenbar für eine beliebige Anzahl von Factoren. Sind diese sämmtlichen Factoren einander gleich, und ihre Anzahl n, so erhält man

$\frac{d(u^n)}{u^n}=\frac{du}{u}+\frac{du}{u}+\frac{du}{u}+\cdots=n\frac{du}{u}$, mithin $d(u^n)=nu^{n-1}du$.

Ist insbesondere $u=x$, so ist das Differential davon dx (oder die Ableitung ist $=1$); mithin ist $\frac{d(x^n)}{x^n}=n\frac{dx}{x}$, wenn n eine positive ganze Zahl; oder $d(x^n)=nx^{n-1}\cdot dx$.

Es sei ferner $n=\frac{p}{q}$ ein Bruch, Zähler p und Nenner q ganze positive Zahlen; man setze $z=x^{\frac{p}{q}}$, $z'=(x+k)^{\frac{p}{q}}$; so ergiebt sich der Werth des Quotienten $\frac{z'-z}{k}$, für $k=0$, wie folgt: Man setze $x^{\frac{1}{q}}=u$, $(x+k)^{\frac{1}{q}}=u+h$, so wird, da $k=x+k-x=(u+h)^q-u^q$;

$$\frac{z'-z}{k}=\frac{(u+h)^p-u^p}{(u+h)^q-u^q}=\frac{(u+h)^p-u^p}{h}:\frac{(u+h)^q-u^q}{h}.$$

Für $k=0$ wird aber auch $h=0$, mithin, da p und q ganze positive Zahlen sind, $\frac{(u+h)^p-u^p}{h}=pu^{p-1}$, $\frac{(u+h)^q-u^q}{h}=qu^{q-1}$; folglich wird, für $k=0$,

$\frac{z'-z}{k}=\frac{pu^{p-1}}{qu^{q-1}}=\frac{p}{q}u^{p-q}=\frac{p}{q}\cdot x^{\frac{p}{q}-1}$, also

$d\left(x^{\frac{p}{q}}\right)=\frac{p}{q}\cdot x^{\frac{p}{q}-1}\cdot dx$, oder $d(x^n)=nx^{n-1}dx$.

Um ferner das Differential von x^{-n} zu finden, wo n wieder positiv, setze man für x^{-n}, $\frac{1}{x^n}$. Nach §. 5. c. findet man hiervon das Differential, wenn man $fx=1$, $\varphi x=x^n$, mithin $dfx=0$, $d\varphi x=nx^{n-1}dx$ setzt; woraus sich ergiebt

$$d(x^{-n})=d\left(\frac{1}{x^n}\right)=-\frac{d(x^n)}{x^{2n}}=-\frac{nx^{n-1}\,dx}{x^{2n}}=-n\cdot x^{-n-1}\cdot dx.$$

Hieraus geht hervor, daß allgemein, der Exponent n mag positiv oder negativ, ganz oder gebrochen sein, $d(x^n)=nx^{n-1}dx$, oder die Ableitung $\frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}$ ist.

Also: Die Ableitung von x^n ist das Product des Exponenten n in die $(n-1)$te Potenz von x.

8. Mit Hülfe vorstehender Sätze kann man das Differential (oder die Ableitung) jeder algebraischen Function finden, d. h. dieselbe differentiiren. Es sei z. B. $y=(a+bx^n)^p$, so setze man $a+bx^n=z$, $y=z^p$; alsdann wird $dy=pz^{p-1}dz$, $dz=bnx^{n-1}dx$, folglich $dy=pbn\cdot z^{p-1}\cdot x^{n-1}dx$ $=pbn(a+bx^n)^{p-1}x^{n-1}dx$. — Andere, zum Theil etwas verwickeltere Beispiele, wofür aber die im Vorigen enthaltenen Regeln hinreichen, sind:

$$d(\sqrt{1+x^2})=+\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}};\ d(\sqrt{1-x^2})=-\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$d(x+\sqrt{1+x^2})=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}[x+\sqrt{1+x^2}].$$

$$d\left[\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right]=\frac{-2dx}{\sqrt{(1-x^2)}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}$$

$$=\frac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)}(1-\sqrt{1-x^2})}=-\frac{dx}{x^2}-\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

9. Wenn der Quotient $\frac{f'(x+k)-f'x}{k}$ für $k=0$ einen bestimmten Werth erhält; so wird dieser die Ableitung von $f'x$ oder die **zweite Ableitung von fx** sein, und soll mit $f''x$ bezeichnet werden. Man hat also $\frac{df'x}{dx}=f''x$, oder $df'x=f''x\cdot dx$. Um aber die Entstehung der zweiten Ableitung aus der ursprünglichen Function fx anschaulicher darzustellen, betrachte man zunächst die Differenz $\Delta fx=f(x+\Delta x)-fx$. — Läßt man in derselben x nochmals um Δx wachsen, so erhält sie eine Zunahme, welche als Differenz einer Differenz, oder zweite Differenz mit $\Delta\Delta fx$, oder kürzer mit $\Delta^2 fx$ bezeichnet werden kann. Diese Zunahme ist offenbar:

$$\Delta^2 fx=[f(x+2\Delta x)-f(x+\Delta x)]-[f(x+\Delta x)-fx]$$

oder

$$\Delta^2 fx=f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+fx.$$

Dividirt man $\Delta^2 fx$ mit $(\Delta x)^2$, so kommt:

$$\frac{\Delta^2 fx}{(\Delta x)^2}=\frac{\frac{f(x+2\Delta x)-f(x+\Delta x)}{\Delta x}-\frac{f(x+\Delta x)-fx}{\Delta x}}{\Delta x}.$$

Indem nun die Differenz Δx nur in ihrem Verschwinden betrachtet wird, so geht sie in das Differential dx über; damit verwandelt sich der Zähler auf der rechten Seite in das Differential von $f'x$, und folglich der ganze Quotient auf der rechten Seite in $\frac{df'x}{dx}=f''x$. Dies ist also der Werth, welchen der

Quotient $\frac{\Delta^2 fx}{(\Delta x)^2}$ für ein verschwindendes Δx erhält; indem man aber Δ mit d vertauscht, kann man ihn durch $\frac{d^2 fx}{dx^2}$ bezeichnen, so daß also $\frac{d^2 fx}{dx^2} = f''x$, oder $d^2 fx = f''x \cdot dx^2$.

Das Zeichen $ddfx$ oder $d^2 fx$ bezeichnet das Differential der zweiten Ordnung, oder das *zweite Differential* von fx, und sein Verhältniß zu dx^2 ist die Ableitung von $f'x$ oder die *zweite* Ableitung von fx. Um also das zweite Differential von fx zu finden, braucht man nur das erste Differential, d. i. $dfx = f'x \cdot dx$, so zu differentiiren, als ob dx auf der rechten Seite ein constanter Factor wäre. Dadurch erhält man:

$$ddfx = df'x \cdot dx, \text{ und weil } df'x = f''x \cdot dx,$$
$$ddfx = d^2 fx = f''x \cdot dx^2.$$

Hierbei ist angenommen, daß x als *gleichmäßig* wachsend gedacht wird; denn nur unter dieser Voraussetzung kann man dx wie einen constanten Factor behandeln. —

Nach derselben Regel fortfahrend, erhält man das dritte Differential $d^3 fx = df''x \cdot dx^2 = f'''x \cdot dx^3$, oder die dritte Ableitung $\frac{d^3 fx}{dx^3} = f'''x$, und allgemein das nte Differential von fx, $d^n fx = f^n x \cdot dx^n$, oder die nte Ableitung $\frac{d^n fx}{dx^n} = f^n x$. —

Beispiel. Das erste Differential von $y = x^n$ war $dy = nx^{n-1}dx$. Hieraus folgt weiter:

$d^2 y = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot dx^2$, $d^3 y = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3} dx^3$, u. s. f.; allgemein

$$d^m y = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1) \cdot x^{n-m} \cdot dx^m.$$

Für das Folgende wird eine kürzere Bezeichnung der Coefficienten in diesen Ableitungen nöthig sein, die hier sogleich bemerkt werden mag. Man bezeichne das Product aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis m mit $m!$, so, daß z. B. $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$ sei; und setze:

$$\frac{n}{1} = n_1, \quad \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} = n_2, \quad \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot} = n_3,$$
$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot} = n_4,$$

allgemein $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdots n-m+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} = n_m$; so erhält man die Ableitungen von x^n der Reihe nach, wie folgt: $n_1 \cdot x^{n-1}$; $2! n_2 x^{n-2}$; $3! n_3 x^{n-3}$; allgemein die mte Ableitung von x^n: $m! n_m x^{n-m}$. — Man bemerke zugleich, daß $(m+1)n_{m+1} = (n-m)n_m$, d. h. z. B. $3 \cdot n_3 = (n-2)n_2$ ist. —

10. Wenn man die höheren Ableitungen einer Function zu finden vermag, so läßt sich mit Hülfe derselben die Zunahme $f(x+k) - fx$, für endliche Werthe von k, auf eine sehr vortheilhafte und bei vielen Untersuchungen sogar unentbehrliche Weise ausdrücken. Um aber zu diesem Ausdrucke zu gelangen, ist folgender Satz nöthig, der sich übrigens aus dem Begriffe einer Ableitung mit Leichtigkeit ergiebt:

Wenn fx eine stetige Function ist, deren Ableitung $f'x$ für alle Werthe von x, die zwischen den Grenzen x_0 und x_1 liegen (wo x_0 kleiner als x_1, d. h. die Differenz $x_1 - x_0$ positiv ist), *lauter endliche, bestimmte Werthe von gleichen Zeichen* hat, so hat der Quotient $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ nothwendig *dasselbe* Zeichen, wie die Ableitung $f'x$. — Es ist nämlich schon im Anfange bemerkt worden, daß ein positiver Werth von $f'x$ anzeigt, daß die Zunahmen von fx und x in *demselben* Sinne geschehen; ein negativer dagegen, daß beide in entgegengesetztem Sinne Statt finden. Wächst also x von x_0 bis x_1, und bleibt $f'x$ für alle zwischen diesen Grenzen befindlichen Werthe von x endlich und positiv; so wächst auch fx von fx_0 bis fx_1, also ist fx_1 größer als fx_0, folglich sind $\frac{fx_1 - fx_0}{x_1 - x_0}$ und $f'x$ beide zugleich positiv. Wenn aber $f'x$ überall zwischen den angegebenen Grenzen endlich und negativ ist, so nimmt fx von fx_0 nach fx_1 hin fortwährend ab; also ist $\frac{fx_1 - fx_0}{x_1 - x_0}$ negativ, so wie $f'x$ es ist. —

11. Nun sei fx eine Function, deren Ableitungen bis zu jeder beliebigen (nten) endliche Werthe haben und als bekannt angesehen werden. Man setze $x+k=z$, also $k=z-x$ und

$$\frac{f(x+k)-fx}{k} = \frac{fz-fx}{z-x} = Q, \quad \text{mithin}$$

$$fz = fx + Q(z-x). \qquad a).$$

Der Quotient Q ist offenbar eine Function der beiden Größen x und z, die von einander völlig unabhängig sind, weil k ganz willkürlich ist. Es ist daher gestattet, nur eine derselben, nämlich x, als veränderlich, die andere z aber als beständig anzusehen, so daß Q eine bloße Function von x ist. Mit Hülfe der Regeln des §. 5. wird man im Stande sein, beliebige Ableitungen von Q nach x zu nehmen, d. h. dieselben durch die Ableitungen von fx auszudrücken. Um aber übersichtliche Formeln zu erhalten, und namentlich Brüche zu vermeiden, bediene man sich der Gleichung a). Da nämlich $fz-fx$ und $Q(z-x)$ zwei ganz identische Functionen sind, so müssen auch ihre Ableitungen, nach x genommen, während z als beständig gesetzt wird, identisch sein. Diese Aleitungen sind $-f'x$ und $\frac{dQ}{dx}(z-x)-Q$; mithin ist

$$-f'x = \frac{dQ}{dx}(z-x) - Q$$

oder

$$Q = f'x + \frac{dQ}{dx}(z-x). \qquad b).$$

Wird dieser Werth von Q in die Gleichung a) gesetzt, so kommt:

$$fz = fx + f'x(z-x) + \frac{dQ}{dx}(z-x)^2. \qquad c).$$

Nimmt man wieder die Ableitungen auf beiden Seiten von b), welche ebenfalls ganz identisch sein müssen, so kommt:

$$\frac{dQ}{dx} = f''x + \frac{d^2Q}{dx^2}(z-x) - \frac{dQ}{dx}, \qquad \text{oder}$$

$$2\frac{dQ}{dx} = f''x + \frac{d^2Q}{dx^2}(z-x). \qquad d).$$

Dieser Werth von $\frac{dQ}{dx}$ in c) gesetzt, giebt

$$fz = fx + f'x(z-x) + f''x\frac{(z-x)^2}{2} + \frac{d^2Q}{dx^2}\frac{(z-x)^3}{2}. \qquad e).$$

Wird von d) auf's Neue die Ableitung genommen und aus derselben $\frac{d^2Q}{dx^2}$ entwickelt, so folgt:

$$3\frac{d^2Q}{dx^2} = f'''x + \frac{d^3Q}{dx^3}(z-x), \qquad f)$$

welcher Werth in e) gesetzt, giebt

$$fz = fx + f'x\frac{(z-x)}{1} + f''x\frac{(z-x)^2}{1\cdot 2} + f'''x\frac{(z-x)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{d^3Q}{dx^3}\frac{(z-x)^4}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Man ersieht hieraus leicht, nach welcher Regel der Ausdruck für fz allgemein zu bilden ist. Wird nämlich angenommen, daß $n\frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}} = f^n x + \frac{d^nQ}{dx^n}(z-x)$ sei, so folgt daraus, indem man die folgende Ableitung nimmt:

$$(n+1)\frac{d^nQ}{dx^n} = f^{n+1}(x) + \frac{d^{n+1}Q}{dx^{n+1}}(z-x),$$

woraus die Allgemeingültigkeit der Annahme sich ergiebt. Mit Hülfe dieser Formel folgt dann weiter:

$$fz = fx + f'x\frac{(z-x)}{1!} + f''x\frac{(z-x)^2}{2!} + f'''x\frac{(z-x)^3}{3!} + \cdots$$

$$\cdots + f^n x\frac{(z-x)^n}{n!} + \frac{d^nQ}{dx^n}\frac{(z-x)^{n+1}}{n!};$$

denn wenn in dieser Formel der obige Werth von $\frac{d^nQ}{dx^n}$ gesetzt wird, so erhält man einen neuen Ausdruck für fz, der aber wieder dieselbe Form hat; mithin ist der vorstehende allgemein.

12. Die Glieder dieses Ausdruckes für fz befolgen ein leicht faßliches Gesetz, von welchem nur das letzte, der Rest der Reihe, eine Ausnahme macht. Um den Ausdruck für denselben bestimmter zu entwickeln, bilde man die Function

$$\varphi x = \left(C - \frac{d^nQ}{dx^n}\right)(z-x)^{n+1},$$

in welcher C eine beliebige beständige Größe ist. Nimmt man die Ableitung von φx, so kommt

$$\varphi' x = \left[(n+1)\frac{d^nQ}{dx^n} - (z-x)\frac{d^{n+1}Q}{dx^{n+1}} - (n+1)C\right][z-x]^n,$$

mithin, da $(n+1)\frac{d^nQ}{dx^n} = \frac{d^{n+1}Q}{dx^{n+1}}(z-x) + f^{n+1}(x)$ war,

$$\varphi' x = [f^{n+1}(x) - (n+1)C][z-x]^n.$$

Es wird angenommen, daß die sämmtlichen Ableitungen $f'x$, $f''x$, u. s. f. bis $f^{n+1}(x)$ an und zwischen den Grenzen x und $z=x+k$ nur endliche bestimmte Werthe haben. Es sei G der größte, K der kleinste Werth von $f^{n+1}(x)$, zwischen diesen Grenzen. Setzt man $(n+1)C=G$, so wird die Differenz $f^{n+1}(x)-G$ für alle zwischen den angenommenen Grenzen befindlichen Werthe von x negativ sein, und da zugleich $z-x$ für alle diese Werthe von x (indem z unverändert bleibt) sein Zeichen nicht ändert; so wird auch $\varphi' x$ beständig dasselbe Zeichen behalten. — Wird dagegen $(n+1)C=K$ gesetzt, so wird $f^{n+1}(x)-K$ fortwährend positiv sein, mithin $\varphi' x$ gleichfalls ein beständiges, dem vorigen aber entgegengesetztes Zeichen haben. Daher wird, nach dem Satze §. 10. die Function $\frac{\varphi z - \varphi x}{z-x}$ entgegengesetzte Zeichen erhalten, wenn man das eine Mal in demselben $C=\frac{G}{n+1}$, das andere Mal $C=\frac{K}{n+1}$ setzt.

Da aber $\varphi z = 0$ ist, so folgt, daß $-\frac{\varphi x}{z-x}$ unter dieser doppelten Annahme entgegengesetzte Zeichen erhält, mithin daß endlich die beiden, diesen Annahmen entsprechenden, Ausdrücke von φx,

$$\left(\frac{G}{n+1} - \frac{d^nQ}{dx^n}\right)(z-x)^{n+1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{K}{n+1} - \frac{d^nQ}{dx^n}\right)(z-x)^{n+1}$$

entgegengesetzte Zeichen haben. Daher liegt die Größe $(n+1)\frac{d^nQ}{dx^n}$ nothwendig zwischen G und K, d. h. zwischen dem größten und dem kleinsten Werthe von $f^{n+1}(x)$, der sich innerhaeb der angenommenen Grenzen befindet. Indem nun $f^{n+1}(x)$ eine stetige Function ist, so wird es zwischen x und $z=x+k$ wenigstens einen Werth x' geben, für welchen genau $(n+1)\frac{d^nQ}{dx^n} = f^{n+1}(x')$ wird, und dieser Werth sich durch $x+\Theta k$ bezeichnen lassen, wenn unter Θ eine Größe verstanden wird, die nicht außerhalb der Grenzen 0 und 1 fallen kann. Daher erhält man $(n+1)\frac{d^nQ}{dx^n} = f^{n+1}(x+\Theta k)$, und zugleich, wenn man in der obigen Reihe für fz, $x+k$ statt z und k statt $z-x$ schreibt:

$$f(x+k) = fx + kf'x + \frac{k^2}{2}f''x + \cdots + \frac{k^n}{n!}f^nx$$
$$+ \frac{k^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(x+\Theta k), \ (\Theta > 0, \leqq 1),$$

eine Reihe, welche immer gilt, wenn die sämmtlichen Ableitungen von fx, bis zur $n+1$ ten, für die Werthe x und $x+k$ und alle zwischen ihnen befindlichen, endlich und stetig sind. —

Der Ausdruck für den Rest der Reihe läßt sich noch auf eine andere Art darstellen. Man bezeichne diesen Rest, der als eine Function von x betrachtet werden kann, in so fern z unveränderlich gedacht wird, mit φx, und setze demnach:

$$fz = fx + (z-x)f'x + \frac{(z-x)^2}{2}f''x + \cdots + \frac{(z-x)^n}{n!}f^n x + \varphi x.$$

Die Function φx hat erstens die Eigenschaft, daß sie für $x = z$ verschwindet, wie offenbar zu sehen ist. Ferner wenn man von vorstehender Reihe die Ableitung nach x nimmt, dabei aber z als unveränderlich ansieht, so heben sich die Ableitungen von fx, bis auf eine, gegen einander auf, und man erhält, wie eine sehr leichte Rechnung lehrt:

$$\varphi' x + \frac{(z-x)^n}{n!} f^{n+1}(x) = 0, \qquad 1)$$

wodurch der Werth von $\varphi' x$ gegeben ist. Weiter aber hat man

$$\varphi z = \varphi(x + z - x) = \varphi x + (z-x)\varphi'(x + \lambda(z-x)),$$

wenn unter λ eine Zahl verstanden wird, die nicht außerhalb der Grenzen 0 und 1 liegen kann, eben so wie früher Θ; und da $\varphi z = 0$, so erhält man:

$$\varphi x = -(z-x)\varphi'(x + \lambda(z-x)).$$

Man schreibe jetzt zur Abkürzung y statt $x + \lambda(z-x)$, so ist

$$\varphi x = -(z-x)\varphi' y. \qquad 2).$$

Setzt man aber in der Gleichung 1) y statt x, so ergiebt sich

$$\varphi' y = -\frac{(z-y)^n}{n!} f^{n+1}(y);$$

mithin aus 2) $\quad \varphi x = +\frac{(z-x)(z-y)^n}{n!} f^{n+1}(y). \quad 3)$

Nun setze man k statt $z-x$, also $x + \lambda k$ statt y, und bemerke, daß

$$(z-x)(z-y)^n = k(z-x-\lambda k)^n = k^{n+1}(1-\lambda)^n \quad \text{ist,}$$

so folgt aus 3) $\quad \varphi x = \frac{k^{n+1}}{n!}(1-\lambda)^n f^{n+1}(x + \lambda k),$

welches der neue Ausdruck des Restes ist. Demnach hat man:

$$f(x+k) = fx + kf'x + \frac{k^2}{2!}f''x + \frac{k^3}{3!}f'''x + \cdots$$
$$\cdots + \frac{k^n}{n!}f^n x + \frac{k^{n+1}}{n!}(1-\lambda)^n f^{n+1}(x + \lambda k).$$

Wenn sich nachweisen läßt, daß einer der beiden angegebenen Restausdrücke, nämlich

$$\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(x + \Theta k) \quad \text{oder} \quad \frac{k^{n+1}}{n!}(1-\lambda)^n f^{n+1}(x + \lambda k)$$

mit wachsendem n sich der Null nähert, so kann man setzen:

$$f(x+k) = fx + kf'x + \frac{k^2}{2}f''x + \cdots + \frac{k^n}{n!}f^n x + \cdots \text{ in inf.},$$

d. h. man kann $f(x+k)$ in eine Reihe nach Potenzen von k entwickeln, und die Summe der n ersten Glieder der Reihe wird der ganzen Summe $f(x+k)$ desto genauer gleich kommen, je größer n genommen wird; oder die Reihe ist convergent. — Wenn insbesondere fx und dessen sämmtliche Ableitungen für $x = 0$ endliche Werthe behalten, welche durch $f0$, $f'0$, $f''0$, u. s. f. bezeichnet werden, so läßt fx in eine Reihe noch Potenzen von x entwickeln, indem man $x = 0$ setzt, und statt k, x schreibt, nämlich:

$$fx = f0 + xf'0 + \frac{x^2}{2}f''0 + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^n 0 + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(\Theta x).$$

Die obige unendliche Reihe für $f(x+k)$ heißt die Taylorsche. Sie bedarf im Allgemeinen der Hinzufügung des Restes, dessen Ausdruck Lagrange gefunden hat. Die hier befolgte Herleitung derselben ist von Ampère, die des zweiten Rest-Ausdruckes von Cauchy gegeben worden. Die Reihe ist für die gesammte Analysis von der größten Wichtigkeit. —

13. Es sei $fx = x^n$, so ist $f'x = nx^{n-1}$, allgemein $f^m(x) = m!\, n_m x^{n-m}$, (§. 9.); mithin erhält man nach dem Taylorschen Satze, wenn der Rest vorläufig durch R angedeutet wird, folgende Reihe, welche die binomische Reihe genannt wird:

$$(x+k)^n = x^n + n_1 x^{n-1}k + n_2 x^{n-2}k^2 + \cdots + n_m x^{n-m}k^m + R.$$

In dieser Reihe werde sofort $x = 1$, gesetzt, und statt k, x geschrieben; so bleiben die sämmtlichen Ableitungen von x^n, für $x = 1$, offenbar endliche bestimmte Größen, und es ergiebt sich:

$$(1+x)^n = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + \cdots + n_m x^m + R.$$

Der Rest kann entweder nach der ersten, oder nach der zweiten Formel ausgedrückt werden. Die erste giebt

$$R = n_{m+1}(1+\Theta x)^{n-m-1} x^{m+1},$$

die zweite $\quad R = (m+1)n_{m+1}(1-\lambda)^m(1+\lambda x)^{n-m-1} x^{m+1}$.

Man setze $\frac{(1-\lambda)x}{1+\lambda x} = u$, und $(1+\lambda x)^{n-1}x = P$, so wird der zweite Ausdruck, indem man zugleich $(n-m)n_m$ für $(m+1)n_{m+1}$ setzt:

$$R = (n-m)n_m u^m \cdot P.$$

Nun ist $u = x\left(1 - \frac{\lambda+\lambda x}{1+\lambda x}\right)$ offenbar ein ächter Bruch, so lange x ein solcher ist; und zwar liegt u immer zwischen 0 und x, welchen Werth, zwischen 0 und 1, λ auch haben mag; also ist der positive Werth des Restes nothwendig kleiner als der von $(n-m)n_m x^m \cdot P$, wenn man x^m für u^m schreibt. Man hat ferner

$(n-m)n_m x^m =$

$$n \cdot \frac{(n-1)x}{1} \cdot \frac{(n-2)x}{2} \cdots \frac{(n-\mu)x}{\mu} \cdot \frac{(n-\mu-1)x}{\mu+1} \cdots \frac{(n-m)x}{m}.$$

In diesem Producte kann μ immer so angenommen werden, daß $\frac{(n-\mu)x}{\mu} = -x\left(1-\frac{n}{\mu}\right)$, so wie alle nachfolgende Factoren des Productes ächte Brüche werden; und die letzten dieser Brüche nähern sich dem Werthe von x desto mehr, je größer m genommen wird. Es sei daher v der größte unter den $m-\mu+1$ ächten Brüchen von $\frac{(n-\mu)x}{\mu}$ bis $\frac{(n-m)x}{m}$, abgesehen von dem Zeichen derselben; so ist ihr Product, ebenfalls ohne Rücksicht auf das Zeichen, kleiner als $v^{m-\mu+1}$, und nähert sich daher noch mehr, als diese Potenz, mit wachsendem m der Null. Da nun P fortwährend, wie auch m wachse, eine endliche Größe bleibt, so nähert sich das Product $(n-m)n_m x^m \cdot P$ mit wachsendem m der Null; um so mehr nähert sich also der Rest R

der Null, oder die Reihe für $(1+x)^n$ **convergirt**, wenn sich **x innerhalb der Grenzen +1 und −1 befindet.**

Anmerkung. Wenn n ein Bruch ist, so ist $(1+x)^n$ eine mehrdeutige Größe. Die vorstehende Reihe giebt nur den einen (positiven) Werth, welcher Statt findet, in so fern $1^n = 1$ gesetzt wird. Vgl. §. 25.

14. Wird der Ausdruck $A = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ nach dem binomischen Satze entwickelt, so findet man

$$A = 1 + m \cdot \frac{1}{m} + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{1}{m}\right)^3 + \cdots + R$$

$$= 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{1}{3!} + \cdots + R.$$

Die vorstehende Reihe bricht nothwendig ab, wenn m eine positive ganze Zahl ist. Ist diese Zahl aber beträchtlich groß, so läßt sich zeigen, daß man sich dem Werthe von A beliebig annähern kann, wenn man nur eine hinreichende Anzahl (n) von Gliedern der Reihe, vom ersten an, in Rechnung bringt; welche Anzahl n viel kleiner sein darf als m. Man schreibe nämlich den weggelassenen Rest R wie folgt:

$R = \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{1}{n!} \cdot S$, wo $S =$

$$1 + \left(1-\frac{n}{m}\right)\frac{1}{n+1} + \left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{n+1}{m}\right)\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots$$

Da die Differenzen $1-\frac{1}{m}$, $1-\frac{2}{m}$, u. s. f. alle zwischen 0 und 1 liegen, so ist der vorstehende Rest offenbar kleiner, als der Werth, welchen man erhält, wenn man statt dieser Differenzen überall 1 setzt. Daher ist auch um so mehr

$$R < \frac{1}{n!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right]$$

und folglich, wenn man sich die geometrische Progression in den Klammern bis in das Unendliche fortgesetzt denkt und sie summirt, so findet man $R < \frac{1}{n!} \frac{n+1}{n}$. Wenn nun die Zahl m sehr groß gedacht wird, so kann n als beliebig klein, gegen m, angesehen werden; also nähern sich mit zunehmendem m die Brüche $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \cdots \frac{n}{m}$ der Null, und folglich A der Summe:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}.$$

Der Fehler, welcher begangen wird, wenn der Werth von A, für $m = \infty$, dieser Summe gleichgesetzt wird, ist positiv und kleiner als $\frac{1}{n!} \cdot \frac{n+1}{n}$; nähert sich also mit wachsendem n der Null. Daher erhält man, für ein unendlich großes m:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \text{ in inf.}$$

Die Reihe rechts liefert offenbar einen endlichen bestimmten Werth, der mit e bezeichnet wird; man findet leicht $e = 2{,}7182818..$

Ist m keine ganze Zahl, so schreibe man $m + \alpha$ statt m, wo α ein positiver ächter Bruch und m wieder eine ganze Zahl ist. Alsdann liegt offenbar $1 + \frac{1}{m+\alpha}$ zwischen $1 + \frac{1}{m}$ und $1 + \frac{1}{m+1}$; also $\left(1 + \frac{1}{m+\alpha}\right)^m$ zwischen $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ und

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{m+1}};$$

beide Grenzen nähern sich dem nämlichen Werthe e, mit wachsendem m; folglich nähert sich auch

$$\left(1 + \frac{1}{m+\alpha}\right)^{m+\alpha} = \left(1 + \frac{1}{m+\alpha}\right)^m \left(1 + \frac{1}{m+\alpha}\right)^\alpha$$

mit wachsendem m dem Werthe e. Also nähert sich immer A dem Werthe e, sobald m sehr groß ist.

15. Entwickelt man ferner den Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mk}$ nach dem binomischen Lehrsatze, so kommt:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mk} =$$

$$1 + k + \frac{mk \cdot mk-1}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{mk \cdot mk-1 \cdot mk-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{1}{m}\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + k + \left(k - \frac{1}{m}\right)\frac{k}{2!} + \left(k - \frac{1}{m}\right)\left(k - \frac{2}{m}\right)\frac{k}{3!} + \cdots$$

Zieht man auf beiden Seiten die Einheit ab, dividirt durch k, und setzt $k = 0$, so kommt

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mk} - 1}{k} = 1 - \frac{1}{2m} + \frac{1}{3m^2} - \frac{1}{4m^2} + \cdots$$

für $k = 0$. Je größer m wird, desto genauer erhält man auf der rechten Seite 1, auf der linken e statt $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$; also ist $\frac{e^k - 1}{k} = 1$, für $k = 0$.

Nun ist $\frac{e^{x+k} - e^x}{k} = e^x \left[\frac{e^k - 1}{k}\right] = e^x$ für $k = 0$, also ist e^x die Ableitung von e^x, oder $d(e^x) = e^x dx$. Hieraus erhält man zufolge der letzten Reihe in §. 12.:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + R.$$

Der Rest ist $\frac{e^{\Theta x} \cdot x^n}{n!}$, und nähert sich offenbar, für jedes x, mit wachsendem n der Null (vgl. die Bemerkung über den Ausdruck $\frac{x^n}{n!}$ in §. 18.); d. h. die Reihe convergirt für jeden Werth von x.

Entwickelt man den Ausdruck $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ nach dem binomischen Lehrsatze, und setzt hierauf m unendlich groß; so erhält man genau die nämliche Reihe, wie die vorstehende für e^x; daher ist $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x$, für $m = \infty$.

16. Nun sei $e^x = y$, so heißt x der Logarithmus von y, zur Grundzahl e, häufig auch der natürliche Logarithmus, welcher durch *log* bezeichnet werden soll, so daß, wenn $y = e^x$,

$x = log \cdot y$ ist. Da ferner $dy = e^x dx$, so ist auch $\frac{dy}{y} = dx = d\,log\,y$; also $d\,log\,x = \frac{dx}{x}$. Hierdurch erhält man die Ableitungen von $log\,x$ der Reihe nach $\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{x^2}$, $+\frac{2}{x^3}$, $-\frac{3!}{x^4}$, u. s. f., die nte $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$; mithin, nach dem Taylorschen Satze, wenn wieder der zweite Ausdruck des Restes benutzt wird:

$$log(x+k) = log\,x + \frac{k}{x} - \frac{k^2}{2x^2} + \frac{k^3}{3x^3} - \frac{k^4}{4x^4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(1-\lambda)^{n-1}k^n}{(x+\lambda k)^n}.$$

Wird $x = 1$, $k = x$ gesetzt, so kommt, da $log\,1 = 0$,

$$log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(1-\lambda)^{n-1}x^n}{(1+\lambda x)^n}.$$

In diesen Formeln bezeichnet λ immer einen positiven ächten Bruch (oder auch 0 oder 1); aber keinesweges denselben in beiden. Die Reihe convergirt, so lange x ein ächter Bruch ist. Es läßt sich aber daraus eine Reihe für $log\,x$ erhalten, die immer convergent gemacht werden kann. Nämlich man setze $x = y^m$, so wird $log\,x = m\,log\,y$, also

$$log\,x = m\,log(1+y-1) = m\left[y-1-\frac{(y-1)^2}{2}+\cdots\right] =$$
$$m(y-1)\left[1-\frac{y-1}{2}+\frac{(y-1)^2}{3}-\frac{(y-1)^3}{4}\cdots\right].$$

Es wird vorausgesetzt, daß x positiv ist. Nimmt man nun für m eine sehr hohe Potenz von 2, $m = 2^n$, so kann $y = x^{\frac{1}{2^n}}$ durch $n$maliges Ausziehen der Quadratwurzel aus x der Einheit, also $y-1$ der Null beliebig genähert werden, daher die vorstehende Reihe rasch convergiren muß. Denkt man sich m unendlich groß, so wird $1-\frac{y-1}{2}+\frac{(y-1)^2}{3}\cdots = 1$, indem $y-1 = 0$, und man erhält

$$log\,x = m(y-1) = m\left(x^{\frac{1}{m}}-1\right),$$

für ein unendliches m. Oben war gefunden $e^x = \left(1+\frac{x}{m}\right)^m$; wird $x = log\,y$, $y = e^x$ gesetzt, so kommt $y = \left(1+\frac{log\,y}{m}\right)^m$; übereinstimmend mit der Formel $log\,y = m\left(y^{\frac{1}{m}}-1\right)$ die so eben gefunden worden ist. Man hat also für e^x und $log\,x$ die beiden merkwürdigen Ausdrücke: $e^x = \left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ und $log\,x = m\left(x^{\frac{1}{m}}-1\right)$, für $m = \infty$, welche eine Vergleichung dieser Functionen mit den algebraischen Functionen gewähren, indem sich, ihnen gemäß, e^x als eine Potenz von unendlich großem, $log\,x$ als eine Potenz von unendlich kleinem Exponenten betrachten läßt.

Sehr brauchbare Reihen zur Berechnung der natürlichen Logarithmen erhält man auf folgende Weise. In der Reihe $log\,(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$ schreibe man $-x$ statt x, so kommt $log\,(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \cdots$; mithin durch Subtraction:

$$log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{1}{7}x^7+\tfrac{1}{9}x^9\cdots\right].$$

Man setze $\frac{1+x}{1-x} = \frac{z+k}{z}$, so wird $x = \frac{k}{2z+k}$ und

$$log\left(\frac{z+k}{z}\right) = 2\left[\frac{k}{2z+k}+\frac{1}{3}\left(\frac{k}{2z+k}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{k}{2z+k}\right)^5+\cdots\right],$$

oder:

$$log(z+k) = log\,z + 2\left[\frac{k}{2z+k}+\frac{1}{3}\left(\frac{k}{2z+k}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{k}{2z+k}\right)^5+\cdots\right].$$

Wird in dieser Reihe $z = 1$, $k = 1$ gesetzt, so kommt

$$log\,2 = 2\left[\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3})^3+\tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3})^5+\cdots\right];$$

für $z = 2$, $k = 1$, kommt

$$log\,3 = log\,2 + 2\left[\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{5})^3+\tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{5})^5+\tfrac{1}{7}(\tfrac{1}{5})^7+\cdots\right];$$

für $z=4, \quad k=1,$

$$log\ 5 = 2\ log\ 2 + 2[\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{9})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{9})^5 + \tfrac{1}{7}(\tfrac{1}{9})^7 + \cdots].$$

Um von den natürlichen Logarithmen zu den gewöhnlichen, deren Grundzahl 10 ist, überzugehen, berechne man

$$log\,nat\ 10 = log\,nat\ 2 + log\,nat\ 5 = 2{,}302585093\cdots$$

Man setze ferner $M = \frac{1}{log\,nat\ 10} = 0{,}43429448\cdots$, so ist allgemein $log\,vulg\ x = M \cdot log\,nat\ x$. — Soll endlich die Function a^x differentiirt werden, in welcher a verschieden von e, aber positiv ist, so setze man $e^b = a$, also $b = log\ a$; dadurch wird $a^x = e^{bx}$, und $d(a^x) = d(e^{bx}) = e^{bx} b dx = a^x log\ a \cdot dx$. —

17. Um die Ableitungen der trigonometrischen Functionen *sin* x und *cos* x zu finden, könnte man sich zwar der aus der Trigonometrie bekannten Eigenschaften derselben bedienen; da aber hierdurch die Untersuchung zum Theil auf geometrische Betrachtungen gegründet werden würde, so ist vorzuziehen, von den trigonometrischen Functionen rein analytische Definitionen zu geben, nachher aber deren Uebereinstimmung mit den bekannten Constructionen nachzuweisen. Dieses Verfahren wird auch als Beispiel der Untersuchung des Ganges einer Function dienen können. — In der Reihe für e^x (§. 15.) schreibe man xi statt x, wo i die positive imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ bedeutet. Die auf diese Weise entstehende Reihe wird sich, nach der Analogie, durch e^{xi} bezeichnen lassen, so daß die Reihe als die Definition des Zeichens e^{xi} anzusehen ist. Man hat also:

$$e^{xi} = 1 + xi + \frac{(xi)^2}{2} + \frac{(xi)^3}{3!} + \frac{(xi)^4}{4!} + \cdots \text{ in inf.},$$

oder, weil $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$, u. s. f.

$$e^{xi} = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!} + \cdots \text{ in inf.} \\ +i\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots \text{ in inf.}\right]. \end{cases}$$

Diese Reihe zerfällt, wie man sieht, in zwei Theile, deren erster der Cosinus, der zweite, mit Weglassung des Factors i, der Sinus von x genannt werden soll. Demnach ist:

$$cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \cdots \text{ in inf.}$$

$$sin\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdots \text{ in inf.},$$

und

$$cos\ x + i\ sin\ x = e^{xi}.$$

Um in der Folge mit imaginären Exponenten rechnen zu können, seine x und y zwei beliebige reelle oder imaginäre Größen, und, nach der Definition,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + \cdots + \frac{y^n}{n!} + \cdots$$

Multiplicirt man diese beiden Reihen in einander, so kommt:

$$e^x \cdot e^y = 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x+y)^n}{n!} + \cdots$$

Nämlich das allgemeine (nte) Glied des Productes ergiebt sich durch die Multiplication gleich

$$\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}y}{(n-1)!\,1} + \frac{x^{n-2}y^2}{(n-2)!\,2!} + \cdots + \frac{x^{n-m}y^m}{(n-m)!\,m!} + \frac{y^n}{n!} =$$

$$\frac{1}{n!}\left[x^n + nx^{n-1}y + \cdots + \frac{n!}{(n-m)!\,m!}x^{n-m}y^m + \cdots + y^n\right]$$

$$= \frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

Da die Reihe, welche das Product $e^x \cdot e^y$ angiebt, offenbar nichts Anderes ist, als e^{x+y}; so folgt daß $e^x \cdot e^y = e^{(x+y)}$, welche Regel der Multiplication also auch dann gilt, wenn die Exponenten x und y imaginäre Größen sind. — Hieraus ergiebt sich dann weiter, wenn h eine reelle Größe bezeichnet, $(e^x)^h = e^{hx}$, x mag reell oder imaginär sein.

18. Es soll zuerst bewiesen werden, daß die obigen Reihen für *sin* x und *cos* x wirklich für jeden endlichen Werth von x einen bestimmten Werth haben, gegen den sie convergiren. Zu dem Ende bemerke man überhaupt folgenden Satz: Wenn die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ sämmtlich positiv sind und jede folgende kleiner als die vorhergehende, a_n aber mit wachsendem n sich der Null nähert, so convergirt die Reihe

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots - (-1)^n a_n \cdots \text{ in inf.};$$

oder, mit anderen Worten, jede Reihe, welche abnehmende, der Null sich nähernde Glieder mit abwechselnden Zeichen hat, convergirt. — Denn es sei R der Rest der Reihe, so erhält man, wenn n ungerade,

$$R = (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \cdots;$$

wofür man auch schreiben kann:

$$R = a_n - (a_{n+1} - a_{n+2}) - (a_{n+3} - a_{n+4}) - \cdots$$

In diesen beiden Ausdrücken für R sind die in Klammern eingeschlossenen Differenzen sämmtlich positiv; daher folgt aus dem ersten, daß R positiv und aus dem zweiten, daß R kleiner ist als a_n. Da nun a_n mit wachsendem n sich der Null nähert, so nähert auch der Rest R sich der Null, d. h. die Reihe convergirt.

Es sei ferner x eine beliebige reelle Zahl, deren positiver Werth zwischen den ganzen Zahlen u und u+1 liege; zugleich sei n eine ganze positive Zahl und größer als u+1, so ist

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdots \frac{x}{u} \cdot \frac{x}{u+1} \cdot \frac{x}{u+2} \cdots \frac{x}{n}.$$

Die Factoren dieses Ausdruckes sind, von $\frac{x}{u+1}$ an, offenbar ächte abnehmende Brüche, deren Product desto näher an Null kommt, je größer n genommen wird; folglich nähert sich $\frac{x^n}{n!}$ mit wachsendem n der Null, wie groß auch x sei. —

Nimmt man von den Reihen für *sin* x und *cos* x eine gewisse Anzahl von Gliedern, vom ersten an, so lassen sich die Reste von beiden darstellen durch die Formel

$$R = \pm \left[\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{x^{n+4}}{(n+4)!} - \frac{x^{n+6}}{(n+6)!} + \cdots \text{ in inf.}\right],$$

in welcher n für *cosinus* gerade, für den *sinus* ungerade ist. Diese Reihe hat immer abwechselnde Zeichen, x mag positiv oder negativ sein, und, wenn n groß genug genommen wird, auch abnehmende Glieder; sie convergirt mithin, und zwar nähert sich, nach dem Vorhergehenden, ihre Summe R mit wachsendem n der Null, was zu beweisen war.

19. Schreibt man in den Reihen für *sin* x und *cos* x, —x statt x, so ergiebt sich

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x;$$

und da $\cos x + i \sin x = e^{xi}$ war, so folgt $\cos x - i \sin x = e^{-xi}$. Nimmt man von diesen beiden Gleichungen das Product, so kommt

$$\cos x^2 + \sin x^2 = 1.$$

Hieraus ist zu schließen, daß die Werthe von *cos* x und *sin* x für keinen reellen Werth von x die Grenzen +1 und —1 überschreiten können. — Multiplicirt man ferner die Gleichungen:

$$\cos x + i \sin x = e^{xi}$$
$$\cos y + i \sin y = e^{yi}$$

mit einander, so folgt

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y)$$
$$= e^{(x+y)i} = \cos(x+y) + i \sin(x+y);$$

welche Gleichung, da x und y, mithin auch die darin vorkommenden *sinus* und *cosinus*, sämmtlich reell sind, nur dadurch bestehen kann, daß

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Denkt man sich in diesen Formeln y als eine beliebig kleine Zunahme von x, so ersieht man aus den Reihen, daß, je kleiner y wird, desto näher $\cos y = 1$, $\sin y = y$ wird; mithin

$cos(x+y)=cos\,x-y\,sin\,x$, und $sin(x+y)=sin\,x+y\,cos\,x$, welche Ausdrücke nur dazu dienen sollen, um das stetige Zunehmen der Functionen $sin\,x$ und $cos\,x$ augenscheinlich zu machen. — Für $y=0$ wird offenbar

$$\frac{cos(x+y)-cos\,x}{y}=-sin\,x,\quad \frac{sin(x+y)-sin\,x}{y}=+cos\,x;$$

also sind $-sin\,x$ und $cos\,x$ die Ableitungen von $cos\,x$ und $sin\,x$, d. h.

$$d(cos\,x)=-sin\,x\cdot dx;\quad d(sin\,x)=+cos\,x\cdot dx.$$

Hieraus folgt auch noch

$$d(e^{xi})=d(cos\,x+i\,sin\,x)=(-sin\,x+i\,cos\,x)dx$$
$$=(i\,cos\,x+i^2\,sin\,x)dx,$$

oder:

$d(e^{xi})=i(cos\,x+i\,sin\,x)dx=ie^{xi}\cdot dx$; also $d(e^{xi})=e^{xi}\cdot idx$, wodurch die Regel der Differentiation der Exponentialgröße e^x auch auf imaginäre Exponenten ausgedehnt wird. Aus dem Taylorschen Satze ergeben sich, mit Hülfe der höheren Ableitungen von $sin\,x$ und $cos\,x$, die folgenden für jeden Werth von x und k convergirenden Reihen:

$$sin(x+k)=sin\,x+k\,cos\,x-\frac{k^2}{2}sin\,x-\frac{k^3}{3!}cos\,x+\frac{k^4}{4!}sin\,x$$
$$+\frac{k^5}{5!}cos\,x-\frac{k^6}{6!}sin\,x-\frac{k^7}{7!}cos\,x+\cdots+\frac{k^{4n}}{4n!}sin(x+\Theta k),$$

$$cos(x+k)=cos\,x-k\,sin\,x-\frac{k^2}{2}cos\,x+\frac{k^3}{3!}sin\,x+\frac{k^4}{4!}cos\,x$$
$$-\frac{k^5}{5!}sin\,x-\frac{k^6}{6!}cos\,x+\frac{k^7}{7!}sin\,x+\cdots+\frac{k^{4n}}{4n!}cos(x+\Theta k),$$

wenn man bei der 4nten Potenz von k stehen bleibt. — Ferner ist zu erwähnen, daß

$$cos\,x=\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2},\quad sin\,x=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}$$

wie aus den Formeln $cos\,x+i\,sin\,x=e^{xi}$, $cos\,x-i\,sin\,x=e^{-xi}$ sofort folgt. — Aus denselben Formeln ergiebt sich auch, wenn n eine ganze Zahl ist,

$$(cos\,x+i\,sin\,x)^n=(e^{xi})^n=e^{nxi}=cos\,nx+i\,sin\,nx,$$

also $(cos\,x+i\,sin\,x)^n=cos\,nx+i\,sin\,nx$,

und eben so $(cos\,x-i\,sin\,x)^n=cos\,nx-i\,sin\,nx$.

Nennt man die Quotienten $\frac{sin\,x}{cos\,x}$ die Tangente, und $\frac{cos\,x}{sin\,x}$ die Contangente von x; so daß

$$tg\,x=\frac{sin\,x}{cos\,x},\quad cotg\,x=\frac{cos\,x}{sin\,x};$$

so giebt die Differentiation, nach der Regel §. 5. c.

$$d\,tg\,x=\frac{cos\,x\,d\,sin\,x-sin\,x\,d\,cos\,x}{cos\,x^2}=\frac{cos\,x^2+sin\,x^2}{cos\,x^2}dx,$$

mithin $d\,tg\,x=\frac{dx}{cos\,x^2}$ und eben so $d\,cotg\,x=-\frac{dx}{sin\,x^2}$.

20. Giebt man in den Reihen $cos\,x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$ und $sin\,x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots$ der Zahl x beliebige Werthe zwischen 0 und 1; so sieht man leicht, daß sowohl $cos\,x$ als $sin\,x$ positive ächte Brüche werden. Für $x=0$ wird $cos\,x=1$, $sin\,x=0$; für $x=1$ erhält man

$$cos\,1=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}\cdots,\quad sin\,1=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{9!}\cdots,$$

woraus zu ersehen ist, daß auch $cos\,1$ und $sin\,1$ positive ächte Brüche sind. Ferner erhält man durch Subtraction:

$$sin\,1-cos\,1=\frac{7}{24}+\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}\right)+\left(\frac{1}{6!}-\frac{1}{8!}\right)+\left(\frac{1}{9!}-\frac{1}{11!}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{10!}-\frac{1}{12!}\right)+\cdots \text{in inf.};$$

daher ist die Differenz $sin\,1-cos\,1$ positiv, also $sin\,1$ größer als $cos\,1$.

Nun ist die Ableitung von $\sin x$, $\frac{d\sin x}{dx}=\cos x$, zwischen den Grenzen 0 und 1 von x beständig positiv; daher wächst $\sin x$ ununterbrochen von 0 bis $\sin 1$, indem x von 0 bis 1 wächst. Dagegen ist die Ableitung von $\cos x$, $\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$, so lange $\sin x$ positiv bleibt, beständig negativ; mithin nimmt $\cos x$ von 1 bis $\cos 1$ ununterbrochen ab, indem x von 0 bis 1 wächst. Da ferner, wie bewiesen, $\sin 1>\cos 1$ ist, so folgt, daß es zwischen 0 und 1 einen, und nur *einen* Werth von x geben muß, für welchen genau $\sin x=\cos x$ ist. Man bezeichne diesen Werth mit $\frac{1}{4}\pi$, so ist $\cos\frac{1}{4}\pi=\sin\frac{1}{4}\pi$, und weil allgemein $\cos x^2+\sin x^2=1$, so ist $\cos\frac{1}{4}\pi=\sin\frac{1}{4}\pi=+\frac{1}{2}\sqrt{2}$, indem beide nothwendig positiv sind. — Aus den allgemeinen Ausdrücken für $\cos(x+y)$, $\sin(x+y)$ ergiebt sich, wenn $y=x$ gesetzt wird,

$$\cos 2x=\cos x^2-\sin x^2,\quad \sin 2x=2\sin x\cos x.$$

Daher findet man $\cos\frac{1}{2}\pi=0$, $\sin\frac{1}{2}\pi=1$; weiter $\cos\pi=-1$, $\sin\pi=0$; $\cos 2\pi=1$, $\sin 2\pi=0$. Vermöge dieser Werthe wird $\cos(\frac{1}{2}\pi+x)=-\sin x$, $\sin(\frac{1}{2}\pi+x)=\cos x$; $\cos(\pi+x)=-\cos x$, $\sin(\pi+x)=-\sin x$; $\cos(2\pi+x)=\cos x$, $\sin(2\pi+x)=\sin x$.

Daher sind $\sin x$ und $\cos x$ *periodische* Functionen; die Periode ist $=2\pi$; und wenn m eine beliebige ganze pos. oder neg. Zahl, so ist

$$\cos(2m\pi+x)=\cos x,\ \sin(2m\pi+x)=\sin x\ ^{*}).$$

*) Wenn x unendlich groß gedacht wird, so hört $\sin x$ auf einen bestimmten Werth zu haben, und kann dann jeder beliebigen Zahl zwischen -1 und $+1$ gleich sein. Eben so $\cos x$. Denn beide Functionen hängen eigentlich nur von dem Reste ab, welchen x durch 2π dividirt, läßt, d. h. wenn $x=2n\pi+\alpha$, ($\alpha>0$ und $<2\pi$), von α. Dieser Rest α wird aber offenbar gänzlich unbestimmt, sobald x unendlich groß ist. — Daher ist auch der Werth von $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x=0$, $\sin\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$ für $x=a$, *unbestimmt*.

Man findet ferner $\cos(\frac{1}{4}\pi+x)=(\cos x-\sin x)\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin(\frac{1}{4}\pi+x)=(\cos x+\sin x)\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Indem nun x von 0 bis $\frac{1}{4}\pi$ wächst, nimmt $\cos x$ von 1 bis $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ beständig ab, $\sin x$ von 0 bis $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ beständig zu; dabei bleibt die Differenz $\cos x-\sin x$ immer positiv; folglich bleiben sowohl $\cos(\frac{1}{4}\pi+x)$ als auch $\sin(\frac{1}{4}\pi+x)$, indem x von 0 bis $\frac{1}{4}\pi$, also $\frac{1}{4}\pi+x$ von $\frac{1}{4}\pi$ bis $\frac{1}{2}\pi$ wächst, beständig positiv, bis für $\frac{1}{2}\pi$ der *cosinus* $=0$ und der *sinus* $=1$ wird. Daher bleibt die Ableitung von $\sin x$, d. i. $\cos x$, beständig positiv, und die von $\cos x$, d. i. $-\sin x$, beständig negativ, so lange x sich zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ befindet; und mithin wächst $\sin x$ ununterbrochen von 0 bis 1, nimmt dagegen $\cos x$ ununterbrochen von 1 bis 0 ab, während x von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ wächst. Da ferner $\cos(\frac{1}{2}\pi+x)=-\sin x$, $\sin(\frac{1}{2}\pi+x)=\cos x$; so nimmt $\cos x$ von 0 bis -1, $\sin x$ von 1 bis 0 ab, indem x von $\frac{1}{2}\pi$ bis π wächst. Folglich nimmt $\cos x$ von 1 bis -1 ununterbrochen ab, indem x von 0 bis π wächst. Dagegen nimmt $\sin x$ von -1 bis $+1$ ununterbrochen zu, indem x von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ wächst.

Anmerkung. Aus den Formeln der §§. 19. 20. lassen sich die übrigen trigonometrischen Formeln leicht finden, wie z. B.

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi-x)=\sin x,\quad \sin(\tfrac{1}{2}\pi-x)=\cos x;$$

$$tg(x+y)=\frac{tg\,x+tg\,y}{1-tg\,x\,tg\,y},\ \text{u. s. f.},$$

die als bekannt vorausgesetzt werden, wenn ihrer auch hier nicht ausdrückliche Erwähnung geschehen ist. —

21. Indem x von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ wächst, so durchläuft die Function $\sin x$ beständig wachsend alle Werthe von -1 bis $+1$. Wenn folglich z eine beliebige Zahl zwischen -1 und $+1$ ist, so giebt es zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ eine, und immer nur *eine* Zahl x, welche so beschaffen ist, daß $\sin x=z$. Diese Zahl x heiße *arcus* (*sinus* $=z$) oder kürzer *arc sin* z.

Wenn ferner x von 0 bis π wächst, so nimmt $\cos x$ von 1 bis -1 ununterbrochen ab; bezeichnet also z eine beliebige Zahl zwischen -1 und $+1$, so giebt es immer einen einzigen Werth von

x, zwischen 0 und π, für welchen $\cos x = z$. Dieser Werth von x heiße *arcus* (*cosinus* $= z$) oder $arc\ cos\ z$.

Wenn x von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ wächst, so durchläuft die Function $tg\ x$, indem sie fortwährend stetig bleibt, alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, und zwar beständig wachsend, weil die Ableitung $\frac{d\,tg\,x}{dx} = \frac{1}{\cos x^2}$ beständig positiv ist. Bezeichnet folglich z eine beliebige Zahl, so giebt es zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ eine einzige Zahl x, für welche $tg \cdot x = z$ wird. Diese Zahl x heiße *arcus* (*tangens* $= z$) oder $arc\ tg\ z$. Endlich wenn x von 0 bis π wächst, so durchläuft $cotg\ x$, überall stetig bleibend, alle Werthe von $+\infty$ bis $-\infty$, und zwar beständig abnehmend, weil die Ableitung $\frac{d\,cotg\,x}{dx} = -\frac{1}{\sin\ x^2}$ negativ ist. Ist folglich z eine beliebige Zahl, so giebt es zwischen 0 und π eine einzige Zahl x, für welche $cotg\ x = z$. Diese Zahl heiße *arcus* (*cotangens* $= z$) oder $arc\ cotg\ z$.

Wenn nun erstens $z = \sin x$, $dz = \cos x \cdot dx$; dabei x zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$; so ist $\cos x = +\sqrt{1-z^2}$, mithin $dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, also, da $x = arc\ sin\ z$,

$$d(arc\ sin\,z) = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Wenn zweitens $z = \cos x$, $dz = -\sin x\,dx$, x zwischen 0 und π; so ist $\sin x = +\sqrt{1-z^2}$, also $dx = \frac{-dz}{\sqrt{1-z^2}}$; d. h. $d(arc\ cos\,z) = -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$.

Drittens wenn $z = tg\,x$, $dz = \frac{dx}{\cos\ x^2}$, $\cos\ x^2 = \frac{1}{1+z^2}$; so folgt $dx = d(arc\ tg\,z) = \frac{dz}{1+z^2}$.

Viertens wenn $z = cotg\,x$, $dz = -\frac{dx}{\sin x^2}$; so folgt

$$dx = d(arc\ cotg\,z) = -\frac{dz}{1+z^2}.$$

Es sei α eine gegebene Zahl zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$; man verlangt alle Werthe von x, die der Gleichung $\sin x = \sin \alpha$ genügen. — Stellt x irgend einen dieser Werthe vor, so sei $n\pi$ das ihm am nächsten kommende Vielfache von π, also $x = n\pi + \beta$, β zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$. Alsdann ist $\sin(n\pi+\beta) = \cos n\pi \cdot \sin \beta = \sin \alpha$. Ist folglich n gerade, so wird $\cos n\pi = 1$, mithin $\sin\beta = \sin\alpha$, also $\beta = \alpha$. Ist aber n ungerade, $\cos n\pi = -1$, so wird $-\sin\beta = \sin(-\beta) = \sin\alpha$, also $-\beta = \alpha$, $\beta = -\alpha$. Daher sind alle möglichen Werthe von x in den Formeln $x = 2n\pi + \alpha$ und $x = (2n+1)\pi - \alpha$ enthalten, in welchen n eine beliebige ganze Zahl ist. —

Es sei α eine beliebige Zahl zwischen 0 und π; man verlangt die sämmtlichen Auflösungen der Gleichung $\cos x = \cos\alpha$. Man setze $x = 2n\pi \pm \beta$, β zwischen 0 und π gedacht; so wird $\cos x = \cos(2n\pi \pm \beta) = \cos(\pm\beta) = \cos\beta = \cos\alpha$ sein müssen, mithin $\beta = \alpha$. Folglich sind alle Werthe von x in der Formel $x = 2n\pi \pm \alpha$ enthalten.

Es sei α eine beliebige Zahl zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$; man verlangt alle Auflösungen der Gleichung $tg\,x = tg\,\alpha$. Man setze $x = n\pi + \beta$, β zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$; so wird $tg\,x = tg(n\pi+\beta) = tg\,\beta = tg\,\alpha$; folglich $\beta = \alpha$. Daher ist $x = n\pi + \alpha$.

Es sei α eine beliebige Zahl zwischen 0 und π; man verlangt x aus der Gleichung $cotg\,x = cotg\,\alpha$. Man setze $x = n\pi + \beta$, β zwischen 0 und π, so ist $cotg\,x = cotg(n\pi+\beta) = cotg\,\beta = cotg\,\alpha$; daher $\beta = \alpha$, und $x = n\pi + \alpha$.

22. Es ist noch übrig, den Werth von π zu finden. Zu dem Ende soll jetzt die Function $arc\ tg\,x$ in eine Reihe entwickelt werden.

Es sei $z = arc\,tg\,x$, so ist $dz = \frac{dx}{1+x^2}$. Nun ist x^2+1 das Product der beiden Factoren $x+i$ und $x-i$; $(i=\sqrt{-1})$; daher findet sich:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = \left[\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right]\frac{1}{2i}.$$

Nimmt man die Ableitungen von $\frac{dz}{dx}$, so ergiebt sich leicht:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{2i}\left[-\frac{1}{(x-i)^2}+\frac{1}{(x+i)^2}\right] = -\frac{1}{2i}\left[\frac{(x+i)^2-(x-i)^2}{(1+x^2)^2}\right];$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{2}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^3}-\frac{1}{(x+i)^3}\right] = +\frac{1\cdot 2}{2i}\left[\frac{(x+i)^3-(x-i)^3}{(1+x^2)^3}\right];$$

und so fort; allgemein:

$$\frac{d^nz}{dx^n} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{2i}\left[\frac{(x+i)^n-(x-i)^n}{(1+x^2)^n}\right].$$

Nun setze man $x=\sqrt{1+x^2}\cdot\cos\varphi$, $1=\sqrt{1+x^2}\cdot\sin\varphi$, (die Größe $\sqrt{1+x^2}$ immer positiv genommen); so wird

$$x+i = \sqrt{1+x^2}(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

also $(x+i)^n = (\sqrt{1+x^2})^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, (§. 19.);

desgleichen $(x-i)^n = (\sqrt{1+x^2})^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$;

folglich $(x+i)^n-(x-i)^n = 2i(\sqrt{1+x^2})^n\sin n\varphi$.

Da ferner $\frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^n} = (\sin\varphi)^n$, so erhält man

$$\frac{d^nz}{dx^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\;\sin n\varphi\cdot\sin\varphi^n.$$

Hieraus ergiebt sich

$$z' = arc\,tg\,(x+k) = z + \frac{dz}{dx}\cdot k + \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{k}{2} + \cdots + R =$$

$$z + \sin\varphi^2\cdot k - \sin 2\varphi\,\sin\varphi^2\cdot\frac{k^2}{2} + \sin 3\varphi\,\sin\varphi^3\cdot\frac{k^3}{3}$$

$$-\sin 4\varphi\,\sin\varphi^4\cdot\frac{k^4}{4}\cdots+(-1)^{n-1}\sin n\varphi\,\sin\varphi^n\cdot\frac{k^n}{n}$$

$$+(-1)^n\sin(n+1)\varphi'\,\sin\varphi'^{n+1}\cdot\frac{k^{n+1}}{n+1}.$$

Das letzte Glied stellt den Rest der Reihe dar, in welchem statt x, $x+\Theta k$, und mithin statt φ eine andere Zahl gesetzt werden muß, die blos durch φ' bezeichnet ist.

Wird insbesondere $x=0$ gesetzt, so ist auch $z=arc\,tg\,0=0$, und $\sin\varphi=1$, $\cos\varphi=0$, also $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, $\sin 2\varphi=0$, $\sin 3\varphi=-1$, $\sin 4\varphi=0$, allgemein $\sin 2n\varphi=0$, $\sin(2n+1)\varphi=(-1)^n$; folglich, wenn man $x=0$ setzt, und für k, x schreibt:

$$z = arc\,tg\,x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

$$+(-1)^n\sin(n+1)\varphi'\cdot(\sin\varphi')^{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

wo der Werth von φ' so bestimmt ist, daß

$$\Theta x=\sqrt{1+\Theta^2x^2}\cdot\cos\varphi',\quad 1=\sqrt{1+\Theta^2x^2}\cdot\sin\varphi',$$

Θ ein positiver ächter Bruch. —

Vorstehende Reihe convergirt immer, wenn x ein ächter Bruch ist; wird $x=1$ gesetzt, so nähert sich zwar der Rest, der sich zwischen den Grenzen $\pm\frac{1}{n}$ befinden muß, ebenfalls der Null; die Convergenz ist jedoch eine sehr langsame. Man erhält indessen in diesem Falle, da für $x=1$, $arc\,tg\,1=z=\frac{1}{4}\pi$ wird,

$$\frac{1}{4}\pi=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\cdots \text{ in inf.}$$

Um rascher convergirende Reihen zu erhalten, muß man auf die Eigenschaften der Functionen $tg\,x$ und $arc\,tg\,x$ zurückgehen. Es seien u und v zwei *arcus*, jeder zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten, und ihre Summe $u+v$ werde $=n\pi+w$ gesetzt, wo w ebenfalls zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen soll, so daß n entweder $+1$, oder 0, oder -1 ist; so hat man

$$tg(n\pi+w)=tg\,w=tg(u+v)=\frac{tg\,u+tg\,v}{1-tg\,u\,tg\,v}.$$

Wenn also $arc\,tg\,x+arc\,tg\,y=n\pi+arc\,tg\,z$ ist,

so folgt $$z=\frac{x+y}{1-xy}.$$

Ebenfalls wenn $arc\,tg\,x-arc\,tg\,y=n\pi+arc\,tg\,z$ ist,

so folgt $$z=\frac{x-y}{1+xy}.$$

Nun berechne man mit Hülfe der obigen Reihe den Werth von $arc\,tg\,x$ z. B. für $x=\frac{1}{2}$; derselbe sei A. Also $tg\,A=\frac{1}{2}$, $tg\,2A=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$. Da ferner $tg\,\frac{1}{4}\pi=1$, so setze man $2A-\frac{1}{4}\pi=B$, und es ergiebt sich $tg\,B=\frac{1}{7}$. Man berechne daher $B=arc\,tg\,\frac{1}{7}$ aus der Reihe, und erhält dann $\frac{1}{4}\pi=2A-B$, oder:

$$\frac{1}{4}\pi=2[\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2})^3+\tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{2})^5-\tfrac{1}{7}(\tfrac{1}{2})^7+\cdots]$$
$$-[\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{7})^3+\tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{7})^5-\tfrac{1}{7}(\tfrac{1}{7})^7+\cdots].$$

Auf demselben Wege kann man noch schneller convergirende Reihen erhalten. Man berechne z. B. $A=arc\,tg\,\frac{1}{5}$, so wird $tg\,A=\frac{1}{5}$, $tg\,2A=\frac{5}{12}$, $tg\,4A=\frac{120}{119}$. Es sei $B=4A-\frac{1}{4}\pi$, so folgt $tg\,B=\frac{1}{239}$, woraus $B=arc\,tg(\frac{1}{239})$ sich berechnen läßt. Mithin findet sich

$$4A-B=\frac{1}{4}\pi=4[\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{5})^3+\tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{5})^5-\tfrac{1}{7}(\tfrac{1}{5})^7\cdots]$$
$$-[\tfrac{1}{239}-\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{239})^3+\tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{239})^5\cdots].$$

Hieraus erhält man den gesuchten Werth von

$$\pi=3{,}1415926535\ \cdots$$

Anm. Die Gleichungen $sin(x+y)=sin\,x\,cos\,y+cos\,x\,sin\,y$ und $cos(x+y)=cos\,x\,cos\,y-sin\,x\,sin\,y$ gelten bekanntlich von den in der Trigonometrie vorkommenden *sinus* und *cosinus*, unabhängig von der angenommenen Winkeleinheit, also eben so wohl, wenn der Winkel x z. B. in Graden, als wenn er durch das Längenverhältniß seines Kreisbogens zum Halb-

messer ausgedrückt wird. Man erhält aus ihnen

$$\frac{sin(x+k)-sin\,x}{k}=cos\,x\cdot\frac{sin\,k}{k}-sin\,x\cdot\frac{1-cos\,k}{k}$$
$$=cos\,x\cdot\frac{sin\,k}{k}-sin\,x\cdot\frac{sin\,\frac{1}{2}k}{\frac{1}{2}k}\cdot sin\,\tfrac{1}{2}k,$$

weil $1-cos\,k=2(sin\,\frac{1}{2}k)^2$ ist. Wenn nun x und k Bogenlängen, für den Halbmesser $=1$, bezeichnen, so wird $\frac{sin\,k}{k}=1$, für $k=0$, weil das Verhältniß des Bogens zur Sehne sich desto mehr der Einheit nähert, je kleiner der Bogen genommen wird. Unter dieser Voraussetzung ergiebt sich $cos\,x$ als die Ableitung von $sin\,x$, indem man in dem obigen Ausdrucke für $\frac{sin(x+k)-sin\,x}{k}$, $k=0$ setzt. Auf dieselbe Art folgt auch, daß $-sin\,x$ die Ableitung von $cos\,x$ ist; und hieraus wird man, wie in §. 19. am Schlusse, die Reihen für $sin(x+k)$ und $cos(x+k)$ mit Hülfe des Taylorschen Satzes finden. Setzt man ferner in diesen Reihen $x=0$ und schreibt x statt k, so erhält mau genau diejenigen Reihen für die trigonometrischen *sinus* und *cosinus*, von denen die obige analytische Untersuchung ausging. Folglich stimmen diese Reihen mit den trigonometrischen Functionen $sin\,x$ und $cos\,x$ unter der Voraussetzung vollständig zusammen, daß bei den letzteren der Winkel x nicht z. B. in Graden, sondern durch das Längenverhältniß seines Bogens zum Halbmesser gemessen werde.

§. 23. Es soll jetzt, als Beispiel zur Uebung im Differentiiren, das Differential der Function

$$fx=[log(1+x^2)]^{arc\,sin\,x}\cdot\left(arc\,tg\,\frac{1}{x}\right)^n$$

gesucht werden. (*log* bedeutet den natürlichen Logarithmus, zur Grundzahl e.) Dieselbe besteht aus zwei Factoren, deren jeder besonders zu behandeln ist. Man setze also

$$\varphi=[\log(1+x^2)]^{\arcsin x} \quad \text{und} \quad \psi=\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)^n.$$

Um $d\varphi$ zu finden, werde $\log(1+x^2)=e^u$, also $\varphi=e^{u \arcsin x}$ gesetzt, so wird

$$d\varphi=e^{u\arcsin x}d(u\arcsin x)=\varphi[\arcsin x\cdot du+u\,d(\arcsin x)].$$

Es ist aber $u=\log\cdot\log(1+x^2)$,

$$du=\frac{d\log(1+x^2)}{\log(1+x^2)}=\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)\log(1+x^2)}=\frac{2x\,dx}{(1+x^2)\log(1+x^2)};$$

$d(\arcsin x)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; mithin

$$d\varphi=\varphi\left[\frac{2x\cdot\arcsin x}{(1+x^2)\log(1+x^2)}+\frac{\log\cdot\log(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right]dx.$$

Ferner $d\psi=n\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)^{n-1}d\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$, und

$$d\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)=\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=-\frac{dx}{1+x^2};$$

mithin $d\psi=-n\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)^{n-1}\dfrac{dx}{1+x^2}$. — Das gesammte Differential von $fx=\varphi\cdot\psi$ ist aber $dfx=\psi d\varphi+\varphi d\psi$; also erhält man:

$$dfx=[\log(1+x^2)]^{\arcsin x}\cdot\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)^{n-1}$$
$$\left[\left(\frac{2x\arcsin x}{(1+x^2)\log(1+x^2)}+\frac{\log\cdot\log(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}-\frac{n}{1+x^2}\right]dx.$$

Einige Zusätze zur Theorie der trigonometrischen Functionen.

24. Eine beliebige Potenz von $\cos x$ oder $\sin x$ läßt sich immer in eine Reihe entwickeln, welche nach den Cosinus oder Sinus der Vielfachen von x fortgeht. Der Raum gestattet jedoch nicht,

diese Entwickelung hier in voller Allgemeinheit zu geben, sondern nöthigt, dieselbe auf positive ganze Exponenten zu beschränken. Es sei demnach m eine positive ganze Zahl; man setze

$$\cos x+i\sin x=u,\quad \cos x-i\sin x=\frac{1}{u};$$

so ist $\cos mx+i\sin mx=u^m$; $\cos mx-i\sin mx=\dfrac{1}{u^m}$.

Man hat $2\cos x=u+\dfrac{1}{u}$; mithin

$$2^m\cos x^m=u^m+m_1u^{m-2}+\cdots+m_\mu u^{m-2\mu}+\cdots+\frac{1}{u^m};$$

zugleich aber auch, wenn man schreibt $2\cos x=\dfrac{1}{u}+u$;

$$2^m\cos x^m=\frac{1}{u^m}+m_1\frac{1}{u^{m-2}}+\cdots+m_\mu\frac{1}{u^{m-2\mu}}+\cdots+u^m;$$

folglich durch Addition, weil $u^m+\dfrac{1}{u^m}=2\cos mx$,

$$2^m\cdot\cos x^m=\cos mx+m_1\cos(m-2)x+m_2\cos(m-4)x+\cdots$$
$$+m_\mu\cos(m-2\mu)x+\cdots+m_1\cos(m-2)x+\cos mx;$$

oder, wenn man die gleichen Glieder dieses Ausdruckes zusammennimmt:

$$2^{m-1}\cos x^m=\cos mx+m_1\cos(m-2)x$$
$$+m_2\cos(m-4)x+\cdots+v.$$

Das durch v bezeichnete letzte Glied dieses Ausdruckes ist

$=m_{\left(\frac{m-1}{2}\right)}\cdot\cos x=\dfrac{m!}{\frac{m+1}{2}!\,\frac{m-1}{2}!}\cos x$, wenn m ungerade ist;

dagegen ist $v=\frac{1}{2}\cdot m_{\left(\frac{m}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\dfrac{m!}{\frac{m}{2}!\,\frac{m}{2}!}$, wenn m gerade ist.

Daher erhält man

$$2\cos x^2=\cos 2x+1.$$
$$4\cos x^3=\cos 3x+3\cos x.$$
$$8\cos x^4=\cos 4x+4\cos 2x+3.$$
$$16\cos x^5=\cos 5x+5\cos 3x+10\cos x.$$

u. s. f.

Schreibt man in der obigen Formel für $\cos x^m$, $\frac{1}{2}\pi - x$ statt x, so erhält man die Entwickelung von $\sin x^m$. Man setze zur Abkürzung $m-2\mu=n$, so ist $\cos n(\frac{1}{2}\pi-x)=\sin\frac{n\pi}{2}\sin nx$, wenn n, mithin m, ungerade ist, dagegen $\cos n(\frac{1}{2}\pi-x)=\cos\frac{n\pi}{2}\cos nx$, wenn m gerade ist. Also erhält man, wenn m ungerade ist:

$$2^{m-1}\sin x^m = \sin\frac{m\pi}{2}\sin mx + m_1\sin\frac{(m-2)\pi}{2}\sin(m-2)x + \cdots$$
$$+ m_\mu \sin\frac{(m-2\mu)\pi}{2}\sin(m-2\mu)x + \cdots$$

oder, weil $\sin\frac{(m-2\mu)\pi}{2}=\cos\mu\pi\sin\frac{m\pi}{2}$ ist, so kommt:

$$2^{m-1}\sin x^m =$$
$$\sin\frac{m\pi}{2}\Big[\sin mx - m_1\sin(m-2)x + \cdots + (-1)^\mu m_\mu \sin(m-2\mu)x \cdots\Big].$$

Daher $4\sin x^3 = -\sin 3x + 3\sin x.$

$16\sin x^5 = \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x.$

u. s. f.

Auf ähnliche Weise erhält man, wenn m gerade ist,

$$2^{m-1}\sin x^m =$$
$$\cos\frac{m\pi}{2}\Big[\cos mx - m_1\cos(m-2)x \cdots + (-1)^\mu m_\mu \cos(m-2\mu)x \cdots + v\Big].$$

Das letzte Glied v ist $=\frac{1}{2}(-1)^{\frac{m}{2}}\frac{m!}{\frac{m}{2}!\frac{m}{2}!}$.

Daher $2\sin x^2 = -\cos 2x + 1.$

$8\sin x^4 = \cos 4x - 4\cos 2x + 3.$

$32\sin x^6 = -\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10,$

u. s. f.

25. Die Formel $\cos x + i\sin x = e^{xi}$ kann benutzt werden, um die nten Wurzeln der positiven oder negativen Einheit, d. h. die sämmtlichen Werthe des vieldeutigen Ausdruckes $(\pm 1)^{\frac{1}{n}}$, wo n eine ganze positive Zahl, zu finden. Setzt man nämlich $z=(\pm 1)^{\frac{1}{n}}$, so wird $z^n=\pm 1$, und es kommt mithin auf die Auflösung der beiden Gleichungen $z^n+1=0$ und $z^n-1=0$ an. Sind die sämmtlichen Wurzeln derselben bekannt, so erhält man damit auch die Werthe des vieldeutigen Ausdruckes $(\pm a)^{\frac{m}{n}}$, in welchem a irgend eine positive Zahl, m und n aber zwei ganze Zahlen bedeuten, und n immer positiv ist. Denn man bezeichne den reellen positiven Werth von $(a)^{\frac{m}{n}}$ mit b, so sind die sämmtlichen Werthe des Ausdruckes $(\pm a)^{\frac{m}{n}}$ in der Form $b(\pm 1)^{\frac{m}{n}}$ enthalten. —

Um zuerst $z^n+1=0$ aufzulösen, setze man $z=\cos x + i\sin x$, so wird, da n eine positive ganze Zahl ist, $z^n=\cos nx + i\sin nx$. Soll nun $z^n=-1$ sein, so muß $\cos nx=-1$, $\sin nx=0$, also $nx=(2m+1)\pi$ gesetzt werden; mithin $x=\frac{(2m+1)\pi}{n}$, und

$$z=\cos\frac{(2m+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2m+1)\pi}{n};$$ woraus $z^n=-1$ folgt.

Giebt man in diesem Ausdrucke der Zahl m alle Werthe von 0 bis n−1, so erhält man sämmtliche n Wurzeln der vorgelegten Gleichung $z^n+1=0$; setzt man für m andere ganze Zahlen ein, so erhält man immer nur dieselben Wurzeln wieder. Die Wurzeln lassen sich paarweise verbinden; nämlich wenn man in dem vorstehenden Ausdrucke für z, m mit n−m−1 vertauscht, so kommt eine zweite Wurzel

$$\cos\frac{(2n-2m-1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2n-2m-1)\pi}{n}$$
$$=\cos\frac{(2m+1)\pi}{n}-i\sin\frac{(2m+1)\pi}{n}.$$

Diese beiden Wurzeln geben zusammen einen reellen Factor des zweiten Grades von z^n+1, nämlich

$$\left(z-\cos\frac{(2m+1)\pi}{n}\right)^2+\left(\sin\frac{(2m+1)\pi}{n}\right)^2$$
$$=z^2-2z\cos\frac{(2m+1)\pi}{n}+1.$$

Um nun die sämmtlichen reellen Factoren des zweiten Grades von z^n+1 zu finden, setze man für m alle ganze positive Zahlen, für welche $2m+1$ nicht größer als n wird. Ist n ungerade, so wird $2m+1=n$ für $m=\frac{n-1}{2}$; alsdann giebt es außer den reellen Factoren des zweiten Grades auch einen reellen Factor des ersten Grades $(z+1)$, weil für $2m+1=n$,

$$\cos\left(\frac{2m+1}{n}\right)\pi+i\sin\left(\frac{2m+1}{n}\right)\pi=\cos\pi=-1 \quad \text{wird.}$$

Beispiele.

$$z^3+1=(z+1)\left(z^2-2z\cos\frac{\pi}{3}+1\right).$$
$$z^4+1=\left(z^2-2z\cos\frac{\pi}{4}+1\right)\left(z^2-2z\cos\frac{3\pi}{4}+1\right).$$
$$z^5+1=(z+1)\left(z^2-2z\cos\frac{\pi}{5}+1\right)\left(z^2-2z\cos\frac{3\pi}{5}+1\right).$$
$$z^6+1=\left(z^2-2z\cos\frac{\pi}{6}+1\right)\left(z^2-2z\cos\frac{3\pi}{6}+1\right)$$
$$\left(z^2-2z\cos\frac{5\pi}{6}+1\right). \text{ ꝛc.}$$

Auf dieselbe Weise findet man die Wurzeln von $z^n-1=0$. Man setze $z=\cos x+i\sin x$, $z^n=\cos nx+i\sin nx=1$; so muß $nx=2m\pi$, $x=\frac{2m\pi}{n}$ sein. Die Wurzeln sind also alle von der Form: $z=\cos\frac{2m\pi}{n}+i\sin\frac{2m\pi}{n}$; und es ergeben sich wieder reelle Factoren des zweiten Grades von der Form:

$$z^2-2z\cos\frac{2m\pi}{n}+1,$$

in welcher Formel für m alle positive ganze Zahlen zu setzen sind, für welche $2m$ nicht größer als n wird. Ist n ungerade, so wird, für $m=0$, $z-1$ ein einzelner reeller Factor; ist n gerade, so erhält man außer diesem noch einen zweiten $(z+1)$ für $2m=n$.

Beispiele.

$$z^2-1=(z-1)(z+1).$$
$$z^3-1=(z-1)\left(z^2-2z\cos\frac{2\pi}{3}+1\right).$$
$$z^4-1=(z-1)(z+1)(z^2+1).$$
$$z^5-1=(z-1)\left(z^2-2z\cos\frac{2\pi}{5}+1\right)\left(z^2-2z\cos\frac{4\pi}{5}+1\right).$$
$$z^6-1=(z-1)(z+1)\left(z^2-2z\cos\frac{2\pi}{6}+1\right)$$
$$\left(z^2-2z\cos\frac{4\pi}{6}+1\right). \text{ ꝛc.}$$

26. Da $\cos x+i\sin x=e^{xi}$, und, wenn m eine beliebige ganze Zahl ist,

$$\cos(2m\pi+x)=\cos x,\quad \sin(2m\pi+x)=\sin x,$$

so hat man

$$\cos(2m\pi+x)+i\sin(2m\pi+x)=e^{(2m\pi+x)i}=\cos x+i\sin x.$$

Erweitert man daher den Begriff der Logarithmen so, daß auch imaginäre Exponenten von e als Logarithmen betrachtet werden; so ist $\log(\cos x+i\sin x)=(2m\pi+x)i$. Folglich, wenn $x=0$, $\frac{1}{2}\pi$, π gesetzt wird, so folgt $\log(1)=2m\pi i$, $\log(i)=(2m+\frac{1}{2})\pi i$, $\log(-1)=(2m+1)\pi i$. Es sei a eine beliebige positive Zahl, und b ihr reeller natürlicher Logarithmus, so daß $e^b=a$; alsdann ist allgemein $\log a=b+\log 1$ $=b+2m\pi i$, $\log(-a)=b+\log(-1)=b+(2m+1)\pi i$, $\log(ia)=b+(2m+\frac{1}{2})\pi i$, $\log(-ia)=b+(2m+\frac{3}{2})\pi i$. Es seien ferner a und b zwei beliebige reelle Zahlen, so erhält man den Logarithmus von $a+bi$ auf folgendem Wege: Man setze den positiven Werth von $\sqrt{a^2+b^2}=r$, und suche diejenige Zahl zwischen 0 und 2π, für welche $\cos\varphi=\frac{a}{r}$, $\sin\varphi=\frac{b}{r}$, mithin $tg\varphi=\frac{b}{a}$ wird; eine solche ist immer, aber nur einmal, zwischen den angegebenen Grenzen vorhanden; alsdann wird

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r\cdot e^{\varphi i};$$

folglich $$\log(a+bi)=\log(r)+(2m\pi+\varphi)i;$$

wo unter $\log(r)$ der reelle Werth zu verstehen ist. — Es hat also jede beliebige reelle oder imaginäre Zahl z unendlich viele Logarithmen, d. h. es giebt unendlich viele Exponenten p zu e, welche durch Reihenentwickelung der Potenz e^p die verlangte Zahl z geben. Unter diesen befindet sich aber nur in dem Falle ein einziger reeller Exponent, wenn die Zahl z reell und positiv ist. —

Endlich da $d(e^{xi})=e^{xi}idx$, und $\log(\cos x+i\sin x)=(2m\pi+x)i$ ist; so folgt

$$d\log(\cos x+i\sin x)=idx=\frac{d(e^{xi})}{e^{xi}}=\frac{d(\cos x+i\sin x)}{\cos x+i\sin x},$$

woraus allgemein hergeleitet werden kann, daß das Differential eines imaginären Logarithmen eben so wie das eines reellen gefunden wird. —

Functionen von mehreren veränderlichen Grössen.

27. Wenn in einer Function zweier veränderlicher Größen x und y, $f(x,y)$, die eine x um k vermehrt wird, so entsteht die Zunahme $$f(x+k,y)-f(x,y).$$
Indem man sich nun den Werth von y unveränderlich denkt, wird $f(x,y)$ als eine bloße Function von x zu betrachten sein, und der Werth, welchen

$$\frac{f(x+k,y)-f(x,y)}{k}$$

für $k=0$ erhält, stellt die **partielle Ableitung** von $f(x,y)$ nach x, dar, die mit $\left(\frac{df}{dx}\right)$ bezeichnet wird, wenn man zur Abkürzung f statt $f(x,y)$ setzt.

Desgleichen, wenn x ungeändert bleibt, y aber um h zunimmt, ergiebt sich die **partielle Ableitung** von f nach y, als der Werth von

$$\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}=\left(\frac{df}{dy}\right), \quad \text{für} \quad h=0.$$

Wenn aber x um k, y und h zugleich wachsen, so entsteht die Zunahme $$f(x+k,\ y+h)-f(x,y).$$
Es werde $f(x+k,y+h)=f(x,y+h)+kP$ gesetzt, so ist klar, daß, für $k=0$, P in die Ableitung von $f(x,y+h)$ nach x, d. h. in $\left(\frac{df(x,y+h)}{dx}\right)$ übergeht. Ferner sei $f(x,y+h)=f(x,y)+hQ$, so wird, für $$h=0,\ Q=\left(\frac{df(x,y)}{dy}\right)=\left(\frac{df}{dy}\right).$$
Man hat allgemein:

$$f(x+k,\ y+h)-f(x,y)=kP+hQ.$$

Wenn die beiden Größen x und y von einander unabhängig sind, so ist auch das Verhältniß der Zunahmen h und k ganz willkürlich; man bezeichne es mit q, so daß $h=k\cdot q$; so wird

$$\frac{f(x+k,\ y+h)-f(x,y)}{k}=P+q\cdot Q.$$

Setzt man zugleich $h=0$, $k=0$, so geht q in das Verhältniß der verschwindenden Zunahmen von x und y, d. i. $\frac{dy}{dx}$ über, und da zugleich P u. Q in $\left(\frac{df}{dx}\right)$ und $\left(\frac{df}{dy}\right)$ übergehen, so erhält man

$$\frac{f(x+k,\ y+h)-f(x,y)}{k}=\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{dy}{dx},$$

für $k=0$, $h=0$. Dieser Ausdruck ist die vollständige Ableitung von $f(x,y)$. Dieselbe ist unbestimmt, so lange $\frac{dy}{dx}$ willkürlich bleibt; wird aber bestimmt, wenn y als eine Function von x betrachtet wird, wovon dann $\frac{dy}{dx}$ die Ableitung ist. Man könnte aber auch eben so gut x als eine Function von y ansehen, und würde dann, auf demselben Wege, wie oben, erhalten

$$\frac{f(x+k,\ y+h)-f(x,y)}{h}=\left(\frac{df}{dy}\right)+\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{dx}{dy} \text{ für } h=0,\ k=0.$$

Um diese Willkür zu vermeiden, schreibt man symmetrischer die Differentiale statt der Ableitungen. Nämlich die Differenz

$$f(x+k,\ y+h)-f(x,y)$$

geht für verschwindende k und h in das vollständige Differential $df(x,y)$ von $f(x,y)$ über, und man erhält

$$df(x,y)=\left(\frac{df}{dx}\right)dx+\left(\frac{df}{dy}\right)dy.$$

Hier sind $\left(\frac{df}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{df}{dy}\right)dy$ die partiellen Differentiale von f nach x und y, und die Formel spricht den Satz aus: Das vollständige Differential einer Function von x und y ist die Summe ihrer partiellen Differentiale. — Man sieht leicht ein, daß dieser Satz auch für mehr als zwei veränderliche Größen gilt. Z. B. wenn eine Function von drei veränderlichen Größen $f(x,y,z)=f$ gegeben ist, so hat man

$$df=\left(\frac{df}{dx}\right)dx+\left(\frac{df}{dy}\right)dy+\left(\frac{df}{dz}\right)dz,$$

als Ausdruck des vollständigen Differentiales von f, durch die partiellen Differentiale. — Der Beweis beruht ganz auf denselben Gründen, wie bei zwei veränderlichen Größen. —

Beispiel. Es sei $f(x,y)=x^m y^n$, so ist

$$\left(\frac{df}{dx}\right)=mx^{m-1}y^n,\quad \left(\frac{df}{dy}\right)=nx^m y^{n-1},$$

$$df=mx^{m-1}y^n dx+nx^m y^{n-1}dy=x^{m-1}y^{n-1}(my\,dx+nx\,dy).$$

28. Hiernach lassen sich die partiellen Ableitungen (oder auch die partiellen Differentiale) höherer Ordnungen einer Function von mehreren Veränderlichen finden. Man bezeichnet durch $\frac{d^2f}{dx\,dy}$ diejenige Function, die gefunden wird, wenn man zuerst die partielle Ableitung von f nach x nimmt, d. i. $\left(\frac{df}{dx}\right)$, und von dieser die partielle Ableitung nach y, $\frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dy}=\frac{d^2f}{dx\,dy}$. Eben so ist $\frac{d^2f}{dx^2}$ die Function, welche entsteht, wenn die part. Ableitung nach x von $\left(\frac{df}{dx}\right)$ genommen wird.

Z. B. für $f=x^m y^n$ war $\frac{df}{dx}=mx^{m-1}y^n$, woraus folgt

$$\frac{d^2f}{dx\,dy}=mx^{m-1}\cdot ny^{n-1},\qquad \frac{d^2f}{dx^2}=m\cdot m-1\cdot x^{m-2}y^n;$$

auch ist $\frac{d^2f}{dy^2}=n\cdot n-1\cdot x^m y^{n-2}$.

Zu bemerken ist, daß $\frac{d^2f}{dx\,dy}=\frac{d^2f}{dy\,dx}$, d. h. daß es gleichviel ist, ob man die Ableitung zuerst nach x und dann nach y, oder zuerst nach y, dann nach x nimmt, was sich so beweisen läßt:

Nach dem §. 12. kann man setzen $f(x+k)=fx+kf'(x+\Theta k)$; also, indem der Werth von y als unveränderlich angesehen, und zugleich zur Abkürzung $x+k=x'$ gesetzt wird,

$$f(x',y)=f(x,y)+k\,\frac{df(x+\Theta k,y)}{dx},$$

wo das Zeichen $\frac{df(x+\Theta k,y)}{dx}$ diejenige Function bedeutet, welche entsteht, wenn in der partiellen Ableitung $\frac{df}{dx}$, $x+\Theta k$ statt x gesetzt wird.

Verwandelt sich nunmehr y in $y'=y+h$, so wird

$$f(x',y')=f(x,y')+k\,\frac{df(x+\Theta_1 k,y')}{dx},$$

folglich ist

$$Q=\frac{\dfrac{f(x',y')-f(x,y')}{k}-\dfrac{f(x',y)-f(x,y)}{k}}{h}$$

$$=\frac{\dfrac{df(x+\Theta_1 k,y')}{dx}-\dfrac{df(x+\Theta k,y)}{dx}}{h}.$$

Für $k=0$ geht aber die Größe auf der rechten Seite über in

$$\frac{\dfrac{df(x,y')}{dx}-\dfrac{df(x,y)}{dx}}{h}$$

und diese wiederum für $h=0$, in $\frac{d^2f}{dx\,dy}$.

Daher ist $\frac{d^2f}{dx\,dy}$ der Werth, welchen der Quotient Q für $k=0$ und $h=0$ erhält. Auf dieselbe Art ergiebt sich aber auch

$$f(x,y')=f(x,y)+h\frac{df(x,y+\lambda h)}{dy},$$

wo λ ein positiver ächter Bruch; und

$$f(x',y')=f(x',y)+h\frac{df(x',y+\lambda_1 h)}{dy};$$

mithin wiederum

$$Q=\frac{\dfrac{f(x',y')-f(x',y)}{h}-\dfrac{f(x,y')-f(x,y)}{h}}{k}$$

$$=\frac{\dfrac{df(x',y+\lambda_1 h)}{dy}-\dfrac{df(x,y+\lambda h)}{dy}}{k},$$

folglich, für $h=0$, $k=0$, $Q=\frac{d^2f}{dy\,dx}$. Daher ist $\frac{d^2f}{dy\,dx}$ ebenfalls der Werth des Quotienten Q, für $h=0$, $k=0$; und folglich einerlei mit $\frac{d^2f}{dx\,dy}$.

Hieraus folgt weiter, daß auch für partielle Ableitungen höherer Ordnungen die Folge der Differentiationen einerlei ist. Denn es sei $\frac{d^2f}{dx\,dy}=\frac{d^2f}{dy\,dx}=q$, so folgt hieraus:

$$\frac{dq}{dy}=\frac{d^3f}{dx\,dy^2}=\frac{d^3f}{dy\,dx\,dy}.$$

Setzt man sodann $\frac{df}{dy}=p$, so ist

$$\frac{d^3f}{dy\,dx\,dy}=\frac{d^2p}{dx\,dy}=\frac{d^2p}{dy\,dx}=\frac{d^2\left(\frac{df}{dy}\right)}{dy\,dx}=\frac{d^3f}{dy^2\,dx};$$

also: $$\frac{d^3f}{dx\,dy^2}=\frac{d^3f}{dy\,dx\,dy}=\frac{d^3f}{dy^2\,dx},$$ u. s. w.

29. Differentiirt man zum zweitenmale den Ausdruck:

$$df=\left(\frac{df}{dx}\right)dx+\left(\frac{df}{dy}\right)dy,$$

so ergiebt sich das zweite Differential von f. Wird dabei x als unabhängig veränderliche Größe, und y als eine Function derselben angesehen (diese Function mag nun gegeben sein oder nicht), so ist $\frac{dy}{dx}$ ebenfalls eine Function von x, und um die höheren Differentiale von

$$df=\left[\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{dx}\right]dx$$

zu finden, braucht man diesen Ausdruck nur so zu differentiiren, als ob dx constant, mithin $d^2x=0$ wäre.

Unter dieser Voraussetzung differentiirt, giebt die Gleichung

$$df=\left(\frac{df}{dx}\right)dx+\left(\frac{df}{dy}\right)dy$$

die folgende:

$$d^2f=\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)dx^2+2\left(\frac{d^2f}{dx\,ky}\right)dx\,dy+\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)dy^2+\left(\frac{df}{dy}\right)d^2y$$

als vollständiges zweites Differential von f.

Wenn aber x und y beide als Functionen einer dritten unabhängig veränderlichen Größe t sollen angesehen werden, wie es nicht selten der Fall ist; so darf man weder d^2x nach d^2y Null setzen, und erhält also in einem solchen Falle in dem Ausdrucke für d^2f noch ein Glied $\left(\frac{df}{dx}\right)d^2x$, wodurch derselbe ganz symmetrisch wird.

Beispiel. Für $f=x^my^n$ war oben

$$df=mx^{m-1}y^ndx+nx^my^{n-1}dy;$$

daher vollständig:

$$d^2f=mx^{m-1}y^nd^2x+m\cdot\overline{m-1}\cdot x^{m-2}y^ndx^2+2mnx^{m-1}y^{n-1}dxdy$$
$$+n\cdot\overline{n-1}\cdot x^my^{n-2}dy^2+nx^my^{n-1}d^2y,$$

oder $d^2f=x^{m-2}y^{n-2}[mxy^2d^2x+m\cdot\overline{m-1}\cdot y^2dx^2+2mnxydxdy$
$+n\cdot\overline{n-1}\cdot x^2dy^2+nx^2yd^2y]$,

in welchem Ausdrucke $d^2x=0$ zu setzen ist, wenn x als unabhängig veränderliche Größe betrachtet wird.

30. Wenn zwischen x und y eine Gleichung besteht, die durch $f(x,y)=0$ bezeichnet werden mag, so muß, indem x und k, y und h zunehmen, zwischen den veränderten x und y ebenfalls die Gleichung $f(x+k,y+h)=0$ gelten; d. h. mit x muß auch y sich ändern, aber so, daß f unverändert bleibt. Hieraus folgt, daß in diesem Falle das Differential von f Null sein

muß; d. h. $df=\left(\frac{df}{dx}\right)dx+\left(\frac{df}{dy}\right)dy=0$

und zwar für jeden beliebigen Werth von x und y. Diese Gleichung dient daher, um das Verhältniß $\frac{dy}{dx}$ oder die Ableitung von y nach x, auszudrücken. Ferner muß $d^2f=0$ sein, also, wenn man den Ausdruck für df differentiirt, und $d^2x=0$ setzt, d. h. x als unabhängig veränderliche, fortwährend gleichmäßig wachsende Größe, und y als Function derselben betrachtet, so kommt:

$$d^2f=\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)dx^2+2\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)dxdy+\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)dy^2+\left(\frac{df}{dy}\right)d^2y=0;$$

welche Gleichung dient, um mit Hülfe der vorigen die zweite Ableitung von y, d. i. $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu bestimmen. Durch weitere Differentiationen werden auf ähnliche Weise die höheren Ableitungen von y nach x bestimmt. Wenn aber x und y beide als Functionen einer dritten Größe t so gegeben sind, daß ihre Ausdrücke der Gleichung $f(x,y)=0$ genügen, so darf bei den Differentiationen weder dx noch dy als beständig, mithin weder d^2x noch d^2y Null gesetzt werden; doch müssen die Gleichungen

$$df=0,\ d^2f=0,\ d^3f=0,\ \text{u. s. f.}$$

sämmtlich befriedigt werden, wenn man die Werthe der Ableitungen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ u. s. f., welche sich aus den Ausdrücken für x und y in t ergeben, einsetzt.

Um ein Beispiel zu geben, sei

$$f(x,y)=\frac{(x-a)^2}{A^2}+\frac{(y-b)^2}{B^2}-1=0,$$

so folgt durch Differentiation:

$$\frac{(x-a)dx}{A^2}+\frac{(y-b)dy}{B^2}=0,$$

weiter:

$$\frac{dx^2}{A^2}+\frac{dy^2}{B^2}+\frac{(x-a)d^2x}{A^2}+\frac{(y-b)d^2y}{B^2}=0.$$

In dieser Gleichung ist $d^2x=0$, wenn x als unabh. veränderl. Größe betrachtet wird. — Man kann aber der vorgelegten Gleichung Genüge leisten, wenn man $x-a=A\cos t$, $y-b=B\sin t$ setzt, woraus folgt:

$$dx=-A\sin t\cdot dt,\quad dy=B\cos t\cdot dt,$$
$$d^2x=-A\cos t\cdot dt^2,\quad d^2y=-B\sin t\cdot dt^2.$$

Bei dieser Annahme ist t als unabhängig betrachtet, also $d^2t=0$ gesetzt. Setzt man die vorstehenden Werthe für dx, dy, d^2x, d^2y in die obigen Gleichungen, so überzeugt man sich leicht, daß sie denselben Genüge leisten.

Anmerkung. Wenn man in irgend einem Ausdrucke, der die höheren Differentiale von y, d. i. d^2y, d^3y, u. s. f. enthält, während $d^2x=0$ gesetzt ist, x nicht mehr als unabhängig betrachten, sondern eine andere unabhängige Veränderliche t einführen will, von welcher x und y Functionen sind, so ist es leicht, den neuen Ausdruck aus dem vorigen so zu erhalten, daß man hernach nur die Ableitungen von x und y nach t in denselben einsetzen darf, um sofort seinen Werth zu haben. Man darf sich nur erinnern, daß $\frac{d^2y}{dx^2}$ das Verhältniß der Differentiale $d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ und dx unter der Bedingung anzeigt, daß dx als unveränderlich angesehen wird. Hebt man diese Bedingung auf, so sind dy, dx oder, wenn man lieber will, die Ableitungen $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ veränderliche Größen, und der Quotient $\frac{dy}{dx}$ muß daher nach der Regel §. 5. c. differentiirt werden. Man findet demnach

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^2},$$ und muß also

statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ setzen $\frac{1}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, d. i. $\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3}$,

wo aber d^2y links und rechts nicht mehr dieselbe Bedeutung hat; nämlich d^2y links bezieht sich auf die zweite Ableitung von y nach x; rechts aber ist es der Zähler von $\frac{d^2y}{dt^2}$, d. h. es bezieht sich auf die zweite Ableitung von y nach t. Schreibt man also die Ableitungen, und nicht die Differentiale, so ist

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Man sieht, daß die Ausdrücke dadurch sehr an Kürze verlieren, und daß es bequemer ist, die Differentiale zu schreiben, wenn man nur die jedesmalige Bedeutung derselben gehörig beachtet. Man findet weiter $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{dx}d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ und indem man für $\frac{d^2y}{dx^2}$ seinen obigen Werth setzt,

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{dx}d\left(\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3}\right)$$
$$=\frac{dx^2d^3y-dx\,dy\,d^3x-3dx\,d^2x\,d^2y+3dy\,d^2x^2}{dx^5}.$$

Es war z. B. oben

$$d^2f=\frac{d^2f}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2f}{dx\,dy}\cdot dx\,dy+\frac{d^2f}{dy^2}\cdot dy^2+\frac{df}{dy}d^2y=0.$$

Indem man nun statt d^2y schreibt: $\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx}$, erhält man:

$$d^2f=\frac{d^2f}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2f}{dx\,dy}dx\,dy+\frac{d^2f}{dy^2}dy^2$$
$$+\frac{df}{dy}\left(\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx}\right)=0.$$

Hätte man aber die Gleichung $df=\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy=0$ sogleich vollständig, auch in Bezug auf dx differentiirt, so hätte man erhalten:

$$d^2f = \frac{df}{dx}d^2x + \frac{d^2f}{dx^2}dy^2 + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2f}{dy^2}dy^2 + \frac{df}{dy}d^2y = 0.$$

Dieses stimmt in der That mit dem Vorigen, wie es sein muß, überein, weil $-\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$ ist. — Im Allgemeinen ist es besser, von vorn herein vollständig zu differentiiren, weil die Ausdrücke dadurch an Symmetrie gewinnen.

31. Man kann die Gleichung $f(x,y)=0$ mit ihrer Ableitung $\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0$ beliebig verbinden, um aus ihnen irgend eine in beiden vorkommende Größe zu eliminiren. Wenn insbesondere in der Gleichung $f(x,y)=0$ eine Constante a vorkommt, so kann diese aus der Ableitung weggeschafft, und eine Gleichung zwischen x, y, $\frac{dy}{dx}$ erhalten werden, der die vorgelegte Gleichung $f(x, y, a)=0$ immer Genüge thut, welcher Werth auch der Constante a beigelegt werden mag.

Es sei z. B. $y=ax$, so wird $dy=a\,dx$, mithin $x\,dy=y\,dx$, eine Differentialgleichung, die immer besteht, wenn y dem x proportionirt ist. Es sei $y^2-2ax+x^2=a^2$, so folgt:

$$y\,dy-a\,dx+x\,dx=0 \quad \text{oder} \quad y\,dy+x\,dx=a\,dx.$$

Wird mit Hülfe dieses Ausdruckes a aus der ursprünglichen Gleichung weggeschafft, so kommt die Differentialgleichung:

$$(x^2+y^2)dx^2=(x\,dx+y\,dy)^2+2(x\,dx+y\,dy)x\,dx,$$

oder, nach Potenzen von dy geordnet:

$$y^2dy^2+4xy\,dy\,dx+(2x^2-y^2)dx^2=0.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ vom zweiten Grade, so wie die vorige Differentialgleichung vom ersten Grade war. Beide enthalten aber nur die erste Ableitung von y nach x, und sind deshalb von erster Ordnung. —

Vermittelst der höheren Ableitungen kann man mehrere

Constanten wegschaffen, wenn solche in der gegebenen Gleichung vorhanden sind. Es sei z. B. $y=a\cdot e^x+b\cdot e^{-x}$, so wird

$$dy=(ae^x-be^{-x})dx,$$
$$d^2y=(ae^x+be^{-x})dx^2, \quad \text{oder} \quad d^2y=y\,dx^2,$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung (zugleich in Hinsicht auf die höchste Ableitung $\frac{d^2y}{dx^2}$ vom ersten Grade), aus welcher die Constanten a und b beide verschwunden sind.

32. Endlich ist noch zu erwähnen, daß die Zunahme einer Function zweier Veränderlicher sich auf ähnliche Weise nach Potenzen der Zunahmen k und h von x und y entwickeln läßt, wie bei einer Function von x nach Potenzen von k geschehen ist. Man setze zur Abkürzung $f(x,y)=u$, $f(x,y+h)=u'$, so wird, nach dem Taylorschen Satze, wenn man den Rest blos durch r andeutet:

$$f(x+k, y+h)=u'+k\frac{du'}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2u'}{dx^2}+\cdots+\frac{k^n}{n!}\frac{d^nu'}{dx^n}+r.$$

Ferner aber ist $u'=u+h\frac{du}{dy}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2u}{dy^2}+\cdots+\frac{h^n}{n!}\frac{d^nu}{dy^n}+r_1.$

$$\frac{du'}{dx}=\frac{du}{dx}+h\frac{d^2u}{dx\,dy}+\frac{h^2}{2}\frac{d^3u}{dx\,dy}+\cdots+\frac{h^n}{n!}\frac{d^{n+1}u}{dx\,dy^n}+r_2;$$

allgemein

$$\frac{d^mu'}{dx^m}=\frac{d^mu}{dx^m}+h\frac{d^{m+1}u}{dx^m dy}+\cdots+\frac{h^n}{n!}\frac{d^{n+m}u}{dx^m dy^n}+r_m.$$

Werden diese Werthe von u', $\frac{du'}{dx}$, u. s. f. eingesetzt, und gehörig geordnet, so folgt:

$$f(x+k, y+h)=u+k\frac{du}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{k^3}{3!}\frac{d^3u}{dx^3}+\cdots$$
$$+h\frac{du}{dy}+kh\frac{d^2u}{dx\,dy}+\frac{k^2h}{2!1!}\frac{d^3u}{dx^2dy}+\cdots$$

$$+\frac{h^2}{2}\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{kh^2}{1!2!}\frac{d^3u}{dx\,dy}+\cdots$$
$$+\frac{h^3}{3!}\frac{d^3u}{dy^3}+\cdots$$

Das allgemeine Glied dieses Ausdruckes, von der Ordnung $n+m$, läßt sich durch $S\left(\frac{k^n h^m}{n!\,m!}\frac{d^{n+m}u}{dx^n dy^m}\right)$ bezeichnen, so verstanden, daß für n und m alle positiven ganzen Zahlen, mit Einschluß von Null, zu setzen sind, welche eine unveränderliche Summe $n+m$ geben. Auch für den Rest läßt sich ein ähnlicher Ausdruck angeben, wie bei der Entwickelung von $f(x+k)$, der jedoch hier übergangen werden soll. — Eine ähnliche Reihenentwickelung findet auch bei Functionen von mehr als zwei veränderlichen Größen Statt.

Untersuchung besonders ausgezeichneter Werthe einer Function.

33. Diejenigen Werthe von x, für welche fx Null, oder unendlich groß wird, findet man durch die Auflösung der Gleichungen $fx=0$, $\frac{1}{fx}=0$. Außer ihnen muß man aber auch, bei der Untersuchung des Ganges einer Function, auf solche Werthe achten, für welche die Ableitungen $f'x$, $f''x$, u. s. f. Null oder unendlich groß werden. In dem letzteren Falle verliert die Taylorsche Reihe ihre Gültigkeit. Wenn jedoch z. B. $f'''x$ unendlich wird für $x=\alpha$, fx, $f'x$, $f''x$ aber für alle Werthe von x zwischen den Grenzen a und b, zwischen welchen α und $\alpha+k$ liegen, endlich und stetig sind, so kann man immer noch setzen:

$$f(\alpha+k)=f\alpha+kf'\alpha+\frac{k^2}{2}f''(\alpha+\Theta k);$$

nur darf die Entwickelung nicht bis auf die dritte Ableitung ausgedehnt werden, weil, nach der Annahme, $f'''\alpha$ unendlich ist.

Wenn nun die Ableitung $f'x$, für $x=\alpha$, Null ist, so zeigt dies an, daß die Function fx, während x von dem Werthe α aus im Wachsen gedacht wird, sich in einem augenblicklichen Stillstande befindet, indem die Ableitung $f'x$, oder das Maaß der veränderlichen Stärke, mit welcher fx wächst, während x gleichmäßig wächst, für $x=\alpha$, Null ist. Hat zugleich $f''\alpha$ einen endlichen, von Null verschiedenen Werth, so ist, indem $f'\alpha$ verschwindet,

$$f(\alpha+k)=f\alpha+\frac{k^2}{2}f''(\alpha+\Theta k) \text{ und } f(\alpha-k)=f\alpha+\frac{k^2}{2}f''(\alpha-\lambda k),$$

(Θ und λ zwischen 0 und $+1$).

Nun kann k so klein genommen werden, daß die Werthe $f''(\alpha+\Theta k)$ und $f''(\alpha-\lambda k)$ dem Werthe $f''\alpha$ beliebig nahe kommen, also beide gleiche Zeichen mit $f''\alpha$ erhalten. Alsdann haben auch die Unterschiede $f(\alpha+k)-f\alpha$ und $f(\alpha-k)-f\alpha$ mit einander und mit $f''\alpha$ gleiche Zeichen. Ist dieses Zeichen positiv, so ist $f\alpha$ kleiner als $f(\alpha+k)$ und $f(\alpha-k)$; ist es aber negativ, so ist $f\alpha$ größer als $f(\alpha+k)$ und $f(\alpha-k)$.

Wenn demnach $f'\alpha$ Null, und $f''\alpha$ endlich und verschieden von Null ist, so ist der Werth von $f\alpha$ entweder größer als die ihm zu beiden Seiten benachbarten Werthe von fx, oder kleiner, je nachdem der Werth von $f''\alpha$ negativ oder positiv ist. In dem ersten Falle findet, indem x als wachsend gedacht wird, ein Uebergang der Function aus dem Wachsen in das Abnehmen, d. h. ein Maximum, in dem zweiten ein Uebergang aus dem Abnehmen in das Wachsen, ebenfalls bei wachsenden x, d. h. ein Minimum Statt.

Wenn aber mit $f'\alpha$ zugleich $f''\alpha$ Null wird, $f'''\alpha$ aber einen endlichen Werth hat, der nicht Null ist, so kommt:

$$f(\alpha+k)-f\alpha=\frac{k^3}{3!}f'''(\alpha+\Theta k),$$

$$f(\alpha-k)-f\alpha=-\frac{k^3}{3!}f'''(\alpha-\lambda k).$$

Indem daher k hinreichend klein genommen wird, so daß

$f'''(\alpha+\Theta k)$ und $f'''(\alpha-\lambda k)$ gleiche Zeichen erhalten, so erhalten die beiden Differenzen auf der linken Seite entgegengesetzte Zeichen; daher findet weder ein Maximum noch ein Minimum, sondern nur ein augenblicklicher Stillstand der Function Statt, nach welchem die Function zu wachsen oder abzunehmen fortfährt, wie vorher.

Ferner wenn mit $f'\alpha$, $f''\alpha$ zugleich $f'''\alpha$ verschwindet, dagegen $f^{IV}\alpha$ endlich und von Null verschieden ist, so wird

$$f(\alpha+k)-f\alpha=\frac{k^4}{4!}f^{IV}(\alpha+\Theta k)$$

$$f(\alpha-k)-f\alpha=\frac{k^4}{4!}f^{IV}(\alpha-\lambda k);$$

es erhalten daher, sobald k hinreichend klein genommen wird, die Differenzen $f(\alpha+k)-f\alpha$ und $f(\alpha-k)-f\alpha$ wieder gleiche Zeichen; daher findet wiederum für $x=\alpha$ ein Maximum oder Minimum von fx Statt, je nachdem $f^{IV}\alpha$ negativ oder positiv ist.

Auf diese Weise gelangt man zu dem allgemeinen Schlusse: Wenn für einen Werth α von x eine ungerade Anzahl der Ableitungen von fx, von der ersten an, gleichzeitig verschwinden, also $f'\alpha=0$, $f''\alpha=0$, $f'''\alpha=0$, ... $f^{2n-1}(\alpha)=0$ wird, die folgende Ableitung $f^{2n}(\alpha)$ aber einen endlichen, von Null verschiedenen Werth hat; so ist der Werth von $f\alpha$ ein Maximum oder ein Minim., je nachdem $f^{2n}(\alpha)$ negativ od. positiv ist.

Wenn aber für $x=\alpha$ eine gerade Anzahl von Ableitungen von $f'\alpha$ an verschwinden, so daß die erste der nicht mehr verschwindenden von ungerader Ordnung ist, so findet zwar ein augenblicklicher Stillstand der Function, aber kein Wechsel der Ab- und Zunahme Statt.

Beispiele. Es sei $fx=x(a-x)$, so wird $f'x=a-2x=0$ für $x=\frac{1}{2}a$, ferner $f''x=-2$; folglich erhält für $x=\frac{1}{2}a$ die Function $fx=x(a-x)$ ihren größten Werth $\frac{1}{4}a^2$.

Es sei $fx=x^x=e^{x\log x}$; $f'x=x^x[1+\log x]$,

$$f''x=x^x\left[\frac{1}{x}+(1+\log x)^2\right].$$

Setzt man $\log x+1=0$, also $x=e^{-1}=\frac{1}{e}$, so wird $f'x=0$, und offenbar zugleich $f''x$ endlich und positiv. Folglich findet, für $x=\frac{1}{e}$ $(e=2{,}7182818,\ \frac{1}{e}=0{,}3678795)$ ein Minimum der Function x^x Statt, dessen Werth etwa 0,6922006 ist.

Es sei $fx=(a-x)^3$, $f'x=-3(a-x)^2$, $f''x=+6(a-x)$, $f'''x=6a$; so wird, für $x=a$, $f'a=0$, $f''a=0$, $f'''a$ aber nicht Null; hier ist also ein Stillstand der Function, die sonst fortwährend, mit wachsendem x, abnimmt, wie schon daraus erhellet, daß der Werth von $f'x$ für jedes x negativ ist, während zugleich die Function offenbar immer stetig bleibt.

34. Wenn die Ableitung $f'x$, für $x=\alpha$, einen unendlich großen Werth erhält, so muß man die Beschaffenheit der Functionen fx und $f'x$, in der Nähe des Werthes $x=\alpha$, untersuchen. Die Ableitung $f'x$ kann z. B. für $x=\alpha-k$, ein anderes Zeichen haben, als für $x=\alpha+k$, so lange k eine sehr kleine Größe ist. Alsdann wird die Function fx, wenn sie z. B. von $x=\alpha-k$ bis zu $x=\alpha$ wächst, von $x=\alpha$ abnehmen, oder umgekehrt; es wird also bei $x=\alpha$ ein Wechsel zwischen Ab- und Zunahme, d. h. ein Maximum oder Minimum, Statt finden. Dies ist z. B., wenn $fx=(x-b)^{\frac{2}{3}}$, mithin $f'x=\frac{2}{3}(x-b)^{-\frac{1}{3}}$ ist, der Fall für $x=b$, wo $f'x=\infty$ wird. Die Ableitung ist negativ, so lange $x<b$, und wird positiv, wenn $x>b$ wird; die Function geht also aus dem Abnehmen in das Wachsen über, und der Werth $fx=0$ für $x=b$ ist ein Minimum. Dieser Uebergang ist aber nicht, wie in den Fällen des §. 33., mit einem augenblicklichen Stillstande verbunden. — In anderen Fällen wechselt die Ableitung $f'x$ ihr Zeichen nicht, indem sie unendlich wird; z. B. für $fx=(x-b)^{\frac{3}{4}}$ wird $f'x=\frac{3}{4}(x-b)^{-\frac{1}{4}}$ für $x=b$ unendlich groß. Hier ist b der

Werth, bei welchem die Function fx abbricht, d. h. aus dem Reellen in das Imaginäre übergeht. — Im Allgemeinen ist die Taylorsche Reihe nicht anwendbar, sobald die Werthe der Ableitungen unendlich groß werden, d. h. die Zunahme $f(x+k)-fx$ läßt sich, für solche Werthe von x, nicht mehr nach ganzen Potenzen von k entwickeln. So giebt $fx=(x-b)^{\frac{2}{3}}$ für $x=b$, $f(x+k)-fx=k^{\frac{2}{3}}$; welche Form offenbar mit derjenigen der Taylorschen Reihe unverträglich ist. Es sei noch $fx=\sqrt{a^2-x^2}$, so wird $f'x=\infty$ für $x=a$; setzt man nun $x=a-k$, so kommt $f(a-k)=\sqrt{k}\cdot\sqrt{2a-k}$, welcher Werth sich nicht nach ganzen Potenzen von k entwickeln läßt.

Es mag hier auch bemerkt werden, daß bei manchen Functionen Unterbrechungen der Stetigkeit vorkommen, während die Ableitungen derselben immer endlich und stetig sind. Dahin gehört die Function $arc\ tg\frac{1}{x}$, deren Ableitung $\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)$ beständig endlich und negativ ist, und welche also, so lange sie stetig bleibt, beständig abnehmen muß. Sie wird aber Null für $x=-\infty$ und für $x=+\infty$. Bei näherer Betrachtung findet man leicht, daß sie, indem x durch Null geht, nicht stetig bleibt, sondern plötzlich von dem Werthe $-\frac{1}{2}\pi$ zu dem Werthe $+\frac{1}{2}\pi$ gelangt. Diese Function nimmt also, indem x von $-\infty$ bis 0 wächst, von 0 bis $-\frac{1}{2}\pi$, hierauf aber, während x von 0 bis $+\infty$ wächst, von $+\frac{1}{2}\pi$ bis 0, beständig ab.

Betrachtet man indessen ihre Ableitung $\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$ genauer, bevor sie noch auf die einfachere Form $\frac{-1}{1+x^2}$ gebracht ist, so sieht man, daß dieselbe, für $x=0$, die Form $\frac{\infty}{\infty}$ erhält, wodurch sich der Werth $x=0$, als ein solcher, der nähere Untersuchung erfordert, hinreichend kund giebt. Ueberhaupt wird der Werth von $\varphi(fx)$ für $x=a$ immer näher zu untersuchen sein, wenn der Werth a ein solcher ist, für welchen die Function fx unendlich wird, oder überhaupt eine besondere Abweichung ihres Ganges darbietet.

35. Oft erscheint der Werth einer Function in unbestimmter Form, ungeachtet ein bestimmter Werth wirklich Statt findet. So wird $\frac{f(x+k)-fx}{k}$ für $k=0$, $\frac{0}{0}$; der Werth aber ist, wie bekannt, die Ableitung $f'x$. — Es seien φx und ψx zwei Functionen, die für $x=a$ beide zugleich verschwinden, so wird ihr Quotient $y=\frac{\varphi x}{\psi x}$, für $x=a$, $\frac{0}{0}$. Um den Werth zu finden, welchen y für $x=a$ erhält, setze man $y\cdot\psi x=\varphi x$, und nehme die Ableitung dieser Gleichung, so kommt,

$$\frac{dy}{dx}\cdot\psi x+y\psi' x=\varphi' x,$$

mithin, für $x=a$, $y\psi' a=\varphi' a$ oder $y=\frac{\varphi' a}{\psi' a}$; d. h. der Werth von $\frac{\varphi x}{\psi x}$ für $x=a$, wenn φa und ψa zugleich verschwinden, ist der Quotient aus den Werthen der Ableitungen $\varphi' x$ und $\psi' x$, für $x=a$. Es sei z. B. $y=\frac{\frac{1}{2}\pi-x}{\cos x}$, so wird $y=\frac{0}{0}$ für $x=\frac{1}{2}\pi$; nimmt man aber die Ableitungen, so ist die des Zählers $=-1$, die des Nenners $=-\sin x=-1$, für $x=\frac{1}{2}\pi$, also $y=1$ der richtige Werth. Es sei $y=\frac{\sin(x^2-a^2)}{1-\cos(x-a)}$, so ist der Werth von y, für $x=a$, $\frac{2x\cos(x^2-a^2)}{\sin(x-a)}=\frac{2a}{0}$, d. i. unendlich groß, wenn nicht $a=0$ ist. Für $a=0$ aber wird

$$\frac{\sin(x^2)}{1-\cos x}=\frac{2x\cos(x^2)}{\sin x}=\frac{0}{0}$$

für $x=0$; also aufs Neue unbestimmt.

Man muß daher auf den Quotienten $\frac{\varphi x}{\psi x}=\frac{2x\ \cos(x^2)}{\sin x}$ wieder die obige Regel anwenden, oder den Werth $\frac{\varphi' 0}{\psi' 0}$ suchen.

Derselbe ergiebt sich gleich $\frac{2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2)}{\cos x}$ für $x=0$, also gleich 2; d. h. es ist $\frac{\sin(x^2)}{1-\cos x}=2$ für $x=0$. — Es sei noch $y=\frac{a^x-b^x}{x}$, so wird $y=\frac{0}{0}$ für $x=0$; der richtige Werth aber ist $y=\log a-\log b$. — Um den Werth von

$$y=\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$$

für $x=0$ zu finden, muß man zweimal hintereinander die Ableitungen nehmen, worauf man $y=\frac{1}{a}$ erhält.

Diese Regel gilt jedoch nur dann, wenn diejenigen Ableitungen von φx und ψx, welche den Werth des Quotienten $\frac{\varphi x}{\psi x}$ nicht mehr $=\frac{0}{0}$ geben, nicht wieder auf andere Weise einen unbestimmten Werth liefern, z. B. $\frac{\infty}{\infty}$. In einem solchen Falle, wo, wie bekannt, $\varphi(x+k)$, $\psi(x+k)$ sich nicht nach Potenzen von k entwickeln lassen, muß man eine andere Form der Entwickelung suchen, um den Quotienten $\frac{\varphi x}{\psi x}$ für $x=a$, zu erhalten. Es sei z. B. $\varphi x=\sqrt{x^2-a^2}$, $\psi x=\sqrt[3]{x^3-a^3}$, so wird $y=\frac{\varphi x}{\psi x}=\frac{0}{0}$ für $x=a$, während $\varphi' a$ und $\psi' a$ unendlich werden. Man erhält aber

$$\varphi(a+k)=\sqrt{k}\cdot\sqrt{2a+k},\quad \psi(a+k)=\sqrt[3]{k}\cdot\sqrt[3]{3a^2+3ak+k^2},$$

also $\frac{\varphi(a+k)}{\psi(a+k)}=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt[3]{k}}\cdot\frac{\sqrt{2a+k}}{\sqrt[3]{3a^2+3ak+k^2}}=0$, für $k=0$.

Also ist $\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt[3]{x^2-a^2}}=0$, für $x=a$.

Ist zwischen x und y eine Gleichung $f(x,y)=0$ gegeben, so folgt durch Differentiirung derselben:

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy=0.$$

Werden nun, für einen bestimmten Werth von x, und einen entsprechenden von y, die partiellen Ableitungen $\frac{df}{dx}$ und $\frac{df}{dy}$ beide zugleich Null; so bleibt das Verhältniß $\frac{dy}{dx}$ unbestimmt. Differentiirt man aber zum zum zweitenmale, indem man $d^2x=0$ setzt, so kommt

$$\frac{d^2f}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2f}{dx\,dy}dx\,dy+\frac{d^2f}{dy^2}dy^2+\frac{df}{dy}d^2y=0.$$

Für die in Rede stehenden Werthe von x und y wird aber $\frac{df}{dy}=0$; also kommt die quadratische Gleichung:

$$\frac{d^2f}{dy^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{d^2f}{dx\,dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{d^2f}{dx^2}=0,$$

wonach $\frac{dy}{dx}$ einen doppelten Werth erhält. — Wenn auch diese Gleichung den Werth von $\frac{dy}{dx}$ noch unbestimmt läßt, so muß man zu den Gliedern höherer Ordnung fortgehen, oder auch, nach Umständen, andere Formen der Entwickelung von $f(x+k, y+h)$ suchen, wenn die Taylorsche Reihe unzulässig ist.

Beispiel. Es sei $f(x,y)=(x^2+y^2)^2+2a^2(y^2-x^2)=0$. Durch Differentiiren erhält man

$$(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)+a^2(y\,dy-x\,dx)=0,$$

oder $$(x^2+y^2+a^2)y\,dy+(x^2+y^2-a^2)x\,dx=0.$$

Für $x=0$, wird $y=0$, also $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$. Differentiirt man aber weiter, so kommt:

$$(x^2+y^2+a^2)y\,d^2y+(3y^2+x^2+a^2)dy^2+4xy\,dx\,dy \\ +(y^2+3x^2-a^2)dx^2=0,$$

also, für $x=0,\ y=0,\ dy^2-dx^2=0,\ \frac{dy}{dx}=\pm 1.$

36. Ein Werth von fx kann auch unter anderen Formen als $\frac{0}{0}$ versteckt sein, z. B. $0\cdot\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0, 0^0 u. dgl., und muß dann durch geeignete Transformationen, Entwickelung in Reihen, oder auf anderem Wege ermittelt werden, worüber sich nicht wohl allgemeine Regeln geben lassen. Z. B. das Product $x\,log\,x$ wird $0\cdot\infty$ für $x=0$; sein Werth ist aber in diesem Falle Null. Denn man setze $log\,x=-z$, $x=e^{-z}$, so ist

$$x\ log\ x=\frac{-z}{e^z}=\frac{-z}{1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\cdots},$$

ein Quotient, der für $z=\infty$, offenbar Null wird. — Der Werth von 0^0 ist nicht immer gleich 1. Allerdings ist $x^x=1$ für $x=0$; dagegen ist z. B. $x^{\frac{1}{log\,x}}=e$, für jeden Werth von x, also auch für $x=0$, wo die Formel in 0^0 übergeht. In der That kann man setzen $0^0=0^{1-1}=0^1\cdot 0^{-1}=\frac{0}{0}$; also ist 0^0 eben so unbestimmt als $\frac{0}{0}$.

37. Für die Anwendung sind diejenigen größten oder kleinsten Werthe von fx, von denen in §. 33. gehandelt worden, die wichtigsten. Häufig ist die Function, von welcher ein solcher Werth gesucht wird, unter der Form f(x,y) gegeben, d. h. von zwei veränderlichen Größen x und y abhängig, zwischen welchen aber eine Gleichung $\varphi(x,y)=0$ besteht. In solchen Fällen kann man zwar y mit Hülfe der Gleichung $\varphi=0$ aus f eliminiren, und alsdann nach §. 33. verfahren; man kann aber auch, um zu finden, ob ein Maximum oder Minimum vorhanden ist, ohne Auflösung der Gleichung $\varphi=0$, das Differential

$$df=\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy=0$$

setzen, wenn man zugleich berücksichtigt, daß auch

$$\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy=0$$

sein muß. Eliminirt man sodann $\frac{dy}{dx}$, so kommt

$$\frac{df}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dy}-\frac{df}{dy}\cdot\frac{d\varphi}{dx}=0,$$

welche Gleichung, verbunden mit $\varphi=0$, die gesuchten Werthe von x und y liefern muß. — Um zu entscheiden, ob dieselben wirklich größte oder kleinste Werthe sind, muß man die zweiten Ableitungen entwickeln; nicht selten aber ist es schon aus der Natur der Aufgabe klar, daß ein Maximum oder Minimum vorhanden sein muß, und in solchen Fällen kann man die Entwickelung der Ableitungen zweiter Ordnung unterlassen.

Beispiel. In einer Ebene ist ein Winkel γ und ein Punct gegeben; man soll durch den Punct eine gerade Linie so ziehen, daß das zwischen den Schenkeln des Winkels befindliche Stück derselben möglichst klein sei.

Man nehme den Scheitel des Winkels γ zum Anfange, und seine Schenkel zu Axen der Coordinaten, und nenne x und y die Stücke, welche die gesuchte Gerade von den Schenkeln abschneidet. Es seien ferner a, b die Coordinaten des gegebenen Punctes; so wird die Gleichung der gesuchten Geraden sein: $\frac{u}{x}+\frac{v}{y}=1$ (wo u, v die laufenden Coord. sind), und, da für $u=a,\ v=b$ werden muß, damit die Linie durch den gegebenen Punct gehe, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$, oder $ay+bx=xy$. Ferner erhält man für die Länge l des abgeschnittenen Stückes:

$$l^2=x^2+y^2-2xy\ cos\,\gamma.$$

Da l, und mithin l^2 möglichst klein sein soll, so muß man haben $ldl=0$, also:

$$(x-y\cos\gamma)dx+(y-x\cos\gamma)dy=0;$$

zugleich aber: $(y-b)dx+(x-a)dy=0$; folglich als Endgleichung:

$$(x-y\cos\gamma)(x-a)=(y-x\cos\gamma)(y-b).$$

Eliminirt man y mit Hülfe der Gleichung $ay+bx=xy$, und läßt man den Factor x weg, welcher die Auflösung $x=0$, $y=0$, $l=0$ giebt, die sich von selbst versteht; so kommt die Gleichung $(x-a)^3-b\cos\gamma(x-a)^2+ab\cos\gamma(x-a)-ab^2=0$, durch deren Auflösung x bestimmt werden muß. — Ist z. B. der Winkel $\gamma=\frac{1}{2}\pi$, $\cos\gamma=0$, so folgt:

$$x=a+\sqrt[3]{ab^2} \text{ und eben so } y=b+\sqrt[3]{ba^2},$$

als die abgeschnittenen Stücke der Axen. — Ist $a=b$, so folgt $x=2a=y$.

88. Es kann aber auch verlangt werden, daß $f(x,y)$, ein Max. od. Min. sei, ohne daß zwischen x und y irgend eine Abhängigkeit bestehe. Man setze $u=f(x,y)$, $u'=f(x+k, y+h)$, so wird

$$u'-u=\frac{df}{dx}k+\frac{df}{dy}h+\frac{d^2f}{dx^2}\frac{k^2}{2}+\frac{d^2f}{dx\,dy}hk+\frac{d^2f}{dy^2}\frac{h^2}{2}+\cdots$$

wenn man bei den Gliedern der zweiten Ordnung stehen bleibt. Sobald sich nun x und y so bestimmen lassen, daß zugleich $\frac{df}{dx}=0$, $\frac{df}{dy}=0$, die Glieder der zweiten Ordnung aber nicht verschwinden, so kann ein Maximum oder Minimum vorhanden sein. Man setze zur Abkürzung $\frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}=a$, $\frac{d^2f}{dx\,dy}=2b$, $\frac{1}{2}\frac{d^2f}{dy^2}=c$, so geben die Glieder der zweiten Ordnung, mit Weglassung der höheren,

$$u'-u=ak^2+2bhk+ck^2,$$

wo man h und k hinreichend klein nehmen muß, damit die höheren Glieder keinen Einfluß auf das Zeichen der Differenz $u'-u$ ausüben. Damit nun u ein Max. od. Min. sei, muß die Differenz $u'-u$ ihr Zeichen nicht ändern, wie auch die Zeichen von k und h geändert werden mögen. Man erhält aber aus der vorstehenden Gleichung, vorausgesetzt, daß a nicht Null ist,

$$u'-u=\frac{(ak+bh)^2+(ac-b^2)h^2}{a}=\frac{(aq+b)^2+ac-b^2}{a}h^2,$$

wenn $k=qh$; woraus hervorgeht, daß die Differenz $u'-u$ ihr Zeichen nur dann nicht ändern wird, wenn $ac-b^2$ nicht <0 ist. Denn wäre dieser Werth negativ, so könnte man der ganz unbestimmten Größe q sowohl Werthe geben, die den Zähler positiv, als andere, die ihn negativ machten. Ist aber $ac-b^2>0$, so kann offenbar weder a noch c gleich Null sein, und beide müssen gleiche Zeichen haben; alsdann wird $u'-u$ positiv oder negativ, je nachdem a positiv oder negativ ist.

Ein Maximum oder Minimum der Function $f(x,y)$ findet also Statt, wenn $\frac{df}{dx}=0$, $\frac{df}{dy}=0$, die Glieder der zweiten Ordnung $ak^2+2bhk+ch^2$ aber so beschaffen sind, daß $ac-b^2$ positiv ist. Und zwar findet das Max. Statt, wenn a, und mithin auch c, beide negativ; das Min., wenn a und c beide positiv sind. Auch giebt es ein Maximum oder Minimum, wenn $ac-b^2=0$ ist, ohne daß a und c, beide zugleich, Null sind. — Werden die Glieder der zweiten Ordnung mit denen der ersten zugleich Null, so muß man zu den höheren Ordnungen fortgehen, um zu entscheiden, ob überhaupt ein Max. oder Min. vorhanden ist, und welches von beiden. Dies soll jedoch hier nicht weiter ausgeführt werden.

Beispiel. Es sei $f(x,y)=xy(m-x-y)$, so wird $\frac{df}{dx}=x(m-x-2y)$, $\frac{df}{dy}=y(m-y-2x)$. Die Glieder zweiten Ordnung sind $-2yk^2+(m-2x-2y)kh-2xh^2$. Man erhält daher zur Bestimmung des Größten oder Kleinsten

$m-x-2y=0$, $m-y-2x=0$, woraus $x=y=\frac{1}{3}m$. Die Glieder der zweiten Ordnung sind

$$-\tfrac{2}{3}m(k^2+\tfrac{1}{2}kh+h^2)=-\tfrac{2}{3}m[(k+\tfrac{1}{4}h)^2+\tfrac{15}{16}h^2];$$

daher findet ein größter Werth Statt, wenn m positiv, ein kleinster, wenn m negativ ist. Der Werth von f ist dabei $\left(\frac{m}{3}\right)^3$.

39. Das wichtigste hierher gehörige Beispiel ist die Methode der kleinsten Quadrate, deren man sich bedient, um aus einer großen Anzahl von Beobachtungen diejenigen Resultate zu erhalten, welche mit der Gesammtheit der Beobachtungen am besten übereinstimmen. Es sei z. B. y eine Function von x von folgender Form: $y=ax^m+bx^n+cx^p$; man kennt die Exponenten m, n, p, welche häufig z. B. die Zahlen 0, 1, 2, oder 1, 2, 3 sind; und zur Bestimmung der Coefficienten a, b, c hat man für zahlreiche Werthe von x die entsprechenden Werthe von y beobachtet. Wären diese Werthe von y genau, so brauchte man deren zur Bestimmung der drei Coefficienten a, b, c nur drei; da sie aber alle mit Beobachtungs-Fehlern behaftet sind, so wird, wenn man sich für a, b, c die richtigen oder wenigstens die der Wahrheit möglichst nahe kommenden Werthe, für x und y aber die zusammengehörigen Beobachtungswerthe gesetzt denkt, die Gleichung zwischen x und y niemals genau erfüllt werden, oder die Differenz

$$ax^m+bx^n+cx^p-y=u$$

wird niemals genau Null sein, sondern bald einen positiven, bald einen negativen Fehler darstellen. Man kann sie aber nicht unmittelbar als das Maaß des Fehlers ansehen, weil es in der Natur der Sache liegt, daß das Maaß des Fehlers immer positiv sein muß, in welchem Sinne derselbe auch Statt gefunden habe; indem sonst ein negativer Fehler als ein Vortheil, im Gegensatze eines positiven Fehlers, angesehen werden müßte, was offenbar widersinnig ist. Man wählt demnach das Quadrat von u zum Maaße des Fehlers, und bestimmt die unbekannte Werthe von a, b, c so, daß die Summe aller durch die Quadrate von u gemessenen Fehler, möglichst klein sei. Man setze demnach

$$ag_1+bh_1+cl_1-y_1=u_1,$$
$$ag_2+bh_2+cl_2-y_2=u_2,$$

allgemein: $$ag_n+bh_n+cl_n-y_n=u_n;$$

in welchen Gleichungen g_1, h_1, l_1 die Werthe bedeuten, welche die Potenzen x^m, x^n, x^p für $x=x_1$ erhalten, wobei y_1 der beobachtete Werth von y ist; eben so wie g_2, h_2, l_2 dem Werthe x_2 entsprechen, für welchen y_2 der beobachtete Werth von y ist; u. s. f. für die übrigen. Alsdann soll also die Summe $u_1{}^2+u_2{}^2+\cdots+u_n{}^2$ ein Minimum sein; oder

$$(ag_1+bh_1+cl_1-y_1)^2+(ag_2+bh_2+cl_2-y_2)^2+\cdots=\text{Min.}$$

Da die Werthe von a, b, c unabhängig von einander sind, so muß, um vorstehende Quadratsumme möglichst klein zu machen, jede ihrer drei Ableitungen nach a, b, c für sich Null gesetzt werden. Nimmt man also die Ableitung zuerst nach a, und setzt sie Null, so erhält man folgende Gleichung:

$$(ag_1+bh_1+cl_1-y)g_1+(ag_2+bh_2+cl_2-y_2)g_2+\cdots=0,$$

welche zur Abkürzung folgendermaßen geschrieben werden mag:

$$a\Sigma g^2+b\Sigma hg+c\Sigma hl=\Sigma gy.$$

Auf dieselbe Weise erhält man noch zwei Gleichungen, indem man die Ableitungen nach b und c Null setzt, nämlich:

$$a\Sigma gh+b\Sigma h^2+c\Sigma hl=\Sigma hy.$$
$$a\Sigma gl+b\Sigma hl+c\Sigma l^2=\Sigma ly.$$

Aus diesen drei Gleichungen sind die Werthe von a, b, c zu berechnen, welche sich der Gesammtheit der Beobachtungen am besten anschließen. Will man sich noch überzeugen, daß diese Werthe wirklich die kleinste Quadratsumme liefern, so setze man $a+\alpha$, $b+\beta$, $c+\gamma$ für a, b, c; alsdann geht u_1 in $u_1+g_1\alpha+h_1\beta+l_1\gamma$, u. d. Quadratsumme $u_1{}^2+u_2{}^2+\cdots u_n{}^2$ oder Σu^2 in $\Sigma(u+g\alpha+h\beta+l\gamma)^2$ über. Entwickelt man diesen Ausdruck, so kommt $\Sigma u^2 + \Sigma(g\alpha + h\beta + l\gamma)^2$, weil die Glieder der ersten Ordnung, nämlich $2\Sigma u(g\alpha + h\beta + l\gamma)$ oder $2\alpha\Sigma ug + 2\beta\Sigma uh + 2\gamma\Sigma ul$ Null sind. Man sieht also, daß die Glieder der zweiten Ordnung, nämlich $\Sigma(g\alpha + h\beta + l\gamma)^2$ immer positiv bleiben; daß also wirklich ein Minimum von Σu^2 Statt findet. Indessen ist es schon von selbst einleuchtend, daß die Quadratsumme einen bestimmten größten Werth nicht hat, einen kleinsten dagegen haben muß.

Anmerkung. Wenn nur eine Größe x gesucht wird, für welche man bei verschiedenen Beobachtungen die Werthe $a_1, a_2, \cdots a_n$ gefunden hat, so muß man, nach dieser Regel, x so bestimmen, daß

$$(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots + (x-a_n)^2 = \text{Min.}$$

wird. Hieraus ergiebt sich sofort $x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ d. h. das arithmetische Mittel aus den beobachteten Werthen.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der krummen Linien und Flächen.

Ebene Curven.

40. Wenn zur Bestimmung einer Curve die Gleichung $f(x,y)=0$ zwischen rechtwinklichen Coordinaten x und y gegeben ist; so wird angenommen, daß weder die Function $f(x,y)$, noch irgend eine ihrer partiellen Ableitungen, wie $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$, u. s. w. vieldeutig sei, sondern daß, wenn für x und y beliebige Werthe gesetzt werden, die Function f und ihre Ableitungen jedesmal nur einen bestimmten Werth erhalten. Ist also die vorgelegte Gleichung algebraisch, so mache man sie rational; überhaupt aber beseitige man jede Vieldeutigkeit, welche das Zeichen für irgend eine Operation noch übrig lassen könnte, durch eine bestimmte Annahme über die Bedeutung desselben. Dessen ungeachtet giebt es zuweilen noch einzelne Werthe von x und y, welche die Function f oder ihre Ableitungen unbestimmt machen können (vergl. Anm. zu §. 20.); man wird aber leicht ersehen, in wie weit die folgenden Sätze für solche besondere Werthe zu gelten aufhören, deren übrigens künftig nicht weiter erwähnt werden soll.

In der Curve $f(x,y)=0$ seine zwei Puncte a und b beliebig, aber doch so gewählt, daß zwischen ihnen ein Bogen ab ununterbrochen fortläuft (Fig. 1.). Werden die Coordinaten dieser Puncte durch x, y; x', y' bezeichnet, so ist die Gleichung der Sehne ab:

$$v - y = \frac{y'-y}{x'-x}(u-x). \qquad \text{(u und v sind laufende Coordinaten.)}$$

Dreht man diese Gerade um den festbleibenden Punct a so, daß der zweite Durchschnitt b sich dem ersten immer mehr nähert, so wird derselbe (b) endlich mit diesem (a) zusammenfallen. Dabei geht der Quotient $\frac{y'-y}{x'-x}=\frac{bc}{ac}$ durch eine stetige Folge von Werthen endlich in das Verhältniß der verschwindenden Zunahmen von y und x, d. i. in $\frac{dy}{dx}$ über; und man erhält die folgende Gleichung für diejenige gerade Linie, welche die Richtung der verschwindenden Sehne in a bezeichnet:

$$v-y=\frac{dy}{dx}(u-x).$$

Diese gerade Linie heißt die Berührungslinie od. Tangente. Die Gleichung einer im Berührungspuncte auf ihr senkrecht stehenden Geraden (der Normale) ergiebt sich hieraus sofort:

$$u-x+\frac{dy}{dx}(v-y)=0.$$

Um das Verhältniß $\frac{dy}{dx}$ zu finden, braucht man nur die Gleichung $f=0$ zu differentiiren, und hierauf die Coordinaten des Punctes a einzusetzen. Schreibt man für $\frac{dy}{dx}$ seinen Werth, wie er sich aus der Gleichung $\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0$ ergiebt, so erhält man eine andere Form für die Gleichung der Tangente, nämlich $\frac{df}{dx}(u-x)+\frac{df}{dy}(v-y)=0$. Um mithin für jede beliebige Curve die Gleichung der Tangente zu erhalten, differentiire man die Gleichung der Curve; dies giebt $\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy=0$; und schreibe hierauf $u-x$ statt dx, und $v-y$ statt dy. — Die Gleichung der Normale läßt sich schreiben:

$$\frac{df}{dy}(u-x)=\frac{df}{dx}(v-y).$$

Es sei α der Winkel, welchen die Tangente mit der Axe der x einschließt und der allemal in dem Sinne von der positiven Axe der x nach der positiven Axe der y gezählt werden muß, so ist $tg\,\alpha=\frac{dy}{dx}$. Werden also z. B. diejenigen Tangenten verlangt, welche gegen die Axe der x die gegebene Neigung α haben, so erhält man zur Bestimmung der sämmtlichen Berührungspuncte dieser parallelen Tangenten die beiden Gleichungen

$$f(x,y)=0 \quad \text{und} \quad \frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\cdot tg\,\alpha=0.$$

Für diejenigen Puncte insbesondere, wo die Tangente der Abscisse parallel ist, wird $\frac{dy}{dx}=tg\,\alpha=0$; da aber, wo sie der Ordinate parallel ist, wird $\frac{dx}{dy}=cotg\,\alpha=0$. — Dabei findet z. B. ein Maximum der Ordinate Statt, wenn, indem $\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ nicht Null, sondern endlich und negativ ist, ein Minimum, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist.

Beispiel. Die Gleichung für einen Kegelschnitt, $y^2=2mx+nx^2$, giebt differentiirt: $y\,dy=(m+nx)dx$; mithin die Gleichung der Tangente: $y(v-y)=(m+nx)(u-x)$, oder $yv-(m+nx)u=mx$, weil $y^2-nx^2-mx=mx$ ist; wo x und y die Coordinaten des Berührungspunctes, u und v die Coordinaten eines beliebigen Punctes der Tangente bedeuten.

41. Unter allen Geraden, welche durch einen Punct a der vorgelegten Curve gezogen werden können, schließt sich die Tangente am nächsten an die Curve an, so daß sich keine andere Gerade in der Nähe des Berührungspunctes zwischen ihr und der Curve hindurchgehend ziehen läßt. Denn es seien $x'=x+k$, $y'=y+h$, die Coordinaten eines dem Berührungspuncte beliebig nahen Punctes der Curve; man denke sich die Gleichung

$f(x,y)=0$ nach y aufgelöst, und es sei $y=\varphi x$ der Ausdruck für den Ast der Curve, in welchem sich a befindet; d. h. $y=\varphi x$ stelle diejenige Wurzel der Gleichung $f(x,y)=0$ vor, welche, sobald für x die Abscisse des Punctes a gesetzt wird, die Ordinate desselben Punctes als den Werth von φx giebt; — so hat man

$$y'=\varphi(x+k)=\varphi x+k\varphi'(x+\Theta k);\quad (\Theta \text{ zwischen } 0 \text{ u. } 1),$$

vorausgesetzt, daß $\varphi' x$ für den Punct a nicht unendlich groß wird. Die Gleichung der Tangente an demselben Puncte ist $v-y=\varphi' x(u-x)$, mithin, $u=x'=x+k$, und $v=v'$ gesetzt, $v'=\varphi x+\varphi' x\cdot k$. Für eine andere durch a gehende Gerade sei $v-y=A(u-x)$, und wieder, $u-x=k$, $v-y=v_1$ gesetzt, $v_1=\varphi x+Ak$. Daher beträgt der Unterschied zwischen der Ordinate der Curve und der Tangente, für den Punkt, dessen Abscisse $x'=x+k$ ist, $y'-v'=[\varphi'(x+\Theta k)-\varphi' x]k$; dagegen der Unterschied zwischen der Ordinate der Curve und der Geraden, für dieselbe Abscisse x', $y'-v_1=[\varphi'(x+\Theta k)-A]k$. Indem nun k sich der Null nähert, nähert sich auch $\varphi'(x+\Theta k)-\varphi' x$ offenbar der Null, dagegen $\varphi'(x+\Theta k)-A$ dem von Null verschiedenen Werthe $\varphi' x-A$; daher wird nothwendig für sehr kleine Werthe von k, der Unterschied $y'-v_1$, d. h. die Abweichung der Curve von ihrer Tangente, in der Richtung der Ordinate gemessen, kleiner als die der Curve von der Geraden; folglich kann die Gerade nicht zwischen der Curve und ihrer Tangente hindurchgehen; w. z. b. w.

Anmerkung. Wenn $\frac{dy}{dx}=\varphi' x$ unendlich groß ist, so findet die obige Gleichung $y'=\varphi x+\varphi'(x+\Theta k)\cdot k$ nicht Statt; alsdann kann man aber umgekehrt x als Function von y betrachten, so daß $\frac{dx}{dy}=0$, und $x=\psi y$, $x'=\psi y+\psi'(y+\Theta h)\cdot h$ zu setzen ist, worauf der Beweis der nämliche bleibt.

42. Vorausgesetzt, daß $\frac{dy}{dx}=\varphi' x$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi'' x$ reelle und endliche Werthe haben, kann man setzen:

$$y'=\varphi(x+k)=\varphi x+\varphi' x\cdot k+\varphi''(x+\Theta k)\cdot\frac{k^2}{2}.$$

Da nun für die Tangente $v'=\varphi x+\varphi' x\cdot k$ ist, so drückt $y'-v'=\varphi''(x+\Theta k)\frac{k^2}{2}$ den Unterschied zwischen der Ordinate der Curve und der Tangente in der Nähe des Berührungspunctes aus, welcher Unterschied mithin stets gleiches Zeichen mit $\varphi''(x+\Theta k)$ hat. Man kann k immer so klein annehmen, daß y' und v' gleiche Zeichen haben. Ferner liegt offenbar die Tangente auf der der Abscisse zugekehrten Seite der Curve oder auf der davon abgekehrten, je nachdem der Werth von y', abgesehen vom Zeichen, größer oder kleiner ist, als der von v'. In dem ersteren Falle haben y' und $y'-v'$ gleiche Zeichen, in dem zweiten Falle (wenn y' näher an Null ist als v') haben sie verschiedene Zeichen; mithin haben auch y' und $\varphi''(x+\Theta k)$ in dem ersten Falle gleiche, im zweiten verschiedene Zeichen, und folglich (da man allemal den Werth von k so klein nehmen kann, daß y und y', $\varphi'' x$ und $\varphi''(x+\Theta k)$ gleiche Zeichen haben), werden auch y und $\varphi'' x=\frac{d^2y}{dx^2}$ gleiche oder ungleiche Zeichen haben, je nachdem die Tangente auf der der Abscisse zugekehrten oder auf der davon abgekehrten Seite der Curve liegt. Da aber die Tangente sich immer auf der erhabenen Seite der Curve befindet, so erhält man folgenden Satz:

In irgend einem ihrer Puncte kehrt die Curve der Axe x ihre erhabene oder hohle Seite zu, je nachdem für diesen Punct die Ordinate y und ihre zweite Ableitung $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleiche oder ungleiche Zeichen haben. — Wenn $y=\varphi x$ durch Null hindurchgehend sein Zeichen ändert, dabei aber $\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi'' x$ endliche und von Null verschiedene Werthe von gleichen Zeichen behält; so kehrt die Curve auf der einen Seite ihre hohle, auf der andern ihre erhabene Seite der Abscisse zu, wobei sie in ihrem Laufe gar keine Aenderung erleidet (Fig. 2.).

Wenn aber $\frac{d^2y}{dx^2}$ Null wird, y mag gleichfalls verschwinden oder nicht, so schließt die Curve an dieser Stelle sich enger an die Tangente an, mit der sie eine Berührung der zweiten Ordnung hat. Verändert $\frac{d^2y}{dx^2}$ bei diesem Durchgange durch Null sein Zeichen, so geht die Curve von einer Seite der Tangente auf die andere über; ein solcher Punct heißt ein Wendepunct; behält aber $\frac{d^2y}{dx^2}$ sein Zeichen, so bleibt die Curve auf derselben Seite der Tangente, und es findet nur eine Berührung zweiter Ordnung Statt.

Im Allgemeinen findet überhaupt eine Berührung nter Ordnung mit der Tangente Statt, sobald die sämmtlichen Ableitungen von $y=\varphi x$ von der zweiten $\varphi''x$ bis zur nten $\varphi^n x$ zugleich verschwinden. Dabei wird, wenn weder $\varphi' x$ noch $\varphi^{n+1}(x)$ unendlich sind, für die Curve:

$$y'=\varphi x+\varphi' x\cdot k+\varphi^{n+1}(x+\Theta k)\cdot\frac{k^{n+1}}{(n+1)!},$$

und für die Tangente $v'=\varphi x+\varphi' x\cdot k$. Hieraus ergiebt sich, daß allgemein der Unterschied der Ordinaten

$$y'-v'=\varphi^{n+1}(x+\Theta k)\cdot\frac{k^{n+1}}{(n+1)!}$$

in der Nachbarschaft des Punctes (x,y) sein Zeichen ändert, je nachdem k^{n+1} für sehr kleine Werthe von k, mit ungleichen Zeichen, entgegengesetzte Zeichen erhält, oder nicht; mithin je nachdem $n+1$ ungerade oder gerade ist. In dem ersten Falle wird die Curve von der Tangente in dem Berührungspuncte zugleich geschnitten, in dem zweiten nicht. Also ist überhaupt mit einer Berührung nter Ordnung ein Wendepunct verbunden oder nicht, je nachdem n gerade oder ungerade, oder je nachdem die erste nicht mehr verschwindende Ableitung (die $n+1$ te) von ungerader oder gerader Ordnung ist.

Beispiel. Für $y=x^3$ wird $\frac{dy}{dx}=3x^2$, $\frac{d^2y}{dx^2}=6x$, $\frac{d^3y}{dx^3}=6$. Daher findet für $x=0$, $y=0$ eine Berührung zweiter Ordnung mit der Axe der Abscissen, und zugleich ein Wendepunct Statt. Uebrigens kehrt die Curve überall ihre erhabene Seite der Abscisse zu (Fig. 3.), weil y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ überall gleiche Zeichen haben.

Für $y=x^4$ wird

$$\frac{dy}{dx}=4x^3,\ \frac{d^2y}{dx^2}=12x^2,\ \frac{d^3y}{dx^2}=24x,\ \frac{d^4y}{dx^4}=24.$$

Daher findet im Anfange der Coordinaten eine Berührung der dritten Ordnung, aber kein Wendepunct Statt (Fig. 4.).

43. Es wird, wie bisher, angenommen, daß die erste Ableitung von y, $\frac{dy}{dx}$, einen endlichen Werth hat. (Vgl. Anm. zu §. 41.) Alsdann ist ein merkwürdiger Punct angezeigt, wenn die zweite, oder überhaupt eine höhere (n te) Ableitung unendlich groß wird, indem die vorhergehenden endlich bleiben. — Um die Beschaffenheit eines solchen Punctes mit größerer Klarheit zu bestimmen, soll die Untersuchung auf algebraische Functionen beschränkt werden. Es sei also f(x,y) eine algebraische, rationale, ganze Function von x und y, und $f(x,y)=0$ die vorgelegte Gleichung der Curve. Es ist klar, daß die sämmtlichen partiellen Ableitungen von f nach x und y ebenfalls rationale und ganze Functionen sind. Nun sei λ der größte gemeinschaftliche Factor der beiden Polynome $\frac{df}{dx}$ und $\frac{df}{dy}$, also $\frac{df}{dx}=\lambda\cdot\varphi$,

$\frac{df}{dy}=\lambda\cdot\psi$, wo λ, φ, ψ drei ganze Functionen von x und y sind, von denen die beiden letzten keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Es ist mithin

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{df}{dx} : \frac{df}{dy} = -\varphi : \psi,$$

und man überzeugt sich leicht, daß bei fortgesetzter Differentiation die höheren Ableitungen wie $\frac{d^ny}{dx^n}$ von der Form $\frac{P}{Q}$ sein müssen, in welcher P und Q zwei ganze Functionen von x und y sind, Q aber nur eine Potenz von ψ sein kann. Wenn nun für irgend einen endlichen Werth von x und einen entsprechenden endlichen Werth von y, $\frac{d^ny}{dx^n}$ unendlich groß wird, so muß offenbar Q und mithin $\psi=0$ sein. Weil aber $\frac{\varphi}{\psi}$ für diese Werthe von x und y, welche ψ verschwinden machen, einen endlichen Werth behält, so muß zugleich auch φ verschwinden; mithin muß für solche Werthe zugleich $\frac{df}{dx}=0$ und $\frac{df}{dy}=0$ sein, also der Werth von $\frac{dy}{dx}$, unmittelbar aus der algebraischen rationalen Gleichung $f(x,y)=0$ genommen, unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen.

44. Dieser Satz darf jedoch nicht umgekehrt werden; d. h. der Werth von $\frac{dy}{dx}$ kann die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ erhalten, ohne daß deswegen höhere Ableitungen unendlich groß werden. Um die Bedeutung der Form $\frac{0}{0}$ festzustellen, seien a und b Werthe von x und y, für welche zugleich $f(x,y)=0$, $\frac{df}{dx}=0$, $\frac{df}{dy}=0$ wird. Setzt man zunächst blos für x seinen Werth a in diese Gleichungen, so wird der zugehörige Werth b von y die

beiden Gleichungen $f(a,y)=0$ und $\frac{df}{dy}=0$ zugleich befriedigen. Wenn aber ein Werth b von y irgend ein ganzes Polynom φy und zugleich seine Ableitung $\varphi' y$ verschwinden macht, so läßt sich leicht zeigen, daß die Gleichung $\varphi y=0$ wenigstens zweimal die Wurzel $y=b$ enthalten, also durch $(y-b)^n$ theilbar sein muß, wo n wenigstens gleich 2 ist. Denn nach der Voraussetzung ist $\varphi y=(y-b)\psi y$, und zugleich $\varphi' y=(y-b)Fy$, wo ψ und F wieder ganze Polynome sind; mithin, wenn man die Ableitung des Ausdruckes für φy nimmt, wird $\varphi' y=(y-b)\psi' y+\psi y=(y-b)Fy$; daher muß auch ψy durch $y-b$, also φy durch $(y-b)^2$ theilbar sein, w. z. b. w.

Demnach giebt in dem hier besprochenen Falle die Gleichung $f(x,y)=0$, für den Werth $x=a$, mehrere gleiche Werthe b von y, und da jeder Werth von y, der demselben Werthe von x entspricht, einem anderen Aste der Curve zugehört, so müssen in dem Puncte $x=a$, $y=b$ mehrere Aeste zusammentreffen; oder der Punct, wo $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$ wird, ist ein **vielfacher Punct**. Ein solch vielfacher Punct kann oft der geometrischen Anschauung und Zeichnung gänzlich entgehen. Z. B. die Gleichung $y^5=x^3$ giebt 5 Werthe von y, also eben so viele Aeste der Curve, von denen aber nur einer reell ist, während die übrigen vier überall fehlen, außer in dem Anfange der Coordinaten, wo die Gleichung $y^5=0$ fünf gleiche Wurzeln giebt. Dieser Punct ist mithin als ein vielfacher Punct anzusehen. — Aus der Gleichung $y^5=x^3$ erhält man: $5y^4dy=3x^2dx$, also $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$ für $x=0$, $y=0$. Setzt man aber $y=x^{\frac{3}{5}}$, so kommt $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$, oder $\frac{dx}{dy}=\frac{5}{3}\cdot x^{\frac{2}{5}}=\frac{5}{3}y^{\frac{2}{3}}=0$ für $x=0$, $y=0$; ferner $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{10}{9}y^{-\frac{1}{3}}$. Daher wechseln in diesem Puncte x und

$\frac{d^2x}{dy^2}$, indem ersteres durch Null, letzteres durch ∞ geht, beide zugleich ihre Zeichen, welche für positive y positiv, für negative y negativ sind; mithin kehrt die Curve, die Axe der y zugleich berührend und schneidend, derselben überall ihre erhabene, oder der Axe der x ihre hohle Seite zu. Der Anfang der Coord. A ist mithin zugleich ein Wendepunct (Fig. 5.).

In anderen Fällen aber zeigt sich ein solcher Punct, für welchen $\frac{dy}{dx}$ unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, wirklich als ein vielfacher Punct, worin sich mehrere Aeste schneiden, die entweder zugleich in demselben abbrechen (eine Spitze), oder durch ihn hindurchgehen (ein Knoten).

Die Gleichung $y^2=(x-2)(x-3)^2$ giebt $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$ für $x=3$. Löst man sie aber auf, so kommt

$$y=\pm(x-3)\sqrt{x-2},\ \frac{dy}{dx}=\pm\frac{3x-7}{2\sqrt{x-2}},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{3x-5}{4\sqrt{x-2}^3};$$

mithin für $x=3$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=\pm1$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\pm1$. In diesem Puncte P schneiden also die beiden Aeste der Curve BCPD und BEPF einander; es ist ein Knoten (Fig. 6.). Für den Scheitel B ist $AB=x=2$, $y=0$, $\frac{dx}{dy}=0$. Für die Puncte C und E ist

$$x=\tfrac{7}{3},\ \frac{dy}{dx}=0,\ y=\mp\frac{2}{3\sqrt{3}},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3};$$

die Curve ist also an diesen Stellen der Abscisse parallel und der Werth der Ordinate ein Maximum. Uebrigens behalten die höheren Ableitungen $\frac{d^3y}{dx^3}$ u. s. f. für $x=3$, sämmtlich endliche Werthe.

Die Gleichung $(y-x^2)^2=x^5$ giebt differentiirt $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$ für

$x=0$, $y=0$. Wird sie aber aufgelöst, so kommt $y=x^2\pm x^{\frac{5}{2}}$, $\frac{dy}{dx}=2x\pm\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=2\pm\frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}}$. Für $x=0$ wird mithin $\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{d^2y}{dx^2}=2$, dagegen die dritte Ableitung unendlich groß. Hier brechen die beiden Aeste der Curve, indem sie zusammentreffen, ab, weil x nicht negativ werden kann, und es entsteht eine Spitze (A, Fig. 7.). Der eine dieser Aeste, AB, für welchen in der Gleichung das Zeichen + gilt, hat fortwährend positive und wachsende Ordinaten, und kehrt seine erhabene Seite gegen die Abscisse. Der andere Ast ADEF ist gegen die Abscisse erhaben bis zu dem Wendepuncte C, wo $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, $x=\left(\frac{8}{15}\right)^2$, $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}\left(\frac{8}{15}\right)^2$ ist, hierauf steigt er bis zu dem Puncte D, wo ein Maximum von y Statt findet, indem $\frac{dy}{dx}=0$, $x=\left(\frac{4}{5}\right)^2$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-1$ ist, und senkt sich sodann, bis er bei E, wo $x=1$, die Abscisse durchschneidet, von welcher er sich dann auf der anderen Seite immer mehr entfernt.

Die Gleichung $y^2=x^2-x^4$ giebt $\frac{dy}{dx}=\frac{x-2x^3}{y}=\frac{0}{0}$ für $x=0$. Wird sie aufgelöst, so kommt $y=\pm\sqrt{x^2-x^4}$, $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{(2x^2-3)x}{\sqrt{1-x^2}^3}$. Im Anfange der Coordinaten ist daher $\frac{dy}{dx}=\pm1$, $\frac{d^2y}{dx^2}=0$. Die Curve hat mithin hier einen Knoten, in welchem sich zwei Aeste schneiden, und jeder von diesen zugleich einen Wendepunct. Für $x=1$ wird $y=0$ und die Tangente der Ordinate parallel. Dagegen für $x^2=\frac{1}{2}$ wird $y^2=\frac{1}{4}$ und die Tangente der Abscisse parallel. Uebrigens ist die Curve in einem endlichen Raume enthalten, da

x^2 nicht größer als 1 und y^2 nicht größer als $\frac{1}{4}$ werden kann, und sie kehrt der Abscisse überall die hohle Seite zu (Fig. 8.).

Zuweilen giebt es Werthe von x, welchen ein reeller Werth von y entspricht, für den aber die erste, oder überhaupt irgend eine Ableitung, imaginär wird. Von einem solchen Puncte ist gar kein Fortgang auf der Curve möglich; es ist einzelner, der Curve zugeordneter Punct. Z. B. wenn $y=\pm(x+1)\sqrt{x-2}$, so fängt die Curve da an, wo $x=+2$, für kleinere und negative Abscissen aber wird y imaginär. Setzt man jedoch $x=-1$, so wird $y=0$; dies ist ein einzelner zugeordneter Punct (D, Fig. 9.). Man erhält

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3(x-1)}{2\sqrt{x-2}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3(x-3)}{4\sqrt{x-2}^3};$$

die Werthe dieser Ableitungen werden imaginär für $x=AD=-1$. Für $x=AB=2$ wird die Curve der Ordinate parallel; sie ist gegen die Abscisse hohl bis zu dem Wendepuncte C, wo $x=3$, $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ wird.

Für $y=\pm(x+1)^2\sqrt{x-2}$ wird

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{(5x-7)(x+1)}{2\sqrt{x-2}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{3(5x^2-14x+5)}{4\sqrt{(x-2)^3}}.$$

Für $x=-1$ wird $y=0$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ imaginär; diese Werthe geben also einen zugeordneten einzelnen Punct. Ein Wendepunct ist da, wo $5x^2-14x+5=0$, also $x=\frac{7+\sqrt{24}}{5}$ wird.

45. Wenn eine Curve Aeste hat, die sich in das Unendliche erstrecken, so nehmen dieselben oft, je weiter sie fortgehen, desto mehr eine bestimmte Richtung an. Diese Richtung wird durch eine gerade Linie bezeichnet, welcher sich die Curve in ihrem Laufe mehr und mehr annähert, und die als die Tangente eines unendlich entfernten Punctes zu betrachten ist. Ein Beispiel hier-

von liefert die Hyperbel, welche bekanntlich zwei geradlinigte Asymptoten hat. Solche geradlinigte Asymptoten giebt es aber auch bei vielen anderen Curven, und um sie zu finden, muß man untersuchen, ob, für unendlich entfernte Puncte der Curven, die Tangente eine bestimmte Richtung erhält, ob also die Curve sich überhaupt einer geraden Linie mehr und mehr annähert, oder nicht. Man untersucht also zuerst, ob es zulässig ist, in der Gleichung der Curve eine der Coordinaten x, y unendlich groß zu setzen, und welchen Werth dann die andere erhält. Hierauf ist zu untersuchen, ob die allgemeine Gleichung der Tangente $v-y=\frac{dy}{dx}(u-x)$ für solche Puncte eine bestimmte Linie giebt, wozu erforderlich ist, daß in der Gleichung $v=\frac{dy}{dx}u+y-\frac{dy}{dx}\cdot x$ die Größen $\frac{dy}{dx}$ und $y-\frac{dy}{dx}x$ bestimmte endliche Werthe erhalten. Es sei z. B. die Gleichung $y^3+yx^2=bx^2$ gegeben, so erhält man $(3y^2+x^2)dy-2(b-y)x\,dx=0$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(b-y)x}{3y^2+x^2},$$

und $$y-\frac{dy}{dx}x=\frac{3y^3+3x^2y-2bx^2}{3y^2+x^2}=\frac{bx^2}{3y^2+x^2}.$$

Setzt man nun x unendlich, so kann, vermöge der Gleichung $x^2=\frac{y^3}{b-y}$, y nur $=b$ werden, da für $y=\infty$, x^2 negativ werden würde. Die Annahme, $x=\infty$, $y=b$, giebt $\frac{dy}{dx}=0$, $y-\frac{dy}{dx}x=\frac{bx^2}{x^2}=b$. Folglich ist $v=b$ die Gleichung einer Asymptote, die mithin der Abscisse parallel ist. — Uebrigens wird $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$ da wo $x=0$, $y=0$. Wenn man aber die Gleichung $(3y^2+x^2)dy=2(b-y)x\,dx$ zum zweitenmale differentiirt, und hierauf $x=y=0$ setzt, so kommt $\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=0$. Es ist also eine Spitze im Anfange A der Coordinaten, bei welcher zugleich ein Minimum der Ordinate Statt findet, von welchem aus die Curve gegen die Asymptote $y=b$ aufsteigt ($AB=b$. Fig. 10.).

Berührende Curven. Krümmungskreis.

46. Eine Gleichung, die nur zwei Constanten enthält, wie diejenigen der geraden Linie, kann im Allgemeinen nur eine Linie ausdrücken, welche mit einer vorgelegten Curve in irgend einem Puncte eine Berührung erster Ordnung, also für denselben Werth von x, dieselbe Ordinate y und denselben Werth der Ableitung $\frac{dy}{dx}$, wie die Curve, hat. Enthält aber die Gleichung einer Curve mehr als zwei Constanten, so können dieselben im Allgemeinen so bestimmt werden, daß zwischen ihr und einer vorgelegten Curve eine Berührung höherer Ordnung Statt finde. Es seien $f(x,y)=0$ und $\varphi(x,v)=0$ die Gleichungen zweier Curven, in deren erster (A) zur Abscisse x die Ordinate y, in der zweiten (B) zu derselben Abscisse x die Ordinate v gehört. Alsdann findet zwischen A und B eine Berührung $n$ter Ordnung Statt, wenn für dieselbe Abscisse x, $v=y$, $\frac{dv}{dx}=\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$, $\ldots \frac{d^nv}{dx^n}=\frac{d^ny}{dx^n}$ wird. Es sei $\psi(x,w)=0$ die Gleichung einer dritten Curve C, welche mit A in dem Puncte, dessen Abscisse x ist, eine Berührung von einer niedrigeren Ordnung als der $n$ten habe, so daß $y=w$, $\frac{dy}{dx}=\frac{dw}{dx} \ldots \frac{d^my}{dx^m}=\frac{d^mw}{dx^m}$, $(m<n)$; so wird, wenn x in $x'=x+k$, und mithin y, v, w in y', v', w', übergehen, und zugleich $y=Fx$, $v=\Phi x$, $w=\Psi x$ gesetzt wird, also $F'x=\Phi'x=\Psi'x$, u. s. f., vermöge des Taylorschen Satzes:

$$y'-v'=[F^{n+1}(x+\Theta k)-\Phi^{n+1}(x+\Theta k)]\frac{k^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$y'-w'=[F^{m+1}(x+\Theta k)-\Psi^{m+1}(x+\Theta k)]\frac{k^{m+1}}{(m+1)!},$$

in welchen Formeln Θ eine Zahl zwischen 0 und 1, aber nicht überall dieselbe, bezeichnet. — Da m kleiner als n angenommen ist, so wird offenbar, wenn k sehr klein ist, $y'-v'$ der Null näher kommen, als $y'-w'$; also die Curve B sich näher als die Curve C an A anschließen. Wenn daher die Curven A und B mit einander eine Berührung $n$ter Ordnung haben, so kann in der Nähe des Berührungspunctes keine andere Curve C zwischen A und B hindurchgehen, welche mit A eine Berührung von niedrigerer als der $n$ten Ordnung hat.

47. Häufig sind die Coordinaten einer Curve A als Functionen einer dritten Veränderlichen t gegeben, so daß man hat $x=\varphi t$, $y=\psi t$. Soll nun eine Curve B, deren Gleichung $f(x,v)=0$ sei, mit A eine Berührung $n$ter Ordnung haben, so muß wie oben, für dasselbe x,

$$v=y,\ \frac{dv}{dx}=\frac{dy}{dx},\ \ldots \frac{d^nv}{dx^n}=\frac{d^ny}{dx^n}$$

sein. Betrachtet man x, y und v sämmtlich als Functionen von t, so ist $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$, folglich, wenn man weiter differentiirt, und wieder $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dt}$ sämmtlich als Functionen von t betrachtet,

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$\frac{d^3y}{dt^3}=\frac{d^3y}{dx^3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^3+3\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^3x}{dt^3}, \quad \text{u. s. w.}$$

Eben so ist

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt},\quad \frac{d^2v}{dt^2}=\frac{d^2v}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{dv}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \text{u. s. w.}$$

Da nun

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2v}{dx^2},\quad \text{u. s. w.},$$

sein soll, so ergiebt sich aus der Vergleichung der vorstehenden Formeln, daß auch

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2v}{dt^2}=\frac{d^2y}{dt^2},\ \ldots\ \frac{d^nv}{dt^n}=\frac{d^ny}{dt^n}$$

sein muß, wenn eine Berührung $n$ter Ordnung Statt finden soll. Um daher die Constanten in der Gleichung $f(u,v)=0$ der Curve B so zu bestimmen, daß B mit A in dem Puncte x,y eine Berührung $n$ter Ordnung habe, darf man nur u mit x, v mit y vertauschen, und die entstehende Gleichung $f(x,y)=0$ $n$mal differentiiren, indem man x und y als Functionen von t betrachtet, hierauf aber für die Ableitungen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, u. s. f. die Werthe zu setzen, welche sich aus den Gleichungen der Curve A, $x=\varphi t$, $y=\psi t$, ergeben.

48. Die Gleichung eines Kreises $(u-a)^2+(v-b)^2=r^2$ enthält drei Constanten, nämlich den Halbmesser r und die Coordinaten des Mittelpunctes a und b. Man kann daher im Allgemeinen durch einen gegebenen Punct x, y einer Curve einen Kreis (**Krümmungskreis** genannt), so legen, daß derselbe mit der Curve eine Berührung zweiter Ordnung habe. Zu dem Ende setze man die Gleichung

1. $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

und differentiire sie zweimal, indem man a, b, r als unveränderlich ansieht; so kommt:

2. $(x-a)dx+(y-b)dy=0$,
3. $(x-a)d^2x+(y-b)d^2y+dx^2+dy^2=0$.

Die Gleichung 2. zeigt, daß der Mittelpunct des Krümmungskreises in der Normallinie liegt. (Vgl. §. 40 die Gleichung der Normallinie.)

In der Gleichung 3. kann man nur dann $d^2x=0$ setzen, wenn x als unabhängig veränderliche Größe betrachtet wird. Man erhält aber eine größere Allgemeinheit und Symmetrie der Ausdrücke, wenn man weder d^2x noch d^2y Null setzt. — Löst man die vorstehenden drei Gleichungen auf, so erhält man:

$$x-a=\frac{(dx^2+dy^2)dy}{dx\,d^2y-dy\,d^2x},\quad y-b=-\frac{(dx^2+dy^2)dx}{dx\,d^2y-dy\,d^2x};$$

und für den Halbmesser des Krümmungskreises (**Krümmungshalbmesser**) aus 1.:

$$r=\pm\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}.$$

Ist insbesondere $d^2x=0$, so wird

$$a=x-\frac{(dx^2+dy^2)dy}{dx\,d^2y},\quad b=y+\frac{(dx^2+dy^2)dx}{dx\,d^2y};$$

$$r=\pm\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y},\quad \text{oder}\quad r=\pm\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^2\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)}.$$

welcher Ausdruck auch für die vorigen Annahmen gilt, wonach dx nicht als unveränderlich betrachtet wurde (§. 30.). — Das Zeichen, welches man dem Ausdrucke für r beilegt, ist willkürlich; wenn man jedoch eine vorgelegte Curve untersucht, so ist es nöthig, bei der einmal getroffenen Wahl des Zeichens zu beharren.

Beispiel. Für die Parabel, deren Gleichung $y^2=2px$, erhält man $y\,dy=p\,dx$, $y\,d^2y+dy^2=0$; daher

$$dx^2+dy^2=\left(\frac{y^2+p^2}{y^2}\right)dx^2=\left(\frac{p+2x}{2x}\right)dx^2,$$

und $$d^2y=-\frac{p^2}{y^3}dx^2.$$

Daher $$a=3x+p,\ p^2b=-y^3,\ r=\sqrt{\frac{(p+2x)^3}{p}}.$$

49. Wenn man sich an jeden Punct einer Curve den Krümmungskreis gelegt denkt, so liegen die Mittelpuncte aller dieser Kreise in einer Curve. Um diese zu finden, muß man aus den Ausdrücken für die Coordinaten a, b dieser Mittelpuncte, mit Hülfe der Gleichung $f(x,y)=0$, die Größen x und y eliminiren. Z. B. für die Parabel erhält man $x=\frac{a-p}{3}$, $y=-(p^2b)^{\frac{1}{3}}$; setzt man diese Werthe in die Gleichung $y^2=2px$, so kommt $\frac{2p(a-p)}{3}=(p^2b)^{\frac{2}{3}}$, oder $8(a-p)^3=27pb^2$ als Gleichung für die Curve der Krümmungsmittelpuncte der Parabel. Allgemein sind offenbar der Halbmesser des Krümmungskreises, und die Coordinaten seines Mittelpunctes, welche durch die Gleichungen 1. 2. 3. §. 48. bestimmt werden, eben sowohl als y, Functionen von x, wenn man x als unabhängig veränderliche Größe betrachtet. Diese Gleichungen müssen für jeden beliebigen Werth von x identisch bestehen; man kann sie daher nach x differentiiren, indem man nicht allein x und y, sondern auch a, b, r als veränderlich ansieht. Differentiirt man die Gleichung 1., so kommt $(x-a)dx+(y-b)dy=(x-a)da+(y-b)db+rdr$, folglich, wegen 2,

$$(x-a)da+(y-b)db+rdr=0. \qquad 4.$$

Differentiirt man ferner die Gleichung 2., und berücksichtigt die Gleichung 3., so ergiebt sich

$$da\cdot dx+db\cdot dy=0 \quad \text{oder} \quad 1+\frac{db}{da}\cdot\frac{dy}{dx}=0. \qquad 5.$$

Nun ist $v-y=\frac{dy}{dx}(u-x)$ die Gleichung der Tangente der vorgelegten Curve, und $v-b=\frac{db}{da}(u-a)$ die der Tangente der zweiten Curve, in welcher die Krümmungsmittelpuncte liegen; beide stehen, wie aus der Gleichung 5. folgt, senkrecht auf einander; also ist die *Normale* einer Curve zugleich *Tangente* der Curve ihrer Krümmungsmittelpuncte.

Um dieses anschaulich zu machen, denke man sich (Fig. 11.) in mehreren sehr nahe auf einander folgenden Puncten a, b, c, d einer Curve die Normalen errichtet; es schneiden sich je zwei auf einander folgende Normalen, a und b in α, b und c in β, c und d in γ, u. s. w; so bilden die Durchschnittspuncte α, β, γ,.. ein Polygon, dessen Seiten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ u. s. f. sind. Je näher nun die Puncte a, b, c, d,.. einander gebracht werden, desto genauer fallen die Durchschnitte α, β, γ,.. benachbarter Normalen mit den Krümmungsmittelpuncten, und die unendlich kleinen Seiten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$,.. mit den Tangenten der Curve der Krümmungsmittelpuncte zusammen, in welche das Polygon $\alpha\beta\gamma$.. endlich übergeht. Hieraus ersieht man auch, daß die Curve abcd.. sich betrachten läßt als entstanden durch die Abwickelung eines über die Curve der Krümmungsmittelpuncte ($\alpha\beta\gamma$..) gespannten Fadens. Die letztere ($\alpha\beta\gamma$) wird daher auch die *Evolute* der ersteren (abcd), diese dagegen die *Evolvente* von jener genannt. Vgl. noch §. 106.

50. *Beispiel.* Die Curve, welche von irgend einem Puncte eines Kreises beschrieben wird, der ohne zu gleiten, auf einer geraden Linie fortgewälzt wird, heißt *Cycloide*. Es sei durch die Drehung des Kreises der beschreibende Punct C (Fig. 12.), aus der anfänglichen Lage A, in die Lage C gekommen, und B der tiefste Punct des Kreises; so ist der Kreisbogen CB der Länge der Geraden AB gleich. Sind daher $AM=x$, $MC=y$ die Coordinaten eines Punctes C der Cycloide, der dem Drehungswinkel $CDB=\varphi$ entspricht, und wird der Halbmesser des wälzenden Kreises durch a bezeichnet, so hat man:

$$x=AB-MB=AB-CK=a\varphi-a\sin\varphi,$$

und

$$y=DB-BK=a-a\cos\varphi,$$

also $x=a(\varphi-\sin\varphi)$ und $y=a(1-\cos\varphi)$ als Gleichungen der Cycloide. — Differentiirt man dieselben, so kommt:

$$dx=a(1-\cos\varphi)d\varphi=2a(\sin\tfrac{1}{2}\varphi)^2d\varphi,$$
$$dy=a\sin\varphi\, d\varphi=2a\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi;$$

mithin, als Gleichung der Tangente:

$$v-y=cotg\,\tfrac{1}{2}\varphi(u-x).$$

Ferner für die Sehne CB, von dem beschreibenden Puncte C nach dem Stützpuncte B, erhält man, da $a\varphi$ und 0 die Coordinaten von B sind,

$\frac{v-y}{0-y}=\frac{u-x}{a\varphi-x}$ oder weil $\frac{a\varphi-x}{y}=\frac{sin\,\varphi}{1-cos\,\varphi}=cotg\,\tfrac{1}{2}\varphi$ ist, $u-x+cotg\tfrac{1}{2}\varphi(v-y)=0$. Daher folgt, daß die Sehne CB auf der Tangente in C senkrecht steht, oder daß sie zugleich die Normale in C ist.

Aus den Werthen für dx und dy ergiebt sich

$$dx^2+dy^2=a^2d\varphi^2[(1-cos\varphi)^2+sin\varphi^2]=2a^2d\varphi^2(1-cos\varphi),$$

oder: $$dx^2+dy^2=4a^2(sin\tfrac{1}{2}\varphi)^2d\varphi^2.$$

Ferner, wenn φ als unabhängig veränderliche Größe betrachtet, und mithin $d^2\varphi=0$ gesetzt wird, $d^2x=a\,sin\,\varphi d\varphi^2$, $d^2y=a\,cos\,\varphi\,d\varphi^2$, mithin

$$dxd^2y-dyd^2x=a^2d\varphi^3[(1-cos\,\varphi)\,cos\,\varphi-sin\,\varphi\,sin\,\varphi]$$

$$=-2a^2(sin\tfrac{1}{2}\varphi)^2d\varphi^3;\quad \text{also}\quad \frac{dx^2+dy^2}{dxd^2y-dyd^2x}=-\frac{2}{d\varphi}.$$

Setzt man diese Werthe in die allgemeinen Ausdrücke zur Bestimmung des Krümmungskreises (§. 48.), so kommt:

$$u=a(\varphi-sin\,\varphi)+2a\,sin\,\varphi=a(\varphi+sin\,\varphi);$$

$$v=a(1-cos\,\varphi)-2a(1-cos\,\varphi)=-a(1-cos\,\varphi);$$

wenn man durch u und v die Coordinaten des Krümmungspunctes (d. i. a und b in §. 48.) bezeichnet; und für den Krümmungshalbmesser $r=4a\,sin\tfrac{1}{2}\varphi$.

Die beiden Gleichungen $u=a(\varphi+sin\,\varphi)$ und $v=-a(1-cos\,\varphi)$ bestimmen die Evolute der Cycloide. Man setze $u'+u=a\pi$, $v'-v=2a$, so erhält man:

$$u'=a(\pi-\varphi)-a\,sin\,\varphi \quad\text{und}\quad v'=a+a\,cos\,\varphi,$$

oder, wenn $\pi-\varphi=\varphi'$ gesetzt wird,

$$u'=a\varphi'-a\,sin\,\varphi',\ v'=a-a\,cos\,\varphi'.$$

Daher ist die Evolute einer Cycloide wieder eine Cycloide von derselben Gestalt, in der Lage, wie Fig. 13. zeigt. Hier ist ABC eine Cycloide, wie sie durch einmalige Umdrehung des wälzenden Kreises a entsteht; bei fortgesetzter Wälzung des Kreises entstehen immer wieder gleiche Bogen, wie ABC, welchen Umstand auch die Gleichungen der Curve ausdrücken. Ferner ist $AC=2a\pi$, $AD=a\pi$, $BD=DE=2a$, und AEC die Evolute oder die Curve der Krümmungsmittelpuncte von ABC, aus zwei cycloidischen Hälften bestehend. — Die Normale an irgend einen Punct F der Cycloide berührt zugleich die Evolute AEC in einem entsprechenden Puncte G.

Ueber die Auffindung der Wurzeln algebraischer Gleichungen mit einer unbekannten Grösse.

51. Im Folgenden soll der wesentlichste Theil einer Methode vorgetragen werden, nach welcher der französische Academiker Fourier, in der 1831, nach seinem Tode, erschienenen Analyse des équations déterminées, die Zahlenwerthe der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen von beliebigen Graden, mit einer verhältnißmäßig sehr großen Leichtigkeit finden gelehrt hat. Die Herleitung dieser Methode wird, wie angemessen ist, rein algebraisch sein; da aber auch gewisse geometrische Constructionen, welche die Resultate sehr anschaulich machen, nicht zu übergehen waren, so mußte die Theorie der ebenen Curven vorausgesetzt werden, und diese Darstellung ihren Platz nach derselben erhalten.

Es sei fx ein algebraisches Polynom vom nten Grade, nämlich:

$$fx = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + kx + l,$$

dessen höchstes Glied x^n den Coefficienten 1, dessen übrige Glieder aber gegebene reelle Zahlen zu Coefficienten haben. Jede Zahl α, welche an die Stelle von x gesetzt, den Werth von $f\alpha$ gleich Null macht, heißt eine Wurzel der Gleichung $fx = 0$. Wenn es eine solche Zahl α giebt, und das Polynom fx mit der Differenz $x - \alpha$ dividirt wird, so ist der Quotient ein ganzes Polynom vom $n-1$ten Grade; denn da $f\alpha = 0$ ist, so ist

$$\frac{fx}{x-\alpha} = \frac{fx - f\alpha}{x-\alpha} = \frac{x^n - \alpha^n}{x-\alpha} + a \cdot \frac{x^{n-1} - \alpha^{n-1}}{x-\alpha} + \cdots + k,$$

woraus das Behauptete folgt. Setzt man daher $fx = (x-\alpha)\psi x$, so muß, wenn die Gleichung noch eine zweite Wurzel β hat, $\psi\beta = 0$, also ψx durch $x - \beta$, und folglich fx durch das Product $(x-\alpha)(x-\beta)$ theilbar sein. Ist $\beta = \alpha$, so ist fx durch $(x-\alpha)^2$ theilbar, oder die Gleichung hat 2 gleiche Wurzeln α. Ist überhaupt fx durch $(x-\alpha)^m$ theilbar, so hat die Gleichung m gleiche Wurzeln α. Alsdann ist $fx = (x-\alpha)^m \varphi x$, mithin $f'x = m(x-\alpha)^{m-1}\varphi x + (x-\alpha)^m \varphi' x$, u. s. f.; daher ist nicht allein $f\alpha = 0$, sondern auch $f'\alpha = 0$, $f''\alpha = 0$, $\ldots$ $f^{m-1}(\alpha) = 0$, weil alle diese Ableitungen den Factor $x - \alpha$ enthalten. Dagegen ist die folgende Ableitung $f^m(x)$ für $x = \alpha$ nicht mehr Null, vorausgesetzt, daß $\varphi\alpha$ nicht Null, also φx nicht durch $x - \alpha$ theilbar, oder die Wurzel α nicht mehr als m mal vorhanden ist; vielmehr ist $f^m(\alpha) = m!\,\varphi\alpha$. Hieraus folgt, daß die Gleichung $fx = 0$, sobald für $x = \alpha$ das Polynom fx und seine $m - 1$ nächstfolgenden Ableitungen Null werden, die folgende $f^m(\alpha)$ aber nicht, m gleiche Wurzeln α haben muß. Denn hätte sie die Wurzel α mehr als m mal, so müßte $f^m(\alpha)$ noch Null werden; und hätte sie dieselbe weniger als m mal, so könnten nicht alle Ableitungen bis zu $f^{m-1}(\alpha)$ Null sein; nach dem eben Bewiesenen.

52. Diese Sätze, und noch mehrere andere, deren hier nicht erwähnt werden soll, zeigen, daß bei der Aufsuchung der Wurzeln der Gleichung $fx = 0$, die Kenntniß der Wurzeln ihrer Ableitungen $f'x$, $f''x$, u. s. f. von Nutzen sein kann. Nach der Fourierschen Methode muß man in der That, um die Wurzeln der Gleichung $fx = 0$ zu finden, die sämmtlichen Ableitungen von fx in Betracht ziehen.

Man bilde die sämmtlichen Ableitungen von

$$X_0 = fx = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + kx + l;$$

nämlich:

$$X_1 = f'x = nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} + \cdots + k,$$
$$X_2 = f''x = n \cdot n-1 \cdot x^{n-2} + \cdots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$X_n = f^n x = n!.$$

Setzt man in alle diese Ableitungen und in die Function fx einen sehr großen negativen Werth, oder $-\infty$, für x ein, so sieht man leicht, daß der Werth irgend einer derselben $f^{m}(x)$ oder X_m positiv oder negativ ist, je nachdem der Exponent $n-m$ des höchsten Gliedes von X_m gerade oder ungerade ist. Fängt man also von der untersten X_n an, so ist diese, wie für jeden Werth, positiv, die folgende X_{n-1} negativ, X_{n-2} wieder positiv, u. s. f. Schreibt man diese Zeichen, von dem der $n$ten Ableitung X_n anfangend, in eine Reihe, so beginnt diese mit $+$, worauf $-$, dann wieder $+$, u. s. f. abwechselnd folgt; oder die Reihe der Zeichen hat, für $x=-\infty$, n Zeichenwechsel. — Setzt man dagegen $x=+\infty$, so werden alle Ableitungen und die Function positiv, und die Reihe der Zeichen für $x=+\infty$, enthält daher n Zeichenfolgen. Indem also x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, gehen n Zeichenwechsel in den Reihen der Zeichen verloren.

Beispiel. $X=x^3-5x^2-7x-4$. $X_1=3x^2-10x-7$. $X_2=6x-10$. $X_3=6$.

Man bilde folgende Tafel:

	X_3	X_2	X_1	X
$x=-\infty$	$+$	$-$	$+$	$-$
$x=+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$

In der ersten Zeichenreihe, für $x=-\infty$, wechseln die Zeichen dreimal, in der zweiten, für $x=+\infty$, gar nicht, oder alle Zeichenwechsel sind, für $x=+\infty$, verloren gegangen.

53. Werden in die Reihe X_n, X_{n-1}, … X_2, X_1, X zwei Werthe a und b von x gesetzt (von denen b die untere, a die obere Grenze des Intervalles $b-a$ heißen soll, wenn die Differenz $b-a$ positiv ist), die so beschaffen sind, daß weder für sie noch für irgend einen zwischen ihnen liegenden Werth von x, die Function fx oder eine ihrer Ableitungen Null wird; und werden die den Werthen von a und b entsprechenden Zeichenreihen gebildet; so können diese nicht von einander verschieden sein. Wenn sich dagegen bei a und b eine Verschiedenheit in den Zeichenreihen findet, so kann sie nur daher rühren, daß zwischen den Grenzen des Intervalles wenigstens eine der Functionen X, X_1, X_2, … X_{n-1} ihr Zeichen gewechselt hat, und also für einen gewissen Werth von x Null geworden ist. Welche Verschiedenheit in den Zeichenreihen bei a und b nun auch Statt finden mag, so ist einer der Hauptsätze, auf welche das Verfahren, die Wurzeln zu finden, sich stützt, folgender:

Die Anzahl der Zeichenwechsel an der unteren Grenze b kann niemals größer sein, als diejenige an der oberen Grenze a. Denn es werde erstens angenommen, daß zwischen a und b die Function fx einmal verschwinde, für $x=c$, außerdem aber in diesem Intervalle weder fx noch einmal, noch irgend eine Ableitung von fx Null werde. Alsdann muß offenbar jede Ableitung in dem Intervalle $b-a$ ihr Zeichen unverändert behalten, und es kann überhaupt nur bei dem Durchgange von fx durch $fc=0$ eine Aenderung der Zeichen eintreten. Bezeichnet man demnach durch dc eine beliebig kleine positive Größe, und bildet man die Zeichenreihen, welche den Werthen $c-dc$ und $c+dc$ entsprechen, so stimmen diese für alle Ableitungen gänzlich überein, und um den Unterschied der Zeichenwechsel zu finden, braucht man nur die Werthe von X und X_1, für $x=c-dc$ und für $x=c+dc$ in Betracht zu ziehen. Nun ist aber $fc=0$, folglich $f(c+dc)=fc+dcf'c=+dcf'c$, wenn man die höheren Potenzen von dc wegläßt, weil dc beliebig klein, und $f'c$ nicht Null ist; dagegen $f(c-dc)=-dc\cdot f'c$. Man erhält daher folgende Tafel:

	. . . .	X_1	X
$c-dc$	. . . .	$f'c$	$-dcf'c$
c	. . . .	$f'c$	0
$c+dc$	. . . .	$f'c$	$+dcf'c$

Man denke sich hier statt $f'c$ und $dcf'c$ überall blos die Zeichen dieser Größen gesetzt, so ist augenscheinlich, daß, welches Zeichen auch $f'c$ haben mag, die beiden Glieder an der oberen Grenze $c-dc$, einen Zeichenwechsel, dagegen die an der unteren Grenze $c+dc$, eine Zeichenfolge darbieten, und da die übrigen Zeichen in beiden Reihen dieselben sind, so bietet die Reihe an der unteren Grenze einen Zeichenwechsel weniger dar, als die an der oberen Grenze; folglich geht, indem fx Null wird, ein Zeichenwechsel verloren.

54. Man nehme ferner an, die Gleichung habe mehrere gleiche Wurzeln c, z. B. drei, so ist $fc=0$, $f'c=0$, $f''c=0$. Vorausgesetzt nun, daß keine andere Ableitung zugleich noch Null wird, gehen auch immer eben so viele Zeichenwechsel verloren, als gleiche Wurzeln da sind. Es wird hinreichen, dies nur an dem Beispiele von drei gleichen Wurzeln zu zeigen. Man findet

$$f(c+dc)=fc+dcf'c+\frac{dc^2}{2}f''c+\frac{dc^3}{6}f'''c,$$

mit Weglassung der höheren Potenzen; also, weil $fc=0$, $f'c=0$, $f''c=0$, $f(c+dc)=\frac{+dc^3}{6}f'''c$, und eben so

$f(c-dc)=-\frac{dc^3}{6}f'''c$; ferner $f'(c+dc)=\frac{dc^2}{2}f'''c$, $f''(c+dc)=dcf'''c$, u. s. w. Hieraus ergiebt sich folgende Tafel:

	. . .	X_3	X_2	X_1	X
$c-dc$	. . .	$f'''c$	$-dcf'''c$	$\frac{+dc^2}{2}f'''c$	$\frac{-dc^3}{6}f'''c$
c	. . .	$f'''c$	0	0	0
$c+dc$	. . .	$f'''c$	$+dcf'''c$	$\frac{+dc^2}{2}f'''c$	$\frac{+dc^3}{6}f'''c$

woraus augenscheinlich ist, daß bei $c-dc$ drei Zeichenwechsel mehr sind, als bei $c+dc$, also, wenn drei gleiche Wurzeln vorhanden sind, auch drei Zeichenwechsel verloren gehen, w. z. b. w.

55. Man nehme ferner an, daß für $x=c$ eine Ableitung verschwinde. Alsdann ist $f^m(c)=0$, und $f^m(c+dc)=dcf^{m+1}(c)$, $f^m(c-dc)=-dcf^{m+1}(c)$; daher erhält man folgende Tafel:

	. . . .	X_{m+1}	X_m	X_{m+1}	. . .
$c-dc$	. . . .	$f^{m+1}(c)$	$-dcf^{m+1}(c)$	$f^{m-1}(c)$	. . .
c	. . . .	$f^{m+1}(c)$	0	$f^{m-1}(c)$	. . .
$c+dc$	. . . .	$f^{m+1}(c)$	$+dcf^{m+1}(c)$	$f^{m-1}(c)$	. . .

Wenn nun $f^{m+1}(c)$ und $f^{m-1}(c)$ gleiche Zeichen haben, so entstehen folgende Zeichenreihen, je nachdem die Zeichen beide positiv oder negativ sind:

	...	X_{m+1}	X_m	X_{m-1}	...
$c-dc$	...	+	−	+	...
c	...	+	0	+	...
$c+dc$	...	+	+	+	...

	...	X_{m+1}	X_m	X_{m-1}	...
$c-dc$	...	−	+	−	...
c	...	−	0	−	...
$c+dc$	...	−	−	−	...

In jedem dieser Fälle ist offenbar, daß die Reihe bei $c-dc$ zwei Zeichenwechsel mehr hat, als die bei $c+dc$, oder daß, indem die Ableitung $f^m(x)$ Null wird, während die beiden benachbarten gleiche Zeichen haben, zwei Zeichenwechsel verloren gehen.

Haben aber $f^{m+1}(c)$ und $f^{m-1}(c)$ ungleiche Zeichen, so entsteht immer eine der beiden folgenden Zeichenreihen:

	...	X_{m+1}	X_m	X_{m-1}	...
$c-dc$	...	+	−	−	...
c	...	+	0	−	...
$c+dc$	...	+	+	−	...

	...	X_{m+1}	X_m	X_{m-1}	...
$c-dc$	...	−	+	+	...
c	...	−	0	+	...
$c+dc$	...	−	−	+	...

In diesem Falle sind oben so viele Zeichenwechsel als unten, oder es geht kein Zeichenwechsel verloren.

56. Man nehme ferner an, daß mehrere Ableitungen hinter einander verschwinden, die Function fx und die übrigen Ableitungen aber nicht. Es sei

$$f^m(c)=0,\ f^{m-1}(c)=0,\ f^{m-2}(c)=0,\ \dots\ f^{m-\mu}(c)=0;$$

so hat man offenbar, weil $f^{m+1}(c)$ nicht mehr Null ist,

$$f^m(c+dc)=dcf^{m+1}(c);\ f^{m-1}(c+dc)=\frac{dc^2}{2}f^{m+1}(c);\ \text{u. s. w.}$$

$$f^{m-\mu}(c+dc)=\frac{(dc)^{\mu+1}}{(\mu+1)!}f^{m+1}(c).$$

Schreibt man in vorstehenden Formeln $-dc$ statt dc, so erhält man die Werthe der Ableitungen für $c-dc$.

Die für $x=c$ verschwindenden Ableitungen erhalten also an der oberen Grenze $c-dc$ abwechselnde, an der unteren $c+dc$ gleiche Zeichen. Wenn nun die Anzahl $\mu+1$ dieser verschwindenden Ableitungen gerade ist, so haben $f^{m-\mu}(c-dc)$ und $f^{m-\mu}(c+dc)$ gleiche Zeichen; und mithin enthält die Reihe an der oberen Grenze $\mu+1$ Zeichenwechsel mehr als die an der unteren Grenze, oder es gehen $\mu+1$, d. i. eine gerade Anzahl von Z. W. verloren. Wenn aber die Anzahl der verschwindenden Ableitungen ungerade ist, so haben $f^{m-\mu}(c-dc)$ und $f^{m-\mu}(c+dc)$ entgegengesetzte Zeichen, und bilden demnach mit der folgenden nicht verschwindenden Ableitung $f^{m-\mu-1}(c)$, die eine eine Zeichenfolge, die andere einen Zeichenwechsel. Befindet sich dieser Zeichenwechsel an der oberen Grenze $c-dc$, so entspricht ihm an der unteren Grenze eine Zeichenfolge; und es gehen mithin $\mu+2$ Zeichenwechsel verloren. Befindet sich dagegen an der oberen Grenze zuletzt eine Zeichenfolge, so entspricht dieser an der unteren Grenze ein Zeichenwechsel, und die Anzahl der Zeichenwechsel, welche im Ganzen verloren gehen, beträgt $\mu+1-1=\mu$. Dieselbe ist, wie man sieht, in beiden Fällen gerade. — Wenn endlich der Werth $x=c$ mehrere Gruppen auf einander folgende Ableitungen in verschiedenen Theilen der Reihe verschwinden macht, so ist klar, daß man, um die Anzahl der Zeichenwechsel zu finden, die im Ganzen an der unteren Grenze verloren gegangen sind, nur die vorstehenden Sätze auf jede einzelne Gruppe verschwindender Ableitungen anzuwenden braucht. Daher folgt allgemein:

1. An der unteren Grenze können nie mehr Zeichenwechsel vorhanden sein, als an der oberen.
2. So oft fx Null wird, geht allemal ein Zeichenwechsel verloren.
3. So oft nur Ableitungen Null werden, fx aber nicht, geht immer eine gerade Anzahl von Zeichenwechseln verloren, die auch Null sein kann.

Wenn nun die Gleichung des nten Grades, $fx=0$, n reelle Wurzeln hat, so kann kein Zeichenwechsel verloren gehen, ohne daß zugleich fx Null wird. Denn es gehen überhaupt von $-\infty$ bis $+\infty$ nur n Zeichenwechsel verloren, und so oft fx Null wird, geht immer ein Z. W. verloren. — Wenn die Gleichung $n-2$ reelle Wurzeln hat, so müssen zwei Zeichenwechsel verloren gehen, ohne daß fx Null wird; also müssen dieselben durch das Verschwinden von Ableitungen beide zugleich verloren gehen. — Wenn die Gleichung $n-4$ reelle Wurzeln hat, so müssen vier Zeichenwechsel durch das Verschwinden von Ableitungen verloren gehen. Ueberhaupt fehlen der Gleichung so viele Paare von Wurzeln, als Paare von Zeichenwechseln durch das Verschwinden von Ableitungen verloren gehen.

57. Diese Regeln sollen wieder auf die obige Gleichung $x^3-5x^2-7x-4=0$ angewendet werden. Man bilde also die Zeichenreihen, indem man für x nach und nach steigende Werthe, z. B. $-\infty$, -10, -1, 0, 1, u. s. f. einsetzt, wie folgt:

$3x^2-10x-7$
$6x-10$
6

	X_3	X_2	X_1	X		
$-\infty$	+	−	+	−	3 Z. W.	
-10	+	−	+	−	3 Z. W.	
-1	+	−	+	−	3 Z. W.	2 Z. W. verl.
0	+	−	−	−	1 Z. W.	
1	+	−	−	−	1 Z. W.	1 Z. W. verl.
10	+	+	+	+	0 Z. W.	

Es geht also zwischen $-\infty$ und -1 kein Z. W. verloren, dagegen zwei Z. W. zwischen -1 und 0 und einer zwischen 1 und 10. Da aber bei der Grenze 10 alle Zeichenwechsel verschwunden sind, so kann zwischen 10 und $+\infty$ keiner mehr verloren gehen. In einem Intervalle, in welchem kein Z. W. verloren geht, ist auch keine Wurzel zu suchen. Daher können sich, der vorstehenden Tafel zufolge, die Wurzeln nur zwischen -1 und 0 und zwischen 1 und 10 befinden. Zwischen -1 und 0 gehen zwei Z. W. verloren; man kann also noch nicht wissen, ob dies bloß Folge des Verschwindens einer Ableitung ist, oder ob fx in diesem Intervalle zweimal Null wird; ob also die beiden angezeigten Wurzeln fehlen oder vorhanden sind. Zwischen 1 und 10 geht ein Z. W. verloren, also ist es sicher, daß zwischen diesen Grenzen fx einmal Null wird; denn würden nur Ableitungen Null, so müßte eine gerade Anzahl von Z. W. verloren gehen. Mehr als eine Wurzel kann sich aber zwischen den Grenzen 1 und 10 nicht befinden, so wenig als zwischen -1 und 0 mehr als zwei, weil so oft fx Null wird, auch allemal ein Zeichenwechsel verloren geht.

Allgemein kann eine Gleichung in keinem Intervalle mehr Wurzeln haben, als in demselben Zeichenwechsel verloren gehen. Ist die Anzahl der verloren gehenden Zeichenwechsel ungerade, so ist eine oder eine ungerade Anzahl von Wurzeln in dem Intervalle vorhanden. Ist aber die Anzahl der verlorenen Zeichenwechsel gerade, so kann sich in dem Intervalle nur eine gerade Anzahl von Wurzeln befinden, die auch Null sein kann.

Die Aufgabe zerfällt somit in zwei andere: Erstens zu entscheiden, ob angezeigte Wurzeln fehlen oder vorhanden sind; zweitens die vorhandenen zu berechnen.

— Inst. 119

58. Die erste dieser Aufgaben findet gar nicht Statt, wenn in einem Intervalle ein Z. W. verloren geht; denn alsdann ist eine Wurzel in demselben unzweifelhaft vorhanden. Gehen aber in einem Intervalle zwei Z. W. verloren, so können sich entweder zwei Wurzeln darin befinden, oder beide fehlen. In diesem Falle zähle man zuerst, wie viele Wurzeln nicht allein von fx, sondern auch von jeder der Ableitungen $f'x$, $f''x$, ..., in dem Intervalle angezeigt sind und schreibe die Zahlen oder **Zeiger**, welche dieses angeben, zwischen die Reihen der Zeichen. Zu dem Ende braucht man nur zu zählen, wie viele Z. W. von $f^n(x)$

bis zu jeder Ableitung an der oberen Grenze mehr sind als an der unteren. In dem obigen Beispiele war

	X_3	X_2	X_1	X
-1	$+$	$-$	$+$	$-$
	0	0	1	2
0	$+$	$-$	$-$	$-$

Die zweite Ableitung X_2 hat also keine Wurzel zwischen -1 und 0; dagegen hat die erste eine, weil die Zeichen der Ableitungen X_3, X_2, X_1 bei -1 einen Wechsel mehr darbieten als bei 0. Ferner sind 2 Wurzeln der Gleichung $X=0$ angezeigt; daher entsteht die Reihe der Zeiger

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad 2.$$

Ueber diese Reihe der Zeiger ist im Allgemeinen zu bemerken, daß zwei auf einander folgende Zeiger nie um mehr als ± 1 verschieden sein können; oder, wenn z der Zeiger von $f^m(x)$ ist, d. h. die Anzahl der in dem Intervalle angezeigten Wurzeln der Gleichung $f^m(x)=0$, so ist der Zeiger der nächstfolgenden Ableitung $f^{m-1}(x)$ entweder wieder z, oder $z+1$, oder $z-1$; denn durch das Hinzutreten der Ableitung $f^{m-1}(x)$ kann zu den vorigen Zeichenwechseln entweder oben und unten ein Zeichenwechsel oder auch eine Zeichenfolge hinzutreten, wodurch der Zeiger z nicht geändert wird, oder es kann oben ein Zeichenwechsel, unten eine Zeichenfolge entstehen, wodurch der Zeiger $z+1$ sich ergiebt, oder oben eine Zeichenfolge, unten ein Zeichenwechsel, wodurch der Zeiger $z-1$ wird. — Also kann z. B. einem Zeiger 2 nicht 0, sondern nur 1 oder 2 oder 3 vorhergehen oder folgen.

Man betrachte zunächst den Fall, in welchem die Reihe der Zeiger sich mit 0, 1, 2 endigt, auf den hernach alle übrigen zurückgeführt werden sollen. Dieser Fall findet, wie man sieht, in dem vorgelegten Beispiele Statt. Die Gleichung $f'x=0$ hat alsdann keine Wurzel in dem Intervalle; weil der Zeiger von X_2 Null ist; dagegen hat $f'x$ eine Wurzel, die nicht fehlen kann, und von fx sind zwei Wurzeln angezeigt. In diesem Falle müssen die Reihen der Zeichen an den Grenzen a und b des Intervalles sich nothwendig auf eine der beiden folgenden Arten endigen:

1.		X_2	X_1	X
a	…	$-$	$+$	$-$
		0	1	2
b	…	$-$	$-$	$-$

2.		X_2	X_1	X
a	…	$+$	$-$	$+$
		0	1	2
b	…	$+$	$+$	$+$

Offenbar nämlich müssen $f''a$ und $f''b$ gleiche Zeichen haben, denn hätten sie ungleiche Zeichen, so müßte die Function X_2 zwischen diesen Grenzen das Zeichen wechseln, und also Null werden, was nicht der Fall sein kann, weil der Zeiger von X_2 Null ist. Wenn alsdann im Ganzen noch zwei Z. W. verloren gehen sollen, so kann dies nur dadurch geschehen, daß die Folge der drei Glieder $f''a$, $f'a$, fa zwei Zeichenwechsel darbietet, dagegen die Folge $f''b$, $f'b$, fb gar keinen; woraus hervorgeht, daß die Zeichenreihen entweder wie in 1 oder wie in 2. endigen müssen.

Gesetzt es befinden sich zwei reelle Wurzeln α und β zwischen a und b; so sei, wofern nicht beide einander gleich sind, $\beta > \alpha$; mithin $\alpha > a$ und $b > \beta$. Man setze $\alpha = a + u$, $\beta = b - v$, so sind u und v positiv und man hat $f(a+u) = 0$, $f(b-v) = 0$, d. h.

$$fa + uf'(a+\Theta u) = 0, \quad fb - vf'(b-\Theta v) = 0.$$

(Θ ist nicht in beiden Formeln dieselbe Zahl, aber immer ein positiver ächter Bruch).

Daher folgt

$$u = \frac{-fa}{f'(a+\Theta u)} \quad \text{und} \quad v = \frac{fb}{f'(b-\Theta v)}.$$

Aus den obigen Tafeln 1. und 2. ersieht man sofort, daß $\frac{-fa}{f'a}$ und $\frac{fb}{f'b}$ positiv sind, und, da die Werthe von u und v es ebenfalls sind, so folgt, daß $f'a$ und $f'(a+\Theta u)$, so wie $f'b$ und $f'(b-\Theta v)$ gleiche Zeichen haben. Ferner aber ist zu schließen,

daß $\frac{-fa}{f'a}$ kleiner als u ist. Denn, wenn der Fall derjenige in Tafel 1. ist, nimmt $f'x$ von $f'a$ bis $f'b$ beständig ab, weil $f''x$ negativ ist; also ist $f'a$ größer als der ebenfalls positive Werth von $f'(a+\Theta u)$; findet aber der Fall 2. Statt, so ist $-f'a$ positiv und größer als der gleichfalls positive Werth von $-f'(a+\Theta u)$, weil $-f'x$ von a bis b abnimmt, indem $-f''x$ negativ ist; also ist in jedem dieser beiden Fälle $\frac{-fa}{f'a} < u$.

Auf ähnliche Weise findet man, daß $\frac{fb}{f'b} < v$ ist. Folglich ist

$a + \frac{-fa}{f'a} < a + u$, d. i. kleiner als die Wurzel α, dagegen

$b - \frac{fb}{f'b} > b - v$, d. i. größer als die Wurzel β; und mithin sind

$$a' = a - \frac{fa}{f'a} \quad \text{und} \quad b' = b - \frac{fb}{f'b}$$

die Grenzen eines neuen Intervalles $b' - a'$, in welchem die Wurzeln α und β liegen, und welches kleiner ist, als das vorige $b - a$. Man hat also

$$\alpha > a - \frac{fa}{f'a}, \quad \beta < b - \frac{fb}{f'b};$$

oder

$$\alpha - a > \frac{-fa}{f'a}, \quad b - \beta > \frac{fb}{f'b};$$

mithin durch Addition

$$(b-a) - (\beta - \alpha) > \frac{-fa}{f'a} + \frac{fb}{f'b},$$

oder

$$b - a > \beta - \alpha + \frac{-fa}{f'a} + \frac{fb}{f'b}.$$

In dieser Formel ist $\beta - \alpha$ Null oder positiv, daher um so mehr

$$b - a > \frac{-fa}{f'a} + \frac{fb}{f'b}.$$ Kriterium

59. Die Bedeutung dieser Formeln läßt sich durch die

Zeichnung derjenigen Curve, deren Gleichung $y=fx$ ist, sehr anschaulich machen. Es ist klar, daß die Wurzeln der Gleichung $fx=0$ den Abscissen derjenigen Puncte entsprechen, in welchen die Axe x von der Curve geschnitten wird, und die Wurzeln der Ableitung $f'x$ denjenigen Puncten, in welchen die Tangente der Curve der Abscisse parallel wird. Sobald ferner die Curve einen Wendepunct hat, muß $f''x=0$ sein; im Allgemeinen aber kehrt die Curve der Axe x die erhabene oder hohle Seite zu, je nachdem fx und $f''x$ gleiche oder ungleiche Zeichen haben. Betrachtet man nun den Bogen der Curve, welcher sich in dem Intervalle zwischen a und b befindet, in welchem $f''x$ keine, $f'x$ eine, fx zwei (möglicherweise auch fehlende) Wurzeln hat; so bemerkt man, nach T. 1. und 2. des §. 58., daß die Curve sowohl bei a als bei b gegen die Abscisse erhaben ist, daß sie ferner, ohne zwischen diesen Grenzen einen Wendepunct zu haben, in einem Puncte der Abscisse parallel wird. Sind die beiden Wurzeln von fx in dem Intervalle vorhanden, so wird der Bogen von der Axe x zweimal geschnitten (Fig. 14.), fehlen sie aber, so liegt derselbe ganz auf einer Seite dieser Axe, ohne von derselben geschnitten oder berührt zu werden (Fig. 15.). Nun lege man in den Puncten A und B der Curve, welche den Puncten a und b der Axe entsprechen, Tangenten Aa', Bb', so ist z. B. die Gleichung der Tangente in A folgende:

$$y-fa=f'a(x-a).$$

Man findet die Abscisse des Punctes a', in welchem die Tangente die Axe x trifft, indem man $y=0$ setzt, nämlich $x=a-\frac{fa}{f'a}$, und die Differenz $x-a=aa'=\frac{-fa}{f'a}$. (Den Abschnitt aa' der Axe, zwischen der Ordinate und der Tangente eines Punctes A, pflegt man auch die Subtangente zu nennen.) Auf dieselbe Art findet man, vermittelst der Gleichung für die Tangente an B,

$$y-fb=f'b(x-b)$$

die Abscisse x von b' gleich $b-\frac{fb}{f'b}$, und folglich $b-x=\frac{fb}{f'b}=b'b$.

Wenn nun die beiden Wurzeln α und β vorhanden sind, also die Curve von der Axe geschnitten wird (Fig. 14.), so ist augenscheinlich, wie nahe auch A an α, B an β gelange, so lange α und β zwischen A und B bleiben,

$$aa'+\alpha\beta+b'b<ab,$$ bis hier. Kronecker

d. h. in algebraischer Form:

$$\frac{-fa}{f'a}+(\beta-\alpha)+\frac{fb}{f'b}<(b-a)$$

und um so mehr $aa'+b'b<ab$, d. h.

$$\frac{-fa}{f'a}+\frac{fb}{f'b}<(b-a).$$

Wenn aber die beiden Wurzeln fehlen, oder keine Durchschnittspuncte vorhanden sind, so nähern sich die Werthe von $f'a$ und $f'b$ desto mehr der Null, je näher die Puncte a und b von beiden Seiten demjenigen Puncte c kommen (Fig. 15.), in welchem $f'x=0$, oder die Tangente der Abscisse parallel wird. Also muß, indem die beiden Grenzen a und b, zwischen denen eine Wurzel von $f'x$ sich beständig befindet, einander näher rücken, die Summe der Subtangenten $aa'+b'b$, d. h. $\frac{-fa}{f'a}+\frac{fb}{f'b}$ sehr bald dem Intervalle $b-a$ gleich kommen, oder dasselbe übertreffen, und wenn dies ist, so folgt, daß die Curve von der Axe nicht geschnitten wird, oder daß die beiden Wurzeln fehlen. Die beiden Tangenten schneiden einander alsdann zwischen der Axe x und der Curve.

Wenn also in einem Intervalle zwei Zeichenwechsel verloren gehen, und die Reihe der Zeiger sich mit 0, 1, 2 endigt, so berechne man, um zu entscheiden, ob die beiden angezeigten Wurzeln fehlen oder vorhanden sind, die Werthe von $f'a$, fa, $f'b$, fb, und bilde die Summe

$$\frac{-fa}{f'a}+\frac{fb}{f'b}$$

welche, so wie jeder einzelne ihrer Summanden, positiv ist. Findet man, daß diese Summe dem Intervall b—a gleich ist, oder dasselbe übertrifft, so ist bewiesen, daß die beiden Wurzeln fehlen. Findet man dieselbe aber kleiner als das Intervall, so sind die Grenzen a und b einander noch nicht nahe genug, um über die Wurzeln zu entscheiden. Alsdann setze man eine beliebige Zahl c zwischen a und b ein, wodurch das Intervall in zwei kleinere getheilt wird. Auf diesem Wege werden entweder die beiden Wurzeln von einander getrennt, wenn sie vorhanden und ungleich sind, oder man findet bald, daß die nach der obigen Formel berechnete Summe der Subtangenten dem entsprechenden Intervalle gleichkommt oder es übertrifft, also die beiden Wurzeln fehlen. Nur wenn die beiden Wurzeln vorhanden und gleich sind, lassen sie sich nicht trennen. Um in dieser Beziehung ein sicheres Verfahren zu haben, kann man, sobald $\frac{-fa}{f'a}+\frac{fb}{f'b}$ sich noch kleiner findet, als b—a, also das Vorhandensein der Wurzeln noch unentschieden ist, bevor man engere Grenzen einsetzt, untersuchen, ob fx und f'x einen gemeinschaftlichen Factor haben. Findet sich ein solcher, so läßt sich auf ihn die in den bisherigen und noch folgenden §. vorgetragene Methode anwenden, um zu entscheiden, ob er zwischen b und a Null wird. Wird er in diesem Intervalle Null, so sind die beiden gleichen Wurzeln gefunden; wird er es aber nicht, so giebt es keine gleichen Wurzeln, und man ist versichert, daß man durch Einsetzung engerer Grenzen entweder die beiden Wurzeln von einander trennt, oder die Bedingung $\frac{-fa}{f'a}+\frac{fb}{f'b}<b-a$ nicht mehr befriedigt findet, wodurch bewiesen wird, daß die Wurzeln fehlen.

In dem obigen Beispiele waren zwei Wurzeln zwischen —1 und 0 angezeigt, und die Reihe der Zeiger endigte mit 0, 1, 2. Man findet

	X_3	X_2	X_1	X
-1	$+$	$-$	$+6$	-3
0	$+$	$-$	-7	-4

$$\frac{3}{6}+\frac{4}{7}>1.$$

Die Werthe $f(-1)=-3$, $f'(-1)=+6$, $f(0)=-4$, $f'(0)=-7$ sind in dieser Tafel beigefügt. Das Intervall b—a ist $=1$, die Summe

$$\frac{-fa}{f'a}+\frac{fb}{f'b}=\frac{3}{6}+\frac{4}{7}>1;$$

also fehlen die beiden angezeigten Wurzeln.

60. Wenn in einem Intervalle zwei Zeichenwechsel verloren gehen, aber die Reihe der Zeiger sich nicht mit 0, 1, 2 endigt, oder wenn mehr als zwei Zeichenwechsel verloren gehen, so wird man immer wieder auf die vorige Regel zurückgeführt, um zu entscheiden, ob die angezeigten Wurzeln fehlen oder vorhanden sind. Nachdem nämlich die Reihe der Zeiger gebildet ist, gehe man in derselben von der Rechten nach der Linken zurück, bis man zum ersten Male den Zeiger 1 trifft. Alsdann ist der zunächst vorhergehende Zeiger rechts nothwendig 2, weil er nicht größer als 2 und nicht gleich 1, oder gleich Null sein kann; denn wäre er Null, so müßte rechts davon schon einmal der Zeiger 1 vorgekommen sein, was gegen die Annahme ist. Links aber von diesem Zeiger 1 kann entweder der Zeiger 0, oder 1, oder 2 stehen. Ist dieser links folgende Zeiger 0, so hat man unter drei auf einander folgenden Ableitungen X_{m+1}, X_m, X_{m-1}, die Folge der Zeiger 0, 1, 2. Also hat alsdann X_{m+1} in dem Intervalle keine Wurzel, weil sein Zeiger 0 ist, X_m hat eine Wurzel (γ) und von X_{m-1} sind zwei Wurzeln angezeigt, über welche man allemal nach der Regel des vorigen §. entscheiden kann, indem man untersucht, ob die Summe

$$\frac{-f^{m-1}(a)}{f^m(a)}+\frac{f^{m-1}(b)}{f^m(b)}$$

größer ist als das Intervall b—a, oder ob die beiden Wurzeln der Gleichung $X_{m-1}=0$ vorhanden sind. Wenn diese beiden Wurzeln von X_{m-1} fehlen, so ist bewiesen, daß auch zwei der angezeigten Wurzeln der rechts folgenden Ableitungen X_{m-2}, X_{m-3}, ...X_1, so wie der Function X selbst, fehlen. Denn alsdann gehen, durch das Verschwinden der Ableitung $f^m(x)$, für $x=\gamma$, zwei Zeichenwechsel zugleich verloren; also fehlen zwei Wurzeln von fx. Man ziehe sofort von allen Zeigern unter den Functionen X_{m-1}, X_{m-2}, ... X_1, X zwei Einheiten ab, so erhält man eine neue Reihe von Zeigern, in welcher der Zeiger 1 weiter nach der rechten Seite fortgerückt ist, und es ist wieder auf dieselbe Weise zu untersuchen, ob von den noch angezeigten Wurzeln ein zweites Paar fehlt, wenn der letzte Zeiger in der neugebildeten Reihe noch größer als 1 ist.

Wenn aber die beiden Wurzeln von X_{m-1} vorhanden und ungleich sind, so lassen sie sich auch durch Einsetzung engerer Grenzen von einander oder von den Wurzeln der nachstehenden Ableitungen X_{m-2}, X_{m-3}, u. s. f. trennen; wodurch unter allen Umständen der Zeiger 1, welcher dem Ende der Zeigerreihe am nächsten kam, weiter nach der rechten Seite fortgerückt wird. Sind dagegen die beiden Wurzeln von X_{m-1} vorhanden und gleich, so untersuche man, ob diese Wurzeln auch die folgenden Functionen X_{m-2} u. s. f. bis X Null machen; man wird dann immer finden, wie viele Zeichenwechsel durch das Verschwinden von Ableitungen verloren gehen, und wie viele gleiche Wurzeln von X vorhanden sind. Wird keine der Functionen X_{m-2}, X_{m-3} ... X mit X_{m-1} zugleich Null, so gehen durch das gleichzeitige Verschwinden von X_{m-1} und X_m zwei Zeichenwechsel verloren, mithin sind zwei Wurzeln als fehlend angezeigt. Alsdann ziehe man wieder, wie vorhin, zwei Einheiten von den Zeigern von X_{m-1}, X_{m-2}, ... X ab, und untersuche die dadurch entstehende neue Reihe der Zeiger.

Wenn aber der links von 1 stehende Zeiger nicht Null ist, so kann er 1 oder 2 sein; d. h. während zwei Wurzeln von X_{m-1} angezeigt sind, und eine von X_m, so kann auch eine, oder es können zwei Wurzeln von X_{m+1} angezeigt sein, die aber niemals fehlen können. Wenn nämlich in einem Intervalle so viele Wurzeln von X vorhanden, als angezeigt sind, so sind nothwendig auch alle in diesem Intervalle angezeigten Wurzeln der Ableitungen von X vorhanden, weil sonst Zeichenwechsel durch das Verschwinden von Ableitungen verloren gehen, also auch Wurzeln von X fehlen müßten. Wendet man diese Bemerkung auf den vorliegenden Fall an, wo eine Wurzel von X_m angezeigt und mithin auch vorhanden ist, so folgt, daß auch die Wurzeln von X_{m+1}, wenn deren zwei angezeigt sein sollten, nicht fehlen können, wie eben behauptet ist. Ferner können die Wurzeln von X_m und X_{m+1} nicht einander gleich sein, weil dies zwei gleiche Wurzeln von X_m voraussetzen würde, während nur eine Wurzel vorhanden ist. Folglich wird man die Wurzeln von X_{m+1} und X_m allemal von einander trennen, oder den Zeiger von X_{m+1} auf Null bringen können, indem man zwischen die Grenzen des Intervalles neue Werthe einsetzt. Dadurch werden entweder die beiden Wurzeln von X_{m-1} von einander getrennt, d. h. der dem Ende der Reihe zunächst stehende Zeiger 1 dem Ende der Reihe noch näher gebracht, also weiter nach der Rechten fortgerückt; oder es wird, wenn dies nicht geschieht, die Folge der Zeiger 0, 1, 2 erhalten, worauf nach dem Vorhergehenden zu verfahren ist. Durch diese Mittel gelangt man immer dahin, entweder die Wurzeln von fx von einander zu trennen, oder zu finden, daß Zeichenwechsel durch das Verschwinden von Ableitungen verloren gehen, wodurch allemal eben so viele Wurzeln, als der verlorenen Z. W. waren, sich als fehlende ergeben.

Bei dem Einsetzen der Werthe von x kann vorkommen, daß für einen Werth c von x einige Ableitungen Null, und mithin ihre Zeichen unbestimmt werden. Man setze dann, wie schon oben mehrmals geschehen, zwei dem c unendlich nahe Werthe c—dc, c+dc ein, und bestimme hierauf die Anzahl von Zeichenwechseln, welche in diesem unendlich kleinen Intervalle verloren gehen. Ist fc nicht Null, so ist diese Anzahl nothwendig Null oder gerade; und es fehlen eben so viele Wurzeln als sie Einheiten enthält. Ist aber zugleich fc Null, so giebt der Ueberschuß der Anzahl verlorener Zeichenwechsel über die Anzahl der vorhandenen Wurzeln ($=c$), der immer eine gerade Zahl und nie kleiner als Null ist, die Anzahl der in diesem Intervalle fehlenden Wurzeln.

61. Es sei z. B. die Gleichung $x^5+x-1=X=0$ vorgelegt; so erhält man

$X_1=5x^4+1$, $X_2=20x^3$, $X_3=60x^2$, $X_4=120x$, $X_5=120$.

	X_5	X_4	X_3	X_2	X_1	X	
−10	+	−	+	−	+	−	
−1	+	−	+	−	+	−	5 Z. W.
0	+	0	0	0	+	−	
1	+	+	+	+	+	+	0 Z. W.

Zufolge dieser Tafel sind die Wurzeln nur zwischen −1 und +1 zu suchen, weil alle Zeichenwechsel in diesem Intervalle verloren gehen. Da aber der Werth $x=0$ mehrere Ableitungen zugleich verschwinden macht, und mithin ihre Zeichen unbestimmt läßt, so setze man einen unendlich kleinen negativen Werth (<0) und einen unendlich kleinen positiven Werth (>0) ein; so erhält man folgende vollständigere Tafel:

	X_5	X_4	X_3	X_2	X_1	X	
−1	+	−	+	−	+	−	
<0	+	−	+	−	+	−	5 Z. W.
0	+	0	0	0	+	−	
>0	+	+	+	+	+	−	1 Z. W.
1	+	+	+	+	+	+	0 Z. W.

In dem unendlich kleinen Intervalle von <0 bis >0 gehen also vier Zeichenwechsel durch das Verschwinden von Ableitungen verloren; mithin fehlen vier Wurzeln. Die fünfte Wurzel aber befindet sich zwischen 0 und 1.

Die vorgelegte Gleichung sei

$$X=x^4-8x^3+24x^2+2x+1=0.$$

Man findet:

$$X_1=4x^3-24x^2+48x+2.\quad X_2=12x^2-48x+48.$$
$$X_3=24x-48.\quad X_4=24.$$

	X_4	X_3	X_2	X_1	X	
−10	+	−	+	−	+	
−1	+	−	+	−	+	4 Z. W.
	0	0	0	1	2	
0	+	−	+	+	+	2 Z. W.
1	+	−	+	+	+	2 Z. W.
	0	1	2	2	2	
10	+	+	+	+	+	0 Z. W.

Zwischen −1 und 0 gehen zwei Z. W. verloren, und zwischen 1 und 10 wieder zwei. Man bilde in beiden Intervallen die Reihen der Zeiger; diejenige zwischen −1 und 0 endigt, wie zu sehen ist, mit 0, 1, 2. Demnach berechne man

$$f(-1)=32,\ f'(-1)=-74,\ f(0)=1,\ f'(0)=2,$$

so ergiebt sich $\frac{-f'(-1)}{f(-1)}+\frac{f0}{f'0}=\frac{32}{74}+\frac{1}{2}<1.$

Die Grenzen sind demnach noch nicht eng genug, um über die Wurzeln zu entscheiden. Bevor man aber engere Grenzen einsetzt, überzeuge man sich, daß fx und $f'x$ keinen gemeinschaftlichen Factor haben, und mithin gleiche Wurzeln nicht vorhanden sind. Da dieses in der That der Fall ist, so setze man $-\frac{1}{2}$ zwischen −1 und 0; es findet sich

	X_4	X_3	X_2	X_1	X
−1	+	−	+	−	+
		0	0	1	2
$-\frac{1}{2}$	+	−	+	+	+
0	+	−	+	+	+

Die Wurzeln sind demnach zwischen −1 und $-\frac{1}{2}$ angezeigt.

Zugleich ist das Intervall $=\frac{1}{2}$, ferner
$f(-\frac{1}{2})=7\frac{1}{16}$, $f'(-\frac{1}{2})=19\frac{1}{2}$, $f(-1)=32$, $f'(-1)=-74$;
$\frac{32}{74}+\frac{7\frac{1}{16}}{19\frac{1}{2}}>\frac{1}{2}$; mithin fehlen die beiden Wurzeln.

Es sind noch zwei Wurzeln zwischen 1 und 10 angezeigt. Hier ist die Reihe der Zeiger 0, 1, 2, 2, 2. Man berechne demnach $f''(1)=12$, $f'''(1)=-24$, $f''(10)=768$, $f'''(10)=192$; so findet man $\frac{12}{24}+\frac{768}{192}<9$. Also sind die Grenzen noch nicht eng genug. Ehe man aber engere Grenzen einsetzt, untersuche man, ob X_3 und X_2 einen gemeinschaftlichen Factor haben, der zwischen 1 und 10 Null wird. Ein solcher ist vorhanden, nämlich $x-2$. Man setze also den Werth 2 ein, und zugleich zwei andere ihm unendlich nahe (<2 und >2); so ergiebt sich

	X_4	X_3	X_2	X_1	X
<2	+	−	+	+	+
2	+	0	0	+	+
>2	+	+	+	+	+

In dem unendlich kleinen Intervalle zwischen <2 und >2 gehen also 2 Z. W. verloren, ohne daß fx Null wird; also fehlen die beiden Wurzeln.

Die vorgelegte Gleichung hat mithin gar keine reelle Wurzel.

62. Es sei gegeben:

$$X = x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101=0.$$
$$X_1=5x^4-12x^3-72x^2+190x-46.$$
$$X_2=20x^3-36x^2-144x+190.$$
$$X_3=60x^2-72x-144.$$
$$X_4=120x-72.$$
$$X_5=120.$$

	X_5	X_4	X_3	X_2	X_1	X	
−10	+	−	+	−	+	−	5 Z. W.
−1	+	−	−	+	−	+	4 „
0	+	−	−	+	−	−	3 „
1	+	+	−	+	+	−	3 „
		0	1	2	2	3	
10	+	+	+	+	+	+	0 „

Es liegt demnach eine Wurzel zwischen -10 und -1, eine zweite zwischen -1 und 0, weil in jedem dieser Intervalle ein Z. W. verloren geht. Ferner sind zwischen 1 und 10 drei Wurzeln angezeigt, von denen eine gewiß vorhanden ist, so daß nur zu entscheiden bleibt, ob die beiden andern ebenfalls vorhanden sind oder fehlen. In der Reihe der Zeiger findet man 1 zum erstenmale, von der Rechten aus, unter X_3; unter X_2 stehet 2, unter X_4 0 als Zeiger, so daß die Folge 0, 1, 2 vorhanden ist. Man berechne demnach $f''(1)=30$, $f'''(1)=-156$, $f''(10)=15150$, $f'''(10)=5136$; so findet man $\frac{30}{156}+\frac{15150}{5136}<9$; man muß also das Intervall enger machen. Vorher überzeuge man sich aber, daß X_2 und X_3 keinen gemeinschaftlichen Factor haben, und mithin die beiden Wurzeln von X_2 nicht gleich sein können. Da es einen solchen nicht giebt, so setze man z. B. $x=3$ ein, so kommt

	X_5	X_4	X_3	X_2	X_1	X	
1	+	+	−	+	+	−	3 Z. W.
	0	0	1	1	2	2	
3	+	+	+	−	−	−	1 „
10	+	+	+	+	+	+	0 „

Es liegt mithin eine Wurzel zwischen 3 und 10; und zwei sind zwischen 1 und 3 angezeigt. Die Reihe der Zeiger ist 0 0 1 1 2 2; also die Folge 0, 1, 2 nicht vorhanden. Man muß daher durch Einsetzung engerer Grenzen die Wurzel von X_3 von der von X_2 trennen. Man setze $x=2$ ein, so kommt

	X_5	X_4	X_3	X_2	X_1	X
1	+	+	−	+	+	−
2	+	+	−	−	+	−
		0	1	0	1	2
3	+	+	+	−	−	−

Der Zeiger 1 ist dadurch von X_2 nach X_1 fortgerückt, und die Reihe der Zeiger zwischen 2 und 3 endigt mit 0 1 2. Man berechne $f(2) = -21$, $f'(2) = 30$, $f(3) = 32$, $f'(3) = 43$; so kommt $\frac{21}{30} + \frac{32}{43} > 1$; mithin fehlen die beiden Wurzeln.

Die Gleichung hat also drei reelle Wurzeln, die vollständig getrennt sind; eine zwischen -10 und -1, eine zwischen -1 und 0, eine zwischen 3 und 10. Die beiden übrigen Wurzeln fehlen.

Die vorgelegte Gleichung sei

$$X = x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4 = 0;$$

so kommt

$$X_1 = 4x^3 - 3x^2 + 8x + 1,\ X_2 = 12x^2 - 6x + 8,$$
$$X_3 = 24x - 6,\ X_4 = 24.$$

	X_4	X_3	X_2	X_1	X	
−10	+	−	+	−	+	4 Z. W.
−1	+	−	+	−	+	4 „
0	+	−	+	+	−	3 „
	0	1	2	2	3	
1	+	+	+	+	+	0 „

Zwischen -1 und 0 liegt eine Wurzel; zwischen 0 und 1 sind drei angezeigt.

Man findet den Zeiger 1 zum erstenmale, von der Rechten aus, unter X_3; rechts davon 2, links 0; also die Folge 0, 1, 2. Man berechne $f''(0) = 8$, $f'''(0) = -6$; so ist schon

$$\frac{-f''(0)}{f'''(0)} = \frac{8}{6} > 1;$$

also ist es nicht nöthig, noch $\frac{f''(1)}{f'''(1)}$ zu berechnen. Die beiden Wurzeln fehlen. Man ziehe von jedem der Zeiger unter X_2, X_3, X, 2 Einheiten ab; so erhält man die Zeigerreihe

	X_4	X_3	X_2	X_1	X
$\left.\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\}$	.	.	0	0	1

Zwischen 0 und 1 haben also X_2 und X_1 keine reelle Wurzel, X aber eine, welche vollständig von den übrigen getrennt ist.

63. Es ist noch übrig zu zeigen, wie eine Wurzel berechnet werden muß, die von allen übrigen getrennt ist. Man habe also ein Intervall, in welchem sich eine einzige reelle Wurzel von fx befindet, also die Reihe der Zeiger sich mit 1 endigt. Alsdann können noch Wurzeln von $f'x$ und von $f''x$ in diesem Intervalle vorhanden sein; durch Einsetzung engerer Grenzen werden sich dieselben aber von der Wurzel trennen lassen, wenn nicht gerade der besondere Fall eintritt, daß fx und $f''x$ eine Wurzel in diesem Intervalle gemein haben. Dagegen können fx und $f'x$ nicht dieselbe Wurzel haben, weil sonst zwei gleiche Wurzeln von fx vorhanden wären, gegen die Annahme. Man untersuche also, ob fx und $f''x$ einen gemeinschaftlichen Factor haben, der in dem Intervalle Null wird. Ist ein solcher gefunden, so liefert er auch die Wurzel von fx; giebt es aber einen solchen nicht, so theile man das Intervall, bis die Wurzel von fx von denen von $f'x$ und $f''x$ getrennt ist, also die Reihe der Zeiger sich mit 0, 0, 1 endigt.

In dem Beispiele des §. 57. lag eine Wurzel zwischen 1 und 10, und man hatte:

	X_3	X_2	X_1	X
1	+	−	−	−
	0	1	1	1
10	+	+	+	+

Es hat also sowohl X_1 als X_2 noch eine Wurzel zwischen 1 und 10. Setzt man $x=5$ ein, so kommt

	X_3	X_2	X_1	X
1	$+$	$-$	$-$	$-$
5	$+$	$+$	$+$	$-$
		0	0	1
10	$+$	$+$	$+$	$+$

Der Zeichenwechsel geht also zwischen 5 und 10 verloren, und zwischen diesen Grenzen hat fx eine, $f'x$ und $f''x$ haben keine Wurzel mehr, oder die Reihe der Zeiger endigt mit 0, 0, 1.

Sind die Grenzen a und b einander so nahe gerückt, daß die Reihe der Zeiger sich mit 0 0 1 endigt, also weder $f'x$ noch $f''x$ in dem Intervalle Null werden, so müssen $f'a$ und $f'b$, so wie $f''a$ und $f''b$ gleiche Zeichen haben. Da nun die Reihe bei a einen Zeichenwechsel mehr darbieten muß, als die Reihe bei b, so können die beiden Zeichenreihen, wenn die drei letzten Zeiger 0 0 1 sein sollen, nur auf eine der vier folgenden Arten enden:

1.	$\cdots X_2$	X_1	X
a	$\cdots +$	$+$	$-$
	0	0	1
b	$\cdots +$	$+$	$+$

2.	$\cdots X_2$	X_1	X
a	$\cdots -$	$-$	$+$
	0	0	1
b	$\cdots -$	$-$	$-$

3.	$\cdots X_2$	X_1	X
a	$\cdots +$	$-$	$+$
	0	0	1
b	$\cdots +$	$-$	$-$

4.	$\cdots X_2$	X_1	X
a	$\cdots -$	$+$	$-$
	0	0	1
b	$\cdots -$	$+$	$+$

Man bemerkt, daß in jedem dieser vier Fälle fx und $f''x$ an der einen Grenze gleiche, an der anderen Grenze ungleiche Zeichen haben; nämlich in den Fällen 1. und 2. haben fb und $f''b$ gleiche, fa und $f''a$ ungleiche Zeichen; dagegen sind in den Fällen 3. und 4. die Zeichen von fa und $f''a$ gleich, und die von fb und $f''b$ verschieden. Zeichnet man den Bogen der Curve $y=fx$, welcher sich von $x=a$ bis $x=b$ erstreckt, so hat derselbe weder einen Wendepunct, noch wird er der Axe an einer Stelle parallel; ferner kehrt er der Axe an der einen Grenze,

wo fx und $f''x$ gleiche Zeichen haben, seine erhabene, an der anderen Grenze, wo sie ungleiche Zeichen haben, seine hohle Seite zu. Die Grenze, bei welcher er gegen die Axe erhaben ist, heiße die äußere, die, bei welcher er gegen die Axe hohl ist, die innere Grenze. In den Fällen 1. 2. ist also die obere Grenze a zugleich die innere, die untere b zugleich die äußere; in den Fällen 3. 4. ist die obere Grenze zugleich die äußere, die untere zugleich die innere. Diesen Fällen entsprechen der Reihe nach die Figuren 16. α. β. γ. δ.

64. Man kann sich der Wurzel sowohl von der äußeren, als von der inneren Grenze aus nähern, aber auf verschiedene Arten. Es sei die untere Grenze b zugleich die äußere, die obere a die innere, wie in 1. und 2. Man bezeichne die Wurzel x durch $b-\beta$, so ist β positiv, und, weil $f(b-\beta)=0$, $\beta=\frac{fb}{f'(b-\Theta\beta)}$. Findet nun der Fall 1. Statt, so ist $f'x$ positiv, und wächst von $f'a$ bis $f'b$, weil $f''x$ positiv ist; folglich ist $f'b > f'(b-\Theta\beta)$. Ist aber der Fall 2. eingetreten, so ist $-f'b$ positiv und $-f'x$ wächst von $-f'a$ bis $-f'b$, weil $-f''x$ positiv ist, also ist $-f'b > -f'(b-\Theta\beta)$. In beiden Fällen ist

$$\frac{fb}{f'b} \text{ positiv und kleiner als } \beta=\frac{fb}{f'(b-\Theta\beta)};$$

folglich ist $b'=b-\frac{fb}{f'b}$ kleiner als b, aber größer als $b-\beta$; daher stellt b' eine neue untere Grenze der Wurzel dar, die der Wurzel näher ist als die Grenze b, und diese Grenze b' ist zugleich wieder eine äußere.

Man gehe sodann von der oberen und inneren Grenze a aus. Der Werth der Wurzel sei $a+\alpha$, so ist α positiv, und $\alpha=\frac{-fa}{f'(a+\Theta\alpha)}$. Findet nun der Fall 1. Statt, so ist $f'x$ positiv, und wächst von $f'a$ bis $f'b$, weil $f''x$ positiv ist; also ist $f'b > f'(a+\Theta\alpha)$. Findet dagegen der Fall 2. Statt, so ist

$-f'x$ positiv, und wächst von $-f'a$ bis $-f'b$, weil $-f''x$ positiv ist; also ist $-f'b > -f'(a+\Theta\alpha)$. In beiden Fällen $\frac{-fa}{f'b}$ positiv und kleiner als α; daher ist $a' = a - \frac{fa}{f'b}$ eine neue obere und innere Grenze, welche der Wurzel $a+\alpha$ näher ist, als die vorige Grenze a.

Es sei ferner die obere Grenze a zugleich die äußere, wie in 3. und 4. In beiden Fällen sieht man leicht, daß der positive Werth von $f'a$ größer ist, als alle andere Werthe, welche $f'x$ in dem Intervalle von a bis b erhält. Wird daher die Wurzel wieder mit $a+\alpha$ bezeichnet, so ist α positiv, und $a+\alpha = a - \frac{fa}{f'(a+\Theta\alpha)}$; zugleich aber $\frac{-fa}{f'a}$ positiv und kleiner als $\alpha = \frac{-fa}{f'(a+\Theta\alpha)}$; daher stellt $a' = a - \frac{fa}{f'a}$ eine neue obere und äußere Grenze dar, welche der Wurzel näher ist, als die Grenze a.

Geht man endlich von der unteren und inneren Grenze b aus, und setzt wieder die Wurzel gleich $b-\beta$, so ist auch β wieder positiv und gleich $\frac{fb}{f'(b-\Theta\beta)}$. Ferner ist der Quotient $\frac{fb}{f'a}$ positiv und kleiner als β, weil der positive Werth von $f'a$ größer ist als der positive Werth von $f'(b-\Theta\beta)$; daher ist $b' = b - \frac{fb}{f'a}$ eine neue untere und innere Grenze, welche der Wurzel näher liegt, als die Grenze b.

Wenn also überhaupt e die äußere, i die innere Grenze bezeichnet, gleichviel, welche von beiden die obere oder die untere sei, so erhält man zwei neue engere Grenzen durch die Formeln

$$e' = e - \frac{fe}{f'e}, \quad i' = i - \frac{fi}{f'e},$$

von denen e' wieder eine äußere, i' wieder eine innere ist.

Dieses läßt sich auch durch Construction anschaulich machen. Es seien (Fig. 17.) e und i die Abscissen der Puncte e und i der Axe, oder E und J der Curve; so lege man an den Punct E, welcher der äußeren Grenze entspricht, eine Tangente Ee', und ziehe aus J eine Parallele Ji', mit derselben. Die Gleichung der Tangente ist

$$v - fe = f'e(u-e)$$

und die der Parallelen:

$$v - fi = f'e(u-i).$$

Für $v=0$ erhält man bei der Tangente $u=e'$, bei der Parallelen $u=i'$; mithin

$$e' = e - \frac{fe}{f'e}, \quad i' = i - \frac{fi}{f'e}; \quad \text{w. z. b. w.}$$

65. Man kann auch die Convergenz dieser Annäherung auf folgende Art messen: Es sei z. B. die untere Grenze b zugleich die äußere, die obere a zugleich die innere, so ist

$$a' = a - \frac{fa}{f'b} \quad \text{und} \quad b' = b - \frac{fb}{f'b}.$$

Man bezeichne das Intervall $b-a$ mit δ, und das folgende $b'-a'$ mit δ', so sind δ und δ' positiv und $\delta' < \delta$. Man hat

$$\delta' = b' - a' = b - a - \frac{fb - fa}{f'b},$$

oder, wenn man $a = b - \delta$ setzt, und

$$fa = f(b-\delta) = fb - \delta f'b + \frac{\delta^2}{2} f''(b-\Theta\delta)$$

entwickelt, so kommt, indem sich mehrere Glieder aufheben,

$$\delta' = \frac{\delta^2}{2} \cdot \frac{f''(b-\Theta\delta)}{f'b}.$$

Der Quotient $\frac{f''(b-\Theta\delta)}{f'b}$ ist offenbar positiv.

Gesetzt man habe die Grenzen a und b einander so nahe gebracht, daß nicht allein $f'x$, $f''x$, sondern auch noch $f'''x$ keine Wurzel zwischen ihnen habe, so bleibt die Function $f'x$ von $f'a$ bis $f'b$ ununterbrochen entweder wachsend oder abnehmend, weil $f''x$, zwischen a und b, sein Zeichen nicht wechselt. Daher ist entweder $f''a$ oder $f''b$, abgesehen vom Zeichen, der größte unter allen Werthen von $f''x$, zwischen den Grenzen a und b. Dieser positive größte Werth von $f''x$ werde mit g bezeichnet. Ferner sei h der kleinste der beiden Werthe von $f'a$ u. $f'b$, ebenfalls ohne Rücksicht auf das Zeichen, so ist offenbar der Quotient $\frac{g}{h}$ größer als der Quotient $\frac{f''(y)}{f'(x)}$, für alle Werthe von x und y, die nicht außerhalb der Grenzen a und b liegen. Man bezeichne $\frac{g}{2h}$ mit q, so ist $q > \frac{f''(b-\Theta\delta)}{2f'b}$, und mithin $\delta' < \delta^2 q$. Nachdem der Werth von q ein für allemal berechnet ist, erhält man aus dieser Formel sofort ein Maaß für die fortschreitende Annäherung, die immer schneller erfolgt, wenn einmal das Intervall so klein geworden ist, daß nicht allein δ, sondern auch δq ein ächter Bruch ist. Die Grenzen des neuen Intervalles, a' und b', geben nämlich einen neuen Werth q' statt q, und für das folgende Intervall δ'' erhält man $\delta'' < \delta'^2 \cdot q'$; allein da nach dem Obigen q' nothwendig kleiner als q ist, so ist um so mehr $\delta'' < \delta'^2 \cdot q$; folglich braucht man den neuen Werth q' nicht zu berechnen, sondern kann q fortwährend beibehalten.

66. Beispiel. Oben war gefunden, daß die Gleichung $x^3 - 5x^2 - 7x - 4 = 0$ eine Wurzel zwischen 5 und 10 hat. Da aber diese Grenzen noch sehr weit sind, so setze man einige Zahlen dazwischen; man findet leicht, daß die Wurzeln zwischen 6 und 7 liegt.

	X_3	X_2	X_1	X
6	+	+	+	−
	6	26	41	10
7	+	+	+	+
	6	32	70	45

Man berechne zugleich die Zahlenwerthe von fx und seinen Ableitungen für $x=6$, $x=7$, z. B. $f(6) = -10$, $f'(6) = 41$, u. s. f., die hier untergeschrieben sind. Da der größte Werth von $f''x$ gleich 32, und der kleinste Werth von $f'x$ gleich 41 ist, also $g=32$, $h=41$, so wird $q = \frac{g}{2h} = \frac{16}{41}$, also $q < 1$. Daher wird bei jeder folgenden Annäherung das neue Intervall δ' kleiner als das Quadrat des vorigen, oder $\delta' < \delta^2$. Um engere Grenzen zu erhalten, berechne man nach den Formeln

$$a' = a - \frac{fa}{f'b},\quad b' = b - \frac{fb}{f'b}$$

die Werthe $a' = 6 + \frac{10}{70} = \frac{43}{7}$, $b' = 7 - \frac{45}{70} = \frac{89}{14}$,

also $a' > 6{,}1$ und $b' < 6{,}4$. Um aber sofort ein noch kleineres Intervall zu erhalten, setze man 6,2 und 6,3 ein. Man findet

$$f(6{,}2) = f(6) + 0{,}2 \cdot f'(6) + \frac{(0{,}2)^2}{2} f''(6) + \frac{(0{,}2)^3}{6} f'''(6) = -1{,}272,$$

dagegen, auf die nämliche Weise, $f(6{,}3) = +3{,}497$; also liegt die Wurzel zwischen $a = 6{,}2$ und $b = 6{,}3$. Man berechne noch $f'(6{,}3)$; der Werth ist 49,07; und man erhält

$$a' = 6{,}2 + \frac{1{,}272}{49{,}07} = 6{,}22 \cdots$$

Da $\delta = 0{,}1$ war, so ist nunmehr $\delta' < 0{,}01$; daher braucht man nur die beiden ersten Stellen von a' zu berechnen, und die Wurzel liegt zwischen 6,22 und 6,23…. Man berechne

$$f(6{,}23) = f(6{,}22) + 0{,}01 \cdot f'(6{,}22) + \cdots$$

Nun war $f(6{,}2) = -1{,}272$; $f'(6{,}2) = 46{,}32$; $f''(6{,}2) = 27{,}2$;

folglich $f(6{,}22) = f(6{,}2) + 0{,}02 \cdot f'(6{,}2) + \cdots = -0{,}340152$,

ferner $f'(6{,}22) = 46{,}8652$; $f''(6{,}22) = 27{,}32$;

daher ist
$$f(6{,}23) = f(6{,}22) + 0{,}01 \cdot f'(6{,}22) + \cdots$$
$$= -0{,}3401 \cdots + 0{,}4686 \cdots + \cdots$$

offenbar positiv; also liegt die Wurzel zwischen 6,22 und 6,23. Man berechne noch

$$f'(6{,}23) = 46{,}8652 + 0{,}01 \cdot 27{,}32 + (0{,}01)^2 \cdot 3 = 47{,}1387,$$

so kommt $a' = 6{,}22 + \frac{0{,}340152}{47{,}1387} = 6{,}2272..$

Das Intervall δ war 0,01, also $\delta' < 0{,}0001$; daher nur 4 Stellen berechnet sind. Ferner findet man

$$f(6{,}2272) = f(6{,}22) + 0{,}0072 \cdot f'(6{,}22) + \cdots$$
$$= -0{,}340152 + 0{,}0072 \cdot 46{,}8652 + (0{,}0072)^2 \cdot 13{,}66 + (0{,}0072)^3$$
$$= -0{,}002014052352.$$

Dagegen ist $f(6{,}2273) = f(6{,}2272) + 0{,}0001 \cdot f'(6{,}2272) + ..$
$$= -0{,}0020.. + 0{,}0047.. + ..$$

offenbar positiv, also liegt die Wurzel zwischen 6,2272 und 6,2273. Man hat noch $f'(6{,}2273) = 47{,}06479587$; also die neue untere Grenze

$$a' = 6{,}2272 + \frac{0{,}002014052352}{47{,}06479587} = 6{,}2272 + 0{,}00004279..$$

und zugleich $\delta' < 0{,}00000001$; also ist die Wurzel größer als 6,22724279, aber kleiner als 6,22724280...

Man findet aber den Werth von

$$f(6{,}22724280) = -0{,}0020140\cdots + 0{,}00004280 \cdot 47{,}062\cdots + \cdots$$
$$= -0{,}0020140\cdots + 0{,}0020142\cdots + \cdots$$

offenbar positiv; mithin ist die Wurzel, bis auf 8 Stellen berechnet, folgende: $x = 6{,}22724279.$

Der vortrefflichen Methoden, welche Fourier angiebt, um bei beliebiger Fortsetzung der Annäherung die Decimalstellen auf dem kürzesten Wege, mit Vermeidung aller entbehrlichen Rechnung, zu erhalten, kann hier nicht weiter erwähnt werden.

Curven im Raume und Flächen.

67. Man denke sich drei auf einander senkrechte Ebenen, und nehme ihre Durchschnittslinien zu Axen senkrechter Coordinaten x, y, z an. Ist nun irgend eine Gleichung zwischen x, y, z gegeben, welche durch $f(x,y,z) = 0$ oder auch durch $f = 0$ bezeichnet werde, so liegen alle Puncte, deren Coordinaten der Bedingung $f = 0$ genügen, auf einer **Fläche**. Sind aber zwei Gleichungen der Art zugleich gegeben, wie $f(x,y,z) = 0$ und $\varphi(x,y,z) = 0$; so liegen die Puncte, deren Coordinaten ihnen beiden genügen, in dem Durchschnitte zweier Flächen, oder in einer **Curve**, welche, wenn sie nicht ganz in eine Ebene fällt, **doppelt gekrümmt** genannt wird.

Insbesondere wird eine **Ebene** durch eine Gleichung von der Form $ax + by + cz = k$ ausgedrückt. Dividirt man diese Gleichung mit der Wurzel aus der Quadratsumme der drei Coefficienten a, b, c, d. i. mit $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)} = m$, so kann man drei Winkel α, β, γ bestimmen durch die Gleichungen $\cos\alpha = \frac{a}{m}$, $\cos\beta = \frac{b}{m}$, $\cos\gamma = \frac{c}{m}$, welche zugleich $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ ergeben. Die Gleichung der Ebene wird $\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z = \frac{k}{m}$, und in dieser Form bedeuten die Coefficienten von x, y, z der Reihe nach die Cosinus der Neigungen der Ebene gegen die Ebenen yz, xz, xy; ferner $\frac{k}{m}$ den senkrechten Abstand der Ebene vom Anfange der Coordinaten. Hat man die Gleichungen zweier

Ebenen $ax+by+cz=k$, $a'x+b'y+c'z=k'$ so wird ihre gegenseitige Neigung i durch die Formel

$$\cos i=\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

bestimmt, oder wenn $a^2+b^2+c^2=1$, $a=\cos\alpha$, $b=\cos\beta$, $c=\cos\gamma$, und eben so $a'^2+b'^2+c'^2=1$, $a'=\cos\alpha'$, $b'=\cos\beta'$, $c'=\cos\gamma'$ ist, so wird

$$\cos i=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'.$$

Diese Formeln, von welchen man häufig Gebrauch zu machen Gelegenheit hat, sind hier nur in Erinnerung gebracht, werden aber aus der analytischen Trigonometrie als bekannt vorausgesetzt. — Als ein zweites Beispiel von besonderer Wichtigkeit dient die Gleichung $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2)=r^2$, welche eine Kugel bedeutet; a, b, c sind die Coordinaten ihres Mittelpunctes, und r der Halbmesser.

Oft ist es vortheilhaft, die Coordinaten der Puncte einer Fläche als Functionen zweier Veränderlichen p, q auszudrücken. Hat man nämlich $x=f(p,q)$, $y=\varphi(p,q)$, $z=\psi(p,q)$, so kann man zwischen diesen drei Gleichungen p und q eliminiren, um die Gleichung der Fläche zu erhalten. Es sei z. B.

$$x-a=A\cos p\cos q,\quad y-b=B\cos p\sin q,\quad z-c=C\sin p,$$

so ergiebt sich durch Elimination

$$\frac{(x-a)^2}{A^2}+\frac{(y-b)^2}{B^2}+\frac{(z-c)^2}{C^2}=1,$$

die Gleichung eines Ellipsoides.

68. Wenn man aus den beiden Gleichungen für eine Curve, $f(x,y,z)=0$, $\varphi(x,y,z)=0$, das eine Mal z. B. z, das andere Mal y eliminirt, so erhält man zwei andere Gleichungen, die eine zwischen x und y, die andere zwischen x und z. Diese drücken die senkrechten Projectionen der Curve auf die Ebenen xy, xz aus. — Ferner kann man auch die Coordinaten der Puncte einer Curve als Functionen einer neuen Veränderlichen

t darstellen, so daß, $x=ft$, $y=\varphi t$, $z=\psi t$ ebenfalls eine Form der Gleichungen einer Curve ist, indem man durch Elimination von t zwei Gleichungen zwischen x, y, z erhält. Ein einfaches Beispiel liefern die Gleichungen:

$$x=at+\alpha,\quad y=bt+\beta,\quad z=ct+\gamma,$$

die offenbar eine gerade Linie ausdrücken. Die Elimination von t giebt

$$\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c},$$

eine gewöhnliche Form der Gleichungen der geraden Linie im Raume. Setzt man wieder $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=m$, und $\cos\lambda=\frac{a}{m}$, $\cos\mu=\frac{b}{m}$, $\cos\nu=\frac{c}{m}$, so sind λ, μ, ν die Neigungen der Geraden gegen die Axen x, y, z, wovon die analytische Trigonometrie nähere Rechenschaft giebt. Hat man für eine gerade Linie den Ausdruck:

$$\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c},$$

und für eine Ebene $ax+by+cz=k$, so stehen die Linie und die Ebene auf einander senkrecht.

69. Es sei eine Curve im Raume vorgelegt. Zieht man durch zwei beliebige Puncte a und b derselben, deren Coordinaten x, y, z und x', y', z' heißen mögen, eine Sehne, so erhält man folgende Gleichungen dieser Geraden

$$\frac{u-x}{x'-x}=\frac{v-y}{y'-y}=\frac{w-z}{z'-z}.$$

Indem man sich wieder den Punct a fest denkt, während die Richtung der Sehne ab so geändert wird, daß b auf der Curve bleibend dem a immer näher rückt, und endlich mit ihm zusammenfällt, so gehen, bei dem Zusammenfallen, die Verhältnisse $x'-x : y'-y : z'-z$ in die Differentialverhältnisse $dx : dy : dz$ über, und man erhält für die Tangente im Puncte a:

$$\frac{u-x}{dx}=\frac{v-y}{dy}=\frac{w-z}{dz}.$$

Die Verhältnisse $dx:dy:dz$ findet man durch Differentiation der Gleichungen der Curve. Ist z. B. $x=ft$, $y=\varphi t$, $z=\psi t$ gegeben, so wird $dx:dy:dz=f't:\varphi't:\psi't$; also

$$\frac{u-ft}{f't}=\frac{v-\varphi t}{\varphi' t}=\frac{w-\psi t}{\psi' t}$$

für die Tangente.

Eine auf die Tangente senkrechte, durch den Berührungspunct gelegte Ebene heißt die Normal-Ebene, und ihre Gleichung ist: $(u-x)dx+(v-y)dy+(w-z)dz=0$.

70. Durch je drei Puncte einer Curve, welche nicht in einer Geraden liegen, kann man einen Kreis legen. Je näher die drei Puncte einander liegen, desto mehr nähert sich dieser Kreis einem Kreise, welcher mit der Curve eine Berührung zweiter Ordnung hat. Ein solcher Kreis heißt der Krümmungskreis, wie bei den ebenen Curven, und seine Ebene die sich der Curve anschließende Ebene. Sie bleibt beständig dieselbe, wenn die Curve eben ist, wechselt aber von einem Puncte zum anderen, bei Curven doppelter Krümmung.

Um den Krümmungskreis zu finden, setze man folgende zwei Gleichungen:

$$(u-a)^2+(v-b)^2+(w-c)^2=\varrho^2. \quad 1.$$
$$A(u-a)+B(v-b)+C(w-c)=0. \quad 2.$$

Die erstere bezeichnet eine Kugel vom Halbmesser ϱ, die zweite eine durch den Mittelpunct der Kugel gelegte Ebene; also beide zusammen einen Kreis in dieser Ebene, der zugleich ein größter Kreis der Kugel ist. Es sind mithin 6 Größen zu bestimmen, nämlich die Coordinaten a, b, c des Mittelpunctes, der Halbmesser ϱ des Krümmungskreises, und die Verhältnisse $A:B:C$, von welchen die Lage seiner Ebene abhängt.

Damit erstens der Kreis durch den Punct x, y, z gehe,

muß sein: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\varrho^2$. 3.

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0. \quad 4.$$

Ferner müssen dieselben Werthe der ersten und zweiten Ableitungen von x, y, z sowohl dem Kreise als der Curve zukommen. Man darf daher nur die beiden Gleichungen 3. u. 4. jede zweimal differentiiren, so erhält man die noch nöthigen Gleichungen, nämlich: $(x-a)dx+(y-b)dy+(z-c)dz=0$. 5.

$$Adx+Bdy+Cdz=0. \quad 6.$$
$$(x-a)d^2x+(y-b)d^2y+(z-c)d^2z+dx^2+dy^2+dz^2=0. \quad 7.$$
$$Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z=0. \quad 8.$$

Subtrahirt man die Gleichung 4. von 2., so kommt die Gleichung der anschließenden Ebene:

$$A(u-x)+B(v-y)+C(w-z)=0, \quad 9.$$

Aus 6. und 8. findet man sofort:

$$A=dy\,d^2z-dz\,d^2y, \quad B=dz\,d^2x-dx\,d^2z,$$
$$C=dx\,d^2y-dy\,d^2x.$$

(Man sieht, daß es nur auf die Verhältnisse $A:B:C$ ankommt). Werden ferner aus 5. und 7. $x-a$, $y-b$, $z-c$ der Reihe nach weggeschafft, so kommt:

$$B(z-c)-C(y-b)=dx(dx^2+dy^2+dz^2). \quad 10.$$
$$C(x-a)-A(z-c)=dy(dx^2+dy^2+dz^2). \quad 11.$$
$$A(y-b)-B(x-a)=dz(dx^2+dy^2+dz^2), \quad 12.$$

von welchen Gleichungen jede eine Folge der beiden anderen ist. Multiplicirt man 4. mit A, und setzt für $A(y-b)$ u. $A(z-c)$ ihre Werthe aus 11. und 12., so kommt:

$$\left.\begin{array}{l}(A^2+B^2+C^2)(x-a)=(Cdy-Bdz)(dx^2+dy^2+dz^2).\\ \text{Desgleichen ist:}\\ (A^2+B^2+C^2)(y-b)=(Adz-Cdx)(dx^2+dy^2+dz^2).\\ (A^2+B^2+C^2)(z-c)=(Bdx-Ady)(dx^2+dy^2+dz^2).\end{array}\right\} \quad 13.$$

Addirt man die Quadrate dieser Gleichungen, und bemerkt, daß

$$(Cdy-Bdz)^2+(Adz-Cdx)^2+(Bdx-Ady)^2=$$
$$(A^2+B^2+C^2)(dx^2+dy^2+dz^2)-(Adx+Bdy+Cdz)^2,$$

ferner $Adx+Bdy+Cdz=0$ ist, so kommt, mit Rücksicht auf 3.

$$(A^2+B^2+C^2)\varrho^2=(dx^2+dy^2+dz^2)^3.$$

Demnach erhält man folgenden Ausdruck für den Krümmungshalbmesser ϱ:

$$\varrho=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{[(dyd^2z\text{-}dzd^2y)^2+(dzd^2x\text{-}dxd^2z)^2+(dxd^2y\text{-}dyd^2x)^2]}}.$$

Der Nenner dieses Ausdruckes läßt sich auch, wenn man die Quadrate entwickelt, auf folgende Form bringen:

$$\sqrt{[(dx^2+dy^2+dz^2)(d^2x^2+d^2y^2d^2z^2)-(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)^2]}.$$

Anm. In der Folge wird zuweilen von dem umgekehrten Werthe von ϱ, nämlich $\frac{1}{\varrho}$, als dem **Maaße der Krümmung**, oder schlechthin der **Krümmung** der Curve, in irgend einem Puncte, die Rede sein.

71. **Beispiel.** Die drei Gleichungen $x=m\ \cos\varphi$, $y=m\ \sin\varphi$, $z=n\varphi$ drücken eine Schraubenlinie aus, die sich auf einem geraden Cylinder befindet, dessen Grundfläche ein Kreis vom Halbmesser m ist. Betrachtet man φ als unabhängige Größe, so wird $dx=-m\sin\varphi d\varphi=-yd\varphi$, $dy=m\cos\varphi d\varphi=xd\varphi$, $dz=nd\varphi$, $d^2x=-xd\varphi^2$, $d^2y=-yd\varphi$, $d^2z=0$, weil $d^2\varphi=0$; mithin erhält man: $dx:dy:dz=-y:x:n$; also für die Tangente:

$$\frac{u-x}{-y}=\frac{v-y}{x}=\frac{w-z}{n}$$

und für die Normalebene: $-y(u-x)+x(v-y)+n(w-z)=0$, oder $uy-vx-n(w-z)=0$. Sind α, β, γ die Neigungen der Normalebene gegen die Ebenen yz, xz, xy, oder, was dasselbe ist, die Neigungen der Tangente gegen die Axen x, y, z, so findet man, mit Rücksicht auf die Gleichung $x^2+y^2=m^2$,

$$\cos\alpha=\frac{-y}{\sqrt{n^2+m^2}},\quad \cos\beta=\frac{x}{\sqrt{n^2+m^2}},\quad \cos\gamma=\frac{n}{\sqrt{n^2+m^2}}.$$

Sämmtliche Normalebenen haben also gegen die Ebene xy, oder sämmtliche Tangenten gegen die Axe der z, gleiche Neigungen, weil der Werth von $\cos\gamma$ für alle Puncte der Curve derselbe ist. Man erhält ferner $A=dy\,d^2z-dz\,d^2y=ny\,d\varphi^3$,

$$B=-nxd\varphi^3,\ C=(x^2+y^2)d\varphi^3=m^2d\varphi^3,$$

sodann $Cdy-Bdz=(n^2+m^2)xd\varphi^4$,

$$Adz-Cdx=(n^2+m^2)yd\varphi^4,\quad Bdx-Ady=0,$$

und $dx^2+dy^2+dz^2=(n^2+x^2+y^2)d\varphi^2=(n^2+m^2)d\varphi^2$; mithin entsteht folgende Gleichung der anschließenden Ebene:

$$ny(u-x)-nx(v-y)+m^2(w-z)=0,$$

oder: $$nyu-nxv+m^2(w-z)=0.$$

Diese Ebene ist also gegen (xy) unter dem beständigen Winkel, dessen Cosinus $\frac{m^2}{\sqrt{[n^2y^2+n^2x^2+m^4]}}$, d. i. $\frac{m}{\sqrt{n^2+m^2}}$, geneigt. Ferner erhält man $A^2+B^2+C^2=m^2(n^2+m^2)d\varphi^6$ und hieraus den Krümmungshalbmesser ϱ und die Coordinaten a, b, c seines Mittelpunctes, wie folgt:

$$x-a=\frac{(n^2+m^2)x}{m^2},\quad y-b=\frac{(n^2+m^2)y}{m^2},\quad z-c=0,$$

oder: $$a=-\frac{n^2x}{m^2},\ b=-\frac{n^2y}{m^2},\ c=z;\ \varrho=\frac{n^2+m^2}{m}.$$

Setzt man in die Werthe von a, b, c statt x, y, z wieder $m\cos\varphi$, $m\sin\varphi$, $n\varphi$, so kommt:

$$a=-\frac{n^2\cos\varphi}{m},\ b=-\frac{n^2\sin\varphi}{m},\quad c=n\varphi.$$

Die Krümmungsmittelpuncte liegen demnach wieder in einer Schraubenlinie, die sich auf einem Cylinder vom Halbmesser $\frac{n^2}{m}$ befindet, dessen Axe mit der des vorigen Cylinders vom Halbmesser m einerlei ist.

Flächen.

72. Eine Fläche werde durch eine beliebige Ebene geschnitten; man sucht die Gleichungen der Tangente an einen Punct (x, y, z) der Curve des Schnittes. — Nach dem Vorigen ist für die Tangente an einer Curve allgemein:

$$\frac{u-x}{dx}=\frac{v-y}{dy}=\frac{w-z}{dz}. \qquad 1.$$

Die Gleichungen der Fläche $f(x,y,z)=0$ und der schneidenden Ebene $\alpha x+\beta y+\gamma z=k$ geben differentiirt:

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz=0. \qquad 2.$$

$$\alpha dx+\beta dy+\gamma dz=0. \qquad 3.$$

Hieraus erhält man

$$dx:dy:dz=\gamma\frac{df}{dy}-\beta\frac{df}{dz}:\alpha\frac{df}{dz}-\gamma\frac{df}{dx}:\beta\frac{df}{dx}-\alpha\frac{df}{dy},$$

welche Verhältnisse in den Ausdruck für die Tangente (1) eingesetzt werden können. Statt aber dieses zu thun, setze man die Werthe $\frac{dy}{dx}=\frac{v-y}{u-x}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{w-z}{u-x}$ aus 1, in 2. und 3, so erhält man die Gleichung zweier Ebenen, deren Durchschnitt die Tangente ist, nämlich:

$$\frac{df}{dx}(u-x)+\frac{df}{dy}(v-y)+\frac{df}{dz}(w-z)=0. \qquad 4.$$

$$\alpha(u-x)+\beta(v-y)+\gamma(w-z)=0. \qquad 5.$$

Die Gleichung 5. drückt offenbar die Ebene des durch (x, y, z) gelegten Schnittes aus. Die Gleichung 4. dagegen stellt eine Ebene dar, welche ebenfalls durch den Punct (x,y,z) geht; übrigens aber von der Lage des Schnittes ganz unabhängig ist. Wie daher auch die Ebene des durch (x,y,z) gehenden Schnittes liegen möge, so liegt die Tangente desselben, für diesen Punct, immer in der Ebene 4., oder diese Ebene ist der Ort der Tangenten, welche sich an beliebige ebene Schnitte, die durch denselben Punct der Fläche gelegt werden, in diesem Puncte ziehen lassen. Sie heiße die **Berührungsebene** der Fläche.

Die auf der Berührungsebene im Berührungspuncte senkrecht errichtete Linie heißt **Normale**, und ihre Gleichungen sind:

$$\frac{u-x}{\frac{df}{dx}}=\frac{v-y}{\frac{df}{dy}}=\frac{w-z}{\frac{df}{dz}}.$$

Wird z als Function von x und y angesehen, und werden seine partiellen Ableitungen $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ mit p, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ mit q bezeichnet, so ist $dz=pdx+qdy$, und $\frac{df}{dx}+p\cdot\frac{df}{dz}=0$, so wie $\frac{df}{dy}+q\frac{df}{dz}=0$. Unter dieser Voraussetzung erhält man für die Berührungsebene die Gleichung

$$w-z=p(u-x)+q(v-y),$$

und für die Normale:

$$\frac{u-x}{p}=\frac{v-y}{q}=-(w-z),$$

oder auch $u-x+p(w-z)=0$, $v-y+q(w-z)=0$.

73. Als Gleichung für irgend eine beliebig durch die Normale gelegte Ebene sei angenommen

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=k,$$

so sieht man leicht, daß $\gamma=\alpha p+\beta q$ sein muß, damit der Schnitt ein Normalschnitt sei, d. h. durch die Normale gehe. Es soll jetzt die Krümmung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ dieses Schnittes, in dem Puncte x, y, z, bestimmt werden.

Der allgemeine Ausdruck für das Quadrat des Krümmungsmaaßes, ist nach §. 70., folgender:

$$\frac{1}{\varrho^2}=\frac{(dy\,d^2z-d^2y\,dz)^2+d^2y^2+d^2z^2}{(dx^2+dy^2+dz^2)^3},$$

wenn $d^2x=0$ gesetzt wird. Die Gleichungen des vorgelegten Schnittes sind die der Fläche $f(x,y,z)=0$ und der schneidenden Ebene $\alpha x+\beta y+\gamma z=k$. Durch Differentiirung derselben erhält man: $dz=pdx+qdy$, $\alpha dx+\beta dy+\gamma dz=0$,

$$d^2z=rdx^2+2sdxdy+tdy^2+qd^2y,$$

$$\left(r=\frac{d^2z}{dx^2},\ s=\frac{d^2z}{dxdy},\ t=\frac{d^2z}{dy^2}\right)$$

$$\beta d^2y+\gamma d^2z=0.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\alpha+p\gamma}{\beta+q\gamma},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{p\beta-q\alpha}{\beta+q\gamma},$$

und wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=h,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-h\gamma}{\beta+q\gamma},\quad \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{h\beta}{\beta+q\gamma}.$$

In den vorstehenden Ausdrücken muß man sich die Werthe eingesetzt denken, welche p, q, r, s, t in dem vorgelegten Puncte erhalten. Da die schneidende Ebene zugleich durch die Normale dieses Punctes geht, so muß auch

$$\gamma=\alpha p+\beta q$$

gesetzt werden, wie oben schon bemerkt ist. Hierdurch erhält man:

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dx^2}=\frac{(\beta+q\gamma)^2+(\alpha+p\gamma)^2+(p\beta-q\alpha)^2}{(\beta+q\gamma)^2}.$$

Wird der Zähler auf der rechten Seite entwickelt, und der obige Werth von γ berücksichtigt, so findet man denselben

$$=\alpha^2(1+q^2)+\beta^2(1+p^2)+2(\alpha p+\beta q)\gamma+(p^2+q^2)\gamma^2-2pq\alpha\beta$$
$$=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(1+p^2+q^2)-\alpha^2p^2-\beta^2q^2-2pq\alpha\beta+\gamma^2$$
$$=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(1+p^2+q^2)=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)l^2,$$

wenn noch $1+p^2+q^2=l^2$ gesetzt wird. Daher

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dx^2}=\frac{l^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{(\beta+q\gamma)^2}. \qquad \text{A.}$$

Ferner erhält man

$$Q=\frac{dyd^2z-dzd^2y}{dx^3}=\frac{-\beta(\alpha+p\gamma)+\gamma(p\beta-q\alpha)}{(\beta+q\gamma)^2}h=-\frac{\alpha h}{\beta+q\gamma},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\gamma h}{\beta+q\gamma},\quad \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{\beta h}{\beta+q\gamma};$$

woraus

$$Q^2+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dz}\right)^2=\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)h^2}{(\beta+q\gamma)^2}, \qquad \text{B.}$$

und, mit Hülfe der Gleichungen A. und B.

$$\frac{1}{\varrho^2}=\frac{h^2(\beta+q\gamma)^4}{l^6(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}$$

oder

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{h(\beta+q\gamma)^2}{l^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)} \qquad \text{C.}$$

gefunden wird. Multiplicirt man jedes Glied der Gleichung A. mit dem auf der nämlichen Seite befindlichen von C., und entwickelt $\frac{1}{\varrho}$, so kommt

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{hdx^2}{l(dx^2+dy^2+dz^2)}.$$

Man schreibe zur Abkürzung ε für $\frac{dy}{dx}$, und setze für dz seinen Werth $pdx+qdy$ oder $(p+q\varepsilon)dx$, und $r+2s\varepsilon+t\varepsilon^2$ für h, so kommt

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{r+2s\varepsilon+t\varepsilon^2}{l(1+\varepsilon^2+(p+q\varepsilon)^2)}, \qquad \text{D.}$$

der Ausdruck für die Krümmung irgend eines Normalschnittes. Die sämmtlichen Normalschnitte unterscheiden sich von einander durch die verschiedenen Werthe, welche das Verhältniß $\beta:\alpha$ für jeden derselben erlangt. Da aber $\varepsilon=\frac{dy}{dx}=-\frac{\alpha+p\gamma}{\beta+q\gamma}$, $\gamma=\alpha p+\beta q$, so sieht man, daß sich ε nach den verschiedenen Lagen des Normalschnittes mit dem Verhältnisse $\beta:\alpha$ zugleich ändert. Man kann demnach diejenigen Normalschnitte suchen, welchen die größte oder kleinste Krümmung zukommt, oder vielmehr, genauer zu reden, diejenigen, in welchen ein Wechsel der

Ab- und Zunahme der Krümmung, in Hinsicht auf die benachbarten Normalschnitte eintritt. Diese Normalschnitte sollen in der Folge **Hauptschnitte** genannt werden. Um sie zu finden, darf man nur aus D., die Ableitung von $\frac{1}{\varrho}$ nach ε nehmen und gleich Null setzen. Es war

$$\varrho(r+2s\varepsilon+t\varepsilon^2)=l(1+\varepsilon^2+(p+q\varepsilon)^2).$$

Wird diese Gleichung nach ϱ und ε differentiirt, $d\varrho$ aber Null gesetzt, so erhält man sofort:

$$\varrho(s+t\varepsilon)=l(\varepsilon+(p+q\varepsilon)q),$$

und folglich, wenn aus den beiden vorstehenden Gleichungen ϱ eliminirt wird:

$$\frac{r+2s\varepsilon+t\varepsilon^2}{s+t\varepsilon}=\frac{1+\varepsilon^2+(p+q\varepsilon)^2}{pq+\varepsilon(1+q^2)}.$$

Entwickelt man diese Gleichung nach Potenzen von ε, so kommt, indem sich die höchsten Glieder aufheben:

$$[s(1+q^2)-tpq]\varepsilon^2+[r(1+q^2)-t(1+p^2)]\varepsilon+pqr-s(1+p^2)=0.$$

74. Diese Rechnung setzt offenbar voraus, daß die Ableitungen p, q, r, s, t in dem gewählten Puncte sämmtlich bestimmte Werthe haben, indem mehrere Schlüsse ungültig würden, wenn ein besonderer Punct der Fläche vorhanden und gewählt wäre, für welchen diese Annahme nicht Statt fände. Im Allgemeinen also giebt es zwei Hauptschnitte, wie vorstehende quadratische Gleichung lehrt. Man kann ferner beweisen, daß die Ebenen dieser Hauptschnitte immer senkrecht auf einander stehen. Denn man denke sich den vorgelegten Punct zum Anfange der Coordinaten, und die Berührungsebene daran zur Ebene der x, y oder u, v gewählt. Die allgemeine Gleichung der Berührungsebene an einen Punct x, y, z ist $w-z=p(u-x)+q(v-y)$; in dem angenommenen Falle ist sie aber die Ebene u, v, also ihre Gleichung $w=0$; so daß nicht allein $x=0$, $y=0$, $z=0$, sondern auch $p=0$, $q=0$ ist.

Wird in der obigen Gleichung für ε, in Folge der erwähnten Annahme der Coordinaten, $p=0$, $q=0$ gesetzt, so kommt:

$$\varepsilon^2+\frac{r-t}{s}\cdot\varepsilon-1=0,$$

welche Gleichung offenbar immer zwei reelle Wurzeln hat. Nun war $\varepsilon=\frac{dy}{dx}$; es sei ferner $y=x\,tg\,\mu$ die Gleichung eines der beiden gesuchten Hauptschnitte, so wird $\frac{dy}{dx}=tg\,\mu$. Für den zweiten Hauptschnitt sei $y=x\cdot tg\,\mu'$; so sind $tg\,\mu$ und $tg\,\mu'$ die beiden Werthe von ε, welche sich aus der vorstehenden Gleichung ergeben, und man hat:

$$tg\,\mu+tg\,\mu'=\frac{t-r}{s},\quad tg\,\mu\;tg\,\mu'=-1.$$

Die letzte dieser Gleichungen giebt $\cos\mu\,\cos\mu'+\sin\mu\,\sin\mu'=0$, oder $\cos(\mu-\mu')=0$, also $\mu-\mu'=\pm\frac{1}{2}\pi$, woraus hervorgeht, daß die beiden Hauptschnitte senkrecht auf einander stehen, w. z. b. w.

75. Es ist noch übrig, die Krümmungsmaaße der Hauptschnitte allgemein auszudrücken, zu welchem Zwecke ε aus den beiden Gleichungen:

$$\varrho(r+2s\varepsilon+t\varepsilon^2)=l(1+\varepsilon^2+(p+q\varepsilon)^2)$$
$$\varrho(s+t\varepsilon)=l(pq+(1+q^2)\varepsilon)$$

zu eliminiren ist. Zur Vereinfachung setze man noch $\varrho=\lambda l$, so hat man

$$\lambda(r+2s\varepsilon+t\varepsilon^2)=1+p^2+2pq\varepsilon+(1+q^2)\varepsilon^2,$$
$$\lambda(s+t\varepsilon)=pq+(1+q^2)\varepsilon.$$

Nimmt man den Werth von ε aus der zweiten Gleichung und setzt ihn in die erste, so kommt:

$$\lambda[r(1+q^2-\lambda t)^2+2s(1+q^2-\lambda t)(\lambda s-pq)+t(s\lambda-pq)^2]=$$
$$(1+p^2)(1+q^2-\lambda t)^2+2pq(1+q^2-\lambda t)(\lambda s-pq)$$
$$+(1+q^2)(\lambda s-pq)^2.$$

Diese Gleichung bringe man auf Null, und bemerke, daß alsdann $1+q^2-\lambda t$ ein gemeinsamer Factor aller Glieder wird, der offenbar im Allgemeinen nicht Null sein kann, weil sonst der Werth von $\varepsilon=\frac{\lambda s-pq}{1+q^2-\lambda t}$ entweder unendlich groß sein, oder der Zähler $\lambda s-pq$ mit dem Nenner zugleich verschwinden müßte, was allgemein nicht der Fall ist; so erhält man, indem man den anderen Factor gleich Null setzt:

$$(1+p^2-\lambda r)(1+q^2-\lambda t)-(pq-\lambda s)^2=0,$$

mithin:

$$(rt-s^2)\lambda^2-[r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)]\lambda+1+p^2+q^2=0,$$

oder, wenn wieder für λ, $\frac{\varrho}{l}$ eingeführt wird, wo $l=\sqrt{1+p^2+q^2}$ ist,

$$(rt-s^2)\varrho^2-[r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)]l\varrho+l^4=0.$$

Durch diese quadratische Gleichung werden also die Krümmungshalbmesser der Hauptschnitte bestimmt. Nennt man den einen dieser beiden Krümmungshalbmesser ϱ', den andern ϱ'', so ist:

$$\varrho'+\varrho''=\frac{[r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)]l}{rt-s^2},\ \varrho'\varrho''=\frac{l^4}{rt-s^2}.$$

76. Da die Ebenen der beiden Hauptschnitte senkrecht auf einander stehen, so kann man sie, die Ebene xy wieder als Berührungsebene genommen, zu Ebenen der xz und yz wählen. Alsdann wird nicht allein $p=0$, $q=0$, sondern auch $s=0$. Um dies einzusehen, darf man nur auf die Gleichung $\varepsilon^2+\frac{r-t}{s}\cdot\varepsilon-1=0$ zurückgehen, von welcher $tg\,\mu$ und $tg\,\mu'$ die beiden Wurzeln waren. Man hatte $tg\,\mu+tg\,\mu'=\frac{r-t}{s}$. Nach der jetzt geschehenen Wahl der Coordinaten muß aber $\mu=0$, $\mu'=\frac{1}{2}\pi$, also $tg\,\mu'$ unendlich groß, und mithin, wenigstens sofern r, t endliche Werthe haben, $s=0$ sein. Durch diese Annahme verwandelt sich der allgemeine Ausdruck der Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ in $\frac{r+t\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}$ (§. 73. D.); oder, wenn $\varepsilon=tg\,\nu$ gesetzt wird, also ν die Neigung der Ebene eines Normalschnittes gegen die Ebene xz ausdrückt, erhält man:

$$\frac{1}{\varrho}=r\,cos\,\nu^2+t\,sin\,\nu^2.$$

Für die Hauptschnitte wird $\nu=0$, $\nu=\frac{1}{2}\pi$; mithin $\varrho'=\frac{1}{t}$, $\varrho''=\frac{1}{r}$; also:

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{(sin\,\nu)^2}{\varrho'}+\frac{(cos\,\nu)^2}{\varrho''}.$$

Durch diese Formel findet man die Krümmung eines beliebigen Normalschnittes (der mit dem Hauptschnitte, dessen Krümmung $\frac{1}{\varrho'}$ ist, den Winkel ν einschließt), wenn man die Krümmungen $\frac{1}{\varrho'}$ und $\frac{1}{\varrho''}$ der beiden Hauptschnitte kennt.

Für einen auf dem vorigen senkrechten Normalschnitt verwandelt sich ν in $\nu+\frac{1}{2}\pi$, also $(cos\,\nu)^2$ in $(sin\,\nu)^2$, und $(sin\,\nu)^2$ in $(cos\,\nu)^2$, und wenn sein Krümmungshalbmesser ϱ_1 ist, so kommt:

$$\frac{1}{\varrho_1}=\frac{(cos\,\nu)^2}{\varrho'}+\frac{(sin\,\nu)^2}{\varrho''};$$

woraus sofort folgt: $\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho_1}=\frac{1}{\varrho'}+\frac{1}{\varrho''}$; d. i. die Summe der Krümmungsmaaße zweier auf einander senkrechten Normalschnitte ist, für einen bestimmten Punct der Fläche, beständig dieselbe.

77. Endlich ist noch zu zeigen, wie sich hieraus die Krümmungen anderer Schnitte finden lassen, die gegen die Normal-

ebene beliebig geneigt sind. Man denke sich einen schiefen Schnitt E, nehme seine Tangente, d. i. seinen Durchschnitt mit der Berührungsebene zur Axe der x, und die Normale der Fläche zur Axe der z. Der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes xz wird nach §. 48. durch $\frac{(dx^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2z}$ ausgedrückt. Da aber die Axe der x zugleich Tangente an die Curve des Normalschnittes ist, so wird, für den Anfang der Coordinaten, $\frac{dz}{dx}=0$, also ist $\varrho=\frac{dx^2}{d^2z}$ der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes. Nimmt man ferner eine zweite Axe z' ebenfalls senkrecht auf x in der Ebene E an, so wird der Krümmungshalbmesser ϱ' des Schnittes E durch $\varrho'=\frac{(dx^2+dz'^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2z'}$ ausgedrückt, oder weil $\frac{dz'}{dx}$ ebenfalls Null ist, durch $\frac{dx^2}{d^2z'}$. Es kommt also nur darauf an, das Verhältniß der Werthe von $\frac{d^2z}{dx^2}$ und $\frac{d^2z'}{dx^2}$ für den Anfang der Coordinaten zu finden. Zu dem Ende bezeichne man mit i die Neigung der Ebenen xz und E, oder der Axen z und z' gegen einander; so ist $y=0$ die Gleichung der Ebene xz, und $y=z\,tg\,i$ die der Ebene E. Jede dieser Gleichungen ist mit der Gleichung $f(x,y,z)=0$ der Fläche zu verbinden, um die Curve des Schnittes zu erhalten. Wird nun vorausgesetzt, daß der vorgelegte Punct der Fläche kein besonderer Punct ist, für welchen die Ableitungen aufhören, endliche und reelle Werthe zu haben, so läßt sich z als Function von x und y nach Potenzen dieser Größen entwickeln, so daß

$$z=\left(\frac{dz}{dx}\right)x+\left(\frac{dz}{dy}\right)y+\tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)x^2+\cdots,$$

oder weil $\frac{dz}{dx}=p=0$, $\frac{dz}{dy}=q=0$, $\frac{d^2z}{dx^2}=r$, u. s. f.,

$$z=\tfrac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2),$$

wenn man alle Glieder, die in Bezug auf x und y von höherer als der zweiten Ordnung sind, wegläßt, weil sie, wie man aus der folgenden Rechnung deutlich ersehen wird, keinen Einfluß auf das Resultat haben können. Betrachtet man nun erstens den Normalschnitt xz, für welchen $y=0$ ist, so wird für denselben $z=\frac{1}{2}rx^2$, also $\frac{d^2z}{dx^2}=r$, für $x=0$. Für den schiefen Schnitt E ist $y=z\,tg\,i$, oder, wenn man $z'=\sqrt{y^2+z^2}$ einführt, so ist $y=z'\sin i$, und $z=z'\cos i$. Werden vorstehende Werthe von y und z in den obigen für z gesetzt, so kommt:

$$2z'\cos i=rx^2+2sxz'\sin i+tz'^2\sin i^2.$$

Differentiirt man diese Gleichung zweimal, indem man z' als Function von x betrachtet, und setzt hierauf $x=0$, $z'=0$, $\frac{dz'}{dx}=0$, so erhält man den Werth, welchen $\frac{d^2z'}{dx^2}$ für den Anfang der Coordinaten erlangt, nämlich:

$$\frac{d^2z'}{dx^2}\cdot\cos i=r.$$

Folglich ist $\frac{d^2z'}{dx^2}\cdot\cos i=\frac{d^2z}{dx^2}$, und mithin, da $\varrho'=\frac{dx^2}{d^2z'}$, $\varrho=\frac{dx^2}{d^2z}$ war, $\varrho'=\varrho\cos i$, d. h. der Krümmungshalbmesser ϱ' des schiefen Schnittes E ist die Projection des Krümmungshalbm. des durch die Tangente von E gelegten Normalschnittes. — Diese Sätze enthalten Alles, was nöthig ist, um die Krümmung eines beliebigen Schnittes einer Fläche, in einem gegebenen Puncte zu finden, unter der Voraussetzung, daß die Ableitungen p, q, r, s, t für diesen Punct nur endliche und bestimmte Werthe haben. Auf besondere Puncte aber, für welche die Ableitungen unendlich oder unbestimmt werden, sind sie nicht auszudehnen.

78. Wenn in einem Puncte der Fläche die Krümmungsmaaße $\frac{1}{\varrho'}$ und $\frac{1}{\varrho''}$ der beiden Hauptschnitte gleiche Zeichen haben,

so folgt aus der Formel des §. 76.

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sin \nu^2}{\varrho'} + \frac{\cos \nu^2}{\varrho''},$$

daß auch das Krümmungsmaaß jedes beliebigen Normalschnittes dasselbe Zeichen hat. Alsdann sind, in diesem Puncte, alle Normalschnitte nach derselben Seite hohl, oder die Berührungsebene liegt ganz auf einer Seite der Fläche. Wenn aber die Krümmungsmaaße der Hauptschnitte entgegengesetze Zeichen haben, so kehrt der eine die hohle, der andere die erhabene Seite nach derselben Richtung hin, und das Krümmungsmaaß wechselt, für einen zwischen den beiden Hauptschnitten befindlichen Normalschnitt, indem es durch Null geht, sein Zeichen. Alsdann liegt die Berührungsebene nicht ganz auf einer Seite der Fläche, sondern schneidet diese, und zwar in dem Normalschnitte, dessen Krümmungsmaaß Null ist. Solche (concav-convexe) Flächen entstehen z. B. durch Umdrehung einer Curve, wenn dieselbe der Drehungsaxe ihre erhabene Seite zukehrt.

Zwischen den Flächen, die überall concav-concav, und denen, die überall concav-convex sind, liegen, als eine Mittelgattung, diejenigen Flächen, von denen der eine Hauptschnitt, in jedem Puncte, das Krümmungsmaaß Null hat. Geht man von irgend einem Puncte einer solchen Fläche in der Richtung dieses Hauptschnittes zu einem unendlich nahen Puncte fort, und von da zu einem zweiten, u. s. w., so erhält man eine Linie in der Fläche, deren Krümmungsmaaß überall Null ist, und die mithin nur eine gerade Linie sein kann. Da nun die Berührungsebene zugleich die Tangente jedes Normalschnittes enthält, so muß sie auch diesen geradlinigten Hauptschnitt berühren, und die in Rede stehenden Flächen haben mithin die Eigenschaft, von der Berührungsebene überall nicht bloß in einem Puncte, sondern in allen Puncten einer geraden Linie berührt zu werden.

Nennt man, (nach Gauß) das Product aus den Krümmungsmaaßen $\frac{1}{\varrho'}$, $\frac{1}{\varrho''}$ der beiden Hauptschnitte das Krümmungsmaaß der Fläche, so ist dieses, für die eben erwähnte Art von Flächen, Null. Nun ist aber, nach §. 75., das Krümmungsmaaß einer Fläche $\frac{1}{\varrho'\varrho''}$, allgemein gleich $\frac{rt-s^2}{l^4}$; folglich muß, für die Flächen, deren Krümmungsmaaß Null ist,

$$rt-s^2=0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2=0 \quad \text{sein.}$$

Dies ist eine sehr bemerkenswerthe Gleichung zwischen den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von z, welcher die Gleichungen der erwähnten Flächen sämmtlich Genüge thun müssen.

79. Man kann aber auch eine allgemeine Form für alle diese Gleichungen finden. Es sei zu dem Ende an einen Punct (x, y, z) einer solchen Fläche eine Berührungsebene gelegt, deren Gleichung

$$w-z=p(u-x)+q(v-y)$$

oder

$$w-pu-qv=z-px-qy$$

sein wird. Man kann nun auf der Fläche so fortgehen, daß man zugleich auf der Berührungsebene bleibt, weil, nach der Voraussetzung, die Fläche von dieser Ebene in einer geraden Linie berührt wird; also können die Werthe von x, y, z so geändert werden, daß die Gleichung der berührenden Ebene dieselbe bleibt, oder p, q, $z-px-qy$ ungeändert bleiben. Damit dies in jedem beliebigen Puncte der Fläche möglich sei, muß nothwendig die Gleichung der Fläche so beschaffen sein, daß zwei der Größen p, q, $z-px-qy$ Functionen der dritten sind, also z. B.

$$q=\varphi p,\quad z-px-qy=\psi p;$$

wo φ und ψ zwei ganz beliebige Functionen von p bezeichnen. Die Gleichung für die Berührungsebene der Fläche, an irgend einem beliebigen Puncte, ist demnach

$$w-pu-\varphi p\cdot v=\psi p.$$

Um die Gleichung der Geraden zu finden, in welcher dieselbe die Fläche berührt, denke man sich diese Gerade als die Grenze, welcher der Durchschnitt zweier in benachbarten Puncten gelegter Berührungsebenen desto näher kommt, je mehr diese Puncte sich dem Zusammenfallen nähern. Es muß demnach für diesen Durchschnitt nicht allein die obige Gleichung gelten, sondern auch diejenige, welche man erhält, wenn man von ihr die Ableitung nach p nimmt, u, v, w aber ungeändert läßt. Diese ist

$$u+\varphi'p\cdot v+\psi'p=0.$$

Giebt man der Größe p irgend einen beliebigen Werth, so erhält man aus den beiden vorstehenden Gleichungen eine der in der Fläche befindlichen Geraden. Eliminirt man aber p aus beiden, so erhält man eine Gleichung zwischen den Coordinaten u, v, w, welche den Ort aller dieser Geraden, d. h. die verlangte Fläche ausdrückt.

Man schreibe x, y, z statt u, v, w und α statt p, und betrachte in den Gleichungen für die Fläche, nämlich:

$$z-\alpha x-\varphi\alpha\cdot y=\psi\alpha \quad \text{und} \quad x+y\varphi'\alpha+\psi'\alpha=0,$$

x und y als unabhängig veränderliche Größen, mithin z und α als Functionen derselben. Man nehme nun die partielle Ableitung nach x, so kommt:

$$\frac{dz}{dx}-\alpha=(x+y\varphi'\alpha+\psi'\alpha)\frac{d\alpha}{dx},$$

oder weil $\quad x+y\varphi'\alpha+\psi'\alpha=0; \quad \frac{dz}{dx}=\alpha.$

Wird ferner die Ableitung nach y genommen, so erhält man $\frac{dz}{dy}-\varphi\alpha=0$; also ist $\frac{dz}{dy}=\varphi\left(\frac{dz}{dx}\right)$, oder, nach den früheren Bezeichnungen $q=\varphi p$. Nimmt man von dieser Gleichung wieder die Ableitungen nach x und y, so kommt:

$$\frac{d^2z}{dx\,dy}=\varphi'\left(\frac{dz}{dx}\right)\cdot\frac{d^2z}{dx^2}$$

$$\frac{d^2z}{dy^2}=\varphi'\left(\frac{dz}{dx}\right)\cdot\frac{d^2z}{dxdy};$$

oder, kürzer bezeichnet, $s=\varphi'p\cdot r$, $t=\varphi'p\cdot s$, mithin, durch Elimination von $\varphi'p$:

$$rt-s^2=0.$$

Die in den Gleichungen $z-\alpha x-\varphi\alpha\cdot y=\psi\alpha$ und $x+y\varphi'\alpha+\psi'\alpha=0$ enthaltenen Flächen genügen also sämmtlich der oben gefundenen Gleichung $rt-s^2=0$, oder haben das Krümmungsmaaß Null.

80. Man stelle sich im Raume ein beliebiges geradlinigtes, aber nicht in einer Ebene enthaltenes Polygon ABCDE vor (Fig. 18.). Werden die Seiten über die Spitzen hinaus verlängert, und durch je zwei auf einander folgende Seiten Ebenen gelegt, so entsteht ein Polyeder, dessen Grenzflächen in der Figur durch GBH, HCK, KDE dargestellt werden. Denkt man sich nun die erste dieser Grenzflächen, GBH, fest, und dreht den benachbarten Theil der Polyederfläche um die Kante BH, bis die nächste Grenzfläche HCK in die Ebene der vorigen GBH fällt; dreht hierauf den folgenden Theil der Polyederfläche um die Kante DK, bis die Grenzfläche KDE wieder mit den beiden vorigen in einer Ebene liegt, u. s. f.; so wird die ganze Polyederfläche in eine Ebene ausgebreitet oder *abgewickelt*. Dieses gilt, wie klein auch die Seiten des gegebenen Polygones ABCDE werden mögen, und besteht also auch noch, wenn das Polygon in eine Curve übergeht. Alsdann verwandeln sich die Verlängerungen der Seiten des Polygons in die Tangenten der Curve, und das ganze Polyeder in eine *abwickelbare* Fläche, von welcher die Grenzflächen des Polyeders berührende Ebenen werden. Um die Gleichung dieser Fläche zu finden, seien $y=fx$, $z=Fx$ die Gleichungen der Curve, so sind

$$u-x=\frac{v-y}{f'x}=\frac{w-z}{F'x}$$

die Gleichungen ihrer Tangente, welche sich auch schreiben lassen, wie folgt:

$$w-uF'x=Fx-xF'x.$$
$$v-uf'x=fx-xf'x.$$

Wird x aus diesen beiden Gleichungen eliminirt, so erhält man die Gleichung der abwickelbaren Fläche, zwischen den Coordinaten u, v, w.

Man schreibe wieder x, y, z statt u, v, w und β statt x, so kommt:

$$z-xF'\beta=F\beta-\beta F'\beta.$$
$$y-xf'\beta=f\beta-\beta f'\beta.$$

Diese Gleichungen sind zwar von den im vorigen §. gefundenen, nämlich: $z-\alpha x-\varphi\alpha\cdot y=\psi\alpha$ und $x+y\varphi'\alpha+\psi'\alpha=0$ der Form nach verschieden, drücken aber wesentlich nur dieselben Flächen aus. Nimmt man nämlich die Ableitungen derselben nach x und nach y, so kommt

$$p-F'\beta=(x-\beta)F''\beta\cdot\frac{d\beta}{dx};\quad q=(x-\beta)F''\beta\cdot\frac{d\beta}{dy};$$
$$-f'\beta=(x-\beta)f''\beta\cdot\frac{d\beta}{dx},\quad 1=(x-\beta)f''\beta\cdot\frac{d\beta}{dy};$$

folglich durch Division

$$\frac{p-F'\beta}{-f'\beta}=\frac{F''\beta}{f''\beta},\text{ oder }p=\frac{F'\beta f''\beta-f'\beta F''\beta}{f''\beta\cdot f''\beta},\text{ und }q=\frac{F''\beta}{f''\beta},$$

woraus, durch Elimination von β, nichts weiter folgt, als daß q eine Function von p ist, wie vorhin.

81. Man kann aber auch die Gleichung der abwickelbaren Flächen sofort in der Gestalt der in §. 79. erhaltenen Gleichungen finden, wenn man von der Berührungsebene derselben ausgeht. Diese Berührungsebene ist nämlich keine andere, als die anschließende Ebene der Curve $y=fx$, $z=Fx$, deren Tangenten die Fläche erzeugen.

Die Gleichung für die anschließende Ebene ergiebt sich nach §. 70:

$$(F'x\cdot f''x-f'x\cdot F''x)(u-x)+F''x(v-fx)-f''x(w-Fx)=0.$$

Man setze $F'x\cdot f''x-f'x\cdot F''x=f''x\cdot\alpha$, $F''x=f''x\cdot\varphi\alpha$,

$$-(F'x\cdot f''x-f'xF''x)x-F''xfx+f''xFx=f''x\cdot\psi\alpha;$$

und schreibe x, y, z statt u, v, w, so erhält die Gleichung der anschließenden Ebene die Form:

$$z-\alpha x-\varphi\alpha\cdot y=\psi\alpha,$$

in welcher $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ zwei Functionen von α sind, deren Form, nach Beschaffenheit der Gleichungen der Curve, $y=fx$, $z=Fx$, verschieden sein wird. Nimmt man von vorstehender Gleichung wieder die Ableitung blos nach α, so erhält man die Gleichung für irgend eine Tangente der Curve, nämlich

$$x+y\varphi'\alpha+\psi'\alpha=0,$$

und durch Elimination von α die der Fläche, wie oben.

Umgekehrt kann man auch, wenn die Gleichungen einer abwickelbaren Fläche

$$z-\alpha x-\varphi\alpha\cdot y=\psi\alpha\quad\text{und}\quad x+y\varphi'\alpha+\psi'\alpha=0$$

gegeben sind, die Gleichungen der Curve finden, durch deren Tangenten sie erzeugt wird. Denn die beiden vorstehenden Gleichungen drücken, für irgend einen Werth von α, eine dieser Tangenten aus, und man erhält mithin die Coordinaten eines Punctes der verlangten Curve, wenn man den Durchschnitt zweier auf einander folgenden Tangenten sucht, d. h. von den beiden vorstehenden wieder die Ableitung nach α nimmt. Nun ist aber die zweite schon die Ableitung der ersten, nach α; also kommt nur noch die Ableitung der zweiten hinzu, nämlich:

$$y\varphi''\alpha+\psi''\alpha=0.$$

Wird aus diesen drei Gleichungen α eliminirt, so erhält man zwei Gleichungen zwischen x, y, z, welche die Curve liefern, deren Tangenten die abwickelbare Fläche erzeugen.

Um noch eine andere Entstehungsweise der abwickelbaren Flächen anzugeben, denke man sich auf einer beliebigen Fläche eine Curve beschrieben. Die Berührungsebene der Fläche, an einen Punct dieser Curve gelegt, hat die Gleichung

$$w-z=p(u-x)+q(v-y).$$

In dieser Gleichung sind, vermöge der Gleichungen der Curve, y, z, p, q sämmtlich Functionen von x; sie ist also von der Form $w-\alpha u-\varphi\alpha\cdot v=\psi\alpha$, wo α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ Functionen von x sind. Denkt man sich nun in sämmtlichen Puncten der Curve die Berührungsebenen an die Fläche gelegt, so bilden die Durchschnitte derselben eine abwickelbare Fläche, deren Gleichung man erhält, wenn man von der vorstehenden die Ableitung nach x, oder nach α, nimmt, d. i. $u+v\varphi'\alpha+\psi'\alpha=0$ setzt, und hierauf α eliminirt.

82. Eine cylindrische Fläche entsteht, wenn eine gerade Linie, einer gegebenen Geraden beständig parallel bleibend, an einer Curve fortbewegt wird. — Die Gleichungen der Geraden seien $y-ax=\alpha$, $z-bx=\beta$; so sind a und b gegebene beständige, α und β veränderliche Größen. Nun seien x', y', z' die Coordinaten eines Punctes, in welchem die Curve von der Geraden getroffen wird, so muß, indem y' und z' Functionen von x' sind, zugleich auch

$$y'-ax'=\alpha,\ z'-bx'=\beta$$

sein; mithin sind α und β ebenfalls Functionen von x' und also β eine Function von α, $\beta=\varphi\alpha$. Folglich muß auch $z-bx=\beta$ eine Function von $y-ax=\alpha$ sein, also ist

$$z-bx=\varphi(y-ax)$$

die Gleichung einer beliebigen Cylinderfläche. — Nimmt man von derselben die Ableitungen nach x und y, so kann man die Function φ eliminiren; nämlich weil

$$p-b=-\varphi'(y-ax)\cdot a,\ q=\varphi'(y-ax);$$

so folgt: $\quad p-b+aq=0$, oder $p+aq=b$.

Dies ist eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung, welcher jede Gleichung genügen muß, die eine Cylinderfläche darstellt. — Diese Gleichung genügt auch der Bedingung $rt-s^2=0$, d. h. alle Cylinderflächen sind **abwickelbar**. (Man erinnere sich, daß $\frac{dp}{dx}=r$, $\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}=s$, $\frac{dq}{dy}=t$ ist.) Nimmt man nämlich von der Gleichung $p+aq=b$ die Ableitungen nach x und y, so kommt:

$$r+as=0,\ s+at=0,\quad \text{also}\quad rt=s^2,\quad \text{w. z. b. w.}$$

Die geometrische Bedeutung der Gleichung $p+aq=b$ ist keine andere, als daß jede Berührungsebene der Cylinderfläche einer geraden Linie parallel ist, von welcher $y=ax$, $z=bx$ die Gleichungen sind.

83. Wenn eine Gerade, indem sie an eine Curve sich lehnend fortrückt, zugleich immer durch einen festen Punct geht, so beschreibt sie eine **Kegelfläche**.

Es seien a, b, c die Coordinaten des festen Punctes, und die Gleichungen der Geraden:

$$y-b=\alpha(x-a),\ z-c=\beta(x-a).$$

Setzt man für x, y, z Werthe, die zugleich der Curve angehören, so ergeben sich α und β als Functionen von x, weil y und z es sind; also ist $\beta=\varphi\alpha$, mithin

$$\frac{z-c}{x-a}=\varphi\left(\frac{y-b}{x-a}\right)$$

die Gleichung aller Kegelflächen. — Nimmt man die Ableitungen nach x, so kommt:

$$\frac{(x-a)p-(z-c)}{(x-a)^2}=-\varphi'\left(\frac{y-b}{x-a}\right)\cdot\frac{y-b}{(x-a)^2},$$

oder $\quad (x-a)p=z-c-(y-b)\varphi'\left(\frac{y-b}{x-a}\right),$

und, wenn man die Ableitung nach y nimmt, $q=\varphi'\left(\frac{y-b}{x-a}\right)$; mithin ist

$$p(x-a)+q(y-b)=z-c$$

die partielle Differentialgleichung aller Kegelflächen. Sie bedeutet, daß sämmtliche Berührungsebenen der Fläche durch den Punct (a, b, c) gehen.

Alle Kegelflächen sind abwickelbar. Denn nimmt man von vorstehender Gleichung die Ableitungen nach x und y, so kommt:

$$s(y-b)+r(x-a)=0,$$
$$s(x-a)+t(y-b)=0;$$

mithin $s^2=rt$, w. z. b. w.

Anmerkung. In den vorstehenden Beispielen der Cylinder- und Kegel-Flächen wurde eine ganz willkürliche Function von x und y, welche sich in der ursprünglichen Gleichung befand, nach Entwickelung der Ausdrücke für die partiellen Ableitungen von z, nach x und y, eliminirt, und man kam dadurch auf Gleichungen zwischen den partiellen ersten Ableitungen p und p von z, welche man partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung nennt. Dagegen enthält die Gleichung der abwickelbaren Flächen nicht eine, sondern zwei willkürliche Functionen, und um diese zu eliminiren, mußte man bis auf die partiellen Ableitungen der zweiten Ordnung von z, nach x und y, zurückgehen, wodurch die Elimination der willkürlichen Functionen, in diesem besonderen Falle, gelang, und man eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, ohne willkürliche Functionen, erhielt. Obige Beispiele geben eine Vorstellung von der vielumfassenden geometrischen Bedeutung, deren die partiellen Differentialgleichungen fähig sind.

Integral-Rechnung.

Integral-Rechnung.

84. Lehrsatz. Zwei Functionen fx und φx, welche dieselbe Ableitung f'x haben, können nur um eine beständige Größe von einander verschieden sein.

Denn man setze $fx - \varphi x = Fx$, und nehme die Ableitung, so ist $f'x - \varphi' x = F'x = 0$, für jeden Werth von x, weil $f'x = \varphi' x$; mithin ist auch $F(x+k) = Fx + kF'(x+\Theta k) = Fx$, weil $F'(x+\Theta k)$ Null ist; d. h. die Function Fx ändert ihren Werth nicht, wenn x den seinigen ändert, oder Fx ist ist eine von x unabhängige, mithin beständige Größe; w. z. b. w.

Folglich ist, wenn C eine beliebige Constante bedeutet, allemal

$$fx = \varphi x + C,$$

sobald, für jeden Werth von x, $f'x = \varphi' x$ ist.

Eine Function ψx, deren Ableitung die gegebene Function fx, oder deren Differential fxdx ist, heißt das Integral dieses Differentials (oder auch die Stammgröße dieser Ableitung), und wird durch Vorsetzung des Buchstabens $\int$ bezeichnet, so daß, wenn

$$d\psi x = fx \cdot dx,$$

$$\psi x = \int fx\, dx$$

ist. Die Operation des Integrirens, welche durch $\int$ angedeutet wird, ist also die umgekehrte des Differentiirens, indem sie durch diese aufgehoben wird. Der Ursprung des Zeichens $\int$, welches eine Summe andeuten soll, wird nachher angegeben werden. — Wenn irgend eine Function ψx gefunden ist, welche die Ableitung fx hat, so stellt $\psi x + C$ (C eine beliebige Constante) die Form vor, in welcher jede Function enthalten ist, die fx zur Ableitung hat. Diese Form heißt das **allgemeine** oder auch das **vollständige Integral** von fx; aus ihm kann man so viele **besondere Integrale** erhalten, als man will, indem man der Constante beliebige Werthe beilegt.

Ein constanter Factor a der Ableitung hat auf die Operation des Integrirens keinen Einfluß, und kann mithin außerhalb des Integral-Zeichens gesetzt werden, d. h. man hat

$$\int a\,fx\,dx = a\int fx\,dx.$$

Ferner ist $\int(fx+\varphi x)dx = \int fx\,dx + \int \varphi x\,dx$, wie leicht einzusehen. In diesen Ausdrücken muß man sich die willkürliche Constante als in der Bezeichnung des Integrals enthalten denken, wie auch zuweilen im Folgenden.

Kennt man das Differential einer Function, so hat man in der letzteren auch sofort das Integral jenes Differentials; z. B. da $d\cdot x^n = nx^{n-1}dx$ ist, so folgt

$$\int nx^{n-1}dx = x^n + C; \quad \text{oder auch} \quad \int x^{n-1}dx = \frac{1}{n}x^n + C.$$

Eben so ist

$$\int\frac{dx}{x} = \log nat\, x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log nat\, a} + C,$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C, \quad \int \sin x\, dx = -\cos x + C,$$

$$\int\frac{dx}{\cos x^2} = tg\, x + C. \quad \text{u. s. w.}$$

Durch Differentiation überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der vorstehenden Formeln.

85. Wenn allgemein $\int fx\,dx = \psi x + C$ gesetzt ist, so kann man die Constante C einer beliebigen Bedingung unterwerfen, die sich in der Regel aus der Beschaffenheit der Aufgabe von selbst ergiebt.

Vorausgesetzt, daß die Function ψx von $x=a$ bis zu irgend einem Werthe von x endlich und stetig bleibt, so kann man verlangen, daß das Integral für $x=a$ verschwinde, oder von

$x=a$ anfange. Damit dies der Fall sei, muß die Constante C aus der Bedingung

$$C + \psi a = 0$$

bestimmt werden, welche $C = -\psi a$ giebt. Um auszudrücken, daß ein Integral von $x=a$ anfangen soll, fügt man dem Zeichen $\int$ den Buchstaben a unten bei; und wenn man noch den Werth angeben will, welchen x nach vollendeter Integration erhalten soll, so schreibt man auch diesen noch oben hinzu, und zwar in folgender Weise:

$$\int_a^{x_1} fx\,dx = \psi x_1 - \psi a;$$

d. h. das Integral $\int fx\,dx$, so genommen, daß es für $x=a$ verschwinde, und bis zu dem Werthe x_1 ausgedehnt, oder das Integral $\int fx\,dx$, genommen zwischen den Grenzen $x=a$ und $x=x_1$, wird durch $\int_a^{x_1} fx\,dx$ bezeichnet, und ist gleich $\psi x_1 - \psi a$.

Dieses Integral erhält einen bestimmten Werth, sobald die Grenzen a_1 und x_1 bestimmte Werthe erhalten, und wird dann ein **bestimmtes Integral**, oder ein **Integralwerth** genannt. Man hat z. B.

$$\int x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 + C;$$

also ist $\quad \int_0^x x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3, \quad$ und $\quad \int_0^1 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}; \quad$ u. dgl. m.

Es seien x_0, x_1, x_2 drei Werthe von x, zwischen denen ψx beständig endlich und stetig bleibt, und nach dem Vorigen:

$$\int_{x_0}^{x_1} fx\,dx = \psi x_1 - \psi x_0, \quad \int_{x_1}^{x_2} fx\,dx = \psi x_2 - \psi x_1,$$

$$\int_{x_0}^{x_2} fx\,dx = \psi x_2 - \psi x_0;$$

so folgt $\quad \int_{x_0}^{x_2} fx\,dx = \int_{x_0}^{x_1} fx\,dx + \int_{x_1}^{x_2} fx\,dx.$

Wenn man also das Intervall der Grenzen, zwischen welchen ein Integral genommen werden soll, in beliebige Theile theilt, so kann man das ganze Integral als die Summe der diesen Theilen entsprechenden Integralwerthe ansehen.

Es war: $\int_{x_0}^{x_1} fx\,dx = \psi x_1 - \psi x_0$.

Der Quotient $\frac{\psi x_1 - \psi x_0}{x_1 - x_0}$ wird bekanntlich, wenn, wie vorausgesetzt ist, ψx immer endlich und stetig bleibt, desto genauer gleich der Ableitung von ψx, für $x = x_0$, je kleiner $x_1 - x_0$ ist. Wenn folglich $x_0, x_1, x_2, \cdots x_n$ beliebige auf einander folgende Werthe von x sind, so ist

$$\int_{x_1}^{x_n} fx\,dx = \int_{x_0}^{x_1} fx\,dx + \int_{x_1}^{x_2} fx\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} fx\,dx =$$

$$(x_1 - x_0)\cdot\frac{\psi x_1 - \psi x_0}{x_1 - x_0} + \cdots + (x_n - x_{n-1})\cdot\frac{\psi x_n - \psi x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

und diese Summe nähert sich der folgenden:

$$(x_1 - x_0)fx_0 + (x_2 - x_1)fx_1 + \cdots + (x_n - x_{n-1})fx_{n-1}$$

desto mehr, je kleiner die Differenzen $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, u. s. f. genommen werden, weil mit der Abnahme z. B. von $x_1 - x_0$ der Quotient $\frac{\psi x_1 - \psi x_0}{x_1 - x_0}$ sich der Ableitung von ψx, für $x = x_0$, d. h. dem Werthe fx_0 nähert.

86. Umgekehrt läßt sich beweisen, daß, wenn fx endlich und stetig bleibt, die Summe

$$\int_0^n = (x_1 - x_0)fx_0 + (x_2 - x_1)fx_1 + \cdots + (x_n - x_{n-1})fx_{n-1}$$

sich einer bestimmten endlichen Grenze nähert, wenn die Intervalle $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, u. s. f., welche zwischen den äußersten Werthen x_0 und x_n liegen, immer kleiner werden. — Es wird angenommen, daß die Werthe $x_0, x_1, x_2, \cdots x_n$ der Größe nach auf einander folgen, also die Differenzen $x_1 - {}_0$, $x_2 - x_1$, u. s. f. sämmtlich gleiche Zeichen haben, die man sich, der Einfachheit wegen, positiv denken kann.

Unter einem Mittelwerthe von fx soll ein Werth verstanden werden, welcher zwischen dem größten und dem kleinsten der Werthe liegt, die fx in einem gegebenen Intervalle, z. B. von x_0 bis x_n erhält. Ein solcher läßt sich immer durch $f(x_0 + \Theta(x_n - x_0))$ bezeichnen, wenn Θ eine Zahl ist, die nicht außerhalb der Grenzen 0 und 1 liegt. — Der aufgestellte Satz läßt sich nun folgendermaßen beweisen:

Die Summe $\int_0^n$ liegt offenbar zwischen den beiden Producten, die man erhält, wenn man die Summe aller Differenzen $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, u. s. f., d. i. $x_n - x_0$ mit dem größten, und wenn man sie mit dem kleinsten unter allen Werthen von fx_0, $fx_1, \cdots fx_{n-1}$ multiplicirt. Folglich ist $\int_0^n$ gleich einem Producte aus einem Mittelwerthe von fx in $x_n - x_0$, d. i.

$$\int_0^n = (x_n - x_0)f(x_0 + \Theta(x_n - x_0)).$$

Nun theile man jedes der Intervalle von x_0 bis x_1, x_1 bis x_2, u. s. f. wieder in kleinere Intervalle, und bilde die Summen $\int_0^1$, $\int_1^2$, u. s. f., nach demselben Gesetze, nach welchem $\int_0^n$ gebildet war; so erhält man wieder:

$$\int_0^1 = (x_1 - x_0)f(x_0 + \Theta_1(x_1 - x_0))$$

$$\int_1^2 = (x_2 - x_1)f(x_1 + \Theta_2(x_2 - x_1));\ \text{u. s. f.}$$

Man setze ferner

$f(x_0 + \Theta_1(x_1 - x_0) = fx_0 + \varepsilon_0$, $f(x_1 + \Theta_2(x_2 - x_1)) = fx_1 + \varepsilon_1$, u. s. f.; so erhält man:

$$\int_0^1 + \int_1^2 + \cdots + \int_{n-1}^n = \int_0^n + \varepsilon_0(x_1 - x_0) + \varepsilon_1(x_2 - x_1) + \cdots + \varepsilon_{n-1}(x_n - x_{n-1}).$$

Die Summe der mit ε_0, ε_1, u. s. f. multiplicirten Glieder ist wieder gleich dem Producte aus der Summe der Intervalle, d. i. aus $x_n - x_0$ in einen Mittelwerth ε von $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots \varepsilon_{n-1}$; mithin ist

$$\int_0^1 + \int_0^2 + \cdots + \int_{n-1}^n = \int_0^n + \varepsilon(x_n - x_0).$$

Je kleiner nun sämmtliche Intervalle $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$ u. s. f. genommen werden, desto mehr nähern sich $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots$ der Null, also desto genauer wird auch $\varepsilon = 0$, und

$$\int_0^1+\int_1^2+\cdots+\int_{n-1}^n=\int_0^n.$$

Hiermit ist bewiesen, daß, wenn jedes der Intervalle x_1-x_0, x_2-x_1,.. wieder in beliebige kleinere getheilt, und die Summe der Producte aus den Intervallen in die entsprechenden Werthe von fx genommen wird, diese Product-Summe der vorigen $\int_0^n$ desto näher kommt, je kleiner die Intervalle x_1-x_0, x_2-x_1 ... waren. Nun denke man sich eine beliebige andere Eintheilung des Intervalles x_n-x_0, und bilde die ihr zukommende Product-Summe, welche mit Σ_0^n bezeichnet werden mag, so kann man eine dritte Eintheilung annehmen, welche sowohl von der ersten, als von der zweiten Eintheilung eine Untereintheilung ist; die Product-Summen $\int_0^n$, Σ_0^n nähern sich alsdann beide der zu dieser dritten Eintheilung gehörigen Product-Summe; also nähern sie sich einander; w. z. b. w.

87. Das Integral $\int_{x_0}^{x_n} fx\,dx$ ist also gleich dem Werthe, welchem sich die Summe $\int_0^n$ nähert, indem die Differenzen x_1-x_0, x_2-x_1,... sich der Null nähern. So lange fx endlich und stetig bleibt, und wenn das Intervall x_n-x_0 endlich ist, ist dieser Werth ebenfalls ein bestimmter und endlicher, und zwar gleich dem Producte aus einem Mittelwerthe von fx in das Intervall x_n-x_0; daher ist auch das Integral

$$\int_{x_0}^{x_n} fx\,dx=(x_n-x_0)f(x_0+\Theta(x_n-x_0)).$$

Wenn die Function fx innerhalb der Grenzen x_0 und x_n nicht überall endlich und stetig ist, oder auch wenn das Intervall x_n-x_0 unendlich groß ist; so wird der Werth des Integrals $\int_{x_0}^{x_n} fx\,dx$ in manchen Fällen unendlich groß, in andern gänzlich unbestimmt, in noch anderen endlich und bestimmt. Kennt man einen allgemeinen Ausdruck ψx des Integrals $\int fx\,dx$, so erhält

man den Integralwerth $\int_{x_0}^{x_1} fx\,dx$, so lange ψx endlich und stetig bleibt, allemal durch die Formel:

$$\int_{x_0}^{x_1} fx\,dx=\psi x_1-\psi x_0.$$

Sobald hingegen für einen Werth a von x, zwischen x_0 und x_1, die Function ψx nicht zugleich endlich und stetig ist, so würde man häufig fehlerhafte Resultate aus der Anwendung der vorstehenden Formel erhalten. Es werde z. B. das Integral $\int\frac{dx}{x}$ von $x_0=-m$ bis $x_1=n$ verlangt, wo m und n positiv sind. Man hat allgemein $\int\frac{dx}{x}=log\,x$; also $\psi x=log\,x$, $\psi(n)=log\,(n)$, $\psi(-m)=log\,(-m)$; woraus

$$\int_{-m}^{n}\frac{dx}{x}=log\left(\frac{n}{-m}\right)$$

folgen würde; ein imaginärer Werth, der offenbar falsch ist. — In solchen Fällen muß man bei der Bestimmung der Constanten denjenigen Werth a von x beachten, bei welchem die Unterbrechung der Stetigkeit der Function ψx Statt findet. Zu dem Ende suche man die Werthe der Integrale $\int fx\,dx$ von $x=x_0$ bis $x=a-u$, und von $x=a+v$ bis $x=x_1$; u und v bedeuten zwei beliebig kleine positive Größen, und es ist angenommen, daß $x_1>x_0$ ist. Der Werth des Integrals $\int_{x_0}^{x_1} fx\,dx$ ist alsdann derjenige, welchen die Summe

$$\int_{x_0}^{a-u} fx\,dx+\int_{a+v}^{x_1} fx\,dx=\psi x_1-\psi(a+v)+\psi(a-u)-\psi(x_0)$$

für $u=0$, $v=0$ erhält.

Um z. B. über den Werth von $\int_{-m}^{n}\frac{dx}{x}$ zu entscheiden, welches Integral oben angeführt wurde, suche man, da für $x=a=0$, $log\,x=-\infty$ wird, die Summe

$$\int_{-m}^{-u}\frac{dx}{x}+\int_{v}^{n}\frac{dx}{x},$$

welche gleich

$$log(-u)-log(-m)+log(n)-log(v)=$$

$$log\left(\frac{u}{m}\right)+log\left(\frac{n}{v}\right)=log\left(\frac{n}{m}\right)+log\left(\frac{u}{v}\right)$$

ist. Da für $u=0$, $v=0$, dieser Werth unbestimmt ist, so ist auch der des vorgelegten Integrales unbestimmt.

Man hat $\int\frac{dx}{x^2}=Const.-\frac{1}{x}$;

also ist $\int_{v}^{n}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{v}-\frac{1}{n}$, $\int_{-m}^{-u}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{u}-\frac{1}{m}$;

folglich $\int_{-m}^{n}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}$ für $u=0$, $v=0$; mithin ist dieses Integral unendlich groß (u, v, n, m sind als positiv zu denken, wie vorhin).

Ein lehrreiches Beispiel ist noch folgendes: Man hat

$$d\ arc\,tg\,x=\frac{dx}{1+x^2};\qquad \text{folglich}$$

$$\int_{a}^{x}\frac{dx}{1+x^2}=arc\,tg\,x-arc\,tg\,a,$$

ein Werth, der für jedes beliebige x und a gilt, weil die Function $arc\,tg\,x$ (die übrigens immer zwischen $+\frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist, §. 21.) von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$ stetig bleibt. Differentiirt man aber den Ausdruck $arc\,tg\frac{x-a}{1+ax}$, so erhält man das Differential $\frac{dx}{1+x^2}$, indem a herausfällt, wie man durch die Rechnung finden wird. Da nun $arc\,tg\frac{x-a}{1+ax}$ für $x=a$ Null wird, so könnte man allgemein setzen:

$$\int_{a}^{x}\frac{dx}{1+x^2}=arc\,tg\frac{x-a}{1+ax}.$$

Dieser Werth ist aber nur so lange richtig, und mit dem obigen $arc\,tg\,x-arc\,tg\,a$ übereinstimmend, als die Function $arc\,tg\frac{x-a}{1+ax}$ stetig bleibt. Betrachtet man den Gang dieser Function näher, so wird man finden, daß, indem x von $-\infty$ bis $-\frac{1}{a}$ wächst, die Function von $arc\,tg\frac{1}{a}$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ wächst; daß dieselbe aber, für $x=-\frac{1}{a}$, von dem Werthe $+\frac{1}{2}\pi$ zu dem Werthe $-\frac{1}{2}\pi$ plötzlich übergeht, und hierauf, indem x von $-\frac{1}{a}$ bis $+\infty$ wächst, von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $arc\,tg\frac{1}{a}$ wächst. Nämlich man setze $x=-\frac{1}{a}-u$ (u positiv gedacht), so wird

$$arc\,tg\frac{x-a}{1+ax}=arc\,tg\frac{1+\frac{1}{a^2}-\frac{u}{a}}{u}=+\tfrac{1}{2}\pi\qquad \text{für}\qquad u=0;$$

ist aber $x=-\frac{1}{a}+v$, v wieder positiv gedacht, so wird:

$$arc\,tg\frac{x-a}{1+ax}=arc\,tg\frac{-\left(1+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{v}{a}}{v}=-\tfrac{1}{2}\pi,\quad \text{für}\quad v=0;$$

da bekanntlich $arc\,tg(+\infty)=+\frac{1}{2}\pi$, $arc\,tg(-\infty)=-\frac{1}{2}\pi$ ist. Wenn nun der Nenner $1+ax$ zwischen den Grenzen der Integration nicht Null wird, so ist das obige Integral richtig. Für die erste Grenze (a) des Integrals ist aber $1+ax=1+a^2$ positiv; also ist das obige Integral richtig, wenn $1+ax$ für den Werth von x an der zweiten Grenze des Integrals, positiv ist. Wenn aber der Bruch $\frac{x-a}{1+ax}$ zwischen den Grenzen der Integration sein Zeichen wechselt, indem er durch das Unendliche geht, was geschieht, wenn der Nenner $1+ax$ durch Null aus dem Positiven in das Negative übergeht, so giebt die obige Formel nicht mehr den richtigen Werth des Integrals.

Indessen ist derselbe immer in der Formel $arctg\frac{x-a}{1-ax}+\text{Const.}$ enthalten, wenn man die Constante gehörig bestimmt. Man findet, wenn $-\frac{1}{a}$ zwischen a und x liegt,

$$\int_a^x \frac{dx}{1+x^2}=arctg\,\frac{x-a}{1+ax}\pm\pi.$$

Das obere Zeichen gilt, wenn a negativ, das untere, wenn a positiv ist.

Diese Werthe ergeben sich, wenn man das Integral theilt, und von $x=a$ bis $x=-\frac{1}{a}$, hierauf von $x=-\frac{1}{a}$ bis $x=x$ berechnet; da aber die andere Form $arctg\,x-arctg\,a$ immer den richtigen Werth giebt, so ist es nicht nöthig, bei diesem Beispiele länger zu verweilen. Bei der Bestimmung der Constanten der Integration, oder der Werthe von Integrale zwischen gegebenen Grenzen, sind die Bemerkungen dieses §. zu beachten.

Integration rationaler Functionen, und einiger anderer, die sich auf solche zurückführen lassen.

88. Jede rationale Function von x läßt sich, vermittelst der algebraischen Division, in zwei Theile zerlegen, von denen der eine ein ganzes Polynom, der andere ein algebraischer ächter Bruch ist, d. h. ein Quotient aus zwei Polynomen, dessen Nenner von höherem Grade ist, als der Zähler. Die Integration des ganzen Polynoms geschieht sofort nach der Formel

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C; \quad \text{z. B.}$$

$$\int(ax^2+bx+c)dx=\tfrac{1}{3}ax^3+\tfrac{1}{2}bx^2+cx+\text{Const.}$$

Dagegen bedarf es zur Integration des gebrochenen Theiles einer Vorbereitung. Nämlich es sei $\frac{fx}{\varphi x}$ ein algebraischer ächter

Bruch, dessen Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Factor haben; so muß vorausgesetzt werden, daß der Nenner φx in reelle Factoren des ersten und zweiten Grades zerlegt sei; welche Zerlegung, wie die Algebra zu beweisen hat, immer möglich ist. Alsdann kann man den Bruch $\frac{fx}{\varphi x}$ in eine Summe einfacher Brüche zerlegen, wie folgt:

Es sei erstens $\varphi x=(x-a)\psi x$; ψx ein Polynom, welches durch $x-a$ nicht mehr theilbar ist; so ist der vorgelegte Bruch $\frac{fx}{\varphi x}=\frac{fx}{(x-a)\psi x}$. Man setze $\frac{fx-fa}{x-a}=U$, $\frac{\psi x-\psi a}{x-a}=V$, so sind U und V ganze Polynome, und man hat:

$$fx=U(x-a)+fa,\quad \psi x=V(x-a)+\psi a;$$

mithin, wenn A eine noch unbestimmte Zahl anzeigt,

$$fx-A\psi x=(U-AV)(x-a)+fa-A\psi a.$$

Nun bestimme man A so, daß $fa-A\psi a=0$ sei; so wird $fx-A\psi x$ durch $x-a$ theilbar, oder

$$fx=A\psi x+(U-AV)(x-a)$$

sein, mithin, wenn man durch $\varphi x=(x-a)\psi x$ dividirt,

$$\frac{fx}{\varphi x}=\frac{A}{x-a}+\frac{U-AV}{\psi x}.$$

Da $\varphi x=(x-a)\psi x$, so ist $\varphi' x=(x-a)\psi' x+\psi x$, mithin $\psi a=\varphi' a$; folglich $A=\frac{fa}{\psi a}=\frac{fa}{\varphi' a}$; und man kann demnach setzen:

$$\frac{fx}{\varphi x}=\frac{fa}{\varphi' a\cdot(x-a)}+\frac{Q}{\psi x} \qquad 1.$$

wo Q ein algebraisches Polynom von niedrigerem Grade als ψx ist.

Es sei $\varphi x=(x-a)^n\psi x$, ψx nicht mehr durch $x-a$ theilbar, und n gleich 2 oder größer als 2. Man setze $x-a=y$, so wird $\varphi x=\varphi(a+y)$, $\psi x=\psi(a+y)$, $\varphi(a+y)=y^n\psi(a+y)$.

Entwickelt man den Ausdruck $\frac{f(a+y)}{\psi(a+y)}$ durch algebraische Division nach steigenden Potenzen von y, und bezeichnet die n ersten Glieder des Quotienten mit U, so erhält man

$$\frac{f(a+y)}{\psi(a+y)}=U+\frac{Qy^n}{\psi(a+y)}.$$

Der Rest muß durch y^n theilbar sein; deshalb ist er durch Qy^n bezeichnet. Man hat demnach

$$\frac{fx}{\varphi x}=\frac{f(a+y)}{\varphi(a+y)}=\frac{U}{y^n}+\frac{Q}{\psi(a+y)},$$

oder

$$\frac{fx}{\varphi x}=\frac{U}{(x-a)^n}+\frac{Q}{\psi x}; \qquad 2.$$

U und Q sind ganze Polynome, und zwar ist U von $n-1$ten Grade. Wenn also der Nenner ψx gleiche Factoren enthält, so läßt sich der Bruch $\frac{fx}{\varphi x}$ nach vorstehender Formel, mit Hülfe einer bloßen algebraischen Division, zerlegen.

89. Es sei ferner $P=(x-\alpha)^2+\beta^2$ ein in reelle Factoren nicht mehr zerlegbarer Factor des zweiten Grades von φx; und $\varphi x=P\cdot\psi x$, ψx durch P nicht mehr theilbar. Man setze $U=A+B(x-\alpha)$, so kann man immer die beiden reellen Zahlen A und B so bestimmen, daß

$$fx-U\psi x$$

durch P theilbar werde.

Denn man dividire das Polynom $fx-U\varphi x$ durch P, es sei Q der Quotient, und $m+n(x-\alpha)$ der Rest der Division, (m und n sind zwei reelle Zahlen, und unabhängig von x); so ist

$$fx-U\psi x=QP+m+n(x-\alpha).$$

Man bestimme nun die Coefficienten A und B so, daß mit $P=0$ zugleich $fx-U\psi x=0$ wird; d. h. da $P=(x-\alpha)^2+\beta^2=0$ gesetzt, $x=\alpha+\beta i$ giebt, $(i=\pm\sqrt{-1})$, so, daß

$$f(\alpha+\beta i)-(A+B\beta i)\psi(\alpha+\beta i)=0$$

sei. Entwickelt man diesen Ausdruck, indem man den Quotienten

$$\frac{f(\alpha+\beta i)}{\psi(\alpha+\beta i)}$$

auf die Form $M+Ni$ bringt, in welcher M und N reelle Zahlen sind, so erhält man

$$A+B\beta i=M+Ni;$$

mithin

$$A=M,\ B=\frac{N}{\beta}. \qquad 3.$$

Da nun für $x=\alpha+\beta i$, $fx-U\psi x=0$, $P=0$, so folgt, daß auch

$$m+n\beta i=0$$

sein muß, und mithin $m=0$, $n=0$ ist. Also ist, wenn die Coefficienten A und B auf die angegebene Weise bestimmt sind, $fx-U\psi x$ durch P theilbar, und man hat, indem Q, wie oben, den Quotienten der Division bedeutet,

$$fx-U\psi x=QP,\ U=A+B(x-\alpha);$$

mithin, da $P\cdot\psi x=\varphi x$,

$$\frac{fx}{\varphi x}=\frac{U}{P}+\frac{Q}{\psi x}. \qquad 4.$$

90. Wenn der Nenner φx einen unzerlegbaren Factor des zweiten Grades $P=(x-\alpha)^2+\beta^2$ auf einer höheren als der ersten Potenz enthält; so sei $\varphi x=P^n\cdot\psi x$, ψx durch P nicht theilbar. Alsdann kann man immer ein Polynom U vom $2n-1$ten Grade finden, welches so beschaffen ist, daß

$$fx-U\psi x$$

durch P^n theilbar ist. Nämlich jedes Polynom vom $2n-1$ten Grade läßt sich durch fortgesetzte Division mit dem Polynome des zweiten Grades P auf folgende Form bringen:

$$U=A+B(x-\alpha))+[A_1+B_1(x-a)]P+[A_2+B_2(x-a)]P^2+\cdots$$
$$+[A_{n-1}+B_{n-1}(x-a)]P^{n-1}.$$

Um nun die $2n$ Coefficienten A, B, A_1, B_1, u. s. f. so zu bestimmen, daß $fx-U\psi x$ durch P^n theilbar werde, berechne man zuerst A und B nach 3. so, daß

$$fx-[A+B(x-\alpha)]\psi x$$

durch P theilbar werde; der Quotient sei Fx, so ist

$$\frac{fx-U\psi x}{P}=Fx-[A_1+B_1(x-a)+(A_2+B_2(x-a))P+\cdots]\psi x.$$

Bestimmt man sodann A_1 und B_1 wieder so, daß

$$Fx-[A_1+B_1(x-a)]\psi x$$

durch P theilbar wird, so sei F_1x der Quotient dieser Division. Man erhält:

$$\frac{fx-U\psi x}{P^2}=F_1x-[A_2+B_2(x-a)+[A_3+B_3(x-a)]P+\cdots]\psi x;$$

also ist $fx-U\psi x$ durch P^2 theilbar gemacht. Werden ferner A_2 und B_2 so bestimmt, daß

$$F_1x-[A_2+B_2(x-a)]\psi x$$

durch P theilbar wird, so wird $fx-U\psi x$ durch P^3 theilbar. Auf diese Weise fortfahrend, bestimmt man alle Coefficienten von U so, daß $fx-U\psi x$ durch P^n theilbar wird. Demnach erhält man $fx-U\psi x=Q\cdot P^n$, und weil $\varphi x=P^n\cdot\psi x$,

$$\frac{fx}{\varphi x}=\frac{U}{P^n}+\frac{Q}{\psi x} \qquad \text{oder}$$

$$\frac{fx}{\varphi x}=\frac{A+B(x-a)}{P^n}+\frac{A_1+B_1(x-a)}{P^{n-1}}+\frac{A_2+B_2(x-a)}{P^{n-2}}+\cdots$$
$$+\frac{A_{n-1}+B_{n-1}(x-a)}{P}+\frac{Q}{\psi x}. \qquad 5.$$

Indem man die nämlichen Regeln auf den noch unzerlegten ächten Bruch $\frac{Q}{\psi x}$ anwendet, muß man dahin gelangen, den Bruch $\frac{fx}{\varphi x}$ in eine Summe von Brüchen zu zerlegen, deren einzelne Glieder keine andere Form haben können, als $\frac{A}{(x-a)^n}$ oder $\frac{A+B(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$. (n eine pos. ganze Zahl.)

Es sei insbesondere der Nenner

$$\varphi x=(x-a)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

ein Product aus lauter ungleichen Factoren des ersten Grades, so folgt, daß der Bruch $\frac{fx}{\varphi x}$ in eine Summe von folgender Form zerlegbar sein muß:

$$\frac{fx}{\varphi x}=\frac{A}{x-a}+\frac{A_1}{x-a_1}\cdots+\frac{A_\mu}{x-a_\mu}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}.$$

Man vereinige sämmtliche Brüche auf der rechten Seite, mit Ausnahme eines einzigen, in eine Summe, welche durch $\frac{Q}{\psi x}$ bezeichnet werde, so daß sei:

$$\frac{fx}{\varphi x}=\frac{A_\mu}{x-a_\mu}+\frac{Q}{\psi x}$$

und $\varphi x=(x-a_\mu)\psi x$. Aus der vorstehenden Gleichung folgt

$$fx=A_\mu\psi x+Q(x-a_\mu),$$

welche Gleichung für jeden Werth von x identisch bestehen muß, weil die Zerlegung, wie bewiesen, möglich ist. Setzt man nun $x=a_\mu$, so folgt

$$fa=A_\mu\cdot\psi a_\mu,$$

oder, weil $\qquad \psi a_\mu=\varphi' a_\mu,\ A_\mu=\frac{fa_\mu}{\varphi' a_\mu}.$

Demnach erhält man folgende Zerlegung des Bruches $\frac{fx}{\varphi x}$, in dem angenommenen Falle:

$$\frac{fx}{\varphi x}=\frac{fa}{\varphi' a(x-a)}+\frac{fa_1}{\varphi' a_1(x-a_1)}+\cdots+\frac{fa_n}{\varphi' a_n(x-a_n)}. \qquad 6.$$

91. **Beispiele.** 1. Es sei

$fx=2x^2-7x+3$, $\varphi x=(x-2)(x-1)(x+3)=x^3-7x+6$, $\varphi' x=3x^2-7$.

Man berechne die Werthe von fx und $\varphi' x$ für $x=2$, $x=1$, $x=-3$, und führe dieselben in die Formel 6. des §. 90. ein, so erhält man:

$$\frac{2x^2-7x+3}{x^3-7x+6}=\frac{-3}{5(x-2)}+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{21}{10(x+3)}.$$

2. $fx=2x^2-3x+4$. $\varphi x=x^3-x^2-7x+3$

$$=(x-3)(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2}).$$

$$\frac{fx}{\varphi x}=\frac{13}{14(x-3)}+\frac{15+19\sqrt{2}}{28(x+1+\sqrt{2})}+\frac{15-19\sqrt{2}}{28(x+1-\sqrt{2})}.$$

3. $fx=x^2-2x+3$. $\varphi x=(x-2)^3(x^2-1)$. Man setze $x-2=y$, $\psi x=x^2-1$, so kommt

$$fx=f(a+y)=3+2y+y^2,\ \psi x=\psi(2+y)=3+4y+y^2;$$

woraus durch Division:

$$\frac{f(2+y)}{\psi(2+y)}=1-\tfrac{2}{3}y+\tfrac{8}{9}y^2-\frac{(26+8y)y^3}{9\psi(2+y)}$$

folgt. (Vgl. §. 88. Formel 2.)

Also ist

$$\frac{x^2-2x+3}{(x-2)^2(x^2-1)}=\frac{1}{(x-2)^3}-\tfrac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}+\tfrac{8}{9}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{10+8x}{9(x^2-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-2)^3}-\tfrac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}+\tfrac{8}{9}\cdot\frac{1}{x-2}-\tfrac{1}{9}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}.$$

4. $fx=2x^2-3x+4$. $\varphi x=[(x+1)^2+2][(x-2)^2+3]$. (S. §. 89.)

$$\frac{fx}{\varphi x}=\frac{A+B(x+1)}{(x+1)^2+2}+\frac{A'+B'(x-2)}{(x-2)^2+3}.$$

Es muß demnach $fx-[A+B(x+1)]\psi x=0$ werden für

$$x=-1+\sqrt{-2},\ \psi x=(x-2)^2+3.$$

Man erhält

$$f(-1+\sqrt{-2})=5-7\sqrt{-2}.\ \psi(-1+\sqrt{-2})=10-6\sqrt{-2}.$$

$$A+B\sqrt{-2}=\frac{5-7\sqrt{-2}}{10-6\sqrt{-2}}=\frac{67-20\sqrt{-2}}{86};\ A=\frac{67}{86},\ B=\frac{-20}{86}.$$

Auf ähnliche Weise, oder auch durch Division, findet man

$A'=\frac{45}{86}$, $B'=\frac{20}{86}$; mithin

$$\frac{2x^2-3x+4}{(x^2+2x+3)(x^2-4x+7)}=\frac{67-20(x+1)}{86((x+1)^2+2)}+\frac{45+20(x-2)}{86((x-2)^2+3)}.$$

5. $fx=x^2+1$. $\varphi x=(x^2+4x+5)^3(x^2+2)$. — Man setze:

$$x^2+4x+5=(x+2)^2+1=P,$$

$$U=A+B(x+2)+(A_1+B_1(x+2))P+(A_2+B_2(x+2))P^2;$$

so sind die Coefficienten in U aus der Bedingung zu bestimmen, daß

$$fx-U(x^2+2)$$

durch P^3 theilbar sei. Demnach ist (§. 90.) zu setzen:

$fx-[A+B(x+2)][x^2+2]=0$ für $x=-2+i$, woraus folgt:

$$A+Bi=\frac{4-4i}{5-4i}=\frac{36-4i}{41},\ A=\frac{36}{41},\ B=-\frac{4}{41}.$$

Dividirt man

$$fx-\frac{[36-4(x+2)][x^2+2]}{41}=\frac{4x^3+13x^2+8x-15}{41}$$

durch P, so kommt $Fx=\frac{4x-3}{41}$. Man mache ferner

$$Fx-[A_1+B_1(x+2)][x^2+2]=0 \text{ für } x=-2+i,$$

so kommt $A_1+B_1i=\frac{-11+4i}{41(5-4i)}=\frac{-71-24i}{41\cdot41}$;

$$A_1=\frac{-71}{41\cdot41},\ B_1=\frac{-24}{41\cdot41}.$$

Hieraus findet man weiter $F_1x=\frac{24x+23}{41\cdot41}$, und, indem man

$$F_1x-[A_2+B_2(x+2)][x^2+2]=0$$

setzt für $x=-2+i$, $A_2=\frac{-221}{41^3}$, $B_2=\frac{20}{41^3}$.

Man findet endlich

$$F_1x-[A_2+B_2(x+2)][x^2+2]=\frac{P(261-20x)}{41\cdot41\cdot41},$$

woraus sich folgende Zerlegung ergiebt:

$$\frac{x^2+1}{[x^2+4x+5]^3(x^2+2)}=\frac{36-4(x+2)}{41(x^2+4x+5)^3}-\frac{71+24(x+2)}{41\cdot41\cdot(x^2+4x+5)^2}$$
$$-\frac{221-20(x+2)}{41\cdot41\cdot41\cdot(x^2+4x+5)}+\frac{261-20x}{41\cdot41\cdot41\cdot(x^2+2)}.$$

92. Nach Zerlegung des Bruches $\frac{fx}{\varphi x}$ hat man nur noch Functionen von der Form:

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{und} \quad \frac{A+B(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^n}$$

zu integriren. Ist $n=1$, so erhält man

$$\int\frac{dx}{x-a}=log\,nat\,(x-a);$$

ist aber n verschieden von 1, so ist

$$\int\frac{dx}{(x-a)^n}=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}.$$

Um das Integral des zweiten Ausdruckes zu finden, betrachte man jeden seiner Theile besonders, nämlich

$$\frac{A}{[(x-a)^2+b^2]^n} \quad \text{und} \quad \frac{B(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^n}.$$

Das Integral des letzten dieser beiden Ausdrücke findet man am leichtesten. Man setze $x-a=y$, $dx=dy$, so wird

$$\int\frac{(x-a)dx}{[(x-a)^2+b^2]^n}=\int\frac{y\,dy}{(y^2+b^2)^n}.$$

Setzt man nun noch $y^2+b^2=z$, so wird $y\,dy=\frac{1}{2}dz$, und

$$\int\frac{y\,dy}{(y^2+b^2)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^n}=-\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{1}{z^{n-1}},$$

oder, wenn wieder für z sein Werth $(x-a)^2+b^2$ gesetzt wird:

$$\int\frac{(x-a)dx}{[(x-a)^2+b^2]^n}=\text{Const.}-\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^{n-1}}.$$

Es bleibt also noch das Integral $\int\frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^n}$ zu finden. Es sei zuerst $n=1$, so ist $\int\frac{dx}{(x-a)^2+b^2}$ das vorgelegte Integral. Setzt man $x-a=by$, $dx=b\,dy$, so kommt

$$\int\frac{dx}{(x-a)^2+b^2}=\frac{1}{b}\int\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{b}\,arc\,tg\,y+\text{Const.}=$$
$$\frac{1}{b}\,arc\,tg\left(\frac{x-a}{b}\right)+\text{Const.}$$

Allgemein ist, wenn $x-a=by$,

$$\int\frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^n}=\frac{1}{b^{2n-1}}\int\frac{dy}{(1+y^2)^n}.$$

Das Integral $\int\frac{dy}{(1+y^2)^n}$ läßt sich durch eine Methode, von welcher auch bei anderen Gelegenheiten häufig Gebrauch gemacht wird, auf ein anderes von derselben Form bringen, in welchem der Exponent n um eine Einheit niedriger ist. Diese Methode ist die der *theilweisen Integration*, und besteht in Folgendem: Es seien u und v zwei Functionen von x, so ist $d(uv)=udv+vdu$; folglich ist, wenn man integrirt, $u\cdot v=\int udv+\int vdu$, oder

$$\int udv=u\cdot v-\int vdu.$$

Durch diese Formel wird das Integral $\int udv$ auf ein anderes $\int vdu$ zurückgeführt. In dem gegenwärtigen Falle läßt sich davon folgende Anwendung machen: Man setze $v=y$, $u=\frac{1}{(1+y^2)^n}$, so ist $dv=dy$, und $du=\frac{-2ny\,dy}{(1+y^2)^{n+1}}$; daher nach der obigen Formel:

$$\int\frac{dy}{(1+y^2)^n}=\frac{y}{(1+y^2)^n}+2n\int\frac{y^2dy}{(1+y^2)^{n+1}}.$$

Nun ist

$$\frac{y^2}{(1+y^2)^{n+1}}=\frac{1+y^2-1}{(1+y^2)^{n+1}}=\frac{1}{(1+y^2)^n}-\frac{1}{(1+y^2)^{n+1}};$$

mithin:

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n\int \frac{dy}{(1+y^2)^n} - 2n\int \frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}};$$

woraus $2n\int \frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}} = \frac{y}{(1+y^2)^n} + (2n-1)\int \frac{dy}{(1+y^2)^n}$

folgt. Schreibt man $n-1$ statt n, so kommt:

$$(2n-2)\int \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \frac{y}{(1+y^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}}.$$

Dies ist die verlangte Reductionsformel. Setzt man darin $n=2$, so kommt

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^2} = \tfrac{1}{2}\frac{y}{1+y^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dy}{1+y^2} =$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{y}{1+y^2} + \tfrac{1}{2}\, arc\ tg\ y + \text{Const.}$$

Für $n=3$ findet man

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^3} = \tfrac{1}{4}\frac{y}{(1+y^2)^2} + \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\frac{y}{(1+y^2)} + \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2} arc tg\, y + C.$$

u. s. w.

Mit Hülfe der gefundenen Integrale kann man, nach vollbrachter Zerlegung in einfache Brüche, jede rationale Function integriren. Es werde noch bemerkt, daß, wenn man die imaginären Factoren des ersten Grades zu Hülfe nimmt, auch die Integrale von der Form $\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^n}$ oder einfacher $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ sich als algebraische und logarithmische Functionen ergeben. Man hat nämlich, wenn $n=1$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{1+xi} + \frac{1}{1-xi}\right);$$

folglich $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{1+xi} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{1-xi}$,

oder, wenn man wie gewöhnlich integrirt:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = arc\ tg\ x = \frac{1}{2i}\, log\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right),$$

welcher Ausdruck von $arc\ tg\ x$, durch imaginäre Logarithmen, zu merken ist.

93. Integrale, deren Ableitungen nicht rational sind, lassen sich zuweilen durch Vertauschung der veränderlichen Größe mit einer anderen, auf Integrale rationaler Functionen zurückführen. Dahin gehört das Integral $\int f(x,y)dx$, wenn $f(x,y)$ eine rationale Function von x und y, y aber einen irrationalen Ausdruck von folgender Form bedeutet:

$$y = \left(\frac{a+bx}{m+nx}\right)^{\frac{1}{q}}$$

wo q eine ganze Zahl.

Setzt man nämlich $\frac{a+bx}{m+nx} = y^q$, so wird $x = \frac{my^q - a}{b - ny^q}$, folglich kann man x und $\frac{dx}{dy}$ rational durch y ausdrücken; wodurch man

$$\int f(x,y)\, dx = \int \varphi y \cdot \frac{dx}{dy}\, dy$$

erhält, in welchem Ausdrucke $\varphi y \cdot \frac{dx}{dy}$ eine rationale Function von y ist, die sich nach den Regeln der vorigen §. integriren läßt.

Man kann diesen Satz noch etwas allgemeiner machen. Es sei $\frac{a+bx}{m+nx} = u$, und $X = f(x,\ u^{\frac{1}{q}},\ u^{\frac{1}{q'}},\ u^{\frac{1}{q''}}, \ldots)$ eine rationale Function von x und beliebigen Wurzeln von u; q, q', q'',.. ganze Zahlen; so suche man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen q, q', u. s. f.; dieses sei p; alsdann setze man $u^{\frac{1}{p}} = y$, so sind $u^{\frac{1}{q}}$, $u^{\frac{1}{q'}}$ u. s. f. sämmtliche ganze Potenzen von y, und die vorgelegte Function geht in eine rationale Function von x und y über; daher sich, nach dem Vorigen, das Integral $\int X dx$ auf ein anderes $\int Y dy$ bringen läßt, in welchem Y eine rationale Function von y ist.

94. Integrale, deren Ableitungen rationale Functionen von x und von der Quadratwurzel aus einem ganzen Polynome des zweiten Grades sind, lassen sich ebenfalls immer rational machen. Man kann diesen Satz auf den des vorigen §. zurückführen. Nämlich es sei $u=\sqrt{ax^2+2bx+c}$; so zerlege man das Polynom $ax^2+2bx+c$ in zwei Factoren des ersten Grades $\alpha x+\beta$ und $\gamma x+\delta$, so daß

$$u=\sqrt{(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)}=(\alpha x+\beta)\sqrt{\frac{\gamma x+\delta}{\alpha x+\beta}}$$

wird. Vorausgesetzt, daß diese beiden Factoren reell sind, setze man $y=\sqrt{\frac{\gamma x+\delta}{\alpha x+\beta}}$, so geht die rationale Function von x und u offenbar in eine rationale Function $f(x,y)$ von x und y über; und das Integral $\int f(x,y)dx$ läßt sich, nach dem vorigen §., in ein anderes von der Form $\int \varphi y\, dy$ verwandeln, in welchem φy eine rationale Function von y ist, die sich nach den vorhergehenden Sätzen integriren läßt. Diese Methode ist auch anwendbar, wenn die beiden Factoren von u^2 imaginär sind; man kann indessen zu der verlangten Integration auf anderem Wege gelangen, ohne das Polynom u^2 in Factoren zu zerlegen.

Die rationale Function $f(x,u)$ von x und $u=\sqrt{ax^2+2bx+c}$ läßt sich immer auf folgende Form bringen:

$$f(x,u)=M+Nu,$$

wo M und N rationale Functionen von x sind. Offenbar nämlich können weder im Zähler noch im Nenner höhere Potenzen von u vorkommen, als die erste, weil u^2 wieder eine rationale Function von x ist. Nun sei $f(x,u)=\frac{P+Qu}{R+Tu}$, P, Q, R, T rationale Functionen von x; so braucht man nur im Zähler und Nenner mit $R-Tu$ zu multipliciren, um im Nenner eine rationale Function von x zu erhalten, nämlich $R^2-T^2u^2$. Schafft man noch im Zähler das Quadrat von u weg, so ergiebt sich die Form $f(x,u)=M+Nu$, w. z. b. w.

Die Aufgabe kommt also immer auf die Integration von einer Function der Form $fx\cdot u$ zurück, in welcher fx eine rationale Function von x bedeutet. Statt dieses Ausdruckes kann man auch $\frac{fx\cdot u^2}{u}=\frac{\varphi x}{u}$ schreiben, weil $\varphi x=fx\cdot u^2$ wieder rational ist.

95. Es sei demnach das Integral $\int\frac{\varphi x}{u}dx$ vorgelegt, worin $u=\sqrt{ax^2+2bx+c}$, φx eine rationale Function von x ist. Man nehme erstens an, daß a positiv sei, und setze $ax+b=az$, $ac-b^2=a^2h$, so wird

$$u^2=ax^2+2bx+c=\frac{(ax+b)^2+ac-b^2}{a}=a(z^2+h)$$

und $dx=dz$; daher das Integral folgende Form annimmt: $\int\frac{fz\cdot dz}{\sqrt{z^2+h}}$; worin fz eine rationale Function von z ist. Nun setze man

$$\sqrt{z^2+h}=v-z,$$

mithin $z^2+h=v^2-2vz+z^2$, oder $h=v^2-2vz$. Differentiirt man diese Gleichung, so kommt $(v-z)dv=v dz$, oder $\frac{dv}{v}=\frac{dz}{v-z}$, und weil $v-z=\sqrt{z^2+h}$,

$$\frac{dv}{v}=\frac{dz}{\sqrt{z^2+h}}.$$

Zugleich ist $z=\frac{v^2-h}{2v}$, $fz=f\left(\frac{v^2-h}{2v}\right)=\psi v$, eine rationale Function von v; also

$$\frac{fz\cdot dz}{\sqrt{z^2+h}}=\frac{\varphi v\cdot dv}{v},$$

die verlangte rationale Form.

Zweitens sei a negativ. Man schreibe $-a$ statt a, so wird

$$u^2=c+2bx-ax^2=\frac{ac+b^2-(ax-b)^2}{a}$$

in welchen Formeln a wieder positiv ist. Es sei ferner $ac+b^2=a^2h$, $ax-b=az$, mithin $u^2=a(h-z^2)$. In dieser Formel muß h positiv sein, wenn nicht u beständig imaginär sein soll. Man schreibe daher h^2 statt h. Das vorgelegte Integral kommt mithin auf die Form $\int\frac{\varphi z\cdot dz}{\sqrt{h^2-z^2}}$ zurück, in welcher φz eine rationale Function von z ist. Nun setze man

$$\sqrt{h^2-z^2}=v(h+z),$$

also $(h+z)v^2=h-z$. Differentiirt man diese Gleichung, so kommt

$$(1+v^2)dz+2v(h+z)dv=0,$$

also

$$\frac{dz}{v(h+z)}=-\frac{2dv}{1+v^2},$$

oder, weil $v(h+z)=\sqrt{h^2-z^2}$ ist,

$$\frac{dz}{\sqrt{h^2-z^2}}=-\frac{2dv}{1+v^2}.$$

Ferner ist $z=\frac{h(1-v^2)}{1+v^2}$; folglich wird durch diese Substitution, das vorgelegte Integral auf dasjenige einer rationalen Function zurückgeführt, wie verlangt wurde.

Es sei z. B. das Integral $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+h}}$ vorgelegt. Man setze $v=x+\sqrt{x^2+h}$, so erhält man nach dem Vorigen, $\frac{dv}{v}=\frac{dx}{\sqrt{x^2+h}}$; mithin ist das Integral gleich $\log v+\text{Const.}$, oder

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+h}}=\log\left(x+\sqrt{x^2+h}\right)+\text{Const.}$$

Ist dagegen das Integral $\int\frac{dx}{\sqrt{h^2-x^2}}$ vorgelegt, so muß $v=\sqrt{\frac{h-x}{h+x}}$ gesetzt werden; woraus sich $\frac{dx}{\sqrt{h^2-x^2}}=-\frac{2dv}{1+v^2}$ ergiebt; mithin

$$\int\frac{dx}{\sqrt{h^2-x^2}}=\text{Const.}-2\,arc\,tg\,v=\text{Const.}-2\,arc\,tg\sqrt{\frac{h-x}{h+x}}.$$

Verlangt man, daß dieses Integral für $x=0$ verschwinde, so erhält man, weil für $x=0$

$$arc\,tg\sqrt{\frac{h-x}{h+x}}=arc\,tg\,1=\tfrac{1}{4}\pi$$

wird,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{h^2-x^2}}=\tfrac{1}{2}\pi-2\,arc\,tg\sqrt{\frac{h-x}{h+x}},$$

oder auch, wenn man hx statt x schreibt:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\tfrac{1}{2}\pi-2\,arc\,tg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Früher war gefunden $d\,arc\,sin\,x=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; mithin $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=arc\,sin\,x$, welches Integral gleichfalls von Null anfängt.

Demnach muß $arc\,sin\,x=\tfrac{1}{2}\pi-2\,arc\,tg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$,

oder

$$arc\,tg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\,arc\,sin\,x$$

sein. Wird $arc\,sin\,x=u$ gesetzt, also $x=sin\,u$, und

$$arc\,tg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}u,$$

so folgt

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=tg\left(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}u\right).$$

In der That ist, wie bekannt,

$$tg\left(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}u\right)=+\sqrt{\frac{1-\sin u}{1+\sin u}}$$

indem das positive Zeichen gewählt werden muß, weil der Werth von u zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt, also $\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}u$ positiv und kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist.

Man kann auch das zweite der eben behandelten Integrale als eine imaginäre Form des ersten ansehen. Schreibt man nämlich in der Formel

$$\int\frac{dx}{\sqrt{h^2+x^2}}=\log\left(x+\sqrt{h^2+x^2}\right)+\text{Const.}$$

xi statt x, so erhält man:

$$i\int\frac{dx}{\sqrt{h^2-x^2}}=\log\left(xi+\sqrt{h^2-x^2}\right)+\text{Const.}$$

Soll dies Integral für $x=0$ verschwinden, so kommt

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{h^2-x^2}}=\frac{1}{i}\log\left(\frac{xi+\sqrt{h^2-x^2}}{h}\right)=\arcsin\frac{x}{h},$$

wo h positiv zu nehmen ist.

96. Es werde noch das Integral $\int\frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2+x^2}}$ verlangt. Man setze

$$\sqrt{h^2+x^2}=u-x,$$

so kommt, nach dem Obigen,

$$\frac{dx}{\sqrt{h^2+x^2}}=\frac{du}{u}\quad\text{und}\quad a+x=\frac{u^2+2au-h^2}{2u};$$

mithin

$$\frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2+x^2}}=\frac{2du}{u^2+2au-h^2}=\frac{2du}{(u+a)^2-a^2-h^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\left[\frac{du}{u+a-\sqrt{a^2+h^2}}-\frac{du}{u+a+\sqrt{a^2+h^2}}\right];$$

und das gesuchte Integral gleich

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\log\left[\frac{u+a-\sqrt{a^2+h^2}}{u+a+\sqrt{a^2+h^2}}\right],$$

oder, wenn man für u seinen Werth in x setzt,

$$\int\frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2+x^2}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\log\left[\frac{x+a+\sqrt{h^2+x^2}-\sqrt{h^2+a^2}}{x+a+\sqrt{h^2+x^2}+\sqrt{h^2+a^2}}\right]+\text{Const.}$$

Schreibt man $-x$ statt x, und $-a$ statt a, also auch $-dx$ statt dx, so bleibt das Integral links unverändert, während sein Werth rechts eine andere Form erhält, nämlich:

$$\int\frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2+x^2}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\log\left[\frac{x+a-\sqrt{h^2+x^2}+\sqrt{h^2+a^2}}{x+a-\sqrt{h^2+x^2}-\sqrt{h^2+a^2}}\right]+\text{Const.}$$

Addirt man diese beiden Werthe, und nimmt das Product unter dem Logarithmenzeichen, so kommt:

$$2\int\frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2+x^2}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{h^2+a^2}}\log\left[\frac{ax-h^2+\sqrt{h^2+a^2}\cdot\sqrt{h^2+x^2}}{ax-h^2-\sqrt{h^2+a^2}\cdot\sqrt{h^2+x^2}}\right]+\text{Const.}$$

oder wenn man den Nenner rational macht, und bemerkt, daß

$$(ax-h^2)^2-(h^2+a^2)(h^2+x^2)=-h^2(x+a)^2$$

ist,

$$\int\frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2+x^2}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{h^2+a^2}}\log\left[\frac{ax-h^2+\sqrt{h^2+a^2}\cdot\sqrt{h^2+x^2}}{-h(x+a)}\right]+\text{Const. A.}$$

Schreibt man ferner in A. xi statt x, ai statt a $(i=\sqrt{-1})$, also idx statt dx, so kommt

$$\int\frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2-x^2}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{h^2-a^2}}\log\left[\frac{-ax-h^2+\sqrt{h^2-a^2}\cdot\sqrt{h^2-x^2}}{x+a}\right]+\text{Const. B.}$$

Diese Formel gilt, wenn $\sqrt{h^2-a^2}$ reell ist. Hat aber dieser Ausdruck einen imaginären Werth, so schreibe man $i\sqrt{a^2-h^2}$ statt $\sqrt{h^2-a^2}$; woraus folgt:

$$\int\frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2-x^2}}=$$

$$\frac{1}{i\sqrt{a^2-h^2}}\log\left[\frac{-ax-h^2+i\sqrt{a^2-h^2}\cdot\sqrt{h^2-x^2}}{x+a}\right]+\text{Const.}$$

Man schreibe $i^2(ax+h^2)$ statt $-ax-h^2$, und dividire unter dem Logarithmenzeichen mit hi, so kommt

$$\int\frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2-x^2}}=$$

$$\frac{1}{i\sqrt{a^2-h^2}}\cdot\log\left[\frac{(ax+h^2)i+\sqrt{a^2-h^2}\cdot\sqrt{h^2-x^2}}{h(x+a)}\right]+\text{Const.}$$

Nun werde, weil

$$(ax+h^2)^2+(a^2-h^2)(h^2-x^2)=h^2(x+a)^2 \quad \text{ist,}$$

$$\frac{\sqrt{a^2-h^2}\cdot\sqrt{h^2-x^2}}{h(x+a)}=\cos y,\quad \frac{ax+h^2}{h(x+a)}=\sin y$$

gesetzt, so erhält das vorstehende Integral die Form

$$\frac{1}{i\sqrt{a^2-h^2}}\log(\cos y+i\sin y)=\frac{y}{\sqrt{a^2-h^2}},$$

also

$$\int\frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-h^2}}\arcsin\left[\frac{ax+h^2}{h(x+a)}\right]+\text{Const. C.}$$

In dieser Formel ist h positiv zu nehmen.

In der Formel A. schreibe man $\pm hi$ statt h, so kommt:

$$\int\frac{dx}{(a+x)\sqrt{x^2-h^2}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-h^2}}\log\left[\frac{ax+h^2+\sqrt{a^2-h^2}\cdot\sqrt{x^2-h^2}}{x+a}\right]+\text{Const. D.}$$

Diese Formel gilt, wenn a^2-h^2 positiv ist. Ist aber a^2-h^2 negativ, so schreibe man in der Formel C. ai, xi, $\pm hi$ statt a, x, h; man erhält:

$$\int\frac{dx}{(a+x)\sqrt{x^2-h^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{h^2-a^2}}\arcsin\left[\frac{ax+h^2}{h(x+a)}\right]+\text{Const.}$$

In dieser Formel kann, in so fern h positiv gedacht wird, nur eines der beiden vorgesetzten Zeichen, und zwar für alle Fälle nur das nämliche, gelten. Wird $a=0$ gesetzt, kommt:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-h^2}}=-\frac{1}{h}\arcsin\frac{h}{x}+\text{Const.}$$

indem man leicht findet, daß hier ~~für ein positives h~~, nur das negative Zeichen gilt. Daher gilt auch oben das negative Zeichen; also ist, wenn $h^2>a^2$:

$$\int\frac{dx}{(a+x)\sqrt{x^2-h^2}}=-\frac{1}{\sqrt{h^2-a^2}}\arcsin\left[\frac{ax+h^2}{h(x+a)}\right]+\text{Const.},$$

oder weil immer $\arcsin z=\frac{1}{2}\pi-\arccos z$ ist,

$$\int\frac{dx}{(a+x)\sqrt{x^2-h^2}}=\frac{1}{\sqrt{h^2-a^2}}\arccos\left(\frac{ax+h^2}{h(x+a)}\right)+\text{Const. E.}$$

Die vorstehenden Formeln werden unbestimmt, sobald $h^2=a^2$. In diesem Falle erhält man, nach den allgemeinen Regeln:

$$\int\frac{dx}{(a+x)\sqrt{a^2-x^2}}=\text{Const.}-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

$$\int\frac{dx}{(a+x)\sqrt{x^2-a^2}}=\text{Const.}+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}.$$

Ueber die theilweise Integration, und einige andere Mittel zur Auffindung von Integralen. Beispiele von Integralen logarithmischer, exponentieller und trigonometrischer Functionen.

97. Die schon in §. 92. erwähnte Methode der theilweisen Integration, führt auf Entwickelungen, durch welche man oft dahin gelangt, vorgelegte Integrale allgemein auszudrücken, d. h. durch die bekannnten Elementarfunctionen darzustellen; oder solche, welche sich nicht auf diese Weise darstellen lassen, und die man deshalb **transscendente** Functionen nennt, auf einfachere Formen zurückzuführen.

Wenn u und v zwei beliebige Functionen von x sind, so ist allgemein (§. 92.)

$$\int u\,dv = vu - \int v\,du.$$

Man setze $\frac{du}{dx} = u'$, $\frac{d^2u}{dx^2} = u''$, u. s. f.; so erhält man hieraus

$$\int u\,dv = vu - \int u'v\,dx. \qquad 1.$$

Nun kann man wieder die theilweise Integration auf die Formel $\int u'v\,dx$ anwenden, indem man $\int v\,dx$ an die Stelle von v, und u' an die Stelle von u setzt. Dabei kann man sich in dem Zeichen $\int v\,dx$ eine beliebige Constante enthalten denken. Man erhält

$$\int u'v\,dx = u'\int v\,dx - \int(\int v\,dx)du'$$

oder, wenn man zur Abkürzung $\int v\,dx = v_1$, hierauf

$$\int v_1\,dx = \iint v\,dx^2 = v_2 \quad \text{u. s. f.} \quad \text{setzt,}$$

$$\left.\begin{aligned} \int u'v\,dx &= u'v_1 - \int v_1 u''\,dx. \\ \int u''v_1\,dx &= u''v_2 - \int v_2 u'''\,dx. \\ &\text{u. s. f.} \\ \int u^n v_{n-1}\,dx &= u^n v_n - \int v_n u^{n+1}\,dx. \end{aligned}\right\} 2.$$

Die Addition der Formeln 1. und 2., mit abwechselnden Zeichen, giebt

$$\int u\,dv = u\cdot v - u'v_1 + u''v_2 \cdots \pm u^n v_n \mp \int u^{n+1}v_n\,dx, \quad 3.$$

wo u^n die nte Ableitung $\frac{d^nu}{dx^n}$ von u', v_n das nte Integral $\int_n v\,dx^n$ von v bedeutet.

Wenn man in dieser Formel bei jeder Integration eine willkürliche Constante hinzufügt, so müssen sich alle diese Constanten in eine einzige vereinigen lassen, weil das Integral nur eine solche enthalten kann. Es läßt sich auch leicht durch die Rechnung nachweisen, daß dies wirklich geschieht. Man setze z. B.

$$\int v\,dx = v_1 + C, \quad \int_2 v\,dx^2 = v_2 + Cx + C_1,$$

so geht $\int u\,dv = uv - u'\int v\,dx + u''\int_2 v\,dx^2 - \int u'''dx \int_2 v\,dx^2$

über in

$$\begin{aligned} \int u\,dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \int u'''v_2\,dx \\ - Cu' + Cu''x - C\int u'''x\,dx \\ + C_1 u'' - C_1\int u'''dx. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke $u'' - \int u'''dx$, $-u' + u''x - \int u'''x\,dx$ sind aber entweder Null oder, wenn man will, beliebige Constanten; daher giebt der ganze von den hinzugefügten Constanten abhängige Theil des Integrals nur eine Constante.

Es sei $v = x - a$; man setze $v_1 = \int v\,dx = \frac{(x-a)^2}{2}$,

$v_2 = \int v_1\,dx = \frac{(x-a)^3}{3!}$, u. s. f., so kommt, wenn man noch fx statt u schreibt, aus 3.,

$$\int fx\,dx = (x-a)fx - \frac{(x-a)^2}{2}f'x + \frac{(x-a)^3}{6!}f''x \cdots$$

$$\pm \frac{(x-a)^n}{n!}f^{n-1}(x) \mp \int \frac{(x-a)^n f^n x}{n!}\,dx.$$

Wenn dieses Integral für $x = a$ verschwinden soll, so setze man $\int fx\,dx = \psi x$, mithin $fx = \psi' x$; man erhält

$$\psi x - \psi a = (x-a)\psi' x - \frac{(x-a)^2}{2}\psi'' x + \frac{(x-a)^3}{3!}\psi''' x \cdots$$

$$\pm \frac{(x-a)^n}{n!}\psi^n x \mp \int_a^x \frac{(x-a)^n \psi^{n+1}(x)\cdot dx}{n!},$$

oder

$$\psi a = \psi x + (a-x)\psi' x + \frac{(a-x)^2}{2}\psi'' x + \frac{(a-x)^3}{3!}\psi''' x \ldots.$$
$$+ \frac{(a-x)^n}{n!}\psi^n x - \frac{1}{n!}\int_a^x (a-x)^n \psi^{n+1}(x)\,dx.$$

Es werde $a = x + k$ gesetzt, so kommt, indem man zugleich die Grenzen des zuletzt stehenden Integrals umkehrt:

$$\psi(x+k) = \psi x + k\psi' x + \frac{k^2}{2}\psi'' x + \ldots.$$
$$+ \frac{k^n}{n!}\psi^n x + \frac{1}{n!}\int_x^a (a-x)^n \psi^{n+1} x \cdot dx.$$

Nach vollendeter Integration muß in dem letzten Gliede $a = x + k$ gesetzt werden. Setzt man $x + k = z$, so erhält man

$$\psi z = \psi x + (z-x)\psi' x + \frac{(z-x)^2}{2!}\psi'' x \ldots.$$
$$+ \frac{(z-x)^n}{n!}\psi^n x + \frac{1}{n!}\int_x^z (z-x)^n \psi^{n+1}(x)\cdot dx.$$

Man sieht, daß dieser Ausdruck nichts anderes ist als die Taylorsche Reihe, deren Rest sich hier durch ein zwischen bestimmten Grenzen zu nehmendes Integral ausgedrückt findet.

98. Wendet man die theilweise Integration auf das Integral $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$ an, wo m und n zwei ganze Zahlen, p eine beliebige gebrochene Zahl, so kann man verschiedene Reductionen desselben erhalten. Z. B. setze man

$$x^{n-1}dx(a+bx^n)^p = dv,\quad x^{m-n} = u,$$

so ist
$$v = \frac{1}{nb(p+1)}(a+bx^n)^{p+1},$$

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}$$
$$- \frac{m-n}{nb(p+1)}\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{p+1}.$$

Nun ist aber

$$x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1} = ax^{m-n-1}(a+bx^n)^p + bx^{m-1}(a+bx^n)^p;$$

daher erhält man

$$\left(1 + \frac{m-n}{n(p+1)}\right)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p =$$
$$\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{(m-n)a}{nb(p+1)}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p dx$$

oder

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p =$$
$$\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - (m-n)a\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p}{b(m+np)}.$$

Sind z. B. m und n positiv, und $m > n$, so wird der Exponent m auf $m-n$, dann auf $m-2n$, u. s. f. gebracht, bis alle in m enthaltenen Vielfachen von n weggeschafft sind. Ist m ein genaues Vielfaches von n, so erhält man ein algebraisches Integral, wie auch noch in einigen anderen Fällen, die hier aufzuzählen zu weitläufig wäre.

Die vorstehende Formel auf das Integral $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$ angewendet giebt:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{(m-1)}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ist m negativ, so folgt aus dieser Formel, durch Versetzung der Glieder, wenn man noch $-m$ statt m schreibt:

$$\int \frac{dx}{x^{m+2}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m+1)x^{m+1}} + \frac{m}{m+1}\int \frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}}.$$

Daher z. B.

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin x + \text{Const.}$$
$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -(\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{2}{3})\sqrt{1-x^2} + \text{Const.}$$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\text{Const.}$$

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2}+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}+\text{Const.};$$

wobei zu bemerken, daß:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\log\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}+C$$

ist. Dies ergiebt sich, wenn in der Formel B. §. 96., $a=0$, $h=1$ gesetzt wird.

99. Es werde noch das Integral $\int(\sin x)^n(\cos x)^m dx$ betrachtet, in welchem n und m zwei beliebige ganze Zahlen sind. Setzt man $\cos x=y$, $\sin x=\pm\sqrt{1-y^2}$, $dx=\frac{\mp dy}{\sqrt{1-y^2}}$, so verwandelt sich das vorgelegte Integral in

$$\int(1-y^2)^{\frac{n-1}{2}}y^m dy,$$

welches sich nach §. 95., wenn $n-1$ ungerade ist, auf das Integral einer rationalen Function bringen läßt. Durch theilweise Integration kann man aber auch das vorgelegte Integral sofort finden. Man setze $\cos x^m\cdot dx=\cos x^{m-1}\cdot d\sin x$, so kommt durch theilweise Integration

$$\int\sin x^n\cdot\cos x^m dx=\int\cos x^{m-1}\cdot\sin x^n d\sin x=$$

$$\frac{1}{n+1}\cos x^{m-1}\sin x^{n+1}+\frac{m-1}{n+1}\int\sin x^{n+2}\cos x^{m-2}dx.$$

Da aber $\sin x^{n+2}\cos x^{m-2}=\sin x^n\cos x^{m-2}-\sin x^n\cos x^m$, so erhält man

$$\int\sin x^n\cos x^m dx=\frac{1}{n+1}\cos x^{m-1}\sin x^{n+1}$$
$$+\frac{m-1}{n+1}\int\sin x^n\cos x^{m-2}dx-\frac{m-1}{n+1}\int\sin x^n\cos x^m dx,$$

oder wenn man die Glieder gehörig zusammenstellt:

$$\int\sin x^n\cos x^m dx=$$

$$\frac{1}{m+n}\cos x^{m-1}\sin x^{n+1}+\frac{m-1}{m+n}\int\sin x^n\cos x^{m-2}dx.\quad A.$$

Diese Formel dient, um den Exponenten m von $\cos x$ auf $m-2$, oder auch, wenn m negativ ist, $m-2$ auf m zu bringen. Man kann auch eine andere erhalten, in welcher der Exponent m unverändert bleibt, dagegen n auf $n-2$ gebracht wird. Man findet, durch Anwendung der nämlichen Methode, wie vorhin:

$$\int\sin x^n\cos x^m dx=$$

$$-\frac{\sin x^{n-1}\cos x^{m+1}}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\int\sin x^{n-2}\cos x^m dx.\quad B.$$

Die Formeln A. und B. geben keine Reduction, wenn $m+n=0$ ist. Alsdann hat man eines der beiden Integrale $\int(tg\,x)^n dx$ und $\int(cotg\,x)^n dx$ zu suchen. Setzt man $tg\,x=z$, $dz=\frac{dx}{\cos x^2}$, $dx=\frac{dz}{1+z^2}$, so kommt $\int(tg\,x)^n dx=\int\frac{z^n dz}{1+z^2}$.

Setzt man $cotg\,x=z$, $dx=\frac{-dz}{1+z^2}$, so kommt

$\int(cotg\,x)^n dx=-\int\frac{z^n dz}{1+z^2}$. Da $\frac{z^n}{1+z^2}=z^{n-2}-\frac{z^{n-2}}{1+z^2}$,

so erhält man:

$$\int\frac{z^n dz}{1+z^2}=\frac{1}{n-1}z^{n-1}-\int\frac{z^{n-2}dz}{1+z^2}.$$

Also z. B. $\int(tg\,x)^2 dx=tg\,x-x+\text{Const.}$

Man hat noch:

$$\int(tg\,x)dx=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x}=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}=-\log\cos x+\text{Const.}$$

$$\int(cotg\,x)dx=\log\sin x+\text{Const.}$$

Man bemerke noch die folgenden Integrale, auf welche man durch die Formeln A. und B. geführt wird:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x\,dx}{\sin x^2}=-\int\frac{d\cos x}{1-\cos x^2}=$$

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C=\log tg\,\tfrac{1}{2}x+C.$$

Setzt man in diesem Integral $\frac{1}{2}\pi+x$ statt x, so kommt

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\log tg\,(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x)+C.$$

$$\int\sin x\cos x\,dx=\tfrac{1}{2}\int\sin 2x\,dx=-\tfrac{1}{4}\cos 2x+C.$$

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{d2x}{\sin 2x}=\log tg\,x+\text{Const.}$$

Um die Integrale $\int\sin x^m dx$, $\int\cos x^m dx$ zu finden, kann man sich auch der Entwickelungen von $\cos x^m$, $\sin x^m$ bedienen, welche in §. 24. gegeben sind. Nach denselben hat man z. B.

$\cos x^4=\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}$, $\sin x^4=\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}$;

folglich $\int\cos x^4 dx=\frac{1}{32}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x+\text{Const.}$

$$\int\sin x^4 dx=\tfrac{1}{32}\sin 4x-\tfrac{1}{4}\sin 2x+\tfrac{3}{8}x+\text{Const.}$$

100. Durch das Mittel der theilweisen Integration findet man z. B. $\int(\log x)dx=x\log x-x$; allgemeiner:

$$\int(\log x)^n dx=x(\log x)^n-n\int(\log x)^{n-1}dx,$$

und $$\int\frac{dx}{(\log x)^n}=\frac{x}{(\log x)^n}+n\int\frac{dx}{(\log x)^{n+1}},$$

oder, wenn man die Glieder versetzt, und n+1 mit n vertauscht:

$$\int\frac{dx}{(\log x)^n}=\frac{1}{n-1}\int\frac{dx}{(\log x)^{n-1}}-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{x}{(\log x)^{n-1}}.$$

Also z. B.

$$\int(\log x)^2 dx=x(\log x)^2-2x\log x+2x+\text{Const.}$$

$$\int\frac{dx}{(\log x)^2}=\int\frac{dx}{\log x}-\frac{x}{\log x}+C.$$

Das Integral $\int\frac{dx}{\log x}$ ist eine transscendente Function eigener Art,

welche man den Integral-Logarithmus nennt, und von deren Theorie hier nur Folgendes erwähnt werden kann:

Es sei x' ein beliebiger positiver ächter Bruch, so ist klar, daß die Function $\frac{1}{\log x}$ für alle Werthe von x zwischen 0 und x' endlich und stetig bleibt; daher das Integral $\int_0^{x'}\frac{dx}{\log x}$ einen endlichen Werth haben muß. Um diesen zu finden, setze man $\log x=-u$, so wird $dx=-\frac{du}{e^u}$, und $u=\infty$ für $x=0$; also

$$\int_0^{x'}\frac{dx}{\log x}=\int_\infty^{u'}\frac{du}{u\cdot e^u},$$

wo $u'=-\log x'$ eine positive Zahl ist.

Man hat $$\frac{e^{-u}}{u}=\frac{1}{u}-1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{3!}+\cdots$$

mithin $$\int\frac{du}{u\cdot e^u}=\text{Const.}+\log u-u+\frac{u^2}{2!2}-\frac{u^3}{3!3}+\frac{u^4}{4!4}-\cdots$$

Die vorstehende immer convergirende Reihe

$$\log u-u+\frac{u^2}{2!2}-\frac{u^3}{3\cdot 3}\cdots$$

werde mit fu bezeichnet. Da das Integral für $u=\infty$ Null werden soll, so muß $\text{Const.}+f(\frac{1}{0})=0$, also $\text{Const.}=-f(\frac{1}{0})$ sein; und es kommt darauf an, diesen Werth zu finden. Es sei a eine beliebig große positive Zahl, so ist $\int_a^u\frac{du}{u\cdot e^u}=fu-fa$, und, wenn man die Ableitung nimmt, $f'u=\frac{1}{u\cdot e^u}$. Man setze $\varphi u=\frac{1}{a}(e^{-a}-e^{-u})$, so ist $\varphi' u=\frac{1}{a\cdot e^u}$; daher offenbar, sobald $a>1$, $u>a$, ist $\varphi' u>f'u$. Folglich wachsen die Functionen $fu-fa$ und φu beide zugleich stetig von Null an, indem u von a bis in das Unendliche wächst; $fu-fa$ aber langsamer als φu, weil $f'u < \varphi' u$ ist; und da $\varphi(\tfrac{1}{0}) = \frac{1}{a \cdot e^a}$, so muß, für $u = \tfrac{1}{0}$,

$$f(\tfrac{1}{0}) - fa < \frac{1}{a \cdot e^a}$$

sein. Berechnet man demnach den Werth der Reihe fu für eine hinreichend große Zahl a, und setzt $f(\tfrac{1}{0}) = fa + \varepsilon$, so ist damit auch der Werth von $f(\tfrac{1}{0})$ bis auf einen Fehler ε gefunden, welcher positiv und kleiner als $\frac{1}{a \cdot e^a}$ ist. Nimmt man z. B. $a = 10$, so ist $\varepsilon < \frac{1}{10 \cdot e^{10}}$, d. i. $\varepsilon < 0{,}00001$; mithin findet man durch diese Rechnung (welche **Brandes** in seinem Lehrbuche der höheren Geometrie, Th. 2. S. 69. ausführt) den Werth von $f(\tfrac{1}{0})$ bis auf 5 Decimalstellen genau. Auf anderen Wegen hat man die Constante des vorgelegten Integrals genauer gefunden $= C = -f(\tfrac{1}{0}) = 0{,}5772156649\cdots$

Demnach erhält man

$$\int_{\infty}^{u} \frac{du}{u \cdot e^u} = C + \log u - u + \frac{u^2}{2!2} - \frac{u^3}{3!3} + \frac{u^4}{4!4} \cdots,$$

oder wenn man $u = -\log x$ setzt, vorausgesetzt, daß x zwischen 0 und 1 liegt,

$$\int_0^x \frac{dx}{\log x} = C + \log(-\log x) + \log x + \frac{(\log x)^2}{2!2} + \frac{(\log x)^3}{3!3} + \cdots$$

Will man eine Formel finden, welche brauchbar ist, sobald x die Einheit übersteigt, so setze man $u = \log x$; man erhält, für ein positives u,

$$\int \frac{dx}{\log x} = \int \frac{e^u du}{u} = \log u + u + \frac{u^2}{2!2} + \frac{u^3}{3!3} + \cdots \text{Const.}, \text{ oder}$$

$$\int \frac{dx}{\log x} = \text{Const.} + \log\log x + \log x + \frac{(\log x)^2}{2!2} + \frac{(\log x)^3}{3!3} + \cdots$$

Verlangt man den Werth von $\int_0^{x'} \frac{dx}{\log x}$, sobald $x' > 1$, so muß man das Integral theilen.

Es seien v und w zwei beliebig kleine positive Größen; man setze

$$\int_0^{x'} \frac{dx}{\log x} = \int_0^{1-v} \frac{dx}{\log x} + \int_{1+w}^{x'} \frac{dx}{\log x} =$$
$$C + \log(-\log(1-v)) + \log(1-v) + \cdots$$
$$+ \log\log x' + \log x' + \frac{(\log x')^2}{2!2} + \cdots$$
$$- \log\log(1+w) - \log(1+w) - \cdots$$

so erhält man, für $v = 0$, $w = 0$,

$$\int_0^{x'} \frac{dx}{\log x} = C + \log \frac{-\log(1-v)}{\log(1+w)}$$
$$+ \log\log x' + \log x' + \frac{(\log x')^2}{2!2} + \cdots$$

Das Verhältniß $\frac{-\log(1-v)}{\log(1+w)}$ nähert sich dem Verhältnisse $\frac{v}{w}$, indem v und w sich der Null nähern, und wird, für $v = 0$, $w = 0$, unbestimmt, weil zwischen v und w keine Abhängigkeit irgend einer Art besteht. Folglich ist auch das vorliegende Integral, zwischen den Grenzen 0 und x', sobald $x' > 1$, unbestimmt. Das Integral $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\log x}$ hat also nur dann einen bestimmten Werth, wenn sich zwischen den (positiven) Grenzen x_0 und x_1 der Werth 1 nicht befindet.

101. Der vorige §. liefert ein Beispiel von dem Gebrauche der Reihen zur Darstellung der Integrale. Hat man eine Function fx auf irgend eine Weise in eine Reihe entwickelt, welche für alle Werthe von x zwischen x_0 und x_1 convergirt, so erhält man durch Integration der Reihe allemal auch das Integral $\int_{x_0}^{x_1} fx\,dx$ durch eine convergente Reihe ausgedrückt. Denn es werde der Rest der Reihe, nach Hinwegnahme der n ersten Glieder, mit $\varphi_n x$ bezeichnet; so muß, nach der Voraussetzung, die Function $\varphi_n x$, für alle Werthe von x zwischen x_0 und x_1, mit

wachsendem n sich der Null nähern; woraus folgt, daß auch der Werth des Integrals $\int_{x_0}^{x_1}\varphi_n x dx$ sich mit wachsendem n der Null nähert, weil er einem Mittelwerthe von $\varphi_n x$, multiplicirt in das Intervall $x_1 - x_0$, gleich ist. Dieses Intervall muß aber endlich sein.

Man kann auch die Reihe für fx noch mit einer Function Fx multipliciren, welche zwischen den Grenzen x_0 und x_1 endlich und stetig bleibt, so erhält man dadurch eine ebenfalls convergirende Reihe für das Integral $\int_{x_0}^{x_1} fx \cdot Fx \cdot dx$.

Man hat z. B.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots;$$

mithin

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\arcsin x = x + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots$$

Um das Integral $\int x^n(1-x)^m dx$ in eine Reihe zu entwickeln, für die Fälle, in welchen ein Ausdruck desselben in endlicher Form nicht zu erhalten ist, setze man:

$$(1-x)^m = 1 - m_1 x + m_2 x^2 - m_3 x^3 + \cdots$$

mithin $x^n(1-x)^m = x^n - m_1 x^{n+1} + m_2 x^{n+2} - m_3 x^{n+3} + \cdots$

so ist

$$\int x^n(1-x)^m dx = \text{Const.} + \frac{x^{n+1}}{n+1} - m_1\frac{x^{n+2}}{n+2} + m_2\frac{x^{n+3}}{n+3} - \cdots$$

Ein anderes Beispiel liefert die Reihe

$$\int e^x \cdot x^n dx = \text{Const.} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{x^{n+3}}{2(n+3)} + \frac{x^{n+4}}{3!\,n+4} \cdots$$

welche man findet, wenn man die Reihe $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$ mit x^n multiplicirt, und das Product integrirt.

Anmerkung. Setzt man $x = \log y$, so wird

$$\int x^n e^x dx = \int (\log y)^n \cdot dy,$$

worüber §. 100 zu vergleichen ist.

102. Es sei f(x,a) eine Function von x, welche zugleich eine unbestimmte Constante a enthält. Kennt man das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,a)dx = \psi(x_1,a) - \psi(x_0,a);$$

so lassen sich aus demselben andere Integrale ableiten, indem man das vorstehende nach a differentiirt, während x_0 und x_1 unverändert bleiben. Offenbar nämlich ist, wenn a in a+k übergeht:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{f(x,a+k)-f(x,a)}{k}\right)dx =$$

$$\frac{\psi(x_1,a+k)-\psi(x_1,a)}{k} - \frac{\psi(x_0,a+k)-\psi(x_0,a)}{k};$$

daher für k=0,

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{df(x,a)}{da}dx = \frac{d\psi(x_1,a)}{da} - \frac{d\psi(x_0,a)}{da}.$$

Man hat z. B. $\int_0^x \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{x}{a}$.

Nimmt man die Ableitung nach a, so kommt:

$$\int_0^x \frac{-2a dx}{(a^2+x^2)^2} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{x}{a^2+x^2} - \frac{1}{a^2}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{x}{a};$$

mithin $\int_0^x \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{a^2+x^2} + \frac{1}{2a^3}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{x}{a}$.

Also z. B. für a=1,

$$\int_0^x \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \tfrac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x,$$

übereinstimmend mit §. 92. Auf diesem Wege würde man z. B. $\int\frac{dx}{(a+x)^n\sqrt{h^2\pm x^2}}$ aus den Formeln des §. 96. für

$\int \frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2 \pm x^2}}$ durch Differentiation nach a leicht finden.

Ferner kann man auch das Integral $\int_{x_0}^{x_1} f(x,a)\,dx$, als eine Function von a betrachtet, mit da multipliciren, und nach a integriren. Dabei geht es aus dem Begriffe eines Integrals, als einer Summe, hervor, daß die Ordnung, in welcher die Integrationen vorgenommen werden, einerlei ist; wenigstens wenn die Function f(x,a) zwischen den Grenzen der Integration in Hinsicht auf x und auf a, überall endlich und stetig bleibt. Es seien demnach α und β die Grenzen der Integration in Bezug auf a,

so hat man $$\int_\alpha^\beta da \int_{x_0}^{x_1} f(x,a)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_\alpha^\beta f(x,a)\,da.$$

Dieser wichtige Satz läßt sich auch auf folgende Art beweisen:

Man setze $\int f(x,y)\,dx = \psi(x,y)$, und $\frac{df(x,y)}{dy} = \varphi(x,y)$;

so ist $$\int_a^x f(x,y)\,dx = \psi(x,y) - \psi(a,y);$$

daher $$\frac{d[\psi(x,y) - \psi(a,y)]}{dy} = \int_a^x \varphi(x,y)\,dx,$$

woraus folgt:

$$\psi(x,y) - \psi(a,y) = \int dy \int_a^x \varphi(x,y)\,dx.$$

mithin:

$$\int_\alpha^y dy \int_a^x \varphi(x,y)\,dx = \psi(x,y) - \psi(a,y) - \psi(x,\alpha) + \psi(a,\alpha).$$

Ferner ist

$$f(x,y) = \int \varphi(x,y)\,dy; \int_\alpha^y \varphi(x,y)\,dy = f(x,y) - f(x,\alpha);$$

$$\int_a^x dx \int_\alpha^y \varphi(x,y)\,dy = \int_a^x f(x,y)\,dx - \int_a^x f(x,\alpha)\,dx =$$
$$\psi(x,y) - \psi(a,y) - \psi(x,\alpha) + \psi(a,\alpha);$$

mithin $\int_\alpha^y dy \int_a^x \varphi(x,y)\,dx = \int_a^x dx \int_\alpha^y \varphi(x,y)\,dy$; w. z. b. w.

Es folge hier ein Beispiel von der Anwendung dieses Satzes.

Man hat $\int_0^1 x^{m-1}\,dx = \frac{1}{m}$, wenn m positiv ist.

Multiplicirt man mit dm, und integrirt, so ist

$$\int dm \int_0^1 x^{m-1}\,dx = \int_0^1 dx \int dm \cdot x^{m-1} = \int \frac{dm}{m} = \log m + \text{Const.}$$

ferner aber $\int dm \cdot x^{m-1} = \int e^{(m-1)\log x}\,dm = \frac{x^{m-1}}{\log x}$;

folglich, wenn das Integral von $m=p$ bis $m=q$ genommen wird,

$$\int_p^q dm \cdot x^{m-1} = \frac{x^q - x^p}{x \log x},$$

und mithin $$\int_p^q dm \int_0^1 x^{m-1}\,dx = \int_0^1 dx \int_p^q x^{m-1}\,dm =$$

$$\int_0^1 dx \cdot \frac{x^q - x^p}{x \log x} = \log \frac{q}{p}.$$

Man hat demnach folgenden bemerkenswerthen Integralwerth:

$$\int_0^1 \frac{x^q - x^p}{x \log x}\,dx = \log \frac{q}{p}.$$

Mehrere Anwendungen des obigen Satzes sehe man in §. 120. und den folgenden.

Anwendungen der Integral-Rechnung auf die Geometrie.

Quadratur und Rectification der Curven.

103. Es sei (Fig. 18.) CEE' ein Bogen einer Curve, AD die Axe der x, AB$=$a, AD$=$x, Ordinate BC$=$fa, DE$=$fx; so ist der Flächenraum BCDE offenbar eine Function von x und a; oder, wenn man sich a unveränderlich denkt, eine Function von x; also BCDE$=\psi x$. Läßt man x um DD'$=\Delta x$ wachsen, so kann man immer Δx so klein annehmen, daß die Ordinate fx zwischen x und $x+\Delta x$ beständig wächst oder beständig abnimmt; daher ist die Größe des Flächenraumes EDDE'$=\Delta\psi x$ zwischen den Grenzen

$$fx\cdot\Delta x \quad \text{und} \quad f(x+\Delta x)\cdot\Delta x,$$

folglich auch der Quotient $\dfrac{\Delta\psi x}{\Delta x}$ zwischen fx und $f(x+\Delta x)$ enthalten. Hieraus folgt, wenn die Differenz Δx im Verschwinden gedacht wird, $\psi' x = fx$; d. h. die Ordinate fx ist die Ableitung der den Flächenraum ausdrückenden Function ψx. Daher wird der Flächenraum CBDE durch das Integral $\int_a^{x_1} fx\,dx$ angegeben, wenn die Abscissen an seinen Grenzen AB$=$a, AD$=x_1$ sind.

Um die Formel für den Flächenraum in Polarcoordinaten zu entwickeln, sei (Fig. 19.) AC$=$r der Leitstrahl, $\angle$CAB$=\varphi$; AB$=r\cos\varphi=x$, CB$=r\sin\varphi=y$. Wächst φ um $\Delta\varphi=$ CAE, so geht AC$=$r in AD$=r+\Delta r$ über, und wenn von C das Loth CE auf AD gefällt wird, so ist Dreieck CAE$=\frac{1}{2}r^2\cos\Delta\varphi\sin\Delta\varphi$. Bezeichnet man die Fläche A'AC mit $\psi(\varphi)$

oder kürzer mit ψ, (indem man AA' als einen beliebigen festen, AC als einen beweglichen Leitstrahl und mithin A'AC als eine Function von φ ansieht), so kann man wieder, nach der Methode der Grenzen, beweisen, daß das Verhältniß von CAD$=\Delta\psi\varphi$ zu dem Dreiecke CAE sich desto mehr der Einheit nähert, je kleiner $\Delta\varphi$ wird; mithin muß

$$\frac{\Delta\psi\varphi}{\Delta\varphi}=\tfrac{1}{2}r^2\cdot\cos\Delta\varphi\cdot\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}$$

sein für $\Delta\varphi=0$; woraus folgt: $\dfrac{d\psi}{d\varphi}=\frac{1}{2}r^2$; also $\psi=\frac{1}{2}\int r^2 d\varphi$. Dieses Integral drückt, zwischen den gehörigen Grenzen genommen, das von zwei Leitstrahlen und dem zwischen ihnen befindlichen Bogen begränzte Flächenstück (A'AC) aus.

Aus den Gleichungen $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, folgt

$$dx=\cos\varphi\cdot dr-y\,d\varphi \quad \text{und} \quad dy=\sin\varphi\,dr+x\,d\varphi;$$

und hieraus findet man

$$x\,dy-y\,dx=r^2 d\varphi,$$

daher die Fläche A'AC auch durch das Integral $\frac{1}{2}\int(x\,dy-y\,dx)$ ausgedrückt werden kann.

Anmerk. Alle diese Ausdrücke erhalten vermittelst des unendlich Kleinen eine klare geometrische Bedeutung, die zu merken ist. Stellt man sich nämlich unter dx eine unendlich kleine Zunahme der Abscisse x vor, welche in Fig. 18. durch DD' angedeutet sei, so drückt das Product $fx\cdot dx$ das Rechteck aus ED in DD' aus, welches bis auf ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung, der Figur EDD'E' gleich ist. Das Integral $\int fx\,dx$ drückt daher den Flächenraum als eine Summe von unendlich vielen Elementar-Rechtecken aus.

Eben so findet man, wenn man in dem Dreiecke CAD den Winkel bei A (Fig. 19.) unendlich klein und gleich $d\varphi$, zugleich CA$=$r, CD$=r+dr$ setzt, und die Sehne CD zieht, den Flächenraum des geradlinigten Dreiecks CAD$=\dfrac{r(r+dr)\sin d\varphi}{2}$, welcher Ausdruck, mit Weglassung aller Glieder zweiter und höherer Ordnungen, auf den einfacheren $\frac{r^2 d\varphi}{2}$ zurückkommt, den man sofort für das Elementar-Dreieck CAD des Flächenraumes der Curve zu nehmen hat.

104. Es sei (Fig. 20.) AC ein Bogen einer **Parabel**, A der Scheitel, $AB=x$, $BC=y$; $y^2=2px$; so ist die Fläche ACB gleich $\int_0^x y\,dx$. Da $y=\sqrt{2px}$, so ist

$$\int_0^x \sqrt{2px}\cdot dx=\sqrt{2p}\int_0^x \sqrt{x}\cdot dx=\tfrac{2}{3}x\sqrt{2px}=\tfrac{2}{3}xy;$$

d. i. $ACB=\frac{2}{3}\cdot AB\cdot BC$.

Für die **Ellipse** ist $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, also $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$; $AB=x$, $BC=y$ (Fig. 21.) $AD=a$, $AE=b$; also der Raum EABC gleich $\int_0^x y\,dx$ oder gleich $b\int_0^x \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot dx$.

Nun ist $\int dx\sqrt{1-x^2}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=$

$$\tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\tfrac{1}{2}\,arcsin\,x,\ (\S.\ 98.)$$

also $\int\frac{dx}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+\frac{1}{2}\,arcsin\frac{x}{a}$, und

$$b\int_0^x dx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{ab}{2}\left[\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+arcsin\frac{x}{a}\right].$$

Für die Fläche unter dem elliptischen Quadranten (EAD) ist $x=a$, also die Fläche $\frac{1}{4}ab\pi$, oder der von der ganzen Ellipse begrenzte Raum gleich $ab\pi$.

Wenn man die Asymptoten AD, AE einer **Hyperbel** zu Axen der Coordinaten nimmt (Fig. 22.), also $AB=x$, BC (parallel mit AE) gleich y setzt, so ist $xy=a^2$ die Gleichung der Hyperbel. Es sei der Asymptotenwinkel $EAD=\alpha$, $Bb=dx$

eine unendlich kleine Zunahme der Abscisse x; man ziehe bc parallel mit BC; so drückt das Product $y\,dx\,sin\,\alpha$ die Fläche des unendlich schmalen Streifens CBbc aus; folglich ist

$$\int y\,dx\cdot sin\,\alpha=a^2\,sin\,\alpha\int\frac{dx}{x}=a^2\,sin\,\alpha\,log\,x+Const.$$

der Ausdruck der von der Hyperbel begrenzten Fläche. Soll dieselbe von der Ordinate FK des Scheitels K ihren Anfang nehmen, so ist die entsprechende Abscisse $AF=a$; mithin die Fläche $KFBC=a^2\,sin\,\alpha\cdot log\left(\frac{x}{a}\right)$.

Für die Cycloide war (§. 50.) $x=a(\varphi-sin\,\varphi)=AB$, $y=a(1-cos\,\varphi)=BC$ (Fig. 23.). Betrachtet man die Fläche ACB als eine Function von φ, und bezeichnet sie mit F, so ist $\frac{dF}{d\varphi}=\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{d\varphi}=y\frac{dx}{d\varphi}$; also, da $y=a(1-cos\,\varphi)$, und $\frac{dx}{d\varphi}=a(1-cos\,\varphi)$, so ist

$$F=a^2\int(1-cos\,\varphi)^2d\varphi=a^2\int\left[\tfrac{3}{2}+\frac{cos\,2\varphi}{2}-2\,cos\,\varphi\right]d\varphi$$

oder
$$F=ABC=a^2\left(\tfrac{3}{2}\varphi+\frac{sin\,2\varphi}{4}-2\,sin\,\varphi\right);$$

wo das Integral so genommen ist, daß es für $x=0$, d. h. für $\varphi=0$, verschwindet.

Für $\varphi=2\pi$ erhält man die ganze Fläche der Cycloide gleich $3a^2\pi$.

Um noch ein Beispiel von der Quadratur in Polarcoordinaten zu geben, sei die Gleichung einer gewöhnlichen Spirale $r=a\varphi$ vorgelegt. Man erhält daraus den Flächenraum, welchen der Leitstrahl r während seiner Drehung von $\angle\varphi=\alpha$ bis $\varphi=\varphi$ überstreicht, gleich

$$\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\varphi r^2d\varphi=\tfrac{1}{2}a^2\int_\alpha^\varphi\varphi^2d\varphi=\tfrac{1}{6}a^2(\varphi^3-\alpha^3);$$

also z. B., für $\alpha=0$, den Flächenraum $\frac{1}{6}a^2\varphi^3=\frac{1}{6}r^2\varphi$.

105. Es sei AB (Fig. 24.) ein überall convexer Bogen einer Curve, und in demselben eine Sehne AB gezeichnet. Man ziehe in A die Tangente und verlängere sie bis zum Durchschnitte F mit der Ordinate EB von B; so ist der convexe Bogen AB größer als die Sehne AB und kleiner als die Summe der einschließenden Linien $AF+BF$. Man kann dies entweder als Grundsatz annehmen, oder auch beweisen, wenn man die Länge des Bogens AB als die Grenze des eingeschriebenen Polygons definirt. Nun sei $AC=\Delta x$, $CB=\Delta y$, $\angle FAC=\alpha$, so ist $tg\,\alpha=\frac{dy}{dx}$, und Sehne $AB=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, $AF+FB=\frac{\Delta x}{\cos\alpha}+\Delta x\,tg\,\alpha-\Delta y$. Setzt man den Bogen AB gleich Δs, so liegt das Verhältniß $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ zwischen

$$\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}+\frac{dy}{dx}-\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

weil $tg\,\alpha=\frac{dy}{dx}$, $\frac{1}{\cos\,\alpha}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

ist. Für ein verschwindendes Bogenelement ds fallen diese beiden Grenzen zusammen, indem $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$ wird, und man erhält die Ableitung des Bogens $\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Statt dessen läßt sich auch schreiben: $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$, was, in Worten ausgedrückt, nichts Anderes heißt, als daß ein unendlich kleines Bogenelement ds als zusammenfallend mit seiner Sehne $\sqrt{dx^2+dy^2}$ angesehen werden muß.

Sind Polarcoordinaten gewählt, so daß $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, so ist

$$dx=\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi,\ dy=\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi,$$

mithin $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{dr^2+r^2d\varphi^2}$.

Der Bogen s wird also durch die Integrale

$$\int\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx}}\cdot dx \quad \text{oder} \quad \int\sqrt{1+r^2\frac{d\varphi^2}{dr^2}}\cdot dr$$

ausgedrückt.

Beispiele. Die vorgelegte Curve sei ein Kreis; die Gleichung desselben $x^2+y^2=r^2$, so ist $xdx+ydy=0$, also

$$dx^2+dy^2=\frac{dx^2(x^2+y^2)}{y^2}=\frac{r^2dx^2}{y^2}=ds^2,$$

mithin, wenn man das positive Zeichen wählt,

$$ds=\frac{rdx}{y}=\frac{rdx}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Hieraus folgt $s=r\,arc\sin\frac{x}{r}+\text{Const.}$, und wenn der Bogen von $x=0$ anfangen soll, $s=r\,arc\sin\frac{x}{r}$.

Aus der Gleichung der Parabel $y^2=2px$ folgt $ydy=pdx$, mithin $ds=dx\sqrt{\frac{p+2x}{2x}}$. Um diese Formel zu integriren, setze man $\sqrt{\frac{p+2x}{2x}}=z$, so wird $x=\frac{\frac{1}{2}p}{z^2-1}$, $dx=\frac{-pz\,dz}{(z^2-1)^2}$ und $ds=\frac{-pz^2\,dz}{(z^2-1)^2}$. Durch Zerlegung in einfache Brüche findet man:

$$\frac{z^2}{(z^2-1)^2}=\tfrac{1}{4}\left[\frac{1}{(z+1)^2}-\frac{1}{z+1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{z-1}\right];$$

daher durch Integration

$$s=\text{Const.}+\tfrac{1}{4}p\log\frac{z+1}{z-1}+\frac{\frac{1}{2}pz}{z^2-1};$$

oder, wenn man für z seinen Werth in x setzt;

$$s=\text{Const.}+\tfrac{1}{4}p\log\frac{\sqrt{p+2x}+\sqrt{2x}}{\sqrt{p+2x}-\sqrt{2x}}+x\sqrt{\frac{p+2x}{2x}}.$$

Soll der Bogen im Scheitel anfangen, so muß für $x=0$ das Integral Null werden; alsdann erhält man Const. $=0$, und den parabolischen Bogen vom Scheitel an:

$$s=\tfrac{1}{4}p\,\log\frac{\sqrt{p+2x}+\sqrt{2x}}{\sqrt{p+2x}-\sqrt{2x}}+x\sqrt{\frac{p+2x}{2x}}.$$

Für die Ellipse ist $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}=0$, woraus, wenn $\frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2$ gesetzt wird, $ds=dx\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}$ folgt, wovon das Integral eine transscendente Function ist. Bringt man die Gleichung der Ellipse in die Form $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$, so wird

$$ds^2=(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)d\varphi^2$$

oder
$$ds=a\sqrt{1-e^2\cos\varphi^2}\cdot d\varphi.$$

Schreibt man in den vorstehenden Gleichungen $-b^2$ statt b^2, so daß $e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}$ wird, so erhält man das Differential des Bogens der Hyperbel:

$$ds=dx\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}=dx\sqrt{\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}}.$$

Für die Cycloide war $dx=a(1-\cos\varphi)d\varphi$, $dy=a\sin\varphi\,d\varphi$ (§. 50.), folglich

$$ds^2=dx^2+dy^2=2a^2(1-\cos\varphi)d\varphi^2=4a^2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2\cdot d\varphi^2;$$

oder $ds=-2a\sin\frac{1}{2}\varphi\,d\varphi$, $s=\text{const.}+4a\cos\frac{1}{2}\varphi$.

Soll der Bogen im Scheitel G der Cycloide anfangen (Fig. 23.), so muß für $\varphi=\pi$, $s=0$ werden, woraus Const. $=0$ und $s=4a\cos\frac{1}{2}\varphi$ folgt. (In dem Ausdrucke für ds ist das negative Zeichen gewählt, weil, unter der gemachten Voraussetzung, der Bogen GC abnimmt, während φ wächst.)

Man hatte $y=a(1-\cos\varphi)=2a\sin\frac{1}{2}\varphi^2$; zugleich $s^2=16a^2\cos\frac{1}{2}\varphi^2$, folglich, durch Elimination von φ,

$s^2+8ay=16a^2$, oder $s^2=8a(2a-y)$; d. h. das Quadrat des Bogens GC gleich dem Rechtecke aus dem vierfachen Durchmesser 8a des wälzenden Kreises in den Höhenabstand GK seines Endpunctes C vom Scheitel G.

106. In §. 48. 49. bedeuteten a, b die Coordinaten des Krümmungsmittelpunctes, r den Krümmungshalbmesser einer ebenen Curve. Werden aus den Gleichungen 1. 2. 4. 5. der genannten §. die Größen $x-a$, $y-b$, $\frac{dy}{dx}$ eliminirt, so erhält man $(x-a)db=(y-b)da$ (aus 2. und 5.); folglich aus 4.

$$(y-b)(da^2+db^2)=-r\,db\,dr.$$
$$(x-a)(da^2+db^2)=-r\,da\,dr.$$

Addirt man die Quadrate dieser Gleichungen, und setzt

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

so kommt
$$da^2+db^2=dr^2.$$

Das Bogenelement der Curve der Krümmungsmittelpuncte oder der Evolute ($\sqrt{da^2+db^2}$) ist demnach dem Differentiale dr des Krümmungshalbmessers gleich, wie es auch sein muß, da der Krümmungshalbmesser der Evolvente bei der Abwickelung der Evolute beständig um die Länge des abgewickelten Bogens zunimmt.

Wenn die Gleichung einer Curve in einem endlichen, nicht transscendenten Ausdrucke enthalten ist, so kann man offenbar auch ihren Krümmungshalbmesser und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunctes immer genau ausdrücken; und da das Differential des Krümmungshalbmessers zugleich das Bogenelement der Evolute ist, so folgt, daß die Evoluten nicht transscendenter Curven rectificabel sind. So war z. B. für die Evolute der Parabel die Gleichung $8(a-p)^3=27pb^2$ gefunden (§. 49.). Setzt man $a-p=x$, $b=y$, $27p=8m$, so kommt $my^2=x^3$, mithin

$$dy = \frac{3}{2} \cdot \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{m}}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \frac{9x}{4m}},$$

also der Bogen

$$s = \frac{8}{27} m \left(1 + \frac{9x}{4m}\right)^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$$

Eben so muß die Cycloide rectificabel sein, wie auch oben gefunden wurde, weil ihre Evolute wieder eine Cycloide ist.

Es werde hier noch bemerkt, wie man den Ausdruck für den Krümmungshalbmesser r durch Construction, mit Hülfe des unendlich Kleinen, finden kann. Es sei (Fig. 25.) $AB = ds$ ein Bogenelement, $CA = r$ der Krümmungshalbmesser, so kann man AB einem Kreisbogen vom Halbmesser r gleichsetzen. Es sei φ der Winkel, welchen die Tangente in A mit der Axe x bildet, also $tg\,\varphi = \frac{dy}{dx}$; so wird $\varphi + d\varphi$ die Neigung der Tangente in B gegen die Axe x sein, und folglich $d\varphi = BDE$ der Winkel, den die Tangenten in A und B mit einander bilden. Dieser Winkel ist aber dem Winkel am Mittelpuncte C gleich; also $\angle C = d\varphi$, und Bogen $ds = r d\varphi$.

Nun ist $\quad tg\,\varphi = \frac{dy}{dx}, \quad$ also

$$d\varphi = d\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \cos\varphi^2 = d\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dx}{ds}\right)^2;$$

mithin
$$ds = r \cdot \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

oder
$$r = \frac{ds^3}{dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)},$$

wie früher gefunden ist.

Den Ausdruck für das Bogenelement einer Curve doppelter Krümmung findet man, indem man wieder an die Stelle eines unendlich kleinen Bogens die Sehne setzt:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

in welchem Ausdrucke die Werthe der Differentiale dx, dy, dz aus den Gleichungen der Curve eingesetzt werden müssen, wodurch derselbe auf das Differential einer Function von einer veränderlichen Größe gebracht wird, welches sodann integrirt werden muß. Man erhält z. B. für die Schraubenlinie, deren Gleichungen $x = m\cos\varphi$, $y = m\sin\varphi$, $z = n\varphi$ waren (§. 71.)

$$ds = \sqrt{n^2 + m^2} \cdot d\varphi, \quad \text{also} \quad s = \sqrt{n^2 + m^2} \cdot \varphi + \text{Const.}$$

Quadratur der Flächen.

107. Da ein unendlich kleiner Bogen einer Curve als zusammenfallend mit seiner Sehne betrachtet werden muß, so folgt, daß ein nach allen Richtungen unendlich kleines Element einer stetig gekrümmten Fläche als eben anzusehen ist. Wird dasselbe nämlich durch beliebige Ebenen geschnitten, so fallen alle durch diese Schnitte entstehenden unendlich kleinen Bogen mit ihren Sehnen zusammen. Die Schnitte des Flächenelementes mit beliebigen Ebenen sind mithin als geradlinigt, und folglich ist das ganze Flächenelement als eben zu betrachten.

Berechnet man unter dieser Voraussetzung den Flächenraum des Elementes, und nimmt die Summe aller auf diese Weise berechneten Elemente eines vorgelegten Stückes der Fläche, so erhält man den gesammten Inhalt desselben.

Es seien die rechtwinklichen Coordinaten der Fläche als Functionen zweier veränderlichen Größen p und q ausgedrückt, also
$$x = f(p,q), \quad y = \varphi(p,q), \quad z = \psi(p,q).$$

Gehen nun p,q in p+dp, q+dq über, so erhält man, mit Weglassung der Glieder höherer Ordnungen

$$dx = a\,dp + a'dq$$
$$dy = b\,dp + b'dq$$
$$dz = c\,dp + c'dq.$$

Werden die Quadrate dieser Ausdrücke addirt, so ergiebt sich der Ausdruck für einen unendlich kleinen auf der Fläche gezeichneten Bogen ds, nämlich

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edp^2 + 2F dp\, dq + Gdq^2,$$

wo $E = a^2 + b^2 + c^2$, $F = aa' + bb' + cc'$, $G = a'^2 + b'^2 + c'^2$ gesetzt ist.

Irgend ein Punct A der Fläche (Fig. 26.), dessen Coordinaten x, y, z sind, kann als Durchschnitt zweier in der Fläche liegenden Curven betrachtet werden, von denen die eine entsteht, wenn p sich ändert, während q ungeändert bleibt, die andere, wenn q sich ändert, während p ungeändert bleibt. Es sei AB das Bogenelement der Curve, für welche q constant bleibt, so wird die Länge desselben durch $\sqrt{E} \cdot dp$ ausgedrückt, weil $dq = 0$ ist. Eben so sei AC das Element der Curve, für welche $dp = 0$, so ist $\sqrt{G} \cdot dq$ der Ausdruck seiner Länge. Man ziehe aus dem Puncte B, dessen Coordinaten $x + adp$, $y + bdp$, $z + cdp$ sind, eine Linie BD, für welche wiederum nur q sich ändert, während der Werth von p, der für diesen Punct B $p + dp$ ist, ungeändert bleibt, und aus C eine Linie CD, für welche $q + dq$ beständig bleibt, während p sich ändert.

Beide Linien treffen in dem Puncte D zusammen, für welchen sich p um dp, q um dq geändert hat. Um die Länge von BD zu finden, darf man in dem Ausdrucke für AC, d. i. $\sqrt{G} \cdot dq$, nur $p + dp$ statt p setzen, wodurch man erhält

$$BD = \left(\sqrt{G} + \frac{d\sqrt{G}}{dp}dp\right)dq,$$

also, mit Weglassung der Glieder zweiter und höherer Ordnungen, $BD = \sqrt{G} \cdot dq = AC$. Auf ähnliche Weise, wenn man in E $q + dq$ statt q setzt, findet man $CD = \sqrt{E} \cdot dp = AB$.

Man hat ferner noch

$$AD^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2.$$

Nun sei der Winkel CAB gleich ω, so erhält man

$$AD^2 = AB^2 + 2AB \cdot BD \cdot \cos\omega + BD^2,$$

oder weil $AB = \sqrt{E} \cdot dp$, $BD = \sqrt{G} \cdot dq$ ist,

$$AD^2 = Edp^2 + 2\sqrt{EG} \cdot \cos\omega \cdot dp \cdot dq + Gdq^2.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck für AD^2 mit dem obigen, so erhält man sofort $\sqrt{EG} \cdot \cos\omega = F$, woraus sich ergiebt

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Die Fläche des als eben zu betrachtenden Viereckes ABCD ist aber gleich $AB \cdot BD \cdot \sin\omega$; folglich gleich

$$\sqrt{E}dp \cdot \sqrt{G}dq \cdot \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}},$$

also gleich $\sqrt{EG - F^2} \cdot dp\, dq.$

Dies ist der allgemeine Ausdruck für ein Element einer stetig gekrümmten Fläche. Integrirt man denselben mit Rücksicht auf die Grenzen eines vorgelegten Flächenstückes, so erhält man den Inhalt desselben gleich

$$\iint \sqrt{EG - F^2} \cdot dp\, dq.$$

108. Gewöhnlich ist für die Fläche eine Gleichung zwischen rechtwinklichen Coordinaten x, y, z gegeben. Um in diesem Falle den Ausdruck des Flächenelementes zu erhalten, muß man zwei der Coordinaten, z. B. x und y an die Stelle der Größen p und q setzen, und die dritte z als Function derselben betrachten. Demnach hat man

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy,$$

mithin

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]dx^2 + 2\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)dx\,dy + \left[1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]dy^2$$

$$=E dx^2 + 2F dx\, dy + G dy^2;$$

also $E = 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2$, $F = \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $G = 1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2$,

daher $EG - F^2 = 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2;$

mithin als Ausdruck des Flächenelementes:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \cdot dx\, dy. \qquad \text{a.}$$

Werden statt der Coordinaten x und y Polarcoordinaten r und φ in der Ebene xy zu Grunde gelegt, so daß vermöge der Gleichung der Fläche z eine Function von r und φ ist, so hat man:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = f(r,\varphi).$$

Demnach ist
$$dx = \cos\varphi \cdot dr - r\sin\varphi \cdot d\varphi$$
$$dy = \sin\varphi \cdot dr + r\cos\varphi \cdot d\varphi$$
$$dz = \left(\frac{dz}{dr}\right) dr + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right) d\varphi;$$

mithin $E = 1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2$, $F = \frac{dz}{dr} \cdot \frac{dz}{d\varphi}$, $G = r^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2$,

und $ds^2 = E dr^2 + 2F dr\, d\varphi + G d\varphi^2;$

ferner das Flächenelement gleich

$$\sqrt{\left[\left(1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right)\left(r^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2\right) - \left(\frac{dz}{dr} \cdot \frac{dz}{d\varphi}\right)^2\right]}\, dr\, d\varphi,$$

oder $\sqrt{\left[r^2 + r^2\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2\right]} \cdot dr\, d\varphi. \qquad$ b.

Werden endlich Polarcoordinaten im Raume zur Bestimmung der Fläche gebraucht, so ist

$$x = r\cos\psi\cos\varphi,\ y = r\cos\psi\sin\varphi,\ z = r\sin\psi.$$

Alsdann läßt sich, vermöge der Gleichung der Fläche, r als eine gegebene Function von φ und ψ ansehen. Man erhält

$$dx = \left(\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)\cos\psi\, d\varphi$$
$$+ \left(\frac{dr}{d\psi}\cos\psi - r\sin\psi\right)\cos\varphi\ d\psi.$$

$$dy = \left(\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)\cos\psi\, d\varphi$$
$$+ \left(\frac{dr}{d\psi}\cos\psi - r\sin\psi\right)\sin\varphi\, d\psi.$$

$$dz = \frac{dr}{d\varphi}\sin\psi\, d\varphi + \left(\frac{dr}{d\psi}\sin\psi + r\cos\psi\right) d\psi.$$

Durch Addition der Quadrate dieser drei Ausdrücke erhält man das Bogenelement

$$ds^2 = E d\varphi^2 + 2F d\varphi\, d\psi + G d\psi^2,$$

wo $E = r^2\cos\psi^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2$, $F = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{dr}{d\psi}$, $G = r^2 + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2$.

Hieraus findet sich

$$EG - F^2 = r^2\left[r^2\cos\psi^2 + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2\cos\psi^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right];$$

mithin der Ausdruck des Flächenelementes:

$$r\, d\varphi\, d\psi \sqrt{\left[r^2\cos\psi^2 + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2\cos\psi^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]}. \qquad \text{c.}$$

Die Formel b. läßt sich mit Vortheil bei Flächen anwenden, die durch Umdrehung entstanden sind. Es sei nämlich z die Umdrehungsaxe, welche in Hinsicht auf die erzeugende Curve als Abscisse betrachtet werden kann, deren zugehörige Ordinate r ist. Stellt nun $f(z,r) = 0$ die Gleichung der erzeugenden Curve vor, so erhält man die Gleichung der Umdrehungsfläche in rechtwinklichen Coordinaten, wenn man statt r, $\sqrt{x^2+y^2}$ schreibt, also $f(z, \sqrt{x^2+y^2}) = 0$. Behält man aber Polarcoordinaten in der Ebene xy bei, d. h. setzt man, wie oben, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, so ist $f(z,r) = 0$ auch als die Gleichung der Umdrehungsfläche zu betrachten, vermöge deren z unabhängig von φ, also eine bloße Function von r ist. Man hat demnach in der Formel b. $\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)=0$, also

$$r\,dr\,d\varphi\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2}$$

als den Ausdruck des Flächenelementes. Diese Formel kann man sofort in Bezug auf φ integriren, weil r und z, mithin auch $\frac{dz}{dr}$, unabhängig von φ sind. Integrirt man von $\varphi=0$ bis $\varphi=2\pi$, so erhält man den Ausdruck eines ringförmigen Elementes der Fläche gleich

$$2\pi\cdot r\,dr\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2}.$$

Man bemerke noch, daß $dr\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2}$ nichts anderes ist, als der Ausdruck des Bogenelementes $ds=\sqrt{dr^2+dz^2}$ der erzeugenden Curve; mithin kann man den Ausdruck des ringförmigen Flächenelementes auch schreiben $2\pi r\cdot ds$; welches Differential nachher in der vorgeschriebenen Ausdehnung zu integriren ist.

Anmerkung. Die in Vorstehendem angegebenen Flächen-Differentiale müssen zwischen Grenzen integrirt werden, die sich aus den Bedingungen der Aufgabe ergeben. Es sei das Integral $\iint f(x,y)\cdot dx\,dy$ zu integriren nach y von $y=\varphi_0 x$ bis $y=\varphi_1 x$, wo $\varphi_0 x$ und $\varphi_1 x$ zwei gegebene Functionen von x sind, und sodann nach x von $x=x_0$ bis $x=x_1$; so kann man entweder die angezeigten Integrationen unmittelbar vollziehen, oder auch, was oft vortheilhafter ist, folgendermaßen verfahren. Um die erste Integration nach y zu vollziehen, bei welcher x als constant angesehen wird, setze man

$$y=\varphi_0 x+(\varphi_1 x-\varphi_0 x)u,$$

so wird, für $y=\varphi_0 x$, $u=0$, und für $y=\varphi_1 x$, $u=1$. Man setze ferner, indem man x als constant ansieht, $dy=(\varphi_1 x-\varphi_0 x)du$, so hat man

$$\int_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} fx,y\cdot dy=\int_0^1 f[x,\varphi_0 x+(\varphi_1 x-\varphi_0 x)u]\cdot(\varphi_1 x-\varphi_0 x)du,$$

und mithin, wenn man hierauf von $x=x_0$ bis $x=x_1$ nach x integrirt:

$$\iint f(x,y)dy\,dx=\iint f(x,\varphi_0 x+(\varphi_1 x-\varphi_0 x)u)\cdot(\varphi_1 x-\varphi_0 x)du\cdot dx,$$

welches transformirte Integral zwischen $u=0$ und $u=1$, und zwischen $x=x_0$ und $x=x_1$ genommen werden muß.

109. Man verlangt z. B. ein gegebenes Stück der Kugelfläche zu quadriren. Die Gleichung dieser Fläche ist bekanntlich, wenn rechtwinkliche Coordinaten zu Grunde gelegt werden,

$$x^2+y^2+z^2=a^2;\ \text{folglich}\ \frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z},\ \frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z},$$

und $$1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2=\frac{a^2}{z^2};$$

mithin $$\frac{a\,dx\,dy}{z}=\frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

der Ausdruck eines Elementes der Kugelfläche.

Wird nun das Stück verlangt, welches sich zwischen der Ebene yz, und einem derselben parallel in dem Abstande $x=h$ gelegten ebenen Schnitte befindet, so nehme man das Integral

$$a\iint\frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

zuerst zwischen den äußersten Werthen, welche y für ein gegebenes x erhält, d. h. von $y=-\sqrt{a^2-x^2}$ bis $y=+\sqrt{a^2-x^2}$, (wodurch die Fläche einer unendlich schmalen Zone erhalten wird, die zwischen zwei der Ebene yz parallelen Ebenen enthalten ist,) und sodann von $x=0$ bis $x=h$. Man kann auch zuerst von $y=0$ bis $y=\sqrt{a^2-x^2}$, dann von $x=0$ bis $x=h$ integriren, wenn man hernach den erhaltenen Werth verdoppelt. Um diese

Integrationen auf das leichteste auszuführen, setze man

$$y=\sqrt{a^2-x^2}\cdot u,\quad dy=\sqrt{a^2-x^2}\cdot du,$$
$$a^2-x^2-y^2=(a^2-x^2)(1-u^2),$$

so geht das vorgelegte Integral über in

$$a\int_0^h dx\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=ah\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\tfrac{1}{2}ah\pi;$$

welches doppelt genommen, die verlangte Hälfte einer Kugelzone giebt $=ah\pi$. Ist $h=a$, so erhält man $a^2\pi$ als die Oberfläche des vierten Theiles der Kugel.

Aus den allgemeinen Formeln erhält man noch mehrere andere Ausdrücke für das Element der Kugelfläche. Z. B. der Ausdruck für das Element einer runden Fläche giebt, da für die Kugel $z^2+r^2=a^2$, mithin $\sqrt{dr^2+dz^2}=\frac{adr}{z}$ ist, für das Element dieser Fläche $\frac{ardrd\phi}{z}=\frac{ardrd\phi}{\sqrt{a^2-r^2}}$, oder, wenn man zuerst in Hinsicht auf ϕ von 0 bis 2π integrirt, für eine unendlich schmale Zone zwischen zwei auf der Axe z senkrechten Ebenen: $2a\pi\cdot\frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}}$. Integrirt man den Ausdruck von $r=0$ bis $r=r$, so kommt $2a\pi(a-\sqrt{a^2-r^2})$, die Oberfläche des durch den Parallelkreis, in der Entfernung $\sqrt{a^2-r^2}$ vom Mittelpuncte, abgeschnittenen Kugelsegmentes.

Eine andere Form für das Differential der Kugelfläche erhält man, wenn man Polarcoordinaten zu Grunde legt. Da $r=a$ die Gleichung der Kugel ist, so ist $\left(\frac{dr}{d\phi}\right)=0$, $\left(\frac{dr}{d\psi}\right)=0$, mithin geht der Ausdruck c. des Flächenelementes für die Kugel über in:

$$a^2\cos\psi\, d\psi\, d\phi,$$

welcher ein unendlich kleines sphärisches Viereck ergiebt, dessen Seiten $ad\psi$ und $a\cos\psi d\phi$ sind, von denen die erste einem größten Kreise, die zweite einem darauf senkrechten Parallelkreise vom Halbmesser $a\cos\psi$ angehört. Integrirt man von $\phi=\phi'$ bis $\phi=\phi''$, und von $\psi=\psi'$ bis $\psi=\psi''$, so erhält man $a^2(\phi''-\phi')(\sin\psi''-\sin\psi')$ als Fläche eines Viereckes, welches von zwei einander parallelen ebenen Schnitten, und zwei darauf senkrechten größten Kreisen, die mit einander den Winkel $\phi''-\phi'$ bilden, eingeschlossen wird. Setzt man z. B. $\phi'=0$, $\phi''=2\pi$, so erhält man die Kugelzone von der Höhe $h=a(\sin\psi''-\sin\psi')$ gleich $2a\pi h$, wie bekannt.

110. Die Gleichung $(z-e)^2=\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}$ stellt einen Kegel zweiten Grades vor, dessen Axe in der Axe z, und dessen Spitze in der Höhe e über dem Anfange der Coordinaten liegt. Die der Ebene xy parallelen Schnitte sind, wie man sieht, Ellipsen. Um die Oberfläche dieses Kegels zu finden, setze man

$$x=\alpha(e-z)\cos\phi,\quad y=\beta(e-z)\sin\phi,$$

welche Annahme mit der Gleichung des Kegels übereinstimmt.

Hierdurch erhält man

$$dx=-\alpha\cos\phi\, dz-\alpha(e-z)\sin\phi\, d\phi,$$
$$dy=-\beta\sin\phi\, dz+\beta(e-z)\cos\phi\, d\phi,\quad dz=dz;$$

mithin

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=Edz^2+2Fdzd\phi+Gd\phi^2,$$

wo

$$E=1+\alpha^2\cos\phi^2+\beta^2\sin\phi^2,$$
$$F=(e-z)\sin\phi\cos\phi\,(\alpha^2-\beta^2),$$
$$G=(e-z)^2(\alpha^2\sin\phi^2+\beta^2\cos\phi^2),$$

mithin

$$EG-F^2=[(1+\alpha^2\cos\phi^2+\beta^2\sin\phi^2)(\alpha^2\sin\phi^2+\beta^2\cos\phi^2)$$
$$-(\alpha^2-\beta^2)^2\sin\phi^2\cos\phi^2][e-z]^2.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck weiter, so findet sich

$$EG-F^2=[\alpha^2\sin\phi^2+\beta^2\cos\phi^2+\alpha^2\beta^2(\cos\phi^4+\sin\phi^4)$$
$$+2\alpha^2\beta^2(\sin\phi^2\cos\phi^2)][e-z]^2,$$

oder $EG-F^2=[\alpha^2 \sin\varphi^2+\beta^2 \cos\varphi^2+\alpha^2\beta^2][e-z]^2$,
weil $\cos\varphi^4+\sin\varphi^4+2\sin\varphi^2\cos\varphi^2=(\cos\varphi^2+\sin\varphi^2)^2=1$.
Demnach erhält man für das Element der Oberfläche des schiefen Kegels

$$\sqrt{EG-F^2}\cdot dz\,d\varphi =$$
$$\sqrt{[\alpha^2 \sin\varphi^2+\beta^2 \cos\varphi^2+\alpha^2\beta^2]}[e-z]dz\,d\varphi.$$

Integrirt man in Bezug auf z von $z=0$ bis $z=e$, so erhält man $\frac{1}{2}e^2\int\sqrt{\alpha^2 \sin\varphi^2+\beta^2 \cos\varphi^2+\alpha^2\beta^2}\cdot d\varphi$ als Ausdruck für die über der Ebene xy, bis zur Spitze, sich erstreckende Kegelfläche, in welchem das Integral von $\varphi=0$ bis $\varphi=2\pi$ genommen werden kann, wenn man die ganze Fläche verlangt, oder von $\varphi=0$ bis $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, wenn man nur einen Quadranten verlangt. Setzt man $\cos 2\varphi=u$, so wird

$$\cos\varphi^2=\frac{1+u}{2},\ \sin\varphi^2=\frac{1-u}{2},\quad d\varphi=\frac{-du}{2\sqrt{1-u^2}}$$

und das Integral geht in folgendes über:

$$-\tfrac{1}{4}e^2\int\sqrt{\left[\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-\frac{(\alpha^2-\beta^2)u}{2}+\alpha^2\beta^2\right]}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

welches von $u=1$ bis $u=-1$ genommen, den vierten Theil der gesuchten Kegelfläche giebt. Dies Integral ist eine transscendente Function, die derjenigen am nächsten kommt, durch welche der Bogen der Ellipse ausgedrückt wird. Ist $\alpha^2=\beta^2$, so hat man einen geraden Kegel mit kreisförmiger Grundfläche, dessen Oberfläche durch

$$\tfrac{1}{2}e^2\cdot\alpha\sqrt{1+\alpha^2}\cdot\varphi+\text{Const.}$$

ausgedrückt wird. Nimmt man dieses Integral von $\varphi=0$ bis $\varphi=2\pi$, so kommt

$$\alpha\sqrt{1+\alpha^2}\cdot e^2\cdot\pi$$

als die Oberfläche des geraden Kegels, von der Höhe e, dessen Grundfläche ein Kreis vom Halbmesser αe ist; wie anderweitig bekannt.

111. Drückt man ein Ellipsoid durch folgende Gleichungen aus:

$$x=a\cos\varphi\cos\psi,\ y=b\sin\varphi\cos\psi,\ z=c\sin\psi,$$

so kommt
$$dx=-a\sin\varphi\cos\psi\,d\varphi-a\cos\varphi\sin\psi\,d\psi$$
$$dy=\ \ b\cos\varphi\cos\psi\,d\varphi-b\sin\varphi\sin\psi\,d\psi$$
$$dz=\ \ c\cos\psi\,d\psi;$$

hieraus

$$dx^2+dy^2+dz^2=Ed\varphi^2+2Fd\varphi d\psi+Gd\psi^2;$$

in welchen Formeln

$$E=(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)\cos\psi^2,$$
$$F=(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi,$$
$$G=(a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2)\sin\psi^2+c^2\cos\psi^2;$$

woraus folgt $EG-F^2=$

$$[(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)(a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2)-(a^2-b^2)^2\sin\varphi^2\cos\varphi^2]\times(\sin\psi^2\cos\psi^2)$$
$$+(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)c^2\cdot\cos\psi^4$$
$$=[a^2b^2\sin\psi^2+(a^2c^2\sin\varphi^2+b^2c^2\cos\varphi^2)\cos\psi^2]\cos\psi^2;$$

oder $\sqrt{EG-F^2}=$

$$abc\cdot\cos\psi\sqrt{\left[\frac{\cos\varphi^2\cos\psi^2}{a^2}+\frac{\sin\varphi^2\cos\psi^2}{b^2}+\frac{\sin\psi^2}{c^2}\right]};$$

mithin als Ausdruck für ein Flächenelement des Ellipsoides:

$$abc\cdot\cos\psi\,d\psi\,d\varphi\sqrt{\left[\frac{\cos\varphi^2\cos\psi^2}{a^2}+\frac{\sin\varphi^2\cos\psi^2}{b^2}+\frac{\sin\psi^2}{c^2}\right]}.$$

Es sei $a=b$, oder das Ellipsoid ein durch Umdrehung um die Axe c entstandenes (ein Sphäroid), so erhält man

$$aac\cdot d\varphi\cdot d\psi\cdot\cos\psi\sqrt{\frac{\cos\psi^2}{a^2}+\frac{\sin\psi^2}{c^2}}$$

für das Flächenelement des Sphäroides. Setzt man $\sin\psi=v$, so wird das Differential

$$d\psi\cdot\cos\psi\sqrt{\frac{\cos\psi^2}{a^2}+\frac{\sin\psi^2}{c^2}}=$$

$$dv\sqrt{\frac{1}{a^2}+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)v^2}=\frac{dv}{a}\sqrt{1-\frac{c^2-a^2}{c^2}\cdot v^2}$$

und, wenn c^2-a^2 positiv, d. h. das Sphäroid durch Umdrehung der Ellipse um ihre große Axe entstanden ist, so hat man, $\frac{c^2-a^2}{c^2}=e^2$ gesetzt:

$$\int\frac{dv}{a}\sqrt{1-e^2v^2}=\frac{1}{2ae}\left[ev\sqrt{1-e^2v^2}+\arcsin ev\right].$$

Demnach erhält man für die Zone des Sphäroids, von $\psi=0$ bis $\psi=\psi$ und von $\varphi=0$ bis $\varphi=2\pi$, den Ausdruck:

$$\frac{ac\pi}{e}\left[e\sin\psi\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}+\arcsin(e\sin\psi)\right].$$

Für $\psi=\frac{1}{2}\pi$, $\sin\psi=1$, erhält man die Hälfte der Oberfläche des Sphäroids gleich

$$\frac{ac\pi}{e}\left[e\sqrt{1-e^2}+\arcsin e\right],$$

oder
$$\pi\left(a^2+\frac{ac^2}{\sqrt{c^2-a^2}}\cdot\arcsin\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}\right).$$

Ist das Sphäroid durch Umdrehung der Ellipse um die kleinere Axe entstanden, also c^2-a^2 negativ, so wird der Ausdruck der Fläche logarithmisch. Will man von diesen Formeln zur Kugel übergehen, für welche $c^2-a^2=0$ ist, so muß man bemerken, daß, für $e=0$, $\frac{\arcsin(e\sin\psi)}{e}=\sin\psi$ wird.

Cubatur der Körper.

112. Einen von einer beliebigen Fläche begrenzten körperlichen Raum denke man sich in unendlich kleine rechtwinkliche Parallelepipede zerlegt, deren Kanten dx, dy, dz den Coordinaten

parallel sind; so giebt die Summe der Inhalte aller dieser Parallelepipede, d. h. das Integral

$$\iiint dx\,dy\,dz$$

zwischen den durch die Beschaffenheit der Grenzfläche bestimmten Grenzen genommen, den gesuchten körperlichen Inhalt. Integrirt man z. B. in Hinsicht auf z, so erhält man $z\cdot dx\,dy$, d. i. das Volumen eines Prismas von der Grundfläche $dx\,dy$, Höhe z; wird hierauf z mit Hülfe der Gleichung der Fläche als Function von x und y ausgedrückt, so giebt das doppelte Integral

$$\iint z\,dx\,dy \qquad a.$$

das verlangte Volumen.

Sind allgemein die Coordinaten x, y, z als Functionen von p und q gegeben, so ist, nach §. 107. $\sqrt{EG-F^2}\cdot dp\,dq$ der Ausdruck eines Elementes der Oberfläche. Es sei i die Neigung dieses Elementes, oder, was eben so viel ist, die Neigung der an dasselbe gelegten Berührungsebene, gegen die Ebene xy, so ist bekanntlich $\cos i=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$. Multiplicirt man das Flächenelement mit $\cos i$, so erhält man seine Projection auf die Ebene xy; und multiplicirt man diese mit z, so erhält man das Volumen eines über dieser Grundfläche befindlichen Elementar-Prismas. Nun ist allgemein

$$dz=\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy;$$

setzt man in diese Gleichung die Werthe von dx, dy, dz, aus §. 107., so erhält man

$$c\,dp+c'dq=\frac{dz}{dx}(a\,dp+a'dq)+\left(\frac{dz}{dy}\right)(b\,dp+b'dq);$$

und da das Verhältniß $\frac{dp}{dq}$ gänzlich unbestimmt bleiben muß, während diese Gleichung immer Statt findet; so zerfällt dieselbe in folgende zwei Gleichungen:

$$a\left(\frac{dz}{dx}\right)+b\left(\frac{dz}{dy}\right)=c,\quad a'\left(\frac{dz}{dx}\right)+b'\left(\frac{dz}{dy}\right)=c',$$

aus denen man findet:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{c'b-cb'}{a'b-ab'},\quad \frac{dz}{dy}=\frac{c'a-ca'}{b'a-ba'}.$$

Die Gleichung der Berührungsebene in dem Puncte x, y, z ist, wie bekannt:

$$w-z=\left(\frac{dz}{dx}\right)(u-x)+\left(\frac{dz}{dx}\right)(v-y).$$

Setzt man in dieselbe die obigen Werthe von $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, so kommt:

$$(b'c-bc')(u-x)+(c'a-ca')(v-y)+(a'b-ab')(w-z)=0.$$

Man bemerke noch, daß

$$(a'b-ab')^2+(c'a-ca')^2+(b'c-bc')^2=$$
$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2=EG-F^2$$

ist. Demnach ist, für die Neigung i der Berührungsebene gegen die Ebene xy,

$$\cos i=\frac{a'b-ab'}{\sqrt{EG-F^2}};$$

und folglich

$$\sqrt{EG-F^2}\cdot dp\,dq\cdot z\cos i=z(a'b-ab')dp\,dq$$

der Ausdruck des Elementarprismas, oder das Volumen des Körpers gleich

$$\iint z\left(\frac{dy}{dp}\cdot\frac{dx}{dq}-\frac{dy}{dq}\cdot\frac{dx}{dp}\right)dp\,dq.\qquad b.$$

Sind z. B. statt x und y Polarcoordinaten in der Ebene gewählt, so daß $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, so hat man $\left(\frac{dx}{dr}\right)=\cos\varphi$, $\left(\frac{dy}{dr}\right)=\sin\varphi$, $\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)=-r\sin\varphi$, $\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)=r\cos\varphi$; demnach geht die vorstehende Formel, wenn man statt p und q, φ und r schreibt, über in

$$\iint z\,r\,dr\,d\varphi,\qquad c.$$

welche man auch leicht unmittelbar finden kann, indem $r\,dr\,d\varphi$ ein rectanguläres Flächenelement in der Ebene xy darstellt, welches mit z multiplicirt, das Elementar-Prisma von der Höhe z giebt.

Eine andere Darstellung des körperlichen Elementes erhält man, wenn man das Flächenelement in seinen senkrechten Abstand vom Anfange der Coordinaten multiplicirt. Nimmt man den dritten Theil des Productes, so hat man den Inhalt einer Pyramide, deren Grundfläche das Flächenelement, und deren Spitze der Anfang der Coordinaten ist. Aus der oben gegebenen Gleichung der Tangentialebene ersieht man, daß der senkrechte Abstand dieser Ebene vom Anfange der Coordinaten folgender ist:

$$\frac{(b'c-bc')x+(c'a-ca')y+(a'b-ab')z}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Wird derselbe mit dem dritten Theile des Flächenelementes, d. i. $\frac{1}{3}\sqrt{EG-F^2}\cdot dp\,dq$ multiplicirt, so erhält man folgenden Ausdruck des gesuchten Volumens, welcher dasselbe nicht als eine Summe paralleler Prismen, sondern im Anfange der Coordinaten zusammenstoßender Pyramiden darstellt:

$$\tfrac{1}{3}\iint[(b'c-bc')x+(c'a-ca')y+(a'b-ab')z]dp\,dq.\qquad d.$$

In diesem Ausdrucke ist, nach §. 107., $a=\frac{dx}{dp}$, $a'=\frac{dx}{dq}$, u. s. f.

Sind z. B. Polarcoordinaten gewählt, wie in §. 108. c., so hat man $p=\varphi$, $q=\psi$ zu setzen, und danach die Werthe von a, b, u. s. f. aus den dortigen Ausdrücken für dx, dy, dz zu entnehmen. Man findet daraus

$$(b'c-bc')x+(c'a-ca')y+(a'b-ab')z=r^3\cos\psi,$$

und folglich den Ausdruck des Volumens

$$\tfrac{1}{3}\iint r^3\cos\psi\,d\psi\,d\varphi.\qquad e.$$

Denselben Ausdruck kann man auch auf folgende Art aus der

Formel c. des §. 108. ableiten. Man denke sich innerhalb des zu berechnenden Volumens ein beliebiges Stück einer Kugelfläche, deren Mittelpunct in den Anfang der Coordinaten fällt, und deren Halbmesser r ist; und drücke nach der genannten Formel ein Element w dieser Kugelfläche durch $r^2 \cos\psi d\varphi d\psi$ aus. Denkt man sich nun eine zweite concentrische Kugelfläche vom Halbmesser $r+dr$, so kann man das Element der Pyramide, deren Kanten die durch die vier Ecken des unendlich kleinen Viereckes w gehenden Halbmesser sind, offenbar als ein rechtwinkliches Parallelepipedum von der Grundfläche w und der Höhe dr betrachten, und demnach durch $r^2 \cos\psi d\varphi d\psi dr$ ausdrücken. Integrirt man diesen Ausdruck zuerst nach r, so erhält man den obigen Ausdruck der Elementar-Pyramide, nämlich $\frac{1}{3}r^3 \cos\psi d\varphi d\psi$.

113. Setzt man, für ein Ellipsoid,

$$x = a\cos\varphi\cos\psi,\quad y = b\sin\varphi\cos\psi,\quad z = c\sin\psi,$$

so erhält man aus den Ausdrücken für dx, dy, dz (§. 111.)

$$\frac{dx}{d\varphi}\cdot\frac{dy}{d\psi} - \frac{dx}{d\psi}\cdot\frac{dy}{d\varphi} = ab\sin\psi\cos\psi;$$

und mithin, als Ausdruck des Elementar-Prismas über der Ebene xy, dessen Höhe z ist, nach §. 112. b.

$$abc\cdot\sin\psi^2\cos\psi\cdot d\psi d\varphi.$$

Integrirt man z. B. diesen Ausdruck in Hinsicht auf ψ von 0 bis ψ, so kommt $\frac{1}{3}abc\cdot\sin\psi^3\cdot d\varphi$. Um diese Formel richtig zu verstehen, sei (Fig. 27.) BCD der Durchschnitt des Ellipsoids mit der Ebene xy; für alle Puncte desselben ist $z=0$, also $\psi=0$, und $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$. Man ziehe aus dem Mittelpuncte A einen Kreis mit dem Halbmesser $AD = a$, in der Ebene BCD; nehme in der Ellipse BCD einen Punct K, dessen Coordinaten $x = AG = a\cos\varphi$, $y = GK = b\sin\varphi$ sind, und verlängere die Ordinate GK bis zu ihrem Durchschnitte E mit dem Kreise. Zieht man noch AE, so ist $\angle EAD = \varphi$. Aendert sich nun φ um $EAE' = d\varphi$, so sei K' der dem geänderten φ entsprechende

Punct der Ellipse, und es werde AK' gezogen. Ferner sei LMKI die Projection der Ellipse, welche entsteht, wenn das Ellipsoid durch eine Ebene parallel mit xy in der Höhe $z = c\sin\psi$ geschnitten wird; daher $AL = a\cos\psi$, $AN = b\cos\psi$ die Hauptaxen dieser Ellipse darstellen. Alsdann wird der über der Grundfläche MM'K'K befindliche körperliche Raum des Ellipsoids durch die Formel $\frac{1}{3}abc\cdot\sin\psi^3 d\varphi$ ausgedrückt. Läßt man ferner ψ ungeändert, und integrirt von $\varphi=0$ bis φ, so erhält man $\frac{1}{3}abc\sin\psi^3\cdot\varphi$ als Ausdruck des über der Grundfläche LMKI befindlichen Raumes. Integrirt man z. B. bis $\psi = \frac{1}{2}\pi$, so ist $\frac{1}{3}abc\cdot\varphi$ der Raum über KAD, und nimmt man $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so $\frac{1}{6}abc\cdot\pi$ als der Rauminhalt des über dem Quadranten CAD liegenden 8ten Theiles des Ellipsoids, mithin ist $\frac{4}{3}abc\cdot\pi$ der Inhalt des ganzen Ellipsoids.

114. Es sei $(z-c)^2 = \alpha^2x^2 + \beta^2y^2$ die Gleichung eines elliptischen Kegels; man sucht den Inhalt desjenigen Stückes, welches zwischen der Ebene zy und einem derselben parallel in dem Abstande x gelegten Schnitt, über der Ebene xy bis zur Spitze hin, sich erstreckt. Zu dem Ende suche man das Integral

$$V = \iint (c - \sqrt{\alpha^2x^2 + \beta^2y^2})\,dx\,dy,$$

genommen von $y=0$ bis $y = \frac{\sqrt{c^2-\alpha^2x^2}}{\beta}$, und von $x=0$ bis $x=x$, welches, wie man sieht, die Hälfte des verlangten Inhalts giebt. Man setze $\beta y = \sqrt{c^2-\alpha^2x^2}\cdot u$, $\beta dy = \sqrt{c^2-\alpha^2x^2}\cdot du$; so kommt

$$\frac{dV}{dx} = \int (c - \sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2y^2})\,dy =$$

$$\frac{c\sqrt{c^2-\alpha^2x^2}}{\beta} - \frac{\sqrt{c^2-\alpha^2x^2}}{\beta}\int_0^1 du\sqrt{\alpha^2x^2+(c^2-\alpha^2x^2)u^2}.$$

Nun ist aber $\int du\sqrt{A^2+B^2u^2} =$

$$\frac{1}{2B}(Bu\sqrt{A^2+B^2u^2} + A^2\log[Bu + \sqrt{A^2+B^2u^2}]),$$

mithin $$\int_0^1 du\sqrt{A^2+B^2u^2} =$$

$$\frac{1}{2B}\left(B\sqrt{A^2+B^2}+A^2 \log\frac{B+\sqrt{A^2+B^2}}{A}\right);$$

setzt man α^2x^2 für A^2, $e^2-\alpha^2x^2$ für B^2, so erhält man

$$\int_0^1 du\sqrt{\alpha^2x^2+(e^2-\alpha^2x^2)u^2} =$$

$$\frac{e}{2}+\frac{\alpha^2x^2}{2\sqrt{e^2-\alpha^2x^2}}\log\frac{e+\sqrt{e^2-\alpha^2x^2}}{\alpha x};$$

mithin sofort:

$$\frac{dV}{dx}=\frac{e\sqrt{e^2-\alpha^2x^2}}{2\beta}-\frac{\alpha^2x^2}{2\beta}\log\frac{e+\sqrt{e^2-\alpha^2x^2}}{\alpha x}.$$

Um das Integral dieser Function nach x zu finden, setze man $\alpha x=eq$, so kommt $\frac{dV}{dx}=\frac{\alpha}{e}\cdot\frac{dV}{dq}$; und hierauf:

$$V=\tfrac{1}{2}\frac{e^3}{\alpha\beta}\int\left[\sqrt{1-q^2}-q^2\log\frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q}\right]dq.$$

Man hat $\int dq\cdot\sqrt{1-q^2}=\frac{1}{2}q\sqrt{1-q^2}+\frac{1}{2}\arcsin q$. Ferner durch theilweise Integration:

$$\int dq\cdot q^2\log\frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q}=$$

$$\tfrac{1}{3}q^3\log\frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q}-\tfrac{1}{3}\int q^3 d\log\frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q}.$$

Nun ist $d\log\frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q}=-\frac{dq}{q\sqrt{1-q^2}}$; mithin

$$\int q^2 dq\cdot\log\frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q}=$$

$$\tfrac{1}{3}q^3\log\frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q}+\tfrac{1}{3}\int\frac{q^2dq}{\sqrt{1-q^2}}=$$

$$\tfrac{1}{3}q^3\log\frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q}+\tfrac{1}{6}\arcsin q-\tfrac{1}{6}q\sqrt{1-q^2}.$$

Demnach findet man:

$$V=\tfrac{1}{2}\frac{e^3}{\alpha\beta}\left[\tfrac{1}{3}\arcsin q+\tfrac{2}{3}q\sqrt{1-q^2}-\tfrac{1}{3}q^3\log\frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q}\right],$$

und, wenn man für q wiederum seinen Werth $\frac{\alpha x}{e}$ setzt:

$$V=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{e^3}{\alpha\beta}\left[\tfrac{1}{3}\arcsin\frac{\alpha x}{e}+\tfrac{2}{3}\frac{\alpha x\sqrt{e^2-\alpha^2x^2}}{e^2}-\tfrac{1}{3}\frac{\alpha^3x^3}{e^3}\log\frac{e+\sqrt{e^2-\alpha^2x^2}}{\alpha x}\right],$$

welches Integral für $x=0$ verschwindet, wei $x^3\log\alpha x$ für $x=0$, Null ist.

Verlangt man das ganze über dem elliptischen Quadranten liegende Volumen des Kegels, so ist $x=\frac{e}{\alpha}$ zu setzen, wodurch $V=\frac{1}{12}\cdot\frac{e^3\pi}{\alpha\beta}$, mithin, für den ganzen Kegel von der Grundfläche $\frac{e}{\alpha}\cdot\frac{e}{\beta}\cdot\pi$ und der Höhe e, $4V=\frac{1}{3}\cdot\frac{e^3\pi}{\alpha\beta}$ erhalten wird, wie bekannt ist.

Mechanische Quadratur.

115. Da man häufig nicht vermag, ein vorgelegtes Integral auf eine für die Rechnung brauchbare Weise allgemein darzustellen, so bedarf man einer Methode, um wenigstens den angenäherten Zahlenwerth eines solchen Integrals, zwischen gegebenen Grenzen, zu finden. Man nennt dieselbe gewöhnlich die mechanische Quadratur, in so fern dadurch, vermittelst der Berechnung einiger Zahlenwerthe von fx, eine Curve quadrirt wird, deren Ordinate fx ist.

Es sei fx eine beliebige Function von x, welche zwischen den (endlichen) Grenzen a und b von x endlich und stetig bleibt; man verlangt den Integralwerth $\int_a^b fx\,dx$.

Es werde $x=a+(b-a)u$ gesetzt, so kommt, weil für $x=a$, $u=0$, und für $x=b$, $u=1$, ferner $dx=(b-a)du$ ist:

$$\int_a^b fx\cdot dx=(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)u)\cdot du.$$

Man kan demnach das vorgelegte Integral allemal auf die Grenzen 0 und 1 bringen; was zur Vereinfachung als geschehen angenommen werde, so daß es sich um die Berechnung des Integrals $\int_0^1 fx\cdot dx$ handelt.

Man berechne den Werth von fx für mehrere auf einander folgende Werthe von x, zwischen 0 und 1, welche mit $a_1, a_2, \ldots a_n$ bezeichnet werden mögen, und suche eine rationale ganze Function φx von x, welche mit der Function fx die n Werthe $fa_1, fa_2, \ldots fa_n$ gemein habe, so daß sei:

$$\varphi a_1=fa_1,\ \varphi a_2=fa_2,\ \ldots\ \varphi a_n=fa_n.$$

Um dieselbe zu finden, bilde man das Polynom des nten Grades:

$$\psi x=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n).$$

Stellt nun φx ein beliebiges Polynom vom $n-1$ ~~n~~ten Grade vor, so erhält man durch Zerlegung in einfache Brüche, nach §. 90., Formel 6.,

$$\frac{\varphi x}{\psi x}=\frac{\varphi a_1}{\psi' a_1(x-a_1)}+\frac{\varphi a_2}{\psi' a_2(x-a_2)}+\cdots+\frac{\varphi a_n}{\psi' a_n(x-a_n)}.$$

Man setze $\varphi a_1=fa_1,\ \varphi a_2=fa_2,\ \ldots\ \varphi a_n=fa_n$; so ist

$$\varphi x=\psi x\left[\frac{fa_1}{\psi' a_1(x-a_1)}+\frac{fa_2}{\psi' a_2(x-a_2)}+\cdots+\frac{fa_n}{\psi' a_n(x-a_n)}\right]$$

ein Polynom vom $n-1$ ~~n~~ten Grade, welches offenbar für

$$x=a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n$$

die Werthe

$$fa_1,\ fa_2,\ \ldots\ fa_n$$

erhält, wie verlangt wurde.

Da der Unterschied der beiden endlichen und stetigen Functionen fx und φx, zwischen 0 und 1, nmal der Null gleich wird, so ist einleuchtend, daß derselbe überhaupt überall sehr klein sein wird, wenn die Anzahl der berechneten Werthe von x beträchtlich groß und ihre Abstände klein genug sind. Wenn man also statt des Integrals $\int_0^1 fx\,dx$ das Integral $\int_0^1 \varphi x\,dx$ berechnet, so begeht man einen Fehler, welcher durch $\int_0^1 (fx-\varphi x)\,dx$ ausgedrückt wird, und mithin einem Mittelwerthe von $fx-\varphi x$ gleich ist, der sich, je kleiner die Abstände der berechneten Ordinaten werden, desto mehr der Null nähern muß. — Geometrisch gesprochen, kommt das Verfahren darauf hinaus, an die Stelle der Curve $y=fx$ eine Curve $y=\varphi x$ zu setzen, in deren Gleichung φx eine rationale ganze Function von x ist, und welche mit der vorigen Curve eine gewisse Anzahl von Puncten gemein hat. Dieses kann aber nur dann mit Erfolg geschehen, wenn die Curve $y = fx$ zwischen den Grenzen der Integration keine Spitzen hat, sondern stetig fortgeht.

Zur Berechnung des vorgelegten Integrals bedient man sich am häufigsten gleich weit abstehender Ordinaten, d. h. man berechnet die Werthe von fx für

$$x = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \frac{n-1}{n}, 1.$$

Bezeichnet man diese Werthe zur Abkürzung mit $A_0, A_1, A_2, \dots A_n$, und setzt nach dem Obigen

$$\psi x = x\left(x - \frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{2}{n}\right) \dots (x-1);$$

so erhält man

$$\varphi x = \frac{A_0}{\psi'(0)} \cdot \frac{\psi x}{x} + \dots + \frac{A_\mu}{\psi'(\mu)} \cdot \frac{\psi x}{x - \frac{\mu}{n}} + \dots + \frac{A_n}{\psi'(n)} \cdot \frac{\psi x}{x-1};$$

in welcher Formel der Werth, den $\psi' x$ für $x = \frac{\mu}{n}$ erhält, zur Abkürzung mit $\psi'(\mu)$ bezeichnet ist. Integrirt man von 0 bis 1, so erhält $\frac{1}{\psi'(\mu)} \int_0^1 \frac{\psi x}{x - \frac{\mu}{n}}$ offenbar einen endlichen bestimmten Werth, der mit K_μ bezeichnet werde; und es ergiebt sich der gesuchte Näherungs-Werth von $\int_0^1 fx\, dx$, nämlich:

$$\int_0^1 \varphi x\, dx = K_0 A_0 + K_1 A_1 + K_2 A_2 + \dots + K_n A_n.$$

Z. B. es seinen drei Ordinaten, für $x = 0, \frac{1}{2}, 1$ berechnet, so ist

$$\psi x = x(x - \tfrac{1}{2})(x-1) = x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x.$$

Man erhält $\psi'(0) = \frac{1}{2}$, $\psi'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, $\psi'(1) = \frac{1}{2}$; ferner

$$\int_0^1 \frac{\psi x}{x} dx = \int_0^1 (x^2 - \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{2}) dx = \tfrac{1}{12};$$

$$\int_0^1 \frac{\psi x}{x - \frac{1}{2}} dx = -\tfrac{1}{6}; \int_0^1 \frac{\psi x}{x-1} dx = \tfrac{1}{12};$$

mithin $K_0 = \frac{1}{6}$; $K_1 = \frac{2}{3}$; $K_2 = \frac{1}{6}$; und folglich

$$\tfrac{1}{6}A_0 + \tfrac{2}{3}A_1 + \tfrac{1}{6}A_2$$

als den Näherungswerth des Integrals $\int_0^1 fx\, dx$.

116. Die Berechnung der Coefficienten $K_0, K_1, \dots K_n$ ist, wie man sieht, mit keiner Schwierigkeit verknüpft, und läßt sich noch durch die Bemerkung abkürzen, daß allgemein $K_0 = K_n$, $K_1 = K_{n-1}$, überhaupt $K_\mu = K_{n-\mu}$ ist.

Da nämlich $K_\mu = \frac{1}{\psi'(\mu)} \int_0^1 \frac{\psi x}{x - \frac{\mu}{n}} dx$,

so ist $$K_{n-\mu} = \frac{1}{\psi'(n-\mu)} \cdot \int_0^1 \frac{\psi x}{x - \frac{n-\mu}{n}} dx.$$

Nun ist, wie man leicht findet, wenn man in der Function ψx, $1-x$ statt x schreibt,

$$\psi(1-x) = (1-x)\left(\frac{n-1}{n} - x\right)\left(\frac{n-2}{n} - x\right) \dots (-x) = (-1)^{n+1} \psi x;$$

folglich $\psi'(1-x) = (-1)^n \psi' x$; oder $\psi' x = (-1)^n \psi'(1-x)$; daher, für $x = \frac{\mu}{n}$, $\psi'(\mu) = (-)^n \psi'(n-\mu)$. Ferner ist, wenn man statt x, $1-u$ schreibt,

$$\int_0^1 \frac{\psi x}{x - \frac{\mu}{n}} \cdot dx = -\int_1^0 \frac{\psi(1-u)}{1-u-\frac{\mu}{n}} du = \int_0^1 \frac{\psi(1-u) du}{\frac{n-\mu}{n} - u},$$

welcher Werth, weil

$$\frac{\psi(1-u)}{\frac{n-\mu}{n} - u} = (-1)^n \frac{\psi u}{u - \frac{n-\mu}{n}};$$ in $(-1)^n \int_0^1 \frac{\psi u}{u - \frac{n-\mu}{n}} du$

übergeht. Daher ist

$$\frac{1}{\psi'(\mu)} \cdot \int_0^1 \frac{\psi x\, dx}{x - \frac{\mu}{n}} = \frac{1}{\psi'(n-\mu)} \int_0^1 \frac{\psi x\, dx}{x - \frac{n-\mu}{n}},$$

oder $K_\mu = K_{n-\mu}$; w. z. b. w. Man bemerke ferner, daß

$$K_0 + K_1 + K_2 + \cdots + K_n =$$

$$\int_0^1 \psi x\, dx \left[\frac{1}{\psi'(0)\cdot x} + \frac{1}{\psi'(1)\left(x - \frac{1}{n}\right)} + \cdots + \frac{1}{\psi'(n)(x-1)} \right].$$

Die in Klammern eingeschlossene Summe von Brüchen ist aber offenbar gleich $\frac{1}{\psi x}$; folglich hat man noch

$$K_0 + K_1 + \cdots + K_n = \int_0^1 dx = 1.$$

Folgende Tafel enthält die zur Anwendung der Methode nöthigen Zahlenwerthe der Coefficienten:

Anzahl d. berechneten Ordinaten.	Näherungswerth. $\left(A_\mu = f\left(\frac{\mu}{n}\right).\right)$
2.	$\frac{A_0 + A_1}{2}.$
3.	$\frac{A_0 + 4A_1 + A_2}{6}.$
4.	$\frac{A_0 + 3A_1 + 3A_2 + A_3}{8}.$
5.	$\frac{7A_0 + 32A_1 + 12A_2 + 32A_3 + 7A_4}{90}.$
6.	$\frac{19A_0 + 75A_1 + 50A_2 + 50A_3 + 75A_4 + 19A_5}{288}.$
7.	$\frac{41A_0 + 216A_1 + 27A_2 + 272A_3 + 27A_4 + 216A_5 + 41A_6}{840}.$
8.	$\frac{751A_0 + 3577A_1 + 1323A_2 + 2989A_3 + \cdots}{17280}.$
9.	$\frac{989A_0 + 5888A_1 - 928A_2 + 10496A_3 - 4540A_4 + \cdots}{2835}.$
10.	$\frac{2857A_0 + 15741A_1 + 1080A_2 + 19344A_3 + 5778A_4 + \cdots}{89600}.$
11.	$\frac{16067A_0 + 106300A_1 - 48525A_2 + 272400A_3 - 260550A_4 + 427368A_6 + \cdots}{598752}.$

Die in den Formeln 8—11. weggelassenen Glieder kann man

leicht aus den angegebenen ergänzen, wenn man auf die Symmetrie achtet, welche in diesen Ausdrücken, wie allgemein vorhin bewiesen worden, Statt finden muß.

Um nur ein sehr einfaches Beispiel zu geben, soll der Werth von $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x}$ berechnet werden, welcher, wie bekannt, gleich *log nat* $\frac{3}{2} = 0{,}4054651\cdots$ ist. Man setze $x = \frac{1}{2}u$, so ist das vorgelegte Integral gleich $\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{1+\frac{1}{2}u} = \int_0^1 \frac{du}{2+u}$. Berechnet man $\frac{1}{2+u}$ für $u = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$; so erhält man die Werthe

$$\tfrac{1}{2},\quad \tfrac{4}{9},\quad \tfrac{2}{5},\quad \tfrac{4}{11},\quad \tfrac{1}{3},$$

und mithin, nach der obigen Tafel, für 5 Ordinaten, den Näherungswerth:

$$\frac{7(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) + 32(\frac{4}{9}+\frac{4}{11}) + 12\cdot\frac{2}{5}}{90} = 0{,}4054656\cdots$$

der bis auf 6 Decimalstellen richtig ist.

117. Obgleich die eben behandelte Methode der mechanischen Quadratur am häufigsten angewendet wird, weil sie für die Rechnung sehr bequem ist, so ist es doch angemessen, hier noch einer anderen Methode zu erwähnen, nach welcher nicht, wie vorhin, gleich weit abstehende Ordinaten berechnet, sondern die zu berechnenden Ordinaten, nach einem gewissen, sogleich anzugebenden, Gesichtspuncte, auf die für die Annäherung vortheilhafteste Weise ausgewählt werden. Diese sehr interessante Methode ist von Gauß erfunden, die hier folgende Herleitung derselben aber von Jacobi gegeben worden.

Es sei, wie in §. 115.

$$\psi x = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n),$$

und $$\varphi x = \psi x \left[\frac{fa_1}{\psi' a_1 (x-a_1)} + \frac{fa_2}{\psi' a_2 (x-a_2)} + \cdots + \frac{fa_n}{\psi' a_n (x-a_n)} \right]$$

diejenige Function, welche mit der gegebenen fx, deren Integral von 0 bis 1 gesucht wird, die n Werthe fa_1, fa_2, ... fa_n gemein hat. Man setze

$$fx = \varphi x + V \cdot \psi x,$$

so wird der Fehler der angenäherten Integration durch

$$\int_0^1 fx dx - \int_0^1 \varphi x dx = \int_0^1 V \psi x \cdot dx$$

ausgedrückt.

Um einen allgemeinen Ausdruck dieses Fehlers, und dadurch ein Maaß der Annäherung zu erhalten, denke man sich fx in einer Reihe nach Potenzen von x entwickelt, nämlich:

$$fx = C + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n + \cdots$$

Wird diese Reihe durch ψx dividirt, so ist, nach der Formel

$$fx = \varphi x + V \cdot \psi x$$

V der Quotient, φx der Rest der Division. Um V zu erhalten, entwickele man den Bruch $\frac{1}{\psi x}$ nach fallenden Potenzen von x, nämlich

$$\frac{1}{\psi x} = \frac{B}{x^n} + \frac{B_1}{x^{n+1}} + \frac{B_2}{x^{n+2}} + \cdots + \frac{B_\nu}{x^{n+\nu}} + \cdots \text{ in inf.},$$

multiplicire diese Reihe mit der Reihe für fx und lasse alle Glieder weg, welche negative Potenzen von x enthalten; so ist V der Inbegriff der übrigen Glieder. (Die Glieder mit negativen Potenzen von x stellen den ächten Bruch $\frac{\varphi x}{\psi x}$, in eine Reihe entwickelt, dar.) Man findet dadurch

$$\begin{aligned} V = {} & C_n B + C_{n+1} B_1 + C_{n+2} B_2 + \cdots \\ & + [C_{n+1} B + C_{n+2} B_1 + C_{n+3} B_2 + \cdots] x \\ & + [C_{n+2} B + C_{n+3} B_1 + C_{n+4} B_2 + \cdots] x^2 \\ & + \cdots \text{ in inf.} \end{aligned}$$

oder, nach den Coefficienten C geordnet:

$$V = C_n B + C_{n+1}(Bx + B_1) + C_{n+2}(Bx^2 + B_1 x + B_2) + \cdots,$$

eine Reihe, deren Gesetz leicht zu übersehen ist.

Daher ist der Fehler der Integration

$$\int_0^1 V \psi x dx = C_n B \int_0^1 \psi x dx + C_{n+1} \int_0^1 (Bx + B_1) \psi x \, dx$$
$$+ C_{n+2} \int_0^1 (Bx^2 + B_1 x + B_2) \psi x \, dx + \cdots \text{ in inf.}$$

Nun lassen sich die Werthe a_1, a_2, a_3, .. a_n zwischen 0 und 1 so wählen, daß die Integrale

$$\int \psi x \, dx, \int x \psi x \, dx, \int x^2 \psi x \, dx, \ldots \int x^{n-1} \psi x \, dx,$$

zwischen den Grenzen 0 und 1 genommen, sämmtlich Null werden. Alsdann fallen die Coefficienten C_n, C_{n+1}, C_{n+2}, .. C_{2n-1} aus dem obigen Ausdrucke des Fehlers hinweg, so daß der Fehler nur noch von den nachfolgenden Coefficienten der Reihe fx, nämlich C_{2n}, C_{2n+1}, u. s. f. abhängt. Dies ist der Gesichtspunct, nach welchem die zu berechnenden Ordinaten gewählt werden sollen.

118. Wird in der Formel für $\int u dv$, §. 97., $u = x^\mu$, $v = \int \psi x \, dx$ gesetzt, so kommt

$$\int x^\mu \psi x dx = x^\mu \int \psi x dx - \mu x^{\mu-1} \int_2 \psi x dx^2 + \mu \cdot \mu - 1 \cdot x^{\mu-2} \int_3 \psi x dx^3$$
$$\cdots + (-1)^\mu \mu! \int_{\mu+1} \psi x dx^{\mu+1}.$$

Aus dieser Formel folgt, daß, wenn man ψx so bestimmen kann, daß die vielfachen Integrale von ψx, vom 1ten bis zum nten, nämlich

$$\int \psi x \, dx, \int_2 \psi x \, dx^2, \ldots \int_n \psi x \, dx^n$$

zwischen den Grenzen 0 und 1 verschwinden, alsdann auch die sämmtlichen Integrale

$$\int_0^1 \psi x \, dx, \int_0^1 x \psi x \, dx, \ldots \int_0^1 x^{n-1} \psi x \, dx$$

Null sind, wie verlangt wird.

Nun sei z. B. $\int_0^x \psi x \, dx = x(x-1) = x^2 - x$, so ist offenbar $\int_0^1 \psi x \, dx = 0$. Allgemeiner sei

$$\int_n \psi x\, dx^n = (x^2 - x)^n$$

so ist $$\int_{n-1} \psi x\, dx^{n-1} = n(x^2-x)^{n-1}(2x-1) = \frac{d(x^2-x)^n}{dx}$$

$$\int_{n-2} \psi x\, dx^{n-2} = n \cdot n\text{-}1(x^2\text{-}x)^{n-2}(2x\text{-}1)^2 + 2n(x^2\text{-}x)^{n-1}$$

oder $$\int_{n-2} \psi x\, dx^{n-2} = \frac{d^2(x^2-x)^n}{dx^2},$$

$$\int_{n-3} \psi x\, dx^{n-3} = \frac{d^3(x^2-x)^n}{dx^3},$$

u. s. f., endlich

$$\int \psi x\, dx = \frac{d^{n-1}(x^2-x)^n}{dx^{n-1}}$$

$$\psi x = \frac{d^n(x^2-x)^n}{dx^n}.$$

Die Ableitungen von $(x^2-x)^n$, von der ersten bis zur $(n-1)$ten, enthalten offenbar sämmtlich den Factor x^2-x, und werden also Null für $x=0$ und für $x=1$; also werden auch die Integrale $\int \psi x\, dx, \cdots \int_n \psi x\, dx^n$, bei der letzten Integration von 0 bis 1 genommen, alle Null, und mithin verschwinden auch die Integrale:

$$\int_0^1 \psi x\, dx,\ \int_0^1 x\,\psi x\, dx,\ \cdots \int_0^1 x^{n-1}\psi x\, dx,$$

wie verlangt wurde.

Man hat, nach dem binomischen Satze

$$(x^2-x)^n = x^{2n} - n_1 x^{2n-1} + n_2 x^{2n-2} - n_3 x^{2n-3} + \cdots$$

folglich erhält man durch $n$malige Differentiation, wenn man nachher noch durch den Coefficienten $\frac{2n!}{n!}$ des höchsten Gliedes dividirt,

$$\frac{n!}{2n!}\frac{d^n(x^2\text{-}x)^n}{dx^n} =$$

$$x^n - \frac{n!\,n!\,(2n\text{-}1)!}{1!(n\text{-}1)!(n\text{-}2)!2n!}x^{n-1} + \frac{n!\,n!\,(2n-2)!}{2!(n\text{-}2)!(n\text{-}2)!2n!}x^{n-2}$$
$$- \frac{n!\,n!\,(2n-3)!}{3!(n-3)!(n-3)!2n!}x^{n-3} + \cdots$$

Dieses Polynom setze man $=\psi x$; so geben die Wurzeln der Gleichung $$\psi x = 0,$$
welche sämmtlich positive, ungleiche ächte Brüche sind, wie aus der Entstehung der Gleichung $\psi x = 0$ leicht zu schließen ist, die verlangten Werthe von

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots a_n,$$

zu welchen die Ordinaten

$$fa_1,\ fa_2,\ fa_3, \cdots fa_n$$

berechnet werden müssen.

Man setze noch

$$\int_0^1 \frac{\psi x\, dx}{\psi' a_1(x-a_1)} = K_1, \text{ u. s. f., allgemein } \int_0^1 \frac{\psi x\, dx}{\psi' a_\mu(x-a_\mu)} = K_\mu;$$

so ist der angenäherte Werth des Integrals $\int_0^1 fx\, dx$ folgender:

$$\int_0^1 \varphi x\, dx = K_1 fa_1 + K_2 fa_2 + \cdots + K_n fa_n.$$

119. Werden z. B. nur zwei Ordinaten berechnet, so ist

$$\psi x = \tfrac{1}{12} \cdot \frac{d^2(x^2-x)^2}{dx^2} = x^2 - x + \tfrac{1}{6},$$

also sind $a_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}}$ und $a_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}}$ die Abscissen, zu welchen die Ordinaten berechnet werden müssen. Man findet daraus leicht $K_1 = K_2 = \frac{1}{2}$, so daß der angenäherte Werth des Integrals folgender ist:

$$\frac{fa_1 + fa_2}{2}.$$

Nach den obigen Formeln ist folgende Tafel berechnet, welche zur Anwendung der Methode dient, wofern nicht mehr als 5 Ordinaten gebraucht werden:

Anzahl der Ordinaten.

2. $a_1 = 0{,}21132487$. $K_1 = K_2 = \frac{1}{2}$.
$a_2 = 0{,}78867513$.

3. $a_1 = 0{,}11270467.$ $K_1 = K_3 = \frac{5}{18}.$
$a_2 = 0{,}5.$ $K_2 = \frac{4}{9}.$
$a_3 = 0{,}88729833.$

4. $a_1 = 0{,}06943184.$
$a_2 = 0{,}33000948.$ $K_1 = K_4 = 0{,}17392742.$
$a_3 = 0{,}66999052.$ $K_2 = K_3 = 0{,}32607258.$
$a_4 = 0{,}93056816.$

5. $a_1 = 0{,}04691008.$ $K_1 = K_5 = 0{,}11846344.$
$a_2 = 0{,}23076534.$ $K_2 = K_4 = 0{,}23931434.$
$a_3 = 0{,}5.$ $K_3 = 0{,}28444444.$
$a_4 = 0{,}76923466.$
$a_5 = 0{,}95308992.$

Um nur ein Beispiel zu geben, welches fast gar keine Rechnung erfordert, vergleiche man die Werthe, welche das schon oben berechnete Integal $\int_0^1 \frac{dx}{2+x}$ erhält, wenn nur zwei Ordinaten, sowohl nach der vorigen, als der jetzt angegebenen Methode, in Rechnung gebracht werden. Nach der vorigen Methode ist dieser Werth $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) = \frac{5}{12} = 0{,}416\cdots;$ wo nur die erste Decimalstelle richtig ist; nach der zweiten Methode erhält man denselben gleich

$$\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{2+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{12}}}+\frac{1}{2+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{12}}}\right] = \frac{1}{5-\sqrt{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{5+\sqrt{\frac{1}{3}}}$$
$$= \tfrac{15}{37} = 0{,}405405\cdots;$$

also vier richtige Decimalstellen.

Anhang über einige bestimmte Integrale.

120. Durch sehr mannigfaltige Mittel, zu welchen besonders die Anwendung des Satzes in §. 102. gehört, hat man eine beträchtliche Anzahl von bestimmten Integralen, d. h. Werthe von Integralen, die zwischen bestimmten Grenzen genommen sind, gefunden, und zwar, was sehr zu bemerken ist, ohne einen allgemeinen Ausdruck dieser Integrale, für veränderliche Grenzen, zu besitzen, oder wenigstens zu Hülfe zu nehmen. Ein Beispiel dieser Art ist schon in §. 108. gegeben worden; es folgen hier noch einige.

Man sucht den Werth von $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$, der offenbar eine positive endliche Zahl sein muß, die mit A bezeichnet werde, so daß

$$A = \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot dx. \qquad 1.$$

Schreibt man yu statt x, und sieht u als veränderlich, y als beständig an, so wird ydu statt dx zu setzen sein, und da für $u=0$, $x=0$ und für $u=\infty$, $x=\infty$ wird, vorausgesetzt, daß y positiv ist, so erhält man auch

$$A = \int_0^\infty e^{-y^2u^2} y du. \qquad 2.$$

Man multiplicire beide Werthe von A mit $e^{-y^2}dy$, und integrire von $y=0$ bis $y=\infty$, so erhält man

$$\int_0^\infty e^{-y^2}dy \cdot \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^\infty e^{-y^2}dy \int_0^\infty e^{-y^2u^2} y du. \qquad 3.$$

In dieser Gleichung ist offenbar der Ausdruck links $=A^2$.

Rechts aber darf man, nach §. 102., die Ordnung der Integrationen umkehren, also zuerst nach y, sodann nach u integriren. Dadurch erhält man aus 3.

$$A^2 = \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-y^2(1+u^2)} y dy.$$

Nun ist, $y^2 = z$ gesetzt,

$$\int_0^\infty e^{-y^2(1+u^2)} y dy = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-z(1+u^2)} dz,$$

und $$\int_0^z e^{-z(1+u^2)} dz = \frac{1-e^{-z(1+u^2)}}{1+u^2},$$

folglich $$\int_0^\infty e^{-z(1+u^2)} dz = \frac{1}{1+u^2},$$

daher $$A^2 = \int_0^\infty \frac{du}{2(1+u^2)} = \tfrac{1}{4}\pi;$$

und $$A = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

121. Es sei $y = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos \alpha x \, dx$, 1.

α eine beliebige reelle Zahl, so erhält man durch Differentiation nach α,

$$\frac{dy}{d\alpha} = -\int_0^\infty e^{-x^2} \sin \alpha x \cdot x dx. \qquad 2.$$

Nun findet man aber, durch theilweise Integration:

$$\int e^{-x^2} \sin \alpha x \cdot x dx = -\tfrac{1}{2} e^{-x^2} \sin \alpha x + \tfrac{1}{2}\alpha \int e^{-x^2} \cos \alpha x \cdot dx. \qquad 3.$$

Werden die Integrale in 3. von $x=0$ bis $x=\infty$ genommen, so ist $e^{-x^2} \sin \alpha x$ an den Grenzen Null; daher erhält man, wegen 1. und 2.

$$\frac{dy}{d\alpha} + \tfrac{1}{2}\alpha y = 0; \qquad 4.$$

mithin $\frac{dy}{y} + \tfrac{1}{2}\alpha \, d\alpha = 0$, oder $\log y = \text{const.} - \tfrac{1}{4}\alpha^2$. 5.

Für $\alpha = 0$ wird, nach dem vorigen §. $y = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$, folglich $\log \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} = \text{const.}$, also, nach Wegschaffung der Logarithmen:

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{1}{4}\alpha^2} = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos \alpha x \cdot dx, \qquad 6.$$

welches der verlangte Integralwerth ist.

Es sei $A = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos x dx$, $B = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x dx$, 7.

α reell und positiv. Man erhält leicht durch theilweise Integration:

$$\left.\begin{aligned} \int e^{-\alpha x} \cos x dx &= e^{-\alpha x} \sin x + \alpha \int e^{-\alpha x} \sin x dx. \\ \int e^{-\alpha x} \sin x dx &= -e^{-\alpha x} \cos x - \alpha \int e^{-\alpha x} \cos x dx. \end{aligned}\right] \; 8.$$

Werden die Integrale zwischen den Grenzen 0 und ∞ genommen, so wird $e^{-\alpha x} \sin x = 0$ für $x = 0$, $x = \infty$, und $-e^{-\alpha x} \cos x = 0$, für $x = \infty$, und $= -1$ für $x = 0$; daher folgt aus 8.

$$A = \alpha B, \quad B + \alpha A = 1,$$

folglich $$B = \frac{1}{1+\alpha^2}, \quad A = \frac{\alpha}{1+\alpha^2};$$ also

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x dx = \frac{1}{1+\alpha^2}, \quad \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos x dx = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}. \qquad 9.$$

Nun integrire man wieder vorstehende Integrale nach α, von 0 bis α, so kann man links zuerst die Integration nach α vollziehen, und erhält, weil

$$\int_0^\alpha e^{-\alpha x} d\alpha = \frac{1-e^{-\alpha x}}{x},$$

$$\int_0^\infty \sin x dx \frac{(1-e^{-\alpha x})}{x} = \operatorname{arc} tg \, \alpha, \qquad 10.$$

$$\int_0^\infty \cos x dx \frac{(1-e^{-\alpha x})}{x} = \tfrac{1}{2} \log (1+\alpha^2). \qquad 11.$$

Setzt man in dem ersten dieser Integrale α unendlich groß, also $e^{-\alpha x} = 0$, $\operatorname{arc} tg \, \alpha = \tfrac{1}{2}\pi$, so kommt das bemerkenswerthe Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \qquad 12.$$

122. Es werde ferner der Integralwerth

$$z=\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\cdot\frac{dx}{b^2+x^2} \qquad 1.$$

gesucht, worin α wieder eine positive, von x unabhängige Größe ist. Nimmt man die Ableitung zweimal nach α, so kommt

$$\frac{dz}{d\alpha}=\int_0^\infty \cos\alpha x\cdot\frac{dx}{b^2+x^2} \qquad 2.$$

$$\frac{d^2z}{d\alpha^2}=-\int_0^\infty \sin\alpha x\cdot\frac{xdx}{b^2+x^2}. \qquad 3.$$

Man multiplicire 1. mit b^2, und ziehe 3. von dem Producte ab, so kommt:

$$b^2z-\frac{d^2z}{d\alpha^2}=\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x\cdot dx}{b^2+x^2}\left(\frac{b^2}{x}+x\right)=\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x\cdot dx}{x}.$$

Es sei $\alpha x=y$, so wird $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$, also, weil für $x=0$, $y=0$ und für $x=\infty$, $y=\infty$,

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}dx=\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}dy=\frac{\pi}{2} \quad (\S.\ 121.)$$

folglich $$b^2z-\frac{d^2z}{d\alpha^2}=\frac{\pi}{2}. \qquad 4.$$

Man setze $b^2z-\frac{\pi}{2}=b^2u$, so wird $\frac{d^2z}{d\alpha^2}=\frac{d^2u}{d\alpha^2}$, mithin aus 4.

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2}=b^2u. \qquad 5.$$

In dieser Gleichung schreibe man $\frac{\beta}{b}$ statt α, also $\frac{1}{b^2}d\beta^2$ statt $d\alpha^2$, so kommt folgende:

$$\frac{d^2u}{d\beta^2}=u, \qquad 6.$$

welcher der Ausdruck $u=Ae^\beta+Be^{-\beta}$, mit den willkürlichen Constanten A und B, Genüge leistet (vgl. §. 31., am Schlusse, oder auch §. 139.). Schreibt man wieder $b\alpha$ statt β, so kommt

$$u=Ae^{b\alpha}+Be^{-b\alpha} \qquad 7.$$

als das Integral von 5. Hieraus folgt

$$\frac{du}{d\alpha}=\frac{dz}{d\alpha}=b(Ae^{b\alpha}-Be^{-b\alpha}); \qquad 8.$$

folglich muß der Werth des Integrals 2. in vorstehender Form (8.) enthalten sein. Um die Constanten A und B zu bestimmen, bemerke man erstens, daß das Integral 2. offenbar nicht größer sein kann, als $\int_0^\infty \frac{dx}{b^2+x^2}$, d. i. $\frac{\pi}{2b}$, wie groß auch α sei. Wäre nun in 8. A nicht Null, so würde das Glied $Ae^{b\alpha}$ und mit ihm der ganze Werth von $\frac{dz}{d\alpha}$ für sehr große Werthe von α über alle Grenzen hinaus wachsen. Da dieses nicht zulässig ist, so muß $A=0$ sein. Ferner erhält man für $\alpha=0$, $\frac{dz}{d\alpha}=\frac{\pi}{2b}=-bB$, wodurch B bestimmt ist.

Es ist demnach gefunden:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\cdot dx}{b^2+x^2}=\frac{\pi}{2b}\cdot e^{-b\alpha}. \qquad 9.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $d\alpha$, und integrirt von 0 bis α, so kommt, weil

$$\int_0^\alpha \cos\alpha x\cdot d\alpha=\frac{\sin\alpha x}{x},\ \int_0^\alpha e^{-b\alpha}d\alpha=\frac{1-e^{-b\alpha}}{b} \quad \text{ist,}$$

$$z=\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x\cdot dx}{x(b^2+x^2)}=\frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-b\alpha}). \qquad 10.$$

123. Eine der merkwürdigsten transscendenten Functionen ist diejenige, welche mit Γp bezeichnet zu werden pflegt, und die in folgendem Integrale enthalten ist:

$$\Gamma p=\int_0^\infty e^{-x}\cdot x^{p-1}dx. \qquad 1.$$

Man findet zuerst durch theilweise Integration:

$$\int e^{-x}x^p dx=-e^{-x}x^p+p\int e^{-x}x^{p-1}dx.$$

Nun sei p eine reelle positive Zahl, so wird $e^{-x}x^p=0$ für $x=0$ und für $x=\infty$. Nimmt man also die beiden Integrale in vorstehender Formel von 0 bis ∞, so kommt, vorausgesetzt, daß p positiv ist,

$$\int_0^\infty e^{-x}x^p dx = p\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$$

oder, nach der angenommenen Bezeichnung,

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma p. \qquad 2.$$

Es sei α eine beliebige positive Zahl; man schreibe in 1. αx statt x, so bleiben die Grenzen der Integration ungeändert, und man erhält:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cdot(\alpha x)^{p-1}\alpha dx = \alpha^p\int_0^\infty e^{-\alpha x}x^{p-1}dx=\Gamma p,$$

oder

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}x^{p-1}dx=\frac{\Gamma p}{\alpha^p}. \qquad 3.$$

Demnach ist auch, in so fern $1+z$ positiv bleibt,

$$\int_0^\infty e^{-(1+z)x}x^{p-1}dx=\frac{\Gamma p}{(1+z)^p}. \qquad 4.$$

Diese Gleichung werde auf beiden Seiten mit $z^{q-1}dz$ multiplicirt, und sodann von $z=0$ bis $z=\infty$ integrirt, so kommt, wenn links zuerst nach z integrirt wird,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx\cdot e^{-xz}z^{q-1}dz=$$

$$\Gamma q\cdot\int_0^\infty e^{-x}\cdot x^{p-q-1}dx=\Gamma q\cdot\Gamma(p-q);$$

weil

$$\int_0^\infty e^{-xz}z^{q-1}dz=\frac{\Gamma q}{x^q}$$

ist. (q und $p-q$ müssen positiv sein, wie p.). Indem man aber auch auf der rechten Seite der Gleichung 4. mit $z^{q-1}dz$ multiplicirt, und hierauf integrirt, so kommt:

$$\Gamma p\cdot\int_0^\infty\frac{z^{q-1}dz}{(1+z)^p}=\Gamma q\cdot\Gamma(p-q).$$

In dieser Gleichung setze man $p=q+r$ und dividire auf beiden Seiten mit $\Gamma p=\Gamma(q+r)$; so kommt

$$\int_0^\infty\frac{z^{q-1}dz}{(1+z)^{q+r}}=\frac{\Gamma q\cdot\Gamma r}{\Gamma(q+r)}. \qquad 5.$$

Dieser merkwürdigen Gleichung, durch welche die von zwei Elementen q und r abhängige transscendente Function auf der linken Seite, auf eine sehr einfache Verbindung dreier Functionen Γ, deren jede nur von einem Elemente abhängt, zurückgeführt wird, giebt man häufig auch folgende, etwas veränderte Gestalt: Es sei $z=\frac{x}{1-x}$, so wird $x=0$ für $z=0$ und $x=1$ für $z=\infty$; ferner $1+z=\frac{1}{1-x}$, $dz=\frac{dx}{(1-x)^2}$. Werden diese Werthe in 5. gesetzt, und 0 und 1 als Grenzen der Integration, wie gehörig, genommen, so kommt:

$$\int_0^1(1-x)^{r-1}x^{q-1}dx=\frac{\Gamma q\cdot\Gamma r}{\Gamma(q+r)}. \qquad 6.$$

124. Es sei n eine positive ganze Zahl; man setze die Reihe

$$1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\cdots+\cos n\varphi=S. \qquad 1.$$

Die Summation dieser Reihe wird nachher gebraucht werden, um noch eine Eigenschaft der Function Γ herzuleiten.

Wird obige Reihe mit $2\cos\varphi$ multiplicirt, so kommt

$$2\cos\varphi+2\cos\varphi^2+2\cos\varphi\cos 2\varphi+\cdots$$
$$+2\cos\varphi\cos n\varphi=2S\cos\varphi. \qquad 2.$$

Nun ist $2\cos\varphi\cos\mu\varphi=\cos(\mu-1)\varphi+\cos(\mu+1)\varphi$;
mithin $2\cos\varphi^2=1+\cos 2\varphi$; $2\cos\varphi\cos 2\varphi=\cos\varphi+\cos 3\varphi$;
$2\cos\varphi\cos 3\varphi=\cos 2\varphi+\cos 4\varphi$; u. s. w.
$2\cos\varphi\cos(n-1)\varphi=\cos(n-2)\varphi+\cos n\varphi$;
$2\cos\varphi\cos n\varphi=\cos(n-1)\varphi+\cos(n+1)\varphi$.

Setzt man diese Werthe in 2., so erhält man, wie leicht zu finden ist, auf der linken Seite die Reihe S doppelt, und noch einige Glieder, so daß folgende Gleichung entsteht:

$$2S+\cos\varphi+\cos(n+1)\varphi-\cos n\varphi-1=2S\cos\varphi,$$

oder $$2S=1+\frac{\cos n\varphi-\cos(n+1)\varphi}{1-\cos\varphi}=1+\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi};$$

oder $$S=\tfrac{1}{2}+\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}. \qquad 3.$$

Multiplicirt man die Reihe 1. auf beiden Seiten mit $d\varphi$, und integrirt man $\varphi=\pi$ bis $\varphi=\varphi$, so kommt

$$\int_\pi^\varphi S d\varphi=\varphi-\pi+\sin\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}+\frac{\sin 3\varphi}{3}+\frac{\sin 4\varphi}{4}\cdots+\frac{\sin n\varphi}{n}.$$

Man setze

$$\sin\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}+\frac{\sin 3\varphi}{3}\cdots+\frac{\sin n\varphi}{n}=U, \qquad 4.$$

so wird $$\int_\pi^\varphi S d\varphi=\varphi-\pi+U. \qquad 5.$$

Der Werth von S aus 3. giebt durch Integration:

$$\int_\pi^\varphi S d\varphi=\tfrac{1}{2}(\varphi-\pi)+\int_\pi^\varphi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}d\varphi.$$

Man findet aber durch theilweise Integration, weil

$$d\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\right)=-\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi\, d\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi^2} \quad \text{ist,}$$

$$\int_\pi^\varphi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}d\varphi=$$

$$-\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi}{(2n+1)\sin\frac{1}{2}\varphi}-\int_\pi^\varphi\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi}{(2n+1)2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}d\varphi,$$

also $$\int_\pi^\varphi S d\varphi=\tfrac{1}{2}(\varphi-\pi)-\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi}{(2n+1)\sin\frac{1}{2}\varphi}$$
$$-\int_\pi^\varphi\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi}{(2n+1)2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}d\varphi. \qquad 6.$$

So lange φ sich **innerhalb** der Grenzen 0 und 2π befindet, wird $\sin\frac{1}{2}\varphi$ nicht Null, bleibt also der Quotient $\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$ eine endliche Größe.

Ferner ist $\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}$ beständig **positiv**, wenn φ zwischen 0 und π liegt.

Bezeichnet man daher mit G den größten Werth, welchen $\cos(n+\frac{1}{2})\varphi$ zwischen den Grenzen der Integration π und φ' erlangt (φ' zwischen 0 und π angenommen), und mit K den kleinsten, so ist für alle Werthe von φ zwischen π und φ'

$$G\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}>\cos(n+\tfrac{1}{2})\varphi\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}$$

und $$K\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}<\cos(n+\tfrac{1}{2})\varphi\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi^2};$$

folglich liegt der Werth des Integrals

$$\int_\pi^{\varphi'}\cos(n+\tfrac{1}{2})\varphi\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}d\varphi$$

zwischen $$G\int_\pi^{\varphi'}\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi\, d\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}=-2G\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\varphi'}-1\right)$$

und $$K\int_\pi^{\varphi'}\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi\, d\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}=-2K\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\varphi'}-1\right).$$

Wird daher mit $\cos\psi$ ein Mittelwerth, den $\cos(n+\frac{1}{2})\varphi$ zwischen π und φ' erhält, bezeichnet, so ist

$$\int_\pi^{\varphi'}\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi}{2n+1}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}\cdot d\varphi=\frac{-2\cos\psi}{2n+1}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\varphi'}-1\right);$$

mithin nähert sich dieses Integral, wenn φ' zwischen 0 und π liegt, mit wachsendem n der Null. Offenbar nähert sich auch der Quotient $\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi'}{(2n+1)\sin\frac{1}{2}\varphi'}$ mit wachsendem n der Null, und folglich erhält man, für $n=\infty$, aus 6., wenn statt der Grenze φ' wieder, wie vorhin, bloß φ geschrieben wird:

$$\int_\pi^\varphi S d\varphi=\tfrac{1}{2}(\varphi-\pi). \qquad 7.$$

Dieselbe Formel gilt auch, wenn φ zwischen π und 2π liegt, was auf ganz ähnliche Weise bewiesen wird. Durch Vergleichung der Formeln 5. und 7. ergiebt sich weiter:

$$\varphi-\pi+U=\tfrac{1}{2}(\varphi-\pi),\ \text{oder}\ U=\frac{\pi-\varphi}{2},$$

d. i.

$$\sin\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}+\frac{\sin 3\varphi}{3}+\cdots+\frac{\sin n\varphi}{n}+\cdots\text{in inf.}=\frac{\pi-\varphi}{2}, \qquad 8.$$

in welcher Formel φ zwischen 0 und 2π liegen muß. Nähme man auf der linken Seite φ zwischen anderen Grenzen, z. B. 2π und 4π, so erhielte man offenbar nur den nämlichen Werth, welcher sich nach Weglassung von 2π ergeben haben würde; so daß, wenn man φ auf der linken Seite über 2π hinaus beliebig wachsen läßt, zwischen zwei auf einander folgenden Vielfachen von 2π beständig die nämlichen Werthe der Reihe, wie zwischen 0 und 2π, wiederkehren. An den Grenzen 0 und 2π ist aber die Summe $\frac{\pi-\varphi}{2}$ nicht richtig; denn die Reihe ist für beide Werthe 0, während der obige Ausdruck ihrer Summe für $\varphi=0$, $\frac{\pi}{2}$, und für $\varphi=2\pi$, $-\frac{\pi}{2}$ giebt, welche Werthe unrichtig sind. Dagegen erhält man z. B. für $\varphi=\pi$ auf beiden Seiten Null, wie erforderlich ist. Daß übrigens die Reihe für alle zwischen 0 und 2π liegenden Werthe von φ auch convergirt, ließe sich zwar auch noch nachträglich beweisen, indessen würde der Beweis auf eine bloße Wiederholung der Herleitung hinauskommen, in welcher die Convergenz schon begründet ist. Nämlich der Ausdruck 6. stellt die Summe $U+\varphi-\pi$ (vgl. 4. 5.) für jeden beliebigen Werth von n genau dar; derselbe nähert sich aber, wie bewiesen, mit wachsendem n dem Werthe $\frac{\varphi-\pi}{2}$. Addirt man also eine hinreichend große Anzahl von Gliedern der Reihe $\sin\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}+\frac{\sin 3\psi}{3}+\cdots$, so kommt die Summe U dem Werthe $\frac{\pi-\varphi}{2}$ immer näher, d. h. die Reihe convergirt gegen ihren angegebenen Gesammtwerth $\frac{\pi-\varphi}{2}$, w. z. b. w.

125. Da bekanntlich

$$2\cos a\varphi\sin n\varphi=\sin(n+a)\varphi+\sin(n-a)\varphi,$$

so ist $2\int_0^{\varphi}\cos a\varphi\sin n\varphi d\varphi=\frac{1-\cos(n+a)\varphi}{n+a}+\frac{1-\cos(n-a)\varphi}{n-a}$,

also wenn von 0 bis 2π integrirt wird, da, wenn n eine ganze Zahl, $\cos(n\pm a)2\pi=\cos 2a\pi$ ist,

$$2\int_0^{2\pi}\cos a\varphi\sin n\varphi d\varphi=\frac{2n}{n^2-a^2}(1-\cos 2a\pi);$$

oder:

$$\frac{1}{1-\cos 2a\pi}\int_0^{2\pi}\cos a\varphi\cdot\frac{\sin n\varphi}{n}\cdot d\varphi=\frac{1}{n^2-a^2}. \qquad 1.$$

Giebt man in dieser Gleichung der Zahl n die Werthe 1, 2, 3, u. s. f. bis n, und addirt die dadurch entstandenen Gleichungen, so kommt: $\frac{1}{1-\cos 2a\pi}\int_0^{2\pi}\cos a\varphi\cdot U\cdot d\varphi=$

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{2^2-a^2}+\frac{1}{3^2-a^2}+\cdots+\frac{1}{n^2-a^2},$$

wo U das nämliche bedeutet, wie in der Formel 4. des vorigen §. Wird nun $n=\infty$ gesetzt, so wird für alle zwischen 0 und 2π, also zwischen den Grenzen des vorstehenden Integrals befindlichen Werthe, $U=\frac{\pi-\varphi}{2}$. Dieses gilt zwar nicht für die Grenzen 0 und 2π selbst; allein es ist leicht einzusehen, daß der Fehler, welcher begangen wird, wenn man $\frac{\pi-\varphi}{2}$ für U setzt, kleiner als jede gegebene Größe, d. h. gar kein Fehler ist. Sind nämlich v und w zwei beliebig kleine positive Größen, so ist $\int_0^{2\pi}\cos a\varphi\cdot U d\varphi=$

$$\int_0^{v}\cos a\varphi\cdot U d\varphi+\int_v^{2\pi-w}\cos a\varphi\cdot\frac{\pi-\varphi}{2}d\varphi+\int_{2\pi-w}^{2\pi}\cos a\varphi\cdot U\cdot d\varphi$$

offenbar nur unendlich wenig von

$$\int_0^{2\pi} \cos a\varphi \cdot \frac{\pi-\varphi}{2} d\varphi =$$

$$\int_0^{v} \cos a\varphi \cdot \frac{\pi-\varphi}{2} d\varphi + \int_v^{2\pi-w} \cos a\varphi \cdot \frac{\pi-\varphi}{2} d\varphi + \int_{2\pi-w}^{2\pi} \cos a\varphi \cdot \frac{\pi-\varphi}{2} d\varphi$$

verschieden; mithin darf gesetzt werden:

$$\int_0^{2\pi} \cos a\varphi \cdot U d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos a\varphi \cdot \frac{\pi-\varphi}{2} \cdot d\varphi.$$

Demnach ist

$$\frac{1}{1-\cos 2a\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos a\varphi \cdot \frac{\pi-\varphi}{2} d\varphi = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2-a^2}. \qquad 2.$$

Nun findet man aber durch theilweise Integration:

$$\int_0^{\varphi} \cos a\varphi \cdot (\pi-\varphi) d\varphi = \frac{1-\cos a\varphi}{a^2} + \frac{(\pi-\varphi)\sin a\varphi}{a},$$

mithin

$$\int_0^{2\pi} \cos a\varphi \cdot \frac{\pi-\varphi}{2} \cdot d\varphi = \frac{1-\cos 2a\pi}{2a^2} - \frac{\pi \sin 2a\pi}{2a}; \qquad 3.$$

folglich, wegen 2.,

$$\frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{\sin 2a\pi}{1-\cos 2a\pi} = \Sigma \frac{1}{n^2-a^2};$$

oder

$$\frac{\pi \sin 2a\pi}{1-\cos 2a\pi} = \frac{1}{a} + \Sigma \frac{-2a}{n^2-a^2}. \qquad 4.$$

Wird diese Formel auf beiden Seiten mit da multiplicirt, und in Bezug auf a integrirt, so kommt, wenn c eine Constante ist:

$$\tfrac{1}{2} \log c(1-\cos 2a\pi) = \log a + \Sigma \log(n^2-a^2),$$

oder, weil $1-\cos 2a\pi = 2\sin a\pi^2$ ist, wenn noch auf beiden Seiten $\log a$ subtrahirt und c statt 2c gesetzt wird:

$$\log \frac{c \cdot \sin a\pi}{a} = \Sigma \log(n^2-a^2),$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\log \frac{c \cdot \sin a\pi}{a} = \Sigma \log\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right),$$

durch welche Aenderung wieder nur die Constante c eine andere Bedeutung erhält, indem nur die Summe $\Sigma \log n^2$ rechts subtrahirt worden ist. Setzt man nun $a=0$, so wird $\frac{\sin a\pi}{a} = \pi$, und man erhält rechts $\Sigma \log 1 = 0$, also

$$\log c\pi = 0,$$

mithin $c\pi = 1$, oder $c = \frac{1}{\pi}$. Folglich ist

$$\log \frac{\sin a\pi}{a\pi} = \Sigma \log\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right),$$

und mithin, wenn man die Logarithmen wegläßt:

$$\sin a\pi = a\pi\left(1-\frac{a^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)\cdots \text{in inf.} \quad 5.$$

Man schreibe in dieser Gleichung 2a statt a, und $2\sin a\pi \cos a\pi$ für $\sin 2a\pi$, so kommt:

$$2\sin a\pi \cos a\pi = 2a\pi(1-2^2a^2)(1-a^2)\left(1-\frac{2^2a^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{2^2}\right)$$
$$\cdots\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{2^2a^2}{(2n+1)^2}\right)\cdots$$

mithin, wenn mit dem Werthe von $2\sin a\pi$ aus 5. in vorstehende Gleichung dividirt wird:

$$\cos a\pi =$$

$$(1-4a^2)\left(1-\frac{4a^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{4a^2}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{4a^2}{(2n+1)^2}\right)\cdots \text{in inf.} \quad 6.$$

126. Die obigen Gleichungen 5. und 6. stellen $\sin a\pi$ und $\cos a\pi$ als Producte aus unendlich vielen, der Einheit immer näher kommenden, Factoren dar. Schreibt man x statt $a\pi$, also $\frac{x}{\pi}$ statt a, so erhalten sie folgende Gestalt:

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots \text{in inf.} \qquad 7.$$

$$\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots \text{in inf.} \qquad 8.$$

Wird in 5. $a=\frac{1}{2}$ gesetzt, so wird $\sin a\pi=1$, und mithin

$$1=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{2^2.2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2.4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2.4}\right)\cdots$$

oder $$1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{35}{36}\cdots\cdot\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n\cdot 2n}\cdots,$$

woraus man folgenden sehr merkwürdigen Ausdruck erhält:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdots\quad 2n\cdot2n\quad\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdots(2n-1)(2n+1)\cdots}\ \text{in inf.}$$

Entwickelt man die Werthe von $\sin x$ und $\cos x$ aus 7. und 8. in Reihen nach Potenzen von x, bleibt aber, um nur die einfachsten Resultate zu erhalten, bei den ersten Gliedern stehen, so kommt offenbar

$$\sin x = x-\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots \text{in inf.}\right]\frac{x^3}{\pi^2}+\cdots$$

$$\cos x = 1-\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}\cdots \text{in inf.}\right]\frac{4x^2}{\pi^2}+\cdots$$

Diese Reihen müssen mit den bekannten Reihen

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\cdots,\quad \cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\cdots$$

übereinstimmen; mithin erhält man, durch Vergleichung der Coefficienten:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots \text{in inf.}=\frac{1}{6}\pi^2. \quad \text{a.}$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots \text{in inf.}=\frac{1}{8}\pi^2. \quad \text{b.}$$

Von diesen beiden, ebenfalls sehr merkwürdigen, Summenformeln, ist jede in der andern enthalten. Multiplicirt man nämlich die Reihe b. mit der geometrischen Progession

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots\frac{1}{2^{2n}}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3},$$

so ist leicht einzusehen, daß das Product nichts weiter als die Reihe a., d. i. die Summe der umgekehrten Quadrate der natürlichen Zahlen sein kann, da b die Summe der umgekehrten Quadrate der ungeraden Zahlen war; mithin erhält man die erstgenannte Summe (a) gleich $\frac{1}{8}\pi^2\cdot\frac{4}{3}=\frac{1}{6}\pi^2$, wie oben.

127. Schreibt man in den Formeln 5. und 6. (§. 125.) $\frac{a}{2}$ statt a, so ergiebt sich, durch Division, folgende Gleichung:

$$tg\frac{a\pi}{2}=\frac{\frac{a\pi}{2}\left(1-\frac{a^2}{4}\right)\left(1-\frac{a^2}{16}\right)\left(1-\frac{a^2}{36}\right)\left(1-\frac{a^2}{64}\right)\cdots}{(1-a^2)\left(1-\frac{a^2}{9}\right)\left(1-\frac{a^2}{25}\right)\left(1-\frac{a^2}{49}\right)\cdots}$$

oder, wenn man auf beiden Seiten die Logarithmen nimmt, und die Glieder rechts in Factoren des ersten Grades zerlegt:

$$\log tg\frac{a\pi}{2}=\log\frac{a\pi}{2}-\log(1-a)-\log(1+a)+\log\left(1-\frac{a}{2}\right)$$
$$+\log\left(1+\frac{a}{2}\right)-\log\left(1-\frac{a}{3}\right)-\log\left(1+\frac{a}{3}\right)+\log\left(1-\frac{a}{4}\right)$$
$$+\log\left(1+\frac{a}{4}\right)\cdots \text{in inf.}$$

Nun ist

$$d\log tg\frac{a\pi}{2}=\frac{d\,tg\frac{a\pi}{2}}{tg\frac{a\pi}{2}}=\frac{\pi da}{2\sin\frac{a\pi}{2}\cdot\cos\frac{a\pi}{2}}=\frac{\pi da}{\sin a\pi},$$

folglich erhält man aus der vorstehenden Gleichung, durch Differentiation nach a:

$$\frac{\pi}{\sin a\pi}=\frac{1}{a}+\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1+a}-\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2+a}$$
$$+\frac{1}{3-a}-\frac{1}{3+a}\cdots \text{in inf.} \qquad 1.$$

Um das Integral

$$\int_0^\infty\frac{x^{a-1}dx}{1+x},$$

worin a ein positiver ächter Bruch ist, in eine Reihe zu entwickeln, theile man dasselbe in zwei Integrale, die von 0 bis 1, und von 1 bis ∞ zu nehmen sind. Wird der Quotient $\frac{x^{a-1}}{1+x}$, nach steigenden Potenzen von x entwickelt, so kommt

$$\frac{x^{a-1}}{1+x}=x^{a-1}-x^{a}+x^{a+1}-x^{a+2}+x^{a+3}-\ldots$$

mithin, da für ein positives a, $\int_0^1 x^{a-1}dx=\frac{1}{a}$ ist,

$$\int_0^1\frac{x^{a-1}dx}{1+x}=\frac{1}{a}-\frac{1}{1+a}+\frac{1}{2+a}-\frac{1}{3+a}+\frac{1}{4+a}\ldots \text{ in inf.} \qquad 2.$$

Ferner erhält man, durch Entwickelung nach fallenden Potenzen von x,

$$\frac{x^{a-1}}{1+x}=\frac{x^{a-2}}{1+\frac{1}{x}}=x^{a-2}-x^{a-3}+x^{a-4}-x^{a-5}+\ldots$$

folglich durch Integration, da, sobald a—1 negativ ist,

$$\int_1^\infty x^{a-2}dx=\frac{1}{1-a}, \text{ u. s. f.}$$

$$\int_1^\infty\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\frac{1}{1-a}-\frac{1}{2-a}+\frac{1}{3-a}-\frac{1}{4-a}+\ldots \text{ in inf.} \qquad 3.$$

Die Addition von 2. und 3. giebt:

$$\int_0^\infty\frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1+a}-\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2+a}\ldots \text{ in inf,}$$

d. i., wegen 1.

$$\int_0^\infty\frac{x^{a-1}dx}{1+x}=\frac{\pi}{\sin a\pi}. \qquad 4.$$

In der Formel 5. des §. 123. setze man $q+r=1$, und schreibe a statt q, x statt z, also 1—a statt r; so kommt, da $\Gamma(1)=1$ ist,

$$\int_0^\infty\frac{x^{a-1}dx}{1+x}=\Gamma a\cdot\Gamma(1-a). \qquad 5.$$

Diese Formel, verglichen mit der vorstehenden, giebt einen merkwürdigen, die Function Γ betreffenden Satz, der in folgender

Gleichung enthalten ist:

$$\Gamma a\cdot\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}. \qquad 6.$$

Hieraus folgt z. B. für $a=\frac{1}{2}$, indem $\sin\frac{\pi}{2}=1$,

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2})=\pi.$$

Es ist aber $\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx.$

Man setze $x^{\frac{1}{2}}=y$, also $x=y^2$ und $x^{-\frac{1}{2}}dx=2dy$, so kommt:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=2\int_0^\infty e^{-y^2}dy,$$

also

$$\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

wie schon in §. 120., auf einem ganz anderen Wege, gefunden worden ist.

Ueber die Integration der Differentiale von Functionen mehrerer veränderlicher Grössen.

128. Im Vorhergehenden ist hinreichend bewiesen worden, daß jede Function einer veränderlichen Größe ein Integral oder eine Stammgröße hat, von welcher sie die Ableitung ist. Hat man dagegen eine Function zweier und zwar von einander unabhängiger Veränderlicher $f(x,y)$, so ist ihr Differential bekanntlich:

$$df = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy,$$

oder wenn man $\frac{dy}{dx}$ zur Abkürzung mit y' bezeichnet, $df = \left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\cdot y'\right)dx$. Bezeichnet man die partiellen Ableitungen von f, nämlich $\frac{df}{dx}$ mit p, $\frac{df}{dy}$ mit q, so sind p und q zwei Functionen von x und y, zwischen welchen ein solcher Zusammenhang Statt findet, daß

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} \quad \text{ist, weil} \quad \frac{d^2f}{dx\,dy} = \frac{d^2f}{dy\,dx}.$$

Hieraus folgt, daß $Mdx + Ndy$ nicht das Differential einer Function von x und y sein kann, wenn nicht $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ ist. Wenn aber diese Bedingung erfüllt wird, so ist auch $Mdx + Ndy$ allemal integrabel, ohne irgend eine Relation zwischen x und y voraus zu setzen. Nämlich man integrire Mdx nach x, indem man y als beständig ansieht, und setze $v = \int Mdx + Y$, wo Y eine beliebige Function von y, ohne x, bezeichnet. Hieraus ergiebt sich durch Differentiation:

$$dv = Mdx + \left(\int \frac{dM}{dy}dx + \frac{dY}{dy}\right)dy.$$

Nun kann man Y so bestimmen, daß

$$\int \frac{dM}{dy}\cdot dx + \frac{dY}{dy} = N,$$

oder

$$\frac{dY}{dy} = N - \int \frac{dM}{dy}dx$$

wird. Nimmt man nämlich von vorstehendem Ausdrucke rechterhand die Ableitung nach x, so findet man $\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}$, welche Differenz, nach der Voraussetzung, Null ist. Also ist $N - \int \frac{dM}{dy}dx$ eine bloße Function von y, ohne x, und mithin ist

$$Y = \int \left(N - \int \frac{dM}{dy}dx\right)dy$$

eine Function von y, wie verlangt wurde. Daher hat man

$$v = \int Mdx + \int \left(N - \int \frac{dM}{dy}dx\right)dy,$$

und wenn man differentiirt, so findet man $dv = Mdx + Ndy$; also stellt die Function v das verlangte Integral von $Mdx + Ndy$ dar.

Beispiel. Es sei das Differential $ydx - xdy$ vorgelegt, so ist $M = y$, $N = -x$, mithin $\frac{dM}{dy} = 1$, $\frac{dN}{dx} = -1$; also die Bedingung der Integrabilität nicht erfüllt, oder $ydx - xdy$ ist nicht das Differential irgend einer Function von x und y.

Ist dagegen $\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$ vorgelegt; so ist $M = \frac{y}{x^2}$, $N = -\frac{1}{x}$; folglich $\frac{dM}{dy} = \frac{1}{x^2}$, $\frac{dN}{dx} = \frac{1}{x^2}$; also die Bedingung der Integrabilität erfüllt.

Man erhält demnach, da $\int \frac{ydx}{x^2} = -\frac{y}{x}$, in so fern y

als beständig angesehen wird,

$$v = -\frac{y}{x} + Y.$$

Um Y zu bestimmen, hat man

$$\frac{dY}{dy} = -\frac{1}{x} - \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0;$$

also ist Y eine beständige Größe, und $v = -\frac{y}{x} + \text{Const.}$ das verlangte Integral $\int \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$.

129. Soll $Mdx + Ndy + Pdz$ ein vollständiges Differential einer Function dreier unabhängiger Veränderlichen x, y, z sein, so wird erfordert, daß, wenn z. B. z als beständig, also $dz = 0$ gesetzt wird, auch

$$Mdx + Ndy$$

ein vollständiges Differential einer Function von x und y, also daß

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

sei. Eben so muß auch

$$\frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}$$

sein. Sind diese drei Bedingungen erfüllt, so ist der vorgelegte Ausdruck integrabel. Denn man setze das Integral von $Mdx + Ndy$, in welchem Ausdrucke z als eine beständige Größe angesehen wird, gleich u, und es sei

$$v = u + Z,$$

wo Z eine Function von z, ohne x und y, bezeichnet. Alsdann ist $du = Mdx + Ndy + \frac{du}{dz}dz$, und $dv = du + \frac{dZ}{dz}dz$; und man kann Z so bestimmen, daß

$$\frac{dZ}{dz} = P - \frac{du}{dz}$$

wird. Nimmt man nämlich von $P - \frac{du}{dz}$ die partiellen Ableitungen nach x und nach y, so sind dieselben

$$\frac{dP}{dx} - \frac{d^2u}{dx\,dz} \quad \text{und} \quad \frac{dP}{dy} - \frac{d^2u}{dy\,dz}.$$

Nun ist aber $\frac{du}{dx} = M$, und $\frac{du}{dy} = N$; also gehen die vorstehenden Ableitungen von $P - \frac{du}{dz}$ über in:

$$\frac{dP}{dx} - \frac{dM}{dz} \quad \text{und} \quad \frac{dP}{dy} - \frac{dN}{dz},$$

welche Differenzen Null sind. Daher ist $P - \frac{du}{dz}$ eine bloße Function von z, wie verlangt wurde; und man erhält

$$v = u + \int \left(P - \frac{du}{dz}\right) dz$$

als diejenige Function, deren Differential $Mdx + Ndy + Pdz$ ist.

Anmerkung. Eine Aufgabe ähnlicher Art, wie die in den vorstehenden §., findet man in §. 149., nach einer anderen Methode, gelöst.

Differentialgleichungen.

130. Die einfachste Art von Differentialgleichungen zwischen zwei veränderlichen Größen wird durch die Formel

$$Mdx + Ndy = 0$$

angezeigt, in welcher M und N zwei gegebene Functionen von x und y sind. Diese Gleichung ist von der ersten Ordnung, und vom ersten Grade (§. 31.). Wenn der Ausdruck $Mdx + Ndy$ der Bedingung der Integrabilität Genüge leistet, also wenn $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ ist (§. 128.), so sei $v = \int(Mdx + Ndy)$; alsdann ist die vorstehende Differential-Gleichung offenbar einerlei mit $dv = 0$, und giebt als Integral $v = \text{Const.}$

Wenn aber der Ausdruck $Mdx + Ndy$ nicht, ohne eine Relation zwischen x und y anzunehmen, integrabel ist, so kann man sich doch leicht überzeugen, daß die vorgelegte Gleichung ein Integral hat, oder daß sich immer eine Gleichung zwischen x und y finden läßt, welche der vorgelegten Differentialgleichung Genüge leistet. Diese Differentialgleichung bestimmt nämlich die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ als Function von x und y; hieraus aber lassen sich auch die höheren Ableitungen von y nach x sofort finden; und man kann mithin, wenn man dem x einen beliebigen Werth beilegt, und zugleich einen willkürlichen Werth von y annimmt, der diesem Werthe von x entsprechen soll, den Werth von y, welcher irgend einem x entsprechen soll, wenigstens durch eine Reihe, mit Hülfe des Taylorschen Satzes, darstellen. Diese Darstellung würde zwar in den meisten Fällen unbefriedigend sein, aber sie lehrt wenigstens, daß die Frage nach der Integration der vorgelegten Gleichung zulässig ist. Dasselbe kann man auch durch geometrische Betrachtungen finden, indem die Aufgabe, die Gleichung $Mdx + Ndy = 0$ zu integriren, darauf hinauskommt, eine Curve zu zeichnen, von welcher nur die Richtung der Tangente in jedem den Coordinaten x, y entsprechenden Puncte gegeben ist. Man nehme also einen Punct, dessen Coordinaten x und y sind, an, durch welchen die Curve gehen soll; lasse hierauf die Abscisse x um k wachsen, wodurch y in y' übergeht, so wird sich der Werth von y' wenn k klein genug ist, aus der Reihe

$$y' = y + \frac{dy}{dx} \cdot k + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{k^2}{2} + \cdots$$

berechnen, und auf diese Weise ein zweiter Punct der Curve erhalten lassen. Geht man sodann wieder von diesem zweiten Puncte aus, so wird man einen dritten, und auf die nämliche Art beliebig viele Puncte der Curve finden. Die ganze Curve ist also völlig bestimmt, und die Aufgabe allemal lösbar. Man nannte früher das, was von der Auflösung dieser Aufgabe bekannt war, die methodus tangentium inversa, welche Benennung aber gegenwärtig veraltet ist.

131. Wenn nun die vorgelegte Aufgabe immer lösbar ist, so giebt es eine der obigen Differentialgleichung Genüge leistende Gleichung zwischen x und y, welche noch eine unbestimmte Constante c enthält. Zu mehrerer Deutlichkeit denke man sich diese Gleichung nach c aufgelöst, also auf die Form

$$v = f(x,y) = c$$

gebracht.

Diese Gleichung giebt, differentiirt, $\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0$, und mithin muß, da $Mdx + Ndy = 0$, $\frac{df}{dx} : M = \frac{df}{dy} : N$ sein. Man bezeichne den Quotienten $\frac{df}{dx} : M$ mit w, so muß

$$\frac{df}{dx} = Mw, \quad \frac{df}{dy} = Nw$$

sein, so daß die durch Differentiation von $f(x,y) = c$ entstehende Gleichung folgende ist:

$$wMdx + wNdy = 0.$$

Wenn also der Ausdruck $Mdx + Ndy = 0$ die Bedingung der Integrabilität nicht erfüllt, so giebt es immer eine Function w von x und y, mit welcher multiplicirt, der Ausdruck ein vollständiges Differential wird. Die Kenntniß dieses Factors (den man den integrirenden Factor nennt) würde sofort zur Integration der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ führen.

Es muß aber der integrirende Factor w folgender Bedingung Genüge leisten:

$$\frac{d(wM)}{dy} = \frac{d(wN)}{dx},$$

oder, wenn man die partiellen Ableitungen entwickelt:

$$w\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)+M\frac{dw}{dy}-N\frac{dw}{dx}=0.$$

Die Aufgabe, die Function w aus vorstehender Gleichung zwischen ihr und ihren partiellen Ableitungen nach x und y zu finden, ist im Allgemeinen eben so schwierig, als die Integration der vorgelegten Differentialgleichung. Man kann sich indessen obiger Gleichung doch in einigen Fällen mit Nutzen bedienen. Wenn z. B. der Quotient

$$\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)\frac{1}{N}$$

kein y enthält, also eine bloße Function von x ist, welche mit X bezeichnet werden mag, so kann man der vorstehenden Gleichung für w genügen, indem man w als eine bloße Function von x, ohne y, betrachtet. Man setze $\frac{dw}{dy}=0$, so kommt

$$\frac{dw}{dx}=Xw;$$

mithin $\frac{dw}{w\,dx}=Xdx$, also $\log w=\int Xdx$, und $w=e^{\int Xdx}$. Multiplicirt man demnach die Gleichung $Mdx+Ndy=0$, wofern dieselbe so beschaffen ist, daß $\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)\frac{1}{N}=X$ eine bloße Function von x ist, mit $e^{\int Xdx}$, so ist die Gleichung

$$e^{\int Xdx}(Mdx+Ndy)=0$$

integrabel. Man setze zur Abkürzung $e^{\int Xdx}M=\mu$, $e^{\int Xdx}N=\nu$, so ist das Integral der vorgelegten Gleichung nach §. 128. in folgender Gleichung enthalten:

$$\int\mu dx+\int\left(\nu-\int\frac{d\mu}{dy}dx\right)dy=\text{Const.},$$

oder weil $\frac{d\mu}{dy}=e^{\int Xdx}\frac{dM}{dy}$, in folgender:

$$\int e^{\int Xdx}Mdx+\int\left(e^{\int Xdx}N-\int e^{\int Xdx}\frac{dM}{dy}dx\right)dy=\text{Const.}$$

Es sei $M=\varphi x\cdot\psi y+fx$, $N=Fx\cdot\psi'y$, so ist $\frac{dM}{dy}=\varphi x\cdot\psi'y$, $\frac{dN}{dx}=F'x\cdot\psi'y$, also

$$\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)\frac{1}{N}=\frac{\varphi x-F'x}{Fx}=X;$$

mithin wird die Gleichung

$$(\varphi x\,\psi y+fx)dx+Fx\,\psi'y\,dy=0$$

durch Multiplication mit $e^{\int Xdx}$ integrirt. Setzt man $\psi y=z$, dividirt durch Fx und schreibt φx, fx statt $\frac{\varphi x}{Fx}$, $\frac{fx}{Fx}$; so kommt:

$$(\varphi x\cdot z+fx)dx+dz=0. \qquad \text{a.}$$

Wird diese Gleichung mit $e^{\int Xdx}$ multiplicirt, wo $X=\varphi x$; so erhält man:

$$e^{\int Xdx}Xz\,dx+e^{\int Xdx}dz=-e^{\int Xdx}fx\,dx.$$

Man sieht leicht, daß die Glieder auf der linken Seite ein vollständiges Differential bilden, so daß sich

$$d(e^{\int Xdx}z)=-e^{\int Xdx}fx\,dx$$

ergiebt. Demnach ist

$$e^{\int Xdx}\cdot z=\text{Const.}-\int e^{\int Xdx}fx\,dx,$$

oder

$$z=(C-\int e^{\int Xdx}fx\,dx)e^{-\int Xdx} \qquad \text{b.}$$

das Integral der vorgelegten Gleichung a.

Wird dem Integrale $\int Xdx$ eine willkürliche Constante beigefügt, so muß diese sich mit C zu einer einzigen Constante vereinigen, da der Werth von z nur eine solche enthalten kann. Eine leichte Rechnung zeigt, daß dieses wirklich geschieht.

Kann zum integrirenden Factor eine bloße Function von y, ohne x, genommen werden, so findet ein dem vorstehenden entsprechendes Verfahren Statt, wie sich von selbst versteht.

132. Um die Differentialgleichung

$$Mdx+Ndy=0$$

zu integriren, sucht man die Veränderlichen, wenn es möglich ist, von einander zu trennen, oder die Gleichung auf die Form

$$Xdx + Ydy = 0$$

zu bringen, in welcher X eine bloße Function von x und Y eine bloße Function von y ist, und deren Glieder sich mithin, jedes besonders, integriren zu lassen. Ist z. B. die Gleichung

$$fx \cdot Ydx + \varphi y \cdot Xdy = 0$$

vorgelegt, in welcher fx und X kein y, so wie φy und Y kein x enthalten, so braucht man nur mit XY zu dividiren, wodurch man

$$\frac{fx\,dx}{X} + \frac{\varphi y\,dy}{Y} = 0$$

erhält, in welcher die Veränderlichen getrennt sind.

Die Trennung der Veränderlichen gelingt immer, wenn M N zwei homogene Functionen von gleichem Grade sind. Man nennt eine Function $f(x,y)$ homogen, wenn sie die Eigenschaft hat, sobald x, y, in tx, ty übergehen, in $t^m f(x,y)$ überzugehen, so daß die Gleichung

$$f(tx,ty) = t^m f(x,y) \qquad a.$$

die Definition homogener Functionen von x und y ausspricht. Z. B. die Function $xy+\sqrt{x^4+y^4}$ geht, wenn tx,ty statt x,y gesetzt werden, in $t^2(xy+\sqrt{x^4+y^4})$ über, ist also homogen. Der Exponent m von t ist der Grad der homogenen Functionen. Die homogene Function vom $m$ten Grade $f(x,y)$ hat die Eigenschaft, daß

$$\frac{df(x,y)}{dx}\cdot x + \frac{df(x,y)}{dy}\cdot y = mf(x,y). \qquad b.$$

ist. Nimmt man nämlich von der obigen Gleichung a., die Ableitung nach t, so kommt

$$\frac{df(tx,ty)}{d(tx)}x + \frac{df(tx,ty)}{d(ty)}y = mt^{m-1}f(x,y)$$

und setzt man $t=1$, so erhält man

$$\frac{df(x,y)}{dx}\cdot x + \frac{df(x,y)}{dy}\cdot y = mf(x,y),$$ w. z. b. w.

Setzt man in der Gleichung a. $x=1$, so kommt

$$f(t, ty) = t^m f(1, y);$$

oder wenn in dieser x statt t, und t statt y gesetzt wird,

$$f(x, tx) = x^m f(1, t). \qquad c.$$

Nun seien $M=f(x,y)$, $N=\varphi(x,y)$ zwei homogene Functionen vom $m$ten Grade, so geht (wegen c.) die Differentialgleichung $Mdx+Ndy=0$, wenn tx statt y gesetzt wird, nach Weglassung des gemeinsamen Factors x^m, über in

$$f(1,t)\cdot dx + \varphi(1,t)\cdot d(t,x) = 0,$$

d. i., wenn man zur Abkürzung ft und φt statt $f(1,t)$, $\varphi(1,t)$, zugleich auch $tdx+xdt$ statt $d(tx)$ schreibt:

$$(ft + t\varphi t)dx + \varphi t \cdot xdt = 0,$$

oder

$$\frac{dx}{x} + \frac{\varphi t\cdot dt}{ft + t\varphi t} = 0,$$

in welcher die Veränderlichen getrennt sind.

Man kann auch leicht beweisen, daß, wenn M und N zwei homogene Functionen von gleichem Grade (m) sind, der Ausdruck

$$\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}$$

ein vollständiges Differential, mithin $\frac{1}{Mx+Ny}$ ein integrirender Foctor der Gleichung $Mdx+Ndy=0$ ist.

Nimmt man nämlich die Ableitung von $\frac{M}{Mx+Ny}$ nach y, und von $\frac{N}{Mx+Ny}$ nach x, so kommt, mit Weglassung des Nenners $(Mx+Ny)^2$,

$$(Mx+Ny)\frac{dM}{dy} - M\left(N + \frac{dM}{dy}x + \frac{dN}{dy}y\right)$$

und $(Mx+Ny)\frac{dN}{dx}-N\left(M+\frac{dM}{dx}x+\frac{dN}{dx}y\right)$

oder $\left(N\frac{dM}{dy}-M\frac{dN}{dy}\right)y\text{-}MN$ und $\left(M\frac{dN}{dx}-N\frac{dM}{dx}\right)x\text{-}NM$. d.

Nun ist aber

$$\frac{dM}{dx}x+\frac{dM}{dy}y=mM,\ \frac{dN}{dx}x+\frac{dN}{dy}y=mN \text{ (nach b.)};$$

folglich

$$\left(N\frac{dM}{dy}-M\frac{dN}{dy}\right)y=N\left(mM-\frac{dM}{dx}x\right)-M\left(mN-\frac{dN}{dx}x\right)$$
$$=\left(M\frac{dN}{dx}-N\frac{dM}{dx}\right)x;$$

also sind die beiden Ausdrücke d. einander gleich, w. z. b. w.

133. Wenn eine Gleichung zwischen x, y und der Ableitung $\frac{dy}{dx}$, in Hinsicht auf diese letztere von höherem als dem ersten Grade ist, so müßte man sie, um sie auf den ersten Grad zurückzuführen, in eine gewisse Anzahl von Factoren von der Form $\frac{dy}{dx}-f(x,y)$ auflösen. Setzt man einen dieser Factoren $\frac{dy}{dx}-f(x,y)=0$, und kann man das Integral dieser Gleichung finden, so befriedigt dasselbe auch die vorgelegte Differentialgleichung. Es sei z. B. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+a\frac{dy}{dx}+b=0$, a und b Constanten, so erhält man zwei Werthe für $\frac{dy}{dx}$, nämlich entweder $\frac{dy}{dx}=A$ oder $\frac{dy}{dx}=B$, mithin $y-Ax=C$, oder $y-Bx=C'$. Man sieht, daß, geometrisch gedeutet, die vorgelegte Differentialgleichung zwei gerade Linien zugleich darstellt, welche gegen die Abscissenaxe x, unter gegebenen Winkeln, deren Tangenten A und B sind, sich neigen, übrigens aber eine willkürliche Lage gegen einander haben, weil die Constanten C und C' beide beliebig sind. Beide Integrale werden durch das Product:

$$(y-Ax-C)(y-Bx-C')=0$$

zugleich dargestellt; d. h. man genügt der Differentialgleichung, wenn man einen der Factoren dieses Productes Null setzt.

Man kann auch das Integral, ohne die Differentialgleichung aufzulösen, auf folgende Art darstellen. Offenbar nämlich muß, wenn man hat:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+a\frac{dy}{dx}+b=0,$$

der Quotient $\frac{dy}{dx}$ unveränderlich sein. Man setze $\frac{dy}{dx}=q$, und $y=qx+c$, so ist zugleich $q^2+aq+b=0$, und das Integral der vorgelegten Gleichung erhält man durch Elimination von q aus den beiden Gleichungen $q=\frac{y-c}{x}$ und $q^2+aq+b=0$; nämlich: $(y-c)^2+a(y-c)x+bx^2=0$.

Dasselbe stellt zwei gerade Linien dar, welche die Axe y in dem Puncte schneide, wo $x=0$, $y=c$ ist.

Diese Gleichung enthält eine willkürliche Constante, und ist das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung. In der That ist jede der beiden früher gefundenen Auflösungen, nämlich $y-Ax-C=0$, und $y-Bx-C'=0$, einzeln genommen, in ihr enthalten.

134. Da sich über die Integration der Differentialgleichungen keine allgemein anwendbaren Regeln geben lassen, so sollen nur noch einige hierher gehörige Beispiele behandelt werden. Es sei die Gleichung

$$y^2dy^2+4xy\,dx\,dy+(2x^2-y^2)dx^2=0$$

vorgelegt. Dieselbe giebt

$$(ydy+2xdx)^2=(2x^2+y^2)dx^2,$$

mithin $$ydy+2xdx=dx\sqrt{2x^2+y^2}.$$
Diese Gleichung ist offenbar homogen; man setze also $y=tx$, so kommt $$tx(tdx+xdt)+2xdx=xdx\sqrt{2+t^2},$$
oder $$(t^2+2)dx+txdt=dx\sqrt{2+t^2};$$
mithin $$\frac{dx}{x}+\frac{tdt}{2+t^2-\sqrt{2+t^2}}=0.$$
Man setze $t^2+2=u^2$, $tdt=udu$, so kommt
$$\frac{dx}{x}+\frac{udu}{u^2-u}=0,\quad \text{oder}\quad \frac{dx}{x}+\frac{du'}{u-1}=0;$$
mithin $log\, x+log(u-1)=\text{const.}$, folglich auch $x(u-1)=c$. Setzt man für u seinen Werth, nämlich
$$u=\sqrt{t^2+2}=\frac{\sqrt{y^2+2x^2}}{x},$$
so erhält man
$$\sqrt{y^2+2x^2}=c+x,\ \text{mithin}\ y^2+x^2=c^2+2cx,$$
welche Gleichung das Integral der vorgelegten ist, und mit der in §. 31. übereinkommt, wenn man $c=a$ setzt.

135. Es werde die Gleichung einer Curve verlangt, deren Tangenten von einem gegebenen Puncte alle gleich weit abstehen. Man nehme diesen Punct zum Anfange der Coordinaten; und setze
$$dx(v-y)-dy(u-x)=0$$
als die Gleichung der Tangente der Curve, im Puncte x, y. Dividirt man diese Gleichung mit $\sqrt{dx^2+dy^2}=ds$, und setzt $u=0$, $v=0$, so hat man den Ausdruck für den senkrechten Abstand a der Tangente vom Anfange der Coordinaten; mithin soll
$$\frac{x\,dy-y\,dx}{ds}=a,\ \text{oder}\ x\,dy-y\,dx=a\sqrt{dx^2+dy^2}\quad \text{sein.}$$
Um diese Gleichung zu integriren, setze man $dy=qdx$; so kommt:
$$qx-y=a\sqrt{1+q^2}.$$

Aus $dy=qdx$ folgt, durch theilweise Integration, $y=qx-\int xdq$, oder $qx-y=\int x\,dq$, folglich muß $\int x\,dq=a\sqrt{1+q^2}$ sein. Diese Gleichung giebt, differentiirt:
$$x\,dq=\frac{aq\,dq}{\sqrt{1+q^2}};$$
mithin muß man entweder haben: $dq=0$, oder $x=\dfrac{aq}{\sqrt{1+q^2}}$.

Die Annahme $dq=0$ giebt $q=\text{const.}$, und folglich stellt
$$qx-y=a\sqrt{1+q^2}$$
das Integral der vorgelegten Gleichung dar, worin q die willkürliche Constante ist. Diese Gleichung bedeutet eine gerade Linie, deren senkrechter Abstand vom Anfange der Coordinaten a ist. Man genügt aber auch der Differentialgleichung, wenn man $x=\dfrac{aq}{\sqrt{1+q^2}}$ setzt, und diese Gleichung mit $y=qx-a\sqrt{1+q^2}$ verbindet, indem man q aus beiden eliminirt. Aus $x\sqrt{1+q^2}=aq$ erhält man $$q=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\ \sqrt{1+q^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$ Setzt man diese Werthe in die andere Gleichung, so kommt
$$y=\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad \text{oder}\quad -y=\sqrt{a^2-x^2},$$
also $x^2+y^2=a^2$, die Gleichung eines Kreises vom Halbmesser a.

Daß diese Gleichung der Differentialgleichung wirklich genügt, sieht man leicht, denn sie giebt $xdx+ydy=0$, woraus
$$dx^2+dy^2=\frac{a^2dx^2}{y^2}\quad \text{und}\quad (x\,dy-y\,dx)=-\frac{a^2dx}{y}$$
folgen, wie erforderlich. Dessen ungeachtet ist sie nicht in dem gefundenen Integrale enthalten, welches nur gerade Linien darstellt. Der Kreis aber vom Halbmesser a, welchen sie angiebt, hat die Eigenschaft, von allen diesen Geraden berührt zu wer-

den; woraus schon hervorgeht, daß die Auflösung durch die Gleichung $x^2+y^2-a^2=0$ mit dem Integrale in einem engen Zusammenhange steht. Man nennt solche Gleichungen, welche einer Differentialgleichung genügen, ohne in dem vollständigen, d. h. mit einer willkürlichen Constante versehenen Integrale derselben enthalten zu sein, **besondere Auflösungen** der Differentialgleichung.

136. Es sei $f(x,y,c)=0$ das vollständige Integral einer Differentialgleichung, mit der willkürlichen Constante c; so ist die Differentialgleichung selbst nichts anderes, als das Resultat der Elimination von c zwischen den beiden Gleichungen

$$f(x,y,c)=0 \quad \text{und} \quad \frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy=0.$$

Man betrachte nun die Constante c als veränderlich, so giebt die Gleichung $f(x,y,c)=0$, differentiirt, folgende:

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dc}dc=0.$$

In vielen Fällen ist es möglich, die Constante c als Function von x und y so zu bestimmen, daß

$$\frac{df}{dc}=0$$

werde. Es sei $c=\varphi(x,y)$ der aus dieser Bedingung entwickelte veränderliche Werth von c; setzt man denselben in das vollständige Integral, so kommt

$$f(x,y,\varphi)=0, \quad \text{wo} \quad \varphi=\varphi(x,y).$$

Diese Gleichung befriedigt offenbar die vorgelegte Differentialgleichung; denn sie giebt

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{d\varphi}d\varphi=0$$

und da $\frac{df}{d\varphi}=0$ ist, so giebt sie $\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy=0$.

Eliminirt man φ aus dieser Gleichung und aus $f(x,y,\varphi)=0$, so erhält man offenbar dieselbe Differentialgleichung, wie vorhin bei der Elimination von c. Wofern nun die Gleichung $f(x,y,\varphi)=0$ nicht als ein bloßer besonderer Fall in dem vollständigen Integrale enthalten ist (was ebenfalls sein kann), so ist sie eine besondere Auflösung der Differentialgleichung. In dem vorigen Beispiele war $qx-y=a\sqrt{1+q^2}$ das vollständige Integral; q die Constante. Nimmt man die Ableitung nach q, indem man x und y ungeändert läßt, so kommt

$$x=\frac{aq}{\sqrt{1+q^2}}$$

aus welcher Gleichung, durch Wegschaffung von q, schon oben die besondere Auflösung $x^2+y^2=a^2$ gefunden wurde.

Um die geometrische Bedeutung dieser besonderen Auflösungen kennen zu lernen, sei $f(x,y,c)=0$ die Gleichung einer Curve, welche, indem die unbestimmte Constante c (die man auch, in Hinsicht auf die Curve, einen **Parameter** nennt) andere Werthe erhält, sich ebenfalls ändern wird. Denkt man sich nun den Parameter c in stetiger Aenderung begriffen, und mithin die zugehörige Curve ebenfalls, so werden, im Allgemeinen, je zwei auf einander folgende Curven einen gemeinschaftlichen Durchschnitt haben, dessen Coordinaten man erhält, wenn man die Gleichungen beider Curven mit einander verbindet. Diese sind

$$f(x,y,c)=0 \quad \text{und} \quad f(x,y,c+dc)=0,$$

oder auch, statt der zweiten,

$$f(x,y,c+dc)-f(x,y,c)=0,$$

welche, für ein verschwindendes dc, auf $\frac{df}{dc}=0$ zurückkommt.

Wird nun c aus der Gleichung $f(x,y,c)=0$ vermittelst $\frac{df}{dc}=0$ weggeschafft, so erhält man die Curve, in welcher alle jene Durchschnitte liegen; und diese ist also die besondere Auflösung derjenigen Differentialgleichung, von welcher $f(x,y,c)=0$

das vollständige Integral war. Für irgend einen Punct P der Curve, welche die besondere Auflösung darstellt, und deren Gleichung $f(x,y,\varphi)=0$ ist, haben x, y, φ bestimmte Werthe. Giebt man der Constante c den Werth von φ, so stellen die beiden Gleichungen $f(x,y,c)=0$ und $f(x,y,\varphi)=0$ zwei mit einander in diesem Puncte P zusammentreffende Curven dar. Diese haben zugleich in P eine gemeinschaftliche Tangente, weil der Werth von $\frac{dy}{dx}$, mag er aus den Gleichungen

$$f(x,\ y,\ c)=0,\quad \frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

oder aus $$f(x,\ y,\ \varphi)=0,\quad \frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0,\quad \frac{df}{d\varphi}=0$$

genommen sein, offenbar derselbe ist. Daher wird die ganze Schaar der Curven von veränderlichem Parameter, welche das vollständige Integral darstellt, von der durch die besondere Auflösung dargestellten Curve eingehüllt. So ist z. B. in der Aufgabe des vorigen §. ein Kreis die Hülle aller in gleichem Abstande a vom Anfange der Coordinaten befindlichen geraden Linien.

Das vollständige Integral der Gleichung

$$y-\frac{xdy}{dx}=\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

(in welcher φ eine Function anzeigt) ist

$$y-ax=\varphi a,$$

wo a die willkürliche Constante. Differentiirt man nach a, so kommt $x=\varphi' a$, woraus sich, nach Elimination von a, eine besondere Auflösung ergiebt, welche die Gleichung einer Curve darstellt, die von allen in dem vollständigen Integrale enthaltenen geraden Linien berührt wird. Dies findet z. B. Anwendung auf die Evolute einer Curve, welche von allen Normalen dieser Curve berührt wird.

137. Es sei noch die Differentialgleichung

$$y^2(dx^2+dy^2)=(xdx+ydy)adx$$

vorgelegt; oder geordnet:

$$y^2dy^2-aydxdy+(y^2-ax)dx^2=0. \qquad \text{A.}$$

Wird dieselbe differentiirt, und $d^2x=0$ gesetzt, so kommt

$$2y^2dyd^2y+2ydy^3-adxdy^2-aydxd^2y+(2ydy-adx)dx^2=0.$$

Entwickelt man hieraus den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$, so kommt:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(adx-2ydy)(dy^2+dx^2)}{(2y^2dy-aydx)dx^2}. \qquad \text{B.}$$

Setzt man den gemeinschaftlichen Factor des Zählers und Nenners Null, nämlich:

$$2ydy-adx=0,$$

so wird die vorstehende Gleichung befriedigt, ohne daß daraus ein bestimmter Werth für $\frac{d^2y}{dx^2}$ hervorgeht. Man setze $y^2-ax=u$, so geht die Gleichung A., welche sich auch, wie folgt, schreiben läßt,

$$(ydy-adx)ydy+(y^2-ax)dx^2=0,$$

über in $$(du-adx)ydy+2udx^2=0$$

oder $$(du-adx)(du+adx)+4udx^2=0,$$

oder $$du^2+(4u-a^2)dx^2=0.$$

Diese Gleichung oder die Gleichung A. wird mithin offenbar befriedigt, wenn man setzt: $4u-a^2=0$, oder

$$y^2-ax=\tfrac{1}{4}a^2. \qquad \text{C.}$$

Wird ferner aus B. der gemeinschaftliche Factor $2ydy-adx$ weggelassen, so kommt

$$yd^2y+dy^2+dx^2=0,$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Man bemerkt leicht, daß

$$yd^2y+dy^2=d(ydy)$$

ist; mithin giebt die vorstehende Gleichung:

$$d(ydy)+dx^2=0, \quad \text{oder} \quad d\left(\frac{ydy}{dx}\right)+dx=0;$$

daher durch einmalige Integration:

$$ydy+(x-k)dx=0,$$

und durch eine zweite Integration

$$y^2+(x-k)^2=g^2;$$

wo k und g willkürliche Constanten sind.

Man setze die Werthe von y^2 und ydy, aus den zuletzt gefundenen Gleichungen, in A., so kommt:

$$(x-k)^2+a(x-k)+g^2-(x-k)^2-ax=0.$$

Entwickelt man diese Gleichung, so fällt x weg, und man erhält

$$g^2-ak=0.$$

Folglich ist $\quad y^2+(x-k)^2=ak \quad$ D.

das vollständige Integral der Differentialgleichung A., mit der willkürlichen Constante k. Die Gleichung C., welche ebenfalls der Differentialgleichung genügte, ist aber nicht in diesem Integrale enthalten. Denn wäre sie es, so müßte es einen beständigen Werth geben, der, für k gesetzt, die Gleichung D. in C. verwandelte. Um diesen zu finden, wenn er vorhanden ist, eliminire man y aus C. und D., so kommt

$$ax+\tfrac{1}{2}a^2+(x-k)^2=ak;$$

Wird diese Gleichung nach k aufgelöst, so kommt

$$k^2-(2x+a)k+(x+\tfrac{1}{2}a)^2=0,$$

oder $\quad (k-x-\tfrac{1}{2}a)^2=0.$

Man sieht, daß der Werth von k nicht unabhängig von x ausfällt, und daß mithin die Gleichung D. nicht dadurch in C. übergehen kann, daß man irgend einen beständigen Werth für k einsetzt. Daher ist C. eine besondere Auflösung der Differentialgleichung A. Man bemerke noch, daß dieselbe, wie auch schon die besondere Auflösung in §. 136., unabhängig von dem vollständigen Integrale, durch Differentiation der Gleichung A. gefunden worden ist, nämlich als der Factor, welcher, gleich Null gesetzt, die Gleichung B. befriedigte, ohne einen bestimmten Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu liefern. Man kann dieselbe nach der Methode des vorigen §. auch aus dem vollständigen Integrale D. erhalten, wenn dieses als bekannt vorausgesetzt wird. Zu dem Ende braucht man nur die Ableitung von D. nach k gleich Null zu setzen; man findet $\;-2(x-k)=a$, also $k=x+\tfrac{1}{2}a$, welcher Werth in D gesetzt:

$$y^2+\tfrac{1}{4}a^2=a(x+\tfrac{1}{2}a) \quad \text{oder} \quad y^2=ax+\tfrac{1}{4}a^2$$

giebt, übereinstimmend mit C.

Die Gleichung D. bedeutet eine Schaar von Kreisen, deren Mittelpuncte auf der Axe x liegen, und deren Halbmesser sich nach dem Gesetze ändern, daß, wenn k der Abstand des Mittelpunctes vom Anfange der Coordinaten ist, $\sqrt{ak}$ den zugehörigen Halbmesser ausdrückt. Alle diese Kreise werden von der durch die Gleichung C. ausgedrückten Parabel eingehüllt.

Dies sind einige Beispiele von besonderen Auflösungen. Eine vollständige Theorie derselben würde hier zu weitläufig sein.

Einige Beispiele von Differentialgleichungen höherer Ordnungen zwischen zwei Veränderlichen.

138. Daß es immer eine Relation zwischen x und y giebt, welche einer gegebenen Gleichung zwischen x, y und mehreren Ableitungen von y nach x, d. i. $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, u. s. f. Genüge leistet, kann man sich, mit Hülfe des Taylorschen Satzes, auf ähnliche Weise klar machen, wie in §. 120. in Bezug auf die Differentialgleichungen erster Ordnung angedeutet worden ist. Nämlich wenn die Differentialgleichung z. B. von der zweiten Ordnung ist, so wird $\frac{d^2y}{dx^2}$ durch x, y, $\frac{dy}{dx}$ ausgedrückt, woraus man die

höheren Ableitungen $\frac{d^3y}{dx^3}$, u. s. f., und also eine Reihe für y erhalten kann. Dabei bleiben die Werthe, welche, für irgend ein gegebenes x, die Größen y und $\frac{dy}{dx}$ haben sollen, ganz beliebig, und die Gleichung zwischen x und y muß mithin zwei willkürliche Constanten enthalten. Dieselbe wurde durch $f(x,y,a,b)=0$ vorgestellt, wo a und b die Constanten sind. Nimmt man von dieser die erste und die zweite Ableitung,

$$\frac{df}{dx}=0,\quad \frac{d^2f}{dx^2}=0$$

und eliminirt a, b mit Hülfe der Gleichung $f=0$, so erhält man die entsprechende Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Will man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung integriren, so ist es am natürlichsten, zuerst eine Differentialgleichung erster Ordnung zu suchen, welche, mit einer willkürlichen Constante versehen, der gegebenen genügt. Diese ist das erste, und ihr Integral, welches wieder eine neue Constante enthalten muß, das zweite Integral der vorgelegten Gleichung zweiter Ordnung. Eben so verhält es sich mit den Differentialgleichungen höherer Ordnungen zwischen zwei Veränderlichen, deren letztes Integral immer so viele willkürliche Constanten enthalten muß, als die Ordnungszahl der Gleichung Einheiten enthält. Man kann immer nur ein letztes vollständiges Integral finden; dagegen können die vorhergehenden Integrale wesentlich verschiedene Formen haben, je nachdem sie diese oder jene der Constanten des vollständigen Integrals enthalten. Z. B. die Gleichung

$$y\,d^2y+dy^2+dx^2=0 \quad (\S.\ 137.)$$

hat
$$y^2+(x-k)^2=g^2$$

zum zweiten Integrale, mit den willkürlichen Constanten k und g. Ein erstes Integral derselben ist

$$y\,dy+(x-k)dx=0, \quad \text{oder} \quad x-k=-y\frac{dy}{dx}.$$

Aber auch die Gleichung

$$y^2+y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=g^2$$

ist ein erstes Integral, welches, wie man sieht, nicht die Constante k, sondern g enthält. Sie giebt

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{g^2-y^2}}{y}.$$

oder
$$\frac{y\,dy}{\sqrt{g^2-y^2}}=dx,$$

woraus man durch Integration wieder dasselbe zweite Integral, wie vorhin, erhält.

139. Es giebt indessen einige Fälle, in welchen man das vollständige Integral einer Differentialgleichung von beliebiger Ordnung finden kann, ohne von jeder Ordnung auf die vorhergehende zurückzugehen. Dahin gehören die sogenannten linearen Differentialgleichung beliebiger Ordnungen (d. h. solche, in welchen y und seine Ableitungen überall nur in der ersten Potenz vorkommen), wenn ihre Coefficienten constant sind. Es sei

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}\cdot\frac{dy}{dx}+a_ny=0$$

die vorgelegte Gleichung, in welcher $a_1, a_2, \ldots$ Constanten sind. Diese Gleichung hat die merkwürdige Eigenschaft, daß man ihr vollständiges Integral finden kann, wenn man nur eine hinreichende Anzahl (nämlich n) unvollständiger Integrale kennt; was sonst, im Allgemeinen, bei beliebigen Differentialgleichungen nicht möglich ist. Solche unvollständige Integrale lassen sich aber, in dem vorliegenden Falle, leicht finden. Es wird hinreichen, dies nur an einer Gleichung der zweiten Ordnung zu zeigen, da das Verfahren überall das nämliche ist. Die vorgelegte Gleichung sei demnach

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_2y=0.$$

Man setze $y=e^{mx}$, so folgt

$$\frac{dy}{dx}=me^{mx}, \quad \frac{d^2y}{d^2x}=m^2\cdot e^{mx}.$$

Die Einsetzung dieser Werthe giebt, nach Weglassung des gemeinsamen Factors e^{mx}, folgende Gleichung zur Bestimmung von m:

$$m^2+a_1m+a_2=0.$$

Bezeichnet man die Wurzeln derselben mit m_1 und m_2, so kommt $y_1=e^{m_1x}$ und $y_2=e^{m_2x}$.

Jeder dieser Werthe befriedigt die vorgelegte Gleichung und ist ein Integral derselben; da er aber keine willkürliche Constante enthält, so ist er nur ein unvollständiges Integral. Man sieht aber leicht, daß auch die Function $y=C_1y_1+C_2y_2$, in welcher C_1, C_2 beliebige Constanten sind, dieser Gleichung genügen muß, wenn y_1 und y_2 ihr genügen; und da dies bei den obigen Werthen von y_1, y_2 der Fall ist, so erhält man

$$y=C_1\cdot e^{m_1x}+C_2\cdot e^{m_2x}$$

als vollständiges Integral der vorgelegten Gleichung, mit den willkürlichen Constanten C_1 und C_2.

Wenn die Wurzeln m_1 und m_2 der Gleichung

$$m^2+a_1m+a_2=0$$

imaginär sind, so setze man

$$m_1=p+qi, \quad m_2=p-qi;$$

so wird $e^{m_1x}=e^{px}\cdot e^{qxi}=e^{px}(\cos qx+i\sin qx)$

$$e^{m_2x}=e^{px}\cdot e^{-qxi}=e^{px}(\cos qx-i\sin qx).$$

Folglich erhält man

$$y=(C_1+C_2)e^{px}\cos qx+(C_1-C_2)i\cdot e^{px}\sin qx,$$

oder wenn man $C_1+C_2=A$, $(C_1-C_2)i=B$ setzt,

$$y=e^{px}(A\cos qx+B\sin qx),$$

als die in diesem Falle passende Form des Integrals. A und B sind willkürliche Constanten.

Wenn die Wurzeln m_1 und m_2 einander gleich sind, so liefert die Formel e^{mx} nur ein unvollständiges Integral. Alsdann erhält man ein zweites, wenn man die Ableitung von $y_1=e^{mx}$ nach m nimmt, d. i. $\frac{dy_1}{dm}=x\cdot e^{mx}$. Setzt man nämlich für y diesen Werth, so erhält man

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy_1}{dm}\right)}{dx}=\frac{d^2y_1}{dmdx}=\frac{d^2y_1}{dx\,dm};$$

eben so
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2\left(\frac{dy_1}{dm}\right)}{dx^2}=\frac{d^3y_1}{dx^2dm};$$

folglich, wenn $y_1=e^{mx}$, $y=\frac{dy_1}{dm}$ ist,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_2y=\frac{d^3y_1}{dx^2dm}+a_1\frac{d^2y_1}{dx\,dm}+a_2\frac{dy_1}{dm}$$

$$=\frac{d\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}+a_1\frac{dy_1}{dx}+a_2y_1\right)}{dm}=\frac{d(e^{mx}(m^2+a_1m+a_2))}{dm}$$

$$=xe^{mx}(m^2+a_1m+a_2)+e^{mx}(2m+a_1).$$

Setzt man nun $m^2+a_1m+a_2=0$, und sind die beiden hieraus entspringenden Werthe von m einander gleich, so wird auch zugleich $2m+a_1=0$; folglich ist

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_2y=0$$

für $y=e^{mx}$ und für $y=xe^{mx}$, wenn m die Wurzel der Gleichung $m^2+a_1m+a_2=(m+\frac{1}{2}a_1)^2=0$, oder $m=-\frac{1}{2}a$ ist. Das vollständige Integral der vorgelegten Gleichung ist alsdann
$$y=C_1e^{mx}+C_2xe^{mx}$$
oder
$$y=(C_1+C_2x)e^{mx}.$$

Auf ähnliche Weise erhält man z. B. das Integral der Gleichung

$$\frac{d^3y}{dx^3}+a_1\frac{d^2y}{dx^2}+a_2\frac{dy}{dx}+a_3y=0$$

durch die Formel

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x},$$

in welcher m_1, m_2, m_3 die Wurzeln der Gleichung

$$m^3 + a_1 m^2 + a_2 m + a_3 = 0$$

sind. Wenn diese Gleichung z. B. drei gleiche Wurzeln (m) hat, so nimmt das Integral folgende Form an:

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{mx}.$$

In diesem Falle erhält man nämlich aus dem unvollständigen Integrale $y_1 = e^{mx}$ zwei andere, indem man die Ableitungen von diesen nach m nimmt, nämlich

$$y_2 = \frac{dy_1}{dm} = x e^{mx}, \quad y_3 = \frac{d^2 y_1}{dm^2} = x^2 e^{mx}.$$

Der Beweis wird, mit Hülfe der bekannten Sätze, welche die gleichen Wurzeln algebraischer Gleichungen betreffen, auf ähnliche Weise geführt, wie vorhin.

140. Wenn in der linearen Differentialgleichung nter Ordnung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_1 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

die Coefficienten a_1, a_2, $\cdots$ a_n sämmtlich Functionen von x, ohne y, sind, so reicht es ebenfalls hin, n unvollständige Integrale derselben zu kennen, um sofort das vollständige Integral zu erhalten. Denn es seien y_1, y_2, $\cdots$ y_n Functionen von x, welche der vorstehenden Gleichung genügen, so genügt denselben auch, wie leicht zu sehen, die daraus zusammengesetzte Function

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n,$$

in welcher C_1, C_2, $\cdots$ C_n Constanten sind. Sind daher die Functionen y_1, y_2, $\cdots$ y_n alle von einander verschieden, so stellt y das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung dar.

Setzt man $y = e^u$, und $\frac{du}{dx} = q$, so wird diese Differentialgleichung auf eine andere zwischen q und x zurückgeführt, die nur noch der n—1ten Ordnung, aber nicht mehr linear ist. Die vorgelegte Gleichung sei z. B.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0,$$

a_1 und a_2 Functionen von x, ohne y. Wird $y = e^u$ gesetzt, so kommt $dy = e^u \cdot du$, $d^2 y = e^u (d^2 u + du^2)$; folglich geht die Gleichung in folgende über:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + a_1 \frac{du}{dx} + a_2 = 0,$$

nachdem der gemeinsame Factor e^u weggelassen worden ist. Wird ferner $\frac{du}{dx} = q$ gesetzt, so kommt

$$\frac{dq}{dx} + q^2 + a_1 q + a_2 = 0,$$

welche Gleichung nur noch von der ersten Ordnung, aber nicht mehr linear ist, weil q darin in der zweiten Potenz vorkommt.

141. Wenn in der linearen Differentialgleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = v$$

die Coefficienten a_1, a_2, $\cdots$ a_n, so wie v, Constanten sind, so setze man $a_n y - v = a_n z$, woraus $dy = dz$, $d^2 y = d^2 z$, u. s. f. folgt. Die Gleichung wird dadurch auf eine andere gebracht, in welcher das letzte Glied, auf der rechten Seite, Null ist, wie in §. 139. angenommen wurde. Sind aber a_1, a_2, $\cdots$ a_n, v Functionen von x, ohne y, so läßt sich die Aufgabe wenigstens vereinfachen, wie hier an dem Beispiele einer Differentialgleichung zweiter Ordnung gezeigt werden soll. Es sei

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = v \qquad \text{A.}$$

die vorgelegte Gleichung, a_1, a_2, v Functionen von x, ohne y. Man suche zuerst zwei unvollständige Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_2y=0, \qquad B.$$

welche mit y_1 und y_2 bezeichnet werden mögen; so ist $y=C_1y_1+C_2y_2$ das vollständige Integral von B. Betrachtet man nunmehr C_1 und C_2 nicht als Constanten, sondern als Functionen von x, so lassen sich diese so bestimmen, daß der Werth von y der Gleichung A. Genüge leistet. Wird nämlich die Gleichung $y=C_1y_1+C_2y_2$ differentiirt, so kommt:

$$dy=C_1dy_1+C_2dy_2+y_1dC_1+y_2dC_2.$$

Nun setze man $y_1dC_1+y_2dC_2=0$; so wird

$$dy=C_1dy_1+C_2dy_2,$$

und hieraus

$$d^2y=C_1d^2y_1+C_2d^2y_2+dC_1dy_1+dC_2dy_2.$$

Man erhält demnach

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_2y=\begin{cases} C_1\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}+a_1\frac{dy_1}{dx}+a_2y_1\right) \\ +C_2\left(\frac{d^2y_2}{dx^2}+a_2\frac{dy_2}{dx}+a_2y_2\right) \\ +\frac{dC_1}{dx}\frac{dy_2}{dx}+\frac{dC_2}{dx}\frac{dy_2}{dx}. \end{cases}$$

Weil aber, nach der Annahme,

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}+a_1\frac{dy_1}{dx}+a_2y_1=0, \quad \frac{d^2y_2}{dx^2}+a_2\frac{dy_2}{dx}+a_2y_2=0,$$

so folgt

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_2y=v=\frac{dC_1}{dx}\cdot\frac{dy_1}{dx}+\frac{dC_2}{dx}\cdot\frac{dy_2}{dx}.$$

Man bestimme demnach $\frac{dC_1}{dx}$ und $\frac{dC_2}{dx}$ aus den Gleichungen:

$$y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}=0 \quad \text{und} \quad \frac{dy_1}{dx}\cdot\frac{dC_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\cdot\frac{dC_2}{dx}=v;$$

so erhält man diese Größen als Functionen von x ausgedrückt, und demnach $\frac{dC_1}{dx}=\varphi_1x$, $\frac{dC_2}{dx}=\varphi_2x$;

oder $C_1=\int\varphi_1x\cdot dx$, $C_2=\int\varphi_2x\cdot dx$.

Das vollständige Integral der vorgelegten Gleichung ist alsdann folgendes:

$$y=y_1\int\varphi_1x\cdot dx+y_2\int\varphi_2x\cdot dx.$$

Ueber die Integration einer Differential-Gleichung von erster Ordnung und vom ersten Grade zwischen drei Veränderlichen.

142. Es sei die Gleichung

$$Mdx+Ndy+Pdz=0 \qquad A.$$

vorgelegt, in welcher M, N, P als Functionen von x, y, z gegeben sind. Wenn es möglich ist, diese Gleichung durch eine Gleichung zwischen x, y, z, mit einer willkürlichen Constante, zu integriren, so sei v = const. dieses Integral; alsdann muß sich offenbar

$$M:N:P=\frac{dv}{dx}:\frac{dv}{dy}:\frac{dv}{dz}$$

verhalten, also muß ein Factor w vorhanden sein, welcher giebt

$$\frac{dv}{dx}=wM, \quad \frac{dv}{dy}=wN, \quad \frac{dv}{dz}=wP,$$

mithin auch

$$\frac{d(wM)}{dy}=\frac{d(wN)}{dx}, \quad \frac{d(wM)}{dz}=\frac{d(wP)}{dx}, \quad \frac{d(wN)}{dz}=\frac{d(wP)}{dy},$$

so daß der Ausdruck $w(Mdx+Ndy+Pdz)$ ein vollständiges Differential ist. §. 129. Entwickelt man die vorstehenden Gleichungen, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} M\frac{dw}{dy}-N\frac{dw}{dx}+w\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)=0.\\ P\frac{dw}{dx}-M\frac{dw}{dz}+w\left(\frac{dP}{dx}-\frac{dM}{dz}\right)=0.\\ N\frac{dw}{dz}-P\frac{dw}{dy}+w\left(\frac{dN}{dz}-\frac{dP}{dy}\right)=0.\end{aligned}\right\}\quad \text{B.}$$

Multiplicirt man die drei Gleichungen B., der Reihe nach, mit P, N, M, so kommt durch Addition

$$P\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)+N\left(\frac{dP}{dx}-\frac{dM}{dz}\right)+M\left(\frac{dN}{dz}-\frac{dP}{dy}\right)=0. \qquad \text{C.}$$

Dies ist eine Bedingungsgleichung, welche die drei Functionen M, N, P erfüllen müssen, wenn die Gleichungen B. mit einander verträglich, oder ein integrirender Factor w möglich sein soll. Vorausgesetzt, daß die Bedingung C. erfüllt ist, so hat die Gleichung A. allemal ein Integral von der Form $v=\text{const.}$, in welche v eine gewisse Function von x, y, z ist. Man integrire nämlich, zuerst z constant setzend, die Gleichung

$$Mdx+Ndy=0; \qquad \text{D.}$$

es sei $u+\varphi z=0$ das Integral, worin φz die Stelle der Constante vertritt. Differentiirt man die Gleichung $u+\varphi z=0$, so kommt, weil $\frac{du}{dx}=\lambda M$, $\frac{du}{dy}=\lambda N$ sein muß (λ der integrirende Factor von D.)

$$\lambda(Mdx+Ndy)+\left(\frac{du}{dz}+\varphi' z\right)dz=0.$$

Diese Gleichung werde mit

$$\lambda Mdx+\lambda Ndy+\lambda Pdz=0$$

verglichen; so muß offenbar

$$\frac{du}{dz}+\varphi' z=\lambda P,$$

oder $$\varphi' z=\lambda P-\frac{du}{dz}$$ sein.

In der That kann man zeigen, daß $\lambda P-\frac{du}{dz}$ auf eine bloße Function von z und φz zurückkommt, wenn die Gleichung $u+\varphi z=0$ vorausgesetzt wird. Betrachtet man nämlich in dieser Gleichung z als beständig, so wird y eine Function von x, und $\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}$. Ferner giebt der Ausdruck $\lambda P-\frac{du}{dz}$, so differentiirt, als ob z beständig wäre, die Ableitung

$$\frac{d(\lambda P)}{dx}+\frac{d(\lambda P)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{d^2u}{dx\,dz}-\frac{d^2u}{dy\,dz}\cdot\frac{dy}{dx}=A,$$

oder, wenn man für $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{dy}{dx}$ ihre Werthe λM, λN, $-\frac{M}{N}$ setzt, und mit N multiplicirt,

$$N\frac{d(\lambda P)}{dx}-M\frac{d(\lambda P)}{dy}-N\frac{d(\lambda M)}{dz}+M\frac{d(\lambda N)}{dz}=AN,$$

oder:

$$AN=\left[N\left(\frac{dP}{dx}-\frac{dM}{dz}\right)+M\left(\frac{dN}{dz}-\frac{dP}{dy}\right)\right]\lambda+P\left(N\frac{d\lambda}{dx}-M\frac{d\lambda}{dy}\right).$$

Nun ist aber, nach der Voraussetzung $\frac{d(\lambda M)}{dy}=\frac{d(\lambda N)}{dx}$, oder

$$M\frac{d\lambda}{dy}-N\frac{d\lambda}{dx}=\lambda\left(\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}\right);$$

folglich

$$\frac{AN}{\lambda}=N\left(\frac{dP}{dx}-\frac{dM}{dz}\right)+M\left(\frac{dN}{dz}-\frac{dP}{dy}\right)+P\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)=0,$$

wegen C., also $A=0$. Folglich ist $\lambda P-\frac{du}{dz}$, wenn man daraus y mit Hülfe der Gleichung $u+\varphi z=0$ eliminirt hat, eine bloße Function von z und φz, ohne x, weil ihre Ableitung A nach x Null ist, und man erhält demnach zur Bestimmung von φz die Gleichung

$$\lambda P-\frac{du}{dz}=\varphi' z,$$

welche als eine Differentialgleichung zwischen z und φz, nach geschehener Elimination von y, zu betrachten ist, aus der sich also φz wiederum bestimmen läßt.

Auf diese Weise ist die vorgelegte Aufgabe auf die Integration der Differentialgleichungen zwischen zwei Veränderlichen zurückgeführt.

Beispiel. Es sei die Gleichung

$$z dx - x dy + (xz + x \log x) dz = 0$$

vorgelegt; also

$$M = z,\ N = -x,\ P = xz + x \log x;$$

welche Werthe die Bedingung C. befriedigen, wie man leicht finden wird. Man integrire $z dx - x dy = 0$, z constant setzend; so wird $\lambda = \frac{1}{x}$, und $u = z \log x - y$; also

$$du = \frac{z dx - x dy}{x} + \log x \cdot dz;$$

folglich muß das Integral in der Form

$$z \log x - y + \varphi z = 0$$

erhalten, und zugleich

$$\varphi' z = z + \log x - \log x = z$$

sein, also
$$\varphi z = \tfrac{1}{2} z^2.$$

Daher hat die vorstehende Gleichung das Integral

$$z \log x - y + \tfrac{1}{2} z^2 = \text{const.}$$

149. Wenn die Bedingung C. nicht erfüllt wird, so giebt es auch kein Integral von $M dx + N dy + P dz = 0$ in der Form $f(x, y, z) = 0$. Offenbar aber kann man dieser Gleichung immer durch zwei Gleichungen zwischen x, y und z Genüge leisten, nämlich wenn man für y eine ganz beliebige Function setzt, so wird z wieder als Function von x bestimmt. Um alle diese möglichen Auflösungen umfassend darzustellen, verfahre man wie folgt: Man integrire wieder $M dx + N dy = 0$, z

als constant betrachtend. Das Integral sei $u + \varphi z = 0$, wo φz eine beliebige Function von z ist, die hier die Stelle der Constante vertritt. Nun differentiire man die Gleichung $u + \varphi z = 0$, nach x, y, z; so kommt, (weil $\frac{du}{dx} = \lambda M$, $\frac{du}{dy} = \lambda N$, wie oben,)

$$\lambda M dx + \lambda N dy + \left(\frac{du}{dz} + \varphi' z\right) dz = 0.$$

Man setze $\lambda P = \frac{du}{dz} + \varphi' z$; so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$u + \varphi z = 0,\ \lambda P - \frac{du}{dz} = \varphi' z$$

welche zusammen die vorgelegte befriedigen. Geometrisch bedeuten dieselben offenbar eine unendliche Anzahl von Curven im Raume, denen eine gemeinsame, in der Differentialgleichung ausgedrückte, Eigenschaft zukommt.

Beispiel. Die Gleichung $y^2 dx + x^2 dy + dz = 0$ genügt der Bedingung C. nicht. Integrirt man aber zuerst $y^2 dx + x^2 dy = 0$, so sieht man leicht, daß $\lambda = \frac{1}{x^2 y^2}$ ein integrirender Factor ist, wodurch $\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2} = 0$, also $u = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ erhalten wird. Hieraus folgt $\frac{du}{dz} = 0$, und, weil $P = 1$, $\varphi' z = \lambda = \frac{1}{x^2 y^2}$. Folglich ist das verlangte Integral in folgenden Gleichungen enthalten:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \varphi z \quad \text{und} \quad \frac{1}{x^2 y^2} = \varphi' z,$$

wo φ eine beliebige Function von z ist.

Einige Bemerkungen über die Integration partieller Differentialgleichungen.

144. Eine Gleichung zwischen x, y, z und beliebigen partiellen Ableitungen von z, nach x und y, heißt eine **partielle Differentialgleichung**. Von solchen können hier nur einige der einfachsten, als Beispiele, betrachtet werden. Es sei zuerst $\frac{dz}{dx}=p=f(x,y)$ gegeben, und es werde die Function z von x und y verlangt, welche dieser Gleichung genügt. Man integrire den Werth von p nach x so, als ob y constant wäre, und füge zum Integrale eine beliebige Function von y, φy; so erhält man:

$$z=\int f(x,y)dx+\varphi y$$

als die gesuchte Function; denn hieraus folgt offenbar, indem y als beständig angesehen wird,

$$\frac{dz}{dx}=f(x,y).$$

Wenn aber $\frac{dz}{dx}=p=f(x,y,z)$ gegeben ist, so ist die Aufgabe schwieriger. Man hat allgemein, wenn $\frac{dz}{dy}$ mit q, wie früher, bezeichnet wird,

$$dz=pdx+qdy.$$

In dieser Gleichung ist $p=f(x,y,z)$ eine gegebene Function x, y, z; q aber ist unbestimmt. Um nun die vorgelegte Gleichung zu integriren, integrire man zuerst die Differentialgleichung

$$dz-pdx=0$$

so, als ob das in p enthaltene y constant, also eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und z vorgelegt wäre. Es sei w ein Factor, der die Function $dz-pdx$ integrabel macht, und u das Integral von $w(dz-pdx)$, so stellt die Gleichung

$$u=\varphi y$$

in welcher φy eine beliebige Function von y ist, das verlangte

Integral dar. Nimmt man nämlich von derselben die Ableitung nach x, indem man y als beständig ansieht, so erhält man

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0.$$

Es war aber $\frac{du}{dx}=-wp$, $\frac{du}{dz}=w$; mithin $w\left(\frac{dz}{dx}-p\right)=0$, also $\frac{dz}{dx}-p=0$, w. z. b. w.

145. Es sei die partielle Differentialgleichung

$$ap+bq=c$$

gegeben, in welcher $p=\frac{dz}{dx}$, $q=\frac{dz}{dy}$, a, b, c Constanten sind. Wird vermittelst derselben q aus der Gleichung

$$dz=pdx+qdy$$

weggeschafft, so kommt

$$bdz-cdy=p(bdx-ady).$$

Man setze $bz-cy=v$, $bx-ay=u$; so ist $dv=pdu$.

Wenn demnach die Function z der vorgelegten partiellen Differentialgleichung genügen soll, so muß die Function $v=bz-cy$ die Eigenschaft haben, daß ihr vollständiges Differential von der Form $\varphi\cdot du$ ist, wo φ irgend eine Function der Veränderlichen bezeichnet. Dieses kann offenbar nur dann Statt finden, wenn v eine Function von u ist; also stellt die Gleichung $bz-cy=\varphi(bx-ay)$ das gesuchte Integral dar. Dieselbe giebt in der That

$$p=\varphi'(bx-ay),\quad bq-c=-a\varphi'(bx-ay),$$

mithin

$$ap+bq=c,$$

wie verlangt wurde.

146. Es sei noch die Gleichung

$$Pp+Qq=R$$

gegeben, in welcher P, Q, R, Functionen von x, y, z sind. Schafft man vermittelst derselben eine der Größen p, q, z. B. q aus

$$dz = pdx + qdy$$

hinweg, so kommt

$$Qdz - Rdy = p(Qdx - Pdy).$$

Der einfachste Fall ist, wenn in dem Ausdrucke $Qdx - Pdy$ nur x und y, aber nicht z, und in $Qdz - Rdy$ nur z und y, aber nicht x, vorkommen. Alsdann kann man zwei integrirende Factoren w und w' finden, welche die Ausdrücke

$$w(Qdz - Rdy) \quad \text{und} \quad w'(Qdx - Pdy)$$

zu vollständigen Differentialen machen. Es sei der erste gleich dM, der zweite gleich dN, so erhält man

$$ww'(Qdz - Rdy) = pww'(Qdx - Pdy)$$

oder

$$w'dM = pwdN.$$

Diese Gleichung kann wieder nur bestehen wenn M eine Function von N ist; also ist

$$M = \varphi(N)$$

das verlangte Integral, worin φ eine beliebige Function andeutet. Der Beweis ist der nämliche, welcher sogleich nachher für den allgemeineren Fall geführt werden wird.

Es sei z. B. $px - qy = 0$ gegeben; so folgt $q = \frac{px}{y}$, und aus $dz = pdx + qdy$,

$$dz = p\left(dx + \frac{ydy}{x}\right)$$

oder

$$dz = \frac{p}{x}(xdx + ydy) = \frac{1}{2}\frac{p}{x}d(x^2 + y^2).$$

Man setze $x^2 + y^2 = u$, so verlangt die vorstehende Gleichung, daß z eine Function von u sei; und das gesuchte Integral ist

$$z = \varphi(x^2 + y^2).$$

Dasselbe giebt in der That

$$p = 2x\varphi'(x^2 + y^2), \quad q = 2y\varphi'(x^2 + y^2),$$

mithin

$$py = qx, \text{ w. z. b. w.}$$

Diese Gleichung umfaßt alle Flächen, welche durch Umdrehung einer Curve um die Axe der z entstehen.

147. Wenn der erwähnte einfache Fall nicht Statt findet, sondern jeder der Ausdrücke

$$Qdz - Rdy \quad \text{und} \quad Qdx - Pdy$$

alle drei Veränderliche enthält, so läßt sich die vorgelegte partielle Differentialgleichung integriren, wenn man im Stande ist, zwei Gleichungen zwischen x, y, z zu finden, welche den Gleichungen $Qdz - Rdy = 0$ und $Qdx - Pdy = 0$ zugleich Genüge leisten. Es seien a und b die in diesen Gleichungen vorkommenden willkürlichen Constanten, und die Gleichungen selbst dargestellt durch

$$M = a, \quad N = b,$$

wo M und N Functionen von x, y, z sind. Betrachtet man nun a als eine Function von b, setzt also $a = \varphi b$, so wird $M = \varphi(N)$ eine Gleichung zwischen x, y, z sein, die der vorgelegten Genüge thut, indem sie zugleich eine willkürliche Function φ enthält. Nimmt man nämlich die partiellen Ableitungen von z aus

$$M = \varphi(N),$$

so ergiebt sich

$$\frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dz}\cdot p = \varphi'N\cdot\left(\frac{dN}{dx} + \frac{dN}{dz}\cdot p\right)$$

$$\frac{dM}{dy} + \frac{dM}{dz}\cdot q = \varphi'N\cdot\left(\frac{dN}{dy} + \frac{dN}{dz}q\right);$$

mithin, durch Wegschaffung von $\varphi'N$,

$$\left(\frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dz}p\right)\left(\frac{dN}{dy} + \frac{dN}{dz}q\right) = \left(\frac{dM}{dy} + \frac{dM}{dz}q\right)\left(\frac{dN}{dx} + \frac{dN}{dz}p\right),$$

oder geordnet:

$$\left(\frac{dN}{dy}\cdot\frac{dM}{dz} - \frac{dM}{dy}\cdot\frac{dN}{dz}\right)p + \left(\frac{dN}{dz}\cdot\frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dx}\cdot\frac{dM}{dz}\right)q$$

$$=\frac{dM}{dy}\cdot\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dN}{dy}. \qquad A.$$

Nach der Voraussetzung aber müssen die beiden Gleichungen

$$\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dz}dz=0$$
$$\frac{dN}{dx}dx+\frac{dN}{dy}dy+\frac{dN}{dz}dz=0$$

einerlei sein mit $Qdz-Rdy=0$, $Qdx-Pdy=0$. Nimmt man die Verhältnisse $dx:dy:dz$ aus den obigen Gleichungen, so kommt:

$$\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dN}{dy}-\frac{dM}{dy}\cdot\frac{dN}{dz}:\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dN}{dz}-\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dN}{dx}:\frac{dM}{dy}\cdot\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dN}{dy}$$
$$=dx:dy:dz;$$

andererseits aber ist auch $P:Q:R=dx:dy:dz$; woraus die Uebereinstimmung der Gleichung A. mit der vorgelegten

$$Pp+Qq=R$$

hervorgeht.

Als einfaches Beispiel kann die schon in 144. betrachtete Gleichung $\frac{dz}{dx}=p=f(x,y,z)$ dienen, deren Integration auf die der beiden Gleichungen $dz-pdx=0$ und $dy=0$ zurückkommt.

Variations-Rechnung.

148. Zur Auflösung gewisser Arten von Aufgaben, von welchen nachher einige Beispiele folgen sollen, ist es nöthig, auszudrücken, daß eine Function y von x in eine andere Function Y übergeht, oder daß die Abhängigkeit zwischen y und x als veränderlich gedacht wird. Man leistet dies eben so einfach als allgemein dadurch, daß man für die Aenderung der Function, d. i. $Y-y$, welche man auch die Variation von y nennt, ein dem Differential-Zeichen dy ähnliches Zeichen δy einführt; so daß, wenn y die ursprüngliche, Y die geänderte Function ist, die Variation $Y-y=\delta y$ eine ganz beliebige Function von x bedeutet.

Um aber, wie später deutlich werden wird, mehr Gleichförmigkeit in die Rechnung zu bringen, werde der Begriff der Variation noch etwas anders gefaßt. Nämlich man setze die Aenderung $Y-y=k\psi(x,k)$. In diesem Ausdrucke bezeichnet k eine beliebige Constante, $\psi(x,k)$ eine willkürliche Function von x und k; übrigens ist derselbe so gebildet, daß $Y-y$, für $k=0$, Null, und für ein sehr kleines k, ebenfalls sehr klein wird. Nun entwickele man die Function $\psi(x,k)$ nach Potenzen von k, und bezeichne die Coefficienten der Entwickelung mit δy, $\frac{1}{2}\delta^2 y$, u. s. f., so daß

$$\psi(x,k)=\delta y+\frac{k\delta^2 y}{2}+\cdots,$$

und

$$k\psi(x,k)=k\delta y+\frac{k^2}{2}\delta^2 y+\cdots$$

sei, und demnach der geänderte Werth von y, d. i. Y durch

$$y + k\delta y + \frac{k^2}{2}\delta^2 y + \cdots$$

ausgedrückt werde. Der Coefficient von k, d. i. δy, welcher eine ganz beliebige Function von x, ohne k, darstellt, die aus $\psi(x,k)$ entsteht, wenn $k=0$ gesetzt wird, heiße die Variation von y.

Es sei v eine beliebige Function von x, y, z; zugleich werden y und z als Functionen von x gedacht. Setzt man $y+k\delta y+\cdots$, $z+k\delta z+\cdots$ statt y, z in v; so sei V der hieraus entstehende geänderte Ausdruck von v. Entwickelt man nun V nach Potenzen von k, so heiße wieder der Coefficient der ersten Potenz von k die Variation von v, und werde mit δv bezeichnet, so daß $V = v + k\delta v + \cdots$ sei. Man sieht sofort, daß δv nichts Anderes ist, als der Werth, welchen der Quotient $\frac{V-v}{k}$ für $k=0$ erhält. Um denselben zu entwickeln, braucht man sich nur der gewöhnlichen Regeln der Differentialrechnung zu bedienen, so findet man sofort

$$\delta v = \frac{dv}{dy}\delta y + \frac{dv}{dz}\delta z.$$

Wenn y in $y+k\delta y$ (mit Weglassung der höheren Potenzen von k) übergeht, so verwandelt sich die Ableitung

$$y_n = \frac{d^n y}{dx^n} \text{ in } \frac{d^n(y+k\delta y)}{dx^n} = \frac{d^n y}{dx^n} + k\frac{d^n \delta y}{dx^n}.$$

Der geänderte Werth von y_n muß aber auch durch $y_n + k\delta y_n$ bezeichnet werden; also ist

$$\delta y_n = \frac{d^n \delta y}{dx^n}, \quad \text{oder} \quad \delta\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = \frac{d^n \delta y}{dx^n}$$

d. h. um die Variation der Ableitung $\frac{d^n y}{dx^n}$ zu finden, braucht man nur die nte Ableitung der Variation von y zu nehmen.

Die vollständige nte Ableitung von v werde mit $\frac{d^n(v)}{dx^n}$ bezeichnet, so daß z. B. die erste Ableitung

$$\frac{d(v)}{dx} = \frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{dv}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

sei, in welcher Formel $\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz}$ partielle Ableitungen von v, nach x, y, z sind. Um die Variation von $\frac{d^n(v)}{dx^n}$, d. i. $\delta\left(\frac{d^n(v)}{dx^n}\right)$, zu finden, muß man in $\frac{d^n(v)}{dx^n}$ $y+k\delta y$, $z+k\delta z$ statt y,z schreiben, und hierauf den Coefficienten von k entwickeln. Es ist aber offenbar einerlei, ob man zuerst $\frac{d^n(v)}{dx^n}$ entwickelt, und hierauf $y+k\delta y$, $z+k\delta z$ statt y,z schreibt, oder ob man durch Einsetzung von $y+k\delta y$, $z+k\delta z$ zuerst v in V übergehen läßt, und sodann die Ableitung von V nimmt. Demnach ist

$$\delta\left(\frac{d^n(v)}{dx^n}\right) = \frac{\frac{d^n(V)}{dx^n} - \frac{d^n(v)}{dx^n}}{k} = \frac{d^n\left(\frac{V-v}{k}\right)}{dx^n} \quad \text{für} \quad k=0;$$

und weil, mit Weglassung der höheren Potenzen von k,

$$V = v + k\delta v$$

ist, so erhält man

$$\delta\left(\frac{d^n(v)}{dx^n}\right) = \frac{d^n(\delta v)}{dx^n}.$$

Man findet also die Variation einer beliebigen Ableitung von v, wenn man die Ableitung der Variation von v nimmt. Auf die nämliche Weise findet man auch die Variation eines beliebigen Integrals von v durch das Integral der Variation δv; z. B. ist für das erste Integral:

$$\delta\int v dx = \int \delta v \cdot dx.$$

Denn man hat nach der Definition

$$\delta\int v dx = \frac{\int V dx - \int v dx}{k} = \int\left(\frac{V-v}{k}\right) dx \quad \text{für} \quad k=0,$$

also

$$\delta\int v dx = \int \delta v \cdot dx.$$

Hierin sind die Regeln für das Verfahren der Variationsrechnung enthalten. Dieselben gelten sowohl, wenn die in v vorkommenden Functionen y, z u. s. f. unabhängig von einander sind, als auch, wenn sie es nicht sind; z. B. also wenn außer y in v nur noch Ableitungen von y nach x vorkommen, wie im Folgenden der Fall sein wird.

149. Es sei $v = f(x, y, y', y'')$ eine Function von x, y und den beiden ersten Ableitungen von y nach x, nämlich $y' = \frac{dy}{dx}$ und $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$. Je nachdem die Function v beschaffen ist, kann es entweder eine Function u von x, y, y', nämlich $u = \varphi(x, y, y')$, geben, von welcher v die vollständige Ableitung ist, oder es kann eine solche Function u nicht geben. In dem ersten Falle ist v allgemein, ohne Rücksicht auf die Abhängigkeit zwischen x und y, integrabel; im anderen Falle ist v nicht allgemein integrabel, sondern das Integral $\int v dx$ muß in jedem Falle besonders gesucht werden, je nachdem y diese oder jene Function von x ist. Die Function u kann ihrerseits wieder allgemein integrabel sein, d. h. es kann eine Function $u_1 = \varphi_1(x,y)$ geben, aus welcher $u = \frac{d(u_1)}{dx}$ hervorgeht, oder nicht. Die Function u_1 wäre das zweite Integral von v, so wie u das erste. Die Bedingungen, unter welchen v ein erstes, und ferner ein zweites Integral hat, lassen sich mit Hülfe der Variations-Rechnung finden. Man wird in der Folge leicht bemerken, daß die Methode im Wesentlichen die nämliche bleiben muß, wenn die in v vorkommenden Ableitungen von y die zweite Ordnung übersteigen, was hier der Kürze wegen nicht angenommen wird.

Wenn die Function v integrabel ist, so muß

$$u = \varphi(x, y, y') = \int v dx$$

sein. Läßt man, in v und in u, y in $y + k\delta y$ übergehen, und vergleicht die Coefficienten der ersten Potenzen von k mit einander, so kommt $\delta u = \int \delta v \cdot dx$; d. h. wenn v integrabel ist, so muß auch die Variation δv integrabel sein; und zwar ist δu ihr Integral. Man schreibe zur Abkürzung v' für $\frac{dv}{dy'}$, v'' für $\frac{dv}{dy''}$,

so ist $$\delta v = \frac{dv}{dy}\delta y + v'\frac{d\delta y}{dx} + v''\frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

mithin $$\delta u = \int \delta v \cdot dx = \int \left[\frac{dv}{dy}\delta y dx + v' d\delta y + v''\frac{d^2\delta y}{dx}\right].$$

Der vorstehende Ausdruck für δu läßt sich durch theilweise Integration in zwei Theile zerlegen, von welchen der eine vom Integralzeichen frei, der andere noch damit behaftet ist. Es wird sich aber zeigen, daß der unter dem Integralzeichen befindliche Theil, seiner Beschaffenheit wegen, niemals integrabel sein kann, und mithin identisch Null sein muß, wenn die Variation δv integrabel sein soll.

Man findet nämlich durch theilweise Integration

$$\int v' d\delta y = v'\delta y - \int d(v') \cdot \delta y;$$

wo $d(v')$ das vollständige Differential von v' bedeutet. Ferner ist

$$\int v''\frac{d^2\delta y}{dx} = v''\frac{d\delta y}{dx} - \int d(v'') \cdot \frac{d\delta y}{dx},$$

$$\int d(v'') \cdot \frac{d\delta y}{dx} = \int \frac{d(v'')}{dx} d\delta y = \frac{d(v'')}{dx}\delta y - \int \frac{d^2(v'')}{dx}\delta y;$$

folglich

$$\int v''\frac{d^2\delta y}{dx} = v''\frac{d\delta y}{dx} - \frac{d(v'')}{dx}\delta y + \int \frac{d^2(v'')}{dx}\delta y.$$

Setzt man die vorstehenden Werthe in den obigen von δu ein, so kommt

$$\delta u = v'\delta y + v''\frac{d\delta y}{dx} - \frac{d(v'')}{dx}\delta y + \int \left[\frac{dv}{dy} - \frac{d(v')}{dx} + \frac{d^2(v'')}{dx^2}\right]\delta y dx.$$

Es sei $$\frac{dv}{dy} - \frac{d(v')}{dx} + \frac{d^2(v'')}{dx^2} = L,$$

so ist L eine Function von x, y und einigen Ableitungen von y nach x, ohne δy. Ist nun L nicht identisch Null, so

muß, nach der obigen Formel, wenn die Variation δv das Integral $$\delta u = \frac{du}{dy}\delta y + \frac{du}{dy'}\delta y'$$
haben soll, daß Integral
$$\int L\delta y\, dx = P\delta y + Q\delta y'$$
sein, wo $$P = \frac{du}{dy} - v' + \frac{d(v'')}{dx},$$
und, weil $\frac{d\delta y}{dx} = \delta y'$, $Q = \frac{du}{dy'} - v''$ ist. Folglich muß auch, wenn man differentiirt,
$$L\delta y dx = dP\delta y + Pd\delta y + dQ\delta y' + Qd\delta y'$$
sein, für jedes beliebige δy. Dies ist aber offenbar unmöglich, wofern die Größen P, Q, und mithin L nicht sämmtlich Null sind. Das Integral $\delta u = \int \delta v\, dx$ ist also nur dann vorhanden, wenn die Gleichung
$$L = 0$$
erfüllt ist, welche demnach die Bedingung der Integrabilität von δv ausdrückt. Wird diese Gleichung erfüllt, so ist
$$\delta u = \left(v' - \frac{d(v'')}{dx}\right)\delta y + v''\delta y'.$$

150. Es läßt sich ferner beweisen, daß u aus dem gefundenen Ausdrucke für δu allemal gefunden werden kann. Man setze zur Abkürzung
$$M = v' - \frac{d(v'')}{dx},\ N = v'',$$
so wird $\delta u = M\delta y + N\delta y'$. Da aber zugleich $u = \varphi(x, y, y')$ sein soll, woraus $\delta u = \frac{du}{dy}\delta y + \frac{du}{dy'}\delta y'$ folgt, so muß $M = \frac{du}{dy}$, $N = \frac{du}{dy'}$, und folglich
$$\frac{dM}{dy'} = \frac{dN}{dy}$$

sein. Diese Bedingung (worüber §. 128. zu vergleichen,) ist erforderlich und zugleich hinreichend, damit der gefundene Ausdruck für δu, in Bezug auf y und y', integrabel, oder damit die Function u, welche verlangt wird, vorhanden sei. Es soll aber sofort gezeigt werden, daß dieselbe schon in der Bedingungs-Gleichung $L = 0$ enthalten, also keine neue Bedingung ist.

Nämlich die Gleichung
$$L = \frac{dv}{dy'} - \frac{d(v')}{dx} + \frac{d^2(v'')}{dx^2} = 0$$
kann offenbar nur dann, wie erfordert wird, identisch bestehen, wenn v'', d. i. $\frac{dv}{dy''}$ unabhängig von y'' ist. Denn enthielte v'' noch die Ableitung y'', so würde in $\frac{d^2(v'')}{dx^2}$ die vierte Ableitung von y als Factor eines Gliedes vorkommen; und da die übrigen Glieder offenbar nur die drei ersten Ableitungen von y enthalten können, so könnte dieses Glied sich gegen keines der übrigen aufheben; dasselbe muß also Null sein. Hieraus folgt aber weiter, daß y'' in v nur als Factor eines Gliedes in der ersten Potenz vorkommen kann; demnach muß v nothwendig von folgender Form sein:
$$v = p + qy'',$$
wo p und q Functionen von x, y, y', ohne y'', sind. Hierdurch wird
$$\frac{dv}{dy} = \frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dy}\cdot y'',\quad v' = \frac{dp}{dy'} + \frac{dq}{dy'}\cdot y'',\quad v'' = q,$$
durch welche Werthe die Gleichung $L = 0$ in folgende übergeht:
$$L = \frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dy}y'' - \frac{d\left(\frac{dp}{dy'}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{dq}{dy'}\cdot y''\right)}{dx} + \frac{d^2(q)}{dx^2} = 0.$$
Man hat $$\frac{d(q)}{dx} = \frac{dq}{dx} + \frac{dq}{dy}y' + \frac{dq}{dy'}y'';$$
daher

$$\frac{d^2(q)}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dq}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{dq}{dy}y'\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{dq}{dy'}y''\right)}{dx}.$$

Wird dieser Werth von $\frac{d^2(q)}{dx^2}$ in die vorstehende Gleichung $L=0$ gesetzt, so fällt $\frac{d\left(\frac{dq}{dy'}y''\right)}{dx}$, wie man sieht, heraus, und es bleibt noch

$$L = \frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dy}y'' - \frac{d\left(\frac{dp}{dy'}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{dq}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{dq}{dy}y'\right)}{dx} = 0.$$

Man setze zur Abkürzung

$$\frac{dp}{dy'} - \frac{dq}{dx} - \frac{dq}{dy}y' = r,$$

so wird $$L = \frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dy}y'' - \frac{d(r)}{dx} = 0.$$

Nun ist aber, weil offenbar r kein y'' enthält,

$$\frac{d(r)}{dx} = \frac{dr}{dx} + \frac{dr}{dy}y' + \frac{dr}{dy'}y''$$

mithin

$$L = \frac{dp}{dy} - \frac{dr}{dx} - \frac{dr}{dy}y' + \left(\frac{dq}{dy} - \frac{dr}{dy'}\right)y'' = 0.$$

Diese Gleichung soll identisch bestehen. Da nun der nicht in Klammern eingeschlossene Theil von L offenbar kein y'' enthält, so besteht sie nur dann, wenn folgende Gleichungen zugleich Statt finden:

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dr}{dx} - \frac{dr}{dy}y' = 0,$$

$$\frac{dq}{dy} - \frac{dr}{dy'} = 0,$$

in welche also die Gleichung $L=0$ zerfällt.

Oben war $$\delta u = M\delta y + N\delta y',$$

und $$M = v' - \frac{d(v'')}{dx},\ N = v''.$$

Nun muß aber $v = p + qy''$ sein; also

$$M = \frac{dp}{dy'} + \frac{dq}{dy'}y'' - \frac{d(q)}{dx},\quad N = q,$$

oder, wenn man $\frac{d(q)}{dx}$ entwickelt und einsetzt,

$$M = \frac{dp}{dy'} - \frac{dq}{dx} - \frac{dq}{dy}y' = r;$$

also $N=q$ und $M=r$.

Da nun $\frac{dq}{dy} = \frac{dr}{dy'}$ war, so ist auch $\frac{dM}{dy'} = \frac{dN}{dy}$, w. z. b. w.

Es sei z. B. $v = \frac{yy' - xy'y' + xyy''}{y^2}$; so folgt

$$\frac{dv}{dy} = \frac{-yy' + 2xy'y' - xyy''}{y^3},\ v' = \frac{y - 2xy'}{y^2},\ v'' = \frac{x}{y},$$

welche Werthe der Bedingung $L=0$ genügen, wie man leicht findet. Daher ist v integrabel. Man erhält $M = -\frac{xy'}{y^2}$, $N = \frac{x}{y}$, also auch $\frac{dM}{dy'} = \frac{dN}{dy}$, und

$$\delta u = \frac{-xy'\delta y}{y^2} + \frac{x\delta y'}{y} = \frac{x(y\delta y' - y'\delta y)}{y^2} = x\delta\left(\frac{y'}{y}\right);$$

folglich $u = \int v dx = \frac{xy'}{y}$.

151. Um zu finden, ob v, wenn es ein erstes Integral hat, also die Bedingung $L=0$ erfüllt ist, auch ein zweites Integral hat, nehme man das erste Integral von δv,

$$\delta u = v'\delta y + v''\frac{d\delta y}{dx} - \frac{d(v'')}{dx}\delta y.$$

Soll nun u integrabel sein, so muß auch δu integrabel sein, und man erhält wieder, durch theilweise Integration

$$\int \delta u \cdot dx = \iint \delta v dx^2 = v''\delta y + \int \left[v' - 2\frac{d(v'')}{dx} \right] \delta y \, dx.$$

Demnach muß, wenn v ein zweites Integral haben soll, außer der Bedingung $L=0$ noch die zweite Bedingung

$$L' = v' - 2\frac{d(v'')}{dx} = 0$$

erfüllt werden. Man setze wieder $v = p + qy''$, so erhält man

$$L' = \frac{dp}{dy'} - 2\frac{dq}{dx} - 2\frac{dq}{dy}y' - \frac{dq}{dy'}y'' = 0.$$

Diese Gleichung kann nur dann bestehen, wenn $\frac{dq}{dy'} = 0$ ist, weil in den übrigen Gliedern y'' nicht vorkommt. Also muß

$$\frac{dp}{dy'} - 2\frac{dq}{dx} - 2\frac{dq}{dy}y' = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dq}{dy'} = 0$$

sein, wenn v ein zweites Integral haben soll. Sind diese Bedingungen erfüllt, so erhält man

$$\iint \delta v \cdot dx^2 = \int \delta u \cdot dx = v''\delta y = q\delta y;$$

folglich findet man das zweite Integral $\iint v dx^2$, wenn man den Ausdruck $q\delta y$, worin q eine Function von x und y, ohne y' ist, in Bezug auf y, d. h. nach δ, integrirt. In dem obigen Beispiele wird die erste der beiden vorstehenden Bedingungs-Gleichungen nicht befriedigt, also findet ein zweites Integral nicht Statt.

152. Wird die Bedingung $L=0$ nicht erfüllt, so findet man oft merkwürdige Resultate, wenn man zwischen x und y gerade die Gleichung $L=0$ setzt, welche alsdann nicht mehr identisch besteht, sondern wodurch y von x abhängig gemacht wird.

Es sei $v = f(x, y, y')$; man verlangt, wenn es angeht, y als Function von x so zu bestimmen, daß für $x=a$, $y=A$, und für $x=b$, $y=B$ werde, und zugleich das Integral

$$u = \int_a^b f(x, y, y')\,dx$$

den größten oder kleinsten Werth erhalte, dessen es, unter Voraussetzung der ersten Bedingung, fähig ist. Man nehme an, daß die Function y in eine andere Function

$$y + k\delta y + \frac{k^2}{2}\delta^2 y + \cdots$$

mithin y' in $\quad y' + k\frac{d\delta y}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d\delta^2 y}{dx} + \cdots;$

übergehe, so geht v, auf entsprechende Weise, über in

$$V = v + k\delta v + \frac{k^2}{2}\delta^2 v + \cdots$$

und mithin das Integral $\int v dx$ in

$$\int V dx = \int v dx + k\int \delta v \cdot dx + \frac{k^2}{2}\int \delta^2 v \cdot dx + \cdots$$

In dieser Reihe kann man offenbar k so klein annehmen, daß das erste Glied, $k\int \delta v \cdot dx$, wenn es nicht Null ist, die Summe aller übrigen übertrifft. Alsdann aber würde dieses Glied entgegengesetzte Zeichen erhalten, wenn k das eine Mal positiv, das andere Mal negativ genommen würde, und mithin wäre der Werth von $\int v dx$ kein größter oder kleinster. Die Bedingung des Größten oder Kleinsten ist also, ganz auf ähnliche Weise, wie bei den Functionen einer Veränderlichen, die, daß der Coefficient der ersten Potenz von k, Null sei; also

$$\int_a^b \delta v \cdot dx = 0.$$

Nun war $v = f(x, y, y')$; mithin

$$\delta v = \frac{dv}{dy}\delta y + v'\delta y',$$

also, wenn wieder theilweise integrirt wird,

$$\int \delta v \cdot dx = v'\delta y + \int \left[\frac{dv}{dy} - \frac{d(v')}{dx} \right] \delta y \, dx.$$

In den vom Integralzeichen freien Theil des vorstehenden Ausdruckes muß man die Werthe setzen, welche x, y und δy, an den Grenzen a und b erhalten, und sodann ihren Unterschied nehmen, um den Werth des Integrals zwischen den Grenzen a und b zu finden. Nun ist aber vorgeschrieben, daß für $x=a$, $y=A$ sein soll; es muß demnach an der Grenze a die gesammte Aenderung von y, d. i. $k\delta y+\frac{k^2}{2}\delta^2 y+\cdots$, Null sein; also müssen, für $x=a$, sämmtliche Coefficienten von k in dem Ausdrücke der Aenderung von y, Null sein; insbesondere also $\delta y=0$. Eben so muß auch an der anderen Grenze b, die Variation von y Null sein, weil auch hier der Werth B von y vorgeschrieben ist. Mithin ist der vom Integralzeichen freie Theil von selbst Null, und um die Bedingung des Größten oder Kleinsten zu erfüllen, muß nur noch

$$\int_a^b\left[\frac{dv}{dy}-\frac{d(v')}{dx}\right]\delta y\,dx=0$$

sein, in welcher Gleichung δy eine ganz beliebige Function von x bedeutet, die nnr an den Grenzen a und b der Bedingung, Null zu sein, unterworfen ist. Daher kann offenbar das vorstehende Integral nicht anders Null sein, als wenn

$$L=\frac{dv}{dy}-\frac{d(v')}{dx}=0$$

ist; welche Gleichung die Bedingung des Größten oder Kleinsten darstellt. Um zu entscheiden, ob wirklich ein Größtes oder Kleinstes vorhanden ist, und welches von beiden, muß man die Glieder zweiter Ordnung des Ausdruckes

$$V=f(x,y+k\delta y+\frac{k^2}{2}\delta^2 y\cdot\cdot,\ y'+k\delta y'+\frac{k^2}{2}\delta^2 y'\cdot\cdot)$$

entwickeln. Dieselben sind

$$\left.\begin{aligned}\frac{k^2\delta^2 v}{2}=\Big[\tfrac{1}{2}\frac{d^2v}{dy^2}\delta y^2+\frac{d^2v}{dy\,dy'}\delta y\delta y'+\tfrac{1}{2}\frac{d^2v}{dy'^2}\delta y'^2&\\ +\tfrac{1}{2}\frac{dv}{dy}\delta^2 y+\tfrac{1}{2}\frac{dv}{dy'}\delta^2 y'\Big]k^2.&\end{aligned}\right\}$$

Um das Integral $\int\delta^2 v\cdot dx$ darzustellen, betrachte man zuerst die

beiden letzten Glieder des vorstehenden Ausdruckes für $\delta^2 v$, nämlich ($\frac{dv}{dy'}=v'$ gesetzt, wie oben)

$$\frac{dv}{dy}\delta^2 y+v'\delta^2 y'$$

und bemerke, daß offenbar wieder $\delta^2 y'=\frac{d\delta^2 y}{dx}$ ist. Nimmt man nun von diesen Gliedern das Integral, so erhält man, nach theilweiser Integration,

$$\frac{dv}{dy'}\delta^2 y+\int\left[\frac{dv}{dy}-\frac{d(v')}{dx}\right]\delta^2 y\,dx.$$

Da nun an den Grenzen $\delta^2 y=0$, und ferner überhaupt

$$\frac{dv}{dy}-\frac{d(v')}{dx}=0$$

ist, so ist dieser Theil des Integrals $\int\delta^2 v dx$ Null; und demnach hat man

$$\int\delta^2 v\cdot dx=\int\left[\frac{d^2v}{dy^2}\delta y^2+2\frac{d^2v}{dy\,dy'}\delta y\delta y'+\frac{d^2v}{dy'^2}\delta y'^2\right]dx.$$

Dieses Integral von a bis b genommen, muß sein Zeichen nicht wechseln, welche Function von x für δy auch gesetzt werde; was der Fall sein wird, wenn der eingeklammerte Ausdruck

$$\frac{d^2v}{dy^2}\delta y^2+2\frac{d^2v}{dy\,dy'}\delta y\delta y'+\frac{d^2v}{dy'^2}\delta y'^2,$$

(nachdem y, in v, als Function von x der Bedingung des Größten oder Kleinsten gemäß ausgedrückt ist,) für alle Werthe von x zwischen a und b, und für jeden beliebigen von δy, sein Zeichen nicht wechselt.

Im Folgenden werden nur solche Aufgaben vorgelegt werden, wo offenbar ist, daß ein Größtes oder Kleinstes Statt finden muß, mithin die Untersuchung der Glieder zweiter Ordnung entbehrt werden kann.

153. Es sei z. B. $v=\sqrt{1+y'^2}$; man verlangt den klein-

sten Werth des Integrals $\int v dx$ zwischen gegebenen festen Grenzen. Da hier offenbar $\int_a^b v dx$ nichts weiter ist, als die Länge einer Curve zwischen zwei gegebenen Puncten, indem für $x=a$, $y=A$ und für $x=b$, $y=B$ werden soll; so heißt diese Aufgabe geometrisch nichts Anderes, als daß die kürzeste Linie in einer Ebene, zwischen zwei gegebenen Puncten verlangt wird. Man erhält

$$\frac{dv}{dy}=0, \frac{dv}{dy'}=v'=\frac{y'}{v}; \quad \frac{d^2v}{dy^2}=0, \frac{d^2v}{dydy'}=0, \frac{d^2v}{dy'^2}=\frac{1}{v^3};$$

folglich ist, nach der obigen allgemeinen Gleichung

$$\frac{dv}{dy}-\frac{d(v')}{dx}=0,$$

die gesuchte Gleichung der kürzesten Linie

$$\frac{d\left(\frac{y'}{v}\right)}{dx}=0;$$

also $\frac{y'}{v}=\text{const.}$; woraus weil $v=\sqrt{1+y'^2}$ ist, folgt:

$$y'=c,$$

c eine Constante. Die gesuchte Linie ist demnach die Gerade, wie bekannt.

Die Glieder der zweiten Ordnung geben blos

$$\frac{d^2v}{dy'^2}\delta y'^2=\frac{1}{v^3}\delta y'^2;$$

folglich behält das Integral

$$\int \delta^2 v \cdot dx = \int \frac{\delta y'^2}{v^3} dx$$

für jedes beliebige δy beständig das nämliche Zeichen; und zwar ist dieses Zeichen positiv, wenn der Unterschied der Grenzen $b-a$ positiv ist, wie man annehmen kann; also findet ein kleinster Werth wirklich Statt, was aber ohnehin klar ist.

Aus der Gleichung $y'=c$ oder $dy=cdx$ erhält man durch

weitere Integration, wenn h eine neue Constante ist, $y=cx+h$. Die Constanten c und h sind so zu bestimmen, daß die Linie durch die beiden gegebenen Puncte gehe; woraus man folgende Gleichung für dieselbe erhält:

$$\frac{y-B}{A-B}=\frac{x-b}{a-b}.$$

154. Es werde ferner die kürzeste Linie zwischen zwei Puncten im Raume verlangt. Da die Länge derselben durch das Integral $\int \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx$ ausgedrückt wird, so ist hier $v=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$, und es sind zwei Größen, nämlich y nnd z, als Functionen von x zu bestimmen. Die Methode ist indessen immer die nämliche. Man schreibe $y+k\delta y+\cdot\cdot$, $z+k\delta z+\cdot\cdot$ statt y und z, und entwickele die Variation δv; so muß das Integral $\int \delta v \cdot dx$ Null sein. Man kann die Rechnung folgendermaaßen machen:

Es ist, wenn $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=ds$ gesetzt wird,

$$\delta v=\frac{dy}{ds}\delta dy+\frac{dz}{ds}\delta dz,$$

folglich

$$\delta \int v dx = \int \delta v \cdot dx = \int \left(\frac{dy \delta dy}{ds}+\frac{dz \delta dz}{ds}\right) dx.$$

Durch theilweise Integration ergiebt sich

$$\delta \int v dx = \frac{dy}{ds}\delta y+\frac{dz}{ds}\delta z-\int\left[d\left(\frac{dy}{ds}\right)\delta y+d\left(\frac{dz}{ds}\right)\delta z\right];$$

und weil δy, δz an den Grenzen Null sind, und $\delta \int v dx=0$ sein soll, muß

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right)\delta y+d\left(\frac{dz}{ds}\right)\delta z=0 \qquad \text{A.}$$

sein. In dieser Gleichung sind δy, δz ganz beliebig und unabhängig von einander; dieselbe kann also nur dann bestehen, wenn

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right)=0,\quad d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0,$$

mithin
$$\frac{dy}{ds}=c,\quad \frac{dz}{ds}=c'$$

ist; c und c' sind Constanten. Diese Gleichungen geben eine gerade Linie, wie leicht zu sehen ist.

Es kann aber auch die kürzeste Linie zwischen zwei Puncten auf einer gegebenen Fläche verlangt werden. Da die Bogenlänge immer durch $\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ ausgedrückt wird, so findet man durch Variation wieder die nämliche Gleichung A.,

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right)\delta y+d\left(\frac{dz}{ds}\right)\delta z=0.$$

In dieser Gleichung sind δy und δz nicht mehr unabhängig von einander, wie vorhin. Setzt man nämlich in der Gleichung der Fläche $f(x,y,z)=0$, $y+k\delta y+\cdots$, $z+k\delta z+\cdots$ statt y und z, und entwickelt nach Potenzen von k, so erhält man

$$f+k\delta f+\frac{k^2}{2}\delta^2 f+\cdots=0$$

und die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von k müssen, einzeln, Null sein. Nun findet man sofort

$$\delta f=\frac{df}{dy}\delta y+\frac{df}{dz}\delta z,\quad \text{also muß}\quad \frac{df}{dy}\delta y+\frac{df}{dz}\delta z=0$$

sein, oder, wenn der Quotient $-\frac{df}{dy}:\frac{df}{dz}$, d. i. $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, wie gewöhnlich, mit q bezeichnet wird,

$$\delta z-q\delta y=0.$$

Demnach giebt die Gleichung A, wenn für δz sein Werth $q\delta y$ gesetzt wird,

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right)+q\,d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0,$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die verlangte kürzeste Linie, welche nachher noch näher betrachtet werden soll.

155. Eine bemerkenswerthe Aenderung der Aufgabe in §. 152. entsteht, wenn die Grenzen des Integrals $\int v\,dx$, welches einen größten oder kleinsten Werth erhalten soll, nicht fest sind, sondern nur gewissen Bedingungen Genüge leisten müssen. Um die Bedeutung hiervon anschaulich zu machen, dient am besten das Beispiel der kürzesten Linie. Man kann nämlich die kürzeste Linie auf einer Fläche nicht zwischen zwei Puncten, sondern zwischen zwei, ihrer Beschaffenheit und Lage nach, gegebenen Curven verlangen. Um die Methode darzustellen, reicht es hin, wenn nur eine Grenze als veränderlich, die andere aber als fest angenommen wird, also z. B. die kürzeste Linie von einem gegebenen Puncte aus nach einer gegebenen Curve verlangt wird.

Es werde also der größte oder kleinste Werth des Integrals

$$\int^{x_1} f(x,\ y,\ y')\,dx$$

verlangt. An der einen Grenze mögen die Werthe von x und y gegeben sein (dieselbe ist in dem vorstehenden Integral unbezeichnet gelassen worden); an der anderen Grenze ist aber der Werth von x_1 nicht gegeben, sondern es wird nur verlangt, daß an dieser Grenze y eine gegebene Function von x, also $y_1=\psi x_1$ sei, wenn mit y_1 der Werth von y, an der Grenze, bezeichnet wird. Man sieht, daß die Gleichung $y_1=\psi x_1$, verbunden mit der Gleichung der Fläche, die begrenzende Curve bestimmt.

Man stelle sich zuerst den Werth von x_1 als gefunden, oder die Grenze x_1 als fest vor; so muß der Werth des Integrals

$$\int f(x,\ y,\ y')\,dx$$

ein größter oder kleinster unter allen denen sein, welche für die nämlichen festen Grenzen möglich sind. Es muß also genau die nämliche Gleichung für das Größte oder Kleinste gelten, wie vorhin, als die Grenzen fest waren, nämlich:

$$\frac{dv}{dy}-\frac{d(v')}{dx}=0.$$

Um dies auch an einem Beispiele anschaulich zu machen, so ist offenbar, daß die kürzeste Linie zwischen zwei Curven, auf einer Fläche, auch die kürzeste zwischen ihren beiden in diesen Curven befindlichen Endpuncten sein muß; daß also die Veränderlichkeit der Grenzen keinen Einfluß auf die Differentialgleichung der Curve, sondern nur auf die Bestimmung der Constanten der Integration haben kann. Wenn nun die Grenzwerthe von y beide willkürlich gegeben sein, oder beliebigen Bedingungen unterworfen werden sollen, so kann dies nur geschehen, wenn die Gleichung

$$L=\frac{dv}{dy}-\frac{d(v')}{dx}=0,$$

aus welcher y zu bestimmen ist, eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, deren Integration zwei willkürliche Constanten herbeiführt. Also muß $v'=\frac{dv}{dy'}$ nicht unabhängig von y' sein; denn sonst würde nur eine Differentialgleichung erster Ordnung entstehen.

Man kann sich indessen überzeugen, daß, wenn $\frac{dv'}{dy'}=0$, dagegen $\frac{dv'}{dy}$ nicht Null ist, der Werth des Integrals $\int_a^b \delta^2 v \cdot dx$ (§. 152.), dessen Ausdruck in diesem Falle folgender ist:

$$\int_a^b \left(\frac{d^2v}{dy^2}\delta y^2+2\frac{dv'}{dy}\delta y\delta y'\right)dx,$$

nicht für jedes beliebige δy das nämliche Zeichen behalten, also gar kein größter oder kleinster Werth des Integrals $\int v dx$ Statt finden kann. Indessen wird dies hier nur gelegentlich bemerkt, und soll nicht weiter ausgeführt werden.

Vorausgesetzt also, daß die Gleichung $L=0$ zweiter Ordnung ist, so liefert ihre Integration $y=\varphi(x,c,c')$, wo c und c' Constanten sind. Da die Werthe von x und y an der einen Grenze gegeben sind, so wird dadurch eine der Constanten eliminirt; daher erhält man nur noch $y=\varphi(x,c)$, und die Constante c ist aus der Bedingung zu bestimmen, daß für $x=x_1$,

$y=\psi x_1=y_1$ werde, also daß

$$y_1=\varphi(x_1,\ c)$$

sein muß.

Nun soll der Werth von x_1 so bestimmt werden, daß das Integral

$$\int^{x_1} f(x,y,y')\,dx$$

worin $y=\varphi(x,c)$, größer oder kleiner werde, als für jeden anderen Werth von x_1. Man ändere also x_1 um δx_1, und zugleich die davon abhängige Constante c um δc, so werden y und y' in $y+\frac{dy}{dc}\delta c$ und $y'+\frac{dy'}{dc}\delta c$ übergehen, und das geänderte Integral demnach sein:

$$\int^{x_1+\delta x_1} f\left(x,y+\frac{dy}{dc}\delta c,\ y'+\frac{dy'}{dc}\delta c\right)\cdot dx.$$

Man entwickle dieses Integral nach Potenzen von δx_1 und δc; so muß, wenn ein Größtes oder Kleinstes Statt finden soll, wie die Summe der der Glieder erster Ordnung Null sein. Das vorgelegte Integral läßt sich in zwei andere zerlegen, deren erstes bis x_1, das zweite von x_1 bis $x_1+\delta x_1$ geht. Das Integral

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} f\left(x,y+\frac{dy}{dc}\delta c,\ y'+\frac{dy'}{dc}\delta c\right)dx$$

ist gleich dem Producte aus dem Intervalle δx_1 in einen Mittelwerth der Function f; und da man dieses Intervall beliebig klein annehmen darf, so kann man diesen Mittelwerth ohne Weiteres dem Werthe gleich setzen, welchen $f(x,y,y')$ für $x=x_1$ erhält; also gleich $\delta x_1\cdot f(x_1,y_1,y'_1)$. Das andere Integral

$$\int^{x_1} f\left(x,y+\frac{dy}{dc}\delta c,\ y'+\frac{dy'}{dc}\delta c\right)dx$$

ist gleich

$$\int^{x_1} f(x,y,y')dx+\int^{x_1}\left(\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dc}\delta c+\frac{df}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dc}\delta c\right)dx,$$

und der zweite Theil von dieser Summe ergiebt sich durch theilweise Integration, weil $\frac{dy'}{dc}=\frac{d\left(\frac{dy}{dc}\right)}{dx}$ ist,

$$\int^{x_1}\left(\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dc}+\frac{df}{dy'}\cdot\frac{d\left(\frac{dy}{dc}\right)}{dx}\right)\delta c\,dx=$$

$$\frac{df}{dy'}\cdot\frac{dy}{dc}\delta c+\int^{x_1}\left(\frac{df}{dy}-\frac{d\left(\frac{df}{dy'}\right)}{dx}\right)\frac{dy}{dc}\delta c\,dx,$$

wovon aber das letzte Glied Null ist, weil

$$L=\frac{df}{dy}-\frac{d\left(\frac{df}{dy'}\right)}{dx}=0.$$

Die Glieder der ersten Ordnung der gesammten Aenderung, welche zusammen Null sein müssen, sind demnach

$$\delta x_1 f(x_1, y_1, y'_1)+\frac{df}{dy'}\cdot\frac{dy_1}{dc}\delta c,$$

wo überall für x und y die Werthe x_1 und y_1 zu setzen sind. Nun ist $y_1=\varphi(x_1, c)$,

demnach, wenn x_1, c, y_1 in $x_1+\delta x_1, c+\delta c, y_1+\delta y_1$ übergehen,

$$\delta y_1=\frac{dy_1}{dx_1}\delta x_1+\frac{dy_1}{dc}\delta c,$$

also $\frac{dy_1}{dc}\delta c=\delta y_1-\frac{dy_1}{dx_1}\delta x_1=\delta y_1-y'_1\delta x_1$

und mithin die Bedingungsgleichung für die veränderliche Grenze folgende:

$$\delta x_1 f(x, y_1, y'_1)+\frac{df}{dy'}(\delta y_1-y'_1\delta x_1)=0.$$

Da nun ferner $y_1=\psi x_1$ gegeben, mithin $\delta y_1=\psi' x_1\delta x_1$ ist, so erhält man durch Elimination von δy_1 eine von δ unabhängige Gleichung zwischen x_1 und y_1, aus welcher, nach Elimination von y_1, der Werth von x_1 gefunden werden kann.

156. Wird z. B. die kürzeste Linie auf einer Fläche, von einem Puncte nach einer gegebenen Curve verlangt; so sei $F(x, y, z)=0$ die Gleichung der Fläche, und $y=\psi x$ die zweite Gleichung für die auf der Fläche liegende Curve. Aus der Gleichung der Fläche hat man

$$dz=p\,dx+q\,dy, \text{ oder } z'=p+qy',$$

wo $p=\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $q=\left(\frac{dz}{dy}\right)$ als Functionen von x und y zu betrachten sind, und $z'=\frac{dz}{dx}$, $y'=\frac{dy}{dx}$ gesetzt ist. Demnach ist

$$v=f(x, y, y')=\sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

mithin $$\frac{df}{dy'}=\frac{y'+qz'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$

und folglich

$$f(x,y,y')-\frac{df}{dy'}y'=\frac{1+pz'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}.$$

Daher erhält man folgende Bedingung für die Grenze:

$$(1+pz')\delta x_1+(y'+qz')\delta y_1=0$$

oder $$\delta x_1+y'\delta y_1+z'(p\delta x_1+q\delta y_1)=0.$$

In dieser Gleichung müssen statt y', z' die Werthe $\frac{dy_1}{dx_1}$, $\frac{dz_1}{dx_1}$ gesetzt werden, welche diese Größen an der Grenze erhalten; setzt man noch für $p\delta x_1+q\delta y_1$ seinen Werth δz_1 ein, und dividirt mit δx_1, so kommt:

$$1+\frac{dy_1}{dx_1}\cdot\frac{\delta y_1}{\delta x_1}+\frac{dz_1}{dx_1}\cdot\frac{\delta z_1}{\delta x_1}=0. \qquad \text{a.}$$

In vorstehender Gleichung bezieht sich das Zeichen d auf die kürzeste Linie, δ auf die Grenzcurve, so daß die Tangente der kürzesten Linie, in ihrem Endpuncte, durch die Gleichungen

$$\frac{u-x_1}{dx_1}=\frac{v-y_1}{dy_1}=\frac{w-z_1}{dz_1},$$

dagegen die Tangente der Grenzcurve, in demselben Puncte, durch $\frac{u-x_1}{\delta x_1}=\frac{v-y_1}{\delta y_1}=\frac{w-z_1}{\delta z_1}$

ausgedrückt werden. Beide Tangenten stehen senkrecht auf einander, wenn

$$dx_1\delta x_1+dy_1\delta y_1+dz_1\delta z_1=0 \qquad b.$$

ist. Da diese Gleichung mit der obigen a. einerlei ist, so besteht die Grenzbedingung, geometrisch ausgedrückt, darin, daß die kürzeste Linie senkrecht auf der Grenzcurve stehen muß.

157. Die kürzeste Linie auf einer Fläche hat merkwürdige Eigenschaften, deren vollständiger Beweis jedoch eine geometrische Untersuchung voraussetzt, die hier zunächst folgen soll. Man denke sich nämlich auf einer gegebenen krummen Fläche eine beliebige Curve gezeichnet, und (nach §. 81.) eine abwickelbare Berührungsfläche an dieselbe gelegt. Man verlangt zu wissen, was aus dieser Curve wird, wenn die Berührungsfläche in eine Ebene ausgebreitet, und mit ihr die Curve abgewickelt wird.

Die gegebene Fläche sei zuerst eine Kugel, und die darauf gezeichnete Curve ein Kreis. Die berührende Fläche ist alsdann ein gerader Kegel, oder, wenn der Kreis ein größter ist, ein Cylinder. Man kann aber den letzteren Fall als im ersten allgemeinen Fall enthalten ansehen, und demnach nur diesen betrachten. Es sei R der Halbmesser des Kreises, ϱ die Seite des Berührungskegels, von der Spitze des Kegels bis zu dem berührten Kreise; i die Neigung von R gegen die Berührungsebene der Kugel, also auch gegen die Seite ϱ des Kegels; so lehrt die geometrische Anschauung sehr leicht, daß $\varrho \cos i=R$ ist.

Wickelt man nun den Kreis von der Kugel, vermittelst des Kegels, ab, so geht derselbe in einen Kreisbogen über, dessen Halbmesser die Seite ϱ des Kegels ist. Es findet also zwischen dem Kreise und seiner Abwickelung der Zusammenhang Statt, welchen die Gleichung $\varrho \cos i=R$ ausspricht, in welcher sich ϱ als der Krümmungshalbmesser der abgewickelten Curve betrachten läßt.

Nun sei ferner eine beliebige Curve auf einer beliebigen Fläche gegeben, und die abwickelbare Berührungsfläche angelegt. Es sei R der Krümmungshalbmesser der Curve in irgend einem Puncte B, und ϱ der Krümmungshalbmesser der abgewickelten Curve, in dem entsprechenden Puncte; ferner i die Neigung des Krümmungshalbmessers R gegen die Berührungsebene der Fläche, in demselben Puncte B. Man errichte noch in B die Normale der Fläche, und in dem Mittelpuncte des Krümmungskreises ein Loth auf der Ebene K desselben, so ist offenbar, daß dieses Loth die Normale der Fläche in einem gewissen Puncte A treffen muß, weil eine durch den Krümmungshalbmesser R und die Normale der Fläche gelegte Ebene senkrecht auf der Ebene K des Krümmungskreises steht. Diesen Punct A nehme man zum Mittelpuncte, und das Stück der Normale von A bis zum Berührungspuncte B zum Halbmesser einer Kugel; so ist der Krümmungskreis vom Halbmesser R ein Parallelkreis dieser Kugel, welche mit der Fläche die Berührungsebene im Puncte B gemein hat. Das Bogenelement der Curve in B kann nun angesehen werden als dem Krümmungskreise selbst angehörig, und das ihm entsprechende Element der abwickelbaren Berührungsfläche als ein Element des Kegels, welcher die Kugel vom Halbmesser AB in dem Kreise R berührt. Folglich gilt für dieses Element wiederum die Gleichung $\varrho \cos i=R$, in welcher ϱ zunächst die Seite des berührenden Kegels bedeutet, die aber, nach vollzogener Abwickelung, in den Krümmungshalbmesser der abgewickelten Curve übergeht. Hierdurch erhält man folgenden merkwürdigen Satz:

Eine Curve werde von einer Fläche, vermittelst einer angelegten abwickelbaren Berührungsfläche, abgewickelt; es sei R der Krümmungshalbmesser der Curve in irgend einem Puncte B, ϱ der Krümmungshalbmesser der abgewickelten Curve in dem entsprechenden Puncte, und i die Neigung des Krümmungshalbmessers R gegen die an B gelegte Berührungsebene der Fläche; so ist $\varrho \cos i=R$ oder $\frac{1}{\varrho}=\frac{\cos i}{R}$.

Nun ist die Gleichung der anschließenden Ebene oder der Ebene des Krümmungskreises folgende:

$$A(u-x)+B(v-y)+C(w-z)=0,$$

wo A, B, C dasselbe sind, wie in §. 70.; und die der Berührungs-Ebene: $\quad -p(u-x)-q(v-y)+w-z=0.$

Man setze $\mu=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, $v=\sqrt{1+p^2+q^2}$, so erhält man für die Neigung i der berührenden gegen die anschließende Ebene

$$\mu v\cdot \cos i=C-Ap-Bq.$$

Man setze $d^2s=0$, also $dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z=dsd^2s=0$, und schaffe mit Hülfe dieser Gleichung d^2x aus C und B weg, so findet man leicht:

$$-Bdx=dydzd^2y+dz^2d^2z+dx^2d^2z,$$
$$Cdx=dy^2d^2y+dzdyd^2z+dx^2d^2y,$$

und hieraus, wenn man die Glieder, welche d^2y, und wieder die, welche d^2z enthalten, zusammenfaßt, und gehörig reducirt:

$$(C-Ap-Bq)dx=ds^2(d^2y+qd^2z).$$

Demnach erhält man

$$\mu v\, \cos i\cdot dx=ds^2(d^2y+qd^2z).$$

Ferner ist der Krümmungshalbmesser $R=\frac{ds^3}{\mu}$; (§. 70.), also wird

$$\frac{\cos i}{R}=\frac{d^2y+q\,d^2z}{vdx\cdot ds}=\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)+qd\left(\frac{dz}{ds}\right)}{vdx}=\frac{1}{\varrho},$$

der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser ϱ der abgewickelten Curve.

158. Soll also eine Gleichung für die abgewickelte ebene Curve gefunden werden, so nehme man in der Ebene derselben beliebige rechtwinkliche Coordinaten u und v an; und drücke das Bogenelement ds und den Krümmungshalbmesser ϱ der abgewickelten Curve durch die Coordinaten u und v vermittelst der folgenden bekannten Formeln aus:

$$ds=\sqrt{du^2+dv^2} \quad \text{und} \quad \varrho=\frac{(du^2+dv^2)^{\frac{3}{2}}}{dud^2v-dvd^2u}.$$

Offenbar muß das Bogenelement der abgewickelten Curve dem entsprechenden Bogenelement der gegebenen Curve, auf der Fläche, gleich sein. Demnach erhält man folgende Gleichung:

$$du^2+dv^2=dx^2+dy^2+dz^2. \qquad 1.$$

Ferner ist, nach dem Obigen, $\varrho=\frac{R}{\cos i}$, also

$$\frac{(du^2+dv^2)^{\frac{3}{2}}}{dud^2v-dvd^2u}=\frac{R}{\cos i}. \qquad 2.$$

Die Größe $\frac{R}{\cos i}$ ist als Function von x, y, z ausgedrückt worden. Da nun vermöge der Gleichungen der Curve, y und z Functionen von x sind, so erhält man durch Wegschaffung von y und z, zur Bestimmung der abgewickelten Curve, zwei Gleichungen von der Form:

$$\sqrt{du^2+dv^2}=\varphi x\cdot dx$$

und

$$\frac{du\,d^2v-dv\,d^2u}{(du^2+dv^2)^{\frac{3}{2}}}=\psi x,$$

wo φx und ψx zwei bekannte Functionen von x sind. Multiplicirt man dieselben in einander, so kommt

$$\frac{dud^2v-dvd^2u}{du^2+dv^2}=\psi x\cdot\varphi x\cdot dx$$

Die Größe links ist aber gleich $d\,arc\,tg\left(\frac{dv}{du}\right)$; also erhält man durch Integration $arc\,tg\frac{dv}{du}=\int\psi x\cdot\varphi x\cdot dx+\text{Const.}$, und mithin

$$\frac{dv}{du}=tg\,[c+\int\psi x\cdot\varphi x\cdot dx]=tg\,X.$$

Hieraus folgt $1+\left(\frac{dv}{du}\right)^2=\frac{1}{\cos X^2}$, also

$$du=\sqrt{du^2+dv^2}\cdot\cos X,\ dv=\sqrt{du^2+dv^2}\cdot\sin X,$$

mithin, wenn man für $\sqrt{du^2+dv^2}$ seinen Werth $\varphi x\,dx$ setzt,

$$du=\varphi x\cdot\cos X\cdot dx,\ dv=\varphi x\cdot\sin X\cdot dx;$$

also durch Integration

$$u-a=\int\varphi x\cdot\cos X\cdot dx,\ v-b=\int\varphi x\cdot\sin x\cdot dx;$$

a und b willkürliche Constanten.

Vermittelst dieser Gleichungen wird man u, v als Functionen von x ausgedrückt erhalten, und durch Elimination von x aus beiden Ausdrücken die Gleichung zwischen u und v finden, welche die der abgewickelten Curve ist. Dieselbe enthält drei willkürliche Constanten, deren Bestimmung von der Wahl der Coordinatenaxen u, v in der Ebene der abgewickelten Curve abhängt. Die Auflösung der in diesem §. vorgelegten Aufgabe, nämlich die Gleichung der abgewickelten Curve zu finden, ist hier nur kurz angedeutet worden, weil dieselbe, obschon als geometrische Aufgabe bemerkenswerth, doch im Folgenden nicht weiter in Gebrauch kommen wird.

159. Man hat nach §. 157.

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\cos i}{R}=\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)+q\,d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{v\,dx}.$$

Für die kürzeste Linie auf einer krummen Fläche war

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right)+q\,d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0,$$

also $\cos i=0$. Dies bedeutet, daß der Krümmungshalbmesser der kürzesten Linie in jedem Puncte senkrecht auf der Berührungsebene der Fläche steht, mithin in die Normale der Fläche fällt; was die erste allgemeine Eigenschaft der kürzesten Linie auf einer Fläche ausmacht. Ferner ist auch

$\frac{1}{\varrho}=0$, d. h. wird die kürzeste Linie, vermittelst einer angelegten abwickelbaren Berührungsfläche, von der gegebenen Fläche in eine Ebene abgewickelt, so geht sie in eine gerade Linie über (weil das Krümmungsmaaß $\frac{1}{\varrho}$ der abgewickelten ebenen Curve Null ist). Aus dieser zweiten allgemeinen Eigenschaft der kürzesten Linie auf einer Fläche kann man sofort schließen, daß die kürzeste Linie auf einer Kugel ein Bogen eines größten Kreises, und auf einem Kreiscylinder ein Bogen einer Schraubenlinie ist. Will man die letztere durch Rechnung finden, so führe man Polarcoordinaten $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ ein; alsdann ist $r=a$ die Gleichung des Cylinders, und man erhält für das Bogenelement einer beliebigen Curve auf dem Cylinder:

$$dx^2+dy^2+dz^2=r^2d\varphi^2+dr^2+dz^2=a^2d\varphi^2+dz^2.$$

Man muß also die Variation des Integrales $\int\sqrt{a^2d\varphi^2+dz^2}$ Null setzen. Die Rechnung giebt, wenn nach z variirt wird,

$$\delta\int\sqrt{a^2d\varphi^2+dz^2}=\delta\int ds=$$

$$\int\frac{dz\,\delta dz}{ds}=\frac{dz}{ds}\delta z-\int d\left(\frac{dz}{ds}\right)\delta z;$$

mithin $d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0$, oder $dz=c\,ds$ als Gleichung der kürzesten Linie. Nun ist aber $ds=\sqrt{a^2d\varphi^2+dz^2}$; folglich

$$dz^2=c^2(a^2d\varphi^2+dz^2);$$

$$dz=\frac{ac}{\sqrt{1-c^2}}d\varphi=k\,d\varphi,$$

also $z=k\varphi+k'$, die Gleichung für eine Schraubenlinie, in welcher k und k' willkürliche Constanten sind.

Um die kürzeste Linie auf einem geraden Kegel zu finden, sei

$$z=r\,tg\,\alpha$$

die Gleichung desselben; und $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Man erhält

$$ds = r^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2(1 + tg\,\alpha^2),$$

oder $$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + \frac{dr^2}{cos\,\alpha^2}.$$

Setzt man nun $\delta \int \sqrt{r^2 d\varphi^2 + \frac{dr^2}{cos\,\alpha^2}} = 0$, und entwickelt die Variationen, so kommt, wenn $\delta r = 0$ gesetzt, also nur nach φ variirt wird,

$$\delta \int ds = \int \frac{r^2 d\varphi \delta d\varphi}{ds} = \frac{r^2 d\varphi}{ds}\delta\varphi - \int d\left(\frac{r^2 d\varphi}{ds}\right)\delta\varphi.$$

Folglich muß, für die kürzeste Linie,

$$d\left(\frac{r^2 d\varphi}{ds}\right) = 0;\ r^2 d\varphi = c ds \quad \text{sein.}$$

Diese Gleichung giebt

$$r^4 d\varphi^2 = c^2\left(r^2 d\varphi^2 + \frac{dr^2}{cos\,\alpha^2}\right);$$

mithin $$d\varphi = \frac{c\,dr}{cos\,\alpha} \cdot \frac{1}{r\sqrt{r^2 - c^2}},$$

oder, wenn man $\frac{1}{r} = v$ setzt,

$$d\varphi = -\frac{c}{cos\,\alpha} \cdot \frac{dv}{\sqrt{1 - c^2 v^2}};$$

also $$cos\,\alpha \cdot d\varphi = d\,arc\,cos\,(cv);$$

oder $$arc\,cos\,(cv) = \varphi\,cos\,\alpha + k,$$

mithin $$cv = \frac{c}{r} = cos\,(\varphi\,cos\,\alpha + k);$$

oder $$r\,cos\,(\varphi\,cos\,\alpha + k) = c,$$

als Gleichung der kürzesten Linie auf dem geraden Kegel; in welcher k und c willkürliche Constanten sind. Dieselben werden bestimmt, wenn die beiden Endpuncte der kürzesten Linie gegeben sind.

160. Es wird die Gleichung derjenigen Curve verlangt, welche, auf einer gegebenen krummen Fläche, mit gegebenem Umringe, den größten Flächenraum einschließt. Diese Aufgabe ist von den bisherigen dadurch unterschieden, daß sie ein bedingtes Maximum verlangt, nämlich den größten Flächenraum unter der Bedingung eines gegebenen Umringes. Um dem Leser das Verständniß zu erleichtern, soll zuerst die Ebene als die gegebene Fläche angenommen werden. Es sei a der Anfang der Coordinaten (Fig. 28.), ab die Axe der x, m und n zwei gegebene Puncte, deren Coordinaten $am' = c$, $m'm = g$, $an' = c'$, $n'n = g'$ sind; so sollen die Puncte m und n durch einen Bogen von gegebener Länge mn so mit einander verbunden werden, daß der Raum $F = mm'n'n$ so groß als möglich sei.

Die Gleichung der gesuchten Curve sei $y = fx$; der gesuchte Raum $\int y dx$ sei F, und der Bogen $L = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ = der gegebenen Größe λ (die Integrale sind von $x = c$ bis $x = c'$ zu nehmen). Man bilde den Ausdruck

$$F + hL,$$

in welchem h eine beliebige beständige Größe anzeigt, setze die Variation desselben

$$\delta(F + hL) = \delta F + h\delta L = 0,$$

und entwickele sie nach den bisherigen Regeln; so wird man diejenige Gleichung zwischen x und y erhalten, welche, für ein beliebiges h, den Gesammtwerth von $F + hL$ zu einem größten macht; so daß, wenn man eine andere Gleichung (B.) zwischen x und y annimmt, die nur den vorgeschriebenen Grenzbedingungen Genüge thut, der daraus entstehende Werth $(F' + hL')$ des obigen Ausdruckes nothwendig kleiner ist, als der aus (A.) berechnete. In der Gleichung A. ist aber noch h, als eine unbestimmte Constante, nach Erfüllung aller Grenzbedingungen, enthalten; wird demnach aus A. der Werth von L entwickelt, so wird auch dieser noch h enthalten. Man bestimme h aus der Gleichung $L = \lambda$; so wird h eine Function von λ, und mithin als eine gegebenen Größe anzusehen sein. Der gefundene Werth von h sei h'; so liefert die Gleichung A. den größten Werth, den der Ausdruck $F+h'L$ erhalten kann, und giebt zugleich $L=\lambda$. Gäbe es es nun noch eine Gleichung B., welche $F'>F$ und zugleich $L'=\lambda$ lieferte, so müßte auch offenbar

$$F'+h'L'>F+h'L$$

sein; also wäre $F+h'L$ nicht das unbedingte Maximum, was gegen die Annahme ist.

Man findet also diejenige Gleichung zwischen x und y, welche den größten Werth von F und den gegebenen Werth von L liefert, d. h. man findet das bedingte Maximum von F, wenn man zuerst das unbedingte Maximum von

$$F+hL$$

nach den Regeln der Variationsrechnung sucht, und hierauf h so bestimmt, daß L seinen gegebenen Werth erhalte. Hieraus entspringt folgende, für die Anwendung der Variationsrechnung sehr wichtige Regel:

Es seien v und w zwei Functionen von x, y, y' y'', u. s. f. Wenn nun der größte oder kleinste Werth des Integrals $F=\int v dx$ verlangt wird, unter der Bedingung, daß zugleich $L=\int w dx$ einen gegebenen Werth habe; so multiplicire man L mit einer willkürlichen Constante h, und mache die Summe

$$F+hL$$

zu einem unbedingten Maximum oder Minimum, indem man, nach den früheren Regeln, die Variation $\delta F+h\delta L=0$ setzt. Hieraus wird sich eine Gleichung zwischen x und y ergeben, welche, nach gehöriger Bestimmung der Constanten, namentlich auch der Größe h, das verlangte bedingte Maximum oder Minimum von F, für einen gegebenen Werth von L, liefern muß. Diese Regel soll sogleich an dem vorgelegten Beispiele erläutert werden. Um die verlangte Curve zu finden, welche, bei gegebener Länge L, die größte Fläche F begränzt, bilde man die Summe

$$F+hL=\int y dx+h\int\sqrt{dx^2+dy^2}$$

und setze ihre Variation Null. Wird nach y variirt, so kommt

$$\delta\int y dx=\int\delta y dx,$$

und $\delta\int ds=\delta\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int\frac{dy\delta dy}{ds}=\frac{dy}{ds}\delta y-\int d\left(\frac{dy}{ds}\right)\delta y,$

folglich $\delta\int y dx+h\delta\int ds=\frac{dy}{ds}\delta y+\int\left(dx-hd\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)\delta y.$

Diese Variation muß Null sein, und da, wegen der Unveränderlichkeit der Grenzen, das Glied außerhalb des Integralzeichens von selbst Null ist, so erhält man folgende Gleichung für die gesuchte Curve:

$$dx-hd\left(\frac{dy}{ds}\right)=0,$$

und durch Integration:

$$x-a=h\frac{dy}{ds};$$

folglich $\quad (x-a)^2[dx^2+dy^2]=h^2dy^2;$

oder $\quad \frac{(x-a)dx}{\sqrt{(h^2-(x-a)^2)}}=dy;$

woraus sofort $\quad y-b=\sqrt{h^2-(x-a)^2},$

oder $\quad (x-a)^2+(y-b)^2=h^2$

folgt. In dieser Gleichung sind a und b die willkürlichen Constanten. Sie giebt einen Kreis, dessen Halbmesser h nach Maaßgabe der gegebenen Bogenlänge zu bestimmen ist.

161. Wird allgemein die Curve verlangt, welche auf einer gegebenen krummen Fläche mit einem gegebenen Umringe den größten Raum einschließt, so erhält man das doppelte Integral $\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot dx dy$ als Ausdruck der Oberfläche, und $\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ als Ausdruck des Bogens. Man bilde nun die Summe $\quad \iint v dy dx+h\int ds$

und setze ihre Variation Null. (In diesen Formeln ist $p=\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $q=\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $v=\sqrt{1+p^2+q^2}$ gesetzt.) Demnach ist zu setzen:

$$\delta\iint v\,dy\,dx + h\delta\int ds = 0.$$

Um die Rechnung so viel als möglich zu vereinfachen, denke man sich $p=\frac{dz}{dx}$, $q=\frac{dz}{dy}$ als Functionen von x und y gegeben, also auch v als eine Function von x und y, und die Integration von v in Bezug auf y vollzogen. Man setze $\int v\,dy = w$, so ist w eine ebenfalls gegebene Function von x und y, so bestimmt, daß $\frac{dw}{dy}=v$. Alsdann geht $\iint v\,dy\,dx$ in $\int w\,dx$ über, und man erhält demnach die Gleichung

$$\delta\int w\,dx + h\,\delta\int ds = 0.$$

Variirt man nach y, so kommt

$$\delta w = \frac{dw}{dy}\delta y = v\delta y,$$

also

$$\delta\int w\,dx = \int\delta w\,dx = \int v\,\delta y\,dx;$$

$$\delta\int ds = \delta\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \int\frac{dy\,\delta\,dy + dz\,\delta\,dz}{ds}$$

$$= \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z - \int\left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\delta y + d\left(\frac{dz}{ds}\right)\delta z\right)$$

und, weil $\delta z = q\delta y$ ist,

$$\delta\int w\,dx + h\delta\int ds =$$

$$\frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z + \int\left[v\,dx - hd\frac{dy}{ds} - hqd\,\frac{dz}{ds}\right]\delta y = 0.$$

Die vom Integralzeichen freien Glieder sind von selbst Null, wenn δy an den Grenzen der Integration Null ist, d. h. wenn die Curve durch zwei gegebenen Puncte gehen soll. Man erhält ferner als Gleichung der gesuchten Curve

$$v\,dx - h\left[d\left(\frac{dy}{ds}\right) + qd\left(\frac{dz}{ds}\right)\right] = 0,$$

oder

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right) + qd\left(\frac{dz}{ds}\right) = \frac{v\,dx}{h}.$$

Die vorstehende Gleichung ist, wie man sieht, einerlei mit $\frac{\cos i}{R}=\frac{1}{h}$ (§. 157.), oder sie giebt $\varrho = h$, und lehrt mithin folgende merkwürdige Eigenschaft der gesuchten Curve kennen: Wird die Curve des kürzesten Umringes vermittelst einer angelegten abwickelbaren Berührungsfläche in eine Ebene abgewickelt, so ist der Krümmungshalbmesser der abgewickelten ebenen Curve von beständiger Größe, und diese demnach ein **Kreis** oder ein Kreisbogen.

Dies ist die characteristische Eigenschaft der Curven kürzesten Umringes auf beliebigen Flächen; d. h. derjenigen Curven, welche, unter allen von gleichem Umringe und durch dieselben zwei gegebenen Puncte gehenden, den größten Raum auf der Fläche einschließen.

Man ersieht aus dieser Eigenschaft sofort, daß auf der Kugel die Curve des kürzesten Umringes ein Kreis ist.

162. Will man die Gleichung dieser Curve noch für den Kreis-Cylinder und den geraden Kegel entwickeln, so lege man wieder die Gleichungen $r=a$ und $z=r\,tg\,\alpha$ dieser Flächen (§. 159.) zu Grunde. Der Ausdruck für ein beliebiges Bogenelement auf dem Cylinder war

$$ds^2 = a^2d\varphi^2 + dz^2;$$

und giebt, verglichen mit dem allgemeinen Ausdrucke in §. 107., indem man sich die Coordinaten x, y, z als Functionen von $p=\varphi$, $q=z$ denkt,

$$E=a^2,\ F=0,\ G=1;$$

also $EG-F^2=a^2$, und mithin $a\,d\varphi\,dz$ der Ausdruck des Flächenelementes. Um nun die Curve des kürzesten Umringes zu finden, muß man setzen:

$$\delta\iint a\,d\varphi\,dz + h\delta\int\sqrt{a^2d\varphi^2+dz^2} = 0,$$

oder wenn noch nach z integrirt wird,

$$a\delta\int z\,d\varphi + h\delta\int\sqrt{a^2d\varphi^2+dz^2} = 0.$$

Die Variation nach z giebt

$$\int\left[ad\varphi - hd\left(\frac{dz}{ds}\right)\right]\delta z = 0,$$

also $ad\varphi = hd\left(\frac{dz}{ds}\right)$ als die gesuchte Gleichung. Integrirt man dieselbe, so kommt

$$a(\varphi-\alpha) = h\frac{dz}{ds},$$

α die willkürliche Constante. Hieraus erhält man weiter, weil $ds = \sqrt{a^2d\varphi^2 + dz^2}$,

$$a^2(\varphi-\alpha)^2(a^2d\varphi^2 + dz^2) = h^2dz^2,$$

und folglich

$$a^4(\varphi-\alpha)^2d\varphi^2 = (h^2 - a^2(\varphi-\alpha)^2)dz^2,$$

oder, wenn zur Abkürzung φ statt $\varphi-\alpha$ gesetzt wird,

$$\frac{a^2\varphi d\varphi}{\sqrt{h^2 - a^2\varphi^2}} = dz,$$

mithin $z = c - \sqrt{h^2 - a^2\varphi^2}$, oder $(z-c)^2 + a^2\varphi^2 = h^2$ als Gleichung der gesuchten Curve, in welcher c eine neue beliebige Constante ist.

Um sich von dieser Curve eine deutliche Anschauung zu verschaffen, darf man nur bedenken, daß, wenn der Cylinder in eine Ebene ausgebreitet wird, diese Curve die Gestalt eines Kreises annehmen muß. Dasselbe gilt auch von der folgenden Curve auf dem geraden Kegel, so wie überhaupt von den Curven kürzesten Umringes auf allen abwickelbaren Flächen.

163. Auf dem geraden Kegel, dessen Gleichung $z = r\,tg\,\alpha$, erhält man den Ausdruck eines Flächenelementes nach der Formel

$$\sqrt{r^2 + r^2\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}\cdot dr\,d\varphi$$

des §. 108. Man hat nämlich $\frac{dz}{dr} = tg\,\alpha$, $\frac{dz}{d\varphi} = 0$, folglich das Flächenelement gleich

$$\frac{r\,dr\,d\varphi}{\cos\alpha}.$$

Demnach muß gesetzt werden:

$$\delta\iint\frac{r\,dr\,d\varphi}{\cos\alpha} + h\delta\int\sqrt{r^2d\varphi^2 + \frac{dr^2}{\cos\alpha^2}} = 0,$$

oder

$$\delta\int\frac{\varphi r\,dr}{\cos\alpha} + h\delta\int\sqrt{r^2d\varphi^2 + \frac{dr^2}{\cos\alpha^2}} = 0.$$

Variirt man nach φ, so kommt:

$$\delta\int\frac{\varphi r\,dr}{\cos\alpha} = \int\frac{r\,dr\,\delta\varphi}{\cos\alpha}.$$

Die Variation des Bogens ist schon früher (§. 159.) berechnet. Fügt man dieselbe hinzu, und setzt die unter dem Integralzeichen befindlichen Glieder Null, so findet sich folgende Gleichung

$$\frac{r\,dr}{\cos\alpha} - hd\left(\frac{r^2d\varphi}{ds}\right) = 0.$$

Man setze zur Abkürzung $h\cos\alpha = k$, so giebt die vorstehende Gleichung durch eine erste Integration

$$\frac{r^2 + k^2 - c^2}{2k} - \frac{r^2d\varphi}{ds} = 0,$$

in welcher Formel c eine willkürliche Constante bedeutet. Nun ist

$$ds = \sqrt{r^2d\varphi^2 + \frac{dr^2}{\cos\alpha^2}}.$$

Wird dieser Werth eingesetzt, und weiter entwickelt, so kommt

$$4k^2r^4d\varphi^2 = (r^2 + k^2 - c^2)^2\left(r^2d\varphi^2 + \frac{dr^2}{\cos\alpha^2}\right),$$

also

$$\sqrt{(4k^2r^2 - (r^2 + k^2 - c^2)^2)}\,r\,d\varphi = \frac{(r^2 + k^2 - c^2)dr}{\cos\alpha}.$$

Man bemerke, daß

$$4k^2r^2 - (r^2 + k^2 - c^2)^2 = 4c^2r^2 - (r^2 + c^2 - k^2)^2,$$

und schreibe demnach

$$\cos\alpha\cdot d\varphi = \frac{(r^2+k^2-c^2)dr}{r\sqrt{4c^2r^2-(r^2+c^2-k^2)^2}}.$$

Nun sei $\quad r^2+c^2-k^2=2cr\cdot u \quad$ oder

$$u=\frac{r}{2c}+\frac{c^2-k^2}{2cr},$$

so kommt $\quad du=\left(\frac{1}{2c}-\frac{c^2-k^2}{2cr^2}\right)dr=\frac{r^2+k^2-c^2}{2cr^2}dr,$

und weil $\quad \cos\alpha\cdot d\varphi=\dfrac{\dfrac{r^2+k^2-c^2}{2cr^2}\cdot dr}{\sqrt{1-\left(\dfrac{r^2+c^2-k^2}{2cr}\right)^2}},$

so erhält man $\quad \cos\alpha\cdot d\varphi=\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}},$

folglich durch Integration (m eine willkürliche Constante)

$$\varphi\cos\alpha+m=\arcsin u,$$
$$u=\sin(\varphi\cos\alpha+m),$$
$$r^2+c^2-k^2=2cr\sin(\varphi\cos\alpha+m),$$

oder $\quad r^2-2cr\sin(\varphi\cos\alpha+m)+c^2=k^2,$

die Gleichung der Curve kürzesten Umringes auf dem geraden Kegel. Wird statt m, $m+\frac{1}{2}\pi$ gesetzt, so erhält diese Gleichung die Form:

$$r^2-2cr\cos(\varphi\cos\alpha+m)+c^2=k^2.$$

Einige nachträgliche Zusätze.

Zu §. 45. Es versteht sich, daß man die Gleichung der Tangente auch in der anderen Form, nämlich $u-x=\frac{dx}{dy}(v-y)$, betrachten muß, um diejenigen Asymptoten zu finden, für welche $\frac{dy}{dx}$ unendlich groß, also $\frac{dx}{dy}=0$ wird, und die mithin der Ordinate y parallel sind.

Zu §. 56. Gesetzt man fände für $x=c$ z. B. folgende Zeichenreihe:

c. $\quad + + 0 0 - + 0 0 0 - 0 + - 0 0.$

Alsdann würde man für $c+dc$ folgende Zeichenreihe erhalten, wie aus der Darstellung in §. 56. folgt:

c+dc. $\quad + + + + - + + + + - - + - - - \quad$ 5 Z. W.

indem man da, wo vorhin 0 stand, immer nur das links zunächst stehende Zeichen zu setzen hat. Diese Reihe enthält 5 Zeichenwechsel. Dagegen erhält man an der oberen Grenze $c-dc$ folgende Zeichenreihe:

c—dc. $\quad + + - + - + - + - - + + - + - \quad$ 11 Z. W.

die gebildet wird, wenn man da, wo vorher Nullen standen, abwechselnde Zeichen setzt, und zwar so, daß das statt der ersten Null, von der Linken an, zu setzende Zeichen dem links zunächst stehenden Zeichen entgegengesetzt ist; also so, daß z. B. aus $+00-$ die Zeichenreihe $+-+-$ entsteht, oder aus $+000-$ die Reihe $+-+--$, und aus $-0+$ die Reihe $-++$. Die Reihe für $c-dc$ hat, wie man sieht, 11 Zeichenwechsel; es gehen also bei c $11-5=6$ Zeichenwechsel verloren, und da zugleich $fc=0$, $f'c=0$, also zwei gleiche Wurzel c vorhanden sind, so gehen 4 Zeichenwechsel durch das Verschwinden von Ableitungen verloren; mithin sind vier Wurzeln als fehlend angezeigt. Wenn man die vorstehenden Zeichenreihen genau durchgeht, so wird man hinreichende Beispiele zur Erläuterung der in §. 56. S. 102., Z. 3—27. aufgestellten Sätze finden.

Zu §. 81. S. 148. Z. 3. v. u. Nimmt man in der Curve, deren Tangenten die abwickelbare Fläche erzeugen, drei auf einander folgende Puncte a, b, c, an, und legt durch dieselben eine Ebene, so nähert sich diese Ebene desto mehr der anschließenden Ebene in b, je näher a und c von beiden Seiten an b rücken. Die anschließende Ebene kann mithin als die Ebene der beiden auf einander folgenden unendlich kleinen Sehnen ab und bc, oder auch zweier unendlich nahe auf einander folgender Tangenten angesehen werden. Nach §. 80. aber ist diese Ebene zweier auf einander folgender Tangenten zugleich die Berührungsebene der abwickelbaren Fläche.

Zu §. 99. S. 190. Z. 1. v. o. Um das Integral $\int \frac{d\,cos\,x}{1-cos\,x^2}$ zu finden, darf man nur $cos\,x = z$ setzen, und den Bruch $\frac{1}{1-z^2}$ zerlegen. Man findet

$$\frac{1}{1-z^2} = \tfrac{1}{2}\frac{1}{1+z} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{1-z},$$

mithin $$\int\frac{dz}{1-z^2} = \tfrac{1}{2}\int\frac{dz}{1+z} + \tfrac{1}{2}\int\frac{dz}{1-z} = \tfrac{1}{2}\,log\,\frac{1+z}{1-z},$$

also $$-\int\frac{dz}{1-z^2} = \tfrac{1}{2}\,log\left(\frac{1-z}{1+z}\right) + C,$$

welches der in Zeile 2. zuerst angegebene Ausdruck ist.

Gedruckt bei den Gebr. Unger.

Handbuch
der
Differential- und Integral-Rechnung
und ihrer Anwendungen
auf
Geometrie und Mechanik.

Zunächst
zum Gebrauche in Vorlesungen
herausgegeben
von
Dr. Ferdinand Minding.

Zweiter Theil,
enthaltend die Mechanik.

Mit zwei Figurentafeln.

Berlin 1838,
bei F. Dümmler.

Handbuch
der
theoretischen Mechanik.

Zunächst
zum Gebrauche in Vorlesungen
herausgegeben
von
Dr. Ferdinand Minding.

Mit zwei Figurentafeln.

Berlin 1838,
bei F. Dümmler.

Vorrede zum zweiten Theile.

Dieser Theil enthält eine von den ersten Elementen bis zu einer gewissen Grenze systematisch fortgeführte Darstellung der theoretischen Mechanik, von welcher jedoch die Mechanik der Flüssigkeiten für jetzt noch ausgeschlossen worden ist.

In Betreff der Grundsätze, welche mich bei dieser Arbeit geleitet haben, will ich nur bemerken, daß es allerdings wesentlich darauf ankam, die Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung auf die Mechanik in einem gewissen Umfange zu zeigen; daß es mir jedoch keinesweges bloß um Rechnungen, sondern, und ganz hauptsächlich, um Entwickelung deutlicher Begriffe, um Darlegung des Sinnes und des Zusammenhanges der mechanischen Gesetze zu thun gewesen ist.

Es schien mir passend, einige statische Untersuchungen, welche ich vor längerer Zeit angestellt, und in Crelles Journal (Band 14. und 15.) bereits bekannt gemacht hatte, hier in einer neuen Bearbeitung aufzunehmen. Leser, welche mit der Statik schon anderweitig bekannt sind, werden mir vielleicht darin ihre Zustimmung nicht versagen, daß durch die Einführung des Mittelpunctes der Kräfte in einer Ebene (man sehe §. 11.) die systematische Entwickelung schon in den ersten Elementen nicht unbeträchtlich gefördert wird. Der hauptsächlichste Theil jener Untersuchungen geht von Seite 78 bis 110; außerdem führt noch ihre Verbindung mit dem Gesetze der virtuellen Geschwindigkeiten zu einigen Sätzen, von denen meines Wissens bisher nur einzelne Fälle bekannt waren.

Herr Professor Möbius hat seinerseits ähnliche Untersuchungen angestellt, und ebenfalls zuerst in Crelles Journal (Band 16.) im Auszuge, sodann ausführlicher in seinem vor einigen Monaten erschienenen Lehrbuche der Statik mitgetheilt. Ein solches Zusammentreffen scheint mir jedenfalls zu Gunsten der Sache zu sprechen.

Auf die Statik fester Körper folgt hier, wie in Werken dieser Art gewöhnlich, die Theorie des Seilpolygons und der biegsamen Systeme überhaupt, mit welcher ich sodann die der elastisch-biegsamen in die engste Verbindung gebracht habe. Der Gedanke

hierzu ist eben so einfach, als der Aufklärung der Sache förderlich. Als wichtigstes Ergebniß meiner Untersuchungen über die elastische Feder, von der ich jedoch hier nur Biegungen in einer Ebene betrachtet habe, erlaube ich mir den Seite 150 aufgestellten Satz hervorzuheben, welcher angiebt, wie viele Biegungen einer elastischen Feder, unter den dort vorausgesetzten Umständen, überhaupt möglich sind, d. h. den Bedingungen des Gleichgewichtes genügen. Diese Frage ist, wenn ich nicht irre, bisher noch nicht beantwortet worden; die Lehrbücher, unter denen ich z. B. dasjenige von Poisson nenne, (man sehe die zweite Ausgabe desselben, Band 1. Seite 612) beschränken sich nur darauf, zu untersuchen, in welchen Fällen es unter den möglichen Biegungen eine sehr kleine giebt, wobei die übrigen ganz unbeachtet bleiben. Der erwähnte Satz lehrt hingegen, wie viele Biegungen in jedem Falle möglich sind, es mag darunter eine sehr kleine sein oder nicht.

Die allgemeine Untersuchung über die Bedingungen des Gleichgewichtes folgt, von Seite 165—191, größtentheils der théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes, einer Abhandlung von Poinsot, die man in der sechsten Ausgabe seiner Statik findet. Daß auch die schöne Theorie der Kräftepaare, welche hier nicht fehlen durfte, von diesem um die Mechanik so sehr verdienten Mathematiker herrührt, ist allgemein bekannt. Noch habe ich das Lehrbuch von Poisson, das Résumé de leçons sur l'application de la mécanique von Navier, und den Calcul de l'effet des machines von Coriolis an einigen Stellen benutzt. Das Lesen in der théorie mathématique des effets du jeu de billard, ebenfalls von Coriolis, deren erstes Capitel von der Bewegung einer Kugel auf einer horizontalen Ebene, mit Rücksicht auf Reibung, handelt, veranlaßte mich, über die Bewegung einer Kugel auf einer schiefen Ebene, mit Rücksicht auf Schwere und Reibung, eine Untersuchung anzustellen, die ich der Hauptsache nach hier aufnehmen zu dürfen geglaubt habe.

Berlin im December 1837.

Der Verfasser.

Berichtigungen.

S. 5. Z. 17. v. u. streiche einmal wird.
S. 38. Z. 9. v. u. l. Fig. 7.
S. 39. Z. 13. v. o. statt werden lies worden.
S. 44. Z. 1. v. o. st. Fig. 11. l. Fig. 11. a.
S. 55. Z. 14. v. o. l. $a_1(v_1\Sigma P - \Sigma P y_1)$.
S. 56. Z. 15. v. o. l. des Dreieckes ABC.
Z. 6. v. u. st. ABC l. A, B, C, und st. BCD l. B, C, D.
S. 62. Z. 9. v. u. st. $K = x_1$ l. $GK = x_1$.
S. 65. Z. 7. u. Z. 13. v. u. statt $\int yx\,dx$ l. $\int yx\,dy$.
S. 68. Z. 3. v. o. st. $256a^4q^2$ l. $256a^4q^3$.
S. 70. Z. 3. v. o. st. $AB = \psi'$ l. $CB = \psi'$.
S. 72. Z. 3. v. o. l. positiv.
S. 75. Z. 14. v. o. l. $w\int dV = \int z\,dV$.
S. 82. Z. 13. v. o. l. in einzigen Punct.
Z. 6. v. u. st. denselben l. derselben.
S. 85. Z. 2. v. u. l. $D'a'$, $D''a''$.
S. 86. Z. 16. v. u. st. Man l. Denn man.
S. 92. Z. 1. v. u. st. $-a$, $-b$, $-c$ l. $-a'$, $-b'$, $-c'$.
S. 108. Z. 15. v. o. st. denselben l. demselben.
S. 127. Z. 2. v. o. st. dt l. t.
S. 138. Z. 5. v. u. fehlt im letzten Gliede des Werthes von Q' der Factor a.
S. 141. Z. 10. v. o. l. Paare (Bc, Cc'), (Cd, Dd').
Z. 13. v. o. st. an l. in.
S. 204. Z. 9. v. o. vor einer fehlt in.
S. 205. Z. 6. v. o. vor ein fehlt in.
S. 209. Z. 12. v. o. st. 64 l. 65.
S. 217. Z. 5. v. o. l. $Y = 0$, $Z = 0$.
S. 252. Z. 10. v. u. streiche und 71.
S. 281. Z. 12. v. o. l. $\int xy\,dm = 0$.
S. 307. Z. 14. v. u. streiche um.
S. 308. Z. 2. v. o. nach die fehlt sich.
S. 309. Z. 6. v. o. st. 16. 17. l. 16. a. b.

Im ersten Theile.

S. 9. Z. 5. v. u. l. $\frac{1}{k}\left[\frac{f(x+k)}{\varphi(x+k)}-\frac{fx}{\varphi x}\right]$.
S. 54. Z. 4. und 5. v. u. st. und l. um.
S. 78. Z. 12. v. o. st. $v-y=v_1$ l. $v=v_1$.
S. 117. Z. 3. u. Z. 8. v. u. l. 001112.
S. 132. Z. 10. v. o. fehlt + vor d^2z^2.
S. 135. Z. 3. v. u. im Zähler l. $(d^2y^2+d^2z^2)dx^2$.
S. 137. Z. 3. v. o. l. $\frac{d^2z}{dx^2}$.
S. 163. Z. 10. v. o. st. $-\frac{u}{a}$ l. $+\frac{u}{a}$.
S. 170. Z. 9. v. u. st. $-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$ l. $+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$.
S. 191. Z. 7. v. o. l. $dx=-\frac{du}{e^u}$.
S. 222. Z. 7. v. u. st. $a\sin\varphi$ l. $b\sin\varphi$.
S. 223. Z. 11. v. o. l. so kommt.

Inhalt.

Einleitung.

1. Die Beobachtung läßt uns zwar immer nur relative Ruhe und Bewegung wahrnehmen; es ist aber klar, daß jedem Körper, oder jedem materiellen Puncte, entweder absolute Ruhe oder irgend eine absolute Bewegung zukommt. Von diesen muß Folgendes angenommen werden:

Ein materieller Punct kann nicht aus absoluter Ruhe in Bewegung übergehen, wenn nicht eine von ihm verschiedene Ursache vorhanden ist, welche ihn zur Bewegung bestimmt. Diese Ursache heißt Kraft.

Wirkt eine Kraft auf ~~den ruhenden~~ Punct, so geht derselbe in gerader Linie fort, und zwar mit gleichförmiger Geschwindigkeit, d. h. in gleichen Zeiten gleiche Räume durchlaufend.

Die Richtung, nach welcher der Punct geht, wird nur durch die Kraft selbst bestimmt, und heißt daher die Richtung der Kraft.

Diese Sätze stellen, zusammengenommen, das Gesetz der Trägheit, in Bezug auf absolute Bewegung, dar. Sie lassen sich auch in einen Satz zusammenfassen, von welchem sie nur die Entwickelung sind, nämlich daß die Materie sich gegen absolute Ruhe und Bewegung gänzlich gleichgültig verhält. Dieses Gesetz der Trägheit, in Bezug auf die absolute Bewegung, ist das erste Axiom der Mechanik. Das zweite Axiom betrifft die *relative* Bewegung, und dehnt dasselbe Gesetz der Trägheit auch auf sie aus.

Nämlich der bewegliche Punct (P), welcher so eben im ersten (absoluten) Raume A gedacht wurde, kann auch gedacht werden als enthalten in einem zweiten (relativen) Raume B, welcher mit P zugleich in A beweglich ist. Wird nun P durch die Kraft in Bewegung gesetzt, so stelle man sich vor, daß alle Puncte von B sich mit der nämlichen Geschwindigkeit in der nämlichen Richtung, wie P, fortbewegen; alsdann befindet sich P, während seiner absoluten Bewegung, beständig an dem nämlichen Orte des Raumes B, d. h. P ist in B in *relativer Ruhe*. Als *zweites Axiom* wird nun festgesetzt:

Wirkt eine Kraft auf den im Raume B relativ ruhenden Punct, so erfolgt eine relative Bewegung in B, und zwar genau die *nämliche*, welche Statt finden würde, wenn der Raum B, und mit ihm der Punct P, gar keine absolute Bewegung hätte.

Ein in dem Raume B befindlicher, die absolute Bewegung desselben nicht wahrnehmender, Beobachter wird mithin den Punct P in einer *scheinbar ruhenden geraden Bahn* gleichförmig fortgehen sehen. Während aber P in dieser Bahn fortgeht, *gehen in der That alle Puncte dieser Bahn*, mit der ihnen, wie jedem Puncte von B, zukommenden gleichförmigen Geschwindigkeit, *unaufhörlich im Raume A gerade fort.* Hieraus ergiebt sich sogleich, welche Bewegung der Punct P, durch das Zusammenwirken zweier Kräfte, im absoluten Raume erhält.

Denn man denke sich den Punct, vermöge dieser durch zwei Kräfte veranlaßten Bewegung, aus einem Orte O in einen anderen Ort O′ des absoluten Raumes gelangend, so folgt aus dem eben Gesagten, daß die Gerade OO′ die Diagonale eines Parallelogrammes ist, dessen eine Seite der Weg ist, welchen der Punct in seiner relativen Bahn in B, von O aus, in der Zwischenzeit gleichförmig durchlaufen hat, während die zweite Seite

die von jedem Puncte der Bahn inzwischen durchlaufene Strecke darstellt.

Wirken demnach auf einen Punct zwei Kräfte, in beliebigen Richtungen, gleichviel ob gleichzeitig oder die eine nach der andern; so ziehe man aus dem Orte O, welchen der Punct in dem Augenblicke einnimmt, da die zweite Kraft auf ihn einwirkt, zwei gerade Linien in den *Richtungen der Kräfte*, und zwar jede von O aus nach derjenigen Seite, nach welcher die entsprechende Kraft den Punct hintreibt; nehme auf beiden Geraden zwei Strecken a und b, welche der Punct in *gleichen Zeiten* durchlaufen würde, wenn das eine Mal die eine, das andere Mal die andere Kraft *allein* ihn in Bewegung setzte; vollende aus den Seiten a und b das Parallelogramm, und ziehe aus O die Diagonale OO′; — so bewegt sich der Punct in dieser Diagonale mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort, und gelangt in den Endpunct O′ derselben in dem nämlichen Augenblicke, in welchem er die eine der Strecken a oder b durchlaufen haben würde, wenn er durch die in der Richtung derselben wirkende Kraft *allein*, von O aus, in Bewegung gesetzt worden wäre.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus den beiden aufgestellten Axiomen, oder aus dem für die absolute wie für die relative Bewegung auf gleiche Weise als gültig angenommenen Gesetze der Trägheit.

Da sich zwei gleichförmige Geschwindigkeiten verhalten, wie die in gleichen Zeiten, vermöge ihrer, durchlaufenen Wege, so verhalten sich die Längen der Seiten a und b, und der Diagonale OO′ (d) des Parallelogrammes zu einander, wie die Geschwindigkeiten, welche jede der beiden Kräfte, allein wirkend, und die, welche beide, zusammenwirkend, dem Puncte ertheilen; und mithin stellen diese Linien die ihnen entsprechenden Geschwindigkeiten nicht allein der Richtung, sondern auch der Größe nach dar.

2. Aus der Construction des Parallelogrammes ergeben sich sofort folgende Zusätze, als besondere Fälle:

a) Werden einem Puncte von zwei Kräften die Geschwindigkeiten a und b in der nämlichen Richtung und in dem nämlichen Sinne ertheilt, so bewegt er sich in diesem Sinne mit der zusammengesetzten Geschwindigkeit $a+b$.

b) Ist aber die Geschwindigkeit b der andern a gerade entgegengesetzt, so erhält der Punct die Geschwindigkeit $a-b$, und geht mit dieser in dem Sinne von a oder in dem Sinne von b fort, je nachdem a größer oder kleiner ist als b.

c) Sind endlich beide Geschwindigkeiten einander gleich und entgegengesetzt, so ist die zusammengesetzte Geschwindigkeit Null.

Wirkt also die Kraft P zweimal in demselben Sinne auf den Punct, so ertheilt sie ihm jedesmal die nämliche Geschwindigkeit a, und der Punct erhält die zusammengesetzte Geschwindigkeit 2a. Wirkt überhaupt die Kraft P nmal auf den Punct, jedesmal in demselben Sinne, so erhält der Punct auch die Geschwindigkeit na. Denn diese Behauptung ist richtig für $n=2$; hieraus folgt sie aber wieder für $n=3$, u. s. f. Und es ist, in Bezug auf die zuletzt hervorgehende zusammengesetzte Geschwindigkeit, einerlei, ob die einzelnen P gleichzeitig oder nach einander wirken.

Zwei Kräfte sind von *gleicher Intensität*, oder sie sind einander *gleich*, wenn sie *dem nämlichen Puncte gleiche Geschwindigkeiten* ertheilen. Wirken auf einen Punct gleichzeitig n gleiche Kräfte (P) in gleichem Sinne, so wirkt auf ihn *eine* Kraft, welche die nfache von P ist. Es ertheilt aber, nach dem Vorhergehenden, diese Kraft nP dem Puncte die Geschwindigkeit na, wenn die Kraft P allein ihm die Geschwindigkeit a ertheilt. Hieraus folgt, daß die Intensitäten der Kräfte den Geschwindigkeiten proportional sind, welche sie demselben Puncte mittheilen.

Es seien P und Q die Intensitäten zweier Kräfte, a und b die ihnen proportionirten Geschwindigkeiten, welche jede einzeln, und d die zusammengesetzte Geschwindigkeit, welche beide, zusammen wirkend, dem Puncte ertheilen. Alsdann kann man sich eine dritte Kraft von der Intensität R vorstellen, welche in der Richtung von d allein angebracht, dem Puncte gerade die nämliche Geschwindigkeit d ertheilen würde. Diese Kraft R heißt die *Resultante* von P und Q, so wie P und Q die *Componenten* von R heißen. Da die Kräfte P, Q, R in den Richtungen derjenigen Linien wirken, welche, als Seiten und Diagonale eines Parallelogrammes, die Geschwindigkeiten a, b, d darstellen, und da ihre Intensitäten den Längen dieser Linien proportionirt sind; so stellen dieselben Linien auch die Richtungen der Kräfte und die Verhältnisse ihrer Intensitäten dar. Man erhält also den Satz:

Zwei Kräfte P und Q, an demselben Puncte (*Angriffspuncte*) angebracht, lassen sich allemal durch eine dritte Kraft (Resultante) ersetzen, welche genau das Nämliche wirkt, wie diese Kräfte (Componenten). Zieht man aus dem Orte des Angriffspunctes zwei Linien, welche die Componenten nach Richtung und Größe (Intensität) darstellen, und vollendet aus ihnen das Parallelogramm, so wird wird die Resultante, nach Richtung und Größe, durch die von dem Angriffspuncte ausgehende Diagonale dargestellt.

Dieser Satz führt den Namen des *Parallelogrammes der Kräfte*.

3. Bisher ist nur von einem einzigen frei beweglichen Puncte die Rede gewesen, auf welchen Kräfte wirkten. Sind Kräfte an *verschiedenen* Angriffspuncten gegeben, so kann man ihre Intensitäten keineswegs durch die Geschwindigkeiten messen, welche die Puncte erhalten; vielmehr muß man die Kräfte, deren Intensitäten mit einander verglichen werden, sämmtlich an *einem und demselben* Puncte anbringen, um sie alsdann durch die erzeugten Geschwindigkeiten zu messen. Werden die Intensitäten der Kräfte (oder vielmehr ihre Verhältnisse zu einer beliebig angenommenen Einheit von Kraft) auf diese Weise als bestimmt betrachtet, so können nunmehr die nämlichen Kräfte auf verschiedene Angriffspuncte wirkend gedacht werden. Dabei blei-

ben die Geschwindigkeiten der Angriffspuncte noch unbekannt, wenn auch die Intensitäten der Kräfte als bekannt angesehen werden. Es ist aber für jetzt nicht nöthig, etwas Näheres über die Geschwindigkeiten der verschiedenen Puncte zu sagen.

Mehrere Puncte, die auf irgend eine Weise mit einander verbunden sind, so daß sie sich nicht unabhängig von einander bewegen können, bilden ein System von Puncten.

Wirken auf ein System von Puncten beliebige Kräfte, so sind, nach der eben gegebenen Erklärung, die Bewegungen der Puncte im Allgemeinen von denen verschieden, welche die Puncte, als frei gedacht, erhalten würden. Es müssen folglich noch andere Kräfte, außer den angebrachten, vorhanden sein, welche zu den Bewegungen der Puncte beitragen. Diese Kräfte rühren von der gegenseitigen Verbindung der Puncte her, und werden Widerstände, auch innere Kräfte genannt, im Gegensatze der an dem System beliebig angebrachten Kräfte, welche äußere Kräfte heißen.

Zwischen mehreren, an einem Systeme angebrachten Kräften besteht Gleichgewicht, wenn die Bewegungen, welche durch einige derselben veranlaßt, durch die anderen gerade aufgehoben werden. Es besteht z. B. Gleichgewicht zwischen zwei gleichen und entgegengesetzten, an demselben Puncte angebrachten, Kräften (§. 2. c.).

Man sagt auch, wenn mehrere Kräfte an einem Systeme (oder an einem Puncte, der als das einfachste System betrachtet werden kann) einander Gleichgewicht halten, das System sei, unter diesen Kräften, in Gleichgewicht. Hieraus folgt aber nicht, daß das System sich darum in Ruhe befinden muß; dasselbe kann vielmehr schon irgend eine Bewegung besitzen. Wenn aber mehrere Kräfte das System, in einem Augenblicke, so treffen, daß zwischen ihnen Gleichgewicht besteht, so haben sie keinen Einfluß auf die Bewegung desselben, wenn eine solche vorhanden ist.

§. 4. Das Vorstehende enthält die allgemeinsten Grundlagen der Mechanik. Diese Wissenschaft zerfällt in zwei Theile.

Der erste Theil heißt die Statik. In demselben werden die Bedingungen untersucht, unter denen Kräfte, an einem gegebenen Systeme, einander Gleichgewicht halten; oder es werden auch Kräfte gesucht, welche anderen, an dem Systeme angebrachten Kräften, zwischen denen nicht Gleichgewicht besteht, Gleichgewicht halten. Wenn zwischen den Kräften (P, P', P'', ..) einerseits, und den Kräften (Q, Q', Q'', ..) andererseits, an einem Systeme Gleichgewicht besteht, und wenn wiederum, anstatt der Kräfte (P, P', P'' ..), andere Kräfte (p, p', p'' ...), an demselben Systeme angebracht, den nämlichen Kräften (Q, Q', Q'' ..) Gleichgewicht halten; so sind die Kräfte (P, P', P'' ..) und (p, p', p'' ..) gleichgeltend, oder es lassen sich allemal die einen durch die anderen ersetzen. Nämlich die Bewegungen, welche die Kräfte (P, P' ..), ohne die Kräfte (Q, Q' ..) an dem Systeme angebracht, veranlassen, müssen einerlei sein mit denen, welche durch die Kräfte (p, p' ..) veranlaßt würden, wenn diese allein wirkten; weil sowohl jene als diese Bewegungen sich gegen die durch die Kräfte (Q, Q', Q'' ..) hervorgebrachten Bewegungen, nach der Voraussetzung, gerade aufheben. Die Untersuchung der Bedingungen des Gleichgewichts ist daher zugleich die Untersuchung der Bedingungen, unter welchen mehrere Kräfte (P, P', P'' ..), anderen Kräften (p, p', p'' ..) gleichgelten, oder die Statik hat ebensowohl die eine als die andere zum Gegenstand.

Die Wichtigkeit der Statik beschränkt sich daher keineswegs allein darauf, daß sie die Bedingungen des Gleichgewichtes kennen lehrt; sondern sie ist auch, wenn nicht Gleichgewicht besteht, für die Untersuchung der durch die Kräfte veranlaßten Bewegungen eine nothwendige Vorbereitungs-Wissenschaft. Indem sie nämlich die Regeln angiebt, nach welchen beliebige Kräfte an einem Systeme in andere gleichgeltende zu verwandeln sind, macht sie es möglich, unter diesen Verwandlungen diejenige auszuwählen, welche zur Bestimmung der gesuchten Bewegungen dienlich ist.

Der zweite Theil der Mechanik wird die **Mechanik im engeren Sinne**, oder auch die **Dynamik** genannt. Derselbe beschäftigt sich mit den durch die Kräfte veranlaßten Bewegungen.

Statik.

Statik.

Kräfte an einem Puncte.

5. Wirken an einem Puncte A zwei Kräfte P, Q, nach Richtung und Größe dargestellt durch die Linien AB, AC (Fig. 1.); so wird ihre Resultante R durch die Diagonale AD des Parallelogrammes ABDC, nach Richtung und Größe dargestellt (§. 2.). Bringt man an A eine der R gleiche und entgegensetzte Kraft (AE) an, so hält diese den Kräften P und Q Gleichgewicht, weil sie der ihnen gleichgeltenden Resultante Gleichgewicht hält.

Da AE=AD, so verhält sich, wie leicht zu sehen (Fig. 1.),

$$AE:AC:AB = \sin(CAB):\sin(EAB):\sin(EAC);$$

d. h. drei Kräfte, die um einen Punct im Gleichgewichte sind, verhalten sich zu einander der Reihe nach, wie die Sinus der von den jedesmaligen beiden andern eingeschlossenen Winkel.

Hieraus folgt auch:

$$AC\cdot AB\cdot\sin(CAB) = AB\cdot AE\cdot\sin(BAE) = AE\cdot AC\cdot\sin(EAC)$$

oder, wenn man sich in Fig. 1. die Geraden EC, CB, BE gezogen denkt,

$$\Delta ABC = \Delta BAE = \Delta EAC,$$

d. h. stellen die Linien AB, AC, AE drei um einen Punct im Gleichgewichte befindliche Kräfte dar, und werden ihre Endpuncte B, C, E durch Gerade verbunden, so sind die hierdurch entstehenden drei Dreiecke, welche A zur gemeinsamen Spitze haben, einander an Flächeninhalt gleich.

Sind der Kräfte mehr als zwei, so kann man zuerst zwei derselben mit einander, sodann ihre Resultante mit einer dritten Kraft zusammensetzen u. s. f., bis die Resultante aller an A angebrachten Kräfte gefunden ist. Bei drei Kräften, deren Richtungen nicht in eine Ebene fallen, wird die Resultante dargestellt durch die Diagonale des Parallelepipedums, dessen Seiten die Kräfte darstellen.

Für eine beliebige Anzahl von Kräften gilt folgender Satz: Es seien AB, AC, AD, ... AF Linien, welche die an A angebrachten Kräfte darstellen. Aus dem Endpuncte B der einen, AB, ziehe man, in dem Sinne von AC, eine der AC parallele und gleiche Linie BC'; ferner aus C', in dem Sinne von AD, eine der AD parallele und gleiche, C'D', u. s. f., wodurch eine gebrochene Linie ABC'D' .. F' erhalten wird. Verbindet man nun den Anfangspunct A dieser gebrochenen Linie mit dem Endpuncte F', so stellt AF' die Resultante aller Kräfte dar. Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich leicht aus dem Parallelogramm der Kräfte. Für zwei Kräfte (AB, AC, Fig. 1.) wäre ABD die gebrochene Linie, mithin AD die Resultante. Soll insbesondere zwischen allen Kräften Gleichgewicht bestehen, so muß die Resultante AF' Null sein, oder die gebrochene Linie ABC'D' .. F' ein geschlossenes Vieleck bilden.

So wie man mehrere Kräfte an einem Puncte durch ihre Resultante ersetzen kann, so läßt sich auch umgekehrt eine Kraft durch mehrere andere ersetzen, von denen sie die Resultante ist. Nimmt man irgend drei Richtungen an, die nur nicht alle einer Ebene parallel sein dürfen, so läßt sich jede gegebene Kraft R in drei diesen Richtungen parallele Componenten zerlegen, und zwar nur auf eine Weise. Nämlich die Componenten sind die, im Angriffspuncte von R zusammenstoßenden, der Richtung nach gegebenen, Seiten eines Parallelepipedums, dessen Diagonale R ist, und dadurch offenbar völlig bestimmt.

Will man bei der Zusammensetzung mehrerer Kräfte an einem gemeinsamen Angriffspuncte, Rechnung anwenden, so ist es zweckmäßig, jede Kraft zuerst nach drei willkürlich angenommenen Richtungen zu zerlegen. Denn alsdann lassen sich alle in die nämliche Richtung fallenden Componenten in eine einzige Kraft vereinigen, welche ihrer Summe gleich ist, und werden die so erhaltenen drei Summen oder Kräfte wieder in eine zusammengesetzt, so ist diese die gesuchte Resultante. Um die einfachsten Formeln zu erhalten, wählt man gewöhnlich drei auf einander senkrechte Richtungen der Zerlegung, wie auch im Folgenden geschehen soll.

Die bei dieser Rechnung erforderlichen, besonders die analytische Bestimmung der Lage gerader Linien betreffenden, Sätze, sind in dem ersten Theile dieses Handbuches, wo von den Anwendungen der Differential-Rechnung auf die Geometrie die Rede war, als dem Leser bekannt, mit Recht vorausgesetzt worden. Denn ihre Herleitung bedarf der Hülfe der Differential-Rechnung nicht, und sollte, nach der sachgemäßen Ordnung, dem Studium derselben schon vorausgegangen sein. Indessen mögen, für einige Leser, jene Sätze, mit ihren Beweisen, hier noch nachträglich eine Stelle finden.

6. Fällt man aus zwei Puncten A, B einer der Lage nach gegebenen geraden Linie (Fig. 2.) die Lothe AC, BD auf eine zweite, beliebig im Raume gegebene Gerade, so heißt das zwischen den Endpuncten der Lothe enthaltene Stück (CD) der zweiten Geraden die senkrechte Projection, oder im Folgenden schlechthin die Projection von AB.

a. Bezeichnet man die Neigung der Geraden AB gegen ihre Projection CD mit α, und setzt $AB = l$, $CD = p$, so ist $p = l \cdot \cos\alpha$.

Zum Beweise ziehe man aus A eine Gerade AE (Fig 2.) parallel mit CD, fälle aus B ein Loth BF auf die Ebene ACD, ziehe FD, welche von AE in E geschnitten wird, und verbinde B mit E. Nach einem aus den Elementen der Stereometrie bekannten Satze ist der Winkel CDF ein rechter, mithin auch, weil AE parallel CD, $\angle$AEF ein rechter, woraus folgt, daß auch AEB ein rechter Winkel ist. Da CDEA ein Rechteck, so ist auch CD=AE. In der Voraussetzung liegt ferner, daß $\angle$BAE$=\alpha$ ist, und man hat AE=AB$\cdot\cos\alpha$, folglich auch CD=AB$\cdot\cos\alpha$, oder $p=l\cos\alpha$, w. z. b. w.

Hieraus folgt noch, daß die Projectionen einer Geraden auf zwei einander parallele Linien, einander gleich sind.

b. Bei dem Gebrauche der Projectionen muß auch der Sinn unterschieden werden, in welchem die zu projicirende Linie zu nehmen ist. Ist z. B. in Fig. 2. die Neigung der Linie AB gegen die Projections-Linie (Axe) gleich α, so ist die Neigung der nämlichen Linie, im entgegengesetzten Sinne genommen, also BA, gegen die in unverändertem Sinne genommene Projections-Axe, gleich $\pi-\alpha$; also ist CD$=l\cdot\cos\alpha$ die Projection von AB, und DC$=l\cos(\pi-\alpha)=-l\cos\alpha$ die Projection von BA. Man setze allemal zuerst fest, welcher Sinn in der Projections-axe der positive sein soll, und wähle für die Neigung der AB gegen die Axe denjenigen Winkel, welchen AB mit einer der Axe parallelen und vom Anfangspuncte A im positiven Sinne ausgehenden Geraden AE bildet, betrachte auch die Länge l von AB immer als positiv; so stellt der Ausdruck $l\cos\alpha$ die Projection von AB auf die Axe nicht allein der Größe nach, sondern auch, durch sein Zeichen, den Sinn derselben dar. Ist α spitz, so ist die Projection positiv, ist α stumpf, so ist sie negativ. Diese Zeichen sind wesentlich zu beachten, sobald mehrere Linien auf dieselbe Axe projicirt werden. Man kann indessen auch, wenn AB$=l$ positiv ist, die Länge von BA$=-l$ oder negativ setzen, muß aber alsdann den Winkel α in beiden Fällen als den nämlichen betrachten. Denn hierdurch verwandelt sich der Werth ($l\cos\alpha$) der Projection von AB, für die von BA in $-l\cos\alpha$, wie erforderlich ist. Obgleich die zuerst angegebene Betrachtungsweise vor dieser manche Vorzüge hat, so bedient man sich doch häufig auch der letztern, namentlich wenn die projicirten Linien Coordinaten sind, welche sowohl positiv, wie negativ genommen zu werden pflegen.

c. Wird eine Gerade AB$=l$ auf drei gegen einander senkrechte Axen projicirt, so ist die Summe der Quadrate ihrer Projectionen dem Quadrate ihrer Länge gleich.

Denn man ziehe aus dem Anfange A von AB drei Gerade parallel mit den Axen, und projicire auf sie die AB, so sind die Projectionen jenen auf die anfänglichen Axen, der Reihe nach, gleich, und bilden offenbar die Kanten eines rechtwinklichen Parallelepipedums, dessen Diagonale AB ist. In einem solchen ist aber das Quadrat der Diagonale gleich der Summe der Quadrate dreier zusammenstoßender Kanten; woraus das Behauptete folgt.

Nennt man demnach α, β, γ die Winkel, welche AB mit den Projections-Axen bildet, und sind mithin $l\cos\alpha$, $l\cos\beta$, $l\cos\gamma$ die Projectionen von AB, so hat man:

$$l^2=l^2\cos\alpha^2+l^2\cos\beta^2+l^2\cos\gamma^2,$$

folglich

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1. \qquad \text{A.}$$

Also: Die Summe der Quadrate der Cosinus der Winkel, welche eine Gerade mit drei auf einander senkrechten Axen bildet, ist der Einheit gleich.

d. Es sei eine zusammenhängende gebrochene Linie (sie heiße ABCD) gegeben. Werden die einzelnen geraden Stücke derselben, AB, BC, CD, in dem durch die Folge der Buchstaben angedeuteten Sinne genommen, auf eine beliebige Axe projicirt, so ist die Summe ihrer Projectionen, mit gehöriger Rücksicht auf deren Zeichen, gleich der Projection der die Endpuncte der gebrochenen Linie verbindenden AD, auf die nämliche Axe. Bildet die gebrochene Linie ein geschlossenes Vieleck, so ist die Summe der Projectionen aller Seiten, auf eine beliebige Axe, Null.

e. Die gebrochene Linie bestehe aus zwei Stücken AB$=l$, BD$=l'$ (Fig. 1.). Man denke sich drei auf einander senkrechte Axen, x, y, z, mit welchen l der Reihe nach die Winkel α, β,

γ; l' die Winkel α', β', γ' bilde; so daß $l\cos\alpha$, $l\cos\beta$, $l\cos\gamma$ und $l'\cos\alpha'$, $l'\cos\beta'$, $l'\cos\gamma'$ die Projectionen von l und l' auf die Axen x, y, z, und mithin, nach d),

$$l\cos\alpha + l'\cos\alpha',\ l\cos\beta + l'\cos\beta',\ l\cos\gamma + l'\cos\gamma'$$

die Projectionen der gebrochenen Linie, auf diese Axen, sind. Es sei noch $AD = r$, und λ, μ, ν die Neigungen von AD gegen die Axen, also $r\cos\lambda$, $r\cos\mu$, $r\cos\nu$ die Projectionen von AD; so hat man:

$$r\cos\lambda = l\cos\alpha + l'\cos\alpha'$$
$$r\cos\mu = l\cos\beta + l'\cos\beta'$$
$$r\cos\nu = l\cos\gamma + l'\cos\gamma'.$$

Addirt man die Quadrate dieser Gleichungen, und setzt, wegen A.,

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,\ \cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2 = 1,$$
$$\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2 = 1,$$

so kommt:

$$r^2 = l^2 + l'^2 + 2ll'(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma').$$

Aus dem Anfange A der gebrochnen Linie ABD werde AC parallel mit BD und in dem Sinne von BD gezogen (Fig. 1.), so ist $\angle CAB$ die Neigung der Geraden AB, BD, gegen einander. Es sei $\angle CAB = i$, mithin $ABD = \pi - i$, und

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2AB \cdot BD \cdot \cos i,$$

oder $$r^2 = l^2 + l'^2 + 2ll'\cos i.$$

Dieser Werth von r^2, mit dem vorigen verglichen, giebt die Formel:

$$\cos i = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma', \quad \text{B.}$$

durch welche die gegenseitige Neigung zweier Geraden, aus ihren Neigungen gegen die Axen, gefunden wird. Daß diese Geraden einander nicht zu schneiden brauchen, versteht sich von selbst; denn es kommt hier überhaupt nur auf ihre Richtung, nicht auf ihren Ort im Raume an. Sind z. B. beide einander parallel, und werden sie in gleichem Sinne genommen (also z. B. auch,

wenn BD die Verlängerung von AB ist), so ist $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ und $i = 0$, wodurch wieder die Formel A erhalten wird. Sind sie zwar parallel, aber dem Sinne nach entgegengesetzt, so ist $\alpha = \pi - \alpha'$, $\beta = \pi - \beta'$, $\gamma = \pi - \gamma'$ und $i = \pi$. Stehen sie senkrecht auf einander, so ist $i = \frac{1}{2}\pi$, und

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0,$$

eine häufig vorkommende Bedingungsgleichung.

f. Durch den Anfang O senkrechter Coordinaten-Axen ziehe man eine beliebige Gerade OQ, setze in jeder dieser Linien den Sinn fest, welcher der positive sein soll, und nenne α, β, γ die Winkel, welche OQ mit den Axen x, y, z, der Reihe nach bildet; wobei alle Linien im positiven Sinne zu nehmen sind. Ferner werde im Raume ein Punct P beliebig gewählt; es seien x, y, z seine Coordinaten, mithin $x\cos\alpha$, $y\cos\beta$, $z\cos\gamma$ die Projectionen derselben auf OQ, in deren Ausdrücken x, y, z mit ihren Zeichen zu nehmen sind (vgl. b.). Denkt man sich die Coordinaten von P in eine von O nach P gehende gebrochene Linie (OP) zusammengesetzt, und nennt man q die Projection von OP auf OQ, welche positiv oder negativ ist, je nachdem sie, von O aus, auf OQ im positiven oder negativen Sinne fortgeht, so hat man:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = q, \qquad \text{C.}$$

zugleich auch

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1.$$

Der Ort aller Puncte P, für welche in der Gleichung C. α, β, γ, q ungeändert bleiben, während x, y, z verändert werden, ist offenbar eine Ebene, welche senkrecht auf OQ, in dem Abstande $= q$ vom Anfange der Coordinaten, steht. Ist also die Gleichung einer Ebene in der Form:

$$ax + by + cz = k$$

gegeben, so setze man zuerst $m = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, dividire die Gleichung mit m, und vergleiche sie mit der Formel C., so ergiebt sich:

$$\cos\alpha = \frac{a}{m}, \quad \cos\beta = \frac{b}{m}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{m}, \quad q = \frac{k}{m}.$$

Hierdurch ist die Richtung der Normale der Ebene bestimmt; doch bleibt das Zeichen der Wurzelgröße m zweideutig, so lange nicht festgesetzt ist, welcher Sinn, in der Normale, der positive sein soll.

Soll nun die gegenseitige Neigung zweier Ebenen gefunden werden, so ist klar, daß man dafür die gegenseitige Neigung ihrer Normalen setzen kann. Sind also $ax + by + cz = k$ und $a'x + b'y + c'z = k'$ die Gleichungen der Ebenen, und i ihre Neigung, so setze man $\cos\alpha = \frac{a}{m}$, u. s. f., eben so $\cos\alpha' = \frac{a'}{m'}$, $\cos\beta' = \frac{b'}{m'}$, $\cos\gamma' = \frac{c'}{m'}$, $m' = \pm\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}$, wodurch die Neigungen der Normalen gegen die Axen bestimmt werden. Setzt man ferner die Werthe dieser Cosinus in die Formel B., so kommt für die gegenseitige Neigung der Normalen, oder für die der Ebenen:

$$\cos i = \frac{aa' + bb' + cc'}{mm'},$$

in welchem Ausdrucke noch eine Zweideutigkeit von Seiten der Zeichen übrig ist, die auch nothwendig Statt finden muß, weil die Neigung der Ebenen oder ihrer Normalen eben so gut ein spitzer als ein stumpfer Winkel ist. Diese Zweideutigkeit wird beseitigt, wenn der Sinn festgesetzt ist, in welchem jede der Normalen genommen werden soll.

Im Folgenden wird von diesen Sätzen sehr häufig, ohne weitere Erinnerung, Gebrauch gemacht werden.

7. Die Intensität einer Kraft werde immer als eine positive Größe gedacht. Stellt man ferner mehrere an einem gemeinsamen Angriffspuncte A wirkende Kräfte durch Linien dar, so versteht sich, daß man jede Linie, von A aus, nur nach einer Seite ziehen muß, und zwar entweder jede nach der, nach wel-

cher die Kraft den Punct zu bewegen strebt, oder jede nach der entgegengesetzten. Nach der ersten Art werden die Kräfte durch die Linien als ziehend, nach der zweiten als stoßend dargestellt. Es ist einerlei, welche dieser Annahmen gemacht wird, nur muß man bei der einmal gewählten bleiben. Werden nun durch A drei auf einander senkrechte Axen x, y, z gelegt, und auf sie die Linien AB, AC..., welche die Kräfte P, P'... darstellen, projicirt, so stellen die Projectionen, nach Größe und Zeichen, die Componenten der Kräfte dar. Nennt man also α, β, γ die Neigungen der Linie AB, welche die Kraft P darstellt, gegen die im positiven Sinne genommenen Axen, so sind $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$ die Componenten von P. Auf ähnliche Weise seien α', β', γ' die Neigungen von P' gegen die Axen, mithin $P'\cos\alpha'$, $P'\cos\beta'$, $P'\cos\gamma'$ die Componenten von P'; u. s. f. Wird die Summe aller in die Axe x fallenden Componenten mit X bezeichnet, so ist

$$X = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots$$

oder kürzer $\quad X = \Sigma P\cos\alpha.$

Werden eben so die Componenten nach y in eine Summe Y, und die nach z in eine Summe Z vereinigt, so hat man

$$Y = P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots$$
$$Z = P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \ldots$$

oder $\quad Y = \Sigma P\cos\beta, \; Z = \Sigma P\cos\gamma.$

Es sei R die Resultante der Kräfte P, P', P'',... und λ, μ, ν ihre Neigungen gegen die Axen, also $R\cos\lambda$, $R\cos\mu$, $R\cos\nu$ die Componenten von R nach den Axen, so folgt unmittelbar:

$$R\cos\lambda = X, \; R\cos\mu = Y, \; R\cos\nu = Z.$$

Addirt man die Quadrate dieser Ausdrücke, so kommt

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad \text{und} \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

wo der Wurzel das positive Zeichen zu geben ist. Die Richtung und der Sinn der Resultante, deren Intensität hierdurch bekannt ist, werden durch die Formeln:

$$\cos\lambda = \frac{X}{R},\quad \cos\mu = \frac{Y}{R},\quad \cos\nu = \frac{Z}{R}$$

ohne Zweideutigkeit bestimmt.

Setzt man in den Ausdruck für R^2, statt X, Y, Z ihre Werthe $\Sigma P \cos\alpha, \cdots$ ein, so ergiebt sich die Intensität der Resultante unmittelbar ausgedrückt durch die Kräfte $P, P' \cdots$ und ihre gegenseitige Neigungen, welche sich mit (PP'), $(P'P'')$ u. s. f. am deutlichsten bezeichnen lassen. Man findet nämlich, bei gehöriger Anwendung der Formeln A. und B. des vorigen §., wenn z. B. nur drei Kräfte P, P', P'' gegeben sind:

$$R^2 = P^2 + P'^2 + P''^2 + 2PP' \cos(PP') + 2P'P'' \cos(P'P'') + 2P''P \cos(P''P),$$

d. h. das Quadrat der Resultante ist gleich der Summe der Quadrate aller Kräfte, vermehrt um die doppelte Summe der Producte, welche man erhält, indem man jede Kraft mit jeder andern, und ihr Product in den Cosinus ihrer gegenseitigen Neigung, multiplicirt.

Dieser Satz gilt für jede beliebige Anzahl von Kräften.

Soll insbesondre zwischen den Kräften Gleichgewicht bestehen, so muß die Resultante R Null sein. Da nun die Resultante die Diagonale eines Parallelepipedums ist, dessen Seiten die Componenten X, Y, Z sind, und die Diagonale nie Null wird, wenn nicht die Seiten des Parallelepipedums einzeln Null sind; so folgt, daß die Componenten einzeln Null sein müssen. Dieser Schluß würde auch gelten, wenn man die Kräfte nicht nach senkrechten, sondern nach schiefen Axen, zerlegt hätte. Man erhält also

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0$$

oder $\quad \Sigma P \cos\alpha = 0,\ \Sigma P \cos\beta = 0,\ \Sigma P \cos\gamma = 0,$

als die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Gleichgewichtes.

§. 8. Es werde jetzt angenommen, daß der Angriffspunct sich auf einer unbeweglichen Fläche befindet, von welcher er sich zwar entfernen kann, die ihm aber kein Eindringen gestattet. Wirken auf ihn gleichzeitig die Kräfte $P, P', P'' \cdots$, so setze man dieselben zuerst in eine einzige Resultante R zusammen, und zerlege diese sodann in eine auf der Fläche normale und eine der Berührungsebene parallele Seitenkraft. Der letzteren setzt die Fläche keinen Widerstand entgegen; in Hinsicht auf die erste sind zwei Fälle möglich; entweder nämlich die normale Kraft drückt den Punct gegen die Fläche, oder sie treibt ihn, sich in der Richtung der Normale von der Fläche zu entfernen. In dem zweiten dieser Fälle ist es offenbar eben so, als ob die Fläche gar nicht vorhanden, oder der Punct frei beweglich wäre. Im ersten Falle aber, wenn der Punct gegen die Fläche gedrückt wird, welche ihm kein Eindringen gestattet, wird der normale Druck durch einen gleichen und entgegengesetzten von der Fläche dargebotenen Widerstand aufgehoben. Soll also Gleichgewicht bestehen, so muß die tangentiale Componente von R Null sein, und die Kraft R muß den Punct normal gegen die Fläche drücken. Um diese Bedingungen analytisch darzustellen, nenne man die Intensität des normalen Widerstandes N, und λ, μ, ν die Winkel, welche die Richtung desselben mit den Axen bildet, zerlege ferner die Kraft R nach den Axen in die drei Componenten X, Y, Z; so muß, für das Gleichgewicht, sein:

$$X + N\cos\lambda = 0,\quad Y + N\cos\mu = 0,\quad Z + N\cos\nu = 0. \qquad 1.$$

Bezeichnet man die Gleichung der Fläche durch $L = 0$, so sind

$$\frac{u - x}{\frac{dL}{dx}} = \frac{v - y}{\frac{dL}{dy}} = \frac{w - z}{\frac{dL}{dz}}$$

die Gleichungen ihrer Normale. Wird ferner zur Abkürzung

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2 = U^2$$

gesetzt, so hat man, für die Neigungen der Normale gegen die

Axen x, y, z die Ausdrücke:

$$\cos\lambda = \frac{1}{U}\cdot\frac{dL}{dx},\quad \cos\mu = \frac{1}{U}\cdot\frac{dL}{dy},\quad \cos\nu = \frac{1}{U}\cdot\frac{dL}{dz},\qquad 2.$$

in welchen aber das Zeichen der Wurzelgröße U noch zweideutig ist. Die Bedingungen des Gleichgewichtes gehen demnach in folgende Gleichungen über:

$$X + \frac{N}{U}\cdot\frac{dL}{dx} = 0,\quad Y + \frac{N}{U}\cdot\frac{dL}{dy} = 0,\quad Z + \frac{N}{U}\cdot\frac{dL}{dz} = 0.\qquad 3.$$

Wird aus diesen drei Gleichungen der Quotient $\frac{N}{U}$ weggeschafft, so kommt:

$$\frac{X}{\frac{dL}{dx}} = \frac{Y}{\frac{dL}{dy}} = \frac{Z}{\frac{dL}{dz}},\qquad 4.$$

welche Gleichungen nichts anderes besagen, als daß die Resultate der Kräfte X, Y, Z auf der Fläche normal ist. Sind die Componenten X, Y, Z als Functionen der Coordinaten x, y, z ihres Angriffspunctes gegeben, so wird durch diese beiden Gleichungen, in Verbindung mit $L=0$, der Ort bestimmt, in welchem der Punct, unter der Wirkung der gegebenen Kräfte, auf der Fläche ruhen kann, oder überhaupt der Ort, in welchem diese Kräfte, wenn sie ihn während der Bewegung treffen, keinen Einfluß auf die Bewegung haben. Dazu gehört aber, daß die Kraft R ihn gegen die Fläche drücke, nicht aber ihn von derselben zu entfernen strebe, und diese Bedingung ist in den vorstehenden Gleichungen nicht enthalten. Um hierüber zu entscheiden, entwickele man aus 4. mit Hülfe der Gleichung $L=0$, zuerst die Werthe von x, y, z, so werden dadurch zugleich die entsprechenden Werthe von X, Y, Z, $\frac{dL}{dx}$, $\frac{dL}{dy}$, $\frac{dL}{dz}$, mithin auch U, bis auf das Zeichen, bekannt. Diese Werthe setze man in die Gleichungen 3. ein, und bestimme das Zeichen von U so, daß der Werth von N positiv werde, was immer möglich und erforderlich ist. Alsdann sind auch die Größen $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ nach 2., bekannt, und mithin die Richtung des Widerstandes vollständig bestimmt. Am klarsten ist es nun, sich die Fläche als eine unendlich dünne Schaale zu denken, und zunächst anzunehmen, daß der Punct sowohl innerhalb als außerhalb der Schaale sich befinden kann. Die gefundenen Werthe von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ lehren alsdann, indem sie die Richtung des Widerstandes angeben, auf welcher Seite der Fläche der Punct sich befinden muß, um durch den Widerstand derselben in Ruhe gehalten zu werden. Soll sich nun der Punct z. B. bloß auf der äußeren Seite befinden, so wird man diejenigen Auflösungen verwerfen, nach welchen er sich auf der inneren Seite befinden müßte.

Es sei z. B. die Fläche eine Kugel, und die auf den Punct wirkende Kraft die Schwere, so ist klar, daß der Punct, wenn die Kugelfläche als eine unendlich dünne Schaale gedacht wird, oben auf der Kugel außerhalb, unten innerhalb der Schaale ruhen kann. Dieses zeigt nun die Rechnung auf folgende Art:

Man nehme den Mittelpunct zum Anfange der Coordinaten, die Axen x, y horizontal, die z vertical und positiv nach oben. Der Halbmesser sei a, also die Gleichung der Kugel

$$L = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

Für die auf den Punct wirkende Kraft kann man sein Gewicht p setzen. Die Richtung derselben bildet mit den Axen x, y, z der Reihe nach die Winkel α, β, γ, deren Cosinus 0, 0, -1 sind; also $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = -1$, und mithin $X=0$, $Y=0$, $Z=-p$. Ferner ist $\frac{dL}{dx} = 2x$, $\frac{dL}{dy} = 2y$, $\frac{dL}{dz} = 2z$; daher gehen die Gleichungen 4. über in

$$\frac{0}{2x} = \frac{0}{2y} = \frac{-p}{2z},$$

und hieraus folgt $x=0$, $y=0$, mithin $z=\pm a$. Auch ist $U=\pm 2a$.

Von den Gleichungen 3. fallen die beiden ersten von selbst weg, weil $X=0$, $Y=0$, $\frac{dL}{dx}=0$, $\frac{dL}{dy}=0$; die letzte giebt, für $z=\pm a$, $\frac{dL}{dz}=\pm 2a$, und mithin

$$-p+\frac{N}{\pm 2a}\cdot 2a=0,$$

folglich $U=+2a$, und $N=p$. Also ist (nach 2.) $\cos\lambda=0$, $\cos\mu=0$, $\cos\nu=+1$; der Widerstand N wirkt mithin parallel der Axe z aufwärts. Der Punct befindet sich nun, weil $z=+a$, oben auf der Kugelschaale, und da der Widerstand N ihn hindert abwärts zu gehen, so muß die Fläche unterhalb des Punctes gedacht werden, oder der Punct sich außerhalb der Kugelschaale befinden.

Setzt man aber $z=-a$, so befindet sich der Punct unten an der Kugel. Alsdann giebt die dritte der Gleichungen 3.:

$$-p-\frac{N}{\pm 2a}\cdot 2a=0,$$

folglich $U=-2a$, $N=p$, und mithin, nach 2., $\cos\lambda=0$, $\cos\mu=0$, $\cos\nu=+1$ $\left(\text{weil } \frac{dL}{dz}=-2a\right)$. Der Widerstand wirkt also wieder aufwärts, oder die Fläche muß sich wieder unterhalb des Punctes befinden, d. h. der Punct muß innerhalb der Kugelschaale liegen.

Der Leser wird aus diesem Beispiele entnehmen, daß die Rechnung allemal die Richtung und den Sinn des Widerstandes deutlich anzeigt, woraus sich sodann schließen läßt, auf welcher Seite der Fläche sich der Punct befinden muß, da der Sinn des Widerstandes immer von der Fläche nach dem Puncte geht.

Im Vorhergehenden ist angenommen, daß der Punct sich ohne Widerstand von der Fläche entfernen kann. Er kann aber auch unbedingt auf derselben zu bleiben gezwungen sein. Alsdann kann man sich statt der Fläche zwei überall gleich und unendlich wenig von einander abstehende Schaalen vorstellen, zwischen welchen der Punct sich befindet. In diesem Falle findet jede normale Kraft, in welchem Sinne sie auch wirke, einen Widerstand, der ihr Gleichgewicht hält; wirkt eine tangentiale Kraft auf den Punct, so ist derselbe im ersten Augenblicke nicht gehindert, nach der Richtung derselben fortzugehen, und muß also in diesem Sinne sich zu bewegen anfangen; wie er dann weiter gehen wird, ist hier nicht zu untersuchen. Wenn also Gleichgewicht bestehen soll, so muß die Resultante aller auf den Punct wirkenden Kräfte auf der Fläche normal sein. Die Bedingungen des Gleichgewichtes sind daher die nämlichen wie vorhin. Und zwar ist jede Auflösung, welche den Gleichungen 4. in Verbindung mit der Gleichung $L=0$ genügt, zulässig, da der Widerstand in der Normale sowohl in dem einen als in dem andern Sinne Statt finden kann.

9. Ist der Angriffspunct auf einer Curve beweglich, so hat man zwischen seinen Coordinaten zwei Gleichungen, die durch $L=0$ und $M=0$ bezeichnet seien. Jede derselben drückt eine Fläche aus, auf welcher der Punct sich befindet, und welche seinem Eindringen einen gewissen normalen Widerstand entgegensetzen wird. Der Punct befindet sich also unter dem Einflusse zweier Widerstände, die man aber in jedem Augenblicke in einen einzigen N zusammensetzen kann, dessen Richtung in die Normal-Ebene der Curve fallen muß. Bezeichnet man mit λ, μ, ν die Neigungen von N gegen die Axen, und bemerkt, daß die Gleichungen der Tangente an der Curve folgende:

$$\frac{u-x}{dx}=\frac{v-y}{dy}=\frac{w-z}{dz},$$

und mithin die Cosinus der Neigungen der Tangente gegen die Axe folgende sind: $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, so ergiebt sich, weil die Richtung von N senkrecht auf der Tangente steht, die Gleichung:

$$\cos\lambda\frac{dx}{ds}+\cos\mu\frac{dy}{ds}+\cos\nu\frac{dz}{ds}=0. \qquad 1.$$

Ferner ist, für das Gleichgewicht, erforderlich, daß sei:

$$X + N \cos\lambda = 0,\quad Y + N \cos\mu = 0,\quad Z + N \cos\nu = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit dx, dy, dz und addirt die Producte, so kommt, wegen 1.

$$X dx + Y dy + Z dz = 0. \qquad 2.$$

Werden aus dieser Gleichung die Differentialverhältnisse $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ weggeschafft, deren Werthe sich aus den Gleichungen der Curve ergeben, so geht dieselbe in eine endliche Gleichung zwischen x, y, z über, welche in Verbindung mit den Gleichungen der Curve, den Ort des Gleichgewichtes bestimmt. Hierbei finden übrigens noch die nämlichen Unterscheidungen Statt, wie bei den Flächen, je nachdem sich der Punct von der Curve entfernen kann oder nicht; es wird aber in jedem Falle der Sinn des normalen Widerstandes durch die Rechnung genau bestimmt, wonach dann das Uebrige beurtheilt werden kann, wie bei den Flächen.

Kräfte an einem festen Systeme.

10. Zwei Puncte sind mit einander fest verbunden, wenn ihre gegenseitige Entfernung ungeändert bleibt, welche Kräfte auch an ihnen angebracht werden. Ein System, dessen Puncte fest mit einander verbunden sind, heiße ein festes System. Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß es ein unbedingt festes System, oder einen unbedingt festen Körper, in der Natur nicht giebt; ~~dessen ungeachtet~~ können die Bedingungen des Gleichgewichtes an einem festen Systeme Gegenstand einer theoretischen, auch auf Körper der Natur in vielen Fällen anwendbaren, Untersuchung sein. Diese Untersuchung setzt einen höchst einfachen Grundsatz voraus, der sogleich angegeben werden soll. Zur Abkürzung nenne man zwei Kräfte, welche in der Richtung der geraden Linie zwischen ihren Angriffspuncten, die eine im entgegengesetzten Sinne der andern, wirken, einander entgegengerichtet. Entgegengerichtete Kräfte sind also allemal einander parallel und entgegengesetzt; aber die Umkehrung dieses Satzes gilt im Allgemeinen nicht. Der Grundsatz, auf welchem die Lehre von dem Gleichgewichte an einem festen Systeme beruht, ist nun folgender:

Zwei gleiche und entgegengerichtete Kräfte, und nur zwei solche, an fest verbundenen Puncten angebracht, halten einander Gleichgewicht.

Es wird an einer anderen Stelle dieses Buches von diesem Grundsatze noch die Rede sein; hier mag nur folgende Bemerkung hinzugefügt werden. Da die Kräfte nicht unmittelbar auf denselben Punct wirken, so kommt auch zwischen ihnen das Gleichgewicht nicht unmittelbar, sondern nur vermittelst der Widerstände oder inneren Kräfte zu Stande, durch welche die gegenseitige Entfernung der Puncte unverändert erhalten wird. Man muß sich also vorstellen, daß an den Puncten zwei einander und den Kräften gleiche Widerstände auftreten, so daß an jedem Puncte zwischen der an ihm angebrachten äußeren und der an ihm auftretenden inneren Kraft Gleichgewicht besteht. Diese Widerstände bilden die Spannung der beide Puncte verbindenden Geraden.

Aus vorstehendem Grundsatze folgt, daß man den Angriffspunct einer Kraft an jeden in ihrer Richtung befindlichen und mit dem vorigen fest verbundenen Punct beliebig verlegen kann. Denn es sei A der anfängliche Angriffspunct der Kraft, B ein mit A fest verbundener, in der Richtung der Kraft liegender Punct; so kann man an B zwei einander gleiche und entgegengesetzte Kräfte anbringen, welche einander aufheben. Fallen nun diese Kräfte zugleich in die Richtung der vorigen Kraft und sind sie dieser gleich, so heben auch die an A und B angebrachten gleichen und entgegengerichteten Kräfte einander auf, und es bleibt also nur noch die andere an B angebrachte Kraft übrig, welche man als die vorher an A angebrachte, jetzt an den Angriffspunct B verlegte Kraft ansehen kann.

Hierbei ist vorausgesetzt, was sich auch von selbst versteht, daß man an jedem Systeme Kräfte, zwischen denen Gleichgewicht besteht, beliebig hinzufügen oder auch wegnehmen kann, ohne etwas zu ändern.

Und eben so ist klar, daß das Gleichgewicht zwischen mehreren Kräften an einem Systeme niemals gestört wird, wenn man zu dem Systeme noch beliebig viele materielle Puncte hinzufügt, und solche mit den Puncten des Systems beliebig verbindet. Oder allgemeiner:

Besteht zwischen den Kräften (P, P′ ..) an dem Systeme A, und zwischen den Kräften (Q, Q′ ..) an dem Systeme B Gleichgewicht, so wird weder das eine noch das andere gestört, wenn man die Puncte des einen Systemes mit den Puncten des anderen beliebig verbindet; ohne übrigens die Verbindung zwischen den Puncten jedes einzelnen Systems zu stören. Denn da die Kräfte keinem der Systeme eine Bewegung ertheilen, so werden durch die Verbindung beider Systeme keine gegenseitigen Einwirkungen zwischen ihnen veranlaßt, und mithin besteht das Gleichgewicht fort.

Dieses gilt eben so gut in Bezug auf das Gleichgewicht von Kräften an ruhenden wie an bewegten Systemen; denn daß durch die Verbindung der Systeme die Bewegung in ihrem Fortgange geändert wird, gehört nicht hierher. Es wird nur gesagt, daß die Kräfte, zwischen denen an jedem Systeme Gleichgewicht besteht, auf die Bewegung keinen Einfluß haben, und auch keinen erhalten, wenn die Systeme beliebig mit einander verbunden werden.

Uebrigens aber kann der Leser sich die Angriffspuncte für jetzt immerhin bloß als ruhend vorstellen, wenn ihm dies eine Erleichterung zu sein scheint.

Zwei Kräfte in einer Ebene.

11. An den Puncten A und B (daß die Puncte fest verbunden sind, und außerdem mit beliebigen anderen Puncten fest

verbunden sein oder werden können, braucht nicht immer wieder ausdrücklich gesagt zu werden) wirken zwei Kräfte P und Q, in den Richtungen AP, AQ, welche im Puncte C einander schneiden (Fig. 3.). Bringt man an C zwei der P und Q beziehungsweise gleiche und entgegenrichtete Kräfte an, so besteht Gleichgewicht. Für diese kann man auch ihre Resultante R setzen, deren Richtung Cr sei. Der Angriffspunct von R kann ferner an jeden beliebigen Punct M in der Richtung der Geraden Cr verlegt werden, ohne das Gleichgewicht zu stören. Oder eine der Cr gleiche und entgegengerichtete Kraft MR an M angebracht, ist die Resultante von P und Q.

Durch die Puncte A, B, C lege man einen Kreis, und nehme zum Angriffspuncte der Resultante R den zweiten Durchschnitt M der Geraden Cr mit diesem Kreise. So lange die Kräfte P und Q der Intensität nach ungeändert bleiben, und ihre gegenseitige Neigung (ACB) ebenfalls ungeändert bleibt, ändert sich offenbar auch die Intensität der Resultante R nicht. Läßt man nun die Kräfte, unter den obigen Voraussetzungen, sich in ihrer Ebene um ihre Angriffspuncte A und B drehen, so durchläuft der Durchschnitt ihrer Richtungen C, bei fortgesetzter Drehung, den ganzen Umring des Kreises CAMB. Es sei, durch diese Drehung, der Punct C nach C′, und die Kräfte in die Richtungen AP′, BQ′ gekommen, so muß die Resultante jetzt den Winkel AC′B in die nämlichen Theile theilen, wie vorhin den Winkel ACB; folglich muß auch die Resultante aus C′ den Bogen AMB in die nämlichen Theile theilen, wie vorhin die Resultante aus C, und mithin muß die Resultante aus C′ den Kreis in dem nämlichen Puncte, wie die Resultante aus C, d. i. in M, zum zweiten Male schneiden.

Gelangt ferner der Durchschnitt der Richtungen beider Kräfte in den Bogen AMB, z. B. nach C″, wobei die Kräfte in die Geraden AP″ und BQ″ fallen; so geht die Resultante C″R″ wieder durch M, wie der Leser leicht einsehen wird.

Es verhält sich $P:Q:R = \sin MCB : \sin ACM : \sin ACB$, oder, weil $ABM = ACM$, $BAM = BCM$, $ACB = 2\Re - AMB$ ist,

$$P:Q:R = \sin MAB : \sin MBA : \sin AMB.$$

Zieht man demnach AM, MB, so ist auch

$$P:Q:R = MB:MA:AB.$$

Der so bestimmte Punct M, durch welchen die Resultante der beiden Kräfte P und Q beständig geht, wenn diese Kräfte, ohne Aenderung ihrer gegenseitigen Neigung, in ihrer Ebene um ihre Angriffspuncte gedreht werden, heiße der **Mittelpunct** der Kräfte P und Q.

Die vorstehende Construction des Mittelpunctes gilt auf gleiche Weise, es mag die Neigung (ACB) der Kräfte P und Q gegen einander spitz oder stumpf sein. Wäre sie stumpf, so würde nur der Bogen AMB, in welchen der Mittelpunct fällt, größer als der auf der anderen Seite der Sehne AB befindliche Theil des Kreises, also größer als der Halbkreis sein (Fig. 4.). Der Mittelpunct fällt in dem Bogen AMB allemal, wie leicht zu sehen, näher an den Angriffspunkt der größeren, als an den der kleineren Kraft; ist z. B. $P > Q$, so ist Bogen AM < Bogen MB. Ist aber $P = Q$, so ist auch Bogen AM = Bogen MB.

Man denke sich jetzt (Fig. 3.) die Neigung ACB der Kräfte als spitz, und nehme an, daß dieselbe sich immer mehr der Null nähere. Alsdann wächst der Durchmesser des Kreises über alle Grenzen hinaus, und der Bogen AMB fällt immer genauer mit der Sehne AB zusammen. Man sieht also, daß, wenn die Kräfte parallel werden, der Mittelpunct M endlich in einen Punct der Sehne AB fallen muß. Dabei gilt immer die Proportion $P:Q = MB:MA$, durch welche die Lage dieses Mittelpunctes, in der Sehne AB und zwischen den Endpuncten derselben, genau bestimmt ist. Die Resultante R aber geht in die Summe $P+Q$ über, und wirkt mit beiden Kräften parallel und in gleichem Sinne.

Man nehme ferner an (Fig. 4.), daß der Winkel ACB stumpf sei und sich immer mehr zwei Rechten nähere; zugleich sei $P > Q$. Alsdann fällt nicht allein Bogen BCA immer genauer in die Sehne BA, sondern es fällt auch der Bogen BCAM immer genauer mit seiner Sehne BM zusammen, weil $\angle ABM = ACM$ ist, und dieser sich der Null nähert, indem ACB sich zwei Rechten nähert. Wird also endlich $\angle ACB = 2\Re$, so fällt BM mit BA in eine gerade Linie zusammen; dabei bleibt aber BM größer als BA, oder der Punct M fällt in die von A ausgehende Verlängerung der Sehne BA. Und man hat immer $P:Q = MB:MA$; zugleich aber $R = P - Q$. Der Mittelpunct fällt demnach in die Verlängerung der Sehne BA, auf die Seite der größeren von beiden Kräften P und Q; die Resultante aber ist den Kräften parallel, ihrem Unterschiede gleich, und wirkt in dem Sinne der größeren.

Ist aber $P = Q$, so ist $\angle ACM = BCM$, oder Bogen AM = Bogen MGB (Fig. 4.), und Sehne AM = MB. Nähert sich nun der Winkel ACB zwei Rechten, während AB, wie immer, unveränderlich gedacht wird, so wachsen MA, MB über alle Grenzen hinaus, oder der Mittelpunct rückt in **unendliche Entfernung** von A und B. Zugleich aber wird die Resultante immer genauer dem Unterschiede beider Kräfte gleich, also immer genauer Null. Dieser Fall macht also eine bemerkenswerthe Ausnahme von den übrigen.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich:

Zwei Kräfte in einer Ebene lassen sich, mit Ausnahme des einzigen Falles, wenn beide einander gleich, parallel und entgegengesetzt sind, immer durch eine dritte, in der nämlichen Ebene wirkende Kraft ersetzen. Diese ersetzende Kraft kann an jedem beliebigen Puncte ihrer Richtung angebracht werden; es giebt aber unter diesen Puncten einen, der vor den übrigen ausgezeichnet ist und der Mittelpunct der Kräfte genannt wird. Dreht man nämlich die Kräfte, in ihrer Ebene, um ihre Angriffspuncte so, daß ihre gegenseitige Neigung beständig die nämliche bleibt, so geht die ersetzende Kraft, in jeder Stellung des Systemes, durch diesen Mittelpunct.

Oder bringt man an diesem Mittelpuncte eine der Resultante gleiche und entgegengerichtete Kraft an, so besteht zwischen dieser und den beiden andern Kräften immer Gleichgewicht, wie auch das System ihrer festverbundenen Angriffspuncte in seiner Ebene verschoben werde, wenn die Kräfte mit unveränderlichen Intensitäten in unveränderlichen Richtungen an ihren Angriffspuncten haften. Wird z. B. der Mittelpunct M (Fig. 3.) als unbeweglich angenommen, so besteht zwischen den Kräften P an A und Q an B immer Gleichgewicht, wie auch das Dreieck AMB, in seiner Ebene, um M gedreht werde, während die Kräfte immer in den nämlichen Richtungen auf ihre Angriffspuncte wirken; weil ihre Resultante beständig durch den unbeweglichen Punct geht.

Anmerkung. Sollte im Vorhergehenden, bei dem Uebergange von geneigten Kräften zu parallelen, noch nicht genug erwiesen scheinen, daß zwei parallele Kräfte, mit Ausnahme des schon erwähnten besonderen Falles, sich immer durch eine einzige Kraft ersetzen lassen; so kann dies noch auf folgende Weise geschehen. Sind an A und B zwei parallele Kräfte P und Q gegeben, so bringe man noch zwei gleiche und entgegengerichtete Kräfte N und N′ an A und B an (Fig. 5.), durch welche nichts geändert wird. Setzt man nun N mit P in die Resultante P′, eben so N′ mit Q in Q′ zusammen, so werden die Richtungen von P′ und Q′ allemal einander schneiden, wenn nicht P und Q einander gerade gleich und entgegengesetzt sind, welcher Fall ausgeschlossen ist. Werden nun die Kräfte P′ und Q′ an den Durchschnitt C ihrer Richtungen übertragen, und statt ihrer wieder die Componenten N und P, N′ und Q gesetzt, so heben sich die gleichen und entgegengesetzten Componenten N und N′ an C auf, und es ergiebt sich mithin an C eine Resultante, welche der Summe (oder Differenz) der Kräfte P und Q gleich und ihnen parallel ist; wie oben gefunden wurde.

Von den Kräftepaaren.

12. Zwei gleiche, parallele und an festverbundenen Angriffspuncten in entgegengesetztem Sinne wirkende Kräfte (welche im Vorhergehenden eine Ausnahme machten), nennt man ein Kräftepaar, oder auch häufig, sobald kein Mißverständniß zu besorgen ist, schlechthin ein Paar. Der senkrechte Abstand zweier ein Paar bildender Kräfte von einander wird die Breite, und die gerade Linie zwischen den Angriffspuncten der Arm des Paares genannt. Da man aber die Angriffspuncte der Kräfte in ihren Richtungen beliebig verlegen kann, so kann man auch den Arm des Paares immer seiner Breite gleich machen, und dieses soll im Folgenden in der Regel als geschehen vorausgesetzt werden. Alsdann stehen die Kräfte senkrecht auf dem Arme des Paares, oder dieses ist rechtwinklich. Man pflegt die Kräfte eines Paares durch entgegengesetzte Zeichen, wie P und —P zu unterscheiden, und das von ihnen gebildete Paar der Kürze wegen durch (P, —P) zu bezeichnen.

Ein Paar, dessen Kräfte nicht Null sind, oder dessen Breite nicht Null ist, kann offenbar nicht für sich im Gleichgewichte sein, auch niemals durch eine einzelne Kraft im Gleichgewichte gehalten werden. Denn hielte eine Kraft R dem Paare Gleichgewicht; so kann man allemal eine der R gleiche, parallele und entgegengesetzte Kraft (—R) annehmen, welche sich gegen das Paar ganz in der nämlichen, nur gerade entgegengesetzten Lage befindet, wie R, und welche dem Paare eben so gut, wie R, Gleichgewicht halten muß, weil in beiden Fällen Alles gleich ist. Man bringe demnach die Kraft (—R) und zugleich, um nichts zu ändern, eine ihr gleiche und entgegengerichtete Kraft (R′) an. Das Gleichgewicht, welches zwischen den Kräften P, —P und R, nach der Annahme besteht, wird durch Hinzufügung von —R und R′ nicht gestört. Da aber auch P, —P und —R für sich im Gleichgewichte sind, so müßte zwischen den beiden noch übrigen parallelen, gleichen und in gleichem Sinne wirkenden Kräften (R und R') Gleichgewicht bestehen, was dem Grundsatze in §. 10 widerspricht.

Ein Kräftepaar ist demnach eine eigenthümliche Verbindung von Kräften, welche niemals durch eine einzelne Kraft ersetzt werden kann. Auf welche Weise aber Paare durch andere Paare ersetzt werden können, soll jetzt gezeigt werden.

13. a. Ein Kräftepaar kann man, in seiner Ebene oder im Raume, **parallel mit sich selbst**, beliebig verlegen, ohne seine Wirkung zu ändern; vorausgesetzt, daß die neuen Angriffspuncte mit den vorigen fest verbunden sind.

Denn es sei (Fig. 6.) (P, —P) das Kräftepaar, an dem Arme AB. Dasselbe werde zur Abkürzung mit α bezeichnet. Aus einem beliebigen Puncte A' ziehe man in dem Sinne von AB die der AB parallele und gleiche Gerade A'B', bringe an A' die der P gleiche Kraft P' in derselben Richtung und in dem Sinne an, in welchem P an A wirkt, und füge zugleich die ihr gleiche und entgegengesetzte (P'') an A' hinzu; eben so bringe man an B' die Kraft —P' parallel mit der an B wirkenden gleichen Kraft, in dem Sinne derselben und zugleich im entgegengesetzten Sinne an; so erhält man an dem Arme A'B' zwei Kräftepaare, nämlich (P', —P') und (P'', —P''), die einander Gleichgewicht halten. Von diesen werde das erstgenannte mit β, das zweite mit γ bezeichnet. Man kann nun, unter der Voraussetzung, daß A'B' mit AB fest verbunden ist, beweisen, daß zwischen den Paaren α und γ Gleichgewicht besteht. Verbindet man nämlich A' mit B und B' mit A durch gerade Linien, so schneiden diese Linien einander gegenseitig in ihren Mitten m. Nun kann man die Kraft P'' an A' mit der ihr gleichen und in gleichem Sinne parallel wirkenden (—P) an B in eine Resultante (Q) vereinigen, welche, der Summe beider Kräfte gleich und ihnen parallel, durch den Punct m geht, der, nach §. 11., der Mittelpunct dieser beiden gleichen und parallelen Kräfte ist. Von der andern Seite lassen sich aber auch die Kräfte P an A und —P'' an B' in eine der vorigen gleiche und entgegengesetzte, an dem nämlichen Puncte m wirkende, Resultante (—Q) vereinigen, welche jener mithin Gleichgewicht hält. Also befindet sich das Paar α mit dem Paare γ im Gleichgewicht, so daß nur noch das Paar β übrig bleibt, welches demnach mit dem anfänglich vorhandenen Paare α gleichgeltend sein muß; w. z. b. w.

b. Ein Kräftepaar kann, in seiner Ebene, beliebig gedreht werden, ohne seine Wirkung zu ändern. Denn es sei (Fig. 7.) (P, —P) das gegebene Paar, von der Breite AB. Durch die Mitte m von AB ziehe man beliebig die Gerade A'B'=AB, doch so, daß auch ihre Mitte in m falle; bringe an A' und B' je zwei auf der Richtung von A'B' senkrechte, einander entgegengesetzte Kräfte P', P'', —P', —P'' an, deren jede an Intensität der Kraft P gleich sei; so hat man an A'B' zwei Paare (P', —P') und (P'', —P''), die einander Gleichgewicht halten. Von diesen hält aber das eine, nämlich in der Figur (P'', —P'') auch dem anfänglichen Paare (P, —P) Gleichgewicht; denn verlängert man die Richtungen der Kräfte P und P'' bis zu ihrem Durchschnitte in α, so geben sie eine Resultante, die von α aus offenbar (weil P=P'') durch m geht; eben so geben auch auf der anderen Seite die Kräfte —P'', —P eine von ihrem Durchschnitte β aus durch m gehende, der vorigen gleiche und entgegengerichtete Resultante; also besteht Gleichgewicht zwischen (P, —P) und (P'', —P''). Mithin bleibt nur noch das Paar (P', —P') an A'B' übrig, welches dem Paare (P, —P) demnach gleichgilt, durch dessen Drehung um m es hervorgebracht werden kann.

Die Sätze a. und b., nach welchen sich überhaupt ein Paar in seiner Ebene, oder in parallelen Ebenen beliebig verschieben läßt, sind in Bezug auf die Kräftepaare das nämliche, was für eine einzelne Kraft die willkürliche Verlegung des Angriffspunctes in der Richtungslinie der Kraft ist.

Denkt man sich für einen Augenblick den Punct m (Fig. 7.) als unbeweglich, so ist einleuchtend, daß die Kräfte P, —P den Arm AB in ihrer Ebene um m zu drehen streben; und der

Sinn, in welchem das Paar (P, —P) seinen Arm zu drehen strebt, ist demjenigen entgegengesetzt, in welchem das Paar (P″, —P″) den seinigen zu drehen strebt. Auf diese Weise wird man jederzeit leicht unterscheiden, ob zwei Paare in einer Ebene in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne wirken.

14. Das Product aus der Breite eines Paares in die Intensität einer der Kräfte (Seitenkräfte) desselben heißt das Moment des Paares. Zwei Paare von gleichen Momenten, die in derselben Ebene (oder in parallelen Ebenen, was einerlei ist) in entgegengesetztem Sinne wirken, halten einander Gleichgewicht.

Denn es sei (Fig. 8.) (P, —P) das eine der Paare, von der Breite $b = AB$, so kann das andere Paar (P′, —P′), von der Breite $b' = AB'$, in der Ebene so verlegt werden, daß die Arme AB und AB′, von dem nämlichen Puncte A ausgehend, theilweise zusammenfallen. Nach der Voraussetzung ist nun $Pb = P'b'$, folglich, wenn $b > b'$, $P < P'$.

Demnach hat man an A die Kraft $P' - P$, welche parallel und in gleichem Sinne mit P wirkt, und außerdem an B′ die die Kraft P′, welche im entgegensetzten Sinne der vorgenannten wirkt. Werden nun die Kräfte $P' - P$ und P in eine Resultante zusammengesetzt, so findet man, daß dieselbe ihrer Summe $P' - P + P$ oder P′ gleich, ihnen parallel sein, und durch den Punct B′ gehen muß.

Denn man hatte $P'b' = Pb$, folglich $(P' - P)b' = P(b - b')$ oder

$$P' - P : P = b - b' : b' = B'B : B'A;$$

folglich ist B′ (nach §. 11.) der Mittelpunct der Kräfte $P' - P$ an A und P an B. Die Resultante ist demnach der noch übrigen Kraft —P′ genau gleich und entgegenrichtet, und hält mithin dieser Gleichgewicht, w. z. b. w.

Paare von gleichen Momenten, die in einer Ebene in gleichem Sinne wirken, kann man also für einander setzen, oder sie sind gleichgeltend.

Hat man an einem Puncte C eine einzelne Kraft P (Fig. 9.), und ist außerdem ein anderer Punct A mit C fest verbunden, so pflegt man auch das Product aus der Kraft P in ihren senkrechten Abstand $AB = b$ von A, das Moment der Kraft P, in Bezug auf den Punct A, zu nennen. Dieses Moment kann man sich allemal als das eines Kräftepaares denken, welches entsteht, wenn man an A eine der P gleiche, parallele und entgegengesetzte Kraft (—P) anbringt, und zugleich, um nichts zu ändern, eine dritte Kraft, der P ebenfalls gleich und parallel, und in gleichem Sinne mit ihr, an A hinzufügt. Da der Angriffspunct von P sich von C nach B verlegen läßt, so hat man das Kräftepaar (P, —P) an dem Arme AB, dessen Moment Pb ist, und außerdem noch die einzelne Kraft P an A; und diese drei Kräfte sind zusammen der vorigen Kraft P gleichgeltend. Wenn in der Folge von dem Momente einer Kraft in Bezug auf einen Punct die Rede ist, so ist darunter das Moment des auf die angegebene Weise entstehenden Paares zu verstehen.

15. Nach dem Vorstehenden ist es leicht, beliebige Paare, die in einer Ebene wirken, in ein einziges gleichgeltendes Paar zu vereinigen. Denn da Paare von gleichen Momenten, in gleichem Sinne in derselben Ebene wirkend, sich für einander setzen lassen, so kann man zuerst alle gegebene Paare auf dieselbe Breite bringen, und hierauf alle an den nämlichen, dieser Breite gleichen, Arm verlegen. Alsdann vereinigen sich alle in dem nämlichen Sinne wirkenden Paare in ein einziges, dessen Moment der Summe der Momente der einzelnen Paare gleich ist, und ebenso vereinigen sich die in dem entgegengesetzten Sinne wirkenden Paare wieder in eines, welches die Summe ihrer Momente zum Moment hat. Diese beiden zusammengesetzten Paare geben aber ein einziges Paar, dessen Moment der Differenz ihrer Momente gleich ist, und welches im Sinne des größeren von ihnen wirkt.

Sind ferner zwei Paare in nicht parallelen Ebenen gegeben, so kann man auch diese sehr leicht in ein gleichgeltendes Paar zusammensetzen. Denn man bringe beide Paare auf gleiche Breiten, und verlege sie an einen gemeinschaftlichen Arm in dem Durchschnitte ihrer Ebenen. Sind nun P, —P und P′, —P′ die Kräfte der Paare, so gedacht, daß P und P′ an dem einen, —P und —P′ an dem anderen Endpuncte des gemeinschaftlichen Armes wirken, so geben P und P′ eine Resultante R, und —P, —P′ eine ihr gleiche und entgegengesetzte —R; beide bilden das zusammengesetzte Paar (R, —R), dessen Breite die nämliche ist, wie die der vorigen Paare.

Auch lassen sich Kräftepaare durch Linien eben so darstellen, wie einzelne Kräfte. Sind nämlich mehrere Paare an beliebig geneigten Ebenen gegeben, so kann man alle diese Ebenen durch einen und denselben willkürlich angenommenen Punct m legen, und jedem Paare in seiner Ebene eine solche Lage geben, daß die Mitte seines Armes in den Punct m treffe. Errichtet man nun auf der Ebene jedes Paares ein seinem Momente proportionales Loth aus m, welches die Axe des Paares heiße; so ist klar, daß diese Axe durch ihre Richtung die (auf ihr senkrechte) Ebene und durch ihre Größe das Moment des Paares bezeichnet. Wird ferner festgesetzt, daß die Drehung, welche ein Paar zu bewirken strebt, einem in dem Endpuncte der Axe befindlichen, nach einem der Angriffspuncte hinblickenden Auge immer in demselben Sinne, etwa von der Linken zur Rechten fortgehend erscheinen soll; so ist es auch nicht mehr zweifelhaft, auf welcher Seite der Ebene des Paares die Axe, aus m, zu errichten ist, und mithin stellt die Axe auch den Sinn des Paares gehörig dar. Denkt man sich z. B. in Fig. 8. die Kräfte sämmtlich als stoßend, und die Ebene der Paare (P, —P), (P″, —P″) horizontal, so muß die Axe des Paares (P, —P) von m aus vertical nach oben, dagegen die des entgegenwirkenden Paares (P″, —P″) von m aus vertical nach unten gehen. Denn alsdann wird z. B. die Kraft P an A, für ein in dem Endpuncte der Axe des Paares (P, —P) befindliches, nach A gewandtes Auge, den Punct A von der Linken zur Rechten fortzutreiben streben, und wendet sich das Auge nach B, so wird die Kraft —P eben so den Punct B von der Linken nach der Rechten hintreiben. Hieraus ist einleuchtend, wie durch die Axe nicht allein Ebene und Moment, sondern auch der Sinn eines Paares bezeichnet wird.

Werden zwei gegebene Paare auf gleiche Breiten gebracht, so verhalten sich ihre Momente und mithin ihre Axen, wie ihre Seitenkräfte. Man verlege beide an einen gemeinsamen, im Durchschnitte ihrer Ebenen liegenden, Arm; es seien (Fig. 10.) AP und AP′ zwei zusammenstoßende Seitenkräfte der Paare, beide senkrecht auf dem gemeinsamen Arm, dessen Endpunct A ist; so ist die Diagonale AR des Parallelogrammes APRP′ die Seitenkraft des zusammengesetzten Paares, wie oben schon bemerkt werden. Stellen ferner AQ, AQ′ die Axen der Paare (P, —P) und (P′, —P′) vor, so ist $AQ:AP = AQ':AP'$, $\angle QAQ' = PAP'$, $QAP = Q'AP' = \mathfrak{R}$; folglich auch, nach Vollendung des Parallelogrammes aus AQ, AQ′, die Diagonale $AR':AR = AQ:AP$, und $\angle R'AR = \mathfrak{R}$; mithin ist AR′ die Axe des zusammengesetzten Paares (R, —R). Daß die Axen AQ, AQ′ hier aus dem einen Endpuncte A des Armes errichtet sind, während sie oben in der Mitte des Armes errichtet wurden, macht offenbar keinen Unterschied.

Da also die Axe eines aus zwei gegebenen zusammengesetzten Paares die Diagonale des aus den Axen dieser Paare zu bildenden Parallelogrammes ist, so folgt überhaupt, daß die Zusammensetzung der Paare, vermittelst der Axen, ganz nach den nämlichen Regeln geschieht, wie die Zusammensetzung einzelner Kräfte.

Man kann daher auch Paare eben so zerlegen, wie einzelne Kräfte. Geht man bei dieser Zerlegung von den Axen aus, so ergeben sich auch sogleich die nöthigen Formeln, um namentlich ein gegebenes Paar in drei auf einander senkrechte Seiten-Paare zu zerlegen. Es sei G das Moment dieses Paares, positiv genommen, oder auch die Länge seiner Axe, λ, μ, ν die Neigungen dieser Axe gegen die Axen x, y, z; so sind $G\cos\lambda$,

$G\cos\mu$, $G\cos\nu$ die den x, y, z parallelen Axen der Seiten-Paare, aus deren Zeichen sich zugleich der Sinn dieser Paare entnehmen läßt. Bezeichnet man die Momente dieser Paare mit L, M, N, und zwar so, daß jedes Moment als positiv oder als negativ gilt, je nachdem ~~seine~~ seine Axe in den positiven oder negativen Theil der entsprechenden Coordinaten-Axe fällt, so hat man:

$$G\cos\lambda = L,\ G\cos\mu = M,\ G\cos\nu = N,$$

und

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

Kräfte im Raume, an einem festen Systeme.

16. Nach diesen Vorbereitungen braucht man sich bei besonderen Fällen nicht weiter aufzuhalten, sondern kann sogleich zur Betrachtung beliebiger Kräfte im Raume, an festverbundenen Puncten, übergehen.

Es seien P, P′, P″... die an den Puncten des Systemes wirkenden Kräfte. An einem beliebig gewählten Puncte A des Systemes bringe man eine der P gleiche, parallele und mit ihr in gleichem Sinne wirkende Kraft, und zugleich eine ihr gleiche und entgegengesetzte an, so erhält man, auf die in §. 14. angegebene Weise, die einzelne Kraft P an A und ein Kräftepaar (P, —P). Auf die nämliche Weise verfahre man mit den übrigen Kräften, so daß man für P′ wieder die Kraft P′ an A und ein Kräftepaar (P′, —P′) erhält, u. s. f. Es ergeben sich also so viele einzelne Kräfte an A und so viele Paare, als anfänglich Kräfte waren. Sämmtliche einzelne Kräfte an A lassen sich in eine Resultante R, und sämmtliche Paare in ein einziges Paar G zusammensetzen.

Also: Beliebige Kräfte an einem festen Systeme sind allemal gleichgeltend einer einzelnen Kraft an einem willkürlich gewählten Puncte, in Verbindung mit einem entsprechenden Kräftepaare.

Da die einzelne Kraft dem Paare nicht Gleichgewicht hal-

ten kann, so muß, wenn Gleichgewicht besteht, sowohl diese Kraft als auch das Moment des Paares Null sein.

Besteht aber nicht Gleichgewicht, so kann noch die einzelne Kraft Null sein; in diesem Falle sind sämmtliche Kräfte einem Paare gleichgeltend. Oder wenn die Kraft nicht Null ist, kann das Paar Null sein; man hat dann einen der Fälle, in welchen die Kräfte sich durch eine einzige ersetzen lassen, die aber, wie im Folgenden gezeigt wird, auch dann eintreten können, wenn das Paar nicht Null ist.

Im Allgemeinen, wenn weder die Kraft R noch das Paar G Null ist, zerlege man dieses nach zwei gegen einander senkrechten Ebenen, von denen die eine (E) auf der Richtung von R senkrecht, mithin die andere (E′) der R parallel sei. Wird die Neigung der Ebene des Paares G gegen die Ebene E mit δ, und das Moment des Paares in E mit V, so wie das des Paares in E′ mit V′ bezeichnet, so ist

$$V = G\cos\delta,\quad V' = G\sin\delta.$$

Da die Ebene E′ des Paares V′ der R parallel ist, so kann sie auch durch die gerade Linie R selbst gelegt werden. Man drehe ferner das Paar V′ in seiner Ebene so, daß die eine seiner Seitenkräfte (sie heiße q) in die Gerade R falle, mithin die andere (—q) der R parallel werde. Alsdann kann man zunächst die Kräfte R und q, welche in derselben Geraden liegen, in eine Summe R+q vereinigen, und diese sodann mit der parallelen Kraft —q in eine Resultante zusammensetzen, welche der Kraft R gleich und parallel sein wird. Man hat alsdann, außer dieser Resultante R nur noch das Paar V, dessen Ebene senkrecht auf der Richtung der Resultante steht. Also folgt:

Der Angriffspunct A der einzelnen Kraft R, welche in Verbindung mit einem gewissen Paare die gegebenen Kräfte ersetzt, läßt sich immer so wählen, daß die Ebene des Paares auf der Richtung von R senkrecht stehe.

Dabei versteht sich, daß für A jeder beliebige Punct in einer gewissen geraden Linie, welche die Richtung von R darstellt, genommen werden kann. Außer dieser bestimmten geraden Linie läßt sich aber kein Angriffspunct für die Resultante so wählen, daß das zugehörige Paar senkrecht auf der Richtung der Resultante stehe. Denn bringt man R an einem anderen Puncte B des Systemes, der nicht in dieser Geraden liegt, in seinem Sinne und zugleich im entgegengesetzten an, so erhält man die Kraft R an B, ferner ein Paar, dessen Seitenkräfte —R an B und R an A sind, und welches sich mit dem auf R senkrechten Paare V in ein einziges (G) zusammensetzen läßt, dessen Ebene aber nicht mehr senkrecht auf R steht; w. z. b. w. Ferner hat G ein größeres Moment als V, weil es durch Zusammensetzung der auf einander senkrechten Paare (R, —R) und V entsteht. Folglich ist V unter allen zusammengesetzten Paaren, die man erhalten kann, je nachdem der Angriffspunct von R gewählt ist, das **kleinste** (d. h. es hat das kleinste Moment).

Ist dieses kleinste zusammengesetzte Paar Null, so bleibt nur noch die einzelne Kraft R übrig, welche die sämmtlichen Kräfte des Systemes ersetzt. Und diese Kräfte lassen sich nie durch eine einzelne Kraft ersetzen, wenn nicht das kleinste zusammengesetzte Paar Null ist. Denn es müßte sonst eine einzelne Kraft R′ einer Kraft R und einem auf ihr senkrechten Paare V Gleichgewicht halten. Dazu gehört aber, daß alle diese Kräfte, an einem Punct in ihren Richtungen angebracht, einander Gleichgewicht halten; und da die Seitenkräfte von V, an einen Punct parallel übertragen, einander aufheben, so müssen R′ und R ebenfalls einander aufheben, also muß R′ der R gleich und entgegengesetzt sein. Demnach erhält man ein Paar (R, —R), welches dem Paare V Gleichgewicht halten, dessen Ebene mithin der Ebene von V parallel sein muß. Folglich muß, wenn R und V zusammen durch eine einzige Kraft im Gleichgewicht gehalten werden sollen, R der Ebene von V parallel sein. In gegenwärtigem Falle steht aber R senkrecht auf der Ebene des Paares V; also folgt:

Kräfte an einem festen Systeme lassen sich nur dann, und dann immer, durch eine einzige Kraft ersetzen, wenn die Ebene des zusammengesetzten Paares der Richtung der **Mittelkraft** parallel und mithin das kleinste zusammengesetzte Paar (V) Null ist. Unter Mittelkraft wird aber hier, wie in der Folge, diejenige Resultante verstanden, welche man erhält, wenn alle gegebenen Kräfte parallel mit sich selbst an einen gemeinsamen Angriffspunct verlegt und in eine Kraft zusammengesetzt werden. Daß hier die Mittelkraft nicht Null sein soll, ist schon oben gesagt worden.

17. Die vorstehenden höchst einfachen Betrachtungen enthalten die Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte an einem festen Systeme, und den Bedingungen ihres Gleichgewichtes. Es bleibt nur noch übrig, die hierher gehörigen Formeln zu entwickeln.

Man nehme einen beliebigen mit dem Systeme fest verbundenen Punct A zum Anfange senkrechter Coordinaten, bezeichne die Kräfte mit P, P′, P″ ···, ferner die Neigungen von P gegen die Axen x, y, z mit α, β, γ, und die Coordinaten des Angriffspunctes von P mit x, y, z; eben so die Neigungen von P′ gegen die Axen mit α', β', γ', und die Coordinaten des Angriffspunctes von P′ mit x′, y′, z′; u. s. f. Indem man nun alle Kräfte an den Anfang der Coordinaten, auf die im vorigen §. angegebene Weise, überträgt, erhält man zuerst für die Richtung und Intensität der Resultante R an A, die Formeln

$$R\cos\lambda = \Sigma P\cos\alpha,\quad R\cos\mu = \Sigma P\cos\beta,\quad R\cos\nu = \Sigma P\cos\gamma,$$

deren Bedeutung aus §. 7. klar ist.

Außer den einzelnen Kräften an A ergeben sich noch die Paare (P, —P), (P′, —P′), u. s. f. Um diese in ein einziges zusammen zu setzen, zerlege man sie zuerst nach den Ebenen der Coordinaten, was am zweckmäßigsten auf folgende Weise geschieht:

Die Kraft P werde nach den Axen in ihre Componenten $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$ und eben so die Kraft —P an A in die Componenten $-P\cos\alpha$, $-P\cos\beta$, $-P\cos\gamma$ zerlegt. Es sei (Fig. 11.) B der Angriffspunct von P, und $BD = P\cos\alpha$ die mit x parallele Componente von P. Die Coordinaten x, y, z von B, so wie die Cosinus von α, β, γ denke man sich zunächst alle als positiv. Man verlege den Angriffspunct von BD in den Durchschnitt C ihrer Richtung mit der Ebene yz, dessen Coordinaten $x = 0$, $y = AI$, $z = IC$ sind; bringe an dem Puncte E der Axe z, für welchen $x = 0$, $y = 0$, $z = AE = IC$, die Kraft $P\cos\alpha = E\delta$ parallel und in gleichem Sinne mit BD, so wie $E\delta' = -P\cos\alpha$, der vorigen entgegen, an; so ergeben sich zwei Kräftepaare, das eine aus den Kräften $AD' = -P\cos\alpha$ an A und $E\delta = P\cos\alpha$ an E, dessen Breite $z = AE$, das andere aus $E\delta' = -P\cos\alpha$ an E und $BD = +P\cos\alpha$ an C, dessen Breite $EC = y$ ist. Das erste dieser Paare liegt in der Ebene zx, und sein Moment ist $P\cos\alpha \cdot z$; das zweite ist der Ebene xy parallel und kann mithin in dieselbe verlegt werden; sein Moment ist $P\cos\alpha \cdot y$. Das Moment eines dieser Paare ist positiv oder negativ, je nachdem seine Axe in den positiven oder negativen Theil der auf der Ebene des Paares senkrechten Coordinaten-Axe fällt. Wird nun das Moment des in die Ebene xy verlegten Paares (BD, $E\delta'$) als positiv angenommen, so muß, da Ax, Ay, Az in Fig. 11. die positiven Theile der Axen x, y, z darstellen, die Axe dieses Paares in die Gerade Az fallen. Alsdann aber lehrt die Anschauung, daß die Axe des Paares (AD, $E\delta$) nicht in Ay, sondern in die Verlängerung dieser Axe über A hinaus oder in den negativen Theil der Axe y fallen muß, damit die Drehung, aus dem Endpuncte der Axe gesehen, immer in demselben Sinne erscheine; also ist das Paar $P\cos\alpha \cdot z$ negativ, wenn $P\cos\alpha \cdot y$ positiv ist. Daher giebt die Componente $P\cos\alpha$ die Paare $+Py\cos\alpha$ in der Ebene xy und $-Pz\cos\alpha$ in der Ebene xz.

Auf gleiche Weise verlege man den Angriffspunct der mit y parallelen Componente $P\cos\beta$, an den Durchschnitt ihrer Richtung mit der Ebene xz, also an den Punct (x, 0, z), und bringe die Kraft $P\cos\beta$ in ihrem Sinne und im entgegenge-

setzten an dem Puncte (x, 0, 0) an; so erhält man zwei Paare, das eine aus $-P\cos\beta$ an A, d. i. (0, 0, 0), und $+P\cos\beta$ an (x, 0, 0); das zweite aus $-P\cos\beta$ an (x, 0, 0) und $+P\cos\beta$ an (x, 0, z). Die Momente dieser Paare sind $-Px\cos\beta$ und $+Pz\cos\beta$. Denn beide sind einander entgegengesetzt, wie es die beiden vorigen waren, und man sieht leicht, daß das Paar $-Px\cos\beta$ (in Figur 11. dargestellt durch (FG, AG′), wo $FG = P\cos\beta$, $AG' = -P\cos\beta$, beide der Axe y parallel, an dem Arme $AF = x$) dem in der nämlichen Ebene wirkenden Paare (BD, $E\delta'$) entgegengesetzt ist, und folglich ein negatives Moment hat, da das Moment von diesem positiv ($= Py\cos\alpha$) angenommen wurde.

Verlegt man endlich den Angriffspunct der Componente $P\cos\gamma$ an den Punct (x, y, 0), also in die Ebene xy, und bringt die Kraft $P\cos\gamma$ an dem Puncte (0, y, 0) in ihrem Sinne und in dem entgegengesetzten an, so erhält man wieder zwei Paare, das eine aus der Kraft $-P\cos\gamma$ an A und $+P\cos\gamma$ an (0, y, 0); das andere aus $-P\cos\gamma$ an (0, y, 0) und $+P\cos\gamma$ an (x, y, 0). Die Momente dieser Paare sind, nach Größe und Zeichen, $-Py\cos\gamma$ und $+Px\cos\gamma$. Denn das erste dieser Momente, in der Ebene xz, ist dem in derselben Ebene befindlichen Paare $Pz\cos\beta$ entgegengesetzt, wie aus der Anschauung leicht erhellet. Demnach geben die Componenten von P folgende Paare:

in der Ebene xy:	$+Py\cos\alpha$,	$-Px\cos\beta$.
— — zx:	$+Px\cos\gamma$,	$-Pz\cos\alpha$.
— — yz:	$+Pz\cos\beta$,	$-Py\cos\gamma$.

Diese Ausdrücke bleiben, nicht allein der Größe, sondern auch den Zeichen nach, richtig, wenn beliebige der Größen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, x, y, z negativ sind. Denn irgend ein Paar, z. B. $Py\cos\alpha$, verwandelt sich in ein entgegengesetztes, sowohl wenn die Seitenkraft $P\cos\alpha$, als wenn die Breite y negativ wird, in welchen Fällen auch das Product $Py\cos\alpha$ negativ wird;

dagegen bleibt es unverändert, wenn die Seitenkraft und die Breite beide zugleich negativ werden, in welchem Falle auch das Product $Py \cos\alpha$ positiv bleibt. Dieses Product drückt also unter allen Umständen das Moment des entsprechenden Paares gehörig aus, wie behauptet wurde.

Durch Addition der in eine Ebene fallenden Paare erhält man die drei Componenten des Paares $(P, -P)$, nämlich:

$$P(y \cos\alpha - x \cos\beta),\ P(x \cos\gamma - z \cos\alpha),\ P(z \cos\beta - y \cos\gamma).$$

Auf gleiche Weise giebt das Paar $(P', -P')$ die Componenten:

$$P'(y' \cos\alpha' - x' \cos\beta'),\ P'(x' \cos\gamma' - z' \cos\alpha'),$$
$$P'(z' \cos\beta' - y' \cos\gamma'),$$

u. s. f. für die übrigen Kräfte.

Addirt man die vorstehenden Momente der Paare in den Ebenen yx, xz, zy, und bezeichnet die Componenten des zusammengesetzten Paares (G) in diesen Ebenen der Reihe nach mit N, M, L, so erhält man

$$N = P(y \cos\alpha - x \cos\beta) + P'(y' \cos\alpha' - x' \cos\beta')$$
$$+ P''(y'' \cos\alpha'' - x'' \cos\beta'') + \cdots$$

oder kürzer $\quad N = \Sigma P(y \cos\alpha - x \cos\beta),$

und eben so $\quad M = \Sigma P(x \cos\gamma - z \cos\alpha),$

$$L = \Sigma P(z \cos\beta - y \cos\gamma).$$

In dem Falle des Gleichgewichtes müssen sowohl die Componenten von R, als die Componenten von G einzeln Null sein, weil nur unter dieser Bedingung R und G Null sein können; folglich sind die Bedingungen des Gleichgewichtes von Kräften an einem festen Systeme in folgenden 6 Gleichungen enthalten:

$$\Sigma P \cos\alpha = 0,\ \Sigma P \cos\beta = 0,\ \Sigma P \cos\gamma = 0;$$
$$\Sigma P(z \cos\beta - y \cos\gamma) = 0,\ \Sigma P(x \cos\gamma - z \cos\alpha) = 0,$$
$$\Sigma P(y \cos\alpha - x \cos\beta) = 0.$$

18. Besteht nicht Gleichgewicht, und ist R nicht Null, so kann man statt A einen beliebigen anderen Punct B zum Angriffspuncte der Resultante wählen, wodurch die Componenten des zusammengesetzten Paares geändert werden. Es seien a, b, c die Coordinaten von B, so sind

$$\frac{u-a}{\cos\lambda} = \frac{v-b}{\cos\mu} = \frac{w-c}{\cos\nu}$$

die Gleichungen der Geraden, in welche die Resultante fällt (u, v, w laufende Coordinaten). Um ferner die Componenten des nunmehr Statt findenden zusammengesetzten Paares (G') zu erhalten, welche L', M', N' heißen mögen, braucht man nur in den obigen Ausdrücken für L, M, N die relativen Coordinaten der Angriffspuncte in Bezug auf B einzuführen, oder x, y, z mit x—a, y—b, z—c, und eben so x', y', z', mit x'—a, y'—b, z'—c zu vertauschen, u. s. f. für die übrigen Angriffspuncte. Hierdurch wird erhalten

$$L' = \Sigma P((z-c) \cos\beta - (y-b) \cos\gamma)$$

oder $\quad L' = \Sigma P(z \cos\beta - y \cos\gamma) - (c \Sigma P \cos\beta - b \Sigma P \cos\gamma).$

Da nun $\quad \Sigma P \cos\beta = R \cos\mu,\ \Sigma P \cos\gamma = R \cos\nu,$

$$\Sigma P(z \cos\beta - y \cos\gamma) = L$$

ist, so folgt

$$L' = L - R(c \cos\mu - b \cos\nu).$$

Auf gleiche Weise folgt:

$$M' = M - R(a \cos\nu - c \cos\lambda)$$
$$N' = N - R(b \cos\lambda - a \cos\mu),$$

wodurch L', M', N' bestimmt sind.

Bezeichnet man die Winkel, welche die Axe des Paares G' mit den Axen der Coordinaten einschließt, durch l', m', n', so ist nach §. 15.

$$G' \cos l' = L',\ G' \cos m' = M',\ G' \cos n' = N'.$$

Heißt ferner Θ die Neigung der Axe von G' gegen die Richtung von R, so hat man

$$\cos\Theta = \cos\lambda \cos l' + \cos\mu \cos m' + \cos\nu \cos n',$$

oder, wenn auf beiden Seiten mit G' multiplicirt wird, nach den vorhergehenden Formeln:

$$G' \cos\Theta = L' \cos\lambda + M' \cos\mu + N' \cos\nu.$$

Offenbar ist aber $G' \cos\Theta$ die Componente von G', welche senkrecht auf R steht, während die zweite Componente mit R parallel ist, oder man hat $G' \cos\Theta = V$, d. h. gleich dem kleinsten zusammengesetzten Paare, und mithin ist der Ausdruck für das Moment dieses Paares:

$$V = L' \cos\lambda + M' \cos\mu + N' \cos\nu.$$

Multiplicirt man die eben angegebenen Werthe von L', M', N', der Reihe nach mit $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, so ergiebt sich auch, durch Addition der Producte:

$$L' \cos\lambda + M' \cos\mu + N' \cos\nu = L \cos\lambda + M \cos\mu + N \cos\nu,$$

d. h. das kleinste zusammengesetzte Paar (V) kann eben so gut durch $L \cos\lambda + M \cos\mu + N \cos\nu$, oder durch die auf R senkrechte Componente von G, anstatt der von G', ausgedrückt werden; was sich übrigens von selbst versteht.

Um ferner die Gleichung derjenigen Resultante zu erhalten, zu welcher das kleinste Paar (V) gehört, bemerke man, daß die Axe dieses Paares V mit R parallel sein muß. Soll daher das zusammengesetzte Paar $G' = V$ sein, so muß zugleich sein

$$\frac{\cos l'}{\cos\lambda} = \frac{\cos m'}{\cos\mu} = \frac{\cos n'}{\cos\nu},$$

oder weil $V \cos l' = L'$, $V \cos m' = M'$, $V \cos n' = N'$ ist, so muß sein:

$$\frac{L'}{\cos\lambda} = \frac{M'}{\cos\mu} = \frac{N'}{\cos\nu}.$$

Verbindet man diese Gleichungen mit

$$L' \cos\lambda + M' \cos\mu + N' \cos\nu = V,$$

so folgt:

$$L' = V \cos\lambda, \quad M' = V \cos\mu, \quad N' = V \cos\nu.$$

Werden ferner für L', M', N' ihre Werthe gesetzt, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$R(c \cos\mu - b \cos\nu) = L - V \cos\lambda$$
$$R(a \cos\nu - c \cos\lambda) = M - V \cos\mu$$
$$R(b \cos\lambda - a \cos\mu) = N - V \cos\nu,$$

von denen jede, vermöge der Gleichung $V = L \cos\lambda + M \cos\mu + N \cos\nu$, eine Folge der beiden anderen ist. Diese Gleichungen, in welchen a, b, c laufende Coordinaten sind, bestimmen die Lage der mit dem kleinsten zusammengesetzten Paare (V) verbundenen Resultante. Ist $V = 0$, oder $L \cos\lambda + M \cos\mu + N \cos\nu = 0$, so lassen sich die Kräfte durch eine **einzige** Kraft ersetzen, deren Gleichungen mithin folgende sind:

$$R(c \cos\mu - b \cos\nu) = L, \quad R(a \cos\nu - c \cos\lambda) = M,$$
$$R(b \cos\lambda - a \cos\mu) = N.$$

Wird aber die Bedingung $V = 0$ nicht erfüllt, so ist es unmöglich, die Kräfte des Systemes durch eine einzelne Kraft zu ersetzen.

19. Die sechs in §. 17. angegebenen Bedingungen des Gleichgewichtes gelten für ein frei bewegliches festes System. Ist aber das System nicht frei beweglich, so braucht nur ein Theil dieser Bedingungen erfüllt zu werden. Wenn z. B. ein **Punct** des Systemes unbeweglich ist, so bringe man an diesem alle Kräfte in ihrem Sinne und im entgegengesetzten an: alsdann erhält man eine einzelne Resultante, die an diesem unbeweglichen Puncte angebracht ist, und ein Kräftepaar. Die Resultante giebt den Druck, welchen der unbewegliche Punct erleidet, der aber durch den Widerstand desselben aufgehoben wird, und für das Gleichgewicht ist nur noch nöthig, daß das Moment des Kräftepaares Null sei. Wird also der unbewegliche Punct zum Anfange der Coordinaten genommen, so sind $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ die Bedingungen des Gleichgewichtes. Oder die sämmtlichen Kräfte an dem Systeme müssen sich auf eine einzelne Kraft bringen

lassen, deren Richtung durch den unbeweglichen Punct geht, wenn Gleichgewicht bestehen soll.

Sind zwei Puncte unbeweglich, so nehme man einen derselben zum Angriffspuncte der Resultante, welche wieder durch den Widerstand dieses Punctes aufgehoben wird. Alsdann braucht das zugehörige Paar nicht mehr Null zu sein, damit Gleichgewicht bestehe, sondern es ist nur nöthig, daß seine Ebene der geraden Linie zwischen den beiden unbeweglichen Puncten parallel sei, oder, was einerlei ist, durch diese hindurchgehe. Nimmt man also die Gerade zwischen beiden unbeweglichen Puncten zur Axe der x, so ist $L=0$ die Bedingung des Gleichgewichtes.

Wenn ein Körper sich um eine unbewegliche Axe drehen und zugleich längs derselben gleiten kann, so nehme man einen in der Axe befindlichen Punct des Körpers zum Angriffspuncte der Resultante, und zerlege diese in eine auf der Axe senkrechte und eine ihr parallele Componente. Alsdann ist, für das Gleichgewicht, erforderlich, daß die der Axe parallele Componente von R Null sei, während die auf ihr senkrechte Componente durch den Widerstand der Axe aufgehoben wird. Ferner muß die Ebene des zugehörigen Kräftepaares durch die Axe gehen. Nimmt man die unbewegliche Axe zur Axe der x, so bestehen die Bedingungen des Gleichgewichtes in den folgenden beiden Gleichungen $\Sigma P \cos\alpha = 0$ (oder $X=0$) und $L=0$. Hieraus folgt noch, daß die Bedingungen des Gleichgewichtes für einen freien Körper, nämlich

$$X=0 \quad Y=0 \quad Z=0$$
$$L=0 \quad M=0 \quad N=0$$

nichts Anderes ausdrücken, als daß um jede der Axen x, y, z Gleichgewicht bestehen muß, so daß der Körper sich um keine derselben drehen und längs keiner derselben gleiten kann.

20. Die allgemeinen Formeln der §§. 17. 18. sollen jetzt auf ein System angewendet werden, dessen Puncte und Kräfte alle in einer Ebene liegen. Es sei diese Ebene die der x und y;

so sind die Ordinaten $z, z', z'' \cdots$ sämmtlich Null, und zugleich $\cos\gamma=0$, $\cos\gamma'=0$, $\cos\gamma''=0$, u. s. f.; folglich (§. 17.)

$$R\cos\lambda=\Sigma P\cos\alpha,\ R\cos\mu=\Sigma P\cos\beta,\ R\cos\nu=0.$$
$$L=0, \quad M=0, \quad N=\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta).$$

Ist $R=0$, also $\Sigma P\cos\alpha=0$, $\Sigma P\cos\beta=0$, so ergeben die sämmtlichen Kräfte ein Paar, dessen Moment $=N$ ist. Ist aber R nicht Null, so lassen sich die Kräfte immer durch eine einzige ersetzen. Denn alsdann ist $L\cos\lambda + M\cos\mu + N\cos\nu = 0$, weil $L=0$, $M=0$, $\cos\nu=0$ (vergl. §. 18.). Uebrigens ist dieses auch ohne Anwendung der allgemeinen Bedingungsgleichung von selbst klar. Die Richtungslinie der ersetzenden Kraft wird, nach §. 18., durch folgende Gleichung bestimmt:

$$R(b\cos\lambda - a\cos\mu)=N,$$

in welcher a, b laufende Coordinaten sind.

Da $\cos\gamma=0$, mithin $\cos\alpha^2+\cos\beta^2=1$, so kann man einen Winkel φ, zwischen 0 und 2π so bestimmen, daß $\cos\alpha=\cos\varphi$, $\cos\beta=\sin\varphi$ wird. Alsdann ist φ die Neigung der Richtungslinie von P gegen die positive Axe der x, allemal in dem nämlichen Sinne von 0 bis 2π gezählt. Eben so kann $\cos\alpha'=\cos\varphi'$, $\cos\beta'=\sin\varphi'$ gesetzt werden, u. s. f. Man setze noch $\cos\lambda=\cos\psi$, $\cos\mu=\sin\psi$, so erhält man folgende Gleichung für die Richtungslinie der ersetzenden Kraft;

$$R(b\cos\psi - a\sin\psi)=\Sigma P(y\cos\varphi - x\sin\varphi).$$

Zugleich ist $R\cos\psi=\Sigma P\cos\varphi$, $R\sin\psi=\Sigma P\sin\varphi$.

Hieraus lassen sich die Coordinaten des **Mittelpunctes** der Kräfte herleiten, welcher bei mehreren Kräften in einer Ebene eben sowohl vorhanden ist, wie bei zweien (§. 11.), wenn die Kräfte nicht gerade ein Paar bilden. Werden nämlich alle Kräfte, ohne Aenderung ihrer gegenseitigen Neigungen um ihre Angriffspuncte, in ihrer Ebene gedreht, so dreht sich auch die ersetzende Kraft beständig um einen festen Mittelpunct, welcher sogleich bestimmt werden soll. Da die gegenseitigen Neigungen so wie die Intensitäten der Kräfte unverändert bleiben, so bleibt auch die Neigung jeder Kraft gegen die Resultante aller Kräfte, während der Drehung, immer die nämliche. Setzt man daher $\varphi = \psi + \varepsilon$, $\varphi' = \psi + \varepsilon'$, $\varphi'' = \psi + \varepsilon''$ u. s. f., so bleiben ε, ε', ε'', .. während der Drehung ungeändert, und es ändert sich nur noch ψ. Man erhält demnach aus den vorhergehenden Gleichungen:

$$R \cos\psi = \Sigma P \cos(\psi + \varepsilon),\ R \sin\psi = \Sigma P \sin(\psi + \varepsilon)$$

$$R(b\cos\psi - a\sin\psi) = \Sigma P(y\cos(\psi+\varepsilon) - x\sin(\psi+\varepsilon))$$

oder

$$R(b\cos\psi - a\sin\psi) = \Sigma P(y\cos\varepsilon - x\sin\varepsilon)\cdot\cos\psi - \Sigma P(y\sin\varepsilon + x\cos\varepsilon)\sin\psi.$$

Diese Gleichung besteht für jeden Werth von ψ, und zerfällt mithin in folgende zwei:

$$Rb = \Sigma P(y\cos\varepsilon - x\sin\varepsilon),\ Ra = \Sigma P(y\sin\varepsilon + x\cos\varepsilon),$$

durch welche die Coordinaten a, b des gesuchten Mittelpunctes bestimmt werden.

Von den parallelen Kräften und dem Mittelpuncte derselben (Schwerpuncte).

21. Wirken zwei parallele Kräfte P und P' in entgegengesetztem Sinne, und sind $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$ die Componenten von P nach den Axen, so sind $-P'\cos\alpha$, $-P'\cos\beta$, $-P'\cos\gamma$ die Componenten von P'. Um demnach die allgemeine Formeln des §. 17. auf parallele Kräfte bequem anzuwenden, kann man den Intensitäten solcher Kräfte, die in entgegengesetztem Sinne wirken, entgegengesetzte Zeichen beifügen, und unter dieser Annahme $\cos\alpha = \cos\alpha' = \cos\alpha'' \cdots$, $\cos\beta = \cos\beta' = \cos\beta'' \cdots$, $\cos\gamma = \cos\gamma' = \cos\gamma'' \cdots$ setzen. Hierdurch ergiebt sich aus den Formeln des §. 17.

$$R\cos\lambda = \cos\alpha\cdot\Sigma P,\ R\cos\mu = \cos\beta\cdot\Sigma P,\ R\cos\nu = \cos\gamma\cdot\Sigma P$$

$$L = \cos\beta\,\Sigma Pz - \cos\gamma\,\Sigma Py,\ M = \cos\gamma\,\Sigma Px - \cos\alpha\,\Sigma Pz,$$

$$N = \cos\alpha\,\Sigma Py - \cos\beta\,\Sigma Px.$$

Ist die Summe $\Sigma P = 0$, so wird $R = 0$, und die Kräfte geben blos ein Paar. Ist aber ΣP nicht Null, so kann man setzen:

$$R = \Sigma P,\ \cos\lambda = \cos\alpha,\ \cos\mu = \cos\beta,\ \cos\nu = \cos\gamma,$$

die Resultante R ist also der Summe aller Kräfte, mit ihren Zeichen, gleich, ihnen parallel, und wirkt in dem Sinne der positiven oder negativen Kräfte, je nachdem ΣP positiv oder negativ ist. Ferner sieht man leicht, daß die vorstehenden Werthe von L, M, N, λ, μ, ν, der Bedingung

$$L\cos\lambda + M\cos\mu + N\cos\nu = 0$$

genügen; woraus folgt, daß die Kräfte sich durch eine einzige ersetzen lassen. Zur Bestimmung der Lage dieser Resultante erhält man aus §. 18. die Gleichungen:

$$(w\cos\beta - v\cos\gamma)\Sigma P = \cos\beta\,\Sigma Pz - \cos\gamma\,\Sigma Py.$$
$$(u\cos\gamma - w\cos\alpha)\Sigma P = \cos\gamma\,\Sigma Px - \cos\alpha\,\Sigma Pz.$$
$$(v\cos\alpha - u\cos\beta)\Sigma P = \cos\alpha\,\Sigma Py - \cos\beta\,\Sigma Px,$$

oder

$$(w\Sigma P - \Sigma Pz)\cos\beta = (v\Sigma P - \Sigma Py)\cos\gamma,$$
$$(u\Sigma P - \Sigma Px)\cos\gamma = (w\Sigma P - \Sigma Pz)\cos\alpha,$$
$$(v\Sigma P - \Sigma Py)\cos\alpha = (u\Sigma P - \Sigma Px)\cos\beta,$$

in welchen u, v, w (anstatt der dortigen a, b, c) die laufenden Coordinaten sind. Diesen Gleichungen wird durch folgende Werthe von u, v, w, unabhängig von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, Genüge geleistet:

$$u\Sigma P = \Sigma Px,\quad v\Sigma P = \Sigma Py,\quad w\Sigma P = \Sigma Pz,$$

oder $$u = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P},\quad v = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P},\quad w = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}.$$

Diese Werthe bestimmen einen Punct, durch welchen die Resultante immer geht, wie auch die Winkel α, β, γ geändert werden mögen; d. h. wie man auch die Kräfte, mit Beibehaltung des

Parallelismus, um ihre Angriffspuncte drehen mag, oder, was auf dasselbe hinauskömmt, wie man auch den Körper verschieben und drehen mag, wenn nur die Kräfte mit unveränderlicher Intensität in unveränderter Richtung auf ihre Angriffspuncte zu wirken fortfahren.

Dieser Punct heißt der **Mittelpunct paralleler Kräfte**; wird aber auch häufig, weil er in der Anwendung auf schwere Körper am meisten vorkommt, der **Schwerpunct** genannt. Da schon früher von einem Mittelpuncte nicht paralleler Kräfte, in einer Ebene, die Rede gewesen ist, so mag noch bemerkt werden, daß dieser sich von dem Mittelpuncte paralleler Kräfte in so fern unterscheidet, als er nur für eine **Drehung der Kräfte in ihrer Ebene**, der Mittelpunct paralleler Kräfte dagegen für jede beliebige Drehung gilt. Von den Eigenschaften aber, welche sich bei unbeschränkter Drehung nicht paralleler Kräfte ergeben, wird im folgenden Abschnitte gehandelt werden.

22. Die obigen Ausdrücke für die Coordinaten des Schwerpunctes sind in der Voraussetzung rechtwinklicher Coordinaten hergeleitet, gelten aber auch für schiefe Coordinaten. Denn es seien, aus einem gemeinsamen Anfange A, x, y, z rechtwinkliche, x_1, y_1, z_1 schiefe Coordinaten eines Punctes O; man bezeichne die Neigung der Axe x_1 gegen x mit $(x_1\ x)$, eben so die Neigung von y_1 gegen x mit $(y_1\ x)$ u. s. f., und setze zur Abkürzung

$$\cos(x_1\ x)=a,\quad \cos(y_1\ x)=a_1,\quad \cos(z_1\ x)=a_2,$$
$$\cos(x_1\ y)=b,\quad \cos(y_1\ y)=b_1,\quad \cos(z_1\ y)=b_2,$$
$$\cos(x_1\ z)=c,\quad \cos(y_1\ z)=c_1,\quad \cos(z_1\ z)=c_2.$$

Werden die schiefen Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Punctes O auf die Axe x projicirt, so ist die Summe der Projectionen gleich x; also

$$x=ax_1+a_1y_1+a_2z_1.$$

Eben so erhält man durch Projection auf y und z:

$$y=bx_1+b_1y_1+b_2z_1.$$

$$z=cx_1+c_1y_1+c_2z_1.$$

Zugleich ist

$$a^2+b^2+c^2=1,\quad a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2=1,\quad a_2{}^2+b_2{}^2+c_2{}^2=1.$$

Nun war für den Schwerpunct in rechtwinklichen Coordinaten:

$$u\Sigma P=\Sigma Px,\quad v\Sigma P=\Sigma Py,\quad w\Sigma P=\Sigma Pz.$$

Werden mit u_1, v_1, w_1 die schiefen Coordinaten des nämlichen Schwerpunctes bezeichnet, so ist:

$$u=au_1+a_1v_1+a_2w_1$$
$$v=bu_1+b_1v_1+b_2w_1$$
$$w=cu_1+c_1v_1+c^2w_1,$$

mithin

$$(au_1+a_1v_1+a_2w_1)\Sigma P=a\Sigma Px_1+a_1\Sigma Py_1+a_2\Sigma Pz_1$$

oder

$$a(u_1\Sigma P-\Sigma Px_1)+a_1(v_1\Sigma P-\Sigma P_1)+a_2(w_1\Sigma P-\Sigma Pz_1)=0.$$

Vertauscht man in dieser Formel a, a_1, a_2 mit b, b_1, b_2 und mit c, c_1, c_2; so erhält man im Ganzen drei Gleichungen zur Bestimmung von u_1, v_1, w_1. Man sieht aber, daß die Auflösung derselben nur zu folgenden Werthen führen kann:

$$u_1\Sigma P-\Sigma Px_1=0,\quad v_1\Sigma P-\Sigma Py_1=0,\quad w_1\Sigma P-\Sigma Pz_1=0;$$

welche Formeln zeigen, daß der obige Ausdruck des Schwerpunctes auch für schiefe Coordinaten gilt, w. z. b. w.

Um den Schwerpunct beliebiger paralleler Kräfte zu finden, kann man dieselben auch in mehrere Gruppen theilen, den Schwerpunct und die Resultante jeder einzelnen Gruppe bestimmen, und aus diesen sodann den Schwerpunct der gesammten Kräfte herleiten, wie ohne Weiteres klar ist. Hieraus folgt der Satz:

Wirken parallele Kräfte auf beliebige Puncte im Raume, und verbindet man jeden dieser Puncte mit dem Schwerpuncte der jedesmal übrigen Puncte durch eine Gerade, so schneiden alle diese Geraden einander in einem Puncte, welcher der Schwerpunct des ganzen Systemes ist.

Sind insbesondere drei Puncte A, B, C gegeben, (F. 11.) die nicht in einer Geraden liegen, an welchen die parallelen Kräfte A, B, C wirken, deren Summe nicht Null ist, so sei D der Schwerpunct von A und B, E der von C und B; man ziehe CD, AE, so muß der Schwerpunct von A, B, C sowohl in der einen, als in der anderen dieser Geraden, also muß er in ihrem Durchschnitte G liegen. Zieht man noch BG, so muß der Durchschnitt F dieser Linie mit AC der Schwerpunct von A und C sein. Da G der Schwerpunct von C und D ist, so verhält sich

$$DG : GC = C : A+B$$

oder

$$DG : DC = C : A+B+C$$

oder

$$\Delta AGB : ACB = C : A+B+C.$$

Hieraus ergiebt sich, daß die Flächen der drei Dreiecke, welche den Schwerpunct G zur gemeinschaftlichen Spitze und die Seiten des Dreieckes zu Grundlinien haben, sich der Reihe nach verhalten, wie die an der jedesmaligen dritten Spitze von ABC angebrachten Kräfte, ohne ihre Zeichen genommen. Sind die Zeichen dieser Kräfte alle die nämlichen, so fällt der Schwerpunct innerhalb des Dreieckes; sind sie es nicht, so fällt er außerhalb. Sind insbesondere die drei Kräfte einander an Größe und Zeichen gleich, so sind auch die drei Dreiecke um G einander gleich, und jedes gleich $\frac{1}{3}$ ABC. Zugleich liegen dann die Puncte D, E, F in den Mitten ihrer Seiten, und man hat:

$$\frac{GD}{CD} = \frac{GE}{AE} = \frac{GF}{BF} = \tfrac{1}{3}.$$

Sind vier Puncte A, B, C, D gegeben, (F. 12.) an welchen die gleichnamigen parallelen Kräfte wirken, so sei G der Schwerpunct von ABC, H der Schwerpunct von BCD. Man ziehe DG, AH, so müssen diese beiden Linien einander in einem Puncte K schneiden, welcher der Schwerpunct von A, B, C, D ist. Zugleich muß sich verhalten

$$KG : DK = D : A+B+C$$

oder

$$KG : GD = D : A+B+C+D.$$

oder Pyram. $ABCK : ABCD = D : A+B+C+D.$

Ueberhaupt müssen die vier in K zusammenstoßende Pyramiden, deren Grundflächen die Seitenflächen der Pyramide ABCD sind, sich zu einander verhalten, wie die an der jedesmaligen vierten Spitze angebrachte Kräfte. Sind insbesondere die vier Kräfte einander gleich und in gleichem Sinne wirksam, so ist

$$KG : GD = 1 : 4,$$

und die vier Pyramiden um K sind einander gleich.

Eine bemerkenswerthe Eigenschaft des Schwerpunctes ist folgende:

Sind beliebige, durch Linien nach Größe und Richtung dargestellte, Kräfte um einen Punct A im Gleichgewichte, so hat A gegen die Endpuncte B, C, D ⋯ dieser Linien eine solche Lage, daß, wenn man sich gleiche, parallele und in gleichem Sinne wirkende Kräfte an diesen Endpuncten angebracht denkt, der Punct A der Schwerpunct derselben ist.

Denn man lege durch A drei auf einander senkrechte Axen, mit welchen die Kräfte die Winkel α, β, γ, u. s. f. bilden, so ist, weil Gleichgewicht besteht,

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + \cdots = 0,\quad P\cos\beta + P'\cos\beta' + \cdots = 0,$$
$$P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + \cdots = 0.$$

Nun ist aber

$$P : P' : P'' \cdots = AB : AC : AD \cdots,$$

also ist auch

$$AB\cos\alpha + AC\cos\alpha' + \cdots = 0,$$

oder, wenn x, x′, ⋯ die Absissen von B, C ⋯ sind, mithin $x = AB\cdot\cos\alpha$, u. s. f., so ist $x + x' + \cdots = 0$ oder $\Sigma x = 0$. Eben so ist $\Sigma y = 0$, $\Sigma z = 0$. Nun seien u, v, w die Coordinaten des Schwerpunctes der n gleichen Kräfte an A, B, C ⋯; so ist, wenn man die Intensität jeder derselben mit Q bezeichnet,

$$nQ\cdot u = Qx + Qx' + \cdots = Q\Sigma x = 0;$$

also $u=0$, eben so $v=0$, $w=0$; also ist der Anfang der Coordinaten der Schwerpunct; w. z. b. w. Sind insbesondere vier Kräfte, die nicht in einer Ebene liegen mögen, um einen Punct A im Gleichgewichte, und B, C, D, E die Endpuncte der sie darstellenden Linien; so ist A der Schwerpunct von vier gleichen, parallelen, in gleichem Sinne an B, C, D, E wirkenden Kräften. Daher sind, nach dem Vorigen, die vier Pyramiden, welche A zur gemeinschaftlichen Spitze, und die Grenzflächen der Pyramide BCDE zu Grundflächen haben, einander gleich. Hieraus folgt der Satz:

Stellen die Linien AB, AC, AD, AE vier Kräfte dar, die an dem Angriffspuncte A im Gleichgewichte sind, so sind die vier durch je drei dieser Linien, als zusammenstoßende Kanten, bestimmten Pyramiden einander an Rauminhalt gleich.

23. Wenn die Angriffspuncte der parallelen Kräfte ein stetiges Ganze bilden, welches Linie, Fläche oder Körper sein kann, so läßt sich der Schwerpunct derselben, mit Hülfe der Integralrechnung, folgendermaßen finden:

Man theile das von den Puncten gebildete Ganze im Elemente dv, die nach allen Dimensionen unendlich klein seien. Wirkt nun an einem Puncte von dv die Kraft p, so wird die an jedem anderen Puncte des nämlichen Elementes wirkende Kraft nur um eine im Verhältnisse zu p unendlich kleine Größe von p verschieden sein, indem vorausgesetzt wird, daß die Kräfte sich von einem Puncte zum anderen stetig ändern. Man kann mithin alle Kräfte an den Puncten von dv als einander gleich und das Product pdv als das Maaß ihrer Resultante ansehen, welche an dem Schwerpuncte von dv angebracht werden muß. Bezeichnet man die Coordinaten desselben mit x, y, z und die Coordinaten des Schwerpunctes aller Kräfte mit x', y', z', so erhält man zur Bestimmung der letzteren sofort:

$$x'\Sigma pdv = \Sigma pxdv,\quad y'\Sigma pdv = \Sigma pydv,\quad z'\Sigma pdv = \Sigma pzdv;$$

oder wenn, wie hier erforderlich, die Summationen durch das

Integralzeichen angedeutet werden,

$$x'\int pdv = \int pxdv,\quad y'\int pdv = \int pydv,\quad z'\int pdv = \int pzdv. \quad \text{a.}$$

Obgleich in diesen Formeln x, y, z sich auf den Schwerpunct des Elementes dv beziehen, so können sie doch ohne Weiteres als die Coordinaten des Angriffspunctes von p angesehen werden, weil dieser Angriffspunct vom Schwerpuncte des Elementes dv unendlich wenig entfernt ist. Im Allgemeinen ist die Kraft p eine Function der Coordinaten ihres Angriffspunctes. Ist insbesondere p constant, d. h. sind die an den verschiedenen Puncten wirkenden parallelen Kräfte einander gleich, so heißt das von den Puncten gebildete Ganze gleichartig. Alsdann gehen die Formeln a. in folgende über:

$$x'\int dv = \int xdv,\quad y'\int dv = \int ydv,\quad z'\int dv = \int zdv,$$

von welchen jetzt auf einige Beispiele Anwendung gemacht werden soll.

Bilden die Angriffspuncte eine Linie, so ist das Bogenelement $=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ für dv zu setzen; mithin erhält man für den Schwerpunct einer gleichartigen Linie von der Länge s:

$$x' = \frac{\int xds}{s},\quad y' = \frac{\int yds}{s},\quad z' = \frac{\int zdv}{s}. \qquad \text{A.}$$

Das Element einer Fläche, in rechtwinklichen Coordinaten ausgedrückt, ist

$$dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2};$$

also erhält man die Coordinaten des Schwerpunctes einer gleichartigen Fläche

$$\left.\begin{array}{l} x' = \dfrac{\iint x\,dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}}{\iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+p^2}},\quad y' = \dfrac{\iint y\,dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}}{\iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ \qquad\qquad z' = \dfrac{\iint z\,dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}}{\iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}} \end{array}\right\}\text{B.}$$

Für einen Körper erhält man in rechtwinklichen Coordinaten

$dv = dx\,dy\,dz$, also

$$x' = \frac{\int\!\!\int\!\!\int x\,dx\,dy\,dz}{\int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz},\quad y' = \frac{\int\!\!\int\!\!\int y\,dx\,dy\,dz}{\int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz},\quad z' = \frac{\int\!\!\int\!\!\int z\,dx\,dy\,dz}{\int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz}. \quad \text{C.}$$

24. Der Schwerpunct einer überall gleichartigen geraden Linie liegt offenbar in ihrer Mitte. Um den Schwerpunct des Umringes eines Polygons zu finden, wenn dieser **gleichartig** ist, braucht man nur die an jeder Seite wirkenden Kräfte in eine Resultante zu vereinigen, welche in der Mitte der Seite anzubringen und der Länge der Seite proportional ist. Wird z. B. der Schwerpunct des Umfanges eines Dreieckes ABC gesucht, so nehme man die Mitten a, b, c der Seiten (Fig. 13.), und ziehe das Dreieck abc. Dieses ist offenbar dem Dreieck ABC ähnlich, mithin

$$ab : bc : ca = AB : BC : CA.$$

Die an den Spitzen a, b, c wirkenden parallelen Kräfte verhalten sich wie ~~AB : BC : CA,~~ also auch wie ~~ab~~ : bc : ca; das heißt, wie die Gegenseiten im Dreiecke abc. Ist nun d der Schwerpunct von c und b, so verhält sich

$$dc : db = AC : AB = ac : ab,$$

oder

$$dc : db = ac : ab.$$

Hieraus folgt, daß die Linie ad, in welcher sich der Schwerpunct des Umringes ABC befinden muß, den Winkel cab halbirt. Zieht man ferner aus b die Gerade be, welche wieder den Winkel cba halbirt, so muß der Schwerpunct auch in dieser Linie liegen; derselbe ist folglich der Durchschnitt f beider Geraden, und mithin der **Mittelpunct des dem Dreiecke abc eingeschriebenen Kreises.**

Der Schwerpunct eines Kreisbogens AB (Fig. 14.) liegt offenbar in dem durch die Mitte D desselben gehenden Halbmesser. Wird mithin dieser Halbmesser zur Axe der x genommen, so ist die Ordinate des Schwerpunctes Null. Um die Abscisse zu finden, setze man $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$; für den

Endpunct A sei $\varphi = ACD = \alpha$, also $CE = a\cos\alpha$, $AE = a\sin\alpha$. Die Abscisse des Schwerpunctes ist, weil Bogen $AB = 2a\alpha$,

$$u = \frac{\int x\,ds}{2a\alpha}$$

und zugleich $ds = a\,d\varphi$, $x = a\cos\varphi$; also $\int x\,ds = a^2\int\cos\varphi\,d\varphi$, welches Integral von $\varphi = -\alpha$ bis $\varphi = \alpha$ genommen, den Werth $2a^2\sin\alpha$ erhält. Folglich ist

$$u = \frac{2a^2\sin\alpha}{2a\alpha} = \frac{a\sin\alpha}{\alpha}$$

oder

$$u : a = \sin\alpha : \alpha,$$

wodurch die Lage des Schwerpunctes bestimmt ist.

Für die Parabel ist (nach §. 105. I.)

$$ds = dx\sqrt{\frac{p+2x}{2x}};$$

also die Coordinaten des Schwerpunctes eines parabolischen Bogens

$$su = \int x\,dx\sqrt{\frac{p+2x}{2x}} = \int\frac{dx\sqrt{px+2x^2}}{\sqrt{2}},$$

$$sv = \int y\,dx\sqrt{\frac{p+2x}{2x}} = \int\sqrt{2px}\cdot dx\sqrt{\frac{p+2x}{2x}}$$

$$= \sqrt{p}\int dx\sqrt{p+2x} = \tfrac{1}{3}\sqrt{p}\,(p+2x)^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$$

Der Ausdruck für den Bogen s ist im ersten Theile, S. 204. Z. 4. gegeben; derselbe läßt sich, durch eine leichte Reduction, auf folgende Form bringen:

$$s = \tfrac{1}{2}p\log\left(\sqrt{p+2x} + \sqrt{2x}\right) + \sqrt{\tfrac{1}{2}px + x^2} + \text{Const.},$$

wo $\text{Const.} = -\tfrac{1}{2}p\log\sqrt{p}$ ist, wenn der Bogen vom Scheitel anfängt.

Um das Integral $\int dx\sqrt{\frac{px+2x^2}{2}}$ zu finden, setze man zur Abkürzung $\frac{p}{2} = 2a$, so erhält man

$$\int dx\sqrt{2ax+x^2}=\int dx\sqrt{(x+a)^2-a^2}=\int dz\sqrt{z^2-a^2},$$

wo $z=x+a$. Nun ist

$$\int dz\sqrt{z^2-a^2}=z\sqrt{z^2-a^2}-\int\frac{z^2dz}{\sqrt{z^2-a^2}}$$

$$=z\sqrt{z^2-a^2}-\int dz\sqrt{z^2-a^2}-a^2\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-a^2}};$$

mithin

$$2\int dz\sqrt{z^2-a^2}=z\sqrt{z^2-a^2}-a^2\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-a^2}},$$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-a^2}}=log(z+\sqrt{z^2-a^2}); \quad \text{(I. §. 95.)}$$

also

$$\int dz\sqrt{z^2-a^2}=\tfrac{1}{2}z\sqrt{z^2-a^2}-\tfrac{1}{2}a^2 log(z+\sqrt{z^2-a^2})+C.,$$

mithin

$$su=\int dx\sqrt{\frac{px+2x^2}{2}}$$

$$=\tfrac{1}{2}(x+\tfrac{1}{4}p)\sqrt{x^2+\tfrac{1}{2}px}-\frac{p}{32}log(x+\tfrac{1}{4}p+\sqrt{x^2+\tfrac{1}{2}px})+C.$$

Es sei (Fig. 15.) AGE eine Cycloide, $AB=x$, $BC=y$;

$$x=a(\varphi-sin\,\varphi),\ y=a(1-cos\,\varphi).$$

Wird der Anfang der Coordinaten in den Scheitel G verlegt, und demnach $GK=x_1$, $KC=y_1$ gesetzt, so ist offenbar $x+y_1=a\pi$, $y+x_1=2a$, mithin

$$x_1=a(1+cos\,\varphi),\ y_1=a(\pi-\varphi+sin\,\varphi),$$

oder, wenn man $\varphi=\pi-\psi$ setzt, und x, y statt x_1, y_1 schreibt:

$$x=a(1-cos\,\psi),\ y=a(\psi+sin\,\psi).$$

Hieraus ergiebt sich $ds=2a\,cos\,\tfrac{1}{2}\psi d\psi$, also Bogen $GC=s=4a\,sin\,\tfrac{1}{2}\psi$, oder $s^2=8ax$ (vgl. I. §. 105.). Ferner ist für den Schwerpunct des Bogens GC, nach der Formel $su=\int x\,ds$, weil $x=\frac{s^2}{8a}$, $su=\frac{s^3}{24a}$, also

$$u=\frac{s^2}{24a}=\tfrac{1}{3}x=\tfrac{1}{3}GK.$$

Um die Ordinate v zu finden, hat man

$$sv=\int y\,ds=ys-\int s\,dy,$$

$$\int s\,dy=8a^2\int sin\,\tfrac{1}{2}\psi\,cos\,\tfrac{1}{2}\psi^2\,d\psi=\tfrac{16}{3}a^2(1-cos\,\tfrac{1}{2}\psi^3);$$

also $$sv=ys-\tfrac{16}{3}a^2(1-cos\,\tfrac{1}{2}\psi^3).$$

Für $\psi=\pi$ wird $s=4a=GA$, $y=a\pi$; also $u=\tfrac{2}{3}a$, $v=(\pi-\tfrac{4}{3})a$.

25. Um den Schwerpunct der Fläche des Paralleltrapezes ABCD (Fig. 16.) zu finden, nehme man die Gerade FE, welche die Mitten der parallelen Seiten AB und DC verbindet, zur Axe der x, und FA zur Axe der y. Es sei HK parallel AB, so sind $FG=x$, $GH=y$ die Coordinaten von H, und $FG=x$, $GK=-y$ die von K. Man setze noch $AF=FB=a$, $DE=EC=b$, $FE=c$, $\angle AFE=\alpha$, und die Fläche des Trapezes, d. i. $(a+b)c\,sin\,\alpha=T$, so ist

$$Tu=sin\,\alpha\iint x\,dy\,dx,\ Tv=sin\,\alpha\iint y\,dy\,dx.$$

Man integrire zuerst nach y zwischen den Grenzen

$$y=\pm\left(\frac{(b-a)x}{c}+a\right),$$

welche durch die Gleichungen der Geraden AD, BC gegeben werden; so ergiebt sich sofort $v=0$, d. h. der Schwerpunct liegt in FE, was auch ohne Rechnung klar ist; ferner kommt:

$$Tu=2\,sin\,\alpha\int\left(\frac{(b-a)x}{c}+a\right)x\,dx,$$

und mithin, wenn von $x=0$ bis $x=c$ integrirt wird,

$$Tu=2\,sin\,\alpha(\tfrac{1}{3}c^2(b-a)+\tfrac{1}{2}ac^2),$$

oder, für T seinen Werth gesetzt:

$$(a+b)u=\tfrac{1}{3}c(a+2b).$$

Hieraus folgt $(a+b)(c-u)=\tfrac{1}{3}c(2a+b)$; also, wenn G der

Schwerpunct, mithin $FG = u$ ist,

$$FG : GE = a + 2b : 2a + b.$$

Ist $AB = 2a = 0$, so hat man ein Dreieck, und findet $u = \frac{2}{3}c$.

Es sei (Fig. 17.) ABD ein elliptisches Segment, dessen Schwerpunct gesucht wird. Durch die Mitte G der Sehne AD lege man den Durchmesser HB der Ellipse, so ist klar, daß der Schwerpunct in GB liegen muß; ferner ziehe man einen zweiten Durchmesser KE parallel mit AD; so sind $CB = a$, $CK = b$ conjugirte Axen, deren Winkel $KCB = \gamma$ sei. Diese zu Axen der x und y genommen, bedingen folgende Gleichung für die Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nun ist Segment $ABD = 2 \sin\gamma \int y\,dx = S$, und $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$; die Grenzen der Integration sind $x = CB = a$, $x = CG = x'$. Hieraus ergiebt sich

$$S = 2b \sin\gamma \int_{x'}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot dx,$$

d. i.

$$S = ab \sin\gamma \left[\frac{\pi}{2} - \frac{x'}{a}\sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2}} - arc \sin\frac{x'}{a}\right],$$

oder wenn man $\frac{\pi}{2} - arc\sin\frac{x'}{a} = \mu$, mithin $\cos\mu = \frac{x'}{a}$ setzt,

$$S = ab \sin\gamma(\mu - \tfrac{1}{2}\sin 2\mu).$$

Ferner ist

$$Su = 2\sin\gamma \int yx\,dx = 2b \sin\gamma \int_{x'}^{a} x\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot dx$$
$$= \tfrac{2}{3} a^2 b \sin\gamma \cdot \sin\mu^3,$$

daher

$$u = \frac{\frac{2}{3} a \sin\mu^3}{\mu - \frac{1}{2}\sin 2\mu}.$$

Für die halbe Ellipse KEB wird $x' = 0$, $\mu = \frac{\pi}{2}$, und $u = \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{\pi}$.

Um den Schwerpunct einer cycloidischen Fläche zu finden, seien wieder x und y Coordinaten aus dem Scheitel G, wie in §. 24. und demnach (Fig. 15.)

$$GK = x = a(1 - \cos\psi),\ KC = y = a(\psi + \sin\psi).$$

Alsdann erhält man für die Fläche $GKC = S$,

$$S = \int y\,dx = yx - \int x\,dy = xy - a^2 \int \sin\psi^2 \cdot d\psi,$$

also

$$S = xy - \tfrac{1}{2}a^2(\psi - \tfrac{1}{2}\sin 2\psi),$$

wo das Integral so genommen ist, daß es für $\psi = 0$ verschwindet, wie die folgenden ebenfalls. Ferner ist:

$$S \cdot u = \int xy\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 y - \tfrac{1}{2}\int x^2 dy$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2 y - \tfrac{1}{2}a^3 \int (1 - \cos\psi)\sin\psi^2 \cdot d\psi,$$

oder

$$S \cdot u = \tfrac{1}{2}x^2 y - \tfrac{1}{2}a^3[\tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{4}\sin 2\psi - \tfrac{1}{3}\sin\psi^3].$$

$$S \cdot v = \iint y\,dx\,dy = \tfrac{1}{2}\int y^2 dx = \tfrac{1}{2}y^2 x - \int yx\,dy.$$

Man hat $\int yx\,dx = a^3 \int (\psi + \sin\psi)\sin\psi^2\,d\psi$,

und findet durch theilweise Integration, für die Grenzen 0 und ψ,

$$\int \psi \sin\psi^2 \cdot d\psi = \tfrac{1}{4}\psi^2 - \tfrac{1}{2}\sin\psi(\psi\cos\psi - \tfrac{1}{2}\sin\psi)$$

und

$$\int \sin\psi^3\,d\psi = 1 - \cos\psi - \tfrac{1}{3}(1 - \cos\psi^3);$$

woraus sich ergiebt, wenn man statt der Potenzen von $\sin\psi$ und $\cos\psi$ die Sinus und Cosinus der Vielfachen von ψ einführt,

$$\int yx\,dx =$$
$$a^3[\tfrac{1}{4}\psi(\psi - \sin 2\psi) + \tfrac{19}{24} - \tfrac{3}{4}\cos\psi - \tfrac{1}{8}\cos 2\psi + \tfrac{1}{12}\cos 3\psi],$$

welcher Werth oben in den Ausdruck für $S \cdot v$ zu setzen ist.

Für die halbe Cycloide wird $\psi = \pi$, $x = 2a$, $y = a\pi$; $S = \frac{3}{2}a^2\pi$;

$$S \cdot u = \tfrac{7}{4}a^3\pi,\ S \cdot v = (\tfrac{3}{4}\pi^2 - \tfrac{4}{3})a^3;$$

also

$$u = \tfrac{7}{6}a,\quad v = \left(1 - \frac{16}{9\pi^2}\right)\frac{a\pi}{2}.$$

26. Für eine Umdrehungsfläche, deren Axe z ist, hat man, nach I. §. 108. (S. 212.) als Ausdruck eines Flächenelementes:

$$r\,dr\,d\varphi\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2},$$

oder wenn man das Bogenelement der erzeugenden Curve, d. i. $dr\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2}=ds$ setzt:

$$r\,d\varphi\,ds.$$

Bezeichnet man einen Theil der Fläche mit S, und sind u, v, w die Coordinaten seines Schwerpunctes, so ist:

$$S=\iint r\,d\varphi\,ds.$$

$$S\cdot u=\iint r^2\cos\varphi\,ds\,d\varphi \quad (\text{weil } x=r\cos\varphi)$$
$$S\cdot v=\iint r^2\sin\varphi\,ds\,d\varphi \quad (\text{weil } y=r\sin\varphi)$$
$$S\cdot w=\iint rz\,ds\,d\varphi.$$

Es sei das Flächenstück begrenzt von zwei auf der Axe z senkrechten, und zwei durch die Axe z gelegten Ebenen, für welche $\varphi=0$ und $\varphi=\varphi'$ sei; so sind die Grenzen nach s und φ unabhängig von einander. Integrirt man von $\varphi=0$ bis $\varphi=\varphi'$, so kommt: $S=\varphi'\int r\,ds$

$$S\cdot u=\sin\varphi'\int r^2 ds,\quad S\cdot v=(1-\cos\varphi')\int r^2 ds,\quad S\cdot w=\varphi'\int rz\,ds.$$

Für einen vollständigen Ring um die Axe z wird $\varphi'=2\pi$, mithin

$$S=2\pi\int r\,ds,\quad u=0,\quad v=0,\quad S\cdot w=2\pi\int rz\,ds.$$

Dieser Ausdruck ergiebt sich auch leicht, wenn man bemerkt, daß $2\pi r ds$ ein unendlich schmales ringförmiges Flächenelement bedeutet, dessen Moment in Bezug auf den Anfang der Coordinaten offenbar $=2\pi r ds\cdot z$ ist. Dividirt man man nun die Summe aller Momente, d. i. $\int 2\pi rz ds$ durch die Summe aller Flächenelemente $\int 2\pi r ds$, so erhält man den Abstand w des Schwerpunctes vom Anfange der Coordinaten, nämlich

$$w=\frac{\int rz\,ds}{\int r\,ds},$$

übereinstimmend mit dem Vorhergehenden.

Es sei z. B. die Fläche eine Kugel, $z^2+r^2=a^2$; man setze $z=a\sin\varphi$, $r=a\cos\varphi$, so wird $ds=a\,d\varphi$, und $\int r\,ds=a^2\sin\varphi$, $\int rz\,ds=\frac{1}{2}a^3\sin\varphi^2$, wenn die Integrale von $\varphi=0$ anfangen; also

$$w=\tfrac{1}{2}a\sin\varphi=\tfrac{1}{2}z.$$

Man sucht den Schwerpunct einer Fläche, welche durch Drehung des Bogens GC einer Cycloide (Fig. 15.) um die Axe GK entsteht. In §. 24. war GK=x, KC=y; hier werde GK=z, KC=r gesetzt, so ist:

$$z=a(1-\cos\psi),\quad r=a(\psi+\sin\psi),$$
$$ds=2a\cos\tfrac{1}{2}\psi\cdot d\psi,\quad s=4a\sin\tfrac{1}{2}\psi,\quad s^2=8az.$$

Es ergiebt sich, wenn $\cos\frac{1}{2}\psi=q$ gesetzt wird:

$$\int r\,ds=rs-\int s\,dr=rs-\tfrac{16}{3}a^2(1-q^3),$$

welcher Werth für $\psi=0$ verschwindet.

$$\int r^2 ds=r^2 s-2\int rs\,dr=r^2 s-2r\int s\,dr+2\iint s\,dr^2.$$

Nun ist $\int s\,dr=-\frac{16}{3}a^2q^3$, mithin $\iint s\,dr^2=-\frac{32}{3}a^3\int q^5 d\psi$, wo $q=\cos\frac{1}{2}\psi$.

Hieraus findet man leicht, noch $\sin\frac{1}{2}\psi=t$ setzend,

$$\iint s\,dr^2=-\tfrac{64}{3}a^3(t-\tfrac{2}{3}t^3+\tfrac{1}{5}t^5),$$

welcher Werth für $\psi=0$ verschwindet.

Demnach ist, für die Grenzen 0 und ψ,

$$\int r^2 ds=r^2 s+\frac{32}{3}a^2 r q^3-\frac{128}{3}a^3 t(1-\tfrac{2}{3}t^2+\tfrac{1}{5}t^4)$$

Endlich findet sich

$$\int rz\,ds=\frac{1}{8a}\int rs^2 ds=\frac{1}{24a}(rs^3-\int s^3 dr),$$

und

$$\int s^3 dr=64a^4\int t^3(1+\cos\psi)d\psi=-256a^4(\tfrac{1}{3}q^3-\tfrac{1}{5}q^5),$$

wo der Kürze wegen $t=\sin\frac{1}{2}\psi$, $q=\cos\frac{1}{2}\psi$ sind, wie vorhin. Hieraus erhält man, wieder zwischen den Grenzen 0 und ψ:

$$\int rz\,ds=\frac{1}{24a}\left[rs^3+256a^4q^2(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}q^2)-\frac{512}{15}a^4\right].$$

Für $\psi=\pi$ ergiebt sich aus diesen Formeln, da $q=0$, $t=1$, $r=a\pi$, $s=4a$ wird:

$$\int r\,ds=4a^2\pi-\frac{16}{3}a^2,\ \int r^2ds=4a^3\pi^2-\frac{1024}{45}a^3,$$

$$\int rz\,ds=\frac{8}{3}a^3\pi-\frac{64}{45}a^3,$$

folglich erhält man zur Bestimmung des Schwerpunctes derjenigen Fläche, welche entsteht, wenn die halbe Cycloide GA (Fig. 15.) um die Axe GD eine Drehung $=\varphi'$ macht:

$$u=\frac{\pi^2-\frac{256}{45}}{\pi-\frac{4}{3}}\cdot\frac{\sin\varphi'}{\varphi'}a,\quad v=\frac{\pi^2-\frac{256}{45}}{\pi-\frac{4}{3}}\cdot\frac{1-\cos\varphi'}{\varphi'}\cdot a$$

$$w=\frac{\pi-\frac{8}{15}}{\pi-\frac{4}{3}}\cdot\tfrac{2}{3}a.$$

(In Figur 15. ist G der Anfang der u, v, w, und u fällt in die Tangente in G, w in GD).

Wird die Cycloide um die Tangente im Scheitel G, als Axe, gedreht, so muß man setzen, da die Drehungsaxe immer die der z sein soll:

$$z=a(\psi+\sin\psi),\ r=a(1-\cos\psi),\ s^2=8ar,$$

wodurch erhalten wird:

$$\int r\,ds=\frac{s^3}{24a}=\tfrac{1}{3}sr,\ \int r^2ds=\tfrac{1}{5}r^2s,\ \text{und}\ \int rz\,ds=\int rz\sqrt{dr^2+dz^2}$$

genau wie oben, weil durch Vertauschung von r mit z diese Formel nicht geändert wird. In der obigen Formel für $\int rz\,ds$ muß aber natürlich $r=a(\psi+\sin\psi)$, d. h. gleich dem gegenwärtigen z, gesetzt werden, um denselben Werth zu erhalten, wie vorhin. Man erhält daher für den Drehungswinkel φ':

$$u=\tfrac{3}{5}r\cdot\frac{\sin\varphi'}{\varphi'},\quad v=\tfrac{3}{5}r\cdot\frac{1-\cos\varphi'}{\varphi'},\quad w=\frac{3}{rs}\int rz\,ds.$$

Also ergiebt sich z. B. für den Schwerpunct der Fläche, die durch eine volle Umdrehung der halben Cycloide GA um die Tangente im Scheitel (in welche w fällt) entsteht, indem $\varphi'=2\pi$, $\psi=\pi$ ist,

$$u=0,\ v=0,\ w=\left(\pi-\frac{8}{15}\right)a.$$

27. Um dem Leser noch ein geeignetes Beispiel zur Uebung in der Integral-Rechnung darzubieten, werde der Schwerpunct der Fläche des rechtwinklichen sphärischen Dreieckes ABC gesucht (Fig. 18.). Es sei B der rechte Winkel, und jede der Katheten AB, BC kleiner als ein Quadrant. Man nehme den durch A gehenden Halbmesser zur Axe der x, die y in der Ebene des Kreises AB..; so lassen sich die rechtwinklichen Coordinaten eines Punctes E der Kugel durch die sphärischen Coorodinaten $AF=\varphi$, $FE=\psi$ ($\angle AFE=\Re$), wie bekannt, folgendermaßen ausdrücken:

$$x=\cos\psi\cos\varphi,\ y=\cos\psi\sin\varphi,\ z=\sin\psi,$$

wobei der Halbmesser $=1$ gesetzt ist. Hieraus ergiebt sich das Element der Kugelfläche $=\cos\psi\,d\varphi\,d\psi$ (I. S. 214.), und mithin, wenn die Fläche des Dreieckes mit Δ bezeichnet wird, und u, v, w die den Axen x, y, z parallelen Coordinaten ihres Schwerpunctes sind:

$$\Delta=\iint\cos\psi\,d\varphi\,d\psi,$$

$$\Delta\cdot u=\iint\cos\psi^2\cos\varphi\,d\varphi\,d\psi,\ \Delta\cdot v=\iint\cos\psi^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\psi,$$

$$\Delta\cdot w=\iint\cos\psi\sin\psi\,d\varphi\,d\psi.$$

Der Werth von Δ könnte zwar als bekannnt angesehen werden;

es wird aber nicht überflüssig sein, zu zeigen, wie er sich aus obigem Integral ergiebt. Man setze $\angle CAB=\alpha$, $ACB=\gamma$, $AB=\varphi'$, $\grave{A}B=\psi'$, so ist, nach bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie:

$$tg\,\psi'=tg\,\alpha\cdot sin\,\varphi',\quad cos\,\gamma=cos\,\varphi'\,sin\,\alpha.$$

Für jeden Punct der Hypotenuse AC, z. B. E ist ferner, wegen des rechtwinklichen Dreieckes AFE:

$$tg\,\psi=tg\,\alpha\,sin\,\varphi,\quad \text{oder}\quad \psi=arc\,tg(tg\,\alpha\cdot sin\,\varphi).$$

Um nun Δ zu finden, integrire man zuerst von $\psi=0$ bis zu dem vorstehenden Werthe von ψ, so ergiebt sich die Fläche eines unendlich schmalen Streifens EFfe; wird hierauf wieder von $\varphi=0$ bis $\varphi=AB$ integrirt, so erhält man Δ. Demnach ist zuerst

$$\Delta=\int sin\,\psi\,d\varphi,$$

wo $sin\,\psi=\dfrac{tg\,\alpha\,sin\,\varphi}{\sqrt{1+tg\,\alpha^2\,sin\,\varphi^2}}$ zu setzen ist. Schreibt man noch k für $tg\,\alpha$, so kommt

$$\Delta=\int_0^\varphi\frac{k\,sin\,\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1+k^2\,sin\,\varphi^2}}.$$

Es sei $z=cos\,\varphi$, so kommt

$$\Delta=-\int_1^z\frac{k\,dz}{\sqrt{1+k^2-k^2z^2}}=\int_z^1\frac{sin\,\alpha\,dz}{\sqrt{1-z^2\,sin\,\alpha^2}},$$

d. i.
$$\Delta=arc\,sin(sin\,\alpha)-arc\,sin(z\,sin\,\alpha)$$
$$=\alpha-arc\,sin(cos\,\varphi\,sin\,\alpha).$$

In diesem Ausdrucke ist aber $\varphi=\varphi'=AB$, und weil $cos\,\varphi'\,sin\,\alpha=cos\,\gamma$ so kommt

$$\Delta=\alpha-arc\,sin(cos\,\gamma)=\alpha-arc\,sin(sin(\tfrac{1}{2}\pi-\gamma))$$
$$=\alpha+\gamma-\tfrac{1}{2}\pi;\quad \text{w. z. b. w.}$$

Bei den übrigen Integralen sind die Grenzen die nämlichen, wie bisher. Wird also zuerst wieder nach ψ von 0 an integrirt, so kommt zunächst:

$$2\int cos\,\psi^2 d\psi=\int(1+cos\,2\psi)d\psi=\psi+\tfrac{1}{2}sin\,2\psi$$
$$2\int sin\,\psi.\,cos\,\psi\,d\psi=sin\,\psi^2,$$

und mithin:

$$2\Delta\cdot u=\int(\psi+sin\,\psi\,cos\,\psi)\,cos\,\varphi\cdot d\varphi$$
$$2\Delta\cdot v=\int(\psi+sin\,\psi\,cos\,\psi)\,sin\,\varphi\cdot d\varphi$$
$$2\Delta\cdot w=\int sin\,\psi^2 d\varphi.$$

In diesen Formeln ist $\psi=arc\,tg(k\,sin\,\varphi)$, $k=tg\,\alpha$,

$$sin\,\psi=\frac{k\,sin\,\varphi}{\sqrt{1+k^2\,sin\,\varphi^2}},\quad cos\,\psi=\frac{1}{\sqrt{1+k^2\,sin\,\varphi^2}}.$$

Nun ist
$$\int\psi\,cos\,\varphi\,d\varphi=\psi\,sin\,\varphi-\int sin\,\varphi\,d\psi$$
$$\int\psi\,sin\,\varphi\,d\varphi=-\psi\,cos\,\varphi+\int cos\,\varphi\,d\psi.$$
$$d\psi=\frac{k\,cos\,\varphi\,d\varphi}{1+k^2\,sin\,\varphi^2}.$$

Demnach

$$\int sin\,\varphi\,d\psi=\int\frac{k\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi\,d\varphi}{1+k^2\,sin\,\varphi^2}=\frac{1}{2k}log(1+k^2\,sin\,\varphi^2),$$

oder weil

$$1+k^2\,sin\,\varphi^2=\frac{1}{cos\,\psi^2};\quad \int sin\,\varphi\,d\psi=-\frac{1}{k}\,log\,cos\,\psi,$$

welches Integral für $\varphi=0$ verschwindet. Ferner ist

$$\int cos\,\varphi\,d\psi=\int\frac{k\,cos\,\varphi^2 d\varphi}{1+k^2\,sin\,\varphi^2}=\frac{1}{k}\int\frac{k^2-k^2\,sin\,\varphi^2}{1+k^2\,sin\,\varphi^2}d\varphi$$
$$=\frac{k^2+1}{k}\int\frac{d\varphi}{1+k^2\,sin\,\varphi^2}-\frac{\varphi}{k}.$$

Um das Integral $\displaystyle\int\frac{d\varphi}{1+k^2\,sin\,\varphi^2}$ zu finden, setze man $sin\,\varphi^2=\dfrac{1-cos\,2\varphi}{2}$, so kommt

$$\int\frac{d\varphi}{1+k^2\,sin\,\varphi^2}=\int\frac{2\,d\varphi}{2+k^2-k^2\,cos\,2\varphi},$$

oder wenn zur Abkürzung $2+k^2=ak^2$ gesetzt wird,

$$k^2\int\frac{d\varphi}{1+k^2\sin\varphi^2}=\int\frac{2d\varphi}{a-\cos 2\varphi}.$$

Es sei $\cos 2\varphi=-q$, so ist $\sin 2\varphi=+\sqrt{1-q^2}$, nämlich positive, weil, nach der Annahme, φ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, also 2φ zwischen 0 und π liegt.

Demnach wird $\sin 2\varphi\cdot 2d\varphi=dq$, mithin $2d\varphi=\frac{dq}{\sqrt{1-q^2}}$ und

$$\int\frac{2d\varphi}{a-\cos 2\varphi}=\int\frac{dq}{(a+q)\sqrt{1-q^2}}.$$

Nun setze man in der Formel C. (I. S. 182.), $x=q$, $h=1$, und bemerke zugleich, daß $a=\frac{k^2+2}{k^2}>1$, so kommt

$$\int\frac{dq}{(a+q)\sqrt{1-q^2}}=\frac{Q}{\sqrt{a^2-1}}+\text{Const.},$$

in welcher Formel ist:

$$\sin Q=\frac{1+aq}{a+q},\quad \cos Q=\frac{\sqrt{a^2-1}\cdot\sqrt{1+q^2}}{a+q}$$

(vgl. I. S. 182, wo $y=Q$).

Da $a+q$ positiv ist, so ist auch $\cos Q$ positiv; daher ohne Zweideutigkeit der Werth von $Q=\arcsin\frac{1+aq}{a+q}$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen. Schreibt man wieder $-\cos 2\varphi$ für q,

so kommt $\displaystyle\int\frac{2d\varphi}{a-\cos 2\varphi}=\frac{Q}{\sqrt{a^2-1}}+\text{Const.}$

wo $Q=\arcsin\frac{1-a\cos 2\varphi}{a-\cos 2\varphi}$, zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$.

Für $\varphi=0$ wird $Q=\arcsin(-1)=-\frac{1}{2}\pi$, demnach

$$\int_0^\varphi\frac{2d\varphi}{a-\cos 2\varphi}=\frac{Q+\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Nun ist $\sin Q$

$$=\frac{1-a\cos 2\varphi}{a-\cos 2\varphi}=\frac{k^2-(2+k^2)\cos 2\varphi}{2+k^2-k^2\cos 2\varphi}=\frac{(2+k^2)\sin\varphi^2-1}{1+k^2\sin\varphi^2},$$

oder wenn man bemerkt, daß $k\sin\varphi=tg\psi$,

$$\sin Q=\frac{2\sin\varphi^2+tg\psi^2-1}{1+tg\psi^2}=1-2\cos\varphi^2\cos\psi^2.$$

Unter φ und ψ sind hier die Grenzwerthe AB, BC zu verstehen. Setzt man die Hypotenuse $AC=H$ (Fig. 18.), so ist $\cos\varphi\cos\psi=\cos H$, und folglich

$$\sin Q=1-2\cos H^2$$

oder

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi+Q)=\cos 2H.$$

Da φ und ψ kleiner sind als $\frac{1}{2}\pi$, so ist auch $H<\frac{1}{2}\pi$, also $2H<\pi$, und weil Q zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, auch $\frac{1}{2}\pi+Q<\pi$. Daher folgt aus der vorstehenden Gleichung, daß nothwendig

$$\tfrac{1}{2}\pi+Q=2H$$

ist, und mithin:

$$\int_0^\varphi\frac{2d\varphi}{a-\cos 2\varphi}=\frac{2H}{\sqrt{a^2-1}};$$

folglich auch

$$\int\frac{d\varphi}{1+k^2\sin\varphi^2}=\frac{2H}{k^2\sqrt{a^2-1}}=H\cos\alpha.$$

Es ist nämlich $a=\frac{2+k^2}{k^2}$, $k=tg\,\alpha$; hieraus folgt $k^2\sqrt{a^2-1}=\frac{2}{\cos\alpha}$. Der oben angegebene Werth von $\int\cos\varphi d\psi$ wird demnach, weil noch

$$\frac{k^2+1}{k}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha},\quad \frac{1}{k}=cotg\,\alpha,$$

$$\int\cos\varphi\,d\psi=\frac{H}{\sin\alpha}-\varphi\,cotg\,\alpha.$$

Endlich findet man:

$$\int\sin\psi\cos\psi\cos\varphi d\varphi=\int\frac{k\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{1+k^2\sin\varphi^2}=\int\sin\varphi d\psi\ \text{(s. oben)}$$

$$\int \sin\psi \cos\psi \sin\varphi d\varphi = \int \frac{k \sin\varphi^2 d\varphi}{1+k^2 \sin\varphi^2}$$
$$= \varphi \, cotg\,\alpha - H \cos\alpha \cdot cotg\,\alpha.$$
$$\int \sin\psi^2 d\varphi = \int \frac{k^2 \sin\varphi^2 d\varphi}{1+k^2 \sin\varphi^2} = \varphi - H \cos\alpha.$$

Mit Hülfe dieser Werthe ergeben sich nun die Coordinaten des Schwerpunctes wie folgt:

$$2\Delta \cdot u = \psi \sin\varphi - \int \sin\varphi d\psi + \int \sin\varphi d\psi = \psi \sin\varphi.$$
$$2\Delta \cdot v = -\psi \cos\varphi + \frac{H}{\sin\alpha} - \varphi \, cotg\,\alpha + (\varphi - H \cos\alpha)\, cotg\,\alpha$$

oder $\quad 2\Delta \cdot v = H \sin\alpha - \psi \cos\varphi$

$\quad 2\Delta \cdot w = \varphi - H \cos\alpha;$

also ist: $\quad 2\Delta = 2\alpha + 2\gamma - \pi,$

$$u = \frac{\psi \sin\varphi}{2\Delta},\ v = \frac{H \sin\alpha - \psi \cos\varphi}{2\Delta},\ w = \frac{\varphi - H \cos\alpha}{2\Delta}.$$

In diesen Formeln ist (Fig. 18.) $AB = \varphi$, $BC = \psi$, $AC = H$, $\angle CAB = \alpha$, $ACB = \gamma$.

Es sei $\quad u' = u \cos\varphi + v \sin\varphi,$

$\quad v' = u \sin\varphi - v \cos\varphi,$

so kommt: $\quad 2\Delta u' = H \sin\alpha \sin\varphi,$

$\quad 2\Delta v' = \psi - H \sin\alpha \cos\varphi.$

Denkt man sich aus der Spitze B des rechten Winkels ein sphärisches Loth (p) auf die Hypotenuse gefällt, so ist

$$\sin p = \sin\alpha \ \sin\varphi.$$

Ferner ist bekanntlich $\sin\alpha \cos\varphi = \cos\gamma$; mithin endlich:

$$u' = \frac{H \sin p}{2\Delta},\ v' = \frac{\psi - H \cos\gamma}{2\Delta},\ w = \frac{\varphi - H \cos\alpha}{2\Delta}.$$

Hier ist der durch die Spitze des rechten Winkels (B) gehende Halbmesser die Axe der u'.

28. Um ein Beispiel von dem Schwerpuncte eines körperlichen Raumes zu geben, denke man sich ein Ellipsoid, dessen Hauptaxen a, b, c seien. Nimmt man die Richtungen derselben zu Coordinaten-Axen, so kann gesetzt werden:

$$x = a \cos\psi \cos\varphi,\ y = b \cos\psi \sin\varphi,\ z = c \sin\psi.$$

Wird nun z. B. der Schwerpunct des halben Ellipsoids, über der Ebene xy, verlangt, so ist klar, daß derselbe in der Axe c liegt. Legt man in dem Abstand z vom Mittelpuncte eine Ebene senkrecht auf die Axe c, so ist die Fläche des elliptischen Schnittes $= ab\pi \cos\psi^2$, weil $a \cos\psi$, $b \cos\psi$ die Axen desselben sind. Dieser Ausdruck mit dz multiplicirt, giebt das Volumen dV einer Schicht von der Höhe dz, deren Moment in Bezug auf den Anfang der Coordinaten $= z dV$ ist; daher ist

$$w \int dV = \int v dV.$$

Nun ist aber

$$\int dV = ab\pi \int \cos\psi^2 dz = abc\pi \int \cos\psi^2 d \sin\psi,$$

weil $z = c \sin\psi$, und

$$\int_0^\psi \cos\psi^2 d(\sin\psi) = \sin\psi - \tfrac{1}{3} \sin\psi^3,$$

also $\quad V = abc\pi \sin\psi (1 - \tfrac{1}{3} \sin\psi^2).$

Ferner

$$\int z dV = ab\pi \int z \cos\psi^2 dz = abc^2\pi \int \cos\psi^2 \sin\psi d \sin\psi$$
$$= \frac{abc^2\pi}{2} (\sin\psi^2 - \tfrac{1}{2} \sin\psi^4);$$

folglich $\quad w = \tfrac{1}{2} c \sin\psi \left(\frac{1 - \tfrac{1}{2} \sin\psi^2}{1 - \tfrac{1}{3} \sin\psi^2} \right)$

oder auch $\quad w = \tfrac{1}{2} z \left(\frac{c^2 - \tfrac{1}{2} z^2}{c^2 - \tfrac{1}{3} z^2} \right).$

Dieser Ausdruck gilt für einen Abschnitt des Ellipsoids zwischen parallelen Grundflächen, von denen eine die Ebene der xy und die zweite von dieser um den Abstand $= z$ entfernt ist. Für das halbe Ellipsoid wird $z = c$, also $w = \tfrac{3}{8} c$.

Im Allgemeinen erhält man für den Schwerpunct eines Volumens V, wenn d^3V ein nach allen Dimensionen unendlich kleines Element desselben ist:

$$V\cdot u=\int x\,d^3V,\ V\cdot v=\int y\,d^3V,\ V\cdot w=\int z\,d^3V,$$

wo das Integralzeichen eine dreifache Integration bedeutet.

Aus §. 112. (I.) ergeben sich verschiedene Ausdrücke für d^3V, je nachdem die Coordinaten der Grenzfläche angenommen sind; namentlich:

in rechtwinklichen Coordinaten: $d^3V=dx\,dy\,dz$.

Sind die Coordinaten der Grenzfläche als Functionen von p und q gegeben (vgl. I., §. 112.), so ist

$$\sqrt{EG-F^2}\cdot\cos i\cdot dp\,dq=\left(\frac{dy}{dp}\cdot\frac{dx}{dq}-\frac{dy}{dq}\cdot\frac{dx}{dp}\right)dp\,dq$$

die Projection des Flächenelementes auf die Ebene xy. Multiplicirt man dieselbe mit dz, so erhält man das Volumen (d^3V) eines unendlich kleinen Parallelepipedums von der Höhe dz; nämlich: $d^3V=\left(\frac{dy}{dp}\cdot\frac{dx}{dq}-\frac{dy}{dq}\cdot\frac{dx}{dp}\right)dp\,dq\,dz$.

So ist z. B. für ein Ellipsoid (I. §. 113.)

$$d^3V=ab\sin\psi\cos\psi\,d\psi\,d\varphi\,dz;$$

demnach

$$\left.\begin{aligned}V\cdot u&=ab\iiint x\sin\psi\cos\psi\,d\psi\,d\varphi\,dz.\\ V\cdot v&=ab\iiint y\sin\psi\cos\psi\,d\psi\,d\varphi\,dz.\\ V\cdot w&=ab\iiint z\sin\psi\cos\psi\,d\psi\,d\varphi\,dz.\end{aligned}\right\}\quad A.$$

Integrirt man z. B. zuerst nach φ, von 0 bis 2π, so kommt, weil

$$x=a\cos\psi\cos\varphi,\ y=b\cos\psi\sin\varphi,$$

$u=0$, $v=0$, wie leicht zu sehen; ferner

$$V\cdot w=2ab\pi\iint z\cos\psi\sin\psi\,d\psi\,dz.$$

Integrirt man ferner diesen Ausdruck von $\psi=\psi$ bis $\psi=\frac{1}{2}\pi$, so kommt $V\cdot w=ab\pi\int z\cos\psi^2\,dz$,

welcher Ausdruck das Moment einer auf der Axe z senkrechten Scheibe von der Höhe dz und der Grundfläche $ab\cos\psi^2\cdot\pi$

darstellt, wie vorhin; daher er auch nicht weiter entwickelt zu werden braucht.

Integrirt man die obigen Ausdrücke A. zuerst nach z, von 0 bis z, so kommt, indem man noch für x und y, so wie nach der Integration für z, ihre Werthe in φ und ψ einführt:

$$V\cdot u=a^2bc\iint\cos\psi^2\sin\psi^2\cos\varphi\cdot d\varphi\,d\psi$$
$$V\cdot v=ab^2c\iint\cos\psi^2\sin\psi^2\sin\varphi\cdot d\varphi\,d\psi$$
$$V\cdot w=\tfrac{1}{2}abc^2\iint\cos\psi\sin\psi^3\,d\varphi\,d\psi.$$

Wird weiter zwischen den nämlichen von einander unabhängigen Grenzen integrirt, wie in I. §. 113., nämlich nach φ von 0 bis φ, und nach ψ von 0 bis ψ, so kommt zuerst:

$$V\cdot u=a^2bc\sin\varphi\int\cos\psi^2\sin\psi^2\,d\psi.$$
$$V\cdot v=ab^2c(1-\cos\varphi)\int\cos\psi^2\sin\psi^2\,d\psi$$
$$V\cdot w=\tfrac{1}{2}abc^2\varphi\int\cos\psi\sin\psi^3\,d\psi,$$

und sodann:

$$V\cdot u=\tfrac{1}{8}a^2bc\sin\varphi(\psi-2\sin 4\psi)$$
$$V\cdot v=\tfrac{1}{8}ab^2c(1-\cos\varphi)(\psi-2\sin 4\psi)$$
$$V\cdot w=\tfrac{1}{8}abc^2\varphi\sin\psi^4.$$

Zugleich ist $V=\frac{1}{3}abc\cdot\varphi\cdot\sin\psi^3$.

Hierbei ist der schon genannte §. 113. im ersten Theile zu vergleichen. Die vorstehenden Ausdrücke geben den Schwerpunct des daselbst berechneten Volumens V, über der Grundfläche LMKD (Fig. 27. I.).

Man bemerke noch folgende Ausdrücke für das Körperelement, nämlich

$$d^3V=r\,dr\,d\varphi\,dz$$

für Polarcoordinaten in der Ebene xy (§. 112. c.), und

$$d^3V=r^2\cos\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi$$

für Polarcoordinaten im Raume (§. 112. e.).

Der erste dieser Ausdrücke ist besonders bequem bei Umdrehungs-Körpern anzuwenden. Will man nämlich den Schwerpunct eines Volumens finden, welches von zwei durch die Axe z gelegten und zwei auf ihr senkrechten Ebenen begrenzt wird, so integrire man zuerst von $\varphi=0$ bis $\varphi=\varphi'$, wo φ' die gegenseitige Neigung der durch z gehenden Ebenen ist; ferner von $r=0$ bis $r=r$; alsdann kommt:

$$V=\tfrac{1}{2}\varphi'\int r^2\,dz$$

$$V\cdot u=\tfrac{1}{3}\sin\varphi'\int r^3\,dz,\quad V\cdot v=\tfrac{1}{3}(1-\cos\varphi')\int r^3\,dz,$$

$$V\cdot w=\tfrac{1}{2}\varphi'\int r^2 z\,dz;$$

so daß nur noch einfache Integrationen zu vollziehen sind. Für $\varphi'=2\pi$, d. h. für ein Stück des Körpers zwischen zwei auf der Drehungsaxe senkrechten Ebenen, erhält man

$$V=\pi\int r^2\,dz,\ u=0,\ v=0,\ V\cdot w=\pi\int r^2 z\,dz.$$

Die Anwendung dieser Formeln wird dem Leser ohne weitere Beispiele klar sein.

Es mag nur noch bemerkt werden, daß die hier gegebenen Formeln sich sämmtlich auf gleichartige Körper (Flächen, Linien) beschränken, bei welchen die an jedem Puncte wirkende Kraft (p, §. 23.) überall von gleicher Intensität ist. Im Allgemeinen aber kann p veränderlich, und wird dann irgend eine Function von x, y, z sein, die unter dem Integralzeichen noch als Factor hinzutritt, wie aus §. 23. a. zu ersehen ist. Da die Regeln der Integration die nämlichen bleiben, so sind besondere Beispiele dieses Falles nicht erforderlich.

Erweiterung der Lehre von den Mittelpuncten der Kräfte.

29. Die Frage nach einem Mittelpuncte der Kräfte wurde bisher in der Statik ausschließlich auf den Fall paralleler Kräfte beschränkt. Es ist aber schon in den §§. 11. und 20. gezeigt worden, daß auch beliebige Kräfte in einer Ebene, wofern ihre Mittelkraft nicht Null ist, einen Mittelpunct haben, der jedoch nur für Drehungen in dieser Ebene gültig bleibt. In den folgenden §§. soll diese Untersuchung auf beliebige Kräfte und Drehungen im Raume ausgedehnt werden.

Man denke sich an einem festen Körper, d. h. an einem Systeme fest verbundener Puncte, Kräfte angebracht, die keiner anderen Einschränkung unterworfen sind, als daß ihre Mittelkraft nicht Null sei. Wegen dieser Einschränkung besteht weder zwischen den Kräften Gleichgewicht, noch sind sie einem bloßen Paare gleichgeltend; dagegen lassen sie sich durch eine der Mittelkraft gleiche und parallele Resultante, an einem beliebig gewählten Angriffspuncte, und ein gewisses zugehöriges Paar ersetzen. Der Angriffspunct der Resultante werde in der Folge immer so gewählt, daß das Moment des zugehörigen Paares das kleinste unter allen möglichen sei; entweder wird mithin dieses Moment Null sein, oder die Ebene des Paares senkrecht auf der Richtung der Resultante stehen.

Nun stelle man sich vor, daß der Körper aus seiner anfänglichen Lage in eine beliebige andere gedreht werde, und lasse wieder dieselben Kräfte wie vorhin, in denselben Richtungen auf dieselben Puncte des Körpers wirken; so ergiebt sich offenbar eine der vorigen gleiche und parallele Resultante, deren Richtungslinie jedoch im Allgemeinen andere Puncte des Körpers treffen wird, als die Richtungslinie der vorigen Resultante traf; so wie auch das Moment des zugehörigen Paares im Allgemeinen dem vorigen nicht mehr gleich sein wird. Wenn man indessen den Körper bloß parallel mit sich selbst verschöbe, so fände offenbar gar keine Aenderung in der gegenseitigen Stellung des Körpers und der Kräfte Statt; mithin würde die Richtungslinie der Resultante den Köper wieder in denselben Puncten treffen, wie vorhin, und das Moment des Paares ebenfalls ungeändert bleiben. Man stelle sich daher, von paralleler Verschiebung absehend, nur noch Drehungen des Körpers um beliebige Axen vor. Es ist aber wiederum einerlei, ob der Körper um eine gegebene, oder um irgend eine andere, jener parallele Axe gedreht wird; denn dreht man ihn, von einer gewissen anfänglichen Stellung aus, das eine Mal um die erste, das andere Mal, in demselben Sinne, um die zweite Axe, so ist augenscheinlich, daß diejenigen Stellungen, welche in beiden Fällen aus gleich großen Drehungen entstehen, einander parallel sind, d. h. daß der Körper aus der einen in die andere durch bloße parallele Verschiebung gebracht werden kann. Da mithin zwischen parallelen Axen kein in der gegenwärtigen Untersuchung gültiger Unterschied Statt findet, so kann man alle Axen durch irgend einen Punct des Körpers legen, der einmal für immer gewählt ist und unbeweglich bleibt, so daß nur noch die Drehungen des Körpers um diesen Punct in Betracht kommen.

Ferner lassen sich die sämmtlichen auf den Körper wirkenden Kräfte auf drei zurückführen. Denn man zerlege die Kräfte nach drei beliebigen, der Einfachheit wegen gegen einander senkrechten Richtungen, die jedoch so anzunehmen sind, daß keine Ebene, die zweien von ihnen parallel ist, der Mittelkraft sämmtlicher Kräfte parallel sei; so ergeben sich drei Gruppen paralleler Kräfte, von deren keiner die Mittelkraft Null sein kann, und die sich mithin in drei einfache Resultanten an eben so vielen Schwerpuncten vereinigen lassen. Diese drei Schwerpuncte bleiben, der Theorie paralleler Kräfte zufolge, in dem Körper fest, wie auch derselbe gedreht werde; die anfänglichen Kräfte sind mithin auf drei gegen einander senkrechte Kräfte zurückgeführt, die in unveränderlich bestimmten Puncten des Körpers wirken, und von denen in der Folge einzig und allein die Rede zu sein braucht.

Durch den als unbeweglich gedachten Punct des Körpers (er heiße A) lege man drei auf einander senkrechte, in dem Körper feste, aber mit ihm im Raume bewegliche Axen, und zwar gehe jede Axe von A aus nur nach einer Seite fort, werde aber nicht über A hinaus nach der andern Seite verlängert; so kann man nunmehr den Körper ganz außer Acht lassen, indem alle Stellungen desselben durch diejenigen der Axen ohne Zweideutigkeit bezeichnet werden. Ferner ziehe man aus A drei den Kräften parallele, mithin wieder gegen einander senkrechte, in dem Sinne der Kräfte fortgehende Gerade, welche die Axen der Kräfte genannt werden sollen; so wird die Stellung des Körpers gegen die Kräfte durch die Stellung seiner Axen gegen die Axen der Kräfte so bestimmt, daß jene aus dieser sofort gefunden werden kann. Denn außer den Richtungen der Axen des Körpers und der Kräfte kommt es nur noch auf die Angriffspuncte der Kräfte an, die aber in dem Körper einmal für immer gegeben sind. Man kann sich also die Anschauung der verschiedenen Stellungen und Drehungen dadurch sehr erleichtern, daß man sich anstatt des Körpers und der Kräfte nur ihre beiderseitigen Axen vorstellt.

Wird der Körper um eine beliebige durch A gelegte Axe α gedreht, während die Kräfte, wie bisher angenommen wurde, ihre Richtungen behalten, so ändern sich die Neigungen der Kräfte gegen die Axen des Körpers, und man erhält Stellungen, die wesentlich von einander verschieden sind. Man könnte aber auch umgekehrt verfahren, nämlich den Körper fest lassen, dagegen die Kräfte um die Axe α drehen; und diese Vorstellung wurde schon bei der Bestimmung des Mittelpunctes von Kräften in einer Ebene, in §. 11., zu Grunde gelegt. In der That ist leicht zu sehen, daß Beides einerlei ist. Denn es bezeichne x eine der Axen des Körpers, u eine der Axen der Kräfte. Man beschreibe eine Kugel um den Punct A, deren Oberfläche von den Axen x, u und α in den gleichnamigen Puncten geschnitten wird, und bilde das sphärische Dreieck αxu (Fig. 19.). Dreht man nun zuerst u um α, während x fest bleibt, so entsteht das Dreieck $x\alpha u'$, in welchem $\alpha u = \alpha u'$. Läßt man dagegen u fest, und dreht x um α, und zwar um gleich viel und in entgegengesetztem Sinne, so entsteht das Dreieck $u\alpha x'$, wo $\alpha x' = \alpha x$ und zugleich $\angle x\alpha x' = u\alpha u'$ ist. Mithin sind auch die Bogen x'u und xu' einander gleich, oder die Neigungen der Axen des Körpers gegen die Kräfte sind in beiden Fällen die nämlichen, w. z. b. w.

Die Stellungen des Körpers und der Kräfte, welche man in beiden Fällen erhält, sind zwar im Raume von einander verschieden; aber dieser Unterschied hat hier kein Gewicht. Denn man kann durch gemeinschaftliche Drehung des Körpers und der Kräfte um die Axe α das ganze System aus der einen Stellung in die andere bringen; so daß z. B. das Dreieck $x'\alpha u$ in die Lage $x\alpha u'$ kommt. Es ist also in beiden Fällen kein Unterschied in den gegenseitigen Stellungen der Kräfte und des Körpers vorhanden; dieser aber ist allein, worauf es hier ankommt.

In der Folge stelle man sich den Körper als unbeweglich vor, und drehe die Kräfte.

30. Die Angriffspuncte der drei Kräfte, auf welche oben die anfänglich gegebenen Kräfte zurückgeführt worden sind, fallen entweder in einem einzigen Puncte des Körpers zusammen, oder sie liegen in einer Geraden, oder sie bestimmen eine Ebene.

In dem ersten dieser Fälle lassen sich die gegebenen Kräfte in drei Gruppen paralleler Kräfte zerlegen, deren Mittelpuncte in einen zusammenfallen; diese Kräfte haben also eben so gut, wie parallele Kräfte, einen für alle Drehungen gültigen Mittelpunct.

Im zweiten Falle liegen die drei Angriffspuncte in einer Geraden. Zerlegt man die an ihnen angebrachten Kräfte nach drei beliebigen Richtungen, so ergeben sich drei Gruppen paralleler Kräfte, und aus ihnen drei Resultanten. Wenn von diesen keine Null ist, so erhält man als neue Angriffspuncte drei Mittelpuncte paralleler Kräfte, die aber offenbar alle mit den vorigen Angriffspuncten in einer Geraden liegen. Wenn also die drei Angriffspuncte einmal in einer Geraden liegen, so kann zwar, durch eine andere Zerlegung der Kräfte, ihre Lage in jener verändert werden; aber sie bleiben immer in denselben Geraden, wie man auch die Kräfte zerlegen mag, können auch nie in einen einzigen Punct zusammenfallen. Diese in dem Körper feste Gerade heiße die Central-Axe. Wären der anfänglich gegebenen Kräfte bloß zwei, die man nachher, der Gleichförmigkeit wegen, durch Zerlegung nach drei Richtungen und Zusammensetzung der parallelen Componenten auf drei bringen kann; so hat das System (d. h. der Körper mit den Kräften) immer eine Central-Axe; nämlich die gerade Linie zwischen den Angriffspuncten der Kräfte. So ist z. B. in Fig. 3. (§. 11.) die Gerade AB die Central-Axe des dortigen Systemes. Ueberhaupt hat ein System immer eine Central-Axe, wenn alle Kräfte desselben einer Ebene parallel sind (und die Mittelkraft nicht Null ist, wie hier immer vorausgesetzt wird). Denn zerlegt man die Kräfte zunächst nach zwei derselben Ebene parallelen Richtungen, so ergeben sich zwei Gruppen paralleler Kräfte, und aus ihnen zwei Resultanten, mithin wieder der vorige Fall zweier Kräfte.

Sind aber die Kräfte nicht alle einer Ebene parallel, so zerlege man sie nach drei beliebigen Richtungen. Betrachtet man zunächst bloß zwei von den entstehenden drei Gruppen paralleler Kräfte, so haben diese eine Central-Axe. Damit aber dem ganzen Systeme eine solche zukomme, ist erforderlich, daß der Mittelpunct der noch übrigen parallelen Kräfte in die Central-Axe der beiden anderen falle. Ein System hat also nur in besonderen Fällen eine Central-Axe, im Allgemeinen aber findet der

dritte Fall Statt; nämlich die Angriffspuncte der drei Kräfte liegen nicht in einer Geraden, und bestimmen mithin eine Ebene. Wenn man die Kräfte nach drei beliebigen Richtungen zerlegt, und die parallelen wieder zusammensetzt, so ergeben sich drei neue Angriffspuncte, die aber offenbar wieder in derselben Ebene liegen, auch niemals in eine einzige gerade Linie fallen können. Diese von allen Drehungen und Zerlegungen unabhängige, in dem Körper feste Ebene, heiße die Central-Ebene. Das Dreieck, welches die drei Angriffspuncte der Kräfte in der Central-Ebene zu Spitzen hat, kann man das Central-Dreieck nennen; man muß jedoch bemerken, daß dasselbe von der Art der Zerlegung nicht unabhängig ist; denn je nachdem man die Kräfte nach diesen oder nach jenen Richtungen zerlegt, ergiebt sich ein anderes Central-Dreieck, jedoch immer in der Central-Ebene.

Die Bestimmung dieses Dreieckes hat mithin, in gegenwärtiger Untersuchung, keineswegs das nämliche Gewicht, wie die der Central-Ebene. Daher mag auch ein das Central-Dreieck mit angehender Satz, der in der Folge nicht weiter gebraucht wird, hier ohne Beweis nur hingestellt werden, weil er doch der Erwähnung nicht unwerth scheint. Man findet ihn durch eine Rechnung, die hier zu lange aufhalten würde, von dem Verfasser dieses Handbuches bewiesen in einem Aufsatze in Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 15. S. 30. Der Satz lautet wie folgt:

Es seien D, D′, D″ die Spitzen des aus irgend einer Zerlegung hervorgegangenen Central-Dreieckes, an denen die drei zugehörigen Kräfte angebracht sind. Aus einem gemeinsamen Anfangspuncte ziehe man drei Gerade, welche diese Kräfte nach Richtung und Größe darstellen. Dieselben lassen sich als zusammenstoßende Kanten eines Tetraeders ansehen, das durch sie völlig bestimmt wird, und dessen Volumen $=V$ sei. Wird nun noch die Fläche des Dreieckes $DD'D''=\Delta$ gesetzt, und das Product $\Delta\cdot V$ gebildet; so ist der Zahlenwerth desselben immer der nämliche, wie man auch die Kräfte zerlegt haben mag. (Es versteht sich von selbst, daß man die Einheit der Kraft nicht bei der einen Zerlegung durch diese, bei der anderen durch jene Länge darstellen muß.)

Es soll nunmehr der obige dritte (allgemeine) Fall näher untersucht werden.

31. Man drehe die Kräfte so, daß die Mittelkraft senkrecht auf der Central-Ebene zu stehen komme. Es mag hier noch einmal erinnert werden, daß man die Axen der Kräfte um den Punct A zu drehen hat, während die Axen des Körpers fest bleiben; die Kräfte selbst drehen sich dann mit um ihre festen Angriffspuncte, indem jede ihrer Axe immer parallel, und die sie darstellende Linie vom Angriffspuncte aus immer auf der nämlichen Seite liegend gedacht werden muß, auf welcher die Axe von

A aus liegt. Da die Central-Ebene in dem Körper fest ist, so kann man zwei von den Axen des Körpers in der Central-Ebene nehmen; die Mittelkraft soll also in der gegenwärtigen Stellung der dritten Axe parallel sein. Man zerlege nun wieder die drei Kräfte nach drei gegen einander senkrechten Richtungen, von denen die eine der Mittelkraft parallel sei; die beiden anderen sind mithin der Central-Ebene parallel. Es sei DD′D″ das Central-Dreieck (Fig. 20.); ferner sei C der Schwerpunct der drei der Mittelkraft parallelen Componenten, deren Summe offenbar der Mittelkraft gleich und also nicht Null ist. Die Summen der in die beiden anderen Richtungen fallenden Componenten (Da, D′a′, D″a″ und Db, D′b′, D″b″) sind dagegen Null; also

$$Da+D'a'+D''a''=0,\ Db+D'b'+D''b''=0.$$

Der Punct C heiße der Central-Punct. Derselbe ist in der Central-Ebene fest. Denn in welcher Stellung man sich die anfänglichen drei Kräfte auch denken mag, so erhält man durch Zerlegung derselben nach drei auf einander senkrechten Richtungen, von denen die eine der Mittelkraft parallel ist, immer dieselben der Mittelkraft parallelen Componenten an denselben Angriffspuncten; der Centralpunct ist folglich der Schwerpunct dreier unveränderlicher paralleler Kräfte an festen Angriffspuncten, also ist er (in dem Körper) fest. Man hat demnach jetzt 7 Kräfte an festen Angriffspuncten, von denen, in gegenwärtiger Stellung, die eine in C senkrecht auf der Central-Ebene steht, und der Mittelkraft gleich ist; während die sechs anderen, schon oben genannten, in der Central-Ebene liegen. Nun werde eine der Mittelkraft gleiche und mit Da parallele Kraft $C\alpha$ und zugleich eine dieser gleiche entgegengesetzte ($C\alpha'$) an C angebracht; und man stelle sich vor, daß wenn die Kräfte um ihre Angriffspuncte gedreht werden, die neuen Kräfte $C\alpha$ und $C\alpha'$ sich ebenfalls, mit Da beständig parallel bleibend, um C drehen. Die vier Kräfte Da, Da′, Da″, $C\alpha$, lassen sich in eine der Mittelkraft gleiche und parallele Resultante (AA′) an dem Schwerpuncte A zusammensetzen, welche mit $C\alpha'$ ein **Paar** bildet. Der Schwerpunct A ist wieder in dem Körper fest. Auf gleiche Weise bringe man an C eine der Mittelkraft gleiche und mit Db parallele Kraft ($C\beta$) und eine dieser gleiche und entgegengesetzte ($C\beta'$) an, so lassen sich wieder Db, Db', Db'' und $C\beta$ in eine Kraft BB' an dem festen Schwerpunct B zusammensetzen, welche mit $C\beta'$ ein zweites Paar bildet.

Das ganze System ist jetzt auf 5 Kräfte, nämlich eine einzelne Kraft an C und die Kräftepaare (AA', $C\alpha'$), (BB', $C\beta'$) gebracht. Diese Kräfte sind sämmtlich der Mittelkraft gleich; die an C angebrachte steht senkrecht auf den vier anderen, und die Kräfte des einen Paares senkrecht auf denen des anderen. Dieses gilt von jeder zulässigen Stellung der Kräfte; in der gegenwärtig angenommenen liegen die Paare in der Central-Ebene. Man begreift auch leicht, daß die drei Puncte A, B, C nicht in einer Geraden liegen können, wenn, wie angenommen ist, anfänglich D, D', D'' nicht in einer Geraden lagen. Ferner läßt sich allemal bewirken, daß der Winkel ACB ein rechter werde. Man nehme C zum Anfange senkrechter Coordinaten x und y in der Central-Ebene; es seien a und b die Coordinaten von A, a' und b' die von B; die alle vier als **bekannt** anzusehen sind. Nun zerlege man die vier einander und der Mittelkraft gleichen Kräfte AA', $C\alpha'$; BB', $C\beta'$, deren Intensität der Einheit gleichgesetzt werde, in der Central-Ebene nach zwei gegen einander senkrechten, noch näher zu bestimmenden Richtungen. Es sei u die Neigung der Kraft AA', und $\frac{1}{2}\pi + u$ die der auf AA' senkrechten Kraft BB', gegen die eine (**erste**) dieser Richtungen; so ergeben sich folgende Componenten der genannten vier Kräfte:

Componenten von	AA'	$C\alpha'$	BB'	$C\beta'$
nach der ersten Richtung	$+\cos u$	$-\cos u$	$-\sin u$	$+\sin u$
nach der zweiten Richtung	$+\sin u$	$-\sin u$	$+\cos u$	$-\cos u$.

Man bringe ferner an C zwei der Einheit gleiche und einander entgegengesetzten Kräfte in der ersten Richtung, und zwei

eben solche in der zweiten Richtung an; so kann wieder, wie vorhin, je eine von diesen (sie sei +1) mit den ihr parallelen Componenten in eine Resultante = +1 zusammengesetzt werden, die an einem festen Schwerpuncte wirkt. Man erhält demnach anstatt A und B zwei neue feste Schwerpuncte A' und B', deren Coordinaten ξ und η, ξ' und η' durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$\xi = a\cos u - a'\sin u \qquad \eta = b\cos u - b'\sin u$$
$$\xi' = a\sin u + a'\cos u \qquad \eta' = b\sin u + b'\cos u.$$

Das Dreieck A'CB' ist aber nothwendig rechtwinklich, wenn

$$\xi^2 + \eta^2 + \xi'^2 + \eta'^2 = (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2$$

oder $\xi\xi' + \eta\eta' = 0$ ist. Setzt man in diese Bedingungsgleichung die obigen Werthe, so kommt:

$$(a^2 + b^2 - a'^2 - b'^2)\sin u\cos u + (aa' + bb')\cos 2u = 0$$

oder
$$tg\,2u = \frac{2(aa' + bb')}{a'^2 + b'^2 - a^2 - b^2}.$$

Diese Gleichung giebt zwei Werthe von u, die um $\frac{1}{2}\pi$ von einander verschieden, aber beide gleich passend sind. Der Winkel u würde unbestimmt bleiben, wenn zugleich Zähler und Nenner des vorstehenden Ausdruckes Null wären; alsdann wäre aber auch, wegen der Gleichung $aa' + bb' = 0$, schon ACB ein rechter Winkel, und keine Verwandlung weiter nöthig.

Wird der Werth von u aus vorstehender Gleichung in die obigen Werthe von ξ, η, ξ', η' gesetzt, so müssen die neuen durch diese Coordinaten bestimmte Schwerpuncte A', B' nothwendig so liegen, daß $\angle$A'CB' ein rechter ist, wie verlangt wurde.

Hierdurch ist das System auf seine einfachste Gestalt gebracht, in welcher es bleiben soll. Man hat fünf gleiche Kräfte; eine einzelne am Centralpuncte C, die senkrecht auf den vier übrigen steht, und die Mittelkraft des ganzen Systemes darstellt; ferner zwei Paare an den in der Central-Ebene senkrecht gegen einander liegenden unveränderlichen Armen CA, CB, von deren

Kräften die des einen zu denen des anderen wiederum senkrecht sind. Diese fünf Kräfte können nun, anstatt der anfänglichen drei, ohne Aenderung ihrer gegenseitigen Neigungen um ihre festen Angriffspuncte beliebig gedreht werden. Jede Stellung derselben wird am leichtesten anschaulich werden, wenn man die Arme CA, CB und eine dritte auf ihnen senkrechte Gerade (sie heiße CD), als Axen des Körpers, und die drei Geraden, durch welche die an C wirkenden Kräfte dargestellt werden, als Axen der Kräfte betrachtet; mit diesen Axen ist alles Uebrige gegeben.

32. Man denke sich zunächst die Mittelkraft in C noch, wie vorher, senkrecht auf der Central-Ebene, und drehe um sie, als feste Axe, die übrigen Kräfte, welche mithin in der Central-Ebene bleiben. Unter den verschiedenen Stellungen, die das System auf diese Weise erhält, sind zunächst zwei zu merken, in welchen die Momente der Paare an den Armen CA und CB (oder kürzer der Paare A und B) jedesmal beide zugleich verschwinden, und in denen mithin die sämmtlichen Kräfte der einfachen Mittelkraft gleichgelten. In diesen Stellungen fallen die Axen der Kräfte in die Axen des Körpers, oder in die Verlängerungen derselben (über C hinaus); die Mittelkraft jedoch nur in die Axe CD oder in deren jenseitige Verlängerung. Solcher Stellungen giebt es also eigentlich vier; so lange aber die Mittelkraft nur in der Axe CD gedacht wird, bleiben ihrer nur zwei.

Die Ebene der Axen CA, CD des Körpers heiße die Ebene A; die der Axen CB, CD die Ebene B; beide werden auch auch die Mittel-Ebenen genannt. In der gegenwärtigen Stellung des Systemes sind die Kräfte der Paare A, B beziehungsweise senkrecht auf den Ebenen B, A; und die Momente beider Paare Null.

Man drehe die Kräfte, von dieser Stellung aus, um eine der Axen CA oder CB, z. B. um die Axe A; so bleibt das Moment des Paares A beständig Null, indem seine Kräfte in die Drehungsaxe fallen. Dagegen drehen sich die Mittelkraft

und die Kräfte des Paares B, dessen Moment nicht mehr Null bleibt, in der Ebene B, und es ist klar, daß sie in derselben einen Mittelpunct haben müssen. Es sei (Fig. 21.) CD der Durchschnitt der beiden Mittelebenen, CB der Arm des Paares B, also DCB die Ebene B, CC′ die Mittelkraft, Bb, Cβ die Kräfte des Paares B, also $\angle C'C\beta = \Re$. Man nehme in CD auf beiden Seiten $CM = CM' = CB$, und bringe in einem der Puncte M, M′, hier nämlich in M, zwei der CC′ gleiche, parallele und einander entgegengesetzte Kräfte Mm und Mμ an, so entsteht die einzelne Kraft Mm und das Paar (Mμ, CC′). Von den beiden Puncten M und M′ ist hier M gewählt, damit das entstehende Paar (Mμ, CC′) dem Paare B (d. i. (Bb, Cβ)) entgegen wirke, wie hier augenscheinlich der Fall ist. Diese Paare halten einander Gleichgewicht. Denn die Breite des Paares B ist $BC \cdot cos(\beta CD)$, wie leicht zu sehen, da $\angle DCB = \Re$; dagegen ist $MC \cdot cos(\beta CD)$ die Breite des Paares (Mμ, CC′); und der vorigen gleich, weil $MC = CB$. Da nun alle Kräfte $= 1$ sind, so sind die Momente der Paare einander gleich; also besteht, indem beide einander entgegen wirken, Gleichgewicht; w. z. b. w. Folglich ist M der gesuchte Mittelpunct.

Die Kräfte verhalten sich also in der gegenwärtigen Stellung ganz eben so, wie Kräfte in einer Ebene, deren Mittelkraft nicht Null ist; es halten nämlich die auf der Ebene B senkrechten (dem Paare A zugehörigen) Kräfte einander Gleichgewicht, und die übrigen Kräfte in der Ebene B haben einen für Drehungen in dieser Ebene gültigen Mittelpunct. Solcher Mittelpuncte ergeben sich vier. Je nachdem man nämlich von der einen oder anderen der beiden oben bezeichneten Anfangs-Stellungen ausgeht, in denen die Mittelkraft immer in die Axe CD und nicht in deren jenseitige Verlängerung fiel, und je nachdem nun um die Axe CA oder CB gedreht wird, ergiebt sich im Allgemeinen jedesmal ein anderer Mittelpunct. Nimmt man in dem Durchschnitte der beiden Mittel-Ebenen $CN = CN' = CA$, so sind M, M′, N, N′ (Fig. 21.) diese vier Mittelpuncte. Wenn aber $CA = CB$, also $CM = CN$, so fallen sie in zwei zusammen.

Diese Betrachtungen erstrecken sich jedoch nur auf besondere Fälle; es würde daher nicht angemessen sein, länger bei ihnen zu verweilen.

33. Vor dem Beginn der allgemeineren Untersuchung müssen jedoch noch einige später unentbehrliche Formeln der analytischen Geometrie entwickelt werden. Man denke sich die Axen der Kräfte gegen die Axen des Körpers in irgend einer Stellung, bezeichne die ersten mit u, v, w; die anderen mit x, y, z; die Neigung von u gegen x mit (ux), von u gegen y mit (uy); u. s. f. Es sei

$$\cos(ux) = a,\quad \cos(uy) = b,\quad \cos(uz) = c$$
$$\cos(vx) = a',\quad \cos(vy) = b',\quad \cos(vz) = c'$$
$$\cos(wx) = a'',\quad \cos(wy) = b'',\quad \cos(wz) = c'';$$

so ist, weil x, y, z gegen einander senkrecht sind:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1. \end{array}\right\} \text{1. a.}$$

Ferner weil u, v, w gegen einander senkrecht sind:

$$\left.\begin{array}{l} a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 \\ a''a + b''b + c''c = 0 \\ a\,a' + b\,b' + c\,c' = 0. \end{array}\right\} \text{1. b.}$$

Aus dem Anfangspuncte C der Axen beschreibe man eine Kugel vom Halbmesser $= 1$, nenne x, y, z, u, v, w die Durchschnittspuncte der Oberfläche mit den gleichnamigen Axen, vollende die sphärischen Dreiecke xyz, uvw (Fig. 22.), und verlängere die Bogen xy, uv bis zu ihrem gemeinsamen Durchschnitte O. Nun sei $Ox = \psi$, $Ou = \varphi$, $\angle uOx = \Theta$; und man denke sich noch von den Puncten u, v, w nach x, y, z die 9 Bogen gezogen, deren Cosinus die obigen a, b, ⋯ c″ sind (in der Figur sind sie weggelassen, um diese nicht zu überfüllen); so hat man in dem Dreiecke uOx:

$$\cos ux = \cos Ou \cdot \cos Ox + \sin Ou \cdot \sin Ox \cdot \cos uOx$$

oder $\qquad a = \cos\varphi\,\cos\psi + \sin\varphi\,\sin\psi\,\cos\Theta.$

Setzt man Ov statt Ou, also $\varphi + \frac{1}{2}\pi$ statt v, so geht ux in vx über; also ergiebt sich aus dem Dreiecke vOx:

$$a' = -\sin\varphi\,\cos\psi + \cos\varphi\,\sin\psi\,\cos\Theta.$$

In dem Dreiecke wOx ist $\angle wOx = \frac{1}{2}\pi + \Theta$, Seite $Ow = \frac{1}{2}\pi$, folglich $\cos wx = \sin Ox \cdot \cos(\frac{1}{2}\pi + \Theta)$, also

$$a'' = -\sin\psi\,\sin\Theta.$$

Vertauscht man überall x mit y, so ist $\psi + \frac{1}{2}\pi$ $(= Oy)$ statt ψ und b statt a zu schreiben; und es kommt:

$$b \;= -\cos\varphi\,\sin\psi + \sin\varphi\,\cos\psi\,\cos\Theta$$
$$b' = \quad \sin\varphi\,\sin\psi + \cos\varphi\,\cos\psi\,\cos\Theta$$
$$b'' = -\cos\psi\,\sin\Theta.$$

In dem Dreiecke uOz ist $Oz = \frac{1}{2}\pi$, $\angle zOu = \frac{1}{2}\pi - \Theta$, also $\cos uz = \sin Ou \cdot \sin\Theta$ oder

$$c \;= \sin\varphi\,\sin\Theta.$$

Ferner aus vOz: $\qquad c' = \cos\varphi\,\sin\Theta$

und aus ΔwOz, da $wz = \Theta$:

$$c'' = \cos\Theta.$$

Durch die vorstehenden Formeln sind die neun Cosinus a, b, ⋯ c″ als Functionen dreier von einander unabhängiger Winkel φ, ψ, Θ ausgedrückt, welche den Bedingungsgleichungen 1. Genüge leisten, wovon man sich durch Einsetzung der Werthe dieser Cosinus in die Gleichungen 1. leicht überzeugen kann:

Man bemerke noch folgende Relationen: Es sei

$$A \;= c''b' - c'b'',\quad B \;= a''c' - a'c'',\quad C \;= b''a' - b'a'',$$
$$A' = c\,b'' - c''b,\quad B' = a\,c'' - a''c,\quad C' = b\,a'' - b''a,$$
$$A'' = c'b - c\,b',\quad B'' = a'c - a\,c',\quad C'' = b'a - b\,a',$$

so ist, wie leicht zu sehen:

$$\left.\begin{array}{ll} Aa'+Bb'+Cc'=0, & Aa''+Bb''+Cc''=0, \\ A'a''+B'b''+C'c''=0, & A'a+B'b+C'c=0, \\ A''a+B''b+C''c=0, & A''a'+B''b'+C''c'=0. \end{array}\right\} 2.$$

Ferner ergiebt sich:

$$Aa+Bb+Cc=A'a'+B'b'+C'c'=A''a''+B''b''+C''c''. \quad 3.$$

Vergleicht man die beiden ersten der Gleichungen 2. mit den in 1. enthaltenen:

$$aa'+bb'+cc'=0,\ aa''+bb''+cc''=0,$$

so folgt $A:B:C=a:b:c;$

mithin: $A=fa,\ B=fb,\ C=fc,$

wo f ein noch unbekannter Factor ist.

Es war aber $A=c''b'-c'b''$, und $c''=\cos\Theta$, $c'=\cos\varphi\sin\Theta$, $b'=\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\Theta$, $b''=-\cos\psi\sin\Theta$; also

$A=(\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\Theta)\cos\Theta+\cos\varphi\cos\psi\sin\Theta\sin\Theta$,

mithin $A=\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi\cos\Theta=a$, demnach ist $f=1$,

und $A=a,\ B=b,\ C=c. \quad$ 4. a.

Auf die nämliche Weise folgt

$$A':B':C'=a':b':c'$$
$$A'':B'':C''=a'':b'':c'',$$

und hieraus, mit Hülfe von 3.

$$A'=a',\ B'=b',\ C'=c',\ A''=a'',\ B''=b'',\ C''=c''. \quad 4.\ b.$$

Die in 4. enthaltenen Relationen sind zu merken.

34. Nun stelle die Axe u die Mittelkraft in C, v die in C wirkende Seitenkraft des Paares A, w die ebenfalls in C wirkende Seitenkraft des Paares B dar; ferner liege die Axe x in dem Arme $CA=p$ des Paares A, und y in dem Arme $CB=q$ des Paares B; so sind a, b, c die Componenten der Mittelkraft nach x, y, z; a', b', c' und a'', b'', c'' die Componenten der in C wirkenden Seitenkräfte der Paare A, B, folglich $-a$, $-b$,

$-c$; $-a''$, $-b''$, $-c''$ die der in A und B wirkenden Seitenkräfte dieser Paare. Wird aus beiden das zusammengesetzte Paar gebildet, so ergeben sich seine Componenten L, M, N vermittelst der Ausdrücke in §. 17. Nennt man nämlich vorläufig x', y', z' die Coordinaten von A, x'', y'', z'' die von B, und setzt $\cos\alpha=-a'$, $\cos\beta'=-b'$, $\cos\gamma'=-c'$, $\cos\alpha''=-b''$, $\cos\beta''=-c''$, $\cos\gamma''=-c''$, so wird, weil $P'=1$, $P''=1$,

$$L=-b'z'+c'y'-b''z''+c''y''$$
$$M=-c'x'+a'z'-c''x''+a''z''$$
$$N=-a'y'+b'x'-a''y''+b''x'',$$

also, da $x'=p$, $y'=0$, $z'=0$, $x''=0$, $y''=q$, $z''=0$ ist, ganz einfach:

$$L=qc'',\ M=-pc',\ N=pc'-qa''.$$

Hieraus ergiebt sich sofort das kleinste zusammengesetzte Paar

$$V=La+Mb+Nc=q(ac''-ca'')+p(b'c-c'b)$$

oder (§. 33. F. 4.) $\quad V=qb'-pa''.$

Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi\cos\Theta=g,$$
$$-\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\cos\Theta=f,$$
$$-\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\cos\Theta=k,$$
$$\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\Theta=t;$$

mithin (§. 33.) $a=g$, $a'=f$, $a''=-\sin\psi\sin\Theta$; $b=k$, $b'=t$, $b''=-\cos\psi\sin\Theta$; $c=\sin\varphi\sin\Theta$, $c'=\cos\varphi\cos\Theta$, $c''=\cos\Theta$; so folgt: $L=q\cos\Theta$, $M=-p\cos\varphi\sin\Theta$,

$$N=pt+q\sin\psi\sin\Theta,\ V=p\sin\psi\sin\Theta+qt.$$

Man hat noch für die Componenten der Mittelkraft die Werthe $a=g$, $b=k$, $c=\sin\varphi\sin\Theta$. Werden diese Ausdrücke in die Gleichungen gesetzt, welche zur Bestimmung der mit dem kleinsten Paare V verbundenen Resultante dienen (§. 18.) so erhält man:

$$\left.\begin{array}{rl} gy-kx= & pt+q\sin\psi\sin\Theta-V\sin\varphi\sin\Theta \\ \sin\varphi\sin\Theta\cdot x-gz= & -p\cos\varphi\sin\Theta-Vk \\ kz-\sin\varphi\sin\Theta\cdot y= & q\cos\Theta-Vg. \end{array}\right\} 1.$$

Wenn man nun die Kräfte ohne Aenderung der gegenseitigen Neigungen um ihre Angriffspuncte beliebig dreht, so ändern sich in den vorstehenden Gleichungen die Winkel φ, ψ, Θ, und mit ihnen die Richtung der Resultante, so wie die Intensität des auf derselben senkrechten Paares V. Unter den Stellungen, in welche das System durch diese Drehung gelangen kann, sind besonders diejenigen hervorzuheben, in denen $V=0$ ist, und mithin die Kräfte sich durch eine einzige ersetzen lassen. Alsdann findet zwischen den Winkeln φ, ψ, Θ folgende Relation statt:

$$V=p\sin\psi\sin\Theta+qt=0,$$

oder, wenn für t sein Werth gesetzt wird:

$$(p\sin\Theta+q\sin\varphi)\sin\psi+q\cos\varphi\cos\Theta\cdot\cos\psi=0.$$

Man setze $\Delta^2=(p\sin\Theta+q\sin\varphi)^2+q^2\cos\varphi^2\cos\Theta^2$, so wird hiernach

$$\Delta\sin\psi=-q\cos\varphi\cos\Theta,\quad \Delta\cos\psi=p\sin\Theta+q\sin\varphi \qquad 2.$$

zu setzen sein, wo das Zeichen der Wurzelgröße Δ unbestimmt bleibt. Ferner erhält man für die Lage der ersetzenden Kraft folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} gy-kx&=+pt+q\sin\psi\sin\Theta\\ \sin\varphi\sin\Theta\cdot x-gz&=-p\cos\varphi\sin\Theta\\ kz-\sin\varphi\sin\Theta\cdot y&=+q\cos\Theta,\end{aligned}\right\}\ 3.$$

von den jede, vermöge der erfüllten Bedingung $V=0$, eine Folge der beiden anderen ist. Wird der Winkel ψ vermittelst der Werthe (2.) von $\sin\psi$ und $\cos\psi$ aus diesen Gleichungen weggeschafft, indem sich für g, k, $pt+q\sin\psi\sin\Theta$ die folgenden Werthe setzen lassen:

$$\Delta g=(p\sin\Theta+q\sin\varphi)\cos\varphi-q\sin\varphi\cos\varphi\cos\Theta^2$$
$$=(p+q\sin\varphi\sin\Theta)\cos\varphi\sin\Theta,$$
$$\Delta k=q\cos\varphi^2\cos\Theta+(p\sin\Theta+q\sin\varphi)\sin\varphi\cos\Theta$$
$$=(q+p\sin\varphi\sin\Theta)\cos\Theta;$$

$$\Delta(pt+q\sin\psi\sin\Theta)=(p^2-q^2)\sin\Theta\cos\Theta\cos\varphi,$$

(diese Formel findet man durch eine ähnliche leichte Reduction, wie die beiden vorigen); so ergeben sich (anstatt 3.) folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &(p+q\sin\varphi\sin\Theta)\cos\varphi\sin\Theta\cdot y-(q+p\sin\varphi\sin\Theta)\cos\Theta\cdot x\\ &\qquad=(p^2-q^2)\cos\varphi\sin\Theta\cos\Theta\\ &\Delta\sin\varphi\sin\Theta\cdot x-(p+q\sin\varphi\sin\Theta)\cos\varphi\sin\Theta\cdot z\\ &\qquad=-\Delta p\cos\varphi\sin\Theta\\ &(q+p\sin\varphi\sin\Theta)\cos\Theta\cdot z-\Delta\sin\varphi\sin\Theta\cdot y\\ &\qquad=\Delta q\cos\Theta.\end{aligned}\right\}\ 4.$$

Diesen Gleichungen kann man auf eine sehr merkwürdige Art, unabhängig von den Werthen von φ und Θ, Genüge leisten. Nämlich man setze zuerst $x=0$, so kommt, aus der ersten und zweiten

$$\left.\begin{aligned}(p+q\sin\varphi\sin\Theta)y&=(p^2-q^2)\cos\Theta\\ (p+q\sin\varphi\sin\Theta)z&=\Delta p,\end{aligned}\right\}\ 5.$$

wenn die gemeinschaftlichen Factoren wegbleiben. Werden diese Gleichungen quadrirt, sodann die erste mit p^2-q^2, die zweite mit p^2 dividirt, und hierauf addirt, so ergiebt sich

$$(p+q\sin\varphi\sin\Theta)^2\left[\frac{y^2}{p^2-q^2}+\frac{z^2}{p^2}\right]=(p^2-q^2)\cos\Theta^2+\Delta^2.$$

Nun ist aber

$$\Delta^2=(p\sin\Theta+q\sin\varphi)^2+q^2\cos\varphi^2\cos\Theta^2$$

mithin $\quad \Delta^2+(p^2-q^2)\cos\Theta^2$

$$=p^2+2pq\sin\Theta\sin\varphi+q^2(\sin\varphi^2+\cos\varphi^2\cos\Theta^2-\cos\Theta^2)$$
$$=p^2+2pq\sin\Theta\sin\varphi+q^2\sin\varphi^2\sin\Theta^2=(p+q\sin\varphi\sin\Theta)^2;$$

mithin ist

$$(p^2-q^2)\cos\Theta^2+\Delta^2=(p+q\sin\varphi\sin\Theta)^2$$

und folglich aus 5. $\dfrac{y^2}{p^2-q^2}+\dfrac{z^2}{p^2}=1$, während zugleich $x=0$.

Wird ferner in den obigen Gleichungen (4.) der ersetzenden Kraft $y=0$ gesetzt, so kommt aus der ersten und dritten:

$$\left.\begin{aligned}(q+p\sin\varphi\sin\Theta)x&=(q^2-p^2)\cos\varphi\sin\Theta\\(q+p\sin\varphi\sin\Theta)z&=\Delta q.\end{aligned}\right\}6.$$

Quadrirt man wieder diese Gleichungen, dividirt die erste durch q^2-p^2, die zweite durch q^2, und addirt, so kommt:

$$(q+p\sin\varphi\sin\Theta)^2\left[\frac{x^2}{q^2-p^2}+\frac{z^2}{q^2}\right]=(q^2-p^2)\cos\varphi^2\sin\Theta^2+\Delta^2.$$

Nun ist aber wiederum

$$\Delta^2+(q^2-p^2)\cos\varphi^2\sin\Theta^2$$
$$=q^2+2pq\sin\varphi\sin\Theta+p^2(\sin\Theta^2-\cos\varphi^2\sin\Theta^2)$$
$$=(q+p\sin\varphi\sin\Theta)^2,$$

mithin ergiebt sich aus der vorhergehenden Gleichung

$$\frac{x^2}{q^2-p^2}+\frac{z^2}{q^2}=1,\quad \text{wobei zugleich}\quad y=0.$$

Es ist demnach gefunden, daß den Gleichungen der ersetzenden Kraft, welche Werthe auch φ und Θ haben mögen, d. h. in welche Stellung auch das System gebracht werde, wofern nur die Bedingung $V=0$ erfüllt ist, oder die Kräfte sich durch eine einzige ersetzen lassen, immer durch folgende zwei Systeme von Gleichungen Genüge geleistet wird:

$$\left.\begin{aligned}x=0,&\quad \frac{z^2}{p^2}+\frac{y^2}{p^2-q^2}=1,\\ y=0,&\quad \frac{z^2}{q^2}+\frac{x^2}{q^2-p^2}=1.\end{aligned}\right\}7.$$

Diese Gleichungen stellen im Allgemeinen zwei in den Mittel-Ebenen befindliche Kegelschnitte dar, von denen einer eine Ellipse, der andere eine Hyperbel ist, weil von den Differenzen p^2-q^2 und q^2-p^2 die eine nothwendig positiv, die andere negativ ist. Es sei z. B. p^2-q^2 positiv, so liegt die Ellipse in der Ebene yz, die Hyperbel in der Ebene xz. Die große Axe der Ellipse und die reelle der Hyperbel fallen in die Axe der z, ihre Mittelpuncte in den Anfang der Coordinaten. Für die Scheitel der Ellipse wird $y=0$, $z=\pm p$, für die Brennpuncte $z=\pm q$; für die Scheitel der Hyperbel $x=0$, $z=\pm q$, und für ihre Brennpuncte $z=\pm p$; folglich fallen die Brennpuncte der Hyperbel mit den Scheiteln der Ellipse, und die Scheitel der Hyperbel mit den Brennpuncten der Ellipse zusammen. Hieraus ergiebt sich der nachstehende beachtungswerthe Satz:

Wenn die Kräfte eines beliebigen Systemes, vorausgesetzt, daß ihre Mittelkraft nicht Null ist, ohne Aenderung ihrer gegenseitigen Neigungen um ihre Angriffspuncte gedreht, und, was immer auf unzählige Arten geschehen kann, in solche Stellungen gebracht werden, in welchen sie sich durch eine einzige ersetzen lassen; so trifft die Richtung der ersetzenden Kraft eine Ellipse und eine Hyperbel, welche den Centralpunct zum gemeinschaftlichen Mittelpuncte haben, von denen die eine in der einen, die andere in der anderen der auf einander und auf der Central-Ebene senkrechten Mittel-Ebenen liegt, und welche so mit einander verbunden sind, daß die Scheitel der einen mit den Brennpuncten der anderen zusammenfallen.

In diesem allgemeinen Satze sind nothwendig alle in §. 30. unterschiedenen Fälle enthalten. Sind die beiden Axen der Ellipse einander gleich, so ist dieselbe ein Kreis, und die Brennpuncte fallen in den Mittelpunct. Daher fallen auch die Scheitel der Hyperbel in den Mittelpunct zusammen, und diese selbst verwandelt sich in eine auf der Ebene des Kreises senkrechte, durch den Mittelpunct (Centralpunct) gehende gerade Linie. Dieser Fall ist kein anderer, als der zweite in §. 30., in welchem dem Systeme keine Central-Ebene, sondern eine Central-Axe zukam; nämlich die genannte Gerade ist die Central-Axe. Die eine der Mittel-Ebenen ist dann die des Kreises (den man den Centralkreis nennen kann); als zweite kann jede durch die Central-Axe gelegte Ebene angesehen werden. In diesem Falle ist von den obigen Größen p, q die eine Null. Sind aber beide zugleich Null, so fallen sämmtliche Brennpuncte und Scheitel in den Centralpunct, und man hat den ersten der in §. 30. unterschiedenen Fälle. Bemerkenswerth ist auch der Fall, in welchem $p=q$. Alsdann ist die kleine Axe der Ellipse Null, diese fällt mithin mit ihrer großen Axe zusammen, deren Endpuncte in dem Abstande $=p$ zu beiden Seiten des Centralpunctes liegen. Die Hyperbel geht in die Verlängerungen dieser Axe, nach beiden Seiten, über; die Brennpuncte und Scheitel aber fallen in die Endpuncte der Axe p. Wenn nun die Kräfte dieses Systemes sich in einer Stellung befinden, in welcher sie einer einzelnen Kraft gleichgelten, so muß diese nothwendig, nach dem allgemeinen Satze, den Umring der Ellipse und den der Hyperbel treffen. In dem gegenwärtigen Falle muß sie also wenigstens durch einen der Endpuncte der Axe p gehen, in welchen die beiden Umringe einander schneiden. Ist die Stellung der Kräfte so, daß die Mittelkraft senkrecht auf der Central-Ebene steht, so geht die Resultante durch beide genannten Puncte zugleich, in jeder anderen Stellung aber nur durch einen derselben. Es ist kaum noch nöthig zu bemerken, daß hier nur von solchen Stellungen die Rede ist, in denen die Kräfte einer einzelnen Kraft gleichgelten.

Will man die andere Vorstellungs-Weise zu Grunde legen, nach welcher der Körper gedreht wird, während die Kräfte in ihren Richtungen an ihren Angriffspuncten haften, so muß man sich die Central-Ebene und die Mittel-Ebenen, in diesen aber die Ellipse und Hyperbel in dem Körper vorstellen, welche sämmtlich in ihm fest sind. So oft nun der Körper in eine Lage kommt, in welcher die Kräfte sich durch eine eine einzige ersetzen lassen, trifft diese zugleich den Umring der Ellipse und den der Hyperbel.

35. Man kann noch die Folge derjenigen Stellungen zu wissen verlangen, in welchen die Kräfte sich beständig durch eine einzige ersetzen lassen, die immer durch einen beliebig gewählten

Punct der Ellipse oder der Hyperbel geht. Es soll gezeigt werden, daß alle diese Stellungen durch Drehung um eine unveränderliche Axe erhalten werden, welche der den Kegelschnitt in dem gewählten Puncte berührenden Geraden parallel ist. Der Punct liege z. B. in der Ebene xz, seine Coordinaten seien demgemäß $x=x'$, $y=0$, $z=z'$, und mithin

$$\frac{z'^2}{q^2}+\frac{x'^2}{q^2-p^2}=1.$$

Bei dieser Drehung findet zwischen den Winkeln φ und Θ, welche bisher von einander unabhängig geblieben waren, eine Relation Statt, welche durch jede der beiden folgenden Gleichungen ausgedrückt wird (§. 34. 6.)

$$(q+p\sin\varphi\sin\Theta)x'=(q^2-p^2)\cos\varphi\sin\Theta$$
$$(q+p\sin\varphi\sin\Theta)z'=\Delta q,$$

indem von diesen jede, vermöge der vorhergehenden Gleichung, in der anderen enthalten ist. Man hatte aber

$$\Delta^2=(q+p\sin\varphi\sin\Theta)^2-(q^2-p^2)\cos\varphi^2\sin\Theta^2,$$

folglich $\Delta^2 z'^2=\Delta^2 q^2-(q^2-p^2)z'^2\cos\varphi^2\sin\Theta^2$,

und mithin

$$\Delta=\pm z'\sqrt{\frac{q^2-p^2}{q^2-z'^2}}\cdot\cos\varphi\sin\Theta=h\cos\varphi\sin\Theta,$$

wenn $h=\pm z'\sqrt{\dfrac{q^2-p^2}{q^2-z'^2}}$

gesetzt wird. Demnach ist

$$(q+p\sin\varphi\sin\Theta)z'=hq\cos\varphi\sin\Theta.$$

Dividirt man diese Gleichung durch

$$(q+p\sin\varphi\sin\Theta)x'=(q^2-p^2)\cos\varphi\sin\Theta,$$

so kommt $\dfrac{z'}{x'}=\dfrac{hq}{q^2-p^2}$, also $h=\dfrac{(q^2-p^2)z'}{qx'}$, welcher Werth von h keine Zweideutigkeit der Zeichen mehr darbietet. Man hat nun

$$\Delta \sin\psi = -q \cos\varphi \cos\Theta; \quad \text{folglich} \quad -\sin\psi \sin\Theta = \frac{q \cos\Theta}{h}.$$

$$\Delta g = (p + q \sin\varphi \sin\Theta) \cos\varphi \sin\Theta; \; g = \frac{p + q \sin\varphi \sin\Theta}{h}.$$

$$\Delta f = -(q + p \sin\varphi \sin\Theta) + q \cos\varphi^2 \sin\Theta^2$$

$$= \frac{-\Delta q}{z'} + q \cos\varphi^2 \sin\Theta^2 = \frac{-\Delta q}{z'} + \frac{\Delta q \cos\varphi \sin\Theta}{h},$$

folglich
$$f = \frac{-q}{z'} + \frac{q \cos\varphi \sin\Theta}{h}.$$

Eben so findet sich $t = \frac{p \cos\Theta}{h}$, $k = \frac{q \cos\Theta}{z'}$.

Durch den Centralpunct lege man eine Gerade, welche mit den Axen x, y, z die Winkel ε, ε', ε'' bilde. Sind ferner i, i', i'' der Reihe nach die Neigungen dieser Geraden gegen die Mittelkraft, und gegen die an dem Centralpuncte wirkenden Seitenkräfte der Paare A und B; so hat man:

$$\cos i = g \cos\varepsilon + k \cos\varepsilon' + \sin\varphi \sin\Theta \cos\varepsilon''$$

$$\cos i' = f \cos\varepsilon + t \cos\varepsilon' + \cos\varphi \sin\Theta \cos\varepsilon''$$

$$\cos i'' = -\sin\psi \sin\Theta \cos\varepsilon - \cos\psi \sin\Theta \cos\varepsilon' + \cos\Theta \cos\varepsilon''.$$

Man setze $\cos\varepsilon' = 0$, d. h. die Gerade liege in der Ebene zx, so kommt:

$$\cos i = \frac{(p + q \sin\varphi \sin\Theta) \cos\varepsilon}{h} + \sin\varphi \sin\Theta \cos\varepsilon''$$

$$\cos i' = \frac{-q \cos\varepsilon}{z'} + \frac{q \cos\varphi \sin\Theta \cos\varepsilon}{h} + \cos\varphi \sin\Theta \cos\varepsilon''$$

$$\cos i'' = \frac{q \cos\Theta \cos\varepsilon}{h} + \cos\Theta \cos\varepsilon''.$$

Nun sei $q \cos\varepsilon + h \cos\varepsilon'' = 0$, so ergiebt sich:

$$\cos i = \frac{p \cos\varepsilon}{h}, \; \cos i' = \frac{-q \cos\varepsilon}{z'}, \; \cos i'' = 0.$$

Die Gleichung der Geraden in der Ebene xz ist $\frac{x}{\cos\varepsilon} = \frac{z}{\cos\varepsilon''}$,

oder
$$qx + hz = 0,$$
oder, weil $hqx' = (q^2 - p^2)z'$ ist,
$$\frac{xx'}{q^2 - p^2} + \frac{zz'}{q^2} = 0.$$

Die Gleichung der Tangente des Kegelschnittes in dem Puncte (x'z') ist bekanntlich $\frac{xx'}{q^2 - p^2} + \frac{zz'}{q^2} = 1$; daher ist offenbar die Gerade dieser Tangente parallel. Und da, während φ und Θ sich durch die Drehung ändern, die Neigungen der Kräfte gegen diese Gerade ungeändert bleiben, wie die obigen Werthe von $\cos i$, $\cos i'$, $\cos i''$ zeigen; so folgt, daß die Kräfte um diese Tangente gedreht werden müssen, wie oben behauptet wurde.

Da alle Resultanten, die vom Berührungspuncte aus nach dem Umringe des anderen Kegelschnittes gehen, mit dieser Tangente gleiche Winkel (i) bilden, so folgt noch, daß sie alle in einem geraden Kegel liegen.

Der Inhalt des Vorstehenden läßt sich in folgenden Satz zusammenfassen: Man denke sich den Körper in einer Stellung, in welcher die Kräfte sich durch eine einzige ersetzen lassen. In dem Durchschnitte derselben mit der Ellipse (oder in dem mit der Hyperbel) ziehe man eine Tangente an die Ellipse (oder an die Hyperbel) und drehe den Körper um diese Tangente, als feste Axe; so lassen die Kräfte sich beständig durch eine einzige ersetzen, deren Lage, Richtung und Größe während der Drehung gänzlich unverändert bleiben. Dieselbe trifft mithin den einen Kegelschnitt beständig in seinem unveränderlichen Berührungspuncte mit der Drehungsaxe, während ihr nach und nach die sämmtlichen Puncte des anderen Kegelschnittes begegnen. Ist dieser Berührungspunct im Raume fest, so besteht zwischen den Kräften, während der angegebenen Drehung des Körpers in allen Stellungen Gleichgewicht. Der einfachste Fall dieses Satzes wurde schon in §. 32. hervorgehoben.

36. In Vorstehendem sind nur solche Stellungen des Systemes in Betracht gekommen, welche der Bedingung $V=0$ Genüge leisteten. Man betrachte ferner das System in allen den Stellungen, in welchen die Resultante eine gegebene Richtung hat, oder mit den Coordinatenaxen gegebene Winkel bildet, deren Cosinus a, b, c sein mögen. Da in diesem Falle $g=a$, $k=b$, $\sin\varphi \sin\Theta = c$, so werden die Gleichungen der Resultante (§. 34. 1.) folgende:

$$ay-bx=N-Vc,$$
$$cx-az=M-Vb,$$
$$bz-cy=L-Va,$$

wo L, M, N, V die in §. 34. angegebenen Ausdrücke bedeuten. Werden die Quadrate derselben addirt, so kommt auf der rechten Seite:

$$N^2+M^2+L^2-2V(Nc+Mb+La)+V^2(c^2+b^2+a^2),$$

oder, weil $V=La+Mb+Nc$, $a^2+b^2+c^2=1$, so erhält man

$$N^2+M^2+L^2-2V^2+V^2, \text{ d. i.}$$
$$N^2+M^2+L^2-V^2;$$

mithin

$$(ay-bx)^2+(cx-az)^2+(bz-cy)^2=N^2+M^2+L^2-V^2.$$

Werden nun für L, M, N, V ihre Werthe aus §. 34. gesetzt, so kommt $\quad N^2+M^2+L^2-V^2$

$$=(pt+q\sin\psi\sin\Theta)^2+p^2\cos\varphi^2\sin\Theta^2+q^2\cos\Theta^2$$
$$-(qt+p\sin\psi\sin\Theta)^2$$
$$=p^2[t^2+\cos\varphi^2\sin\Theta^2-\sin\psi^2\sin\Theta^2]$$
$$+q^2[\sin\psi^2\sin\Theta^2+\cos\Theta^2-t^2].$$

Man wird aber ohne Schwierigkeit finden, daß

$$t^2+\cos\varphi^2\sin\Theta^2-\sin\psi^2\sin\Theta^2=g^2$$
$$\sin\psi^2\sin\Theta^2+\cos\Theta^2-t^2=k^2$$

ist, mithin, weil in dem vorliegenden Falle $g=a$, $k=b$,

$$N^2+M^2+L^2-V^2=p^2a^2+q^2b^2;$$

und $\quad (ay-bx)^2+(cx-az)^2+(bz-cy)^2=p^2a^2+q^2b^2. \qquad$ A)

Um die Bedeutung dieser Gleichung zu verstehen, ziehe man durch den Anfang der Coordinaten C die den Gleichungen

$$\frac{u}{a}=\frac{v}{b}=\frac{w}{c}$$

entsprechende, also der Resultante parallele Linie H, nehme außer derselben einen Punct B an, dessen Coordinaten x, y, z seien, und suche den senkrechten Abstand dieses Punctes von der Linie. Zu dem Ende ziehe man die Gerade CB, und nenne δ den Winkel, welchen sie mit der Linie H bildet, so ist der gesuchte Abstand gleich $CB\cdot\sin\delta$. Nun sind die Gleichungen der Linie CB folgende:

$$\frac{u}{x}=\frac{v}{y}=\frac{w}{z};$$

folglich, wenn man sie mit der Gleichung von H verbindet,

$$\cos\delta=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

weil $\quad a^2+b^2+c^2=1, \quad$ und zugleich die Länge CB $=\varrho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; folglich $\varrho\cos\delta=ax+by+cz$. Hieraus ergiebt sich

$$\varrho^2\sin\delta^2=x^2+y^2+z^2-(ax+by+cz)^2$$
$$=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$$
$$=(ay-bx)^2+(cx-az)^2+(bz-cy)^2.$$

Der zuletzt stehende Ausdruck drückt mithin das Quadrat des kürzesten Abstandes ($\varrho\sin\delta$) des Punctes B von der Linie H aus, oder auch, wenn man durch B eine Linie parallel der H zieht, den kürzesten Abstand dieser Linie vom Anfange der Coordinaten.

Aus der mit A) bezeichneten Gleichung geht demnach hervor, daß der senkrechte Abstand aller (jedesmal mit dem kleinsten zusammengesetzten Paare verbundenen) Resultanten, welche die nämliche Richtung haben, vom Centralpuncte C, eine beständige Größe, nämlich gleich $\sqrt{p^2a^2+q^2b^2}$ ist, und man erhält den Satz:

Werden die Kräfte des Systemes um die festbleibende Richtung der Mittelkraft gedreht, so ist der Ort, in welchem sich die jedesmal mit dem kleinsten zusammengesetzten Paare verbundene Resultante bewegt, ein Kreiscylinder, dessen Axe durch den Centralpunct geht.

Giebt man der Resultante eine der vorigen gerade entgegengesetzte Richtung, so sind die Cosinus ihrer Neigungen gegen die Axen $-a$, $-b$, $-c$; da aber die Gleichung des vorstehenden Cylinders durch die Umkehrung der Zeichen von a, b, c nicht geändert wird; so folgt, daß auch die den vorigen gerade entgegengesetzten Resultanten in dem nämlichen Cylinder liegen.

37. Es ist noch zu untersuchen, wie sich das zusammengesetzte Paar ändert, indem die Resultante auf der Cylinderfläche fortgeht. Setzt man $g=a$, $k=b$, $\sin\varphi\sin\Theta=c$, so ergeben sich, aus den beiden ersten dieser Gleichungen, folgende Ausdrücke für $\sin\psi$ und $\cos\psi$:

$$(a^2+b^2)\sin\psi = a\sin\varphi\cos\Theta - b\cos\varphi,$$
$$(a^2+b^2)\cos\psi = a\cos\varphi + b\sin\varphi\cos\Theta.$$

Eliminirt man demnach ψ zunächst aus dem Werthe von t, so kommt: $(a^2+b^2)t = a\cos\Theta - bc\cdot\cos\varphi\sin\Theta$;

ferner

$$(a^2+b^2)N = a(p+qc)\cos\Theta - b(q+pc)\cos\varphi\sin\Theta,$$
$$(a^2+b^2)V = a(q+pc)\cos\Theta - b(p+qc)\cos\varphi\sin\Theta.$$

Nun werde, wie zulässig ist, gesetzt:

$$\cos\Theta = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin\gamma, \quad \cos\varphi\sin\Theta = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos\gamma;$$

ferner $a(q+pc) = \mu\cos\varepsilon$, $b(p+qc) = \mu\sin\varepsilon$,

so kommt $\sqrt{a^2+b^2}\cdot V = \mu\cdot\sin(\gamma-\varepsilon)$.

Für $\gamma=\varepsilon$ wird $V=0$; dieser Werth von γ liefert also eine Resultante, welche in dem Cylinder liegt und zugleich die Ellipse und Hyperbel trifft. Für diese Resultante sei $L=L'$, $M=M'$, $N=N'$, so ergiebt sich

$$L' = q\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin\varepsilon, \quad M' = -p\sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos\varepsilon,$$
$$N' = \frac{a(p+qc)\sin\varepsilon - b(q+pc)\cos\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Legt man durch diese Resultante und den Centralpunct eine Ebene, so ist die Gleichung derselben:

$$L'x + M'y + N'z = 0. \qquad 1.$$

Man lege ferner durch eine zweite, zu einem beliebigen γ gehörige Resultante und den Centralpunct eine Ebene, deren Gleichung sein wird:

$$(L-aV)x + (M-bV)y + (N-cV)z = 0, \qquad 2.$$

wo $L = q\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin\gamma$, $\quad M = -p\sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos\gamma$,

$$N = \frac{a(p+qc)\sin\gamma - b(q+pc)\cos\gamma}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$V = \frac{\mu\sin(\gamma-\varepsilon)}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Es sei η die Neigung der Ebenen 1. 2. gegen einander, so kommt

$$\cos\eta = \frac{LL'+MM'+NN'}{p^2a^2+q^2b^2}.$$

Man findet aber $LL'+MM'+NN' = A+B+C$, wo gesetzt ist:

$$A = \left[(a^2+b^2)q^2 + \frac{a^2(p+qc)^2}{a^2+b^2}\right]\sin\gamma\sin\varepsilon,$$

$$B = \left[(a^2+b^2)q^2 + \frac{b^2(q+pc)^2}{a^2+b^2}\right]\cos\gamma\cos\varepsilon,$$

$$C = -\frac{ab(p+qc)(q+pc)\sin(\gamma+\varepsilon)}{a^2+b^2}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich weiter auf folgende Formen bringen:

$$A = \left[(a^2+b^2)q^2 + (p+qc)^2 - \frac{b^2(p+qc)^2}{a^2+b^2}\right]\sin\gamma\sin\varepsilon,$$

$$B = \left[(a^2+b^2)p^2 + (q+pc)^2 - \frac{a^2(q+pc)^2}{a^2+b^2}\right]\cos\gamma\cos\varepsilon,$$

$$C=-\frac{\mu^2 \sin\varepsilon \cos\varepsilon \sin(\gamma+\varepsilon)}{a^2+b^2};$$

und hieraus folgt, weil $a^2+b^2+c^2=1$, $a(q+pc)=\mu\cos\varepsilon$, $b(p+qc)=\mu\sin\varepsilon$ ist,

$$A+B=(p^2+q^2+2pqc)\cos(\varepsilon-\gamma)-\frac{\mu^2(\sin\gamma \sin\varepsilon^3+\cos\gamma \cos\varepsilon^3)}{a^2+b^2},$$

und endlich

$$A+B+C=\left[(p^2+q^2+2pqc)(a^2+b^2)-\mu^2\right]\frac{\cos(\varepsilon-\gamma)}{a^2+b^2}$$

$$=(a^2p^2+b^2q^2)\cos(\varepsilon-\gamma).$$

Folglich ist $\cos\eta=\cos(\varepsilon-\gamma)$, und das Moment des zusammengesetzten Paares V, gleich

$$\frac{\mu \sin\eta}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Diese Formel spricht sehr einfach das Gesetz der Aenderung des Paares V aus. Für $\eta=0$ und $\eta=\pi$ wird $V=0$; es giebt also zwei Resultanten, für welche $V=0$, und die mithin die Ellipse und Hyperbel treffen. Die durch sie gelegte Ebene geht zugleich durch die Axe des Cylinders. Legt man durch diese Axe und durch irgend eine Resultante, zu welcher das Paar V gehört, eine zweite Ebene, so ist das Paar V dem Sinus der Neigung (η) dieser Ebene gegen die vorige proportional.

Ist also die Resultante der Richtung und dem Sinne nach gegeben, oder sind die Cosinus a, b, c nach Größe und Zeichen gegeben, so giebt es zwei entsprechende Stellungen des Systemes, in welchen die Kräfte sich jedesmal durch eine einfache Kraft ersetzen lassen, deren Richtungslinien mithin durch die Ellipse und die Hyperbel gehen. Beide liegen mit dem Centralpuncte in einer und derselben Ebene. Kehrt man die Zeichen von a, b, c sämmtlich um, so erhält man zwei andere, durch die Ellipse und Hyperbel gehende Resultanten, für welche wieder $V=0$ ist, die aber im entgegensetztem Sinne, in Bezug auf die beide vorigen, wirken. Es giebt also vier einander parallele Resultanten, für welche $V=0$ ist. Da man nun leicht sieht, daß sich im Allgemeinen vier Gerade von der Ellipse zur Hyperbel ziehen lassen, die einer gegebenen Geraden parallel sind, und da, nach dem Vorstehenden, jeder dieser vier Geraden, als Resultante, in einem gewissen Sinne genommen, ein verschwindendes Paar zukommt, so folgt: Zu irgend einer die Ellipse und Hyperbel verbindenden Geraden läßt sich immer eine, und im Allgemeinen nur eine entsprechende Stellung der Kräfte angeben, in welcher sich diese durch eine einzige ersetzen lassen, die in der gegebenen Geraden wirkt.

38. Man stelle sich die Kräfte in einer beliebigen Stellung vor, nehme senkrecht auf der Richtung der Mittelkraft eine beliebige Gerade als Axe, und drehe die Kräfte um diese Axe. Die Mittelkraft oder die ihr parallele, mit dem kleinsten Paare V verbundene Resultante bleibt während dieser Drehung beständig senkrecht auf der Axe. Man lege eine Ebene senkrecht auf die Axe, durch einen beliebigen Punct, etwa den Centralpunct, und zerlege jede der Kräfte in zwei andere, die eine der Axe, die andere der Ebene parallel. Hierauf projicire man die sämmtlichen Angriffspuncte auf die Ebene, und bringe die der Ebene parallelen Componenten jede an der Projection ihres Angriffspunctes in ihres Richtung und in der entgegengesetzten an, so erhält man ein System von Kräften in dieser Ebene, und ein System von Paaren, deren Ebenen alle der Axe parallel sind. Die Summe aller der Axe parallelen Componenten des Systemes ist offenbar Null, weil die Axe senkrecht auf der Resultante steht; dieselben geben mithin ebenfalls ein der Axe paralleles Paar, welches sich mit allen übrigen Paaren in ein einziges der Axe paralleles Paar zusammensetzen läßt. Ferner geben die sämmtlichen Kräfte in der Ebene eine Resultante $R=1$, die während der Drehung beständig durch einen festen Mittelpunct M geht. Man zerlege das der Axe parallele Paar, welches sich offenbar während der Drehung stetig verändert, in ein mit der Resultante

paralleles und in ein darauf senkrechtes. Setzt man das der R parallele Paar mit der durch M gehende Kraft R zusammen, so erhält man eine der R parallele und gleiche Kraft, welche offenbar eine der Axe parallel durch den Punct M gezogene Gerade beständig treffen muß. Dies giebt folgenden Satz:

Werden die Kräfte um eine auf der Richtung der Mittelkraft senkrechte Axe gedreht, so schneidet die mit dem kleinsten Paare verbundene Resultante, indem sie der Drehung der Kräfte folgt, beständig eine gewisse feste, der Drehungsaxe parallele Gerade, und zwar, wie sich von selbst versteht, immer rechtwinklich. Um diese Gerade zu construiren, projicire man die Angriffspuncte der Kräfte und die Kräfte selbst auf eine gegen die Axe senkrechte, also der Mittelkraft parallele Ebene, suche den Mittelpunct aller dieser in einer Ebene befindlichen Kräfte und errichte in denselben ein Loth auf der Ebene, so ist dieses die verlangte Gerade.

Die Formeln für den Mittelpunct einer beliebigen Anzahl von Kräften in einer Ebene sind in §. 20. gegeben worden. Will man denselben durch Construction finden, so kann man zuerst den Mittelpunct von zweien der Kräfte nach §. 11. bestimmen, an demselben die Resultante dieser Kräfte anbringen, und diese hierauf mit einer dritten Kraft zusammensetzen, wodurch ein neuer Mittelpunct erhalten wird, u. s. f. Man kann aber auch sämmtliche Kräfte nach zwei Richtungen zerlegen (von denen keine der Mittelkraft parallel sein darf, wenn nicht alle Kräfte einander parallel sind), und die parallelen Componenten an ihren Schwerpuncten vereinigen; so hat man wieder den Fall zweier Kräfte.

Zum Schlusse mögen noch einige Bemerkungen über einen besonderen Fall folgen, der in der Natur vorkommt, nämlich den Fall, in welchem die anfänglich gegebenen, an festbestimmten Puncten des Körpers angebrachten Kräfte in einer einzelnen Kraft und einem Paare bestehen. Derselbe trifft an der Oberfläche der Erde bei Körpern ein, die nicht allein *schwer*, sondern zu-

gleich auch *magnetisch* sind. Denn der Magnetismus bringt an dem Körper allemal ein Kräftepaar hervor, während die Schwerkräfte in allen Puncten sich in eine Resultante am Schwerpuncte vereinigen.

Da die Kräfte in einer einzelnen Kraft und einem Paare bestehen, so sind sie alle einer Ebene parallel; das System hat mithin keine Central-Ebene, sondern nur eine Central-Axe. Man sieht ferner leicht ein, daß es auch mit Rücksicht auf die Drehung gestattet ist, das Paar in dem Körper, aber nur *parallel mit sich selbst*, zu verlegen; man verlege demnach das Paar in dem Körper parallel mit sich selbst so, daß der Arm desselben durch den Angriffspunct der einzelnen Kraft geht; so ist der neue Arm zugleich die *Centralaxe* des Körpers. Die Central-Axe ist also eine dem Arme des Paares parallele durch den Angriffspunct der einzelnen Kraft gehende Gerade, wie man auch leicht durch die Zusammensetzung der Kräfte nach den allgemeinen Regeln finden kann. An dieser Central-Axe kann nun wieder das Paar, immer parallel mit sich selbst, beliebig verschoben und z. B. so gelegt werden, daß der Angriffspunct einer seiner Kräfte in den Angriffspunct der einzelnen Kraft fällt; alle diese Veränderungen sind auch mit Rücksicht auf die Drehung der Kräfte gleichgültig. Fällt zugleich die Ebene des Paares in die der Central-Axe und der einzelnen Kraft, oder werden die Kräfte durch Drehung in eine dieser Annahme genügende Stellung gebracht, so haben sie in ihrer Ebene einen Mittelpunct, der in dem Umringe des Central-Kreises liegt. Derselbe läßt sich zwar nach den allgemeinen Regeln leicht finden, kann aber auch auf folgende, schon in §. 32. vorgekommene Weise bestimmt werden. Es seien (Fig. 21.) $C\beta = Bb = q$ die Kräfte des Paares, $CC' = p$ die einzelne Kraft, $CB = a$ der Arm des Paares, und der unveränderliche Winkel $C'C\beta = \gamma$. Nun denke man sich die Kräfte so gedreht, daß die des Paares in die Verlängerungen seines Armes fallen, also z. B. $C\beta$ in die Verlängerung von BC über C; so wird die einzelne Kraft durch den Mittelpunct gehen müssen.

Wird also von C aus unter dem Winkel $BCD=\pi-\gamma$ eine Gerade CD gezogen, so liegt in ihr der Mittelpunct. Man nehme nun in dieser Geraden $CM=\frac{aq}{p}$, und zwar auf einer bestimmten Seite von C aus, nämlich so, daß das Moment der Kraft CC′ in Bezug auf M dem Momente des Paares entgegen wirke; so ist M der gesuchte Mittelpunct. Denn das Moment von CC′ in Bezug auf M ist $=p\cdot CM\cdot \sin C'CM$, und das des Paares ist $=qa \sin \beta CB$; es ist aber $C'CM =\pi-\gamma-C'CB$, und $\beta CB=C'CB+\gamma$; folglich $\sin C'CM =\sin \beta CB$, also $p\cdot CM=aq$; w. z. b. w.

Die Central-Axe eines schweren und magnetischen Körpers läßt sich durch Beobachtung bestimmen, wenn der Schwerpunct des Körpers und die Richtung der magnetischen Kraft gegeben sind. Wird nämlich der Körper in seinem Schwerpuncte frei drehbar befestigt, so nimmt er eine gewisse Stellung des Gleichgewichtes ein, in welcher das magnetische Paar Null ist. Zieht man nun durch den in genannter Stellung befindlichen Körper eine der Richtung der magnetischen Kraft parallele Gerade; so hat man die Central-Axe, worauf sich auch der Central-Kreis in dem Körper leicht bestimmen läßt. Ueber diesen Gegenstand werden später noch einige Bemerkungen folgen.

Gleichgewicht biegsamer Systeme.

Seilpolygon.

39. Es seien (Fig. 23.) AB, BC, CD, DE, EF gerade Linien von unveränderlichen Längen, welche sich um ihre Endpuncte ohne Hinderniß drehen können, so daß sie ein biegsames Vieleck ABCDEF bilden. An den Puncten A, B ... F seien die Kräfte P, P′, ... P^{V} angebracht, zwischen denen Gleichgewicht bestehe, dessen Bedingungen untersucht werden sollen.

Bei diesem Gleichgewichte werden offenbar die Seiten AB, BC, .. den auf sie einwirkenden äußeren Kräften gewisse Widerstände oder Spannungen entgegensetzen müssen, durch welche allein das Gleichgewicht zu Stande kommt. Man denke sich die Verbindung eines beliebigen Theiles des Vieleckes, z. B. CDE, mit dem übrigen Theile, gänzlich aufgehoben, zugleich aber in den Endpuncten C und E die nach CB und EF wirkenden Spannungen als Kräfte angebracht; so ist klar, daß das Gleichgewicht in CDE nicht gestört wird. Betrachtet man also irgend eine einzelne Seite des Vieleckes, z. B. CD, so muß an derselben zwischen der Kraft P″, und der nach CB gerichteten Spannung, an C, einerseits, und der Kraft P‴, so wie der nach DE gerichteten Spannung, an D, andererseits, Gleichgewicht bestehen; folglich muß die Resultante der beiden erstgenannten Kräfte an C, derjenigen der beiden anderen Kräfte an D, gleich und entgegengerichtet sein. Jede Seite, z. B. CD, wird also, wenn Gleichgewicht besteht, durch zwei gleiche und entgegengerichtete, an den Puncten C und D wirkende Kräfte gezogen, denen zwei gleiche innere Kräfte Gleichgewicht halten müssen, welche die Spannung der Seite CD ausmachen. Man nenne die Spannungen in AB, BC, CD ⋯, welche die Puncte A, B, C ⋯ beziehungsweise den Puncten B, C, D zu nähern streben, der Reihe nach t, t′, t″ ⋯; so lassen sich die ihnen gleichen und entgegengerichteten Spannungen, welche die Puncte B, C, D ⋯ der Reihe nach den A, B, C ⋯ zu nähern streben, durch $-t$, $-t'$, $-t''$ ⋯ bezeichnen; so daß man sich z. B. in der Seite BC an dem Puncte B die Kraft $+t'$, an C dagegen $-t'$ vorzustellen hat.

Es muß nun, wenn Gleichgewicht besteht, die Spannung $+t$ (an A) der Kraft P Gleichgewicht halten, beide müssen also einander gleich und entgegengesetzt sein. Eben so muß an B zwischen den Spannungen $-t$ und $+t'$ und der Kraft P′, und an C zwischen $-t'$, $+t''$ und P″, Gleichgewicht bestehen; u. s. f. an allen Spitzen des Vieleckes. Oder, was auf dasselbe hinauskommt, jede der Spannungen $+t$, $+t'$, ⋯ ist der Resultante aller äußeren Kräfte gleich und entgegengesetzt, die von A bis zu dem Anfange der Seite, in welcher die Spannung wirkt, an dem Vielecke angebracht sind. Denn indem z. B. die Spannung $+t'$ in B den Kräften P′ und $-t$ Gleichgewicht hält, braucht man nur zu bemerken, daß die Kraft $-t$ keine andere ist, als die Kraft P, deren Angriffspunct von A nach B verlegt werden kann; also ist $+t'$ mit der Resultante R von P und P′ im Gleichgewichte. Da mithin R in der Richtung BC wirken muß, so kann ihr Angriffspunct von B nach C verlegt, oder es kann R anstatt $-t'$ gesetzt werden; und mithin ist, in C, die Kraft $+t''$ mit der Resultante von R und P″, oder von P, P′, P″, im Gleichgewichte; u. s. f. Folglich muß auch in E die Kraft $+t^{IV}$ mit der Resultante der Kräfte P, P′, ⋯ P^{IV} im Gleichgewichte sein, und da $+t^{IV}$ nichts Anderes ist, als die von dem Angriffspuncte F in ihrer Richtung an E verlegte Kraft P^{V}; so muß die Kraft P^{V} der Resultante aus allen übrigen äußeren Kräften P, P′ ⋯ P^{IV}, Gleichgewicht halten.

Sind also die äußeren Kräfte P, P′ ⋯, die an einem biegsamen Vielecke im Gleichgewichte sein sollen, nach Richtungen

und Intensitäten gegeben, so ist das Gleichgewicht, wofern das Vieleck ganz frei beweglich ist, nur dann möglich, wenn die Mittelkraft aus allen diesen äußeren Kräften Null ist. Wenn aber diese Bedingung erfüllt ist, läßt sich allemal eine dem Gleichgewichte zwischen den anzubringenden äußeren Kräften genügende Gestalt und Stellung des Vieleckes angeben. Bezeichnet man, wie gewöhnlich, die Neigungen von P, P′, ⋯ gegen drei auf einander senkrechte Axen mit α, β, γ; α', ⋯; ⋯ und die Neigungen von $+t$, $+t'$, ⋯ gegen die Axen, durch welche zugleich die Richtungen der Seiten AB, BC, ⋯ bestimmt werden, mit a, b, c; a′, b′, c′; ⋯; so hat man nach dem Vorhergehenden folgende Gleichungen:

$$
\begin{array}{l}
P \cos\alpha + t \cos a = 0 \\
P' \cos\alpha' - t \cos a + t' \cos a' = 0 \\
P'' \cos\alpha'' - t' \cos a' + t'' \cos a'' = 0 \\
P''' \cos\alpha''' - t'' \cos a'' + t''' \cos a''' = 0 \\
P^{IV} \cos\alpha^{IV} - t''' \cos a''' + t^{IV} \cos a^{IV} = 0 \\[6pt]
P \cos\beta + t \cos b = 0 \\
P' \cos\beta' - t \cos b + t' \cos b' = 0 \\
P'' \cos\beta'' - t' \cos b' + t'' \cos b'' = 0 \\
P''' \cos\beta''' - t'' \cos b'' + t''' \cos b''' = 0 \\
P^{IV} \cos\beta^{IV} - t''' \cos b''' + t^{IV} \cos b^{IV} = 0 \\[6pt]
P \cos\gamma + t \cos c = 0 \\
P' \cos\gamma' - t \cos c + t' \cos c = 0 \\
P'' \cos\gamma'' - t' \cos c' + t'' \cos c'' = 0 \\
P''' \cos\gamma''' - t'' \cos c'' + t''' \cos c''' = 0 \\
P^{IV} \cos\gamma^{IV} - t''' \cos c''' + t^{IV} \cos c^{IV} = 0
\end{array}
\qquad 1.
$$

Zu diesen kommen noch die Gleichungen $P^{V} \cos\alpha^{V} - t^{IV} \cos\alpha^{IV} = 0$, $P^{V} \cos\beta^{V} - t^{IV} \cos\beta^{IV} = 0$, $P^{V} \cos\gamma^{V} - t^{IV} \cos\gamma^{IV} = 0$. Jede derselben ist jedoch nur eine Folge der ihr entsprechenden 5 anderen; denn werden z. B. die 5 ersten addirt, so kommt, weil die Mittelkraft aus allen P, P′, ⋯ P^{V} Null, mithin auch $\Sigma P \cos\alpha = 0$ ist, unmittelbar $-P^{V} \cos\alpha^{V} + t^{IV} \cos a^{IV} = 0$; wie behauptet wurde. Durch vorstehende Gleichungen werden offenbar die sämmtlichen Componenten der Spannuugen, also die Spannungen selbst, und zugleich die Richtungen der Seiten, vollständig bestimmt. Man erhält z. B. $P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + t'\cos a' = 0$, $P\cos\beta + P'\cos\beta' + t'\cos b' = 0$, $P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + t'\cos c' = 0$, zur Bestimmung von t'; u. s. f. für die übrigen.

Ist der Endpunct A des Vieleckes unbeweglich, so drückt P den Widerstand aus, welchen der Punct A leisten muß, und da dieser Widerstand jede beliebige Richtung und Größe haben kann, so wird auch die Bedingung, daß die Mittelkraft aus allen äußern Kräften, den Widerstand in A mit eingerechnet, Null sein muß, immer von selbst erfüllt, oder das Vieleck, in welchem ein Punct A unbeweglich ist, läßt sich immer in eine Gestalt und Stellung des Gleichgewichtes bringen, welche Kräfte auch an den übrigen Puncten angebracht werden.

Wenn beide Endpuncte unbeweglich sind, so sei h ihre Entfernung von einander, und λ, μ, ν die Neigungen von h gegen die Axen, ferner $AB = l$, $BC = l'$, .. die Längen der Seiten; alsdann ist die Summe der Projectionen der Seiten auf jede Axe gleich der Projection von h auf diese Axe, d. h.

$$\Sigma l\cos a = h\cos\lambda,\quad \Sigma l\cos b = h\cos\mu,\quad \Sigma l\cos c = h\cos\nu. \qquad 2.$$

Diese drei Gleichungen müssen mit den Gleichungen 1. verbunden werden, um die sämmtlichen Unbekannten t, t', .. $\cos a$, $\cos c'$ .. zu bestimmen, zu welchen auch die Widerstände P und P^V in den festen Puncten gehören. Läßt man aus 1. die drei Gleichungen weg, welche den Widerstand P enthalten, so bleiben, wenn das Vieleck n Seiten hat, $3n - 3$ von einander unabhängige Gleichungen übrig, zu welchen noch die Gleichungen 2. und die bekannten n Bedingungen $\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1$, u. s. w. hinzugefügt werden müssen, um die 4n Unbekannten (t, t' .., a, b, c, a', ..) zu bestimmen.

Ist das Vieleck in sich **geschlossen**, so beruht die Bestimmung seiner Gestalt und der Spannungen seiner Seiten im-

mer auf dem nämlichen Satze, wie vorhin, daß jede äußere Kraft mit den in ihrem Angriffspuncte wirkenden Spannungen im Gleichgewichte sein muß. Die Anwendung dieses Satzes giebt, für ein neck, 3n der obigen 1. ähnliche Gleichungen zwischen den Componenten der Kräfte P, P', .. und der Spannungen t, t', .., von denen aber 3 aus den übrigen folgen. Ferner erhält man 3 Gleichungen, indem man (in 2.) $h = 0$ setzt, und hat noch die n Bedingungen $\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1$, u. s. w.; also im Ganzen 4n von einander unabhängige Gleichungen zwischen eben so vielen unbekannten Größen, nämlich den n Spannungen t, t', ... und den 3n Cosinus von a, b, c, a', b', c' ..., durch welche die Richtungen der Seiten bestimmt werden.

Es sei z. B. ein Viereck vorgelegt, an dessen Spitzen A, B, C, D die Kräfte P, P', P'', P''' wirken (Fig. 24.). Heißen die Seiten AB, BC, CD, DE, der Reihe nach l, l', l'', l''' und ihre Spannungen t, t', t'', t''', so hat man folgende Gleichungen:

$$P\cos\alpha + t\cos a - t'''\cos a''' = 0$$
$$P'\cos\alpha' + t'\cos a' - t\cos a = 0$$
$$P''\cos\alpha'' + t''\cos a'' - t'\cos a' = 0.$$

Die vierte Gleichung, nämlich $P'''\cos a''' + t'''\cos a''' - t''\cos a'' = 0$ ist eine Folge dieser drei, weil $\Sigma P\cos\alpha = 0$. Vertauscht man in den vorstehenden Ausdrücken α, a, mit β, b, und mit γ, c, so erhält man noch 6 andere Gleichungen. Ferner ist

$$\Sigma l\cos a = 0,\quad \Sigma l\cos b = 0,\quad \Sigma l\cos c = 0,$$

und

$$\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1,\quad \text{u. s. w.}$$

also ergeben sich im Ganzen 16 Gleichungen zur Bestimmung der 4 Spannungen und der 12 Cosinus von a, b, c, a' ...

Anmerkung. Man kann auch annehmen, daß die Längen der Seiten des Vieleckes ABCD ... (Fig. 23.) nicht unveränderlich sind, sondern daß eine solche Seite, wenn sie in ihren Endpuncten von zwei gleichen und entgegengerichteten Kräften nach aussen oder nach innen gezogen wird, sich verlängert oder verkürzt, indem zugleich die Spannung beständig wächst, bis sie den äußeren Kräften gleich wird und Gleichgewicht eintritt. Es ist klar, daß die Ausdehnung durch die Spannung bedingt sein muß; am einfachsten wird sie derselben proportional gesetzt, und diese Annahme ist auch mit der Erfahrung verträglich, so lange wenigstens die Spannung gewisse Grenzen nicht überschreitet. Wenn nun an dem ausdehnsamen Vielecke das Gleichgewicht besteht, so kann man die Seiten als unveränderlich betrachten, und mithin gelten die oben entwickelten Gleichungen auch für ein ausdehnsames Vieleck, wofern man nur in ihnen nicht die ursprünglichen, sondern die durch die Spannungen geänderten Seitenlängen in Rechnung bringt. Ist L die ursprüngliche Länge einer Seite, und l die durch die Spannung geänderte, so hat man, nach der obigen Annahme, $l = L(1+\gamma t)$, wo γ ein constanter Coefficient ist. Dieser Werth von l, und eben so die Werthe $L'(1+\gamma t')$, $L''(1+\gamma t'')$, .. von l', l'', ... müssen in die obigen Gleichungen 2. gesetzt werden; dadurch erhält man in allen Fällen eben so viele Gleichungen zwischen eben so vielen Unbekannten wie vorhin. Ist das Vieleck ganz frei und nicht geschlossen, so lassen sich die Verlängerungen seiner Seiten finden, wenn die Spannungen aus den Gleichungen 1. bestimmt sind.

Im Folgenden soll aber, der Einfachheit wegen, die Ausdehnsamkeit bei Seite gesetzt werden, wofern nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird.

40. Wenn die Kraft P den Winkel zwischen den in ihrem Angriffspuncte zusammenstoßenden Seiten l und l' halbirt, so müssen auch die Spannungen t und t' in diesen Seiten einander gleich sein, weil ihre Resultante der P Gleichgewicht hält. Es sei u der Winkel zwischen den Schenkeln l und l', so ist $P = 2t \cos\frac{1}{2}u$. Sind nun die Seiten l und l' einander gleich, und bezeichnet man mit r den Halbmesser des Kreises, der sich um das durch die Seiten l, l', mit dem eingeschlossenen Winkel u bestimmte Dreieck beschreiben läßt, so ist $2r\cos\frac{1}{2}u = l$; mithin $Pr = tl$. Werden alle Winkel des Vieleckes durch die angebrachten Kräfte halbirt, so ist auch die Spannung überall gleich; und sind alle Seiten einander gleich, so ist das Product Pr für alle Spitzen des Vieleckes von gleichem Werthe, nämlich gleich tl.

Man denke sich ein biegsames Seil über eine Fläche gespannt, z. B. etwa in dem einen Endpuncte auf der Fläche befestigt, und in dem andern eine spannende Kraft angebracht. Der Druck, welchen das Seil in jedem Puncte auf die Fläche ausübt, muß mit dem Widerstand der Fläche im Gleichgewicht, also nach der Normale der Fläche gerichtet sein. Dieser Druck ist aber die Resultante der Spannungen, die in zwei unendlich kleinen auf einander folgenden Elementen des Seiles an dem gemeinsamen Endpuncte derselben wirken, und liegt mithin in der Ebene dieser Elemente oder in der Ebene des Krümmungskreises; und da er zugleich auf der Curve normal ist, so fällt er in die Richtung des Krümmungshalbmessers. Das biegsame Seil muß also auf der Fläche eine solche Lage annehmen, daß der Krümmungshalbmesser seiner Curve in die Normale der Fläche fällt. Diese Curve kann die kürzeste zwischen ihren Endpuncten auf der Fläche sein (vgl. I. §. 159.); sie ist es aber nicht nothwendig. Z. B. auf einer Kugel muß ein gespannter Faden, zwischen zwei gegebenen Endpuncten, wenn weiter keine äußeren Kräfte auf ihn wirken, in dem Bogen eines größten Kreises liegen; ist nun der von dem Faden gebildete Bogen kleiner als die Hälfte des größten Kreises, so ist er der kürzeste auf der Kugel, zwischen seinen Endpuncten; er ist dies aber nicht, wenn er größer ist als der Halbkreis, und es versteht sich von selbst, daß alsdann seine Länge auch kein Maximum sein kann, da eine unbedingt längste Linie zwischen zwei Puncten auf einer Fläche, widersinnig wäre. Ob die Länge eines gespannten Fadens ein Minimum ist oder nicht, kann im Allgemeinen, nach den Regeln der Variations-Rechnung, nur durch die Untersuchung der Variationen zweiter Ordnung entschieden werden.

Da der Widerstand der Fläche in jedem Puncte senkrecht auf der Curve steht, so halbirt er den Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Elementen der Curve, und folglich ist die Spannung der Curve überall gleich. Theilt man die Curve in unendlich kleine gleiche Elemente ds, so gilt die obige Gleichung $Pr = tl$ auch für den über die Fläche gespannten Faden, wenn $l = ds$ gesetzt wird. Der Druck P ist also in jedem Puncte der unveränderlichen Spannung t und der Krümmung des Fadens $\left(\frac{1}{r}\right)$ proportional.

Wenn der Angriffspunct einer Kraft (er heiße B) an dem Seile hin und her gleiten kann, so muß derselbe, damit Gleichgewicht bestehe, eine solche Stellung einnehmen, daß die Richtung der Kraft den Winkel der anstoßenden Seiten (sie mögen AB, BC heißen) halbire. Denn wenn Gleichgewicht besteht, so kann man sich, ohne dasselbe zu stören, die Puncte A und C als unbeweglich denken; alsdann kann, weil die Summe der Seiten $(AB + BC)$ unveränderlich ist, der Angriffspunct sich nur noch auf einer Ellipse bewegen, welche die Puncte A und C zu Brennpuncten hat, und die Kraft muß demnach auf der Ellipse normal sein, also, nach einem bekannten geometrischen Satze, den Winkel ABC halbiren; w. z. b. w. Alsdann sind mithin auch die Spannungen der Seiten AB, BC einander gleich.

41. Als ein Beispiel zur Theorie des Seilpolygons, welches sich mit einem geringen Aufwande von Rechnung durchführen läßt, diene folgende Aufgabe:

An der festen lothrechten Stange cb (Fig. 25.) ist in c eine Schnur cdQ befestigt, deren Ende mit dem Gewichte Q belastet, auf der schiefen Ebene ae ruht, und welche noch im Puncte d durch ein angehängtes Gewicht P gespannt wird. Welche Stellung nimmt die Schnur im Zustande des Gleichgewichtes an, und wie groß sind die Spannungen in ihren beiden Theilen cd und Qd?

Man fälle aus c das Loth ck auf ae; seine Länge läßt sich als gegeben ansehen, und sei k. Ferner sei Winkel $eab = \alpha$ die Neigung der schiefen Ebene gegen die wagerechte ab, mithin auch $eck = \alpha$. Man verlängere Qd bis f; es sei der unbekannte Winkel $dQe = x$, und $cdf = y$; ferner sei $dQ = b$, $dc = c$ gegeben. Projicirt man Qdc auf ck, so kommt

$$b \sin x + c \sin (x + y) = k. \qquad 1.$$

Es sei noch Θ die Spannung in Qd, t die Spannung in dc; so müssen erstens die drei Kräfte Θ, t und P an d einander Gleichgewicht halten, woraus sich ergiebt:

$$\Theta \sin (x + \alpha) + P = t \sin (x + y + \alpha). \qquad 2.$$

$$\Theta \cos (x + \alpha) \quad = t \cos (x + y + \alpha). \qquad 3.$$

Zerlegt man ferner das Gewicht Q und die Spannung Θ nach der Richtung ae und nach einer auf ae senkrechten, so müssen die der schiefen Ebene parallelen Componenten einander Gleichgewicht halten. Diese Componenten sind $Q \sin \alpha$ und $\Theta \cos x$; mithin erhält man

$$Q \sin \alpha = \Theta \cos x. \qquad 4.$$

Aus diesen vier Gleichungen sind die vier Unbekannten t, Θ, x, y zu bestimmen.

Man setze zur Abkürzung $x + y = z$, und eliminire t aus den Gleichungen 2. 3., so kommt $-\Theta \sin y + P \cos (z + \alpha) = 0$; und mithin durch Elimination von Θ aus 4.:

$$\frac{\cos x}{\sin y} = \frac{Q \sin \alpha}{P \cos (z + \alpha)},$$

oder $P = Q \sin \alpha \cdot q$ gesetzt,

$$q \cos x \cos (z + \alpha) = \sin (z - x),$$

oder

$$q \cos \alpha \cos z - q \sin \alpha \sin z = \sin z - \cos z \, tg\, x,$$

oder

$$(1 + q \sin \alpha)\, tg\, z = q \cos \alpha + tg\, x. \qquad 5.$$

Die Gleichung 5. muß, verbunden mit der Gleichung 1., nämlich

$$b \sin x + c \sin z = k \qquad 6.$$

die gesuchten Werthe von x und z liefern. Man könnte zwar eine dieser Größen, z. B. x aus beiden Gleichungen eliminiren; allein es ist besser, beide in der gegebenen Form beizubehalten. Zur ferneren Auflösung ist dann die Bemerkung dienlich, daß der Winkel $dce = \frac{\pi}{2} - z - \alpha$ offenbar zwischen Null und dem Winkel ε enthalten sein muß, welchen die Schnur bei c mit cb bilden würde, wenn sie nur durch das Gewicht Q gespannt, also $P=0$ wäre. Da nun $c+b$ die Länge der ganzen Schnur, und $\angle dck$ in diesem Falle gleich $\varepsilon+\alpha$ ist, so hat man

$$\cos(\varepsilon+\alpha) = \frac{k}{c+b},$$

woraus der Werth von ε sich ergiebt. Demnach ist $\frac{\pi}{2} - z - \alpha > 0$ und $< \varepsilon$, und mithin sind $\frac{\pi}{2} - \alpha$ und $\frac{\pi}{2} - \alpha - \varepsilon$ zwei vorläufige Grenzen, zwischen denen z liegen muß.

Es sei z. B. $P=1$, $Q=1$, $\alpha=45^0$, $b=c=k=1$. In diesem Falle erhält man $\cos(\alpha+\varepsilon)=\frac{1}{2}$, also $\alpha+\varepsilon=60^0$, $\varepsilon=15^0$. Der gesuchte Winkel z liegt also zwischen 30^0 und 45^0. Man findet noch $q=\sqrt{2}$, und mithin aus 5. und 6. folgende Gleichungen:

$$\sin x + \sin z = 1 \quad \text{und} \quad 2\,tg\,z = 1 + tg\,x.$$

Man setze $\sin x + \sin z - 1 = u$, nehme einige Werthe von z zwischen 30^0 und 45^0 an, und berechne zu jedem aus der zweiten Gleichung das zugehörige x und dann u. Hieraus ergiebt sich folgende Tafel:

z.	x.	u.
45^0	45^0	$+0{,}414$ ...
40^0	$34^0 5'$	$+0{,}202$ ...
35^0	$21^0 50'$	$-0{,}055$ ...

Setzt man noch $z=36^0$ ein, so ergiebt sich

$$x=24^0 22' 27'', \quad u=+0{,}0004796 \,\ldots;$$

mithin liegt z zwischen 35^0 und 36^0.

Man erhält

für $z=35^0\,59'\,30''$, $x=24^0\,21'\,10''$, $u=+0{,}0000214$

für $z=35^0\,59'\,29''$, $x=24^0\,21'\,7''$, $u=-0{,}0000157$,

und hieraus durch Interpolation:

$z=35^0\,59'\,29'',4$; $x=24^0\,21'\,8'',2$; $y=z-x=11^0\,38'\,21'',2$.

Die Spannnungen sind:

$$\Theta=0{,}77680, \quad t=1{,}74871.$$

Kettenlinie.

42. Wenn die an einem Seilpolygone wirkenden Kräfte alle einander parallel sind, so ist leicht einzusehen, daß das Polygon eben werden muß. Ein frei herabhängender schwerer Faden wird daher eine ebene Curve bilden, die man **Kettenlinie** nennt. Es sei ABD diese Curve (Fig. 26.), A und B die festen Endpuncte des Fadens. Man nehme den tiefsten Punct D der Curve zum Anfange der Coordinaten, $DE=x$ vertical, $EC=y$ horizontal. Es sei t die Spannung in C, aufwärts ziehend gedacht, φ der Winkel, welchen sie mit der Axe der x bildet, also $tg\,\varphi = \frac{dy}{dx}$, ds das Bogenelement der Curve, Pds das Gewicht desselben, π und π' die Widerstände in A und B, welche mit der Axe x die Winkel ε und ε' bilden; ferner Bogen $DC=s$, $DA=\lambda$; so ist t die Resultante von π und dem Gewichte des Bogens AC, d. i. $\int_s^\lambda Pds$; mithin die verticale Componente von t

$$t\cos\varphi = \pi\cos\varepsilon - \int_s^\lambda Pds,$$

und die horizontale Componente $t\sin\varphi = \pi\sin\varepsilon$. Ferner hat man noch

$$\pi\cos\varepsilon + \pi'\cos\varepsilon' - \int Pds = 0,$$

wo das Integral $\int Pds$ das ganze Gewicht des Fadens ADB ausdrückt, und zugleich

$$\pi \sin\varepsilon + \pi' \sin\varepsilon' = 0,$$

weil die Mittelkraft aus π, π' und dem Gewichte des Fadens Null sein muß.

Nennt man Θ die Spannung im tiefsten Puncte, für welchen $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $s = 0$, so ergiebt sich aus den beiden ersten Gleichungen:

$$0 = \pi \cos\varepsilon - \int_0^\lambda P ds \quad \text{und} \quad \Theta = \pi \sin\varepsilon;$$

also allgemein $t \cos\varphi = \int_0^s P ds$ und $t \sin\varphi = \Theta$.

Die horizontale Spannung ist demnach überall gleich Θ, die verticale Spannung $t \cos\varphi$ in C ist aber gleich dem Integrale $\int_0^s P ds$, d. h. dem Gewichte des Bogens CD.

Ist der Faden überall gleichförmig, so nehme man das Gewicht seiner Längeneinheit als Einheit der Gewichte und mithin der Kräfte an; alsdann wird $P = 1$, und mithin

$$t \cos\varphi = s \quad \text{und} \quad t \sin\varphi = \Theta;$$

woraus durch Elimination von t, weil $tg\,\varphi = \frac{dy}{dx}$, folgt:

$$s\,dy = \Theta dx, \qquad \text{a)}$$

in welcher Gleichung die positive Zahl Θ die Länge eines Fadens von der Art des vorgelegten ausdrückt, dessen Gewicht das Maaß der horizontalen Spannung ist.

Wird diese Gleichung quadrirt und $dy^2 = ds^2 - dx^2$ gesetzt, so kommt

$$s^2(ds^2 - dx^2) = \Theta^2 dx^2,$$

mithin $$s^2 ds^2 = (s^2 + \Theta^2) dx^2$$

und $$\frac{s\,ds}{\sqrt{s^2+\Theta^2}} = dx,$$

wo die Quadratwurzel mit positivem Zeichen genommen ist, weil x und s zugleich wachsen. Durch Integration ergiebt sich

$$x + k = \sqrt{s^2+\Theta^2},$$

und weil für $x = 0$, $s = 0$ wird, $k = \Theta$, also

$$x + \Theta = \sqrt{s^2+\Theta^2}. \qquad \text{b)}$$

Wird ferner der Werth von dx durch s ausgedrückt in die Gleichung $s\,dy = \Theta dx$ gesetzt, so kommt:

$$dy = \frac{\Theta ds}{\sqrt{s^2+\Theta^2}}; \qquad \text{c)}$$

folglich $$y = \Theta \log \frac{s + \sqrt{s^2+\Theta^2}}{\Theta},$$

da für $s = 0$, $y = 0$ werden muß. Für die letztere Gleichung läßt sich auch schreiben:

$$y = -\Theta \log \frac{\sqrt{s^2+\Theta^2} - s}{\Theta};$$

mithin ist

$$\Theta \cdot e^{\frac{y}{\Theta}} = \sqrt{s^2+\Theta^2} + s \quad \text{und} \quad \Theta \cdot e^{-\frac{y}{\Theta}} = \sqrt{s^2+\Theta^2} - s;$$

folglich, weil $\sqrt{s^2+\Theta^2} = x + \Theta$,

$$\tfrac{1}{2}\Theta\left[e^{\frac{y}{\Theta}} + e^{-\frac{y}{\Theta}}\right] = x + \Theta \qquad \text{d)}$$

und $$\tfrac{1}{2}\Theta\left[e^{\frac{y}{\Theta}} - e^{-\frac{y}{\Theta}}\right] = s. \qquad \text{e)}$$

Die erste der beiden vorstehenden Gleichungen liefert die Gleichung der Kettenlinie zwischen den Coordinaten x und y.

Es seien $DF = a$, $FA = b$ die Coordinaten von A, ferner $DG = a'$, $GB = b'$ die Coordinaten von B. (man bemerke, daß b' negativ sein muß, wenn b positiv ist), ferner Bogen $DA = \lambda$, $DB = L - \lambda$, L die ganze Länge des Fadens, so hat man zwischen diesen Größen und Θ aus d) u. e) folgende Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}\Theta\left[e^{\frac{b}{\theta}}+e^{-\frac{b}{\theta}}\right]=a+\Theta.$$

$$\tfrac{1}{2}\Theta\left[e^{\frac{b'}{\theta}}+e^{-\frac{b'}{\theta}}\right]=a'+\Theta.$$

$$\tfrac{1}{2}\Theta\left[e^{\frac{b}{\theta}}-e^{-\frac{b}{\theta}}\right]=\lambda.$$

$$\tfrac{1}{2}\Theta\left[e^{-\frac{b'}{\theta}}-e^{+\frac{b'}{\theta}}\right]=L-\lambda.$$

Sind nun die beiden Endpuncte der Lage nach gegeben, und die Länge des Fadens L ebenfalls, so sind noch $a-a'=A$, $b-b'=B$ bekannte Größen. Demnach sind zwischen den 6 Unbekannten a, b, a', b', λ, Θ, 6 Gleichungen gegeben, welche sich durch Elimination von a', b', zunächst auf folgende vier bringen lassen:

$$\tfrac{1}{2}\Theta\left[e^{\frac{b}{\theta}}+e^{-\frac{b}{\theta}}\right]=a+\Theta.$$

$$\tfrac{1}{2}\Theta\left[e^{\frac{B-b}{\theta}}+e^{-\frac{B-b}{\theta}}\right]=a+\Theta-A.$$

$$\tfrac{1}{2}\Theta\left[e^{\frac{b}{\theta}}-e^{-\frac{b}{\theta}}\right]=\lambda.$$

$$\tfrac{1}{2}\Theta\left[e^{\frac{B-b}{\theta}}-e^{-\frac{B-b}{\theta}}\right]=L-\lambda.$$

Werden noch a und λ aus diesen Gleichungen eliminirt, so erhält man folgende zwei Gleichungen zwischen b und Θ, nämlich:

$$\tfrac{1}{2}\Theta\left[e^{\frac{b}{\theta}}+e^{-\frac{b}{\theta}}\right]=A+\tfrac{1}{2}\Theta\left[e^{\frac{B-b}{\theta}}+e^{-\frac{B-b}{\theta}}\right]$$

$$\tfrac{1}{2}\Theta\left[e^{\frac{b}{\theta}}-e^{-\frac{b}{\theta}}+e^{\frac{B-b}{\theta}}-e^{-\frac{B-b}{\theta}}\right]=L.$$

Man setze $e^{\frac{b}{\theta}}=z$, so gehen diese Gleichungen in folgende über:

$$\tfrac{1}{2}\Theta\left[z+\frac{1}{z}-\frac{e^{\frac{B}{\theta}}}{z}-e^{-\frac{B}{\theta}}\cdot z\right]=A.$$

$$\tfrac{1}{2}\Theta\left[z-\frac{1}{z}+\frac{e^{\frac{B}{\theta}}}{z}-e^{-\frac{B}{\theta}}\cdot z\right]=L.$$

Werden diese beiden Gleichungen addirt, und noch zur Abkürzung $e^{\frac{B}{2\theta}}=u$, also $e^{\frac{B}{\theta}}=u^2$ gesetzt, so kommt:

$$\Theta z\left(1-\frac{1}{u^2}\right)=A+L;$$

und werden jene subtrahirt, so kommt

$$\frac{\Theta}{z}(1-u^2)=A-L.$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen in einander, so ergiebt sich

$$\Theta^2\left(2-u^2-\frac{1}{u^2}\right)=A^2-L^2,$$

oder

$$\Theta^2\left(u-\frac{1}{u}\right)^2=L^2-A^2,$$

mithin durch Ausziehung der Wurzel:

$$\Theta\left(e^{\frac{B}{2\theta}}-e^{-\frac{B}{2\theta}}\right)=\sqrt{L^2-A^2},$$

wo die Wurzelgröße positiv zu nehmen ist, weil, indem Θ und B positiv sind, die Größe links nur einen positiven Werth haben kann, wie leicht zu sehen ist. Aus dieser Gleichung muß die unbekannte Spannung Θ gefunden werden. Um dieselbe in eine für die Auflösung durch Versuche mehr geeignete Form zu bringen, bestimme man einen spitzen Winkel μ durch die Gleichung

$$2\Theta=\sqrt{L^2-A^2}\cdot tg\,\mu,\quad \text{und setze}\quad B=\beta\sqrt{L^2-A^2};$$

so kommt

$$e^{\beta\, cotg\,\mu}-e^{-\beta\, cotg\,\mu}=2\,cotg\,\mu.$$

Nun ist $(e^{\beta\, cotg\,\mu}+e^{-\beta\, cotg\,\mu})^2-(e^{\beta\, cotg\,\mu}-e^{-\beta\, cotg\,\mu})^2=4$; daher folgt:

$$e^{\beta\, cotg\, \mu} + e^{-\beta\, cotg\, \mu} = 2\sqrt{1 + cotg\, \mu^2} = \frac{2}{sin\, \mu},$$

in welcher das positive Wurzelzeichen gewählt werden muß, weil der Ausdruck links nur positive Werthe haben kann. Werden die beiden vorstehenden Gleichungen addirt, so kommt

$$e^{\beta\, cotg\, \mu} = cotg\, \mu + \frac{1}{sin\, \mu} = \frac{1 + cos\, \mu}{sin\, \mu} = cotg\, \tfrac{1}{2}\mu;$$

mithin ist $\beta\, cotg\, \mu = log\, nat\, cotg\, \tfrac{1}{2}\mu$, oder

$$tg\, \mu \cdot log\, nat\, cotg\, \tfrac{1}{2}\mu = \frac{B}{\sqrt{L^2 - A^2}}, \qquad f)$$

aus welcher Gleichung, da B, L, A bekannt sind, der Winkel μ durch Versuche gefunden werden muß, was mit Leichtigkeit geschehen kann. Ist μ gefunden, so erhält man zunächst Θ, sodann $z = e^{\frac{b}{\theta}}$, mithin b; und hieraus die übrigen Größen a, λ, a', λ', wodurch die Lage des tiefsten Punctes gegen die festen Endpuncte vollständig bestimmt ist.

Um die Spannung in jedem Puncte zu finden, hat man $t\, cos\varphi = s$, $t\, sin\varphi = \Theta$, also $t = \sqrt{s^2 + \Theta^2}$, und weil $x + \Theta = \sqrt{s^2 + \Theta^2}$, so kommt

$$t = \sqrt{s^2 + \Theta^2} = x + \Theta, \qquad g)$$

wodurch die Spannung in jedem Puncte sehr einfach ausgedrückt ist, sobald Θ bekannt ist.

Demnach ist $dx = dt$; wird dieser Werth in die Gleichung a) gesetzt, so kommt

$$s\, dy = \Theta dt. \qquad h)$$

Differentiirt man die Gleichung h), indem man t als unabhängige Veränderliche betrachtet, so kommt

$$ds\, dy + s\, d^2y = 0. \qquad i).$$

Wird zuerst s aus h) und i) eliminirt, so ergiebt sich

$$ds\, dy^2 + \Theta dt\, d^2y = 0.$$

Nun war, nach c) $t\, dy = \Theta ds$ (indem $t = \sqrt{s^2 + \Theta^2}$); also $dy = \frac{\Theta ds}{dt}$. Wird dieser Werth von dy in die vorstehende Gleichung gesetzt, so kommt:

$$\Theta \cdot ds^3 + t^2 dt\, d^2y = 0,$$

oder

$$-\frac{ds^3}{d^2y\, dt} = \frac{t^2}{\Theta}.$$

Da in dem Ausdrucke auf der linken Seite dx statt dt gesetzt werden kann, so giebt derselbe den Krümmungshalbmesser der Kettenlinie an. Wird dieser mit ϱ bezeichnet, so ist in jedem Puncte $\varrho = \frac{t^2}{\Theta}$. Für den tiefsten Punct wird $t = \Theta$, also auch $\varrho = \Theta$; d. h. die Spannung im tiefsten Puncte wird durch das Gewicht eines Fadens gemessen, dessen Länge dem Krümmungshalbmesser in diesem Puncte gleich ist.

Entwickelt man die Exponentialgrößen in der Gleichung (d)

oder

$$1 + \frac{x}{\Theta} = \tfrac{1}{2}\left[e^{\frac{y}{\theta}} + e^{-\frac{y}{\theta}}\right]$$

in Reihen, so kommt

$$\frac{x}{\Theta} = \frac{y^2}{2\Theta^2} + \frac{y^4}{4!\,\Theta^4} + \cdots,$$

mithin, wenn für sehr kleine y rechts nur das erste Glied beibehalten wird,

$$2\,\Theta x = y^2,$$

d. h. in der Nähe des Scheitels nähert sich die Kettenlinie einer Parabel, deren Parameter Θ ist.

Bestimmung der Gestalt und Spannung eines biegsamen Fadens, unter beliebigen Kräften.

43. Wirken auf jeden Punct eines biegsamen Fadens Kräfte, die allgemein als Functionen der Coordinaten ihrer An=

griffspuncte gegeben sein mögen, und besteht Gleichgewicht, so wird dieses nicht gestört, wenn beliebige Theile des Fadens fest werden. Man theile daher den Faden in unendlich kleine Elemente ds, und betrachte jedes derselben als ein unveränderliches oder festes System; so lassen sich die an ihm wirkenden Kräfte, nach Zerlegung in drei den Axen x, y, z parallele Componenten, in drei Resultanten vereinigen. Da immer vorausgesetzt werden kann, daß die an einem Elemente wirkenden parallelen Componenten von einander nur um eine Größe verschieden sind, die im Verhältniß zu der in jedem einzelnen Puncte wirkenden Componente unendlich klein ist, so sind diese parallelen Componenten auch als gleich anzusehen, und geben mithin drei der Länge ds proportionale Resultanten $X ds$, $Y ds$, $Z ds$, parallel den Axen x, y, z. In diesen Ausdrücken bedeutet z. B. X die Intensität derjenige Resultante, welche sich ergiebt, wenn an jedem einzelnen der Länge ds gleichen Elemente der Längen-Einheit dieselben der Axe x parallelen Componenten angebracht werden, welche an dem Fadenelemente wirken. Denn es sei ds der $n$te Theil der Längen-Einheit, (n ist also unendlich groß); so ist $n \cdot ds = 1$, und da auf jedes Element die Kraft $X ds$ wirkt, so wirkt auf alle zusammen die Resultante $n \cdot X ds = X$. Die Kräfte $X ds$, $Y ds$, $Z ds$ kann man sich nun in der Mitte des Elementes angebracht denken; es ist aber vielmehr ganz einerlei, an welchem Puncte des Elementes diese Kräfte angebracht werden, da innerhalb desselben überhaupt kein angebbarer Unterschied der Angriffspuncte Statt findet.

Die zur Bestimmung der Gestalt und Spannung des Fadens nöthigen Gleichungen ergeben sich aus dem Satze, daß die Spannung in jedem Elemente der Resultante aus allen Kräften, die vom Anfange des Fadens bis zu diesem Elemente wirken, Gleichgewicht hält. Die Componenten dieser Resultante sind $\int X ds$, $\int Y ds$, $\int Z ds$; nennt man nun t die Spannung, welche in der Richtung der Tangente des Elementes wirkt, so sind $t\frac{dx}{ds}$,

$t\frac{dy}{ds}$, $t\frac{dz}{ds}$ ihre Componenten nach den Axen; und mithin muß sein:

$$t\frac{dx}{ds}+\int X ds=0,\quad t\frac{dy}{ds}+\int Y ds=0,\quad t\frac{dz}{ds}+\int Z ds=0. \qquad 1.$$

Werden diese Gleichungen der Reihe nach mit dx, dy, dz multiplicirt, und die Producte addirt, so kommt

$$t+\frac{dx}{ds}\int X ds+\frac{dy}{ds}\int Y ds+\frac{dz}{ds}\int Z ds=0. \qquad 2.$$

Hieraus ergiebt sich der Werth von t positiv oder negativ, je nachdem t in der Richtung des Elementes oder in der Richtung seiner Verlängerung wirkt; also, je nachdem die äußeren Kräfte das Element auszudehnen oder zusammen zu drücken streben.

Dieser Ausdruck für t ist jedoch nur dann anwendbar, wenn die Gestalt des Fadens, also die Größen $\frac{dx}{ds}$, $\int X ds$, u. s. f. schon anderweitig bekannt sind. Im Allgemeinen aber muß man die Gleichungen 1. differentiiren, um die Curve des Fadens zu bestimmen. Man erhält:

$$d\left(t\frac{dx}{ds}\right)+X ds=0,\quad d\left(t\frac{dy}{ds}\right)+Y ds=0,\quad d\left(t\frac{dz}{ds}\right)+Z ds=0. \qquad 3.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit dx, dy, dz, und betrachtet ds als constantes Differential, setzt also

$$dx\, d^2x+dy\, d^2y+dz\, d^2z=ds\, d^2s=0;$$

so kommt:

$$dt+X dx+Y dy+Z dz=0. \qquad 4.$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen 3. mit dy, die zweite mit dx, und subtrahirt, so kommt:

$$t(dy\, d^2x-dx\, d^2y)=-(X dy-Y dx)ds^2. \qquad 5.$$

Multiplicirt man auf gleiche Weise zuerst die dritte Gleichung mit dx, die erste mit dz; sodann die zweite mit dz und die dritte mit dy, und subtrahirt, wie vorhin, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} t(dx\,d^2z-dz\,d^2x) &= -(Zdx-Xdz)ds^2\\ t(dz\,d^2y-dy\,d^2z) &= -(Ydz-Zdy)ds^2\end{aligned}\right\}\quad 5.$$

Von diesen drei Gleichungen 5. ist jede eine Folge der beiden anderen. Man erhält aus ihnen, durch Elimination von t,

$$\frac{dy\,d^2x-dx\,d^2y}{Xdy-Ydx}=\frac{dx\,d^2z-dz\,d^2x}{Zdx-Xdz}=\frac{dz\,d^2y-dy\,d^2z}{Ydz-Zdy},\qquad 6.$$

welche Gleichungen jedoch nur für *eine* gelten.

Um die Bedeutung derselben zu verstehen, bemerke man, daß die Zähler in vorstehenden Ausdrücken sich der Reihe nach verhalten, wie die Cosinus der Neigungen der anschließenden Ebene der Curve gegen die Ebenen xy, zx, xz (vgl. §. 70. I.). Oder wenn auf der anschließenden Ebene ein Loth errichtet wird, dessen Neigungen gegen die Axen x, y, z mit α, β, γ bezeichnet werden, so verhalten sich diese Zähler der Reihe nach wie $\cos\gamma : \cos\beta : \cos\alpha$; mithin geben vorstehende Gleichungen die Proportion:

$$\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma = Ydz-Zdy : Zdx-Xdz : Xdy-Ydx,$$

woraus folgt: $\cos\alpha\cdot dx+\cos\beta\cdot dy+\cos\gamma\cdot dz=0$

$$X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma=0.$$

Die erste dieser Gleichungen besagt weiter nichts, als daß das Loth auf der anschließenden Ebene zugleich auf der Tangente senkrecht ist; was sich von selbst versteht. Die zweite Gleichung lehrt, daß die auf das Element ds wirkende Kraft Pds, deren Componenten Xds, Yds, Zds sind (also $P=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$) in die anschließende Ebene fallen muß. Denn zerlegt man P in eine auf der anschließenden Ebene normale und eine dieser parallele Componente, so ist die erstere von beiden offenbar $= X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma$, und nach obiger Gleichung, Null. In der That muß die Kraft Pds mit den Spannungen der beiden in ihrem Angriffspuncte zusammenstoßenden Elemente im Gleichgewichte sein, also in der Ebene derselben, d. h. in der anschließenden Ebene liegen.

Um die noch nöthige zweite Gleichung zu erhalten, suche man den Werth von dt aus einer der Gleichungen 5. und setze ihn in die Gleichung 4. ein; so ergiebt sich eine Differentialgleichung dritter Ordnung. Man hat also zwischen x, y, z eine Differentialgleichung zweiter, und eine dritter Ordnung, deren Integration fünf willkürliche Constanten herbeiführt. Diese werden, wie leicht zu sehen, völlig bestimmt, wenn z. B. die beiden Endpuncte des Fadens und seine Länge gegeben sind.

Es sei Θ die Neigung der Kraft $Pds=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\cdot ds$ gegen die Tangente der Fadencurve, so ist $P\cos\Theta$ die tangentiale, $P\sin\Theta$ die normale Componente von P. Zerlegt man aber jede der Kräfte X, Y, Z in eine tangentiale und eine normale Componente, so sind offenbar $X\frac{dx}{ds}$, $Y\frac{dy}{ds}$, $Z\frac{dz}{ds}$ die tangentialen Componenten, deren Summe mithin $=P\cos\Theta$ sein muß. Also ist

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}=P\cos\Theta;$$

und mithin, nach 4.

$$dt+P\cos\Theta\cdot ds=0.\qquad 7.$$

Nun ist Pds die an dem Elemente ds wirkende Kraft; vorstehende Gleichung besagt mithin nichts Anderes, als daß die Zunahme der Spannung von einem Elemente zum andern mit der tangentialen Componente dieser Kraft im Gleichgewichte ist. In der That hält die Spannung an C, in dem Elemente CD (Fig. 23.) der Resultante von P, P′, P″ Gleichgewicht. Bezeichnet man daher die in der Richtung CB wirkende Resultante von P und P′ für einen Augenblick mit R, und den Winkel $\pi-BCD$ mit u, ferner den Winkel $\pi-P''CD$ mit Θ, und die Spannung in CD, an C (wie in §. 39.) mit t″; so stellen $R\cos u$ und $P''\cos\Theta$ die nach CD gerichteten Componenten von R und P″ dar; mithin ist $R\cos u+P''\cos\Theta+t''=0$. Es ist aber

$R = -t'$, d. h. gleich der Spannung in BC, an C; also $-t' \cos u + P'' \cos \Theta + t'' = 0$. Für eine Curve wird der Winkel u unendlich klein, also $\cos u = 1$, und $t'' - t' \cos u = t'' - t' = dt'$; ferner muß auch die Kraft P'' unendlich klein sein, oder $P''ds$ anstatt P'' geschrieben werden; also ergiebt sich

$$dt' + P'' \cos \Theta \cdot ds = 0,$$

wie vorhin.

Addirt man noch die Quadrate der Gleichungen 5. und bemerkt, daß

$$(dyd^2x - dxd^2y)^2 + (dxd^2z - dzd^2x)^2 + (dzd^2y - dyd^2z)^2 = \frac{ds^6}{\varrho^2}$$

wo ϱ den Krümmungshalbmesser bedeutet (vgl. §. 70. I.), so kommt

$$\frac{t^2 \cdot ds^2}{\varrho^2} = (X\,dy - Y\,dx)^2 + (Z\,dx - X\,dz)^2 + (Y\,dz - Z\,dy)^2$$
$$= (X^2 + Y^2 + Z^2)ds^2 - (Xdx + Ydy + Zdz)^2$$
$$= P^2 ds^2 - P^2 \cos \Theta^2\, ds^2,$$

oder

$$t = \varrho P \sin \Theta. \qquad 8.$$

Die Spannung in jedem Puncte ist also dem Produkte aus dem Krümmungshalbmesser in die normale Componente der daselbst wirkenden Kraft (P ds) proportional. Um diese Gleichung richtig zu verstehen, muß man bemerken, daß die Zahl P nicht allein von der Einheit der Kraft, sondern auch von der Einheit der Länge abhängt, wie im Anfange dieses §. in Bezug auf die Componenten X, Y, Z bemerkt wurde. Wird z. B. die Längeneinheit verdoppelt, so verwandelt sich P in 2P, dagegen ϱ in $\frac{1}{2}\varrho$, und mithin bleibt t unverändert, wie erforderlich ist, da t nur von der Einheit der Kraft abhängt.

Anmerkung. Für die Kettenlinie war (§. 42.) $P = 1$, Θ gleich dem dortigen φ, also $\sin \Theta = \frac{dy}{ds}$ und mithin, nach vorstehender Gleichung (8.)

$$t = \varrho \frac{dy}{ds}.$$

Zugleich aber ist, nach c) und g) in §. 42., wenn noch T für das dortige Θ gesetzt wird,

$$\frac{dy}{ds} = \frac{T}{t};$$

folglich ergiebt sich

$$t^2 = T \cdot \varrho,$$

wie am Ende von §. 42.

44. Ist der Faden über eine Fläche gespannt, so wirkt auf ein Element ds außer der äußeren Kraft Pds noch der Widerstand der Fläche Nds, dessen Neigungen gegen die Axen λ, μ, ν seien. Die Gleichungen 3. des vorhergehenden §. gehen daher in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} d\left(t\frac{dx}{ds}\right) + N \cos\lambda\, ds + Xds = 0 \\ d\left(t\frac{dy}{ds}\right) + N \cos\mu\, ds + Yds = 0 \\ d\left(t\frac{dz}{ds}\right) + N \cos\nu\, ds + Zds = 0. \end{aligned}\right\} \quad 1.$$

Zugleich ist, da der Widerstand Nds in die Normale fällt:

$$\cos\lambda \cdot dx + \cos\mu \cdot dy + \cos\nu \cdot dz = 0.$$

Mit Hülfe dieser Relation ergiebt sich wie vorhin:

$$dt + Xdx + Ydy + Zdz = 0. \qquad 2.$$

Ueberhaupt ist klar, daß die Ergebnisse des vorigen §. sich auf den gegenwärtigen Fall anwenden lassen, wenn man die Resultante von P und N an die Stelle von P setzt. Bei einem freien Faden muß die Kraft Pds in der anschließenden Ebene liegen; bei dem auf einer Fläche ruhenden Faden muß dasselbe von der Resultante der Kraft Pds und des Widerstandes Nds gelten. Wirken keine äußeren Kräfte auf den Faden, oder ist

$X=0$, $Y=0$, $Z=0$, so muß der normale Widerstand N in die anschließende Ebene, und mithin in die Richtung des Krümmungshalbmessers der Curve fallen. Zugleich ist alsdann (nach 2.) $dt=0$, oder die Spannung constant (vgl. auch §. 40.). Die obigen Gleichungen 1. gehen in diesem Falle in folgende über:

$$t\frac{d^2x}{ds^2}+N\cos\lambda=0,\ t\frac{d^2y}{ds^2}+N\cos\mu=0,\ t\frac{d^2z}{ds^2}+N\cos\nu=0,$$

und diese geben, nach Wegschaffung von $\frac{N}{t}$, die Proportion

$$\frac{d^2x}{ds^2}:\frac{d^2y}{ds^2}:\frac{d^2z}{ds^2}=\cos\lambda:\cos\mu:\cos\nu, \qquad 3.$$

welche in der That nichts Anderes besagt, als daß der Krümmungshalbmesser der Curve in die Normale der Fläche fällt. Um dieses nachzuweisen, gehe man auf §. 70. im ersten Theile zurück, wo von der Bestimmung des Krümmungshalbmessers die Rede ist. Setzt man man in den Formeln 13. dieses §. anstatt $A^2+B^2+C^2$ seinen Werth $\frac{ds^6}{\varrho^2}$, so lassen sich diese folgendermaßen schreiben:

$$\frac{x-a}{\varrho}=\frac{\varrho(Cdy-Bdz)}{ds^4},\quad \frac{y-b}{\varrho}=\frac{\varrho(Adz-Cdx)}{ds^4},$$

$$\frac{z-c}{\varrho}=\frac{\varrho(Bdx-Ady)}{ds^4}.$$

Nun ist aber

$$Cdy-Bdz=(dx\,d^2y-dy\,d^2z)dy-(dz\,d^2x-dx\,d^2z)dz$$
$$=dx(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)-ds^2\,d^2x,$$

also, weil $dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z=ds\,d^2s=0$,

$$Cdy-Bdz=-ds^2\,d^2x$$

Eben so ist: $$Adz-Cdx=-ds^2\,d^2y$$

$$Bdx-Ady=-ds^2\,d^2z.$$

Nennt ε, η, ζ die Neigungen des Krümmungshalbmessers gegen die Axen x, y, z, so ist offenbar

$$\cos\varepsilon=\frac{x-a}{\varrho},\quad \cos\eta=\frac{y-b}{\varrho},\quad \cos\zeta=\frac{z-c}{\varrho};$$

folglich

$$\cos\varepsilon:\cos\eta:\cos\zeta=\frac{d^2x}{ds^2}:\frac{d^2y}{ds^2}:\frac{d^2z}{ds^2},$$

und also, nach 3.

$$\cos\varepsilon:\cos\eta:\cos\zeta=\cos\lambda:\cos\mu:\cos\nu;$$ w. z. b. w.

Es sei $f(x, y, z)=0$ die Gleichung der Fläche und durch Differentiation derselben sei gefunden $dz=pdx+qdy$ (die Bezeichnung ist wie in §. 72. I.); so hat man bekanntlich für die Neigungen der Normale gegen die Axen:

$$\cos\lambda:\cos\mu:\cos\nu=p:q:-1.$$

Also ist nach 3.

$$\frac{d^2x}{ds^2}:\frac{d^2y}{ds^2}:\frac{d^2z}{ds^2}=p:q:-1,$$

oder $$\frac{d^2x}{ds^2}+p\frac{d^2z}{ds^2}=0,\quad \frac{d^2y}{ds^2}+q\frac{d^2z}{ds^2}=0.$$

Die zweite dieser Gleichungen ist einerlei mit der, welche in §. 159. I. für die kürzeste Linie entwickelt worden (man sehe §. 40.). Die erste aber ist eine bloße Folge der zweiten; denn multiplicirt man die erste mit dx, die zweite mit dy, addirt die Producte, und bemerkt, daß $pdx+qdy=dz$, so kommt die Gleichung

$$\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{ds^2}=0,$$

welche schon oben vorausgesetzt ist.

Der Druck des Fadens auf die Fläche ergiebt sich sofort, wenn man in der Gleichung 8. des vorigen §. N statt $P\sin\Theta$ setzt; nämlich

$$N=\frac{t}{\varrho},$$

also der Krümmung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ proportional, übereinstimmend mit §. 40.

45. Beispiel. Ein gleichförmiger schwerer Faden ABDE (Fig. 27.) sei über einen horizontalen Cylinder gelegt und durch zwei gleiche Gewichte Q, Q′ gespannt. Es ist offenbar, daß der Faden in einer verticalen Ebene liegen wird. Man nehme diese Ebene zu der der xz, die x horizontal, die z vertical und positiv nach oben; der Anfang derselben ist der Mittelpunct c des kreisförmigen Querschnittes ADEA, vom Halbmesser a; mithin

$$x^2+z^2-a^2=0$$

die Gleichung der Fadencurve. Man hat nach 1.

$$d\left(t\frac{dx}{ds}\right)+N\cos\lambda\,ds=0,\quad d\left(t\frac{dz}{ds}\right)+N\cos\nu\,ds-Pds=0,$$

wo Pds das Gewicht des Fadenelementes ist.

Man setze für einen Punct B des Fadens $\angle BCA=\varphi$, und $x=a\cos\varphi$, $z=a\sin\varphi$, so ist $ds=ad\varphi$, $\frac{dx}{ds}=-\sin\varphi$, $\frac{dz}{ds}=\cos\varphi$; ferner $\cos\lambda=\cos\varphi$, $\cos\nu=\sin\varphi$ (weil Nds in die Richtung des Halbmessers CB fällt); also

$$-d(t\sin\varphi)+N\cos\varphi ds=0,\quad d(t\cos\varphi)+N\sin\varphi ds-Pds=0,\quad 1.$$

oder, weil $ds=ad\varphi$:

$$d(t\sin\varphi)=+aN\cos\varphi\cdot d\varphi$$
$$d(t\cos\varphi)=-aN\sin\varphi\cdot d\varphi+aP\,d\varphi,$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\sin\varphi$, die zweite mit $\cos\varphi$, so kommt durch Addition:

$$dt=aP\cos\varphi\cdot d\varphi,$$

also

$$t=\text{Const.}+aP\sin\varphi,$$

oder, weil für den Punct A, wo $\varphi=0$, offenbar $t=Q$ ist,

$$t=Q+aP\sin\varphi.$$

Multiplicirt man die erste der obigen Gleichungen mit $\cos\varphi$, die zweite mit $\sin\varphi$, und subtrahirt, so folgt:

$$t=aN-aP\sin\varphi.$$

Demnach ist der Druck

$$N=\frac{Q+2aP\sin\varphi}{a}.$$

Berücksichtigt man noch die Reibung des Fadens gegen den Cylinder, so können die beiden Gewichte Q und Q′, oder die Spannungen in den vertical gerichteten Elementen A und E ungleich sein, ohne daß das Gleichgewicht aufgehoben wird. Es sei z. B. die Spannung Q in A etwas größer als die Spannung Q′ in B, so strebt der Faden in dem Sinne EDA auf dem Cylinder zu gleiten; dieses aber kann durch Reibung verhindert werden. Man bezeichne dieselbe, für ein Element ds, mit fds, und bemerke, daß sie in dem Sinne von t (Bt, Fig. 27.) tangential wirkt; daher $-f\sin\varphi\,ds$ ihre horizontale, $+f\cos\varphi\,ds$ ihre verticale Componente ist. Werden diese in 1. hinzugefügt, so kommt:

$$-d(t\sin\varphi)+N\cos\varphi ds-f\sin\varphi ds=0$$
$$d(t\cos\varphi)+N\sin\varphi ds+f\cos\varphi ds-Pds=0$$

oder

$$\left.\begin{aligned} d(t\sin\varphi)&=(N\cos\varphi-f\sin\varphi)ad\varphi\\ d(t\cos\varphi)&=-(N\sin\varphi+f\cos\varphi-P)\,ad\varphi.\end{aligned}\right\}\quad 2.$$

Hieraus folgt zuerst:

$$dt=(P\cos\varphi-f)ad\varphi,\qquad 3.$$

ferner:

$$t=aN-aP\sin\varphi.\qquad 4.$$

Die Reibung f ist, der Erfahrung nach, dem Drucke proportional, also $f=\mu N$, μ eine von N unabhängige, durch Beobachtung zu bestimmende Größe. Die Einsetzung dieses Werthes von f giebt:

$$dt=(P\cos\varphi-\mu N)ad\varphi.\qquad 5.$$

Zugleich aber ist aus 4. $dt=adN-aP\cos\varphi\,d\varphi$; folglich

$$dN-P\cos\varphi d\varphi=(P\cos\varphi-\mu N)d\varphi;$$

also

$$dN+\mu Nd\varphi=2P\cos\varphi\,d\varphi.$$

Diese Gleichung werde mit dem integrirenden Factor $e^{\mu\varphi}$ multiplicirt (vgl. §. 131. I.); so ergiebt sich

$$d(e^{\mu\varphi}N)=2P\cdot e^{\mu\varphi}\cos\varphi\,d\varphi.$$

Nun ist $\int e^{\mu\varphi}\cos\varphi\,d\varphi=\frac{e^{\mu\varphi}(\sin\varphi+\mu\cos\varphi)}{1+\mu^2}$

(dieses Integral folgt leicht aus §. 121. Formel 8. im ersten Theile); also erhält man

$$e^{\mu\varphi}N=\frac{2P\cdot e^{\mu\varphi}(\sin\varphi+\mu\cos\varphi)}{1+\mu^2}+\text{Const.},$$

oder $$N=c\cdot e^{-\mu\varphi}+\frac{2P(\sin\varphi+\mu\cos\varphi)}{1+\mu^2}.$$

Um die Constante c zu bestimmen, hat man die Spannung in A, für $\varphi=0$, gleich Q, also, nach 4., für $\varphi=0$, $t=Q$,

$$aN=Q;$$

folglich

$$\frac{Q}{a}=c+\frac{2P\mu}{1+\mu^2},\quad \text{oder}\quad c=\frac{Q}{a}-\frac{2P\mu}{1+\mu^2}.$$

Demnach ist

$$N=\left(\frac{Q}{a}-\frac{2P\mu}{1+\mu^2}\right)e^{-\mu\varphi}+\frac{2P(\sin\varphi+\mu\cos\varphi)}{1+\mu^2}$$

und zugleich $$t=aN-aP\sin\varphi.$$

Für $\varphi=\pi$ ergeben sich die Spannung Q' und der Druck N' in E, nämlich

$$N'=\left(\frac{Q}{a}-\frac{2P\mu}{1+\mu^2}\right)e^{-\mu\pi}-\frac{2P\mu}{1+\mu^2}$$

und $$Q'=aN'.$$

Es braucht also der Faden in E nur mit dem Gewichte

$$Q'=\left(Q-\frac{2aP\mu}{1+\mu^2}\right)e^{-\mu\pi}-\frac{2P\mu a}{1+\mu^2}$$

gespannt zu sein, indem dieses mit Hülfe der Reibung der Spannung Q in A Gleichgewicht zu halten vermag. Setzt man das Gewicht des Fadens Null, also $P=0$, so erhält man $Q'=Q\cdot e^{-\mu\pi}$; durch das eigene Gewicht des Fadens wird

aber der Druck, und mithin die Reibung, verstärkt; also ist der obige Werth von Q' kleiner als dieser zweite, für $P=0$.

Biegung elastischer Federn, in einer Ebene.

46. Es sei ABCDEF (Fig. 28.) ein biegsames Vieleck, zunächst beliebig im Raume, auf welches in den Spitzen A, B, .. äußere Kräfte P, P', .. wirken, wie in §. 39. Indem aber durch die Biegung die Endpuncte je zweier auf einander folgender Seiten, wie A und C, B und D, C und E, u. s. f. einander genähert werden, nehme man an, daß zwischen denselben eine gegenseitige Abstoßung eintrete, welche die Seiten in eine einzige gerade Linie zurückzuführen strebe. Es wird also z. B. der Punct D von B mit einer gewissen Kraft p in der Richtung BD abgestoßen, und stößt diesen wieder mit der gleichen und entgegengerichteten Kraft $-p$ ab. Man bringe an C die Kraft p in ihrer Richtung und in entgegengesetzter an, so wird nichts geändert; es ergiebt sich aber ein Kräftepaar $(p, -p)$ an dem Arme CD, und ein zweites Paar $(p, -p)$ an BC; beide liegen in einer Ebene (BCD) und sind dem Sinne nach einander entgegengesetzt. Eben so sei q die Abstoßung zwischen C und E, und man bringe in D die Kraft q in ihrer Richtung (CE) und in entgegengesetzter an; so entsteht wieder ein Kräftepaar $(q, -q)$ an dem Arme CD, und ein zweites Paar $(q, -q)$ an dem Arme DE. An dem Arme CD wirken demnach zwei Paare $(p, -p)$ und $(q, -q)$, die sich in ein einziges zusammen setzen lassen. Es seien ferner die Seiten des Vieleckes alle einander gleich, (ihre Länge $=l$); und man nehme an, daß das Moment des Paares $(p, -p)$ an CD, welches die Seite CD in die Verlängerung von BC zu drehen strebt, dem Biegungswinkel in C, d. i. dem Nebenwinkel von BCD, so wie das des Paares $(q, -q)$, welches CD in die Verlängerung von ED zu drehen strebt, dem Biegungswinkel in D, d. i. $\pi-CDE$, proportional

sei (das Gesetz der Abstoßung, welcher aus dieser Hypothese folgen würde, braucht hier nicht weiter untersucht zu werden). Ist nun $\angle BCD = \pi - \varphi$, $CDE = \pi - \varphi'$; so kann demnach das Moment des Paares (p, —p) an dem Arme CD $= k\varphi$, und das von (q, —q) an demselben Arme $= k\varphi'$ gesetzt werden, wo k eine Constante ist. Wird noch zur Vereinfachung das Vieleck ABCD.. in der Folge immer als eben angenommen, so ist klar, daß die Paare $k\varphi$ und $k\varphi'$ an CD einander entgegenwirken, und mithin zusammengesetzt ein Paar bilden, dessen Moment $= k(\varphi - \varphi')$ ist. Man denke sich dasselbe auf die Breite $CD = l$ gebracht, und setze sein Moment $= Ql$, so ist $Ql = k(\varphi - \varphi')$. Dieses Paar sei in der Figur (Cc, Dd). Ein ähnliches hat man sich an jeder Seite des Vieleckes zu denken.

Sind nun an dem Vielecke beliebige äußere Kräfte mit den inneren Kräften, nämlich den Widerständen gegen Biegung und den Spannungen, im Gleichgewichte, so wird dieses nicht gestört, wenn die gegenseitigen Entfernungen aller Spitzen des Vieleckes unveränderlich werden. Alsdann kann man alle der Biegung widerstrebenden Paare in ein einziges zusammensetzen; man sieht aber sogleich, daß dieses Paar Null ist. Denn z. B. dem Paare (p, —p) an CD entspricht ein anderes Paar (p, —p) an BC; beide aber sind dem Winkel $\pi - BCD = \varphi$ proportional, also ihre Momente $= k\varphi$, und mithin einander gleich; und da das eine dem anderen entgegenwirkt, so heben sie einander auf, nachdem ihre Arme fest verbunden sind. In der That muß die Summe der Momente aller der Biegung widerstrebenden Paare Null sein, weil dieselben, nach der Voraussetzung, von gegenseitigen Abstoßungen zwischen den Puncten herrühren, die zu zweien einander gleich und entgegengerichtet sind. Es muß demnach an dem festgewordenen Vielecke, weil in diesem die der Biegung widerstrebenden inneren Kräfte unter einander im Gleichgewichte sind, zwischen den äußeren Kräften P, P',.. Gleichgewicht bestehen, mithin die Mittelkraft und das zusammengesetzte Paar von diesen, Null sein. Wirken insbesondere auf das Vieleck,

welches ein elastisch biegsames heißen mag, nur zwei äußere Kräfte P und P^V, in den Endpuncten A und F, so müssen diese einander gleich und entgegengerichtet sein (Fig. 28.). Zugleich ist alsdann das Vieleck n o t h w e n d i g e b e n. Denn es seien (Fig. 28. a.) AB, BC, die beiden ersten Seiten, auf welche die dem Winkel $\pi - ABC$ proportionalen, einander gleichen Paare (Aa, Bb) und (Bβ, Cβ'), in der Ebene ABC, wirken. Eben so wirken in der Ebene BCD der zweiten und dritten Seite, an BC und CD, die wiederum einander gleichen, dem Winkel $\pi - BCD$ proportionalen Paare. Nun muß die Resultante der Kräfte P und Aa, an A, in die Richtung AB fallen, indem sie der Spannung in AB, an A, Gleichgewicht hält; folglich muß P in der Ebene aAB, d. i. an der Ebene ABC liegen. Ferner müssen die Kräfte Bb, Bβ, Bc an B mit den nach BA und BC gerichteten Spannungen an B im Gleichgewichte sein, also muß die Kraft Bc in die Ebene ABC der vier anderen fallen; mithin muß auch das Paar (Bc, Cc') in der Ebene ABC liegen, und da dieses Paar auch in der Ebene BCD liegt, so muß CD sich in der Ebene ABC befinden; u. s. f. für die übrigen Seiten.

Um die Gestalt des Vieleckes und die Spannungen in seinen Seiten zu bestimmen, verfahre man ganz eben so, wie bei dem biegsamen Vielecke in §. 39. Die Spannung in irgend einer Seite, z. B. in CD, an C, hält der Mittelkraft aus allen Kräften Gleichgewicht, die von A bis C an dem Vielecke vorhanden sind. Dieselben sind die äußeren Kräfte P, P',.. und die Kraft $Q = Cc$ (Fig. 28.), indem die noch übrigen Kräfte der Paare an AB, BC die Mittelkraft Null geben. Zerlegt man diese Kräfte, die alle in einer Ebene gedacht werden sollen, nach zwei auf einander senkrechten Axen x und y, und bezeichnet die Neigungen der auf einander senkrechten t und Q, gegen x, mit u und $\frac{\pi}{2} + u$, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} t\cos u - Q\sin u + \Sigma P\cos\alpha = 0 \\ t\sin u + Q\cos u + \Sigma P\sin\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \quad 1.$$

mithin:

$$\left.\begin{aligned} -t &= \cos u \cdot \Sigma P \cos\alpha + \sin u \cdot \Sigma P \sin\alpha \\ Q &= \sin u \cdot \Sigma P \cos\alpha - \cos u \cdot \Sigma P \sin\alpha. \end{aligned}\right\} \quad 2.$$

Man hat $Ql = k(\varphi' - \varphi)$, oder, wenn man auf beiden Seiten mit l multiplicirt, $Ql^2 = kl(\varphi' - \varphi)$. Nun sind, nach der Voraussetzung, alle Seiten des Vieleckes einander gleich, und mithin ist das Product kl constant; man schreibe daher k statt kl, wodurch erhalten wird $Ql^2 = k(\varphi' - \varphi)$.

Man denke sich anstatt des elastisch biegsamen Vieleckes eine stetige Curve, oder eine elastische Feder. Für diese wird

$$l = ds,\ tg\, u = \frac{dy}{dx},\ \sin u = \frac{dy}{ds},\ \cos u = \frac{dx}{ds};$$

bezeichnen ferner Xds, Yds die Componenten der an einem Elemente wirkenden äußeren Kraft, so ist

$$\Sigma P \cos\alpha = \int X ds,\ \Sigma P \sin\alpha = \int Y ds;$$

und mithin, indem man alle diese Werthe in 2. setzt:

$$\left.\begin{aligned} -t &= \frac{dx}{ds}\int X ds + \frac{dy}{ds}\int Y ds \\ Q &= \frac{dy}{ds}\int X ds - \frac{dx}{ds}\int Y ds. \end{aligned}\right\} \quad 3.$$

Ferner wird noch φ, d. i. der Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Elementen der Curve gleich du, mithin $\varphi' - \varphi = d^2u$, und folglich

$$Q \cdot ds^2 = k d^2 u.$$

Bezeichnet ϱ den Krümmungshalbmesser, λ die Krümmung der Curve, so ist bekanntlich $\lambda = \frac{1}{\varrho}$, und $\varrho du = ds$, also $du = \lambda ds$, $d^2u = d\lambda ds$; mithin $Q = k\frac{d\lambda}{ds}$, und, nach 3.

$$k d\lambda = dy \int X ds - dx \int Y ds.$$

47. Man nehme an, daß nur an den Endpuncten A und F der elastischen Feder äußere Kräfte wirken, welche, wie früher

bemerkt worden, einander gleich und entgegengerichtet sein müssen. Die Curve der Feder ist alsdann nothwendig eben. Es sei A der Anfang der Coordinaten, AF die Axe der x, und P die an A angebrachte Kraft, so ist offenbar $\int X ds = P$, $\int Y ds = 0$, und mithin wird die vorstehende Gleichung:

$$k d\lambda = P dy,$$

also

$$k\lambda = Py + \text{Const.}$$

Für den Anfang A ist aber nicht allein $y = 0$, sondern auch nothwendig die Krümmung λ Null, mithin Const. $= 0$. Denn es sei AB $= ds$ das erste Element der Curve, ε seine Neigung gegen das folgende Element BC (also ε der Nebenwinkel von ABC), so ist $\varepsilon = \lambda ds$, und mithin hat das der Biegung widerstrebende Paar an dem Arme AB, d. i. (Aa, Bb) (Fig. 28. a.) den früheren Annahmen gemäß, das Moment $\frac{k\varepsilon}{ds}$ oder $k\lambda$. Diesem Momente muß offenbar das Moment der Kraft P, in Bezug auf den Punct B, d. i. Pdy, Gleichgewicht halten; daher muß $Pdy = k\lambda$, folglich λ unendlich klein sein, w. z. b. w. (Der Contingenz-Winkel $\varepsilon = \lambda ds$ ist demnach im Anfange der Curve ein Unendlich-Kleines der zweiten Ordnung). Es ergiebt sich also für die gesuchte Gestalt der elastischen Feder folgende Gleichung:

$$k\lambda = Py. \qquad 1.$$

Da an jedem Elemente ds der Curve das Paar $Qds = kd\lambda$ wirkt, so ist $\int Q ds = k\lambda$ die Summe der Momente aller dieser von A an bis zu irgend einem Puncte der Curve wirkenden Elementar-Paare, welche man das Moment der Elasticität, in Bezug auf Biegung, oder auch das Biegungsmoment nennt. Die Gleichung 1. drückt demnach aus, daß das Moment der Kraft P, in Bezug auf jeden Punct der Curve, dem Biegungsmomente in Bezug auf diesen Punct, Gleichgewicht halten muß.

Der Werth der Krümmung λ ist bekanntlich

$$\pm\frac{dx^2\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^3}\left(\text{vgl. I. §. 48., wo } r=\frac{1}{\lambda}\right);$$

folglich hat man, wenn noch zur Abkürzung $k=Ph^2$ gesetzt wird, aus 4.

$$\pm\frac{h^2 dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^3}=y.$$

Es sei $\frac{dy}{dx}=q$, so giebt vorstehende Gleichung

$$\pm\frac{h^2 dq}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}dx}=y,$$

oder, auf beiden Seiten mit dy multiplicirt:

$$\pm\frac{h^2 q\, dq}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}}=y\, dy.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$\frac{\mp 2h^2}{\sqrt{1+q^2}}=y^2+\text{Const.},$$

oder weil $$\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}=\frac{\pm dx}{ds},$$

so kommt $$\pm 2h^2\frac{dx}{ds}=y^2+\text{Const.}$$

Für den Punct A sei $\frac{dy}{ds}=tg\,\mu$, $\frac{dx}{ds}=cos\,\mu$, so wird Const. $=\pm 2h^2 cos\,\mu$, und man erhält mithin

$$2h^2\frac{dx}{ds}=2h^2 cos\,\mu\pm y^2. \qquad 2.$$

Hieraus ergiebt sich weiter

$$2h^2\frac{dy}{ds}=\pm\sqrt{4h^4-(2h^2 cos\,\mu\pm y^2)^2}. \qquad 3.$$

Setzt man zu Abkürzung

$$\sqrt{4h^4-(2h^2 cos\,\mu\pm y^2)^2}=U,$$

so folgt $$dx=\pm\frac{(2h^2 cos\,\mu\pm y^2)dy}{U}. \qquad 4.$$

$$ds=\pm\frac{2h^2\, dy}{U}. \qquad 5.$$

Die Gleichung 4. ist die Differentialgleichung der Curve, deren Integration keine neue Constante herbeiführt, weil für $x=0$, auch $y=0$ werden muß. Man sieht aus dieser Gleichung, daß nichts an Allgemeinheit verloren geht, wenn man blos das eine der vor y^2 stehenden Zeichen in Betracht zieht, und zwei Fälle unterscheidet, je nachdem $cos\,\mu$ positiv oder negativ ist. (Der Fall, in welchem $cos\,\mu=0$, braucht nicht besonders hervorgehoben zu werden.) Man setze also:

$$U=\sqrt{4h^4-(2h^2 cos\,\mu+y^2)^2},$$

und

$$\pm U dx=(2h^2 cos\,\mu+y^2)dy,\quad \pm U ds=2h^2 dy.$$

Indem nun y und s von Null anfangend wachsen, gilt in den vorstehenden Gleichungen das positive Vorzeichen von U, bis für den größten Werth von y, welcher mit f bezeichnet werde, $\frac{dy}{dx}=0$, $U=0$ wird. Indem alsdann y wieder von $+f$ bis $-f$ abnimmt, gilt das negative Zeichen von U; für $y=-f$ wird U wieder Null, und wechselt das Zeichen, u. s. f. in's Unendliche. Der Werth von f ergiebt sich aus der Gleichung $4h^4=(2h^4 cos\,\mu+f^2)^2$; man findet

$$f=2h\, sin\,\tfrac{1}{2}\mu. \qquad 6.$$

Es sei (Fig. 29.) $AB=c$, $BC=f$, Bogen $AC=l$, so hat man:

$$c=\int_0^f\frac{(2h^2 cos\,\mu+y^2)dy}{U}. \qquad 7.$$

$$l=\int_0^f\frac{2h^2 dy}{U}. \qquad 8.$$

Die Figur 29. entspricht dem Falle, daß $\cos\mu$ positiv, oder die Neigung der Tangente in A gegen die Richtung der Kraft P spitz ist. In dieser Figur wird $y=0$ für $x=2c=AD$, ferner $y=-f$ für $x=3c=AE$, u. s. f. Die elastische Curve bildet hier mehrere gleiche, abwechselnd auf verschiedenen Seiten der Axe liegende Bogen; sie kann auch nur einen solchen Bogen bilden (Fig. 30.). Jeder der Durchschnitte der Curve mit der Axe AF, wie D, H in Fig. 29., ist zugleich ein Wendepunct, weil wegen der Gleichung $k\lambda=Py$ die Krümmung daselbst ihr Zeichen wechselt.

Ist $\cos\mu$ negativ, so wird, wenn man $\pi-\mu'$ statt μ schreibt

$$dx=\pm\frac{(y^2-2h^2\cos\mu')dy}{U},\quad U=\sqrt{4h^4-(y^2-2h^2\cos\mu')^2},$$

$$f=2h\cos\tfrac{1}{2}\mu'.$$

Es sei noch $q^2=2h^2\cos\mu'$, q positiv, wie f, so ist $q<f$, weil $\sqrt{2\cos\mu'}<2\cos\frac{1}{2}\mu'$, wie leicht zu sehen; man setze ferner

$$-p=\int_0^q\frac{(y^2-2h\cos\mu')dy}{U},$$

wo p wesentlich positiv ist. Die Werthe von $-p$ und q stellen die Coordinaten (AM und MN, Fig. 31.) des dem Anfange A zunächst liegenden von denjenigen Puncten der Curve dar, in welchen die Tangente auf der Axe x senkrecht steht. Es sei noch, wie oben, c die Abscisse des Punctes C (Fig. 31.), in welchem die Tangente der Axe x parallel ist, so hat man

$$c=\int_0^f\frac{(y^2-2h^2\cos\mu')dy}{U}.$$

Dieser Werth von c kann eben sowohl positiv wie negativ sein.

In den Fig. 31. 32. 33. werden verschiedene Formen der elastischen Curve dargestellt, alle unter Voraussetzung eines negativen Werthes von $\cos\mu$. In denselben ist überall A der Anfang, AP die Richtung der positiven x, $AM=-p$, $MN=q$;

$AB=c$, $BC=f$; $AM'=2c+p$, $M'N'=q$, u. s. f. In Fig. 31. ist c positiv und größer als p. Wäre c kleiner als p, so würden die Bogen ACD und HKF einander schneiden. In Fig. 32. 33. ist c negativ, und zwar in Fig. 32. auch $2c+p$ negativ, in 33. dagegen ist $2c+p$ positiv.

Für die Spannung der Feder ergiebt sich aus der ersten der Gleichungen 3. (§. 46.), weil $\int X ds=P$,

$$-t=P\frac{dx}{ds}=\frac{P(y^2+2h^2\cos\mu)}{2h^2}.\qquad 9.$$

Die Spannung ist also in jedem Puncte gleich der nach der Tangente gerichteten Componente von P. Dies ist in der That augenscheinlich nothwendig; denn geht man auf das in §. 46. betrachtete Vieleck (Fig. 28.) zurück, so muß die Spannung z. B. an C, in der Seite CD, der Mittelkraft aller an A, B, C wirkenden Kräfte Gleichgewicht halten. Diese Mittelkraft hat aber zu Componenten nur die Kräfte P und Cc, indem die Kräfte der an AB, BC wirkenden Paare einander aufheben; zerlegt man also P in eine nach CD gerichtete und eine darauf senkrechte Componente, so muß die zweite mit Cc, die erste mit der Spannung im Gleichgewichte sein, w. z. b. w. Die Spannung ist z. B. in Fig. 31. in dem Bogen AN positiv, weil für diesen $\frac{dx}{ds}$ negativ ist; dagegen ist sie in dem Bogen NN' negativ, weil für diesen $\frac{dx}{ds}$ positiv ist. Die äußeren Kräfte streben mithin den Bogen AN auszudehnen, und den Bogen NN' zusammenzudrücken.

Anmerkung. Wird die gebogene Feder in einem ihrer Puncte, z. B. in N (Fig. 31.) fest eingeklemmt, so wird das Gleichgewicht nicht gestört; also bleibt z. B. der Theil AN ungeändert. Wäre mithin nur dieser Theil AN, in N eingeklemmt, und in A durch die Kraft P gebogen, vorgelegt; so müßte man ebenfalls von der obigen Gleichung $k\lambda=Py$ ausgehen, um seine

Gestalt zu bestimmen. Man würde nur zur Bestimmung der Constanten der Integration andere Gleichungen erhalten, als vorhin.

Es sei die Feder AB (Fig. 34.) in B eingeklemmt, in A durch die Kraft P gebogen; so erhält man, wenn wieder A zum Anfange, AP zur Axe der x genommen wird, wie oben für den Bogen AN in Fig. 31.:

$$dx=\frac{(y^2-2h^2\cos\mu')dy}{U},\quad U=\sqrt{4h^4-(y^2-2h^2\cos\mu')^2},$$

oder, wenn man μ statt μ', und $-x$ statt x schreibt, also die positiven x in der Richtung von A nach C annimmt:

$$-dx=\frac{(y^2-2h^2\cos\mu)dy}{U},\quad \text{und}\quad ds=\frac{2h^2\,dy}{U}.$$

Für den Punct B sei $x=AC=a$, $y=CB=b$, $\frac{dy}{dx}=tg\,\alpha$; die Länge des Bogens AB sei L; so ergeben sich folgende Gleichungen zur Bestimmung der Constanten a, b, μ:

$$cotg\,\alpha=\frac{2h^2\cos\mu-b^2}{\sqrt{4h^4-(2h^2\cos\mu-b^2)^2}},\quad L=2h^2\int_0^b\frac{dy}{U},$$

$$a=\int_0^b\frac{(2h^2\cos\mu-y^2)dy}{U}.$$

48. In diesem §. ist wieder von einer freien, durch zwei in den Endpuncten angebrachte Kräfte gebogenen, Feder die Rede. Sind die Constanten P und k, mithin $h=\sqrt{\frac{k}{P}}$, und die Länge der Feder (L) sämmtlich gegeben, so muß man, um die Gestalt derselben zu bestimmen, die Werthe von f, c, μ aus den Gleichungen 6., 7., 8. finden. In der Gleichung 8. ist aber der Werth von l nicht unbedingt gegeben; nur so viel ist klar, daß die gesammte Länge der Feder ein gerades Vielfache des Bogens l, also daß $L=2nl$ ist; welche Werthe von n zulässig sind,

bleibt noch zu entscheiden. Zu dem Ende werde μ aus U eliminirt; man hat nämlich

$$U^2=(2h^2-2h^2\cos\mu-y^2)(2h^2+2h^2\cos\mu+y^2)$$

und
$$2h^2-2h^2\cos\mu=f^2;$$

folglich
$$U^2=(f^2-y^2)(4h^2-f^2+y^2),$$
und aus 8.

$$l=\frac{L}{2n}=2h^2\int_0^f\frac{dy}{U},$$

wo die Quadratwurzel U positiv zu nehmen ist, wie in 8. Man setze $y=f\cdot z$, und $\frac{f}{2h}=\sin\frac{1}{2}\mu=g$, so wird

$$2h\int_0^f\frac{dy}{U}=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-g^2(1-z^2))}}=G,$$

wo das Integral G offenbar eine Function von g ist. Für $g=0$ wird $G=\frac{1}{2}\pi$, für $g=1$, $G=\int_0^1\frac{dz}{z\sqrt{1-z^2}}=\infty$. Indem ferner g von 0 bis 1 wächst, sieht man leicht, daß G von $+\frac{1}{2}\pi$ bis ∞ stetig zunimmt. Nun muß aber sein

$$L=2nhG,$$

und da $G>\frac{1}{2}\pi$, auch $L>nh\pi$. Folglich sind nur diejenigen Werthe von n zulässig, welche kleiner sind als $\frac{L}{h\pi}$. Sobald aber die positive ganze Zahl n kleiner als $\frac{L}{h\pi}$ und nicht Null ist, ist auch die transcendente Gleichung $L=2nhG$, oder

$$L=2nh\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-g^2(1-z^2))}}$$

nothwendig lösbar; denn da G stetig von $\frac{1}{2}\pi$ bis ∞ wächst, und $L>nh\pi$ ist, so muß es einen, und nur einen Werth von g, zwischen 0 und 1, geben, für welchen genau $L=2nhG$ wird. Setzt man also für n alle positiven ganzen Zahlen, die kleiner sind als $\frac{L}{h\pi}$, so erhält man eben so viele Werthe von g, die alle von einander verschieden sind, weil zu einem größeren n offenbar ein kleineres g gehört. Mithin ergiebt sich der bemerkenswerthe Satz: Eine elastische Feder von gegebener Länge L, kann durch zwei gleiche und entgegengerichtete an ihren Endpuncten angebrachte Kräfte (P) immer auf so viele verschiedene Arten gebogen werden, als die zunächst unter dem Quotienten $\frac{L\sqrt{P}}{\pi\sqrt{k}}$ liegende ganze Zahl Einheiten enthält.

In diesem Quotienten bedeutet k eine von der Länge der Feder unabhängige, durch die sonstige Beschaffenheit derselben bedingte Constante; π ist $=3{,}1415\cdots$ Man könnte auch doppelt so viele Biegungen zählen, in so fern jeder Biegung eine zweite entspricht, welche aus der ersten durch Vertauschung von Rechts und Links entsteht. Diese kann aber mit der anderen für einerlei gelten.

Außer diesen gebogenen Stellungen der Feder ist aber auch noch die gerade Stellung möglich, und zwar auf doppelte Weise, je nachdem nämlich die Kräfte P die Feder auszudehnen oder zusammenzudrücken streben. In dem ersten Falle ist das Gleichgewicht der Feder offenbar sicher, d. h. wenn man die Feder ein wenig böge, so würde es sich sofort wieder herstellen; in dem zweiten Falle kann das Gleichgewicht sicher oder unsicher sein. Wenn nämlich der Quotient $\frac{L\sqrt{P}}{\pi\sqrt{k}}$ nicht größer ist als die Einheit, so folgt aus dem vorstehenden Satze, daß die Feder sich gar nicht biegen kann; das Gleichgewicht ist alsdann sicher. Wird also z. B. eine auf fester Unterlage vertical stehende gerade elastische Feder oben mit dem Gewichte P gedrückt, so kann sie sich nicht biegen, so lange nicht $\frac{L\sqrt{P}}{\pi\sqrt{k}}>1$, also $P>\frac{k\cdot\pi^2}{L^2}$ ist. Der Quotient $\frac{k\pi^2}{L^2}$ giebt mithin ein Maaß für die Festigkeit der Feder, in Bezug auf Biegung, welche, wie man sieht, unter

sonst gleichen Umständen, dem Quadrate der Länge der Feder umgekehrt proportional ist.

Ist f gegen h sehr klein, so findet nur eine sehr geringe Biegung Statt. Alsdann ist auch $g=\frac{f}{2h}$ ein sehr kleiner Bruch, und man erhält, mit Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen von g, $G=\frac{1}{2}\pi$; doch ist zu bemerken, daß G nothwendig etwas größer ist als $\frac{1}{2}\pi$. Folglich muß auch, wenn eine sehr kleine Biegung Statt finden soll, L sehr nahe $=nh\pi$, jedoch größer als $nh\pi$ sein. Alsdann ist nahe $P=\frac{n^2k\pi^2}{L^2}$; also folgt:

Eine sehr kleine Biegung der Feder kann nur dann Statt finden, wenn der Druck P einem der Werthe $\frac{k\pi^2}{L^2}$, $\frac{4k\pi^2}{L^2}$; $\frac{9k\pi^2}{L^2}$, .. sehr nahe kommt, den er aber zugleich übertreffen muß.

Bei sehr geringer Biegung muß offenbar $\frac{dy}{dx}$ überall sehr klein, oder die Curve gegen die Axe der x, in welche die Richtung des Druckes fällt, wenig geneigt sein. Man kann daher die Gestalt der Feder aus der Grundgleichung (§. 47. 1.) leicht ermitteln. Werden nämlich die zweiten und höheren Potenzen von $\frac{dy}{dx}$ vernachlässigt, so ergiebt sich $\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=1$, wodurch der Ausdruck der Krümmung λ sich in $\pm\frac{d^2y}{dx^2}$, und die Gleichung 1. in $\pm h^2\frac{d^2y}{dx^2}=y$ verwandelt. Man überzeugt sich aber leicht, daß hier das Zeichen + nicht Statt finden kann, indem die aus der Annahme desselben hervorgehende Curve der Voraussetzung einer sehr kleinen Biegung widerspricht. Es muß daher das negative Zeichen gelten, d. h. die Curve muß gegen die Axe x überall hohl sein, was auch ohne Rechnung klar ist. Die Differentialgleichung ist mithin:

$$-h^2\frac{d^2y}{dx^2}=y,$$

und wird dieselbe so integrirt, daß y mit x zugleich Null wird, so kommt
$$y=f\sin\frac{x}{h},$$
wo f eine Constante ist, die gegen h sehr klein sein muß. Bezeichnet man den Abstand der Endpuncte der Feder von einander (z. B. AF, Fig. 30.), mit e, so muß für $x=e$, $y=0$ sein. Entweder ist also $f=0$, und die Feder gerade, oder, wenn f nicht Null ist, $\sin\frac{e}{h}=0$, also $e=hn\pi$. Da aber e sehr nahe der Länge L der Feder gleich ist, so muß sehr nahe $L=nh\pi$ sein; wie schon vorhin gefunden wurde. Für $n=1$ wird $h=\frac{L}{\pi}$, und $y=\sin\frac{\pi x}{L}$; alsdann hat die Feder die Gestalt der Figur 30. Für $n=2$ wird $y=f\sin\frac{2\pi x}{L}$, oder die Feder schneidet die Axe x dreimal, für $x=0, x=\frac{1}{2}L, x=L$. Für $n=3$ wird $y=f\sin\frac{3\pi x}{L}$; die Gestalt der Feder entspricht der Figur 29. U. s. f.

49. Die elastische Feder ACB sei auf zwei Stützen A und B horizontal gelegt, und zwischen denselben in C durch ein Gewicht P beschwert; man verlangt die Biegung derselben zu bestimmen, jedoch nur unter der Voraussetzung, daß dieselbe sehr klein sei (Fig. 35.).

Diese Feder kann angesehen werden als zusammengesetzt aus zweien, CA und CB, welche in C, in einer noch zu bestimmenden gemeinsamen Richtung eingeklemmt sind. Von diesen beiden Theilen sei CA der kleinere. Man nehme C zum Anfange der Coordinaten, die horizontale Ca zur Axe der x; es sei $Ca=c$, $Cb=-c'$, (also c und c' positiv); ferner bezeichne man den Druck in A und B mit Q und Q', so hat man

$$Q+Q'=P, \qquad Qc=Q'c',$$

mithin
$$Q=\frac{Pc'}{c+c'},\quad Q'=\frac{Pc}{c+c'}.$$

Nun ist CA in C eingeklemmt, und wird durch die Kraft Q in A gebogen, deren Moment in Bezug auf irgend einen Punct von CA gleich $Q(c-x)$ ist. Man hat mithin $k\lambda=Q(c-x)$, oder, weil $\lambda=\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^3$
$$k\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\left(\frac{dx}{ds}\right)^3=Q(c-x).$$

Da nach der Annahme die Biegung sehr klein sein soll, so ist $\frac{dy}{dx}$ ein sehr kleiner Bruch, dessen zweite und höhere Potenzen vernachlässigt werden. Hieraus ergiebt sich $\frac{dx}{ds}=1$, und
$$k\frac{d^2y}{dx^2}=Q(c-x),$$
mithin durch Integration:
$$k\frac{dy}{dx}=Q(cx-\tfrac{1}{2}x^2)+\text{Const.}$$

Für $x=0$, also in dem Puncte C, sei $\frac{dy}{dx}=tg\,w$; so folgt:
$$k\frac{dy}{dx}=k\,tg\,w+Q(cx-\tfrac{1}{2}x^2)$$
und durch weitere Integration, indem für $x=0$, auch $y=0$ sein muß:
$$ky=kx\,tg\,w+Q(\tfrac{1}{2}cx^2-\tfrac{1}{6}x^3). \qquad 1.$$

Für den zweiten Theil CB, in welchem x negativ ist, schreibe man $-x$ statt x, so ist offenbar $Q'(c'-x)$ das Moment von Q' in B, für irgend einen Punct von CB; also
$$k\frac{d^2y}{dx^2}=Q'(c'-x),$$

und durch Integration:

$$k\frac{dy}{dx}=Q'(c'x-\tfrac{1}{2}x^2)+\text{Const.}$$

Für $x=0$ ist, in Bezug auf CB, $\frac{dy}{dx}=-tg\,w$; also

$$k\frac{dy}{dx}=Q'(c'x-\tfrac{1}{2}x^2)-k\,tg\,w,$$

und $$ky=Q'\left(\frac{c'x^2}{2}-\frac{1}{6}x^3\right)-kx\,tg\,w. \quad 2.$$

Für $x=c$ werde in 1. $y=f=Aa$ (s. Fig. 35.); so muß für $x=c'$ in 2. ebenfalls $y=Bb=f$ werden; also ergiebt sich aus 1. und 2.

$$kf=\tfrac{1}{3}Qc^3+kc\,tg\,w,\quad kf=\tfrac{1}{3}Q'c'^3-kc'\,tg\,w.$$

Durch Einsetzung der obigen Werthe von Q und Q' ergeben sich hieraus für f und $tg\,w$ die Werthe:

$$f=\frac{Pc^2c'^2}{3k(c+c')},\quad tg\,w=\frac{Pcc'(c'-c)}{3k(c+c')}.$$

Da, mit Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen von $\frac{dy}{dx}$, $ds=dx$ ist, sind auch c und c' den Bogen CA und CB gleich, oder $c+c'$ ist die gesammte Länge der Feder.

Um den tiefsten Punct G zu finden, der zwischen C und B liegen muß, setze man in 2. $\frac{dy}{dx}=0$, so kommt

$$Q'(c'x-\tfrac{1}{2}x^2)=k\,tg\,w,$$

oder, wenn für Q' und $tg\,w$ ihre Werthe eingeführt werden,

$$c'x-\tfrac{1}{2}x^2=\tfrac{1}{3}c'(c'-c).$$

Hieraus folgt $x=c'-\sqrt{\tfrac{1}{3}c'(c'+2c)}$, wo das negative Zeichen gelten muß, weil Abscisse x von G nicht größer als c' sein kann.

Es sei insbesondere das Gewicht P in der Mitte zwischen A und B angebracht, so wird $c=c'$, und der tiefste Punct G

fällt in C. Sein Abstand von der Horizontallinie ist alsdann $=f$, man findet:

$$f=\frac{Pc^3}{6k}.$$

50. Es sei (Fig. 36.) die Feder AB in A horizontal eingeklemmt, in B gestützt und in C, zwischen A und B, durch das Gewicht P beschwert. Der unbekannte Druck auf B heiße Q; die horizontale AB sei Axe, A Anfang der x, $AD=c$ die Abscisse von C, $AB=c'$. Die Biegung wird wieder als sehr klein vorausgesetzt.

Man erhält zuerst für den Theil AC, welchen die Kraft P abwärts, Q aufwärts zu biegen strebt,

$$k\frac{d^2y}{dx^2}=P(c-x)-Q(c'-x)$$

$$k\frac{dy}{dx}=P(cx-\tfrac{1}{2}x^2)-Q(c'x-\tfrac{1}{2}x^2),$$

ohne Constante, weil für $x=0$, wegen der horizontalen Einklemmung in A, $\frac{dy}{dx}=0$ ist. Ferner:

$$ky=P(\tfrac{1}{2}cx^2-\tfrac{1}{6}x^3)-Q\left(\frac{c'x^2}{2}-\frac{1}{6}x^3\right). \quad 1.$$

Der Theil CB kann als eingeklemmt in C angesehen werden. Man erhält für denselben:

$$k\frac{d^2y}{dx^2}=-Q(c'-x)$$

$$k\frac{dy}{dx}=\text{Const.}-Q(c'x-\tfrac{1}{2}x^2).$$

Für $x=c$ muß dieser Werth von $\frac{dy}{dx}$ dem vorigen gleich sein; hieraus folgt $\text{Const.}=\frac{Pc^2}{2}$; also

$$k\frac{dy}{dx}=\frac{Pc^2}{2}-Q(c'x-\tfrac{1}{2}x^2).$$

Weiter $ky = \frac{Pc^2x}{2} - Q\left(\frac{c'x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + Const.$

Für $x = c$ muß der Werth von y aus dieser Gleichung mit dem aus 1. hervorgehenden einerlei sein; hieraus folgt $Const. = -\frac{Pc^3}{6}$

und $$ky = \frac{Pc^2x}{2} - \frac{Pc^3}{6} - Q\left(\frac{c'x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right). \qquad 2.$$

Für $x = c'$ wird in 2. $y = 0$, also $\frac{Pc^2}{2}(c' - \frac{1}{3}c) = \frac{Qc'^3}{3}$; und

mithin: $$Q = \frac{Pc^2(3c' - c)}{2c'^3},$$

wodurch der Druck in B bestimmt ist.

Es sei insbesondere das Gewicht P in der Mitte angebracht, mithin $c' = 2c$, so wird $Q = \frac{5}{16}P$. Die Gleichungen 1. und 2. geben in diesem Falle:

$$ky = \frac{1}{16}P\left(3cx - \frac{11}{6}x^3\right)$$
$$ky = \frac{1}{2}P\left(c^2x - \frac{5}{8}cx^2 + \frac{5}{48}x^3 - \frac{c^3}{3}\right)$$

und mithin $k\frac{dy}{dx} = \frac{1}{8}P(3cx - \frac{11}{4}x^2)$ für AC

$$k\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}P(c^2 - \frac{5}{4}cx + \frac{5}{16}x^2) \text{ für CB.}$$

Die erste dieser Gleichungen giebt $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = \frac{12}{11}c$, welcher Werth nicht zulässig ist, weil für AC, x nicht größer als c werden kann. Die zweite Gleichung giebt $\frac{dy}{dx} = 0$ für $5x^2 - 20cx + 16c^2 = 0$, d. i. $x = 2c(1 - \sqrt{\tfrac{1}{5}})$. Setzt man diesen Werth von x in die Gleichung 2, so kommt der Abstand y' des tiefsten Punctes von der Horizontalen AB:

$$y' = \frac{Pc^3}{6k}(\sqrt{5} - \tfrac{3}{2}).$$

Nach dem vorigen §. war dieser Abstand bei der blos gestützten und in der Mitte beschwerten Feder gleich $\frac{Pc^3}{6k}$; derselbe wird mithin, durch die Einklemmung des einen Endes der Feder, in dem Verhältnisse von $\sqrt{5} - \frac{3}{2} : 1$ oder etwa von $14 : 19$ vermindert.

51. Es sei die horizontal liegende Feder AC in den Puncten A, B, C gestützt, zwischen denselben in D und E mit den Gewichten P und P' belastet (Fig. 37.). Man nehme A zum Anfange der horizontalen x; es sei $AD = c$, $AB = c'$, $AE = c''$, $AC = c'''$; ferner seien Q, Q', Q'' die Drucke in A, B, C. Man hat zuerst:

$$Q + Q' + Q'' = P + P', \quad Q'c' + Q''c''' = Pc + P'c''. \qquad 1.$$

Für den Theil AD der Feder ist:

$$k\frac{d^2y}{dx^2} = P(c - x) - Q'(c' - x) + P'(c'' - x) - Q''(c''' - x)$$

oder, mit Rücksicht auf die vorhergehenden Bedingungen,

$$k\frac{d^2y}{dx^2} = -Qx,$$

mithin $$k\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}Q(c^2 - x^2) + k\,tg\,w,$$

und $$ky = \tfrac{1}{2}Q(c^2x - \tfrac{1}{3}x^3) + kx\,tg\,w, \qquad 2.$$

wenn in D, für $x = c$, $\frac{dy}{dx} = tg\,w$. Für den folgenden Theil DB:

$$k\frac{d^2y}{dx^2} = -Q'(c' - x) + P'(c'' - x) - Q''(c''' - x)$$

oder auch

$$k\frac{d^2y}{dx^2} = -Qx - P(c - x),$$

$$k\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}Q(c^2 - x^2) + \tfrac{1}{2}P(c - x)^2 + k\,tg\,w,$$

weil für $x = c$, dieser Werth von $\frac{dy}{dx}$ mit dem vorigen übereinstimmen muß. Mithin

$$ky = \tfrac{1}{2}Q(c^2x - \tfrac{1}{3}x^3) - \tfrac{1}{6}P(c-x)^3 + kx\,tg\,w, \qquad 3.$$

welcher Werth, für $x=c$, mit dem aus 2. übereinstimmt, so daß keine Constante hinzukommen darf. Ferner muß in 3. für $x=c'$, $y=0$ werden; dies giebt die Bedingungsgleichung:

$$\tfrac{1}{2}Q(c^2c' - \tfrac{1}{3}c'^3) + \tfrac{1}{6}P(c'-c)^3 + kc'\,tg\,w = 0. \qquad 4.$$

Für den Theil BE ist

$$k\frac{d^2y}{dx^2} = P'(c''-x) - Q''(c'''-x) = -Qx - P(c-x) + Q'(c'-x)$$

mithin

$$k\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}Q(c^2-x^2) + \tfrac{1}{2}P(c-x)^2 - \tfrac{1}{2}Q'(c'-x)^2 + k\,tg\,w,$$

welcher Werth, für $x=c'$, mit dem aus 3. einerlei ist. Ferner

$$ky = \tfrac{1}{2}Q(c^2x - \tfrac{1}{3}x^3) - \tfrac{1}{6}P(c-x)^3 + \tfrac{1}{6}Q'(c'-x)^3 + kx\,tg\,w, \qquad 5.$$

in welcher Gleichung für $x=c'$, wegen der Bedingung 4, $y=0$ wird.

Endlich ist für EC

$$k\frac{d^2y}{dx^2} = -Q''(c'''-x) = -Qx - P(c'-x) + Q'(c'-x) - P'(c''-x),$$

$$k\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}Q(c^2-x^2) + \tfrac{1}{2}P(c-x)^2 - \tfrac{1}{2}Q'(c'-x)^2 + \tfrac{1}{2}P'(c''-x)^2 + k\,tg\,w,$$

welcher Werth für $x=c''$, mit dem aus 5. übereinstimmt. Weiter

$$\left.\begin{aligned} ky = \tfrac{1}{2}Q(c^2x - \tfrac{1}{8}x^3) - \tfrac{1}{6}P(c-x)^3 + \tfrac{1}{6}Q'(c'-x)^3 - \tfrac{1}{6}P'(c''-x)^3 \\ + kx\,tg\,w, \end{aligned}\right\} \quad 6.$$

übereinstimmend mit 5., für $x=c''$. Für $x=c'''$ muß y aus 6. Null werden; also

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}Q(c^2c''' - \tfrac{1}{3}c'''^2) + \tfrac{1}{6}P(c'''-c)^3 - \tfrac{1}{6}Q'(c'''-c')^3 \\ + \tfrac{1}{5}P'(c'''-c'')^3 + kc'''\,tg\,w = 0. \end{aligned}\right\} \quad 7.$$

Aus den Gleichungen 1., 4., 7. lassen sich die vier Unbekannten Q, Q', Q'', $tg\,w$ bestimmen.

Es sei, um nur noch ein einfacheres Beispiel durchzuführen, $c'=2c$, $c''=3c$, $c'''=4c$, so geben diese Gleichungen:

$$Q + Q' + Q'' = P + P', \quad 2Q' + 4Q'' = P + 3P'.$$

$$12k\,tg\,w = (2Q - P)c^2$$

$$24k\,tg\,w = (52Q + 8Q' - 27P - P')c^2.$$

Hieraus erhält man

$$k\,tg\,w = -\frac{(P+P')}{64}c^2,$$

$$Q = \frac{13P - 3P'}{32}, \quad Q' = \frac{22(P+P')}{32}, \quad Q'' = \frac{13P' - 3P}{32}.$$

Wäre z. B. $P=P'$, so trüge die mittlere Stütze $\frac{11}{16}$, jede der beiden andern dagegen $\frac{5}{32}$ der Gesammtbelastung 2P. Denkt man sich anstatt der elastischen Feder AC (Fig. 37.) eine starre oder unbiegsame Linie, so hat man zur Bestimmung der Drucke in A, B, C nur die beiden Gleichungen 1., welche nicht hinreichen. Eben so würde auch im vorigen §. der Druck Q in B (Fig. 36.) unbestimmt bleiben, wenn an die Stelle der elastischen Feder AB eine starre Linie gesetzt würde. Man sieht aus diesen Beispielen, wie die Vertheilung des Druckes auf mehrere Stützpuncte, welche unbestimmt bleibt, so lange die Körper als unbedingt fest betrachtet werden, gefunden werden kann, sobald auch nur die kleinste Biegung derselben vorausgesetzt wird.

Anmerkung. Die elastische Feder wird hier überall als eine bloße Linie ohne eignes Gewicht betrachtet; es würde aber nicht schwer sein, auch ihr Gewicht in diesem und dem vorigen §. nach den allgemeinen Principien mit in Rechnung zu bringen, wenn man ihr ein solches beilegt. Dieses auszuführen mag dem Leser überlassen bleiben.

52. In den bisherigen Untersuchungen, von §. 46. an, ist die elastische Feder als nicht ausdehnsam betrachtet worden. Man kann aber auch noch die Annahme, daß jedes Element eine seiner

Spannung proportionale Verkürzung oder Verlängerung erleide, in die Rechnung einführen. Es sei ds' die ursprüngliche, ds die durch die Spannung geänderte Länge des Elementes; so ist $ds = ds'(1+\gamma t)$, wo γ einen constanten positiven Coefficienten bedeutet, wie in der Anmerkung zu §. 39. Besteht nun zwischen den an der elastischen Feder angebrachten Kräften Gleichgewicht, so kann jedes Element als unveränderlich betrachtet werden, und man erhält mithin insbesondere für eine Feder, die durch zwei an ihren Endpuncten angebrachte Kräfte gebogen ist, die nämliche Gleichung (1.) wie in §. 46. Die durch die Spannung geänderte Länge eines Elementes $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ wird, wie dort, durch die Gleichung 5. $\left(ds = \pm \frac{2h^2 dx}{U}\right)$ ausgedrückt; aus dieser aber folgt die ursprüngliche Länge

$$ds' = \pm \frac{2h^2 dx}{(1+\gamma t)U}.$$

Man nehme der Einfachheit wegen an, daß die Feder nur *einen* Bogen bilde, wie Fig. 30. Bezeichnet nun $2l'$ die ganze ursprüngliche Länge der Feder, so erhält man, anstatt der Gleichung 8. in §. 46., folgende:

$$l' = \int_0^f \frac{2h^2 dy}{(1+\gamma t)U}.$$

Für die Spannung besteht die nämliche Gleichung, wie in §. 46. Aus derselben ergiebt sich

$$1+\gamma t = 1 - \frac{\gamma P(2h^2 \cos\mu + y^2)}{2h^2}$$

und folglich

$$l' = \int_0^f \frac{4h^4 dy}{(2h^2 - \gamma P(2h^2 \cos\mu + y^2))U}.$$

Dieser Ausdruck für l', an die Stelle der Gleichung 8. in §. 46. gesetzt, giebt, in Verbindung mit den dortigen Gleichungen 6. 7. die Mittel zur Bestimmung der Constanten μ, f, c. Berechnet man ferner noch das Integral

$$l = \int_0^f \frac{2h^2 dy}{U},$$

so giebt die Differenz $2l' - 2l$ die gesammte Verkürzung der Feder an, welche bei der Biegung Statt findet.

Bisher ist auch die Dicke der Feder, d. h. ihre Ausdehnung in der Richtung des Krümmungshalbmessers, gänzlich bei Seite gesetzt worden. Es ist aber wichtig, noch zu zeigen, wie auch diese Ausdehnung in Rechnung gebracht und namentlich die Constante k mit Rücksicht auf dieselbe bestimmt werden kann.

Ein biegsamer Stab, von der Gestalt eines geraden Prismas mit rechteckiger Grundfläche, sei an dem einen Ende eingeklemmt, und zwar so, daß zwei seiner Seitenflächen horizontal, also die beiden anderen vertical liegen. An dem freien Ende werde ein Gewicht P angebracht, und dadurch der Stab gebogen. Es sei $ABCD$ ein verticaler Längendurchschnitt desselben (Fig. 38.), AB das eingeklemmte Ende. Man denke sich den Stab als bestehend aus unendlich dünnen Längenfasern, wie ac, deren jede einzelne ohne Widerstand biegsam, zugleich aber einer der Spannung proportionalen Verlängerung oder Verkürzung fähig ist. Bei der Biegung werden einige Fasern sich ausdehnen, andere sich zusammenziehen; es wird aber angenommen, daß diejenigen Puncte der verschiedenen Fasern, welche vor der Biegung in einem normalen Querschnitte des Stabes lagen, sich auch nach der Biegung noch in einem solchen befinden, und zwar in der nämlichen Lage gegen einander, so daß die Gestalt des Querschnittes nicht geändert ist. Legt man also durch einen Punct N der gebogenen Faser AND (Fig. 38.) eine auf ihrer Tangente in N senkrechte Ebene, so ist der dadurch entstehende Querschnitt (in der Figur dargestellt durch NM) ein Rechteck von der nämlichen Gestalt, wie er ohne Biegung des Stabes sein würde. Diejenige Faser ac, welche von den beiden äußeren AD und BC gleich weit absteht, heiße die mittle Faser des Durchschnittes $ABCD$. Es sei $M'N'$ eine der MN unendlich nahe Normale, K ihr Durchschnitt mit jener, so ist $Km = \rho$ der Krümmungshalbmesser der mittlen Faser, in dem Elemente $mm'=ds$. Die Länge eines Elementes nn' einer anderen Faser, in dem Abstand $mn=v$ von der mittlen, ist offenbar:

$$nn'=\left(1+\frac{v}{\varrho}\right)ds.$$

Ferner sei ds' die anfängliche Länge, t die Spannung von mm', so ist $ds=ds'(1+\gamma t)$, und mithin

$$nn'=\left(1+\frac{v}{\varrho}\right)\left(1+\gamma t\right)ds'.$$

In der Anwendung werden $\frac{v}{\varrho}$ und γ immer nur sehr kleine Brüche sein; vernachlässigt man demnach das Product derselben, so kommt einfacher:

$$nn'=\left(1+\frac{v}{\varrho}+\gamma t\right)ds'.$$

Die anfängliche Länge ds' des Elementes nn' ist also um $\left(\frac{v}{\varrho}+\gamma t\right)ds'$ vermehrt; mithin entwickelt dieses Element eine seiner Ausdehnung proportionale Spannung. Wird dieselbe $=\Theta$ gesetzt, so ist $\gamma\Theta\,ds'$ die ihr entsprechende Verlängerung; mithin ist

$$\gamma\Theta\,ds'=\left(\frac{v}{\varrho}+\gamma t\right)ds'$$

oder

$$\Theta=t+\frac{v}{\gamma\varrho}.$$

Man bezeichne die auf der Ebene ABCD senkrechte Breite des Stabes mit u, so kann der unendlich kleine Querschnitt der Faser nn' durch $du\cdot dv$ ausgedrückt werden, und die Kraft, mit welcher die Faser sich wieder bis auf ihre anfängliche Länge zusammenzuziehen strebt, ist mithin

$$=\Theta\cdot du\,dv=\left(t+\frac{v}{\gamma\varrho}\right)du\,dv.$$

Betrachtet man zunächst den ersten Theil dieses Ausdruckes,

nämlich $t\,du\,dv$, so lassen sich die durch denselben dargestellten gleichen und parallelen, an $N'M'$ wirkenden Kräfte in eine Resultante vereinigen, welche an dem Puncte m anzubringen ist. Setzt man die halbe Dicke des Stabes $m'N'=v'$, so ist die Intensität dieser Resultante $=t\,du\int_{-v'}^{+v'}dv=2tv'\,du$.

Der andere Theil des obigen Ausdruckes giebt, in Bezug auf die gesammte Länge von $N'M'$ integrirt, die Summe $\frac{du}{\gamma\varrho}\int_{-v'}^{+v'}v\,dv=0$. Diese Kräfte geben mithin ein Paar, dessen Moment offenbar $=\frac{2du}{\gamma\varrho}\int_0^{v'}v^2\,dv=\frac{2}{3}\frac{v'^3\cdot du}{\gamma\varrho}$ ist.

Denkt man sich ABCD als den mittlen Durchschnitt, d. h. gleich weit von den beiden äußern verticalen Seitenflächen abstehend, so ist nunmehr amc die mittle Faser des Stabes, d. h. diejenige, welche durch die Schwerpuncte aller seiner (als gleichartige Flächen gedachten) Querschnitte geht. Wird nun noch in Bezug auf u integrirt, so erhält man die gesammte Spannung $2tuv'$, welche in m vereinigt gedacht werden kann, und das Paar $\frac{2}{3}\frac{v'^3u}{\gamma\varrho}$, welches man sich ebenfalls in der Ebene des mittlen Durchschnittes an der Normale $N'M'$ wirkend vorstellen kann. Diesem Paare wirkt auf der anderen Seite der Normale $N'M'$ ein zweites entgegen, welches von ihm um sein Differential verschieden ist; der Unterschied beider Paare, d. i. $\frac{2}{3}\frac{v'^3u}{\gamma}\,d\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ ist es also, welcher die Normale $N'M'$ zu drehen strebt.

Es wird nun nichts geändert, wenn man sich alle Fasern in der mittlen Faser des Stabes vereinigt und an jedem Elemente derselben wie mm' das angegebene Paar $\frac{2}{3}\frac{v'^3u}{\gamma}\,d\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ in gehörigem Sinne angebracht denkt. Man setze

$$\frac{2}{3}\frac{v'^3u}{\gamma}=k,$$

und schreibe λ für $\frac{1}{\varrho}$, so ist $k d\lambda$ das Moment dieses Paares, wie in §. 46. Oder, wenn man das Paar auf die Breite ds bringt, und sein Moment $= Q ds$ setzt, so erhält man $Q = k\frac{d\lambda}{ds}$. Man hat also einen biegsamen Faden, welcher in jedem Elemente ein der Biegung widerstrebendes Paar $= Q ds = k d\lambda$ darbietet, oder eine elastische Feder, die genau den in §. 46. gemachten Annahmen entspricht, nur mit dem Unterschiede, daß sie zugleich ausdehnsam ist. Man erhält mithin für die Curve der mittlen Faser, wie in §. 47., $k\lambda = Py$, und eine weitere Fortsetzung dieser Betrachtungen würde überhaupt nur Vorhergegangenes zu wiederholen haben, also überflüssig sein.

Die Spannung t ist hier, wie in §. 47., der nach der Tangente der mittlen Faser gerichteten Componente von P gleich. Da nun bei nicht beträchtlicher Biegung diese Tangente überall nur wenig von der Horizontalen abweicht, so ist alsdann die Spannung t sehr gering, und mithin auch die mittle Faser sehr wenig ausgedehnt.

Den vorstehenden ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich überhaupt in Bezug auf biegsame Stäbe von beliebigem Querschnitte anstellen; dieselben sollen jedoch hier nicht weiter ausgeführt werden, um diesen Abschnitt nicht über Gebühr zu verlängern.

Allgemeine Untersuchung über die Bedingung des Gleichgewichtes.

53. Die bisherigen Untersuchungen über das Gleichgewicht einiger Systeme sind nur als einzelne Beispiele zu betrachten, welche ihrer Wichtigkeit oder auch ihrer Einfachheit wegen hervorgehoben wurden; sie enthalten aber noch keine allgemeine Regel, nach welcher die Bedingungen des Gleichgewichtes beliebiger Systeme gefunden werden könnten. Eine solche soll im Folgenden unter der Voraussetzung entwickelt werden, daß die Verbindung der Puncte des Systemes unter einander sich durch Gleichungen zwischen ihren Coordinaten in Bezug auf drei im Raume unbewegliche Axen ausdrücken lasse. Diese Voraussetzung findet z. B. Statt, wenn die gegenseitigen Abstände einiger Puncte unveränderlich, oder auch wenn Puncte auf unbeweglichen Flächen oder Curven zu bleiben genöthigt sind; und sie ist überhaupt von sehr großer Allgemeinheit.

Man bemerke zuerst, daß das Gleichgewicht zwischen äußeren Kräften an einem Systeme nur vermittelst der durch die Verbindung der Puncte bedingten Widerstände oder inneren Kräfte zu Stande kommt, welche allemal in dem Maaße an den Puncten auftreten, als gerade nöthig ist, um diese Verbindung unter Einwirkung der äußeren Kräfte unverletzt zu erhalten. Denkt man sich diese Widerstände an jedem Puncte als Kräfte angebracht, so kann man von der gegenseitigen Verbindung der Puncte gänzlich absehen, und es muß Gleichgewicht bestehen zwischen den äußeren und inneren Kräften an jedem einzelnen Puncte, der als gänzlich frei anzusehen ist. Folglich kommt es bei Aufsuchung der allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichtes nur auf die

Herleitung der Widerstände aus der gegebenen Verbindung der Puncte an; nach dieser hat man nur noch das Gleichgewicht zwischen Kräften an freien Puncten zu betrachten.

Die Widerstände werden jedoch durch die Art der Verbindung der Puncte, oder durch die zwischen den Coordinaten derselben bestehenden Bedingungsgleichungen nicht unmittelbar bestimmt, sondern lassen sich aus diesen nur mit Hülfe eines neuen, sogleich anzugebenden Grundsatzes herleiten. Um dieses deutlich zu machen, betrachte man zwei festverbundene Puncte. Zwischen zwei solchen stellt man sich gern, als Mittel der festen Verbindung, eine starre materielle Linie vor; da aber die Puncte von dieser wiederum mit einander fest verbunden sein müssen, so wird dadurch nichts gewonnen. Die Vorstellung einer starren Linie muß vielmehr beseitigt werden, so daß nur zwei materielle Puncte, in beliebiger Entfernung von einander, übrig bleiben; sie mögen a und b heißen. Ihre feste Verbindung besteht nun darin, daß, wenn äußere Kräfte, an ihnen angebracht, den Abstand ab zu vermehren oder zu vermindern streben, zwischen a und b sofort eine gegenseitige Anziehung oder Abstoßung rege wird, welche allemal gerade hinreicht, um diesen Abstand ungeändert zu erhalten. Ueber den Ursprung dieses Widerstandes, wie überhaupt aller Kräfte, hat die Statik nichts zu sagen; derselbe ist mit dem Begriffe einer festen Verbindung gegeben. Da die Anziehungen (oder Abstoßungen) zwischen den Puncten einander entgegengerichtet sind, so müssen auch die äußeren Kräfte, wenn jene diesen Gleichgewicht halten sollen, einander entgegenrichtet sein. Daß sie aber auch einander g l e i c h sein müssen, wie der Grundsatz in §. 10. behauptet, folgt erst dann, wenn man annimmt, daß die Anziehungen (oder Abstoßungen) zwischen a und b einander gleich sind. Hieraus wird klar, daß die Widerstände bei einem festen Systeme aus dem Begriffe der festen Verbindung a l l e i n noch nicht hergeleitet werden können, sondern daß zur Bestimmung derselben noch der Grundsatz erfordert wird, welcher unter dem Namen des Satzes von der G l e i c h h e i t z w i s c h e n W i r k u n g und G e g e n w i r k u n g (Action und Reaction) bekannt ist. Nach diesem Grundsatze ist die Wirkung (Anziehung oder Abstoßung) eines Punctes a auf einen anderen Punct b ohne Ausnahme begleitet von einer gleichen und entgegengerichteten Wirkung (Gegenwirkung) von b auf a; oder die Kräfte, mit welchen zwei Puncte a und b einander anziehen (abstoßen), sind allemal einander g l e i c h. Dieser Satz gilt für alle in der Natur beobachteten Anziehungen oder Abstoßungen; derselbe muß auch der theoretischen Untersuchung der Bedingungen des Gleichgewichtes beliebiger Systeme zu Grunde gelegt werden, wenn diese nicht auf alle Anwendbarkeit verzichten will. Von welcher Art also die Verbindung zwischen den Puncten eines Systemes auch sei, so wird in der Folge unbedingt vorausgesetzt, daß jeder Punct auf jeden andern nur in der Richtung der geraden Linie zwischen beiden anziehend oder abstoßend wirken kann, und daß die Anziehungen (Abstoßungen) zwischen je zwei Puncten allemal gegenseitig, entgegengerichtet, und gleich sind. Wie sich nun mit Hülfe dieses Grundsatzes die Widerstände allgemein bestimmen lassen, soll im Folgenden gezeigt werden.

54. Zunächst läßt sich beweisen, daß das Gleichgewicht allemal möglich sein muß, ohne daß die an den Puncten angebrachten Kräfte, jede einzeln, Null sind. Denn es ist augenscheinlich möglich, an dem Systeme solche Kräfte $P, P', P'' \cdots$ anzubringen, welche die Verbindung der Puncte zu verletzen streben, oder welche die Richtigkeit der zwischen den Coordinaten derselben obwaltenden Bedingungsgleichungen aufheben würden, wenn ihnen keine Widerstände entgegenwirkten. Die Kräfte $P, P', \ldots$ ertheilen nun den Puncten, wenn sie einander nicht Gleichgewicht halten, irgend welche Bewegungen. Da diese Bewegungen aber mit den Bedingungen des Systemes verträglich sein müssen, was diejenigen Bewegungen, welche die Puncte erhalten würden, wenn keine Widerstände Statt fänden, nach der Voraussetzung nicht sein würden, weil die Kräfte die Bedingungen des Systemes

zu verletzen streben; so sind die wirklichen Bewegungen aller oder wenigstens einiger Puncte, nach Richtung oder nach Geschwindigkeit, im Allgemeinen nach beiden, von denen verschieden, welche die Puncte, als unabhängig von einander gedacht, durch die Kräfte erhalten würden. Nun denke man sich an jedem Puncte zugleich mit P eine zweite Kraft Q derjenigen Bewegung gerade entgegen angebracht, zu welcher der Punct durch die Kraft P und durch seine Verbindung mit den übrigen Puncten veranlaßt wird; und es sei Q gerade groß genug, um diese Bewegung aufzuheben; so besteht zwischen den Kräften $P, P', P'' \cdots$, einerseits und $Q, Q', Q'', \cdots$ andererseits, an dem Systeme Gleichgewicht, ohne daß die Resultante der Kräfte P und Q an jedem einzelnen Puncte gerade Null ist; also ist das Gleichgewicht an jedem Systeme möglich, ohne daß die an den Puncten desselben angebrachten Kräfte, jede einzeln, Null sind, w. z. b. w.

Nach der Voraussetzung bestehen zwischen den Coordinaten der Puncte des Systemes, in Bezug auf die im Raume festen Axen x, y, z, mehrere Bedingungsgleichungen, die durch $L=0$, $M=0$, $N=0, \cdots$ bezeichnet werden mögen. Nun denke man sich, daß dieses System in irgend einer Stellung, die jedoch immer mit jenen Bedingungsgleichungen verträglich sein muß, gleichzeitig von mehreren Kräften ergriffen werde, zwischen denen gerade Gleichgewicht bestehe, so haben die Kräfte keinen Einfluß auf den Zustand des Systemes, in Hinsicht auf Ruhe oder Bewegung. Sie können auch keinen erhalten, wenn man sich vorstellt, daß in dem Augenblicke ihrer Anbringung zu den bisherigen Bedingungsgleichungen des Systemes eine neue hinzutrete, welche durch $H=0$ bezeichnet werde, und die, wie sich von selbst versteht, von der Art sein muß, daß die gegenwärtigen Werthe der Coordinaten der Puncte ihr Genüge thun. Um diese Bemerkung noch deutlicher zu machen, denke man sich über das System ein zweites jenem ganz gleiches so gelegt, daß beide einander völlig decken. Werden an dem ersten Systeme (A) Kräfte angebracht, die einander Gleichgewicht halten, und wird zugleich an dem zweiten (B) die neue Bedingung $H=0$ hinzugefügt; so besteht an jedem einzelnen Gleichgewicht; denn an A sind die angebrachten Kräfte im Gleichgewichte, und an B sind gar keine Kräfte angebracht. Wenn nun das System B, welches bisher nur über A lag, und dieses genau deckte, sich zugleich mit A unveränderlich verbindet, so wird dadurch augenscheinlich an dem Gleichgewichte der Kräfte an A nichts geändert, während doch das ganze System nunmehr, außer den übrigen, auch noch der Bedingung $H=0$ unterworfen ist. Eine solche Bedingung wäre z. B. die, daß die gegenseitige Entfernung zweier Puncte unveränderlich würde, oder die, daß ein Punct auf einer unbeweglichen, durch seinen gegenwärtigen Ort gehenden Fläche von nun an zu bleiben gezwungen wäre. Da das Gleichgewicht der Kräfte an dem Systeme nicht gestört wird, wenn eine Bedingung dieser Art hinzukommt; so kann man deren eben so gut zwei, oder drei, oder überhaupt beliebig viele hinzufügen, ohne das Gleichgewicht aufzuheben. Man kann z. B. annehmen, daß ein bisher beweglicher Punct unbeweglich werde; alsdann fügt man, wenn der Punct nicht schon vorher auf einer Fläche oder Curve zu bleiben gezwungen war, drei neue Bedingungen hinzu, indem man seine Coordinaten unveränderlich setzt; dadurch wird das Gleichgewicht nicht gestört.

55. Man betrachte jetzt ein System, von dessen Puncten keiner unbeweglich oder durch ein äußeres Hinderniß in gewissen Bewegungen gehemmt sei; also ein freies System. Da die aus der Verbindung der Puncte hervorgehenden Widerstände gegen äußere Kräfte in gegenseitigen Anziehungen oder Abstoßungen zwischen den Puncten bestehen, welche, nach dem in §. 53. erläuterten Grundsatze von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung, einander allemal zu zweien entgegengerichtet und gleich sind; und da, wenn Gleichgewicht besteht, die äußeren und inneren Kräfte an jedem Puncte des Systemes mit einander im Gleichgewichte sein müssen; so erfordert das Gleichgewicht, daß

die äußeren Kräfte sich in je zwei gleiche und entgegengerichtete müssen zerlegen lassen.

Die Erfüllung dieser Bedingung ist allemal nothwendig; es ist auch klar, daß sie hinreichen muß, wenn das System ein festes ist. Denn da zwei gleiche und entgegengerichtete Kräfte, an festverbundenen Puncten angebracht, die Entfernung derselben zu ändern streben, und offenbar ändern würden, wenn ihnen keine Widerstände entgegenwirkten; so müssen an den Puncten zwei Widerstände auftreten, welche den äußeren Kräften gleich sind; alsdann aber besteht Gleichgewicht.

Nun betrachte man ein System von vier Puncten A, B, C, D zwischen deren gegenseitigen Entfernungen l, m, n, p, q, r irgend eine Gleichung gegeben sei, die durch

$$L = f(l, m, n, p, q, r) = 0$$

bezeichnet werde. Besteht zwischen äußeren Kräften an diesem Systeme Gleichgewicht, so müssen zuerst, wenn jede Kraft nach den gegen die Angriffspuncte der drei anderen gerichteten Geraden zerlegt wird, die in jede einzelne dieser Geraden fallenden Componenten einander gleich und entgegengerichtet sein. Ferner wird das Gleichgewicht nicht gestört, wenn drei von den Puncten (A, B, C) unbeweglich werden; alsdann kann sich aber der vierte Punct D nur noch auf einer Fläche bewegen, welche sogleich näher bestimmt werden soll; und mithin muß die auf diesen Punct wirkende Kraft gegen diese Fläche normal sein. Es seien p, q, r die drei in D zusammenstoßenden Kanten des Tetraeders ABCD, so sind nunmehr die übrigen Kanten, nämlich l, m, n, unveränderlich. Ferner seien x, y, z die Coordinaten des beweglichen Punctes D, a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' die der unbeweglich gedachten Puncte, so hat man

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$
$$q = \sqrt{(x-a')^2 + (y-b')^2 + (z-c')^2}$$
$$r = \sqrt{(x-a'')^2 + (y-b'')^2 + (z-c'')^2}.$$

Werden diese Werthe für p, q, r in die obige Gleichung $L=0$ gesetzt, so erhält man die Gleichung der Fläche, auf welcher der Punct D zu bleiben genöthigt ist, und welche sich, mit Weglassung der Constanten l, m, n durch

$$L = f(p, q, r) = 0$$

bezeichnen läßt. Es seien u, v, w die Componenten der an D wirkenden Kraft P, nach den Kanten p, q, r; so läßt sich zeigen, daß P auf der Fläche normal ist, wenn sich dieselben zu einander verhalten, wie die Ableitungen der Function f(p, q, r) nach p, q, r. Denn es sei

$$u : v : w = \frac{df}{dp} : \frac{df}{dq} : \frac{df}{dr},$$

oder

$$u = \lambda \frac{df}{dp}, \quad v = \lambda \frac{df}{dq}, \quad w = \lambda \frac{df}{dr}. \qquad \text{A.}$$

Man zerlege die Kräfte u, v, w nach den Axen x, y, z; so erhält man, wenn die Neigungen von u gegen die Axen bezeichnet werden durch $\alpha, \alpha', \alpha''$, die von v durch β, β', β'', und die von w durch $\gamma, \gamma', \gamma''$, folgende Componenten von P nach x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} X &= u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma \\ Y &= u \cos\alpha' + v \cos\beta' + w \cos\gamma' \\ Z &= u \cos\alpha'' + v \cos\beta'' + w \cos\gamma'' \end{aligned}\right\} \text{B.}$$

Nun ist $\cos\alpha = \frac{x-a}{p} = \frac{dp}{dx}, \quad \cos\beta = \frac{x-a'}{q} = \frac{dq}{dx},$

$$\cos\gamma = \frac{x-a''}{r} = \frac{dr}{dx}, \quad \cos\alpha' = \frac{y-b}{p} = \frac{dp}{dy}, \text{ u. s. f.;}$$

also, wegen A.

$$X = \lambda \left(\frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{df}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} + \frac{df}{dr} \cdot \frac{dr}{dx} \right),$$

und weil

$$\frac{dL}{dx} = \frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{df}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} + \frac{df}{dr} \cdot \frac{dr}{dx},$$

$X = \lambda \frac{dL}{dx}$. Eben so folgt $Y = \lambda \frac{dL}{dy}$, $Z = \lambda \frac{dL}{dz}$. Es verhalten sich also die Compouenten von P, nach den Axen x, y, z, d. i. X, Y, Z zu einander wie $\frac{dL}{dx} : \frac{dL}{dy} : \frac{dL}{dz}$, d. h. wie die Cosinus der Neigungen der Normale gegen x, y, z; folglich ist ihre Resultante auf der Fläche normal, w. z. b. w. Mithin müssen die Componenten nach p, q, r der Kraft P an D sich verhalten, wie die Ableitungen $\frac{df}{dp}$, $\frac{df}{dq}$, $\frac{df}{dr}$; sie sind demnach $\lambda \frac{df}{dp}$, $\lambda \frac{df}{dq}$, $\lambda \frac{df}{dr}$.

Da nun die Kräfte in den Kanten des Tetraeders einander zu zweien gleich und entgegengerichtet sind, so muß z. B. an dem Puncte A in der Kante $p = AD$ ebenfalls die Kraft $\lambda \frac{df}{dp}$ wirken. Ferner aber müssen auch die Kräfte in den drei in A zusammenstoßenden Kanten p, l, m, sich zu einander verhalten, wie die Ableitungen von $\frac{df}{dp} : \frac{df}{dl} : \frac{df}{dm}$; und Aehnliches gilt von den beiden noch übrigen Puncten; folglich sind nunmehr die Richtungen und die Verhältnisse der Intensitäten aller Kräfte, welche an dem Systeme einander Gleichgewicht halten können, völlig bestimmt. Werden nun Kräfte in diesen bestimmten Richtungen und mit diesen bestimmten Verhältnissen der Intensitäten an dem Systeme angebracht, so muß auch zwischen ihnen Gleichgewicht bestehen. Denn es ist einleuchtend, daß das Gleichgewicht an einem Systeme, wenn es besteht, dadurch nicht aufgehoben wird, daß die Intensitäten aller Kräfte an dem Systeme in einem gemeinsamen Verhältnisse geändert werden, während die Richtungen derselben, wie sich von selbst versteht, ungeändert bleiben. Oder mit anderen Worten, das Gleichgewicht zwischen mehreren Kräften kann nur bedingt sein durch die Verhältnisse zwischen den Intensitäten der Kräfte. Denn besteht zwischen mehreren Kräften Gleichgewicht, und wird jede derselben an ihrem Angriffspuncte noch einmal angebracht,

so besteht wieder zwischen den neuen Kräften Gleichgewicht; man kann also die Intensitäten alle z. B. verdoppeln, ohne das Gleichgewicht zu stören. Nähme man aber von allen Intensitäten z. B. die Hälfte, und bestände nunmehr nicht Gleichgewicht; so denke man sich das System als zusammengesetzt aus zweien, die über einander liegen und einander genau decken, überhaupt aber ganz gleich sind, und an deren jedem die Kräfte von den halben Intensitäten wirken, welche, nach der Voraussetzung, nicht im Gleichgewichte sind. Die Kräfte ertheilen mithin jedem Systeme eine gewisse Bewegung, und offenbar beiden dieselbe; diese Bewegungen stören auch einander gar nicht, sondern die Systeme begleiten einander nur fortwährend; man kann also beide eben so gut als ein einziges betrachten, an welchem mithin die Kräfte von den ursprünglichen ganzen Intensitäten einander nicht Gleichgewicht halten würden; dies ist aber gegen die Voraussetzung. Was hier von den doppelten und den halben Intensitäten gesetzt ist, läßt sich eben so leicht auf die n fachen Intensitäten oder die n ten Theile derselben anwenden, und gilt mithin auch allgemein für jede beliebige Aenderung der Intensitäten nach einem gemeinsamen Verhältnisse.

Wenn also an dem vorgelegten Systeme von vier Puncten Kräfte angebracht werden, deren Richtungen und Intensitäts-Verhältnisse den obigen Bedingungen genügen, und es bestände zwischen ihnen doch nicht Gleichgewicht; so gäbe es überhaupt gar keine Kräfte, die, an dem Systeme angebracht, einander Gleichgewicht hielten; was dem in §. 54. Bewiesenen widerstreitet.

56. Es sei ferner ein System von beliebig vielen Puncten gegeben, zwischen deren gegenseitigen Abständen eine Bedingungsgleichung Statt finde, nämlich

$$L = f(l, m, n, p, q, r, p' q' r', \cdots) = 0.$$

In dieser Gleichung bedeuten l, m, n die Abstände zwischen dreien der Puncte, nämlich A, B, C, ferner p, q, r die Entfernungen eines vierten (D) von diesen, eben so p', q', r' die eines fünften D' ebenfalls von A, B, C; u. s. f. Denn welche Gleichung zwischen den gegenseitigen Entfernungen der Puncte auch gegeben sei, so kann doch der Abstand zwischen je zwei Puncten, wie DD', ausgedrückt werden durch die Entfernungen derselben von drei anderen A, B, C, und die Abstände zwischen diesen A, B, C. Man kann also annehmen, daß in der Gleichung $L=0$ nur die Entfernungen der drei Puncte A, B, C von einander, und die jedes anderen von diesen dreien vorkommen. Ist n die Anzahl der Puncte des Systemes, so hat man auf diese Weise n—3 Tetraeder, wie DABC, D'ABC, u s. f. zu betrachten, welche das Dreieck ABC, dessen Seiten l, m, n sind, zur gemeinsamen Grundfläche haben. Man zerlege die Kräfte P, P' .. an D, D' .. beziehungsweise nach den Kanten p, q, r; p', q', r'; ... in die Componenten u, v, w; u', v', w'; ..., und bringe an den gemeinsamen Endpuncten A, B, C dieser Kanten die in jede derselben fallende Componente in ihrer Richtung und in entgegengesetzter an; also z. B. an dem Puncte A, in welchem p, p', .. zusammentreffen, die Kräfte +u und —u in der Richtung von p, +u' und —u' in der von p', u. s. f. Das Gleichgewicht wird nicht gestört, wenn sämmtliche Kanten unveränderlich werden; alsdann halten aber in jeder der Kanten p, q, r, p', q', r', ... die beiden gleichen und entgegengerichteten Componenten, wie z. B. u an D und —u an A, in der Kante p, einander Gleichgewicht; folglich muß auch zwischen den noch übrigen an A, B, C wirkenden Kräften Gleichgewicht bestehen. Diese sind u, u' .. an A, v, v' .. an B, w, w' .. an C, welche von D, D', .. nach diesen Puncten übergetragen sind; außer ihnen noch die an A, B, C wirkenden Kräfte (sie heißen Q, Q', Q''), welche mit den übrigen (P, P', ...) im Gleichgewichte sind. Es seien R, R', R'' die Resultanten von Q, u, u', .. an A, Q', v, v', .. an B, Q'', w, w', .. an C; so muß zwischen R, R', R'' Gleichgewicht bestehen; diese drei Kräfte müssen also in die Ebene des Dreieckes ABC fallen, und sich nach den Seiten l,

m, n desselben in je zwei gleiche und entgegengerichtete zerlegen lassen. Hieraus folgt, daß die Kräfte des Systemes, nämlich Q, Q', Q'', P, P', .., welche einander Gleichgewicht halten, und sich mithin überhaupt in je zwei gleiche und entgegengerichtete müssen zerlegen lassen, sich allemal auch auf diese bestimmte Weise, nämlich nach den Kanten der Tetraeder DABC, D'ABC, .. in je zwei gleiche und entgegengerichtete zerlegen lassen.

Diese Zerlegung vorausgesetzt, denke man sich die sämmtlichen nach D', D'', .. gerichteten Kanten, wie p', q', r'; p'', q'', r'' .. unveränderlich; es bleiben also nur noch die 6 Kanten l, m, n, p, q, r des Tetraeders DABC veränderlich. Die unveränderlichen Kanten sind für sich im Gleichgewichte, und stören die Bewegungen der Puncte D, A, B, C gar nicht; also muß auch an dem Tetraeder DABC, welches nunmehr als gänzlich frei zu betrachten ist, Gleichgewicht bestehen, und mithin müssen die in den Kanten desselben (l, m, n, p, q, r) wirkenden, einander paarweise gleichen und entgegengerichteten Kräfte sich verhalten, wie die Ableitungen der Function f(l, m, n, p, q, r, ...) nach l, m, n, p, q, r. Werden also die beiden gleichen und entgegengerichteten Kräfte in der Kante p durch $\lambda\frac{df}{dp}$ ausgedrückt, so sind die in den Kanten l, m, n, p, q, r wirkenden gleichen und entgegengerichteten Kräfte beziehungsweise gleich $\lambda\frac{df}{dl}$, $\lambda\frac{df}{dm}$, $\lambda\frac{df}{dn}$, $\lambda\frac{df}{dq}$, $\lambda\frac{df}{dr}$. Wendet man dieselben Betrachtungen auf das Tetrader D'ABC an, indem man sich jetzt p', q', r' als veränderlich, dagegen p, q, r als unveränderlich vorstellt, so müssen die nach den Kanten von D'ABC gerichteten Kräfte wieder den Ableitungen von f nach l, m, n, p', q', r' proportional sein; und da die Kräfte in den Kanten l, m, n dieselben sind, wie vorhin, nämlich $\lambda\frac{df}{dl}$, $\lambda\frac{df}{dm}$, $\lambda\frac{df}{dn}$; so sind auch die nach p', q', r' gerichteten Kräfte gleich $\lambda\frac{df}{dp'}$, $\lambda\frac{df}{dq'}$, $\lambda\frac{df}{dr'}$. U. s. f.

Werden diese Kräfte sämmtlich nach den Axen x, y, z zerlegt, so erhält man für die Componenten der Kraft P an dem Puncte D, dessen Coordinaten x, y, z seien, ganz wie in §. 55.,

$$X=\lambda\frac{dL}{dx},\ Y=\lambda\frac{dL}{dy},\ Z=\lambda\frac{dL}{dz}.$$

Eben so für die Componenten der Kraft P', an D', wenn x', y', z' die Coordinaten von D' sind:

$$X'=\lambda\frac{dL}{dx'},\ Y'=\lambda\frac{dL}{dy'},\ Z'=\lambda\frac{dL}{dz'}.$$

In dem Puncte A wirken nach den Kanten l, m, p, p', p'', ... die Kräfte $\lambda\frac{df}{dl}$, $\lambda\frac{df}{dm}$, $-\lambda\frac{df}{dp}$, $-\lambda\frac{df}{dp'}$, ... Die Componenten der Kraft $\lambda\frac{df}{dp}$ an D nach x, y, z sind, nach §. 55., $\lambda\frac{df}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}$, $\lambda\frac{df}{dp}\cdot\frac{dp}{dy}$, $\lambda\frac{df}{dp}\cdot\frac{dp}{dz}$; dieselben Componenten, aber mit entgegengesetzten Zeichen, gehören der in A nach der Richtung p wirkenden Kraft. Es seien x_0, y_0, z_0 die Coordinaten von A, x, y, z die von D, wie vorher, so ist

$$p^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,$$

folglich $\frac{dp}{dx}=\frac{x-x_0}{p}=-\frac{dp}{dx_0}$; eben so $\frac{dp}{dy}=-\frac{dp}{dy_0}$, $\frac{dp}{dz}=-\frac{dp}{dz_0}$.

Folglich sind die Componenten der an A nach der Richtung p wirkenden Kraft, nach Größe und Zeichen:

$$\lambda\frac{df}{dp}\cdot\frac{dp}{dx_0},\ \lambda\frac{df}{dp}\cdot\frac{dp}{dy_0},\ \lambda\frac{df}{dp}\cdot\frac{dp}{dz_0}.$$

Es seien noch x_1, y_1, z_1 die Coordinaten von B, x_2, y_2, z_2 die von C, und mithin

$$l^2=(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2$$
$$m^2=(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2+(z_0-z_2)^2,$$

so sind wiederum

$$\lambda\frac{df}{dl}\cdot\frac{dl}{dx_0},\ \lambda\frac{df}{dl}\cdot\frac{dl}{dy_0},\ \lambda\frac{df}{dl}\cdot\frac{dl}{dz_0}$$

die Componenten von $\lambda\frac{df}{dl}$ nach x, y, z; eben so $\lambda\frac{df}{dm}\cdot\frac{dm}{dx_0}$, ... die Componenten von $\lambda\frac{df}{dm}$ nach x, y, z; folglich erhält man überhaupt, wenn X_0, Y_0, Z_0 die Componenten nach x, y, z der Resultante aller an A wirkenden Kräfte bedeuten:

$$X_0=\lambda\left(\frac{df}{dl}\cdot\frac{dl}{dx_0}+\frac{df}{dm}\cdot\frac{dm}{dx_0}+\frac{df}{dp}\cdot\frac{dp}{dx_0}+\frac{df}{dp'}\cdot\frac{dp'}{dx_0}+\cdots\right)$$

oder $$X_0=\lambda\frac{dL}{dx_0},$$

und eben so $$Y_0=\lambda\frac{dL}{dy_0},\quad Z_0=\lambda\frac{dL}{dz_0}.$$

Auf gleiche Weise ergeben sich als Componenten der an B wirkenden Kraft:

$$X_1=\lambda\frac{dL}{dx_1},\ Y_1=\lambda\frac{dL}{dy_1},\ Z_1=\lambda\frac{dL}{dz_1};$$

und für den Punct C:

$$X_2=\lambda\frac{dL}{dx_2},\ Y_2=\lambda\frac{dL}{dy_2},\ Z_2=\lambda\frac{dL}{dz_2}.$$

Also sind überhaupt

$$\lambda\frac{dL}{dx},\ \lambda\frac{dL}{dy},\ \lambda\frac{dL}{dz}$$

die Componenten nach x, y, z, der an einem Puncte des Systems, dessen Coordinaten x, y, z sind, anzubringenden Kraft.

Oben ist vorausgesetzt, daß in der Gleichung $L=f(l,m,n,p,q,\ldots)=0$ nur einige der gegenseitigen Entfernungen der Puncte vorkommen, durch welche alle übrigen sich ausdrücken lassen. Wenn aber die Gleichung ursprünglich zwischen beliebigen oder zwischen allen Entfernungen ohne Unterschied gegeben ist, und nun die Entfernungen durch Coordinaten ausgedrückt werden, so erhält man eine Bedingungsgleichung zwischen den Coordinaten der Puncte, die ganz einerlei sein muß mit derjenigen, welche man nach Elimination einiger Entfernungen zwischen den Coordinaten erhalten würde. Denn es sei z. B. ϱ der Abstand zwischen D und D', und die gegebene Gleichung sei:

$$L=f(l, m, n, p, q, r, p', q', r', \varrho \cdots)=0.$$

Der Abstand ϱ läßt sich durch die Abstände der Puncte D und D' von A, B, C und die Seiten l, m, n des Dreiecks ABC ausdrücken; also ist

$$\varrho=\varphi(l, m, n, p, q, r, p', q', r'),$$

wo φ eine gewisse Function ist, die hier nicht weiter gesucht wird.

Wenn man nun alle Entfernungen l, m, n, ... r' durch Coordinaten ausdrückt, so giebt die vorstehende Function φ den Ausdruck von ϱ in Coordinaten; dieser aber kann kein anderer sein als der bekannte:

$$\varrho=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2};$$

folglich ergiebt sich durch Einführung der Function φ in die Gleichung L=0, keine andere Gleichung in Coordinaten, als wenn man in der Gleichung L=0 sofort alle Abstände durch Coordinaten ausdrückt, ohne einen derselben zu eliminiren.

Da es nun nach dem Obigen, um die Componenten der an einem Puncte anzubringenden Kraft, nach den Axen x, y, z, auszudrücken, nur auf die Ableitungen von L nach den Coordinaten dieses Punctes ankommt; so folgt, daß man nicht nöthig hat, an der ursprünglichen Bedingungsgleichung L=0, zwischen den gegenseitigen Entfernungen der Puncte, irgend eine Veränderung vorzunehmen; sondern daß vielmehr die Ableitungen von L nach den Coordinaten jedes Punctes, multiplicirt in einen für alle Puncte unveränderlichen, sonst aber beliebigen Coefficienten λ, die Componenten der an dem Puncte anzubringenden Kraft ausdrücken. Und werden an dem Systeme solche Kräfte angebracht,

so muß nothwendig Gleichgewicht bestehen, welcher Werth auch dem Coefficienten λ beigelegt worden sei; wie in §. 54. erläutert worden.

57. Finden mehrere Bedingungsgleichungen zwischen den gegenseitigen Entfernungen der Puncte Statt, nämlich L=0, M=0 u. s. f.; so kann man erstens an dem Systeme Kräfte anbringen, deren Componenten $\lambda\frac{dL}{dx}$, $\lambda\frac{dL}{dy}$, $\lambda\frac{dL}{dz}$ sind, und die einander Gleichgewicht halten, weil die Gleichung L=0 Statt findet. Eben so kann man Kräfte von den Componenten $\mu\frac{dM}{dx}$, $\mu\frac{dM}{dy}$, $\mu\frac{dM}{dz}$ anbringen, die wieder wegen der Gleichung M=0, unter einander im Gleichgewichte sind; u. s. f. Also besteht überhaupt Gleichgewicht zwischen Kräften, deren Componenten sind:

$$\lambda\frac{dL}{dx}+\mu\frac{dM}{dx}+\cdots,\quad \lambda\frac{dL}{dy}+\mu\frac{dM}{dy}+\cdots,\quad \lambda\frac{dL}{dz}+\mu\frac{dM}{dz}+\cdots.$$

Diese Kräfte sind, wie man sieht, die Resultanten von denjenigen, welche wegen jeder einzelnen Bedingung zum Gleichgewichte erfordert werden. Um anzusehen, daß **nur** diese an dem Systeme einander Gleichgewicht halten können, denke man sich alle Bedingungen bis auf eine z. B. L=0, hinweg, zugleich aber an der Stelle von jenen passende Kräfte angebracht, welche das Gleichgewicht ungestört erhalten; was offenbar möglich ist. Alsdann besteht nur noch die Bedingung L=0, vermöge deren nur Kräfte von den Componenten $\lambda\frac{dL}{dx}$, ... an dem Systeme im Gleichgewichte sein können. Also erfordert jede einzelne Gleichung zum Gleichgewichte immer die nämlichen Kräfte, als wenn sie allein vorhanden wäre; daher müssen, wie unmittelbar folgt, bei mehreren Bedingungen die Kräfte, welche im Gleichgewichte sind, Resultanten von solchen sein, wie sie jede einzelne Bedingung fordert; w. z. b. w.

58. Nun stelle man sich vor, daß einige von den Puncten des Systemes **unbeweglich** werden; so ist das System nicht mehr frei wie bisher, das Gleichgewicht besteht aber fort zwischen den nämlichen Kräften, welche so eben angegeben wurden. Die an den unbeweglichen Puncten vorhandenen Kräfte sind jedoch nunmehr nur Widerstände, welche diese Puncte dem auf sie ausgeübten Drucke der übrigen Kräfte entgegensetzen. Sieht man daher von denselben ab, so besteht das Gleichgewicht an den übrigen Puncten unter Kräften, deren Componenten sind: $\lambda\frac{dL}{dx}+\mu\frac{dM}{dx}+\cdots$, u. s. w., wie oben; dasselbe kommt jedoch nur vermittelst der Widerstände jener unbeweglichen Puncte zu Stande. Indem man alsdann in den Gleichungen zwischen den gegenseitigen Entfernungen, nämlich $L=0$, $M=0, \cdots$ die Coordinaten der unbeweglichen Puncte, als bloße Constanten, außer Acht läßt, gehen dieselben in irgend welche Gleichungen zwischen den Coordinaten der beweglichen Puncte des Systemes über. Umgekehrt, wenn eine Gleichung zwischen den Coordinaten der beweglichen Puncte gegeben ist, welche sich nicht auf eine Gleichung zwischen den gegenseitigen Entfernungen dieser Puncte zurückführen läßt, so kann man sich immer die gegenseitigen Entfernungen der Puncte ausgedrückt denken als Functionen der Coordinaten dreier beliebig im Raume angenommener **unbeweglicher** Puncte, und der Abstände der beweglichen Puncte von diesen; und da die Coordinaten der unbeweglichen Puncte, als Constanten, nicht in Betracht kommen, so hat man wieder eine Gleichung zwischen den gegenseitigen Entfernungen aller Puncte, unter denen drei unbewegliche sich befinden. Also müssen die Kräfte an den beweglichen Puncten, welche an dem System im Gleichgewicht sind, sich eben so ausdrücken lassen, wie oben. Uebrigens hat man die Bedingungsgleichungen $L=0$, $M=0$, zwischen den Coordinaten zu nehmen wie sie sind, um aus ihnen die Ableitung $\frac{dL}{dx}$, u. s. f. zu entwickeln; denn wenn man zuerst die Coordinaten vermittelst der Entfernungen, und nachher wieder die Entfernungen durch die Coordinaten ausdrückt, so bleiben die Gleichungen zwischen den Coordinaten ganz die nämlichen, welche sie anfänglich waren, wie schon in §. 55. bemerkt worden.

Hiermit ist folgender allgemeine Lehrsatz der Statik bewiesen:

Wenn zwischen den Coordinaten der Puncte eines Systemes die Bedingungsgleichungen

$$L=0,\ M=0,\ N=0,\cdots$$

gegeben sind, so lassen die den Axen x, y, z parallelen Componenten von Kräften, welche, an dem Systeme gleichzeitig angebracht, einander Gleichgewicht halten, für irgend einen der Puncte, dessen Coordinaten x, y, z, sich immer ausdrücken wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} X&=\lambda\frac{dL}{dx}+\mu\frac{dM}{dx}+\nu\frac{dN}{dx}+\cdots\\ Y&=\lambda\frac{dL}{dy}+\mu\frac{dM}{dy}+\nu\frac{dN}{dy}+\cdots\\ Z&=\lambda\frac{dL}{dz}+\mu\frac{dM}{dz}+\nu\frac{dN}{dz}+\cdots\end{aligned}\right\}\quad a.$$

Diese Componenten sind mithin, für einen anderen Punct des Systemes, dessen Coordinaten x', y', z':

$$\left.\begin{aligned} X'&=\lambda\frac{dL}{dx'}+\mu\frac{dM}{dx'}+\nu\frac{dN}{dx'}+\cdots\\ Y'&=\lambda\frac{dL}{dy'}+\mu\frac{dM}{dy'}+\nu\frac{dN}{dy'}+\cdots\\ Z'&=\lambda\frac{dL}{dz'}+\mu\frac{dM}{dz'}+\nu\frac{dN}{dz'}+\cdots\end{aligned}\right\}\quad b.$$

U. s. f. für alle Puncte des Systemes.

59. Um aus diesen Gleichungen die Bedingungen des Gleichgewichtes irgend eines Systemes herzuleiten, muß man aus

denselben die unbestimmten Coefficienten $\lambda, \mu, \nu, \cdots$ eliminiren; die alsdann sich ergebenden Gleichungen zwischen den Coordinaten der Puncte und den Componenten der Kräfte sind die gesuchten Bedingungen.

Es sei z. B. ein freies festes System von n Puncten vorgelegt; so sind von den $\frac{n(n-1)}{2}$ gegenseitigen Entfernungen der Puncte $3n-6$ als gegeben anzusehen, durch welche alle übrigen bestimmt werden. Man hat also $3n-6$ Bedingungsgleichungen wie

$$L=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-a^2=0$$
$$M=(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2-a'^2=0$$
$$N=(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2-a''^2=0$$

u. s. f.

Der obige Lehrsatz giebt für jeden Punct drei, im Ganzen also $3n$ Gleichungen; in denselben kommen aber $3n-6$ unbestimmte Coefficienten $\lambda, \mu, \nu, \cdots$ vor, nach deren Elimination mithin 6 Bedingungen des Gleichgewichtes übrig bleiben. Um diese zu finden, bemerke man, daß z. B. $\frac{dL}{dx}=2(x-x')=-\frac{dL}{dx'}$, also $\frac{dL}{dx}+\frac{dL}{dx'}=0$, eben so $\frac{dM}{dx}+\frac{dM}{dx''}=0$, $\frac{dN}{dx'}+\frac{dN}{dx''}=0, \cdots$

Nun ist, nach obigem Satze:

$$X=\lambda\frac{dL}{dx}+\mu\frac{dM}{dx}+\nu\frac{dN}{dx}+\cdots$$
$$X'=\lambda\frac{dL}{dx'}+\mu\frac{dM}{dx'}+\nu\frac{dN}{dx'}+\cdots \qquad \text{a.}$$
$$X''=\lambda\frac{dL}{dx''}+\mu\frac{dM}{dx''}+\nu\frac{dN}{dx''}+\cdots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$X^{(n-1)}=\lambda\frac{dL}{dx^{(n-1)}}+\mu\frac{dM}{dx^{(n-1)}}+\nu\frac{dN}{dx^{(n-1)}}+\cdots$$

Addirt man alle diese Gleichungen, und bemerkt, daß $\frac{dL}{dx}+\frac{dL}{dx'}=0$, alle übrigen Ableitungen von L aber, wie $\frac{dL}{dx''}, \cdots$ sämmtlich Null sind, und daß Aehnliches für die Ableitungen von $M, N, \cdots$ gilt; so kommt $X+X'+X''+\cdots X^{(n-1)}=0$, oder $\Sigma X=0$. Auf gleiche Weise ergiebt sich $\Sigma Y=0$, $\Sigma Z=0$; hiermit sind also drei Bedingungen des Gleichgewichtes gefunden. Man schreibe noch:

$$Y=\lambda\frac{dL}{dy}+\mu\frac{dM}{dy}+\nu\frac{dN}{dy}+\cdots$$
$$Y'=\lambda\frac{dL}{dy'}+\mu\frac{dM}{dy'}+\nu\frac{dN}{dy'}+\cdots \qquad \text{b.}$$

u. s. w.,

multiplicire die Gleichungen a. der Reihe nach mit $y, y', y'', \cdots$, die b. mit $x, x', x'', \cdots$ und subtrahire die zweiten Producte von den ersten, so kommt

$$Xy-Yx+X'y'-Y'x'+\cdots=\Sigma(Xy-Yx)=\lambda l+\mu m+\nu n+\cdots,$$

in welcher Gleichung die zur Abkürzung eingeführten Zeichen $l, m, n, \cdots$ folgende Werthe haben, die man sogleich findet, wenn man sich erinnert, daß $\frac{dL}{dx''}=0$, $\frac{dL}{dy''}=0$, $\frac{dM}{dx'}=0$, $\frac{dM}{dy'}=0$, $\frac{dN}{dx}=0$, $\frac{dN}{dy}=0$, u. s. w.; nämlich

$$l=y\frac{dL}{dx}-x\frac{dL}{dy}+y'\frac{dL}{dx'}-x'\frac{dL}{dy'},$$
$$m=y\frac{dM}{dx}-x\frac{dM}{dy}+y''\frac{dM}{dx''}-x''\frac{dM}{dy''},$$
$$n=y'\frac{dN}{dx'}-x'\frac{dN}{dy'}+y''\frac{dN}{dx''}-x''\frac{dN}{dy''},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Da nun $\frac{dL}{dx}+\frac{dL}{dx'}=0$, $\frac{dL}{dy}+\frac{dL}{dy'}=0$, so ergiebt sich:

$$l=(y-y')\frac{dL}{dx}-(x-x')\frac{dL}{dy},$$

und weil $\frac{dL}{dx}=2(x-x')$, $\frac{dL}{dy}=2(y-y')$, so folgt offenbar $l=0$. Auf gleiche Weise erhält man $m=0$, $n=0$, u. s. f.; mithin

$$\Sigma(Yx-Xy)=0.$$

Auf dieselbe Art lassen sich auch die beiden Bedingungen $\Sigma(Zy-Yz)=0$, $\Sigma(Xz-Zx)=0$ herleiten; wodurch die sechs Bedingungen für das Gleichgewicht eines frei beweglichen festen Systemes auf's Neue, übereinstimmend mit §. 17., gefunden sind.

60. Aus den allgemeinen Formeln des §. 58. lassen sich die unbestimmten Coefficienten λ, μ, ν, .. auf eine allgemeine, von der Form der zwischen den Coordinaten der Puncte obwaltenden Gleichungen $L=0$, $M=0$,... ganz unabhängige Art eliminiren, wodurch ein für alle Systeme gültiger Satz erhalten wird, welche unter dem Namen des Satzes der virtuellen Geschwindigkeiten bekannt ist. Um denselben gehörig zu verstehen, ist erforderlich, einige Bemerkungen über die Bewegung vorauszuschicken, welche sich an die ersten §§. der Einleitung anschließen.

Wirken auf einen anfänglich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in gerader Linie fortgehenden Punct nach einander mehrere Kräfte in beliebigen Richtungen, so ertheilt jede dem Punct eine ihrer Intensität proportionale Geschwindigkeit, die sich mit der schon vorhandenen, nach der Regel des Parallelogrammes, in eine resultirende Geschwindigkeit zusammensetzt. Die Bahn des Punctes ist also im Allgemeinen eine von mehreren Geraden gebildete gebrochene Linie, und seine Geschwindigkeit, nach Richtung und Größe, in jedem Augenblicke gleich der Resultante aus der anfänglichen und den inzwischen durch die Kräfte ihm er-

theilten Geschwindigkeiten. Letzteres gilt unter allen Umständen; hier kommt es nun darauf an, den Ausdruck der Geschwindigkeit unter der Voraussetzung zu entwickeln, daß die Kräfte ununterbrochen oder stetig auf den Punct einwirken, und seine Geschwindigkeit in jedem unendlich kleine Zeittheile unendlich wenig verändern. Dieselbe ist alsdann stetig veränderlich, und kann nicht mehr, wie die gleichförmige, durch den in der Zeiteinheit durchlaufenen Weg gemessen werden; man findet aber ihr richtiges Maaß leicht auf folgende Art: Die den Axen x, y, z parallelen Componenten der Geschwindigkeit, zur Zeit t, seien u, v, w; nach Ablauf der Zeit dt, also zur Zeit $t+dt$, seien sie $u+du$, $v+dv$, $w+dw$; nach der Voraussetzung sind du, dv, dw unendlich klein, wenn dt unendlich klein ist. Man kann immer annehmen, daß die den Axen parallelen Componenten der sämmtlichen Kräfte, welche in der Zeit dt auf den Punct wirken, nach jeder Axe in einerlei Sinne wirken, und mithin die Geschwindigkeit nach jeder Axe in der Zeit dt entweder beständig vermehren oder beständig vermindern. Denn fände in dieser Zeit ein Wechsel zwischen Ab- und Zunahme in Bezug auf eine der Geschwindigkeiten u, v, w Statt, so könnte man dt kleiner als zuvor und klein genug annehmen, um denselben auszuschließen. Bezeichnet nun dx den in der Zeit dt nach der Richtung der x durchlaufenen Weg, also die Projection des von dem Puncte in dieser Zeit durchlaufenen Weges auf die Axe x, so ist klar, daß derselbe lediglich durch die mit x parallelen, von u bis $u+du$ stetig zu- oder abnehmenden Componenten der Geschwindigkeit des Punctes bedingt wird. Bliebe die Geschwindigkeit nach x während der Zeit dt beständig gleich u, so würde der durchlaufene Weg gleich udt sein; wäre dagegen die Geschwindigkeit während dieser Zeit dt beständig gleich $u+du$, so wäre $(u+du)dt$ der durchlaufene Weg. Da aber die Geschwindigkeit von u bis $u+du$ beständig wächst oder beständig abnimmt, so liegt auch der durchlaufene Weg dx nothwendig zwischen den Grenzen udt

und $(u+du)dt$; folglich liegt auch der Quotient $\frac{dx}{dt}$ zwischen u und $u+du$. Da nun der Unterschied du zwischen diesen beiden Grenzen, nach der Voraussetzung, kleiner wird als jede beliebige Größe, indem dt sich der Null nähert, so folgt, daß u genau gleich ist dem Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}$, oder der Ableitung der Abscisse (x) des Punctes, zur Zeit t, welche offenbar irgend eine Function der Zeit ist, nach t.

Bei dieser Herleitung wurden u und der in der Zeit dt durchlaufene Weg dx zunächst nur positiv gedacht, folglich ist auch unter $\frac{dx}{dt}$ zunächst nur der positive Werth der Ableitung von x nach t zu verstehen; es ist aber klar, daß auch das Zeichen dieser Ableitung wesentliche Bedeutung hat. Setzt man die Ableitung $\frac{dx}{dt}$ mit ihrem Zeichen gleich u, so erhält man den Werth von u positiv oder negativ, je nachdem die Abscisse x mit wachsender Zeit zunimmt oder abnimmt; oder je nachdem die Projection des bewegten Punctes auf die Axe x sich von dem Anfange der Coordinaten entfernt oder demselben nähert. In der Folge wird unter $\frac{dx}{dt}$ immer die Geschwindigkeit nach x mit ihrem Zeichen verstanden.

Auf gleiche Weise erhält man $v=\frac{dy}{dt}$, $w=\frac{dz}{dt}$, als Componenten der Geschwindigkeit nach y und z; mithin ist die resultirende Geschwindigkeit, wenn die Axen x, y, z senkrecht gegeneinander gedacht werden,

$$\sqrt{u^2+v^2+w^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

oder $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=ds$ gesetzt,

$$\sqrt{u^2+v^2+w^2}=\frac{ds}{dt}.$$

Es seien α, β, γ, die Winkel, welche die Richtung der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ mit den Axen x, y, z bildet; so sind die Componenten $u=\frac{ds}{dt}\cos\alpha$, $v=\frac{ds}{dt}\cos\beta$, $w=\frac{ds}{dt}\cos\gamma$; in welchen Ausdrücken $\frac{ds}{dt}$ als positiv gedacht werde. Demnach ist $\frac{ds}{dt}\cos\alpha=\frac{dx}{dt}$, folglich $\cos\alpha=\frac{dx}{ds}$, und eben so $\cos\beta=\frac{dy}{ds}$, $\cos\gamma=\frac{dz}{ds}$. Diese Ausdrücke zeigen, daß die Richtung der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ in die Tangente der Bahn des Punctes fällt. Mit dieser Geschwindigkeit würde der Punct in der Richtung der Tangente gleichförmig fortgehen, wenn von einem gewissen Augenblicke an keine neuen Kräfte mehr auf ihn wirkten.

61. Man denke sich das vorgelegte System in irgend einer mit seinen Bedingungen verträglichen Bewegung begriffen; so sind die Coordinaten der verschiedenen Puncte überhaupt Functionen der Zeit t, welche aber für jeden Werth von t jenen Bedingungen:

$$L=0,\quad M=0,\quad N=0,\ldots$$

Genüge thun. Es müssen daher auch die Ableitungen von L, N, N, ... nach t beständig Null sein; mithin $\frac{dL}{dt}=0$, $\frac{dM}{dt}=0$, $\frac{dN}{dt}=0,\ldots$

Multiplicirt man nun die Gleichungen a. in §. 58. der Reihe nach mit $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, ferner b. mit $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$, und so fort für alle ähnlichen, den verschiedenen Puncten des Systemes entsprechenden Ausdrücke; addirt die Producte und bemerkt, daß der Ausdruck

$$\frac{dL}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{dL}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{dL}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}+\frac{dL}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dt}+\frac{dL}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dt}+\frac{dL}{dz'}\cdot\frac{dz'}{dt}+\cdots$$

oder in kürzerer Bezeichnung der Ausdruck

$$\Sigma\left(\frac{dL}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{dL}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{dL}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}\right)$$

nichts Anderes als $\frac{dL}{dt}$, und mithin gleich Null ist; und daß eben so:

$$\Sigma\left(\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{dM}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{dM}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}\right)=\frac{dM}{dt}=0, \quad \text{u. s. w.}$$

so erhält man

$$X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}+X'\frac{dx'}{dt}+Y'\frac{dy'}{dt}+Z'\frac{dz'}{dt}+\cdots=0$$

oder $$\Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)=0. \qquad \text{A.}$$

Es sei P die Intensität der an dem Puncte (x, y, z) wirkenden Kraft, $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit dieses Punctes, beide positiv genommen; so ist

$$P=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}, \qquad \frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}}.$$

Man setze noch $X=P\cos\alpha$, $Y=P\cos\beta$, $Z=P\cos\gamma$,

$$\frac{dx}{ds}=\cos a, \quad \frac{dy}{ds}=\cos b, \quad \frac{dz}{ds}=\cos c,$$

und $$\cos\alpha\cos a+\cos\beta\cos b+\cos\gamma\cos c=\cos\Theta,$$

so wird $$\frac{X\,dx+Y\,dy+Z\,dz}{dt}$$

$$=P\frac{ds}{dt}(\cos\alpha\cos a+\cos\beta\cos b+\cos\gamma\cos c)=P\frac{ds}{dt}\cdot\cos\Theta,$$

und die obige Gleichung A geht mithin in folgende über:

$$\Sigma\left(P\frac{ds}{dt}\cdot\cos\Theta\right)=0. \qquad \text{B.}$$

Diese Gleichung enthält nun den Satz der virtuellen Geschwindigkeiten, auf die einfachste Form gebracht. In derselben bezeichnet P die Intensität der auf den Punct (x, y, z) wirkenden Kraft, $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit dieses Punctes in irgend einem Augenblicke der vorausgesetzten Bewegung des Systemes (beide, P und $\frac{ds}{dt}$, sind *positiv* zu nehmen); ferner Θ den Winkel, welchen die Richtung der Kraft P mit der Richtung der Geschwindigkeit einschließt. Die Bewegung des Systemes ist schlechthin jede mögliche (nur durch die Bedingungen $\frac{dL}{dt}=0$, $\frac{dM}{dt}=0,\ldots$ eingeschränkt, mit denen sie immer verträglich sein muß); dieses wird durch den dafür gebräuchlichen Ausdruck *virtuelle* Bewegung einigermaßen angedeutet. Die Geschwindigkeit eines Punctes in dieser virtuellen Bewegung heißt seine virtuelle Geschwindigkeit, und das Product aus derselben in den Ausdruck $P\cos\Theta$ das *virtuelle Moment* der Kraft P, welches mithin gleich $P\cos\Theta\cdot\frac{ds}{dt}$ ist. Zerlegt man die Kraft P nach der Richtung der virtuellen Geschwindigkeit ihres Angriffspunctes und nach einer darauf senkrechten, so ist die erstere dieser beiden Componenten gleich $P\cos\Theta$; das virtuelle Moment ist mithin das Product aus der virtuellen Geschwindigkeit in die nach der Richtung derselben wirkende Componente der Kraft. Oder zerlegt man die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ nach der Richtung der Kraft P, und einer darauf senkrechten, so ist die erstere Componente $\frac{ds}{dt}\cdot\cos\Theta$; das virtuelle Moment ist mithin auch gleich dem Product aus der Kraft P in die nach der Richtung derselben geschätzte virtuelle Geschwindigkeit. Das virtuelle Moment ist positiv oder negativ, je nachdem die Neigung (Θ) der Kraft gegen die Richtung der virtuellen Geschwindigkeit spitz oder stumpf ist, oder je nachdem die in die Richtung der virtuellen Geschwindigkeit fallende Componente von P in dem Sinne dieser Geschwindigkeit oder demselben entgegen wirkt.

Der in der Gleichung B. enthaltene Satz läßt sich nun folgendermaßen aussprechen:

Denkt man sich ein System in irgend einer beliebigen, nur mit seinen Bedingungen verträglichen, Bewegung begriffen, und, indem es durch irgend eine Stellung hindurchgeht, gleichzeitig von Kräften getroffen, zwischen denen Gleichgewicht besteht; so ist die Summe der virtuellen Momente aller dieser Kräfte Null.

Man kann auch aus der Formel B. oder vielmehr aus der ihr gleichgeltenden A. die allgemeinen Formeln des §. 58. herleiten, und damit beweisen, daß auch umgekehrt an dem in irgend einer zulässigen Stellung gedachten Systeme Gleichgewicht besteht, wenn für jede mögliche (virtuelle) Bewegung von dieser Stellung aus, die Summe der virtuellen Momente Null ist. Denn sei das System z. B. zweien Bedingungen $L=0$, $M=0$, unterworfen. Man hat nach A.

$$\Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)=0,$$

ferner $$\frac{dL}{dt}=\Sigma\left(\frac{dL}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dL}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dL}{dz}\frac{dz}{dt}\right)=0,$$

$$\frac{dM}{dt}=\Sigma\left(\frac{dM}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dM}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dM}{dz}\frac{dz}{dt}\right)=0.$$

Multiplicirt man die zweite dieser Gleichungen mit λ, die dritte mit μ und addirt die Producte zur ersten, so kommt:

$$\Sigma\left\{\left(X+\lambda\frac{dL}{dx}+\mu\frac{dM}{dx}\right)\frac{dx}{dt}+\left(Y+\lambda\frac{dL}{dy}+\mu\frac{dM}{dy}\right)\frac{dy}{dt}+\left(Z+\lambda\frac{dL}{dz}+\mu\frac{dM}{dt}\right)\frac{dz}{dt}\right\}=0.$$

Man bestimme die beiden Coefficienten λ, μ so, daß sei

$$X+\lambda\frac{dL}{dx}+\mu\frac{dM}{dx}=0,\quad Y+\lambda\frac{dL}{dy}+\mu\frac{dM}{dy}=0; \qquad \text{a.}$$

so fallen aus der obigen Gleichung die Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ heraus, und alle übrigen, wie $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$, ... sind gänzlich beliebig. Denn zwischen diesen sämmtlichen Geschwindigkeiten finden nur zwei Gleichungen $\frac{dL}{dt}=0$, $\frac{dM}{dt}=0$ Statt, so daß zwei von ihnen durch die übrigen, ganz willkürlich bleibenden, bedingt werden. Es kann aber die obige Gleichung, nunmehr verwandelt in

$$\left(Z+\lambda\frac{dL}{dz}+\mu\frac{dM}{dz}\right)\frac{dz}{dt}+\left(X'+\lambda\frac{dL}{dx'}+\mu\frac{dM}{dx'}\right)\frac{dx'}{dt}+\cdots=0,$$

für ganz beliebige Werthe von $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, ... nicht anders bestehen, als wenn ist:

$$Z+\lambda\frac{dL}{dz}+\mu\frac{dM}{dz}=0,\quad X'+\lambda\frac{dL}{dx'}+\mu\frac{dM}{dx'}=0,\quad \text{u. s. w.} \qquad \text{b.}$$

Schreibt man $-\lambda$, $-\mu$ anstatt λ, μ, so werden die Gleichungen a und b ganz einerlei mit denen des §. 58; diese folgen also aus dem Satze der virtuellen Geschwindigkeiten, w. z. b. w. Daß man bei jeder beliebigen Anzahl von Bedingungen eben so verfahren kann, bedarf keines Beweises.

62. Um von dem Satze der virtuellen Geschwindigkeiten einige Anwendungen zu machen, nehme man an, daß auf ein gegebenes System Kräfte von unveränderlichen Intensitäten wirken, deren Richtungen durch gegebene unbewegliche Puncte gehen. Es sei P eine dieser Kräfte, B ihr Angriffspunct, A der unbewegliche Punct in ihrer Richtung; der Abstand $AB=r$; x, y, z die Coordinaten von B, a, b, c die von A. Die Componenten von P sind

$$X = \pm P\left(\frac{x-a}{r}\right),\ Y = \pm P\left(\frac{y-b}{r}\right),\ Z = \pm P\left(\frac{z-c}{r}\right).$$

Je nachdem die Kraft P ihren Angriffspunct B gegen den unbeweglichen Punct A hinzieht oder von ihm abstößt, muß in vorstehenden Ausdrücken das eine oder das andere Zeichen genommen werden. Nun hat man nach der Formel A. in §. 61., wenn Gleichgewicht besteht

$$\Sigma \pm P\frac{((x-a)dx+(y-b)dy+(z-c)dz)}{rdt} = 0,$$

oder, weil $(x-a)dx+(y-b)dy+(z-c)dz = rdr$, mit Weglassung von dt,

$$\Sigma \pm P\, dr = 0.$$

Die Stellungen des Gleichgewichtes sind also solche, bei welchen in Bezug auf die Werthe der Function $\Sigma \pm Pr$ das eintritt, was in §. 33. des ersten Theiles ein augenblicklicher Stillstand genannt worden ist, indem für diese Stellungen die Ableitung jener Function Null wird. Dabei findet in der Regel in Bezug auf die Function $\Sigma \pm Pr$ ein Wechsel zwischen Ab- und Zunahme, also ein größter oder kleinster Werth Statt; doch müssen diese Umstände in jedem einzelnen Falle näher untersucht werden. Uebrigens gilt in der Formel $\Sigma \pm Pr$ das eine, z. B. wenn man will, das positive Vorzeichen von r für Kräfte, welche ihre Angriffspuncte gegen die unbeweglichen Puncte hinziehen; für abstoßende Kräfte dagegen das andere Zeichen.

In diesem Falle ist, wie man sieht, der Ausdruck $\Sigma(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$ unmittelbar integrabel. Dieses findet auch Statt, wenn die Intensitäten der nach festen Puncten gerichteten Kräfte P, P' ... nicht constant, sondern beliebige Functionen der Abstände r, r', .. ihrer Angriffspuncte von jenen festen Puncten sind. Es sei $P = \varphi r$, $P' = \varphi_1 r'$, u. s. f., so wird für das Gleichgewicht

$$\pm \varphi r \cdot dr \pm \varphi_1 r' \cdot dr' \cdots = 0,$$

also im Allgemeinen die Function $\Sigma \pm \int \varphi r\, dr$ ein Maximum oder Minimum. In diesem Ausdrucke kann man wieder die oberen Zeichen für anziehende, die unteren für abstoßende Kräfte nehmen.

Der Ausdruck $\Sigma(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$ ist auch noch integrabel, wenn die Kräfte in gegenseitigen Anziehungen oder Abstoßungen zwischen den beweglichen Puncten des Systemes bestehen, deren Intensitäten Functionen der Entfernungen sind. Denn es seien x, y, z die Coordinaten des Punctes A, x', y', z' die von B; r die Entfernung AB, und fr die gegenseitige Wirkung zwischen A und B; so sind die Componenten der Kraft fr an A

$$X = fr\left(\frac{x-x'}{r}\right),\ Y = fr\left(\frac{y-y'}{r}\right),\ Z = fr\left(\frac{z-z'}{r}\right),$$

und die der Kraft an B, welche der vorigen gleich und entgegengerichtet ist,

$$X' = fr\left(\frac{x'-x}{r}\right),\ Y' = fr\left(\frac{y'-y}{r}\right),\ Z' = fr\left(\frac{z'-z}{r}\right);$$

mithin erhält man, weil

$$(x-x')(dx-dx')+(y-y')(dy-dy')+(z-z')(dz-dz') = rdr,$$

$$Xdx+Ydy+Zdz+X'dx'+Y'dy'+Z'dz' = fr \cdot dr.$$

Folglich ist überhaupt die Summe $\Sigma(X\,dx+\cdot\cdot) = \Sigma fr\,dr$, und mithin wieder integrabel; auch ist ihr Integral, wenn Gleichgewicht besteht, im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum, wie in den vorigen Fällen.

63. Bemerkenswerth ist die Anwendung des Satzes der virtuellen Geschwindigkeiten auf solche Fälle, in denen die Kräfte mit unveränderlichen Intentensitäten in unveränderlichen Richtungen an ihren Angriffspuncten haften, in welcher Stellung das System sich auch befinde. In der Gleichung A. des §. 61. sind alsdann die Größen X, Y, Z beständig. Setzt man $X = P\cos\alpha$, $Y = P\cos\beta$, $Z = P\cos\gamma$, so wird dieselbe

$$\Sigma P(\cos\alpha \cdot dx + \cos\beta \cdot dy + \cos\gamma \cdot dz) = 0,$$

also ist in diesem Falle, für das Gleichgewicht, die Function

$$\Pi = \Sigma P(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)$$

im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum. Man denke sich ein beliebiges, aber nicht freies System, und es sei die Mittelkraft R aus allen P, P' .., welche in allen Stellungen des Systemes nach Richtung und Größe die nämliche bleibt, nicht Null; ferner wähle man die Axe der x ihr parallel. Alsdann ist $\Sigma P\cos\alpha = R$, $\Sigma P\cos\beta = 0$, $\Sigma P\cos\gamma = 0$. Nun projicire man die Kräfte und Puncte des Systemes, in irgend einer Stellung gedacht, auf die Ebene xy, so erhält man ein System von Kräften in dieser Ebene, deren Mittelkraft wieder gleich R, also nicht Null ist, und welche mithin einen Mittelpunct haben. Um die Coordinaten desselben zu finden, verfahre man wie §. 20. Die Kräfte in der Ebene x, y, sind $P\cos\alpha$, $P'\cos\alpha'$, .. parallel mit x, $P\cos\beta$, $P'\cos\beta'$ ... parallel mit y; die Coordinaten des gemeinsamen Angriffspunctes von $P\cos\alpha$ und $P\cos\beta$ sind x, y; u. s. f. für die übrigen.

Bei Aufsuchung des Mittelpunctes muß man sich vorstellen, daß die Kräfte in der Ebene xy sich um ihre Angriffspuncte drehen. Man setze, weil $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 = 1 - \cos\gamma^2 = \sin\gamma^2$ ist, $\cos\alpha = \sin\gamma\cos\varepsilon$, $\cos\beta = \sin\gamma\sin\varepsilon$; so ist ε die Neigung der Kraft $P\sin\gamma$, d. i. der Projection von P auf die Ebene xy, gegen die Axe x; welche Neigung allein bei der Drehung sich ändert, während γ ungeändert bleibt. Eben so sei $\cos\alpha' = \sin\gamma'\cos\varepsilon'$, $\cos\beta' = \sin\gamma\sin\varepsilon'$; u. s. f. Nennt man nun ψ die Neigung der Resultante gegen die Axe x, nach einer gewissen Drehung der Kräfte, durch welche zugleich die Winkel ε, ε', .. in $\varepsilon+\psi$, $\varepsilon'+\psi$, .. übergehen, und werden die Coordinaten des Mittelpunctes durch a, b bezeichnet, so hat man, nach §. 20.,

$$R(b\cos\psi - a\sin\psi) = \Sigma P\sin\gamma(y\cos(\psi+\varepsilon) - x\sin(\psi+\varepsilon)).$$

Hieraus folgt, wie in §. 20.

$$Ra = \Sigma P\sin\gamma(x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon)$$

$$Rb = \Sigma P\sin\gamma(y\cos\varepsilon - x\sin\varepsilon),$$

oder weil $\cos\alpha = \sin\gamma\cos\varepsilon$, $\cos\beta = \sin\gamma\sin\varepsilon$, u. s. w.

$$Ra = \Sigma P(x\cos\alpha + y\cos\beta)$$

$$Rb = \Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta).$$

Projicirt man die Kräfte eben so auf die Ebene xz, so erhält man wieder einen Mittelpunct. Bezeichnet man die Coordinaten desselben mit a', c', so ist

$$Ra' = \Sigma P(x\cos\alpha + z\cos\gamma)$$

$$Rc' = \Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma).$$

Folglich ist

$$\Pi = \Sigma P(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = R(a+a') - \Sigma Px\cos\alpha.$$

Setzt man $\Sigma Px\cos\alpha = a''\Sigma P\cos\alpha = Ra''$, so ist offenbar a'' die Abscisse des Schwerpunctes der mit x, also mit der Mittelkraft parallelen Componenten der Kräfte; d. h. a'' ist die Abscisse des Centralpunctes; und

$$\Pi = R(a + a' - a'').$$

Denkt man sich nun an jedem der beiden Mittelpuncte in den Ebenen xy und xz die Kraft R in ihrer Richtung, und am Centralpuncte dieselbe Kraft in gerade umgekehrter Richtung angebracht, und wird die Abscisse des Schwerpunctes dieser drei parallen Kräfte mit x_1 bezeichnet, so ist offenbar $x_1 = a + a' - a''$, und mithin $\Pi = Rx_1$.

Man bemerke noch, daß der Werth von Π sich auch so ausdrücken läßt: $\Pi = \Sigma P\int\cos\Theta ds$, weil $d\Pi = \Sigma P(\cos\alpha \cdot dx + ..) = \Sigma P\cos\Theta ds$ ist (§. 61.). Offenbar ist aber $\int\cos\Theta \cdot ds$ die Projection des von dem Angriffspuncte der Kraft P durchlaufenen Weges auf die (unveränderliche) Richtung der Kraft P, so wie x_1 die Projection des von jenem Schwerpuncte durchlaufenen Weges auf die Richtung der Mittelkraft ist; und die Bedeutung der Gleichung $\Pi = Rx_1 = \Sigma P\int\cos\Theta ds$ läßt sich mithin folgendermaßen aussprechen:

Denkt man sich ein System, an welchem Kräfte von unveränderlichen Richtungen und Intensitäten wirken, deren Mittelkraft R nicht Null ist, durch eine mit seinen Bedingungen verträgliche Bewegung aus irgend einer Stellung in eine andere gelangend, so ist das Product aus der Intensität der Mittelkraft in die Verschiebung eines gewissen Punctes, der sich in jeder Stellung des Systemes construiren läßt, nach der Richtung jener Kraft, gleich der Summe der Produkte aus jeder Kraft in die Verschiebung ihres Angriffspunctes, nach der Richtung der Kraft. Jener Punct aber wird gefunden, wenn man das System auf zwei gegen einander senkrechte, der Kraft R parallele Ebenen projicirt, an jedem der Mittelpuncte beider Projectionen diese Kraft in ihrer Richtung, zugleich am Centralpuncte dieselbe Kraft in umgekehrter Richtung anbringt, und von den drei parallelen Kräften (R, R, —R) den Schwerpunct sucht.

In den Stellungen des Gleichgewichtes (solche giebt es jedoch, weil die Mittelkraft nicht Null ist, nur dann, wenn das System nicht frei ist) ist die Verschiebung dieses Schwerpunctes, nach der Richtung der Mittelkraft, im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum.

Ist dagegen die Mittelkraft Null, so kann man nur sagen, daß in jeder Stellung des Gleichgewichtes die Summe der Producte aus jeder Kraft in die Verschiebung ihres Angriffspunctes nach der Richtung der Kraft, im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum ist. Dieser Fall bleibt im Folgenden, wie bisher, ausgeschlossen.

Sind insbesondere die Kräfte alle einer Ebene (sie sei xy) parallel, so erhält man,

$$\Pi = \Sigma P(x\, cos\,\alpha + y\, cos\,\beta)$$

weil $cos\,\gamma = 0$, $cos\,\gamma' = 0$, u. s. f. Der vorstehende Ausdruck bezieht sich auf den Mittelpunct, welcher durch Projection der Kräfte auf die ihnen parallele Ebene xy erhalten wird; die Verschiebung desselben nach der Richtung der Mittelkraft, oder sein Abstand von einer auf dieser Richtung senkrechten unveränderlichen Ebene ist also, in jeder Stellung des Gleichgewichtes, im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum.

Um diesen Satz an einem möglichst einfachen Beispiele anschaulich zu machen, sei ABCD (Fig. 39.) ein biegsames Vieleck, dessen Endpuncte A, D unbeweglich oder auf zwei in einer und derselben Ebene befindlichen Curven aa′, dd, beweglich sind, und dessen Spitzen B, C sich ebenfalls von dieser Ebene nicht entfernen können. Auf die Puncte B, C wirken zwei nach Richtungen und Intensitäten unveränderlich gegebene Kräfte P, Q, beide in der Ebene des Vieleckes, deren Mittelkraft nicht Null sei. Diese ist mithin nach Richtung und Intensität ebenfalls unveränderlich. In der Ebene des Vieleckes ziehe man eine beliebige, aber unveränderliche Gerade (sie sei KN), senkrecht auf der Richtung der Mittelkraft. Giebt man nun dem Vielecke irgend eine Stellung, so wird man den Mittelpunct M der Kräfte P, Q auf die bekannte Weise construiren können, und wenn die Stellung diejenige des Gleichgewichtes ist, so ist der senkrechte Abstand des Mittelpunctes (MG) von der festen Geraden KN (in dem durch Fig. 39. dargestellten Falle) ein Maximum, oder mit anderen Worten, der Mittelpunct M ist, in der Stellung des Gleichgewichtes, in der Richtung der Mittelkraft möglichst weit vorgeschoben.

Sind endlich alle Kräfte einander parallel, so ist in dem obigen Werthe von Π auch noch $cos\,\beta = 0$, $cos\,\beta' = 0$, u. s. f., mithin $\Pi = \Sigma Px\, cos\,\alpha = \Sigma \pm Px$, weil $cos\,\alpha^2 = 1$, $cos\,\alpha'^2 = 1, \cdots$; also ist in diesem Falle der Abstand des Mittelpunctes der parallelen Kräfte von einer auf der Richtung der Mittelkraft senkrechten Ebene ein Maximum oder Minimum. Nach diesem Gesetze muß z. B. der Schwerpunct irgend eines nicht freien Systemes von schweren Puncten oder Körpern, wenn dieses in der Stellung des Gleichgewichtes ruhen soll, tiefer liegen als in jeder anderen. Derselbe könnte freilich, nach dem nämlichen Gesetze, auch so hoch als möglich liegen, weil jedoch das Gleichgewicht alsdann offenbar unsicher sein oder durch die kleinste Störung gänzlich aufgehoben werden würde; so kann ein Körper in der Natur, in welcher es niemals an störenden

Ursachen fehlt, in dieser Stellung nicht oder etwa nur mit Hülfe von Hindernissen, wie Reibung, in Ruhe bleiben.

Es mag hier noch gezeigt werden, wie sich aus diesem Gesetze die Gleichung der Kettenlinie, mit Hülfe der Variations-Rechnung, herleiten läßt. Es sei ds das Element eines gleichförmigen, schweren und biegsamen, in seinen Endpuncten befestigten Fadens; die Axe x sei horizontal, die y vertical; l sei die Länge des Fadens; u, v die Coordinaten seines Schwerpunctes; so hat man

$$l \cdot u = \int x\,ds, \quad l \cdot v = \int y\,ds.$$

Nach dem obigen Gesetze muß nun $\int y\,ds$ ein Maximum sein; daher hat man, indem zugleich die Bedingung $\int ds = l$ gegeben ist, nach den Regeln der Variations-Rechnung (vgl. §. 160. I.)

$$\delta \int y\,ds + h\,\delta \int ds = 0,$$

oder $\delta \int (y+h)\,ds = 0$; mithin $\int (\delta y \cdot ds + (y+h)\,\delta ds) = 0$.

Nun ist $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; also $\delta ds = \frac{dy\,\delta dy}{ds}$; mithin

$$\int \left(ds \cdot \delta y + (y+h) \frac{dy}{ds} d\,\delta y \right) = 0.$$

Hieraus folgt durch theilweise Integration, wobei die außerhalb des Integralzeichens fallenden Glieder nach den bekannten Regeln verschwinden,

$$\int \left[ds - d\left((y+h) \frac{dy}{ds} \right) \right] \delta y = 0;$$

die Gleichung der Curve ist daher $ds - d\left((y+h) \frac{dy}{ds} \right) = 0$; oder integrirt:

$$s + k = (y+h) \frac{dy}{ds}.$$

Nimmt man den Anfang der Coordinaten im tiefsten Puncte, so wird für $x=0$, $y=0$, zugleich $\frac{dy}{ds} = 0$, $s = 0$; folglich $k = 0$; und mithin durch weitere Integration, da $s = 0$ sein muß für $y = 0$,

$$s^2 + h^2 = (y+h)^2.$$

Vertauscht man die Buchstaben y und h mit x und Θ, so erhält man $s^2 + \Theta^2 = (x + \Theta)^2$, wie in §. 42.

64. Man denke sich noch einen schweren und magnetischen Körper, wie in §. 38. Die magnetische Kraft wird hier, wie an jener Stelle, ohne Rücksicht auf die Variationen, welchen sie bekanntlich unterworfen ist, als unveränderlich betrachtet. Soll dieser Körper in einem Puncte A befestigt, in Ruhe bleiben, so müssen die an ihm wirkenden Kräfte sich durch eine einzige ersetzen lassen, deren Richtung durch den Befestigungspunct geht. Das an der Centralaxe wirkende magnetische Paar muß mithin mit der Resultante der Schwerkräfte am Schwerpuncte in einer durch A gehenden Ebene liegen. Es sei ABD diese Ebene (Fig. 40.), BD die Centralaxe, D der Schwerpunct; die verticale DP stelle das Gewicht des Körpers, (Bm, Dm') das magnetische Paar, MR die Resultante dar, welche parallel und gleich GP ist; so muß MR durch A und zugleich durch den Mittelpunct M der Kräfte des Systemes gehen, und der Punct M sich mithin in der durch A gehenden Verticalen befinden. Diese Bemerkung liefert ebenfalls ein Beispiel zu dem Satze des vorigen §. in Bezug auf Kräfte, die einer Ebene parallel sind; der Leser wird sich dasselbe bei einigem Nachdenken selbst genauer zu erläutern im Stande sein. Wenn blos von der Stellung des sicheren Gleichgewichtes die Rede ist, so muß M u n t e r A und u n t e r der Centralaxe liegen. Der Punct M ist einer der beiden Durchschnitte des Centralkreises mit der Ebene ABD. Würde der Körper in einem anderen, ebenfalls oberhalb BD in der Ebene ABD befindlichen Punct A' befestigt; so würde in der Stellung des sichern Gleichgewichtes wieder der nämliche Punct M in der Verticalen unter A' liegen. Dies giebt den Satz: Wird ein schwerer und magnetischer Körper nach einander in verschiedenen Puncten befestigt, die alle in einer und derselben durch die Centralaxe gehenden Ebene und auf derselben Seite dieser

Axe sich befinden; so trifft in der jedesmaligen Stellung des sicheren Gleichgewichtes die durch den Befestigungspunct gezogene Verticale immer einen und denselben Punct des Körpers, nämlich den auf der anderen Seite der Centralaxe liegenden Durchschnitt des Centralkreises mit jener Ebene.

Wenn man den Körper, anstatt in A, in M befestigt, so besteht ebenfalls Gleichgewicht, welches auch durch Drehung um eine durch M gehende auf der Ebene ABD senkrechte Axe nicht gestört wird. Der magnetische Körper wird mithin a s t a t i s c h, wenn man diese Axe unbeweglich macht.

Auch über den allgemeinsten Fall eines Systemes unveränderlicher Kräfte an einem festen Körper, in welchem eine Central-Ebene Statt findet, ließen sich ähnliche Betrachtungen anstellen, welche zu dem allgemeinen Satze des vorigen §. Beispiele liefern würden; diese müssen jedoch, beschränkten Raumes wegen, hier wegbleiben.

D y n a m i k.

Dynamik.

Bewegung eines Punctes.

65. Es seien P und P' die Intensitäten zweier Kräfte, welche demselben mateiriellen Puncte beziehungsweise die Geschwindigkeiten v und v' ertheilen, so hat man, weil die Kräfte den Geschwindigkeiten proportional sind, die Gleichung $\frac{P}{v} = \frac{P'}{v'}$, oder der Quotient $\frac{P}{v}$ ist, für denselben Punct, eine unveränderliche Größe, welche die *Masse* des Punctes genannt wird. Nach dieser Erklärung kommt die Einheit der Masse demjenigen Puncte zu, welchem die Einheit der Kraft die Einheit der Geschwindigkeit mittheilt. Die Einheit der Geschwindigkeit ist aber diejenige gleichförmige Geschwindigkeit, vermöge deren in der Zeiteinheit die Längeneinheit durchlaufen wird. Kennt man die Geschwindigkeit v', welche eine Kraft von bekannter Intensität P' einem Puncte ertheilt, so ergiebt sich die Masse m desselben aus der Gleichung $m = \frac{P'}{v'}$, und für jede beliebige Kraft P und entsprechende Geschwindigkeit v gilt, bei demselben Puncte, die Gleichung $P = mv$, aus welcher nunmehr wieder die Intensität irgend einer Kraft P gefunden wird, wenn die ihr entsprechende Geschwindigkeit v z. B. aus Beobachtung bekannt ist. Das Product aus der Masse eines Punctes in seine Geschwindigkeit heißt sein *Bewegungsmoment*. Ertheilt dieselbe Kraft P einem anderen Puncte von der Masse m_1 die Geschwindigkeit v_1, so ist wiederum $P = m_1 v_1$,

und mithin $m_1 v_1 = mv$; d. h. die Geschwindigkeiten, welche gleiche Kräfte zweien Puncten ertheilen, verhalten sich umgekehrt wie deren Massen, oder mit anderen Worten: gleiche Kräfte ertheilen allen Puncten gleiche Bewegungsmomente. Ueberhaupt aber sieht man, daß jedes Bewegungsmoment einer gewissen Kraft gleich gilt.

Die Kräfte in der Natur ändern die Geschwindigkeiten ihrer Angriffspuncte nie augenblicklich um endliche Größen, sondern die Aenderung der Geschwindigkeit einer unendlich kleinen Zeit ist immer unendlich klein, wenn gleich nicht selten, z. B. bei dem Stoße der Körper, große Aenderungen so rasch erfolgen, daß sie für augenblicklich gehalten werden. Kräfte, welche die Geschwindigkeiten ihrer Angriffspuncte, durch stetige Einwirkung, in einer unendlich kleinen Zeit unendlich wenig ändern, nennt man überhaupt beschleunigende Kräfte; die in der Natur vorhandenen sind solche. Da es aber in Bezug auf die zuletzt hervorgehende zusammengesetzte Geschwindigkeit eines Punctes einerlei ist, ob die Kräfte, welche dazu beitragen, gleichzeitig oder nach einander angebracht werden, so ist auch die Geschwindigkeit, welche ein Punct, durch die während einer beliebigen Zeit stetig fortdauernde Einwirkung beschleunigender Kräfte, am Ende dieser Zeit erhält, dieselbe, welche er auf einmal erhalten würde, wenn alle diese Kräfte gleichzeitig auf ihn wirkten. Man denke sich zunächst eine gleichförmig beschleunigende Kraft, d. h. eine solche, welche immer in derselben Richtung wirkt und ihrem Angriffspuncte in gleichen Zeiten immer gleiche Geschwindigkeiten ertheilt. Wirkt diese Kraft während der Zeiteinheit auf einen Punct, dessen Masse der Einheit gleich sein mag, und bezeichnet man mit X die Geschwindigkeit, welche der Punct nach Ablauf der Zeiteinheit durch sie erhalten hat, so drückt die Zahl X unmittelbar auch die Intensität der Resultante aus allen Elementarkräften aus, welche während der Dauer der Zeiteinheit auf den Punct wirkten, und in diesem Sinne ist sie das Maaß der Intensität der gleichförmig beschleunigenden Kraft. Theilt man

ferner die Zeiteinheit in n gleiche Theile, so ist $\frac{1}{n} \cdot X$ die Geschwindigkeit, welche der Punct durch die Einwirkung der Kraft während der Dauer eines solchen Theiles erhält, weil die Kraft seine Geschwindigkeit, nach der Voraussetzung, in gleichen Zeiten überhaupt um gleich viel ändert. Für ein unendlich großes n geht der nte Theil der Zeiteinheit ein unendlich kleines Zeitelement dt über, und mithin ist die Zunahme der Geschwindigkeit des Punctes, während der Zeit dt, gleich $X\,dt$. Stellt man sich also die Kraft parallel der Axe der x vor, und bezeichnet demgemäß (s. §. 60.) die dieser Axe parallele Geschwindigkeit des Punctes mit $\frac{dx}{dt}$, so wird die Zunahme dieser Geschwindigkeit in der Zeit dt durch $d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ ausgedrückt, und mithin erhält man $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = X\,dt$. Dieses gilt für die Einheit der Masse. Wirkt aber die Kraft X auf einen Punct, dessen Masse überhaupt gleich m ist, so ist $X\,dt$ nicht die Zunahme seiner Geschwindigkeit, sondern vielmehr die seines Bewegungsmomentes $\left(m\frac{dx}{dt}\right)$; mithin hat man alsdann: $md\left(\frac{dx}{dt}\right) = X\,dt$, oder, in so fern man t als unabhängige Veränderliche betrachtet, und mithin $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt}$ setzt,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X.$$

Diese Gleichung gilt auch, wenn die nach der Richtung der x wirkende beschleunigende Kraft nicht unveränderlich ist, wie bisher angenommen worden. Alsdann bedeutet in derselben X die Geschwindigkeit, welche die Kraft einem Puncte von der Einheit der Masse, wenn sie mit der nämlichen Intensität während der Dauer der Zeiteinheit auf ihn wirkte, am Ende dieser Zeit ertheilt haben würde, und diese Geschwindigkeit ist zugleich das Maaß der augenblicklichen Intensität der beschleunigenden Kraft. Diese Intensität ändert sich allerdings selbst während des Zeitelementes dt, so daß sie zu Anfange desselben gleich X, am Ende desselben aber gleich $X+dX$ ist. Denkt man sich dieselbe, wie angeht, während der Zeit dt beständig wachsend oder abnehmend, so leuchtet ein, daß die Zunahme, welche das Bewegungsmoment des Punctes in der Zeit dt erhält, d. i. der Ausdruck $m\frac{d^2x}{dt}$, zwischen den Grenzen Xdt und $(X+dX)dt$ enthalten ist; folglich liegt auch $m\frac{d^2x}{dt^2}$ zwischen X und $X+dX$, und mithin ist, für ein unendlich kleines dt, genau $m\frac{d^2x}{dt^2}=X$, wie behauptet wurde.

Der Ausdruck $\frac{d^2x}{dt^2}$ ist, wie man sieht, die Ableitung der Geschwindigkeit nach t. Derselbe kann das Maaß der Beschleunigung oder schlechthin die Beschleunigung genannt werden; er stellt die Zunahme der Geschwindigkeit dar, welche der Punct am Ende der Zeiteinheit erhalten haben würde, wenn die Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeit dt, nämlich $\frac{d^2x}{dt}$, während der ganzen Dauer der Zeiteinheit sich ununterbrochen gleichmäßig wiederholte.

Nennt man noch das Product aus der Masse in die Beschleunigung das Beschleunigungsmoment, so stellt die Gleichung $m\frac{d^2x}{dt^2}=X$ nur den aus dem Vorhergehenden von selbst einleuchtenden Satz dar: Das Beschleunigungsmoment ist der beschleunigenden Kraft, in jedem Augenblicke der Bewegung, gleich.

66. Man denke sich zwei beschleunigende Kräfte, beide nach der Richtung der x auf die Massen m und m' wirkend; ihre

Intensitäten seien X und X', so hat man $m\frac{d^2x}{dt^2}=X$, und $m'\frac{d^2x'}{dt^2}=X'$. Wenn man nun etwa durch Beobachtung findet, daß die Geschwindigkeiten beider Puncte immer gleichzeitig um gleich viel wachsen, so müssen offenbar die Beschleunigungen $\frac{d^2x}{dt^2}$ und $\frac{d^2x'}{dt^2}$ einander in jedem Augenblicke gleich sein; folglich muß auch $\frac{X}{m}=\frac{X'}{m'}$ sein; d. h. die Intensitäten der Kräfte müssen sich zu einander verhalten, wie die Massen ihrer Angriffspuncte.

Es sei insbesondere X eine gleichförmig beschleunigende Kraft, der Masse ihres Angriffspunctes proportional und der Axe x parallel wirkend; so ist $X=gm$, g eine beständige von m unabhängige Größe, und man hat, mit Weglassung des gemeinsamen Factors m, $\frac{d^2x}{dt^2}=g$. Hieraus folgt durch Integration $\frac{dx}{dt}=gt+\text{Const.}$ Um die Constante zu bestimmen, muß man die Geschwindigkeit des Punctes für irgend einen Augenblick kennen. Man nehme an, daß derselbe zur Zeit $t=0$ in Ruhe gewesen sei, so wird $\text{Const}=0$, und $\frac{dx}{dt}=gt$. Nimmt man ferner den Ort des Punctes zur Zeit $t=0$ zum Anfange der x, so folgt weiter $x=\frac{1}{2}gt^2$; d. h. die durchlaufenen Wege verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten. Die Geschwindigkeit des Punctes ist mithin am Ende der ersten Zeiteinheit gleich g; diese Zahl drückt zugleich die Intensität der beschleunigenden Kraft für die Einheit der Masse aus. Der in der ersten Zeiteinheit durchlaufene Weg ist $\frac{1}{2}g$. Bezeichnet man überhaupt die Geschwindigkeit mit v, so ist $v=gt$, und da zugleich $2x=gt^2$, so folgt $2gx=v^2$.

Genaue Beobachtungen haben gelehrt, daß in Folge der Schwere alle Körper, wenn ihr Fall durch keine andere Kraft gehemmt wird, an demselben Orte auf der Erdoberfläche, in gleichen Zeiten um gleiche Höhen fallen; hieraus folgt, daß die Intensität, mit welcher die Schwere auf jeden Körper wirkt, der Masse desselben proportional ist. Ferner zeigt die Beobachtung, daß die Geschwindigkeit bei dem Falle der Zeit, oder, was dasselbe ist, daß die Fallhöhe dem Quadrate der Zeit proportional ist; hieraus folgt, daß die Schwere, in der Nähe der Erdoberfläche, eine gleichförmig beschleunigende Kraft ist. Die Geschwindigkeit, welche sie einem Körper in der Zeiteinheit ertheilt, pflegt man mit g zu bezeichnen; diese Zahl g drückt mithin auch die Intensität aus, mit welcher die Schwere auf die Einheit der Masse wirkt, und ist demnach überhaupt das Maaß der Intensität der Schwere, für irgend einen Ort an der Erdoberfläche. Auf einen Körper, dessen Masse sich zu der als Einheit angenommenen verhält wie m:1, wirkt die Schwere mit der Intensität mg; dieses Product nennt man das Gewicht des Körpers. Demnach sind, an demselben Orte der Erdoberfläche oder überhaupt für gleiche Werthe von g, die Gewichte der Körper den Massen derselben proportional; daher sich die Verhältnisse von diesen aus jenen, bei irdischen Körpern, durch Wägung bestimmen lassen.

Um den Werth von g in Zahlen anzugeben, muß eine bestimmte Zeiteinheit und eine Längeneinheit angenommen werden. Das Zeitmaaß liefert die Natur selbst; denn nach den genausten Beobachtungen ist die Zeit, in welcher die Himmelskugel eine scheinbare, oder die Erde eine wirkliche Umdrehung um ihre Axe vollendet, unveränderlich sich gleich; man nennt dieselbe einen Sterntag. Ein Sonnentag dagegen ist die Zeit eines scheinbaren Umlaufes der Sonne um die Erde. Seine Dauer beträgt etwas mehr, als die eines Sterntages, und ist überhaupt im Laufe des Jahres veränderlich; ihr mittler Werth heißt ein mittler Sonnentag und beträgt 1,0027379 mal so viel als ein Sterntag. Gewöhnlich rechnet man nach mittlen Sonnentagen, deren jeder in 86400 gleiche Theile, Secunden (mittler Zeit) genannt, getheilt wird. Werden nun die Secunde mittler Zeit und der preußische oder rheinländische Fuß als Einheiten angenommen, so beträgt, nach den schärfsten Beobachtungen, der Werth von g zu Berlin 31',2649. Dieser Werth ändert sich für verschiedene Orte der Erdoberfläche um kleine Größen, nimmt auch von jedem Orte nach der Höhe zu ab; für geringe Höhen ist jedoch die Abnahme, den Beobachtungen sowohl wie theoretischen Gründen zufolge, ganz unmerklich.

67. Bedeuten X, Y, Z die Componenten einer beschleunigenden Kraft, welche auf einen frei beweglichen Punct von der Masse m wirkt; so ergeben sich zur Bestimmung seiner Bewegung, nach den in §. **64.** entwickelten Grundsätzen, sofort folgende Gleichungen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z. \qquad 1.$$

Die Aufgabe besteht nun, wenn X, Y, Z als Functionen der Coordinaten und etwa noch der Zeit t gegeben sind, allemal darin, durch Integration der vorstehenden zu drei endlichen Gleichungen zwischen x, y, z, t zu gelangen, oder die Coordinaten als Functionen der Zeit zu bestimmen. Die sechs Constanten, welche bei der Integration erhalten werden, lassen sich finden, wenn z. B. die Coordinaten des Punctes und die drei Componenten seiner Geschwindigkeit für einen gegebenen Augenblick bekannt sind.

Als einfaches Beispiel diene hier die Bewegung eines geworfenen Körpers im leeren Raume, bei unveränderlich gedachter Schwere. Es ist klar, daß die Bahn eben sein muß; ihre Ebene sei xy; die Axe x vertical und positiv nach oben; so hat man

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-g,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=0,$$

und durch Integration: $\frac{dx}{dt}=c-gt$, $\frac{dy}{dt}=k$. Es sei u die Anfangsgeschwindigkeit, für $t=0$, i ihre Neigung gegen den

Horizont, so wird $c = u \sin i$, $k = u \cos i$, und mithin, wenn man weiter intregirt, $x = u \sin i \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$, $y = u \cos i \cdot t$; wo für $t = 0$, x und y gleich Null angenommen sind. Durch Elimination von t folgt:

$$2u^2 \cos i^2 \cdot x = u^2 y \sin 2i - g y^2,$$

oder, wenn die zur Geschwindigkeit u gehörige Fallhöhe gleich h, und demnach $u^2 = 2gh$ gesetzt wird:

$$4h \cos i^2 \cdot x = 2hy \sin 2i - y^2$$

oder auch $(y - h \sin 2i)^2 = 4h \cos i^2 (h \sin i^2 - x)$.

Diese Gleichung giebt eine Parabel, deren Parameter gleich $4h \cos i^2$ ist, deren Scheitel die Coordinaten $x' = h \sin i^2$, $y' = h \sin 2i$, und unter allen Puncten der Curve die höchste Lage hat.

68. Bezeichnet man die Geschwindigkeit eines Punctes mit v, so ist, nach §. 60., $v = \frac{ds}{dt}$. Ferner ist $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{dx}{ds}$; eben so $\frac{dy}{dt} = v \frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{dt} = v \frac{dz}{ds}$. Durch Differentiation dieser Gleichungen erhält man, wie bisher t als unabhängige Veränderliche betrachtend,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = v \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dt} + \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Nun ist $d\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{ds^2} = \frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{ds^3} v dt$,

weil $ds = v dt$; mithin

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{ds^3} \cdot v^2 + \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Aehnliche Ausdrücke ergeben sich für $\frac{d^2 y}{dt^2}$ und $\frac{d^2 z}{dt^2}$. Bezeichnet man ferner den Krümmungshalbmesser der Bahn, in dem Orte

des Punctes zur Zeit t, mit ϱ, und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunctes mit a, b, c, so hat man

$$\frac{dx\, d^2s - ds\, d^2x}{ds^3} = \frac{dx\, ds\, d^2s - ds^2\, d^2x}{ds^4} = \frac{x-a}{\varrho^2},$$

und ähnliche Formeln in Bezug auf b und y, c und z (diese Formeln sind in §. 44. bewiesen, wo hernach nur noch $d^2s = 0$ gesetzt wurde, was hier nicht geschehen darf); mithin erhält man

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{v^2}{\varrho^2}(x-a) + \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{X}{m}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{v^2}{\varrho^2}(y-b) + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{Y}{m}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{v^2}{\varrho^2}(z-c) + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{Z}{m}.$$

Zur Vereinfachung nehme man den augenblicklichen Ort des Punctes zum Anfange der Coordinaten, die Richtung des Krümmungshalbmessers, nach dem Krümmungsmittelpuncte hin, zur Axe der positiven x, die der Geschwindigkeit v zur Axe der positiven y, so wird in den vorstehenden Formeln $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $dx = 0$, $dy = ds$, $dz = 0$, $b = 0$, $c = 0$ und $a = \varrho$, zugleich aber ϱ positiv; mithin erhält man $Z = 0$, und

$$m \frac{v^2}{\varrho} = X, \; m \frac{dv}{dt} = Y.$$

Hieraus folgt: Die beschleunigende Kraft läßt sich in jedem Augenblicke in zwei Componenten zerlegen, von denen die eine (Y) in der Richtung der Tangente, die andere (X) in der Richtung des Krümmungshalbmessers der Bahn wirkt. In der That bedarf es keiner weitläufigen Erläuterung, daß die Richtung der beschleunigenden Kraft in jedem Augenblicke in der anschließenden Ebene der Curve liegen muß; dies ist es aber, was der vorhergehende Satz besagt. Die Intensität der erstgenannten Componente (Y) ist dem Momente der wirklichen Beschleunigung des Punctes in seiner Bahn $\left(\text{d. i. } m \frac{dv}{dt}\right)$ gleich, und sie ist positiv oder negativ, je nachdem sie die Geschwindigkeit v, mit welcher der Punct in seinem Orte zur Zeit t anlangt, zu vermehren oder zu vermindern strebt. Die normale Componente X dagegen ist gleich $\frac{mv^2}{\varrho}$, und dieser Werth ist, wegen der Wahl der Coordinaten, wesentlich positiv; d. h. diese normale Componente strebt unter allen Umständen den Punct dem Krümmungsmittelpuncte zu nähern, oder sie hält dem Bestreben des Punctes, sich in der Richtung des Halbmessers von dem Mittelpuncte der Krümmung zu entfernen, Gleichgewicht. Dieses Bestreben heißt die Schwungkraft. Um seine Entstehung deutlich einzusehen, darf man nur bedenken, daß das Bewegungsmoment des Punctes am Ende jedes unendlich kleinen Zeittheiles dt sich zusammensetzt aus dem Bewegungsmomente mv, welches er am Anfange dieses Zeitelementes besaß, und dem Bewegungsmomente Pdt, welches ihm durch die beschleunigende Kraft P ertheilt wird; man kann sich dabei ohne Weiteres die Bewegung während des Zeitelementes als gleichförmig, und die Wirkung der Kraft P bloß am Ende desselben augenblicklich Statt findend, vorstellen. (Der Fehler ist ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung.) Es sei $m(v+dv)$ dieses resultirende Bewegungsmoment, ε der unendlich kleine Winkel, den seine Richtung (d. h. die Richtung der Geschwindigkeit $v+dv$) mit der Richtung des vorigen mv, und Θ der endliche Winkel, den sie mit der Richtung der Kraft P bildet. Man zerlege die Bewegungsmomente mv und Pdt nach der Richtung des resultirenden und nach einer darauf senkrechten; so sind die Componenten $mv\cos\varepsilon$ und $mv\sin\varepsilon$, $P\cos\Theta\,dt$ und $P\sin\Theta\,dt$; und mithin ist das resultirende Bewegungsmoment:

$$m(v+dv)=mv\cos\varepsilon+P\cos\Theta\,dt.$$

Nun ist aber ε unendlich klein und gleich $\frac{ds}{\varrho}$, wie bekannt; die Differenz $v-v\cos\varepsilon$ ist daher ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung, also hier Null; und mithin ist $mdv=P\cos\Theta dt$. Ferner müssen die auf der Richtung des resultirenden Bewegungsmomentes senkrechten Componenten einander Gleichgewicht halten; dieselben sind $mv\sin\varepsilon$ und $P\sin\Theta\,dt$; oder, weil $\sin\varepsilon=\varepsilon=\frac{ds}{\varrho}=\frac{v\,dt}{\varrho}$, so sind sie $\frac{mv^2}{\varrho}dt$ und $P\sin\Theta\,dt$; beide müssen mithin einander gleich sein, also $P\sin\Theta=\frac{mv^2}{\varrho}$; w. z. b. w. Die Schwungkraft ist demnach nichts Anderes, als die auf der Richtung des resultirenden Bewegungsmomentes senkrechte Componente des unmittelbar vorhergehenden Bewegungsmomentes; sie gilt einer beschleunigenden Kraft gleich, welche den Punct von dem Mittelpuncte der Krümmung seiner Bahn zu entfernen strebt und deren Intensität durch den Quotienten $\frac{mv\varepsilon}{dt}=\frac{mv^2}{\varrho}$ ausgedrückt werden muß.

69. Wenn der Punct auf einer Fläche oder Curve zu bleiben gezwungen ist, so wirkt auf ihn außer der beschleunigenden Kraft noch ein Widerstand N, dessen Componenten $N\cos\alpha$, $N\cos\beta$, $N\cos\gamma$ sein mögen; alsdann erhält man

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X+N\cos\alpha,\ m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+N\cos\beta,\ m\frac{d^2z}{dt^2}=Z+N\cos\gamma.\ 1.$$

Geschieht insbesondere die Bewegung auf einer Curve, deren Gleichungen $L=0$, $M=0$ seien, so ist N die Resultante der von beiden Flächen L und M dargebotenen Widerstände. Da diese normal sind, so müssen sich ihre Componenten ausdrücken lassen durch $\lambda\frac{dL}{dx}$, ..., $\mu\frac{dM}{dx}$, ...; und mithin kann man setzen $N\cos\alpha=\lambda\frac{dL}{dx}+\mu\frac{dM}{dx}$, u. s. f.; also anstatt 1.

$$\left.\begin{array}{c} m\frac{d^2x}{dt^2}=X+\lambda\frac{dL}{dx}+\mu\frac{dM}{dx},\ m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+\lambda\frac{dL}{dy}+\mu\frac{dM}{dz}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2}=Z+\lambda\frac{dL}{dz}+\mu\frac{dM}{dz}. \end{array}\right\}\ 2.$$

Diese Gleichungen gelten auch, wenn der Punct auf einer Fläche bleiben muß; ist $L=0$ ihre Gleichung, so braucht man nur $\mu=0$ zu setzen. Für einen ganz freien Punct wäre noch $\lambda=0$. Die Formeln 2. umfassen mithin alle Fälle. Multiplicirt man dieselben der Reihe nach mit dx, dy, dz, und addirt die Producte, so fallen λ, μ heraus. und man erhält:

$$m\frac{ds\,d^2s}{dt^2}=Xdx+Ydy+Zdz. \quad 3.$$

Wird die beschleunigende Kraft $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ mit P, die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ mit v, und der Winkel, den die Richtungen von beiden mit einander bilden, mit Θ bezeichnet, so hat man $X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}=P\cos\Theta$. (Vgl. S. 188. Man kann auch den Beweis in §. 43. S. 131. hier anwenden, wenn man dort anstatt Fadencurve **Bahn** liest.) Die Gleichung 3. wird hiernach $m\frac{dv}{dt}=P\cos\Theta$, welche schon im vorhergehenden §., für einen freien Punct gefunden wurde. Sie gilt also auch, wenn der Punct auf einer Fläche oder Curve geht. Wirken auf denselben keine beschleunigenden Kräfte, so ist $P=0$, also $\frac{dv}{dt}=0$, mithin die Geschwindigkeit unveränderlich. Der Punct geht also auf der Fläche oder Curve mit **unveränderlicher** Geschwindigkeit fort, sobald die beschleunigenden Kräfte zu wirken aufhören. Es versteht sich jedoch von selbst, daß der Werth von v sich ändern wird, wenn der Punct in seiner Bahn auf Spitzen stößt; wie denn überhaupt die Gleichung $m\frac{dv}{dt}=P\cos\Theta$ nur so lange unverändert gilt, als der Contingenzwinkel (ε) der Bahn unendlich klein, und mithin $v-v\cos\varepsilon$ ein unendlich Kleines zweiter Ordnung ist. (Man sehe den vorigen §., gegen das Ende.) Bewegt sich der Punct ohne Einwirkung beschleunigender Kräfte auf einer Fläche, so ist seine Bahn der Art, daß ihr

Krümmungshalbmesser in die Normale der Fläche fällt. Denn da die Geschwindigkeit unveränderlich ist, so ist $ds=c\,dt$, c eine Constante; folglich wenn $d^2t=0$, auch $d^2s=0$; und mithin $\frac{dx}{dt}=\frac{c\,dx}{ds}$, $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{cd^2x}{ds^2}$; u. s. f. Zugleich sind in 2. die Größen X, Y, Z, μ Null; mithin, nach 2,

$$\frac{d^2x}{ds^2}:\frac{d^2y}{ds^2}:\frac{d^2z}{ds^2}=\frac{dL}{dx}:\frac{dL}{dy}:\frac{dL}{dz},$$

woraus nach §. 44. das Behauptete folgt, weil $\frac{dL}{dx}:\frac{dL}{dy}:\frac{dL}{dz}=p:q:-1$. Uebrigens ist dieser Satz auch ohne alle Rechnung einleuchtend. Denn da die Schwungkraft in der Richtung des Krümmungshalbmessers wirkt, und der normalen Componente der beschleunigenden Kraft Gleichgewicht hält; da ferner die beschleunigende Kraft hier nur in dem Widerstande der Fläche besteht, dessen tangentiale Componente Null ist; so folgt erstens, daß die Beschleunigung Null, mithin die Geschwindigkeit unveränderlich ist, und zweitens, daß die Schwungkraft dem Widerstande der Fläche entgegen wirken, also der Krümmungshalbmesser der Bahn in die Normale der Fläche fallen muß; w. z. b. w.

70. Da $\frac{ds\,d^2s}{dt^2}=vdv$, so kann man die Gleichung 3. auch so schreiben:

$$\tfrac{1}{2}md(v^2)=Xdx+Ydy+Zdz \quad 1. a.$$

oder auch $$\tfrac{1}{2}md(v^2)=P\cos\Theta\,ds. \quad 1. b.$$

Das halbe Product aus der Masse eines Punctes in das Quadrat seiner Geschwindigkeit nennt man seine **lebendige Kraft**. Die Gleichung b. besagt mithin: Die Zunahme an lebendiger Kraft, während des Zeitelementes dt, ist gleich dem Producte aus der Intensität der beschleunigenden Kraft in die unendlich kleine Verschiebung ihres Angriffspunctes nach der Richtung der

Kraft. Dieses Product ist positiv oder negativ, oder die lebendige Kraft wird durch die beschleunigende vermehrt oder vermindert, je nachdem diese mit der Richtung der Bewegung einen spitzen oder stumpfen Winkel bildet. Man könnte nach §. 61. geneigt sein, dieses Product, noch durch dt dividirt, also $P\cos\Theta.\frac{ds}{dt}$, das virtuelle Moment der Kraft zu nennen; es ist jedoch zu erwägen, daß $\frac{ds}{dt}$ hier nicht jede beliebig gedachte (virtuelle), sondern nur die wirkliche Geschwindigkeit ist, und mithin die Benennung virtuelles Moment hier nicht in ihrer gehörigen Bedeutung angewendet werden würde.

Wenn der Ausdruck $Xdx+Ydy+Zdz$ ein vollständiges Differential ist, oder wenn sich eine solche Function Π von x, y, z finden läßt, daß

$$d\Pi = Xdx+Ydy+Zdz$$

ist (Beispiele stehen in §. 62. und 63.), so erhält man $\frac{1}{2}md(v^2) = d\Pi$, und durch Integration

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \Pi + \text{Const.}$$

Sind nun v_0 und Π_0 die Werthe von v und Π für einen bestimmten Augenblick der Bewegung, so wird $\frac{1}{2}mv_0^2 = \Pi_0 + \text{Const.}$, mithin

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mv_0^2 + \Pi - \Pi_0. \qquad 2.$$

Die Geschwindigkeit v ist also immer die nämliche, sobald nur Π den nämlichen Werth hat, ungeachtet dabei die übrigen Umstände der Bewegung noch sehr verschieden sein können. Da Π eine Function der Coordinaten des Punctes zur Zeit t, und Π_0 dieselbe Function seiner Coordinaten zur Zeit t_0 ist, so erhält man, wenn $\Pi = a$, $\Pi_0 = a_0$ gesetzt wird, wo a, a_0 Constanten sind, zwei Flächen (Π und Π_0), von deren einer (Π_0) der Punct zur Zeit t_0 mit der bestimmten Geschwindigkeit v_0 in irgend einer Richtung ausging, um auf der zweiten Π zu irgend einer Zeit t anzulangen. Diese Bewegung mag nun frei oder auf vorgeschriebener Bahn geschehen; so lehrt die in jedem Falle gültige Gleichung 2., daß der Punct auf der Fläche Π immer mit derselben Geschwindigkeit anlangt. Ist z. B. die beschleunigende Kraft die Schwere, und nimmt man die Axe x vertical und positiv nach unten; so wird $X = mg$, $Y = 0$, mithin $d\Pi = mgdx$, $\Pi = mgx$, und nach 2.

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \tfrac{1}{2}v_0^2 + gx - gx_0. \qquad 3.$$

Die Fläche Π und Π_0 sind hier horizontale Ebenen, denn ihre Gleichungen sind $gx = a$, $gx_0 = a_0$. Ein schwerer Körper langt also, von einer horizontalen Ebene nach einer anderen fallend, bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit, immer mit der nämlichen Geschwindigkeit in der zweiten Ebene an, welche Bahn er auch inzwischen durchlaufen habe. Oder wird z. B. ein schwerer Körper im leeren Raume schief in die Höhe geworfen, so ist seine Geschwindigkeit in jedem Puncte seiner Bahn derjenigen gleich, welche er, mit der nämlichen Anfangsgeschwindigkeit gerade aufwärts geworfen, in der gleichen Steighöhe besitzen würde. In der That erhält man, nach den hier gegebenen Regeln, für die Geschwindigkeit des geworfenen Körpers aus §. 67. die Gleichung $\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}u^2 - gx$, oder weil $u^2 = 2gh$, $v^2 = 2g(h-x)$, welcher Ausdruck nur von der Anfangsgeschwindigkeit u und der Steighöhe x, nicht aber von der Richtung von u abhängt, wie erforderlich.

71. Es sei insbesondere die Anfangsgeschwindigkeit eines schweren, frei oder in vorgeschriebener Bahn fallenden Körpers, Null; und der Anfangspunct der Bewegung auch Anfang der Coordinaten; so erhält man aus der Gleichung 3. des vorigen §., da $v_0 = 0$, $x_0 = 0$, die Gleichung $v^2 = 2gx$, wo x die Fallhöhe ist. Aus derselben folgt, weil $v = \frac{ds}{dt}$, $dt = \frac{ds}{\sqrt{2gx}}$, mithin die Fallzeit $t = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2gx}} = \int_0^x \frac{ds}{dx}\cdot\frac{dx}{\sqrt{2gx}}$. Kennt man die Curve auf welcher sich der Punct bewegt, so kann, wie

man sieht, die Fallzeit aus diesem Ausdrucke sofort gefunden werden. Man kann auch fragen, auf welcher Curve der Körper fallen muß, um von einem gegebenen Puncte A nach einem anderen tiefer liegenden B in kürzester Zeit zu gelangen. Dies ist eine sehr einfache Aufgabe der Variationsrechnung; denn offenbar muß das Integral $\int_0^h \frac{ds}{dx}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$, in welchem h den Höhenunterschied zwischen A und B bezeichnet, ein Minimum sein. Nun ist, wenn man nach y und z variirt, bekanntlich

$$\delta\, ds = \frac{dy\,\delta\, dy}{ds} + \frac{dz\,\delta\, dz}{ds},$$

und mithin, da die Variation des obigen Integrales verschwinden muß,

$$\int_0^h \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{dy}{ds}\delta\, dy + \frac{dy}{ds}\delta\, dz\right) = 0,$$

daher durch theilweise Integration:

$$\int\left[d\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{dy}{ds}\right)\delta y + d\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{dz}{ds}\right)\delta z\right] = 0.$$

Ist eine durch die Grenzpuncte gehende Fläche gegeben, auf welcher der Punct bleiben soll, so hat man $\delta z = \left(\frac{dz}{dy}\right)\delta y = q\delta y$, und mithin

$$d\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dy}{ds}\right) + q d\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dz}{ds}\right) = 0$$

als Gleichung der Curve des schnellsten Falles, auf dieser Fläche. Wenn aber keine Fläche gegeben ist, so sind δy und δz unabhängig von einander; mithin sind

$$d\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dy}{ds}\right) = 0,\quad d\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

oder $\frac{dy}{ds} = a\sqrt{x}$, $\frac{dz}{ds} = b\sqrt{x}$ die Gleichungen für die Curve; a und b Constanten. Aus ihnen folgt zuerst $b\,dy - a\,dz = 0$;

d. h. die Curve liegt in einer verticalen Ebene; was von selbst einleuchtet. Diese Ebene sei die der x und y, so ist $dz = 0$, $b = 0$; schreibt man noch $\frac{1}{\sqrt{a}}$ anstatt a, so kommt $\sqrt{a}\cdot dy = \sqrt{x}\cdot ds$; mithin $a\,dy^2 = x(dx^2 + dy^2)$ und

$$(a-x)dy^2 = x\,dx^2,\ (a-x)ds^2 = a\,dx^2.$$

Man setze $\frac{dx}{ds} = \cos\varphi$, so kommt $a - x = a\cos\varphi^2$, $x = a\sin\varphi^2$; folglich $dx = 2a\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$, und

$$dy = \sqrt{\frac{x}{a-x}}\cdot dx = 2a\sin\varphi^2\, d\varphi = a(1-\cos 2\varphi)\, d\varphi;$$

daher durch Integration, da für den Anfangspunct A die Werthe von x, y, φ alle Null sind: $y = a(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi)$. Man erhält daher, noch $\frac{1}{2}\psi$ anstatt φ schreibend:

$$x = \tfrac{1}{2}a(1-\cos\psi),\ y = \tfrac{1}{2}a(\psi - \sin\psi)$$

welche Gleichungen, wie man sieht, eine Cycloide geben, deren erzeugender Kreis den Durchmesser a hat. Zur Bestimmung desselben seien $x = h$, $y = k$ die Coordinaten von B, und ψ' der entsprechende Werth von ψ, so ist

$$h = \tfrac{1}{2}a(1-\cos\psi'),\ k = \tfrac{1}{2}a(\psi' - \sin\psi').$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Unbekannten a und ψ' bestimmen. Für den Anfangspunct A ist $x = 0$, mithin auch $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{a-x}} = 0$; d. h. die Anfangsrichtung der Bewegung vertical nach unten, wie übrigens auch die gefundenen Gleichungen der Bahn lehren. Man denke sich in Fig. 15. AE horizontal, und die Cycloide AGE vertical nach unten gekehrt, so gelangt ein fallender Körper von A nach C am schnellsten auf dem Bogen AC, und eben so auch von E nach C am schnellsten auf dem Bogen EGC. Es kann sich also ereignen, daß der Körper, um am schnellsten nach dem gegebenen Puncte zu gelangen, erst unter diesen herabsinken und nachher wieder steigen muß. Liegen beide Endpuncte in einer Horizontalen, so bleibt das gefundene Resultat ebenfalls richtig; der Körper muß, um durch die Schwere am schnellsten von A nach E zu gelangen, die ganze Cycloide AGE durchlaufen; seine Geschwindigkeit ist alsdann, bei der Ankunft in E, Null.

Da $\sqrt{x}=\sqrt{a}\cdot \sin\frac{1}{2}\psi$, $ds=a\sin\frac{1}{2}\psi\cdot d\psi$, so ist die Fallzeit überhaupt

$$t=\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2gx}}=\sqrt{\frac{a}{2g}}\int_0^{\psi'} d\psi=\psi'\sqrt{\frac{a}{2g}};$$

also z. B. die Dauer des Falles durch die ganze Cycloide AGE gleich $2\pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$. (In Fig. 15. ist GD $=$ a).

Der Fall auf einer vertical oder auch schief liegenden Cycloide, deren Scheitel G zugleich der am tiefsten liegende Punct ist, hat noch eine andere bemerkenswerthe Eigenschaft, nämlich die, daß ein ohne Anfangsgeschwindigkeit in irgend einem Puncte derselben entlassener Körper immer gleiche Zeiten braucht, um im Scheitel anzulangen. Nimmt man in Fig. 15. die durch C gehende Horizontale KC zur Axe der y, KG zur Axe der x, und setzt KG $=$ h, Bogen CG $=\sigma$, so ist die Dauer des Falles von C nach G, wenn die Cycloide vertical steht $\int_0^h \frac{ds}{dx}\cdot\frac{dx}{\sqrt{2gx}}$. Nun ist $\sigma^2=4ah$, und allgemein, wenn s einen beliebigen in C anfangenden und zwischen C und G endigenden Bogen bedeutet, $(\sigma-s)^2=4a(h-x)$, nach einer schon mehrfach erwähnten Eigenschaft der Cycloide; folglich $(\sigma-s)\frac{ds}{dx}=2a$, und

$$t=\int_0^h \frac{2a}{\sigma-s}\cdot\frac{dx}{\sqrt{2gx}}=\sqrt{\frac{a}{2g}}\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}}.$$

Man findet aber

$$\int\frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}h^2-(x-\frac{1}{2}h)^2}}=\arcsin\left(\frac{x-\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\right)+\text{Const.};$$

folglich $\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}}=\pi$; mithin $t=\pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$; also t unabhängig von h, w. z. b. w. Ist die Ebene der Cycloide nicht vertical, sondern unter dem Winkel i gegen die Verticale geneigt, so braucht man nur statt g die dieser Ebene parallele Componente von g, nämlich $g\cos i$ zu setzen.

72. Es sei ein Punct auf einer Kugel beweglich, deren Gleichung $L=x^2+y^2+z^2=r^2$; so erhält man aus 2. in §. 69., $\mu=0$ setzend:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X+2\lambda x,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+2\lambda y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z+2\lambda z.$$

Ist die beschleunigende Kraft die Schwere, so heißt der Punct ein mathematisches Pendel. Um die Bewegung desselben zu untersuchen, nehme man die Axe x vertical und positiv nach unten; so wird $X=mg$, $Y=0$, $Z=0$. Schreibt man λm anstatt 2λ, so kommt:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g+\lambda x,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\lambda y,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=\lambda z. \qquad 1.$$

Diese Gleichungen der Reihe nach mit dx, dy, dz multiplicirt, geben nach Addition der Producte und Integration (vgl. §. 70.)

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\tfrac{1}{2}v_0{}^2+g(x-x_0). \qquad 2.$$

Multiplicirt man die zweite der Gleichungen 1. mit z, die dritte mit y, und subtrahirt, so kommt:

$$\frac{z\,d^2y-y\,d^2z}{dt^2}=0. \qquad 3.$$

Nun ist aber $z\,d^2y-y\,d^2z=d(z\,dy-y\,dz)$; daher kann man die Gleichung 3. sofort einmal integriren; man erhält

$$z\,dy-y\,dz=c\,dt, \qquad 4.$$

wo c eine Constante. Diese Gleichung lehrt folgende Eigenschaft der Bewegung des Punctes kennen: Seine Projection auf die durch den Mittelpunct der Kugel gehende Horizontal-Ebene (zy) bewegt sich so, daß der von dem Mittelpuncte nach ihr gezogene Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Denn die Fläche zwischen zwei Leitstrahlen ist $\frac{1}{2}\int(z\,dy-y\,dz)$ (s. §. 103. I.). Man setze nun: $x=r\cos\psi$, $y=r\sin\psi\cos\varphi$, $z=r\sin\psi\sin\varphi$, so findet sich leicht, durch Entwickelung der Differentiale dx, dy, dz (wie in §. 108., S. 211. I., wobei aber r constant bleibt)

$$ds^2=r^2(d\psi^2+\sin\psi^2\,d\varphi^2),\quad z\,dy-y\,dz=r^2\sin\psi^2\,d\varphi.$$

Setzt man noch $x_0=r\cos\alpha$, so geben die Gleichungen 2. u. 4.

$$\left.\begin{array}{c} r^2(d\psi^2+\sin\psi^2\,d\varphi^2)=(v_0{}^2+2gr(\cos\psi-\cos\alpha))dt^2 \\ r^2\sin\psi^2\,d\varphi=c\,dt \end{array}\right\}\ 5.$$

durch deren Integration ψ und φ als Functionen von t zu bestimmen sind. Hier mag es genügen, nur den Fall sehr kleiner Schwingungen zu betrachten. Ist nämlich die Anfangsgeschwindigkeit v_0 Null oder sehr klein, und zugleich die anfängliche Ablenkung (α) des Pendels von der Verticalen sehr klein, so lehrt die erste der Gleichungen 5., daß $\cos\psi$ beständig sehr nahe $=1$ sein, und mithin ψ während der ganzen Dauer der Bewegung sehr nahe Null bleiben muß; der Punct muß also kleine Schwingungen um die Verticale machen. Seine Geschwindigkeit ist überhaupt in jedem Augenblicke gleich $r\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+\sin\psi^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$; $r\sin\psi\frac{d\varphi}{dt}$ ist ihre horizontale, $r\frac{d\psi}{dt}$ die auf jener senkrechte Componente. Würde die letztere nie Null, so müßte das Pendel beständig steigen oder beständig fallen; da dieses offenbar nicht sein kann, so muß es Zeiten geben, für welche $\frac{d\psi}{dt}=0$. Einen solchen Augenblick nehme man als Anfang, für ihn sei $t=0$ und noch $\frac{d\varphi}{dt}=\varepsilon$, so ergiebt sich aus 5., da zugleich $\psi=\alpha$,

$$r^2\varepsilon^2\sin\alpha^2=v_0{}^2\quad\text{und}\quad\varepsilon r^2\sin\alpha^2=c,\qquad 6.$$

oder weil α sehr klein ist, $\pm v_0=r\varepsilon\alpha$, $c=\varepsilon r^2\alpha^2$. Da auch ψ beständig sehr klein ist, so erhält man, mit Vernachlässigung der vierten und höheren Potenzen von α und ψ, $\cos\psi-\cos\alpha=\frac{1}{2}(\alpha^2-\psi^2)$, $\sin\psi^2=\psi^2$; und mithin aus 5.

$$\left.\begin{array}{c} r(d\psi^2+\psi^2\,d\varphi^2)=(r\varepsilon^2\alpha^2+g(\alpha^2-\psi^2))dt^2 \\ \psi^2 d\varphi=\varepsilon\alpha^2 dt \end{array}\right\}\ 7.$$

Man betrachte zuerst den Fall, in welchem $\varepsilon=0$, also die horizontale Anfangsgeschwindigkeit Null ist. Alsdann ist $d\varphi=0$, oder φ constant; die Bewegung erfolgt ganz in einer Ebene. Setzt man $n=\sqrt{\frac{g}{r}}$, so giebt die erste der Gleichungen 7.

$$d\psi^2=n^2(\alpha^2-\psi^2)dt^2,$$

folglich $\quad n\,dt=\pm\frac{d\psi}{\sqrt{\alpha^2-\psi^2}}$, $\quad$ und durch Integration:

$nt+\text{Const.}=\mp\, arc\cos\frac{\psi}{\alpha}$. Nimmt man auf beiden Seiten den Cosinus, so fällt das Doppelzeichen weg; man findet $\cos(nt+C)=\frac{\psi}{\alpha}$; oder weil für $\psi=\alpha$, $t=0$ wird, $\cos C=1$, und mithin

$$\psi=\alpha\cos nt.$$

Der Werth von ψ geht also beständig zwischen α und $-\alpha$ hin und her; die Dauer einer vollen Periode (Doppelschwingung) findet man, wenn man $nt=2\pi$ setzt, denn alsdann wird ψ zum zweiten Male gleich α, wie für $t=0$ zum ersten Male; diese Dauer ist mithin gleich $\frac{2\pi}{n}=2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$.

Ist ε nicht Null, so erhält man ein conisches Pendel. Durch Elimination von $d\varphi$ ergiebt sich aus 7., wenn wieder $g=n^2r$ ist:

$$\psi^2\,d\psi^2=(\alpha^2-\psi^2)(n^2\psi^2-\varepsilon^2\alpha^2)dt^2$$

oder, wenn noch $\varepsilon^2\alpha^2=n^2\gamma^2$ gesetzt wird:

$$\psi^2 d\psi^2 = (\alpha^2-\psi^2)(\psi^2-\gamma^2)n^2dt^2;$$

mithin $$ndt = \frac{\pm\psi d\psi}{\sqrt{(\alpha^2-\psi^2)(\psi^2-\gamma^2)}}.$$

Der Werh von ψ^2 geht mithin zwischen den Grenzen α^2 und γ^2 beständig hin und her. Für $t=0$ wird $\psi=\alpha$, nach der Voraussetzung; man kann aber den Anfang der Zeit so wählen, daß der Punct für $t=0$ zu fallen beginne, d. h. man kann, ohne der Allgemeinheit zu schaden, annehmen, daß α^2 größer sei als γ^2, wenn nicht beide einander gleich sind. Fände gerade dieser besondere Fall statt, so müßte ψ^2 fortwährend gleich α^2 sein; alsdann wäre, nach 7., auch $\frac{d\varphi}{dt}$ constant; der Punct würde also mit gleichförmiger Geschwindigkeit einen horizontalen Kreis beschreiben.

Im Allgemeinen läßt obige Gleichung sich auch schreiben wie folgt:

$$ndt = \frac{\pm 2\psi d\psi}{\sqrt{(\alpha^2-\gamma^2)^2-(2\psi^2-\alpha^2-\gamma^2)^2}}$$

und giebt mithin durch Integration:

$$2nt + \text{Const.} = \pm\, arc\cos\left(\frac{2\psi^2-\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2-\gamma^2}\right)$$

oder, wenn man auf beiden Seiten den Cosinus nimmt, wodurch das doppelte Zeichen wegfällt:

$$(\alpha^2-\gamma^2)\cos(2nt+C) = 2\psi^2-\alpha^2-\gamma^2.$$

Für $t=0$ wird $\psi=\alpha$, folglich $\cos C=1$, und mithin ist

$$2\psi^2 = \alpha^2+\gamma^2+(\alpha^2-\gamma^2)\cos(2nt). \qquad 8.$$

Zur Bestimmung von $d\varphi$ hat man noch $\psi^2 d\varphi = \varepsilon\alpha^2 dt$; folglich

$$d\varphi = \frac{2\varepsilon\alpha^2 dt}{\alpha^2+\gamma^2+(\alpha^2-\gamma^2)\cos 2nt}. \qquad 9.$$

Man setze $\alpha^2+\gamma^2 = a(\alpha^2-\gamma^2)$, so wird $\sqrt{a^2-1} = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha^2-\gamma^2}$ und

$$d\varphi = \frac{2\varepsilon\alpha^2 dt}{(\alpha^2-\gamma^2)(a+\cos 2nt)} = \sqrt{a^2-1}\cdot\frac{2n\,dt}{a+\cos(2nt)},$$

weil $\frac{\varepsilon\alpha}{\gamma}=n$ (die Werthe von ε, α, γ, n sind sämmtlich als positiv zu betrachten). Hieraus erhält man durch Integration, wenn in §. 27. S. 72. das dortige $2\varphi=\pi-2nt$ gesetzt wird:

$$\text{Const.}-2\varphi = arc\sin\frac{1+a\cos 2nt}{a+\cos 2nt},$$

oder auf beiden Seiten den Sinus nehmend:

$$\sin(C-2\varphi) = \frac{1+a\cos 2nt}{a+\cos 2nt}.$$

Nimmt man an, daß für $t=0$, $\varphi=0$ ist, so wird $\sin C=1$; mithin

$$\cos 2\varphi = \frac{1+a\cos 2nt}{a+\cos 2nt}, \quad \text{oder} \quad \frac{1-\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi} = \frac{a-1}{a+1}\cdot\frac{1-\cos 2nt}{1+\cos 2nt},$$

oder endlich, weil $\frac{a-1}{a+1}=\frac{\gamma^2}{\alpha^2}$, nach Ausziehung der Wurzel:

$$\alpha\, tg\,\varphi = \gamma\, tg\, nt. \qquad 10.$$

Hier ist das positive Wurzelzeichen gewählt, weil, indem t von 0 an wächst, zufolge 9. auch φ von 0 an stetig wachsen muß. Man hat, nach 8.

$$\psi^2 = \tfrac{1}{2}(\alpha^2+\gamma^2+(\alpha^2-\gamma^2)\cos 2nt)$$
$$= \alpha^2(\cos nt)^2+\gamma^2(\sin nt)^2;$$

hieraus ergiebt sich, zufolge 10.

$$\psi^2\cos\varphi^2 = \alpha^2(\cos nt)^2, \quad \psi^2\sin\varphi^2 = \gamma^2(\sin nt)^2.$$

Es ist aber $y = r\sin\psi\cos\varphi$, $z = r\sin\psi\sin\varphi$; folglich, mit Vernachlässigung der vierten und höheren Potenzen von ψ, $y^2 = r^2\psi^2\cos\varphi^2$, $z^2 = r^2\psi^2\sin\varphi^2$, und mithin

$$y^2 = \alpha^2(\cos nt)^2, \quad z^2 = \gamma^2(\sin nt)^2;$$

folglich $\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$; d. h. die Projection der Bahn des Punctes auf die horizontale Ebene yz ist eine Ellipse. Die Zeit eines Umschwunges um die Verticale findet man, wenn man $\varphi=2\pi$ setzt; alsdann wird nach 10. $nt=2\pi$ (für $\varphi=\pi$ wurde vorher $nt=\pi$); diese Zeit ist mithin gleich $2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$.

Ueber die Bewegung mehrerer Puncte, unter gegenseitigen Anziehungen.

73. Man denke sich zunächst zwei freie Puncte, zwischen denen eine gegenseitige Anziehung (oder auch Abstoßung) Statt finde, die irgend eine Function der Entfernung sei. Es sei R die Intensität derselben, für die Entfernung ϱ; m und m' die Massen der Puncte, x, y, z und x', y', z' ihre Coordinaten in Bezug auf drei unbewegliche rechtwinkliche Axen; so sind die Componenten der auf m wirkenden Anziehung von m': $X=\pm R\frac{(x'-x)}{\varrho}$, $Y=\pm R\frac{(y'-y)}{\varrho}$, $Z=\pm R\frac{(z'-z)}{\varrho}$, wobei die doppelten Zeichen noch unbestimmt bleiben können, (nur müssen entweder alle oberen zugleich, oder alle unteren zugleich gelten); die Componenten der auf m' wirkenden Anziehung sind $-X$, $-Y$, $-Z$. Man erhält demnach zur Bestimmung der Bewegung der Puncte, deren jeder eine beliebige Anfangsgeschwindigkeit erhalten zu haben vorausgesetzt wird:

$$\left.\begin{array}{l} m\frac{d^2x}{dt^2}=\ \ X,\ m\frac{d^2y}{dt^2}=\ \ Y,\ m\frac{d^2z}{dt^2}=\ \ Z. \\ m'\frac{d^2x'}{dt^2}=-X,\ m'\frac{d^2y'}{dt^2}=-Y,\ m'\frac{d^2z'}{dt^2}=-Z. \end{array}\right\} \quad 1.$$

Addirt man die unter einander stehenden Gleichungen, so kommt $m\frac{d^2x}{dt^2}+m'\frac{d^2x'}{dt^2}=0$, also durch Integration $m\frac{dx}{dt}+m'\frac{dx'}{dt}=\alpha$, u. s. f.; es gelten also folgende Gleichungen:

$$m\frac{dx}{dt}+m'\frac{dx'}{dt}=\alpha,\ m\frac{dy}{dt}+m'\frac{dy'}{dt}=\beta,\ m\frac{dz}{dt}+m'\frac{dz'}{dt}=\gamma, \quad 2.$$

in welchen α, β, γ Constanten sind. Diese Gleichungen lehren, daß die Summen der Bewegungsmomente der Puncte, nach jeder der drei Axen, unveränderlich sind, oder mit anderen Worten: Denkt man sich die den Bewegungsmomenten der Puncte gleichgeltenden Kräfte an einem gemeinsamen Angriffspuncte O in ihren Richtungen angebracht, und in eine Resultante vereinigt, welche man das resultirende Bewegungsmoment nennen kann; so ist dieses, während der ganzen Dauer der Bewegung, nach Richtung und Größe, unveränderlich. Dieser wichtige Satz läßt sich auch leicht ohne Hülfe der Rechnung beweisen. Denn es sei R das resultirende Bewegungsmoment in irgend einem Augenblicke; so kommt in dem folgenden Augenblicke die Wirkung der Anziehung zwischen m und m' hinzu, und um die Aenderung von R zu finden, muß man die den Puncten durch sie ertheilten Bewegungsmomente (oder, was einerlei ist, die ihnen gleichgeltenden Kräfte) in ihren Richtungen an demselben Puncte O anbringen, wo sie aber, weil einander gleich und entgegengerichtet, einander aufheben. Mithin bleibt R während der ganzen Dauer der Bewegung unveränderlich; w. z. b. w.

Diese höchst einfachen Betrachtungen gestatten noch weitere Ausdehnung. Bringt man nämlich an dem Puncte O jedes der Bewegungsmomente von m und m' nicht allein in seiner Richtung, sondern auch in entgegengesetzter an; so erhält man, mit Hinzunahme der wirklichen Bewegungsmomente von m und m', außer der Resultante R an O noch zwei Paare von Bewegungsmomenten, welche sich sofort in ein einziges zusammensetzen lassen. Denn der Umstand, daß die Puncte m, m', O nicht fest, und überhaupt gar nicht mit einander verbunden sind, hindert nicht, aus den an ihnen vorhandenen Kräften solche Combinationen zu bilden, wie Mittelkraft und zusammengesetztes Paar sind; aus demselben folgt nur, daß diese Combinationen in dem gegenwärtigen Falle nicht für die Kräfte selbst gesetzt werden, oder ihnen nicht gleichgelten können, wie bei festverbundenen Puncten der Fall sein würde. Dieses wird aber auch nicht behauptet. Denkt man sich nun in irgend einem Augenblicke der Bewegung das zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente in Bezug auf den beliebig gewählten Punct O gebildet, so ist erstens klar, daß dasselbe unveränderlich bleiben würde, wenn keine gegenseitige Anziehung weiter Statt fände, und mithin die Puncte m und m' von nun an gleichförmig in gerader Linie fortgingen. Denn das Moment einer Kraft in Bezug auf einen Punct (O) ändert sich nicht, wenn der Angriffspunct der Kraft in der Richtung derselben beliebig verlegt wird. Im nächsten Augenblicke werden nun die Bewegungsmomente der Puncte durch die Anziehungen zwischen ihnen geändert; da diese aber einander gleich und entgegengerichtet sind, so bilden sie zusammen ein Paar, dessen Breite Null ist, und durch dessen Hinzutreten mithin das zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente nicht geändert werden kann.

Man sieht sogleich, daß vorstehende Schlüsse nicht ausschließlich für zwei, sondern überhaupt für beliebig viele Puncte gelten, und nichts weiter voraussetzen, als daß die auf sie wirkenden beschleunigenden Kräfte in jedem Augenblicke einander zu zweien gleich und entgegengerichtet sind (oder sich in je zwei solche zerlegen lassen). Unter dieser Voraussetzung bleiben also für beliebig viele Puncte *das resultirende Bewegungsmoment und das resultirende Paar der Bewegungsmomente, in Bezug auf einen beliebig gewählten Punct O, während der ganzen Dauer der Bewegung gänzlich unveränderlich.*

Nachdem der Punct O für irgend einen Augenblick der Bewegung beliebig im Raume gewählt ist, kann man entweder in jedem folgenden Augenblicke wieder denselben Punct wählen, oder auch jeden anderen O', der von O aus in der Richtung des resultirenden Bewegungsmomentes (R) liegt, um nämlich immer, nach Ebene und Größe, dasselbe zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente (es heiße Q) zu erhalten. Wird nämlich überhaupt statt O ein anderer Punct O' gewählt, so ändert sich dieses Paar Q nur dadurch, daß zu ihm ein neues hinzutritt, wel-

ches entsteht, indem man die Kraft R in ihrer Richtung und in entgegengesetzter an O' anbringt, wodurch die einzelne Kraft R an O' und das Paar (R, —R) an dem Arme OO' erhalten wird. Dieses Paar, mit dem Paare Q zusammengesetzt, giebt das dem Puncte O' entsprechende zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente Q'. Wenn nun der Punct O' von O aus in der Richtung von R liegt, so ist das Paar (R, —R) offenbar Null, also das Paar Q' einerlei mit Q; w. z. b. w.

74. Diese Sätze lassen sich noch auf eine andere Art ausdrücken, welche die in ihnen enthaltenen Eigenschaften der Bewegung sehr anschaulich macht. Setzt man nämlich $mx+m'x'=(m+m')u$, $my+m'y'=(m+m')v$, $mz+m'z'=(m+m')w$, so erhält man aus den Gleichungen 2. des vorigen §. sofort:

$$(m+m')\frac{du}{dt}=\alpha,\quad (m+m')\frac{dv}{dt}=\beta,\quad (m+m')\frac{dw}{dt}=\gamma.$$

Der Punct, dessen Coordinaten u, v, w durch die vorhergehenden Gleichungen bestimmt sind, wird zuweilen der Mittelpunct der Massen m und m' genannt; da er aber, wenn man sich an m und m' parallele und diesen Massen proportionale Kräfte in gleichem Sinne angebracht vorstellt, oder wenn man sich die Massen als schwer denkt, ihr Schwerpunct sein würde, so nennt man ihn gewöhnlich den Schwerpunct der Massen. Doch muß man bemerken, daß von parallelen Kräften und insbesondere von Schwere hier gar nicht die Rede ist. Nach den vorstehenden Formeln sind die Geschwindigkeiten dieses Schwerpunctes nach den Axen unveränderlich; derselbe ist also entweder beständig in Ruhe (wenn α, β, γ Null sind), oder er bewegt sich gleichförmig und geradlinig fort; unter allen Umständen aber ist seine Lage in jedem Augenblicke gänzlich unabhängig von den gegenseitigen Anziehungen zwischen m und m'.

Aus den Gleichungen 1. des vorigen §. erhält man ferner:

$$\frac{m(x\,d^2y-y\,d^2x)}{dt^2}=Yx-Xy,\quad \frac{m'(x'd^2y'-y'd^2x')}{dt^2}=-(Yx'-Xy');$$

folglich durch Addition auf der rechten Seite:

$$Y(x-x')-X(y-y')=\pm\frac{R}{\varrho}((y'-y)(x-x')-(x'-x)(y-y'))=0,$$

mithin auch

$$\frac{m(x\,d^2y-y\,d^2x)+m'(x'\,d^2y'-y'\,d^2x')}{dt^2}=0.$$

Diese Gleichung läßt sich einmal sofort integriren; man erhält (vgl. §. 72. 3.)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{m(x\,dy-y\,dx)+m'(x'dy'-y'dx')}{dt}=k. \\ \text{Auf dieselbe Weise ergeben sich die beiden ähnlichen:} \\ \dfrac{m(z\,dx-x\,dz)+m'(z'\,dx'-x'\,dz')}{dt}=k' \\ \dfrac{m(y\,dz-z\,dy)+m'(y'dz'-z'dy')}{dt}=k''. \end{array}\right\}\ 3.$$

Die Glieder auf der linken Seite drücken die Componenten des zusammengesetzten Paares Q, in Bezug auf den Anfang der Coordinaten, aus, wie man augenblicklich sieht, wenn man bemerkt, daß hier $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$ die Componenten der an dem Puncte (x, y, z) vorhandenen Kraft sind, welche mithin in den Ausdrücken für N, M, L (§. 16.) anstatt $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$ gesetzt werden müssen; so wie ebenfalls $m'\frac{dx'}{dt}$ für $P'\cos\alpha'$, u. s. f. Die vorstehenden Gleichungen enthalten mithin den Satz von der Unveränderlichkeit des zusammengesetzten Paares der Bewegungsmomente, für zwei Puncte. Denkt man sich ferner aus dem Anfange der Coordinaten (O) Leitstrahlen Om, Om' nach m und m' gezogen, so stellen die Zähler auf der linken Seite die doppelten Summen der unendlich kleinen Flächen dar, welche die Projectionen von Om und Om' auf die Ebenen xy, zx, yz in der Zeit dt überstreichen; die Gleichungen 3. lehren mithin, daß jede dieser Summen dem Differentiale der Zeit

proportional ist, woraus, da die Coordinaten-Ebenen ganz beliebig sind, folgender Satz hervorgeht:

Die Summen der Flächenräume, welche die Projectionen der von einem unveränderlichen nach den beweglichen Puncten gehenden Leitstrahlen, auf eine unveränderliche Ebene, in gleichen Zeiten überstreichen, sind einander gleich.

Die bisherigen Sätze lassen sich auch ausdehnen auf die relativen Bewegungen der Puncte in Bezug auf irgend einen Punct O', der in gerader Linie gleichförmig fortgeht. Denn es sei a die Geschwindigkeit von O' und man denke sich an dem Puncte m das Bewegungsmoment ma in der Richtung der Bewegung von O' und in der entgegengesetzten (also ma und —ma) angebracht; eben so m'a und —m'a an m', u. s. f. an allen Puncten, so viele deren sein mögen; wodurch nichts geändert wird. Setzt man nun —ma mit dem wirklichen Bewegungsmomente von m in eine Resultante mv zusammen, so hat nunmehr m eine der von O' gleiche und parallele Geschwindigkeit a, und eine relative Geschwindigkeit v gegen O'; von den übrigen Puncten gilt dasselbe. Es ist nun klar, daß man sich die allen Puncten mit O' gemeinsame Geschwindigkeit a ganz hinweg denken, also O' als ruhend, und an den Puncten m, m', ... nur noch die Geschwindigkeiten v, v', .. als vorhanden annehmen kann, wodurch dieser Fall ganz auf den bisher betrachteten zurückgeführt wird. Demnach bleibt die Resultante R' der relativen Bewegungsmomente mv, m'v' .., und eben so ihr zusammengesetztes Paar, gebildet in Bezug auf O', (es heiße Q') fortwährend unveränderlich.

Um dieses auch noch durch Rechnung zu zeigen, seien ξ, η, ζ die Coordinaten von O' in Bezug auf den unbeweglichen Anfang O der x, y, z; die Axe der x falle in die Richtung der Bewegung von O', so wird $\frac{d\xi}{dt}=a$, $\frac{d\eta}{dt}=0$, $\frac{d\zeta}{dt}=0$; und $\xi=at+a'$, $\eta=0$, $\zeta=0$. Nun sind $\frac{dx}{dt}-\frac{d\xi}{dt}$, u. s. f. die Componenten der relativen Geschwindigkeit von m gegen O'; und da nach 2. im vorigen §.

$m\frac{dx}{dt}+m'\frac{dx'}{dt}=\alpha$, oder überhaupt $\Sigma m\frac{dx}{dt}=\alpha$ ist, so kommt

$$\Sigma m\left(\frac{dx-d\xi}{dt}\right)=\alpha-a\Sigma m,\quad \Sigma m\left(\frac{dy-d\eta}{dt}\right)=\beta,\quad \Sigma m\left(\frac{dz-d\zeta}{dt}\right)=\gamma.$$

Ferner ist $\Sigma m\left(\frac{xdy-ydx}{dt}\right)=k$ (nach 3.), $\Sigma m\frac{dy}{dt}=\beta$, $\Sigma my=\beta t+\beta'$; folglich

$$\Sigma m\left(\frac{(x-\xi)dy-y(dx-d\xi)}{dt}\right)=\Sigma m\left(\frac{xdy-ydx}{dt}\right)-\xi\Sigma m\frac{dy}{dt}+\frac{d\xi}{dt}\Sigma my$$

$$=k-(at+a')\beta+(\beta t+\beta')a=k-a'\beta+\beta'a=k_1,$$

d. h. die der Ebene xy parallele Componente (k_1) von Q' ist constant; und eben so sind es die übrigen. Ist insbesondere O' der Schwerpunct, so wird, weil die von ihm durchlaufene Gerade hier als Axe der x zu nehmen ist, $\Sigma my=0$, also $\beta=0$, $\beta'=0$, und mithin $k_1=k$; überhaupt ist alsdann das Paar Q' einerlei mit Q.

75. Um die Bewegung der beiden Puncte m und m' näher zu bestimmen, nehme man von jetzt an ihren Schwerpunct zum Anfange der Coordinaten, so wird $mx+m'x'=0$, $my+m'y'=0$, $mz+m'z'=0$; folglich auch

$$m\,dx+m'dx'=0,\quad m\,dy+m'dy'=0,\quad m\,dz+m'dz'=0.$$

Es sei noch die Ebene xy parallel der von Q; so wird in 3. $k'=0$, $k''=0$, und k gleich dem Momente von Q. Ferner erhält man aus den vorstehenden Gleichungen $m'm'(x'dy'-y'dx')=mm(xdy-ydx)$, u. s. f.; schafft man mit Hülfe dieser Ausdrücke die Coordinaten von m' aus den Gleichungen 3. weg, so kommt:

$$xdy-ydx=hdt,\quad zdx-xdz=0,\quad ydz-zdy=0,\quad \text{wo } h=\frac{km'}{m+m'}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit z, y, x, so kommt auf der linken Seite Null, mithin ist $hz=0$, oder $z=0$, und folglich auch $z'=0$. Zur Bestimmung von x, y, hat man demnach bis jetzt eine Gleichung, nämlich: $xdy-ydx=hdt$. Um eine zweite zu erhalten, nehme man die Grundgleichungen (1., §. 73.):

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\pm\frac{R(x-x')}{\varrho},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\pm\frac{R(y-y')}{\varrho}.$$

Man hat $m'(x-x')=(m+m')x$, $m'(y-y')=(m+m')y$, folglich auch

$$m'^2\varrho^2=m'^2((x-x')^2+(y-y')^2)=(m+m')^2(x^2+y^2).$$

Nach Wegschaffung von x' und y' ergiebt sich daher aus den vorigen:

$$mm'\frac{d^2x}{dt^2}=\pm(m+m')\frac{Rx}{\varrho},\quad mm'\frac{d^2y}{dt^2}=\pm(m+m')\frac{Ry}{\varrho}.$$

Hier muß aber, wenn m und m' einander anziehen, von den beiden Vorzeichen das untere genommen werden; denn da der Schwerpunct sich beständig zwischen m und m' befindet, so wird jeder Punct nach ihm, d. i. nach dem Anfange der Coordinaten hingezogen, mithin ist z. B. die Zunahme seiner Geschwindigkeit nach x, und also auch seine Beschleunigung $\frac{d^2x}{dt^2}$ negativ, wenn x positiv, und positiv, wenn x negativ ist. Multiplicirt man nun die erste obiger Gleichungen mit dx, die zweite mit dy, addirt die Producte, und schreibt dsd^2s anstatt dxd^2x+dyd^2y, so erhält man, zugleich das untere Zeichen nehmend:

$$mm'\frac{dsd^2s}{dt^2}=-(m+m')\frac{R(xdx+ydy)}{\varrho},$$

oder weil $m'^2\varrho\,d\varrho=(m+m')^2(xdx+ydy)$ ist:

$$m\frac{dsd^2s}{dt^2}=-\frac{m'}{m+m'}\cdot R\,d\varrho.$$

76. Nach dem von Newton entdeckten und durch alle späteren Untersuchungen immer mehr bestätigten Gesetze der allgemeinen Gravitation ziehen je zwei materielle Puncte im Raume einander mit einer Kraft an, welche ihren Massen direct, und dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist. Es würde hier zu weitläufig sein, anzugeben, auf welche Weise dieses Gesetz aus Keplers später zu erwähnenden Entdeckungen

über die Bewegungen der Himmelskörper hat können hergeleitet werden; die nachstehenden Betrachtungeu beschränken sich nur darauf, einige der einfachsten Folgerungen aus ihm zu entwickeln. Es sei c die Intensität der Anziehung zwischen zwei der Einheit gleichen Massen in der Einheit der Entfernung, so ist, unter der Voraussetzung des angegebenen Gesetzes, $R = \frac{cmm'}{\varrho^2}$, mithin verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in:

$$\frac{ds\,d^2s}{dt^2} = -\frac{cm'm'}{m+m'} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho^2},$$

oder durch Integration in

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{cm'm'}{m+m'}\left(\frac{1}{\varrho} + \text{Const.}\right)$$

Außer dieser Gleichung hat man noch $x\,dy - y\,dx = h\,dt$. Man setze $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, so wird $x^2 + y^2 = r^2$, mithin $m'\varrho = (m+m')r$, und zugleich

$$x\,dy - y\,dx = r^2 d\varphi,\quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Setzt man diese Werthe in die vorstehenden Gleichungen ein, so kommt

$$dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \frac{2cm'^3}{(m+m)^2}\left(\frac{1}{r} + f\right)dt^2 \qquad \text{und} \qquad r^2 d\varphi = h\,dt,$$

wo f eine Constante ist. Es sei ferner zur Abkürzung $\frac{m'\sqrt{2cm'}}{m+m'} = q$, $qt = \Theta$, $h = q\gamma$, so kommt:

$$dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \left(f + \frac{1}{r}\right)d\Theta^2,\quad r^2 d\varphi = \gamma\,d\Theta. \qquad 1.$$

Um diese Gleichungen weiter zu integriren, setze man $r = \frac{1}{z}$; alsdann kommt:

$$dz^2 + z^2 d\varphi^2 = (f+z)z^4\,d\Theta^2,\quad d\varphi = \gamma z^2 d\Theta,$$

und mithin, nach Wegschaffung von $d\Theta$,

$$\gamma^2(dz^2 + z^2 d\varphi^2) = (f+z)d\varphi^2.$$

Wird hieraus der Werth von $d\varphi$ entwickelt, so ergiebt sich

$$d\varphi = \frac{\pm\gamma^2 dz}{\sqrt{\frac{1}{4} + \gamma^2 f - (\gamma^2 z - \frac{1}{2})^2}}.$$

Die Größe $\frac{1}{4} + \gamma^2 f$ muß demnach positiv sein; man setze also

$$\tfrac{1}{4} + \gamma^2 f = \tfrac{1}{4}e^2,$$

so kommt
$$d\varphi = \frac{\pm 2\gamma^2 dz}{\sqrt{e^2 - (2\gamma^2 z - 1)^2}},$$

und durch Integration $\varphi + \text{Const} = \mp \arccos\frac{2\gamma^2 z - 1}{e}$, wo man sich e positiv denken kann. Nimmt man auf beiden Seiten den Cosinus, und schreibt noch φ anstatt $\varphi + \text{Const.}$, $\frac{1}{r}$ anstatt z, setzt auch $2\gamma^2 = p$, so ergiebt sich $\cos\varphi = \frac{p-r}{er}$,

oder
$$r(1 + e\cos\varphi) = p. \qquad 2.$$

In dieser Gleichung sind e und p positive, übrigens aber noch unbestimmte Constanten, weil sie von den vorigen Constanten f und γ (oder h) abhängen. Eine dritte Constante in derselben ist dadurch beseitigt, daß φ anstatt $\varphi + \text{Const.}$ geschrieben worden. Nimmt man sofort den Fall aus, in welchem $p = 0$, (in diesem Falle wäre auch $\gamma = 0$, und mithin schon nach 1. $d\varphi = 0$; die Puncte würden sich dann in einer geraden Linie bewegen); so giebt die Gleichung 2. eine Curve zweiten Grades. Dieselbe ist ein Kreis für $e = 0$, eine Ellipse, wenn $e < 1$, eine Parabel, wenn $e = 1$, und eine Hyperbel, wenn $e > 1$. Der Schwerpunct ist in jedem Falle zugleich ein Brennpunct derselben. Verlangt man die Gleichung in rechtwinklichen Coordinaten, so ist zuerst $r^2 = (p - er\cos\varphi)^2$ und $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$; mithin $x^2 + y^2 = (p - ex)^2$, woraus folgt:

$$[(1-e^2)x + ep]^2 + (1-e^2)y^2 = p^2.$$

Es werde nunmehr angenommen, daß $e < 1$, also die Bahn elliptisch sei. Bezeichnet man ihre halbe große Axe mit a, die halbe kleine mit b, so giebt die vorstehende Gleichung:

$$a=\frac{p}{1-e^2},\quad b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}},\quad \text{mithin}\quad ap=b^2.$$

(p ist der halbe Parameter.)

Zur Bestimmung von Θ hat man noch:

$$\gamma z^2 d\Theta=\frac{\pm 2\gamma^2 dz}{\sqrt{e^2-(2\gamma z^2-1)^2}},$$

weil beide Ausdrücke gleich $d\varphi$ sind; setzt man wieder $\frac{1}{r}$ statt z, und $2\gamma^2=p$, mithin $2\gamma=\sqrt{2p}$, so kommt

$$d\Theta=\frac{\mp\sqrt{2p}\cdot r dr}{\sqrt{e^2r^2-(p-r)^2}}=\frac{\mp\sqrt{2p}\cdot r dr}{\sqrt{2pr-p^2-(1-e^2)r^2}},$$

oder, weil $p=a(1-e^2)$, $d\Theta=\frac{\mp\sqrt{2a}\cdot r dr}{\sqrt{2ar-a^2(1-e^2)-r^2}}$, und

mithin $$d\Theta=\frac{\mp\sqrt{2a}\cdot r dr}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}.$$

Um diese Formel leicht zu integriren, setze man $a-r=ae\,cos\,v$, so erhält man sofort:

$$d\Theta=\pm a\sqrt{2a}(1-e\,cos\,v)dv.$$

Da die Zeit beständig wachsend, oder dt und mithin auch $d\Theta$ immer positiv gedacht wird, so muß in dieser Formel das positive Zeichen für ein zunehmendes, das negative für ein abnehmendes v gelten. Aus der zweiten der Gleichungen 1. geht aber, da man jedenfalls γ als positiv ansehen kann, hervor, daß φ mit der Zeit beständig wächst; demnach folgt aus 2., daß r zwischen den Grenzen $\frac{p}{1+e}$ und $\frac{p}{1-e}$ beständig hin und hergeht; und da diese Grenzen einerlei sind mit sind mit $a(1-e)$ und $a(1+e)$, so folgt, daß auch $cos\,v$ alle Werthe zwischen -1 und $+1$, in immer wiederkehrender stetiger Folge, erhält. Man könnte sich demnach v zuerst von 0 bis π wachsend, denn wieder von π bis

0 abnehmend vorstellen; man kann sich aber auch v von 0 bis 2π, und wenn man will noch weiter, beständig wachsend denken. Demnach gilt, unter der zulässigen Voraussetzung eines mit der Zeit beständig wachsenden v, in obiger Gleichung das positive Zeichen, und man erhält durch Integration:

$$\Theta=a\sqrt{2a}(v-e\,sin\,v),$$

wo keine Constante hinzugefügt zu werden braucht, wenn man für $v=0$, $\Theta=0$, mithin $t=0$ annimmt. Man hat demnach die Gleichungen:

$$r=a(1-e\,cos\,v),\quad qt=a\sqrt{2a}(v-e\,sin\,v),\qquad 3.$$

welche, mit Hülfe von 2., die Bewegung von m, und folglich auch die von m', bestimmen. Beide Puncte beschreiben um ihren Schwerpunct O ähnliche Ellipsen, welche einen Brennpunct in O haben, und deren große Axen den Massen umgekehrt proportional sind. Die gerade Linie mOm' überstreicht bei der Bewegung in gleichen Zeiten gleiche Flächen, was auch von jedem ihrer Theile Om und Om', einzeln genommen, gilt, da diese immer einander proportionirt sind. Die Zeit eines Umlaufes (T) ergiebt sich aus 3. für $v=2\pi$; man findet $T=\frac{2\pi a\sqrt{2a}}{q}$,

oder weil $q=\frac{m'\sqrt{2cm'}}{m+m'}$ ist, $T=\frac{2\pi(m+m')a}{m'}\sqrt{\frac{a}{cm'}}$.

Verlangt man die relative Bahn von m in Bezug auf m', so sind die relativen Coordinaten von m, nämlich $x-x'$ und $y-y'$ als Functionen der Zeit auszudrücken. Man hat aber $m'(x-x')=(m+m')x$, und $x=r\,cos\,\varphi$, also $m'(x-x')=(m+m')r\,cos\,\varphi$, und eben so $m'(y-y')=(m+m')r\,sin\,\varphi$. Um die Gleichung der relativen Bahn anzugeben, setze man $\varrho^2=(x-x')^2+(y-y')^2$, wie oben, alsdann ist $m'\varrho=(m+m')r$; eliminirt man nun r aus 2. und 3,, so kommt

$$\varrho(1+e\,cos\,\varphi)=\frac{(m+m')p}{m'},\quad \varrho=\frac{a(m+m')}{m'}(1-e\,cos\,v),$$

$$t = \frac{(m+m')a}{m'} \sqrt{\frac{a}{cm'}} (v - e \sin v).$$

Die halbe große Axe a' der elliptischen relativen Bahn von m gegen m' ist mithin $a' = \frac{a(m+m')}{m'}$; führt man diese in vorstehende Gleichungen ein, so kommt, weil $p = a(1-e^2)$,

$$\varrho(1+e \cos \varphi) = a'(1-e^2), \quad \varrho = a'(1-e \cos v),$$

$$t = a' \sqrt{\frac{a'}{c(m+m')}} (v - e \sin v).$$

Die Umlaufszeit ist T, wie vorhin; sie kann auch ausgedrückt werden durch $T = 2\pi a' \sqrt{\frac{a'}{c(m+m')}}$.

77. Nimmt man an, daß zu m und m' noch ein dritter Punct μ hinzukommt, welcher wieder die beiden vorigen nach dem nämlichen Gesetze anzieht und von ihnen angezogen wird, so erhält man die berühmte Aufgabe der drei Körper, deren vollständige Lösung bisher der Integralrechnung nicht gelungen ist. Sind die Massen von m und μ gegen m' sehr klein, und vernachlässigt man, bei einer ersten Annäherung wenigstens, die Brüche $\frac{m}{m'}$, $\frac{\mu}{m'}$; so kann man auch m' als im Schwerpuncte selbst ruhend betrachten, und die gegenseitige Anziehung zwischen m und μ unberücksichtigt lassen, weil dieselbe in jedem Augenblicke gegen die Anziehungen von m' auf m und μ sehr klein ist (so lange nämlich zwischen den Entfernungen der drei Puncte m', m, μ nur endliche Verhältnisse vorausgesetzt werden). Alsdann beschreibt **erstens** jeder der Puncte m und μ um m' eine Ellipse, die einen Brennpunct in m' hat, und bewegt sich **zweitens** in derselben so, daß der von m' nach ihm gerichtete Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Die Umlaufszeit von m ist nach dem vorigen §., wenn man die Masse von m' als Einheit nimmt, und den nach der Voraussetzung sehr kleinen Bruch m auch hier wegläßt, weil er schon vorher überall vernachlässigt ist, $T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{c}}$; und eben so ist die Umlaufszeit von μ, $T' = 2\pi a' \sqrt{\frac{a'}{c}}$, wo a und a' die halben großen Axen der Bahnen von m und μ sind; folglich ist $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{c} = \frac{T'^2}{a'^3}$; d. h. **drittens**, die Quadrate der Umlaufszeiten beider Puncte verhalten sich, wie die Cuben der großen Axen ihrer Bahnen.

Diese drei Gesetze hat zuerst **Kepler** in den Bewegungen der Planeten um die Sonne erkannt; daher sie seinen Namen führen. Wie sich dieselben aus dem Gravitationsgesetze herleiten lassen, ist so eben gezeigt werden; es geht zugleich hervor, daß sie Annäherungen sind, die bei dem Planetensysteme, mehrerer günstiger Umstände wegen, schon sehr genau zutreffen.

Daß man die Körper des Sonnensystemes, bei der Bestimmung ihrer gegenseitigen Anziehungen nach dem Gravitationsgesetze, als bloße Puncte betrachten kann, folgt, wie man leicht einsieht, zuerst aus ihren großen Entfernungen von einander, läßt sich aber auch noch unabhängig von diesem Umstande auf andere Weise darthun. Man kann nämlich beweisen, daß eine Kugel, die entweder überhaupt gleichartig ist, d. h. deren Theile, bei gleichem Volumen immer gleiche Massen haben, oder die aus gleichartigen Schichten zwischen concentrischen Kugelflächen besteht, einen außer ihr befindlichen Punct, auf den sie nach dem Gravitationsgesetze anziehend wirkt, eben so anzieht, als ob ihre Masse im Mittelpuncte vereinigt wäre. Da nun die Sonne und die Planeten beinahe die Gestalt von Kugeln haben, so zieht jeder dieser Körper, wenn er auch in seinem Innern nicht gleichartig, sondern nur aus gleichartigen Schichten zusammengesetzt ist, einen außer ihm befindlichen Punct nahe eben so an, als ob seine gesammte Masse im Mittelpuncte vereinigt wäre.

Um den angegebenen Satz zu beweisen, denke man sich eine gleichartige Kugelschaale, von überall gleicher und unendlich kleiner Dicke ε; der Halbmesser ihrer Oberfläche (ob der äußeren oder inneren, ist einerlei), sei r; der Abstand des angezogenen Punctes m vom Mittelpuncte C sei a. Man nehme C zum Anfange der Coordinaten, die Gerade a zur Axe der x, und setze: $x=r\cos\psi$, $y=r\sin\psi\cos\varphi$, $z=r\sin\psi\sin\varphi$; also $x^2+y^2+z^2=r^2$. Hiernach ist ein unendlich kleines Element der Kugelfläche $\omega=r^2\sin\psi\, d\varphi\, d\psi$, das Volumen eines Elementes der Kugelschaale $\varepsilon\omega$, die Masse dieses Elementes, wegen der Gleichartigkeit der Schaale diesem Volumen proportional, gleich $\mu\varepsilon\omega$, und seine Anziehung auf die Masse m gleich $\frac{cm\mu\varepsilon\cdot\omega}{\varrho^2}=\frac{k\omega}{\varrho^2}$, wo k eine Constante und $\varrho=\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\psi}$ den Abstand zwischen ω und m bedeutet. Die Richtung der Anziehung bildet mit den Axen x, y, z Winkel, deren Cosinus $\frac{a-x}{\varrho}$, $\frac{y}{\varrho}$, $\frac{z}{\varrho}$ sind; ihre Componenten sind mithin $\frac{k(a-x)\omega}{\varrho^3}$, $\frac{ky\omega}{\varrho^3}$, $\frac{kz\omega}{\varrho^3}$. Man sieht jedoch, daß die Resultante aller Anziehungen in die Richtung der Axe x fallen muß; also müssen die mit y und z parallelen Componenten einander aufheben, wie auch die Rechnung leicht ergiebt; die gesammte Anziehung ist demnach parallel mit x und ihre Intensität (sie heiße X) ist, weil $\omega=r^2\sin\psi\, d\varphi\, d\psi$,

$$X=kr^2\iint\frac{a-x}{\varrho^3}\sin\psi\, d\varphi\, d\psi,$$

das Integral zwischen den Grenzen $\varphi=0$ und $\varphi=2\pi$, $\psi=0$ und $\psi=\pi$ genommen. Die Integration nach φ kann sogleich vollzogen werden; man erhält

$$X=2\pi kr^2Q,$$

wo das Integral $\int_0^\pi\frac{a-x}{\varrho^3}\sin\psi\, d\psi$ vorläufig mit Q bezeichnet ist. Um dieses leicht zu erhalten, bemerke man, daß $\varrho^2=(a-x)^2+y^2+z^2$, mithin, wenn man die Ableitung nach

a nimmt, $\frac{d\varrho}{da}=\frac{a-x}{\varrho}$ ist. Ferner ist $\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{da}=-\frac{1}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{da}=\frac{x-a}{\varrho^3}$; setzt man also das Integral $\int_0^\pi\frac{\sin\psi\, d\psi}{\varrho}=R$, so ist $Q=-\frac{dR}{da}$. Nun findet man aber sogleich, mit Rücksicht auf den Werth von ϱ, nämlich $\varrho=\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\psi}$,

$$\int\frac{\sin\psi\, d\psi}{\varrho}=-\int\frac{d\cos\psi}{\varrho}=\frac{\varrho}{ar}+\text{Const.},$$

folglich wenn man die Werthe von ϱ für $\psi=0$ und $\psi=\pi$ mit ϱ_0 und ϱ_1 bezeichnet, $R=\frac{\varrho_1-\varrho_0}{ar}$. Man bemerke, daß ϱ_1 und ϱ_0 wesentlich positiv sind; und daß zugleich $\varrho_0^2=(a-r)^2$ und $\varrho_1^2=(a+r)^2$ ist. Liegt nun der angezogene Punct innerhalb der Kugelschaale, so ist r—a positiv, mithin $\varrho_0=r-a$, und zugleich $\varrho_1=r+a$; also $\varrho_1-\varrho_0=2a$. Hieraus folgt $R=\frac{2}{r}$, und $Q=-\frac{dR}{da}=0$; also $X=0$, d. h. die Resultante aller Anziehungen der Kugelschaale auf einen innerhalb derselben liegenden Punct ist **Null**. Liegt aber der Punct außerhalb der Kugelschaale, so ist $a>r$, und $\varrho_0=a-r$, $\varrho_1=a+r$, mithin $\varrho_1-\varrho_0=2r$, und $R=\frac{2}{a}$, folglich $Q=-\frac{dR}{da}=\frac{2}{a^2}$, und die Anziehung

$$X=\frac{4\pi kr^2}{a^2}$$

genau so groß, als wenn die Masse der Kugelschaale im Mittelpuncte vereinigt wäre. Man sieht aber, daß der Satz von einer vollen, aus gleichartigen Schichten bestehenden Kugel gelten muß, wenn er von jeder einzelnen Schicht gilt. Eine solche Kugel zieht demnach einen außer ihr liegenden Punct so an, als ob ihre Masse im Mittelpuncte vereinigt wäre; w. z. b. w.

Ist M die Masse der Kugel, m die des angezogenen Punctes in dem Abstande a vom Mittelpuncte, der aber nicht kleiner sein muß als der Halbmesser der Kugel, so ist demnach die Anziehung gleich $\frac{cmM}{a^2}$, wenn sie für die Einheiten der Entfernung und der Massen gleich c gesetzt wird, wie früher. Die Anziehung der Kugel auf einen an ihrer Oberfläche befindlichen Punct von der Einheit der Masse ist mithin gleich $\frac{cM}{r^2}$, wenn r der Halbmesser der Kugel ist.

78. Wäre die Erde genau eine aus gleichartigen concentrischen Schichten bestehende Kugel, und hätte sie keine Axendrehung, so würde die Schwere lediglich aus ihrer Anziehung entstehen, und mithin an allen Orten der Oberfläche gleich und nach dem Mittelpuncte gerichtet sein. Aus der Drehung der Erde um ihre Axe entspringt aber noch eine Schwungkraft, die an verschiedenen Orten der Oberfläche verschieden ist. Es sei, unter Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde, r ihr Halbmesser, ψ die geographische Breite eines Punctes der Oberfläche, ϱ der Halbmesser des durch ihn gehenden Parallelkreises, v die Geschwindigkeit des Punctes vermöge der Drehung der Erde, T die Dauer einer Umdrehung, so ist $v=\frac{2\pi\varrho}{T}$, $\varrho=r\cos\psi$; und die Intensität der Schwungkraft, auf die Einheit der Masse zurückgeführt, ist $\frac{v^2}{\varrho}=\frac{4\pi^2\varrho}{T^2}=\frac{4\pi^2 r\cos\psi}{T^2}$. Da diese den Punct in der Richtung des Halbmessers ϱ von dem Mittelpuncte seines Parallelkreises zu entfernen strebt, so bildet sie mit der nach dem Mittelpuncte gerichteten Anziehung (deren Intensität G sei) den stumpfen Winkel $\pi-\psi$. Bezeichnet man die Resultante beider Kräfte mit g, den Winkel, den sie mit der Richtung von G bildet, mit λ, und zerlegt die Kräfte nach der Richtung von G und nach einer darauf senkrechten, so kommt:

$$g\cos\lambda=G-\frac{4\pi^2 r\cos\psi^2}{T^2},\quad g\sin\lambda=\frac{4\pi^2 r\cos\psi\sin\psi}{T^2}.$$

Diese Resultante g würde, unter der Voraussetzung der Kugelgestalt, die Schwere an der Erdoberfläche sein. Setzt man $\frac{4\pi^2 r}{T^2}=\mu G$, so kommt:

$$g\cos\lambda=G(1-\mu\cos\psi^2),\ g\sin\lambda=\tfrac{1}{2}\mu G\sin 2\psi.$$

Um den Werth von μ zu finden, kann man, da es sich hier nur um eine ohngefähre Bestimmung handelt, in der Gleichung $\mu=\frac{4\pi^2 r}{T^2\cdot G}$ von der Veränderlichkeit der Schwere absehen, und ohne Weiteres für G den in §. 66. angegebenen Werth von g setzen, der von dem hier erforderlichen nur wenig abweichen kann; nimmt man noch den Umring eines größten Kreises der Erdkugel $2\pi r=127{,}9$ Millionen pr. Fuß, und $T=86164''$ (Dauer eines Sterntages), so findet man

$$\mu=\frac{2\pi\cdot 127{,}9\cdot 10^6}{31{,}265\cdot(86164)^2}$$

und hieraus $\mu=\frac{1}{289}$ beinahe. Da auch λ, in Theilen des Halbmessers ausgedrückt, nur ein sehr kleiner Bruch sein kann, so ergiebt sich, mit Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen von λ,

$$g=G(1-\mu\cos\psi^2),\quad g\lambda=\tfrac{1}{2}\mu G\sin 2\psi,$$

oder $\lambda=\frac{\frac{1}{2}\mu\sin 2\psi}{1-\mu\cos\psi^2}$, also, mit Vernachlässigung von μ^2,

$$g=G(1-\mu\cos\psi^2),\quad \lambda=\tfrac{1}{2}\mu\sin 2\psi.$$

Auf der Oberfläche der als Kugel gedachten Erde würde also die Schwere vom Pole nach dem Aequator hin um eine dem Quadrate des Cosinus der Breite proportionale Größe abnehmen; zugleich aber auch an allen Orten, mit Ausnahme der Pole und des Aequators, um einen kleinen Winkel λ von der Richtung nach dem Mittelpuncte abweichen, und zwar auf der nördlichen Halbkugel nach Süden, auf der südlichen nach Norden. Der größte Werth dieser Ablenkung findet unter der Breite von 45^0 statt, wo $\lambda = \frac{1}{2}\mu = \frac{1}{578} = 0{,}0017$ ist, was einem Winkel von 6 Minuten gleichgilt.

Hieraus geht schon hervor, daß wenn die Erde einmal eine genaue Kugel von flüssiger Masse war, ihre Gestalt durch die Schwungkraft verändert werden mußte, von der sie bekanntlich auch in der That abweicht, indem sie sich mehr der eines elliptischen Sphäroids nähert. Bei dieser Gestalt ist die Intensität der Anziehung (G) an verschiedenen Puncten ungleich, auch zur Bestimmung ihrer Richtung eine genauere Untersuchung nöthig, von der hier nicht gehandelt werden kann. Unter allen Umständen aber ist die Schwere an jedem Orte der Erdoberfläche, nach Richtung und Größe, die Resultante der daselbst Statt findenden Anziehung des Erdkörpers und der Schwungkraft.

Allgemeine Gleichungen für die Bewegung eines Systemes von Puncten.

79. Bewegt sich ein System von Puncten unter beliebigen beschleunigenden Kräften, so wird die Geschwindigkeit jedes Punctes theils durch die auf ihn wirkende Kraft, theils durch die von seiner Verbindung mit den übrigen herrührenden Widerstände stetig geändert. Es sei m die Masse, v die Geschwindigkeit mithin mv das Bewegungsmoment eines Punctes zur Zeit t, so geht dieses, in dem folgenden unendlich kleinen Zeittheile dt, in ein anderes von dem vorigen nach Größe und Richtung unendlich wenig verschiedenes über; dasselbe sei, am Ende des Zeittheils dt, $m(v+dv)$. Zerlegt man ferner das Bewegungsmoment $m(v+dv)$ in eines, welches nach Richtung und Größe gleich mv ist, und in ein zweites mw (welches gegen mv unendlich klein sein wird), so muß mw die Resultante der beschleunigenden Kraft und der Widerstände sein, welche in der Zeit dt auf m wirkten, und ohne die das Bewegungsmoment mv unverändert geblieben wäre. Wenn man daher die beschleunigende Kraft in zwei Componenten zerlegt, von denen die eine dem Bewegungsmomente mw nach Richtung und Größe gleichgilt, so muß die andere mit den Widerständen an m im Gleichgewichte sein. Die wirkliche Bewegung des Punctes erfolgt mithin gerade so, als ob derselbe frei wäre, und nur die erste, dem Bewegungsmomente mw gleichgeltende Componente der beschleunigenden Kraft auf ihn wirkte; die andere Componente aber wird durch die Widerstände aufgehoben, und heißt daher die **verlorene Componente der beschleunigenden Kraft**, oder schlechthin die verlorene Kraft.

Es seien X, Y, Z die Componenten der beschleunigenden Kraft, nach den Axen x, y, z, und U, V, W die der verlorenen Kraft, nach denselben Axen, so sind $(X-U)dt$, $(Y-V)dt$, $(Z-W)dt$ die unendlich kleinen Zunahmen, welche das Bewegungsmoment des Punctes in der Zeit dt nach den Axen wirklich erhält, (also die Componenten von mw), und da diese Zunahmen sich auch durch $m\frac{d^2x}{dt}$, ... ausdrücken lassen, so erhält man $m\frac{d^2x}{dt} = (X-U)dt$, oder

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X-U,\ m\frac{d^2y}{dt^2} = Y-V,\ m\frac{d^2z}{dt^2} = Z-W.$$

Ferner aber besteht zwischen der verlorenen Kraft und den Widerständen an jedem Puncte Gleichgewicht, oder es besteht überhaupt zwischen allen verlorenen Kräften an dem Systeme Gleichgewicht, und folglich müssen diese Kräfte, wenn $L=0$, $M=0$, .. die zwischen den Coordinaten der Puncte obwaltenden Gleichungen sind, sich, nach §. 58., ausdrücken lassen durch

$$U = \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \cdots$$

$$V = \lambda\frac{dL}{dy} + \mu\frac{dM}{dy} + \cdots$$

$$W = \lambda \frac{dL}{dz} + \mu \frac{dM}{dz} + \cdots$$

Setzt man diese Werthe von U, V, W in die vorhergehenden Gleichungen, und schreibt noch $-\lambda$, $-\mu$, .. anstatt λ, μ, ..; so erhält man für den Punct (x, y, z)

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda \frac{dL}{dx} + \mu \frac{dM}{dx} + \cdots \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda \frac{dL}{dy} + \mu \frac{dM}{dy} + \cdots \qquad \text{A.} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda \frac{dL}{dz} + \mu \frac{dM}{dz} + \cdots \end{aligned}$$

und ähnliche Gleichungen für alle übrigen Puncte des Systemes; wodurch ausgedrückt wird, daß das Beschleunigungsmoment eines Punctes m, nach jeder Axe, gleich ist der Summe der Componenten der beschleunigenden Kraft und der Widerstände, nach dieser Axe. Ist n die Anzahl der Puncte, i die der Bedingungsgleichungen des Systemes, oder die der Coefficienten λ, μ, ν.., so ergeben sich aus den vorstehenden, nach Elimination von λ, μ.., überhaupt 3n—i Differential-Gleichungen, welche in Verbindung mit den i Bedingungen L=0, M=0,.. gerade erforderlich und hinreichend sind, um durch Integration die 3n Coordinaten der Puncte als Functionen von t zu bestimmen. Diese Integration führt 6n—2i Constanten herbei; so viele von einander unabhängige Coordinaten und Componenten von Geschwindigkeiten müssen also noch für irgend einen Augenblick gegeben sein, wenn alle Constanten bestimmt werden sollen. Da die Anzahl aller Coordinaten und Componenten der Geschwindigkeiten, nach den Axen, überhaupt 6n ist, und zwischen ihnen 2i Bedingungen $L=0$, $M=0, \cdots$ $\frac{dL}{dt}=0$, $\frac{dM}{dt}=0, \cdots$ obwalten, so können in der That gerade 6n—2i Coordinaten und Geschwindigkeiten beliebig gegeben sein.

80. Ist das System ganz frei, so sind die Widerstände an allen Puncten desselben einander zu zweien gleich und entgegengerichtet; ihre Mittelkraft und ihr zusammengesetztes Paar sind daher Null, und haben folglich keinen Einfluß auf das resultirende Bewegungsmoment der Puncte und das zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente, deren Aenderungen vielmehr nur noch durch die Mittelkraft und das zusammengesetzte Paar der beschleunigenden Kräfte bedingt sein können. Sind also z. B. auch die beschleunigenden Kräfte entweder Null oder in jedem Augenblick einander zu zweien gleich und entgegengerichtet, so bleibt das resultirende Bewegungsmoment und das zusammensetzte Paar der Bewegungsmomente fortwährend unveränderlich wie in §. 73.

Um dieses auch aus den allgemeinen Gleichungen des vorigen §. herzuleiten, bemerke man, daß bei einem freien Systeme nur Gleichungen zwischen den gegenseitigen Entfernungen der Puncte Statt finden können. Werden diese, wie in §. 55., mit l, m, n, p, q, .. bezeichnet, so ist $L = f(l, m, n, p, q, \cdots) = 0$ eine solche Gleichung. Nun sei $l^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$, so ist $\frac{dl}{dx} + \frac{dl}{dx'} = 0$, eben so sei $m^2 = (x-x'')^2 + \cdots$, und mithin $\frac{dm}{dx} + \frac{dm}{dx''} = 0$, $n^2 = (x'-x'')^2 + \cdots$, $\frac{dn}{dx'} + \frac{dn}{dx''} = 0$, u. s. f.; ferner hat man

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dx} &= \frac{df}{dl}\cdot\frac{dl}{dx} + \frac{df}{dm}\cdot\frac{dm}{dx} + \frac{df}{dn}\cdot\frac{dn}{dx} + \cdots \\ \frac{dL}{dx'} &= \frac{df}{dl}\cdot\frac{dl}{dx'} + \frac{df}{dm}\cdot\frac{dm}{dx'} + \frac{df}{dn}\cdot\frac{dn}{dx'} + \cdots \qquad \text{a.} \\ \frac{dL}{dx''} &= \frac{df}{dl}\cdot\frac{dl}{dx''} + \frac{df}{dm}\cdot\frac{dm}{dx''} + \frac{df}{dn}\cdot\frac{dn}{dx''} + \cdots \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

Da nun $\frac{dl}{dx} + \frac{dl}{dx'} = 0$, ferner $\frac{dl}{dx''} = 0$, $\frac{dl}{dx'''} = 0$, u. s. f.;

eben so $\frac{dm}{dx}+\frac{dm}{dx''}=0$, $\frac{dm}{dx'}=0$, $\frac{dm}{dx'''}=0$, u. s. f.; so kommt durch Addition vorstehender Gleichungen

$$\frac{dL}{dx}+\frac{dL}{dx'}+\frac{dL}{dx''}+\cdots=\Sigma\frac{dL}{dx}=0.$$

Auf gleiche Weise ergeben sich $\Sigma\frac{dL}{dy}=0$, $\Sigma\frac{dL}{dz}=0$; folglich erhält man aus den Gleichungen A des vorhergehenden §., und den ähnlichen für die übrigen Puncte des Systemes:

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma X,\ \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}=\Sigma Y,\ \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}=\Sigma Z.$$

Setzt man nun $\Sigma mx=u\Sigma m$, $\Sigma my=v\Sigma m$, $\Sigma mz=w\Sigma m$, so sind u, v, w, die Coordinaten des Schwerpunctes des Systemes (§. 73.), und man hat $\Sigma md^2x=d^2u\Sigma m$, u. s. w. folglich

$$\frac{d^2u}{dt^2}\Sigma m=\Sigma X,\ \frac{d^2v}{dt^2}\Sigma m=\Sigma Y,\ \frac{d^2w}{dt^2}\Sigma m=\Sigma Z,$$

d. h. der Schwerpunct bewegt sich so, als ob alle Massen in ihm vereinigt und alle beschleunigenden Kräfte an ihm angebracht wären. Ferner hat man

$$\left.\begin{aligned}\frac{dL}{dy}&=\frac{df}{dl}\cdot\frac{dl}{dy}+\frac{df}{dm}\cdot\frac{dm}{dy'}+\cdots\\ \frac{dL}{dy'}&=\frac{df}{dy}\cdot\frac{dl}{dy'}+\frac{df}{dm}\cdot\frac{dm}{dy'}+\cdots\end{aligned}\right\}\quad b.$$

u. s. w.

folglich aus a. und b.

$$y\frac{dL}{dx}-x\frac{dL}{dy}=\frac{df}{dl}\left(y\frac{dl}{dx}-x\frac{dl}{dy}\right)+\frac{df}{dm}\left(y\frac{dm}{dx}-x\frac{dm}{dy}\right)+\cdots$$

$$y'\frac{dL}{dx'}-x'\frac{dL}{dy'}=\frac{df}{dl}\left(y'\frac{dl}{dx'}-x'\frac{dl}{dy'}\right)+\frac{df}{dm}\left(y'\frac{dm}{dx'}-x'\frac{dm}{dy'}\right)+\cdots$$

$$y''\frac{dL}{dx''}-x''\frac{dL}{dy''}=\frac{df}{dl}\left(y''\frac{dl}{dx''}-x''\frac{dl}{dy''}\right)+\frac{df}{dm}\left(y''\frac{dm}{dx''}-x''\frac{dm}{dz''}\right)+\cdots$$

u. s. w.

Nun ist aber

$$y\frac{dl}{dx}-x\frac{dl}{dy}+y'\frac{dl}{dx'}-x'\frac{dl}{dy'}=(y-y')\frac{dl}{dx}-(x-x')\frac{dl}{dy}$$
$$=\frac{(y-y')(x-x')-(x-x')(y-y')}{l}=0;$$

ferner $y''\frac{dl}{dx''}-x''\frac{dl}{dy''}=0$, weil $\frac{dl}{dx''}=0$, $\frac{dl}{dy''}=0$, u. s. f.; eben so $y'\frac{dm}{dx'}-x'\frac{dm}{dy'}=0$, und $y\frac{dm}{dx}-x\frac{dm}{dy}+y''\frac{dm}{dx''}-x''\frac{dm}{dy''}=0$, u. s. f.; also erhält man überhaupt durch Addition der vorhergehenden Gleichungen:

$$\Sigma\left(y\frac{dL}{dx}-x\frac{dL}{dy}\right)=0,$$

und eben so

$$\Sigma\left(z\frac{dL}{dy}-y\frac{dL}{dz}\right)=0,\ \Sigma\left(x\frac{dL}{dz}-z\frac{dL}{dx}\right)=0.$$

Diese Gleichungen besagen nichts weiter, als daß das Paar, welches die von der Gleichung $L=0$ herrührenden Widerstände bilden, beständig Null ist, wie oben schon bemerkt wurde. Demnach ergiebt sich aus den Gleichungen A. des vorigen §., und den ähnlichen für die übrigen Puncte des Systemes:

$$\Sigma m\left(\frac{y\,d^2x-x\,d^2y}{dt^2}\right)=\Sigma(Xy-Yx)$$

$$\Sigma m\left(\frac{z\,d^2y-y\,d^2z}{dt^2}\right)=\Sigma(Yz-Zy)$$

$$\Sigma m\left(\frac{x\,d^2z-z\,d^2x}{dt^2}\right)=\Sigma(Zx-Xz).$$

Da $\Sigma m\left(\frac{y\,d^2x-x\,d^2y}{dt^2}\right)=\frac{d\left(\Sigma m\frac{(y\,dx-x\,dy)}{dt}\right)}{dt}$ ist, so kann man die erste der obigen Gleichungen auch so schreiben:

$$d\left(\Sigma m\frac{(y\,dx-x\,dy)}{dt}\right)=\Sigma(Xy-Yx)\cdot dt,$$

und ähnlich die übrigen; diese Gleichungen enthalten mithin, was oben schon gesagt ist, nämlich daß die Aenderungen des zusammengesetzten Paares der Bewegungsmomente, in Bezug auf den beliebig gewählten Anfang der Coordinaten O, nur durch die Momente der beschleunigenden Kräfte in Bezug auf O bedingt werden. Diese Momente sind Null, wenn die beschleunigenden Kräfte einander zu zweien gleich und entgegengerichtet sind; sie sind auch Null, wenn die beschleunigenden Kräfte in jedem Augenblicke nach dem Anfange O der Coordinaten gerichtet sind. Von dem letzteren Falle bietet sich ein Beispiel, in Bezug auf die Bewegung eines einzelnen Punctes, in §. 72. dar, wo die beschleunigenden Kräfte in dem nach dem Halbmesser gerichteten Widerstande der Kugelfläche und der Schwere bestanden. Zerlegt man dieselben in eine horizontale und in eine verticale Componente, so ist die erstere vonseiten der Schwere Null, und besteht mithin nur in der horizontalen Componente des Widerstandes, welche nach dem Mittelpuncte gerichtet, und deren Moment in Bezug auf diesen daher beständig Null ist. Hieraus entspringt die am Ende von S. 221. erwähnte Eigenschaft der Bewegung eines schweren Punctes auf der Kugel.

Sind überhaupt die Momente $\Sigma(Xy-Yx)=0$, $\Sigma(Yz-Zy)=0$, $\Sigma(Zx-Xz)=0$, so erhält man durch die erste Integration der vorhergehenden Gleichungen:

$$\Sigma m(y\,dx-x\,dy)=c\,dt,\ \Sigma m(z\,dy-y\,dz)=c'\,dt,$$
$$\Sigma m(x\,dz-z\,dx)=c''\,dt,$$

d. h. das zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente, in Bezug auf den Anfang der Coordinaten O, bleibt nach Ebene und Größe fortwährend unveränderlich. Die Constanten c, c', c'' drücken die Componenten desselben nach den Coordinatenebenen aus; bezeichnet man noch seine Größe (Moment) mit Q, so ist $Q=\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}$. Dieser Satz kann auch, wie in §. 74., so ausgesprochen werden: Die Summen der Flächenräume, welche die Projectionen der von O nach den Puncten des Systemes gehenden Leitstrahlen, auf eine unveränderliche Ebene, in gleichen Zeiten überstreichen, sind einander gleich. Die Werthe dieser überstrichenen Flächen sind, in Bezug auf die Coordinatenebenen, und für die Einheit der Zeit, c, c', c''. Nimmt man xz senkrecht auf der Ebene des zusammengesetzten Paares, so wird $c''=0$, und zugleich $\sqrt{c^2+c'^2}=Q$. Es sei Θ die Neigung der Ebene xy gegen die von Q, so ist $c=Q\cos\Theta$, $c'=Q\sin\Theta$. Nimmt man noch die Ebene xy parallel der von Q, so wird $\Theta=0$, und $c=Q$; die Summe der von den Projectionen der Leitstrahlen in der Zeiteinheit überstrichenen Flächen wird also, bei demselben Anfangspuncte O, am größten, wenn die Ebene des zusammengesetzten Paares die Projectionsebene ist; ihr Werth ist dann Q, für eine andere gegen diese unter dem Winkel Θ geneigte Ebene ist er $Q\cos\Theta$.

Man pflegt den hier angegebenen Satz den von der Erhaltung der Flächen zu nennen.

81. Aus den Gleichungen A. und den ähnlichen für die übrigen Puncte, in §. 79., kann auf folgende Art ein sehr wichtiger und allgemein gültiger Satz abgeleitet werden. Multiplicirt man sie der Reihe nach mit dx, dy, dz, eben so die ähnlichen für den Punct (x', y', z') geltenden mit dx', dy', dz', u. s. f., addirt die Producte, und setzt

$$dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z=dz\,d^2s,\ dx'd^2x'+\cdots=ds'd^2s',$$

u. s. f., noch bemerkend, daß

$$\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz+\frac{dL}{dx'}dx'+\cdots=dL=0,$$

u. s. f.; so fallen alle von den Ableitungen von L, M, ... herrührenden Glieder weg, und man erhält:

$$\frac{m\,ds\,d^2s+m'\,ds'\,d^2s'+\cdots}{dt^2}=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz+X'\,dx'+\cdots$$

oder, wenn $\frac{ds}{dt}=v$, $\frac{ds'}{dt}=v'$, $X dx+Y dy+Z dz=P\cos\Theta ds$,

u. s. f. (s. §. 70.) gesetzt werden:

$$\Sigma mvdv = \Sigma P\cos\Theta ds, \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}\Sigma md(v^2) = \Sigma P\cos\Theta ds.$$

Der Ausdruck $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$ ist die Summe der lebendigen Kräfte (s. §. 70.) aller Puncte, oder die **lebendige Kraft des Systemes**. Die vorstehende Gleichung lehrt demnach, daß **die Zunahme der lebendigen Kraft des Systemes in jedem Zeitelement dt gleich ist der Summe der Producte aus der Intensität jeder Kraft in die Fortrückung ihres Angriffspunctes nach der Richtung der Kraft, während der Zeit dt.** Von den Zeichen dieser Producte gilt die in §. 70. aufgestellte Regel.

Wirken demnach auf das System keine beschleunigenden Kräfte, so ist $\Sigma P\cos\Theta ds = 0$, und mithin $\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \text{Const.}$, oder die lebendige Kraft des Systemes ist während der ganzen Dauer der Bewegung unveränderlich.

Ist der Ausdruck $\Sigma P\cos\Theta ds = \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$ ein genaues Differential, oder giebt es eine Function Π der Coordinaten $x, y, z, x', y', z', x'', \cdots$, so beschaffen, daß $d\Pi = \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$; so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\Sigma md(v^2) = d\Pi,$$

mithin durch Integration $\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 + \Pi - \Pi_0$; die lebendige Kraft wird dann immer wieder die nämliche, wenn der nämliche Werth von Π wiederkehrt. Man vergleiche hier §. 70. und 71., wo derselbe Satz in Bezug auf einen einzelnen Punct entwickelt ist. Beispiele von Fällen, in welchen der Ausdruck $\Sigma(Xdx + \cdots)$ ein vollständiges Differential ist, und Bemerkungen über die geometrische Bedeutung seines Integrales (Π) findet man in §. 62. und 63. Um hier nur ein sehr einfaches Beispiel genauer anzuführen, seien die beschleunigenden Kräfte an den Puncten alle constant und parallel der Axe x, zugleich den Massen der Puncte proportional, so kann man setzen: $X = gm$, $Y = 0$, $Z = 0$, $X' = gm'$, $Y' = 0$, $Z' = 0$, u. s. f.; folglich $d\Pi = g(mdx + m'dx' + \cdots)$ und $\Pi = g(mx + m'x' + \cdots)$. Setzt man demnach $u\Sigma m = \Sigma mx$, so ist u die Abscisse des Schwerpunctes der parallelen Kräfte oder des Systemes (beide sind hier einerlei, weil die beschleunigenden parallelen Kräfte zugleich den Massen proportional angenommen sind); demnach ist

$$\tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = g(u - u_0)\Sigma m;$$

d. h. die Zunahme der lebendigen Kraft des Systemes, in der Zeit von t_0 bis t, dividirt durch die (unveränderliche) Intensität der Resultante der beschleunigenden Kräfte, also der Quotient $\dfrac{\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2}{2g\Sigma m}$, ist gleich der inzwischen erfolgten Verrückung des **Schwerpunctes** nach der (gleichfalls unveränderlichen) Richtung jener Resultante. Dieses läßt sich z. B. auf ein System von schweren Puncten anwenden, in so fern die Schwere als unveränderlich betrachtet wird. Die Zunahme an lebendiger Kraft bei einem solchen, während einer gewissen Zeit, hängt allemal blos von der verticalen Tiefe ab, um welche der Schwerpunct in dieser Zeit gefallen ist; sie wird Abnahme, wenn der Schwerpunct steigt. Dabei ist es ganz einerlei, wie die Puncte mit einander verbunden sind, und ob sie sich frei oder auf vorgeschriebenen Bahnen bewegen. (Es versteht sich von selbst, daß hier die Einwirkung anderer Kräfte, wie Reibung, Widerstand der Luft, u. dgl., welche sich in der Natur nie ganz beseitigen läßt, nicht in Betracht kommt.)

82. Es giebt Fälle, in welchen der im vorigen §. entwickelte Satz der lebendigen Kräfte allein schon zur Bestimmung der Bewegung des Systemes hinreicht; nämlich wenn bei einem Systeme von n Puncten zwischen den $3n$ Coordinaten $3n-1$ Bedingungen gegeben sind oder überhaupt sich annehmen lassen. Ist z. B. ein festes System von n Puncten gegeben, so finden zwischen den Coordinaten derselben $3n-6$ Bedingungen Statt, welche die Unveränderlichkeit der gegenseitigen Entfernungen ausdrücken. Sind nun noch zwei der n Puncte unbeweglich, so sind ihre sechs Coordinaten unveränderlich; da aber die Entfer-

nung zwischen beiden Puncten schon in den vorigen 3n—6 Bedingungen enthalten ist, so ist die Unveränderlichkeit einer der sechs Coordinaten eine Folge der übrigen Bedingungen; mithin kommen also nur noch 5 Bedingungen hinzu, und man hat also zwischen 3n Coordinaten überhaupt 3n—1 Bedingungen. In der That versteht sich auch von selbst, daß bei einem festen Körper, der sich nur um eine unbewegliche Axe drehen kann, eine einzige Gleichung zur Bestimmung der Bewegung hinreichen muß, weil eben nur eine einzige Geschwindigkeit zu bestimmen übrig bleibt.

Um dieses Beispiel sogleich weiter auszuführen, sei ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers, d. h. die Geschwindigkeit eines seiner Puncte in der Entfernung $=1$ von der Drehungsaxe; ferner sei m die Masse des Körpers, dm die im Verhältnisse zu m unendlich kleine Masse eines nach allen Dimensionen unendlich kleinen Theiles des Körpers, r der Abstand dieses Theiles dm von der Axe, so ist $v=r\omega$ die Geschwindigkeit, und mithin $\frac{1}{2}dm \cdot r^2\omega^2$ die lebendige Kraft von dm, folglich $\frac{1}{2}\int dm \cdot r^2\omega^2$ die lebendige Kraft des Körpers. Das Integralzeichen bezieht sich hier auf alle Elemente dm, und in Bezug auf dasselbe ist ω constant, folglich die lebendige Kraft gleich $\frac{1}{2}\omega^2\int r^2 dm$. Man nennt das Integral $\int r^2 dm$, d. h. die Summe der Producte aus der Masse jedes Elementes in das Quadrat seines Abstandes von der Drehungsaxe das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Axe; die lebendige Kraft ist mithin hier gleich dem halben Producte aus dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit in das Trägheitsmoment des Körpers, in Bezug auf die Drehungsaxe. Nimmt man diese zur Axe der x, so sind die Abscisse x und der Abstand $r=\sqrt{y^2+z^2}$ für jeden Punct unveränderlich; daher bleibt, wenn $y=r\sin\varphi$, $z=r\cos\varphi$ gesetzt werden, nur noch φ als Function der Zeit zu bestimmen. Dieses geschieht mit Hülfe des Satzes der lebendigen Kräfte, indem die Winkelgeschwindigkeit ω der Ableitung $\frac{d\varphi}{dt}$ gleich ist. Denn für $r=1$ wird $x=\sin\varphi$, $y=\cos\varphi$,

mithin die Geschwindigkeit $\omega=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}$.

Nun ist $dx=0$, für jeden Punct, folglich die Summe $\Sigma(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)=\Sigma(Y\,dy+Z\,dz)$; und mithin wird die Gleichung der lebendigen Kräfte folgende:

$$\tfrac{1}{2}d(\omega^2)\cdot\int r^2 dm=\Sigma(Y\,dy+Z\,dz).$$

In dieser Gleichung ist $\omega=\frac{d\varphi}{dt}$; ferner kommt auf der rechten Seite, wenn die Kräfte als Functionen der Coordinaten gegeben sind, keine andere mit der Zeit veränderliche Größe vor als φ; diese Gleichung ist folglich immer integrabel; und man erhält:

$$\tfrac{1}{2}\omega^2\int r^2 dm=\int\Sigma(Y\,dy+Z\,dz)+\text{Const.},$$

wo das Integral rechts eine Function von φ ist. Durch eine zweite Integration kann aus dieser Gleichung, wie man sieht, φ sofort als Function der Zeit bestimmt werden, welches der Zweck der Aufgabe ist.

Die beschleunigende Kraft sei die Schwere, unveränderlich gedacht, und die Axe der z ihr parallel, also vertical und positiv nach unten, so ist $Y=0$, $Z=g\,dm$, mithin $\frac{1}{2}\omega^2\int r^2 dm=\int\Sigma g\,dm\,dz=\Sigma gz\,dm+\text{Const.}$

Nennt man z' die verticale Ordinate des Schwerpunctes des Körpers, so ist $mz'=\Sigma mz$. Es sei noch a der Abstand des Schwerpunctes von der Drehungsaxe x, und man verstehe unter φ die Neigung von a gegen die Verticale z (die Winkelgeschwindigkeit ω bleibt gleich $\frac{d\varphi}{dt}$, wie vorhin), so ist $z'=a\cos\varphi$, und mithin giebt vorstehende Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\cdot\int r^2 dm=amg\cos\varphi,$$

oder, wenn man das Trägheitsmoment $\int r^2 dm=k^2 m$ setzt:

$$k^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=2ag\cos\varphi+\text{Const.}$$

Es sei, für $t=0$, $\frac{d\varphi}{dt}=v_0$, $\varphi=\alpha$, so erhält man

$$k^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=k^2v_0{}^2+2ag(\cos\varphi-\cos\alpha).$$

Für einen schweren Punct, der sich in einem verticalen Kreise vom Halbmesser r bewegt, d. h. für das in einer Ebene schwingende mathematische oder einfache Pendel hat man nach §. 72. 5., wenn das dortige c und mit ihm $d\varphi$ gleich Null gesetzt, und φ für das dortige ψ, so wie rv_0 für v_0 geschrieben wird, weil hier v_0 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit, mithin rv_0 die Anfangsgeschwindigkeit ist:

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=r^2v_0{}^2+2gr(\cos\varphi-\cos\alpha).$$

Diese Gleichung wird mit der vorigen einerlei, wenn $ar=k^2$. Der Körper (das physische Pendel) schwingt also um seine unbewegliche Axe gleichzeitig mit einem einfachen Pendel von der Länge $r=\frac{k^2}{a}$. Legt man durch die Axe x und den Schwerpunct eine Ebene, und zieht in ihr eine der x parallele Gerade, in dem Abstande $r=\frac{k^2}{a}$ von x, auf der Seite des Schwerpunctes, so schwingen die Puncte dieser Geraden eben so als ob die übrige Masse des Körpers nicht vorhanden wäre. Dieselbe wird **Schwingungsaxe** genannt.

Die Dauer einer sehr kleinen Schwingung beträgt, nach §. 72., bei dem einfachen Pendel von der Länge r, $t=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, mithin bei dem physischen, welches mit dem einfachen von der Länge $\frac{k^2}{a}$ gleichzeitig schwingt, $t=\pi\sqrt{\frac{k^2}{ag}}$. Zählt man die Anzahl (n) der Schwingungen, welche dieses Pendel während einer bekannten und hinreichend langen Zeit T macht, so erhält man mit großer Genauigkeit die Dauer einer Schwingung gleich

$\frac{T}{n}$, und mithin $\frac{T}{n}=\pi\sqrt{\frac{k^2}{ag}}$; folglich $g=\frac{k^2\pi^2n^2}{T^2a}$. Es läßt sich aber, wenn die Masse in dem Pendel gleichmäßig oder überhaupt nach einem bekannten Gesetze vertheilt ist, aus der Gestalt desselben der Quotient $\frac{k^2}{a}$ berechnen. Denn es sei dm die Masse, $dV=dx\,dy\,dz$ das Volumen eines Elementes, so ist unter Annahme gleichmäßiger Vertheilung, jene diesem proportional, also $dm=\mu dV$, wo μ ein constanter Coefficient, und mithin ist das Trägheitsmoment $\int r^2dm=k^2m=\mu\int(y^2+z^2)dV$. (Das Zeichen $\int$ bedeutet hier eine dreifache Integration.) Ferner hat man zur Bestimmung von a, $my'=\int y\,dm=\mu\int y\,dV$, $mz'=\int z\,dm=\mu\int z\,dV$, und $a=\sqrt{y'^2+z'^2}$; und da sich die dreifachen Integrale $\int y\,dV$, $\int z\,dV$, $\int(y^2+z^2)dV$ sämmtlich finden lassen, so folgt, wenn man ihre Werthe der Reihe nach mit α, β, γ bezeichnet, $\frac{k^2}{a}=\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. Demnach kommen in obigem Werthe von g nur bekannte Zahlen vor, aus denen sich ein bestimmter Zahlenwerth für g, d. i. für die Intensität der Schwere an dem Orte der Beobachtung, ergiebt.

Die Pendelschwingungen liefern daher ein Mittel zur Bestimmung dieser Intensität, welches sehr großer Genauigkeit fähig ist; es versteht sich jedoch von selbst, daß solche nur durch weitere Correctionen und überhaupt durch Berücksichtigung vieler Umstände erreicht wird, von denen hier nicht die Rede sein kann.

83. Denkt man sich die bisherige Drehungsaxe (x) wieder **beweglich**, dagegen die Schwingungsaxe (x') **unbeweglich**, so fällt die neue Schwingungsaxe in jene Drehungsaxe, oder mit andern Worten: Drehungs- und Schwingungs-Axe lassen sich mit einander vertauschen.

Diese Eigenschaft folgt aus einem allgemeinen Satze über die lebendige Kraft eines Systemes, der hier zugleich seine Stelle findet; nämlich:

Die lebendige Kraft eines Systemes läßt sich immer in zwei Theile zerlegen, deren Summe sie gleich ist. Der eine Theil ist die lebendige Kraft, welche der Bewegung des Schwerpunctes entspricht, d. h. er ist gleich dem halben Producte aus der Summe aller Massen des Systemes, multiplicirt in das Quadrat der Geschwindigkeit des Schwerpunctes; der andere Theil entspricht den relativen Bewegungen der Puncte gegen jenen Schwerpunct, d. h. er ist gleich der halben Summe der Producte aus der Masse jedes Punctes in das Quadrat seiner relativen Geschwindigkeit, in Beziehung auf den Schwerpunct.

Denn es seien ξ, η, ζ die Coordinaten des Schwerpunctes S; x, y, z die eines Punctes m des Systemes, also $u=x-\xi$, $v=y-\eta$, $w=z-\zeta$ die relativen Coordinaten von m gegen S; so ist $\xi\Sigma m=\Sigma mx$, oder $\Sigma mu=0$, und eben so $\Sigma mv=0$, $\Sigma mw=0$. Die lebendige Kraft des Systemes sei U; mithin $U=\frac{1}{2}\Sigma m\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}\right)$. Setzt man $dx=d\xi+du$, $dy=d\eta+dv$, $dz=d\zeta+dw$, so kommt

$$U=\tfrac{1}{2}\frac{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}{dt^2}\Sigma m+\frac{d\xi}{dt}\Sigma m\frac{du}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\Sigma m\frac{dv}{dt}$$
$$+\frac{d\zeta}{dt}\Sigma m\frac{dw}{dt}+\tfrac{1}{2}\Sigma m\left(\frac{du^2+dv^2+dw^2}{dt^2}\right);$$

oder, weil $\Sigma m\frac{du}{dt}=0$, $\Sigma m\frac{dv}{dt}=0$, $\Sigma m\frac{dw}{dt}=0$,

$$U=\tfrac{1}{2}\frac{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}{dt^2}\Sigma m+\tfrac{1}{2}\Sigma m\left(\frac{du^2+dv^2+dw^2}{dt^2}\right), \qquad a.$$

w. z. b. w. Wendet man diesen Satz auf einen festen Körper an, der sich um eine unbewegliche Axe (sie sei die der x) dreht; so bleiben bei der Drehung x und ξ, also u, constant. Ferner sei, für den Schwerpunct $\eta=a\sin\varphi$, $\zeta=a\cos\varphi$, für einen andern Punct m sei $y=r\sin(\varphi+\varepsilon)$, $z=r\cos(\varphi+\varepsilon)$; ε ist die Neigung von r gegen a, welche eben so wie die Abstände r und a während der Bewegung unveränderlich bleibt. Man erhält

$$d\eta^2+d\zeta^2=a^2 d\varphi^2,$$
$$dv=dy-d\eta=(r\cos(\varphi+\varepsilon)-a\cos\varphi)d\varphi,$$
$$dw=dz-d\zeta=-(r\sin(\varphi+\varepsilon)-a\sin\varphi)d\varphi;$$

hieraus folgt $dv^2+dw^2=(r^2+a^2-2ar\cos\varepsilon)d\varphi^2$. Bezeichnet man mit ϱ den senkrechten Abstand des Punctes m von der durch den Schwerpunct gehenden, mit x parallelen Geraden (sie heiße q), so ist $\varrho^2=a^2+r^2-2ar\cos\varepsilon$, und wird noch die Winkelgeschwindigkeit $\omega=\frac{d\varphi}{dt}$ eingeführt, so hat man $\frac{d\eta^2+d\zeta^2}{dt^2}=a^2\omega^2$, $\frac{dv^2+dw^2}{dt^2}=\varrho^2\omega^2$; folglich nach a. die lebendige Kraft des Körpers:

$$U=\tfrac{1}{2}a^2\omega^2\Sigma m+\tfrac{1}{2}\omega^2\Sigma\varrho^2 m,$$

wobei zu bemerken, daß $\Sigma\varrho^2 m$ das Trägheitsmoment des Körpers für die Axe q ist.

Von der anderen Seite aber ist die lebendige Kraft des Körpers $U=\frac{1}{2}\omega^2\Sigma r^2 m$, mithin, nach Aufhebung des gemeinsamen Factors $\frac{1}{2}\omega^2$:

$$\Sigma r^2 m=\Sigma\varrho^2 m+a^2\Sigma m, \qquad b.$$

d. h. das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine beliebige Axe ist gleich demjenigen in Bezug auf die mit jener parallel durch den Schwerpunct gelegte Axe, vermehrt um das Product aus der Masse des Körpers in das Quadrat des Abstandes (a) beider Axen von einander.

Man setze $\Sigma r^2 m=k^2\Sigma m$, $\Sigma\varrho^2 m=\lambda^2\Sigma m$, so kommt $k^2=a^2+\lambda^2$. Diese Gleichung lehrt, daß der Schwerpunct immer zwischen der Drehungsaxe (x) und der Schwingungsaxe (x′) liegt. Denn sein Abstand von x ist a, dagegen ist $\frac{k^2}{a}$ nach dem vorigen §. der Abstand zwischen x und x′, und nach vorstehender Gleichung $\frac{k^2}{a}>a$. Nimmt man x′ zur Drehungsaxe, und bezeichnet ihren Abstand vom Schwerpuncte mit a′, so ist

$a' = \frac{k^2}{a} - a$. Bezeichnet man ferner mit mk'^2 das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Axe x', so wird wieder, indem man in der Formel $k^2 = \lambda^2 + a^2$. die Buchstaben k und a beziehungsweise mit k' und a' vertauscht, und λ, wie erforderlich, ungeändert läßt, $k'^2 = \lambda^2 + a'^2$. Nun ist aber $\frac{k^2}{a} = \frac{\lambda^2}{a} + a$, und $\frac{k'^2}{a'} = \frac{\lambda^2}{a'} + a'$, zugleich $a' = \frac{k^2}{a} - a = \frac{\lambda^2}{a}$, folglich $\frac{k'^2}{a'} = a + \frac{\lambda^2}{a}$, also $\frac{k'^2}{a'} = \frac{k^2}{a}$, d. h. die neue Schwingungsaxe fällt in die vorige Drehungsaxe, w. z. b. w.

84. Zu genauerem Verständniß der Aufgabe des §. 82. gehört, daß auch der Druck bestimmt werde, den die Drehungsaxe in jedem Augenblicke erleidet. In der Natur wird auf jeden Punct derselben ein bestimmter Druck ausgeübt werden; man kann aber, so lange die Axe als unbedingt unbiegsam betrachtet wird, wie hier geschehen soll, nicht die Intensität des Druckes auf jeden Punct, sondern nur die Resultante und das zusammengesetzte Paar aus allen diesen Kräften bestimmen. Zu dem Ende nehme man in der Axe x einen beliebigen Punct O zum Anfange der Coordinaten, und denke sich an demselben den in jedem Puncte der Axe Statt findenden Druck in seiner Richtung und in entgegengesetzter angebracht; so erhält man durch Zusammensetzung einen resultirenden Druck R in O, nnd ein gewisses zugehöriges Paar Q, dessen Ebene offenbar durch die Axe x geht; mithin stellen R und Q, in gerade umgekehrtem Sinne wirkend gedacht, den Widerstand der unbeweglichen Axe dar. Da in jedem Augenblicke der Bewegung zwischen den verlorenen Kräften Gleichgewicht besteht (§. 79.); so muß dieser Widerstand jenen Kräften Gleichgewicht halten. Die verlorenen Kräfte sind, nach den Axen x, y, z zerlegt, allgemein $U = X - m\frac{d^2x}{dt^2}$, $V = Y - m\frac{d^2y}{dt^2}$, $W = Z - m\frac{d^2z}{dt^2}$ (§. 79.); zerlegt man noch

R nach x, y, z in die Componenten π, ϱ, σ und das Paar Q nach den Ebenen xy und xz in die Componenten N und M, so erhält man, da zwischen allen diesen Kräften an dem festen Körper, der nunmehr als gänzlich frei zu betrachten ist, Gleichgewicht besteht, den in §. 17. oder auch 59. angegebenen Bedingungen zufolge:

$$\Sigma U + \pi = 0,\ \Sigma V + \varrho = 0,\ \Sigma W + \sigma = 0.$$
$$\Sigma(Vz - Wy) = 0,\quad \Sigma(Wx - Uz) + M = 0,$$
$$\Sigma(Uy - Vx) + N = 0,$$

oder, wenn man für U, V, W ihre Werthe einsetzt:

$$\left.\begin{array}{c} \pi + \Sigma X - \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = 0,\quad \varrho + \Sigma Y - \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \\ \sigma + \Sigma Z - \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = 0. \\ M + \Sigma(Zx - Xz) - \Sigma m\frac{(x\,d^2z - z\,d^2x)}{dt^2} = 0 \\ N + \Sigma(Xy - Yx) - \Sigma m\frac{(y\,d^2x - x\,d^2y)}{dt^2} = 0 \end{array}\right\}\ \text{a.}$$

$$\Sigma(Yz - Zy) - \Sigma m\frac{(z\,d^2y - y\,d^2z)}{dt^2} = 0. \qquad \text{b.}$$

Von diesen Gleichungen dienet die letzte zur Bestimmung der Bewegung; denn wird in derselben $y = r\,sin\,\varphi$, $z = r\,cos\,\varphi$ gesetzt, so geht sie in eine Differentialgleichung zwischen φ und t über, durch deren Integration φ als Function von t sich ergiebt.

In dem gegenwärtigen Falle ist (§. 82.), $X = 0$, $Y = 0$, $Z = gm$, und zugleich $z\,dy - y\,dz = r^2 d\varphi$, folglich giebt die Gleichung b.

$$\Sigma mr^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \Sigma gmy = 0,$$

oder, wenn für den Schwerpunct $y = y' = a\,sin\,\varphi$, mithin $\Sigma my = a\,sin\,\varphi \cdot \Sigma m$, und das Trägheitsmoment $\Sigma mr^2 = k^2\Sigma m$

gesetzt wird:

$$k^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + ag \sin\varphi = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung auf beiden Seiten mit $d\varphi$, und integrirt, so kommt

$$\tfrac{1}{2}k^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - ag \cos\varphi = \text{Const.},$$

welche Gleichung mit der in §. 82. aus dem Satze der lebendigen Kräfte entwickelten, wie gehörig übereinstimmt. Die wiederholte Herleitung kann jedoch zur Uebersicht der verschiedenen Methoden nützlich sein.

Um zur Bestimmung der Widerstände zurückzukehren, setze man in den Gleichungen a.: $X=0$, $Y=0$, $Z=g\,dm$, $dx=0$, $dy=r\cos\varphi\, d\varphi$, $dz=-r\sin\varphi\, d\varphi$, mithin $d^2y = -y\,d\varphi^2 + z\,d^2\varphi$, $d^2z = -z\,d\varphi^2 - y\,d^2\varphi$; und schreibe noch $\int$ statt Σ, so kommt:

$$\left.\begin{aligned}
\pi &= 0, \quad \varrho = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\int z\,dm - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \int y\,dm,\\
\sigma &= -g\int dm - \frac{d^2\varphi}{dt^2}\int y\,dm - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \int z\,dm,\\
M &= -g\int x\,dm - \frac{d^2\varphi}{dt^2}\int xy\,dm - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \int xz\,dm,\\
N &= -\frac{d^2\varphi}{dt^2}\int xz\,dm + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \int xy\,dm.
\end{aligned}\right\} \text{c.}$$

Diese Ausdrücke lassen sich noch etwas vereinfachen, wenn man zum Anfange der Coordinaten denjenigen Punct (er heiße O) wählt, in welchem das vom Schwerpuncte auf die Drehungsaxe gefällte Loth (a) diese Axe trifft; denn alsdann ist die Abscisse des Schwerpunctes Null, mithin $\int x\,dm = 0$. Ferner ist $\int y\,dm = am \sin\varphi$, $\int z\,dm = am\cos\varphi$; es bleiben also nur noch die Integrale $\int xy\,dm$ und $\int xz\,dm$ als Functionen von φ zu bestimmen. Zu dem Ende denke man sich drei in dem Körper feste

Axen aus dem Anfange O der vorigen gezogen; die erste (u) falle mit x zusammen, die zweite v gehe durch den Schwerpunct; die dritte sei w.

Die Axe v bildet mit der verticalen z den veränderlichen Winkel φ; sind folglich x, y, z und u, v, w die Coordinaten desselben Elementes (dm) in beiden Systemen, so hat man: $y = v\sin\varphi - w\cos\varphi$, $z = v\cos\varphi + w\sin\varphi$; folglich $\int xy\,dm = \sin\varphi \int uv\,dm - \cos\varphi\int uw\,dm$, $\int xz\,dm = \cos\varphi\int uv\,dm + \sin\varphi\int uw\,dm$. Die Werthe der Integrale $\int uv\,dm$, $\int uw\,dm$ lassen sich aus der Gestalt des Körpers und der Lage der Axen u, v, w in ihm bestimmen, und sind von der Bewegung unabhängig; man setze daher $\int uv\,dm = Am$, $\int uw\,dm = Bm$, so wird $\int xy\,dm = (A\sin\varphi - B\cos\varphi)m$, $\int xz\,dm = (A\cos\varphi + B\sin\varphi)m$. Wird noch für $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ sein obiger Werth $-\frac{ag\sin\varphi}{k^2}$, und für $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ der Werth $\frac{2ag(\cos\varphi - \cos\alpha)}{k^2}$ gesetzt, in welchem α die größte Ablenkung des Pendels ist, auch das Gewicht (p) anstatt der Masse (m) eingeführt, d. h. $gm = p$ gesetzt, so kommt:

$$\varrho = -\frac{a^2p\sin\varphi\cos\varphi}{k^2} - \frac{2a^2p\sin\varphi(\cos\varphi - \cos\alpha)}{k^2},$$

$$\sigma = -p + \frac{ap\sin\varphi^2}{k^2} - \frac{2a^2p\cos\varphi(\cos\varphi - \cos\alpha)}{k^2},$$

$$M = \frac{ap\sin\varphi}{k^2}(A\sin\varphi - B\cos\varphi)$$
$$- \frac{2ap(\cos\varphi - \cos\alpha)}{k^2}(A\cos\varphi + B\sin\varphi),$$

$$N = \frac{ap\sin\varphi}{k^2}(A\cos\varphi + B\sin\varphi)$$
$$+ \frac{2ap(\cos\varphi - \cos\alpha)}{k^2}(A\sin\varphi - B\cos\varphi).$$

Hierdurch erhält man den Widerstand, den die Drehungsaxe zu leisten hat, für Schwingungen von jeder beliebigen Weite. Für sehr kleine Schwingungen sind α und φ sehr klein; alsdann ergiebt sich der verticale Druck $(-\sigma)$ bis auf die zweiten Potenzen von α und φ gleich dem Gewichte p des Körpers; der horizontale Druck $(-\varrho)$ und die Momente der Paare M und N aber sind beständig sehr klein.

85. Es sei ein Rad an der Welle vorgelegt; $CA=r$ der Halbmesser der Welle, $CB=R$ der des Rades (Fig. 41.); an denselben wirken die Gewichte P und Q, an umgeschlagenen Seilen hängend, einander in Hinsicht auf Drehung entgegen. Ist das Moment von P in Bezug auf C größer als das von Q, d. i. $PR>Qr$, so muß, abgesehen von Reibung, eine Drehung erfolgen, durch welche P sinkt und Q steigt. Um diese Bewegung aus dem Satze der lebendigen Kräfte herzuleiten, sei ω die Winkelgeschwindigkeit, M die Masse, Mk^2 das Trägheitsmoment des Rades und der Welle in Bezug auf die Drehungsaxe, so ist $\frac{1}{2}Mk^2\omega^2$ ihre lebendige Kraft. Die Geschwindigkeit, mit welcher alle Puncte von P sinken, ist offenbar $R\omega$, und die, mit welcher die von Q steigen, ist $r\omega$, folglich ist, wenn man die Massen von P und Q mit m und m' bezeichnet, $\frac{1}{2}mR^2\omega^2$ die lebendige Kraft von P und $\frac{1}{2}m'r^2\omega^2$ die von Q; demnach beträgt die gesammte lebendige Kraft (wenn der Einfachheit wegen von der Masse der Seile abgesehen wird) $\frac{1}{2}\mu\omega^2$, wo zur Abkürzung $\mu=Mk^2+mR^2+m'r^2$ gesetzt ist, und ihre Zunahme in jedem Augenblicke $\mu\omega\,d\omega$.

Ferner wird der Ausdruck $\Sigma(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$, wenn man die Axen x und y horizontal, z vertical und positiv nach unten nimmt, hier gleich $g\Sigma dm\,dz$, weil $X=0$, $Y=0$, $Z=gdm$. Nennt man ζ, ζ', ζ'' die verticalen Ordinaten der Schwerpuncte der Gewichte P, Q, und der Welle mit dem Rade, so ist $\Sigma dm\,dz$ die Summe der Glieder $md\zeta$ und $m'd\zeta'$; das dritte Glied $Md\zeta''$, welches von der Wirkung der Schwere auf die Welle und das Rad herrührt, ist Null, wenn der Schwerpunct genau in die Drehungsaxe fällt, indem alsdann ζ'' constant

bleibt; also ergiebt sich, nach dem Satze der lebendigen Kräfte:

$$\mu\omega\,d\omega=g(md\zeta+m'd\zeta').$$

Nun sind aber die Geschwindigkeiten von P und Q $\frac{d\zeta}{dt}=R\omega$, und $\frac{d\zeta'}{dt}=-r\omega$; folglich erhält man durch Einsetzung dieser Werthe, den gemeinsamen Factor ω weglassend: $\mu\,d\omega=g(Rm-rm')dt$; demnach ist die Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig beschleunigt. Verlangt man noch die Spannungen der Seile BP, AQ, in jedem Augenblicke der Bewegung, so sind diese die verlorenen Beschleunigungsmomente der Massen m und m'. Wäre die Masse m frei, so würde die Schwere ihr die Beschleunigung g ertheilen; die Beschleunigung ist aber $R\frac{d\omega}{dt}$, weil $R\omega$ die Geschwindigkeit von m; also ist $m\left(g-R\frac{d\omega}{dt}\right)$ das verlorene Beschleunigungsmoment der fallenden Masse m, und die Spannung T in BP mithin: $T=m\left(g-R\frac{d\omega}{dt}\right)$. Eben so findet sich das verlorene Beschleunigungsmoment der steigenden Masse m', oder die Spannung T' in AQ: $T'=m'\left(g+r\frac{d\omega}{dt}\right)$. Setzt man für $\frac{d\omega}{dt}$ seinen obigen Werth, so kommt:

$$T=mg\left(1-\frac{R(Rm-rm')}{\mu}\right),\quad T'=m'g\left(1+\frac{r(Rm-rm')}{\mu}\right).$$

Der gesammte Druck auf die Axe ist offenbar die Resultante des Gewichtes (Mg) von Welle und Rad, und der Spannungen T, T'; seine Intensität Π ist also der Summe $Mg+T+T'$ gleich; oder die Gewichte $Mg=W$, $mg=P$, $m'g=Q$ einführend, erhält man:

$$\Pi=W+P\left(1-\frac{R(PR-Qr)}{Wk^2+PR^2+Qr^2}\right)+Q\left(1+\frac{r(PR-Qr)}{Wk^2+PR^2+Qr^2}\right),$$

d. i. $$\Pi = W + P + Q - \frac{(PR - Qr)^2}{Wk^2 + PR^2 + Qr^2};$$

also ist der Druck Π während der Bewegung unveränderlich und kleiner als während der Ruhe, wo er gleich $W+P+Q$ sein würde.

Anmerkung. Soll bei dieser Aufgabe noch die Reibung der Axe der Welle gegen die Zapfenlager in Rechnung gebracht werden, so sei ϱ der Halbmesser dieser Axe, mithin $\varrho\omega$ die Geschwindigkeit, mit welcher jeder Berührungspunct der Axe auf dem Lager gleitet. Ferner sei π der unendlich kleine Druck in einem dieser Berührungspuncte; die daselbst Statt findende Reibung werde ihm proportional, und gleich $f\pi$ gesetzt (f ist ein von der Beschaffenheit der Berührungsflächen abhängiger Coefficiant); durch sie wird, weil die Reibung in der Richtung der Bewegung des Berührungspunctes und dieser gerade entgegen wirkt, und weil die augenblickliche Fortgleitung dieses Punctes der Axe durch $\varrho\, d\omega$ ausgedrückt werden muß, die Zunahme der lebendigen Kraft um ein Glied gleich $-f\pi\varrho\, d\omega$ vermindert und die Summe aller ähnlichen Glieder für sämmtliche Berührungspuncte beträgt, wenn $\Sigma\pi = \Pi$ der gesammte Druck ist, indem der Werth von $f\varrho\, d\omega$ für alle diese Puncte der nämliche bleibt, $-f\Pi\varrho\, d\omega$. Folglich giebt die Gleichung der lebendigen Kräfte:

$$\mu\omega\, d\omega = g(Rm - rm')\omega\, dt - f\Pi\varrho\, d\omega, \qquad 1.$$

wo $\mu = Mk^2 + mR^2 + m'r^2$, wie oben, und zugleich hat man, zur Bestimmung von Π, wie vorhin: $\Pi = W + T + T'$ oder

$$\Pi = g(M + m + m') - (Rm - rm')\frac{d\omega}{dt}. \qquad 2.$$

Zur Abkürzung setze man $Rm - rm' = k$, $M + m + m' = q$, und schreibe f statt $f\varrho$, so werden vorstehende Gleichungen:

$$\mu\omega\, d\omega = gk\,\omega\, dt - f\Pi\, d\omega,\ \Pi = gq - k\frac{d\omega}{dt}.$$

Die Elimination von Π giebt:

$$\left(\mu\frac{d\omega}{dt} - gk\right)\omega + f\left(gq - k\frac{d\omega}{dt}\right)\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

oder $$fk\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 - (\mu\omega + fgq)\frac{d\omega}{dt} + gk\omega = 0,$$

$$\left[fk\cdot\frac{d\omega}{dt} - \tfrac{1}{2}(\mu\omega + fgq)\right]^2 = \tfrac{1}{4}(\mu\omega + fgq)^2 - fgk^2\omega;$$

und endlich

$$fk\cdot\frac{d\omega}{dt} = \tfrac{1}{2}(\mu\omega + fgq) - \sqrt{\tfrac{1}{4}(\mu\omega + fgq)^2 - fgk^2\omega}.$$

Hier muß das negative Zeichen gewählt werden, welches für $f=0$, zunächst $\frac{d\omega}{dt} = \frac{0}{0}$ und nachher $\frac{d\omega}{dt} = \frac{gk}{\mu}$ giebt, wie gehörig. Wählte man dagegen das positive Zeichen, so würde für ein sehr kleines f, $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu\omega}{fk}$ werden, also entweder $\omega = 0$ oder $\frac{d\omega}{dt}$ unendlich groß; von welchen Fällen bei gegenwärtiger Anwendung keiner Statt finden kann. Die Integration der vorstehenden Gleichung hat keine Schwierigkeit; daher kann sie hier übergangen werden.

86. Die in §. 82. und 85. gegebenen Beispiele reichen schon hin, um im Allgemeinen die Anwendung des Satzes der lebendigen Kräfte zu zeigen, welcher jederzeit, wie auch das vorgelegte System beschaffen sei, eine der zur Lösung der Aufgabe nöthigen Gleichungen, ohne weitläufige statische Betrachtungen, liefert, und mithin namentlich in solchen Fällen, wo überhaupt nur eine Gleichung erfordert wird, mit Vortheil angewendet werden kann.

Man kann sich ferner des Satzes der lebendigen Kräfte in vielen Fällen zur Unterscheidung des sicheren und unsicheren Gleichgewichtes bedienen. Besteht zwischen mehreren Kräften, die man sich als Functionen der Coordinaten ihrer Angriffspuncte gegeben denke, an einem Systeme Gleichgewicht, und stellt man sich zugleich das System als ruhend vor; so heißt das Gleichgewicht sicher oder unsicher, je nachdem die Puncte, wenn ihnen irgend eine kleine Bewegung ertheilt wird, durch die fortdauernde Wirkung der Kräfte wieder in die anfängliche Lage zurückgeführt oder von denselben weiter entfernt werden. Man sieht schon aus dieser Erklärung, daß das Gleichgewicht bei demselben Systeme in Hinsicht auf einige Verrückungen sicher, auf andere aber unsicher sein kann. Auch kann dasselbe nach der Verrückung noch fortbestehen; alsdann ist es weder sicher noch unsicher, und mag hier ein stehendes genannt werden. Ein solches findet z. B. bei einem schweren Körper Statt, der sich frei um seinen unbeweglichen Schwerpunct drehen kann; denn das Gleichgewicht dauert während dieser Drehung beständig fort. Ist aber ein schwerer Körper nicht im Schwerpuncte, sondern in einem anderen Puncte befestigt, um welchen er sich ohne Hinderniß drehen kann, und befindet sich der Schwerpunct vertical unter dem Befestigungspuncte, so ist das Gleichgewicht in Hinsicht auf die Verrückung des Schwerpunctes sicher; in Hinsicht auf Drehung des Körpers um die durch den Schwerpunct gehende Verticale findet aber nur ein stehendes Gleichgewicht Statt.

Die Anwendung des Satzes der lebendigen Kräfte auf gegenwärtige Aufgabe beruht auf folgenden Gründen: Nach demselben ist überhaupt $\Sigma m v\, dv = \Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$, und insbesondere, wenn der Ausdruck rechts ein genaues Differential ($d\Pi$) ist, $\frac{1}{2}\Sigma m v^2 = \Pi + \text{Const.}$, wo Π eine Function der Coordinaten anzeigt. Durch Integration erhält man, wenn v_0, v_0', .. die Anfangsgeschwindigkeiten der Puncte sind, und Π_0 den anfänglichen Werth von Π bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma m v_0^2 + \Pi - \Pi_0. \qquad \text{a.}$$

Man denke sich die Anfangsgeschwindigkeiten v_0, v_0', .. sämmtlich sehr klein. Da das System sich anfänglich in der Stellung des Gleichgewichtes befand, so hat man für den ersten Augenblick der Bewegung, $\Pi = \Pi_0$, und zugleich $d\Pi = 0$; mithin kann

der Werth von Π, welcher der Stellung des Gleichgewichtes entspricht, ein Maximum oder Minimum sein. Ist Π_0 ein Maximum von Π, und ist die dem Systeme ertheilte Bewegung von der Art, daß durch sie überhaupt der Werth von Π geändert wird, so wird die Differenz $\Pi - \Pi_0$ bei fortgehender Bewegung zunächst negativ; da aber $\frac{1}{2}\Sigma m v_0^2$ nach der Voraussetzung sehr klein ist, und die Summe aller Glieder auf der rechten Seite der Gleichung a. unter allen Umständen positiv bleiben muß, so läßt sich schließen, daß diejenigen Aenderungen der Coordinaten, mit denen zugleich Π sich ändert, beständig sehr klein bleiben müssen. Denn beträchtliche Aenderungen derselben können nicht erfolgen, ohne daß die Differenz $\Pi - \Pi_0$ negative Werthe erhielte, die nicht mehr sehr klein wären; solche Werthe aber können nicht Statt finden. Folglich ist das Gleichgewicht in Hinsicht auf diejenigen Veränderungen, bei welchen der Werth von Π sich ändert, sicher.

Wenn aber gewisse Coordinaten in Π gar nicht vorkommen, so sind, ungeachtet Π immer ein Maximum bleibt, noch Bewegungen möglich, durch welche der Werth dieser Function gar nicht geändert wird. Indem für solche $\Pi - \Pi_0$ beständig Null ist, wird die lebendige Kraft $\frac{1}{2}\Sigma m v^2 = \frac{1}{2}\Sigma m v_0^2$, bleibt also unveränderlich dieselbe. In Betreff der genannten Bewegungen ist das Gleichgewicht ein stehendes.

Dies ist, was sich hier im Allgemeinen über die Anwendung des Satzes der lebendigen Kräfte auf die Frage nach der Sicherheit des Gleichgewichtes sagen läßt. Es bleibt unentbehrlich, die besonderen Bedingungen jeder Aufgabe näher zu untersuchen, um zu entscheiden, ob nach einer kleinen Erschütterung das System um die Stellung des Gleichgewichtes nur Schwingungen machen, oder wie überhaupt seine Bewegung beschaffen sein wird.

87. Wenn die beschleunigenden Kräfte an einem freien Systeme in gegenseitigen Anziehungen oder Abstoßungen zwischen den

Puncten bestehen, so finden bei der Bewegung desselben folgende Gesetze Statt, die hier aus dem Vorgehenden zusammengestellt werden:

1. Das resultirende Bewegungsmoment aller Massen des Systemes bleibt während der ganzen Dauer der Bewegung unveränderlich; oder der Schwerpunct bewegt sich gleichförmig in gerader Linie mit einer Geschwindigkeit, die gleich ist dem resultirenden Bewegungsmomente, dividirt durch die Summe der Massen.

2. Das zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente, gebildet in Bezug auf einen, entweder unbeweglichen oder auch in der Richtung des resultirenden Bewegungsmomentes fortgehenden Punct, z. B. den Schwerpunct, bleibt während der ganzen Dauer der Bewegung, nach Ebene und Größe, unveränderlich.

3. Sind die Intensitäten der gegenseitigen Anziehungen (Abstoßungen) zugleich Functionen der Entfernungen, so ist, nach §. 62., der Ausdruck $\Sigma(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$ ein genaues Differential ($=d\Pi$), und folglich erhält die lebendige Kraft des Systemes immer denselben Werth, so oft derselbe Werth von Π wiederkehrt (man sehe §. 81.); insbesondere also wird auch die lebendige Kraft wieder die nämliche, wenn der Fall eintritt, daß alle Puncte des Systemes wieder in die nämlichen Orte gelangen, welche sie schon einmal einnahmen. Dieser Satz gilt auch, wenn das System nicht frei ist.

Die Erfahrung lehrt, daß wenn zwei Körper im Raume einander mit gewissen Geschwindigkeiten begegnen, bei dem Zusammentreffen sofort sehr große Aenderungen in ihren Bewegungen eintreten. Es müssen also sehr große beschleunigende Kräfte da sein, welche in sehr kurzer Zeit die beträchtlichen Wirkungen hervorbringen, die man bei dem Stoße beobachtet. Diese Kräfte lassen sich als Anziehungen und Abstoßungen zwischen den Puncten der Körper denken, die sich nur auf sehr kleine Entfernungen erstrecken. Geht man von dieser Voraussetzung aus, und denkt

sich beide Körper ganz frei beweglich, auch keinen anderweitigen beschleunigenden Kräften unterworfen, so lassen sich unmittelbar die beiden ersten der so eben aufgestellten Bewegungsgesetze anwenden. Diesen zufolge geht der Schwerpunct beider Körper während des Stoßes und nach ihm gleichförmig in gerader Linie ungestört fort, wie vorher; und das zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente, in Bezug auf ihn gebildet, bleibt ebenfalls, nach Ebene und Größe, gänzlich ungeändert. Diese Gesetze gelten, die Körper mögen bei dem Stoße unversehrt bleiben oder zerbrechen; auch sind sie unabhängig von der Reibung, welche bei dem Stoße an den Oberflächen der Körper eintritt. Denn obgleich die Kenntniß der physischen Ursachen der Reibung noch nicht sehr vorgerückt ist, so muß man sich doch dieselbe als Folge gewisser Anziehungen oder Abstoßungen denken, welche sich nur auf sehr geringe Weiten erstrecken, und bei denen die Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung, wie überall, Statt findet. Indem die Reibung das Gleiten des einen Körpers an dem anderen, während der sehr kurzen Dauer des Stoßes, erschwert oder verhindert, kann sie die Vertheilung der Bewegung zwischen beiden beträchtlich ändern, aber bei freien Körpern weder auf die Bewegung ihres gemeinsamen Schwerpunctes noch auf das zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente Einfluß haben.

Die Anwendung des Satzes der lebendigen Kräfte auf den Stoß der Körper gestattet nur einen sehr bedingten Schluß, weil die Wirkungen ihrer Theile auf einander uns nicht näher bekannt sind.

Um von dem einfachsten Falle auszugehen, denke man sich zwei freie Puncte m und m′, die einander, in der Entfernung r, mit der Kraft fr abstoßen. Es seien δr, $\delta_1 r$ die Verrückungen von m und m′, in dem Zeitelemente dt, nach der Richtung ihres Abstandes r, v und v′ ihre Geschwindigkeiten, so hat man, nach dem Satze der lebendigen Kräfte, folgende Gleichung:

$$mvdv+m'v'dv'=fr(\delta r+\delta_1 r).$$

Der Ausdruck $fr\cdot\delta r$ ist negativ oder positiv, je nachdem, da hier

Abstoßung vorausgesetzt wird, die Verrückung δr in die Gerade r oder in deren Verlängerung fällt; eben so verhält es sich mit dem anderen Gliede $fr \cdot \delta_1 r$. Denkt man sich fr immer positiv, und hiernach δr, $\delta_1 r$ mit ihren gehörigen Zeichen genommen, so stellt in jedem Falle die Summe $\delta r + \delta_1 r$ die gesammte Aenderung von r, in der Zeit dt, dar; diese mit dr bezeichnend, erhält man: $mv\,dv + m'v'dv' = fr \cdot dr$. Es sei, in einem gewissen Augenblicke, $r = r_0$, $v = v_0$, $v' = v_0$, so ergiebt sich durch Integration der vorstehenden folgende Gleichung der lebendigen Kräfte:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}m'v'^2 = \tfrac{1}{2}mv_0{}^2 + \tfrac{1}{2}m'v_0'^2 + \int_{r_0}^{r} fr\,dr.$$

Nimmt man an, daß die abstoßende Kraft sich nur auf eine bestimmte Weite erstreckt, so ist $fr = 0$, so lange r größer ist, als eine gewisse Grenze r_0. Sobald aber $r < r_0$, denke man sich daß eine mit abnehmendem r über alle Grenzen hinaus wachsende Abstoßung Statt finde; also daß die Function fr, sobald $r < r_0$, mit abnehmendem r wachse, für $r = 0$ aber unendlich groß werde. Auch das Integral $\int_0^{r_0} fr\,dr$ werde als unendlich groß angenommen. Die obige Gleichung läßt sich auch schreiben: $\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}m'v'^2 = \tfrac{1}{2}mv_0{}^2 + \tfrac{1}{2}m'v_0'^2 - \int_r^{r_0} fr \cdot dr.$

Das Integral $\int_r^{r_0} fr\,dr$ ist wesentlich positiv, so lange $r < r_0$, es wird Null, wenn $r > r_0$. Denn unter der Voraussetzung $r > r_0$ ist $fr = 0$, und mithin auch $\int_{r_0}^{r} fr\,dr = 0$. Aus obiger Gleichung folgt, daß der Abstand r nicht über eine gewisse Grenze hinaus abnehmen kann; denn für ein sehr kleines r würde der Werth der lebendigen Kraft negativ werden, was nicht angeht. Auch ist aus der Natur der Sache klar, daß r nach der Abnahme wieder bis zu dem Werthe r_0 zunehmen muß, da die Puncte einander beständig abstoßen; der Leser wird also den strengen Beweis dieser Behauptung, der sich durch Rechnung leicht führen läßt, nicht vermissen. Denkt man sich demnach r von r_0 an anfänglich bis zu einem gewissen Werthe abnehmend, nachher aber wieder bis r_0 wachsend, so vermindert sich anfänglich der Werth der lebendigen Kraft, und nimmt dann mit wachsendem r wieder zu, bis für $r = r_0$ das Integral $\int_r^{r_0} fr\,dr$ verschwindet. Alsdann erhält, indem die Abstoßung aufhört, die gesammte lebendige Kraft der Puncte wieder den nämlichen Werth, den sie anfänglich besaß.

Dies ist der einfachste, dem Stoße elastischer Körper analoge Fall, den die Theorie annehmen kann. Aehnliche Betrachtungen lassen sich auch auf den Stoß zwischen Körpern von beliebiger Größe anwenden. Man betrachte nur zwei Körper A und B; es sei u die Geschwindigkeit des Schwerpunctes von A, v die relative Geschwindigkeit eines Elementes m dieses Körpers, gegen jenen Schwerpunct; so ist $\tfrac{1}{2}u^2\Sigma m + \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2$ die lebendige Kraft von A (§. 83.). Eben so sei $\tfrac{1}{2}u'^2\Sigma m + \tfrac{1}{2}\Sigma mv'^2$ die lebendige Kraft von B. Die Summe von beiden werden zur Abkürzung mit U bezeichnet; ihr Werth in dem ersten Augenblicke des Stoßes, in welchem die gegenseitigen Wirkungen zwischen den Puncten der Körper beginnen, sei U_0. Diese Wirkungen bestehen theils aus denen, welche von einigen Puncten des einen Körpers auf einige des anderen ausgeübt und von diesen wiederum zurückgegeben werden; theils, indem dadurch einige Theile in jedem Körper aus ihrer Lage gebracht und so die Gestalten der Körper geändert werden, aus denen, welche sofort zwischen den Puncten desselben Körpers eintreten. Anderweitige Wirkungen sind nicht vorhanden, wenn die Körper ganz frei sind, wie hier angenommen ist. Es sei r der Abstand zwischen zwei auf einander wirkenden Puncten, fr die Intensität der Anziehung oder Abstoßung zwischen ihnen, beide mögen übrigens demselben Körper angehören oder nicht; so entsteht von dieser Wirkung in dem Ausdrucke des Differentiales der lebendigen Kraft während des Stoßes (U) ein Glied gleich $fr \cdot dr$, und die Gleichung der lebendigen Kräfte wird mithin $dU = \Sigma fr\, dr$. Für den Anfang des Stoßes ist $U = U_0$, es sei noch $r = r_0$, so kommt durch Integration:

$$U = U_0 + \Sigma \int_{r_0}^{r} fr \cdot dr,$$

welche Gleichung in jedem Augenblicke des Stoßes gelten muß. Nimmt man nun an, daß die Körper, nachdem sie zuerst einander mehr oder weniger zusammengedrückt hatten, sich nachher in Folge der Wirkungen zwischen ihren Elementen wieder ausdehnen und ihre ursprüngliche Gestalt wieder genau erhalten (d. h. legt man ihnen die Eigenschaft vollkommener Elasticität bei), und setzt man noch voraus, daß während des Stoßes die einander berührenden (eigentlich nur sehr genäherten) Theile der beiderseitigen Oberflächen keine relative Geschwindigkeit in der Richtung der gemeinsamen Beührungsebene besitzen oder nicht an einander gleiten; so haben am Ende des Stoßes beide Körper wieder die nämliche Gestalt und gegenseitige Stellung, wie am Anfange; mithin ist der Abstand r zwischen je zwei Puncten am Ende des Stoßes wieder dem anfänglichen r_0 gleich, und folglich wird $U = U_0$. Unter diesen Voraussetzungen ist also die lebendige Kraft nach dem Stoße die nämliche wie vorher.

Man muß dieselbe jedoch für jeden Körper nicht allein nach der Geschwindigkeit seines Schwerpunctes berechnen, sondern auch die relativen Bewegungen seiner Theile in Bezug auf jenen berücksichtigen. Sind die Umstände so, daß weder vor noch nach dem Stoße eine Drehung der Körper um ihre Schwerpuncte Statt findet, so folgt hieraus noch nicht, daß die relativen Geschwindigkeiten der Puncte (nämlich die obigen v und v') am Ende des Stoßes Null sind. Denn es können die durch den Stoß aus ihrer ursprünglichen Lage gebrachten Theile jedes Körpers, wenn sie auch in diese zurückkehren, doch um sie Schwingungen machen, welche noch nach dem Stoße fortdauern, und der dazu verwendete Theil der lebendigen Kraft geht für den Schwerpunct des Körpers verloren, da die Geschwindigkeit dieses

Punctes nach Beendigung des Stoßes durch gegenseitige Wirkungen zwischen den Theilen des Körpers nicht weiter geändert werden kann.

Diese hier nicht weiter auszuführenden Bemerkungen reichen hin um zu zeigen, daß man den Verlust an lebendiger Kraft, bei dem Stoße zwischen freien Körpern, nicht ausschließlich aus dem Mangel der Elasticität herzuleiten berechtigt ist. Sind die Körper nicht frei, so ist ohnehin klar, daß die Erschütterung von ihnen auf andere, mit denen sie in Berührung sind, sich fortpflanzt, wodurch für jene immer ein Verlust an lebendiger Kraft entsteht.

Von den Hauptaxen der Körper und den Trägheitsmomenten.

88. Nach §. 82. ist die lebendige Kraft eines Körpers, der sich um eine unbewegt bleibende Axe dreht, gleich dem halben Producte aus dem Trägheitsmomente des Körpers für diese Axe, multiplicirt in das Quadrat seiner Winkelgeschwindigkeit. Die Lehre vom Trägheitsmomente ist daher in der Dynamik von großer Wichtigkeit, und soll deshalb, im Zusammenhange mit noch anderen hierher gehörigen Gegenständen, in diesem Abschnitte entwickelt werden.

Durch einen Punct O des Körpers lege man drei gegen einander senkrechte Axen x, y, z und nenne A, B, C die denselben beziehungsweise zugehörigen Trägheitsmomente; so ist

$$A = \int (y^2 + z^2) dm,\ B = \int (z^2 + x^2) dm,\ C = \int (x^2 + y^2) dm.$$

Da das Trägheitsmoment immer eine endliche positive Größe sein muß, so kann unter allen durch O gehenden Axen eine so ausgewählt werden, daß das ihr zukommende Trägheitsmoment nicht kleiner ist, als dasjenige für irgend eine andere Axe. (Alle Axen, von denen in diesem §. die Rede ist, werden durch denselben Punct O gelegt; diese Bedingung wird im Folgenden stillschweigend vorausgesetzt.) Unter den auf dieser (sie heiße x) senkrechten Axen wähle man wieder diejenige der y so, daß ihr zugehöriges Trägheitsmoment nicht kleiner sei, als das für eine andere auf x senkrechte Axe. Zu der dritten auf x und y senkrechten Axe z gehört das Trägheitsmoment C; und man hat, nachdem die Axen x, y, z auf die angegebene Art gewählt sind, $A > B > C$, wo das Zeichen $>$ die Gleichheit nicht ausschließt, wie auch im folgenden Theile dieses §.

Für irgend eine vierte Axe H, die mit den vorigen x, y, z die Winkel α, β, γ bildet, sei D das Trägheitsmoment, so ist, nach dem Vorigen $A > D$. Nennt man r den kürzesten Abstand eines Elementes dm des Körpers von H, so ist $D = \int r^2 dm$, und zugleich (vergl. S. 103.)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma)^2$$

oder
$$r^2 = (y^2+z^2)\cos\alpha^2 + (z^2+x^2)\cos\beta^2 + (x^2+y^2)\cos\gamma^2 \\ -2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta.$$

Multiplicirt man mit dm, und integrirt in Bezug auf die ganze Masse des Körpers, setzt auch zur Abkürzung $\int yz\,dm = h$, $\int zx\,dm = h'$, $\int xy\,dm = h''$, so kommt das Trägheitsmoment:

$$D = A\cos\alpha^2 + B\cos\beta^2 + C\cos\gamma^2 \\ -2h\cos\beta\cos\gamma - 2h'\cos\gamma\cos\alpha - 2h''\cos\alpha\cos\beta.$$

Man nehme zuerst die Axe H in der Ebene xy, so ist $\cos\gamma = 0$, und $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 = 1$. Daher kann $\cos\alpha = \cos\varphi$, $\cos\beta = \sin\varphi$ gesetzt werden, woraus sich ergiebt:

$$D = A\cos\varphi^2 + B\sin\varphi^2 - 2h''\sin\varphi\cos\varphi < A,$$

folglich auch $A\sin\varphi^2 > B\sin\varphi^2 - 2h''\sin\varphi\cos\varphi$, oder $A > B - 2h''\,cotg\,\varphi$. Diese Ungleichheit (welche Gleichheit nicht ausschließt) kann für jeden beliebigen Werth von φ offenbar nur dann bestehen, wenn $h'' = 0$ ist; und da sie besteht, so muß $h'' = \int xy\,dm = 0$ sein. Nimmt man ferner die Axe H in der Ebene xz an, so ist $\cos\beta = 0$, und wird noch $\cos\alpha = \cos\varphi$, $\cos\beta = \sin\varphi$ gesetzt, so kommt $D = A\cos\varphi^2 + C\sin\varphi^2 - 2h'\sin\varphi\cos\varphi < A$, oder $A > C - 2h'\,cotg\,\varphi$; was nicht

bestehen kann, wenn nicht $h' = 0$, also $\int zx\,dm = 0$ ist. Nimmt man endlich die Axe H in der Ebene yz an, so ist $\cos\alpha = 0$, und wird $\cos\beta = \cos\varphi$, $\cos\gamma = \sin\varphi$ gesetzt, so kommt $D = B\cos\varphi^2 + C\sin\varphi^2 - 2h\sin\varphi\cos\varphi < B$, oder $B > C - 2h\,cotg\,\varphi$, was nicht sein kann, wenn nicht $h = 0$ oder $\int yz\,dm = 0$ ist. Hiernach wird das Trägheitsmoment für die Axe H:

$$D = A\cos\alpha^2 + B\cos\beta^2 + C\cos\gamma^2,$$

wo $A > B > C$. Auch folgt, daß $D > C\cos\alpha^2 + C\cos\beta^2 + C\cos\gamma^2$, also $D > C$ ist, d. h. das Trägheitsmoment für die Axe z ist nicht größer als das für irgend eine andere Axe H.

Sind insbesondere die Trägheitsmomente für die drei Axen x, y, z einander gleich, also $A = B = C$, so wird auch $D = A$, also alle Trägheitsmomente einander gleich. Sind zwei derselben einander gleich, z. B. $A = B$, so wird $D = A\sin\gamma^2 + C\cos\gamma^2$; mithin für $\cos\gamma = 0$, $D = A$, d. h. die Trägheitsmomente für alle in der Ebene xy befindlichen Axen sind einander gleich.

89. Eine durch den Punct O gehende Axe x heißt **Hauptaxe**, wenn, indem O wie bisher Anfang der Coordinaten bleibt, die Integrale $\int xy\,dm$ und $\int xz\,dm$ beide zugleich Null sind. Legt man durch die Hauptaxe x eine beliebige Ebene, deren Neigung gegen die Ebene xy gleich α sei, und zieht in derselben aus O die Gerade v senkrecht auf x, so ist, für die senkrechte Projection eines Elementes dm des Körpers auf die Ebene xv, $v = y\cos\alpha + z\sin\alpha$, mithin $\int xv\,dm = \cos\alpha \int xy\,dm + \sin\alpha \int xz\,dm = 0$; es kommt also auf die Wahl der Ebenen xy, xz nichts an. Aus dem vorigen §. folgt, daß jedem Puncte O des Körpers wenigstens drei Hauptaxen zukommen, die sich durch denselben legen lassen, und gegen einander senkrecht sind. Eine derselben ist im Allgemeinen die Axe des größten, eine andere die des kleinsten Trägheitsmomentes. Diese drei Hauptaxen bezeichne man, wie oben, mit x, y, z und die zugehörigen Trägheitsmo-

mente der Reihe nach mit A, B, C, wobei immer $A > B > C$ vorausgesetzt wird, ohne die Gleichheit auszuschließen.

Man lege ferner durch O noch drei andere rechtwinkliche Axen u, v, w, und bezeichne die Cosinus ihrer Neigungen gegen x, y, z wie in §. 33. Sind nun x, y, z und u, v, w die Coordinaten desselben Punctes in beiden Systemen, so ergeben sich, indem man x, y, z zuerst auf die Abscisse u, dann auf v und dann auf w senkrecht projizirt, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} u &= a x + b y + c z \\ v &= a' x + b' y + c' z \\ w &= a'' x + b'' y + c'' z \end{aligned}\right\} \quad 1.$$

wobei zwischen a, b, .. c'' die Gleichungen 1. a und 1. b in §. 33. gelten. Diese Formeln für die Verwandlung eines rechtwinklichen Coordinatensystemes in ein anderes sind auch schon in §. 22. enthalten, wenn man die dortigen schiefen Axen x_1, y_1, z_1 rechtwinklich annimmt. Aus denselben folgt weiter

$$uv = (ax+by+cz)(a'x+b'y+c'z)$$

oder wenn man mit dm multiplicirt, und in Bezug auf die gesammte Masse des Körpers integrirt, zugleich bemerkend, daß $\int xy\,dm = 0$, $\int zx\,dm = 0$, $\int yz\,dm = 0$, weil x, y, z Hauptaxen sind:

$$\int uv\,dm = aa'\int x^2 dm + bb'\int y^2 dm + cc'\int z^2 dm.$$

Es ist aber $\int (y^2+z^2)dm = A$, u. s. w. (§. 88.); also $2\int x^2 dm = B+C-A$, $2\int y^2 dm = C+A-B$, $2\int z^2 dm = A+B-C$. Zur Abkürzung sei noch $B+C-A=2A'$, $C+A-B=2B'$, $A+B-C=2C'$ (A', B', C' sind wesentlich positiv); demnach folgt:

$$\left.\begin{aligned} \int uv\,dm &= a\,a'A' + b\,b'B' + c\,c'C' \\ \int wu\,dm &= a''a\,A' + b''b\,B' + c''c\,C' \\ \int vw\,dm &= a'a''A' + b'b''B' + c'c''C' \end{aligned}\right\} \quad 2.$$

Die beiden letzten dieser Formeln ergeben sich auf gleiche Weise

wie die erste, oder unmittelbar aus dieser durch angemessene Verwechselung der Buchstaben.

Soll nun u eine vierte, mit keiner der drei vorigen zusammenfallende Hauptaxe sein, so müssen die Integrale $\int uv\,dm$, $\int uw\,dm$ verschwinden, und mithin folgende Gleichungen gelten:

$$a\,a'A' + b\,b'B' + c\,c'C' = 0 \qquad 3.$$

$$a''a\,A' + b''b\,B' + c''c\,C' = 0. \qquad 4.$$

Sind erstens die drei Trägheitsmomente A, B, C einander gleich, so ist auch $A'=B'=C'$, und die Bedingungen 3. 4. werden, nach §. 33., 1. b., von selbst erfüllt; d. h. alle Axen sind Hauptaxen. (Es ist immer nur von den durch O gelegten Axen die Rede, so lange diese Bedingung nicht ausdrücklich aufgehoben wird.) Sind ferner zwei der Trägheitsmomente A, B, C einander gleich, und von dem dritten verschieden, z. B. $A=B$, so ist auch $A'=B'$, und die vorstehenden Gleichungen geben, mit Rücksicht auf 1. b. in §. 33., $cc'(C'-A')=0$, $cc''(C'-A')=0$. Es ist aber $C'-A'=A-C$, also nicht Null; mithin $cc'=0$, $cc''=0$. Beide Bedingungen werden befriedigt, wenn $c=0$, d. h. jede Axe in der Ebene xy ist Hauptaxe, außer diesen aber und der auf ihnen senkrechten z keine andere. Denn setzt man $c'=0$, $c''=0$, wodurch obigen Bedingungen ebenfalls genügt wird, so ergiebt sich nur die Axe z.

Sind endlich A, B, C alle von einander verschieden, so giebt es keine vierte Hauptaxe. Denn es sei, wenn es angeht, u eine solche, die mit keiner der vorigen zusammenfällt. Da v und w sich beliebig, wenn nur senkrecht gegen u und gegen einander, wählen lassen; so nehme man v in der Ebene xu, mithin w senkrecht auf x, und setze demnach in der Gleichung 4. $a''=0$. Diese Gleichung giebt, weil noch $b''b+c''c=0$, $b''b(B'-C')=0$, und weil $B'-C'=C-B$, also nicht Null ist, so giebt sie $bb''=0$; daher auch $c''c=0$ sein muß. Da b und c nicht zugleich Null sein können, indem sonst u in x fiele, da ferner auch b'' und c'' nicht zugleich Null sein können, weil $b''^2+c''^2=1$;

so folgt, daß entweder b'' und c oder b und c'' zugleich Null sein müssen. Setzt man $b''=0$, $c=0$, so giebt die Gleichung 3., weil $aa'+bb'=0$, $aa'(A'-B')=0$, mithin $aa'=0$, also auch $bb'=0$. Hieraus folgt, da weder a noch b Null sein kann, indem sonst, wegen $c=0$, u in y oder in x fallen würde, $a'=0$, $b'=0$, mithin $c'=\pm 1$. Diese Werthe in die erste der Gleichungen 1. b., §. 33., gesetzt, geben $\pm c''=0$, was nicht möglich ist; denn da $a''=0$, $b''=0$ sind, so folgt $c''=\pm 1$. Um zu beweisen, daß eben so wenig b und c'' zugleich Null sein können, braucht man im Vorstehenden nur die Buchstaben b und c mit einander zu vertauschen; dadurch wird der Beweis auch auf auf diesen Fall anwendbar. Folglich ist keine vierte Hauptaxe vorhanden; w. z. b. w.

90. Hier muß einer wichtigen Eigenschaft der Hauptaxen erwähnt werden, die sich aus §. 84. ergiebt. Wenn sich nämlich ein Körper ohne Einwirkung beschleunigender Kräfte um eine unbewegliche Axe x dreht, so folgt aus dem genannten §., oder auch aus dem Satze der lebendigen Kräfte, daß seine Winkelgeschwindigkeit $\left(\omega=\frac{d\varphi}{dt}\right)$ unveränderlich ist. Nimmt man die Drehungsaxe, wie in §. 84., zu derjenigen der x, so ist für jeden Punct des Körpers $\frac{dx}{dt}=0$, $\frac{d^2x}{dt^2}=0$; zugleich sind die Kräfte X, Y, Z alle Null, und man erhält für den Widerstand der Axe folgende Ausdrücke:

$$\pi=0,\ \varrho=-\omega^2\int y\,dm,\ \sigma=-\omega^2\int z\,dm,\ M=-\omega^2\int xz\,dm,$$
$$N=\omega^2\int xy\,dm.$$

Diese Ausdrücke ergeben sich aus §. 84. am einfachsten, wenn man in den Gleichungen c., welche den Widerstand bei Umdrehung eines schweren Körpers ausdrücken, $g=0$, $\frac{d\varphi}{dt}=\omega$, und $\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{d\omega}{dt}=0$ setzt. Nun lege man durch den Anfang O der x, y, z, welcher ein beliebiger Punct der Drehungsaxe x ist, drei neue Axen u, v, w, die in dem Körper fest seien, während die vorigen x, y, z im Raume fest sind. Da jedoch x auch im Körper fest ist, so falle u in x; ferner sei v dem vom Schwerpuncte auf u gefällten Lothe a parallel; so hat man $\int v\,dm=am$, $\int w\,dm=0$. Bezeichnet noch, wie in §. 84., φ die veränderliche Neigung von v gegen z, so ist $y=v\sin\varphi+w\cos\varphi$, $z=v\cos\varphi-w\sin\varphi$, folglich $\int y\,dm=am\sin\varphi$, $\int z\,dm=am\cos\varphi$, und $\int xy\,dm=\sin\varphi\int uv\,dm-\cos\varphi\int uw\,dm$, $\int xz\,dm=\cos\varphi\int uv\,dm+\sin\varphi\int uw\,dm$. Es sei nun insbesondere u eine der dem Puncte O zugehörigen Hauptaxen, so sind $\int uv\,dm=0$, $\int uw\,dm=0$, mithin auch $\int xz\,dm=0$, $\int xy\,dm$, während der ganzen Dauer der Bewegung. Hieraus folgt:

$$\varrho=-\omega^2\int y\,dm,\ \sigma=-\omega^2\int z\,dm,\ M=0,\ N=0;$$

der gesammte Druck auf die Axe besteht also nur in einer einzelnen Kraft $\sqrt{\varrho^2+\sigma^2}$ in O; dagegen sind die Paare M und N beständig Null. Wenn daher, mit Ausnahme von O, alle übrigen Puncte der Axe x frei beweglich gemacht werden, so bleibt diese Axe dennoch unbewegt, weil sie nur in dem unbeweglichen Puncte O einen Druck erleidet, und der Körper dreht sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um dieselbe, wie vorher. Geht insbesondere u durch den Schwerpunct des Körpers, so wird noch $\int v\,dm=0$, also auch $\int y\,dm=0$, $\int z\,dm=0$, und folglich $\varrho=0$, $\sigma=0$; d. h. wenn die zu O gehörige Hauptaxe noch durch den Schwerpunct geht, so erleidet sie, indem der Körper sich ohne Einwirkung beschleunigender Kräfte um sie dreht, gar keinen Druck, und braucht mithin auch in keinem Puncte befestigt zu sein, um immer unbewegt zu bleiben; die Drehung dauert also immerwährend gleichförmig fort.

Der Ursprung des hier in Rede stehenden Druckes auf die Axe liegt in der Schwungkraft. Diese beträgt, für die Winkelgeschwindigkeit ω, und für ein Element dm in dem Abstande $r=\sqrt{y^2+z^2}$ von der Drehungsaxe x, $\frac{r^2\omega^2 dm}{r}$ (indem $r\omega$

die Geschwindigkeit von dm ist) oder $r\omega^2 dm$. Sie wirkt in der Richtung des Abstandes r, diesen zu vergrößern strebend. Zerlegt man sie nach den im Raume unbeweglichen Axen x, y, z, so sind ihre Componenten $X=0$, $Y=\omega^2 y\,dm$, $Z=\omega^2 z\,dm$, indem $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ die Cosinus der Winkel sind, welche ihre Richtung mit y und z bildet, wobei r positiv, y und z aber mit ihren Zeichen zu nehmen sind. Man setze alle Schwungkräfte in eine einzelne Kraft an O, und ein Paar zusammen; bezeichne die Componenten von jener mit π', ϱ', σ', die von diesem mit L', M', N'; so kommt:

$$\pi'=\Sigma X=0,\ \varrho'=\Sigma Y=\omega^2\int y\,dm,\ \sigma'=\Sigma Z=\omega^2\int z\,dm,$$
$$L'=\Sigma(Yz-Zy)=0,\ M'=\Sigma(Zx-Xz)=\omega^2\int xz\,dm,$$
$$N'=\Sigma(Xy-Yx)=-\omega^2\int xy\,dm,$$

folglich ist $\varrho+\varrho'=0$, $\sigma+\sigma'=0$, $M+M'=0$, $N+N'=0$; d. h. der Widerstand der Axe hat, wenn keine beschleunigenden Kräfte vorhanden sind, nur den Schwungkräften Gleichgewicht zu halten.

Daß die Ebene des zusammengesetzten Paares der Schwungkräfte durch die Drehungsaxe gehen, also die auf dieser senkrechte Componente L' Null sein muß, versteht sich von selbst, weil alle Schwungkräfte nach der Axe gerichtet sind. Man bemerke noch, daß die Mittelkraft aus allen Schwungkräften nach Richtung und Größe die nämliche ist, als ob die ganze Masse des Körpers im Schwerpuncte vereinigt sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Axe x drehte. Denn nennt man y', z' die Coordinaten des Schwerpunctes, so sind $my'\omega^2$ und $mz'\omega^2$ die Componenten der in angegebener Voraussetzung Statt findenden Schwungkraft, und da $my'=\int y\,dm$, $mz'=\int z\,dm$, so sind sie den vorigen ϱ' nnd σ' gleich, w. z. b. w.

Hieraus ergiebt sich noch Folgendes: Eine durch den Körper gelegte Gerade ist nur dann in Bezug auf einen ihrer Puncte Hauptaxe, wenn bei der Drehung um sie die Ebene des zusammengesetzten Paares der Schwungkräfte der Mittelkraft aus diesen parallel ist, und mithin, nach vorhergehendem Satze, durch den Schwerpunct geht. Alsdann lassen sich alle Schwungkräfte in eine einzige Resultante vereinigen, und in Beziehung auf den Angriffspunct derselben ist jene Axe Hauptaxe. Geht aber jene Gerade durch den Schwerpunct, so ist die Mittelkraft der Schwungkräfte unter allen Umständen Null, und diese geben mithin ein Paar. Wenn auch dieses Paar Null ist, und nur dann, ist die Gerade Hauptaxe, und zwar ist sie dieses für jeden ihrer Puncte; wodurch sich die durch den Schwerpunct gehenden Hauptaxen vor den übrigen auszeichnen, die immer nur für einen ihrer Puncte Hauptaxen sind.

Es sei, um auch hier die Anwendung der Rechnung nachzuweisen, u die Gerade, ein beliebiger Punct O in ihr Anfang der Coordinaten, und die Ebene uv gehe durch den Schwerpunct, so ist $\int v\,dm=am$, $\int w\,dm=0$. Soll diese Gerade u in Beziehung auf einen ihrer Puncte O' Hauptaxe sein, dessen Abstand von O, mit seinem Zeichen, gleich c sei, so muß sich c so bestimmen lassen, daß die Integrale $\int(u-c)v\,dm$, $\int(u-c)w\,dm$ beide Null werden. Man setze $\int uv\,dm=Am$, $\int uw\,dm=Bm$; dadurch gehen diese Bedingungen, weil $\int v\,dm=am$, $\int w\,dm=0$, über in $A-ac=0$, $B=0$, welche wiederum nichts Anderes ausdrücken, als so eben entwickelt worden.

91. Es muß noch gezeigt werden, wie sich die Lage der zu einem Puncte O gehörigen Hauptaxen durch Rechnung bestimmen lasse. Es seien, immer aus dem Anfange O, u, v, w drei gegebene senkrechte Axen, x, y, z die drei gesuchten Hauptaxen; und man setze:

$$\left.\begin{array}{l}\int u^2\,dm=F,\ \int v^2\,dm=G,\ \int w^2\,dm=H,\\ \int vw\,dm=f,\ \int wu\,dm=g,\ \int uv\,dm=h.\end{array}\right\}\quad 1.$$

Die hier mit F, ... h bezeichneten Integrale werden als gegeben vorausgesetzt, und können allemal gefunden werden, wenn die Gestalt des Körpers und die Vertheilung der Masse in ihm bekannt sind. Wären f, g, h alle Null, so wären auch u, v, w schon die gesuchten Hauptaxen; dieser Fall kann also ausgeschlossen werden.

Ferner gelten zwischen den Coordinaten u, v, w und x, y, z desselben Punctes die Gleichungen 1. in §. 89., nämlich

$$u=ax+by+cz,\quad v=a'x+b'y+c'z,\quad w=a''x+b''y+c''z, \qquad 2.$$

und zwischen a, b ... c'' wieder die Gleichungen 1. a und 1. b in §. 33. Ferner folgt aus den Werthen von A, A', A'', B, ... C'' (Seite 91. unten)

$$Aa+A'a'+A''a''=Bb+B'b'+Bb''=Cc+C'c'+C''c'',$$

oder weil $A=a$, $A'=a'$ ... (S. 92. Formel 4.),

$$a^2+a'^2+a''^2=b^2+b'^2+b''^2=c^2+c'^2+c''^2.$$

Nach 1. a. §. 33. ist aber die Summe dieser drei gleichen Ausdrücke gleich 3; folglich muß jeder von ihnen der Einheit gleich sein. Dies versteht sich auch von selbst, weil z. B. a, a', a'' die Cosinus der Winkel sind, welche x mit den rechtwinklichen Axen u, v, w bildet; es kam hier nur darauf an, zu zeigen, wie auch diese Relation in den Formeln des §. 33. enthalten ist. Also hat man noch:

$$a^2+a'^2+a''^2=1,\quad b^2+b'^2+b''^2=1,\quad c^2+c'^2+c''^2=1. \qquad 3.$$

und auch

$$bc+b'c'+b''c''=0,\quad ca+c'a'+c''a''=0,\quad ab+a'b'+a''b''=0. \quad 4.$$

Die letzte dieser Gleichungen 4. folgt, indem man die Werthe von A, A', A'' (S. 91.) beziehungsweise mit b, b', b'' multiplicirt und die Producte addirt; auf ähnliche Weise die übrigen. Multiplicirt man die Gleichungen 1. der Reihe nach mit a, a', a'', und addirt die Producte, und eben so nachher mit b, b', b'', wieder addirend, u. s. f., so kommt:

$$x=au+a'v+a''w,\quad y=bu+b'v+b''w,\quad z=cu+c'v+c''w, \quad 5.$$

welche Gleichungen man, wie Jeder sieht, auch auf geometrischem Wege durch Projection leicht erhält. Nun sei für die gesuchten Hauptaxen x, y, z:

$$\left.\begin{array}{lll} \int x^2\,dm=\xi, & \int y^2\,dm=\eta, & \int z^2\,dm=\zeta \\ \int yz\,dm=0, & \int zx\,dm=0, & \int xy\,dm=0. \end{array}\right\} \quad 6.$$

Quadrirt man die Werthe von u, v, w in 2., multiplicirt mit dm, und integrirt, so folgt mit Rücksicht auf 1. und 6.

$$\left.\begin{array}{l} F=a^2\xi+b^2\eta+c^2\zeta \\ G=a'^2\xi+b'^2\eta+c'^2\zeta \\ H=a''^2\xi+b''^2\eta+c''^2\zeta \end{array}\right\} \quad 7.$$

Multiplicirt man ferner die Gleichungen 2. zu zweien mit einander, sodann die Producte mit dm, und integrirt wieder, so folgt ebenfalls aus 1. und 6.

$$\left.\begin{array}{l} f=a'a''\xi+b'b''\eta+c'c''\zeta \\ g=a''a\xi+b''b\eta+c''c\zeta \\ h=aa'\xi+bb'\eta+cc'\zeta \end{array}\right\} \quad 8.$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen 7. mit a, die zweite und dritte von 8. mit a'' und a', und addirt die Producte, so kommt:

$$aF+a''g+a'h=a\xi, \quad \text{oder} \quad a(F-\xi)+a'h+a''g=0.$$

Auf ähnliche Weise ergeben sich überhaupt die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a(F-\xi)+a'h+a''g=0 \\ ah+a'(G-\xi)+a''f=0 \\ ag+a'f+a''(H-\xi)=0 \end{array}\right\} \quad 9.$$

Vertauscht man in denselben a, a', a'', ξ mit b, b', b'', η und mit c, c', c'', ζ, so erhält man noch 6 andere Gleichungen, die ebenfalls richtig sein müssen, deren Hinschreibung aber unnöthig ist. Aus den beiden ersten der Gleichungen 9. folgt:

$$a:a':a''=fh-g(G-\xi):hg-f(F-\xi):(F-\xi)G-\xi)-h^2,$$

und mithin aus der dritten:

$$(fh-g(G-\xi))g+(hg-f(F-\xi))f+((F-\xi)(G-\xi)-h^2)(H-\xi)=0,$$

oder geordnet:

$$(F-\xi)(G-\xi)(H-\xi)-f^2(F-\xi)-g^2(G-\xi)-h^2(H-\xi)+2fgh=0. \quad 10.$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung von ξ. Da man aber in der Gleichung 9. auch b, η und c, ζ anstatt a, ξ schreiben konnte, und dann durch Wegschaffung von b, b′, b″ wieder die nämliche Gleichung 10., nur η statt ξ enthaltend, und eben so nach Wegschaffung von c, c′, c″ wieder die Gleichung 10., nur ζ statt ξ enthaltend, sich ergeben mußte, so folgt, daß die drei Wurzeln der Gleichung 10. die gesuchten Werthe von ξ, η, ζ sind. Und da schon bewiesen ist, daß die drei Hauptaxen x, y, z vorhanden sind, so folgt, daß auch diese drei Wurzeln alle reell und positiv sein müssen, weil sie die Werthe der Integrale $\int x^2 dm$, u. s. f., und mithin wesentlich positiv sind. Um nun die Neigungen der Hauptaxen x, y, z gegen u, v, w zu bestimmen, bemerke man noch, daß aus den Gleichungen 9. folgt:

$$a:a'=fh-g(G-\xi):hg-f(F-\xi)$$
$$a':a''=gf-h(H-\xi):fh-g(G-\xi),$$

folglich

$$a:a':a''=\frac{1}{hg-f(F-\xi)}:\frac{1}{fh-g(G-\xi)}:\frac{1}{gf-h(H-\xi)}.$$

Setzt man also:

$$\lambda^2=\frac{1}{(hg-f(F-\xi))^2}+\frac{1}{(fh-g(G-\xi))^2}+\frac{1}{(gf-h(H-\xi))^2},$$

so folgt:

$$\lambda a=\frac{1}{hg-f(F-\xi)},\quad \lambda a'=\frac{1}{fh-g(G-\xi)},\quad \lambda a''=\frac{1}{gf-h(H-\xi)}.$$

Vertauscht man in diesen Ausdrücken die Buchstaben a, a′, a″, ξ beziehungsweise mit b, b′, b″, η und mit c, c′, c″, ζ, so erhält man die übrigen Cosinus b, ⋯ c″; womit die Hauptaxen und zugleich die ihnen zugehörigen Trägheitsmomente $A=\eta+\zeta$, $B=\zeta+\xi$, $C=\xi+\eta$ gefunden sind.

92. Wenn die Trägheitsmomente A, B, C des Körpers für die durch den Schwerpunct gehenden Hauptaxen bekannt sind, so ergiebt sich dasjenige für irgend eine andere Axe H mit Hülfe der in §. 83. und 88. enthaltenen Sätze sehr leicht. Denn man lege durch den Schwerpunct eine der H parallele Axe H′, und es sei D′ das ihr zukommende Trägheitsmoment; so erhält man, nach §. 88.

$$D'=A\cos\alpha^2+B\cos\beta^2+C\cos\gamma^2,$$

wo α, β, γ die Neigungen von H oder H′ gegen die Hauptaxen x, y, z sind. Bezeichnet man ferner mit a den senkrechten Abstand der Axen H und H′ von einander, und das zu H gehörige Trägheitsmoment mit D, die Masse des Körpers mit m, so ist, nach dem Satze in §. 83.,

$$D=D'+a^2 m.$$

Diese beiden Formeln geben den Werth von D sehr leicht, wenn A, B, C bekannt sind, auf deren Bestimmung es mithin hauptsächlich ankommt.

Man bezeichne das Volumen eines nach allen Dimensionen unendlich kleinen Elementes des Körpers mit dv, so muß die Masse dm desselben sich durch ein Product $\varrho\,dv$ ausdrücken lassen, in welchem der Coefficient ϱ entweder eine beständige Größe oder irgend eine Function der Coordinaten des Elementes ist, je nachdem die Masse in dem Körper gleichmäßig vertheilt ist oder nicht. Dieser Coefficient heißt die Dichtigkeit. Setzt man $dv=dx\,dy\,dz$, so werden demnach die Trägheitsmomente für die drei Axen x, y, z beziehungsweise durch folgende Integrale ausgedrückt:

$$\iiint(y^2+z^2)\varrho\,dx\,dy\,dz,\quad \iiint(z^2+x^2)\varrho\,dx\,dy\,dz,$$
$$\iiint(x^2+y^2)\varrho\,dx\,dy\,dz,$$

welche sich nach den bekannten Regeln finden lassen, wenn die Dichtigkeit ϱ als Functionen x, y, z gegeben ist. In den folgenden Beispielen wird es genügen, nur gleichartige Körper zu betrachten.

Setzt man demnach $\iiint x^2 dx\,dy\,dz = \xi$, $\iiint y^2 dx\,dy\,dz = \eta$, $\iiint z^2 dx\,dy\,dz = \zeta$, so sind, für einen Körper von überall gleicher Dichtigkeit ϱ die Trägheitsmomente in Beziehung auf die Axen x, y, z:

$$A = \varrho(\eta + \zeta),\ B = \varrho(\zeta + \xi),\ C = \varrho(\xi + \eta).$$

Der Körper sei ein gerades Prisma oder ein Cylinder von beliebigem Querschnitte; die durch den Schwerpunct gehende Längenaxe sei die der x, und jener Punct Anfang der x; die Länge des Prisma sei 2a; so erhält man, zuerst nach x von $-a$ bis $+a$ integrirend:

$$\xi = \tfrac{2}{3}a^3 \iint dx\,dy,\quad \eta = 2a \iint y^2 dy\,dz,\quad \zeta = 2\iint z^2 dy\,dz.$$

Die Längenaxe x ist hier immer zugleich Hauptaxe; denn durch Integration nach x von $-a$ bis $+a$ erhält man $\iiint xy\,dx\,dy\,dz = 0$, $\iiint xz\,dx\,dy\,dz = 0$, weil $\int_{-a}^{+a} x\,dx = 0$. Die Bestimmung der beiden andern Hauptaxen hängt von der Gestalt des Querschnittes ab. Für das Folgende mag hier noch im Allgemeinen bemerkt werden, daß bei gleichartigen Körpern jede Axe, um welche der Körper symmetrisch liegt, auch eine Hauptaxe sein muß. Denn es sei x eine solche Axe, x', y', z' die Coordinaten eines Elementes dm, so giebt es, wegen der angenommenen symmetrischen Vertheilung um die Axe x, ein anderes Element dm, dessen Coordinaten x', $-y'$, $-z'$, und mithin besteht das Integral $\int xy\,dm$ aus je zwei gleichen Elementen $x'y'dm$ und $-x'y'dm$, die einander zu Null aufheben; folglich ist $\int xz\,dm = 0$ und eben so $\int xz\,dm = 0$; u. s. w. In den folgenden Beispielen sind x, y, z immer die durch den Schwerpunct gehenden Hauptaxen.

Der Querschnitt des Prisma sei ein Rechteck, 2b und 2c die Seiten desselben, die Axen y und z ihnen parallel; so ist die Fläche $\iint dy\,dz = 4bc$, und mithin $\xi = \frac{8}{3}a^3 bc$, oder wenn das Volumen $8abc = V$ gesetzt wird, $\xi = \frac{1}{3}a^2 V$, und eben so ist $\eta = \frac{1}{3}b^2 V$, $\zeta = \frac{1}{3}c^2 V$; folglich die Trägheitsmomente, die Masse $\varrho V = m$ gesetzt:

$$A = \tfrac{1}{3}(b^2 + c^2)m,\ B = \tfrac{1}{3}(c^2 + a^2)m,\ C = \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2)m.$$

Für einen Würfel werden die Seiten 2a, 2b, 2c einander gleich; mithin auch $A = B = C = \frac{2}{3}a^2 m$; daher sind alle durch den Schwerpunct gehenden Axen Hauptaxen (§. 89.). Ist $a > b > c$, so ist z die Axe des größten Trägheitsmomentes (C) und x die des kleinsten (A).

Der Querschnitt sei elliptisch; $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ die Gleichung seines Umringes; so ist die Fläche $\iint dy\,dz = bc\pi$, wie bekannt, folglich $\xi = \frac{1}{3}a^3 bc\pi = \frac{1}{3}a^2 V$, wo $V = 2abc\pi$ das Volumen des Cylinders ist. Ferner ist $\iint y^2 dy\,dz = \frac{2}{3}b^3 \int_{-c}^{+c} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} dz$, nachdem von $y = -b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$ bis $y = +b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$ integrirt worden. Zur weiteren Integration setze man $z = c\sin\varphi$; auch mag, um der Rechnung etwas mehr Allgemeinheit zu geben, n anstatt des Exponenten $\frac{3}{2}$ geschrieben werden; so kommt

$$\int_{-c}^{+c} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^n dz = 2c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi^{2n+1} d\varphi.$$

In gegenwärtigem Falle ist $2n + 1$ eine positive ganze und gerade Zahl, nämlich 4; schreibt man nun in dem Ausdrucke von $2^{m-1} \cos x^m$ (S. 43. I.) 2m anstatt m, so kommt:

$$2^{2m-1} \cos x^{2m} = \cos 2mx + 2m \cos(2m-2)x + \cdots + \tfrac{1}{2}\frac{2m!}{m!\,m!}$$

also durch Integration von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$, $2^{2m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{2m} dx$ $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2m!}{m!\,m!}$, und mithin $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi^{2m} d\varphi = \frac{\pi}{2^{2m+1}} \cdot \frac{2m!}{m!\,m!}$;

folglich wenn $2m = 2n + 1 = 4$ ist, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi^4 d\varphi = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}$

$=\frac{3\pi}{16}$, und mithin $\iint y^2\,dy\,dz=\frac{2}{3}b^3\cdot 2c\cdot\frac{3\pi}{16}=\frac{1}{4}b^3c\pi$; also $\eta=\frac{1}{2}ab^3c\pi=\frac{1}{4}b^2V$, und eben so $\zeta=\frac{1}{4}c^2V$. Hieraus erhält man: $A=\frac{1}{4}(b^2+c^2)m$, $B=(\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{3}a^2)m$, $C=(\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{3}a^2)m$, wo $m=\varrho V$.

Der Körper sei ein Ellipsoid, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ die Gleichung seiner Oberfläche; so muß man, um ξ zu finden, nach x, y, z beziehungsweise zwischen deu Grenzen $\pm a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$, $\pm b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$, $\pm c$ integriren. Hieraus ergiebt sich zunächst

$$\xi=\frac{2}{3}a^3\iint\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^n dy\,dz,$$

wo wieder zu etwas größerer Allgemeinheit der Exponent n anstatt $\frac{3}{2}$ gesetzt ist. Zur weiteren Integration werde $y=b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\cdot\sin\varphi$, $dy=b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\cdot\cos\varphi\,d\varphi$ gesetzt, so kommt, wenn man noch 2m anstatt 2n+1 schreibt:

$$\xi=\frac{8}{3}\cdot a^3b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi^{2m}\cdot d\varphi\int_0^c\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)^m dz$$

$$=\frac{2m!\,\pi\cdot a^3bc}{3\cdot m!\,m!\,2^{2m-2}}\int_0^1(1-u^2)^m du,$$

wo noch $z=cu$ gesetzt ist. Um das zuletzt stehende Integral für jeden positiven ganzen Werth von m zu finden, bemerke man, daß

$$d((1-u^2)^m u)=(1-u^2)^m du-2m(1-u^2)^{m-1}u^2du$$

$$=(1-u^2)^m du+2m(1-u^2)^m du-2m(1-u^2)^{m-1}du,$$

also $d((1-u^2)^m u)=(2m+1)(1-u^2)^m du-2m(1-u^2)^{m-1}du$.

Integrirt man auf beiden Seiten von $u=0$ bis $u=u$, so kommt:

$$(1-u^2)^m u=2m+1\int_0^u(1-u^2)^m du-2m\int_0^u(1-u^2)^{m-1}du;$$

folglich, da der Ausdruck links für $u=1$ Null wird:

$$\int_0^1(1-u^2)^m du=\frac{2m}{2m+1}\int_0^1(1-u^2)^{m-1}du,$$

mithin auch

$$\int_0^1(1-u^2)^{m-1}du=\frac{2m-2}{2m-1}\int_0^1(1-u^2)^{m-2}du,\quad \text{u. s. f;}$$

also

$$\int_0^1(1-u^2)^m du=\frac{2m\cdot 2m-2\cdot 2m-4\cdots 2}{2m+1\cdot 2m-1\cdot 2m-3\cdots 3}.$$

Für den vorliegenden besonderen Fall ist $2m=2n+1=4$, daher $\int_0^1(1-u^2)^2du=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}$ und, nach dem obigen Ausdrucke von ξ,

$$\xi=\frac{4!\,\pi}{3\cdot 16}\cdot\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}\cdot a^3bc=\frac{4}{15}a^3bc\pi=\frac{1}{5}a^2V,$$

wo $V=\frac{4}{3}abc\pi$. Eben so ist $\eta=\frac{1}{5}b^2V$, $\zeta=\frac{1}{5}c^2V$, und mithin, $\varrho V=m$ gesetzt:

$$A=\frac{1}{5}(b^2+c^2)m,\quad B=\frac{1}{5}(c^2+a^2)m,\quad C=\frac{1}{5}(a^2+b^2)m.$$

Für eine gleichartige Kugel vom Halbmesser a erhält man hieraus das Trägheitsmoment in Bezug auf einen Durchmesser gleich $\frac{2}{5}a^2m$, wo m die Masse der Kugel.

Bewegung fester Körper.

93. Zur Kenntniß der Bewegung eines festen Körpers wird erfordert, daß man erstens die Bewegung eines ihm angehörigen Punctes (derselbe mag O heißen), und zweitens die relativen Bewegungen der übrigen Puncte in Beziehung auf O, oder die Drehung des Körpers um O, anzugeben wisse. Wenn ein Punct des Körpers unbeweglich ist, so fällt, indem man diesen für O nimmt, der erste Theil der Aufgabe hinweg; wenn aber kein Punct unbeweglich ist, so ist es vortheilhaft, für O den Schwerpunct des Körper zu nehmen, dessen Bewegung (nach §.

80.) eben so erfolgt, als ob die ganze Masse in ihm vereinigt wäre und alle Kräfte unmittelbar auf ihn wirkten.

Man denke sich drei rechtwinkliche, im Raume unbewegliche Axen, bezeichne die Coordinaten von O, nach denselben, mit ξ, η, ζ, und die eines anderen Punctes P des Körpers mit x', y', z'; so sind $x'-\xi$, $y'-\eta$, $z'-\zeta$ die relativen Coordinaten von P gegen O, welche der Kürze wegen mit x, y, z bezeichnet werden sollen. Ferner lege man durch O drei gegen einander senkrechte, in dem Körper feste und mit ihm im Raume bewegliche Axen u, v, w; es seien a, b, c, ... die mit der Zeit veränderlichen Neigungen derselben gegen die unbeweglichen Axen; so finden in jedem Augenblicke zwischen den relativen Coordinaten von P gegen O in Bezug auf die beweglichen Axen (u, v, w) einerseits und die unbeweglichen andererseits folgende Gleichungen Statt:

$$\left.\begin{array}{ll} u=a\,x+b\,y+c\,z & x=au+a'v+a''w \\ v=a'x+b'y+c'z & y=bu+b'v+b''w \\ w=a''x+b''y+c''z & z=cu+c'v+c''w \end{array}\right\} \quad 1.$$

$$\left.\begin{array}{ll} a^2+b^2+c^2=1 & a^2+a'^2+a''^2=1 \\ a'^2+b'^2+c'^2=1 & b^2+b'^2+b''^2=1 \\ a''^2+b''^2+c''^2=1 & c^2+c'^2+c''^2=1 \end{array}\right\} \quad 2.$$

$$\left.\begin{array}{ll} a'a''+b'b''+c'c''=0 & bc+b'c'+b''c''=0 \\ a''a+b''b+c''c=0 & ca+c'a'+c''a''=0 \\ a\,a+b\,b+c\,c=0 & ab+a'b'+a''b''=0 \end{array}\right\} \quad 3.$$

Diese Gleichungen sind hier zur Uebersicht aus §. 33. und 91. vollständig zusammengestellt. Ferner erinnere man sich noch aus §. 33., daß die 9 Cosinus a, b, ... c'' sich als Functionen dreier Veränderlicher φ, ψ, Θ darstellen lassen, welche den Bedingungsgleichungen 2. und 3. Genüge leisten; daher die Lage der Axen u, v, w durch die Winkel φ, ψ, Θ bedingt wird, welche als Functionen der Zeit bestimmt werden müssen. Auch hat man noch

$$x'=\xi+x, \quad y'=\eta+y, \quad z'=\zeta+z; \qquad 4.$$

Die Aufgabe erfordert mithin, außer der Bestimmung φ, ψ, Θ,

durch welche x, y, z für jeden Punct des Körpers als Functionen der Zeit bekannt werden, auch noch die von ξ, η, ζ, wofern O nicht unbeweglich ist; denn in diesem Falle sind ξ, η, ζ constant.

Man denke sich die Geschwindigkeit des Punctes P, zur Zeit t, nach den Axen u, v, w, und eben so die von O nach denselben Axen zerlegt, bezeichne die Componenten der ersten mit U', V', W', die der zweiten mit U'', V'', W'' und setze:

$$U=U'-U'', \quad V=V'-V'', \quad W=W'-W''$$

so sind U, V, W die relativen Geschwindigkeiten von P gegen O, nach den Axen u, v, w. Nach den Richtungen der unbeweglichen Axen aber sind diese relativen Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, und da diese mit den Axen u, v, w Winkel bilden, deren Cosinus a, b, c; a' ... c'' sind; so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} U=a\dfrac{dx}{dt}+b\dfrac{dy}{dt}+c\dfrac{dz}{dt} \\ V=a'\dfrac{dx}{dt}+b'\dfrac{dy}{dt}+c'\dfrac{dz}{dt} \\ W=a''\dfrac{dx}{dt}+b''\dfrac{dy}{dt}+c''\dfrac{dz}{dt} \end{array}\right\} \quad 5.$$

Aus 1. folgt aber, indem u, v, w von t unabhängig sind:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt}=u\dfrac{da}{dt}+v\dfrac{da'}{dt}+w\dfrac{da''}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt}=u\dfrac{db}{dt}+v\dfrac{db'}{dt}+w\dfrac{db''}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt}=u\dfrac{dc}{dt}+v\dfrac{dc'}{dt}+w\dfrac{dc''}{dt} \end{array}\right\} \quad 6.$$

Setzt man in 5. vorstehende Werthe von $\frac{dx}{dt}$, ..., noch bemerkend, daß

$$\left.\begin{aligned} a\,da + b\,db + c\,dc &= 0\\ a'da' + b'db' + c'dc' &= 0\\ a''da'' + b''db'' + c''dc'' &= 0 \end{aligned}\right\}\quad 7.$$

so kommt, indem der gemeinsame Nenner dt als Factor auf die andere Seite genommen wird:

$$\begin{aligned} U\,dt &= (a\,da' + b\,db' + c\,dc')v + (a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')w\\ V\,dt &= (a'da + b'db + c'dc)u + (a'da'' + b'db'' + c'dc'')w\\ W\,dt &= (a''da + b''db + c''dc)u + (a''da' + b''db' + c''dc')v. \end{aligned}$$

Nach 3. aber ist $a\,da' + b\,db' + c\,dc' + a'da + b'db + c'dc = 0$; u. s. f.; man setze daher:

$$\left.\begin{aligned} a\,da' + b\,db' + c\,dc' &= -(a'da + b'db + c'dc) = r\,dt\\ a''da + b''db' + c''dc &= -(a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'') = q\,dt\\ a'da'' + b'db'' + c'dc'' &= -(a''da' + b''db' + c''dc') = p\,dt \end{aligned}\right\}\quad 8.$$

wodurch erhalten wird:

$$U = rv - qw,\quad V = pw - ru,\quad W = qu - pv. \qquad 9.$$

Zieht man in dem Körper von O aus eine gerade Linie, deren Gleichungen sind:

$$\frac{u}{p} = \frac{v}{q} = \frac{w}{r}, \qquad 10.$$

so ist nach 9. für alle Puncte derselben $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$; d. h. die relative Geschwindigkeit aller dieser Puncte gegen O, für den Augenblick t, ist *Null*, und mithin ist diese Gerade die *augenblickliche Drehungsaxe* des Körpers. Aus den Gleichungen 9. geht auch hervor, daß die Geschwindigkeiten U, V, W für alle Puncte einer Geraden, die mit der durch Gleichung 10. bestimmten parallel ist, gleich groß sind; denn die Gleichungen einer solchen Geraden sind $rv - qw = f$, $pw - ru = g$, $qu - pv = h$, wo f, g, h unabhängig von den laufenden Coordinaten u, v, w, aber durch die Bedingung $fp + gq + hr = 0$ mit einander verbunden sind. Für die Puncte dieser Geraden

wird mithin $U = f$, $V = g$, $W = h$; diese Werthe sind also für alle diese Puncte einerlei, wie auch der Begriff der Drehungsaxe erfordert.

Man lege durch O eine auf der Drehungsaxe senkrechte Ebene, deren Gleichung mithin ist $pu + qv + rw = 0$, nehme in derselben einen Punct in der *Einheit* der Entfernung von O, so ist die relative Geschwindigkeit desselben gegen O:

$$\sqrt{U^2 + V^2 + W^2} = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Denn es ist nach 9. überhaupt

$$\begin{aligned} U^2 + V^2 + W^2 &= (rv - qw)^2 + (pw - ru)^2 + (qu - pv)^2\\ &= (p^2 + q^2 + r^2)(u^2 + v^2 + w^2) - (pu + qv + rw)^2, \end{aligned}$$

welcher Werth für $pu + qv + rw = 0$ und $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ in $p^2 + q^2 + r^2$ übergeht, und mithin die obige Formel liefert. Diese Geschwindigkeit ist die *augenblickliche Winkelgeschwindigkeit* der Drehung, welche hinfort mit ω bezeichnet werden soll. Demnach ist

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}. \qquad 11.$$

94. Die Formeln 9. geben jede der Geschwindigkeiten U, V, W als zusammengesetzt aus zwei Componenten, z. B. U aus rv und $-qw$, u. s. w. Diese Componenten der Geschwindigkeit $\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$ lassen sich aber noch auf eine andere bemerkenswerthe Weise zu zweien mit einander verbinden. Nämlich man setze pw mit $-pv$ zusammen, so erhält man, da die erste dieser Componenten mit v, die zweite mit w parallel ist, und beide mithin senkrecht gegen einander sind, eine resultirende Geschwindigkeit, deren Größe gleich $p'\sqrt{v^2 + w^2}$ ist, wo p' den positiven Werth von p bedeutet. Die Richtung derselben bildet mit den positiven Axen der u, v, w Winkel, deren Cosinus $0,\ \frac{\pm w}{\sqrt{v^2 + w^2}},\ \frac{\mp v}{\sqrt{v^2 + w^2}}$ sind, wobei die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem p positiv oder negativ ist; sie ist daher senkrecht nicht allein gegen u, sondern auch gegen das von

dem Puncte P (dessen Coordinaten u, v, w sind) auf die Axe u gefällte Loth; denn dieses bildet mit den Axen v, w Winkel, deren Cosinus $\frac{v}{\sqrt{v^2+w^2}}$, $\frac{w}{\sqrt{v^2+w^2}}$ sind, woraus sofort das Behauptete folgt. Da nun das Loth von P auf die Axe u, der Größe nach, gleich $\sqrt{v^2+w^2}$ ist, so entspricht die Geschwindigkeit $p'\sqrt{v^2+w^2}$ einer Drehung um u, mit einer Winkelgeschwindigkeit, deren Größe dem positiven Werthe von p (d. i. p') gleich ist. Auch in Beziehung auf den Sinn dieser Drehung um u findet keine Zweideutigkeit Statt. Denn man betrachte denjenigen Punct des Körpers, für welchen $u=0$, $v=0$, $w=+1$ ist; so sind 0, p, 0, die Componenten der Geschwindigkeit, welche er vermöge der Drehung um u besitzt, nach den Axen u, v, w, d. h. dieser Punct geht (augenblicklich und blos vermöge der Drehung um u) in dem Sinne der positiven oder negativen v, je nachdem p positiv oder negativ ist. Hierdurch ist aber der Sinn der Drehung völlig bestimmt, da die Richtungen der positiven Axen u, v, w in dem Körper von Anfang an festgesetzt sein mußten. Denkt man sich in einem Puncte der positiven Axe u ein nach der Ebene vw hinblickendes Auge, so wird für dasselbe, wenn p positiv ist, die Drehung der Puncte in der Ebene vw in einem gewissen Sinne, z. B. von der Linken zur Rechten, erfolgen; dieser Sinn ist dann der positive. Wenn nun im Folgenden von der Drehung um irgend eine Axe die Rede ist, so denke man sich diese von O aus immer nur nach einer Seite fortgehend, die dadurch bestimmt wird, daß die Drehung für ein in der Axe befindliches Auge, welches nach der auf ihr senkrecht durch O gelegten Ebene hinblickt, im positiven Sinne erfolgen soll. Schneidet man noch, wenn mehrere Drehungen zugleich in Betracht kommen, auf der so bestimmten Axe jeder derselben, von O aus, ein ihrer Winkelgeschwindigkeit proportionales Stück ab; so sieht man, daß durch diese Abschnitte der Axen jede Drehung nach allen Beziehungen eben so vollständig dargestellt wird, wie ein Kräftepaar durch seine Axe

(§. 15.). In dem vorliegenden Falle fällt also die Axe der Drehung um u in den positiven oder negativen Theil von u, je nachdem p positiv oder negativ ist.

Auf gleiche Weise geben die Componenten qu und $-qw$ die Geschwindigkeit $q\sqrt{u^2+w^2}$, welche einer Drehung um v mit der Winkelgeschwindigkeit q entspricht, und deren Axe wieder in den positiven oder negativen Theil von v fällt, je nachdem q positiv oder negativ ist. Denn es sei z. B. q positiv, und man betrachte den Punct, dessen Coordinaten $u=1$, $v=0$, $w=0$ sind, so sind 0, 0, q die Componenten seiner Geschwindigkeit nach u, v, w, vermöge dieser Drehung um v; d. h. der Punct geht (augenblicklich) in der Richtung der positiven w; der Sinn dieser Drehung ist aber wieder der einmal als positiv angenommene, wie die Anschauung lehrt. Endlich geben rv und $-ru$, zusammengesetzt, die Geschwindigkeit $r\sqrt{u^2+v^2}$, welche einer Drehung um w mit der Winkelgeschwindigkeit r entspricht; und die Axe fällt wieder in den positiven oder negativen Theil von w, je nachdem r positiv oder negativ ist.

Folglich kann die Winkelgeschwindigkeit des Körpers $\omega = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$ betrachtet werden als zusammengesetzt aus drei anderen, nämlich p, q, r, mit welchen der Körper sich gleichzeitig um die Axen u, v, w dreht, und man bemerkt schon aus dem Ausdrucke für ω, in Verbindung mit den Gleichungen (10.) für die augenblickliche Drehungsaxe, daß diese Zusammensetzung sich ganz nach den nämlichen Regeln richtet wie die der Kräftepaare, oder, wenn die Drehungen alle durch ihre Axen auf die angegebene Weise dargestellt werden, nach denselben Regeln, wie die Zusammensetzung der Kräfte.

Wird nämlich ein Körper, auf irgend eine Weise, gleichzeitig zur Drehung um zwei einander in O schneidende Axen veranlaßt, so nehme man auf diesen Axen zwei den Winkelgeschwindigkeiten α, β proportionale Stücke $OK=\alpha$, $OK'=\beta$, jedes von P aus auf der gehörigen Seite, wie vorhin angegeben ist, vollende aus ihnen das Parallelogramm und ziehe die Diagonale OH (Fig. 42.); so besteht die Bewegung des Körpers in einer Drehung um diese Axe, deren Winkelgeschwindigkeit der Länge von OH proportional ist, und die überhaupt wieder durch OH dargestellt wird.

Denn man betrachte einen Punct H dieser Diagonale; es seien $Hl = r$, $Hm = \varrho$ seine senkrechten Abstände von den Seiten OK, OK'; so ist bekanntlich $r \cdot \alpha = \varrho \cdot \beta$. Zugleich aber drückt $r\alpha$ die Geschwindigkeit aus, welche H durch die Drehung um OK, so wie $\varrho\beta$ die, welche H durch die Drehung um OK' erhält; beide sind also einander gleich, ihre Richtungen sind senkrecht auf der Ebene KOK', und einander entgegengesetzt, weil die Drehungen um die Axen OK, OK', von K und K' aus betrachtet, in demselben Sinne erfolgen; folglich bleibt der Punct H, und mithin überhaupt die Gerade OH in Ruhe, und der Körper muß sich um diese Axe drehen. Um ferner die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung zu finden, errichte man in O ein Loth OA auf der Ebene KOK', von der Länge $=1$; es stellen AP, AP' die Geschwindigkeiten α und β dar, welche A durch die Drehungen um OK, OK' beziehungsweise erhält; so ist $\angle PAP' = KOK'$, weil AP, AP' gegen OK, OK' beziehungsweise senkrecht sind, und die resultirende Geschwindigkeit von A ist die Diagonale AR, welche senkrecht auf HO steht; zugleich verhält sich

$$AP : AP' : AR = OK : OK' : OH;$$

also wird die resultirende Drehung um die Axe OH auch der Größe und nicht minder dem Sinne nach durch die Diagonale OH dargestellt; w. z. b. w.

Diese Zusammensetzung der Drehungen vermittelst ihrer Axen muß für beliebig viele Drehungen richtig sein, da sie für zwei gilt; wenn man also auf den Axen u, v, w von O aus die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r mit Rücksicht auf die Zeichen aufträgt, und aus diesen Abschnitten das Parallelepipedum vollendet, so stellt die von O ausgehende Diagonale desselben die

Richtung der augenblicklichen Drehungsaxe und die Größe, so wie den Sinn der Drehung um diese dar.

Die Winkelgeschwindigkeit derselben ist $\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$, und nennt man (u), (v), (w) die Winkel, welche der sie darstellende Theil der Drehungsaxe mit den positiven Theilen von u, v, w bildet, so hat man:

$$\cos(u) = \frac{p}{\omega}, \; \cos(v) = \frac{q}{\omega}, \; \cos(w) = \frac{r}{\omega}, \qquad 12.$$

in welchen Formeln ω positiv, p, q, r aber mit ihren Zeichen genommen werden müssen. Verlangt man noch die Neigungen dieser Drehungsaxe gegen die unveränderlichen Richtungen x, y, z, so erhält man, dieselben mit (x), (y), (z) bezeichnend:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= a \cos(u) + a' \cos(v) + a'' \cos(w) \\ \cos(y) &= b \cos(u) + b' \cos(v) + b'' \cos(w) \\ \cos(z) &= c \cos(u) + c' \cos(v) + c'' \cos(w) \end{aligned}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{ap + a'q + a''r}{\omega} \\ \cos(y) &= \frac{bp + b'q + b''r}{\omega} \\ \cos(z) &= \frac{cp + c'q + c''r}{\omega} \end{aligned}\right\} \qquad 13.$$

95. Man hat nach §. 93.

$$\begin{aligned} a\,da + b\,db + c\,dc &= 0 \\ a'\,da + b'\,db + c'\,dt &= -r\,dt \\ a''da + b''db + c''dc &= q\,dt. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit a, a', a'' und addirt die Producte, so kommt $da = (a''q - a'r)dt$. Multiplicirt man auf gleiche Weise mit b, b', b'', und addirt, so kommt $db = (b''q - b'r)dt$, und durch Multiplication mit c, c', c'', $dc = (c''q - c'r)dt$.

Aehnliche Ausdrücke erhält man für da', db' ..., und über=

haupt folgt:

$$\left.\begin{array}{l} da=(a''q-a'r)dt,\ da'=(ar-a''p)dt,\ da''=(a'p-aq)dt \\ db=(b''q-b'r)dt,\ db'=(br-b''p)dt,\ db''=(b'p-bq)dt \\ dc=(c''q-c'r)dt,\ dc'=(cr-c''p)dt,\ dc''=(c'p-cq)dt \end{array}\right\} \quad 14.$$

Diese Werthe in die Gleichungen 6. (§. 93.) gesetzt, geben:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt}=(a''q-a'r)u+(ar-a''p)v+(a'p-aq)w \\ \frac{dy}{dt}=(b''q-b'r)u+(br-b''p)v+(b'p-bq)w \\ \frac{dz}{dt}=(c''q-c'r)u+(cr-c''p)v+(c'p-cq)w \end{array}\right\} \quad 15.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen bilde man aus 1. (§. 93.) den Werth des Ausdruckes $\frac{y\,dx-x\,dy}{dt}$, so wird zunächst das in u^2 multiplicirte Glied dieses Werthes:

$$[(ba''-ab'')q-(ba'-a'b)r]u^2$$

oder, weil $ba''-ab''=c'$, $ba'-a'b=-c''$ ist (§. 33. 4.), $(c'q+c''r)u^2$. Eben so werden die in v^2 und w^2 multiplicirten Glieder beziehungsweise: $(c''r+cp)v^2$ und $(cp+c'q)w^2$, und man erhält:

$$\frac{y\,dx-x\,dy}{dt}=(c'q+c''r)u^2+(c''r+cp)v^2+(cp+c'q)w^2+\cdots$$

In dieser Formel sind die in uv, vw, wu multiplicirten Glieder weggelassen, weil ihre Entwickelung entbehrlich ist. Nimmt man nämlich für u, v w die drei durch O gehenden Hauptaxen des Körpers, so wird $\Sigma uvm=0$, $\Sigma vwm=0$, $\Sigma wum=0$ (wo m die Masse eines Elementes); multiplicirt man daher die vorstehende Gleichung mit m, und integrirt in Bezug auf die gesammte Masse des Körpers, so fallen die Glieder, welche vorstehende Integrale zu Factoren haben, weg, und man erhält:

$$\Sigma\left(\frac{y\,dx-x\,dy}{dt}\right)m$$
$$=(c'q+c''r)\Sigma u^2m+(c''r+cp)\Sigma v^2m+(cp+c'q)\Sigma w^2m.$$

Nun seien, wie früher A, B, C die den Hauptaxen u, v, w zugehörigen Trägheitsmomente, mithin

$$\Sigma(v^2+w^2)m=A,\ \Sigma(w^2+u^2)m=B,\ \Sigma(u^2+v^2)m=C,$$

folglich $2\Sigma u^2m=B+C-A$, $2\Sigma v^2m=C+A-B$, $2\Sigma w^2m=A+B-C$. Diese Werthe geben, in obige Gleichung gesetzt:

$$\Sigma m\left(\frac{y\,dx-x\,dy}{dt}\right)=Acp+Bc'q+Cc''r. \quad 16.\ a.$$

Auf gleiche Weise folgt

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma m\left(\frac{x\,dz-z\,dx}{dt}\right)=Abp+Bb'q+Cb''r \\ \Sigma m\left(\frac{z\,dy-y\,dz}{dt}\right)=Aap+Ba'q+Ca''r. \end{array}\right\} \quad 16.\ b.$$

Diese Formeln kann man auch auf folgende Weise erhalten. Man bilde in irgend einem Augenblicke der Bewegung das zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente in Beziehung auf den Punct O, so stellen in 16. die Glieder auf der linken Seite die Componenten desselben nach den Ebenen xy, zx, yz dar. Die Componenten desselbes Paares nach den Ebenen uv, wu, vw ergeben sich aus den Formeln 9. (§. 93.); sie sind nämlich

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma(Uv-Vu)m=r\Sigma(u^2+v^2)m=Cr \\ \Sigma(Wu-Uw)m=q\Sigma(w^2+u^2)m=Bq \\ \Sigma(Vw-Wv)m=p\Sigma(v^2+w^2)m=Ap \end{array}\right\} \quad 17.$$

wobei man sich zu erinnern hat, daß $\Sigma uvm=0$, $\Sigma wum=0$, $\Sigma vwm=0$.

Wenn man nun jedes dieser drei Paare nach den Ebenen xy, zx, yz zerlegt, so erhält man z. B. Crc'', Bqc', Apc als Componenten nach xy; weil c'', c', c die Neigungen der Axen der Paare Cr, Bp, Ap gegen z, d. i. gegen die Axe des in der

Ebene xy wirkenden Paares sind; also folgt sofort:

$$\Sigma\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{dt}\right)m = Acp + Bc'q + Cc''r,$$

wie vorhin, und eben so folgen die übrigen Gleichungen 16.

96. Es ist noch übrig, den Zusammenhang zwischen den Größen p, q, r und den Winkeln φ, ψ, Θ, von welchen die 9 Cosinus a, ⋯ c″ Functionen sind, genauer zu entwickeln. Nach §. 33. ist:

$$\begin{aligned}
a &= \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\Theta,\\
a' &= -\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\Theta,\\
a'' &= -\sin\psi\sin\Theta,\\
b &= -\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\Theta,\\
b' &= \sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\Theta,\\
b'' &= -\cos\psi\sin\Theta.
\end{aligned}$$

$$c = \sin\varphi\sin\Theta,\quad c' = \cos\varphi\sin\Theta,\quad c'' = \cos\Theta.$$

Hieraus folgt durch Differentiation:

$$\begin{aligned}
da &= a'\,d\varphi + b\,d\psi - c\sin\psi\,d\Theta\\
db &= b'\,d\varphi - a\,d\psi - c\cos\psi\,d\Theta\\
dc &= c'\,d\varphi \qquad\quad + c''\sin\varphi\,d\Theta\\
da' &= -a\,d\varphi + b'\,d\psi - c'\sin\psi\,d\Theta\\
db' &= -b\,d\varphi - a'\,d\psi - c'\cos d\psi\Theta\\
dc' &= -c\,d\varphi \qquad\quad + c''\cos\varphi\,d\Theta\\
da'' &= b''\,d\psi - c''\sin\psi\,d\Theta\\
db'' &= -a''\,d\psi - c''\cos\psi\,d\Theta\\
dc'' &= \qquad\quad - \sin\Theta\,d\Theta.
\end{aligned}$$

Die Werthe von da′, db′, dc′ erhält man aus denen von da, db, dc sofort, wenn man in jenen $\varphi + \frac{1}{2}\pi$ anstatt φ setzt. Denn dadurch verwandeln sich a, b, c, a′, b′, c′, beziehungsweise in a′, b′, c′, —a, —b, —c, woraus das Behauptete folgt. Multiplicirt man die drei ersten dieser Gleichungen der Reihe

nach mit a′, b′, c′ und addirt die Producte, so erhält man mit Rücksicht auf 8. (§. 93.).

$$-r\,dt = d\varphi + (ba' - ab')\,d\psi - (c(a'\sin\psi + b'\cos\psi) - c'c''\sin\varphi)\,d\Theta.$$

Nach §. 33. 4. ist aber $ba' - ab' = -c''$; ferner ist $a'\sin\psi + b'\cos\psi = \cos\varphi\cos\Theta$, und $c\cdot\cos\varphi\cos\Theta = \sin\varphi\cos\varphi\sin\Theta\cos\Theta = c'c''\sin\varphi$; folglich ergiebt sich:

$$r\,dt = c''\,d\psi - d\varphi.$$

Multiplicirt man ferner die Werthe von da″, db″, dc″ der Reihe nach mit a, b, c und addirt die Producte, so kommt:

$$-q\,dt = (ab'' - ba'')\,d\psi - (c''(a\sin\psi + b\cos\psi) + c\sin\Theta)\,d\Theta.$$

Es ist aber $a\sin\psi + b\cos\psi = \sin\varphi\cos\Theta$, und $c''\sin\varphi\cos\Theta + c\sin\Theta = \sin\varphi$; zugleich auch $ab'' - ba'' = -c'$; folglich

$$q\,dt = c'\,d\psi + \sin\varphi\,d\Theta.$$

Vergleicht man mit einander die Formeln $-q\,dt = a\,da'' + b\,db'' + c\,dc''$ und $p\,dt = a'da'' + b'db'' + c'dc''$, so bemerkt man leicht, daß die erste in die zweite übergeht, wenn man in jener $\varphi + \frac{1}{2}\pi$ anstatt φ schreibt. Denn hierdurch werden einerseits da″, db″, dc″, die von φ unabhängig sind, nicht geändert, andererseits aber verwandeln sich dadurch a, b, c beziehungsweise in a′ b′, c′, wie vorhin schon bemerkt ist. Schreibt man demnach in dem vorstehenden Werthe von q dt, $\varphi + \frac{1}{2}\pi$, für φ, mithin —c für c′, so kommt:

$$-p\,dt = -c\,d\psi + \cos\varphi\cdot d\Theta.$$

Daher hat man im Ganzen:

$$\left.\begin{aligned}
p\,dt &= \sin\varphi\sin\Theta\,d\psi - \cos\varphi\,d\Theta\\
q\,dt &= \cos\varphi\sin\Theta\,d\psi + \sin\varphi\,d\Theta\\
r\,dt &= \cos\Theta\,d\psi - d\varphi.
\end{aligned}\right\}\ 18.$$

Nach diesen Vorbereitungen lassen sich die Differentialgleichungen für die Bewegung eines Körpers unter beliebigen beschleunigenden Kräften ohne Schwierigkeit aufstellen. Es sollen hier der

Reihe nach folgende Fälle in Betracht gezogen werden: erstens die freie Bewegung, zweitens die Drehung um einen festen Punct, drittens die Bewegung auf einer festen Ebene.

Freie Bewegung fester Körper.

97. In §. 80. sind sechs Gleichungen entwickelt worden (nämlich S. 248. Z. 7. und S. 249. Z. 16—18.), welche für die Bewegung jedes freien Systemes gelten, bei einem festen aber zugleich zur Bestimmung derselben hinreichen. Sie drücken nichts Anderes aus, als daß die Resultante und das zusammengesetzte Paar der verlorenen Kräfte, in jedem Augenblicke Null ist, oder, um sie auf eine ihrer Form noch genauer angemessene Weise auszusprechen, daß die Resultante aller Beschleunigungsmomente derjenigen aller beschleunigenden Kräfte, und das zugehörige Paar von jenen dem von diesen in jedem Augenblicke der Bewegung gänzlich gleich ist. Für die gegenwärtige Anwendung ist es zweckmäßig, sich alle diese Beschleunigungsmomente und die beschleunigenden Kräfte am Schwerpuncte des Körpers in ihren Richtungen und in den entgegengesetzten angebracht vorzustellen, und mithin die genannten Paare sogleich in Bezug auf diesen Punct zu bilden.

Es seien, wie in §. 93., ξ, η, ζ die Coordinaten des Schwerpunctes (O), x', y', z' die eines Elementes m des Körpers, mithin $x=x'-\xi$, $y=y'-\eta$, $z=z'-\zeta$ die relativen Coordinaten von m gegen O, sämmtlich parallel dreien rechtwinklichen im Raume festen Axen, und X, Y, Z die Componenten der an m wirkenden beschleunigenden Kraft; so hat man $\Sigma m\frac{d^2x'}{dt^2}=\Sigma X$, u. s. f., oder weil $\Sigma mx'=\xi\Sigma m$,

$$\frac{d^2\xi}{d^2t}\Sigma m=\Sigma X,\quad \frac{d^2\eta}{dt^2}\Sigma m=\Sigma Y,\quad \frac{d^2\zeta}{dt^2}\Sigma m=\Sigma Z, \qquad 1.$$

wie in §. 80. Ferner sind $\Sigma m\left(\frac{y\,d^2x'-x\,d^2y'}{dt^2}\right)$ und

$\Sigma(Xy-Yx)$ die in die Ebene xy fallenden Componenten jene des Paares der Beschleunigungsmomente, diese des Paares der beschleunigenden Kräfte, indem beide Paare in Beziehung auf den Schwerpunct gebildet werden sollen. Dieselben sind einander gleich. Man hat aber $\Sigma my\frac{d^2x'}{dt^2}=\Sigma my\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2\xi}{dt^2}\Sigma my$, daher, weil $\Sigma my=0$, $\Sigma my\frac{d^2x'}{dt^2}=\Sigma my\frac{d^2x}{dt^2}$, und eben so $\Sigma mx\frac{d^2y'}{dt^2}=\Sigma mx\frac{d^2y}{dt^2}$; folglich $\Sigma m\left(\frac{y\,d^2x'-x\,d^2y'}{dt^2}\right)$ $=\Sigma m\left(\frac{y\,d^2x-x\,d^2y}{dt^2}\right)$; woraus sich ergiebt

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma m\left(\frac{y\,d^2x-x\,d^2y}{dt^2}\right)=\Sigma(Xy-Yx)\\ \text{eben so}\quad&\Sigma m\left(\frac{x\,d^2z-z\,d^2x}{dt^2}\right)=\Sigma(Zx-Xx)\\ &\Sigma m\left(\frac{z\,d^2y-y\,d^2z}{dt^2}\right)=\Sigma(Yz-Zy)\end{aligned}\right\}\quad 2.$$

Diese Gleichungen lassen sich, wenn zur Abkürzung $\Sigma(Xy-Yx)=N$, $\Sigma(Zx-Xz)=M$, $\Sigma(Yz-Zy)=L$ gesetzt werden, auch schreiben wie folgt:

$$\begin{aligned}\Sigma m\,d(y\,dx-x\,dy)&=N\,dt^2,\\ \Sigma m\,d(x\,dz-z\,dx)&=M\,dt^2,\\ \Sigma m\,d(z\,dy-y\,dz)&=L\,dt^2,\end{aligned}$$

hieraus aber erhält man, für die Ausdrücke $\Sigma m(y\,dx-x\,dy)$, u. s. f. ihre Werthe aus 16. (§. 95.) setzend:

$$\left.\begin{aligned}d(A\,ap+B\,a'q+C\,a''r)&=L\,dt\\ d(A\,bp+B\,b'q+C\,b''r)&=M\,dt\\ d(A\,cp+B\,c'p+C\,c''r)&=N\,dt\end{aligned}\right\}\quad 3.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit a, b, c, addirt die Producte, und bemerkt daß $a\,da+b\,db+c\,dc=0$, $a\,da'+b\,db'+c\,dc'=r\,dt$, $a\,da''+b\,db''+c\,dc''=-q\,dt$, so wie

$a^2+b^2+c^2=1$, $aa'+bb'+cc'=0$, $aa''+bb''+cc''=0$ ist, so kommt:

$$A\,dp+(B-C)qr\,dt=(La+Mb+Nc)dt.$$

Multiplicirt man auf gleiche Weise mit a', b', c', und eben so mit a'', b'', c'', und addirt jedesmal die Producte, so erhält man zwei ähnliche Gleichungen, die sich jedoch auch ohne neue Rechnung schon aus der vorhergehenden durch gehörige Verwechselung der Buchstaben ergeben müssen. Also folgt aus 3.

$$\left.\begin{array}{l} A\,dp+(B-C)qr\,dt=(La+Mb+Nc)dt \\ B\,dq+(C-A)rp\,dt=(La'+Mb'+Nc')dt \\ C\,dr+(A-B)pq\,dt=(La''+Mb''+Nc'')dt \end{array}\right\}\ 4.$$

In diese Gleichungen (oder auch in die vorhergehenden unter 3.) kann man für p, q, r ihre Werthe aus §. 96. (Formel 18.) und zugleich für die Cosinus a, b, ... c'', die ihnen gleichen Functionen von φ, ψ, Θ setzen. Da die Kräfte X, Y, Z und die Momente $Xy-Yx$, u. s. f. Functionen von x, y, z, ξ, η, ζ sind, und da sich x, y, z (nach 93. 1.) als Functionen von φ, ψ, Θ ausdrücken lassen (denn u, v, w sind für jeden Punct des Körpers unveränderlich, oder von der Zeit unabhängig, und kommen daher bloß als Constanten in Betracht); so sind auch ΣX, ΣY, ΣZ, L, M, N Functionen von φ, ψ, Θ, ξ, η, ζ, die etwa auch noch die Zeit t enthalten können. Aus dieser Uebersicht geht hervor, daß die sechs Gleichungen 1. und 4. gerade erforderlich und hinreichend sind, um die sechs Unbekannten φ, ψ, Θ, ξ, η, ζ als Functionen der Zeit zu bestimmen, worin der Zweck der Aufgabe besteht. Diese sechs Differentialgleichungen sind sämmtlich zweiter Ordnung; ihre Integration führt mithin 12 Constanten herbei, welche z. B. bestimmt werden, wenn die Werthe der sechs Größen $\varphi, \dots \zeta$ und die ihrer Ableitungen nach t, für einen gegebenen Augenblick bekannt sind, d. h. wenn man die Stellung des Körpers und seine Geschwindigkeit, sowohl in Hinsicht der Bewegung des Schwerpunctes als der

Drehung um diesen, für einen gegebenen Augenblick vollständig kennt.

Es ist aber hier unnöthig, die Elimination von p, q, r aus den Gleichungen 4. auszuführen.

Eines der einfachsten hierher gehörigen Beispiele liefert die Bewegung eines schweren Körpers im leeren Raume, bei unveränderlich gedachter Schwere. Nimmt man die Axe der z vertical und positiv nach unten, so wird $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$, $\Sigma Z=g\Sigma m$; zugleich $L=0$, $M=0$, $N=0$; mithin erhält man aus 1. und 4.

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=0,\ \frac{d^2\eta}{dt^2}=0,\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}=g.$$

$$A\,dp+(B-C)\,qr\,dt=0,$$

$$B\,dq+(C-A)\,rp\,dt=0,$$

$$C\,dr+(A-B)\,pq\,dt=0.$$

In diesem Falle sind die Bewegung des Schwerpunctes und die Drehung des Körpers um diesen ganz unabhängig von einander; während der Schwerpunct eine Parabel beschreibt, dreht sich um ihn der Körper um eben so, wie geschehen würde, wenn der Schwerpunct unbeweglich wäre. Dies ist unmittelbar einleuchtend, weil die Resultante aller Schwerkräfte durch den Schwerpunct geht, und mithin auf die Drehung des Körpers um diesen keinen Einfluß haben kann. Die Aufgabe kommt also, in Hinsicht der Drehung des Körpers, auf den Fall zurück, dessen Untersuchung jetzt folgt.

Drehung um einen festen Punct.

98. Der feste Punct (er heiße O), um welchen der Körper sich dreht, wird in jedem Augenblicke einen gewissen Druck erleiden, der mit Π bezeichnet werde. Bezeichnet man die Coordinaten eines Körperelementes, nach drei unbeweglichen in O anfangenden Axen, mit x, y, z und die Neigungen von Π gegen diese mit λ, μ, ν, so hängt die analytische Bestimmung dieses

Druckes oder des Widerstandes $-\Pi$ von folgenden Gleichungen ab, die sogleich ergeben, wenn man bedenkt, daß dieser Widerstand den verlorenen Kräften Gleichgewicht halten muß:

$$\Sigma X - \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} - \Pi\cos\lambda = 0,\quad \Sigma Y - \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} - \Pi\cos\mu = 0,$$

$$\Sigma Z - \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} - \Pi\cos\nu = 0.$$

Diese Formeln treten hier an die Stelle der Gleichungen 1. im vorigen §. Zur Bestimmung der Drehung des Körpers um O dienen die Gleichungen 2. des vorigen §., von welchen 3. und 4. weitere Transformationen sind. Es soll nun zunächst der einfachste der hierher gehörigen Fälle entwickelt werden, welcher Statt findet, wenn keine beschleunigenden Kräfte vorhanden sind. Alsdann ist **erstens** das zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente, gebildet in Bezug auf den festen Punct O (es soll hinfort das Paar Q heißen), nach Ebene und Größe, und **zweitens** die lebendige Kraft des Körpers, für alle Zeiten unveränderlich. Der erste dieser Sätze folgt, weil einerseits die beschleunigenden Kräfte Null sind, zugleich aber auch das Moment des Widerstandes Π in Beziehung auf den Punct O Null ist, da die Richtung von Π durch O geht; daher ist das zusammengesetzte Paar der **Beschleunigungsmomente**, gebildet in Bezug auf O, beständig Null, und mithin das der **Bewegungsmomente** constant. Daß ferner die lebendige Kraft unveränderlich ist, folgt aus dem allgemeinen Satze der lebendigen Kräfte (§. 81.).

Setzt man, für den vorliegenden Fall, in den Gleichungen 4. des vorigen §. $L=0$, $M=0$, $N=0$, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} A\,dp+(B-C)qr\,dt&=0\\ B\,dq+(C-A)rp\,dt&=0\\ C\,dr+(A-B)pq\,dt&=0\end{aligned}\right\}\quad 1.$$

Ferner lassen sich die Gleichungen 3., in welchen $L=0,\cdots$, sofort integriren; sie geben

$$\left.\begin{aligned} Aap+Ba'q+Ca''r&=l\\ Abp+Bb'q+Cb''r&=l'\\ Acp+Bc'q+Cc''r&=l''\end{aligned}\right\}\quad 2.$$

wo l, l', l'' Constanten sind, die nichts Anderes, als die Componenten des Paares Q nach den Ebenen yz, zx, xy, bedeuten, wie aus den Formeln 16. 17. in §. 95. erhellet. Diese Gleichungen enthalten mithin den so eben erwähnten dieses Paar betreffenden Satz. Sie lassen sich auch leicht aus den Gleichungen 1. herleiten. Denn multiplicirt man diese der Reihe nach mit a, a', a'', addirt die Producte, so kommt, bei gehöriger Rücksicht auf die Formeln 14. in §. 95., $Ad(ap)+Bd(a'q)+CD(c'r)=0$, woraus die erste der Gleichungen 2. folgt. Eben so die übrigen. Setzt man die Intensität des Paares Q gleich k, so ergiebt sich, durch Addition der Quadrate von 2:

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=l^2+l'^2+l''^2=k^2.\quad 3.$$

Um die lebendige Kraft des Körpers zu finden, sei e die Geschwindigkeit eines seiner Puncte; so hat man, nach §. 93. 9., $e^2=U^2+V^2+W^2$, oder

$$e^2=p^2(v^2+w^2)+q^2(w^2+u^2)+r^2(u^2+v^2)$$
$$-2qrvw-2rpwu-2pquv;$$

folglich, weil u, v, w die durch O gehenden Hauptaxen sind, und mithin $\Sigma mvw=0$, u. s. f., ferner $\Sigma m(v^2+w^2)=A$, u. s. f. ist;

$$\tfrac{1}{2}\Sigma e^2m=\tfrac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2).$$

Multiplicirt man die Gleichungen 1. der Reihe nach mit p, q, r, und addirt die Producte, so kommt $Apdp+Bqdq+Crdr=0$, also $\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)=\text{Const.}$, d. h. die lebendige Kraft ist constant. Bezeichnet man sie mit $\frac{1}{2}h^2$, so wird

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=h^2.\quad 4.$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, denke man sich die positive Axe der z als Axe des Paares Q; so wird in den Gleichungen

2. $l=0$, $l'=0$, und $l=k$, wo k die Intensität des Paares Q oder die Größe seiner Axe vorstellt, und positiv ist. Hierdurch werden die Gleichungen 1. folgende:

$$Aap+Ba'q+Ca''r=0$$
$$Abp+Bb'q+Cb''r=0$$
$$Acp+Bc'q+Cc''r=k.$$

Diese Gleichungen multiplicire man der Reihe nach zuerst mit a, b, c, dann mit a', b', c', endlich mit a'', b'', c'', und addire jedesmal die Producte, so kommt

$$Ap=ck,\ Bq=c'k,\ Cr=c''k. \qquad 5.$$

Offenbar sind ck, c'k, c''k nichts Anderes als die Componenten des Paares Q, nach den auf u, v, w beziehungsweise senkrechten Ebenen; daß diese sich aber auch durch Ap, Bq, Cr ausdrücken lassen, ist schon in §. 95. (17.) bemerkt worden. Denkt man sich das Paar Q gegeben, und zugleich die Neigungen der Hauptaxen u, v, w gegen die Axe desselben in irgend einem Augenblicke bekannt; so erhält man aus vorstehenden Gleichungen die Werthe von p, q, r für diesen Augenblick, wodurch zugleich die Constante h in 4. bestimmt wird. Die ferneren Aenderungen der Werthe von p, q, r richten sich nun nach den Gleichungen 1.

Indem der Körper sich dreht, erleidet die augenblickliche Drehungsaxe (sie heiße u'), oder diejenige Gerade in dem Körper, deren Geschwindigkeit zur Zeit t Null ist, durch die Wirkung der Schwungkräfte einen gewissen Druck, der sich in eine einzelne Kraft an dem festen Puncte O und ein Paar zusammensetzen läßt. Dieses Paar kann nie Null sein, wenn nicht die Drehungsaxe gerade eine Hauptaxe ist; folglich erhält, mit Ausnahme dieses besonderen Falles, die Gerade, welche zur Zeit t Drehungsaxe ist, in dem folgenden Zeitelemente dt eine unendlich kleine Geschwindigkeit, und hört damit auf Drehungsaxe zu sein, während nunmehr eine andere in dem Körper befindliche, der vorigen unendlich nahe Gerade augenblicklich die Geschwindigkeit Null hat, und mithin die neue Drehungsaxe ist.

Man denke sich das auf die Drehungsaxe wirkende Paar der Schwungkräfte in die Componenten L'dt, M'dt, N'dt zerlegt, deren Axen beziehungsweise u, v, w sind; so stellen diese Ausdrücke auch die Aenderungen dar, welche die Componenten des Paares Q, nämlich ck, c'k, c''k in der Zeit dt beziehungsweise erleiden; und da diese Aenderungen auch gleich kdc, kdc', kdc'' sind, so erhält man:

$$kdc=L'dt,\ kdc'=M'dt,\ kdc''=N'dt.$$

Es ist aber, nach 5. und 1. $kdc=Adp=(C-B)qrdt$, u. s. f.; hieraus folgt:

$$L'=(C-B)qr,\ M'=(A-C)rp,\ N'=(B-A)pq,$$

oder auch, weil $Ap=ck$, u. s. w.

$$L'=(c''q-c'r)k,\ M'=(cr-c''p)k,\ N'=(c'p-cq)k.$$

Bezeichnet man daher das Moment des Paares der Schwungkräfte mit S, und die Neigungen seiner Axe gegen u, v, w mit ε, ε', ε'' so ist $L'=S\cos\varepsilon$, $M'=S\cos\varepsilon'$, $N'=S\cos\varepsilon''$, und $L'^2+M'^2+N'^2=S^2=[p^2+q^2+r^2-(cp+c'q+c''r)^2]k^2$.

Nennt man i die Neigung der augenblicklichen Drehungsaxe (u') gegen z, so ist, nach der dritten der Formeln 13. in §. 94., indem i dasselbe was dort (z) bedeutet:

$$\omega\cos i=cp+c'q+c''r. \qquad 6.$$

Folglich wird $S^2=(\omega^2-\omega^2\cos i^2)k^2$, also

$$S=k\omega\sin i. \qquad 7.$$

Ferner ist, wie leicht zu sehen, $cL'+c'M'+c''N'=0$, oder $c\cos\varepsilon+c'\cos\varepsilon'+c''\cos\varepsilon''=0$; d. h. die Axe des Paares S steht senkrecht auf der Axe z. Auch ist $p\cos\varepsilon+q\cos\varepsilon'+r\cos\varepsilon''=0$; d. h. die Axe von S senkrecht auf der Drehungsaxe; dieses versteht sich jedoch von selbst, weil das Paar der Schwungkräfte durch die Drehungsaxe gehen muß. Die Axe dieses Paares S bleibt daher immer in der Ebene xy (d. i. in der Ebene des Paares Q), und die Ebene von S ist immer die Ebene u'z.

Aus 6. erhält man, mit Hülfe der Gleichungen 5. $k\omega \cos i = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$, also nach 4.

$$k\omega \cos i = h^2, \qquad 8.$$

d. h. zerlegt man die Winkelgeschwindigkeit ω, deren Axe u' ist (auf die in §. 94. angegebene Weise) nach den Axen x, y, z; so ist die der Axe z entsprechende Componente unveränderlich; dieselbe ist nämlich $\omega \cos i$, mithin nach 8. gleich $\frac{h^2}{k}$. Also bleibt die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Körper sich um die Axe des Paares Q dreht, fortwährend sich gleich.

99. Es dürfte nicht überflüssig sein, zu zeigen, wie sich diese Sätze auch auf sehr einfache Weise aus anderen Betrachtungen ergeben. Es sei z, wie bisher, die Axe des unveränderlichen Paares Q, u' die augenblickliche Drehungsaxe, i die Neigung von u' gegen z; ferner sei v' senkrecht auf u' in der Ebene u'z; so kann man das Paar Q, dessen Moment k genannt worden ist, in zwei andere zerlegen, deren Axen beziehungsweise u' und v', und deren Momente mithin $k \cos i$ und $k \sin i$ sind.

Nimmt man noch w' senkrecht auf u' und v', und setzt $\varrho = \sqrt{v'^2 + w'^2}$, so ist offenbar $\varrho\omega m$ das Bewegungsmoment des körperlichen Elementes m. Man zerlege dasselbe nach den Axen u', v', w' in die Componenten U, V, W, so hat man: $U = 0$, $V = w'\omega m$, $W = -v'\omega m$, weil $\frac{w'}{\varrho}$, $-\frac{v'}{\varrho}$ die Cosinus der Winkel sind, welche die Richtung der auf ϱ senkrechten Kraft $\varrho\omega m$ mit den Axen v', w' bildet; folglich erhält man, da von der anderen Seite das Paar Q in die Componenten $k \cos i$, $k \sin i$, 0 zerlegt ist, deren Axen beziehungsweise u', v', w' sind:

$$\Sigma(Vw' - Wv') = \omega\Sigma m(w'^2 + v'^2) = k \cos i$$
$$\Sigma(Wu' - Uw') = -\omega\Sigma u'v'm \qquad = k \sin i$$
$$\Sigma(Uv' - Vu') = -\omega\Sigma u'w'm \qquad = 0.$$

Es ist aber $\Sigma(v'^2 + w'^2)m$ das Trägheitsmoment des Körpers, für die Drehungsaxe u', mithin $\frac{1}{2}\omega^2\Sigma(v'^2 + w'^2)m$ nichts Anderes als seine lebendige Kraft, welche constant und mit $\frac{1}{2}h^2$ bezeichnet worden ist; die erste dieser Gleichungen giebt daher sofort $\omega k \cos i = h^2$, wie Formel 8. des vorigen §.

Ferner sind, nach §. 90. die Componenten des Paares der Schwungkräfte, in den Ebenen u'v' und u'w', beziehungsweise $-\omega^2 \Sigma u'v'm$ und $\omega^2 \Sigma u'w'm$; die zweite derselben ist, nach der letzten obigen Gleichungen, Null, und die erste gleich $\omega k \sin i$; das Paar der Schwungkräfte fällt also in die Ebene der z, u', v', d. h. in die Ebene der Drehungsaxe und der Axe von Q, und sein Moment ist $\omega k \sin i$; w. z. b. w.

Hier noch einige weitere Bemerkungen. Die Lage der augenblicklichen Drehungsaxe in dem Körper hängt bekanntlich von folgenden Gleichungen ab: $\frac{u}{p} = \frac{v}{q} = \frac{w}{r}$. Eliminirt man aus diesen, in Verbindung mit denen unter 3. und 4. im vorigen §., die Größen p, q, r; so erhält man die Kegelfläche, welche die Drehungsaxe in dem Körper beschreibt. Ihre Gleichung ergiebt sich wie folgt:

$$A(k^2 - Ah^2)u^2 + B(k^2 - Bh^2)v^2 + C(k^2 - Ch^2)w^2 = 0.$$

Dieser Kegel ist mithin zweiten Grades. Aus den Gleichungen 3. und 4. in §. 98. erhält man noch:

$$k^2 - Ah^2 = -Bq^2(A - B) - Cr^2(A - C),$$
$$k^2 - Ch^2 = Cp^2(A - C) + Bq^2(B - C).$$

Da nun $A > B > C$, so folgt hieraus, daß $k^2 - Ah^2$ negativ, $k^2 - Ch^2$ aber positiv ist. Auch kann keiner dieser Ausdrücke Null sein, wenn nicht $A = B = C$; dieser besondere Fall, in welchem jede Drehungsaxe eine Hauptaxe ist und unbeweglich bleibt, kann hier ganz ausgeschlossen werden. Die Axe des obigen Kegels ist entweder u oder w, d. h. entweder die Axe des größten oder die des kleinsten Trägheitsmomentes, je nachdem $k^2 - Bh^2$ positiv oder negativ ist.

Es sei z. B. k^2-Bh^2 positiv, so ist u die Axe des Kegels, den die Drehungsaxe in dem Körper beschreibt; und wenn man denselben durch eine auf u senkrechte Ebene in dem Abstande $u=1$ von der Spitze schneidet, so ist

$$B(k^2-Bh^2)v^2+C(k^2-Ch^2)w^2=A(Ah^2-k^2)$$

die Gleichung des elliptischen Schnittes. Die Hauptaxen desselben, die den Axen v und w parallel sind, bezeichne man beziehungsweise mit v_1 und w_1, so folgt:

$$v_1{}^2:w_1{}^2=C(k^2-Ch^2):B(k^2-Bh^2).$$

Nun ist aber $(B+C)h^2-k^2=A(B+C-A)p^2+BC(r^2+q^2)$, also positiv, oder $(B+C)h^2>k^2$, und wenn man auf beiden Seiten mit $B-C$ multiplicirt, $(B^2-C^2)h^2>k^2(B-C)$ oder $C(k^2-Ch^2)>B(k^2-Bh^2)$; folglich auch $v_1{}^2>w_1{}^2$; d. h. der auf der Axe u senkrechte elliptische Querschnitt des Kegels hat seine kleine Axe parallel mit w, also mit der Axe des kleinsten Trägheitsmomentes.

Dieses gilt wenn $k^2-Bh^2>0$. Ist aber $k^2-Bh^2=0$, so lehrt die obige Gleichung, daß die Drehungsaxe immer in einer gewissen durch v gehenden oder auf uw senkrechten Ebene bleibt. Und ist $k^2-Bh^2<0$, so ist w die Axe des Kegels, und die große Axe seines auf w senkrechten Schnittes parallel mit u, d. h. mit der Axe des größten Trägheitsmomentes.

Der obige Kegel wird ein gerader, wenn $A=B$ oder $B=C$; seine Axe ist w, wenn $A=B$, dagegen u, wenn $B=C$ ist. Auch kann noch, wenn z. B. $A=B$, die Drehungsaxe in der Ebene uv liegen; sie muß dann unbeweglich bleiben, weil sie eine Hauptaxe ist. Dies folgt auch leicht aus der Rechnung; es ist aber unnöthig, bei besonderen Fällen zu verweilen, die keine Wichtigkeit haben.

Die Axe z des Paares Q, welche im Raume fest bleibt, beschreibt in dem Körper ebenfalls einen Kegel zweiten Grades. Ihre Gleichungen in Beziehung auf die Hauptaxen u, v, w sind

nämlich: $\frac{u}{c}=\frac{v}{c'}=\frac{w}{c''}$; oder weil $ck=Ap$, u. s. f., $\frac{u}{Ap}=\frac{v}{Bq}=\frac{w}{Cr}$. Diese Gleichungen, nebst denen unter 3. und 4. in §. 98. geben, nach Wegschaffung von p, q, r:

$$\frac{(k^2-Ah^2)u^2}{A}+\frac{(k^2-Bh^2)v^2}{B}+\frac{(k^2-Ch^2)w^2}{C}=0;$$

also wieder einen Kegel zweiten Grades, dessen Axe u oder w ist, unter den nämlichen Bedingungen wie vorhin. Demnach bleiben die Abweichung der Drehungsaxe von einer der Hauptaxen u oder w, um welche sie einen Kegel beschreibt, und wiederum die Abweichung dieser Hauptaxe von der unveränderlichen Richtung der Axe von Q, immer innerhalb bestimmter Grenzen.

100. Man multiplicire die Gleichungen 1. in §. 98. der Reihe nach mit BCp, CAq, ABr, und addire die Producte, so erhält man, weil $p\,dp+q\,dq+r\,dr=\omega\,d\omega$ ist,

$$ABC\cdot\omega d\omega=[BC(C-B)+CA(A-C)+AB(B-A)]pqr\cdot dt$$

oder

$$ABC\cdot\omega d\omega=(A-B)(B-C)(C-A)pqr\cdot dt. \qquad 1.$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist also constant, wenn $A=B$ oder $B=C$ ist. Sie ist auch constant, wenn eine der Größen p, q, r Null ist. Soll aber z. B. r während der ganzen Dauer der Bewegung Null sein, so folgt aus den Gleichungen 1. in §. 98. $dp=0$, $dq=0$, und $(A-B)pq=0$. Also sind auch p und q constant, und wenn keine dieser Größen Null ist, $A=B$; alsdann ist die Drehungsaxe, indem sie in der Ebene uv liegt, zugleich eine Hauptaxe.

Im Folgenden wird, mit Ausschließung dieser besonderen Fälle, angenommen, daß A, B, C, alle von einander verschieden sind, und daß der Körper sich nicht um eine Hauptaxe dreht. Alsdann ist ω immer veränderlich.

Man hat:

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=k^2$$
$$A\ p^2+B\ q^2+C\ r^2=h^2$$
$$p^2+\ \ q^2+\ \ r^2=\omega^2.$$

Diese Gleichungen multiplicire man der Reihe nach mit 1, $-(B+C)$, BC, und addire die Producte, so kommt

$$\left.\begin{array}{l}(A-B)(A-C)p^2=k^2-(B+C)h^2+BC\omega^2\\(B-C)(B-A)q^2=k^2-(C+A)h^2+CA\omega^2\\(C-A)(C-B)r^2=k^2-(A+B)h^2+AB\omega^2\end{array}\right\}\quad 2.$$

von welchen die beiden letzten sich aus der ersten durch bloße Verwechselung der Buchstaben ergeben. Zur Vereinfachung setze man:

$$(B+C)h^2-k^2=BC\lambda^2,\quad (C+A)h^2-k^2=CA\mu^2,$$
$$(A+B)h^2-k^2=AB\nu^2,$$

so sind λ, μ, ν alle reell, weil die Größen links sämmtlich positiv sind. Denn nach §. 99. sind Ah^2-k^2 und $(B+C)h^2-k^2$ positiv. Hiernach gehen die Gleichungen 2. in folgende über:

$$\left.\begin{array}{l}(A-B)(A-C)p^2=BC(\omega^2-\lambda^2)\\(B-C)(A-B)q^2=CA(\mu^2-\omega^2)\\(B-C)(A-C)r^2=AB(\omega^2-\nu^2)\end{array}\right\}\quad 3.$$

Da in diesen alle Glieder links positiv sind, so müssen auch die Differenzen $\omega^2-\lambda^2$, $\mu^2-\omega^2$, $\omega^2-\nu^2$ immer positiv sein. Nun war oben $Ah^2>k^2$; folglich, wenn man auf beiden Seiten mit $B-C$ multiplicirt, und CBh^2 hinzu addirt,

$$Ah^2(B-C)+CBh^2>(B-C)k^2+CBh^2$$

oder $$(C+A)Bh^2-Bk^2>(A+B)Ch^2-Ck^2,$$

folglich $ABC\mu^2>ABC\nu^2$, also $\mu^2>\nu^2$. Ferner ist $k^2>Ch^2$, also $(A-B)k^2+ABh^2>(A-B)Ch^2+ABh^2$; oder $(A+C)Bh^2-Bk^2>(B+C)Ah^2-Ak^2$, d. i. $ABC\mu^2>ABC\lambda^2$, oder $\mu^2>\lambda^2$. Mithin ist $\mu^2>\nu^2$ und $\mu^2>\lambda^2$, und zwar

mit Ausschluß der Gleichheit, wenn A, B, C alle von einander verschieden sind, wie angenommen ist. Wenn ferner $\nu>\lambda$ ist (alsdann ist auch $k^2-Bh^2>0$, wie leicht zu sehen), so muß $\mu>\omega>\nu$ sein, d. h. die Winkelgeschwindigkeit ω immer zwischen den Grenzen μ und ν bleiben (λ, μ, ν, sind überall positiv zu nehmen, wie ω). Ist $\lambda=\nu$ oder $k^2=Bh^2$, so bleibt ebenfalls immer $\mu>\omega>\nu$. Ist aber $\lambda>\nu$, so bleibt ω immer zwischen μ und λ.

Quadrirt man die Gleichung 1. und multiplicirt sie mit dem Producte von 3., so kommt:

$$\omega^2d\omega^2=(\omega^2-\lambda^2)(\omega^2-\nu^2)(\mu^2-\omega^2)dt^2,$$

folglich

$$dt=\pm\frac{\omega\,d\omega}{\sqrt{(\omega^2-\lambda^2)(\omega^2-\nu^2)(\mu^2-\omega^2)}}.\quad 4.$$

Durch diese Gleichung wird ω als Function von t bestimmt. Man sieht aus derselben, daß ω eine periodische Function der Zeit ist. Denn es sei, für irgend einen Augenblick, z. B. für $t=0$, $\omega=\omega'$, so sieht man zuerst aus 1., da die Werthe von p, q, r für $t=0$, nach Größe und Zeichen als bekannt vorausgesetzt werden, ob zunächst ω wächst oder abnimmt, d. h. ob $\frac{d\omega}{dt}$ für $t=0$ positiv oder negativ ist. Ist nun z. B. $\frac{d\omega}{dt}$ positiv, so gilt in 4. zunächst das positive Zeichen. Man denke sich auch $\nu>\lambda$, so muß $\omega'>\nu$ und $<\mu$ sein; mithin wächst ω von ω' bis μ, kann aber nicht größer werden, als μ, weil sonst der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen negativ würde; folglich muß alsdann das negative Zeichen zu gelten anfangen, und ω wiederum von μ bis ν abnehmen. Da nach der Voraussetzung ν größer ist als λ, so kann ω nicht unter ν abnehmen, weil sonst das Product unter dem Wurzelzeichen negativ werden müßte; also muß nachher ω wieder von ν bis μ wachsen, u. s. f. ins Unendliche. Die Zeit, in welcher ω von dem größten Werthe μ bis zu dem kleinsten ν oder auch umgekehrt von dem Werthe ν bis zu μ gelangt, heiße T, so ist

$$T=\int_{\nu}^{\mu}\frac{\omega\, d\omega}{\sqrt{(\omega^2-\lambda^2)(\omega^2-\nu^2)(\mu^2-\omega^2)}}.$$

Nun sei t′ die Zeit, in welcher ω, nach den obigen Annahmen von ω' an wachsend, zuerst den Werth μ erreicht, immer von $t=0$ an gerechnet; so ist, wenn man zur Abkürzung setzt: $U=+\sqrt{(\omega^2-\lambda^2)(\omega^2-\nu^2)(\mu^2-\omega^2)}$,

$$t'=\int_{\omega'}^{\mu}\frac{\omega\, d\omega}{U}$$

wodurch t′ bekannt wird. Ferner wird $\omega=\nu$ für die Zeiten $t'+T$, $t'+3T, \cdots$, $t'+(2n+1)T$, dagegen wird $\omega=\mu$ für die Zeiten t', $t'+2T$, .. $t'+2nT$. Ist nun irgend eine Zeit t gegeben, zu welcher das entsprechende ω verlangt wird, so bilde man zunächst die Differenz $t-t'$, dividire sie durch T, der Quotient sei m, der Rest t″. Es sei z. B. m gerade, so hat man für die Zeit $t-t''$ oder $Tm+t'$, $\omega=\mu$, und mithin

$$t''=\int_{\omega}^{\mu}\frac{\omega\, d\omega}{U}$$

eine transscendente Gleichung, in der t″ bekannt und aus welcher ω zu finden ist. Daß dieselbe immer einen und nur einen reellen positiven Werth von ω, zwischen μ und ν, geben kann, ist einleuchtend; demnach ist der zur Zeit t gehörige Werth von ω völlig bestimmt, wie erforderlich.

Hieraus geht deutlich hervor, wie zu jeder Zeit t das entsprechende ω gefunden werden kann. Diese Aufgabe gestattet immer nur eine Auflösung; aber die umgekehrte, nämlich zu einem gegebenen ω die Zeit t zu finden, gestattet deren unendlich viele, weil dieselben Werthe von ω periodisch wiederkehren.

Besondere Beachtung verdient noch der Fall, wenn $\nu=\lambda$. Alsdann ist

$$dt=\frac{\pm\omega\, d\omega}{(\omega^2-\nu^2)\sqrt{\mu^2-\omega^2}},$$

welche Formel sich leicht integriren läßt. Man setze $\sqrt{\mu^2-\omega^2}=z$, und $\sqrt{\mu^2-\nu^2}=f$, so wird $dt=\frac{\mp dz}{f^2-z^2}$, und mithin $\mp 2ft = \text{Const.}+\log\left(\frac{f+z}{f-z}\right)$. Es sei, für $t=0$, $z=z'$, so wird

$$\mp 2ft=\log\left(\frac{f-z'}{f+z'}\cdot\frac{f+z}{f-z}\right).$$

Es sei noch $\omega=\omega'$ für $t=0$, und man denke sich ω zunächst von ω' bis μ wachsend, folglich z von $z'=\sqrt{\mu^2-\omega'^2}$ bis Null abnehmend; so gilt in vorstehender Gleichung das negative Zeichen, und die Zeit t′, in welcher ω von ω' bis μ zunimmt, ergiebt sich, wenn man $z=0$ setzt:

$$t'=\frac{1}{2f}\log\left(\frac{f+z'}{f-z'}\right).$$

Von da an muß aber ω wieder abnehmen, oder z muß von Null an wieder wachsen; sucht man nun die Zeit T′, in welcher ω von μ bis zu einem gewissen Werthe ω abnimmt, oder z von Null bis z wächst, so findet man:

$$T'=\int_0^z\frac{dz}{f^2-z^2}=\frac{1}{2f}\log\left(\frac{f+z}{f-z}\right),$$

mithin wird $T=\infty$ für $z=f$ oder für $\omega=\nu$. Wenn also ω einmal im Abnehmen ist, so nähert es sich beständig seinem kleinsten Werthe ν, ohne denselben je zu erreichen. Für $\omega=\nu$ wird zugleich $p=0$, $r=0$ (wegen 3.); d. h. die Drehungsaxe, welche sich nach §. 99. in dem gegenwärtigen Falle überhaupt in einer durch v gehenden Ebene befindet, nähert sich immer mehr der Axe v, sobald die Winkelgeschwindigkeit im Abnehmen ist. Im Ganzen also nähert sich die Bewegung des Körpers in dem besonderen Falle, wenn $k^2=Bh$ oder $\nu=\lambda$ ist, nach Verlauf einer gewissen endlichen Zeit immer mehr einer Drehung um die Axe v, mit der unveränderlichen Geschwindigkeit ν, ohne diese Grenze je zu erreichen.

Da sich ω für jedes t nach dem Vorigen finden läßt, so ergeben sich p^2, q^2, r^2 aus 3. Was noch die Zeichen betrifft, so findet, wenn die Werthe von p, q, r, für $t=0$ nach Größe und Zeichen bekannt sind, keine Zweideutigkeit Statt. Denn es ist klar, daß keine der Größen p, q, r ihr Zeichen ändern kann, ohne zugleich durch Null zu gehen; ferner aber ändert sie es jedesmal, wenn sie durch Null geht. Wenn also z. B. wieder $\nu > \lambda$ ist, so befindet sich ω immer zwischen μ und ν, und die Drehungsaxe beschreibt einen Kegel um u. Alsdann wird p nie Null, und wechselt folglich auch sein Zeichen nicht; dagegen wechselt q das seinige, so oft $\omega=\mu$, und r, so oft $\omega=\lambda$ wird. Daß diese Regel die richtige ist, ergiebt sich schon aus der Anschauung; um sie aber auch durch Rechnung nachzuweisen, darf man nur die Gleichung 1. in diesem §. betrachten, welche lehrt, daß $\frac{d\omega}{dt}$ und das Product pqr entgegengesetzte Zeichen haben, folglich auch immer zugleich ihre Zeichen wechseln. (In dieser Gleichung ist nämlich der Factor $C-A$ auf der rechten Seite negativ.) Wenn nun, wie vorhin, $\nu > \lambda$ ist, so findet der Zeichenwechsel Statt, sobald $\omega=\mu$, $q=0$, und sobald $\omega=\nu$, $r=0$ wird. Da p in diesem Falle niemals sein Zeichen wechselt, und für $\omega=\mu$, r nicht Null wird, also das seinige wechseln kann; so muß mithin q, indem es durch Null geht, sein Zeichen wechseln; u. s. w. Daß sich hieraus die Zeichen von p, q, r für jede gegebene Zeit t beurtheilen lassen, ist einleuchtend. Die Bedeutung dieser Zeichen ist aber in §. 94. hinreichend erläutert worden.

Nach §. 98. 5. ist

$$Ap=k \sin\varphi \sin\Theta,\quad Bq=k \cos\varphi \sin\Theta,\quad Cr=k \cos\Theta. \qquad 5.$$

Ferner ist, nach §. 96. 18.

$$p\,dt=\sin\varphi \sin\Theta\, d\psi-\cos\varphi\, d\Theta$$
$$q\,dt=\cos\varphi \sin\Theta\, d\psi+\sin\varphi\, d\Theta.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen, die erste mit $\sin\varphi$, die zweite mit $\cos\varphi$, und addirt die Producte, so kommt

$$(p \sin\varphi+q \cos\varphi)\,dt=\sin\Theta\, d\psi,$$

oder wenn noch mit $\sin\Theta$ auf beiden Seiten multiplicirt wird, mit Rücksicht auf 5:

$$k(Ap^2+Bq^2)dt=(k^2-C^2r^2)d\psi,$$

oder auch, nach §. 98. 4.

$$d\psi=\frac{k(h^2-Cr^2)}{k^2-C^2r^2}\cdot dt.$$

Da h^2-Cr^2 und k^2-Cr^2 immer positiv sind, so lehrt diese Formel, daß ψ mit der Zeit beständig wächst; d. h. mit andern Worten, daß der Durchschnitt der beweglichen Ebene uv mit der unbeweglichen xy sich in dieser immer in demselben Sinne dreht. Man hat aber, nach Formel 3. dieses §. $r^2=\frac{AB(\omega^2-\nu^2)}{(A-C)(B-C)}$; folglich

$$\frac{h^2-Cr^2}{k^2-C^2r^2}=\frac{(A-C)(B-C)h^2-ABC(\omega^2-\nu^2)}{(A-C)(B-C)k^2-ABC^2(\omega^2-\nu^2)}.$$

Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$(A-C)(B-C)h^2+ABC\nu^2=(AB+C^2)h^2-Ck^2=ABCG$$
$$(A-C)(B-C)k^2+ABC^2\nu^2=ABC^2H,$$

so wird
$$\frac{h^2-Cr^2}{k^2-C^2r^2}=\frac{G-\omega^2}{C(H-\omega^2)},$$

und mithin

$$d\psi=\frac{k}{C}\cdot\frac{G-\omega^2}{H-\omega^2}\cdot dt,$$

$$d\psi=\frac{k}{C}\cdot\frac{G-\omega^2}{H-\omega^2}\cdot\frac{\pm\omega\, d\omega}{\sqrt{(\omega^2-\lambda^2)(\omega^2-\nu^2)(\mu^2-\omega^2)}} \qquad 6.$$

In dieser Gleichung gilt das positive oder negative Zeichen, je nachdem ω abnimmt oder wächst; es findet also derselbe Wechsel der Zeichen Statt, wie in der Gleichung 4., wobei keine Unbestimmtheit übrig bleibt. Aus den Gleichungen 5. ergeben sich noch φ und Θ, da p, q, r bekannt sind. Und zwar muß man

Θ immer zwischen 0 und π, φ aber zwischen 0 und 2π nehmen. Da hierdurch die Winkel ψ, φ, Θ ohne Zweideutigkeit bestimmt sind, so ergeben sich auch die Werthe der 9 Cosinus $a, \dots c''$ und mit ihnen die Stellung des Körpers, für einen beliebigen Augenblick. Im Ganzen ist demnach die Auflösung der Aufgabe enthalten in den Gleichungen 2. und 4. des §. 98. und in denen 4. und 6. des gegenwärtigen §. Alle diese Gleichungen sind von einander unabhängig, und enthalten sechs Constanten, nämlich h, l, l', l'', nebst den zu 4. und 6. gehörigen, wie erforderlich. Indem man aber die Ebene xy der des Paares Q parallel annahm, wurde $l=0$, $l'=0$; mithin blieben nur noch vier Constanten übrig, nämlich h und l'' (oder k), nebst denen zu 4. und 6. Nach dieser Vereinfachung treten die Gleichungen 5. dieses §. an die Stelle von 2. in §. 98. Alle übrigen aber folgen aus den genannten.

Aus 6. folgt noch, daß ω eine periodische Function von ψ ist, wie von t. Man setze, immer nur den Fall annehmend, daß $\nu > \lambda$ ist,

$$\Psi = \frac{k}{C}\int_{\nu}^{\mu} \frac{(G-\omega^2)\,\omega d\omega}{(H-\omega^2)\sqrt{(\omega^2-\lambda^2)(\omega^2-\nu^2)(\mu^2-\omega^2)}};$$

so nimmt in der Zeit T, in welcher der Werth von ω von μ bis ν abnimmt, oder auch von ν bis μ wächst, zugleich der Winkel ψ immer um dieselbe Größe Ψ zu. Da $\nu > \lambda$, so beschreibt die Drehungsaxe einen Kegel um u, den sie in der Zeit 4T durchläuft, nach deren Ablauf sie in dem Körper wieder die nämliche Lage hat, wie am Anfange derselben. In diesem Augenblicke sind daher auch die Werthe von p, q, r, und mithin auch Θ und φ wieder die nämlichen, wie am Anfange; aber ψ hat um 4Ψ zugenommen; daher ist inzwischen der Körper nicht wieder in die nämliche Stellung gelangt, wenn nicht gerade 4Ψ gleich 2π oder überhaupt einem Vielfachen von 2π gleich ist (π ist der Umring des Kreises, für den Durchmesser $=1$, wie gewöhnlich). Ueberhaupt ist die Bewegung des Körpers nach allen Umständen periodisch, wenn Ψ mit π commensurabel ist; im Allgemeinen also ist sie es nicht.

101. Als zweites Beispiel mögen noch die Gleichungen für die Bewegung eines schweren Körpers entwickelt werden, der sich um einen unbeweglichen Punct O drehen kann. Nimmt man die Axe z vertical und positiv nach unten, so ist in den Gleichungen 2. des §. 97., welche hier unmittelbar Anwendung finden, $X=0$, $Y=0$, $Z=gm$, folglich $L=-g\Sigma my$, $M=g\Sigma mx$, $N=0$; oder, weil noch §. 93. 1. $x=au+a'v+a''w$, u. s. f.

$$L=-g\Sigma(bu+b'v+b''w)m,\quad M=g\Sigma(au+a'v+a''w)m,\quad N=0.$$

Man bezeichne die Coordinaten des Schwerpunctes nach den durch O gelegten Hauptaxen (u, v, w) mit u', v', w', so wird

$$\Sigma um=u'\Sigma m,\quad \Sigma vm=v'\Sigma m,\quad \Sigma wm=w'\Sigma m,$$

und hiernach

$$L=-g(bu'+b'v'+b''w')\Sigma m,\quad M=g(au'+a'v'+a''w')\Sigma m,\quad N=0;$$

ferner erhält man, mit Rücksicht auf §. 33. 4.

$$\begin{aligned} La+Mb+Nc &= g(c'w'-c''v')\Sigma m,\\ La'+Mb'+Nc' &= g(c''u'-cw')\Sigma m,\\ La''+Mb''+Nc'' &= g(cv'-c'u')\Sigma m. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 4. in §. 97. werden mithin:

$$\left.\begin{aligned} Adp+(B-C)qrdt &= g(c'w'-c''v')\Sigma m\cdot dt\\ Bdq+(C-A)rpdt &= g(c''u'-cw')\Sigma m\cdot dt\\ Cdr+(A-B)pqdt &= g(cv'-c'u')\Sigma m\cdot dt \end{aligned}\right\}\ 1.$$

wo zugleich $c=\sin\varphi\sin\Theta$, $c'=\cos\varphi\sin\Theta$, $c''=\cos\Theta$. Verbindet man mit diesen die Gleichungen 18. in §. 96., so hat man sechs Gleichungen zwischen den Unbekannten p, q, r, φ, ψ, Θ und t, wie erforderlich.

Anstatt der vorstehenden kann man auch die Gleichungen 3. in §. 97. anwenden. Diese geben:

$$\left.\begin{aligned} d(Aap+Ba'q+Ca''r) &= -g(bu'+b'v'+b''w')\Sigma m\cdot dt \\ d(Abp+Bb'q+Cb''r) &= \quad g(au'+a'v'+a''w')\Sigma m\cdot dt. \end{aligned}\right\} 2.$$

Die dritte läßt sich sofort integriren, weil $N=0$; sie giebt:

$$Acp+Bc'q+Cc''r=k, \qquad 3.$$

wo k eine Constante, und ist mithin eines der Integrale, welche zur Lösung der vorliegenden Aufgabe erforderlich sind. Dasselbe läßt sich auch leicht aus 1. herleiten, wenn man diese Gleichungen der Reihe nach mit c, c', c'' multiplicirt, und die Producte addirt. Auch die Bedeutung dieses Integrals ist aus dem Früheren klar; bildet man nämlich in Bezug auf den festen Punct O das zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente, und zerlegt es nach den Ebenen xz, yz und xy, so ist die letzte, d. h. die horizontale Componente, der Gleichung 3. zufolge, constant und gleich k. Dies folgt auch offenbar daraus, daß die horizontale Componente des zusammengesetzten Paares der beschleunigenden Kräfte, gebildet in Beziehung auf O, Null ist. Multiplicirt man die Gleichungen 1. nach der Reihe mit p, q, r und addirt die Producte, so folgt noch ein zweites Integral. Man findet:

$$Ap\,dp+Bq\,dq+Cr\,dr$$
$$=g[(c''q-c'r)u'+(cr-c''p)v'+(c'p-cq)w']dt,$$

oder weil, nach §. 95. 14. $dc=(c''q-c'r)dt$, u. s. f.

$$Ap\,dp+Bq\,dq+Cr\,dr=g(u'dc+v'dc'+w'dc'')$$

mithin durch Integration:

$$\tfrac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)=g(cu'+c'v'+c''w')+\text{Const.} \qquad 4.$$

Diese Gleichung drückt, wie man sieht, die lebendige Kraft des Körpers aus. Man bemerke, daß $cu'+c'v'+c''w'=z'$, d. h. gleich der verticalen Ordinate des Schwerpunctes ist; daß die lebendige Kraft des Körpers von der Tiefe des Schwerpunctes unter O abhängt, ist schon in den allgemeinen Bemerkungen des §. 81. gezeigt worden.

Ausführlicher soll hier auf diese Untersuchung nicht eingegangen werden. Dieselbe vereinfacht sich in einigen besonderen Fällen, welche die Integration leicht gestatten, gehört aber, im Allgemeinen betrachtet, zu den schwierigsten.

Bewegung eines Körpers auf einer festen Ebene.

102. Ein frei beweglicher Körper sei auf eine feste Ebene gelegt, und der Wirkung beliebiger Kräfte unterworfen, die jedoch ihn von dieser nicht zu entfernen streben, so daß er in jedem Augenblicke seiner Bewegung die Ebene berührt. Offenbar kann man diesen Körper als gänzlich frei betrachten, und mithin die Gleichungen des §. 97. hier anwenden, wenn man nur den Widerstand, den die Ebene darbietet, gehörig in Rechnung bringt.

Es müssen jedoch einige Fälle von einander unterschieden werden. Man nehme zuerst an, daß der Körper die Ebene nur in einem Puncte berühre (dieser Punct des Körpers mag hinfort B heißen); und daß seine Oberfläche stetig gekrümmt sei. Der Berührungspunct B wird in diesem Falle im Allgemeinen in dem Körper beständig wechseln, oder der Körper auf der Ebene rollen. Er könnte in B auch eine Spitze haben; dieser Fall würde ein anderer sein, von welchem nachher gehandelt werden soll.

Es seien h, h', h'' die Cosinus der Neigungen eines auf der festen Ebene, nach der Seite des Körpers hin, errichteten Lothes gegen drei unbewegliche Axen x', y', z'; so ist

$$hx'+h'y'+h''z'=k$$

die Gleichung der Ebene, und zugleich $h^2+h'^2+h''^2=1$. (h, h', h'' und k sind also gegebene Constanten.) Bezeichnet man ferner den Widerstand der Ebene in B mit R, so sind Rh, Rh', Rh'' seine Componenten nach x', y', z', weil R auf der Ebene normal ist. Mithin ergeben sich, wenn noch, wie früher, ξ, η, ζ die Coordinaten des Schwerpunctes O des Körpers bedeuten, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{d^2\xi}{dt^2}\Sigma m=\Sigma X+Rh,\ \frac{d^2\eta}{dt^2}\Sigma m=\Sigma Y+Rh',\\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}\Sigma m=\Sigma Z+Rh''.\end{array}\right\}\quad 1.$$

Durch O lege man die drei Hauptaxen u, v, w, und es seien u, v, w die relativen Coordinaten von B gegen O, nach den gleichnamigen Axen; es seien noch x, y, z die relativen Coordinaten von B gegen O, nach den unbeweglichen Axen x', y', z'; so hat man, wie früher:

$$x=au+a'v+a''w,\ y=bu+b'v+b''w,\ z=cu+c'v+c''w.\quad 2.$$

Es sind aber $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ die Coordinaten von B nach den unbeweglichen Axen, welche, weil B in die feste Ebene fällt, der obigen Gleichung derselben genugthun müssen; man hat daher

$$h(x+\xi)+h'(y+\eta)+h''(z+\zeta)=k.\quad 3.$$

Nennt man ferner λ, μ, ν die Neigungen von R gegen u, v, w, so sind $R\cos\lambda$, $R\cos\mu$, $R\cos\nu$ die Componenten von R, nach u, v, w; die nach x, y, z aber sind, nach dem Obigen, Rh, Rh', Rh''; zerlegt man nun diese nach den Richtungen jener, so kommt: $R\cos\lambda=Rha+Rh'b+Rh''c$, oder

$$\left.\begin{array}{l}\cos\lambda=ha+h'b+h''c,\\ \cos\mu=ha'+h'b'+h''c',\\ \cos\nu=ha''+h'b''+h''c''.\end{array}\right\}\quad 3.\ a.$$

Von der anderen Seite muß R auf der Oberfläche des Körpers normal sein; daher hat man, wenn

$$H=f(u,v,w)=0\quad 4.$$

die Gleichung dieser Fläche ist, und

$$U=\pm\sqrt{\left(\frac{dH}{du}\right)^2+\left(\frac{dH}{dv}\right)^2+\left(\frac{dH}{dw}\right)^2}$$

zur Abkürzung gesetzt wird,

$$U\cos\lambda=\frac{dH}{du},\ U\cos\mu=\frac{dH}{dv},\ U\cos\nu=\frac{dH}{dw}.\quad 5.$$

Man entwickele noch die Ausdrücke für die Componenten des Paares, welches die Kraft R an B mit einer ihr gleichen und entgegengesetzten bildet, die man sich am Schwerpuncte O angebracht vorstellt. Diese Componenten sind, nach den auf u, v, w beziehungsweise senkrechten Ebenen

$$R(w\cos\mu-v\cos\nu),\ R(u\cos\nu-w\cos\lambda),\ R(v\cos\lambda-u\cos\mu).$$

Setzt man zur Abkürzung $La+Mb+Nc=L'$, $La'+Mb'+Nc'=M'$, $La''+Mb''+Nc''=N'$, so geben die Gleichungen 4. in §. 97., mit Hinzufügung der der vorstehenden Componenten des Paares (R, —R):

$$\left.\begin{array}{l}Adp+(B-C)qrdt=L'dt+R(w\cos\mu-v\cos\nu)dt\\ Bdq+(C-A)rpdt=M'dt+R(u\cos\nu-w\cos\lambda)dt\\ Cdr+(A-B)pqdt=N'dt+R(v\cos\lambda-u\cos\mu)dt\end{array}\right\}\quad 6.$$

Man denke sich die Cosinus von λ, μ, ν vermittelst ihrer Werthe aus 3. a. aus allen übrigen Gleichungen eliminirt, so bleiben überhaupt noch 16 Unbekannte übrig, nämlich φ, ψ, Θ, p, q, r, u, v, w, x, y, z, ξ, η, ζ und R, die sämmtlich als Functionen der Zeit bestimmt werden müssen. Hierzu hat man die Gleichungen 1. bis 6. (von welchen jedoch die unter 3. a. auszuschließen sind, nachdem man nämlich für $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, überall ihre Werthe aus 3. a. gesetzt hat); ihre Anzahl ist 14; weil aber von denen unter 5. jede eine Folge der beiden anderen ist, so gelten sie nur für 13. Nimmt man noch die Gleichungen 18. in §. 96. hinzu, so sind zwischen allen Unbekannten 16 von einander unabhängige Gleichungen gegeben, aus denen sich jene als Functionen von t müssen bestimmen lassen. Diese Gleichungen lassen sich, mit einigen Abänderungen, auch dann anwenden, wenn **zweitens** der Körper in B eine **Spitze** hat. Alsdann bleiben, so lange nämlich der Körper sich auf die Spitze B stützt, die Coordinaten u, v, w von B **unveränderlich**;

zugleich aber fällt die Bedingung hinweg, daß der Widerstand R auf der Fläche des Körpers normal ist; folglich fallen überhaupt von den vorigen Unbekannten drei, nämlich u, v, w, mit ihnen aber auch zugleich die drei Gleichungen 4. und 5. hinweg; während alle übrigen, d. h. 13 Unbekannte und eben so viele Gleichungen zwischen ihnen und t, bleiben wie vorhin.

Ein dritter Fall tritt ein, wenn die Oberfläche des Körpers abwickelbar ist, und die Ebene nicht in einem Puncte, sondern in einer geraden Linie berührt, die aber in der Fläche wechselt. Alsdann findet in jedem Puncte der Berührungslinie ein gewisser Widerstand Statt, der auf der Ebene wie auf der Fläche des Körpers normal ist, und da zugleich alle diese Widerstände in demselben Sinne wirken, so ist klar, daß sie sich immer in eine einzige Kraft zusammensetzen lassen. Bezeichnet man diese Kraft mit R, und nennt ihren Angriffspunct in dem Körper wieder B, seine Coordinaten u, v, w; so muß R wieder auf der Fläche normal sein, wie im ersten Falle, und mithin gelten ganz dieselben Gleichungen (1. bis 6.) wie vorhin. Dieser Fall ist also von dem ersten nicht wesentlich unterschieden.

Viertens werde noch angenommen, daß der Körper sich, während einer gewissen Zeit, auf eine geradlinige Kante stütze, deren Gleichungen, nach den Hauptaxen u, v, w, folgende seien:

$$v = nu + l, \quad w = n'u + l' \qquad 7.$$

wo n, l, n′, l′ gegebene Constanten sind. Diese Gleichungen treten, wenn man unter u, v, w die Coordinaten des Punctes B versteht, der in jener Kante liegt, an die Stelle derer unter 4. und 5. (B ist der Angriffspunct der Resultante R aller Widerstände, wie vorhin.) Ferner ist noch auszudrücken, daß die Kante auf der Richtung von R senkrecht steht. Dieselbe bildet mit den Axen u, v, w Winkel, deren Cosinus der Reihe nach sich verhalten wie $1:n:n'$, und da λ, μ, ν die Neigungen von R gegen jene Axen sind, so hat man

$$\cos\lambda + n\cos\mu + n'\cos\nu = 0, \qquad 8.$$

in welche Gleichung für $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ ihre Werthe aus 3. a. zu setzen sind. Sie giebt eine Relation zwischen φ, ψ, Θ; ferner kann man aus 6. v und w vermittelst der vorhergehenden (7.) eliminiren, und auch noch nach 3., mit Rücksicht auf 2., u als Function von φ, ψ, Θ, ξ, η, ζ ausdrücken. Setzt man diesen Werth von u noch in 6. ein, so bleiben nur noch die Gleichungen 1. 6. und 8, nebst denen unter 18. in §. 96. übrig; also im Ganzen 10, zwischen den Unbekannten p, q, r, φ, ψ, Θ, ξ, η, ζ, R und der Zeit t, wie erforderlich.

Es versteht sich von selbst, daß diese und noch andere Fälle, deren hier nicht erwähnt ist, nach einander bei der Bewegung desselben Körpers eintreten können, je nachdem seine Oberfläche gestaltet ist. Die vorstehende Aufzählung kann dem Leser eine Uebersicht der Aufgabe gewähren; im Folgenden aber soll nur noch der erste der hier erwähnten Fälle näher in Betracht gezogen werden.

103. Um die Rechnung etwas zu vereinfachen, nehme man die feste Ebene zu derjenigen der x′ und y′; dadurch wird $h=0$, $h'=0$, $h''=1$; und mithin gehen die Gleichungen 1. des vorigen § in folgende über:

$$\frac{d^2\xi}{d^2t}\Sigma m = \Sigma X, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2}\Sigma m = \Sigma Y, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2}\Sigma m = \Sigma Z + R. \qquad 1.$$

Ferner wird noch in 3., weil die feste Ebene die der x′y′ ist, auch $k=0$, und $z' = z + \zeta = 0$, folglich, wenn man für z seinen Werth aus 2. setzt:

$$\zeta + cu + c'v + c''w = 0. \qquad 2.$$

Aus 3. a. ergiebt sich weiter $\cos\lambda = c$, $\cos\mu = c'$, $\cos\nu = c''$; folglich werden 4. und 5.

$$\left.\begin{aligned} &H = f(u, v, w) = 0 \\ &\pm Uc = \frac{dH}{du}, \quad \pm Uc' = \frac{dH}{dv}, \quad \pm Uc'' = \frac{dH}{dw} \end{aligned}\right\} \qquad 3.$$

Hierdurch wird der vorstehende Ausdruck für ζ:

$$\pm U\cdot\zeta+\frac{dH}{du}\cdot u+\frac{dH}{dv}\cdot v+\frac{dH}{dw}\cdot w=0, \qquad 4.$$

wo das Zeichen von U immer so zu wählen ist, daß der Werth von ζ positiv bleibt.

Endlich geben die Gleichungen 6., durch Einsetzung von c, c′, c″ für die Cosinus von λ, μ, ν:

$$\begin{aligned}
&Adp+(B-C)qrdt=L'dt+R(c'w-c''v)dt\\
&Bdq+(C-A)rpdt=M'dt+R(c''u-cw)dt\\
&Cdr+(A-B)pqdt=N'dt+R(cv-c'u)dt.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen drücken die Componenten des in Beziehung auf den Schwerpunct gebildeten Paares der Beschleunigungsmomente, nach den auf den Hauptaxen u, v, w beziehungsweise senkrechten Ebenen aus. Man kann aber dieses Paar auch nach den auf x, y, z senkrechten Ebenen zerlegen; alsdann erhält man folgende Gleichungen, welche den vorstehenden gleichgelten, und anstatt ihrer gebraucht werden können:

$$\left.\begin{aligned}
&d(Aap+Ba'q+Ca''r)=Ldt-Rydt\\
&d(Abp+Bb'q+Cb''r)=Mdt+Rxdt\\
&d(Acp+Bc'q+Cc''r)=Ndt
\end{aligned}\right\}\quad 5.$$

Nämlich $-Ry$, Rx, 0 sind die Werthe der Ausdrücke $Yz-Zy$, $Zx-Xz$, $Xy-Yx$ für $X=0$, $Y=0$, $Z=R$, d. h. die Componenten des Momentes von R in Bezug auf den Schwerpunct, indem x, y, z die relativen Coordinaten des Angriffspunctes B von R gegen jenen bedeuten. Diese Gleichungen folgen übrigens aus 3. in §. 97. ohne Weiteres, indem hier nur R zu den übrigen beschleunigenden Kräften hinzukommt.

Die auf den Körper wirkenden beschleunigenden Kräfte seien die Schwere und eine dem Drucke proportionale Reibung im Berührungspuncte, deren Wirkungsweise jedoch noch einiger Erläuterung bedarf. Der Punct B des Körpers, in welchem dieser zur Zeit t die Ebene berührt, besitzt in diesem Augenblicke

eine gewisse Geschwindigkeit, deren Ausdruck zunächst gesucht wird. Die Coordinaten von B sind, nach den unbeweglichen Axen, $x+\xi$, $y+\eta$ und $z+\zeta$; die letzte von diesen ist Null. Setzt man für x, y, z ihre bekannten Werthe (2. in §. 102.), so erhält man folgende Ausdrücke dieser Coordinaten:

$$\xi+au+a'v+a''w,\quad \eta+bu+b'v+b''w,\quad \zeta+cu+c'v+c''w.$$

Um die Geschwindigkeit des Punctes B anzugeben, muß man von diesen Ausdrücken die Ableitungen nach t nehmen, dabei aber u, v, w als unveränderlich betrachten. Die Componenten der Geschwindigkeit von B nach den Axen x und y (sie mögen noch zur Abkürzung für die Folge mit ξ', η' bezeichnet werden), sind mithin:

$$\left.\begin{aligned}
\xi'&=\frac{d\xi}{dt}+u\frac{da}{dt}+v\frac{da'}{dt}+w\frac{da''}{dt}\\
\eta'&=\frac{d\eta}{dt}+u\frac{db}{dt}+v\frac{db'}{dt}+w\frac{db''}{dt}
\end{aligned}\right\}\quad 6.$$

Die dritte, auf der festen Ebene normale Componente dieser Geschwindigkeit ist: $\zeta=\frac{d\zeta}{dt}+u\frac{dc}{dt}+v\frac{dc'}{dt}+w\frac{dc''}{dt}$. Nimmt man aber die Ableitung der Gleichung 2. nach allen Veränderlichen, zu denen auch u, v, w gehören, so kommt:

$$\frac{d\zeta}{dt}+u\frac{dc}{dt}+v\frac{dc'}{dt}+w\frac{dc''}{dt}+\frac{c\,du+c'dv+c''dw}{dt}=0.$$

Nach 3. ist aber

$$c\,du+c'dv+c''dw=\frac{1}{U}\left[\frac{dH}{du}du+\frac{dH}{dv}dv+\frac{dH}{dw}dw\right]=0;$$

folglich erhält man:

$$\frac{d\zeta}{dt}+u\frac{dc}{dt}+v\frac{dc'}{dt}+w\frac{dc''}{dt}=0, \qquad 7.$$

d. h. die auf der festen Ebene senkrechte Geschwindigkeit des Berührungspunctes ist Null, oder die Bewegung desselben ist dieser Ebene parallel; wie auch aus der Anschauung einleuchtet. Der

Berührungspunct gleitet demnach auf der Ebene in der Zeit dt mit der Geschwindigkeit, deren Componenten unter 6. angegeben sind. Diesem Gleiten widerstrebt die Reibung, indem sie der Geschwindigkeit des Berührungspunctes gerade entgegen wirkt. Es sind nun zwei Fälle möglich; entweder nämlich ist die Reibung stark genug, um die Geschwindigkeit des Berührungspunctes gleich Null zu machen, oder nicht. In dem ersten dieser Fälle, in welchem der Körper rollt, ohne zu gleiten, tritt die Reibung nur mit der Intensität auf, die in jedem Augenblicke nöthig ist, um die Geschwindigkeit des Berührungspunctes zu vertilgen; in dem zweiten Falle tritt sie dagegen mit ihrer vollen Intensität auf, welche, nach der Voraussetzung, dem Drucke proportional ist. Ob der eine oder der andere dieser Fälle Statt findet, muß durch die Rechnung selbst entschieden werden, wie das nachfolgende Beispiel zeigen soll.

Es seien demnach f und f′ die Componenten der Reibung nach den Richtungen von x und y; ferner denke man sich die Axe x in der festen Ebene horizontal, und es sei i die Neigung dieser Ebene (xy) gegen den Horizont; so sind, wenn noch $\mathfrak{M}=\Sigma m$ die Masse des Körpers bezeichnet, die Componenten des Gewichtes des Körpers, welches man sich in dem Schwerpuncte O vereinigt vorzustellen hat, nach den Axen x, y, z beziehungsweise: 0, $\mathfrak{M}g \sin i$, $-\mathfrak{M}g \cos i$, wenn man sich die positive Axe der y in der festen Ebene abwärts, und die z von ihr aus aufwärts gerichtet, auch den Winkel i als spitz vorstellt. Folglich erhält man:

$$\Sigma X = f,\quad \Sigma Y = \mathfrak{M}g \sin i + f',\quad \Sigma Z = -\mathfrak{M}g \cos i, \qquad 8.$$

welche Werthe in 1. zu setzen sind. Ferner erhält man noch, da in jedem Augenblicke das Paar, welches die Schwerkräfte in Bezug auf den Schwerpunct bilden, Null ist, und da die Componenten der Reibung sind: $X=f$, $Y=f'$, $Z=0$, die relativen Coordinaten ihres Angriffspunctes gegen den Schwerpunct aber x, y, z:

$$L = Yz - Zy = zf',\quad M = Zx - Xz = -zf,\quad N = Xy - Yx = yf - xf' \qquad 9.$$

welche Werthe in 5. zu setzen sind.

So lange nun die Reibung der Geschwindigkeit des Berührungspunctes nicht vertilgen kann, ist ihre Intensität dem Drucke, also auch dem Widerstande R proportional; demnach:

$$\sqrt{f^2 + f'^2} = \mu R, \qquad 10.$$

von μ eine Constante. Ihre Richtung aber ist der Geschwindigkeit jenes Punctes entgegengesetzt; hieraus folgt offenbar, daß die Componenten der Reibung sich zu einander verhalten müssen, wie die der Geschwindigkeit von B, nach x und y; also

$$\frac{f}{f'} = \frac{\xi'}{\eta'} \qquad 11.$$

wo für ξ' und η' ihre Werthe aus 6. gesetzt werden müssen. Vorstehende Gleichung drückt jedoch nur aus, daß die Reibung der Geschwindigkeit des Berührungspunctes parallel ist, nicht aber, daß sie ihr gerade entgegen wirkt; dieser Umstand, obgleich sehr wesentlich, kommt erst später im Verlaufe der Rechnung in Betracht.

Wenn aber die Reibung hinreicht, um die Geschwindigkeit des Berührungspunctes zu vertilgen, so hören die Gleichungen 10. 11. zu gelten auf; alsdann aber hat man zwei andere, nämlich:

$$\xi' = 0,\quad \eta' = 0. \qquad 12.$$

(Vgl. Formel 6.). Zugleich aber müssen die Werthe von f und f′, welche sich alsdann ergeben, folgender Bedingung genügen: $\sqrt{f^2 + f'^2} < \mu R$, da die Intensität der Reibung nie größer sein kann als μR. Wird diese Bedingung nicht befriedigt, so ist auch die Geschwindigkeit von B nicht Null; mithin gelten dann die Gleichungen unter 10. 11.

104. Um das Vorhergehende an einem Beispiele zu erläutern, welches die Integration ohne Schwierigkeiten gestattet, soll die Bewegung einer gleichartigen Kugel auf einer schiefen Ebene,

unter dem Einflusse der Schwere und der Reibung, untersucht werden. Zur Vereinfachung schreibe man im Folgenden Mf, Mf', MR anstatt f, f', R (oder auch setze man die Masse der Kugel =1); hiernach geben zunächst die beiden ersten der Gleichungen 1. des vorigen §., mit Rücksicht auf 8.

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=f,\ \frac{d^2\eta}{dt^2}=g\,sin\,i+f'. \qquad 1.$$

Es sei h der Halbmesser der Kugel, mithin ihre Gleichung

$$H=u^2+v^2+w^2-h^2=0;$$

so folgt $U=\pm 2h$, $\frac{dH}{du}=2u$, $\frac{dH}{dv}=2v$, $\frac{dH}{dw}=2w$, also nach 4. $\pm h\zeta+u^2+v^2+w^2=0$. Hier muß, da ζ positiv ist, das negative Zeichen gelten; dadurch erhält man $\zeta=h$ und $U=-2h$; folglich nach 3. im vorigen §.

$$-hc=u,\ -hc'=v,\ -hc''=w. \qquad 2.$$

Ferner giebt die dritte der Gleichnngen 1. des vorigen §., weil ζ constant ist, $R+\Sigma Z=0$, oder nach 8.

$$R-g\,cos\,i=0. \qquad 3.$$

Die Werthe von u, v, w in 2. zeigen, daß $au+a'v+a''w=0$, also $x=0$, und eben so $y=0$; wie sich bei der Kugel von selbst versteht. Daher ergiebt sich aus 9. im vorigen §., indem nach $z=-\zeta=-h$ ist,

$$L=-hf',\ M=hf,\ N=0.$$

Auch ist für eine gleichartige Kugel vom Halbmesser h, $A=B=C=\frac{2}{5}h^2$, mit Weglassung des Factors M, der hier überall aus der Rechnung fällt. Hiernach gehen die Gleichungen 5. in folgende über:

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{2}{5}h\frac{d(ap+a'q+a''r)}{dt}&=-f'\\ \tfrac{2}{5}h\frac{d(bp+b'q+b''r)}{dt}&=f\\ \tfrac{2}{5}h\frac{d(cp+c'q+c''r)}{dt}&=0\end{aligned}\right\}\quad 4.$$

in welchen noch ein gemeinsamer Factor h auf beiden Seiten weggelassen ist. Ferner hat man, so lange die Geschwindigkeit von B nicht Null ist:

$$\sqrt{f^2+f'^2}=\mu g\,cos\,i, \qquad 5.\ a.$$

weil $R=g\,cos\,i$; zugleich ist, nach 11. $\eta' f-\xi' f'=0$. Man setze noch in den Formeln 6. des vorigen §. für $\frac{da}{dt}$, $\frac{da'}{dt}$, u. s. f. ihre Werthe aus § 95. 14., so kommt

$$\xi'=\frac{d\xi}{dt}+(a''q-a'r)u+(ar-a''p)v+(a'p-aq)w,$$

oder mit Rücksicht auf 2. und auf die schon oft gebrauchten Relationen 4. in §. 33:

$$\xi'=\frac{d\xi}{dt}+h(bp+b'q+b''r).$$

Eben so ist $\eta'=\frac{d\eta}{dt}+(b''q-b'r)u+(br-b''p)v+(b'p-bq)w$

oder wegen 2. $\eta'=\frac{d\eta}{dt}-h(ap+a'q+a''r)$,

und mithin:

$$\left[\frac{d\eta}{dt}-h(ap+a'q+a''r)\right]f=\left[\frac{d\xi}{dt}+h(bp+b'q+b''r)\right]f'. \qquad 6.\ a.$$

Wenn aber die Geschwindigkeit von B Null ist, so gelten die beiden letzten Gleichungen nicht mehr; dagegen ist alsdann

$$\sqrt{f^2+f'^2}<\mu g\,cos\,i, \qquad 5.\ b.$$

und

$$\left.\begin{aligned}\xi'&=\frac{d\xi}{dt}+h(bp+b'q+b''r)=0.\\ \eta'&=\frac{d\eta}{dt}-h(ap+a'q+a''r)=0.\end{aligned}\right\}\quad 6.\ b.$$

105. Man setze

$$(p)=ap+a'q+a''r$$
$$(q)=bp+b'q+b''r$$
$$(r)=cp+c'q+c''r,$$

und bemerke, daß (p), (q), (r) die Componenten der Winkelgeschwindigkeit der Kugel nach den Axen x, y, z beziehungsweise ausdrücken, die aber von nun an, mit Weglassung der Klammern, bloß durch p, q, r bezeichnet werden sollen, also mit den vorigen p, q, r nicht verwechselt werden müssen. Hierdurch verwandeln sich die Gleichungen 4. des vorigen §. in folgende:

$$\tfrac{2}{5}h\frac{dp}{dt}=-f',\ \tfrac{2}{5}h\frac{dq}{dt}=f,\ \tfrac{2}{5}h\frac{dr}{dt}=0. \qquad 1.$$

Zugleich wird $\xi'=\frac{d\xi}{dt}+hq,\ \eta'=\frac{d\eta}{dt}-hp$. Setzt man noch zur Abkürzung $\frac{d\xi}{dt}=u,\ \frac{d\eta}{dt}=v$, so gehen die Bedingungen 5. und 6. des vorigen §. in folgende über:

$$\sqrt{f^2+f'^2}=\mu g\cos i. \qquad 2.\,a.$$
$$(v-hp)f=(u+hq)f' \qquad 3.\,a.$$
$$\sqrt{f^2+f'^2}<\mu g\cos i \qquad 2.\,b.$$
$$u+hq=0,\ v-hp=0 \qquad 3.\,b.$$

von denen nach Umständen die ersten oder zweiten gelten, wie aus dem Vorigen bekannt ist. Endlich hat man noch, nach 1. im vorigen §.

$$\frac{du}{dt}=f,\ \frac{dv}{dt}=g\sin i+f'. \qquad 4.$$

Hiermit sind in jedem Falle zur Bestimmung der gegenwärtigen Unbekannten p, q, r, u, v, f, f', sieben Gleichungen vorhanden, wie erforderlich. Eine von jenen, nämlich r, fällt aber noch hinweg, weil nach 1. $\frac{dr}{dt}=0$, also r constant ist. Demnach bleibt die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um den auf der festen Ebene senkrechten Durchmesser fortwährend unveränderlich.

Um noch die Bedeutung der Zeichen von p und q anschaulich zu machen, erinnere man sich, daß die Axe x horizontal ist, die Richtung der positiven y aber auf der schiefen Ebene abwärts geht. Wenn daher z. B. die Kugel gerade abwärts rollt, ohne zu gleiten, so ist v positiv, und $v-hp=0$, also auch p positiv. Hierdurch wird anschaulich, in welchem Sinne die Drehung um den horizontalen Durchmesser erfolgt, wenn p positiv ist. Denkt man sich ferner u, d. i. die horizontale Geschwindigkeit des Mittelpunctes positiv, so muß, wenn zugleich der Berührungspunct in horizontaler Richtung nicht gleiten soll, $u+hq=0$, also q negativ sein; hierdurch wird wieder die Bedeutung des Zeichens von q anschaulich, die übrigens aus dem Vorigen auch, nach den allgemeinen Regeln in §. 94., von selbst folgt.

Es seien u_0, v_0, p_0, q_0, die Werthe von u, v, p, q für $t=0$, welche beliebig gegeben sein können; so sind u_0+hq_0 und v_0-hp_0 die Anfangsgeschwindigkeiten des Berührungspunctes, nach den Axen x und y. Im Allgemeinen ist keine von beiden Null; hier soll jedoch nur vorausgesetzt werden, daß u_0+hq_0 nicht Null sei. Man wähle noch, wie frei steht, die Richtung der positiven x so, daß u_0+hq_0 positiv sei. Eliminirt man f und f' aus 1. und 4., so kommt:

$$\frac{du}{dt}=\tfrac{2}{5}h\frac{dq}{dt},\ \frac{dv}{dt}+\tfrac{2}{5}h\frac{dp}{dt}=g\sin i,$$

folglich durch Integration, da für $t=0$, $u=u_0$, u. s. w.,

$$u-u_0=\tfrac{2}{5}h(q-q_0),\ v-v_0+\tfrac{2}{5}h(p-p_0)=g\sin i\cdot t. \qquad 5.$$

Hieraus folgt:

$$u+hq=\tfrac{7}{2}u-\tfrac{5}{2}u_0+hq_0,\quad v-hp=\tfrac{7}{2}v-\tfrac{5}{2}g\sin i\cdot t-\tfrac{5}{2}v_0-hp_0,$$

oder wenn man setzt: $u+hq=\frac{7}{2}U,\ v-hp=\frac{7}{2}V+g\sin i\cdot t,$

$$u-\tfrac{5}{7}u_0+\tfrac{2}{7}hq_0=U,\ v-g\sin i\cdot t-\tfrac{5}{7}v_0-\tfrac{2}{7}hp_0=V. \qquad 6.$$

Ferner gelten jetzt die Gleichungen 2. a. 3. a., welche nach Einsetzung der Werthe von f und f' aus 4. geben:

$$du^2+(dv-g\,dt\cdot sin\,i)^2=\mu^2g^2\,cos\,i^2\cdot dt^2$$

$$\frac{du}{u+hq}=\frac{dv-g\,dt\cdot sin\,i}{v-hp}$$

oder da nach 6. $du=dU$, $dv-g\,dt\cdot sin\,i=dV$ ist, wenn man noch $\mu g\,cos\,i\cdot t=\Theta$ und $\frac{2}{7}g\,sin\,i\cdot t=k\Theta$ setzt, wo $k=\frac{2}{7}\frac{tg\,i}{\mu}$ ist:

$$\left.\begin{aligned}dU^2+dV^2&=d\Theta^2\\ \frac{dU}{U}&=\frac{dV}{V+k\Theta}\end{aligned}\right\}\ 7.$$

Um diese Gleichungen zu integriren, setze man:

$$dU=sin\,\varphi\cdot d\Theta,\ dV=cos\,\varphi\cdot d\Theta,$$

wodurch der ersten Genüge geleistet wird; alsdann giebt die zweite

$$V+k\Theta=U\,cotg\,\varphi,$$

und diese, differentiirt:

$$dV+k\,d\Theta=cotg\,\varphi\cdot dU-\frac{U d\varphi}{sin\,\varphi^2}.$$

Es ist aber $dV=cotg\,\varphi\cdot dU$; mithin folgt $k\,d\Theta=-\frac{U d\varphi}{sin\,\varphi^2}$; ferner ist $sin\,\varphi\,d\Theta=dU$; also erhält man $k\,dU=-\frac{U\,d\varphi}{sin\,\varphi}$ oder $\frac{k\,dU}{U}=-\frac{d\varphi}{sin\,\varphi}$. Nun ist bekanntlich $\int\frac{d\varphi}{sin\,\varphi}=log\,tg\,\frac{1}{2}\varphi$ (s. I. S. 190.); daher folgt dnrch Integration: $k\,log\,U+log\,tg\,\frac{1}{2}\varphi=\text{Const.}$, oder, nach Wegschaffung der Logarithmen:

$$U^k=c\cdot cotg\,\tfrac{1}{2}\varphi,$$

wo c eine Constante. Hieraus folgt weiter

$$U^{-k}=\frac{1}{c}\,tg\,\tfrac{1}{2}\varphi,$$

und mithin:

$$cotg\,\tfrac{1}{2}\varphi+tg\,\tfrac{1}{2}\varphi=\frac{1}{c}U^k+cU^{-k}=\frac{2}{sin\,\varphi}$$

$$cotg\,\tfrac{1}{2}\varphi-tg\,\tfrac{1}{2}\varphi=\frac{1}{c}U^k-cU^{-k}=2\,cotg\,\varphi.$$

Daher ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}2d\Theta&=\frac{2dU}{sin\,\varphi}=\left(\frac{1}{c}U^k+cU^{-k}\right)dU\\ 2dV&=2cotg\,\varphi\cdot dU=\left(\frac{1}{c}U^k-cU^{-k}\right)dU\end{aligned}\right\}\ 8.$$

folglich wenn man integrirt:

$$\left.\begin{aligned}2\Theta&=\frac{U^{1+k}}{c(1+k)}+\frac{c\cdot U^{1-k}}{1-k}+C\\ 2V&=\frac{U^{1+k}}{c(1+k)}-\frac{c\cdot U^{1-k}}{1-k}+C'\end{aligned}\right\}\ 9.$$

wo C und C' Constanten sind, die sich aus den Werthen von U, V für $t=0$ oder $\Theta=0$, sogleich ergeben. Bezeichnet man diese mit U_0, V_0, so ist

$$\frac{U_0^{1+k}}{c(1+k)}+\frac{cU_0^{1-k}}{1-k}+C=0,\ 2V_0=\frac{U_0^{1+k}}{c(1+k)}-\frac{cU_0^{1-k}}{1-k}+C'.$$

Obige Integration gilt, wenn nicht gerade $k=1$ ist; für $k=1$ aber erhält man anstatt 9.

$$2\Theta=\frac{U^2}{2c}+c\,log\,U+C,\ 2V=\frac{U^2}{2c}-c\,log\,U+C'.$$

Es bleibt noch übrig, die Constante c zu bestimmen, welche von den Constanten in 9., also von C und C', oder von U_0 und V_0 abhängen muß, da die Integration von 7. nur zwei willkürliche Constanten gestattet, die eben U_0 und V_0 sind. Man multiplicire erste der Gleichungen 9. mit k, und addire das Product zur zweiten, so kommt

$$2(V+k\Theta)=\frac{1}{c}U^{1+k}-cU^{1-k}+C'+Ck \qquad 10.\ a.$$

oder nach 8.

$$2(V+k\Theta)=2U\cdot\frac{dV}{dU}+C'+Ck.$$

Es ist aber, nach 7. $V+k\Theta=U\frac{dV}{dU}$; folglich ergiebt sich $C'+Ck=0$ oder, in Folge der vorstehenden Werthe von C und C':

$$2V_0=\frac{1}{c}U_0^{1+k}-cU_0^{1-k}.$$

Hieraus folgt

$$c^2+2V_0U_0^{k-1}c=U_0^{2k}$$

oder $\quad c=-V_0U_0^{k-1}\pm\sqrt{U_0^{2k}+V_0^2U_0^{2k-2}}.$

Für $t=0$ ist die horizontale Geschwindigkeit des Berührungspunctes ($u_0+hq_0=\frac{7}{2}U_0$) nach der Voraussetzung positiv und nicht Null; folglich muß auch U von $t=0$ an, während einer gewissen Zeit wenigstens, positiv sein. Demnach ist, in Folge der ersten der Gleichungen 8. $\frac{dU}{d\Theta}$ positiv oder negativ, je nachdem c positiv oder negativ ist. Nach 4. ist $\frac{du}{dt}=f$, und da f der positiven horizontalen Geschwindigkeit von B entgegenwirkt, so ist f negativ; folglich ist auch $\frac{du}{dt}$, und mithin $\frac{dU}{d\Theta}=\frac{du}{\mu g\cos i\cdot dt}$ negativ; daher muß c negativ sein, und mithin in obigem Werthe von c das negative Zeichen gelten. Also ist

$$c=-V_0U_0^{k-1}-U_0^{k-1}\sqrt{U_0^2+V_0^2}. \qquad 10.\ b.$$

Da in dieser Gleichung U_0 positiv ist, so giebt sie immer einen reellen negativen Werth von c, V_0 mag positiv, Null oder negativ sein. Aus derselben erhält man noch

$$\frac{1}{c}=\frac{V_0-\sqrt{U_0^2+V_0^2}}{U_0^{1+k}},$$

und mithin

$$\frac{V_0-\sqrt{U_0^2+V_0^2}}{1+k}-\frac{V_0+\sqrt{U_0^2+V_0^2}}{1-k}+C=0$$

$$\left.\begin{aligned}\text{oder}\qquad C&=\frac{2kV_0}{1-k^2}+\frac{2\sqrt{U_0^2+V_0^2}}{1-k^2}\\ \text{und}\qquad C'&=-\frac{2k^2V_0}{1-k^2}-\frac{2k\sqrt{U_0^2+V_0^2}}{1-k^2}\end{aligned}\right\}\ 11.$$

weil $C'+Ck=0$. Nach Einsetzung der Werthe von c, C, C' aus 10. und 11. in 9. sind U und V, mithin auch u, v, p, q (nach 5 und 6.) als Functionen von Θ oder von t bestimmt, wie erforderlich ist.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem k kleiner als 1 ist oder nicht. Ist $k=1$ oder $k>1$, so kann, nach den Formeln 9. (und den ihnen folgenden für $k=1$) U nicht Null werden, ohne daß Θ und mithin t unendlich groß wird; folglich wird in diesem Falle die Geschwindigkeit des Berührungspunctes nie Null; und die Formeln 9. gelten während der ganzen Dauer der Bewegung.

Für ein sehr großes t oder Θ muß in denselben offenbar U sehr klein werden; man erhält also immer genauer, je kleiner U ist:

$$2\Theta=\frac{c}{(1-k)U^{k-1}},\quad 2V=-\frac{c}{(1-k)U^{k-1}}=-2\Theta;$$

also $\quad V+\Theta=0$, und $\quad U=\left(\frac{c}{2(1-k)\Theta}\right)^{\frac{1}{k-1}}.$

Setzt man für V, U, Θ ihre Werthe, und bezeichnet zur Abkürzung den wesentlich positiven Quotienten $\frac{c}{2(1-k)}$ mit $\frac{1}{n}$, so kommt:

$$v - g(\sin i - \mu \cos i)t = \tfrac{5}{7}v_0 + \tfrac{2}{7}hp_0$$

$$u - \tfrac{5}{7}u_0 + \tfrac{2}{7}hq_0 = \frac{1}{(n\mu g \cos i \cdot t)^{k-1}},$$

in welchen Gleichungen aber t sehr groß sein muß. Daher wird immer genauer mit wachsendem t:

$$v = g(\sin i - \mu \cos i)t, \quad u = \tfrac{5}{7}u_0 - \tfrac{2}{7}hq_0.$$

Man bemerke noch, daß $k > 1$, also $\frac{2}{7}\frac{tg\, i}{\mu} > 1$, oder $\sin i > \frac{7}{2}\mu \cos i$, mithin um so mehr $\sin i > \mu \cos i$ ist. Der Werth von v ist also wesentlich positiv, wie offenbar auch erforderlich ist.

Nach dem Vorhergehenden ist, bei der Bewegung einer Kugel auf einer unter dem Winkel i gegen den Horizont geneigten Ebene, die Reibung nicht im Stande, die Geschwindigkeit des Berührungspunctes zu vertilgen, wenn $k > 1$ oder $i > arc\, tg\, \frac{7}{2}\mu$ ist; wo μ das constante Verhältniß der Intensität der Reibung zu derjenigen des Druckes bezeichnet. Man sieht in der That, daß Druck und Reibung immer mehr abnehmen, also die Kugel auf der Ebene immer leichter gleiten kann, je größer i wird; wenn nämlich, wie hier, die Reibung bloß dem Drucke proportional vorausgesetzt wird.

Ist aber $k < 1$ (mit Ausschluß der Gleichheit), so nimmt nach 8., weil $\frac{dU}{d\Theta}$ negativ ist, U von seinem anfänglichen positiven Werthe U_0 aus beständig ab, und wird Null, nach 9., für $2\Theta = C$, also, weil $\Theta = \mu g t \cos i$, in der Zeit

$$t' = \frac{C}{2\mu g \cos i} = \frac{kV_0 + \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{(1-k^2)\mu g \cos i},$$

die offenbar endlich und positiv ist. Für diesen Augenblick wird zugleich (nach 10. a.) $2(V + k\Theta) = 0$, weil $C' + Ck = 0$, also wird, weil $k\Theta = \frac{2}{7}g \sin i \cdot t$, $V + \frac{2}{7}g \sin i \cdot t = 0$, indem $U = 0$ wird; d. h. (nach 6.) die Geschwindigkeit des Berührungspunctes nach y verschwindet zugleich mit der nach x, für $t = t'$; folglich wird in diesem Augenblicke überhaupt die Geschwindigkeit des Berüh-

rungspunctes Null, und die Kugel beginnt zu rollen, ohne zu gleiten.

Es gelten daher jetzt die Gleichungen a. (2. und 3.) nicht mehr, sondern die unter b. treten an ihre Stelle; während 1. und 4. bleiben, wie vorher. Aus diesen folgt

$$u = \tfrac{2}{5}hq + \text{Const.}, \quad v + \tfrac{2}{5}hp = g \sin i \cdot t + \text{Const.},$$

oder, wenn man die Werthe von u, v, p, q für $t = t'$ mit u', v', p', q' bezeichnet:

$$u - u' = \tfrac{2}{5}h(q - q'), \quad v - v' + \tfrac{2}{6}h(p - p') = g \sin i(t - t'). \qquad 12.$$

Für $t = t'$ gelten aber die Gleichungen 6., in welchen $U = 0$, $V = -\frac{2}{7}g \sin i \cdot t'$ ist; aus diesen ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{l} u' = \tfrac{5}{7}u_0 - \tfrac{2}{7}hq_0, \; v' = \tfrac{5}{7}g \sin i \cdot t' + \tfrac{5}{7}v_0 + \tfrac{2}{7}hp_0 \\ u' + hq' = 0, \quad v' - hp' = 0. \end{array}\right\} \qquad 13.$$

wodurch die Constanten u', v', p', q' in 12. bestimmt sind. Ferner gelten, von $t = t'$ an, noch die Gleichungen 3. b.

$$u + hq = 0, \quad v - hp = 0. \qquad 14.$$

Aus 12. und 14. folgt:

$$u = u', \; q = q', \; v = hp = \tfrac{5}{7}v' + \tfrac{2}{7}hp' + \tfrac{2}{7}g \sin i(t - t'), \qquad 15.$$

mithin $\frac{du}{dt} = 0$, $\frac{dq}{dt} = 0$, also nach 1. $f = 0$. Ferner folgt:

$h\frac{dp}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{5}{7}g \sin i$, und hieraus, nach 1.,

$$\tfrac{2}{5}h\frac{dp}{dt} = -f' = \tfrac{2}{7}g \sin i.$$

Nach der Voraussetzung ist aber $k < 1$, oder $\frac{2}{7}g \sin i < \mu g \cos i$; also ergiebt sich die Intensität der Reibung, nämlich $\frac{2}{7}g \sin i$ (indem $f = 0$), kleiner als $\mu g \cos i$; die Bedingung 2. b. wird mithin von der Zeit $t = t'$ an fortwährend befriedigt, und die Kugel rollt demnach von diesem Augenblicke an unaufhörlich, ohne zu gleiten; wobei die Elemente ihrer Bewegung (u, v, p, q) durch die Gleichungen 15. bestimmt werden. Nach diesen bleiben u und q fortwährend constant; also ist die horizontale Geschwindigkeit des Mittelpunctes (u) unveränderlich; seine mit y parallele Geschwindigkeit (v) ist dagegen gleichförmig beschleunigt. Hieraus ergiebt sich, daß die Bahn des Mittelpunctes von $t=t'$ an, eine Parabel ist.

Von besonderen Fällen, die bei dieser Aufgabe noch eintreten können, mag hier nur derjenige nahmhaft gemacht werden, welcher Statt findet, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten u_0, v_0, p_0, q_0 sämmtlich Null sind. Wird die Kugel auf der schiefen Ebene ohne Anfangsgeschwindigkeit entlassen, so ist klar, daß die Schwere allen Puncten derselben im ersten Augenblicke eine mit y parallele Geschwindigkeit $=g\,sin\,i\cdot dt$ ertheilt, mit welcher mithin der Berührungspunct abwärts zu gleiten strebt. Folglich muß die Reibung der Axe y parallel aufwärts wirken; also ist in diesem Falle $f=0$, mithin, nach 1. und 4. im vorigen §.

$$\tfrac{2}{5}h\frac{dp}{dt}=-f',\ \tfrac{2}{5}h\frac{dq}{dt}=0,\ \frac{du}{dt}=0,\ \frac{dv}{dt}=g\,sin\,i+f'.$$

Hieraus folgt $u=0$, $q=0$, weil für $t=0$, $u_0=0$, $q_0=0$; die horizontalen Geschwindigkeiten des Schwerpunctes und des Berührungspunctes bleiben also immer Null, wie sich auch von selbst versteht. Ferner gelten, wenn $k<1$, die Gleichungen 3. b.; man hat also $v-hp=0$, und zugleich $\frac{dv}{dt}+\frac{2}{5}h\frac{dp}{dt}=g\,sin\,i$, folglich $v+\frac{2}{5}hp=g\,sin\,i\cdot t$, also $v=hp=\frac{5}{7}g\,sin\,i\cdot t$.

Hieraus folgt $\frac{2}{5}h\frac{dp}{dt}=\frac{2}{7}g\,sin\,i=-f'$; es ist aber, weil $k=\frac{2}{7}\frac{tg\,i}{\mu}<1$ nach der Voraussetzung, auch $-f'=\frac{2}{7}g\,sin\,i<\mu g\,cos\,i$; und da zugleich $f=0$, so wird die Bedingung 2. b. erfüllt, wie erforderlich. Die Geschwindigkeit des Berührungspunctes bleibt also beständig Null, oder die Kugel rollt abwärts, ohne zu gleiten, wenn $k<1$. Dies gilt auch noch, wenn $k=1$.

Ist aber $k>1$, so würde, wenn man die vorstehenden Formeln auch dann noch anwenden wollte, die Reibung sich wieder $=-f'=\frac{2}{7}g\,sin\,i>\mu g\,cos\,i$ ergeben; also die Bedingungen 2. b. nicht mehr erfüllt werden. Mithin gelten die Gleichungen 2. a., 3. a.; aus denen, weil $f=0$, $u=0$, $q=0$, sich bloß ergiebt $f'=-\mu g\,cos\,i$, wo das negative Zeichen so lange gelten muß, als der Berührungspunct abwärts gleitet, oder seine Geschwindigkeit positiv ist. Demnach hat man:

$$\tfrac{2}{5}h\frac{dp}{dt}=\mu g\,cos\,i,\quad \frac{dv}{dt}=g(sin-\mu\,cos\,i);$$

mithin

$$\tfrac{2}{5}hp=\mu g\,cos\,i\cdot t,\quad v=g(sin\,i-\mu\,cos\,i)t.$$

Die Geschwindigkeit des Berührungspunctes ergiebt sich hieraus

$$v-hp=g(sin\,i-\tfrac{7}{2}\mu\,cos\,i)t,$$

also immer positiv, weil $k>1$, d. i. $sin\,i>\frac{7}{2}\mu\,cos\,i$ ist. Folglich gelten die vorstehenden Gleichungen immerfort.

106. Für eine horizontale Ebene wird $i=0$, $k=0$, $\Theta=\mu gt$. Um zunächst die Bewegung auf dieser zu bestimmen, so lange die Geschwindigkeit des Berührungspunctes nicht Null ist, kann man die Gleichungen 9. des vorigen §. anwenden. Man denke sich noch die positive Richtung der x der Anfangsgeschwindigkeit des Berührungspunctes (d. i. $u_0+hq_0=\frac{7}{2}U_0$) parallel; so wird $V_0=0$ und U_0 positiv; mithin nach 10. b. $c=-1$, und nach 11. $C=2U_0$, $C'=0$. Demnach ergiebt sich aus 9. sofort: $\mu gt=U_0-U$, und $V=0$, oder

$$U=U_0-\mu gt,\quad V=0.\qquad 1.$$

Folglich bleibt die Richtung der Geschwindigkeit des Berührungspunctes, mithin auch die der Reibung, unveränderlich und mithin nach der Annahme parallel mit x. Für die Reibung findet man aus vorstehenden Gleichungen $\frac{dU}{dt}=\frac{du}{dt}=f=-\mu g$, $f'=0$.

Man hat, nach 6. im vorigen §.

$$U=u-\tfrac{5}{7}u_0+\tfrac{2}{7}hq_0,\ V=v-v_0\ \text{(weil } v_0-hp_0=0\text{)}$$

also erhält man, für die Geschwindigkeit des Mittelpunctes:

$$u-\tfrac{5}{7}u_0+\tfrac{2}{7}hq_0=\tfrac{2}{7}(u_0+hq_0)-\mu gt$$

oder
$$\left.\begin{array}{ll} u=u_0-\mu gt, & v=v_0, \\ hq=\tfrac{7}{2}U-u=hq_0-\tfrac{5}{2}\mu gt, & hp=v_0. \end{array}\right\}\quad 2.$$
und

Hieraus folgt, daß die Bahn des Mittelpunctes, wenn nicht $v_0=0$ ist und so lange die Kugel gleitet, eine Parabel ist. Bezeichnet man die Coordinaten seiner senkrechten Projection auf die horizontale Ebene mit x, y, so ist $u=\frac{dx}{dt}$, $v=\frac{dy}{dt}$, und

$$\frac{dx}{dt}=u_0-\mu gt,\ \frac{dy}{dt}=v_0,$$

folglich, indem für $t=0$, x und y Null sind,

$$x=u_0t-\tfrac{1}{2}\mu gt^2,\ y=v_0t\qquad 3.$$

oder, nach Elimination von t:

$$\mu gy^2-2u_0v_0y+2v_0{}^2x=0,$$

oder endlich $\quad(\mu gy-u_0v_0)^2=v_0{}^2(u_0{}^2-2\mu gx).$

Es sei (Fig. 43.) A der Anfang, AB die Axe der x, also auch die Richtnng der Anfangsgeschwindigkeit des Berührungspunctes, AE die Axe der y, ADG die Parabel, so hat man, für den Scheitel D derselben, nach vorstehender Gleichung:

$$ED=x'=\frac{u_0{}^2}{2\mu g},\ AE=y'=\frac{u_0v_0}{\mu g}.\qquad 4.$$

Der Weg, den die senkrechte Projection des Mittelpunctes, also der Berührungspunct, auf der Ebene von A aus durchläuft, ist daher anfänglich ein gewisser Bogen dieser Parabel, bis die Kugel zu gleiten aufhört, oder die Geschwindigkeit des jedesmaligen Berührungspunctes, in dem Augenblicke der Berührung, immer gerade durch Null geht. Dies erfolgt von dem Augenblicke an, in welchem (in 1.) $U=0$ wird; alsdann wird

$$t=t'=\frac{U_0}{\mu g}=\tfrac{2}{7}\left(\frac{u_0+hq_0}{\mu g}\right).$$

Setzt man zugleich für diese Zeit t', $u=u'$, so folgt aus 2. $u'=u_0-\frac{2}{7}(u_0+hq_0)=\frac{5}{7}u_0-\frac{2}{7}hq_0$. Es gelten aber nunmehr die Gleichungen 15. des vorigen §.; sie geben hier:

$$u=-hq=u',\ v=hp=v_0,\qquad 5.$$

d. h. von $t=t'$ an ist die Geschwindigkeit des Berührungspunctes beständig Null, und die des Mittelpunctes nach Richtung und Größe unveränderlich; die Folge der Berührungspuncte beschreibt also von nun an auf der Ebene eine gerade Linie mit der Geschwindigkeit $\sqrt{u'^2+v_0{}^2}$. Zugleich ist von $t=t'$ an die Reibung gänzlich Null; denn da $\frac{du}{dt}=0$, $\frac{dv}{dt}=0$, so folgt $f=0$, $f'=0$. Die Richtung dieser Geraden ist die der Tangente jener Parabel, wie aus der Rechnung leicht folgt, aber auch ohne sie unmittelbar daraus, daß für $t=t'$ alle Kräfte verschwinden.

In dem besondern Falle, wenn $v_0=0$, hat man $u=u_0-\mu gt$, $v=0$; die Bewegung geschieht dann in der Geraden AB selbst. Die Kugel gleitet bis zu der Zeit t', die eben so bestimmt, wie vorhin; von diesem Augenblicke an aber rollt sie ohne zu gleiten, und die Geschwindigkeit ihres Mittelpunctes ist alsdann unveränderlich gleich $u'=\frac{5}{7}u_0-\frac{2}{7}hq_0$. Es kann sich nun ereignen, daß die Geschwindigkeit des Mittelpunctes Null und hierauf negativ wird, ehe sie den unveränderlichen Werth u' erhält; dazu gehört, daß $u_0-\mu gt=0$ werde für eine Zeit t zwischen 0 und t'; für diesen Fall muß u_0 positiv und $\frac{u_0}{\mu g}<t'$ oder $u_0<\frac{2}{7}(u_0+hq_0)$ sein. Alsdann ist offenbar auch $u'=u_0-\frac{2}{7}(u_0+hq_0)$ negativ; und die Bewegung ist in ihrem Endzustande rückläufig. Aehnliches kann auch Statt finden, wenn v_0 nicht Null ist, mithin der Mittelpunct anfänglich einen parabolischen Bogen beschreibt.

Nämlich die Anfangsgeschwindigkeit dieses Punctes ist allgemein: $\sqrt{u_0{}^2+v_0{}^2}$, ihre Richtung die der Tangente (AA') in A; die Endgeschwindigkeit dagegen, mit welcher die Kugel von $t = t'$ an fortrollt, ist $\sqrt{u'^2 + v_0^2}$ oder $\sqrt{(\frac{5}{7}u_0 - \frac{2}{7}hq_0)^2 + v_0^2}$. Diese ist nun in Vergleich mit der ersten rechtläufig oder rückläufig, je nachdem der Mittelpunct in den Scheitel D der Parabel gelangt, oder nicht. Die zur Erreichung des Scheitels erforderliche Zeit t'' ergiebt sich aus der zweiten der Gleichungen 3. gleich $\frac{v'}{v_0} = \frac{u_0}{\mu g}$, nach 4.; die Kugel bewegt sich also überhaupt nur dann nach dem Scheitel der Parabel hin, wenn u_0 positiv ist. Soll sie nun, vorausgesetzt daß u_0 positiv ist, in ihrem Endzustande rechtläufig sein, so muß dieser zeitig genug eintreten, daß sie den Scheitel der Parabel nicht erreiche; mithin muß $t' < t''$ oder

$$\tfrac{2}{7}(u_0 + hq_0) < u_0, \quad \text{d. i.} \quad \tfrac{2}{5}hq_0 < u_0$$

sein. Da zugleich $u_0 + hq_0 > 0$, so folgt, daß in diesem Falle hq_0 zwischen den Grenzen $-u_0$ und $+\frac{5}{2}u_0$ liegen muß, wobei zugleich u_0 positiv ist.

Alsdann beginnt der Endzustand in irgend einem Puncte F zwischen A und D, von wo aus die Kugel nach der Richtung der Tangente FF' gleichförmig fortrollt. Ist aber $t' > t''$, so erreicht und überschreitet der Mittelpunct den Scheitel D, der Endzustand beginnt erst nachher, z. B. in G, von wo die Kugel nach der Tangente GG' fortrollt; die Bewegung ist also, im Endzustande, rückläufig. Hierzu ist erforderlich, daß u_0 positiv und $< \frac{2}{5}hq_0$, oder $hq_0 > \frac{5}{2}u_0$ sei.

Daß dieser Endzustand in der Erfahrung nicht, wie vorstehende Rechnung giebt, unaufhörlich fortdauert, kann nicht befremden, da schon der Widerstand der Luft hinreicht, das genaue Verhältniß zwischen der Geschwindigkeit des Mittelpunctes und derjenigen der Drehung zu stören und zu bewirken, daß die Geschwindigkeit des Berührungspunctes wieder aufhört Null zu sein, oder dieser wieder gleitet. Da alsdann auch die Reibung wieder eintritt, so ist klar, daß auf diese Weise die Kugel bald gänzlich zur Ruhe kommen muß.

Gedruckt bei den Gebr. Unger.

Schmidt, K. A. L., erster Anschauungscursus der Raumlehre für Schulen; die Wurzel- und Stammräume: Kugel, Zylinder, Kegel, Prismen und Pyramiden, nebst Schnitten enthattend; nach den Grundsätzen der neuern Elementar-Methodik, für Bürger- und Landschulen bearbeitet. 1r Theil, 1e Abtheil. (auch unter dem Titel: Raumlehre für Schulen; nach den Grundsätzen der neuern Elementar-Methodik in drei Cursen bearbeitet. 1r Theil. Wurzel- und Stammräume und ihre Schnitte). gr. 8. 15 Sgr.

Steiner, J., die geometrischen Konstructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur practischen Benutzung. Mit 2 Kupfern. gr. 8. 17½ Sgr.

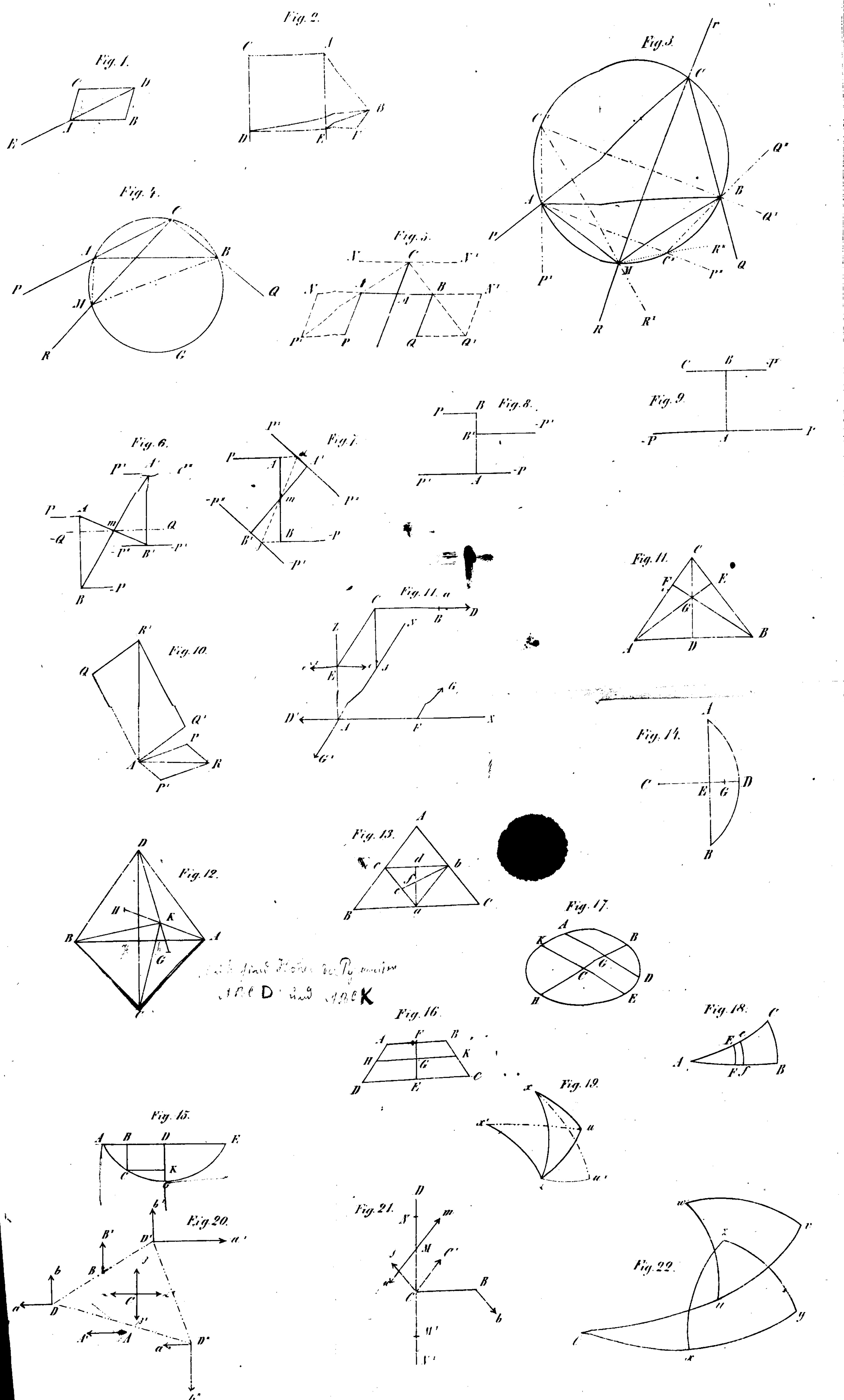

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 11. a
Fig. 12.
sind Höhen der Pyramiden
ABCD und ABCK
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.

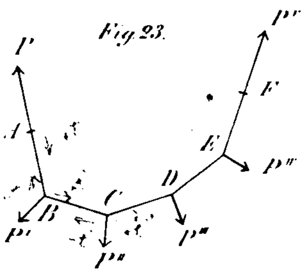

Fig. 23.

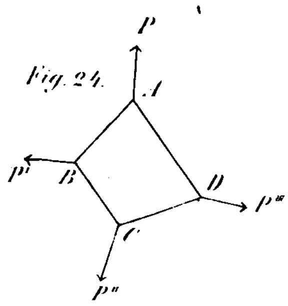

Fig. 24.

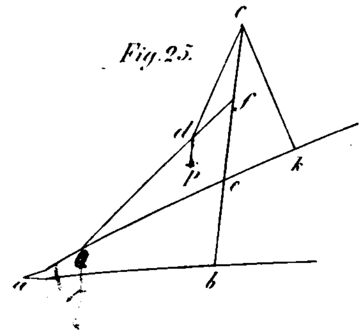

Fig. 25.

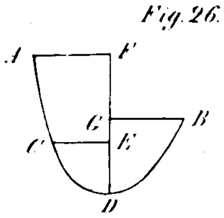

Fig. 26.

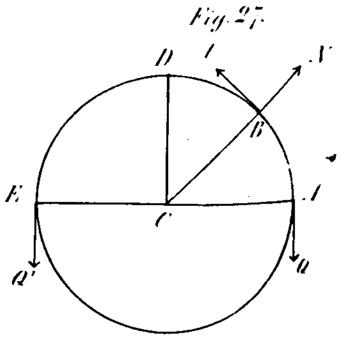

Fig. 27.

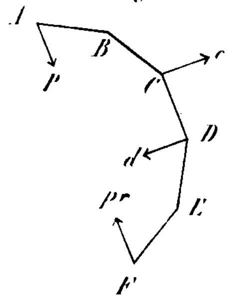

Fig. 28.

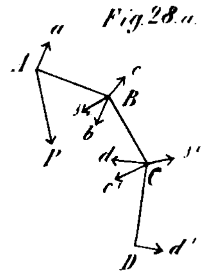

Fig. 28. a.

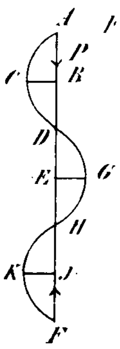

Fig. 29.

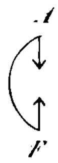

Fig. 30.

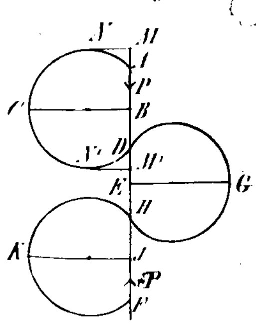

Fig. 31.

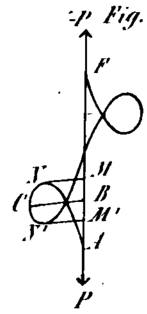

Fig. 32.

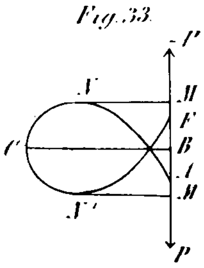

Fig. 33.

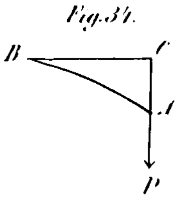

Fig. 34.

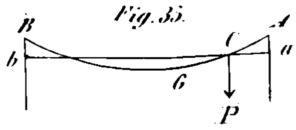

Fig. 35.

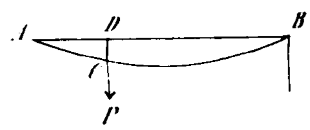

Fig. 36.

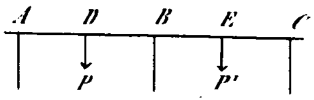

Fig. 37.

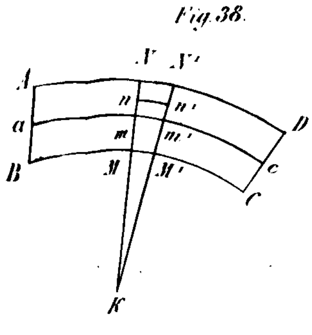

Fig. 38.

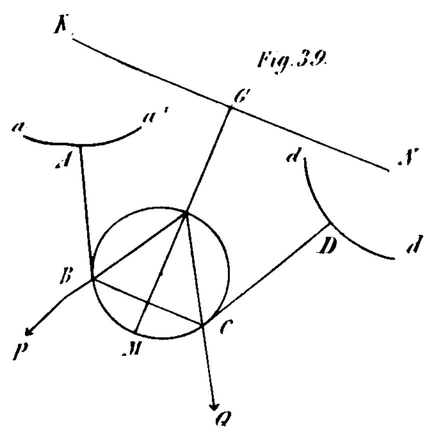

Fig. 39.

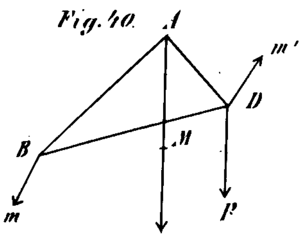

Fig. 40.

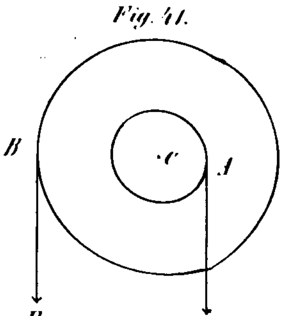

Fig. 41.

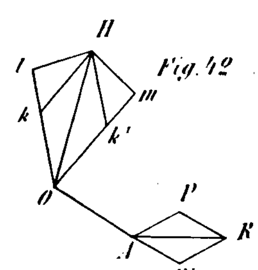

Fig. 42.

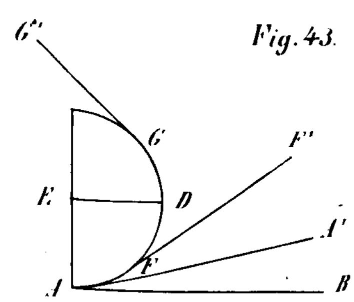

Fig. 43.