

3  
MATEMAATIKA ÕPETAMISE KOMISJON

---

---

*Õp. 1581*

# ALGEBRA

## ÕPIK

KESKKOOLILE





A-11018

L. Brandt  
R I<sup>a</sup>

MATEMAATIKA ÕPETAMISE KOMISJONI  
MATEMAATIKA ÕPPERAAMATUD

---

---

*Õp. 1587*  
J. GRÜNTAL — G. RÄGO

# ALGEBRA

ÕPIK

KESKKOOLILE

~~1A~~

~~36857~~

---

---

KIRJASTUS OSAÜHING „LOODUS“  
TARTU 1938 TALLINN

Matemaatika Õpetamise Komisjon:

Gerhard Rägo  
esimees

Elmar Etverk  
Julius Grüntal  
Karl Maasik  
Robert Meresmaa  
Kalev Ratassepp  
Leonti Ruumet  
Arnold Vihman

2

Tartu Riikliku Õlikooli  
Raamatukogu

89 397

Keeleline korrektor: Helmut Pürkop

K. Mattieseni trükikoda o.-ü., Tartu, 1938.

## Sisukord.

	lk.
Peatükk I. Algebraise sümbolika alged . . . . .	1—24
1. Täht arvu tähisena . . . . .	1
2. Ülesannete lahendamine tähelisil andmeil .	2
3. Matemaatilised sümbolid . . . . .	4
4. Algebraalne avaldis . . . . .	5
5. Kordaja . . . . .	6
6. Arvu ruut. Arvu kuup . . . . .	7
7. Aste . . . . .	7
8. Sulud . . . . .	8
9. Avaldise numbriline väärtus . . . . .	11
10. Arvude kujutamine sirgel . . . . .	14
11. Avaldise numbriliste väärtuste graafiline kujutamine . . . . .	15
12. Valem . . . . .	17
13. Üksliige. Hulkliige . . . . .	19
14. Hulkliikme koondamine . . . . .	20
15. Algebraised teisendused . . . . .	21
16. Täht tundmatu arvu tähisena . . . . .	22
17. Võrrand . . . . .	23
Peatükk II. Arvutamise põhiseadused . . . . .	25—44
18. Loendamise tulemuse ühesus . . . . .	25
19. Nelja põhitehte rajamine loendamisele .	25
20. Liitmise põhiseadused . . . . .	30
21. Lahutamise põhiseadused . . . . .	34
22. Korrutamise põhiseadused . . . . .	36
23. Jagamise põhiseadused . . . . .	40
24. Arvutamise põhiseaduste rakendusi . .	42
Peatükk III. Positiivsed ja negatiivsed arvud . .	45—63
25. Vastassuunalised suurused . . . . .	45
26. Positiivsed ja negatiivsed arvud . . . .	46
27. Relatiivsete arvude järjestus suuruse järgi	48
28. Relatiivsete arvude skaala . . . . .	49
29. Relatiivsete arvude liitmine . . . . .	50

## IV

		lk.
§	30. Relatiivsete arvude lahutamine . . . . .	52
§	31. Relatiivsete arvude korrutamine . . . . .	55
§	32. Relatiivsete arvude astendamine . . . . .	58
§	33. Relatiivsete arvude jagamine . . . . .	59
§	34. Arvutamise põhiseadused positiivsete arvude vallas . . . . .	60
§	35. Arvuvalla laiendamine negatiivsete arvudega . . . . .	61
Peatükk IV. Täisavaldised . . . . .		64—70
§	36. Üksliikmete korrutamine . . . . .	64
§	37. Üksliikmete jagamine . . . . .	65
§	38. Üksliikmete astendamine . . . . .	66
§	39. Polünoomide korraldamine . . . . .	68
§	40. Hulkliikmete liitmine ja lahutamine . . . . .	69
§	41. Hulkliikme korrutamine ja jagamine üksliikmega . . . . .	70
Peatükk V. Võrrand . . . . .		71—82
§	42. Võrdus. Võrratus . . . . .	71
§	43. Samasus . . . . .	72
§	44. Võrrand . . . . .	73
§	45. Võrduse ja võrratuse põhiomadused . . . . .	75
§	46. Võrrandite teisendamise lause . . . . .	78
§	47. Lineaarvõrrand . . . . .	79
§	48. Üldkujulise lineaarvõrrandi lahend . . . . .	81
§	49. Lineaarvõrrandi lahendamine . . . . .	81
Peatükk VI. Arvutamise abivalemid . . . . .		83—88
§	50. Kaksliikmete korrutamine . . . . .	83
§	51. Summa ruudu valem . . . . .	84
§	52. Vahe ruudu valem . . . . .	84
§	53. Kahe arvu summa ja vahe korrutise valem . . . . .	85
§	54. Hulkliikmete korrutamine . . . . .	86
§	55. Summa kuubi ja vahe kuubi valemid . . . . .	87
Peatükk VII. Arvude ja üksliikmete jaguvus . . . . .		89—100
§	56. Arvu jagaja . . . . .	89
§	57. Algarv. Kordarv . . . . .	90
§	58. Jaguvuse tunnused . . . . .	90
§	59. Arvu lahutamine algtegureiks . . . . .	94
§	60. Arvu jagajate leidmine . . . . .	96
§	61. Antud arvude suurim ühistegur . . . . .	96
§	62. Antud üksliikmete suurim ühistegur . . . . .	98
§	63. Antud arvude väikesim ühiskordne . . . . .	98
§	64. Antud üksliikmete väikesim ühiskordne . . . . .	100

Peatükk VIII. Algebraalne murd . . . . . lk.  
101—122

Esimene tsükkel.

65. Murd . . . . .	101
66. Murru põhiomadus . . . . .	102
67. Murru laiendamine ja taandamine . . . . .	103
68. Murdude ühenimelisteks teisendamine . . . . .	105
69. Murdude võrdlemine . . . . .	107
70. Murdude liitmine . . . . .	108
71. Murdude lahutamine . . . . .	111
72. Murdude korrutamine . . . . .	112
73. Murdude jagamine . . . . .	114
74. Murru astendamine . . . . .	116
75. Arvutamise põhiseadused murdarvude vallas . . . . .	117
76. Kahe arvu suhe . . . . .	119
77. Võrre . . . . .	119
78. Võrde põhiomadus . . . . .	121

Peatükk IX. Ruutjuur. Kuupjuur . . . . . 123—141

79. Seose $y = x^2$ graafik . . . . .	123
80. Parabooli kasutamine arvutusabinõuna . . . . .	125
81. Ruutjuure sümbol . . . . .	126
82. Ruutjuure leidmine ruutude tabeli abil . . . . .	128
83. Ruutjuure leidmise algoritm . . . . .	130
84. Ruutjuure leidmine ettekirjutatud täp- susega . . . . .	134
85. Irratsionaalarv . . . . .	135
86. Arvuvalla tihendamine irratsionaalsete arvudega . . . . .	138
87. Ruutjuur korrutisest ja jagatisest . . . . .	139
88. Kuupjuure leidmine kuupide tabelist . . . . .	140

Peatükk X. Ruutvõrrand . . . . . 142—160

89. Ruutvõrrandi üldkuju . . . . .	142
90. Mittetäielikkude ruutvõrrandite lahend- damine . . . . .	143
91. Ruutvõrrandi $(x + m)^2 = n$ lahendamine . . . . .	145
92. Taandatud ruutvõrrandi lahendamine . . . . .	146
93. Taandatud ruutvõrrandi lahendi valem . . . . .	148
94. Üldkujulise ruutvõrrandi lahendi valem . . . . .	151
95. Biruutvõrrandi lahendamine . . . . .	154
96. Ruutvõrrandi koostamise ja lahendamise näiteid . . . . .	155
97. Taandatud ruutvõrrandi lahendite oma- dused . . . . .	159
98. Ruutvõrrandi koostamine antud lahendite järgi . . . . .	160

## VI

Peatükk XI. Algebraalne murd . . . . .	lk. 161—174
Teine tsükkel.	
§ 99. Hulkliikme tegureiks lahutamine . . . . .	161
§ 100. Hulkliikmete suurim ühistegur . . . . .	165
§ 101. Hulkliikmete väikesim ühiskordne . . . . .	165
§ 102. Hulkliikmelise nimetajaga murrud . . . . .	166
§ 103. Võrrete omadusi . . . . .	168
§ 104. Täheliste kordajatega lineaarvõrrand . . . . .	169
§ 105. Võrrandid otsitavaga nimetajas . . . . .	172
Peatükk XII. Võrrand-süsteem . . . . .	175—188
§ 106. Kahe tundmatuga lineaarvõrrand-süsteem	175
§ 107. Lineaarvõrrand-süsteemi lahendamine asetusvõttega . . . . .	176
§ 108. Lineaarvõrrand-süsteemi lahendamine liitmisevõttega . . . . .	178
§ 109. Lahendumatud võrrand-süsteemid . . . . .	180
§ 110. Võrrand-süsteemi koostamine . . . . .	182
§ 111. Ruutvõrrand-süsteem . . . . .	184
Ajaloolisi andmeid . . . . .	189
Märksõnastik . . . . .	192

## Peatükk I.

### Algebralise sümboolika alged.

#### § 1. Täht arvu tähisena.

Algebra esimeseks ülesandeks on luua lühikiri, milles oleks hõlpus avaldada arvulisi vahekordi meid ümbritsevas tõelikkuses, arvude vallas tähelepanud tõsiasju ja juhiseid mitmesuguste suuruste arvutamiseks. Mõtete avaldamisel algebra lühikirjas sagedasti tähistame arve tähtedega.

Ülesanne 1. Nädalapäevadest on ühed tööpäevad, teised puhkepäevad, kuid ikka on mõlemaid kokku 7. Avalda see tõsiasi lühikirjas.

Lahendus. Tähistame nädala tööpäevade arvu tähega  $t$ , puhkepäevade arvu tähega  $p$ . Tõsiasi, et mõlemaid kokku on 7, avaldub siis lühidalt kujul:

$$t + p = 7.$$

Ülesanne 2. Ametniku aastateenistus koosneb tema 12 kuupalgast. Avalda see tõsiasi lühikirjas.

Lahendus. Tähistame ametniku aastateenistuse kroonides tähega  $a$ , kuupalga kroonides tähega  $k$ . Siis

$$a = k + k + k + k + k + k + k + k + k + k + k + k,$$

ehk lühemalt

$$a = 12 \cdot k.$$

Ülesanne 3. Olgu tarvis määrata kasvava puu läbimõõt ja olgu mõõduriistana kasutada sentimeeter-pael. Sellega me ei saa mõõta nõutavat läbimõõtu, kuid saame kergesti määrata puu ümbermõõdu. Nõutava läbimõõdu saab siis arvutada juhise järgi: „Puu läbimõõt on seitse kahekümne kahendikku puu ümbermõõdust.“ Avalda see juhise lühikirjas.

Lahendus. Märgime puu läbimõõdu sentimeetrites tähega  $l$ , puu ümbermõõdu sentimeetrites tähega  $u$ . Ülal-sõnastatud juhise puu läbimõõdu määramiseks avaldub siis lühidalt kujul:

$$l = \frac{7}{22} \cdot u.$$

## § 2. Ülesannete lahendamine tähelisil andmeil.

Ülesanne 1. Linnades nummerdatakse majad tänava ühel poolel paarisarvuliste numbritega 2, 4, 6, ..., tänava teisel poolel paarituuravuliste numbritega 1, 3, 5, ... Missugust numbrit kannab  $n$ -es maja tänava ühel poolel, missugust numbrit  $n$ -es maja tänava teisel poolel?

Lahendus. Tänavaga ühel poolel kannab

	esimene	teine	kolmas . . .	maja
numbrit	2	4	6	. . .
ehk	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 2$	$2 \cdot 3$	. . .

Seega  $n$ -es maja kannab numbrit

$$2 \cdot n.$$

Tänavaga teisel poolel kannab

	esimene	teine	kolmas . . .	maja
numbrit	1	3	5	. . .
ehk	$2 \cdot 1 - 1$	$2 \cdot 2 - 1$	$2 \cdot 3 - 1$	. . .

Seega  $n$ -es maja kannab numbrit

$$2 \cdot n - 1.$$

Oma arutluste tulemuse võime lühidalt kokku võtta nõnda:

$$\begin{aligned} n\text{-es paarisarv on } & 2 \cdot n, \\ n\text{-es paaritu arv on } & 2 \cdot n - 1. \end{aligned}$$

Ülesanne 2. Kirjutusmaterjali ostuarve tasutakse  $a$  kümnesendise ja  $b$  ühesendise rahaga. Kui suur on ostuarve?

Lahendus.

1 kümnesendine on väärt 10 senti,  
 $a$  kümnesendist on väärt  $a \cdot 10$  senti,  
 ehk, muutes tegurite järjekorda,  $10 \cdot a$  senti.

Kokku  $a$  kümnesendist ja  $b$  ühesendist raha on väärt

$$10 \cdot a + b$$

senti. Seega on ostuarve suurus leitud.

Oma arutluste tulemuse võime lühidalt kokku võtta nõnda:

arv, mis koosneb  $a$  kümnest ja  $b$  ühest, avaldub kujul

$$10 \cdot a + b$$

Ülesanne 3. Jaamas seisab ühel rööpapaaril kaubarong, mille pikkus on  $p$  meetrit. Kõrvaloleval rööpapaaril sõidab kaubarongist mööda reisijaterong, mille pikkus on  $q$  meetrit. Reisijaterongi kiirus on  $v$  meetrit sekundis. Mitu sekundit kestab reisijaterongi möödasõit kaubarongist?

Lahendus. Tee, mille reisijaterong peab katma teisest rongist mööda sõites, on esimese ja teise rongi pikkuste summa, seega

$$p + q$$

meetrit. Kiiruse puhul  $v$  meetrit sekundis on selle tee sõitmiseks tarvis aega

$$\frac{p+q}{v}$$

sekundit, millega nõutud aeg on leitud.

Ülesanne 4. Klassis on tööl  $t$  õpilast; haiguse tõttu puudub  $h$  õpilast. Mitu protsenti õpilasist on haiged?

Lahendus. Tervete õpilaste arv on  $t$ , haigete õpilaste arv on  $h$ ; seega on kõiki õpilasi kokku

$$t + h.$$

Haigete õpilaste arv moodustab sellest osa, mis avaldub kujul

$$\frac{h}{t+h}.$$

Kui selle murru kirjutame protsentides, saame, et haigeid õpilasi on

$$\frac{100 \cdot h}{t+h} \%.$$

### § 3. Matemaatilised sümbolid.

Matemaatilised sümbolid on tähised, mis asendavad kirjutatud sõnu; nii kirjutame

sõnade asemel	tähise	midagi loeme
seitse	7	seitse
mingi arv	$a, b, \dots$	$a, b, \dots$
	$H, N, \dots$	suur $h$ , suur $n, \dots$
	$\alpha, \beta, \dots$	alfa, beeta, $\dots$

sõnade asemel	tähise	mida loeme
on, on võrdne	=	on, on võrdne
liita	+	pluss
lahutada	—	miinus
korrutada	·	korda
jagada	—	murrujoon, jagada
	või	:
ei ole võrdne	$\neq$	ei ole võrdne
on ligikaudu võrdne	$\approx$	on ligikaudu võrdne
on suurem kui	>	on suurem kui
on väiksem kui	<	on väiksem kui

Punkt korrutamismärgina kirjutatakse poole rea kõrgusêle.

Kahe tähe vahel, sageli ka numbrilise teguri ja tähe vahel jäetakse korrutamispunkt ära. Nii tähendab  $Nx$  sama, mis  $N \cdot x$  ja  $3,8u$  sama, mis  $3,8 \cdot u$ .

Ülaltoodud matemaatiliste sümbolite kogu täiendame hiljemini vajaduse kohaselt.

Märkus. Sümboleid kirjutiste lühendamiseks kasutame ka igapäevases elus; nii kirjutame

sõnade asemel	tähise
meeter	m
gramm	g
naelsterling	£
dollar	\$

#### § 4. Algebraalne avaldis.

Algebraaliseks avaldiseks nimetame kogu arvtähiseid, mis on isekeskis ühendatud tehtemärkidega.

Näiteks on

$$t + p, \quad 12k, \quad \frac{7}{22}u, \quad 2n - 1,$$

$$10a + b, \quad \frac{p+q}{v}, \quad \frac{100h}{t+h}$$

algebralised avaldised.

Ka üksikarve, nagu 7,  $a, \frac{3}{4}$ ,  $N$ , loeme algebralisteks avaldisteks.

### § 5. Kordaja.

Korrutises esinevat numbrilist tegurit nimetame kordajaks.

Tavaliselt kirjutatakse kordaja teiste tegurite ette. Nii on avaldistes  $12k$ ,  $3n$ ,  $\frac{7}{22}u$  kordajaiks arvud 12, 3 ja  $\frac{7}{22}$ . Kordaja 1 jäetakse kirjutamata. Nii kirjutame avaldise  $1 \cdot bc$  asemel lihtsalt  $bc$ .

Tähendagu  $a$  mingit arvu. Lühiduse otstarbel kirjutame siis

summa	$a + a$	kujul	$2 \cdot a$ ehk $2a$
,,	$a + a + a$	,,	$3 \cdot a$ „ $3a$
,,	$a + a + a + a + a$	,,	$5 \cdot a$ „ $5a$

Selle eeskujul mõistame kirjutist  $100a$  summana, milles arv  $a$  on võetud liidetavana 100 korda.

Avaldistes  $\frac{7}{22}u$  ja  $0,72a$  on kordajad murdarvulised.

Täisarvuline kordaja näitab, mitu korda kordajale järgnevat avaldist tuleb võtta liidetavana; murdarvuline kordaja näitab, missugune osa tuleb võtta kordajale järgnevast avaldisest.

## § 6. Arvu ruut. Arvu kuup.

Näide 1. Ruudukujuline põrand kaetakse malelaua sarnaselt ruudukujuliste parkettkividega. Mahtugu nii põranda pikkusse kui ka laiusse  $a$  kivi. Siis mahub põrandale

$$a \cdot a \text{ ehk } aa$$

kivi. Korrutise  $aa$  kirjutame kujul  $a^2$ .

Üldiselt: kui ruudu küljesse pikkusühik mahub  $a$  korda, siis ruudu pindala on  $a^2$  vastavat ruutühikut.

Selletõttu avaldist  $a^2$  loetakse  $a$  ruut.

Näide 2. Mahtugu kuubi servasse  $a$  pikkusühikut. Täidame kuubi kuupühikutega, see on kuupidega, mille serva pikkus on 1 pikkusühik. Kuubi põhi kattub siis  $a \cdot a$  ruutühikuga; sellel põhjal asetsevas kihis on seega  $a \cdot a$  kuupühikut; kihte on  $a$ , seega on kuubis kuupühikuid kokku

$$a \cdot a \cdot a = a \cdot a^2.$$

Korrutise  $a \cdot a \cdot a$  ehk  $a \cdot a^2$  kirjutame kujul  $a^3$ .

Niisiis: kui kuubi servasse pikkusühik mahub  $a$  korda, siis kuubi ruumala on  $a^3$  vastavat kuupühikut.

Sellepärast avaldist  $a^3$  loetakse  $a$  kuup.

## § 7. Aste.

Ülal kirjutasime

korrutise  $a \cdot a$  ehk  $aa$  lühemalt  $a^2$

ja korrutise  $a \cdot a \cdot a$  ehk  $aaa$  lühemalt  $a^3$ .

Kirjutame selle eeskujul

korrutise  $a \cdot a \cdot a \cdot a$  ehk  $aaaa$  lühemalt  $a^4$  ja üldiselt  $n$  võrdsest tegurist koosneva korrutise  $a \cdot a \cdot a \dots a$  ehk  $aaa \dots a$  lühemalt  $a^n$ .

Arve  $a^2, a^3, a^4, \dots a^n$  nimetame arvu  $a$  teiseks, kolmandaks, neljandaks, ...  $n$ -daks astmeks. Seega:

arvu  $a$   $n$ -es aste on korrutis, milles on  $n$  võrdset tegurit  $a$ .

Arv  $a^1$  on arvu esimene aste; me loeme ta võrdseks arvu  $a$  enesega. Astendaja 1 jäetakse kirjutamata.

Avaldises  $a^n$  nimetame arvu  $a$  astendata vaks ehk astme aluseks, arvu  $n$  — astendajaks.

Astendaja näitab, mitu korda alus on võetud tegurina.

Astme leidmist nimetame astendamiseks.

## § 8. Sulud.

Ülesanne 1. Avalda üldkujul kahe järjestikuse täisarvu korrutis.

Lahendus. Tähistame väiksema kahest kõnesolevast arvust tähega  $N$ ; sellele järgnev arv on siis  $N + 1$ . Kui kirjutaksime need arvud kõrvuti ja paigutaksime punkti korrutamismärgina nende vahele, saaksime

$$N \cdot N + 1.$$

Lugedes kirjutatut näeme, et esimeseks tehteks on korrutamine, teiseks liitmine; kirjutatud avaldis nõuab seega esmalt arvu  $N$  korrutamist arvuga  $N$  ja arvu 1 liitmist saadusega. Et ülesande lahenduses ära märkida nõuet esmalt toimetada arvude  $N$  ja 1 liitmist ja siis alles saaduse korrutamist arvuga  $N$ , võtame summa  $N + 1$  sulgudesse ja kirjutame nõutava korrutise kujul

$$N \cdot (N + 1).$$

Erijuhul, kui  $N$  on näiteks arv 7, tähendab

avaldis $N \cdot (N + 1)$	arvu	$7 \cdot 8$	ehk	$56,$
„ $N \cdot N + 1$	„	$7 \cdot 7 + 1$	„	$50.$

Ülesanne 2. Ruudukujulise mänguväljaku külg on  $k$  meetrit. Väljaku suurendamiseks pikendatakse tema külgi 3 meetri võrra. Väljaku katmiseks on kasutada  $V$  kuupmeetrit liiva. Kui paks tuleb väljaku katekiht?

Lahendus. Peale väljaku laiendamist on tema kumbki külg  $(k + 3)$  meetrit, seega väljaku pindala  $(k + 3)^2$  ruutmeetrit; tähendab, liivakiht tuleb

$$\frac{V}{(k + 3)^2}$$

meetrit paks.

Viimast avaldist tuleb mõista nõnda: „Liida arvuga  $k$  arv 3, arvuta tulemuse ruut ja jaga arv  $V$  leitud ruuduga.“

Seevastu avaldist

$$\frac{V}{k + 3^2}$$

mõistetakse nõnda: „Arvuta 3-e ruut, liida tulemus arvuga  $k$  ja jaga arv  $V$  leitud summaga.“

Jagatise

$$\frac{V}{k + 3^2}$$

kirjutamisel murrujooneta tuleb jagaja paigutada sulgudesse:

$$V : (k + 3^2).$$

Ülaltoodud arutlusist näeme, et

sulud on sümbolid, millega märgitakse tehete järjekorda.

Et ära hoida kahtlust selle kohta, missuguses järjekorras sooritada avaldises märgitud tehted, on kokku lepitud järgmiselt:

Kui avaldises sulgusid ei esine, tuleb esmalt sooritada astendamised, siis korrutamised ja jagamised, ning viimaks liitmised ja lahutamised selles järjekorras, milles esinevad märgid pluss ja miinus. Kui avaldises esineb sulgusid, tuleb kõigepealt sooritada need tehted, mida nõuavad sulgudes olevad tehtemärgid; kui see on toimunud, tuleb edasi käia eespool-toodud juhise järgi.

N ä i d e. Avaldisest

$$a + bc^2 - \frac{m}{n}$$

loeme käsku: „Leia arvu  $c$  ruut; korruta saadus arvuga  $b$ ; jaga arv  $m$  arvuga  $n$ ; liida korrutis arvuga  $a$ ; lahuta tulemusest varemini-saadud jagatis.“

Seevastu avaldises

$$a + b(c^2 - \frac{m}{n})$$

näeme nõuet: „Leia arvu  $c$  ruut; jaga arv  $m$  arvuga  $n$ ; lahuta esimesest saadusest teine; korruta tulemus arvuga  $b$ ; liida saadus arvuga  $a$ .“

Viimaks avaldis

$$(a + bc)^2 - \frac{m}{n}$$

ütleb meile: „Korruta arvud  $b$  ja  $c$ ; liida saadud korrutis arvuga  $a$ ; arvuta leitud summa ruut; jaga arv  $m$  arvuga  $n$ ; lahuta jagatis eelmisest tulemusest.“

Sulgudest on tarvitusel

ümmargused sulud	( )
nurgelised sulud	[ ]
loogelised sulud	{ }

Mõnedes küsimustes osutub vajalikuks kasutada kaht või isegi kolme liiki sulgusid. Näitame seda järgmise ülesandega.

Ülesanne. On teada, et

1 inglise nael on 20 šillingit ehk 240 pennit ja väärtuselt võrdne ümmarguselt 18 krooniga. Mitu krooni on väärt

$n$  inglise naela  $s$  šillingit ja  $p$  pennit?

Lahendus. 1 inglise nael on 20 šillingit, seega  $n$  inglise naela on  $n \cdot 20$  ehk  $20 \cdot n$  ehk  $20n$  šillingit; koos  $s$  šillingiga annab see

$$20n + s$$

šillingit.

Edasi teame, et

1 šilling on 12 pennit,

seega

$(20n + s)$  šillingit on  $(20n + s) \cdot 12$

ehk

$$12(20n + s)$$

pennit. Koos  $p$  penniga annab see

$$12(20n + s) + p$$

pennit. Iga penni on väärt  $\frac{18}{240}$  ehk  $\frac{3}{40}$  krooni, seega antud summa Inglise rahas on väärt

$$\frac{3}{40} [12(20n + s) + p]$$

krooni.

### § 9. Avaldise numbriline väärtus.

Ülesanne 1. Kui suur on ringi pindala, kui ringi raadius on 10 sentimeetrit?

Lahendus. Ring, mille raadius on  $r$  sentimeetrit, omab pindala

$$\pi r^2$$

ruutsentimeetrit. Kõnesoleval juhul on  $r = 10$ , seega otsitav pindala on

$$\pi \cdot 10^2 = 3,14 \cdot 100 = 314$$

ruutsentimeetrit.

Arv 314 on avaldise  $\pi r^2$  numbriline väärtus tähe  $r$  väärtusel 10.

Ülesanne 2. Kui suur on kolmnurga pindala, kui tema alus on 16 sentimeetrit ja kõrgus on 28 sentimeetrit?

Lahendus. Kolmnurk, mille alus on  $a$  sentimeetrit ja kõrgus on  $h$  sentimeetrit, omab pindala

$$\frac{1}{2} ah$$

ruutsentimeetrit. Kõnesoleval juhul on  $a = 16$ ,  $h = 28$ , seega otsitav pindala on

$$\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 28 = 8 \cdot 28 = 224$$

ruutsentimeetrit.

Arv 224 on avaldise  $\frac{1}{2} ah$  numbriline väärtus, kui  $a = 16$  ja  $h = 28$ .

Ülesanne 3. Määra avaldise

$$\frac{2pq}{(p+q)^2}$$

numbriline väärtus, kui  $p = 1,2$  ja  $q = 5,6$ .

Lahendus. Lihtsuse mõttes arvutame eraldi lugeja ja nimetaja:

$$2pq = 2 \cdot 1,2 \cdot 5,6 = 2,4 \cdot 5,6 = 13,44$$

$$p + q = 1,2 + 5,6 = 6,8$$

$$(p + q)^2 = 6,8^2 = 46,24.$$

Seega

$$\frac{2pq}{(p+q)^2} = \frac{13,44}{46,24} = \frac{84}{289} \approx 0,29.$$

Kokkuvõttes:

selleks, et saada avaldise numbrilist väärtust temas esinevate tähtede antud väärtustel, asetame avaldisse need väärtused tähtede asemele ja toimetame nendega tehted, mida avaldises seisvad tehtemärgid ette kirjutavad.

Sageli on tarvis teada ühe ja sama avaldise numbrilisi väärtusi mitmel tähe eriväärtusel. Sel puhul korraldame kogu arvutamistöö kindla plaani ehk skeemi järgi. See hõlbustab tööd, aitab hoiduda vigadest ja kergendab tunduvalt tulemuste kontrollimist. Asja selgitamiseks olgu järgmine näide.

Näide. Arvutame avaldise

$$\frac{1+2n}{(n-1)^2}$$

väärtused  $n$ -i täisarvuliste väärtuste jaoks vahemikus 2-st 8-ni. Saadused anname sajandikeni.

Töö korraldame, nagu allpool-seisvast skeemist näha; skeemi täidame veergude kaupa.

$n$	$2n$	$1+2n$	$n-1$	$(n-1)^2$	$\frac{1+2n}{(n-1)^2}$
2	4	5	1	1	5,00
3	6	7	2	4	1,75
4	8	9	3	9	1,00
5	10	11	4	16	0,69
6	12	13	5	25	0,52
7	14	15	6	36	0,42
8	16	17	7	49	0,35

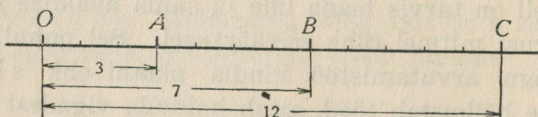
### § 10. Arvude kujutamine sirgel.

Olgu antud arvud

3                      7                      12

ja nõutagu neid kujutada sirgel joonel. Selleks võtame sirge joone (joonis 1), valime temal mõne punkti, märgime selle kriipsukesega ja kirjutame selle kriipsu vastu tähe  $O$ . Valime sobiva pikkusühiku, näiteks 5 mm, ja kanname sirgele, lähtudes punktist  $O$ , lõigud

$$OA = 3 \cdot 5 \text{ mm} \quad OB = 7 \cdot 5 \text{ mm} \quad OC = 12 \cdot 5 \text{ mm}$$



Joonis 1.

Lõigud  $OA$ ,  $OB$  ja  $OC$  kujutavad antud arve 3, 7 ja 12. Neil lõikudel on ühine alguspunkt  $O$ . Seega on igaüks neist lõikudest määratud niipea, kui on teada tema lõpp-punkt. Et punktid  $A$ ,  $B$  ja  $C$  määravad lõike  $OA$ ,  $OB$  ja  $OC$  ja need lõigud kujutavad arve 3, 7 ja 12, siis ütleme ka, et

punktid	$A$	$B$	$C$
kujutavad arve	3	7	12

ehk teisiti:

arvud 3, 7 ja 12 on kujutatud punktidega  $A$ ,  $B$  ja  $C$ .

Sirget, millel kujutame arve, nimetame arvteljeks.

Kujutamiseks valitud pikkusühikut nimetame kujutamisuühikuks.

Kokkuvõttes:

selleks, et kujutada joonisel arvu  $x$ , võtame mõne sirge arvteljeks; valime sellel teljel mõne punkti  $O$  alguseks; valime sobiva kujutamisuühiku; kanname, lähtudes algusest, teljele lõigu  $OX$ , mille pikkus on  $x$  ühikut; punkt  $X$  kujutab siis arvu  $x$ .

## § 11. Avaldise numbriliste väärtuste graafiline kujutamine.

Ülesanne. On antud avaldis

$$\frac{1}{2}x(x-1).$$

Arvuta ja kujuta selle avaldise numbrilised väärtused  $x$ -i täisarvuliste väärtuste puhul 1-st 6-ni.

Lahendus. Kõnesolevate numbriliste väärtuste arvutamise toimetame allseisvas skeemis:

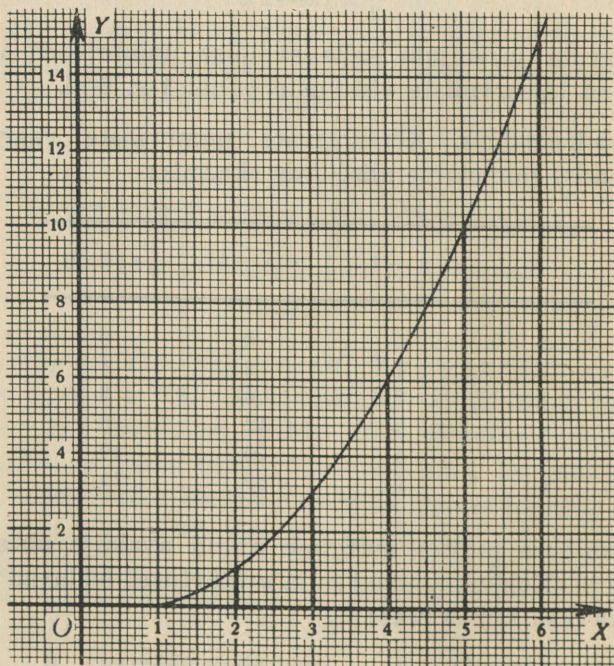
$x$	$x-1$	$x(x-1)$	$\frac{1}{2}x(x-1)$
1	0	0	0
2	1	2	1
3	2	6	3
4	3	12	6
5	4	20	10
6	5	30	15

Lühiduse mõttes märgime antud avaldise üheainsa tähega  $y$ . Kokkukuuluvad  $x$ - ja  $y$ -väärtused leiduvad meie skeemis ikka samas reas:

$x$ -väärtusele	1	vastab $y$ -väärtus	0
„ „	2	„ „ „	1
„ „	3	„ „ „	3
jne.			

Kõnesolevate  $x$ - ja  $y$ -väärtuste kokkukuuluvust saame esitada näitlikult järgmiselt (joonis 2): võtame lehe millimeeter-paberit; valime ühe seal leiduvaist sirgeist  $x$ -teljeks; valime sellel mõne punkti  $O$  alguseks; valime sobiva pikkusühiku, näiteks 1 cm, ja kujutame  $x$ -i väärt-

tused tuntud viisil punktidenä  $x$ -teljel; punktid tähistame numbrikestega 1, 2, 3, 4, 5, 6. Punktis  $O$  tõmbame sirge risti  $x$ -teljega; selle sirge nimetame  $y$ -teljeks. Punktide 1, 2, 3, 4, 5, 6 tõmbame sirged rööbiti  $y$ -teljega;



Joonis 2.

valime paraja pikkusühiku, näiteks 0,5 cm, ja kanname praegunimetatud sirgeile lõigud 0, 1, 3, 6, 10, 15. Need lõigud kujutavad antud avaldise numbrilisi väärtusi. Saadud lõikude lõpp-punktid ühendame kõveraga. See kõver kujutab avaldise  $y$  väärtuse muutumist  $x$ -i muutudes.

## Kokkuvõttes:

Selleks, et kujutada avaldise  $y$  väärtuse muutumist  $x$ -i muutudes, võtame mõne sirge  $x$ -teljeks ja märgime sellel teljel alguse  $O$ . Sellest punktist tõmbame sirge risti eelmisega ja nimetame selle sirge  $y$ -teljeks. Valides kohase pikkusühiku kujutame  $x$ -väärtused  $x$ -teljel punktidenä; saadud punktidest tõmbame sirged rööbiti  $y$ -teljega; valides sobiva pikkusühiku kujutame neil sirgeil  $y$ -väärtused lõikudena; läbi saadud lõikude lõpp-punktide joonistame kõvera; see kõver kujutab avaldise  $y$  väärtuse muutumist  $x$ -i muutudes.

## § 12. Valem.

Valemiks nimetame matemaatilisis sümboleis kirjutatud juhust, mille järgi ülesande andmeist arvutatakse otsitav.

Näide 1. Juhise „et arvu  $l$  saada, tuleb arvust  $u$  võtta  $\frac{7}{22}$ “ kirjutame valemına kujus

$$l = \frac{7}{22} \cdot u.$$

Seda loeme lühidalt nii: „ $l$  on seitse kahekümne kahendikku  $u$ .“

Näide 2. Juhise „et arvu  $s$  saada, tuleb arv  $a$  korrutada 10-ga ja saadusega liita arv  $b$ “ kirjutame valemına kujus

$$s = 10a + b.$$

Seda loeme lühidalt nii: „ $s$  on võrdne  $a$  kümnekordse ja  $b$  summaga.“

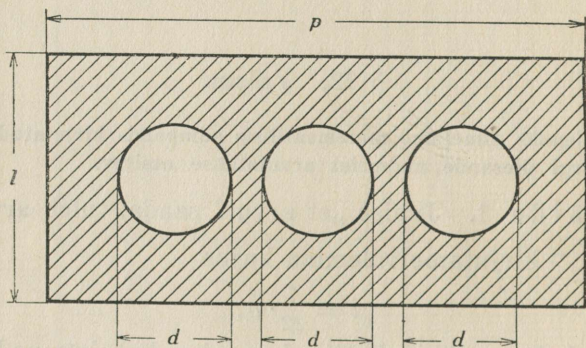
Näide 3. Juhise „et arvu  $p$  saada, tuleb arv  $h$  korrutada 100-ga, arvud  $t$  ja  $h$  liita ja esimene saadus jagada teisega“ kirjutame valemına kujus

$$p = \frac{100 h}{t + h}.$$

Seda loeme lühidalt nii: „ $p$  on võrdne murruga, mille lugejaks on sada  $h$  ja nimetajaks arvude  $t$  ja  $h$  summa.“

Valem koosneb ikka kahest osast: vasakul pool võrdusmärki seisab otsitava tähis; paremal pool võrdusmärki seisavad andmete tähised, mis on isekeskis ühendatud tehtemärkidega; need märgid näitavad, mida peab andmetega tegema, et otsitavat saada.

Eriti sageli puutume valemitega kokku kaudse mõõtmise küsimusis.



Joonis 3.

Pikkuste mõõtmisel loendame, mitu pikkusühikut või selle osa mahub mõõdetavasse lõigusse. Säärast mõõtmisviisi nimetame otseseks. Enamik teisi mõõtmisi, näiteks pindala, ruumala ja aine erikaalu mõõtmised, toimuvad kaudsel viisil: mõõdetakse otseselt mõned vajalikud andmed ning otsitav suurus saadakse neist andmeist alles arvutamise teel.

Näide. Määrame ülalseisval joonisel (joonis 3) kujutatud lesta pindala.

Mõõdame, näiteks sentimeetrites, lesta pikkuse, laiuse ja väljalõigatud ringide diameetrid. Olgu mõõtmise tulemused vastavalt  $p$ ,  $l$  ja  $d$ . Arvutades pindalasiid ruut-sentimeetrites leiame, et

lesta ristküliku pindala on võrdne  $lp$ ,  
 ühe ringi pindala „ „  $\frac{1}{4} \pi d^2$ ,  
 3 ringi kogupindala „ „  $\frac{3}{4} \pi d^2$  ;

seega otsitav pindala on võrdne

$$lp - \frac{3}{4} \pi d^2 .$$

Tähistades otsitava pindala tähega  $S$ , saame valemi

$$S = lp - \frac{3}{4} \pi d^2 .$$

Sellest valemist näeme, et otsitava pindala  $S$  arvutamiseks tuleb kõigepealt leida pikkused  $l$ ,  $p$  ja  $d$ ; otsitava arvutamine toimub siis juhise järgi: „korruta arvud  $l$  ja  $p$ ; leia arvu  $d$  ruut, korruta see arvuga  $\pi$  ja võta korrutisest  $\frac{3}{4}$ ; lahuta saadus korrutisest  $lp$ “.

### § 13. Üksliige. Hulkliige.

Korrutised, astmed ja jagatised kannavad ühist nimetust üksliige. Üldisemalt defineerime nii:

üksliikmed on niisugused avaldised, milles viimane tehe pole ei liitmine ega lahutamine.

Üksliikmed on näiteks avaldised:

$$a^2 \quad 3a^2b \quad 0,7a \cdot 0,5cx^2 \quad N \cdot (N + 1)$$

$$\left(\frac{2a}{b}\right)^3 \quad \frac{0,5n}{7x^2} \quad \frac{a+2}{5m} \quad \frac{n^2}{(n+5)^3} .$$

Üksliikmetest koostatud summad ja vahed kannavad ühist nimetust hulkliige. Seega:

hulkliikmed on niisugused avaldised, milles viimane tehe on kas liitmine või lahutamine.

Hulkliikmed on näiteks avaldised

$$\begin{array}{ccc} a + 2b & 3m^2 + n^2 & 7cd + 4f^2 \\ f^2g - h^3 & (N + 1)^2 - 7 & pq - \pi r^2 \\ x^2 - 3x + 4 & & x^3 + px + q. \end{array}$$

Hulkliiget, mis koosneb ainult kahest üksliikmest, nimetame kaksliikmeks ehk **binoomiks**; hulkliiget, mis koosneb kolmest üksliikmest, nimetame kolmliikmeks ehk **trinoomiks**.

Näiteks hulkliikmed

$$\begin{array}{ccc} 1 + x & 2a + b & 4a^2 - x^2 \\ \text{on binoomid, seevastu hulkliikmed} \\ 1 + x + x^2 & 3u^2 - 2u + 1 & az^2 + bz + c \\ \text{on trinoomid.} \end{array}$$

Iga üksliige, mis esineb hulkliikme avaldises kas liidetavana või lahutatavana, on selle hulkliikme liikmeks.

Näiteks on hulkliikme  $5p^2 + 6pq - 1\frac{2}{3}q^2$  liikmeiks avaldised

$$5p^2 \quad 6pq \quad 1\frac{2}{3}q^2.$$

Üksliikmeid, mis erinevad ainult kordajailt, nimetame **sarnaseiks**.

Niisugusteks on näiteks üksliikmed

$$\begin{array}{ccc} a^3b^2c & \frac{1}{2}a^3b^2c & 10a^3b^2c, \\ \text{samuti} \\ 5\frac{p^2}{mn} & 0,6\frac{p^2}{mn} & \frac{1}{2}\frac{p^2}{mn}. \end{array}$$

#### § 14. Hulkliikme koondamine.

Kui hulkliikmes esineb sarnaseid liikmeid, siis on võimalik hulkliiget koondada, asendades mitme sarnase

liikme summa või kahe sarnase liikme vahe üheainsa liikmega. Nii on

$$15a - 4a + a = 11a + a = 12a.$$

Toiminguid üksikuid samme loeme nii: viisteist  $a$  miinus neli  $a$  on üksteist  $a$ ; üksteist  $a$  pluss üks  $a$  on kaks-teist  $a$ .

Toimingut, millega hulkliikmes mitme sarnase liikme summa või kahe sarnase liikme vahe asendatakse üheainsa liikmega, nimetame hulkliikme koondamiseks.

Näited.

$$1. \quad 9cx - 5cx + 8cx - 9cx = 3cx.$$

$$2. \quad 10Nh^2 + Nh^2 - 7Nh^2 - 3Nh^2 = Nh^2.$$

$$3. \quad \left(\frac{a}{x}\right)^3 + 2\frac{a^2}{x} + 3\frac{a^2}{x} - \left(\frac{a}{x}\right)^3 - 7 = 5\frac{a^2}{x} - 7.$$

### § 15. Algebralised teisendused.

Hulkliikme koondamisel muutub hulkliikme väline kuju, mitte aga hulkliikme numbriline väärtus: igasuguse väärtuse asetamisel tähe asemele hulkliikme algkujusse ja hulkliikme koondatud kujusse saame ikka ühe ja sellisama tulemuse. Asetades näiteks võrduses

$$15a - 4a + a = 12a$$

tähe  $a$  asemele väärtuse 4, saame

$$15a - 4a + a = 15 \cdot 4 - 4 \cdot 4 + 4 = 60 - 16 + 4 = 44 + 4 = 48$$

ja samuti  $12a = 12 \cdot 4 = 48$ .

Toiminguid, mille puhul muutub küll algebralise avaldise kuju, mitte aga tema numbriline väärtus, nimetame algebralisteks teisendusteks.

Teisenduse tulemuse kontrollimine toimub sel teel, et me nii avaldise lähtekujusse kui ka teisendatud kujusse

asetame tähtede asemele ühed ja samad arvud; kui tulemused on võrdsed, siis võib arvata, et teisendus on sooritatud õieti.

Algebraliste avaldiste teisendamise peaeesmärgiks on nende avaldiste lihtsustamine. Näites

$$15a - 4a + a = 12a$$

nõuab avaldise algkuju numbrilise väärtuse arvutamine 4 tehet, avaldise lõppkuju numbrilise väärtuse arvutamine kõigest ühtainsat tehet.

### § 16. Täht tundmatu arvu tähisena.

Tundmatu arvu märkimine tähega on aluseks kõigile üldisile võtetele, mida algebra pakub ülesannete lahendamiseks.

Näide. Ärimehed Kask ja Mänd asutavad ettevõtte, kusjuures Mänd paigutab sellesse 2 korda suurema summa kui Kask. Ettevõtte põleb maha. Kindlustusselts tasub kindlustussumma 4800 krooni. Kui palju langeb sellest summast Kasele?

Me lahendame ülesande järgmiselt: tähistame Kasele langenud, esiotsa tundmatu kroonide arvu mingi tähega, näiteks tähega  $s$ . Et Mäni osakapital oli 2 korda suurem Kase osakapitalist, siis peaks temale langema kindlustussummast ka 2 korda suurem osa kui Kasele, seega  $2s$  krooni. Kokku mõlemale langes  $(s + 2s)$  krooni; see summa on aga teada, nimelt 4800 krooni. Tähendab

$$s + 2s = 4800,$$

ehk

$$3s = 4800.$$

Selles võrduses  $s$  on tundmatu ehk otsitav.

Meie võrdus ütleb, et kolm  $s$  on 4800; üks  $s$  on kolm korda väiksem, seega

$$s = 1600.$$

Niisiis langeb Kasele 1600 krooni.

Märkus. Tundmatuid tähistatakse tavaliselt tähes-  
tiku viimaste tähtedega, näiteks  $x, z, u, s$ . Tundmatu tähi-  
sena on aga võimalik kasutada ka iga teist tähte, näiteks  
 $a, f, N, Q$ .

### § 17. Võrrand.

Otsitava tegelik määramine toimus eelmises näites  
võrduse abil

$$s + 2s = 4800.$$

Võrdust, mille kaudu määratakse otsitav, nimetame võr-  
randiks.

Igal võrrandil on vasak pool ja parem pool;  
esimene seisab võrdusmärgi eel, teine võrdusmärgi järel.

Otsitava arvutatud väärtust nimetame võrrandi lahendiks.

Võrrandi lahendi leidmist nimetame võrrandi lahenda-  
miseks.

Leitud lahendi kõlblikkuse proovimiseks — lahendi  
kontrollimiseks — asetame selle lahendi otsitava  
asele nii võrrandi vasakusse kui ka paremasse poolde;  
kui tulemused on võrdsed, on tegemist õige lahendiga, vas-  
tasel korral mitte. Esimesel juhul ütleme, et asetatav arv  
rahuldab võrrandit, teisel juhul, et ta võrrandit ei  
rahulda. Nii näeme, et

võrrandil	on lahend	sest
$\frac{2u}{u-1} = \frac{8}{3}$	$u = 4$	$\frac{2 \cdot 4}{4-1} = \frac{8}{3}$
$s^2 + 6 = 5s$	$s = 2$	$2^2 + 6 = 10$ ja ka $5 \cdot 2 = 10$
$t^2 - 5t = t + 7$	$t = 7$	$7^2 - 5 \cdot 7 = 14$ ja ka $7 + 7 = 14$ .

Võrrandi lahendamise näiteid.

Näide 1. Lahendame võrrandi

$$3u - 2 = 7.$$

Arutame küsimust nõnda:  $3u - 2 = 7$ , tähendab  $3u$  on 2 võrra suurem kui 7, seega ta on  $7 + 2$  ehk 9; niisiis  $3u = 9$ ; üks  $u$  on 3 korda väiksem, seega  $u = 3$ .

Kontroll: kui  $u = 3$ , siis  $3u - 2 = 3 \cdot 3 - 2$  ehk  $9 - 2$  ehk 7, nagu peab olema.

Näide 2. Lahendame võrrandi

$$\frac{2}{5}t + 13 = 21.$$

Näeme:  $\frac{2}{5}t + 13 = 21$ , järelikult  $\frac{2}{5}t$  on 13 võrra 21-st väiksem, seega  $21 - 13$  ehk 8; niisiis  $\frac{2}{5}t = 8$ . Üks viiendik  $t$  on kaks korda väiksem kui kaks viiendikku  $t$ , seega  $\frac{1}{5}t = 4$ ; terve  $t$  on oma viiendikust 5 korda suurem, seega  $t = 20$ .

Kontroll: kui  $t = 20$ , siis  $\frac{2}{5}t + 13 = \frac{2}{5} \cdot 20 + 13$  ehk  $8 + 13$  ehk 21, nagu peab olema.

## Peatükk II.

### Arvutamise põhiseadused.

#### § 18. Loendamise tulemuse ühesus.

Nii kogu arvutamine kui ka algebraliste avaldiste teisendamine tugineb vähestele tõdedele, mille üldnimeks on arvutamise põhiseadused. Nende seaduste käsitlemise rajame silmanähtavale tõsiasjale, et

antud kogus olevate esemete loendamise tulemus ei olene esemete loendamise viisist,

kui loendamisel pole ühtki eset vahele jäetud ega ole ühtki eset arvestatud enam kui üks kord.

Seda tõsiasja nimetame lühidalt loendamise aksiomiks.

Esemete arv mingis kogus on ikka täisarv. Et selles peatükis me tegeleme ainult esemete kogudega, siis siin kõik arvutähised  $a, b, c, \dots, m, n, \dots$  tähendavad ikka täisarve.

Kõik täisarvud moodustavad täisarvude rea

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, n+1, n+2, \dots$$

Täisarvude real pole lõppu.

#### § 19. Nelja põhitehte rajamine loendamisele.

##### Liitmine.

Nõutagu liita arv 5 arvuga 7. Võtame selleks täisarvude rea:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots,$$

otsime selles reas arvu 7 ja loendame sellest edasi 5 arvu:

8, 9, 10, 11, 12.

Arv 12 on arvude 7 ja 5 liitmise tulemus ehk arvude 7 ja 5 summa.

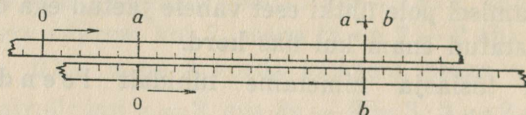
Üldistame toodud arutlust.

Olgu antud kaks täisarvu  $a$  ja  $b$ .

Ütlust „liida täisarvud  $a$  ja  $b$ “ mõistame nii, et tuleb täisarvude reas võtta arv  $a$  ning sellest edasi loendada  $b$  arvu;

neid arve kirjutame  $a + 1, a + 2, a + 3, \dots, a + b$ .

Tulemust  $a + b$  nimetame antud arvude  $a$  ja  $b$  summaks, antud arve endid liidetavaiks.



Joonis 4.

Summat  $a + b$  saab hõlpsasti määrata mehaaniliselt: olgu meil kasutada kaks ühesugust võrdsete jaotistega skaalat (joonis 4), näiteks cm-jaotistega mõõdupuud. Suunda kasvavate arvude poole nimetame skaalasuunaks. Paigutame skaalad teineteise alla nii, et nende suunad ühtiksid. Nihutame skaalasisid, kuni ülemise skaala  $a$ -kriipsu vastas alumisel seisab 0. Siis seisab alumise skaala  $b$ -kriipsu vastas ülemisel skaalal nõutav kriips  $a + b$ .

Et täisarvude rida ei lõpe, siis on võimalik temas leida kuitahes suuri arve ja nendest veel edasi loendada kuitahes kaugemale. See tähendab, et

liitmist on võimalik teostada iga arvude paari  $a$  ja  $b$  puhul.

## Lahutamine.

Nõutagu lahutada arv 6 arvust 14. Võtame selleks täisarvude rea, otsime selles reas arvu 14 ja loendame siit tagasi 6 arvu:

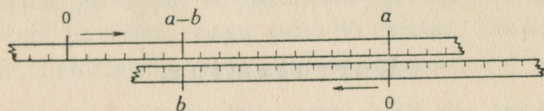
13, 12, 11, 10, 9, 8.

Arv 8 on arvust 14 arvu 6 lahutamise tulemus, ehk arvude 14 ja 6 vahe.

Üldistame toodud arutlust.

Olgu antud kaks täisarvu  $a$  ja  $b$  ning olgu  $a > b$ .

Ütlust „lahuta täisarvust  $a$  täisarv  $b$ “ mõistame nii, et tuleb võtta täisarvude reas arv  $a$  ning sellest tagasi loendada  $b$  arvu;



Joonis 5.

neid arve tähistame  $a - 1, a - 2, a - 3, \dots, a - b$ .

Tulemust  $a - b$  nimetame antud arvude  $a$  ja  $b$  vaheks, arvu  $a$  vähendatavaks, arvu  $b$  lahutatavaks.

Vahet  $a - b$  saab hõlpsasti määrata mehaaniliselt meie skaalade paariga (joonis 5): paigutame skaalad teineteise alla nii, et nende suunad oleksid vastupidised, ja nihutame neid skaalaid, kuni ülemise skaala  $a$ -kriipsu vastas seisab alumise skaala kriips 0. Siis seisab alumise skaala  $b$ -kriipsu vastas ülemisel skaalal just nõutav kriips  $a - b$ .

Täisarvude reas  $b$  arvu tagasiloendamine arvust  $a$  on teostatav üksnes siis, kui  $a > b$ :

lahutamine on teostatav ainult siis, kui vähendatav on suurem kui lahutatav.

Kui täisarvude reas võtame arvu  $a$ , loendame tagasi  $b$  arvu, ning sealt loendame edasi (arvude kasvamise suunas) jälle  $b$  arvu, siis tuleme arvu  $a$  juurde tagasi; sümbolites kirjutame seda nii:

$$(a - b) + b = a.$$

Arv  $a$  esineb siin summana, arvud  $b$  ja  $a - b$  liideta- vaina. Neist arvudest oli lahutamisel summa  $a$  antud vähendatavana ja liidetav  $b$  lahutatavana; teine liidetav  $a - b$  esines otsitavana. Seega:

lahutamine on tehe, mille abil antud summa ja ühe liidetava järgi määratakse teine liidetav.

Lahutamine on liitmise pöördtehe.

### Korrutamine.

Ütlust „korruta täisarv  $b$  täisarvuga  $a$ “ mõistame nii, et tuleb arv  $b$  võtta liidetavana  $a$  korda;

sümbolites:

$$\underbrace{b + b + b + \dots + b}_{a \text{ liidetavat}}$$

Arvu  $b$ , mis korduvalt võetakse liidetavana, nimetame korrutatavaks; arvu  $a$ , mis näitab, mitu korda arv  $b$  liidetavana tuleb võtta, nimetame korrutajaks; korrutamise tulemust nimetame korrutiseks. Korrutatav ja korrutaja kannavad ühist nimetust tegur.

Lühiduse mõttes kirjutame eespool-toodud summa

$$b + b + b + \dots + b$$

kujul

$$a \cdot b;$$

nagu tavaliselt viisiks, kirjutame korrutaja esimese tegurina.

Eespool-öeldust näeme, et korrutamise on liitmise erijuht; niisugusena teostub ta loendamise teel.

Nagu liitmine, nii ka

korrutamise on teostatav iga arvude paari  $a$  ja  $b$  puhul.

### J a g a m i n e.

Olgu antud kaks täisarvu  $a$  ja  $b$  ning olgu  $a > b$ .

Ütlust „jaga täisarv  $a$  täisarvuga  $b$ “ mõistame nii, et tuleb leida, mitu korda järjest on võimalik lahutada arvu  $b$  arvust  $a$ .

Arvu  $a$ , mida jagame, nimetame jagatavaks; arvu  $b$ , millega jagame — jagajaiks, jagamise tulemust jagatiseiks.

Öeldust järeldub, et jagamine teostub korduva lahutamise teel ja seega, nagu teisedki tehted, taandub loendamisele. Lahutamise võimalikkuse tingimusest näeme, et

jagamine on teostatav täisarvudes ainult siis, kui jagatav on suurem kui jagaja.

Jagamisel võib juhtuda, et lahutades arvust  $a$  järjest arvu  $b$  jõuame viimaks arvuni 0; sel puhul arv  $b$  mahub täisarv korda arvusse  $a$ , ehk arv  $a$  on jaguv arvuga  $b$ . Või jälle juhtub, et lahutades arvust  $a$  järjest arvu  $b$  jõuame viimaks arvuni, mis väiksem kui  $b$ ; seega edaspidine arvu  $b$  lahutamine osutub võimatuks; sel korral arv  $a$  pole jaguv arvuga  $b$ , jagamisel tekib jääk.

Kui arv  $b$  mahub arvusse  $a$  täisarv korda, kirjutame arvude  $a$  ja  $b$  jagamise tulemuse kujul

$$a : b.$$

See arv näitab, mitmest liidetavast  $b$  koosneb arv  $a$ ; järelikult

$$(a : b) \cdot b = a,$$

Arv  $a$  esineb siis korrutisena, arvud  $b$  ja  $(a : b)$  teguritena. Neist arvudest oli jagamisel antud korrutis  $a$  jagatavana ja tegur  $b$  jagajana; teine tegur  $(a : b)$  esines otsitavana. Seega:

jagamine on tehe, mille abil antud korrutise ja ühe teguri järgi leitakse teine tegur.

Jagamine on korrutamise pöördtehe.

Kui arv  $b$  mahub arvusse  $a$  täisarv  $q$  korda ja jääb jääk  $r$ , siis võime kirjutada, et

$$q \cdot b + r = a,$$

see tähendab:

jagatise ja jagaja korrutis liidetud jäägiga annab jagatava.

Aritmeetika õpetab, kuidas antud arvudest  $a$  ja  $b$  saada võimalikult vähese vaevaga nende summat, vahet, korrutist ja jagatist, see on arve

$$a + b, \quad a - b, \quad a \cdot b \quad \text{ja} \quad a : b.$$

Põhiliku tähtsusega tehnilisteks abinõudeks nende arvude määramisel on liitmistabel ja korrutamistabel.

Arvude

$$a + b, \quad a - b, \quad a \cdot b \quad \text{ja} \quad a : b$$

leidmist andmeid  $a$  ja  $b$  nimetame lühidalt arvutamiseks.

Arvutamise üksiksammude põhjendamine toimub arvutamise põhiseaduste varal.

## § 20. Liitmise põhiseadused.

Ülesanne 1. IIa klassis on  $a$  õpilast, IIb klassis on  $b$  õpilast. Õpilaste vähesuse tõttu kummaski klassis ühendatakse need üheksainsaks II klassiks. Kui suur on õpilaste arv selles klassis?

Lahendus. Nõutava arvu võime leida kahel viisil: kas liites  $a$  õpilasega  $b$  õpilast, see annab

$$a + b$$

õpilast, või liites  $b$  õpilasega  $a$  õpilast, see annab

$$b + a$$

õpilast. Et mõlemal juhul on loendatud ühed ja samad õpilased, siis on loendamisaksioomi järgi

$$a + b = b + a.$$

Viimase võrduse sisu võime sõnastada nii:

summa ei olene liidetavate järjekorrast.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame liitmise vahetuvuse seaduseks ehk, võõrkeelse nimetusega, liitmise kommutatiivsuse seaduseks.

Ülesanne 2. Perekonna peaa surma puhul pärib perekond kindlustussumma  $a$  krooni ning sellele lisaks pangas oleva hoiusumma  $b$  krooni ühes juurdekasvanud intressiga  $c$  krooni. Kui suur on pärandi koguväärtus?

Lahendus. Nõutava väärtuse võime arvutada kahel viisil: esiteks sel teel, et leiame kogu pangast saada oleva raha, see on kroonides

$$b + c,$$

ja liidame selle kindlustussummaga; see annab kroonides

$$a + (b + c);$$

teiseks võime pärandi koguväärtuse arvutada sel teel, et kindlustussummaga liidame hoiusumma, see annab kroonides

$$a + b,$$

ja tulemusega liidame hoiusumma intressi, see annab kroonides

$$(a + b) + c.$$

Et kumbki pärandi arvutuse viis loendamisaksioomi järgi annab sama tulemuse, siis peab olema kehtiv võrdus:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Viimase võrduse sisu võime sõnastada nõnda:

selle asemel, et arvuga liita kahe teise arvu summa, võib selle arvuga liita esimese liidetava ja tulemusega teise liidetava.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame liitmise ühenduvuse seaduseks ehk, võõrkeelse nimetusega, liitmise assotsiatiivsuse seaduseks.

Ülesanne 3. Hääletamisel saab kandidaat ühes hääletamisjaoskonnas  $a$  häält, mis kõik kehtivaks loetakse, teises hääletamisjaoskonnas  $b$  häält, millest aga  $c$  häält kehtivusetuks loetakse rikutud hääletamissedelite tõttu. Kui palju on kandidaat saanud kehtivaid häáli?

Lahendus. Nõutava häältehulga võib arvutada kahel viisil: loendades kehtivad hääled teises jaoskonnas, neid on  $b - c$ , ja liites need esimeses jaoskonnas saadud häältega, leiame

$$a + (b - c);$$

või jälle: loendades kõik antud hääled, neid on  $a + b$ , ja lahutades neist  $c$  kehtivusetut häält, leiame

$$(a + b) - c.$$

Et kehtivate häälte hulga loendamise tulemus ei olene häälte loendamise viisist, siis peab olema

$$a + (b - c) = (a + b) - c.$$

22 Viimase võrduse sisu võime sõnastada nii:

selle asemel, et arvuga liita kahe teise arvu vahe, võib selle arvuga liita vähendatava ja tulemusest lahutada lahutatava.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame vahe liitmise seaduseks.

Avaldises  $(a + b) + c$  sulud märgivad sama tehete järjekorda, milles tehted on märgitud avaldises  $a + b + c$ ; samuti avaldises  $(a + b) - c$  sulud märgivad sama tehete järjekorda, milles tehted on märgitud avaldises  $a + b - c$ . Seepärast võime kirjutada, et

$$a + (b + c) = a + b + c$$

ja

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

Kokkuvõttes:

sulgudes seisva summa või vahe liitmisel võib sulud ära jätta.

### Liitmise põhiseaduste rakendamise näited.

1.  $8 + 3 + 67 = 67 + 3 + 8 = 70 + 8 = 78.$   
vahetuvuse seaduse põhjal
2.  $573 + 65 = 573 + 60 + 5 = 633 + 5 = 638.$   
ühenduvuse seaduse põhjal
3.  $899 + 4175 = 4175 + 899 = 4175 + (900 - 1) =$   
vahetuvuse seaduse põhjal  
 $= 4175 + 900 - 1 = 5075 - 1 = 5074.$   
vahe liitmise seaduse põhjal
4.  $3n + (m - 2n) + (n - m) = 3n + m - 2n +$   
 $+ n - m = 2n.$

## § 21. Lahutamise põhiseadused.

Ülesanne 1. Ametniku palgast  $a$  krooni peetakse kinni tasumata tulumaks  $b$  krooni ja viivitusraha  $c$  krooni. Kui suur summa kuulub väljamaksmisele?

Lahendus. Nõutava summa võib arvutada kahel viisil: esiteks sel teel, et tulumaksu ja viivitusraha liidame, see annab  $(b + c)$  krooni, ja tulemuse lahutame palgast; nii saame kroonides

$$a - (b + c).$$

Teiseks võiksime palgast kõigepealt lahutada tulumaksu, see annab  $(a - b)$  krooni, ja tulemusest veel lahutada viivitusraha; nii saame kroonides

$$(a - b) - c.$$

Et kummalgi arvutusviisil loendamisaksiooni järgi saame sama tulemuse, siis peab olema õige võrdus:

$$a - (b + c) = (a - b) - c.$$

Viimase võrduse sõnastame nii:

selle asemel, et arvust lahutada kahe teise arvu summa, võib sellest arvust lahutada ühe liidetava ja tulemusest lahutada teise liidetava.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame summa lahutamise seaduseks.

Ülesanne 2. Kiirarvutuse testil hinnatakse parima ja nõrgima töö tulemused vastavalt  $a$  ja  $b$  punktiga ( $a > b$ ); viimasest  $b$  punktist kustutatakse töö välise külje puudulikkuse tõttu veel  $c$  punkti. Mitme punkti võrra ületab parim töö nõrgima?

Lahendus. Nõutava arvu võib määrata kahel viisil: esiteks sel teel, et leiame nõrgima töö lõpuhinna, see on  $(b - c)$  punkti, ja lahutame selle parima töö hinnangust; nii saame

$$a - (b - c);$$

teine tee nõutava arvu saamiseks on see, et eeskätt leiame esialgsete hinnangute vahe, see on  $a - b$  punkti; pannes tähele, et siin oleme lahutanud liigselt  $c$  punkti, parandame varemini-leitud vahet selle  $c$  punkti liitmisega; see annab

$$(a - b) + c.$$

Et kummalgi arvutusviisil loendamisaksiooni järgi saame sama tulemuse, siis peab olema kehtiv võrdus:

$$a - (b - c) = (a - b) + c.$$

Selle võrduse võime sõnastada nii:

selle asemel, et arvust lahutada kahe teise arvu vahe, võib sellest arvust lahutada vähendatava ja liita tulemusega lahutatava.

Praegu-sõnastatud tõsiasi nimetame vahe lahutamise seaduseks.

Avaldis  $(a - b) - c$  tähendab sedasama, mis avaldis  $a - b - c$ ; samuti tähendab avaldis  $(a - b) + c$  sedasama, mis avaldis  $a - b + c$ . Seega võime kirjutada:

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Kokkuvõttes:

summa või vahe lahutamisel võib sulud ära jätta, kui muuta sulgudes olevate liikmete ees märgid vastupidisteks, see on kirjutada märgi  $+$  asemele märk  $-$  ja märgi  $-$  asemele märk  $+$ .

## Lahutamise põhiseaduste rakendamise näited.

$$1. \quad 483 - 56 = 483 - (50 + 6) = (483 - 50) - 6 =$$

summa lahutamise seaduse põhjal

$$= 433 - 6 = 427.$$

$$2. \quad 1347 - 298 = 1347 - (300 - 2) =$$

vahe lahutamise seaduse põhjal

$$= 1347 - 300 + 2 = 1047 + 2 = 1049.$$

$$3. \quad 5p - (2p - 3q) - (3p + q) = 5p - 2p + 3q -$$

$$- 3p - q = 2q.$$

### § 22. Korrumise põhiseadused.

Ülesanne 1. Ruudulise paberi leheküljel leiame lehe pikkusel  $a$  ruutu, lehe laiusel  $b$  ruutu. Mitu ruutu on leheküljel?

Lahendus. Nõutava ruutude arvu saab määrata kahel viisil: esiteks nii, et me ruute loendame ridade viisi: igas reas  $b$  ruutu, ridu on  $a$ , seega ruutude arv on

$$a \cdot b;$$

teiseks võime aga ruute loendada ka veergude viisi: igas veerus  $a$  ruutu, veerge on  $b$ , seega ruutude arv on

$$b \cdot a.$$

Et kummalgi viisil loendamisaksiooni järgi saame sama arvu ruute, siis peab olema õige võrdus:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

See tähendab, et

korrumis ei olene tegurite järjekorrast.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame korrutamise vahetuvuse seaduseks ehk korrutamise kommutatiivsuse seaduseks.

Ülesanne 2. Telliskivid on laotud üksteise ligi virna, mille pikkuses  $b$  kivi, laiuses  $c$  kivi, kõrguses  $a$  kivi. Kui suur on kivide arv virnas?

Lahendus. Nõutava arvu saab määrata esiteks sel viisil, et me kive loendame rõhtsate kihtide viisi: kihis on  $b \cdot c$  kivi, kihte on  $a$ , seega kõiki kive

$$a \cdot (b \cdot c).$$

Teiseks võime kive loendada aga ka laiuti — ridade viisi: reas  $c$  kivi, ridu on  $a \cdot b$ , seega kõiki kive

$$(a \cdot b) \cdot c.$$

Et nii üks kui teine kivide arvu määramise viis annab loendamisaksioomi põhjal sama tulemuse, siis peab olema õige võrdus:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Kokkuvõttes:

selle asemel, et korrutada arvu kahe arvu korrutisega, võib arvu korrutada ühe teguriga ja saaduse korrutada teise teguriga.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame korrutamise ühenduvuse seaduseks ehk korrutamise assotsiatiivsuse seaduseks.

Ülesanne 3. Kaupmehel on tasuda oma kaubavarustajale Ameerikas kaks arvet  $a$  \$ ja  $b$  \$ suuruses. Kui palju läheb kaupmehel maksma nende arvete tasumine Eesti rahas, kui \$ maksab praegu  $c$  krooni?

Lahendus. Nõutava summa võib arvutada kahel viisil; esiteks võib määrata kogu võla suuruse dollarites, see on

$$a + b,$$

ja hiljemini arvutada see summa ümber Eesti rahasse, see annab kroonides

$$(a + b) \cdot c.$$

Teiseks võib määrata kummagi arve suuruse Eesti rahas, see annab kroonides

$$a \cdot c \text{ ja } b \cdot c,$$

ja siis mõlemad tulemused liita; see annab kokku kroonide arvu

$$a \cdot b + b \cdot c.$$

Et kummagi arvutusviisi puhul loendamisaksioomi järgi saame sama rahasumma, siis peab olema õige võrdus:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$$

ehk, muutes tegurite järjekorra,

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b.$$

Oma arutluse tulemuse võime sõnastada nõnda:

selle asemel, et summa korrutada mõne arvuga, võib korrutada sama arvuga eraldi iga liidetava ja liita saadused.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame korrutamise jaotuvuse seaduseks ehk korrutamise distributiivsuse seaduseks.

Ülesanne 4. Riigiametniku kuupalk on  $a$  krooni, millest maha arvatakse  $b$  krooni pensionimaksu. Kui suur on  $c$  kuu eest ametnikule väljamakstud teenistustasu?

Lahendus. Nõutava tasu võime arvutada kahel viisil. Esiteks sel teel, et leiame ametnikule tegelikult väljamakstava kuupalga, see on kroonides

$$a - b,$$



$$\begin{aligned}
 3. \quad 46 \cdot 98 &= 46 \cdot (100 - 2) = 46 \cdot 100 - 46 \cdot 2 = \\
 &\quad \text{vahe korrutamise} \\
 &\quad \text{seaduse põhjal} \\
 &= 4600 - 92 = 4508.
 \end{aligned}$$

$$4. \quad 3a \cdot 4b \cdot \frac{1}{2} a = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot b = 3 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot b = 6a^2b.$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad p(p+q) + p(p-q) &= (p^2 + pq) + \\
 + (p^2 - pq) &= p^2 + pq + p^2 - pq = 2p^2.
 \end{aligned}$$

### § 23. Jagamise põhiseadused.

Olgu  $a$ ,  $b$  ja  $c$  täisarvud ja jagugu arv  $b$  arvuga  $c$ . Siis jagub selle arvuga ka korrutis  $a \cdot b$ . Tõepoolest, andku arv  $b$  jagamisel arvuga  $c$  jagatise  $n$ :

$$\frac{b}{c} = n,$$

siis

$$b = n \cdot c.$$

Sellest järeldub, et

$$a \cdot b = a \cdot (n \cdot c),$$

ehk, korrutamise ühenduvuse seaduse järgi,

$$a \cdot b = (a \cdot n) \cdot c,$$

teiste sõnadega,

$$\frac{a \cdot b}{c} = a \cdot n.$$

See näitab, et korrutis  $a \cdot b$  jagub arvuga  $c$ .

Asendades viimases võrduses  $n$ -i jagatisega  $\frac{b}{c}$ , saame:

$$\frac{ab}{c} = a \cdot \frac{b}{c}$$

Selles võrduses peituva lause sõnastame lühidalt nii:

selle asemel, et jagada korrutis mingi arvuga, võib jagada selle arvuga korrutise ühe teguri ja tulemuse korrutada teise teguriga.

Kõnesolevat lauset nimetame korrutise jagamise seaduseks.

Analoogilise tõestuskäigu rakendamisel jõuame otsusele, et juhul, kui arvud  $a$  ja  $b$  on jaguvad arvuga  $c$ , siis

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

ja edasi, et juhul, kui arvud  $a$  ja  $b$  on jaguvad arvuga  $c$  ning  $a > b$ , siis

$$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

Tõepoolest:

Olgu

$$\frac{a}{c} = m \quad \text{ja} \quad \frac{b}{c} = n;$$

siis

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = m \pm n.$$

Teiselt poolt

$$a = c \cdot m \quad \text{ja} \quad b = c \cdot n,$$

seega

$$a \pm b = c \cdot m \pm c \cdot n,$$

ehk

$$a \pm b = c \cdot (m \pm n);$$

see tähendab, et

$$\frac{a \pm b}{c} = m \pm n.$$

Järelikult

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c},$$

m. o. t. t. (mida oligi tarvis tõestada).

Eelmises võrduses peituvad laused:

selle asemel, et jagada summa mõne arvuga, võib jagada selle arvuga kummagi liidetava ja liita tulemused;

selle asemel, et jagada vahe mõne arvuga, võib jagada selle arvuga vähendatava ning lahutatava ja lahutada esimesest tulemusest teine.

Praegu-sõnastatud tõsiasi ju nimetame vastavalt summa ja vahe jagamise seadusteks.

Näited.

$$1. \quad \frac{700}{25} = \frac{7 \cdot 100}{25} = 7 \cdot \frac{100}{25} = 7 \cdot 4 = 28,$$

korrutise jagamise  
seaduse põhjal

$$2. \quad \frac{4575}{15} = \frac{4500 + 75}{15} = \frac{4500}{15} + \frac{75}{15} =$$

summa jagamise  
seaduse põhjal

$$= \frac{45 \cdot 100}{15} + 5 = \frac{45}{15} \cdot 100 + 5 = 3 \cdot 100 + 5 = 305.$$

korrutise jagamise  
seaduse põhjal

## § 24. Arvutamise põhiseaduste rakendusi.

Eespool oleme näidanud arvutamise põhiseaduste kehtivust täisarvude vallas. Hiljemini näeme, et need seadused jäävad kehtima ka murdarvude puhul. Näiteks

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$$

ja

$$\frac{3}{4}(12 + 28) = \frac{3}{4} \cdot 12 + \frac{3}{4} \cdot 28.$$

Iga arvutamise põhiseadust on võimalik avaldada ka hel viisil: üks kord eespooltoodud võrdusega, teine kord vahetades selles võrduses pooled; näiteks ühtaegu võrdusega

$$a - (b - c) = a - b + c$$

on kehtiv võrdus

$$a - b + c = a - (b - c);$$

ühtaegu võrdusega

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

on kehtiv võrdus

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Arvutamise põhiseadused on aluseks nii numbrilisele arvutamisele kui ka avaldiste teisendamisele.

Näide 1.

$$89 - 17 + 7 = 89 - (17 - 7) = 89 - 10 = 79.$$

Näide 2.

$$8 \cdot 1\frac{1}{3} + 8 \cdot 5\frac{2}{3} = 8 \cdot (1\frac{1}{3} + 5\frac{2}{3}) = 8 \cdot 7 = 56.$$

Näide 3.

$$y = 17(x + 2) - 5(2x - 13) + \frac{1}{2}(8x - 172).$$

Korrutamise jaotuvuse seaduse põhjal saame

$$y = (17x + 34) - (10x - 65) + (4x - 86).$$

Vahe lahutamise ja vahe liitmise seaduste põhjal leiame edasi

$$y = 17x + 34 - 10x + 65 + 4x - 86.$$

Koondamisel saame

$$y = 11x + 13.$$

Avaldise  $y$  numbrilise väärtuse arvutamisel tema algkujust lähtudes tuleks sooritada 10 tehet, sama väärtuse arvutamine avaldise teisendatud kujust nõuab ainult 2 tehet.

Näide 4.

$$S = a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} (a + b) \cdot \frac{1}{4} a.$$

Avaldise teine liige on korrutamise vahetuvuse seaduse põhjal võrdne avaldisega

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot a \cdot (a + b);$$

korrutamise ühenduvuse seaduse põhjal on see aga võrdne korrutisega

$$\frac{1}{4} a(a + b).$$

Seega

$$S = a^2 - \frac{1}{4} a(a + b).$$

Korrutamise jaotuvuse seaduse põhjal saame

$$S = a^2 - \left( \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} ab \right)$$

ning siit summa lahutamise seaduse põhjal

$$\begin{aligned} S &= a^2 - \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab = \\ &= \frac{3}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab; \end{aligned}$$

seda saame korrutamise jaotuvuse seaduse põhjal kirjutada kujul

$$S = \frac{1}{4} a(3a - b).$$

### Peatükk III.

## Positiivsed ja negatiivsed arvud.

### § 25. Vastassuunalised suurused.

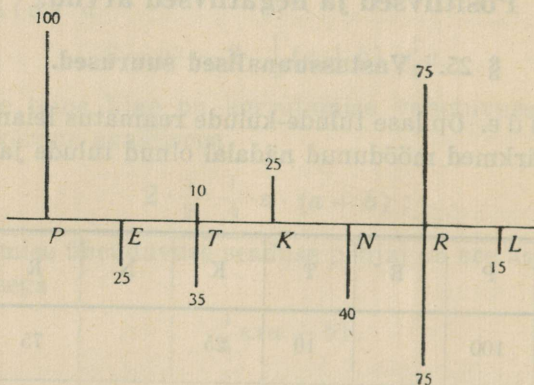
Näide. Õpilase tulude-kulude raamatus leiame järgmised märkmed möödunud nädalal olnud tulude ja kulude kohta:

Päev	P	E	T	K	N	R	L
Tulu senti	100		10	25		75	
Kulu senti		25	35		40	75	15

Esitame need andmed näitlikult joonisel.

Üks võimalikkudest viisidest selleks on järgmine: võtame vabalt mõne sirgjoone (joonis 6), märgime sellel võrdsete vahemikkude järel rea punkte ja valime need nädalapäevade kujutisteks, tähistades neid järjest tähtedega *P*, *E*, *T*, ... Neist punkttest tõmbame püstsirged ja kujutame viimaseil kohaselt valitud mõõdus tulud näiteks ülespoole suunatud lõikudena, kulud aga vastassuunas, see on allapoole suunatud lõikudena. Töö tulemusena esineb joonisel kujutatud pilt. Selles peegeldub õpilase tulude-kulude käik kõigis üksikasjus: sealt näeme esimesel pilgul, mis päeval esines vaid tulu, mis päeval vaid kulu, mis päeval tulu oli kuluga tasakaalus, mis päeval kulu oli ülekaalus.

Suursi, nagu tulu ja kulu, varandus ja võlg, kahju ja kasu, välja- ja sisseveetud kauba hulgad, nime-tame vastassuunalisteks suurusteks. Sää-raste suurustena esinevad ka alakaal ja ülekaal, tempera-



Joonis 6.

tuuri sooja- ja külmakraadid, kõrgused ülalpool ja allpool merepinda, aastaarvud enne ja pärast Kristuse sündimist.

Kõik eespool-nimetatud suurused on suunaga suurused; nende vastandina olgu nimetatud suunata suurused, nagu näiteks: linna elanikkude arv, ringjoone pikkus, keha kaal.

### § 26. Positiivsed ja negatiivsed arvud.

Olgu kassas mingi rahasumma. Kui sellele lisanduks tulu  $b$  senti, siis oleks kassas endisest summast  $b$  senti enam; kui kassas olevast rahast tuleks kanda kulu  $c$  senti, siis oleks kassas endisest summast  $c$  senti vähem.

Sel põhjusel asendame edaspidi tulu-kulu küsimusis

kirjutise:	kirjutisega:
tulu $b$ senti	+ $b$ senti
kulu $c$ senti	— $c$ senti

samuti asendame kasu-kahju küsimusis

kirjutise:	kirjutisega:
kasu $m$ krooni	+ $m$ krooni
kahju $n$ krooni	— $n$ krooni

ja sooja-külma küsimusis

kirjutise:	kirjutisega:
sooja $p$ kraadi	+ $p$ kraadi
külma $q$ kraadi	— $q$ kraadi

Neis kirjutisis märk pluss asendab meil sõnu tulu, kasu, sooja; märk miinus aga sõnu kulu, kahju, külma. Järelikult sümbolid + ja — ei ole siin tehtemärgid, nagu tavaliselt, vaid suuruse suuna tähised.

Me ütleme, et sümbolid nagu

$$+5 \qquad +7\frac{1}{2} \qquad +11,4$$

kujutavad positiivseid arve; seevastu sümbolid nagu

$$-8 \qquad -3\frac{3}{5} \qquad -12,7$$

kujutavad negatiivseid arve.

Kui positiivse või negatiivse arvu kirjutises jätame ära suunda näitava märgi, saame selle arvu absoluutvääruse.

Näiteks arvu  $+7\frac{1}{2}$  absoluutväärus on  $7\frac{1}{2}$   
 „  $-3,8$  „ „ „  $3,8$ .

Lühemalt kirjutame viimaseid sõnastusi nii:

$$\left| +7\frac{1}{2} \right| = 7\frac{1}{2}$$

$$\left| -3,8 \right| = 3,8.$$

Positiivseid ja negatiivseid arve nimetame ühise nimetusega relatiivseteks arvudeks ehk suunatud arvudeks.

Kui võimaliku valesti mõistmise pärast on vaja näidata, et märgid  $+$  ja  $-$  on arvu suuna tähised, siis võetakse sümbolid

$$+b \quad -c \quad +m \quad -n \quad +p \quad -q$$

sulgudesse:

$$(+b) \quad (-c) \quad (+m) \quad (-n) \quad (+p) \quad (-q).$$

Kirjutusviisi sulgudega kasutame igal juhul, kui märgid pluss ja miinus esinevad kõrvuti, üks kord tehtmärgina, teine kord suuna tähisena. Näiteks kirjutises

$$-7 + (+3) + (-2) - (+5) - (-1)$$

teine ja neljas pluss ning esimene, teine ja viies miinus on suuna tähised; seevastu esimene ja kolmas pluss ning kolmas ja neljas miinus on tehtmärgid.

## § 27. Relatiivsete arvude järjestus suuruse järgi.

Ülesanne. Laskevõistlusel saavutas

õpilane K a r u 15 punkti alla klassi keskmist,

„ M ä n d 4 „ üle klassi keskmise,

„ V ä l i klassi keskmise,

„ S u s i 18 punkti üle klassi keskmise,

„ K a s k 7 „ alla klassi keskmist.

Järjesta need õpilased nende laskeosavuse paremuse järgi.

L a h e n d u s. On selge, et kasvava paremuse järjekord on see:

Karu	Kask	Väli	Mänd	Susi
15 p. alla keskmist	7 p. alla keskmist	ei üle ega alla keskmist	4 p. üle keskmise	18 p. üle keskmise

Märgime Välja taseme, mille suhtes punktid on loetud üle ja alla olevateks, sümboliga 0. Tarvitame alla-suuna sümboliks märki —, üle-suuna sümboliks märki +. Siis saame kõnesolevad võistlustulemused kirjutada lühidalt kujul:

Karu	Mänd	Väli	Susi	Kask
—15	+4	0	+18	—7

või järjestatult kasvava paremuse järjes

Karu	Kask	Väli	Mänd	Susi
—15	—7	0	+4	+18

Seega tuleb lugeda kehtivaks võrratuste rida:

$$-15 < -7 < 0 < +4 < +18.$$

Üldistades elmist mõttekäiku ütleme nõnda:

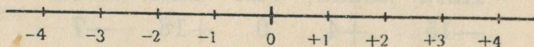
iga negatiivne arv on väiksem igast positiivsest; kahest positiivsest arvust on see suurem, millel on suurem absoluutväärtus; kahest negatiivsest arvust on see suurem, millel on väiksem absoluutväärtus; null on suurem igast negatiivsest arvust ja väiksem igast positiivsest arvust.

## § 28. Relatiivsete arvude skaala.

Eriti ülevaatliku pildi suuruse järgi järjestatud positiivsetest ja negatiivsetest arvudest saame järgmisel viisil: võtame arvtelje (joonis 7), valime temal mõne punkti nullpunktiks ning sellest punktist lähtudes kanname teljele kujutamishüliku 1, 2, 3, ... korda nii pare-

male kui ka vasakule poole. Saadud lõikude lõpud märke kriipsukestega ning viimased tähistame märkidega  $+1, +2, +3, \dots$  nullist paremale poole liikudes ja märkidega  $-1, -2, -3, \dots$  vasakule poole liikudes. Saadud joonist nimetame positiivsete ja negatiivsete arvude skaalaks ehk astmikuks. Seda skaalat vaadeldes näeme, et arvude suurem-väiksem-olemise tunnust võime nüüd sõnastada lühidalt nii:

kahest arvust on see suurem, millele vastav kriips skaalal asetseb teise omast paremal pool.



Joonis 7.

Positiivsete ja negatiivsete arvude astmiku tuntumaks näiteks on termomeetri skaala. See seisab harilikult püsti. Kahest temperatuurist on see kõrgem, millele vastav kriips termomeetri skaalal asetseb kõrgemal.

## § 29. Relatiivsete arvude liitmine.

**Ülesanne.** Mängitakse õnnemängu. Lõppegu esimene voor võiduga 9 senti ja liitugu selle võiduga teisel voorul võit 4 senti. Kui suur on kogu võit?

**Lahendus.** On selge, et kogu võit on  $9 + 4$  ehk 13 senti: võit 9 senti koos võiduga 4 senti on sama, mis võit 13 senti.

Samal viisil võiksime kirjutada, et võit 9 senti koos kaotusega 4 senti on sama, mis võit 5 senti, ja edasi, et kaotus 9 senti koos võiduga 4 senti on sama, mis kaotus

5 senti, ning lõpuks, et kaotus 9 senti koos kaotusega 4 senti on sama, mis kaotus 13 senti.

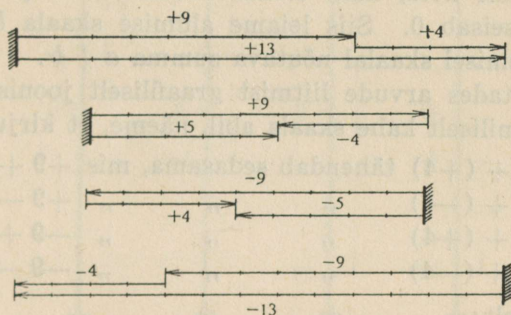
Kirjutades need laused matemaatilises lühikirjas saame:

$$(+9) + (+4) = (+13)$$

$$(+9) + (-4) = (+5)$$

$$(-9) + (+4) = (-5)$$

$$(-9) + (-4) = (-13)$$



Joonis 8.

Jättes mitte-hädavajalikud sulud lühiduse mõttes ära, kirjutame ülaltoodud summade veeru nii:

$$+9 + (+4) = +13$$

$$+9 + (-4) = +5$$

$$-9 + (+4) = -5$$

$$-9 + (-4) = -13.$$

Kujutades andmed suunatud löikudena võiksime need tulemused ka kohe jooniselt ära lugeda (joonis 8).

Andmete päritolu arvestamata sõnastame tulemuse üldkujul nõnda:

kahe sama märgiga arvu summal on sama märk, mis liideta-  
vailgi; summa absoluutväärtus on liidetavate absoluutväärtuste  
summa;

kahe erineva märgiga arvu summal on selle liidetava märk, millel on suurem absoluutväärtus; summa absoluutväärtus on liidetavate absoluutväärtuste vahe.

Positiivsete ja negatiivsete arvude summa saame määrata ka mehaaniliselt. Olgu näiteks liita kaks positiivset või negatiivset arvu  $a$  ja  $b$ . Kasutame selleks kaht ühesugust, võrdsete jaotustega skaalat. Paigutame nad teineteise alla nõnda, et nende suunad ühtiksid, ja nihutame neid, kuni ülemise skaala  $a$ -kriipsu vastas alumisel seisab 0. Siis leiame alumise skaala  $b$ -kriipsu vastas ülemisel skaalal nõutava summa  $a + b$ .

Sooritades arvude liitmist graafiliselt joonisel 8 või ka mehaaniliselt kahe skaala abil, näeme, et kirjutis

$$\begin{array}{l} +9 + (+4) \text{ tähendab sedasama, mis } +9 + 4 \\ +9 + (-4) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad +9 - 4 \\ -9 + (+4) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad -9 + 4 \\ -9 + (-4) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad -9 - 4, \end{array}$$

ehk üldiselt:

$$\begin{array}{l} a + (+b) = a + b \\ a + (-b) = a - b. \end{array}$$

Seega liitmisel

märkide paar  $+$  ( $+$ ) asendub ainsa märgiga  $+$ ,  
 „ „  $+$  ( $-$ ) „ „ „  $-$ .

Näited.

1.  $+19 + (+7) = +19 + 7 = +26$ .
2.  $-31 + (-9) = -31 - 9 = -40$ .
3.  $-4x + (-13x) = -4x - 13x = -17x$ .

### § 30. Relatiivsete arvude lahutamine.

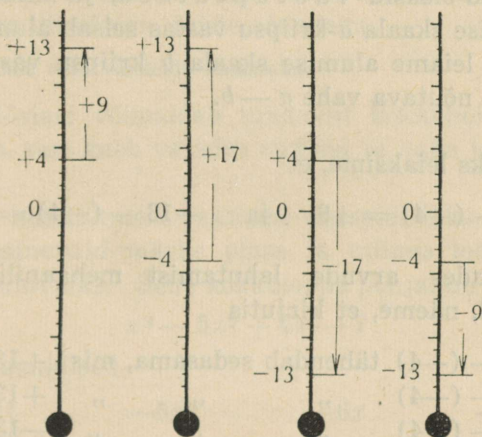
Ülesanne. Maapinnal näitab termomeeter  $+13^{\circ}$ , lennukil õhus aga kõigest  $+4^{\circ}$ . Kui suur on esimese ja teise temperatuuri vahe?

Lahendus. Otsitav vahe on

$$+13 - (+4)$$

kraadi. Küsimus nõuab niisuguse arvu  $x$  leidmist, mis  $+4$ -ga liites annaks  $+13$ :

$$+4 + x = +13.$$



Joonis 9.

Proovimise teel leiame, et otsitavaks arvuks on  $+9$ :  
tõepoolest  $+4 + (+9) = +13$ . Seega:

$$+13 - (+4) = +9.$$

Samale tulemusele jõuame eriti kergelt, kui vaatleme termomeetri skaalat (joonis 9); tõepoolest

$$+13 - (+4) = +9.$$

Analoogiliselt leiame termomeetri skaalal, et

$$+13 - (-4) = +17$$

ja edasi, et

$$-13 - (+4) = -17$$

$$-13 - (-4) = -9.$$

Relatiivsete arvude vahet saame määrata ka mehaanilisel teel.

Olgu  $a$  ja  $b$  kaks relatiivset arvu. Nõutagu lahutada arvust  $a$  arv  $b$ . Võtame kaks ühesugust võrdsete jaotustega skaalat, paigutame nad teineteise alla nõnda, et skaalade suunad oleksid vastupidised, ja nihutame neid, kuni ülemise skaala  $a$ -kriipsu vastas seisab alumisel skaalal 0. Siis leiame alumise skaala  $b$  kriipsu vastas ülemisel skaalal nõutava vahe  $a - b$ .

Näiteks leiaksime, et

$$+13 - (+4) = +9 \quad \text{ja} \quad +13 - (-4) = +17.$$

Sooritades arvude lahutamist mehaaniliselt kahe skaala abil, näeme, et kirjutis

$$\begin{array}{l} +13 - (+4) \text{ tähendab sedasama, mis } +13 - 4 \\ +13 - (-4) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad +13 + 4 \\ -13 - (+4) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad -13 - 4 \\ -13 - (-4) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad -13 + 4, \end{array}$$

ehk üldiselt:

$$\begin{aligned} a - (+b) &= a - b \\ a - (-b) &= a + b. \end{aligned}$$

Seega lahutamisel

märkide paar  $- (+)$  asendub ainsa märgiga  $-$ ,  
 „ „  $- (-)$  „ „ „  $+$ .

Näited.

1.  $+25 - (+17) = +25 - 17 = +8.$
2.  $-31 - (-16) = -31 + 16 = -15.$
3.  $-4N^2 - (-5N^2) = -4N^2 + 5N^2 = N^2.$

Vahetades võrduses

$$a + (-b) = a - b$$

pooled, saame

$$a - b = a + (-b).$$

See tähendab, et negatiivsete arvude kasutamisele võtmisel arvu lahutamist saab ikka asendada vastassuunalise arvu liitmisega, teiste sõnadega,

iga vahet võib vaadelda summana.

See tõsiasi võimaldab tunduvat kokkuhoidu lausete sõnastusis, sest kaob vajadus summa ja vahe juhu eristamiseks.

Kõiki hulkliikmeid vaatleme edaspidi ikka **summa**dena; esinevaid märke pluss ja miinus loeme liikme juurde kuuluvaiks. Selle kokkuleppe põhjal on hulkliikme

$$x^3 - 5x^2 + 6x - 7$$

liikmeiks avaldised

$$+x^3 \qquad -5x^2 \qquad +6x \qquad -7.$$

### § 31. Relatiivsete arvude korrutamine.

**Ülesanne 1.** Kell jääb 5 sekundit tunni kohta järele, seega tema käigu parandus on +5 sekundit tunni kohta. Keskpäeval kell näitas parajasti õiget aega. Misuguse paranduse peab lisandama kella hilisemale näitamisele, ütleme kell +4, et saada õiget aega?

**Lahendus.** Arutame asja nõnda:

Näidates keskpäeval õiget aega ja jäädes järgneva 4 tunni jooksul järele kokku 4 · 5 ehk 20 sekundit, näitab osuti kella 4 ajal 20 sekundit vähem kui tarvis. Seega on otsitav parandus 20 sekundit, mis tuleb kella näitami-

sele lisandada. Seepärast kirjutame nõutava paranduse sekundeis kujul

$$+20.$$

Sellest kirjutisest pole aga näha paranduse saamislugu: ta on koostunud positiivse 4 tunni jooksul võrdseist üksiktunni parandusist  $+5$  sekundit. Et seda asjaolu nähtavale tuua, kirjutame kõnesoleva paranduse kujul

$$(+4) \cdot (+5),$$

mõistes selle kirjutisega arvu  $+20$ :

$$(+4) \cdot (+5) = +20.$$

Küsimine edasi, missuguse paranduse peab lisandama kella varasemale näitamisele, ütleme kell 4 tundi enne keskpäeva ehk kell  $-4$ , et saada õiget aega?

Arutame asja nõnda:

Jäädes keskpäevale eelneval 4 tunnil järele kokku  $4 \cdot 5$  ehk 20 sekundit, näitas osuti keskpäeval õiget aega. Tähen-dab, kella  $-4$  ajal näitas osuti 20 sekundit ena m kui tarvis. Seega on otsitav parandus 20 sekundit, mis tuleb kella näitamisest lahutada. Seepärast kirjutame nõutava paranduse sekundeis kujul

$$-20.$$

Selle paranduse saamislugu on järgmine: ta on koostunud 4 negatiivse tunni jooksul võrdseist üksiktunni parandusist  $+5$  sekundit. Et seda asjaolu nähtavale tuua, kirjutame kõnesoleva ajaparanduse kujul

$$(-4) \cdot (+5),$$

mõistes selle kirjutisega arvu  $-20$ :

$$(-4) \cdot (+5) = -20.$$

Ülesanne 2. Kell ruttab 5 sekundit tunni kohta ette, seega tema käigu parandus on  $-5$  sekundit tunni kohta. Keskpäeval kell näitas õiget aega. Missuguse paranduse peab lisandama kella hilisemale näitamisele, ütleme kell  $+4$ , et saada õiget aega?

Lahendus. Arutades eespool-näidatud viisil näeme, et otsitav parandus on sekundeis  $-20$ . Kirjutame selle paranduse, märkides ühtlasi tema saamisluгу, kujul

$$\begin{aligned} & (+4) \cdot (-5), \\ \text{nii et} \quad & (+4) \cdot (-5) = -20. \end{aligned}$$

Küsime edasi, missuguse paranduse peab lisandama kella varasemale näitamisele, ütleme kell  $-4$ , et saada õiget aega?

Arutades jälle eespool-näidatud viisil näeme, et otsitav parandus on sekundeis  $+20$ . Kirjutame selle paranduse, märkides ühtlasi tema saamisluгу, kujul

$$\begin{aligned} & (-4) \cdot (-5), \\ \text{nii et} \quad & (-4) \cdot (-5) = +20. \end{aligned}$$

Jättes kõrvale andmete päritolu mõistame edaspidi ikka

avaldist	arvuna
$(+4) \cdot (+5)$	$+20$
$(-4) \cdot (+5)$	$-20$
$(+4) \cdot (-5)$	$-20$
$(-4) \cdot (-5)$	$+20$

Üldiselt asja sõnastades ütleme nii:

korrutis on positiivne, kui tegurid on ühe ja sama märgiga arvud; korrutis on negatiivne, kui tegurid on erinevate märkidega arvud;

korrutise absoluutväärtus on võrdne tegurite absoluutväärtuste korrutisega.

Relatiivsete arvude korrutise märkimisel asetame tegurid alati sulgudesse. Korrutamise tulemuse kirjuti- ses jätame sulud ära.

Näited.

$$1. (-2) \cdot (-10 \frac{1}{2}) = +2 \cdot \frac{21}{2} = +21.$$

$$2. (+0,05) \cdot (-7,2) = -0,36.$$

$$3. (-a) \cdot (+a^2) = -a^3.$$

### § 32. Relatiivsete arvude astendamise.

Eelmises paragraafis öeldu põhjal saame, et

$$(+7)^2 = (+7) \cdot (+7) = +49$$

$$(+5)^3 = (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) = (+25) \cdot (+5) = +125$$

$$(-9)^2 = (-9) \cdot (-9) = +81$$

$$(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = (+16) \cdot (-4) = -64$$

$$(+a)^2 = +a^2$$

$$(-a)^2 = +a^2$$

$$(+a)^3 = +a^3$$

$$(-a)^3 = -a^3.$$

Eriti leiame, et

$$(-1)^2 = +1$$

$$(-1)^3 = -1$$

$$(-1)^4 = +1$$

$$(-1)^5 = -1$$

ja üldiselt, et

$$(-1)^{2n} = +1$$

$$(-1)^{2n-1} = -1.$$

Samuti leiame, et iga astendaja  $n$  puhul on

$$(+a)^n = a^n$$

ja

$$(-a)^{2n} = a^{2n}$$

$$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}$$

Näeme, et

positiivse arvu aste on positiivne; negatiivse arvu paaris-  
arvulise astendajaga aste on positiivne; negatiivse arvu paaritu-  
arvulise astendajaga aste on negatiivne.

### § 33. Relatiivsete arvude jagamine.

Olgu  $a$  ja  $b$  kaks relatiivset arvu. Nende jagatisena mõistame niisugust arvu  $x$ , mis korrutamisel arvuga  $b$  annab arvu  $a$ , teiste sõnadega, arvu  $x$ , mille puhul

$$b \cdot x = a.$$

Et korrutise absoluutväärtus on võrdne tegurite absoluutväärtuste korrutisega, siis peab olema:

$$|b| \cdot |x| = |a|.$$

Siit saame jagatise absoluutväärtuse kujul

$$|x| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Arvu  $x$  märgi peab valima nõnda, et korrutis  $bx$  saaks arvu  $a$  märgi: kui  $b$  ja  $a$  on ühe ja sama märgiga, peab  $x$  olema märgiga  $+$ , vastasel korral märgiga  $-$ .

Seega:

jagatis on positiivne, kui jagatav ja jagaja on ühe ja sama märgiga arvud; jagatis on negatiivne, kui jagatav ja jagaja on erinevate märkidega arvud;

jagatise absoluutväärtus on jagatava ja jagaja absoluutväärtuste jagatis.

Relatiivsete arvude jagatise märkimisel jagamismärgiga: asetame jagatava ja jagaja alati sulgudesse; jagatise märkimisel murrujoone abil pole sulud vajalikud. Jagamise tulemuse kirjutises jätame sulud ära.

Näited.

$$(+35) : (+7) = +5 \qquad (+35) : (-7) = -5$$

$$(-35) : (+7) = -5 \qquad (-35) : (-7) = +5$$

$$\frac{-7}{+10} = -0,7 \qquad \frac{+3}{-4} = -\frac{3}{4} \qquad \frac{-12}{-28} = +\frac{3}{7}$$

### § 34. Arvutamise põhiseadused positiivsete arvude vallas.

Eespool-antud tehetehiste järgi käies leiame, et

$$\begin{aligned}
 +3 + (+8) &= +8 + (+3), \\
 [(+2) \cdot (+3)] \cdot (+7) &= (+2) \cdot [(+3) \cdot (+7)], \\
 (+2) \cdot [+3 + (+5)] &= (+2) \cdot (+3) + (+2) \cdot (+5).
 \end{aligned}$$

Neil ja teistel niisugustel näidetel veendume, et arvutamise põhiseadused, mis kehtivad suunata arvude vallas, kanduvad muutumatult üle positiivsete arvude valda.

Kui vaatleme positiivseid arve ja tehteid nendega, siis näeme, et need arvud oma omadustelt milleski ei erine meile varemini tuntud märgita ehk suunata arvudest.

Näiteks on

$+3 < +5$	ja rööbiti sellega	$3 < 5,$
$+7 - (+4) = +3$	„ „ „	$7 - 4 = 3,$
eüasi		
$(+30) : (+5) = +6$	„ „ „	$30 : 5 = 6,$
samuti		
$(+3)^4 = +81$	„ „ „	$3^4 = 81.$

Järelikult pole põhjust arvutamisel vahet teha arvude  $+3$  ja  $3$ , arvude  $+7\frac{1}{2}$  ja  $7\frac{1}{2}$  ning arvude  $+9,4$  ja  $9,4$  vahel. Seepärast jätame positiivse arvu kirjutamisel märgi pluss ära, kui seda märki pole tarvis eriti rõhutada miinus-märgi vastandina. Nii kirjutame võrduse

$$+7 + (-3) = +4$$

asemel lühemalt

$$7 + (-3) = 4$$

ja võrduse

$$(-9)^2 = +81$$

asemel lühemalt

$$(-9)^2 = 81.$$

### § 35. Arvuvalla laiendamine negatiivsete arvudega.

Pole raske veenduda, et positiivsete arvude vallas kehtivad arvutamise põhiseadused kehtivad ka positiivsete ja negatiivsete arvude vallas, kui aga mõista seal summat, vahet, korrutist ja jagatist nii, nagu neid eespool seletasime.

\* Näited.

$$1. \quad -7 + (+13) = -7 + 13 = +6$$

$$+13 + (-7) = +13 - 7 = +6.$$

Seega

$$-7 + (+13) = +13 + (-7),$$

tähendab, näite puhul kehtib liitmise vahetuvuse seadus.

$$2. \quad (-7) \cdot [(-5) \cdot (+3)] = (-7) \cdot (-15) = +105$$

$$[(-7) \cdot (-5)] \cdot (+3) = (+35) \cdot (+3) = +105.$$

Seega

$$(-7) \cdot [(-5) \cdot (+3)] = [(-7) \cdot (-5)] \cdot (+3),$$

tähendab, näite puhul kehtib korrutamise ühenduvuse seadus.

$$3. \quad (-4) \cdot [+13 - (+7)] = (-4) \cdot [13 - 7] =$$

$$= (-4) \cdot (+6) = -24$$

$$(-4) \cdot (+13) - (-4) \cdot (+7) = -52 - (-28) =$$

$$= -52 + 28 = -24.$$

Seega

$(-4) \cdot [+13 - (+7)] = (-4) \cdot (+13) - (-4) \cdot (+7)$ ,  
tähendab, näite puhul kehtib korrutamise jaotuvuse seadus.

Neist näiteist näeme, et arvutamise põhiseadused, mis valitsevad positiivsete arvude vallas, on muutumatult kehtivad ka positiivsete ja negatiivsete arvude vallas. Õeldu põhjal võime vaadelda negatiivseid arve mitte mingi omaette arvuliigina, vaid positiivsete arvude valla loomuliku laiendina. Positiivsed ja negatiivsed arvud moodustavad koos relatiivsete arvude valla.

Relatiivsete arvude valda kuuluvaks loeme ka arvu 0. Oma omadustelt ta erineb tunduvalt kõigist teistest arvudest. Leiame kõigepealt, et igasuguse arvu  $a$  puhul

$$\begin{array}{ll} a + 0 = a & a - 0 = a \\ 0 + a = a & 0 - a = -a. \end{array}$$

Olgu nüüd  $a$  mõni täisarv. Siis korrutamise definitsiooni järgi

$$a \cdot 0 = \underbrace{0 + 0 + 0 + \dots + 0}_a,$$

$a$  liidetavat

ehk

$$a \cdot 0 = 0.$$

Siit järeldub, et

$$0 : a = 0.$$

Olgu  $a$  murdarv  $\frac{m}{n}$ . Võttes nullist ühe  $n$ -diku ja siis  $m$  niisugust, näeme, et võrdus

$$a \cdot 0 = 0$$

jääb kehtima ka murdarvulise  $a$  puhul. Samuti jääb tehtud eeldusel kehtima võrdus

$$0 : a = 0.$$

Avaldisel  $0 \cdot a$  korrutamise definitsiooni järgi pole mõtet. Lepime kokku mõista selle sümboliga sedasama, mis sümboliga  $a \cdot 0$ . Siis oleks korrutamise vahetuvuse seadus kehtiv ka nulli puhul ja oleks

$$0 \cdot a = 0.$$

Küsime lõpuks, mida tähendab sümbol

$$a : 0 ?$$

Jagamise definitsiooni järgi sümbol  $a : 0$  nõuab niisuguse arvu  $x$  leidmist, mis korrutamisel nulliga annaks arvu  $a$ . Niisugust arvu  $x$  aga ei leidu: tõepoolest, misuguse väärtuse ka annaksime  $x$ -le, ikka on

$$0 \cdot x = 0$$

ja mitte  $a$ , nagu nõutakse. Sellest järeldub, et sümbolil  $a : 0$  pole mõtet ja seepärast

**nulliga jagada ei saa.**

## Peatükk IV.

### Täisavaldised.

#### § 36. Üksliikmete korrutamine.

Olgu antud korrutada kaks ühe ja sama arvu astet, näiteks avaldis  $a^m$  avaldisega  $a^n$ . Tuletades meelde nende avaldiste tähendust, saame

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_m \text{ tegurit} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_n \text{ tegurit}.$$

Paremalt pool seisvate tegurite koguarv on  $m + n$ ; seega võib nende tegurite korrutist kirjutada lühemalt kujul  $a^{m+n}$ ; järelkult

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Näeme, et ühe ja sama arvu astmete korrutis on sama arvu aste; korrutises esinev astendaja on tegurites esinevate astendajate summa. Kergema meelespidamise otstarbel anname tulemuse olulise osa lühisõnastuses:

ühe ja sama arvu astmete korrutamisel astendajad liidetakse.

Näited.

1.  $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$ .
2.  $x \cdot x^3 = x^{1+3} = x^4$ .
3.  $u \cdot u^2 \cdot u^3 = u^{1+2+3} = u^6$ .

Olgu antud korrutada üksliikmed  $5a^2x^3$  ja  $-7ax^4$ . Nõutav korrutis on

$$5a^2x^3 \cdot (-7ax^4).$$

Korrutamise vahetuvuse seaduse põhjal võime seda kirjutada ka nii:

$$5 \cdot (-7) \cdot a^2 \cdot a \cdot x^3 \cdot x^4$$

ja edasi korrutamise ühenduvuse seaduse põhjal:

$$[5 \cdot (-7)] \cdot [a^2 \cdot a] \cdot [x^3 \cdot x^4]$$

ehk

$$(-35) \cdot (a^3) \cdot (x^7)$$

ehk, lühemalt,

$$-35a^3x^7.$$

Üldistades võime tulemuse lühidalt sõnastada nõnda:

üksliikmete korrutamisel tuleb nende kordajad korrutada ja ühesuguste täheliste tegurite astendajad liita.

N ä i d e.

$$\begin{aligned} (-3abx^2) \cdot (-2\frac{1}{3}a^2x^3) &= (-3) \cdot (-2\frac{1}{3}) \cdot a^3bx^5 = \\ &= (3 \cdot \frac{7}{3})a^3bx^5 = 7a^3bx^5. \end{aligned}$$

### § 37. Üksliikmete jagamine.

Olgu antud jagada kaks sama alusega astet, näiteks avaldis  $a^m$  avaldisega  $a^n$ . Olgu astendaja  $m$  suurem astendajast  $n$ , sümbolites:  $m > n$ . Siis

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Tõepoolest, korrutades kontrolliks jagatist jagajaga, saame

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m,$$

nagu peab olema.

Seega: kui  $m > n$ , siis

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Tulemuse võime lühidalt sõnastada nõnda:

ühe ja sama arvu astmete jagamisel astendaja jagajas lahutatakse astendajast jagatavas.

Jagatis  $a^m : a^m = 1$  igasuguse astendaja  $m$  puhul.

Olgu antud jagada üksliige  $-28a^5b^3x$  üksliikmega  $-4a^2b^3$ . Rakendame korrutisega jagamise juhist:

selleks, et jagada arvu korrutisega, võib arvu jagada esimese teguriga ja saaduse teise teguriga.

Jagame jagatava eeskätt jagaja esimese teguriga  $-4$ ; saame  $7a^5b^3x$ ; jagame saaduse teise teguriga  $a^2$ ; see annab  $7a^3b^3x$ ; jagame selle saaduse kolmanda teguriga  $b^3$ ; see annab lõppsaadusena  $7a^3x$ .

Üldistades võime üksliikmete jagamise juhise sõnastada lühidalt nõnda:

üksliikmete jagamisel tuleb nende kordajad jagada ja ühe-  
suguste täheliste tegurite astendajad lahutada.

N ä i d e.

$$3cN^2u^5 : (-4N^2u^3) = -\frac{3}{4}cu^2.$$

### § 38. Üksliikmete astendamine.

Olgu antud astendada avaldis  $a^m$  arvuga  $n$ .  
Astme definitsiooni kohaselt kirjutame

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \dots a^m}_{n \text{ tegurit}}$$

Meelde tuletades, et ühe ja sellesama arvu astmete korrutamisel astendajad liidetakse, leiame, et

$$(a^m)^n = a^{m+m+m+\dots+m}.$$

Summa  $m + m + m + \dots + m$ , kus esineb  $n$  võrdset liidetavat ja iga liidetav on  $m$ , võime kirjutada lühemalt  $nm$ . Seega

$$(a^n)^n = a^{nn}.$$

Tulemuse võime sõnastada lühidalt nõnda :

astme astendamisel astendajad korrutatakse.

Näited.

$$(x^2)^3 = x^6 \qquad (u^3)^5 = u^{15}$$

Olgu antud astendada korrutis  $ab$  arvuga  $n$ .

Astme definitsiooni järgi on

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \dots ab}_{n \text{ tegurit}}$$

Rakendades korrutamise vahetuvuse seadust näeme, et

$$(ab)^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ tegurit}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \dots b}_{n \text{ tegurit}}$$

ehk

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

Tulemuse võime sõnastada lühidalt nõnda :

korrutise astendamisel astendame iga tema teguri.

Näide. Leida üksliikme  $-3ab^2c^3$  neljas aste.

Eelmist juhust rakendades saame

$$\begin{aligned} (-3ab^2c^3)^4 &= (-3)^4 \cdot a^4 \cdot (b^2)^4 \cdot (c^3)^4 = \\ &= +81 \cdot a^4 \cdot b^8 \cdot c^{12}, \end{aligned}$$

ehk lühemalt

$$(-3ab^2c^3)^4 = 81a^4b^8c^{12}.$$

### § 39. Polünoomide korraldamine.

Hulkliikmeist omavad erilist tähtsust need, mis koosnevad ühe ja sama arvu astmeist. Neid hulkliikmeid nimetatakse võõrkeelse nimetusega polünoomideks.

Näiteks järgmised avaldised on polünoomid:

$$2x - 1, \quad N^2 - 3N, \quad 5u^2 + 2u - 7, \quad h^3 + h + 1.$$

Ülevaatlikkuse otstarbel on viisiks kirjutada polünoome nii, et neis liikmed esineksid kas kasvavate või kahanevate astendajate järjekorras. Ülaltoodud näiteis on polünoomid korraldatud kahanevate astendajate järjekorras.

Näiteis

$$1 + \frac{1}{2}z, \quad H - 3H^2 + H^3, \quad w + 2w^3 + 3w^5 - w^7$$

on polünoomid korraldatud kasvavate astendajate järjekorras.

Märkus. Korraldatud polünoomidena esinevad meile kõik kümnendsüsteemis kirjutatud arvud. Näiteks tähendab kirjutis

$$25371$$

õieti polünoomi

$$2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1.$$

Lühiduse otstarbel on arvude märkimisviisis ära jäetud kümne astmed ja tehtemärgid. Missuguse kümne astme juurde kuuluvad kirjutises 25371 kordajad 2, 5, 3, 7, 1, seda näitab nende kordajate koht arvu 25371 kirjutises: paremalt vasakule poole seisavad esimesel kohal ühed, teisel kohal kümned ( $10^1$ ), kolmandal kohal sajad ( $10^2$ ), neljandal kohal tuhanded ( $10^3$ ) jne.

### § 40. Hulkliikmete liitmine ja lahutamine.

Hulkliikmete liitmine ja lahutamine tugineb liitmise ja lahutamise põhiseadustele. Nende tehete sooritamise viis on näha järgmisist näiteist.

Näited.

$$\begin{aligned} 1. \quad & (x^3 + 2x^2 + 5x - 1) + (x^3 - 2x^2 - 2x + 1) = \\ & = x^3 + 2x^2 + 5x - 1 + x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = \\ & = 2x^3 + 3x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & (u^3 - 5u + 7) - (u^3 - 3u^2 + 6) = \\ & = u^3 - 5u + 7 - u^3 + 3u^2 - 6 = 3u^2 - 5u + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & (5ax^2 + 3bz^2 - 7abc) + (bz^2 - 5ax^2 + 6abc) = \\ & = 5ax^2 + 3bz^2 - 7abc + bz^2 - 5ax^2 + 6abc = \\ & = 4bz^2 - abc. \end{aligned}$$

Mõnikord on otstarbekohasem kirjutada liidetavad ja lahutatavad hulkliikmed üksteise alla nii, et sarnased liikmed esineksid samas veerus. Puuduvate astmete koht jäetakse tühjaks. Võte on sama, mida rakendame arvude liitmisel ja lahutamisel, selle vahega, et ära jäävad ülekanded ja laenamised.

Näited.

$$\begin{array}{r} 1. \quad \begin{array}{r} 4035 \\ + 720 \\ \hline 4798 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4k^3 \quad + 3k + 5 \\ + \quad \quad 7k^2 + 2k \\ \hline 4k^3 + 7k^2 + 9k + 8 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2. \quad \begin{array}{r} 75938 \\ - 30708 \\ \hline 45230 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7k^4 + 5k^3 + 9k^2 + 3k + 8 \\ - \quad 3k^4 \quad \quad + 7k^2 \quad \quad + 8 \\ \hline 4k^4 + 5k^3 + 2k^2 + 3k \end{array} \end{array}$$

### § 41. Hulkliikme korrutamine ja jagamine üksliikmega.

Hulkliikmete korrutamine üksliikmega taandub korrutamise jaotuvuse seaduse rakendamisel üksliikmete korrutamisele.

Hulkliikmete jagamine üksliikmega taandub summa jagamise seaduse rakendamisel üksliikmete jagamisele.

Näited.

1.  $(+5x^2) \cdot (x^3 - 4x^2 + 3x - 1) =$   
 $= 5x^5 - 20x^4 + 15x^3 - 5x^2.$
2.  $(-4ab^2x) \cdot (5a^2x + 3bx^2 - 7ab) =$   
 $= -20a^3b^2x^2 - 12ab^3x^3 + 28a^2b^3x.$
3.  $(35Nu^3 - 14N^2u^2 + 7N^3u) : (-7Nu) =$   
 $= -5u^2 + 2Nu - N^2.$

Kokkuvõttes võime sõnastada järgmise juhise:

hulkliikme korrutamiseks üksliikmega korrutame selle üksliikmega eraldi hulkliikme iga liikme ja liidame tulemused.

Analoogiline eeskiri kehtib hulkliikme jagamise kohta üksliikmega:

hulkliikme jagamiseks üksliikmega jagame selle üksliikmega eraldi hulkliikme iga liikme ja liidame tulemused.

Näited.

1.  $(4ax^3 + 12abx^2 - 8abcx) : 4ax =$   
 $= x^2 + 3bx - 2bc.$
2.  $(2\frac{4}{5}N^4u^4 + 10\frac{1}{2}N^3u^3 - 16\frac{1}{3}N^2u^2) : 7Nu^2 =$   
 $= \frac{2}{5}N^3u^2 + 1\frac{1}{2}N^2u - 2\frac{1}{3}N.$

## Peatükk V.

### Võrrand.

#### § 42. Võrdus. Võrratus.

Kui kaks avaldist on võrdsed, siis märgime seda võrdusmärgiga nende avaldiste vahel. Näiteks kirjutame:

$$5 \cdot 13 - 7 \cdot 4 = 3 \cdot 9 + 10$$

$$13(11 + 9) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13$$

$$\frac{2 \cdot 7 + 1}{3 \cdot 7 - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$a + 4a = 2a + 3a$$

$$3x(a - 4c) = 3ax - 12cx.$$

Niisuguseid kirjutisi nimetame võrdusteks. Kui kaks avaldist pole võrdsed, kasutame selle tõsiasi märkimiseks sümboleid

$$\neq \quad > \quad <.$$

Näiteks kirjutame:

$$5^2 - 3^2 \neq (5 - 3)^2$$

$$7^3 > 8^2 + 9$$

$$0,5^2 < 1 - 0,5.$$

Niisuguseid kirjutisi nimetame võrratusteks.

Iga võrdus koosneb ikka kahest osast; neid osi nimetame lühidalt võrduse vasakuks pooleks ja paremaks pooleks. Samu nimetusi kasutame ka võrratuste puhul.

## § 43. Samasus.

Võrdust nimetame samasuseks, kui ta kehtib temas esineva tähe või tähtede igal väärtusel.

Näide. Olgu antud võrdus:

$$(x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x + 2.$$

Asetame võrduse kummaski pooles tähe  $x$  asemele näiteks arvud

$$0, 1, 2, -1, -2, \frac{1}{2}, 0,8$$

ja korraldame tulemused tabelisse. Saame

$x$	0	1	2	-1	-2	$\frac{1}{2}$	0,8
$(x - 1)(x - 2)$	2	0	0	6	12	$\frac{3}{4}$	0,24
$x^2 - 3x + 2$	2	0	0	6	12	$\frac{3}{4}$	0,24

Näeme, et iga kasutatud  $x$ -väärtuse puhul nii üks kui teine avaldis omab üht ja sama väärtust. Sedasama näeme, andes tähele  $x$  veel teisi väärtusi. Seega antud võrdus on samasus.

Samaselt võrdumise tähiseks on  $\equiv$ .

Õeldu põhjal võime antud võrduse kirjutada kujul:

$$(x - 1)(x - 2) \equiv x^2 - 3x + 2.$$

Samaselt võrduvad avaldised tähendavad üht ja sedasama, erinedes üksteisest vaid väliselt kujult.

Kõik avaldiste teisendused, mis otseselt või kaudselt tuginevad arvutamise põhiseadustele, ei muuda avaldise numbrilist väärtust, vaid muudavad ainult tema välist

kuju; niisuguste teisenduste tulemus on seega alati samaselt võrdne lähteavaldisega.

Näide.

$$6x(2x - a) + a(6x - 4a) \equiv 12x^2 - 6ax + 6ax - 4a^2 \equiv \\ \equiv 12x^2 - 4a^2 \equiv 4(3x^2 - a^2).$$

Märkus. Sümbolit  $\equiv$  tarvitatakse ainult siis, kui on tarvis eriti rõhutada asjaolu, et võrdumine on kehtiv samaselt. Muidu tarvitatakse sümboli  $\equiv$  asemel harilikku võrdusmärki  $=$ , nagu meie seda seni olemegi teinud kõigi teisenduste puhul.

#### § 44. Võrrand.

Olgu antud võrdus  $x^2 = 3x + 28$ . See võrdus ei ole samasus. Tõepoolest, asetades tähe  $x$  asemele näiteks arvu 4, saame vasakul poolel  $4^2$  ehk 16, paremal poolel aga  $3 \cdot 4 + 28$  ehk 40. Tulemused pole võrdsed.

Võib küsida, kas ehk siiski leidub  $x$ -i väärtusi, mille puhul mõlemad avaldised omavad üht ja sama väärtust, tähendab,  $x^2$  saab võrdseks avaldisega  $3x + 28$ .

Asetades  $x$ -i asemele arvu 7 näeme, et esimene avaldis omab väärtust  $7^2$  ehk 49 ja teine väärtust  $3 \cdot 7 + 28$ , ehk ka 49. Tähendab:

$$\text{kui } x = 7, \text{ siis on } x^2 = 3x + 28.$$

Võrdust, mis sisaldab mingit tähte ja ei ole samasus, nimetame võrrandiks.

Näited. Võrdused

$$2x - 10 = 17 - x$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^3 = 3x + 2$$

on võrrandid, sest asetades  $x$ -i asemele näiteks nulli, saame võrduste vasakul poolel ja paremal poolel vastavalt

$$-10 \text{ ja } 17, \quad 6 \text{ ja } 0, \quad 0 \text{ ja } 2;$$

seejuures

$$-10 \neq 17, \quad 6 \neq 0, \quad 0 \neq 2.$$

Arvust, mis asetamisel otsitava asemele võrrandi kummassegi poolde annab võrdsed tulemused, ütleme, et ta rahuldab võrrandit.

Näiteks rahuldab võrrandit

$$x^2 = 7x - 12$$

$x$ -i väärtus 3, sest  $3^2 = 9$  ja ka  $7 \cdot 3 - 12 = 9$ .

Võrrandit rahuldavat arvu nimetame võrrandi lahendiks.

Näiteks arv  $-2$  on võrrandi

$$x^3 = 3x^2 - 20$$

lahendiks.

Võrrandi lahendi leidmiseks vajalikkude teisenduste ja tehete sooritamist nimetame võrrandi lahendamiseks.

Üks võrrandi lahendamise viisidest tugineb proovimisele.

Näide. Lahendame võrrandi  $7x = x^2 - 44$ .

Asetades  $x$ -i asemele arvud

$$-7 \quad -6 \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2,$$

saame vasakul poolel

$$-49 \quad -42 \quad -35 \quad -28 \quad -21 \quad -14,$$

paremal poolel seevastu

$$+5 \quad -8 \quad -19 \quad -28 \quad -35 \quad -40.$$

Näeme, et arv  $-4$  annab asetamisel kummalgi poolel võrdsed tulemused; seega arv  $-4$  on antud võrrandi lahendiks.

Algebra rakendamisel tegeliku elu poolt seatud küsimustes on esimeseks püüdeks avaldada need küsimused lühikirjas võrrandite näol. Algebra tähtsamaid ülesandeid on võtete loomine võrrandite lahendamiseks.

#### § 45. Võrduse ja võrratuse põhiomadused.

Igal võrdusel on 4 põhilise tähtsusega omadust, mis silmanähtavalt kehtivad ja tõestamist ei vaja. Sõnastame need võrduse omadused järgmiste aksiomidenä:

1. **Liitmisaksiom.** Kui kahe võrdse arvuga liita üks ja sama arv, saame võrdsed tulemused.

$$\begin{array}{ll} \text{Sümbolites: Kui} & a = b, \\ \text{siis} & a + m = b + m. \end{array}$$

2. **Lahutamisasiom.** Kui kahest võrdsest arvust lahutada üks ja sama arv, saame võrdsed tulemused.

$$\begin{array}{ll} \text{Sümbolites: Kui} & a = b, \\ \text{siis} & a - m = b - m. \end{array}$$

3. **Korrutamisasiom.** Kui kaks võrdset arvu korrutada ühe ja sama arvuga, saame võrdsed tulemused.

$$\begin{array}{ll} \text{Sümbolites: Kui} & a = b, \\ \text{siis} & ma = mb. \end{array}$$

4. **Jagamisasiom.** Kui kaks võrdset arvu jagada ühe ja sama arvuga, saame võrdsed tulemused.

$$\begin{array}{ll} \text{Sümbolites: Kui} & a = b, \\ \text{siis} & \frac{a}{m} = \frac{b}{m}. \end{array}$$

Arvuks  $m$  ei saa olla null.

Ülaltoodud 4 aksiooni moodustavad aluse, millele tugineb kogu võrrandite teisendamine ja lahendamine.

Näide. Lahendame võrrandi  $\frac{3}{4}x - 1 = 8$ .

Teisendame selle võrrandi järk-järgult: liites kummagi poolega arvu 1, saame liitmisaksiooni põhjal võrrandi

$$\frac{3}{4}x = 9;$$

jagades siin kummagi poole arvuga 3 saame jagamisaksiooni põhjal võrrandi

$$\frac{1}{4}x = 3;$$

korrutades nüüd kummagi poole arvuga 4 saame korrutamisaksiooni põhjal

$$x = 12,$$

millega otsitav lahend on leitud.

Kõik võrrandid, mis saame mõnest lähtevõrrandist ülaltoodud 4 aksiooni rakendamisel, on lähtevõrrandi teisendid. Lähtevõrrand ja tema teisendid omavad kõik samu lahendeid. Seepärast nimetame kõiki neid võrrandeid üksteisega samaväärseiks ehk ekvivalentseiks.

Rööbiti ülaltoodud võrduste omadustega on kehtivad järgmised võrratuste omadused:

1. Kui  $a > b$ , Kui  $a < b$ ,  
siis  $a + m > b + m$ . siis  $a + m < b + m$ .
2. Kui  $a > b$ , Kui  $a < b$ ,  
siis  $a - m > b - m$ . siis  $a - m < b - m$ .

3. Kui $m > 0$ ja $a > b$ , siis $ma > mb$ .	Kui $m > 0$ ja $a < b$ , siis $ma < mb$ .
---	--

Seevastu:

Kui $m < 0$ ja $a > b$ , siis $ma < mb$ .	Kui $m < 0$ ja $a < b$ , siis $ma > mb$ .
--	--

4. Kui $m > 0$ ja $a > b$ , siis $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$ .	Kui $m > 0$ ja $a < b$ , siis $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$ .
---	--

Seevastu:

Kui $m < 0$ ja $a > b$ , siis $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$ .	Kui $m < 0$ ja $a < b$ , siis $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$ .
--	--

Märgime lõpuks veel järgmise tõsiasja: kui  $m = 0$ ,  
 siis igasuguste  $a$  ja  $b$  puhul

$$ma = mb.$$

Seepärast: kui  $m = 0$ , siis võrdusest

$$ma = mb$$

ei saa järeldada, et ka

$$a = b.$$

## § 46. Võrrandite teisendamise lause.

Võrrandi iga liiget võib kanda üle ühelt võrrandi poolelt teisele, muutes seejuures liikme märgi vastupidiseks.

Tõepoolest, olgu tegemist näiteks võrrandiga

$$x^3 + 19x = 10x^2 - 30.$$

Lühiduse mõttes kirjutame ta kujul

$$A + B = C - D,$$

kus  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ja  $D$  tähendavad avaldisi  $x^3$ ,  $19x$ ,  $10x^2$  ja  $30$ .

Tahetagu siin üle viia liige  $B$  vasakult poolelt paremale poolele. Selleks lahutame võrrandi kummastki poolest liikme  $B$ ; lahutamisaksiooni põhjal on seejuures tekkivad vahed võrdsed; seega

$$A + B - B = C - D - B$$

ehk, lühemalt,

$$A = C - D - B.$$

Näeme nüüd liiget  $B$  vastupidise märgiga seismas võrrandi paremal poolel.

Tahetagu algvõrrandis üle viia paremalt poolelt vasakule poolele liige  $-D$ . Selleks liidame võrrandi kummagi poolega arvu  $D$ ; liitmisaksiooni põhjal on tulemused võrdsed; seega

$$A + B + D = C - D + D$$

ehk, lühemalt,

$$A + B + D = C.$$

Näeme nüüd liiget  $D$  vastupidise märgiga seismas võrrandi vasakul poolel.

Näide 1. Olgu antud võrrand

$$5x + 1 = 8x - 20.$$

Praegu-tõestatud lause lubab selle võrrandi kirjutada kujul  $5x + 21 = 8x$  või  $1 = 3x - 20$  või  $0 = 3x - 21$ . Kõik need 4 võrrandit on sama väärsed. Kõiki neid 4 võrrandit rahuldab arv 7.

Näide 2. Olgu antud võrrand  $x^2 + 5x - 6 = 0$ .

Praegu-tõestatud lause lubab sama võrrandit kirjutada kujul  $x^2 + 5x = 6$  või  $x^2 = -5x + 6$  või  $x^2 - 6 = -5x$  või  $5x = 6 - x^2$ . Kõik need võrrandid on sama väärsed. Kõiki neid võrrandeid rahuldavad arvud  $-6$  ja  $1$ .

## § 47. Lineaarvõrrand.

Olgu antud mingi võrrand, milles pole liikmeid otsitavaga nimetajas. Võtame võrrandi liikmed vasakule poolele nii, et paremale poolele jääks null; avame kõik sulud ja koondame vasaku poole.

Kui peale koondamist otsitav esineb võrrandis ainult esimesel astmel, siis nimetame seda võrrandit esimese astme võrrandiks ehk **lineaarvõrrandiks**.

Sama nimetuse anname sel korral ka lähtevõrrandile.

Näiteks on

$$2x = 7 \quad 3x - 4 = 19 \quad 7x - 1 = \frac{1}{2}x + 29$$

lineaarvõrrandid.

Seevastu

$$x^2 = x + 3 \quad \frac{1}{x} - 2x = 10$$

pole lineaarvõrrandid.

Lineaarvõrrandis peab leiduma liige otsitava esimese astmega; kirjutame selle liikme kujul  $ax$ . Kõrvu sellega

võib leiduda otsitavast vaba liige; märgime selle tähega  $b$ .  
Seega

lineaarvõrrandi üldkuju on  $ax + b = 0$ .

Järgmised ülesanded selgitavad lineaarvõrrandi lahendamise käiku.

Ülesanne 1. Lahenda võrrand  $12x = 21$ .

Lahendus. Jagades võrrandi kummagi poole 12-ga, saame jagamisaksiooni põhjal võrdsed arvud; seega

$$x = \frac{21}{12},$$

ehk, taandades,

$$x = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}.$$

Ülesanne 2. Lahenda võrrand  $x + 8 = 13$ .

Lahendus. Lahutades kummastki poolest 8, saame lahutamisaksiooni põhjal võrdsed arvud; seega

$$x = 13 - 8,$$

ehk

$$x = 5.$$

Ülesanne 3. Lahenda võrrand  $4x + 7 = 3$ .

Lahendus. Lahutades kummastki poolest 7, saame lahutamisaksiooni põhjal võrdsed arvud; seega

$$4x = 3 - 7,$$

ehk

$$4x = -4.$$

Jagades kummagi poole 4-ga, saame jagamisaksiooni põhjal võrdsed arvud; seega

$$x = \frac{-4}{4},$$

ehk

$$x = -1.$$

### § 48. Üldkujulise lineaarvõrrandi lahend.

Olgu antud lahendada võrrand

$$ax + b = 0.$$

Kummastki poolest arvu  $b$  lahutades saame lahutamisaksiooni põhjal

$$ax = -b;$$

kumbagi poolt arvuga  $a$  jagades saame jagamisaksiooni põhjal

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Et võrrand  $ax + b = 0$  oleks tõesti esimese astme võrrand, selleks peab  $a$  olema nullist erinev:  $a \neq 0$ .

Sel eeldusel on murrul  $-\frac{b}{a}$  kindel ühene väärtus. Seega

lineaarvõrrandil on üks ja ainus lahend.

### § 49. Lineaarvõrrandi lahendamine.

Aja ja vaeva kokkuhoiu mõttes on otstarbekohane lineaarvõrrandi lahendamist toimetada järgmiselt:

1. avame sulud, kui võrrandis esineb suluavaldisi, ja koondame;
2. kanname kõik otsitavaga liikmed ühele poolele ja kõik otsitavast vabad liikmed võrrandi teisele poolele;
3. koondame;
4. jagame mõlemad pooled otsitava kordajaga ja taandame saaduse.

Leitud lahendit kontrollime, asetades selle algvõrrandisse otsitava asemele.

Ülesanne. Lahenda võrrand

$$5(x - 4) - 2(3x + 7) - 14 = 9(2x + 5) - x - 21.$$

Lahendus. Avame sulud:

$$5x - 20 - 6x - 14 - 14 = 18x + 45 - x - 21;$$

koondame kummagi poole:

$$-x - 48 = 17x + 24;$$

võtame otsitavaga liikmed vasakule poolele, otsitavast vabad liikmed paremale poolele:

$$-x - 17x = 24 + 48;$$

koondame nii vasaku poole kui ka parema poole:

$$-18x = 72;$$

jagame kummagi poole  $-18$ -ga:

$$x = \frac{72}{-18};$$

taandades saame lõpuks

$$x = -4.$$

Kontrollime leitud lahendit.

Leitud  $x$ -väärtuse puhul antud võrrandi vasak pool on:

$$\begin{aligned} 5 \cdot (-4 - 4) - 2 \cdot [3 \cdot (-4) + 7] - 14 &= \\ &= 5 \cdot (-8) - 2 \cdot (-12 + 7) - 14 = \\ &= -40 - 2 \cdot (-5) - 14 = -40 + 10 - 14 = -44; \end{aligned}$$

sama  $x$ -väärtuse puhul võrrandi parem pool on

$$\begin{aligned} 9 \cdot [2 \cdot (-4) + 5] - (-4) - 21 &= \\ &= 9 \cdot [-8 + 5] + 4 - 21 = 9 \cdot (-3) + 4 - 21 = \\ &= -27 + 4 - 21 = -48 + 4 = -44. \end{aligned}$$

Et kummalgi poolel saime sama tulemuse, siis arv  $-4$  tõepoolest rahuldab võrrandit.

Kontrollimisel tuleb leitud lahend asetada otsitava asemele võrrandi algkuju kummassegi poolde, mitte aga juba teisendatud võrrandi pooltesse. Vastasel korral asetamine ei ilmutaks viga, mis ehk on juhtunud juba võrrandi teisendamisel.

## Peatükk VI.

### Arvutamise abivalemid.

#### § 50. Kaksliikmete korrutamine.

Olgu antud kaksliikmed  $a + b$  ja  $c + d$ . Nende korrutis on

$$(a + b) \cdot (c + d).$$

Et saada seda korrutist sulgudeta avaldisena ehk *arendatud kujul*, rakendame korrutamise jaotuvuse seadust:

$$m \cdot (c + d) = mc + md.$$

Kõnesoleval juhul  $m = a + b$ . Seega

$$(a + b) \cdot (c + d) = (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d.$$

Rakendades viimase võrduse paremal poolel uuesti sama seadust, saame

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

Samal viisil saame

$$(a + b) \cdot (c - d) = ac + bc - ad - bd$$

ja

$$(a - b) \cdot (c - d) = ac - bc - ad + bd.$$

Sõnastame tulemuse nõnda:

kaksliikmete korrutise arendamiseks korrutame ühe kaksliikme kummagi liikme teise kaksliikme kummagi liikmega ja liidame saadused.

Näited.

1.  $(x + 1)(x + 2) = x^2 + x + 2x + 2 = x^2 + 3x + 2.$
2.  $(2a + u)(a - 3u) = 2a^2 + au - 6au - 3u^2 =$   
 $= 2a^2 - 5au - 3u^2.$

### § 51. Summa ruudu valem.

Olgu antud kahe arvu summa  $a + b$ . Selle ruut on  
 $(a + b)^2.$

Et saada seda avaldist arendatud kujul, rakendame kaksliikmete korrutamise eeskirja; see annab:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2;$$

sellest järeldub, et

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Sõnastame tulemuse nõnda:

kahe arvu summa ruudu arendamiseks tuleb liita esimese arvu ruut, esimese ja teise arvu kahekordne korrutis ja teise arvu ruut.

Näited.

1.  $(a + 3)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9.$
2.  $(4a + 7b)^2 = (4a)^2 + 2 \cdot 4a \cdot 7b + (7b)^2 =$   
 $= 16a^2 + 56ab + 49b^2.$
3.  $108^2 = (100 + 8)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 8 + 8^2 =$   
 $= 10000 + 1600 + 64 = 11664.$

### § 52. Vahe ruudu valem.

Olgu antud kahe arvu vahe  $a - b$ . Selle ruut on  
 $(a - b)^2.$

Et saada seda avaldist arendatud kujul, rakendame kaksliikmete korrutamise eeskirja; see annab:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ba + b^2,$$

millest järeldub, et

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Sõnastame tulemuse nõnda:

kahe arvu vahe ruudu arendamiseks tuleb esimese arvu ruudust lahutada esimese ja teise arvu kahekordne korrutis ja saadusega liita teise arvu ruut.

Näited.

$$1. (a - 5)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 5 + 5^2 = a^2 - 10a + 25.$$

$$2. (3a - 2b)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 2b + (2b)^2 = \\ = 9a^2 - 12ab + 4b^2.$$

$$3. 97^2 = (100 - 3)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2 = \\ = 10000 - 600 + 9 = 9409.$$

### § 53. Kahe arvu summa ja vahe korrutise valem.

Kahe arvu  $a$  ja  $b$  summa ja vahe korrutis avaldub kujul

$$(a + b)(a - b).$$

Selle avaldise arendamine kaksliikmete korrutamise eeskirja järgi annab:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2,$$

millest saame

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Sõnastame tulemuse nõnda:

kahe arvu summa ja vahe korrutise arendamiseks tuleb esimese arvu ruudust lahutada teise arvu ruut.

Näited.

$$1. (x + 5)(x - 5) = x^2 - 25.$$

$$2. (3a + 2b)(3a - 2b) = (3a)^2 - (2b)^2 = 9a^2 - 4b^2.$$

$$3. (a + x)(a - x)(a^2 + x^2) = \\ = (a^2 - x^2)(a^2 + x^2) = a^4 - x^4.$$

Märkus. Ülaltuletatud valemities võib vahetada poolde. See laiendab veelgi nende valemite kasutamise võimalust arvutamisel ja avaldiste teisendamisel.

Näited.

$$1. 1 + 2x + x^2 = (1 + x)^2.$$

$$2. 4u^2 - u + \frac{1}{16} = \left(2u - \frac{1}{4}\right)^2.$$

$$3. 93^2 - 7^2 = (93 + 7)(93 - 7) = 100 \cdot 86 = 8600.$$

### § 54. Hulkliikmete korrutamine.

Hulkliikme korrutamine hulkliikmega taandub korrutamise jaotuvuse seaduse rakendamisel hulkliikme korrutamisele üksliikmetega ja saadud korrutiste liitmisele. Hulkliikmete korrutamise eeskirja sõnastame nii:

kahe hulkliikme korrutise saamiseks tuleb korrutada esimese hulkliikme iga liige teise hulkliikme iga liikmega ja liita saadused. Korrutise anname koondatud kujul.

Näide 1.

$$(x^2 - 2x + 3)(x + 4) = \\ = x^3 - 2x^2 + 3x + 4x^2 - 8x + 12 = \\ = x^3 + 2x^2 - 5x + 12.$$

Näide 2.

$$(3ax^2 + 4bu^2)(ax + bu) = \\ = 3a^2x^3 + 4abu^2x + 3abux^2 + 4b^2u^3.$$

Polünoomide korral on ülevaatlikkuse mõttes otstarbekohane osakorrutisi kirjutada üksteise alla nii, et sarnased liikmed esineksid samas veerus. Puuduvate astmete kohad jäetakse tühjaks. Võtte on sama, mida rakedame arvude korrutamisel.

Näide 3.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 2x + 3)(x^2 + x - 1) \\
 \hline
 x^5 \qquad - 2x^3 + 3x^2 \\
 + x^4 \qquad - 2x^2 + 3x \\
 \qquad - x^3 \qquad + 2x - 3 \\
 \hline
 x^5 + x^4 - 3x^3 + x^2 + 5x - 3
 \end{array}$$

### § 55. Summa kuubi ja vahe kuubi valemid.

Olgu antud kahe arvu summa  $a + b$ . Selle kuup on

$$(a + b)^3.$$

Et saada seda avaldist arendatud kujul, kirjutame:

$$\begin{aligned}
 (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 = \\
 &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = \\
 &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3
 \end{aligned}$$

ehk lühemalt:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Samal teel leiame, et

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Sõnastame tulemused nõnda:

kahe arvu summa kuubi arendamiseks tuleb liita esimese arvu kuup, esimese arvu ruudu ja teise arvu kolmekordne korrutis, esimese arvu ja teise arvu ruudu kolmekordne korrutis ning teise arvu kuup;

kahe arvu vahe kuubi arendamiseks tuleb esimese arvu kuu-  
bist lahutada esimese arvu ruudu ja teise arvu kolmekordne kor-  
rutis, vahega liita esimese arvu ja teise arvu ruudu kolmekordne  
korrutis ning saadusest lahutada teise arvu kuup.

N ä i t e d.

1.  $(1 - x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3.$
2.  $(10,1)^3 = (10 + 0,1)^3 =$   
 $= 1000 + 3 \cdot 100 \cdot 0,1 + 3 \cdot 10 \cdot 0,01 + 0,001 =$   
 $= 1000 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 0,1 + 0,001 = 1030,301.$

M ä r k u s. Arvutamise abivalemid hõlbustavad tun-  
duvalt arvutamist, võimaldades seda mõnikord toimetada  
peast. Need valemid on ka tähtsaks abinõuks avaldiste  
teisendamisel.

N ä i t e d.

1.  $45^2 = (40 + 5)^2 = 1600 + 400 + 25 = 2025.$
2.  $87^2 - 13^2 = (87 + 13)(87 - 13) = 100 \cdot 74 = 7400.$
3.  $(3a + b)^2 - (3a - b)^2 =$   
 $= 9a^2 + 6ab + b^2 - 9a^2 + 6ab - b^2 = 12ab$

või teisiti:

$$\begin{aligned} (3a + b)^2 - (3a - b)^2 &= \\ &= (3a + b + 3a - b)(3a + b - 3a + b) = \\ &= 6a \cdot 2b = 12ab. \end{aligned}$$

4.  $(x + 3)(x - 4) - (x - 2)^2 =$   
 $= (x^2 + 3x - 4x - 12) - (x^2 - 4x + 4) =$   
 $= (x^2 - x - 12 - x^2 + 4x - 4) = 3x - 16.$

## Peatükk VII.

### Arvude ja üksliikmete jaguvus.

#### § 56. Arvu jagaja.

Selles ja järgmistes sama peatüki paragraafides me tegeleme täisarvudega. Sõna arv ja tähised  $a$ ,  $b$ ,  $N$ ,  $q$ ... tähendavad siin täisarve.

Iga arv jagub arvuga 1, näiteks

$$4 : 1 = 4, \quad 237 : 1 = 237, \quad a : 1 = a;$$

samuti iga arv jagub arvu enesega, näiteks

$$10 : 10 = 1, \quad 198 : 198 = 1, \quad a : a = 1.$$

Arvu  $a$  jagamisel mõne arvuga  $b$ , kus  $b > 1$  ja  $a > b$ , võib esineda kaks juhtu: arv  $a$  annab jagamisel arvuga  $b$  jäägi või arv  $a$  jagub arvuga  $b$ .

Kui arv  $a$  jagub arvuga  $b$ , siis ütleme, et

arv  $b$  on arvu  $a$  jagajaks,

ehk

arv  $b$  on arvu  $a$  teguriks,

ehk

arv  $a$  on arvu  $b$  kordne.

Näiteks arv 210 jagub arvuga 42, seega arv 42 on arvu 210 jagaja ehk arv 42 on arvu 210 teguriks ehk arv 210 on arvu 42 kordne.

Arvu jagajate leidmine võib toimuda proovimise teel. Nii leiame arvu 20 puhul, et tema jagajaiks on

1, 2, 4, 5, 10, 20;

jagajaiks pole

3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, ... 19.

### § 57. Algarv. Kordarv.

Täisarvude reas

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ...

leidub arve, millel pole teisi jagajaid peale arvu ühe ja arvu enda. Niisuguseks arvuks on näiteks 7: ta jagub 1-ga ja 7-ga, ei jagu aga 2-ga, 3-ga, 4-ga, 5-ga, 6-ga.

Arve, millel ei leidu ühest suuremaid ja arvust enesest väiksemaid jagajaid, nimetame algarvudeks.

Arvu 1 me ei loe algarvude hulka.

Vahemikus 1-st 100-ni leiame proovimise teel järgmised algarvud:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59,  
61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Vastandiks algarvudele on arvud, millel leidub ühest suuremaid ja arvust enesest väiksemaid jagajaid.

Arve, millel leidub ühest suuremaid ja arvust enesest väiksemaid jagajaid, nimetame kordarvudeks.

Kordarvudeks on näiteks arvud 6, 15, 28.

### § 58. Jaguvuse tunnused.

Küsimust, kas antud arv jagub mõne teise arvuga või mitte, on igal juhul võimalik otsustada, tegelikult jagades antud arvu selle teisega. Näiteks arv 495 ei jagu arvuga 17, sest jagamisel tekib jääk 2.

Jagamise tegelik läbiviimine on küllaltki tülikas. Paljude sageli esinevate jagajate puhul, nagu 2, 3, 4, 5, 9, saame jaguvuse küsimust otsustada tunduvalt väiksema vaevaga, rakendades jaguvuse tunnuseid. Jaguvuse tunnuste tuletamisel toetume järgmistele lausetele:

1. Kui kumbki kahest liidetavast jagub mõne arvuga, siis jagub sellega ka nende summa.

2. Kui üks liidetavaist jagub mõne arvuga, teine aga annab selle arvuga jagamisel jäägi, siis liidetavate summa annab selle arvuga jagamisel sama jäägi.

Esimese lause tõestamiseks arutame järgmiselt:

Olgu lauses nimetatud liidetavad märgitud tähtedega  $a$  ja  $b$ , nende summa tähega  $N$ :

$$N = a + b.$$

Jagugu arvud  $a$  ja  $b$  arvuga  $c$ ; siis on  $a$  ja  $b$  arvu  $c$  kordsed ja me võime kirjutada:

$$a = p \cdot c$$

$$b = q \cdot c,$$

kus  $p$  ja  $q$  on täisarvud. Liitmisaksioomi põhjal saame:

$$a + b = p \cdot c + q \cdot c$$

ehk

$$N = (p + q) \cdot c.$$

Siit näeme, et  $N$  on arvu  $c$  kordne, seega jaguv arvuga  $c$ . Lause jääb kehtima ka 3, 4, 5 jne. liidetava puhul.

Teise lause tõestamiseks arutame järgmiselt:

Olgu liidetavad nagu varemalt tähistatud  $a$  ja  $b$ . Jagugu arv  $a$  arvuga  $c$  ja andku arv  $b$  jagamisel arvuga  $c$  jagatise  $q$  ja jäägi  $r$ . Siis on

$$a = p \cdot c$$

$$b = q \cdot c + r.$$

Liitmisaksioomi põhjal saame

$$a + b = p \cdot c + q \cdot c + r,$$

ehk

$$N = (p + q) \cdot c + r.$$

Siit näeme, et arvu  $N$  jagamisel arvuga  $c$  tekib jääk  $r$ , m. o. t. t.

Jaguvuse tunnused jagajate puhul

2, 5 ja 10.

Olgu antud mingi arv  $N$ ; olgu temas kümneid  $k$  ja ühelisi  $u$ ; siis on

$$N = 10k + u.$$

Viimase summa esimene liige on arvude 10 ja  $k$  korrutis; tegur 10 on 2-ga jaguv, seega on  $10k$  korrutise jagamise seaduse põhjal jaguv 2-ga. Teise lause põhjal arv  $N$  annab jagamisel 2-ga sama jäägi, mis annab üheliste arv  $u$  jagamisel 2-ga. Järelikult arv  $N$  on jaguv või mittejaguv 2-ga vastavalt sellele, kas tema ühelised on 2-ga jaguvad või mitte. 2-ga jaguvad ühtedest vaid 0, 2, 4, 6, 8. Seega:

arv on jaguv 2-ga, kui tema kirjutis lõpeb nulli või paarisnumbriga.

Samal viisil arutades leiame, et

arv on jaguv 5-ga, kui tema kirjutis lõpeb numbriga 0 või 5.

Samal viisil arutades leiame ka, et

arv on jaguv 10-ga, kui tema kirjutis lõpeb numbriga 0.

Jaguvuse tunnus jagajate 4 ja 25 puhul.

Olgu antud mingi arv  $N$ ; olgu temas sadu  $s$ , kümmelisi  $k$  ja ühelisi  $u$ ; siis on

$$N = 100s + 10k + u,$$

ehk

$$N = 100s + (10k + u).$$

Viimase summa esimene liige on korrutise jagamise seaduse põhjal jaguv 4-ga. Teise lause põhjal arvud  $N$  ja  $10k + u$  annavad jagamisel 4-ga ühe ja sama jäägi. Järelikult arv  $N$  on jaguv või mittejaguv 4-ga vastavalt sellele, kas  $10k + u$  on jaguv 4-ga või mitte. Seega:

arv on jaguv 4-ga, kui ta kirjutise kaks viimast numbrit kujutavad 4-ga jaguvat arvu.

Samal viisil arutades leiame, et

arv on jaguv 25-ga, kui ta kirjutise kaks viimast numbrit kujutavad 25-ga jaguvat arvu.

Jaguvuse tunnus jagajate 9 ja 3 puhul.

Olgu tegemist mingi arvuga  $N$ ; olgu tema numbrid paremalt vasakule poole  $n_1, n_2, n_3, \dots$ . Siis on selles arvus  $n_1$  ühelist,  $n_2$  kümnelist,  $n_3$  sajalist jne. Näiteks arvu 7509 puhul  $n_1 = 9$ ,  $n_2 = 0$ ,  $n_3 = 5$  ja  $n_4 = 7$ . Oma numbrite kaudu arv  $N$  avaldub kujul:

$$N = n_1 + 10n_2 + 100n_3 + \dots$$

Selle summa võime kirjutada ka nii:

$$N = n_1 + (9n_2 + n_2) + (99n_3 + n_3) + \dots$$

ehk, avades sulud ja liikmed teisiti rühmitades,

$$N = (9n_2 + 99n_3 + \dots) + (n_1 + n_2 + n_3 + \dots).$$

Esimeses suluavaldises on iga liige ilmsesti 9-ga jaguv; esimese lause põhjal on seega suluavaldis ise 9-ga jaguv. Teise lause põhjal annab arv  $N$  jagamisel 9-ga sama jäägi, mille annab jagamisel 9-ga avaldis

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots$$

ehk arvu  $N$  „numbrite summa“. Järelikult on arv  $N$  jaguv või mittejaguv 9-ga vastavalt sellele, kas arvu numbrite summa on jaguv 9-ga või mitte. Arvu numbrite summat nimetame arvu ristsummaks.

Kokkuvõttes:

arv on jaguv 9-ga, kui arvu ristsumma on jaguv 9-ga.

Samal viisil arutades leiame, et

arv on jaguv 3-ga, kui arvu ristsumma on jaguv 3-ga.

Näide. Arv 780126 on jaguv 2-ga, sest 6 on jaguv 2-ga; arv pole jaguv 4-ga, sest 26 pole jaguv 4-ga; arv pole jaguv 5-ga, sest 6 pole jaguv 5-ga. Arvu ristsumma

$$7 + 8 + 0 + 1 + 2 + 6 = 24$$

on jaguv 3-ga, pole aga jaguv 9-ga; seega antud arv on jaguv 3-ga, mitte aga 9-ga.

### § 59. Arvude lahutamine algtegreiks.

Olgu antud mõni kordarv  $a$ ; olgu  $b$  üks selle arvu tegureist; siis on

$$a = b \cdot q.$$

Selles võrduses arv  $a$  esineb korrutisena. Kui arvud  $b$  ja  $q$  on algarvud, siis meie võrdus annab arvu  $a$  tema algtegurite korrutisena, ehk, nagu ütleme, algtegreiks lahutatud kujul.

Näiteks esinevad võrdustes

$$15 = 3 \cdot 5 \qquad 77 = 11 \cdot 7 \qquad 611 = 13 \cdot 47$$

arvud 15, 77 ja 611 lahutatult oma algtegreiks.

Olgu võrduses

$$a = b \cdot q$$

üks tegureist, näiteks  $b$ , kordarv. Siis peab temale leiduma jagaja, mis on suurem kui 1 ja väiksem kui  $b$ ; olgu see jagaja  $c$ . Sel puhul võime kirjutada

$$b = c \cdot p,$$

seega

$$a = c \cdot p \cdot q.$$

Olgu viimases võrduses üks tegureist, näiteks  $c$ , jäl-

legi k o r d a r v. Siis peab temale leiduma jagaja, mis on suurem kui 1 ja väiksem kui  $c$ ; olgu see  $d$ . Sel puhul võime kirjutada

$$c = d \cdot n,$$

seega

$$a = d \cdot n \cdot p \cdot q.$$

Nõnda edasi minnes ja kordarvulisi tegureid järjest korrutistena kirjutades jõuame viimaks niikaugele, et kõik paremal poolel seisvad tegurid on algarvud: arv  $a$  esineb siis oma algtegurite korrutisena ehk lahutatult algtegureiks.

Tegelikult toimub arvu  $a$  algtegureiks lahutamine sel viisil, et me proovime, kas algarv 2 on arvu teguriks; kui mitte, siis proovime, kas 3 on selle arvu teguriks; kui mitte, siis proovime, kas 5 on selle arvu teguriks, jne. Võib juhtuda, et ükski arvust  $a$  väiksem algarv ei ole arvu  $a$  teguriks; siis on  $a$  ise algarv. Vastasel korral leidub arv  $t$ , mis on arvu  $a$  teguriks. Sel puhul määrame arvu  $a$  ja leitud teguri  $t$  jagatise  $b$ , kirjutame  $a = t \cdot b$  ja toimetame edasi arvuga  $b$ , nagu eespool arvu  $a$  puhul seletatud.

Näide. Lahutame arvu 396 algtegureiks.

Talitates eespool-seletatud viisil saame:

$$396 = 2 \cdot 198 = 2 \cdot 2 \cdot 99 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 33 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11.$$

Sobivat skeemi arvu algtegureiks lahutamiseks õpime järgmisist näiteist:

Näide 1.

396		2
198		2
99		3
33		3
11		11

Näide 2.

3003		3
1001		7
143		11
13		13

---


$$396 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \quad 3003 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$

Kontrolliiks jääb vaid teostada paremal pool märgitud korrutamised.

Üksikiikme algteguriks nimetame kordaja algtegureid ja kõiki ühetäheliste tegureid astendatavaid.

Näiteks on üksikiikme  $70ab^2x^3$  algtegurid

2, 5, 7, a, - b, x.

Oma algtegurite korruutisena esineb antud üksikiikme kujul:

$$70ab^2x^3 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ab^2x^3.$$

### § 60. Arvu jagajate leidmine.

Kui arv on lahutatud algteguriks, saab kergesti leida tema jagajad, võttes arvu algtegureid üksikiikult, siis korrutades neid paarikaupa, kolmekaupana jne. Näiteks on

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5;$$

siit arvu 60 jagajad on

2

3

5

2 · 2

2 · 3

2 · 5

3 · 5

2 · 2 · 3

2 · 2 · 5

2 · 3 · 5

2 · 2 · 3 · 5

ehk, lühemalt, 2, 3, 5; 4, 6, 10, 15; 12, 20, 30; 60;

kõigi nende jagajatega seitsib veel endastmõistetavalt jagaja 1.

### § 61. Antud arvude suurim ühistegur.

Olgu antud kakks arvu, näiteks 30 ja 42. Nende arvude

jagajad on vastavalt

1 2 3 5 6 10 15 30

ja 1 2 3 6 7 14 21 42.

Nagu näeme, omavad arvu 30 ja 42 ühisi jagaja-

jaid; nendeks on arvu

1, 2, 3 ja 6.

Seega on antud arvude suurimaks ühisjagajaks arv 6. Arvude suurimat ühisjagajat nimetame ka arvude suurimaks ühisteguriks. Niisiis:

antud arvude suurimaks ühisteguriks nimetame suurimat arvu, millega jagub igaüks antud arvudest.

Olgu kaks arvu lahutatud algtegureiks. Kirjutame välja mõlema arvu ühised algtegurid. Võttes neid tegureid üksikult, siis korrutatult paarikaupa, kolme-kaupa jne. saame kõik meie arvude ühisjagajad; suurima neist saame, arvutades kõigi ühiste algtegurite korrutise.

Näide. Olgu antud arvud 420 ja 2700. Lahutades need algtegureiks saame:

$$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \quad 2700 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5.$$

Antud arvudel on järgmised ühised algtegurid:

$$2, 2, 3, 5;$$

seega on antud arvude ühiseiks jagajaiks arvud

$$2, 3, 5; 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 3 \cdot 5;$$

$$2 \cdot 2 \cdot 3, 2 \cdot 2 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5; 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Neid arve võime kirjutada lühemalt nii:

$$2, 3, 5; 4, 6, 10, 15; 12, 20, 30; 60;$$

nendega seltsib veel endastmõistetavalt jagaja 1.

Arvude 420 ja 2700 suurim ühisjagaja ehk suurim ühistegur on 60.

Eespool-õeldut üldistades jõuame järgmisele reeglile:

selleks, et saada antud arvude suurimat ühistegurit, lahutame arvud algtegureiks, kirjutame välja arvude ühised algtegurid ja leiame nende korrutise.

Näide. Leiame arvude 1452, 1980 ja 6600 suurima ühisteguri.

Korraldame töö nii:

				6600	2		
		1980	2	3300	2		
1452	2	990	2	1650	2		
726	2	495	3	825	3		
363	3	165	3	275	5		
121	11	55	5	55	5		
11	11	11	11	11	11		
$1452 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11^2$		$1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$		$6600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$			

Arvude 1452, 1980 ja 6600 suurim ühistegur on

$$2^2 \cdot 3 \cdot 11 = 132.$$

### § 62. Antud üksliikmete suurim ühistegur.

Antud avaldiste suurimaks ühisteguriks nimetame avaldiste kõigi ühiste algtegurite korrutist.

Olgu antud üksliikmed

$$42a^3b^2x \quad \text{ja} \quad 105ab^2x^2$$

ehk, lahutatult algteguks:

$$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot a^3b^2x \quad \text{ja} \quad 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ab^2x^2.$$

Nende avaldiste suurim ühistegur on

$$3 \cdot 7 \cdot ab^2x$$

ehk, lühemalt,

$$21ab^2x.$$

### § 63. Antud arvude väikesim ühiskordne.

Olgu antud arvud 12 ja 15. Nende ühe-, kahe-, kolme-, ... kordsed on vastavalt

$$12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132 \dots$$

$$15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 180 \dots$$

Kordsete ridades leidub ühiseid arve, näiteks

60, 120 ja edasi 180, 240, . . .

Neist ühiskordseist on üks väikesim; meie juhul 60; teised on selle ühe-, kahe-, kolme- jne. kordsed.

Antud arvude väikesimaks ühiskordseks nimetame väikesimat arvu, mis jagub iga antud arvuga.

Olgu kaks arvu  $a$  ja  $b$  lahutatud algtegureiks. Olgu nende arvude väikesim ühiskordne  $k$ . Vaadeldes arvu  $k$  arvu  $a$  kordsena, näeme, et temas peavad leiduma kõik arvu  $a$  algtegurid; vaadeldes teda arvu  $b$  kordsena, näeme, et temas peavad leiduma samuti kõik arvu  $b$  algtegurid. Järelikult saame arvu  $k$ , kui kirjutame välja kõik arvu  $a$  algtegurid, lisaks neile veel need arvu  $b$  algtegurid, mis arvus  $a$  ei esine, ja moodustame väljakirjutatud tegurite korrutise.

Näide. Leiame arvude 126 ja 56 väikesima ühiskordse.

Korraldame töö nii:

126	2		56	2	
63	3		28	2	
21	3		14	2	
7	7		7	7	
126		$= 2 \cdot 3^2 \cdot 7$	56		$= 2^3 \cdot 7$

Arvude 126 ja 56 väikesim ühiskordne on

$$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 2^2 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 8 \cdot 9 \cdot 7 = 504.$$

Eespool-õeldut üldistades jõuame järgmisele reeglile:

selleks, et saada antud arvude väikesimat ühiskordset, lahutame arvud algtegureiks, kirjutame välja ühe arvu algtegurid, nendele lisaks teiste arvude need algtegurid, mis veel puuduvad, ja leiame kõigi väljakirjutatud algtegurite korrutise.

Antud arvude väikesima ühiskordse leidmise reegli võib sõnastada ka nii:

selleks, et saada antud arvude väikesimat ühiskordset, lahutame arvud algteguriteks ja korrutame ühe antud arvudest teiste arvude nende algteguritega, mis võetud arvus ei esine.

#### § 64. Antud üksliikmete väikesim ühiskordne.

Antud avaldiste väikesimaks ühiskordseks nimetame ühe avaldise korrutist teiste avaldiste nende algteguritega, mis võetud avaldises ei esine.

Olgu antud üksliikmed

$$40m^2n^3p \text{ ja } 84mnq^2$$

ehk, lahutatult algteguriteks:

$$2^3 \cdot 5 \cdot m^2n^3p \text{ ja } 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot mnq^2.$$

Nende avaldiste väikesim ühiskordne on

$$2^3 \cdot 5 \cdot m^2 \cdot n^3 \cdot p \cdot 3 \cdot 7 \cdot q^2$$

ehk

$$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot m^2 \cdot n^3 \cdot p \cdot q^2$$

ehk

$$840m^2n^3pq^2.$$

Antud üksliikmete väikesima ühiskordse leidmise juhise võib sõnastada nii:

selleks, et saada antud üksliikmete väikesimat ühiskordset, võtame ühe neist üksliikmeist ja korrutame selle teiste üksliikmete nende algteguritega, mis võetud üksliikmes ei esine.

## Peatükk VIII.

### Algebraalne murd.

Esimene tsükkel.

#### § 65. Murd.

Murdu  $\frac{5}{7}$  mõistame tulemusena, mille saame, kui terviku jaotame 7-ks võrdseks osaks ja neid osi võtame 5. Üldistame seda mõtet. Olgu  $m$  ja  $n$  kaks positiivset täisarvu. Murdu  $\frac{m}{n}$  mõistame tulemusena, mille saame, kui terviku jaotame  $n$  võrdseks osaks ja neid osi võtame  $m$ .

Arvu, mis näitab, mitmeks osaks on jaotatud tervik, nimetame murru nimetajaks; arvu, mis näitab, mitu niisugust osa on võetud, nimetame murru lugejaks.

Selle asemel, et enne jaotada üks tervik  $n$  võrdseks osaks ja siis võtta  $m$  niisugust osa, võime enne võtta  $m$  tervikut kokku ja saaduse jaotada  $n$  võrdseks osaks. Õeldu põhjal võime murdu  $\frac{m}{n}$  tõlgendada jagatisena, mille saame, jagades arvu  $m$  arvuga  $n$ . Seega

murd  $\frac{m}{n}$  on niisugune arv, mis korrutamisel arvuga  $n$  annab arvu  $m$ .

Sümbolites avaldub see definitsioon kujul:

$$n \cdot \frac{m}{n} = m.$$

Olgu  $p$  ja  $q$  kaks positiivset täisarvu. Murru esimese tõlgenduse järgi sümbolitel

$$\frac{-p}{q} \text{ ja } \frac{p}{-q}$$

pole mõtet, küll aga omavad nad mõtet praegu-antud definitsiooni järgi. Viimasest nähtub, et kumbagi neist sümboleist tuleb mõista murruna  $-\frac{p}{q}$ :

$$\frac{-p}{q} = \frac{p}{-q} = -\frac{p}{q}.$$

Sellest järeldub, et pole vajadust eraldi uurida murdu, mille lugejaks või nimetajaks on negatiivne arv, vaid murru omaduste tuletamisel ja murdudega tehete käsitlemisel võime eeldada, et murru lugeja ja nimetaja on positiivsed.

### § 66. Murru põhiomadus.

Murru põhiomaduse tuletamisel lähtume silmanähtavast tõest, et murru  $\frac{a}{b}$  väärtus  $m$  korda suureneb, kui lugejat korrutame arvuga  $m$ , ja  $m$  korda väheneb, kui arvuga  $m$  korrutame nimetajat. Siit järeldub, et

murru väärtus ei muutu, kui korrutame ühe ja sama arvuga nii murru lugejat kui ka tema nimetajat.

Sümbolites avaldub see tõsiasi nõnda:

$$\frac{a}{b} = \frac{m \cdot a}{m \cdot b}.$$

Lugedes sama võrdust paremalt poolt vasakule näeme, et

murru väärtus ei muutu, kui jagame ühe ja sama arvuga murru lugejat ja nimetajat.

Ülaltoodud võrduses peituvat murru omadust loeme murru põhiomaduseks.

### § 67. Murru laiendamine ja taandamine.

Korrutades murru  $\frac{3}{4}$  lugejat ja nimetajat arvudega 5, 7, 9, 10 ja 13, saame murrud

$$\frac{15}{20} \quad \frac{21}{28} \quad \frac{27}{36} \quad \frac{30}{40} \quad \frac{39}{52}$$

Murru põhiomaduse järgi on kõigil neil murdudel üks ja seesama väärtus  $\frac{3}{4}$ ; seega kõik need murrud on murru  $\frac{3}{4}$  teisendid.

Jagades murru  $\frac{840}{1120}$  lugejat ja nimetajat arvudega 2, 10, 20, 140 ja 280, saame murrud

$$\frac{420}{560} \quad \frac{84}{112} \quad \frac{42}{56} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{3}{4}$$

Murru põhiomaduse järgi on kõigil neil murdudel üks ja seesama väärtus  $\frac{420}{560}$ ; seega kõik need murrud on murru  $\frac{420}{560}$  teisendid.

Teisendust, mille puhul murru lugejat ja nimetajat korrutame ühe ja sellesama arvuga, nimetame murru laiendamiseks; teisendust, mille puhul murru lugejat ja nimetajat jagame ühe ja sellesama arvuga, nimetame murru taandamiseks.

Murru laiendamiseks pole tõket; murru taandamist on aga võimalik teostada vaid niikaua, kui murru lugejal ja nimetajal on veel ühiseid tegureid.

Murdu, mille lugejal ja nimetajal pole ühiseid tegureid (peale arvu 1), nimetame taandumatuks.

Näiteks on murrud

$$\frac{3}{5} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{13}{18} \quad \frac{23}{41}$$

ja

$\frac{a}{b} \qquad \frac{m}{n^2} \qquad \frac{2p}{3q} \qquad \frac{x+1}{a^3}$

taandumatud murrud.

Murru taandamist selgitame järgmiste ülesannete varal.

Ülesanne 1. Taanda murd  $\frac{234}{306}$ .

Lahendus.

$$\frac{234}{306} = \frac{117}{153} = \frac{39}{51} = \frac{13}{17}.$$

taandades taandades taandades  
 kahega kolmega kolmega

Saadud murd  $\frac{13}{17}$  on taandumatu, sest tema lugejal ja nimetajal pole ühiseid tegureid peale arvu 1.

Selle asemel, et taandamist toimetada samm-sammult, võib seda teha ühekorraga, jagades lugejat ja nimetajat nende suurima ühisteguriga.

Ülesanne 2. Taanda murd  $\frac{832}{864}$ .

Lahendus. Lugeja ja nimetaja algtegureiks lahutamine annab  $832 = 2^6 \cdot 13$  ja  $864 = 2^5 \cdot 3^3$ , seega nende arvude suurim ühistegur on  $2^5$ . Jagades lugejat ja nimetajat arvuga  $2^5$  leiame, et  $832 : 2^5 = 2 \cdot 13 = 26$  ja  $864 : 2^5 = 3^3 = 27$ , järelikult

$$\frac{832}{864} = \frac{26}{27}.$$

Murd  $\frac{26}{27}$  on taandumatu, sest tema lugejal ja nimetajal pole ühiseid tegureid peale arvu 1, teiste sõnaga, lugeja ja nimetaja on ühistegurita arvud.

Samal viisil toimetame taandamist täheliste murdude puhul.

Ülesanne 3. Taanda murd

$$\frac{132a^4b^2c^3}{165ab^3c^4d}.$$

Lahendus. Kirjutame antud murru kujul

$$\frac{2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot a^4 b^2 c^3}{3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot ab^3 c^4 d}$$

Lugejal ja nimetajal on järgmised ühised tegurid:

$$3, 11, a, b^2, c^3.$$

Järelikult lugeja ja nimetaja suurim ühistegur on

$$33ab^2c^3.$$

Jagades sellega antud murru lugejat ja nimetajat saame, et

$$\frac{132a^4b^2c^3}{156ab^3c^4d} = \frac{4a^3}{5bcd}$$

### § 68. Murdude ühenimelisteks teisendamine.

Murde, millel on üks ja seesama nimetaja, nimetame ühenimelisteks; niisuguste murdude nimetajat — nende ühisnimetajaks.

Näiteks

$$\frac{3}{17} \quad \frac{8}{17} \quad \frac{13}{17} \quad \frac{16}{17}$$

on ühenimelised murrud; samuti on

$$\frac{a}{2mn} \quad \frac{b^2}{2mn} \quad \frac{cd}{2mn} \quad \frac{h}{2mn}$$

ühenimelised murrud.

Antud murde on alati võimalik teisendada ühenimelisteks murdudeks, võttes nende ühisnimetajaks antud nimetajate mingi ühiskordse. Lihtsuse mõttes võtame selleks ühisnimetajaks harilikult antud nimetajate väikesima ühiskordse. Murdude ühenimelisteks teisendamist selgitame järgmiste ülesannete varal.

Ülesanne 1. Teisenda murrud  $\frac{11}{12}$  ja  $\frac{13}{15}$  ühenimelisteks.

Lahendus. Arvude 12 ja 15 väikesimaks ühiskordseks on 60; see on 5 korda suurem kui 12 ja 4 korda suurem kui 15. Järelikult murru põhiomaduse järgi

$$\frac{11}{12} = \frac{11 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{55}{60} \quad \text{ja} \quad \frac{13}{15} = \frac{13 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{52}{60}.$$

Arvu, mis näitab, mitu korda murru laiendamisel suureneb murru lugeja ja nimetaja, nimetame murru laiendusteguriks.

Eelmises ülesandes olid murdude laiendustegurid vastavalt 5 ja 4.

Üldine reegel, mille järgi murde teisendame ühenimelisteks, on järgmine:

selleks, et erinevate nimetajatega murde teisendada ühenimelisteks, määrame nende nimetajate väikesima ühiskordse ning võtame selle murdude ühisnimetajaks; murdude uued lugejad saame, korrutades antud lugejad vastavate laiendusteguritega.

Ülesanne 2. Teisenda murrud  $\frac{9}{14}$ ,  $\frac{3}{35}$  ja  $\frac{11}{24}$  ühenimelisteks.

Lahendus. Lahutades nimetajad algtegureiks saame

$$14 = 2 \cdot 7 \quad 35 = 5 \cdot 7 \quad 24 = 2^3 \cdot 3;$$

seega nimetajate väikesim ühiskordne on

$$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$$

ning vastavad laiendustegurid on

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad 2^3 \cdot 3 \qquad 5 \cdot 7$$

ehk

$$60 \qquad 24 \qquad 35.$$

Järelikult

$$\frac{9}{14} = \frac{9 \cdot 60}{14 \cdot 60} = \frac{540}{840} \quad \frac{3}{35} = \frac{3 \cdot 24}{35 \cdot 24} = \frac{72}{840}$$

$$\frac{11}{24} = \frac{11 \cdot 35}{24 \cdot 35} = \frac{385}{840}.$$

Samal viisil toimime täheliste murdude ühenimelisteks teisendamisel.

Ülesanne 3. Teisenda murrud

$$\frac{7c}{12abx} \quad \frac{13x}{20ab^2} \quad \frac{8b}{15a^2x^3}$$

ühenimelisteks.

Lahendus. Lahutades nimetajad algtegureiks saame

$$2^2 \cdot 3 \cdot abx \quad 2^2 \cdot 5 \cdot ab^2 \quad 3 \cdot 5 \cdot a^2x^3;$$

seega nimetajate väikesim ühiskordne on

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^2b^2x^3,$$

ehk

$$60a^2b^2x^3.$$

Murdude laiendustegurid on vastavalt

$$5abx^2 \quad 3ax^3 \quad 4b^2.$$

Järelikult võime antud murrud asendada murdudega

$$\frac{7c \cdot 5abx^2}{60a^2b^2x^3} \quad \frac{13x \cdot 3ax^3}{60a^2b^2x^3} \quad \frac{8b \cdot 4b^2}{60a^2b^2x^3}$$

ehk, lühemalt kirjutades, murdudega

$$\frac{35abcx^2}{60a^2b^2x^3} \quad \frac{39ax^4}{60a^2b^2x^3} \quad \frac{32b^3}{60a^2b^2x^3}.$$

### § 69. Murdude võrdlemine.

Lähtume silmanähtavast tõest, et

võrdsete nimetajate puhul on see murd suurem, millel on suurem lugeja; võrdsete lugejate puhul on see murd suurem, millel on väiksem nimetaja.

Näiteks murdude reas  $\frac{4}{15}, \frac{11}{15}, \frac{8}{15}, \frac{7}{15}$  on suurimaks murruks  $\frac{11}{15}$ ; murdude reas  $\frac{7}{12}, \frac{7}{16}, \frac{7}{9}, \frac{7}{20}$  on suurimaks murruks  $\frac{7}{9}$ .

Juhul, kui võrdlemiseks antud murrud erinevad nii lugejailt kui ka nimetajailt, teisendame nad ühenimelisteks.

Ülesanne. Järjesta murrud  $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}$  nende suuruse järgi.

Lahendus. Asendame antud murrud murdudega

$$\frac{10}{20} \quad \frac{8}{20} \quad \frac{15}{20};$$

tähele pannes, et

$$\frac{8}{20} < \frac{10}{20} < \frac{15}{20},$$

järeldame, et

$$\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4}.$$

### § 70. Murdude liitmine.

Ülesanne 1. Liida murrud  $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}$  ja  $\frac{5}{7}$ .

Lahendus. Kõigil liidetavail on ühine nimetaja. On selge, et

$$2 \text{ seitsmendikku} + 3 \text{ seitsmendikku} + 5 \text{ seitsmendikku} = \\ = (2 + 3 + 5) \text{ seitsmendikku,}$$

ehk teisiti:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{2+3+5}{7}.$$

Saaduse võime kirjutada lühemalt  $\frac{10}{7}$  ehk  $1\frac{3}{7}$ .

Samal viisil saame, et

$$\frac{3a}{5N^2} + \frac{2b}{5N^2} = \frac{3a + 2b}{5N^2}.$$

Sõnastame oma arutluste tulemuse nõnda:

ühenimeliste murdude summa on murd, millel on seesama nimetaja mis liidetavailgi, lugeja aga on antud murdude lugejate summa.

Ülesanne 2. Liida murrud  $\frac{12}{35}$ ,  $\frac{29}{42}$ ,  $\frac{61}{70}$ .

Lahendus. Teisendame murrud ühenimelisteks. Ühisnimetajaks võtame väikesima võimalikest, see on, nimetajate väikesima ühiskordse. Et

$$35 = 5 \cdot 7 \quad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \quad 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7,$$

siis on ühisnimetajaks arv

$$2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \quad \text{ehk} \quad 210$$

ja laiendustegureiks arvud

$$2 \cdot 3, \quad 5 \quad \text{ja} \quad 3 \quad \text{ehk} \quad 6, \quad 5 \quad \text{ja} \quad 3.$$

Seega

$$\begin{aligned} \frac{12}{35} + \frac{29}{42} + \frac{61}{70} &= \frac{12 \cdot 6}{35 \cdot 6} + \frac{29 \cdot 5}{42 \cdot 5} + \frac{61 \cdot 3}{70 \cdot 3} = \frac{72}{210} + \frac{145}{210} + \frac{183}{210} = \\ &= \frac{72 + 145 + 183}{210} = \frac{400}{210} = \frac{40}{21} = 1\frac{19}{21}. \end{aligned}$$

Samal viisil talitame täheliste murdude liitmisel.

Ülesanne 3. Liida murrud

$$\frac{f}{3a^2}, \quad \frac{g}{10ab}, \quad \frac{h}{15b^2}.$$

Lahendus. Ühisnimetajaks on avaldis

$$30a^2b^2$$

ja laiendustegureiks vastavalt

$$10b^2, 3ab, 2a^2;$$

seega

$$\begin{aligned} \frac{f}{3a^2} + \frac{g}{10ab} + \frac{h}{15b^2} &= \frac{f \cdot 10b^2}{3a^2 \cdot 10b^2} + \frac{g \cdot 3ab}{10ab \cdot 3ab} + \frac{h \cdot 2a^2}{15b^2 \cdot 2a^2} = \\ &= \frac{10b^2f}{30a^2b^2} + \frac{3abg}{30a^2b^2} + \frac{2a^2h}{30a^2b^2} = \frac{10b^2f + 3abg + 2a^2h}{30a^2b^2}. \end{aligned}$$

Vajalikke abiarvutusi peast tehes võib eelseisvas võrduste ahelas kaks vahepealset lüli kirjutamata jätta.

Ülesanne 4. Liida segaarvud  $4\frac{3}{8}$ ,  $2\frac{2}{5}$  ja  $1\frac{7}{10}$ .

Lahendus. Arvestades seda, et

$$4\frac{3}{8} = 4 + \frac{3}{8}, \quad 2\frac{2}{5} = 2 + \frac{2}{5} \quad \text{ja} \quad 1\frac{7}{10} = 1 + \frac{7}{10},$$

leiame:

$$\begin{aligned} 4\frac{3}{8} + 2\frac{2}{5} + 1\frac{7}{10} &= (4 + 2 + 1) + \left(\frac{3}{8} + \frac{2}{5} + \frac{7}{10}\right) = \\ &= 7 + \left(\frac{15}{40} + \frac{16}{40} + \frac{28}{40}\right) = 7 + \frac{59}{40} = 7 + 1\frac{19}{40} = 8\frac{19}{40}. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes:

segaarvude liitmisel liidame täisosade summa murdosade summaga.

Märkus. Mõnikord on otstarbekohane kirjutada algebralist segaavaldist murdavaldise kujul. Küsimus taandub murdude liitmisele, kui arvestame tõsiasja, et iga täisavaldist võime kujutada murdavaldisena, mille nime-taja on 1.

Näide.

$$2a + \frac{b^3}{5c^2} = \frac{2a}{1} + \frac{b^3}{5c^2} = \frac{2a \cdot 5c^2}{5c^2} + \frac{b^3}{5c^2} = \frac{10ac^2 + b^3}{5c^2}.$$

## § 71. Murdude lahutamine.

Ülesanne 1. Lahuta murrust  $\frac{7}{9}$  murd  $\frac{5}{9}$ .

Lahendus. On selge, et

$$\begin{aligned} 7 \text{ üheksandikku} - 5 \text{ üheksandikku} &= \\ &= (7 - 5) \text{ üheksandikku} \end{aligned}$$

ehk, teisiti kirjutades,

$$\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{7-5}{9},$$

mida võime kirjutada lühemalt  $\frac{2}{9}$ .

Samal viisil lahutame ühenimelisi tähelisi murde.

Näide.

$$\frac{9b^3}{10H^2u} - \frac{a^2c}{10H^2u} = \frac{9b^3 - a^2c}{10H^2u}.$$

Sõnastame oma arutluste tulemuse nõnda:

ühenimeliste murdude vahe on murd, millel on seesama nimetaja, mis antud murdulgi, lugeja aga on antud murdude lugejate vahe.

Ülesanne 2. Lahuta murrust  $\frac{5}{6}$  murd  $\frac{3}{8}$ .

Lahendus. Teisendades antud murrud ühenimelisteks saame

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{20 - 9}{24},$$

ehk  $\frac{11}{24}$ .

Samal viisil lahutame tähelisi murde.

Näide 1.

$$\frac{5a}{14cu^2} - \frac{9b}{35c^2u} = \frac{5a \cdot 5c}{70c^2u^2} - \frac{9b \cdot 2u}{70c^2u^2} = \frac{25ac - 18bu}{70c^2u^2}.$$

Näide 2.

$$\begin{aligned} mh - \frac{2a^2b^2c}{5nh^2} &= \frac{mh}{1} - \frac{2a^2b^2c}{5nh^2} = \frac{5mnh^3}{5nh^2} - \frac{2a^2b^2c}{5nh^2} = \\ &= \frac{5mnh^3 - 2a^2b^2c}{5nh^2}. \end{aligned}$$

Ülesanne 3. Lahuta arvust  $3\frac{7}{12}$  arv  $1\frac{19}{20}$ .

Lahendus. Teisendades murdosad ühenimelisteks saame:

$$3\frac{7}{12} - 1\frac{19}{20} = 3\frac{35}{60} - 1\frac{57}{60}.$$

Et 35-st pole võimalik lahutada 57, siis võtame 3-st täisühikust ühe ja peenendame ta 60-ndikeks; saame:

$$2\frac{95}{60} - 1\frac{57}{60} = (2 - 1) + \frac{95 - 57}{60} = 1 + \frac{38}{60} = 1\frac{38}{60} = 1\frac{19}{30}.$$

Sõnastame oma mõttekäigu tulemuse nõnda:

segaarvude lahutamisel lahutame täisosad omaette ja murdosad omaette ning liidame tulemused; tarbe korral peenendame murruks ühe vähendatava ühtedest.

Käsiteldud juhule ei leidu vastet täheliste murdudega töötamisel.

## § 72. Murdude korrutamine.

Ütlust „Korruta arv  $A$  täisarvuga  $t$ “ mõistame nii, et tuleb võtta arv  $A$  liidetavana nii mitu korda, kui palju ühtesid on arvus  $t$ . Näiteks tähendab kirjutis

$$3 \cdot 4\frac{2}{5}$$

sedasama, mis kirjutis

$$4\frac{2}{5} + 4\frac{2}{5} + 4\frac{2}{5}.$$

Seega korrutamise täisarvuga taandub liitmisele ega paku sisuliselt uut. Küsime, kuidas mõista ütlust „Korruta arv  $A$  murruga  $\frac{m}{n}$ “. Sellel ütlusel endises tõlgenduses pole mõtet. Sellele ütlusele sisu leidmiseks võtame järgmise ülesande.

Ülesanne. Kauba kilogrammi hind on  $A$  krooni. Kui palju maksab  $t$  (täisarv) kilogrammi seda kaupa? Kui palju maksab  $\frac{m}{n}$  (murdarv) kilogrammi seda kaupa?

Lahendus. Esimesele küsimusele saame vastuse:  $t$  kilogrammi kaupa maksab kroonides

$$t \cdot A.$$

Teise küsimuse lahendame nõnda:

1 kg kaupa maksab	$A$	krooni
$\frac{1}{n}$ „ „ „ „ $n$ korda vähem, seega	$\frac{A}{n}$	„
$\frac{m}{n}$ „ „ „ „ $m$ korda enam, seega	$\frac{m \cdot A}{n}$	„

Esimese küsimuse lahendame, korrutades arvu  $A$  täisarvuga  $t$ ; teise — leides arvust  $A$  kui tervikust osa  $\frac{m}{n}$ . Et mõlemad küsimused on oma laadilt samased, siis on loomulik nimetada ühe ja sama nimega ka toiminguid nende lahendamiseks. Sel kaalutlusel nimetame osa  $\frac{m}{n}$  leidmist arvust  $A$  kui tervikust arvu  $A$  korrutamiseks murruga  $\frac{m}{n}$ . Järelikult:

korrutada arv  $A$  murruga  $\frac{m}{n}$  tähendab leida arvust  $A$  kui tervikust osa  $\frac{m}{n}$ .

Selle definitsiooni järgi on

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{a}{b} = \frac{m \cdot a}{n \cdot b}.$$

See tähendab:

kahe murru korrutis on murd, mille lugejaks on antud murdude lugejate korrutis ja nimetajaks antud murdude nimetajate korrutis.

Näide.

$$\frac{35}{78} \cdot \frac{13}{140} = \frac{35 \cdot 13}{78 \cdot 140} = \frac{1 \cdot 1}{6 \cdot 4} = \frac{1}{24}.$$

Samal viisil toimime täheliste murdude korrutamisel.

Näide.

$$\frac{15a^2c^2x}{84mn^2y^3} \cdot \frac{24my^2}{35c^2} = \frac{15 \cdot 24 \cdot a^2c^2mxy^2}{84 \cdot 35 \cdot mn^2c^2y^3} = \frac{3 \cdot 2a^2x}{7 \cdot 7n^2y} = \frac{6a^2x}{49n^2y}.$$

Kui tegurina esineb segaarv, teisendame selle murruks ja arvutame korrutise, nagu ülal seletatud.

Näide.

$$1\frac{7}{8} \cdot 3\frac{1}{5} = \frac{15}{8} \cdot \frac{16}{5} = \frac{15 \cdot 16}{8 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 6.$$

Samal viisil toimime täheliste avaldiste puhul.

Näide.

$$\left(a + \frac{b}{c}\right) \left(k + \frac{m}{n}\right) = \frac{ac + b}{c} \cdot \frac{kn + m}{n} = \frac{(ac + b)(kn + m)}{cn}.$$

### § 73. Murdude jagamine.

Olgu antud kaks arvu  $a$  ja  $b$ . Ütlust „Jaga arv  $a$  arvuga  $b$ “ mõistame nõudena leida niisugune arv  $x$ , mis korrutamisel jagajaga  $b$  annaks jagatava  $a$ ; sümboolites

$$b \cdot x = a.$$

Võtame lähemale vaatlusele juhu, et jagaja  $b$  on murd, näiteks  $\frac{m}{n}$ . Sel puhul on

$$\frac{m}{n} \cdot x = a,$$

järelikult jagamisaksiooni põhjal

$$\frac{1}{n} \cdot x = \frac{a}{m}$$

ja korrutamisaksiooni põhjal

$$x = \frac{a \cdot n}{m}$$

ehk

$$x = a \cdot \frac{n}{m}.$$

Me näeme:

selleks, et saada arvu  $a$  ja murru  $\frac{m}{n}$  jagatist, tuleb moodustada arvu  $a$  ja murru  $\frac{n}{m}$  korrutis. Murd  $\frac{n}{m}$  on saadud antud murrust  $\frac{m}{n}$ , vahetades temas lugeja ja nimetaja. Lugeja ja nimetaja vahetamise teel saadud murdu nimetame antud murru pöördeks. Näiteks murru  $\frac{4}{7}$  pööre on  $\frac{7}{4}$  ja arvu 5 ehk  $\frac{5}{1}$  pööre on  $\frac{1}{5}$ .

Kokkuvõttes ütleme:

selleks, et jagada arvu murruga, korrutame selle arvu murru pöördega.

Näited.

$$1. \quad \frac{22}{39} : \frac{55}{104} = \frac{22}{39} \cdot \frac{104}{55} = \frac{22 \cdot 104}{39 \cdot 55} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 5} = \frac{16}{15} = 1 \frac{1}{15}.$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \frac{a^2bx^3}{2nz} \cdot \frac{ax^2}{3bz^2} &= \frac{a^2bx^3}{2nz} \cdot \frac{3bz^2}{ax^2} = \frac{a^2bx^3 \cdot 3bz^2}{2nz \cdot ax^2} = \\
 &= \frac{abx \cdot 3bz}{2n \cdot 1} = \frac{3ab^2xz}{2n}
 \end{aligned}$$

Märkus. Skeem, mille abil tuletasime arvu  $a$  ja murru  $\frac{m}{n}$  jagatise  $x$ , on tõeliselt terviku leidmise skeem, kui on teada terviku osa  $\frac{m}{n}$ . Seega võime öelda:

jagada arv  $a$  murruga  $\frac{m}{n}$  tähendab leida tervik, mille osa  $\frac{m}{n}$  on arv  $a$ .

#### § 74. Murru astendamine.

Astme definitsiooni järgi on

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ tegurit}}$$

Murdude korrutamise eeskirja järgi võime võrduse parema poole asendada avaldisega

$$\frac{a \cdot a \cdot a \cdots a}{b \cdot b \cdot b \cdots b} \text{ ehk } \frac{a^n}{b^n};$$

seega

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Tulemuse sõnastame nõnda:

murru  $n$ -es aste on murd, mille lugeja ja nimetaja on vastavalt antud murru lugeja ja nimetaja  $n$ -dad astmed.

Näide.

$$\left(\frac{3a^2}{4b^3}\right)^3 = \frac{(3a^2)^3}{(4b^3)^3} = \frac{27a^6}{64b^9}.$$

### § 75. Arvutamise põhiseadused murdarvude vallas.

Eespool on antud mitmeid eeskirju tehete sooritamiseks murdarvudega. Tekib küsimus, kas need eeskirjad on kokkukõlas arvutamise põhiseadustega. Veendume mõne näite varal, et antud arvutamise eeskirjad tagavad arvutamise põhiseaduste kehtivust ka murdarvude vallas.

Näide 1. Liitmise ühenduvuse seadus väidab, et

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Näitame, et see seadus on kehtiv ka murdarvude vallas. Olgu tegemist kolme murruga

$$\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \text{ ja } \frac{r}{s}.$$

Käies murdude liitmise eeskirja järgi leiame ühelt poolt, et

$$\frac{m}{n} + \left( \frac{p}{q} + \frac{r}{s} \right) = \frac{m}{n} + \frac{ps + qr}{qs} = \frac{mqs + nps + nqr}{nqs}.$$

Teiselt poolt saame, et

$$\left( \frac{m}{n} + \frac{p}{q} \right) + \frac{r}{s} = \frac{mq + np}{nq} + \frac{r}{s} = \frac{mqs + nps + nqr}{nqs}.$$

Et tulemused on samad, siis peavad seda olema ka lähteavaldised, seega

$$\frac{m}{n} + \left( \frac{p}{q} + \frac{r}{s} \right) = \left( \frac{m}{n} + \frac{p}{q} \right) + \frac{r}{s}.$$

Saadud võrdus näitab, et liitmise ühenduvuse seadus on kehtiv ka murdarvude vallas.

Näide 2. Korrutamise jaotuvuse seadus väidab, et

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Näitame, et see seadus on kehtiv ka murdarvude vallas. Olgu tegemist kolme murruga

$$\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \text{ ja } \frac{r}{s}.$$

Käies murdude liitmise ja korrutamise eeskirjade järgi leiame ühelt poolt, et

$$\frac{m}{n} \cdot \left( \frac{p}{q} + \frac{r}{s} \right) = \frac{m}{n} \cdot \frac{ps + qr}{qs} = \frac{m(ps + qr)}{nqs} = \frac{mps + mqr}{nqs}.$$

Teiselt poolt on

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} + \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} = \frac{mp}{nq} + \frac{mr}{ns} = \frac{mps + mqr}{nqs}.$$

Et tulemused on samad, siis peavad seda olema ka lähteavaldised, seega

$$\frac{m}{n} \left( \frac{p}{q} + \frac{r}{s} \right) = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} + \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s}.$$

Saadud võrdus näitab, et korrutamise jaotuvuse seadus on kehtiv ka murdarvude vallas.

Analoogiliselt võime veenduda ka teiste arvutamise põhiseaduste kehtivuses murdarvude puhul.

Et murdarvud alluvad samadele arvutamise põhiseadustele, mis täisarvudki, siis võime nii ühti kui teisi kokku võtta ühiseks täis- ja murdarvude vallaks ehk  $rationaalsete$  arvude vallaks.

Negatiivsete arvude loomisel positiivsete arvude kõrvale oleme laiendanud ennemalt-tuntud arvuvalda: arvudega 1, 2, 3, ... seltsisid arvud 0 ja  $-1, -2, -3, \dots$ . Nende täisarvude vallas iga kahe teineteisele järgneva arvu vahe on üks. Murdarvude loomisega oleme tihendanud arvuvalda; näiteks arvude 2 ja 3 vahele on asetunud arvud  $2\frac{1}{4}, 2\frac{2}{3}, 2\frac{7}{10}$  ja kuitahes palju teisi.

### § 76. Kahe arvu suhe.

Kahe arvu suhte mõtte selgitamiseks toome järgmise ülesande.

Ülesanne. Äriees on mahutanud ühte ettevõtetesse 1200 krooni, teise 6000 krooni, ja saab aastas kasu esimesest ettevõttest 120 krooni, teisest ettevõttest 400 krooni. Kumba ettevõttesse on kapitali mahutamise kasulikum?

Lahendus. Esimene ettevõtte annab ühelt kroonilt kasu  $\frac{120}{1200}$  ehk  $\frac{1}{10}$  krooni, teine ettevõtte seevastu  $\frac{400}{6000}$  ehk  $\frac{1}{15}$  krooni. Saadud murdudest on esimene suurem kui teine; järelikult on kasulikum mahutada kapitali esimesse ettevõttesse. Murrud  $\frac{120}{1200}$  ja  $\frac{400}{6000}$  annavad kummagi ettevõtte kohta kasu suhte kapitalisse.

Üldiselt defineerime suhet nõnda:

arvu  $a$  suhteks arvusse  $b$  nimetame murdu  $\frac{a}{b}$  ehk jagatist  $a : b$ .

Sageli antakse kahe arvu suhe protsentides; näiteks

$$\text{suhe} \quad 1 : 10 = 10 : 100 = 10\%$$

$$\text{ja suhe} \quad 1 : 15 = 6\frac{2}{3} : 100 = 6\frac{2}{3}\%.$$

### § 77. Võrre.

Võrde mõtte selgitamiseks toome järgmise ülesande.

Ülesanne. Õpilane mõõdab mõõtpaelaga klassi pikkust ja leiab selle olevat 10 m veaga mitte üle 25 mm; teine õpilane mõõdab oma töölaua pikkust ja leiab selle olevat 0,80 m veaga mitte üle 2 mm. Kumb mõõtmislaad on täpsem?

L a h e n d u s. Esimese mõõtmise puhul tuleb ühe meetri kohta viga kuni  $\frac{25}{10}$  ehk 2,5 mm, teise mõõtmise puhul viga kuni  $\frac{2}{0,80}$  ehk samuti 2,5 mm. Seega on mõlemad mõõtmised võrdtäpsed. Murrud  $\frac{25}{10}$  ja  $\frac{2}{0,80}$  annavad kummagi mõõtmisvea suhte mõõtmisvaadusse ja kujutavad mõõtmiste relatiivseid vigu. Need murrud on võrdsed:

$$\frac{25}{10} = \frac{2}{0,80}.$$

Võrdust, nagu kõnesolev, nimetame võrdeks. Üldiselt defineerime võrret nõnda:

võrdekst nimetame niisugust võrdust, mille kumbki pool on kahe arvu suhe.

Näiteks võrdused

$$\frac{4}{6} = \frac{20}{30} \qquad \frac{a}{x} = \frac{x}{b} \qquad \frac{a-u}{a+u} = \frac{1}{a}$$

on võrded.

Neli arvu, millest võrre  $a : b = c : d$  ehk

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

koosneb, on võrdeliikmed; neist  $b$  ja  $c$  on siseliikmed,  $a$  ja  $d$  on välisliikmed.

Võrretega puutume sagedasti kokku nn. võrdeliste suuruste puhul. Olgu näiteks kaks suhkruhulka kilogrammides märgitud  $c$  ja  $d$ , nende suhkruhulkade väärtused kroonides  $a$  ja  $b$ . Siis  $a$  on nii mitu korda suurem  $b$ -st, kui palju korda  $c$  on suurem  $d$ -st; sümbolites:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Me ütleme, et kauba hulk ja selle väärtus on võrdelised suurused. Niisugusteks suurusteks on ka hoiusumma ja selle kantud intress, ruudu külg ja ruudu ümbermõõt, piima ruumala ja piima kaal.

Üldiselt defineerime nii:

suurusi, mille vastavate väärtuste suhted on võrdsed, nimetame võrdelisteks suurusteks.

Näiteks hapniku hulk ja vesiniku hulk vees on võrdelised suurused, sest igasuguse veehulga puhul on temas leiduva vesiniku hulga ja hapniku hulga suhe üks ja seesama, nimelt 1 : 8.

### § 78. Võrde põhiomadus.

Väidame:

võrde siseliikmete korrutis on võrdne sama võrde välisliikmete korrutisega.

Tõepoolest, olgu tegemist võrdega

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$

kirjutades need murrud ühise nimetajaga saame:

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd};$$

korrutades võrduse kumbagi poolt avaldisega  $bd$ , leiame:

$$ad = bc,$$

m. o. t. t.

Ümberpöördult:

kui neli arvu  $a, b, c, d$  rahuldavad tingimust  $ad = bc$ , siis võib neist moodustada võrde.

Tõepoolest, olgu

$$ad = bc;$$

jagades mõlemad korrutised  $bd$ -ga leiame:

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd},$$

ehk, taandades,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

m. o. t. t.

Praegu-tõestatud lause annab meile murdude võrdumise tingimuse: kui  $ad = bc$ , siis

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Võrduses  $ad = bc$  on võimalik vahetada tegurite järjekorda paremal poolel, vahetada tegurite järjekorda vasemal poolel ja ka vahetada võrduse pooli. Sellest järeldub, et ühtaegu võrdega  $a : b = c : d$  on kehtivad võrded

$$a : c = b : d \quad d : b = c : a \quad b : a = d : c.$$

See tähendab, et

võrdes võib siseliikmed isekeskis ümber paigutada;

võrdes võib välisliikmed isekeskis ümber paigutada;

võrdes võib siseliikmed võtta välisliikmeteks ja välisliikmed siseliikmeteks.

P e a t ü k k IX.

**Ruutjuur. Kuupjuur.**

§ 79. Seose  $y = x^2$  graafik.

Olgu antud ruut, mille külg on  $x$  sentimeetrit. Selle ruudu pindala  $y$  on siis  $x^2$  ruutsentimeetrit:

$$y = x^2.$$

Viimane võrdus kujutab seost ruudu külje ja ruudu pindala vahel. Uurime seda seost lähemalt, arvestamata tema päritolu.

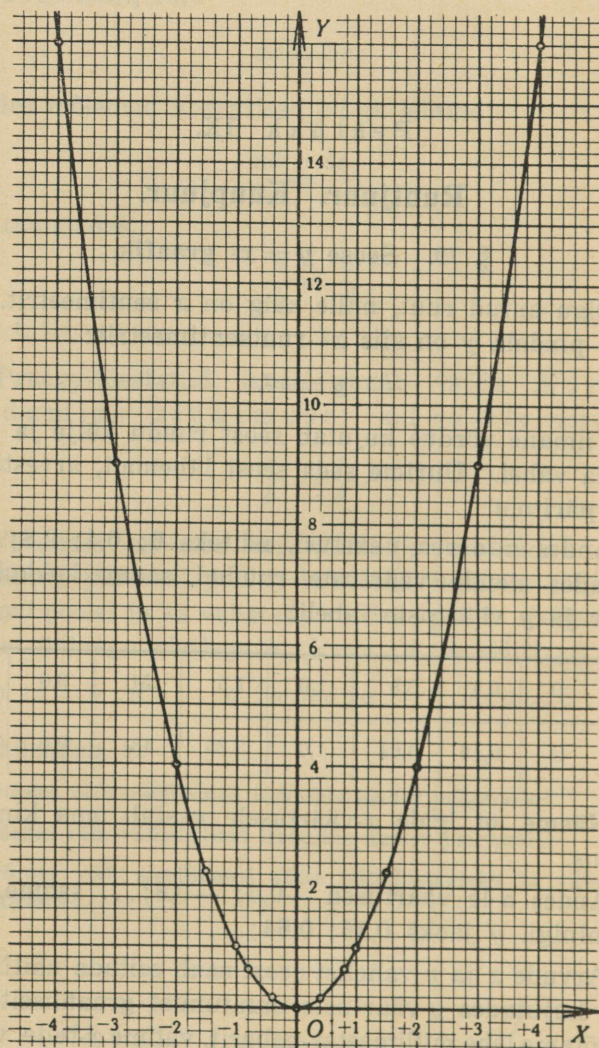
Andes  $x$ -le rea väärtusi, näiteks 0; 0,4; 0,8;... ja arvutades nende väärtuste ruudud, saame kokkukuuluvate  $x$  ja  $y$  väärtuste tabeli:

$x$	0	0,4	0,8	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
$y$	0	0,16	0,64	1,0	2,25	4,0	9,0	16,0

Näeme, et igale  $x$ -väärtusele vastab oma kindel  $y$ -väärtus.

Andes  $x$ -le väärtused  $-0,4$ ;  $-0,8$ ;... saame, nagu enneminigi,  $y$  jaoks 0,16; 0,64;...

Arvude  $x$  ja  $y$  vahelist seost saab esitada näitlikumal viisil, kujutades  $y$ -väärtuste muutumist graafiliselt. Selleks võtame lehe millimeeter-paberit, valime  $x$ -telje, võtame sellel alguse  $O$ , valime sobiva kujutamisühiku ja kujutame  $x$ -teljel väärtused  $-4,0$ ; ... 0; 0,4; 0,8; ... 4,0.



Joonis 10.

Punktist  $O$  tõmbame risti  $x$ -teljega  $y$ -telje. Arve  $-4,0$ ;  $-3,0$ ; ... kujutavaist punkttest tõmbame  $y$ -teljega rööbikud sirged ja kujutame neil, alates  $x$ -teljest, kohaselt valitud kujutamisühiku abil  $y$ -väärtused  $16,0$ ;  $9,0$ ; ...

Pilk saadud joonisele näitab, et nende  $y$ -lõikude lõpud asetsevad ladusal kõveral (joonis 10). See kõver kannab *parabooli* nime. Ta kujutab  $y$ -väärtuste muutumist  $x$ -väärtuste muutudes.

### § 80. Parabooli kasutamine arvutusabinõuna.

Eespool-saadud joonist saab kasutada *arvutusabinõuna*. Tõepoolest, olgu antud mingi  $x$ -väärtus, näiteks  $x = 2,8$ ; küsime, kui suur on  $x^2$ ? Otsime  $x$ -teljel punkti  $x = 2,8$ ; liigume seda punkti läbivat ristsirget mööda üles kõverani ja loeme saadud lõigu pikkuse  $7,8$ . Möödapääsematute väikeste mõõtmis- ja joonistamisvigade tõttu saadus ei ole täpne:  $2,8^2 = 7,84$ ; saadus on aga täpsele väärtusele väga lähedal, erinedes temast kõigest  $0,04$  võrra.

Veelgi tulusam on joonise kasutamine *pöördülesande* lahendamisel. Tõepoolest, olgu antud mingi  $y$ -väärtus, näiteks  $3,7$ ; kui suur on vastav  $x$ ? Teiste sõnadega: missuguse arvu ruut on  $3,7$ ? Küsimuse lahendamiseks võtame  $y$ -teljel punkti  $3,7$  ja tõmbame sellest punktist rööbiku  $x$ -teljega, nihkume piki seda rööbikut kõverani, sealt ristsihis alla  $x$ -teljeni ja loeme siin *kaks* väärtust

$$-1,9 \text{ ja } +1,9.$$

Kontroll annab

$$(-1,9)^2 = (+1,9)^2 = 3,61,$$

mis on antud väärtusest umbes  $0,1$  võrra väiksem.

Esimeses ülesandes oli antud  $x$ , otsiti selle ruutu  $y$ ; tehet, mille abil see  $y$  saadakse, nimetatakse  $x$ -i ruudu leidmiseks. Teises ülesandes oli antud  $x$ -i ruut  $y$ ; otsiti arvu  $x$ ; tehet, mille abil see  $x$  saadakse, nimetatakse  $y$  ruutjuure leidmiseks.

Leida ruutjuur arvust  $A$  tähendab leida niisugune arv, mille ruut on võrdne  $A$ -ga.

Ülal tutvusime graafilise võttega ruutjuure leidmiseks; hiljemini anname ka numbrilise võtte selle ülesande lahendamiseks.

### § 81. Ruutjuure sümbol.

Nõudeid liita, lahutada, korrutada ja jagada me oleme märkinud sümbolitega  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $:$ ; nõuet „leida ruutjuur arvust  $A$ “ märgime sümboliga  $\sqrt{A}$ , loe: ruutjuur arvust  $A$ .

Oleme aga kirjutisi

$$a + b \qquad a - b \qquad a \cdot b \qquad a : b$$

mõistnud mitte ainult nõuetena toimetada liitmise, lahutamise jne. tehted, vaid ka sümbolitena nende tehete tulemuste tähistamiseks. Nii tähendab näiteks kirjutis  $a + b$  arvude  $a$  ja  $b$  summat, kirjutis  $a \cdot b$  arvude  $a$  ja  $b$  korrutist. Samuti näeme ka sümbolis

$$\sqrt{A}$$

mitte ainult ruutjuure leidmise nõuet, vaid ka selle tehete tulemuste tähist. Nii kirjutame:

$$\sqrt{16} = 4 \qquad \sqrt{49} = 7 \qquad \sqrt{3,7} \approx 1,93.$$

Summa, vahe, korrutise ja jagatise määramisel jõud-  
sime ikka ühele ja ainsale tulemusele. Ruutjuure  
määramine seevastu viib meid alati kahele tulemusele.  
Tõepoolest, nõutagu arvu, mille ruut on  $A$ . Märgime otsi-  
tava tähega  $x$ ; siis peab olema

$$x^2 = A.$$

Rahuldagu seda nõuet positiivne arv  $a$ , nii et

$$a^2 = A;$$

siis rahuldab seda nõuet ka negatiivne arv  $-a$ ;  
tõepoolest

$$(-a)^2 = a^2,$$

seega ka

$$(-a)^2 = A.$$

Niisiis peaksime kirjutama

$$\sqrt{A} = a \quad \text{ja ka} \quad \sqrt{A} = -a.$$

See tähendab aga, et sümbolil  $\sqrt{A}$  on kaks tähendust.  
Kõiki seni tarvitusel olnud kirjutisi, nagu

$$A + 2, \quad A - 2, \quad 2A, \quad \frac{A}{2}, \quad A^2$$

tuli ikka mõista vaid ühes tähenduses. Tahtes ka süm-  
bolit

$$\sqrt{A}$$

mõista ühes ainsas tähenduses, lepime kokku tähistada  
sellega ikka vaid võrrandi  $x^2 = A$  positiivset lahendit.  
Nii kirjutame, et võrrandi

$$x^2 = 64$$

lahendid on

$$x_1 = \sqrt{64} = 8 \quad \text{ja} \quad x_2 = -\sqrt{64} = -8.*)$$

### § 82. Ruutjuure leidmine ruutude tabeli abil.

Ülesanne. Olgu kasutada arvude ruutude tabel:

$x$	1	2	3	...	10	11	12	...	18	19	20	...
$x^2$	1	4	9	...	100	121	144	...	324	361	400	...

Leia ruutjuur arvust 350.

Lahendus. Arv 350 asetseb 324 ja 361 vahel. Järelikult otsitav ruutjuur asetseb 18 ja 19 vahel. Võime teda kirjutada kujul  $18 + a$ , vaadeldes arvu  $a$  parandusena, mis tuleb lisandada arvule 18 ruutjuure õige väärtuse saamiseks. Ülevaate kergendamiseks kirjutame abitabeli:

$x$	$y = x^2$
18	324
$18 + a$	$350 = 324 + 26$
19	361

\*) Olgu tähendatud, et teaduslikus kirjanduses sümbolit  $\sqrt{A}$  sageli mõistetakse kahesena; sel puhul võrrandi  $x^2 = 64$  lahendid esinevad kujus

$$x = \sqrt{64},$$

ehk, täielikumalt,

$$x_1 = |\sqrt{64}| = 8 \quad \text{ja} \quad x_2 = -|\sqrt{64}| = -8.$$

On kokkuleppe asi, kuidas mõista üht või teist sümbolit.

Näeme:  $x$ -i kasvades  $a$  võrra  $y$  kasvab 26 võrra,  $x$ -i kasvades 1 võrra  $y$  kasvab 37 võrra. Kui  $x$ - ja  $y$ -kasvud oleksid võrdelised, siis oleks

$$\frac{a}{1} = \frac{26}{37}.$$

Tegelikult on see vaid ligikaudu nõnda; seepärast

$$\frac{a}{1} \approx \frac{26}{37} \approx 0,7$$

ja seega parandatud  $x$ -i väärtus on 18,7.

Kontroll: saadud arvu ruutu tõstes leiame  $18,7^2 = 349,69$ , mis erineb antud arvust 350 umbes 0,3 võrra.

Võtet võib korrata. Kirjutame uue abitabeli:

$x$	$y = x^2$
18,7	349,69
$18,7 + \beta$	$350 = 349,69 + 0,31$
19	361

Samadel kaalutlustel nagu eespool saame

$$\frac{\beta}{0,3} \approx \frac{0,31}{11,31},$$

see tähendab, et

$$\beta \approx \frac{0,3 \cdot 0,3}{11} \approx 0,008,$$

nii et veel kord parandatud juure väärtus on 18,708.

Kontrolliks saadud arvu ruutu tõstes leiame

$$18,708^2 = 349,989264,$$

mis erineb antud väärtusest 350 kõigest umbes 0,01 võrra.

Niisiis

$$\sqrt{350} \approx 18,708.$$

Võtet veel kord rakendades saaksime nõutava ruutjuure veelgi suurema täpsusega.

Käsiteldud võtet nimetatakse võõrkeelse sõnaga interpolatsiooniks.

Märkus. Tavaliselt abitabeleid välja ei kirjutata. Vajalikud arvutused toimetatakse, kus võimalik, peast.

### § 83. Ruutjuure leidmise algoritm.

Ruutjuure leidmise algoritm on võtte ruutjuure kiireks määramiseks. Võtte käsitlemist toimetame kahe osas: esimeses selgitame, mitu numbrit on ruutjuures, teises — missugused on ruutjuure numbrid. Asume esimese küsimuse käsitlemisele.

Iga ühekohaline arv  $a$  rahuldab tingimust

$$1 \leq a < 10;$$

sellest järeldub, et

$$1 \leq a^2 < 100;$$

see tähendab, et ühekohalise arvu ruut on ühe või kahekohaline arv. Iga kahekohaline arv  $b$  rahuldab tingimust

$$10 \leq b < 100;$$

sellest järeldub, et

$$100 \leq b^2 < 10000;$$

see tähendab, et kahekohalise arvu ruut on kolme- või neljakohaline arv. Mõttekäiku üldistades näeme, et  $n$ -kohalise arvu ruudul on kas  $2n - 1$  või  $2n$  numbrit. Überpöörduvalt: ruutjuur arvust, millel on  $2n - 1$  või  $2n$  numbrit, on  $n$ -kohaline arv.

Siit järeldub võte numbrite arvu määramiseks arvu ruutjuures:

rühmitame juuritava arvu numbrid, alates ühelistega, kahe- numbrilisteks rühmadeks, kusjuures viimasesse rühma võib jääda ka üksainus number; siis tekkinud numbrirühmade hulk annab ruutjuure kohtade arvu.

N ä i d e.  $\sqrt{190873454}$  on viiekohaline arv. Tõepoo- lest, juuritava arvu numbrite rühmitamine annab

$$1'90'87'34'54,$$

seega 5 rühma.

Asume nüüd ruutjuure numbrite otsimisele. Selgi- tame küsimust näitel  $\sqrt{1369}$ . Rühmitades juuritava arvu numbreid, saame 13'69; numbrirühmi on 2, seega  $\sqrt{1369}$  on kahekohaline arv. Olgu temas kümmelisi  $x$  ja ühelisi  $y$ . Otsitav arv esineb siis kujul

$$10 \cdot x + y$$

ja tema ruut on

$$100 \cdot x^2 + 2 \cdot 10 \cdot x \cdot y + y^2,$$

järelikult

$$100 \cdot x^2 + 2 \cdot 10 \cdot x \cdot y + y^2 = 1369.$$

Kirjutades selle võrduse kujul

$$x^2 \cdot 100 + 2 \cdot 10 \cdot x \cdot y + y^2 = 13 \cdot 100 + 69$$

näeme, et paremal poolel sadade arv on 13, vasakul poolel aga  $x^2$ , milledele võivad lisanduda veel mõned sajad liik- meist  $2 \cdot 10 \cdot x \cdot y + y^2$ . Seega  $x^2$  ei saa olla suurem kui 13. Et  $x^2$  on ruutarv, 13 aga seda ei ole, siis ei saa  $x^2$  olla võrdne 13-ga; seega peab olema  $x^2 < 13$ . Võtame  $x$ -i väärtuseks suurima arvu, mis viimast võrratust rahuldab. Et suurimaks ruutarvuks, mis arvude reas seisab enne 13, on 9, siis  $x^2 = 9$  ja otsitav kümmeliste arv  $x = \sqrt{9}$ , ehk  $x = 3$ .

Asetades võrduses

$$100 \cdot x^2 + 2 \cdot 10 \cdot x \cdot y + y^2 = 1369$$

$x$ -i asemele 3, saame

$$100 \cdot 9 + 2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot y + y^2 = 1369,$$

ehk

$$2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot y + y^2 = 469,$$

ehk

$$2 \cdot 3 \cdot y \cdot 10 + y^2 = 46 \cdot 10 + 9$$

See võrdus lubab määrata tundmatut  $y$ .

Selleks arutame nii: vasakul poolel on näha  $2 \cdot 3 \cdot y$  kümnet; neile võivad lisanduda veel mõned kümned arvust  $y^2$ ; seega igal juhul

$$2 \cdot 3 \cdot y \leq 46, \text{ ehk } y \leq \frac{46}{2 \cdot 3}, \text{ ehk } y \leq 7;$$

see tähendab, et  $y$  on 7 või sellest väiksem. Missugune see  $y$  tõepoolest on, seda otsustame proovimise teel, alates suurimast võimalikust väärtusest. Võttes katseks  $y = 7$ , leiame

$$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10 + 7^2 = 420 + 49 = 469,$$

just nagu peab olema; seega  $y = 7$ ,  $10x + y = 37$  ja

$$\sqrt{1369} = 37.$$

Üheliste leidmist võib kergendada tähele pannes, et neid määravat võrrandit

$$2 \cdot 3 \cdot y \cdot 10 + y^2 = 469$$

saab kirjutada kujus

$$(2 \cdot 3 \cdot 10 + y) \cdot y = 469.$$

See ütleb: kui kahekordsele kümneliste arvule juurde kirjutame üheliste arvu ja tulemuse üheliste arvuga korrutame, peame saama 469. Kümneliste arv oli 3; selle kahekordne on 6. Võttes juurdekirjutatavaks arvuks 7, saame

arvu 67, mis korrutamisel 7-ga annab  $67 \cdot 7 = 469$ , nagu peab olema.

Tööd võib korraldada ülevaatlilikult alljärgnevate skeemide järgi, millest esimeses on kasutatud täielikumat, teises aga lühemat kirjutusviisi:

$$\begin{array}{r} \sqrt{1369} = 30 + 7 \\ \hline 900 \\ 2 \cdot 30 + 7 \quad | \quad 469 \\ \phantom{2 \cdot 30 + 7} 7 \quad | \quad 469 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{1369} = 37 \\ \hline 9 \\ 67 \quad | \quad 469 \\ \phantom{67} 7 \quad | \quad 469 \end{array}$$

Võte lubab üldistamist juhule, kus ruutjuur on 3-, 4-, 5- jne. kohaline arv.

N ä i d e. Leiame  $\sqrt{289567}$ .

Rühmitame juuritavas numbrid paarikaupa, sammudes paremalt poolt vasakule; saame

$$28'95'67;$$

siit näeme, et otsitav ruutjuur on kolmekohaline arv. Selle leidmine võib toimuda, nagu allpool näha:

$$\sqrt{28'95'67} = 538 \text{ puudusega} \\ 25 \quad \text{või} \quad 539 \text{ liiaga.}$$

$$\begin{array}{r|l} 103 & 395 \\ \hline 3 & 309 \\ \hline 1068 & 8667 \\ 8 & 8544 \\ \hline & +123 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1069 & 8667 \\ \hline 9 & 9621 \\ \hline & -954 \end{array}$$

$$538 < \sqrt{289567} < 539.$$

Märkus. Eelmises näites ruutjuure leidmisel me ei saanud otsitavat juurt täpselt; leidsime ainult kaks teineteisele järgnevat täisarvu, mille vahel asetseb otsitav ruutjuur:

$$538 < \sqrt{289567} < 539.$$

Neid kaht arvu nimetame otsitava ruutjuure lähendeks; esimene neist on puudusega, teine liiaga.

Arvude 538 ja 539 vahe on 1. Et  $\sqrt{289567}$  asetseb nende arvude vahel, siis ta erineb kummastki vähem kui ühe võrra. Seega võrduste

$$\sqrt{289567} = 538 \quad \text{ja} \quad \sqrt{289567} = 539$$

viga ei küüni üheni.

#### § 84. Ruutjuure leidmine ettekirjutatud täpsusega.

Leida arvu  $a$  ruutjuur veega alla  $\frac{1}{n}$  tähendab leida 2 arvu, mille vahe on  $\frac{1}{n}$  ja mille ruutude vahel asetseb arv  $a$ .

Kõnesolevaid arve võime tähistada  $\frac{x}{n}$  ja  $\frac{x+1}{n}$ . Nad peavad rahuldama nõuet, et

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 < a < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2.$$

Korrutades võrratuste kõiki liikmeid sama arvuga  $n^2$  saame

$$x^2 < an^2 < (x+1)^2.$$

Arvud  $x$  ja  $x+1$  erinevad 1 võrra ja nende ruutude vahel asetseb arv  $an^2$ . Seega on meie ülesanne taandunud arvu  $an^2$  ruutjuure leidmisele veega alla 1. Viimast ülesannet oskame aga juba lahendada ruutjuure leidmise algoritmiga.

Näide. Leiame ruutjuure arvust 2 veaga alla 0,0001.

Meie juhul on  $a = 2$ ,  $n = 10\,000$ ; seega

$$n^2 = 100\,000\,000 \text{ ja } an^2 = 200\,000\,000$$

Ruutjuure leidmise algoritm annab

$$\sqrt{200000000} = 14142 \text{ puudusega} \\ \text{või } 14143 \text{ liiaga.}$$

Jagades leitud arvud 10 000-ga saame

$$\sqrt{2} = 1,4142 \text{ puudusega} \\ \text{või } 1,4143 \text{ liiaga.}$$

Kontroll annab:

$$1,4142^2 = 1,99996164;$$

see on väiksem kui 2, erinedes sellest vähem kui 0,0001 võrra;

$$1,4143^2 = 2,00024449;$$

see on suurem kui 2, erinedes sellest vähem kui 0,0003 võrra.

## § 85. Irratsionaalarv.

Ülesanne. Kui pika peab võtma ruudu külje, et ruudu pindala oleks 2 ruutmeetrit?

Lahendus. Olgu nõutava ruudu külje pikkus  $x$  meetrit. Siis on tema pindala  $x^2$  ruutmeetrit; seega peab olema

$$x^2 = 2.$$

Katsudes seda nõuet rahuldada täisarvuga näeme, et

$$1^2 = 1 < 2 \qquad 2^2 = 4 > 2$$

ja veelgi suuremad on  $3^2$ ,  $4^2$ ,  $5^2$  jne. Nii näeme, et ei leidu täisarvu, mille ruut on 2.

Katsume nõuet  $x^2 = 2$  rahuldada murdarvuga, näiteks murruga  $\frac{a}{b}$ . Loomulikult võtame proovitava murru tema lihtsamal, see on, taandatud kujul; sel juhul  $a$  ja  $b$  on ühistegurita arvud.

Kirjutame murru  $\frac{a}{b}$  nii, et tema lugeja ja nimetaja esineksid algteguriteks lahutatuina:

$$\frac{a}{b} = \frac{h \cdot k \cdot l \dots n}{p \cdot q \cdot r \dots v},$$

siin on lugeja tegurid kõik erinevad nimetaja teguritest. Ruutu tõstes saame

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{h \cdot h \cdot k \cdot k \cdot l \cdot l \dots n \cdot n}{p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot r \cdot r \dots v \cdot v}.$$

Näeme, et ka sellel murrul lugeja tegurid kõik erinevad nimetaja teguritest, seega ka murd  $\left(\frac{a}{b}\right)^2$  on taandumatu. Meie nõude kohaselt peab

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2,$$

tähendab, kõnesolev murd  $\left(\frac{a}{b}\right)^2$  peab olema taanduv täisarvule 2. Murd ei saa korruga olla taandumatu ja taanduv. Seega peab meie nõudes peituma viga. See tähendab, et ei leidu ka murdarvu, mille ruut on 2.

Ülaltoodust näeme, et põhimõtteliselt on võimatu nõuet  $x^2 = 2$  täpselt rahuldada täis- või murdarvuga.

Küll aga on võimalik nõuet rahuldada ligikaudu, ja pealegi nii hästi kui iganes soovime. Rakendades ruut-

juure leidmise algoritmi ja järk-järgult viga vähendades näeme, et

$$\begin{aligned}
 1 &< x < 2 \\
 1,4 &< x < 1,5 \\
 1,41 &< x < 1,42 \\
 1,414 &< x < 1,415 \\
 1,4142 &< x < 1,4143 \\
 1,41421 &< x < 1,41422 \\
 1,414213 &< x < 1,414214 \\
 1,4142135 &< x < 1,4142136 \\
 &\text{jne.}
 \end{aligned}$$

Nii seisab arv  $x$  suletuna järjest kitsamasse ja kitsamasse vahemikku. Vasempoolses tulbas seisavad  $x$ -i lähendid puudusega, parempoolses tulbas  $x$ -i lähendid liiaga. Vastavate lähendite viga järjest väheneb: esimeses reas ei küüni viga 1-ni, teises reas ei küüni ta 0,1-ni, kolmandas reas ei küüni ta 0,01-ni jne. Nii ühe kui teise tulba lähendid juhivad meid  $x$ -i väärtusele:

$$x = 1,4142135 \dots$$

Selles kirjutises numbrite jada ei lõpe.

Tõepoolest, kui see poleks nii, siis seisaks meie ees tavaline kümnendmurd ning selle ruut oleks 2; eespool-tõestatu põhjal pole säärast murdu olemas. Seega on  $x$  lõputa kümnendmurd. Seda lõputa kümnendmurdu pole võimalik kirjutada ühegi hariliku murruna; vastasel korral leiduks niisugune harilik murd, mille ruut on 2.

Täisarve ja harilikke murde nimetasime koos ratsionaalseteks arvudeks.

Arve, mida ei saa kirjutada ei täisarvuna ega hariliku murruna, nimetame irratsionaalseteks arvudeks.

Murru 1,4142135... saamislugu tagab, et tema ruut on 2:

$$(1,4142135\dots)^2 = 2;$$

vastavalt sellele kirjutame selle lõputa kümnendmurru lühiduse mõttes sümboliga  $\sqrt{2}$ .

Üldiselt:

kujutagu sümbol  $\sqrt{A}$  ratsionaalset või irratsionaalset arvu, ikka on  $(\sqrt{A})^2 = A$ .

Nagu  $\sqrt{2}$ , nii kujutavad ka  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{10}$  irratsionaalseid arve.

### § 86. Arvuvalla tihendamine irratsionaalsete arvudega.

Omalaadise laiendasime arvude valda, luues positiivsete arvude kõrvale negatiivsed arvud. Siis tihendasime arvuvalda murdarvudega ja saime nii ratsionaalsete arvude valla. Irratsionaalsete arvude loomisega ratsionaalsete arvude vahele tihendame arvuvalda veelgi. Negatiivsete arvude loomisega said sümbolid, nagu

$$-1, \quad -5, \quad -7\frac{1}{2},$$

kindla mõtte ja sisu. Irratsionaalarvude loomisega saavad mõtte ka sümbolid nagu

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \sqrt{5\frac{1}{2}},$$

milledel pole vastet täis- ja murdarvude vallas. On tõestatud, et arvutamise põhiseadused jäävad kehtima ka irratsionaalsete arvude puhul. Ratsionaalsed ja irratsionaalsed arvud moodustavad koos reaalarvude valla.

### § 87. Ruutjuur korrutisest ja jagatisest.

Näitame, et

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Väite tõestamiseks oletame vastupidist, nimelt, et

$$\sqrt{ab} \neq \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Võrratuse kummalgi poolel seisavad positiivsed arvud. Kui kaks positiivset arvu pole võrdsed, siis pole võrdsed ka nende ruudud. Seega

$$(\sqrt{ab})^2 \neq (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2$$

ehk

$$(\sqrt{ab})^2 \neq (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2$$

ehk

$$ab \neq a \cdot b,$$

mis on võimatu. Tehtud oletusest järeldub võimatu tulemus; järelikult on see oletus vale ja seega meie väide õige.

Samal viisil saame näidata, et

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Tõestatud võrdustes võib vahetada pooled. Nii tõestatud võrdused kui need, mis saame poolte vahetamisel, leiavad kasutamist avaldiste teisendamisel, eriti teguri juuremärgi alla toomisel ja teguri juuremärgi ette toomisel.

Olgu näiteks tegemist juurega  $\sqrt{n^2 a}$ . Tõestatud lause põhjal saame

$$\sqrt{n^2 a} = \sqrt{n^2} \cdot \sqrt{a} = n\sqrt{a}.$$

Samu võrdusi vastupidises suunas lugedes saame

$$n\sqrt{a} = \sqrt{n^2} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{n^2 a}.$$

Kokkuvõttes:

arvu, mille ruut esineb tegurina ruutjuure märgi all, võib võtta tegurina juuremärgi ette; arvu, mis seisab tegurina juuremärgi ees, võib võtta ruutu tõstetult tegurina juuremärgi alla.

Näited.

$$1. \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

$$2. 3\sqrt{\frac{10}{9}} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{\frac{10}{9}} = \sqrt{9 \cdot \frac{10}{9}} = \sqrt{10}.$$

### § 88. Kuupjuure leidmine kuupide tabelist.

Kuupjuureks arvust  $A$  nimetame niisugust arvu, mille kuup on  $A$ .

Kuupjuure sümboliks on  $\sqrt[3]{\quad}$ . Näiteks on

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad \sqrt[3]{27} = 3 \quad \sqrt[3]{125} = 5.$$

Nagu ruutjuurt saime leida ruutude tabeli abil, nii saame kuupjuurt leida kuupide tabeli abil.

Näide. Olgu kasutada arvude kuupide tabel:

$x$	1	2	3	4	5	...	10	...
$x^3$	1	8	27	64	125	...	1000	...

Leiame kuupjuure arvust 41.

Kasutame selleks meile juba tuttavat interpolatsioonivõtet. Arv 41 asetseb arvude 27 ja 64 vahel. Järelikult otsitav kuupjuur asetseb 3 ja 4 vahel. Lähisväärtusele 3 lisatava paranduse  $a$  määramiseks koostame abitabeli:

$x$	$x^3$
3	27
$3 + a$	$41 = 27 + 14$
4	64

Kui oletada, et arvu ja selle kuubi kasvud on võrreldesid, saame:

$$\frac{a}{1} = \frac{14}{37},$$

millest

$$a \approx 0,4.$$

Seega otsitav kuupjuur on ligikaudu  $3 + 0,4$  ehk  $3,4$ . Seda arvu kontrolliks kuupi tõstes leiame  $3,4^3 \approx 39,3$ , mis erineb antud väärtusest 41 umbes 1,7 võrra. Võtte veelkordseks rakendamiseks koostame abitabeli:

$x$	$x^3$
3,4	39,3
$3,4 + \beta$	$41 = 39,3 + 1,7$
4	64

Saame:

$$\frac{\beta}{0,6} \approx \frac{1,7}{24,7},$$

millest leiame

$$\beta \approx \frac{1,7 \cdot 0,6}{25} \approx 0,04.$$

Seega otsitav kuupjuur on  $3,44$ . Seda arvu kontrolliks kuupi tõstes leiame  $3,44^3 \approx 40,7$ , mis erineb antud väärtusest 41 veel kõigest umbes 0,3 võrra.

Abitabeleid vajasime ülal interpolatsioonivõtte seletamiseks. Kui võtte rakendamisviis on selge, jätame abitabelite koostamise ära ja arvutame paranduse peast.

Võib näidata, et  $\sqrt[3]{41}$  ei ole täpselt avaldatav ühegi murru  $\frac{a}{b}$  kaudu. Nagu  $\sqrt{2}$  ja  $\sqrt{5}$ , nii on ka  $\sqrt[3]{41}$  irratsionaalne arv.

## Peatükk X.

### Ruutvõrrand.

#### § 89. Ruutvõrrandi üldkuju.

Olgu antud mingi võrrand, milles pole liikmeid otsitavaga nimetajas. Võtame võrrandi liikmed vasakule poolele nii, et paremale poolele jääks üksainus liige null; avame kõik sulud ja koondame vasaku poole;

kui peale sulgude avamist ja koondamist kõrgeim aste, milles esineb otsitav, on teine aste, siis nimetame võrrandit teise astme võrrandiks ehk ruutvõrrandiks.

Sama nimetuse anname sel korral ka lähtevõrrandile. Nii on võrrandid

$$x^2 = 7 \qquad 4x^2 = 9 \qquad \frac{1}{2}x^2 = x + 10$$

$$5x^2 - 4 = x \qquad 0,3x^2 + 0,7x - 10 = 0$$

kõik ruutvõrrandid. Seevastu võrrandid

$$\frac{4}{x^2} - x = 7 \qquad \frac{2x}{x-3} = 5 \qquad x^3 = 2x^2 + 10$$

pole ruutvõrrandid.

Ruutvõrrandis peab esinema liige otsitava ruuduga; peale selle võib esineda liige otsitava esimese astmega ning otsitavast vaba liige. Kui need liikmed tähistame  $ax^2$ ,  $bx$  ja  $c$ , saame võrrandi kirjutada kujul

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

See on ruutvõrrandi üldkuju. Selles võrrandis  $a$  ei saa olla null, sest vastasel korral, kui  $a = 0$ , võrrand poleks enam ruutvõrrand.

Võime ikka oletada, et  $a > 0$ ; kui see poleks nii, saavutaksime selle, korrutades võrrandi kumbagi poolt  $-1$ -ga.

Jagades viimase võrrandi kõiki liikmeid arvuga  $a$ , saame

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0;$$

valides kordajate  $\frac{b}{a}$  ja  $\frac{c}{a}$  jaoks uued tähised  $p$  ja  $q$ , saame võrrandi kirjutada kujul

$$x^2 + px + q = 0.$$

Sel kujul kirjutatud ruutvõrrandit nimetame taandatud ruutvõrrandiks.

Kokkuvõttes:

võrrandit  $ax^2 + bx + c = 0$  nimetame üldkujuliseks ruutvõrrandiks, võrrandit  $x^2 + px + q = 0$  taandatud ruutvõrrandiks.

Võib juhtuda, et ruutvõrrandis puudub teine või kolmas liige või mõlemad;

kui ruutvõrrandis puudub otsitavast vaba liige või liige otsitava esimese astmega, siis nimetame ruutvõrrandit mittetäielikuks.

## § 90. Mittetäielikkude ruutvõrrandite lahendamine.

1. juht. Kui ruutvõrrandi vaba liige on null, omab võrrand kuju

$$ax^2 + bx = 0.$$

Selle lahendamiseks võtame vasakul poolel otsitava sulgude ette; saame:

$$x(ax + b) = 0.$$

Viimane võrdus nõuab, et tegurite  $x$  ja  $ax + b$  korru-tis oleks 0. Seda nõuet saab rahuldada ainult võttes

$$\text{kas } x = 0 \text{ või } ax + b = 0,$$

see tähendab, võttes

$$\text{kas } x = 0 \text{ või } x = -\frac{b}{a}.$$

Teisi võrrandit rahuldavaid  $x$ -väärtusi pole; võrran-dil on k a k s lahendit.

Ü l e s a n n e. Lahenda võrrand  $4x^2 + 3x = 0$ .

L a h e n d u s. Kirjutame antud võrrandi kujul

$$x(4x + 3) = 0.$$

Siit järeldame, et

$$\text{kas } x = 0 \text{ või } 4x + 3 = 0,$$

see tähendab, võrrandi lahendeiks on

$$x_1 = 0 \text{ ja } x_2 = -\frac{3}{4}.$$

2. j u h t. Kui ruutvõrrandis puudub liige otsitava esimese astmega, omab võrrand kuju

$$ax^2 + c = 0.$$

Siit saame

$$ax^2 = -c$$

ja

$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Kui avaldis  $-\frac{c}{a}$  on positiivne, saame k a k s lahendit:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ ja } x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Kui avaldis  $-\frac{c}{a}$  on negatiivne, siis meie võrrandil ei ole lahendit; tõepoolest, nõuet

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

sel juhul täita ei saa, sest vasakul poolel seisab oma loomult positiivne suurus, paremal aga negatiivne.

Kui  $c = 0$ , siis on ka  $-\frac{c}{a} = 0$ , seega ka  $x^2 = 0$ , ja võrrandil on üksainus lahend:

$$x = 0.$$

Näited.

$$1. \quad 9x^2 - 16 = 0 \quad x^2 = \frac{16}{9} \quad x_1 = \frac{4}{3} \quad x_2 = -\frac{4}{3}.$$

Võrrandil on kaks lahendit.

$$2. \quad x^2 + 10 = 0 \quad x^2 = -10.$$

Võrrandil pole lahendit.

### § 91. Ruutvõrrandi $(x + m)^2 = n$ lahendamine.

Võrrandi  $(x + m)^2 = n$  vasak pool on täisruut. Kui  $n < 0$ , pole võimalik seatud nõuet rahuldada, sest vasakul poolel seisab oma loomult positiivne suurus, paremal aga oletuse järgi negatiivne. Sel juhul võrrandil pole lahendit.

Kui  $n = 0$ , siis ka  $(x + m)^2 = 0$ ,

seega

$$x + m = 0$$

ja

$$x = -m,$$

mis on võrrandi ainus lahendiks.

Kui  $n > 0$ , saame

$$x + m = \pm \sqrt{n},$$

seega

$$x = -m \pm \sqrt{n},$$

millest leiame võrrandi kaks lahendit:

$$x_1 = -m + \sqrt{n} \quad \text{ja} \quad x_2 = -m - \sqrt{n}.$$

Ülesanne. Lahenda võrrand

$$(x + 3)^2 = 25.$$

Lahendus. Saame

$$x + 3 = \pm \sqrt{25}$$

ehk

$$x + 3 = \pm 5;$$

seega  $x_1 = -3 + 5 = 2$  ja  $x_2 = -3 - 5 = -8$ .

## § 92. Taandatud ruutvõrrandi lahendamine.

Ülesanne 1. Lahenda võrrand  $x^2 + 6x + 9 = 49$ .

Lahendus. Kirjutades antud võrrandi kujul

$$(x + 3)^2 = 49$$

näeme, et ta kuulub eespool-käsiteldud võrrandiliiki. Lahendades saame

$$x + 3 = \pm \sqrt{49},$$

seega

$$x + 3 = \pm 7,$$

niisiis

$$x = -3 \pm 7,$$

järelikult

$$x_1 = -3 + 7 \quad \text{ja} \quad x_2 = -3 - 7$$

ehk

$$x_1 = 4 \quad \text{ja} \quad x_2 = -10.$$

Ülesanne 2. Lahenda võrrand  $x^2 + 6x = 55$ .

Lahendus. Võrreldes seda võrrandit eelmises ülesandes esinenud võrrandiga paneme tähele, et vasaku pool erinevad vaid vabaliikme 9 võrra. Liidame selle arvu vasaku poolega ja teeme sama ka parema poolega, et võrdus jääks jõusse; saame:

$$x^2 + 6x + 9 = 55 + 9$$

ehk

$$(x + 3)^2 = 64;$$

siit

$$x + 3 = \pm \sqrt{64}$$

ehk

$$x + 3 = \pm 8$$

ehk

$$x = -3 \pm 8$$

ehk

$$x_1 = -3 + 8 = 5 \quad \text{ja} \quad x_2 = -3 - 8 = -11.$$

Ülesanne 3. Lahenda võrrand  $x^2 + 3x - 10 = 0$ .

Lahendus. Teisendame antud võrrandi nii, et võrrandi vasak pool on täisruut. Selleks viime vabaliikme paremale poolele; saame:

$$x^2 + 3x = 10.$$

Tähele pannes, et avaldist  $3x$  võime kirjutada kujul  $2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x$ , näeme, et vasak pool saab täisruuduks, kui temaga liidame  $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ ; et võrdus jääks jõusse, tuleb sedasama teha ka parema poolega; nii saame:

$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Seega on

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \frac{9}{4}$$

ehk

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4};$$

siit

$$x + \frac{3}{2} = \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = \pm \frac{7}{2},$$

see tähendab

$$x = -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2},$$

seega

$$x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 2 \quad \text{ja} \quad x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -5.$$

Praegu-arendatud mõttekäik leiab rakendamist järgmises paragraafis taandatud ruutvõrrandi lahendi valemi tuletamisel.

### § 93. Taandatud ruutvõrrandi lahendi valem.

Kirjutame antud võrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

kujul

$$x^2 + px = -q$$

ja täiendame vasaku poole täisruuduni; selleks liidame vasaku poolega liikme  $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ ; et võrdus jääks jõusse, teeme seda ka parema poolega; nii saame:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

ehk

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

ehk

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

seega

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Saadud võrdust nimetame taandatud ruutvõrrandi lahendi valemiks; sõnastame selle järgmiselt:

taandatud ruutvõrrandi lahendeiks on vastasmärgiga võetud otsitava esimese astme kordaja pool  $\pm$  ruutjuur selle poole kordaja ruudu ja vabaliikme vahest.

Ülesanne. Lahenda võrrand  $x^2 - x - 20 = 0$ .

Lahendus. Siin on  $p = -1$ ,  $q = -20$ , seega

$$\frac{p}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Järelikult

$$x = -\left(-\frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-20)}$$

ehk

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 20}$$

ehk

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}.$$

Seega

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ ja } x_2 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{8}{2} = -4.$$

Leitud arvude 5 ja  $-4$  asetamine  $x$ -i asemele võrrandi vasakusse poole kinnitab, et need arvud tõesti on antud võrrandi lahendid.

Saadud lahendi valemil on mõtet ainult siis, kui juurealune avaldis on positiivne või null:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0,$$

see tähendab, kui

$$p^2 - 4q \geq 0.$$

Kui

$$p^2 - 4q > 0,$$

siis on võrrandil 2 erinevat lahendit:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

ja

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Kui

$$p^2 - 4q = 0,$$

siis on võrrandil üksainus lahend

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Kui

$$p^2 - 4q < 0,$$

siis võrrandil pole üldse lahendit.

Avaldist  $p^2 - 4q$  nimetame taandatud ruutvõrrandi diskriminandiks.

Diskriminandi märk määrab, kas võrrandil on lahendit või mitte. Diskriminant tähistatakse sageli tähega  $d$ .

Diskriminandi  $d$  kaudu võime taandatud ruutvõrrandi lahendi valemi kirjutada kujul

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{d}}{2}.$$

### § 94. Üldkujulise ruutvõrrandi lahendi valem.

Nagu ülalpool nägime, ruutvõrrandi üldkuju on

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Et kordaja  $a \neq 0$ , siis võime võrrandi kummagi poole jagada selle kordajaga; saame

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Rakendades taandatud ruutvõrrandi lahendi valemit, saame

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}.$$

Juuremärgi all seisva avaldise võib kirjutada kujul

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \quad \text{ehk} \quad \frac{b^2 - 4ac}{4a^2};$$

võttes ruutjuure sellest avaldisest, saame:

$$\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Seega

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ehk

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

See on üldkujulise ruutvõrrandi lahendi valem; selle võime sõnastada järgmiselt:

Üldkujulise ruutvõrrandi lahend on murd; selle nimetaja on otsitava ruudu kordaja kahekordne; lugeja aga on vastasmärgiga võetud otsitava esimese astme kordaja  $\pm$  ruutjuur selle kordaja ruudu ja neljakordse otsitava ruudu kordaja ja vabaliikme korrutise vahest.

Saadud valemil on mõtet ainult siis, kui juurealune avaldis on positiivne või null.

Kui

$$b^2 - 4ac > 0,$$

siis on kõnesoleval ruutvõrrandil 2 erinevat lahendit:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ja

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Kui

$$b^2 - 4ac = 0,$$

siis on võrrandil üksainus lahend  $x = -\frac{b}{2a}$ .

Kui

$$b^2 - 4ac < 0,$$

siis võrrandil üldse pole lahendit.

Avaldist  $b^2 - 4ac$  nimetame üldkujulise ruutvõrrandi diskriminandiks.

Seda diskriminanti tähistatakse sageli tähega  $D$ . Diskriminandi märk määrab, kas võrrandil on lahendit või mitte.

Diskriminandi  $D$  kaudu võime üldkujulise ruutvõrrandi lahendi valemi kirjutada kujul:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Ülesanne 1. Lahenda võrrand  $6x^2 + 7x - 3 = 0$ .

Lahendus. Võrrandi diskriminant

$$D = 7^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3) = 49 + 72 = 121;$$

$D$  on positiivne; seega võrrandil peab olema kaks erinevat lahendit.

Lahendi valem annab:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{12} = \frac{-7 \pm 11}{12}.$$

Seega

$$x_1 = \frac{-7 + 11}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

ja

$$x_2 = \frac{-7 - 11}{12} = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2}.$$

Ülesanne 2. Lahenda võrrand  $3x^2 - x - 1 = 0$ .

Lahendus. Võrrandi diskriminant

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 1 + 12 = 13;$$

$D$  on positiivne; seega võrrandil peab olema kaks erinevat lahendit.

Lahendi valem annab:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

Seega

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{6}.$$

Ülesanne 3. Lahenda võrrand  $5x^2 - 4x + 7 = 0$ .

Lahendus. Võrrandi diskriminant

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 7 = 16 - 140 = -124;$$

$D$  on negatiivne; seega võrrandil lahendit pole.

## § 95. Biruutvõrrandi lahendamine.

Ruutvõrrandi kaudu lahenevad ka mõned võrrandid, mille aste on kõrgem kui 2, näiteks biruutvõrrand

$$az^4 + bz^2 + c = 0.$$

Tõepoolest:

Tähistades  $z^2$  tähega  $x$  näeme, et

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Olgu selle ruutvõrrandi lahendid  $x_1$  ja  $x_2$ . Nõutavad  $z$ -väärtused saame lahendades võrrandid

$$z^2 = x_1 \quad \text{ja} \quad z^2 = x_2.$$

Ülesanne. Lahenda võrrand:

$$z^4 - 14z^2 - 32 = 0.$$

Lahendus. Võttes  $z^2 = x$ , saame:

$$x^2 - 14x - 32 = 0.$$

Selle võrrandi lahendid on

$$x_1 = 16 \quad \text{ja} \quad x_2 = -2.$$

Tähendab:

$$\text{kas } z^2 = 16 \quad \text{või} \quad z^2 = -2.$$

Teist nõuet rahuldada ei saa, sest  $z^2$  on positiivne. Esimesest aga saame

$$z_1 = 4 \quad \text{ja} \quad z_2 = -4.$$

Kontroll:  $4^4 - 14 \cdot 4^2 - 32 = 256 - 224 - 32 = 0$   
 ja samuti  $(-4)^4 - 14 \cdot (-4)^2 - 32 = 0$ ,  
 nagu peab olema.

### § 96. Ruutvõrrandi koostamise ja lahendamise näiteid.

Ülesanne 1. Ristkülikukujuline spordiväljak on 88 aari suur. Kui üht tema külge vähendada 2 m võrra, teist aga suurendada 10 m võrra, saame ruudukujulise väljaku. Kui suur on selle ruudu külg?

Lahendus. Olgu ruudu külg  $x$  meetrit. Siis on ristküliku küljed meetrites  $x + 2$  ja  $x - 10$ . Seega ristküliku pindala on ruutmeetrites

$$(x + 2)(x - 10)$$

ehk

$$x^2 - 8x - 20.$$

Teiselt poolt see pindala on 88 aari ehk 8800 ruutmeetrit. Järelikult

$$x^2 - 8x - 20 = 8800$$

ehk

$$x^2 - 8x - 8820 = 0.$$

Võrrandi lahendi valem annab:

$$x = 4 \pm \sqrt{8836}$$

ehk

$$x = 4 \pm 94;$$

seega

$$x_1 = 4 + 94 = 98 \quad \text{ja} \quad x_2 = 4 - 94 = -90.$$

Et ruudu külg on oma loomult positiivne suurus, siis  $x_2$  meie ülesande lahendina ei tule arvesse. Ainsaks ülesande lahendiks jääb  $x = 98$ ; see tähendab, et otsitav ruudu külg on 98 m.

Kontroll: väljaku küljed on meetrites  $98 + 2 = 100$  ja  $98 - 10 = 88$ ; seega väljaku pindala on  $100 \cdot 88$  ehk 8800 ruutmeetrit ehk 88 aari, nagu peab olema.

Ülesanne 2. Ema kingib tütrele 21,60 krooni taskurättide ostmiseks. Poes selgub, et rätid on vahepeal hinnas langenud 10 senti tükilt, mille tõttu neid rätte saaks kingitud raha eest osta 3 tükki enam kui kavatseti. Mitu rätti kavatseti osta?

Lahendus. Olgu osta soovitud rättide arv  $x$ . Nende eelarvestatud tüki hind oleks siis  $\frac{2160}{x}$  senti. Rätti hind poes on sellest 10 senti madalam, seega

$$\frac{2160}{x} - 10$$

senti. Selle tükihinna puhul saaks rätte osta 3 tükki enam kui kavatseti, niisiis

$$x + 3.$$

Rättide koguhinna sentides saame kujul

$$(x + 3) \left( \frac{2160}{x} - 10 \right);$$

see koguhind oli 2160 senti, järelikult

$$(x + 3) \left( \frac{2160}{x} - 10 \right) = 2160.$$

Et  $x \neq 0$ , siis võime  $x$ -ga korrutada võrrandi kumbagi poole; saame:

$$(x + 3) (2160 - 10x) = 2160x$$

ehk

$$2160x + 6480 - 10x^2 - 30x = 2160x$$

ehk

$$-10x^2 - 30x + 6480 = 0$$

ehk, jagades võrrandi kumbagi poolt  $-10$ -ga,

$$x^2 + 3x - 648 = 0.$$

Otsitava  $x$  määramine nõuab taandatud ruutvõrrandi lahendamist. See annab:

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 648} = \frac{-3 \pm \sqrt{2601}}{2},$$

ehk

$$x_1 = \frac{-3 + 51}{2} = 24 \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-3 - 51}{2} = -27.$$

Et rätide arv on oma loomult positiivne, siis teine lahend ei tule arvesse. Seega kavatseti osta taskurätte 24 tükki ehk 2 tosinat. Räti eelarvestatud hinna saame jagades 21,60 krooni 24-ga; nii leiame:

$$21,60 \text{ krooni} : 24 = 2160 \text{ senti} : 24 = 90 \text{ senti.}$$

Kontroll:  $90 - 10 = 80$ ; nii mitu senti maksab rätt poes;  $2160 : 80 = 27$ ; nii mitu rätti saaks osta; see arv on just kolme võrra suurem 24-st, nagu peab olema.

Ülesanne 3. Kahe koha  $A$  ja  $B$  vaheline kaugus on 349 km. Kohast  $A$  lahkub sõiduk koha  $B$  suunas. Üks tund hiljem lahkub kohast  $B$  teine sõiduk koha  $A$  suunas. Teise sõiduki kiirus on 8 km võrra tunnis väiksem kui esimese kiirus. Sõidukid kohtuvad 216 km kaugusel kohast  $A$ . Kui suure kiirusega liigub kumbki sõiduk?

Lahendus. Olgu esimese sõiduki kiirus  $v$  kilomeetrit tunnis; siis on teise kiirus  $(v - 8)$  kilomeetrit tunnis. Kuni kohtumiseni tuli esimesel sõidukil katta 216 km, teisel  $349 - 216$  ehk 133 km. Selleks kulus aega

esimesel  $\frac{216}{v}$  tundi,

teisel  $\frac{133}{v - 8}$  tundi.

Esimene aeg on teisest ühe tunni võrra pikem, seega

$$\frac{216}{v} - \frac{133}{v - 8} = 1.$$

Saadud võrrandi lahendamiseks vabaneme murdudest:

$$216(v - 8) - 133v = v(v - 8);$$

avame sulud:

$$216v - 1728 - 133v = v^2 - 8v;$$

viime liikmed vasakule poolele, koondame ja korrutame -1-ga; see annab:

$$v^2 - 91v + 1728 = 0.$$

Võrrandi diskriminant on

$$91^2 - 4 \cdot 1728 = 1369;$$

et see diskriminant on positiivne, siis on võrrandil 2 lahendit. Lahendi valem annab:

$$v = \frac{91 \pm \sqrt{1369}}{2} \quad \text{ehk} \quad v = \frac{91 \pm 37}{2};$$

seega

$$v_1 = 64 \quad \text{ja} \quad v_2 = 27.$$

Niisiis on esimese sõiduki kiirus kas 64 km tunnis või 27 km tunnis ning teise sõiduki kiirus sellele vastavalt kas 56 km tunnis või 19 km tunnis.

Kontrollime tulemusi ülesande teksti varal.

Esimese lahendipaari puhul esimene sõiduk tarvitab kohtumiseni aega

$$\frac{216}{64} \quad \text{ehk} \quad 3\frac{3}{8} \quad \text{tundi, teine seevastu} \quad \frac{133}{56} \quad \text{ehk} \quad 2\frac{3}{8} \quad \text{tundi};$$

aegade vahe on  $3\frac{3}{8} - 2\frac{3}{8}$  ehk 1 tund, nagu peab olema.

Teise lahendipaari puhul esimene sõiduk tarvitab kohtumiseni aega

$$\frac{216}{27} \quad \text{ehk} \quad 8 \quad \text{tundi, teine seevastu} \quad \frac{133}{19} \quad \text{ehk} \quad 7 \quad \text{tundi};$$

aegade vahe on  $8 - 7$  ehk 1 tund, nagu peab olema. Mõlemad lahendipaarid kõlbavad.

### § 97. Taandatud ruutvõrrandi lahendite omadused.

Taandatud ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendid on

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

ja

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Moodustame lahendite summa; et liitmisel juured koonduvad, siis saame:

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \left(-\frac{p}{2}\right) = -p.$$

Moodustame lahendite korrutise; saame:

$$x_1 \cdot x_2 = \left[-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right] \cdot \left[-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right].$$

Rakendades summa ja vahe korrutise valemit, leiame:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q.$$

Niisiis

$$x_1 + x_2 = -p$$

ja

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Tulemuse võime sõnastada järgmiselt:

taandatud ruutvõrrandi lahendite summa on võrdne vastasmärgiga võetud otsitava esimese astme kordajaga; lahendite korrutis on võrdne vabaliikmega.

## § 98. Ruutvõrrandi koostamine antud lahendite järgi.

Ülesanne. Koosta ruutvõrrand, millel on antud lahendid  $x_1$  ja  $x_2$ .

Lahendus. Eespool-tuletatud lause põhjal on

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

ehk, teisiti,

$$p = -(x_1 + x_2) \quad \text{ja} \quad q = x_1 \cdot x_2.$$

Seega nõutud ruutvõrrand on

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0.$$

Näide. Koostame ruutvõrrandi, mille lahendid on  $-\frac{1}{2}$  ja  $+\frac{1}{6}$ .

Antud lahendite summa

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{-3+1}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3};$$

lahendite korrutis  $(-\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{12}.$

Järelikult  $p = \frac{1}{3}$  ja  $q = -\frac{1}{12}$  ning seega otsitav ruutvõrrand on

$$x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{12} = 0.$$

Korrutades kummagi poole 12-ga saame samade lahenditega üldkujulise ruutvõrrandi

$$12x^2 + 4x - 1 = 0.$$

Peatükk XI.

Algebraalne murd.

Teine tsükel.

§ 99. Hulkliikme tegureiks lahutamine.

Mõned hulkliikmed on esitatavad korrutistena, mille tegurid on üksliikmed ja hulkliikmed. Näiteks

$$\begin{aligned}7a^2 - 7a &= 7a(a - 1), \\n^2 - 5n + 6 &= (n - 2)(n - 3), \\x^3 + 3x^2 - 10x &= x(x + 5)(x - 2).\end{aligned}$$

Sel juhul räägime hulkliikmete tegureiks lahutamisest.

Hulkliikme algtegureiks loeme tema algarvulisi tegureid, nagu

$$3, 5, 7, 11, 13,$$

tähelisi tegureid, nagu

$$a, b, N, u, x,$$

ja hulkliikmelisi tegureid, mis ei luba lahutamist tegureiks, nagu

$$\begin{aligned}b + 1, \quad 3N + 2, \quad a + u, \\a^2 + x^2, \quad u^3 + abc, \quad x^3 + 5a^2b.\end{aligned}$$

Lahutada hulkliige algtegureiks tähendab esitada teda tema algtegurite korrutisena.

Hulkliikme teguriteks lahutamise võtetest käsitleme järgmisi: 1) ühise teguri sulgude ette toomise võte; 2) liikmete rühmitamise võte; 3) arvutamise abivalemite kasutamise võte ja 4) ruuttrinoomi teguriteks lahutamise võte.

Sõltub hulkliikmest, missuguse võtte abil teda õnnestub lahutada tegureiks.

1. võtte. Ühise teguri sulgude ette toomise võtte tugineb valemile

$$ma + mb = m(a + b).$$

Näited.

1.  $12x + 36 = 12(x + 3) = 2^2 \cdot 3 \cdot (x + 3).$
2.  $u^3 - 5u^2 = u^2(u - 5).$
3.  $18ih^2 - 24i^2h^2 = 6ih^2(3 - 4i) = 2 \cdot 3 \cdot ih^2(3 - 4i).$
4.  $7u(3q - 2) + 5(3q - 2) = (3q - 2)(7u + 5).$

2. võtte. Liikmete rühmitamise võtte puhul paigutame hulkliikmes liikmed nii sulgudesse, et õnnestuks mõne avaldise sulgude ette võtmise.

Näited.

1.  $11N(5z + 4) - 5z - 4 = 11N(5z + 4) - (5z + 4) = (5z + 4)(11N - 1).$
2.  $px + py - 2qx - 2qy = (px + py) - (2qx + 2qy) = p(x + y) - 2q(x + y) = (x + y)(p - 2q).$
3.  $u^3 - 5u^2 - 3u + 15 = (u^3 - 5u^2) - (3u - 15) = u^2(u - 5) - 3(u - 5) = (u - 5)(u^2 - 3).$

3. võtte. Arvutamise abivalemite kasutamise võtte tugineb valemile:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Näited.

1.  $9a^2x^2 - 1 = (3ax + 1)(3ax - 1).$
2.  $h^2x^2 + 2ah^2x + h^2a^2 = h^2(x^2 + 2ax + a^2) = h^2(x + a)^2.$
3.  $63x^2 - 84x + 28 = 7(9x^2 - 12x + 4) = 7(3x - 2)^2.$

4. v õ t e. Ruuttrinoomi tegureiks lahutamisel kasutame taandatud ruutvõrrandi lahendite omadusi. Me nägime eelmises paragraafis, et ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

võime kirjutada tema lahendite kaudu kujus:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0,$$

Avades sulud leiame:

$$x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0;$$

rakendades rühmitamise võtet saame:

$$(x^2 - x_1x) - (x_2x - x_1x_2) = 0$$

ehk

$$x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = 0$$

ehk

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0;$$

seega

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Sõnastame tulemuse nõnda:

et lahutada ruuttrinoom  $x^2 + px + q$  tegureiks, võrrandame ta nulliga ja lahendame saadud võrrandi; leitud lahendite  $x_1$  ja  $x_2$  abil ruuttrinoom lahutub tegureiks kujul:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Kui trinoom on antud kujul

$$ax^2 + bx + c,$$

siis võtame kõigepealt kordaja  $a$  sulgude ette ja toimime eespool-antud juhise järgi.

Ülesanne 1. Lahuta tegureiks trinoom:

$$x^2 - 7x + 6.$$

Lahendus. Võrrandame trinoomi nulliga:

$$x^2 - 7x + 6 = 0;$$

lahendame saadud võrrandi:

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 6} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

ehk

$$x_1 = \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ ja } x_2 = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} = \frac{2}{2} = 1;$$

seega

$$x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6).$$

Ülesanne 2. Lahuta tegureiks trinoom

$$3x^2 - 7x + 4.$$

Lahendus. Kirjutame trinoomi kujus

$$3 \left( x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{4}{3} \right).$$

Taandatud võrrandi  $x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{4}{3} = 0$  lahendid on  
needsamad, mis võrrandil

$$3x^2 - 7x + 4 = 0.$$

Selle võrrandi lahendid aga on

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{6};$$

seega

$$x_1 = \frac{7+1}{6} = \frac{4}{3} \text{ ja } x_2 = \frac{7-1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Järelikult

$$3x^2 - 7x + 4 = 3(x - 1) \left( x - \frac{4}{3} \right)$$

ehk

$$3x^2 - 7x + 4 = (x - 1)(3x - 4).$$

### § 100. Hulkliikmete suurim ühistegur.

Hulkliikmete suurima ühisteguri leidmiseks lahutame hulkliikmed algtegereiks, kirjutame välja nende ühised algtegurid ja moodustame viimaste korrutise.

Ülesanne. Leia polünoomide

$$15h^2 - 15h, 9h^3 - 9h \text{ ja } 24h^3 - 48h^2 + 24h$$

suurim ühistegur.

Lahendus. Antud avaldiste algtegereiks lahutamine annab:

$$15h^2 - 15h = 15h(h - 1) = 3 \cdot 5 \cdot h(h - 1),$$

$$9h^3 - 9h = 9h(h^2 - 1) = 3^2 \cdot h(h + 1)(h - 1),$$

$$24h^3 - 48h^2 + 24h = 24h(h^2 - 2h + 1) = \\ = 2^3 \cdot 3 \cdot h(h - 1)^2.$$

Séega nõutud suurim ühistegur on

$$3h(h - 1).$$

### § 101. Hulkliikmete väikesim ühiskordne.

Hulkliikmete väikesima ühiskordse leidmiseks lahutame hulkliikmed algtegereiks, kirjutame välja ühe hulkliikme, siis selles puuduvad algtegurid teistest hulkliikmetest ja moodustame välja-kirjutatud avaldistest korrutise.

Ülesanne. Leia avaldiste

$$4N^2x - 4N^2, 6N(x^2 + 2x - 3) \text{ ja } 20Nx^2 - 20N$$

väikesim ühiskordne.

Lahendus. Antud avaldiste algtegereiks lahutamine annab:

$$4N^2x - 4N^2 = 4N^2(x - 1) = 2^2 \cdot N^2(x - 1),$$

$$6N(x^2 + 2x - 3) = 6N(x - 1)(x + 3) = \\ = 2 \cdot 3 \cdot N(x - 1)(x + 3),$$

$$20Nx^2 - 20N = 20N(x^2 - 1) = \\ = 2^2 \cdot 5 \cdot N(x - 1)(x + 1);$$

seega nõutud väikesim ühiskordne on

$$2^2 \cdot N^2(x-1) \cdot 3 \cdot (x+3) \cdot 5 \cdot (x+1)$$

ehk

$$60N^2(x-1)(x+1)(x+3).$$

### § 102. Hulkliikmelise nimetajaga murrud.

Järgmised näited selgitavad murdude teisendamisi ja tehteid murdudega hulkliikmelise nimetaja puhul.

Ülesanne 1. Taanda murd

$$\frac{(x+3)(x+2)+2(x-3)}{x^2+14x+49}.$$

Lahendus. Lugeja teisendamine annab:

$$\begin{aligned} (x+3)(x+2)+2(x-3) &= x^2+5x+6+2x-6 = \\ &= x^2+7x = x(x+7). \end{aligned}$$

Nimetaja lahutub tegureiks järgmiselt:

$$x^2+14x+49 = (x+7)^2.$$

Seega

$$\frac{(x+3)(x+2)+2(x-3)}{x^2+14x+49} = \frac{x(x+7)}{(x+7)^2} = \frac{x}{x+7}.$$

Ülesanne 2. Lihtsusta avaldis

$$\frac{12}{(2a+b)^2-9b^2} + \frac{1}{ab+b^2} - \frac{1}{ab-b^2}.$$

Lahendus. Nimetajaid tegureiks lahutades saame:

$$\begin{aligned} (2a+b)^2-9b^2 &= (2a+b+3b)(2a+b-3b) = \\ &= (2a+4b)(2a-2b) = 2^2(a+2b)(a-b); \\ ab+b^2 &= b(a+b); \\ ab-b^2 &= b(a-b). \end{aligned}$$

Seega antud nimetajate väikesim ühiskordne on:

$$2^2b(a+b)(a-b)(a+2b).$$

Teisendades antud murrud ühenimelisteks saame antud avaldise kujul:

$$\frac{12b(a+b) + 2^2(a-b)(a+2b) - 2^2(a+b)(a+2b)}{2^2b(a+b)(a-b)(a+2b)}.$$

Lugeja lihtsustamine annab:

$$\begin{aligned} 12(ab + b^2) + 4(a^2 + ab - 2b^2) - 4(a^2 + 3ab + 2b^2) &= \\ = 12ab + 12b^2 + 4a^2 + 4ab - 8b^2 - 4a^2 - 12ab - 8b^2 &= \\ = 4ab - 4b^2 = 4b(a - b). \end{aligned}$$

Seega omab antud avaldis kuju

$$\frac{4b(a-b)}{4b(a+b)(a-b)(a+2b)}$$

ehk

$$\frac{1}{(a+b)(a+2b)}.$$

Ülesanne 3. Lihtsusta avaldis

$$\frac{x^2 - 4u^2}{x + u} \cdot \frac{x^2 - u^2}{x + 2u}.$$

Lahendus. Saame:

$$\frac{(x+2u)(x-2u)}{x+u} \cdot \frac{(x+u)(x-u)}{x+2u} = (x-2u)(x-u).$$

Ülesanne 4. Lihtsusta avaldis

$$x = \frac{n + \frac{2n-1}{n-2}}{n + \frac{n}{n-2}}.$$

Lahendus. Lugeja teisendamine annab:

$$\begin{aligned} n + \frac{2n-1}{n-2} &= \frac{n(n-2) + 2n-1}{n-2} = \frac{n^2 - 2n + 2n - 1}{n-2} = \frac{n^2 - 1}{n-2} = \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{n-2}. \end{aligned}$$

Nimetaja teisendamisel saame:

$$n + \frac{n}{n-2} = \frac{n(n-2) + n}{n-2} = \frac{n^2 - 2n + n}{n-2} = \frac{n^2 - n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{n-2}.$$

Seega

$$x = \frac{(n+1)(n-1)}{n-2} : \frac{n(n-1)}{n-2} = \frac{n+1}{n}.$$

Kokkuvõttes:

murdude puhul, mille nimetajateks on hulkliikmed, käime teisendamisel ja tehete sooritamisel nendesamade juhiste järgi, mis andsime üksliikmeliste nimetajatega murdude puhul.

### § 103. Võrrete omadusi.

1. o m a d u s.

$$\text{Kui } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ siis } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Tõepoolest, kui

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

siis liitmisaksiooni põhjal

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

ehk, kirjutades võrduse kummagi poole murruna,

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d},$$

m. o. t. t.

2. o m a d u s.

$$\text{Kui } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ siis } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

Tõestus toimub lahutamisaksiooni rakendades.

3. o m a d u s.

$$\text{Kui } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ siis } \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

Väide järeldub esimesest ja teisest omadusest jagamisaksiooni rakendamisel.

### § 104. Täheliste kordajatega lineaarvõrrand.

Selgitame järgmiste näidete varal lineaarvõrrandi lahendamise käiku täheliste kordajate puhul.

Ü l e s a n n e 1. Lahenda võrrand

$$\frac{n+x}{m} + \frac{m-x}{n} = 2,$$

milles  $x$  on otsitav ning  $m$  ja  $n$  on antud arvud.

L a h e n d u s. Vasakul poolel nõutud liitmist teostades saame:

$$\frac{n(n+x) + m(m-x)}{mn} = 2$$

ehk, korrutamisaksiooni põhjal,

$$n(n+x) + m(m-x) = 2mn.$$

Sulgusid avades saame:

$$n^2 + nx + m^2 - mx = 2mn$$

ehk

$$nx - mx = -n^2 + 2mn - m^2$$

ehk, korrutades kummagi poole  $-1$ -ga,

$$mx - nx = n^2 - 2mn + m^2$$

ehk, kummagi poole teguriteks lahutades,

$$(m-n)x = (n-m)^2;$$

jagades kummagi poole otsitava kordajaga, leiame:

$$x = \frac{(n-m)^2}{m-n} = \frac{(m-n)^2}{m-n}$$

ehk

$$x = m - n.$$

Kontroll: asetades leitud väärtuse  $x$ -i asemele antud võrrandi vasakusse poole, leiame:

$$\begin{aligned} \frac{n + (m-n)}{m} + \frac{m - (m-n)}{n} &= \frac{n + m - n}{m} + \frac{m - m + n}{n} = \\ &= \frac{m}{m} + \frac{n}{n} = 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

nagu peab olema.

Ülesanne 2. Lahenda võrrand

$$\frac{b}{4ax - a} - \frac{a(8x - 1)}{4bx - b} = 2,$$

lugedes arvud  $a$  ja  $b$  andmeiks ja arvu  $x$  otsitavaks.

Lahendus. Vasakul poolel seisvate murdude nimetajaid tegureiks lahutades saame:

$$4ax - a = a(4x - 1) \quad \text{ja} \quad 4bx - b = b(4x - 1),$$

seega nimetajate väikesim ühiskordne on

$$ab(4x - 1)$$

ja murdude laiendustegurid on vastavalt  $b$  ja  $a$ . Sooritades võrrandi vasakul poolel nõutud lahutamise, leiame:

$$\frac{b^2 - a^2(8x - 1)}{ab(4x - 1)} = 2.$$

Kasutades korrumatisaksioomi vabaneme nimetajast:

$$b^2 - a^2(8x - 1) = 2ab(4x - 1)$$

ehk, sulgudes avades,

$$b^2 - 8a^2x + a^2 = 8abx - 2ab.$$

Siit

$$-8a^2x - 8abx = -a^2 - 2ab - b^2$$

ehk, korrutades kummagi poole  $-1$ -ga:

$$8a^2x + 8abx = a^2 + 2ab + b^2$$

ehk teisiti

$$8a(a+b)x = (a+b)^2;$$

jagades kummagi poole otsitava kordajaga, saame:

$$x = \frac{a+b}{8a}.$$

Kontroll: asetades leitud väärtuse  $x$ -i asemele algvõrrandisse leiame, et võrrandi esimene liige on

$$4a \cdot \frac{b}{8a} - a = \frac{b}{2} - a = \frac{2b}{a+b-2a} = \frac{2b}{b-a}.$$

Samuti leiame, et võrrandi teine liige on

$$\begin{aligned} \frac{a(8 \cdot \frac{a+b}{8a} - 1)}{4b \cdot \frac{a+b}{8a} - b} &= \frac{a(\frac{a+b}{a} - 1)}{b \cdot \frac{a+b}{2a} - b} = \frac{a+b-a}{\frac{b(a+b)-2ab}{2a}} = \\ &= \frac{2ab}{ab+b^2-2ab} = \frac{2ab}{b^2-ab} = \frac{2ab}{b(b-a)} = \frac{2a}{b-a}. \end{aligned}$$

Järelikult võrrandi vasak pool on

$$\frac{2b}{b-a} - \frac{2a}{b-a} = \frac{2b-2a}{b-a} = \frac{2(b-a)}{b-a} = 2,$$

nagu peab olema.

Kokkuvõttes:

tähealiste kordajatega lineaarvõrrandi lahendamisel

1. vabaneme murdudest, korrutades võrrandi kummagi poole liikmete ühisnimetajaga;
2. avame sulud ja koondame;
3. toome kõik otsitavaga liikmed ühele poolele ja kõik teised liikmed teisele poolele;
4. koondame;
5. võtame otsitava sulgude taha ja jagame kummagi poole otsitava kordajaga;
6. taandame leitud avaldise;
7. kontrollime vastust, asetades leitud avaldise otsitava asemele antud võrrandisse.

### § 105. Võrrandid otsitavaga nimetajas.

Võrrandi lahendamisel võib eksida teisendamistes ja arvutustes. Seepärast on väga soovitatav kontrollida leitud lahendi kõlblikkust, asetades selle lahendi otsitava asemele lahendada antud võrrandisse. Leitud lahendi kontrollimine on ilmtingimata vajalik, kui lahendamiseks ettepanud võrrand sisaldab otsitavat nimetajas. Selgitame sel puhul võrrandi lahendamisel esinevaid iseärasusi järgmiste ülesannete varal.

Ülesanne 1. Lahenda võrrand

$$\frac{x+1}{3x-7} = \frac{3x-8}{3(3x+4)}.$$

Lahendus. Võrde põhiomadus annab:

$$3(3x+4)(x+1) = (3x-7)(3x-8),$$

millest peale sulgude avamist saame:

$$9x^2 + 21x + 12 = 9x^2 - 45x + 56$$

ehk, koondades,

$$66x = 44,$$

seega

$$x = \frac{44}{66} = \frac{2}{3}.$$

Kontroll: asetades leitud väärtuse  $x$ -i asemele lähtevõrrandisse, saame võrrandi vasakul poolel

$$\frac{\frac{2}{3} + 1}{3 \cdot \frac{2}{3} - 7} = \frac{\frac{5}{3}}{-5} = -\frac{1}{3}$$

ja võrrandi paremal poolel

$$\frac{3 \cdot \frac{2}{3} - 8}{3 \left( 3 \cdot \frac{2}{3} + 4 \right)} = \frac{2 - 8}{3(2 + 4)} = \frac{-6}{3 \cdot 6} = -\frac{1}{3},$$

seega leitud  $x$ -i väärtus tõesti rahuldab võrrandit.

Ülesanne 2. Lahenda võrrand

$$\frac{4x + 5}{7x - 8} = \frac{4}{7}.$$

Lahendus. Võrde põhiomadus annab

$$7(4x + 5) = 4(7x - 8);$$

sulges avades saame:

$$28x + 35 = 28x - 32.$$

Lahutades võrduse kummastki poolest  $28x$  näeme, et arv 35 peaks olema võrdne arvuga  $-32$ , mis on võimatu. Selles võrrandis peituv nõue pole rahuldav, võrrandil pole lahendit.

Ülesanne 3. Lahenda võrrand:

$$\frac{2 + \frac{x+1}{x-1}}{3 + \frac{2x-1}{x-1}} = 2.$$

Lahendus. Korrutades vasakul poole seisva murru lugejat ja nimetajat avaldisega  $x - 1$ , saame:

$$\frac{2(x-1) + (x+1)}{3(x-1) + (2x-1)} = 2$$

ehk, avades sulud ja koondades:

$$\frac{3x-1}{5x-4} = 2.$$

Korrutades võrrandi kummagi poole avaldisega  $5x - 4$ , vabaneme nimetajast ja saame:

$$3x - 1 = 2(5x - 4)$$

ehk

$$3x - 1 = 10x - 8$$

ehk

$$-7x = -7$$

ja seega

$$x = 1.$$

Kontroll: asetades leitud väärtuse  $x$ -i asemele võrrandi vasakusse poolde saame:

$$\frac{2 + \frac{1+1}{1-1}}{3 + \frac{2-1}{1-1}} = \frac{2 + \frac{2}{0}}{3 + \frac{1}{0}}$$

Nii murrul  $\frac{2}{0}$  kui ka murrul  $\frac{1}{0}$  pole mõtet; leitud väärtus  $x = 1$  ei rahulda võrrandit; võrrandil pole lahendit.

Teame, et lineaarvõrrandil  $ax + b = 0$  on olemas alati üks ja ainus lahend. Käsiteldud näide õpetab, et võrrand, milles otsitav esineb nimetajas, võib teisendamisel taanduda lineaarsele; sellest hoolimata ei tarvitse tal olla lahendit.

## Peatükk XII.

### Võrrand-süsteem.

#### § 106. Kahe tundmatuga lineaarvõrrand-süsteem.

Mõnede küsimuste lahendamisel on otstarbekohane kasutada mitut tundmatut.

Näide. Elektriäri poolt koostatud valgustusseadme eelarve näitab järgmist: kui võimla valgustamiseks võtta 4 leeklampi ja 7 hõõglampi, läheb valgustusseade maksma 236 krooni; kui aga võtta 3 samasugust leeklampi nagu ennemgi, ja 11 hõõglampi, siis läheb see seade maksma 223 krooni. Kui kallilt on äri poolt arvestatud leeklambi ja kui kallilt hõõglambiseade?

Märgime ühe leeklambiseadme hinna tähega  $l$ , ühe hõõglambiseadme hinna tähega  $h$ , kusjuures kumbki hind on arvestatud kroonides. Ülesande sõnastuse järgi on siis ühelt poolt

$$4l + 7h = 236,$$

teiselt poolt

$$3l + 11h = 223.$$

Ülesande lahendamine on taandatud nõudele: leida  $kaks$  niisugust arvu  $l$  ja  $h$ , mis rahuldavad ühtaegu nii esimest kui ka teist võrrandit, ehk teisiti, leida  $kaks$  niisugust arvu  $l$  ja  $h$ , mis rahuldavad võrrand-süsteemi:

$$\begin{cases} 4l + 7h = 236 \\ 3l + 11h = 223 \end{cases}$$

Nõuet, et tuleb ühtaegu rahuldada kaht võrrandit, märgime sel viisil, et mõlemad võrrandid võtame loogelise suluga ühte.

Et võrrandis tundmatud esinevad esimeses astmes, siis on need võrrandid lineaarsed ja süsteem on lineaarvõrrand-süsteem.

Üldiselt ütleme nii:

kaks võrrandit

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

milles  $a, b, c, d, m$  ja  $n$  on antud arvud ja  $x$  ja  $y$  on otsitavad, moodustavad kahe tundmatuga lineaarvõrrand-süsteemi; lahendada see süsteem tähendab leida niisugune  $x$ - ja  $y$ -väertuspaar, mis ühtaegu rahuldab nii esimest kui ka teist võrrandit.

### § 107. Lineaarvõrrand-süsteemi lahendamine asetusvõttega.

Olgu lahendada eespool-toodud võrrand-süsteem:

$$\begin{cases} 4l + 7h = 236 \\ 3l + 11h = 223 \end{cases}$$

Arutame nii: kujutleme, et meil on juba õnnestunud leida üht otsitavat, näiteks otsitavat  $h$ ; siis pole enam raske leida teist otsitavat  $l$ . Tõepoolest, asetame näiteks esimeses võrrandis  $h$  asemele tema jaoks leitud väärtuse; peale tuntud liikmete ülekandmist paremale poolele saame siis

$$4l = 236 - 7h,$$

millest

$$l = \frac{236 - 7h}{4}.$$

Seega oleks ka  $l$  leitud. Saadud  $l$  peab aga rahuldama ka teist võrrandit; see tähendab, et

$$3 \cdot \frac{236 - 7h}{4} + 11h = 223.$$

Nii jõuame võrrandile, milles ainsaks otsitavaks on  $h$ . Selle võrrandi lahendamine ei tee raskusi: korrutades võrrandi pooli 4-ga saame:

$$3 \cdot (236 - 7h) + 44h = 892;$$

siit

$$708 - 21h + 44h = 892$$

ehk

$$23h = 184$$

ehk

$$h = 8.$$

Asetades selle väärtuse  $l$ -i avaldises  $h$  asemele saame

$$l = \frac{236 - 7 \cdot 8}{4} = \frac{180}{4} = 45.$$

Niisiis

$$h = 8, \quad l = 45.$$

K o n t r o l l. Asetades tulemused võrrandite vasakutesse pooltesse, saame:

$$4 \cdot 45 + 7 \cdot 8 = 180 + 56 = 236, \text{ nagu peab olema;}$$

$$3 \cdot 45 + 11 \cdot 8 = 135 + 88 = 223, \text{ nagu peab olema.}$$

Kokkuvõttes võime anda järgmise eeskirja kahe tundmatu lineaarvõrrand-süsteemi lahendamiseks:

avaldame ühest võrrandist ühe tundmatu teise kaudu; asetame saadud avaldise teise võrrandisse varemini avaldatud tundmatu asemele; lahendame tekkinud võrrandi ja asetame lahendi teise tundmatu avaldisse.

Käsiteldud võte kannab aetusvõtte nime.  
Ülesanne. Lahenda lineaarvõrrand-süsteem:

$$\begin{cases} 6x + 5y = 205 \\ 4x + 3y = 135 \end{cases}$$

Lahendus. Teisest võrrandist saame

$$3y = 135 - 4x \quad \text{ehk} \quad y = \frac{135 - 4x}{3};$$

seega esimesest järeldub, et

$$\text{ehk} \quad 6x + 5 \cdot \frac{135 - 4x}{3} = 205$$

$$18x + 5(135 - 4x) = 615$$

ehk

$$18x + 675 - 20x = 615$$

ehk

$$-2x = -60;$$

siit

$$x = 30$$

ja järelikut

$$y = \frac{135 - 4 \cdot 30}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

Kontroll. Asetades tulemused võrrandite vasakutesse pooltesse, saame:

$$6 \cdot 30 + 5 \cdot 5 = 180 + 25 = 205, \text{ nagu peab olema;}$$

$$4 \cdot 30 + 3 \cdot 5 = 120 + 15 = 135, \text{ nagu peab olema.}$$

### § 108. Lineaarvõrrand-süsteemi lahendamine liitmisvõttega.

Kui lähemalt vaatleme lineaarvõrrand-süsteemi lahendamiseks antud eeskirja ja selle rakendamist ülalkäsiteldud näitele, siis näeme, et võtte kahe esimese sammu eesmärgiks on tuletada ühest võrrandist teise abil niisugune

võrrand, mis oleks vaba ühest tundmatust. Tõepoolest, võrdus  $y = \frac{135 - 4x}{3}$  on vaid võrrandi  $4x + 3y = 135$  teisend ja võrdus  $6x + 5 \cdot \frac{135 - 4x}{3} = 205$  on võrrandi  $6x + 5y = 205$  teisend, mis saadud eelmist võrrandit arvestades.

Toimingut, mille abil kahest kahe tundmatuga võrrandist tuletatakse ühe tundmatuga võrrand, nimetatakse ühe tundmatu elimineerimiseks.

Tundmatu elimineerimist võib teostada mitmel viisil. Üks lihtsamaid on järgmine: tundmatu  $y$  elimineerimiseks süsteemist

$$\begin{cases} 6x + 5y = 205 \\ 4x + 3y = 135 \end{cases}$$

korrutame esimese võrrandi kummagi poole  $-3$ -ga, teise võrrandi kummagi poole  $5$ -ga; lühemas kõnekäänus: korrutame esimest võrrandit  $-3$ -ga, teist  $5$ -ga; saame süsteemi:

$$\begin{cases} -18x - 15y = -615 \\ 20x + 15y = 675 \end{cases}$$

Liidame võrdsed suurused võrdsetega; liitmisaksioomi põhjal on tulemused võrdsed; seega

$$2x = 60.$$

See võrrand on vaba tundmatust  $y$  ja seega on seatud eesmärk saavutatud. Selleks tarvilikud tehted: korrumine  $-3$ -ga, korrumine  $5$ -ga ja tulemuste liitmine on lubatavad operatsioonid; nende toimingu lubatavust kindlustavad korrumine- ja liitmisaksioomid.

Edaspidine lahenduskäik on lihtne:

$$\begin{aligned}x &= 30 \\4 \cdot 30 + 3y &= 135 \\3y &= 15 \\y &= 5.\end{aligned}$$

Niisiis süsteemi lahendid on  $x = 30$  ja  $y = 5$ .

Kokkuvõttes võime anda järgmise eeskirja ühe tundmatu elimineerimiseks kahe tundmatuga lineaarvõrrand-süsteemist:

korrutame kummagi võrrandi kohase teguriga, valides tegurid nii, et saadavais võrrandis eemaldatava tundmatu ees seisaksid absoluutselt võrdsed, kuid vastupidiste märkidega kordajad; saaduste liitmise tulemus on siis vaba sellest tundmatust.

N ä i d e. Elimineerime süsteemist

$$\begin{cases}6x + 5y = 205 \\4x + 7y = 135\end{cases}$$

tundmatu  $x$ .

Selleks korrutame esimese võrrandi 2-ga, teise võrrandi  $-3$ -ga ja liidame saadused:

$$\begin{array}{r}12x + 10y = 410 \\-12x - 21y = -405 \\ \hline-11y = 5\end{array}$$

Saadud võrrand on vaba tundmatust  $x$ .

M ä r k u s. Ka eelmises paragraafis käsitletud asetusvõtte on vaid üks võimalikkudest viisidest ühe tundmatu elimineerimiseks kahest lineaarvõrrandist.

### § 109. Lahendumatud võrrand-süsteemid.

Ü l e s a n n e 1. Lahenda süsteem

$$\begin{cases}3x + 5y = 8 \\6x + 10y = 15\end{cases}$$

Lahendus. Elimineerime tundmatu  $y$ . Selleks korrutame esimese võrrandi 2-ga, teise  $-1$ -ga; saame:

$$\begin{cases} 6x + 10y = 16 \\ -6x - 10y = -15 \end{cases}$$

Liitmisaksioomi põhjal järeldub neist võrdusist, et null peaks olema võrdne ühega, mis on võimatu. Siin on tegemist juhuga, kus süsteemi võrrandid on üksteisele vasturääkivad: esimene nõuab, et  $6x + 10y$  oleks 16, teine seevastu, et sama summa oleks 15.

Ülesanne 2. Lahenda süsteem:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 14 \end{cases}$$

Lahendus. Elimineerime tundmatu  $x$ . Selleks korrutame esimese võrrandi 2-ga, teise  $-1$ -ga; saame:

$$\begin{cases} 4x - 6y = 14 \\ -4x + 6y = -14 \end{cases}$$

Liites need võrrandid saame võrduse

$$0 = 0.$$

See nõue on täidetud olenemata sellest, missuguse väärtuse me anname tundmatule  $y$ . Seepärast ei saa siit ka mingit  $y$ -väärtust määrata. Siin on tegemist juhuga, kus kumbki võrrand nõuab üht ja sedasama või üks võrrandeist on teise võrrandi teisend; tõepoolest: kui teise võrrandi jagame 2-ga, saame esimese. Ühest nõudest ei jätku kahe tundmatu määramiseks.

Kokkuvõttes:

lineaarvõrrand-süsteem on lahendumatu, kui selle süsteemi võrrandid on üksteisele vasturääkivad või kui üks süsteemi võrrandest on teise võrrandi teisend.

## § 110. Võrrand-süsteemi koostamine.

Ülesanne 1. Kullasepal on kaks hõbepeekrit ja nende juurde kuuluv hõbekandmik, mille hind on 16 krooni. Kandmik ühes esimese peekriga maksab 4 korda rohkem kui teine peeker; kandmik ühes teise peekriga maksab 3 korda rohkem kui esimene peeker. Kui kallid on kumbki peeker?

Lahendus. Märgime esimese peekri hinna kroonides tähega  $p$ , teise peekri hinna kroonides tähega  $q$ . Siis esimese peekri ja kandmiku hind kokku on  $p + 16$ , teise peekri neljakordne hind on  $4q$ ; seega

$$p + 16 = 4q.$$

Teise peekri ja kandmiku koguhind on  $q + 16$ , esimese peekri kolmekordne hind on  $3p$ ; seega

$$q + 16 = 3p.$$

Nii saame kahe tundmatuga lineaarvõrrand-süsteemi:

$$\begin{cases} p + 16 = 4q \\ q + 16 = 3p \end{cases}$$

ehk, teisiti kirjutades:

$$\begin{cases} p - 4q = -16 \\ 3p - q = 16 \end{cases}$$

Seega on ülesande lahendamiseks vajalik võrrand-süsteem leitud.

Süsteemi lahendamine annab

$$p = 7\frac{3}{11}, \quad q = 5\frac{9}{11},$$

s. t. esimene peeker maksab  $7\frac{3}{11}$  krooni, teine  $5\frac{9}{11}$  krooni. Ebatavaline vastuse kuju on seletatav sellega, et ülesanne on pärit XVI sajandist.

Ülesanne 2. Kaks sportlast  $A$  ja  $B$  võistlevad 800 meetri jooksus. Esimesel katsel annab  $A$  30 m maad  $B$ -le ette, tuleb aga sellest hoolimata 2 sekundit varem sihile kui  $B$ . Teisel katsel annab  $A$  50 m maad  $B$ -le ette ja tuleb nüüd 1,2 sekundit hiljem sihile kui  $B$ . Kui kiiresti jookseb kumbki sportlane?

Lahendus. Mõõdame jooksukiirust ühikuga meetri sekundis ja märgime sportlase  $A$  jooksukiiruse tähega  $a$ , sportlase  $B$  jooksukiiruse tähega  $b$ . Oma teekatmiseks kulub  $A$ -l esimesel katsel  $\frac{800}{a}$  sekundit,  $B$ -l seevastu  $\frac{800-30}{b}$  ehk  $\frac{770}{b}$  sekundit. Esimene aeg on teisest 2 sekundi võrra lühem, seega

$$\frac{800}{a} + 2 = \frac{770}{b}.$$

Samal viisil arutades leiame, et teise katse puhul

$$\frac{800}{a} - 1,2 = \frac{750}{b}.$$

Saadud võrrandeid teisiti kirjutades saame:

$$\begin{cases} \frac{800}{a} - \frac{770}{b} = -2 \\ \frac{800}{a} - \frac{750}{b} = 1,2 \end{cases}$$

Märkides murrud  $\frac{1}{a}$  ja  $\frac{1}{b}$  vastavalt tähtedega  $a$  ja  $\beta$  näeme, et need abitundmatud peavad rahuldama võrrand-süsteemi

$$\begin{cases} 800a - 770\beta = -2 \\ 800a - 750\beta = 1,2 \end{cases}$$

Määrates siit  $a$  ja  $\beta$  saame

$$\beta = \frac{3,2}{20}, \quad a = \frac{1212}{8000},$$

järelikult

$$a = \frac{8000}{1212} \approx 6,61 \quad \text{ja} \quad b = \frac{20}{3,2} = 6,25.$$

Niisiis sportlase *A* jooksukiirus oli 6,61 meetrit sekundis ja sportlase *B* jooksukiirus 6,25 meetrit sekundis.

Kokkuvõttes toimub lineaarvõrrand-süsteemi koostamine järgmiselt:

märgime otsitavad kohaselt valitud tähtedega; avaldame nende tähtede ja ülesande andmete abil seosed, mis ülesandes on väljendatud sõnadega; saadud võrrandeid teisendame nii, et süsteem esineks kujul

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n; \end{cases}$$

tarbe korral kasutame abitundmatuid.

### § 111. Ruutvõrrand-süsteem.

Olgu tegemist süsteemiga, mis koosneb kahest võrrandist kahe tundmatuga.

Kui üks või mõlemad süsteemi võrrandeist on ruutvõrrandid, siis nimetame süsteemi ruutvõrrand-süsteemiks.

Näiteks on süsteemid

$$\begin{cases} x^2 - 2xy = 32 \\ 3x + y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

ruutvõrrand-süsteemid.

Süsteemi nimetame ka siis ruutvõrrand-süsteemiks, kui tema võrrandis ei esine ei liiget  $x^2$ -ga, ega ka liiget  $y^2$ -ga, küll aga liige tundmatute korrutisega  $xy$ . Näiteks on süsteem

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 5 \end{cases}$$

ruutvõrrand-süsteem.

Käsitleme allpool ainult mõnda ruutvõrrand-süsteemi eritüüpi.

1. tüüp. Üks süsteemi võrrandeist on ruutvõrrand, teine lineaarvõrrand.

Niisugust süsteemi näeme esimeses ülaltoodud näites. Kõnesolevat tüüpi võrrand-süsteem laheneb järgmiselt: avaldame lineaarvõrrandist ühe tundmatu ja asetame leitud avaldise selle tundmatu asemele ruutvõrrandisse; saame ühe tundmatuga ruutvõrrandi; seda lahendades ja lineaarset võrrandit arvestades leiame süsteemi lahendid.

Näide. Lahendame süsteemi:

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 65 \end{cases}$$

Esimesest võrrandist saame

$$y = 10 - 2x,$$

seega järeldub teisest, et

$$x^2 + (10 - 2x)^2 = 65$$

ehk

$$x^2 + 100 - 40x + 4x^2 = 65$$

ehk

$$5x^2 - 40x + 35 = 0$$

ehk

$$x^2 - 8x + 7 = 0,$$

millest

$$x_1 = 1 \quad \text{ja} \quad x_2 = 7$$

ja järelikult

$$y_1 = 8 \quad \text{ja} \quad y_2 = -4.$$

Meie süsteemil on kaks paari lahendeid

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 8 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = 7 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

2. tüüp. Tundmatud esinevad võrrandis sümmeetriliselt. Sel puhul võrrandid oma kuju ei muuda, kui vahetame tundmatud. Niisugusteks süsteemideks on näiteks 3 järgmist süsteemi:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Ülesanne 1. Lahenda süsteem

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ x + y = 7. \end{cases}$$

Lahendus. Jagamisaksiooni põhjal saame

$$x - y = 3;$$

et

$$x + y = 7,$$

siis

$$2x = 10,$$

seega

$$x = 5$$

ja

$$y = 2.$$

Ülesanne 2. Lahenda süsteem

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$$

Lahendus. Võttes esimese võrrandi kummagi poole ruutu, saame

$$(x + y)^2 = 64;$$

lahutades siit

$$4xy = 60,$$

saame

$$(x - y)^2 = 4,$$

millest

$$x - y = \pm 2.$$

Seega

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 8 \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Järelikult süsteemi lahendid on:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 3 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 5 \end{cases}$$

Ülesanne 3. Lahenda süsteem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Lahendus. Korrutame teise võrrandi 2-ga; saame:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

Üks kord võrrandite vastavaid pooli liites, teine kord lahutades, saame:

$$(x + y)^2 = 16$$

ja

$$(x - y)^2 = 4.$$

Seega

$$x + y = \pm 4$$

ja

$$x - y = \pm 2.$$

See annab 4 võrrand-süsteemi; neist esimene on

$$\begin{cases} x + y = +4 \\ x - y = +2 \end{cases}$$

Selle lahendamisel saame esimese süsteemi lahendid

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

Kolme ülejääva süsteemi lahendid on

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -3 \\ y_3 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -1 \\ y_4 = -3 \end{cases}$$

Kokkuvõttes:

olgu antud lahendada ruutvõrrand-süsteem; kui üks antud võrrandeist on lineaarne, siis elimineerime selle abil ühe tundmatu; kui kumbki võrrandeist on teise astme võrrand, siis püüame tuletada niisugust võrrandit, milles vähemalt üks tundmatu esineb esimeses astmes; edasi toimime, nagu eespool seletatud.

## Ajaloolisi andmeid.

Algebra nimi. Algebra nime algvormiks on *al-jabr*; nii see esineb tähtsa araabiakeelse matemaatilise teose pealkirjas: *al-jabr w'al muqâbalah*. Teos on pärit IX sajandi algusest; tema autoriks on kuulus Araabia matemaatik *Muhammed ibn Mûsa al-Khowarizmi*, see on: Muhammed, Mûsa poeg, pärit Khowarizm'ist. Sõna *al-jabr* on tõlgitud kui negatiivse liikme ülekandmist võrrandi ühelt poolelt võrrandi teisele poolele. Uuemad uurimused on aga näidanud, et sõna *al-jabr* on arvatavasti assüüria päritoluga ja tähendab eesti keeles „on tähtsuselt võrdne“. Tõenäoliselt see sõna jäi Väike-Aasias tarvitusele ka pärast Assüüria riigi kokkuvarisemist. Ristiusuliste süürlaste kaudu, kes olid araablastele kreeka teaduslike teoste tõlkijaks araabia keelde, kandus sõna *al-jabr* araablaste juurde võrdumise tähenduses võrrandite puhul. Araablased tõlkisid sõna *al-jabr* oma keelde sõnaga *al-muqâbalah*, kasutasid mõlemaid sõnu rööbiti teineteisega, omistades hiljemini kummalegi tähenduse „õpetus võrrandeist“. Samas mõttes mõistame algebrat meiega.

Algebra sümboolid. Arvutamisevõtete väljaarendamiseks oli vaja luua vaid esimese üheksa arvu tähised ja nulli ja harjuda mõttega, et number omab tähendust alles ühenduses kohaga, millel ta seisab; näiteks kirjutises 777 paremalt esimene number tähendab 7 ühte, sama number, seistes paremalt teisel kohal, tähendab 7 kümnet ja sama number, seistes paremalt kolmandal kohal, tähendab 7 sada.

Algebra väljakujundamiseks tuli luua tunduvalt rohkearvulisem sümboolite kogu: oli tarvis sümboleid tundmatute tähistamiseks ja sümboleid tehete ja tehete järjekorra määramiseks. Kõrvu sellega tuli luua uued arvuliigid: positiivsed ja negatiivsed, ratsionaalsed ja irratsionaalsed arvud. Sageli uued mõisted seisid ülepääsematus vastuolus seniste arusaamistega; niisuguste mõistete näiteina nimetame arve, mis on väiksemad kui null, ja arve, mida ei saa

avaldada ei ühegi täisarvu ega ühegi murdarvuga. Toodud põhjustel algebra arenes suhteliselt aeglasemalt kui aritmeetika. Tee algebra jõudsamaks arenemiseks avanes alles pärast algebra sümbolika lõplikku väljakujunemist XVI ja XVII sajandil.

Algebra sümbolite arenemises leiame palju juhuslikku; hili-semad autorid kasutasid oma eelkäijate loodud sümboleid, muutes ja täiendades neid enam oma maitse kui otstarbe kohaselt. Ainsa tõkke sümbolite uputusele seadis asjaolu, et pärast trükikunsti avastamist autorid olid tahes-tahtmata sunnitud kasutama valmis trüki-märke. Enamik praegu-tarvitatavaid matemaatilisi sümboleid on saadud tähtede ja sõnalühendite lihtsustamise teel.

**Tehtemärgid.** Vanimas meile säilinud matemaatilises käsikirjas, *Ahmes'e* papüüruses (XVII sajandist e. Kr.) kasutatakse liitmise märkimiseks sümbolit  $\triangle$  ja lahutamise märkimiseks sümbolit  $\triangle$ . *Diophantos* (III sajandil p. Kr.) märkis liitmise sel teel, et kirjutas liidetavad kõrvuti teineteisega, lahutamise aga sümboliga  $\nabla$ . *Fibonacci* (loe: fibonatsi) a. 1202 märgib liitmist sõnaga *plus* ja lahutamist sõnaga *minus*; esimene neist tähendab enam, teine tähendab vähem. Mõlemad sõnad on säilinud tänini liitmise ja lahutamise märkide nimetustena. Tehtemärgid + ja — esinevad esmakordselt *Widman'i* aritmeetika õpperaamatus a. 1489. On tõenäoline, et märk + on tekkinud ladinakeelse sõna *et* kokkutõmbamisel, millega vareremini sageli märgiti liitmist; sõna *et* tähendab eesti keeles „ja“. Märk — on tekkinud tõenäoliselt tähe *m* kokkutõmbamisel. Punkt korrutamismärgina ja kaks punkti jagamismärgina võeti tarvitusele *Leibnitz'i* (1646—1716) poolt. Murrujoont kasutasid juba araab-lased.

**Võrduse ja võrratuse tähised.** Kahe suuruse võrdumist märgib *Diophantos* märgiga  $\sigma$ ; see on nähtavasti sõna *ισος* lühendiks, mis tähendab „võrdne“. Keskajal märgiti võrdumist sama tähendusega ladinakeelse sõnaga *aequalis*. A. 1637 kasutab *Descartes* (loe: dekárt) võrdumine sümbolina märki  $\infty$ . Praegu tarvitusel olev märk = on *Record'e*i (loe: rekord) loodud a. 1557, põhjendusega, et „ei ole kaht teist asja, mis oleksid nii võrdsed, kui kaks rööbikut võrdpikkust lõiku“. Suurem ja väiksem ole-mise märgid > ja < on loodud *Harriot'i* (loe: härriot) poolt; trükiis ilmusid nad a. 1631, kümme aastat pärast autori surma.

**Otsitava tähis.** Vanim viis on märkida otsitavat sõnaga. Nii kasutab *Ahmes* otsitava märkimiseks sõna *suurus* või

sõna kuhi. Al-Khowarizmi nimetab otsitava esimest astet sõnaga juur, otsitava teist astet sõnaga ruut. Fibonacci tõlkis need sõnad araabia keelest ladina keelde sõnadega *radix* ja *quadratus*. Hilisemad Itaalia autorid kasutasid otsitava märkimiseks sõnu *res* ehk *cosa*, tähendusega asi, ka sõna *numerus*, tähendusega arv. Otsitava ruut ja kuup märgiti sõnadega *censo* ja *cubus*. Sõnad asendati hiljemini lühenditega; nii märgib Vietta (loe: vieeta) XVI sajandi lõpul otsitava, tema ruudu ja kuubi tähtedega N, Q ja C. Sageli jäeti tundmatu üldse kirjutamata; nii näeksime avaldisi  $7$ ,  $8x$ ,  $9x^2$

Chuquet (loe: šükee) kirjutises a. 1484 kujul  $7^0, 8^1, 9^2$

Bombelli „ a. 1572 „  $7, 8, 9$

Bürgi „ a. 1619 „  $7, 8^I, 9^{II}$

Astme ja juure tähis. Astme praeguse märkimisviisi valmistasid ette

Harriot a. 1631 kirjutisega  $a, aa, aaa, aaaa, \dots$

Hérigone (loe: erigoon) a. 1634 „  $a, a2, a3, a4, \dots$

ja Descartes a. 1637 „  $x, xx, x^3, x^4, \dots$

Juure tähisena kasutati ladinakeelse sõna *Radix* või *radix* (see tähendab juur) esimest tähte, *R* või *r*. Nii kirjutab Bombelli a. 1572 ruutjuurt sümboliga *R. q.* ja kuupjuurt sümboliga *R. c.*; nii kirjutab Stevin a. 1585 neid juuri vastavalt  $\sqrt{\quad}$  ja  $\sqrt[3]{\quad}$ . Kui palju praegu-kasutatav tähistusviis on lihtsam ja ülevaatlikum varemini-tarvitatud tähistusviisidest, seda näeme kõrvuseadmisest:

praegu kirjutame Bombelli kirjutas a. 1572

$$\sqrt{20 - 6x + x^2} \qquad R. q. \ L20 \cdot m \cdot \overset{1}{6}p \cdot \overset{2}{I}I$$

Viimases kirjutises *R. q.* tähendab ruutjuurt, tähed *L* ja *I* täidavad sulgude aset, tähed *m.* ja *p.* tähendavad miinust ja plussi,

viimaks  $\overset{1}{6}$  ja  $\overset{2}{I}$  tähendavad  $6x$  ja  $x^2$ .

### Märksõnastik.

Kriips rea alguses tähendab eelmise rea sõna kordumist;  
 nool tähendab „vt. noolele järgnevat sõna“;  
 sõna sulgudes täiendab sulgude ees seisvat sõna;  
 arv tähendab lk. numbrit, kus selgitatakse rea alguses seisev sõna;  
 j. arvu taga tähendab „ja järgnev“;  
 jj. arvu taga tähendab „ja järgnevad“.

- abivalemid (arvutamise) 83 jj.
- absoluutväärtus 47
- algarv 90
- algoritm (ruutjuure) 130 jj.
- algtegur 94, 96, 164
- algtegureiks lahutamine 94, 96
- algus-punkt 14
- alus (astme) 8
- arendamine 83 jj.
- arvtelg 14
- arvutamine 30, 83 jj.
- arvutamise põhiseadused 25 jj.  
30, 42
- arvuvald 61 jj., 117 j., 138
- asetusvõte 176 jj.
- assotsiatiivsus 32, 37
- aste 8, 59, 64, 67, 116
- astendaja 8
- astendamine 7, 58, 66 j., 116
- astendatav 8
- astme astendamine 66
- astmete jagamine 65  
— korrutamine 64
- astmik 50
- avaldis 5
- binoom → kakliige
- biruutvõrrand 154
- definiitsioon 101
- diskriminant 150, 152 jj.
- distributiivsus 38
- ekvivalentne → samaväärne
- elimineerimine 179
- graafik 123
- graafiline (kujutamine) 15 jj.
- hulkliige 19, 69 j. 86, 161, 165 j.
- interpolatsioon 130
- irratsionaalarv 137 jj.
- jagaja 29, 89, 96
- jagamine 29 j., 30, 40, 59, 65 j.,  
70, 115
- jagamisaksioom 75
- jagatav 29
- jagatis 29, 59, 119, 139
- jaguv 29
- jaguvus 89 jj.
- jaotuvus 38 j.
- jääk 29
- kahene 128
- kakliige 20, 83
- kaudne (möötmine) 18
- koefitsient → kordaja
- kolmliige 20
- kommutatiivsus 31, 37
- kontroll (võrrandi lahendi) 23
- koondamine (hulkliikme) 20
- koostamine (võrrandi) 155 jj.,  
182
- kordaja 6, 169
- kordarv 90
- kordne 89

- korraldamine 68  
 korrutaja 28  
 korrutamine 28 j., 36, 55, 64, 70, 83, 112  
 korrutamisaksioom 75  
 korrutis 55, 83, 85, 114, 139  
 korrutise jagamine 41 j.  
 korrutisega jagamine 66  
 kujutamine (arvude) 14 j.  
 kujutamisühik 14  
 kuup 7, 87  
 kuupide tabel 140  
 kuupjuur 140  
 lahend (võrrandi) 23  
 lahendamine (võrrandi) 23, 74, 81  
 lahendi valem 149, 151  
 lahendumatu 180  
 lahutamine 27 j., 34, 52, 69, 111  
 — algteureiks 94, 96, 162  
 lahutamisaksioom 75  
 lahutatav 27  
 laiendamine (muru) 103  
 laiendustegur 106  
 liidetav 26  
 liige (hulkliikme) 20  
 — (võrde) 120  
 liitmine 26, 30 j., 50, 69, 108  
 liitmisaksioom 75  
 liitmisvõte 178 j.  
 lineaarvõrrand 79 j., 169 jj.  
 — süsteem 175 jj.  
 loendamine 25  
 loendamisaksioom 25  
 lugeja 101  
 miinus 5, 47  
 mittetäielik (ruutvõrrand) 143  
 m.o.t.t. 42  
 murd 101 jj., 166 jj.  
 murdude vald 117  
 negatiivne arv 47, 49, 59, 61  
 nimetaja 101  
 null 49, 63, 75  
 numbriline väärtus (avaldise) 12 j.  
 otsene (mõõtmise) 18  
 otsitav 22  
 paarisarv 3  
 paarituurv 3  
 parabool 125  
 parandus 56, 128  
 pluss 5, 47, 61  
 polünoom 68  
 positiivne arv 47, 49, 59 jj.  
 proportsioom → võrre  
 protsent 4  
 põhiomadus (muru) 102  
 — (võrde) 121  
 põhiseadused (arvutamise) 25 jj., 117  
 pöördtehe 28, 30  
 pöördülesanne 125  
 pööre (muru) 115  
 rahuldama (võrrandit) 23, 74  
 ratsionaalarv 118, 138  
 reaalarv 138  
 relatiivsed arvud 48 jj.  
 ristsumma 93  
 ruut 7, 84 j.  
 ruutjuur 126 jj.  
 ruuttrinoom 163  
 ruutude tabel 128  
 ruutvõrrand 142 jj.  
 ruutvõrrand-süsteem 184 jj.  
 samasus 72  
 samaväärsed võrrandid 76  
 sarnased liikmed 20  
 segaarv 110, 112  
 siseliige (võrde) 120  
 skaala 26 j., 49  
 skeem 13, 15, 95  
 suhe 119  
 sulud 10 jj., 33, 35, 51  
 summa 26, 55  
 — jagamine 42  
 — jaguvus 91  
 — korrutamine 38  
 — kuup 87  
 — lahutamine 34, 36  
 — liitmine 32  
 — ruut 84  
 suunaga suurused 46  
 suunata suurused 46  
 suunatud arvud 48  
 suurim ühistegur 97 j., 165  
 sümbol 6, 126  
 sümboolika 1 jj.  
 taandamine (muru) 103

- taandatud ruutvõrand 143, 146, 159  
 taandumatu (murd) 103  
 tegur 28, 89  
 tehete järjekord 10  
 tehtmärgid 47 j.  
 teisendus 21  
 telg 14  
 tihendamine (arvuvalla) 118, 138  
 korrutatav 28  
 trinoom → kolmliige  
 tundmatu 22  
 tunnused (jaguvuse) 90 jj.  
 täisarv 25  
 täpsus 134  
 vahe 27, 55  
   — jagamine 42  
   — korrutamine 39 j.  
   — lahutamine 34, 36  
   — liitmine 33  
   — kuup 87  
   — ruut 84  
 vahetuvus 31, 33, 37, 39  
 valem 17 j., 83 jj., 149, 151  
 võrdeline 121  
 võrdlemine (murdude) 107  
 võrdumine (murdude) 122  
 võrduse omadused 75  
 võrand 23, 73 jj., 172  
 võrandi teisendamine 78  
 võrand-süsteem 175  
 võrratus 72, 77  
 võrre 120 jj., 168  
 vähendatav 27  
 väikesim ühiskordne 98, 165  
 välisliige (võrde) 120  
 väärtus (numbriline) 12, 15  
 ühenduvus 32, 33, 37, 39  
 ühenimelised murrud 105  
 ühesus 25  
 ühisjagaja 96  
 ühiskordne 98, 100  
 ühisnimetaja 105  
 ühistegur 96  
 üksliige 19, 64 jj., 96, 98, 100  
 üldkuju 80, 142  
 üldkujuline ruutvõrand 143, 151

flu

TÜ RAAMATUKOGU



10300016202972

A  
11018

89 397

HIND 2 KR. 10 S.