S. GELFAND
M. GERVER
A. KIRILLOV
N. KONSTANTINOV
A. KUŠNIRENKO

$1+2+3+\dots+n=\frac{(n+1)n}{2}$

$x_n=\frac{n+1}{n}$

$< 0{,}1?$

$\frac{(2n-1)2n}{\dots(2n-1)}=2^n$

$\frac{(1-\frac{1}{2n})}{(1+\frac{1}{2n})}=1$

ELEMENTAAR-MATEMAATIKA ÜLESANDEID

A-29928 II

S. GELFAND
M. GERVER
A. KIRILLOV
N. KONSTANTINOV
A. KUŠNIRENKO

ELEMENTAARMATEMAATIKA ÜLESANDEID

JADAD
KOMBINATOORIKA
PIIRVÄÄRTUSED

KIRJASTUS „VALGUS" · TALLINN 1969

51
E 52

Originaali tiitel:

Математика
Библиотечка физико-математической школы
Выпуск 3
С. И. Гельфанд, М. Л. Гервер, А. А. Кириллов,
Н. Н. Константинов, А. Г. Кушниренко
ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ
Последовательности
Комбинаторика
Пределы
Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва 1965.

Vene keelest tõlkinud *K. Kallaste*
Kunstiliselt kujundanud *T. Aru*

2
Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
74797

2—2—2
213—69

SISSEJUHATUS

Käesolev «Füüsika-matemaatika kooli raamatukogu» kolmas raamat on mõeldud ülesannete koguks 9.—11. klassi õpilastele.

Kogumik on koostatud nii, et see võib olla ka õpikuks kursuse vastavate osade käsitlemisel.

Meie käsitlusviis erineb paljus traditsioonilisest.

Esiteks pööratakse suuremat tähelepanu loogilisele ettevalmistusele võrreldes arvutuslikuga.

Teiseks toetume rohkem õpilaste iseseisvale tööle.

Kolmas põhiline erinevus on materjali valikus. Me püüame matemaatika koolikursusest õpetada nimelt seda, mida läheb rohkem vaja edaspidiseis õpinguis ja töös.

Käesolevat raamatut võib lugeda mitmeti. Lihtsaim, kuigi mitte kõige otstarbekam meetod on lugeda läbi ülesannete tingimused, seejärel ülesannete lahendused ja need läbi mõelda, siis aga lahendada kontrollülesanded. Me usume, et õpilased omandavad käsitletava aine ka sellise passiivse meetodiga. Palju kasulikum on aga toimida nii. Lahendada iseseisvalt vastuseid, juhiseid ja lahendusi kasutamata terve hulk ülesandeid. Pärast seda aga võrrelda saadud tulemusi raamatus

toodud vastustega. Seejärel lugege läbi lahendused. Me soovitame viimast teha isegi siis, kui ülesanded ei tekitanud mingeid raskusi, sest lahendustes anname sageli kasulikke täiendavaid andmeid, mõnikord aga püstitame uusi küsimusi.

Kui niisugune töötamise meetod osutub liiga raskeks, võite kasutada vahepealset teed: pärast seda, kui te mõningaid ülesandeid ei suutnud lahendada, vaatamata korduvatele katsetustele, pöörduge osa «Vastused ja juhised» poole. Kui ülesanne ka pärast seda ei tule välja, lugege läbi ülesande lahendus.



Märgiga «Parkimiskoht» tähistatakse teksti lõik, kus esineb edaspidise mõistmiseks tarvilikke andmeid: definitsioone, valemeid jm. Selle märgi juures tuleb peatuda ja hoolikalt vastav lõik läbi lugeda.



Märk «Järsk tõus» asetseb seal, kus paikneb raskeim ainelõik. Kui vastav tekst on ptiikirjas, võib esimesel lugemisel selle koha vahele jätta.



Eriti tähelepanelik olge märgi «Ohtlik kurv» juures. Sageli asetseb see märk kohas, kus esimesel pilgul tundub kõik olevat selge ja lihtne. Kui aga nii, nagu peab, aru ei saada, võib see edaspidises viia tõsistele vigadele.

Tavaliselt täiendab ülesannete kogu õpikut. Meie raamatukesega võib aga töötada õpikut kasutamata.

Sellist materjali käsitlusviisi praktiseeritakse 1962/63. õppeaastast alates Moskva mõningates matemaatilise kallakuga koolides [1].

---

[1] Vt. M. Gerveri, N. Konstantinovi, A. Kušnirenko artiklit «Задачи по алгебре и анализу» kogumikus «Обучение в математических школах», 1. väljaanne, Moskva, «Prosveštšenie», 1965. Osa selle artikli materjalist on kasutatud ka käesolevas väljaandes.

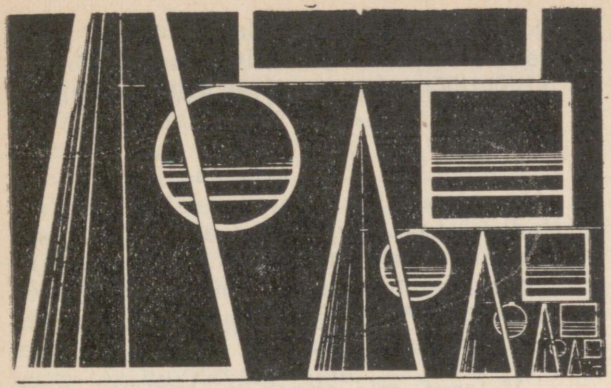
Teeme veel kaks märkust.

1. Tõenäoliselt huvitab teid kõigepealt kombinatoorika. Avage raamat leheküljelt 21. Te võite «kartuseta» hakata lahendama ülesandeid otse teisest peatükist (ülesanded 44, 46, 50!). Et lahendada näiteks ülesannet 44, pole tarvis tunda isegi algebrat. Te võite selle ülesande (samuti ülesande laste kõristitest) anda lahendada ka oma nooremale vennale või õele.

2. Raamatus on palju ülesandeid, milles tuleb tõestada mingi väide mistahes n korral. Ärge kartke seda! Kontrollige algul vastavat näidet $n = 2, 3, 4$ puhul; seejuures märkate kindlasti teatud seaduspärasusi, mis aitavad teid (ja see ongi kõige tähtsam) mõista ja tunnetada ülesande tingimusi, mõnikord aga ütlevad ette ka lahenduskäigu (vt. näiteks ülesanne 2).

Raamat on kirjutatud alljärgnevalt: esimese peatüki kirjutas S. Gelfand, teise peatüki M. Gerver ja A. Kušnirenko, kolmanda peatüki A. Kirillov. N. Konstantinov oli kaastegev ülesannete valimisel ja redigeeris kõik osad.

Autorid avaldavad tänu kõigile nendele seltsimeestele, kes abistasid autoreid nende töös raamatuga: I. Gelfandile, J. Glagolevale, J. Dõnkinale, V. Rjabenkole, B. Šabatile, samuti aga ka Moskva 7. kooli 11-G ja 10-G klassi õpilastele ning Moskva 2. kooli 10-E ja 10-Ž klassi õpilastele, eriti aga M. Podolnile, A. Rõskinale, J. Šatsile ja M. Šifrinale.



I PEATÜKK

JADAD

§ 1. Mis on jada

Me ütleme, et on antud arvude jada

$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots,$

kui igale naturaalarvule[1] n on seatud vastavusse mingi arv u_n.

P

Toome jadade kohta näiteid.

Näide 1. 1, 1, 1, ..., 1, ...

Siin $u_n = 1$ — igale n väärtusele on vastavusse seatud arv 1.

Näide 2. Paaritute arvude jada:

1, 3, 5, ...

Siin $u_n = 2n - 1$.

Näide 3. Jada on antud valemiga

$$u_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

[1] *Naturaalarvudeks* nimetatakse positiivseid täisarve.

a) Kirjutage see jada välja.
(Vastus. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...)
b) Leidke u_{100}, u_{n-3} ja u_{n+1}.
(Vastus. $u_{100} = 5050$

$$u_{n-3} = \frac{(n-3)(n-3+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n-3)(n-2)}{2};$$

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.)$$

Valemit, mis annab u_n avaldise, nimetatakse jada *üldliikme valemiks*. Näiteks võib jada

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...

kirjutada lühidalt üles üldliikme valemiga: $u_n = n^2$.

Näide 4. Kirjutage üldliikme valem järgmise jada kohta:

2, 5, 8, 11, 14, 17, ...

Näide 5. Seaduspärasust, mille järgi kirjutatakse välja jada liikmeid, pole alati kerge leida. Olgu näiteks antud jada

$$0, \frac{7}{2}, 13, \frac{63}{2}, 62, \frac{215}{2}, 171, \ldots$$

Leidke mingi reegel, mis määrab selle jada.
(Vastus. Selle jada üldliikme valem on näiteks järgmine:

$$u_n = \frac{n^3 - 1}{2}.)$$

Näide 6. Jada

3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, ...

kohta aga vaevalt teil õnnestub kirjutada üldliikme valemit. Sellest hoolimata on see jada antud järgmise reegliga: n-ndal

kohal asub kümnendmurruna kirjutatud arvu π ($\pi = 3{,}1415926\ldots$[1]) n-es number. Seega on antud kindel reegel, mille põhjal igale naturaalarvule n on seatud vastavusse arv u_n — jada liige. Näiteks, $u_1 = 3$, $u_2 = 1$, $u_7 = 2$.

Põhimõtteliselt võime saada teada mitte ainult arvu, mis on 1-sel või 7-ndal kohal, vaid ka arvu, mis on 100-ndal, 1005-ndal või üldse mistahes kohal. Vaatamata sellele, et see jada pole antud üldliikme valemiga, võib tema iseloomustamiseks leida terve rea huvitavaid fakte.

Näiteks on matemaatikud tõestanud, et see jada pole perioodiline.

Näide 7. Kirjutage välja jada

1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

10 esimest liiget, kui see jada on koostatud järgmise reegli põhjal: jada kaks esimest liiget on ühed ($u_1 = 1$, $u_2 = 1$), iga järgmine liige, alates kolmandast, võrdub aga kahe eelmise summaga, s. t. kehtib valem

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad (n \geqslant 3).$$

Antud juhtumil on võimalik kirjutada

---

[1] Geomeetriast te teate, et arv π on ringjoone pikkuse ja diameetri suhe. Arvu π esimese väärtuse leidis Archimedes. Ta teadis, et arv π paikneb arvude $3\frac{1}{7}$ ja $3\frac{10}{71}$ vahel. Koolis te kasutate ülesannete lahendamisel tavaliselt väärtust $\pi = 3{,}14$. Täpsemate arvutuste korral võetakse ka π väärtus täpsem, näiteks 3,14159. Põhimõtteliselt võib π väärtusi arvutada kuitahes suure täpsusega. Muuseas, raske on endale ette kujutada ülesannet, mille lahendamiseks oleks vaja teada rohkem, kui seda on vaja teada π teise kümne numbri leidmiseks. Kurioosumina võiks vast mainida veel seda, et inglane W. Shanks (1873) kulutas suurema osa oma elust selleks, et arvutada välja arvu π 707 numbrit. Hiljuti leiti elektronarvutil arvu π mõnikümmend tuhat numbrit. Seejuures selgus, et alates 202. numbrist oli Shanksi arvutustes viga!

u_n jaoks avaldist, kuid see pole kerge. (Selle jada liikmeid nimetatakse *Fibonacci arvudeks*. Vt. nende kohta veel ülesannet 43.)

Näide 8. Leidke jada

$$u_1, u_2, \ldots$$

esimesed liikmed, kui selle jada n-es liige on võrdne kõigi naturaalarvude summaga 1-st n-ni.

(Lahendus. $u_1 = 1$, $u_2 = 1 + 2 = 3$, $u_3 = 1 + 2 + 3 = 6$, $u_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, ..., $u_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

Vastus. 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...)

§ 2. Matemaatilise induktsiooni meetod

Kui esimene järjekorras seisja on naine ja iga naise taga seisab samuti naine, siis koosneb järjekord ainult naistest.

Taolist arutlust, mis peitub eelnevas naljatuses, võib kohata matemaatika kõige erinevates osades ja see kannab *matemaatilise induktsiooni printsiibi* nime. Selle printsiibi rangem formuleering on järgmine:

kui väidete jadas esimene väide on õige ja igale õigele väitele järgneb samuti õige väide, siis on selles jadas kõik väited õiged.

Näide 9. Olgu vaja tõestada valem

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

See valem sisaldab terve rea väiteid:

1) $$1 = \frac{1 \cdot 2}{2};$$

2) $$1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2};$$

3) $1+2+3=\frac{3\cdot 4}{2}$;

4) $1+2+3+4=\frac{4\cdot 5}{2}$;

. . . . . .

Esimene väide on ilmselt õige. Kontrollime, kas igale õigele väitele järgneb õige väide.

Olgu väide õige k korral, s. t. et kehtib võrdus

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Liidame selle võrduse mõlema poolega arvu $k+1$. Saame

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Kuid see on just väide $k+1$ puhul, mis järgneb väitele k korral.

Seega tõestasime, et igale õigele väitele järgneb õige väide. Matemaatilise induktsiooni printsiibi põhjal on meie valem õige iga k puhul.

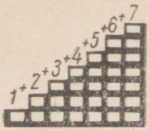
Seda ülesannet võib lahendada ka matemaatilise induktsiooni meetodit kasutamata. Tähistame summa, mida tahame leida, sümboliga u_n. Kirjutame kaks võrdust

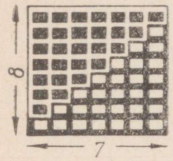
$$u_n=1+2+3+\ldots+(n-2)+$$
$$+(n-1)+n,$$
$$u_n=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+$$
$$+3+2+1$$

(alumises reas on seesama summa mis ülemiseski, ainult et vastupidises järjekorras). Saame

$$2u_n=[1+n]+[2+(n-1)]+[3+(n-2)]+\ldots+$$
$$+[(n-2)+3]+[(n-1)+2]+[n+1].$$

Igas kandiliste sulgudega avaldises on





$1+2+3+4+5+6+7=$
$=\frac{8\cdot 7}{2}=28$

Joon. 1

arv $n+1$, neid sulgusid on aga üldse n (joon. 1). Seetõttu

$$2u_n=\underbrace{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)}_{n\text{ korda}}=$$
$$=n(n+1),$$

$$u_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ja võrdus ongi tõestatud.

Anname veel ühe matemaatilise induktsiooni printsiibi formuleeringu, mis veidi erineb eelnevast.

Olgu meil antud mingi väide ehk, nagu öeldakse, hüpotees ja me tahame kontrollida selle hüpoteesi õigsust iga naturaalarvulise n korral.

Oletame, et meil õnnestus tõestada kaks järgmist väidet:

a) hüpotees on õige, kui $n=1$;

b) sellest, et hüpotees on õige $n=k$ korral, kus k on mingi naturaalarv, järeldub hüpoteesi õigsus ka $n=k+1$ korral.



Matemaatilise induktsiooni printsiip seisneb selles, et väidetest a) ja b) järeldub hüpoteesi õigsus n kõigi naturaalarvuliste väärtuste korral.



Väide b) on tingliku iseloomuga. Selles ei väideta, et hüpotees on õige $n=k+1$ korral. Ta seisneb vaid selles, et kui meie hüpotees on õige $n=k$ korral, siis on ta õige ka $n=k+1$ korral. Väidet b) nimetame edaspidi *induktiivseks oletuseks.*



N ä i d e 10. Tõestame, et n iga naturaalarvulise väärtuse korral arv n^5-n jagub 5-ga.

Tõestame seda matemaatilise induktsiooni meetodi põhjal.

a) Kui $n=1$, siis avaldis n^5-n on võrdne nulliga ja ta jagub 5-ga.

b) Olgu k suvaline naturaalarv. Näi-

tame, et kui $n = k$ korral arv $k^5 - k$ jagub 5-ga, siis $(k+1)^5 - (k+1)$ jagub samuti 5-ga. Kasutades võrdust

$$(k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + \\ + 10k^2 + 5k + 1$$

(kontrollige seda!), teisendame avaldist $(k+1)^5 - (k+1)$ järgmiselt:

$$(k+1)^5 - (k+1) = \\ = (k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + \\ + 5k + 1) - (k+1) = \\ = (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k).$$

Me kujutasime arvu $(k+1)^5 - (k+1)$ kahe liidetava summana. Esimene neist $(k^5 - k)$ jagub 5-ga oletuse põhjal. Teine liidetav $5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$ jagub samuti 5-ga. 5-ga jaguvate arvude summa jagub aga ka ise 5-ga, s. t. $(k+1)^5 - (k+1)$ jagub 5-ga.

Niisiis, väited a) ja b) on tõestatud. Tähendab, matemaatilise induktsiooni printsiibi põhjal arv $n^5 - n$ jagub 5-ga n kõigi naturaalarvuliste väärtuste korral.

On veel teisigi matemaatilise induktsiooni printsiibi formuleeringuid, mis aga kõik on ekvivalentsed antutega. Toome näitena veel ühe.

Kui:

a) mingi väide on õige $n = 1$ puhul;

b) sellest, et väide on õige kõigi $n \leqslant k$ korral, järeldub, et ta on õige ka $n = k + 1$ puhul, siis on see väide õige n kõigi väärtuste korral.

Selle formuleeringu erinevus eelnevatest seisneb järgnevas.

Punktis b) me nõuame, et väide oleks õige kõigi $n \leqslant k$ korral, mitte ainult $n = k$ puhul.

On kerge mõista, et matemaatilise induktsiooni printsiibi mõlemad formuleeringud on ekvivalentsed selles mõttes, et

iga teoreemi, mida saab tõestada induktsiooni meetodi ühe vormi abil, saab tõestada ka teise vormi abil.

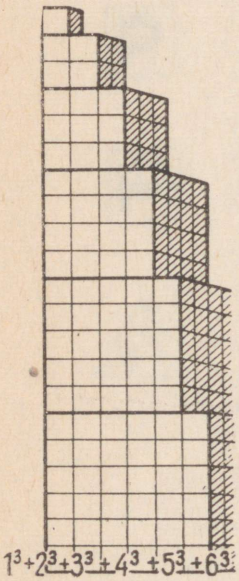
Märgime samuti, et väite a) tõestus on vajalik nii-öelda ainult «sissejuhatuseks». Kui a) asemel tõestada väide

a′) sellest, et meie hüpotees on õige, ütleme, $n = 8$ puhul, punkt b) jätta aga muutumatuks, siis väidetest a′) ja b) saab järeldada, et hüpotees on õige n kõigi kaheksast suuremate naturaalarvude korral. Nimelt kohtume sellise olukorraga näiteks ülesandes 9.

§ 3. Ülesannete tingimused

1. Tõestada, et n kõigi naturaalarvuliste väärtuste korral kehtib võrdus (joon. 2)

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$



Joon. 2

2. Tõestada, et n kõigi naturaalarvuliste väärtuste korral kehtib võrdus

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

3. Arvutada summa

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

4. Tõestada, et võrdus

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \ldots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}$$

on õige n kõigi naturaalarvuliste väärtuste korral ja a kõigi väärtuste korral, mis pole võrdsed nulliga ega negatiivse täisarvuga.

5. Tõestada võrdus [1]

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1,$$

kus n on mistahes naturaalarv.

6. Tõestada, et võrdus

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

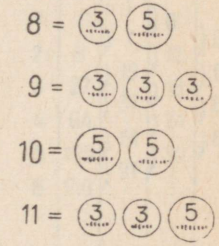
on õige kõigi täisarvuliste $n \geqslant 2$ puhul.

7. Tõestada võrdus

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

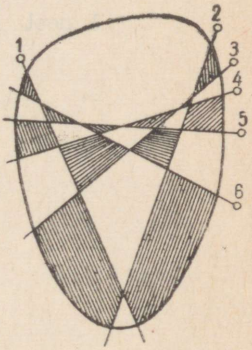
8. Mitmeks osaks jaotavad tasapinna n sirget, millest ükski paar pole paralleelne ja ükski kolmik ei lõiku ühes punktis.

9. Tõestada, et igà rahasummat, mis on suurem kui 7 kopikat, saab maksta täpselt kolme- ja viiekopikalistega (joon. 3).



Joon. 3

10. Tõestada, et n sirgega osadeks jaotatud tasapinda saab värvida mustaks ja valgeks nii, et mistahes kaks osa, millel on ühine külg, on värvitud erinevat värvi (sellist värvimist nimetatakse korrapäraseks, joon. 4).



Joon. 4

11. Tõestada, et kolme järjestikuse naturaalarvu kuupide summa jagub 9-ga.

12. Tõestada, et mistahes täisarvulise $n \geqslant 0$ korral

$$11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

jagub 133-ga.

---

[1] $n!$ (loetakse «n-faktoriaal») tähistab kõigi täisarvude korrutist 1-st n-ni.

13. Tõestada, et mistahes $n \geqslant 2$ korral kehtib võrratus

$$(1+a)^n > 1+na,$$

kui eeldada, et $a > -1$ ja $a \neq 0$.

14. Tõestada, et mistahes $n \geqslant 2$ korral

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

Läheme nüüd üle jadasid käsitlevate ülesannete juurde. Kasulik on veel kord vaadata jada definitsiooni ja näiteid lehekülgedel 7—10.

15. Olgu jada antud järgmisel viisil:

$u_1 = 2$; $u_2 = 3$; $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$, kui $n > 2$.

Tõestada, et kehtib valem $u_n = 2^{n-1} + 1$.

16. Olgu $u_1 = 1$; $u_{n+1} = u_n + 8n$, kus n on naturaalarv. Tõestada, et

$$u_n = (2n-1)^2.$$

Olgu antud jada $u_1, u_2, \ldots$ Moodustame sellest uue jada $v_1, v_2, \ldots$ järgmisel viisil: $v_n = u_{n+1} - u_n$ kõigi n väärtuste puhul. Seda jada nimetatakse jada $u_1, u_2, \ldots$ *vahede jadaks*. Tähistame saadud uue jada nii: $\Delta u_1, \Delta u_2, \ldots$ (Δ — kreeka tähestiku suur täht «delta»).

17. Olgu $u_n = n^2$. Leida vahede jada üldliikme valem.

18. On antud kaks jada $u_1, u_2, \ldots$ ja $v_1, v_2, \ldots$ ühe ja sama vahede jadaga, s. t. sellised, et $\Delta u_n = \Delta v_n$ kõigi n väärtuste korral.

a) Kas võib väita, et $u_n = v_n$?

b) Kas võib väita, et $u_n = v_n$, kui täiendavalt on teada, et $u_1 = v_1$?

19. Olgu jada $w_1, w_2, \ldots$ iga liige võrdne jadade $u_1, u_2, \ldots$ ja $v_1, v_2, \ldots$ vastavate liikmete summaga, s. t. $w_n = u_n + v_n$ iga

n puhul. Tõestada, et sel juhtumil $\Delta w_n = \Delta u_n + \Delta v_n$ iga n puhul.

20. On antud jada $u_n = n^k$. Tõestada, et tema vahede jada üldliige on $k-1$ astme hulkliige n suhtes, ja leida selle hulkliikme pealiikme kordaja.

21. On antud jada, milles u_n on k astme hulkliige n suhtes pealiikme kordajaga a_0. Tõestada, et Δu_n on $k-1$ astme hulkliige n suhtes, ja leida selle pealiikme kordaja.

22. On antud jada $u_n = n^k$, kus k on mingi kindel positiivne arv. Nüüd moodustatakse tema vahede jada, saadud jadast moodustatakse uuesti vahede jada jne. Nii tehakse k korda (joon. 5). Tõestada, et tulemuseks saadakse jada, mille liikmed on kõik võrdsed ühe ja sama arvuga. Missugusega nimelt?

23. On antud jada $v_n = n^k$. Tõestada, et on olemas jada $u_1, u_2, \ldots$, mille üldliige on $k+1$ astme hulkliige n suhtes ja mille puhul $\Delta u_n = v_n$. Leida ka selle hulkliikme pealiige.

24. On antud jada $u_1, u_2, \ldots$ Sellest moodustati tema vahede jada. Saadud jadast moodustati uuesti vahede jada. Kui seda tehti neli korda, siis saadi nullide jada. Tõestada, et lähtejada on kolmanda astme hulkliige.

25. Mingi jada $u_1, u_2, \ldots$ kohta on teada, et tema vahede jada $v_1, v_2, \ldots$ väljendub k astme hulkliikmena. Tõestada, et jada $u_1, u_2, \ldots$ ise võib olla antud $k+1$ astme hulkliikmena.

26. Arvutada summa $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

27. Arvutada summa $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)$.

$u_n = n^3$

n	n^3	Esimene vahe	Teine vahe	Kolmas vahe
0	0			
		1		
1	1		6	
		7		6
2	8		12	
		19		6
3	27		18	
		37		6
4	64		24	
		61		6
5	125		30	
		91		
6	216			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Joon. 5

Aritmeetiliseks progressiooniks nimetatakse jada, mille puhul $u_{n+1} = u_n + d$ iga n puhul. Arvu d nimetatakse progressiooni *vaheks*.

Geomeetriliseks progressiooniks nimetatakse jada, mille puhul $u_{n+1} = u_n \cdot q$ iga n puhul. Arvu q nimetatakse progressiooni *teguriks*.

28. a) Avaldada aritmeetilise progressiooni n-es liige esimese liikme u_1 ja vahe d kaudu.

b) Avaldada geomeetrilise progressiooni n-es liige esimese liikme u_1 ja teguri q kaudu.

29. a) Leida aritmeetilise progressiooni n esimese liikme summa S_n valem.

b) Leida geomeetrilise progressiooni n esimese liikme korrutise P_n valem.

30. a) Leida aritmeetilise progressiooni esimese 15 liikme summa, kui esimene liige on 0 ja vahe on $\frac{1}{3}$.

b) Leida geomeetrilise progressiooni esimese 15 liikme korrutis, kui esimene liige on 1 ja tegur on $\sqrt[3]{10}$.

31. a) Aritmeetilise progressiooni kolmas liige on 0. Leida esimese 5 liikme summa.

b) Geomeetrilise progressiooni kolmas liige on 4. Leida esimese 5 liikme korrutis.

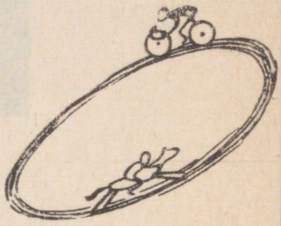
32. Tõestada, et geomeetrilise progressiooni n esimese liikme summa valem on

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

33. Keegi sõidab linna väga huvitava uudisega ja 10 minuti pärast teatab seda linna kahele elanikule. Kumbki neist tea-

tab seda omakorda 10 minuti pärast kahele elanikule (kes pole uudist veel kuulnud) jne[1]. Kui palju aega kulub selleks, et uudist teaks kogu linna 3-miljoniline elanikkond?

34. Jalgrattur ja ratsanik võistlesid staadionil (joon. 6). Nad pidid läbima 5 ringi. Esimese ringi läbimiseks kulus neil aega võrdselt. Iga järgmise ringi läbis jalgrattur 1,1 korda aeglasemalt kui eelmise. Ratsanik läbis iga järgmise ringi teatud ajavahemiku võrra aeglasemalt kui eelmise. Finišisse saabusid nad üheaegselt. Kumb neist kulutas viimase ringi läbimiseks rohkem aega ja mitu korda rohkem?



Joon. 6

35. Leida kõigi tuhandest väiksemate positiivsete paaritute arvude summa.

36. Leida kõigi 2-ga ja 3-ga mittejaguvate positiivsete kolmekohaliste arvude summa.

37. Jada n esimese liikme summa S_n väljendub valemiga $S_n = 3n^2$. Tõestada, et see jada on aritmeetiline progressioon. Arvutada selle jada esimene liige ja vahe.

38. Kas on olemas geomeetrilist progressiooni, mille liikmete hulgas on arvud 27; 8; 12 (need arvud ei tarvitse paikneda jadas kõrvuti ja mitte selles järjekorras nagu siin)? Millistel kohtadel võivad paikneda need arvud progressioonis?

39. Sama küsimus arvude 1; 2; 5 kohta.

40. Aritmeetilise progressiooni 12., 13. ja 15. liikme ruudud moodustavad geomeetrilise progressiooni. Leida selle progressiooni kõik võimalikud tegurid.

---

[1] Muidugi seni, kuni linnas on veel elanikke, kes seda uudist ei tea.

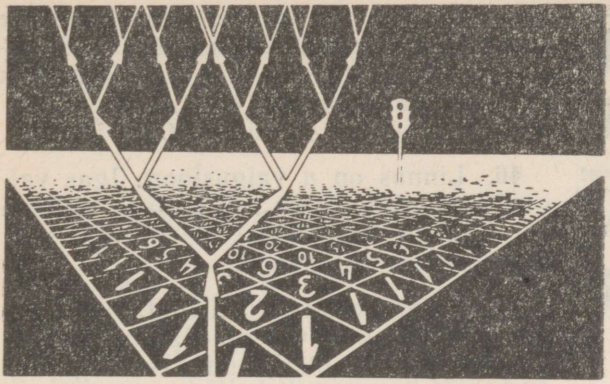
41. Leida kõik geomeetrilised progressioonid, mille iga liige, alates kolmandast, on võrdne kahe eelneva summaga.

42. Mingi jada liikmeteks on kahe geomeetrilise progressiooni vastavate liikmete summad. Millega võrdub selle jada kolmas liige, kui tema kaks esimest liiget võrduvad nulliga?

43. Esitada Fibonacci jada[1] ($u_1 = 1$; $u_2 = 1$; $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$) liikmed kahe geomeetrilise progressiooni liikmete summana.

---

[1] Vt. näide 7 leheküljel 9.



II PEATÜKK

KOMBINATOORIKA

Enamuses selle peatüki ülesannetes tuleb vastata küsimusele «mitmel viisil?». Selliseid ülesandeid (erinevate kombinatsioonide arvu loendamisele) nimetatakse sageli kombinatoorseteks, matemaatika osa aga, mis käsitleb nende lahendamist, nimetatakse *kombinatoorikaks*. Kombinatoorsetel arvestustel on suur tähtsus tõenäosusteoorias, arvutusmatemaatikas, automaatide teoorias ja matemaatilises ökonoomikas.

44. Köögis on viis lampi. Kui palju on erinevaid valgustusviise?

Kas teile on arusaadav, mis on valgustusviis? Iga lamp võib kas põleda või mitte. Kahte valgustusviisi loetakse erisugusteks, kui nad erinevad teineteisest kasvõi üheainsa lambi põlemise või mittepõlemise poolest (joon. 7 ja 8).



Joon. 7

45. Olgu meil n lampi. Tähistame val-



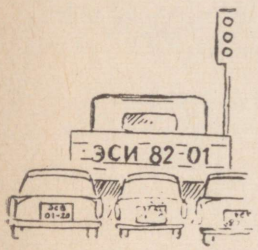


Joon. 8

gustusviiside arvu, mille puhul põleb k lampi, sümboliga C_n^k. Tõestada, et $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n$. Kas on mõistetav tähistus C_n^k? Mida tähendab C_5^1? Millega on võrdne C_5^4?

46. Linnas on n valgusfoori. Igas valgusfooris võib põleda kas punane, kollane või roheline tuli. Mitmel viisil võib süüdata need n valgusfoori?

47. Mitmel viisil võib süüdata n valgusfoori, millest k võivad põleda ühe värviga kolmest värvist, ülejäänud $n - k$ aga ühe värviga kahest värvist?



Joon. 9

48. Kui palju on kuuekohalisi arve, milles pole nulle ega kaheksaid?

49. Kui suur on maksimaalne võimalik arv erinevaid autonumbreid, mis koosnevad neljast numbrist ja nendele järgnevast kolmest tähest (joon. 9, tähestikus on üldse 32 tähte)?

50. Ühes kuningriigis erinevad iga kaks inimest teineteisest hammastiku poolest. Kui suur võib maksimaalselt olla selle kuningriigi elanikkond (maksimaalne hammaste arv on 32)?

51. Avaldises $(x - 1)(x - 2)(x - 3) \ldots (x - 100)$ on avatud sulud ja koondatud sarnased liikmed. Leida x^{99} kordaja.

52. Mitmel viisil on võimalik naturaalarvu n kujutada kahe naturaalarvu summana?

Seda ülesannet võib mõista mitmeti. Võib lugeda, et liidetavate järjekord pole oluline, võib aga lugeda, et on. Teiste sõnadega, võib lugeda, et $8 = 3 + 5$ ja $8 = 5 + 3$ on üks ja seesama liidetavaiks lahutus, võib aga ka lugeda, et erinev. Vastused saadakse samuti erinevad. Soovitame lahendada mõlemad ülesanded.

53. Analoogiline küsimus kolmeks liidetavaks lahutamise kohta (järjekord on oluline).

Pascali kolmnurgaks nimetatakse järgmist tabelit:

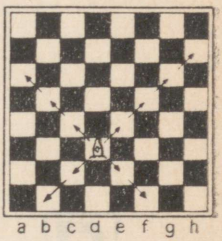
```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    . . . . . . . . . . .
```

(kolmnurga küljed koosnevad ühtedest, tabeli iga muu arv on aga tema kohal olevate arvude summa).

54. Tõestada, et Pascali kolmnurgas on $(n+1)$-nda rea arvude summa 2^n.

55. Millise suurima arvu odasid võib paigutada malelauale nii, et need ei lööks üksteist? Tõestada, et odade selliste paigutusviiside arv on mingi arvu ruut.

Et mõista ülesande tingimusi, tuleb muidugi teada, kuidas oda liigub. Oda liigub mööda diagonaale. Näiteks võib oda väljalt *d*3 liikuda ükskõik missugusel joonisel 10 näidatud väljale (*b*1, *c*2 jne.). Seega, 2 oda löövad teineteist, kui nad paiknevad ühel ja samal diagonaalil.



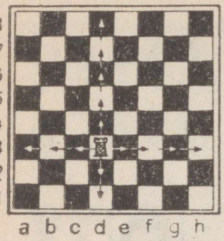
Joon. 10

56. Emal on kaks õuna ja kolm pirni. Igal päeval järjest viie päeva jooksul võtab ta ühe puuvilja. Mitmel viisil võib ta seda teha?

57. Analoogiline ülesanne, kui õunu on k ja pirne n.

58. Analoogiline ülesanne, kui emal on 2 õuna, 3 pirni ja 4 apelsini.

59. Mitmel viisil võib paigutada malelauale 8 vankrit, nii et need ei lööks üksteist?



Joon. 11

Vanker liigub mööda horisontaale ja vertikaale. Näiteks võib vanker $d3$ liikuda ükskõik millisele väljale vertikaalil d ja horisontaalil 3 (joon. 11).

60. Mitmel viisil võib n esemest välja valida kaks?

Senini tähistasime n elemendist 2-kaupa valiku võimalusi (või valgustusviiside arvu, kui n lambist põleb 2) sümboliga C_n^2. Ülesanne seisneb selles, et arvutada C_n^2 (näiteks on ülesandes 56 juba leitud, et $C_5^2 = 10$).

61. Mitmel viisil võib panna istuma 26 õpilast, kui klassis on istekohti 28?

62. Isal on viis paarikaupa erinevat apelsini. Ta annab need oma kaheksale pojale nii, et igaüks saab kas ühe apelsini või mitte midagi. Mitmel viisil on võimalik seda teha?

63. Tähistame sümboliga C_n^k arvu, mis näitab, mitmel viisil on võimalik süüdata k lampi n lambist (iga lamp võib kas põleda või mitte). Tõestada, et see arv C_n^k paikneb Pascali kolmnurga $(n+1)$-se rea $(k+1)$-sel kohal.

64. Mitmel viisil võib paigutada malelauale 4 vankrit, nii et need ei lööks üksteist.

65. Roodus on 3 ohvitseri ja 40 sõdurit. Mitmel viisil on võimalik välja saata patrulli, mis koosneks ühest ohvitserist ja kolmest sõdurist?

66. Mitmel viisil võib n esemest välja valida 3 eset?

67. Mitmel viisil võib n esemest välja valida k eset?

68. Klaveril on 88 klahvi. Kui palju

saab moodustada jadasid, mis koosnevad kuuest paarist erinevatest helidest? (Jadas helid järgnevad üksteisele.) Kui palju saab moodustada kuuest helist koosnevaid akorde? (Akordi saame, kui vajutame üheaegselt kuuele erinevale klahvile.)

69. Missuguses Pascali kolmnurga reas on kõik arvud paaritud?

70. Kui palju liikmeid on pärast sulgude avamist avaldises $(a+1)(b+1)\cdot$ $\cdot(c+1)(d+1)(e+1)(f+1)(g+1)$?

71. Kui palju saadakse seejuures liikmeid, mis sisaldavad kolme tähte?

72. Avaldises $(1+x+y)^{20}$ avatakse sulud, kuid sarnaseid liikmeid ei koondata. Kui palju saadakse seejuures liikmeid?

73. Avaldises $(1+x^5+x^7)^{20}$ avatakse sulud. Leidke pärast sarnaste liikmete koondamist x^{17} ja x^{18} kordajad.

74. Avaldises $(1+x)^{56}$ on avatud sulud ja sarnased liikmed koondatud. Leida x^8 ja x^{48} kordajad.

75. Tõestada, et

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n.$$

Seda valemit nimetatakse *Newtoni binoomvalemiks.*

76. Ülesannetest 75 ja 63 järeldub järgmine väide. Olgu $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ Pascali kolmnurga $(n+1)$-se rea arvud. Siis

$$(1+x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Tõestage see fakt, toetudes vahetult Pascali kolmnurga definitsioonile (ja mitte

kasutades ülesannetes 75 ja 63 saadud tulemusi).

77. Arvu 14 641 iga numbrite paari vahele on kirjutatud k nulli. Tõestada, et saadud arv on täisruut.

78. Avaldises $(a+b)^n$ on avatud sulud ja koondatud sarnased liikmed. Kirjutada välja liige, milles esineb a^k.

79. Avaldises $(x+y+z)^n$ leida liige, milles esineb $x^k y^l$.

80. Leida:

a) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots$;
b) $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots$

81. Avaldises $(1+x-3x^2)^{1965}$ on avatud sulud ja koondatud sarnased liikmed. Leida saadud hulkliikme kordajate summa.

82. Mitme nulliga lõpeb arv $11^{100} - 1$?

83. Kumb on suurem, kas $99^{50} + 100^{50}$ või 101^{50}?

84. Mitu erinevat jagajat on arvul $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$?

85. Mitu erinevat jagajat on arvul 10!?

86. Mitu diagonaali saab tõmmata kumeras n-nurgas?

87. Mitu erinevat mittekorduvate numbritega viiekohalist paarisarvu saab moodustada numbritest 0, 1, 3, 4, 5?

88. Mitmel viisil saab kahte tasku panna üheksat erineva väärtusega münti?

89. Klassis õpetatakse kümmet õppeainet. Kolmapäeval on kuus tundi, kusjuures kõik tunnid on erinevad. Mitmel viisil on võimalik kolmapäevaks koostada tunniplaani?

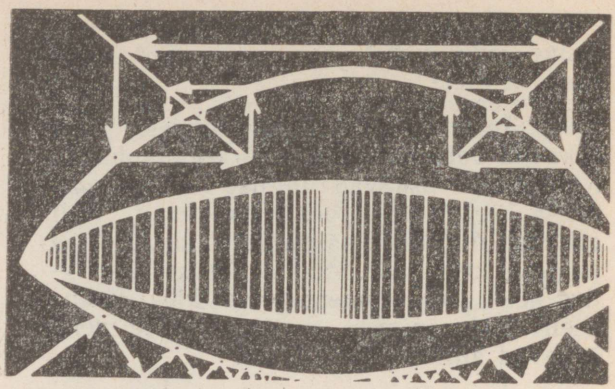
90. Mitmel viisil võib jaotada $3n$ eset kolme isiku vahel nii, et igaüks neist saaks n eset?

91. Toas on teatud arv inimesi, kes oskavad vähemalt ühte võõrkeelt kolmest. Kuus neist oskavad inglise keelt, kuus saksa keelt, seitse prantsuse keelt. Neli oskavad inglise ja saksa keelt, kolm saksa ja prantsuse keelt, kaks prantsuse ja inglise keelt. Üks inimene oskab kõiki kolme keelt. Mitu inimest on toas? Mitu neist oskavad ainult inglise keelt?

92. Raamatukogus on arvel teatud arv lugejaid (s. t. inimesi, kes on läbi lugenud kas või ühe selle raamatukogu raamatu). Iga k raamatu kohta on teada ($1 \leqslant k \leqslant n$), kui palju lugejaid on kõik need raamatud läbi lugenud. Kuidas leida, mitu lugejat on raamatukogus arvel? (Raamatukogus on üldse n raamatut.)

93. Kui palju on telefoninumbreid, mis sisaldavad kombinatsiooni 12? (Telefoninumber koosneb kuuest numbrist.)

94. Seesama küsimus telefoninumbrite kohta, mis koosnevad n numbrist.



III PEATÜKK

PIIRVÄÄRTUSED

See peatükk sisaldab täiendavat materjali rohkem ja nõuab teilt palju iseseisvat tööd.

Siin esitatavad ülesanded võib jaotada kahte rühma. Esimese rühma moodustavad ettevalmistava osa ülesanded (välja arvatud mõned raskemad tärnikesega märgitud ülesanded) ja põhiosa ülesanded, mis on märgitud ringikesega. Need õpilased, kes tahavad omandada piirväärtuste teooria kooliprogrammi ulatuses, võivad piirduda esimese rühma ülesannetega. Enesekontrolliks on mõeldud ülesanded 33, 34a, 34b, 35, 39, 40a, 40d, 43.

Teise rühma ülesanded nõuavad suuremat loogilist ettevalmistust ja on sissejuhatavateks ülesanneteks matemaatilisse analüüsi. Nende ülesannete lahendamisel on eriti oluline iseseisev töö. Me ei soovita siin kasutada passiivset õppimisvormi, millest rääkisime sissejuhatuses.

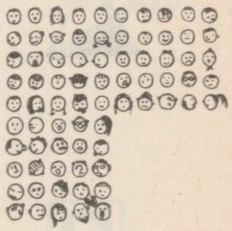
§ 1. Ettevalmistavad ülesanded

95. Kahele õpilasele tehti ülesandeks pidada ilmakalendrit. Nad pidid tähistama «+» päeva, mil ilm oli ilus, ja märgiga «—» päeva, mil ilm oli halb. Esimene õpilane toimis nii. Ta tegi vaatlusi kolm korda päevas — hommikul, päeval ja õhtul. Kui vähemalt ühe vaatluse ajal sadas, tegi ta märgi «—», ülejäänud juhtumeil aga märgi «+». Teine õpilane tegi vaatlusi samal ajal kui esimenegi. Kui vähemalt ühe vaatluse ajal vihma ei sadanud, tegi ta märgi «+», ülejäänud juhtumeil märgi «—». Nii sai ilm igal päeval ühe hinnanguist: ++; +—; —+; ——. Kas need hinnangud võivad tõepoolest esineda?

96. Kahele poisile ülesandest 95 lisandus kolmas, kes sooritab vaatlusi samal ajal kui esimesed kakski, ja teeb märgi «—», kui vähemalt kahe vaatluse ajal sajab, ja märgi «+» ülejäänud juhtumeil. Missugused järgmisest kaheksast hinnangust +++; ++—; +—+; —++; —+—; ——+; +——; ——— võivad tõepoolest esineda?

97. a) Kolmsada inimest on rivistatud 30 ritta ja 10 kolonni. Igast reast valiti välja kõige pikem inimene, nendest 30 inimesest valiti aga välja kõige lühem. Seejärel valiti igast kolonnist välja kõige lühem inimene, nendest 10 inimesest aga kõige pikem. Kes osutub pikemaks: lühematest kõige pikem või pikematest kõige lühem?

b) Kas vastus muutub, kui rivistada inimesed mitte ristküliku, vaid nurgakujuliselt, nagu joonisel 12 (esimeses kümnes kolonnis igas 20 inimest, igas järgmises 10)?



Joon. 12

98. Kontrolltööd nimetatakse kergeks, kui igas pingis on õpilane, kes lahendas kõik ülesanded. Andke raske kontrolltöö definitsioon.

99. Vaatleme kerge kontrolltöö kahte definitsiooni:

a) iga variandi iga ülesande lahendas vähemalt üks õpilane;

b) iga variandi puhul lahendas vähemalt üks õpilane kõik ülesanded.

Kas kontrolltöö võib olla kerge definitsiooni a) mõttes ja raske definitsiooni b) mõttes?

100. Millised järgmistest teoreemidest on õiged?

1) Kui iga liidetav jagub 7-ga, siis ka summa jagub 7-ga.

2) Kui iga liidetav ei jagu 7-ga, siis ka summa ei jagu 7-ga.

3) Kui vähemalt üks liidetav jagub 7-ga, siis ka summa jagub 7-ga.

4) Kui summa jagub 7-ga, siis ka iga liidetav jagub 7-ga.

5) Kui summa ei jagu 7-ga, siis ka ükski liidetav ei jagu 7-ga.

6) Kui summa ei jagu 7-ga, siis vähemalt üks liidetav ei jagu 7-ga.



101*. Tähendagu **A** ja **B** mingit kahte väidet. Kriipsukesega tähe peal märgime vastava väite eitust (joon. 13). Näiteks kui täht **A** tähendab väidet «Kolmnurgas *ABC* on kõik küljed võrdsed», siis $\overline{\mathbf{A}}$ tähendab väidet «Kolmnurgas *ABC* pole kõik küljed võrdsed». Vaatleme kaheksat teoreemi:

1. Kui on **A**, siis on **B**.
2. Kui on $\overline{\mathbf{A}}$, siis on **B**.
3. Kui on **A**, siis on $\overline{\mathbf{B}}$.
4. Kui on $\overline{\mathbf{A}}$, siis on $\overline{\mathbf{B}}$.

5. Kui on **B**, siis on **A**.
6. Kui on $\overline{\mathbf{B}}$, siis on **A**.
7. Kui on **B**, siis on $\overline{\mathbf{A}}$.
8. Kui on $\overline{\mathbf{B}}$, siis on $\overline{\mathbf{A}}$.

On teada, et teoreem 1 on õige. Ülejäänud teoreemid tuleb jaotada kolme rühma nii, et esimesse rühma kuuluksid teoreemid, mis on õiged, teise rühma teoreemid, mis pole õiged, kolmandasse rühma aga teoreemid, mis võivad olla õiged, aga ka valed. Lepime seejuures kokku mitte vaadelda **A** ja **B** hulgas väiteid, mis pole kunagi õiged, ega ka väiteid, mis on alati õiged. (Näiteks «Kolmnurgas *ABC* on kõik nurgad täisnurgad» või «Kolmnurga *ABC* kõik kolm mediaani lõikuvad ühes ja samas punktis».)

102. Lahendada võrrandid [1]:

a) $x + 2|x| = 3$,
b) $x^2 + 3|x| - 4 = 0$,
c) $|2x + 1| + |2x - 1| = 2$.

103. Tõestage võrratused:

a) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$,
b) $|x - y| \geqslant |x| - |y|$,
c) $|x - y| \geqslant ||x| - |y||$.

Selgitage iga juhu puhul, kunas võrratus muutub võrduseks.

104. Kas on olemas sellist naturaalarvu n, mille puhul

a) $\sqrt[n]{1000} < 1{,}001$?

[1] Suurus $|x|$ (loetakse «x moodul» või «x absoluutväärtus») defineeritakse järgmiselt:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kui } x > 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0, \\ -x, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

SÜNDMUSED:

A - sajab

$\overline{\text{A}}$ - ei saja

B - vihmavari on lahti

$\overline{\text{B}}$ - vihmavari on kinni

TEOREEMID:



Kui A, siis B



Kui A, siis $\overline{\text{B}}$



Kui $\overline{\text{A}}$, siis B



Kui $\overline{\text{A}}$, siis $\overline{\text{B}}$

Joon. 13

b)* $\sqrt[n]{n} < 1{,}001$?

c) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0{,}1$?

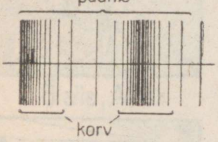
d) $\sqrt{n+n} - n < 0{,}1$?

105. Kas on olemas sellist arvu C, et k kõigi täisarvuliste väärtuste puhul kehtiks võrdus

$$\left| \frac{k^2 - 2k + 1}{k^4 - 3} \right| < C?$$

106*. Kas on olemas täisarvude k sellist lõpmatut hulka, et mistahes arvu C puhul kehtiks võrratus

$k \sin k > C$?



Joon. 14

Olgu antud lõpmatu jada[1] $\{x_n\}$. Kujutame selle jada liikmeid punktidena arvteljel (seejuures võib muidugi osutuda, et osa jada liikmeid satub ühte ja samasse punkti; näiteks jada $1; \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{3}; 1; \frac{1}{4}; \ldots$ kõik paarituarvulistel kohtadel paiknevad liikmed satuvad punkti 1).

Nimetame arvtelje lõiku $[a, b]$ jada $\{x_n\}$ *püüniseks*, kui väljaspool seda lõiku pole üldse jada liikmeid või on neid ainult lõplik arv.

Nimetame arvtelje lõiku $[a, b]$ jada $\{x_n\}$ *korviks*, kui sellesse lõiku kuulub lõpmatu hulk jada liikmeid (joon. 14).

107. a) Tõestage, et iga püünis on ka korviks.

b) Mõtelge välja niisugune jada ja niisugune lõik, mis oleks selle jada korviks, kuid mitte püüniseks.

108. On antud jadad:

a) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots;$

[1] Sümboliga $\{x_n\}$ tähistatakse lühidalt jada $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

b) $1;\ 2;\ \frac{1}{2};\ 1\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ 1\frac{1}{3};\ \ldots$

$\ldots;\ \frac{1}{n};\ 1\frac{1}{n};\ \ldots,$

c) $1;\ \frac{1}{2};\ 3;\ \frac{1}{4};\ 5;\ \frac{1}{6};\ \ldots$

$\ldots;\ 2n-1;\ \frac{1}{2n};\ \ldots$

ja lõigud

A) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, B) $[-1, 1]$, C) $[-2, 2]$.

Selgitage, missugused lõigud on antud jadade jaoks püünisteks ja missugused korvideks.

109. Kas on olemas jada, mille jaoks kumbki lõikudest $[0, 1]$ ja $[2, 3]$ on
a) korviks? b) püüniseks?



110. On teada, et teatud jada puhul on kumbki lõikudest $[0, 1]$ ja $[9, 10]$ sellele jadale korviks. Kas on olemas selle jada jaoks püünist:
a) pikkusega 1? b) pikkusega 9?

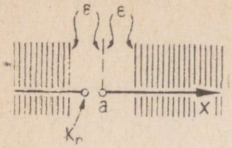
111. a) Kas on olemas jada, millel pole ühtegi korvi?
b)* Kas on olemas jada, millele iga suvaline lõik on korviks?

§ 2. Ülesanded, mis on seotud piirväärtuse definitsiooniga

Arvu a nimetatakse jada $\{x_n\}$ piirväärtuseks, kui mistahes positiivse arvu ε puhul (kreeka täht «epsilon») leidub selline arv k, et jada kõigi liikmete korral, mille number n on suurem kui k, on täidetud võrratus (joon. 15)

$|x_n - a| < \varepsilon.$





Joon. 15

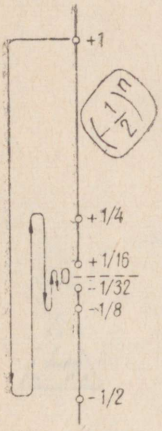
Seda fakti, et arv a on jada $\{x_n\}$ piirväärtuseks, kirjutatakse üles nii:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

(loetakse: «x_n piirväärtus, kui n läheneb lõpmatusele, on a») ehk nii:

$$x_n \to a, \text{ kui } n \to \infty$$

(loetakse: «x_n läheneb a-le, kui n läheneb lõpmatusele»).



Joon. 16

112°. On antud jadad:

a) $x_n = \frac{1}{n}$,

b) $x_n = \frac{1}{n^2+1}$,

c) $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (joon. 16),

d) $x_n = \log_n 2$.

Näidake iga juhtumi puhul niisugune arv k, et $n > k$ korral kehtiks võrratus

A) $|x_n| < 1$, B) $|x_n| < 0{,}001$,

C) $|x_n| < 0{,}000001$.

113. a) Tõestage, et kui $n \to \infty$ korral $x_n \to a$, siis mistahes lõik keskpunktiga punktis a on jada $\{x_n\}$ püüniseks.

b) Kas vastupidine väide on õige?

114*. a) Tõestage, et kui $n \to \infty$ korral $x_n \to a$, siis iga lõik keskpunktiga punktis a on jada $\{x_n\}$ korviks, aga ükski punkti a mittesisaldav lõik pole seda.



b) On teada, et mistahes lõik keskpunktiga punktis a on jada $\{x_n\}$ korviks, aga ükski punkti a mittesisaldav lõik pole seda. Kas võib väita, et $x_n \to a$, kui $n \to \infty$?

115. Tõestage, et kui mingi lõik on jada $\{x_n\}$ korviks, siis ükski väljaspool seda lõiku asuv arv ei saa olla jada $\{x_n\}$ piirväärtuseks.

116°. Missugustel järgmistest jadadest on olemas piirväärtused?

a) $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; \ldots; \frac{1}{2n-1}; -\frac{1}{2n}; \ldots;$

b) $0; \frac{2}{3}; \frac{8}{9}; \frac{26}{27}; \ldots; \frac{3^n-1}{3^n}; \ldots;$

c) $1; 1+\frac{1}{2}; 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}; 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}; \ldots; 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}; \ldots$ (joon. 17);

d) $1; 2; 3; 4; \ldots; n; \ldots;$

e) $1; 1; 1; 1; \ldots; 1; \ldots;$

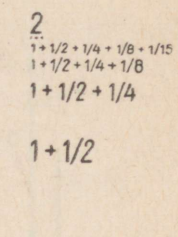
f) $0; 1; 0; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{3}; \ldots; 0; \frac{1}{n}; \ldots;$

g) $0{,}2; 0{,}22; 0{,}222; 0{,}2222; \ldots; \ldots; \underbrace{0{,}222\ldots2}_{n}; \ldots;$

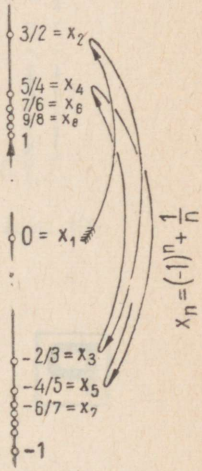
h) $\sin 1°; \sin 2°; \sin 3°; \ldots; \sin n°; \ldots$

i) $\frac{\cos 1°}{1}; \frac{\cos 2°}{2}; \frac{\cos 3°}{3}; \ldots; \frac{\cos n°}{n}; \ldots;$

j) $0; 1\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; 1\frac{1}{4}; -\frac{4}{5}; 1\frac{1}{6}; \ldots; (-1)^n+\frac{1}{n}; \ldots$ (joon. 18).



Joon. 17



Joon. 18

117°. Kas ühe ja sama jada piirväärtusteks saab olla kaks erinevat arvu?

118. Arvu a nimetatakse *jada* $\{x_n\}$ *kuhjumispunktiks*, kui suvalise positiivse arvu ε ja suvalise arvu k korral leidub selline number

$$n > k,$$

mille puhul kehtib võrratus

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

a) Tõestage, et kui a on jada $\{x_n\}$ kuhjumispunkt, siis iga suvaline lõik keskpunktiga punktis a on jada $\{x_n\}$ korviks.

b) Tõestage pöördteoreem.

119. Tõestage, et jada piirväärtus (kui see on olemas) on kuhjumispunktiks.

120. Näidake iga järgmise jada kõik kuhjumispunktid:

a) $x_n = \dfrac{n+1}{n}$;

b) $x_n = (-1)^n$;

c) $x_n = \sin n^\circ$;

d) $x_n = n^{(-1)^n}$;

e) $x_n = n$;

f) $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{2}{4}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{5}; \dfrac{2}{5}; \dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{5}; \ldots$

121. Jada $\{x_n\}$ nimetatakse tõkestatuks, kui leidub selline arv C, et iga n puhul kehtib võrratus

$$|x_n| \leqslant C.$$

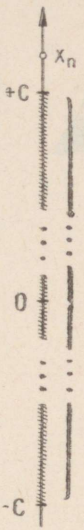
Sõnastage tõkestamata jada definitsioon.

122. a) Tõestage, et kui jadal on olemas piirväärtus, siis on ta ka tõkestatud.

b) Kas ka vastupidine väide on õige?

123. Öeldakse, et jada $\{x_n\}$ kasvab tõkestamatult (seda kirjutatakse nii: $x_n \to \infty$, kui $n \to \infty$), kui mistahes arvu C puhul leidub selline arv k, et iga $n > k$ puhul kehtib võrratus (joon. 19):

$|x_n| > C$.



Joon. 19

Missugused järgmistest jadadest kasvavad tõkestamatult ja missugused on tõkestamata?

a) $x_n = n$;

b) $x_n = n \cdot (-1)^n$;

c) $x_n = n^{(-1)^n}$;

d) $x_n = \begin{cases} n, \text{ kui } n \text{ on paarisarv,} \\ \sqrt{n}, \text{ kui } n \text{ on paaritu arv;} \end{cases}$

e) $x_n = \dfrac{100n}{100 + n^2}$.

124. Mõtelge tõkestatud jada, millel

a) oleks nii suurim kui vähim liige;

b) oleks suurim liige, kuid puuduks vähim;

c) oleks vähim liige, kuid puuduks suurim;

d) poleks ei vähimat ega suurimat liiget.

125. Vaatleme järgmist 16 tingimust (täht m asendab väljendit «mistahes ... puhul», täht l aga väljendit «leidub selline ..., et»):

1. l $\varepsilon > 0$ l k l $n > k$ $|x_n - a| < \varepsilon$.
2. l $\varepsilon > 0$ l k l $n > k$ $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$.
3. l $\varepsilon > 0$ l k m $n > k$ $|x_n - a| < \varepsilon$.
4. l $\varepsilon > 0$ l k m $n > k$ $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$.
5. l $\varepsilon > 0$ m k l $n > k$ $|x_n - a| < \varepsilon$.
6. l $\varepsilon > 0$ m k l $n > k$ $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$.
7. l $\varepsilon > 0$ m k m $n > k$ $|x_n - a| < \varepsilon$.
8. l $\varepsilon > 0$ m k m $n > k$ $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$.
9. m $\varepsilon > 0$ l k l $n > k$ $|x_n - a| < \varepsilon$.
10. m $\varepsilon > 0$ l k l $n > k$ $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$.

11. $m\ \varepsilon > 0\ l\ k\ m\ n > k\ |x_n - a| < \varepsilon.$
12. $m\ \varepsilon > 0\ l\ k\ m\ n > k\ |x_n - a| \geqslant \varepsilon.$
13. $m\ \varepsilon > 0\ m\ k\ l\ n > k\ |x_n - a| < \varepsilon.$
14. $m\ \varepsilon > 0\ m\ k\ l\ n > k\ |x_n - a| \geqslant \varepsilon.$
15. $m\ \varepsilon > 0\ m\ k\ m\ n > k\ |x_n - a| < \varepsilon.$
16. $m\ \varepsilon > 0\ m\ k\ m\ n > k\ |x_n - a| \geqslant \varepsilon.$

Millised nendest tingimustest väljendavad jadade teile juba tuntud omadusi (kunas jada on tõkestatud, kunas arv a on jada piirväärtuseks, kunas arv a on jada kuhjumispunktiks, kunas jada tõkestamatult kasvab) või nende omaduste eitusi?

126. Vaatleme jadade viit järgmist omadust: 1) millal jada on samaselt võrdne a-ga, 2) millal arv a on jada piirväärtuseks, 3) millal arv a on jada kuhjumispunktiks, 4) millal jada on tõkestatud, 5) millal jada tõkestamatult kasvab.

Iga jada võib iseloomustada viiest pluss- või miinusmärgist koosneva kombinatsiooniga. Näiteks kombinatsioon $--+++-$ tähendab, et jadal on 2., 3. ja 4. omadus, ei ole aga 1. ja 5. omadust. Mõningatel kombinatsioonidel pole üldse mõtet (näiteks kombinatsioon $+++++$: kui jadal on 1. omadus, siis tal 5. omadust olla ei saa).

a) Näidake kõik märkide kombinatsioonid, millel on mõte. Iga märgikombinatsiooni kohta konstrueerige jada, mida see kombinatsioon iseloomustab.

b) Tõestage, et ülejäänud märgikombinatsioonidel pole mõtet.

127. Tõestage, et kui jadal on olemas piirväärtus, siis leidub jadas kas suurim liige, väikseim liige või nii see kui ka teine. Tooge kõigi kolme juhtumi kohta näiteid.

128. Tõestage, et mistahes lõpmatust jadast saab moodustada lõpmatu monotoonse osajada. (Jada x_n nimetatakse monotoonseks, kui on täidetud üks järgmistest tingimustest:

1) $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$,
2) $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots$.

Esimesel juhul nimetatakse jada mittekahanevaks, teisel juhul mittekasvavaks.)



Piirväärtuse teoorias on väga suur tähtsus ühel reaalarvude omadusel, mida tavaliselt võetakse aksioomina.

Bolzano-Weierstrassi aksioom:

igal monotoonsel tõkestatud jadal on olemas piirväärtus.

See aksioom väljendab reaalarvude valla «täielikkust». Piltlikult kõneldes seisneb see selles, et arvteljel pole «läbilõikeid» ega «auke».

Matemaatilise analüüsi kursuses tõestatakse, et Bolzano-Weierstrassi aksioom on samaväärne järgmiste väidetega.

1. Kui arvteljele konstrueerida sirglõikude lõpmatu jada nii, et iga järgmine lõik asub eelneva sees, siis on kõigil nendel lõikudel vähemalt üks ühine punkt.

2. Iga reaalarvu võib esitada lõpmatu (perioodilise või mitteperioodilise) kümnendmurruna ja igale niisugusele murrule vastab mingi reaalarv.

Kui üks nendest väidetest võtta aksioomiks, siis teine väide ja Bolzano-Weierstrassi aksioom muutuvad teoreemideks, mida saab tõestada.

129*. Tõestage, et Bolzano-Weierstrassi aksioom pole kehtiv, kui vaadelda ainult ratsionaalarve (s. t. leiduvad ratsionaalarvude monotoonsed tõkestatud jadad, millel pole ratsionaalarvulist piirväärtust).

130. Tõestage, et igal tõkestatud jadal on vähemalt üks kuhjumispunkt.

131. Tõestage, et järgmistel jadadel on olemas piirväärtus:

a) $1;\ 1+\frac{1}{4};\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9};\ \ldots;\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2};\ \ldots,$

b) $1;\ 1-\frac{1}{3};\ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5};\ \ldots;\ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1};\ \ldots$

§ 3. Ülesanded piirväärtuse arvutamise kohta

132°. Tõestage, et kui $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, siis

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b,$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab,$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, kui $b \neq 0$ ja $y_n \neq 0$.

133°. Mõtelge sellised jadad $\{x_n\}$ ja $\{y_n\}$, et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ ning et

a) $\frac{x_n}{y_n} \to 0$, kui $n \to \infty$,

b) $\frac{x_n}{y_n} \to 1$, kui $n \to \infty$,

c) $\frac{x_n}{y_n} \to \infty$, kui $n \to \infty$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ ei eksisteeri.

134°. Leida järgmiste jadade piirväärtused:

a) $x_n = \frac{2n+1}{3n-5}$,

b) $x_n = \frac{10n}{n^2+1}$,

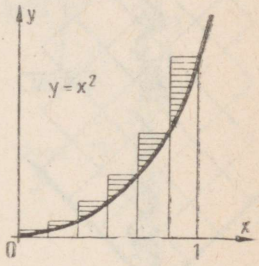
c) $x_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}$,

d) $x_n = \frac{2^n+1}{2^n-1}$,

e) $x_n = \frac{1}{n^{k+1}}(1^k + 2^k + \ldots + n^k)$

(k — kindel naturaalarv).

Ülesande 134 jadal e) on järgmine geomeetriline mõte. Vaatleme tasapinna osa, mis on piiratud funktsiooni $y = x^k$ graafikuga, x-teljega ja sirgega $x = 1$. Jaotame x-telje lõigu $[0, 1]$ n võrdseks osaks ja konstrueerime igale osale ristküliku nii, et ristküliku parempoolne tipp paikneks funktsiooni graafikul (joon. 20). Kõigi konstrueeritud ristkülikute pindalade summa on parajasti võrdne avaldisega $x_n = \frac{1}{n^{k+1}}(1^k + 2^k + \ldots + n^k)$. Selle suuruse piirväärtust, kui $n \to \infty$, nimetatakse definitsiooni kohaselt vaadeldava kõverjoonelise kujundi pindalaks.



Joon. 20

135°. Tõestada, et

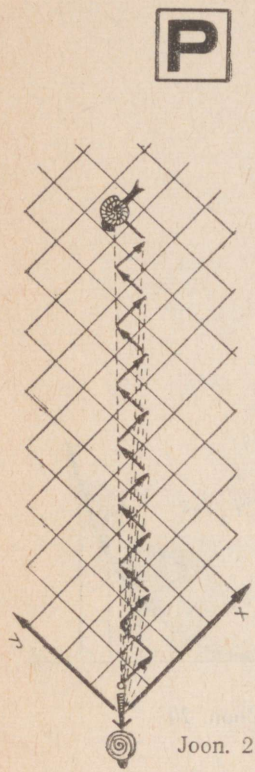
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = 0.$$

136. Tõestada, et $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

137. Tõestada, et $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$, kui $a > 1$.

138*. Tõestada, et $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n} = 0$.

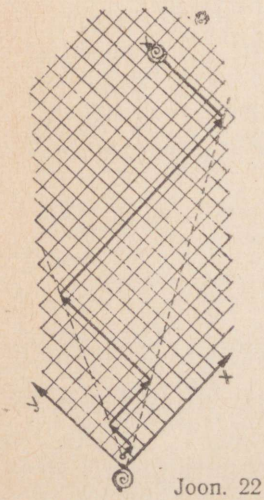
139*. Leida $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.



Joon. 21

Senini me kõnelesime arvujadade piirväärtustest. Kuid arvude abil võib anda ka mitmesuguseid geomeetrilisi objekte. Näiteks võib sirgjoone sihi tasandil anda sirge tõusuga; punkti asukoha sirgel või tasandil punkti koordinaatidega jne. Kõigil juhtumeil, mil termineid «piirväärtus» või «läheneb» kasutatakse geomeetriliste objektide jadade juures, on meil tegemist arvujadadega, mis iseloomustavad neid objekte. Nii näiteks väljendit «Punktide M_n jada tasandil läheneb punktile M» tuleb mõista selles mõttes, et punkti M_n koordinaadid lähenevad punkti M vastavatele koordinaatidele.

140°. Tigu ronib mööda ruudulise paberilehe ruute liikudes kõigepealt ühe ruudu võrra paremale, seejärel ühe ruudu võrra otse üles, siis uuesti ühe ruudu võrra paremale, seejärel jälle ühe ruudu võrra ülespoole jne. (joon. 21). Teine tigu istub aga paigal ja vaatab pikksilmaga esimesele järele. Kas pikksilma suund läheneb kindlale piirseisule, kui esimene tigu jätkab liikumist kirjeldatud viisil?



Joon. 22

141. Kuidas muutub eelmise ülesande vastus, kui tigu liiguks järgmiselt:

a) 1 ruut paremale, 2 ruutu üles, 1 ruut paremale, 2 ruutu üles jne.?

b) 1 ruut paremale, 2 ruutu üles, 3 ruutu paremale, 4 ruutu üles, 5 ruutu paremale, 6 ruutu üles jne.?

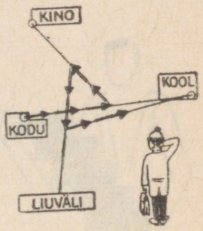
c) 1 ruut paremale, 2 ruutu üles, 4 ruutu paremale, 8 ruutu üles, 16 ruutu paremale, 32 ruutu üles jne. (joon. 22)?

142°. Paraboolil, mis on funktsiooni $y = x^2$ graafikuks, võetakse punkt A_0 abstsissiga a ja punktide A_n jada abstsis-

sidega $a+\frac{1}{n}$. Tähistame läbi punktide A_0 ja A_n tõmmatud lõikaja lõikepunkti x-teljega M_n-ga. Tõestage, et punktide M_n jadal on piirväärtus, kui $n \to \infty$, ja leidke see piirväärtus.

Olgu M_0 punktide M_n jada piirväärtuseks. Sirget A_0M_0 nimetatakse parabooli puutujaks punktis A_0.

143°. Õpilane Peeter väljus kodust, et minna kooli. Käinud ära pool teed, otsustas ta, et parem on minna siiski kinno, ja seadis sammud kino poole. Kui ta oli läbinud pool teed, tekkis tal mõte minna hoopis uisutama ja ta hakkas minema liuvälja suunas. Käinud ära pool teed liuväljani, mõtles ta, et tuleb siiski õppida, ja pöördus koolimaja poole. Kuid poolel teel kooli mõtles ta uuesti ümber ja pöördus kino poole (joon. 23). Kuhu jõuab lõpuks Peeter, kui ta jätkab liikumist samal viisil?



Joon. 23

144°. Punktide jada $\{M_n\}$ sirgel on konstrueeritud järgmise seaduspärasuse järgi. Esimesed kaks punkti M_1 ja M_2 võetakse suvaliselt, iga järgmine punkt on aga kahte eelnevat punkti ühendava lõigu keskpunktiks. Tõestada, et jadal $\{M_n\}$ on piirväärtus, ja leida see.

145. *Lõpmatu arvude rea* summa leitakse järgmisel viisil. Olgu antud rida

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Tähistame n esimese liidetava summa sümboliga S_n. Kui jadal $\{S_n\}$ on piirväärtus S, siis arvu S nimetatakse antud rea summaks. Kui aga jadal $\{S_n\}$ pole piirväärtust, siis öeldakse, et antud rida hajub, ja temale mingit summat ei kirjutata.

Leida summad:

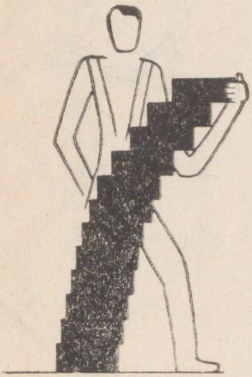
a) $1 + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots$,

b) $a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots + na^n + \ldots$,

c) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$,

d) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \ldots$,

e)* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$



Joon. 24

146. On piiramatu hulk ühesuguseid ristthahukakujulisi telliseid. Tellised laotakse üksteisele mingi ettenihkega nii, et nad ei kukuks (joon. 24). Kui pika «katuse» võib sellisel viisil saada?

147. Tõestada, et jadal

$$2;\ 2 + \frac{1}{2};\ 2 + \frac{1}{2 + 1};$$

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}};\ \ldots$$

on piirväärtus, ja leida see.

148. Ruutjuure arvutamiseks positiivsest arvust a võib kasutada järgmist lähendite meetodit. Võtke suvaline arv x_0 ja konstrueerige jada järgmise seaduse järgi:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Tõestage, et kui $x_0 > 0$, siis $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \sqrt{a}$, kui aga $x_0 < 0$, siis $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\sqrt{a}$.

(Märgiga $\sqrt{a}$ tähistame aritmeetilise juure arvust a.)

Kui palju vajatakse lähendeid (s. t. kui palju jada $\{x_n\}$ liikmeid tuleb arvutada), et leida $\sqrt{10}$ väärtus täpsusega 0,00001, kui lähteväärtuseks võtta $x_0 = 3$?

I peatüki juurde

1. Arvutada summa

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

2. Tõestada, et mistahes naturaalarvu n korral

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=$$
$$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

3. Arvutada korrutis

$$\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{16}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1-\frac{4}{n^2}\right),\quad \text{kus } n\geqslant 3.$$

4. Tõestada, et

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}=2^n.$$

5. Tõestada, et mistahes naturaalarvu $n>1$ korral kehtib võrratus

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

6. Milliste naturaalarvuliste n väärtuste korral kehtib võrratus

$2^n>2n+1$?

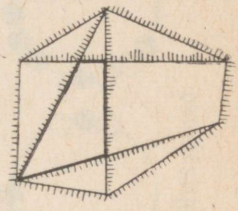
7. Tõestada, et

$$2^{n-1}(a^n + b^n) > (a + b)^n,$$

kus $a + b > 0$, $a \neq b$, $n > 1$.

8. Tõestada, et tasapinda, mis on jaotatud n ringjoonega osadeks, saab värvida musta ja valge värviga nii, et mistahes kaks naaberosa on värvitud erinevat värvi.

9. Suvalise kumera hulknurga küljed on väljastpoolt värvitud. Hulknurgas tõmmatakse mõned tema diagonaalid nii, et neist ükski kolm ei lõiku ühes punktis. Kõik diagonaalid on samuti ühelt poolt värvitud, s. t. ühelt poolt ääristab diagonaali kitsas värviline riba (joon. 25). Tõestada, et leidub vähemalt üks lähtehulknurgast diagonaalidega eraldatud hulknurk, mille kõik küljed on väljastpoolt värvitud.



Joon. 25

10. Tõestada, et iga täisarvu $n \geqslant 0$ korral arv $10^{n+1} - 10(n + 1) + n$ jagub 81-ga.

11. Arvutada summa

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \ldots + n(n + 2).$$

12. Aritmeetilise progressiooni n esimese liikme summa on võrdne m esimese liikme summaga, $n \neq m$. Tõestada, et selle progressiooni $n + m$ esimese liikme summa on võrdne nulliga.

13. Arvutada summa

$$6 + 66 + 666 + \ldots + \underbrace{666\ldots66}_{n \text{ korda}}.$$

14. Kas on olemas aritmeetilist progressiooni, mille liikmete hulka kuuluksid arvud 1, $\sqrt{2}$ ja 3? Need arvud võivad paikneda progressioonis mitte järjest ja

ka mitte selles järjekorras, nagu nad on kirjutatud.

15. On antud geomeetriline progressioon, mille tegur on 0-st ja (-1)-st erinev täisarv. Tõestada, et mistahes arvu suvaliselt valitud progressiooni liikmete summa ei saa olla võrdne selle progressiooni ühegi liikmega.

16. Korrapärase kolmnurga iga külg on jaotatud n võrdseks osaks. Kõigist jaotuspunktidest on pandud läbi külgedega paralleelsed sirged. Need sirged jaotavad kolmnurga väikesteks võrdseteks kolmnurkadeks. Osa neist kolmnurkadest on värvitud mustadeks, osa valgeteks, nii et mistahes must piirneks paarisarvu valgetega, mistahes valge aga paaritu arvu valgetega. Tõestada, et suure kolmnurga nurkades paiknevad väikesed kolmnurgad on ühte värvi.

17. Leidke viga väite «Kõik arvud on üksteisega võrdsed» alljärgnevas induktsiooni põhjal läbiviidud «tõestuses».

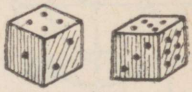
T õ e s t u s. Tõestame, et mistahes n arvu on üksteisega võrdsed. Üks arv on võrdne iseendaga. Seepärast $n = 1$ korral on väide õige. Oletame, et väide on õige $n = k$ korral, ja tõestame siis väite õigsuse $n = k + 1$ korral.

Nummerdame kõik antud hulga arvud: $1, 2, 3, \ldots, k + 1$. Esimesed k arvu on omavahel võrdsed ja seepärast on nad võrdsed esimese arvuga. Eraldame teise arvu. Siis ülejäänud arvud, mille seas on ka $(k + 1)$-ne arv, on üksteisega võrdsed ja võrdsed esimese arvuga.

Niisiis, kõik arvud on võrdsed esimesega, tähendab, nad on ka omavahel võrdsed. Väide on tõestatud.

18. Väikse kuubi tahkudele on kirjutatud arvud 1-st 6-ni ja nii on saadud mängutäring. Leida erinevate täringute arv.

19. Täringu kahekordsel viskamisel liideti saadud silmad. Kumb summa on tõenäosem: 9 või 10 (joon. 26)?



Joon. 26

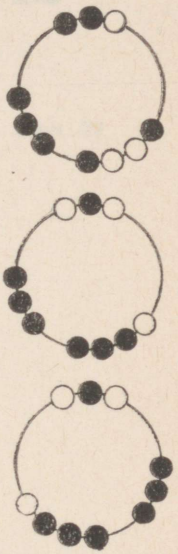
20. Doominomängu lõppemisel osutus, et kõik doominokivid paiknesid ühes reas. Leida kõikvõimalike ridade arv. (Doominokivid pannakse maha mööda sirgjoont.)

21. a) Mitmel viisil saab ümmarguse laua ümber panna istuma 19 inimest?

b) Mitmel viisil saab ümmarguse laua ümber panna istuma 19 inimest, nii et A ja B vahel istuks r inimest?

22. Kaks poistegruppi mängivad hoovis jalgpalli «10-ni», kusjuures kohtunik protokollib, kuidas muutub mängu seis. Näiteks 1 : 0, 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4, 2 : 4, 2 : 5, 2 : 6, 3 : 6, 4 : 6, 5 : 6, 6 : 6, 7 : 6, 8 : 6, 9 : 6, 9 : 7, 10 : 7. Kui palju võib saada erinevaid protokolle?

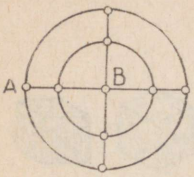
23. Laste kõristi koosneb rõngast, millele on lükitud kolm valget ja seitse musta kuulikest. Mõned kõristid tunduvad meile esimesel pilgul erinevatena, neid saab aga muuta ühesugusteks, kui nihutada kuulikesi rõngal (joon. 27). Leida tõeliselt erinevate kõristite arv.



Joon. 27

24. Mitmel viisil saab mängunupp liikuda malelaual väljalt $a1$ väljale $h8$, kui iga käiguga liigub ta ühe ruudu võrra ülespoole või paremale?

25. Mitmel viisil saab malelauale panna kaks valget ja kaks musta vankrit, nii et valged ei lööks musti?



Joon. 28

26. Mitut erinevat teed mööda saab kabekivi väljalt *a*1 liikuda kabeks? (Teisi kive kabelaual pole.)

27. Mitut iseendaga mittelõikuvat teed mööda saab liikuda punktist *A* punktisse *B* (joon. 28)? (Liikumine toimub ring- ja radiaalteid mööda ümberpaiknemisega valge ringikesega märgitud punktides.)

28. Mitmel viisil saab kolmemõõtmelisele malelauale $3 \times 3 \times 3$ paigutada 9 vankrit nii, et need ei lööks üksteist? (Vanker lööb piki oma rida, veergu ja tulpa.)

29. $2 \times n$ tabeli igas ruudus on üks arvudest 1-st *n*-ni, kusjuures ükskõik kummas reas ja ükskõik millises veerus paiknevad arvud on erinevad. Kui palju on niisuguseid tabeleid?

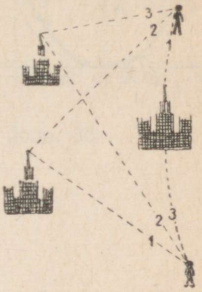
30. Üks hajameelne reisija jättis oma asjad automaathoiuruumi. Kui ta tund aega enne rongi väljasõitu tuli asju välja võtma, siis selgus, et ta oli numbri peaaegu unustanud. Reisija mäletas ainult, et numbris esinesid 23 ja 37. Kui palju numbreid peab reisija läbi valima? (Et saada kätte asju, tuleb õigesti valida viiekohaline number.)

31. Isal oli 7 tütart. Alati, kui üks tütardest läks mehele, tuli iga tema vallaline vanem õde kaebama, et on rikutud igivana kommet, mille järgi mehele minnakse vanuse järjekorras. Pärast seda, kui mehele oli läinud viimane tütar, osutus, et isa oli kuulanud ära 7 kaebust. Mitmel viisil võis see juhtuda?

Selle ülesande raskemat laadi sõnastus oleks järgmine. Nimetame *n-permutatsiooniks n* arvu rida 1-st *n*-ni, milles iga arv esineb vaid 1 kord. Selle rea arvu-

paari (p, l) nimetame *korrapäratuks*, kui $p > l$ ja p paikneb n-permutatsioonis l-st vasakul. Kui palju on olemas n-permutatsioone k korrapäratu arvupaariga? (Ülesandes õdedest-pruutidest $n = k = 7$.)

32. Kui linnas on 2 kõrgehitust, siis nende tippe võib näha mistahes järjestuses (vasakult paremale), kui neid vaadata linna erinevatest punktidest. Sama on õige ka kolme kõrgehituse puhul, kui ainult need ei paikne ühel sirgel (joon. 29). Arhitekt tahab paigutada 7 kõrgehitust nii, et jalutades mööda linna võib nende tippe näha mistahes järjestuses. Kas see on tal võimalik?



Joon. 29

III peatüki juurde

33. Tõestada, et arv 2 pole jada

$$1;\ 3;\ \frac{1}{2};\ 2\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ 2\frac{1}{3};\ \ldots;\ \frac{1}{n};\ 2\frac{1}{n};\ \ldots$$

piirväärtuseks.

34. Teades, et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Leida alljärgnevate jadade piirväärtused:

a) $y_n = \dfrac{2x_n - 1}{x_n + 1}$, b) $y_n = \dfrac{x_n^2 + x_n - 2}{x_n - 1}$,

c) $y_n = \dfrac{x_n^{10} - 1}{x_n - 1}$, d) $y_n = \sqrt{x_n}$.

35. Tõestada, et kui jada $\{x_n\}$ piirväärtuseks on a, siis on ka sellest jadast liikmete mistahes ümberpaigutamise teel saadud jada piirväärtuseks a.

36. Tõestada, et kui jada piirväärtus on a, siis tema mistahes lõpmatu osajada piirväärtus on samuti a.

TRÜ Raamatukogu

37. Tõestada, et kui arv a on jada $\{x_n\}$ kuhjumispunktiks, siis saab jadast $\{x_n\}$ välja valida niisuguse osajada, et selle piirväärtuseks on arv a. Kas ka vastupidine väide on õige?

38. Mõtelge välja jada, mille puhul kõik kuhjumispunktid oleksid täisarvud ja iga täisarv oleks kuhjumispunkt.

39. Tõestage, et kui $x_n \geqslant 0$ iga n korral ja $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, siis $a \geqslant 0$.

40. Leidke piirväärtused:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3n-2}{1+2+3+\ldots+n}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{4^n}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\log n+2^n}{n^2-\log n-2^n}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$.

41. Jada $\{x_n\}$ on moodustatud järgmise seaduse põhjal: esimene liige valitakse vabalt, iga järgmine liige leitakse aga eelnevast valemi järgi $x_{n+1} = ax_n + b$, kus a ja b on jäävad arvud. Missuguste a ja b väärtuste korral on jadal $\{x_n\}$ olemas piirväärtus?

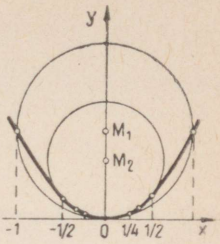
42. Tõestage, et kui rea

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

liikmete hulgast kriipsutada maha kõik need, mille kirjutises esineb number 3, siis järelejäävatest liikmetest koosneva rea summa on lõplik.

43. Vaatleme funktsiooni $y = x^2$ graafikul punkte A_n ja B_n vastavalt abstsis-

sidega $\frac{1}{n}$ ja $-\frac{1}{n}$. Joonestame läbi A_n, B_n ja koordinaatide alguspunkti ringjoone. Olgu M_n selle ringjoone keskpunkt (joon. 30). Tõestage, et punktide M_n jadal $\{M_n\}$ on olemas piirväärtus ja leidke see.



Joon. 30

I peatükk

1. Lahendame ülesande, kasutades matemaatilise induktsiooni meetodit.

a) $n = 1$ korral on võrdus õige.

b) Olgu võrdus õige $n = k$ korral, kus k on mingi suvaline arv. Tõestame, et sel juhul on ta õige ka $n = k + 1$ korral, s. t. et

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \\ = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Tõepoolest, olgu $n = k$ korral võrdus õige, s. t. olgu

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

Siis

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \\ = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \\ = (k+1)^2\left[\frac{k^2}{4} + k + 1\right] = \\ = \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4k + 4) = \\ = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Niisiis, võrduse õigsusest $n = k$ korral järeldub tema õigsus $n = k + 1$ korral. Seepärast võime matemaatilise indukt-

siooni printsiibi põhjal väita, et n kõigi naturaalarvuliste väärtuste korral kehtib võrdus

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. Esimene lahendusviis. Rakendame matemaatilise induktsiooni meetodit.

a) Veendume vahetu kontrollimise teel võrduse õigsuses $n = 1$ korral.

b) Olgu võrdus õige mingi naturaalarvu k korral, s. t.

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$= \frac{k}{k+1}.$$

Tõestame, et siis on ta õige ka $n = k + 1$ korral. Tõepoolest,

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Seega on mõlemad väited, mis on vajalikud matemaatilise induktsiooni meetodi rakendamiseks, tõestatud. Seepärast on antud väide õige ka n kõigi väärtuste puhul.

Teine lahendusviis. Iga n puhul kehtib valem

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

(mida võib vahetult kontrollida). Seepärast võib tõestatava võrduse vasaku poole kirjutada järgmiselt:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+$$
$$+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}=$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\cdots+$$
$$+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Saadud summas kõik liidetavad, peale esimese ja viimase, koonduvad. Seepärast

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+$$
$$+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}=$$
$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1},$$

mida oligi tarvis tõestada.

3. Esimene lahendusviis. Tõestame matemaatilise induktsiooni meetodi abil, et kehtib võrdus

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=$$
$$=\frac{n}{3n+1}.$$

a) $n = 1$ korral on võrdus õige.

b) Olgu antud võrdus õige k kõigi naturaalarvuliste väärtuste puhul, s. t. olgu

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1}.$$

Näitame, et siis on ta õige ka $n = k + 1$ korral.

Tõepoolest,

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{(3k+1)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4}.$$

Seega on antud võrduse õigsus tõestatud n kõigi väärtuste korral.

Teine lahendusviis. Kasutame valemit

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3(3n-2)} + \frac{1}{3(3n+1)}.$$

Rakendades seda võrdust tõestatava võrduse kõigi liidetavate kohta, saame

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-5)(3n-2)} + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \left(\frac{1}{3 \cdot 1} - \frac{1}{3 \cdot 4}\right) + \left(\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 7}\right) + \left(\frac{1}{3 \cdot 7} - \frac{1}{3 \cdot 10}\right) + \ldots +$$

$$+\left(\frac{1}{3(3n-5)}+\frac{1}{3(3n-2)}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{3(3n-2)}+\frac{1}{3(3n+1)}\right).$$

Pärast sulgude avamist kõik liidetavad peale esimese ja viimase koonduvad ja me saame

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

Võrdus on tõestatud.

4. Esitame siin võimalikest tõestustest üheainsa, mis põhineb matemaatilise induktsiooni meetodil.

a) Vahetu kontrollimise teel on kerge veenduda, et $n=1$ korral on võrdus õige.

b) Olgu võrdus õige $n=k$ korral:

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}=\frac{k}{a(a+k)}.$$

Näitame, et siis on ta õige ka $n=k+1$ korral. Saame

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=$$
$$=\frac{k}{a(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=$$
$$=\frac{k(a+k+1)+a}{a(a+k)(a+k+1)}=\frac{k^2+ak+a+k}{a(a+k)(a+k+1)}=$$

$$= \frac{(a+k)(k+1)}{a(a+k)(a+k+1)} = \frac{k+1}{a(a+k+1)}.$$

Seepärast võime nüüd matemaatilise induktsiooni meetodi põhjal väita, et võrdus on õige n kõigi naturaalarvuliste väärtuste korral.

5. Lahendame ülesande matemaatilise induktsiooni meetodiga.

a) $n = 1$ korral on võrdus õige (kontrollige!).

b) Olgu võrdus kehtiv $n = k$ korral:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! =$$
$$= (k+1)! - 1.$$

Näitame, et sel korral on ta kehtiv ka $n = k+1$ korral. Tõepoolest,

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! +$$
$$+ (k+1)(k+1)! =$$
$$= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! =$$
$$= (k+2)(k+1)! - 1.$$

Kuid $n!$ definitsiooni põhjal $(k+2)(k+1)! = (k+2)!$. Seepärast

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + (k+1)(k+1)! =$$
$$= (k+2)! - 1,$$

s. t. antud võrdus osutus õigeks ka $n = k+1$ korral. Rakendades matemaatilise induktsiooni meetodit, saame, et antud võrdus on õige n kõigi naturaalarvuliste väärtuste korral.

6. Esimene lahendusviis. Tõestame antud võrduse matemaatilise induktsiooni meetodiga.

a) $n = 1$ korral näitab vahetu kontrollimine võrduse õigsust.

b) Olgu võrdus õige mingi naturaalarvulise $k \geqslant 2$ korral:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=$$

$$=\frac{k+1}{2k}.$$

Näitame, et sel juhul on ta õige ka $n=k+1$ korral. Tõepoolest,

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{k+1}{2k}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)^2-1]}{2k(k+1)^2}=$$

$$=\frac{(k+1)k(k+2)}{2k(k+1)^2}=\frac{k+2}{2(k+1)}.$$

Nüüd, rakendades matemaatilise induktsiooni meetodit, võime väita, et võrdus on õige kõigi $n\geqslant 2$ korral.

Teine lahendusviis. Iga naturaalarvulise $n\geqslant 2$ korral kehtib valem

$$1-\frac{1}{n^2}=\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}.$$

Rakendanud seda valemit võrduse vasakul poolel igale tegurile, saame

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\times$$

$$\times\frac{(4-1)(4+1)}{4^2}\ldots\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\times$$

$$\times\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}.$$

On kerge näha, et peaaegu kõik tegurid lugejast ja nimetajast taanduvad. Ei taandu ainult $2 - 1 = 1$ ja $n + 1$ lugejas, aga samuti 2 ja n nimetajas. Seepärast

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n},$$

s. t. võrdus on tõestatud.

7. Rakendame matemaatilise induktsiooni meetodit.

a) $n = 1$ korral on valem õige (kontrollige!).

b) Olgu valem õige mingi naturaalarvu k korral, s. t. olgu

$$1 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{k-1} \cdot \frac{k(k+1)}{2}.$$

Näitame, et siis on ta õige ka $n = k + 1$ korral. Tõepoolest,

$$1 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^k(k+1)^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2 = (-1)^{k-1}(k+1) \times \left[\frac{k}{2} - k - 1\right] = \frac{(-1)^{k-1}(k+1)}{2}(-k-2) = (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Niisiis, kasutades matemaatilise induktsiooni printsiipi, saame, et antud valem on õige n kõigi naturaalarvuliste väärtuste korral.

8. Olgu tasapinnale juba tõmmatud n sirget. Tõmbame nüüd $(n + 1)$-se sirge. Eelmise n sirgega lõikub see $(n + 1)$-ne

sirge n punktis, sest eelduse põhjal lõikab ta neist igaühte ning ühegi kahega ei lõiku ta ühes ja samas punktis. Arusaadav, et nende n punktiga jaotub $(n+1)$-ne sirge $n+1$ lõiguks (kaks neist on kiired). Igaüks neist lõikudest jaotab tasapinna mingi vana osa kaheks uueks osaks. Seepärast $n+1$ lõiku moodustavad tasapinna $(n+1)$-st vanast osast $2n+2$ uut osa, s. t. $(n+1)$-se sirge lisamisel suureneb tasapinna osade arv $n+1$ võrra. Nüüd on kerge leida, mitmeks osaks jaotavad tasapinna n sirget. Üks sirge jaotab tasapinna kaheks osaks. Teise sirge lisamisel suureneb osade arv 2 võrra, kolmanda sirge lisamisel suureneb osade arv veel 3 võrra jne. Seepärast osade üldarv on

$$2+2+3+4+\ldots+n=$$
$$=1+(1+2+3+\ldots+n)=$$
$$=1+\frac{n(n+1)}{2}$$

(vt. eespool lk. 10, näide 9). Seepärast osade arv, milleks sirged jaotavad tasapinna, on $\frac{n(n+1)}{2}+1$.

9. a) $n=8$ korral on ilmne, et 8 kopikat on kujutatav kolme- ja viiekopikaliste summana: $8=5+3$.

b) Oletame, et me saame k kopikat kujutada kolme- ja viiekopikaliste summana. Näitame, et sedasama saab sel korral teha ka $k+1$ kopikaga. Vaatleme kahte juhtumit: k kopikat kujutavas summas on vähemalt üks viiekopikaline, pole ühtegi viiekopikalist. Esimesel juhtumil, asendades viiekopikalise kahe kolmekopikalisega, saame vajaliku $k+1$ kopikat kujutava summa. Teisel juhtumil on k kopikat kujutatav ainult kolmekopikaliste summana, kusjuures on selge, et nende kolmekopikaliste

arv pole kolmest väiksem. Seepärast võime kolm kolmekopikalist asendada kahe viiekopikalisega ja siis saame vajaliku $k+1$ kopikat kujutava summa. Seega, kui k kopikat on kujutatav kolme- ja viiekopikaliste summana, võib sedasama teha ka $k+1$ kopikaga. Seepärast, kasutades matemaatilise induktsiooni printsiipi, saame, et mistahes 7-st kopikast suurem rahasumma on kujutatav kolme- ja viiekopikaliste summana.

10. a) Kui tasapind on jaotatud osadeks ainult ühe sirgega, siis võib neid osi värvida nii, nagu seda ülesande tingimused nõuavad. Selleks piisab, kui üks pooltasapind värvida üht värvi ja teine pooltasapind teist värvi.

b) Oletame, et me oleme n sirgega osadeks jaotatud tasapinna värvinud vajalikul viisil. Tõmbame $(n+1)$-se sirge ja näitame, et saadud tasapinda saab samuti nõutaval kombel värvida. Uus sirge jaotab tasapinna kaheks pooltasapinnaks. Et saada vajalikku mustrit, toimime nii. Ühel saadud pooltasapinnal muudame iga tüki värvuse vastupidiseks (s. t. asendame valge värvuse mustaga, musta aga valgega), teisel pooltasapinnal jätame aga värvused muutmata. Näitame, et nii toimides on tasapind värvitud korrapäraselt. Võtame kaks naabertükki. Võib esineda kaks juhtumit: kas sirge, mis neid tükke teineteisest eraldab, on üks vanadest sirgetest, või on see uus, $(n+1)$-ne sirge. Esimesel juhtumil olid need tükid uue sirge tõmbamiseni ja värvuse muutmiseni erinevat värvi, pärast aga mõlemad kas muutsid värvust või kumbki ei muutnud. On selge, et mõlemad tükid jäävad erinevat värvi. Teisel juhtumil olid need tükid uue sirge tõmbamiseni ühevärvilised, pärast aga muutis üks tükkidest oma värvust, s. t.

need kaks tükki saavad erivärvilisteks. Seega, kui me oskame õigesti värvida n sirgega osadeks jaotatud tasapinda, siis võime värvida ka $n+1$ sirgega osadeks jaotatud tasapinna. Nüüd võime rakendada matemaatilise induktsiooni printsiipi, mis tõestabki väite õigsuse.

11. Tuleb tõestada, et iga naturaalarvulise n korral

$$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$$

jagub 9-ga.

a) $n=1$ korral on väide õige, sest $1^3+2^3+3^3=36$ jagub 9-ga.

b) Olgu väide õige mingi naturaalarvulise k korral, s. t. jagugu $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$ arvuga 9. Tõestame, et siis on see väide õige ka $n=k+1$ korral. Saame

$$\begin{aligned}&(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3=\\&=(k+1)^3+(k+2)^3+(k^3+3\cdot 3k^2+\\&+3\cdot 3^2\cdot k+3^3)=[k^3+(k+1)^3+\\&+(k+2)^3]+9(k^2+3k+3).\end{aligned}$$

Me esitasime arvu $(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$ kahe liidetava summana, milledest esimene jagub 9-ga eelduse põhjal, teine on aga 9 korrutis täisarvuga. Seepärast ka nende liidetavate summa jagub 9-ga.

Niisiis, me võime kasutada matemaatilise induktsiooni printsiipi, mis tõestabki väite.

12. a) Kontrollime väite õigsust $n=0$ korral. Sel juhul

$$\begin{aligned}&11^{n+2}+12^{2n+1}=11^2+12=\\&=121+12=133\end{aligned}$$

jagub 133-ga.

b) Olgu antud väide kehtiv mingi $k\geqslant 0$ korral, s. t. jagugu $11^{k+2}+12^{2k+1}$ arvuga

133. Näitame, et sel juhul on väide kehtiv ka $n = k + 1$ korral. Saame

$$11^{(k+1)+2} + 12^{2(k+1)+1} = 11^{k+3} + 12^{2k+3} =$$
$$= 11 \cdot 11^{k+2} + 144 \cdot 12^{2k+1} = 11 \cdot 11^{k+2} +$$
$$+ 11 \cdot 12^{2k+1} + 133 \cdot 12^{2k+1} = 11(11^{k+2} +$$
$$+ 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1}.$$

Saadud liidetavatest esimene jagub 133-ga oletuse põhjal, teine aga sisaldab arvu 133 tegurina. Seepärast jagub ka nende summa 133-ga.

Nüüd aga näitab matemaatilise induktsiooni printsiip, et väide on õige iga $n \geqslant 0$ korral.

13. a) $n = 2$ korral on võrratus õige, kuna $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$, sest $a^2 > 0$, kui $a \neq 0$.

b) Olgu võrratus õige mingi naturaalarvu $k \geqslant 2$ korral, s. t. olgu

$$(1 + a)^k > 1 + ka.$$

Tõestame, et siis on võrratus õige ka $n = k + 1$ korral. Tõepoolest, eelduse põhjal $1 + a > 0$. Seepärast, korrutades võrratuse

$$(1 + a)^k > 1 + ka.$$

mõlemad pooled $(1 + a)$-ga, saame

$$(1 + a)^k(1 + a) > (1 + ka)(1 + a),$$
$$(1 + a)^{k+1} > (1 + (k + 1)a) + ka^2.$$

Kuid $ka^2 > 0$, kui $a \neq 0$. Seepärast

$$(1 + a)^{k+1} > 1 + (k + 1)a.$$

Seega, rakendades matemaatilise induktsiooni printsiipi, saame, et kõigi $n \geqslant 2$ korral

$$(1 + a)^n > 1 + na,$$

kui $a > -1$, $a \neq 0$.

14. a) $n = 2$ korral on võrratus kehtiv, sest $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$.

b) Olgu võrratus kehtiv $n = k$ korral, s. t. olgu

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}. \quad (1)$$

Näitame, et siis on võrratus kehtiv ka $n = k + 1$ puhul. Selleks on küllaldane tõestada võrratuse

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \quad (2)$$

õigsus. Tõepoolest, kui oleme tõestanud võrratuse (2) õigsuse, siis, liitnud võrratuse (2) võrratusega (1), mis eelduse põhjal on õige, saame võrratuse, kus $n = k + 1$. Tõestame nüüd võrratuse (2). Korrutades võrratuse (2) mõlemad pooled avaldisega $\sqrt{k+1} + \sqrt{k}$, saame võrratuse

$$1 + \sqrt{\frac{k}{k+1}} > 1,$$

mis on ilmselt õige. Seepärast on ka võrratus (2) õige. Seega siis järeldub võrratuse

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

õigsusest $n = k$ korral tema õigsus $n = k + 1$ korral.

Nüüd võime rakendada matemaatilise induktsiooni printsiipi ja nii osutub antud võrratus õigeks kõigi $n \geqslant 2$ puhul.

15. a) $n = 1$ ja $n = 2$ korral on valemi õigsus ilmne.

b) Olgu valem õige kõigi $n \leqslant k$ korral, kus $k \geqslant 2$. Näitame, et siis on ta õige ka $n = k + 1$ korral. Tõepoolest,

$$u_{k+1} = 3u_k - 2u_{k-1} =$$
$$= 3(2^{k-1} + 1) - 2(2^{k-2} + 1) =$$
$$= 3 \cdot 2^{k-1} + 3 - 2^{k-1} - 2 =$$
$$= 2 \cdot 2^{k-1} - 1 = 2^k - 1.$$

Nüüd võime rakendada matemaatilise induktsiooni printsiipi, mis näitab, et valem on õige iga n puhul.

16. a) $n = 1$ korral on valem õige.

b) Olgu valem õige $n = k$ korral, s. t. olgu

$$u_k = 2(k-1)^2.$$

Näitame, et siis on ta õige ka $n = k + 1$ puhul. Tõepoolest

$$u_{k+1} = u_k + 8k = (2k-1)^2 + 8k =$$
$$= 4k^2 - 4k + 1 + 8k =$$
$$= 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2.$$

Rakendades matemaatilise induktsiooni printsiipi, saame, et valem on õige n kõigi naturaalarvuliste väärtuste korral.

17. $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n =$
$= (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1.$

18. Näitame, et n kõigi väärtuste puhul on õige valem

$$u_1 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots + \Delta u_{n-1} = u_n.$$

Tõepoolest, meenutades jada definitsiooni, saame

$$u_1 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots + \Delta u_{n-1} =$$
$$= u_1 + (u_2 - u_1) +$$
$$+ (u_3 - u_2) + \ldots + (u_n - u_{n-1}).$$

Viimase summa kõik liikmed peale u_n koonduvad ja me saamegi vajaliku valemi.

On selge, et säärane valem on õige ka v_n kohta.

Leiame nüüd, millega on võrdne vahe $u_n - v_n$:

$$u_n - v_n = (u_1 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots + \\ + \Delta u_{n-1}) - (v_1 + \Delta v_1 + \Delta v_2 + \ldots + \\ + \Delta v_{n-1}) = u_1 - v_1 + \Delta u_1 - \Delta v_1 + \Delta u_2 - \\ - \Delta v_2 + \ldots + \Delta u_{n-1} - \Delta v_{n-1}.$$

Kuid ülesande tingimusest teame, et $\Delta u_1 = \Delta v_1$, $\Delta u_2 = \Delta v_2$, ..., $\Delta u_{n-1} = \Delta v_{n-1}$, ja seepärast

$$u_n - v_n = u_1 - v_1.$$

Siit järeldub, et kui $u_1 \neq v_1$, siis $u_n - v_n \neq 0$, s. t. u_n ja v_n pole võrdsed n ühegi väärtuse korral. Kui aga $u_1 = v_1$, siis n kõigi väärtuste puhul kehtib võrdus $u_n = v_n$.

19. Ülesanne lahendatakse vahetu kontrollimisega:

$$\Delta w_n = (w_{n+1} - w_n) = \\ = (u_{n+1} + v_{n+1}) - (u_n + v_n) = \\ = (u_{n+1} - u_n) + (v_{n+1} - v_n) = \\ = \Delta u_n + \Delta v_n.$$

20. Vahede jada üldliige $\Delta u_n = (n+1)^k - n^k$. Näitame, et

$$(n+1)^k = n^k + kn^{k-1} + \ldots,$$

kus punktidega on tähistatud $(k-1)$-st väiksemate astendajatega n astmeid sisaldavad liikmed.

Tõestame seda, kasutades induktsiooni.

a) $k = 1$ korral on väide õige.

b) Olgu väide õige mingi $k = k_0$ korral, s. t. olgu

$$(n+1)^{k_0} = n^{k_0} + k_0 n^{k_0-1} + \ldots,$$

kus punktidega on tähistatud $(k-1)$-st väiksemate astendajatega n astmeid sisaldavad liikmed. Näitame, et sel korral on väide õige ka $k = k_0 + 1$ korral. Saame

$$(n+1)^{k_0+1} = (n+1)^{k_0}(n+1) =$$

$= (n^{k_0} + k_0 n^{k_0-1} + \ldots)(n+1) =$
$= n^{k_0+1} + k_0 n^{k_0} + \ldots + n^{k_0} + k_0 n^{k_0-1} +$
$+ \ldots = n^{k_0+1} + (k_0+1) n^{k_0} + \ldots .$

Viimases avaldises on punktidega tähistatud k_0-st väiksemate astendajatega n astmeid sisaldavad liikmed. Niisiis on väide õige ka $k = k_0 + 1$ korral.

Nüüd, kasutades matemaatilise induktsiooni printsiipi, saame, et iga k puhul

$$(n+1)^k = n^k + kn^{k-1} + \ldots$$

Seepärast

$$\Delta u_n = (n+1)^k - n^k = n^k + kn^{k-1} + \ldots$$
$$\ldots - n^k = kn^{k-1} + \ldots,$$

kus punktidega on tähistatud $(k-1)$-st väiksemate astendajatega n astmeid sisaldavad liikmed. Tähendab, Δu_n väljendub $k-1$ astme hulkliikmena n suhtes, kusjuures selle hulkliikme pealiikme kordaja on k.

21. Olgu $u_n = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} n + a_k$.

Vaatleme siis jada u_n kui $k+1$ jada summat, kusjuures nende jadade üldliikmeteks on $a_0 n^k$, $a_1 n^{k-1}$, $\ldots$, $a_{k-1} n$, a_k. Siis ülesande 19 tulemuse põhjal on Δu_n nende $k+1$ jada vahede jadade summaks. Ülesandest 20 on selge, et esimese vahede jada üldliige väljendub $k-1$ astme hulkliikmena n suhtes pealiikme kordajaga $a_0 k$, kõigi ülejäänud vahede jadade üldliikmed väljenduvad aga hulkliikmetena, mille astendajad on väiksemad kui $k-1$. Seepärast jada Δu_n üldliige väljendub $k-1$ astme hulkliikmena n suhtes pealiikme kordajaga $a_0 k$.

22. Näitame, et jada $u_n = n^k$ korral on k-s vahe iga k puhul $k!$. Kasutame matemaatilise induktsiooni meetodit.

a) $k = 1$ puhul on väide õige, sest kui $u_n = n$, siis $\Delta u_n = 1 = 1!$.

b) Olgu väide tõestatud kõigi $k \leqslant k_0$ korral. Tõestame väite ka $k = k_0 + 1$ puhul. Võtame jada $u_n = n^{k_0+1}$. Siis teame (vt. ülesanne 20), et selle jada esimese vahede jada üldliige väljendub k_0 astme hulkliikmena n suhtes pealiikme kordajaga $k_0 + 1$. Olgu see hulkliige

$$\Delta u_n = (k_0 + 1)n^{k_0} + a_1 n^{k_0-1} + \\ + a_2 n^{k_0-2} + \ldots + a_{k_0}.$$

Jada Δu_n on $k_0 + 1$ jada summa, kusjuures nende jadade üldliikmeteks on vastavalt $(k_0 + 1)n^{k_0}$, $a_1 n^{k_0-1}$, ..., a_{k_0}. Meil tuleb k_0 korda võtta jada Δu_n vahede jada. On selge, et selleks on küllaldane võtta k_0 korda iga liidetava vahede jada ja tulemused liita. Sellest, et väide on tõestatud $k = k_0$ puhul, järeldub, et pärast vahede võtmist k_0 korda esimesest liidetavast, saadakse jada, mille kõik liikmed on ühesugused ja võrdsed $(k_0 + 1)k_0! = (k_0 + 1)!$. Sellest, et väide on tõestatud $k = k_0 - 1$ korral, järeldub, et, võtnud $k_0 - 1$ korda vahede jada teisest liidetavast, saame jada, mille kõik liikmed on ühesugused ja võrdsed $a_1(k_0 - 1)!$, aga võtnud vahede jada veel kord, saame jada, mille kõik liikmed on võrdsed nulliga. Analoogiliselt, pärast kõigi järgnevate liidetavate vahede jada k_0 kordset võtmist saame tulemuseks nulli. Seepärast u_n jada $(k_0 + 1)$-se vahede jada kõik liikmed on võrdsed $(k_0 + 1)!$.

Seega saime, et n^k jada k-s vahede jada on iga k puhul võrdne $k!$.

23. Lahendame ülesande matemaatilise induktsiooni meetodiga k suhtes.

a) Olgu $k = 0$, s. t. $v_n = 1$ iga n korral. On selge, et sel korral otsitav jada eksisteerib, ja nimelt $u_n = n$. Tähistame selle jada sümboliga $\{u_n^{(0)}\}$.

b) Olgu väide tõestatud kõigi $k \leqslant k_0$ korral. See tähendab, et eksisteerivad sellised jadad $\{u_n^{(0)}\}$, $\{u_n^{(1)}\}$, ..., $\{u_n^{(k_0)}\}$, et $\Delta u_n^{(0)} = 1$, $\Delta u_n^{(1)} = n$, ..., $\Delta u_n^{(k_0)} = n^{k_0}$. Näitame, et eksisteerib niisugune jada $\{u_n^{(k_0+1)}\}$, et $\Delta u_n^{(k_0+1)} = n^{k_0+1}$. Leiame selle jada järgmisel viisil. Võtame algul jada, mille üldliige on n^{k_0+2}. Me teame, et selle jada vahede jada üldliige väljendub $k_0 + 1$ astme hulkliikmena n suhtes, kusjuures tema pealiikme kordajaks on $k_0 + 2$ (vt. ülesanne 21). Seepärast jada $\frac{n^{k_0+2}}{k_0+2}$ vahede jada üldliige väljendub $k_0 + 1$ astme hulkliikmena n suhtes pealiikme kordajaga 1.

Olgu see hulkliige

$$n^{k_0+1} + a_0 n^{k_0} + a_1 n^{k_0-1} + \ldots + a_{k_0}.$$

Võtame siis jadaks $\{u_n^{(k_0+1)}\}$ jada, mille üldliige on järgmine:

$$u_n^{(k_0+1)} = \frac{n^{k_0+1}}{k_0+1} - a_0 u_n^{(k_0)} -$$
$$- a_1 u_n^{(k_0-1)} - \ldots - a_{k_0} u_n^{(0)}.$$

Näitame, et sel korral on vajalikud tingimused rahuldatud. Tõepoolest, kasutades ülesande 19 tulemusi, saame

$$\Delta u_n^{(k_0+1)} = \Delta\left(\frac{n^{k_0+2}}{k_0+2}\right) - \Delta(a_0 u_n^{(k_0)}) -$$
$$- \Delta(a_1 u_n^{(k_0-1)}) - \ldots - \Delta(a_{k_0} u_n^{(0)}) =$$
$$= n^{k_0+1} + a_0 n^{k_0} + a_1 n^{k_0-1} + \ldots + a_{k_0} -$$
$$- a_0 n^{k_0} - a_1 n^{k_0-1} - \ldots - a_{k_0} = n^{k_0+1}.$$

Seega eksisteerib vajalike omadustega jada $\{u_n^{(k_0+1)}\}$. Nüüd, kasutades matemaatilise induktsiooni printsiipi, saame, et iga k puhul on olemas jada $u_n^{(k)}$, mille puhul $\Delta u_n^{(k)} = n^k$. On samuti selge, et jada $\{u_n^{(k)}\}$ üldliige väljendub $k + 1$

astme hulkliikmena n suhtes pealiikme kordajaga $\frac{1}{k+1}$.

24. Võtame kasutusele järgmise tähistuse: $v_n = \Delta u_n$, $w_n = \Delta v_n$, $x_n = \Delta w_n$ ja $y_n = \Delta x_n$. Ülesande tingimusest on teada, et $y_n = 0$ iga n korral. Sellest järeldub, et x_n on ühesugune kõigi n väärtuste puhul. Siit nähtub, et w_n väljendub iga n puhul esimese astme hulkliikmena n suhtes. Olgu see hulkliige $a_0 n + a_1$. Ülesande 18 lahendusest teame, et

$$v_n = v_1 + w_1 + w_2 + \ldots + w_{n-1} = \\ = v_1 + a_0[1 + 2 + \ldots + (n-1)] + \\ + a_1(n-1).$$

Kuid me teame, et $1 + 2 + \ldots + (n-1) = \\ = \frac{n(n-1)}{2}$ (vt. lk. 10), seepärast

$$v_n = v_1 + a_1(n-1) + a_0 \frac{n(n-1)}{2},$$

s. t. jada v_n üldliige väljendub teise astme hulkliikmena n suhtes. Olgu see hulkliige $v_n = b_0 n^2 + b_1 n + b_2$. Siis

$$u_n = u_1 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1} = \\ = u_1 + b_2(n-1) + b_1 \frac{n(n-1)}{2} + \\ + b_0[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2].$$

Näitame, et summat $1^2 + 2^2 + \ldots + \\ + (n-1)^2$ saab esitada kolmanda astme hulkliikmena n suhtes. Tõepoolest, tähistame selle summa sümboliga S_n. Siis $\Delta S_n = \\ = n^2$. Seepärast ülesandest 23 järeldub, et S_n väljendub kolmanda astme hulkliikmena n suhtes. Tähendab, ka u_n väljendub kolmanda astme hulkliikmena n suhtes.

25. Olgu hulkliikmel v_n kuju

$$v_n = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} n + a_k.$$

Võtame siis jada

$$w_n = a_0 u_n^{(k)} + a_1 u_n^{(k-1)} + \ldots + \\ + a_{k-1} u_n^{(1)} + a_k u_n^{(0)},$$

kus $u_n^{(k)}$, $u_n^{(k-1)}$, $\ldots$, $u_n^{(1)}$, $u_n^{(0)}$ on hulkliikmed, mille olemasolu on tõestatud ülesandes 23. Siis ülesandest 19 järeldub, et iga n korral $\Delta w_n = v_n$. Seega iga n korral $\Delta w_n = \Delta v_n$. Ülesandest 18 a) järeldub, et vahe $u_n - w_n$ on ühesugune n kõigi väärtuste korral (vahe on võrdne $u_1 - v_1$). Seepärast on n kõigi väärtuste korral õige võrdus

$$u_n = (a_0 u_n^{(k)} + a_1 u_n^{(k-1)} + \ldots + \\ + a_{k-1} u_n^{(1)} + a_k u_n^{(0)}) + (u_1 - w_1).$$

Ülesandest 23 on teada, et $u_n^{(k)}$ väljendub $k+1$ astme hulkliikmena n suhtes. Seepärast jada u_n üldliige väljendub $k+1$ astme hulkliikmena n suhtes.

26. Olgu $u_n = 1 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$. Siis on selge, et $\Delta u_n = n^2$. Ülesandest 24 järeldub, et u_n väljendub kolmanda astme hulkliikmena n suhtes, s. t.

$$u_n = a_0 n^3 + a_1 n^2 + a_2 n + a_3.$$

Leiame nüüd a_0, a_1, a_2, a_3. Asetanud selleks n asemele arvud 0, 1, 2, 3, saame

$$\begin{cases} u_0 = a_3 = 0, \\ u_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1, \\ u_2 = 8a_0 + 4a_1 + 2a_2 + a_3 = 5, \\ u_3 = 27a_0 + 9a_1 + 3a_2 + a_3 = 14. \end{cases}$$

Lahendame saadud süsteemi:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 1, \\ 8a_0 + 4a_1 + 2a_2 = 5, \\ 27a_0 + 9a_1 + 3a_2 = 14. \end{cases}$$

Selleks lahutame kolmandast võrrandist

kolmekordse esimese ja teisest võrrandist kahekordse esimese. Siis saame

$$\begin{cases} 24a_0 + 6a_1 = 11, \\ 6a_0 + 2a_1 = 3; \end{cases}$$

$$6a_0 = 2, \quad a_0 = \frac{1}{3}, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{6}.$$

Seega,

$$u_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n =$$

$$= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

s. t.

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Märkus. Me võiksime ka mitte kasutada ülesande 24 tulemusi. Selleks tuleb aga saadud vastus tõestada matemaatilise induktsiooni meetodiga.

27. Tähistame $u_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1)$.

Siis $\Delta u_n = n(n+1)$ on teise astme hulkliige. Seepärast ülesande 24 tulemusest järeldub, et u_n on kolmanda astme hulkliige. Oletame

$$u_n = a_0n^3 + a_1n^2 + a_2n + a_3.$$

a_0, a_1, a_2, a_3 arvutamiseks asendame n arvudega 0, 1, 2, 3. Saame nelja tundmatuga neljast võrrandist koosneva süsteemi:

$$\begin{cases} u_0 = a_3 = 0, \\ u_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 2, \\ u_2 = 8a_0 + 4a_1 + 2a_2 + a_3 = 8, \\ u_3 = 27a_0 + 9a_1 + 3a_2 + a_3 = 20, \end{cases}$$

millest saame süsteemi

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2, \\ 8a_0 + 4a_1 + 2a_2 = 8, \\ 27a_0 + 9a_1 + 3a_2 = 20. \end{cases}$$

Lahutame kahekordse esimese võrrandi teisest ja kolmekordse esimese võrrandi kolmandast. Saame

$$\begin{cases} 3a_0 + a_1 = 2, \\ 24a_0 + 6a_1 = 14. \end{cases}$$

Saadud süsteemis lahutame kuuekordse esimese võrrandi teisest:

$$6a_0 = 2; \quad a_0 = \frac{1}{3}; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = \frac{2}{3}.$$

Seepärast

$$u_n = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n =$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

s. t.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

28. a) Aritmeetilise progressiooni definitsiooni põhjal saame

$$u_n = u_{n-1} + d = u_{n-2} + 2d = \ldots =$$
$$= u_1 + (n-1)d.$$

b) Geomeetrilise progressiooni definitsiooni põhjal saame

$$u_1 = u_{n-1}q = u_{n-2}q^2 = \ldots = u_1 q^{n-1}.$$

29. a) Meil tuleb leida järgmine summa:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n.$$

Ülesandest 28 a) teame, et seda summat võib kirjutada järgmiselt:

$$S_n = u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) + \ldots +$$
$$+ [u_1 + (n-2)d] + [u_1 + (n-1)d].$$

Kirjutame selle summa ümber nii, et tema liikmed paikneksid vastupidises järjekorras:

$$S_n = [u_1 + (n-1)d] + \\ + [u_1 + (n-2)d] + \ldots + \\ + (u_1 + 2d) + (u_1 + d) + u_1.$$

Liidame need kaks võrdust

$$2S_n = \{u_1 + [u_1 + (n-1)d]\} + \\ + \{(u_1 + d) + [u_1 + (n-2)d]\} + \\ + \ldots + \{[u_1 + (n-2)d] + \\ + (u_1 + d)\} + \{[u_1 + (n-1)d] + \\ + u_1\}.$$

(Esimese võrduse iga liige liidetakse vastava liikmega teisest võrdusest.) On selge, et summa igas loogeliste sulgudega avaldises on $2u_1 + (n-1)d$. Selliseid loogeliste sulgudega avaldisi on n. Seepärast

$$2S_n = n[2u_1 + (n-1)d] = \\ = 2u_1 n + n(n-1)d,$$

$$S_n = u_1 n + \frac{n(n-1)}{2} d.$$

b) Meil tuleb leida

$$P_n = u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_{n-1} \cdot u_n.$$

Ülesandest 28 b) on teada, et P_n võib kirjutada järgmiselt:

$$P_n = u_1 \cdot u_1 q \cdot u_1 q^2 \cdot \ldots \cdot u_1 q^{n-2} \cdot u_1 q^{n-1} = \\ = u_1^n q^{1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)}.$$

Kuid me teame (vt. lk. 10), et

$$1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) = \\ = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Seepärast

$$P_n = u_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

30. a) Vastavalt ülesandes 29 a) saadud valemile

$$S_n = u_1 n + \frac{n(n-1)}{2} d =$$

$$= \frac{15 \cdot 14}{2} \cdot \frac{1}{3} = 35.$$

b) Ülesandes 29 b) saadud valemi põhjal

$$P_n = u_1{}^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = (\sqrt[3]{10})^{\frac{15 \cdot 14}{2}} =$$

$$= 10^{\frac{15 \cdot 14}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 10^{35}.$$

31. a) Me teame, et aritmeetilise progressiooni puhul

$$u_1 = u_3 - 2d; \; u_2 = u_3 - d;$$

$$u_4 = u_3 + d; \; u_5 = u_3 + 2d.$$

Seepärast viie esimese liikme summa on

$$S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 =$$
$$= (u_3 - 2d) + (u_3 - d) + u_3 +$$
$$+ (u_3 + d) + (u_3 + 2d) = 5u_3 = 0.$$

b) Meil tuleb leida

$$P_5 = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5.$$

Me teame, et geomeetrilise progressiooni puhul

$$u_1 = \frac{u_3}{q^2}; \; u_2 = \frac{u_3}{q}; \; u_4 = u_3 q; \; u_5 = u_3 q^2.$$

Seepärast

$$P_5 = \frac{u_3}{q^2} \cdot \frac{u_3}{q} \cdot u_3 \cdot u_3 q \cdot u_3 q^2 = u_3{}^5 = 4^5 =$$

$$= 1024.$$

32. Meil tuleb leida geomeetrilise progressiooni n esimese liikme summa, s. t. suurus

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n =$$
$$= u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \ldots + u_1 q^{n-1}.$$

Vaatleme vahet $qS_n - S_n$:

$$qS_n - S_n = q(u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots + u_1q^{n-1}) - (u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots + u_1q^{n-1}) = u_1q + u_1q^2 + u_1q^3 + \ldots + u_1q^{n-1} + u_1q^n - u_1 - u_1q - u_1q^2 - \ldots - u_1q^{n-2} - u_1q^{n-1}.$$

Näeme, et selles summas koonduvad kõik liikmed peale esimese ja viimase, s. t.

$$qS_n - S_n = u_1q^n - u_1,$$

$$S_n(q-1) = u_1q^n - u_1,$$

$$S_n = \frac{u_1q^n - u_1}{q-1}.$$

33. On kerge näha, et nende inimeste arv, kellele teatati uudist, on esimese kümneminutilise perioodi lõpus 2, teise kümneminutilise perioodi lõpus 4, k-nda kümneminutilise perioodi lõpus 2^k. Kõigi inimeste arv, kes teavad uudist 10^k minuti pärast, on võrdne nende inimeste arvuga, kes teavad uudist 0 minuti pärast (s. t. 1 inimene), pluss nende inimeste arv, kes teavad uudist 10 minuti pärast (2 inimest), pluss nende inimeste arv, kes teavad uudist kahekümne minuti pärast (4 inimest), ja nii edasi kuni inimeste arvuni, kes teavad uudist $k \cdot 10$ minuti pärast (2^k inimest).

Seepärast inimeste arv S on võrdne summaga

$$S_k = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^k.$$

Näeme, et S_k on võrdne niisuguse geomeetrilise progressiooni esimese $k+1$ liikme summaga, mille esimeseks liikmeks on arv 1 ja teguriks on 2. Seepärast

$$S_k = \frac{1 \cdot 2^{k+1} - 1}{2-1} = 2^{k+1} - 1.$$

Nüüd tuleb ülesande lahendamiseks leida vähim k väärtus, mille puhul S_k, s. t. kõigi inimeste arv, kes teavad uudist $k \cdot 10$

minuti pärast, oleks suurem kui 3 000 000 (linna elanike üldarv). Kergesti leiame, et see vähim k väärtus on 21, sest

$$2^{22} - 1 = 4\,194\,303.$$

Seega saavad linna kõik elanikud uudist teada 210 min. = 3 t. 30 min. pärast.

34. Tähistame ajavahemikud, mille jooksul jalgrattur läbis 1., 2., 3., 4. ja 5. ringi, vastavalt sümbolitega a_1, a_2, a_3, a_4 ja a_5, sümbolitega b_1, b_2, b_3, b_4 ja b_5 tähistame aga vastavad ratsaniku ajad. Ülesande tingimustest teame, et arvud $a_1, \ldots,$ a_5 moodustavad geomeetrilise progressiooni, mille tegur on 1,1, arvud $b_1, \ldots, b_5$ moodustavad aga aritmeetilise progressiooni. Tähistame selle progressiooni vahe tähega d. Me teame, et $a_1 = b_1$ ja et $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$. Kasutades ülesannetes 29 ja 32 saadud valemeid, võime viimast võrrandit teisendada järgmiselt:

$$\frac{a_1 \cdot 1{,}1^5 - a_1}{1{,}1 - 1} = 5a_1 + \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot d,$$

$$a_1[10(1{,}1^5 - 1) - 5] = 10d,$$

$$\frac{d}{a_1} = \frac{10(1{,}1^5 - 1) - 5}{10}.$$

Meil tuleb leida suhe $\frac{b_5}{a_5}$.

$$\frac{b_5}{a_5} = \frac{a_1 + 4d}{a_1 \cdot 1{,}1^4} = \frac{1}{1{,}1^4} + \frac{4}{1{,}4^4} \cdot \frac{d}{a_1}.$$

Asendades siin $\frac{d}{a_1}$ tema väärtusega, saame

$$\frac{b_5}{a_5} = \frac{1}{1{,}1^4} + \frac{4}{1{,}1^4} \cdot \frac{10(1{,}1^5 - 1) - 5}{10} =$$

$$= \frac{1}{1{,}1^4}[1 + 4(1{,}1^5 - 1) - 2] =$$

$$= \frac{1}{1{,}1^4}(4 \cdot 0{,}6105 - 1) =$$

$$= \frac{1{,}4421}{1{,}4641} \approx 0{,}986 < 1.$$

Seega me näeme, et ratsanikul kulus viimase ringi läbimiseks ligikaudu 0,986 korda vähem aega kui jalgratturil.

35. Meil tuleb leida summa $1 + 3 + 5 + \ldots + 997 + 999$. Nagu näeme, on see niisuguse aritmeetilise progressiooni 500 esimese liikme summa, mille esimeseks liikmeks on 1 ja vaheks 2. Seetõttu see summa on

$$1 \cdot 500 + \frac{500 \cdot 499}{2} \cdot 2 = 500 + 500 \cdot 499 =$$

$$= 500 \cdot 500 = 250\,000.$$

36. Lahutame kõigi positiivsete kolmekohaliste arvude summast $S^{(1)}$ 2-ga jaguvate positiivsete kolmekohaliste arvude summa ($S^{(2)}$) ja 3-ga jaguvate positiivsete kolmekohaliste arvude summa ($S^{(3)}$). Seejuures arvud, mis jaguvad nii 2-ga kui ka 3-ga, s. t. jaguvad 6-ga, me lahutasime 2 korda.

Seepärast tuleb meil õige vastuse leidmiseks liita saadud vahega kõigi 6-ga jaguvate positiivsete kolmekohaliste arvude summa ($S^{(6)}$), s. t. leida suurus

$$S = S^{(1)} - S^{(2)} - S^{(3)} + S^{(6)}.$$

Igaüks neist neljast võrduse paremal pool olevast summast on vastavate aritmeetiliste progressioonide teatud arvu liikmete summa. See liikmete arv ja progressiooni vahe on toodud järgmises tabelis

	u_1	n	d
I	100	900	1
II	100	450	2
III	102	300	3
IV	102	150	6

Seepärast $S^{(1)} = 100 \cdot 900 + \frac{900 \cdot 899}{2} \cdot 1 =$

$= 90\,000 + 404\,550 = 494\,500,$

$S^{(2)} = 100 \cdot 450 + \frac{450 \cdot 499}{2} \cdot 2 = 247\,050,$

$S^{(3)} = 102 \cdot 300 + \frac{300 \cdot 299}{2} \cdot 3 = 30\,600 +$

$+ 134\,550 = 165\,150,$

$S^{(6)} = 102 \cdot 150 + \frac{150 \cdot 149}{2} \cdot 6 = 82\,350,$

$S = S^{(1)} - S^{(2)} - S^{(3)} + S^{(6)} = 164\,700.$

37. Mistahes jada n-es liige saadakse, kui n esimese liikme summast lahutada $n - 1$ esimese liikme summa, s. t.

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Antud juhtumil

$$u_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 3(n-1)^2 = 6n - 3.$$

Leiame nüüd $u_n - u_{n-1}$:

$$u_n - u_{n-1} = (6n-3) - [6(n-1) - 3] = 6.$$

Näeme, et jada u_n kahe naaberliikme vahe on jääv suurus ning võrdne 6-ga. See tähendab, et antud jada on aritmeetiline progressioon, mille vahe on 6 ja esimene liige $u_1 = S_1 = 3$.

38. Oletame, et me oleme juba leidnud niisuguse geomeetrilise progressiooni.

Olgu arv 27 selles m-ndal kohal, 8 olgu n-ndal kohal ja 12 olgu p-ndal kohal. Tähistame progressiooni esimese liikme sümboliga u_1 ja progressiooni teguri tähega q. Siis saame

$$27 = u_1 q^{m-1},$$
$$8 = u_1 q^{n-1},$$
$$12 = u_1 q^{p-1}.$$

Jaganud esimese võrduse liikmeti teisega ja siis kolmandaga, saame

$$\frac{27}{8} = q^{m-n},$$

$$\frac{9}{4} = q^{m-p}.$$

Astendame nüüd esimest võrdust vahega $m - p$ ja teist vahega $m - n$. Et nii saadud võrduste paremad pooled on võrdsed, peavad võrdsed olema ka nende vasakud pooled, s. t.

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{m-p} = \left(\frac{9}{4}\right)^{m-n},$$

$$3^{3m-3p-2m+2n} = 2^{3m-3p-2m+2n},$$

$$3^{m-3p+2n} = 2^{m-3p+2n}.$$

Pole raske näha, et viimane võrdus saab kehtida ainult siis, kui $m - 3p + 2n = 0$. Olgu nüüd, ümberpöördult, m, n ja p niisugused positiivsed arvud, et $m - 3p + 2n = 0$. Siis on kehtiv võrdus

$$3^{m-3p+2n} = 2^{m-3p+2n},$$

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{m-p} = \left(\frac{9}{4}\right)^{m-n}.$$

Olgu $q = \sqrt[m-n]{\frac{27}{8}}$, siis

$$\frac{27}{8} = q^{m-n} \quad \text{ja} \quad \frac{9}{4} = q^{m-p}.$$

Tähistame u_1-ga niisuguse arvu, mille puhul $12 = u_1 q^{p-1}$ (selline arv on alati olemas). Siis võrdustest $\frac{27}{8} = q^{m-n}$ ja $\frac{9}{4} = q^{m-p}$ järeldub, et

$$8 = u_1 q^{n-1},$$
$$27 = u_1 q^{m-1}.$$

See aga tähendab, et geomeetrilises progressioonis, mille tegur on q ja esimene liige u_1, paiknevad arvud 27, 8 ja 12 vastavalt m-ndal, n-ndal ja p-ndal kohal. Niisuguse jada näiteks toome jada, mille puhul $u_1 = 8$ ja $q = \frac{3}{2}$. Siin $m = 4$, $n = 1$ ja $p = 2$.

39. Oletame, et me oleme leidnud niisuguse geomeetrilise progressiooni, milles arvud 1, 2 ja 5 paiknevad vastavalt m-ndal, n-ndal ja p-ndal kohal. Siis

$$1 = u_1 q^{m-1},$$
$$2 = u_1 q^{n-1},$$
$$5 = u_1 q^{p-1}.$$

Jagades teise ja kolmanda võrduse esimesega, saame

$$2 = q^{n-m},$$
$$5 = q^{p-m}.$$

Astendades nüüd esimese võrduse vahega $(p - m)$ ja teise vahega $(n - m)$, saame

$$2^{p-m} = 5^{n-m}.$$

On ilmne, et see võrdus saab kehtida vaid juhul, kui $p - m = 0$ ja $n - m = 0$, sest vastasel korral oleks võrduse vasakul poolel paarisarv, paremal poolel aga paaritu.

Kuid ülesande mõtte kohaselt on selge, et arvud m, n ja p peaksid olema kõik

erinevad. Seepärast oletus selliste omadustega geomeetrilise progressiooni olemasolust viiks vastuolule ja seega niisugust progressiooni pole.

40. Tähistame aritmeetilise progressiooni 12-nda, 13-nda ja 15-nda liikme vastavalt sümbolitega u_{12}, u_{13}, u_{15}. Teame, et arvud u_{12}^2, u_{13}^2, u_{15}^2 moodustavad geomeetrilise progressiooni, s. t. et

$$\frac{u_{13}^2}{u_{12}^2} = \frac{u_{15}^2}{u_{12}^2}.$$

Leides selle võrduse mõlemast poolest ruutjuure, saame, et

$$\frac{u_{13}}{u_{12}} = \frac{u_{15}}{u_{13}}$$

või

$$\frac{u_{13}}{u_{12}} = -\frac{u_{15}}{u_{13}}.$$

Vaatleme esimest võrdust. Mistahes aritmeetilise progressiooni korral $u_{13} = u_{12} + d$, $u_{15} = u_{13} + 2d = u_{12} + 3d$, kus d on jada vahe. Seepärast

$$\frac{u_{12} + d}{u_{12}} = \frac{u_{13} + 2d}{u_{13}},$$

$$1 + \frac{d}{u_{12}} = 1 + \frac{2d}{u_{13}},$$

$$\frac{d}{u_{12}} = \frac{2d}{u_{13}}.$$

Eeldame, et $d \neq 0$, siis

$$\frac{u_{13}}{u_{12}} = 2, \quad \frac{u_{13}^2}{u_{12}^2} = 4,$$

s. t. saadud geomeetrilise progressiooni tegur on sel juhul võrdne 4-ga.

Analoogiliselt võime vaadelda juhtumit, mil on kehtiv võrdus

$$\frac{u_{13}}{u_{12}} = -\frac{u_{15}}{u_{13}}.$$

Sel juhtumil, tehes läbi samasugused tehted, saame võrduse:

$$u_{12}^2 + 4u_{12}d + d^2 = 0$$

ehk

$$\left(\frac{d}{u_{12}}\right)^2 + 4\frac{d}{u_{12}} + 1 = 0,$$

millest

$$\frac{d}{u_{12}} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Juhtum a): $\frac{d}{u_{12}} = -2 + \sqrt{3}.$

$$\frac{u_{13}}{u_{12}} = 1 + \frac{d}{u_{12}} = -1 + \sqrt{3},$$

$$q = \left(\frac{u_{13}}{u_{12}}\right)^2 = 4 - 2\sqrt{3}.$$

Juhtum b): $\frac{d}{u_{12}} = -2 - \sqrt{3}.$

$$\frac{u_{13}}{u_{12}} = 1 + \frac{d}{u_{13}} = -1 - \sqrt{3},$$

$$q = \left(\frac{u_{13}}{u_{12}}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}.$$

Seega järeldub võrdusest

$$\frac{u_{13}}{u_{12}} = -\frac{u_{15}}{u_{13}},$$

et q võib võrduda kas avaldisega $4 - 2\sqrt{3}$ või avaldisega $4 + 2\sqrt{3}$.

Jääb veel juhtum $d = 0$. On selge, et sel korral $q = 1$.

41. Olgu meil selline geomeetriline progressioon. Siis on kehtiv võrdus

$u_1q^{n+1} = u_1q^n + u_1q^{n-1}$ iga n korral.

Siit järeldub, et

$$q^2 = q + 1,$$

millest

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Niisuguse geomeetrilise progressiooni puhul, mille iga liige on võrdne kahe eelneva summaga, võib tema tegur omandada vaid väärtust $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ või väärtust $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On selge, et ka vastupidine väide on õige, s. t. et mistahes geomeetrilise progressiooni puhul, kui vaid tema tegur on võrdne ühega neist väärtusist, võrdub iga tema liige kahe eelneva summaga.

42. Tähistame esimese progressiooni esimese liikme u_1-ga ja teguri q-ga, teise progressiooni esimese liikme v_1-ga ja teguri p-ga. Teame, et

$$u_1 + v_1 = 0,$$

$$u_1q + v_1p = 0.$$

Meil tuleb leida, millega on võrdne avaldis $u_1q^2 + v_1p^2$:

$$u_1q^2 + v_1p^2 = u_1q^2 - u_1p^2 =$$
$$= u_1(q^2 - p^2) = u_1(q - p)(q + p).$$

Kuid võrdustest

$$u_1 + v_1 = 0,$$

$$u_1q + v_1p = 0$$

järeldub, et $u_1(q - p) = 0$.

Seepärast $u_1q^2 + v_1p^2 = u_1(q - p)(q + p) = 0$, s. t. meie jada kolmas liige on samuti võrdne nulliga.

43. Meil tuleb leida kaks geomeetrilist progressiooni $\{u_n\}$ ja $\{v_n\}$, nii et oleks kehtivad võrdused

$$u_1 + v_1 = 1,$$
$$u_2 + v_2 = 1,$$
$$u_n + v_n = u_{n-1} + v_{n-1} + u_{n-2} + v_{n-2}.$$

Tähistame nende progressioonide tegurid vastavalt tähtedega p ja q. On selge, et $p \neq q$, sest ühesuguste teguritega kahe geomeetrilise progressiooni summa on samuti geomeetriline progressioon, Fibonacci jada aga pole geomeetriline progressioon. Viimase võrduse võib kirjutada ümber järgmiselt:

$$u_1q^{n-1} + v_1p^{n-1} = u_1q^{n-2} + v_1p^{n-2} +$$
$$+ u_1q^{n-3} + v_1p^{n-3},$$

$$u_1q^{n-3}(q^2 - q - 1) =$$
$$= -v_1p^{n-3}(p^2 - p - 1).$$

Näitame, et siis $p^2 - p - 1 = 0$ ja $q^2 - q - 1 = 0$. Tõepoolest, ärgu olgu see nii, olgu näiteks $p^2 - p - 1 \neq 0$. Siis, jaganud viimase võrduse mõlemad pooled avaldisega

$$v_1q^{n-3}(p^2 - p - 1),$$

saame

$$\frac{u_1}{v_1}\,\frac{q^2 - q - 1}{p^2 - p - 1} = -\left(\frac{p}{q}\right)^{n-3}$$

kõigi $n > 3$ puhul.

Võrduse vasak pool ei sõltu n-st, tähendab, ka parem pool ei tohi sõltuda n-st. Kuid see võib nii olla vaid sel juhul, kui $p = q$. Kuid me juba selgitasime, et $p \neq q$. Seega jõudsime vastuoluni, s. t. oletus, et $p^2 - p - 1 \neq 0$, pole õige. Seepärast $p^2 - p - 1 = 0$. Analoogiliselt $q^2 - q - 1 = 0$. Sellest järeldub, et p ja q on ruutvõrrandi $x^2 - x - 1 = 0$ erinevateks lahenditeks. Selle ruutvõrrandi lahenditeks

on $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ja $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Oletame näiteks, et $p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ja $q=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Leiame nüüd u_1 ja v_1. Nende leidmiseks on meil kaks võrrandit

$$u_1+v_1=1,$$

$$u_1\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}+v_1\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1.$$

Nendest saame, et

$$u_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}};\quad v_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Seepärast

$$u_n=u_1p^{n-1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n};$$

$$v_n=v_1q^{n-1}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}=$$

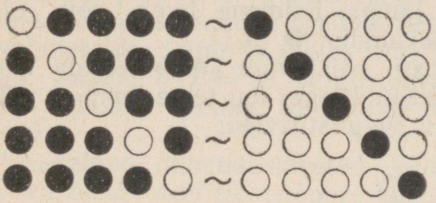
$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.$$

Järelikult,

$$a_n=u_n+v_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\right.$$

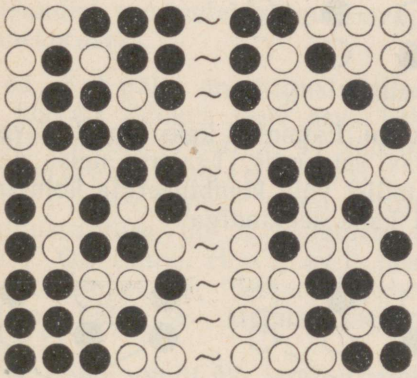
$$\left.-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right].$$

44. Esimene lahendusviis. Valgustusviiside arv, mil põleb üks lamp viiest lambist, on võrdne valgustusviiside arvuga, mil põleb 4 lampi viiest lambist (joon. 31).

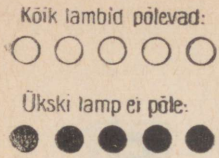


Joon. 31

Analoogiliselt, valgustusviiside arv, mil põleb 2 lampi viiest lambist, on võrdne valgustusviiside arvuga, mil 2 lampi viiest ei põle (s. t. põleb 3 lampi viiest). Need valgustusviisid on näidatud joonisel 32 (10 valgustusviisi, mil põleb 2 lampi, ja 10 valgustusviisi, mil põleb 3 lampi). On



Joon. 32



Joon. 33

veel kaks valgustusviisi (joon. 33) (kõik lambid põlevad, ükski lamp ei põle). Me vaatasime sellega läbi kõik valgustusviisid ja nüüd on neid kerge kokku lugeda.

Teine lahendusviis. 1) Olgu köögis üksainus lamp. See lamp võib olla kahes seisundis: ta võib kas põleda ● või mitte ○, s. t. valgustusviise on 2.

2) 2 lampi. Esimene lamp võib olla kahes seisundis: ● ja ○.

Kumbagi neist võib kombineerida teise lambi seisunditega: kui teine lamp ei põle, saame 2 valgustusviisi:



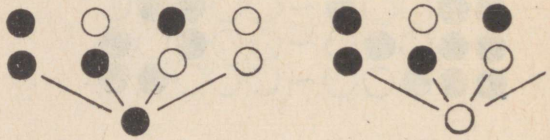
Kui teine lamp põleb, saame veel 2 valgustusviisi:



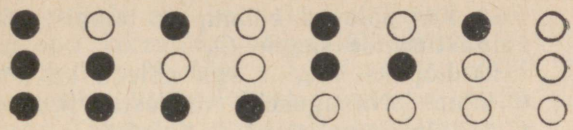
Valgustusviise on kokku 4:



3) 3 lampi. Esimesed kaks lampi võivad olla neljas seisundis. Igaühte neist neljast seisundist võib kombineerida kolmanda lambi kahe seisundiga:



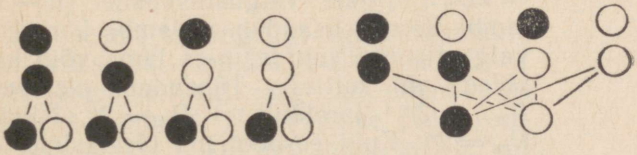
Valgustusviise on kokku 8;



4) 4 lampi. Esimesed kolm lampi võivad olla kaheksas seisundis. Igaühte neist võib kombineerida neljanda lambi kahe seisundiga. Saame $8 \cdot 2 = 16$ valgustusviisi.

5) 5 lampi. Saame $16 \cdot 2 = 32$ valgustusviisi.

Vaadeldud lahendusmeetod võimaldab ka väikseid modifikatsioone: üleminekut kahelt lambilt kolmandale võib illustreerida mitte ainult eespool toodud skeemiga, vaid ka järgmiste skeemidega.



Mõlemad need skeemid näitavad samuti, et ühe lambi lisamine (mis võib olla kahes seisundis) suurendab valgustusviiside arvu kahekordseks.

45. Kui palju on valgustusviise n lambi korral? Leiame selle arvu kahel meetodil (võrdle ülesande 44 lahendusega).

Esimene lahendusviis.

0) Ei põle ühtegi lampi. Niisuguseid valgustusviise on C_n^0 (põleb 0 lampi n-st). On ilmne, et $C_n^0 = 1$ mistahes n korral. Selleks et tõestatav valem näeks «ilus» välja, ei kirjuta me mitte **1**, vaid C_n^0.

1) Põleb ainult üks lamp n lambist. Niisuguseid valgustusviise on C_n^1.

2) C_n^2 tähistab valgustusviiside arvu, mille puhul põlevad 2 lampi n lambist.

k) Kui põlevad k lampi n lambist, siis valgustusviise saame C_n^k.

n) Lõpuks võivad aga põleda ka kõik n lampi. Niisuguseid valgustusviise on C_n^n. (On ilmne, et ka $C_n^n = 1$.)

Niisiis, kokku on valgustusviise

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \\ + \ldots + C_n^n.$$

Teine lahendusviis. Tähistame valgustusviiside arvu n lambi korral (millest igaüks võib kas põleda või mitte) sümboliga D_n. Tõestame induktsiooni teel, et $D_n = 2^n$ (sisuliselt on see juba tõestatud selle ülesande juhises).

D_1 — valgustusviiside arv ühe lambi korral on ilmselt võrdne 2-ga. $D_n = 2D_{n-1}$ (igale valgustusviisile $(n-1)$ lambi korral lisandub n lambi korral 2 valgustusviisi juurde: n-es lamp võib kas põleda või mitte). Tähendab, oletusest $D_{n-1} = 2^{n-1}$ järeldub, et $D_n = 2^n$. Niisiis $D_n = 2^n$. Kuid eespool me tõestasime, et

$$D_n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + \\ + C_n^k + \ldots + C_n^n.$$

Järelikult

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + \\ + C_n^n = 2^n.$$

46. Kui on ainult üks valgusfoor, siis sisselülitamisviise on 3. Lisame nüüd ühe valgusfoori juurde. Ühe valgusfoori igast sisselülitamisviisist, muutes teise seisundit, võime saada kahe valgusfoori korral kolm sisselülitamisviisi. Tähendab, lülitamisviiside arv suureneb kolm korda. Kokku on seega $3 \cdot 3 = 3^2$ võimalust. Lisame juurde kolmanda valgusfoori. Kahe valgusfoori igast sisselülitamisviisist võime uuesti saada kolm sisselülitamisviisi

kolme valgusfoori korral, kui muudame kolmanda seisundit. Uuesti suurenes lülitamisviiside arv kolm korda. Kolme valgusfoori korral on seega lülitamisviiside arv $3 \cdot 3^2 = 3^3$. Ühe valgusfoori lisamisel suureneb lülitamisviiside arv alati kolm korda. Tähendab, n valgusfoori võib panna põlema 3^n viisil.

47. Põlegu esimesed k valgusfoori mingil viisil (selliseid viise on 3^k, vt. ülesannet 46), seejuures võib ülejäänuid süüdata 2^{n-k} viisil (vt. ülesannet 45). Tähendab, k esimese valgusfoori igast sisselülitamisviisist võib saada 2^{n-k} kõigi valgusfooride sisselülitamisviisi. Tähendab, üldse on võimalusi $3^k \cdot 2^{n-k}$.

49. Vastus: $10^4 \cdot 32^3$ numbrit (tähestikus on 32 tähte).

50. Seame kuningriigi igale elanikule vastavusse 32-st nullist ja ühest koosneva jada järgmise reegli järgi: kui elanikul on esimene hammas, siis paneme jadas esimesele kohale 1, kui aga mitte, siis 0; kui elanikul on teine hammas, siis paneme jadas teisele kohale 1, kui aga mitte, siis 0; kui elanikul jne. (eeldame, et hambad on mingil kindlal viisil nummerdatud). Ülesande tingimusest on selge, et erinevatele elanikele on vastavusse seatud erinevad jadad ja seepärast kuningriigi elanike maksimaalne arv on lihtsalt võrdne selliste jadade arvuga. Niisuguste jadade arv on aga 2^{32} (vt. ülesannete 44 ja 45 lahendusi). Muide, $2^{32} \approx 4\,000\,000\,000$ (neli miljardit). See on rohkem kui kogu maakera elanikkond.

51. Vaatleme liidetavaid, mis me saame pärast sulgude avamist, kuid enne sarnaste liikmete koondamist. Iga selline liidetav on saja teguri korrutis, kusjuures

ükskõik milline neist tegureist on kas täht x või mingi number. Esimene tegur on kas x või -1, teine tegur on kaks x või -2 jne. Meid huvitavad ainult sellised korrutised, milles 99 korda esineb x ja 1 kord number. Niisuguseid korrutisi on 100, sest arv võib olla esimesel, teisel jne. sajandal kohal.

Vastavad korrutised on:

$$\underbrace{-1 \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{99\text{ korda}},$$

$$x \cdot (-2) \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{98\text{ korda}}, \ \ldots,$$

$$\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{99\text{ korda}} \cdot (-100).$$

Tähendab, x^{99} kordaja on

$$-(1+2+3+\ldots+100) =$$

$$= -\frac{101 \cdot 100}{2} = -5050.$$

(Sulgudes on aritmeetilise progressiooni summa. Vt. esimest peatükki.)

52. A. Järjekord on oluline. Sel juhtumil määratakse iga liidetavaiks lahutus esimese liidetavaga, milleks võib olla mistahes n-st väiksem naturaalarv (seejuures on muidugi ka teine liidetav naturaalarv). Tähendab, liidetavaiks lahutusi on üldse $n-1$.

B. Järjekord pole oluline. Kui n on paaritu arv, siis liidetavaiks lahutusi on kaks korda vähem kui juhtumil A, sest kirjutusi $n=1+(n-1)$ ja $n=(n-1)+1$, $n=2+(n-2)$ ja $n=(n-2)+2$ jne. loetakse nüüd samasteks. Vastus: $\frac{n-1}{2}$. Kui aga n on paarisarv, siis liidetavaiks lahutuse $n=\frac{n}{2}+\frac{n}{2}$

jaoks ei leidu paari, iga teise jaoks aga leidub. Siit saame vastuse:

$$1+\frac{(n-1)-1}{2}=\frac{n}{2}.$$

53. Loendame, kui palju on liidetavaiks lahutusi, kus esimeseks liidetavaks on 1. Teise ja kolmanda liidetava summa peab olema $n-1$. On ilmne, et selliseid lahutusi on nii palju, kui palju on arvu $n-1$ lahutusi kaheks liidetavaks. Kuid me juba teame, et neid on $n-2$ (vt. ülesande 52 lahendust). Täpselt samuti on lahutuste arv, milles esimene liidetav on 2, võrdne $(n-3)$-ga jne. Lahutusi, milles esimeseks liidetavaks on $n-2$, on üks. Nii olemegi loendanud kõik liidetavaiks lahutused. Neid on

$$(n-2)+(n-3)+\ldots+3+2+1=$$
$$=\frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

(Vasakul on aritmeetilise progressiooni liikmete summa.) Loendage samal viisil liidetavaiks lahutuste arv, kui liidetavaid on neli. Vastuseks sellele ülesandele saame:

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}.$$

Ülesande 53 veel ühte lahendamise võimalust vaata ülesande 60 lahenduse lõpus toodud märkusest.

54. Rakendame matemaatilise induktsiooni meetodit. $n=1$ korral (teine rida) on arvude summa 2. Tõestame, et $(n+1)$-se rea arvude summa on kaks korda suurem kui n-nda rea arvude summa. Selleks kirjutame Pascali kolmnurga n-nda ja $(n+1)$-se rea välja järgmisel kujul:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & & a & & b\ldots f & & g & & 1 \\ 0+1 & & 1+a & & a+b & \ldots & f+g & & g+1 & & 1+0 \end{array}$$

Leiame nüüd $(n+1)$-se rea arvude summa

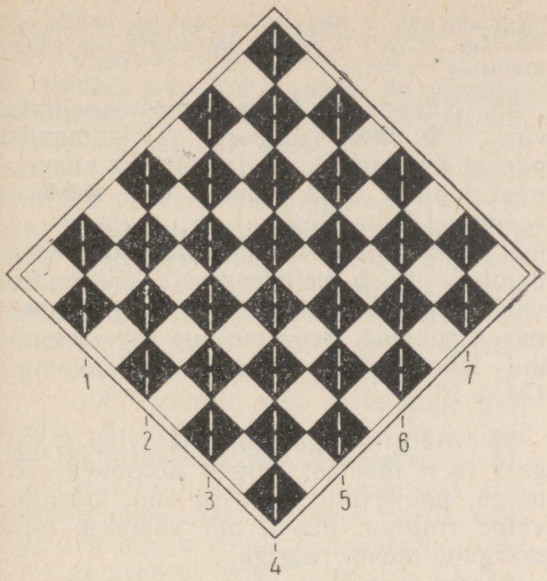
$$(0+1)+(1+a)+(a+b)+\ldots+$$
$$+(f+g)+(g+1)+(1+0).$$

Selleks liidame algul iga sulgavaldise esimesed liidetavad, seejärel aga teised. Saame

$$(0+1+a+b+\ldots+f+g+1)+$$
$$+(1+a+b+\ldots+g+1+0)=$$
$$=2(1+a+b+\ldots+f+g+1).$$

Vasakul on $(n+1)$-se rea arvude summa, paremal aga n-nda rea arvude kahekordne summa. Nüüd on selge, et $(n+1)$-se rea arvude summa on 2^n.

55. Ülesande juhises (lk. 163) on toodud konkreetne näide 14 oda paigutamise kohta. Järelikult on 14 oda võimalik nii paigutada, nagu ülesandes nõutud. Kui tõestame, et rohkem kui 14 oda selliselt paigutada ei saa, siis ülesande esimene pool on lahendatud. Vaatleme algul mustaväljalisi odasid. Kui palju on neid võimalik paigutada malelauale, et nad ei lööks üksteist? 7 oda saab nii paigutada; tõestame, et rohkem pole võimalik. Võtame 7 musta diagonaali, mis on üksteisega paralleelsed (joon. 34). Ühel diagonaalil võib paikneda maksimaalselt üks oda. Seepärast on vastuseks 7. Kui võtame mustad diagonaalid, mis on endistega risti, siis saame neid 8 (äärmised koosnevad ainult ühest ruudust). Vaadeldes neid diagonaale, võiksime samuti veenduda, et rohkem kui seitse oda nendele diagonaalidele paigutada ei saa (tõepoolest, kui nendele oleks paigutatud kaheksa oda, mis ei löö üksteist, siis kaks neist peavad paiknema äärmistel diagonaalidel. Kuna aga äärmised diagonaalid koosnevad ühest ruudust, siis need odad peavad asetsema malelaua



Joon. 34

vastasnurkades, s. t. nad peavad lööma teineteist). See arutlus on aga üleliigne, sest me saame tulemuse palju lihtsamal viisil, valides diagonaalid nii, nagu seda on tehtud joonisel 34.

Valgeväljalisi odasid, mis ei löö üksteist, on samuti 7. Valgeväljalised ja mustaväljalised odad ei saa üksteist lüüa. Tähendab malelauale võib maksimaalselt paigutada 14 oda, mis ei löö üksteist.

Tähistame 7 üksteist mittelööva valgeväljalise oda paigutusviiside arvu V-ga; 7 üksteist mittelööva mustaväljalise oda paigutusviiside arvu M-ga ja lõpuks 14 üksteist mittelööva oda paigutusviiside arvu O-ga. Ilmne, et $V = M$, $O = V \cdot M = (M)^2$, s. t. O on mingi arvu ruut.

Märkus. Lahendage üldisem ülesanne. Olgu laua mõõtmed $n \times n$, kus n on paarisarv. Tõestage, et suurim arv odasid, mis saab sellele lauale

paigutada nii, et nad ei löö üksteist, on $2n-2$. Tõestage, et $2n-2$ üksteist mittelööva oda paigutusviiside arv on 2^n.

56. Näiteks üks õunte ja pirnide võtmise viis: ○●○●● (esimesel ja kolmandal päeval õun, teisel, neljandal ja viiendal päeval pirn), teine võtmise viis: ●●●○○ (esimesel kolmel päeval pirn, viimasel kahel päeval õun). Niisiis, ülesande lahendamiseks tuleb meil loendada kõik kahest valgest ja kolmest mustast ringist koosnevad rühmad. Seda me aga juba tegime, kui lahendasime ülesannet 44. Vastus: $C_5^2 = 10$.

57. Märgime iga jaotamise viisi k valgest ja n mustast ringist koosneva rühmaga; päevi, mil võetakse õun, märgime valge ringiga; päevi, mil võetakse pirn, märgime musta ringiga.

Antud ülesanne on seega ekvivalentne järgmisega.

Meil on $(n+k)$ lampi. Tuleb leida valgustusviiside arv, mille puhul põleb k lampi.

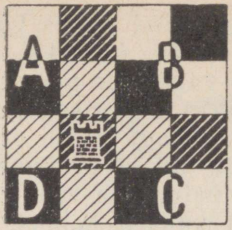
Meenutame, et selle arvu me tähistame sümboliga C_{n+k}^k (selle sümboli võiksime kirjutada ka n ja k sisaldava avaldisena, kui võrdleme saadud vastust ülesannete 60, 66 ja 67 tulemustega).

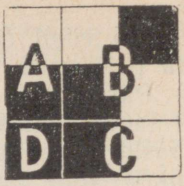
59. Me juba tõestasime, et igal vertikaalil paikneb ainult üks vanker (vt. juhist). Arusaadavalt paikneb ka igal horisontaalil ainult üks vanker. Vanker vertikaalil a võib olla paigutatud ükskõik missugusele väljale kaheksast (kõik horisontaalid olid vabad). Pärast seda aga, kui vanker on lauale paigutatud, on üks horisontaal juba kinni (kui näiteks vanker asub väljal $a2$, siis horisontaalile 2 ei saa enam paigutada teisi vankreid). Seepärast vertikaalile b võib vankrit paigutada vaid

seitsmel viisil (äsjavaadeldud näites võib teda paigutada väljadele $b1$, $b3$, $b4$, ..., $b8$). Pärast seda, kui b vanker on paigutatud lauale, on kinni juba 2 horisontaali, vabasid horisontaale jääb aga 6, nii et c vankrit võib paigutada mistahes kuuele väljale. d vankrit võib paigutada viiel viisil, e vankrit neljal, f vankrit kolmel, g vankrit kahel ja h vankrit ainult ühel viisil. Niisiis, a vankrit võib paigutada lauale kaheksal viisil. a ja b vankrite paigutamisviiside arv on $8 \cdot 7$. a, b ja c vankrite paigutamisviiside arv on $8 \cdot 7 \cdot 6$ jne. a, b, c, ..., h vankreid võib malelauale paigutada $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$ viisil (! on faktoriaali sümbol, vt. ülesannet 5). Et kontrollida, kas saite lahendusest aru, lahendage ülesanne: «Mitmel viisil võib paigutada $n \times n$ ruuduga lauale n vankrit nii, et need ei lööks üksteist?» Vastus: $n!$ Kontrollige veel kord ennast. Nüüd lahendame ülesande 59 teisel viisil, kusjuures saame .... erineva vastuse (?!). Kui usute, et esimene lahendus oli õige, siis otsige üles viga teises lahenduses.

Teise lahenduse anname otsekohe $n \times n$ ruuduga laua jaoks. Tähistame n vankri (mis ei löö üksteist) paigutusviiside arvu $n \times n$ ruuduga lauale sümboliga L_n. Tõestame, et $L_n = (n!)^2$.

Tõestuseks kasutame matemaatilise induktsiooni meetodit. $n = 1$ puhul on teoreem ilmselt õige: $L_1 = (1!)^2$ (ühest väljast koosnevale lauale saab panna ühe vankri ühel viisil). Näitame, et kui $L_{n-1} = [(n-1)!]^2$, siis $L_n = (n!)^2$. Selleks on piisav tõestada, et $L_n = n^2 \cdot L_{n-1}$. Vaatleme vankritest ühte. Seda vankrit võib paigutada mistahes n^2 väljale. Edaspidist arutlust illustreerime joonistega, kusjuures joonistel $n = 4$. Niisiis, olgu esimene vanker paigutatud mingile väljale (väljale P, joon. 35). Eraldame lauast vertikaali ja





Joon. 35

horisontaali, mis läbivad välja P (joonisel on see vertikaal ja horisontaal viirutatud). Ülejäänud vankreid ei saa paigutada sellele vertikaalile ja horisontaalile. Osadest, milleks jaotus laud (joonisel on need osad tähistatud tähtedega A, B, C ja D), paneme kokku uue laua mõõtmetega $(n-1)\times(n-1)$, nihutades selleks neid osi paralleelselt iseendaga. Paigutame nüüd lähtelauale kõik n vankrit nii, et need ei lööks üksteist ja et esimene vanker paikneks väljal P. Seejuures kõik vankrid, peale esimese, paiknevad viirutamata väljadel. Nihutame osasid A, B, C ja D koos nendel asuvate vankritega. Siis saadud $(n-1)\times(n-1)$ ruuduga laual saame $n-1$ vankri paigutuse, kusjuures vankrid ei löö üksteist. Vankrite erinevale paigutusele esimesel laual vastab seejuures vankrite erinev paigutus teisel laual ja vankrite iga paigutuse teisel laual võib saada sel viisil. Üldse on erinevaid paigutusi teisel laual L_{n-1}. Välja P võib aga valida n^2 viisil. Tähendab, $L_n = n^2 \cdot L_{n-1}$. Kus on viga?

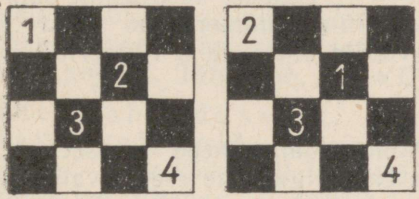
Võib-olla pole viga leida sugugi lihtne. Seda enam, et tõestus pole väga kerge. Et kergendada teie otsinguid, toome veel ühe tõestuse (juba juhu $n = 4$ kohta).

Niisiis, mitmel viisil võib paigutada 4 vankrit 4×4 ruuduga lauale nii, et nad ei lööks üksteist?

Esimese vankri võib paigutada ükskõik millisele 16 väljast. Pärast seda, kui esimene vanker on paigutatud mingile väljale (vt. joon. 35), võib teisi vankreid paigutada vaid viirutamata väljadele. Tähendab, teise vankri võib paigutada lauale üheksal viisil. Kolmanda vankri paigutamiseks (kui esimesed kaks on paigutatud) jääb neli välja. Lõpuks, neljandat vankrit võib (kui esimesed kolm on paigutatud) paigutada ühelainsal viisil (et vankrid ei lööks üksteist). Niisiis $L_4 = 16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1 = (4!)^2$.

Kus on viga? Mõtelge, enne kui loete edasi.

Lahendus oleks õige, kui vankrid oleksid nummerdatud. Sel korral oleksid joonisel 36 kujutatud paigutused erinevad. Kui aga vankrid pole nummerdatud, siis on see üks ja sama paigutus (joon. 37).



Joon. 36

Niisiis, me tõestasime 2 järgmist teoreemi.

1) n vankri [1] paigutusviiside arv $n \times n$ ruuduga laual on $n!$, kui vankrid pole erisugused.

2) n vankri [1] paigutusviiside arv $n \times n$ ruuduga laual on $(n!)^2$, kui vankrid on erisugused (nummerdatud).



Joon. 37

Kumbki neist teoreemidest järeldub kergesti teisest. Veendume selles uuesti, kui $n = 4$ (seejärel üldistage seda arutlust).

[1] mis ei löö üksteist

Märgime 4×4 ruuduga lauaI 4 välja, mis rahuldavad järgmist nõuet: kui paigutada nendele väljadele 4 vankrit, siis need ei löö üksteist. Tähistame märgitud väljad tähtedega *a, b, c* ja *d*. On selge, et 4 välja valikuviiside arv on l_4. Kirjutame vankritele numbrid: 1, 2, 3 ja 4. Olgu P_4 vankrite 1, 2, 3 ja 4 erinevate ümberpaigutuste arv väljadel *a, b, c* ja *d*. Arv P_4 muidugi ei sõltu märgitud väljade valiku viisist: kui *A, B, C* ja *D* on mingid teised märgitud väljad, siis vankrite 1, 2, 3 ja 4 erinevate paigutuste arv väljadel *A, B, C* ja *D* on samuti P_4. Seepärast $L_4 = P_4 \cdot l_4$. Jääb veel leida, millega on võrdne P_4. Tehke seda ise. Vastus: $P_4 = 4!$. Seega $L_4/l_4 = 4!$. On õige ka üldine valem $L_n/l_n = n!$ (kontrollige!). Seepärast, teades, et $l_n = n!$, leiame, et $L_n = (n!)^2$; ja ümberpöördult, teades, et $L_n = (n!)^2$, leiame, et $l_n = n!$. Eespool kasutasime sümbolit P_n; P_n on n nummerdatud vankri paigutamisviiside arv laua n fikseeritud väljale.

60. Nummerdame need n eset: 1, 2, 3, ... n. Nüüd iga kahe eseme valiku viis n esemest vastab arvude paarile (valitud esemete numbrid), kusjuures paarid (k, m) ja (m, k) määravad ilmselt ühe ja sama viisi. Niisiis, C_n^2 võrdub paaride $(1, 2), (1, 3), \ldots, (n-1, n)$ arvuga.



Paaris võib esimesel numbril olla n väärtust, teisel aga järele jäänud $n-1$ väärtust. Üldse on paare $n(n-1)$. Kuid seejuures on arvestatud mõlemaid numbrite paare (k, m) ja (m, k), kuigi nad määravad esemete ühe ja sama paari. Tähendab

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Märkus. Nüüd võime ülesande 53 lahendada hoopis teisiti.

Arvu n jaotamist 3-ks liidetavaks võib endale ette kujutada nii: traatvardale (nagu arvelaual) on lükitud n nuppu, seejärel nihutatakse nupud laiali kahte kohta. Nuppude vahel on $n-1$ vahemikku. Valida neist kahte (kus me nuppe laiali nihutame) võib C_{n-1}^2 viisil. Niisiis, vastus:

$$C_{n-1}^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

62. Tähistame jaotusviiside arvu, mis näitab, mitmel viisil on isal võimalik 5 paarikaupa erinevat apelsini jaotada oma kaheksale pojale, sümboliga A_8^5. Leiame A_8^5 kahel meetodil.

Esimene lahendusviis. Kaheksast pojast viie poja valikuviiside arv (kes saavad apelsini) on C_8^5. Igale niisugusele valikule vastab 5! apelsinide jaotusviisi (5 paarikaupa erineva apelsini jaotusviiside arv viiele pojale). Tähendab, $A_8^5 = C_8^5 \cdot 5!$.

Teine lahendusviis. Esimese apelsini võib anda ükskõik kellele 8-st pojast. Teise — ükskõik kellele ülejäänud 7-st pojast jne. Viienda — ükskõik kellele ülejäänud 4-st pojast (ülejäänud 3 poega ei saa apelsine). Niisiis,

$$A_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{8!}{3!}.$$

63. Tõestame, et Pascali kolmnurga $(n+1)$-se rea $(k+1)$-sel kohal paikneb C_n^k. Väite tõestame matemaatilise induktsiooni meetodiga n suhtes. $n = 1$ korral on teoreem õige. Tõepoolest, Pascali kolmnurga teises reas esimesel kohal on $1 = C_1^0$ ja teisel kohal $1 = C_1^1$. Eeldame, et teoreem on õige n korral. Tõestame, et siis on ta õige ka $n+1$ korral. Kui $k = 0$ või $k = n+1$, on teoreem õige, sest

$C^0_{n+1} = 1$, $C^{n+1}_{n+1} = 1$, aga Pascali kolmnurga igas reas on esimesel ja viimasel kohal 1. Meenutame nüüd, et C^k_n on n lambist k lambi sisselülitamisviiside arv. Vaatame, kui palju on lülitamisviise, kui lampe on $n+1$ ja sisse tuleb lülitada k lampi. Kui viimane lamp põleb, siis ülejäänud võivad põleda C^{k-1}_n viisil (ülejäänud lampidest võime sisse lülitada mistahes $k-1$). Kui aga viimane lamp ei põle, siis ülejäänud võib sisse lülitada C^k_n viisil. Sellega on tõestatud, et $C^k_{n+1} = C^{k-1}_n + C^k_n$. Eelduse põhjal paikneb Pascali kolmnurga $(n+1)$-ses reas arv C^k_n. Pascali kolmnurga järgmises reas paiknevad aga definitsiooni põhjal arvud:

$$1,\ C^0_n + C^1_n,\ C^1_n + C^2_n,\ \ldots,\ C^{n-1}_n + C^n_n,\ 1.$$

Tõestatu põhjal võime selle rea kirjutada ka nii:

$$1,\ C^1_{n+1},\ C^2_{n+1},\ \ldots,\ C^n_{n+1},\ 1.$$

See aga ütlebki, et teoreem on õige ka $n+1$ korral. Teoreem on tõestatud.



66. Leiame algul, mitmel viisil võib n esemest välja valida 3 eset kindlas järjekorras. Esimeseks võib võtta mistahes eseme, teiseks — mistahes eseme $(n-1)$-st ülejäänust, kolmandaks — mistahes eseme $(n-2)$-st ülejäänust. Kokku on $n(n-1)(n-2)$ võimalust. Nii toimides saame aga sama esemete kogumi (järjekorda arvestamata) kuuel korral (esemetest A, B ja C koosneva kogumi võime saada kuuel viisil: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Tähendab, n esemest kolme eseme valik (valiku järjekorda arvesta-

mata) võib toimuda $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ viisil.

67. Definitsiooni järgi saab n esemest k eset välja valida C_n^k viisil. Käesoleva ülesande võib lahendada (s. t. leida C_n^k jaoks valem) selsamal viisil nagu eelmise ülesandegi. Võib aga kasutada ka induktsiooni. Me tõestasime ülesandes 63, et

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k .$$

P

Tõestame induktsiooni abil n suhtes, et

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

P

(lepime kokku, et $0! = 1$). $n = 1$ korral on väide õige. Oletame, et ta on õige ka n korral. Siis eelduse põhjal

$$C_{n+1}^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{(k-1)!} +$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{(k-1)!} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{n-k+1}{k}\right) =$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n+1-k+1)}{k!} .$$

Me tõestasime, et väide on õige ka $n+1$ korral. Seega on induktsiooni põhjal väide alati õige. Saadud valemi võib kirjutada ka kujul

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

Arvu C_n^k nimetatakse *kombinatsioonide arvuks n elemendist k-kaupa.*

P

C_n^k on n esemest k eseme valikuviiside arv valiku järjekorda arvestamata.

Ka on olemas spetsiaalne sümbol n esemest k eseme valikuviiside arvu märkimiseks, kui arvestatakse valiku järjekorda, nimelt: A_n^k. Me juba kasutasime seda tähistusviisi ülesande 62 lahenduses; seal tõestasime valemi: $A_8^5 = C_8^5 \cdot 5! = \frac{8!}{3!}$.

Analoogiline valem on õige ka üldjuhul:

$$A_n^k = C_n^k k! = \frac{n!}{(n-k)}.$$

Kontrollige seda!

P

Arvu A_n^k nimetatakse *variatsioonide arvuks n elemendist k-kaupa.*

$k = n$ korral nimetatakse arvu A_n^k *permutatsioonide arvuks n elemendist* ja tähistatakse sümboliga P_n.

Väljendid «kombinatsioonide arv n elemendist k-kaupa» ja «permutatsioonide arv n elemendist» ning tähistus C_n^k on üldkasutatavad. Väljendit «variatsioonide arv n elemendist k-kaupa» ning tähistusi A_n^k ja P_n kasutatakse aga harvemini.

70. Iga liige, mis saadakse pärast sulgude avamist avaldises

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1) \times \times (f+1)(g+1)$$

on s e i t s m e teguri korrutis (sest sulgusid on seitse). Iga tegur neist on kas täht või number 1. Niisiis, me peame leidma seitsme teguri korrutiste arvu, kusjuures need tegurid võivad olla «kahes olekus». Tähendab, antud ülesanne on ekvivalentne järgmisega: leida valgustusviiside arv, kui lampe on seitse ja igaüks neist võib põleda või mitte. V a s t u s: 2^7.

71. Lugege läbi ülesande 70 lahendus. Meid huvitavad sellised korrutised, mil-

les esineb 3 korda täht ja 4 korda number 1. Niisuguseid korrutisi on sama palju kui võimalusi 7-st tähest 3 tähe valikuks, s. t. $C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$.

Märkus. Korrates peaaegu sõna-sõnalt selle ülesande lahendust, võib tõestada, et pärast sulgude avamist avaldises $(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + an)$ saame C_n^k liiget, milles on k tähte.

72. Avame avaldises $(1 + x + y)^{20}$ sulud, kuid sarnaseid liikmeid ei koonda. Iga seejuures saadud liige on kahekümne teguri korrutis. Mistahes liige neist on kas 1, x või y. Tähendab, antud ülesanne on ekvivalentne järgmisega: mitmel viisil võib süüdata 20 valgusfoori, kui igaühes neist võib põleda kas punane, kollane või roheline tuli?

Vastus: 3^{20} (võrrelge ülesandega 70).

73. Vastus: x^{17} kordaja on $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{2}$. x^{18} kordaja on 0.

74. Lugege läbi ülesande 71 lahenduse lõpus olev märkus. Võrrelge kahte avaldist:

$$(1+x)^{56} \text{ ja } (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_{56}).$$

Kui $a_1 = a_2 = \ldots = a_{56} = x$, siis saame teisest avaldisest esimese.

Pärast sulgude avamist saame avaldises $(1 + a_1)(1 + a_2) \times \ldots \times (1 + a_{56})$ C_5^8 liiget, milles on 8 tähte. Neist iga liige muutub pärast tähtede a_1, a_2, ..., a_{56} asendamist x-ga astmeks x^8.

Tähendab, x^8 kordaja avaldises $(1 + x)^{56}$ (pärast sulgude avamist ja sarnaste liikmete koondamist) on C_{56}^8.

Analoogiliselt, x^{48} kordaja on C_{56}^{48}.

Märkus. Arvud C^8 ja C^{48} on võrdsed. Seepärast x^8 ja x^{48} kordajad avaldises $(1 + x)^{56}$ on võrdsed. Täpselt samuti on omavahel võrdsed ka

x^6 ja x^{50} kordajad avaldises $(1+x)^{56}$. Üldiselt, avaldises $(1+x)^n$ on x^k ja x^{n-k} kordajad võrdsed; $C_n^k = C_n^{n-k}$.

75. Valemi

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n$$

tõestamisel tuleb peaaegu sõna-sõnalt korrata ülesande 74 lahendust.

76. Tõestame väite induktsiooni meetodi abil. $n = 1$ korral on väide õige: $(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x$, binoomkordajad ühtivad Pascali kolmnurga teise rea arvudega.

Oletame, et väide on õige $n-1$ korral, s. t.

$$(1+x)^{n-1} = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1} x^{k-1} + a_k x^k + \ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

kus $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, \ldots, a_{n-1}$ on Pascali kolmnurga n-nda rea arvud.

Tõestame, et sel korral on väide õige ka n korral. Teiste sõnadega, tuleb tõestada, et

$$(1+x)^n = b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k + \ldots + b_n x^n,$$

kus $b_0, b_1, \ldots, b_k, \ldots, b_n$ on Pascali kolmnurga $(n+1)$-se rea arvud.

Pascali kolmnurga definitsiooni põhjal on $b_0 = 1$, $b_1 = a_0 + a_1$, $\ldots$, $b_k = a_{k-1} + a_k$, $\ldots$,

$b_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-1}$, $b_n = 1 (= a_{n-1})$.

Niisiis, tuleb tõestada, et

$$(1+x)^n = 1 + (a_0 + a_1)x + \ldots + (a_{k-1} + a_k)x^k + \ldots + (a_{n-2} + 1)x^{n-1} + 1 \cdot x^n.$$

Kuid see on ilmne:

$$(1+x)^n = (1+x)^{n-1} \cdot (1+x) = (a_0 + a_1 x + \ldots +$$

$$+ a_k x^k + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}) \times$$
$$\times (1 + x) = a_0 + a_1 x + \ldots +$$
$$+ a_k x^k + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} +$$
$$+ a_0 x + a_1 x^2 + \ldots +$$
$$+ a_k x^{k+1} + \ldots + a_{n-1} x^n =$$
$$= a_0 + (a_0 + a_1) x + \ldots +$$
$$+ (a_{k-1} + a_k) x^k + \ldots +$$
$$+ (a_{n-2} + a_{n-1}) x^{n-1} + a_{n-1} x^n.$$

78. Kuna $(a+b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$, siis liige, mis sisaldab a^k, on võrdne avaldisega

$$C_n^k a^k b^{n-k}.$$

79. Leiame algul kõik x^k-ga liikmed. Kirjutame

$$(x + y + z)^n = [x + (y + z)]^n = \ldots +$$
$$+ C_n^k x^k \cdot (y + z)^{n-k} + \ldots$$

Nüüd leiame avaldises $(y + z)^{n-k}$ liikme, milles sisaldub y^l:

$$(y + z)^{n-k} = \ldots + C_{n-k}^l y^l z^{n-k-l} + \ldots$$

Siit selgub, et $x^k x^l$ sisaldav liige on

$$C_n^k C_{n-k}^l x^k y^l z^{n-k-l}.$$

Avaldist $C_n^k C_{n-k}^l$ võib veidi teisendada:

$$C_n^k C_{n-k}^l = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} =$$
$$= \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}.$$

80. Kui samasuses

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots +$$
$$+ C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$$

võtta $x = 1$, saame

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots +$$
$$+ C_n^{n-1} + C_n^n.$$

$x = -1$ korral saame

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n.$$

Liites ja lahutades need võrdused liikmeti, saame

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}.$$

81. Kui avaldises $(1 + x - 3x^2)^{1965}$ avada sulud ja koondada sarnased liikmed, saame hulkliikme $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$. Märgime, et selle hulkliikme kordajate summa on võrdne hulkliikme väärtusega kohal $x = 1$:

$$a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 + \ldots = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Arusaadavalt pole tarvis avada sulgusid ega koondada sarnaseid liikmeid. On piisav, kui võtta lähteavaldises $x = 1$. Saame

$$(1 + 1 - 3 \cdot 1^2)^{1965} = (-1)^{1965} = -1.$$

Niisiis, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = -1$.

86. Vastus: $C_n^2 - n$. Lahendus: võtame kõik hulknurga erinevate tippude paarid (selliseid paare on C_n^2) ja ühendame need tipud sirglõikudega. Saame C_n^2 lõiku. Nende seas on n külge, ülejäänud on aga diagonaalid, s. t. diagonaale on $C_n^2 - n$.

91. Kirjutame ülesande tingimused välja kompaktsemalt:

i	s	p	is	sp	pi	isp
6	6	7	4	3	2	1

Oletame, et toast väljus inimene, kes oskab kolme keelt. Siis kohalejäänutest ei oska ükski rohkem kui kahte keelt ja me saame järgmise tabeli:

i	s	p	is	sp	pi	isp
5	5	6	3	2	1	0

Oletame nüüd, et toast väljus kolm inimest, kes oskavad inglise ja saksa keelt; nende inimeste arv aga, kes oskavad teisi keelte paare, ei muutu (sest ükski toas viibivatest inimestest ei oska kolme keelt):

i	s	p	is	sp	pi	isp
2	2	6	0	2	1	0

Pärast seda, kui toast väljub kaks inimest, kes oskavad saksa ja prantsuse keelt, ja üks, kes oskab prantsuse ja inglise keelt, saame ülesande:

i	s	p	is	sp	pi	isp
1	0	3	0	0	0	0

Viimase ülesande lahendamine ei paku aga raskusi: tuppa jäi üks inimene, kes oskab ainult inglise keelt, ja veel kolm, kes oskavad ainult prantsuse keelt; kokku neli inimest. Kuna toast on väljunud seitse inimest, siis algul oli toas 11 inimest. Neist ainult inglise keelt oskab üks.

92. Liidame k antud raamatut läbilugenud inimeste arvud kõigi raamatukogumite järgi k raamatust. Saadud summa tähistame sümboliga S_k. Tõestame, et

$$S = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \ldots + (-1)^{n-1} S_n$$

ongi lugejate arv raamatukogus.

Võtame lugeja, kes on läbi lugenud

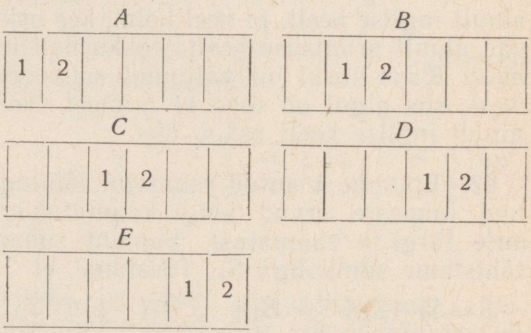
täpselt k raamatut, ja vaatame, kui suur on tema osa summa S igas liidetavas. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et see lugeja on läbi lugenud k esimest raamatut. Liidetavas S_1 on selle lugeja osa $k(=C_k^1)$, sest ta kuulub nende lugejate hulka, kes on läbi lugenud esimese, teise, kolmanda jne. k-nda raamatu. Summas S_2 on selle lugeja osa C_k^2, sest ta kuulub lugejate hulka, kes on läbi lugenud iga raamatute paari k esimesest raamatust. Analoogiliselt, summas S_m on selle lugeja osa C_k^m, kui $m \leqslant k$, ja 0, kui $m > k$. Tähendab, selle lugeja osa summas S on

$$C_k^1 - C_k^2 + C_k^3 + \ldots + (-1)^{k-1} C_k^k.$$

Kuid me teame, et $-C_k^0 + C_k^1 - C_k^2 + C_k^3 + \ldots + (-1)^{k-1} C_k^k = 0$ ja $C_k^0 = 1$. Tähendab, selle lugeja osa summas S on võrdne 1-ga. Arutlus on rakendatav mistahes lugeja kohta. Järelikult, S on võrdne lugejate arvuga raamatukogus, mida oligi tarvis tõestada.

Märkus. Pole raske näha, et ülesanne 91 on ülesande 92 erijuhus. Ent ülesande 91 lahendusmeetodit võib kasutada ka ülesande 92 juures.

93. Vaatleme viit telefoninumbrite hulka:



(näiteks koosneb hulk B telefoninumbritest, milles teisel-kolmandal kohal on 12,

ülejäänud kohtadel aga ükskõik millised numbrid). Igas niisuguses hulgas on 10^4 telefoninumbrit. Hulkades A ja B pole ühtegi ühist telefoninumbrit, hulkades A ja C on aga ühiseid 10^2 tükki. Nende kuju on

1	2	1	2		

On kerge leida, et telefoninumbreid, mis kuuluvad korraga mingisse kahte hulka, on $6 \cdot 10^2$ tükki. Üksainus telefoninumber (1 2 1 2 1 2) on aga niisugune, mis kuulub igasse kolme hulka. Nüüd võib kas ülesande 91 või ülesande 92 lahendusmeetodiga kergesti näidata, et otsitav arv on

$$5 \cdot 10^4 - 6 \cdot 10^2 + 1 = 49\,401.$$

III. peatükk

95. Kui kogu ööpäeva jooksul vihma ei sadanud, tegid mõlemad õpilased märgi «+». Kui aga kogu aeg sadas, tegid õpilased märgi «—». Kui hommikul sadas, päeval ja õhtul oli aga kuiv, tegi esimene õpilane märgi «—», teine aga märgi «+».

Juhtum «+—» pole võimalik, sest et esimene õpilane tegi märgi «+» ainult sel juhtumil, kui vihma üldse ei sadanud. Kuid siis pidi ka teine õpilane tegema märgi «+».

96. Kui esimene õpilane tegi märgi «+», tähendab see, et vihma üldse ei sadanud. Sel korral tegid ka teised kaks õpilast märgi «+». Üldhinnang on «+ + +». Kui esimene tegi märgi «—», kolmas aga märgi «+», siis see tähendab, et vihma sadas täpselt üks kord kolmest. Sel korral peab teine õpilane tegema märgi «+». Üldhinnang on «— + +». Kui

aga esimene ja kolmas tegid märgi «—», tähendab see, et vihma tuli kahel korral kolmest või kõigil kolmel korral. Esimesel juhtumil tegi teine õpilane märgi «+», teisel juhtumil märgi «—». Üldhinnang on «— + —» või «— — —». Kuna me analüüsisime läbi kõikvõimalikud juhtumid, siis teisi hinnanguid olla ei saa.

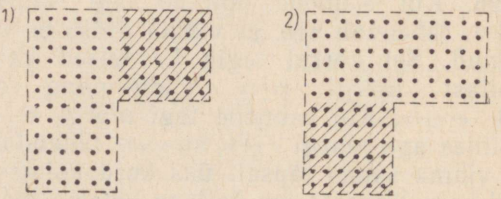
Teine lahendusviis. Vihma võib sadada 0, 1, 2 või 3 korda. Vastus järeldub tabelist.

Mitu korda sadas vihma / Hinnangud	0	1	2	3
1. õpilane	+	—	—	—
2. õpilane	+	+	+	—
3. õpilane	+	+	—	—

97. a) Olgu A lühim pikematest ja B pikim lühematest. Võrdleme neid C-ga — inimesega, kes seisab samas reas kus A ja samas kolonnis kus B. Et A on pikim oma reas, siis on ta C-st pikem, aga et B on lühim oma kolonnis, siis on ta C-st lühem. Tähendab, A on pikem B-st.

b) Vaatleme kahte paigutust (joon. 38).

Kui viirutatud kohtadesse paigutada pikemat kasvu inimesed võrreldes ülejäänu-



Joon. 38

tega, siis esimesel juhtumil osutub lühim pikematest pikemaks, teisel juhtumil aga lühemaks kui lühematest pikim (kontrollige!).

Mõtelge järele, miks esimesel juhtumil neist kahest juhtumist ei saa rakendada sedasama arutlust mis ülesande a) lahendamisel.

99. Eeldame, et iga õpilane lahendas vaid ühe ülesande, kuid nii, et iga ülesande oli keegi lahendanud. Sel juhtumil on kontrolltöö raske a) mõttes ja kerge b) mõttes.

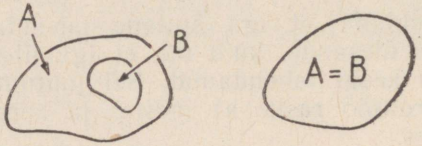
100. Võrdused $3+4=7$ ja $2+7=9$ näitavad, et teoreemid 2, 3, 4 ja 5 on õiged. Teoreem 1 on ilmne. Teoreemi 6 on kerge tõestada vastuväiteliselt.

101. Teoreemi 8 on kerge tõestada vastuväiteliselt (kui teoreem 1 on õige). Tõepoolest, olgu teoreem 8 vale. See tähendab, et $\overline{\mathbf{B}}$-st ei järeldu $\overline{\mathbf{A}}$, s. t. on võimalik juhtum, mil $\overline{\mathbf{B}}$ kehtib ja $\overline{\mathbf{A}}$ ei kehti. Kuid see tähendab, et **B** pole kehtiv, **A** aga on. Teoreemi 1 põhjal pole see aga võimalik.

Teoreemide 4 ja 5 korral võib valida väidete **A** ja **B** sellised näited, mille puhul need teoreemid on õiged, ja sellised, mille puhul need pole õiged. Eriti ilmekad näited võib koostada nii. Olgu A ja B kaks punktihulka tasandil. **A**-ks võtame väite «Punkt M kuulub hulka A», **B**-ks aga väite «Punkt M kuulub hulka B». Siis teoreem 1 tähendab, et hulk A sisaldub tervikuna hulgas B; teoreem 2 tähendab, et A täiend [1] sisaldub hulgas B; teo-

[1] Mingi hulga A täiendiks tasandil nimetatakse tasapinna kõigi punktide hulka, mis ei kuulu A-sse. Näiteks on ülemise pooltasandi (kaasa arvatud x-telg) täiendiks alumine pooltasand (x-telg pole kaasa arvatud).

reem 3 tähendab, et A sisaldub hulga B täiendis jne. Sõnastage ise ülejäänud teoreemid ja tehke hulkade A ja B kohta joonised, mille puhul need teoreemid on õiged, ja joonised, mille puhul need teoreemid pole õiged. Vajalike jooniste tegemiseks vaadelge joonist 39.



Joon. 39

Analüüsige need juhtumid iseseisvalt läbi ja veenduge, et teoreemid 4 ja 5 võivad olla nii õiged kui ka valed.

Mõistagi võib tuua ka teisi näiteid (näiteks ülesandest 100 teoreemid 1 ja 6 või mõningaid tuttavaid teoreeme geomeetriast ja algebrast). Tõestame nüüd, et teoreemid 2, 3, 6 ja 7 pole õiged.

Kui teoreem 2 oleks õige, siis saaksime järgmise skeemi:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\text{teoreem 1}} \mathbf{B} \xleftarrow{\text{teoreem 2}} \overline{\mathbf{A}}$$

(kui **A** on õige, siis **B** on õige teoreemi 1 põhjal, kui $\overline{\mathbf{A}}$ pole õige, siis **B** on õige teoreemi 2 põhjal). Seega, väide **B** võib olla alati õige, kuid me leppisime kokku selliseid väiteid mitte vaadelda.

Kui teoreem 3 on õige, siis

$$\overline{\mathbf{B}} \xleftarrow{\text{teoreem 3}} \mathbf{A} \xrightarrow{\text{teoreem 1}} \mathbf{B}.$$

Tähendab, kui mingil juhtumil väide **A** on õige, siis on õiged ka kaks teineteisele vasturääkivat väidet **B** ja $\overline{\mathbf{B}}$, mis pole aga võimalik. Niisiis, **A** pole kunagi õige. Kuid selliseid väiteid me ei vaatle.

Kui on õige teoreem 6, siis

$$\overline{\mathbf{B}} \xrightarrow{\text{teoreem 6}} \mathbf{A} \xrightarrow{\text{teoreem 1}} \mathbf{B}.$$

Näeme, et väite **B** mitteõigsusest järeldub, et ta on õige. See võib nii olla vaid sel juhtumil, mil **B** on alati õige.

Kui teoreem 7 on õige, siis

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\text{teoreem 1}} \mathbf{B} \xrightarrow{\text{teoreem 7}} \overline{\mathbf{A}}.$$

Teiste sõnadega, sellest et **A** on õige, järeldub, et **A** pole õige. Tähendab, **A** pole kunagi õige.

102. a) Olgu algul $x \geqslant 0$. Siis $|x| = x$ ja me saame võrrandi $3x = 3$, millest $x = 1$. Olgu nüüd $x \leqslant 0$; siis $|x| = -x$ ja me saame võrrandi $-x = 3$, millest $x = -3$. Vastus: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

b) $x \geqslant 0$ korral saame võrrandi $x^2 + 3x - 4 = 0$, millest $x_1 = 1$, $x_2 = -4$. Tingimust $x \geqslant 0$ rahuldab ainult esimene lahend.

$x \leqslant 0$ korral saame võrrandi $x^2 - 3x - 4 = 0$, millest $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. Tingimust $x \leqslant 0$ rahuldab ainult esimene lahend. Vastus: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

c) Olgu $x < -\frac{1}{2}$. Siis $|2x+1| = -(2x+1)$, $|2x-1| = -(2x-1)$. Saame võrrandi $-(2x+1)-(2x-1) = 2$, millest $x = -\frac{1}{2}$.

Olgu $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Siis $|2x+1| = 2x+1$, $|2x-1| = -(2x-1)$. Saame võrrandi $(2x+1)-(2x-1) = 2$, mis osutub samasuseks. Tähendab, lõigu

$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ kõik arvud on antud võrrandi lahenditeks.

Olgu nüüd $x > \frac{1}{2}$. Siis $|2x+1| = 2x+1$ ja $|2x-1| = 2x-1$. Saame võrrandi $(2x+1)+(2x-1) = 2$, millest $x = \frac{1}{2}$. Vastus: võrrandi lahenditeks on lõigu $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ kõik arvud.

103. a) Olgu algul arvud x ja y positiivsed. Siis $|x| = x$, $|y| = y$, $|x+y| = x+y$. Uuritav võrratus muutub võrduseks.

Kui x on positiivne, y aga negatiivne, siis tuleb eraldi vaadelda juhtumeid $x+y \geqslant 0$ ja $x+y < 0$. Esimesel juhtumil $|x| = x$, $|y| = -y$, $|x+y| = x+y$. Võrratus omandab kuju $x+y \leqslant x-y$. See võrratus on kehtiv, sest y on negatiivne.

Teisel juhtumil $|x| = x$, $|y| = -y$, $|x+y| = -(x+y)$. Võrratus omandab kuju

$$-x-y \leqslant x-y.$$

See on kehtiv võrratus, sest x on positiivne.

Ülejäänud juhtumid saadakse läbiarutatutest, kui muuta mõlema arvu x ja y märk. Kuna seejuures $|x|$, $|y|$ ja $|x+y|$ ei muutu, jääb võrratus kehtivaks.

b) Võimalik oleks, nagu ülesande 9 a) lahendamiselgi vaadelda eraldi arvude x, y ja $x-y$ kõiki võimalikke paiknemisi arvteljel, kuid me kasutame siin ära asjaolu, et võrratus $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ on juba tõestatud. Tähistame vahe $x-y$ tähega z. Siis $x = y+z$. Kuna $|y+z| \leqslant |y|+|z|$, siis $|x| \leqslant |y|+|x-y|$, mida oligi tarvis tõestada.

c) Ka siin on võimalik tõestada see võrratus erinevate juhtumite läbiarutamise teel, kuid lihtsam on tuletada ta juba tõestatutest. Selleks märgime, et kui $|x| \geqslant |y|$, siis antud võrratus ühtib ülesande 103 b) võrratusega. Kui ka $|x| < |y|$, siis võrratus omandab kuju $|x - y| \geqslant |y| - |x|$ või $|y - x| \geqslant |y| - |x|$. See on aga samuti ülesande 103 b) võrratus, milles on x ja y ümber vahetatud.

Märkus. Võib soovitada ka näitlikumat lahendust, kui kasutada asjaolu, et suurus $|x|$ on võrdne punktide 0 ja x vahelise kaugusega arvteljel, suurus $|x - y|$ on aga võrdne punktide x ja y vahelise kaugusega. Vt. sel eesmärgil meie «Raamatukogu» esimest väljaannet nimetusega «Koordinaatide meetod».

104. a) Võrratuse $\sqrt[n]{1000} < 1{,}001$ võib ümber kirjutada nii: $1000 < (1 + 0{,}001)^n$. Arendame võrratuse parema poole binoomvalemi järgi. Saame

$$(1 + 0{,}001)^n = 1 + \frac{n}{1000} + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1000^2} + \ldots + \frac{1}{1000^n}.$$

Siit nähtub, et $n > 1$ korral on suurus $(1 + 0{,}001)^n$ igal juhul suurem kui $1 + \frac{n}{1000}$. Seepärast n küllalt suure väärtuse korral, näiteks $n = 1\,000\,000$ puhul on $(1 + 0{,}001)^n > 1000$. Tähendab, $n = 1\,000\,000$ puhul on kehtiv ka lähtevõrratus $\sqrt[n]{1000} < 1{,}001$.

b) Kirjutame samuti, nagu ülesande 104 a) lahenduseski, võrratuse ümber kujul $n < (1 + 0{,}001)^n$ ja arendame parema poole binoomvalemi järgi. Sellest valemist järeldub, et $n > 2$ korral on kehtiv võrratus $(1{,}+0{,}001)^n > 1 + \frac{n}{1000} + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1000^2}$.

Kuid n küllalt suure väärtuse korral on see avaldis suurem kui n. Tõepoolest, kui $n-1>2\cdot 1000^2$, siis juba viimane liidetav on suurem kui n. Järelikult $n=2\cdot 1000^2+2$ korral on kehtiv võrratus $(1{,}001)^n>n$ ja seega ka lähtevõrratus $\sqrt[n]{n}<1{,}001$.

c) Kasutame samasust $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Sellest samasusest nähtub, et suurus $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ pole mingil juhtumil suurem kui $\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Seepärast $n>25$ puhul on kehtiv võrratus

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{10}.$$

d) Sellist arvu n pole olemas. Tõepoolest, kui $\sqrt{n^2+n}-n<0{,}1$, siis $\sqrt{n^2+n}<n+0{,}1$ ja $n^2+n<(n+0{,}1)^2=n^2+\frac{n}{5}+0{,}01$. Viimane võrratus pole aga ilmselt n ühegi naturaalarvulise väärtuse korral kehtiv, sest $n>\frac{n}{5}+0{,}01$.

105. Vaatame, kuidas käitub avaldis $\left|\frac{k^3-2k+1}{k^4-3}\right|$ (absoluutväärtuse poolest) suurte k väärtuste korral. Selge, et lugejas mängib peamist osa liige k^3, nimetajas aga k^4. Seepärast võib arvata, et k suurte väärtuste korral on antud avaldis võrdne suurusega $\left|\frac{k^3}{k^4}\right|=\frac{1}{|k|}$. Leiame nüüd, kuivõrd antud avaldise täpne väär-

tus erineb leitud ligikaudsest väärtusest. Selleks teeme järgmise teisenduse:

$$\left|\frac{k^3-2k+1}{k^4-3}\right| = \left|\frac{k^3\left(1-\frac{2}{k^2}+\frac{1}{k^3}\right)}{k^4\left(1-\frac{3}{k^4}\right)}\right| =$$

$$= \frac{1}{|k|}\cdot\frac{\left|1-\frac{2}{k^2}+\frac{1}{k^3}\right|}{\left|1-\frac{3}{k^4}\right|}.$$

Olgu $|k| \geqslant 2$; siis

$$\left|1-\frac{2}{k^2}+\frac{1}{k^3}\right| \leqslant 1+\frac{2}{k^2}+\frac{1}{|k|^3} \leqslant$$

$$\leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8} < 2,$$

$$\left|1-\frac{3}{k^4}\right| \geqslant 1-\frac{3}{k^4} \geqslant 1-\frac{3}{16} > \frac{1}{2}.$$

Seepärast on $|k| \geqslant 2$ korral kehtiv võrratus

$$\frac{1}{|k|}\cdot\frac{\left|1-\frac{2}{k^2}+\frac{1}{k^3}\right|}{\left|1-\frac{3}{k^4}\right|} < \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Niisiis, $|k| \geqslant 2$ korral ei ületa antud avaldise väärtus arvu 2. Jääb vaid vaadelda, millised väärtused on avaldisel $k = -1, 0, 1$ korral. Need väärtused on vastavalt $1, \frac{1}{3}, 0$.

Vastus: otsitav arv C on olemas. Näiteks võib oletada, et

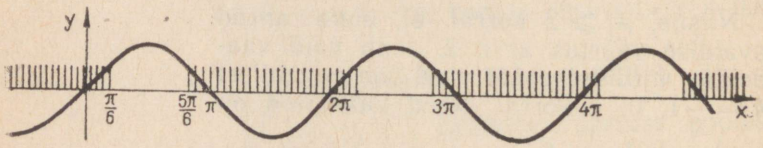
$$C = 2.$$

Märkus. Samal viisil võib saada ka täpsemat hinnangut antud avaldisele. Võib veenduda, et avaldise suurim väärtus on 1, mille ta omandab $k = -1$ korral. Tehke seda ise.

106. Antud avaldis on kahe arvu: k ja $\sin k$ korrutis. Esimese neist arvudest võib valida ükskõik kui suure. Kui seejuures teine arv pole liiga väike, on ka kogu korrutis suur arv. Nõuame näiteks, et $\sin k$ oleks suurem kui $\frac{1}{2}$. Punktihulk x, mille puhul $\sin x > \frac{1}{2}$, koosneb lõpmata paljudest vahemikest kujul

$$2\pi n + \frac{\pi}{6} < x < 2\pi n + \frac{5\pi}{6},$$

kus n on suvaline täisarv (joon. 40). Iga vahemiku pikkus on $\frac{2\pi}{3}$. Et see pikkus on suurem kui 1, siis igas sellises vahemikus on vähemalt üks täisarv. Siit järeldub, et mistahes arvu C korral on olemas lõpmata palju arve, mille puhul $k \cdot \sin k > C$. Tõepoolest, kõikide arvude k korral, mis asuvad eespool toodud vahemikes, on täidetud võrratus $\sin k > \frac{1}{2}$. Seepärast, kui naturaalarv k on suurem kui $2C$ ja paikneb ühes toodud vahemikest, siis $k \cdot \sin k > C$. Selliseid arve on ilmselt lõpmata palju.



Joon. 40

107. a) Olgu lõik $[a, b]$ püünis. See tähendab, et väljaspool seda lõiku võib olla ainult lõplik arv jada liikmeid. Kui see lõik poleks korviks, oleks selle lõigu sees samuti ainult lõplik arv jada liik-

meid. Kuid kogu jadas on lõpmata palju liikmeid. Vastuolu näitab, et lõik $[a, b]$ peab olema korviks.

b) Jada b) ja lõik B ülesandest 108. Esimene, kolmas, viies jne. jada liige paikneb lõigu sees; teine, neljas, kuues jne. liige aga väljaspool lõiku. Seepärast on see lõik korviks ja ei ole püüniseks.

109. a) Jada

$$1;\ 3;\ \frac{1}{2};\ 2\frac{1}{2};\ \ldots;\ \frac{1}{n};\ 2\frac{1}{n};\ \ldots$$

b) Sellist jada pole olemas. Tõepoolest, oletame, et lõik [0, 1] on mingi jada püüniseks. Siis väljaspool seda lõiku võib paikneda vaid lõplik arv jada liikmeid. Tähendab, ka lõiku [2, 3] tuleb ainult lõplik arv liikmeid. Seepärast pole lõik [2, 3] selle jada korviks ja veel vähem (vt. ülesannet 107 a) tema püüniseks.

110. a) Ühikupikkuse lõigu mistahes paigutuse puhul ei ole tal ühiseid punkte vähemalt ühega lõikudest [0, 1] ja [9, 10]. Ärgu olgu tal näiteks ühiseid punkte lõiguga [0, 1]. Kui see ühikupikkune lõik oleks püünis, siis väljaspool teda, ja eriti lõigus [0, 1], oleks ainult lõplik arv jada liikmeid. See on aga vastuolus sellega, et lõik [0, 1] on eelduse põhjal jada korviks.

b) Vaatleme kahte jada:

1) $1;\ 9;\ \frac{1}{2};\ 9\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ 9\frac{2}{3};\ \ldots$

$\ldots;\ \frac{1}{n};\ 9\frac{n-1}{n};\ \ldots,$

2) $0;\ 10;\ \frac{1}{2};\ 9\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ 9\frac{1}{3};\ \ldots$

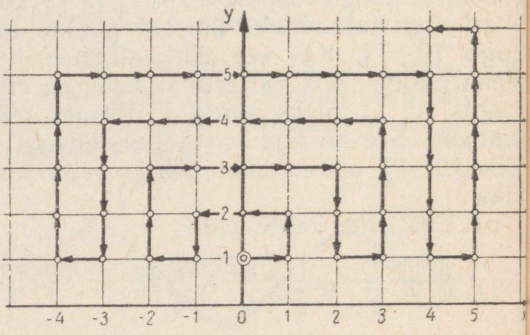
$\ldots;\ \frac{n-1}{n};\ 9\frac{1}{n};\ \ldots.$

Esimese jada jaoks pole olemas püünist pikkusega 9. (Kontrollige, et lõigud $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ ja $\left[9\frac{2}{3}, 10\right]$ on selle jada korvideks. Siit, nagu ka ülesande 110 a) lahenduses, tõestatakse, et püünist pikkusega 9 pole olemas.)

Teise jada jaoks on lõik $\left[\frac{1}{2}, 9\frac{1}{2}\right]$ püüniseks, sest jada kõik liikmed, alates kolmandast, kuuluvad sellesse lõiku.

111. a) Jadal 1; 2; 3; ...; n; ... pole ühtegi korvi, sest lõigus pikkusega l ei sisaldu rohkem kui $l + 1$ jada liiget.

b) Konstrueerime nüüd jada, mille liikmete hulka kuuluvad kõik ratsionaalarvud. Kuna igas suvalises lõigus leidub lõpmatu hulk ratsionaalarve, siis sellisele jadale on iga lõik korviks. Et konstrueerida meile vajalikku jada, liigume ruudulise paberilehe jooni mööda nii, nagu näidatud joonisel 41.



Joon. 41

Iga kord, kui läbime ruudu tippu, moodustame jada ühe liikme. Kui ruudu tipu koordinaadid on x ja y (nagu joonisel näeme, on x ja y täisarvud, kusjuures

$y > 0$), on jada vastavad liikmed võrdsed murruga $\frac{x}{y}$. Me saame sel viisil jada

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{0}{2}; \frac{-1}{2}; \frac{-1}{1}; \frac{-2}{1}; \frac{-2}{2}; \frac{-2}{3}; \ldots$$

Näitame, et see jada sisaldab kõik ratsionaalarvud. Tõepoolest, iga ratsionaalarvu võib definitsiooni kohaselt kirjutada kujul $\frac{p}{q}$, kus p ja q on täisarvud ja $q > 0$. Liikudes eespool kirjeldatud viisil mööda tasandit, tuleme teatud arvu sammude pärast punkti, mille koordinaadid on p ja q. Jada vastav liige on parajasti $\frac{p}{q}$.

Tegelikult esineb iga ratsionaalarv nii konstrueeritud jadas isegi lõpmatu arv kordi, sest ratsionaalarvu võib lõpmata mitmeselt kujutada murruna $\frac{p}{q}$ $\left(\text{näiteks } \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \ldots\right)$. Näidata aga ära ratsionaalarvu puhul jada vastava liikme numbrit pole sugugi lihtne. Proovige näiteks leida arvudele $1\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{7}$, 10 vastavad jada liikmete numbrid. Millega on võrdne selle jada sajas liige?

113. a) Vaatleme lõiku keskpunktiga punktis a. Tähistame selle lõigu pikkuse 2ε-ga. Piirväärtuse definitsiooni kohaselt leidub selline arv k, et kõigi $n > k$ korral kehtib võrratus $|x_n - a| < \varepsilon$. See võrratus näitab, et punkt x_n asub antud lõigus. Niisiis, väljaspool antud lõiku paikneb mitte rohkem kui k jada liiget. Tähendab, antud lõik on jada x_n püüniseks.

b) Olgu antud suvaline positiivne arv ε. Vaatleme lõiku, mille keskpunkt asub punktis a ja mille pikkus on lühem kui 2ε.

Eelduse põhjal on see lõik jada x_n püüniseks. Seepärast paikneb väljaspool seda lõiku ainult lõplik arv jada liikmeid. Olgu k nende numbritest suurim. (Kui väljaspool lõiku pole üldse jada liikmeid, siis eeldame, et $k = 0$.) Siis mistahes $n > k$ korral paikneb liige x_n antud lõigus, s. t. on kehtiv võrratus $|x_n - a| < \varepsilon$. Seega me tõestasime, et a on jada $\{x_n\}$ piirväärtus.

114. a) Olgu antud lõik keskpunktiga punktis a. Tähistame selle lõigu pikkuse 2ε-ga. Piirväärtuse definitsiooni kohaselt on olemas selline arv k, et $n > k$ korral on kehtiv võrratus $|x_n - a| < \varepsilon$. See tähendab, et jada kõik liikmed, mille numbrid on k-st suuremad, paiknevad antud lõigus.

Olgu nüüd antud lõik, mis ei sisalda punkti a. Tähistame punkti a ja antud lõigu lähima otspunkti vahelise kauguse ε-ga. Piirväärtuse definitsiooni kohaselt on olemas niisugune arv k, et $n > k$ korral on kehtiv võrratus $|x_n - a| < \varepsilon$. See tähendab, et $n > k$ korral paikneb liige x_n punktile a lähemal kui antud lõigu lähim otspunkt. Seepärast paiknevad kõik k-st suuremate numbritega liikmed väljaspool seda lõiku. Tähendab, antud lõigus ei saa olla lõpmata palju jada liikmeid.

b) Jada $1; \frac{1}{2}; 3; \frac{1}{4}; \ldots; n^{(-1)^{n-1}}; \ldots$ korviks on mistahes lõik keskpunktiga nullpunktis. Tõepoolest, jada, mis koosneb paarisarvulistel kohtadel seisvatest liikmetest $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \ldots; \frac{1}{2n}; \ldots$ ilmselt läheneb nullile. Seepärast mistahes lõigus, keskpunktiga nullpunktis, on selle jada liikmeid lõpmata palju (vt. ülesande 114 a) lahendust). Tähendab, see lõik on lähtejada korviks. Näitame nüüd, et ükski lõik, mis ei sisalda nullpunkti, pole lähtejada

korviks. Tõepoolest, paarisarvulistel kohtadel seisvatest liikmetest moodustatud osajadale pole see lõik korviks (vt. ülesande 114 a) lahendust); paarituarvulistel kohtadel seisvatest liikmetest moodustatud osajada 1; 3; 5; 7; ... jaoks ei saa üldse ükski lõik olla korviks (tõestage seda ise). Seepärast igas nullpunkti mittesisaldavas lõigus on ainult lõplik arv paarisarvulistel kohtadel seisvaid liikmeid ja lõplik arv paarituarvulistel kohtadel seisvaid liikmeid. Tähendab, selles lõigus on üldse lõplik arv jada liikmeid ja järelikult pole see lõik korviks.

Niisiis, jada $x_n = n^{(-1)^{n-1}}$ ja nullpunkt rahuldavad ülesande 114 b) tingimusi. Kuid arv 0 pole jada piirväärtuseks. Tõepoolest, vastasel juhul oleks kõigi liikmete korral, alates n mingist väärtusest, täidetud tingimus $|x_n| < 1$. Kuid see võrratus pole kehtiv kõigi paarituarvulistel kohtadel seisvate liikmete puhul.

Märkus. Jada

$$x_n = n^{(-1)^{n-1}}$$

võib endale ette kujutada kui kahe lihtsa jada 1; 3; 5; 7; ...; $2n-1$; ... ja $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \ldots$ ...; $\frac{1}{2n}$; ... ühendust. See jadade moodustamise viis osutub sageli kasulikuks. Näiteks, et konstrueerida jada, millele kaks antud lõiku oleksid korvideks (vt. ülesannet 109 b)), võib ühendada kaks niisugust jada, milledest ühele oleks korviks üks lõik, teisele aga teine lõik.

115. Ülesande 114 a) lahenduses me tõestasime, et kui $n \to \infty$ korral $x_n \to a$, siis pole ükski punkti a sisaldav lõik korviks. Siit järeldub nõutav väide kergesti vastuväiteliselt. Tehke seda ise.

116. Selleks et tõestada, et jada $\{x_n\}$ piirväärtuseks on arv a, tuleb näidata, et

iga positiivse arvu ε korral võib valida sellise arvu k, et $n > k$ puhul oleks kehtiv võrratus $|x_n - a| < \varepsilon$. Sageli osutub võimalikuks näidata otsest valemit, mis seob k ja ε.

a) $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Kuna $|x_n| = \frac{1}{n}$, siis arvuks k võib võtta $\frac{1}{\varepsilon}$. Tõepoolest, $n > \frac{1}{\varepsilon}$ korral on kehtiv võrratus $|x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Märkus. Arv k pole antud ε järgi üheselt määrav. Näites a) oleksime võinud k-ks võtta ka $k = \frac{2}{\varepsilon}$ või $\frac{1}{\varepsilon} + 1$ (üldiselt suurusest $\frac{1}{\varepsilon}$ suurema suvalise arvu). Sageli pole otstarbekam võtta k väärtuseks kõige «ökonoomsem» väärtus (k võib väga keeruliselt avalduda ε kaudu), vaid palju lihtsam avaldis. Näiteks tõestamiseks, et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+0{,}6n+3{,}2} = 0$, võib kasutada asjaolu, et $x_n < \frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{n}$ ja k-ks võtta $\frac{1}{\varepsilon}$. See on palju mugavam kui kõige ökonoomsem väärtus

$$k = \sqrt[3]{1{,}6 + \sqrt{2{,}552 - \frac{1{,}6}{\varepsilon} + \frac{1}{4\varepsilon^2}}} + \sqrt[3]{1{,}6 - \sqrt{2{,}552 - \frac{1{,}6}{\varepsilon} + \frac{1}{4\varepsilon^2}}},$$

mille saame alljärgneva kuupvõrrandi lahendamisel:

$n^3 + 0{,}6n + 3{,}2 = \frac{1}{\varepsilon}$.

Esineb aga selliseid juhtumeid, mil k kõige ökonoomsema väärtuse puhul ei saa üldse anda otsest valemit, aga «varuga» väärtus on kergesti leitav.

b) $x_n = \frac{3^n - 1}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Kuna $|x_n - 1| = \frac{1}{3^n}$, siis k väärtuseks võib võtta $\log_3\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

c) Kasutades geomeetrilise progressiooni summa valemit, leiame $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$. Siit nähtub, et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ ja k väärtuseks võib võtta $\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

d) Antud jadal piirväärtust pole, sest suvalise arvu a ja suvalise ε korral on võrratus $|x_n - a| < \varepsilon$ kehtiv vaid lõpliku arvu n väärtuste puhul.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$; sest $|x_n - 1|$ on antud juhul samaselt võrdne nulliga, võrratus $|x_n - 1| < \varepsilon$ on kehtiv suvalise positiivse ε korral n kõigi väärtuste puhul.

f) Vaatleme eraldi paarisarvulise ja paarituarvulise n juhtumeid. Paarisarvulise $n = 2m$ korral saame $x_n = \frac{1}{m}$. Seepärast $m > \frac{1}{\varepsilon}$ puhul (s.t. $n > \frac{2}{\varepsilon}$ puhul) on kehtiv võrratus $|x_n| < \varepsilon$. Paarituarvulise n korral on x_n võrdne nulliga, seepärast võrratus $|x_n| < \varepsilon$ on kehtiv n kõigi

paarituarvuliste väärtuste korral. Niisiis, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ja k väärtuseks võib võtta arvu $\frac{2}{\varepsilon}$.

g) Geomeetrilise progressiooni summa valemi järgi saame $\underbrace{0{,}22\ldots2}_{n} = \frac{2}{10} + \frac{2}{10^2} + \ldots + \frac{2}{10^n} = \frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$. Siit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{9}$ ja k väärtuseks võib võtta $\log\left(\frac{2}{9\varepsilon}\right)$ (või lihtsalt $\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, vt. märkust ülesande 116 a) lahenduse juures).

h) Antud jadal piirväärtust pole. Tõepoolest, kui $n = 180m$, siis $x_n = 0$, kui aga $n = 90 + 360m$, siis $x_n = 1$. Kui jadal oleks piirväärtus a, siis alates mingist väärtusest n_0, oleks kehtiv võrratus $|x_n - a| < \frac{1}{4}$. Siit omakorda järelduks aga, et $n_1 > n_0$ ja $n_2 > n_0$ korral oleks kehtiv võrratus $|x_{n_1} - x_{n_2}| \leqslant |x_{n_1} - a| + |a - x_{n_2}| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Kuid antud jadas on ükskõik kui suurte järjenumbritega liikmeid, mis erinevad teineteisest rohkem kui $\frac{1}{2}$ võrra.

i) Kuna $|\cos n^\circ| \leqslant 1$, siis $|x_n| \leqslant \frac{1}{n}$. Siit ilmneb, et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ja k väärtuseks võib võtta $\frac{1}{\varepsilon}$.

j) Antud jadal piirväärtust pole. Kui

arv a oleks tema piirväärtuseks, siis teatud n väärtusest alates oleks kehtiv võrratus $|x_n - a| < \frac{1}{2}$. Siis $|x_n - x_{n+1}| \leqslant$ $\leqslant |x_n - a| + |a - x_{n+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Kuid antud jada mistahes kahe naaberliikme vahe on suurem kui 1.

117. Oletame, et kaks erinevat arvu a ja b on ühe ja sama jada $\{x_n\}$ piirväärtusteks. Tähistame nende punktide vahelise kauguse 2ε-ga. Kui a on jada $\{x_n\}$ piirväärtuseks, siis leidub selline arv k_1, et $n > k_1$ korral on kehtiv võrratus $|x_n - a| < \varepsilon$. Analoogiliselt, kui arv b on jada $\{x_n\}$ piirväärtuseks, siis leidub selline arv k_2, et $n > k_2$ korral on $|x_n - b| < \varepsilon$. Järelikult, kui n on suurem kui k_1 ja k_2, on kehtivad mõlemad võrratused $|x_n - a| < \varepsilon$ ja $|x_n - b| < \varepsilon$. See on aga võimatu, sest $|a - b| = 2\varepsilon$.

118. a) Näitame, et mistahes lõik keskpunktiga punktis a on jada $\{x_n\}$ korviks. Olgu lõigu pikkus 2ε. Meil tuleb näidata, et sellesse lõiku tuleb lõpmata palju jada liikmeid, s. t. on kehtiv võrratus $|x_n - a| \leqslant \varepsilon$. Oletame, et see pole nii. Siis tuleb sellesse lõiku ainult lõplik arv jada liikmeid.

Olgu k suurim nende liikmete numbritest. (Kui lõigus pole üldse jada liikmeid, siis oletame, et $k = 0$.) Siis kõik liikmed, mille numbrid on suuremad kui k, paiknevad väljaspool lõiku. Kuid see on vastuolus kuhjumispunkti definitsiooniga: suvalise k korral leidub selline number $n > k$, et $|x_n - a| < \varepsilon$, ja tähendab x_n paikneb selles lõigus.

b) Oletame vastupidist, s. t. a pole jada kuhjumispunktiks. See tähendab, et mingi ε ja mingi k korral ei leidu sellist

numbrit $n > k$, mille puhul $|x_n - a| < \varepsilon$. Teiste sõnadega, mingis lõigus keskpunktiga punktis a paikneb ainult lõplik arv (mis pole k-st suurem) jada liikmeid. Me jõudsime vastuoluni antud tingimusega, mille järgi mingi suvaline lõik keskpunktiga punktis a on jada $\{x_n\}$ korviks ja sisaldab seega lõpmata palju jada liikmeid.

119. See järeldub ülesannete 113 a), 107 a) ja 118 b) lahendustest. Proovige esitada seda lahendust kasutamata püünise ja korvi mõisteid.

120. a) Jada $x_n = \frac{n+1}{n}$ piirväärtuseks on arv 1. Tähendab (vt. ülesannet 119), arv 1 on selle jada kuhjumispunktiks. Teisi kuhjumispunkte jadal pole (vt. ülesandeid 114 a) ja 118 a)).

b) Punktid $+1$ ja -1 on ilmselt jada $x_n = (-1)^n$ kuhjumispunktideks. Iga mistahes teise punkti a jaoks võib konstrueerida sellise lõigu keskpunktiga punktis a, milles pole ühtegi jada liiget. Seepärast jadal teisi kuhjumispunkte pole.

c) Kuna funktsiooni $\sin x°$ periood on 360°, siis igaüks arvudest 0; $\pm \sin 1°$; $\pm \sin 2°$; ...; $\sin 89°$; ± 1 esineb jadas lõpmatu arv korda. Seepärast on kõik need arvud kuhjumispunktideks. Kui arv a ei ühti ühegagi neist loetletud 181 arvust, siis võib konstrueerida sellise lõigu keskpunktiga punktis a, mis ei sisalda ühtegi jada liiget. (Selleks piisab võtta lõigu pikkus väiksem, kui on vahemaa punktist a lähima nimetatud arvuni.) Seepärast teisi kuhjumispunkte jadal pole.

d) Seda jada on mugavam kujutada kahe jada $y_n = \frac{1}{2n-1}$ ja $z_n = 2n$ ühendusena. Esimesel jadal on üksainus kuhjumispunkt 0, teisel aga pole üldse kuhju-

mispunkte. (Tõestage need väited ise.) Näitame nüüd, et punkt a on lähtejada kuhjumispunktiks siis ja ainult siis, kui ta on kahest jadast $\{y_n\}$ ja $\{z_n\}$ vähemalt ühe kuhjumispunktiks. Tõepoolest, kui kasutada ülesande 118 tulemust, siis jääb tõestada peaaegu ilmne väide: lõik $[a, b]$ on jada $\{x_n\}$ korviks siis ja ainult siis, kui see lõik on jadadest $\{y_n\}$ ja $\{z_n\}$ vähemalt ühe korviks.

Märkus. Täpselt samasuguse arutluse teel tõestatakse ka üldine teoreem: kui jada $\{x_n\}$ on lõpliku arvu jadade $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, ..., $\{t_n\}$ ühendus, siis $\{x_n\}$ kuhjumispunktide hulk koosneb jadade $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, ..., $\{t_n\}$ kuhjumispunktide hulkadest.

e) Kui arv a rahuldab tingimust $0 \leqslant a \leqslant 1$, siis igas suvalises lõigus keskpunktiga punktis a paikneb lõpmata palju antud jada liikmeid. Tõepoolest, kui lõigu pikkus on 2ε, siis iga $n > \frac{1}{\varepsilon}$ puhul on liikmete $\frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \ldots; \frac{n-1}{n}$ hulgas vähemalt üks, mis paikneb võetud lõigus. Kui aga $a < 0$ või $a > 1$, võib konstrueerida lõigu keskpunktiga punktis a, mis ei sisalda ühtegi jada liiget.

Seepärast antud jada kuhjumispunktideks on kõik lõigu $[0, 1]$ punktid ja ainult need.

122. a) Olgu jada $\{x_n\}$ piirväärtus x_0. Võtame mingi lõigu $[a, b]$ keskpunktiga punktis x_0. Kuna see lõik on jada $\{x_n\}$ püüniseks (vt. ülesannet 113 a)), siis väljaspool seda lõiku paikneb vaid lõplik arv jada liikmeid. Olgu x_k nendest liikmetest suurim (absoluutväärtuse poolest). Tähistame tähega C suurima arvudest $|a|$, $|b|$, $|x_k|$. Siis jada kõigi liikmete puhul kehtib võrratus $|x_n| \leqslant C$. Tõepoolest, kui x paik-

neb lõigus $[a, b]$, ei ületa $|x_n|$ suurimat arvudest $|a|$, $|b|$. Kui aga x_n ei paikne lõigus $[a, b]$, siis $|x_n| \leqslant |x_k|$ (kuna x_k on jada liikmetest absoluutväärtuse poolest suurim, mis ei paikne lõigus $[a, b]$). Tähendab, ammugi $|x_n| \leqslant C$.

b) Ülesandes 108 b) toodud jada on tõkestatud, sest $|x_n| \leqslant 2$. Tõestame, et sellel jadal pole piirväärtust. Tõepoolest, on kerge kontrollida, et lõigud $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ ja $\left[1, 1\frac{1}{4}\right]$ on jada $\{x_n\}$ korvideks. Nende lõikude vahemaa on $\frac{3}{4}$.

Siit järeldub (vt. ülesande 110 a) lahendust), et sellel jadal pole püünist, mille pikkus oleks lühem kui $\frac{3}{4}$. Kuid kui jadal $\{x_n\}$ oleks piirväärtus a, siis iga suvaline lõik keskpunktiga punktis a oleks tema püüniseks ja, tähendab, püünised oleksid kuitahes lühikesed. Saadud vastuolu näitabki, et jadal $\{x_n\}$ pole piirväärtust.

Mõistagi võib seda lahendust esitada ka nii, et tõestuses ei esineks mõisteid «püünis» ja «korv» (vt. ülesannete 116 h) ja 116 j) lahendusi. Tehke seda ise.

123. a) Olgu N mingi suvaline positiivne arv. Kõigi $n > N$ korral kehtib võrratus $|x_n| > N$. Seepärast jada $\{x_n\}$ kasvab tõkestamatult.

b) Lahendus on samasugune nagu juhtumil a).

c) Jada pole tõkestatud, sest iga positiivse arvu C korral leidub niisugune number n, et $|x_n| > C$ (piisab, kui n-ks võtta mistahes C-st suurem paarisarv). Kuid see jada ei kasva tõkestamatult, sest võrratus $|x_n| > 1$ pole kehtiv n kõigi paarituarvuliste väärtuste korral.

d) Olgu N mingi suvaline positiivne arv. Iga $n > N^2$ puhul kehtib võrratus $x_n > N$. Järelikult, $x_n \to \infty$.

e) Näitame, et jada $\{x_n\}$ on tõkestatud. Täpsemalt, tõestame, et $|x_n| \leqslant 5$. Kuna $x_n > 0$, siis $|x_n| = x_n$, ja me peame tõestama, et $x_n \leqslant 5$. See aga järeldub alljärgnevast:

$$5 - x_n = 5 - \frac{100n}{100 + n^2} =$$

$$= \frac{5}{100 + n^2}(100 + n^2 - 20n) =$$

$$= \frac{5(10 - n)^2}{100 + n^2} \geqslant 0.$$

125. Arutame üksikasjalikult läbi vaid kaks näidet.

1) Näitame, et tingimust 1 rahuldab mistahes jada $\{x_n\}$. Tõepoolest, me peame näitama, et leidub positiivne arv ε, selline arv k ja selline number $n > k$, et $|x_n - a| < \varepsilon$. Võtame ε-ks arvu $|x_1 - a| + 1$ ja oletame, et $k = 0$ ja $n = 1$. Siis nõutav tingimus on täidetud.

6) Näitame, et tingimus 6 tähendab seda, et jada $\{x_n\}$ piirväärtuseks pole arv a. Tõepoolest, väide «a on jada $\{x_n\}$ piirväärtuseks» tähendab, et mistahes $\varepsilon > 0$ korral leidub niisugune k, et kõigi $n > k$ puhul on kehtiv võrratus $|x_n - a| < \varepsilon$. Selle väite eitus on järgmine: «Mitte iga $\varepsilon > 0$ puhul leidub niisugune k, et kõigi $n > k$ korral on kehtiv võrratus $|x_n - a| < \varepsilon$».

Selle lause võib sõnastada ka järgmiselt: «Mingi $\varepsilon > 0$ puhul ei leidu sellist k, et kõigi $n > k$ korral oleks kehtiv võrratus $|x_n - a| < \varepsilon$». Seda võib sõnastada aga ka nii: «Leidub selline $\varepsilon > 0$, et mistahes k puhul mitte kõigi $n > k$ korral on kehtiv võrratus $|x_n - a| < \varepsilon$». Lõpuks võib selle lause sõnastada aga ka nii: «Leidub sel-

line $\varepsilon > 0$, et mistahes k korral leidub $n > k$, mille puhul $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$».

Me saime just tingimuse 6. Pöörake tähelepanu sellele, et seda tingimust võib saada ka piirväärtuse definitsioonist järgmise reegli põhjal: 1) sõnade asemele «leidub selline, ... et» panna «mistahes ... puhul»; 2) sõnade asemele «mistahes ... puhul» panna «leidub selline, ... et»; 3) võrratus $|x_n - a| < \varepsilon$ asendada vastupidise võrratusega $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$. See reegel on rakendatav ka kõigi ülejäänud tingimuste puhul. Kontrollige, et see reegel annab iga tingimuse korral selle tingimuse eituse sõnastuse.

126. Kui kogum algab märgiga «+», siis on kõik jada liikmed võrdsed a-ga. Seepärast kogumi kõik ülejäänud märgid määratakse üheselt: arv a on jada piirväärtuseks ja kuhjumispunktiks, jada on tõkestatud ja tõkestamatult ei kasva.

Vaatleme nüüd kogumeid, mis algavad märkidega «— +»; see tähendab, et jada läheneb a-le. Siis on aga kogumi kõik ülejäänud märgid määratud: arv a on jada kuhjumispunktiks (ülesanne 119), jada on tõkestatud (ülesanne 122 a)) ja ei kasva tõkestamatult.

Vaatleme veel kogumeid, milles viimane märk on «+». Sel juhtumil kasvab jada tõkestamatult ja see määrab kogumi kõik teised märgid: jada pole samaselt võrdne a-ga, ei lähene a-le, a pole jada kuhjumispunktiks ja jada pole tõkestatud.

Ülejäänud kogumites on esimene, teine ja viies märk «—». Osutub, et sel juhtumil võivad kolmandal ja neljandal kohal olla mistahes märgid. Vastavaid näiteid on toodud osas «Vastused ja juhised».

127. Osas «Vastused ja juhised» on toodud jadade näiteid, millel on piirväärtus, suurim või väikseim liige või nii see kui

ka teine. Jääb veel tõestada, et pole olemas jadasid, millel on piirväärtus, kuid ei ole suurimat ega väikseimat liiget.

Oletame, et jadal $\{x_n\}$ pole suurimat liiget. Näitame, et siis võib jadast $\{x_n\}$ eraldada kasvava osajada. Tõepoolest, vaatleme jada esimest liiget x_1. Kuna see liige pole suurim, siis leidub mingi liige $x_{n_1} > x_1$. See liige x_{n_1} ei saa olla suurem kõigist temale järgnevatest jada liikmetest (sest vastasel juhul oleks jada esimesest n_1 liikmest suurim ka kõigist liikmetest suurim). Seepärast on olemas selline number $n_2 > n_1$, et $x_{n_2} > x_{n_1}$. Jälle ei saa liige x_{n_2} olla suurem kõigist temale järgnevatest liikmetest jne. Me saime lõpmatu kasvava osajada

$$x_1 < x_{n_1} < x_{n_2} < \ldots < x_{n_k} < \ldots$$

Analoogiliselt, kui jadal $\{x_n\}$ pole väikseimat liiget, siis on olemas lõpmatu kahanev osajada

$$x_1 > x_{m_1} > x_{m_2} > \ldots > x_{m_k} > \ldots$$

Tähistame x_{n_1} ja x_{m_1} vahe tähega ε. Siis kõigi $k > 1$ korral kehtib võrratus $x_{n_k} - x_{m_k} > x_{n_1} - x_{m_1} = \varepsilon$. Siit järeldub (vrd. ülesande 116 h) või 123 b) lahendusega), et jadal $\{x_n\}$ pole piirväärtust.

128. Kui jadal $\{x_n\}$ või tema mingil osajadal pole suurimat liiget, siis (nagu näidatud ülesande 127 lahenduses) võib jadast $\{x_n\}$ eraldada lõpmatu kasvava osajada. Vaatleme nüüd seda juhtumit, mil mistahes osajadas on väikseim liige. Olgu x_{n_1} jada kõigist liikmeist suurim, x_{n_2} suurim kõigist x_{n_1}-le järgnevaist liikmeist, x_{n_3} suurim kõigist x_{n_2}-le järgnevaist liik-

meist jne. Ilmselt on siis kehtivad võrratused

$$x_{n_1} \geqslant x_{n_2} \geqslant \ldots \geqslant x_{n_k} \geqslant \ldots$$

Niisiis võib ka sellel juhtumil jadast $\{x_n\}$ eraldada monotoonse osajada.

129. Vaatleme jada 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ... Selles jada on liige x_n arvu $\sqrt{2}$ ligikaudseks (puuduga) väärtuseks täpsusega kuni $\frac{1}{10^n}$.

Jada $\{x_n\}$ definitsioonist endast järeldub, et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$ ($n > \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ korral on kehtiv võrratus $|x_n - \sqrt{2}| < \varepsilon$). Kuna arv $\sqrt{2}$ on irratsionaalarv ja et jadal $\{x_n\}$ saab olla ainult üks piirväärtus, siis ühtegi ratsionaalarvu jada piirväärtuseks olla ei saa.

Märkus. Selles tõestuses me kasutasime asjaolu, et on olemas reaalarv, mille ruut on 2 ja mis on kirjutatav lõpmatu kümnendmurruna. Meie arutlust võib aga ka nii muuta, et selles esineksid ainult ratsionaalarvud. Selleks tuleb x_n defineerida kui suurimat arvudest, mida võib esitada lõpliku kümnendmurruna n kohaga pärast koma ja mille ruut oleks väiksem kui 2. Pärast seda tuleb näidata, et kui x_n läheneb mingile arvule a, siis $a^2 = 2$.

Selle tõestuse üldine idee seisneb järgmises.

Arvu x_n omaduseks on, et x_n^2 on väiksem kui 2, kuid $\left(x_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$ on juba suurem kui 2. Seepärast n suurte numbrite puhul on x_n^2 väga lähedal 2-le. Teiselt poolt on n küllalt suurte numbrite puhul arvud x_n ja a lähedased ja seega on ka arvud x_n^2 ja a^2 lähedased. Siit võib järeldada, et a^2 ja 2 vahe on kuitahes väike. Kuid see vahe on jääv arv, mis ei sõltu n-st. Seepärast $a^2 = 2$. Jääb veel tõestada, et pole olemas ratsionaalarvu a, mille ruut oleks 2. Proovige siin esitatud kaalutlustele anda range tõestuse vorm.

130. Olgu antud tõkestatud jada. Valime sellest jadast lõpmatu monotoonse osajada (vt. ülesande 128 lahendust). See osajada on tõkestatud ja Bolzano-Weierstrassi aksioomi põhjal on tal piirväärtus. Näitame, et see piirväärtus on lähtejada kuhjumispunktiks.

Tõepoolest, iga lõik keskpunktiga selles punktis on valitud osajada püüniseks. Seepärast paikneb igas niisuguses lõigus lõpmata palju lähtejada liikmeid, s. t. see lõik on lähtejada korviks. Väide järeldub nüüd teoreemist 118 b).

131. a) Jada $x_n = 1 + \frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n^2}$ on ilmselt kasvav. Näitame, et see jada on tõkestatud. Tõepoolest, kuna $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$, siis

$$x_n < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)} =$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Niisiis, $|x_n| < 2$ iga n korral. Seepärast Bolzano-Weierstrassi aksioomist järeldub, et on olemas $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Kõrgema matemaatika meetoditega võib leida, et see piirväärtus on $\frac{\pi^2}{6}$. Selle fakti elementaarset esitust võite leida raamatust: А. М. Яглом, И. М. Яглом «Неэлементарные задачи в элементарном изложении».

b) Ilmselt on antud jada osajada x_{2n}, mis koosneb paarisarvulistel kohtadel seisvatest liikmetest, kasvav, sest

$$x_{2n} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1}\right) > x_{2n-2},$$

ja tõkestatud, sest

$$x_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) - \ldots -$$

$$- \left(\frac{1}{4n-5} - \frac{1}{4n-3}\right) - \frac{1}{4n-1} < 1.$$

Seepärast on olemas $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$. Tähistame selle piirväärtuse tähega a ja näitame, et arv a on kogu jada x_n piirväärtuseks. Tõepoolest, olgu antud suvaline positiivne arv ε. Siis leidub selline arv k, et $2n > k$ korral on kehtiv võrratus

$$|x_{2n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Peale selle on $2n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ korral kehtiv võrratus $|x_{2n+1} - x_{2n+2}| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Seepärast, kui n on suurem kui arvudest k ja $\frac{1}{\varepsilon}$ suurim, siis $|x_n - a| < \varepsilon$.

Osutub, et $a = \frac{\pi}{4}$ (tõestust vaata eelmisel leheküljel nimetatud raamatust).

132. a) Meil tuleb tõestada, et mistahes positiivse arvu puhul leidub niisugune arv k, et $|x_n + y_n - a - b| < \varepsilon$ iga $n > k$ korral. Kuna tingimuse põhjal $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, siis leidub niisugune arv k_1, et $n > k_1$ korral $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Täpselt samuti sellest, et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,

järeldub niisuguse arvu k_2 olemasolu, et $n > k^2$ korral $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Olgu suurim arvudest k_1 ja k_2. Siis $n > k$ korral saame

$$|x_n + y_n - a - b| \leqslant |x_n - a| + \\ + |y_n - b| < \varepsilon.$$

b) Tõestatakse samuti nagu a).

c) Kasutame samasust

$$x_n y_n - ab = x_n y_n - b x_n + b x_n - ab = \\ = x_n (y_n - b) + b (x_n - a).$$

Kuna jadal x_n on piirväärtus, siis on ta tõkestatud (vt. ülesannet 122 a)), s. t. on olemas niisugune arv C, et $|x_n| \leqslant C$ kõigi n korral. Tähistame tähega M arvudest C ja $|b|$ suurima. Olgu nüüd meile antud mistahes positiivne arv ε. Kuna $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \\ = a$, siis on olemas niisugune arv k_1, et $n > k_1$ korral kehtib võrratus $|x_n - a| < \\ < \frac{\varepsilon}{2M}$. Täpselt samuti on olemas niisugune arv k_2, et $n > k_2$ korral kehtib võrratus $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Tähistagu k suurimat arvudest k_1 ja k_2. Siis $n > k$ korral saame:

$$|x_n y_n - ab| = |x_n (y_n - b) + b (x_n - a)| \leqslant \\ \leqslant |x_n| \, |y_n - b| + |b| \, |x_n - a| \leqslant \\ \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

d) Kasutame samasust

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n - a}{y_n} + \frac{a(b - y_n)}{b y_n}.$$

Oletame algul, et meil õnnestus tõestada jada $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ tõkestatus. See tähen-

daks, et on olemas niisugune arv M, et $\left|\frac{1}{y_n}\right| \leqslant M$ iga n korral. Siis

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right| \leqslant \left|\frac{x_n-a}{y_n}\right|+\left|\frac{a(b-y_n)}{by_n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant M(x_n-a)+M\left|\frac{a}{b}\right||y_n-b|.$$

Olgu antud mistahes positiivne arv ε. Me võime leida sellise arvu k_1, et $n > k_1$ korral $|x_n-a| < \frac{\varepsilon}{2M}$, ja sellise arvu k_2, et $n > k_2$ korral $|y_n-b| < \frac{\varepsilon|b|}{2|a|M}$. Tähistame tähega k arvudest k_1 ja k_2 suurima. Siis $n > k$ korral saame

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right| \leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\left|\frac{a}{b}\right|\cdot\frac{\varepsilon|b|}{2|a|M}=\varepsilon.$$

Tõestame nüüd, et kui $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, $b \neq 0$, $y_n \neq 0$, siis jada $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ on tõkestatud. Oletame, et $b > 0$. Siis on olemas selline arv k, et $n > k$ korral kehtib võrratus $|y_n-b| < \frac{b}{2}$. Sellest võrratusest järeldub, et $n > k$ korral jada $\{y_n\}$ kõik liikmed paiknevad lõigus $\left[\frac{b}{2}, \frac{3b}{2}\right]$. Tähistame tähega M arvudest $\frac{2}{b}$; $\frac{1}{|y_1|}$; $\frac{1}{|y_2|}$; ...; $\frac{1}{|y_k|}$ suurima (me mõistame siin arvu k all täisarvu). On ilmne, et võrratus $\left|\frac{1}{y_n}\right| \leqslant M$ kehtib iga n puhul. Analüüsige ise juhtumit $b < 0$.

134. Kasutades ülesande 133 tulemusi, võime kirjutada:

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{5}{n}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{5}{n}\right)}=\frac{2}{3}.$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=0.$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)}=0.$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}}=$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)} = 1.$$

e) Nagu peatükis 1 näidatud, summa $1^k+2^k+\ldots+n^k$ on $k+1$ astme hulkliige n suhtes pealiikme kordajaga $\frac{1}{k+1}n^{k+1}$ (vt. ülesannet 23). Seepärast

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}n^{k+1}+a_1n^k+\ldots+a_{k+1}}{n^{k+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{a_{k+1}}{n^{k+1}}\right) = \frac{1}{k+1}.$$

135. Et $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$ (vt. «Vastused ja juhised»), siis $|x_n| = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n-1}}$. Siit järeldub, et $n > 1+\frac{1}{\varepsilon^2}$ korral on kehtiv võrratus $|x_n| < \varepsilon$.

136. Kasutame asjaolu, et

$$2^n = (1+1)^n = 1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\ldots > n+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2}.$$ Seepärast $|x_n| = \frac{n}{2^n} <$

$$< \frac{2}{n}.$$ Seega on $n > \frac{2}{\varepsilon}$ korral kehtiv võrratus $|x_n| < \varepsilon$.

137. Kasutame asjaolu, et

$$a^n = [1 + (a-1)]^n = 1 + n(a-1) + \\ + \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 + \ldots > \\ > \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2.$$

Seepärast

$$|x_n| = \frac{n}{a^n} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2} = \\ = \frac{2}{(n-1)(a-1)^2}.$$

Mistahes positiivse ε puhul $n > \\ > \frac{2}{(a-1)^2\varepsilon} + 1$ korral saame $|x_n| < \varepsilon$.

138. Paiknegu arv n arvude 2^{m-1} ja 2^m vahel; siis $\log_2 n$ paikneb $m-1$ ja m vahel. Järelikult ei ületa avaldis $\frac{\log_2 n}{n}$ suurust $\frac{m}{2^{m-1}}$. Kuid me teame (vt. ülesannet 136), et mistahes $\varepsilon > 0$ korral leidub niisugune arv k, et $m > k$ puhul kehtib võrratus $\frac{m}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$ ehk $\frac{m}{2^{m-1}} < \varepsilon$. Näitame, et $n > 2^k$ korral on kehtiv võrratus $\frac{\log_2 n}{n} < \varepsilon$. Tõepoolest, kui $n > 2^k$, siis n asetseb 2^{m-1} ja 2^m vahel, kus $m > k$. Seepärast $\frac{\log_2 n}{n} < \frac{m}{2^{m-1}} < \varepsilon$.

139. Näitame, et iga positiivse ε puhul on olemas niisugune arv k, et $n > k$ korral kehtib võrratus $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$. Kuna $\sqrt[n]{n} \geqslant 1$, siis

$|\sqrt[n]{n}-1| = \sqrt[n]{n}-1$.

Vaatleme, milliste n väärtuste korral pole võrratus $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$ kehtiv.

Teiste sõnadega, milliste n väärtuste korral on kehtiv võrratus $\sqrt[n]{n}-1 \geqslant \varepsilon$ ehk $\sqrt[n]{n} \geqslant \varepsilon+1$ ehk $n \geqslant (1+\varepsilon)^n$. Et

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 \ldots > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2,$$

siis võrratusest $n \geqslant (1+\varepsilon)^n$ järeldub, et $n > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$ millest $n < 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$. Seepärast kõigi $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$ korral pole võrratus $\sqrt[n]{n}-1 \geqslant \varepsilon$ kehtiv. Järelikult on võrratus $\sqrt[n]{n}-1 < \varepsilon$ kehtiv.

140. Kasutame selle ülesande juhises antud tähistust. Pärast esimest sammu satub tigu punkti, mille koordinaadid on $(a+1, b)$. Pärast teist sammu — punkti, mille koordinaadid on $(a+1, b+1)$ jne. Pärast n-ndat sammu on tigu punktis $(a+n, b+n)$, pärast $(2n+1)$ sammu punktis $(a+n+1, b+n)$. Seepärast

$$k_{2n} = \frac{b+n}{a+n}, \quad k_{2n+1} = \frac{b+n}{a+n+1}.$$

Nüüd jääb leida veel jada k_n piirväärtus. Tähistame k_{2n} sümboliga k'_n ja k_{2n+1} sümboliga k''_n. On kerge kontrollida (vt. ülesande 134 lahendust), et jadad $\{k'_n\}$ ja $\{k''_n\}$ lähenevad 1-le. Seepärast mistahes $\varepsilon > 0$ korral leidub selline arv l_1, et $n > l_1$ puhul on kehtiv võrratus $|k'_1 - 1| < \varepsilon$. Täpselt samuti leitakse selline arv l_2, et $n > l_2$ puhul on kehtiv võrratus $|k''_2 -$

$-1|<\varepsilon$. Tähistame l-ga arvudest $2l_1$ ja $2l_2+1$ suurima. Siit $n>l$ korral on kehtiv võrratus $|k_n-1|<\varepsilon$.

141. Säilitame tähistuse, mida on kasutatud ülesande 140 juhises ja lahenduses.

a) Sellel juhtumil $k'_n=k_{2n}=\dfrac{b+2n}{a+n}$, $k''_n=k_{2k+1}=\dfrac{b+2n}{a+n+1}$. Me saame, et $\lim\limits_{n\to\infty}k'_n=\lim\limits_{n\to\infty}k''_n=2$. Siit, nagu ka eespool, järeldub, et $\lim\limits_{n\to\infty}k_n$ on olemas ja võrdub 2-ga.

b) Sellel juhtumil

$$k'_n=k_{2n}=\frac{b+2+4+\ldots+2n}{a+1+3+\ldots+(2n-1)}=$$

$$=\frac{b+n^2+n}{a+n^2};$$

$$k''_n=k_{2n+1}=\frac{b+2+4+\ldots+2n}{a+1+3+\ldots+(2n+1)}=$$

$$=\frac{b+n^2+n}{a+(n+1)^2}.$$

Siit $\lim\limits_{n\to\infty}k'_n=\lim\limits_{n\to\infty}k''_n=1$ ja, nagu ka eespool, tõestatakse, et $\lim\limits_{n\to\infty}k_n$ on olemas ja võrdub 1-ga.

c) Sellel juhtumil

$$k'_n=k_{2n}=\frac{b+2+8+\ldots+2^{2n-1}}{a+1+4+\ldots+2^{2n-2}}=$$

$$=\frac{b+\frac{2}{3}(4^n-1)}{a+\frac{1}{3}(4^n-1)};$$

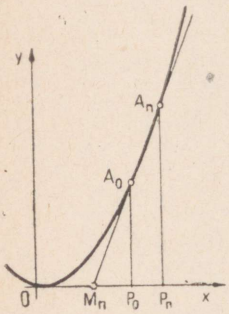
$$k''_n=k_{2n+1}=\frac{b+2+8+\ldots+2^{2n-1}}{a+1+4+\ldots+2^{2n}}=$$

$$= \frac{b + \frac{2}{3}(4^n - 1)}{a + \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)}.$$

Siit on näha, et $\lim\limits_{n\to\infty} k'_n = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} k''_n = \frac{1}{2}$.

Näitame, et jadal $\{k_n\}$ pole antud juhtumil piirväärtust. Tõepoolest, kui mingi jada piirväärtus on a, siis tema mistahes osajadal on seesama piirväärtus. Tõestage see iseseisvalt, kasutades näiteks ülesandeid 113 a) ja b).

Kuid antud juhtumil on osajadadel $\{k_{2n}\}$ ja $\{k_{2n+1}\}$ võrdsed piirväärtused.



Joon. 42

142. Kolmnurkade $A_0M_nP_0$ ja $A_nM_nP_n$ (joon. 42) sarnasusest saame

$$M_nP_0 : M_nP_n = P_0A_0 : P_nA_n.$$

Tähistame punkti M_n abstsissi x_n-ga. Siis võib saadud võrde kirjutada kujul:

$$(a - x_n) : \left(a + \frac{1}{n} - x_n\right) =$$

$$= a^2 : \left(a + \frac{1}{n}\right)^2.$$

Siit saame avaldise x_n jaoks:

$$x_n = \frac{a(an+1)}{2an+1} = \frac{a\left(a + \frac{1}{n}\right)}{2a + \frac{1}{n}}.$$

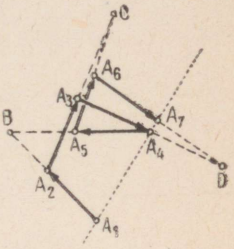
Seepärast

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a\left(a + \frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2a + \frac{1}{n}\right)} = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}.$$

Geomeetriliselt võib saadud vastust tõl-

gendada nii: paraboolile tema mistahes punktis tõmmatud puutuja jaotab pooleks lõigu, mis ühendab parabooli tipu puutepunkti projektsiooniga x-teljel.

143. Väljugu õpilane Peeter punktist A_1. Tähistame tähtedega B, C, D vastavalt punktid, kus asub koolimaja, kino ja liuväli (joon. 43).



Joon. 43

Peetri teekonda kujutab siis murdjoon $A_1A_2A_3\ldots$, kus punkt A_2 on lõigu A_1B keskpunkt, punkt A_3 on lõigu A_2C keskpunkt, punkt A_4 on lõigu A_3D keskpunkt jne. Tõestame, et punktid A_1, A_4, A_7, $\ldots$ $\ldots A_{3n+1}$, $\ldots$ paiknevad ühel ja samal sirgel. Tõepoolest, lõik A_2A_5 on kolmnurga A_1BA_4 kesklõik, mistõttu ta on paralleelne lõiguga A_1A_4, kuid on sellest kaks korda lühem. Täpselt samuti, vaadeldes kolmnurka A_2CA_5, järeldame, et lõik A_3A_6 on paralleelne lõiguga A_2A_5, kuid on sellest kaks korda lühem. Lõpuks, kolmnurgast A_3DA_6 saame, et lõik A_4A_7 on paralleelne lõiguga A_3A_6, kuid on sellest kaks korda lühem. Võrreldes saadud tulemusi, näeme, et lõigud A_1A_4 ja A_4A_7 on teineteise pikendusteks, kusjuures lõigu A_4A_7 pikkus on 8 korda väiksem kui lõigu A_1A_4 pikkus.

Täpselt samuti võib teha kindlaks, et lõik A_7A_{10} on lõigu A_4A_7 pikenduseks, lõik $A_{10}A_{13}$ lõigu A_7A_{10} pikenduseks jne. Niisiis, punktid A_1, A_4, A_7, $\ldots$, A_{3n+1}, $\ldots$ paiknevad kõik ühel ja samal sirgel. Me tõestasime samuti, et nende punktide vahelised kaugused kujutavad geomeetrilist progressiooni teguriga $\frac{1}{8}$. Nüüd pole raske näidata, et jadal A_1; A_4; A_7; $\ldots$; A_{3n+1}; $\ldots$ on piirväärtus. Tõepoolest, võtame punkti A_1 koordinaatide alguspunktiks sirgel, mis läbib sellele jadale vastavaid punkte, mõõduühikuks võtame aga lõigu A_1A_4 pikkuse. Siis punkti A_{3n+1} koordinaat

$$x_n = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \ldots + \frac{1}{8^{n-1}} =$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n}{1 - \frac{1}{8}}.$$

Seepärast on olemas $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1\frac{1}{7}$ (vt. ülesanne 132).

Seega tõestasime, et punktide jada A_1; A_4; A_7; ...; A_{3n+1}; ... läheneb mingile punktile M. Täpselt samuti võib tõestada, et jada A_2; A_5; A_8; ...; A_{3n+2}; ... läheneb mingile punktile N, jada A_3; A_6; A_9; ...; A_{3n}; ... aga mingile punktile P. Seega hakkab Peeter peatselt liikuma mööda kolmnurga MNP külgi. Tõestage ise, et punktide M, N ja P asend sõltub ainult punktide B, C ja D asendist, ei sõltu aga punktist A_1, kust liikumine algas.

144. Esimene lahendusviis. Võtame sirgel M_1M_2 punkti M_1 koordinaatide alguspunktiks ja lõigu M_1M_2 mõõtühikuks. Siis punkti M_n koordinaat x_n on eelnevate punktide koordinaatidega seotud valemiga

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$$

(tõestage see võrdus ise). Näitame, et jada $\{x_n\}$ läheneb arvule $\frac{2}{3}$.

Selleks näitame induktsiooni teel, et $x_n = \frac{2}{3}\left[1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$.

Tõepoolest, võttes $n = 1$, saame $x_1 = \frac{2}{3}\left[1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 0$. $n = 2$ korral saame $x_2 = \frac{2}{3}\left[1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right] = 1$.

Oletame nüüd, et võrdus $x_n = \frac{2}{3}\left[1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$ on kehtiv kõigi $n \leqslant k$ korral. Kontrollime võrduse kehtivust $n = k + 1$ korral.

Asetades x_k ja x_{k-1} avaldised valemisse $x_{k+1} = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$, saame

$$x_{k+1} = \frac{\frac{2}{3}\left[1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right]+\frac{2}{3}\left[1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right]}{2} =$$

$$= \frac{2}{3}\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)^k+\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)^k(1-2)\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right].$$

Teine lahendusviis. Vaatleme punkti N, mis jaotab lõigu M_1M_2 suhtes 2 : 1. Tõestage induktsiooni põhjal, et seesama punkt N jaotab kõik lõigud M_2M_3, M_3M_4 ..., M_nM_{n+1}, ... suhtes 2 : 1. Siit järgneb vahetult, et lõigu M_nN pikkus on 2^{n-1} korda väiksem kui lõigu M_1N pikkus. See aga tähendab, et jada M_1; M_2; ...; M_n; ... piirväärtuseks on punkt N.

145. a) Geomeetrilise progressiooni summa järgi $S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. Kui $|a| < 1$, siis

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1-a^{n+1})}{1-a} = \frac{1}{1-a}.$$

Kui $|a| > 1$, siis $n \to \infty$ korral $S_n \to \infty$.

Lõpuks, kui $|a| = 1$, siis saame kas jada $S_n = n$ ($a = 1$ puhul) või jada $S_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$ ($a = -1$ puhul). Neist kummalgi jadal pole piirväärtust. Niisiis, $|a| \geqslant 1$ korral jada hajub.

b) Anname summale S_n kuju $(a + a^2 + \ldots + a^n) + (a^2 + a^3 + \ldots + a^n) + \ldots + (a^{n-1} + a^n) + a^n$. Kasutades iga sulgudes oleva summa puhul geomeetrilise progressiooni summa valemit, saame

$$S_n = \frac{a - a^{n+1}}{1-a} + \frac{a^2 - a^{n+1}}{1-a} + \ldots + \frac{a^n - a^{n+1}}{1-a} =$$

$$= \frac{a + a^2 + \ldots + a^n - na^{n+1}}{1-a} =$$

$$= \frac{\frac{a - a^{n+1}}{1-a} - na^{n+1}}{1-a} =$$

$$= \frac{a - (n + 1 - na)a^{n+1}}{(1-a)^2}.$$

Sellest valemist järeldub juba kergesti (vt. ülesannet 137), et $|a| < 1$ korral $S_n \to \frac{a}{(1-a)^2}$, $|a| \geqslant 1$ korral aga rida hajub.

c) Kuna $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, siis

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1};$$

$S = 1$.

d) Et $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} =$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right], \text{ siis}$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \right.$$

$$+\left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4}\right) + \ldots +$$

$$\left. +\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]; \quad S = \frac{1}{4}.$$

e) Näitame, et

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Tõepoolest, selles summas on n liiget ja väiksem neist on $\frac{1}{2}$. Nüüd märgime, et

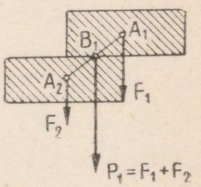
$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots +$$

$$+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) > 1 + \frac{1}{2}n$$

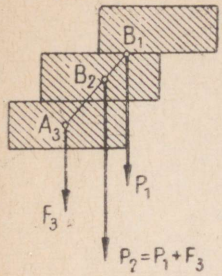
(sest iga sulgudes olev avaldis on suurem kui $\frac{1}{2}$). Siit järeldub, et $S_n \to \infty$, kui $n \to \infty$. Tähendab, jada hajub.

146. Kahte tellist võib teineteisele paigutada ettenihkega $\frac{1}{2}$ (loeme tellise pikkuse võrdseks 1-ga). Jõudude F_1 ja F_2 resultantjõud P_1 paikneb $\frac{1}{4}$ ühiku kaugusel teise tellise servast (joon. 44). Seepärast võib kolmandat tellist nihutada teise tel-



$\frac{A_1B_1}{A_2B_1} = \frac{F_1}{F_2} = 1$

Joon. 44



Joon. 45

lise suhtes $\frac{1}{4}$ võrra. Nüüd tuleb leida jõudude P_1 ja F_3 resultantjõud. Kuna jõud P_1 on kaks korda suurem kui F_3, jaotab resultantjõu rakenduspunkt jõudude F_3 ja P_1 rakenduspunktide vahelise lõigu suhtes 2 : 1 (joon. 45). Siit järeldub, et neljandat tellist võib kolmanda suhtes nihutada $\frac{1}{6}$ võrra. Toimides nii edasi, võib kontrollida (tehke seda ise, kasutades matemaatilise induktsiooni printsiipi), et $(n+1)$-st tellist võib n-nda tellise suhtes nihutada $\frac{1}{2n}$ võrra.

Seega siis võib n tellisest ehitada «katuse» pikkusega $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2(n-1)}$. Kuna rida $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ hajub (vt. ülesannet 145e)), võib «katuse» ehitada kuitahes pika.

147. Jada $\{x_n\}$ rahuldab ilmselt võrdust $x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}$. Oletame, et jada $\{x_n\}$ piirväärtuseks on arv a. Siis võrduse vasak pool läheneb arvule a, parem pool aga arvule $2+\frac{1}{a}$ (vt. ülesannet 132). Me saame seega võrduse $a=2+\frac{1}{a}$, millest $a=1\pm\sqrt{2}$. Kuna iga x_n on suurem kui 2, ei saa $1-\sqrt{2}$ olla jada $\{x_n\}$ piirväärtuseks.

Niisiis, me tõestasime, et kui jadal $\{x_n\}$ on olemas piirväärtus, siis see piirväärtus on $1+\sqrt{2}$.

Näitame nüüd, et otsitav piirväärtus tõepoolest eksisteerib. Tähistame x_n ja $1+\sqrt{2}$ vahe sümboliga y_n. Me peame näitama, et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Asendades võrduses $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$ suuruse x_n tema avaldisega y_n kaudu, saame

$$1+\sqrt{2}+y_{n+1} = 2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}+y_n},$$

millest

$$y_{n+1} = \frac{2(1+\sqrt{2}+y_n)+1-(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}+y_n)}{1+\sqrt{2}+y_n} =$$

$$= \frac{(1-\sqrt{2})y_n}{1+\sqrt{2}+y_n}.$$

Sellest valemist saame järgmise hinnangu: $|y_{n+1}| < \frac{1}{2}|y_n|$. Tõepoolest, $|1-\sqrt{2}| < \frac{1}{2}$, aga $1+\sqrt{2}+y_n > 1$ (see järeldub sellest, et $|y_n| < \frac{1}{2}$, mida on kerge kindlaks määrata induktsiooni põhjal).

Seepärast

$$|y_{n+1}| = \frac{|1-\sqrt{2}|\cdot|y_n|}{|1+2+y_n|} < \frac{1}{2}|y_n|.$$

Siit järgneb vahetult, et $|y_n| < \frac{|y_1|}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^n}$, järelikult läheneb jada $\{y_n\}$ nullile.

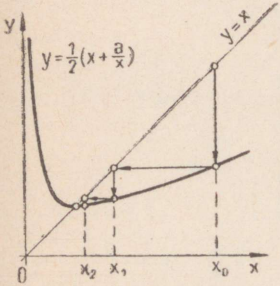
Märkus. Võib tõestada, et jada

$$n_1;\ n_1+\frac{1}{n_2};\ n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3}};\ n_1+$$

$$+\frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3+\frac{1}{n_4}}};\ \ldots,$$

kus n_1, n_2, n_3, ... on suvalised naturaalarvud, piirväärtuseks on mingi irratsionaalarv a. Kui jada n_1; n_2; n_3; ... on perioodiline, on arvul a kuju $r_1+\sqrt{r_2}$, kus r_1 ja r_2 on ratsionaalarvud. Õige on ka vastupidine väide: iga irratsionaalarvu, mille kuju on $r_1+\sqrt{r_2}$, võib kujutada lõpmatu perioodilise ahelmurruna. Üksikasjalikumalt on sellest kirjutatud raamatus А. Я. Хинчин «Цепные дроби».

148. Algul tõestame, et kui jadal x_n on piirväärtus olemas, siis see on $\pm\sqrt{a}$. Tõepoolest, olgu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Siis $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(x_n+\right.$ $\left.+\frac{a}{x_n}\right)=\frac{1}{2}\left(b+\frac{a}{b}\right)$. Me saame võrduse $b=\frac{1}{2}\left(b+\frac{a}{b}\right)$, millest $b^2=a$, $b=$ $=\pm\sqrt{a}$.



Joon. 46

Märgime veel, et kui $x_0>0$, on jada kõik liikmed positiivsed; kui aga $x_0<0$, on jada kõik liikmed negatiivsed. Seepärast esimesel juhtumil $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}$, aga teisel juhtumil $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\sqrt{a}$.

Jääb tõestada, et jadal $\{x_n\}$ on piirväärtus tõepoolest olemas. Olgu $x_0>0$ (joon. 46). Tähistame x_n ja $\sqrt{a}$ vahe, mis on jagatud $\sqrt{a}$-ga, sümboliga y_n. Asetades

avaldise $x_n = \sqrt{a}(1+y_n)$ võrdusesse $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, saame

$$\sqrt{a}(1+y_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a}(1+y_n) + \frac{a}{\sqrt{a}(1+y_n)}\right),$$

millest

$$y_{n+1} = \frac{y_n^2}{2(1+y_n)}.$$

Meil tuleb tõestada, et jada $\{y_n\}$ läheneb nullile. Märgime algul, et kuna

$$1 + y_0 = 1 + \frac{x_0 - \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{x_0}{\sqrt{a}} > 0,$$

siis on kõik arvud y_n iga $n \geqslant 1$ korral positiivsed. Seepärast

$$|y_{n+1}| = y_{n+1} = \frac{{y_n}^2}{2(1+y_n)} < \frac{y_n}{2}.$$

Siit järeldub, et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Vaatleme konkreetset näidet: $a = 10$, $x_0 = 3$. Sellel juhul $y_0 = \frac{3-\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$. Kuna $(3{,}2)^2 = 10{,}24 > 10$, siis $\sqrt{10} < 3{,}2$. Seepärast $|y_0| = \left|\frac{3-\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\right| < \frac{0{,}2}{3} = \frac{1}{15}$ ja, tähendab,

$$|y_1| = \frac{y_0^2}{2(1+y_0)} < \frac{\left(\frac{1}{15}\right)^2}{2\left(1-\frac{1}{15}\right)} < \frac{1}{400}.$$

Edasi,

$$|y_2| = \frac{y_1^2}{2(1+y_1)} < \frac{\left(\frac{1}{400}\right)^2}{2} < \frac{1}{320000}.$$

Seepärast $|x_2 - \sqrt{10}| = y_2\sqrt{10} < \frac{\sqrt{10}}{320000} < 0{,}00001$. Niisiis, et leida $\sqrt{10}$ täpsusega 0,00001, on küllaldane leida liige x_2. Saame

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{10}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{10}{3}\right) =$$

$$= 3\frac{1}{6} = 3{,}166666\ldots,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{10}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(3\frac{1}{6} + \frac{10}{3\frac{1}{6}}\right) =$$

$$= 3\frac{37}{228} = 3{,}162280\ldots$$

Tõepoolest $\sqrt{10} = 3{,}16227765\ldots$

Nagu näete, erineb meie poolt leitud väärtus tegelikust väärtusest tõepoolest vähem kui 0,00001 võrra.

I peatükk

2. Ülesannet võib lahendada kahel viisil: matemaatilise induktsiooni meetodiga või kasutades valemit

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

3. $\frac{n}{3n+1}$.

6. Ülesannet võib lahendada kahel viisil: kasutades matemaatilise induktsiooni printsiipi või kasutades võrdust

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}.$$

Ülesande lahendamisel matemaatilise induktsiooni meetodiga tuleb alustada väärtusega $n = 2$.

8. $\frac{n(n+1)}{2} + 1$. Olgu tasapinnal juba tõmmatud n sirget. Kui tõmmata $(n+1)$-ne sirge, suureneb tasapinna osade arv $n+1$ võrra.

9. Oletame, et n kopikat $(n > 7)$ on kujutatav kolme- ja viiekopikaliste summana. Näidake, et siis on ka $n+1$ kopikat kujutatav kolme- ja viiekopikaliste summana. Seejärel rakendage matemaatilise induktsiooni meetodit, alates $n = 8$.

14. Kasutage võrratust

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.$$

17. $\Delta u_n = 2n + 1$.

18. a) Ei või; b) võib. Kasutada valemit $u_1 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots + \Delta u_{n-1} = u_n$.

20. Hulkliikme pealiikme kordaja on k.

21. Kasutada ülesannete 19 ja 20 tulemusi.

22. $k!$.

23. Lahendada ülesanne induktsiooni meetodiga k järgi. Kasutada ülesannete 19 ja 20 tulemusi.

25. Kasutada ülesannete 19 ja 23 tulemusi.

26. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ülesandest 25 on selge, et summa väljendub 3-nda astme hulkliikmena.

27. $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

28. a) $u_n = u_1 + d(n-1)$;
b) $u_n = u_1 q^{n-1}$.

29. a) $S_n = u_1 n + \frac{n(n-1)}{2} d$;

b) $P_n = u_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

30. a) $S_{15} = 35$; b) $P_{15} = 10^{35}$.

31. a) 0; b) $4^5 = 1024$.

32. Tõestamiseks vaadelda suurust $qS_n - S_n$.

33. 210 minutit = 3 tundi 30 minutit.

34. Ratsanik kulutas viimase ringi läbimiseks 0,986 korda vähema aega kui jalgrattur.

35. 250 000.

36. 164 700. Tähistame kõigi kolmekohaliste positiivsete arvude summa sümboliga $S^{(1)}$, kolmekohaliste positiivsete 2-ga jaguvate arvude summa sümboliga $S^{(2)}$, kolmekohaliste positiivsete 3-ga jaguvate arvude summa sümboliga $S^{(3)}$ ja 6-ga jaguvate arvude summa sümboliga $S^{(6)}$. Siis summa, mida ülesandes nõutakse, on

$$S = S^{(1)} - S^{(2)} - S^{(3)} + S^{(6)}.$$

37. $u_1 = 3$, $d = 6$.

38. Ja, on olemas. Kui 27 asub m-ndal kohal, 8 n-ndal kohal ja 12 p-ndal kohal, siis rahuldavad arvud m, n ja p võrdust $m - 3p + 2n = 0$.

39. Ei, pole olemas.

40. Progressiooni tegur võib omandada väärtusi: 1; 4; $4 + 2\sqrt{3}$ ja $4 - 2\sqrt{3}$.

41. Mistahes progressioon teguriga $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ või $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

42. Jada kolmas liige on samuti võrdne 0-ga.

43. $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

II peatükk

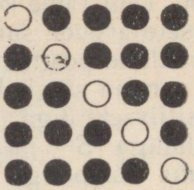
44. Ülesannet võib hakata lahendama mitmeti.

Esimene lahendusviis. Võib lihtsalt loendada kõik valgustusviisid.

0) Ei põle ükski lamp. ●●●●●

(1 viis)

1) Põleb üks lamp (vt. skeemi).



(5 viisi)

2) Põlevad kaks lampi (joonistage skeem ja loendage ise).

(? viisi)

3) Põlevad kolm lampi. (Ärge kiirustage. Pole tarvis midagi joonistada ega loendada. Mõtelge ja selgubki, et te teate juba vastust.)

(? viisi)

4) Põlevad neli lampi. (On arusaadav, et valgustusviise on niisama palju kui esimesel juhtumil.) Selge?

(5 viisi)

5) Põlevad kõik 5 lampi ○○○○○

(1 viis)

Vastus. Kokku 32 viisi.

Teine lahendusviis. Võib aga arutleda ka teisiti. Ärgu olgu lampe viis, vaid üks. Kui palju on siis valgustusviise? Olgu nüüd lampe kaks jne. Mitu korda suureneb valgustusviiside arv, kui lisandub 1 lamp?

45. Lugege läbi ülesande 44 juhis.

Sümboli C_n^k kasutamine võimaldab asendada lauset «Toas on 5 lampi; valgustusviise, mille puhul põlevad neist 3, on 10» valemiga $C_5^3 = 10$. Mida väljendab

valem $C_5^1 = C_5^4$? Millega on võrdne C_5^0? Ülesande 44 kahe lahendusmeetodi kõrvutamine viib valemini $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5$.

46. 3^n.

47. $3^k \cdot 2^{n-k}$.

48. Oletame, et te olete mingil viisil saanud teada, kui palju on viiekohalisi arve, milles pole nulle ega kaheksaid. Kas te võiksite nüüd leida, kui palju on kuuekohalisi?

49. Kui palju on autonumbreid, mis koosnevad kahest numbrist ja ühest tähest; kahest numbrist ja kahest tähest?

50. Kas te võiksite koostada ülesande lampidest, mis oleks sarnane antud ülesandega?

51. —5050.

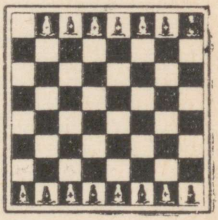
52. Kui liidetavate järjekorda on arvestatud, on jaotusi $n - 1$; kui pole arvestatud, on jaotusi paarisarvulise n korral $\frac{n}{2}$, paarituarvulise n korral aga $\frac{n-1}{2}$.

53. $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

54. Tõestage, et $(n + 1)$-se rea arvude summa on kaks korda suurem kui n-nda rea arvude summa.

55. Mõnikord pakutakse sellist lahendust. Paigutame 14 oda nii, nagu näidatud joonisel 47. Selge, et rohkem kui 14 oda (mis paarikaupa ei löö teineteist) malelauale paigutada ei saa.

Nagu tavaliselt ilmneb, ei oska sellise lahenduse autor aga selgitada, miks see on selge. Seetõttu ei saa ta ka harilikult



Joon. 47

vastata ülesande teisele küsimusele (põhiküsimusele).

56. $C_5^2 = 10$.

57. Vastus: C_{n+k}^n. (Kui te ei suuda kohe kirjutada valemit, mis annaks vastuse n ja k kaudu, soovitame piirduda selle vastusega. Veidi hiljem tuletatakse see valem (vt. ülesandeid 60, 66 ja 67).)

58. $C_9^2 \cdot C_7^3$.

59. Ühel vertikaalil ei saa asetseda kahte vankrit (nad lööksid teineteist), tähendab, igal vertikaalil saab olla vaid üksainus vanker.

Kuid vertikaale on 8 ja vankreid 8. Tähendab, igal vertikaalil asub täpselt 1 vanker. Mitmel viisil võib seda vankrit paigutada?

60. $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

61. $C_{28}^2 \cdot (26!) = \frac{28!}{2}$ [sümboliga $n!$ tähistatakse korrutist $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1)n$].

62. $C_8^5 \cdot 5! = \frac{8!}{3!}$.

64. $C_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

66. $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

67. $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$.

Püüdke tõestada seda valemit ülesande 66 meetodiga.

68. $A_{88}^6 = \frac{88!}{6!}$ jada, $C_{88}^6 = \frac{88!}{6!\,82!}$ akordi.

69. Ridades, mille numbriteks on 2^n, kus $n = 1, 2, 3, \ldots$

70. 2^7.

71. $C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

72. 3^{20}.

74. x^8 kordaja on C_{56}^8, x^{48} kordaja on $C_{56}^{48} = C_{56}^8$.

78. Juhis: $(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$.

79. Leidke algul kõik liikmed, mis sisaldavad astet x^k.

80. Lahendame analoogilise ülesande: tõestada, et

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \\ + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n.$$

Seda ülesannet, tõsi küll, me juba kohtasime, kuid nüüd me lahendame ta teise meetodiga. Samasuses $(1+x)^n = C_n^0 + \\ + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + \\ + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$ võtame $x = 1$. Saame $2^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot 1 + C_n^2 \cdot 1 + \ldots + \\ + C_n^k \cdot 1 + \ldots + C_n^n \cdot 1$, mida oligi tarvis tõestada.

82. Kolm nulliga.

83. Anda arvudele 99 ja 101 kuju: $99 = \\ = 100 - 1$ ja $101 = 100 + 1$.

84. 2^5.

85. Juhis: $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$; kas te võiksite ütelda, kui palju jagajaid on arvul $2^8 \cdot 3^4$?

87. Missugune number võib olla meil arvus viimasel kohal? esimesel kohal? Vastus: 42.

88. 2^9.

90. $C_{3n}^n \cdot C_{2n}^n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$.

91. Toas on 11 inimest, ainult inglise keelt oskab neist üks.

93. Võib kasutada ülesande 92 tulemust, võib aga ka proovida loendamise teel leida selliste telefoninumbrite arvu, mis ei sisalda kombinatsiooni 12. Vastus: 49 401.

III peatükk

95. Juhtum «+ —» pole võimalik. Ülejäänud on võimalikud.

96. Võimalikud hinnangud: «+ + +»; «— + +»; «— + —»; «— — —».

97. a) Pikematest kõige lühem on alati pikem kui lühematest kõige pikem. b) Muutub. Sellise paigutuse korral on võimalikud mõlemad juhtumid.

98. Kontrolltööd nimetatakse raskeks, kui vähemalt ühes pingis mõlemad õpilased ei lahendanud vähemalt ühte ülesannet.

99. Võib.

100. Teoreemid 1 ja 6 on õiged, ülejäänud valed.

101. Esimene rühm — teoreem 8; teine rühm — teoreemid 2, 3, 6 ja 7; kolmas rühm — teoreemid 4 ja 5.

102. a), b) Vaadelge eraldi juhtumeid $x \geqslant 0$ ja $x < 0$. c) Vaadelge eraldi juhtumeid $x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ ja $x > \frac{1}{2}$. Vastused: a) $x_1 = 1$, $x_2 = -3$; b) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; c) lõik $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

103. Vaadelge eraldi punktide x, y ja 0 paiknemise mitmesuguseid juhtumeid! arvteljel. Juhtumil a) on võrratus kehtiv vaid siis, kui $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ või $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$. Juhtumil b) on võrratus kehtiv, kui $x \geqslant y \geqslant 0$ või $x \leqslant y \leqslant 0$. Juhtumil c), kui $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ või $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$.

104. Väited a), b) ja c) on õiged, d) aga vale.

105. Õige.

106. Õige.

107. b) Vt. ülesannet 108.

108. Jada a) jaoks on kõik antud lõigud püünisteks. Jada b) jaoks on lõigud A) ja B) korvideks, lõik C) aga püüniseks.

109. a) On olemas; b) pole olemas.

110. a) On olemas; b) pole teada. Võib olla ja võib ka mitte.

111. a) On olemas; b) on olemas.

112. Vastavad k väärtused on toodud järgmises tabelis.

	A	B	C
a	1	1000	1000 000
b	0	$\sqrt[1]{999}$	$\sqrt[1]{999\,999}$
c	0	$\frac{3}{\log 2}$	$\frac{6}{\log 2}$
d	2	2^{1000}	$2^{1\,000\,000}$

113. b) Õige.

114. b) Ei saa. Vt. jada ülesandest 108 c).

115. Kasutage ülesannet 109 b).

116. a) Piirväärtus on 0; b) piirväärtus on 1; c) piirväärtus on 2; d) piirväärtust pole; e) piirväärtus on 1; f) piirväärtus on 0; g) piirväärtus on $\frac{2}{9}$; h) piirväärtust pole; i) piirväärtus on 0; j) piirväärtust pole.

117. Ei saa. (Juhis: vrd. ülesannet 115.)

118. Juhis b) kohta: sõnastage, mida tähendab, et arv a pole jada kuhjumispunktiks.

119. Vt. ülesandeid 113 a), 107 a), 118 b).

120. a) 1; b) 1, -1; c) 0; $\pm\sin 1°$, $\pm\sin 2°$, ..., $\pm\sin 89°$, ± 1; d) 0; e) kuhjumispunkte pole; f) kuhjumispunktid täidavad lõigu $[0, 1]$.

121. Jada $\{x_n\}$ nimetatakse tõkestamatuks, kui mistahes C korral leidub selline indeks n, et kehtib võrratus $|x_n| > C$.

122. Vale. Vt. ülesannet 108 b).

123. a) $x_n \to \infty$; $x_n \to \infty$; c) $\{x_n\}$ — tõkestamata; d) $x_n \to \infty$; e) $\{x_n\}$ — tõkestatud.

124. a) $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; b) $x_n = \frac{1}{n}$;

c) $x_n = \frac{n-1}{n}$; d) $x_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}$.

125. 1) Tingimust rahuldavad kõik jadad. 2) Mitte kõik jada liikmed pole võrdsed a-ga. 3) Jada on tõkestatud. 4) Punkt a pole jada kuhjumispunktiks. 5) Jada ei kasva tõkestamatult. 6) Arv a pole jada piirväärtuseks. 7) Jada on tõkestatud.

9) Arv a on kas jada $\{x_n\}$ üheks liikmeks või selle jada [1] kuhjumispunktiks.

Ülejäänud tingimused on loetletute eitusteks. Ja nimelt, tingimus järjenumbriga k) tähendab, et tingimus järjenumbriga $17-k$) pole täidetud. Näiteks tingimus 10 tähendab, et tingimus 7 pole täidetud, s. t. jada pole tõkestatud. Tingimus 15 tähendab, et tingimus 2 pole täidetud, s. t. jada kõik liikmed on võrdsed a-ga jne.

126. a) $+++++-;\ x_n=a;$

$-++++-;\ x_n=a+\frac{1}{n};$

$--+++-;\ x_n=a+1+(-1)^n;$

$--+---;\ x_n=a+n[1+(-1)^n];$

$----+-;\ x_n=a+(-1)^n;$

$-----+;\ x_n=n;$

$------;\ x_n=a+1+n[1+(-1)^n].$

127. 1) $x_n=\frac{1}{n}$; 2) $x_n=\frac{n-1}{n}$;

3) $x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

128. Tõestage, et kui lõpmatul jadal pole suurimat liiget, siis tema liikmete hulgast võib välja valida lõpmatu kasvava osajada.

129. Tõestage, et $\sqrt{2}$ ligikaudsete (puuduga) väärtuste jada 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41422; ... on monotoonne, tõkestatud ja tal pole ratsionaalarvulist piirväärtust.

130. Kasutage ülesande 128 tulemust ja Bolzano-Weierstrassi aksioomi.

---

[1] Kui tingimus 9 on täidetud, siis punkti a nimetatakse jada $\{x_n\}$ puutepunktiks.

131. a) Kasutage võrratust $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ ja tõestage, et jada on tõkestatud. b) Vaadelge eraldi jadasid, mis on moodustatud paarisarvulistel ja paarituarvulistel kohtadel seisvatest jada liikmetest.

133. a) $x_n = \frac{1}{n^2}$; $y_n = \frac{1}{n}$; b) $x_n = \frac{1}{n}$; $y_n = \frac{1}{n}$; c) $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$; d) $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

134. a) $\frac{2}{3}$; b) 0; c) 1; d) 1; e) $\frac{1}{k+1}$.

135. Kasutage samasust

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

136. Esitage 2^n kujul $(1+1)^n$ ja kasutage binoomvalemit.

137. Esitage a^n kujul $[1+(a-1)]^n$ ja kasutage binoomvalemit.

138. Kasutage ülesande 136 tulemust.

139. 1.

140. Võtame koordinaatide alguseks punkti, kus asub teine tigu. Koordinaatteljed suuname ruudulise paberilehe jooni mööda ja mõõduühikuks võtame ühe ruudu pikkuse. Olgu algmomendil esimene tigu punktis, mille koordinaadid on (a, b). Leidke punkti koordinaadid (a_n, b_n), kuhu satub tigu n sammu pärast. Pikksilm on suunatud mööda sirget, mille tõus $k_n = \frac{b_n}{a_n}$. Tõestage, et $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 1$.

141. Vt. ülesande 140 juhist. Vastused: a) $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 2$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 1$; c) jadal $\{k_n\}$ pole piirväärtust.

142. Tõmbame punktidest A_0 ja A_n ristsirged x-teljele. Olgu P_0 ja P_n nende ristsirgete aluspunktid. Tõestage, et kolmnurgad $M_nA_0P_0$ ja $M_nA_nP_n$ on sarnased, ning arvutage siit lõigu M_nP_0 pikkus. Vastus. Punkt M on lõigu OP_0 keskpunkt.

143. Märkige paberilehele kolm punkti, mis tähistavad koolimaja, kino ja liuvälja asukohti. Võtke suvaline neljas punkt ja konstrueerige Peetri teekonda kujutav murdejoon A_1, A_2, A_3, A_4, ... Võrrelge lõike A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6, A_4A_7 jne.

144. Punkt M jaotab lõigu M_1M_2 suhtes $2:1$.

145. a) $S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$; $|a|<1$ puhul $S = \frac{1}{1-a}$, $|a| \geqslant 1$ puhul rida hajub; b) $S_n = \frac{a-(n+1-na)a^{n+1}}{(1-a)^2}$; $|a|<1$ puhul $S = \frac{a}{(1-a)^2}$, $|a| \geqslant 1$ puhul rida hajub.

(Juhis. Kujutage S_n n geomeetrilise progressiooni summana.) c) $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, $S = 1$; d) $S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$, $S = \frac{1}{4}$; e) rida hajub. (Juhis. Tõestage, et $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$.)

146. «Katuse» võib ehitada kuitahes pika. Juhis. Võtame tellise pikkuseks ühiku. Tõestage induktsiooni teel, et tellis ei kuku, kui $(n+1)$-st tellist (ülevalt lu-

gedes) nihutatakse n-nda tellise suhtes $\frac{1}{2n}$ võrra. Pärast seda kasutage ülesande 145 e) tulemust.

147. $1+\sqrt{2}$.

148. Piisab, kui arvutada x_2.

Sisukord

	Ülesanded	Lahendused	Vastused ja juhised
Sissejuhatus	3		
I peatükk. **Jadad** . . .	7	54	159
§ 1. Mis on jada	7		
§ 2. Matemaatilise induktsiooni meetod .	10		
§ 3. Ülesannete tingimused	14		
II peatükk. **Kombinatoorika**	21	89	161
III peatükk. **Piirväärtused**	28	113	166
§ 1. Ettevalmistavad ülesanded	29		
§ 2. Ülesanded, mis on seotud piirväärtuse definitsiooniga . . .	33		
§ 3. Ülesanded piirväärtuse arvutamise kohta	40		
Kontrollülesanded	46		
I peatüki juurde . . .	46		
II peatüki juurde . . .	49		
III peatüki juurde . . .	51		

Сергей Израилевич Гельфанд, Михаил Львович Гервер, Александр Александрович Кириллов, Николай Николаевич Константинов, Анатолий Георгиевич Кушниренко. ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ. Последовательности. Комбинаторика. Пределы. На эстонском языке. Перевел с русского К. Калласте. Художественное оформление Т. Ару. Издательство «Валгус». Таллин, Пярнуское шоссе, 10.

Toimetaja E. Randma. Kunstiline toimetaja H. Keigo. Tehniline toimetaja I. Vahtre. Korrektorid E. Bitter ja S. Türn. Laduda antud 18. VI 1968. Trükkida antud 9. VI 1969. Kohila Paberivabriku trükipaber nr. 2, 54×84/16. Trükipoognaid 11. Tingtrükipoognaid 9,24. Arvestuspoognaid 6,5. Trükiarv 4000. Tellimise nr. 3796. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II.

Hind 17 kop.

17 kop.

A-2992

$$\sqrt{n+$$

$$\frac{}{(n+1)(n}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}}$$

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00410743 1