A-36591

EESTI NSV HARIDUSMINISTEERIUM

TÖÖJUHENDID KAUGÕPPEKESKKOOLIDE ÕPILASTELE

1968./69. õppeaastaks

MATEMAATIKA

XI klass

TALLINN
1968

A

2

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

98670

Задания для учащихся заочной средней школы

Математика. XI класс

На эстонском языке

Министерство просвещения Эстонской ССР
Таллин, Тынисмяги, II

TRÜ rotaprint 1968. Paljundamisele antud 8. X 1968.
Trükipoognaid 3,5. Tingtrükipoognaid 3,19. Arvestuspoognaid 2,86. Trükiarv 2500. Paber 30 x 42. 1/4.
Tell. nr. 613.

Hind 8 kop.

A-36591

XI klassi matemaatika

Tööjuhend on koostatud programmi järgi, kusjuures terve aasta õppematerjal on jaotatud 10-ks arvestuseks. Märkuste all on toodud mõningad antud programmi kuuluvad põhitõed, mida on tahetud õpiku kõrval rõhutada või millele on antud õpikust erinev formuleering. Märkuste all antakse ka näpunäiteid teoreetilise materjali õppimiseks ja ülesannete lahendamiseks.

Enne kohustuslike harjutusülesannete lahendamist, mis tulevad õpetajale esitada arvestusele tulles,on vaja õppida vastava osa teooria ja läbi lahendada juhendis toodud näidisülesanded. Iga arvestuse lõpul on antud rida küsimusi enesekontrolliks.

Õpik: E. Etverk, O. Prinits. Matemaatika XI klassile, 1968.

I ARVESTUS

1. Programm

Tasapind ja selle kujutamine. Tsentraalprojektsiooni ja paralleelprojektsiooni mõiste. Tasapinna määramine punktide ja sirgjoonte abil.

Kahe sirgjoone vastastikused asendid ruumis. Kiivsirged.

Sirge ja tasapinna vastastikused asendid.

Kahe tasapinna vastastikused asendid.

Kolme tasapinna vastastikused asendid.

Kolm paralleelset sirget ruumis.

Vastavalt paralleelsete haaradega nurgad. Paralleelprojektsiooni omadused.

2. Märkusi

Tuleb meeles pidada punktide, sirgete ja tasapindade tähistamisviis, samuti ka tasapinna kujutamine joonisel. Edasist tööd hõlbustab tunduvalt ka mitmesuguste matemaatiliste lausete märkimine lühidalt vastavate sümbolite abil. Tähtsamad neist on:

$\subset$ (asetseb), $\supset$ (läbib), $\times$ (lõikub), $\parallel$ (on paralleelne)

Näiteid:

1) tasapind α läbib sirget s: $\alpha \supset s$
2) sirge s asetseb tasapinnal α : $s \subset \alpha$
3) sirge s ja tasapind α lõikuvad: $s \times \alpha$
4) tasapind α on määratud punktidega A, B ja C: $\alpha \equiv ABC$
5) tasapind α on määratud sirgetega s ja t: $\alpha \equiv st$.
6) punkt O on sirge s ja tasapinna α lõikepunkt: $O \equiv s \times \alpha$
7) sirge s on paralleelne tasapinnaga α : $s \parallel \alpha$

Erinevalt tasapinnalisest geomeetriast, kus mitteühtivad sirged kas lõikuvad või on paralleelsed, võivad sirged ruumis omada veel kolmanda vastastikuse asendi: olla kiivsed, s.t. olla mitteparalleelsed ja mittelõikuvad. Kiivsirgetest ei saa läbi panna üht ja sama tasapinda.

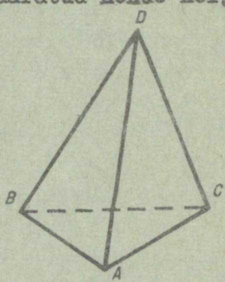
Sirge ja tasapinna ning kahe tasapinna vastastikuste asendite juures tuleb rangelt vahet teha definitsiooni ja tunnuse vahel. Definitsioon annab üldise iseloomustuse, määrab nähtuse olemuse. Näiteks: sirge ja tasapind on paralleelsed, kui neil ei ole ühtki ühist punkti. Tunnus aga on teoreem, mille tõestus tugineb vastavale definitsioonile ja mis võimaldab teatavate piiratumate tingimuste alusel kindlaks teha sirge ja tasapinna või kahe tasapinna vastastikust asendit. Näiteks: sirge ja tasapind on paralleelsed, kui antud sirge on paralleelne tasapinnal asetseva sirgega: (s.t. ta ei oma tasapinnal asetseva sirgega ühtki ühist punkti).

Kuna teoreemide tõestamisel on vaja sageli kasutada abitasapindu, tuleb hästi teada tasapinna määramise tingimusi.

3. Näidisülesandeid

Ü l e s a n n e 1. On antud neli punkti, mis ei ole ühel ja samal tasapinnal. Kas võib leiduda nende hulgas kolm punkti, mis asetsevad ühel ja samal sirgel? Mitu sirget ja mitu tasapinda on määratud nende nelja punktiga?

Antud punktide seas ei saa olla kolme punkti nii, et nad asetseksid ühel ja samal sirgel, sest siis oleksid kõik neli punkti ühel tasapinnal, kuna sirge ja väljaspool seda asetsev punkt määravad ühe tasapinna.



Joon. 1.

Järelikult peavad neli punkti asuma nii nagu on näha jooniselt 1.

Et iga sirge on määratud kahe punktiga, siis saab igast antud punktist joonestada teistesse punktidesse 3 sirget (punktist D saab joonestada sirged punktidesse A, B ja C). Kuna punkte on neli, siis sirgeid peaks saama joonestada vastavalt $4 \cdot 3 = 12$. Jooniselt näeme aga, et erinevaid sirgeid on ainult 6. Põhjus on selles, et iga sirge on joonestatud 2 korda – näiteks punktist D punkti A ja punktist A punkti D jne. Sellepärast tulebki arutelu tulemusena saadud sirgete arv 12 jagada 2-ga. Seega saab läbi antud nelja punkti joonestada 6 sirget.

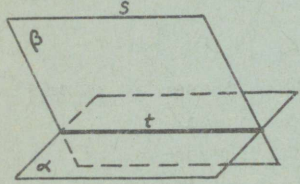
Kuna nelja punkti on võimalik rühmitada kolme kaupa neljal erineval viisil, siis antud 4 punkti määravad ka neli erinevat tasapinda.

Ü l e s a n n e 2. Kuidas võib asetseda tasapinnaga paralleelne sirge sellel tasapinnal antud sirge suhtes?

a) Mõlemad sirged on paralleelsed juhul, kui nad asetsevad ühel ja samal tasapinnal.

b) Sirged on kiivsed, kui nad ei asetse ühel ja samal tasapinnal.

Ü l e s a n n e 3. Antud on tasapind ja sellega paralleelne sirge. Tõestada, et seda sirget läbiva tasapinna ja antud tasapinna lõikejoon on paralleelne antud sirgega.



Joon. 2.

E: $s \parallel \alpha$ ja s ei asetse α -l.

$\beta \supset s$

$\beta \times \alpha \equiv t$

V.: $t \parallel s$

T.: Oletame vastuväiteliselt et sirged t ja s lõikuvad mingis punktis O. Sel juhul asetseb punkt O nii sirgel t kui ka sirgel s. Et $t \subset \alpha$, siis ka $O \subset \alpha$ ja seega peaks sirgel s olema tasapinnaga α üks ühine punkt O. See aga on vastuolus eeldusega ($s \parallel \alpha$) ja meie oletus osutus valeks. Seega $t \parallel s$.

Ü l e s a n n e 4. Läbi antud punkti panna tasapind, mis on paralleelne antud tasapinnaga.

Antud: α ja väljaspool tasapinda punkt A. Konstrueerida tasapind β nii, et $\beta \supset A$ ja $\beta \parallel \alpha$.

Lahendus:

1) Joonestame tasapinnal α kaks lõikuvat sirget $s \times t$.
2) Asetame läbi sirge s tasapinna γ nii, et $\gamma \times \alpha \equiv s$.
3) Joonestame tasapinnal γ $s' \parallel s$.
4) Asetame läbi sirge t tasapinna δ nii, et $\delta \times \alpha \equiv t$.
5) Joonestame tasapinnal δ $t' \parallel t$.
6) s' ja t' kui kaks lõikuvat sirget määravad ühe tasapinna, mis tasapindade paralleelsuse tunnuse põhjal on paralleelne tasapinnaga α. Seega saamegi tasapinna β.

4. Harjutusülesandeid

Õpikust lahendada ülesanded: 2, 3, 5, 9, 12, 13, 18, 21, 25, 26(1), 29, 31.

5. Kordamisküsimusi

1. Millal asetseb sirgjoon antud tasapinnal?
2. Millal kaks sirgjoont ühtivad?
3. Millal kaks tasapinda ühtivad?
4. Millised sirged ei määra tasapinda?
5. Millised on kahe sirge vastastikused asendid ruumis?
6. Millal on sirge paralleelne tasapinnaga?
7. Milline on kahe tasapinna paralleelsuse definitsioon?
8. Milline on paralleelsete tasapindade põhiomadus?
9. Mida nimetatakse kahe kiivsirge vaheliseks nurgaks?
10. Nimetage paralleelprojektsiooni omadusi.

II ARVESTUS

1. Programm

Kahetahuline nurk. Ruuminurk. Tasapinna normaal ja selle omadused. Punkti ja sirge normaalprojektsioon.

2. Märkusi

Kahetahulise nurga joonnurga saame kui kahetahulist nurka lõikame tema servaga ristuva tasapinnaga. Tekkivad lõikejooned moodustavadki joonnurga. Joonnurga saamiseks

1) võtame kahetahulise nurga serval ühe vaba punkti

2) joonestame läbi valitud punkti servaga ristuvad sirged mõlemal kahetahulise nurga tahul.

Kahe tasapinna vaheliseks nurgaks nimetatakse nende tasapindade vahelist teravnurka. Seda nurka mõõdetakse tema joonnurga abil.

Tasapindade lõikumisel ühes punktis tekivad r u u m i n u r g a d. Kumera ruuminurga tasanurkade summa on väiksem kui täispööre. Kolmetahulise nurga korral kehtib lisaks eelnimetatud omadusele veel teoreem: kolmetahulise nurga iga tasanurk on väiksem kui ülejäänud tasanurkade summa (ja suurem kui ülejäänud tasanurkade vahe).

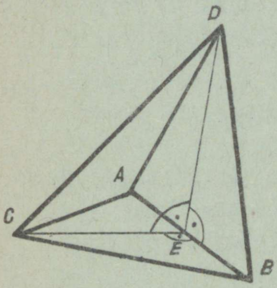
Tasapinna normaali korral ilmneb eriti selgesti definitsiooni ja tunnuse erinevus. Definitsioon nõuab, et sirget võib nimetada tasapinna normaaliks ainult siis, kui ta on risti <u>kõigi</u> selle tasapinna sirgetega. Tunnuse põhjal on sirge tasapinna normaaliks, kui ta on risti tasapinna <u>kahe lõikuva</u> sirgega.

Oluline on meelde jätta ka kõik õpikus toodud tasapinna normaali omadused, kuna neid on edaspidistes tõestustes sageli vaja.

Teoreemi täisnurga ristprojektsioonist (kolme ristsirge teoreemi) tuleb hiljem sageli kasutada ruumisirgete ristseisu põhjendamisel. Teoreem ise mingisuguseid erilisi raskusi ei valmista, kuid raskusi pakub tema äratundmine. Sellepärast tuleb teoreemi sisulisele mõistmisele pöörata erilist tähelepanu.

3. Näidisülesandeid

Ü l e s a n n e 1. Kaks võrdset võrdkülgset kolmnurka küljepikkusega a asetsevad nii, et neil on üks külg ühine ning kolmnurkade tasapinnad ristuvad. Avaldada mitteühiste tippude vaheline kaugus.



Joon. 3.

Antud:

$AB = BC = AC = AD = DB = a$

$DE \perp AB$

$CE \perp AB$

$\angle CED = 90^\circ$

Leida: CD

Lahendus: Et $AE = EB = \frac{a}{2}$ (võrdkülgse kolmnurga kõrgus poolitab aluse), siis Pütagorase teoreemi järgi saab leida Δ -st BED:

$$DE^2 = BD^2 - EB^2 = a^2 - (\tfrac{a}{2})^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$CE^2 = DE^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Delta \text{ -st CED: } CD^2 = CE^2 + DE^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = \frac{6a^2}{4}$$

Vastus: Mitteühiste tippude vaheline kaugus on $\frac{a}{2}\sqrt{6}$.

Ü l e s a n n e 2. Kolmetahulise nurga üks tasanurk on 75° ja teine 126°. Missugustes piirides on kolmanda tasanurga suurus.

Et kolmetahulise nurga iga tasanurk peab olema väiksem kui kahe ülejäänud tasanurga summa ja suurem kui samade tasanurkade vahe, siis kolmas tasanurk peab olema

$$126^\circ - 75^\circ < \alpha < 126^\circ + 75^\circ$$

Seega

$$51^\circ < \alpha < 201^\circ.$$

3.

Kuna samaaegselt kõikide tasanurkade summa peab olema väiksem kui 360°, siis

$$126^\circ + 75^\circ + \alpha < 360^\circ$$

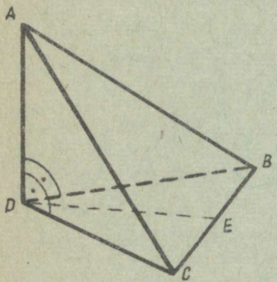
ehk

$$\alpha < 360^\circ - (126 + 75^\circ)$$
$$\alpha < 159^\circ$$

Siit saamegi nurga α suuruse jaoks järgmised piirid

$$\underline{51^\circ < \alpha < 159^\circ}$$

Ü l e s a n n e 3. Kolmetahulise nurga kõik tasanurgad on 60°. Arvutada kahetahuliste nurkade suurused.



Joon. 4.

Antud: $\angle DAC = \angle CAB = \angle DAB = 60^\circ$
$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$

Leida: $\angle CDB$

Lahendus: Et iga kolmnurga sisenurkade summa on 180°, siis $\alpha = \beta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

Kui tähistada

$AD = x$, siis
$AC = 2x$ ja samuti
$AB = 2x$

$$DC = DB = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3}$$

Et Δ CAB on võrdhaarne ja ta tipunurk on 60°, siis ka alusnurgad on 60° $\left(\frac{180^\circ - 2 \cdot 60^\circ}{2}\right)$ ning kolmnurk on võrdkülgne. Seega ka külg $BC = 2x$.

Δ CDB on ka võrdhaarne kolmnurk ja kui tipust D tõmmata kõrgus alusele BC, siis see kõrgus poolitab aluse, s.t. $CE = x$.

Δ -st CDE leiame

$$\sin \angle CDE = \frac{x}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\angle CDE = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\angle CDB = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vastus: Kahetahuliste nurkade suurused on 2 arcsin $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ü l e s a n n e 4. Risttahuka mõõtmed on 7 cm, 4 cm ja 5 cm. Kui suur on nurk risttahuka diagonaali ja kõige väiksema tahu vahel.

Antud: $AB = 7$ cm
$BC = 4$ cm
$BB_1 = 5$ cm

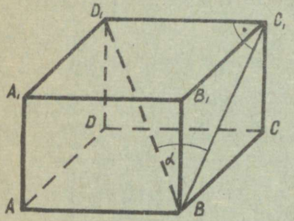
Leida: α

Lahendus:

$\angle BC_1D_1 = 90^{\circ}$, kuna D_1C_1 on risti tsp-ga BCC_1B_1.

$$BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \text{ cm}$$

$$D_1C_1 = 7 \text{ cm}$$



Joon. 5.

Δ-st BC_1D_1: $\tan\alpha = \frac{D_1C_1}{BC_1} = \frac{7}{\sqrt{41}}$,

kust $\alpha = \arctan \frac{7}{\sqrt{41}}$.

Vastus: diagonaali ja kõige väiksema tahu vaheline nurk on arctan $\frac{7}{\sqrt{41}}$.

Ü l e s a n n e 5. Lõiku pikkusega 20 cm lõikab tasapind nii, et lõigu otspunktid on tasapinnast 4 cm ja 6 cm kaugusel. Kui suur on lõigu ja tasapinna vaheline nurk.

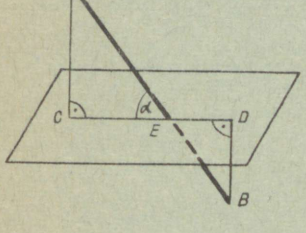
Antud: $AB = 20$ cm
$AC = 6$ cm
$BD = 4$ cm

Leida: α

Lahendus: $\Delta AEC \sim \Delta BED$

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AE}{BE} \text{ e. } \frac{AE}{BE} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Kui $AE = x$, siis
$BE = 20 - x$.



Joon. 6.

Seega $$\frac{x}{20 - x} = \frac{3}{2}$$

$$2x = 60 - 3x$$

$$5x = 60$$

$$x = 12$$

$$AE = 12$$

Δ-st AEC: $\sin\alpha = \frac{AC}{AE} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$$\alpha = 30^\circ$$

Ülesannet saab lahendada ka lihtsamalt, kui sirget AB viia rööplükkega üles 4 cm võrra. Sel juhul tekib täisnurkne kolmnurk, milles teravnurga α vastaskaatet on $6 + 4 = 10$ cm ja hüpotenuus on 20 cm. Analoogiliselt leiame, et $\sin\alpha = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, kust $\alpha = 30^\circ$.

4. Harjutusülesandeid

Õpikust lahendada ülesanded: 56, 58, 60, 62, 65, 67, 70, 72.

5. Kordamisküsimusi

1. Mis on kahetahuline nurk?
2. Kuidas joonestada kahetahulise nurga joonnurka?
3. Millised on kolmetahulise nurga tasanurkade omadused?
4. Mis on tasapinna normaal?
5. Millised on tasapinna normaali omadused?
6. Mis on sirge ristprojektsiooniks?
7. Millega võrdub lõigu ristprojektsiooni pikkus?
8. Milline oluline erinevus on sirge ja tasapinna ristseisu definitsioonil ja tunnusel?
9. Sõnastage teoreem täisnurga ristprojektsiooni kohta?

III A R V E S T U S

1. Programm

Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised.

Ekstreemumiülesanded.

Tuletise mõiste kasutamine võrrandite ligikaudsel lahendamisel.

Funktsiooni $y = [f(x)]^n$ tuletis.

Newtoni binoomvalem, selle kasutamine ligikaudsel arvutamisel.

Funktsiooni diferentsiaal; selle kasutamine ligikaudsel arvutamisel.

2. Märkusi

Enne, kui asuda trigonomeetriliste funktsioonide tuletiste õppimisele, tuleb korrata tuletise mõistet üldse ja algebraliste funktsioonide tuletiste leidmist.

Trigonomeetriliste funktsioonide tuletiste leidmine eeldab 1) piirväärtuse definitsiooni tundmist ja oskust leida konstandi, summa, korrutise ja jagatise piirväärtust,

2) mitmesuguste trigonomeetria valemite tundmist nagu

a) põhiseosed: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$$

b) liitmisvalemid:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

c) korrutiseks teisendamise valemid:

4.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Trigonomeetriliste funktsioonide tuletiste leidmiseks on vaja teada avaldise $\frac{\sin x}{x}$ piirväärtust, kui $x \to 0$. Argumenti x mõõdame siin radiaanides, mitte kraadides. (Kesknurga x suurus radiaanides võrdub temale vastava kaare pikkuse ja raadiuse suhtega.) Et $x \to 0$ korral läheneb nullile nii $\frac{\sin x}{x}$ nimetaja kui ka lugeja, siis tuleb $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ leida geomeetriliselt, kasutades ühikringi.

Funktsiooni cos x tuletise leidmiseks tuleb kasutada samasust

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos(x+\Delta x) - \cos x = -2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\sin\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$

$$= -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\frac{2x+\Delta x}{2} = -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Trigonomeetriliste funktsioonide astmete ($\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\tan^2 x$ jne.) või kordse argumendi trigonomeetriliste funktsioonide (sin 2x, tan 2x, jne.) tuletiste leidmisel tuleb need funktsioonid teisendada enne sellisteks, et seal esineksid ainult sin x, cos x või tan x teguritena või liikmetena.

Ekstreemumiülesannete lahendamisel peab teadma, et funktsioonil võib olla maksimum või miinimum neil argumendi väärtustel, millede korral funktsiooni tuletis on võrdne nulliga s.o. $f'(x) = 0$.

Ekstreemumiülesannete lahendamisel tuleb teha kõigepealt selgeks, millise funktsiooni maksimumi või miinimumi me otsime, anda see funktsioon ühe muutuja kaudu ja siis leida selle funktsiooni tuletis.

Et rakendada Newtoni võtet võrrandi $f(x) = 0$ lahendi leidmiseks, tuleb leida proovimise teel lahendi x_0 esimene lähend x_1. Selleks tuleb otsida tundmatu x kaks niisugust väärtust, millele vastavate funktsiooni $f(x)$ väärtused on erimärgilised. x_1 asub viimaste vahel, sest teine teisel pool nullkohta on funktsioonil eri märk.

Ruutvõrrandi korral saame lahendite esimesed lähendid ruutvõrrandi lahendivalemi abil. Kuupvõrrandi ja kõrgema astme võrrandite korral leitakse lahendi esimesed lähendid graafiliselt. Teise lähendi leidmiseks kasutame Newtoni võtet ja saame, et teine lähend x_2 on

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Analoogiliselt leiame kolmanda lähendi x_3

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \text{ jne.}$$

Kuupvõrrandi $x^3 + px + q = 0$ lahendi esimese lähendi leiame funktsioonide $y = x^3$ ja $y = - px - q$ graafikute lõikepunktide abstsissidena.

Kuupvõrrandi $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ lahendi esimese lähendi leidmiseks kasutatakse ruutliikmest vabanemise teisendust (asendatakse x avaldisega $x + a$ ja leitakse selline a, mille korral ruutliige muutub nulliks) ning sel teel taandatakse lähendi leidmine eelmisele juhule.

Newtoni binoomvalemi tuletamisel tuleb selgeks teha binoomi $(x + 1)^n$ arendi kordajate leidmise võte.

Võrdusest $C_k = C_{n-k}$ näeme, et binoomrea algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel olevate liikmete kordajad on võrdsed (vt. Pascal'i kolmnurk).

Binoomi $(a + b)^n$ arendi liige

$$\frac{n!}{k!(n - k)!} a^{n-k}b^k$$

on selle arendi $k + 1$ liige. Seda liiget nimetame arendi üldliikmeks ja tähistame tähega T_{k+1}. Taandades kordaja

$\frac{n!}{k!(n-k)!}$ korrutisega $(n - k)!$, saame üldliikme kujul

$$T_{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k} a^{n-k}b^k;$$

$$(k = 1,2 \ldots n)$$

ehk

$$T_{k+1} = C_k a^{n-k}b^k.$$

Kui $k = 0$, siis $C_o = 1$.

3. Näidisülesandeid

Ü l e s a n n e 1. Leida $\cos^2 x$ tuletis.

Et $\cos^2 x = \cos x \cdot \cos x$, siis kasutades korrutise tuletise leidmise eeskirja, saame:

$$\begin{aligned}(\cos^2 x)' &= (\cos x)' \cdot \cos x + \cos x \cdot (\cos x)' = \\ &= 2 \cos x(\cos x)' = 2 \cos x\,(-\sin x) = \\ &= -2 \sin x \cos x = -\sin 2x\end{aligned}$$

Ü l e s a n n e 2. Leida $\tan 2x$ tuletis.

Et $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$, siis kasutades kõigepealt jagatise tuletise leidmise eeskirja, saame:

$$(\tan 2x)' = \frac{(2 \tan x)'(1 - \tan^2 x) - 2 \tan x(1-\tan^2 x)'}{(1 - \tan^2 x)^2} =$$

$$= \frac{2(\tan x)'(1 - \tan^2 x) + 2 \tan x(\tan^2 x)'}{(1 - \tan^2 x)^2}.$$

Kuna

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ja

$$(\tan^2 x)' = (\tan x \cdot \tan x)' =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \tan x + \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{2 \tan x},$$

siis asendades saame:

$$(\tan 2x)' = \frac{\dfrac{2(1-\tan^2 x)}{\cos^2 x} + \dfrac{2\tan x \cdot 2\tan x}{\cos^2 x}}{(1-\tan^2 x)^2} =$$

$$= \frac{2 - 2\tan^2 x + 4\tan^2 x}{\cos^2 x(1-\tan^2 x)^2} =$$

$$= \frac{2 + 2\tan^2 x}{\cos^2 x(1-\tan^2 x)^2} = \frac{2(1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x})}{\cos^2 x\,(1 - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x})^2} =$$

$$= \frac{2\,\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x(\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x})^2} = \frac{2}{\cos^4 x \cdot \dfrac{\cos^2 2x}{\cos^4 x}} =$$

$$= \frac{2}{\cos^2 2x}\,.$$

Ü l e s a n n e 3. Leida funktsiooni $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ tuletis.

$$y' = \frac{(1)' \cdot \cos^2 x - 1(\cos^2 x)'}{\cos^4 x} = \frac{0 \cdot \cos^2 x + \sin 2x}{\cos^4 x} =$$

$$= \frac{\sin 2x}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\,.$$

Ü l e s a n n e 4. On antud võrrand $x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$. Teisendada see võrrand kujule, kus puudub ruutliige. Mille võrra saadud võrrandi lahendid erinevad antud võrrandi lahenditest?

Asendame x avaldisega x+a

$$(x+a)^3 + 3(x+a)^2 + 2(x+a) - 1 = 0$$
$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 + 3x^2 + 6ax + 3a^2 + 2x + 2a - 1 = 0$$
$$x^3 + (3a + 3)x^2 + (3a^2 + 6a + 2)x + a^3 + 3a^2 + 2a - 1 = 0$$

Ruutliige muutub nulliks, kui $3a + 3 = 0$, s.t. $a = -1$.

Kui nüüd a asendame oma väärtusega, saame võrrandi kujul

$$x^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 2x + (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1 = 0.$$

$$x^3 - x - 1 = 0$$

Olemegi saanud nõutud võrrandi kuju.

Kuna me x asendamisel $(x + a)$-ga vähendame tundmatut a võrra, siis saadud võrrandi lahendid erinevad antud võrrandi lahendeist a võrra, s.t. on a võrra väiksemad. Antud juhul on uue võrrandi lahend 1 võrra suurem esialgse võrrandi lahendist, kuna vähendamine -1 võrra tähendab 1 võrra suurendamist.

Ü l e s a n n e 5. Kolmnurga pindala on 12,5 cm^2. Leida kolmnurga kõrgus ja alus nii, et nende summa oleks minimaalne.

Olgu kolmnurga alus a ja kõrgus h, siis nende summa

$$y = a + h.$$

Leida tuleb selle funktsiooni minimaalne väärtus. Selleks peame andma ta ühe muutuva suuruse kaudu. Kuna ülesande andmetes on antud kolmnurga pindala, mis ka avaldub suuruste a ja h kaudu, saame pindala avaldisest $\left(S = \frac{a \cdot h}{2}\right)$ avaldada kõrguse h

$$h = \frac{2S}{a} = \frac{25}{a}$$

Asendades saame:

$$y = a + \frac{25}{a}.$$

Leiame saadud funktsiooni tuletise:

$$y' = 1 - \frac{25}{a^2}.$$

Et leida, millise a väärtuse korral on y ekstremaalne. võrdsustame y' nulliga:

$$1 - \frac{25}{a^2} = 0;$$

$$a^2 - 25 = 0;$$

$$a = \sqrt{25} = 5.$$

Uurime, kas $a = 5$ korral on y minimaalne või maksimaalne. Selleks anname a-le 5-st veidi erinevad väärtused ja arvutame vastavad y väärtused.

Olgu $a = 5{,}1$, siis $y = 5{,}1 + \frac{25}{5{,}1} \approx 5{,}1 + 4{,}91 = 10{,}01$.

Kui $a = 4{,}9$, siis $y = 4{,}9 + \frac{25}{4{,}9} \approx 4{,}9 + 5{,}11 = 10{,}01$.

Kui $a = 5$, siis $y = 5 + \frac{25}{5} = 5 + 5 = 10$. Siit näeme,

Siit näeme, et $a = 5$ korral on funktsioonil $y = a + h$ minimaalne väärtus.

Edasi arvutame h.

$$h = \frac{25}{a} = \frac{25}{5} = 5.$$

Vastus: Antud pindala korral on aluse ja kõrguse summa minimaalne siis, kui $a = h = 5$ cm.

Ü l e s a n n e 6. Tuleb valmistada pealt lahtine risttahukakujuline anum, mille põhjaks on ruut ja mille ruumala on 32 l. Millised peavad olema anuma mõõtmed, et selle valmistamiseks kuluks vähim hulk materjali?

Olgu põhjaks oleva ruudu külg a ja anuma kõrgus h, siis materjali kulu on võrdne risttahuka külgpindala ja ühe põhja pindala summaga

$$S = 4a \cdot h + a^2.$$

Leida tuleb selle funktsiooni minimaalne väärtus.

Et selle risttahuka ruumala on antud, siis saame ruumala avaldisest avaldada suuruse h.

$$V = a^2 \cdot h, \text{ kust}$$

$$h = \frac{V}{a^2} = \frac{32}{a^2}.$$

Asendame saadud kõrguse pindala valemisse:

$$S = 4a \cdot \frac{32}{a^2} + a^2 = \frac{128}{a} + a^2$$

ja leiame pindala tuletise

$$S' = -\frac{128}{a^2} + 2a.$$

Võrrutame saadud tuletise nulliga ja leiame a väärtuse, mille korral pindala on ekstremaalne.

$$2a - \frac{128}{a^2} = 0$$

$$2a^3 - 128 = 0$$
$$2a^3 = 128$$
$$a^3 = 64$$
$$a = 4$$

Kontrollime, kas $a = 4$ korral on pindala minimaalne.
Kui $a = 4$, siis $S = \frac{128}{4} + 16 = 32 + 16 = 48$
Kui $a = 3{,}5$; siis $S = \frac{128}{3{,}5} + 12{,}25 = 36{,}6 + 12{,}25 = 48{,}85$
Kui $a = 4{,}5$; siis $S = \frac{128}{4{,}5} + 20{,}25 = 28{,}6 + 20{,}25 = 48{,}85$
Selgub, et $a = 4$ korral on pindala minimaalne.
Arvutame h:

$$h = \frac{32}{a^2} = \frac{32}{16} = 2$$

Vastus: Antud ruumala korral kulub anuma valmistamiseks materjali minimaalselt, kui põhjaserv on 4 dm ja kõrgus on 2 dm.

Ülesanne 7. Leida funktsiooni $\cos^3 x$ tuletis.

Tuletise leidmisel kasutame funktsiooni $f(x)^n$ tuletise leidmise eeskirja.

$$(\cos^3 x)' = 3\cos^2 x \cdot (\cos x)' = -3\cos^2 x \sin x$$

Ülesanne 8. Leida funktsiooni $n(x + 1)^{n-1}$ tuletis.

$$\left[n(x + 1)^{n-1}\right]' = n(n-1)\cdot(x+1)^{n-2}\cdot (x + 1)' =$$
$$= n(n - 1)\cdot(x + 1)^{n-2}$$

Ülesanne 9. Leida binoomi $(a + x)^8$ kuues liige.

Kuuenda liikme korral $k = 5$. Valemist $C_k = C_{n-k}$ saame, et $C_5 = C_{8-5} = C_3$. Seega

$$T_6 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\, a^{8-5}x^5 = 56a^3x^5.$$

Ülesanne 10. Leida binoomi $(x - \frac{1}{x})^9$ kolmas liige.

Kolmanda liikme korral $k = 2$. Saame

$$T_3 = \frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}\, x^{9-2}\cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^2 = 36x^7\cdot \frac{1}{x^2} = 36x^5.$$

Ü l e s a n n e 11. Arendada binoom $(a^2 - \frac{1}{a})^7$.

$$\left(a^2 - \frac{1}{a}\right)^7 = (a^2)^7 + 7(a^2)^6\cdot\left(-\frac{1}{a}\right) + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}(a^2)^5\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)^2 +$$

$$+ \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}(a^2)^4\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)^3 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(a^2)^3\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)^4 +$$

$$+ \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(a^2)^2\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)^5 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}a^2\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)^6 +$$

$$+ \left(-\frac{1}{a}\right)^7 = a^{14} - 7a^{12}\cdot\frac{1}{a} + 21a^{10}\cdot\frac{1}{a^2} - 35a^8\cdot\frac{1}{a^3} +$$

$$+ 35a^6\cdot\frac{1}{a^4} - 21a^4\cdot\frac{1}{a^5} + 7a^2\cdot\frac{1}{a^6} - \frac{1}{a^7} =$$

$$= a^{14} - 7a^{11} + 21a^8 - 35a^5 + 35a^2 - \frac{21}{a} + \frac{7}{a^4} - \frac{1}{a^7}.$$

Ü l e s a n n e 12. Leida $0{,}98^8$ täpsusega 0,0001.

Kirjutades $0{,}98^8$ kujul $(1 - 0{,}02)^8$, arendame saadud binoomi ritta, kirjutades välja need liikmed, mis mõjutavad veel neljandat kohta

$$0{,}98^8 = (1 - 0{,}02)^8 \approx 1 - 8\cdot 0{,}02 + \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot(0{,}02)^2 -$$

$$- \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(0{,}02)^3 = 1 - 0{,}16 + 28\cdot 0{,}0004 -$$

$$- 56\cdot 0{,}000008 = 1 - 0{,}16 + 0{,}0112 - 0{,}000448 \approx$$

$$\approx 1{,}0112 - 0{,}1604 = 0{,}8508.$$

Viies liige $\left[\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot(0{,}002)^4\right]$ ei mõjuta enam neljandat kohta.

Ü l e s a n n e 13. Leida funktsiooni $x^2 + \frac{1}{x}$ muut ja diferentsiaal.

Et funktsiooni $f(x)$ muut on $f(x + \Delta x) - f(x)$, siis

$$(x+\Delta x)^2 + \frac{1}{x+\Delta x} - (x^2 + \frac{1}{x}) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 +$$

$$+ \frac{1}{x+\Delta x} - x^2 - \frac{1}{x} = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 +$$

$$+ \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + \frac{x - x - \Delta x}{x(x+\Delta x)} =$$

$$= \left[2x + \Delta x - \frac{1}{x(x+\Delta x)}\right] \cdot \Delta x.$$

Funktsiooni diferentsiaal on:

$$(x^2 + \frac{1}{x})' dx = (2x - \frac{1}{x^2}) dx.$$

Ü l e s a n n e 14. Arvutada diferentsiaali abil $\sqrt{64,2}$.

Vaatleme funktsiooni $y = \sqrt{x}$. Antud ülesandes tuleb võtta $x = 64$; $dx = 0,2$.

$$y = \sqrt{64} = 8.$$

$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Bigg|_{\substack{dx = 0,2 \\ x = 64}} = \frac{0,2}{2 \cdot 8} = \frac{1}{80} = 0,0125.$$

$$\sqrt{64,2} = 8,0125.$$

Tabelist saame: $\sqrt{64,2} = 8,012$.

4. Harjutusülesanded

Õpikust lahendada ülesanded: 94(a, f), 101, 109, 113, 115, 127, 129(a), 133(f, j), 139(d), 144, 145(b).

5. Kordamisküsimusi

1. Millega võrdub (sin x)', (cos x)' ja (tan x)'?
2. Kuidas saab proovimise teel kindlaks määrata võrrandi lahendi esimese lähendi?
3. Milles seisneb Newtoni võrrandi lahendi täpsustamise võte?

4. Kuidas saab võrrandi $x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$ vabastada ruutliikmest?
5. Milliseid binoomkordajate omadusi saab selgitada Pascali kolmnurga abil?
6. Milline on binoomi arendi $(a + b)^n$ üldliikme valem? Kuidas avaldub arendi 5-es liige?
7. Mida tähendab kirjutis 5!, kui suur on selle väärtus?
8. Mida nimetatakse funktsiooni diferentsiaaliks?

IV ARVESTUS

1. Programm

Kõverjoonse trapetsi pindala. Pindala tuletis. Algfunktsioon. Määramata integraal. Määratud integraal. Newton-Leibnizi valem.

2. Märkusi

Antud funktsiooni f(x) algfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni F(x), mille tuletis on võrdne f(x)-ga, s.t.

$$F'(x) = f(x).$$

Et aga

$$\left[F(x) + C\right]' = f(x),$$

kus C on määramata konstant, siis võime üldiselt lugeda f(x) algfunktsiooniks F(x) + C. Funktsiooni f(x) algfunktsiooni ehk määramata integraali tähistatakse sümboliga

$$\int f(x)\, dx,$$

näiteks

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C,$$

sest

$$(-\cos x + C)' = \sin x.$$

Siit näeme, et määramata integraali lahendamine tähendab niisuguse funktsiooni leidmist, mille tuletis võrdub integraali aluse funktsiooniga.

Geomeetriliselt tähendab määramata integraal kõvera f(x) graafiku aluse kõverjoonelise trapetsi pindala. Selle trapetsi pindala sõltub trapetsi aluste asukohast. Kui üks trapetsi alus on kohal a, teine aga muudab oma asukohta x-teljel, siis kõverjoonelise trapetsi pindala on x funktsioon. Tähistame ta S(x). Seega on

$$S(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Juhul, kui esimese aluse asukoht on fikseeritud mingil kindlal kohal x = a, siis vastab igale argumendi väärtusele üks kindel pindala, s.t. et määramata konstant C omab siis kindla arvulise väärtuse

$$C = -F(a)$$

ja

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Kui ka teise aluse asukoht on fikseeritud, näiteks x = b, siis saame, et

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Integraali, mille rajad on antud, nimetatakse määratud integraaliks.

Toodud seos kannab Newton-Leibnizi valemi nime ja annab meile eeskirja määratud integraali arvutamiseks. Selleks tuleb kõigepealt leida funktsiooni f(x) algfunktsioon F(x) ning asendada siis selles x algul ülemise rajaga b, siis alumise rajaga a ja esimesest tulemusest lahutada teine:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Määratud integraal geomeetriliselt tähendab kõverjoonelise trapetsi pindala, mille mõlemad alused on fikseeritud. Seda pindala teiselt poolt defineeritakse kui väga kitsaste ristkülikute pindalade summa piirväärtust, mistõttu määratud integraali võib defineerida ka kui summa piirväärtust. Sellel tähelepanekul on väga suur tähtsus, kuna see võimaldab geomeetriliste kehade ruumalade leidmise taandada määratud integraali arvutamisele, samuti ka leida mitmesuguste joontega piiratud kujundite pindalasid.

3. Näidisülesandeid

Ü l e s a n n e 1. Lahendada määramata integraalid:

a) $\int x^n\,dx$ (n on naturaalarv)

b) $\int \frac{dx}{x^5}$

c) $\int x\sqrt{x}\,dx$

Ülesande lahendamisel otsime sellist funktsiooni, mille tuletis võrdub integraali aluse funktsiooniga.

a) $\int x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} + C$, sest $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$.

Saab näidata, et valem $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ kehtib ka n negatiivse ja murrulise väärtuse korral.

Nagu saadud tulemusest nähtub, saame astme integreerimisel tulemuseks 1-e võrra suurema astendajaga astme ja uue astendaja jagatise. Kasutame saadud tähelepanekut järgmiste ülesannete lahendamisel.

$$\text{b)} \int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$$

$$\text{c)} \int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + C.$$

Kontrollimiseks leiame saadud tulemustest tuletised, mis võrduvad integreeritavate avaldistega.

Ü l e s a n n e 2. Lahendada määramata integraalid:

a) $\int \frac{x^3+1}{x+1}\,dx$

b) $\int (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2 \, dx$

Enne lahendamist teisendame integreeritavaid funktsioone.

a) $\frac{x^3 + 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = x^2 - x + 1.$

Seega

$$\int \frac{x^3 + 1}{x + 1} \, dx = \int (x^2 - x + 1)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c.$$

Kontroll.

$$\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c\right)' = \frac{3x^2}{3} - \frac{2x}{2} + 1 = x^2 - x + 1.$$

b) $\int (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2 dx = \int (\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} +$

$+ \cos^2 \frac{x}{2})dx = \int (1 + \sin x)dx = x - \cos x + c.$

Kontroll. $(x - \cos x + c)' = 1 + \sin x.$

Ü l e s a n n e 3. Leida määratud integraalid:

a) $\int_2^5 \frac{dx}{x^2}$ b) $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$ c) $\int_1^2 (x^2 - 2x + 1)dx$

Kasutame Newton-Leibnizi valemit

a) $\int_2^5 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_2^5 = -\frac{1}{5} - (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3}{10};$

b) $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - (- \cos 0) =$

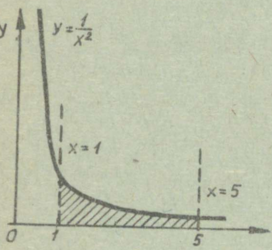
$= - (-1) - (-1) = 2;$

c) $\int_1^2 (x^2 - 2x + 1)dx = (\frac{x^3}{3} - x^2 + x)\Big|_1^2 = (\frac{8}{3} - 4 + 2) -$

$- (\frac{1}{3} - 1 + 1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$

Ü l e s a n n e 4. Leida kujundi pindala, mida piiravad funktsiooni $y = \frac{1}{x^2}$ graafik, x-telg ja sirged $x = 1$ ja $x = 5$.

Piirkonnas $1 < x < 5$ on funktsioon $\frac{1}{x^2} > 0$. Seega asub kogu kujund ülalpool x-telge ja me võime tema pindala leida korraga (joon. 7).



Joon. 7.

Niisiis

$$S = \int_1^5 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^5 =$$

$$= -\frac{1}{5} - (-1) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Ü l e s a n n e 5. Leida kõveraga $y = \frac{x^2}{2}$ ja sirgega $y = -x + 1{,}5$ piiratud kujundi pindala.

Joniselt 8 näeme, et see pindala võrdub trapetsi Ax_1x_2B pindala S_1 ja ühekordsete joontega viirutatud pindala S_2 (Ax_1x_2BOA) vahega. Integreerimisrajad x_1 ja x_2 on joonte $y = \frac{x^2}{2}$ ja $y = -x + 1{,}5$ lõikepunktide abstsissid. Nende leidmiseks tuleb lahendada süsteem:

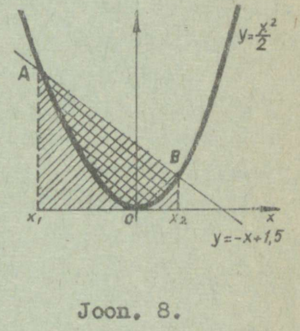
$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = -x + 1{,}5 \end{cases}$$

Kasutades asendusvõtet, saame:

$$\frac{x^2}{2} = -x + 1{,}5;$$

$$x^2 = -2x + 3;$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$



Joon. 8.

Selle ruutvõrrandi lahendid on

$$x_1 = -3,$$
$$x_2 = 1.$$

Leiame trapetsi Ax_1x_2B pindala S_1:

$$S_1 = \int_{-3}^{1} (-x + 1{,}5)dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 1{,}5\,x\right)\Big|_{-3}^{1} = \left(-\frac{1}{2} + 1{,}5\right) -$$

$$- \left(-\frac{9}{2} - 4{,}5\right) = 1 + 9 = 10.$$

Leiame nüüd ühekordsete joontega viirutatud kujundi pindala S_2:

$$S_2 = \int_{-3}^{1} \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{x^3}{6}\Big|_{-3}^{1} = \frac{1}{6} - \left(\frac{-27}{6}\right) = \frac{1}{6} + \frac{27}{6} = \frac{28}{6} = 4\frac{2}{3}.$$

Otsitava kujundi pindala

$$S = S_1 - S_2 = 10 - 4\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

4. Harjutusülesanded

Õpikust lahendada ülesanded: 154(a, e, i), 155(d,e,f), 157(c), 159(a,d), 167(b,d,h), 168(d,e), 171(a), 174(b), 176.

5. Kordamisküsimusi

1. Mis on antud funktsiooni algfunktsiooniks?
2. Mis on määramata integraali geomeetriliseks vasteks?
3. Mis on määratud integraal geomeetriliselt?
4. Kuidas saame seose $C = -F(a)$.
5. Kuidas saame leida määratud integraali väärtuse?
6. Millist integraali nimetatakse määratud integraaliks?
7. Kuidas saab kontrollida, kas oleme integreerinud õigesti?

V ARVESTUS

1. Programm

Prisma; selle omadused. Rööptahukas; selle omadused. Risttahukas; selle omadused. Prisma külg- ja täispindala. Risttahuka ruumala. Püstprisma ruumala.

2. Märkusi

Suurt tähelepanu tuleb pöörata jooniste valmistamisele nii tõestamisel kui ka ülesannete lahendamisel.

Ruumiliste kehade joonestamisel tuleb need jooned, mis jäävad pindade taha, joonestada punktiirjoontena või märgatavalt peenemate pidevate joontena. Paralleelsed jooned on ka joonisel paralleelsed ning võrdsete pikkustega paralleelsed lõigud võrdsed. Kõik vertikaallõigud on joonisel vertikaalsed. Iga ülesande juurde tuleb teha vastava ruumilise keha joonis. Hästi tehtud joonisest sõltub suurel määral ülesande lahendamise edukus. Sageli on ülesannetes vaja lahendada tasapinnalisi kujundeid, milleks on kasulik teha vastav abijoonis. Tuleb meeles pidada, et otsitavate leidmiseks peab koostatud seoste (võrrandite) arv võrduma neis seostes (võrrandites) esinevate tundmatute arvuga.

Kõigepealt tuleb välja kirjutada ülesande teksti põhjal koostatavad seosed ja siis leida jooniselt kolmnurki, mis seovad otsitavat suurust (lõiku, nurka) antud lõikude või nurkadega. Sageli osutub vajalikuks täiendada joonist uute kolmnurkadega.

Tundmatute seostamiseks kasutame trigonomeetrilisi seoseid. Pütagorase teoreemi tuleks rakendada ainult juhul, kui täisnurkses kolmnurgas pole antud teravnurka.

Ülesanne on soovitav lahendada kõigepealt üldkujul, s.t. täheliste andmetega, lõpptulemus lihtsustada, asendada tähed arvudega ja teha vastavad arvutused.

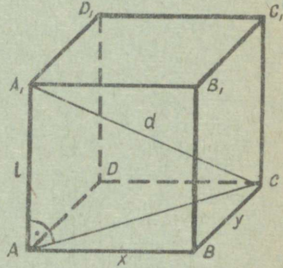
Kõik eespool antud juhised kehtivad ka 6. ja 7. arvestuse kohta.

3. Näidisülesandeid

Ü l e s a n n e 1. Risttahuka külgserv on 12 cm, diagonaal 13 cm ja põhja pindala 12 cm^2. Leida risttahuka põhiservad.

Antud: $l = 12$ cm
$d = 13$ cm
$S = 12$ cm^2

Leida: x ja y.



Joon. 9.

L a h e n d u s: Esimese seose saame tingimusest, et risttahuka põhja pindala on 12 cm^2:

$$xy = 12 \qquad (1)$$

kus x ja y on vastavalt risttahuka põhja pikkus ja laius.

Teise seose leidmiseks joonestame põhja diagonaali AC (joon. 9). Tekkinud täisnurkne kolmnurk seob tundmatuid x ja y:

$$x^2 + y^2 = AC^2. \qquad (2)$$

AC^2 leidmiseks vaatleme täisnurkset kolmnurka A_1AC. Selles kolmnurgas on teada hüpotenuus d ja kaatet l. Seega

$$AC^2 = d^2 - l^2 = 13^2 - 12^2 = 25.$$

Asetades $AC^2 = 25$ võrrandisse (2), saame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12. \end{cases}$$

Saadud võrrandisüsteemi lahendamiseks korrutame teist võrrandit 2-ga ja liidame võrrandid:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2xy = 24, \end{cases}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 49,$$

millest

$$(x + y)^2 = 49$$

ja

$$x + y = 7 \text{ (x ja y summa ei saa olla } -7).$$

Lahutades esimesest võrrandist teise, saame:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 1,$$
$$(x - y)^2 = 1$$
$$x - y = \pm 1.$$

Võrrandisüsteemide

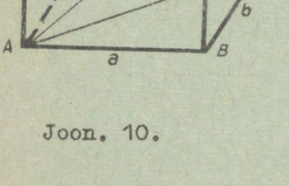
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

lahendid 4 ja 3 ongi risttahuka põhiservade pikkused.

V a s t u s. Risttahuka põhiservad on 3 cm ja 4 cm.

Märkus. Antud ülesandes oli otstarbekas asendada antud suurused kohe arvudega.

Ü l e s a n n e 2. Risttahuka diagonaallõike pindala on 824 m^2 ja põhiservad 14,5 m ja 24,2 m. Leida diagonaalidevaheline nurk.



Joon. 10.

Antud: $S_{A_1C} = 824$ m^2

$a = 14,5$ m

$b = 24,2$ m

Leida: α

L a h e n d u s: Risttahuka (joon. 10) diagonaallõige AA_1C_1C on ristkülik. Nurk ACA_1 võrdub $\frac{\alpha}{2}$. Täisnurksest kolmnurgast ACA_1 saame

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{AA_1}{AC}. \qquad (1)$$

Lõigu AC leiame täisnurksest kolmnurgast ABC, kasutades Pütagorase teoreemi:

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Teades, et risttahuka diagonaallõige on ristkülik, saame:

$$S_{A_1C} = AA_1 \cdot AC$$

ja

$$AA_1 = \frac{S_{A_1C}}{AC}.$$

Asetades AC ja AA_1 avaldised valemisse (1), saame:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{S_{A_1C}}{AC^2} = \frac{S_{A_1C}}{a^2 + b^2};$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{824}{14{,}5^2 + 24{,}2^2} = \frac{824}{210{,}3 + 585{,}6} = \frac{824}{795{,}9}$$

ja

$$\log\tan\frac{\alpha}{2} = \log 824 - \log 795{,}9 = 2{,}9159 - 2{,}9009 = 0{,}0150.$$

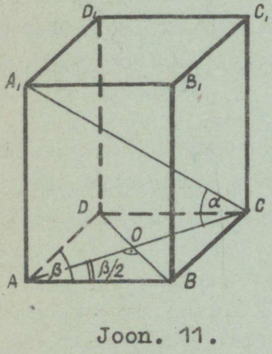
Siit

$$\frac{\alpha}{2} = 46^\circ,$$

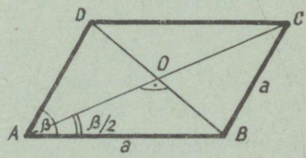
$$\alpha = 92^\circ.$$

V a s t u s. Risttahuka diagonaalide vaheline nurk on 92°.

Ü l e s a n n e 3. Püstprisma põhjaks on romb, mille külje pikkus on 24 cm ja teravnurk on 35°. Prisma pikema diagonaali ja põhja vaheline nurk on 62°. Leida täispindala.



Joon. 11.



Joon. 12.

Antud: $a = 24$ cm

$\beta = 35^\circ$

$\alpha = 62^\circ$

Leida: S_t

L a h e n d u s. Püstprisma (joon. 11) täispindala $S_t = S_k + 2S_p$, kus $S_k = 4a \cdot AA_1$. Lõigu AA_1 leiame täisnurksest kolmnurgast ACA_1:

$$AA_1 = AC \cdot \tan\alpha.$$

Teades, et rombi diagonaalid poolituvad lõikepunktis, on risti ja poolitavad rombi nurgad, saame täisnurksest kolmnurgast ABO (joon. 12)

$$\frac{AC}{2} = a \cos\frac{\beta}{2} \text{ ja } AC = 2a\cos\frac{\beta}{2}.$$

Nüüd leiame, et

$$AA_1 = 2a\cos\frac{\beta}{2}\tan\alpha.$$

ja

$$S_k = 8a^2\cos\frac{\beta}{2}\tan\alpha.$$

Püstprisma põhja pindala on

$$S_p = 2S_{ABD} = 2\frac{a^2\sin\beta}{2} = a^2\sin\beta$$

ja täispindala

$$S_t = 8a^2\cos\frac{\beta}{2}\tan\alpha + 2a^2\sin\beta$$

ehk

$$S_t = 8a^2\cos\frac{\beta}{2}\tan\alpha + 4a^2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

ehk

$$S_t = 4a^2\cos\frac{\beta}{2}\left(2\tan\alpha + \sin\frac{\beta}{2}\right).$$

Täispindala väärtuse leidmiseks tuleb tuua avaldisse ülesandes antud a, β ja α väärtused ning siis arvutada. Ülesande andmetest nähtub, et arvutusteks piisab arvutuslükati täpsusest.

Ü l e s a n n e 4. Püstprisma põhjaks on kolmnurk külgedega 12 cm, 9,2 cm ja 7,6 cm. Prisma kõrgus on 30 cm. Leida prisma ruumala.

Antud: $a = 12$ cm

$b = 9{,}2$ cm

$c = 7{,}6$ cm

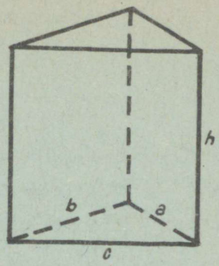
$h = 30$ cm

Leida: V

L a h e n d u s. Prisma (joon. 13) ruumala

$$V = S_p \cdot h.$$

Põhja pindala leidmiseks kasutame Heroni valemit



Joon. 13.

$$S_p = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)},$$

kus $p = \frac{a + b + c}{2}$.

Ruumala leiame siis valemi järgi:

$$V = h\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Leides eelnevalt avaldiste $p = \frac{a + b + c}{2}$, $p - a$, $p - b$, $p - c$ arvulised väärtused, arvutame ruumala arvutuslükati abil.

4. Harjutusülesanded

Õpikust lahendada ülesanded: 208(c), 210, 220, 232, 233, 237, 250, 257.

5. Kordamisküsimusi

1. Millise kujuga on prisma külgpinnalaotus?
2. Nimetage kõik prisma eriliigid ja defineerige need.
3. Kuidas leitakse risttahuka täispindala? Kuidas ruumala?
4. Millega võrdub prisma ruumala?
5. Vastata õpikus toodud küsimustele nr. 185-191, 195-207 ja 221-224.

VI ARVESTUS

1. Programm

Püramiid; selle omadused. Tüvipüramiid. Püramiidi külgpindala ja täispindala. Püramiidi ruumala. Tüvipüramiidi ruumala. Kaldprisma ruumala.

2. Märkusi

Püramiidi põhjaga paralleelse lõike omaduste tõestamine tugineb sarnaste kolmnurkade omadustel:

1) vastavad joonelemendid on võrdelised (s.o. nende suhted on võrdsed)

2) pindalad suhtuvad nagu vastavate joonelementide ruudud.

Tuleb meeles pidada, et õpikus antud püramiidide pindalade valemid kehtivad ainult korrapäraste püramiidide korral. Ainult korrapärase täispüramiidi külgtahud on kõik võrdsed võrdhaarsed kolmnurgad, mille kõrgus on püramiidi apoteemiks.

Korrapärase tüvipüramiidi külgtahud on kõik võrdsed võrdhaarsed trapetsid.

Korrapärasel püramiidil on võrdsed:

1) külgtahkude ja põhitahu vahelised nurgad;

2) külgservade ja põhitahu vahelised nurgad;

3) külgtahkude tipunurgad;

4) külgservade ja põhiservade vahelised nurgad.

Püramiidi ruumala valemi tuletamisel kasutame valemit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\cdot\Delta x_i .$$

Kui püramiidi põhjaga paralleelse lõike kaugus tipust on x, siis lõike pindala on x funktsioon S(x). Lõike pindala $S(x) = \frac{S_p}{h^2} x^2$, kus $\frac{S_p}{h^2}$ on konstant. Kui lõigetevaheline kaugus on Δ x, siis

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x$$

See avaldis on aga võrdne määratud integraaliga

$$V = \int_{0}^{h} S(x)\, dx.$$

Lähtudes viimasest valemist saamegi püramiidi ruumala avaldise.

Teades, et korrapärase n-nurga üks sisenurk on

$$\frac{(n - 2)180^\circ}{n}$$

ja korrapärase tahkkeha tipu juures olevate tasanurkade summa peab olema väiksem kui 360°, saab näidata, et korrapäraseid tahkkehi saab olla ainult viis. Neist on kolmnurksete tahkudega 3, nelinurksete tahkudega 1 ja viisnurksete tahkudega 1 tahkkeha.

Et korrapärase kolmnurga iga sisenurk on 60°, saab selliseid tasanurki panna ühe ruuminurga tipu juurde 3 (tetraeeder), neli (oktaeeder) või 5 (ikosaeeder). Kuue tasanurga korral on nende summa 360° ja kumerat ruuminurka ei teki.

Korrapärase nelinurga iga sisenurk on 90° ja sellistest tasanurkadest saab moodustada ainult kolmetahulise ruuminurga (heksaeedril).

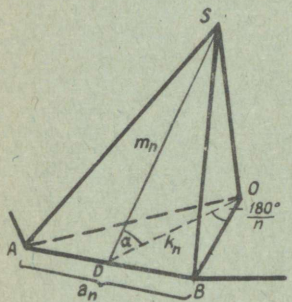
Korrapärase viisnurga sisenurk on $\frac{(5 - 2)180^\circ}{5} =$ $= 108^\circ$ ja ka neist saab moodustada ainult kolmetahulise kumera ruuminurga (dodekaeedril).

Korrapärase kuusnurga iga sisenurk on 120° ja et $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$, siis neist kumerat ruuminurka ei saa moodustada ja kuusnurksete tahkudega korrapärast tahkkeha ei teki.

Analoogiliselt võib näidata, et ka ülejäänud korrapärased hulknurgad ei saa olla korrapärase tahkkeha tahkudeks.

3. Näidisülesandeid

Ü l e s a n n e 1. Korrapärase kaheksanurkse püramiidi põhiserv on 10 cm. Külgtahu ning põhitahu vaheline nurk on 40^0. Kui pikk on püramiidi apoteem?



Joon. 14.

Ülesande lahendamiseks pole tarvis välja joonestada kogu korrapärast kaheksanurkset prismat, vaid ainult osa sellest.

Antud: $AB = a_n = 10$ cm

$\angle ODS = \alpha = 40^0$

$n = 8$

Leida: m_n

L a h e n d u s: Täisnurkses kolmnurgas ODS (joon. 14):

$$\frac{k_n}{m_n} = \cos\alpha \ ;$$

$$m_n = \frac{k_n}{\cos\alpha}. \qquad (1)$$

Täisnurkses kolmnurgas DOB on

$$\angle DOB = \frac{180^0}{n} \quad \text{ja } DB = \frac{a_n}{2}.$$

Siit saame:

$$\frac{k_n}{\frac{a_n}{2}} = \cot\frac{180^0}{n},$$

millest

$$k_n = \frac{a_n}{2}\cot\frac{180^0}{n}.$$

Asetades k_n avaldise võrdusesse (1), saame

$$m_n = \frac{a_n \cot\frac{180^0}{n}}{2\cos\alpha}$$

Asendame nüüd antud avaldises olevad suurused nende arvuliste väärtustega

$$m_8 = \frac{10 \cdot \cot 22^\circ 30'}{2 \cos 40^\circ} = \frac{5 \cdot \cot 22^\circ 30'}{\cos 40^\circ}$$

ja arvutame siis arvutuslükatiga m_8 väärtuse.

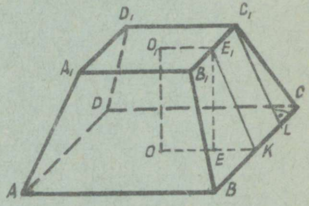
Ü l e s a n n e 2. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on a ja b ning külgserv on c. Leida apoteem ja kõrgus.

Antud: $BC = a$

$B_1C_1 = b$

$CC_1 = c$

Leida: KE_1 ja $EE_1 = OO_1$



Joon. 15.

L a h e n d u s. Apoteemi KE_1 leidmiseks vaatleme täisnurkset kolmnurka LCC_1 (joon. 15). Sellest saame:

$$KE_1 = LC_1 = \sqrt{CC_1^2 - LC^2};$$

$$LC = \frac{BC - B_1C_1}{2} = \frac{a - b}{2};$$

$$KE_1 = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2}.$$

Täisnurksest kolmnurgast E_1KE saame:

$$EE_1 = \sqrt{KE_1^2 - EK^2};$$

$$EK = OK - O_1E_1 = \frac{a - b}{2}$$

$$EE_1 = \sqrt{c^2 - \frac{(a - b)^2}{4} - \frac{(a - b)^2}{4}} = \sqrt{c^2 - \frac{(a - b)^2}{2}};$$

$$OO_1 = \sqrt{c^2 - \frac{(a - b)^2}{2}}.$$

Ü l e s a n n e 3. Püramiidi põhjaks on kolmnurk, mille külgede pikkused on 17 cm, 28 cm ja 39 cm. Püramiidi kõrgus on 24 cm. Arvutada püramiidi ruumala.

Antud: $a = 17$ cm

$b = 28$ cm

$C = 39$ cm

$h = 24$ cm

Leida: V

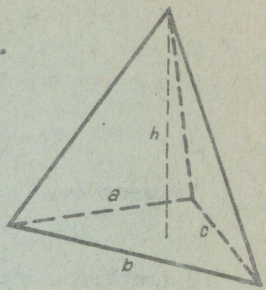
L a h e n d u s: Püramiidi (joon. 16) ruumala arvutame valemi järgi

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_p.$$

Põhja pindala leidmiseks kasutame Heroni valemit:

$$S_p = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

kus $p = \frac{a+b+c}{2}$.



Joon. 16.

Ü l e s a n n e 4. Ruudukujulise põhjaga kaldprisma põhiserv on a. Prisma külgserv on b ja see moodustab põhja diagonaaliga nurga α. Leida ruumala.

Antud: $AB = a$

$AA_1 = b$

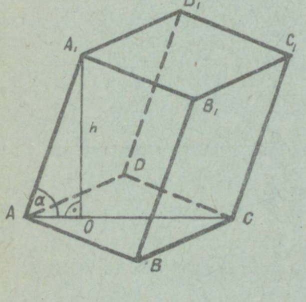
$\angle A_1AO = \alpha$

Leida: V

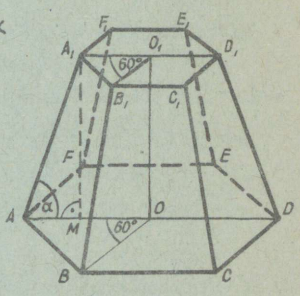
L a h e n d u s: Teame, et $V = S_p \cdot h$, kus $S_p = a^2$. Täisnurksest kolmnurgast AOA_1 (joon. 17) saame:

$$h = b \sin\alpha.$$

$$V = a^2 b \sin\alpha$$



Joon. 17.



Joon. 18.

Ü l e s a n n e 5. Korrapärase kuusnurkse tüvipüramiidi põhiservad on 14 m ja 10 m. Külgserv moodustab suurema põhitahuga nurga 38°. Leida ruumala.

Antud: $a = 14$ m

$b = 10$ m

$\alpha = 38^\circ$

Leida: V

L a h e n d u s:

$$V = \frac{h}{3}\left(S_{p1} + \sqrt{S_{p1} \cdot S_{p2}} + S_{p2}\right).$$

Täisnurksest kolmnurgast AMA_1 (joon. 18) leiame

$$h = AM \cdot \tan\alpha$$

Korrapärase kuusnurga korral $AD = 2AO = 2a$ ja $A_1D_1 = 2A_1O_1 = 2b$.

$$AM = a - b;$$

$$h = (a - b)\tan\alpha\ ;$$

$$S_{p1} = 6 \cdot \frac{a^2 \sin 60^\circ}{2} = 3a^2 \sin 60^\circ;$$

$$S_{p2} = 3b^2 \sin 60^\circ.$$

Asendades saadud avaldised ruumala valemisse, saame:

$$V = \frac{(a - b)\tan\alpha}{3} \cdot \left(3a^2 \sin 60^\circ + \sqrt{9a^2b^2 \sin^2 60^\circ} + 3b^2 \sin 60^\circ\right) = \frac{(a - b)\tan\alpha}{3} \cdot \left(3a^2 \sin 60^\circ + 3ab \sin 60^\circ + 3b^2 \sin 60^\circ\right) = \frac{(a - b)\tan\alpha \cdot 3 \sin 60^\circ}{3} \times (a^2 + ab + b^2) = (a^3 - b^3)\tan\alpha \sin 60^\circ.$$

Ruumala arvulise väärtuse leidmiseks tuleb asetada ruumala avaldisse ülesandes antud a, b ja α väärtused ning siis arvutada tulemus.

4. Harjutusülesanded

Õpikust lahendada ülesanded: 274, 277, 282, 291, 300, 304, 312, 332, 343.

5. Kordamisküsimusi

Vastata õpiku küsimustele nr. 262-270, 283-286, 306-308, 314-318. 341 ja 342.

VII A R V E S T U S

1. Programm

Silinder; selle külgpindala ja täispindala. Silindri ruumala.

Koonus. Tüvikoonus. Koonuse ja tüvikoonuse külg- ja täispindala. Koonuse ruumala. Tüvikoonuse ruumala.

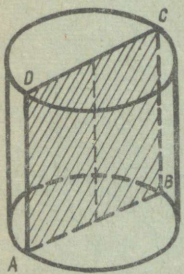
Kera. Kera tasapinnaline lõige. Kera osad.

Sfääri ja selle osade pindala.

Kera ja selle osade ruumala.

2. Märkusi

Defineerides silindrilise pinna ja silindri, tuleb meeles pidada, et edaspidi vaatleme ainult püstringsilindrit, mida nimetame lihtsalt silindriks.



Joon. 19.

Näitame, et silindri (püstringsilindri) telglõige ABCD on ristkülik (joon. 19).

Kui silindri põhjasid (mis definitsiooni järgi on paralleelsed) lõigata kolmanda tasapinnaga ABCD, siis tekkinud lõikesirged AB ja DC on paralleelsed. AB = DC kui võrdsete ringide diameetrid. Kui nelinurgal on aga üks paar võrdseid ja paralleelseid külgi, siis on ta rööpkülik. Et aga silindri moodustajad on põhjaga risti, siis ka DA on risti lõiguga AB (järeldub tasapinna normaali omadusest). Kui rööpküliku üks nurk on täisnurk, siis on ta ristkülik.

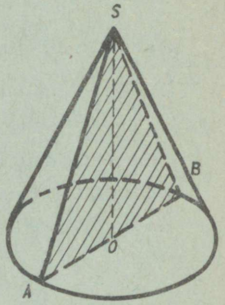
Nii silindri külgpindala kui ka ruumala arvutamisel tuleb silmas pidada, et ringi sisse kujundatud korrapärase kõõlhulknurga ümbermõõdu ($n \cdot a_n$) piirväärtus külgede arvu tõkestamatul kasvamisel võrdub ringi ümbermõõduga

$$\lim_{n\to\infty}(n \cdot a_n) = 2\pi r.$$

Defineerides koonilise pinna ja koonuse, tuleb meeles pidada, et edaspidi vaatleme ainult püstringkoonust, mida me nimetame lihtsalt koonuseks.

Näitame, et koonuse telglõige on võrdhaarne kolmnurk (joon. 20).

Koonuse kõrgus OS on risti põhja diameetriga AB (miks?). Täisnurksed kolmnurgad AOS ja BOS on võrdsed, sest neil on üks ühine kaatet OS ning kaatetid AO ja BO on võrdsed kui ühe ja sama ringi raadiused. Siis on võrdsed ka nende hüpotenuusid AS ja BS ning seega kolmnurk ABS on võrdhaarne.



Joon. 20.

Tüvikoonuse saamiseks lõikame antud koonusest ära paralleelse tasapinnaga nn. tipukoonuse. Saab näidata, et tüvikoonuse telglõige on võrdhaarne trapets.

Kui koonuse või tüvikoonuse telglõige on määratud, s.t. kui on antud piisavalt andmeid tema ülejäänud elementide leidmiseks, siis on määratud ka koonus või tüvikoonus.

Kera ja tema osade pindalade ja ruumalade arvutamisel on vaja hästi omandada kera definitsioon, mille järgi kera on korrapärase hulknurga pöörlemisel ümber sümmeetriatelje tekkinud pöördkeha piirasend hulknurga nurkade arvu tõkestamatul kasvamisel.

Nagu õpiku joniselt 132 nähtub, koosneb tekkinud pöördkeha koonustest ja tüvikoonustest, mille külgpindalade summa on pöördkeha pindalaks ja ruumalade summa on pöördkeha ruumalaks.

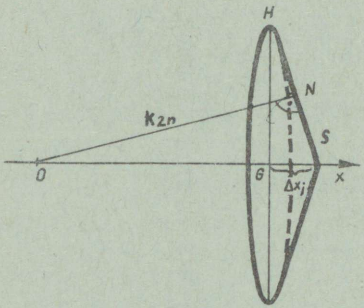
Kera pindala leidmiseks on otstarbekas võtta korrapärane hulknurk, mille külgede arv on paarisarv, sest niisuguse hulknurga sümmeetriateljeks on tema suurim diagonaal.

Õpikus on arvutatud tüvikoonuse külgpindala hulknurga apoteemi (k_{2n}) ja tüvikoonuse kõrguse (Δx_i) kaudu

$$S_i = 2\pi \cdot k_{2n} \cdot \Delta x_i .$$

Näitame, et sama valem kehtib ka koonuse korral. Koonuse külgpindala on

$$S_i = \pi \cdot HG \cdot HS .$$



Joon. 21.

Sarnastest kolmnurkadest ONS ja HGS (joon. 21) saame

$$\frac{HG}{\Delta x_i} = \frac{k_{2n}}{NS},$$

millest

$$HG \cdot NS = k_{2n} \cdot \Delta x_i .$$

Et

$$NS = \frac{HS}{2},$$

siis

$$HG \cdot HS = 2k_{2n} \cdot \Delta x_i$$

ja

$$S_i = 2\pi \cdot k_{2n} \cdot \Delta x_i .$$

Seega avalduvad nii tüvikoonuste kui ka koonuste külgpindalad ühtse valemina ja et neid on n tükki, siis tekkinud pöördkeha pindala on

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi \cdot k_{2n} \cdot \Delta x_i .$$

Kuna $2\pi k_{2n}$ on kõikidel liikmetel võrdne, siis võime tuua selle summamärgi ette:

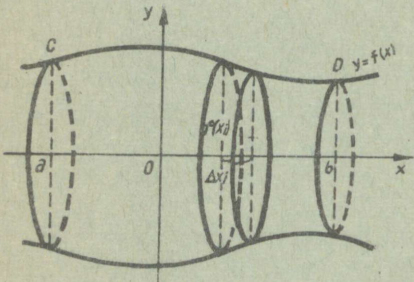
$$2\pi k_{2n} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i .$$

Teame, et

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Antud juhul on integreeritav funktsioon $f(x) = 1$ ja seega

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \int_{-r}^{r} dx = x \Big|_{-r}^{r} = 2r.$$



Joon. 22.

Kõverjoonelise trapetsi aCDb (joon. 22) pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördkeha ruumala arvutamiseks jaotame ta x-teljega ristuvate tasapindadega n võrdseks osaks ja lähendame need silindritega. Jooniselt nähtub, et i-nda silindri kõrguseks on Δx_i ja põhja raadiuseks on funktsiooni $y = f(x)$ väärtus kohal x_i s.o. $f(x_i)$.

Seega i-nda silindri ruumala

$$V_i = \pi \cdot f^2(x_i) \cdot \Delta x_i,$$

kus

$$i = 1, 2 \dots n.$$

Õpikus on leitud nende silindrite ruumalade summa abil pöördkeha ruumala

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Kasutades pöördkeha ruumala valemit ja teades, et ringjoone võrrand on $y^2 = r^2 - x^2$, võime $f^2(x)$ asendada $(r^2 - x^2)$-ga. Valides vajalikud integreerimise rajad, võime leida nii kera kui ka tema osade ruumala.

3. Näidisülesandeid

Ü l e s a n n e 1. Silindri telglõige on ruut küljega a. Avaldada silindri külgpinnalaotuse mõõtmed.

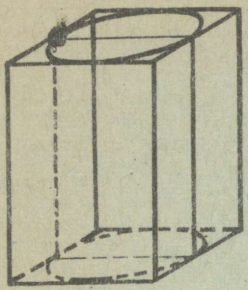
Silindri külgpinnalaotus on ristkülik, mille kõrgus võrdub silindri kõrgusega ja mille alus võrdub silindri põhja ümbermõõduga. Silindri kõrgus võrdub telglõike küljega a. Et silindri raadius on $\frac{a}{2}$, siis silindri põhja ümbermõõt

$$Ü = 2\pi \cdot \frac{a}{2} = \pi a.$$

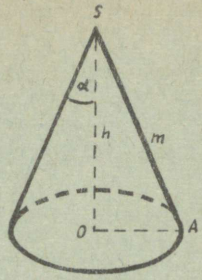
Vastus. Silindri telglõike mõõtmed on πa ja a.

Ü l e s a n n e 2. Ruudukujulise ristlõikega metallvardast treitakse maksimaalse ruumalaga silinder (joon. 23). Kui suur on metalli kadu protsentides?

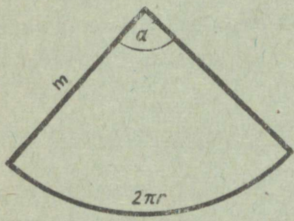
Olgu varda pikkus h ja ristlõike külg a. Siis on ka silindri kõrgus h ja läbimõõt a. Varda ruumala $V_1 = a^2h$ ja silindri ruumala $V_2 = \pi \frac{a^2h}{4}$.



Joon. 23.



Joon. 24.



Joon. 25.

Ruumala kadu on

$$V_1 - V_2 = a^2h - \pi \frac{a^2h}{4} = a^2h(1 - \frac{\pi}{4}).$$

Metalli kadu

$$\frac{V_1 - V_2}{V_1} \cdot 100\% = \frac{a^2h(1 - \frac{\pi}{4})\ 100\%}{a^2h} = 25(4 - \pi)\%.$$

Vastus. Metalli kadu on $25(4 - \pi)\%$.

Ü l e s a n n e 3. Koonuse läbimõõt on 10 cm ja kõrgus 12 cm. Arvutada koonuse külgpinnalaotuse kesknurk.

Antud: $h = 12$ cm

$d = 10$ cm

Leida: a.

L a h e n d u s. Koonuse külgpinnalaotus on sektor (joon. 25), mille raadius võrdub koonuse moodustajaga m ja mille kesknurk $\alpha = \frac{2\pi r}{m}$ radiaani.

$$\alpha = \frac{2\pi r}{m} = \frac{2 \cdot 180^\circ r}{m} = \frac{360^\circ r}{m} \text{ radiaani.}$$

Täisnurksest kolmnurgast OAS (joon. 24), saame

$$m = \sqrt{(\frac{d}{2})^2 + h^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

Seega

$$\alpha = \frac{5 \cdot 360^\circ}{13} \approx 138^\circ 28'.$$

Vastus. Koonuse külgpinnalaotuse kesknurk $\alpha = 138^\circ 28'$.

Ü l e s a n n e 4. Avaldada koonuse ruumala, kui koonuse kõrguse ja moodustaja vaheline nurk on α ning telglõike pindala on Q.

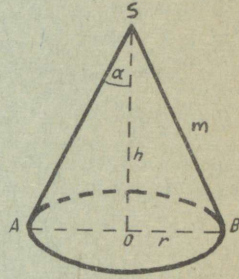
Antud: $\angle ASO = \alpha$

$S_{ASB} = Q$

Leida: V.

L a h e n d u s. Koonuse ruumala

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$



Joon. 26.

Kolmnurga ASB (joon. 26) pindala Q = = hr. Kolmnurgast BSO saame:

$$\tan\alpha = \frac{r}{h};$$

Seega

$$r = h \tan\alpha ,$$

millest

$$h^2 \tan\alpha = Q,$$

$$h = \sqrt{\frac{Q}{\tan\alpha}}.$$

Koonuse põhja raadius

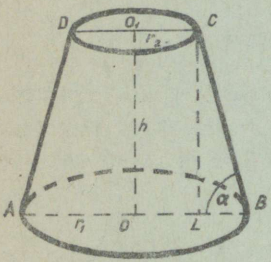
$$r = h \tan\alpha = \sqrt{\frac{Q}{\tan\alpha}} \cdot \tan\alpha = \sqrt{Q \tan\alpha}.$$

Asendades ruumala valemis r ja h saadud avaldistega, saame:

$$V = \frac{1}{3}\pi Q \tan\alpha \sqrt{\frac{Q}{\tan\alpha}} = \frac{1}{3}\pi Q \sqrt{Q \tan\alpha}.$$

Vastus. Koonuse ruumala on $\frac{1}{3}\pi Q\sqrt{Q\tan\alpha}$.

Ü l e s a n n e 5. Tüvikoonuse kõrgus on 3. Ühe põhja raadius on kaks korda suurem teise põhja raadiusest ja moodustaja kaldenurk põhja suhtes on 45°. Avaldada tüvikoonuse ruumala.



Joon. 27.

Antud: $OO' = h = 3$;

$\angle CBL = \alpha = 45^\circ$;

$OB = r_1 = 2r_2$

Leida: V.

L a h e n d u s. Tüvikoonuse ruumala arvutame valemi järgi

$$V = \frac{\pi}{3} h\,(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

Ruumala valemist näeme, et tundmatud on põhjade raadiused r_1 ja r_2. Kolmnurgast CLB (joon. 27) lõik LB = $r_1 - r_2$ ja

$$r_1 - r_2 = h\cot\alpha = 3\cot 45^\circ = 3;$$
$$r_1 - r_2 = 3;$$
$$2r_2 - r_2 = 3;$$
$$r_2 = 3;$$
$$r_1 = 6.$$

Seega

$$V = \frac{\pi\cdot 3}{3}(36 + 18 + 9) = 63\pi.$$

Vastus. Tüvikoonuse ruumala on 63π ruumalaühikut.

Ü l e s a n n e 6. Kera vöö kõrgus on 7 cm ning põhjade raadiused on 16 cm ja 33 cm. Arvutada vöö pindala.

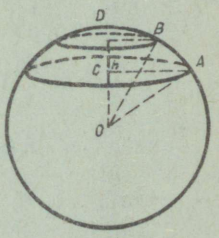
Antud: $DC = h = 7$ cm

$DB = r_1 = 16$ cm

$CA = r_2 = 33$ cm

Leida: S

L a h e n d u s. Kera vöö pindala $S = 2\pi Rh$, milles tundmatuks on kera raadius R.



Joon. 28.

Vaatleme kolmnurka ODB (joon. 28), millest saame

$$(h + x)^2 + r_1^2 = R^2,$$

kus $x = OC$.

Kolmnurgast OAC saame

$$x^2 + r_2^2 = R^2.$$

Nendest kahest võrdusest järeldub, et

$$(h + x)^2 + r_1^2 = x^2 + r_2^2,$$

$$h^2 + 2hx + x^2 + r_1^2 = x^2 + r_2^2,$$

$$2hx = r_2^2 - r_1^2 - h^2,$$

$$x = \frac{r_2^2 - r_1^2 - h^2}{2h};$$

$$x = \frac{33^2 - 16^2 - 7^2}{2 \cdot 7} = \frac{1089 - 256 - 49}{14} = 56 \text{ cm};$$

$$R^2 = x^2 + r_2^2,$$

$$R^2 = 56^2 + 33^2 = 3136 + 1089 = 4225;$$

$$R = 65 \text{ cm}.$$

Nüüd leiame kera vöö pindala.

$$S = 2\pi \cdot 65 \cdot 7 = 910\pi \text{ cm}^2.$$

Vastus. Kera vöö pindala on 910π cm^2.

Ü l e s a n n e 7. Leida funktsiooni $y = \frac{1}{x^2}$ graafiku pöörlemisel ümber x-telje tekkinud pöördkeha ruumala vahemikus 1-st 3-ni.

$$V = \pi\int_1^3 \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 dx = \pi\int_1^3 x^{-4}dx = \frac{\pi \cdot x^{-4+1}}{-4+1}\Bigg|_1^3 = -\pi \cdot \frac{1}{3x^3}\Bigg|_1^3 =$$

$$= -\pi\left(\frac{1}{81} - \frac{1}{3}\right) = \pi\frac{27 - 1}{81} = \frac{26\pi}{81} \text{ ruumiühikut.}$$

Ü l e s a n n e 8. Õõnes teraskuul, mille läbimõõt on 10 cm, kaalub 3,2 kG. Leida kuuli seina paksus, kui terase erikaal on 7,8.

Antud: $d = 2r = 10$ cm

$P = 3{,}2$ kG $= 3200$ G

$e = 7{,}8$

Leida: x.

L a h e n d u s. Olgu õõnsuse raadius r_1, siis $x = r - r_1$. Teraskesta ruumala $V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r_1^3$.
Teraskesta kaal $P = Ve$, millest $V = \frac{P}{e}$.
Nendest võrdustest saame:

$$\frac{P}{e} = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r_1^3;$$

$$\frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{P}{e};$$

$$r_1^3 = r^3 - \frac{3P}{4\pi e}.$$

Et

$$r^3 = 125$$

ja

$$\frac{3P}{4\pi e} = \frac{3 \cdot 3200}{4\pi \cdot 7{,}8} \approx 98,$$

siis

$$r_1^3 = 125 - 98 = 27;$$

$$r_1 = 3 \text{ cm};$$

$$x = 5 - 3 = 2 \text{ cm}.$$

Vastus. Kuuli seina paksus on 2 cm.

4. Harjutusülesanded

Õpikust lahendada ülesanded: 360, 367, 379, 391, 392, 399, 403, 410, 416, 421, 432, 442, 446, 462, 468, 483.

5. Kordamisküsimusi

Vastata õpikus toodud küsimustele nr. 350-357, 361-363, 371-373, 382-390, 396-398, 404-407, 417-420, 427-429, 455-458 ja 472-475.

VIII A R V E S T U S

1. Programm

Arvuvalla laiendamise vajadusest. Naturaalarvud, täisarvud, ratsionaalarvud, reaalarvud.

Kompleksarvud ja nende geomeetriline tõlgendamine. Kompleksarvu trigonomeetriline kuju. Tehted kompleksarvudega.

Kompleksarvude kasutamine kolmanda ja neljanda astme kaheliikmeliste võrrandite lahendamisel. Algebra põhiteoreem (tõestuseta).

2. Märkusi

Vaadeldav teema kujutab endast ülevaateteemat, kus tehakse kokkuvõte keskkoolis õppimise vältel vaadeldud arvuhulkadest. Meenutatakse arvuhulkade juba tuttavaid omadusi ning antakse ka lisaks uusi. Õppimise käigus peab saama selgeks, millistesse arvuhulkadesse vaadeldav arv kuulub, millise hulga kõik elemendid kuuluvad teise hulka ja millisesse (kõik ratsionaalarvud kuuluvad reaalarvude hulka jne.). Lisaks varem tuntud arvuhulkadele õpitakse tundma ka kompleksarvude hulka. (Samuti ka imaginaararvude hulka.) Kõige parema pildi reaal-, imaginaar- ja kompleksarvude vahekordadest annab nende graafiline pilt. Peame meeles, et:

1) reaalarvu kujutav punkt asub reaalteljel (x-teljel),

2) imaginaararvule vastav punkt asub imaginaarteljel (puhtimaginaararv) ja ka väljaspool telgi (igal pool tasapinnal välja arvatud reaaltelg),

3) kompleksarvule vastab mistahes tasapinna punkt (mõlemad teljel, samuti ka telgede vahelistel osadel).

Algebralises kujus on $a + bi$ imaginaararv, kui $b \neq 0$. Kui viimane tingimus ära jätta, siis $a + bi$ tähen-

TRÜ Raamatukogu

dab mistahes kompleksarvu. See kompleksarv on reaalarv, kui $b = 0$ ja imaginaararv, kui $b \neq 0$. Kui $a = b = 0$, siis tulemuseks on arv null.

Kompleksarvu $a + bi$ trigonomeetriline kuju on $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kus φ tähistab nurka 0° ja 360° vahel. Kompleksarvu trigonomeetrilise kuju leidmisel peab hästi jälgima, et φ oleks valitud õiges veerandis. Seda on kõige kergem määrata, kui mõttes teha a ja b märkide järgi kindlaks, kus asub seda kompleksarvu kujutav punkt koordinaatteljestikus.

3. Näidisülesandeid

Ü l e s a n n e 1. Lahendada võrrand $x^2 - 5x + 8 = 0$.

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{5 \pm i\sqrt{7}}{2};$$

$$x_1 = \frac{5 - i\sqrt{7}}{2}; \qquad x_2 = \frac{5 + i\sqrt{7}}{2}.$$

Ü l e s a n n e 2. Leida x ja y väärtus nii, et kehtiks võrdus

$$3 - 2ix + iy = i + x - 2y.$$

Kirjutame antud võrde teisiti:

$$3 + (-2x + y)i = x - 2y + i.$$

Kasutades kompleksarvude võrdsuse tingimust, saame

$$\begin{cases} 3 = x - 2y \\ -2x + y = 1 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + y = 1. \end{cases}$$

Lahendades saadud võrrandisüsteemi liitmis-lahutamisvõtte abil, saame

$$\begin{cases} x - 2y = 3 & \mid \cdot 2 \\ -2x + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + y = 1 & \mid \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 4y = 6 \\ -2x + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y = 3 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$-3y = 7 \qquad -3x = 5$$

$$y = -\frac{7}{3} \qquad x = -\frac{5}{3}.$$

Vastus. Saadud võrdust rahuldavad $x = -\frac{5}{3}$ ja $y = -\frac{7}{3}$.

Ü l e s a n n e 3. Leida arvu $1 - i\sqrt{3}$ trigonomeetriline kuju.

Antud: $a = 1$

$b = -\sqrt{3}$

Leida: r, φ

L a h e n d u s: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

Et a (abstsiss) on positiivne ja b (ordinaat) on negatiivne, siis $1 - i\sqrt{3}$-le vastav punkt asub neljandas veerandis. Seega

$$\varphi = 360^\circ - \arctan \sqrt{3}$$

$$\varphi = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ.$$

Vastus. $1 - i\sqrt{3} = 2(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$.

Ü l e s a n n e 4. Leida korrutis

$$2(\cos 28^\circ + i \sin 28^\circ) \cdot 4(\cos 52^\circ + i \sin 52^\circ).$$

Kasutades trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvude korrutamise eeskirja, saame korrutise mooduliks

$$2 \cdot 4 = 8$$

ja argumendiks $28^\circ + 52^\circ = 80^\circ$.

Seega

$$2(\cos 28^\circ + i \sin 28^\circ) \cdot 4(\cos 52^\circ + i \sin 52^\circ) =$$
$$= 8(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ).$$

Ü l e s a n n e 5. Leida jagatised:

a) $\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}$; b) $\frac{6(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})}{3(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6})}$.

a) $$\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{(1 - i\sqrt{3})^2}{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})} = \frac{1 - 2i\sqrt{3} - 3}{1 + 3} =$$

$$= \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) $$\frac{6(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})}{3(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6})} = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Ü l e s a n n e 6. Lahendada võrrand

$$x^4 + 4 = 0.$$

Anname võrrandile kuju $x^4 + a^4 = 0$:

$$x^4 + (\sqrt{2})^4 = 0.$$

Kasutades võrrandi $x^4 + a^4 = 0$ lahendi valemeid, saame

$$x_{1,2} = + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(1 \pm i);$$

$$x_{3,4} = - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(1 \pm i).$$

Kontroll. Võrrandit rahuldavad need x-väärtused, mille korral $x^4 = -4$.

a) $(1 + i)^4 = (1 + 2i + i^2)^2 = (1 + 2i - 1)^2 = (2i)^2 = -4$;

b) $(1 - i)^4 = (1 - 2i - 1)^2 = (-2i)^2 = (-2)^2 \cdot i^2 = 4\cdot(-1) =$
$= -4$;

c) $(-1 + i)^4 = (1 - 2i - 1)^2 = (-2i)^2 = -4$;

d) $(-1 - i)^4 = (1 + i)^4 = -4$.

Vastus. $x_1 = 1 + i$; $x_2 = 1 - i$; $x_3 = -1 + i$;
$x_4 = -1 - i$.

4. Harjutusülesandeid

Õpikust lahendada ülesanded: 496(b), 509(a,c,f), 513(c), 514(a,b) 518, 528(a,b,c,d), 535(a,c,d,f), 540(a,b), 542, 544(a,b,c), 546(d), 547(e,f,g), 550(b,d), 551(b,e,h), 553(a,c,d).

5. Kordamisküsimusi

1. Vastata õpikus toodud küsimustele nr. 491-495, 507-508, 510-511, 541.
2. Millal on kaks kompleksarvu võrdsed?
3. Milline on antud kompleksarvu kaaskompleksarv?, milline vastandarv?
4. Mis on kompleksarvu moodul?, mis argument?
5. Millised arvud kuuluvad kompleksarvude hulka?
6. Milline omadus kannab algebra põhilause nime?

IX ja X ARVESTUS

Keskkooli kursuse kordamine.

Hind 8 kop.

A
36 591
98670

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00388869 2