

TARTU ÜLIKOOL
Füüsika-keemiateaduskond
Teoreetilise füüsika instituut

ELMO TEMPEL

**GALAKTIKA NGC 4594 HÜDRODÜNAAMILINE
MUDEL**

Astrofüüsika magistritöö

Juhendaja: dots. PEETER TENJES

Tartu 2005

Sisukord

1	Sissejuhatus	4
2	Galaktikate kirjeldamine	6
2.1	Galaktikad	6
2.2	Kolmas liikumisintegraal	8
2.3	Galaktikate vaatlused	10
3	Hüdrodünaamiline mudel	12
3.1	Jeansi võrrandid	13
3.2	Jeansi võrrandite sulgemine	15
3.3	Tihedusjaotus	19
3.4	Teoreetilised puudujäägid	21
4	Mudeli praktiline rakendamine	23
4.1	Dispersioonide projekteerimine vaatesihile	23
4.2	Teoreetiline mudel kokkuvõtvalt	26
4.3	Programm dispersioonide arvutamiseks	28
5	Mudeli rakendamine galaktikale NGC 4594	30
5.1	Galaktika NGC 4594 vaatlusandmed	30
5.2	Galaktika NGC 4594 tihedusjaotus	33
5.3	Testarvutused galaktikal NGC4594	35
5.3.1	Dispersioonid erineva parameetri z_0 korral	36
5.3.2	Dispersioonid erinevate tihedusjaotuste korral	39
5.3.3	Dispersioonid erineva σ_θ korral	41
5.4	Galaktika NGC 4594 dispersioonid	42
	Kokkuvõte	46

Viited	48
Summary	52

Peatükk 1

Sissejuhatus

Galaktikad on inimestes tähelepanu äratanud nende avastamise algusaegadest alates. Algselt ei olnud kindel, mis objektidega täpselt tegu on, arvati et need on Linnutee sisesed objektid. Alles aastal 1924 sai selgeks, et meie galaktika ei ole ainulaadne ning väljaspool Linnuteed eksisteerib veel mitmeid galaktikaid. Tänapäevaks on teada lugematu hulk galaktikaid. Mida nõrgemaid objekte me mõõdame, seda rohkem galaktikaid me avastame. Galaktikate täpne arv universumis on siiani saladuseks ning me saame anda sellele vaid kaudseid hinnanguid.

Galaktikad on ühed enim pilkuköitvad objektid universumis. Spiraalgalaktikate värvikas ketas on tähelepanuväärne. Galaktikate väline ilu on vaatamiseks kõigile, kuid teadlased ei piirdu ainult galaktikate ilu hindamisega, vaid nad soovivad üha rohkem uurida galaktikaid süvitsi. Galaktikate struktuur ja dünaamika on samuti pakkunud paljudele astronoomidele huvi ning nad on pühendanud aastaid nende uurimisele.

Galaktikate dünaamikaga hakkas esimeste seas tegelema ka J. Jeans, kes kirjutas üles võrrandid galaktikate dünaamika kirjeldamiseks. Galaktikaid võib vaadelda kui pidevat tähelist keskkonda ning sellest tulenevalt omavad Jeans'i võrrandid teatud sarnasust hüdrodünaamika võrranditega. Sellest sarnasusest lähtuvalt nimetatakse neid võrrandeid ka galaktika hüdrodünaamika võrranditeks. Need võrrandid ei ole tänapäevani leidnud ühest lahendust

ning Jeans'i võrranditega tegelemine võib anda palju märkimisväärset infot galaktikate dünaamika kohta. Jeans'i võrrandid ja galaktikate dünaamika kirjeldamine on selle töö peamisi teemasid.

Galaktikad on tähelepanuväärsed objektid veel seetõttu, et seal ei kehti ainult klassikalised füüsika seadused. Erinevalt klassikalisest füüsikast teadaolevatele liikumisintegraalidele (energia ja impulsimomendi integraal), eksisteerib galaktikates tähtede orbiitidel ka nn. kolmas liikumisintegraal. Selle liikumisintegraaliga on 1950-ndatel aastatel väga palju tegelenud G. Kuzmin, kelle tulemused leiavad kajastamist ka veel tänapäeval. Kolmanda integraali teooria ja sealt saadav info on olulisel kohal ka antud töös.

Oma töö esimeses osas annan üldise ülevaate galaktikatest ning kolmandast liikumisintegraalidest galaktikates. Esimese osaga püüan luua pildi galaktikatest ning nende üldistest omadustest ning sellest, milliste iseärasustega tuleb arvestada galaktika dünaamika kirjeldamisel. Töö teises osas on toodud Jeans'i võrrandid ning kõik seosed, mis olid vajalikud Jeans'i võrrandisüsteemi sulgemiseks. Edasine töö seisneb selles, et on toodud vajalikud üleminekud, et võrrelda vaatluslikke andmeid teoreetiliste tulemustega. Jeans'i võrrandite matemaatiliseks lahendamiseks on kirjutatud programm, kuid kuna tuleb arvutada kolmekordseid integraale, siis programmi kirjutamisel tuli leida optimaalne seos arvutuskiiruse ja täpsuse vahel.

Töö viimane osa on kõige huvitavam ning mõtlemisainet tekitav. Viimases osas on toodud igasuguste testarvutuste tulemused. Nende arvutuste analüüsimisel saab anda hinnangu loodud mudeli realistlikkusele. Kuna mudel on siiski loodud kirjeldamiseks vaadeldavaid galaktikaid, siis me valisimegi ühe galaktika NGC 4594 ning tegime selle kohta detailsed arvutused. Lõpus on toodud tulemused ning vaatlusandmed. Nende võrdlemine annab selge hinnangu koostatud mudelile.

Peatükk 2

Galaktikate kirjeldamine

2.1 Galaktikad

Galaktikad on tähesüsteemid, mis koosnevad miljarditest tähtedest. Selliseid tähesüsteeme ei ole võimalik täpselt kirjeldada. Galaktika kirjeldamisel tuleb teha lähendusi ja lihtsustusi. Vaadeldes galaktikat kui tähtede statistilist kogumit, saab teda kirjeldada pörkevaba Boltzmanni võrrandiga. Galaktikaid võib vaadelda kui gaasi, kus osakesteks on tähed, mis liiguvad mingis gravitatsioonipotentsiaalis. Selles töös on kirjeldatud galaktikaid Boltzmanni võrrandiga, mis on kohandatud galaktikate dünaamika uurimisele.

Universumis eksisteerib igasuguse kujuga galaktikaid. Tinglikult on need jagatud elliptilisteks galaktikateks, spiraalgalaktikateks ja irregulaarseteks galaktikateks. Samuti on iga suur grupp jagatud alamgruppideks. Näiteks spiraalgalaktikate hulgast saab eristada varbspiraalgalaktikaid, elliptiliste galaktikate kogumist hiidelliptilised galaktikad jne. Erinevat tüüpi galaktika kirjeldamisel tuleb arvesse võtta erinevaid nüansse. Ketasgalaktikate puhul on vaatlustest võimalik kindlaks määrata galaktika pöörlemistelg, kuid elliptiliste galaktikate puhul on pöörlemistelg ebamäärane suurus. Omaette grupp on irregulaarsed galaktikad, kus pöörlemistelg ei ole enamasti selgelt välja kujunenud. Galaktika dünaamikat kirjeldava mudeli loomisel tuleb teha mingi valik, sest universaalset mudelit on väga raske, kui mitte võima-

tu, koostada. Selles töös vaadeldakse galaktikaid, mis on telgsümmeetrilised. Sellisteks galaktikateks on ketasgalaktikad ja elliptilised galaktikad. Oma uurimisvaldkonnast jätame välja irregulaarsed galaktikad, kuna seal võib puududa telgsümmeetria. Teiseks tingimuseks, mis uuritavale galaktikale seame, on pöörlemistelje määratlemine. Ketasgalaktikate puhul on pöörlemistelje määramine lihtne, kuid elliptiliste galaktikate puhul see alati ei pruugi olla võimalik. Kokkuvõtvalt saab öelda, et peamiseks uurimisobjektiks antud töös on ketasgalaktikad.

Eelnevalt sai mainitud, et galaktikaid vaadeldakse kui tähtede kogumit, mis liigub oma tekitatud gravitatsiooniväljas. Galaktikate pöörlemiskõverate uurimine on andnud informatsiooni, mille põhjal saab väita, et peale näiva aine galaktikates peab olema veel varjatud aine. Varjatud aine ehk tume aine ei kajastu galaktika vaatlustest otseselt, kuid sellest hoolimata ollakse tema olemasolus üsna kindel. Tume aine paikneb galaktika välisosas ja on väga massiivne. Tumedat ainet kirjeldatakse kui sfäärilist krooni ümber galaktika. Selles töös on suur tähtsus tumedal ainel galaktika tihedusjaotuse kirjeldamisel. Töö lõpuosas on tehtud arvutused ka mudeli jaoks, kus tumedat ainet ei ole arvestatud ja sealt lähtub, et tume aine on galaktikates olulise tähtsusega.

Galaktikad on ühed vanimad tähesüsteemid universumis. Enamus vaadeldavatest galaktikates on tekkinud miljardeid aastaid tagasi ja on nüüdseks saavutanud statsionaarse oleku, kus nende areng on praktiliselt peatunud. Nende galaktikate kõrvale, mis on eksisteerinud juba pikka aega, tekib pidevalt juurde uusi noori galaktikaid. Tekkivate galaktikate dünaamika kirjeldamisel tuleks arvestada ka muutustega, mis kirjeldaksid galaktika evolutsiooni ajas. Selles töös seda siiski ei tehta ning me piirdume ainult galaktikatega, mis on juba statsionaarses olekus ning galaktika on oma evolutsiooni sisuliselt lõpetanud. Galaktikates, olenemata nende evolutsiooni staadiumist, esineb tähtede omavahelisi pörkeid, mis tuleks arvesse võtta galaktika dünaamika kirjeldamisel. Boltzmanni võrrandid, mida me dünaamika kirjeldamisel kasutame, ei arvesta tähtede pörkeid. Kuna galaktikates on tähtede pörked harvad ning nad on ainult marginaalse tähtsusega, siis nende mitteamestamine ei

mõjuta oluliselt tulemusi. Selles töös jäetaksegi tähtede põrked statsionaarse galaktika üldise dünaamika kirjeldamisel arvesse võtmata.

2.2 Kolmas liikumisintegraal

Klassikalises stellaardünaamikas on tähtede orbiitide jaoks teada kaks liikumisintegraali: energia integraal ja impulsimomendi integraal, mida tähistame vastavalt I_1 ja I_2 .

$$I_1 = v_R^2 + v_\theta^2 + v_z^2 - 2\Phi \quad (2.1)$$

$$I_2 = Rv_\theta \quad (2.2)$$

Nendes valemities kasutame silindrilisi koordinaate (R, θ, z) .

Ainult nende integraalide abil ei ole võimalik kirjeldada kogu galaktika dünaamikat. Klassikaliste integraalidega ei ole võimalik seletada kiiruste dispersiooni ellipsoidi kolmeteljelisust. Klassikalistest integraalidest tulenevalt peaks kiiruste ellipsoid olema kaheteljeline. Otseselt on kiiruste ellipsoidi vaadeldud Linnutees Päikese ümbruses ning seal on saadud, et kiiruste ellipsoid on kolmeteljeline. Kaudsetest vaatlustest teistes galaktikates on jõutud samuti arusaamisele, et kiiruste ellipsoid on kolmeteljeline. Reaalse kiiruste ellipsoidi seletamiseks tuleb eeldada kolmanda integraali olemasolu. On teada, et galaktikates esinevad nn. irregulaarsed jõud. Kolmanda integraali olemasolu ongi tõenäoliselt tingitud irregulaarsetest jõududest. Esmakordselt andsid kolmandale integraalile matemaatilise kuju Oort (1932) ja Lindblad (1933), seetõttu nimetatakse nende poolt kirja pandud integraali ka Oorti–Lindbladi integraaliks. Nad eeldasid, et tegemist on energiaintegraaliga z -telje sihis.

$$I_3 = v_z^2 - 2(\Phi - \Phi_0) \quad (2.3)$$

Toodud Oorti–Lindbladi integraal suudab seletada kiiruste ellipsoidi kuju ainult galaktika tasandis. Oma töös kasutan kolmanda integraalina G. Kuzmini poolt tuletatud avaldist (Kuzmin 1953, 1954).

$$I_3 = (Rv_z - zv_R)^2 + z^2v_\theta^2 + z_0^2(v_z^2 - 2\Phi^*) \quad (2.4)$$

Selle integraali kaks esimest liiget kirjeldavad näivalt impulsimomendi integraali ruutu ja viimane liige on sarnane energia integraaliga z -koordinaadis. Valemis esinev funktsioon Φ^* on leitav seosest

$$\begin{aligned} z_0^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial R} &= z^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R} - Rz \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ z_0^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} &= (R^2 + z_0^2) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - Rz \frac{\partial \Phi}{\partial R} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Kasutades kolmanda integraali teooriat on võimalik saada infot galaktikate dünaamika, eriti kiiruste dispersioonide kohta. Kuzmin (1953) näitas, et kiiruste ellipsoid paikneb ruumis piki elliptilisi koordinaate fookusega $z = \pm z_0$. Selles töös me eeldame samuti, et kiiruste ellipsoid paikneb piki elliptilisi koordinaate, kuid elliptilised koordinaadid on eri galaktika piirkondades erinevad: me eeldame, et elliptiliste koordinaatide fookus z_0 ei ole konstantne suurus, vaid $z_0 = f(R, z)$.

Kasutades pörkelist Boltzmanni võrrandit, näitas Kuzmin (1961, 1963), et kiiruste ellipsoidi kuju iseloomustab seos

$$\frac{1}{\sigma_z^2} = \frac{1}{\sigma_R^2} + \frac{1}{\sigma_\theta^2}, \quad (2.6)$$

kus σ_R , σ_z ja σ_θ märgivad dispersioone silindriliste koordinaattelgede sihis. G. Kuzmin tuletas selle seose galaktika tasandis, kasutades õhukese ketta lähendust. Kuna seos (2.6) määrab ära kiiruste ellipsoidi kuju juhul, kui dispersioonid on mõõdetud piki ellipsoidi telgi, siis tasandist väljaspool see seos ei kehti. Väljaspool tasandit kirjutame seose üles kujul, kus dispersioonid on kiiruste ellipsoidi pooltelgede sihis. Vastavalt eeldusele võtame kiiruste dispersioonid elliptiliste koordinaattelgede sihis. Tähistades dispersioone elliptilistes koordinaatides vastavalt σ_1 , σ_2 ja σ_3 , saame seose (2.6) asemel järgmise avaldise:

$$\frac{1}{\sigma_2^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_3^2} \quad (2.7)$$

Seos (2.7) ei ole rangelt tõestatud, kuid vaatlustest on saadud, et teatud täpsusega ta siiski kehtib.

2.3 Galaktikate vaatlused

Tänapäeval tehakse galaktikate kohta mitmeid erinevaid vaatlusi. Üldjoontes saab need jagada kaheks: fotomeetrilised ja spektromeetrilised.

Fotomeetrilised vaatlused on olulised galaktikate heleduskõverate koostamisel. Fotomeetriline heleduskõver on küllaltki detailne ja heledusjaotusest lähtuvalt jagatakse galaktika mitmeks allsüsteemiks: mõhn, ketas, halo, jne. Heleduskõvera alusel saab modelleerida iga allsüsteemi jaoks oma heledusprofili. Omistades igale allsüsteemile konstantse mass-heledus suhte, saab teada ka allsüsteemide massid. Fotomeetrilistest vaatlustest ei ole midagi teada galaktika dünaamika kohta ning seega ei saa ka hinnata mass-heldus suhet ning masse.

Galaktika dünaamika kohta saab infot spektromeetrilistest vaatlustest. Spektromeetrilistest vaatlustest saab galaktika pöörlemiskõverad, mille alusel saab määrata juba galaktika dünaamilisi parameetreid. Galaktikas vaadeldakse kahte tüüpi pöörlemiskõveraid: gaasi pöörlemine ja täheline pöörlemine. Neil kahel pöörlemiskõveral on suured erinevused. Gaas paikneb galaktikas peamiselt õhukeses kettas ning gaas liigub ringkiirusele lähedastel kiirustel. Gaasi dünaamikas on oluline pöörlemine ($v \gtrsim 200$ km/s) ning dispersioonid on vähetähtsad (~ 20 km/s). Täheline pöörlemiskõver ei ole lähendatav ringkiirusega kuna täheline komponent sisaldab suuri kiiruste dispersioone.

Galaktika dünaamikat kirjeldavas mudelis on ühe parameetrina galaktika pöörlemiskiirused. Oma mudelis me ei kasuta otseselt vaatlusandmeid, mis saadakse galaktika pöörlemiskiiruste kohta. Me teeme lihtsustuse, milles galaktika pöörlemiskõvera lähendame ringkiirusele. Ringkiirus on defineeritud

potentsiaali kaudu järgmiselt

$$v_c^2 = R \frac{\partial \Phi}{\partial R}, \quad (2.8)$$

kus Φ tähistab gravitatsiooni potentsiaali.

Oma mudelis teeme eelduse, et galaktika pöörlemiskiirus on mingi konstant β korda ringkiirus. Arvestades seda, saab avaldada galaktika pöörlemiskiiruse kujul

$$\frac{V_\theta^2}{R} = \beta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R}. \quad (2.9)$$

Oluline teave, mis gaasi pöörlemiskõverast saadakse, on tumeda aine osakaal galaktikas. Eeldades, et galaktika potentsiaal on tingitud ainult näivast komponendist, siis gaasi pöörlemiskõver peaks raadiuse kasvades lange-ma. Vaatlustest on saadud, et pöörlemiskõver jääb konstantseks. Vaatlusliku pöörlemiskõvera seletamiseks eeldatakse, et galaktikat ümbritseb massiivne kroon (tume aine ehk varjatud aine).

Galaktikates vaadeldakse eraldi süsteemina kerasparvede süsteemi. Kuna kerasparved paiknevad galaktika halos, siis kerasparvede vaatluste põhjal hinnatakse halo parameetreid: pöörlemiskiirust, dispersioone, jt.

Antud töös kõige olulisem vaatluslik info on dispersioonide vaatlused. Dispersioonide vaatlused nõuavad väga head tehnoloogilist aparatuuri kuid sellest hoolimata on tänapäeval tehtud juba küllaltki palju dispersioonide vaatlusi. Antud töö seisukohalt on oluline, et uuritavas galaktikas oleks dispersioone vaadeldud piki mitut erinevat lõiget galaktikas.

Peatükk 3

Hüdrodünaamiline mudel

Galaktikate kinemaatilise mudeli koostamisel tuleb arvesse võtta mitmeid erinevaid aspekte, mis mõjutavad galaktika kinemaatikat. Lisaks tihedusjaotusele ja pöörelemiskõverale tuleb arvesse võtta ka kiiruste dispersiooni galaktikas. Mudeleid, mis võtaks arvesse kiiruste dispersioone, on püütud koostada mitmeid. Sfääriliste süsteemide jaoks on selliseid mudeleid koostanud Binney & Mamon (1982), Merrit (1985), Gerhard (1991), Tremaine et al. (1994), Carollo et al. (1995). Sfääriliste süsteemide puhul sõltub tähe orbiit ainult kahest liikumisintegraalst ja kolmanda integraaliga neis mudeleis ei arvestata.

Ellipsoidaalsete tihedusjaotusega mudelites on kiiruste dispersioonide profiilid arvatud vaid mõnede spetsiifiliste faasitiheduste puhul (vaata van der Marel et al. (1990), de Bruijne et al. (1996), de Zeeuw et al. (1996), Merrit (1996)).

Selles töös me vaatleme natuke üldisemat juhtu ja piirame ennast telgsümmeetriliste süsteemidega. Telgsümmeetrilise hüdrodünaamilise mudeli kirjeldamisega tegi algust Einasto (1970). Ta koostas galaktika M31 (Andromeda galaktika) mudeli, kus oli arvestatud mõnede lihtsamate kolmanda liikumisintegraalide avaldistega, mistõttu need mudelid kehtisid ainult galaktika tasandis. Galaktika tasandist väljaspool tehti täiendavalt lihtsustavaid eeldusi, mis kõik ei olnud piisavalt füüsikaliselt põhjendatud. Selles töös jät-

kame seda tööd, mida Einasto tegi, kuid mudeli koostamisel lähtume üldistest seaduspärasustest ning püüame teha võimalikult vähe kitsendavaid eeldusi.

3.1 Jeansi võrrandid

Galaktika dünaamika kirjeldamisel lähtume Boltzmanni pörkevabadest võrranditest, mida stellaardünaamikas kasutas esimesena Jeans (1919, 1922) ning seetõttu kutsutakse neid võrrandeid ka Jeansi võrranditeks. Jeansi võrrandid silindrilistes koordinaatides avalduvad järgmiselt (Binney & Tremaine 1987):

$$\frac{\partial(\rho\bar{v}_R)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_R^2)}{\partial R} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_R\bar{v}_z)}{\partial z} + \rho \left(\frac{\bar{v}_R^2 - \bar{v}_\theta^2}{R} + \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial(\rho\bar{v}_\theta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_R\bar{v}_\theta)}{\partial R} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_\theta\bar{v}_z)}{\partial z} + \frac{2\rho}{R}\bar{v}_\theta\bar{v}_R = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial(\rho\bar{v}_z)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_R\bar{v}_z)}{\partial R} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_z^2)}{\partial z} + \frac{\rho\bar{v}_R\bar{v}_z}{R} + \rho\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \quad (3.3)$$

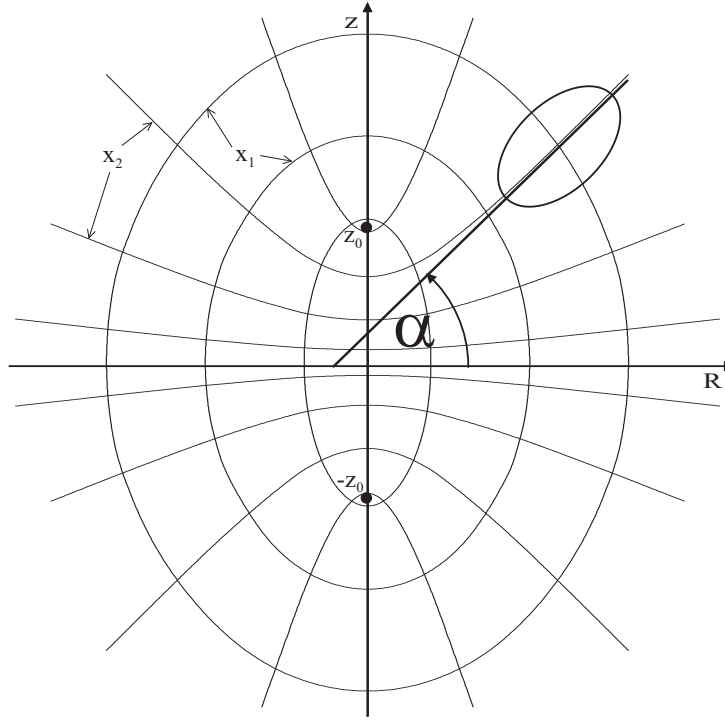
kus v_R , v_z , v_θ tähistavad kiiruste komponente vastavate koordinaattelgede sihis ning ρ ja Φ on vastavalt massi ruumtihedus ning gravitatsiooni potentsiaal.

Silindriliste koordinaate valik ei ole juhuslik, vaid teadlik ja põhjendatud valik. Galaktikad on üldiselt telgsümmeetrilised objektid ning seetõttu kasutamegi silindrilisi koordinaate. Galaktikaid, kus telgsümmeetria puudub (näiteks irregulaarsed galaktikad), ei ole võimalik meie mudeliga kirjeldada.

Jeansi võrrandid (3.1)-(3.3) on üldised võrrandid ning ei ole edasiseks analüüsiks kõige paremad. Võrrandite lihtsustamiseks toome kõigepealt sisse kiiruste dispersiooni tensori, mis on defineeritud valemiga

$$\sigma_{ij}^2 \equiv \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} = \bar{v}_i\bar{v}_j - \bar{v}_i\bar{v}_j. \quad (3.4)$$

Dispersiooni tensor määrab kiiruste ellipsoidi kuju ja orientatsiooni ruumis. Maatriksite algebrast on teada, et valides vastavalt koordinaadistiku, on sümmeetriline tensor diagonaliseeritav. Diagonaliseeritud tensori peadiagonaalil



Joonis 3.1: Elliptilised koordinaadid. z_0 tähistab ellipsi ja hüperbooli fookust; x_1 ja x_2 on elliptilised koordinaadid; R ja z on silindrilised koordinaadid. Nurk α tähistab nurka kiiruste ellipsoidi ja galaktika tasandi vahel.

asuvad ellipsoidi telgede suunalised väärtused ning tensori segakomponendid on nullid. Joonisel 3.1 esitatud dispersiooni tensor (kiiruste ellipsoid) on diagonaalne elliptilistes koordinaatides, kuna ellipsoidi teljed ja elliptilised koordinaadid langevad kokku. Silindrilistes koordinaatides ühtib vaid üks telg σ_θ^2 ühe silindrilise koordinaadiga. Arvestades galaktika sümmeetriat, saab ellipsoidi kirjeldada nelja suurusega: dispersioonid koordinaattelgede sihis (σ_R , σ_z ja σ_θ) ning nurk α koordinaattelje R ja ellipsoidi peatelje vahel (joonis 3.1). Matemaatiliselt avalduvad tensori segakomponendid telgsümmeetrilises süsteemis järgmiselt:

$$\sigma_{Rz}^2 = \gamma(\sigma_R^2 - \sigma_z^2), \quad (3.5)$$

$$\sigma_{R\theta}^2 = \sigma_{z\theta}^2 = 0, \quad (3.6)$$

kus

$$\gamma = \frac{1}{2} \tan 2\alpha. \quad (3.7)$$

Võrrand (3.6) tuleneb otseselt telgsümmeetriast: telgsümmeetrilises süsteemis ellipsoidi üks telg langeb kokku ühe koordinaatteljega (telg θ ja dispersioon σ_θ^2). Võrrandi (3.5) detailsem tuletus elliptiliste ja silindriliste koordinaatide vahelistest seostest on toodud bakalaureusetöös.

Galaktika telgsümmeetriast tulenevalt $\overline{v_R^2} = \overline{v_z^2} = 0$. Arvestades telgsümmeetriast tulenevaid seoseid, muutub teine Jeans'i võrrand (3.2) samasuseks. Minnes Jeans'i võrrandites (3.1) ja (3.3) üle dispersioonidele ning tuues seejärel sisse dispersioonide suhted

$$k_z \equiv \frac{\sigma_z^2}{\sigma_R^2} \quad k_\theta \equiv \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_R^2}$$

ning tähistades pöörlemiskiirust suurusega $V_\theta^2 = \overline{v_\theta^2}$, saame peale mõningast lihtsustust Jeans'i võrrandid meile sobival kujul

$$\frac{\partial \rho \sigma_R^2}{\partial R} + \left(\frac{1 - k_\theta}{R} + \frac{\partial \kappa}{\partial z} \right) \rho \sigma_R^2 + \kappa \frac{\partial \rho \sigma_R^2}{\partial z} = -\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{V_\theta^2}{R} \right), \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \rho \sigma_z^2}{\partial z} + \left(\frac{\xi}{R} + \frac{\partial \xi}{\partial R} \right) \rho \sigma_z^2 + \xi \frac{\partial \rho \sigma_z^2}{\partial R} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (3.9)$$

kus

$$\kappa \equiv \gamma(1 - k_z) \quad \xi \equiv \frac{\kappa}{k_z}.$$

Jeans'i võrrandites (3.8) ja (3.9) tihedus ρ , potentsiaal Φ ning pöörlemiskiirus V_R on määratavad galaktika vaatlustest (heledusjaotusest ning pöörlemiskõverast tähtede ja gaasi jaoks). Võrrandi (3.8) lahendamise σ_R^2 suhtes ning võrrandi (3.9) lahendamise σ_z^2 suhtes. Tundmatuteks suurusteks jäävad k_z , k_θ ja γ , mis tuleb leida, et sulgeda võrrandid.

3.2 Jeans'i võrrandite sulgemine

Tundmatute suuruste k_z , k_θ , γ leidmiseks kasutame kolmanda integraali olemasolu galaktikates. Kolmas integraal on mitteklassikaline integraal ja seega

algupärastes Jeans'i võrrandites ta otseselt ei kajastu. Jeans'i võrrandites on kõik kolm dispersiooni sõltumatud ning sellest tulenevalt ei ole neis keelatud kolmanda integraali olemasolu. Kolmanda integraali teoorist lähtuvalt on võimalik sulgeda Jeans'i võrrandid (3.8) ja (3.9).

Toome sisse konfokaalsed elliptilised koordinaadid (Landau & Livshits 1976), mis on defineeritud järgnevalt (joonis 3.1):

$$\frac{R^2}{x^2 - z_0^2} + \frac{z^2}{x^2} = 1, \quad x_3 = \theta, \quad (3.10)$$

kus

$$x^2 = \begin{cases} x_1^2 & \geq z_0^2 \\ x_2^2 & \leq z_0^2 \end{cases}. \quad (3.11)$$

Selles definitsioonis on z_0 ellipsi ja hüperbooli fookus. Järgnevalt toome välja mõned matemaatilised seosed, mis on avaldatavad elliptiliste ja silindriliste koordinaatide vahelistest seostest. Elliptilised koordinaadid avalduvad silindriliste koordinaatide kaudu järgmiselt:

$$x_1^2 = \frac{1}{2} [\Omega + (\Omega^2 - 4z^2 z_0^2)^{1/2}], \quad (3.12)$$

$$x_2^2 = \frac{1}{2} [\Omega - (\Omega^2 - 4z^2 z_0^2)^{1/2}], \quad (3.13)$$

kus

$$\Omega \equiv R^2 + z_0^2 + z^2.$$

Joonisel 3.1 toodud nurk α avaldub:

$$\tan \alpha = \frac{z^2 - x_2^2}{Rz}. \quad (3.14)$$

Jeans'i võrrandites sisalduv ellipsoidi kaldenurgaga seotud parameeter γ avaldub seosega

$$\gamma = \frac{1}{2} \tan 2\alpha = \frac{Rz}{R^2 + z_0^2 - z^2}, \quad (3.15)$$

kus z_0 on ellipsi ja hüperbooli fookus. Eelnevalt toodud seoste detailne tuletus on toodud bakalaureusetöös.

Suurus γ kirjeldab kiiruste ellipsoidi orientatsiooni. Valides $z_0 = \text{const}$ on kiiruste ellipsoid orienteeritud piki fikseeritud elliptilisi koordinaate. Vaadeldes z_0 -i kui funktsiooni R -st ja z -st ($z_0 = f(R, z)$), on kiiruste ellipsoidi

orientatsiooni määrav elliptiline koordinaadistik muutuv, sõltudes parameetrist z_0 . Selles töös määrataksegi kiiruste ellipsoidi orientatsioon parameetriga z_0 .

Leiame, kuidas avalduvad suurused k_z ja k_θ . Tähistades elliptilistes koordinaatides dispersioonide suhted suurustega

$$k_{12} \equiv \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \quad k_{13} \equiv \frac{\sigma_3^2}{\sigma_1^2},$$

näitas Einasto (1970), et need suhted avalduvad järgmiselt:

$$k_{12} = \frac{a_1 z_0^2 + a_2 x_2^2}{a_1 z_0^2 + a_2 x_1^2}, \quad (3.16)$$

$$k_{13} = \frac{a_1 z_0^2 + a_2 x_2^2}{a_1 z_0^2 + a_2 z^2 + b_2 R^2}. \quad (3.17)$$

Konstandid a_1 , a_2 ja b_2 on tundmatud ning nad tuleb määrata teistest kaalutlustest. Einasto (1970) oma töös eeldas, et konstandid $a_1 = a_2 = b_2$. Selles töös valime konstandid selliselt, et kiiruste ellipsoidi kuju määrav seos (3.18) oleks rahuldatud. See seos on saadud eelnevalt toodud seose (2.6) üldistamisel väljapoole galaktika tasandit. Seos, mis määrab kiiruste ellipsoidi kuju on järgmine:

$$\frac{1}{k_{12}} = 1 + \frac{1}{k_{13}}. \quad (3.18)$$

Seos (3.18) on tõestatud vaid galaktika tasandis, kus kiiruste ellipsoid on paralleelne galaktika tasandiga. Antud töös on tehtud eeldus, et seos (3.18) kehtib kogu galaktika ulatuses ning määrab ära ellipsoidi kuju ka väljaspool galaktika tasandit. Meie eeldust õigustavad ka galaktikate kooskõlalised N-keha mudelid.

Määrame konstandid a_1 , a_2 ja b_2 . Konstantide valik on suvaline, nad peavad vaid rahuldama seost (3.18). Kõigepealt valime $b_2 = a_2$. Me võime sellise valiku teha, kui konstandid a_1 ja a_2 rahuldavad etteantud seost. Jagades võrrandites (3.19) ja (3.20) lugeja ja nimetaja konstandiga a_2 ning tehes asenduse $a_1/a_2 \equiv a$, saame

$$k_{12} = \frac{az_0^2 + x_2^2}{az_0^2 + x_1^2}, \quad (3.19)$$

$$k_{13} = \frac{az_0^2 + x_2^2}{az_0^2 + z^2 + R^2}. \quad (3.20)$$

Asendame saadus suurused võrrandisse (3.18) ning lihtsustades avaldist, saame

$$x_1^2 = x_2^2 + az_0^2 + z^2 + R^2. \quad (3.21)$$

Avaldades võrrandist (3.21) az_0 ning asendades selle võrranditesse (3.19) ja (3.20), saame lõplikult avaldada suurused k_{12} ja k_{13} .

$$k_{12} = \frac{B + z_0^2 - z^2 - R^2}{3B + z_0^2 - z^2 - R^2}, \quad (3.22)$$

$$k_{13} = \frac{B + z_0^2 - z^2 - R^2}{2B}, \quad (3.23)$$

kus

$$B \equiv \sqrt{\Omega^2 - 4z^2z_0^2}$$

Kasutades silindriliste ja elliptiliste koordinaatide vahelisi seoseid, saab näidata, et

$$k_z = \frac{\sin^2 \alpha + k_{12} \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + k_{12} \sin^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha + k_{12}}{1 + k_{12} \tan^2 \alpha}, \quad (3.24)$$

$$k_\theta = \frac{k_{13}}{\cos^2 \alpha + k_{12} \sin^2 \alpha} = \frac{k_{13}(1 + \tan^2 \alpha)}{1 + k_{12} \tan^2 \alpha}. \quad (3.25)$$

Suurus z_0 on teoreetiliselt leitav vaid galaktika tasandis. Kuzmin (1962, 1963) näitas, et galaktika tasandis kehtib seos

$$R \left(\frac{\partial \gamma}{\partial z} \right)_{z=0} = -\frac{1}{4} \frac{\partial \ln \rho_t}{\partial \ln R}, \quad (3.26)$$

kus ρ_t tähistab kogu galaktika tihedust. Avaldades valemist (3.26) suuruse z_0^2 , saame (vaata bakalaureusetöö)

$$z_0^2(R) = -R \left[4\rho_t(R, 0) \left(\frac{\partial \rho_t(R, 0)}{\partial R} \right)^{-1} + R \right]. \quad (3.27)$$

Teoreetilistest kaalutlustest ei ole z_0 -i sõltuvust z -st hetkel võimalik määrata. Antud töös eeldatakse, et z_0 sõltub ka z -st. Kuna seda sõltuvust ei

ole võimalik matemaatiliselt leida, siis jäetakse ta vabaks suuruseks, mis valitakse selliselt, et tulemused ühtiksid vaatlusandmetega. Sobiva funktsiooni leidmisel eeldatakse siiski, et galaktika tasandis peab z_0 avalduma kujul (3.27).

3.3 Tihedusjaotus

Hüdrodünaamiline mudel, võrrandite (3.8) ja (3.9) näol, sisaldab tihedust ja gravitatsioonipotentsiaali. Galaktika tihedusjaotus tuleb määrata vaatlusandmete põhjal ning selle kirjeldamisel tuleb lähtuda galaktika omadustest. Galaktika kui terviku tihedusjaotust on küllaltki raske ühe matemaatilise seosega väljendada. Uurides mingit konkreetset galaktikat, annab seal eristada mitmeid komponente: tuum, mõhn, ketas, halo jne. Igat üksikut allsüsteemi on juba palju lihtsam kirjeldada kui tervikut. Tihedusjaotuse kirjeldamisel lähtume sellest, et uuritavat galaktikat on tinglikult võimalik jagada allsüsteemideks. Iga allsüsteem on teistest erinev, kuid üldised omadused on siiski samad: allsüsteem omab elliptilist profiili ning tihedus kahaneb eksponentsiaalselt raadiuse kasvades. Ellipsoidaalne tihedusjaotus, millel on konstantne ellipsi pooltelgede suhe ϵ , on kirjeldatav seosega (Einasto 1969, Sérsic 1968)

$$\rho(a) = \rho(0) \exp[-(a/a_c)^{1/N}], \quad (3.28)$$

kus

$$\rho(0) = \frac{hM}{4\pi\epsilon a_0^3} \quad (3.29)$$

$$a = \sqrt{R^2 + z^2/\epsilon^2} \quad (3.30)$$

$$a_c = ka_0. \quad (3.31)$$

Toodud tihedusjaotuses on kasutatud tähistusi: $\rho(0)$ – tsentraalne tihedus, M – vaadeldava allsüsteemi mass, a_0 – harmooniline keskmine raadius. Suurused N ja ϵ kirjeldavad tihedusjaotust allsüsteemis ning h ja k on parameetrist N sõltuvad normeerimiskordajad (vaata Tenjes et al. 1994, Appendix B).

Tihedusjaotus uuritavas galaktikas määratakse fotomeetriliste vaatluste põhjal. Kõigepealt jagatakse galaktika allsüsteemideks ning seejärel leitakse juba iga allsüsteemi jaoks sobivad väärtused tihedusjaotuse määramiseks. Galaktika ja allsüsteemide massi hindamisel võetakse arvesse ka galaktika pöörlemiskõverat. Galaktika pöörlemiskõverast tuleneb asjaolu, et fotomeetriliste vaatluste põhjal tehtud mudel ei kirjelda täielikult galaktika pöörlemiskõverat. Galaktika pöörlemiskõverast tulenevalt peab galaktika sisaldama suurel hulgal varjatud ainet. Varjatud aine lisatakse tihedusjaotusele ühe komponendina. Varjatud aine puhul on tegu nn. tumeda ainega, millel heledus puudub. Tumeda aine kirjeldamiseks kasutame matemaatilist seost (King 1962, Einasto et al. 1974)

$$\rho(a) = \begin{cases} \rho(0)\{[1 + (\frac{a}{a_c})^2] - [1 + (\frac{a^0}{a_c})^2]\} & \text{kui } a \leq a^0 \\ 0 & \text{kui } a > a^0 \end{cases}, \quad (3.32)$$

kus a^0 tähistab isotermilise sfääri välimist cutoffi raadiust. Füüsikaliselt määrab a^0 raadiuse, kust alates tumeda aine tihedus muutub nulliks.

Kuna Jeans'i võrrandid sisaldavad ka gravitatsiooni potentsiaali, siis toome siinkohal ära valemid potentsiaali leidmiseks. Gravitatsiooni potentsiaal leitakse vastavalt Poissoni võrrandile

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (3.33)$$

Gravitatsioonipotentsiaali tuletised avalduvad kujul

$$\frac{\partial\Phi(R, z)}{\partial R} = R \frac{GhM}{(ea_0)^3} \int_0^{\arcsin e} \rho^*(a) \sin^2 x dx, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial\Phi(R, z)}{\partial z} = z \frac{GhM}{(ea_0)^3} \int_0^{\arcsin e} \rho^*(a) \tan^2 x dx, \quad (3.35)$$

kus e on eksentrilisus ja $\rho^*(a)$ on kasutatav tihedusjaotus. Need suurused avalduvad järgmiselt:

$$a^2 = \frac{\sin^2 x}{e^2} \left(R^2 + \frac{z^2}{\cos x^2} \right) \quad (3.36)$$

$$e = \sqrt{1 - \epsilon^2} \quad (3.37)$$

$$\rho^*(a) = \exp \left[- \left(\frac{a}{ka_0} \right)^{1/N} \right]. \quad (3.38)$$

Valemid (3.34) ja (3.35) kirjeldavad gravitatsioonipotentsiaali tuletise leidmist elliptiliste tihedusjaotuste korral. Sfääriliste tihedusjaotuste (näiteks tumeda aine kroon) korral potentsiaali tuletis on leitav järgnevatest avaldistest

$$\frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial R} = R \frac{GhM}{(a_0)^3} \int_0^1 \rho^*(a) u^2 du, \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial z} = z \frac{GhM}{(a_0)^3} \int_0^1 \rho^*(a) u^2 du, \quad (3.40)$$

kus $a^2 = u^2(R^2 + z^2)$ ning $\rho^*(a)$ on tihedusjaotus ilma kordajata $\rho(0)$.

3.4 Teoreetilised puudujäägid

Peamiseks ülesandeks galaktika dünaamika kirjeldamisel lähtuvalt Jeans'i võrranditest oli Jeans'i võrrandite sulgemine. Nüüdseks oleme suutnud Jeans'i võrrandid sulgeda ja meie loodud teoreetilises mudelis ei ole enam suuri puudujääke. Siiski, oleme teinud palju lihtsustavaid eeldusi, mis ei pruugi vastata tegelikkusele ning mille tõttu meie mudel võib anda vastuolulisi tulemusi. Alljärgnevalt toome välja mudelis esinevad puudused ning analüüsime nende mõju tulemustele. Hilisemas peatükis, kus käsitletakse arvutusi, on toodud konkreetset näited erinevate teoreetiliste puudujääkide mõjust arvutuslikele tulemustele.

Üheks tõsisemaks probleemiks on z_0 määramine. Teoreetiliselt ei ole seda õnnestunud veel määrata, kuna puuduvad piisavalt täpsed vaatlusandmed. Alles kavandatava satelliidi GAIA mõõtmise tulemusena on vaatlustest saadavad kiiruste ellipsoidi orientatsioon (ja seega z_0) kogu galaktika meridionaaltasandis. Loodud mudelis on jäetud z_0 vabaks parameetriks, mis tuleb leida vaatlusandmetest lähtuvalt. Kuna z_0 -i varieerides on võimalik leida hea

kooskõla vaatlusandmete ja arvutuslike tulemuste vahel, siis on meie mudel üks võimalus hinnata kiiruste ellipsoidi orientatsiooni galaktikates.

Teiseks vastuoluks teooria ja arvutuste vahel on asjaolu, et me ei lahenda Jeans'i võrrandeid kui süsteemi, vaid lahendame mõlemad võrrandid sõltumatult. Ühest võrrandist leiame σ_R^2 ja teisest σ_z^2 . Samas kasutame neis võrrandites seost $k_z = \sigma_z^2 / \sigma_R^2$. Siit tulebki probleem, et teoreetiline suhe k_z ja arvutuslik suhe ei lange kokku. Seda probleemi ei ole võimalik üheselt lahendada, kuna mõlemad võrrandid on samaväärsed. Probleem seisneb arvata-vasti mõnes lähenduses, mis me tegime seoses kolmanda integraali teooriaga.

Kolmandast integraalist tulenev seos $1/k_z = 1 + 1/k_\theta$ on tõestatud ainult galaktika tasandis. Meie laiendasime seda seost ka tasandist väljapoole. Selle seose kasutatavus väljaspool galaktika tasandit ei ole leidnud teoreetilist kinnitust, kuid loogilistest kaalutlustest lähtuvalt võiks see kehtida ka väljaspool tasandit. Kuna galaktika tasandis määrab see seos kiiruste ellipsoidi kuju, siis võib eeldada, et see seos määrab kiiruste ellipsoidi kuju ka väljaspool galaktika tasandit. Seda toetavad ka teatud täpsusega N-keha mudelid.

Lisaks eelnevalt mainitud probleemidele on meie mudelis veel mõned puudujäägid, mis tuleks siinkohal ära mainida. Oma mudeli koostamisel võtsime aluseks statsionaarse galaktika. Statsionaarses galaktikas ei arvestata tähtede omavahelisi pörkeid ja galaktika üldist arengut. Kui võtta reaalne galaktika, siis seal esineb ka tähtede omavahelisi pörkeid ja täpses mudelis tuleks seda arvestada.

Teoreetiliselt koostatud mudelis esineb küllaltki palju puudujääke ja vastuolusid, mis võivad hakata mõjutama arvutuslike tulemusi. Kuid kõigist neist puudujääkidest hoolimata oleme suutnud Jeans'i võrrandid sulgeda ning leida võimaluse nende lahendamiseks. Vaadates koostatud teoreetilist mudelit suuremast plaanist, siis füüsikalised põhitõed on meie mudelis kõik arvesse võetud ning mainitud puudujäägid ei oma olulist tähtsust selles mudelis. Me oleme võimelised oma mudeliga arvutama dispersioone, mida on võimalik ka vaatlusandmetega võrrelda. Vaatlusandmetega võrreldavate dispersioonide leidmine oligi meie mudeli koostamise üks peamine eesmärk.

Peatükk 4

Mudeli praktiline rakendamine

4.1 Dispersioonide projekteerimine vaatesihile

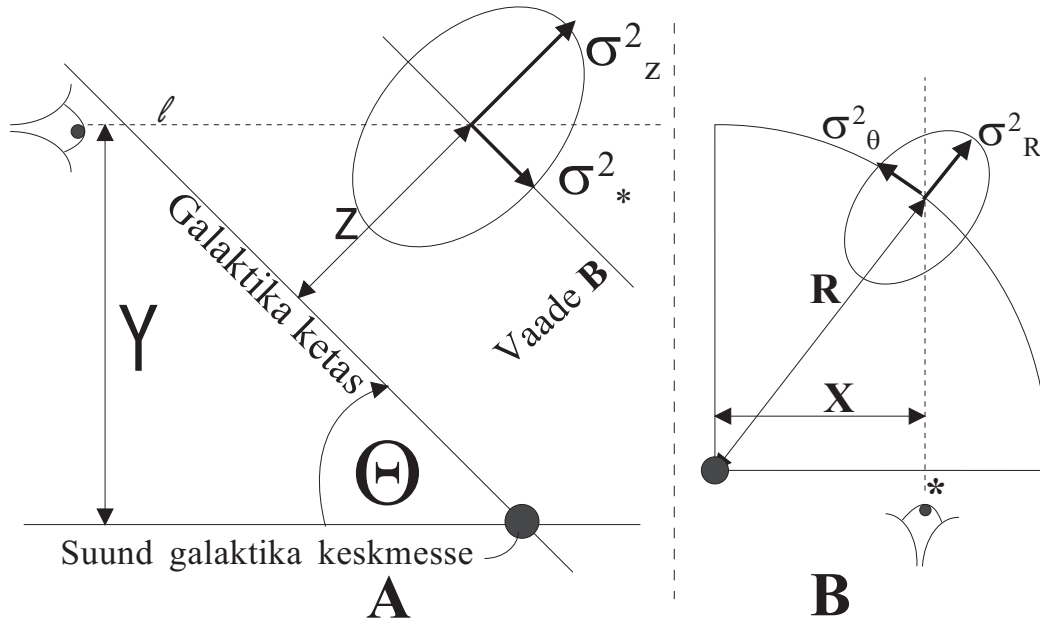
Hüdrodünaamilistest mudelitest arvatud dispersioonid σ_R^2 , σ_z^2 ja σ_θ^2 ei ole võrreldavad vaatlusandmetest saadavate dispersioonidega. Selleks, et arvutuslikke dispersioone võrrelda vaatlusandmetega, peab nad viima vastavusse. Vaadeldav dispersioon on üldjuhul superpositsioon koordinaattelgede sihis olevatest dispersioonidest. Erijuhtudel, kui galaktika paistab meie poole serviti, siis vaadeldavas dispersioonis ei kajastu σ_z^2 ning juhul kui galaktika telg on suunatud meie poole, siis vaadeldav dispersioon on formeerunud ainult σ_z^2 -i järgi.

Dispersioonide projekteerimine vaatesihile toimub kahes etapis. Esiteks projekteerime dispersioonid galaktika tasandiga paralleelses tasandis. Selleks tuleb σ_R^2 ja σ_θ^2 projekteerida tasandisse, mis läbib vaatesihti ja on risti galaktika tasandiga (joonis 4.1). Projekteeritud dispersioon avaldub järgmiselt:

$$\sigma_*^2 = \sigma_\theta^2 \frac{X^2}{R^2} + \sigma_R^2 \left(1 - \frac{X^2}{R^2}\right). \quad (4.1)$$

Teiseks tuleb projekteerida vaatesihile dispersioonid σ_z^2 ja σ_*^2 . Selleks arvestame vaatesihti ja galaktikatasandi vahelist nurka Θ (joonis 4.2). Vaatesihile projekteeritud dispersioon σ_l^2 on järgmine:

$$\sigma_l^2 = \sigma_*^2 \cos^2 \Theta + \sigma_z^2 \sin^2 \Theta \quad (4.2)$$

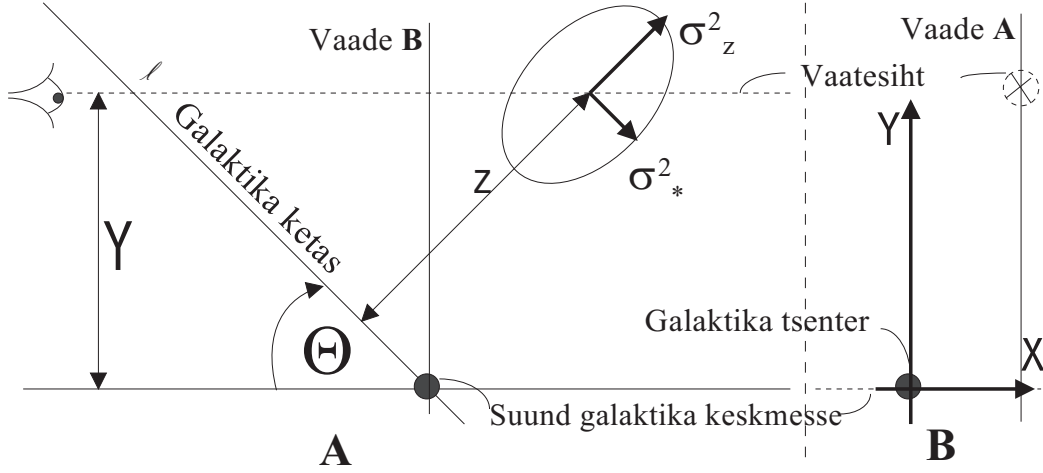


Joonis 4.1: Dispersioonide σ_R^2 ja σ_θ^2 projekteerimine galaktika tasandiga paralleelsesesse tasandisse. Projekteeritud dispersioon on σ_*^2 .

Joonistel 4.1 ja 4.2 on kujutatud dispersioonide projekteerimine punktis $P(X, Y)$. Koordinaadid X ja Y on mõõdetud tasandis, mis on risti vaatesihiga ning läbib galaktika tsentrit. Koordinaatide nullpunktiks on valitud galaktika keskpunkt. Koordinaat X lähtub piki galaktika näivat suurt pooltelge, Y piki näivat väikepooltelge (koordinaadid taevafääril).

Et projekteeritud dispersioon oleks võrreldav vaadeldud dispersiooniga, selleks tuleb arvestada sellega, et vaadeldud dispersioon on mingi keskmine vaatesihil olevatest dispersioonidest. Selleks, et viia vastavusse projekteeritud dispersioon vaadeldud suurusega, tuleb dispersiooni integreerida piki vaatejoont kogu galaktika ulatuses. Selle juures tuleb arvestada galaktika heledusjaotusega, sest heledamad piirkonnad omavad lõpptulemuses suuremat kaalu. Integreerime projekteeritud dispersiooni piki vaatejoont arvestades heledusjaotusega

$$\sigma_{int}^2(X, Y) = \frac{1}{Q(X, Y)} \int_{-\infty}^{\infty} q(R, z) \sigma_l^2(R, z) dl, \quad (4.3)$$



Joonis 4.2: Dispersioonide σ_*^2 ja σ_z^2 projekteerimine vaatesihile. Projekteeritud dispersioon on σ_l^2 .

kus $q(R, z)$ tähistab galaktika ruumheledusjaotust ning $Q(X, Y)$ pindheledusjaotust. Tehes integraalis muutujavahetuse, nii et integreerimine oleks üle raadiuse, saame lõplikult

$$\sigma_{int}^2(X, Y) = \frac{1}{Q(X, Y)} \int_X^\infty \Psi \frac{R}{\cos \Theta \sqrt{R^2 - X^2}} dR, \quad (4.4)$$

kus

$$\begin{aligned} \Psi &\equiv q(R, z_1) \sigma_l^2(R, z_1) + q(R, z_2) \sigma_l^2(R, z_2), \\ z_{1,2} &= \left(\frac{Y}{\sin \Theta} \pm \sqrt{R^2 - X^2} \right) \tan \Theta. \end{aligned}$$

Valemi (4.4) järgi on võimalik leida dispersioon ühele galaktika komponendile. Meie mudelis on galaktika mitmekomponendiline ja seega vaadeldava suurusega võrreldava tulemuse saamiseks tuleb summeerida kõik galaktika komponendid, kusjuures tuleb jällegi arvestada heleduspanustega

$$\sigma_{vaatlus}(X, Y) = \left(\frac{\sum_i [Q_i(X, Y) (\sigma_{int}^2(X, Y))_i]}{\sum_i Q_i(X, Y)} \right)^{1/2}, \quad (4.5)$$

kus i tähistab allsüsteemi järjekorranumbrit ning summeerimine toimub üle kõigi allsüsteemide.

4.2 Teoreetiline mudel kokkuvõtvalt

Lõpptulemus saavutatakse järgmise algoritmi kohaselt:

$$\sigma_{vaatlus}(X, Y) = \left(\frac{\sum_i [Q_i(X, Y) (\sigma_{int}^2(X, Y))_i]}{\sum_i Q_i(X, Y)} \right)^{1/2}, \quad (4.6)$$

kus summeerimine toimub üle kõigi allsüsteemide. X, Y – koordinaadid taevasfääril.

Pindheledus Q_i leitakse valemist

$$Q_i(R, Z) = 2 \frac{\epsilon_i}{f_i E_i} \int_A^\infty \frac{\rho_i(a) a da}{(a^2 - A^2)^{1/2}}, \quad (4.7)$$

kus

$$a^2 = R^2 + \left(\frac{z}{\epsilon} \right)^2, \quad (4.8)$$

$$A^2 = X^2 + \left(\frac{Y}{E} \right)^2, \quad (4.9)$$

$$E_i^2 = \epsilon_i^2 \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta. \quad (4.10)$$

Antud valemities on kasutatud tähistusi: f – mass-heledus suhe; ϵ – allsüsteemi pooltelgede suhe; E – vaatesuunas projekteeritud ellipsoidi pooltelgede suhe; Θ – galaktika tasandi ja vaatesihi vaheline nurk; R, z – silindrilised koordinaadid; $\rho(a)$ – tihedusjaotus. Tihedusjaotusena on kasutatud ellipsoidaalset jaotust, mis avaldub kujul

$$\rho(a) = \rho_0 \exp \left[- \left(\frac{a}{ka_0} \right)^{1/N} \right], \quad (4.11)$$

kus

$$\rho_0 = \frac{hM}{4\pi\epsilon a_0^3}. \quad (4.12)$$

Tähistused: a_0 – harmooniline keskmine raadius; M – galaktika mass; ϵ – pooltelgede suhe; k, h – normeerimiskonstandid.

Ühe galaktika komponendi dispersioon ρ_{int}^2 leitakse järgmiselt:

$$\sigma_{int}^2(X, Y) = \frac{1}{Q(X, Y)} \int_X^\infty \Psi \frac{R}{\cos \Theta \sqrt{R^2 - X^2}} dR, \quad (4.13)$$

kus

$$\Psi \equiv q(R, z_1) \sigma_l^2(R, z_1) + q(R, z_2) \sigma_l^2(R, z_2), \quad (4.14)$$

$$z_{1,2} = \left(\frac{Y}{\sin \Theta} \pm \sqrt{R^2 - X^2} \right) \tan \Theta. \quad (4.15)$$

Seni defineerimata suurused: q – galaktika ruumheledusjaotus; σ_l^2 – vaatesihi suunaline dispersioon. Ruumheledus on otseselt seotud ruumtihedusega ning ta avaldub kujul

$$q(R, z) = \frac{\rho[a(R, z)]}{f}. \quad (4.16)$$

Vaatesihi suunaline dispersioon avaldatuna silindriliste koordinaattelgede suunaliste dispersioonide σ_R^2 , σ_z^2 ja σ_θ^2 kaudu avaldub järgmiselt:

$$\sigma_l^2 = \sigma_*^2 \cos^2 \Theta + \sigma_z^2 \sin^2 \Theta, \quad (4.17)$$

kus

$$\sigma_*^2 = \sigma_\theta^2 \frac{X^2}{R^2} + \sigma_R^2 \left(1 - \frac{X^2}{R^2} \right). \quad (4.18)$$

Koordinaattelgedesuunalised dispersioonid σ_R^2 ja σ_z^2 on leitavad võrranditest (3.8) ja (3.9). Matemaatilisest analüüsist tuleneb, et nende võrrandite lahend avaldub kujul:

$$\rho \sigma_R^2(R, z) = (1 - \beta^2) \int_R^\infty K_R(r, z) \left[\exp \int_R^r p(r^*, z) dr^* \right] dr, \quad (4.19)$$

$$\rho \sigma_z^2(R, z) = \int_z^\infty K_z(R, z') \left[\exp \int_z^{z'} g(R, z^*) dz^* \right] dz', \quad (4.20)$$

kus

$$p = \frac{1 - k_\theta}{R} + \frac{\partial \kappa}{\partial z}, \quad (4.21)$$

$$g = \frac{\xi}{R} + \frac{\partial \xi}{\partial R} \quad (4.22)$$

ja

$$K_R \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial R} \quad K_z \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (4.23)$$

Võrrandites (4.19) ja (4.20) on kasutatud tähistusi κ ja ξ , mis on defineeritud järgmiselt:

$$\kappa \equiv \gamma(1 - k_z) \quad \xi \equiv \frac{\kappa}{k_z}. \quad (4.24)$$

Suurused k_z ja k_θ määravad kiiruste ellipsoidi kuju ning suurus γ määrab ellipsoidi orientatsiooni. Suurus β väljendab seost pöörlemiskiiruse ja ringkiiruse vahel.

4.3 Programm dispersioonide arvutamiseks

Dispersioonide arvutamisel hüdrodünaamilistest mudelitest tuleb leida kolmekordne integraal. Analüütiliselt on sellise integraali leidmine võimatu ja seetõttu kasutame numbrilist integreerimist. Numbrilisel integreerimisel on kasutatud Gaussi meetodit. Enne programmi kirjutamist sai uuritud integraalialuseid funktsioone ja avaldist dispersioonide leidmiseks. Mitmes kohas tuleb integreerida lõpmatusse. Peamisteks integraalialusteks funktsioonideks on eksponentsiaalselt kahanevad funktsioonid. Programmi optimaalsel kirjutamisel tuli seda kõike arvestada ja leida viis, kuidas saada minimaalse ajaga suurim täpsus.

Numbrilisel integreerimisel sai modifitseeritud Gaussi numbrilist integreerimist nii, et ta arvestaks funktsiooni eksponentsiaalset kahanemist ning teda oleks võimalik kasutada lõpmatusse integreerimisel.

Gaussi meetodil numbriline integreerimine on järgmine (vaata bakalaureusetöö)

$$J = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(z)dz \approx \sum_{i=1}^n w_i g(z_i), \quad (4.25)$$

kus z on leitav seosest

$$z = \frac{2x - b - a}{b - a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{(b-a)z + b + a}{2}. \quad (4.26)$$

Summas n on Gaussi integreerimise punktide arv ning x_i ja w_i on vastavalt Gaussi punktide koordinaadid ning kaalud.

Eksponentsiaalselt kahanevate funktsioonide integreerimisel kasutan Gaussi valemit logaritmilises teljestikus. Selleks tuleb teha muutujavahetus $x = e^t$:

$$J = \int_a^b f(x)dx = \int_{\ln a}^{\ln b} f(e^t)d(e^t) = \int_{\ln a}^{\ln b} e^t f(e^t)dt \quad (4.27)$$

Gaussi valemi (4.27) kasutamiseks tuleb teha tagasiasendused:

$$a \equiv \ln a, \quad b \equiv \ln b, \quad t \equiv x, \quad e^t f(e^t) \equiv f(x). \quad (4.28)$$

Gaussi punktide arvu valikust sõltub integraali täpsus. Igal üksikul integreerimisel läheb rahuldava tulemuse saamiseks vaja erinev arv Gaussi punkte. Programmis on kasutatud ainult kümme Gaussi punkti ning piisava täpsuse saavutamiseks kasutatakse osadeks jagamise algoritmi: algul leitakse integraal otsitavates rajades $a..b$, edasi leitakse integraal kahes lõigus $a..c$ ja $c..b$, kui tulemus erineb eelmisest, siis leitakse integraal lõikudes $a..d$, $d..c$, $c..e$ ja $e..b$ ja kontrollitakse jälle tulemust eelmises punktis saadud tulemusega, väiksemateks piirideks jagamist jätkatakse seni, kuni piisav täpsus on saavutatud. Osadeks jagamisel on võimalik valida lisaks lineaarsele skaalale ka logaritmilist skaalat, mis tagab parema tulemuse eksponentsiaalselt kahanevate funktsioonide korral.

Integreerimisel lõpmatusse toimub numbrilisel integreerimisel selliselt, et teatud maalt lõigatakse funktsioon ära nii, et järgi jääb vaid integreerimine teatud rajani. Äralõike piiri valimine toimub igal integreerimisel eraldi. Selle piiri valimine toimub vastavalt algoritmile: leitakse integraal rajades $a..10a$, edasi leitakse integraal rajades $10a..100a$, kui selle integraali väärtus ei ole piisavalt väike võrreldes esimese tulemusega, siis leitakse integraal rajades $100a..1000a$ ja võrreldakse eelpool saadud integraalide summaga, algoritmi jätkatakse seni, kuni piisav täpsus on saavutatud. Igal piirkonnal kasutatakse jällegi eelpool kirjeldatud osadeks jagamise algoritmi.

Programm sisaldab kokku üle 1300 rea. Programm on kättesaadav võrguaadressilt: www.aai.ee/~elmo/dis.zip

Peatükk 5

Mudeli rakendamine galaktikale NGC 4594

5.1 Galaktika NGC 4594 vaatlusandmed

Me rakendame oma mudelit Sa galaktikale M 104 (NGC 4594, Sombrero galaktika (joonis 5.3)). See galaktika on meie mudeli testimiseks soodne, kuna selle jaoks on olemas detailsed vaatlusandmed galaktika tihedusjaotuse konstrueerimiseks. Antud mudeli rakendamisel on siiski peamine asjaolu, et galaktika M 104 jaoks on mõõdetud dispersioone ka galaktika tasandist väljaspool asuvatel sirgetel.

Galaktika M 104 kauguseks on hinnatud 9.1 Mpc ning vastav skaala on $1'' = 0.044$ kpc (Ford et al. 1996, Larsen et al. 2001, Tonry et al. 2001). Uuritava galaktika kaldenurk on 84° . Galaktika pindheledusprofiilide alusel eristame galaktikas nelja näivat komponenti: tuum, möhn, halo ja ketas. Lisaks neile komponentidele ümbritseb galaktikat massiivne tumedast aineest kroon.

Praeguseks on pinnafotomeetria galaktikast NGC 4594 olemas UBVRi värvides. Tabelis 5.1 on toodud viited erinevatele allikatele, nõrgimad isofoodid (mag arcsec^{-2}) ning värvisüsteemid.

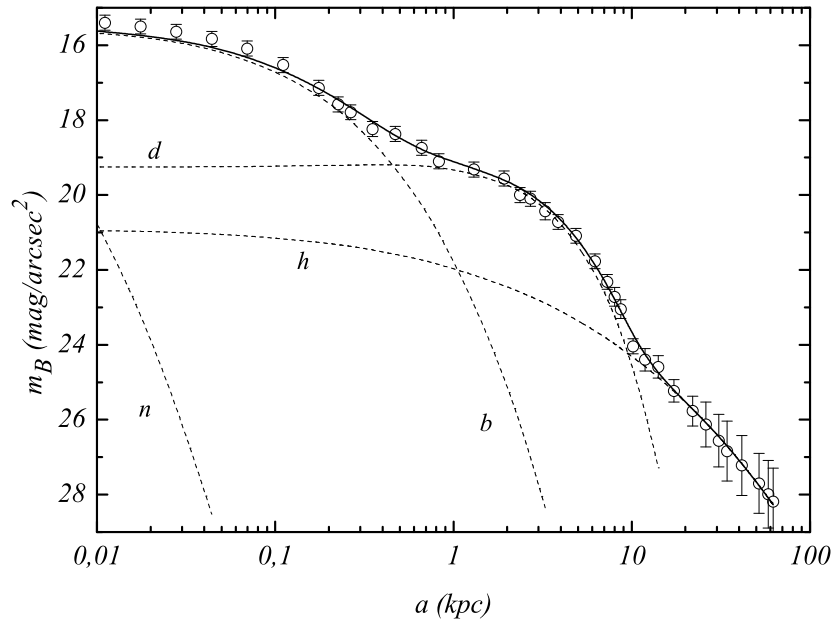
Konstrueeritud pindheledus profiilid UBVRi värvides piki suurt ja/või

Tabel 5.1: Fotomeetrilised andmed

Viited	Nõrgim isofoot	Värvus süsteem
van Houten (1961)	24.6	VB
Spinrad et al. (1978)		R
Burkhead (1979)	28.2	B
Boroson (1981)	24.7	B
Hamabe, Okamura (1982)	22.7	B
Beck et al. (1984)	27.3	B
Jarvis, Freeman (1985)	25.0	V
Kent (1988)	23.6	R
Burkhead (1986)	23.1	BUVRI
Kormendy (1988)	19.2	V
Crane et al. (1993)	17.4	BU
Emsellem et al. (1996)	17.8	V

väikest telge on tuletatud erinevate autorite tulemuste keskmistamisest. Isofoodid on lähendatud erinevate eksentrilisustega ellipsiteks. Kõik sedasi saadud pindheledus profiilid on esialgseteks andmeteks meie mudeli detailsel koostamisel. Detailselt on esitatud pindheledusprofiilid B värvis (joonis 5.1). Joonisel on toodud vaatluslikud andmed ja pindheledus profiilid allsüsteemide kaupa.

Galaktika modelleerimisel kasutame gaasi pöörlemiskõverat. Ioniseeritud gaasi radiaalne pöörlemiskõvera on koostanud Schweizer (1978) and Rubin et al. (1985). HI kiirused $11, 4''$ (0.5 kpc) lahutusega on saadud Bajaja et al. (1984). Galaktika keskosas pöörlemiskiiruste konstrueerimisel võtsime aluseks ioniseeritud gaasi vaatlused (tänu paremale lahutusvõimele). Pöörlemiskõvera välisosas on erinevate vaatluste andmeid keskmistatud. Selliselt õnnestus koostada pöörlemiskõver, mis katab raadiuste vahemikku 0.19 kpc



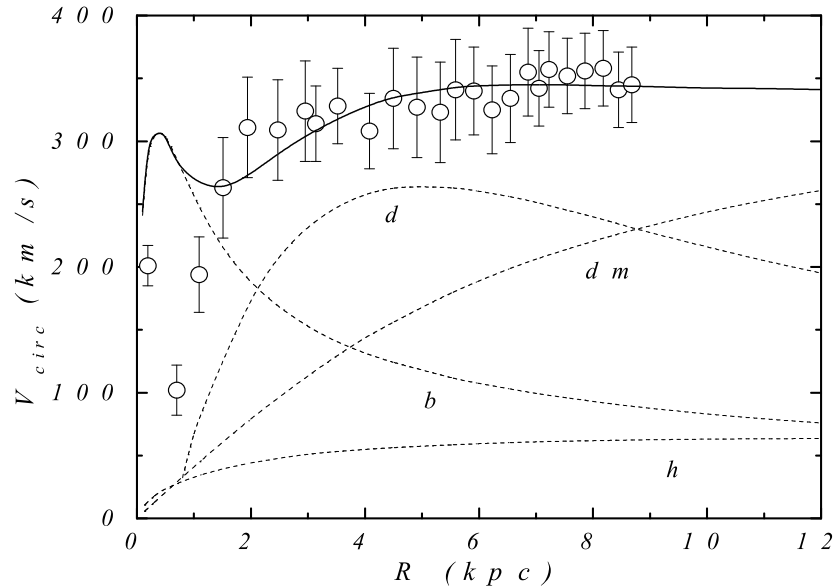
Joonis 5.1: Galaktika M 104 keskmine pindheledusprofiil B-värvis. Ringid – vaatlused, pidev joon – mudel, punktiirjoon – mudel komponentidena (n–tuum, b–mõhn, h–halo, d–ketas).

kuni 8.7 kpc. Toodud pöörlemiskõver on toodud joonisel 5.2.

Vaatesuunaline kiiruste dispersioon galaktika tasandis väga heades vaatlustingimustes ($0.2''$ – $0.4''$) galaktika keskosa jaoks on saanud HST-ga ja CFHT-ga (Kormendy et al. 1996). Keskmistel kaugustel on dispersioone mõõtnud Kormendy & Illingworth (1982), Carter & Jenkins (1993), Hes & Peletier (1993), van der Marel et al. (1994) ja Emsellem et al. (1996). Me oleme keskmistanud dispersioone erinevates kaugus intervallides, sõltuvalt vaatlustingimustest ning kiiruste lahtusest.

Väljaspool galaktika tasandit on kiiruste dispersioone mõõtnud Kormendy & Illingworth (1982). Paralleelselt galaktika tasandiga on nad dispersioone mõõtnud kaugustel $30''$, $40''$, $50''$ ning risti galaktika tasandiga kaugusel $50''$ (vaata joonis 5.3).

Kerasparvede vaatlused kirjeldavad galaktikas halo allüsteemi. Keras-



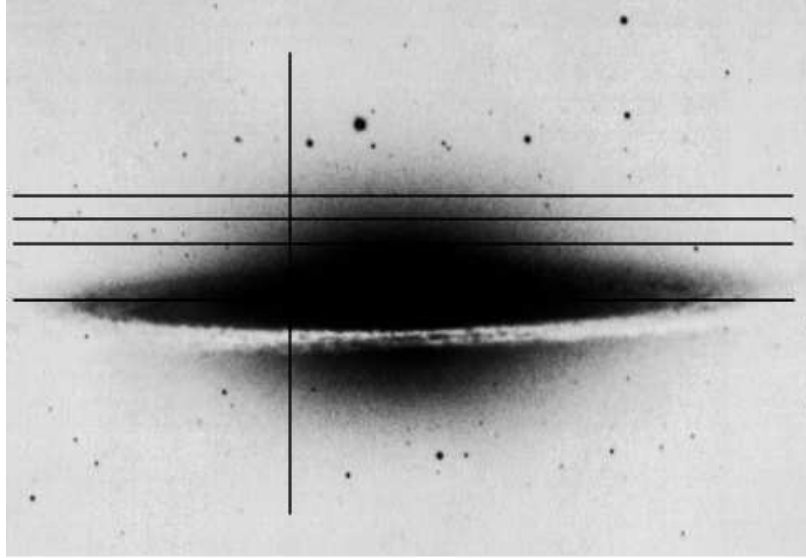
Joonis 5.2: Galaktika M 104 gaasi pöörlemiskõver. Ringid – vaatlused, pidev joon – mudel, punktiirjoon – mudel komponentidena (b–mõhn, h–halo, d–ketas, dm–tume aine).

parvede kiiruste dispersiooni on mõõtnud Bridges et al. (1997) ning ta sai väärtuseks 255 km/s.

5.2 Galaktika NGC 4594 tihedusjaotus

Galaktika NGC 4594 tihedusjaotuse konstrueerimisel eraldame galaktikast neli näivat komponenti – tuum, mõhn, ketas ja metallivaene halo. Dünaamilise mudeli koostamisel lisame mudelisse veel massiivse musta aine krooni. Hilisemas hüdrodünaamilises mudelis lisame eelnevatel komponentidel veel galaktika tsentrisse musta augu.

Konstrueerides pindheledusjaotust allsüsteemides, lähendame nad valemiga (3.28). Saadud heledusjaotusele seatakse vastavusse tihedusjaotus, eeldades igas allsüsteemis konstantset mass-heledus suhet. Saadud dünaamilist mudelit võrreldakse vaadeldud pöörlemiskõveraga ning võimalusel ka kiirus-



Joonis 5.3: Galaktika fotomeetriline kujutis. Jooned märgivad sirgeid, kus on mõõdetud kiiruste dispersioone.

te dispersioonidega. Selle võrdlusega täpsustatakse fotomeetrisest mudelis olevaid suurusid.

Antud töös on kõigepealt koostatud igale allsüsteemile vastav fotomeetriseline mudel. Vaadeldav galaktika pindheledus leitakse järgnevalt

$$Q = \sum_i Q_i = 2 \frac{\epsilon_i}{f_i E_i} \int_A^\infty \frac{\rho_i(a) a da}{(a^2 - A^2)^{1/2}}. \quad (5.1)$$

Fotomeetrisest mudelist määratakse kõik tihedusjaotuse parameetrid peale allsüsteemi massi.

Galaktika komponentide massid määrame pöörlemisseadusest

$$v_i^2(R) = 4\pi\epsilon_i G \int_0^R \frac{\rho_i(a) a^2 da}{(R^2 - e_i^2 a^2)^{1/2}}, \quad (5.2)$$

$$V^2(R) = \sum_{i=1}^5 v_i^2(R), \quad (5.3)$$

kus G on gravitatsioonipotentsiaal, $e = \sqrt{1 - \epsilon^2}$ on eksentrilisus, ϵ on el-

lipsi telgede suhe ning R on ekvatoriaalne kaugus. $\rho_i(a)$ kirjeldab eelnevalt kirjeldatud ellipsoidaalset tihedusjaotust, kus $a = \sqrt{R^2 + z^2/\epsilon^2}$.

Saadud tihedusjaotuse parameetrid on koondatud tabelisse 5.2. Tabelis on lisaks toodud veel musta augu parameetrid, mis on saadud hilisemast dispersioonide mudelist. Tabelis toodud suurustest massid on mõõdetud ühikutes $10^{10}M_\odot$, raadiused ühikutes kpc ning mass-heledussuhe on ühikutes M_\odot/L_\odot .

Tabel 5.2: Galaktika NGC 4594 tihedusjaotus

Popul.	M	a_0	ϵ	N	k	h	β	M/L_B
Tuum	0.001	0.0015	0.99	3.0	0.00297	314.3	0.2	5.0
Mõhn	2.0	0.248	0.65	2.09	0.03926	40.83	0.3	5.64
Halo	4.7	13.0	0.81	4.0	1.263-4	3111.0	0.3	1.47
Ketas	10.0	3.28	0.25	0.93	0.5717	3.474	0.85	5.52
MustAuk	0.1	0.0001	0.99	0.93	0.5717	3.474	0.1	100
Kroon	400	40.0			0.1274	19.35		

Täpsema kirjelduse saamiseks, kuidas vaatlusandmetest tihedusjaotus konstrueeritakse, vaata Einasto & Haud (1989), Tenjes et al. (1994, 1998).

5.3 Testarvutused galaktikal NGC4594

Selles osas on toodud testarvutuste tulemused, kus on analüüsitud teoreetilise mudeli puudujääkide mõju dispersioonidele. Siin osas oleme püüdnud tuua välja olulisemad võrdlused erinevate tulemuste vahel. Suur tähelepanu on pööratud sellele, et püüdsime leida, kui palju mõjutavad erinevad tegurid lõpptulemusi. Alljärgnevates osades ongi analüüsitud ja toodud tulemused erinevate probleemide korral.

5.3.1 Dispersioonid erineva parameetri z_0 korral

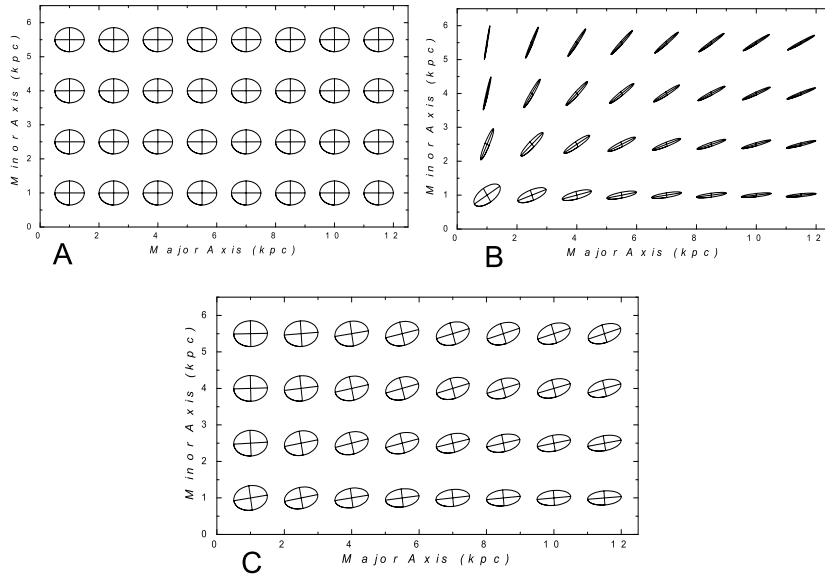
Teoreetilises osas sai mainitud, et z_0 määrab otseselt ära selle, kuidas kiiruste ellipsoid ruumis paikneb. Füüsikalistest kaalutlustest on teada, et galaktika tasandis on kiiruste ellipsoid suunatud piki galaktika raadiust. Väljaspool galaktika tasandit on selleks mitmeid võimalusi. Kiiruste ellipsoidi orientatsiooni on uurinud ka Arnold (1995).

z_0 -i matemaatiline sisu on selles, et ta on elliptiliste koordinaatide ellipsi ja hüperbooli fookus. Oma testarvutustes kasutasime z_0 -i äärmuslikke väärtusi: $z_0 = 0$ ja $z_0 = \infty$. Esimesel juhul elliptilised koordinaadid taanduvad sfäärilisteks koordinaatideks ning teisel juhul on tegu tavaliste ristkoordinaatidega. Kiiruste ellipsoid on vastavalt orienteeritud sfääriliste koordinaatide raadiuse sihis või siis teisel juhul paralleelselt galaktika tasandiga. Kiiruste ellipsoidi orientatsiooni erinevate z_0 väärtuste korral iseloomustab joonis 5.4. Sellel joonisel on toodud ka kiiruste ellipsoidi orientatsioon, mille korral arvutuslikud ja vaatluslikud tulemused ühtivad kõige paremini. Jooniselt 5.4 selgub, et kiiruste ellipsoidi teoreetiline kuju sõltub parameetrist z_0 . Joonise 5.4 põhjal võib järeldada, et kumbki äärmuslik variant z_0 -i jaoks ei ole reaalne ning tegelik z_0 -i väärtus jääb kuskile nende kahe äärmuse vahepeale: tulemus, mille korral dispersioonid on kooskõlas vaatlusandmetega.

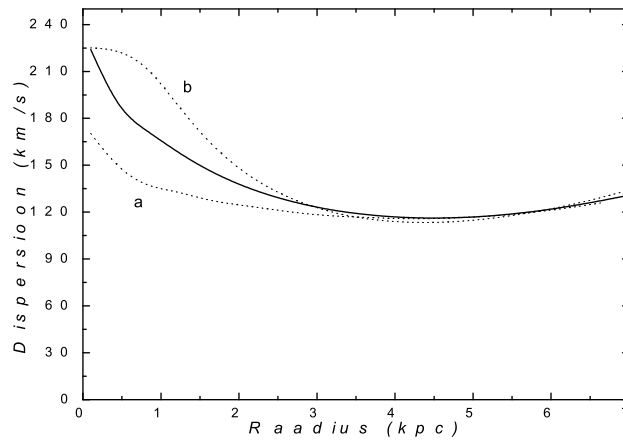
Joonisel 5.5 on toodud tulemused, kus on dispersioonide väärtused erinevate z_0 väärtuste korral. Jooniselt on näha, et leides sobiva z_0 -i on võimalik dispersioonide väärtusi galaktika keskosas küllaltki palju muuta ning sedasi on võimalik saavutada ka hea kooskõla vaatlusandmetega. Probleemiks, miks meie poolt leitud parim tulemus z_0 -le ei vii vaatluslikke tulemusi kokku arvutuslikega, on see, et z_0 -i määramisel tuleb talle omistada mingi matemaatiline funktsioon. Kuna pole mingeid andmeid, milline see funktsioon peaks olema, siis oli ka väga raske sobiva funktsiooni leidmine.

Kiiruste ellipsoidi orientatsiooni määrab matemaatiline avaldis z_0 jaoks ning ellipsoidi kuju meridionaaltasandis (Rz-tasandis) määrab k_z . Joonisel 5.4 on toodud kiiruste ellipsoidi kuju ja orientatsioon erineva z_0 korral.

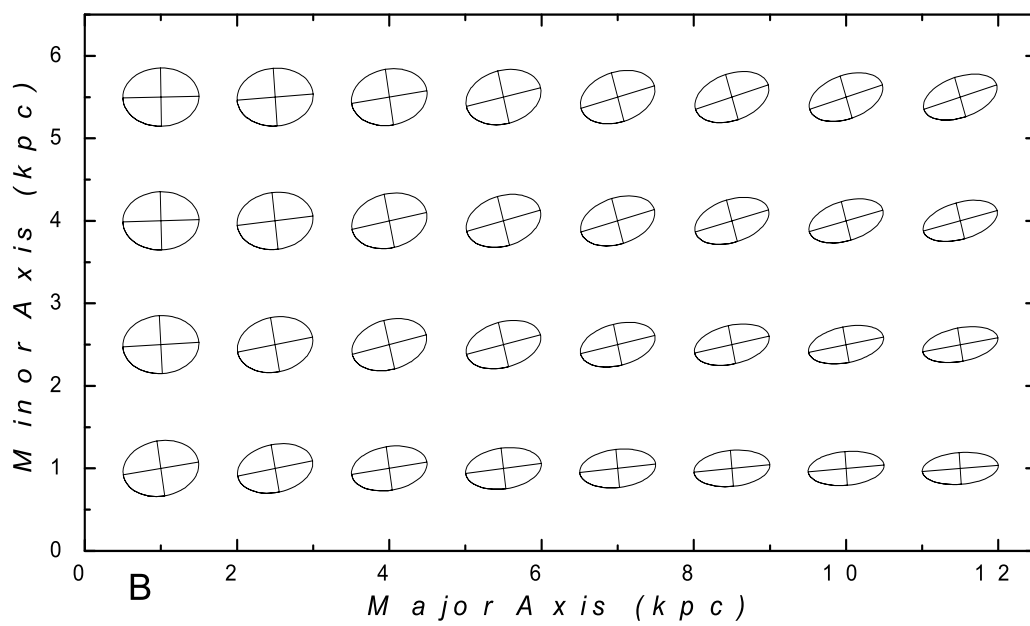
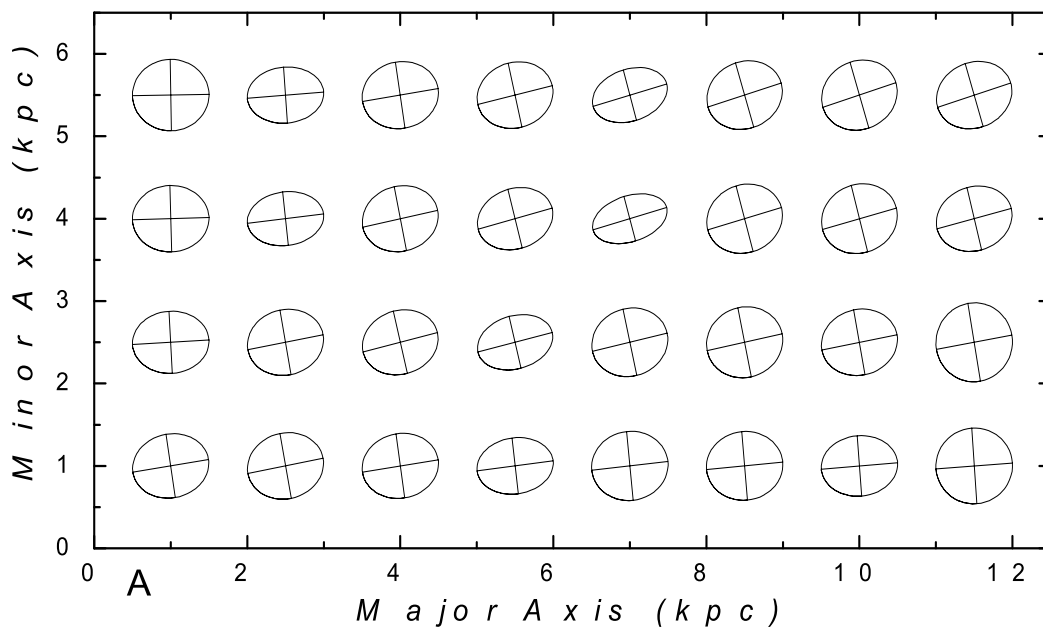
Jeansi võrranditest leitakse arvutuslikul teel dispersioonid σ_R^2 ja σ_z^2 . Neist



Joonis 5.4: Kiiruste ellipsoidi orientatsioon erineva parameetri z_0 korral. A) $z_0 = 10000$; B) $z_0 = 1.0$; C) $z_0 = f(R, z)$.



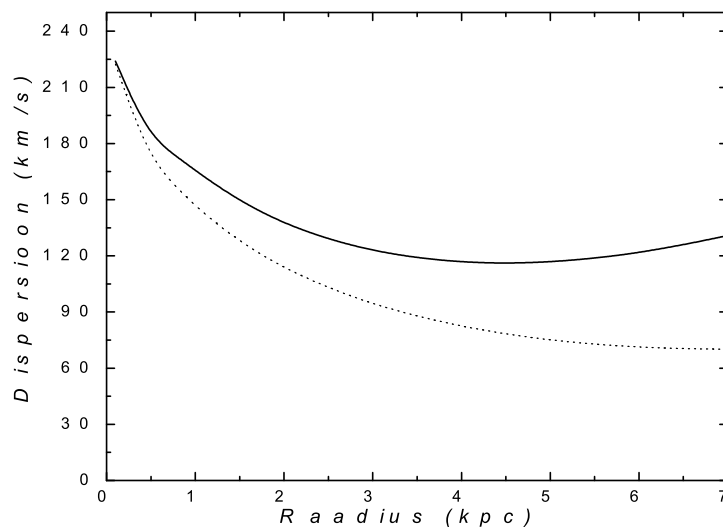
Joonis 5.5: Dispersioonid erineva parameetri z_0 korral. Pideva joonega on toodud meie parim lähendus, mis sobib vaatlusandmetega, punktiirjoonega on märgitud z_0 -i äärmuslikud juhud: a) $z_0 = 10000$; b) $z_0 = 1.0$.



Joonis 5.6: Kiiruste ellipsoidi kuju arvutuslikul (A) ja teoreetilisel (B) juhul.

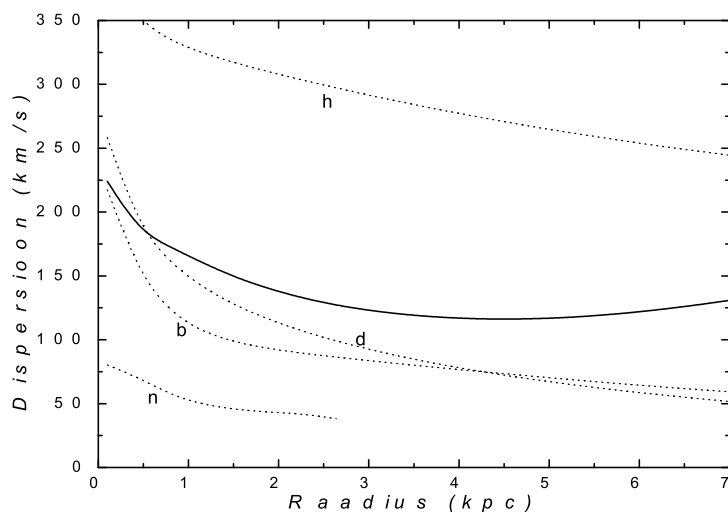
suurustest saab leida ka otse suhte k_z . Joonisel 5.6 on toodud kiiruste ellipsoidi kuju teoreetisel ja arvutuslikul juhul. Jooniselt on näha, et tulemused ei lange ideaalselt kokku. Arvutusliku tulemuste kõikumine on osaliselt selgitatav sellega, et me vaatleme galaktikat mitmekomponendilisena, mis toob ka sisse ellipsoidi kuju järsud muutused erinevatel raadiustel. Seda vastuolu annaks kõrvaldada, kui me lahendaksime Jeans'i võrrandeid kui süsteemi ning leiaksime sobiva z_0 -i, mille korral teoreetiline ja arvutuslik k_z langeksid kokku. Paraku ei ole Jeans'i võrrandite süsteemina lahendamine nii lihtne, kuna see nõuab väga suurt arvutusjõudlust.

5.3.2 Dispersioonid erinevate tihedusjaotuste korral



Joonis 5.7: Dispersioonid krooniga (pidev joon) ja kroonita (punktirjoon) mudelis.

Oma mudeli testimisel tegime mitmeid arvutusi, kus vaatlesime dispersioonide käitumist erinevate tihedusjaotuste korral. Lisaks erinevatele tihedusjaotustele vaatlesime ka, kuidas dispersioonid muutuvad, kui varieerida antud mudelis kasutatud ühte tihedusjaotuse paremeetrit. Kõigi nende testide tulemused vastasid füüsikalistele ootustele ning ei olnud vastuolus teadmis-



Joonis 5.8: Dispersioonid populatsioonides. Pidev joon – summaarne dispersioon. Punktiirjooned – mudel komponentidena (n–tuum, b–mõhn, h–halo, d–ketas).

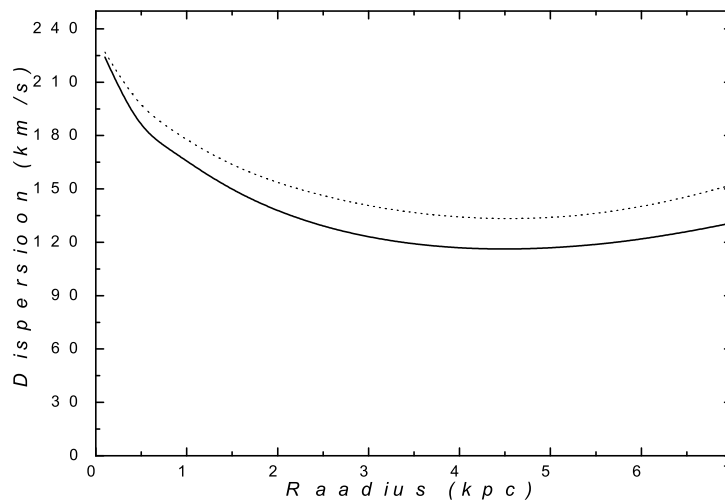
tega dispersioonide käitumise kohta. Täpsem analüüs sai tehtud bakalaureusetöös ning siinkohal ei hakka neid tulemusi uuesti välja tooma.

Lisaks bakalaureusetöös tehtud arvutustele, olen teinud lisaks veel mõned arvutused, uurimaks dispersioonide käitumist galaktikal NGC 4594. Me uurisime, kuidas galaktika kroon mõjutab dispersioone. Selle uurimiseks arvutasime dispersioonid mudelist, kust galaktika kroon oli kõrvaldatud. Tulemused on toodu joonisel 5.7. Jooniselt on näha, et tumeda aine mõju galaktika tsentris on küllaltki minimaalne; galaktika välisosades on see mõju juba oluline ning seal ei saa krooni arvestamata jätta.

Lisaks summaarsele dispersioonidele, pakkus huvi ka see, kuidas summaarne dispersioon formeerub. Millised galaktika populatsioonid on olulised summaarse dispersiooni kujunemisel. Joonisel 5.8 on toodud välja summaarne dispersioon ja iga üksiku populatsiooni dispersioon. Jooniselt on näha, et summaarse dispersiooni kujunemine toimub heledusjaotuse järgi, mis on ka oodatav tulemus. Samuti on jooniselt näha, et üksikute komponentide dispersioon võib erineda summaarsest dispersioonist väga palju, kuid seda

peamiselt nendes osades, kus selle komponendi heledus on vähetähtis. Jooniselt lähtub, et halo dispersioon on kõige suurem ning halo suur dispersioon põhjustab ka summaarse dispersiooni tõusu raadiuse suurenedes. Galaktika välisosas oli mõõdetud vaatlustest halo dispersiooniks 255 km/s. Jooniselt on näha, et see tulemus langeb kokku meie mudelist saadud tulemusega.

5.3.3 Dispersioonid erineva σ_θ korral



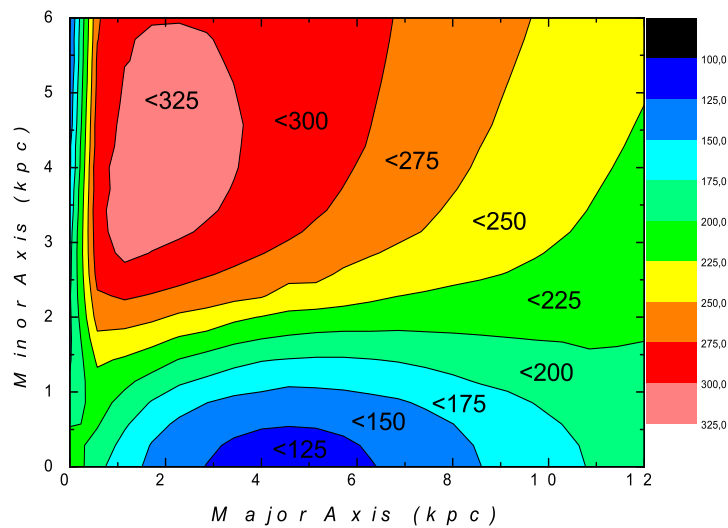
Joonis 5.9: Summaarne dispersioon, kus σ_θ on leitud σ_R (pidev joon) ja σ_z (punktirjoon) järgi.

Kui me viisime arvatud dispersioonid vastavusse vaadeldud tulemustega, siis tuli projekteerida kolm dispersiooni σ_R^2 , σ_z^2 ja σ_θ^2 vaatesihile. Jeans'i võrranditest saame arvutada vaid kaks dispersiooni σ_R^2 ja σ_z^2 . Kolmas dispersioon σ_θ^2 tuleb leida eelneva kahe dispersiooni kaudu. On kaks võimalust σ_θ^2 määramiseks: σ_R^2 kaudu või σ_z^2 kaudu. Esimesel juhul saab seda leida otseselt seosest k_θ . Sellist σ_θ^2 määramist ongi kasutatud programmis, mis dispersioone arvutab. Teine võimalus oleks σ_θ^2 leida σ_z^2 kaudu.

Joonisel 5.9 on toodud dispersioonid, kasutades erinevat σ_θ^2 määramist. Nagu jooniselt võib näha, ei ole erinevus kuigi suur. Seega võib oletada,

et mõlemad valemid on adekvaatsed ning kirjeldavad ühtemoodi galaktika dünaamikat.

5.4 Galaktika NGC 4594 dispersioonid

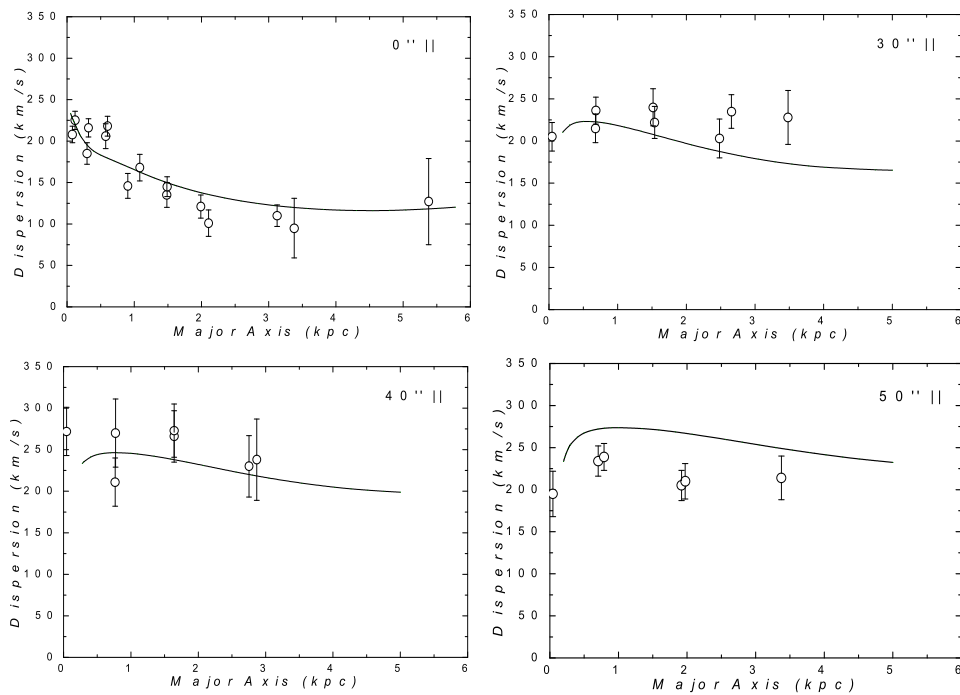


Joonis 5.10: Kiiruste dispersiooni profil Rz -tasandis.

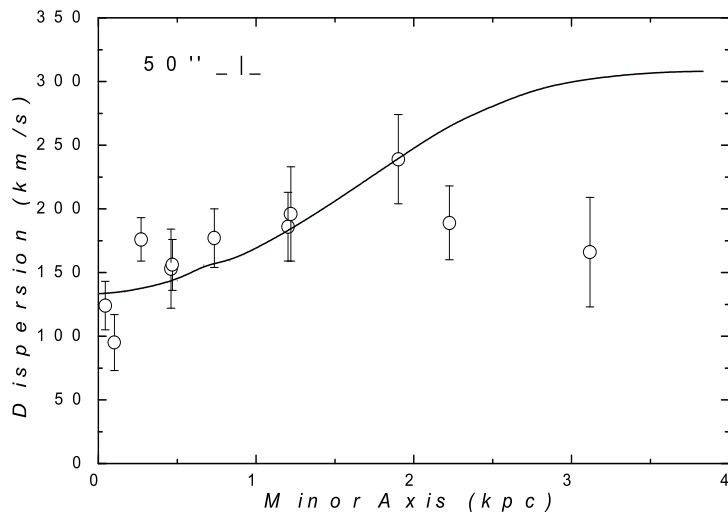
Galaktika NGC 4594 dispersioonid erinevatel sirgetel galaktikas on mõõtnud Kormendy & Illingworth (1982). Nad on mõõtnud dispersioone galaktika tasandis ja tasandiga paralleelsetel lõikudel, mis asetsevad galaktika tasandist vastavalt kaugustel $30''$, $40''$, $50''$. Galaktika tasandiga ristuv tasandis on mõõdetud dispersioonid sirgel, mis on galaktika teljest $50''$ kaugusel. Joonisel 5.3 on toodud illustreerivalt sirged, kus dispersioonid on mõõdetud.

Joonistel 5.11 ja 5.12 on toodud dispersioonid meie parimast kooskõllalisest mudelist ning vaatlusandmed. Joonisel 5.11 on dispersioonid sirgetel, mis on paralleelsed galaktika tasandiga, joonisel 5.12 on dispersioonid sirgel, mis on risti galaktika tasandiga.

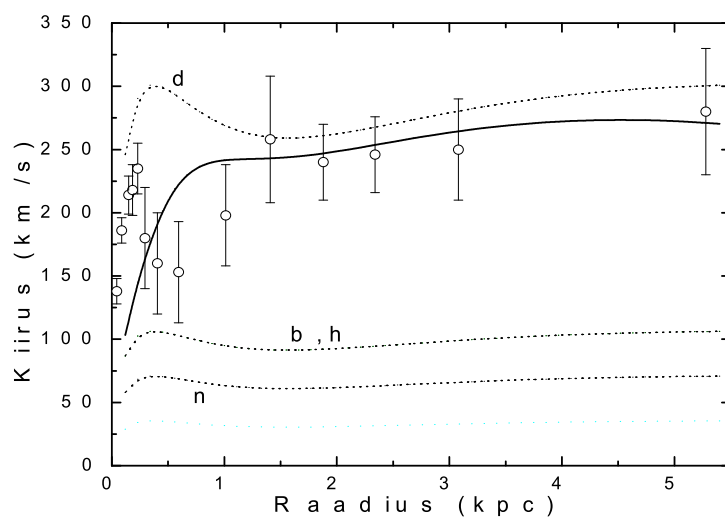
Joonisel 5.10 on toodud arvutatud dispersioonide profiil kogu galaktika meridionaaltasandis. Jooniselt on näha, et tasandist eemaldudes dispersioo-



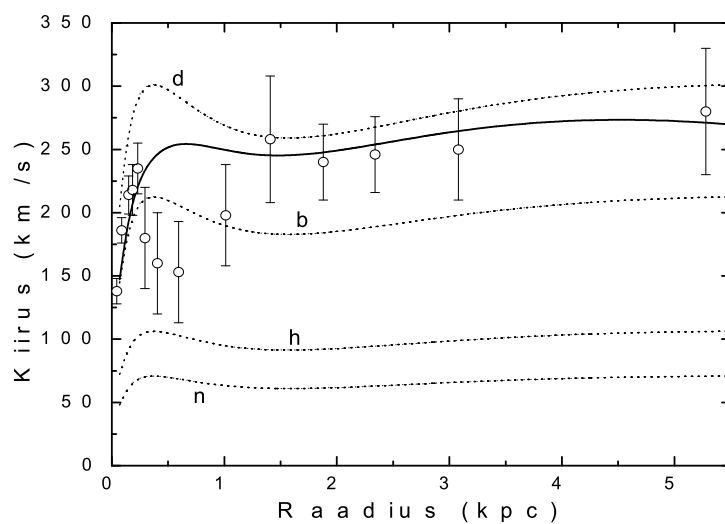
Joonis 5.11: Teoreetilised (pidevjoon) ja vaatluslikud (punktid) dispersioonid galaktika tasandis ja kolmel sirgel paralleelselt galaktika tasandiga.



Joonis 5.12: Teoreetilised (pidevjoon) ja vaatluslikud (punktid) dispersioonid sirgel, mis on risti galaktika tasandiga.



Joonis 5.13: Täheleine pöörlemiskiirus galaktikas M 104. Punktid – vaatlused, pidevjoon – mudel, punktiirjoon – mudel komponentidena (n–tuum, b–mõhn, h–halo, d–ketas).



Joonis 5.14: Täheleine pöörlemiskiirus galaktikas M 104. Mõhna $\beta = 0.6$. Punktid – vaatlused, pidevjoon – mudel, punktiirjoon – mudel komponentidena (n–tuum, b–mõhn, h–halo, d–ketas).

nid üldjoontes suurenevad. See on tingitud tumeda aine krooni suurest mõjust gravitatsioonipotentsiaalile väljaspool galaktika tasandit.

Lisaks dispersioonidele arvutasin igale komponendile tema vastava ringkiiruse üldises potentsiaaliväljas. Arvestades iga allsüsteemi parameetri β -ga, sain igale allsüsteemile vastava pöörlemiskiiruse. Summeerides erinevate allsüsteemide pöörlemiskiirused arvestades heledusjaotust, saan galaktika teoreetilise pöörlemiskiiruse. Joonisel 5.13 on toodud võrdlused vaatlusandmetega. On näha, et mõhna β peaks olema suurem, kuid suurema β korral ei olnud võimalik saavutada head kooskõla dispersioonide vahel. Antud juhul on β määratud rohkem dispersioonide põhjal ning sellest ka väiksem β väärtus. Joonisel 5.14 on toodud arvutuslikud pöörlemiskiirused mõhna $\beta = 0.6$ korral.

Kokkuvõte

Esimesed galaktikate hüdrodünaamika mudelid koostati juba eelmise sajandi algul, kui Jeans võttis aluseks Boltzmanni võrrandid. 20. sajandi jooksul arenes inimeste kasutuses olev vaatlustehnika pidevalt, mille tulemusena saadi üha täpsemaid andmeid galaktikate kohta. Tänu heale vaatlustehnikale on tänapäeval võimalik mõõta kiiruste dispersioone galaktikas, mis on olulised hüdrodünaamiliste mudelite kontrollimisel. Antud töös koostasid mudelid selliselt, et teoreetiliselt arvutatud dispersioone saaks võrrelda vaatlusandmetega.

Galaktikate hüdrodünaamiliste mudelite koostamisel lähtusin Jeans'i võrranditest. Ma eeldan, et galaktika on pörkevaba tähtedesüsteem, mis on telg-sümmeetriline. Töö üheks eesmärgiks oli hüdrodünaamiliste võrrandite sulgemine, eeldades kolmanda liikumisintegraali olemasolu galaktikates. Eeldasin, et kolmas integraal on Kuzmini integraal, millest tulenevalt sain vastavad seosed kiiruste ellipsoidi kuju ja orientatsiooni määramiseks. Ma eeldan, et kiiruste ellipsoid on kolmeteljeline ning asub galaktika tasandi suhtes kindla nurga all. Kuzmini teoriast tulenes, et kiiruste ellipsoid on orienteeritud elliptiliste koordinaattelgede sihis ning kiiruste ellipsoidi kuju iseloomustab järgnev seos: $1/\sigma_2^2 = 1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_3^2$, kus σ_i tähistab i -nda telje suunalist dispersiooni. Nende teadmiste baasil õnnestus mul Jeans'i võrrandid sulgeda. Konstrueeritud mudelis sisaldub teadaolevatele suurustele veel üks tundmatu suurus – kiiruste ellipsoidi kalle, mida iseloomustab suurus z_0 (ellipsoidi ja hüperbooli fookus konfokaalsetes elliptilistes koordinaatides). Meil tuleb leida sobiv lahendus suurusele z_0 selliselt, et tulemused oleksid kooskõlas vaatlusandmetega.

Veel üheks eesmärgiks antud töö raames oli kirjutada koostatud mudelitele vastav programm ning teostada mõningad testarvutused. Hüdrodünaamilised mudelid eeldavad kolmekordse integraali leidmist, mis nõuab küllaltki suurt ajakulu. Programmi kirjutamisel Fortranis on püütud leida kompromiss

tööaja ja arvutamistäpsuse osas.

Kontrollimaks mudeli tõepärasust ning arvutuslikke vigu, mis võisid tekkida, tegime mitmeid testarvutusi: arvutasime dispersioone mitme erineva tihedusjaotusega, varieerisime nurka vaatesihi ja galaktika vahel, varieerisime mitmeid tihedusjaotuse parameetreid. Kõik tehtud testid olid kooskõlas meie füüsikaliste ootustega. Konstrueeritud mudel ei töötanud ainult galaktika telje läheduses. Antud töös on teljelähedane piirkond lihtsalt kõrvale jäetud.

Mudelist arvutatud dispersioonid σ_i^2 ei ole otseselt võrreldavad vaatlusandmetega. Võrreldavate tulemuste saamiseks projekteerisime kõik arvutatud dispersioonid vaatesihile ning integreerisime üle vaatesihi, arvestades heleduspanustega.

Me rakendasime oma mudelit Sa galaktikale M 104 (NGC 4594, Sombrero galaktika). See galaktika on igati sobilik meie mudeli testimiseks: galaktika kohta on olemas detailne tihedusjaotus ja kiiruste kõver. Mis kõige olulisem, selles galaktikas on mõõdetud dispersioone erinevatel sirgetel, mis on paralleelselt ja risti galaktika tasandiga.

Mudelist arvutatud dispersioone sai võrreldud olemasolevate vaatlusandmetega. Meie parimas mudelis kiiruste ellipsoid on pigem radiaalsuunaline ning paralleelne galaktika tasandiga: formeerumisnurgad ≤ 30 deg. Väljaspool galaktika tasandit hakkavad dispersioonid vähehaaval suurenema, tulevalt tumeda aine kroonist.

Kokkuvõtvalt saab väita, et koostatud mudel sobib galaktikate dünaamika kirjeldamiseks. Selles mudelis esineb siiski mõned väiksed puudujäägid, kuid nendest hoolimata saab seda mudelit kasutada kiiruste dispersioonide arvutamiseks galaktikas.

Kirjandus

- [1] Arnold R., 1995, MNRAS, 276, 293
- [2] Bajaja E., et al., 1984, A&A, 141, 309
- [3] Beck R., et al., 1984, ESO Messenger, Nr. 36, 29
- [4] Binney J., Mamon G.A., 1982, MNRAS, 200, 361
- [5] Binney J., Tremaine S., 1987, Galactic Dynamics, Princeton Univ. Press, Princeton, NY
- [6] Boroson T., 1981, ApJS, 46, 177
- [7] Bridges T.J., et al., 1997, MNRAS, 284, 376
- [8] Burkhead M.S., 1979, in Photometry, kinematics and dynamics of galaxies; ed. D.S. Evans, Univ Texas, Austin, p. 143
- [9] Burkhead M.S., 1986, AJ, 91, 777
- [10] Carollo C.M., de Zeeuw P.T., van der Marel R.P., 1995, MNRAS, 276, 1131
- [11] Carter D., Jenkins C.R., 1993, MNRAS, 263, 1049
- [12] Crane P., et al., 1993, AJ, 106, 1371
- [13] de Bruijne J.H.J., van der Marel R.P., de Zeeuw P.T., 1996, MNRAS, 282, 909

- [14] de Zeeuw P.T., Evans N.W., Schwarzschild M., 1996, MNRAS, 280, 903
- [15] Einasto J., 1969, Astrofizika, 5, 137
- [16] Einasto J., 1970, Afz, 6, 149
- [17] Einasto J., et al., 1974 Tartu Astr. Obs. Teated, 48, 1
- [18] Einasto J., Haud U., 1989, A&A, 223, 89
- [19] Emsellem E., Bacon R., Monnet G., Poullain P., 1996, A&A, 312, 777
- [20] Ford H.C., Hui X., Ciardullo R., Freeman K.C., 1996, ApJ, 458, 455
- [21] Gerhard O.E., 1991, MNRAS, 250, 812
- [22] Hamabe M., Okamura S., 1982, Ann Tokyo Astron Obs, Sec Ser, 18, 191
- [23] Hes R., Peletier R.F., 1993, A&A, 268, 539
- [24] Jarvis B.J., Freeman K.C., 1985, ApJ, 295, 324
- [25] Jeans J.H., 1919, Phil. Trans. Roy. Soc. London A, 218, 157
- [26] Jeans J.H., 1922, MNRAS, 82, 122
- [27] Kent S.M., 1988, AJ, 96, 514
- [28] King I.R., 1962, AJ, 67, 471
- [29] Kormendy J., 1988, ApJ, 335, 40
- [30] Kormendy J., Illingworth G., 1982, ApJ, 256, 460
- [31] Kormendy J., et al., 1996, ApJ, 473, L91
- [32] Kuzmin G.G., 1953, Tartu Astr. Obs., 32, 332
- [33] Kuzmin G.G., 1954, Tartu Astr. Obs. Teated, Nr. 1
- [34] Kuzmin G.G., 1961, Tartu Astr. Obs., 33, 351

- [35] Kuzmin G.G., 1962, Bull. Abastumani Astrophys. Obs., 27, 89
- [36] Kuzmin G.G., 1963, Tartu Astr. Obs. Teated, 6, 16
- [37] Landau L.D., Livshits E.M., 1976, Mechanics (Course of Theor Phys), Butterworth-Heinemann, 3rd Ed.
- [38] Larsen S.S., Forbes D.A., Brodie J.P., 2001, MNRAS, 327, 1116
- [39] Lindblad B., 1933, Die Milchstrasse, Die Dynamic der Milchstrasse, Handbuch der Astrophysik, 5/2, Berlin
- [40] Merritt D., 1985, AJ, 90, 1027
- [41] Merritt D., 1986, AJ, 112, 1085
- [42] Oort J.H., 1932, B.A.N., 6, 249
- [43] Rubin V.C., Burstein D., Ford Jr W.K., Thonnard N., 1985, ApJ, 289, 81
- [44] Schweizer F., 1978, ApJ, 220, 98
- [45] Sérsic J. L., 1968, Atlas de Galaxies Australes, Observatorio Astronomico, Cordoba, Argentina
- [46] Spinrad H., Ostriker J.P., Stone R.P.S., Chiu L.-T.G., Bruzual G.A., 1978, ApJ, 225, 56
- [47] Tempel E., 2003, Bakalaureusetöö, Teoreetilise füüsika instituut, Füüsika-keemia teadsuskond, Tartu Ülikool
- [48] Tenjes P., Haud U., Einasto J., 1994, A&A, 286, 753
- [49] Tenjes P., Haud U., Einasto J., 1998, A&A, 335, 449
- [50] Tonry J.L., et al., 2001, ApJ, 546, 681
- [51] Tremaine S. et al., 1994, AJ, 107, 634

- [52] van der Marel R.P., Binney J., Davies R.L., 1990, MNRAS, 245, 582
- [53] van der Marel R.P., et al., 1994, MNRAS, 268, 521
- [54] van Houten C.J., 1961, Bull Astron Inst Neth, 16, 1

Summary

Galaxy NGC 4594 hydrodynamical model.

The first models of the hydrodynamic galaxies were composed at the beginning of the last century when Jeans based them on Boltzmann's equations. The continuous development of the observation technique in the twentieth century resulted in more exact data about galaxies. With the help of good observation technique it is possible today to measure the velocity dispersions in a galaxy that are important to constraint the hydrodynamical models. In this paper I drafted models to make it possible to compare the theoretically calculated dispersions with the observational data.

I based my development of hydrodynamic models of galaxies on Jeans equations. I assume, that galaxies are collisionless stellar systems with axial symmetry. One aim of this paper was the closing of the hydrodynamic equations, assuming that there exists the third integral of motion in the galaxies. I assumed that the third integral is the Kuzmin integral; from which I derived necessary relations to calculate shapes and orientations of velocity ellipsoid. I assume that galactic velocity dispersion ellipsoid is triaxial and in general lies under a certain angle with respect to the galactic plane. It resulted from the Kuzmin theory that the ellipsoid of velocities is oriented in the direction of hyperbolae axis in the elliptic coordinates and the shape of velocities ellipsoid is defined by the following equation: $1/\sigma_2^2 = 1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_3^2$, where σ_i marks the dispersion in the direction of the axis i . On the base of this knowledge I succeeded in closing Jeans equations. The models are stationary, self-consistent, multicomponential and axisymmetric. Our model includes one additional unknown value – velocity ellipsoid orientation. We must find the best solution to z_0 (foci of ellipses and hyperbolae in confocal elliptic coordinates), when fitting model to the measured dispersions. The quantity z_0 determines the orientation of velocity ellipsoid.

One more aim of the paper was to write a program for drafted models and to carry out some testing calculations. The hydrodynamical models it is necessary to find a triple integral, but it takes in account very much time. By writing this program in Fortran i have tried to find a compromise between the time that the calculations take and the precision of the calculations.

In order to avoid calculation errors we at first made several tests: calculated dispersions for several simple density distribution profiles, varied the viewing angle between disk and line of sight, varied density distribution parameters. All test results were in accordance with our physical expectations. The constructed model does not work only near the galactic rotational axis – this case must be solved separately. In the present work this special study was not done.

Calculated on the basis of hydrodynamic models the dispersions σ_R^2 , σ_z^2 and σ_θ^2 can not be compared directly with measurements. To compare theoretical dispersions whit observed data, we project the velocity dispersions to the line of sight. In order to compare calculated dispersions with measured data, we must calculate the average in the line-of-sight dispersion: we integrate dispersions along the line-of-sight, taking into account galactic luminosity profile.

We apply our model to the case of spiral Sa galaxy M 104 (NGC 4594, the Sombrero galaxy). This galaxy is suitable for model testing being a disk galaxy with a significant spheroidal component. The galaxy has a detailed surface brightness distribution and a well-determined rotation curve. And most importantly in our case the line of sight velocity dispersion have been measured along the slit at different positions parallel and perpendicular to the projected major axis.

The mass distribution model for M 104 is constructed in two stages. In the first stage we construct an approximate mass and light distribution model, where only light distribution, rotation and mean velocity dispersions are taken into account. Here we assume the galaxy to consist of the nucleus, the bulge, the disk, the metal-poor halo and the dark matter halo.

Thereafter, in the second stage we developed a more detailed mass distribution model and calculate line-of-sight velocity dispersions in the whole galactic meridional plane. Calculated dispersions are compared with observations along different slit positions perpendicular and parallel to the galactic major axis.

In the best fit model velocity dispersion ellipsoids are rather parallel to the galactic plane, forming angles ≤ 30 deg. Velocity dispersion ellipsoids are radially elongated. Outside the galactic plane dispersions increase due to the dark matter domination.

In conclusion, our model is suitable for describing galaxy dynamics. With our model, we can calculate velocity dispersions in every position in galactic meridional plane and compare them with observational data.