EESTI NSV TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED

УЧЁНЫЕ ЗАПИСКИ ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

06 MATEMAATILISED TEADUSED
06 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
№ 1—4

RK „TEADUSLIK KIRJANDUS“

EESTI NSV TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЁНЫЕ ЗАПИСКИ ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

MATEMAATILISED TEADUSED 1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

J. SARV

PUNKTARVUTUS ANALÜÜTILISES GEOMEETRIAS

СО СВОДКОЙ:
ИСЧИСЛЕНИЕ ТОЧЕК В АНАЛИТИЧЕСКОЙ
ГЕОМЕТРИИ

RK „TEADUSLIK KIRJANDUS"
TARTU, 1946

TRÜ GEOMEETRIA KATEEDER. JUHATAJA prof. J. SARV

PUNKTARVUTUS ANALÜÜTILISES GEOMEETRIAS.

See uurimus tahab anda vastuvõetavamat kuju punktarvutuse kui analüütilise geomeetria ühe meetodi algmeile. Punktarvutust on meetodina kavatsenud Leibniz[1], tema suurema osa on välja töötanud Möbius[2], täiuseni on ta viidud Grassmann'i[3] ja Hamilton'i[4] poolt sada aastat tagasi.

Punktarvutus on imevähe rakendamist leidnud, kuigi veel käesoleva sajandi teisel aastakümnel on temale tähelepanu juhtinud Mehmke[5] ja veel kolmanda lõpul Lotze[6]. Selle vähese rakendamise põhjuseks võiks küll olla esiteks see, et kõik siin nimetatud autorid on püüdnud esitada seda analüütilise geomeetria meetodit iseseisvana muist meetodeist ja nagu ainuõigena. Meil Eestis[7] aga on küll katsutud teda rakendada hariliku koordinaatide meetodi abiks. Punktarvutuse vähese rakendamise teiseks põhjuseks võiks olla see, et ta on koordinaatide meetodist abstraktsem ja tema lõpuleviija Grassmann'i poolt liiga abstraktselt esitatud.

Punktarvutus on rakenduv geomeetrias, aga vahest veel avaramalt mehaanikas. Esiteks võimaldab ta üheks valemiks kokku võtta need valemid, mis on ühised punkti igale koordinaadile. Teiseks annab ta oma korrutisega sugestiivsed avaldised geomeetrias punkte või sirgeid ühendavaile kui ka sirgete ja tasandite ühiseile kujundeile, mehaanikas liikumise ja tema pingete komponendele ja paarele. Kolmandaks tuletab ta analüütilise geomeetria enese sisust determinantide teooria ja vektorarvutuse, esimese täielikult, kuna vektorarvutuseks on siiski veel tarvilik lisakokkulepe kahe vektori korrutise vektoriks lugemiseks.

---

1 Kiri Huygens'ile, 1679.
2 Der Barycentrische Calcul, 1827.
3 Ausdehnungslehre, 1844 (teine trükk 1878). Ausdehnungslehre, 1862.
4 Lectures on Quaternions, 1853.
5 Vorlesungen über Punkt- und Vektorrechnung, 1913.
6 Punkt- und Vektorrechnung, 1929.
7 J. Sarv, Analüütilise geomeetria algkursus, 1924.

Lineaarsed punktavaldised ahvatlevad tuletama Cartesius'e koordinaate lihtsalt põhipunktide kordajatena. Kuid Möbius'e, Grassmann'i ja Mehmke sellekohased katsed ei ole andnud rahuldavaid tulemusi. Meie oleme siin analüütilise geomeetria jaoks lähtunud lineaarse punktavaldise definitsioonist Cartesius'e koordinaatide najal. Punktarvutuse küsimused projektiivses ja mitteeukleidilistes geomeetriates jätame edaspidistele uurimustele.

Selle uurimuse tulemusteks tahaksid olla:

1. Lineaarne punktavaldis tuleb defineerida samanimeliste koordinaatide lineaarsete avaldiste kokkuvõttena, nii et selle definitsiooni järgi on lineaarse punktavaldise kohta kehtivad kõik arvude seadused.

2. Punktide korrutise mõiste tuleb kujundada, lähtudes geomeetria igivanast sümboolikast koos Möbius'e alternatiivsusega ja jälgides distributiivsust ning assotsiatiivsust.

3. Kuna ühel sirgel on kahe punkti korrutis skalaar — kahe punkti vahemaa, ühel tasandil kolme punkti korrutis — kolmnurga pindala ja ruumis nelja oma — nelitahuka ruumala, tuleb tegurite arvu skalaari omast üleulatumise korral korrutises lugeda skalaar arvkordaja väärseks.

1. Lineaarne punktavaldis. Sirge joone kahe punkti A ja B Cartesius'e koordinaatide a_i ja b_i järgi avalduvad selle joone iga punkti P koordinaadid $p_1 = x$, $p_2 = y$ ja $p_3 = z$ kauguste $\overline{AP}$ ja $\overline{AB}$ jagatise

$$\overline{AP} : \overline{AB} = t$$

abil kolmnurkade sarnasuse põhjal järgmiselt:

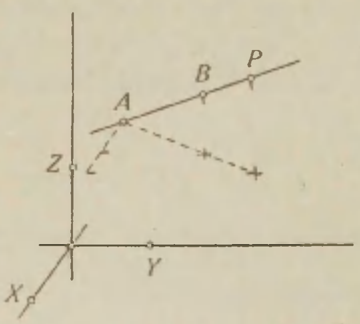
$$x = a_1 + t(b_1 - a_1),$$
$$y = a_2 + t(b_2 - a_2),$$
$$z = a_3 + t(b_3 - a_3).$$

Vahel võib olla mõnusam avaldada neid koordinaate kauguste $\overline{AP}$ ja $\overline{PB}$ jagatise

$$\overline{AP} : \overline{PB} = \lambda$$

abil. Siis saavad nad

$$x = \frac{a_1 + \lambda b_1}{1 + \lambda},$$
$$y = \frac{a_2 + \lambda b_2}{1 + \lambda},$$
$$z = \frac{a_3 + \lambda b_3}{1 + \lambda}.$$



Joon. 1.

Esimese kolme võrduse asemel kirjutatakse üks:

$$P = A + t(B - A)$$

ja teise kolme asemel

$$P = (A + \lambda B) : (1 + \lambda).$$

Need kaks lühendatud kirjutist esitavadki *lineaarsed punktavaldised*, s. o. avaldised, kus on punkte liidetud, lahutatud ja arvudega korrutatud või jagatud. Nimetame neid selles järjekorras *esimeseks ja teiseks põhiavaldiseks*. Nendest näeme, et

1 *punkte liita või lahutada või arvuga korrutada või jagada tähendab liita või lahutada või arvuga korrutada või jagada nende punktide samanimelisi koordinaate üksikult*

ja et

2 *saadus tuleb lugeda üksikuks punktiks siis ja ainult siis, kui ta on üks punkt aritmeetika algõpetuse järgi, s. o. kui on liidetud n punkti ja summast lahutatud $n - 1$ punkti, või jälle liites, lahutades, arvudega korrutades ja jagades saadud m punkti ja saadus jagatud arvuga m*[1].

Need on punktarvutuse kaks esimest põhilauset.

2. Vektor. Lineaarsete punktavaldiste hulgas on eriline see, mis on lihtsalt kahe punkti vahe, näiteks $B - A$, või selline vahe korrutatud mingi arvuga nagu $t(B - A)$. See lineaarne punktavaldis on eriline selle poolest, et seal on punktide arv null ja ühe punkti saamiseks tuleks siis see avaldis jagada nulliga, mis on aritmeetika järgi võimata. Selle erilise punktavaldise on *Hamilton*[2] nimetanud *vektoriks*. Vektoris esinevaid kahe punkti koordinaatide vahesid või neid vahesid korrutatud selle arvuga, millega on selles vektoris korrutatud see kahe punkti vahe, nimetatakse selle *vektori komponendeks*.

Põhilauseist järgneb, et lineaarsete punktavaldiste teisendamise kohta on kehtivad kõik lineaarsete arvavaldiste teisendamise seadused. Seega on

$$A + (B - A) = A - A + B = B.$$

---

[1] J. *Sarv*, Analüütilise geomeetria algkursus, lk. 7—8.

[2] Philosophical Magazin, 1864, lk. 26—27.

Kui tuleb tarvis kõnelda vektorist, mis on kahe samase punkti vahe, nagu siin $A - A$, siis nimetatakse seda n u l l v e k t o r i k s. Punktile liitudes ei muuda nullvektor seda punkti, kuna iga muu vektor punktile liitudes veab selle punkti teiseks, nimelt selle vektori punktide läbi mineva sirge sihil — selle v e k t o r i s i h i l — lahkujast punktist — v e k t o r i a l g u s e s t — teise punkti — v e k t o r i l õ p u poole, nende punktide vahelise kauguse või selle mitmekordse — selle v e k t o r i s u u r u s e võrra. Vektori suurus on siis Pythagoras'e lause järgi ruutjuur komponentide ruutude summast.

Punktarvutuse põhilauseist ja vektori definitsioonist järgneb, et

1) v e k t o r i d o n v õ r d s e d siis ja ainult siis, kui neil on võrdsed samanimelised komponendid;

2) v e k t o r i t e s u m m a k s on vektor, mille komponendeks on liidetavate vektorite samanimeliste komponentide summad, ja

3) v e k t o r i k o r r u t i s m i n g i a r v u g a on vektor, mille komponendeks on korrutatava omad korrutatud selle arvuga.

Esimesest põhiavaldisest näeme, et mingi vektor $B - A$, liitudes sellekohase arvu t kordselt mingi antud punktiga A, veab selle punkti edasi omal sihil ja t-kordselt oma suuruse võrra uueks punktiks P. Kuid teine põhiavaldis näitab, et ka punkt B, liitudes sellekohase arvu λ kordselt punktiga A pärast jagamist arvuga $1 + \lambda$, on viinud punkti A enese poole mineval sihil samasse punkti P. Kui on $\lambda = 1$ ja seega jagajaks 2, siis on P p u n k t i d e A ja B (v a h e l i s e s i r g l õ i g u) k e s k p u n k t, sest tema koordinaadid on A ja B omade aritmeetilised keskmised.

Esimene põhiavaldis on teisest mõnusam selle poolest, et seal ei ole tegemist jagamisega: vektoris on punktide arv null, nii et vektor, liitudes ühe punktiga, annab ka saaduseks juba ühe ainsa punkti.

Teisest põhiavaldisest näeme, et siis, kui λ väärtus ligineb piiramatult arvule —1, kasvavad punkti P koordinaadid piiramatult. Viime seal jagaja $1 + \lambda$ teisele poole kordajaks:

$$(1 + \lambda)P = A + \lambda B,$$

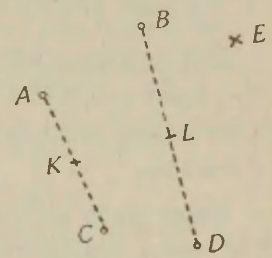
siis näeme, et λ liginemisel miinus ühele on punkti piiriks sirge AB päratu punkt, kordaja $1 + \lambda$ piiriks 0, aga parema poole piiriks vektor $A - B$. Seega on v e k t o r p ä r a t u p u n k t k o r d a j a g a n u l l.

Kahe vektori summa saamist graafilisel teel näitab joonis siin kõrval. Seal on vektor $B - A$ liidetud vektoriga $D - C$ sel viisil, nagu see järgneb punktarvutuse põhilauseist. See on

$$B - A + D - C = B + D - (A + C) =$$
$$= 2L - 2K = 2(L - K).$$

Siit näeme, et k a h e v e k t o r i s u m m a o n n e n d e l õ p p u d e k e s k p u n k t i j a a l g u s t e k e s k p u n k t i v a h e k a h e k o r d s e l t. Selleks, et sellele summale saaks ühine algus esimese liidetavaga, s. o. et oleks mingi punkt E, mis annaks

$$B - A + D - C = E - A,$$



Joon. 2.

peab olema

$$D - C = E - B,$$

kust järgneb

$$E + C = B + D = 2L,$$

nii et punkti E saamiseks tuleb sirglõiku CL pikendada üle punkti L sama pikkuse võrra. Siit näeme, et k a h e v e k t o r i g r a a f i l i n e s u m m a s a a b ü h i s e a l g u s e ü h e l i i d e t a v a g a s i i s, k u i e s i m e s e l i i d e t a v a l õ p p v õ e t a k s e a l g u s e k s t e i s e l i i d e t a v a g a v õ r d s e l e v e k t o r i l e, m i l l e l õ p p s i i s o n g i k a s u m m a o m a. Siit näeme ka, et g r a a f i l i s e l t on v õ r d s e d kaks vektorit, mis veavad rööpküliku ühe külje otsi vastaskülje omiks.

Vektorit esitatakse graafiliselt peale alguse ja lõpu veel noolega, mis läheb algusest lõppu, ja kirjutatakse siis ka $\overrightarrow{AB}$, kui alguseks on A ja lõpuks B. Siis öeldakse ka, et vektor läheb punktist A punktisse B. Kuid sagedamini kirjutatakse vektoreid väikeste tähtedega. Saksa autorid kasutavad selleks enamasti gooti tähti, teised sagedasti, nagu meiegi, rasvaseid kursiivtähti.

3. Punkti avaldis põhipunktes. Meie teine põhiavaldis saab üldisema kuju, kui seal parameetri λ kirjutame murru kujul

$$\lambda = \frac{m}{n}.$$

On ju siis

$$P = \left(A + \frac{m}{n}B\right) : \left(1 + \frac{m}{n}\right) = (nA + mB) : (n + m).$$

Sellel kujul esinevad siin punktid A ja B samaväärsetena, kuna esimeses põhiavaldises on punkt A esinemas 2 korda, B ainult 1 kord. Kui seal aga sulud avame, siis saame

$$P = (1 - t)A + tB,$$

mis on samane meie teise põhiavaldisega, ja siit paistab silma seos meie kahe parameetri vahel:

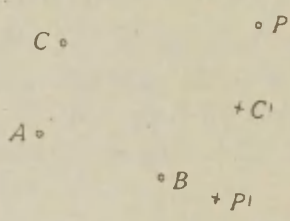
$$t = \lambda : (1 + \lambda),$$

mis muidugi järgneb ka nende parameetrite definitsioonest.

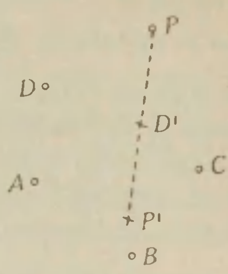
Sirge joone kahte punkti, milledest on koostatud avaldis selle joone igale punktile P, nimetame selle joone p õ h i p u n k t e k s. Meie põhiavaldised ongi siis ü h e s i r g e p u n k t i a v a l d i s e d p õ h i p u n k t e s.

Nagu sirge on määratud tema kahe punktiga, nii on tasand määratud tema kolme mitte ühel sirgel asetseva punktiga. Olgu need punktid A, B, C. Siis saame selle tasandi igale punktile P a v a l d i s e n e n d e p õ h i p u n k t i d e A, B, C kaudu, kui näiteks vaatleme sirgel AB sellist punkti P' ja sirgel PP' sellist C', et oleks $P'P \parallel AC$ ja $CC' \parallel AB$. On ju siis meie esimese põhiavaldise ja vektorite $C' - P'$ ja $C - A$ võrdsuse järgi sellekohaste arvudega t ja u
$P = P' + u(C' - P') = P' + u(C - A) = A + t(B - A) + u(C - A)$.
Avades siin sulud saame avaldise

$$P = (1 - t - u)A + tB + uC,$$



Joon. 3.



Joon. 4.

kus kõik kolm põhipunkti esinevad samaväärsetena, igaüks oma kordajaga, mille hulgas ühe erinev kirjutis on vaid meie teise põhilause väljend, et kordajate summaks on 1. Selline erinev kirjutis võiks siis A kordaja asemel olla niisama hästi B või C kordajal.

Samuti saame ruumi igale punktile avaldise nelja mitte ühel tasandil asetseva põhipunkti, mingite A, B, C, D kaudu, kui näiteks vaatleme tasandil ABC sellist punkti P' ja sirgel $P'P$ sellist D', et oleks $P'P \parallel AD$ ja $DD' \parallel AP'$. On ju siis vektorite $D' - P'$ ja $D - A$ võrdsuse ja punkti P' avaldise järgi sellekohaste arvudega t, u ja v

$$P = P' + v\,(D' - P') = A + t\,(B - A) + u\,(C - A) + v\,(D - A)$$

ja pärast sulgude avamist

$$P = (1 - t - u - v)A + tB + uC + vD.$$

Kui üheks põhipunktiks on koordinaatide alguspunkt O — telgede nullipunkt — ja teisteks telgede ühepunktid, mis olgu x-teljel X, y-teljel Y ja z-teljel Z, siis saab neis põhipunktes punktile $P = (x;\,y;\,z)$ esimeseks — vektoravaldiseks —

$$P = O + x\,(X - O) + y\,(Y - O) + z\,(Z - O)$$

ja siis muidugi teiseks — punktavaldiseks —

$$P = (1 - x - y - z)O + xX + yY + zZ.$$

Kirjutame ühikvektorid $X - O$, $Y - O$, $Z - O$ Hamilton'i järgi

$$X - O = \boldsymbol{i},\ Y - O = \boldsymbol{j},\ Z - O = \boldsymbol{k}.$$

Siis on vektoravaldis koordinaadistiku põhipunktes punktil $P = (x;\,y;\,z)$

$$P = O + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

ja igal vektoril $A - B = (a_1 - b_1;\, a_2 - b_2;\, a_3 - b_3)$

$$A - B = (a_1 - b_1)\,\boldsymbol{i} + (a_2 - b_2)\,\boldsymbol{j} + (a_3 - b_3)\,\boldsymbol{k}.$$

4. Kahe punkti korrutis. Kui sirgel joonel on kaks punkti A ja B, siis kirjutame nende kahe punkti vahelist lõiku ja ka tervet seda sirget Eukleides'est või vahest juba Thales'est saadik AB. See kirjutis on praegu algebra sümboolika järgi nende kahe punkti korrutis. Möbius on selle kirjutise tähendust täpsustanud selle poolest, et tuleb lugeda

$$AB = -BA \quad \text{ja seega } AA = 0.$$

See Möbius'e täpsustus on üldiselt tarvitusele tulnud. Kui nüüd seda kirjutist saab lugeda punktide korrutiseks, siis erineb see korrutis harilikust arvude korrutisest igatahes selle poolest, et temas kahe teguri kohtade vahetamine muudab suunamärgi. Harilikus arvude korrutises võib tegurite kohti vahetada, ilma et korrutis sellest muutuks, ta on, nagu öeldakse, kommutatiivne. Meie näiv punktide korrutis on siis mittekommutatiivne. Et tal kahe teguri vahetamisel nimelt ja ainult märk muutub, sellepärast nimetatakse teda alternatiivseks. Kahe teguri korrutise põhiomaduseks on see, et kui üks tegur on summa, siis on korrutiseks ki summa, mille liikmeiks on selle teguri liikmed, korrutatud teise teguriga. See on niinimetatud distributiivsus. Seega võib sirge lõigu kirjutist selle otste korrutiseks lugeda vaid siis, kui ta on distributiivne.

Olgu sirgel AB kaks punkti

$$P = (1 - p) A + pB,$$
$$Q = (1 - q) A + qB.$$

Siis on distributiivsuse põhjal nende kahe punkti korrutis

$$PQ = [(1 - p) A + pB] [(1 - q) A + qB]$$
$$= (1 - p) (1 - q) AA + (1 - p)qAB + p(1 - q) BA + pqBB.$$

Alternatiivsuse pärast kaovad siin esimene ja viimane liige, kuna kolmas saab punkttegurite kohtade vahetamisega teise sarnaseks ja on muutunud märgiga, nii et saab

$$PQ = [(1 - p)q - p(1 - q)]AB = (q - p)AB.$$

Siit näeme, et siis, kui sirge joone põhipunktide korrutise loeme nende põhipunktide vahelise lõigu esitiseks suuruse ja (Möbius'e järgi ka) suuna poolest, esitab selle sirge iga kahe punkti korrutamise saadus ka nende punktide vahelise lõigu suuruse ja suuna poolest. On ju 1) lineaarse punktavaldise definitsiooni järgi p lõigu AP suurusearv ja q lõigu AQ oma, kui mõõduks on lõik AB, ja 2) suuna mõiste järgi suund PQ samane suunaga AB siis, kui on $q > p$, aga vastupidine, kui on $q < p$.

Sirge joone kahe punkti korrutamise saadus esitab nende punktide vahelise lõigu ainult suuruse ja suuna poolest, mitte enam individuaalselt. Sest sama saaduse saame aritmeetika järgi ka siis, kui sellekohases järjekorras korrutame sellesama sirge mingeid muid punkte, millede vahemaa on võrdne P ja Q omaga. Kuigi ühe sirge kahe punkti korrutamise saadus ei esita enam nende kahe punkti vahelist lõiku individuaalselt, siis esitab ta ometi individuaalselt sellesama sirge tema põhipunktide korrutise kaudu.

Nimetame kahe punkti korrutist joonvektoriks ja nende kahe punkti läbi minevat sirget selle joonvektori kandjaks.

Korrutatavaist punktest nimetame esimest *joonvektori alguseks*, teist *lõpuks* ning alguse ja lõpu vahelist kaugust *joonvektori suuruseks*. Nime joonvektori teine pool tahabki rõhutada kahe punkti korrutise sugulust nende kahe punkti vahega: kummalgi on sama suurus, siht ja suund. Kuid joonvektoril ei saa olla võrdset väljaspool teda kandvat sirget joont, kuna kahe punkti vahe on sellest kitsendusest vaba — teda nimetatakse joonvektori kõrval *vabavektoriks*.

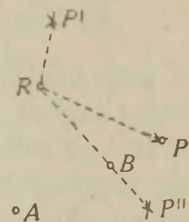
Korrutame mingi punkti R, mis ei asetse sirgel AB, selle sirge mingi punktiga P. Me saame

$$RP = R(1-p)A + RpB = (1-p)RA + pRB.$$

Vaatleme selle saaduse liikmetega võrdseid joonvektoreid nende sirgete ühises punktis R. Olgu nad

$$(1-p)RA = RP' \quad \text{ja} \quad pRB = RP''$$

Siis on geomeetria järgi $PP' \parallel BR$ ja $PP'' \parallel RA$. Siit näeme, et *mingi välise punkti korrutamine mingi sirge punktiga seab nende kahe punkti vahelise lõigu võrdseks sellest välisest punktist selle sirge põhipunktesse minevate sirgete lõikude summaga, kus liidetavad on selle rööpküliku ühest nukist lähtuvaiks külgedeks, mille sealtsamast lähtuvaks diagonaaliks on korrutatavate punktide vaheline lõik.* Siit järgneb ka juhis joonvektorite graafiliseks liitmiseks sellel juhul, kui nende kandjail on ühine punkt.



Joon. 5.

Kahe punkti

$$P = (1-p)A + pB,$$
$$Q = (1-q)A + qB.$$

korrutamise saadus kirjutatakse otsekohe:

$$PQ = \begin{vmatrix} 1-p & p \\ 1-q & q \end{vmatrix} AB.$$

Selles kirjutises on põhipunktide korrutise kordajaks tabel tegurites esinevaist põhipunktide kordajaist. Seda tabelit koos nende tehetega, mis toimuvad korrutatavate punktide korrutamisel selle tabeli arvudega, nimetatakse kaherealiseks *determinandiks*. Need tehted on: 1) esimese rea iga arv tuleb korrutada teisest reast sellega, mis ei asetse temaga ühes veerus (muidu oleks saanud põhipunkti korrutis iseenesega, mis oleks null) ; 2) esimese rea teise arvu korrutis teise rea esimesega tuleb võtta vastasmärgiga, sest ta esineb selle korrutise BA ees, milles tulab tegurite kohad vahetada; 3) need korrutised tuleb liita.

Kahe punkti korrutises esinev determinant saab lihtsam siis, kui korrutame neid punkte nende vektoravaldistes ja kirjutame põhipunktide vahe $B - A = i$:

$$P = A + pi,$$
$$Q = A + qi.$$

Saab ju siis

$$PQ = \begin{vmatrix} 1 & p \\ 1 & q \end{vmatrix} Ai = \begin{vmatrix} 1 & p \\ 1 & q \end{vmatrix} AB,$$

sest distributiivsuse ja alternatiivsuse pärast on

$$Ai = A(B - A) = AB.$$

5. Kolme punkti korrutis. Olgu tasandil OXY 3 punkti $A = (a_1; a_2)$, $B = (b_1; b_2)$ ja $C = (c_1; c_2)$, s. o. vektoravaldistena:

$$A = O + a_1 i + a_2 j,$$
$$B = O + b_1 i + b_2 j,$$
$$C = O + c_1 i + c_2 j.$$

Kirjutis OXY või ABC tähendab muistsest ajast saadik nende kolme punkti vahelist tasandi tükki ja ka tervet neid kolme punkti läbivat tasandit. Praeguse algebra sümboolika järgi oleks siin tegu kolme punkti korrutisega. M ö b i u s on selliste kirjutiste tähendust täpsustanud selle poolest, et tuleb lugeda näiteks

$$OXY = -XOY = XYO = -YXO = YOX = -OYX,$$

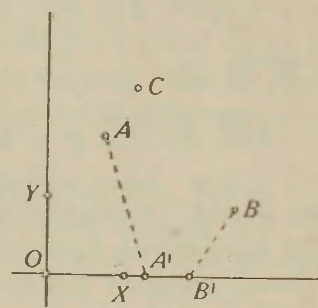
s. o. kahe punkti koha vahetus muudab märgi, nii et siis, kui OXY ühes r i n g j ä r j e k o r r a s $O, X, Y, O, X, \ldots$ on nende kolme punkti vaheline tasandi tükk või terve tasand loetud positiivseks, tuleb ta vastupidises ringjärjekorras $X, O, Y, X, O, \ldots$ lugeda negatiivseks. Kui nende kolme punkti hulgas on kaks samast, nii et erinevaid jääb vaid 2, siis on nende vaheline tasandi tükk 0 ja neid läbiv tasand määramatu. Kui siis kolme punkti kirjutist võib lugeda korrutiseks, on see korrutis alternatiivne iga kahe teguri suhtes.

Korrutame punktid A, B ja C. Korrutise saame otsekohe kirjutada:

$$ABC = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} (Oij = OXY),$$

kui püstkriipsude vahele paigutatud arvude tabelit mõtleme koos nende tehetega, mis korrutamisel pidi arvudega toimuma. Need tehted on: 1) esimese rea iga arv tuleb eraldi korrutada iga sellise arvuga teisest reast, mis ei ole temaga samas veerus, ning iga saadud korrutis kolmanda rea selle arvuga, mis ei ole tema kummagi teguriga samas veerus (muidu oleks saanud nendega korrutatud põhipunktide korrutis kahe samase teguriga, mis oleks null); 2) need kolme teguri korrutised tuleb võtta igaüks selle pluss- või miinusmärgiga, mis tuleb nende teguritega korrutatud põhipunktide sama-järjekorralisele korrutisele siis, kui seal seame järjekorra OXY; 3) need korrutised tuleb liita.

Kolmerealist ja kolmeveerulist arvude tabelit koos nende tehetega nimetatakse **kolmerealiseks determinandiks**. Kui kolme punkti korrutis esitab nende punktide vahelise tasandi tüki tema suuruse poolest, siis peab determinant OXY ees olema kolmnurga ABC pindala arv, mõõtmise puhul OXY pindalaga. See on tõesti nii.



Joon. 6.

Selle tõestuseks vaatleme joonist siin kõrval. Viime seal kolmnurgal ABC, kui $a_2 \neq c_2$, tipu B ||-selt küljele AC x-telje peale punktiks B'. Sellega kolmnurga pindala ei muutu. Aritmeetiliselt toimub see muutus nii, et punktile B liidame vektori $C - A$ sellise arvu m-kordselt, et nii saadud punktil B' saaks teine koordinaat 0:

$$b'_2 = b_2 + m(c_2 - a_2) = 0$$

Selleks peab siis olema

$$m = \frac{-b_2}{c_2 - a_2}.$$

Meie kolme punkti korrutis ei ole selle toiminguga muutunud. Sest

$$AB'C = A[B + m(C - A)]C = ABC + mACC - mAAC = ABC:$$

meie lisandite väärtus oli null. Seega on muutumata jäänud ka kordaja põhipunktide korrutise ees.

Kolmnurgal $AB'C$ viime nüüd tipu A ||-selt küljele CB' x-telje peale punktiks A'. Sellega jälle ei muutu pindala. Aritmeetiliselt toimub see uus muutus nii, et punktile A liidame vektori $C - B'$, sellise arvu l kordselt, et nii saadud punktil A' saaks teine koordinaat 0:

$$a'_2 = a_2 + lc_2 = 0.$$

Selleks peab siis olema

$$l = \frac{-a_2}{c_2}.$$

Meie kolme punkti korrutis ei ole selle toiminguga jällegi muutunud, kuna meie lisandite väärtus on null.

Nüüd on

$$A' = (a'_1; 0) = O + a'_1 i$$
$$B' = (b'_1; 0) = O + b'_1 i$$
$$C = (c_1; c_2) = O + c_1 i + c_2 j$$

ja seega

$$ABC = A'B'C = \begin{vmatrix} 1 & a'_1 & O \\ 1 & b'_1 & O \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} (Oij = OXY) = (b'_1 - a'_1)c_2 OXY.$$

Siin on OXY kordaja nimelt selle teisendatud kolmnurga pindala arv (kui mõõduks on kolmnurga OXY pindala, s. o. pool ruutmõõtu), sest $b'_1 - a'_1$ on aluse pikkus ja c_2 kõrgus.

Et see lihtsam determinant on võrdne endisega, see järgneb determinantide põhiomadustest. Determinant on tema tehete määruse järgi temas esinevate arvude — tema elemende — korrutiste summa. Neis korrutistes esineb element ja nimelt üks ainus igast reast (ja igast veerust). Sellest järgneb determinandi esimene põhiomadus: kui determinandi ühe rea (või veeru) elemendid on kõik kaheliikmelised, siis on see determinant võrdne kahe sellise determinandi summaga, millel mõlemal on kõik teised read (või veerud) samased lähtedeterminandi omiga, aga selle ühe rea (või veeru) elemendeks ühel lähtedeterminandi omade ühed liikmed, teisel teised. Punktide korrutise alternatiivsusest järgneb determinandi teine põhiomadus: kui determinandil vahetame kahe rea (või veeru) kohad, siis muutub tema märk, ja determinant on võrdne nulliga, kui tal on üks rida (või veerg) samane teisega.

Liites punktide korrutises ühele tegurile teist, liidame selle korrutise determinandis ühe rea elemendele teise omad ja sellega selle korrutise determinandile determinandi, mis on null. Seega ei muutu determinandi väärtus, kui ühe rea (või veeru) elemendele liidame teise samanimelised: esimesele esimese, teisele teise jne. Ja ainult seda oleme teinud oma kolmnurka nii teisendades, et tema pindala ei muutunud, sest liidetava rea elemende ühine kordaja (l või m) saab ju kordajaks nullile.

Seega siis, kui tasandi põhipunktide korrutise loeme nende vahelise tasandi tüki esitiseks suuruse ja suuna poolest, esitab selle tasandi iga kolme punkti korrutis tõesti nende punktide vahelise tasandi tüki nii suuruse kui ka suuna poolest, kuid mitte enam individuaalselt: sellesama tasandi igal sellisel kolmel punktil, millede vaheline tasandi tükk on suuruselt võrdne ABC omaga, saab korrutis sellekohases järjekorras samane ABC omaga.

Kirjutame punkti punktavaldises ka alguspunkti kordaja ühe tähega: A oma a_0, B oma b_0 ja C oma c_0. Olgu nüüd tasandil ABC mingid 3 punkti P, Q, R, millede avaldised punktes A, B, C ja siis ka punktes OXY oleksid

$$P = p_a A + p_b B + p_c C = (p_a a_0 + p_b b_0 + p_c c_0)\,O + (p_a a_1 + p_b b_1 + \\ + p_c c_1)\,X + (p_a a_2 + p_b b_2 + p_c c_2)\,Y,$$

$$Q = q_a A + q_b B + q_c C = (q_a a_0 + q_b b_0 + q_c c_0)\,O + (q_a a_1 + q_b b_0 + \\ + q_c c_1)\,X + (q_a a_2 + q_b b_2 + q_c c_2)\,Y,$$

$$R = r_a A + r_b B + r_c C = (r_a a_0 + r_b b_0 + r_c c_0)\,O + (r_a a_1 + r_b b_1 + \\ + r_c c_1)\,X + (r_a a_2 + r_b b_2 + r_c c_2)\,Y.$$

Korrutame need punktid:

$$PQR = \begin{vmatrix} p_a & p_b & p_c \\ q_a & q_b & q_c \\ r_a & r_b & r_c \end{vmatrix} ABC = \begin{vmatrix} p_a & p_b & p_c \\ q_a & q_b & q_c \\ r_a & r_b & r_c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} OXY =$$

$$= \begin{vmatrix} p_a a_0 + p_b b_0 + p_c c_0 & p_a a_1 + p_b b_1 + p_c c_1 & p_a a_2 + p_b b_2 + p_c c_2 \\ q_a a_0 + q_b b_0 + q_c c_0 & q_a a_1 + q_b b_1 + q_c c_1 & q_a a_2 + q_b b_2 + q_c c_2 \\ r_a a_0 + r_b b_0 + r_c c_0 & r_a a_1 + r_b b_1 + r_c c_1 & r_a a_2 + r_b b_2 + r_c c_2 \end{vmatrix} OXY.$$

Siit näeme, et kahe kolmerealise determinandi korrutis on ka kolmerealine determinant, mille mingis veerus (näiteks teises) ja mingis reas (näiteks kolmandas) asetsev arv on koostatud korrutatava determinandi samanumbrise (teise) veeru ja kordaja samanumbrise (kolmanda) rea arvudest nii, et veeru esimene arv on korrutatud rea esimesega, veeru teine — rea teisega jne. ning need korrutised liidetud.

Punkti punktavaldises on kordajate summa 1. Siiski on siin esitatud lause determinantide kohta kehtiv igasuguste arvude korral.

6. Assotsiatiivsus. Skalaar. 0-avaldis. Kolme punkti korrutamisel võib esiti korrutada kaks neist ja siis saaduse kolmandaga. Sest kahe punkti korrutises, näiteks

$$AB = (O + a_1 i + a_2 j)\,(O + b_1 i + b_2 j) =$$
$$= (b_1 - a_1)\,Oi + (a_2 - b_2)\,jO + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\,\boldsymbol{ij},$$

kui seal on põhipunktid võetud selles järjekorras, millest kolmanda juurdetulekul saakski peadiagonaali järjekord, esinevad juba kolmerealise determinandi kõigist liikmeist nende kahe rea arvude korrutised õigete märkidega, nii et kolmanda punktiga seda kahe punkti korrutist edasi korrutades toome vaid igale liikmele puuduva kolmanda teguri juurde (ning arvude korrutised ei olene tegurite järjekorrast). Seda kolme teguri korrutise omadust, et seal võib enne korrutada ükskõik millised kaks ja siis saaduse kolmandaga, nimetatakse assotsiatiivsuseks.

Harilikult nimetatakse kahe teguri korrutises viimast tegurit korrutatavaks ja esimest kordajaks, nagu seda ka meie determinantide korrutise juures rakendasime. Aga kui on tegu uue teguri juurdetulemisega, siis on loomulik nimetada seda uut tegurit kordajaks. Seega paigutub meie üldise kirjutamise suunas kordaja korrutatava taha. Korrutist uuesti kirjutades saab teda jälle ette tuua. Täpsuseks kõneldakse eestkorrutamisest, kui kordaja on korrutatava ees, ja tagantkorrutamisest, kui ta on taga. Muidugi on sellel vahetegemisel mõtet vaid seal, kus korrutis ei ole kommutatiivne.

Kolme punkti korrutises võime kahe punkti korrutist korrutada kolmandaga niisama hästi tagant kui eest, sest ABC sees tuleb CAB saamiseks vahetada kahe teguri kohti kaks korda: $ABC = -ACB = CAB = [(b_1 - a_1)\,c_2 + (a_2 - b_2)\,c_1 + a_1 b_2 - a_2 b_1]\,OXY$.

Kahe punkti korrutise avaldis põhipunktes ühel sirgel (s. o. kui põhipunkteks olid selle sirge kaks punkti) sai üheliikmeline. Nüüd näeme, et kahe punkti korrutise avaldis põhipunktes ühel tasandil (kui põhipunkteks on selle tasandi kolm punkti) on kolmeliikmeline, kuna kolme punkti korrutise avaldis põhipunktes on sellel tasandil üheliikmeline. Nende üheliikmeliste avaldiste juures nägime veel, et nad ei esitanud indiviide, nagu on antud punkt, antud sirge või ka antud tasand. Nimetame s k a l a a r i k s seda avaldist põhipunktes, mis on üheliikmeline ja ei esita indiviidi.

Aritmeetika järgi o n k o r r u t i s n u l l s i i s j a a i n u l t s i i s, k u i ü k s t e g u r o n n u l l. Alternatiivsuse korral on korrutis küll null ka siis, kui 2 tegurit on samased, aga assotsiatiivsuse pärast taandub selline kahe teguri korrutis jälle üheks — nullteguriks. Kui nüüd meie kahe punkti korrutises on $B = A$, nii et saab $b_1 - a_1 = 0$, $a_2 - b_2 = 0$, $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$ ja seega

$$AB = AA = 0 \cdot Oi + 0 \cdot jO + 0 \cdot ij,$$

siis seda avaldist ja üldse iga n u l l a v a l d i s t, mille igas liikmes on teguriks null, loeme lihtsalt nulliks sellepärast, et tema korrutis mingi muu avaldisega on ka nullavaldis ja et tema summaks mingi muu avaldisega on seesama muu avaldis.

7. Sirge joon. Ühe sirge kahe punkti korrutis esitab nende kahe punkti vahelise lõigu tema suuruse ja suuna poolest otseselt siis, kui see sirge läbib kahte põhipunkti. Muidu esitab see korrutis selle lõigu alles mitme lõigu summana. Kuid igal juhul esitab näiteks tasandil OXY punktide $A = O + a_1 i + a_2 j$ ja $B = O + b_1 i + b_2 j$ korrutis

$$AB = (a_2 - b_2)\, jO + (b_1 - a_1)\, Oi + (a_1 b_2 - b_1 a_2) ij$$

terve sirge AB selle poolest, et selle sirge iga punkt

$$P = O + xi + yj$$

korrutatult selle kahe punkti korrutisega,

$$ABP = [(a_2 - b_2)\, x + (b_1 - a_1)\, y + (a_1 b_2 - b_1 a_2)]\, OXY$$

annab nulli. Sest ühe sirge kolme punkti vahelise tasanditüki suurus on null. Seega peavad sirge AB iga punkti koordinaadid rahuldama s e l l e s i r g e v õ r r a n d i t

$$(a_2 - b_2)\, x + (b_1 - a_1)\, y + a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0.$$

Selle võrrandi kordajaid ehk korrutises AB korrutiste jO, Oi ja ij kordajaid

$$a_2 - b_2 = p_{02}, \quad b_1 - a_1 = p_{01}, \quad a_1 b_2 - b_1 a_2 = p_{12}$$

nimetatakse selle s i r g e k o o r d i n a a d e k s. Kaks esimest neist määravad lõigu AB suuruse, sihi ja suuna, sest p_{01} ja p_{02} on ju vektori

$B-A$ — s i r g e AB v e k t o r i — komponendid, kuna kolmas p_{12} — t a s a n d i OXY s i r g e AB m o m e n t p u n k t i O k o h t a — näitab, et see lõik peab olema nimelt sirge AB peal. On ju korrutise

$$OAB = (a_1b_2 - b_1a_2)\, OXY = p_{12}\, OXY$$

järgi p_{12} kolmnurga OAB pindala arv, mis oma suuruse ja märgiga annab aluse AB suuruse ja märgi järgi ka kõrguse $(AB)O$ — sirge AB ja punkti O vahelise kauguse — omad: $p_{12} > 0$ k o r r a l o n O s i r g e s t AB j a s i h i s t AB s e a l s a m a l p o o l e l (v a s a k u l v õ i p a r e m a l), k u s s i r g e s t j a s i h i s t XY-g i, $p_{12} < 0$ k o r r a l v a s t u p i d i s e l p o o l e l.

Ruumi kahe punkti

$$A = O + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},$$
$$B = O + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$$

korrutise

$$AB = p_{01}O\boldsymbol{i} + p_{02}\, O\boldsymbol{j} + p_{03}\, O\boldsymbol{k} + p_{12}\boldsymbol{ij} + p_{23}\boldsymbol{jk} + p_{31}\boldsymbol{ki}$$

kordajaid

$$p_{01} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & b_1 \end{vmatrix},\ p_{02} = \begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ 1 & b_2 \end{vmatrix},\ p_{03} = \begin{vmatrix} 1 & a_3 \\ 1 & b_3 \end{vmatrix},$$

$$p_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},\ p_{23} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\ p_{31} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}$$

nimetatakse sirge AB k o o r d i n a a d e k s r u u m i s. Nendest on 3 esimest selle sirge vektori $B - A$ komponendid ja viimaseid 3 nimetatakse selle s i r g e m o m e n d e k s järgemööda z-, x- ja y-t e l j e k o h t a.

Selle sirge iga punkti

$$P = O + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

korrutis selle kahe punkti omaga:

$$ABP = (p_{01}y - p_{02}x + p_{12})\, O\boldsymbol{ij} + (p_{02}z - p_{03}y + p_{23})\, O\boldsymbol{jk} +$$
$$+ (-p_{01}z + p_{03}x + p_{31})\, O\boldsymbol{ki} + (p_{12}z + p_{23}x + p_{31}y)\, \boldsymbol{ijk}$$

on muidugi endiselt null.

See korrutis on neljaliikmeline ja üksikud liikmed on üksteisest l i n e a a r s e l t o l e n e m a t u d, see on: neist ei saa ühte avaldada teiste summana, kuigi neid teisi enne liitmist korrutame mingite selleks otsitavate arvudega. See järgneb sellest, et ruumi põhipunktid on igaüks teistest lineaarselt olenematud. Saab ju näiteks punktes O, X, Y lineaarselt avaldada küll tasandi OXY iga punkti, aga mitte ühtegi punkti väljaspool seda tasandit ja siis ka mitte neljandat põhipunkti Z. Kui lineaarselt olenematuil liikmeil on summa null, siis peab selles summas olema iga liige null. Sest vastasel korral saaks ju ühte liiget avaldada teiste summana ja mingite avaldiste lineaarset olenematust defineeritaksegi sellega, et n e n d e s u m m a s a a b o l l a n u l l a i n u l t s i i s, k u i n a d o n k õ i k ü k s i k u l t n u l l i d. Meie korrutise ABP liikmeis ei saa olla nullid põhipunktide (ja põhivektorite) korrutised põhipunktide definitsiooni järgi. Seega peavad nullid olema kordajad:

$$\begin{aligned} p_{01}y - p_{02}x + p_{12} &= 0, \\ p_{02}z - p_{03}y + p_{23} &= 0, \\ -p_{01}z + p_{03}x + p_{31} &= 0, \\ p_{12}z + p_{23}x + p_{31}y &= 0. \end{aligned}$$

Esimesed 3 neist võrrandeist on sirge AB projektsioonide võrrandid järgemööda tasandeil OXY, YZO, OZX. Neljas võrrand järgneb neist, kui korrutame esimesed 3 järgemööda arvudega z, x, y ja summeerime saadused. Sirge joon on määratud oma kahe projektsiooniga. Ülearune kolmas võrrand määrab s e o s e k u u e k o o r d i n a a d i v a h e l. Selle seose saamiseks korrutame need 3 esimest võrrandit järgemööda arvudega p_{03}, p_{01}, p_{02} ja summeerime. Siis saame

$$p_{03}p_{12} + p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} = 0.$$

8. **Nelja punkti korrutis.** Nelja punkti

$$\begin{aligned} A &= O + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}, \\ B &= O + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}, \\ C &= O + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}, \\ D &= O + d_1\boldsymbol{i} + d_2\boldsymbol{j} + d_3\boldsymbol{k}, \end{aligned}$$

korrutis

$$ABCD = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} OXYZ$$

esitab nende nelja punkti vahelise ruumitüki suuruse ja suuna poolest. Selle tõestuseks tuleb näidata, et siin esinev neljarealine determinant on tõesti selle ruumitüki suuruse arv positiivselt või negatiivselt, kui mõõduks on ruumitükk $OXYZ$. Selleks teisendame ruumitüki $ABCD$ ilma suurust muutmata nii, et tema põhi tuleks tasandile OXY.

Liidame tegurile A, kui $d_3 \neq b_3$, vektori $D - B$ (s. o. viime tippu A servaga BD ja seega põhjaga DBC $\|$-selt BD pikkuselt) sellise arvu l kordselt, et uuel teguril

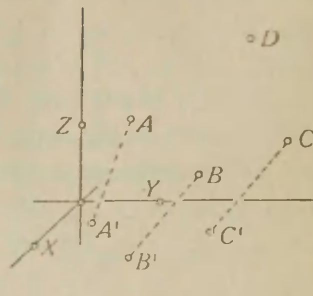
$$A' = A + l(D - B)$$

oleks kolmas koordinaat null:

$$a'_3 = a_3 + l(d_3 - b_3) = 0.$$

Selleks peab siis olema

$$l = - a_3 : (d_3 - b_3).$$



Joon. 7.

Edasi liidame tegureile B ja C vektori $(D - A')$ vastavalt selliste arvude m ja n kordselt, et uutel teguritel

$$B' = B + m(D - A'),\quad C' = C + n(D - A')$$

saaksid ka kolmandad koordinaadid nullid:

$$b'_3 = b_3 + md_3 = 0,\ c'_3 = c_3 + nd_3 = 0.$$

Selleks tuleb muidugi võtta

$$m = - b_3 : d_3,\ n = - c_3 : d_3.$$

Siis on geomeetria järgi ruumitükk $A'B'C'D$ võrdne tükiga $ABCD$. Alternatiivsuse pärast on siis ka korrutis endine:

$$A'B'C'D = A'(B + mD - mA')\,(C + nD - nA')D = A'BCD =$$
$$= (A + lD - lB)\,BCD = ABCD.$$

See korrutis annab

$$A'B'C'D = \begin{vmatrix} 1 & a'_1 & a'_2 & 0 \\ 1 & b'_1 & b'_2 & 0 \\ 1 & c'_1 & c'_2 & 0 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} OXYZ = \begin{vmatrix} 1 & a'_1 & a'_2 \\ 1 & b'_1 & b'_2 \\ 1 & c'_1 & c'_2 \end{vmatrix} d_3 OXYZ,$$

kus arvuline kordaja on ilmselt selle ruumitüki suuruse arv, sest ta on tasandil OXY asetseva põhja pindala arv, korrutatud tipu kolmanda koordinaadiga — kõrgusega.

Et see arvuline kordaja — uus determinant — on võrdne endisega, see järgneb neist tehteist, mis punktide korrutamisel toimuvad determinandi arvudega. Need tehted n-realises determinandis on: 1) esimese rea iga arv eraldi korrutatakse iga sellise arvuga teisest reast, mis ei ole temaga samas veerus, ning iga juba saadud korrutis eraldi järgmise rea iga sellise arvuga, mis ei ole selle saadud korrutise ühegi teguriga samas veerus jne.; 2) nii saadud n teguri korrutised võetakse igaüks selle pluss- või miinusmärgiga, mis talle tuleb, kui tema tegurid seatakse veergude järjekorda järjest mingite kahe teguri kohti vahetades ja igal vahetamisel märki muutes; 3) need korrutised liidetakse. Neist tehteist järgnevad d e t e r m i n a n d i p õ h i o m a d u s e d:

1. D e t e r m i n a n t o n h o m o g e e n s e l t l i n e a a r n e i g a o m a r e a v õ i v e e r u a r v u d e s, nii et ta on null, kui tema ühel real või veerul on kõik arvud nullid, korrutub arvuga, millega korrutatakse ühe rea või veeru kõik arvud, ja siis, kui ühe rea või veeru kõik arvud on kaheliikmelised, lahkub kaheks determinandiks, kus ühel on selle rea või veeru arvudeks ühed neist liikmeist, teisel teised, kuna kummalgi kõik muud read või veerud on samad lähtedeterminandi omad;

2. d e t e r m i n a n d i m ä r k m u u t u b, k u i t e m a k a h e l r e a l v õ i v e e r u l v a h e t a t a k s e k o h a d, nii et ta on null, kui tal on 2 rida või veergu samased või võrdelised.

Neist determinandi põhiomadustest järgneb nüüd otsekohe, et punkttegurile teist sellesama korrutise tegurit mingi arvu kordselt liites ei muuda me põhipunktide korrutise ette tuleva determinandi suurust. Tuleb ju siis esimese põhiomaduse järgi sellele determinandile teine liidetavaks juurde, aga sellel teisel saab liidetava punktteguri kordaja võtta determinandi ette ja siis on sellel determinandil 2 samast rida, nii et ta on null teise põhiomaduse järgi.

Nelitahuka *ABCD* ruumala arv saab aritmeetika järgi positiivne siis, kui tema põhja pindala *ABC* on positiivne, nagu ka kõrgus — tipu *D* kolmas koordinaat, või jälle mõlemad negatiivsed. Siis on nelitahukal *ABCD* nukkide k r u v i j ä r j e k o r d samane nelitahuka *OXYZ* omaga: kummalgi on viimane nukk eelmisi läbivast tasandist sellel poolel, kust kummalgi nende eelmiste ringjärjekord paistab samasena. Ruumala arvu negatiivsuse korral oleks lugu vastupidi. Selle kohta ütleme, et nelitahuka ruumala arv esitab ka selle nelitahuka s u u n a.

Nelitahuka *ABCD* suund on samane tema teisendi *A'B'C'D* omaga. Sest kolmnurga nukki vastasküljega ||-selt edasi viies ei muuda me selle kolmnurga nukkide ringjärjekorda ega nelitahuka nukki vastastahuga (selle servaga) ||-selt edasi viies selle nelitahuka nukkide kruvijärjekorda.

Seega siis, k u i r u u m i p õ h i p u n k t i d e k o r r u t i s e l o e m e n e n d e p u n k t i d e v a h e l i s e r u u m i t ü k i e s i t iseks suuruse ja positiivse suuna poolest, esitab ruumi iga nelja punkti korrutis tõesti nende punktide vahelise ruumitüki nii suuruse kui ka suuna poolest, kuid mitte enam individuaalselt: igal sellisel neljal punktil, millede vaheline ruumitükk on võrdne $ABCD$ omaga, saab korrutis sellekohases järjekorras samane $ABCD$ omaga.

9. Assotsiatiivsuse rakendamine. Kolme punkti korrutis ruumis. Tasand. Korrutame punktest A, B, C, D esiti kaks esimest, siis teised ja viimaks saadud korrutised omavahel. Olgu endiselt

$$AB = p_{01}O\boldsymbol{i} + p_{02}O\boldsymbol{j} + p_{03}O\boldsymbol{k} + p_{12}\boldsymbol{ij} + p_{23}\boldsymbol{jk} + p_{31}\boldsymbol{ki}$$

ja analoogiliselt

$$CD = q_{01}O\boldsymbol{i} + q_{02}O\boldsymbol{j} + q_{03}O\boldsymbol{k} + q_{12}\boldsymbol{ij} + q_{23}\boldsymbol{jk} + q_{31}\boldsymbol{ki},$$

kus on muidugi

$$q_{01} = \begin{vmatrix} 1 & c_1 \\ 1 & d_1 \end{vmatrix}, \quad q_{02} = \begin{vmatrix} 1 & c_2 \\ 1 & d_2 \end{vmatrix}, \quad q_{03} = \begin{vmatrix} 1 & c_3 \\ 1 & d_3 \end{vmatrix}, \quad q_{12} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix},$$

$$q_{23} = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix}, \quad q_{31} = \begin{vmatrix} c_3 & c_1 \\ d_3 & d_1 \end{vmatrix}.$$

Siis on nende nelja punkti korrutis

$$ABCD = (p_{01}q_{23} + p_{02}q_{31} + p_{03}q_{12} + p_{12}q_{03} + p_{23}q_{01} + p_{31}q_{02})OXYZ,$$

nii et neljarealine determinant on taandunud kuue kergesti arvutatava liikme summaks. Kui siin saaks sirge CD samaseks sirgega AB, nii et q_{ik} erineksid koordinaadest p_{ik} vahest ainult ühise kordaja — lõikude CD ja AB jagatise — poolest, siis oleks ju nende punktide või ka lõikude vaheline ruumala null ja mõõdu kordajas esineks jälle ühe sirge koordinaatide vaheline seos

$$p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0$$

mingi arvu kordselt.

Nelja punkti korrutis saab veelgi lihtsama ilme siis, kui on kergesti saadav kolme oma

$$ABC = u_1O\boldsymbol{jk} + u_2O\boldsymbol{ki} + u_3O\boldsymbol{ij} + u_0\boldsymbol{jik},$$

kus on

$$u_1 = \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} 1 & a_3 & a_1 \\ 1 & b_3 & b_1 \\ 1 & c_3 & c_1 \end{vmatrix}, \quad u_3 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad u_0 = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

ja kus veergude järjekord on ikka nii valitud, et ei tuleks tegu miinusega. On ju siis

$$ABCD = (u_1 d_1 + u_2 d_2 + u_3 d_3 + u_0) OXYZ.$$

Meie kolme punkti korrutis ruumis esitab kolmnurga ABC tema suuruse ja seisu poolest. Sest tema esimesed 3 liiget esitavad ilmselt selle kolmnurga projektsioonid järgemööda tasandeil OYZ, OZX ja OXY suuruse ja suuna poolest, kuna neljas liige pärast tagantkorrutamist punktiga O esitab nelitahuka $ABCO$ suuruse ja suuna poolest.

See kolme punkti korrutis esitab ka terve tasandi ABC selle poolest, et selle tasandi iga punkt

$$P = O + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

korrutatud selle kolme punkti korrutisega, annab nulli

$$ABCP = (u_1 x + u_2 y + u_3 z + u_0)\, OXYZ = 0.$$

Sest ühe tasandi nelja punkti vahelise ruumitüki suurus on null. Seega peavad tasandi ABC iga punkti koordinaadid rahuldama selle t a s a n d i v õ r r a n d i t

$$u_1 x + u_2 y + u_3 z + u_0 = 0.$$

Selle võrrandi kordajate — selle t a s a n d i k o o r d i n a a t i d e u_1, u_2, u_3, u_0, kohta teame, et esimesed 3 on kolmnurga ABC projektsioonide suurused tasandeil OYZ, OZX ja OXY, kuna viimane — vaba liige — on selle nelitahuka suurus, millele see kolmnurk on põhjaks ja millel tipp on koordinaatide alguses. Olgu selle kolmnurga pindala S, tema tasandi — meie võrrandiga määratud tasandi — ristjoon olgu r ja alguspunkti kaugus sellest tasandist p. Siis on geomeetria järgi

$$u_1 = S \cos \widehat{OYZ \cdot S} = S \cos \widehat{xr}$$

(nurk kahe tasandi vahel on võrdne nurgaga nende ristjoonte vahel) ja samuti ka

$$u_2 = S \cos \widehat{yr}, \quad u_3 = S \cos \widehat{zr}, \quad u_0 = Sp.$$

Seega on t a s a n d i k o o r d i n a a d i d v õ r d e l i s e d t e m a r i s t j o o n e s i h i k o o s i n u s t e g a j a a l g u s p u n k t i k a u g u s e g a t e m a s t.

10. Vektorite korrutised. Et vektori alguseks võime võtta ükskõik millise punkti, siis võtame selleks seni koordinaatide alguse, kuni pole mingi muu punkt sobivam. Lühenduseks kirjutame vektori ühe väikese, aga rasvase tähega:

$$A - O = \boldsymbol{a},\ B - O = \boldsymbol{b} \text{ jne.},$$

nii et

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k} \text{ jne.}$$

Kahe vektori kui kahe lineaarse punktavaldise korrutis on punktide korrutiste summa ja seega alternatiivne, nagu punktide korrutiski, näiteks $\boldsymbol{ii} = 0$, $\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji}$. Sellest järgneb

$$\boldsymbol{ab} = (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\,(b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) =$$

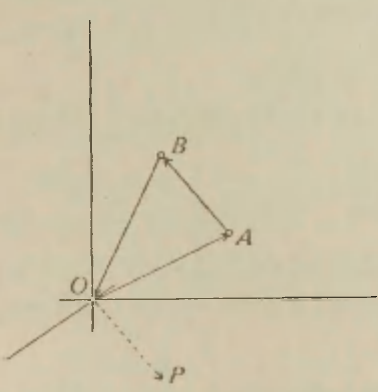
$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{jk} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \boldsymbol{ki} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{ij}.$$

Sellist kahe vektori korrutist (varsti näeme veel teissugust) on nimetatud b i v e k t o r i k s. Tema avaldis punktide korrutiste summana on:

$$\boldsymbol{ab} = (A - O)\,(B - O) = AB + BO + OA,$$

nagu ka ü h i k v e k t o r e i l (nendes puuduvate ühikvektorite järjekorras)

$$\boldsymbol{jk} = (Y - O)\,(Z - O) = YZ + ZO + OY,$$
$$\boldsymbol{ki} = (Z - O)\,(X - O) = ZX + XO + OZ,$$
$$\boldsymbol{ij} = (X - O)\,(Y - O) = XY + YO + OX.$$



Joon. 8.

Neist avaldistest näeme, et bivektor on selliste kolme joonvektori summa, millel igaühel on lõpp teise alguseks. Kui esitame joonvektori graafiliselt noolega, mille algus ja lõpp (tipp) on joonvektori omad, siis on bivektor graafiliselt esitatud n o o l - k o l m n u r g a g a, kus iga külje lõpp on teise alguseks. See meenutab väga ümberringiliikumist — pöörlemist. Selle graafilise esitise saame teisendada sellega, et neist kolmest joonvektorist mingid kaks liidame. Nende graafiline summa, mis lähtub muidugi nende ühisest punktist, on rööbik ja võrdne kolmanda küljega, aga vastassuunaline, nagu see järgneb muidugi ka arvutusest: kui näiteks liidame BO ja OA ja kui on $P - O = A - B$, siis

$$BO + OA = O\,(A - B) = O\,(P - O) = OP$$

ja seega

$$AB + BO + OA = AB + OP = AB - PO.$$

Kahe paralleelse ja suuruselt ning suunalt võrdse joonvektori vahena esitatud bivektorit nimetatakse lihtsalt paariks.

Bivektori avaldisest ühikvektoreis näeme, et bivektorid on võrdsed, kui nende noolkolmnurgad asetsevad samal või paralleelseil tasandeil ja omavad suuruse ja suuna poolest võrdsed pindalad. Sest ühikbivektorite kordajad — avaldatud bivektori komponendid — on selle kolmnurga projektsioonide pindalad suuruse ja suuna poolest. Sellest järgneb, et võrdseil paarel on joonvektori suurus pöördvõrdeline joonvektoritevahelise kaugusega. Sest joonvektori suurus, korrutatud selle kaugusega, on bivektori noolkolmnurga suurus — selle bivektori suurus. Sellest järgneb, et bivektor, liitudes tema tasandile paralleelse joonvektoriga, viib seda ||-sena edasi oma tasandiga paralleelselt. Selle edasiviimise suund ja suurus järgnevad muidugi sellest, et kolmnurgal, mille alust esitab see uus joonvektor ja mille tipp on vana peal, peavad olema pindala suurus ja suund samased selle bivektori noolkolmnurga omiga.

Vektor on viimase saja aasta jooksul osutunud imemõnusaks arvutusabinõuks, eriti mehaanikas, aga ka geomeetrias. Bivektor kui pöörlemise esitis ei ole rakenduv geomeetrias ja kahe joonvektori vahena on ta seda ainult vähe. Aga kuni tarvitatakse Cartesius'e ristkoordinaate, seni on geomeetrias väga tarvilik vabavektor, mille komponendeks on bivektori omad. Seda vabavektorit nimetatakse bivektori tegurite vektorkorrutiseks. Ta on, nagu tasandi koordinaatide puhul märkisime, risti selle bivektori tasandiga ning seega oma kummagi teguriga ja tema suuruseks on nende tegurite vahelise pindala suuruse arv. Vektorkorrutise tehtemärgiks võtame kaldristi. Siis on

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

ning siis

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}.$$

Kolme vektori

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= A - O = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{b} &= B - O = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{c} &= C - O = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

korrutis

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{ijk}$$

on assotsiatiivsuse pärast kahe esimese vektori korrutise — bivektori — korrutis kolmandaga, s. o.

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{ab}.\boldsymbol{c} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{jk} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \boldsymbol{ki} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{ij} \right).$$

$$(c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}) =$$

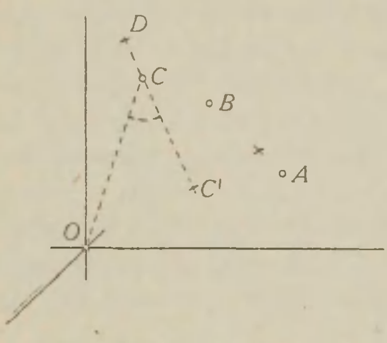
$$= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 \right) \boldsymbol{ijk}.$$

Korrutame siin kummagi poole eestpoolt punktiga O. Siis saame

$$O\boldsymbol{abc} = OABC = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 \right) (O\boldsymbol{ijk} = OXYZ).$$

Siit näeme, et s i i s, k u i k o l m e ü h i k v e k t o r i k o r r u t i s e l o e m e n e n d e v e k t o r i t e v a h e l i s e r u u m i t ü k i e s i t i s e k s s u u r u s e j a s u u n a p o o l e s t, e s i t a b n i i i g a k o l m e v e k t o r i k o r r u t i s n e n d e v a h e l i s e r u u m i t ü k i.

Olgu $C'C$ nelitahuka $OABC$ kõrgus ja punkt D sirgel $C'C$ nii, et vektori $D - C' = \boldsymbol{d}$ komponendid oleksid võrdsed bivektori $\boldsymbol{ab}$ omiga.



Joon. 9.

Siis on $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

Vektorarvutuses käsitletakse vektorit tema komponentide tabelina ühe-realise või üheveerulise m a a t r i k s i n a, näiteks

$$\boldsymbol{a} = (a_1\, a_2\, a_3).$$

Kahe vektori vektorkorrutis on nende komponendest koosneva kaherealise maatriksi, näiteks

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

determinantide maatriks

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (d_1 d_2 d_3).$$

Kolme vektori korrutises näeme kahe esimese vektorkorrutise $\boldsymbol{d}$ ja vektori $\boldsymbol{c}$ samanimeliste (esimeste, teiste jne.) komponentide korrutiste summat. Kahe vektori samanimeliste (esimeste, teiste jne. komponentide korrutiste summat nimetatakse nende kahe vektori s k a l a a r k o r r u t i s e k s. Meie kolme vektori korrutises $\boldsymbol{abc}$ ühikvektorite korrutise kordaja — kirjutame ta $(\boldsymbol{abc})$ — on siis vektorite $\boldsymbol{d}$ ja $\boldsymbol{c}$ skalaarkorrutis. Skalaarkorrutise märgiks on kirjanduses sagedasti täpp ja sellepärast nimetatakse skalaarkorrutist ka t ä p p k o r r u t i s e k s ning siis vektorkorrutist ka ristkorrutiseks. Seega on $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{d}$ korral

$$(\boldsymbol{abc}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{c} = d_1c_1 + d_2c_2 + d_3c_3$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Vektori $\boldsymbol{d}$ suurus $|\boldsymbol{d}| = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}$ on nelitahuka $OABC$ põhja OAB suurus. Ruumala arvu saame korrutades põhja suurust kõrguse suurusega. Kõrguse suurus on külgmise serva OC projektsioon põhja ristjoone — vektori $\boldsymbol{d}$ sihi — peal, s. o. selle serva pikkus, korrutatud tema ja $\boldsymbol{d}$ sihtide vahelise nurga koosinusega. Selle serva pikkus on vektori $\boldsymbol{c}$ suurus

$$|\boldsymbol{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}.$$

Seega on kahe vektori skalaarkorrutis nende vektorite suuruste korrutis, korrutatud nende sihtide vahelise nurga koosinusega, näiteks

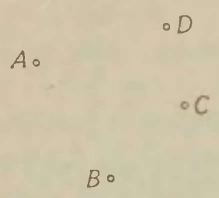
$$\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{d}| \cdot |\boldsymbol{c}| \cos \widehat{dc}.$$

Kahe vektori vektorkorrutise suurus on omakorda nende vektorite suuruste korrutis, korrutatud nende vahelise nurga siinusega, näiteks

$$\boldsymbol{d} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \sin \widehat{\boldsymbol{ab}} \cdot$$

Sest kolmnurga pindala arv on kahe külje pikkuste korrutis, korrutatud nende vahelise nurga siinusega (mõõdus OXY).

11. Lõikekorrutis. Jaotusvalemid. Ühe tasandi kahe sirge AB ja CD lõikepunkt kirjutatakse $AB \cdot CD$. See kirjutis on oma kuju poolest nende kahe sirge korrutis, ja teda kui korrutist distributiivsuse põhjal käsitledes saame tõesti avaldise nende kahe sirge ühisele punktile. Siin tuleb vaid silmas pidada kahte erilist asjaolu. Üheks eriliseks asjaoluks on see, et assotsiatiivsus on siin piiratud täpi asukohaga: enne tuleb korrutada kummalgi pool täppi, siis alles saadud avaldised teineteisega. Ei saa ju näiteks siin kõrval joonisel sirgete AB ja CD lõikepunkt olla samane sirgete AC ja BD omaga.



Joon. 10.

Teiseks eriliseks asjaoluks on siin see, et selles tasandilises korrutises esineb punkttegureid 4. Sellepärast saame teostatud korrutise igas liikmes põhipunkttegureid 4, kuna erinevaid põhipunkte on tasandil vaid 3. Ent tasandil on kolme põhipunkti korrutis skalaar, mis tuleb liikmete ühise tegurina võtta korrutise ette.

Needsamad erilised asjaolud tuleb silmas pidada korrutiste $AB \cdot CDE$ ja $ABC \cdot DEF$ arvutamisel, s. o. ruumis sirge ja tasandi lõikepunkti ja kahe tasandi lõikesirge avaldiste tuletamisel. Siin saab aga esimese avaldise liikmeis põhipunkttegureid 5, teise omis 6, kuna erinevaid põhipunkte on ruumis 4. Nelja punkti korrutis kui skalaar tuleb võtta liikmete ühise kordajana avaldise ette.

Kuid kõiki neid lõikekorrutisi on lihtsam arvutada valemite abil, mis võimaldavad neid korrutisi jaotada mitmeks lihtsaks, kus on antud punkte üksikult või lõikesirge korral kaheteguriliste korrutistena korrutatud neistsamust antud punktest koosnevate skalaaridega. Neid valemeid nimetatakse j a o t u s v a l e m e i k s.

Korrutise $AB \cdot CD$ jaoks saame jaotusvalemi sel teel, et avaldame korrutises $AB \cdot CD$ esimese punkti A teistes

$$A = x_0 B + x_1 C + x_2 D,$$

korrutame selle (tagant) punktiga B (kusjuures esimene liige annab muidugi 0) ja saaduse

$$AB = (x_1 C + x_2 D) B$$

korrutisega CD. Siis saame

$$AB \cdot CD = (x_1 C + x_2 D) BCD,$$

kus tegur sulgude taga on skalaar ja seega sulgudes nimelt otsitava punkti avaldis. Seal tuleb vaid arvutada kordajad x_1 ja x_2. Kordaja x_2 arvutamiseks korrutame punkti A avaldise korrutisega BC. Siis saame

$$ABC = x_2 \, DBC,$$

kust

$$x_2 = ABC : DBC.$$

Kordaja x_1 jaoks korrutame punkti A avaldise korrutisega BD. Siis saame

$$ABD = x_1\, CBD,$$

kust

$$x_1 = ABD : CBD = -ABD : BCD.$$

Seega on e s i m e s e k s j a o t u s v a l e m i k s

$$AB \cdot CD = ABC \cdot D - ABD \cdot C.$$

Selle valemi järgi saab otsekohe kirjutada sirgete AB ja CD lõikepunkti koordinaadid, kui oleme arvutanud kolmnurkade ABC ja ADB pindalade arvud (viies seega teise liikme miinuse skalaari ADB sisse)

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = a, \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & d_1 & d_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = b.$$

On ju siis need koordinaadid

$$x = (ad_1 + bc_1) : (a + b),$$
$$y = (ad_2 + bc_2) : (a + b),$$

sest põhilausete järgi t u l e b p u n k t i d e j a o k s s a a d u d a v a l d i s j a g a d a s e a l l i i d e t u d p u n k t i d e k o r d a j a t e s u m m a g a s e l l e k s, e t l i i d e t u d p u n k t i d e k o o r d i n a a t i d e s u m m a d s a a k s i d a v a l d a t a v a p u n k t i k o o r d i n a a d e k s.

Otse samal viisil kui esimene, tuletub t e i n e j a o t u s v a l e m

$$ABC \cdot DE = -ABCD \cdot E + ABCE \cdot D.$$

Tasandite ABC ja DEF lõikejoone jaoks saame jaotusvalemi, kui avaldame sirge AB punktes C, D, E, F:

$$AB = x_{01}CD + x_{02}CE + x_{03}CF + x_{12}DE + x_{23}EF + x_{31}FD.$$

Siis on ju (pärast nullväärtusega liikmete ärajätmist)

$$ABC = (x_{12}DE + x_{23}EF + x_{31}FD)C,$$

kus saame tundmatud kordajad, endiselt korrutades sirget AB sirgetega CD, CE ja CF:

$$x_{23} = ABCD : EFCD,$$
$$x_{31} = ABCE : FDCE,$$
$$x_{12} = ABCF : DECF.$$

Nii saame kolmanda jaotusvalemi

$$ABC \cdot DEF = ABCD \cdot EF + ABCE \cdot FD + ABCF \cdot DE.$$

Selle viimase valemi järgi on

$$\begin{aligned} OAB \cdot OCD &= OABC \cdot DO + OABD \cdot OC \\ &= - OABC \cdot OD + OABD \cdot OC; \end{aligned}$$

on ju esimese liikme kordaja skalaar $OABO$ null. Avaldame selle võrduse vektoreis, siis saame

$$\boldsymbol{Oab} \cdot \boldsymbol{Ocd} = - \boldsymbol{Oabc} \cdot \boldsymbol{Od} + \boldsymbol{Oabd} \cdot \boldsymbol{Oc}$$

ja üldist kahekordset kordajat O ära jättes

$$\boldsymbol{ab} \cdot \boldsymbol{cd} = - \boldsymbol{abc} \cdot \boldsymbol{d} + \boldsymbol{abd} \cdot \boldsymbol{c}.$$

Kui siin võtame bivektori $\boldsymbol{ab}$ asemele samade komponendega vektori, mis olgu

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b},$$

ja bivektori $\boldsymbol{cd}$ asemele samade komponendega vektorkorrutise $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}$, siis on skalaarid skalaarkorrutised

$$(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{ec}), \ (\boldsymbol{abd}) = (\boldsymbol{ed})$$

ja meie kahe bivektori korrutis, mis tema avaldise järgi on vektorkorrutis, annab kahekordse vektorkorrutise valemi

$$\boldsymbol{e} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = -(\boldsymbol{ec})\boldsymbol{d} + (\boldsymbol{ed})\boldsymbol{c}.$$

Teise ja kolmanda valemi rakendamise näide:

$$\begin{aligned} A &= (1 \ -1 \quad 1) \\ B &= (2 \ -3 \ -1) \\ C &= (3 \ -1 \quad 2) \\ D &= (5 \ -4 \quad 2) \\ E &= (4 \ -1 \ -2) \\ F &= (3 \ -2 \quad 7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB &= (1 \quad -2 \quad -2 \quad -1 \quad 4 \quad 3) \\ \overline{ABC} &= (-4-2+4 \quad -6-2+3 \\ &\quad -1+6-1 \quad 2-12+3) \\ \overline{ABCD} &= (-2 \cdot 5) + (-5 \cdot -4) + \\ &\quad + (4 \cdot 2) - 7 = 11 \\ \overline{ABCE} &= (-2 \cdot 4) + (-5 \cdot -1) + \\ &\quad + (4 \cdot -2) - 7 = -18 \\ \overline{ABCF} &= (-2 \cdot 3) + (-5 \cdot -2) + \\ &\quad + (4 \cdot 7) - 7 = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L = \overline{ABC \cdot DE} &= [11 \cdot 4 + 18 \cdot 5 \quad (11 \cdot -1) + (18 \cdot -4) \quad (11 \cdot -2) + \\ &\quad + 18 \cdot 2] \ : 29 = \left(\frac{134}{29} \quad -\frac{83}{29} \quad \frac{14}{29}\right) \end{aligned}$$

$$LM = ABC \cdot DEF = [(25 \cdot -1) + (11 \cdot -1) + (-18 \cdot 2) \quad (25 \cdot 3) + (11 \cdot -1) + (-18 \cdot -2) \quad (25 \cdot -4) + (11 \cdot 9) + (-18 \cdot -5) \ \ldots] =$$

$$= (-72 \quad 100 \quad 89 \ \ldots) = \begin{cases} x = \frac{134}{29} - 72t \\ y = -\frac{83}{29} + 100t \\ z = \frac{14}{29} + 89t \end{cases}$$

Kontrolliks peavad sirge DE punkti L koordinaadid $5 - t$, $-4 + 3t$ ja $2 - 4t$ rahuldama tasandi ABC võrrandit, nii et on

$$-2(5-t) - 5(-4+3t) + 4(2-4t) - 7 = 0.$$

Siit järgneb

$$-29t = -11 \quad \text{ehk} \quad t = 11 : 29$$

ja seega tõesti $x = 5 - t = 134 : 29$ jne.

Sirge LM kontrolliks tuleb arvutada:

$$DE = (-1 \quad 3 \quad -4 \quad 11 \quad 10 \quad 18)$$

$$DEF = (21 - 8 + 10 \quad -12 + 7 + 18 \quad 2 - 9 + 11 \ \ldots) = \\ = (23 \quad 13 \quad 4 \ \ldots).$$

On ju sirge LM vektor risti tasandite ABC ja DEF ristjoone vektoritega $(-2 \ -5 \ 4)$, $(23 \ 13 \ 4)$ ja seega võrdeline nende vektorkorrutisega $(-72 \ 100 \ 89)$.

ИСЧИСЛЕНИЕ ТОЧЕК В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.

Сводка.

Исчисление точек — это метод аналитической геометрии, по которому точки пространства выражаются алгебраически линейно в 4 фундаментальных точках подобно тому, как векторы выражаются в 3 фундаментальных векторах. Настоящая работа является попыткой более конкретного, чем до сих пор, подхода к началам этого уже более ста лет применяемого метода. В ней еще показано, как из этого вспомогательного метода аналитической геометрии уже само собою следуют, как теория детерминантов, так и векторная алгебра. Ведь еще Мебиус (1827) заметил, что вектор выражается арифметической разностью двух точек, и соответственно этому Гамильтон (1853) дал определение вектора, а основным свойством детерминанта является альтернативность комбинаций строк; Мебиус же нашел, что альтернативность есть также основное свойство комбинаций точек.

Точки обозначены в этой работе прописными буквами, как у Мебиуса и Гамильтона, хотя многие современные авторы, особенно в Германии, предпочитают строчные. Для немецких авторов этот последний способ представляется более удобным, ибо у них для численных коэффициентов остаются свободными готические буквы.

Töö esitatud toimetusele 30. juunil 1945.

MB 01519.
Vastutav toimetaja H. Jaakson. Tehniline toimetaja H. Kohu. Korrektorid J. V. Veski a B. Pravdin. Ladumisele antud 10. XI 1945. Trükkimisele antud 27. II 1946. Paberi kaust 67×95. 1/16. Trükipoognaid 2. Autoripoognaid 1,89. Arvestuspoognaid 1,96. Laotihedus trpg. 44 000. Tiraaž 2200. Trükikoja tellimus 1271. Trükikoda „Hans Heidemann", Tartu, Vallikraavi 4. Hind rbl. 2.—

Исчисление точек в аналитической геометрии.
На эстонском языке. Эгосиздат „Научная Литература", Тарту.