Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Rainis Õunpuu

Iseärasustega Volterra integraalvõrrandi lahendamine kollokatsioonimeetodil

Matemaatika

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: prof. Arvet Pedas

Tartu 2025

ISEÄRASUSTEGA VOLTERRA INTEGRAALVÕRRANDI LAHENDAMINE KOLLOKATSIOONIMEETODIL

Bakalaureusetöö

Rainis Õunpuu

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös vaadeldakse Volterra integraalvõrrandi ligikaudset lahendamist lineaarsplainidega kollokatsioonimeetodil. Käsitletakse võrrandi lahendamist nii pideva tuuma kui ka iseärasustega tuuma korral. On uuritud meetodi koonduvust ja koonduvuskiirust ning saadud teoreetilisi tulemusi on kontrollitud numbriliste näidete abil.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.

Märksõnad: Volterra integraalvõrrand, kollokatsioonimeetod, nõrgalt singulaarne tuum.

COLLOCATION METHOD FOR SOLVING VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS WITH SINGULARITIES

Bachelor thesis

Rainis Õunpuu

Abstract. The bachelor's thesis examines the numerical solution of Volterra integral equations using the collocation method with linear splines. The thesis addresses equations with both continuous kernels and kernels containing singularities. The purpose of the thesis is to study the convergence and convergence rate of the proposed method, as well to compare the theoretical results with numerical examples.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations.

Key Words: Volterra integral equation, collocation method, weakly singular kernel.

Sisukord

Sissejuhatus

Käesolevas bakalaureusetöös vaadeldakse integraalvõrrandit kujul

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x,y)u(y)\,dy, \quad 0 \le x \le b,$$

kus

$$K(x,y) = (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} K_1(x,y), \quad 0 \le \alpha < 1, \quad 0 \le \beta < 1-\alpha.$$

Funktsioonide K_1 ja f kohta eeldatakse, et nad on pidevad vastavalt piirkonnas $Q = \{(x,y)\colon 0 \le y \le x \le b\}$ ja lõigul $[0,b]$. Eesmärgiks on vaadelda võrrandi ligikaudset lahendamist kollokatsioonimeetodiga, mis tugineb võrrandi lahendi u lähendamisele pidevate lineaarsplainidega u_n lõigul $[0,b]$ sobivalt valitud võrgu $\Delta_n = \{x_0, x_1, ..., x_n : 0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ korral, kus n on mingi naturaalarv. Töö eesmärgiks on leida tingimused, millal viga $u_n - u$ väheneb võrgupunktide arvu $n+1$ kasvamisel ning tuletatada hinnangud vea $u_n - u$ suurusele olenevalt α ja β väärtustest ning funktsioonide f ja K_1 siledusest (vt Teoreeme 6, 7, 8). Bakalaureusetöös üldistatakse töös [1] saadud tulemused laiemale integraalvõrrandite klassile.

Bakalaureusetöö koosneb neljast osast. Esimeses osas vaadeldakse integraalvõrrandi lahendi olemasolu ja siledusega seotud küsimusi. Teises osas käsitletakse võrrandi ligikaudset lahendamist pidevate lineaarsplainidega kollokatsioonimeetodil. Kolmandas osas uuritakse kollokatsioonimeetodi abil saadud lähislahendite koonduvust ja koonduvuse kiirust. Neljandas osas rakendatakse vaadeldud meetodit selliste integraalvõrrandite ligikaudsel lahendamisel, mille lahend on teada.

1 Volterra integraalvõrrand

Tähistame tähega $\mathbb{R}$ kõikide reaalarvude hulka ning tähega $\mathbb{N}$ naturaalarvude hulka. Olgu $C[a,b]$ lõigul $[a,b]$ kõigi pidevate funktsioonide hulk ja $C^m[a,b] (m \in \mathbb{N})$ kõigi m korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulk lõigul $[a,b]$. Hulk $C[a,b]$ on Banachi ruum normiga $\|f\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$, kus $f \in C[a,b]$. Olgu X, Y Banachi ruumid. Siis kõigi pidevate lineaarsete operaatorite $A \colon X \to Y$ ruumi tähistame kirjutisega $L(X,Y)$. Kõiki m korda pidevalt diferentseeruvaid funktsioone piirkonnas Q tähistame $C^m(Q) (m \in \mathbb{N})$.

Vaatleme lineaarset võrrandit

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x,y)u(y)\,dy, \quad 0 \le x \le b, \quad b > 0, \tag{1.1}$$

kus f ja K on antud funktsioonid ning u on otsitav. Võrrandit (1.1) nimetatakse Volterra teist liiki integraalvõrrandiks, seejuures liiget K nimetatakse võrrandi tuumaks ning liiget f vabaliikmeks. Võrrandi (1.1) tuuma K kohta eeldame, et

$$K(x,y) = (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} K_1(x,y), \tag{1.2}$$

kus

$$0 \le \alpha < 1, \quad 0 \le \beta < 1-\alpha, \quad K_1 \in C(Q), \quad Q = \{(x,y) : 0 \le y \le x \le b\}. \tag{1.3}$$

Kui $\alpha = \beta = 0$, siis võrrandi (1.1) lahendi olemasolu ja ühesuse kohta kehtib järgmine väide (vt [2], lk 5).

Teoreem 1. *Olgu $\alpha = \beta = 0$. Kui funktsioon K_1 on pidev piirkonnas Q ja $f \in C[0,b]$, siis võrrandil (1.1) on olemas ühene lahend $u \in C[0,b]$.*

Tõestame teoreemi võrrandi (1.1) lahendi u sileduse kohta:

Teoreem 2. *Olgu $\alpha = \beta = 0$. Olgu $f \in C^m[0,b]$, $K_1 \in C^m(Q)$, $m \in \mathbb{N}$. Siis võrrandi (1.1) lahend u kuulub hulka $C^m[0,b]$.*

Tõestus. Olgu $m = 1$ ja olgu $u \in C[0,b]$ võrrandi (1.1) lahend, s.t $u(x)$ rahuldab võrrandit

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x,y)u(y)\,dy \tag{1.4}$$

Kuna $f \in C^1[0,b]$ ja $\frac{\partial}{\partial x}K(x,y)$ on pidev funktsioon piirkonnas Q, siis korrutis $\left[\frac{\partial}{\partial x}K(x,y)\right] u(y)$ on pidev piirkonnas Q ning seega

$$\frac{d}{dx}\int_0^x K(x,y)u(y)\,dy = \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}K(x,y)u(y)\,dy + K(x,x)u(x).$$

Seega võrduse (1.4) parem pool $f(x) + \int_0^x K(x,y)u(y)\,dy$ on iga $x \in [0,b]$ korral diferentseeruv ning võrrandi (1.4) lahendi u tuletis avaldub kujul

$$u'(x) = f'(x) + K(x,x)u(x) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}K(x,y)u(y)\,dy, \quad 0 \le x \le b. \tag{1.5}$$

Kuna liikmed $\int_0^x \frac{\partial}{\partial x}K(x,y)u(y)\,dy, K(x,x)u(x), f'(x)$ on lõigus $[0,b]$ pidevad, siis ka võrduse (1.5) vasak pool $u'(x)$ on pidev lõigus $[0,b]$ ning $u \in C^1[0,b]$.

Olgu $m = 2$. Kuna $u \in C^1[0,b]$ ja $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 K \in C(Q)$, siis leidub võrduse (1.5) paremast poolest tuletis muutuja x järgi:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left[f'(x) + K(x,x)u(x) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}K(x,y)u(y)\,dy\right] \\
&= f''(x) + \frac{d}{dx}\left[K(x,x)\right]u(x) + K(x,x)u'(x) + \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \frac{\partial}{\partial x}K(x,y)u(y)\,dy\right] \\
&= f''(x) + \frac{d}{dx}\left[K(x,x)\right]u(x) + K(x,x)u'(x) + \int_0^x \frac{\partial^2}{\partial x^2}K(x,y)u(y)\,dy + \frac{d}{dx}[K(x,x)u(x)] \\
&= f''(x) + 2\frac{d}{dx}\left[K(x,x)\right]u(x) + 2K(x,x)u'(x) + \int_0^x \frac{\partial^2}{\partial x^2}K(x,y)u(y)\,dy, \quad 0 \le x \le b.
\end{aligned}$$

Kuna saadud avaldis on pidev lõigul $[0,b]$, siis leidub ka võrrandi (1.5) vasakust poolest pidev tuletis lõigul $[0, b]$, s.t

$$u''(x) = f''(x) + 2\frac{d}{dx}\left[K(x,x)\right]u(x) + 2K(x,x)u'(x) + \int_0^x \frac{\partial^2}{\partial x^2}K(x,y)u(y)\,dy$$

ning $u \in C^2[0, b]$. Analoogilist arutelu jätkates jõuame tulemuseni $u \in C^m[0, b]$. $\square$

Toome sisse hulga $C^{2,\theta}(0, b], 0 < \theta < 1$, mille elementideks on lõigus $[0, b]$ pidevad ning poollõigus $(0, b]$ kaks korda pidevalt diferentseeruvad funktsioonid u, mille tuletised u' ja u'' rahuldavad tingimusi

$$|u'(x)| \leq C_1 x^{-\theta}, \quad |u''(x)| \leq C_2 x^{-\theta-1}, \quad 0 < x \leq b,$$

kus C_1 ja C_2 on mingid positiivsed konstandid, mis ei sõltu suurusest $x \in (0, b]$. On selge, et $C^2[0, b] \subset C^{2,\theta}(0, b]$.

Osutub, et võrrandi (1.1) lahendi sileduse kohta tingimustel (1.2)-(1.3) kehtib järgmine teoreem (vt. [3]).

Teoreem 3. *Kehtigu eeldused* (1.3)*. Kui* $f \in C[0, b]$*, siis võrrandil* (1.1) *leidub parajasti üks lahend* $u \in C[0, b]$*. Kui* $\alpha \in (0, 1)$*,*$0 \leq \beta < 1 - \alpha$*,* $K_1 \in C^2(Q)$ *ja* $f \in C^{2,\theta}(0, b]$*, kus* $\theta = \alpha + \beta$*, siis võrrandi* (1.1) *lahend* u *kuulub klassi* $C^{2,\theta}(0, b]$*.*

2 Kollokatsioonimeetod

2.1 Võrk

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu lõigul $[0, b]$ antud võrk:

$$\Delta_n = \{x_0, x_1, ..., x_n : 0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}.$$

Punkte $x_0, \ldots, x_n$ nimetatakse võrgu Δ_n sõlmedeks. Moodustame võrgu Δ_n sõlmede põhjal osalõikude $[x_{i-1}, x_i](i = 1, \ldots, n)$ pikkused $x_i - x_{i-1}$ ja tähistame maksimaalse osalõigu pikkuse tähega h_n:

$$h_n = \max_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1}).$$

Olgu võrgu Δ_n sõlmed antud seosega

$$x_i = b \left(\frac{i}{n}\right)^r, \quad r \in [1, \infty), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Paneme tähele, et $r = 1$ korral on iga osalõik $[x_{i-1}, x_i](i = 1, ..., n)$ pikkusega $\frac{b}{n}$. Sellist võrku nimetatakse ühtlaseks võrguks. Kui $r > 1$, on iga osalõik pikem eelnevast osalõigust. Selliselt defineeritud võrku nimetatakse gradueeritud võrguks.

Osutub, et

$$h_n \to 0, \quad kui \quad n \to \infty. \tag{2.2}$$

Tõepoolest, sõlmede (2.1) korral

$$\begin{aligned} x_i - x_{i-1} &= b\left[\left(\frac{i}{n}\right)^r - \left(\frac{i-1}{n}\right)^r\right] \\ &= b\left(\frac{1}{n}\right)^r [i^r - (i-1)^r] \\ &\leq b\left(\frac{1}{n}\right)^r rn^{r-1} = \frac{br}{n}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Seega

$$h_n = \max_{i=1,...,n} (x_i - x_{i-1}) \leq \frac{br}{n} \to 0, \quad kui \quad n \to \infty.$$

2.2 Lineaarsplainid

Olgu meil lõigul $[0, b]$ antud võrk Δ_n, kus $n \geq 2$. Defineerime võrguga Δ_n seotud funktsioonid $\varphi_0, ..., \varphi_n$ järgmiselt:

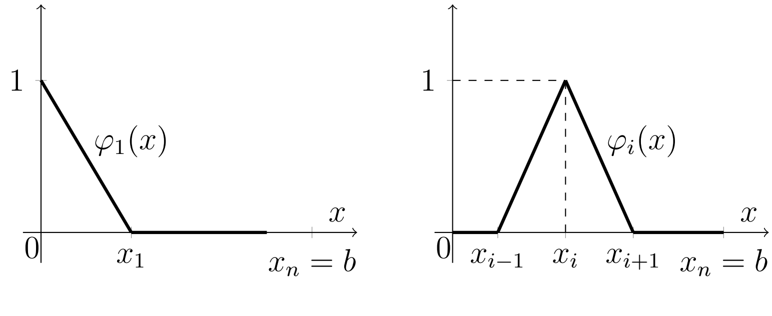
$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{kui} \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & \text{kui} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad i = 1, ..., n-1, \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases} \tag{2.3}$$

Juhul kui $i = 0$ ja $i = n$, defineerime

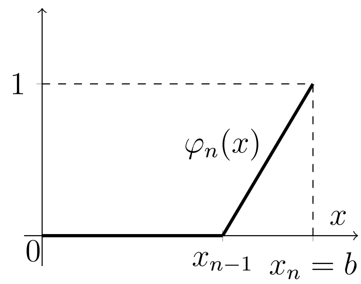
$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & \text{kui} \quad x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0, & \text{mujal,} \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & \text{kui} \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n, \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Vastavate funktsioonide esitused on toodud joonisel 1 ja joonisel 2.



Joonis 1: Funktsioonide φ_0 ja $\varphi_i (i = 1, ..., n-1)$ esitus.



Joonis 2: Funktsiooni φ_n esitus.

Sellisel viisil defineeritud funktsioonid on lõigu $[0, b]$ igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i](i = 1, \ldots, n)$ esimese astme polünoomid, mis on pidevad tervel lõigul, s.t tegemist on lineaarsplainidega (täpsemalt vt. [1]).

Funktsioonide (2.3)-(2.5) korral saame iga $i, j = 0, \ldots, n$ puhul, et kehtib

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, \text{kui} & i = j, \\ 0, \text{kui} & i \neq j. \end{cases} \tag{2.6}$$

Osutub, et antud funktsioonid (2.3)-(2.5) on lineaarselt sõltumatud lõigul $[0, b]$. Selle jaoks peame näitama, et kui

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + ... + a_n\varphi_n(x) = 0, \quad \forall x \in [0, b], \tag{2.7}$$

siis

$$a_0 = a_1 = ... = a_n = 0.$$

Selle näitamiseks valime seoses (2.7) $x = x_0$, siis omaduse (2.6) põhjal

$$a_0\varphi_0(x_0) + a_1\varphi_1(x_0) + ... + \varphi_n(x_0) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + ... + a_n \cdot 0 = 0$$

ehk $a_0 = 0$. Analoogiliselt, valides seoses (2.7) $x = x_i(i = 1, ..., n)$, saame $a_i =$

$0(i = 1, ..., n)$. Seega omadus (2.7) saab kehtida ainult juhul, kui

$$a_0 = a_1 = ... = a_n = 0.$$

Seega funktsioonid $\varphi_i (i = 0, ..., n)$ on lineaarselt sõltumatud lõigul $[0, b]$.

2.3 Kollokatsioonimeetodi kirjeldus

Vaatleme Volterra integraalvõrrandit (1.1), s.t võrrandit

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x, y)u(y)\, dy, \quad 0 \leq x \leq b. \tag{2.8}$$

Olgu lõigul $[0, b]$ antud võrk Δ_n, kus $n \geq 2$ ja olgu funktsioonid $\varphi_j (j = 1, \ldots, n)$ defineeritud seoste (2.3)-(2.5) abil. Võrrandi (2.8) lahendile u otsime lähendit kujul

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x), \quad 0 \leq x \leq b, \tag{2.9}$$

kus $c_j (j = 0, ..., n)$ on mingid konstandid. Konstantide määramiseks asetame suuruse (2.9) võrrandisse (2.8) ning nõuame, et integraalvõrrand (2.8) oleks rahuldatud võrgu Δ_n sõlmedes $x_i (i = 0, \ldots, n)$:

$$u_n(x_i) = f(x_i) + \int_0^{x_i} K(x_i, y)u_n(y)\, dy, \quad i = 0, ..., n. \tag{2.10}$$

Tänu esitusele (2.9) saame (2.10) kirjutada kujul

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x_i) = f(x_i) + \int_0^{x_i} K(x_i, y) \left(\sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(y) \right) dy$$

ehk

$$c_i = f(x_i) + \sum_{j=0}^{n} k_{ij} c_j, \quad i = 0, ..., n, \tag{2.11}$$

kus

$$k_{ij} = \int_0^{x_i} K(x_i, y)\varphi_j(y)\, dy, \quad i, j = 0, ..., n.$$

Võrdused (2.11) kujutavad endast lineaarset algebralist võrrandisüsteemi suuruste $c_0, ..., c_n$ leidmiseks. Suuruste k_{ij} arvutamist saab lihtsustada tänu seostele

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = 0, \quad \text{kui} \quad x \geq x_1, \\
&\varphi_j(x) = 0, \quad \text{kui} \quad x \notin (x_{j-1}, x_{j+1}), \quad j = 1, ..., n-1, \\
&\varphi_n(x) = 0, \quad \text{kui} \quad x \leq x_{n-1}.
\end{aligned}$$

Seega saame suuruste k_{ij} arvutamiseks järgmised valemid:

- Kui $j = 0$, siis $k_{00} = 0$ ning

$$k_{i0} = \int_0^{x_1} K(x_i, y)\frac{x_1 - y}{x_1 - x_0}\, dy, \quad i = 1, ..., n.$$

- Kui $i = j$, siis:

$$k_{ij} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x_i, y)\frac{y - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\, dy, \quad i, j = 1, ..., n.$$

- Kui $i - 1 \geq j$, siis:

$$k_{ij} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_i, y)\frac{y - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}\, dy + \int_{x_j}^{x_{j+1}} K(x_i, y)\frac{x_{j+1} - y}{x_{j+1} - x_j}\, dy, \quad i = 2, ..n, \quad j = 1, .., n.$$

- Kui $i < j$, siis:

$$k_{ij} = \int_0^{x_i} K(x_i, y)\frac{x_1 - y}{x_1 - x_0}\, dy = 0, \quad i = 0, ..., n-1 \quad j = 1, ..., n.$$

Edaspidine eesmärk on uurida süsteemi (2.11) ühest lahenduvust ja vea $u_n - u$ suurust erinevate n väärtuste korral.

3 Kollokatsioonimeetod kui Galjorkini meetod

Vaatleme integraalvõrrandit (2.8) operaatorvõrrandina

$$u = f + Tu, \tag{3.1}$$

milles T on operaator, mis on defineeritud võrdusega

$$(Tu)(x) = \int_0^x K(x,y)u(y)\,dy, \quad 0 \le x \le b, \tag{3.2}$$

kus $K(x,y)$ on kujul (1.2). On kerge näha, et operaator T on lineaarne. Tõepoolest, suvaliste $u, v \in C[0,b]$ puhul

$$\begin{aligned}
(T(u+v))(x) &= \int_0^x K(x,y)(u(y)+v(y))\,dy \\
&= \int_0^x K(x,y)u(y)\,dy + \int_0^x K(x,y)v(y)\,dy \\
&= (Tu)(x) + (Tv)(x), \quad x \in [0,b],
\end{aligned}$$

samuti suvalise $\lambda \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned}
(T(\lambda u))(x) &= \int_0^x K(x,y)\lambda u(y)\,dy \\
&= \lambda \int_0^x K(x,y)u(y)\,dy \\
&= \lambda (Tu)(x), \quad x \in [0,b].
\end{aligned}$$

Kuna on täidetud tingimused (1.2)-(1.3), siis operaator $T : C[0,b] \to C[0,b]$ on kompaktne (vt [3]).

Teoreemidest 1 ja 3 saame järeldada, et võrrandile (3.1) vastaval homogeensel võrrandil $u = Tu$ leidub ruumis $C[0,b]$ vaid null-lahend $u = 0$.

Olgu $P_n : C[0,b] \to C[0,b]$ operaator, mis seab suvalisele $u \in C[0,b]$ vastavusse tükiti lineaarse funktsiooni

$$(P_n u)(x) = \sum_{j=0}^{n} u(x_j)\varphi_j(x), \quad 0 \le x \le b, \tag{3.3}$$

kus $\varphi_j (j = 0, ..., n)$ on võrguga Δ_n seotud lineaarsplainid kujul (2.3)-(2.5).

Osutub, et P_n on ruumis $C[0, b]$ lineaarne tõkestatud operaator. $P_n : C[0, b] \to C[0, b]$ on lineaarne, sest suvaliste $u, v \in C[0, b]$ puhul

$$\begin{aligned}(P_n(u + v))(x) &= \sum_{j=0}^{n}(u(x_j) + v(x_j))\varphi_j(x) \\ &= \sum_{j=0}^{n} u(x_j)\varphi_j(x) + \sum_{j=0}^{n} v(x_j)\varphi_j(x) \\ &= (P_n u)(x) + (P_n v)(x) \quad (0 \le x \le b)\end{aligned}$$

ning suvalise $\lambda \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned}(P_n(\lambda u))(x) &= \sum_{j=0}^{n} \lambda u(x_j)\varphi_j(x) \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{n} u(x_j)\varphi_j(x) \\ &= \lambda(P_n u)(x) \quad (0 \le x \le b).\end{aligned}$$

Näitame, et operaator $P_n : C[0, b] \to C[0, b]$ on tõkestatud, s.t leidub selline positiivne konstant c, et iga $u \in C[0, b]$ korral $\|P_n u\|_{C[0,b]} \le c\|u\|_{C[0,b]}$. Tõepoolest, kui

$u \in C[0,b]$, siis

$$\begin{aligned}
\|P_n u\|_{C[0,b]} &= \max_{x\in[0,b]} \left| \sum_{j=0}^{n} u(x_j)\varphi_j(x) \right| \\
&\le \max_{x\in[0,b]} \sum_{j=0}^{n} |u(x_j)|\varphi_j(x) \\
&\le \|u\|_{C[0,b]} \max_{x\in[0,b]} \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(x) \\
&= \|u\|_{C[0,b]}.
\end{aligned}$$

Seega operaator $P_n : C[0,b] \to C[0,b]$ on tõkestatud ja

$$\|P_n\|_{L(C[0,b],C[0,b])} \le 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Veelgi enam, suvalise $u \in C[0,b]$ korral saame

$$(P_n u)(x_i) = \sum_{j=0}^{n} u(x_j)\varphi_j(x_i) = u(x_i), \quad i = 0, 1..., n.$$

Seepärast

$$\begin{aligned}
(P_n(P_n u))(x) &= \sum_{j=0}^{n} (P_n u)(x_j)\varphi_j(x) \\
&= \sum_{j=0}^{n} u(x_j)\varphi_j(x) = (P_n u)(x)
\end{aligned}$$

s.t $P_n^2 = P_n$ ehk operaator P_n on projektor. Siis kehtib $\|P_n\|_{L(C[0,b],C[0,b])} \ge 1$ (vt [4], lk 259) ning kokkuvõttes saame

$$\|P_n\|_{L(C[0,b],C[0,b])} = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Operaatori P_n definitsioonist (3.3) järeldub, et $P_n u = 0$ parajasti siis, kui $u(x_i) = 0$ iga $i = 0, 1, ..., n$ korral.

Tõepoolest, olgu $u \in C[0,b]$ ning eeldame, et $P_n u = 0$, siis $(P_n u)(x_i) = 0$. Definitsiooni kohaselt $(P_n u)(x_i) = u(x_i)$, seega $u(x_i) = 0$ iga $i = 0, 1, ..., n$ korral. Teistpidi implikatsioon järeldub otse definitsioonist (3.3).

Seega on kollokatsioonitingimused (2.10) samaväärsed nõudega

$$P_n(u_n - f - Tu_n) = 0. \tag{3.5}$$

Kuna operaator P_n on lineaarne, saame võrduse (3.5) kirjutada kujul

$$P_n u_n = P_n f + P_n T u_n.$$

Arvestades, et $P_n u_n = u_n$, jõuame võrduseni

$$u_n = P_n f + P_n T u_n. \tag{3.6}$$

Üleminekut võrrandilt (3.1) võrrandile (3.6) nimetatakse Galjorkini meetodiks. Esitame selle kohta teoreemi, mille tõestus on leitav raamatust [5], lk 59.

Teoreem 4. *Olgu T lineaarne kompaktne ehk täielikult pidev operaator Banachi ruumis E. Homogeensel võrrandil $u = Tu$ olgu vaid null-lahend $u = 0$. Projektorid $P_n (n = 1, 2, \dots)$ koondugu $n \to \infty$ korral punktiviisi ühikoperaatoriks:*

$$P_n u \to u, \quad kui \quad n \to \infty \quad (\forall u \in E).$$

Siis võrrand (3.1) on iga $f \in E$ korral üheselt lahenduv ning leidub selline n_0, et $n \geq n_0$ korral on ka võrrandid (3.6) üheselt lahenduvad. Võrrandite (3.6) lahendid u_n koonduvad $n \to \infty$ korral võrrandi (3.1) lahendiks u ning kehtib veahinnang

$$\|u_n - u\|_E \leq c\|u - P_n u\|_E, \quad n \geq n_0, \tag{3.7}$$

kus konstant c ei sõltu arvust n.

3.1 Meetodi koonduvus

Esitame kõigepealt põhihulga definitsiooni ning Banach-Steinhause teoreemi, mis on leitavad raamatust [4], lk 135-137.

Definitsioon 1. Hulka $E \subset X$ nimetatakse põhihulgaks normeeritud ruumis X, kui hulga E lineaarne kate on kõikjal tihe.

Teoreem 5 (*Banach-Steinhausi teoreem*)**.** *Olgu X, Y Banachi ruumid ning E põhihulk ruumis X. Jada $A_n \in L(X,Y)$ koondub punktiviisi operaatoriks $A \in L(X,Y)$ parajasti siis, kui on täidetud järgmised tingimused:*

1) $\exists M \in \mathbb{R}, \|A_n\|_{L(X,X)} \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N},$

2) $A_n x \to Ax, \quad \forall x \in E.$

Olgu operaatorid $P_n (n \geq 2)$ defineeritud võrdusega (3.3) ning olgu $u \in C^1[0,b]$. Siis saame hinnangu

$$\max_{x \in [0,b]} |u(x) - (P_n u)(x)| \leq cn^{-1}, \tag{3.8}$$

kus c on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest n.

Olgu $x \in [x_{i-1}, x_i] (i = 1, \ldots, n)$, siis

$$\begin{aligned} |u(x) - (P_n u)(x)| &= |u(x) - u(x_{i-1})\varphi_{i-1}(x) - u(x_i)\varphi_i(x)| \\ &= \left| u(x) - u(x_{i-1}) \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} - u(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right| \\ &= \left| u(x) - u(x_{i-1}) - \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}) \right|. \end{aligned}$$

Lagrange'i keskväärtusteoreemi (vt [6], lk 127) kohaselt leidub selline $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$, et

$$u'(\xi) = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Kuna $u \in C^1[0,b]$, siis saame selle kirjutada Taylori valemina punktis x_{i-1} jääkliikmega Lagrange'i kujul

$$u(x) = u(x_{i-1}) + u'(\eta)(x - x_{i-1}), \quad \eta \in (x_{i-1}, x).$$

Seega

$$\begin{aligned}
|u(x) - (P_n u)(x)| &= \left| u(x) - u(x_{i-1}) - \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) \right| \\
&= \left| u(x_{i-1}) + u'(\eta)(x - x_{i-1}) - u(x_{i-1}) - u'(\xi)(x - x_{i-1}) \right| \\
&= |(u'(\eta) - u'(\xi))(x - x_{i-1})| \\
&\leq |u'(\eta) - u'(\xi)||x - x_{i-1}| \\
&\leq 2 \max_{t \in [0,b]} |u'(t)| h_n \\
&\leq 2 \max_{t \in [0,b]} |u'(t)| b r n^{-1} = c n^{-1},
\end{aligned}$$

kus $c = 2\max_{t\in[0,b]} |u'(t)| br$, millega oleme näidanud (3.8) kehtivuse.

Kuna kehtib omadus (2.2), siis võrratusest (3.8) järeldub, et iga $u \in C^1[0,b]$ korral

$$\|u - P_n u\|_{C[0,b]} = \max_{x \in [0,b]} |u(x) - (P_n u)(x)| \to 0, \quad kui \quad n \to \infty.$$

Kuna $C^1[0,b]$ on kõikjal tihe ruumis $C[0,b]$ ja kehtib (3.4) siis Banach-Steinhausi teoreemi põhjal saame iga $u \in C[0,b]$ korral, et

$$\|u - P_n u\|_{C[0,b]} \to 0, \quad kui \quad n \to \infty. \tag{3.9}$$

Teoreem 6. *Olgu võrrandi* (1.1) *tuum kujul* $K(x,y) = (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} K_1(x,y)$ *ning kehtigu eeldused* (1.3). *Olgu kollokatsioonimeetodis* (2.9)-(2.10) *kasutusel ühtlane võrk* $\Delta_n (n \geq 2)$ *sõlmedega*

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

kus $h = \frac{b}{n}$.

Siis kehtivad järgmised väited:

1) *kui* $f \in C[0,b]$, *siis integraalvõrrandil* (1.1) *on olemas ühene lahend* $u \in C[0,b]$. *Kui* $\alpha \in (0,1)$,$0 \leq \beta < 1-\alpha$ *ja* $f \in C^{2,\alpha+\beta}(0,b]$, *siis integraalvõrrandil* (1.1) *on olemas lahend* $u \in C^{2,\alpha+\beta}(0,b]$, *mis on ühene ruumis* $C[0,b]$;

2) *leidub selline* $n_0 \in \mathbb{N}$, *et* $n \geq n_0$ *korral kollokatsioonimeetodi* (2.9)-(2.10) *abil saadav lähend* $u_n \in C[0,b]$ *on üheselt määratud;*

3) *leiab aset koondumine*

$$\max_{x\in[0,b]} |u_n(x) - u(x)| \to 0, \quad kui \quad n \to \infty.$$

Tõestus. Väide 1) järeldub teoreemidest 1 ja 3. Väidete 2)-3) tõestamiseks vaatleme integraalvõrrandit (1.1) operaatorkujul (3.1), kus $T : C[0,b] \to C[0,b]$ on defineeritud seosega (3.2).

Olgu $P_n (n \in \mathbb{N})$ projektorid, mis on defineeritud seosega (3.3) ning vaatleme võrrandit

$$u_n = P_n f + P_n T u_n. \tag{3.10}$$

Kuna kehtib koondumine (3.9), siis on täidetud kõik Teoreemi 4 eeldused. Seega leidub selline $n_0 \in \mathbb{N}$, et $n \geq n_0$ korral on võrrand (3.10) üheselt lahenduv ning kehtib veahinnang

$$\|u_n - u\|_{C[0,b]} \leq c\|u - P_n u\|_{C[0,b]}, \quad n \geq n_0, \tag{3.11}$$

kus $u \in C[0,b]$ on võrrandi (1.1) lahend ning c on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest n.

Väide 2) järeldub võrrandi (3.10) ühesest lahenduvusest ning väide 3) järeldub koondumisest (3.9) ja hinnangust (3.11). □

Sõnastame ja tõestame nüüd teoreemid koonduvuse kiiruse kohta.

Teoreem 7. *Olgu $K \in Q$, kus $Q = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x \leq b\}$ (s.t võrrandi* (1.1) *tuuma K korral $\alpha = \beta = 0$ ja $K = K_1$). Olgu kollokatsioonimeetodis* (2.9)-(2.10) *kasutusel ühtlane võrk $\Delta_n (n \geq 2)$ sõlmedega*

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

kus $h = \frac{b}{n}$. Siis lisaks Teoreemi 6 väidetele kehtivad järgmised väited:

1) Kui funktsioon $K_1 \in C^1(Q)$ ja $f \in C^1[0,b]$, siis kehtib veahinnang

$$\max_{x \in [0,b]} |u_n(x) - u(x)| \leq C_1 n^{-1},$$

kus C_1 on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest n.

2) Kui funktsioon $K_1 \in C^2(Q)$ ja $f \in C^2[0,b]$, siis kehtib veahinnang

$$\max_{x \in [0,b]} |u_n(x) - u(x)| \leq C_2 n^{-2}, \tag{3.12}$$

kus C_2 on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest n.

Tõestus. Olgu $P_n (n \geq 2)$ projektorid, mis on defineeritud seosega (3.3). Väite 1) eelduse kohaselt $f \in C^1[0,b]$. Siis Teoreemi 2 kohaselt võrrandi (1.1) lahend $u \in C^1[0,b]$. Teoreemi 4 kohaselt

$$\|u_n - u\|_{C[0,b]} \leq c \|P_n u - u\|_{C[0,b]}.$$

Kuna kehtib hinnang (3.8), siis

$$\max_{x \in [0,b]} |u_n(x) - u(x)| \leq c \max_{x \in [0,b]} |(P_n u)(x) - u(x)| \leq C_1 n^{-1},$$

kus C_1 on positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest n. Seega väide 1) on tõestatud.

Väite 2) eelduse kohaselt $f \in C^2[0,b]$, siis teoreemi 2 kohaselt võrrandi (1.1) lahend $u \in C^2[0,b]$. Seega saame $u_n - u$ iga osalõigu $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, \ldots, n)$ korral esitada kujul (vt [7], lk 17)

$$u_n(x) - u(x) = \frac{u''(\xi)}{2}(x - x_{i-1})(x - x_i),$$

kus $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$,$x \in [x_{i-1}, x_i]$. Seega iga $x \in [x_{i-1}, x_i]$ korral

$$\begin{aligned}
\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |u_n(x) - u(x)| &= \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \left| \frac{u''(\xi)}{2}(x - x_{i-1})(x - x_i) \right| \\
&\leq \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \frac{|u''(\xi)|}{2} \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |(x - x_{i-1})(x - x_i)| \\
&= \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \frac{|u''(\xi)|}{2} \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (x - x_{i-1})(x_i - x).
\end{aligned}$$

Märgime, et $(x - x_{i-1})(x_i - x)$ saavutab oma maksimumi punktis $x = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$, siis

$$\begin{aligned}
\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |u_n(x) - u(x)| &\leq \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \frac{|u''(\xi)|}{2} \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} - x_{i-1} \right) \left(x_i - \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \max_{x \in [0,b]} |u''(\xi)| \frac{1}{4}(x_i - x_{i-1})^2 \\
&= \frac{h^2}{8} \max_{x \in [0,b]} |u''(\xi)| = C_2 n^{-2}.
\end{aligned}$$

kus C_2 on positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest n. Saadud tulemus kehtib iga osalõigu puhul seega oleme tõestanud ka väite 2). $\square$

Teoreem 8. *Olgu võrrandi (1.1) tuum kujul $K(x,y) = (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} K_1(x,y)$ ning kehtigu eeldused (1.3), kus $\alpha \in (0,1)$,$0 \leq \beta < 1-\alpha$,$K_1 \in C^2(Q)$ ja $f \in C^{2,\alpha+\beta}(0,b]$. Olgu kollokatsioonimeetodis (2.9)-(2.10) kasutusel gradueeritud võrk $\Delta_n (n \geq 2)$ sõlmedega*

$$x_i = b \left(\frac{i}{n} \right)^r (i = 0, 1, \ldots, n); \quad r \in [1, \infty).$$

Siis leidub $n_0 \in \mathbb{N}$,et $n \geq n_0$ korral on kollokatsioonimeetodi (2.9)-(2.10) abil leitud *lahendi u lähislahend $u_n \in C[0,b]$ üheselt määratud nii, et kehtib veahinnang*

$$\max_{x\in[0,b]} |u_n(x) - u(x)| \le C \begin{cases} n^{-r(1-\alpha-\beta)}, & kui \quad 1 \le r < \frac{2}{1-\alpha-\beta}, \\ n^{-2}, & kui \quad r \ge \frac{2}{1-\alpha-\beta}, \end{cases} \tag{3.13}$$

kus C on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest n.

Tõestus. Teoreemist 3 järeldub, et $u \in C^{2,\alpha+\beta}(0,b]$ ning Teoreemist 6 järeldub, et $n \ge n_0$ korral $u_n \in C[0,b]$ on üheselt määratud. Näitame, et kehtib hinnang (3.13). Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $x \in [0, x_1]$. Kuna lähend $u_n(x)$ on lahendit u interpoleeriv funktsioon, siis saame vahe $u_n(x) - u(x)$ kirjutada $x \in [0, x_1]$ korral kujul

$$\begin{aligned}
u_n(x) - u(x) &= u(0)\varphi_0(x) + u(x_1)\varphi_1(x) - u(x) \\
&= u(0)\frac{x_1 - x}{x_1} + u(x_1)\frac{x}{x_1} - u(x) \\
&= \frac{u(0)(x_1 - x) + u(x_1)x - u(x)x_1 + u(x)x - u(x)x}{x_1} \\
&= \frac{(x_1 - x)(u(0) - u(x)) - x(u(x) - u(x_1))}{x_1} \\
&= \frac{x_1 - x}{x_1}(u(0) - u(x)) - \frac{x}{x_1}(u(x) - u(x_1)), \quad x \in [0, x_1].
\end{aligned}$$

Kuna $u \in C^{2,\alpha+\beta}(0,b]$, siis

$$\begin{aligned}
u_n(x) - u(x) &= \frac{x_1 - x}{x_1}(u(0) - u(x)) - \frac{x}{x_1}(u(x) - u(x_1)) \\
&= \frac{x_1 - x}{x_1}\int_x^0 u'(y)\,dy - \frac{x}{x_1}\int_{x_1}^x u'(y)\,dy \\
&= \frac{x}{x_1}\int_x^{x_1} u'(y)\,dy - \frac{x_1 - x}{x_1}\int_0^x u'(y)\,dy, \quad x \in [0, x_1].
\end{aligned}$$

Hindame nüüd lõigul $[0, x_1]$ maksimaalset viga $u_n(x) - u(x)$:

$$\begin{aligned}\max_{x\in[0,x_1]} |u_n(x) - u(x)| &= \max_{x\in[0,x_1]} \left| \frac{x}{x_1} \int_x^{x_1} u'(y)\,dy - \frac{x_1 - x}{x_1} \int_0^x u'(y)\,dy \right| \\ &\leq \max_{x\in[0,x_1]} \left(\int_x^{x_1} |u'(y)|\,dy + \int_0^x |u'(y)|\,dy \right), \quad x \in [0, x_1].\end{aligned}$$

Teoreemi 3 kohaselt $|u'(y)| \leq C_1 y^{-\alpha-\beta}$, kus C_1 on mingi positiivne konstant. Nüüd

$$\begin{aligned}\max_{x\in[0,x_1]} \left(\int_x^{x_1} |u'(y)|\,dy + \int_0^x |u'(y)|\,dy \right) &\leq \max_{x\in[0,x_1]} \left(\int_0^{x_1} C_1 y^{-\alpha-\beta}\,dy + \int_0^x C_1 y^{-\alpha-\beta}\,dy \right) \\ &= 2C_1 \max_{x\in[0,x_1]} \left(\frac{y^{-\alpha-\beta+1}}{-\alpha-\beta+1}\Bigg|_{y=0}^{y=x_1} + \frac{y^{-\alpha-\beta+1}}{-\alpha-\beta+1}\Bigg|_{y=0}^{y=x_1} \right) \\ &= 2C_1 \max_{x\in[0,x_1]} \left(\frac{x_1^{-\alpha-\beta+1} + x^{-\alpha-\beta+1}}{-\alpha-\beta+1} \right).\end{aligned}$$

Kuna $\alpha + \beta < 1$ ning $x \in [0, x_1]$, siis

$$\begin{aligned}\max_{x\in[0,x_1]} |u_n(x) - u(x)| &\leq 2C_1 \max_{x\in[0,x_1]} \left(\frac{x_1^{-\alpha-\beta+1} + x^{-\alpha-\beta+1}}{-\alpha-\beta+1} \right) \\ &\leq 2C_1 \frac{2x_1^{-\alpha-\beta+1}}{-\alpha-\beta+1} \\ &= \frac{4C_1}{-\alpha-\beta+1} \left[b \left(\frac{1}{n} \right)^r \right]^{-\alpha-\beta+1} \\ &= \frac{4C_1 b^{-\alpha-\beta+1}}{-\alpha-\beta+1} n^{-r(-\alpha-\beta+1)} = C_2 n^{-r(1-\alpha-\beta)}, \qquad (3.14)\end{aligned}$$

kus $C_2 = \frac{4C_1 b^{-\alpha-\beta+1}}{-\alpha-\beta+1}$ on mingi positiivne konstant.

Olgu nüüd $x \in [x_{i-1}, x_i] (i = 2, \ldots, n)$. Sellest, et u_n interpoleerib lahendi u väärtusi, saame vahe $u_n(x) - u(x)$ esitada kujul (vt [7], lk 17)

$$u_n(x) - u(x) = \frac{u''(\xi)}{2}(x - x_{i-1})(x - x_i),$$

kus $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$ ja $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Kuna $|(x - x_{i-1})(x - x_i)| \leq \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4}$ ja

Teoreemi 3 kohaselt

$$|u''(\xi)| \leq C_2 x_{i-1}^{-\alpha-\beta-1}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 2, \dots, n,$$

kus C_2 on positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest x. Siis

$$\begin{aligned}
|u_n(x) - u(x)| &\leq \frac{C_2 x_{i-1}^{-\alpha-\beta-1}}{2} \cdot \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4} \\
&= \frac{C_2 x_{i-1}^{-(1+\alpha+\beta)}}{8} \cdot (x_i - x_{i-1})^2 \\
&= \frac{C_2}{8} \left[b \left(\frac{i-1}{n} \right)^r \right]^{-(1+\alpha+\beta)} \cdot \left[b \left(\frac{i}{n} \right)^r - b \left(\frac{i-1}{n} \right)^r \right]^2 \\
&= \frac{C_2}{8} b^{(1-\alpha-\beta)} \left(\frac{i-1}{n} \right)^{-r(1+\alpha+\beta)} \left[\left(\frac{i}{n} \right)^r - \left(\frac{i-1}{n} \right)^r \right]^2 \\
&= \frac{C_2}{8} b^{(1-\alpha-\beta)} \left(\frac{i-1}{n} \right)^{-r(1+\alpha+\beta)} \cdot n^{-2r} \left[(i^r - (i-1)^r) \right]^2,
\end{aligned}$$

iga $x \in [x_{i-1}, x_i]$ korral.

Lagrange'i keskväärtusteoreemi (vt [6], lk 127) kohaselt leidub $\eta \in (i-1, i)$ nii, et

$$i^r - (i-1)^r = r\eta^{r-1}(i - (i-1)) = r\eta^{r-1} \leq r i^{r-1},$$

kus $i = 2, \dots, n$. Seega

$$\begin{aligned}
|u_n(x) - u(x)| &\leq \frac{C_2}{8} b^{-(1+\alpha+\beta)} \left(\frac{i-1}{n} \right)^{-r(1+\alpha+\beta)} n^{-2r} r i^{2(r-1)} \\
&= \frac{C_2}{8} b^{1-\alpha-\beta} r^2 n^{r(1+\alpha+\beta)-2r} (i-1)^{-r(1+\alpha+\beta)} i^{2(r-1)} \\
&= \frac{C_2}{8} b^{1-\alpha-\beta} r^2 n^{-r(1-\alpha-\beta)} (i-1)^{-r(1+\alpha+\beta)} i^{2(r-1)}, \quad i = 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

Hindame korrutist $(i-1)^{-r(1+\alpha+\beta)} i^{2(r-1)}$, kus $i = 2, \dots, n$:

$$
\begin{aligned}
(i-1)^{-r(1+\alpha+\beta)} i^{2(r-1)} &= (i-1)^{-r(1+\alpha+\beta)} i^{2r} i^{-2} \\
&= (i-1)^{-r(1+\alpha+\beta)} \left(\frac{i}{i-1}\right)^{2r} (i-1)^{2r} \left((i-1)\frac{i}{i-1}\right)^{-2} \\
&= (i-1)^{-r(1+\alpha+\beta)+2r-2} \left(\frac{i}{i-1}\right)^{2r-2} \\
&\le (i-1)^{r(1-\alpha-\beta)-2} 2^{2(r-1)}, \quad i = 2, \dots, n.
\end{aligned}
$$

Kokkuvõttes saame hinnangu

$$
\begin{aligned}
|u_n(x) - u(x)| &\le \frac{C_2}{8} b^{1-\alpha-\beta} r^2 n^{-r(1-\alpha-\beta)} (i-1)^{r(1-\alpha-\beta)-2} 2^{2(r-1)} \\
&= C_3 n^{-r(1-\alpha-\beta)} (i-1)^{r(1-\alpha-\beta)-2}, \quad x = [x_{i-1}, x_i], \quad i = 2, \dots, n,
\end{aligned}
$$

kus $C_3 = \frac{C_2}{8} b^{1-\alpha-\beta} r^2 2^{2(r-1)}$. Paneme tähele, kui $r(1-\alpha-\beta) \le 2$ ehk $r \le \frac{2}{1-\alpha-\beta}$, siis

$$
|u_n(x) - u(x)| \le C_3 n^{-r(1-\alpha-\beta)} (i-1)^{r(1-\alpha-\beta)-2} \le C_3 n^{-r(1-\alpha-\beta)} \tag{3.15}
$$

kus $x \in [x_{i-1}, x_i] (i = 2, \dots, n)$. Kui $r(1-\alpha-\beta) > 2$, siis

$$
|u_n(x) - u(x)| \le C_3 n^{-r(1-\alpha-\beta)} (i-1)^{r(1-\alpha-\beta)-2} \le C_3 n^{-2}, \tag{3.16}
$$

kus $x \in [x_{i-1}, x_i] (i = 2, \dots, n)$. Hinnangutest (3.14),(3.15) ja (3.16) järeldub hinnang (3.13). $\square$

4 Arvulised näited

4.1 Näide 1

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(x) = x^4 - \frac{x^7}{105} + \int_0^x (x-y)^2 u(y)\,dy, \quad x \in [0,1]. \tag{4.1}$$

See võrrand on kujul (1.1), kus $[0,b] = [0,1]$, $K(x,y) = (x-y)^2$,$\alpha = 0$, $\beta = 0$,$K(x,y) = K_1(x,y) = (x-y)^2$ ning $f(x) = x^4 - \frac{x^7}{105}$. Võrrandi (4.1) lahendiks on

$$u(x) = x^4, \quad x \in [0,1].$$

Lähendi $u_n(x)(n \in \mathbb{N})$ leidmiseks kasutame peatükis 2.3 kirjeldatud kollokatsioonimeetodit võttes aluseks ühtlase võrgu $\Delta_n(n \geq 2)$ punktidega $x_i = ih$, kus $i = 0, 1, \ldots, n$ ja $h = \frac{1}{n}$.

Võrrandi (4.1) korral on funktsioon K_1 kaks korda pidevalt diferentseeruv hulgas $Q = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ ja $f \in C^2[0,1]$. Teoreemi 7 kohaselt saame veahinnangu $\|u_n - u\|_{C[0,1]} \leq C_2 n^{-2}$, kus konstant C_2 ei sõltu suurusest n. Vea $\|u_n - u\|_{C[0,1]}$ lähendi ε_n arvutame järgmiselt:

$$\varepsilon_n = \max_{\substack{i=0,1\ldots,n \\ k=0,1,\ldots,10}} |u_n(x_{ik}) - u(x_{ik})|, \tag{4.2}$$

kus $x_{ik} = x_i + \frac{k}{10}(x_{i+1} - x_i)$. Leiame ka suhted $\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$, mille abil saab iseloomustada meetodi vea tegelikku käitumist. Näeme, et antud näite korral sõlmede kahekordistamisel peaks viga ε_n vähenema ligikaudu 4 korda (s.t suhe $\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$ peaks lähenema arvule 4). Saadud arvulised tulemused on toodud tabelis 1.

Tabel 1: Vead ja nende suhted esimese näite korral.

n	ε_n	$\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$
8	0.021	
16	$5.613 \cdot 10^{-3}$	3.74
32	$1.45 \cdot 10^{-3}$	3.87
64	$3.684 \cdot 10^{-4}$	3.94
128	$9.285 \cdot 10^{-5}$	3.97
256	$2.33 \cdot 10^{-6}$	3.98

Tabelist 1 näeme, et arvulised tulemused vastavad Teoreemis 7 saadud hinnangule (3.12).

4.2 Näide 2

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(x) = x^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi x}{2} + \int_0^x (x-y)^{-\frac{1}{2}} u(y)\, dy, \quad x \in [0,1]. \tag{4.3}$$

See võrrand on kujul (1.1), kus $[0,b] = [0,1]$, $K(x,y) = (x-y)^{-\frac{1}{2}}$,$K_1(x,y) = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ ning $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi x}{2}$. Võrrandi (4.3) lahendiks on

$$u(x) = x^{\frac{1}{2}}, \quad x \in [0,1].$$

Lähendi $u_n(x)(n \in \mathbb{N})$ leidmiseks kasutame peatükis 2.3 kirjeldatud kollokatsioonimeetodit võttes aluseks gradueeritud võrgu $\Delta_n(n \geq 2)$ punktidega

$$x_i = b\left(\frac{i}{n}\right)^r,$$

kus $i = 0, 1, \ldots, n$.

Võrrandi (4.3) korral on funktsioon K_1 kaks korda pidevalt diferentseeruv hulgas $Q = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ ja $f \in C^{2,0.5}(0, 1]$. Teoreemi 8 kohaselt saame veahinnangu

$$\max_{x\in[0,b]} |u_n(x) - u(x)| \leq C \begin{cases} n^{-\frac{r}{2}}, & kui \quad 1 \leq r < 4, \\ n^{-2}, & kui \quad r \geq 4. \end{cases}$$

Sellest järeldub, et valemiga (4.2) leitud suuruste ε_n suhted $\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$ peaksid olema $r = 1$ korral $2^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}41$, $r = 2$ korral 2 ja $r = 4$ korral 4.

Tabel 2: Vead ja nende suhted $r = 1$, $r = 2$ ja $r = 4$ korral.

n	ε_n	$\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$	ε_n	$\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$	ε_n	$\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$
8	0.828		0.196		0.347	
16	0.3317	2.50	$4.535 \cdot 10^{-2}$	4.31	$5.850 \cdot 10^{-2}$	5.93
32	0.1304	2.54	$1.113 \cdot 10^{-2}$	4.02	$1.386 \cdot 10^{-2}$	4.22
64	$4.978 \cdot 10^{-2}$	2.62	$3.888 \cdot 10^{-3}$	2.90	$3.476 \cdot 10^{-3}$	3.99
128	$2.253 \cdot 10^{-2}$	2.21	$1.940 \cdot 10^{-3}$	2.01	$8.830 \cdot 10^{-4}$	3.94
256	$1.579 \cdot 10^{-2}$	1.43	$9.688 \cdot 10^{-4}$	2.00	$2.263 \cdot 10^{-4}$	3.90

Tabelist 2 on näha, et saadud tulemused on kooskõlas teoreetilise hinnanguga.

4.3 Näide 3

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(x) = x^{\frac{1}{2}} - x + \int_0^x y^{-\frac{1}{2}} u(y)\, dy, \quad x \in [0, 1]. \tag{4.4}$$

See võrrand on kujul (1.1), kus $[0, b] = [0, 1]$, $K(x, y) = y^{-\frac{1}{2}}$,$K_1(x, y) = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$ ning $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - x$. Võrrandi (4.4) lahendiks on

$$u(x) = x^{\frac{1}{2}}, \quad x \in [0, 1].$$

Lähendi $u_n(x)(n \in \mathbb{N})$ leidmiseks kasutame peatükis 2.3 kirjeldatud kollokatsioonimeetodit võttes aluseks gradueeritud võrgu $\Delta_n(n \geq 2)$ punktidega

$$x_i = b\left(\frac{i}{n}\right)^r,$$

kus $i = 0, 1, \dots, n$.

Võrrandi (4.4) korral on funktsioon K_1 kaks korda pidevalt diferentseeruv hulgas $Q = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ ja $f \in C^{2,0.5}(0, 1]$. Teoreemi 8 kohaselt saame veahinnangu

$$\max_{x\in[0,b]} |u_n(x) - u(x)| \leq C \begin{cases} n^{-\frac{r}{2}}, & \textit{kui} \quad 1 \leq r < 4, \\ n^{-2}, & \textit{kui} \quad r \geq 4. \end{cases}$$

Sellest järeldub, et valemiga (4.2) leitud suuruste ε_n suhted $\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$ peaksid olema $r = 1$ korral $2^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}41$, $r = 2$ korral 2 ja $r = 4$ korral 4.

Tabel 3: Vead ja nende suhted $r = 1$, $r = 2$ ja $r = 4$ korral.

n	ε_n	$\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$	ε_n	$\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$	ε_n	$\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$
8	0.204		$5.109 \cdot 10^{-2}$		$3.391 \cdot 10^{-2}$	
16	0.116	1.76	$1.623 \cdot 10^{-2}$	3.14	$9.235 \cdot 10^{-3}$	3.67
32	$6.375 \cdot 10^{-2}$	1.82	$7.841 \cdot 10^{-3}$	2.07	$2.426 \cdot 10^{-3}$	3.81
64	$3.418 \cdot 10^{-2}$	1.86	$3.895 \cdot 10^{-3}$	2.01	$6.233 \cdot 10^{-4}$	3.89
128	$2.273 \cdot 10^{-2}$	1.50	$1.941 \cdot 10^{-3}$	2.01	$1.582 \cdot 10^{-4}$	3.94
256	$1.589 \cdot 10^{-2}$	1.43	$9.692 \cdot 10^{-4}$	2.00	$3.983 \cdot 10^{-5}$	3.97

Tabelist 3 näeme, et saadud veahinnangud vastavad teoreemile 8.

4.4 Näide 4

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(x) = x^{\frac{1}{2}} - x\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(2\right)} + \int_0^x (x-y)^{-\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{4}} u(y)\, dy, \quad x \in [0,1]. \tag{4.5}$$

See võrrand on kujul (1.1), kus $[0,b] = [0,1]$, $K(x,y) = (x-y)^{-\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{4}}$,$K_1(x,y) = 1$, $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{4}$, $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - x\frac{\Gamma(\frac{5}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(2)}$ ning $\Gamma(a)$ on Euleri gammafunktsioon $\Gamma\left(a\right) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx$. Võrrandi (4.5) korral on funktsioon K_1 kaks korda pidevalt diferentseeruv hulgas $Q = \{(x,y) : 0 \le y \le x \le 1\}$ ja $f \in C^{2,0.5}(0,1]$ ning tema lahendiks on

$$u(x) = x^{\frac{1}{2}}, \quad x \in [0,1].$$

Lähendi $u_n(x)(n \in \mathbb{N})$ leidmiseks kasutame peatükis 2.3 kirjeldatud kollokatsioonimeetodit võttes aluseks gradueeritud võrgu $\Delta_n(n \ge 2)$ punktidega

$$x_i = b\left(\frac{i}{n}\right)^r,$$

kus $i = 0, 1, \ldots, n$. Teoreemi 8 põhjal saame veahinnangu

$$\max_{x\in[0,b]} |u_n(x) - u(x)| \le C \begin{cases} n^{-\frac{r}{2}}, & kui \quad 1 \le r < 4, \\ n^{-2}, & kui \quad r \ge 4. \end{cases}$$

Sellest järeldub, et valemiga (4.2) leitud suuruste ε_n suhted $\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$ peaksid olema $r = 1$ korral $2^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}41$, $r = 2$ korral 2 ja $r = 4$ korral 4.

Tabel 4: Vead ja nende suhted $r = 1$, $r = 2$ ja $r = 4$ korral.

n	ε_n	$\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$	ε_n	$\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$	ε_n	$\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$
8	0.174		$3.906 \cdot 10^{-2}$		$3.883 \cdot 10^{-2}$	
16	$8.482 \cdot 10^{-2}$	2.06	$1.581 \cdot 10^{-2}$	2.47	$1.035 \cdot 10^{-2}$	3.75
32	$4.670 \cdot 10^{-2}$	1.80	$7.821 \cdot 10^{-3}$	2.02	$2.729 \cdot 10^{-3}$	3.79
64	$3.235 \cdot 10^{-2}$	1.44	$3.890 \cdot 10^{-3}$	2.01	$7.047 \cdot 10^{-4}$	3.87
128	$2.256 \cdot 10^{-2}$	1.43	$1.940 \cdot 10^{-3}$	2.01	$1.799 \cdot 10^{-4}$	3.92
256	$1.581 \cdot 10^{-2}$	1.42	$9.689 \cdot 10^{-4}$	2.00	$4.546 \cdot 10^{-5}$	3.96

Tabelist 4 on näha, et saadud tulemused on kooskõlas teoreetilise hinnanguga.

Kasutatud kirjandus

[1] L. Otsus, "Volterra teist liiki integraalvõrrandi lahendamine lineaarsplainidega kollokatsioonimeetodil," Bakalaureusetöö, Tartu Ülikool, 2024.

[2] H.Brunner, *„Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications“* (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics). 2017.

[3] A.Pedas ja G.Vainikko, "Integral equations with diagonal and boundary singularities of the kernel," *Journal for Analysis and Applications*, köide 25, lk. 487–516, 2006. aadress: https://ems.press/content/serial-article-files/35544.

[4] E.Oja ja P.Oja, *„Funktsionaalanalüüs“*. Tartu Ülikool, 1991.

[5] G.Vainikko, *„Kiirguslevi. Matemaatilise füüsika täiendavad peatükid“*. Tartu Ülikool, 1990.

[6] L.Loone ja V.Soomer, *„Matemaatilise analüüsi algkursus“*. Tartu Ülikooli kirjastus, 2009.

[7] E.Tamme, L.Võhandu ja L.Luht, *„Arvutusmeetodid“*. Kirjastus Valgus, 1986.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Rainis Õunpuu,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

   "Iseärasustega Volterra integraalvõrrandi lahendamine kollokatsioonimeetodil",

   mille juhendaja on Arvet Pedas, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Rainis Õunpuu

29.05.2025

Lisa

Programm on kirjutatud programeerimiskeeles R.

```
library(cubature)
veahinnang <- function(z){
  r <- 1
  a <- 0
  b <- 1
  n <- z

  x <- numeric(n + 1)
  for (i in 0:n) {
    x[i + 1] <- a + b * (i / n)^r
  }

  K <- function(x, y) {
    (x-y)^(-1/4)*y^(-1/4)
  }

  f <- function(x) {
    return(x^(1/2)-x*gamma(5/4)*gamma(3/4)/gamma(2))
  }

  U <- function(x) {
    return(x^(1/2))
  }

  fii <- function(i, y) {
    if (i == 1) {
```

```
    return(ifelse((x[1] <= y) * (y <= x[2]),
    (x[2] - y) / (x[2] - x[1]), 0))
  }
  if (i == length(x)) {
    return(ifelse((x[n] <= y) * (y <= x[n+1]),
    (y - x[n]) / (x[n+1] - x[n]), 0))
  }
  return(
    ifelse((x[i] <= y) * (y <= x[i+1]),
    (x[i+1] - y) / (x[i+1] - x[i]),
           ifelse((x[i-1] <= y) * (y <= x[i]),
           (y - x[i-1]) / (x[i] - x[i-1]), 0))
  )
}


kij <- function(i, j) {
  xi <- x[i]

  if (j == 1) {
    if (xi <= x[1]) return(0)
    return(adaptIntegrate(
      function(y) K(xi, y) * (x[2] - y) / (x[2] - x[1]),
      lower = 0,
      upper =min(xi, x[2])
    )$integral)
  }

  if (i < j) return(0)
```

```
  if (i == j) {
    if (i == 1) return(0)
    return(adaptIntegrate(
      function(y) K(xi, y) * (y - x[i - 1]) / (x[i] - x[i - 1]),
      lower = x[i - 1],
      upper = xi
    )$integral)
  }


  int1 <- adaptIntegrate(
    function(y) K(xi, y) * (y - x[j - 1]) / (x[j] - x[j - 1]),
    lower = x[j - 1],
    upper = x[j]
  )$integral

  int2 <- adaptIntegrate(
    function(y) K(xi, y) * (x[j + 1] - y) / (x[j + 1] - x[j]),
    lower = x[j],
    upper = x[j + 1]
  )$integral

  return(int1 + int2)
}

A = matrix(rep(0, (n+1) * (n+1)), nrow = n+1 , ncol = n+1 )

for (i in 1:(n+1)) {
```

```
      for(j in 1:(n+1)){
        A[i,j] <- kij(i,j)
      }
    }
    A <- diag(n+1)-A
    f_maatriks <- f(x)
    C <- solve(A, f_maatriks)

    un <-function(x){
      summa <- 0

      for( i in 1:(n+1)){
        summa <- summa + C[i]*fii(i,x)
      }
      return(summa)
    }

    vead <- c()
    for(i in 1:n){
      for(k in 0:10){
        xik <- x[i]+k*((x[i+1]-x[i])/10)
        vead <- c(vead, abs(U(xik) - un(xik)))
      }
    }
    viga <- max(vead)
    return(viga)
}

N <- c(8,16,32,64,128,256)
```

```
hinnangud <- numeric(length(N))
for (i in seq_along(N)) {
  hinnangud[i] <- veahinnang(N[i])
  print(hinnangud[i])
}
for (j in 1:(length(N)-1)) {
  print(hinnangud[j]/hinnangud[j+1])
}
```