Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Anete Miller

Rühmade osalised toimed

Matemaatika

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: Valdis Laan

Tartu 2023

RÜHMADE OSALISED TOIMED

Bakalaureusetöö

Anete Miller

Lühikokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös antakse ülevaade rühmade osalistest toimetest hulkadel. Koos sobivate definitsioonide ja näidetega tõestatakse omaloominguna varasemast tuntud seos rühmade osaliste toimete ja rühmast sümmeetrilisse inverssesse monoidi viivate ühikut säilitavate eelmorfismide vahel. Veel näidatakse selliste toimete seost monoidi tugeva osalise toimega, sümmeetrilise inversse poolrühma loomuliku järjestusseose alternatiivset kirjeldust ning et iga homomorfism kommutatiivsete inverssete poolrühmade vahel on eelmorfism.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria.

Märksõnad: rühmad (matemaatika), poolrühmad (matemaatika), homomorfismid, järjestusseosed.

PARTIAL ACTIONS OF GROUPS

Bachelor's thesis

Anete Miller

Abstract

In this Bachelor's thesis a review of partial actions of groups is given. Another proof for the earlier known result about the connection between partial actions of groups and identity preserving premorphisms from that group to a symmetric inverse monoid has been found with definitions and examples when needed. Moreover, the connection between such actions and strong partial actions of monoids, an alternative description for the natural order of the symmetric inverse semigroup and that every homomorphism between commutative inverse semigroups is a premorphism are shown.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory.

Key Words: groups (math.), semigroups (math.), homomorphisms, partial orders.

Sisukord

Sissejuhatus

Esimesena kasutas nimetust „rühma osaline toime“ Ruy Excel aastal 1995 ilmunud artiklis. Et osaliste toimete ja toimete vaheline seos sarnaneb bijektsioonide ja osaliste bijektsioonide seotusega, siis on see loomulik termin. Rühmade osalisi toimeid on loomulik vaadelda rühmade toimete üldistusena. Rühmade osalised toimed tekivad, kui rühma toime tingimused asendada sarnaste, kuid nõrgemate tingimustega.

Michael Dokuchaevi ülevaateartiklis [1] täpsustatakse, et Ruy Excel võttis rühmade osalised toimed kasutusele tööriistana $\mathcal{C}^*$-algebrate teoorias. Veel lisatakse, et Johannes Kellendonk ja Mark V. Lawson mõistsid osaliste toimete olulisust laiemalt ning rakendasid neid erinevates algebra, topoloogia ja geomeetria valdkondades. Hiljem hakkasid osaliste toimetega tegelema ka teised matemaatikud. Michael Dokuchaev on kirjutanud veel ühe ülevaateartikli [2], millest saab järeldada, ja ta ütleb seda ka ise, et pärast 2011. aastat on osaliste toimete uurimine hoogustunud.

Käesolevas referatiivses bakalaureusetöös vaadeldakse rühmade osalisi toimeid hulkadel, täpsemalt üldisust kaotamata parempoolseid osalisi toimeid. Näidatakse nii sellise toime seost rühmast sümmeetrilisse inverssesse monoidi viivate ühikut säilitavate eelmorfismidega kui ka monoidi tugeva osalise toimega. Esimest neist loetakse töö põhitulemuseks. Need on küll varasemalt tuntud faktid, kuid tõestused on omalooming.

Esimeses peatükis tuletatakse meelde mõned algebraliste struktuuride mõisted ning vastavad tähistused, antakse parempoolse toime ja parempoolse osalise toime definitsioonid ning tuuakse ka näiteid. Veel tõestatakse parempoolse osalise toime ja monoidi tugeva osalise toime vaheline seos.

Töö teine peatükk on sümmeetrilisest inverssest poolrühmast, mida vajatakse põhitulemuses. Alustatakse vastava struktuuri konstrueerimisest, jätkatakse sellel järjestusseose defineerimisega. Vajalikes kohtades tuuakse näiteid ning esitatakse hiljem kasutatud tõestuseta lause. Lisaks näidatakse, et järjestusseosel on olemas alternatiivne kirjeldus.

Kolmas peatükk algab eelmorfismi definitsiooniga ning selle ja teatud poolrühmade vahelise homomorfismi seosega. Tuuakse ka vastavaid näiteid. Töö põhitulemus koos tõestusega moodustab peatükist enamuse.

Töö toetub peamiselt raamatutele ja artiklitele, mille autorid on Mati Kilp, Johannes Kellendonk, Christopher Hollings ja Mark V. Lawson.

1 Definitsioonid ja abitulemused

Anname mõned definitsioonid, mida selles töös vaja läheb.

Definitsioon 1.1 ([5]). **Poolrühm** on hulk S koos kahekohalise algebralise tehtega $*$, mis rahuldab järgmist tingimust:

$$(a * b) * c = a * (b * c) \text{ iga } a, b, c \in S \text{ korral.}$$

Definitsioon 1.2 ([5]). **Monoid** on hulk M koos kahekohalise algebralise tehtega $*$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. $(a * b) * c = a * (b * c)$ iga $a, b, c \in M$ korral;
2. leidub $e \in M$ nii, et $a * e = e * a = a$ iga $a \in M$ korral.

Definitsioon 1.3 ([5]). **Rühm** on hulk G koos kahekohalise algebralise tehtega $*$, mis rahuldab kolme tingimust:

1. $(a * b) * c = a * (b * c)$ iga $a, b, c \in G$ korral;
2. leidub element $e \in G$ nii, et $a * e = e * a$ iga $a \in G$ korral;
3. iga $a \in G$ korral leidub element $b \in G$ nii, et $a * b = e = b * a$.

Edaspidi tähistame poolrühmast S rääkides selle elementide a ja b korrutist ab.

Definitsioon 1.4 ([5]). Poolrühma G nimetatakse **kommutatiivseks poolrühmaks**, kui selle tehe $*$ täidab järgmist tingimust:

$$\text{iga } a \in G \text{ ja iga } b \in G \text{ korral } a * b = b * a.$$

Iga rühm on monoid, seega võime rühma toimena vaadelda monoidi toimet.

Definitsioon 1.5 ([3])**.** Monoidi M **parempoolseks toimeks** hulgal X nimetatakse kujutust $X \times M \to X$, $(x, s) \mapsto x \cdot s$, mille puhul kehtivad järgmised tingimused:

1. $x \cdot 1 = x$ iga $x \in X$ korral;

2. $(x \cdot s) \cdot t = x \cdot st$ iga $x \in X$ ja iga $s, t \in M$ korral.

Ühtluse huvides tähistame kujutishulka väiketähtedega. Sellist tähistust on varem kasutanud ka näiteks Mark Lawson [7].

Definitsioon 1.6 ([5])**.** Kujutuse $f \colon A \to B$ **kujutiseks** nimetatakse kõikide nende elementide hulka $\mathrm{im}(f)$ hulgast B, millel leidub vähemalt üks originaal kujutuse f suhtes. Seega

$$\mathrm{im}(f) = \{b \in B \mid \exists a \in A\, (b = f(a))\}.$$

Definitsioon 1.7. Osalise kujutuse α all hulgast A hulka B mõeldakse kujutust hulga A mingist alamhulgast hulka B. Seda alamhulka kutsutakse osalise kujutuse **määramispiirkonnaks** ja tähistatakse $\mathrm{dom}\,\alpha$.

Ka osalisi kujutusi hulkade A ja B vahel tähistatakse $A \to B$. See, kas tegu on kujutusega või osalise kujutusega, selgub kontekstist.

Kui hulga A element a kuulub hulka $\mathrm{dom}\,\alpha$, siis ütleme, et $\alpha(a)$ on defineeritud ja kirjutame $\exists \alpha(a)$.

Näide 1.8. Võib vaadelda osalist kujutust $\beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, kui $x \neq 0$. Selle määramispiirkond on $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Näide 1.9. Vaatleme osalist kujutust

$$\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \ (n, z) \mapsto n + z \text{ , kui } \ n + z \geq 1.$$

Kui $n = 2$ ja $z = 5$, siis $(n, z) \mapsto 7$. Valime nüüd $n = 2$ ja $z = -5$, mis tähendab, et $n + z = -3 < 1$. Järelikult elemendil $(2, -5)$ ei ole kujutist. Seega lähtehulgas leidub nii kujutistega kui ka kujutisteta elemente ehk tegu on tõepoolest osalise kujutusega.

Osaliste kujutuste $\alpha, \beta \colon A \to B$ võrdumiseks on tarvis näidata, et $\mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta)$ ja et iga $x \in \mathrm{dom}(\alpha)$ korral $\alpha(x) = \beta(x)$.

Lihtne on märgata, et parempoolse toime ja parempoolse osalise toime definitsioonid erinevad vaid selle poolest, et osalise toime tingimustes tuleb eeldada, et vajalikud elemendid on defineeritud.

Definitsioon 1.10 ([3])**.** Monoidi M **parempoolne osaline toime** hulgal X on osaline kujutus $X \times M \to X$, $(x, s) \mapsto x \cdot s$, mis täidab kahte tingimust:

(PA1') iga $x \in X$ korral on defineeritud $x \cdot 1$ ja $x \cdot 1 = x$;

(PA2') kui on defineeritud $x \cdot s$ ja $(x \cdot s) \cdot t$, siis on defineeritud $x \cdot st$ ja $(x \cdot s) \cdot t = x \cdot st$.

Definitsioon 1.11. Monoidi M parempoolset osalist toimet hulgal X nimetatakse **tugevaks**, kui see rahuldab järgmist tingimust:

(S) kui on defineeritud $x \cdot s$ ja $x \cdot st$, siis on defineeritud $(x \cdot s) \cdot t$ ja $(x \cdot s) \cdot t = x \cdot st$.

Definitsioon 1.12 ([4])**.** Rühma G **parempoolne osaline toime** hulgal X on osaline kujutus

$$X \times G \to X,\ (x, g) \mapsto x \cdot g, \quad \text{kui } x \cdot g \text{ on defineeritud,}$$

mis rahuldab kolme tingimust:

(PA1) kui on defineeritud $x \cdot g$, siis on defineeritud $(x \cdot g) \cdot g^{-1}$ ja $(x \cdot g) \cdot g^{-1} = x$;

(PA2) kui on defineeritud $x \cdot g$ ja $(x \cdot g) \cdot h$, siis on defineeritud $x \cdot gh$ ja $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot gh$;

(PA3) iga $x \in X$ korral on defineeritud $x \cdot 1$ ja $x \cdot 1 = x$.

Viimases definitsioonis on ülaindeksi -1 all mõeldud vastandelementi tehte $\cdot$ suhtes.

Näide 1.13. Tuleme tagasi näites 1.9 vaadeldud osalise kujutuse $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $(n, z) \mapsto n \cdot z = n + z$, kui $n + z \geq 1$, juurde ja näitame, et tegemist on rühma $(\mathbb{Z}, +)$ osalise toimega hulgal $\mathbb{N}$.

(PA3). Vaatleme elementi $n \in \mathbb{N}$. Rühma $\mathbb{Z}$ ühikelement liitmise suhtes on 0 ja et $n + 0 \geq 1$, siis $n \cdot 0$ on defineeritud ja $n \cdot 0 = n + 0 = n$.

(PA2). Eeldame, et $n \cdot z$ ja $(n \cdot z) \cdot u$ on defineeritud. Siis $n + z \geq 1$ ja $(n + z) + u \geq 1$. Järelikult ka $n + (z + u) \geq 1$ ehk $n \cdot (z + u)$ on defineeritud ning lisaks sellele kehtib võrdus $(n \cdot z) \cdot u = n \cdot (z + u)$.

(PA1). Olgu $n \cdot z$ defineeritud. Siis $n + z \geq 1$. Et $(n + z) + (-z) = n \geq 1$, siis ka $(n \cdot z) \cdot (-z)$ on defineeritud ja $(n \cdot z) \cdot (-z) = (n + z) + (-z) = n + 0 = n$.

Kõik parempoolse osalise toime tingimused kehtivad, seega on kujutus $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $(n, z) \mapsto n + z$, kui $n + z \geq 1$, parempoolne osaline toime.

Monoidi osaline toime on rühma osalise toimega üsnagi lihtsalt seotud. Järgneva lause tõestusidee pärineb artiklist [8].

Lause 1.14. *Olgu G rühm. Osaline kujutus $X \times G \to X$ on rühma G parempoolne osaline toime hulgal X parajasti siis, kui see on monoidi G tugev osaline toime hulgal X.*

Tõestus. Tingimused (PA1'), (PA2') ja (PA3), (PA2) tulenevad otseselt üksteisest ja eeldame, et need kehtivad. Seega piisab väite tõestamiseks näidata tugevust ning tingimuse (PA1) kehtivust.

Tarvilikkus. Eeldame, et tingimused (PA1), (PA2) ja (PA3) kehtivad. Tõestame tingimuse (S). Olgu $x \cdot g$ ja $x \cdot gh$ defineeritud, kus $x \in X$ ja $g, h \in G$. Tingimuse (PA1) tõttu on defineeritud ka $(x \cdot g) \cdot g^{-1}$ ja $(x \cdot g) \cdot g^{-1} = x$. Järelikult tänu tingimusele (PA2) on defineeritud ka $(x \cdot g) \cdot g^{-1}gh = (x \cdot g) \cdot 1h = (x \cdot g) \cdot h$ ja

$$x \cdot gh = \big((x \cdot g) \cdot g^{-1}\big) \cdot gh = (x \cdot g) \cdot g^{-1}gh = (x \cdot g) \cdot h.$$

Piisavus. Nüüd eeldame, et kehtivad tingimused (PA1'), (PA2') ja (S). Tõestame tingimuse (PA1). Olgu $x \cdot g$ defineeritud, kus $x \in X$ ja $g \in G$. Et tingimuse (PA1') tõttu on defineeritud $x \cdot 1$, siis on defineeritud ka $x \cdot gg^{-1}$. Viimasest tuleneb tingimuse S tõttu elemendi $(x \cdot g) \cdot g^{-1}$ defineeritus ja kehtivad ka võrdused

$$(x \cdot g) \cdot g^{-1} = x \cdot gg^{-1} = x \cdot 1 = x.$$

$\square$

2 Sümmeetriline inversne poolrühm

Mark V. Lawsoni [7, lk 1] sõnul defineeris inverssed poolrühmad esmalt V. V. Wagner aastal 1952 ning seejärel temast sõltumatult Gordon Preston 1954. aastal.

Mark Lawsonile [7, lk 15] tuginedes saame selgitada ka sümmeetriat. Mingit tüüpi matemaatilise struktuuri sümmeetriateisendusteks võib lugeda struktuuri säilitavaid bijektiivseid teisendusi. Nende hulk moodustab reeglina rühma teisenduste järjestrakendamise suhtes.

Matemaatilise struktuuri **osaline sümmeetria** on isomorfism selle struktuuri kahe alamstruktuuri vahel. Need osalised sümmeetriad moodustavad sageli inversse poolrühma sobival viisil defineeritud korrutamise suhtes. Seda silmas pidades on loomulik kutsuda mingi hulga alamhulkade vaheliste bijektsioonide (niinimetatud osaliste bijektsioonide) poolrühma sümmeetriliseks inversseks poolrühmaks. Viimane poolrühm on oluliseks erijuhuks niinimetatud abstraktsest inverssest poolrühmast, mille definitsiooni me kohe anname.

Definitsioon 2.1 ([6])**.** Poolrühma S elementi t nimetatakse elemendi $s \in S$ **inversseks elemendiks**, kui $s = sts$ ja $t = tst$.

Definitsioon 2.2 ([6])**.** Poolrühma nimetatakse **inversseks**, kui selle igal elemendil leidub täpselt üks inversne element.

Definitsioon 2.3 ([7, lk 4])**.** Olgu X hulk. Osalist kujutust $\varphi\colon X \to X$ nimetatakse **bijektiivseks**, kui kujutus $\mathrm{dom}(\varphi) \to \mathrm{im}(\varphi),\ x \mapsto \varphi(x)$, on bijektiivne.

Kõigi osaliste bijektsioonide $X \to X$ hulka tähistatakse $I(X)$.

Defineerime hulgal $I(X)$ tehte.

Olgu X hulk ja $I(X)$ selle osaliste bijektsioonide hulk. Defineerime hulgal $I(X)$ elementide $\varphi, \psi \in I(X)$ korrutamise funktsioonide kompositsioonina

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x)) \quad \forall x \in \mathrm{dom}(\varphi \circ \psi), \tag{1}$$

kus

$$\operatorname{dom}(\varphi \circ \psi) = \psi^{-1}(\operatorname{im}(\psi) \cap \operatorname{dom}(\varphi)) = \{x \in \operatorname{dom}(\psi) \mid \psi(x) \in \operatorname{dom}(\varphi)\}.$$

Tehte defineerisime [7, lk 4] järgi. Ilmneb, et selliselt defineeritud tehtega on hulk $I(X)$ poolrühm ning seda nimetatakse **sümmeetriliseks inversseks poolrühmaks**.

Näide 2.4. Rühm G on inversne poolrühm, kusjuures iga $g \in G$ korral saame valida selle inversseks elemendiks g^{-1}.

Järgnev lause näitab sümmeetrilise inversse poolrühma elementide loogilist seost oma inverssete elementidega.

Lause 2.5 ([7, lk 4–5])**.** *Kui X on hulk, siis $(I(X), \circ)$ on inversne poolrühm, kus iga $\varphi \in I(X)$ korral* $\operatorname{dom}(\varphi^{-1}) = \operatorname{im}(\varphi)$, $\operatorname{im}(\varphi^{-1}) = \operatorname{dom}(\varphi)$ *ja*

$$\varphi^{-1}(x) = y \iff \varphi(y) = x. \tag{2}$$

Inverssel poolrühmal järjestusseose defineerimiseks vajame ka idempotendi mõistet.

Definitsioon 2.6 ([5])**.** Kui on antud mittetühi poolrühm $(S, \cdot)$, siis selle elementi $s \in S$ nimetatakse **idempotendiks**, kui $s^2 = s$.

Poolrühma S kõigi idempotentide hulka tähistatakse sümboliga $E(S)$.

Definitsioon 2.7 ([4])**.** Igal inverssel poolrühmal S saab defineerida järjestusseose $\leq$ järgmiselt:

$$a \leq b \iff (\exists e \in E(S))\, a = be.$$

Seda järjestusseost nimetatakse selle inversse poolrühma **loomulikuks järjestusseoseks**.

Märkus 2.8. [7, lemma 1.4.6] On võimalik näidata, et

$$a \leq b \iff (\exists f \in E(S))\, a = fb.$$

Lemma 2.9. *Kui $\leq$ on loomulik järjestusseos inverssel poolrühmal $I(X)$, siis*

$$\varphi \leq \psi \iff \mathrm{dom}(\varphi) \subseteq \mathrm{dom}(\psi) \;\wedge\; (\forall x \in \mathrm{dom}(\varphi))\, \varphi(x) = \psi(x). \tag{3}$$

Tõestus. $\Longrightarrow$. Olgu $\varphi, \psi \in I(X)$. Eeldame, et $\varphi \leq \psi$. Siis märkuse 2.8 tõttu leidub $f \in E(I(X))$ nii, et $\varphi = f \circ \psi$. Järelikult

$$\mathrm{dom}(\varphi) = \mathrm{dom}\,(f \circ \psi) = \{x \in \mathrm{dom}(\psi) \mid \psi(x) \in \mathrm{dom}(f)\} \subseteq \mathrm{dom}(\psi).$$

Et f on idempotent, siis iga $x \in \mathrm{dom}(\phi)$ korral

$$f(\psi(x)) = (f \circ \psi)(x) = (f \circ f \circ \psi)(x) = (f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)).$$

Et f on injektiivne, siis $\psi(x) = \varphi(x)$.

$\Longleftarrow$. Eeldame nüüd, et $\mathrm{dom}(\varphi) \subseteq \mathrm{dom}(\psi)$ ja iga $x \in \mathrm{dom}(\varphi)$ korral $\varphi(x) = \psi(x)$. Vaja on leida sobiv osaline kujutus $e \in E(I(X))$ nii, et $\varphi = \psi e$. Ilmneb, et selleks sobib $e \colon \mathrm{dom}(\varphi) \to \mathrm{dom}(\varphi)$, $x \mapsto x$.

Ilmselt $e \in I(X)$ ja $e \in E(I(X))$. Võrduse $\varphi = \psi e$ kehtivuseks piisab näidata, et $\mathrm{dom}(\varphi) = \mathrm{dom}(\psi \circ e)$ ja et iga määramispiirkonna $\mathrm{dom}(\varphi)$ elemendi x korral $\varphi(x) = (\psi \circ e)(x)$.

Olgu $x \in \mathrm{dom}(\varphi)$, siis $x \in \mathrm{dom}(e)$ ja seega ka $x \in \mathrm{im}(e) = \mathrm{dom}(\varphi)$. Eelduse kohaselt nüüd $x \in \mathrm{dom}(\psi)$. Järelikult $x \in \mathrm{dom}\,(\psi \circ e)$.

Võtame $x \in \mathrm{dom}\,(\psi \circ e)$. Siis $x \in \mathrm{dom}(e) = \mathrm{dom}(\varphi)$.

Sellega on määramispiirkondade võrdsus näidatud.

Fikseerime määramispiirkonna $\operatorname{dom}(\varphi)$ elemendi x. Nüüd eelduse tõttu

$$(\psi \circ e)\,(x) = \psi(e(x)) = \psi(x) = \varphi(x).$$

$\square$

3 Osalised toimed ja eelmorfismid

Selles peatükis defineerime eelmorfismi, tõestame teatud homomorfismide ja eelmorfismide vahelise seose ning näitame, et rühmade osalised toimed on üksüheses vastavuses ühikut säilitavate eelmorfismidega.

Definitsioon 3.1 ([4]). **Eelmorfismiks** nimetatakse kujutust $f\colon S \to T$ inversssete poolrühmade vahel, mis täidab kahte tingimust:

(PM1) $f\left(s^{-1}\right) = (f(s))^{-1}$ iga $s \in S$ korral;

(PM2) $f(s)f(t) \leq f(ts)$ iga $s, t \in S$ korral.

Viimases tingimuses tähistab sümbol $\leq$ inversse poolrühma standardset järjestust.

Paneme tähele, et eelnevas definitsioonis tähistatakse ülaindeksiga -1 inversset elementi.

Näide 3.2. Võtame rühma $G = (\mathbb{Z}, +)$, hulga $X = \mathbb{N}$ ning näites 1.9 vaadeldud osalise kujutuse

$$\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ (n, z) \mapsto n + z \text{ , kui } \ n + z \geq 1.$$

Iga fikseeritud täisarvu z korral saame osalise kujutuse

$$f(z)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n + z \text{ , kui } \ n + z \geq 1.$$

On võimalik näidata, et $f\colon \mathbb{Z} \to I(\mathbb{N})$, $z \mapsto f(z)$, on eelmorfism, kusjuures see järeldub teoreemi 3.6 tõestusest.

Definitsioon 3.3. Olgu S ja T poolrühmad. Kujutust $f\colon S \to T$ nimetatakse poolrühmade **homomorfismiks**, kui

$$f(st) = f(s)f(t)$$

mistahes $s, t \in S$ korral.

Lemma 3.4. *Iga homomorfism kommutatiivsete inverssete poolrühmade vahel on eelmorfism.*

Tõestus. Olgu $f\colon S \to T$ homomorfism kommutatiivsete inverssete poolrühmade vahel.

(PM2). Et $f(s)f(t) = f(st) = f(ts)$ iga $s, t \in S$ korral, siis tingimus on täidetud.

(PM1). Igal inversse poolrühma elemendil on täpselt üks inversne element, seega piisab näidata, et

$$f\left(s^{-1}\right) = f\left(s^{-1}\right) f\left(s\right) f\left(s^{-1}\right) \quad \text{ja} \quad f(s) = f\left(s\right) f\left(s^{-1}\right) f\left(s\right).$$

Seetõttu, et

$$f\left(s^{-1}\right) f\left(s\right) f\left(s^{-1}\right) = f\left(s^{-1}ss^{-1}\right) = f\left(s^{-1}\right)$$

ja

$$f\left(s\right) f\left(s^{-1}\right) f\left(s\right) = f\left(ss^{-1}s\right) = f\left(s\right),$$

on tingimus (PM1) tõestatud. □

Näide 3.5. Vaatleme poolrühma $S = (\mathbb{Z}, \min)$. See on kommutatiivne poolrühm, milles kõik elemendid on idempotendid, seega on see inversne poolrühm. Hulgal $\mathbb{Z}$ on defineeritud nii inversse poolrühma loomulik järjestus, tähistame $\leq$, kui ka harilik täisarvude järjestus, tähistame $\leq_{\mathbb{Z}}$.

Vaatleme kujutust

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ z \mapsto -z.$$

Proovime näidata, et see on eelmorfism, mis ei ole homomorfism.

(PM1). Tingimuse kehtimiseks piisab tähele panna, et iga $z \in \mathbb{Z}$ korral

$$f(-z) = -(-z) = -f(z).$$

(PM2). Üldisust kaotamata eeldame, et $z \leq_{\mathbb{Z}} w$, kus $z, w \in \mathbb{Z}$. Siit saame, et $f(w) = -w \leq_{\mathbb{Z}} -z = f(z)$. Järelikult $f(w) = \min\{f(z), f(w)\}$, kusjuures $f(w)$ on idempotent poolrühmas S, seega

$$\min\{f(z), f(w)\} = f(w) \leq f(z) = f(\min\{w, z\}).$$

Toome kontranäite tõestamaks, et kujutus f ei ole homomorfism. Vaatleme elemente $-1, 0 \in \mathbb{Z}$. Näeme, et

$$f(\min\{-1, 0\}) = f(-1) = -(-1) = 1,$$

aga

$$\min\{f(-1), f(0)\} = \min\{1, 0\} = 0,$$

seega võrdus ei kehti ja f ei ole homomorfism.

On selge, et sümmeetriline inversne poolrühm $I(X)$ on monoid ühikelemendiga id_X. Olgu G rühm ühikelemendiga 1. Me ütleme, et eelmorfism $f\colon G \to I(X)$ **säilitab ühikut**, kui $f(1) = id_X$.

Teoreem 3.6. *Rühma G osalised toimed hulgal X on üksüheses vastavuses ühikut säilitavate eelmorfismidega $G \to I(X)$.*

Tõestus. Vaatleme hulki

$$A := \{\alpha\colon X \times G \to X \mid \alpha \text{ on osaline toime}\},$$

$$B := \{f\colon G \to I(X) \mid f \text{ on eelmorfism}\}.$$

Peame näitama, et need hulgad on üksüheses vastavuses.

Vaatleme juhtu, mil $X = \emptyset$. Siis hulkades A ja $I(X)$ on ainult tühi kujutus. Viimane tähendab, et iga $g \in G$ korral kujutatakse g tühjaks kujutuseks. Et see on ainus võimalik kujutus, on ka hulgas B ainult üks element. Järelikult on võimalik panna hulgad A ja B üksühesesse vastavusse.

Edaspidi eeldame, et $X \neq \emptyset$.

Olgu α osaline parempoolne toime $\alpha\colon X \times G \to X$, $(x, g) \mapsto \alpha(x, g)$, kus G on rühm ja X hulk. Iga elemendi $g \in G$ korral võib vaadelda osalist kujutust $\rho_g^\alpha\colon X \to X$, mis on defineeritud võrdusega

$$\rho_g^\alpha(x) := \alpha(x, g), \quad \text{kui } \exists \alpha(x, g).$$

Muuhulgas

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}\left(\rho_g^\alpha\right) &= \{x \in X \mid \exists \alpha(x, g)\}, \\ \operatorname{im}\left(\rho_g^\alpha\right) &= \{\alpha(x, g) \mid \exists \alpha(x, g)\}. \end{aligned}$$

Näitame, et ρ_g^α on hulga X osaline bijektsioon (s.t. hulga $I(X)$ element).

Olgu $x_1, x_2 \in X$, $g \in G$ ning eeldame, et on defineeritud $\alpha(x_1, g), \alpha(x_2, g) \in X$ ja $\rho_g^\alpha(x_1) = \rho_g^\alpha(x_2)$ ehk $\alpha(x_1, g) = \alpha(x_2, g)$. Et $g \in G$ ja G on rühm, siis leidub g^{-1}. Tingimuse (PA2) tõttu on defineeritud ka $\alpha\left(\alpha(x_1, g), g^{-1}\right)$ ja $\alpha\left(\alpha(x_2, g), g^{-1}\right)$ ning

$$x_1 = \alpha\left(\alpha(x_1, g), g^{-1}\right) = \alpha\left(\alpha(x_2, g), g^{-1}\right) = x_2.$$

Sellega on tõestatud osalise kujutuse ρ_g^α üksühesus.

Iga $\alpha \in A$ korral võime vaadelda kujutust

$$f_\alpha\colon G \to I(X), \;\; g \mapsto \rho_g^\alpha.$$

Tõestame, et f_α on eelmorfism. Määramis- ja muutumispiirkonnaga probleeme ei teki. Ilmselt $I(X)$ täidab eeldusi, rühma G sobivust näitasime varem.

(PM1). Seetõttu, et $f_\alpha\left(g^{-1}\right) = \rho_{g^{-1}}^\alpha$ ja $(f_\alpha(g))^{-1} = \left(\rho_g^\alpha\right)^{-1}$, piisab esimese tingimuse kehtimiseks näidata, et $\rho_{g^{-1}}^{\alpha} = \left(\rho_g^{\alpha}\right)^{-1}$.

Paneme tähele, et

$$\operatorname{dom}\left(\rho_{g^{-1}}^{\alpha}\right) = \left\{x \in X \mid \exists \alpha\left(x, g^{-1}\right)\right\} =: U,$$
$$\operatorname{dom}\left((\rho_g^{\alpha})^{-1}\right) = \operatorname{im}\left(\rho_g^{\alpha}\right) = \{\alpha(y,g) \mid y \in X, \exists \alpha(y,g)\} =: V.$$

Näitame, et $U = V$.

Olgu $m \in U$. Siis on defineeritud $\alpha\left(m, g^{-1}\right)$. Tingimuse (PA1) tõttu on defineeritud ka $\alpha\left(\alpha\left(m, g^{-1}\right), \left(g^{-1}\right)^{-1}\right) = \alpha\left(\alpha\left(m, g^{-1}\right), g\right)$. Et $\alpha\left(m, g^{-1}\right) \in X$, siis uuesti sama tingimust rakendades saame $m = \alpha\left(\alpha\left(m, g^{-1}\right), g\right) \in V$.

Võtame nüüd $n \in V$. See tähendab, et leidub $k \in X$ nii, et $\alpha(k,g)$ on defineeritud ja $n = \alpha(k,g)$. Kasutades taaskord tingimust (PA1), saame kinnituse elemendi $\alpha\left(\alpha(k,g), g^{-1}\right)$ defineeritusele. Siit aga näeme, et $\alpha(k,g) \in U$.

Iga hulga U element kuulub hulka V ja vastupidi ka, seega $U = V$.

Olgu $x \in U$ ja tähistame $\left(\rho_g^{\alpha}\right)^{-1}(x) =: y \in X$. Siis $x = \rho_g^{\alpha}(y) = \alpha(y,g)$. Järelikult tingimuse (PA1) tõttu

$$\rho_{g^{-1}}^{\alpha}(x) = \alpha\left(x, g^{-1}\right) = \alpha\left(\alpha(y,g), g^{-1}\right) = y = \left(\rho_g^{\alpha}\right)^{-1}(x),$$

kui $\alpha\left(x, g^{-1}\right)$ on defineeritud.

Kokkuvõttes saime, et osalised kujutused ρ_g^{α} ja $\left(\rho_g^{\alpha}\right)^{-1}$ kujutavad määramispiirkonna elemendid võrdseteks kujutisteks.

(PM2). Näitame nüüd, et $\rho_g^{\alpha} \circ \rho_h^{\alpha} \leq \rho_{hg}^{\alpha}$ iga $g, h \in G$ korral, kus $\leq$ on defineeritud real (3). Kasutame selleks lemmat 2.9.

Teame, et

$$\operatorname{dom}\left(\rho_g^{\alpha} \circ \rho_h^{\alpha}\right) = \{x \in \operatorname{dom}(\rho_h^{\alpha}) \;\mid\; \rho_h^{\alpha}(x) \in \operatorname{dom}(\rho_g^{\alpha})\}.$$

Seega x on selline element, et $\alpha(x,h)$ on defineeritud, ja $\rho_h^{\alpha}(x) = \alpha(x,h)$ selline element, et $\alpha(\alpha(x,h),g) = \alpha(x,hg)$ on defineeritud. Järelikult

$$\operatorname{dom}\left(\rho_g^\alpha \circ \rho_h^\alpha\right) \subseteq \{x \in X \mid \exists\alpha(x,hg)\} = \operatorname{dom}(\rho_{hg}^\alpha).$$

Lisaks sellele, iga $x \in \operatorname{dom}\left(\rho_g^\alpha \circ \rho_h^\alpha\right)$ korral

$$\begin{aligned}
(\rho_g^\alpha \circ \rho_h^\alpha)(x) &= \rho_g^\alpha(\rho_h^\alpha(x)) && \text{(definitsioon (1))}\\
&= \rho_g^\alpha(\alpha(x,h)) && (\rho_h^\alpha \text{ definitsioon})\\
&= \alpha(\alpha(x,h),g) && (\rho_g^\alpha \text{ definitsioon})\\
&= \alpha(x,hg) && \text{(tingimus (PA2))}\\
&= \rho_{hg}^\alpha(x), && (\rho_{hg}^\alpha \text{ definitsioon})
\end{aligned}$$

kui $\alpha(x,h)$ ja $\alpha(\alpha(x,h),g)$ on defineeritud.

Nüüd vaatleme kujutust

$$\gamma\colon A \to B, \quad \alpha \mapsto f_\alpha.$$

Peame näitama, et see on bijektiivne.

Olgu $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ ning oletame, et $\gamma(\alpha_1) = \gamma(\alpha_2)$. Siis

$$\gamma(\alpha_1) = \gamma(\alpha_2) \iff f_{\alpha_1} = f_{\alpha_2} \iff (\forall g \in G)\, \rho_g^{\alpha_1} = \rho_g^{\alpha_2}.$$

Nüüd piisab näidata, et $\alpha_1 = \alpha_2$.

Teame, et

$$\begin{aligned}
\operatorname{dom}\left(\rho_g^{\alpha_1}\right) &= \{x \in X \mid \exists\alpha_1(x,g)\},\\
\operatorname{dom}\left(\rho_g^{\alpha_2}\right) &= \{x \in X \mid \exists\alpha_2(x,g)\}.
\end{aligned}$$

Seega

$$
\begin{aligned}
&(\forall g \in G)\, \rho_g^{\alpha_1} = \rho_g^{\alpha_2} \\
\Longrightarrow\ & (\forall g \in G)\ \mathrm{dom}(\rho_g^{\alpha_1}) = \mathrm{dom}(\rho_g^{\alpha_2}) \\
\Longrightarrow\ & (\forall g \in G)(\forall x \in X)\ \big(x \in \mathrm{dom}(\rho_g^{\alpha_1}) \iff x \in \mathrm{dom}(\rho_g^{\alpha_2})\big) \\
\Longrightarrow\ & (\forall g \in G)(\forall x \in X)\ (\exists \alpha_1(x,g) \iff \exists \alpha_2(x,g)) \\
\Longrightarrow\ & (\forall g \in G)(\forall x \in X)\ ((x,g) \in \mathrm{dom}(\alpha_1) \iff (x,g) \in \mathrm{dom}(\alpha_2)) \\
\Longrightarrow\ & \mathrm{dom}(\alpha_1) = \mathrm{dom}(\alpha_2).
\end{aligned}
$$

Varem nägime, et iga $g \in G$ korral kehtib võrdus $\rho_g^{\alpha_1} = \rho_g^{\alpha_2}$. Järelikult iga paari $(x,g) \in \mathrm{dom}(\alpha_1)$ korral

$$\alpha_1(x,g) = \rho_g^{\alpha_1}(x) = \rho_g^{\alpha_2}(x) = \alpha_2(x,g).$$

Sellega oleme näidanud, et $\alpha_1 = \alpha_2$, ja tõestanud γ injektiivsuse.

Näitame, et kujutus γ on sürjektiivne.

Olgu antud eelmorfism $f\colon G \to I(X)$. Vajalik on konstrueerida osaline toime $\alpha\colon\ X \times\ G \to X$ nii, et $f = \gamma(\alpha) = f_\alpha$. Loomulik on lugeda, et

$$\mathrm{dom}(\alpha) := \{(x,g) \in X \times G \mid x \in \mathrm{dom}\,(f(g))\}$$

ja defineerida

$$\alpha(x,g) := f(g)(x)$$

iga $(x,g) \in \mathrm{dom}(\alpha)$ korral. Tarvis on näidata, et α on osaline toime ja $f = f_\alpha$.

(PA1). Eeldame, et $\alpha(x,g)$ on defineeritud. Siis

$$\begin{aligned}
\exists\alpha(x,g) &\implies x \in \operatorname{dom}(f(g)) \\
&\implies f(g)(x) \in \operatorname{im}(f(g)) = \operatorname{dom}\left(f(g)^{-1}\right) \\
&\implies \alpha(x,g) \in \operatorname{dom}\left(f\left(g^{-1}\right)\right) \\
&\implies \exists\alpha\left(\alpha(x,g), g^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Et $x \in X$, f on eelmorfism ja

$$\begin{aligned}
x &= ((f(g))^{-1} \circ f(g))(x) && \text{(definitsioon (2))} \\
&= \left(f\left(g^{-1}\right) \circ f(g)\right)(x) && \text{(f on eelmorfism)} \\
&= f\left(g^{-1}\right)(f(g)(x)) && \text{(definitsioon (1))} \\
&= f\left(g^{-1}\right)(\alpha(x,g)) && \text{(α definitsioon)} \\
&= \alpha\left(\alpha(x,g), g^{-1}\right), && \text{(α definitsioon)}
\end{aligned}$$

siis on defineeritud ka $\alpha\left(\alpha(x,g), g^{-1}\right)$.

(PA2). Nõuame $\alpha(x,g)$ ja $\alpha(\alpha(x,g),h)$ defineeritust. Nüüd taaskord seetõttu, et f on eelmorfism,

$$\begin{aligned}
\alpha(\alpha(x,g),h) &= f(h)(\alpha(x,g)) && \text{($f(h)$ definitsioon)} \\
&= f(h)(f(g)(x)) && \text{($f(g)$ definitsioon)} \\
&= (f(h) \circ f(g))(x) && \text{(definitsioon (1))} \\
&= f(gh)(x) && \text{(definitsioon (3))} \\
&= \alpha(x, gh). && \text{($f(gh)$ definitsioon)}
\end{aligned}$$

(PA3). Võtame $x \in X$. Et $f(1) = id_X$, siis iga $x \in X$ korral $x \in \operatorname{dom}(f(1))$, seega

$\alpha(x,1)$ on defineeritud ja

$$\alpha(x,1) = f(1)(x) = id_X(x) = x.$$

Nüüd eelneva põhjal

$$\alpha(x,1) = \alpha\left(x, gg^{-1}\right) = \alpha\left(\alpha(x,g), g^{-1}\right) = x.$$

Kokkuvõttes α on osaline toime.

Kujutuste f ja f_α määramispiirkonnad on võrdsed, seega nende kujutuste võrdumiseks peavad nende kujutised iga määramispiirkonna elemendi puhul võrduma.

Olgu $g \in G$ ja $x \in X$. Siis

$$f_\alpha(g)(x) = \rho_g^\alpha(x) = \alpha(x,g) = f(g)(x).$$

Muutumispiirkondade võrdumine tuleneb kujutuste f ja f_α määramispiirkondade ning iga määramispiirkonna elemendi korral kujutiste võrdumisest. □

Kokkuvõte

Bakalaureusetöös anti ülevaade rühmade osalistest toimetest hulkadel. Põhitulemusena näidati ära seos rühmade osaliste toimete ja rühmast sümmeetrilisse inversssesse monoidi viivate ühikut säilitavate eelmorfismide vahel. Lisaks tõestati rühmade osaliste toimete seos monoidi tugeva osalise toimega, sümmeetrilise inversse poolrühma loomuliku järjestusseose alternatiivne kirjeldus ja et iga homomorfism kommutatiivsete inverssete poolrühmade vahel on eelmorfism. Sobivates kohtades anti vajaminevaid definitsioone ja toodi näiteid.

Rühmade osaliste toimete kohta on teada palju rohkem, kui siin töös mainitud. Seega materjali jaguks üheks või ka mitmeks uueks referatiivseks tööks. See aga ei tähenda, et uusi tulemusi tõestada ei saa.

Viited

[1] M. Dokuchaev, Partial actions: a survey. Groups, algebras and applications, *Contemp. Math.* 537 (2011), 173–184.

[2] M. Dokuchaev, Recent developments around partial actions, *São Paulo J. Math. Sci.* 13 (2019), 195–247.

[3] C. Hollings, Partial actions of monoids, *Semigroup Forum* 75 (2007), 293–316.

[4] J. Kellendonk, M. V. Lawson, Partial actions of groups, *Internat. J. Algebra Comput.* 14 (2004), 87–114.

[5] M. Kilp, *Algebra I*, Tartu Ülikool, Tartu, 1998, 295 lk.

[6] M. Kilp, *Algebra II*, Tartu Ülikool, Tartu, 1998, 164 lk.

[7] M. Lawson, *Inverse Semigroups: The Theory of Partial Symmetries*, World Scientific, 1998, 428 lk.

[8] M. Megrelishvili, L. Schröder, Globalisation of confluent partial actions on topological and metric spaces, *Topology Appl.* 145 (2004), 119–145.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Anete Miller,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Rühmade osalised toimed“, mille juhendaja on Valdis Laan, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaaloman-di ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Anete Miller

9.05.2023