Tartu Riiklik Ülikool

Teoreetilise mehhaanika kateeder

E.Pihlapuu

FERDINAND MINDINGI TEADUSLIK-PEDAGOOGILINE TEGEVUS TARTU ÜLIKOOLIS TEOREETILISE MEHHAANIKA ALAL

Diplomitöö

Juhendaja: prof. G.Rägo

Tartu 1956

1. Sissejuhatus

Mehhaanika on vanimaid teadusi; tema definitsiooni leiame juba III sajandil e.m.a. "Mehane" tähendab kreeka keeles kavalust. Nii ütlebki Pseudoaristoteles, et inimene võib oma kavalusega võita loodust, toimida looduse vastu.

Mehhaanika arengutee on olnud pikk ja keerukas. Mehhaanika varajasemat arengut takistas suuresti eksperimendi puudumine antiikajal ja katse hülgamine keskajal skolastilise teaduse õitsengul. Kui XV sajandil tootlike jõudude kasvu ja kaubakäibe arengu tagajärjel algab feodaalühiskonna lagunemine, tekib uus ajajärk ka teaduse arengus. Suhteliselt lühikese aja jooksul ilmuvad teaduse areenile sellised silmapaistvad teadlased nagu Leonardo da Vinci, Kopernicus, Galilei, Descartes. Viimase poolt formuleeritud inertsiseadus (iga osake jääb oma endisesse olukorda kuni tema kohtumiseni teiste osakestega) koos liikumise jäävuse seadusega (üks keha võib teisega kokku põrgates edasi anda vaid niipalju liikumist, kuipalju ta ise seda kaotab) on veel praegugi teoreetilise mehhaanika nurgakivideks; nad antakse vaid teises sõnastuses ja kannavad nüüd Newtoni I liikumisseaduse ja impulsslause nimetusi.

XVII sajandi lõpul koondab Newton kõik osalt enne teda formuleeritud printsiibid ühtsesse süsteemi oma põhiteoses "Principia mathematica philosophia naturalis" (1687). Samal ajal teeb tehnika suuri edusamme, mis omakorda mõjutavad mehhaanika arengut. Punkti mehhaanikast on taevamehhaanika loomiseks esialgu küllalt, maiste nähtuste kirjeldamiseks aga juba vähe; tekib vajadus kindla keha mehhaanika järgi. Mehhaanika matemaatilise aparatuuri väljatöötamine on XVIII sajandi täpisteaduste iseloomulikumaks jooneks. Sellal mehhaanika eraldub teistest teadustest iseseisva distsipliinina; ta on rakendusmatemaatika silmapaistvamaks haruks. Ilmuvad üksteise järele D'Alembert'i, Euleri ja Lagrange'i klassikalised tööd teoreetilises mehhaanikas. Eulerit loetakse õigusega teoreetilise mehhaanika ning Lagrange'i analüütilise mehhaanika rajajaks. Seega oli teoreetiline mehhaanika XIX sajandi alul alles noor distsipliin. Ferdinand Minding, kelle teaduslik-pedagoogilist tegevust käesolevas töös vaatleme, oli üks selle noore distsipliini edasiarendajaid.

2. F.Mindingi elulugu

Ferdinand Minding sündis 1806.a. Kališis (tollal Preisi linn), kus ta isa oli linnakohtu eesistujaks.

Keskhariduse omandas Minding Hirschbergi gümnaasiumis, mille lõpetas 1824.a. Mindingi lõputunnistusel seisid erandltult kõigis aineis hinded "väga hea". Juba gümnaasiumiaastail ilmnes Mindingi suur and vanade keelte alal. Arvatavasti sel põhjusel gümnaasiumi direktor soovitas tal pühenduda vana-juudi keele uurimisele. Olgu tähendatud, et vanade keelte spetsialistid olid Saksamaal alati erilises aus. Astunud Halle ülikooli ja peatselt üle minnes Berliini, tegeles Minding peagu ainuüksi humanitaarainetega: ta kuulas klassikalise filoloogia, ajaloo ja filosoofia loenguid. Vaid muu seas ta kuulas mõned kursused füüsikast ja keemiast ning ühe lühikese kursuse staatikast. Viimane oli esimeseks ja ka viimaseks tema poolt kuulatud kursuseks matemaatika ja mehhaanika alalt, s.o. just selle teaduse alalt, mille kallal Minding hiljem suure eduga töötas ning üldise tunnustuse võitis.

1827.a. lahkus Minding ülikoolist ja oli lühikest aega gümnaasiumiõpetajaks, õpetades matemaatikat, ajalugu ja emakeelt. 1829.a. kaitses ta Halle's oma doktori dissertatsiooni kahekordse integraali ligikaudsest arvutamisest ning 1831.a. asus Berliini eradotsendina matemaatika erialal. Tema lähimaks töökaaslaseks oli Peter Gustav Lejeune-Dirichlet, hiljem ülemaailmselt kuulus matemaatik, aastast 1859 Gaussi järglane Göttingeni ülikoolis. Noorel Dirichlet'l ja Mindingil oli au olla pioneerideks tollal uusimate matemaatika harude õpetamisel Berliini ülikoolis; just nende nimedega algas Berliinis matemaatilise teaduse võimas areng. Samuti oli Mindingile suureks õnneks, et juba esimestel tegevusaastatel Berliinis sõlmusid tal sõbralikud suhted suure reisija ja laiahaardelise teadlase Alexander Humboldt'iga.

Pärast mõningaid trükis ilmunud töid lõpetas Minding 1834.a. uurimuse raskuskeskme mõiste üldistamise võimalustest. Seda tööd hindas Pariisi Teaduste Akadeemia erikomisjon. Komisjoni kiitev hinnang tegi Mindingi nime ülemaailmselt kuulsaks.

Paralleelselt tööga Berliini ülikoolis hakkas Minding 1834. aastal kõrgema matemaatika ja teoreetilise mehhaanika dotsendiks Berliini Kõrgemas Ehituskoolis.

1843.a. tegi tsaarivalitsus Mindingile ettepaneku tulla matemaatika kateedri juhatajaks Tartu ülikoolis. Minding võttis kutse vastu ja asus juba sama aasta sügisel Tartu, juhatades siin rakendusmatemaatika kateedrit ning olles ühtlasi matemaatika kabineti direktoriks.

Minding tuli Tartusse juba tunnustust leidnud teadlasena. Tänu sellele kujunesid tal juba Tartu tegevuse alguses tihedad teaduslikud sidemed Peterburi Teaduste Akadeemiaga.

1861.a. anti Mindingile uurimuse "Kahe muutujaga esimest järku diferentsiaalvõrrandite integreerimisest" eest akadeemik Ostrogradski ettepanekul Peterburi Teaduste Akadeemia Demidovi preemia. 1864.a. valiti Minding Peterburi Teaduste Akadeemia korrespondeerivaks liikmeks ja 1879.a., kui Mindingil möödus 50 aastat doktori kraadi saamisest, auliikmeks. Selle juubeli puhul Peterburi Teaduste Akadeemialt saadetud tervitusest ilmneb Akadeemia suur tunnustus Mindingile: "... et Sinule osaks saanud jumala tahte erilise soosingu tõttu Su tööde küllus ei kahane, vaatamata aastatele; ei nüri ega nõrgene Sinu mõistuse teravus ega jõud: viimased Sinu teaduslikud uurimused kinnitavad Su vaimu sama tarkust, peensust ja võimsust, mis ilmneb Sinu kõige õitsvama tegevusperioodi töödeski".

F.Minding säilitas oma viimsete elupäevadeni täieliku mõtteselguse ning elava huvi kõige vastu, mis toimus teaduslikul horisondil. Ta suri 13.mail 1885.a.

Mindingi väikesearvuline lähimate sõprade ring tundis teda kui avameelset ja eelarvamustest sõltumatut inimest. Õpilased hindasid teda kui suurt õpetlast, mitmekülgselt ja kõrgelt haritud inimest. Ta kuulub nende väheste matemaatikute-iseõppijate hulka, kes jätsid teadusse sügava jälje.

3. Ülevaade F.Mindingi teaduslikust tööst

Mindingi teaduslike tööde loetelu sisaldab 60 numbrit. Nende tööde temaatika kuulub matemaatilise analüüsi ja teoreetilise mehhaanika valdkonda.

Kõrgeima tunnustuse osaliseks on saanud Mindingi saavutused pindade teoorias. Pindade teooria, mille alused pandi Euleri poolt ja mis XIX sajandi alul sai Gaussilt kõverjoonsete koordinaatide meetodi, arenes XIX sajandil resultaatide poolest üheks rikkaimaks matemaatiliseks distsipliiniks. Minding oli ajalooliselt esimeseks suureks Gaussi geomeetrilise loomingu jätkajaks. Mindingile võlgneme tõsiasja avastamise, et pinna joone geomeetriline kõverus on üks pinna põhilistest karakteristikutest. Pinna joone geodeetiliseks kõveruseks mingis selle joone punktis nimetatakse sellest punktist võetud kõverusvektori projektsiooni selle pinna puutetasandile. Geodeetiline kõverus säilitab oma väärtuse pinna igasuguse deformatsiooni puhul, mille juures ei teki ei volte ega rebenemisi.

Teine Mindingi suursaavutus seisneb esimestes põhjapanevates resultaatides küsimuse lahendamisel: kas saab mingit antud pinda laotada teisele pinnale (muidugi kurdusid ja rebenemisi tekitamata). See probleem on üks diferentsiaalgeomeetria põhilisi küsimusi ja ta seati juba Gaussi poolt. Pärast Mindingit tegelesid selle küsimusega paljud tuntud geomeetrid. Hollandi geomeeter Struik nimetab küsimust pindade lahtirullumise kohta üht või teist joont mööda "Mindingi probleemiks". Tähtsaim Mindingi teoreem väidab, et kaks sama konstantse kõverusega pinda on alati laotatavad teineteisele.

Juba 1838.a. avaldas Minding arvamust kerapinna painutamise võimatusest, s.t. kerapinna deformeerimatusest. Seda väidet laiendati kogu kinniste kumerate pindade klassile, kuid väide tõestati alles 1899.a. Mindingi arvamusega tõsteti ajaliselt esimene küsimus pindade painutamise kohta"suures mastaabis" ("im Grossen", nagu nüüd öeldakse). Mindingile kuulub ka konstantse (nii negatiivse kui positiivse) kõverusega pöördpindade leidmise au. Aastal 1868 kuulus itaalia geomeeter Beltrami näitas, et lühimad jooned negatiivse kõverusega Mindingi pindadel ühtuvad kõigis omadustes sirgjoontega Lobatševski geomeetrias. Sellest ajast peale on Lobatševski geomeetria sama reaalne kui Eukleidese geomeetriagi.

Mindingi lemmikülesandeks oli isoperimeetriline ülesanne kõveral pinnal (milline kuju anda kõverale, et ta asudes pinnal haaraks maksimaalse pindala). Sellele küsimusele pühendas ta rea uurimusi. Ta tulemused selles küsimuses on klassikalised.

Pika aja kestel ei pööratud tähelepanu Mindingi tööle algebraliste funktsioonide integreerimisest, mis ilmus 1842.a. Alles 50 aasta möödudes Brill ja Noether hindavad Mindingit kui autorit, "kelle töö selguse, lühiduse ja tõestuste otstarbeka ülesehituse poolest ei jää maha Abeli omast".

Teoreetilist mehhaanikat on Minding täiendanud rea hinnatavate tulemustega. Staatika-alaste uurimuste hulgas, mis on Crelle ajakirja[x)] kaudu laialt tuntuks saanud, on eriti tähtis mitteparalleelsete tungide raskuskeskme küsimus; paralleelsete tungide juhul oli ~~oli~~ raskuskeskme olemasolu teada juba Archimedesel. Mindingi

---

x) Crelle "Journal für die reine und angewandte Mathematik" 14. köites on ilmunud Mindingi uurimus "Untersuchung betreffend die Frage nach einem Mittelpunkte nicht paralleler Kräfte" ja 15. köites töö "Über den Ort sämmtlicher Resultanten eines der Drehung unterworfenen Systemes von Kräften".

põhiline teoreem tungide raskuskeskmest[1] sai astaatilise tasakaaluteooria aluseks. Astaatiliseks tasakaaluks nimetatakse tasakaalu, mis säilib kõigi mõjuvate tungide pööramisel ühe ja sama, kuid muidu ükskõik millise nurga võrra. Astaatilise tasakaalu teooriat arendati edasi kuulsa prantsuse geomeetri Gaston Darboux poolt 1871.a., s.o. 36 aastat pärast Mindingi tööde ilmumist. Coriolis[2] uuris kera liikumist rõhtsal tasapinnal. Minding üldistas selle kaldpinna juhule, arvestades peale raskust ka veel hõõrdumist.

Minding uuris ka elastsete vedrude tasakaalutingimusi, jõudes teistele seisukohtadele, kui Poisson oma õpikus "Resumé de lecons sur l'application de la mecanique".

---

1) Kui antud tungide süsteem taandub üheks tungiks, siis resultandi mõjusirge läbib alati kaht koonuslõiget, millest üks on yz -tasapinnal asuv ellips ja teine xz -tasapinnal asuv hüperbool, kusjuures need omavahel risti asetsevais tasapindades olevad koonuslõiked läbivad üksteise fookuseid. S.o. juhul, kui kesktasapinnaks on xy-tasapind.

2) Coriolis "Theorie mathematique des effets du jeu de billard".

4. F.Mindingi pedagoogiline tegevus Tartu Ülikoolis

F.Minding alustas oma tegevust Tartu ülikoolis 1843.a. Tollal oli meie ülikoolis neli teaduskonda: teoloogia, õigusteaduse, arstiteaduse ja filosoofia fakulteedid. Kõrvuti oma valitud erialaga võis õppida omal valikul ka veel nelja võõrkeelt, joonistamist, vehklemist, laulmist, tantsimist, ratsutamist ning omandada mitmesuguseid tehnilisi oskusi. Õppejõude oli ülikoolis 45-50. 1850.a. filosoofiateaduskond lahutatakse ajaloo-keeleteaduse ja matemaatika-loodusteaduskonnaks. Õppejõudude arv ülikoolis tõusis peagi 75-ni.

1843.a. lahutati matemaatika professuur kaheks, millest üks esindas puht-, teine rakendusmatemaatikat. Minding oli rakendusmatemaatika korraliseks professoriks ning matemaatika kabineti direktoriks. Ta tegevus Tartu ülikoolis oli erakordselt mitmekesine. Et saada ülevaadet Mindingi pedagoogilisest tööst Tartus, vaatleme, mida ta on meie ülikoolis lugenud oma neljakümneaastase tegevuse vältel.

Jrk. nr.	Loengu aine	Aeg: aasta ja semester
1.	Staatika	1843 I, 1849 II, 1851 II, 1852 I, 1853 II, 1855 I, 1857 I, 1859 II, 1861 II, 1862 II, 1864 II, 1868 I, 1869 I, 1870 I 1871 I, 1873 II, 1875 I, 1877 I, 1878 II, 1880 I, 1881 II, 1883 I
2.	Dünaamika	1848 I, 1850 I, 1852 II, 1854 I, 1855 II, 1857 II, 1858 I, 1860 I, 1860 II,

		1863 I, 1863 II, 1865 I, 1865 II, 1867 I, 1867 II, 1869 I, 1869 II, 1872 I, 1874 I, 1875 II, 1876 I, 1880 II, 1881 I, 1882 I
3.	Elementaarne mehhaanika põllumajandusteadlastele (Holtzmanni õpiku järgi, Stuttgart 1848; Burg, "Compendium der Mechanik", Wien 1849)	1849 I, 1851 I, 1853 I, 1855 I, 1857 I, 1859 I, 1861 II, 1863 II, 1865 I
4.	Analüütiline mehhaanika	1874 II
5.	Analüütiline dünaamika	1877 II, 1878 I, 1879 I
6.	Mehhaanika valitud peatükkidest	1868 I, 1868 II
7.	Kindlate ja vedelate kehade staatika	1866 II
8.	Staatika, dünaamika ja analüütilise mehhaanika ülesannete lahendamine	1859 II, 1867 I, 1872 II, 1873 I, 1876 II, 1867 II
9.	Hüdraulika ja masinate teooria (Navier, "Lecons sur l'application de la mecanique", 1833; Burg "Compendium der Mechanik", 1849; Weisbach "Lehrbuch der Mechanik", 1845)	1848 II, 1850 II, 1853 II, 1856 I, 1858 II, 1861 I
10.	Kõrgema analüüsi harjutused ühes rakendustega mehhaanikas	1849 I

11.	Kindla keha matemaatilisest teooriast ja elastsusest (Lame, "Theorie mathematique de l'elasticite' des corps solides", 1852);	1854 I, 1856 II, 1860 I
	elastsusteooria, võnkumiste teooria	1865 I, 1874 I, 1876 I, 1878 I, 1881 II
12.	Soojusjuhtivuse seadusest (Fourier "Theorie analytique de la chaleur")	1854 II
13.	Külgetõmbest gravitatsiooniseaduse järgi (Clausius "Das Potential", 1859)	1863 II
14.	Tasapinnaline ja sfääriline trigonomeetria (Legendre);	1851 I
	sfääriline trigonomeetria koos rakendustega astronoomia ülesannetele	1866 I, 1868 I, 1869 II, 1872 I, 1876 I, 1877 I, 1879 I
15.	Tõenäosusteooria (Laplace "Theorie des probabilites", Paris, 1820) ja vähimruutude meetod	1843 I, 1848 I, 1850 I, 1852 II, 1854 I, 1855 II, 1858 I, 1860 II, 1862 II, 1865 I, 1867 I, 1869 I, 1873 I, 1875 I, 1882 II; 1877 II, 1879 I, 1881 I
16.	Dioptrika ja katoptrika (Littrow "Dioptrik", Wien, 1838)	1849 II, 1852 I, 1855 I 1858 I, 1860 I, 1861 II, 1863 II, 1866 I, 1868 II, 1872 II, 1875 II, 1879 II, 1882 I, 1882 II

17.	Kõrgemat järku võrrandite teooria (Lagrange "Sur la resolution des equations", Paris, 1808; Fourier "Analyse des equations determinees", Paris, 1831; Schnuse "Theorie der höheren Gleichungen", Braunschweig, 1850)	1844 I, 1851 II, 1854 II, 1856 II, 1860 II, 1862 I, 1864 I, 1868 II, 1870 I, 1871 II, 1873 I, 1875 I, 1876 II, 1878 II, 1881 I, 1883 I
18.	Diferentsiaal- ja integraalarvutus	1850 I, 1850 II, 1857 I, 1857 II, 1862 II, 1879 II, 1880 I
19.	Diferentsiaalvõrrandite integreerimisest (omaenda kirjutuse järgi, St. Peterburg, 1862);	1862 II, 1864 I, 1865 II, 1874 I, 1875 II, 1877 II, 1880 II;
	eriliste diferentsiaalvõrrandite lahendamine ja nende rakendamine füüsika ülesannetele	1876 II, 1877 I
20.	Integraalarvutuse harjutusi	1844 I, 1848 I
21.	Kõverate ja pindade teooria (Senff "Theoria curvarum et superficierum", Dorpati, 1831; Gauss "Disquisitiones generales circa superficies curvas", 1827)	1844 I, 1848 I, 1849 I, 1851 I, 1859 II, 1864 I, 1866 II, 1870 I, 1874 II
22.	Elliptiliste funktsioonide teooria (Jacobi, "Fundamenta nova theoriae functionem ellipticarum", Regiomonti, 1829)	1853 I, 1867 I, 1869 II, 1871 II, 1873 II
23.	Elementaarmatemaatika (Grunert)	1851 I, 1851 II

24.	Elementaarne analüütiline geomeetria koos trigonomeetriaga (Brandes, Blüchner, Plücker); elementaarne geomeetria ühes trigonomeetriaga (Fort'i ja Schlömlich'i analüütilise geomeetria õpiku järgi, 1855)	1851 II, 1862 I, 1864 II 1859 I
25.	Arvteooria (oma raamatu järgi "Anfangsgründe der höheren Arithmetik", Berlin, 1855)	1851 II, 1854 II, 1872 I
26.	Variatsioonarvutus	1862 I
27.	Poliitiline aritmeetika (Bleibtreu; 1845)	1856 I, 1859 I, 1861 I, 1863 I, 1866 I
28.	Kujutav geomeetria (Monge ja Wolff)	1844 I, 1848 I
29.	Kõrgem geodeesia (Puissant, Fischer)	1848 II, 1850 II, 1853 I, 1856 I, 1858 II, 1861 I, 1863 I, 1865 II, 1867 II, 1874 II, 1878 I
30.	Maamõõtmisharjutused põllumajandusteadlaste jaoks	1852 II, 1854 II, 1856 II, 1858 II, 1860 II, 1862 II, 1864 II.

Selles tabelis puuduvad andmed vaid 1844 II - 1847 II, 1870 II ja 1871 I semestri kohta. Loengu aine juures sulgudes toodud teoste pealkirjad näitavad, kelle õpikuid ja uurimistöid Minding oma loengutes kasutas. Mehhaanika-alaste loengute jaoks oli kasutada peamiselt prantsuskeelne, osalt saksakeelne kirjandus.

Staatikat ja dünaamikat luges F.Minding oma 1838.a. ilmunud õpiku "Handbuch der teoretischen Mechanik" järgi, mis oli üheks esimeseks saksakeelseks süstemaatiliseks õpikuks teoreetilise mehhaanika alal. Selle raamatu sisukord on järgmine:

I Staatika

1. Punkti staatika.

2. Kindla süsteemi staatika. Ühel tasapinnal asuva kahe tungi keskpunkt. Tungipaaridest. Kindlale kehale rakendatud tungide liitmine. Tasakaalutingimuste erijuhte. Ühel tasapinnal asuvate tungide süsteemi keskpunkt. Paralleelsete tungide keskpunkt. Tungide keskpunkti mõiste laiendamine.

3. Painduva süsteemi tasakaal. Nöörpolügoon. Aheljoon. Painduvate niitide üldised tasakaalutingimused.

4. Elastsete vedrude paindumine (ühel tasapinnal). Rakendus painduva varda juhule.

5. Üldised tasakaalutingimused. Põhilause.

II Dünaamika

1. Ühe punkti liikumine.

2. Mitme vastastikuse külgetõmbe mõju all oleva punkti liikumisest. Kahe vastastikuses külgetõmbes oleva punkti liikumisest. Kahe punkti liikumine gravitatsiooniseaduse järgi. Kepleri seadus, Kera külgetõmme gravitatsiooniseaduse järgi. Kaalust Maa pinnal.

3. Punktide süsteemi liikumise üldvõrrandid. Hoo seadus. Hoo seaduse rakendamine füüsikalisele pendlile. Füüsikaline pendel. Hoo seaduse rakendamine võllile kinnitatud kettale. Võllile kinnitatud ketta liikumine hõõrdumise arvesse võtmisel. Püsiv ja mittepüsiv tasakaal. Märkmed kehade põrgete kohta.

4. Kehade peainertsteljed ja inertsmomendid. Inertsmomendi arvutamine.

5. Kindla keha liikumine.

6. Kindla keha vaba liikumine.

7. Pöörlemine ühe kindla punkti ümber. Pöörlemine kiirendava

tungita. Raske keha pöörlemine.

8. Keha liikumine tasapinnal. Keha liikumine kaldpinnal. Kera liikumine kaldpinnal. Kera liikumine horisontaaltasapinnal.

Kogu see tolle aja kohta küllaltki ulatuslik kursus loeti kolme semestri vältel.

Oma teoreetilise mehhaanika õpiku eessõnas Minding võtab mehhaanika aksioomideks järgmised tõed:

1) kehade inertsi omadus;

2) liikumise relatiivsus (räägitakse kahest ruumist; ühe ruumi suhtes keha võib olla paigal, teise suhtes liikuda);

3) liikumiste liitumine.

Edasi antakse tungide parallelogrammi printsiip ja sellega seoses olevad laused.

Eessõna lõpul esitatakse mehhaanika jaotus: staatika, kus antakse tingimused, mil punktide süsteemile rakendatud tungid on tasakaalus; dünaamika (mehhaanika, selle sõna tõelises mõttes), mis tegeleb tungide poolt tekitatud liikumiste uurimisega.

Et saada ettekujutust mehhaanika küsimuste erisugusest käsitlemisviisist Mindingi kursuses võrreldes käsitlemisviisiga tänapäeval, vaatleme näidet ühe punkti liikumise kohta Mindingi teoreetilise mehhaanika õpikus. Anname teksti peaaegu täpses tõlkes ja lisame sulgudes vajalikud seletused.

"Olgu P ja P' kahe tungi intensiivsused (mõeldud on tungi suurused), mis ühele ja samale materiaalsele punktile annavad vastavalt kiirused v ja v' (mõeldud on, et mõlemad punktid on algul paigal ja tungid mõjuvad kaduvväikestes ajavahemikes). Kuna tungid ja kiirused on proportsionaalsed, siis on kehtiv võrdus

$$\frac{P}{v} = \frac{P'}{v'}$$

See tähendab aga, et jagatis $\frac{P}{v}$ on ühe ja sama punkti jaoks muutumatu suurus. Seda suurust nimetatakse punkti massiks. Antud seletuse põhjal on siis massiühikuks niisugune mass, millel tungiühik tekitab kiirusühiku (mõeldud on see kõik lõpmata väikese ajavahemiku kohta, ümber arvestamisel ühele ajaühikule). Kiirusühikuks on aga niisugune kiirus, mille puhul piikusühik läbitakse ühe ajaühiku jooksul. Kui meil on teada kiirus v', mille tungi intensiivsus P' mingile punktile annab, siis selle punkti mass avaldub kujul

$$m = \frac{P'}{v'}.$$

Seega ükskõik millise tungi P ja temale vastava kiiruse v kohta ühe ja sellesama punkti korral kehtib võrdus

$$P = mv,$$

millest siitpeale saame leida tungi intensiivsuse P, kui vastav kiirus on teada (näiteks katsest).

Punkti massi ja kiiruse korrutist nimetatakse punkti liikumismomendiks (käesoleval ajal liikumishulgaks, impulsiks).

Andku seesama tung P mingile teisele punktile massiga m_1 kiiruse v_1. Saame jällegi

$$P = m_1 v_1.$$

Järelikult

$$m_1 v_1 = mv,$$

s.t., et kiirused, millised kahele punktile annavad võrdsed tungid, on pöördvõrdelised nende massidega või teiste sõnadega: võrdsed tungid annavad kõikidele punktidele võrdsed liikumismomendid. Üldiselt: ühele kindlale tungile vastavad liikumismomendid on kõik võrdsed.

Tungid, nagu nad looduses esinevad, ei muuda oma rakenduspunktide kiirust kunagi silmapilkselt ja lõplikes suurustes, sest lõpmatult väikese aja jooksul kiiruse muutus on ka ise lõpmatult väike. Kuid väga sageli, näiteks kehade põrke korral, suured kiiruste muutused toimuvad nii ruttu, et neid muutumisi võib lugeda hetkelisteks.

Tunge, mis pidevalt mõjudes lõpmatult väikese aja jooksul oma rakenduspunktide kiirusi lõpmata vähe muudavad, nimetatakse kiirendavateks tungideks; looduses esinevad tungid ongi niisugused. Punkti lõppkiiruse suhtes on ükskõik, kas mõjuvad tungid on rakendatud samaaegselt või üksteise järele. Seepärast on kiirus, mille punkt mistahes aja kestel kiirendavate tungide kestva mõju tõttu selle aja lõpuks saavutab, võrdne kiirusega, mille ta saavutaks kõigi nende tungide ühtaegu mõjumisel. Ühtlaselt kiirendavaks tungiks nimetatakse kogu aeg ühes ja samas suunas mõjuvat tungi, mis oma rakenduspunktile võrdsetel ajavahemikel annab võrdsed kiirused. Mõjugu niisugune tung ajaühikus punktile, mille massiks on üks massiühik; tähistame X -ga kiirust, mille punkt sel puhul saab. Siis väljendab X vahetult ka kõigi punktile ajaühiku vältel mõjuvate elementaartungide resultandi intensiivsust. Selles mõttes on ta ühtlaselt kiirendava tungi intensiivsuse mõõt. Jagame ajaühiku n võrdseks osaks; siis $\frac{1}{n}\cdot X$ on kiirus, mille punkt tungi mõjul ühe niisuguse aja osa jooksul saab, kuna tung eelduse järgi oma rakenduspunkti kiirust võrdseil ajavahemikel ühepalju muudab. Lõpmata suure n korral muutub $\frac{1}{n}$ ajaühiku osa lõpmata väikeseks ajaelemendiks dt. Seega on punkti kiiruse suurenemine aja dt kestel võrdne $X\,dt$. Kujutleme x-teljega paralleelset tungi ning tähistame sellekohaselt x-teljega paralleelse kiiruse $\frac{dx}{dt}$, siis väljendub selle kiiruse juurdekasv aja dt jooksul kujul $\frac{d^2x}{dt}$(mille all on mõeldud $d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ ehk $\frac{d^2x}{dt^2}dt$). Järelikult

$$\frac{d^2x}{dt} = X\,dt.$$

See kehtib massiühiku kohta. Kui tung X mõjub punktile massiga m, siis $X\,dt$ pole punkti kiiruse juurdekasv, vaid ta liikumismomendi $m\frac{dx}{dt}$ juurdekasv. Järelikult

$$m\frac{d^2x}{dt} = X\,dt$$

ja seepärast

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathfrak{X}.$$

See võrrand kehtib ka siis, kui x suunas mõjuv kiirendav tung on muutuv. Selles võrrandis $\mathfrak{X}$ tähendab kiirust, mis sama intensiivsusega mõjuv tung oleks andnud punktile, mille mass võrdub massiühikuga, ajaühiku kestel. Kõnesolev kiirus on ühtlasi kiirendava tungi silmapilkse intensiivsuse mõõt. See intensiivsus muutub aga ise ajaelemendi dt vältel, nii et ta selle algul on $\mathfrak{X}$ ja lõpul $\mathfrak{X}+d\mathfrak{X}$. On ilmne, et aja dt jooksul tekkinud liikumismomendi juurdekasv, s.o. avaldis

$$m\frac{d^2x}{dt}\ \left(\text{ehk } m\frac{d^2x}{dt^2}\cdot dt\right),$$

asetseb tõkete $\mathfrak{X}dt$ ja $(\mathfrak{X}+d\mathfrak{X})dt$ vahel. Järelikult asub $m\frac{d^2x}{dt^2}$ vahemikus $\mathfrak{X}$ ja $\mathfrak{X}+d\mathfrak{X}$ ning seega lõpmata väikese aja dt puhul ongi

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathfrak{X}$$

nagu varem näidatud.

Nagu näeme, on avaldis $\frac{d^2x}{dt^2}$ kiiruse tuletis t järgi. Teda võib kiirendade mõõduks või lihtsalt kiirenduseks nimetada. Ta määrab kindlaks kiiruse juurdekasvu, mille punkt ajaühiku lõpul saavutab, kui kiiruse kasvamine aja dt jooksul, nimelt $\frac{d^2x}{dt}$, kogu ajaühiku vältel toimub katkematult ühteviisi kordudes.

Massi ja kiirenduse korrutist nimetatakse kiirendusmomendiks. Seepärast sisaldab eelmine võrrand õieti iseendastmõistetava lause: kiirendusmoment on igal liikumise hetkel võrdne kiirendava tungiga."

Ei saa öelda, et Mindingi pikad seletused midagi juurde tooksid Newtoni teisele seadusele, mille järgi

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathfrak{X}$$

ehk, teises esitusviisis,

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right)=\mathfrak{X}.$$

On ilmne, et Minding loeb primaarseteks mõisteteks järgmised: absoluutne ruum, paigalseis selles ruumis, tung ja selle intensiivsus, liikumismoment. Mass on tal tuletatud mõiste.

Peab märkima, et see osa on nõrgemaid kohti kogu Mindingi poolt antud dünaamika käsitluses. Kogu edaspidine käsitlus on palju selgem ja vastab hoopis enam esitusviisile, mida tavaliselt leiame tänapäeval.

5. Kokkuvõte

Käesoleva aasta algul möödus poolteist sajandit Tartu ülikooli ühe teeneterikkama teadlase Ferdinand Mindingi sünnist. Mitmed tema poolt ülestõstetud probleemid annavad ainet uurimiseks veel tänapäevalgi. Niisugusteks on näiteks üldiste tungide süsteemi keskpunkti probleem, mõned pindade painutamise eriprobleemid, isoperimeetriline probleem kõveral pinnal j.m.m.

Minding oli mitte ainult suur teadlane, vaid ka tunnustatud pedagoog. Ta õpilasi võis möödunud sajandi teisel poolel leida nii Moskva matemaatilistes ringkondades, Pulkovo astronoomia observatooriumis, Riia Polütehnilises Instituudis, Saksamaa kõrgemais õppeasutustes kui ka keskkooliõpetajatena mõõtmatul Venemaa territooriumil. Tuntumaist Mindingi õpilastest võiks nimetada Axel Harnack'it Saksamaal ja Carl Petersoni Moskvas. Nagu alles viimastel aastatel selgunud, on Peterson olnud Moskva Matemaatilise Seltsi üks asutajaist ning temaga algab Moskva diferentsiaalgeomeetrite koolkond.

Tartu ülikoolis pani Minding ka aluse eriti rakendusmatemaatika arenemisele, lugedes esimesena väga mitmeid rakendusmatemaatika aineid. Mindingit kui inimest on kõrgelt hinnatud. Nii iseloomustab teda prof Helmling[x)] kui kuulsaimat meest ja kõige sõbralikumat kolleegi.

Arvestades F.Mindingi laialdast sügavat ja alati klassikaliselt

---

x) P.Helmling oma kirjutuses diferentsiaalvõrrandi integreerimise kohta märgib "... Ferd. Minding, vir clarissimus, collega amicissimus, perspexit ...".

5. Kokkuvõte

Käesoleva aasta algul möödus poolteist sajandit Tartu ülikooli ühe teeneterikkama teadlase Ferdinand Mindingi sünnist. Mitmed tema poolt ülestõstetud probleemid annavad ainet uurimiseks veel tänapäevalgi. Niisugusteks on näiteks üldiste tungide süsteemi keskpunkti probleem, mõned pindade painutamise eriprobleemid, isoperimeetriline probleem kõveral pinnal j.m.m.

Minding oli mitte ainult suur teadlane, vaid ka tunnustatud pedagoog. Ta õpilasi võis möödunud sajandi teisel poolel leida nii Moskva matemaatilistes ringkondades, Pulkovo astronoomia observatooriumis, Riia Polütehnilises Instituudis, Saksamaa kõrgemais õppeasutustes kui ka keskkooliõpetajatena mõõtmatul Venemaa territooriumil. Tuntumaist Mindingi õpilastest võiks nimetada Axel Harnack'it Saksamaal ja Carl Petersoni Moskvas. Nagu alles viimastel aastatel selgunud, on Peterson olnud Moskva Matemaatilise Seltsi üks asutajaist ning temaga algab Moskva diferentsiaalgeomeetrite koolkond.

Tartu ülikoolis pani Minding ka aluse eriti rakendusmatemaatika arenemisele, lugedes esimesena väga mitmeid rakendusmatemaatika aineid. Mindingit kui inimest on kõrgelt hinnatud. Nii iseloomustab teda prof Helmling[x)] kui kuulsaimat meest ja kõige sõbralikumat kolleegi.

Arvestades F.Mindingi laialdast sügavat ja alati klassikaliselt

---

[x)] P.Helmling oma kirjutuses diferentsiaalvõrrandi

$$X_0 \frac{d^2y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y = 0$$

integreerimise kohta märgib "... Ferd. Minding, vir clarissimus, collega amicissimus, perspexit ...".

küpset teaduslikku produktsiooni, tema laia haardega pedagoogilist tegevust ning tema juhendamisel valminud teadlaste hulka, tuleb tunnistada F.Mindingit suuremaks Tartu ülikoolis töötanud matemaatikuks, rakendusmatemaatikuks ja teoreetiliseks mehhaanikuks.

küpset teaduslikku produktsiooni, tema laia haardega pedagoogilist tegevust ning tema juhendamisel valminud teadlaste hulka, tuleb tunnistada F.Mindingit suuremaks Tartu ülikoolis töötanud matemaatikuks, rakendusmatemaatikuks ja teoreetiliseks mehhaanikuks.

Kasutatud kirjandus

1. Г.А. Ряго, Из жизни и деятельности четырех замечательных математиков Тартуского Университета.

Tartu Riikliku Ülikooli Toimetised. Vihik 37, Tallinn, 1955.

2. F.Minding, Handbuch der theoretischen Mechanik. Berlin 1838.

3. Index scholarum in Universitate Litteraria Caesarea Dorpatiensi.

4. A.L.Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 14 und 15.

Sisukord